

Theorie
der markovschen Abfertigungsprozesse
und deterministisches Chaos

Dissertation

zur Erlangung der wirtschaftswissenschaftlichen Doktorwürde
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Dipl.-Wi.-Math. Diana Völker
aus Hamburg

Hamburg, den 19.10.2006

Mitglieder der Promotionskommission

Vorsitzender: Prof. Dr. Stefan Voß
Erstgutachter: Prof. Dr. Dr. Klaus Hansen
Zweitgutachter: Prof. Prof. e. h. Dr. Dr. h. c. Dieter B. Preßmar

Vollzug der Promotion: 27.12.2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Chaos-Begriff im Alltagsverständnis	1
1.2	Systemsensitivität als Hauptursache für Chaos	2
1.3	Determinismus <i>versus</i> Zufall?	5
1.4	Deterministisches Chaos im Rahmen der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse	7
1.5	Problemstellung und Gang der Untersuchung	12
2	Grundlagen der Chaos-Theorie	14
2.1	Systemdefinition	14
2.2	Fraktale	21
2.3	Verhaltensmuster dissipativer dynamischer Systeme	45
2.3.1	Einfache Attraktoren	46
2.3.2	Seltsamer Attraktor (<i>Strange Attractor</i>)	54
2.4	Änderungen der Verhaltensmuster	63
2.4.1	Volumenkontraktion – quantitative Änderung	63

2.4.2	Bifurkationen – qualitative Änderungen	64
2.5	Übergänge zum Chaos	68
3	Markovsche Abfertigungsprozesse und ergodische Chaos-	
	Theorie	69
3.1	Stochastische Grundbegriffe	69
3.2	Ergodische markovsche Abfertigungsprozesse	76
3.3	Chaos-theoretische Aspekte	82
3.3.1	Hinreichende Kriterien für das Entstehen des chaotischen Verhaltens	82
3.3.2	Instabilität der Systemlänge	83
3.3.3	Markovsche Prozesse mit renormierbarer Struktur	85
4	Untersuchung theoretischer Modelle markovscher Abfertigungs-	
	Prozesse	91
4.1	Werkzeuge zum Nachweis der chaotischen Prozessdynamik	91
4.2	Schwache Stationarität der Markov-Zeitreihe	93
4.3	Autokorrelation und ARIMA-Modellierung	97
4.4	Leistungsspektrum	102
4.5	Lyapunov-Exponent	109
4.6	Seltsamer Attraktor	119
4.7	Einfluss von Auslastung und Systemumfang	127

5	Untersuchung eines praxisbezogenen Leistungsprozesses134
5.1	Problemstrukturierung134
5.2	Beschreibung der Ist-Situation138
5.3	Datenaufbereitung141
5.3.1	Datenstrukturanalyse141
5.3.2	Statistische Daten-Analyse142
5.4	Entwurf eines Simulationsmodells145
5.5	Validierung des Simulationsmodells153
5.6	Analyse der Simulationsergebnisse154
5.6.1	Schwache Stationarität154
5.6.2	Autokorrelationsanalyse und ARIMA-Modellierung157
5.6.3	Spektralanalyse158
5.6.4	Lyapunov-Exponent160
5.6.5	Seltsamer Attraktor163
5.7	Betriebswirtschaftliche Interpretation der Ergebnisse165
6	Zusammenfassung169
6.1	Schlussbetrachtung und Forschungsfragen169
6.2	Ausblick171

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1: Schwaches Kausalitätsprinzip	3
Abbildung 1.2: Starkes Kausalitätsprinzip	3
Abbildung 1.3: Verletzung der starken Kausalität	4
Abbildung 2.1: Statische Darstellung der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 3,5$	18
Abbildung 2.2: Die Bahn der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 3,5$, Anfangswert $x_0 = 0,2$	19
Abbildung 2.3: Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks; die ersten 3 Iterationen und das Ergebnis nach einigen weiteren Schritten	22
Abbildung 2.4: Konstruktion der Cantor-Menge	24
Abbildung 2.5: Triadischer Baum	25
Abbildung 2.6: Selbstähnlichkeit von Strecke und Quadrat	27
Abbildung 2.7: Hilbert-Kurve	30
Abbildung 2.8: Logistische Funktion mit Parameterwert r_1 für eine superstabile Bahn der Periodenlänge 2	31
Abbildung 2.9: Iterierte 1. Ordnung der logistischen Funktion mit Parameterwert r_2 für eine superstabile Bahn der Periodenlänge 4	31

Abbildung 2.10: Der Unterschied zwischen der logistischen Funktion mit Parameterwert r_1 (durchgezogene Linie) und dem reskalierten Teil der Iterierten 1. Ordnung der logistischen Funktion mit Parameterwert r_2 (gestrichelte Linie)32
Abbildung 2.11: Ein unregelmäßiges Fraktal34
Abbildung 2.12: Ermittlung der Box-Dimension35
Abbildung 2.13: Erste Schritte des Chaos-Spiels36
Abbildung 2.14: Das Chaos-Spiel nach ca. 500, 1000, 1500 Spielzügen37
Abbildung 2.15: Multifraktales Chaos-Spiel, die ersten zwei Runden38
Abbildung 2.16: Multiplikative Kaskade zur Erzeugung des binomialen multifraktalen Maßes mit $m_0 = 2/3$ und $m_1 = 1/3$42
Abbildung 2.17: Die $f(\alpha)$ -Kurve des binomialen multifraktalen Maßes mit $m_0 = 2/3$ und $m_1 = 1/3$43
Abbildung 2.18: Pendelbahn mit Punktattraktor47
Abbildung 2.19: Bewegung der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 2,78$ für die ersten Iterationen48
Abbildung 2.20: Fixpunkt-Attraktor der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 2,78$49
Abbildung 2.21: Pendelbahn mit Grenzyklus-Attraktor49
Abbildung 2.22: Punktweise umkehrbar eindeutige Abbildung des Grenzyklus auf eine Linie50
Abbildung 2.23: Bewegung der logistischen Funktion auf einem Zyklus-Attraktor50
Abbildung 2.24: Zweidimensionaler Torus im dreidimensionalen Phasenraum52
Abbildung 2.25: Punktweise umkehrbar eindeutige Abbildung des Torus auf ein Quadrat in der $\theta_1 \times \theta_2$ -Ebene52

Abbildung 2.26: Geschlossene Bahnkurven für eine periodische Bewegung auf dem zweidimensionalen Torus-Attraktor	53
Abbildung 2.27: Nichtgeschlossene Bahnkurve für quasiperiodische Bewegung	53
Abbildung 2.28: He'non-Attraktor mit Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$, Parametern $a = 1,4$, $b = 0,3$, 60.000 Iterationen	56
Abbildung 2.29: Die Bewegung der Systemvariablen auf dem He'non-Attraktor; Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$, Parameter $a = 1,4$, $b = 0,3$, 60.000 Iterationen	57
Abbildung 2.30: Die Anfangswertsensitivität des He'non-Attraktors	57
Abbildung 2.31: Die Anfangswertsensitivität des He'non-Attraktors; Entwicklung der Startwerte $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x'_0, y'_0) = (0,00001, 0)$; Punkte (x_n, x'_n) für 100, 1.000, 10.000, 50.000 Iterationen	59
Abbildung 2.32: Autokorrelationsverhalten der Systemvariablen auf dem He'non-Attraktor	60
Abbildung 2.33: Vergrößerungen des He'non-Attraktors	61
Abbildung 2.34: Variablenbewegung auf dem Attraktor der logistischen Funktion; Startwert $x_0 = 0,01$, Parameterwert 4	61
Abbildung 2.35: Schematische Darstellung des Bifurkationsszenarios der logistischen Funktion für die Parameterwerte $r \in [1, 4]$	66
Abbildung 2.36: Feigenbaum-Konstante δ	67
Abbildung 3.1: Markovscher Prozess mit zwei Zuständen und vier Übergangswahrscheinlichkeiten	86
Abbildung 3.2: Markov-Graph eines einfachen periodischen markovschen Prozesses mit zwei Zuständen	89
Abbildung 3.3: Konstruktion eines selbstähnlichen Markov-Graphen	89

Abbildung 4.1: Entwicklung des Mittelwertes der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe	95
Abbildung 4.2: Entwicklung der empirischen Varianzfunktion der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe	95
Abbildung 4.3: Entwicklung des „Mittelwertes“ der logistischen Iterationsreihe mit Parameterwert 4, Startwert 0,01	96
Abbildung 4.4: Entwicklung der „empirischen Varianzfunktion“ der logistischen Iterationsreihe mit Parameterwert 4, Startwert 0,01	96
Abbildung 4.5: Entwicklung der empirischen Autokorrelationsfunktion der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty;\text{FIFO})$ -Zeitreihe	99
Abbildung 4.6: Entwicklung der empirischen Varianzfunktion des R_t -Anteils der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe	101
Abbildung 4.7: Mischungsverhalten der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = 0,2$	103
Abbildung 4.8: Periodisches Verhalten der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = \sin^2(\frac{\pi}{7})$	104
Abbildung 4.9: Ergodische Eigenschaft der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = 0,2$	105
Abbildung 4.10: Auswirkung der Systemsensitivität auf die computergestützte Berechnung einer Iterationsbahn der logistischen Funktion mit Parameterwert 4	106
Abbildung 4.11: Spektrum der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe	108
Abbildung 4.12: Spektrum des W_t -Anteils der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe	108

Abbildung 4.13: Beispiel für die Sensitivität des linearen dynamischen Systems $x_{n+1} = 1,5 * x_n$	112
Abbildung 4.14: Entwicklung der absoluten Differenzen der Iterationsreihen $\{x_{n+1} = 1,5 \cdot x_n; x_0 = 0,01\}$ und $\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 1,5 \cdot x_{n,\varepsilon_0}; x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$	113
Abbildung 4.15: Beispiel für die Sensitivität der logistischen Funktion mit Parameterwert 4; Entwicklung eines Intervalls von Anfangswerten $x_0 \in I_0 = [0,01; 0,013]$	114
Abbildung 4.16: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_n der Iterationsreihen der logistischen Funktion mit Parameterwert 4 : $\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\}$ und $\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 4 \cdot x_{n,\varepsilon_0} \cdot (1 - x_{n,\varepsilon_0}); x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$...	114
Abbildung 4.17: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten $L(x_0)$ der Iterationsreihe der logistischen Funktion mit Parameterwert 4: $\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\}, \varepsilon_0 = 0,000001$	115
Abbildung 4.18: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe	117
Abbildung 4.19: Entwicklung der Autokorrelationsfunktion der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe	118
Abbildung 4.20: Mittelwertentwicklung des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe	118
Abbildung 4.21: Attraktor der Systemlänge N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe, Beobachtungszeit $T = 10.000$ ZE	119
Abbildung 4.22: Bewegung der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe auf dem Attraktor	120
Abbildung 4.23: Lyapunov-Dimension	125

Abbildung 4.24: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ in Abhängigkeit von Systemauslastung ρ für unterschiedliche Kanalzahlen k	129
Abbildung 4.25: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ in Abhängigkeit von Kanalzahl k für unterschiedliche Systemauslastungsgrade ρ	130
Abbildung 5.1: Modellierung der Black-Box-Probleme	137
Abbildung 5.2: Leistungsprozess der ***-Klinik – schematische Darstellung	138
Abbildung 5.3: Algorithmus des gesamten Programmablaufs	148
Abbildung 5.4: Detail-Algorithmus des Programm-Blocks „OP-Durchführung“	150
Abbildung 5.5: Algorithmus zum Zusatzprogramm „Mittagspausen-Regelung im Falle von Leerlaufzeiten“	152
Abbildung 5.6: Entwicklung der N_t -Zeitreihe des operativen Leistungsprozesses der Klinik über die Simulationsdauer von 1 Jahr	155
Abbildung 5.7: Mittelwertentwicklung der N_t -Zeitreihe	156
Abbildung 5.8: Entwicklung der empirischen Varianzfunktion der N_t -Zeitreihe	156
Abbildung 5.9: Entwicklung der empirischen Autokovarianzfunktion der N_t -Zeitreihe	156
Abbildung 5.10: Entwicklung der empirischen Varianzfunktion des W_t -Anteils der N_t -Zeitreihe	158
Abbildung 5.11: Spektrum der N_t -Zeitreihe	159
Abbildung 5.12: Spektrum des W_t -Anteils der N_t -Zeitreihe	159
Abbildung 5.13: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der N_t -Zeitreihe	160

Abbildung 5.14: Mittelwertentwicklung des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ des operativen Leistungsprozesses der Klinik162
Abbildung 5.15: Attraktor der Prozessvariablen N_t , gesamte Beobach- tungszeit $T = 97.500$ ZE163
Abbildung 5.16: Bewegung der Prozessvariablen N_t auf dem Attraktor164

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1: Beispiele für triadische Darstellung von Dezimalzahlen	24
Tabelle 2.2: Beispiele für triadische Darstellung einiger Punkte der Cantor-Menge	25
Tabelle 2.3: Verkleinerungsfaktoren s und Anzahl der Teile n für die Strecke, das Quadrat und das Sierpinski-Dreieck	28
Tabelle 4.1: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten der Iterationsreihen der logistischen Funktion mit Parameterwert 4: $\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\}$ und $\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 4 \cdot x_{n,\varepsilon_0} \cdot (1 - x_{n,\varepsilon_0}); x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$	115
Tabelle 4.2: Mittelwerte, zugehörige Streuungsmaße des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe	118
Tabelle 4.3: Entwicklung des Mittelwerts des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/k$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe in Abhängigkeit von ρ und k	128
Tabelle 4.4: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ der $M^{exp}/M^{exp}/k$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe in Abhängigkeit von ρ und k	128
Tabelle 5.1: Übersicht der Modellvariablen	145

Tabelle 5.2: Übersicht der deterministischen Modellparameter	146
Tabelle 5.3: Übersicht der stochastischen Modellparameter	147
Tabelle 5.4: Mittelwerte, zugehörige Streuungsmaße des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ des operativen Leistungsprozesses der Klinik ...	161

Abkürzungsverzeichnis

bspw.	–	beispielsweise
bzgl.	–	bezüglich
bzw.	–	beziehungsweise
d. h.	–	das heißt
etc.	–	et cetera
ggf.	–	gegebenenfalls
i. A.	–	im Allgemeinen
i. d. R.	–	in der Regel
i. e. S.	–	im eigentlichen Sinne
s.	–	siehe
sog.	–	sogenannte (-r/-s)
u. a.	–	unter anderem
u. s. w.	–	und so weiter
u. U.	–	unter Umständen
vgl.	–	vergleiche
z. B.	–	zum Beispiel

1 Einleitung

1.1 Chaos-Begriff im Alltagsverständnis

Der Begriff „deterministisches Chaos“ mag auf den ersten Blick einen Widerspruch in sich aufdecken: spontan ließe sich mit dem Begriff die Erklärung einer „bestimmten Formlosigkeit“ verbinden. Oder er ließe sich sogar mit dem Begriff einer „festgelegten Apokalypse“ in Zusammenhang bringen. In Wirklichkeit wird mit dem Begriff „deterministisches Chaos“ das Zusammenspiel des Dualen in der Natur erfasst, der koexistierenden Naturphänomene - Determinismus und Zufall.

Für manche dynamische Systeme ist zwar ein katastrophentypischer Charakter der Zustandsentwicklung als Ergebnis eines deterministisch-chaotischen Verhaltens nicht auszuschließen: man denke dabei an die Entstehung der Erde durch den Zusammenstoß zweier oder mehrerer Himmelskörper, die Jahrmillionen zuvor infinitesimal ihre chaotischen Bahnen geändert haben mochten. In der Regel handelt es sich jedoch bei einem deterministisch-chaotischen Phänomen keineswegs um etwas „vom Normalverhalten Abweichendes“, sondern um eine wohldefinierte Zeitentwicklung eines dynamischen Systems mit einer empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Das einfachste Beispiel hierzu ist die Bewegung eines Mehrfachpendels, dessen chaotische Bahn als das vollkommen normale Verhalten des Pendels zu sehen ist. Deterministisch – also vollständig vorhersagbar – wäre nur der Ruhezustand des Mehrfachpendels.

Auch der Schlag des menschlichen Herzens wird durch deterministisch-chaotisches Verhalten beschrieben: in Abhängigkeit von der jeweiligen Belastung und/oder Gemütslage variiert die Herzfrequenz, um optimale Anpassung an ständig wechselnde Anforderungen sicherzustellen. Bei einem gesunden Herzen ist diese Variation „chaotisch“, langfristig unvorhersagbar. Auch in diesem Beispiel wäre der einzig mögliche vollständig deterministische Systemzustand der Herzstillstand.

Weitere Beispiele für deterministisch-chaotisches Systemverhalten liefern u. a. die Beobachtungen aus den Bereichen:

- der Astronomie – die Dynamik unseres Sonnensystems, die Aktivitäten der Sonne, die Existenz schwarzer Löcher sowie die Dynamik und Aktivitäten von Neutronensternen etc.;
- der Biologie - chemische Reaktionen;
- der Wirtschaftsforschung - nichtlineare Steuerreformen und deren Auswirkungen auf die Entwicklung der Wirtschaft eines Staates;
- der Meteorologie – die Wettervorhersage.

In den meisten Fällen stellt sich das deterministisch-chaotische Systemverhalten als normal und positiv heraus. Kurz gefasst – „Chaos ist überall und es funktioniert“.¹

1.2 Systemsensitivität als Hauptursache für Chaos

Die Idee vom deterministischen Chaos rührt von der festgestellten Gegebenheit, dass vollkommen determinierte dynamische Systeme unter bestimmten Voraussetzungen - bspw. Parameterkonstellation bei der logistischen Funktion² – ein irreguläres Verhalten aufweisen, das sich auf den ersten Blick jeglicher deterministischen Gesetzmäßigkeit entzieht. Die Erfassung des Verhaltens von solchen Systemen scheint in diesem Fall nur unter dem probabilistischen Ansatz möglich zu sein. Beim genauen Hinsehen stellt sich jedoch heraus, dass dieses irreguläre Verhalten sehr

¹ Vgl. Morfill, G., Scheingraber, H.: Chaos ist überall... und es funktioniert: eine neue Weltansicht, Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt/Main, Berlin, 1991.

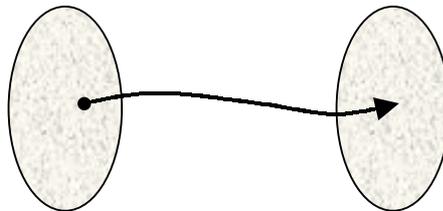
² Die logistische Funktion ist definiert durch die Beziehung $x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$, $x_n \in [0, 1]$.

wohl nach einem determinierten Muster verläuft. Der einzige Unterschied zu den dynamischen Systemen mit regulärem Verhalten liegt für derartige Systeme in der Schwierigkeit einer exakten Erfassung und Vorhersage deren Verhaltens.

Was ist unter dem deterministisch-chaotischen Systemverhalten zu verstehen? Die Grundlage zur Klärung dieser Frage bilden das schwache und das starke Kausalitätsprinzipien. Das *schwache Kausalitätsprinzip* besagt:

- „gleiche Ursachen erzielen gleiche Wirkungen“.

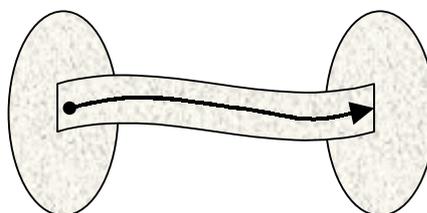
Abbildung 1.1: Schwaches Kausalitätsprinzip



Somit handelt es sich dabei um die Zuordnung einer bestimmten Ursache zu genau einer Wirkung und kann als punktartige Betrachtung des Geschehens bezeichnet werden. Eine Erweiterung dessen stellt *das starke Kausalitätsprinzip* dar, das besagt:

- „ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen“.

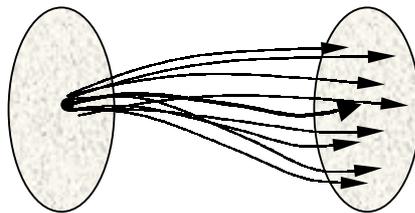
Abbildung 1.2: Starkes Kausalitätsprinzip



In Bezug bspw. auf die Reproduzierbarkeit eines Experiments bedeutet dies die Forderung, dass geringe Abweichungen in den Anfangsbedingungen auch nur zu geringen Abweichungen im Ergebnis des Experiments führen.

Reguläre Prozesse entwickeln sich entsprechend dem starken Kausalitätsprinzip: quantitative Änderung der Anfangsparameter kann zwar zur quantitativen Änderung des Systemverhaltens führen, die topologische Struktur der Systemdynamik bleibt jedoch erhalten. Irreguläre Prozesse brechen das starke Kausalitätsprinzip: ähnliche Ursachen haben keine ähnlichen Wirkungen.

Abbildung 1.3: Verletzung der starken Kausalität



Dabei unterscheidet man i. A. zwischen zwei Arten des irregulären Verhaltens – dem *deterministisch-chaotischen* und dem rein *stochastischen* Verhalten.

Das *deterministisch-chaotische* Systemverhalten folgt nicht mehr dem starken Kausalitätsprinzip, hält jedoch das schwache ein. In diesem Fall kann nur bei identischen Anfangsbedingungen wiederholt dieselbe Systemdynamik beobachtet werden. Die ausschließliche Einhaltung der schwachen Kausalität durch ein dynamisches System wird auch als *Anfangswertsensitivität* des Systems bezeichnet: schon geringe Abweichungen in den Anfangsbedingungen können aufgrund der Anfangswertsensitivität ein völlig unterschiedliches Systemverhalten nach sich ziehen.

Dem rein *stochastischen* Systemverhalten liegen keine deterministischen Gesetzmäßigkeiten im üblichen Sinne zugrunde. Darüber hinaus trägt stochastische Prozessdynamik weder dem schwachen noch dem starken Kausalitätsprinzip Rechnung.

Wie allgemein ist die sensitive Systemabhängigkeit von den Anfangsbedingungen? Zum einen ist festzuhalten, dass diese, wenn überhaupt, bei deterministischen dynamischen Systemen oder dynamischen Systemen, die deterministische Strukturen beinhalten, vorkommt. Die Anfangswertsensitivität kann bei vielen physikalischen

Systemen beobachtet werden.³ Allein aus der Problematik der genauen Messbarkeit heraus ist für die meisten physikalischen Systeme eine gewisse Unsicherheit bezüglich der wahren Anfangsbedingungen gegeben. Zum anderen ist festzuhalten, dass es sowohl Systeme mit sensitiver Abhängigkeit bezüglich aller Anfangsbedingungen als auch Systeme mit einer solchen Abhängigkeit bezüglich bestimmter Anfangsbedingungen gibt. Zusammengefasst ist die Vorhersage einer Systementwicklung weitgehend als erfolglos zu sehen, falls die oben genannte Anfangswertsensitivität vorliegt.

1.3 Determinismus versus Zufall?

„Gott würfelt nicht...“

B. Pascal

„Nichts ist in der Natur zufällig... Etwas erscheint nur zufällig aufgrund der Unvollständigkeit unseres Wissens.“

Spinoza

Die Idee von dem *allgemeinen Determinismus*⁴ ist in der Welt der Natur- und aber auch der Geisteswissenschaften nicht neu. Sie wurde bereits vor knapp zwei Jahrhunderten von P. S. Laplace zur wissenschaftlichen Diskussion gestellt: „Eine Intelligenz, die in einem gegebenen Augenblick alle Kräfte kennt, durch welche die Natur belebt wird, und die entsprechende Lage aller Teile, aus denen sie zusammengesetzt ist, und die darüber hinaus breit genug wäre, um alle diese Daten der Analyse zu unterziehen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Körper des Universums und die des kleinsten Atoms umfassen. Für sie wäre nichts ungewiss,

³ Ruelle, D.: Zufall und Chaos, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1991, S.40.

⁴ Determinismus – Lehre von der kausalen Bestimmtheit allen Geschehens, auch des menschlichen Handelns, durch Naturgesetze. Sowohl Zufall als auch Willensfreiheit werden demnach ausgeschlossen.

und die Zukunft ebenso wie die Vergangenheit wäre ihren Augen gegenwärtig. Der menschliche Verstand, in der Perfektion, die er in der Lage war, der Astronomie zu geben, stellt ein schwaches Abbild dieser Intelligenz dar.“⁵ Bis in die heutigen Tage konnten aufgrund des unzureichenden Wissensstandes noch keine allgemein gültigen, mathematisch fundierten Beweise des allgemeinen Determinismus erbracht werden. Dennoch bleibt die laplacesche Formulierung des allgemeinen Determinismus grundlegend für die Charakterisierung eines dynamischen Systems als deterministisch⁶ und bildet die Ausgangsbasis für eine Mehrzahl von Theorien der Naturwissenschaften.

Was bedingt die Tatsache, dass die Naturwissenschaften immer wieder den Vorzug einer deterministischen Erklärung der Vorgänge und Strukturen aus der Umwelt geben? Eine tiefliegende Ursache hierfür ist der Glaube des menschlichen Verstandes, sich in deterministischen Strukturen sicher zu fühlen. Man denke dabei an die Neigung des Menschen, alles im Alltag wahrgenommene linearisieren zu wollen. Dass auch diese Sicherheit zu relativieren ist, lehren uns die Umwelt und die Wissenschaft immer wieder: das bekannteste und simpelste Beispiel hierfür ist die logistische Funktion mit ihrer Parameterempfindlichkeit – je nach Parameterausprägung variiert das Verhalten der Funktion vom stabilen Fixpunkt über das Periodische bis hin zum chaotischen Verhaltensmuster.

Stochastik⁷, oder auch Wahrscheinlichkeitstheorie genannt, ist ein Teilgebiet der höheren Mathematik, das sich u. a. mit dem Entwurf und der Validierung von Modellen beschäftigt, die Ausschnitte der Realität unter Zulassung eines höheren Flexibilitätsgrades abbilden. Insbesondere gilt für stochastische Modelle, dass sich diese von der deterministischen Weltanschauung abwenden und bei der Beschreibung der jeweiligen Prozessdynamik komplexer nichtlinearer Gesetzmäßigkeiten bedienen.

⁵ Ruelle, D.: Zufall und Chaos, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1991, S. 27, zitiert aus P. S. Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, Courcier, Paris, 1814.

⁶ Speziell Systemdeterminismus bedeutet, dass das beobachtete Systemverhalten bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterliegt, die durch die strenge Mathematik der klassischen Mechanik beschrieben werden können.

⁷ Stochastik – Lehre vom Zufall, Oberbegriff für Wahrscheinlichkeitstheorie. Unter Zufall wird das verstanden, was ohne erkennbaren Grund und ohne Absicht geschieht.

Zunächst ist also festzuhalten, dass sowohl deterministische als auch stochastische Strukturen Modelle sind, die hinreichend genau oder genauer als sonstige Modelle bestimmte Vorgänge oder Zustände der Umwelt beschreiben. In diesem Sinne wird also einem Ereignis deterministische oder stochastische Natur unterstellt, ohne dass dafür ein fundierter allgemein gültiger Beweis erbracht worden wäre. Sondern solange die jeweilige Annahme als in sich konsistent und zutreffend für die entsprechende Situation erscheint, wird sie für den abzubildenden Realitätsausschnitt für gültig erklärt.

1.4 Deterministisches Chaos im Rahmen der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse

Die klassischen Definitionen von Zufall und Determinismus lassen auf logische Unvereinbarkeit der beiden Begriffe schließen:

- einerseits lässt auf den ersten Blick der Determinismus von Laplace keinen Raum für Zufall;⁸
- andererseits ist eine der zentralen Eigenschaften der durch die stochastischen Gesetzmäßigkeiten beschriebenen Abfertigungsprozesse ihre Gedächtnislosigkeit – und somit, oberflächlich gesehen, eine Undeterminiertheit - in Bezug auf die vorangegangenen Systemzustände. Als Ursache für die Gedächtnislosigkeit der Abfertigungsprozesse wird der Zufall genannt.⁹

Damit bezieht die Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse eine Sonderstellung unter den sonstigen durch deterministische Mathematik beschriebenen Theorien der Mathematik und Physik. Bei einer genaueren Betrachtung der Dynamik markovscher Prozesse sowohl aus der theoretischen als auch aus der empirischen Sicht und dem Vergleich dieser mit der Dynamik deterministischer Systeme lässt sich zeigen, dass

⁸ Vgl. Abschnitt 1.3, S. 6.

⁹ Vgl. Abschnitt 3.2 S. 83.

- es sowohl wesentliche Parallelitäten im quantitativen Verständnis der theoretischen Begriffskonstrukte der beiden Prozessarten gibt als auch grundlegende Übereinstimmungen in qualitativer Auffassung der Prozessdynamik vorhanden sind und letztendlich
- sowohl der Zufall bei dynamischen Prozessen mit dem nachweisbaren deterministisch-chaotischen Verhalten eine Rolle spielt als auch, in einem beschränkten Ausmaß, deterministischer Charakter in der Dynamik markovscher Prozesse zum Ausdruck kommt.

Den Ausgangspunkt einer beliebigen Prozessbetrachtung bildet der Anfangszustand des jeweiligen Systems. Der Anfangszustand eines markovschen Abfertigungssystems ist i. d. R. im Voraus nicht deterministisch festgelegt, sondern durch eine probabilistische Gesetzmäßigkeit – den Anlaufvektor – beschrieben. Erst im Rahmen eines konkreten Experiments lässt sich dieser ex-post deterministisch erfassen. Aber auch der Anfangszustand eines deterministischen Systems könnte anstatt genau festgelegt auch zufällig sein: in der Praxis ist der Anfangszustand eines Systems niemals mit vollkommener Genauigkeit bekannt, eine auch noch so geringe Unsicherheit bezüglich der kaum vermeidbaren Messfehler wird stets in Kauf genommen. Die numerische Erfassung des Anfangszustandes im Falle eines deterministischen Systems kann daher eine Zufälligkeitskomponente keineswegs vollständig ausschließen. Zusammenfassend ist bezüglich des Anfangszustandes der Prozessbetrachtung der einzige Unterschied zwischen den beiden Ansätzen festzuhalten: die Theorie der markovschen Prozesse lässt im Voraus dem beobachteten System einen deutlich höheren Grad an Flexibilität zu. Man mag somit aus empirischer Sicht über die konkrete Höhe der jeweiligen Flexibilitätsgrade streiten, jedoch nicht über deren Gegebenheit.

Des Weiteren zeigt der Begriffskonstrukt „Systemdynamik“ unter dem deterministischen Ansatz einerseits sowie unter dem stochastischen Ansatz andererseits grundlegende Parallelitäten auf. Zum einen sind es die Gemeinsamkeiten im *quantitativen* Verständnis des Begriffs im Rahmen der klassischen Mechanik und der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse:

- laut Auslegung der newtonschen Mechanik ist der Zustand eines physikalischen Systems zu einer gewissen Zeit durch die *Lagen* und

Geschwindigkeiten der Systempunkte gegeben, in denen die Materie des Systems konzentriert ist.¹⁰ Aus der vollständigen Kenntnis des Zustandes eines physikalischen Systems zu einer gewissen Zeit (Anfangszeitpunkt der Beobachtung) lässt sich jeder Systemzustand zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt bestimmen¹¹;

- ähnliche Auffassung liegt der Erklärung der „Systemdynamik“ im Rahmen der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse zugrunde – die Kenntnis des *Anlaufvektors*¹² und der *einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten*¹³ erlaubt die Berechnung des Systemzustandes zum beliebigen Zeitpunkt der Prozessentwicklung.¹⁴

Zum anderen lässt die *qualitative* Beschreibung des Begriffs „Systemdynamik“ aus der Sicht der Quantenmechanik für die sogenannten Fluid-Systeme sowie aus der Sicht der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse auf inhaltliche Ähnlichkeiten der beiden Prozessarten schließen:

- Betrachtet man die Mechanik einer viskosen Flüssigkeit, so lassen sich verallgemeinernd drei Dynamikphasen unterscheiden: eine *laminare* (reguläre), eine *periodische* und eine *turbulente* (chaotische) Phase;¹⁵
- Die Untersuchung der Dynamik von markovschen Abfertigungsprozessen liefert vergleichbare Erkenntnisse – deren Dynamik kann i. d. R. durch (mindestens) eine *turbulente* Phase, auch die Einschwingungsphase genannt, und eine *reguläre* Phase, die sogenannte Gleichgewichtsphase, beschrieben werden. Eine andere Art von markovschen Prozessen ist wiederum durch (mindestens) eine turbulente und eine *oszillatorische* Phase gekennzeichnet.

Auch in Bezug auf die generelle *Prognostizierbarkeit* der Prozessdynamik lässt sich durch eine allgemeinere Betrachtung eine Annäherung des genannten Charakteristikums der beiden Prozessarten aneinander festhalten:

¹⁰ Vgl. Ruelle, D.: Zufall und Chaos, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1992, S. 26.

¹¹ Anbei beachte man jedoch die Aussage der heisenbergschen Unschärferelation darüber, dass der Ort und die Geschwindigkeit eines Punktes nicht gleichzeitig beliebig genau feststellbar sind. Aufgrund dieser Aussage wird von einigen Chaos-Forschern die Meinung vertreten, dass chaotisches Systemverhalten nicht als deterministisch bezeichnet werden kann.

¹² Kann meines Erachtens als die Lage des markovschen Abfertigungsprozesses zum Anfangszeitpunkt der Beobachtung interpretiert werden.

¹³ Gekoppelt an die Zeitkomponente lassen sie sich als Geschwindigkeiten der Systempunkte – sprich der möglichen Realisationen - interpretieren.

¹⁴ Vgl. Abschnitt 3.2, S. 77-79.

¹⁵ Vgl. Sprott, C. J.: Chaos and Time-Series Analysis, Oxford University Press, 2003, S. 4.

- Wie bereits erwähnt, wird die Dynamik der markovschen Prozesse durch den Zufall bestimmt. Im Einzelnen jedoch wird ein konkreter markovscher Prozess durch ein *wohldefiniertes* stochastisches Modell beschrieben, was die prinzipielle Unsicherheit der Langzeitvorhersage bezüglich dessen Verhaltens verringert;
- Zieht man zum Vergleich ein deterministisches System, dessen Ausgangszustand mit einer *Zufälligkeitskomponente* behaftet ist, so wird man feststellen, dass sich diese Zufälligkeitskomponente auf weitere Dynamik des Systems auswirkt. Dies würde bedeuten, dass jeder nachfolgende Systemzustand, auch im Falle einer vollständigen deterministischen Erfassung, mit Ungewissheit verbunden ist. Die Zufälligkeitskomponente mag anfänglich unbedeutend erscheinen. Jedoch kann manche Systemdynamik aus ihrer deterministischen Gesetzmäßigkeit heraus ein in der Zeit nicht zu vernachlässigendes Wachstum dieser Zufälligkeitskomponente beinhalten. Dies würde zu der Annahme einer Langzeit-Unvorhersagbarkeit der Systemdynamik führen.

Anschließend lässt sich die Anwendbarkeit des Konzeptes vom deterministischen Chaos auf die markovschen Abfertigungsprozesse dadurch begründen, dass es zwar aus theoretischer Sicht eine klare Trennung der Begriffe „Determinismus“ und „Zufall“ geben mag, in der Praxis jedoch eine enge Verwobenheit der Ansätze zu beobachten ist:

- Die klassische Definition vom deterministischen Chaos beruht auf der Annahme eines *deterministischen*, dynamischen Systems. Somit legt die gängige Definition von Chaos *klare und feste Rahmen* für die mögliche Zugehörigkeit eines dynamischen Systems zu den potentiell chaotischen. Bereits seit Langem sind jedoch Systembeispiele aus den Bereichen der empirischen Mathematik – Astronomie, Meteorologie etc. – bekannt, für die eindeutig chaotisches Verhalten nachgewiesen wurde, ohne dass diese in die starren Definitionsmuster des klassischen – *deterministischen* - Chaos-Begriffs einwandfrei hinein gepasst hätten. Das populärste Beispiel hierzu ist das Phänomen des Schmetterlingseffekts¹⁶ aus dem Bereich der Meteorologie-Forschung. Weitere Beispiele für chaotisches System-

¹⁶ Vgl. Abschnitt 2.1.

verhalten findet man bei der Untersuchung von Elektronenbewegung innerhalb der Atome, Ausbreitung von Waldbränden, Erdbeben, Epidemien, Evolution von Sprachen, und sogar der Liebe als Gemütszustand, beschrieben durch Empfindungen romantischer Art.¹⁷ Dabei ist zu beachten, dass eine Vielzahl dieser Systembeispiele eine Mathematik beinhaltet, die zum Teil *auf stochastischen Grundsätzen* beruht oder deren Logik der stochastischen ähnlich ist;

- Andererseits werden markovsche Abfertigungsprozesse durch stochastische Modelle beschrieben, die als Grundlage *statistische Langzeitbeobachtung* und *Analyse* von naturverwandten Zeitreihen mit Hilfe von mehr oder weniger simplen *Werkzeugen der klassischen Statistik*¹⁸ haben. Immerhin liefern statistische Auswertungsmethoden Aussagen über das mittlere Verhalten von Systemen, innerhalb welcher die einzelnen Vorgänge für den Beobachter nicht durchschaubar sind. Die Zuverlässigkeit der statistischen Werkzeuge mag angezweifelt werden, jedoch werden diese seit Jahrzehnten in vielen Wirtschaftszweigen (Versicherungswirtschaft, Marktforschung, Volkswirtschaft etc.) mit Erfolg eingesetzt. Somit liegt die Annahme nahe, dass die mathematische Darstellung von markovschen Abfertigungsprozessen eine *deterministische Komponente* mit einschließt.

Aufgrund der angestellten Überlegungen lässt sich das Konzept vom deterministischen Chaos auch im Rahmen der Theorie der markovschen Prozesse einsetzen. Bereits der französische Mathematiker Henri Poincaré hat sich mit der Frage der Langzeit-Unvorhersagbarkeit für deterministische Systeme in seinem Buch „Wissenschaft und Methode“ von 1908 beschäftigt. In einem knappen Satz hat er auf die gegenseitige Verträglichkeit von Zufall und Determinismus hingewiesen: „Eine sehr kleine Ursache, die uns entgehen mag, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht ignorieren können, und dann sagen wir, dass dieser Effekt auf Zufall beruht“. Damit war für Poincaré der Mechanismus der Systemsensitivität bezüglich der Anfangsbedingungen eine von mehreren Möglichkeiten, wie ein klassisches

¹⁷ Vgl. Sprott, J. C.: Chaos and Time-Series Analysis, Oxford University Press, 2003, S. 2 – 19.

¹⁸ Wie z. B. die Berechnung von Häufigkeiten, die Ableitung einer Verteilungsannahme, Schätzung der Güte der Verteilungsannahme u.ä.

deterministisches Verständnis der Welt in natürlicher Weise eine probabilistische Idealisierung mit beinhalten kann.

1.5 Problemstellung und Gang der Untersuchung

Vorab ist die allgemeine Fragestellung dieser Arbeit festzuhalten: „Existiert Chaos in markovschen Abfertigungsprozessen?“.

Nach der Vorstellung der allgemein bekannten Kriterien für deterministisch-chaotisches Verhalten im System (**Kapitel 2**) wird eine inhaltliche Verbindung zwischen den chaos-theoretischen Überlegungen und der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse geschaffen (**Kapitel 3**). Insbesondere werden problembezogen konkrete Fragestellungen ausgearbeitet, die den Gang und die Inhalte der darauf folgenden empirischen Untersuchungen bestimmen. Des Weiteren werden die im Abschnitt 1.4 „Deterministisches Chaos im Rahmen der Theorie...“ beschriebenen Gemeinsamkeiten von deterministischen und stochastischen Strukturen sowohl durch theoretische Ausführungen (**Kapitel 3**) als auch mittels empirischer Beobachtungen (**Kapitel 4, Kapitel 5**) gestützt.

Die zur Untersuchung anstehenden theoretischen Abfertigungsprozesse, jeweils in Abhängigkeit von den unterschiedlichen Parameterwerten, werden mit Hilfe der Simulationssprache ARENA simuliert. Unter Zuhilfenahme von allgemein bekannten Werkzeugen der Zeitreihenanalyse und von chaos-theoretischen Kenngrößen wird die Entwicklung von markovschen Abfertigungsprozessen aus der chaos-theoretischen Sicht qualitativ und quantitativ erfasst und analysiert (**Kapitel 4**). Damit wird gleichzeitig eine Analyse-Grundlage geschaffen, die eine chaos-theoretische Untersuchung von praxisbezogenen Abfertigungsprozessen ermöglicht. Als weiterer Gegenstand der Untersuchung präsentiert sich der Einfluss von prozess-initiiierenden Parametern auf das jeweilige Systemverhalten. Die Betrachtung von unterschiedlichen Szenarien liefert betriebswirtschaftlich relevante Aussagen über die Möglichkeiten von prozessoptimierenden Gestaltungsmaßnahmen.

Im hieran anschließenden empirischen Teil der Arbeit (**Kapitel 5**) wird der Abfertigungsprozess einer Klinik anhand der bereitgestellten Daten in ein Simulationsmodell umgesetzt. Die Ergebnisse der Modell-Simulation werden entsprechend den aufgestellten Kriterien auf chaotisches Verhalten hin untersucht sowie einer betriebswirtschaftlichen Interpretation im Hinblick auf die vorliegenden Fragestellungen unterzogen.

Die Arbeit wird mit einer Zusammenfassung der Untersuchungsergebnisse zum Thema „Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse und deterministisches Chaos“ abgeschlossen (**Kapitel 6**). Eine inhaltliche und methodische Bewertung der erzielten Ergebnisse sowie eine komprimierte Vorstellung von weiteren Forschungsfragen runden die Schlussbetrachtung ab.

Die unten aufgeführte Aufstellung präsentiert im Überblick die in dieser Arbeit zu behandelnden Forschungsfragen:

1. Kann das Konzept des deterministischen Chaos generell im Rahmen der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse angewandt werden?
2. Welche quantitativ erfassbaren Aspekte der markovschen Abfertigungsprozesse begründen den Bedarf einer chaos-theoretischen Untersuchung?
3. Sind markovsche Abfertigungsprozesse chaotisch und ggf. welche Systemparameter beeinflussen im welchen Ausmaß das chaotische Systemverhalten?
4. Welche prozessgestaltenden Maßnahmen können zur Stabilisierung des chaotischen Systemverhaltens eingesetzt werden?

2 Grundlagen der Chaos-Theorie

2.1 Systemdefinition

Zahlreiche ökonomische Systeme lassen sich nicht hinreichend genau oder grundsätzlich nicht durch eine lineare Abbildung darstellen. Zum einen liegt es an der Komplexität dieser Prozesse, insbesondere in Bezug auf die Struktur der Interdependenzen zwischen den einzelnen, den Prozess beschreibenden Elementen. Zum anderen ermöglicht die lineare Sichtweise aus dem System heraus keine Erklärung irregulärer Verhaltensmuster, die zeitweise in solchen Systemen beobachtet werden können.

Als bekanntestes Beispiel für ein irreguläres Verhaltensmuster sei der „Schmetterlingseffekt“ aus der Meteorologie angesprochen: der Flügelschlag eines Schmetterlings über China kann eine Luftbewegung im molekularen Bereich auslösen, die aufgrund nichtlinearer Rückkopplungen in der Atmosphäre einen Wirbelsturm in Amerika verursachen kann. Eine „unendlich“ kleine Ursache kann somit zu einer erheblichen Änderung des Gesamtsystemverhaltens führen. Mit einem herkömmlichen linearen Ansatz ließe sich ein solches Systemverhalten aus sich selbst heraus nicht erklären. Man würde versuchen, eine derartige Entwicklung durch Zufall bzw. durch Einwirkung exogener Störgrößen zu erklären.¹⁹

¹⁹ Vgl. Argyris, J., Faus, G., Haase, M. : Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994, S. 2.

Rückkopplungsprozesse nichtlinearer Art gehören seit Langem zur Grundausstattung in allen exakten Wissenschaften. In dynamischer Form werden sie als Standard-Verfahren zur Modellierung natürlicher Phänomene eingesetzt: bspw. lassen sich mit Hilfe eines geeignet definierten Rückkopplungsprozesses im Rahmen der newtonschen Quantenmechanik Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens zu einem beliebigen Zeitpunkt aus den entsprechenden Werten zum vorangehenden Zeitpunkt ermitteln. Das Rückkopplungsgesetz beschreibt in diesem Fall die Bewegung des Teilchens und es kommt im Prinzip nicht darauf an, ob der Prozess als zeitdiskret oder zeitkontinuierlich angesehen wird: bei den physikalischen Prozessen sind unendlich kleine Zeitschritte²⁰ zur Erfassung der Prozessentwicklung üblich, biologische Prozesse beziehen sich nicht selten auf die Entwicklungsschritte von Jahr zu Jahr oder von Generation zur Generation. In diesem Zusammenhang können die Begriffe Iteration, Rückkopplung und Zeitschritt für Prozesse, deren Dynamik in rekursiver Form erfasst werden kann, als synonym betrachtet werden.

Die Zulassung von nichtlinearen Modellstrukturen ermöglicht aus theoretischer Sicht irreguläre²¹ Entwicklungen innerhalb der Systeme endogen zu erklären, ohne dabei auf exogene stochastische Größen zurückgreifen zu müssen. Beobachtungen in unterschiedlichen Wissenschaftsbereichen haben gezeigt, dass bereits einfache nicht-lineare, vollständig determinierte Systeme irreguläres Verhalten erzeugen können, das Charakteristika stochastischer Prozesse aufweist. Dies ist ein Hinweis dafür, dass irreguläres Verhalten durchaus zur inneren Natur von nichtlinearen dynamischen Systemen gehören kann. Aus praktischer Sicht kann dem irregulären Verhalten deterministische Dynamik unterstellt werden, falls es sich auch durch weitere Ansammlung von Informationen über das System nicht eliminieren bzw. abschwächen lässt. Dieses irreguläre Verhalten bezeichnet man als deterministisches Chaos. Deterministisches Chaos ist somit durch zufallsähnliche Schwankungen in einem System gekennzeichnet, dessen Dynamik durch deterministische Gesetzmäßigkeit festgelegt ist.²²

²⁰ Ausgenommen die Mikrophysik.

²¹ Also diejenigen Prozesse, die das Prinzip der starken Kausalität nicht befolgen.

²² Vgl. Argyris, J., Faus, G., Haase, M. : Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994, S. 22.

Definition 2.1: Ein *dynamisches System*

$$x_{t+1} = f(x_t) = f^t(x_0)$$

mit $x, f : R^n \rightarrow R^n$ - reellwertige Funktionsvektoren,

f - *nichtlinear*, *umkehrbar eindeutig*,

f^t - t -fache *Kopplung* der Funktion f ,

ist ein *vollständig determiniertes System*²³, dessen Dynamik durch *rekursive nichtlineare* Form der Beziehung festgelegt ist, und somit der klassische Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen der Chaos-Theorie.

x_t beschreibt den Zustand des Systems zur Zeit t . Außerdem entsteht die Systemdynamik per definitionem durch rekursive Form der Beziehung. D. h. zu jedem Anfangszustand x_0 kann mittels wiederholter Anwendung desselben Rechenverfahrens auf x_0 jeder zukünftige Zustand angegeben werden. Da f umkehrbar eindeutig ist, kann zum gegebenen Anfangszustand eindeutig auch jeder vergangene Zustand des Systems bestimmt werden. Die Abhängigkeit der Variablen x vom Parameter t gibt im Modell die Dynamik des Systems wieder. Die rekursive Form der Beziehung schließt die Abhängigkeiten und Zusammenwirkungsmuster zwischen den einzelnen Systemgrößen mit ein.

Im Abschnitt 1.4 „Deterministisches Chaos im Rahmen der Theorie...“ wurde darauf hingewiesen, dass es aus empirischer Sicht zwischen deterministischen und stochastischen Prozessen, die sich in der Zeit nach bestimmten, denen zugrunde liegenden, Gesetzmäßigkeiten entwickeln, keine klar definierbare Trennlinie existiert. Die im Rahmen dieser Arbeit vorzunehmende empirische Untersuchung auf chaotisches Verhalten bezieht sich auf konkrete Realisationen markovscher Abfertigungsprozesse, die als repräsentative Beispiele für unterschiedliche Modell-Ausprägungen²⁴ verallgemeinernde Schlussfolgerungen für die Verhaltenstendenz dieser Klasse dynamischer Systeme ermöglichen. Wie auch bei empirischen Chaos-Unter-

²³ Ist f nicht umkehrbar, so nennt man das dynamische System halbdeterminiert.

²⁴ Näheres zu unterschiedlichen Modell-Ausprägungen der Abfertigungsprozesse s. Kapitel 3, Abschnitt 3.2, S. 81.

suchungen in vielen anderen wissenschaftlichen Bereichen – bspw. experimenteller Physik, Chemie, Meteorologie – ist bei den hier zu untersuchenden Zeitreihen die Voranmerkung angebracht, dass es sich dabei, ex-post betrachtet, um eine determinierte Entwicklung des jeweiligen Abfertigungsprozesses handelt.

Als begleitendes Beispiel wird in dieser Arbeit das Verhalten der logistischen Funktion in der Zeit in Abhängigkeit von unterschiedlichen Parameterwerten betrachtet. Dies soll vordergründig der Veranschaulichung des deterministisch-chaotischen Verhaltens im Sinne der klassischen Chaos-Theorie dienen. Außerdem lassen sich die problemrelevanten Schlussfolgerungen aus der Zeitreihenanalyse mittels Vergleich der jeweiligen Analyseergebnisse über das Verhalten der markovschen Zeitreihen und der logistischen Funktion besser nachvollziehen.

Die logistische Funktion, oder auch aufgrund ihrer ursprünglichen Verwendung in der Logistik und ihrer Parabelform logistische Parabel genannt, wurde 1854 von dem belgischen Soziologen und Mathematiker P.-F. Verhulst eingeführt. Deren Anwendungszweck lag in der Abbildung des Populationswachstums, das nach oben durch die Ressourcenknappheit beschränkt ist. In statischer Form wird die logistische Funktion durch die nichtlineare Gleichung der Form beschrieben:

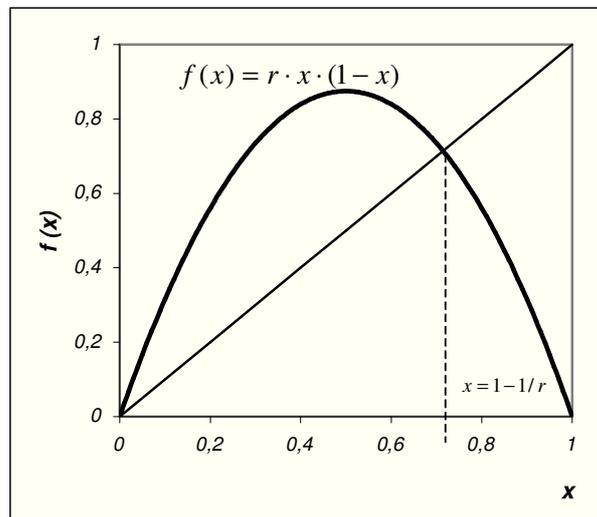
$$f(x) = r \cdot x \cdot (1 - x)$$

mit $x \in [0, 1]$ - Variable und

$r \in R^+$ - Parameter der logistischen Funktion.

Wobei für die chaos-theoretischen Untersuchungen der Parameterbereich $r \in (0, 4]$ relevant ist. Die oben vorgestellte logistische Funktion kann durch eine Parabel im Definitionsbereich repräsentiert werden:

Abbildung 2.1: Statische Darstellung der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 3,5$



Um das Folglied auf das vorhergehende zu projizieren, ist die Winkelhalbierende von Bedeutung. Die *Schnittpunkte* der Winkelhalbierenden mit der Parabel der logistischen Funktion und gleichzeitig *stabile*²⁵ *Fixpunkte* sind $x = 0$ für $0 < r < 1$ und $x = 1 - \frac{1}{r}$ für $1 < r < 3$. Für $r > 3$ verlieren die Schnittpunkte ihre Stabilität.

Als dynamischer Prozess ist die logistische Funktion durch Rückkopplung folgender Art gegeben:

$$x_{t+1} = r \cdot x_t \cdot (1 - x_t) ,$$

$$x_t \in [0, 1], \quad \forall t = 0, 1, 2, 3, \dots ,$$

$$r \in (0, 4] \text{ - Parameter der logistischen Funktion,}$$

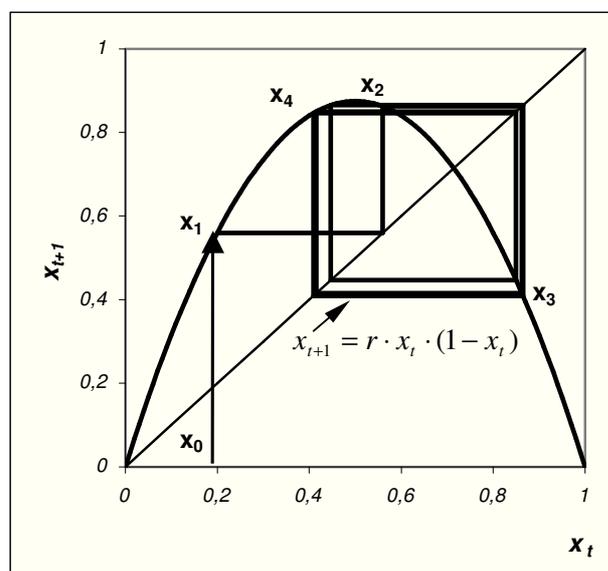
$$t \text{ - Anzahl der Iterationen .}$$

Üblicherweise erfolgt die Darstellung der Entwicklung eines dynamischen Systems in einem *Phasen-* oder *Zustandsraum* - einem i. d. R. mehrdimensionalen Raum R^n , in dem alle möglichen Zustände eines dynamischen Systems erfasst werden. Die

²⁵ Zur Erinnerung: Die Bedingung für die Stabilität der Fixpunkte lautet $|f'(x)| < 1$.

gesamte Lösungsmenge ordnet demzufolge allen Anfangszuständen aus R^n nach der Zeit t neue Zustände zu. Eine derartige Abbildung wird als *Phasenfluss* f^t im Phasenraum R^n genannt. Einzelne Zustände im R^n werden als Phasenpunkte bezeichnet²⁶. Die Entwicklung eines dynamischen Systems, ausgehend von einem konkreten Anfangszustand $x_0 \in R^n$, wird als *Trajektorie* oder *Bahn* genannt. Die Abbildung 2.2 veranschaulicht die Bahn der logistischen Funktion mit dem Parameterwert $r = 3,5$ und dem Anfangswert $x_0 = 0,2$ für die ersten acht Iterationen: vom Anfangszustand ausgehend nimmt das System nach einer Iteration/Zeiteinheit den Wert $x_1 = 0,56$ an, der darauf folgende Zustand ist mit dem Wert $x_2 = 0,8624...$ auf der statischen Parabel gekennzeichnet, der nächste mit dem Wert $x_3 = 0,4153...$ usw.

Abbildung 2.2: Die Bahn der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 3,5$, Startwert $x_0 = 0,2$



Im Zusammenhang mit Phasenräumen unterscheidet man zwischen *konservativen* und *dissipativen* Systemen. Bei *konservativen* Systemen bleibt mit fortlaufender Zeit der dazugehörige Zustandsraum erhalten. Im Allgemeinen entspricht dies einer Energieerhaltung, z. B. :

²⁶ Vgl. Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 11.

- in einem zweidimensionalen Fall würde dies die Beibehaltung des Flächenmaßes bedeuten,
- in einem dreidimensionalen Fall wäre dies als Unveränderlichkeit des Volumens zu sehen.

Konservative Systeme sind gegenüber ihrer Umwelt abgeschlossen. Ursache und Wirkung innerhalb solcher Systeme sind eindeutig miteinander verbunden und können beliebig genau berechnet werden.

Ökonomische Prozesse stellen jedoch offene dynamische Systeme dar, die sich im ständigen Energieaustausch mit anderen Systemen befinden. Daher wird den ökonomischen Prozessen *dissipative* Natur unterstellt. *Dissipative* dynamische Systeme sind insbesondere durch die Eigenschaft gekennzeichnet, ihr Verhaltensmuster in der Zeit zu verändern, ohne dass sich die ihnen zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit verändert.²⁷

Es ist also vorerst festzuhalten, dass

- chaotisches Verhalten in *dissipativen dynamischen* Systemen beobachtet werden kann, deren Entwicklung in der Zeit einer bestimmten *Gesetzmäßigkeit* entsprechend festgelegt ist, und
- diese Gesetzmäßigkeit *nichtlinearer* Natur und durch eine *gegenseitige Kopplung* bzw. Wechselwirkung von Parametern und Variablen des Systems gekennzeichnet ist.

Dies hat zur Folge, dass die die Dynamik beschreibende Gesetzmäßigkeit nicht in einzelne Elemente auseinander und wieder zusammengesetzt werden kann, ohne dass dabei Informationen über das Systemverhalten verloren gehen.²⁸ Kurz gesagt lässt sich die Systemdynamik in diesem Fall mit Worten charakterisieren: „Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile“²⁹. Diese Systemeigenschaft wird auch als multiplikatives Überlagerungsprinzip bezeichnet und bildet die Grundlage für ein weiteres Charakteristikum chaotischer Verhaltensmuster – die *Selbstähnlichkeit*, die im darauf folgenden Abschnitt erläutert wird.

²⁷ Näheres zur Änderung der Verhaltensmuster dissipativer dynamischer Systeme s. Abschnitt 2.3.

²⁸ Im Gegensatz zu den Gesetzmäßigkeiten linearer Form, für die das sogenannte additive Überlagerungsprinzip gilt: aus der Kenntnis der einzelnen Systemelemente lassen sich eindeutige und vollständige Aussagen über das gesamte dynamische System ableiten.

²⁹ Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 5.

2.2 Fraktale³⁰

Die Repräsentation der Dynamik eines deterministisch-chaotischen Systems im Phasenraum hat des Öfteren eine fraktale geometrische Struktur. Dabei ist zu betonen, dass der Nachweis einer fraktalen Struktur der Systemdynamik weder notwendig noch hinreichend zur Charakterisierung des Systems als deterministisch-chaotisch ist. Denn es gibt dynamische Systeme mit fraktalen Strukturen, die keineswegs deterministisch-chaotisch sind. Und umgekehrt gibt es Systeme, die deterministisch-chaotisches Verhalten aufweisen, deren Dynamikstruktur jedoch nicht fraktal ist.³¹

Das charakteristische qualitative Merkmal fraktaler Objekte, kurz gesprochen *Fraktalen*, ist ihre *Selbstähnlichkeit*, die durch Wiederholung bestimmter Strukturformen in allen Größenskalen zum Ausdruck kommt. In Bezug auf dynamische Systeme, die durch deterministisch-chaotische Verhaltensmuster charakterisiert sind, ist demnach deren Rückkopplungsform der Dynamik die Ursache für die fraktale bzw. selbstähnliche Dynamikstruktur.

Definition 2.2:³² Eine Struktur heißt *selbstähnlich*, wenn Teile von ihr kleine Kopien des Ganzen enthalten.

Eine Struktur heißt *exakt selbstähnlich*, wenn jeder Teil dieser Struktur eine genaue Kopie des Ganzen enthält.

Die gängigsten Beispiele für Fraktale aus der Natur sind Blätter, Bäume, unser Nervensystem, Korallen. In der Regel lassen sich Fraktale durch einfache mathematische Gleichungen erfassen und imitieren.³³ Als Beispiel aus der Natur, das die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit sehr gut veranschaulicht, kann der Blumenkohl genannt werden. Der Blumenkohl setzt sich aus Teilen zusammen, die auch Röschen genannt werden und die, von ihrer Größe abgesehen, dem ganzen Blumenkohlkopf ähnlich sind. Unter einem Vergrößerungsglas lässt sich feststellen, dass diese Röschen sich wiederum aus kleineren, ihnen ähnlichen Röschen zusammensetzen. Die

³⁰ „Fraktal“ ist dem lateinischen Wort „frangere“ abgeleitet, das „zerbrechen“ bedeutet.

³¹ Vgl. H.-W. Lorenz : Neuere Entwicklungen in der Theorie dynamischer Systeme. In: Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik, Nr. 204, 1988, S. 295 – 315.

³² Vgl. Peitgen, H.-O., u.a. : Fraktale: Selbstähnlichkeit, Chaosspiel, Dimension, Springer Verlag, 1992, S. 1.

³³ Vgl. Mandelbrot, Benoit B.: Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser Verlag Basel, 1991.

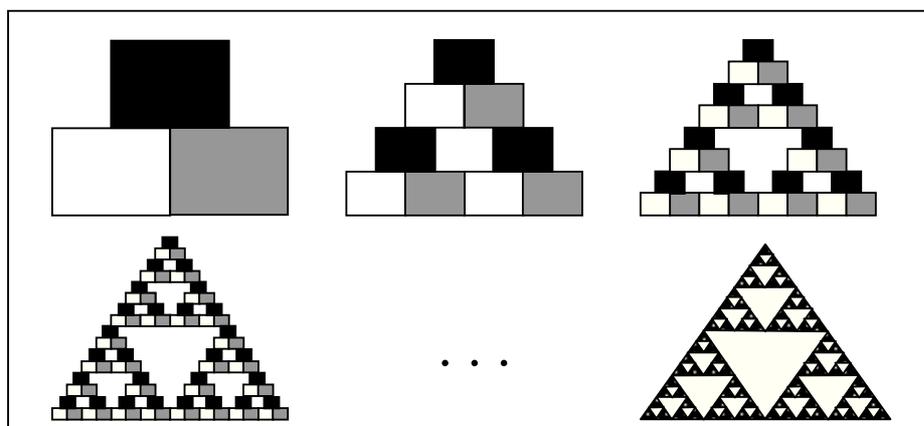
selbstähnliche Zusammensetzung des Blumenkohlkopfes lässt sich auf diese Art drei- bis vier Stufen hindurch verfolgen. In mathematischer Idealisierung ließe sich die Selbstähnlichkeit einer Struktur in unendlich vielen Stufen fortsetzen.

Fraktale geometrische Strukturen können mit Hilfe einfacher, vollständig determinierter Rückkopplungsverfahren konstruiert werden. Die Konstruktion eines Fraktals kann am Beispiel des Sierpinski-Dreiecks verdeutlicht werden, das durch die Zusammensetzung einer Vielzahl von Ähnlichkeitstransformationen unterschiedlichen Grades eines einfachen geometrischen Objektes zustande kommt:

- man beginnt mit drei gleichgroßen Rechtecken, die in Form einer Pyramide zueinander geordnet werden. Das Ausgangsbild wird kopiert und gleichzeitig um den Faktor $1/2$ verkleinert. Dieser Vorgang wird die *Ähnlichkeitstransformation* genannt;
- im nächsten Schritt ersetzt man jedes der ursprünglichen Dreiecke durch die verkleinerte Kopie. Dieses Bild wird erneut einer Ähnlichkeitstransformation mit dem Faktor $1/2$ unterzogen;
- der beschriebene Iterationsvorgang kann beliebig lange fortgesetzt werden.

Mit fortschreitender Iterationenzahl wird das entstehende Bild einem Dreieck, nämlich dem Sierpinski-Dreieck, immer ähnlicher, in dem es sich aus einer Mehrzahl unterschiedlich verkleinerten Kopien des ursprünglichen Dreiecks zusammensetzt:

Abbildung 2.3: Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks; die ersten 3 Iterationen und das Ergebnis nach einigen weiteren Schritten³⁴



³⁴ Die Rechtecke des Ausgangsbildes sind farblich unterschiedlich gekennzeichnet, um die fraktale Struktur des entstehenden Objektes grafisch zu verdeutlichen, insbesondere um die Eigenschaften der Selbstähnlichkeit und der Skaleninvarianz zu unterstreichen.

Die Abbildung 2.3 macht auf eine besonders simple Art die zwei grundlegenden Eigenschaften fraktaler Objekte nachvollziehbar – die *Selbstähnlichkeit* und die *Skaleninvarianz* fraktaler Strukturen:

- das im Laufe des oben beschriebenen Rückkopplungsprozesses entstehende Sierpinski-Dreieck besteht aus Teilen, die durch eine Vergrößerung als Kopien des Ganzen erkannt werden können;
- die Skaleninvarianz wird durch das Betrachten des Ausgangsbildes und des letzten, nach mehreren Iterationsschritten entstandenen, Bildes der Abbildung 2.4 deutlich – zwecks Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks hätte man genauso gut anstatt eines Rechtecks ein Dreieck, oder eine beliebige andere Figur, oder eine Buchstabenreihenfolge (z.B. ABCD) wählen können, das Konstruktionsverfahren würde in jedem Fall zur gleichen Endstruktur führen. Das Verfahren läuft auf eine einzige Endfigur hinaus – das Sierpinski-Dreieck.

Ein weiteres Beispiel für klassische Fraktale, dessen Konstruktion sich einfach vorstellt, ist die Cantor-Menge. Sie wurde von dem G. Cantor 1883 veröffentlicht und galt als Beispiel für außergewöhnliche Mengen insofern, dass sie eine „... perfekte, nirgends dichte Untermenge“³⁵ darstellt. Im Rahmen der Chaos-Theorie nimmt die Cantor-Menge eine wichtige Rolle ein, da sie u. a. als eine wesentliche Modellgrundlage für viele andere Fraktale steht.

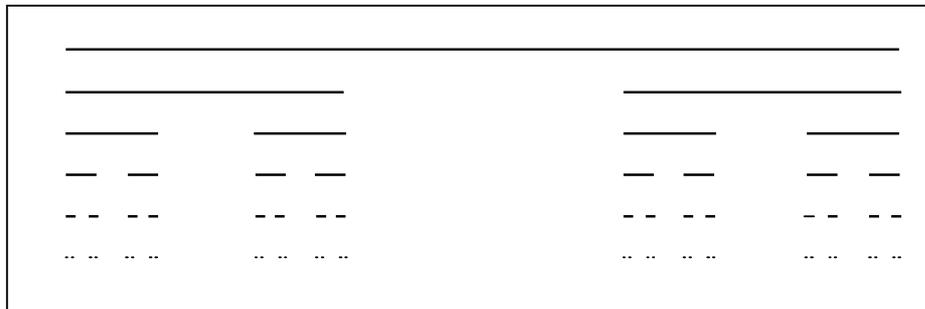
Allgemein gesprochen ist die Cantor-Menge eine unendliche Menge von Punkten im Einheitsintervall $[0, 1]$, deren Erzeugung wie folgt beschrieben werden kann:

- man beginnt mit dem Intervall $[0, 1]$ und entfernt das mittlere offene Drittel davon $(1/3, 2/3)$. Zurück bleiben die beiden geschlossenen Teilintervalle $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$, jeweils der Länge $1/3$;
- von den beiden verbliebenen Intervallen wird erneut je das mittlere offene Drittel entfernt. Dabei erhält man vier geschlossene Intervalle $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$ und $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$, jeweils der Länge $1/9$;
- dieses Rückkopplungsverfahren kann unendlich lange fortgesetzt werden, dabei werden nach n Iterationsschritten 2^n Intervalle je der Länge $1/3^n$ konstruiert.

³⁵ Peitgen, H.-O., u. a.: Bausteine des Chaos: Fraktale, Springer-Verlag Klett-Cotta, 1992, S. 85.

Die Abbildung 2.4 veranschaulicht die ersten Konstruktionsschritte zur Erzeugung der Cantor-Menge:

Abbildung 2.4: Konstruktion der Cantor-Menge



Die eigentliche Cantor-Menge setzt sich aus einer Menge der Punkte zusammen, die nach unendlich vielen Schritten der Entfernung von offenen Teilintervallen letztendlich übrig bleiben. Bei der Frage nach der Beschaffenheit der Cantor-Menge folgt intuitiv, dass die Endpunkte der jeweils bleibenden Teilintervalle, also die Punkte 0 , 1 , $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{2}{27}$, \dots , zur Cantor-Menge gehören. Diese Tatsache ergibt sich unmittelbar aus der Art des Rückkopplungsverfahrens, das zur Konstruktion der Cantor-Menge eingesetzt wird. Eine weitere Überlegung würde jedoch auch die Zugehörigkeit der nichtabzählbar vielen weiteren Punkten aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$, die keine Endpunkte der übrig bleibenden Teilintervalle sind, zur Cantor-Menge zum Vorschein bringen. Wie können diese Punkte spezifiziert werden? Hierfür benötigt man eine Darstellung der Cantor-Menge mit Hilfe von triadischen Zahlen.

