Anwendungen der verallgemeinerten Multiskalenanalyse in der numerischen Strömungsmechanik

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg

vorgelegt von

Friederike Schröder-Pander

aus Lübeck

Hamburg 2001

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Thomas Sonar und Prof. Dr. Carl Geiger

Hamburg, den 30. November 2000

Prof. Dr. Ulrich Eckhardt Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

In	halts	sverzeichnis	i
Sy	mbc	lverzeichnis	iii
Ei	nleit	ung	1
1	Gru 1.1 1.2 1.3 1.4	Hyperbolische Erhaltungsgleichungen	5 8 11 14
	1.5 1.6	Die Finite-Volumen-Methode	15 17 17 21
2	Ver 2.1 2.2 2.3	allgemeinerte Multiskalenanalyse (VMSA) Mathematische Grundlagen	25 26 31 35 36 40
3	Anv 3.1 3.2	vendung der Multiskalenanalyse als Datenkompression Operatoren in 2D Numerische Resultate 3.2.1 Selbstdefinierte Testfunktionen 3.2.2 Berechnung mit einer Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes"	43 43 51 53

4	Berechnung der Differentiationsmatrix						
	4.1 Differentiationsmatrix im Waveletkontext						
		4.1.1	Berechnung auf V^k	64			
		4.1.2	Berechnung auf $V^k \oplus W^k$	72			
	4.2						
		4.2.1	Berechnung auf V^k	79			
		4.2.2	Berechnung auf $V^k \oplus W^k$	82			
	4.3		tiationsmatrix mit der VMSA, unstrukturiert				
		4.3.1	Berechnung auf V^k	84			
		4.3.2	Berechnung auf $V^k \oplus W^k$	91			
5	Detektion von Phänomenen						
	5.1	Trenner	n von Stoß und Kontaktunstetigkeit	96			
	5.2		ler Löcher in den Streifen der Unstetigkeiten				
	5.3	Genaues Lokalisieren der Unstetigkeiten					
		5.3.1	Der Lokalisierungsalgorithmus	106			
			Die RH-Bedingungen				
	5.4		sche Resultate				
		5.4.1	Stöße – erste Schritte	115			
		5.4.2	Stöße – verbesserte Methode	120			
		5.4.3	Kontaktunstetigkeit	125			
Zι	ısam	menfass	ung und Ausblick	12 9			
Li	terat	urverze	ichnis	131			

Symbolverzeichnis

$A(\vec{u}, \vec{ u})$	Hyperbolizitätsmatrix	Definition 1.1.4
$A^{\hat{k}}$	Differentiationsmatrix	Abschnitt 4.1.2
a	Schallgeschwindigkeit	Definition 1.2.1
α	Multiindex	Abschnitt 3.1
α_i	Koeffizienten der Skalierungsgleichung	Lemma $1.6.2$
a_{α}	Koeffizienten des Rekonstruktions-	
	polynoms π_i^k	Abschnitt 3.1
B^k	Differentiationsmatrix	Abschnitt 4.1.2
b_i^k	Schwerpunkt der Zelle Ω_i^k	Abschnitt 3.1
$egin{aligned} b_j^k \ C^k \end{aligned}$	Differentiationsmatrix	Abschnitt 4.1.2
$ec{c}$	Geschwindigkeit (einer Unstetigkeit)	Abschnitt 1.3
D^k	Differentiationsmatrix	Abschnitt 4.1.2
\mathcal{D}_k	Diskretisierungsoperator	Definition 2.1.1
$D_k^{k+1} \\ d_i^k$	Restriktionsoperator	Definition 2.1.3
d_i^k	Skalenkoeffizienten	Def: $2.1.12$
\dot{E}	Energie	Abschnitt 1.2
E_k	Umrechnungsmatrix der s^k in die e^k	Def: $2.1.12$
e^k	Rekonstruktionsfehler	Definition 2.1.9
ε	Toleranzgrenze	Abschnitt 3.2
$arepsilon rac{arepsilon}{ec{F}}$	Flußfunktion	Definition 1.1.2
$ec{F}$	Flußfunktion	Abschnitt 1.3
$ec{f}_{ m num}$	Numerische Flußfunktion	Definition 1.5.2
Γ_{ik}	Liniensegmente von $\partial\Omega_i$	Abschnitt 1.5
$\Gamma(i)$	Menge aller Liniensegmente von $\partial\Omega_i$	Abschnitt 1.5
G_k	Umrechnungsmatrx der e^k in die s^k	Abschnitt 2.1
g_i	Koeffizienten der Skalierungsgleichung	
	für Wavelets	Satz 1.6.4
H	Enthalpie	Abschnitt 1.2

h_k	Schrittweite im (äquidistanten) Gitter	Abschnitt 2.3.1
${\mathcal I}_k$	Identität auf V^k	Definition 2.1.6
I_k	Einheitsmatrix auf V^k	Lemma $2.1.8$
I^k, I_i^k	(Teil-) Intervall der Auflösung k	Abschnitt 2.2
J_k	Dimension von V^k	Definition 2.1.1
Λ	Diagonalmatrix	Abschnitt 1.2
Ma	Machzahl	Definition 1.2.1
M_j^k	Basismatrix	Definition 3.1.5
$egin{array}{c} \mu_j^{k^J} \ ec{n} \end{array}$	Basisvektoren	Definition 2.1.12
\vec{n}	äußerer Normalenvektor	Definition 1.1.2
Ω	Gebiet des \mathbb{R}^2	Abschnitt 1.1
Ω_i	Kontrollvolumen, Zelle	Definition 1.1.2
Ω^k_{1q}	Vektor von Flächen von Zellen Ω_i^k	Definition 3.1.5
ω_i	Gewichte der Gaußquadratur	Abschnitt 1.5
$P(\vec{u}, \vec{\nu})$	Transformationsmatrix	Abschnitt 1.2
P_{V^k}	Orthogonalprojektion auf V^k	Abschnitt 1.6.1
$P_{k+1}^k \\ P^{k,k+1}$	Prolongationsoperator	Definition 2.1.7
$P^{k,k+1}$	Restriktionsmatrix	Abschnitt 4.1.2
p	Druck	Abschnitt 1.2
π_i^k	Rekonstruktionsfunktion	Abschnitt 1.5
φ	Skalierungsfunktion	Definition 1.6.1
ψ	Wavelet	Definition 1.6.3
R^k	Differentiationsmatrix	Abschnitt 4.1.1
\mathcal{R}_k	Rekonstruktionsoperator	Definition 2.1.6
ρ	Dichte	Beispiel 1.1.3
S	Zustandsraum	Definition 1.1.1
\sum	Unstetigkeitskurve	Abschnitt 1.3
s_i^k	Entwicklungskoeffizienten	Abschnitt 1.6.2
\mathcal{T}_h	Triangulierung eines Gebietes	Definition 1.4.1
\vec{u}	Vektor der Zustandsvariablen	Definition 1.1.1
\overline{u}_i^k	Zellmittel	Definition 1.5.1
V^k, W^k	Räume der Multiskalenzerlegung	Abschnitt 1.6.1
$ec{v}$	Geschwindigkeit	Beispiel 1.1.3
x_i^k	diskrete (Gitter-) Punkte	Abschnitt 2.2
x_i^k ζ ∂_x	Trennungsparameter	Abschnitt 5.1
	partielle Ableitung	Gleichung (1.3)
$ abla_{ec{u}}$.	Jacobimatrix von ·	Gleichung (1.3)

$\partial\Omega_i$	Rand der Zelle Ω_i	Abschnitt 1.1
$ \Omega_i $	Flächeninhalt von Ω_i	Definition 1.5.1
[u]	Sprung einer Funktion	
	über eine Unstetigkeit	Abschnitt 1.3
$<\lambda(\Omega_i^k),\cdot>$	Zellmitteloperator	Definition 1.5.1
$\overline{F}'(x)$	Ableitung der Funktion F	
	im Sinne von Distributionen	Abschnitt 4.1.1
$\hat{\psi}$	Fouriertransformierte	Definition 1.6.3
*	Winkel	Abschnitt 5.4.2

Einleitung

Die numerische Simulation von strömungsmechanischen Problemen ist ein heutzutage häufig benutztes Hilfsmittel, um die komplexen Vorgänge in den Lösungen der zugrundeliegenden nichtlinearen Gleichungen zu modellieren. Mit den Euler-Gleichungen der Gasdynamik, die zu der Klasse der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen gehören, wird die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie in einem reibungsfreien Gas beschrieben. Diese sind zeitabhängige partielle Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0,$$

wobei u hier den Vektor der Zustandsvariablen Dichte, Impuls und Totalenergie darstellt.

Die Daten für numerische Simulationen von mehrdimensionalen Problemen in der Gasdynamik benötigen sehr viel Speicherplatz, was schon bei zweidimensionalen Gebieten zu Problemen führen kann. Mit Hilfe der verallgemeinerten Multiskalenanalyse (VMSA) ist es gelungen, den Bedarf an Speicher erheblich zu reduzieren. Diese Methode, die eine Verallgemeinerung der Multiskalenanalyse bei Wavelets ist, zerlegt die numerischen Lösungen auf einer Folge von gröber werdenen Gittern in verschiedene Skalen bzw. Signale. Da die Lösungen von Problemen der Strömungsmechanik auf dem größten Teil des Gebietes glatt sind und nur an manchen Stellen Unstetigkeiten und andere Phänomene ausbilden, müssen beim Übergang zu einem gröberen Gitter meist nur an diesen Stellen die Rekonstruktionsfehler gespeichert werden. Sehr kleine Fehler werden dabei vernachlässigt, ohne die Struktur der Lösung zu verwischen.

Mit Hilfe von Wavelets wurden die bekanntesten Methoden zur Signalanalyse entwickelt, siehe zum Beispiel [Dau92, Mey92, Mey93, Mal98]. Jedoch sind Wavelets und die dazugehörige Multiskalenanalyse an regelmäßige (aber nicht notwendigerweise rechteckige) Gitter und Gittersequenzen gebunden. Um auch unstrukturierte Gitter benutzen zu können, entwickelte Harten die verallgemeinerte Multiskalenanalyse (siehe [Har93a, Har93b, Har94]), die 2 Einleitung

diese Einschränkungen nicht aufweisen. Eine erste Anwendung auf unstrukturierten Gittern wurde erstmals von Abgrall und Harten ([AH94]) durchgeführt. In der vorliegenden Arbeit wurde die Theorie weiter formalisiert und konnte vollständig auf Operationen der linearen Algebra zurückgeführt werden, siehe hierzu auch [SPSF00].

Weitere Zugänge zu verallgemeinerten Multiskalenanalysen wurden zum Beispiel von Dahmen et al. ([CDP94]) und Sweldens ([Swe97]) entwickelt. Die ersten Methoden, die Ideen der Signalanalyse in der Strömungsmechanik verwenden, wurden jedoch nicht mit Hilfe der Wavelets und der Multiskalenanalyse entwickelt. Bereits Mitte der achtziger Jahre beschäftigten sich Vorozhtsov und Yanenko mit Methoden zur Lokalisierung von Singularitäten in numerischen Lösungen von Problemen der Gasdynamik mit Hilfe von Finiten Differenzen, siehe hierzu das Buch [VY90].

Die verallgemeinerte Multiskalenanalyse kann auch in anderen Bereichen der numerischen Simulation erfolgreich angewendet werden, zum Beispiel bei der Detektion von Phänomenen. Wie schon erwähnt, erzeugen die komplexen Systeme nichtlinearer Gleichungen in endlicher Zeit typische Phänomene wie zum Beispiel Unstetigkeiten (Stöße, Kontaktunstetigkeiten) und Verdünnungswellen. Bei der numerischen Lösung ist darauf zu achten, daß diese erfaßt und entsprechend behandelt werden, um so korrekte Lösungen zu erhalten und unter anderem Oszillationen zu vermeiden. Hier ist also das Problem der Detektion von Phänomenen zu lösen. Die Detektion ermöglicht es einerseits, die auftretenden Phänomene besser zu verstehen, kann andererseits aber auch als Indikator für Gitteradaption eingesetzt werden.

Desweiteren kann die verallgemeinerte Multiskalenanalyse für die Berechnung der Ableitung von diskreten Daten benutzt werden. Die berechneten Ableitungen sind vielseitig einsetzbar; sie können zum Beispiel als Hilfsmittel für Detektion von Unstetigkeiten und Gitteradaption verwendet werden. Die Idee der sogenannten Differentiationsmatrix entstammt erneut der Theorie der Wavelets.

Das erste Kapitel enthält eine Einführung in die Theorie der Euler-Gleichungen und die numerischen Methoden zur Lösung dieser Gleichungen. Alle in dieser Arbeit verwendeten Lösungen wurden auf unstrukturierten Boxgittern mit Hilfe von Finite-Volumen-Verfahren berechnet. Diese Verfahren kombinieren Genauigkeit der Approximation mit Robustheit der Verfahren. Sie wurden erfolgreich bei der Simulation von Erhaltungsgleichungen eingesetzt. Dies kommt der Aufgabe der Detektion entgegen, da gute Lösungen naturgemäß weniger Störungen aufweisen und so die Phänomene deutlicher herausgearbeitet werden können. Die Unstrukturiertheit der Gitter ermöglicht hohe Flexibilität bei der Behandlung von komplizierten

Geometrien. Lokale Verfeinerungen lassen sich leicht realisieren.

Im zweiten Kapitel wird die Idee der verallgemeinerten Multiskalenanalyse ausführlich erläutert und unter anderem auf Boxgitter angewandt. Alle Operationen wurden mit Operatoren der linearen Algebra beschrieben.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit der Datenkompression. Es enthält einige Testrechnungen, die die Wirksamkeit der Methode unterstreichen, darunter auch ein Beispiel mit einer numerischen Lösung eines Problems aus der Gasdynamik.

Im vierten Kapitel wird für den eindimensionalen Fall die Berechnung der Differentiationsmatrix zur Ableitung diskreter Daten auf die Berechnung mit Hilfe der verallgemeinerten Multiskalenanalyse auf unstrukturierte Gitter übertragen. Dies kann auf einem beliebigen Gitter der Gittersequenz geschehen. Die Ableitung auf dem feinsten Gitter kann ohne Informationsverlust rekonstruiert werden. Datenkompression ist auch hier wieder möglich. Der Vergleich mit dem Finite-Differenzen-Verfahren zeigt jedoch, daß die mit der VMSA berechneten Ableitungen nicht konkurrenzfähig sind.

Inhalt des fünften Kapitels ist die Detektion von Phänomenen. Mit Hilfe der verallgemeinerten Multiskalenanalyse werden Unstetigkeiten detektiert und voneinander separiert. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden zur weiteren Lokalisierung der Unstetigkeiten eingesetzt. Hierfür wurden Testrechnungen anhand einer numerischen Lösung eines Problems aus der Gasdynamik durchgeführt.

Kapitel 1

Grundlagen

Das Kapitel ist in fünf Abschnitte gegliedert. Abschnitt 1.1 führt in die Theorie der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen ein, Abschnitt 1.2 behandelt die Euler-Gleichungen der Gasdynamik. In Abschnitt 1.3 werden die Rankine-Hugoniot-Bedingungen hergeleitet, die in Kapitel 5 bei der Detektion von Phänomenen eine wichtige Rolle spielen. Die Gittergenerierung ist Inhalt von Abschnitt 1.4. Abgeschlossen wird das Kapitel mit einer Einführung in Finite-Volumen-Methoden (Abschnitt 1.5).

Weitere Einzelheiten zum numerischen Lösen der behandelten Gleichungen findet sich in der Dissertation von Friedrich ([Fri99]). Mit dem im Rahmen seiner Arbeit entwickelten Strömungslöser wurden alle Lösungen berechnet, die die Grundlage für sämtliche in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen lieferten.

1.1 Hyperbolische Erhaltungsgleichungen

Da in dieser Arbeit ausschließlich zweidimensionale Probleme behandelt werden, wird die Theorie ebenfalls im Zweidimensionalen dargestellt. Eine Verallgemeinerung auf n Dimensionen findet sich in vielen Büchern zur Strömungsmechanik. Vektoren werden in diesem und dem fünften Kapitel stets mit einem Pfeil versehen. In den übrigen Kapiteln werden die Vektorpfeile der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

Sei $\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Element des Gebietes Ω mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial \Omega$.

Definition 1.1.1 Die Funktion

$$\vec{u}: \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^m , m \in \mathbb{N}$$

 $(\vec{x}, t) \longmapsto \vec{u}(\vec{x}, t)$

ist der Vektor der Zustandsvariablen oder konservativen Variablen. S wird Zustandsraum genannt.

Damit kann der Begriff der Erhaltungsgleichung eingeführt werden:

Definition 1.1.2 Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \vec{u} \, d\vec{x} + \int_{\partial \Omega_i} \sum_{j=1}^2 \vec{f_j}(\vec{u}) n_j \, ds = 0$$

$$\tag{1.1}$$

mit dem Vektor der Flußfunktionen $\vec{f_j}: S \longrightarrow \mathbb{R}^m, j=1,2$ und der äußeren Einheitsnormale $\vec{n}=(n_1,n_2)^T$ heißt (System von) Erhaltungsgleichungen in Integralform. Das Gebiet $\Omega_i \subset \Omega$ ist ein sogenanntes Kontrollvolumen mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial \Omega_i$.

Die Erhaltungsgleichung beschreibt die Änderung der Zustandsvariablen mit der Zeit. Diese Änderung der Zustände innerhalb eines Kontrollvolumens wird durch Flüsse über seinen Rand ausgeglichen. Zur Veranschaulichung der Bezeichnungen "konservative Variable" und "Erhaltungsgleichung" wird in Beispiel 1.1.3 die Gleichung für die Erhaltung der Masse hergeleitet (siehe auch [Hir88]).

Beispiel 1.1.3 Die Masse im Kontrollvolumen Ω_i ist gegeben durch

$$\int_{\Omega_i} \rho \ d\vec{x},$$

wobei $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ die Dichte des Gases bezeichne. Da Masse nicht einfach entstehen oder verloren gehen kann, ist das Herausströmen von Masse aus Ω_i in zeitlicher Änderung demnach durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho \ d\vec{x} < 0$$

gegeben. Andererseits wird das Ausströmen von Masse über den Rand dargestellt durch

$$\int_{\partial\Omega_i} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \ ds > 0,$$

wobei $\vec{v}(\vec{x},t) = (v_1(\vec{x},t), v_2(\vec{x},t))^T$ das Geschwindigkeitsfeld des Gases sei. Das Produkt $\rho(\vec{x},t)\vec{v}(\vec{x},t)$ ist der Impuls des Gases.

Zusammen gilt also

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho \ d\vec{x} = -\int_{\partial \Omega_i} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \ ds$$

$$\iff \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho \ d\vec{x} + \int_{\partial \Omega_i} \sum_{j=1}^2 \rho v_j n_j \ ds = 0,$$

die Erhaltungsgleichung der Masse mit $u := \rho$ und $f_j := \rho v_j$.

Falls die Zustandsvariablen hinreichend glatt sind, kann die Zeitableitung in das Integral des ersten Terms der Erhaltungsgleichung hineingezogen werden. Zusätzliche Anwendung des Satzes von Gauß auf den zweiten Term der Gleichung liefert insgesamt

$$\int_{\Omega_i} \partial_t \vec{u} \, d\vec{x} + \int_{\Omega_i} \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \vec{f}_j(\vec{u}) = 0.$$

Da dies für alle Kontrollvolumina Ω_i gültig ist, gilt auch die *Divergenzform* der Erhaltungsgleichung

$$0 = \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \vec{f}_j(\vec{u})$$
 (1.2)

$$= \partial_t \vec{u} + \sum_{j=1}^2 \nabla_{\vec{u}} \vec{f_j}(\vec{u}) \partial_{x_j} \vec{u}. \tag{1.3}$$

Hierbei sei $\nabla_{\vec{u}} \vec{f_j}$ die Jacobi-Matrix von f_j bezüglich \vec{u} . Die letzte Form (1.3) zeigt, daß Erhaltungsgleichungen zur Klasse der quasilinearen Differentialgleichungen gehören.

Lösungen der Integralform der Erhaltungsgleichungen (1.1) gehören zu den sogenannten schwachen Lösungen. Da die Lösungen nichtlinearer Gleichungen in endlicher Zeit Unstetigkeiten so wie zum Beispiel Stöße ausbilden, ist es von Vorteil, die schwache Formulierung der Erhaltungsgleichungen zum numerischen Lösen zu benutzen. So ist diese Formulierung auch die Basis bei der Entwicklung von Finite-Volumen-Verfahren (siehe Kapitel 1.5). Nachteil ist, daß die Eindeutigkeit schwacher Lösungen nicht garantiert werden kann. Hier muß eine weitere Bedingung, die sogenannte Entropiebedingung, erfüllt

werden. Eine Erläuterung hierzu und zur Existenz und Eindeutigkeit findet man in [Son97], eine ausführliche Herleitung der Entropiebedingungen findet sich auch in [LeV92].

Definition 1.1.4 Die Erhaltungsgleichung (1.1) bzw. (1.2) heißt hyperbolisch, falls die Matrix

$$A(\vec{u}, \vec{\nu}) := \sum_{j=1}^{2} \nabla_{\vec{u}} \vec{f}_{j}(\vec{u}) \nu_{j}$$

für alle (normierten) $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)^T \in \mathbb{R}^2$ m reelle Eigenwerte $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m$ und linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m$ besitzt.

Die Eigenschaft der Hyperbolizität wird bei der Konstruktion numerischer Verfahren eingesetzt. Es wird sich zeigen, daß auch die Euler-Gleichungen hyperbolisch sind.

1.2 Die Euler-Gleichungen der Gasdynamik

Die Euler-Gleichungen lassen sich durch die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie beschreiben. Die Erhaltung von Masse wurde in Beispiel 1.1.3 hergeleitet. Die Herleitungen für die beiden anderen Erhaltungsgleichungen findet man in vielen Büchern zur Strömungsmechanik.

Es bezeichne $p(\vec{x},t)$ den Druck und $E(\vec{x},t)$ die Totalenergie des Gases. Letztere setzt sich aus der kinetischen und der inneren Energie zusammen: $E = \frac{1}{2}||\vec{v}||^2 + e$. Die Enthalpie wird definiert durch $H := E + \frac{p}{\rho}$.

Die Erhaltung von Impuls ist damit gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho v_j \, d\vec{x} + \int_{\partial \Omega_i} (\rho \, \vec{v} \cdot \vec{n}) \, v_j + p \, n_j \, ds = 0, \qquad j = 1, 2,$$

die Erhaltung von Energie durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho E \ d\vec{x} + \int_{\partial \Omega_i} (\rho E + p) \vec{v} \cdot \vec{n} \ ds = 0.$$

Diese Gleichungen gelten für reibungsfreie, kompressible Gase unter der Voraussetzung, daß keine zusätzliche Wärmequelle besteht und keine äußeren Kräfte wirken.