Triadische Zahlen sind Zahlen, die im triadischen System, bestehend aus Ziffern $\{0, 1, 2\}$, mit Basis 3 dargestellt werden können:

Tabelle 2.1: Beispiele für triadische Darstellung von Dezimalzahlen

Dezimal	In Potenzen von 3	Triadisch
3	$1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$	10
5	$1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$	12
22	$2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$	211
0,7	$2 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 0 \cdot 3^{-3} + 2 \cdot 3^{-4} + \dots$	0,2002...
0,05	$0 \cdot 3^{-1} + 0 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-3} + 1 \cdot 3^{-4} + \dots$	0,0011...

Somit kann jeder Punkt der Cantor-Menge in triadischer Form wie folgt dargestellt werden:

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + a_4 \cdot 3^{-4} + \dots$$

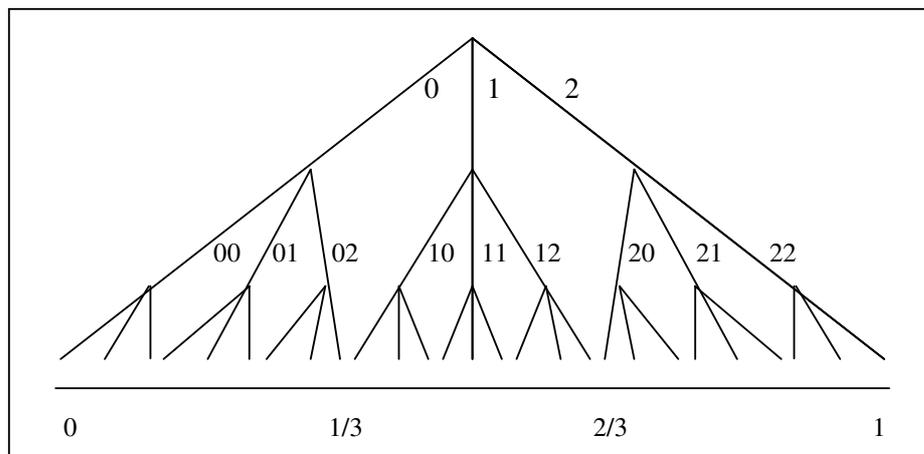
mit $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots \in \{0, 1, 2\}$.

Tabelle 2.2: Beispiele für triadische Darstellung einiger Punkte der Cantor-Menge

Dezimal	In Potenzen von 3	Triadisch
0	$0 \cdot 3^0$	0
1/3	$1 \cdot 3^{-1}$	0,1
2/3	$2 \cdot 3^{-1}$	0,2
1/9	$0 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2}$	0,01
7/9	$2 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2}$	0,21
1	$1 \cdot 3^0$	1

Die Abbildung 2.5 veranschaulicht die triadische Darstellung der Zahlen aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$: der erste Hauptzweig überdeckt Zahlen zwischen 0 und 1/3, der Zweite zwischen 1/3 und 2/3, und der Letzte Zahlen zwischen 2/3 und 1. Zwecks Bestimmung der triadischen Darstellung einer Zahl aus $[0, 1]$ folgt man den entsprechenden Zweigen hinunter bis zu der Zahl und notiert jeweils eine 0 für linke, 1 für mittlere und 2 für rechte Zweige.

Abbildung 2.5: Triadischer Baum



Somit gilt für die Cantor-Menge folgende Aussage:

Aussage 2.1: *Die Cantor-Menge besteht aus allen den Punkten aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$, die in der triadischen Darstellung ohne die Ziffer „1“ wiedergegeben werden können.*

Bspw. gehört der Endpunkt $2/3$ laut dieser Aussage aufgrund seiner triadischen Darstellung $0,2$ zur Cantor-Menge. Die Endpunkte $1/3$ und $1/9$ gehören zu der Cantor-Menge, da sie neben der in der Tabelle 2.2 aufgeführten triadischen Darstellung auch in triadischer Form $0,0222\bar{2}$ bzw. $0,0022\bar{2}$ geschrieben werden können. Somit ist die Zugehörigkeit der Endpunkte der Teilintervalle zu der Cantor-Menge nach der oben erfolgten Aussage bestätigt. Überdies lassen sich alle Endpunkte der Teilintervalle wie folgt charakterisieren: die Endpunkte der Teilintervalle sind alle die Zahlen aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$, die die Aussage 2.1 erfüllen und deren triadische Darstellung mit unendlich vielen aufeinander folgenden Ziffern 2 oder 0 endet. Daraus folgt für alle übrigen Punkte der Cantor-Menge, dass es diejenigen Zahlen aus dem Einheitsintervall $[0, 1]$ sind, die in triadischer Form, bestehend aus jeder anderen beliebigen Kombination³⁶ der Ziffern 0 und 2, wiedergegeben werden können. Wie man es sich kombinatorisch vorstellen kann, ist der Anteil solcher Punkte in der Cantor-Menge höher als der Anteil der Endpunkte der Teilintervalle.

Anhand dieser Ausführungen lassen sich die Nichtabzählbarkeit der Cantor-Menge und deren Interpretation als „Staub aus Punkten“ begründen: sie besteht fast sicher aus „Nicht“-Endpunkten, und, obwohl jeder zugehörige Punkt beliebig genau durch andere zugehörige Punkte angenähert werden kann, so etwas wie ein Intervall gibt es in der Cantor-Menge nicht.³⁷ Des Weiteren gilt für die Cantor-Menge:

- deren Mächtigkeit ist dieselbe wie die des Einheitsintervalls $[0, 1]$ und
- sie ist selbstähnlich.

Die Selbstähnlichkeit der Cantor-Menge folgt aus der Überlegung, dass für jeden Punkt aus $[0, 1]$ der triadischen Darstellung

$$\xi = \alpha_1 \cdot 3^{-1} + \alpha_2 \cdot 3^{-2} + \alpha_3 \cdot 3^{-3} + \alpha_4 \cdot 3^{-4} + \dots \quad \text{mit } \alpha_i \in \{0, 2\}$$

immer ein Punkt aus $[0, 1/3]$ der Form existiert

³⁶ Endlicher oder unendlicher Länge.

³⁷ Die Behauptung folgt bereits aus der geometrischen Beschaffenheit des Konstruktionsverfahrens.

$$\frac{\xi}{3} = 0 \cdot 3^{-1} + \alpha_1 \cdot 3^{-2} + \alpha_2 \cdot 3^{-3} + \alpha_3 \cdot 3^{-4} + \dots \quad \text{mit } \alpha_i \in \{0, 2\}$$

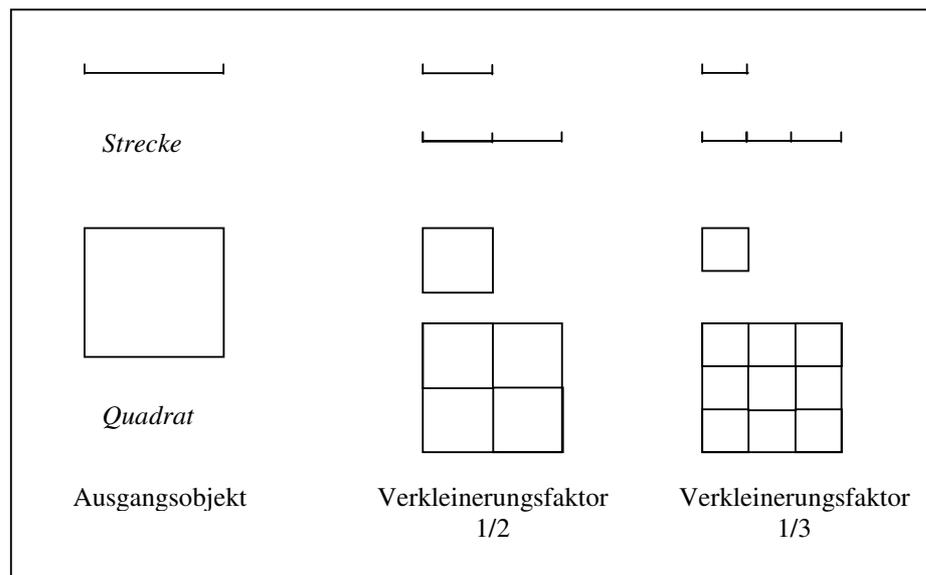
und ein Punkt aus $[2/3, 1]$ der Form

$$\frac{\xi}{3} + \frac{2}{3} = 2 \cdot 3^{-1} + \alpha_1 \cdot 3^{-2} + \alpha_2 \cdot 3^{-3} + \alpha_3 \cdot 3^{-4} + \dots \quad \text{mit } \alpha_i \in \{0, 2\}.$$

Dies bedeutet, dass jedes Teilintervall der Ordnung k der geometrischen Konstruktion der Cantor-Menge die gesamte Cantor-Menge enthält, um den Faktor $1/3^k$ verkleinert. Somit ist die Cantor-Menge eine Vereinigung von beliebig kleinen Teilen, wobei jeder von denen eine exakte verkleinerte Kopie der Cantor-Menge darstellt.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass nicht jedes selbstähnliche Objekt ein Fraktal ist. Bspw. lassen sich eine Strecke oder ein Quadrat mittels Ähnlichkeitstransformationen in beliebig kleine Teile zerlegen. Jedoch sind diese Objekte nicht fraktal. Der eine Unterschied zwischen fraktalen und nicht fraktalen selbstähnlichen Strukturen liegt darin, dass die nicht fraktalen Strukturen Ähnlichkeitstransformationen mit beliebigen Verkleinerungsfaktoren zulassen. Bei fraktalen Strukturen sind die Faktoren, falls diese existieren, charakteristisch für die jeweilige Struktur. Das Sierpinski-Dreieck lässt bspw. nur Verkleinerungsfaktoren $1/2$, $1/4$, $1/8$, ... zu, Ähnlichkeitstransformationen mit anderen Faktoren würden die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit zerstören. Hierzu vergleiche man die Abbildungen 2.6 und 2.3:

Abbildung 2.6: Selbstähnlichkeit von Strecke und Quadrat



Die in der Abbildung 2.6 dargestellten Objekte sind sogar exakt selbstähnlich. Sowohl fraktale als auch nicht fraktale exakt selbstähnliche Strukturen haben eines gemeinsam: zwischen dem Verkleinerungsfaktor³⁸ und der Anzahl der Teile, in die die Struktur mit dem Faktor zerlegt werden kann, existiert eine Beziehung, die einem Potenzgesetz folgt. Bspw. gibt es für die Strecke und für das Quadrat zwischen dem Verkleinerungsfaktor s und der Anzahl der Teile n die Potenzgesetz-Verknüpfung folgender Form:

$$n = \frac{1}{s^D}, \quad \text{mit} \quad D = 1 \quad \text{für die Strecke,} \quad D = 2 \quad \text{für das Quadrat.}$$

Der Exponent im Potenzgesetz stimmt also mit der topologischen Dimension des jeweiligen Objektes überein. Bei den fraktalen exakt selbstähnlichen Strukturen ist jedoch die konkrete Form der Beziehung zwischen dem Verkleinerungsfaktor s und der Anzahl der Teile n nicht auf den ersten Blick erkennbar. Darauf wird etwas später in diesem Abschnitt eingegangen, vorerst jedoch gibt die Tabelle 2.3 eine Übersicht über die bereits beschriebene Verknüpfung zwischen s und n für die Strecke, das Quadrat und das Sierpinski-Dreieck:

Tabelle 2.3: Verkleinerungsfaktoren s und Anzahl der Teile n für die Strecke, das Quadrat und das Sierpinski-Dreieck

Objekt	Verkleinerungsfaktor	Anzahl der Teile
Strecke	$1/2$	2
	$1/3$	3
	$1/217$	217
Quadrat	$1/2$	$4 = 2^2$
	$1/3$	$9 = 3^2$
	$1/217$	$47089 = 217^2$
Sierpink-Dreieck	$1/2$	3
	$1/4$	9
	$1/2^k$	3^k

Die oben aufgeführten Beispiele von Fraktalen deuten eine weitere charakteristische Eigenschaft fraktaler Strukturen an: ein Fraktal besitzt eine endliche Fläche und eine

³⁸ Auch Skalierungsfaktor genannt.

unendliche Länge des Randes.³⁹ Dies kann besonders gut anhand eines weiteren fraktalen Objektes – der Hilbert-Kurve – veranschaulicht werden. Die Hilbert-Kurve ist eine unendlich lange Linie, eingezeichnet in eine endliche Fläche. Das Konstruktionsverfahren kann wie folgt beschrieben werden:

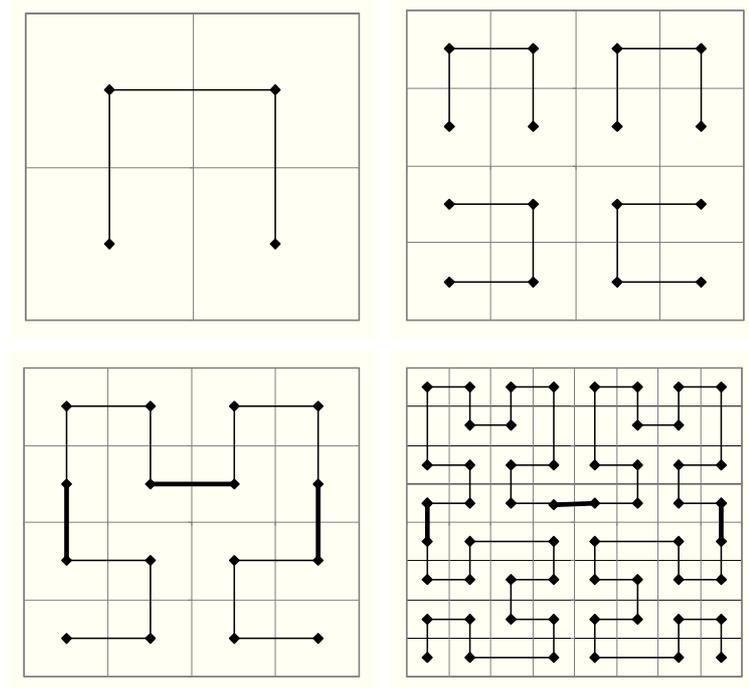
- eine Fläche in Form eines Quadrates wird in vier gleiche Teilquadrate geteilt. Die Mittelpunkte der Teilquadrate werden auf dem kürzesten Weg miteinander verbunden. Wobei die Länge der auf diese Weise entstehenden Kurve gleich 1 sei;
- dieser Anfangszustand der Abbildung wird um den Faktor $1/2$ verkleinert und in jeden der 4 Teilquadrate eingesetzt, so dass das erste Teilquadrat die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Abbildung, das letzte Teilquadrat die um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedrehte Abbildung und die übrigen zwei Teilquadrate jeweils die exakte Kopie des Anfangszustandes enthalten;
- die Kurven der Teilquadrate werden wieder auf dem kürzesten Weg durch drei Strecken von der Gesamtlänge $1/2$ der Ausgangskurve miteinander verbunden. Die an diesem Punkt entstandene Abbildung wird ebenfalls um den Faktor $1/2$ verkleinert;
- die verkleinerte Kopie der Abbildung wird nach demselben Prinzip wie vorher in die vier Teilquadrate eingesetzt und die jeweiligen Kurven in den Teilquadraten analog der vorherigen Vorgehensweise miteinander verbunden. Die Gesamtlänge der Verbindungslinien beträgt diesmal $1/4$ der Ausgangskurve. Diese Kurve enthält 16 um den Faktor $1/4$ verkleinerte Kopien des Anfangszustandes;
- Dieses Verfahren kann beliebig lange fortgesetzt werden. Die Linie – der Länge 1 zu Beginn der Konstruktion - füllt das ursprüngliche Quadrat vollständig aus.

Wie man beobachten kann, ist die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit der Hilbert-Kurve bereits im Konstruktionsverfahren impliziert - im Vorgang der Verkleinerung der jeweiligen Abbildung und in der Anordnung der verkleinerten Kopien nach dem oben beschriebenen Prinzip. Die auf diese Art erfolgte Abbildung der Ausgangslinie

³⁹ Näheres zur Berechnung der Randlänge sowie der Fläche von fraktalen Kurven s. Liening, A.: Komplexe Systeme zwischen Ordnung und Chaos: neuere Entwicklungen in der Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und die Bedeutung für die Wirtschaftswissenschaft und ihre Didaktik, Habilitation an der Universität Münster, 1998, S. 80 – 83.

auf eine Quadrat-Fläche ist eindeutig und stetig – jedem Punkt der Linie wird ein Punkt der Quadrat-Fläche zugeordnet. Sie ist jedoch nicht umkehrbar eindeutig, denn jedem Punkt auf der Quadrat-Fläche können ein, zwei oder vier Punkte der Linie in Folge der Hilbert-Konstruktion zugeordnet werden.

Abbildung 2.7: Hilbert-Kurve



Anhand der Abbildung 2.7 wird deutlich, dass die Länge der entstehenden Hilbert-Kurve bei jedem Schritt anwächst, im Grenzfall gegen Unendlich, die sie umschließende Fläche jedoch begrenzt bleibt.

Auch die logistische Funktion weist die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit auf. Zur Veranschaulichung der Eigenschaft betrachte man die statische Abbildung 2.8 der Funktion $f(x)$ für den Parameterwert r_1 einer superstabilen Bahn⁴⁰ mit Periode 2 und die Abbildung 2.9 der Iteration 1.Ordnung $f^{(1)}(x) = f(f(x))$ für den Parameterwert r_2 einer superstabilen Bahn mit Periode 4. Die Kurve in der Abbildung 2.8 hat einen im hohen Maße ähnlichen Verlauf, charakterisiert durch die Periodenlänge

⁴⁰ Eine Bahn der logistischen Funktion heißt superstabil, wenn der Punkt $x=1/2$, d. h. $f'(x) = r(1-2x) = 0$ ist, Element dieser Bahn ist. Solche Bahnen konvergieren sehr schnell gegen einen *einfachen Attraktor*. Einfache Attraktoren werden im darauf kommenden Abschnitt ausführlich erklärt.

2, wie die beiden Teile – je in gestrichelten Quadraten - der Kurve in der Abbildung 2.9. Bei Reskalierung (Vergrößerung) des Inhaltes des größeren gestrichelten Quadrats und direktem Abgleich mit der Kurve $f(x)$ stellt man tatsächlich einen nur sehr geringen Unterschied im Verlauf (vgl. Abbildung 2.10) fest. Diese Form der Selbstähnlichkeit ist charakteristisch für eine Periodenverdopplung.

Abbildung 2.8: Logistische Funktion mit Parameterwert r_1 für eine super-stabile Bahn der Periodenlänge 2

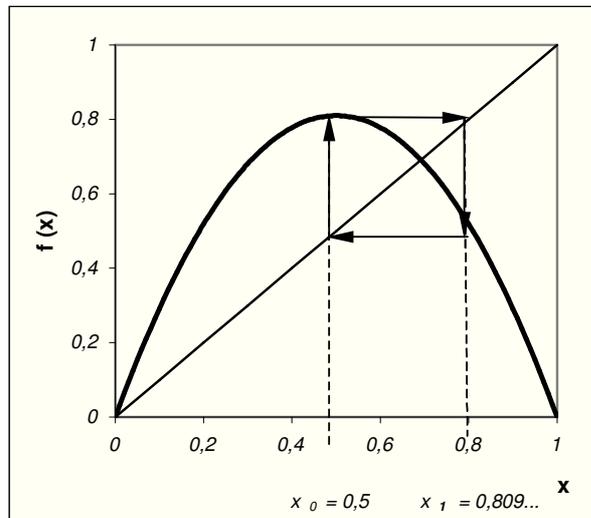


Abbildung 2.9: Iterierte 1. Ordnung der logistischen Funktion mit Parameterwert r_2 für eine super-stabile Bahn der Periodenlänge 4

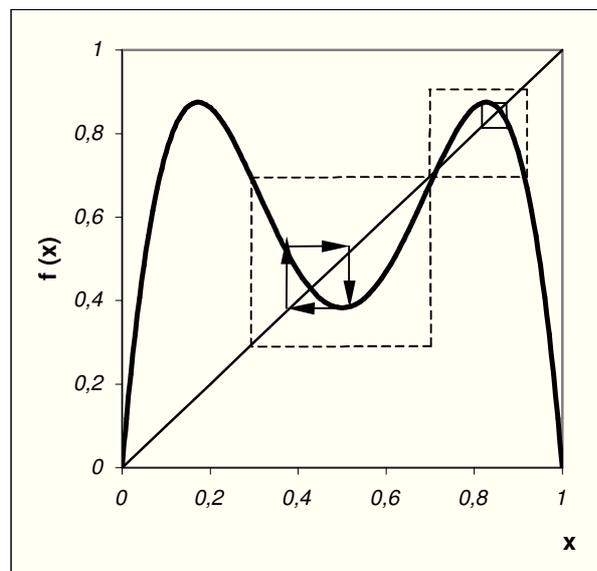
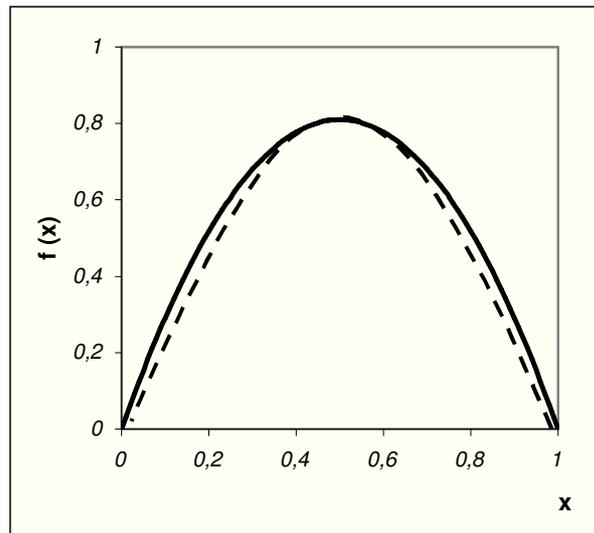


Abbildung 2.10: Unterschied zwischen der logistischen Funktion mit Parameterwert r_1 (durchgezogene Linie) und dem reskalierten Teil der Iterierten 1.Ordnung der logistischen Funktion mit Parameterwert r_2 (gestrichelte Linie)



Ein weiteres quantitatives Maß, mit dem Fraktale charakterisiert werden können, ist ihre Dimension. In der Sprache der Topologie⁴¹ wird unter Dimension eines Objektes die Anzahl der unabhängigen Koordinaten verstanden, die für die eindeutige Beschreibung des Objektes benötigt werden. Diese topologische Interpretation der Dimension ist jedoch für viele fraktale Strukturen und Objekte unbrauchbar: man betrachte die bereits vorgestellte Hilbert-Kurve – die Dimension einer Linie ist im üblichen Sinne eins, die Hilbert-Kurve füllt aber vollständig eine zweidimensionale Fläche aus. Die Kurve ist also, aus der intuitiven Überlegung heraus, weder richtig ein- noch richtig zweidimensional.

Die Frage nach der richtigen Definition des Dimensionsbegriffes wurde in den Naturwissenschaften erneut mit der Entstehung der Chaos-Theorie aufgeworfen. Dabei entstand eine Mehrzahl der Dimensionsbegriffe – wie bspw. die kleine induktive Dimension, große induktive Dimension, Überdeckungsdimension, homologische

⁴¹ Topologie ist ein Bereich der Mathematik, der sich zum größten Teil im letzten Jahrhundert entwickelt hat und der sich mit der qualitativen Problematik von Form und Gestalt befasst. Insbesondere befasst sich die Topologie mit Fragen nach Transformationen von Objekten in einem beliebig elastischen Raum, ohne dass die invarianten Eigenschaften der Objekte verloren gehen. Näheres hierzu vgl. Peitgen, H.-O., u. a.: Bausteine des Chaos: Fraktale, Springer-Verlag Klett-Cotta, 1992, S. 128 – 130.

Dimension, Selbstähnlichkeitsdimension, Hausdorff-Dimension, fraktale Dimension, Box-Dimension, Informationsdimension etc. - wobei einige darunter Objekteigenschaften zum Mittelpunkt haben, die in keiner Verbindung zu der topologischen Invarianz der Objekte stehen.⁴²

Die Selbstähnlichkeitsdimension und die Box-Dimension sind spezielle Formen der fraktalen Dimension. Die fraktale Dimension geht auf Mandelbrot zurück und verdankt ihre Bezeichnung ihrem gebrochenganzzahligen Charakter. Der Selbstähnlichkeitsdimension einer Struktur dient als Grundlage die Potenzgesetz-Verknüpfung zwischen dem Verkleinerungsfaktor s und der Anzahl der Teile n , in die die Struktur mit dem Faktor zerlegt werden kann:

$$D_s = \frac{\log n}{\log(1/s)} .$$

Somit ergibt sich die Selbstähnlichkeitsdimension des Sierpinski-Dreiecks mit:

$$D_s = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log 3^k}{\log 2^k} \approx 1,5850 .$$

Die Selbstähnlichkeitsdimension der Hilbert-Kurve strebt von unten 2 an:

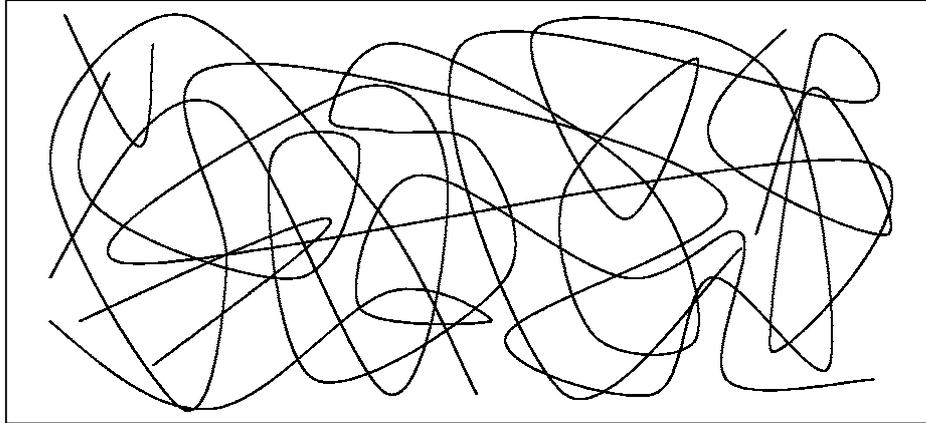
$$D_s \rightarrow 2 .^{43}$$

Die Box-Dimension ist ein weiterer Spezialfall der fraktalen Dimension und inhaltlich eng mit der Selbstähnlichkeitsdimension verwandt. Für viele fraktale Strukturen stimmen sogar die beiden Dimensionen wertmäßig überein. Die Box-Dimension wird insbesondere zur Charakterisierung komplexer fraktaler Strukturen eingesetzt, die die spezielle Eigenschaft der Selbstähnlichkeit nicht aufweist. Wie könnte man bspw. die Dimension der in der Abbildung 2.11 dargestellten Struktur bestimmen, die zwar gewisse Skalierungseigenschaften aufweist, jedoch im hohen Maße unregelmäßig und weit von der Selbstähnlichkeit entfernt ist?

⁴² Näheres hierzu s. C. Kuratowski: Topologie II, PWN, 1961, auch R. Engelking: Dimension Theorie, North Holland, 1978.

⁴³ Über die Selbstähnlichkeitsdimension der Hilbert-Kurve existiert bis heute keine einheitliche Meinung. Die alternative zu der in dieser Arbeit eingebrachten Meinung ist, dass die Hilbert-Kurve die Dimension 2 besitzt, da sie, im Unendlichen betrachtet, die zugehörige Fläche vollständig ausfüllt.

Abbildung 2.11: Ein unregelmäßiges Fraktal

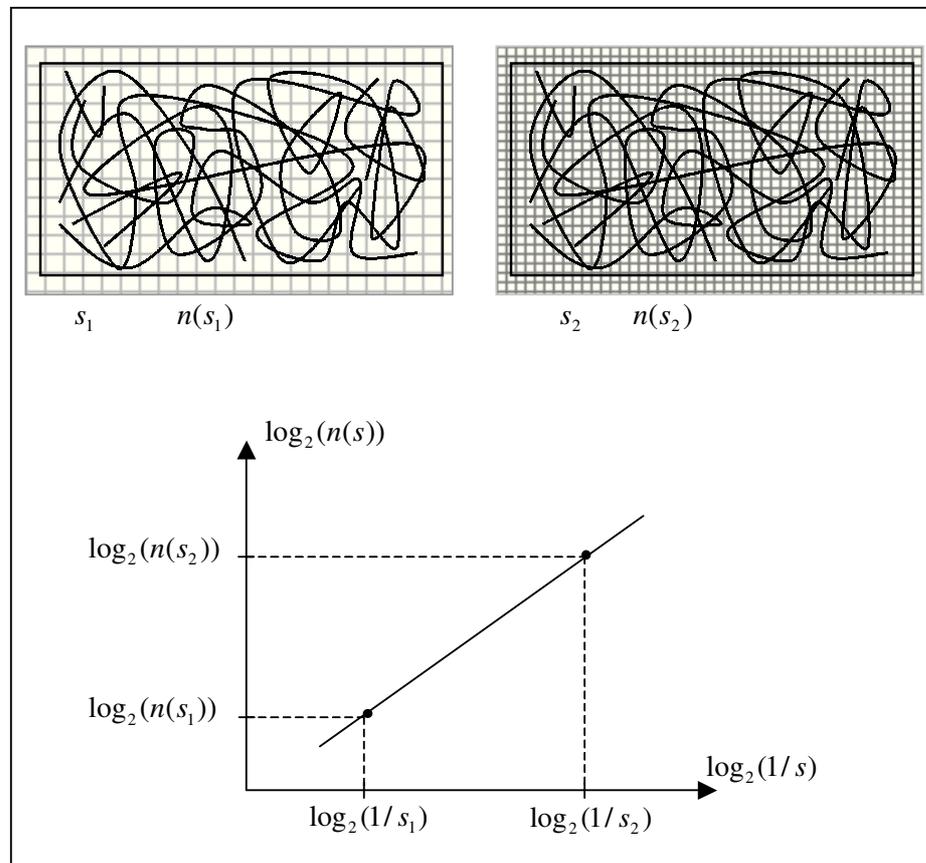


Die Abhilfe dabei schafft die Box-Dimension, die sich auf jede Struktur in der Ebene und auf jedes Objekt in einem Raum anwenden lässt. Das Konzept der Box-Dimension beruht auf dem Abzählen der Gitterboxen mit einer Boxenweite s , die von der fraktalen Struktur, bedeckt mit dem regelmäßigen Gitter, getroffen werden. Man verwendet für die Ermittlung der Box-Dimension mehrere Gitter mit immer kleinerer Boxenweite s . In Abhängigkeit von der jeweiligen Boxenweite s ergibt sich die entsprechende Anzahl der Boxen $n(s)$. Die Messwerte werden in ein $(\log_2(n(s)); \log_2(1/s))$ -Diagramm eingetragen. Durch die entstandenen Punkte in der Ebene wird eine Gerade approximiert. Die Steigung der Geraden ergibt die Box-Dimension D_b .

Es wird i. d. R. empfohlen, eine Folge von Gittern mit dem Verkleinerungsfaktor $1/2$ für die Boxenweite zu wählen. Die Anzahl der Boxen des k -ten Gitters, die von dem Fraktal getroffen werden, ergibt in diesem Fall die Boxenzahlfolge $n(2^{-k})$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Die Steigung der Geraden zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten ist in diesem Fall gleich dem Zweierlogarithmus des Boxenzahlverhältnisses zweier aufeinander folgender Gitter:

$$\log_2 \frac{n(2^{-(k+1)})}{n(2^{-k})} .$$

Abbildung 2.12: Ermittlung der Box-Dimension



Mit dem Sierpinski-Dreieck- und dem Hilbert-Konstruktionsverfahren wurden zwei von einer Vielzahl⁴⁴ bekannter vollständig determinierter Verfahren zur Erzeugung von fraktalen Strukturen vorgestellt. In der Chaos-Theorie existiert mittlerweile eine Sammlung von Beispielen *zufällig* erzeugter Strukturen, die die Eigenschaften fraktaler Objekte besitzen. Eines davon wird in diesem Abschnitt vorgestellt, um zu verdeutlichen, dass Zufall, Fraktale und Chaos in einem engen Zusammenhang zueinander stehen können. Dieses Beispiel ist unter der Bezeichnung „das Chaos-Spiel“ bekannt:

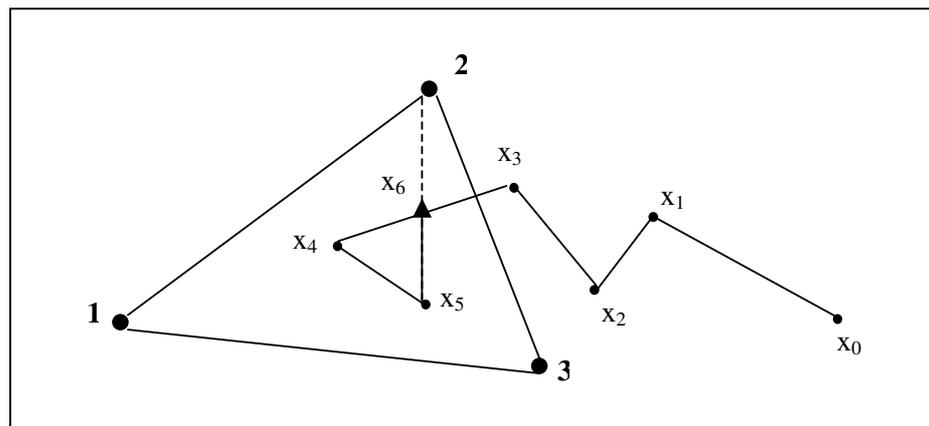
- man markiert beliebig auf einem Blatt Papier drei Punkte, so dass sie nicht auf einer Geraden liegen, und nummeriert sie entsprechend mit 1, 2, 3. Diese Punkte werden *Bezugspunkte* genannt. Des Weiteren nimmt man einen „drei-

⁴⁴ Um einige weitere Beispiele für fraktale Objekte/Strukturen zu nennen: die Koch-Kurve, der Sierpinski-Teppich, das Pascal'sche Dreieck, die Cantor-Menge, die Peano-Kurve. Näheres hierzu vgl. Peitgen, H.-O., u. a.: Bausteine des Chaos: Fraktale, Springer-Verlag Klett-Cotta, 1992.

- seitigen“ Würfel⁴⁵, mit dem die Augenzahlen 1, 2, 3 gewürfelt werden können;
- man beginnt das Spiel mit einem beliebig auf dem Blatt markierten *Spielpunkt* x_0 . Mit dem Würfeln bestimmt man jetzt den konkreten Bezugspunkt, in dessen Richtung sich der Spielpunkt bewegen soll: bei der Augenzahl 2 bspw. wird genau in der Mitte der Strecke zwischen dem Spielpunkt x_0 und dem Bezugspunkt 2 der neue Spielpunkt x_1 gesetzt;
 - mit dem erneuten Würfeln wird der entsprechende Bezugspunkt unter den drei Punkten 1, 2, 3 bestimmt, in Richtung dessen auf halber Strecke sich der Spielpunkt x_1 mit diesem Schritt zu bewegen hat.

Das Chaos-Spiel kann beliebig lange fortgesetzt werden. Die Abbildung 2.13 veranschaulicht die ersten 6 Schritte des Spiels:

Abbildung 2.13: Erste Schritte des Chaos-Spiels

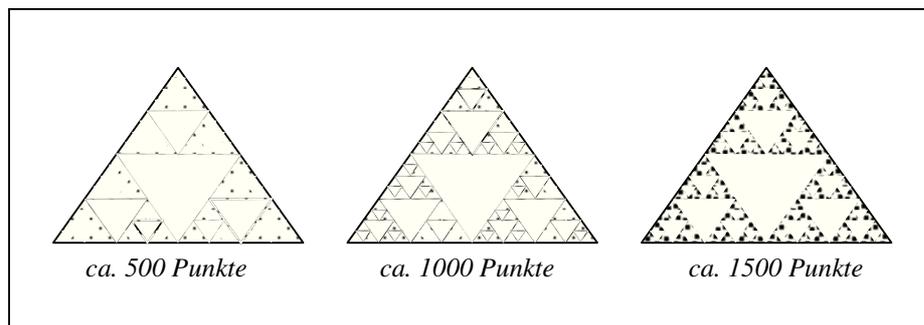


Das beschriebene Chaos-Spiel ist nichts Anderes als ein Verfahren zur Erzeugung einer zufälligen Punkt-Folge in der Ebene, was an sich kein besonderes Erkenntnis darstellt. Das Einzige, was man vorerst erkennen kann, ist die Tatsache, dass, unabhängig von der Ausgangslage des Spielpunktes x_0 auf dem Blatt Papier, sich dieser auf die Dreiecksfläche der Bezugspunkte 1, 2, 3 hin bewegt und, sobald sich der Spielpunkt im Inneren des Dreiecks befindet, entweicht er dieser Fläche während der gesamten übrigen Spieldauer nicht mehr. Setzt man jedoch das Chaos-Spiel lange genug fort und betrachtet die Spielpunkte auf dem Blatt Papier ohne die

⁴⁵ In der Praxis erhält man einen „dreiseitiger“ Würfel, indem die übrigen Augenzahlen 4, 5, 6 des normalen sechsseitigen Würfels umkehrbar eindeutig zu den Augenzahlen 1, 2, 3 zugeordnet werden. Bspw. mit der Zuordnung (1, 4), (2, 5), (3, 6) ist das Würfeln einer 5 als das Würfeln einer 2 zu interpretieren.

Verbindungen, so wird man feststellen, dass die Punkt-Fläche mit steigender Iterationenzahl dem Sierpinski-Dreieck immer ähnlicher wird. Bis diese zufällig erzeugte Punkt-Folge deutlich die geordnete Struktur des Sierpinski-Dreiecks wiedergibt. Das Sierpinski-Dreieck basiert jedoch, gemäß bisherigen Ausführungen, auf einem vollständig determinierten Konstruktionsverfahren und ist ein Musterbeispiel für Ordnung und Struktur.

Abbildung 2.14: Das Chaos-Spiel nach ca. 500, 1000, 1500 Spielzügen



Das bereits besprochene Sierpinski-Dreieck wird u. a. durch einen Exponenten – die gebrochenganzzahlige *Selbstähnlichkeitsdimension* $D_s \approx 1,5850$ – als fraktales Objekt charakterisiert. Die Selbstähnlichkeitsdimension des Sierpinski-Dreiecks ist in jedem Punkt der Struktur gleich. Dieselbe Beobachtung gilt auch für die Hilbert-Kurve – jeder auch noch so kleine Teilbereich der mit der Kurve gefüllten Fläche weist dieselbe *Selbstähnlichkeitsdimension* $D_s \approx 2$ auf. Derartige fraktale Strukturen mit einer gleichmäßigen Konsistenz werden als *homogene Fraktale* bezeichnet.

Neben den vorher vorgestellten Fraktalen, die aus der geometrischen Sicht recht einfach konstruiert sind, existieren komplizierte Strukturen, die durch ein ganzes Spektrum von Exponenten charakterisiert werden können. Solche Strukturen werden als *verallgemeinerte Fraktale* oder auch als *Multifraktale* bezeichnet.

Die erste charakteristische Eigenschaft der Multifraktale ist die unterschiedlich dichte Konsistenz verschiedener Bereiche der fraktalen Struktur. In diesem Zusammenhang spricht man auch von dem *inhomogenen Fraktal*. Eine solche Struktur beschreibende Exponenten werden im Unterschied bspw. zur fraktalen Dimension, die homogene fraktale Strukturen beschreibt, als *inhomogene* oder *multifraktale Maße* bezeichnet.

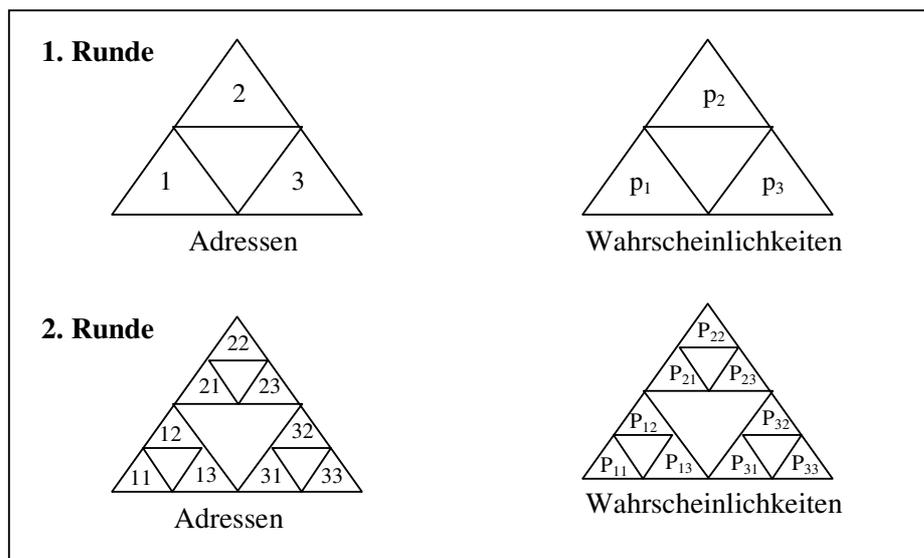
Ein Beispiel des multifraktalen Maßes stellt das Vorkommen eines bestimmten Metalls auf einem Kontinent dar: die Dichte, mit der sich dieses Metall im Boden verteilt, ist von Land zu Land auf dem Kontinent, von Region zu Region innerhalb eines bestimmten Landes, von Gebiet zu Gebiet unterschiedlich. Diese Unterteilung eines Kontinentes in immer kleinere Teilflächen kann dabei beliebig lange fortgesetzt werden, das dabei zu bestimmende Maß – die Menge des Metalls auf der (Teil-) Fläche – wird immer von Teilfläche zu Teilfläche unterschiedlich ausfallen. In dem Fall hat man es mit einem Maß zu tun, das Unregelmäßigkeiten in jeder Größenordnung zeigt. Sind die Unregelmäßigkeiten in allen Größenordnungen gleich (zumindest statistisch), so wird das entsprechende Maß *selbstähnlich* oder *multifraktal* genannt.

Auch das bereits vorgestellte Chaos-Spiel kann als ein Multifraktal auftreten, nämlich bei Zulassung eines „unfairen“ Würfels:

$$p_1 \neq p_2 \neq p_3 \quad \text{mit } 1, 2, 3 \text{ – Bezugspunkte.}$$

In diesem Fall werden die Kontraktionen während des Spiels mit ungleichen Wahrscheinlichkeiten angewendet. Bei einer genügend langen Spieldauer entsteht ebenfalls ein Sierpinski-Dreieck, dessen Teildreiecke (Adressen 1, 2, 3) von dem Spielpunkt - im Unterschied zum Chaos-Spiel mit einem „fairen“ Würfel - mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten aufgesucht werden.

Abbildung 2.15: Multifraktales Chaos-Spiel: die ersten zwei Runden



Bei einer oberflächlichen Betrachtung dieses Sierpinski-Dreiecks könnte man auf eine gleichmäßige Dichte der Punkte innerhalb eines Teildreiecks schließen (1. Runde). Eine genauere Analyse der Strukturkonsistenz der Teildreiecke bringt jedoch unterschiedliche Häufigkeiten der Treffer innerhalb der Teildreiecke zum Vorschein (2. Runde):

$$p_1 \neq p_{11} \neq p_{12} \neq p_{13} .$$

Außerdem stellt man bei tiefer gehender Zerlegung des Sierpinski-Dreiecks in Teildreiecke folgende Entwicklung des auf dem Dreieck definierten Maßes $\mu(MF)$ in Abhängigkeit von der Zerlegungstiefe fest:

1.Runde $\{ \mu : i \rightarrow p_i \mid \mu_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Adressen der Teildreiecke} \}$

2.Runde $\{ \mu : ij \rightarrow p_{ji} \mid \mu_{ij} = p_{ij} = \mu_i p_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{Adressen der Teildreiecke} \}$

usw.

Die Zerlegung der Menge der Trefferpunkte nach einer bestimmten Regel in zunehmend kleinere Komponenten zieht die Zerlegung des zugehörigen Maßes auf den Komponenten entsprechend einer weiteren Regel mit sich. Ein derartiger Vorgang wird als multiplikative Kaskade bezeichnet und ist typisch für Multifraktale mit einem festen theoretischen Hintergrund.

Die Berechnung des *inhomogenen* Maßes eines Multifraktals stützt sich auf das Konzept der Box-Dimesion⁴⁶. Das Multifraktal wird mit Boxen der Seitenlänge ζ überdeckt und das in jeder Box enthaltene Maß wird mit der durchschnittlichen Wahrscheinlichkeitsdichte in der jeweiligen Box gewichtet. In einem E-dimensionalen euklidischen Raum ist die Gesamtzahl der überdeckenden Boxen der Seitenlänge ζ proportional zu ζ^{-E} . Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines inhomogenen Maßes ermöglicht die Charakterisierung der Unregelmäßigkeiten in der räumlichen Verteilung des Maßes und ist im E-dimensionalen euklidischen Raum als $\mu(MF)/\zeta^E$ definiert. Falls das inhomogene Maß zufälliger Natur ist, wie es bspw. bei dem Chaos-Spiel mit einem „unfairen“ Würfel gegeben ist, wird anstatt der Wahrscheinlichkeitsdichte die Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe gezeichnet.

⁴⁶ Vgl. S. 34-35.

Im Falle eines selbstähnlichen inhomogenen Maßes verliert jedoch die Wahrscheinlichkeitsdichte ihre Bedeutung. An ihre Stelle kommt der sogenannte *diskretisierte Hölder-Exponent*, ermittelt für die jeweilige Box:

$$\alpha = \frac{\log \mu(\text{Box}(\zeta))}{\log \zeta} .$$

Untersuchungen haben ergeben, dass eine Vielzahl der selbstähnlichen Maße einen Hölder-Exponenten $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ aufweist, wobei $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < \infty$. Für einige Multifraktale, wie bspw. Turbulenzen, ist es häufig sinnvoll, $\alpha_{\min} = 0$ und/oder $\alpha_{\max} = \infty$ zuzulassen.

Anstatt der Wahrscheinlichkeitsdichte des Maßes $\mu(MF)$ wird also die Häufigkeitsverteilung des Hölder-Exponenten α gezeichnet:

- für jeden Wert von α wird die Anzahl der Boxen $n_{\zeta}(\alpha)$ der Seitenlänge ζ bestimmt, deren Hölder-Exponent gleich α ist;
- unter Annahme einer zufälligen Box-Auswahl aus der Gesamtzahl der überdeckenden Boxen der Seitenlänge ζ ist die Treffer-Wahrscheinlichkeit für den Hölder-Exponenten im Wert von α gegeben durch:

$$p_{\zeta}(\alpha) = \frac{n_{\zeta}(\alpha)}{\zeta^{-E}} .$$

Bei einem selbstähnlichen inhomogenen Maß ist zu beachten, dass dessen Verteilung nicht, wie es sonst zu erwarten ist, bei $\zeta \rightarrow 0$ gegen einen Grenzwert steuert. Daher wäre die Zeichnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Hölder-Exponenten wenig sinnvoll;

- aus dem oben genannten Grund werden als charakteristische Größen eines selbstähnlichen Maßes $\mu(MF)$ die logarithmischen Funktionen folgender Gestalt eingesetzt:

$$f_{\zeta}(\alpha) = -\frac{\log n_{\zeta}(\alpha)}{\log \zeta} \quad \text{mit} \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} f_{\zeta}(\alpha) \rightarrow f(\alpha)^{47}$$

⁴⁷ Die Werte von $f(\alpha)$ werden vage als fraktale Dimension der Teilmenge der Boxen mit Seitenlänge ζ interpretiert, deren Hölder-Exponent bei $\zeta \rightarrow 0$ gleich α ist.

bzw.

$$C_\zeta(\alpha) = -\frac{\log p_\zeta(\alpha)}{\log \zeta} \quad \text{mit} \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} C_\zeta(\alpha) \rightarrow C(\alpha).$$

Unter Voraussetzung der Existenz eines Grenzwertes $f(\alpha)$ gilt zusätzlich:

$$C(\alpha) = f(\alpha) - E.$$

Das einfachste Beispiel eines exakt selbstähnlichen Maßes ist das *binomiale Maß* μ . Das Konstruktionsverfahren des binomialen Maßes gleicht dem des Sierpinski-Dreiecks. Das Maß μ wird rekursiv durch eine multiplikative Kaskade erzeugt:

- die Kaskade beginnt ($k = 0$) mit einer gleichmäßig auf einem Einheitsintervall $I = I_0 = [0, 1]$ verteilten Masseneinheit. Dabei gilt in diesem Stadium $\mu(I) = 1$;
- im nächsten Schritt ($k = 1$) wird die Masse in zwei Teile m_0 und m_1 zerlegt. Die beiden Teile werden jeweils gleichmäßig auf der Hälfte des Einheitsintervalls verteilt - m_0 auf der linken Hälfte $I_{0,0} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $m_1 = 1 - m_0$ auf der rechten Hälfte $I_{0,1} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Somit gilt für das binomiale Maß nach diesem Schritt unter Einhaltung der Maßinvarianz⁴⁸ $\mu(I_{0,0}) = m_0$ und $\mu(I_{0,1}) = m_1$;⁴⁹
- im darauf folgenden Schritt ($k = 2$) werden die Teilintervalle in die Intervalle der Länge $2^{-k} = \frac{1}{4}$ aufgespalten: $I_{0,00} = \left[0, \frac{1}{4}\right]$, $I_{0,01} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $I_{0,10} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, $I_{0,11} = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. Die Massen m_0 und m_1 werden nach einer bestimmten Regel zerlegt und auf den entsprechenden Teilintervallen gleichmäßig verteilt:

$$\mu(I_{0,00}) = \mu_{0,00} = m_0 m_0,$$

⁴⁸ Denn das ursprüngliche Maß $\mu(I_0) = \mu(I_{0,0}) + \mu(I_{0,1}) = m_0 + m_1 = 1$ bleibt erhalten.

⁴⁹ Die Maße der Teilintervalle $\mu(I_{0,-})$ verhalten sich wie Wahrscheinlichkeiten, daher wird μ auch als Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet.

$$\mu(I_{0,01}) = \mu_{0,01} = m_0 m_1 ,$$

$$\mu(I_{0,10}) = \mu_{0,10} = m_1 m_0 ,$$

$$\mu(I_{0,11}) = \mu_{0,11} = m_1 m_1 ;$$

- die rekursiv-multiplikative Kaskade zur Konstruktion des binomialen multifraktalen Maßes kann beliebig lange fortgesetzt werden. Im k -ten Stadium der Bildung ist die ursprüngliche Masse über die dyadischen Intervalle $(i2^{-k}, (i+1)2^{-k}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$, verteilt mit:

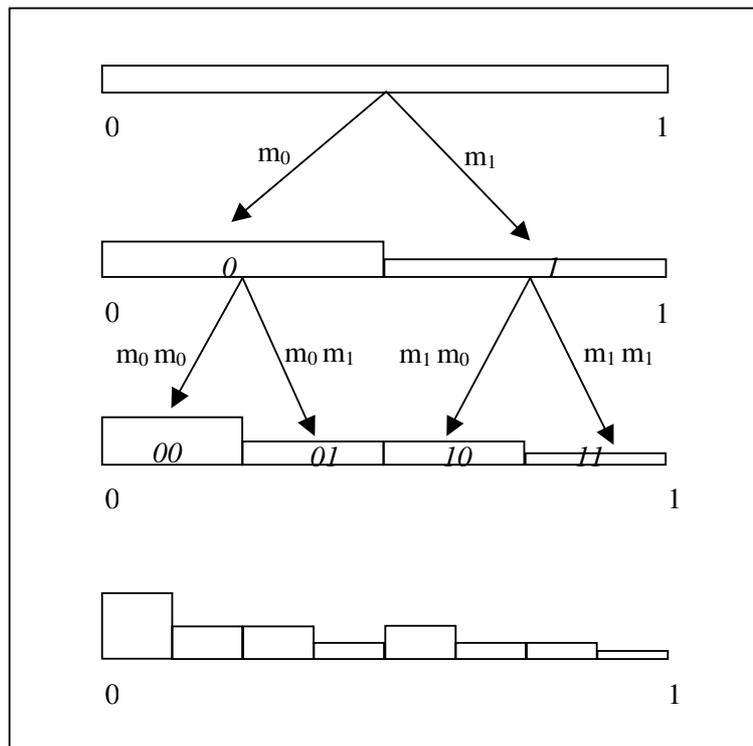
$$\mu_{0.\beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_k} = \prod_{i=1}^k m_{\beta_i} = m_0^{n_0} m_1^{n_1}$$

mit $0.\beta_1\beta_2\beta_3\dots\beta_k$ - binomiale Adresse des jeweiligen Teilintervalls,

n_0 - Anzahl der Ziffern 0 in der Adresse,

$n_1 = k - n_0$ - Anzahl der Ziffern 1 in der Adresse.

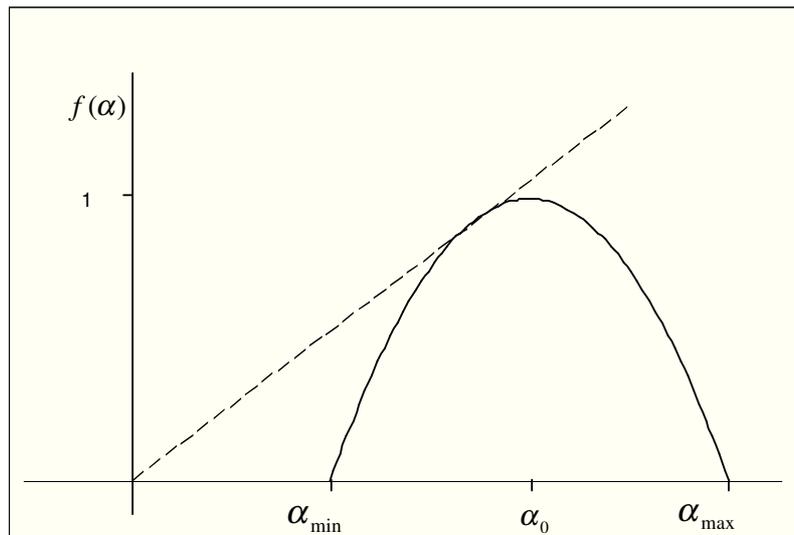
Abbildung 2.16: Multiplikative Kaskade zur Erzeugung des binomialen multifraktalen Maßes mit $m_0 = 2/3$ und $m_1 = 1/3$



Für die $f(\alpha)$ -Kurve des binomialen multifraktalen Maßes gilt:

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha_{\max} - \alpha}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \log_2 \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \right) - \frac{\alpha - \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \log_2 \left(\frac{\alpha - \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}} \right)$$

Abbildung 2.17: Die $f(\alpha)$ -Kurve des binomialen multifraktalen Maßes mit $m_0 = 2/3$ und $m_1 = 1/3$



Die $f(\alpha)$ -Kurve des binomialen multifraktalen Maßes weist die typischen Eigenschaften der selbstähnlichen (theoretisierbaren) Maße auf:

- deren Definitionsbereich ist durch $0 < \alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max} < \infty$ gegeben und $f(\alpha) \geq 0$;
- sie hat ein globales Maximum, der nur in einem Wert $\alpha = \alpha_0$ erreicht wird;
- sie ist symmetrisch bezüglich ihres Maximums;
- sie verhält sich quadratisch in der lokalen Umgebung des Maximalwertes;
- sie verläuft unterhalb der Winkelhalbierenden, definiert durch $f(\alpha) = \alpha$.

Die beiden Extremwerte α_{\min} und α_{\max} befinden sich in den beiden Teilintervallen des Einheitsintervalls, die am weitesten links bzw. rechts liegen. Dies folgt aus der multiplikativen Beschaffenheit der Massen-Verteilung auf die jeweiligen Teilintervalle und ist eine Besonderheit des binomialen multifraktalen Maßes. I. A. können das Minimum und das Maximum des diskretisierten Hölder-Exponenten eines multifraktalen Maßes irgendwo im Träger des Maßes liegen.

Wie für den vorgestellten Fall des binomialen Maßes ist auch generell für Multifraktale charakteristisch, dass es eine Mehrzahl verschiedener α -Werte gibt, die alle verschiedene $f(\alpha)$ aufweisen. Diese Tatsache ist einer der Gründe für das Zustandekommen des Ausdrucks Multifraktal.

Die Idee der $f(\alpha)$ -Kurve als charakteristische Größe eines selbstähnlichen Maßes kann auf die maßerzeugenden Prozesse erweitert werden, denen zufällige Multiplikatoren zugrunde liegen. Die meisten fraktalen Mengen in der Natur sind zufällige fraktale Mengen, wie bspw. Turbulenzen oder diffusionsbedingte Ablagerungsprozesse: laut Ergebnissen experimenteller Untersuchungen von Turbulenzen ist die Dissipationsrate der kinetischen Energie in vollständig ausgeprägter Turbulenz ein Multifraktal.

Für den Nachweis der Existenz eines *selbstähnlichen Maßes* bei zufallsbedingten Prozessen aus der Natur⁵⁰ stellt die Erfüllung aller oben aufgezählten Eigenschaften der $f(\alpha)$ -Kurve keine Notwendigkeit dar. Denn die meisten multifraktalen Maße beruhen nicht auf einer analytisch explizit erfassbaren multiplikativen Kaskade: auch wenn eine solche Kaskade existieren sollte, gehört sie i. d. R. der Vergangenheit an. Das Einzige, bei derartigen Prozessen statistisch Erfassbare, ist das von dieser Kaskade erzeugte Maß. Daher ist die einzige, Selbstähnlichkeit charakterisierende, Eigenschaft der $f(\alpha)$ -Kurve, die für zufällige (multiplikative) Prozesse nachweisbar sein sollte, die Bedingung, dass die Kurve unterhalb der Winkelhalbierenden $f(\alpha) = \alpha$ verlaufen muss. Auch darf man nicht erwarten, dass die anhand einer Zeitreihe ermittelten diskretisierten Hölder-Exponenten und die zugehörigen $f(\alpha)$ -Werte „problemlos“ gegen eine $f(\alpha)$ -Kurve konvergieren: aus der Praxis-Erfahrung ist bekannt, dass das Konvergenzverhalten der entsprechenden Werte gegen die Funktion $f(\alpha)$ meistens außerordentlich langsam ist.

Bei derartigen Prozessen tritt der diskretisierte Hölder-Exponent als eine Zufallsvariable A auf. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt somit, dass der Mittelwert über die Stichprobe der k Realisationen der Zufallsvariablen A für $k \rightarrow \infty$ fast sicher dem Erwartungswert der Zufallsvariablen gleich ist:

⁵⁰ Im Rahmen einer Zeitreihenanalyse.

$$P \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = E(A) \right\} \rightarrow 1 .$$

Für das oben vorgestellte binomiale Maß⁵¹ lässt sich außerdem anhand einer ausreichend großen Stichprobe unter Berufung auf das Gesetz der großen Zahlen der Maximalwert der analytischen $f(\alpha)$ -Kurve bestimmen. Dieser ist fast sicher gleich dem Modalwert der Stichprobe

$$P \left\{ \underset{k \rightarrow \infty}{MOD} (\alpha_i)_{i=1}^k = \alpha_0 \right\} \rightarrow 1 ,$$

also dem Wert, der am häufigsten innerhalb einer Zeitreihe vorkommt.

2.3 Verhaltensmuster dissipativer dynamischer Systeme

I. A. versteht man unter dem *Attraktor* einen für ein System „attraktiven“ dynamischen Zustand, der über die Zeit ein relativ *stabiles Verhaltensmuster* aufweist. Im mathematischen Sinne ist ein Attraktor die Menge, gegen die alle aus der Umgebung U des Attraktors ausgehenden Trajektorien konvergieren, nach dem die sogenannten Transienten⁵² abgeklungen sind. Das Abklingen von Transienten in der Zeit ist durch die dissipative Eigenschaft des beobachteten Systems bedingt.

Definition 2.3:⁵³ Ein *Attraktor* eines Phasenflusses f^t ist eine kompakte Menge A mit folgenden Eigenschaften:

- 1) A ist *invariant* unter dem Fluss f^t , d.h. $f^t(A) = A, \forall t$,
- 2) A besitzt eine *offene Umgebung* U , die sich unter dem Fluss f^t auf A zusammenzieht, d. h. $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(U) = A$,
- 3) A kann nicht in zwei abgeschlossene, nichtüberlappende, invariante Untermengen zerlegt werden.

⁵¹ I. S. v. Maß eines zufallsbedingten Prozesses, wie bspw. einer Folge von Münzwürfen.

⁵² Transiente – kurz dauernde, relativ scharf begrenzte Potentialauslenkung.

⁵³ Vgl. Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 17.

Der praktische Weg zur Erkennung eines „attraktiven“ Zustandes in einem stabilen Muster besteht in der Überprüfung, ob das System nach einer künstlichen Störung seines Verhaltens wieder diesen Zustand anstrebt. Einen Attraktor nach der mathematischen Definition zu bestimmen ist meist nicht einfach. Möglich ist es jedoch einen Satz zu überprüfen:

Satz 2.1:⁵⁴ Wenn gilt $|f'(A)| < 1$, dann ist A ein Attraktor.

Man unterscheidet zwischen vier Attraktortypen:

- Fixpunkt-Attraktoren,
- Grenzyklus-Attraktoren,
- Torus-Attraktoren,
- seltsame Attraktoren.

Die ersten drei genannten Typen gehören zu der Klasse der „nicht-chaotischen“ bzw. *einfachen Attraktoren*. *Seltsame Attraktoren* bilden *chaotische Zustände* dynamischer Systeme ab.

2.3.1 Einfache Attraktoren

Definition 2.4:⁵⁵ Ein *Fixpunkt-Attraktor* ist eine zeitlich konstante Lösung

$$x_{t+1} = x_t = x^*$$

eines dynamischen Systemverhaltens.

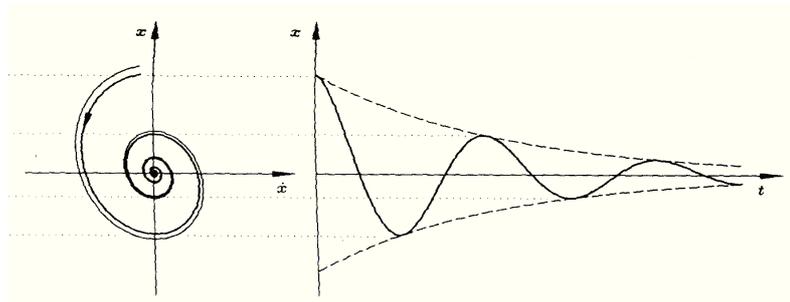
Der Fixpunkt-Attraktor beschreibt somit eine Gleichgewichtslage des dynamischen Systems. Als Beispiel für den Fixpunkt-Attraktor kann die Bewegung eines Pendels unter normalen Bedingungen genannt werden. Die Pendelbewegung lässt sich dabei in einen zweidimensionalen Phasenraum einbetten. Das Pendel wird bei der Schwin-

⁵⁴ Vgl. Zeitler, H.; Neidhardt, W.: *Fraktale und Chaos: Eine Einführung*, Darmstadt 1993, S.17.

⁵⁵ Vgl. Loistl, O., Betz, I.: *Chaostheorie*, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 17.

gung der Reibung durch den Luftwiderstand ausgesetzt. Dadurch wird die Schwingung langsamer, bis es in einem Punkt zur Ruhe kommt. Die Flussbahn des Pendels wird also durch diesen Gleichgewichtspunkt angezogen. Auslenkungen, egal wie stark und in welche Richtung, führen das System immer in diesen Punkt-Attraktor zurück.

Abbildung 2.18:⁵⁶ Pendelbahn mit Punktattraktor

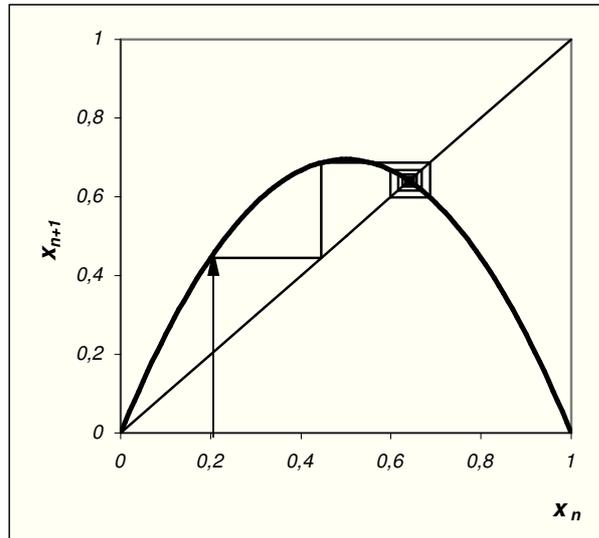


Auch die als Musterbeispiel in dieser Arbeit gewählte logistische Funktion strebt bei bestimmten Parameterwerten r , nämlich für $0 < r < 3$, einen Fixpunkt-Attraktor an. Dabei spielt es keine Rolle, mit welchem Startwert $x_0 \in [0,1]$ die Iterationsbahn der Funktion anfängt. Die Abbildung 2.20 veranschaulicht die Systemdynamik der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 2,78$ für zwei unterschiedliche Startwerte $x_0 = 0,2$ und $x_0 = 0,6$. In der Abbildung 2.21 ist der zugehörige Fixpunkt-Attraktor für beide Iterationsbahnen dargestellt:

⁵⁶ Vgl. Argyris, J., Faus, G., Haase, M. : Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994, S. 26.

Abbildung 2.19: Bewegung der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 2,78$ für die ersten Iterationen

a) für den Startwert $x_0 = 0,2$



b) für den Startwert $x_0 = 0,6$

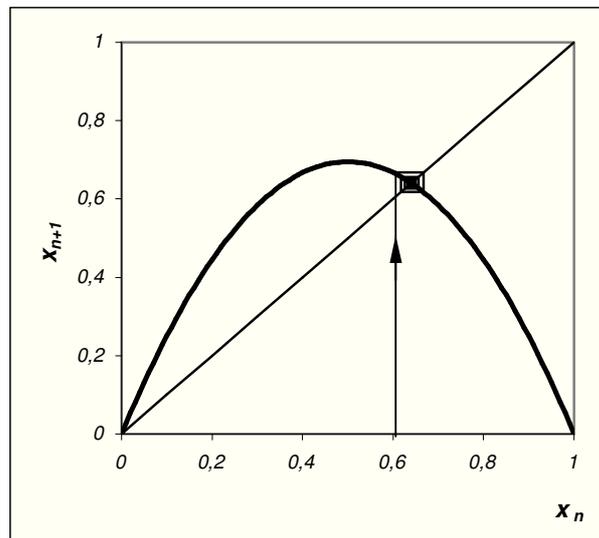
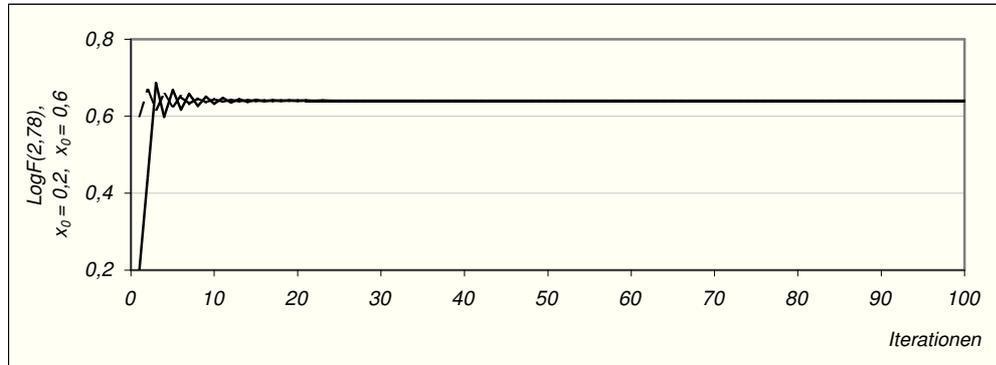


Abbildung 2.20: Fixpunkt-Attraktor der logistischen Funktion mit Parameterwert $r = 2,78$



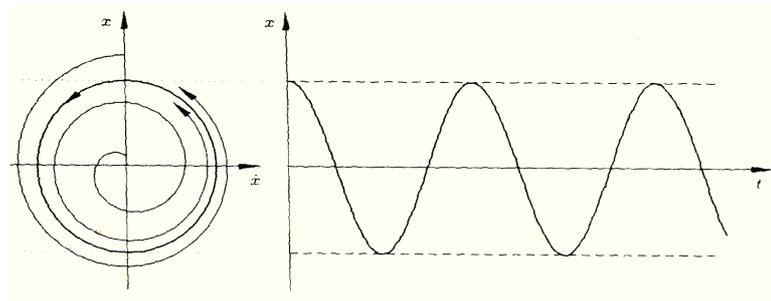
Definition 2.5:⁵⁷ Ein (Grenz-)Zyklus-Attraktor ist eine geschlossene Bahn x_t , gegen die Systemlösungen aus der Umgebung $U(x)$ konvergieren:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(f^t(x)) = 0 \quad \text{mit}$$

d – Distanz zwischen der Bahn x_t und dem Grenzyklus.