Die drei Gleichungen lassen sich mit

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{f_j} := \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + p \delta_{1j} \\ \rho v_2 v_j + p \delta_{2j} \\ \rho H v_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

als System von Erhaltungsgleichungen (1.1) oder in Divergenzform als

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho E \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + p \delta_{1j} \\ \rho v_2 v_j + p \delta_{2j} \\ \rho H v_j \end{pmatrix} = 0$$

schreiben.

Da dieses System fünf unbekannte Größen enthält, wird eine weitere Beziehung zwischen den Unbekannten benötigt. Diese Aufgabe erfüllt die Zustandsgleichung, die für ideale Gase die Form

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}||\vec{v}||^2 \tag{1.4}$$

hat. Ein Gas wird als *ideal* bezeichnet, wenn bei unveränderter Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen konstant ist ([Kuc95]). Bei hinreichend hoher Temperatur verhält sich Luft nahezu wie ein ideales Gas. Eine Herleitung dieser Gleichung findet man bei [LeV92]. Die Konstante γ ist das Verhältnis von spezifischer Wärme bei konstantem Volumen zu derjenigen bei konstantem Druck. Für trockene Luft gilt $\gamma = 1.4$.

Um nachprüfen zu können, ob die Euler-Gleichungen hyperbolisch sind, benötigt man die Jacobi-Matrizen der Flüsse $\nabla_{\vec{u}}\vec{f_j}, j=1,2$ sowie die Transformationsmatrix $P(\vec{u}, \vec{\nu})$ und ihre Inverse, die die Matrix $A(\vec{u}, \vec{\nu}) := \sum_{j=1}^{2} \nabla_{\vec{u}}\vec{f_j}\nu_j$ (siehe Definition 1.1.4) diagonalisiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise ist die Definition zweier weiterer physikalischer Größen sinnvoll:

Definition 1.2.1 i. Die Funktion

$$a := \sqrt{\gamma \, \frac{p}{\rho}}$$

heißt Schallgeschwindigkeit.

ii. Die Größe

$$Ma := \frac{||\vec{v}||}{a}$$

wird als Machzahl bezeichnet.

Die Jacobimatrizen der Flüsse sind gegeben (siehe [Hir90]) durch

$$\nabla_{\vec{u}} \cdot \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{\gamma - 3}{2} v_1^2 + \frac{\gamma - 1}{2} v_2^2 & (3 - \gamma) v_1 & -(\gamma - 1) v_2 & \gamma - 1\\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0\\ -\gamma v_1 E + (\gamma - 1) v_1 ||\vec{v}||^2 & \gamma E - \frac{\gamma - 1}{2} (v_2^2 + 3v_1^2) & -(\gamma - 1) v_1 v_2 & \gamma v_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_{\vec{u}} \cdot \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v_1 v_2 & v_2 & v_1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} v_2^2 + \frac{\gamma - 1}{2} v_1^2 & -(\gamma - 1) v_1 & (3 - \gamma) v_2 & \gamma - 1 \\ -\gamma v_2 E + (\gamma - 1) v_2 ||\vec{v}||^2 & -(\gamma - 1) v_1 v_2 & \gamma E - \frac{\gamma - 1}{2} (v_1^2 + 3 v_2^2) & \gamma v_2 \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix und ihre Inverse, die mittels

$$\Lambda(\vec{u}, \vec{\nu}) := P^{-1}(\vec{u}, \vec{\nu}) A(\vec{u}, \vec{\nu}) P(\vec{u}, \vec{\nu})$$

die Matrix A diagonalisieren, sind gegeben durch

$$P(\vec{u}, \vec{\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\rho}{2a} & \frac{\rho}{2a} \\ v_1 & \rho\nu_2 & \frac{\rho}{2a}(v_1 + a\nu_1) & \frac{\rho}{2a}(v_1 - a\nu_1) \\ v_2 & -\rho\nu_1 & \frac{\rho}{2a}(v_2 + a\nu_2) & \frac{\rho}{2a}(v_2 - a\nu_2) \\ \frac{||\vec{v}||^2}{2} & \rho(v_1\nu_2 - v_2\nu_1) & \frac{\rho}{2a}(H + a(\vec{v} \cdot \vec{n})) & \frac{\rho}{2a}(H - a(\vec{v} \cdot \vec{n})) \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{Ma}^2 & (\gamma - 1) \frac{v_1}{\mathbf{a}^2} & (\gamma - 1) \frac{v_2}{\mathbf{a}^2} & \frac{1 - \gamma}{\mathbf{a}^2} \\ \frac{1}{\rho} (v_2 \nu_1 - v_1 \nu_2) & \frac{\nu_2}{\rho} & -\frac{\nu_1}{\rho} & 0 \\ \frac{\mathbf{a}}{\rho} (\frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{Ma}^2 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\mathbf{a}}) & \frac{1}{\rho} (\nu_1 - (\gamma - 1) \frac{v_1}{\mathbf{a}}) & \frac{1}{\rho} (\nu_2 - (\gamma - 1) \frac{v_2}{\mathbf{a}}) & \frac{\gamma - 1}{\rho \mathbf{a}} \\ \frac{\mathbf{a}}{\rho} (\frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{Ma}^2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\mathbf{a}}) & -\frac{1}{\rho} (\nu_1 + (\gamma - 1) \frac{v_1}{\mathbf{a}}) & -\frac{1}{\rho} (\nu_2 + (\gamma - 1) \frac{v_2}{\mathbf{a}}) & \frac{\gamma - 1}{\rho \mathbf{a}} \end{pmatrix}.$$

Ausgerechnet ergibt sich für die Diagonalmatrix

$$\Lambda(\vec{u},\vec{\nu}) = \mathrm{diag}(\vec{v} \cdot \vec{\nu}, \vec{v} \cdot \vec{\nu}, \vec{v} \cdot \vec{\nu} + \mathbf{a}, \vec{v} \cdot \vec{\nu} - \mathbf{a}).$$

Die Matrix $A(\vec{u}, \vec{\nu})$ des Systems der Eulergleichungen enthält also vier (=m) Eigenwerte und vier linear unabhängige Eigenvektoren, die man als Spaltenvektoren in der Transformationsmatrix P findet. Dies zeigt, daß das System der Eulergleichungen zur Klasse der hyperbolischen Differentialgleichungen gemäß Definition 1.1.4 gehört.

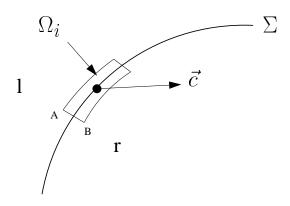


Abbildung 1.1: Zelle Ω_i bewegt sich mit der Unstetigkeit Σ mit.

1.3 Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen stellen den Zusammenhang zwischen den Zuständen vor und hinter Unstetigkeiten und der Geschwindigkeit der Unstetigkeit her. Zur Herleitung wird eine Unstetigkeitskurve Σ betrachtet, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{c}(\vec{x},t)$ fortbewegt. Als Kontrollvolumen dient ein infinitesimales Gebiet Ω_i mit Rand $\partial \Omega_i$, das sich mit der Unstetigkeit mitbewegt, siehe Abbildung 1.1. Der Abstand zwischen den beiden Längsseiten sei der Einfachheit halber für die gesamte Länge des Kontrollvolumens gleich B-A. Die Zustände vor (d.h. rechts) bzw. hinter dem Stoß werden durch die Indizes r und l unterschieden, so wie in der Abbildung angedeutet.

Da in diesem Fall das Kontrollvolumen zeitabhängig ist, wird noch ein Hilfsmittel benötigt, der Reynoldssche Transportsatz (siehe [Son93]), der Inhalt ist von

Satz 1.3.1 Sei $\Omega_i(t)$ ein zeitabhängiges Kontrollvolumen und $\vec{c}(\vec{x},t)$ die Geschwindigkeit von $\Omega_i(t)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i(t)} \vec{u} \ d\vec{x} = \int_{\Omega_i(t)} \partial_t \vec{u} \ d\vec{x} + \int_{\Omega_i(t)} \nabla_{\vec{x}} \cdot (\vec{u}\vec{c}) \ d\vec{x}.$$

Nach Anwendung des Satzes von Gauß auf das zweite Integral der rechten Seite erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i(t)} \vec{u} \ d\vec{x} = \int_{\Omega_i(t)} \partial_t \vec{u} \ d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i(t)} \vec{u} \ (\vec{c} \cdot \vec{n}) \ ds. \tag{1.5}$$

Integriere nun die Divergenzform der Erhaltungsgleichung 1.2 über $\Omega_i(t)$ und

wende erneut den Gaußschen Integralsatz an. Man erhält wieder die Integralform der Erhaltungsgleichung 1.1 mit zeitabhängigem Kontrollvolumen $\Omega_i(t)$:

$$\int_{\Omega_i(t)} \partial_t \vec{u} \ d\vec{x} = -\int_{\Omega_i(t)} \sum_{j=1}^2 \partial_{x_j} \vec{f_j}(\vec{u}) \ d\vec{x}$$
$$= -\int_{\partial\Omega_i(t)} \sum_{j=1}^2 \vec{f_j}(\vec{u}) n_j \ ds.$$

Zusammen mit Gleichung (1.5) folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i(t)} \vec{u} \ d\vec{x} = -\int_{\partial\Omega_i(t)} \sum_{j=1}^2 \vec{f_j}(\vec{u}) n_j \ ds + \int_{\partial\Omega_i(t)} \vec{u} \ (\vec{c} \cdot \vec{n}) \ ds.$$

Wenn man nun das Kontrollvolumen verschwinden läßt $((B-A) \longrightarrow 0)$, geht das Integral auf der linken Seite gegen null. Für die Randintegrale benutzt man folgende Rechnung:

$$\int_{\partial\Omega_l(t)} \vec{f} \cdot \vec{n} \ ds \longrightarrow \int_{\Sigma} (\vec{f_r} - \vec{f_l}) \cdot \vec{n} \ d\Sigma = \int_{\Sigma} [\vec{f}] \cdot \vec{n} \ d\Sigma,$$

wobei $[f] = f_r - f_l$ den Sprung einer Funktion f über die Unstetigkeit hinweg bezeichne.

Damit erhält man insgesamt

$$\int_{\Sigma} [\vec{u}] \vec{c} \cdot \vec{n} - \sum_{j=1}^{2} [\vec{f}_j] n_j \ d\Sigma = \int_{\Sigma} ([\vec{u}] \vec{c} - [\vec{F}]) \cdot \vec{n} \ d\Sigma = 0$$

mit $\vec{F} = (f_1 \ f_2)$ und schließlich die Rankine-Hugoniot-Bedingungen

$$([\vec{u}]\vec{c} - [\vec{F}]) \cdot \vec{n} = 0.$$

Für die Euler-Gleichungen erhält man die vier Bedingungen

$$\begin{split} \left[\rho\right] \vec{c} \cdot \vec{n} &= \left[\rho \vec{v} \cdot \vec{n}\right], \\ \left[\rho \vec{v}\right] \vec{c} \cdot \vec{n} &= \left[\left(\rho \vec{v} \cdot \vec{n}\right) \vec{v} + p \, \vec{n}\right], \\ \left[\rho E\right] \vec{c} \cdot \vec{n} &= \left[\rho H \, \vec{v} \cdot \vec{n}\right]. \end{split}$$

Um die verschiedenen Typen von Unstetigkeiten leichter beschreiben zu können, wähle die x-Achse entlang der Einheitsnormalen \vec{n} , die y-Achse senkrecht dazu. Dann gilt

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_1$$
.

Damit kann man die vier Rankine-Hugoniot-Bedingungen als

$$[\rho] \vec{c} \cdot \vec{n} = [\rho v_1], \tag{1.6}$$

$$\left[\rho v_1\right] \vec{c} \cdot \vec{n} = \left[\rho v_1^2 + p\right], \tag{1.7}$$

$$[\rho v_2] \vec{c} \cdot \vec{n} = [\rho v_1 v_2], \qquad (1.8)$$

$$[\rho E] \vec{c} \cdot \vec{n} = [\rho H v_1] \tag{1.9}$$

schreiben.

Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

$$[v_1] \neq 0$$

In diesem Fall ist ein Sprung in der normalen Komponente der Geschwindigkeit vorgegeben.

Betrachte nun die erste und dritte Gleichung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen (Gleichungen (1.6) und (1.8)) und löse sie nach $\vec{c} \cdot \vec{n}$ auf:

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r}{\rho_l - \rho_r} \quad \text{und} \quad \vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\rho_l v_1^l v_2^l - \rho_r v_1^r v_2^r}{\rho_l v_2^l - \rho_r v_2^r}.$$

Gleichsetzen zeigt, daß

$$v_2^l = v_2^r$$
 bzw. $[v_2] = 0$

gelten muß. Es liegt also kein Sprung in der tangentialen Komponente der Geschwindigkeit vor. Diese Art von Unstetigkeit wird *Stoß* genannt. Die Werte von Dichte und Druck weisen Sprünge über den Stoß auf.

$$[v_1] = 0$$

Hierbei findet kein Sprung in der normalen Komponente der Geschwindigkeit statt.

Wenn man diese Bedingung in die erste Gleichung (1.6) einsetzt, erhält man

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = v_1$$
.

Einsetzen in die zweite Gleichung (1.7) liefert

$$(\rho_l - \rho_r)v_1^2 = (\rho_l - \rho_r)v_1^2 + (p_l - p_r),$$
 also $[p] = 0.$

Diese Art der Unstetigkeit wird Kontaktunstetigkeit genannt. Auch bei dieser Unstetigkeit springt die Dichte. Die tangentielle Geschwindigkeit v_2 kann einen Sprung ausbilden.

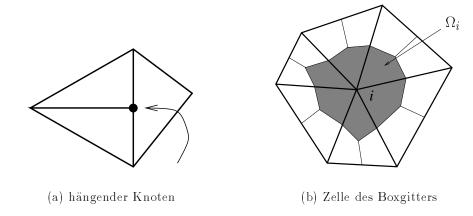


Abbildung 1.2: Gittergenerierung: Dreieckstriangulierung → Boxgitter

1.4 Gittergenerierung

Für Finite-Volumen-Verfahren werden meist sogenannte Boxgitter verwendet. Diese Gitter werden aus Dreieckstriangulierungen konstruiert und daher auch duale Triangulierungen genannt.

Auf dem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$, das hier der Einfachheit halber polygonal berandet sei, sei eine Dreieckstriangulierung gegeben, die zulässig ist nach

Definition 1.4.1 Eine Triangulierung \mathcal{T}_h eines Gebietes Ω heißt zulässig, wenn für zwei Teilgebiete Ω_i und Ω_j genau einer der folgenden Fälle zutrifft:

- i. $\Omega_i = \Omega_j$.
- ii. Ω_i und Ω_j besitzen genau eine gemeinsame Kante und zwei gemeinsame Knoten.
- iii. Ω_i und Ω_j besitzen genau einen gemeinsamen Knoten.
- iv. $\Omega_i \cap \Omega_j = \{\}.$

Der Index h bezeichne den größten Durchmesser der Zellen der Triangulierung:

$$h := \sup_{\Omega_i \in \mathcal{T}_h} \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in \Omega_i} |\vec{x} - \vec{y}|.$$

Eine Zerlegung ist zum Beispiel nicht zulässig, wenn sie hängende Knoten aufweist (siehe Abbildung 1.2 (a)).

Um nun die duale Triangulierung zu konstruieren, verbinde den Schwerpunkt jedes Dreiecks mit den Mittelpunkten der zu dem Dreieck gehörenden drei Kanten. Ergebnis ist eine Triangulierung, deren Zellen entweder eine Kante (oder mehrere) gemein haben oder nicht benachbart sind (siehe Abbildung 1.2 (b)). Zwei Zellen können also im Gegensatz zu Dreieckstriangulierungen nicht nur einen gemeinsamen Punkt besitzen. Zellen der dualen Triangulierung, manchmal auch Boxen genannt, sind Kontrollvolumina (siehe Abschnitt 1.1).

1.5 Die Finite-Volumen-Methode

Die Idee der Finite-Volumen-Methoden basiert auf der Integral- oder schwachen Form der Erhaltungsgleichung 1.1

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \vec{u} \, d\vec{x} = -\int_{\partial \Omega_i} \sum_{j=1}^2 \vec{f_j}(\vec{u}) n_j \, ds \tag{1.10}$$

und besteht darin, die Gleichung in dieser Form zu diskretisieren.

Das Flächenintegral wird mit Hilfe des Zellmitteloperators diskretisiert:

Definition 1.5.1 Gegeben sei eine Zelle $\Omega_i \subset \Omega$. Das Zellmittel einer Funktion u(x) auf der Zelle Ω_i ist definiert als

$$u \longmapsto <\lambda(\Omega_i), u>:= \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} u(x) \ dx =: \overline{u}_i \in \mathbb{R}.$$

 $|\Omega_i|$ bezeichne den Flächeninhalt der Zelle Ω_i .

Um die rechte Seite der Gleichung (1.10) vollständig numerisch beschreiben zu können, sind mehrere Schritte notwendig:

Approximation des Randintegrals

Nach Konstruktion ist der Rand jeder Zelle des Boxgitters polygonal berandet. Sei $\Gamma(i)$ die Menge aller Liniensegmente des Randes $\partial\Omega_i$. Damit kann

man Gleichung 1.10 schreiben als

$$\frac{d}{dt}\overline{u}_i(t) = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ik} \in \Gamma(i)} \int_{\Gamma_{ik}} \sum_{j=1}^2 \vec{f}_j(\vec{u}) n_{ik,j} \ ds$$

mit dem von Ω_i aus gesehen äußeren Normalenvektor $\vec{n}_{ik} = (n_{ik,1}, n_{ik,2})^T$. Der Übersichtlichkeit halber werden die Vektorpfeile auf den Zellmitteln weggelassen. Es bezeichne also $\overline{u}_i(t)$ den Zellmittelvektor der Zustandsvariablen \vec{u} .

Approximiere das Randintegral auf jedem der Liniensegmente durch eine Gauß-Quadraturformel mit n Stützstellen \vec{x}_i und Gewichten $\omega_i, i = 1, \ldots, n$. Man erhält

$$\frac{d}{dt}\overline{u}_i(t) = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ik} \in \Gamma(i)} |\Gamma_{ik}| \left\{ \sum_{l=1}^n \omega_l \sum_{j=1}^2 \vec{f}_j(\vec{u}(\vec{x}_l, t)) n_{ik,j} + \mathcal{O}(h^{2n}) \right\}.$$

Einführung einer numerischen Flußfunktion

Um auch an den Punkten, an denen die Zustandsvariablen \vec{u} Unstetigkeiten aufweisen, den Integranden korrekt approximieren zu können, werden numerische Flußfunktionen eingeführt:

Definition 1.5.2 Eine zu den Flußfunktionen $\vec{f_j}, j=1,2$ gehörende Funktion

$$\vec{f}_{\text{num}}: S \times S \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{n}) \longmapsto f_{\text{num}}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{n})$$

heißt numerische Flußfunktion, falls sie konsistent ist mit den Flußfunktionen, wenn also für alle $\vec{u} \in S$ gilt:

$$\vec{f}_{\text{num}}(\vec{u}, \vec{u}, \vec{n}) = \sum_{j=1}^{2} \vec{f}_{j}(\vec{u}) n_{j}.$$

Beispiele für numerische Flußfunktionen findet man zum Beispiel in [Hir90]. Mit der Bezeichnung Ω_k für diejenige Nachbarzelle von Ω_i , die das Liniensegment Γ_{ik} mit Ω_i gemein hat, kann man das Integral schreiben als

$$\frac{d}{dt}\overline{u}_i(t) = -\frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\Gamma_{ik} \in \Gamma(i)} |\Gamma_{ik}| \left\{ \sum_{l=1}^n \omega_l \vec{f}_{\text{num}} \left(\vec{u}(\vec{x}_l, t), \vec{u}(\vec{x}_l, t), \vec{n}_{ik} \right) + \mathcal{O}(h^{2n}) \right\}.$$

Zellmittel-Diskretisierung der Zustandsvariablen

Der letzte Schritt besteht in der Zellmittel-Diskretisierung der Argumente, der Zustandsvariablen der numerischen Flußfunktion. Da die Approximationsordnung durch die der Diskretisierung der Zellmittel durch $\mathcal{O}(h)$ begrenzt ist, müssen in jedem Schritt die Zustandsvariablen aus den diskreten Zellmitteln mittels einer Funktion π_i rekonstruiert werden. Eigenschaften dieser Funktion und Beispiele werden in Abschnitt 3.1 erläutert.

Die Finite-Volumen-Methode lautet dann zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\frac{d}{dt}\overline{u}_{i}(t) = -\frac{1}{|\Omega_{i}|} \sum_{\Gamma_{ik} \in \Gamma(i)} |\Gamma_{ik}| \sum_{l=1}^{n} \omega_{l} \vec{f}_{\text{num}}(\pi_{i}(\overline{u}_{i}(\vec{x}_{l}, t)), \pi_{k}(\overline{u}_{k}(\vec{x}_{l}, t)), \vec{n}_{ik}),$$

$$\overline{u}_{i}(0) = \langle \lambda(\Omega_{i}), u(0) \rangle.$$

Für Einzelheiten der zeitlichen Diskretisierung siehe [Fri99].

1.6 Einführung in die Multiskalenanalyse bei Wavelets

Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die Multiskalenanalyse bei Wavelets gegeben. Wichtige Definitionen, Sätze und Zusammenhänge werden in Abschnitt 1.6.1 nur kurz angegeben. Für eine ausführliche Darstellung und in dieser Arbeit nicht gegebene Definitionen und Beweise sei auf [LMR94], [Gei99] und [Dau92] verwiesen. In Abschnitt 1.6.2 wird als Beispiel die Boxfunktion als Skalierungsfunktion gewählt, da diese für die Anwendungen in dieser Arbeit wichtig ist.

1.6.1 Grundlagen

Definition 1.6.1 Eine Multiskalenanalyse des $L^2(\mathbb{R})$ ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume $V^k \subset L^2(\mathbb{R})$

$$\{0\} \subset \ldots \subset V^2 \subset V^1 \subset V^0 \subset V^{-1} \subset V^{-2} \subset \ldots \subset L^2(\mathbb{R})$$

mit

$$\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V^k} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} V^k = \{0\},$$

$$f(\cdot) \in V^k \iff f(2^k \cdot) \in V^0.$$

Weiterhin gibt es eine Funktion $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, deren ganzzahlige Translate eine Orthonormalbasis von V^0 erzeugen, das heißt:

i.

$$V^{0} = \overline{span\{\varphi(\cdot - i)|i \in \mathbb{Z}\}},$$

ii.

$$\langle \varphi(\cdot - i), \varphi(\cdot - j) \rangle = \delta_{ij}$$
.

Zur Definition ist Folgendes anzumerken:

i. Es gilt:

$$f \in V^0 \iff f(\cdot - i) \in V^0 , i \in \mathbb{Z},$$

 $f \in V^k \iff f(\cdot - 2^k i) \in V^k, i \in \mathbb{Z}.$

ii. Die Räume V^k sind skalierte Versionen des Grundraumes V^0 , der durch Translation einer Funktion φ , der sogenannten orthogonalen Skalierungsfunktion, aufgespannt wird.

Die Räume V^k werden daher von Dilatationen und Translationen von φ erzeugt:

$$V^k = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_i^k | i \in \mathbb{Z}\}} \quad \text{mit} \quad \varphi_i^k(x) := 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}x - i). \quad (1.11)$$

 φ ist hierbei normalisiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \ dx = 1.$$

Lemma 1.6.2 Die Skalierungsfunktion φ erfüllt die Skalierungsgleichung

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \, \varphi(2x - i),$$

wobei $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge reeller Zahlen ist.

BEWEIS Dies folgt aus
$$\varphi \in V^0 \subset V^{-1} = \overline{\operatorname{span}\{\sqrt{2}\varphi(2x-i)|i \in \mathbb{Z}\}}$$
.

Seien nun W^{k+1} die orthogonalen Komplemente von V^{k+1} in V^k , dann gilt:

$$V^k = V^{k+1} \oplus W^{k+1}, \quad W^{k+1} \perp V^{k+1}.$$
 (1.12)

Die Orthogonalprojektion auf V^k werde mit P_{V^k} bezeichnet. Es gilt

$$\lim_{k \to +\infty} ||P_{V^k} f||_{L_2} = 0,$$

$$\lim_{k \to -\infty} ||P_{V^k} f - f||_{L_2} = 0.$$

Zusammen mit den Operatoren P_{W^k} auf W^k folgt:

$$P_{V^k} = P_{V^{k+1}} + P_{W^{k+1}}.$$

Wiederholte Anwendung von (1.12) ergibt

$$V^k = \bigoplus_{j>k+1} W_j$$
 und $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_j W_j$.

So kann kann eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ dargestellt werden (siehe [LMR94]) durch

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P_{W^k} f = P_{V^k} f + \sum_{j=-\infty}^k P_{W^j} f.$$

Definition 1.6.3 Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt Wavelet, falls sie die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

mit der Fouriertransformation

$$\hat{\psi}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \psi(x) e^{-ix\omega} dx$$

erfüllt.

Aus der Zulässigkeitsbedingung kann man ableiten, daß für ein Wavelet ψ die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, dx = 0$$

eine notwendige Bedingung ist. Falls die Funktion ψ einen kompakten Träger hat, ist die Bedingung auch hinreichend. Auf die Bedeutung von Wavelets mit kompaktem Träger für die Anwendungen wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen, auch nicht auf die Bedeutung der Fouriertransformation. Hierfür sei auf die Literatur [LMR94, Gei99] verwiesen.

Der zentrale Satz der Multiskalenanalyse ist

Satz 1.6.4 Sei $\{V^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Multiskalenanalyse, die von der orthogonalen Skalierungsfunktion $\varphi \in V^0$ erzeugt wird.

Für die Funktion $\psi \in V^{-1}$, die durch

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \varphi(2x - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \varphi_i^{-1}(x),$$

$$g_i = (-1)^i \alpha_{1-i},$$

definiert ist, gilt:

- i. $\{\psi_i^k(\cdot)=2^{-k/2}\psi(2^{-k}\cdot -i)\,|\,i\in\mathbb{Z}\}$ ist eine Orthonormalbasis des Raumes W^k ,
- ii. $\{\psi_i^k \mid i, k \in \mathbb{Z}\}\ ist\ eine\ Orthonormalbasis\ des\ L^2(\mathbb{R}),$
- iii. ψ ist ein Wavelet.

Erläuterungen zu Satz 1.6.4:

• Die Koeffizienten der Skalierungsgleichung erfüllen die Orthogonalitätsbeziehung

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\alpha_i\alpha_{i+2k}=\delta_{0,k}\,,$$

falls die Skalierungsfunktion orthogonal ist.

• Für die Koeffizienten α_i gelten

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i = \sqrt{2} \text{ und } \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \alpha_i = 0.$$

• Das durch die MSA definierte Wavelet ist nicht eindeutig bestimmt. Durch

$$g_i = (-1)^i \alpha_{1+2l-i}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

werden zum Beispiel auch Wavelets definiert.

• Die Konstruktion von Orthonormalbasen des $L^2(\mathbb{R})$, deren Basisfunktionen aus einer einzigen Funktion erzeugt werden, ist ein nicht triviales Problem. Die sogenannten Daubechies-Wavelets sind Wavelets, die zudem noch einen kompakten Träger besitzen (siehe [Dau92]). Das einfachste Daubechies-Wavelet D_2 , das Haar-Wavelet, wird im folgenden Abschnitt 1.6.2 hergeleitet.

1.6.2 Multiskalenanalyse mit der Boxfunktion

Die Skalierungsfunktion φ sei die Boxfunktion (siehe Abbildung 1.3 links):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 &, x \in [0, 1[\\ 0 &, \text{sonst} \end{cases}$$

Der Grundraum V^0 wird von den Funktionen

$$\varphi_i^0 = \varphi(x-i) = \begin{cases} 1 &, x \in [i, i+1[\\ 0 &, \text{sonst} \end{cases}$$

aufgespannt und enthält demnach alle Funktionen, die auf den Intervallen [i, i+1[konstant sind.

Für ein beliebiges Level k gilt (siehe Gleichung 1.11)

$$V^k = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_i^k, i \in \mathbb{Z}\}}$$
 mit $\varphi_i^k = 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}x - i) = \begin{cases} 2^{-k/2}, x \in [2^k i, 2^k (i+1)[\\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

Die Räume V^k enthalten also gerade die Funktionen, die auf $[2^k i, 2^k (i+1)], i \in \mathbb{Z}$ konstant sind.

Die Projektion einer Funktion f auf das Level k geschieht mit Hilfe des Projektionsoperators:

$$P_{V^k}(f) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} s_i^k \varphi_i^k \quad \text{mit}$$

$$s_i^k = \langle f, \varphi_i^k \rangle = \frac{1}{2^{k/2}} \int_{2^{k}i}^{2^k(i+1)} f(x) \, dx.$$

Dies ergibt für ein Teilintervall

$$P_{V^k}f|_{[2^k i, 2^k (i+1)[} = 2^{-k} \int_{2^k i}^{2^k (i+1)} f(x) dx.$$

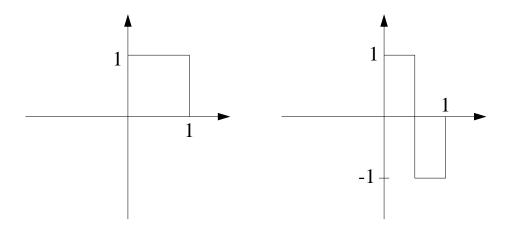


Abbildung 1.3: Die Boxfunktion φ und das Haar-Wavelet ψ

Die Skalierungsgleichung (Lemma 1.6.2) wird hier zu

$$\varphi_i^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{2i}^k + \varphi_{2i+1}^k)$$

und die Koeffizienten s_i^k entsprechend zu

$$s_i^{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{2i}^k + s_{2i+1}^k).$$

Für den Fehler erhält man damit

$$P_{W^{k+1}}(f) = P_{V^k}(f) - P_{V^{k+1}}(f)$$

$$= \sum_{i} s_i^k \varphi_i^k - \sum_{i} s_i^{k+1} \varphi_i^{k+1}$$

$$= \sum_{i} s_i^k \varphi_i^k - \frac{1}{2} \sum_{i} (s_{2i}^k + s_{2i+1}^k) (\varphi_{2i}^k + \varphi_{2i+1}^k)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} (s_{2i}^k - s_{2i+1}^k) (\varphi_{2i}^k - \varphi_{2i+1}^k)$$

$$= \sum_{i} d_i^{k+1} \psi_i^{k+1}$$

mit $d_i^{k+1} := \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{2i}^k - s_{2i+1}^k)$ und $\psi_i^{k+1} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_{2i}^k - \varphi_{2i+1}^k)$.

Für φ gilt die Skalierungsgleichung (siehe Lemma 1.6.2):

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i \varphi(2x - i).$$

Diese ist mit $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ für die Boxfunktion erfüllt:

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x - 1)$$
$$= \varphi_{[0,\frac{1}{2}[} + \varphi_{[\frac{1}{2},1[}.$$

Die Vorschrift zur Berechnung des zu der Boxfunktion gehörende Wavelets ψ findet man im Hauptsatz der Multiskalenanalyse, Satz 1.6.4:

$$g_0 = \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad g_1 = -\alpha_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{i} g_{i} \varphi(2x - i)$$

$$= \varphi(2x) - \varphi(2x - 1) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$(1.13)$$

Dieses Wavelet ist das Haar-Wavelet, siehe hierzu Abbildung 1.3 rechts.

Bemerkung 1.6.5 Eine effiziente Berechnung der Koeffizienten

$$s_i^k = \langle f, \varphi_i^k \rangle$$
 und $d_i^k = \langle f, \psi_i^k \rangle$

liefert die schnelle Wavelet-Transformation. Ausführliche Beschreibungen hierzu finden sich zum Beispiel in [Gei99] und [LMR94].

Kapitel 2

Verallgemeinerte Multiskalenanalyse (VMSA)

Die Idee der verallgemeinerten Multiskalenanalyse stammt von der Multiskalenanalyse bei Wavelets ab. Dort wird eine Funktion oder ein Signal in verschiedene Skalenkomponenten, d.h. in verschiedene Frequenzen zerlegt. Dargestellt wird dies mit Hilfe einer Funktion, des sogenannten analysierenden Wavelets, und deren Trans- und Dilationen (siehe z.B. [LMR94] oder [Gei99]).

Jedoch sind Wavelets an regelmäßige (aber nicht notwendigerweise rechteckige) Gitter(-sequenzen) gebunden. Dies veranlaßte Harten ([Har93b, Har94]) zur Konstruktion der verallgemeinerten Multiskalenanalyse, bei der diese Einschränkungen nicht existieren. So kann diese Methode auch auf unstrukturierten Gittern angewendet werden Dies wurde erstmalig bei [AH94] durchgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit ist es gelungen, die verallgemeinerte Multiskalenanalyse auf unstrukturierten Gittern vollständig auf Matrix-Vektor-Operationen der linearen Algebra zurückzuführen, siehe hierzu [SPSF00]. So wie bei der Zerlegung des Gebietes ist die Wahl des analysierenden Wavelets bei der verallgemeinerten Multiskalenanalyse weniger eingeschränkt, da im Prinzip jede Funktion dafür verwendet werden kann. Allerdings birgt gerade die Allgemeinheit der Methode auch Nachteile, da genauer auf die sinnvolle Wahl der einzelnen Komponenten geachtet werden muß.

In Abschnitt 2.1 werden die mathematischen Grundlagen der verallgemeinerten Multiskalenanalyse (VMSA) beschrieben, die auf dem Zugang von Harten (siehe [Har93b, AH94, Har94, SPSF00]) beruhen. In Abschnitt 2.2 werden an einem eindimensionalen Beispiel die verschiedenen Operatoren der verallgemeinerten MSA erläutert. In Abschnitt 2.3 wird die VMSA auf die Boxfunktion angewendet. Dabei wird die Notation der VMSA auf die Notation der Multiskalenanalyse bei Wavelets übertragen. Die Ergebnisse werden

bei der Berechnung der Differentiationsmatrix in Kapitel 4 benötigt.

2.1 Mathematische Grundlagen

Gegeben sei ein Banach-Raum V sowie die zu zerlegende Funktion $v \in V$. Weiterhin seien endlich-dimensionale Banach-Räume $V^k, k \in \mathbb{N}_0$, gegeben.

Diskretisierung

Die Verbindung zwischen dem Raum V und den Räumen V^k liefert

Definition 2.1.1 i. Sei $\{\mathcal{D}_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge linearer Operatoren, der Diskretisierungsoperatoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_k : V & \longrightarrow & V^k \\ v & \longmapsto & v^k \end{array}$$

zwischen zwei Banachräumen V und V^k . J_k bezeichne die Dimension von V^k : $J_k := \dim V^k$. ii. Die Folge $\{\mathcal{D}_k\}_{k=0}^{\infty}$ heißt geschachtelt, falls gilt:

- \mathcal{D}_k ist surjektiv für alle k.
- $\forall v \in V : \mathcal{D}_k v = 0 \Longrightarrow \mathcal{D}_{k+1} v = 0.$

Im folgenden seien alle Folgen von Diskretisierungsoperatoren geschachtelt. Mit den Räumen V^k werden in dieser Arbeit Gitter verschieden feiner Auflösung assoziiert. Die Dimension von V^k entspricht dabei der Anzahl der diskreten Werte auf dem zugehörigen Gitter, bei Zellmitteldiskretisierung enthält das Gitter demnach dim V^k Zellen. Das Gitter V^0 bezeichne stets das feinste Gitter. Damit gilt

$$\dim V^{k+1} < \dim V^k,$$

d.h., der Raum V^{k+1} bezieht sich auf ein gröberes Gitter als der Raum V^k .

Bemerkung 2.1.2 Ebensogut könnte man auch $\dim V^k < \dim V^{k+1}$ wählen; dann gehörte V^0 zum gröbsten Gitter. Aus programmiertechnischen Gründen wurde jedoch die Vergröberung der Gitter mit wachsendem k gewählt. Außerdem werden so Indexprobleme vermieden: Falls V^0 mit dem gröbsten Gitter assoziiert wird, muß bei Hinzunahme eines weiteren groben

Gitters entweder ein negativer Index verwendet oder alle Indizes verschoben werden. Dieses Problem tritt bei der hier gewählten Darstellung nicht auf. Sei L nun der Index des gröbsten möglichen Gitters, d.h., V^L bestehe nur aus einem Element und gehöre also zu dem Gitter, dessen einzige Zelle das ganze Gebiet umfaßt. Dann gilt:

$$\dim V^{k+1} < \dim V^k \qquad , k = 0, \dots L - 1$$

$$V^L = V^{L+1} = V^{L+2} = \dots \qquad \diamond$$

Restriktion

Den Übergang zwischen den einzelnen Gittern beschreibt

Definition 2.1.3 Eine lineare, surjektive Abbildung

$$D_k^{k+1}: V^k \longrightarrow V^{k+1}$$

 $k \in \mathbb{N}_0$, heißt Restriktionsoperator, falls

$$\forall v^k = \mathcal{D}_k v \in V^k : \quad D_k^{k+1} v^k = \mathcal{D}_{k+1} v.$$

Lemma 2.1.4 Die Definition der Restriktion wohldefiniert, d.h., sie ist unabhängig von der Wahl des $v \in V$.

BEWEIS Wegen der Surjektivität der \mathcal{D}_k existiert mindestens ein Element $v \in V$, so daß $\mathcal{D}_k v = v^k$. Seien $v_1 \neq v_2$ zwei Elemente aus V mit $\mathcal{D}_k v_1 = v^k = \mathcal{D}_k v_2$.

Wegen der Linearität der \mathcal{D}_k gilt

$$0 = \mathcal{D}_k v_1 - \mathcal{D}_k v_2 = \mathcal{D}_k (v_1 - v_2).$$

$$\Rightarrow 0 \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{D}_{k+1}(v_1 - v_2) = \mathcal{D}_{k+1}v_1 - \mathcal{D}_{k+1}v_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_{k+1}v_1 = \mathcal{D}_{k+1}v_2.$$

Es ist nun möglich, die einmal diskretisierte Funktion v zu restringieren, ohne v dafür zu kennen:

Lemma 2.1.5 Seien $L \in \mathbb{N}$ und $v^0 \in V^0$ gegeben. Die Folge $\{v^k\}_{k=1}^L$ sei mit Hilfe wiederholter Anwendung der Restriktion berechnet:

$$v^{k+1} = D_k^{k+1} v^k$$
 , $k = 0, \dots, L-1$.

Dann gilt für alle $v \in V$ mit $v^0 = \mathcal{D}_0 v$:

$$v^k = \mathcal{D}_k v$$
 , $k = 1, \dots, L$.

Dies ist eine einfache Folgerung aus der Definition des Restriktionsoperators:

$$D_k^{k+1}(\mathcal{D}_k v) = \mathcal{D}_{k+1} v.$$

Um die Funktion v wieder rekonstruieren zu können, benötigt man zwei weitere Operatoren. Die diskreten Daten müssen einerseits vom gröbsten Gitter aufs feinste prolongiert, andererseits wieder als Element des Raumes V dargestellt werden.

Rekonstruktion

Definition und Lemma 2.1.6 Für jedes $\mathcal{D}_k, k \in \mathbb{N}_0$, existiert ein rechtsinverser Operator, der Rekonstruktionsoperator

$$\mathcal{R}_k: V^k \longrightarrow V$$

d.h., es gilt

$$\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k = \mathcal{I}_k$$
.

BEWEIS Da $\mathcal{D}_k: V \longrightarrow V^k$ surjektiv ist, existiert zu jedem $v^k \in V^k$ ein $f \in V$, so daß $\mathcal{D}_k f = v^k$.

Wähle nun zu jedem $v^k \in V^k$ ein festes $f \in V$ mit $\mathcal{D}_k f = v^k$ und setze $\mathcal{R}_k v^k := f$, $\mathcal{R}_k : V^k \longrightarrow V$. Die so definierte Abbildung hat die gewünschte Eigenschaft $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k = \mathcal{I}_k$.

Mit Hilfe von Diskretisierung und Rekonstruktion kann aus den Daten v^{k+1} eine Approximation an v^k berechnet werden. Da $\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}$ die Rekonstruktion eines $v \in V$ ist, gilt für $\mathcal{D}_k v = v^k$:

$$v^k \approx \mathcal{D}_k(\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}).$$

Prolongation

Definition 2.1.7 Der durch

$$P_{k+1}^k: V^{k+1} \longrightarrow V^k$$

$$v^{k+1} \longmapsto \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k+1} v^{k+1},$$

 $k \in \mathbb{N}_0$, definierte Operator heißt Prolongationsoperator.

Lemma 2.1.8 Der Prolongationsoperator P_{k+1}^k ist rechtsinvers zu D_k^{k+1} , d.h., es gilt

$$D_k^{k+1} P_{k+1}^k = I_{k+1}.$$

Beweis Nach der Definition des Restriktionsoperators gilt für alle $v \in V$:

$$D_k^{k+1}(\mathcal{D}_k v) = \mathcal{D}_{k+1} v; \tag{2.1}$$

dies gilt also auch für $v:=\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}$. Da weiterhin per definitionem $P_{k+1}^kv^{k+1}=\mathcal{D}_k\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}$ ist, erhält man

$$D_k^{k+1}(P_{k+1}^k v^{k+1}) = D_k^{k+1} \mathcal{D}_k(\mathcal{R}_{k+1} v^{k+1}) \stackrel{(2.1)}{=} \mathcal{D}_{k+1} \mathcal{R}_{k+1} v^{k+1} = v^{k+1}.$$

Rekonstruktionsfehler

Der Prolongationsoperator approximiert die Daten des feineren Gitters aus den Daten des gröberen Gitters und erzeugt dadurch einen Fehler, dessen Eigenschaften im folgenden erläutert werden.

Definition 2.1.9 Die Funktion

$$e^k := v^k - P_{k+1}^k v^{k+1} = (I_k - P_{k+1}^k D_k^{k+1}) v^k$$

heißt Rekonstruktionsfehler.

Lemma 2.1.10 Der Rekonstruktionsfehler ist ein Element des Kerns von D_{k}^{k+1} .

BEWEIS

$$D_k^{k+1}e^k = D_k^{k+1}v^k - (D_k^{k+1}P_{k+1}^k)v^{k+1} \stackrel{\text{Lemma}}{=} v^{k+1} - v^{k+1} = 0.$$

Lemma 2.1.11 *Es gilt:*

dim Ker
$$D_k^{k+1} = J_k - J_{k+1}$$
.

BEWEIS Da D_k^{k+1} surjektiv ist, gilt Im $D_k^{k+1} = V^{k+1}$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt

$$\dim V^k = \dim \operatorname{Im} \ D_k^{k+1} + \dim \operatorname{Ker} \ D_k^{k+1},$$

woraus die Behauptung folgt.

Skalenkoeffizienten

Nach den Lemmata 2.1.10 und 2.1.11 werden für den Rekonstruktionsfehler nur $J_k - J_{k+1}$ Komponenten benötigt. Die Umrechnung beschreibt

Definition 2.1.12 Sei $\{\mu_j^k\}_{j=1}^{J_k-J_{k+1}}$ eine Basis von Ker D_k^{k+1} , also

$$\operatorname{Ker} D_k^{k+1} = span\{\mu_j^k\}_{j=1}^{J_k - J_{k+1}}.$$

Die Koeffizienten $d^k := (d_1^k, \dots, d_{J_k-J_{k+1}}^k)$ in

$$e^{k} = \sum_{j=1}^{J_{k} - J_{k+1}} d_{j}^{k} \mu_{j}^{k} =: E_{k} d^{k}$$

mit $E_k \in \mathbb{R}^{J_k \times (J_k - J_{k+1})}$ sind die Skalenkoeffizienten des Rekonstruktionsfehlers.

Die Berechnung der Skalenkoeffizienten aus den Rekonstruktionsfehlern erfolgt mit Hilfe des Operators $G_k \in \mathbb{R}^{(J_k - J_{k+1}) \times J_k}$:

$$d^k = G_k e^k.$$

Damit gilt

Lemma 2.1.13 Für alle $e^k \in \text{Ker } D_k^{k+1}$:

$$E_k G_k e^k = e^k.$$

Bemerkung 2.1.14 Man beachte den Unterschied in der Notation der Skalenkoeffizienten bei der MSA bei Wavelets und der VMSA:

In der Theorie der Wavelets beziehen sich die Koeffizienten d^k auf das gröbere Gitter. Die d^k sind also die Fehler, die beim Übergang von Level k-1 zu Level k enstehen. Um die in der Literatur verbreitete Notation bei der Multiskalenanalyse bei Wavelets nicht zu ändern, wurden die Indizes in dieser Form beibehalten. Die d^k 's haben auch tatsächlich die Dimension des gröberen Gitters, da die Gitterfolge immer dyadisch ist. Daher ist diese Bezeichnung (Index k) auch gerechtfertigt.