Die Pendelbewegung mit einem immer wiederkehrenden gleichbleibenden Impuls von außen repräsentiert einen Grenzyklus-Attraktor.⁵⁸ Die Schwingungsbahn des Pendels wird dabei nicht zu einem Fixpunkt hingezogen, sondern gibt eine zyklische Bewegung wieder. Unabhängig davon, wie man das Pendel in Bewegung versetzt, kommt es langfristig auf den gleichen Zyklus zurück:

Abbildung 2.21:⁵⁹ Pendelbahn mit Grenzyklus-Attraktor



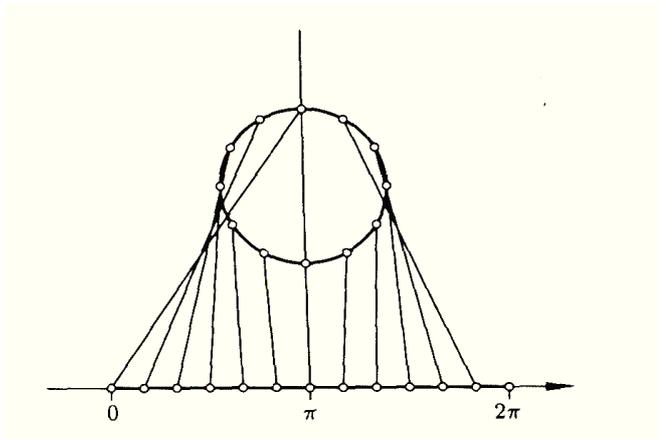
Der Grenzyklus lässt sich Punkt für Punkt umkehrbar eindeutig auf eine Linie des euklidischen Raums abbilden:

⁵⁷ Vgl. Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 18.

⁵⁸ Bpsw. eine Pendeluhr.

⁵⁹ Vgl. Argyris, J., Faus, G., Haase, M.: Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994, S.27.

Abbildung 2.22:⁶⁰ Punktweise umkehrbar eindeutige Abbildung des Grenzyklus auf eine Linie

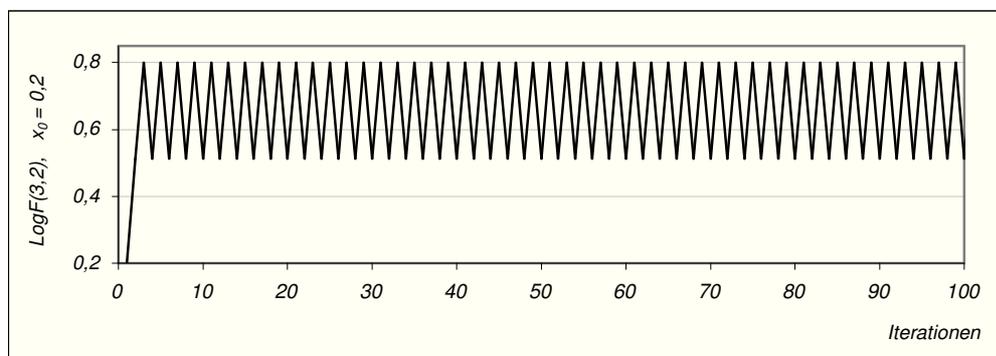


Somit ist der Grenzyklus ein eindimensionaler Attraktor in einem zweidimensionalen Phasenraum. Da sich die Bahnkurve des Zyklus-Attraktors nach einem Umlauf schließt, entspricht dieser einer periodischen Bewegung des Systems.

Auch die logistische Funktion strebt für die Parameterwerte $3 < r \leq 3,4$ einen Zyklus-Attraktor der Periodenlänge 2 an. Die Abbildung 2.8 präsentiert eine superstabile Bahn der logistischen Funktion mit dem Parameterwert $r = 3,24$ und dem Startwert $x_0 = 0,5$. In der Abbildung 2.23 ist die periodische Dynamik der logistischen Funktion mit dem Parameterwert $r = 3,2$ für die Iterationsbahnen mit den Startwerten $x_0 = 0,2$ und $x_0 = 0,6$ dargestellt:

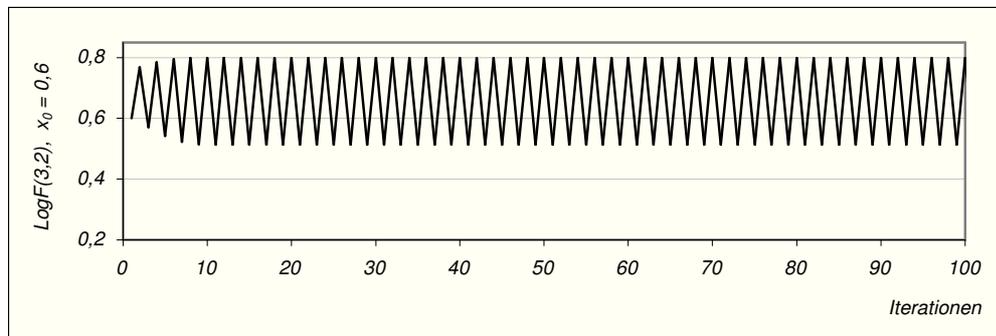
Abbildung 2.23: Bewegung der logistischen Funktion auf einem Zyklus-Attraktor

a) für den Startwert $x_0 = 0,2$



⁶⁰ Vgl. ebenda, S. 36.

b) für den Startwert $x_0 = 0,6$

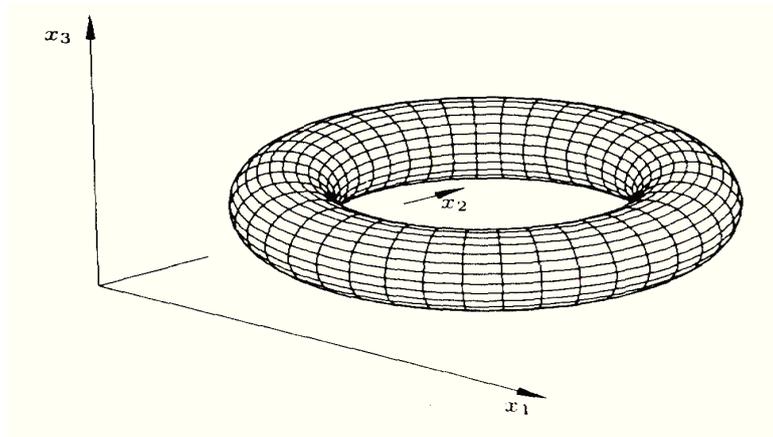


Tori existieren in höherdimensionalen Phasenräumen mit $n \geq 3$ und können selbst eine beliebig hohe endliche Dimension ab Größenordnung 2 aufwärts besitzen. Ein zweidimensionaler Torus-Attraktor kann durch zwei unabhängige, zweidimensionale nichtlineare dynamische Systeme $f_1(x)$, $f_2(y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2$ beschrieben werden, deren unabhängige Lösungen Grenzyklen G_1 und G_2 - eindimensionale Objekte in der Ebene - sind. Die gekoppelte Lösung der Systeme lässt sich als Produkt beider Grenzyklen $G_1 * G_2$ darstellen. Sie wird als *zweidimensionaler Torus* in einem vierdimensionalen Phasenraum bezeichnet.

Als Beispiel für einen zweidimensionalen Torus-Attraktor im dreidimensionalen Phasenraum kann ein gekoppeltes Pendelsystem, bestehend aus zwei durch einen gleichmäßigen Impuls angetriebenen, in alle Richtungen bewegbaren Pendel, dienen. Jedes Pendel folgt einem Grenzyklus-Attraktor. Die Kopplung der Pendel soll in der Form erfolgen, dass der eine Grenzyklus den anderen mit im Kreis hinter sich her zieht.

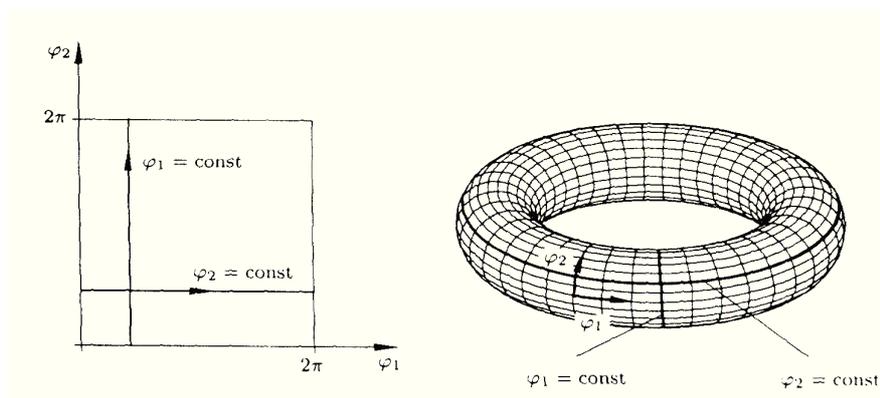
Der Zustand eines gekoppelten Pendelsystems kann durch einen Punkt beschrieben werden, der sich auf der Oberfläche eines dreidimensionalen ringförmigen Gebildes bewegt.

Abbildung 2.24:⁶¹ Zweidimensionaler Torus im dreidimensionalen Phasenraum



Die Dimensionalität des Torus kann auf analoge Weise wie die des Grenzyklus nachvollzogen werden. Jeder Punkt auf der Oberfläche des Torus kann umkehrbar eindeutig auf einen Punkt in der Ebene $\theta_1 \times \theta_2$ abgebildet werden. Als Ergebnis der Abbildung ergibt sich ein Quadrat $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, das mit Schere und Klebestoff durch Biegen und Rollen in den Torus zurückverwandelt werden kann. Dadurch wird die umkehrbare Eindeutigkeit der Abbildung deutlich.

Abbildung 2.25:⁶² Punktweise umkehrbar eindeutige Abbildung des Torus auf ein Quadrat in der $\theta_1 \times \theta_2$ -Ebene

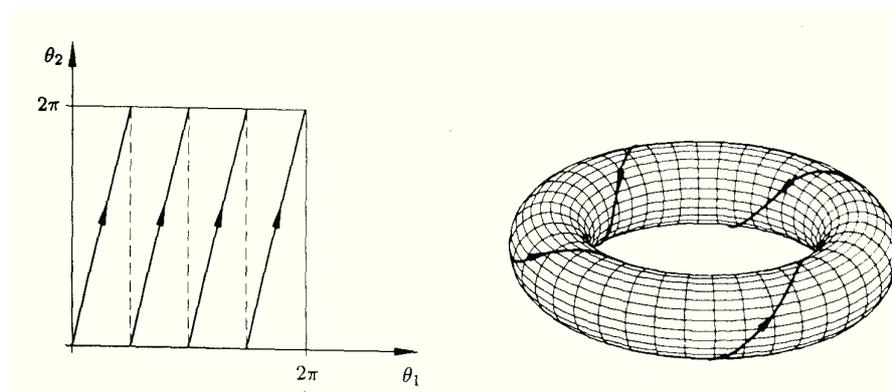


⁶¹ Vgl. Argyris, J., Faus, G., Haase, M. : Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994, S. 37.

⁶² Vgl. ebenda.

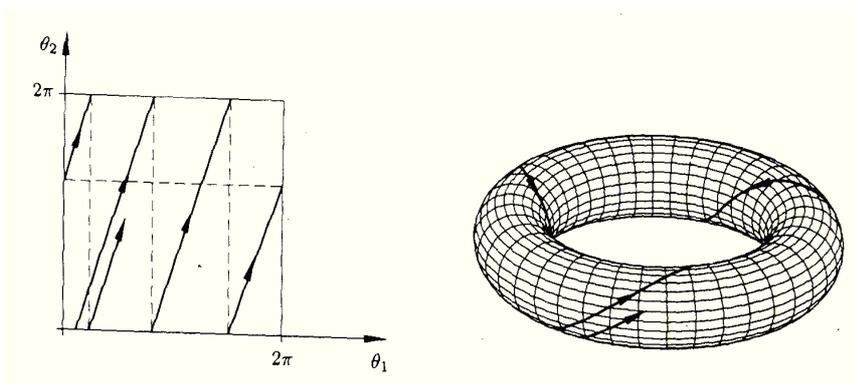
Bereits im zweidimensionalen Fall unterscheidet man zwischen periodischer und quasiperiodischer Bewegung auf dem Attraktor. Eine periodische Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich die Bahnkurve – eventuell nach einigen Umläufen – schließt. Dieser Verlauf der Bahnkurve wird mathematisch durch die rationale Steigung ω_1 / ω_2 der Geraden⁶³ in der $\theta_1 \times \theta_2$ -Ebene beschrieben.

Abbildung 2.26: Geschlossene Bahnkurven für eine periodische Bewegung auf dem zweidimensionalen Torus-Attraktor



Im Falle der quasiperiodischen Bewegung ist die Steigung der Geraden in der $\theta_1 \times \theta_2$ -Ebene irrational. Die Bahnkurve schließt sich nie und füllt im Verlauf der Zeit das Quadrat in der $\theta_1 \times \theta_2$ -Ebene bzw. den Torus vollständig aus.

Abbildung 2.27: Nichtgeschlossene Bahnkurve für quasiperiodische Bewegung



Dabei ist zu beachten, dass sich zwei beliebig nahe beieinander auf einem Torus startende Bahnkurven im Zeitablauf nicht voneinander entfernen.

⁶³ Alternativ spricht man von der Windungszahl bzw. vom Verhältnis der Frequenzen.

2.3.2 Seltsamer Attraktor (*Strange Attractor*)

Ein *Seltsamer Attraktor* wird durch eine Trajektorie innerhalb eines begrenzten Unterraumes eines Phasenraumes dargestellt. Die Trajektorie verläuft in ähnlichen, skaleninvarianten Mustern. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Selbstähnlichkeit* und der *fraktalen Dimension* des seltsamen Attraktors.

Die Trajektorie eines *seltsamen Attraktors* kehrt nie zu einem bereits besuchten Punkt des Phasenraumes zurück, jedoch in eine beliebig kleine Umgebung dieses Punktes. In diesem Zusammenhang spricht man auch von der *Rekurrenz* der Bewegung des Attraktors.⁶⁴ Mit anderen Worten füllt die Trajektorie eines seltsamen Attraktors im Zeitverlauf den gesamten Definitionsbereich des Attraktors (beliebig) dicht aus. Diese Systemdynamik ist *aperiodisch* und kann als *Mischungsverhalten*⁶⁵ bezeichnet werden.

Trajektorienteile, welche sich in einem bestimmten Punkt beliebig nahe kommen, entfernen sich kurze Zeit später exponentiell voneinander, um sich möglicherweise später wieder beliebig nahe zu kommen. Das exponentielle Auseinanderlaufen zweier benachbarter Trajektorienteile wird als Streckung des Phasenraumes bezeichnet. Das nahe aneinander Vorbeilaufen – als Faltung des Phasenraumes.

Aufgrund derartigen Verhaltens wird einem seltsamen Attraktor *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* zugeschrieben. Eine infinitesimale Änderung bestimmter Anfangsparameter kann bei dem seltsamen Attraktor zu vollkommen unterschiedlichem Systemverhalten führen. Die Entfernung zweier benachbarter Trajektorienteile lässt sich mit Hilfe des sog. *Lyapunov-Exponenten*⁶⁶ messen.

Dabei ist zu beachten, dass das oben beschriebene Verhalten auf jeweils numerisch fest vorgegebene Anfangsbedingungen zurückzuführen ist. Die Bewegung des

⁶⁴ Vgl. Bestle, D.: Beurteilungskriterien für chaotische Bewegungen nichtlinearer Schwingungssysteme in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 100, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1988, S. 75.

⁶⁵ Vgl. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: Chaos: Bausteine der Ordnung, aus dem Amerikanischen übersetzt von Rodenhausen, A. M., Springer-Verlag, Klett-Cotta, 1994, S. 51. Näheres zum Mischungsverhalten s. Kapitel 4, Abschnitt 4.4.

⁶⁶ Als Lyapunov-Exponent wird eine Maßzahl bezeichnet, die quantitativ jeweilige Streckung oder Faltung des Phasenraumes beschreibt. Zur konkreten Ermittlung des Lyapunov-Exponenten s. Kapitel 4, Abschnitt 4.5.

Systems ist dabei über einen größeren Bereich des Phasenraumes zerstreut, bleibt jedoch auf eine ringförmige Umgebung des Attraktors beschränkt. Man beschreibt diese Bewegung im weiteren Sinne auch als Turbulenz.

Eines der gängigsten Beispiele des seltsamen Attraktors stellt der He'non-Attraktor dar, 1976 eingeführt als ein vereinfachtes System für das Lorenz-Modell von dem französischen Astronomen M. He'non. Aufgrund seiner einfachen Beschaffenheit ist er im Rahmen einer Einführung in die Chaos-Theorie zur Veranschaulichung analytischer Aspekte einer Untersuchung komplexer Systemdynamik auf chaotisches Verhalten gut geeignet. Der He'non-Attraktor lässt sich definieren durch folgende Transformation:⁶⁷

$$H(x, y) = (y + 1 - ax^2, \quad bx)$$

bzw. als Iterationsprozess:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (y_n + 1 - ax_n^2, \quad bx_n)$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$,

a, b - geeignet zu wählende Parameter.

Ähnlich wie bei der logistischen Funktion hängt die topologische Struktur des He'non-Attraktors von der jeweiligen Parameterwahl ab: für einige Parameterkonstellationen weist die He'non-Dynamik einen periodischen Zyklus auf, bei anderen Parametern ist jedoch seine Dynamik chaotisch. In der Abbildung 2.28 ist der chaotische Fall des He'non-Attraktors mit dem Startwert $(0, 0)$ und der Parameterwahl $a = 1,4$, $b = 0,3$ für die ersten 60.000 Iterationsschritte dargestellt. Bahnen, die in der Attraktornähe starten, werden von der chaotischen Dynamik des He'non-Attraktors angezogen. Außerdem füllen diese Bahnen den Attraktor dicht aus. Das zugehörige Einzugsgebiet E des chaotischen He'non-Attraktors ist in der Abbildung mit gestrichelten Linien gekennzeichnet, wobei die jeweiligen Eckpunkte des Bereichs die Koordinaten haben:

$$H_1 = (-1,33, \quad 0,42),$$

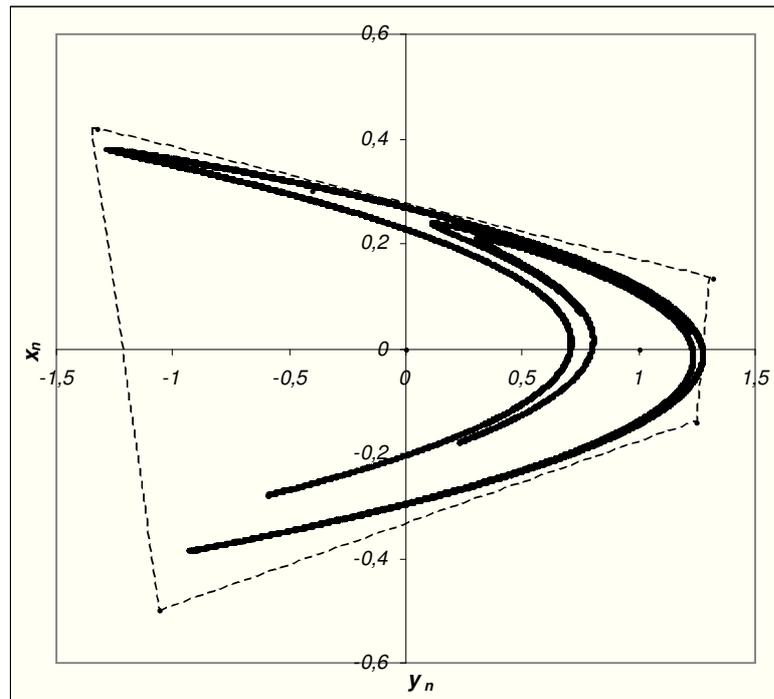
$$H_2 = (1,32, \quad 0,133),$$

⁶⁷ Vgl. Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: Chaos: Bausteine der Ordnung, aus dem Amerikanischen übersetzt von Rodenhausen, A. M., Springer-Verlag, Klett-Cotta, 1994, S. 217 – 239.

$$H_3 = (1,245, -0,14),$$

$$H_4 = (-1,06, -0,5).$$

Abbildung 2.28: He'non-Attraktor mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und den Parametern $a = 1,4$, $b = 0,3$, 60.000 Iterationen



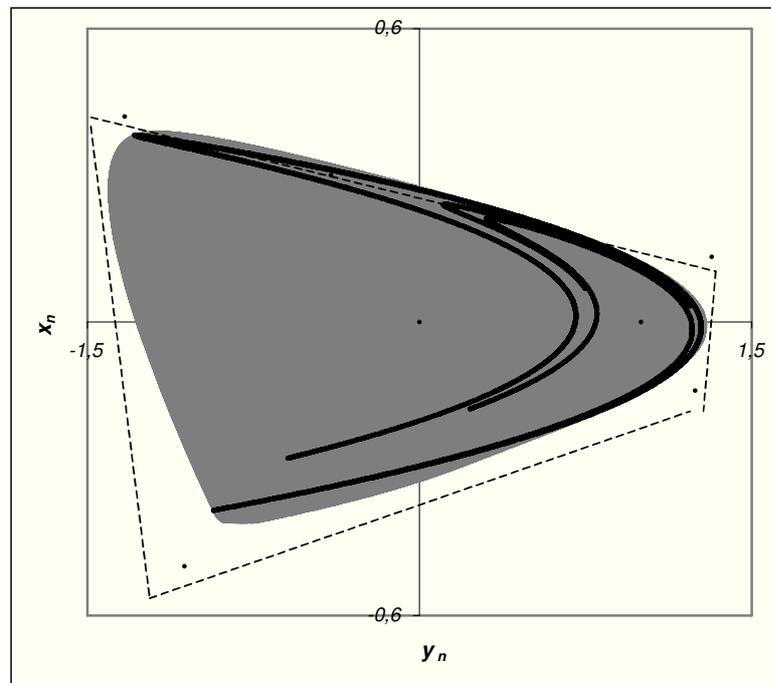
Die Gültigkeit des Einzugsgebiets E lässt sich leicht prüfen, in dem man einen Startwert aus dem gekennzeichneten Bereich mit He'non-Transformation iteriert. Eine einmalige Anwendung des He'non-Iterators auf den gesamten Bereich liefert als Ergebnis eine Teilmenge desselben Bereichs:

$$H(E) \subset E .$$

Außerdem würde man feststellen, dass das mit der He'non-Transformation iterierte Gebiet um den Faktor 0,3 zusammenschrumpft. Somit reduziert sich seine Flächeneinheit nach n Iterationsschritten auf $0,3^n$. Das bedeutet, dass der He'non-Attraktor, angewandt auf sein gesamtes Einzugsgebiet, eine Teilmenge der Ebene überdeckt, deren Fläche gleich Null ist. Bahnen, die außerhalb des Einzugsgebiets starten, entwickeln sich ins Unendliche.

Das *Mischungsverhalten* auf dem He'non-Attraktor ist in der Abbildung 2.29 dargestellt:

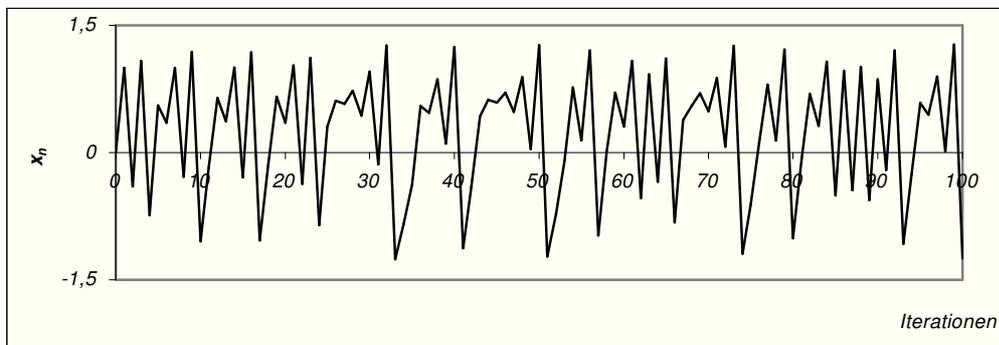
Abbildung 2.29: Die Bewegung der Systemvariablen auf dem He'non-Attraktor;
 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $a = 1,4$, $b = 0,3$, 60.000 Iterationen



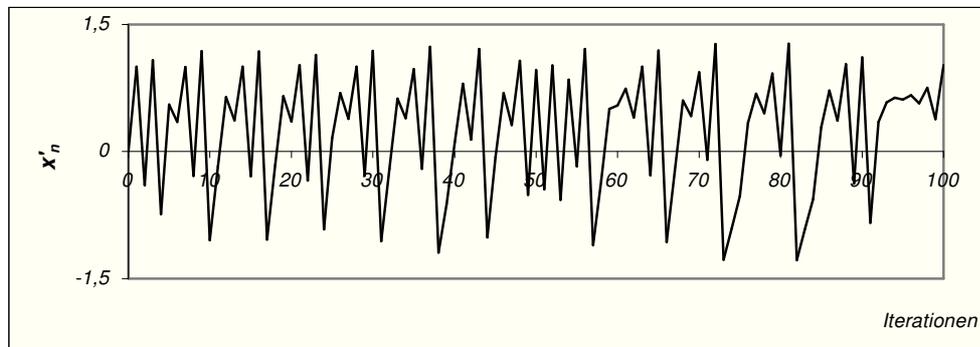
Der Hénon-Attraktor zeichnet sich durch die *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* aus: Bahnen, die beliebig nahe beieinander starten, zeichnen nach einer gewissen Zeit eine Differenz auf, deren Entwicklung sich auf den gesamten Definitionsbereich des Attraktors ausdehnt:

Abbildung 2.30: Die Anfangswertsensitivität des Hénon-Attraktors

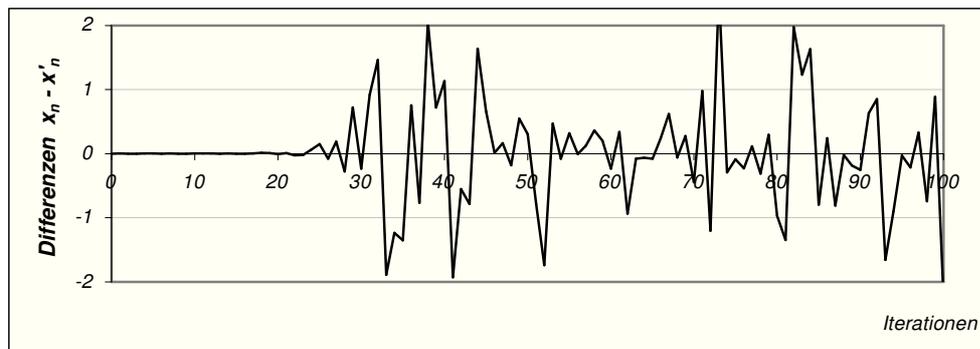
a) erste 100 Iterationen des Startwertes $(x_0, y_0) = (0, 0)$



b) erste 100 Iterationen des Startwertes $(x'_0, y'_0) = (0,00001, 0)$



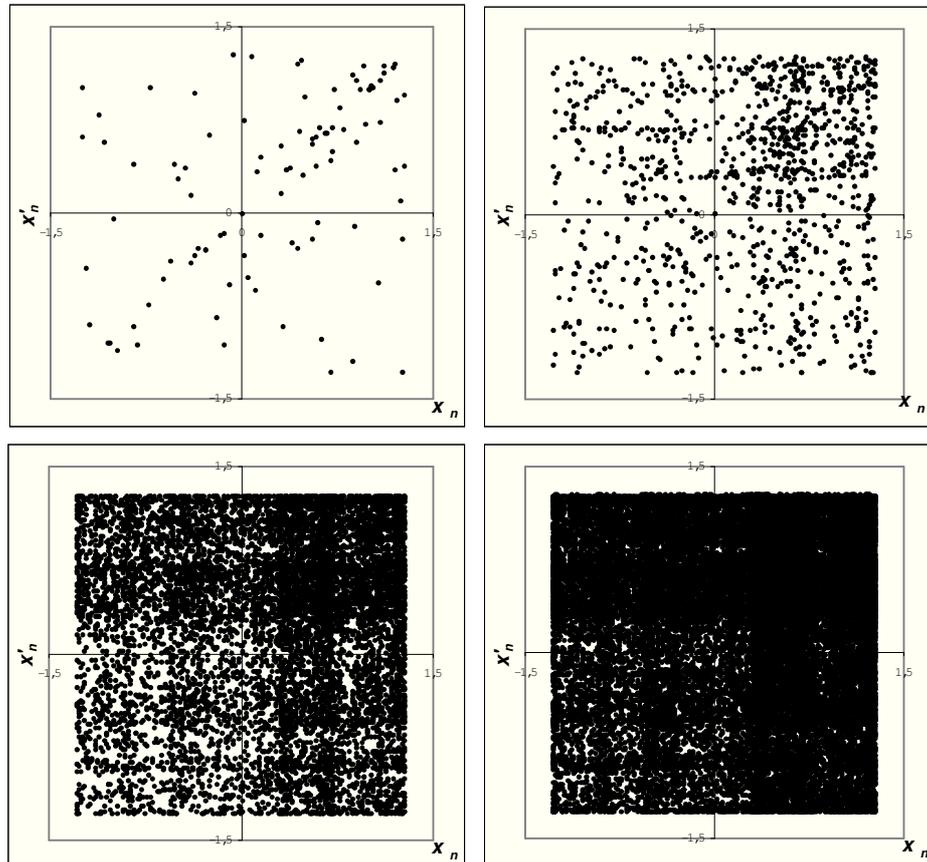
c) Entwicklung der Differenz $x_n - x'_n$, $n = 0, 1, 2, \dots, 100$



Die Folge der Anfangswertsensitivität ist somit, dass eine verhältnismäßig geringe Störung in den Anfangsbedingungen mit der Zeit so groß wird wie das Signal selber. Prognosen für Systeme, die sich auf einem seltsamen Attraktor bewegen, können ihre Gültigkeit nur kurzfristig behalten. Bereits sehr geringfügige Messfehler in den Anfangsbedingungen können einen exponentiell wachsenden Prognosefehler nach sich ziehen.

Eine alternative Veranschaulichung der Anfangswertsensitivität lässt sich anhand der beiden oben vorgestellten Bahnen des He'non-Attraktors mit den Startwerten $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x'_0, y'_0) = (0,00001, 0)$ wie folgt darstellen: zeichnet man die Punkte (x_n, x'_n) für die ersten 100, 1.000, 10.000, 50.000 Iterationen auf, so wird man feststellen, dass diese mit der fortschreitenden Zeit das gesamte Quadrat des Definitionsbereichs der Variablen x dicht ausfüllen.

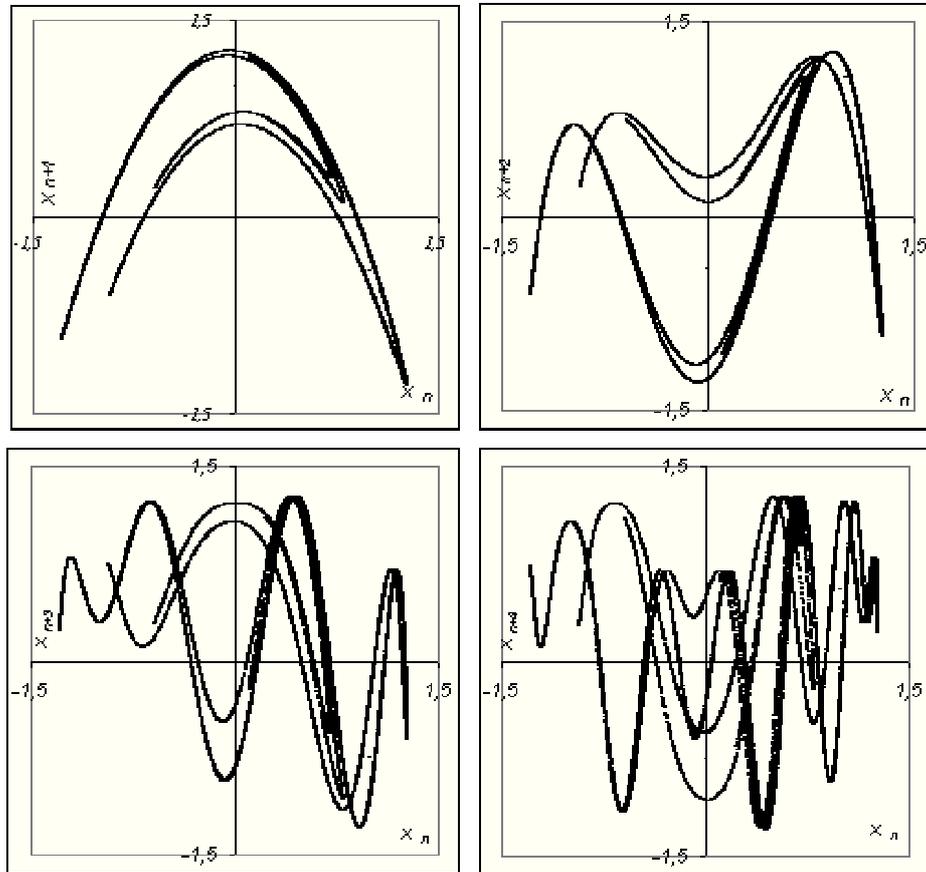
Abbildung 2.31: Anfangswertsensitivität des Hénon-Attraktors; Entwicklung der Startwerte $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x'_0, y'_0) = (0,00001, 0)$; Punkte (x_n, x'_n) für 100, 1.000, 10.000, 50.000 Iterationen



Die Abbildung 2.31 macht deutlich, dass es zwischen zwei beliebig nahe beieinander startenden Bahnen auf dem Hénon-Attraktor keine Korrelationen gibt. Dabei könnte man auf die Idee kommen, dass es sich bei der Systemdynamik auf einem seltsamen Attraktor um einen dem *weißen Rauschen*⁶⁸ ähnlichen Vorgang handelt. Dies trifft jedoch nicht zu: Für genügend geringe zeitliche Abstände weisen die Werte einer Iterationsbahn auf dem Hénon-Attraktor eine wohl strukturierte Autokorrelation auf. Diese Eigenschaft des seltsamen Attraktors beruht selbstverständlich auf dem vollständig determinierten Ursprung des dynamischen Systems. Wobei sich der System-Determinismus in diesem Fall aufgrund der Anfangswertsensitivität im Zeitverlauf sehr erheblich relativieren kann:

⁶⁸ Als *weißes Rauschen* wird ein rein stochastischer Prozess verstanden, der keinerlei Korrelation der Zeitreihenwerte aufweist. Exakte Definition des Begriffs erfolgt im inhaltlichen Zusammenhang mit der Problemstellung der Arbeit im Kapitel 4, Abschnitt 4.3.

Abbildung 2.32: Autokorrelationsverhalten der Variablen auf dem He'non-Attraktor

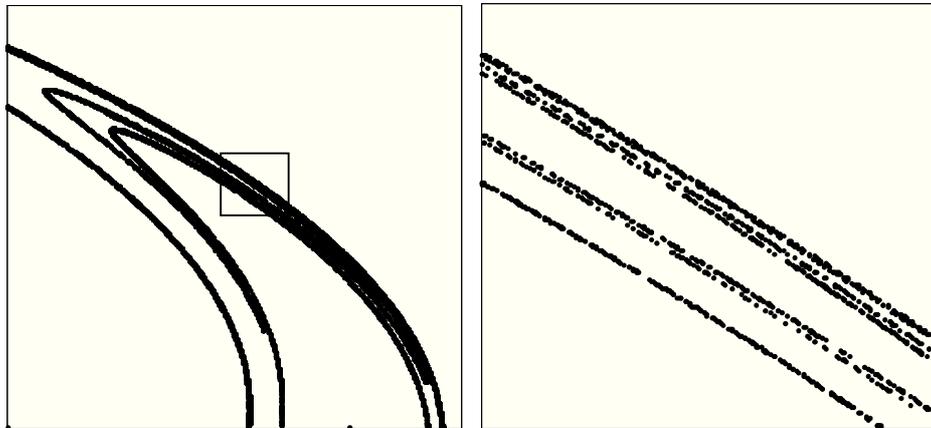


Die oben aufgeführte Abbildung zeigt den strukturellen Zusammenhang der Systemvariablen auf dem Hénon-Attraktor mit ihrer zurückliegenden Entwicklung. Für die Zeitlags der Länge 1 bis 4 Iterationsschritte (Bildreihenfolge von oben links bis unten rechts) drückt sich sogar das autokorrelative Verhalten der Systemvariablen in Form eines modifizierten Hénon-Attraktors aus. Laut Peitgen, H.-O., beträgt die Box-Dimension des Hénon-Attraktors $D_b \approx 1,28$.⁶⁹

Außerdem liefert die Analyse der Attraktorstruktur eine Cantor-Mengen-ähnliche Zusammensetzung der Trajektorienteile. Die Abbildung 2.33 stellt zwei aufeinander folgende Vergrößerungen des Hénon-Attraktors dar, auf dem linken Bild ist der Bereich $0 \leq x \leq 1,2$; $0 \leq y \leq 0,3$ erfasst, auf dem rechten $0,6 \leq x \leq 0,8$; $0,15 \leq y \leq 0,2$:

⁶⁹ Vgl. Peitgen, H.-O., u. a.: Chaos: Bausteine der Ordnung, aus dem Amerikanischen übersetzt von Rodenhausen, A. M., Springer-Verlag, Klett-Cotta, 1994, S. 231.

Abbildung 2.33: Vergrößerungen des He'non-Attraktors

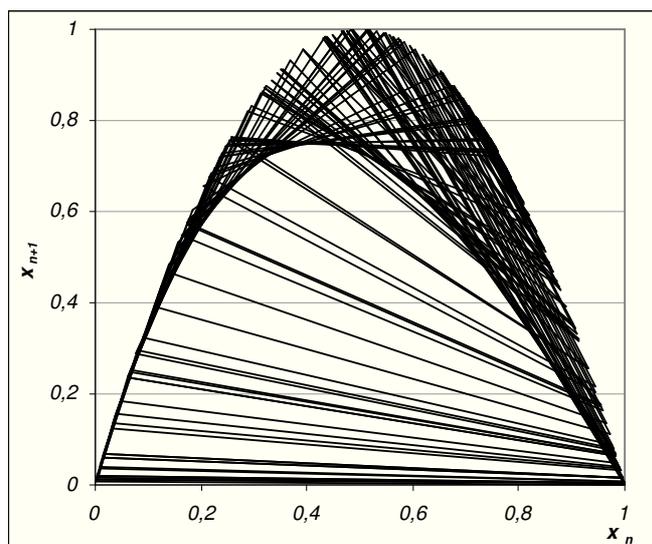


Auch die Systemvariable der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4 befindet sich auf einem seltsamen Attraktor:

- ihre Dynamik ist durch die Anfangswertsensitivität und Mischungsverhalten gekennzeichnet und
- der Attraktor, auf dem sich die Variable bewegt, ist fraktal dimensioniert.

Die quantitative Erfassung dieser Eigenschaften wird im Kapitel 4 behandelt. Hier wird lediglich die Bewegung der Variablen x auf dem Attraktor der logistischen Funktion (Parameter 4; Startwert $x_0 = 0,01$), für die ersten 200 Iterationen präsentiert:

Abbildung 2.34: Variablenbewegung auf dem Attraktor der logistischen Funktion; Startwert $x_0 = 0,01$, Parameterwert 4



Die Tatsache, dass sich ein dynamisches System trotz chaotischen Verhaltens auf systemcharakteristischen Gebilden – Attraktoren – befindet, lässt die Annahme zu, dass die Entwicklung in oder aus dem Chaos durch eine gewisse Systematik geprägt ist. Diesbezüglich spricht man auch von Ordnung im Chaos bzw. vom *Prinzip der Selbstorganisation*: Prozesse, die fern vom Gleichgewicht sind, entwickeln sich durch systemimmanente Kräfte zu komplexeren Ordnungsstrukturen.

Vereinfacht gesprochen wird der Attraktor eines dissipativen dynamischen Systems als „seltsam“ gesehen, wenn seine Systemdynamik nicht in die Klasse der gewöhnlichen Attraktoren eingeordnet werden kann: sie kann, langfristig betrachtet, weder durch einen einzelnen Punkt (Fixpunkt-Attraktor), noch durch endlich viele Punkte (Zyklus-Attraktoren), noch durch stetige Mannigfaltigkeiten periodischer oder aperiodischer Art (Tori) erfasst werden. Viele nichtlineare Systeme aus den Bereichen der experimentellen Physik, Chemie und Biologie gelten als chaotisch, da ihre Entwicklung nicht integrierbar und somit nicht vorhersagbar ist. Aus diesem Grunde wird deren Dynamikstruktur als seltsamer Attraktor charakterisiert. Auch nicht zu vergessen ist, dass die meisten integrierbaren Beispiele – wie die logistische Funktion -, die im Rahmen der Chaos-Theorie eingebracht werden und die das streng aufgebaute chaos-theoretische Konzept aus Definitionen und charakteristischen Kenngrößen erfüllen, einer Lehrbuchsammlung entstammen und nur wenig mit der Realität zu tun haben. Insofern gelten solche Lehrbuchbeispiele heutzutage eher als eine Ausnahme. „...Die Wirklichkeit außerhalb der Lehrbücher erweist sich als weitgehend unberechenbar und lässt sich oft nur durch seltsame ... Attraktoren beschreiben.“⁷⁰

Die Anwendung der chaos-theoretischen Überlegungen findet also in der Praxis auf alle nichtlinearen Systeme statt, deren Dynamik nicht die Verhaltensmuster der gewöhnlichen Attraktoren aufweist. Die als seltsam charakterisierten Attraktoren müssen dabei nicht notwendigerweise selbstähnlich sein oder eine klar definierbare Struktur und somit eine fraktale Dimension besitzen. Die charakteristische Eigenschaft, durch die sich alle seltsamen Attraktoren auszeichnen, ist deren sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

⁷⁰ Schröder, M.: *Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit: Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit*, aus dem Amerikanischen übersetzt von Brau, J., und Sümer, E., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford, 1994, S. 33.

2.4 Änderungen der Verhaltensmuster

Bezüglich des gesamten Systemverhaltens können zwei Fälle unterschieden werden:

- ein System kann bei unveränderten Umweltbedingungen⁷¹ mehrere potentielle Attraktoren aufweisen. Der Übergang zwischen den Attraktoren erfolgt auf eine hinreichende Auslenkung aus der Bahn des aktuellen Attraktors hin;
- ein System verfügt bei gegebenen Umweltbedingungen nur über einen Attraktor. Der Wechsel von Attraktoren ist zwingend an die Umweltveränderungen gebunden.

Der Weg in einen Attraktor wird als *Transiente* bezeichnet. Zur Veranschaulichung des transienten Systemverhaltens kann ein einfaches Beispiel betrachtet werden: Die Zugabe der Milch in schwarzen Kaffee stellt eine Transiente dar, den Weg in einen Attraktor, der sich als Milchkaffee präsentiert. Die Unterscheidung zwischen dem transienten Systemverhalten und der eigentlichen Bewegung des Systems auf dem Attraktor benötigt einen ausreichend großen Beobachtungszeitraum.

Die Menge aller Punkte, die sich auf einen Attraktor zu bewegen, heißt das *Einzugsgebiet* des Attraktors. Die Pendeluhr hat zwei solche Einzugsgebiete: Bei kleiner Auslenkung des Pendels kehrt es wieder in die Ruhelage zurück, bei großer Auslenkung jedoch beginnt die Uhr zu ticken, und das Pendel führt stabile Oszillationen aus.

2.4.1 Volumenkontraktion - quantitative Änderung

Quantitative Änderung des Systemverhaltens ist dadurch charakterisiert, dass sich ein *Volumenelement* des Phasenraumes R^n unter der Wirkung des Phasenflusses f' zusammenzieht, bis der Volumeninhalt den Wert Null annimmt⁷². Nach einem solchen Übergang befindet sich das System auf einem Attraktor, dessen Dimension kleiner ist als die des ursprünglichen Phasenraumes. Dabei reduziert sich die Anzahl der zur Beschreibung der Systemdynamik erforderlichen Variablen. Derartiger Systemübergang wird als *Volumenkontraktion* bezeichnet.

⁷¹ Technisch: Kontrollparameter.

⁷² Falls dem System keine neue Energie zugefügt wird.

Definition 2.6:⁷³ *Volumenkontraktion* ist die lokale *Volumenänderungsrate* für jeden Abbildungsschritt. Sie wird beschrieben durch

$$\varphi(x) = |\det Df(x)| \quad \text{mit}$$

$Df(x)$ – Funktional- oder Jakobimatrix des Funktionsvektors f .

Für dissipative Systeme muss also aufgrund der *quantitativen* Änderung des Volumens gelten

$$\varphi(x) = |\det Df(x)| < 1 \quad \text{für} \quad \forall x \in R^n .$$

Dissipation bedeutet jedoch i. A. nicht, dass das Phasenraumvolumen unendlich gegen Null strebt und sich die Systementwicklung auf einen Fixpunkt hin bewegt.

Die Volumenkontraktion ist bei der Systemdynamik gegeben, die auf einen der einfachen Attraktoren zustrebt.⁷⁴ Auch die Transiente eines dynamischen Systems auf den seltsamen Attraktor kann durch die Volumenkontraktion begleitet werden. Häufiger ist jedoch die Bewegung eines dynamischen Systems auf einen seltsamen Attraktor hin durch *Bifurkationsszenarien* gekennzeichnet. Diese werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

2.4.2 Bifurkationen - qualitative Änderungen

Falls das dynamische System f zusätzlich Parameter $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ mit $r_i \in R$ enthält, hängt sein Verhalten - der Phasenfluss f_r^t - im Regelfall von diesen Parametern ab. „Normalerweise“ verursacht eine geringe Änderung eines Parameters auch nur eine geringfügige Änderung der topologischen Struktur des jeweiligen Attraktors $f_r^t(x_0)$. Die Überschreitung eines bestimmten kritischen Parameterwertes kann bei dynamischen Systemen, die zum irregulären Verhalten neigen, eine schlagartige

⁷³ Vgl. Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien, S. 13.

⁷⁴ Vgl. Abschnitt 2.3.1.

Änderung in der Struktur des Attraktors herbeiführen. Diese plötzliche qualitative Änderung des Attraktors $f_r'(x_0)$ bei speziellen Werten $r_i \in R$ wird als *Bifurkation* bezeichnet.

Zu den bekanntesten Bifurkationsszenarien zählen die *Heugabelbifurkation*, auch unter der Bezeichnung der *Periodenverdoppelung* bekannt, die Hopfbifurkation sowie die Sattelpunkt- oder Tangentenbifurkation. Die Heugabelbifurkation ist das am häufigsten auf dem Weg ins Chaos beobachtete Szenario und durch folgendes Verhaltensmuster gekennzeichnet:

- bis zu einem bestimmten Parameterwert r_1 liegt bspw. ein *stabiler Fixpunkt* vor, am r_1 wird der stabile Fixpunkt *instabil* und zerfällt in *zwei stabile Fixpunkte*. Dieser Systemzustand wird auch als *Zweierzyklus* bezeichnet;
- der Zweierzyklus bleibt bis zu einem Parameterwert r_2 stabil. In r_2 wird die zweiperiodische Lösung instabil und es bildet sich ein Viererzyklus;
- dieses Verhalten kann sich bis zu einem r_∞ fortsetzen, an dem dann eine unendlichfach periodische Lösung vorliegt.

In der Abbildung 2.35 ist schematisch das Bifurkationsszenario der logistischen Funktion für die Parameterwerte $r \in [1, 4]$ dargestellt:

- für die Parameterwerte $r < r_1 = 3$ bewegt sich die logistische Funktion im Langzeitverhalten auf einem Fixpunkt-Attraktor;
- bei dem Parameterwert $r = r_1 = 3$ erfolgt eine Verhaltensänderung der Funktion: der Fixpunkt wird instabil und bereits eine geringfügige Erhöhung des Parameterwertes $r > r_1 = 3$ führt zum Entstehen von zwei neuen Fixpunkten, die abwechselnd von der logistischen Funktion aufgesucht werden. Für die Parameterwerte $3 < r < r_2 \approx 3,449489\dots$ strebt also das System einen einfachen Zyklus-Attraktor an. Die Verzweigung bei $r_1 = 3$ wird als *periodenverdoppelnd* und der kritische Parameterwert r_1 selber wird als *Bifurkationspunkt* bezeichnet;
- mit dem nächsten periodenverdoppelnden Parameterwert $r_2 \approx 3,449489\dots$ wird der Zweierzyklus instabil und eine weitere Periodenverdopplung führt das System auf einen Viererzyklus - $3,449489\dots < r < r_3 \approx 3,544090\dots$ - hin;

- die Periodenverdopplungskaskade setzt sich für steigende Parameterwerte r fort:

$$1 \rightarrow \quad 2 \rightarrow \quad 4 \rightarrow$$

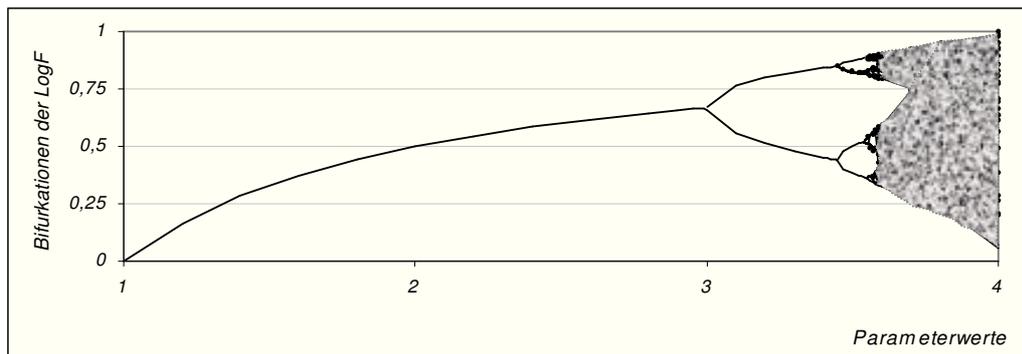
$$r_1 = 3, \quad r_2 = 3,449489\dots, \quad r_3 = 3,544090\dots,$$

$$8 \rightarrow \quad 16 \rightarrow \dots$$

$$r_4 = 3,564407\dots, \quad r_5 = 3,568759\dots, \dots,$$

bis sich die logistische Funktion bei dem Parameterwert $r_\infty = 4$ auf dem seltsamen Attraktor bewegt und im Langzeitverhalten Werte über das ganze Definitionsintervall $[0, 1]$ verteilt annimmt.

Abbildung 2.35: Schematische Darstellung des Bifurkationsszenarios der logistischen Funktion für die Parameterwerte $r \in [1, 4]$



Beobachtet man die Abstände zwischen den einzelnen Bifurkationspunkten der logistischen Funktion, r_i , $i = 1, 2, 3, \dots$:

$$d_1 = r_2 - r_1 ,$$

$$d_2 = r_3 - r_2 ,$$

$$\dots$$

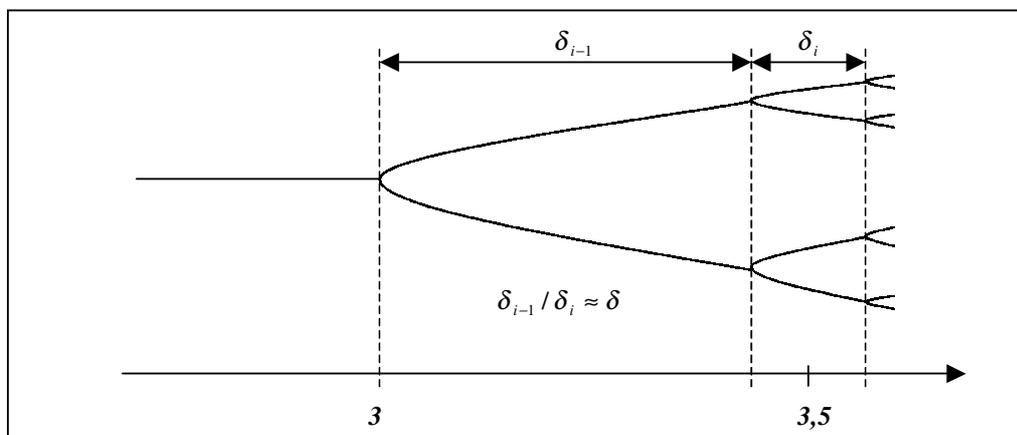
$$d_i = r_{i+1} - r_i ,$$

so stellt man fest, dass mit wachsendem i die Abstände zwischen den aufeinander folgenden Bifurkationspunkten rapide abnehmen. Wird die Abstandsverringerung auf eine Gesetzmäßigkeit hin untersucht, kommt man zum Ergebnis, dass sich diese Verringerung nicht durch z. B. eine einfache geometrische Beziehung d_i/d_{i+1}

beschreiben lässt. Sondern vielmehr bilden die geometrischen Quotienten δ_i , $\delta_i = d_i/d_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, eine mit wachsendem i konvergierende Folge. Daher wird auch von einer *annähernd geometrischen* Verringerung der Abstände zwischen den Bifurkationspunkten gesprochen. Laut Feigenbaum gilt für den entsprechenden Grenzwert δ , auch *Feigenbaum-Konstante* genannt, folgende Beziehung:

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(r_{i+1} - r_i)}{r_{i+2} - r_{i+1}} = 4,6692016091029\dots \quad ^{75}$$

Abbildung 2.36: Feigenbaum-Konstante δ



Die Feigenbaum-Konstante lässt sich also aus dem Bifurkationsverhalten eines dynamischen Systems ableiten. Und sie ist – ebenfalls durch Feigenbaum nachgewiesen – für dynamische Systeme einer Familie gleich. Im vorgestellten Fall bedeutet dies, dass die Feigenbaum-Konstante im Wert von $\delta = 4,6692\dots$ das Bifurkationsszenario der ganzen Klasse von Iteratoren beschreibt, die der logistischen Funktion in gewisser Weise ähnlich sind. Diese Eigenschaft der Feigenbaum-Konstante wird als *Universalität* bezeichnet. Dabei ist insbesondere die Tatsache wichtig, dass die Universalität der Feigenbaum-Konstante nicht nur bei einfachen mathematischen Systemen gilt, sondern sich auch auf komplexe physikalische Phänomene ausdehnt: Die Zahl δ tritt in vielen anderen chaotischen Systemen auf, bspw. beim tropfenden Wasserhahn, bei den Oszillationen von flüssigem Helium, bei den Fluktuationen einer Mottenpopulation.

⁷⁵ Vgl. M. J. Feigenbaum : Quantitative universality for a Class of nonlinear Transformations, J. Stat. Phys. 19, 1978, S. 25 – 52.

Die Bedeutung der Feigenbaum-Konstante in der Chaos-Theorie ist ähnlich groß wie die von der Zahl π in der herkömmlichen Geometrie. Aufgrund ihrer eindeutigen Vorhersagbarkeit bei einem ansonsten chaotischen – nicht vorhersagbaren – Systemverhalten ist sie gut zur Aufstellung von Prognosen des chaotischen Verhaltens geeignet: einfaches Messen zweier aufeinander folgender Periodenverdopplungen ermöglicht die Vorhersage von weiteren kritischen Parameterwerten des jeweiligen Systems bis hin zu demjenigen, bei Überschreiten dessen das jeweilige System in das chaotische Verhalten übergeht.

2.5 Übergänge zum Chaos

Zusammenfassend kann aus theoretischer Sicht ein System als deterministisch-chaotisch angesehen werden, wenn folgende Punkte erfüllt sind:

- das dynamische System ist *nichtlinear* ;
- die Dynamik des Systems ist *deterministisch* ;
- das System entsteht durch *Iteration bzw. Rückkopplung* ;
- dem System werden *keine* externen *Impulse* hinzugefügt ;
- das Verhalten von beobachteten Trajektorien hängt *sensitiv* von beliebig geringen Veränderungen der Anfangsbedingungen ab ;
- der zugrunde liegende Attraktor ist *seltsam*, d. h. seine Struktur ist selbstähnlich und weist eine gebrochene Dimension auf.

Die ersten vier Aspekte sind die Voraussetzung für das Entstehen von Chaos in dynamischen Systemen. Die letzten zwei Punkte können zum Nachweis von Chaos in einem dissipativen, dynamischen System verwendet werden. Für die komplexen physikalischen Systeme, deren Verhalten (nur) mittels einer Zeitreihe erfassbar ist, gelten dieselben Voraussetzungen auf der empirischen Ebene wie die oben aufgezählten für Systeme mit mathematisch exakt darstellbarer Systemdynamik.

3 Markovsche Abfertigungsprozesse und ergo- dische Chaos-Theorie

3.1 Stochastische Grundbegriffe

Markovsche Prozesse bilden eine Klasse von stochastischen Prozessen, die aufgrund ihrer Beschaffenheit eine hohe Praxisrelevanz besitzen – die überwiegende Zahl der Abfertigungsvorgänge in der Praxis lässt sich in Form von markovschen Prozessen beschreiben. Gegenstand der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse ist die Untersuchung deren Dynamik in Abhängigkeit von der Struktur und von den jeweiligen, den Prozess bestimmenden Parametern. Theoretische Basis für die Erfassung der Dynamik von markovschen Prozessen bilden die Begriffe des Wahrscheinlichkeitsraumes, der diskreten Zufallsvariablen, des invarianten Maßes und letztendlich der Begriff des stochastischen Prozesses.

Definition 3.1: Das Tripel (Ω, \mathcal{A}, P) heißt *Wahrscheinlichkeitsraum* eines Zufallsexperiments⁷⁶, wenn gilt:

- 1) Die Menge Ω ist ein *Stichprobenraum* (Merkmalsraum) des Zufallsexperiments, der alle potentiell möglichen elementaren Ergebnisse ω dieses Zufallsexperiments enthält;

⁷⁶ Unter einem Zufallsexperiment ist eine Situation zu verstehen, die ein vom Zufall beeinflusstes Ergebnis hervorbringt.

2) Das System \mathcal{A} von Teilmengen A^{77} von Ω ist eine σ -Algebra über Ω , d. h. \mathcal{A} besitzt folgende Eigenschaften:

$$\Omega \in \mathcal{A} ,$$

$$A^c \in \mathcal{A} , \quad \text{falls } A \in \mathcal{A} ,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} , \quad \text{falls } A_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

3) Eine Abbildung $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}* , d. h. P besitzt folgende Eigenschaften:

$$P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (P \text{ ist nichtnegativ}) ,$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (P \text{ ist normiert}) ,$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad \forall \text{ Folgen paarweise disjunkter Ereignisse } A_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ (P \text{ ist } \sigma\text{-additiv}) .$$

Als nächstes wird eine Transformation $G : \Omega \rightarrow \Omega$ betrachtet, die messbar ist im Sinne von $[A \in \mathcal{A}] \Rightarrow [G^{-1}A = \{\omega : G\omega \in A\}] \in \mathcal{A}$. Falls $P(G^{-1}A) = P(A)$, $\forall A \in \mathcal{A}$, dann heißt G *maßerhaltend* oder auch P ist *invariant* unter G .

Birkhoff-Khinchin-Theorem:⁷⁸

Sei nun (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, f - eine P -integrierbare reellwertige Funktion und P sei invariant bezüglich G . Dann gilt mit der Wahrscheinlichkeit 1 (i. e. S. P -fast-überall) folgende Beziehung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(G^i \omega) = \hat{f}(\omega) \quad ,$$

⁷⁷ $A \subset \Omega$, A wird auch als Ereignis aus der Grundgesamtheit Ω bezeichnet.

⁷⁸ Vgl. Barnett, W. A. u.a. : *Nonlinear and Complex Dynamics in Economics*, S. 27, Internet-Bezug, 2003. Beweis-Idee s. Behnen, K., Neuhaus, G. : *Grundkurs Stochastik*, B. G. Teubner Stuttgart 1984, S. 249.

wobei $\hat{f}(\omega)$ eine invariante Funktion ist mit der Eigenschaft⁷⁹:

$$\int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) = \int_{\Omega} \hat{f}(\omega) dP(\omega) .$$

Die oben genannte Eigenschaft beinhaltet u. a. aufgrund der Maß-Invarianz die Zulässigkeit der Bildung eines *arithmetischen Mittelwertes* der Realisationen einer Zufallsvariablen⁸⁰ *über die Zeit* bzw. die Zulässigkeit einer Durchschnittsbildung über die Iterationsschritte einer Funktion.

Die meisten dynamischen Systeme werden im Rahmen der klassischen Chaos-Theorie in Bezug auf deren chaotischen Eigenschaften aus dem topologischen oder aus dem geometrischen Blickwinkel betrachtet. Viele Prozesse sind jedoch durch eine derart komplexe Dynamik gekennzeichnet, dass deren geometrische oder topologische Beschreibung entweder sehr schwierig oder gar unmöglich ist. Dieses trifft u. a. auf die markovschen Abfertigungsprozesse zu. Bei solchen Prozessen ist die chaos-theoretische Analyse nur auf Basis eines ausreichenden statistischen Materials möglich. Dabei ist festzuhalten, dass jedes auch noch so "sauber" aufbereitete statistische Material grundsätzlich mit Wahrscheinlichkeiten behaftet ist. Daher erscheint für diese Systeme das Umsteigen vom geometrischen bzw. topologischen Ansatz auf den *ergodischen Ansatz* der Prozessbetrachtung als gerechtfertigt.

Bevor der ergodische Ansatz konkretisiert werden kann, wird hier die nächste wichtige Eigenschaft der oben eingeführten Transformation G erklärt - die *Ergodizitätseigenschaft*.⁸¹ Heuristisch gesehen ist G *ergodisch* (bzw. metrisch transitiv), wenn für fast alle ω die Bahn $\{\omega, G\omega, G^2\omega, \dots\}$ des jeweiligen Startwerts $\omega \in \Omega$ *ähnlich* ist.⁸² Die formelle Beschreibung der Ergodizitätseigenschaft lautet wie folgt:

⁷⁹ Heuristisch gesehen bedeutet diese Eigenschaft, dass die Erwartungswerte der beiden Zufallsvariablen / Funktionen f und \hat{f} unter P gleich sind.

⁸⁰ Allgemein gesprochen ist eine Zufallsvariable eine Variable, die ihre Werte unter Einfluss des Zufalls annimmt. Die eigentliche Begriff-Definition erfolgt im zweiten Teil des Abschnitts.

⁸¹ Vgl. Medio, A.: *Chaotic Dynamics: Theorie and Applications to Economics*, Cambridge University Press 1992, Digital Reprinting 1999, S. 72 – 73.

⁸² Achtung: direkter Zusammenhang mit der Selbstähnlichkeit einer Funktion im Sinne der klassischen Chaos-Theorie.

Definition 3.2:⁸³ Gegeben sei ein dynamisches System $(\Omega, \mathcal{A}, P, G)$. Dann heißt die maßerhaltende Transformation G *ergodisch*, wenn gilt $G^{-1}(A) = A$ ⁸⁴ für die $A \in \mathcal{A}$, die *trivial* sind, d. h. für die $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$ erfüllt ist.

Ergoden-Theorem :

Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Bezogen auf das Birkhoff-Khinchin-Theorem ist die maßerhaltende Transformation G *ergodisch*, wenn für jede integrierbare reellwertige Funktion f der entsprechende Grenzwert \hat{f} konstant ist und P -fast-überall gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(G^i \omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega) .$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass für ergodische dynamische Systeme ein einziges statistisch erfasstes Experiment als Musterbeispiel für das gesamte Systemverhalten dienen kann. Und vor allem, dass die zeitbezogene Mittelwertbildung als gleichwertig einer raumbezogenen Mittelwertbildung anzusehen ist.

Sei nun $f = I_A$ *charakteristische Funktion* von A mit

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases} ,$$

dann ist $\sum_{i=0}^{n-1} I_A(G^i \omega)$ die Anzahl der Elemente der Bahn $\{\omega, G\omega, G^2\omega, \dots\}$, die in A liegen. In Bezug auf das ergodische dynamische System $(\Omega, \mathcal{A}, P, G)$ ist die oben genannte Summe der Ausdruck dafür, wie oft die betrachtete Bahn $\{\omega, G\omega, G^2\omega, \dots\}$ zum Ereignis A (wieder-)kehrt. Theoretisch gesehen kann die Summe unendlich sein - d. h., das System kann beliebig oft zum Ereignis A wiederkehren. Die *durchschnittliche Verweilzeit* des Systems im Ereignis A ist jedoch eher begrenzt. Falls G ergo-

⁸³ Barnett, W. A. u. a. : Nonlinear and complex Dynamics in Economics, Internet-Bezug, 2003, S. 28.

⁸⁴ Oder auch wenn gilt $GA=A$, d.h. G ist umkehrbar.

disch ist und $P(A) > 0$ gilt, kann sogar gezeigt werden, dass folgende Beziehung P-fast-überall gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_A(G^i \omega) = \int_{\Omega} I_A(\omega) dP(\omega) = \int_A dP(\omega) = P(A) .^{85}$$

Mit anderen Worten, die Bahnen eines ergodischen dynamischen Systems $(\Omega, \mathcal{A}, P, G)$ sind Ω -ähnlich: jedes messbare Ereignis $A \subset \Omega$ wird von einer Bahn mit P-fast-beliebigem Startwert ω mit *asymptotischer Frequenz/Häufigkeit* $P(A)$ aufgesucht.

Bezug nehmend auf die Ausführungen des Kapitels 2 werden hier die Beispiele der invarianten Maße für die in dem o. g. Kapitel vorgestellten Attraktoren aufgeführt.⁸⁶

Fixpunkt-Attraktor

Sei $\omega^* \in \Omega$ der (Fix-)Punkt mit der Eigenschaft $G^i \omega^* = \omega^*$, $\forall i$, dann ist

$$P = \delta_{\omega^*} \quad \text{mit} \quad \delta_{\omega^*} \text{ - Dirac-Delta-Funktion, zentriert in } \omega^* ,$$

ein invariantes ergodisches Maß eines dynamischen Systems, das sich auf das o. g. Fixpunkt-Attraktor hin bewegt.

Zyklus-Attraktor

Ein dynamisches System befindet sich auf einem Zyklus-Attraktor, wenn ein $i > 0$ existiert, für den gilt $G^i \omega = \omega$. In diesem Fall kann der Zyklus selber durch den Ausdruck $\gamma = \{G^t \omega \mid t \in [0, i)\}$ beschrieben werden. Das dazu gehörige Maß, definiert durch

$$P = \delta_{\gamma} = \frac{1}{i} \int_0^i \delta_{G^t \omega} dt ,$$

ist invariant und ergodisch.

⁸⁵ Vgl. Medio, A.: Chaotic Dynamics: Theorie and Applications to Economics, Cambridge University Press 1992, Digital Reprinting 1999, S. 72.

⁸⁶ Vgl. ebenda, S. 75 – 77.

Quasiperiodische Bewegung auf dem 2D-Torus-Attraktor

Die Bewegung eines dynamischen Systems auf dem 2D-Torus-Attraktor kann beschrieben werden durch das Vektorfeld (Gleichungssystem) :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 ,$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 ,$$

wobei θ_1, θ_2 - entsprechende Winkel-Variablen sind. Falls das Verhältnis der beiden Frequenzen ω_1/ω_2 irrational ist, handelt es sich dabei um eine quasiperiodische Bewegung auf dem Torus-Attraktor. In diesem Fall ist das Maß

$$\frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2}$$

invariant unter dem Fluss und ergodisch.

Seltsamer Attraktor

Im Falle eines seltsamen Attraktors ist die Situation zu komplex, um eindeutig ein invariantes ergodisches Maß für diesen Attraktor-Typ definieren zu können. Für ein konkretes Beispiel eines seltsamen Attraktors – logistische Funktion mit dem Parameter $r = 4$ – haben Collet und Eckmann⁸⁷ gezeigt, dass das Maß

$$P = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

die entsprechenden Eigenschaften besitzt.

Generell kann ein chaotischer Attraktor unendlich viele ergodische Maße besitzen. So dass es immer zur Entscheidung steht, welches von denen zur weiteren Systemanalyse eingesetzt werden soll.

⁸⁷ Vgl. Collet, P., Eckmann, J. P.: Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems, Birkhäuser, Basel, 1980.

Definition 3.3 : Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Sei durch den Stichprobenraum \mathcal{X} die *Verringerung der Beobachtungstiefe* beschrieben. Des Weiteren sei die Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ gegeben. Ist $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ abzählbar und gilt

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in X(\Omega),$$

so heißt X *diskrete Zufallsvariable* mit Werten in \mathcal{X} .