Bei der VMSA hingegen beziehen sich die Skalenkoeffizienten d^k (genauso wie die Rekonstruktionsfehler e^k) auf das feinere Gitter, also auf den Übergang von k nach k+1. Im Gegensatz zu den Rekonstruktionsfehlern e^k haben

die Skalenkoeffizienten d^k nicht die Dimension des feineren Gitters, sind also nicht Element des V^k . Da sie aber auch nicht die Dimension des gröberen Gitters haben und im engen Zusammenhang mit den Rekonstruktionsfehlern stehen, wurde auch diese Notation nicht an die andere angepaßt.

Multiskalentransformation

Lemma 2.1.15 v^k und $\{d^k, v^{k+1}\}$ können ohne Informationsverlust ineinander überführt werden.

BEWEIS i. Die Umrechnung von v^0 in die Multiskalendarstellung beschreibt die Direkte Multiskalentransformation:

Berechne v^{k+1} und d^k durch

$$\begin{array}{rcl} v^{k+1} & = & D_k^{k+1} v^k \\ d^k & = & G_k (I_k - P_{k+1}^k D_k^{k+1}) v^k. \end{array}$$

ii. Die Berechnung von v^0 aus den gröbsten Daten und den Skalenkoeffizienten erfolgt durch die Inverse Multiskalentransformation:

Rekonstruiere v^k durch

$$P_{k+1}^{k}v^{k+1} + E_{k}d^{k} = P_{k+1}^{k}D_{k}^{k+1}v^{k} + E_{k}G_{k}(I_{k} - P_{k+1}^{k}D_{k}^{k+1})v^{k}$$

$$= P_{k+1}^{k}D_{k}^{k+1}v^{k} + (I_{k} - P_{k+1}^{k}D_{k}^{k+1})v^{k}$$

$$= v^{k}.$$

Bemerkung 2.1.16 Die Darstellung von $v^0 \in V^0$ durch $\{v^L, d^0, \dots, d^{L-1}\}$ heißt Multiskalendarstellung von V^0 .

2.2 Die verallgemeinerte Multiskalenanalyse in 1D

Gegeben sei das Einheitsintervall I := [0,1]. Das feinste Gitter I^0 werde durch die äquidistante Unterteilung des Intervalls in $2^N, N \in \mathbb{N}$, Teilintervalle generiert. Hierbei bezeichne $\Delta_0 x := 2^{-N}$ die Länge jedes Teilintervalls $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \ldots, 2^N - 1$. Für die gröberen Gitter werden je zwei Teilintervalle zusammengefaßt. So erhält man auf dem k-ten Level für $k = 0, \ldots, L$:

$$I^{k} := \{ x_{i}^{k} \in \mathbb{R} \mid x_{i}^{k} := i\Delta_{k}x, i = 0, \dots, 2^{N-k}, \Delta_{k}x := 2^{k}\Delta_{0}x \}.$$

Nach Konstruktion gibt es höchstens N+1 voneinander verschiedene Gitter. I^N ist das gröbstmögliche, es enthält das Einheitsintervall als einzige Zelle.

Diskretisierung

Der Raum V sei der Raum der stetigen Funktionen auf $I, V := C([0,1]; \mathbb{R})$, und v_i^k der Wert der Funktion $v \in V$ am Punkt x_i^k . Dann werde der Diskretisierungsoperator \mathcal{D}_k durch

$$\mathcal{D}_k v =: v^k := (v_0^k, \dots, v_{2^{N-k}}^k)^T \in \mathbb{R}^{2^{N-k}+1} =: V^k$$

definiert, es handelt sich demnach um punktweise Diskretisierung. Dieser Diskretisierungsoperator ist gemäß Definition 2.1.1 geschachtelt. Die Dimension von V^k ist $J_k = 2^{N-k} + 1$.

Restriktion

Die Restriktion wird durch das Streichen der Werte an allen Stützstellen mit ungeradem Index definiert:

$$\begin{array}{lcl} D_k^{k+1} v^k & = & D_k^{k+1} (v_0^k, \dots, v_{2^{N-k}}^k)^T := (v_0^{k+1}, \dots, v_{2^{N-(k+1)}}^{k+1})^T \\ & = & (v_0^k, v_2^k, \dots, v_{2^{N-k}-2}^k, v_{2^{N-k}}^k)^T =: v^{k+1} \in V^{k+1} := \mathbb{R}^{2^{N-(k+1)}+1}. \end{array}$$

Daher gilt

$$J_k = 2^{N-k} + 1 = 2 \cdot 2^{N-(k+1)} + 1 = 2(2^{N-(k+1)} + 1) - 1 = 2J_{k+1} - 1.$$

So erhält man das Gitter I^{k+1} aus dem nächstfeineren I^k durch

$$I^{k+1} := \{ x_i^{k+1} \in \mathbb{R} \mid x_i^{k+1} := x_{2i}^k, i = 0, \dots, 2^{N - (k+1)} \}.$$

Der Restriktionsoperator lautet in Matrixform:

$$D_k^{k+1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2^{N-(k+1)}+1)\times(2^{N-k}+1)}.$$

Prolongation

Der Prolongationsoperator $P_{k+1}^k := \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k+1}$ ist nicht eindeutig definiert, da durch die Diskretisierung Informationen verloren gehen. Mit Hilfe geeigneter Rekonstruktionsoperatoren können Prolongationen unterschiedlicher Güte konstruiert werden. Es muß jedoch sichergestellt sein, daß der Operator rechtsinvers zur Restriktion ist.

In Matrixdarstellung ist die Prolongation durch

$$P_{k+1}^{k} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2^{N-k}+1)\times(2^{N-(k+1)}+1)}$$

gegeben, wobei die Einträge * jeden möglichen Eintrag bedeuten. Diese werden durch die Wahl der Rekonstruktion festgelegt. Die Rechtsinversität ist für alle *-Einträge erfüllt.

Rekonstruktion

Die einfachste nichttriviale Rekonstruktion ist die lineare Interpolation mit stückweise stetigen linearen Funktionen, also

$$\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}|_{[x_i^{k+1},x_{i+1}^{k+1}]} = v_i^{k+1} + \lambda(v_{i+1}^{k+1} - v_i^{k+1}) \in \Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\text{für } \lambda \in [0,1], i = 0, \dots, 2^{N-(k+1)} - 1 \text{ mit}$$

$$\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1}(x_i^{k+1}) = v_i^{k+1}. \tag{2.2}$$

Bemerkung 2.2.1 Bedingung (2.2) wird Rekonstruktionsbedingung genannt, siehe hierzu auch (3.1). Sie sichert die Wohldefiniertheit des Restriktionsoperators.

Angewendet auf den Diskretisierungsoperator ergibt dies

$$\begin{split} P_{k+1}^k v^{k+1}|_{[x_i^{k+1}, x_{i+1}^{k+1}]} &= \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k+1} v^{k+1}|_{[x_i^{k+1}, x_{i+1}^{k+1}]} \\ &= (v_i^{k+1}, \frac{1}{2} (v_i^{k+1} + v_{i+1}^{k+1}), v_{i+1}^{k+1})^T \\ &= (v_{2i}^k, \frac{1}{2} (v_{2i}^k + v_{2i+2}^k), v_{2i+2}^k)^T. \end{split}$$

Mit Hilfe dieser Informationen können nun die *-Einträge in der Matrixdarstellung des Prolongationsoperators durch sinnvolle ersetzt werden. Dies ergibt für die lineare Rekonstruktion:

$$P_{k+1}^{k} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Rekonstruktionsfehler

Um den Fehler $e^k = (I_k - P_{k+1}^k D_k^{k+1}) v^k$ zu erhalten, muß man die Matrix $I_k - P_{k+1}^k D_k^{k+1} \in \mathbb{R}^{(2^N-k+1)\times(2^{N-k}+1)}$ bestimmen. Die einfache Rechnung ergibt:

$$I_k - P_{k+1}^k D_k^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung des Fehlers $e^k=(e^k_i)_{i=0,\dots,2^{N-k}}$ kann nun aus der Matrix $I_k-P^k_{k+1}D^{k+1}_k$ direkt abgelesen werden:

$$\begin{array}{rcl} e_{2i}^k & = & 0 & , i = 0, \dots, 2^{N-(k+1)} \\ e_{2i+1}^k & = & -\frac{1}{2} v_{2i}^k + v_{2i+1}^k - \frac{1}{2} v_{2i+2}^k, & i = 0, \dots, 2^{N-(k+1)} - 2. \end{array}$$

Skalenkoeffizienten

Gemäß der Lemmata 2.1.10 und 2.1.11 kann der Fehler in nur $J_k - J_{k+1} = 2^{N-(k+1)}$ Skalenkoeffizienten ausgedrückt werden, was man bei diesem Beispiel explizit an obiger Darstellung des Fehlers sieht.

Eine Basis $\{\mu_j^k\}_{j=1}^{J_k-J_{k+1}}$ des Kerns des Rekonstruktionsoperators ist (siehe die zugehörige Matrixdarstellung) durch die Einheitsvektoren

$$\mu_j^k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{2^{N-k}+1} \quad , j = 1, \dots, 2^{N-(k+1)}$$

gegeben.

Aus der Darstellung

$$e^k = \sum_{j=1}^{J_k - J_{k+1}} d_j^k \mu_j^k =: E_k d^k$$

erhält man

$$d_j^k = e_{2j-1}^k \quad , j = 1, \dots, 2^{N-(k+1)},$$
 (2.3)

und den Operator E_k , der den Rekonstruktionsfehler wieder aus den Skalenkoeffizienten berechnet:

$$E_k := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2^{N-k}+1)\times(2^{N-(k+1)})}.$$

Der Operator G_k , der die Skalenkoeffizienten berechnet, ist durch Gleichung (2.3) und $E_kG_ke^k=e^k$ eindeutig bestimmt:

$$G_k := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2^N - (k+1)) \times (2^{N-k} + 1)}.$$

2.3 Anwendung der (verallgemeinerten) Multiskalenanalyse auf die Boxfunktion

Die für diese Arbeit relevante Anwendung der Multiskalenanalyse ist die Wahl der Boxfunktion

$$\varphi(x) := \chi_{[0,1[} = \begin{cases} 1 & x \in [0,1[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Skalierungsfunktion, da damit die Zellmittel adäquat behandelt werden können. In Abschnitt 1.6.2 wurde diese Skalierungsfunktion auf die Multiskalenanalyse bei Wavelets in einer Dimension angewandt.

In Abschnitt 2.3.1 und Abschnitt 2.3.2 wird die Multiskalenanalyse bei Wavelets auf die VMSA übertragen und auf die Boxfunktion angewandt, erst auf strukturierte, dann auf unstrukturierte eindimensionale Gitter bzw. Intervalle. So werden gleichzeitig die nötigen Werkzeuge für die Berechnung der Differentiationsmatrix mit Hilfe der VMSA in Abschnitt 4.3 bereitgestellt. Es wird die Notation der Multiskalenanalye der Wavelets benutzt (siehe Abschnitt 1.6). Zusammenhänge mit der Notation der VMSA aus Abschnitt 2.1 werden im folgenden angegeben. Die Folge der Gitter sei stets dyadisch aufgebaut.

2.3.1 VMSA strukturiert mit der Boxfunktion

Gegeben sei eine Folge von Intervallen I^k mit Teilintervallänge h_k . Die Anzahl der Teilintervalle auf dem Gitter I^k betrage N_k .

Da es sich hier um eine dyadische Gittervergröberung handelt, bestehen jeweils zwei feine Zellen auf dem Level k aus einer auf dem Level k + 1:

$$|I_i^{k+1}| = |I_{2i}^k| + |I_{2i+1}^k|$$
, also $h_{k+1} = 2h_k$.

Die Räume V^k werden von den Funktionen

$$\varphi_i^k = \frac{1}{h_k} \varphi\left(\frac{x - ih_k}{h_k}\right) = \frac{1}{h_k} \varphi\left(\frac{x}{h_k} - i\right) = \begin{cases} \frac{1}{h_k} &, x \in I_i^k \\ 0 &, \text{ sonst} \end{cases}$$

 $i=0,\ldots,N_k-1$, aufgespannt.

Satz 2.3.1 Die Projektion einer Funktion f auf V^k ist gegeben durch

$$P_{V^k}(f) = h_k \sum_{j=0}^{N_k - 1} \langle f, \varphi_j^k \rangle \varphi_j^k = h_k \sum_{j=0}^{N_k - 1} s_j^k \varphi_j^k$$

Die s_i^k werden hierbei analog zum Waveletfall durch

$$s_i^k = \langle f, \varphi_i^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi_i^k(x) dx$$
$$= \frac{1}{h_k} \int_{I_i^k} f(x) dx$$

definiert. Dabei entsprechen die s_i^k den Elementen des Vektors v^k aus Abschnitt 2.1 bzw. den Zellmitteln \overline{u}_i^k aus Abschnitt 3.1, in dem die VMSA auf Boxgitter übertragen wurde. Der Projektionsoperator P_{V^k} entspricht dem Diskretisierungsoperator \mathcal{D}_k mit dem Unterschied, daß die Projektion mit Hilfe der Basisfunktionen als Funktion auf dem gesamten Intervall gegeben ist, die Diskretisierung in Abschnitt 2.1 als Vektor der diskreten Werte, im Falle der Boxgitter aus Abschnitt 3.1 als Vektor der Zellmittel \overline{u}_i^k .

BEWEIS Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_i^k(x) \varphi_j^k(x) dx = \frac{1}{h_k^2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{h_k} - i\right) \varphi\left(\frac{x}{h_k} - j\right) dx$$

$$\stackrel{y:=x/h_k}{=} \frac{1}{h_k} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y - i) \varphi(y - j) dy$$

$$= \frac{1}{h_k} \delta_{ij},$$

Jede Funktion f kann, projiziert auf V^k , als Linearkombination der φ_i^k ausgedrückt werden. Setze nun $f(x) := \varphi_i^k(x), i = 0, \dots, N_k - 1$. Dann gilt

$$P_{V^k}(\varphi_i^k) = \varphi_i^k = h_k \sum_j \frac{1}{h_k} \delta_{ij} \cdot \varphi_j^k$$

$$= h_k \sum_j \int_{\mathbb{R}} \varphi_i^k(x) \varphi_j^k(x) \, dx \cdot \varphi_j^k$$

$$= h_k \sum_j \langle \varphi_i^k, \varphi_j^k \rangle \varphi_j^k$$

Für die φ_i^k kann eine zu den Wavelets analoge Skalierungsgleichung abgeleitet werden, die Inhalt ist von

Definition und Lemma 2.3.2 Die verallgemeinerte Skalierungsgleichung lautet

$$\varphi(x) = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \varphi(2x - j)$$

mit $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ als einzigen α_i 's ungleich null.

Diese Skalierungsgleichung wird bereits als verallgemeinert bezeichnet, da sie als Spezialfall der verallgemeinerten Skalierungsgleichung (2.3.3) aus Abschnitt 2.3.2 aufgefaßt wird. Im Vergleich zur Skalierungsgleichung 1.6.2 der

Theorie der Wavelets besteht in diesem Fall die Verallgemeinerung nur darin, daß die Intervalle auf dem (äquidistanten) Intervall I^0 beliebige Länge haben können.

Beweis Es gilt

$$\varphi_{|I_i^{k+1}|} = \varphi_{|I_{2i}^k|} + \varphi_{|I_{2i+1}^k|} = \sum_{j=1}^2 \varphi_{|I_{2i+j}^k|}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\varphi_i^{k+1} = \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2} \varphi_{2i+j}^k \quad , \text{ da } h_{k+1} = 2h_k$$

$$\iff \varphi_i^{k+1} = \sum_j \alpha_j \varphi_{2i+j}^k \quad \text{mit } \alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & , j = 1, 2\\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dies bedeutet ausgeschrieben

$$\frac{1}{h_{k+1}}\varphi\left(\frac{x}{h_{k+1}} - i\right) = \sum_{i} \alpha_{j} \frac{1}{h_{k}}\varphi\left(\frac{x}{h_{k}} - (2i + j)\right)$$

Mit $h_{k+1} = 2h_k$ und Substitution von $y := \frac{x}{h_{k+1}}$ erhält man

$$\varphi(y-i) = 2\sum_{j} \alpha_{j}\varphi(2y-2i-j)$$

und mit z := y - i schließlich die gewünschte Gleichung.

Einerseits gilt $s_i^k = \langle f, \varphi_i^{k+1} \rangle$, andererseits

$$s_i^k = \sum_i \alpha_i \, s_{2i+j}^k = \sum_i \alpha_j < f, \varphi_{2i+j}^k > = < f, \sum_i \alpha_i \, \varphi_{2i+j}^k > = < f,$$

Daß diese Skalierungsgleichung für $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_i = 0, i \neq 0, 1$ erfüllt ist, rechnet man leicht nach. Man erhält damit die Gleichung

$$s_i^{k+1} = \frac{s_{2i}^k + s_{2i+1}^k}{2}.$$

Dies entspricht abstrakt dem Restriktionsoperator 2.1.3. Angewandt auf Boxgitter ergibt sich der Restriktionsoperator aus Lemma 3.1.1, der eine Verallgemeinerung der hier gegebenen Gleichung darstellt.

Für die Fehler berechnet man

$$\begin{split} P_{W^{k+1}}(f) &= P_{V^k}(f) - P_{V^{k+1}}(f) \\ &= \sum_i h_k \, s_i^k \varphi_i^k - \sum_i h_{k+1} s_i^{k+1} \varphi_i^{k+1} \\ &= \sum_i h_k \, s_i^k \varphi_i^k - \sum_i \frac{h_{k+1}}{4} (s_{2i}^k + s_{2i+1}^k) (\varphi_{2i}^k + \varphi_{2i+1}^k) \\ &= \sum_i h_k \, s_i^k \varphi_i^k + \sum_i \frac{h_{k+1}}{4} (s_{2i}^k - s_{2i+1}^k) (\varphi_{2i}^k - \varphi_{2i+1}^k) \\ &- \sum_i \frac{h_{k+1}}{2} (s_{2i}^k \varphi_{2i}^k + s_{2i+1}^k \varphi_{2i+1}^k) \\ &= \sum_i h_{k+1} \frac{(s_{2i}^k - s_{2i+1}^k)}{2} \frac{(\varphi_{2i}^k - \varphi_{2i+1}^k)}{2} \\ &= h_{k+1} \sum_i d_i^{k+1} \, \psi_i^{k+1} \end{split}$$

mit dem verallgemeinerten Wavelet

$$\psi_i^{k+1} := \frac{1}{2} (\varphi_{2i}^k - \varphi_{2i+1}^k)$$

und den Skalenkoeffizienten

$$d_i^{k+1} := \frac{1}{2} (s_{2i}^k - s_{2i+1}^k).$$

Aus den Skalierungsgleichungen für die Skalierungsfunktion φ und der für das zugehörige Wavelet ψ erhält man

$$\psi_i^{k+1} = \sum_j g_j \varphi_{2i+j}^k.$$

und daraus mit obiger Definition des verallgemeinerten Wavelets die Koeffizienten $g_0 = \frac{1}{2}$ und $g_1 = -\frac{1}{2}$. Man erhält also für ψ wieder das Haar-Wavelet:

$$\psi(x) = 2\sum_{i \in \mathbb{Z}} g_i \varphi(2x - i)$$
$$= \varphi(2x) - \varphi(2x - 1).$$

Der Unterschied zwischen den hier angegebenen Skalenkoeffizienten d_i^k und denen der VMSA besteht in der Notation. Die Koeffizienten d^k beziehen in der Theorie der Wavelets sich auf das gröbere Gitter, bei der VMSA jedoch auf das feinere, siehe hierzu Bemerkung 2.1.14.

2.3.2 VMSA unstrukturiert mit der Boxfunktion

Gegeben sei eine Folge von unstrukturierten Intervallen I^k mit dem feinsten Intervall I^0 . Das Intervall I^k bestehe aus den N_k Zellen I_i^k , auf denen die Funktionen

$$\varphi_i^k(x) = \frac{1}{|I_i^k|} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{|I_i^k|} &, x \in I_i^k \\ 0 &, \text{sonst} \end{cases}$$

leben, die den Raum V^k aufspannen.

Ein Teilintervall I_i^{k+1} auf Level k+1 besteht wie in Abschnitt 2.3.1 aus zwei Teilintervallen vom Level k:

$$|I_i^{k+1}| = |I_{2i}^k| + |I_{2i+1}^k|.$$

Satz 2.3.3 Die verallgemeinerte Skalierungsgleichung lautet

$$\varphi(z) = \sum_{j} \alpha_{j} \frac{|I_{i}^{k+1}|}{|I_{2i+j}^{k}|} \varphi\left(\frac{|I_{i}^{k+1}|}{|I_{2i+j}^{k}|} z - \frac{\sum_{m=0}^{2i+j-1} |I_{m}^{k}| - \sum_{m=0}^{i-1} |I_{m}^{k+1}|}{|I_{2i+j}^{k}|}\right).$$

BEWEIS Es gilt

$$\varphi_{|I_i^{k+1}|} = \varphi_{|I_{2i}^k|} + \varphi_{|I_{2i+1}^k|} = \sum_{j=1}^2 \varphi_{|I_{2i+j}^k|}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\varphi_{i}^{k+1} = \sum_{j=1}^{2} \frac{|I_{2i+j}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi_{2i+j}^{k}$$

$$\iff \varphi_{i}^{k+1} = \sum_{j} \alpha_{j} \varphi_{2i+j}^{k} \quad \text{mit } \alpha_{j} = \begin{cases} \frac{|I_{2i+j}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|}, j = 1, 2\\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iff \frac{1}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_{m}^{k+1}|}{|I_{i}^{k+1}|}\right) = \sum_{j} \alpha_{j} \frac{1}{|I_{2i+j}^{k}|} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{2i+j-1} |I_{m}^{k}|}{|I_{2i+j}^{k}|}\right)$$

$$\begin{split} \text{Setze } y &:= \frac{x}{|I_i^{k+1}|} \\ \iff \frac{1}{|I_i^{k+1}|} \varphi \left(y - \frac{\sum_{m=0}^{i-1} |I_m^{k+1}|}{|I_i^{k+1}|} \right) = \sum_j \alpha_j \frac{1}{|I_{2i+j}^k|} \varphi \left(\frac{|I_i^{k+1}|}{|I_{2i+j}^k|} y - \frac{\sum_{m=0}^{2i+j-1} |I_m^k|}{|I_{2i+j}^k|} \right) \\ \text{Setze } z &:= y - \frac{\sum_{m=0}^{i-1} |I_m^{k+1}|}{|I_i^{k+1}|} \\ \iff \frac{1}{|I_i^{k+1}|} \varphi(z) &= \sum_i \alpha_j \frac{1}{|I_{2i+j}^k|} \varphi \left(\frac{|I_i^{k+1}|}{|I_{2i+j}^k|} z - \frac{\sum_{m=0}^{2i+j-1} |I_m^k| - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^{k+1}|}{|I_{2i+j}^k|} \right), \end{split}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Mit

$$\langle \varphi_i^k, \varphi_j^k \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_i^k \varphi_j^k dx$$

$$= \frac{1}{|I_i^k||I_j^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|}\right) \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{j-1} |I_m^k|}{|I_j^k|}\right) dx$$

$$= \frac{1}{|I_i^k|} \delta_{ij}$$

gilt für die Projektion einer Funktion f auf ein Level k

$$P_{V^k} f(x) = \sum_{i=0}^{N_k-1} |I_i^k| s_i^k \varphi_i^k(x)$$
, wobei $s_i^k = \langle f, \varphi_i^k \rangle$.

Für s_i^{k+1} leitet man aus der verallgemeinerten Skalierungsgleichung ab, daß

$$\begin{split} s_i^{k+1} &=& \sum_{j=0}^1 \alpha_j s_{2i+j}^k & \text{mit } \alpha_j := \frac{|I_{2i+j}^k|}{|I_i^{k+1}|} \\ &=& \frac{|I_{2i}^k| s_{2i}^k + |I_{2i+1}^k| s_{2i+1}^k}{|I_i^{k+1}|}, \end{split}$$

so daß diese rekursiv berechnet werden können.

Dies entspricht dem Restriktionsoperator für Zellmittel aus der verallgemeinerten Multiskalenanalyse, der in Lemma 3.1.1 in allgemeinerer Form (eine grobe Zelle besteht aus q feinen Zellen) eingeführt wird.

Definition 2.3.4 Die skalierten Versionen des verallgemeinerten Wavelets ψ_i^k der verallgemeinerten Multiskalenanalyse sind gegeben durch

$$\psi_{i}^{k+1} := \sum_{l} g_{l} \varphi_{2i+l}^{k} \quad mit \quad g_{l} = (-1)^{l} \frac{|I_{2i+l}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|}, l = 0, 1$$

$$= \frac{|I_{2i}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi_{2i}^{k} - \frac{|I_{2i+1}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi_{2i+1}^{k}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|I_{i}^{k+1}|} &, x \in I_{2i}^{k} \\ -\frac{1}{|I_{i}^{k+1}|} &, x \in I_{2i+1}^{k} \\ 0 &, sonst. \end{cases}$$

Die Skalenkoeffizienten berechnet man dann mittels

$$d_i^{k+1} = \langle f, \psi_i^{k+1} \rangle = \frac{1}{|I_i^{k+1}|} \left(\int_{I_{2i}^k} f(x) \, dx - \int_{I_{2i+1}^k} f(x) \, dx \right).$$

Kapitel 3

Anwendung der Multiskalenanalyse als Datenkompression

In diesem Kapitel wird eine erste Anwendung der verallgemeinerten Multiskalenanalyse dargestellt. Mit Hilfe der Multiskalenanalyse werden die Ergebnisse numerischer Simulationen strömungsmechanischer Probleme, wie in Kapitel 1 beschrieben, komprimiert, um so Speicherplatz sparen zu können. In Abschnitt 3.1 werden die dafür benötigten Werkzeuge, die Gitter und die Operatoren, definiert und analysiert. Abschnitt 3.2 erläutert ausführlich die numerischen Tests und diskutiert deren Ergebnisse.

3.1 Operatoren in 2D

Gegeben sei ein zweidimensionales, polygonal berandetes Gebiet Ω . Auf diesem Gebiet sei eine zulässige Triangulierung gemäß Definition 1.4.1 gegeben. Die duale Triangulierung Ω^0 werde aus der primären wie in Abschnitt 1.4 beschrieben konstruiert und ist ebenfalls konform. Die gröberen Gitter werden mit Hilfe des folgenden Agglomerationsalgorithmus generiert, der eine Modifikation des Algorithmus von Lallemand [LSD92] darstellt (siehe auch [SPS95]). Nach Konstruktion sind auch alle gröberen Gitter konform.

Agglomeration

Sei Ω^k das Gitter auf dem k-ten Level mit den polygonal berandeten Zellen $\Omega^k_i \subset \Omega^k$. Um das Gitter Ω^{k+1} zu erhalten, führe folgende Schritte durch:

• Solange es möglich ist, Zellen zu agglomerieren:

- Wähle eine Zelle Ω_i^k :
 - * Falls es die erste zu wählende Zelle ist, wähle eine beliebige Zelle vom Rand.
 - * Ansonsten betrachte alle noch nicht agglomerierten Zellen, die Nachbarn von bereits agglomerierten sind. Falls Zellen am Rand existieren, wähle eine beliebige Randzelle, ansonsten eine beliebige andere der betrachteten Zellen.
- Sammle alle zu Ω_i^k benachbarten Zellen, die noch nicht agglomeriert wurden.
- Betrachte alle Kombinationen von Agglomerationen der Zelle Ω_i^k mit einer, zwei bzw. drei zu Ω_i^k benachbarten Zellen. Das bedeutet, daß Agglomerationen von zwei, drei und vier feinen Zellen zu einer groben zugelassen sind. Für jede dieser Kombinationen berechne ein Qualitätsmaß für die resultierende grobe Zelle Ω_j^{k+1} und wähle diejenige mit dem größten Maß. Das Maß ¹ ist gegeben durch

$$Q := \frac{|\Omega_j^{k+1}|}{(U(\Omega_j^{k+1}))^2}.$$

Hierbei bezeichne U den Umfang einer Zelle.

- Falls eine Zelle Ω_i^k nicht agglomeriert wurde (also zwischen agglomerierten Zellen isoliert liegt):
 - Sammle alle (groben) zu Ω_i^k benachbarten Zellen.
 - Betrachte alle möglichen Kombinationen von Agglomerationen mit Ω_i^k und einer groben Zelle.
 - Berechne das oben definierte Qualitätsmaß für alle diese Kombinationen.
 - Wähle die Kombination mit dem größten Qualitätsmaß und agglomeriere beide Zellen.

Durch diese Art der Agglomeration wird verhindert, daß die gröberen Gitter aus meist langgestreckten Zellen bestehen, wie es bei vielen Algorithmen der Fall ist.

Bezeichne die Folge der Gitter mit $\{\Omega^k\}_{k=0}^L$. Ω^0 sei das feinste, Ω^L das gröbste betrachtete Gitter. Das Gitter Ω^k enthalte J_k Zellen.

¹Das maximale Qualitätsmaß Q wird bei einem Kreis angenommen.

Um unübersichtliche Indizes einzusparen, wird im folgenden die Agglomeration von q feinen Zellen $\{\Omega_i^k\}_{i=1}^q$ in eine grobe Zelle Ω_i^{k+1} betrachtet:

$$|\Omega_j^{k+1}| = \sum_{i=1}^q |\Omega_i^k|$$

Es wird also der V^k mit dem \mathbb{R}^q und der V^{k+1} mit dem \mathbb{R} identifiziert (statt mit $\mathbb{R}^{N_k \cdot q}$ bzw. \mathbb{R}^{N_k} , wie es eigentlich für die VMSA des ganzen Gitters korrekt wäre).

Diskretisierung

Die Definition des Zellmittels wurde schon in Definition 1.5.1 gegeben. Für eine Zelle Ω_i^k auf einem Gitter Ω^k war sie gegeben durch

$$u \longmapsto <\lambda(\Omega_i^k), u>:= \frac{1}{|\Omega_i^k|} \int_{\Omega_i^k} u(x) dx =: \overline{u}_i^k \in \mathbb{R}.$$

Die Diskretisierung kann nun mit Hilfe der Zellmittel definiert werden:

$$\mathcal{D}_k u := (\overline{u}_1^k, \dots, \overline{u}_q^k)^T =: v^k \in \mathbb{R}^q =: V^k.$$

Restriktion

Durch die Wahl der Diskretisierung ist die Wahl des Restriktionsoperators eindeutig bestimmt durch

Lemma 3.1.1 Der Restriktionsoperator D_k^{k+1} ist gegeben durch

$$D_k^{k+1}v^k := \frac{1}{|\Omega_j^{k+1}|} \sum_{i=1}^q |\Omega_i^k| \overline{u}_i^k = \overline{u}_j^{k+1} =: v^{k+1} \in \mathbb{R} =: V^{k+1}$$

und daher darstellbar als

$$D_k^{k+1} = \frac{1}{|\Omega_i^{k+1}|} (|\Omega_1^k|, \dots, |\Omega_q^k|).$$

BEWEIS

$$\overline{u}_{j}^{k+1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{|\Omega_{j}^{k+1}|} \int_{\Omega_{j}^{k+1}} u(x) \, dx = \frac{1}{|\Omega_{j}^{k+1}|} \sum_{i=1}^{q} \int_{\Omega_{i}^{k}} u(x) \, dx \\
= \frac{1}{|\Omega_{j}^{k+1}|} \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| \frac{1}{|\Omega_{i}^{k}|} \int_{\Omega_{i}^{k}} u(x) \, dx = \frac{1}{|\Omega_{j}^{k+1}|} \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| \overline{u}_{i}^{k} \qquad \square$$

Bemerkung 3.1.2 Der Restriktionsoperator ist in diesem Fall ein Element des $\mathbb{R}^{J_{k+1} \times J_k} = \mathbb{R}^{1 \times q}$.

Prolongation

Nach Lemma 2.1.8 muß die Prolongation P_{k+1}^k rechtsinvers zur Restriktion sein. Dies bedeutet, daß die Prolongation von der Form

$$P_{k+1}^k := \left(\begin{array}{c} p_1^k \\ \vdots \\ p_q^k \end{array}\right)$$

sein und

$$D_k^{k+1} P_{k+1}^k = 1$$

gelten muß.

Lemma 3.1.3 Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß P_{k+1}^k einen zulässigen Prolongationsoperator definiert, ist

$$\sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| p_{i}^{k} = |\Omega_{j}^{k+1}|.$$

BEWEIS

$$D_k^{k+1} P_{k+1}^k = \frac{1}{|\Omega_j^{k+1}|} \sum_{i=1}^q |\Omega_i^k| p_i^k = \frac{1}{|\Omega_j^{k+1}|} |\Omega_j^{k+1}| = 1.$$

Die weitere Definition des Prolongatrionsoperators hängt von der Wahl der Rekonstruktion ab, da $P_{k+1}^k := \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k+1}$.

Triviale Rekonstruktion

Definition 3.1.4 Der triviale Rekonstruktionsoperator \mathcal{R}_k ist definiert durch

$$\mathcal{R}_k \overline{u}_i^k|_{\Omega_i^k} := \overline{u}_i^k.$$

Daher gilt für den zugehörigen Prolongationsoperator

$$P_{k+1}^{k}\overline{u}_{j}^{k+1} = \mathcal{D}_{k}\mathcal{R}_{k+1}\overline{u}_{j}^{k+1} = \mathcal{D}_{k}\overline{u}_{j}^{k+1} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{j}^{k+1} \\ \vdots \\ \overline{u}_{j}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \overline{u}_{j}^{k+1}$$

$$\Longrightarrow P_{k+1}^k = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in V^k = \mathbb{R}^q.$$

Damit gilt

$$\sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| p_{i}^{k} = \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| = |\Omega_{j}^{k+1}|,$$

d.h., die Bedingung aus Lemma 3.1.3 ist erfüllt.

Polynomiale Rekonstruktion höherer Ordnung

Gesucht ist diesmal ein Polynom π_j^{k+1} vom Grad n auf der Zelle Ω_j^{k+1} des Gitters Ω^{k+1} als Rekonstruktion von \overline{u}_j^{k+1} ,

$$\mathcal{R}_{k+1}v^{k+1} = \pi_j^{k+1},$$

welches die sogenannte Rekonstruktionsbedingung (siehe auch Gleichung (2.2))

$$<\lambda(\Omega_j^{k+1}), \pi_j^{k+1}> = \frac{1}{|\Omega_j^{k+1}|} \int_{\Omega_j^{k+1}} \pi_j^{k+1}(x) dx \stackrel{!}{=} \overline{u}_j^{k+1}$$
 (3.1)

erfüllt.

Es gilt:

$$P_{k+1}^{k}\overline{u}_{j}^{k+1} = \begin{pmatrix} p_{1}^{k} \\ \vdots \\ p_{q}^{k} \end{pmatrix} \overline{u}_{j}^{k+1} = \mathcal{D}_{k}\mathcal{R}_{k+1}\overline{u}_{j}^{k+1} = \begin{pmatrix} \langle \lambda(\Omega_{1}^{k}), \pi_{j}^{k+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \lambda(\Omega_{q}^{k}), \pi_{j}^{k+1} \rangle \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{split} \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| p_{i}^{k} \overline{u}_{j}^{k+1} &= \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| < \lambda(\Omega_{i}^{k}), \pi_{j}^{k+1} > \\ &= \sum_{i=1}^{q} |\Omega_{i}^{k}| \frac{1}{|\Omega_{i}^{k}|} \int_{\Omega_{i}^{k}} \pi_{j}^{k+1}(x) \ dx \\ &= \sum_{i=1}^{q} \int_{\Omega_{i}^{k}} \pi_{j}^{k+1}(x) \ dx \\ &= |\Omega_{j}^{k+1}| \frac{1}{|\Omega_{j}^{k+1}|} \int_{\Omega_{j}^{k+1}} \pi_{j}^{k+1}(x) \ dx \\ &= |\Omega_{j}^{k+1}| < \lambda(\Omega_{j}^{k+1}), \pi_{j}^{k+1} > \\ &= |\Omega_{i}^{k+1}| \overline{u}_{i}^{k+1} \end{split}$$

$$\implies \sum_{i=1}^{q} |\Omega_i^k| p_i^k = |\Omega_j^{k+1}|.$$

Lemma 3.1.3 ist wiederum erfüllt, d.h., die Prolongation ist wohldefiniert (und damit auch die Rekonstruktion).

Die allgemeine Form eines Polynoms π_j^{k+1} auf der groben Zelle Ω_j^{k+1} ist definiert durch

$$\pi_j^{k+1}(x) := \sum_{|\alpha| \le n} a_{\alpha} (x - b_j^{k+1})^{\alpha}.$$

Hierbei sei $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ ein Multiindex mit $|\alpha|=\sum_{i=1}^2\alpha_i, x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, b_j^{k+1} der Zellmittelpunkt der Zelle Ω_j^{k+1} und a_α die noch zu bestimmenden Koeffizienten des Rekonstruktionspolynoms. Es soll, soweit möglich, immer quadratisch rekonstruiert werden.

Sei nun ν_j die Anzahl der Nachbarn der Zelle Ω_j^{k+1} und die deren Nachbarn. Dann werden die a_{α} aus den $\nu_j + 1$ Interpolationsbedingungen

$$<\lambda(\Omega_{j}^{k+1}), \pi_{j}^{k+1}> = \overline{u}_{j}^{k+1} < \lambda(\Omega_{i}^{k+1}), \pi_{j}^{k+1}> = \overline{u}_{i}^{k+1} , i = 1, \dots, \nu_{j}$$
 (3.2)

berechnet. Jedoch resultiert dies meist in ein überbestimmtes Gleichungssystem. Dieses kann zum Beispiel mit der Least-Squares-Ausgleichsmethode gelöst werden, jedoch gilt dann im allgemeinen

$$\frac{1}{|\Omega_i^{k+1}|} \int_{\Omega_i^{k+1}} \pi_j^{k+1}(x) \ dx \neq \overline{u}_i^{k+1}.$$

Dies muß jedoch (siehe Rekonstruktionsbedingung (3.1)) zumindest für die Zelle Ω_i^{k+1} , für die rekonstruiert wird, gelten. Um diese Bedingung zu erfüllen, wird das System modifiziert, und es wird stattdessen das System

$$<\lambda(\Omega_{j}^{k+1}), \tilde{\pi}_{j}^{k+1}> = 0$$
 (3.3)
 $<\lambda(\Omega_{i}^{k+1}), \tilde{\pi}_{j}^{k+1}> = \overline{u}_{i}^{k+1} - \overline{u}_{j}^{k+1}$, $i = 1, \dots, \nu_{j}$ (3.4)

$$<\lambda(\Omega_i^{k+1}), \tilde{\pi}_j^{k+1}> = \overline{u}_i^{k+1} - \overline{u}_j^{k+1} , i = 1, \dots, \nu_j$$
 (3.4)

für das Polynom

$$\tilde{\pi}_{j}^{k+1}(x) = \sum_{|\alpha|=1} \tilde{a}_{\alpha}(x - b_{j}^{k+1})^{\alpha} + \sum_{|\alpha|=2} \tilde{a}_{\alpha}((x - b_{j}^{k+1})^{\alpha} - c_{\alpha}^{k+1})$$

mit

$$c_{\alpha}^{k+1} := \frac{1}{|\Omega_j^{k+1}|} \int_{\Omega_j^{k+1}} (x - b_j^{k+1})^{\alpha} dx$$

gelöst.

Da Gleichung (3.3) nach Konstruktion von $\tilde{\pi}_j^{k+1}$ automatisch erfüllt ist, entfällt eine Zeile im System, ebenso der konstante Parameter, da $\tilde{a}_{(0,0)}$ in $\tilde{\pi}_i^{k+1}$ nicht vorkommt.

Die gesuchten Koeffizienten a_{α} können nun leicht aus den \tilde{a}_{α} durch

$$a_{(0,0)} := \overline{u}_j^{k+1} - \sum_{|\alpha|=2} \tilde{a}_{\alpha} c_{\alpha}, \qquad a_{\alpha} := \tilde{a}_{\alpha}, \quad \text{if } |\alpha| \ge 1$$

berechnet werden.

An den Stellen, an denen ν_j kleiner als 5 ist, kann nicht quadratisch rekonstruiert werden. Dies kann zum Beispiel am Rand des Gebietes, speziell an den Ecken, passieren.

In diesem Fall wird linear rekonstruiert mit

$$\tilde{\pi}_{j}^{k+1} = \tilde{a}_{(1,0)}(x - b_{j}^{k+1})^{(1,0)} + \tilde{a}_{(0,1)}(x - b_{j}^{k+1})^{(0,1)}$$

und der Umrechnung

$$\begin{array}{rcl} a_{(0,0)} & := & \overline{u}_j^{k+1}, \\ & a_{\alpha} & := & \tilde{a}_{\alpha}, & \text{ falls } |\alpha| = 1. \end{array}$$

Mit dem gleichen Ansatz kann man auch Rekonstruktionen höherer Ordnung berechnen. Jedoch steigt der Rechenaufwand mit zunehmender Ordnung schnell an.

Skalenkoeffizienten

Um die Skalenkoeffizienten zu berechnen, wird eine Basis des Kerns des Restriktionsoperators D_k^{k+1} benötigt, da nach Definition 2.1.12

$$e^{k} = \sum_{j=1}^{J_{k} - J_{k+1}} d_{j}^{k} \mu_{j}^{k} =: E_{k} d^{k}$$
(3.5)

gilt.

Bekannt ist die Dimension von ker D_k^{k+1} :

$$\dim \ker D_k^{k+1} = J_k - J_{k+1} = q - 1.$$

Um die Basisvektoren bestimmen zu können, ist der Begriff der Basismatrix hilfreich, erstmals beschrieben in [SPS95], hier eingeführt in

Definition 3.1.5 Sei $\{\mu_j^k\}_{j=1}^{q-1}$ eine Basis von $\ker D_k^{k+1}$ und

$$\Omega_{1..q}^k := \left(egin{array}{c} |\Omega_1^k| \ dots \ |\Omega_q^k| \end{array}
ight)$$

derjenige Vektor, der die Flächeninhalte der q Zellen enthält, die zu einer groben Zelle agglomeriert werden. Die Matrix $M_j^k \in \mathbb{R}^{J_k \times J_k} = \mathbb{R}^{q \times q}$ heißt j-te Basismatrix, falls

$$\mu_j^k = M_j^k \Omega_{1...q}^k \qquad , j = 1, \dots, q - 1$$
 (3.6)

gilt.

Sämtliche Basismatrizen können aus einer anti-symmetrischen Matrix generiert werden:

Definition und Lemma 3.1.6 Die anti-symmetrische Matrix

$$M_1^k := \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{array} \right)$$

die generierende Basismatrix, ist eine Basismatrix.

Lemma 3.1.7 Die q-1 Basismatrizen bestehen aus der generierenden Basismatrix $M_1^k = \{(m_{ij}^k)\}_{i,j=1}^q$ und den q-2 Matrizen M_j^k , die aus M_1^k durch das Setzen von

$$m_{1i}^k := -1$$
 und $m_{i1}^k := 1$

entstehen:

Mit Hilfe der Basismatrizen M_j^k können mit Gleichung (3.6) leicht die Basisvektoren μ_j^k des Kerns und damit die Skalenkoeffizienten (Gleichung (3.5)) berechnet werden.

3.2 Numerische Resultate

Es wurden drei Rechnungen auf zwei verschiedenen Gebieten durchgeführt. Das Einheitsquadrat diente als Grundlage für die ersten beiden Tests, die mit selbstgewählten Funktionen die Arbeitsweise der verallgemeinerten Multiskalenanalyse veranschaulichen. Für den dritten Test wurde eine Rechnung des Falls "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" (siehe [Fri98]) auf einem rechteckigen Gebiet betrachtet.

Die Dreieckstriangulierungen wurden stets mit dem Algorithmus von Friedrich ([Fri93]) generiert, das Boxgitter und die Folge von gröber werdenden Gittern nach den Algorithmen aus Abschnitt 1.4 bzw. 3.1.

Für die numerischen Resultate wurden die diskreten Daten vom feinsten Gitter auf das gröbste restringiert. Dabei wurden beim Übergang zum jeweils nächstgröberen Gitter diejenigen Rekonstruktionsfehler gespeichert, die nicht unter eine bestimmte Toleranzgrenze ε (siehe unten) fallen. Dies bedeutet, daß nur Speicher für die Daten auf gröbsten Gitter sowie für die verbleibenden Fehler bereitgestellt werden muß.

Es wurde der Speicheraufwand für die Daten mit und ohne Multiskalenanalyse verglichen. Um die Genauigkeit der Rekonstruktion abschätzen zu können, wurden die Daten des feinsten Gitters aus den Daten des gröbsten unter Hinzunahme der gespeicherten Fehler rekonstruiert und mit den ursprünglichen Daten verglichen.