Definition 3.4: Ein *diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß* P^X definiert über $(\mathcal{X}, P(\mathcal{X}))$ mit der Eigenschaft

$$P^X(B) = P(X^{-1}(B)) \quad \forall B \subset \mathcal{X}$$

heißt das *von X und P induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß* oder auch *Verteilung* von X unter P .

P^X hat die Darstellung:

$$P^X(B) = \sum_{x \in B} P(X^{-1}(\{x\})) \quad , \quad B \subset \mathcal{X} .$$

Zuletzt wird in diesem Abschnitt der Begriff des stochastischen Prozesses erläutert. Vereinfacht gesprochen ist ein *stochastischer Prozess* ein mathematisches Modell eines empirischen Prozesses, dessen zeitliche Entwicklung wesentlich durch den Zufall bestimmt wird: z. B. Entwicklung der Bevölkerung einer Stadt ist nicht nur von der Zeit t abhängig, sondern unterliegt zufälligen Einflüssen.

Definition 3.5: Ein *stochastischer Prozess* (X_t) ist eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_t : X_t \in \mathcal{X}, t \in T\}$ mit

\mathcal{X} - eine Menge der Zustände, in der (X_t) seine Werte annimmt,

t - Zeitvariable,

T - Zeitparameterraum des Prozesses, in dem t ihre Werte annimmt.

Die Menge X nennt man den *Zustandsraum* des Prozesses. Ist X eine abzählbare Menge, so handelt es sich um einen *diskreten Zustandsraum*. Ist X ein Intervall, so ist dementsprechend der Zustandsraum *stetig*.

Ist T eine diskrete Folge, also z. B. $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, dann heißt (X_t) ein *Prozess in diskreter Zeit*. Ist hingegen T ein Intervall, z. B. $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, dann wird (X_t) ein *Prozess in stetiger Zeit* genannt.

Der stochastische Prozess stellt somit eine Folge von Zufallsvariablen dar, wobei jedem Zeitindex t eine Zufallsvariable X_t zugeordnet ist. Zufallsvariable können als Größen aufgefasst werden, die Chancen ausdrücken, mit denen im Rahmen eines Vorgangs mit Zufallscharakter bestimmte reelle Zahlen auftreten. Diese Chancen verändern sich in der Zeit. Zu verschiedenen Zeitindizes sind deshalb verwandte, aber nicht völlig gleiche Zufallsvariable gültig. Der Zufallsvorgang kann zu einem anderen Zeitpunkt wiederholt werden, wobei dies nicht unter denselben Anfangsbedingungen erfolgen muss. Die mathematische Gesetzmäßigkeit, die die Realisierung der Folge von Zufallsvariablen X_t zum beliebigen Zeitpunkt t beschreibt, wird als *Wahrscheinlichkeitsverteilung von (X_t)* bezeichnet.

3.2 Ergodische markovsche Abfertigungsprozesse

Für die Entwicklung eines stochastischen Prozesses ist es entscheidend, in welcher Weise die Wahrscheinlichkeitsverteilung von (X_t) von der Vergangenheit des Prozesses abhängt. Hier sind viele verschiedene Möglichkeiten denkbar. Markovscher Prozess - auch Prozess ohne Nachwirkung - ist ein stochastischer Prozess, bei dem sich die Kenntnis der zukünftigen Entwicklung ausschließlich aus der Kenntnis des gegenwärtigen Standes ergibt.

Definition 3.6: Ein stochastischer Prozess (X_t) ist ein *markovscher Prozess*, wenn gilt:

$$P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_0} = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) =$$

$$= P(X_{t_n} = x_n \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

mit $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ - beliebige Beobachtungszeitpunkte.

Die oben definierte Eigenschaft heißt auch *Markov-Eigenschaft*. Vereinfacht ausgedrückt hat ein markovscher Prozess kein Gedächtnis. Als Beispiel hierzu kann die Exponentialverteilung genannt werden, die eine wichtige Rolle in der Abfertigungstheorie spielt.

Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit und einfacheren Handhabung werden die Abfertigungsprozesse in der Praxis in diskreter Zeit erfasst. Außerdem definiert sich der Output praxisrelevanter Abfertigungsprozesse oft durch die Menge von nichtteilbarem Gut/Stückzahl. Daher ist eine weitere Spezifizierung der markovschen Prozesse sinnvoll.

Definition 3.7: Ein markovscher Prozess heißt eine *Markov-Kette*, wenn der zugehörige Zustandsraum \mathcal{X} diskret ist: $\mathcal{X} = (0, 1, 2, 3, \dots)$.

Hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette nicht von der Zeit ab, spricht man von einer *homogenen Markov-Kette*. Für die Markov-Kette (in diskreter Zeit) gilt definitionsgemäß:

$$P(X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}) =$$

$$= P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = p_{ij}.$$

p_{ij} wird auch *einstufige Übergangswahrscheinlichkeit* aus dem Zustand i in den Zustand j genannt. Die Markov-Kette (X_t) wird vollständig durch den zugehörigen Zustandsraum \mathcal{X} und die einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten⁸⁸ $p_{ij}, \forall i, j \in \mathcal{X}$, charakterisiert.

⁸⁸ $p_{ij}, \forall i, j \in \mathcal{X}$, werden zu einer Übergangsmatrix P zusammengefasst, deren Zeilensummen stets gleich 1 sind: der Prozess kann sinngemäß seinen Zustandsraum nicht verlassen und muss sich nach jedem Schritt in einem der Zustände wiederfinden.

Die Auskunft über die Verteilung der Zustände nach n Schritten geben die n -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten an:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) .$$

Sie lassen sich mit Hilfe des *Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit* berechnen:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathfrak{X}} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} .$$

Zur Analyse des Langzeitverhaltens einer Markov-Kette ist es notwendig, die möglichen Zustände zu klassifizieren:

- Zwei Zustände einer Markov-Kette *kommunizieren* miteinander, falls es jeweils einen (u. U. mehrstufigen) Übergang von dem einen Zustand in den anderen und umgekehrt gibt:

$$\forall i, j \in \mathfrak{X} \text{ kommunizieren} \Leftrightarrow \exists n, m \in \mathbb{N} : p_{ij}^{(n)} > 0 \wedge p_{ji}^{(m)} > 0 ,$$

- Zustände, die mit keinem anderen und nicht mit sich selber kommunizieren, werden als *unwesentlich* bezeichnet:

$$\forall i \in \mathfrak{X} \text{ - unwesentlich} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathfrak{X} : p_{ij}^{(n)} = 0 \wedge p_{ii}^{(n)} = 0 .$$

Definition 3.8: Eine Menge von Zuständen heißt *ergodisch*, falls sie die minimale Menge von miteinander kommunizierenden Zuständen ist, die, wenn die Markov-Kette einen ihrer Zustände erreicht hat, nicht mehr verlassen werden kann.

Die übrigen Mengen von Zuständen werden als *transient* bezeichnet.⁸⁹

Eine *Markov-Kette* mit ausschließlich ergodischen Zuständen heißt selbst *ergodisch*.

Das Langzeitverhalten von ergodischen Markov-Ketten ist durch die Konvergenz gegen einen Gleichgewichtszustand charakterisiert und wird durch den Ergodensatz beschrieben.

⁸⁹ Per definitionem gilt also für die transienten Zustandsmengen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System nie in die jeweilige Zustandsmenge zurückkehrt, größer als 0 ist.

Definition 3.9: Ein Abfertigungsprozess befindet sich im *Gleichgewichtszustand*, wenn die entsprechenden *Zustandswahrscheinlichkeiten* unabhängig vom Ausgangszustand sind und sich im Zeitverlauf nicht mehr verändern:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m > n \quad P^m = P^n.$$

Ergodensatz: Sofern irgendeine Potenz der Matrix P der Übergangswahrscheinlichkeiten nur streng positive Elemente enthält, strebt die Matrix $\lim_{m \rightarrow \infty} P^m$ gegen eine Matrix W mit folgenden Eigenschaften:

- jede Zeile von W ist der gleiche Wahrscheinlichkeitsvektor \bar{w} ;
- die Komponenten von \bar{w} sind streng positiv.⁹⁰

Folgerung 3.1: Laut Ergodensatz gilt $W \cdot P = W$. Matrix W repräsentiert den *stationären Zustand (Gleichgewichtszustand)* einer Markov-Kette.

Der Vektor \bar{w} gibt an, wie wahrscheinlich das System die einzelnen Zustände annimmt, wenn erst einmal der Einfluss der Ausgangsverteilung - auch *Einschwingungsphase* eines Abfertigungssystems genannt - beseitigt ist. Vektor \bar{w} wird auch als Linkseigenvektor⁹¹ der Matrix P zum Eigenwert 1 bezeichnet.

Angewandt auf die praxisrelevanten Abfertigungsprozesse beschreiben die Markov-Ketten die Ankunft der Elemente in das System sowie deren Abfertigung. Die Elementen-Ankunft wird i. d. R. als eine Quelle aufgefasst, die in bestimmten Zeit-

⁹⁰ Achtung: bei dem Ergodensatz handelt es sich lediglich um eine Konkretisierung des Ergoden-Theorems, vgl. Abschnitt 3.1. Der Ergodensatz gilt insbesondere für Markov-Ketten, die durch eine $N \times N$ -Übergangsmatrix beschrieben werden, die in der Haupt- sowie in den beiden Nebendiagonalen streng positive Elemente enthält. Denn eine derartige Matrix besteht bereits in ihrer $(N-1)$ -ten Potenz ausschließlich aus streng positiven Elementen; Ausgeschlossen aus dem Gültigkeitsbereich des Ergodensatzes sind *periodische* Markov-Ketten. Diese weisen eine besondere Struktur auf: sie führen auf eine Übergangsmatrix, den sogenannten (infinitesimalen) Generator, die zyklisch ist.

⁹¹ Zur Erinnerung: Ein Vektor \bar{w} ist ein (*Rechts-*) *Eigenvektor* der quadratischen Matrix P mit Eigenwert λ , wenn $\bar{w} \neq 0$ und $P\bar{w} = \lambda\bar{w}$ gilt. \bar{w} ist ein *Linkseigenvektor* zur P, wenn $\bar{w} \neq 0$ und $\bar{w}^T P = \lambda \bar{w}^T$ gilt.

abständen neue Elemente – einzeln nacheinander oder in Gruppen – dem System zukommen lässt. Die Abfertigung der Elemente erfolgt, je nach Modellanforderungen, in einem Kanal, mehreren parallel oder sequenziell geschalteten Kanälen, oder in einer Kombination der genannten Kanal-Schaltungen.

Wie es bereits im Abschnitt 3.1 beschrieben wurde, kann die Dynamik eines Abfertigungssystems zum einen durch eine Übergangswahrscheinlichkeiten-Matrix explizit angegeben werden. In diesem Fall wird direkt die im Rahmen dieser Arbeit zur Untersuchung stehende Zufallsvariable Systemlänge⁹² N_t , $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, angesprochen. Zum anderen kann die Systemdynamik durch die Angabe der jeweiligen theoretischen Dichte- bzw. Verteilungsfunktionen für den Systemzugang und für die Systemabfertigung beschrieben werden.

Bei den meisten üblichen Abfertigungssystemen, z. B. Bedienung der Kunden in einem Geschäft, an einer Tankstelle oder in einer Arztpraxis, ist die Poissonverteilung mit geeignet gewählten Parametern λ bzw. μ eine hinreichend gute Näherung für die Modellierung der Anzahl der Ankünfte N_t^{ank} bzw. der Anzahl der abgefertigten Elemente N_t^{abf} :

$$N_t^{ank} \sim P_t(\lambda), \text{ mit } \lambda - \text{Ankunftsrate,}$$

$$N_t^{abf} \sim P_t(\mu) \text{ mit } \mu - \text{Abfertigungsrate.}^{93}$$

Die Zufallsvariable Systemlänge N_t , $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, stellt in diesem Fall eine stochastische Kopplung der beiden oben genannten Zufallsexperimente Systemzugang und Systemabfertigung dar. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prozessvariablen Systemlänge $N_t = N_t^{ank} - N_t^{abf}$, $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, gilt unter Annahme eines beschränkten Warteraumes $0 < N_{wr} < \infty$:

⁹² Definiert als die Anzahl der Elemente im System je Zeiteinheit.

⁹³ Die *Ankunftsrate* ist definiert als die durchschnittliche Anzahl der ankommenden Elemente je Zeiteinheit, die *Abfertigungsrate* ist dementsprechend die durchschnittliche Anzahl der abgefertigten Elemente je Zeiteinheit.

Folgerung 3.2:

$$\begin{aligned}
 P(N_t = n) &= P(N_t^{ank} - N_t^{abf} = n) = P(N_t^{ank} = n)P(N_t^{abf} = 0) + \\
 &+ P(N_t^{ank} = n+1)P(N_t^{abf} = 1) + P(N_t^{ank} = n+2)P(N_t^{abf} = 2) + \\
 &+ \dots + \\
 &+ P(N_t^{ank} = N_{wr} - 1)P(N_t^{abf} = N_{wr} - n - 1) + \\
 &+ P(N_t^{ank} = N_{wr})P(N_t^{abf} = N_{wr} - n) = \\
 &= \sum_{i=n}^{N_{wr}} P(N_t^{ank} = i)P(N_t^{abf} = i - n) = \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)t} \sum_{i=n}^{N_{wr}} \frac{(\lambda t)^i (\mu t)^{i-n}}{i!(i-n)!} \quad 94
 \end{aligned}$$

Dabei ist festzuhalten, dass bei den poissonverteilten Ankunfts- bzw. Abfertigungszahlen unter Annahme von hinreichend langer Systemlaufzeit auf die exponentialverteilten Zwischenankunfts- bzw. Abfertigungszeiten geschlossen werden kann.⁹⁵

Wie bereits erwähnt können die meisten praxisrelevanten Abfertigungsprozesse als ein komplexer markovscher Abfertigungsprozess angesehen werden, der sich bei näherer Betrachtung aus einer Mehrzahl von einfachen Markov-Modellen folgender Ausprägungen zusammensetzt:

$$M^{exp} / M^{exp} / 1 : (N ; \text{FIFO}),$$

$$M^{exp} / M^{exp} / k_{|} : (N ; \text{FIFO}),$$

$$M^{exp} / M^{exp} / k_{_} : (N ; \text{FIFO}).⁹⁶$$

⁹⁴ Achtung: die Systemlänge ist nicht mehr poissonverteilt.

⁹⁵ Vgl. Meyer, M., Hansen, K.: Planungsverfahren des Operations Research, Verlag Vahlen, 1985, S. 244 – 259.

⁹⁶ Der Klassifizierungscode für Abfertigungsprozesse u. a. nach Kendall (1951) und Lee (1966) besteht aus fünf Abkürzungen, der Reihe nach lesbar:

- Art des Zugangsprozesses (M = Markov-Kette, ^{exp}=exponentialverteilte Zwischenankunftszeiten),
- Art des Abfertigungsprozesses (M = Markov-Kette, ^{exp}=exponentialverteilte Abfertigungszeiten),
- Anzahl der Kanäle, Art der Kanal-Schaltung,
- Maximal zulässige Systemlänge (Anzahl der Elemente in Kanälen und Warteraum),
- Abfertigungsregel(FIFO = first in, first out).

Die oben aufgeführten Markov-Modelle sind aus der theoretischen Sicht eine Spezifizierung des $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modells. Das $M^{exp}/M^{exp}/1:(N; \text{FIFO})$ -Modell dürfte lediglich ein stabileres Verhalten als das $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modell aufweisen, was nicht den Ausschluss von ggf. vorhandenem chaotischem Systemverhalten bedeuten sollte. Auch die Modelle mit sequentiellen und parallelen Kanalschaltungen können demnach mittels folgender Annahmen auf das allgemeine theoretische $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modell zurückgeführt werden:

- die niedrigste Abfertigungsrate der sequentiell geschalteten Kanäle sei in diesem Fall die ausschlaggebende für das Reduktionsmodell;
- die mittlere Gesamtabfertigungsrate $\mu^{(k)} = k \cdot \mu$ des Modells mit parallel geschalteten Kanälen sei die Abfertigungsrate des entsprechenden Reduktionsmodells.

3.3 Chaos-theoretische Aspekte

3.3.1 Hinreichende Kriterien für das Entstehen des chaotischen Verhaltens

Aus dem Blickwinkel der ergodischen Chaos-Theorie betrachtet, erfüllen die markovschen Abfertigungsprozesse hinreichende Kriterien für das Entstehen des chaotischen Systemverhaltens:

- mit der Definition 3.6 „markovscher Prozess“, allgemein gesehen, und der Folgerung 3.2 „Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prozessvariablen Systemlänge N_t “ - für eine konkrete Problemstellung als Beispiel - wird die *nichtlineare* Prozessdynamik eines markovschen Abfertigungsprozesses erklärt;
- die Definition der Prozessdynamik durch eine Übergangswahrscheinlichkeiten-Matrix P ⁹⁷ bzw. durch die Festlegung von Verteilungsfunktionen für die Ankunfts- und Abfertigungszahlen mit entsprechenden Parametern λ und

⁹⁷ I.d.R. für eine endliche Anzahl der möglichen Systemzustände.

μ und letztendlich die Existenz eines Gleichgewichtszustandes in der Zeit lassen die Annahme *deterministischer*⁹⁸ Strukturen in der Prozessentwicklung zu;

- die Prozessdynamik kann jederzeit durch die *rekursive* Beziehung der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P^{t+1} = P \cdot P^t \quad , \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

erfasst werden;

- vorausgesetzt eine hinreichend genaue Modellierung eines Abfertigungsprozesses als markovscher Prozess, ist auch die *Endogenität* der Prozessdynamik gegeben.

Somit kann die Möglichkeit des chaotischen Systemverhaltens für markovsche Abfertigungsprozesse mittels:

- Untersuchung der Prozessdynamik auf sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und das Mischungsverhalten sowie
- Untersuchung der topologischen Struktur des zugehörigen Attraktors auf die Charakteristika der Selbstähnlichkeit und der fraktalen Dimension hin zugelassen oder ausgeschlossen werden.⁹⁹

3.3.2 Instabilität der Systemlänge

Die Betrachtung des $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modells aus theoretischer Sicht liefert einen Anhaltspunkt für die Annahme chaotischer Verhaltensmuster eines markovschen Abfertigungsprozesses unter bestimmten Voraussetzungen.

⁹⁸ Im Sinne der ergodischen Chaos-Theorie. Ob die Annahme von überwiegend deterministischen Strukturen der Prozessdynamik gerechtfertigt ist, lässt sich empirisch im Rahmen einer Zeitreihenanalyse überprüfen. Hierzu vgl. Kapitel 4, Abschnitt 4.3.

⁹⁹ Ausschlaggebend für die Klassifizierung der Prozessdynamik als chaotisch ist der Nachweis der Anfangswertsensitivität und des Mischungsverhaltens. Die Untersuchung der Attraktor-Struktur hat einen fakultativen Charakter.

Gegeben sei ein $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Prozess, definiert über dem Zustandsraum $X = (0, 1, 2, 3, \dots)$, wobei die einzelnen Zustände den jeweiligen Wert für die Systemlänge N_t , $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, angeben. Der Systemzugang sei durch die *Ankunftsrate* λ , die Abfertigung der Elemente - durch die *Abfertigungsrate* μ beschrieben. Mit Kenntnis von λ und μ kann die Systemdynamik in der Übergangsmatrix P festgehalten werden,¹⁰⁰ für die wegen der Markov-Eigenschaft des $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Prozesses gilt $P^{t+1} = P \cdot P^t$, $t = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Aufgrund der Ergodizitätseigenschaft des Prozesses¹⁰¹ lässt sich die Matrix W der Übergangswahrscheinlichkeiten im Gleichgewichtszustand berechnen. Gleichzeitig kann die erste grundlegende Aussage über die Prozessstabilität gemacht werden: *Der Abfertigungsprozess ist stabil bezüglich seines Gesamtzustandes in Langzeitbetrachtung*. Denn in der Zeit strebt er einen Gleichgewichtszustand an, der durch die Zustandswahrscheinlichkeiten w_i , $i = 0, \dots, \infty$, beschrieben wird, die unabhängig von der jeweiligen Ausgangssituation sind.¹⁰²

$$E(P^t) = W$$

$t \rightarrow \infty$

$$\text{var}(P^t) = 0$$

$t \rightarrow \infty$

Mit Kenntnis der w_i , $i = 0, \dots, \infty$, lassen sich des Weiteren der Erwartungswert $E(N_t)$ sowie die Varianz $\text{var}(N_t)$ bzw. Standardabweichung $\sigma(N_t)$ für die Systemlänge N_t berechnen:

$$E(N_t) = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$t \rightarrow \infty$

$$\text{var}(N_t) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma(N_t) = \frac{\sqrt{\rho}}{1 - \rho}$$

$t \rightarrow \infty$

mit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - Verkehrsdichte des Abfertigungsprozesses.

¹⁰⁰ Detaillierte Vorgehensweise hierzu s. Meyer, M., Hansen, K.: Planungsverfahren des Operations Research, Verlag Vahlen, 1985, S. 252 – 255.

¹⁰¹ Vgl. ebenda, S. 245 – 259. Zum empirischen Nachweis der Ergodizitätseigenschaft einer Markov-Zeitreihe s. Kapitel 4, Abschnitt 4.2.

¹⁰² Vgl. ebenda, S. 252-259.

Bereits an den mathematischen Ausdrücken für die jeweiligen Lage- und Streuungsmaße wird sichtbar, dass der Prozess bezüglich der Systemlänge N_t nicht stabil ist. Denn aufgrund der praxisrelevanten Voraussetzung $\rho \in (0, 1)$ wird klar, dass die Varianz bzw. die Standardabweichung der Prozessvariablen deren Erwartungswert weit übersteigen:

$$\begin{aligned} \underset{t \rightarrow \infty}{\text{var}(N_t)} &\gg \underset{t \rightarrow \infty}{E(N_t)}, \\ \underset{t \rightarrow \infty}{\sigma(N_t)} &\gg \underset{t \rightarrow \infty}{E(N_t)} \quad . \end{aligned}$$

Die festgestellte *Instabilität der Prozessvariablen Systemlänge N_t* führt zu der Annahme der Systemsensitivität bezüglich der Anfangsbedingungen für die betreffende Variable N_t .

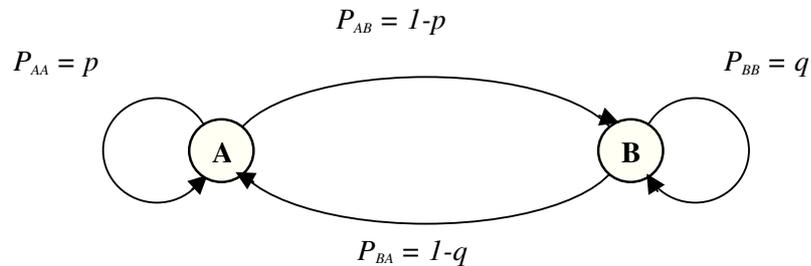
3.3.3 Markovsche Prozesse mit renormierbarer Struktur

Allgemein ausgedrückt bedeutet *Renormierung* das Erkennen und mathematische Erfassen der selbstähnlichen Struktur eines Prozesses. Zur Erinnerung: unter einer selbstähnlichen Struktur ist eine solche zu verstehen, deren Teile kleinere Kopien des Ganzen enthalten.¹⁰³ Um den Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen und der Theorie der markovschen Abfertigungsprozesse darzustellen, wird der Einfachheit halber ein markovscher Prozess mit zwei möglichen Zuständen A und B und Übergangswahrscheinlichkeiten p , $1-p$, q , $1-q$ betrachtet:

- der Prozess befindet sich im Zustand A mit der Wahrscheinlichkeit p , falls der unmittelbar vorhergehende Zustand A gewesen ist, und mit der Wahrscheinlichkeit $1-q$, falls der unmittelbar vorhergehende Zustand B gewesen ist;
- im darauf folgenden Schritt kann der Prozess mit der Wahrscheinlichkeit p im Zustand A bleiben oder aber mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ in den Zustand B übergehen.

¹⁰³ Zu unterscheiden von dem Begriff der *exakten Selbstähnlichkeit* einer Struktur, die gegeben ist, wenn jeder beliebige Teil der Struktur eine genaue Kopie des Ganzen enthält.

Abbildung 3.1: Markovscher Prozess mit zwei Zuständen und vier Übergangswahrscheinlichkeiten, dargestellt in Form eines Graphen



Für $p = q$ geht der in der Abbildung 3.1 dargestellte markovsche Prozess mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in den Zustand A oder B über. Für $p = q = 1/2$ sind die aufeinander folgenden Ereignisse unabhängig. Die Ereignisfolge stellt in diesem Fall ein Selbstähnlichkeitsprozess dar: Beim Weglassen jeden zweiten Ereignisses liegen weiterhin unabhängige und gleichwahrscheinliche Ereignisse A und B vor und die reduzierte Sequenz unterscheidet sich nicht von der ursprünglichen.¹⁰⁴

Ausgehend von einer unendlich langen Beobachtungszeitspanne gilt für die Autokorrelation zum Lag τ zwischen den zwei Ereignissen x_n und $x_{n+\tau}$ des oben beschriebenen Prozesses mit $p = q$:

$$r(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_{n+\tau} .$$

Aufgrund der ergodischen Eigenschaft des oben beschriebenen markovschen Prozesses kann zum einen der Erwartungswert durch den zeitlichen Durchschnitt ersetzt werden. Für $r(1)$ gilt demnach ausgehend von vier unterschiedlichen Möglichkeiten (AA, AB, BA, BB):

$$r(1) = \frac{1}{2} [p - (1-p) - (1-p) + p] = 2p - 1 .^{105}$$

¹⁰⁴ Achtung: für $p \neq q$ ist der markovsche Prozess nicht mehr selbstähnlich, da jeweils benachbarte Ereignisse einer Realisation miteinander korrelieren. Das Auslassen der einzelnen Ereignisse aus der Ereigniskette würde in diesem Fall zu einer deutlich geringeren Autokorrelation führen.

¹⁰⁵ Zu beachten ist die Tatsache, dass für $p < 1/2$ $r(1) < 0$ ist.

Zum anderen, da der gegenwärtige Zustand vollständig auf die unmittelbar vorhergehende Generation der Ereignisse zurückzuführen ist, gilt allgemein für den Korrelationskoeffizienten:

$$r(\tau) = r_1^\tau = (2p - 1)^\tau .$$

Zur Beschreibung der exponentiellen Entwicklung des markovschen Prozesses wird ein neuer Parameter β in folgender Form eingeführt:

$$e^{-\beta} = 2p - 1 \quad \text{für} \quad p \geq 1/2 .$$

Der Korrelationskoeffizient lässt sich somit beschreiben durch:

$$r(\tau) = e^{-\beta\tau} .$$

Durch das Weglassen jeden zweiten Ereignisses aus der Ereigniskette des betrachteten markovschen Prozesses ergibt sich eine neue Ereigniskette des reduzierten Prozesses mit einem anderen Parameter $p^{(2)}$ (i. A. $p^{(2)} \neq 1/2$). Für die Korrelation des neuen Prozesses gilt:

$$r_\tau^{(2)} = r_{2\tau} = r_\tau^2 = e^{-2\beta\tau} .$$

Mit der Verdoppelung des Parameters β gilt für die neue Übergangswahrscheinlichkeit $p^{(2)}$:

$$2p^{(2)} - 1 = (2p - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad p^{(2)} = 2p^2 - 2p + 1 .$$

Im Allgemeinen entspricht das Weglassen einzelner Ereignisse aus der vorliegenden Ereigniskette einer Indexskalierung der Kette s_n mit einer ganzen Zahl r , um die reduzierte Ereigniskette s_{nr} zu erhalten. Den zuvor gemachten Ausführungen zufolge kann die Ereigniskette des neuen markovschen Prozesses auch über einen skalierten Parameter $\beta^{(r)} = r\beta$ erhalten werden.

Nun lassen sich für den dargestellten markovschen Prozess zwei kritische Zustände festlegen:

- bei $\beta = 0$ liegt der vollständig korrelierte Fall des Markov-Prozesses vor;

- bei $\beta = \infty$ liegt der chaotische Fall des Markov-Prozesses vor, da die Entwicklung des Prozesses mit nur zwei möglichen Zuständen und bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten völlig unvorhersagbar ist.

Insbesondere liegt der chaotische Fall - $\beta = \infty$ - vor, wenn $p = q = 1/2$ gilt. Dies wirft die Frage auf, ob auch anderen Verteilungsgesetzen folgende markovsche Prozesse neben der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit die Tendenz zum chaotischen Verhalten aufweisen.

Und zuletzt wird in diesem Abschnitt ein Beispiel für die Konstruktion eines selbstähnlichen, also renormierbaren, Markov-Graphen vorgestellt. Damit die Renormierung auf einen Markov-Graphen angewandt werden kann, muss der Graph, wie es bei anderen Fraktalen – z. B. kochschen Schneeflocke - gegeben ist, skalieren. Als Ausgangspunkt für die Konstruktion der Prozesse mit Skalierungseigenschaft werden periodische markovsche Prozesse betrachtet. Diese Klasse von markovschen Prozessen ist dadurch gekennzeichnet, dass sie in der Langzeitentwicklung eine oszillierende Prozessdynamik aufweisen, so dass die möglichen Zustände periodisch durchlaufen werden. Eingesetzt werden sie vor allem zum mathematischem Modellieren von Trends, saisonalen und zufallsabhängigen Schwankungen, die durch zyklische Verhaltensmuster gekennzeichnet sind.

Als praxisrelevantes Beispiel sei das Modellieren eines Abfertigungsprozesses aufgeführt, der durch eine reguläre stochastische Übergangsmatrix P beschrieben werden kann:

$$P^{(n+1)} = P \cdot P^{(n)} .$$

Bei Erweiterung des Modells durch Einbeziehen der sich ändernden Einbestellpolitiken – beschrieben z. B. durch eine einperiodische Übergangsmatrix P_r - erhält man einen „zusammengesetzten“ markovschen Prozess, der periodische Zyklen aufweist:

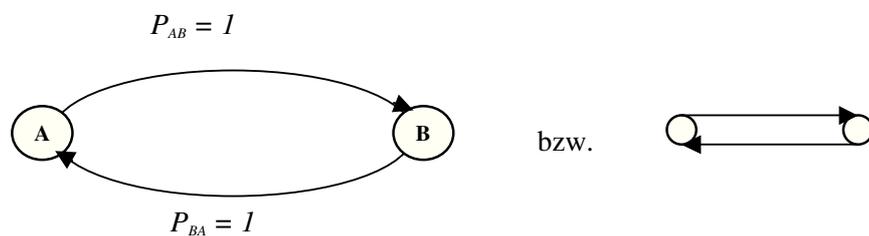
$$P^{(n+1)} = P_r \cdot P \cdot P^{(n)} .$$

Der einfachste periodische markovsche Prozess ist durch zwei mögliche Zustände A und B und folgende Übergangsmatrix gegeben:

$$P_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

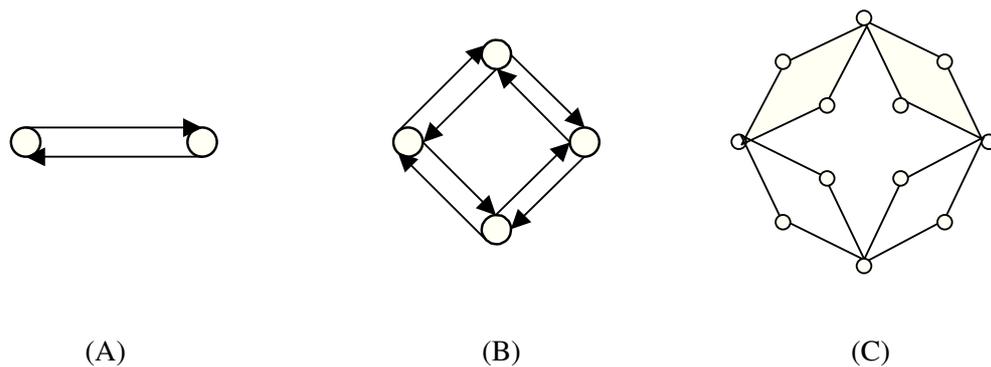
Beginnt der Prozess im Zustand A, so wird er nach jeder ungeraden Anzahl der Übergänge in den Zustand B und nach jeder geraden Anzahl der Übergänge in den Zustand A gelangen.

Abbildung 3.2: Markov-Graph eines einfachen periodischen markovschen Prozesses mit zwei Zuständen



Des Weiteren wird auf den oben beschriebenen Markov-Graphen folgende Iterationsvorgabe angewandt: Auf der jeweiligen Übergangsstrecke zwischen zwei gegebenen Zuständen füge man einen neuen hinzu und konstruiere zwei geschlossene Verbindungen von dem hinzugefügten Zustand aus zu den beiden Ursprungszuständen:

Abbildung 3.3: Konstruktion eines selbstähnlichen Markov-Graphen



Im Fall (C) wurde die geschlossene Verbindung zwischen je zwei Zuständen aus Gründen der Übersichtlichkeit durch eine Linie ersetzt. Die oben beschriebene Konstruktion kann beliebig fortgesetzt werden.¹⁰⁶

Die Übergangsmatrix für den Fall (B) der Abbildung 3.3 sieht bspw. wie folgt aus:

$$(B) \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

Da der auf diese Weise konstruierte Prozess als rekursiv definiert wurde und eine selbstähnliche Struktur aufweist, liegt die Annahme nahe, dass dieser eine fraktale Dimension besitzt – eine weitere Eigenschaft von chaotischen Systemen. Dabei bleibt jedoch die Frage nach der Universalität bzw. Gleichheit der kritischen Exponenten für verschiedene Phasenübergänge des Prozesses, dem die oben gezeichnete Dynamik zugrunde liegt, offen. Denn das Vorhandensein von selbstähnlichen Strukturen allein liefert noch keinen Nachweis für eine chaotische Prozessdynamik.

¹⁰⁶ Der oben konstruierte selbstähnliche markovsche Prozess lässt sich in seiner Struktur mit hierarchischem Gitter für ferromagnetische Spin-Wechselwirkung vergleichen. Vgl. Peitgen, H.-O., Richter, P. H.: The Beauty of Fractals, Springer Verlag, Berlin, 1986.

4 Untersuchung theoretischer Modelle markovscher Abfertigungsprozesse

4.1 Werkzeuge zum Nachweis der chaotischen Prozessdynamik

Anknüpfend an die Ausführungen des Abschnittes 3.3 „Chaos-theoretische Aspekte markovscher Abfertigungsprozesse“ wird in diesem Kapitel eine exemplarische Untersuchung markovscher Prozesse auf das Vorhandensein chaotischer Prozessdynamik vorgestellt. Dabei wird die bereits ausgesprochene Annahme über die Instabilität der Systemlänge wieder aufgenommen und ein vollständiger Nachweis des chaotischen Verhaltens der Prozessvariablen Systemlänge N_t erbracht.

Der Nachweis erfolgt zum einen unter dem Einsatz der üblichen statistischen Werkzeuge der Zeitreihenanalyse:

- allgemeine Analyse der Lage- und Streuungsparameter der Prozessvariablen liefert die entsprechenden Hinweise auf *schwache Stationarität* und *Ergodizitätseigenschaft* der Zeitreihe;
- die Autokorrelationsanalyse der Zeitreihe stellt den Grad der (*Un-*) *Korreliertheit* der einzelnen Realisationen der Prozessvariablen untereinander fest und begründet somit die Aussagefähigkeit der vorliegenden Messungen über das gesamte Verhalten der Prozessvariablen;

- die ARIMA-Modellierung ermöglicht den Aufschluss darüber, inwiefern das beobachtete Verhalten der Prozessvariablen auf *deterministische Strukturen* zurückzuführen ist;
- die Spektralanalyse erklärt die *Natur der Prozessdynamik*.

Zum anderen werden zur Feststellung von weiteren problemrelevanten Eigenschaften der Prozessvariablen die gängigen chaos-theoretischen Werkzeuge eingesetzt:

- die Ermittlung des Lyapunov-Exponenten der Zeitreihe liefert den Nachweis für die *Systemsensitivität bezüglich der Anfangsbedingungen*;
- die Aufzeichnung des N_t -Attraktors veranschaulicht die *Selbstähnlichkeit* der Attraktorstruktur;
- die Ermittlung von entsprechenden fraktalen Dimensionsmaßen dient als Beweis für den *fraktalen* Charakter des N_t -Attraktors.

Als Präsentationsbeispiel wird der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Prozess mit poissonverteilten Ankunfts- sowie Abfertigungszahlen vorgestellt:

$$N_t^{ank} \sim P(\lambda) , \quad \text{mit } \lambda - \text{Ankunftsrate, } \lambda = 1,9 ,$$

$$N_t^{abf} \sim P(\mu) , \quad \text{mit } \mu - \text{Abfertigungsrate, } \mu = 2 .$$

Für die entsprechende Verkehrsdichte ergibt sich somit der Wert $\rho = 0,95$. Zur Erzeugung der Markov-Zeitreihe wurde ein Simulationsmodell des Abfertigungsprozesses unter entsprechenden Verteilungs- und Parameterannahmen in der Simulationssprache ARENA programmiert. Als Zusatzbedingung für die Untersuchungen des Systemverhaltens auf die Anfangswertsensitivität wurde dabei die geringfügige Abweichung in den Anfangsbedingungen auf $\varepsilon_0 = 1$ mit Abfertigungszeit 0,001 ZE gesetzt.

Im Anschluss darauf erfolgt eine problemrelevante Untersuchung des Systemverhaltens markovscher Abfertigungsprozesse in Abhängigkeit von den prozessinitiiierenden Parametern – der Verkehrsdichte und des Systemumfangs. Eine

Gegenüberstellung unterschiedlicher Szenarien ermöglicht ökonomisch relevante Aussagen über die Auswirkungen der beobachteten Prozessdynamik auf die von der Problematik betroffenen Kenngrößen und Funktionen der Betriebsführung, deren Ausmaß sowie die Möglichkeiten zur Gegensteuerung.

4.2 Schwache Stationarität der Markov-Zeitreihe¹⁰⁷

Bei der vorliegenden Problemstellung handelt es sich um eine ökonomische Zeitreihe, die aus der statistischen Sicht als zeit- und wertdiskreter stochastischer Prozess aufgefasst werden kann. Die Anwendung der üblichen Werkzeuge der Zeitreihenanalyse auf die vorliegende Zeitreihe setzt voraus, dass diese die Anforderung an schwache Stationarität erfüllt.

Definition 4.1: Ein stochastischer Prozess (X_t) heißt *schwach stationär*, wenn alle Zufallsvariablen X_t den gleichen Erwartungswert μ und die gleiche Varianz σ^2 besitzen und die Autokovarianzfolge endliche, ausschließlich von der Zeitdifferenz τ abhängige Werte aufweist:

$$E(X_t) = \mu \quad ,$$

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \quad ,$$

$$^{108} \gamma_\tau = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = E(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu) \quad ,$$

¹⁰⁷ Zur Erinnerung: Eine *Zeitreihe* ist eine Gesamtheit von Daten, die in zeitlicher Abfolge erfasst werden. Meist werden Beobachtungen nur zu bestimmten Zeitpunkten gewonnen, in diesem Fall spricht man von *diskreten Zeitreihen*. Bei kontinuierlichen Zeitreihen erfolgen die Beobachtungen durchgehend in definierten Zeitabständen. Die als Beispiel gewählte Markov-Zeitreihe umfasst die Beobachtungen der Prozessvariablen Systemlänge N_t eines konkret definierten markovschen Prozesses. Zu theoretischen Grundlagen der schwachen Stationarität eines $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modells s. Meyer, M., Hansen, K.: Planungsverfahren des Operations Research, Verlag Vahlen, 1985, S. 244 – 259. Daher geht es in diesem Abschnitt lediglich darum, die Vorgehensweise bei dem Nachweis der schwachen Stationarität einer empirischen Zeitreihe vorzustellen.

¹⁰⁸ γ_τ wird als theoretische Autokovarianzfunktion eines schwach stationären stochastischen Prozesses (X_t) bezeichnet.

$$\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Mit anderen Worten, mit der Eigenschaft der schwachen Stationarität wird die Gleichheit der Verteilungen eines jeden Ausschnitts der Prozessvariablen begründet.

Ob die realisierte Zeitreihe eines Prozesses als schwach stationär angesehen werden kann, lässt sich bereits am Anfang einer Zeitreihenanalyse mittels Betrachtung einer grafischen Darstellung der Zeitreihe feststellen. Die empirische Reihe der Realisationen sollte die theoretischen Eigenschaften eines schwach stationären Prozesses wiedergeben, nämlich eine gewisse Konstanz von Niveau, Streuung und Abhängigkeitsstruktur. Sollte die Darstellung einer Zeitreihe auf bspw. Trends oder mit dem Niveau steigende Streuung deuten, so ist die Eigenschaft der schwachen Stationarität der Zeitreihe nicht gegeben.

Als hinreichend gute Schätzer für die oben genannten Eigenschaften einer Prozessvariablen werden der Mittelwert und die empirische Varianz bzw. die Autokovarianzfunktion gesehen:¹⁰⁹

$$E(X_t) \approx \bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t, \quad T \rightarrow \infty,$$

$$\text{Var}(X_t) \approx s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2, \quad T \rightarrow \infty,$$

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) \approx c(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}), \quad \tau \geq 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Als Beispiel werden darauf folgend die Entwicklung des Mittelwertes, der empirischen Varianzfunktion der Systemlänge N_t der vorgestellten $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO) - Zeitreihe aufgeführt.¹¹⁰

¹⁰⁹ Die Aussage über die Güte der entsprechenden Schätzer ist asymptotischer Natur und beinhaltet die hinreichende Gleichheit der theoretischen Größe mit dem jeweiligen Schätzer bei genügend langen Zeitreihen.

¹¹⁰ Die Autokovarianz- und die Autokorrelationsfunktion stehen in einem direkten funktionalen Zusammenhang zueinander. Daher dürfte die Betrachtung der empirischen Autokorrelationsfunktion ausreichen, um die Schlussfolgerungen über die entsprechenden Eigenschaften der Prozessvariablen ableiten zu können. Hierzu s. Abschnitt 4.3.

Abbildung 4.1 : Entwicklung des Mittelwertes der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe

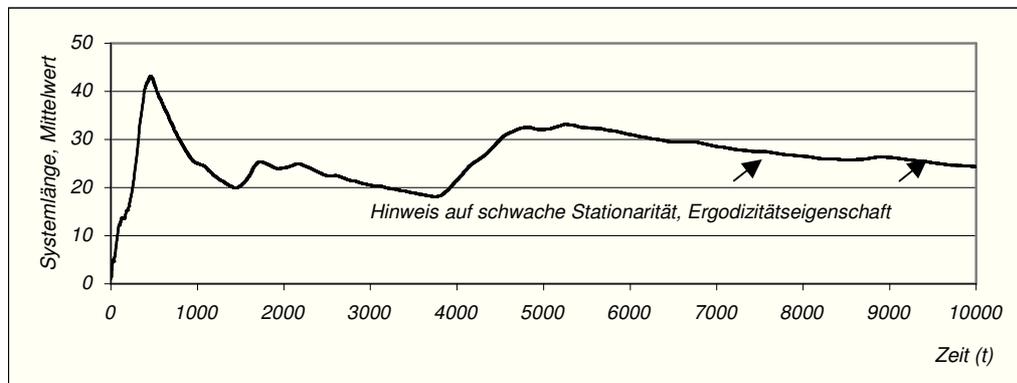
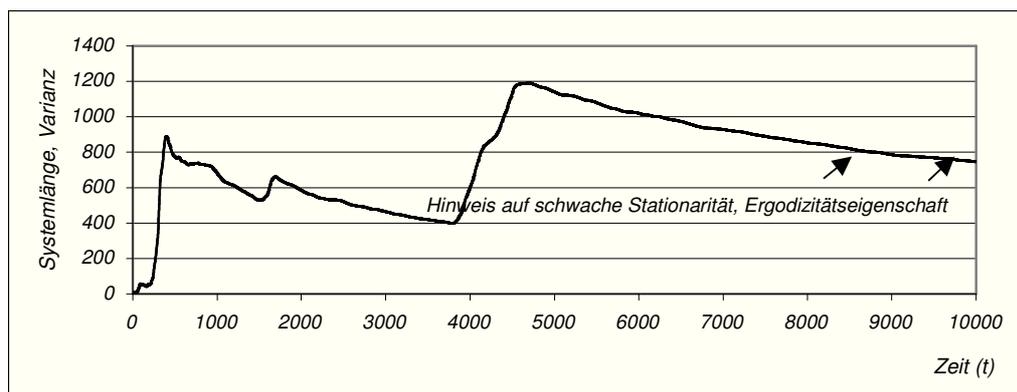


Abbildung 4.2 : Entwicklung der empirischen Varianzfunktion der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe



Sowohl die Entwicklung des Mittelwertes als auch die Entwicklung der empirischen Varianzfunktion weisen deutlich auf die Existenz eines endlichen Erwartungswertes bzw. einer endlichen Varianz der Prozessvariablen hin. Es ergeben sich folgende empirische Größen:

$$\bar{N}_t \approx 26, \quad s_{N_t}^2 \approx 764 .$$

Zum Vergleich wird die Entwicklung des „Mittelwertes“ und der „empirischen Varianzfunktion“¹¹¹ einer Iterationsreihe der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4 und Startwert 0,01 in den Abbildungen 4.3 und 4.4 dargestellt.

Abbildung 4.3: Entwicklung des „Mittelwertes“ der logistischen Iterationsreihe mit Parameterwert 4, Startwert 0,01

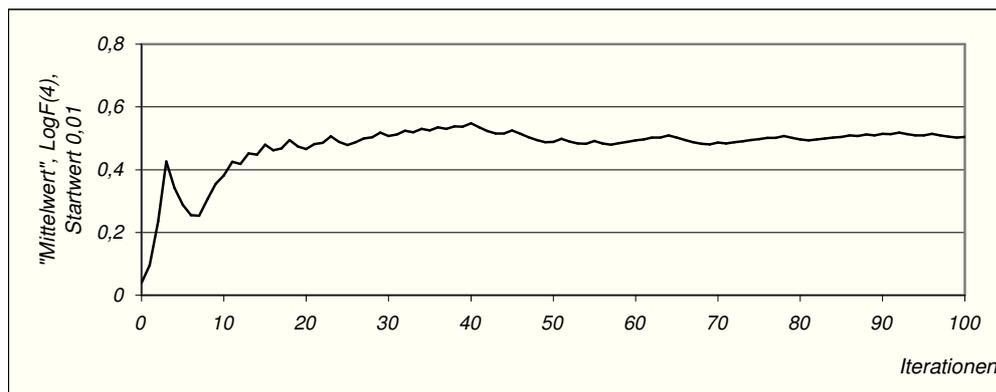
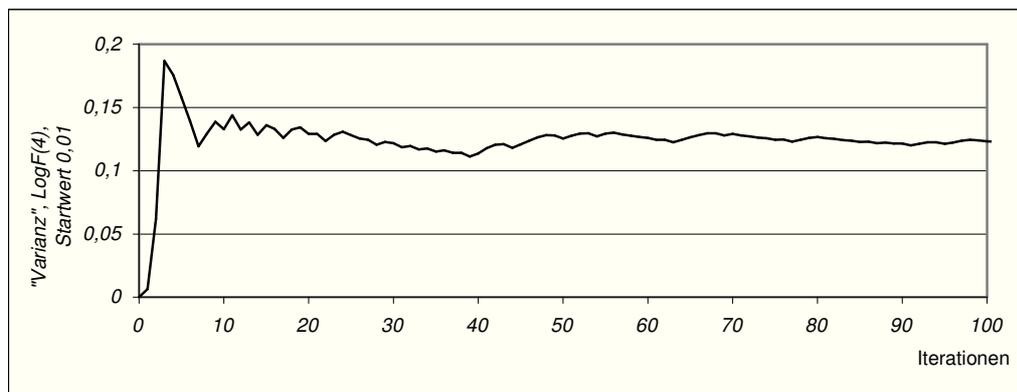


Abbildung 4.4: Entwicklung der „empirischen Varianzfunktion“ der logistischen Iterationsreihe mit Parameterwert 4, Startwert 0,01



¹¹¹ Die Bezeichnung der Lage- und Streuungsparameter ist in Anführungszeichen gesetzt, da die der logistischen Iterationsreihe zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit vollständig deterministisch ist.

4.3 Autokorrelation und ARIMA-Modellierung

Die *Autokorrelationsanalyse* dient der Untersuchung der sequentiellen Eigenschaften einer Zeitreihe und wird benutzt, um den Grad der linearen Abhängigkeit – Korreliertheit - von aufeinander folgenden Realisationen einer Zeitreihe zu bestimmen.

Eine (empirische) Autokorrelationsfunktion beschreibt die zeitliche Korrelation einer Variablen mit sich selbst: Werte einer Zeitreihe werden nach bestehenden Zusammenhängen untersucht. Der festgestellte Zusammenhang wird als eine Funktion der Differenz dargestellt (Erinnerungsvermögen des Systems). Beim Vorliegen einer Zeitreihe x_1, x_2, \dots, x_T ist die empirische Autokorrelation zum Lag $\tau = 0, 1, \dots, T - 1$ gegeben durch

$$r(\tau) = \frac{c(\tau)}{s^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (x_t - \bar{x}) \cdot (x_{t+\tau} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2},$$

und es gilt asymptotisch unter Voraussetzung der schwachen Stationarität des Prozesses (X_t) :

$$E(r(\tau)) \underset{T \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\gamma_\tau}{\gamma_0}.$$

Die Ergebnisse einer Autokorrelationsanalyse werden in einem Korrelogramm – einem Plot von $r(\tau)$ gegen den Lag τ für $\tau = 0, 1, 2, \dots$ – abgetragen.

Das $r(\tau)$ bewegt sich im Wertebereich $(-1, +1)$. Ein naher $+1$ $r(\tau)$ bedeutet hohe positive Korrelation, ein naher -1 $r(\tau)$ - hohe negative Korrelation der Zeitreihenwerte. $r(\tau) = 0$ ist dementsprechend der Nachweis der völligen Unkorreliertheit des Systems. Dabei ist zu beachten, dass zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen stets unkorreliert sind, also $r(\tau) = 0, \forall \tau \geq 0$. Umgekehrt jedoch ist i. A. aus der Unkorreliertheit zweier Zufallsvariablen nicht deren stochastische Unabhängigkeit zu folgern.

Für die allgemeine Gültigkeit der aus einer Zeitreihenanalyse gewonnenen Erkenntnisse ist neben der Eigenschaft der schwachen Stationarität der Zeitreihe das genügend schnelle Abfallen der ggf. bestehenden Abhängigkeiten zwischen den Realisationen der Prozessvariablen mit wachsendem zeitlichen Abstand von Bedeutung. Denn erst dann können geeignete Verallgemeinerungen der auf empirischer Basis gewonnenen Informationen für unabhängige Zufallsvariablen zugelassen werden.

Die eigentliche Aussage der Autokorrelationsanalyse ist demnach, inwiefern das beobachtete Systemverhalten stochastischer Natur ist. Stochastisches Verhalten (auch *weißes Rauschen* genannt) ist rein zufällig und weist keinerlei Korrelation der Zeitreihenwerte auf:

Definition 4.2: Ein White-Noise-Prozess (W_t) ist eine Folge von unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen W_t mit folgenden Eigenschaften:

$$E(W_t) = 0 \quad ,$$

$$\text{Var}(W_t) = \sigma_w^2 \quad ,$$

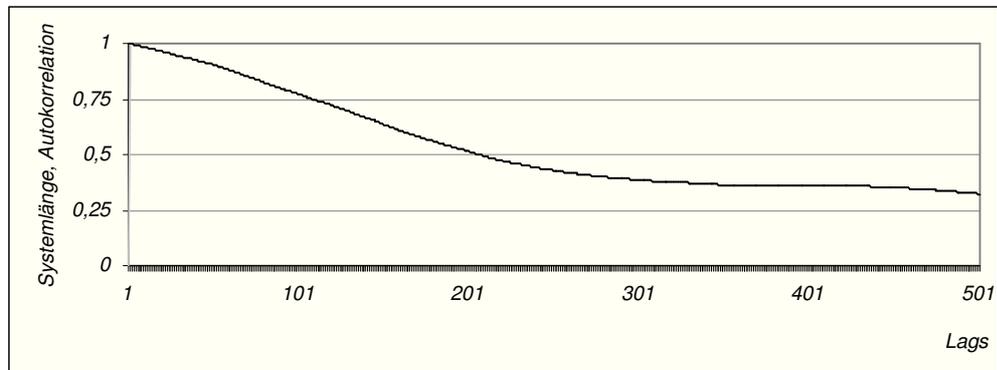
$$\text{Cov}(W_t, W_{t+\tau}) = 0 \quad , \quad \forall t, \tau \geq 0.$$

Bei dem deterministisch-chaotischen Systemverhalten sind jedoch schon aus seiner Definition heraus *zeitliche Korrelationen* zu erwarten.¹¹²

Aus der Praxiserfahrung ist bekannt, dass die Autokorrelationsfunktion eines irregulären Signals bezogen auf das „Erinnerungsvermögen des Systems“ mehr oder weniger schnell abfällt und letztendlich auf die Werte um den Null-Punkt abklingt. Je schneller die Autokorrelationsfunktion abfällt, umso weniger innerer Zusammenhänge bestehen innerhalb der untersuchten Zeitreihe und umso eher ist das irreguläre Verhalten als rein stochastisch zu interpretieren.

¹¹² Hierzu vgl. die Ausführungen des Abschnitts 2.3.2 zum Autokorrelationsverhalten des Hénon-Attraktors, S. 59-60.

Abbildung 4.5: Entwicklung der empirischen Autokorrelationsfunktion der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe



Am Korrelogramm ist zu erkennen, dass sich die empirischen Autokorrelationskoeffizienten mit wachsendem Zeitabstand gegen Null bewegen. Somit ist auch gezeigt, dass die empirische Autokovarianzfolge endliche, von der Zeit t unabhängige Werte aufweist. Alle weiteren aus der Analyse der Zeitreihe gewonnenen Erkenntnisse können als allgemein gültig für das gesamte Verhalten der Prozessvariablen betrachtet werden.

Bei der zu untersuchenden Fragestellung ist des Weiteren darauf zu achten, ob die Entwicklung der empirischen Autokorrelationsfunktion zu Beginn der Beobachtungszeit von Null verschiedene Werte aufweist. Gegebenenfalls handelt es sich bei dem Prozess um einen solchen mit Abhängigkeitsstrukturen zwischen den einzelnen Realisationen der Prozessvariablen. Unter Berufung auf den Wold'schen Zerlegungssatz kann demnach überprüft werden, ob der vorliegende Prozess durch eines der gängigen linearen Zeitreihenmodelle¹¹³ hinreichend genau abgebildet werden kann.

Wold'scher Zerlegungssatz:¹¹⁴

Jeder schwach stationäre Prozess¹¹⁵ (X_t) lässt sich eindeutig durch die Summe zweier Prozesse darstellen:

¹¹³ AR-, MA-, ARIMA-Modelle, Näheres hierzu s. Schlittgen, R., Dr.: Angewandte Zeitreihenanalyse, R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2001, S. 45-77.
¹¹⁴ Vgl. ebenda, S. 59.
¹¹⁵ Achtung: ein White-Noise-Prozess ist stationär, soweit Erwartungswert und Varianz existieren.

$$X_t = D_t + W_t .$$

Dabei ist (W_t) ein MA[∞]-Prozess¹¹⁶; (D_t) ist deterministisch, also lässt sich exakt vorhersagen.

Daraus folgend kann bestimmt werden, ob die Komponente des weißen Rauschens bei dem betrachteten Prozess (X_t) verhältnismäßig schwach und daher vernachlässigbar ist. In diesem Fall kann das beobachtete Systemverhalten überwiegend auf die deterministischen Prozessstrukturen zurückgeführt werden.

Da es sich bei der betrachteten $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe um eine schwach stationäre handelt, lässt sie sich als ein *ARIMA(p, d, q)-Modell* darstellen. ARIMA-Modelle sind als gute Näherungen für viele empirische Zeitreihen bekannt. Sie werden i. d. R. zur Prognose der zukünftigen Entwicklung eines (stochastischen) Prozesses eingesetzt¹¹⁷ und erfassen den *autoregressiven integrierten langfristigen Durchschnitt* der beobachteten Prozessentwicklung. ARIMA-Modelle bestehen aus zwei Komponenten:

- einer gewichteten Summe vergangener Werte der Zeitreihe und
- einer gewichteten Summe vergangener Fehler (oder auch Zufallsschocks genannt)¹¹⁸.

Dabei beschreibt der erstere Teil eines ARIMA-Modells die deterministische Komponente D_t des beobachteten Prozesses, der letztere Teil die Komponente des weißen Rauschens W_t .¹¹⁹ Die Parameter p und q werden als Ordnungsparameter der jeweiligen Prozesskomponenten bezeichnet und erfassen letztendlich das Erinnerungsvermögen der vom beobachteten Prozess erzeugten Zeitreihe. Lässt sich feststellen, dass die zu modellierende Zeitreihe Trends aufweist, müssen diese Trends durch eine Differenzenbildung $(X_t - X_{t-1})$ eliminiert werden. Der Parameter d beschreibt die Ordnung der zur Trendbereinigung benötigten Differenzenbildung. Die allgemeine Form eines ARIMA-Modells lässt sich wie folgt beschreiben:

¹¹⁶ Ein MA[q]-Prozess (X_t) – Moving-Average-Prozess – ist definiert durch die Beziehung $X_t = W_t - \beta_1 W_{t-1} - \dots - \beta_q W_{t-q}$.

¹¹⁷ U. a. bspw. zur Prognose der Entwicklung von Börsenwerten.

¹¹⁸ Vgl. Schlittgen, R., Dr.: Zeitreihenanalyse, R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2005, S. 253-349.

¹¹⁹ I. S. vom Wold'schen Zerlegungssatz.

$$(X_t - \mu) = \alpha_1(X_{t-1} - \mu) + \alpha_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \alpha_p(X_{t-p} - \mu) + \beta_1 W_{t-1} + \beta_2 W_{t-2} + \dots + \beta_q W_{t-q}$$

mit

$$\mu = E(X_t),$$

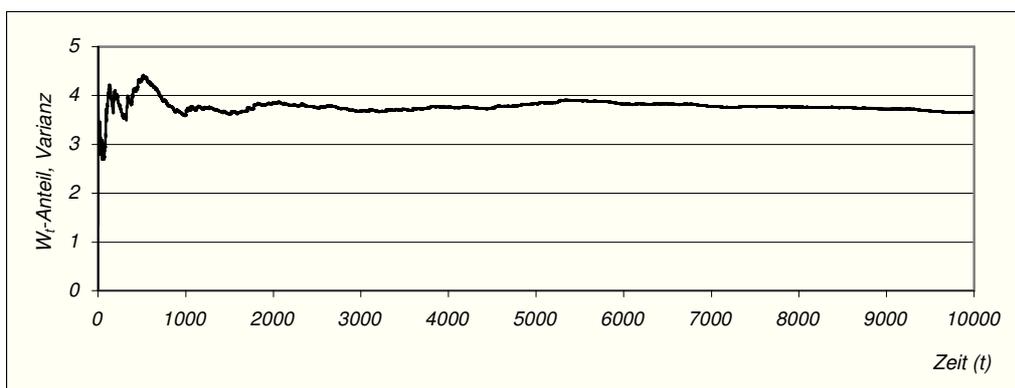
$$E(W_t) = 0,$$

$$\text{Var}(W_t) = \sigma_w^2.$$

Dabei sind $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_w^2$ unbekannte Modellparameter, die geschätzt werden müssen. Als Schätzfunktion für μ wird der Mittelwert der Zeitreihe (X_t) eingesetzt. Die übrigen Modellparameter werden häufig mittels *Likelihood*-, *Kleinste Quadrate(KQ)*-Methoden oder *rekursiver generalisierter M-Schätzung*, auch RGM-Schätzung genannt, approximiert.

Im Rahmen der Modellierung der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe als $\text{ARIMA}(1;1;1)$ -Prozess wurden die Komponente des White-Noise-Anteils W_t sowie deren Varianz berechnet.

Abbildung 4.6 : Entwicklung der empirischen Varianzfunktion des W_t -Anteils der Systemlänge N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ – Zeitreihe



Mittels Vergleich der Varianzen von N_t der ursprünglichen Markov-Zeitreihe und der W_t -Zeitreihe ergibt sich der durchschnittliche Anteil der W_t -Varianz an der

Gesamtvarianz der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)–Zeitreihe in Höhe von 0,00493424. Das deutet darauf hin, dass das Verhalten der Prozessvariablen N_t fast ausschließlich auf den deterministischen Anteil D_t des Prozesses zurückzuführen ist.

4.4 Leistungsspektrum

Die Spektralanalyse dient der Untersuchung einer Zeitreihe auf reguläre und/oder irreguläre Schwankungen, wobei die Betonung auf die Feststellung der irregulären Verhaltensmuster erfolgen soll. Grundsätzlich sei vorgemerkt: Verhaltensmuster, die auf den ersten Blick als irregulär wahrgenommen werden, müssen nicht zwingend chaotischer Natur sein. Es kann sich gleichermaßen um einen Einschwingungsvorgang (reguläre Bewegung mit sehr langer Periode) oder um einen quasi-periodischen Vorgang handeln.

Definition 4.3: Der Prozess (X_t) habe die Autokovarianzfunktion γ_τ , für die gilt $\sum |\gamma_\tau| < \infty$. Dann heißt die Funktion

$$f(\lambda) = \gamma_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma_\tau \cos(2\pi\lambda\tau)$$

das Spektrum von (X_t) .

Unter Verwendung der empirischen Autokovarianzfunktion lässt sich das Spektrum einer Zeitreihe x_1, x_2, \dots, x_T schätzen durch:

$$f(\lambda) \approx \hat{f}_{x,T}(\lambda) = \frac{c(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^{T-1} c(\tau) \cos(\lambda\tau) .$$

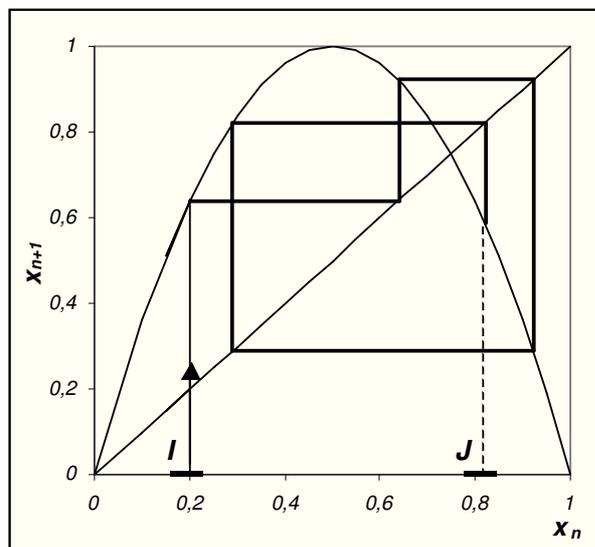
Bezug nehmend auf die klassische Chaos-Theorie entspricht die Spektralanalyse dem Nachweis des Mischungsverhaltens und der Existenz von periodischen Punkten im Definitionsbereich einer Funktion.

Definition 4.4: Das *Mischungsverhalten* eines deterministischen dynamischen Systems kann durch folgende Beziehung beschrieben werden: Für je zwei offene, beliebig kleine Intervalle I und J aus dem

Definitionsbereich des deterministischen dynamischen Systems existieren Anfangswerte in I, die durch Iteration bzw. im Zeitverlauf Folgewerte in J annehmen.

Die Abbildung 4.7 veranschaulicht das Mischungsverhalten der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4. Die Bahn der logistischen Funktion startet mit dem Anfangswert $x_0 = 0,2$ aus dem Intervall I und nach 5 Iterationen nimmt sie den Wert $x_5 = 0,8219\dots$ im Intervall J an. Das Fortsetzen des Iterationsvorgangs würde eine Bahn mit Folgewerten ergeben, die gleichmäßig über den ganzen Definitionsbereich $[0,1]$ verteilt sind. Das gängigste Beispiel für das Mischungsverhalten eines dynamischen Systems aus dem alltäglichen Leben ist die Zugabe eines Gewürzes in einen Teig – beim weiteren Mischen des Teiges verteilt sich das Gewürz gleichmäßig in der gesamten Masse.

Abbildung 4.7: Mischungsverhalten der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = 0,2$

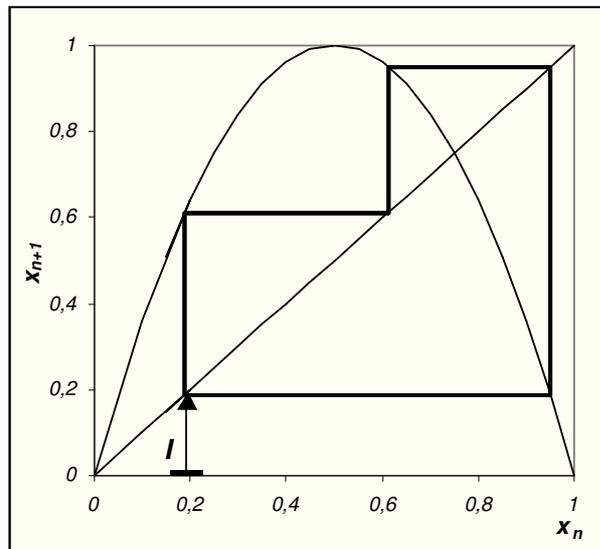


Gleichzeitig neben den Anfangswerten, die das Mischungsverhalten aufweisen, existieren im Intervall I periodische Punkte, die, gewählt als Iterationsstartwert, Bahnen mit auffallend kurzen Periodenlängen hervorbringen. Die Periodenlänge einer solchen Bahn variiert jedoch mit fortschreitender Iteration, bedingt durch die Sensitivität der Funktion. In der Abbildung 4.8 ist das periodische Verhalten des Iterationsstartwertes $x_0 = \sin^2(\pi/7)$, $x_0 \in I$, der logistischen Funktion mit Para-

meterwert 4 dargestellt. In diesem Fall handelt es sich um eine Iterationsbahn mit Periodenlänge 3:

$$x_0 = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \rightarrow x_1 = \sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \rightarrow x_2 = \sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right) \rightarrow x_3 = \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \rightarrow \dots$$

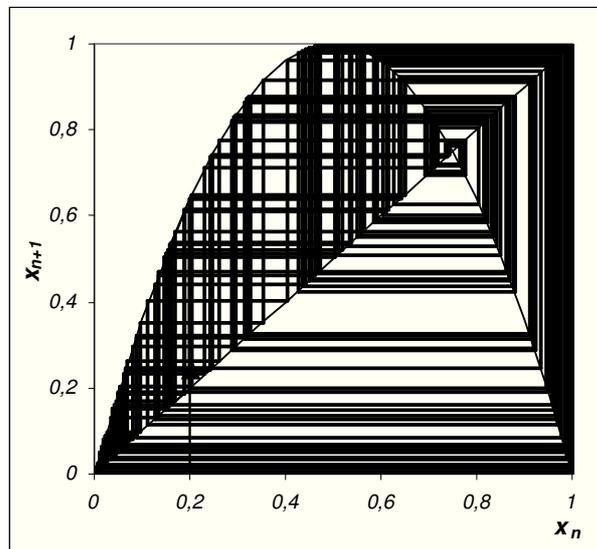
Abbildung 4.8: Periodisches Verhalten der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = \sin^2(\pi/7)$



Die beiden Verhaltensmuster stehen im funktionalen Zusammenhang zueinander und beruhen letztendlich auf der Ergodizitätseigenschaft der Funktion. Diese definiert sich dadurch, dass ausgehend von einem beliebigen Iterationsstartwert bei hinreichend langem Iterieren die Bahn der Funktion über den ganzen Definitionsbereich gleichmäßig verteilt ist und aufgrund der Sensitivität das beschriebene Mischungsverhalten zeitweise durch periodisches Verhalten unterbrochen werden kann. Hier besteht eine direkte logische Verbindung zu der Ergodizitätseigenschaft von markovschen Abfertigungsprozessen.

Die Abbildung 4.9 veranschaulicht die Ergodizitätseigenschaft der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4. Die Bahn aus der Abbildung 4.7 wurde um über 150 Iterationsschritte fortgesetzt, um die gleichmäßige Verteilung der Werte über den gesamten Definitionsbereich der Funktion darzustellen.