Bemerkung 3.2.1 Für die Rechnungen wurde auf die Umrechnung von Rekonstruktionsfehlern zu Skalenkoeffizienten (vergleiche Abschnitt 2.1) verzichtet. Es wurden demnach "nur" die Rekonstruktionsfehler für jede Zelle betrachtet, da die Berechnung der Skalenkoeffizienten im Falle der Datenkompression aus zwei Gründen nur von theoretischem Interesse ist:

i. Um die Skalenkoeffizienten zu berechnen, muß für jede Zelle ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Matrixeinträge bestehen aus Summen von Zellmitteln des feineren Gitters. Dies führt zu einer $1/h^2$ -Skalierung, die bei unstrukturierten Gittern nur schwer berücksichtigt werden kann. Dies hat zur Folge, daß man Skalenkoeffizienten erhält, die eine andere Größenordnung haben als die Rekonstruktionsfehler. Daher wiederum können die Rekonstruktionsfehler durch das

Abschneidekriterium nicht genügend kontrolliert werden.

ii. Durch die Berechnung der Skalenkoeffizienten wird nicht notwendigerweise Speicher gespart: Man betrachte als Beispiel eine grobe Zelle, die aus vier feinen Zellen besteht. Die Berechnung der Skalenkoeffizienten führt auf eine Darstellung der Fehler mit drei Skalenkoeffizienten. Es ist jedoch möglich, daß im ganzen nur ein oder zwei Rekonstruktionsfehler gespeichert werden mußten. In diesem Fall kostet die Darstellung mit Skalenkoeffizienten mehr Speicher.

Mit Hilfe der Multiskalenanalyse werden demnach nur die Daten des gröbsten Gitters sowie die Rekonstruktionsfehler, die oberhalb der Toleranzgrenze ε liegen, gespeichert. Die Anzahl der so gespeicherten Daten wurde mit der Anzahl der Daten auf dem gröbsten Gitter einschließlich aller Rekonstruktionsfehler verglichen (1. Kompressionsrate) bzw. mit der Anzahl der Daten auf dem feinsten Gitter (2. Kompressionsrate).

Die Anzahl der Daten des gröbsten Gitters und der Rekonstruktionsfehler werde mit #MSA bezeichnet, die des gröbsten Gitters und aller Rekonstruktionsfehler mit #ALLE und die des feinen Gitters mit #FEIN.

Damit ergeben sich die beiden Kompressionsraten:

1. Kompressionsrate:

100%: Speichern aller Fehler und der gröbsten Daten.

$$\frac{100 \cdot (\#ALLE - \#MSA)}{\#ALLE}$$

2. Kompressionsrate:

100%: Speichern des feinsten Gitters.

$$\frac{100 \cdot (\#\text{ALLE} - \#\text{MSA})}{\#\text{FEIN}}$$

Die Kompressionsraten geben also den Prozentsatz an, der mit der MSA im Vergleich den den beiden oben beschriebenen Größen gespart wird.

Zusätzlich wurden für alle Tests die L_1 - und L_{∞} -Fehler berechnet (siehe Tabellen 3.1-3.4). Es wurde jeweils eine Folge von fünf und neun Gittern benutzt.

Die Toleranz ε wurde gitterabhängig gewählt, jedoch haben alle Tests ergeben, daß eine feste Toleranz zu sehr ähnlichen Ergebnissen führt und somit die Berechnung einer gitterabhängigen Toleranz in Frage stellt.

Seien nun L+1 Gitter gegeben, wobei L das feinste und 0 das gröbste Gitter indiziere.

Die gitterabhängigen ε_k werden mit folgendem Algorithmus berechnet:

$$\varepsilon_L := \varepsilon$$

$$\forall k = L - 1, \dots, 1 :$$

$$\varepsilon_k := \alpha_k \varepsilon_{k+1}$$

mit

$$\alpha_k := \max_{\Omega_j^{k+1}} \sqrt{\frac{|\Omega_i^k|}{|\Omega_j^{k+1}|}} \quad \text{mit} \quad \Omega_j^{k+1} = \bigcup_{i=1}^q \Omega_i^k.$$

Hierbei ist α_k das maximale Verhältnis zwischen grober Zelle auf dem Level k+1 und zugehöriger feiner auf dem Level k.

3.2.1 Selbstdefinierte Testfunktionen

Die verallgemeinerte Multiskalenanalyse wurde zuerst mit zwei Testfunktionen durchgeführt, um die Datenkompression des Algorithmus' zu verdeutlichen. Sie sind wie folgt definiert:

1.
$$f_1(x) = \sin(12(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}))$$

2.
$$f_2(x) = \begin{cases} \sin(x)\cos(y), & x > \frac{1}{2} \\ \sin(y)\cos(x), & \text{sonst} \end{cases}$$

Das feinste Gitter auf dem Einheitsquadrat enthielt 23833 Zellen, was ungefähr einer Schrittweite von $h = \frac{1}{150}$ entspricht, das fünfte und neunte 602 beziehungsweise 14 Zellen.

Die erste Funktion, f_1 , enthält keine unstetigen Stellen, siehe hierzu Abbildung 3.4 am Ende dieses Kapitels. Die erste und dritte Spalte der Abbildung stellen die Isolinien der diskreten Daten dar, die lokal auf jeder Zelle rekonstruiert wurden. Die Fehler, die rechts neben den Isolinien abgebildet sind, beziehen sich auf den Übergang von der Funktion links zu der direkt darunter.

Wie in der Abbildung zu sehen ist, mußten bei den ersten vier Restriktionen fast keine Rekonstruktionsfehler gespeichert werden. Erst ab der fünften Restriktion ist ein Anstieg der Fehleranzahl zu verzeichnen. Die Anwendung der drei gröbsten Gittern führt zu einer schlechten Repräsentation der anfänglichen Funktion.

Bei den Tests mit fünf benutzten Gittern wurden ausgezeichnete Kompressionsraten erreicht: 98.45% bzw. 97.47% für $\varepsilon = 10^{-2}$ und 95.96% bzw. 93.44% für $\varepsilon = 10^{-3}$, was wegen der Glattheit der Funktion auch zu erwarten war.

# level	ε -var	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler	1. Kompr.rate	2. Kompr.rate
5	10^{-2}	1.07e-03	1.22e-02	98.45%	97.47%
	10^{-3}	2.97e-04	2.37e-03	95.96%	93.44%
	10^{-4}	3.73 e-05	1.90e-04	81.91%	70.58%
9	10^{-2}	2.79e-03	1.99e-02	98.85%	98.12%
	10^{-3}	3.28e-04	2.11e-03	95.30%	92.28%
	10^{-4}	3.77e-05	1.90e-04	81.15%	69.05%

Tabelle 3.1: Funktion f_1 : L_1 -, L_∞ -Fehler und Kompressionsraten

# level	ε-var	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler	1. Kompr.rate	2. Kompr.rate
5	10^{-2}	5.50e-04	1.94e-02	95.44%	92.58%
	10^{-3}	4.02e-05	1.51e-03	92.21%	87.33%
	10^{-4}	1.09e-05	1.62e-04	90.95%	85.29%
9	10^{-2}	2.08e-03	2.08e-02	96.27%	93.87%
	10^{-3}	1.42e-04	1.79e-03	92.71%	88.04%
	10^{-4}	2.13e-05	1.62e-04	90.85%	84.98%

Tabelle 3.2: Funktion f_2 : L_{1} -, L_{∞} -Fehler und Kompressionsraten

Auch der Gebrauch von neun Leveln führt zu Kompressionsraten derselben Güte (zum Beispiel 98.85% und 98.12% für $\varepsilon = 10^{-2}$). Da die Funktion f_1 zwar glatt ist, aber oszillativen Charakter besitzt, sind die Kompressionsraten für $\varepsilon = 10^{-4}$ kleiner, aber dennoch gut.

Im Gegensatz zur Funktion f_1 enthält f_2 Unstetigkeiten entlang der Achse x=0.5. Die rekonstruierten Daten und die dazugehörigen Fehler findet man in Abbildung 3.5 am Ende dieses Kapitels. Aufgrund der Unstetigkeiten mußten bei dieser Funktion mehr Fehler gespeichert werden als bei Funktion f_1 . Die Wahl $\varepsilon=10^{-2}$ führt zu Kompressionsraten von 95.44% bzw. 92.58%. In der Abbildung ist gut zu erkennen, daß nur Fehler, die direkt am Unstetigkeitsstrahl liegen, gespeichert werden mußten, und zwar für alle gegebenen Toleranzen ε . Auch bei diesem Beispiel weisen die rekonstruierten Funktionen auf den unteren Leveln immer größere Abweichungen von der Struktur der eigentlichen Funktion auf, bis sie schließlich diese Struktur nicht mehr wiedergeben.

Der Vergleich der Kompressionsraten beider Funktionen zeigt, daß es nicht notwendig ist, alle neun Gitter zu benutzen, da der Gebrauch von fünf bzw.

neun Gittern in allen Fällen zu ähnlichen Kompressionsraten führt.

3.2.2 Berechnung mit einer Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes"

Bei diesem Testproblem wird eine (rechteckige) Röhre betrachtet, in der zum Zeitpunkt t=0 ein Stoß mit Machzahl 10 auf die untere reflektierende (also feste) Wand der Röhre trifft. Der Stoß schließt mit der unteren Wand einen Winkel von 60 Grad ein. Vor dem Stoß, d.h. rechts davon, befindet sich Luft ($\gamma=1.4$) im Ruhezustand mit Dichte $\rho=1.4$ und Druck p=1. Hinter dem Stoß berechnet man mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingungen (siehe Abschnitt 1.3) einen Zustand mit Dichte $\rho=8$, Geschwindigkeit |v|=8.25 und Druck p=116.5. Siehe hierzu auch den Übersichtsartikel [WC84]. Die Lage des Stoßes im Anfangszustand ist in Abbildung 3.1 zu sehen.



Abbildung 3.1: Lage des Stoßes zur Zeit t=0 für die Rechnung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes"

Das feinste Gitter bestand aus 111781 Zellen, was ungefähr h=0.005 entspricht, das fünfte aus 979 Zellen, das neunte aus 54. Die Gitter der beiden jeweils gröbsten Gitter sind in Abbildung 3.2 zu sehen.

Bei diesem Problem muß das System der Eulergleichungen (siehe Abschnitt 1.2) zu Dichte, Impuls und Energie gelöst werden. Die Lösungen wurden auf Boxgittern (Abschnitt 1.4) mit der Finite-Volumen-Methode (Abschnitt 1.5) berechnet. Eine detailliertere Beschreibung zur numerischen Lösung dieser Probleme findet sich zum Beispiel bei [Son97] oder [Fri99].

Bei diesem strömungsmechanischen Problem treten an den Stößen große Sprünge auf, deren Größe bei den unterschiedlichen Zustandsvariablen des Systems stark variieren. Daher erscheint es angebracht — auch mit Blick auf die Detektion in Kapitel 5 — statt eines relativen Abschneidekriteriums ein absolutes zu nehmen. Dies kann man am einfachsten durch die Projektion des Fehlerintervalls auf das Intervall [0,1] realisieren. Die Rekonstruktionsfehler werden erst nach der Projektion auf das Einheitsintervall mit der Toleranzgrenze verglichen. Dies führt zu einem weniger





Abbildung 3.2: Gitter des fünften und neunten Levels

scharfen Kriterium, da mehr Rekonstruktionsfehler unter der Toleranzgrenze liegen als ursprünglich und somit nicht mehr berücksichtigt werden. Die zugehörige Multiskalenzerlegung der Dichte ist in Abbildung 3.7 zu sehen, die berechneten L_1 -, L_{∞} -Fehler und die Kompressionsraten in Tabelle 3.4.

Es wurde jedoch zusätzlich eine Rechnung mit dem ursprünglichen Abscheidekriterium durchgeführt, da für die Datenkompression an sich nichts dagegen spricht, dieses zu benutzen, da es nur auf die Kompression der Daten jeder einzelnen Zustandsvariablen ankommt und nicht auf etwaige Größenvergleiche unter ihnen. Außerdem ist dabei sehr schön zu erkennen, daß die leichten Oszillationen vor allem an der Spitze des ersten Stoßes das Speichern vieler Rekonstruktionsfehler erfordern. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Tabelle 3.3 und Abbildung 3.6 zu sehen. So kommt es natürlich auch immer auf die Güte der numerischen Berechnung der Lösung an, wieviele Rekonstruktionsfehler gespeichert werden müssen.

# level	ε -var	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler	1. Kompr.rate	2. Kompr.rate
	10^{-2}	2.18e-03	2.40e-02	80.66 %	69.65 %
5	10^{-3}	1.20e-04	2.44e-03	54.78 %	29.04 %
	10^{-4}	8.80e-06	2.16e-04	44.63 %	13.10 %
	10^{-2}	2.49e-03	2.98e-02	80.78 %	69.56 %
9	10^{-3}	1.41e-04	2.44e-03	54.83 %	28.49 %
	10^{-4}	9.74e-06	2.28e-04	44.61 %	12.30 %

Tabelle 3.3: L_1 -, L_∞ -Fehler und Kompressionsraten für eine Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" ohne Skalierung

Die Kompressionsraten sind trotz der Unstetigkeiten in der numerischen Lösung für beiden Multiskalenrechnungen sehr hoch, da man einen großen Teil der Rekonstruktionsfehler vernachlässigen kann. Dies ist durch die Struktur des betrachteten Problems zu erklären: Lösungen strömungsmechanischer Probleme sind typischerweise fast überall glatt und weisen meist nur auf we-

# level	ε-var	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler	1. Kompr.rate	2. Kompr.rate
5	10^{-2}	6.29 e-03	8.59e-02	87.81 %	80.87 %
	10 ⁻³	6.52 e-04	9.77e-03	64.79 %	44.75 %
	10^{-4}	3.39 e-05	9.84e-04	48.32 %	18.90 %
9	10^{-2}	8.58e-03	1.16e-01	88.10 %	81.16 %
	10^{-3}	7.58e-04	1.04e-02	64.91 %	44.44 %
	10^{-4}	4.01 e-05	1.37e-03	48.35 %	18.22 %

Tabelle 3.4: L_{1^-} , L_{∞} -Fehler und Kompressionsraten für eine Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" mit Skalierung auf [0,1]

nigen Bereichen des Gebietes Unstetigkeiten oder andere Phänomene auf und sind daher für Datenkompression gut geeignet. Für die skalierte Rechnung erhält man bei $\varepsilon=10^{-2}$ eine Kompressionsrate von 87.81% bzw. 80.87%. Bei schärfer werdender Toleranzgrenze werden die Kompressionsraten jedoch schnell klein. Dies kommt daher, daß sich die Werte vor (also unter) dem ersten Stoß zwar stetig, aber dennoch mit einem steilen Gradienten verändern, so daß bei scharfer Toleranzgrenze auch diese Rekonstruktionsfehler gespeichert werden. Dies ist in Abbildung 3.3 deutlich zu sehen. Dort sind die Rekonstruktionsfehler abgebildet, die mit dem ursprünglichen Abschneidekriterium (d.h. ohne Projektion auf das Einheitsintervall) beim Übergang vom feinsten Gitter zum nächsten mit $\varepsilon=10^{-4}$ gespeichert werden mußten. Für strömungsmechanische Probleme mit diesen Strukturen bietet sich also eine zu scharfe Toleranzgrenze nicht an.



Abbildung 3.3: Rekonstruktionsfehler mit $\varepsilon = 10^{-4}$

Bei beiden Rechnungen sieht man (so wie auch bei den beiden Testbeispielen), daß die Struktur der Lösung nach dem fünften Level sehr verwischt wird. Da die Kompressionsraten der 5- und 9-Level-Tests ebenfalls kaum Unterschiede aufweisen, zeigt dies nochmal deutlich, daß eine Folge von fünf Gittern ausreichend ist, nicht nur für die Datenkompression, sondern auch für andere Anwendungen wie zum Beispiel die Detektion von Unstetigkeiten und Adaption.

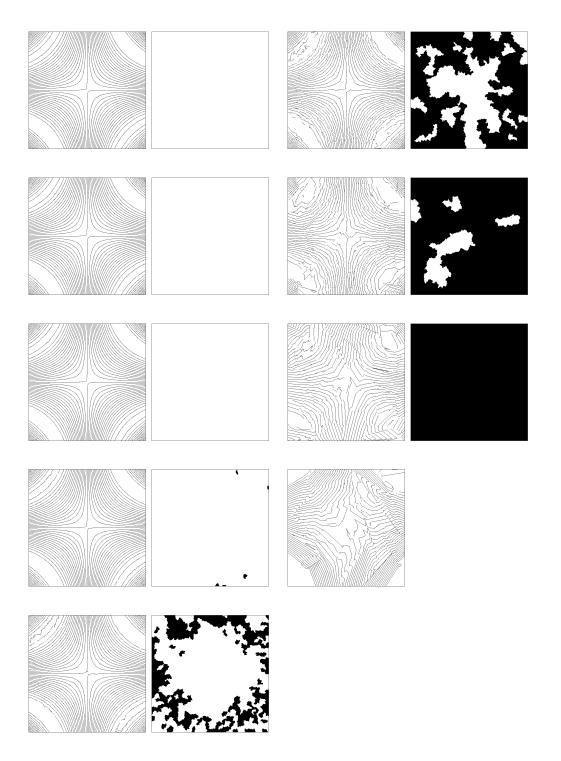


Abbildung 3.4: Rekonstru
ierte Daten und Rekonstruktionsfehler der Funktion f_1 , gerechnet mit $\varepsilon=10^{-3}$ auf einer Folge von neun Gittern

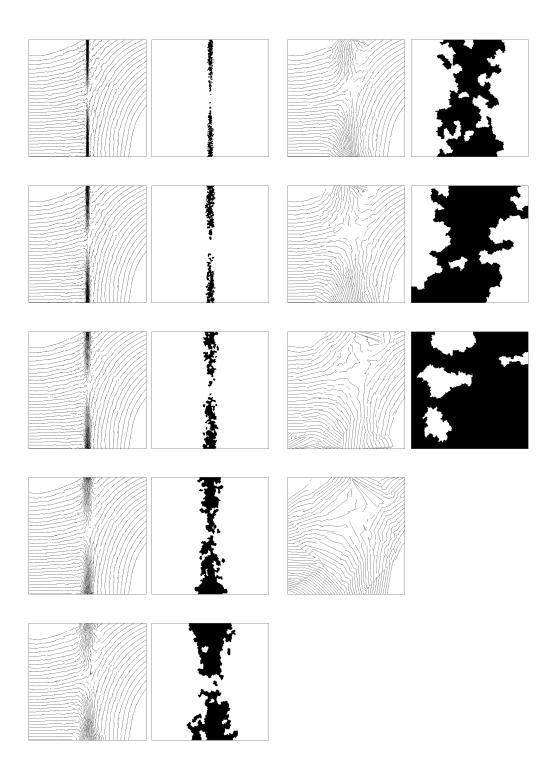


Abbildung 3.5: Rekonstru
ierte Daten und Rekonstruktionsfehler der Funktion f_2 , gerechnet mit $\varepsilon=10^{-2}$ auf einer Folge von neun Gittern

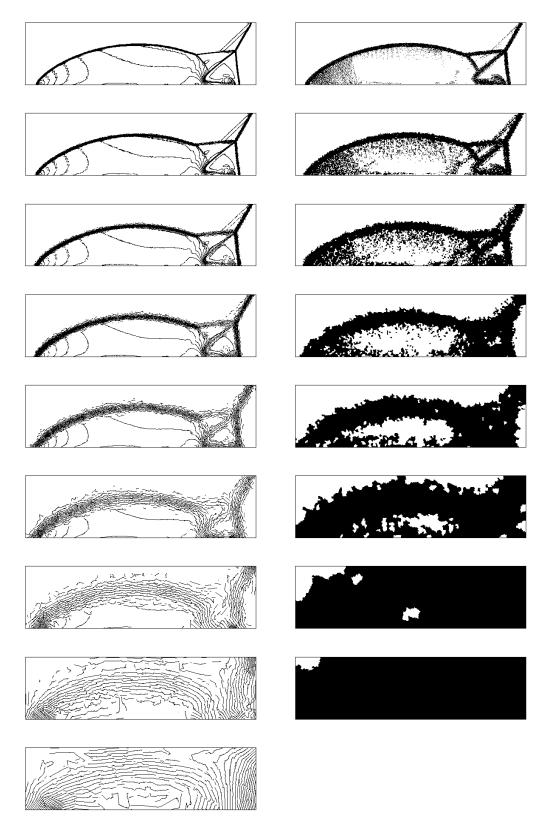


Abbildung 3.6: Rekonstruierte Daten und Rekonstruktionsfehler der Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" mit $\varepsilon=10^{-2}$ auf einer Folge von neun Gittern (ohne Skalierung)

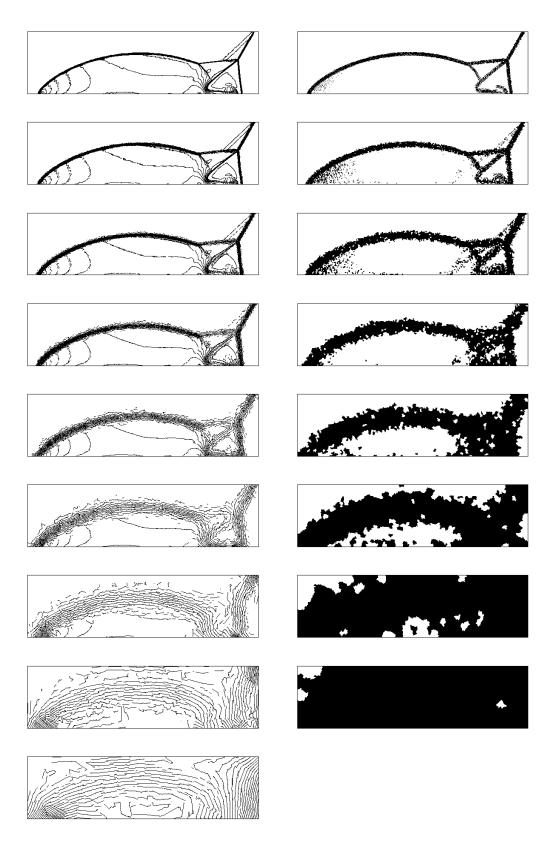


Abbildung 3.7: Rekonstruierte Daten und Rekonstruktionsfehler der Lösung der "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" mit $\varepsilon=10^{-2}$ auf einer Folge von neun Gittern (mit Skalierung auf [0,1])

Kapitel 4

Berechnung der Differentiationsmatrix

Inhalt dieses Kapitels ist die Berechnung der Differentiationsmatrix für eindimensionale Gitter bzw. Intervalle mittels der verallgemeinerte Multiskalenanalyse. Mit Hilfe dieser Matrix kann man zu gegebenen diskreten Daten, den Zellmitteln einer Funktion, die Ableitung dieser wiederum in Form von Zellmitteln berechnen. Die diskreten Ableitungen einer numerischen Lösung sind in vielen Bereichen als Hilfsmittel einsetzbar, zum Beispiel bei der Lokalisierung von Unstetigkeiten oder allgemeiner zur Detektion von Phänomenen. Außerdem sind Ableitungen als Indikator bei Gitteradaption sehr nützlich.