Abbildung 4.9 : Ergodizitätseigenschaft der logistischen Funktion mit Parameterwert 4, Startwert $x_0 = 0,2$



Dabei ist auf Folgendes zu achten: eine gleichmäßige Verteilung der jeweiligen Iterationsbahn über den Definitionsbereich der Funktion ist nicht gleichzusetzen mit einer Gleichverteilung der Iterationswerte über den Definitionsbereich. Beispielsweise hat die Analyse des Iterationsverhaltens der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4 ergeben, dass die Wahrscheinlichkeit für die Iterationswerte nahe den Randpunkten 0 und 1 des Definitionsbereichs wesentlich größer ist, als die Wahrscheinlichkeit für die Iterationswerte in der Mitte des Definitionsbereichs.

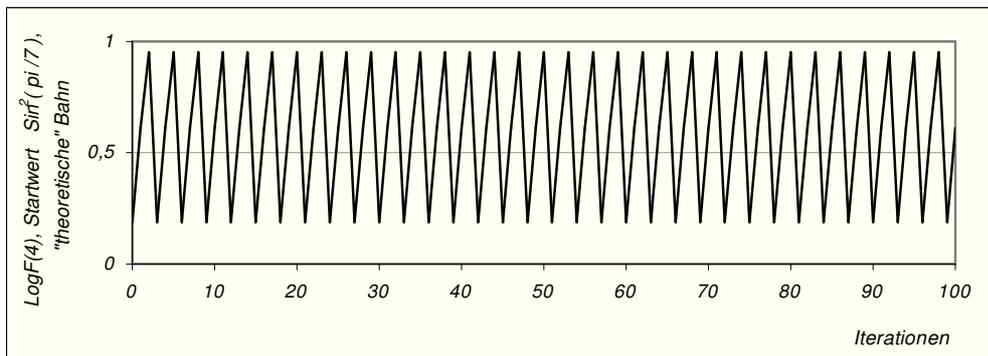
Die oben erwähnten Verhaltensänderungen der Funktion – die Änderung der Periodenlänge und das Auslaufen des Mischungsverhaltens in einer Periode – können in einigen Fällen durch die Rundungsfehler erklärt werden, die bei computergestützten Berechnungen nicht zu vermeiden sind.

Die Abbildung 4.10 liefert ein Beispiel für die Auswirkungen der Anfangswertsensitivität auf die computergestützte Berechnung einer Iterationsbahn der logistischen Funktion mit Parameterwert 4. Als Startwert wird der bereits vorgestellte periodische Punkt $x_0 = \sin^2(\pi/7)$ gewählt. Bei hinreichend langem Iterieren des Startwertes weicht die computererzeugte Bahn der Funktion von der „theoretischen“ ab. Der eingeschlichene Rundungsfehler wächst mit jedem weiteren Iterationsschritt, bis die

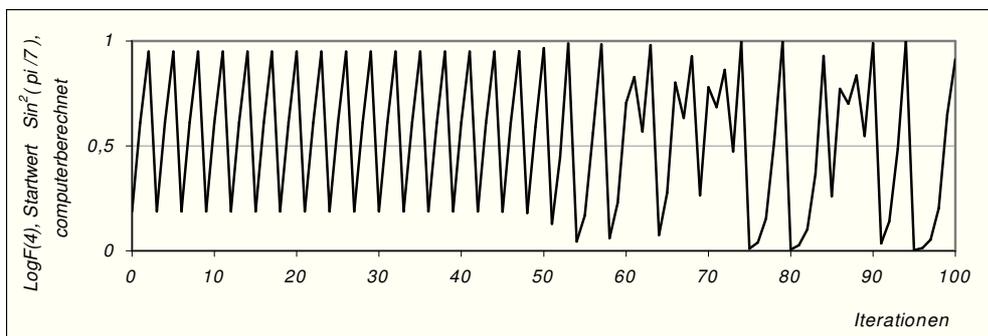
„theoretische“ und die computererzeugte Bahnen nichts mehr miteinander gemein haben:

Abbildung 4.10: Auswirkung der Systemsensitivität auf die computergestützte Berechnung einer Iterationsbahn der logistischen Funktion mit Parameterwert 4

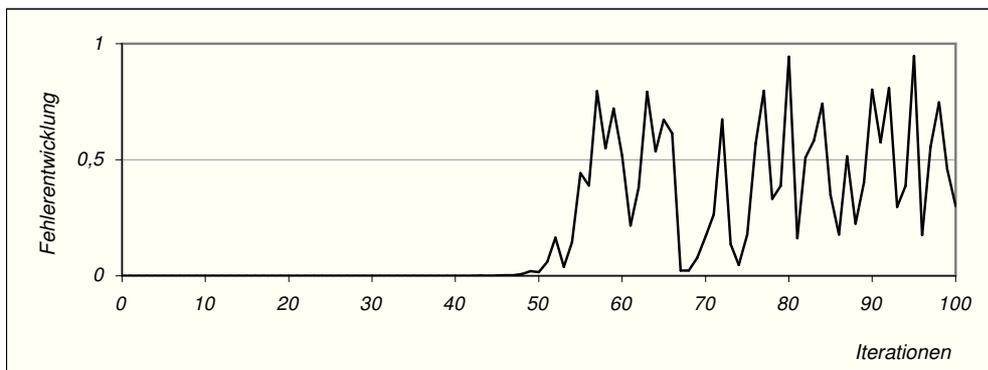
a) „theoretische“ Iterationsbahn



b) computerberechnete Iterationsbahn



c) Entwicklung des Rundungsfehlers aufgrund der Systemsensitivität



Kurz gesprochen, ist es nicht immer möglich, mit Hilfe eines Rechners die exakte Entwicklung eines sensitiven dynamischen Systems wiederzugeben.¹²⁰ Das bedeutet in Bezug auf die markovschen Abfertigungsprozesse, deren Anfangswertsensitivität vorausgesetzt, dass sogar theoretische markovsche Modelle sich nur bedingt einer exakten Analyse auf chaotisches Verhalten unterziehen lassen. Denn das Erzeugen von entsprechenden Zeitreihen mittels eines Simulationsprogramms dürfte bereits Rundungsungenauigkeiten beinhalten. Die Zeitreihen der realen Abfertigungsprozesse sind daher mit der Fehlergefahr in mehrfacher Hinsicht belastet – im Rahmen der statistischen Datenerfassung, der mathematischen und programmtechnischen Modellierung und der Simulation. Somit „reduziert“ sich der empirische Nachweis des Mischungsverhaltens einer Markov-Zeitreihe auf die Analyse des Leistungsspektrums der problemrelevanten Prozessvariablen.

Die Spektralanalyse leistet in diesem Fall die Erfassung der rekurrenten Struktur eines seltsamen Attraktors – unendlich viele Rückkehrperioden mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, die im einzelnen gegen Null gehen.¹²¹ Weist das Spektrum keine einzelnen stark ausgeprägten Frequenzen, sondern ein breites Frequenzband auf, liegt ein dynamisches Systemverhalten mit sehr vielen Perioden vor. Enthält das breite Frequenzband keine bedeutsamen Peaks, wird das beobachtete Spektrum auch als breitbandiges Spektrum bezeichnet. Der zugrundeliegende dynamische Prozess ist entweder aperiodisch oder rein stochastisch.

Die Frage, ob es sich bei der vorliegenden Zeitreihe um einen White-Noise-Prozess handelt, wurde bereits mittels Analyse der empirischen Autokorrelationsfunktion und ARIMA-Modellierung geklärt. Auch die Spektralanalyse kann einen Nachweis der rein stochastischen Natur einer Prozessvariablen liefern, denn ein White-Noise-Prozess hat das Spektrum $f(\lambda) = \sigma_w^2$.

Ein Hinweis auf die ergodische bzw. die Mischungseigenschaft der vorliegenden Zeitreihe wurde bereits im Abschnitt 4.2 vorgestellt. Somit ist das Ziel der

¹²⁰ Im Falle der logistischen Funktion entspricht bspw. die computerberechnete Iterationsbahn exakt der „theoretischen“ Bahn für die Iterationsstartwerte $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$. Denn in diesem Fall entstehen keine Rundungsfehler.

¹²¹ Vgl. Bestle, D.: Beurteilungskriterien für chaotische Bewegungen nichtlinearer Schwingungssysteme in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik, Nr. 100, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1988, S. 76 – 84.

Spektralanalyse die Vervollständigung des Nachweises durch die Aufdeckung eines breitbandigen Spektrums an Frequenzen mit überwiegender Präsenz des niedrigfrequentierten Anteils der Zeitreihe. Die unten aufgeführte Abbildung liefert die Ergebnisse einer Spektralanalyse der Systemlänge N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe. Zum Vergleich wird das Spektrum des W_t -Anteils an der Prozessvariablen dargestellt :

Abbildung 4.11: Spektrum der N_t -Variablen der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe

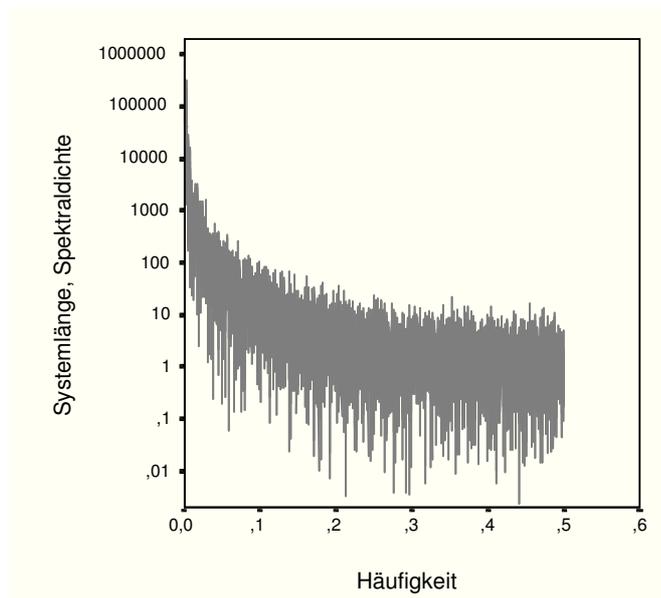
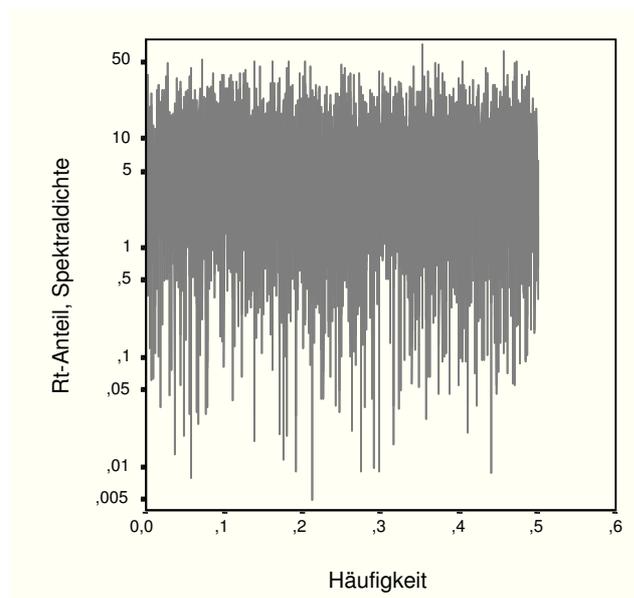


Abbildung 4.12: Spektrum des W_t -Anteils der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe



Die analysierte Markov-Zeitreihe von N_t weist ein breites Band an Frequenzen auf, die sich auf dem gesamten Frequenz-Definitionsbereich $[0; 0,5]$ verteilen. Der Anteil der Fläche unter der Spektraldichte zwischen zwei Frequenzpunkten an der Gesamtfläche von 0 bis 0,5 entspricht dem Anteil der Gesamtvarianz der Markov-Zeitreihe, der auf harmonische Wellen mit Frequenzen aus diesem Bereich zurückgeht. Daher lässt sich aus der grafischen Darstellung der Spektraldichte folgern, dass die Markov-Zeitreihe durch niedrige Frequenzen, d. h. harmonische Wellen mit langen Periodendauern, dominiert wird.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Spektralanalyse die Möglichkeit bietet, das beobachtete Systemverhalten als periodisch oder als aperiodisch zu charakterisieren. Aus dem breitbandigen Spektrum ist jedoch i. d. R. nicht erkennbar, ob das beobachtete aperiodische Verhalten auf die *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* zurückzuführen ist.

4.5 Lyapunov-Exponent

Eine der wichtigen Eigenschaften, durch die das chaotische Systemverhalten charakterisiert werden kann, stellt die *Sensitivität* eines dynamischen Systems bezüglich der Anfangsbedingungen dar. Die *Anfangswertsensitivität* eines Systems führt dazu, dass ein beliebig kleines Intervall von den Anfangswerten im Laufe der Iteration deutlich vergrößert wird. Das bedeutet, dass eine auch noch so geringe Abweichung in den Anfangsbedingungen eine exponentiell wachsende Fehlerfortpflanzung nach sich zieht, wodurch die Prognosefähigkeit für das Verhalten des Systems erheblich beeinträchtigt wird.

Sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ist eine qualitative Eigenschaft eines dynamischen Systems. Eine Quantifizierung dieser Eigenschaft erfolgt mittels des Lyapunov-Exponenten, der folgendermaßen definiert wird:

Definition 4.5: Lyapunov-Exponent $L(x_0)$ beschreibt das durchschnittliche exponentielle Wachstum infinitesimal kleiner Fehler in den Anfangsbedingungen in der Umgebung von einem beliebigen Startwert x_0 :

$$\left| \frac{\varepsilon}{x_0} \right| \xrightarrow{N \text{ Iterationen}} \left| \frac{\varepsilon \cdot e^{N \cdot L(x_0)}}{f^{(N)}(x_0)} \right|$$

$$\varepsilon \cdot e^{N \cdot L(x_0)} = \left| f^{(N)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(N)}(x_0) \right|$$

bzw.

$$L(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^{(N)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(N)}(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx} \right|.$$

$e^{L(x_0)}$ ist demnach der Faktor, um den der Abstand zwischen zwei eng benachbarten Punkten im Mittel nach einer Iteration gestreckt wird.¹²²

Somit beschreibt der Lyapunov-Exponent drei unterschiedliche Verhaltensweisen zweier ursprünglich eng benachbarter Trajektorien eines dynamischen Prozesses im Zeitverlauf:

- bei $L(x) < 0$ liegt exponentielle Konvergenz der Trajektorien vor,
- bei $L(x) = 0$ Neutralität oder
- bei $L(x) > 0$ exponentielle Divergenz .

Das Konzept der Lyapunov-Exponenten ist universell in dem Sinne, dass es sich bei der Analyse „... einer Vielzahl dynamischer Systeme in der Mathematik und in den Naturwissenschaften überhaupt ...“¹²³ auf chaotisches Verhalten bewährt hat. Insbesondere im Rahmen der Analyse von höherdimensionalen dynamischen Systemen sind die Lyapunov-Exponenten eine Schlüsselgröße für die Feststellung und Quantifizierung der sensitiven Systemabhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Die Anzahl der Lyapunov-Exponenten, die ein dynamisches System besitzt, ist gleich der Anzahl der Dimensionen des zugehörigen Phasenraumes.

¹²² Auch als das durchschnittliche Fehler-Wachstum bezeichnet.

¹²³ Peitgen, H.-O., u.a.: Chaos: Bausteine der Ordnung, aus dem Amerikanischen übersetzt von A. M. Rodenhausen, Springer-Verlag Klett-Kotta, 1994, S. 48-49.

Des Weiteren gilt für $L(x_0)$ unter Berücksichtigung der Kettenregel:

$$L(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \prod_{i=0}^{N-1} \left| \frac{df}{dx}(f^{(i)}(x_0)) \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| .$$

Für die praktische Ermittlung des Lyapunov-Exponenten wird häufig eine vereinfachte Vorgehensweise angewandt. Ausgegangen wird vom Fehler-Wachstumsfaktor e^{nL} , der die exponentielle Änderung einer infinitesimal kleinen Störung in den Anfangsbedingungen ε_0 nach n Iterationsschritten bzw. Zeiteinheiten angibt:

$$e^{nL} = \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right| \quad \text{bzw.} \quad n \cdot L = \ln \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right| \quad \text{oder} \quad L = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right|$$

mit ε_0 - Anfangsabweichung,

$\varepsilon_n = f^{(n)}(x_0 + \varepsilon_0) - f^{(n)}(x_0)$ - Entwicklung der Anfangsabweichung nach n Iterationsschritten.

Mit dem Einsatz einer anderen Schreibform

$$\left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right| = \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_{n-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right|$$

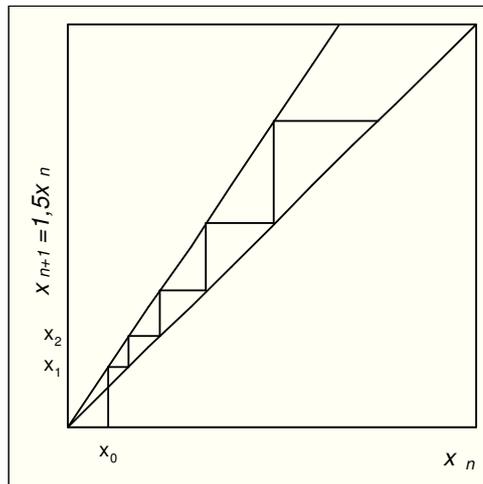
gilt für den Lyapunov-Exponenten:

$$L = \frac{1}{n} \cdot \ln \left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} \right| = \frac{1}{n} \cdot \ln \left(\left| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_{n-2}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \right| .$$

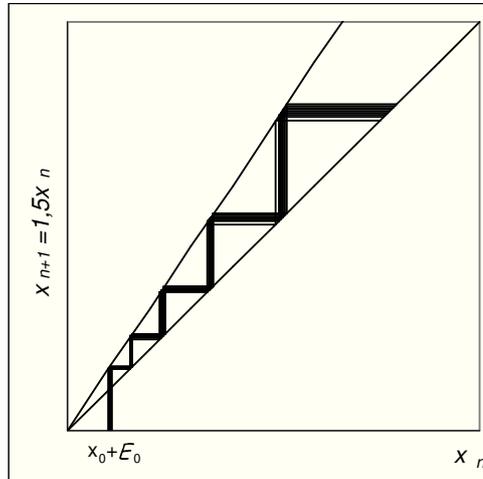
Jedoch nicht jedes System, das durch die Anfangswertsensitivität gekennzeichnet ist, zeigt das chaotische Verhalten auf. Eine Vielzahl von linearen dynamischen Systemen mit einer solchen Eigenschaft verhalten sich regulär. Dies kann am folgenden grafischen Beispiel verdeutlicht werden.

Abbildung 4.13: Beispiel für die Sensitivität des linearen dynamischen Systems $x_{n+1} = 1,5 * x_n$,

a) Entwicklung eines Einzelwertes



b) Entwicklung eines Intervalls von Anfangswerten



In diesem Fall ist zwar das Fehler-Wachstum überproportional, jedoch ist die Wachstumsrate eines beliebig geringen Startfehlers ϵ_0 konstant und einwickelt sich mit demselben Proportionalitätsfaktor wie der Iterationswert:

$$x_n = 1,5^n x_0 ,$$

$$x_{n,\epsilon_0} = 1,5^n (x_0 + \epsilon_0) ,$$

$$\frac{\varepsilon_n}{x_n} = \frac{x_{n,\varepsilon_0} - x_n}{x_n} = \frac{1,5^n \varepsilon_0}{1,5^n x_0} = \frac{\varepsilon_0}{x_0},$$

$$L = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{1,5^n \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \right| = \ln 1,5 = 0,405\dots$$

mit x_0 - Iterationsstartwert,

ε_0 - Startfehler (beliebig geringe Abweichung in den Anfangsbedingungen),

x_n - Iterationswert nach n Iterationsschritten,

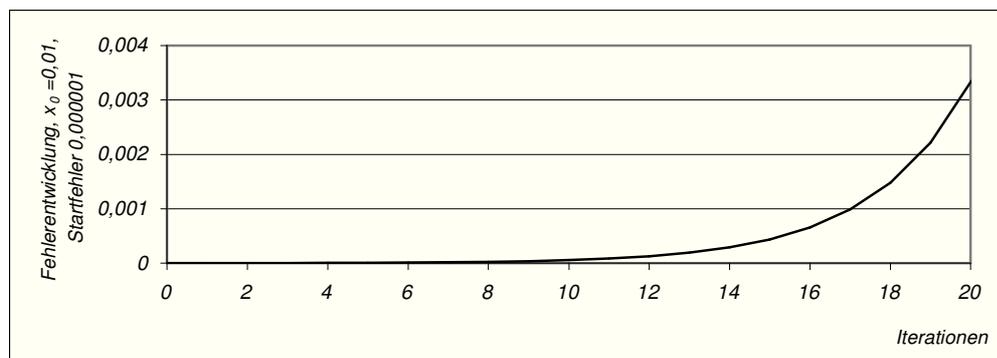
ε_n - Fehler nach n Iterationsschritten.

Die Fehlerentwicklung lässt sich also im vorgestellten Fall für einen beliebig langen Iterationsvorgang durch eine exakte mathematische Gesetzmäßigkeit erfassen bzw. vorhersagen:

Abbildung 4.14: Entwicklung der absoluten Differenzen der Iterationsreihen

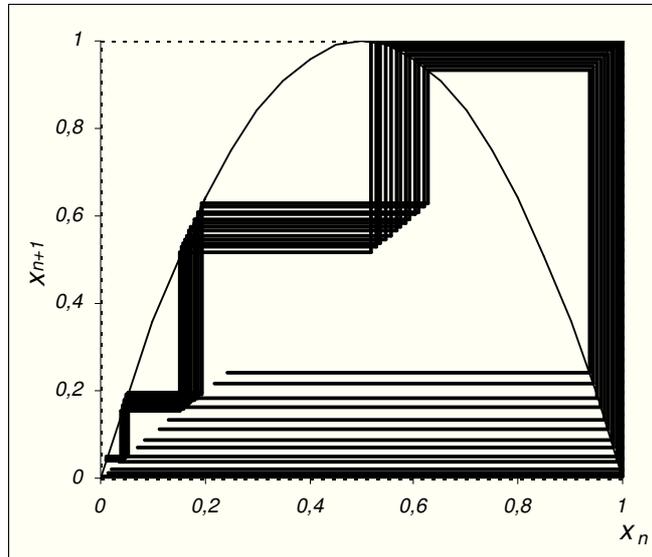
$$\{x_{n+1} = 1,5 \cdot x_n; x_0 = 0,01\} \text{ und}$$

$$\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 1,5 \cdot x_{n,\varepsilon_0}; x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$$



Zum Vergleich wird die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4 durch grafische Iteration in der Abbildung 4.15 dargestellt: Nach nur 4 Iterationsschritten vergrößert sich die Länge des Startintervalls fast um das Achtzigfache von $\Delta I_0 = 0,003$ auf $\Delta I_4 \approx 0,238\dots$ mit $x_4 \in I_4 = [0,00406045; 0,24252245]$.

Abbildung 4.15: Beispiel für die Sensitivität der logistischen Funktion mit Parameterwert 4; Entwicklung eines Intervalls von Anfangswerten $x_0 \in I_0 = [0,01; 0,013]$

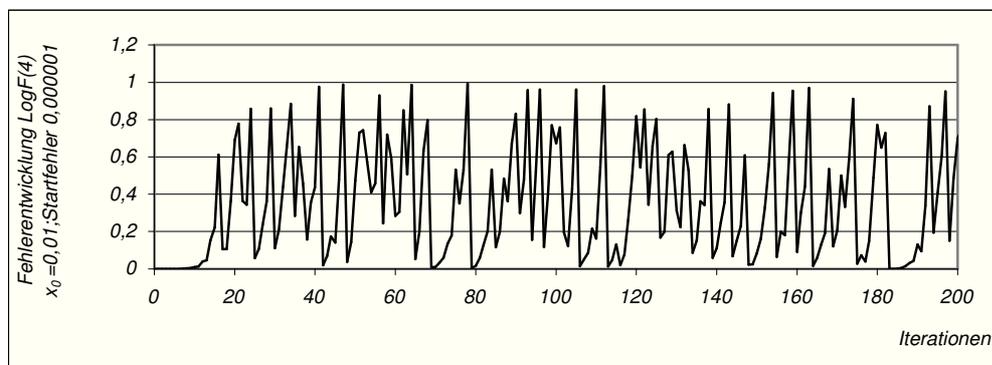


Um die Anfangswertsensitivität eines chaotischen Falls zu verdeutlichen, wird zu dem oben aufgeführten grafischen Beispiel zusätzlich die Entwicklung des Iterationsstartwertes $x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001$ mit dem geringen Startfehler $\varepsilon_0 = 0,000001$ betrachtet:

Abbildung 4.16: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_n der Iterationsreihen der logistischen Funktion mit Parameterwert 4 :

$$\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\} \quad \text{und}$$

$$\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 4 \cdot x_{n,\varepsilon_0} \cdot (1 - x_{n,\varepsilon_0}); x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$$



Wie die Abbildung 4.16 zeigt, verläuft die Entwicklung der absoluten Differenzen

der jeweiligen Iterationswerte $|x_n - x_{n,\varepsilon_0}|$ - die Fehlerentwicklung - irregulär. Für höhere Iterationenzahlen lässt sie sich nicht mehr mathematisch exakt erfassen. Die Vorhersagbarkeit der Fehlerentwicklung verschiebt sich relativ schnell in den probabilistischen Bereich. Die Entwicklung des zugehörigen Lyapunov-Exponenten ist in der Tabelle 4.1 sowie in der Abbildung 4.17 zusammengefasst:

Tabelle 4.1: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten der Iterationsreihen der logistischen Funktion mit Parameterwert 4 :

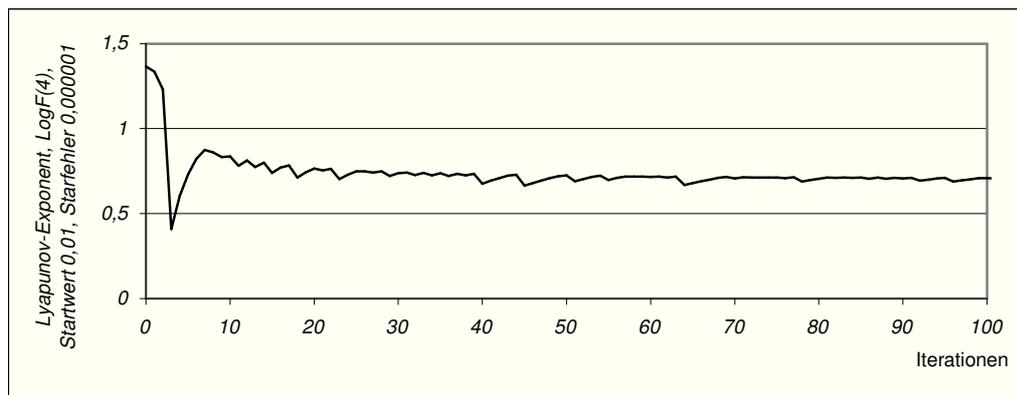
$$\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\} \text{ und}$$

$$\{x_{n+1,\varepsilon_0} = 4 \cdot x_{n,\varepsilon_0} \cdot (1 - x_{n,\varepsilon_0}); x_{0,\varepsilon_0} = 0,010001; \varepsilon_0 = 0,000001\}$$

Iterationen	Lyapunov-Exponent
10	0,833174994
100	0,707478068
1.000	0,694751314
3.000	0,692813575
5.000	0,6932899
8.000	0,693346329
10.000	0,693305228

Abbildung 4.17: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten $L(x_0)$ der Iterationsreihe der logistischen Funktion mit Parameterwert 4 :

$$\{x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n); x_0 = 0,01\} \text{ , } \varepsilon_0 = 0,000001$$



Der Lyapunov-Exponent der betrachteten Iterationsreihe konvergiert also gegen 0,693... . Demnach werden geringe Startfehler bei jeder Iteration der logistischen Funktion ungefähr verdoppelt:

$$e^{L(x_0)} \approx e^{0,693} \approx 2 .$$

Ähnliche Entwicklung des Lyapunov-Exponenten der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4 ergibt sich für jeden anderen Startwert $x_0 \in (0;1)$ sowie jeden beliebigen, verhältnismäßig zu x_0 geringen Startfehler ε_0 .

Das Konzept des Lyapunov-Exponenten im Rahmen der ergodischen Chaos-Theorie basiert auf einer zur klassischen Sicht korrespondierenden Betrachtungsweise. Unter Berücksichtigung des Ergoden-Theorems¹²⁴ und der konkreten Wahl einer integrierbaren reellwertigen Funktion $f(x) = \ln|x|$ sowie einer maßerhaltenden ergodischen Transformation $GX = \frac{X - X^{(\varepsilon)}}{\varepsilon}$ kann der Lyapunov-Exponent wie folgt definiert werden:¹²⁵

$$E(L(X_t, \varepsilon)) = \int_x \ln|GX| dP(x) = \int_x \ln \left| \frac{X - X^{(\varepsilon)}}{\varepsilon} \right| dP(x) . \quad (4.1)$$

Der Ausdruck (4.1) beschreibt nichts anderes als den Erwartungswert der Zufallsvariablen $L(X_t, \varepsilon)$ unter dem invarianten ergodischen Maß P. Aufgrund der Ergodizitätseigenschaft eines markovschen Prozesses ist der oben definierte Lyapunov-Exponent unabhängig von den jeweiligen Anfangsbedingungen, also von der konkreten Wahl des Startwertes x_0 .

Für die Analyse empirischer Zeitreihen lässt sich der unter (4.1) definierte Erwartungswert unter Berücksichtigung des asymptotischen Charakters der Gleichung durch die zeitbezogene Mittelwertbildung - das arithmetische Mittel - $\bar{L}(\chi_t, \varepsilon)$ der entsprechend transformierten experimentell erfassten Zeitreihen-Entwicklungen $\chi_t = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $\chi_t^{(\varepsilon)} = \{x_0 + \varepsilon, x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}, \dots\}$ ersetzen:

$$E(L(X_t, \varepsilon)) \approx \bar{L}(\chi_t, \varepsilon) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \ln \left| \frac{x_t - x_t^{(\varepsilon)}}{\varepsilon} \right| , \quad T \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

mit $t = 0, 1, 2, \dots T$ - Beobachtungszeit,

¹²⁴ Vgl. S.72.

¹²⁵ Vgl. Barnett, W. A. u. a. : Nonlinear and complex Dynamics in Economics, Internet-Bezug, 2003, S. 29.

ε - eine geringfügige Änderung der Anfangsbedingungen.

(4.2) misst für konkrete Zeitreihenentwicklungen den realisierten durchschnittlichen exponentiellen Unterschied zwischen zwei ursprünglich eng benachbarten Trajektorien eines ergodischen dynamischen Systems.

Die Analyse der Prozessvariablen Systemlänge N_t des bereits in den Abschnitten 4.1 – 4.4 vorgestellten $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Prozesses bezüglich der Anfangswertsensitivität hat ergeben, dass:

- die Fehlerentwicklung ε_t der Prozessvariablen N_t durch ein irreguläres Verhaltensmuster gekennzeichnet ist;
- der Schätzer des Lyapunov-Exponenten für den betreffenden markovschen Prozess über die gesamte Beobachtungszeit $T = 10.000 \text{ ZE}$ positiv ist und gegen den Wert 2,25... konvergiert.

Die angesprochenen Eigenschaften der Prozessvariablen N_t , die deren Anfangswertsensitivität begründen, werden anhand der Abbildungen 4.18 - 4.20 sowie der Tabelle 4.2 veranschaulicht. Zur Verdeutlichung des irregulären Charakters der Fehlerentwicklung betrachte man die zu ε_t gehörige Autokorrelationsfunktion. Deren Verlauf gibt die zentrale Eigenschaft eines White-Noise-Prozesses wieder – die vollständige Unkorreliertheit der Zeitreihenwerte ε_t untereinander.

Abbildung 4.18: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der Prozessvariablen N_t , der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe

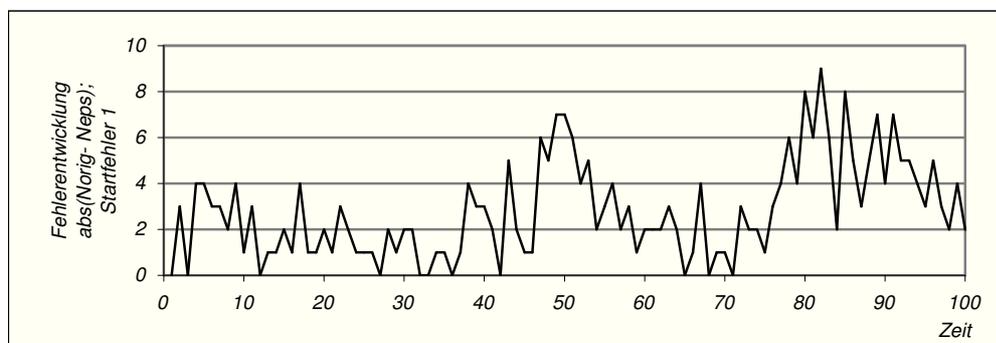


Abbildung 4.19: Entwicklung der Autokorrelationsfunktion der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der Prozessvariablen N_t , der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe

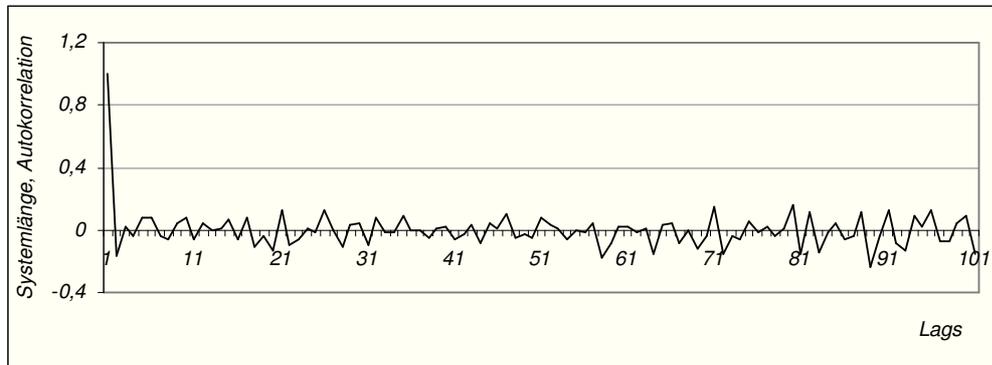
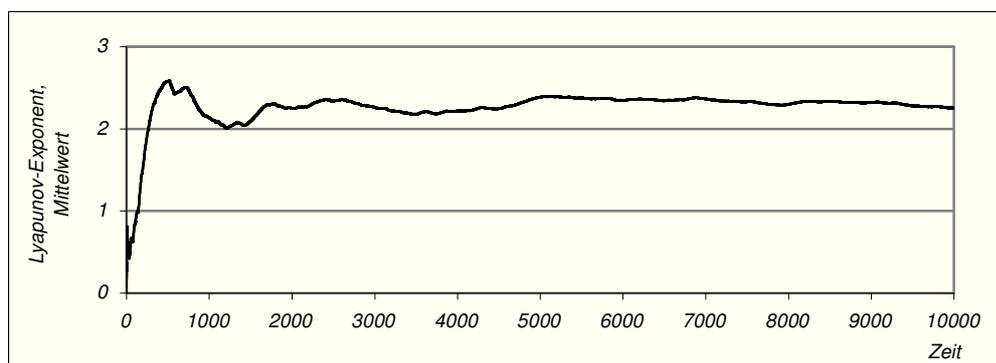


Tabelle 4. 2 : Mittelwerte, zugehörige Streuungsmaße des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe

Beobachtungszeit, ZE	Lyapunov-Exponent		
	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,836448564	0,481296231	0,690277675
1.000	2,13346007	1,348264532	1,160567218
3.000	2,258261934	1,173625687	1,083159489
5.000	2,384543838	1,196704131	1,09383033
8.000	2,299882738	1,144482534	1,06973804
10.000	2,251016606	1,157518265	1,075826433

Abbildung 4.20: Mittelwertentwicklung des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe



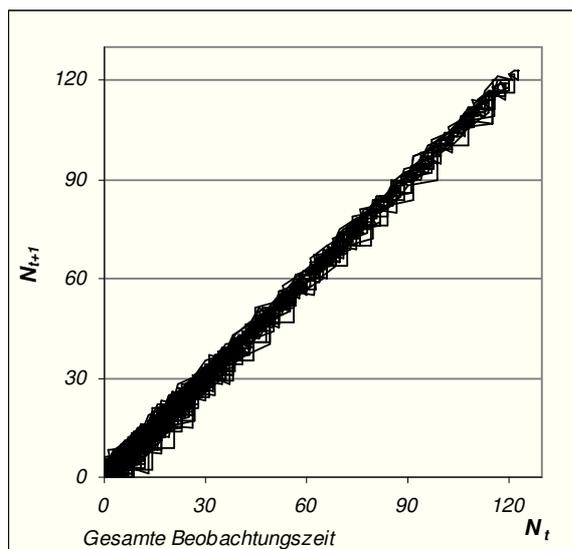
Demnach kann eine geringe Abweichung des Startwertes N_0 des $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Prozesses je Zeiteinheit bis auf das Zehnfache anwachsen:

$$e^{\bar{L}(N_t, \varepsilon)} \approx e^{2,25826...} \approx 10 .$$

4.6 Seltsamer Attraktor

Wie es bereits im Abschnitt 2.3.2 angesprochen wurde, lässt sich die topologische Dynamikstruktur eines chaotischen Systems in Form eines seltsamen Attraktors darstellen. Die zentrale qualitative Eigenschaft eines seltsamen Attraktors ist die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Außerdem zeichnet sich i. d. R. die topologische Struktur des Attraktors, auf dem sich die Prozessvariable bewegt, durch Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension aus. Die Systemdynamik der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe während der gesamten Beobachtungszeitspanne $T = 10.000$ ZE ist in der Abbildung 4.21 dargestellt:

Abbildung 4.21: Attraktor der Systemlänge N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1: (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe, Beobachtungszeit $T = 10.000$ ZE



Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit ist charakteristisch für viele fraktale Strukturen. Im Kapitel 2, Abschnitt 2.2, wurde darauf hingewiesen, dass bei der Selbstähnlichkeit zwischen zwei Ausprägungen zu unterscheiden ist, nämlich zwischen der (annähernden) Selbstähnlichkeit und der exakten Selbstähnlichkeit einer fraktalen Struktur.

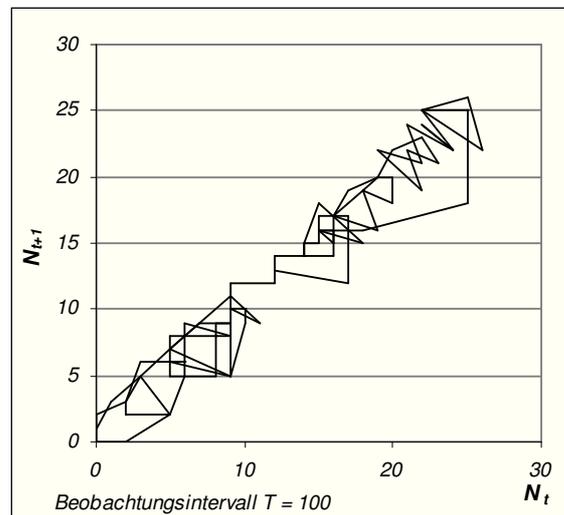
Die exakt selbstähnlichen Attraktorstrukturen sind ausschließlich bei deterministisch-chaotischen Systemen aus dem Bereich der klassischen Chaos-Theorie anzutreffen.

Bei ergodischen dynamischen Systemen können, wenn überhaupt, *selbstähnliche* Strukturen beobachtet werden.¹²⁶ Dabei wird die Strukturelbstähnlichkeit durch die Invarianz des Maßes bedingt, der den zugehörigen Phasenraum miterklärt.

Bei der vorliegenden Markov-Zeitreihe handelt es sich um die Messergebnisse einer diskreten Prozessvariablen. Daher lässt sich die *Selbstähnlichkeit* der Attraktorstruktur in diesem Fall mittels Vergleich der grafischen Darstellung des Attraktors für zwei unterschiedlich lange Beobachtungszeitintervalle qualitativ erfassen. Die Abbildung 4.22 veranschaulicht die selbstähnliche Attraktorstruktur der Prozessvariablen N_t für die Beobachtungszeitintervalle $T = 100$ ZE und $T = 200$ ZE. Anhand dieser Darstellungen lassen sich sowohl der rekurrente Charakter der Bewegung der Prozessvariablen auf dem Attraktor wie die Streckung und die Faltung des zugehörigen Phasenraumes wiedergeben:

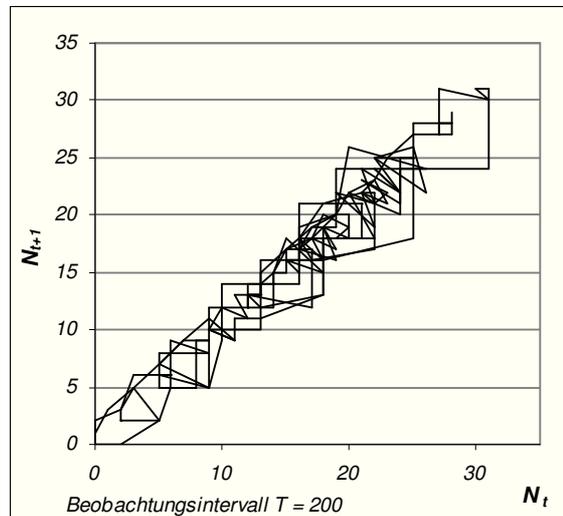
Abbildung 4.22: Bewegung der Prozessvariablen N_t der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe auf dem Attraktor

a) Beobachtungszeitintervall $T = 100$ ZE



¹²⁶ Ausgenommen Prozesse mit renormierbarer Struktur. Denn diese sind exakt selbstähnlich. Vgl. Abschnitt 3.3.3.

b) Beobachtungszeitintervall $T = 200$ ZE



Gleichzeitig stellt sich die Frage nach der fraktalen Dimension des beobachteten Attraktors. Fraktale Dimension gibt die Anzahl der paarweise unabhängigen Zustandsgrößen an, die die Bewegung auf dem Attraktor beschreiben.

Im Rahmen der klassischen Chaos-Theorie ist eine Mehrzahl von Dimensionsmaßen bekannt, die einen seltsamen Attraktor charakterisieren können. Dazu zählen u. a. die Box-, die Hausdorff-, die Lyapunov-, die Informationsdimension sowie die verallgemeinerten Rényi-Dimensionen.¹²⁷ Für die vorliegende Zeitreihe werden in Anlehnung an die Konzepte der Box-Dimension und des shannonschen Informationsmaßes die Informations- sowie die Kaplan-Yorke-Dimension bestimmt.

Das Konzept der Box-Dimension basiert auf der Überlegung, die Komplexität von fraktalen Strukturen mittels Zerlegung des zugehörigen Phasenraumes in m -dimensionale Boxen der Kantenlänge ζ zu messen. Dabei wird die minimale Anzahl der Boxen ermittelt, die zur vollständigen Überdeckung des Attraktors erforderlich ist. Die Box-Dimension¹²⁸ ergibt sich dann aus der Beziehung:

¹²⁷ Vgl. Schröder, M.: Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin, Oxford, 1994, S. 213 - 219.

¹²⁸ Die Box-Dimension ist auch unter der Bezeichnung der fraktalen Dimension oder der Kolmogorov-Kapazität des Attraktors bekannt.

$$D_0 = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\log n(\zeta)}{\log \zeta} ,$$

mit $n(\zeta)$ - die minimale Anzahl der zur Überdeckung des Attraktors benötigten Boxen,

ζ - Kantenlänge einer Box.

Neben der Aufwendigkeit der rechentechnischen Ermittlung der Box-Dimension und der Zuverlässigkeit der numerischen Ergebnisse gehört zu den Mängeln der Box-Dimension, dass diese die unterschiedliche Stärke der Frequentierung durch Trajektorien einzelner Attraktorgebiete nicht berücksichtigt. Mit anderen Worten, die Box-Dimension trägt der für die seltsamen Attraktoren charakteristischen Inhomogenität der Punktverteilung keine Rechnung. Zur Erinnerung: bereits bei der logistischen Funktion wurde festgestellt, dass die Randgebiete des Attraktors 0 und 1 stärker als die übrigen Gebiete frequentiert werden. Gerade bei ergodischen dynamischen Systemen spielt die Häufigkeit, mit welcher die Trajektorien einzelne Attraktorgebiete aufsuchen, bei quantitativer Erfassung der topologischen Attraktorstruktur eine wichtige Rolle.

Unter Zuhilfenahme des shannonshen Informationsmaßes wird nun basierend auf dem Konzept der Box-Dimension die Informationsdimension entwickelt. Das shannonsche Informationsmaß stammt aus der Informationstheorie und definiert die durchschnittliche Menge an Information (gemessen in Bits), die zur Feststellung des nächst folgenden Zustandes eines dynamischen Systems im Phasenraum erforderlich ist:

$$I = -\sum_{\forall i} p_i \log p_i ,$$

mit i - i-ter Systemzustand,

p_i - die Aufenthaltsdauer des Systems im i-ten Zustand.

Aus der Skalierung des shannonshen Informationsmaßes lässt sich die Informationsdimension herleiten:

$$D_I = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{-\sum_{i=1}^{n(\zeta)} p_i(\zeta) \log p_i(\zeta)}{\log \zeta} \right) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{I(\zeta)}{\log \zeta} ,$$

mit $n(\zeta)$ - die minimale Anzahl der zur Überdeckung des Attraktors benötigten Boxen,

ζ - Kantenlänge einer Box,

$p_i(\zeta) = \frac{n_i(\zeta)}{n(\zeta)}$ - die relative Häufigkeit, mit der die i -te Box von der Trajektorie frequentiert wird.

Angewandt auf die ergodischen dynamischen Systeme lässt sich die Informationsdimension unter Erklärung des Elementarereignisses zur minimalmöglichen Box¹²⁹, welche zur Überdeckung des Attraktors eingesetzt werden kann, folgendermaßen definieren:

$$D_I = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i ,$$

mit n - Anzahl der voneinander verschiedenen Elementarereignisse, die während der gesamten Beobachtungszeit eingetreten sind,

p_i - relative Häufigkeit, mit der die Prozessvariable N_t den i -ten Zustand, $i = 1, \dots, n$, im Laufe der Beobachtungszeit angenommen hat.

Für die vorliegende diskrete Markov-Zeitreihe ergibt sich somit die Informationsdimension im Wert von:

$$D_I = 6,139 .$$

¹²⁹ Somit ist die entsprechende Kantenlänge $\zeta = 1$.

Die Kaplan-Yorke-Dimension wird durch die Beziehung definiert:

$$D_{KY} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left(\frac{d(\log n(\zeta))}{d\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right),$$

mit $n(\zeta)$ - die minimale Anzahl der zur Überdeckung des Attraktors benötigten Boxen,

ζ - Kantenlänge einer Box,

und berücksichtigt in ihrer Form die Streckungs- und Faltungsprozesse, durch die die Bewegung auf einem seltsamen Attraktor charakterisiert wird. Unter Erklärung des Elementarereignisses zur minimalmöglichen Box ergibt sich folgender Wert für die Kaplan-Yorke-Dimension der $M^{exp}/M^{exp}/1$: (∞ ; FIFO)-Zeitreihe:

$$D_{KY} = 6,9542 .$$

Nach Untersuchungen von Grassberger, P. und Proccacia, I. an dynamischen chaotischen Systemen bildet die Kaplan-Yorke-Dimension eine obere Grenze der in diesem Abschnitt erwähnten Dimensionsmaße¹³⁰. Insbesondere soll also die Beziehung gelten:

$$D_I \leq D_o \leq D_{KY} ,$$

was im vorliegenden Fall tatsächlich gegeben ist.

In Bezug auf die vorliegende Markov-Zeitreihe ist auch folgende Beobachtung von Interesse: nach Aussage von Kaplan, J. L. und Yorke, J. A. ist die Informationsdimension gleich der sogenannten Lyapunov-Dimension, die sich bei der Kenntnis von allen die Systemdynamik charakterisierenden Lyapunov-Exponenten wie folgt definiert:

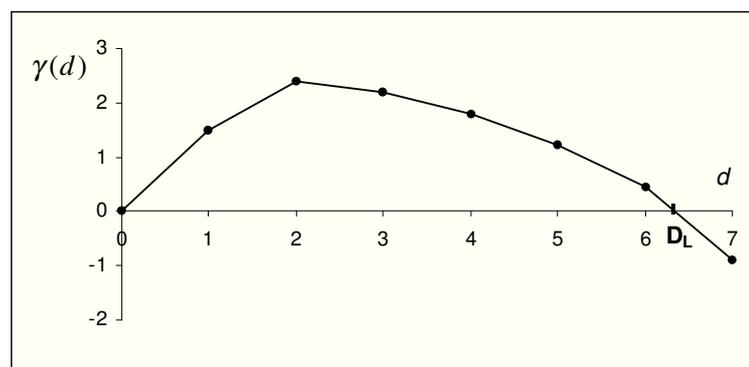
¹³⁰ Vgl. Grassberger, P., Proccacia, I.: Measuring the strageness of strange attraktors, Physica D, 9, 1983, S. 189-208.

$$D_L = \max\{d > 0 \mid \gamma(d) \geq 0\} ,$$

$$\text{mit } \gamma(k) = L_1 + L_2 + \dots + L_k + \dots ,$$

$L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_k \geq \dots$ - der Größe nach geordnete Lyapunov-Exponenten des Systems.

Abbildung 4.23: Lyapunov-Dimension



Aufgrund der komplexen Struktur des untersuchten $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty;FIFO)$ -Prozesses gilt den zuvor erfolgten Ausführungen entsprechend für die fraktale Dimension des zugehörigen Attraktors

$$D_f \in (6, 7) .$$

Demnach verfügt der Prozess neben dem bereits empirisch ermittelten Lyapunov-Exponenten der Systemlänge L_{N_t} über weitere 5 Lyapunov-Exponenten, die in ihrer Zusammenwirkung zum einen die chaotische Eigenschaft der Systemdynamik, die sich im exponentiellen Divergieren zweier eng benachbarter Trajektorien ausdrückt, bedingen, zum anderen jedoch langfristig das Verbleiben des Systems in einem Fluss – dem stationären Zustand – herbeiführen. Die höhere fraktale Dimension des N_t -Attraktors und die Existenz mehrerer Lyapunov-Exponenten für den betreffenden Abfertigungsprozess sind damit begründet, dass es sich bei dem Abfertigungsprozess um eine Kopplung von zwei Zufallsprozessen – dem Zugangs- und dem eigentlichen Abfertigungsprozess - handelt.

Diese Tatsache begründet die Annahme, dass sich die Lyapunov-Exponenten und die höherdimensionale Struktur des Attraktors im Einzelnen auf die Prozessvariablen mittlere Ankunfts- und mittlere Abfertigungszeit, die Ankunftsanzahl und die Abfertigungsanzahl sowie die bestimmten Gesetzmäßigkeiten der Initialprozesse¹³¹ und der Kopplung beziehen. Die Prozessvariable N_t stellt somit, theoretisch betrachtet, eine „aggregierte“ Größe dar. Die problemrelevante Untersuchung der genannten Bezugsgrößen erscheint jedoch aus ökonomischer Sicht weniger interessant. Denn die betriebswirtschaftliche Relevanz der Problematik liegt in der Antwort auf die Frage nach dem Verhalten der eigentlichen Plangröße Systemlänge unter Berücksichtigung der vorhandenen Kapazitäten – technische und räumliche Ausstattung des Betriebes, Leistungsfähigkeit der abfertigenden Einheiten.

Aufgrund der bestehenden Interdependenzen der o. g. Prozessvariablen kann der $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty;FIFO)$ -Prozess als multiplikativer Zufallsprozess charakterisiert werden. Der untersuchte markovsche Attraktor der Systemlänge N_t gehört somit in die Klasse der sogenannten Multifraktale¹³² – komplexe Strukturen, die eine Verallgemeinerung des fraktalen Konzeptes darstellen und deren Erfassung mehr als einen Skalierungsexponenten erfordert. Die Anwendung des multifraktalen Konzeptes ist insbesondere in den Bereichen der Physik, Chemie, Geologie verbreitet, wie z. B. die Verteilung der Menschen auf der Erde oder die Verteilung von Fehlern in Computernetzwerken. Auch einige Glücksspiele weisen multifraktale Strukturen auf.¹³³

¹³¹ Gemeint sind der Zugangsprozess und der eigentliche Abfertigungsprozess.

¹³² I. e. S. Fraktale, die höhere Dimensionen - $D_f > 2$ - aufweisen. Näheres hierzu vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.2, S. 37 - 45.

¹³³ Das einfachste Beispiel hierzu wurde im Kapitel 2, Abschnitt 2.2, S. 37 - 39 vorgeführt. Vgl. auch Schröder, M.: Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin, Oxford, 1994, S. 201 – 225.

4.7 Einfluss von Auslastung und Systemumfang

Die Entwicklung der Systemlänge N_t eines markovschen Abfertigungsprozesses in der Zeit wird neben den jeweils getroffenen Verteilungsannahmen für die Ankunft und Abfertigung der Elemente durch die Höhe der konkreten Parameterwerte λ und μ , bzw. durch die Höhe der jeweiligen Verkehrsdichte $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, beeinflusst. Daher liegt die Annahme nahe, dass auch die Höhe des Lyapunov-Exponenten der Systemlänge N_t in der Abhängigkeit von dem entsprechenden Verkehrsdichte-Wert ρ variiert. Es stellt sich des Weiteren die Frage, wie sich der Lyapunov-Exponent der Systemlänge N_t eines markovschen Abfertigungsprozesses in Abhängigkeit von der Anzahl der Abfertigungskanäle k im System verhält.¹³⁴

Die Analyse markovscher Prozesse bezüglich der Anfangswertsensitivität der Systemlänge N_t in Abhängigkeit von unterschiedlichen Werten für die Verkehrsdichte $\rho \in (0; 1)$ sowie unterschiedlicher Kanalzahl $k \in [1, 20]$ hat ergeben, dass der Lyapunov-Exponent der Systemlänge N_t für beliebige Verkehrsdichte-Werte, $\rho \in (0; 1)$, positiv ist. Somit lässt sich behaupten, dass die markovschen Abfertigungsprozesse i. A. die Eigenschaft der Anfangswertsensitivität sowie die dadurch bedingte Tendenz zum chaotischen Verhalten aufweisen: jede geringfügige Störung/ Abweichung verursacht eine Verhaltensänderung im Prozessablauf, die in der Zeit exponentiell anwächst.

In den unten aufgeführten Tabellen 4.3 und 4.4 sind exemplarisch die Entwicklung des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}_{k,\rho}(N_t, \varepsilon)$ für verschiedene Werte von ρ und k sowie das zugehörige durchschnittliche Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ dargestellt.

¹³⁴ Gemeint sind parallel geschaltete Kanäle, da sich dieselbe Fragestellung für die sequenzielle Kanalschaltung unter Maßgabe der geringeren Abfertigungsrate auf die Untersuchung eines $M^{exp}/M^{exp}/1:(\infty; \text{FIFO})$ -Modells mit entsprechender Abfertigungsrate reduziert.

Tabelle 4.3: Entwicklung des Mittelwerts des Lyapunov-Exponenten $\bar{L}_{k,\rho}(N_t, \varepsilon)$ der $M^{exp}/M^{exp}/k : (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe in Abhängigkeit von ρ und k

Kanal-Zahl	Beobachtungszeit ZE	Lyapunov-Exponent, Mittelwert		
		$r = 0,2$	$\rho = 0,5$	$r = 0,95$
M / M / 1	100	0,041588831	0,244720009	0,836448564
	1000	0,051188659	0,334599366	2,13346007
	3000	0,041019921	0,303349766	2,258261934
	5000	0,040891843	0,326547997	2,384543838
	10000	0,046128041	0,326278263	2,251016606
M / M / 2	100	0,095341615	0,520291176	1,059973056
	1000	0,063443294	0,470003014	2,350213837
	3000	0,055290909	0,427721243	2,004357756
	5000	0,061413258	0,428474916	2,1366561
	10000	0,072956772	0,42954593	2,373433208
M / M / 5	100	0,254244306	0,858826743	1,07623325
	1000	0,215034062	0,622985262	2,198234811
	3000	0,215510896	0,559276699	1,933615827
	5000	0,218254258	0,584057172	1,961593576
	10000	0,217477178	0,584743061	2,100511522

Tabelle 4.4: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ der $M^{exp}/M^{exp}/k : (\infty; \text{FIFO})$ -Zeitreihe in Abhängigkeit von ρ und k

Kanal-Zahl k	System-Auslastung r		
	0,2	0,5	0,95
M / M / 1	1,0	1,4	9,6
M / M / 2	1,1	1,6	9,2
M / M / 5	1,2	1,8	7,8

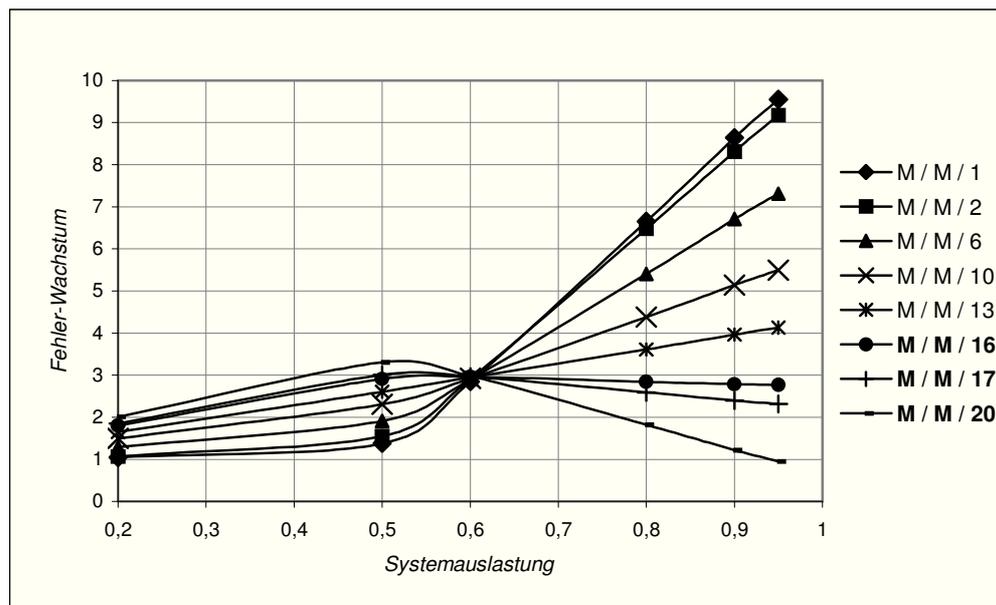
Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Höhe des Lyapunov-Exponenten und des damit beschriebenen durchschnittlichen Fehler-Wachstums, bedingt durch die jeweiligen Ausprägungen der Systemauslastung und des Systemumfangs, sehr stark variiert: das durchschnittliche Fehler-Wachstum bewegt sich zwischen 1 und 10.

Abfertigungssysteme mit einem durchschnittlichen Fehler-Wachstum in Höhe von 1 können im chaos-theoretischen Sinne als *stabil* angesehen werden. Sie weisen zwar einen positiven Lyapunov-Exponenten auf, dieser nimmt jedoch Werte im zwei-

stelligen Nachkommabereich an.¹³⁵ Technisch gesehen bedeutet ein durchschnittliches Fehler-Wachstum in Höhe von 1, dass sich eine geringfügige Störung additiv auf den weiteren Prozessablauf auswirkt: eine kurzzeitige Verzögerung in der Auftragsbearbeitung eines Betriebes bspw. verursacht in diesem Fall lediglich eine gleichlange Verschiebung der Bearbeitung der darauf kommenden Aufträge nach hinten.

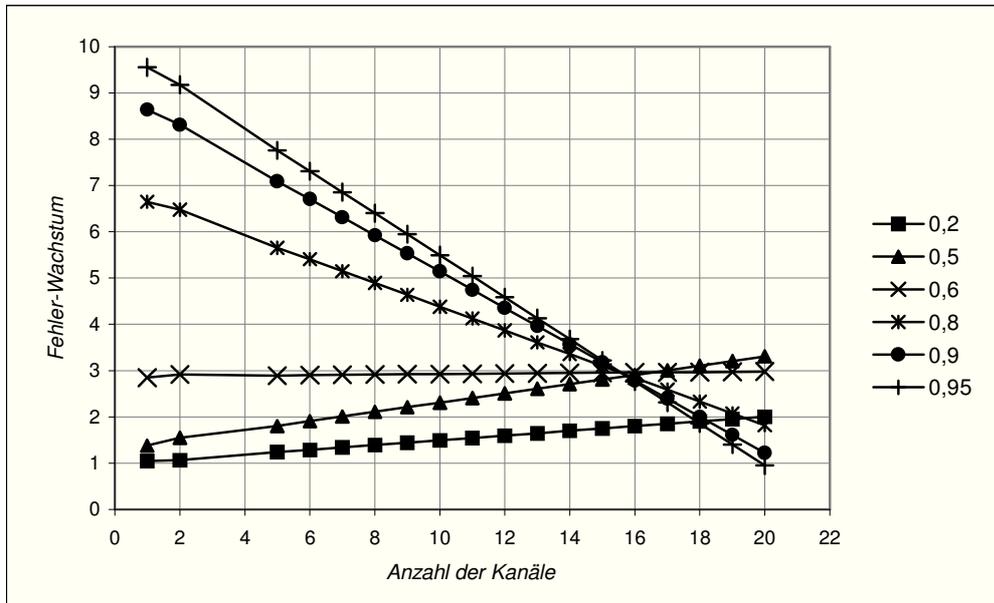
Die Abbildungen 4.24 und 4.25 veranschaulichen das durchschnittliche Fehler-Wachstum für unterschiedliche Szenarien des Systemumfangs und der Auslastung.

Abbildung 4.24: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ in Abhängigkeit von Systemauslastung ρ für unterschiedliche Kanalzahlen k



¹³⁵ Vgl. Tabelle 4.3, $k = 1$, $\rho = 0,2$.

Abbildung 4.25: Durchschnittliches Fehler-Wachstum $e_{k,\rho}^L$ in Abhängigkeit von Kanalzahl k für unterschiedliche Systemauslastungsgrade ρ



Eine Detailanalyse der dargestellten Szenarien lässt in Bezug auf die Höhe des durchschnittlichen Fehler-Wachstums und dessen Verhalten bei Variation der Szenarien vier voneinander abzugrenzende Bereiche erkennen:

- Prozesse mit Systemauslastung unter 60 %,
- Prozesse mit Systemauslastung in Höhe von 60 %,
- Prozesse mit Systemauslastung über 60 % und Kanalzahl bis zu 15, einschließlich sowie
- Prozesse mit Systemauslastung über 60 % und Kanalzahl größer 15.

Abfertigungsprozesse, die mit einer Systemauslastung unter 60 % gefahren werden, weisen ein durchschnittliches Fehler-Wachstum zwischen 1 und 4 auf. Wobei mit ansteigendem Auslastungsgrad und/oder mit wachsender Kanalzahl das durchschnittliche Fehler-Wachstum ansteigt:

$$\rho < 0,6: 1 \leq e_{k,\rho}^L \leq 4, \quad \forall k, \wedge ((k \uparrow \vee \rho \uparrow) \Rightarrow e_{k,\rho}^L \uparrow).$$

Eine 60 %-ge Auslastung zieht für Systeme beliebigen Umfangs die gleiche Anfangswertsensitivität nach sich, die durch das 3-fache durchschnittliche Fehler-Wachstum gekennzeichnet ist:

$$\rho = 0,6: e_{k,\rho}^L = 3, \quad \forall k .$$

Es lässt sich in diesem Fall von einer Indifferenz der markovschen Abfertigungsprozesse im chaos-theoretischen Sinne bezüglich der Systemflexibilität sprechen: eine Erhöhung oder Verringerung der Kanalzahl bei gleichbleibender 60%-ger Auslastung des Abfertigungssystems ändert nichts am Ausmaß der Empfindlichkeit des Systems gegenüber geringfügigen Störungen und somit am Ausmaß der Unsicherheit des Prozessablaufs.

Abfertigungsprozesse, die mit bis zu 15 Kanälen ausgestattet sind und mit einer Auslastung von über 60 % gefahren werden, sind durch ein durchschnittliches Fehler-Wachstum zwischen 3 und 10 charakterisiert:

$$\rho > 0,6 \wedge k \leq 15: 3 \leq e_{k,\rho}^L \leq 10 .$$

Mit steigender Auslastung eines solchen Prozesses steigt auch das Fehler-Wachstum an. Jedoch erhöht man die Anzahl der Kanäle im Abfertigungssystem bei gleichbleibendem Auslastungsniveau, verringert sich das durchschnittliche Fehler-Wachstum und somit auch die Unsicherheit des geplanten Prozessablaufs:

$$\rho > 0,6 \wedge k \leq 15: \rho \uparrow \Rightarrow e_{k,\rho}^L \uparrow, \quad k \uparrow \Rightarrow e_{k,\rho}^L \downarrow .$$

Sieht sich ein Unternehmen in einem solchen Fall aufgrund von bspw. momentaner Auftragslage der Notwendigkeit gegenüber, kurzfristig Produktionszahlen zu erhöhen, was mittels einer höheren Auslastung zu erreichen ist, hat es mit einer exponentiell ansteigenden Unsicherheit seiner Planung für die kommende Periode zu rechnen. Daher sind

- die erforderlichen Lagerbestände,
- zusätzlicher Personalbedarf,
- Fertigstellungszusagen

im Voraus unter Kenntnisnahme des erhöhten Risikos zu bemessen.

Ist die Ursache für die Erhöhung der Produktionszahlen eine langfristige Unternehmensexpansion und soll dies durch eine Kapazitätserweiterung des Produktionsbetriebes erreicht werden, kann das Unternehmen mit einem zusätzlichen positiven Effekt - nämlich mit der Steigerung der Stabilität des Produktionsablaufs gegenüber früher - rechnen.

Ist die Stabilität des Produktionsablaufs an sich ein wichtiges Ziel für die Unternehmensführung und steht diese vor der Auswahl einer geeigneten stabilitätserhöhenden Maßnahme, ist auch in diesem Fall die Erhöhung der Kanalzahl als eine geeignete Alternative in Betracht zu ziehen. Dabei ist der Nutzen aus der Erhöhung der Produktionsstabilität gegen die jeweiligen Investitionskosten abzuwägen.

Bei Abfertigungsprozessen, die über mehr als 15 Kanäle verfügen und mit einer Auslastung von über 60 % gefahren werden, liegt das durchschnittliche Fehler-Wachstum zwischen 1 und 3:

$$\rho > 0,6 \wedge k \geq 16: 1 \leq e_{k,\rho}^L \leq 3.$$

Mit steigender Auslastung und/oder Kanalzahl sinkt das Fehler-Wachstum:

$$\rho > 0,6 \wedge k \geq 16: (k \uparrow \vee \rho \uparrow) \Rightarrow e_{k,\rho}^L \downarrow.$$

Produktions-/Dienstleistungsbetriebe, die nach einem solchen Szenario fahren, sind in einem verhältnismäßig geringen Ausmaß für Störungen beliebiger Natur anfällig. Schwankungen des Auslastungsgrades oder gar ein kurzfristiger Ausfall eines Kanals ziehen geringere Abweichungen des realen Produktionsablaufs von dem Geplanten nach sich. Denn diese werden dank des Systemumfangs und der damit verbundenen Systemflexibilität frühzeitig gemindert oder abgefangen. Sowohl eine technische Erweiterung als auch ein Anstieg der Auslastung führen in diesem Fall zur Verringerung der Unsicherheit im Produktionsablauf. Zu beachten ist dabei auch ein gewisser Synergieeffekt, der sich aus der gleichzeitigen Erhöhung des Auslastungsgrades und der Kanalzahl ergibt: die daraus resultierende Steigerung der Stabilität gegenüber geringfügigen Störungen im Produktionsablauf ist größer als eine solche, die durch nur eine der o. g. Maßnahmen zu erreichen wäre. Von Bedeutung ist des Weiteren die Erkenntnis, dass ab einer bestimmten Anzahl der Abfertigungskanäle ein Betrieb die Möglichkeit hat, ein im chaos-theoretischen Sinne stabiles Szenario zu fahren: mit

einer Kanalzahl in Höhe von 20 und einer 95 %-gen Auslastung¹³⁶ geht die Tendenz zum chaotischen Verhalten gegen Null, das durchschnittliche Fehler-Wachstum liegt bei 1, die Plangrößen lassen sich mit hoher Sicherheit realisieren. Ist ein Produktionsbetrieb mit mehr als 20 Abfertigungs-kanälen ausgestattet, ist ein chaosfreies Produktionsszenario bereits mit einem geringeren Auslastungsgrad erreicht. Dieses hohe Stabilitätsniveau ist jedoch stets nur für Auslastungsgrade von über 60 % möglich.

¹³⁶ Vorausgesetzt die technische und nachfragebedingte Realisierbarkeit der Auslastung.

5 Untersuchung eines praxisbezogenen Leistungsprozesses

5.1 Problemstrukturierung

Es wird der Behandlungsbereich einer ***-Klinik¹³⁷ betrachtet. Hierbei könnte es sich sowohl um eine Leistungseinheit¹³⁸ eines medizinischen Betriebes – bspw. einen Raum zur Röntgendiagnose oder einen für chiropraktische Behandlung – als auch um den gesamten Leistungsbereich eines solchen Betriebes handeln, der sich aus einer Mehrzahl von parallel und/oder sequentiell arbeitenden Leistungseinheiten zusammensetzt. Dieser Ansatz könnte auch für die Praxis eines niedergelassenen Arztes gelten.

Des Weiteren wird unterstellt, dass die Patienten in zufälliger Zahl pro Zeiteinheit eintreffen und sich in einem Warteraum aufhalten, bis sie in den freigewordenen Behandlungsraum eintreten können. In Abhängigkeit von der Diagnose bzw. von der konkreten Art der erforderlichen Behandlung und dem Zustand des Patienten ist auch die Behandlungszeit eine zufällige Größe. Da es sich jedoch dabei um einen normalen betriebswirtschaftlichen Leistungsprozess handelt, ist der eigentlichen Leistung stets eine Planung vorgeschaltet. Die im Rahmen des Planungsvorgangs festgelegten Termine bzw. Behandlungsdauern basieren i. d. R. auf Erfahrungswerten der Vergan-

¹³⁷ Aus Datenschutz-Gründen wird der Name des Klinikums durch *** ersetzt.

¹³⁸ Aus theoretischer Sicht als ein Abfertigungskanal zu verstehen, in dem je ZE höchstens nur ein Patient behandelt werden kann.

genheit. Die Terminfestlegung für den jeweiligen Leistungsprozess ist als determinierende Komponente zu verstehen, die bei einem Simulationsansatz in Form von den bereits realisierten Werten einer Zeitreihe zum Ausdruck kommt. Zusätzlich können mit einem Simulationsansatz weitere prozessgestaltende Planungsmaßnahmen – wie bspw. eine Beschränkung des Warteraumes – berücksichtigt werden.

Die Untersuchung des Leistungsprozesses der ***-Klinik auf chaotisches Verhalten erfolgt unter dem Einsatz eines Simulationsmodells¹³⁹, das die Abfertigung des Patientenstroms der Klinik in einer bestimmten Zeitspanne hinreichend genau abbildet und die Durchführung unterschiedlicher Szenarien – möglicher Abläufe des realen Systems – zwecks Analyse der Simulationsergebnisse im Hinblick auf die vorliegende Fragestellung ermöglicht.

Untersucht wird dabei die Frage, inwiefern ein derart determinierter Prozess chaotisches Verhalten aufweisen kann. Den Mittelpunkt einer solchen Untersuchung bildet die Feststellung, ob eine verhältnismäßig geringe Störung¹⁴⁰ zu einem vollkommen anderen Prozessablauf führen kann und ggf. ob eine derartige Verhaltensänderung vom irregulären bzw. nicht vorhersagbaren Charakter ist. Der ökonomische Wert der Untersuchung bezieht sich folglich auf die Aufdeckung der Möglichkeiten einer stabilitätserhöhenden Prozessgestaltung. Der Detailliertheitsgrad der Analyse im Hinblick auf die Planungs- bzw. Beobachtungszeiträume¹⁴¹ sowie auf den Umfang und die Komplexität des betrachteten Systems kann, wie bereits erwähnt, je nach Bedarf variieren. Die in diesem Kapitel vorgestellte Vorgehensweise ist repräsentativ für eine chaos-theoretische Untersuchung derartiger, in der betriebswirtschaftlichen Praxis jederzeit vorzufindender, Leistungsprozesse.

Dem eigentlichen Entwurf eines Simulationsmodells geht die problembezogene Analyse der Struktur sowie der statischen und dynamischen Eigenschaften des realen Leistungsprozesses der Klinik voraus. Die Systemeigenschaften beschreiben jeweils

¹³⁹ Der Begriff Simulationsmodell nimmt seinen Ursprung aus der eigentlichen Definition eines Modells als materielle oder immaterielle (geistige, formale) Darstellung eines Realitäts-Ausschnitts, die eine „experimentelle Manipulation der abgebildeten Strukturen und Zustände“ ermöglicht. Ein derart konstruiertes Modell, bei dem eine mehrfache experimentelle Manipulation der Input- und/oder Outputgrößen, sowie aller diese Größen beeinflussenden systeminternen Interaktionen möglich ist, wird als Simulationsmodell bezeichnet. Vgl. Niemeyer, G.: Kybernetische System- und Modelltheorie, München, 1977, S. 57.

¹⁴⁰ Diese definiert sich letztendlich in Zeiteinheiten, die im Vergleich zu den jeweiligen Zwischenankunftszeiten und den Behandlungsdauern der Patienten im infinitesimalen Bereich liegen.

¹⁴¹ Es kann sich dabei um einen Tag, eine Woche, einen Monat etc. als exemplarischen Zeitraum handeln.

zeitpunktbezogen das Ergebnis von Interaktionen zwischen dem System und seiner Umwelt - System-Input und System-Output - sowie innerhalb des Systems –Transformation des System-Inputs zwecks Herstellung eines angestrebten System-Outputs. Im zu untersuchenden Fall handelt es sich um einen Patienten-Strom, an dem, entsprechend den jeweiligen Diagnosen der Patienten, bestimmte chirurgische und ggf. medizinisch-pflegerische Leistungen zu erbringen sind.

Aufgrund der vorliegenden Fragestellung kann das betrachtete System auch als *relativ geschlossen* klassifiziert werden¹⁴², denn bei der Modellbildung werden nur die im Hinblick auf das Untersuchungsziel interessierenden Interaktionen berücksichtigt. Ein relativ geschlossenes System ist im chaos-theoretischen Sinne als ein endogenes System mit einem gewissen Grad an Dissipation zu verstehen. Dem endogenen Charakter des Systems wird im Rahmen der Modellbildung durch eine hohe Übereinstimmung des Modells mit dem realen System Rechnung getragen. Die dissipative Eigenschaft des Systems wird dabei zum einen durch den zufälligen Charakter der Patienten-Ankunft und der -Abfertigung mitabgebildet. Zum anderen erlaubt eine Simulation eine oder mehrere punktuell wirkende Einflussgrößen mit einzubeziehen, die den Charakter einer verhältnismäßig geringfügigen Störung aufweisen.

Die Modellierung des Klinik-Leistungsprozesses gehört zu den sogenannten *Black-Box-Problemen*: das reale System ist durch teilweise bekannte Strukturen und unbekanntes Verhalten zu beschreiben, wobei das Untersuchungsziel das Systemverhalten ist.¹⁴³ Die *Black-Box-Probleme* gelten als das wichtigste Einsatzgebiet von Simulationsmodellen. Denn computergestützte Simulationsmodelle sind am besten geeignet, um in der Phase der Modell-Validierung eine möglichst hohe Übereinstimmung des Modells mit dem realen Betriebsgeschehen zu erzielen. Außerdem sind sie effektive Hilfsmittel für Vor- und begleitende Untersuchungen des Systemverhaltens. Daher kann eine computergestützte Durchführung des Modell-Algorithmus häufig analog einer Experiment-Durchführung am realen System angesehen werden. Voraussetzung zur Lösung derartiger Probleme bilden:

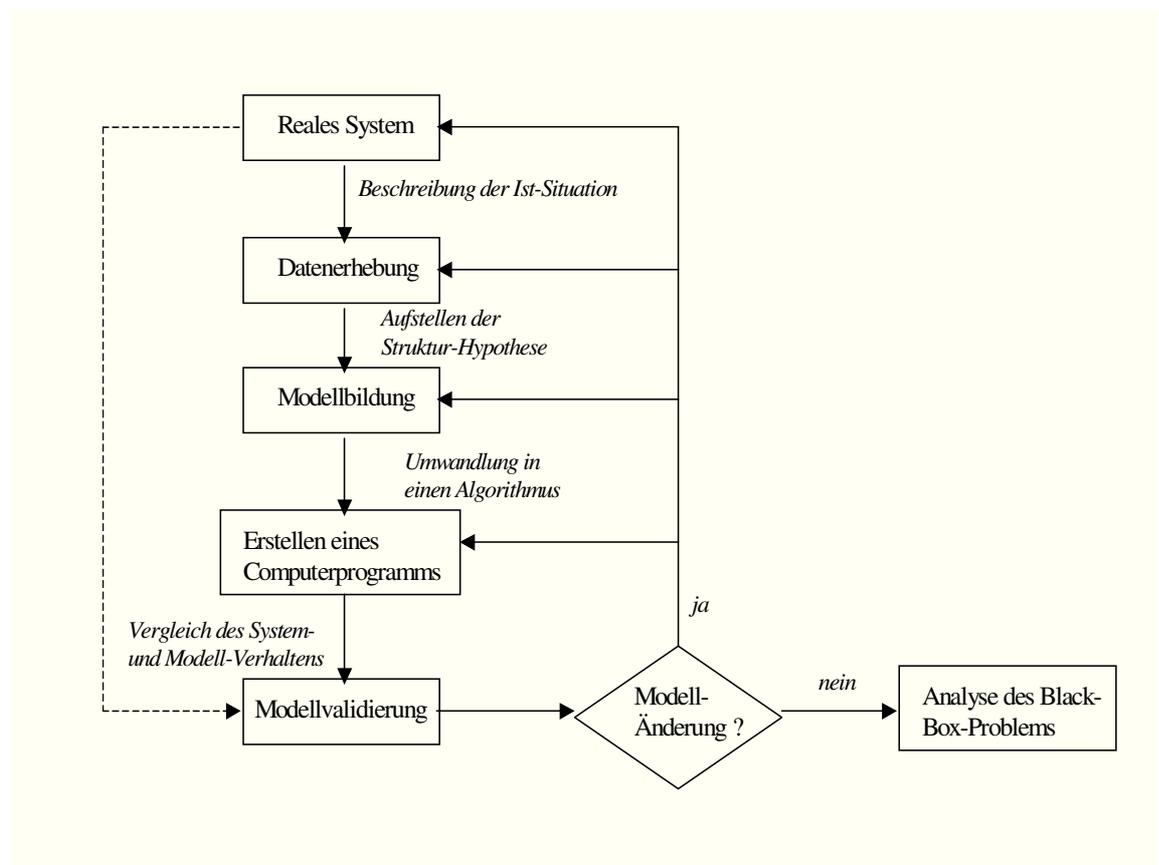
¹⁴² Zusätzlich zu relativ geschlossenen Systemen unterscheidet man offene und geschlossene Systeme. Näheres hierzu s. Niemeyer, G.: Kybernetische System- und Modelltheorie, München, 1977, S. 25.

¹⁴³ In Abhängigkeit davon, wie intensiv die Phase der Modell-Validierung genutzt wird, um einen hohen Übereinstimmungsgrad des Modells mit dem realen System zu erreichen, lässt sich ein Black-Box-Problem zu einem Grey-Box-Problem – dem mit bekannter Struktur oder mit bekanntem Verhalten - transformieren. Da jedoch die Grenze zwischen den beiden Problemarten fließend ist, wird auf die genaue Klassifizierung des endgültigen Modells verzichtet.

- systematische Beobachtung des realen Systems zwecks Gewinnung statistischen Materials - *Datenerhebung*;
- auf der Grundlage des statistischen Materials Aufstellung einer Hypothese über die Struktur und eventuell ansatzweise über das Verhalten des Systems - *Modellbildung*;
- Umwandlung des Modells in ein Algorithmus¹⁴⁴ unter Zuhilfenahme einer geeigneten Simulationssprache – *Erstellung eines Computerprogramms*;
- Vergleich des Modellverhaltens mit dem des realen Systems, dabei wird überprüft, ob das Modell die gleichen Eigenschaften wie das System aufweist und demnach im Hinblick auf das Untersuchungsziel gültig ist – *Modell-Validierung*.

Die aufgezählten Schritte lassen sich im folgenden Fluss-Diagramm zusammenfassen:

Abbildung 5.1 : Modellierung der Black-Box-Probleme



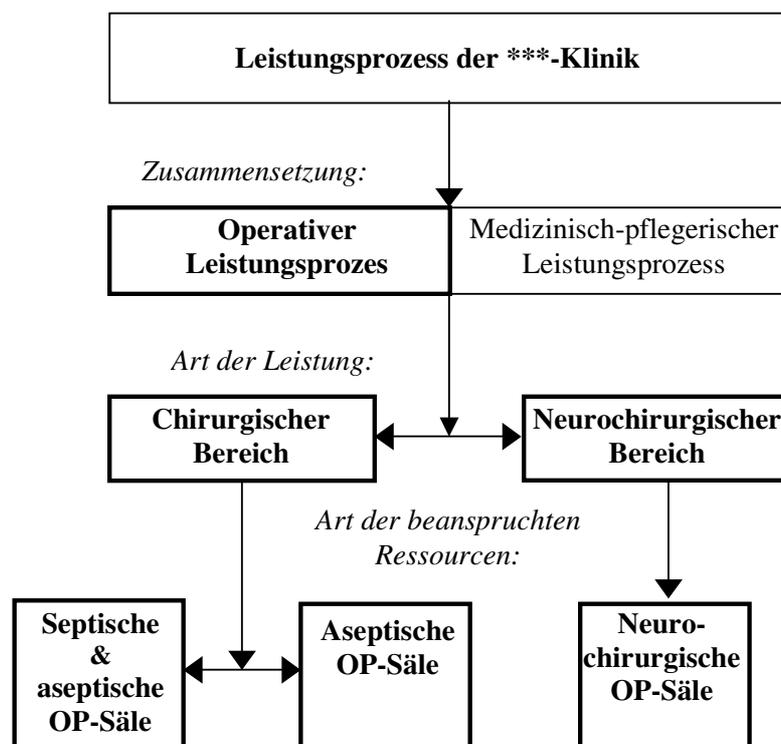
¹⁴⁴ „Intuitiv ist ein Algorithmus eine Arbeitsvorschrift, deren Beschreibung von endlicher Länge ist und prinzipiell von jedem effektiv nachvollzogen werden kann. ... Vom mathematischen Standpunkt aus ist ein Algorithmus nichts anderes als die Beschreibung einer Abbildung, die die „Eingabe“-Daten in die „Ausgabe“-Daten abbildet.“ Claus, V.: Einführung in die Informatik, Stuttgart, 1975, S. 11.

5.2 Beschreibung der Ist-Situation

Der Klinik-Betrieb lässt sich im eigentlichen Sinne in zwei Leistungsbereiche – den operativen und den medizinisch-pflegerischen - unterteilen. Der *operative Bereich* umschließt die präoperativen Maßnahmen (Vorbereitung des Patienten auf die Operation, Einleiten der Narkose), die Operation sowie die postoperativen Maßnahmen (Ausleiten der Narkose unter medizinisch-pflegerischer Beobachtung auf der Aufwachstation). Der *medizinisch-pflegerische Bereich* setzt sich aus den zur endgültigen Genesung des Patienten notwendigen medizinisch-pflegerischen Maßnahmen auf den Pflegestationen zusammen.

Sowohl der operative als auch der medizinisch-pflegerische Bereich der Klinik lassen sich den Leistungsarten entsprechend in einen *neurochirurgischen* und einen *chirurgischen* Teilbereich aufspalten, die dem Leistungsinhalt und der Ressourcen-Aufteilung nach als voneinander unabhängige, separate Teilbereiche anzusehen sind.

Abbildung 5.2: Leistungsprozess der ***-Klinik – schematische Darstellung¹⁴⁵



¹⁴⁵ Fett gekennzeichnet sind die untersuchungsrelevanten Komponenten des Leistungsprozesses.

Der *neurochirurgische* Teilbereich verfügt über einen OP-Saal, inklusive entsprechender Ressourcen-Ausstattung (spezialisiertes OP-Team, Geräte), und eine Pflegestation, bestehend aus 7 2-Bett-Zimmern und 12 3-Bett-Zimmern, die vom Pflegepersonal bedient werden.¹⁴⁶

Der *chirurgische* Teilbereich verfügt über 6 OP-Säle und 5 Pflegestationen. Zwei der OP-Säle sind sowohl für aseptische als auch für septische Operationen ausgestattet. In den vier übrigen können nur aseptische Operationen durchgeführt werden. Außerdem besteht eine ansatzweise flexible Zuordnung der OP-Teams zu den einzelnen OP-Sälen, wobei die Anzahl der OP-Teams gleich der Anzahl der OP-Säle ist. Generell kann also im Rahmen einer Modellreduktion die Annahme einer festen Zuordnung der OP-Teams zu den jeweiligen OP-Sälen getroffen werden. Die Pflegestationen verfügen über 18 1-Bett-Zimmer, 30 2-Bettzimmer und 47 3-Bett-Zimmer, die vom Pflegepersonal bedient werden.¹⁴⁷

Die *Arbeitszeit* der OP-Säle beträgt regulär 6,5 Stunden täglich, inklusive einer flexiblen Mittagspause in Höhe von 30 Minuten. Entsprechend der aktuellen Situation sind sowohl die Überstunden als auch eine kürzere Arbeitszeit möglich. Den statistischen Beobachtungen zufolge beträgt die durchschnittliche¹⁴⁸ Überstundenzahl pro Tag 1 Std. (Chirurgie, septisch/aseptisch) und 1,4 Std. (Chirurgie, aseptisch; Neurochirurgie). Die sogenannte zufallsbedingte durchschnittliche Ausfallzeit eines OP-Saales und die damit verbundene kürzere Arbeitszeit können bis zu 1 Stunde betragen. Die flexible Einrichtung einer Mittagspause ermöglicht den einzelnen OP-Teams, sich an die jeweilige aktuelle Situation besser anzupassen, denn ein länger andauernder OP-Eingriff kann unmöglich von einer Mittagspause unterbrochen werden.

Bei 20-25 Aufnahmefällen pro Tag werden 90% der Aufnahmefälle am nächsten Tag, die übrigen 10% in der nächstmöglichen Zeit – überwiegend am zweiten Tag nach der Aufnahme - operiert. Somit gelten für den operativen Leistungsprozess die *FIFO-Abfertigungsregel* sowie die *durchschnittliche Ankunftszeit* in Höhe von:

¹⁴⁶ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "Bett Nummerierung ***-Klinik".

¹⁴⁷ Vgl. ebenda.

¹⁴⁸ Errechnet als Erwartungswert der dreieckverteilten Zufallsvariablen mit entsprechenden Parametern, vgl. Anhang B, Daten-Übersicht „Überstunden-Jahresübersicht für Repräsentanzfälle“.

$$T = \frac{390 \text{ ZE / Tag}}{25 \text{ Fälle / Tag}} = 15,6 \text{ ZE}$$

unter Annahme von 25 Anfragen/Tag an die Klinik. Anschließend verbleiben die Patienten auf den Stationen bis zur vollständigen Genesung.

Da die medizinisch-pflegerische Leistung am Patienten im starken Ausmaß normativen Planungsrestriktionen unterliegt - z. B. die entsprechend der jeweiligen Diagnose vorgeschriebene Verweildauer des Patienten unter pflegerischer Aufsicht - kann der dissipatorische Einfluss auf den Leistungsprozess in diesem Bereich als sehr geringfügig angesehen werden. Den statistischen Unterlagen zufolge beträgt die durchschnittliche Verweildauer eines Patienten im medizinisch-pflegerischen Bereich 19 Tage – eine verhältnismäßig lange Zeitspanne. Sie wird in der Regel im Voraus risikoavers kalkuliert und im Rahmen der Bettenbelegungsplanung für den jeweiligen Patienten festgelegt. Aus diesen Gründen ist die Sensitivitätsschwelle des Leistungsprozesses im medizinisch-pflegerischen Bereich als hoch anzusehen: auch wenn geringfügige, unvorhersehbare Schwankungen der Verweildauer im Einzelfall eintreten sollten, würden diese keinen erheblichen Einfluss auf die gesamte Situation in dem Bereich ausüben. Daher wird von der problemrelevanten Betrachtung des medizinisch-pflegerischen Bereichs abgesehen.

Vom eigentlichen Interesse für die zu untersuchende Fragestellung ist jedoch der *operative* Bereich des Leistungsprozesses. Denn dieser unterliegt im hohen Ausmaß dissipatorischen Schwankungen. Die Zeit, die ein Patient im operativen Bereich zubringt, auch OP-Dauer (Operations-Dauer) genannt, hängt im wesentlichen von seiner OP-Art (Diagnose) ab und beträgt durchschnittlich zwischen 1 und 5 Stunden, die Aufwachdauer nach der Operation ausgeschlossen. Insgesamt lässt sich der *operative Leistungsprozess* der Klinik als ein Abfertigungsprozess charakterisieren mit folgenden System-Eigenschaften:

- zufallsbedingte Ankunft der Anfragen an die Klinik;
- inhomogene zufallsbedingte Zusammensetzung des Prozesses in Bezug auf die OP-Art und somit auf die jeweilige OP-Dauer;
- breite Streuung der OP-Dauer-Werte je OP-Art.

Berücksichtigt man zusätzlich die verhältnismäßig hohe Prozessgeschwindigkeit, so lässt sich in diesem Bereich eine hohe Sensitivität des Prozesses gegenüber möglichen geringfügigen Störungen vermuten. Daher kann die Untersuchung der operativen Prozessdynamik auf chaotisches Verhalten präzise und nachvollziehbare Aussagen liefern, die aus der ökonomischen Sicht eine hohe Relevanz in Bezug auf

- die Vorhersagbarkeit des Prozessablaufs sowie der damit verbundenen Kosten- und Ertragsverläufe,
 - die Effizienz der Planungs- und Budgetierungsmaßnahmen sowie
 - die Effektivität von prozessoptimierenden Maßnahmen
- besitzen.

5.3 Datenaufbereitung¹⁴⁹

5.3.1 Datenstrukturanalyse

Für den Chirurgie-Teilbereich der Klinik wurden im Rahmen dieser Arbeit folgende Daten in Anspruch genommen:

- OP-Dauer je OP-Art, festgehalten als arithmetisches Mittel, minimale OP-Dauer, Median, maximale OP-Dauer: \bar{t}^{ch} , $(t^{ch}_{min}, t^{ch}_{med}, t^{ch}_{max})$;¹⁵⁰
- Anzahl der Operationen je OP-Art täglich, monatlich (je als Jahresübersicht), aggregiert auf entsprechende Jahreszahlen;¹⁵¹
- Anzahl der septischen und aseptischen Operationen je OP-Art im Beobachtungsjahr;¹⁵²
- Überstunden-Übersicht pro Tag je OP-Saal.¹⁵³

¹⁴⁹ Anmerkung: 80% der von der Klinik erhaltenen Daten wurden im Hardcopy-Format geliefert. Daher wird in dieser Arbeit nur der für die vorliegende Fragestellung relevante und entsprechend vorbereitete Teil der Daten aufgeführt.

¹⁵⁰ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, Jahresübersicht".

¹⁵¹ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht".

¹⁵² Eingearbeitet in Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, relative Häufigkeiten septischer Fälle und entsprechende OP-Dauer-Aufschläge (Min.) je Cluster, Jahresübersicht".

¹⁵³ Eingearbeitet in Anhang B, Daten-Übersicht "Überstunden-Jahresübersicht für Repräsentanzfälle".

Für den Neurochirurgie-Teilbereich der Klinik wurden im Rahmen dieser Arbeit folgende Daten in Anspruch genommen:

- OP-Dauer je OP-Art, festgehalten als arithmetisches Mittel, minimale OP-Dauer, Median, maximale OP-Dauer: \bar{t}^{nch} , $(t^{nch}_{min}, t^{nch}_{med}, t^{nch}_{max})$;¹⁵⁴
- Anzahl der Operationen je OP-Art monatlich (Jahresübersicht), aggregiert auf entsprechende Jahreszahlen;¹⁵⁵
- Überstunden-Übersicht pro Tag.¹⁵⁶

Die Bestimmung der übrigen zur Prozessmodellierung erforderlichen Kennzahlen und Struktureigenschaften¹⁵⁷ erfolgte bereits im Abschnitt 5.2 „Beschreibung der Ist-Situation“.

5.3.2 Statistische Daten-Analyse

Das statistische Material über die tägliche Anzahl der Operationen je OP-Art im Chirurgie-Teilbereich ließ sich hinsichtlich der zugrunde liegenden Verteilungen sowie der zugehörigen Verteilungsparameter der Modellvariablen OP-Anzahl je OP-Art analysieren. Unter Berücksichtigung des Quadratischen Fehlers als Gütekriterium für den Schätzer der Verteilungsfunktion stellte sich heraus, dass

- bei 25 von 27 OP-Arten der bestmögliche Schätzer für die Verteilungsfunktion der OP-Anzahl die Poissonverteilungsfunktion mit entsprechenden Parametern ist;
- bei 2 übrigen OP-Arten ist die Poissonverteilungsfunktion der zweitbeste Schätzer nach Weibull- bzw. Betaverteilungsfunktion für die oben genannte Modellvariable.¹⁵⁸

¹⁵⁴ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht “OP-Schnitt-Nahtzeiten, Neurochirurgie, Jahresübersicht“.

¹⁵⁵ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht “OP-Anzahl je OP-Art, Neurochirurgie, Monatsübersicht“.

¹⁵⁶ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht “Überstunden-Jahresübersicht für Repräsentanzfälle“.

¹⁵⁷ Wie bspw. die durchschnittliche Ankunftsanzahl der Anfragen, Art der Leistung, Art und entsprechende Zuordnung der Ressourcen.

¹⁵⁸ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht “Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie“.

Ähnliche Ergebnisse lieferte die Analyse der monatlichen OP-Zahlen je OP-Art im Neurochirurgie-Teilbereich:

- bei 8 von 10 OP-Arten ist die Poissonverteilungsfunktion der beste Schätzer für die Verteilung der OP-Anzahl;
- bei 2 übrigen ist dieser der zweitbeste Schätzer nach der Weibull- bzw. Lognormalverteilungsfunktion mit entsprechenden Parametern.¹⁵⁹

Die Tatsache einer weitgehend zutreffenden Annahme der Poissonverteilungsfunktion für die Modellvariable OP-Anzahl je OP-Art lässt verallgemeinert auf die poissonverteilte Ankunfts- sowie Abfertigungszahlen des Leistungsprozesses schließen. Daraus wiederum lässt sich die Annahme von exponentialverteilten Zwischenankunfts- und Abfertigungszeiten begründen. Somit konnte gezeigt werden, dass dieser Praxis-Fall sich auf eine einfache Weise auf ein allgemeines theoretisches $M^{exp}/M^{exp}/k : (N ; FIFO)$ -Modell mit exponentialverteilten Zwischenankunfts- und Abfertigungszeiten zurückführen lässt.

Für den Ankunftsprozess wurde die Annahme der exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten zugrundegelegt:

$$T_{Ank} = EXPO(T) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad , \quad t > 0 \quad , \quad T = 15,6 .$$

Aus den jeweiligen Übersichten über die Tages-/Monatszähl der Operationen in beiden Teilbereichen¹⁶⁰ – Chirurgie, Neurochirurgie – ließ sich die durchschnittliche, dem tatsächlichen Prozessablauf entsprechende, Beschränkung der Warteräume je OP-Saal ermitteln:¹⁶¹

Chirurgie: $WR_k = 6$ mit $k = 1, \dots, 6$ – OP – Säle,

Neurochirurgie: $WR_k = 5$ mit $k = 7$ – OP – Saal.

¹⁵⁹Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht “Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Monat je OP-Art, Neurochirurgie“.

¹⁶⁰ Vgl. Anhang B, Daten-Übersichten “OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht“, “OP-Anzahl je OP-Art, Neurochirurgie, Monatsübersicht“.

¹⁶¹ Als Summe von Mittelwert und Standardabweichung der Modellvariablen OP-Anzahl/Tag, anteilig für je OP-Saal im Chirurgie-Teilbereich.

Die Daten über die OP-Dauer je OP-Art wurden zwecks Modellreduktion einer hierarchischen Cluster-Analyse bezüglich der Parameter \bar{t} , $(t_{\min}, t_{\text{med}}, t_{\max})$ unterzogen.¹⁶² Als Ergebnis der Cluster-Analyse wurden einzelne OP-Arten zu homogenen Clustern¹⁶³ $j = 1, \dots, J^{ch}$ bzw. J^{nch} zusammengefasst. Mittels einer Häufigkeiten-Analyse wurden relative Häufigkeiten (P_j^{ch}) bzw. (P_j^{nch}) , $j = 1, \dots, J^{ch}$ bzw. J^{nch} , der OP-Arten innerhalb der jeweiligen Cluster ermittelt. Aus den mit relativen Häufigkeiten gewichteten arithmetischen Mitteln der mittleren und maximalen OP-Dauern innerhalb der jeweiligen Cluster wurden die modellrelevanten Parameter t_j , $t_{j\max}$ $j = 1, \dots, J^{ch}$ bzw. J^{nch} je Cluster abgeleitet.¹⁶⁴ Auf der Basis der vorliegenden Daten konnte für die OP-Dauer je Cluster die Annahme einer nach oben durch die maximal mögliche, clusterrelevante OP-Dauer gekappten Exponentialverteilung gemacht werden:¹⁶⁵

$$OPDauer_j^{ch} = MIN (EXPO (t_j^{ch}), t_{\max j}^{ch}), \quad j = 1, \dots, J^{ch} \quad \text{bzw.}$$

$$OPDauer_j^{nch} = MIN (EXPO (t_j^{nch}), t_{\max j}^{nch}), \quad j = 1, \dots, J^{nch} .$$

Eine Häufigkeiten-Analyse der septischen und aseptischen Fälle je OP-Art im Chirurgie-Teilbereich lieferte relative Häufigkeiten der septischen Fälle je OP-Art, jahreszahlbezogen. Woraus durch gewichtete Aggregation der Häufigkeiten die relativen Häufigkeiten je Cluster ermittelt wurden. Mittels einer Differenzen-Analyse der septischen und aseptischen OP-Dauern je OP-Art und unter Berücksichtigung der oben genannten relativen Häufigkeiten wurden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $[P_{js}^{ch}]$ und Zeitaufschläge $\Delta OPDauer_j^{ch}$, $j = 1, \dots, J^{ch}$, für septische Fälle ermittelt.¹⁶⁶

¹⁶² Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "Hierarchische Cluster-Analyse OP-Dauer, Chirurgie, Zuordnungsübersicht".

¹⁶³ Gemeint ist die Homogenität der Modellvariablen OP-Dauer bezüglich der jeweiligen mittleren OP-Dauern \bar{t} unter Berücksichtigung der Streuung $(t_{\min}, t_{\text{med}}, t_{\max})$.

¹⁶⁴ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, nach Clustern geordnet, Jahresübersicht", "OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, nach Clustern aggregiert, Jahresübersicht".

¹⁶⁵ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Dauer-Verteilung je Cluster, Clusterhäufigkeiten".

¹⁶⁶ Vgl. Anhang B, Daten-Übersicht "OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, relative Häufigkeiten septischer Fälle und entsprechende OP-Dauer-Aufschläge (Min.) je Cluster, Jahresübersicht".

5.4 Entwurf eines Simulationsmodells

Zwecks Untersuchung des operativen Leistungsprozesses der Klinik auf chaotisches Verhalten wurde ein Simulationsmodell entworfen, das den aktuellen Arbeitsablauf weitgehend vollständig wiedergibt.

Die im Rahmen der statistischen Datenanalyse erfolgten Festlegung der Modellstruktur, Verteilungsannahmen über die Modellvariablen, sowie die Schätzung der zugehörigen Modellparameter beziehen sich ausschließlich auf die grundlegenden Eigenschaften des operativen Leistungsprozesses. Dies bedeutet, dass die im realen Fall zu beobachtenden Trends – dazu gehören insbesondere die saisonalen sowie die wochentagsabhängigen Schwankungen – bei der Modellierung des Leistungsprozesses nicht berücksichtigt wurden. Auch die in der Realität gegebene Wahrscheinlichkeit eines kurzfristig überhöhten Anstieges der Nachfrage nach Leistungen – Wahrscheinlichkeit für sogenannte Ausreißer – wurde ebenfalls außer Acht gelassen. Denn die angesprochenen Verhaltensmuster, die den realen Leistungsprozess begleiten, müssen für die zu untersuchende Fragestellung aus dem Gesamtverhalten eliminiert werden.

Das Modell beinhaltet die von der Klinik bereits praktizierten Planungsmaßnahmen wie flexible Mittagspause, flexibler Arbeitsschluss, Beschränkung der Warteräume, Puffer-Zeiten zwischen den einzelnen Operationen. Die folgenden Tabellen-Übersichten fassen die erforderlichen Modellparameter und -variablen zusammen:

Tabelle 5.1: Übersicht der Modellvariablen

$OPDauer_i$	OP-Dauer des Patienten i
N_i	Systemlänge zum Zeitpunkt des Systemeintritts des Patienten i
N_{ki}	Systemlänge des OP-Saals k zum Zeitpunkt des Systemeintritts des Patienten i
$LambdaIst_i$	Ankunftsrate zum Zeitpunkt des Systemeintritts des Patienten i
$MyIst_i$	Abfertigungsrate zum Zeitpunkt des Systemaustritts des Patienten i
$MyIst_{ki}$	Abfertigungsrate des OP-Saals k zum Zeitpunkt des Ausschleusens des Patienten i aus dem OP-Saal k

Rho_i	Verkehrsdichte zum Zeitpunkt des Systemaustritts des Patienten i
$Verlustrate_{ki}$	Verlustrate des OP-Saals k zum Zeitpunkt des Systemaustritts des Patienten i, falls der entsprechende Warteraum voll ist
$Verlustrate_i$	Gesamtverlustrate zum Zeitpunkt des Systemaustritts des Patienten i, falls alle in Frage kommenden Warteräume voll sind

Tabelle 5.2: Übersicht der deterministischen Modellparameter

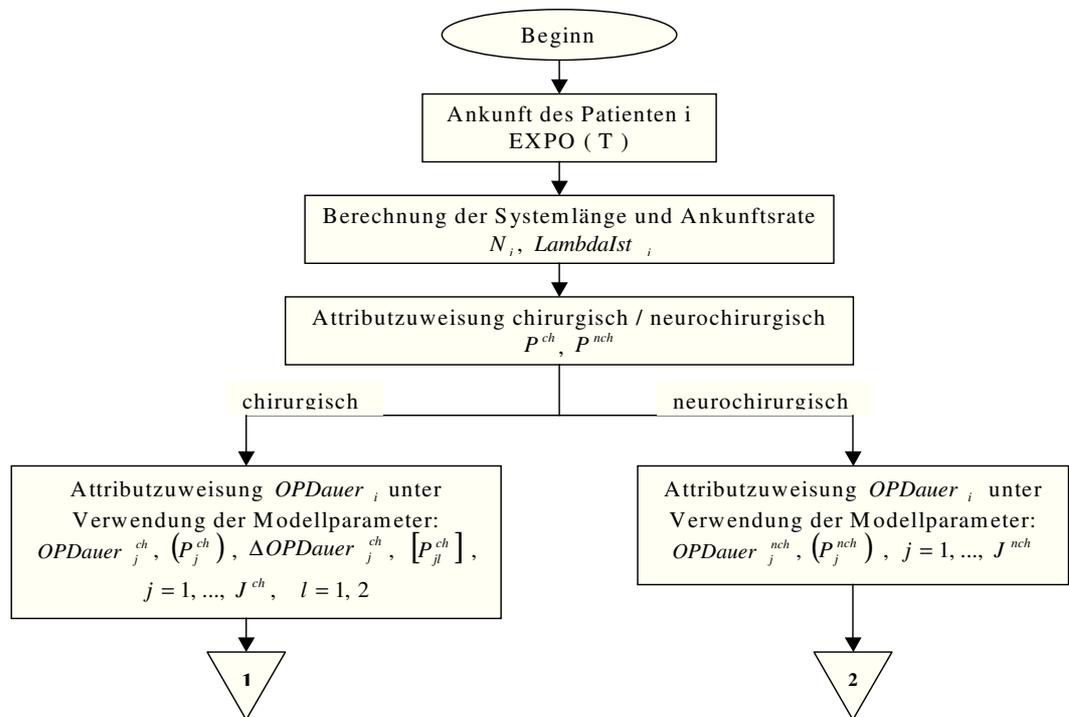
$k = 7$	Anzahl der OP-Säle
WR_k	Beschränkung des Warteraumes vor dem OP-Saal k
TNOW	Aktuelle Simulationslaufzeit
T	Durchschnittliche Ankunftszeit der Patienten
N_{SimT}	Anzahl der zu simulierenden Tage
T_{SimT}	Arbeitstagslänge
T_{MP}	Länge der Mittagspause
$T_{MP\text{Beginn}}$	Beginn der Mittagspause
$[T_{\min MP}, T_{\max MP}]$	Zeitabschnitt, in dem die Mittagspause erfolgen soll
$T_{\min MP}$	Frühestmöglicher Beginn der Mittagspause im regulären Fall
$T_{\max MP}$	Spätestens möglicher Beginn der Mittagspause im regulären Fall
N_{MPk}	Anzahl der erfolgten Mittagspausen des OP-Saals k in der Simulationszeitspanne $[0, N_{SimT} \cdot T_{SimT}]$
$[T_{\min AS}, T_{AS}]$	Zeitabschnitt, in dem vorzeitiges Ende des Arbeitstages möglich ist
$T_{\min AS}$	Frühestmöglicher Arbeitsschluss
T_{AS}	Regulärer Arbeitsschluss
Control _k	Kontrollvariable zum Abprüfen der Mittagspause im OP-Saal k

Tabelle 5.3: Übersicht der stochastischen Modellparameter

$T_{Ank} = EXPO(T)$	Zwischenankunftszeit der Patienten
P^{ch}	Wahrscheinlichkeit eines chirurgischen Eingriffs
P^{nch}	Wahrscheinlichkeit eines neurochirurgischen Eingriffs
J^{ch}	Anzahl der OP-Dauer-Cluster, Chirurgie
$OPDauer_j^{ch} = MIN (EXPO (t_j^{ch}), t_{\max j}^{ch}),$ $j = 1, \dots, J^{ch}$	Operationsdauer j , $j = 1, \dots, J^{ch}$, Chirurgie
$(P_j^{ch}), j = 1, \dots, J^{ch}$	Wahrscheinlichkeitenvektor für OP-Dauer j , $j = 1, \dots, J^{ch}$, Chirurgie
$\Delta OPDauer_j^{ch} \geq 0, j = 1, \dots, J^{ch}$	OP-Dauer-Aufschlag für die OP-Dauer j , falls septisch, Chirurgie
$[P_{js}^{ch}], j = 1, \dots, J^{ch}, s = 1, 2$	Wahrscheinlichkeitenmatrix für septischen/ aseptischen Fall der OP-Dauer j , $j = 1, \dots, J^{ch}$, Chirurgie
J^{nch}	Anzahl der OP-Dauer-Cluster, Neurochirurgie
$OPDauer_j^{nch} = MIN (EXPO (t_j^{nch}), t_{\max j}^{nch}),$ $j = 1, \dots, J^{nch}$	Operationsdauer j , $j = 1, \dots, J^{nch}$, Neurochi- rurgie
$(P_j^{nch}), j = 1, \dots, J^{nch}$	Wahrscheinlichkeitenvektor für OP-Dauer j , $j = 1, \dots, J^{nch}$, Neurochirurgie

Der gesamte Modell-Aufbau, einschließlich einer detaillierten Darstellung des eigentlichen Abfertigungsblocks, wird anhand von zwei Algorithmen (Abbildungen 5.3, 5.4) dargestellt.

Abbildung 5.3 : Algorithmus des gesamten Programmablaufs



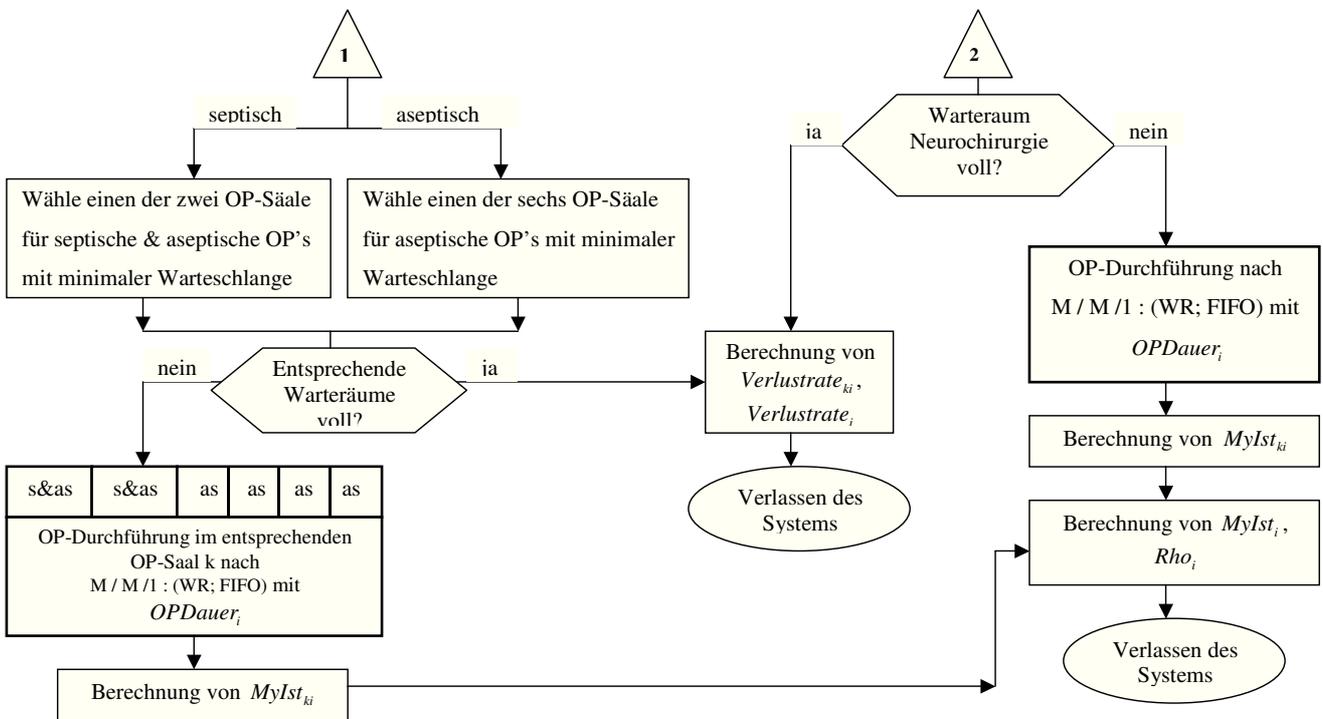
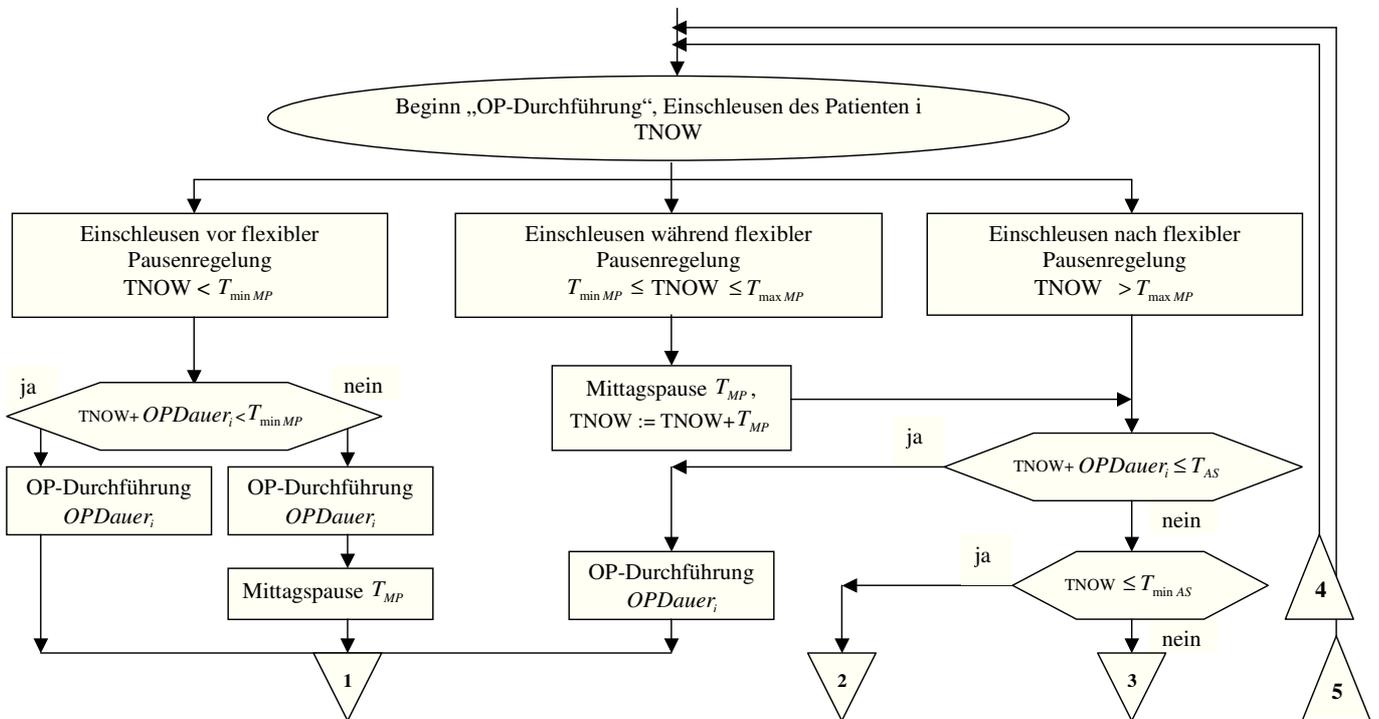


Abbildung 5.4 : Detail-Algorithmus des Programm-Blocks „OP-Durchführung“



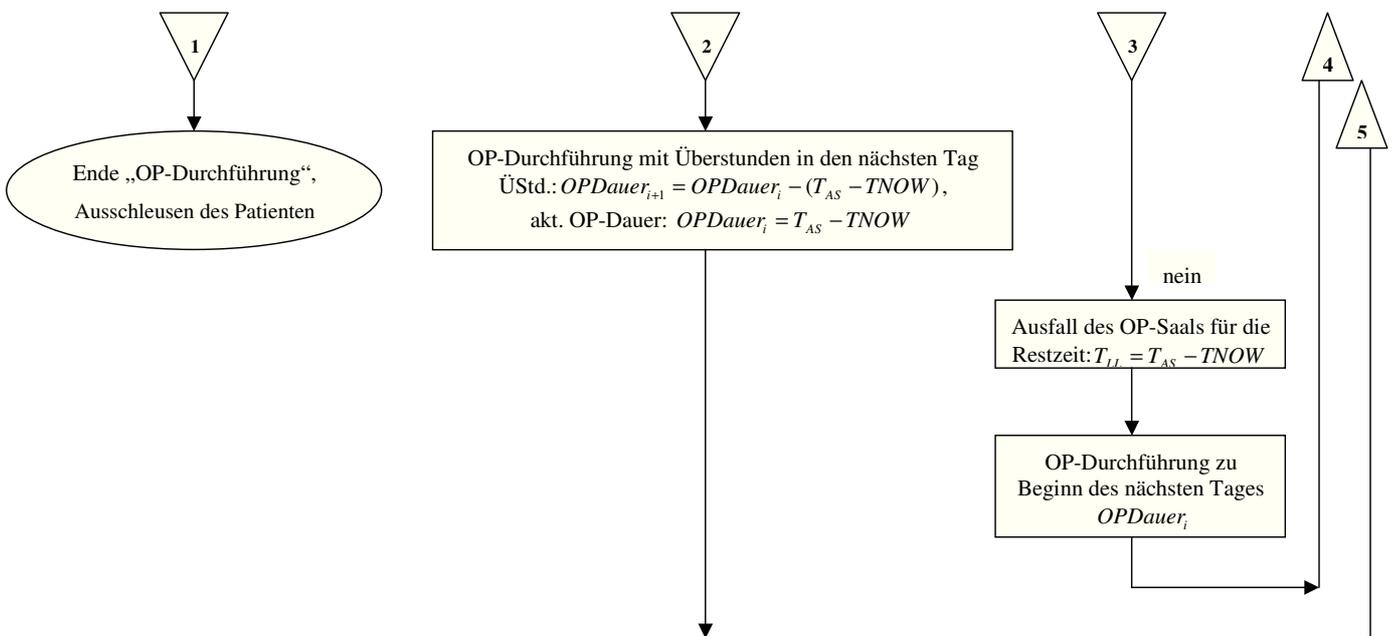
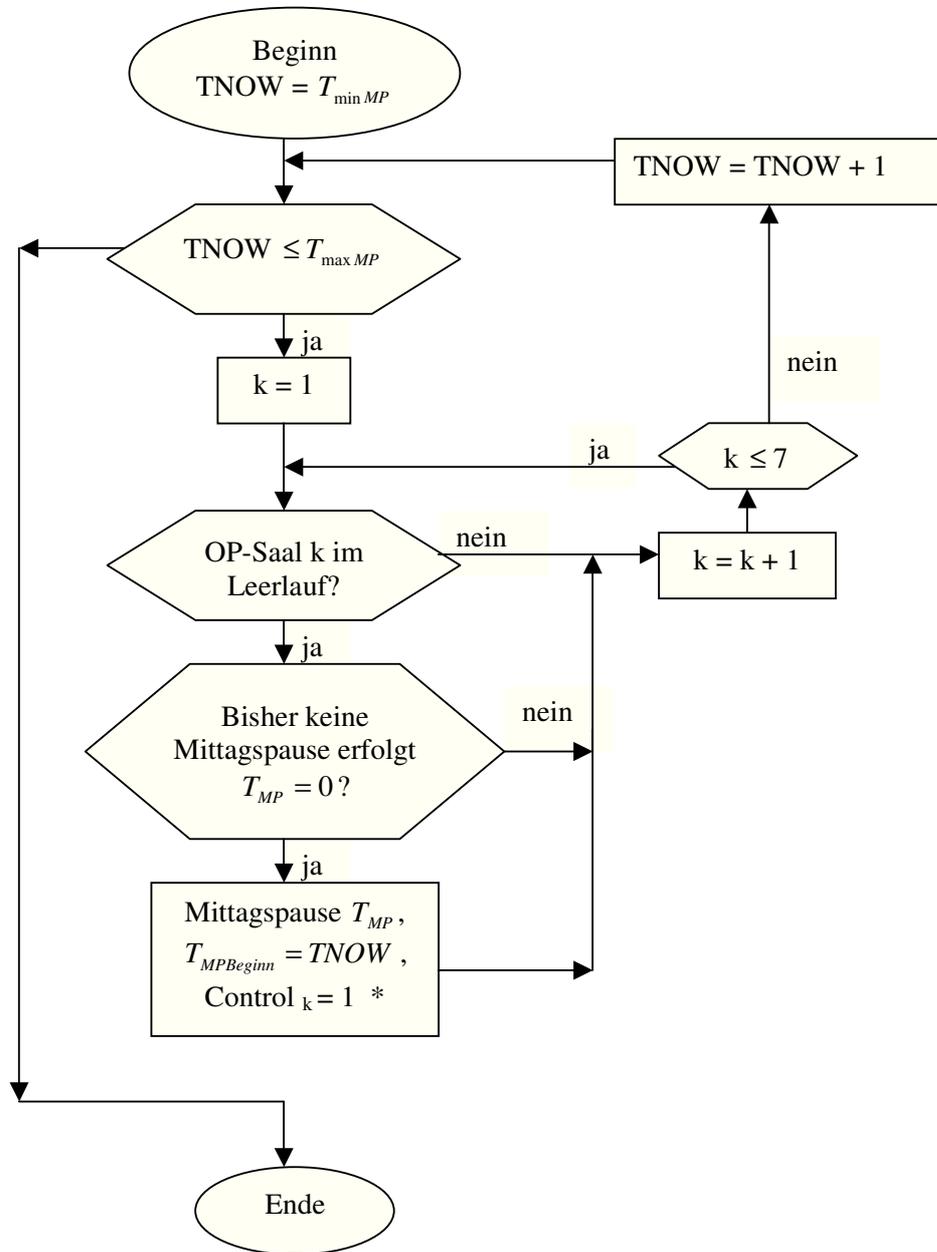


Abbildung 5.5 : Algorithmus zum Zusatzprogramm „Mittagspausen-Regelung im Falle von Leerlaufzeiten“



*Bemerkung zu * :* Die Kontrollvariable Control_k wird im Block „OP-Durchführung“ abgeprüft. Falls gerade Control_k=1 ist, der eingetroffene Patient wartet auf seine OP die restliche Zeit der laufenden Mittagspause.

5.5 Validierung des Simulationsmodells

Das im Abschnitt 5.4 vorgestellte Simulationsmodell wurde der Modell-Validierung unterzogen. Anhand der Kontrollgrößen λ_{Ist_i} , μ_{Ist_i} , ρ_i , $Verlustrate_i$, N_{ki} , N_{MPk} konnte eine weitgehende Übereinstimmung des Modellverhaltens mit dem realen Systemverhalten festgestellt werden:

- die Anlaufphase¹⁶⁷ des Modells betrug 300 ZE: bei TNOW = 50 ZE wies das Modell die Verkehrsdichte $\rho_i = 4,15...$ auf, bei TNOW = 300 ZE sank die Verkehrsdichte auf $\rho_i = 0,93...$;
- während der stationären Phase nahm die Verkehrsdichte Werte im Bereich $\rho_i \in [0,890..., 0,92...]$ an, was mit der Angabe einer hohen Auslastung des operativen Leistungsprozesses der Klinik übereinstimmt;
- die Modell-Ankunftsrate bewegte sich während der gesamten Simulationszeit im Bereich $\lambda_{Ist_i} \in [0,0628..., 0,0629...]$, was der durchschnittlichen Ankunftszeit von $T = 15,9$ ZE entspricht;
- sowohl während der Einschwingungsphase wie auch während der stationären Phase blieb die $Verlustrate_i$ auf Null, wobei die jeweiligen Systemlängen der OP-Säle die Werte im Intervall

$$N_{ki} \in [0, 6], \quad k = 1, \dots, 6 \quad \text{Chirurgie,}$$

$$N_{ki} \in [0, 5], \quad k = 7 \quad \text{Neurochirurgie}$$

angenommen haben. Dies ist ein Hinweis auf korrekte Ermittlung der Modellgröße Beschränkung des Warteraumes k ;

- die Mittagspausen der OP-Säle erfolgten stets in der durch das Programm festgelegten Zeitspanne¹⁶⁸, wobei der konkrete Zeitpunkt der Pausennahme von der aktuellen Arbeitssituation im jeweiligen OP-Saal abhängig war.

¹⁶⁷ Inhaltlich zu unterscheiden von der Einschwingungsphase, die bis zum Eintritt der Stationarität dauert. Die Anlaufphase bezieht sich lediglich auf die Zeitspanne zum Beginn des Simulationslaufs, in der das „leere“ System mit Elementen „aufgefüllt“ wird, bis es algorithmusgerecht arbeiten kann.

¹⁶⁸ Nur in Ausnahme-Fällen – falls am frühen Vormittag ein Patient mit der OP-Dauer über 5 Std. ankam – erfolgte keine Pausennahme.

5.6 Analyse der Simulationsergebnisse

Die Analyse der Simulationsergebnisse erfolgt in gleichen Schritten, wie sie bereits bei der Analyse theoretischer markovscher Prozesse auf chaotisches Verhalten vorgenommen und im Kapitel 4 „Untersuchung theoretischer Modelle markovscher Abfertigungsprozesse ...“ vorgestellt wurden.

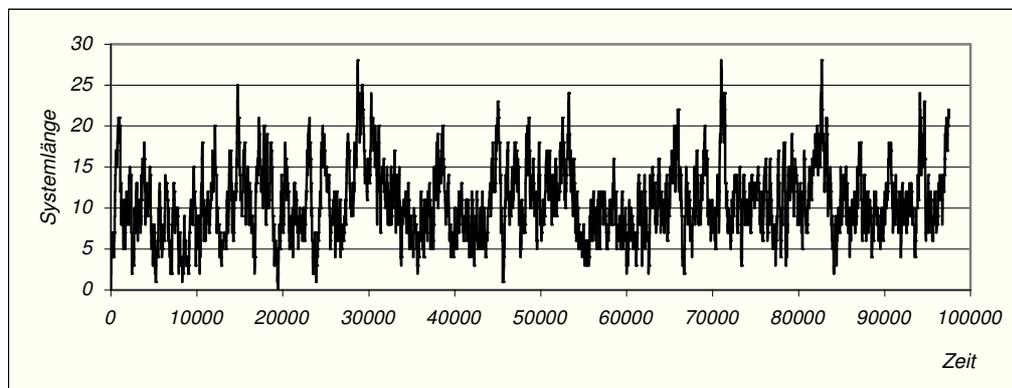
Das Verhalten der Prozessvariablen Systemlänge soll im Vorfeld der eigentlichen chaos-theoretischen Untersuchung auf Eigenschaften der schwachen Stationarität, der Ergodizität sowie der linearen Unabhängigkeit der aufeinander folgenden Realisationen der Prozessvariablen überprüft werden. Diese Untersuchungen werden mittels Messung der Systemlänge N_t je Zeiteinheit des Simulationslaufes, Ermittlung deren Mittelwerts und der Varianz für die gesamte Dauer der Simulation sowie des zugehörigen Autokorrelationskoeffizienten vorgenommen. Sie sollen dem Nachweis der statistischen Aussagefähigkeit der Simulationsergebnisse sowie deren Analysefähigkeit bezüglich der problemrelevanten Fragestellung dienen.

Im Rahmen der chaos-theoretischen Analyse wird der operative Leistungsprozess der Klinik auf Gegebenheit deterministischer Strukturen, das Mischungsverhalten sowie die Anfangswertsensitivität der Prozessvariablen Systemlänge N_t untersucht. Diese Prozesscharakteristika werden unter Zuhilfenahme der ARIMA-Modellierung, der Spektralanalyse sowie der Ermittlung des Lyapunov-Exponenten der Prozessvariablen nachgewiesen. Im Anschluss darauf wird der zugehörige N_t -Attraktor gezeichnet, dessen Zugehörigkeit zur Klasse der seltsamen Attraktoren mittels grafischer Veranschaulichung der selbstähnlichen Struktur und Ermittlung der fraktalen Dimensionsmaße erfolgt.

5.6.1 Schwache Stationarität

Die Ergebnisse einer Modellsimulation des operativen Leistungsprozesses der Klinik über die Dauer von 1 Jahr sind in der darauf folgenden Abbildung dargestellt:

Abbildung 5.6: Entwicklung der N_t -Zeitreihe des operativen Leistungsprozesses der Klinik über die Simulationsdauer von 1 Jahr



Übereinstimmend mit den Analyseergebnissen über das Verhalten der theoretischen markovschen Prozesse weist der operative Leistungsprozess der Klinik die Eigenschaft der schwachen Stationarität auf: Aus der Darstellung der Entwicklung der Prozessvariablen lassen sich solche Charakteristika der Zeitreihe erkennen wie ein weitgehend gleichbleibendes Niveau der Realisationen sowie die Existenz des endlichen Erwartungswertes und der Varianz. Diesbezügliche Auswertung der Simulationsergebnisse liefert als asymptotische Schätzer des Erwartungswertes und der Varianz der Prozessvariablen endliche empirische Mittelwert und Varianz:

$$\mu = E(N_t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} \overline{N_t} = \frac{1}{97485} \sum_{t=1}^{97485} N_t = 10,85107 \quad ,$$

$$\sigma^2 = Var(N_t) \underset{t \rightarrow \infty}{\approx} s_{N_t}^2 = \frac{1}{97484} \sum_{t=1}^{97485} (N_t - \overline{N_t})^2 = 20,4473156$$

Die sich in der Zeit verringernde bis überwiegend konstante Streuung der Werte um das Langzeitmittel der Reihe ist ein Hinweis auf die ergodische Eigenschaft der Systemdynamik.

Abbildung 5.7: Mittelwertentwicklung der N_t -Zeitreihe

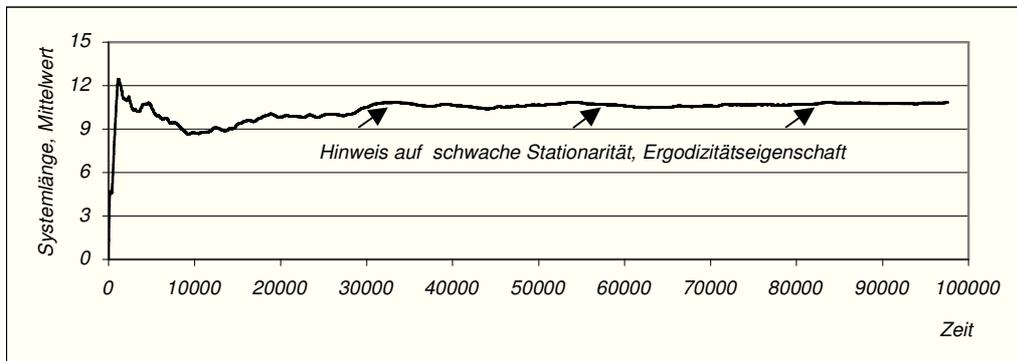
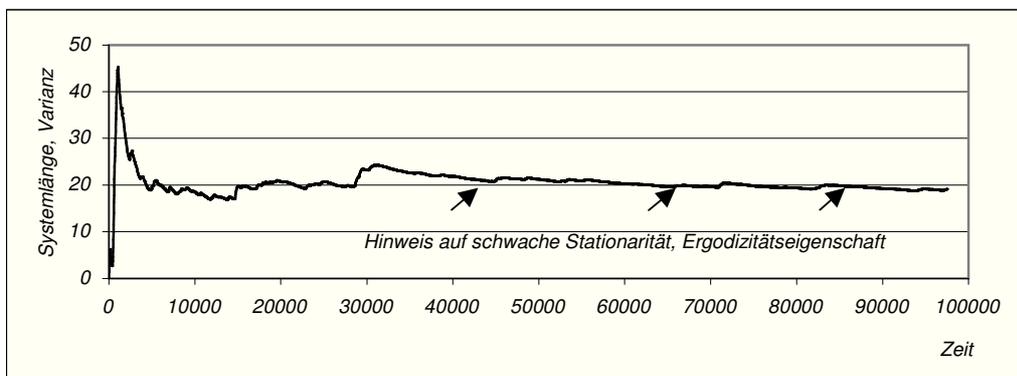
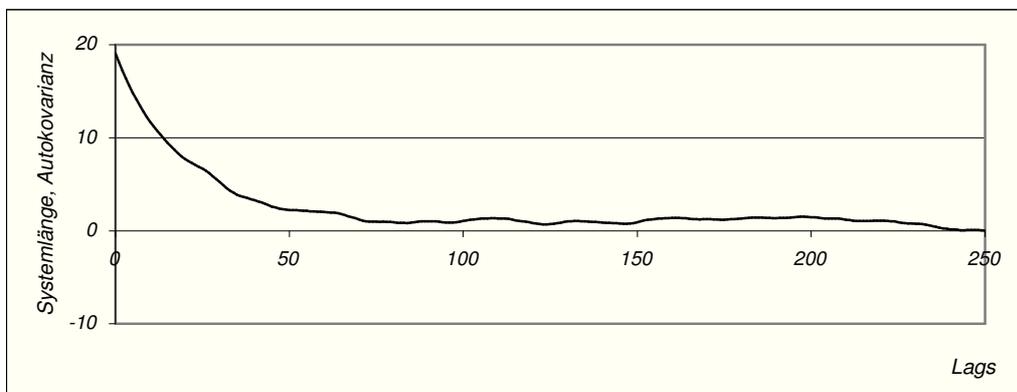


Abbildung 5.8: Entwicklung der empirischen Varianzfunktion der N_t -Zeitreihe



Auch das letzte Kriterium zum Nachweis der schwachen Stationarität des Leistungsprozesses – endliche und von der Zeit t unabhängige Werte der Autokovarianzfunktion – wird durch die Auswertung der Zeitreihe bezüglich der empirischen Autokovarianzen für $\tau = 0, 1, 2, \dots, 250$ Lags bestätigt:

Abbildung 5.9: Entwicklung der empirischen Autokovarianzfunktion der N_t -Zeitreihe



5.6.2 Autokorrelationsanalyse und ARIMA-Modellierung

Die Analyse der N_t -Zeitreihe bezüglich der Autokorreliertheit der einzelnen Realisationen der Prozessvariablen N_t zeigt, dass in der Anfangsphase der Prozessentwicklung zwischen ihnen Abhängigkeiten bestehen, da der Autokorrelationskoeffizient nahe bei 1 liegt. Mit wachsendem zeitlichen Abstand zwischen den Realisationen sinkt der Autokorrelationskoeffizient bis auf die Werte nahe bei Null.

Als Schätzer für die den Prozess auszeichnende Autokorrelation ergibt sich folgender Mittelwert der empirischen Autokorrelationskoeffizienten der Zeitreihe über die gesamte Beobachtungsdauer:

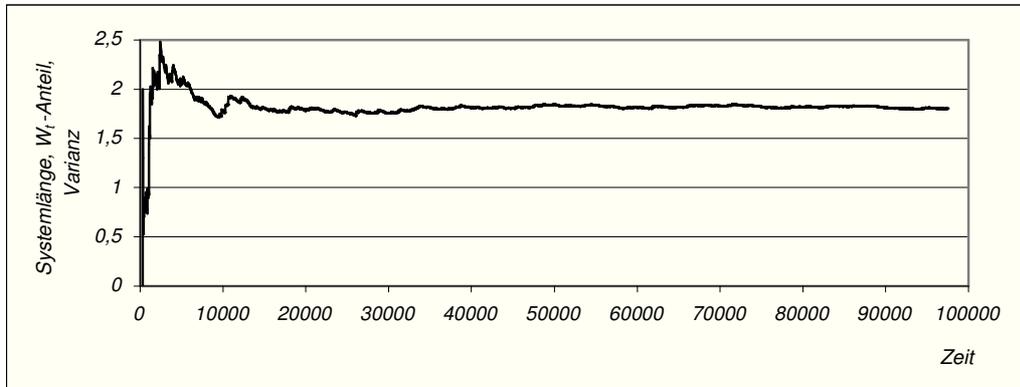
$$p_\tau \approx E(c_\tau) = \frac{1}{6479} \sum_{\tau=0}^{6478} c_\tau = -0,00070119 .$$

Die anfänglich hohe positive Autokorreliertheit der Prozessvariablen N_t lässt darauf schließen, dass die Dynamik des operativen Leistungsprozesses durch eine verhältnismäßig stark ausgeprägte deterministische Komponente D_t beeinflusst wird.¹⁶⁹

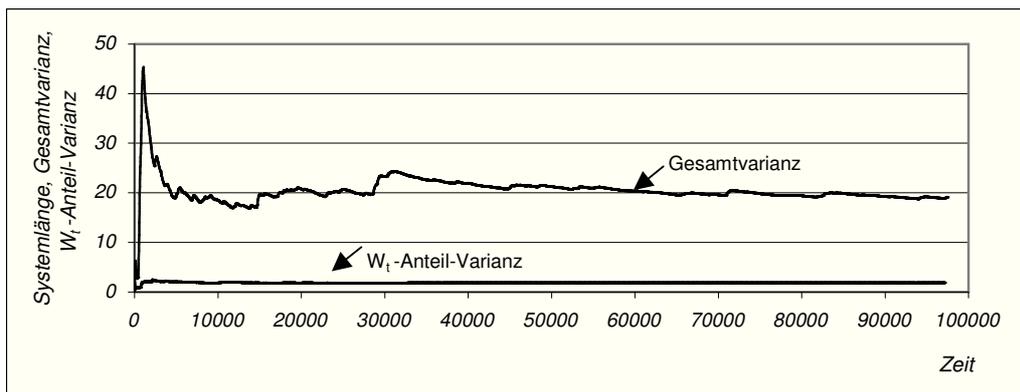
Die ARIMA(1;1;1)-Modellierung des Leistungsprozesses ergibt für den W_t -Anteil der Prozessvariablen N_t die empirische Varianz in Höhe von $s_{R_t}^2 = 1,82103962$. Der durchschnittliche Anteil der W_t -Varianz an der Gesamtvarianz der Prozessvariablen beträgt 0,0890608 und kann als geringfügig angesehen werden.

¹⁶⁹ Vgl. Kapitel 4, Abschnitt 4.3.