Ziel dieses Kapitels ist es, auch unstrukturierte Gitter benutzen zu können. Die Übertragung auf unstrukturierte Gitter ist mit Hilfe der verallgemeinerten Multiskalenanalyse gelungen, jedoch zeigen die numerischen Tests, daß die Ergebnisse, die mit der Differentiationsmatrix berechnet wurden, schlechter sind als die des Finite-Differenzen-Verfahrens. Da außerdem die Ableitungen, mit der Differentiationsmatrix berechnet, im linearen Fall inkonsistent sind, ist von einer Verallgemeinerung auf zwei Dimensionen abzuraten.

In Abschnitt 4.1 wird die Berechnung der Differentiationsmatrix für Wavelets betrachtet. Die Gitter sind demnach strukturiert und haben auf dem feinsten betrachteten Gitter V^0 Intervallänge 1. Die Ausarbeitung dieses Falles lehnt sich an [Jam93, Bey92, BCR91] an. Abhängig von der Wahl des jeweiligen Wavelets werden verschiedene Approximationsordnungen für die diskreten Ableitungen erreicht. Für den hier betrachteten ersten Fall entspricht dies der Berechnung mit dem Daubechies-Wavelet D_2 .

Der Übergang zur Berechnung mit Hilfe der verallgemeinerten Multiskalenanalyse, was auch den Übergang zu unstrukturierten Gittern beinhaltet, wird in zwei Schritten vollzogen: Zuerst werden strukturierte Gitter mit Teilintervallen beliebiger Länge im verallgemeinerten Multiskalenkontext betrachtet (Abschnitt 4.2), dann erst unstrukturierte (Abschnitt 4.3).

Es wird angenommen, daß die Intervalle auf dem Level k aus N_k Teilintervallen bestehen. Die diskreten Zellmittel werden hierin Anlehnung an die übliche Notation bei Wavelets mit s_i^k (statt \overline{u}_i^k) bezeichnet. Hierbei bezeichne wie gewohnt k den Level und i den Zellindex.

4.1 Differentiationsmatrix im Waveletkontext

4.1.1 Berechnung auf V^k

Ausgangspunkt sind die Räume V^k verschiedener Feinheit mit den dazugehörigen Basisfunktionen φ_i^k von V^k (siehe Gleichung (1.11)):

$$\varphi_i^k(x) := 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}x - i).$$

Zuerst wird die Funktion auf ein beliebiges Level V^k projiziert, abgeleitet und wieder auf das Level projiziert.

Die Projektion P_{V^k} von f auf den Raum V^k hat die Gestalt

$$P_{V^k}f(x) := \sum_{i=0}^{N_k-1} \langle f, \varphi_j^k \rangle \varphi_j^k(x) = \sum_{i=0}^{N_k-1} s_j^k \varphi_j^k(x).$$

Da die Basisfunktionen eine Orthonormalbasis bzgl. des inneren Produktes $<\cdot,\cdot>$ bilden, also

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_i^k(x) \varphi_j^k(x) \ dx = \delta_{ij}$$

gilt, haben die s_i^k die Gestalt

$$s_i^k := \langle f, \varphi_i^k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_i^k(x) \ dx.$$

Die Ableitung der Projektion lautet:

$$\frac{d}{dx}P_{V^k}f(x) = \sum_{j=0}^{N_k-1} s_j^k(\varphi_j^k)'(x)$$

Sie muß nun wieder auf den Raum V^k projiziert werden:

$$P_{V^{k}} \left(\frac{d}{dx}P_{V^{k}}(f)\right) = \sum_{i=0}^{N_{k}-1} < \frac{d}{dx}P_{V^{k}}f, \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} < \sum_{j=0}^{N_{k}-1} s_{j}^{k}(\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} \sum_{j=0}^{N_{k}-1} s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} \sum_{j=0}^{N_{k}-1} s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} (s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{i}^{k} > + \dots + s_{N_{k}-1}^{k} < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{i}^{k} >) \varphi_{i}^{k}$$

$$= (s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{0}^{k} > + \dots + s_{N_{k}-1}^{k} < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{0}^{k} >) \varphi_{0}^{k}$$

$$+ \dots + (s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > + \dots + s_{N_{k}-1}^{k} < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} >) \varphi_{N_{k}-1}^{k}$$

$$= \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > + \dots + s_{N_{k}-1}^{k} < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{i=1}^{T} \varphi_{N_{k}-1}^{k} \right)^{T}$$

$$= \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > + \dots + s_{N_{k}-1}^{k} < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{i=1}^{T} \varphi_{N_{k}-1}^{k} \right)^{T}$$

$$= \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \right)^{T} \left(\sum_{s_{0}^{k} < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \dots < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^$$

mit

$$\varphi^k = \left(\varphi_0^k, \dots, \varphi_{N_k-1}^k\right)^T.$$

Man erhält also die sogenannten Differentiationsmatrizen

$$R^k := (r_{ij}^k)_{i,j=0}^{N_k-1} \quad \text{mit} \quad r_{ij}^k := <(\varphi_j^k)', \varphi_i^k > .$$

Berechnung der Matrixeinträge für R^k:

Es gilt:

$$\varphi_i^k(x) := 2^{-k/2} \varphi(2^{-k} x - i)
\Rightarrow (\varphi_i^k)'(x) = 2^{-k/2} 2^{-k} \varphi'(2^{-k} x - i)
= 2^{-\frac{3}{2}k} \varphi'(2^{-k} x - i)$$

Damit folgt für die Komponenten r_{ij}^k der Matrizen R^k :

$$r_{ij}^{k} = \langle (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\varphi_{j}^{k})'(x) \varphi_{i}^{k}(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 2^{-\frac{3}{2}k} \varphi'(2^{-k}x - j) 2^{-k/2} \varphi(2^{-k}x - i) dx$$

$$= 2^{-2k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(2^{-k}x - j) \varphi(2^{-k}x - i) dx$$
Substituiere $y := 2^{-k}x$, $dy = 2^{-k} dx \iff dx = 2^{k} dy$

$$= 2^{-2k} 2^{k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y - j) \varphi(y - i) dy$$

$$= 2^{-k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y - j) \varphi(y - i) dy$$
Substituiere $z := y - j \iff y = z + j$, $dz = dy$

$$= 2^{-k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi(z + j - i) dz$$

$$= 2^{-k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi(z - (i - j)) dz$$

$$\implies 2^{k} r_{ij}^{k} = r_{i-j} \quad \text{mit} \quad r_{l} := \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \varphi(x - l) dx. \tag{4.2}$$

Besondere Aufmerksamkeit verdient nun die Berechnung der r_l : Integrand ist das Produkt aus der charakteristischen Funktion und ihrer Ableitung. Diese Ableitung existiert im klassischen Sinn an den Stellen x=0 und x=1 nicht; sie kann jedoch mit Hilfe von Distributionen berechnet werden.

Es wird an dieser Stelle keine Einführung in die Distributionentheorie gegeben, da es den Umfang der Arbeit sprengen würde. Für Interessierte werden die Bücher von Kanwal ([Kan83]) und Walter ([Wal94]) empfohlen. Die folgende Darstellung richtet sich nach Kanwal.

Definition 4.1.1 Das Dirac-Funktional $\delta(x)$ ist eine Distribution, definiert durch folgende Eigenschaften:

i.
$$\delta(x-\xi)=0$$
 , $x\neq \xi$

ii. $\int_{\mathbb{R}} \delta(x-\xi) f(x) \ dx = f(\xi)$ für hinreichend glattes f (Abbildungseigenschaft)

Für den Spezialfall $f(x) \equiv 1$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x - \xi) = 1. \tag{4.3}$$

Das Dirac-Funktional ist Ableitung einer anderen Distribution, der Heaviside-Funktion:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Der Wert für x = 0 ist nicht (eindeutig) definiert. In der Literatur wird der Wert an dieser Stelle meist durch H(0) = 0 oder H(0) = 1 definiert, es findet sich aber auch H(0) = 1/2. Die Definition scheint von der jeweiligen benötigten Anwendung abzuhängen.

Sei nun F(x) eine Funktion in x, die einen Sprung der Größe a_1 bei $x = \xi_1$ hat, aber auf dem übrigen Intervall $\mathbb{R}\setminus\{\xi_1\}$ stetig ist und dort demnach eine klassische Ableitung besitzt.

Die Ableitung von F(x) in $\mathbb{R}\setminus\{\xi_1\}$ werde mit F'(x) bezeichnet, die Ableitung im Sinne der Distributionen auf ganz \mathbb{R} mit $\overline{F}'(x)$. Setze nun

$$f(x) := F(x) - a_1 H(x - \xi_1) \tag{4.4}$$

mit der Heavisidefunktion H(x).

Die Funktion f ist stetig, auch an $x = \xi_1$. Die Ableitung fällt rechts und links von ξ_1 mit der von F(x) zusammen. Differentiation beider Seiten von Gleichung (4.4) ergibt

$$F'(x) = \overline{F}'(x) - a_1 \delta(x - \xi_1)$$

bzw.
$$\overline{F}'(x) = F'(x) + a_1 \delta(x - \xi_1).$$

Dies kann leicht auf eine Funktion F(x) verallgemeinert werden, die Sprünge der Größe a_1, \ldots, a_l an den Stellen ξ_1, \ldots, ξ_l besitzt. Die Ableitung ist dann gegeben durch

$$\overline{F}'(x) = F'(x) + \sum_{j=1}^{l} a_j \delta(x - \xi_j).$$

Da hier die Werte an den Sprungstellen als nicht definiert angenommen werden, erhält man für die die Skalierungsfunktion φ , die charakteristische Funktion

$$\varphi(x) = H(x) - H(x-1)$$

und damit

$$\overline{\varphi}'(x) = \delta(x) - \delta(x-1).$$

Betrachte nun zunächst das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \ dx.$$

Die Ableitung

$$\overline{\varphi}'(x) = H'(x) - H'(x-1) = \delta(x) - \delta(x-1)$$

wird im Integral ersetzt:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) - \delta(x - 1) dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \delta(x - 1) dx$$

Beide Integrale ergeben eins — integriert über ganz \mathbb{R} — nach dem Spezialfall der Abbildungseigenschaft (siehe Gleichung (4.3)). Jedoch ist das eigentliche Integrationsintervall das Intervall [l, l+1] (siehe Gleichung (4.2)). Um dies korrekt lösen zu können, bedarf es noch eines weiteren Hilfsmittels: Der Approximation an das Delta-Funktional und die Heaviside-Funktion durch Funktionenfolgen.

Das Delta-Funktional kann durch verschiedene Funktionenfolgen approximiert werden, die die Abbildungseigenschaft erfüllen (ohne Einschränkung sei $\xi = 0$):

(i)
$$\lim_{m \to \infty} s_m(x) = \delta(x), \tag{4.5}$$

(ii)
$$\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}} s_m(x) f(x) = f(0). \tag{4.6}$$

Eine sehr bekannte Funktionenfolge, die die Eigenschaften (4.5) und (4.6) erfüllt, ist

$$s_m(x) := \frac{m}{\pi(1 + m^2 x^2)}.$$

Für $m \gg 1$ ist $s_m(x) \ll 1$ außer in einer Umgebung um x = 0. Die Funktion ist für m = 1, 3 und 6 in Abbildung 4.1(a) dargestellt.

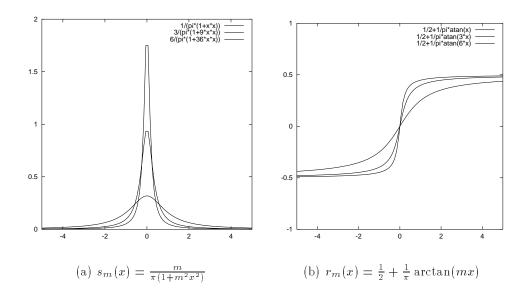


Abbildung 4.1: Approximation des Delta-Funktionals und der Heaviside-Funktion

Für die Flächeninhaltsfunktion $r_m(x)$, die den Flächeninhalt von $s_m(x)$ links des Punktes x berechnet, erhält man

$$r_m(x) = \int_{-\infty}^x s_m(u)du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(mx)$$

Diese Funktion ist wieder für die Werte m=1,3 und 6 in Abbildung 4.1(b) zu sehen.

Es gilt

$$\lim_{m \to \infty} r_m(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ \frac{1}{2} & , x = 0, \\ 1 & , x > 0. \end{cases}$$

Bemerkung 4.1.2 Da die Folge $r_m(x)$ die Heaviside-Funktion approximiert, scheint die Wahl von H(0) = 1/2 sinnvoll.

Der Wert der Flächeninhaltsfunktion $r_m(x)$ bei x=0 beträgt 1/2. Das bedeutet, daß das Integral über $\delta(x)$ über das Einheitsintervall auch "nur" den

Wert 1/2 ergibt:

$$\int_0^1 \delta(x) \ dx = \frac{1}{2}$$

Für die Integrale

$$r_l = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\varphi(x-l) \ dx = \int_l^{l+1} \delta(x) \ dx - \int_l^{l+1} \delta(x-1) \ dx$$

bei denen $\varphi(x-l)$ das Integrationsintervall [l,l+1[festlegt, ergeben sich folgende Teillösungen:

$$\int_{-1}^{0} \delta(x) \, dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_{0}^{1} \delta(x) \, dx = \frac{1}{2},$$

$$\int_{l}^{l+1} \delta(x) \, dx = 0 \quad \text{für} \quad l > 0 \text{ und } l < -1$$

und

$$\int_0^1 \delta(x-1) \, dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_1^2 \delta(x-1) \, dx = \frac{1}{2},$$

$$\int_l^{l+1} \delta(x-1) \, dx = 0 \quad \text{für} \quad l > 1 \text{ und } l < 0.$$

Für die Matrixeinträge ergibt sich damit für die verschiedenen Fälle:

1=-1

$$\int_{-1}^{0} \delta(x) \ dx - \int_{-1}^{0} \delta(x-1) \ dx = \frac{1}{2}$$

l=0

$$\int_0^1 \delta(x) \ dx - \int_0^1 \delta(x-1) \ dx = 0$$

l=1

$$\int_{1}^{2} \delta(x) \ dx - \int_{1}^{2} \delta(x-1) \ dx = -\frac{1}{2}$$

Kompakt geschrieben bedeutet dies für die Kompenten auf dem Level 0 und 1:

$$r_{ij}^{0} = r_{i-j}^{0} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i-j = -1\\ 0 & i = j\\ -\frac{1}{2} & i-j = 1\\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad r_{ij}^{1} = \frac{1}{2}r_{i-j}^{1} = \begin{cases} \frac{1}{4} & i-j = -1\\ 0 & i = j\\ -\frac{1}{4} & i-j = 1\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit sieht die Differentiationsmatrix \mathbb{R}^0 folgendermaßen aus:

$$R^{0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Für die Matrizen \mathbb{R}^k erhält man

$$R^k = 2^{-k} R^0 = \text{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2^{k+1}}, 0, \frac{1}{2^{k+1}} \right\}.$$

Auch wenn die Differentiationsmatrix auf jedem beliebigen Level berechnet werden kann, ist meistens das feinste Level 0 der Ausgangspunkt der Berechnungen. Es wird sich jedoch zeigen, daß auch Differentiationsmatrizen auf anderen Leveln benutzt werden.

Bemerkung 4.1.3 Führt man diese Berechnung nicht mit dem Haar-Wavelet bzw. dem Daubechies-Wavelet D_2 , sondern mit einem Daubechies-Wavelet höherer Ordnung D_{2M} durch, erhöht sich die Approximationsgenauigkeit. Es zeigt sich, daß für die Daubechies-Wavelets D_2 und D_4 die Koeffizienten der Differentiationsmatrix gerade die Koeffizienten des zentralen Finite-Differenzenverfahrens exakt ergeben, für Daubechies-Wavelets höherer Ordnung näherungsweise. Eine ausführliche Besprechung hierzu findet sich in [Bey92, BCR91].

4.1.2 Berechnung auf $V^k \oplus W^k$

Anstatt die Berechnung auf einem der V^{k-1} (bzw. V^k) durchzuführen, kann dies ebensogut auf $V^k \oplus W^k$ geschehen, da nach Gleichung (1.12)

$$V^{k-1} = V^k \oplus W^k$$

gilt. Dies ist sinnvoll, wenn man die Ableitung der diskreten Daten komprimieren möchte. Man lese hierzu Bemerkung 4.1.5 am Ende dieses Abschnitts.

Wir erhalten für die Projektion $P_{V^k \oplus W^k}: L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow V^k \oplus W^k$ von f auf $V^k \oplus W^k$

$$P_{V^k \oplus W^k}(f) = \sum_{i=0}^{\frac{N_k}{2} - 1} s_i^k \varphi_i^k(x) + \sum_{i=0}^{\frac{N_k}{2} - 1} d_i^k \psi_i^k(x)$$

mit

$$s_i^k := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_i^k(x) dx \text{ und } d_i^k := \int_{\mathbb{R}} f(x)\psi_i^k(x) dx.$$

Mit ψ_i^k werde wie immer das zur Skalierungsfunktion φ zugehörige Wavelet, in dem hier betrachteten Fall das Haar-Wavelet (siehe dazu 1.13) bezeichnet.

Die Ableitung der Projektion von f auf $V^k \oplus W^k$ ist

$$\frac{d}{dx} P_{V^k \oplus W^k}(f) = \sum_{i=0}^{\frac{N_k}{2} - 1} s_i^k (\varphi_i^k)'(x) + \sum_{i=0}^{\frac{N_k}{2} - 1} d_i^k (\psi_i^k)'(x).$$

Wieder muß die Ableitung auf $V^k \oplus W^k$ projiziert werden:

$$P_{V^{k} \oplus W^{k}}(\frac{d}{dx}P_{V^{k} \oplus W^{k}}(f)) = \sum_{i} < \frac{d}{dx}P_{V^{k} \oplus W^{k}}(f), \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$+ \sum_{i} < \frac{d}{dx}P_{V^{k} \oplus W^{k}}(f), \psi_{i}^{k} > \psi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k} + \sum_{i} \sum_{j} d_{j}^{k} < (\psi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \psi_{i}^{k} > \psi_{i}^{k} + \sum_{i} \sum_{j} d_{j}^{k} < (\psi_{j}^{k})', \psi_{i}^{k} > \psi_{i}^{k}$$

Analog zur Berechnung von $P_{V^k}(\frac{d}{dx}P_{V^k}(f))$ erhält man

$$(1) \quad \sum_{i} \sum_{j} s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} <(\varphi_{0}^{k})', \varphi_{0}^{k} > & \cdots & <(\varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \varphi_{0}^{k} > \\ \vdots & & \vdots \\ <(\varphi_{0}^{k})', \varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > & \cdots & <(\varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > \end{pmatrix}}_{:=R^{k}} \begin{pmatrix} s_{0}^{k} \\ \vdots \\ s_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} \end{pmatrix} \right]^{T} \varphi^{k}$$

(2)
$$\sum_{i} \sum_{j} d_j^k < (\psi_j^k)', \varphi_i^k > \varphi_i^k$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} <(\psi_{0}^{k})', \varphi_{0}^{k} > & \cdots & <(\psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \varphi_{0}^{k} > \\ \vdots & & \vdots & \\ <(\psi_{0}^{k})', \varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > & \cdots & <(\psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > \end{pmatrix}}_{:=C^{k}} \begin{pmatrix} d_{0}^{k} \\ \vdots \\ d_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} \end{pmatrix} \right]^{I} \varphi^{k}$$

$$(3) \quad \sum_{i} \sum_{j} s_j^k < (\varphi_j^k)', \psi_i^k > \psi_i^k$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} <(\varphi_{0}^{k})', \psi_{0}^{k} > & \cdots & <(\varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \psi_{0}^{k} > \\ \vdots & & \vdots \\ <(\varphi_{0}^{k})', \psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > & \cdots & <(\varphi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \psi_{\frac{N}{2}-1}^{k} > \end{pmatrix}}_{:=R^{k}} \begin{pmatrix} s_{0}^{k} \\ \vdots \\ s_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} \end{pmatrix} \right]^{T} \psi^{k}$$

(4)
$$\sum_{i} \sum_{j} d_{j}^{k} < (\psi_{j}^{k})', \psi_{i}^{k} > \psi_{i}^{k}$$

$$= \left[\underbrace{\begin{pmatrix} <(\psi_{0}^{k})', \psi_{0}^{k} > & \cdots & <(\psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \psi_{0}^{k} > \\ \vdots & & \vdots \\ <(\psi_{0}^{k})', \psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > & \cdots & <(\psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k})', \psi_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} > \right] \begin{pmatrix} d_{0}^{k} \\ \vdots \\ d_{\frac{N_{k}}{2}-1}^{k} \end{pmatrix} \right]^{T} \psi^{k}$$

mit

$$\varphi^k = \begin{pmatrix} \varphi_0^k \\ \vdots \\ \varphi_{\frac{N_k}{2}-1}^k \end{pmatrix} \text{ und } \psi^k = \begin{pmatrix} \psi_0^k \\ \vdots \\ \psi_{\frac{N_k}{2}-1}^k \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow P_{V^k \oplus W^k} \left(\frac{d}{dx} P_{V^k \oplus W^k} (f) \right) = \left[\begin{pmatrix} R^k & C^k \\ B^k & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^k \\ d^k \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \varphi^k \\ \psi^k \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} (s^k)' \\ (d^k)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^k \\ \psi^k \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} R^k & C^k \\ B^k & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^k \\ d^k \end{pmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} \varphi^k \\ \psi^k \end{pmatrix}.$$

Man erhält also die vier Matrizen:

$$R^{k} := (r_{ij})_{i,j} \text{ mit } r_{ij}^{k} := <(\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} >,$$

$$A^{k} := (a_{ij})_{i,j} \text{ mit } a_{ij}^{k} := <(\psi_{j}^{k})', \psi_{i}^{k} >,$$

$$B^{k} := (b_{ij})_{i,j} \text{ mit } b_{ij}^{k} := <(\varphi_{j}^{k})', \psi_{i}^{k} >,$$

$$C^{k} := (c_{ij})_{i,j} \text{ mit } c_{ij}^{k} := <(\psi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} >.$$

Hierbei muß auf die Dimension der einzelnen Matrizen geachtet werden. Diese wird, falls nötig, dazugeschrieben.