Abbildung 5.10: a) Entwicklung der empirischen Varianzfunktion des W_t -Anteils der N_t -Zeitreihe



b) Gegenüberstellung der empirischen Gesamtvarianz und der Varianz des W_t -Anteils der N_t -Zeitreihe



Somit lässt sich das Verhalten der Prozessvariablen Systemlänge überwiegend auf deterministische Strukturen zurückführen.

5.6.3 Spektralanalyse

Die Spektralanalyse der N_t -Zeitreihe weist ein breitbandiges Spektrum der Prozessvariablen N_t auf. Die zugehörigen Frequenzen verteilen sich über den gesamten

Definitionsbereich $[0; 0,5]$. Wobei das Spektrum durch die niedrigen Frequenzen, die im Bereich $[0; 0,05]$ liegen, dominiert wird.

Abbildung 5.11: Spektrum der N_t -Zeitreihe

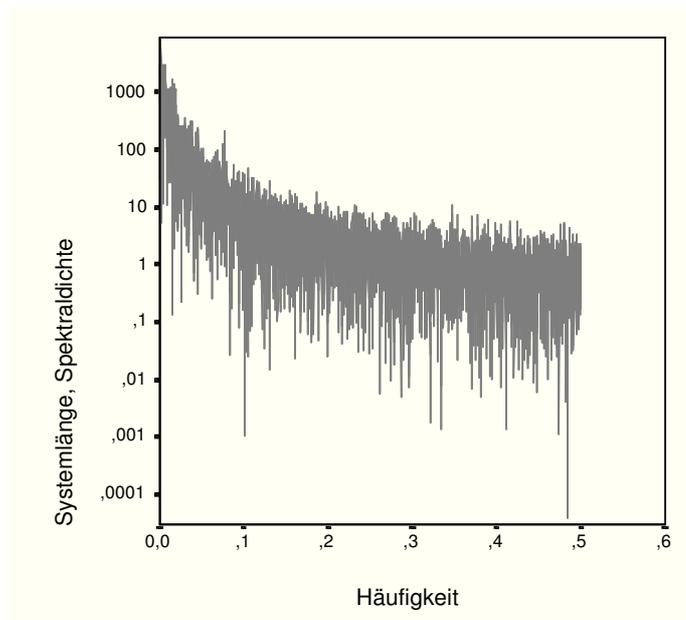
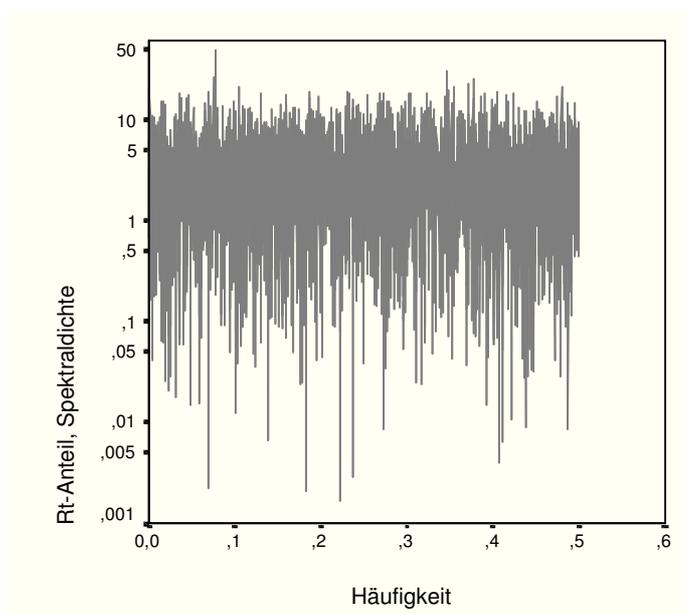


Abbildung 5.12: Spektrum des W_t -Anteils der N_t -Zeitreihe



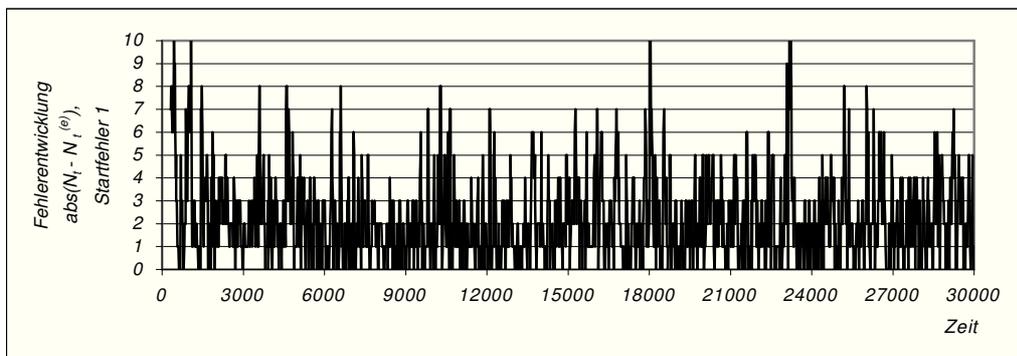
Die Eigenschaft der schwachen Stationarität, die Ergodizitätseigenschaft des Leistungsprozesses und das breitbandige Spektrum der Prozessvariablen N_t mit einem hohen Anteil an Wellen mit langen Periodendauern dienen als empirischer Nachweis für das Mischungsverhalten der Prozessvariablen N_t .

5.6.4 Lyapunov-Exponent

Zwecks Ermittlung des Lyapunov-Exponenten wurde der operative Leistungsprozess einmal mit dem Systemlänge-Startwert $N_0 = 0$ und darauf folgend mit dem Systemlänge-Startwert $N_0^{(\varepsilon)} = 1$ simuliert. Der Geringfügigkeit der Störung in den Anfangsbedingungen wurde dadurch Rechnung getragen, dass das ε -Element mit einer exponentialverteilten Abfertigungszeit mit Parameter $\mu = 1$ in die Abfertigung einging.

Der Beginn der Auswertung wurde dem Ablauf der „technischen Einschwingungsphase“ – TNOW = 300 ZE - gleichgesetzt. Die jeweiligen Realisationen der Systemlänge N_t wurden in gleichbleibenden Zeitintervallen gemessen. Darauf basierend erfolgte die Ermittlung der absoluten Systemlängendifferenzen ε_t sowie des entsprechenden Mittelwertes des Lyapunov-Exponenten.

Abbildung 5.13: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t , $\varepsilon_0 = 1$, der N_t - Zeitreihe



Der Abbildung 5.14 ist zu entnehmen, dass die Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t der beiden Zeitreihen N_t und $N_t^{(\varepsilon)}$, denen dieselbe Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt und die sich lediglich um eine geringfügige Startwert-Differenz voneinander unterscheiden, irregulär verläuft und mathematisch nicht exakt berechenbar ist. Die Vorhersagbarkeit der Fehlerentwicklung ist, ähnlich wie bei der Zeitreihe der logistischen Funktion mit dem Parameterwert 4^{170} , nicht gegeben.

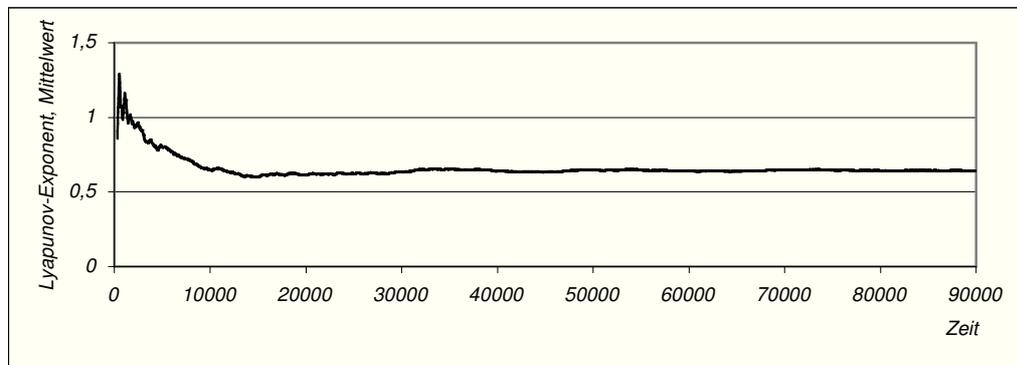
Die quantitative Auswertung der Simulationsergebnisse liefert einen klaren Nachweis für einen positiven Lyapunov-Exponenten. Am Anfang der Beobachtungszeit steigt der empirische Lyapunov-Exponent, wobei das Maximum mit $TNOW = 510$ ZE bei $\bar{L}(N_t, \varepsilon) = 1,29004387\dots$ liegt. Danach fällt der empirische Wert des Lyapunov-Exponenten bis auf $\bar{L}(N_t, \varepsilon) = 0,644\dots$ ab und konvergiert gegen diesen Wert fortwährend. Die Analyseergebnisse sind in der Tabelle 5.4 sowie in der Abbildung 5.15 zusammengefasst:

Tabelle 5.4 : Mittelwerte, zugehörige Streuungsmaße des Lyapunov-Exponenten des operativen Leistungsprozesses der Klinik

Beobachtungszeit (Min.)	Lyapunov-Exponent		
	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
300	0,857496926	0,655491451	0,79011238
1.000	1,09786121	0,657105073	0,804637659
3.000	0,882002905	0,529432131	0,725808612
5.000	0,798777834	0,486791498	0,696659198
8.000	0,706713736	0,455115626	0,673990615
10.000	0,646598423	0,431195794	0,656163311
30.000	0,632688814	0,408873292	0,639272209
50.000	0,649462267	0,40914764	0,639550561
80.000	0,643695926	0,404666904	0,636074712

¹⁷⁰ Vgl. Abbildung 4.16, S.114.

Abbildung 5.14: Mittelwertentwicklung des Lyapunov-Exponenten des operativen Leistungsprozesses der Klinik



Zusammenfassend lässt sich folgern, dass das untersuchte Praxisbeispiel sensitiv bezüglich der Anfangsbedingungen ist. Die Anfangswertsensitivität wirkt sich „chaos-fördernd“ fortdauernd auf die gesamte Prozessdynamik aus. Eine geringfügige Abweichung oder Störung in den Anfangsbedingungen kann sich durchschnittlich je Zeiteinheit verdoppeln:

$$e^{\bar{L}(N_i, \varepsilon)} \approx e^{0,6439\dots} = 1,9035031 ,$$

und somit zu einem anderen Ablauf des Prozesses als *geplant* führen.

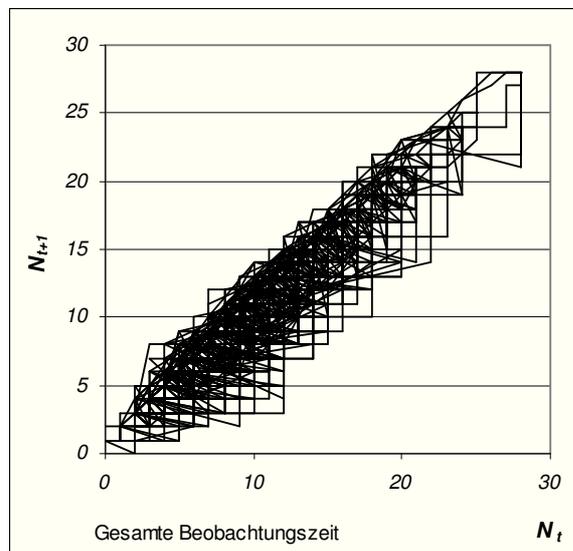
Zu beachten ist aber auch die Tatsache, dass das durchschnittliche Fehler-Wachstum bei dem untersuchten Leistungsprozess deutlich geringer ausfällt, als bei einem vergleichbaren theoretischen Markov-Modell¹⁷¹. Die Ursachen dafür sind zum einen die Beschränkung der Warteräume der OP-Säle, zum anderen die prozess-gestaltenden Maßnahmen wie die Pufferzeiten und die Zulassung von OP-bedingten Überstunden.

¹⁷¹ Vgl. Abbildungen 4.24, 4.25 , S 129-130.

5.6.5 Seltsamer Attraktor

Die topologische Attraktorstruktur der vorliegenden N_t -Zeitreihe deutet ebenfalls auf das Mischungsverhalten der Prozessvariablen sowie auf die *Selbstähnlichkeit* der von N_t erzeugten Bahn:

Abbildung 5.15: Attraktor der Prozessvariablen N_t , gesamte Beobachtungszeit $T = 97.500$ ZE



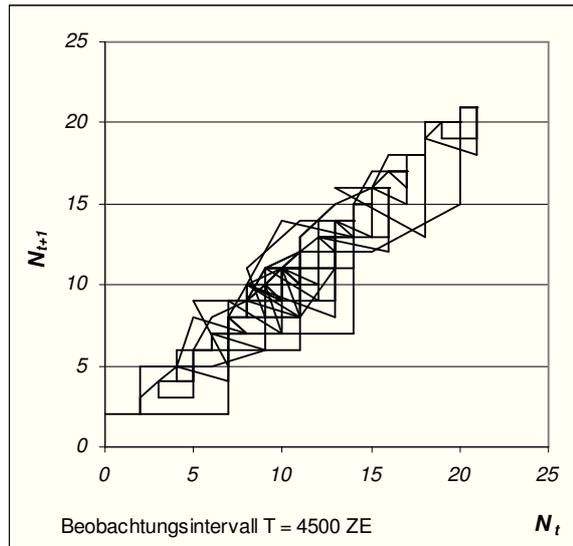
Die Eigenschaft der selbstähnlichen Attraktorstruktur kann auch in diesem Fall mittels Vergleich der Attraktor-Darstellungen für Beobachtungszeitintervalle unterschiedlicher Länge qualitativ nachvollzogen werden. Ein Vergleich der Abbildungen 5.17 a) und 5.17 b) der topologischen Attraktorstruktur, aufgezeichnet für Beobachtungszeitintervalle $T = 4500$ ZE und $T = 9000$ ZE, liefert die entsprechenden Hinweise:

- die Verteilung der Werte über den gesamten Definitionsbereich,
- die rekurrente Struktur der Bahn von N_t , bedingt durch eine Mehrzahl der Rückkehrperioden unterschiedlicher Periodenlängen sowie
- die gleichzeitige Beschränkung des Trajektorienverlaufs auf einen Teilbereich des Phaseraumes

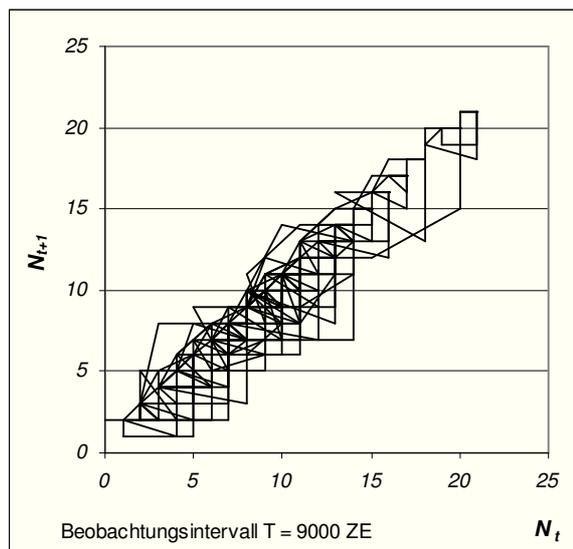
weisen auf die Zugehörigkeit des gezeichneten N_t -Attraktors zur Klasse der *seltsamen Attraktoren* hin.

Abbildung 5.16: Bewegung der Prozessvariablen N_t auf dem Attraktor

a) Beobachtungszeit $T = 4500$ ZE



b) Beobachtungszeit $T = 9000$ ZE



Auch die bereits im Kapitel 4, Abschnitt 4.6 „Seltsamer Attraktor“, vorgestellten fraktalen Dimensionsmaße begründen die eben erfolgte Klassifizierung des N_t -

Attraktors: bei der Gesamtzahl der Elementarereignisse $n(\zeta) = 29$ und den zugehörigen relativen Häufigkeiten ergeben sich die Werte für die Informationsdimension sowie für die Kaplan-Yorke-Dimension in Höhe von:

$$D_I = 4,126$$

$$D_{KY} = 4,858 \quad .$$

5.7 Betriebswirtschaftliche Interpretation der Ergebnisse

Die Analyse des Prozessablaufs der Klinik auf chaotisches Verhalten hat ergeben, dass der operative Leistungsprozess trotz der praktizierten prozessregulierenden Planungsmaßnahmen die Tendenz zum chaotischen Verhalten aufweist. Die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, das Mischungsverhalten der Prozessvariablen N_i , deren selbstähnliche Attraktorstruktur und die fraktale Dimension des N_i -Attraktors führen letztendlich zu der Schlussfolgerung, dass unter der Zielsetzung der maximal möglichen Systemauslastung eine Prognose der Prozessentwicklung nur sehr ungenaue Angaben liefern kann. Das chaotische Systemverhalten vermindert somit im starken Ausmaß die *Prognosequalität*. Insbesondere ist dadurch die Sicherheit einer kurz- bis mittelfristigen Prognose nicht mehr gewährleistet. Eine vernachlässigbar geringfügige Veränderung oder Störung im Prozessablauf – bspw. ein kurzfristiger Ausfall eines OP-Gerätes, eine Verlängerung der OP-Dauer aufgrund auftretender unvorhersehbarer chirurgischer oder technischer Komplikationen, die für sich an als unbedeutend klein gesehen und daher im realen Betriebsgeschehen i. d. R. kaum wahrgenommen werden – kann eine unvorhersagbare, vom Geplanten abweichende Entwicklung des Prozessablaufs nach sich ziehen.

Bedingt durch die verminderte Prognosequalität verringert sich die *Zuverlässigkeit und Effizienz der Planung*, die üblicherweise auf der zahlenmäßigen Erfassung und Analyse des Prozessablaufs basiert und konkrete Vorgabegrößen benötigt, die zugleich zur Prozesssteuerung der einzelnen Teilbereiche der Klinik eingesetzt

werden können. Insbesondere in Bezug auf die Zahlen der durchzuführenden Eingriffe, die Durchführungszeiten und somit zwingend auf die Kosten- und Ertragsverläufe ist die Sicherheit der Planung nicht mehr gewährleistet: aufgrund der Anfangswertsensitivität kann die Abweichung der realisierten Istgrößen von den Planzahlen je Zeiteinheit exponentiell, mit dem durchschnittlichen Faktor 2 anwachsen.

Auch die Umsetzung der Pläne in Ergebnisvorgaben für die einzelnen Teilbereiche, als *Budgetierung* bezeichnet, ist von dem negativen Einfluss der chaotischen Prozessdynamik betroffen. Systematisch und regelmäßig durchgeführt, soll die Budgetierung eine frühzeitige Erkennung von Abweichungen und Engpassbereichen im Krankenhaus, Feststellung von Ursachen hierfür sowie ein zeitnahes Ergreifen der notwendigen Gegenmaßnahmen ermöglichen und somit als Hilfsinstrument der funktionsübergreifenden Betriebsdisziplin *Controlling* dienen. Mit der stark verminderten Prognosequalität bezüglich der Leistungserstellung im untersuchten Fall ist folglich die geringe *Qualität der Prozesssteuerung mittels Budgetierung und Controlling* verbunden. Zu beachten ist auch, dass es sich dabei nicht nur um ein rein qualitatives Problem handelt, sondern dass sich die aufgrund der „verfehlten“ Planung entstehenden Engpässe und ungenutzten Kapazitäten stets monetär bewerten lassen.

Die für die betriebswirtschaftlichen Zwecke am meisten gebrauchte Form der Budgetierung im Krankenhaus ist die Budgetierung auf Kostenbasis. In diesem Fall wird Budgetierung als Planung der Kosten auf der Basis der voraussichtlich zu erbringenden Leistung für einen festen Zeitraum definiert. Bei der problemrelevanten Fragestellung – Auswirkungen des chaotischen Verhaltens der Systemlänge N_t auf die kurz- bis mittelfristigen betriebswirtschaftlichen Aktivitäten und Kenngrößen der Klinikführung – ist es sinnvoll, die Personalkosten des OP-Bereichs und die OP-Betriebsmittelkosten¹⁷², die unmittelbar durch den Vorgang der Leistungserstellung verursacht werden und somit der Prozessvariablen N_t direkt zugeordnet werden können, als fixe Kosten zu sehen.¹⁷³ Gleichzeitig stellen die genannten Kostenarten den größten Anteil an den Gesamtkosten der Leistungserstellung dar. Der Verbrauch

¹⁷² Gemeint sind die Kosten der technischen Ausrüstung des OP-Bereichs.

¹⁷³ Entsprechend der in der Produktionstheorie üblichen Unterscheidung der Produktionskosten in fixe und variable im Hinblick auf deren Variabilität innerhalb einer Zeitspanne und in Abhängigkeit von der Höhe des Outputs: Kosten, deren Höhe nicht durch die steigenden/sinkenden Produktionszahlen innerhalb der betrachteten Zeitspanne beeinflusst werden kann, werden periodenbezogen als fix bezeichnet.

an Werkstoffen der Klinik ist zwar leistungsabhängig und wird durch die Entwicklung der Systemlänge N_t initiiert, jedoch ist dessen monetär bewerteter Anteil an den Gesamtkosten der Leistungserstellung verhältnismäßig gering. Auch lässt sich die Höhe der Vorräte bei Anpassungsbedarf kurzfristig variieren.¹⁷⁴

Ausgehend von der Tatsache, dass die Klinik eine kurz- bis mittelfristige Planung der Kosten und die anschließende Budgetierung unter der Annahme einer bestimmten Auslastung¹⁷⁵ des Leistungsprozesses vornimmt, ist es bei der gegebenen Fragestellung angebracht, von der *Effizienz der Planung* des o.g. Kostenblocks und dessen *Wirtschaftlichkeit* zu sprechen. Denn eine Planung von Kosten für eine bestimmte Periode ist dann als effizient zu sehen, wenn die Abweichung der realisierten Größen von den Geplanten gering ist. Setzt sich nun, verursacht durch eine geringfügige Änderung/Störung in den Anfangsbedingungen, innerhalb der Planungsperiode chaotisches Verhalten der Systemlänge N_t ein, kann die Abweichung der tatsächlich realisierten Kosten- und Ertragsverläufe von den planmäßig vorgesehenen je Zeiteinheit bis auf das zweifache anwachsen. Wobei, vorausgesetzt den Fall, auch die Entwicklung der Abweichung selbst aufgrund des chaotischen Charakters der Prozessdynamik nicht vorhersagbar ist. Es stellt sich hiermit die Frage, ob man generell bei einem derartigen Prozessverlauf von der Effizienz der Planung sprechen kann: jede geringfügige Änderung bzw. Störung im Prozessablauf führt zu anderen/neuen Kosten- und Ertragsverläufen. Demnach unterliegt die Wirtschaftlichkeit, verstanden als Verhältnis von Kosten zur erbrachten Leistung, der Unsicherheit in Bezug auf deren Planbarkeit und Steuerung. Gemildert werden die negativen Folgen der chaotischen Prozessdynamik in diesem Bereich durch die mittlerweile seit Langem von den Krankenhaus- und Klinik-Betrieben praktizierte *flexible Budgetierung*, die Reaktions- und Anpassungsfähigkeit des Betriebsmanagements auf die gegebene Situation erhöht.

An die bereits aufgezählten betriebswirtschaftlichen Nachteile des chaotischen Systemverhaltens knüpft sich des Weiteren die verringerte *Effektivität des Lernprozesses*. Dieser, verstanden als das Beobachten und Begreifen der systemimmanenten Ursache-Wirkungs-Muster, soll dazu dienen, zukunftsbezogen

¹⁷⁴ Denkbar ist zumindest eine monatliche Vorratsregulierung.

¹⁷⁵ I. d. R. stets bei Bestreben der vollen Auslastung des OP-Bereichs.

rationale Entscheidungen bezüglich der Art und der richtigen Zusammensetzung der prozessoptimierenden Maßnahmen zu treffen. Jedoch entzieht sich naturbedingt die chaotische Prozessdynamik samt deren Ursachen der Erfassbarkeit durch unmittelbare Teilnehmer des Geschehens.

Andererseits, wie es bereits in den Abschnitten 5.6.1 – 5.6.4 erläutert wurde, lassen sich die negativen Auswirkungen der chaotischen Prozessdynamik auf das betriebliche Geschehen erheblich reduzieren. Im vorliegenden Praxisbeispiel der ***-Klinik tragen die prozessgestaltenden Maßnahmen wie die Beschränkung der Warteräume, bedarfsgerechte Anpassung der Arbeitszeiten, flexible Pauseneinrichtung sowie ein Einbau der Pufferzeiten zwischen den einzelnen Eingriffen dazu bei, dass die Sicherheit des Prozessablaufs im Vergleich zu dem gleichartigen Prozess in seiner Urform deutlich erhöht wird: liegt das durchschnittliche Fehler-Wachstum des Prozesses ohne Berücksichtigung von prozessgestaltenden Planungsmaßnahmen bei dem 7-fachen einer möglichen geringfügigen Störung, weist der Leistungsprozess der Klinik ein durchschnittliches Fehler-Wachstum in Höhe von 2 auf. Die erhöhte Sicherheit des Prozessablaufs ist in diesem Fall mit einer Art Opportunitätskosten zu bewerten. Insbesondere regulieren zwar die Beschränkung des Warteraumes und die Pufferzeiten den Prozessablauf, jedoch bedeuten sie ökonomisch gesehen eine Verringerung der Produktivität. Denn die mit diesen Maßnahmen zusammenhängenden Akzeptanz von Patientenverlust an die Konkurrenz und Leerlaufzeiten haben letztendlich eine Ertragsminderung zur Folge. Rechentechnisch bewirken die genannten Maßnahmen, dass der Leistungsprozess tatsächlich auf einem deutlich niedrigeren Auslastungsniveau gefahren wird.

Die realisierten sicherheitserhöhenden Vorkehrungen sind, insbesondere unter Beachtung der Art der Leistungen, in dem vorgestellten Praxisbeispiel als angebracht und gerechtfertigt zu sehen. Jedoch in Anlehnung an die Ausführungen des Abschnitts 4.7 „Einfluss von Auslastung und Systemumfang“ lässt sich die Empfehlung einer Betriebserweiterung bzw. eines Klinik-Zusammenschlusses unterbreiten: ein Leistungsprozess mit mehr als 16 OP-Sälen, eine entsprechende Nachfrage vorausgesetzt, kann auf hohem Auslastungsniveau und mit hoher Resistenz gegenüber möglichen Störungen im Prozessablauf gefahren werden.

6 Zusammenfassung

6.1 Schlussbetrachtung und Forschungsfragen

Aus der Sicht der theoretischen Markov-Modelle ist für die Abfertigungsprozesse, die durch solche Modelle beschrieben werden, die Möglichkeit des chaotischen Verhaltens bezüglich der Prozessvariablen Systemlänge N_t gegeben. Die Existenz eines breitbandigen, überwiegend niedrigfrequentierten Leistungsspektrums der Prozessvariablen N_t liefert einen Nachweis für deren *Mischungsverhalten*. Ein durchgehend *positiver Lyapunov-Exponent* der untersuchten Zeitreihen dient als Nachweis für das exponentielle Wachstum einer geringfügigen Störung in den Anfangsbedingungen. Die *selbstähnliche Struktur* des N_t -Attraktors und dessen *multifraktale Dimension* stellen weitere Hinweise für chaotisches Verhalten der Prozessvariablen dar.

Die vorgestellten Ergebnisse der chaos-theoretischen Untersuchung markovscher Abfertigungsprozesse liefern somit den eindeutigen Nachweis für die in einem mehr oder weniger starken Ausmaß *eingeschränkte Prognostizierbarkeit* der jeweiligen Prozessdynamik. Dies seinerseits lässt auf die *Unsicherheit einer betriebswirtschaftlichen Planung* des Produktionsablaufs für den kurz- bis mittelfristigen Planungshorizont schließen. Betroffen sind davon vor allem ökonomische Größen wie *Produktionszahlen, Fertigstellungszeiten, Kosten- und Ertragsverläufe* eines Unternehmens.

Auch die Qualität der Prozesssteuerung mittels *Budgetierung* und *Controlling* im Unternehmen ist durch den chaotischen Charakter der Prozessdynamik negativ beeinflusst: eine frühzeitige Erkennung von Abweichungen, Engpassbereichen und ungenutzten Kapazitäten im Produktionsablauf, Feststellung von Ursachen hierfür sowie zeitnahe Ergreifen von prozessoptimierenden Maßnahmen werden dadurch erheblich erschwert.

Die Neigung zum chaotischen Verhalten variiert jedoch in Abhängigkeit von dem jeweiligen Szenario – Anzahl der Abfertigungskanäle und Verkehrsdichte: bei einigen Szenarien ist die chaotische Prozessdynamik so gut wie ausgeschlossen, andere wiederum können aufgrund einer geringfügigen Störung im Prozessablauf ein durchschnittliches Fehler-Wachstum von bis zu dem 10-fachen der ursprünglichen Abweichung je Zeiteinheit aufweisen.

Außerdem reagieren verschiedene Szenarien unterschiedlich auf mögliche Schwankungen des Auslastungsgrades sowie auf die Änderung der Anzahl der Abfertigungskanäle im System. Bei Prozessen mit einem Auslastungsgrad unter 60 % verursacht eine Erhöhung der Kanalzahl bei gleichbleibender Auslastung eine Verstärkung des chaotischen Charakters der Prozessdynamik und somit einen Anstieg der Unsicherheit im Produktionsablauf. Auch auf die Erhöhung der Auslastung bei gleichbleibender Kanalzahl reagieren Prozesse mit Kanalzahl unter 16 mit einem Anstieg der chaotischen Schwankungen im Prozessablauf.

Bei den Szenarien mit dem Auslastungsgrad von über 60 % wirkt die Erhöhung der Kanalzahl stabilisierend. Prozesse, deren Kapazität 20 und mehr Abfertigungskanäle beträgt und deren Auslastungsniveaus bei 90 % - 95 % liegen, sind im chaostheoretischen Sinne stabil: sie haben ein durchschnittliches exponentielles Fehler-Wachstum in Höhe von 1. Die Resistenz dieser Gruppe von Prozessen gegenüber geringfügigen Störungen ist in erster Linie mit der hohen Systemflexibilität zu begründen, die auf ihren Umfang zurückzuführen ist.

Die in dieser Arbeit vorgestellten chaos-theoretischen Untersuchungen sind von einer grundlegenden Natur, jedoch decken die hier präsentierten Ergebnisse nicht vollständig den Forschungsbedarf zum Thema „Chaos in Abfertigungsprozessen“ ab. Zu klären wäre bspw. die Frage nach der Ursache für den Synergieeffekt zwischen

Auslastung und Systemumfang, der in Systemen mit höheren Kanalzahlen und Auslastungsniveaus beobachtet wird.¹⁷⁶ Eine mögliche Erklärung hierfür wäre bspw., dass derartige Systeme eine Prozessdynamik aufweisen, die vom Charakter her den vollautomatisierten Produktionsabläufen sehr nahe kommt. Eine andere/weitere Begründung dafür könnte die exponentielle Gesetzmäßigkeit sein, die der Prozessdynamik zugrunde liegt. Da jedoch zu dieser Fragestellung weiter gehende Untersuchungen erforderlich sind, bleiben die ausgesprochenen Annahmen vorerst spekulativ.

Des Weiteren bezieht sich die in dieser Arbeit untersuchte Problematik auf die Prozesse, die durch Modelle mit poissonverteilten Ankunfts- und Abfertigungszahlen abgebildet werden. Zwar lässt sich eine Mehrheit von Abfertigungsabläufen aus der betriebswirtschaftlichen Realität durch solche Modelle hinreichend genau oder gar optimal abbilden, dennoch sind auch praxisrelevante Abfertigungsabläufe denkbar, die durch andere stochastische Gesetzmäßigkeiten zu beschreiben wären. Diese Vermutung wird insbesondere durch die Ergebnisse der statistischen Datenanalyse, die im Kapitel 5 zur Modellierung des praxisbezogenen Leistungsprozesses vorgenommen wurde, gestützt: einige prozessinitiiierenden Modellvariablen lassen sich durch bspw. eine Weibull-, Beta- oder Lognormalverteilung genauer abbilden als durch die – im Übrigen häufig zutreffende – Annahme einer Poissonverteilung.¹⁷⁷ Es besteht daher ein Forschungsbedarf hinsichtlich einer Zahl von „Randverteilungen“ die sich zur Abbildung spezieller Abfertigungsabläufe in der Praxis eignen.

6.2 Ausblick

Es ist klar, dass man keineswegs von lokaler Stabilität in unternehmensinternen Abläufen der in dieser Arbeit betrachteten Art Produktion/Dienstleistungserstellung ausgehen kann, sondern davon ausgehen muss, dass i. d. R. nichtlineare Beziehungen unter den leistungsbezogenen Kenngrößen vorherrschen. Diese bilden nicht die Ausnahme in einem ansonsten zum globalen Gleichgewicht tendierenden System,

¹⁷⁶ Vgl. Kapitel 4, Abschnitt 4.7.

¹⁷⁷ Vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.3.2.

sondern stellen eher die Regel dar. Weiterhin ist ebenso einleuchtend, dass die Anwendung der Erkenntnisse aus der Chaos-Theorie auf ökonomische Vorgänge des Leistungsbereiches eines Unternehmens nicht nur sinnvoll, sondern notwendig ist, vor allem wenn man entsprechende Zeitreihen untersuchen und dabei aussagefähige Erkenntnisse für die Zukunft, bspw. für die weitere Gestaltung des Planungs-, Budgetierungsprozesses und letztendlich der eigentlichen Leistungserstellung, gewinnen will.

Zwar ist anhand der in dieser Arbeit behandelten N_t -Zeitreihen, was übrigens auch für die meisten ökonomischen Zeitreihen ebenfalls zutrifft, das Auftreten von Chaos nicht exakt zu erfassen.¹⁷⁸ Das liegt nicht an den mathematischen Instrumenten der Chaos-Forschung, sondern zum einen an dem Problem, dass das zur Verfügung stehende statistische Material i. d. R. nicht in seiner Originalform direkt für chaostheoretische Auswertungen verwendet werden kann. Hier spielen u. a. Aspekte der unternehmensinternen Datenerfassung hinein, wie die „grobmaschige“ Struktur der aufgenommenen Daten oder die nicht auszuschließende Ungenauigkeit der Messungen. Zum anderen entziehen sich aufgrund des dissipativen Charakters der untersuchten Abfertigungssysteme die die Prozessdynamik treibenden Variablen und Konstanten einem direkten Einfluss des Entscheidungsträgers: die im Rahmen der klassischen Chaos-Theorie geltende Erkenntnis über die ausschlaggebende Wichtigkeit der Parameterwahl und der Wahl von Anfangswerten kann für die markovschen Abfertigungsprozesse nicht ohne Weiteres umgesetzt werden.

Dennoch erscheint es auf jeden Fall hilfreich, anhand des vorhandenen statistischen Materials Plausibilitätsüberlegungen darüber anzustellen, ob und inwiefern der Eintritt von Chaos im jeweiligen Abfertigungssystem möglich ist und welche Gestaltungsmöglichkeiten zur Sicherung einer „chaosfreien“ Prozessdynamik dem Entscheidungsträger zur Verfügung stehen.

Dabei könnte das Abwägen der Möglichkeit einer Prozessgestaltung auf dem hohen Auslastungsniveau ($\rho \rightarrow 1$) unter Prämisse des bestehenden Risikos für chaotische Zustände gegen die Möglichkeit eines (fast) risikofreien Prozessablaufs, die bspw. durch Einbau von Pufferzeiten zwischen den einzelnen Eingriffen erreichbar wäre,

¹⁷⁸ Wie dies im Falle rein theoretischer differenzierbarer Zeitreihen der Fall ist.

eine problemrelevante Überlegung sein. Die erstere Alternative entspricht der Urform des unternehmerischen Denkens nach dem Prinzip der Gewinnmaximierung, während die Letztere zwingend mit Akzeptanz einer geringeren Auslastung des Abfertigungssystems und somit eines geringeren Outputs im Vergleich zu der ersteren Alternative verbunden ist. Zu beachten ist, dass sowohl die Bereitschaft zur Risikotragung als auch die Annahme des Pufferzeiten-Modells mit einer Art Opportunitätskosten verbunden sind, die jeweils zu ermitteln und bei der Alternativenwahl zu berücksichtigen sind.

Eine weitere Möglichkeit zur Prozessstabilisierung kann darin bestehen, die Kapazität eines Produktions-/Dienstleistungsbetriebes zu erweitern. Jedoch auch in diesem Fall ist der Nutzen der prozessstabilisierenden Maßnahme, unter Beachtung von deren Realisierbarkeit, gegen den hierfür erforderlichen Investitionsaufwand abzuwägen.

Literaturverzeichnis

Anishchenko, V. S., Astakhov, V. V., Neiman, A. B., Vadivasova, T. E., Schimansky-Geier, L.: Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.

Argyris, J., Faus, G., Haase, M.: Die Erforschung des Chaos, Braunschweig Wiesbaden, 1994.

Bae, J., Kim, J., Lee, E. Y.: An optimal service rate in a Poisson arrival queue with two-stage service policy, in: Mathematical Methods of Operations Research, Physica-Verlag, Volume 58, Issue 3, 2003, S. 477 – 482.

Behnen, K., Neuhaus, G.: Grundkurs Stochastik, B. G. Teubner, Stuttgart 1984.

Bestle, D.: Beurteilungskriterien für chaotische Bewegungen nichtlinearer Schwingungssysteme in Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 11: Schwingungstechnik Nr. 100, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1988.

Biethahn, J., Hummeltenberg, W., Schmidt, B.: Simulation als betriebliche Entscheidungshilfe, Band 3, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992.

Blätter, C.: Analysis I – III , 3 Bänder, 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, 1980.

Böschel, S.: Handeln trotz Nichtwissen: vom Umgang mit Chaos und Risiko in Politik, Industrie und Wissenschaft, Campus Verlag, Frankfurt am Main, 2004.

Bösken, M.: Investitionscontrolling unter Berücksichtigung von Selbstorganisation und Chaos in der Unternehmung und Umwelt, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der wirtschaftswissenschaftlichen Doktorwürde des FB Wirtschaftswissenschaften der Universität zu Marburg, Marburg 1995.

Bräuer, K.: Chaos, Attraktoren und Fraktale: Mathematische und physikalische Grundlagen nichtlinearer Phänomene mit Anwendungen in Physik, Biologie und Medizin, Logos Verlag Berlin, 2002.

Brüggemann, W.: Ausgewählte Probleme der Produktionsplanung: Modellierung, Komplexität und neuere Lösungsmöglichkeiten, Physica-Schriften zur Betriebswirtschaft 52, Physica-Verlag, 1995.

Buchholz, P.: Die strukturierte Analyse Markovscher Modelle, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1991.

Buzug, T., Dr.: Analyse chaotischer Systeme, Forschungsanstalt der Bundeswehr für Wasserschall- und Geophysik, Kiel, Wissenschaftsverlag Mannheim Leipzig Wien Zürich, 1998.

Canty, M. J.: Chaos und Systeme: Eine Einführung in Theorie und Simulation dynamischer Systeme, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig-Wiesbaden, 1995.

Claus, V.: Einführung in die Informatik, Stuttgart, 1975.

Daub, A.: Ablaufplanung: Modellbildung, Kapazitätsabstimmung und Unsicherheit, Reihe: Quantitative Ökonomie, Band 53, Verlag Josef Eul Bergisch Gladbach Köln, 1993.

De Marco, T.: Structured Analysis and System Specification, YOURDON inc., New York, 1978.

Ekeland, I.: Zufall, Glück und Chaos: Mathematische Expeditionen, aus dem Französischen übersetzt von Fliessbach, H., Carl Hanser Verlag München Wien 1992.

Elskens, Y., Escande, D.: Microscopic dynamics of plasmas and chaos, Institute of Physics Publ., Bristol, 2003.

Fischer, G.: Lineare Algebra, 9. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986.

Flesch, J., Thuijsman, F., Vriese O. J.: Stochastic Games with non-observable Actions, in: Mathematical Methods of Operations Research, Physica-Verlag, Volume 58, Issue 3, 2003, S. 459 – 475.

Frick, A.: Der Software-Entwicklungsprozess – Ganzheitliche Sicht, Carl Hanser Verlag, München Wien, 1995.

Gernert, Ch., Ahrend, N.: IT-Management: System statt Chaos: ein praxisorientiertes Modell, Oldenbourg Verlag, München, 2002.

Hartmann, S.: Generating scenarios for simulation and optimization of container terminal logistics, in: ORSpectrum, Springer-Verlag, Volume 26, Issue 2, April 2004, S. 171 – 192.

Hartung, J., Elpelt, B.: Multivariate Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, 4. Auflage, R. Oldenbuorg Verlag GmbH, München, 1992.

Hartung, J.: Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, 8. Auflage, R. Oldenbuorg Verlag GmbH, München, 1991.

Heller, W.-D., Lindenberg, H., Nuske, M., Schriever, K.-H.: Stochastische Systeme: Markovketten, Stochastische Prozesse, Warteschlangen, 1. Auflage, de Gruyter, Berlin, New York, 1978.

Hoppensteadt, F. C.: Analysis and Simulation of Chaotic Systems, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1994.

Junglas, B.: Quantenchaos in einem dissipativen Billard, Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik der Mathematischen-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, 1997.

Kahlbacher, G. Helmut: Termin- und Ablaufplanung – ein analytischer Zugang, Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktor der Naturwissenschaften des FB Mathematik der Universität Kaiserslautern, 1992.

Kinnebrock, W.: Bedeutende Theorien des 20. Jahrhunderts: Quantenmechanik – Relativitätstheorie – Gravitation – Kosmologie – Chaostheorie – Prädikatenlogik, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1999.

Kirschenbaum, A.: Chaos organization and disaster management, Schriftenreihe Public administration and public policy, Dekker, New York, 2004.

Klir, J., Valach, M.: Cybernetic Modelling, London, 1965.

Krüger, S.: Simulation – Grundlagen, Techniken, Anwendungen, Walter de Gruyter Verlag, Berlin New York, 1975.

Kunick, A., W.-H. Steeb: Chaos in dynamischen Systemen, B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich 1986.

Lehmann, E.: Endliche homogene Markoffsche Ketten – eine Anwendung von Wahrscheinlichkeits- und Matrizenrechnung, Bayerischer Schulbuch-Verlag München, 1973.

Leiner, B.: Zeitreihenanalyse, 3. Auflage, R. Oldenbuorg Verlag GmbH, München, 1991.

Liening, A.: Komplexe Systeme zwischen Ordnung und Chaos: neuere Entwicklungen in der Theorie nicht-linearer dynamischer Systeme und die Bedeutung für die Wirtschaftswissenschaft und ihre Didaktik, Habilitation an der Universität Münster, 1998.

Lier, T.: Determinismus oder Zufall? Chaostheorie und Neuronale Netze in der Nichtlinearen Analyse ökonomischer Zeitreihen, Dissertation am Institut für Sozialforschung der Universität Stuttgart, 1999.

Loistl, O., Betz, I.: Chaostheorie, 3. Auflage, R. Oldenbourg Verlag München Wien.

Martelli, M.: Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York-Chichester-Weinheim-Brisbane-Singapore-Toronto, 1999.

Medio, A.: Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics, Cambridge University Press, 1992, Reprinting 1999.

Mertens, P.: Prognoserechnung, 3. Auflage, physika-Verlag, Würzburg – Wien, 1978.

Meyer, M., Hansen, K.: Planungsverfahren des Operations Research, 3. Auflage, Verlag Franz Vahlen GmbH, München, 1985.

Morfill, G., Scheingraber, H.: Chaos ist überall...Und es funktioniert: eine neue Weltansicht, Verlag Ullstein GmbH, Frankfurt/Main, 1991.

Neumann, K.: Operations Research Verfahren, Band 2, Carl Hanser Verlag, München Wien, 1977.

Niemeyer, G.: Kybernetische System- und Modelltheorie, München, 1977.

Niemeyer, G.: Systemsimulation, Frankfurt, 1973.

Olsen, L.: Random geometrically graph directed self-similar multifractals, University of North Texas, USA, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.

Paul, T. M.: Markoffsche Entscheidungsmodelle mit unvollständiger Information, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat. der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm, Ulm, 1994.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: Chaos: Bausteine der Ordnung, aus dem Amerikanischen übersetzt von Rodenhausen, A. M., Springer-Verlag, Klett-Cotta, 1994.

Peitgen, H.-O., u. a. : Fractals for the Classroom, Part two, Complex systems and Mandelbrot set, Springer-Verlag, 1992.

Ruelle, D.: Zufall und Chaos, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New-York, 1991.

Schäl, M.: Markoffsche Entscheidungsprozesse, B. G. Teubner Stuttgart, 1990.

Schlittgen, R.: Angewandte Zeitreihenanalyse, R. Oldebourg Verlag, München Wien, 2001.

Schroeder, M.: Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit: Notizen aus dem Paradies der Unendlichkeit, aus dem Amerikanischen übersetzt von Brau, J. und Sümer, E., Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford, 1994.

Schuster, H. G.: Deterministisches Chaos, VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim-New York-Basel-Cambridge-Tokyo, 1994.

Schuster, H. G.: Handbook of chaos control, WILEY-VCH Verlag GmbH Weinheim, 1999.

Sornette, D.: Critical phenomena in natural sciences: concepts and tools, Springer Verlag Berlin/Heidelberg/New-York, 2004.

Sprott, J. C.: Chaos and Time-Series Analysis, Oxford University Press, 2003.

Steinhausen, D.: Simulationstechniken, R. Oldenbuorg Verlag GmbH, München, 1994.

Stroh, C. M.: Julia Sets of rational functions with spezial Emphasis on Chebyshev Families, Connectedness and Visualization on the Computer, Schriften der Johannes-Kepler-Universität, Reihe C – Technik und Naturwissenschaften 32, Universitätsverlag Rudolf Trauner, Linz, 2000.

Worbs, J.: Modellierung und Analyse turbulenter produktionslogistischer Prozesse mit Methoden der Nichtlinearen Dynamik, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2003.

Anhang A

Entwicklung des Lyapunov-Exponenten markovscher Abfertigungsprozesse in Abhängigkeit von Kanalzahl und Verkehrsdichte

Beispiel 1:

$$M^{exp}/M^{exp}/1 : (1000 ; \text{FIFO}) = (\lambda = 0,4; \mu = 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 0; \Delta t = 1)$$

Tabelle 1.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,041588831	0,027371263	0,164613335
1000	0,051188659	0,037352838	0,193172166
3000	0,041019921	0,035563317	0,188550954
5000	0,040891843	0,034284788	0,185143003
10000	0,046128041	0,036103735	0,190000327

Abbildung 1.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})

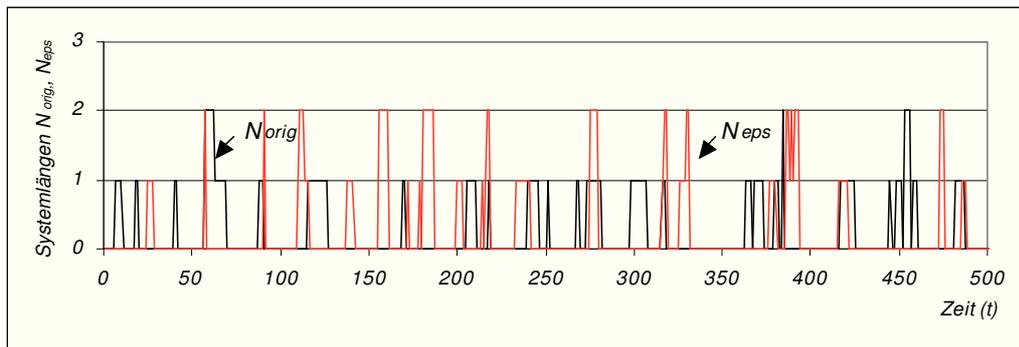


Abbildung 1.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t

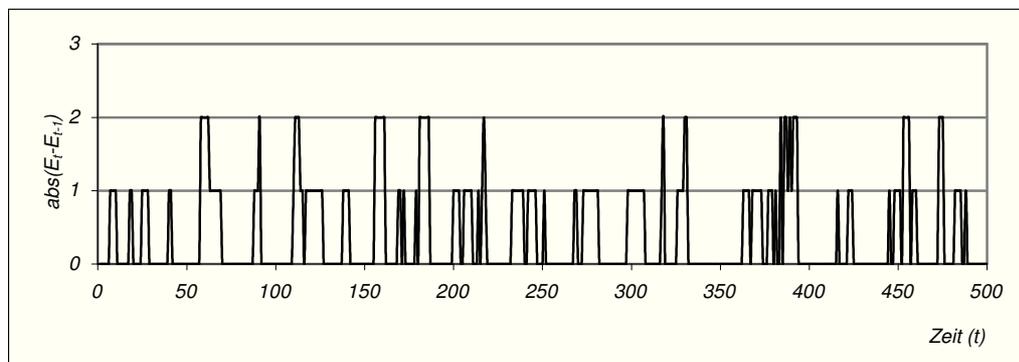
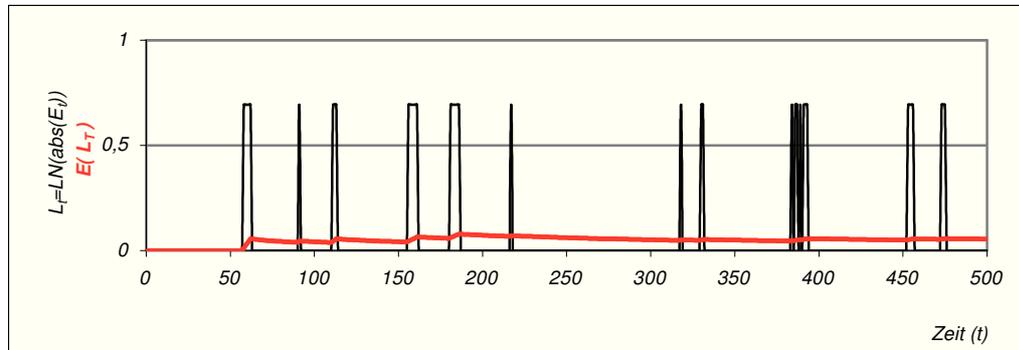


Abbildung 1.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen¹⁷⁹ und des Lyapunov-Mittelwerts



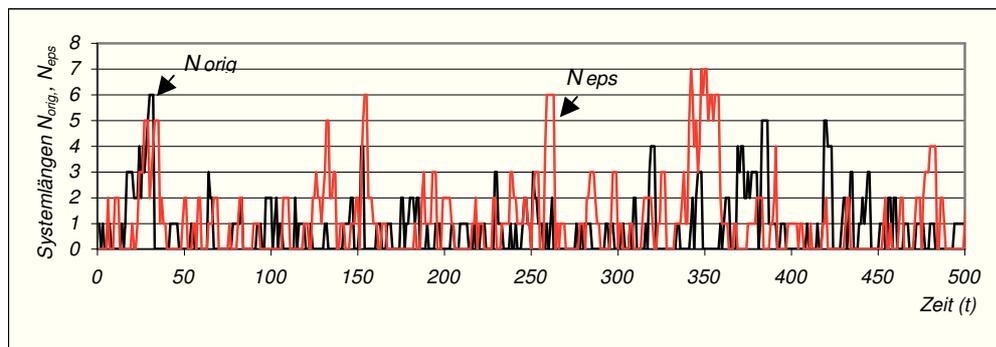
Beispiel 2:

$$M^{exp}/M^{exp}/1 : (1000 ; \text{FIFO}) = (\lambda = 1; \mu = 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 0; \Delta t = 1)$$

Tabelle 2.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,244720009	0,18323991	0,425919606
1000	0,334599366	0,284590579	0,533203515
3000	0,303349766	0,251413312	0,501327745
5000	0,326547997	0,262767693	0,51255745
10000	0,326278263	0,269933954	0,519525708

Abbildung 2.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})



¹⁷⁹ Lyapunov-Zahl: $L_t = \ln \left| \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0} \right|$, $t = 0, 1, 2, \dots$

Abbildung 2.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t

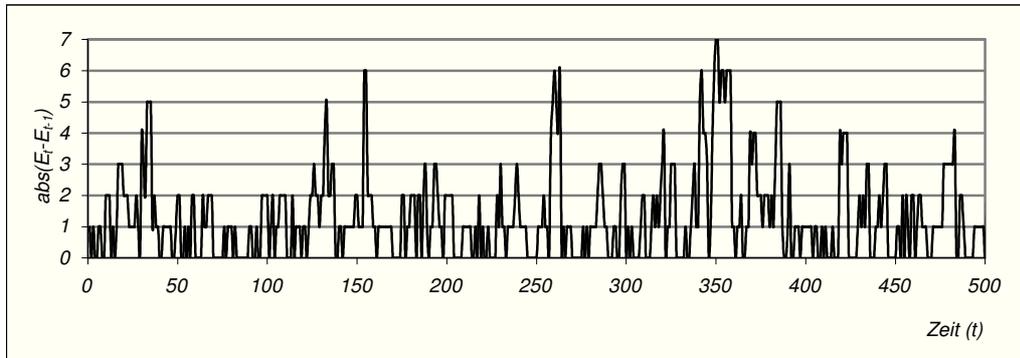
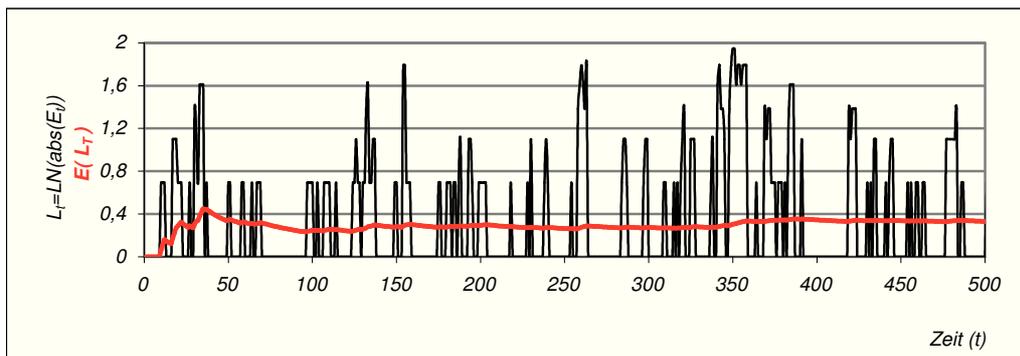


Abbildung 2.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 3:

$$M^{exp}/M^{exp}/1 : (1000 ; FIFO) = (\lambda = 1,9; \mu = 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 3.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,836448564	0,481296231	0,690277675
1000	2,13346007	1,348264532	1,160567218
3000	2,258261934	1,173625687	1,083159489
5000	2,384543838	1,196704131	1,09383033
10000	2,251016606	1,157518265	1,075826433

Abbildung 3.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\epsilon)}$ (N_{eps})

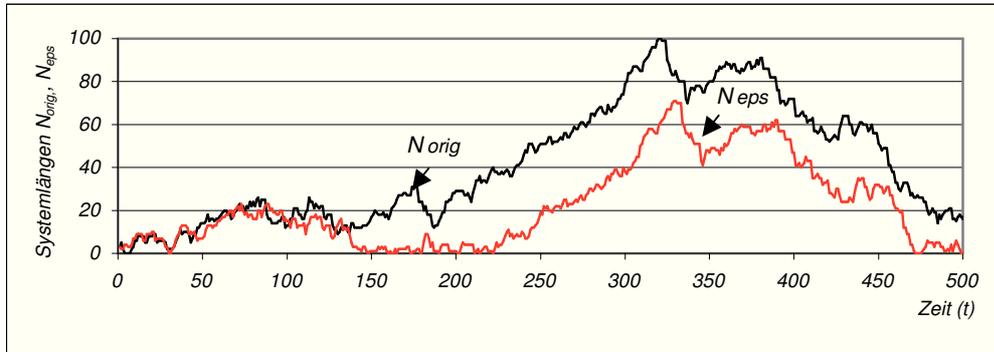


Abbildung 3.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ϵ_t

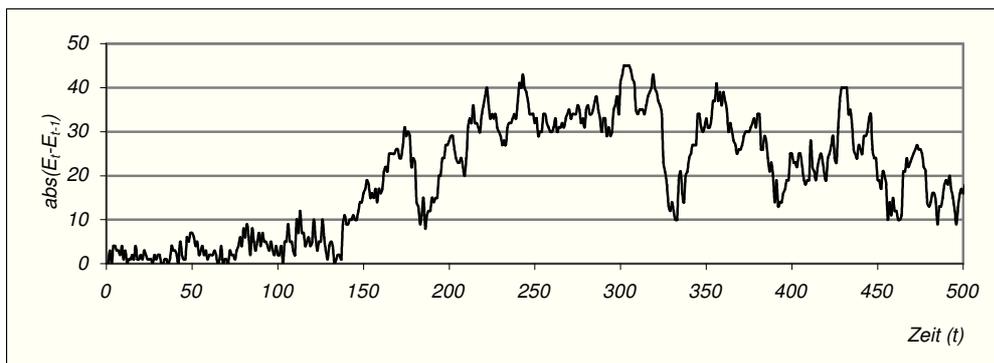
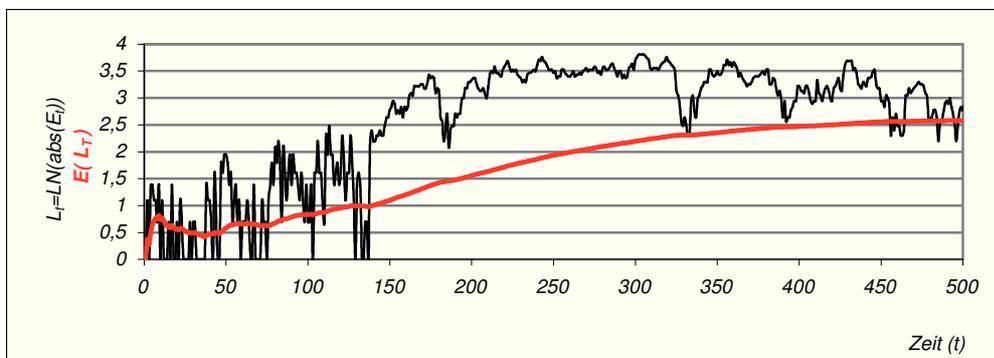


Abbildung 3.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 4:

$$M^{exp} / M^{exp} / 2 : (1000 ; FIFO) = (\lambda = 0,4; \mu_i = 1; i = 1, 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 0; \Delta t = 1)$$

Tabelle 4.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,095341615	0,071069916	0,265253118
1000	0,063443294	0,048016586	0,219017282
3000	0,055290909	0,040821803	0,202010385
5000	0,061413258	0,043911742	0,209530331
10000	0,072956772	0,05415209	0,232694381

Abbildung 4.1: Entwicklung der Systemgrößen N_i (N_{orig}), $N_i^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})

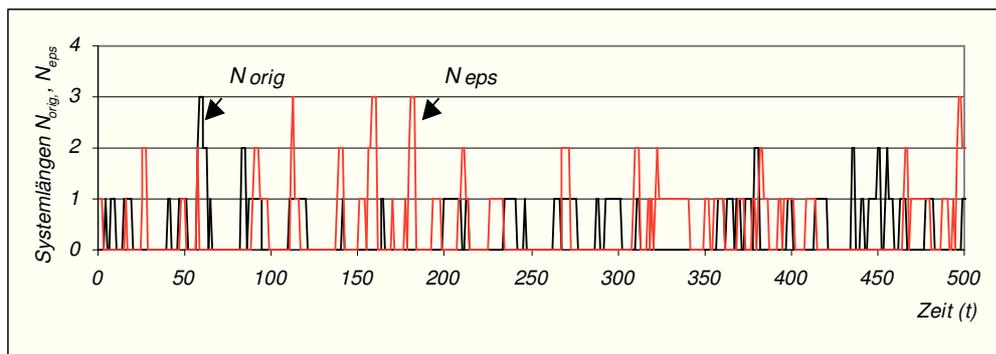


Abbildung 4.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_i

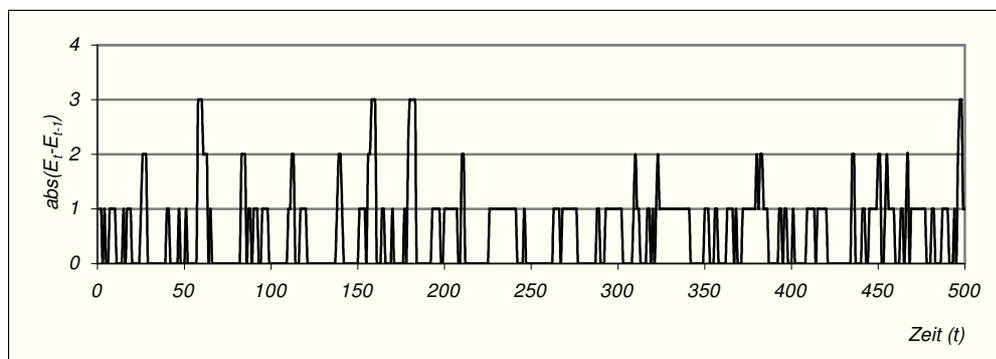
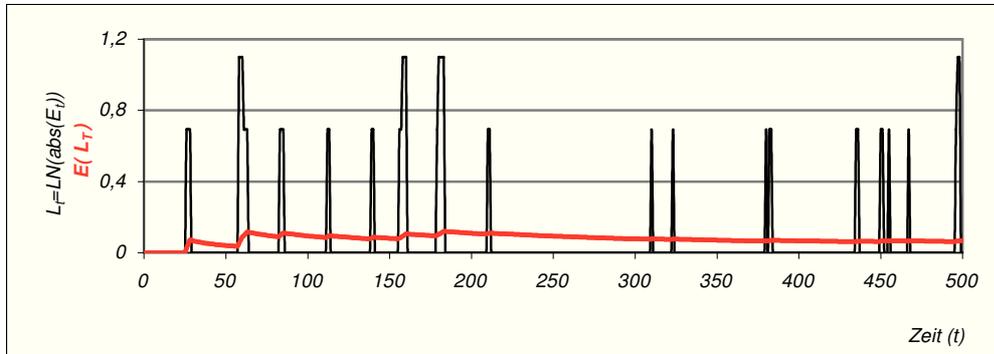


Abbildung 4.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 5:

$$M^{exp} / M^{exp} / 2 : (1000 ; FIFO) = (\lambda = 1; \mu_i = 1; i = 1, 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 5.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,520291176	0,314981738	0,558419127
1000	0,470003014	0,353160109	0,593975546
3000	0,427721243	0,315991424	0,562037449
5000	0,428474916	0,314629386	0,560862247
10000	0,42954593	0,322976851	0,568282107

Abbildung 5.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})

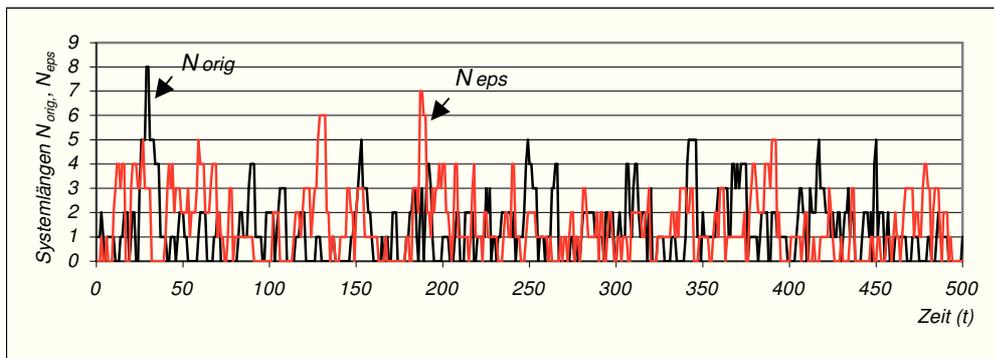


Abbildung 5.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t

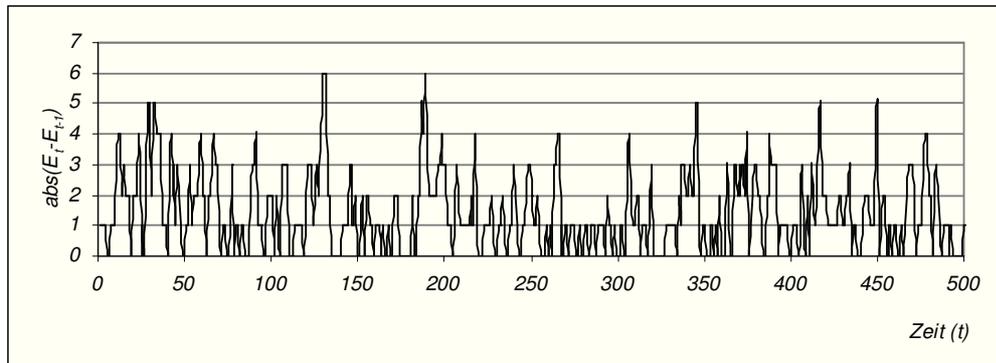
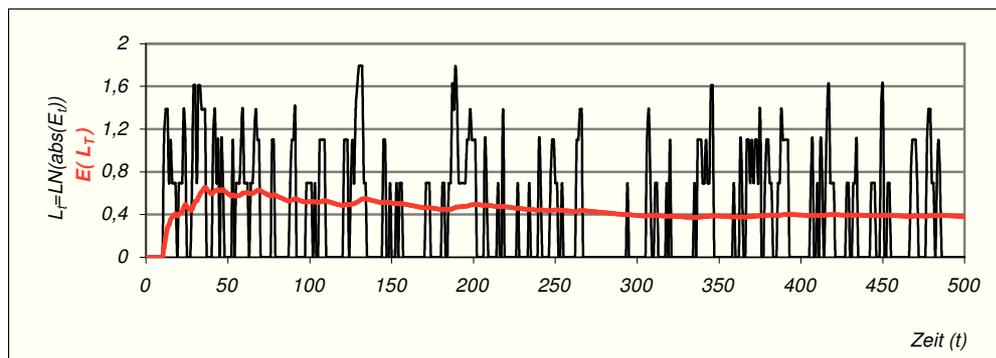


Abbildung 5.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 6:

$$M^{exp} / M^{exp} / 2 : (1000 ; FIFO) = (\lambda = 1,9; \mu_i = 1; i = 1, 2; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 6.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	1,059973056	0,664512853	0,811090454
1000	2,350213837	1,377345592	1,173016729
3000	2,004357756	1,167318313	1,080244976
5000	2,1366561	1,096977798	1,047262337
10000	2,373433208	1,259921139	1,122405964

Abbildung 6.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\epsilon)}$ (N_{eps})

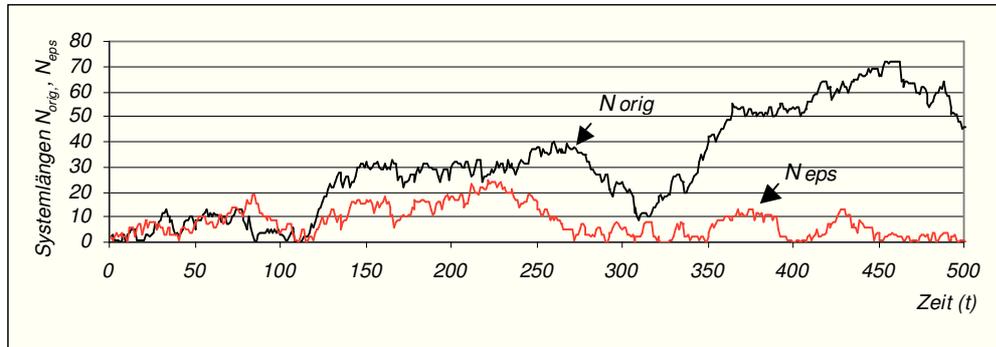


Abbildung 6.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ϵ_t

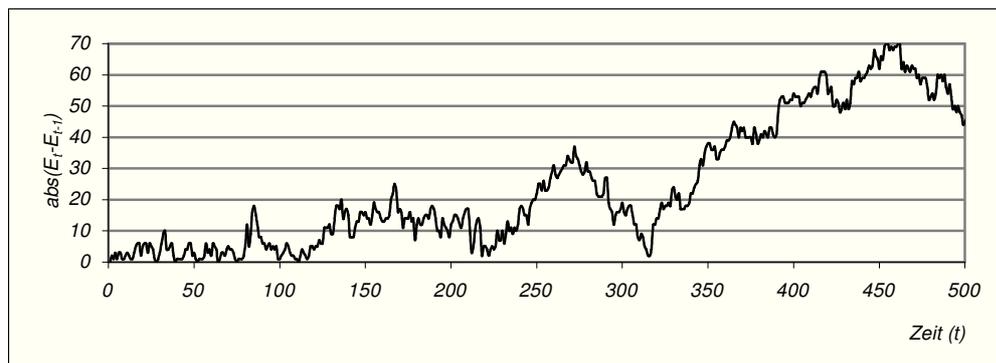
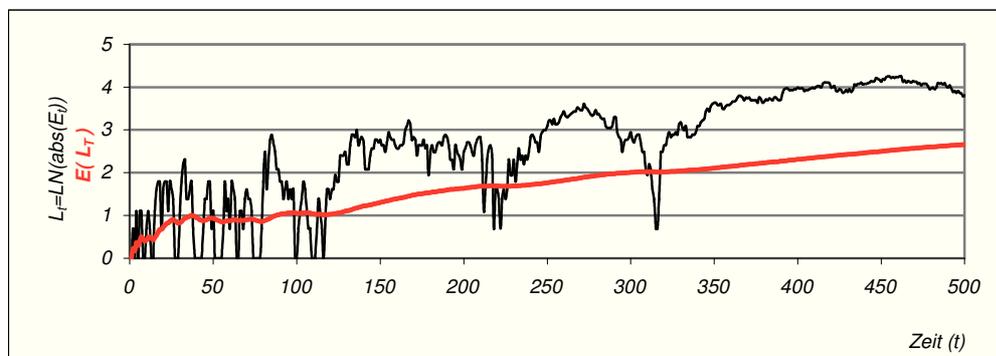


Abbildung 6.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 7:

$$M^{exp}/M^{exp}/5:(1000; \text{FIFO}) = (\lambda = 0,4; \mu_i = 0,4; i = 1, \dots, 5; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 7.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,254244306	0,148711589	0,383698414
1000	0,215034062	0,126590599	0,355617784
3000	0,215510896	0,1368591	0,369883063
5000	0,218254258	0,142715276	0,377738974
10000	0,217477178	0,142271911	0,377170629

Abbildung 7.1: Entwicklung der Systemgrößen N_i (N_{orig}), $N_i^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})

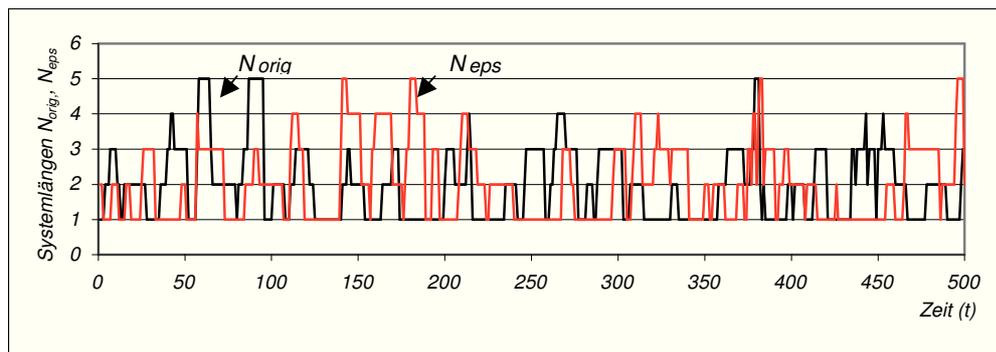


Abbildung 7.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t

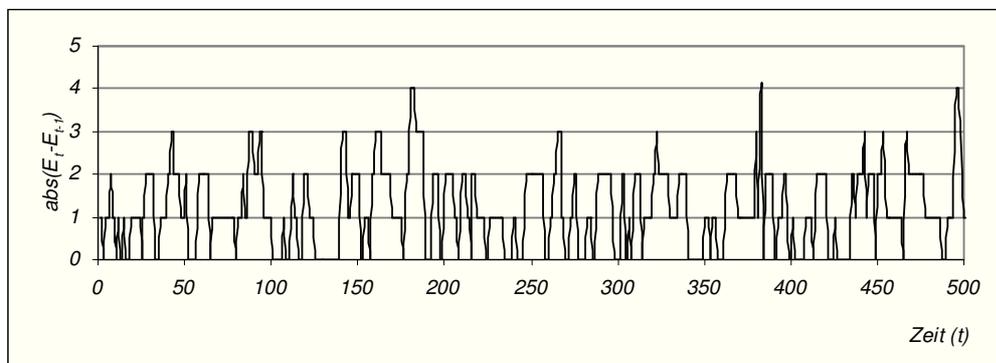
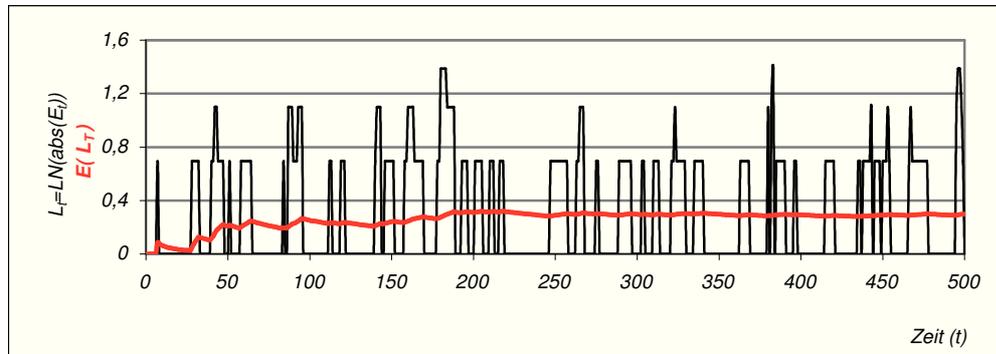


Abbildung 7.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 8:

$$M^{exp}/M^{exp}/5 : (1000 ; FIFO) = (\lambda = 1; \mu_i = 0,4; i = 1, \dots, 5; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 8.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	0,858826743	0,529205496	0,723818652
1000	0,622985262	0,396171731	0,629106954
3000	0,559276699	0,372887031	0,610542984
5000	0,584057172	0,379740385	0,616169163
10000	0,584743061	0,371412725	0,609405927

Abbildung 8.1: Entwicklung der Systemgrößen N_i (N_{orig}), $N_i^{(\varepsilon)}$ (N_{eps})

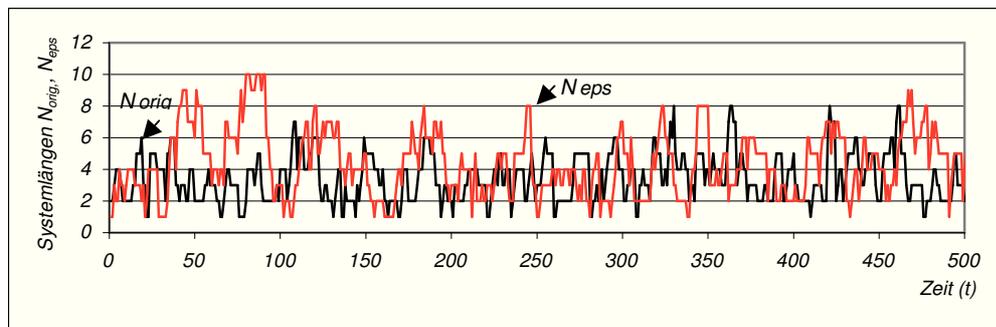


Abbildung 8.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ε_t

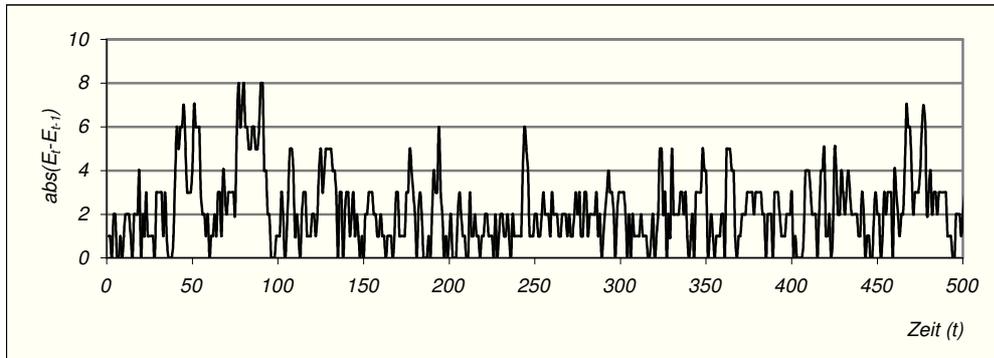
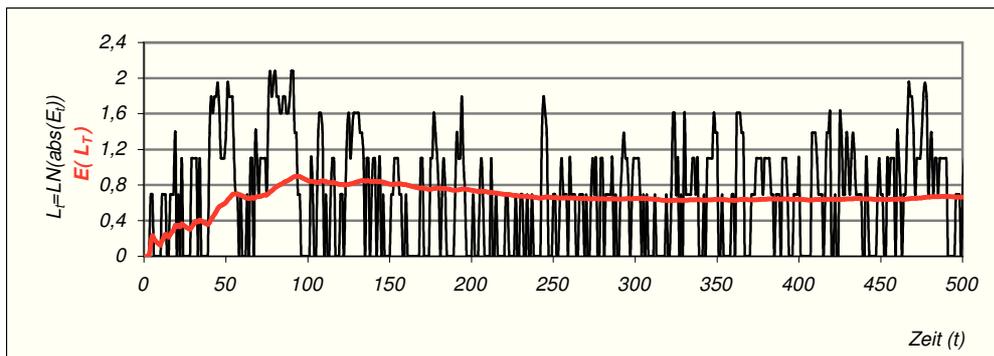


Abbildung 8.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Beispiel 9:

$$M^{exp}/M^{exp}/5:(1000; \text{FIFO}) = (\lambda = 1,9; \mu_i = 0,4; i = 1, \dots, 5; N_0 = 0; \varepsilon_0 = 1; t_0 = 1; \Delta t = 1)$$

Tabelle 9.1: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung des Lyapunov-Exponenten

Beobachtungszeit	Mittelwert	Varianz	Standardabweichung
100	1,07623325	0,591701494	0,765365585
1000	2,198234811	0,822586089	0,906511723
3000	1,933615827	0,92573068	0,961988619
5000	1,961593576	0,956543035	0,977932373
10000	2,100511522	0,998899183	0,999399466

Abbildung 9.1: Entwicklung der Systemgrößen N_t (N_{orig}), $N_t^{(\epsilon)}$ (N_{eps})

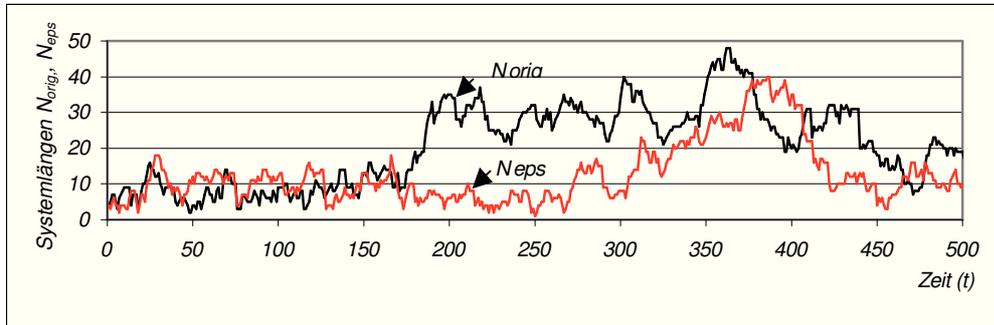


Abbildung 9.2: Entwicklung der absoluten Differenzen ϵ_t

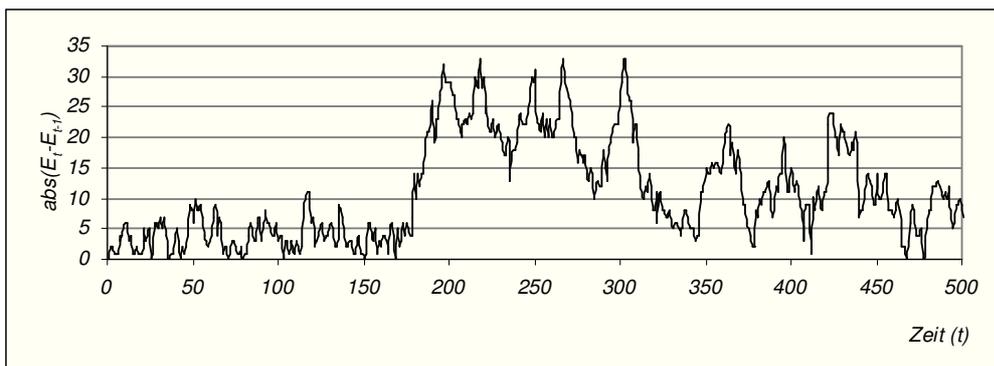
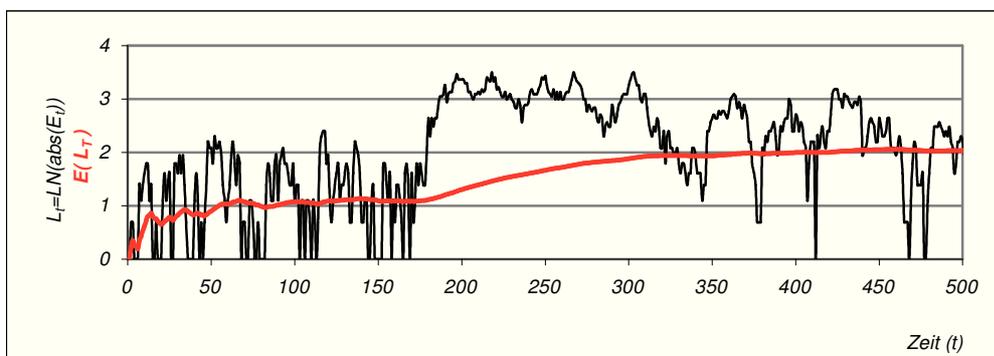


Abbildung 9.3: Entwicklung der Lyapunov-Zahlen und des Lyapunov-Mittelwerts



Anhang B

Praxisbezogener Fall, *-Klinik: statistisch aufbereitete Daten**

Bettenernumerierung ***-Klinik

Nr. Stockwerk	Bezeichnung Station	ZimmerNr.	Bettanzahl
3. OG	CH3 (Chirurgie)	301 - 306	3
		307	2
		308	3
		310	2
		311	1
		314 - 321	3
4. OG	CH4 (Chirurgie)	415	1
		416 - 422	2
		423	1
		431	1
		432 - 438	2
		439	1
		441	1
		442	1
5. OG	NCH5 (Neurochirurgie)	513	2
		514	3
		515	3
		516	2
		517	3
		518	2
		519	3
		520	2
		521	2
		529 - 533	3
		534	2
		535 - 536	3
		537	2
538	3		
6. OG	CH6 (Chirurgie)	605	1
		606	1
		607 - 611	2
		617 - 620	1
		621 - 624	2
		625 - 628	1
7. OG	CH7 (Chirurgie)	714	2
		716	3
		717	2
		718 - 723	3
		738 - 742	3
		743	2
		745 - 748	3
8. OG	CH8 (Chirurgie)	814	1
		816	3
		817	2
		818 - 823	3
		838 - 842	3
		843	2
		845 - 848	3

**Überstunden-Jahresübersicht für Repräsentanzfälle:
Saal 1 (Chirurgie, septisch / aseptisch), Saal 5 (Chirurgie, aseptisch),
Saal 3 (Neurochirurgie)**

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3
01.01	94	0	0
01.02	3	54	30
01.03	0	0	0
01.04	18	46	0
01.05	0	0	0
02.01	0	0	5
02.02	0	68	35
02.03	12	0	0
02.04	15	0	0
02.05	15	0	7
03.01	5	48	0
03.02	0	0	0
03.03	50	157	18
03.04	0	0	0
03.05	34	0	0
04.01	97	4	0
04.02	43	128	42
04.03	0	0	0
04.04	5	0	210
04.05	0	0	68
05.01	0	10	0
05.02	157	50	0
05.03	21	70	0
05.04	6	132	0
05.05	0	0	0
06.01	50	15	0
06.02	105	0	0
06.03	0	0	0
06.04	0	0	10
06.05	93	0	0
07.01	32	27	0
07.02	0	39	3
07.03	0	0	45
07.04	38	0	31
07.05	0	0	0
08.01	192	55	7
08.02	0	66	0
08.03	17	111	72
08.04	26	7	80
08.05	0	0	0
09.01	50	0	0
09.02	0	0	120
09.03	0	0	0
09.04	0	20	25
09.05	0	0	0
10.01	0	0	0
10.02	0	0	0
10.03	0	0	120
10.04	0	35	0
10.05	0	0	0

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3
11.01	0	0	0
11.02	61	36	0
11.03	41	7	0
11.04	0	0	55
11.05	1	0	20
12.01	18	29	0
12.02	0	0	26
12.03	0	0	0
12.04	0	0	0
12.05	0	0	0
13.01	73	15	49
13.02	183	25	43
13.03	0	12	30
13.04	150	0	0
13.05	0	0	0
14.01	10	72	0
14.02	50	73	0
14.03	51	25	21
14.04	0	0	0
14.05	0	0	0
15.01	0	0	0
15.02	42	0	0
15.03	0	0	29
15.04	9	0	0
15.05	0	0	24
16.01	133	95	0
16.02	0	4	49
16.03	0	0	0
16.04	141	58	0
17.02	58	2	0
17.03	0	38	95
17.04	0	0	47
17.05	85	42	0
18.02	0	0	10
18.03	0	0	0
18.04	52	108	70
18.05	0	0	0
19.01	235	97	115
19.02	51	0	46
19.03	0	0	0
19.04	34	33	35
19.05	0	0	0
20.01	0	0	30
20.02	0	24	0
20.03	0	109	30
20.04	21	105	57
20.05	0	0	0
21.01	0	46	46
21.02	0	22	72
21.03	295	68	4

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3
21.04	21	0	0
21.05	0	0	0
22.01	0	22	0
22.02	0	0	50
22.03	42	0	14
22.05	61	0	10
23.01	0	48	45
23.02	54	10	0
23.03	0	72	51
23.04	47	6	18
23.05	138	50	0
24.02	51	103	40
24.03	49	0	40
24.04	22	0	0
24.05	0	0	7
25.01	39	9	53
25.02	0	0	8
25.03	95	115	0
25.04	0	0	0
25.05	7	0	17
26.01	0	0	0
26.02	103	34	0
26.03	0	91	8
26.04	95	10	0
26.05	140	22	0
27.01	85	204	0
27.02	174	157	0
27.03	0	12	0
27.04	25	0	0
27.05	0	0	0
28.01	0	85	8
28.02	4	0	0
28.03	0	0	0
28.04	0	193	0
28.05	110	0	0
29.01	43	0	45
29.02	164	103	75
29.03	5	0	14
29.04	0	0	13
29.05	0	0	0
30.01	17	30	21
30.02	0	0	65
30.03	7	0	41
30.04	50	0	10
30.05	23	0	28
31.01	29	40	0
31.02	24	100	0
31.03	0	0	0
31.04	35	6	18
31.05	0	74	0
32.01	0	79	37
32.02	0	0	17
32.03	47	0	0
32.04	0	0	0

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3
32.05	200	0	27
33.01	0	16	0
33.02	0	61	0
33.03	103	0	37
33.04	52	94	0
33.05	0	0	0
34.01	0	0	0
34.02	0	0	30
34.03	0	14	24
34.04	217	49	0
34.05	0	0	213
35.01	0	0	11
35.02	32	40	0
35.03	0	0	25
35.04	0	0	0
35.05	57	65	45
36.01	0	0	0
36.02	0	0	0
36.03	12	0	0
36.04	24	0	0
36.05	108	9	0
37.01	133	109	0
37.02	31	17	13
37.03	67	26	0
37.04	177	33	8
37.05	0	33	0
38.01	0	83	35
38.02	134	1	0
38.03	48	0	33
38.04	10	0	0
38.05	10	37	0
39.01	3	0	9
39.02	0	74	94
39.03	0	38	0
39.04	0	38	0
39.05	0	0	31
40.01	14	0	45
40.03	0	76	0
40.04	0	0	100
40.05	0	1	0
41.01	0	195	178
41.02	98	0	110
41.03	39	0	15
41.04	26	0	0
41.05	45	0	0
42.01	20	60	0
42.02	24	0	75
42.03	75	92	0
42.04	28	0	0
42.05	20	0	0
43.01	103	26	0
43.02	0	99	14
43.03	75	58	0
43.04	0	0	0

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3
43.05	0	0	9
44.01	0	5	23
44.02	15	118	0
44.03	120	0	54
44.04	0	256	0
44.05	0	0	0
45.01	0	0	0
45.02	0	0	16
45.03	0	75	0
45.04	122	0	113
45.05	45	0	0
46.01	25	44	0
46.02	127	48	58
46.03	62	0	0
46.04	0	0	30
46.05	0	0	0
47.01	0	0	0
47.02	135	85	0
47.03	5	0	0
47.04	26	98	0
47.05	0	35	0
48.01	7	0	0
48.02	92	0	0
48.03	0	0	0
48.04	0	0	10
48.05	0	87	0
49.01	0	0	0
49.02	0	0	0
49.03	11	0	0
49.04	62	0	55
49.05	0	0	0
50.01	0	60	0
50.02	25	56	0
50.03	0	0	45
50.04	17	12	0
50.05	0	0	0
51.01	0	0	0
51.02	132	0	0
51.03	13	0	0
51.04	83	0	0
51.05	15	38	0
52.03	8	k.a.	33
52.04	77	k.a.	255
52.05	0	k.a.	0
Mittelwert	28,43	26,44	16,09
Median	5	0	0
Maximum	192	256	255
Minimum	0	0	0
Modalwert	0	0	0
EWert	64,00	85,33	85,00
EW (Std.)	1,07	1,42	1,42

OP-Saal / Wo.Tag	Überstunden (Min.)		
	Saal 1	Saal 5	Saal 3

OP-Schnitt-Nahtzeiten, Chirurgie, Jahresübersicht

Lfd. Nr.	OP-Art- Nummer	OP Anzahl Gesamt	OP-Mittlere Dauer	OP-Zeit- Median	OP-Zeit- Minimum	OP-Zeit- Maximum
1	1	1363	75,17	71	10	274
2	103	7	134,48	120	101	205
3	2	206	105,23	99,5	44	241
4	3	783	98,13	95	16	221
5	4	157	76,65	74	48	115
6	5	3	113	125	82	132
7	6	31	129,13	125,5	47	220
8	7	8	111	112	91	125
9	8	2	279,5	279,5	268	291
10	904	37	53,23	52	2	106
11	905	17	61,12	56	39	117
12	10	394	163,19	159,5	81	327
13	1003	6	206	203	167	256
14	1004	6	243	243	243	243
15	1021	5	114	97,5	69	192
16	1101	12	148,83	135	93	252
17	1102	125	137,85	130	62	399
18	12	5	126	110	106	163
19	1201	186	105,35	99,5	40	231
20	1202	162	107,23	102	34	235
21	1203	31	154,5	140	65	301
22	1204	11	98	96	47	145
23	13	20	241,27	240	184	304
24	14	80	191,5	194	92	282
25	1401	27	140,63	127	92	265
26	1402	18	135	131	92	204
27	1403	139	132,39	125	93	243
28	15	43	112,5	107,5	83	168
29	16	2	92	92	70	114
30	17	12	180,38	160,5	101	300
31	19	2	98	98	94	102
32	20	3	159	149	132	196
33	21	1	217	217	217	217
34	2101	4	98	98	98	98
35	2102	14	72	62	34	165
36	2106	3	232,5	222	182	304
37	2109	2	84	84	84	84
38	22	154	68,29	62,5	10	171
39	2201	4	42,75	41	29	60
40	2202	1	97	97	97	97
41	2203	4	149	160,5	53	222
42	23	104	54,6	51,5	12	222
43	2301	139	35,17	33	10	85
44	2309	19	40	48	23	49
45	25	19	62	46	15	109
46	2501	7	53,15	33	15	112
47	26	56	30	27,5	13	74
48	24	14	34,61	30	12	69
49	2403	665	39	39	39	39
50	27	52	18,39	16	3	60

**OP-Schnitt-Nahtzeiten nach Clustern geordnet, Chirurgie,
Jahresübersicht**

Lfd.Nr.	OP-Art- Nummer	OP Anzahl Gesamt	OP-Mittlere Dauer	OP-Zeit- Median	OP-Zeit- Minimum	OP-Zeit- Maximum
45	25	19	62	46	15	109
46	2501	7	53,15	33	15	112
10	904	37	53,23	52	2	106
11	905	17	61,12	56	39	117
5	4	157	76,65	74	48	115
39	2201	4	42,75	41	29	60
49	2403	665	39	39	39	39
44	2309	19	40	48	23	49
43	2301	139	35,17	33	10	85
47	26	56	30	27,5	13	74
50	27	52	18,39	16	3	60
48	24	14	34,61	30	12	69
34	2101	4	98	98	98	98
40	2202	1	97	97	97	97
31	19	2	98	98	94	102
37	2109	2	84	84	84	84
29	16	2	92	92	70	114
6	5	3	113	125	82	132
8	7	8	111	112	91	125
18	12	5	126	110	106	163
28	15	43	112,5	107,5	83	168
22	1204	11	98	96	47	145
15	1021	5	114	97,5	69	192
2	103	7	134,48	120	101	205
26	1402	18	135	131	92	204
16	1101	12	148,83	135	93	252
27	1403	139	132,39	125	93	243
25	1401	27	140,63	127	92	265
19	1201	186	105,35	99,5	40	231
4	3	783	98,13	95	16	221
20	1202	162	107,23	102	34	235
3	2	206	105,23	99,5	44	241
35	2102	14	72	62	34	165
38	22	154	68,29	62,5	10	171
23	13	20	241,27	240	184	304
36	2106	3	232,5	222	182	304
12	10	394	163,19	159,5	81	327
21	1203	31	154,5	140	65	301
30	17	12	180,38	160,5	101	300
33	21	1	217	217	217	217
13	1003	6	206	203	167	256
7	6	31	129,13	125,5	47	220
41	2203	4	149	160,5	53	222
42	23	104	54,6	51,5	12	222
1	1	1363	75,17	71	10	274
24	14	80	191,5	194	92	282
14	1004	6	243	243	243	243
32	20	3	159	149	132	196
9	8	2	279,5	279,5	268	291
17	1102	125	137,85	130	62	399

**OP-Schnitt-Nahtzeiten nach Clustern aggregiert, Chirurgie,
Jahresübersicht**

Cl. Nr	Lfd.Nr.	OP-Art- Nummer	OP- Anzahl/ OP-Art	OP- Anzahl Gesamt	OP- Mittlere Dauer	OP-Mittlere Dauer anteilig	OP-Dauer Maximum	OP-Dauer Maximum anteilig
1	45	25	19		62	4,970464135	109	8,738396624
	46	2501	7		53,15	1,569831224	112	3,308016878
	10	904	37		53,23	8,310168776	106	16,54852321
2	11	905	17		61,12	4,384135021	117	8,392405063
	5	4	157	237	76,65	50,77658228	115	76,1814346
3	39	2201	4		42,75	0,248546512	60	0,348837209
	49	2403	665		39	37,69622093	39	37,69622093
	44	2309	19	688	40	1,104651163	49	1,353197674
4	43	2301	139		35,17	18,73038314	85	45,26819923
	47	26	56		30	6,436781609	74	15,87739464
	50	27	52		18,39	3,663908046	60	11,95402299
	48	24	14	261	34,61	1,856475096	69	3,701149425
5	34	2101	4		98	35,63636364	98	35,63636364
	40	2202	1		97	8,818181818	97	8,818181818
	31	19	2		98	17,81818182	102	18,54545455
	37	2109	2		84	15,27272727	84	15,27272727
	29	16	2	11	92	16,72727273	114	20,72727273
6	6	5	3		113	30,81818182	132	36
	8	7	8	11	111	80,72727273	125	90,90909091
7	18	12	5		126	9,84375	163	12,734375
	28	15	43		112,5	75,5859375	168	112,875
	22	1204	11		98	16,84375	145	24,921875
	15	1021	5	64	114	8,90625	192	15
8	2	103	7		134,48	37,6544	205	57,4
	26	1402	18	25	135	97,2	204	146,88
9	16	1101	12		148,83	10,03348315	252	16,98876404
	27	1403	139		132,39	103,3832022	243	189,758427
	25	1401	27	178	140,63	21,33151685	265	40,19662921
10	19	1201	186		105,35	14,65602094	231	32,13612565
	4	3	783		98,13	57,46880329	221	129,4263276
	20	1202	162		107,23	12,99271503	235	28,47419596
	3	2	206	1337	105,23	16,21344802	241	37,13238594
11	35	2102	14		72	4,710280374	165	10,79439252
	38	22	154	214	68,29	49,14327103	171	123,0560748
12	23	13	20		241,27	209,8	304	264,3478261
	36	2106	3	23	232,5	30,32608696	304	39,65217391
13	12	10	394		163,19	147,1324027	327	294,8237986
	21	1203	31		154,5	10,95995423	301	21,35240275
	30	17	12	437	180,38	4,953226545	300	8,23798627
14	33	21	1		217	31	217	31
	13	1003	6	7	206	176,5714286	256	219,4285714
15	7	6	31		129,13	114,3722857	220	194,8571429
	41	2203	4	35	149	17,02857143	222	25,37142857
16	42	23	104		54,6	3,870756646	222	15,73824131
	1	1	1363	1467	75,17	69,84097478	274	254,5753238
17	24	14	80	80	191,5	191,5	282	282
18	14	1004	6	6	243	243	243	243
19	32	20	3	3	159	159	196	196
20	9	8	2	2	279,5	279,5	291	291
21	17	1102	125	125	137,85	137,85	399	399

5211

**OP-Schnitt-Nahtzeiten nach Clustern aggregiert, Chirurgie,
Jahresübersicht**

Cl. Nr	Lfd.Nr	OP-Art- Nummer	OP-Mittlere Dauer Cluster	OP-Dauer Maximum Cluster	rel. Cluster- Häufigkeit
1	45	25			
	46	2501			
	10	904			
2	11	905			
	5	4	70,0111814	113,168776	0,04548071
3	39	2201			
	49	2403			
	44	2309	39,0494186	39,3982558	0,1320284
4	43	2301			
	47	26			
	50	27			
	48	24	30,6875479	76,8007663	0,05008636
5	34	2101			
	40	2202			
	31	19			
	37	2109			
	29	16	94,2727273	99	0,00211092
6	6	5			
	8	7	111,545455	126,909091	0,00211092
7	18	12			
	28	15			
	22	1204			
	15	1021	111,179688	165,53125	0,01228171
8	2	103			
	26	1402	134,8544	204,28	0,00479754
9	16	1101			
	27	1403			
	25	1401	134,748202	246,94382	0,03415851
10	19	1201			
	4	3			
	20	1202			
	3	2	101,330987	227,169035	0,25657263
11	35	2102			
	38	22	53,8535514	133,850467	0,04106697
12	23	13			
	36	2106	240,126087	304	0,00441374
13	12	10			
	21	1203			
	30	17	163,045584	324,414188	0,08386106
14	33	21			
	13	1003	207,571429	250,428571	0,00134331
15	7	6			
	41	2203	131,400857	220,228571	0,00671656
16	42	23			
	1	1	73,7117314	270,313565	0,28151986
17	24	14	191,5	282	0,01535214
18	14	1004	243	243	0,00115141
19	32	20	159	196	0,00057571
20	9	8	279,5	291	0,0003838
21	17	1102	137,85	399	0,02398772
					1

**OP-Schnitt-Nahtzeiten, relative Häufigkeiten septischer Fälle und
entsprechende OP-Dauer-Aufschläge (Min.) je Cluster,
Chirurgie, Jahresübersicht**

Cl. Nr	OP-Art- Nummer	OP Anzahl Gesamt CILEv 1	Anteil septisch rel	Anzahl septisch abs	Gesamt abs	Gesamt rel	OP-Zeit- Med- Differenz se-ase	OP-Zeit- Zuschlag septisch/ Cluster
1	25	63	0,1176	2,2353			12,5	
	2501 904		0,1026	3,7949			48,5	
2	905 4	174	0,0556	0,9444	6,9746	0,0294	-3	30,0
3	2201	688	0,2550	169,5530	184,1684	0,2677	19,5	19,0
	2403 2309		0,7692	14,6154			19	
4	2301	261	0,1915	10,7234	34,6663	0,1328	-7,5	0,0
	26		0,3393	17,6429			2	
	27 24		0,4500	6,3000			16	
5	2101	11	0,5000	1,0000	1,0000	0,0909	-32	0,0
	2202							
	19 2109 16							
6	5	11						
	7							
7	12	64	0,0769	3,3077	3,3077	0,0517	24,5	24,5
	15							
	1204 1021							
8	103	25	0,4500	3,1818	4,1292	0,1639	26,4	30,1
	1402		0,0526	0,9474			56	
9	1101	178	0,1441	20,0254	20,0254	0,1125	93	93,0
	1403							
	1401							
10	1201	1337	0,0013	1,0038	1,0038	0,0008	-41	0,0
	3							
	1202 2							
11	2102	168	0,0667	0,9333	14,7402	0,0877	-6	21,7
	22		0,0897	13,8069			23,5	
12	13	23	0,2667	5,3333	8,3333	0,3623	85	85,0
	2106		1,0000	3,0000				
13	10	437	0,4406	173,5804	175,8825	0,4025	12,5	13,3
	1203		0,0313	0,9688			57	
	17		0,1111	1,3333			85,5	
14	21	7	1,0000	1,0000	2,7143	0,3878	51	51,0
	1003		0,2857	1,7143				
15	6	35			4,0000	0,1143		
	2203							
16	23	1467	0,0800	8,3200	8,3200	0,0057	-16,5	0,0
	1							
17	14	80	0,6279	50,2326	50,2326	0,6279	31	31,0
18	1004	6	1,0000	6,0000	6,0000	1,0000		
19	20	3	0,2500	0,7500	0,7500	0,2500	10	10,0
20	8	2						
21	1102	125						

**OP-Dauer-Verteilung je Cluster
Clusterhäufigkeiten, Chirurgie**

Cl.-Nr.	OP-Anzahl	OP-Dauer-Verteilung	relative Clusterhäufigkt p_i	davon OP-Septisch Anteil	OPSept. Zeit-Zuschlag je Cluster	relative Clusterhäufigkt p_i aggr.
1+2	237	MIN (EXPO(70,011); 113,168)	0,0455	0,0294	30	0,0455
3	688	MIN (EXPO(39,049); 39,398)	0,1320	0,2677	19	0,1775
4	261	MIN (EXPO(30,687); 76,8)	0,0501	0,1328	0	0,2276
5	11	MIN (EXPO(94,272); 99)	0,0021	0,0909	0	0,2297
6	11	MIN (EXPO(111,545); 126,909)	0,0021	0	0	0,2318
7	64	MIN (EXPO(111,179); 165,531)	0,0123	0,0517	24,5	0,2441
8	25	MIN (EXPO(134,854); 204,28)	0,0048	0,1639	30,1	0,2489
9	178	MIN (EXPO(134,748); 246,943)	0,0342	0,1125	93	0,2831
10	1337	MIN (EXPO(101,330); 227,169)	0,2566	0,0008	0	0,5396
11	214	MIN (EXPO(53,853); 133,850)	0,0411	0,0877	21,7	0,5807
12	23	MIN (EXPO(240,126); 304)	0,0044	0,3623	85	0,5851
13	437	MIN (EXPO(163,045); 324,414)	0,0839	0,4025	13,3	0,6690
14	7	MIN (EXPO(207,571); 250,428)	0,0013	0,3878	51	0,6703
15	35	MIN (EXPO(131,400); 220,228)	0,0067	0,1143	0	0,6770
16	1467	MIN (EXPO(73,711); 270,313)	0,2815	0,0057	0	0,9585
17	80	MIN (EXPO(191,5); 282)	0,0154	0,6279	31	0,9739
18	6	MIN (EXPO(243); 243)	0,0012	1,0000	0	0,9751
19	3	MIN (EXPO(159); 196)	0,0006	0,2500	10	0,9756
20	2	MIN (EXPO(279,5); 291)	0,0004	0	0	0,9760
21	125	MIN (EXPO(137,85); 399)	0,0240	0	0	1,0000
	5211		1,0000			

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag
01.01	6	1	4	0	0	0	0	0	0	0	1	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	1	0	22
01.02	4	1	2	1	0	0	0	0	0	2	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	16	0	1	0	34
01.03	8	2	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	29
01.04	4	1	3	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	21	1	0	1	36
01.05	9	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	7	0	1	0	25
02.01	2	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	1	0	0	0	0	0	0	1	2	14	0	1	0	30
02.02	4	2	5	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	17	0	0	0	36
02.03	5	1	5	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	15	0	0	0	33
02.04	6	1	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	11	0	0	0	28
02.05	7	2	1	2	0	1	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	27
03.01	12	1	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	10	0	0	0	28
03.02	5	2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	3	1	0	0	0	0	0	1	3	16	0	1	0	37
03.03	8	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	12	0	1	0	29
03.04	8	1	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	13	0	0	0	32
03.05	4	1	1	2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	14	0	0	1	28
04.01	5	0	2	2	0	0	0	0	0	3	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	17	0	0	1	35
04.02	5	1	4	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	11	0	1	1	29
04.03	5	1	3	0	0	2	0	0	0	1	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	33
04.04	6	0	5	0	0	0	0	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	17	0	0	0	35
04.05	5	1	4	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	1	27
05.01	2	1	4	1	1	0	0	0	1	4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	2	14	0	0	0	33
05.02	5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	0	1	1	0	0	0	0	0	1	2	22	0	0	1	39
05.03	3	2	2	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	22	1	1	0	39
05.04	7	0	6	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15	1	0	0	34
05.05	6	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16	0	0	1	32
06.01	7	0	3	0	0	0	0	0	0	3	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	14	0	0	0	32
06.02	6	0	1	2	0	0	0	0	0	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	3	20	0	1	2	43

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag
06.03	7	1	0	2	0	0	0	0	1	1	2	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	12	0	0	0	30
06.04	3	1	5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	30
06.05	6	1	4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	2	4	0	0	22
07.01	8	3	2	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	21	0	1	0	40
07.02	8	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	16	0	0	0	34
07.03	9	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	16	0	0	0	34
07.04	4	0	0	2	0	0	0	0	0	4	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	21	0	0	0	36
07.05	8	1	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	25
08.01	5	0	2	0	0	0	0	0	1	3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	0	35
08.02	1	1	5	1	0	0	0	0	0	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	14	0	0	1	32
08.03	5	0	4	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	8	0	0	0	26
08.04	7	0	2	0	0	0	0	0	0	4	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	1	35
08.05	7	0	4	0	0	0	0	0	1	2	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	31
09.01	2	0	4	1	0	0	0	0	1	1	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	13	0	0	0	29
09.02	7	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	16	0	1	0	36
09.03	7	0	4	0	0	1	0	0	1	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	21	0	0	0	39
09.04	7	1	4	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	14	0	0	0	33
09.05	5	0	3	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	12	0	1	0	28
10.01	7	0	2	1	0	0	0	0	0	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	18	0	0	0	35
10.02	5	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	13	0	0	1	31
10.03	7	1	4	0	0	1	0	0	0	2	0	1	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	15	0	0	0	34
10.04	4	1	5	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	1	32
10.05	4	2	4	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	13	0	0	1	29
11.01	7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	10	0	0	0	26
11.02	8	1	3	1	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	15	0	0	1	36
11.03	3	2	3	0	0	0	0	0	1	0	4	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	17	0	0	0	35
11.04	6	2	3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	14	0	0	0	30

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag	
11.05	4	1	4	3	0	0	0	0	0	4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	28	
12.01	8	1	2	0	0	0	0	0	1	3	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0	32	
12.02	4	0	4	0	0	0	0	0	1	1	1	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	2	27	0	0	0	45
12.03	7	1	4	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	16	0	0	0	35
12.04	4	2	3	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	0	0	0	27
12.05	3	1	3	0	0	1	0	0	1	2	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0	19
13.01	9	0	4	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	9	0	0	0	28
13.02	7	2	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	15	0	0	0	35
13.03	3	1	4	3	0	0	0	0	0	2	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	8	0	0	0	27
13.04	2	0	3	0	0	0	0	0	1	5	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	23
13.05	4	0	4	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1	0	0	24
14.01	9	1	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	23	0	0	1	42
14.02	5	0	2	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	3	10	1	0	0	29
14.03	6	3	4	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16	1	0	0	36
14.04	6	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	25	0	1	1	41
14.05	5	1	3	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	0	0	1	22
15.01	5	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	14	0	0	1	30
15.02	5	0	4	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	3	15	0	0	0	32
15.03	6	0	4	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	1	10	0	0	0	28
15.04	2	1	7	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	13	0	1	0	29
15.05	6	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	13	0	1	0	30
16.01	5	2	2	2	0	0	0	0	0	4	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	1	0	33
16.02	4	0	4	0	0	1	0	0	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	19	1	0	0	36
16.03	5	2	3	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	12	0	0	0	29
16.04	4	0	3	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	3	19	0	0	0	35
17.02	6	0	6	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	21	0	0	0	38
17.03	10	1	2	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	30

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag	
17.04	7	1	3	2	0	0	0	0	1	0	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	0	40	
17.05	5	1	7	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	8	0	0	0	29	
18.02	5	0	4	1	1	0	0	0	1	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	15	0	0	0	36	
18.03	5	0	5	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	9	0	1	0	28	
18.04	4	1	3	1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	2	0	13	0	0	0	31	
18.05	4	3	3	2	0	0	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	7	0	0	0	26	
19.01	6	2	1	0	0	0	0	0	0	2	1	4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	29	
19.02	4	1	4	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	4	19	0	0	0	38	
19.03	9	0	3	0	0	0	0	0	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	17	0	0	1	37	
19.04	7	0	4	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	9	0	0	0	27	
19.05	4	1	5	0	0	0	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	7	0	0	0	23	
20.02	7	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	6	18	0	0	0	38	
20.03	5	0	1	3	0	1	0	0	1	1	1	0	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	11	0	1	0	29	
20.04	2	2	4	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	4	1	11	0	0	0	29	
20.05	5	2	1	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	1	20	
21.01	6	0	4	2	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	11	0	1	0	30	
21.02	4	4	4	0	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3	17	0	0	0	36	
21.03	9	1	3	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	11	0	0	0	31
21.04	3	2	4	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	12	0	0	1	28	
21.05	6	0	4	0	0	0	0	0	0	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	18	0	0	0	35	
22.01	6	1	3	0	0	0	1	0	0	3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	16	0	0	0	34	
22.02	6	1	5	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	18	0	1	0	37	
22.03	3	2	4	0	0	0	0	0	0	0	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	3	1	12	0	1	0	32	
22.05	5	3	3	0	0	0	0	0	0	3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15	0	0	1	34	
23.01	4	2	2	3	0	0	0	0	1	0	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	2	37	
23.02	5	0	2	0	0	0	0	0	1	3	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	16	0	0	0	34	
23.03	7	1	2	1	0	0	0	0	0	0	1	3	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	13	0	0	0	32	

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag	
23.04	5	1	5	1	0	0	0	0	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	1	35	
23.05	1	1	6	0	0	0	0	0	0	3	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	3	1	4	0	1	24	
24.02	7	0	3	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	19	0	0	0	38	
24.03	6	1	2	0	0	0	0	0	0	1	4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	15	0	1	2	34
24.04	6	3	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	12	0	0	0	30
24.05	5	2	3	2	0	0	0	0	0	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	1	0	30
25.01	9	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	12	0	0	1	29	
25.02	8	1	5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	1	20	1	0	0	43
25.03	3	3	2	0	0	0	0	0	0	1	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	14	0	1	0	32
25.04	2	0	4	1	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	15	0	0	0	30
25.05	2	2	3	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	16	0	0	0	30
26.01	7	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	23	1	0	0	40
26.02	3	1	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	1	3	14	0	1	1	34
26.03	8	4	3	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	23	0	0	1	44	
26.04	3	1	5	0	0	0	0	0	0	0	3	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	1	1	0	35
26.05	4	1	4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	13	0	1	0	28
27.01	5	1	4	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	27
27.02	6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	21	1	0	0	38
27.03	6	2	3	1	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	18	0	1	0	37
27.04	5	2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	17	1	0	0	33
27.05	5	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	8	0	0	0	23
28.01	2	2	3	2	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	17	0	0	0	35
28.02	8	0	4	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	17	0	0	1	37
28.03	4	1	3	1	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	14	0	0	0	29
28.04	4	1	4	3	0	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	19	0	1	0	38
28.05	7	1	1	2	0	1	0	0	0	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	9	0	0	0	27
29.01	6	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	35

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag	
29.02	5	2	4	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	6	0	0	1	26
29.03	6	1	3	0	0	1	0	0	1	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	19	0	0	1	37	
29.04	11	0	2	2	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	13	0	0	0	32
29.05	11	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	6	0	0	0	23	
30.01	5	1	3	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	29	0	1	0	47	
30.02	7	0	4	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	5	17	0	2	0	40
30.03	4	0	4	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	4	0	0	0	0	0	0	0	2	0	15	0	0	0	33
30.04	4	1	2	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19	0	1	0	35
30.05	5	1	1	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	3	10	0	0	1	28	
31.01	4	0	3	0	0	0	0	0	0	2	0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	3	1	15	1	0	0	33	
31.02	6	1	3	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	19	1	1	0	39	
31.03	1	2	3	1	0	0	1	0	0	2	1	1	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	21	0	0	0	36	
31.04	5	1	2	1	0	0	0	0	0	1	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	2	1	19	1	0	0	38	
31.05	5	0	3	0	0	1	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	20	0	0	0	36	
32.01	8	0	1	0	0	0	0	0	0	3	2	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	20	0	1	0	38	
32.02	2	1	5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	2	0	4	15	0	1	0	34	
32.03	6	1	3	1	0	0	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	10	0	0	0	29	
32.04	4	2	1	1	0	0	0	0	1	1	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	9	0	0	0	25	
32.05	7	0	1	1	0	0	0	0	0	3	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0	26	
33.01	4	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	3	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	27	0	0	0	41	
33.02	4	1	2	0	0	1	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	4	12	0	0	0	31	
33.03	7	2	4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	1	39	
33.04	6	0	3	0	0	0	1	0	0	2	1	1	0	2	0	1	0	0	0	0	1	0	9	0	0	0	27	
33.05	6	1	3	1	0	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	3	10	0	0	0	29	
34.01	6	1	3	1	0	0	0	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	14	0	1	0	32	
34.02	5	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	2	3	19	0	0	0	37	
34.03	9	0	3	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15	0	0	0	33	

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag
34.04	4	1	4	0	0	0	0	1	1	1	1	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0	0	32
34.05	4	1	2	1	0	0	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	7	0	1	0	22
35.01	4	0	3	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	17	0	0	0	32
35.02	6	0	3	0	0	0	0	0	0	2	1	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	1	18	0	0	1	37
35.03	5	1	2	2	0	0	0	0	0	3	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	30
35.04	6	0	3	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	23	0	1	1	41
35.05	4	0	2	0	0	0	0	0	0	4	2	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	8	0	0	1	25
36.01	6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	2	19	0	2	0	35
36.02	5	2	1	2	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	27	0	0	0	44
36.03	5	0	3	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	2	12	0	1	0	30
36.04	8	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	19	0	1	1	38
36.05	7	0	2	1	0	0	0	0	0	3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	0	0	26
37.01	6	2	5	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	17	0	0	0	34
37.02	3	1	3	0	0	0	0	0	0	3	1	1	0	2	0	0	0	0	0	0	2	2	18	0	0	0	36
37.03	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	1	0	0	0	0	0	2	0	16	0	0	0	33
37.04	6	1	5	0	0	1	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	10	0	0	0	30
37.05	6	2	3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	1	1	1	6	0	1	0	24
38.01	7	2	3	0	0	1	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	1	1	32
38.02	8	1	3	1	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	19	0	0	0	38
38.03	3	0	2	4	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	8	0	0	0	25
38.04	7	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	16	0	0	1	32
38.05	4	1	4	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	13	0	0	1	28
39.01	7	0	4	0	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	16	0	0	0	35
39.02	7	1	2	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	4	15	0	0	0	35
39.03	5	0	7	1	0	0	0	0	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	15	0	0	0	35
39.04	8	1	4	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	20	0	0	0	37
39.05	5	1	4	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	3	11	0	0	1	30

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag	
40.01	9	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	14	0	1	0	31
40.03	1	0	5	1	0	0	0	0	1	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	23	1	0	0	38
40.04	3	0	4	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	21	0	0	0	37
40.05	7	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	13	1	1	0	32	
41.01	4	0	5	1	0	0	0	0	0	0	0	3	1	3	0	0	0	0	0	0	0	2	1	16	1	0	0	37
41.02	4	0	3	1	0	0	1	0	0	3	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	20	0	0	1	39
41.03	7	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	34
41.04	1	0	3	2	0	0	0	0	0	2	3	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	2	14	0	1	0	33
41.05	10	1	2	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	25
42.01	6	0	4	0	0	0	0	0	0	1	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	0	0	1	31
42.02	5	1	5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	13	0	0	0	33
42.03	3	3	3	0	0	0	0	0	1	2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	12	0	0	0	30
42.04	3	0	5	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	17	0	0	0	32	
42.05	5	0	7	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	1	0	0	28
43.01	5	0	4	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	14	0	0	0	32	
43.02	6	1	3	1	0	0	0	0	1	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	17	0	0	0	35
43.03	5	0	3	1	0	0	0	0	0	2	1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	3	2	21	1	2	0	46	
43.04	5	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	13	1	0	1	29
43.05	7	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	14	0	0	0	28	
44.01	3	0	7	1	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	16	0	0	0	36
44.02	6	1	3	1	0	0	0	0	0	3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	33
44.03	6	1	6	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	19	0	0	0	40	
44.04	2	2	0	0	0	0	0	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2	15	0	0	0	31
44.05	7	0	5	2	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8	0	0	1	26
45.01	9	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	15	0	0	1	35
45.02	4	0	3	1	0	0	0	0	0	2	1	3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	3	17	0	1	0	37	
45.03	5	1	2	1	0	0	0	0	0	1	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	16	0	0	0	32

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag
45.04	6	0	5	0	0	1	0	0	0	1	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	9	1	0	0	28
45.05	6	2	3	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	13	0	0	0	31
46.01	6	0	1	1	0	0	0	0	0	4	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	21	0	0	0	39
46.02	8	0	4	2	0	0	0	0	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	13	0	0	0	33
46.03	7	1	3	0	0	0	0	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	19	0	0	0	37
46.04	3	0	2	1	0	1	0	0	0	2	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	31
46.05	5	0	4	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	18	0	0	33
47.01	8	1	3	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	22	0	0	0	39
47.02	5	1	4	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	13	0	0	0	31
47.03	8	0	2	0	0	1	0	0	0	2	0	1	0	2	1	0	0	0	0	0	0	1	21	0	0	0	39
47.04	10	0	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	14	0	0	0	34
47.05	8	1	4	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0	1	0	31
48.01	5	1	1	1	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	2	18	0	0	0	35
48.02	6	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3	9	0	0	0	28
48.03	4	0	2	0	0	0	0	0	1	0	1	3	0	2	0	0	0	0	0	0	1	3	13	0	0	0	30
48.04	4	0	3	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	3	0	0	1	0	0	0	0	0	12	0	1	1	30
48.05	9	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	1	12	0	0	0	32
49.01	7	0	3	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	4	23	1	0	0	44
49.02	7	0	3	0	0	0	0	0	1	4	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	23	0	0	0	43
49.03	1	0	4	0	0	0	1	0	0	1	0	5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	15	0	1	0	31
49.04	4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	4	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	0	34
49.05	8	0	6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13	0	0	0	28
50.01	4	0	2	2	0	0	0	0	1	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	20	0	0	0	36
50.02	5	1	4	1	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	3	17	0	0	0	37
50.03	3	2	1	1	0	0	0	0	0	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	13	0	0	0	30
50.04	4	0	4	1	0	0	0	0	0	2	0	5	0	1	0	0	0	0	0	1	2	0	14	0	0	0	34
50.05	4	1	6	1	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	21	0	0	0	39

OP-Anzahl je OP-Art, Chirurgie, Tagesübersicht

OP-Art- Nr/ WoTag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	Gesamt/ Tag
51.01	3	1	4	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	4	0	0	0	0	0	0	2	2	11	0	1	0	31
51.02	5	2	1	1	0	0	0	0	0	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	3	22	0	0	0	41
51.03	4	1	3	2	0	0	0	0	1	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	16	0	0	0	33
51.04	6	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	27
51.05	6	1	7	1	0	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	14	0	0	0	33
52.03	3	0	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	1	15	0	0	0	26
52.04	4	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	13	0	0	0	23
52.05	3	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	23
Durchschnittliche OP-Anzahl/ Tag & OP-Saal																										4,64172	
Anteilige Standardabweichung der OP-Anzahl/ Tag & OP-Saal																										0,7306	
Beschränkung des Warteraumes																										6	

Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie

<p>OP-Art 1</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(5.44) Square Error: 0.004231</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 9 Degrees of freedom 7 Test Statistic = 13.6 Corresponding p-value = 0.0616</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 1 Max Data Value 12 Sample Mean = 5.44 Sample Std Dev = 2.01</p>	<p>OP-Art 2</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.817) Square Error: 0.001978</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 4 Degrees of freedom 2 Test Statistic = 2.1 Corresponding p-value = 0.372</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 4 Sample Mean = 0.817 Sample Std Dev = 0.855</p>	<p>OP-Art 3</p> <p>Distribution: Weibull Expression: -0.5 + WEIB(4.05, 2.63) Square Error: 0.006442</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 6 Degrees of freedom 3 Test Statistic = 9.07 Corresponding p-value = 0.0296</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 7 Sample Mean = 3.11 Sample Std Dev = 1.46</p>
<p>OP-Art 4</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.623) Square Error: 0.000116</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 3 Degrees of freedom 1 Test Statistic = 0.284 Corresponding p-value = 0.621</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 5 Sample Mean = 0.623 Sample Std Dev = 0.821</p>	<p>OP-Art 5</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0119) Square Error: 0.000000</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 1 Degrees of freedom -1 Test Statistic = 2.52e-006 Corresponding p-value < 0.005</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.0119 Sample Std Dev = 0.109</p>	<p>OP-Art 6</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.123) Square Error: 0.000058</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.123 Corresponding p-value < 0.005</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.123 Sample Std Dev = 0.341</p>

Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie

<p>OP-Art 7</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0398) Square Error: 0.000003</p> <p>Chi Square Test Number of intervals Degrees of freedom -1 Test Statistic = 0.00031 Corresponding p-value < 0.005</p> <p>Number of Data Points 251 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.0398 Sample Std Dev = 0.196</p>	<p>OP-Art 8</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.00794) Square Error: 0.000000</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 1 Degrees of freedom -1 Test Statistic = 4.98e-007 Corresponding p-value < 0.005</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.00794 Sample Std Dev = 0.0889</p>	<p>OP-Art 9</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.214) Square Error: 0.001398</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 1.56 Corresponding p-value < 0.005</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 3 Sample Mean = 0.214 Sample Std Dev = 0.439</p>
<p>OP-Art 10</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(1.63) Square Error: 0.003562</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 5 Degrees of freedom 3 Test Statistic = 6.01 Corresponding p-value = 0.117</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 5 Sample Mean = 1.63 Sample Std Dev = 1.13</p>	<p>OP-Art 11</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(1.63) Square Error: 0.003562</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 5 Degrees of freedom 3 Test Statistic = 6.01 Corresponding p-value = 0.117</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 5 Sample Mean = 1.63 Sample Std Dev = 1.13</p>	<p>OP-Art 12</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(1.56) Square Error: 0.002812</p> <p>Chi Square Test Number of intervals 5 Degrees of freedom 3 Test Statistic = 3.2 Corresponding p-value = 0.38</p> <p>Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 5 Sample Mean = 1.56 Sample Std Dev = 1.19</p>

Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie

<p>OP-Art 13</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0794) Square Error: 0.000005 Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.0146 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.0794 Sample Std Dev = 0.285</p>	<p>OP-Art 14</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(1.04) Square Error: 0.000679 Chi Square Test Number of intervals 4 Degrees of freedom 2 Test Statistic = 1.25 Corresponding p-value = 0.542 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 4 Sample Mean = 1.04 Sample Std Dev = 0.993</p>	<p>OP-Art 15</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.167) Square Error: 0.000136 Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.234 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.167 Sample Std Dev = 0.394</p>
<p>OP-Art 16</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.00794) Square Error: 0.000000 Chi Square Test Number of intervals 1 Degrees of freedom -1 Test Statistic = 4.98e-007 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.00794 Sample Std Dev = 0.0889</p>	<p>OP-Art 17</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0476) Square Error: 0.000006 Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.0275 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.0476 Sample Std Dev = 0.213</p>	<p>OP-Art 19</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.00794) Square Error: 0.000000 Chi Square Test Number of intervals 1 Degrees of freedom -1 Test Statistic = 4.98e-007 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.00794 Sample Std Dev = 0.0889</p>

Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie

<p>OP-Art 20</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0119) Square Error: 0.000000 Chi Square Test Number of intervals Degrees of freedom = -1 Test Statistic = 2.52e-006 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.0119 Sample Std Dev = 0.109</p>	<p>OP-Art 21</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0833) Square Error: 0.000003 Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.00621 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.0833 Sample Std Dev = 0.291</p>	<p>OP-Art 22</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.651) Square Error: 0.000099 Chi Square Test Number of intervals 3 Degrees of freedom 1 Test Statistic = 0.211 Corresponding p-value = 0.673 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 4 Sample Mean = 0.651 Sample Std Dev = 0.797</p>
<p>OP-Art 23</p> <p>Distribution: Beta Expression: -0.5 + 7 * BETA(1.15, 4.1) Square Error: 0.001402 Chi Square Test Number of intervals 4 Degrees of freedom 1 Test Statistic = 1.65 Corresponding p-value = 0.214 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 6 Sample Mean = 1.04 Sample Std Dev = 1.16</p>	<p>OP-Art 24</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(14.7) Square Error: 0.004166 Chi Square Test Number of intervals 13 Degrees of freedom 11 Test Statistic = 23.7 Corresponding p-value = 0.0152 Number of Data Points 252 Min Data Value 3 Max Data Value 29 Sample Mean = 14.7 Sample Std Dev = 4.62</p>	<p>OP-Art 25</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.0992) Square Error: 0.000110 Chi Square Test Number of intervals 2 Degrees of freedom 0 Test Statistic = 0.253 Corresponding p-value < 0.005 Number of Data Points 252 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.0992 Sample Std Dev = 0.3</p>

Geschätzte Verteilungen für die Modellvariable OP-Anzahl/Tag je OP-Art, Chirurgie

OP-Art 26		OP-Art 27		Gesamt	
Distribution:	Poisson	Distribution:	Poisson	Distribution:	Poisson
Expression:	POIS(0.222)	Expression:	POIS(0.206)	Expression:	POIS(32.5)
Square Error:	0.000603	Square Error:	0.000308	Square Error:	0.002526
Chi Square Test		Chi Square Test		Chi Square Test	
Number of intervals	2	Number of intervals	2	Number of intervals	16
Degrees of freedom	0	Degrees of freedom	0	Degrees of freedom	14
Test Statistic	= 0.834	Test Statistic	= 0.459	Test Statistic	= 13.4
Corresponding p-value	< 0.005	Corresponding p-value	< 0.005	Corresponding p-value	= 0.494
Number of Data Points	252	Number of Data Points	252	Number of Data Points	252
Min Data Value	0	Min Data Value	0	Min Data Value	19
Max Data Value	2	Max Data Value	2	Max Data Value	47
Sample Mean	= 0.222	Sample Mean	= 0.206	Sample Mean	= 32.5
Sample Std Dev	= 0.444	Sample Std Dev	= 0.434	Sample Std Dev	= 5.11

OP-Schnitt-Nahtzeiten, Neurochirurgie, Jahresübersicht

Lfd. Nr.	OP-Art-Nummer	OP Anzahl Gesamt	OP-Mittlere Dauer	OP-Zeit-Median	OP-Zeit-Minimum	OP-Zeit-Maximum
1	50	1
2	53	1	140,75	141	99	192
3	61	549	61,7	56	5	262
4	62	3
5	63	1	129,5	129,5	118	141
6	64	2	74,25	69,5	49	109
7	65	41	37,8	37	5	77
8	68	48	33,75	28,5	10	113
9	69	9	59,5	52,5	31	110
10	73	3	232,66	251	165	282
11	75	15	17,63	20	8	30
12	78	6	72,9	62,5	42	143
13	81	2
14	83	12	106	100	55	198
15	84	82	103,9	81	5	345
16	85	137	21,56	15	3	130

OP-Schnitt-Nahtzeiten nach Clustern geordnet, Neurochirurgie, Jahresübersicht

Lfd.Nr.	OP-Art-Nummer	OP Anzahl	OP-Mittlere Dauer	OP-Zeit-Median	OP-Zeit-Minimum	OP-Zeit-Maximum
8	68	48	33,75	28,5	10	113
16	81+ 85	137	21,56	15	3	130
7	65	41	37,8	37	5	77
6	64	2	74,25	69,5	49	109
9	69	9	59,5	52,5	31	110
12	78	6	72,9	62,5	42	143
11	75	15	17,63	20	8	30
2	50 + 53	2	140,75	141	99	192
5	63	1	129,5	129,5	118	141
14	83	12	106	100	55	198
3	62 + 61	540	61,7	56	5	262
15	84	82	103,9	81	5	345
10	73	3	232,66	251	165	282

**OP-Schnitt-Nahtzeiten nach Clustern aggregiert,
Neurochirurgie, Jahresübersicht**

Cl. Nr.	Lfd. Nr.	OP-Art- Nummer	OP Anzahl	OP- Anzahl/ Cluster	OP- Mittlere Dauer	OP-Mittlere Dauer Anteilig	OP-Dauer Maximum	OP-Dauer Maximum Anteilig	OP-Mittlere Dauer/ Cluster	OP-Dauer Maximum Cluster	relative Cluster- Häufigkeit	Geschätzte Vtg. OP-Anzahl
1	8	68	48		33,75	7,16814159	113	24				POIS(4)
	16	81 + 85	137		21,56	13,0695575	130	78,8053097				POIS(11.6)
	7	65	41	226	37,8	6,85752212	77	13,9690265	27,0952212	116,77434	0,2516704	POIS(3.42)
2	6	64	2		74,25	8,73529412	109	12,8235294				POIS(0.75)
	9	69	9		59,5	31,5	110	58,2352941				POIS(0.5)
	12	78	6	17	72,9	25,7294118	143	50,4705882	65,9647059	121,52941	0,018931	
3	11	75	15	15	17,63	17,63	30	30	17,63	30	0,0167038	-0.5 + LOGN(1.78, 1.82)
4	2	50 + 53	2		140,75	93,83333333	192	128				
	5	63	1	3	129,5	43,16666667	141	47	137	175	0,0033408	
5	14	83	12	12	106	106	198	198	106	198	0,013363	POIS(1)
6	3	62 + 61	540	540	61,7	61,7	262	262	61,7	262	0,6013363	POIS(44.8)
7	15	84	82	82	103,9	103,9	345	345	103,9	345	0,091314	POIS(6.75)
8	10	73	3	3	232,66	232,66	282	282	232,66	282	0,0033408	
				898								1

**OP-Dauer-Verteilung je Cluster,
Clusterhäufigkeiten, Neurochirurgie**

Cl.- Nr.	OP- Anzahl	OP-Dauer-Verteilung	rel. Cluster- Häufigkeit	rel. Cluster- Häufigkeit, aggreg.
1	226	MIN (EXPO(27,095); 116,774)	0,2517	0,2517
2	17	MIN (EXPO(65,964); 121,529)	0,0189	0,2706
3	15	MIN (EXPO(17,63); 30)	0,0167	0,2873
4	3	MIN (EXPO(137); 175)	0,0033	0,2906
5	12	MIN (EXPO(106); 198)	0,0134	0,3040
6	540	MIN (EXPO(61,07); 262)	0,6013	0,9053
7	82	MIN (EXPO(103,9); 345)	0,0913	0,9967
8	3	MIN (EXPO(232,66); 282)	0,0033	1,0000

OP-Anzahl je OP-Art, Neurochirurgie, Monatsübersicht

OP-Art-Nr/ Monat	50	53	61	62	63	64	65	68	69	73	75	78	81	83	84	85	Gesamt/ Monat
01	0	0	56	0	0	0	0	2	2	0	1	1	0	0	5	5	72
02	0	0	43	0	0	0	2	5	1	2	1	2	0	0	9	13	78
03	0	0	53	1	0	0	3	3	1	0	0	1	0	0	10	11	83
04	0	0	43	1	0	0	0	2	1	0	2	0	1	0	8	11	69
05	0	0	46	0	0	0	4	5	2	0	0	1	1	1	8	9	77
06	0	0	48	0	0	0	2	8	0	0	0	1	0	2	2	9	72
07	0	0	39	1	1	0	3	8	0	0	4	0	0	1	7	23	87
08	0	0	42	0	0	1	8	5	1	0	1	0	0	0	5	14	77
09	1	1	43	0	0	0	3	1	0	0	3	0	0	0	7	12	71
10	0	0	43	0	0	0	5	5	1	0	0	0	0	2	11	9	76
11	0	0	51	0	0	0	7	1	0	0	3	0	0	1	5	15	83
12	0	0	30	0	0	0	4	3	0	0	0	0	0	5	4	8	54

Geschätzte Verteilungen für die Zufallsvariable OP-Anzahl/Monat je OP-Art, Neurochirurgie

<p>OP-Art 61</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(44.8) Square Error: 0.119765 Number of Data Points 12 Min Data Value 30 Max Data Value 56 Sample Mean = 44.8 Sample Std Dev = 6.85</p>	<p>OP-Art 62</p> <p>Distribution: Weibull Expression: $-0.5 + \text{WEIB}(0.854, 1.9)$ Square Error: 0.000098 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 1 Sample Mean = 0.25 Sample Std Dev = 0.452</p>	<p>OP-Art 65</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(3.42) Square Error: 0.046658 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 8 Sample Mean = 3.42 Sample Std Dev = 2.43</p>
<p>OP-Art 68</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(4) Square Error: 0.109521 Number of Data Points 12 Min Data Value 1 Max Data Value 8 Sample Mean = 2.41 Sample Std Dev = 2.41</p>	<p>OP-Art 69</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.75) Square Error: 0.008139 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.75 Sample Std Dev = 0.754</p>	<p>OP-Art 75</p> <p>Distribution: Lognormal Expression: $-0.5 + \text{LOGN}(1.78, 1.82)$ Square Error: 0.020491 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 4 Sample Mean = 1.25 Sample Std Dev = 1.42</p>
<p>OP-Art 78</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(0.5) Square Error: 0.001499 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 2 Sample Mean = 0.5 Sample Std Dev = 0.674</p>	<p>OP-Art 83</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(1) Square Error: 0.042087 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 5 Sample Mean = 1.48 Sample Std Dev = 1.48</p>	<p>OP-Art 84</p> <p>Distribution: Poisson Expression: POIS(6.75) Square Error: 0.047225 Number of Data Points 12 Min Data Value 0 Max Data Value 11 Sample Mean = 6.75 Sample Std Dev = 2.63</p>

Geschätzte Verteilungen für die Zufallsvariable OP-Anzahl/Monat je OP-Art, Neurochirurgie

OP-Art 85		Gesamt	
Distribution:	Poisson	Distribution:	Poisson
Expression:	POIS(11.6)	Expression:	POIS(74.9)
Square Error:	0.057645	Square Error:	0.085958
Number of Data Points	12	Number of Data Points	12
Min Data Value	5	Min Data Value	54
Max Data Value	23	Max Data Value	87
Sample Mean	= 11.6	Sample Mean	= 74.9
Sample Std Dev	= 4.54	Sample Std Dev	= 8.53

Tabellarischer Lebenslauf

Diana Völker
Grillparzerstr. 22
22085 Hamburg

Persönliche Daten

Geboren: 20.11.1971
Staatsangehörigkeit: deutsch

Wissenschaftlicher Bildungsgang

9 / 2000 – 8 / 2004	wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Unternehmensforschung, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Universität Hamburg
9 / 1992 – 10 / 1998	Studium an der Universität Hamburg im Studiengang „Wirtschaftsmathematik“
3 / 1995 – 6 / 1995	studentische Aushilfskraft beim HWWA Institut für Wirtschaftsforschung, Forschungsgruppe „Sektorale Wirtschaftsstruktur“
10 / 1991 – 5 / 1992	Deutschsprachkurs bei der GFBA, Hamburg
7 / 1991	Übersiedlung nach Deutschland
1988 – 1991	Studium an der Leningrader Universität für Schiffbau im Fach „Angewandte Mathematik“
1982 – 1987	Schule für Kunst und Malerei in Krasnodar / Russland
1977 – 1988	Oberschule in Krasnodar / Russland

Hamburg, den 27.01.2007