Für A^k, B^k und C^k ergibt die Berechnung der Matrixelemente

$$a_{ij}^{k} = 2^{-k} a_{i-j} \quad \text{mit } a_{l} := \int_{\mathbb{R}} \psi'(x) \psi(x-l) \, dx,$$

$$b_{ij}^{k} = 2^{-k} b_{i-j} \quad \text{mit } b_{l} := \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \psi(x-l) \, dx,$$

$$c_{ij}^{k} = 2^{-k} c_{i-j} \quad \text{mit } c_{l} := \int_{\mathbb{R}} \psi'(x) \varphi(x-l) \, dx.$$

Die Matrizen R^k wurden bereits in Abschnitt 4.1.1 berechnet mit $r_{\pm 1} = \mp \frac{1}{2}$. Die Matrizelemente von A^k , B^k und C^k können direkt aus den Werten r_l berechnet werden. Mit der Skalierungsgleichung (siehe Lemma 1.6.2) und

der Definition des (Haar-)Wavelets (1.13) erhält man:

$$a_{l} = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-l)\psi'(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} g_{i} \varphi(2(x-l)-i) \cdot 2\sqrt{2} \sum_{i' \in \mathbb{Z}} g_{i'} \varphi'(2x-i') dx$$

$$= 4 \sum_{i} \sum_{i'} g_{i} g_{i'} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x-2l-i) \varphi'(2x-i') dx$$
Substituiere $y := 2x - i' \Longrightarrow dy = 2 dx$

$$= 2 \sum_{i} \sum_{i'} g_{i} g_{i'} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y-2l-i+i') \varphi'(y) dy$$

$$= 2 \sum_{i} \sum_{i'} g_{i} g_{i'} r_{2l+i-i'}$$

Analog berechnet man

$$b_l = 2\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{i' \in \mathbb{Z}} g_i \alpha_{i'} r_{2l+i-i'}$$
 und
$$c_l = 2\sum_{i}^{L-1} \sum_{i'}^{L-1} \alpha_i g_{i'} r_{2l+i-i'}.$$

Ausgewertet mit den bereits berechneten r_l erhält man

Dies ergibt insgesamt die drei Matrizen

$$A^k = \text{tridiag} \left\{ \frac{1}{2^{k+1}}, 0, -\frac{1}{2^{k+1}} \right\}, \quad B^k = \text{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}, -\frac{1}{2^{k+1}} \right\}$$

und

$$C^k = \text{tridiag} \left\{ \frac{1}{2^{k+1}}, -\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}} \right\}.$$

Bemerkung 4.1.4 Es wurde und wird auch weiterhin stillschweigend angenommen, daß die Funktionen zyklisch sind mit Periode |I|. Dadurch wird das Problem der Berechnung der Randelemente umgangen. Dieses ist noch ein ganz anderes Kapitel, aber keines dieser Arbeit.

Wenn man sich die Wirkung der insgesamt vier Matrizen vergegenwärtigt, stellt man fest, daß die Matrizen die folgenden Abbildungen darstellen:

$$A^{k}: d^{k} \longrightarrow (d^{k})'$$

$$B^{k}: s^{k} \longrightarrow (d^{k})'$$

$$C^{k}: d^{k} \longrightarrow (s^{k})'$$

$$R^{k}: s^{k} \longrightarrow (s^{k})'$$

Die Ableitung auf $V^1 \oplus W^1$ wird damit durch

$$(s^1)' = R^1 s^1 + C^1 d^1$$

 $(d^1)' = B^1 s^1 + A^1 d^1$

bzw. in Matrizform durch

$$\begin{pmatrix} (s^1)' \\ (d^1)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^1 & C^1 \\ B^1 & A^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1 \\ d^1 \end{pmatrix}$$

beschrieben, was die Berechnung der Projektion der Ableitung noch einmal verifiziert (siehe Gleichung 4.7).

Berechnung der $(s^k)' \in V^k$ aus den $(s^{k+1})' \in V^{k+1}$ und $(d^{k+1})' \in W^{k+1}$

Um nun die Ableitung auf dem Gitter V^k aus den berechneten Ableitungen auf $V^{k+1} \oplus W^{k+1}$ zu bekommen, definiert man die Matrix $P^{k,k+1}$ durch

$$P^{k,k+1}:(s^k)\longrightarrow \begin{pmatrix} s^{k+1}\\ d^{k+1} \end{pmatrix},$$

also diejenige Matrix, die aus den diskreten Werten $(s_0^k,\ldots,s_{N_k-1}^k)^T$ den Vektor $(s_0^{k+1},\ldots,s_{N_k/2-1}^{k+1},s_0^{k+1},\ldots,s_{N_k/2-1}^{k+1})^T$ berechnet. Da $P^{k,k+1}$ orthonormal ist, erhält man die Ableitung auf V^k durch

$$(s^k)' = (P^{k,k+1})^T \begin{pmatrix} (s^{k+1})' \\ (d^{k+1})' \end{pmatrix}.$$

Wie sieht die Matrix $P^{k,k+1}$ konkret aus?

In den ersten $N_k/2$ Zeilen werden die Daten auf dem gröberen Gitter berechnet. Da aus jeweils zwei feinen Intervallen ein grobes wird, sind nur zwei der Werte ungleich null. In den anderen Zeilen werden die Fehler beim Übergang zum gröberen Gitter berechnet. Auch hier sind nur je zwei der feinen Intervalle pro Zeile beteiligt und demnach ungleich null.

Diese Werte entsprechen h_0 und h_1 aus der Skalierungsgleichung in Lemma 1.6.2 für φ bzw. g_0 und g_1 für ψ , siehe hierzu auch Satz 1.6.4.

Dies kann auch rechnerisch nachgewiesen werden: Mit Hilfe der Skalierungsgleichung (siehe Lemma 1.6.2) und Satz 1.6.4 kann man nachrechnen, daß für die φ_i^{k+1} und ψ_i^{k+1}

$$\varphi_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \varphi_{2i+j}^k \text{ und } \psi_i^{k+1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \varphi_{2i+j}^k$$

gilt.

Das ergibt für die charakteristische Funktion φ und das Haar-Wavelet ψ in Matrixschreibweise

$$P^{k,k+1} := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ g_0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g_0 & g_1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}$$

wobei in diesem Fall $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = g_0 = -g_1$. Die zugehörige Differentiationsmatrix auf $V^1 \oplus W^1$ ist

$$D^{1} := \begin{pmatrix} R^{1}_{4 \times 4} & C^{1}_{4 \times 4} \\ R^{1}_{4 \times 4} & A^{1}_{4 \times 4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Man verifiziere $D^0 = R^0 = (P^{0,1})^T D^1 P^{0,1}$.

Die Differentiationsmatrizen D^k werden mit wachsendem k schnell unange-

nehm. Die Matrizen D^2 und D^3 , die

$$\begin{pmatrix} s^2 \\ d^2 \\ d^1 \end{pmatrix} \text{ abbildet in } \begin{pmatrix} (s^2)' \\ (d^2)' \\ (d^1)' \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} s^3 \\ d^3 \\ d^2 \\ d^1 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} (s^3)' \\ (d^3)' \\ (d^2)' \\ (d^1)' \end{pmatrix},$$

also in den Räumen $V^2 \oplus W^2 \oplus W^1$ bzw. $V^3 \oplus W^3 \oplus W^2 \oplus W^1$ leben, lauten

$$D^{2} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{2} & C_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{2} \\ R_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{2} & A_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{2} \end{pmatrix} & P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1,2} C_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1} \\ R_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1} (P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{0,1})^{T} & A_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{2} \end{pmatrix}$$

sowie $D^3 =$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{3} & C_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{3} \\ B_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{3} & A_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{3} \end{pmatrix} & P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{2,3} C_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{2} \\ B_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{2} (P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1,2})^{T} & A_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} P_{\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}}^{2,3} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1,2} C_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1} \\ B_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1} (P_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1,2})^{T} & A_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{3} \end{pmatrix} & A_{\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}}^{1} \end{pmatrix}$$

An dieser Darstellung ist gut zu erkennen, daß die Differentiationsmatrizen aus vier Blöcken bestehen,

$$D^k = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

bei dem der Block D_{11} die Differentiationsmatrix des vorhergehenden Levels D^{k-1} mit halber Dimension enthält.

Bemerkung 4.1.5 Durch das Benutzen von mehreren Skalen (Gittern) kann die Ableitung der diskreten Daten komprimiert werden. Dies funktioniert im Prinzip genauso wie die Datenkompression des eigentlichen Strömungsfeldes in Kapitel 3. Fehler der Ableitungen (die durch die Restriktion entstehen, also keine Approximationsfehler) können vernachlässigt

werden, falls sie klein genug sind, ohne die Struktur der Ableitung der diskreten Daten zu verwischen. Ohne weiteren Informationsverlust — bis auf den der vernachlässigten Fehler — kann man die Ableitung mit Hilfe der Matrizen D^k auf dem feinsten Gitter rekonstruieren.

4.2 Differentiationsmatrix mit der VMSA, strukturiert

Der entscheidende Unterschied bei der Berechnung der Differentiationsmatrix mit der verallgemeinerten Multiskalenanalyse im Gegensatz zu der mit der MSA bei Wavelets ist der Ausgangspunkt. Denn nun muß von den Zellmitteln (Definition 1.5.1), die aus den Rechnungen des Strömungslösers resultieren, ausgegangen werden.

Gegeben seien also die Zellmittel (noch immer s_i^k statt \overline{u}_i^k genannt)

$$s_i^k := <\lambda(I_i^k), f> = \frac{1}{|I_i^k|} \int_{I_i^k} f(x) \ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_i^k(x) \ dx = < f, \varphi_i^k>$$

einer Funktion f auf dem Level V^k mit Teilintervallen der Länge h_k . Es wird daran erinnert, daß sämtliche Teilintervalle des Intervalls I^k die Länge $|I_i^k| = h_k$ besitzen.

Man beachte, daß die Länge der Teilintervalle auf dem feinsten Raum V^0 beliebig ist, was eine erste Verallgemeinerung im Vergleich zu den Wavelets (Länge 1) darstellt. Die Gitter sind jedoch noch immer äquidistant.

4.2.1 Berechnung auf V^k

Die Basisfunktionen von V^k sind im Fall der verallgemeinerten Multiskalenanalyse im Fall äquidistanter Intervalle gegeben durch

$$\varphi_i^k := \frac{1}{h_k} \varphi\left(\frac{x - i \cdot h_k}{h_k}\right) = \frac{1}{h_k} \varphi\left(\frac{x}{h_k} - i\right).$$

$$i=0,\ldots,N_k-1.$$

Nach Satz 2.3.3 ist die Projektion einer Funktion f auf V^k gegeben durch

$$P_{V^k}(f) = h_k \sum_{j=0}^{N_k - 1} \langle f, \varphi_j^k \rangle \varphi_j^k = h_k \sum_{j=0}^{N_k - 1} s_j^k \varphi_j^k.$$

Für die Ableitung der Projektion gilt demzufolge

$$\frac{d}{dx}P_{V^k}f(x) = h_k \sum_{j=0}^{N_k-1} s_j^k(\varphi_j^k)'(x).$$

Hiermit wird die Projektion der Ableitung (vergleiche auch mit Gleichung 4.1) zu

$$P_{V^{k}} \quad \left(\frac{d}{dx}P_{V^{k}}(f)\right) = h_{k} \sum_{i=0}^{N_{k}-1} \left\langle \frac{d}{dx}P_{V^{k}}(f), \varphi_{i}^{k} \right\rangle \varphi_{i}^{k}$$

$$= h_{k} \sum_{i=0}^{N_{k}-1} \left\langle h_{k} \sum_{j=0}^{N_{k}-1} s_{j}^{k}(\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} \right\rangle \varphi_{i}^{k}$$

$$= h_{k}^{2} \sum_{i=0}^{N_{k}-1} \left(\sum_{j=0}^{N_{k}-1} s_{j}^{k} \right\langle (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} \right) \varphi_{i}^{k}$$

$$= \left[h_k^2 \begin{pmatrix} <(\varphi_0^k)', \varphi_0^k > & \cdots & <(\varphi_{N_k-1}^k)', \varphi_0^k > \\ \vdots & & \vdots & \\ <(\varphi_0^k)', \varphi_{N_k-1}^k > & \cdots & <(\varphi_{N_k-1}^k)', \varphi_{N_k-1}^k > \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^k \\ \vdots \\ s_{N_k-1}^k \end{pmatrix} \right]^T \varphi^k$$

$$=: \mathbb{R}^k$$

$$\operatorname{mit} \varphi^k := \left(\varphi_0^k, \ldots, \varphi_{N_k-1}^k\right)^T.$$

Nach Definition von R^k gilt also

$$R^k := (r_{ij}^k)_{i,j=0}^{N_k-1} \quad \text{mit} \quad r_{ij}^k := h_k^2 < (\varphi_j^k)', \varphi_i^k > .$$

Die Basisfunktionen φ_i^k waren definiert als

$$\begin{split} \varphi_i^k &:= & \frac{1}{h_k} \varphi \left(\frac{x}{h_k} - i \right) \\ \Longrightarrow & (\varphi_i^k)' &= & \frac{1}{h_k^2} \varphi' \left(\frac{x}{h_k} - i \right). \end{split}$$

Damit können nun die Matrixelemente berechnet werden:

$$\begin{split} r_{ij}^k &= h_k^2 < (\varphi_j^k)', \varphi_i^k > \\ &= h_k^2 \int_{\mathbb{R}} (\varphi_j^k)'(x) \varphi_i^k(x) \, dx \\ &= h_k^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_k^2} \varphi'\left(\frac{x}{h_k} - j\right) \cdot \frac{1}{h_k} \varphi\left(\frac{x}{h_k} - i\right) \, dx \\ &= \frac{1}{h_k} \int_{\mathbb{R}} \varphi'\left(\frac{x}{h_k} - j\right) \varphi\left(\frac{x}{h_k} - i\right) \, dx \\ \stackrel{y:=x/h_k}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y - j) \varphi(y - i) \, dy \\ \stackrel{z:=y-j}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi(z - (i - j)) \, dz \\ &= r_{i-j} \quad \text{mit } r_l := \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \varphi(x - l) \, dx, \end{split}$$

was für R^0 dasselbe Resultat liefert wie bei dem Fall mit Wavelets:

$$R^0 = \operatorname{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

Es ist sogar so, daß alle \mathbb{R}^k diese Gestalt haben. Dies erscheint vielleicht zunächst verwunderlich, da es — anders als erwartet — keine Skalierung für die verschiedenen Level gibt. Nach genauerem Hinsehen erweist sich dies jedoch als richtig, da die Projektion der Ableitung auf den Raum \mathbb{V}^k die folgende Gestalt hat:

$$P_{V^k}(\frac{d}{dx}P_{V^k}(f)) = (R^k s^k)^T \varphi^k \text{ mit } s^k := \begin{pmatrix} s_0^k \\ \vdots \\ s_{N_k-1}^k \end{pmatrix} \text{ und } \varphi^k := \begin{pmatrix} \varphi_0^k \\ \vdots \\ \varphi_{N_k-1}^k \end{pmatrix},$$

die Werte also durch die φ_i^k 's skaliert werden, was folgendes Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 4.2.1 Betrachtet wird das Intervall [0,6] mit drei Teilintervallen der Länge $h_0 = 2$ und die Funktion f(x) = x.

Man berechnet $s^0 = (1, 3, 5)^T$. Da die Werte an den Intervallenden besonderer Behandlung bedürfen, wird hier nur nach der Ableitung von f auf dem zweiten Intervall I_1^0 gesucht.

 \Diamond

Mit dem Finite Differenzen-Verfahren berechnet man für die Ableitung auf I_1^0 :

$$(s_1^0)' = \frac{1}{2h_0}(s_2^0 - s_0^0) = \frac{1}{4}(5-1) = 1.$$

Anwendung der Differentiationsmatrix R^0 ergibt den Wert

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0^0 \\ s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 2 \\ * \end{pmatrix}$$

Schließlich erhält man als Projektion der Ableitung auf V^0

$$P_{0}(\frac{d}{dx}P_{0}(f)) = (R^{0}s^{0})^{T}\varphi^{0} = *\cdot\varphi_{0}^{k} + 2\cdot\varphi_{1}^{0} + *\cdot\varphi_{2}^{0}$$

$$= *\cdot\varphi_{0}^{k} + 2\cdot\frac{1}{h_{0}}\varphi\left(\frac{x}{h_{0}} - 1\right) + *\cdot\varphi_{2}^{0}$$

$$= *\cdot\varphi_{0}^{k} + 1\cdot\varphi\left(\frac{x}{2} - 1\right) + *\cdot\varphi_{2}^{0}$$

$$= *\frac{*}{2}|_{[0,2[} + 1|_{[2,4[} + \frac{*}{2}|_{[4,6[},$$

dasselbe Resultat wie mit dem Finite-Differenzen-Verfahren.

4.2.2 Berechnung auf $V^k \oplus W^k$

Satz 4.2.2 Die Projektion auf $V^k \oplus W^k$ ist definiert durch

$$P_{V^k \oplus W^k}(f) = h_k \sum_i (s_i^k \varphi_i^k + d_i^k \psi_i^k),$$

wobei

$$d_i^k := \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_i^k(x) dx \text{ und } \psi_i^k := \frac{1}{h_k} \psi\left(\frac{x}{h_k} - i\right).$$

Beweis Eine zu den φ_i^k 's analoge Rechnung liefert

$$<\psi_j^k, \psi_i^k> = \frac{1}{h_k} \delta_{ij}$$

und damit das Resulat.

Kombination der Rechnung für den Wavelet-Fall und der Rechnung für den auf V^0 ergibt

$$\begin{array}{rcl} a_{ij}^k & = & h_k^2 < (\psi_j^k)', \psi_i^k >, \\ b_{ij}^k & = & h_k^2 < (\varphi_j^k)', \psi_i^k >, \\ c_{ij}^k & = & h_k^2 < (\psi_j^k)', \varphi_i^k > \end{array}$$

und damit

$$a_{ij}^{k} = a_{i-j} \quad \text{mit } a_{l} := \int_{\mathbb{R}} \psi'(x)\psi(x-l) \ dx,$$

$$b_{ij}^{k} = b_{i-j} \quad \text{mit } b_{l} := \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\psi(x-l) \ dx,$$

$$c_{ij}^{k} = c_{i-j} \quad \text{mit } c_{l} := \int_{\mathbb{R}} \psi'(x)\varphi(x-l) \ dx.$$

In Abschnitt 2.3.1 konnte die verallgemeinerte Skalierungsgleichung abgeleitet werden:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{i} \alpha_i \, \varphi(2x - i)$$
 und daraus $\psi(x) = 2 \sum_{i} g_i \, \varphi(2x - i)$.

Damit gilt

$$a_l = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - l)\psi'(x) dx$$

 \vdots (gleiche Rechnung wie beim Wavelet-Fall)
 $= 4 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{i' \in \mathbb{Z}} g_i g_{i'} r_{2l+i+i'}.$

Analoge Resultate berechnet man für b_l und c_l , und so berechnen sich die Integrale für die Elemente der Matrizen A, B und C leicht zu

Die Werte sind die gleichen wie im Wavelet-Fall.

Dies ergibt insgesamt die drei Matrizen

$$A^k = \operatorname{tridiag} \left\{ \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right\}, \quad B^k = \operatorname{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right\}$$

und

$$C^k = \text{tridiag}\left\{\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right\}.$$

Die Skalierung $1/h_k$ erfolgt nun wieder durch die Multiplikation mit den Basisfunktionen.

Die Matrix $P^{k,k+1}$ hat hier die Gestalt

$$P^{k,k+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.2.3 Die Matrix $P^{k,k+1}$ ist nun nicht mehr orthogonal im Gegensatz zu der Matrix, die aus der Multiskalenanalyse der Wavelets resultierte. Die Vektoren sind noch immer orthogonal zueinander, jedoch nicht mehr normiert. Daher muß explizit mit der Inversen gerechnet werden (statt mit der Transponierten).

4.3 Differentiationsmatrix mit der VMSA, unstrukturiert

4.3.1 Berechnung auf V^k

Die Basisfunktionen des Grundraumes V^k sind

$$\varphi_i^k(x) = \frac{1}{|I_i^k|} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{|I_i^k|} &, x \in I_i^k \\ 0 &, \text{sonst} \end{cases}$$

für $i = 0, ..., N_k - 1$.

Nach Abschnitt 2.3.2 gilt für die Projektion einer Funktion f auf das Level k

$$P_{V^k} f(x) = \sum_{i=0}^{N_k - 1} |I_i^k| s_i^k \varphi_i^k(x).$$

Damit erhält man für die Ableitung der Projektion

$$\frac{d}{dx}P_{V^k}f(x) = \sum_{j=0}^{N_k-1} |I_j^k| s_j^k (\varphi_j^k)'(x)$$

und für die Projektion der Ableitung auf V^k :

$$P_{V^{k}}(\frac{d}{dx}P_{V^{k}}(f)) = \sum_{i=0}^{N_{k}-1} |I_{i}^{k}| < \frac{d}{dx}P_{V^{k}}f, \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} |I_{i}^{k}| < \sum_{j=0}^{N_{k}-1} |I_{j}^{k}| s_{j}^{k}(\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= \sum_{i=0}^{N_{k}-1} |I_{i}^{k}| \sum_{j=0}^{N_{k}-1} |I_{j}^{k}| s_{j}^{k} < (\varphi_{j}^{k})', \varphi_{i}^{k} > \varphi_{i}^{k}$$

$$= (R^{k}s^{k})^{T} \varphi^{k}.$$

 $mit R^k =$

$$\begin{pmatrix}
|I_{i}^{k}||I_{i}^{k}| < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{0}^{k} > & \cdots & |I_{i}^{k}||I_{N_{k}-1}^{k}| < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{0}^{k} > \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
|I_{N_{k}-1}^{k}||I_{i}^{k}| < (\varphi_{0}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > & \cdots & |I_{N_{k}-1}^{k}||I_{N_{k}-1}^{k}| < (\varphi_{N_{k}-1}^{k})', \varphi_{N_{k}-1}^{k} > \end{pmatrix},$$

$$s^{k} := \begin{pmatrix} s_{0}^{k} \\ \vdots \\ s_{N_{k}-1}^{k} \end{pmatrix} \text{ und } \varphi^{k} := \begin{pmatrix} \varphi_{0}^{k} \\ \vdots \\ \varphi_{N_{k}-1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix R^k enthält demnach die Elemente

$$r_{ij} = |I_i^k||I_j^k| < (\varphi_j^k)', \varphi_i^k >$$
, $i, j = 0, \dots, N_k - 1$.

Nach diesen Vorarbeiten können nun die Matrixelemente explizit berechnet werden:

$$\begin{split} r_{ij}^k &= |I_i^k| |I_j^k| < (\varphi_j^k)', \varphi_i^k > \\ &= |I_i^k| |I_j^k| \int_{\mathbb{R}} (\varphi_j^k)'(x) \varphi_i^k(x) \ dx \\ &= \frac{1}{|I_j^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{x - \sum_{m=0}^{j-1} |I_m^k|}{|I_j^k|} \right) \varphi \left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|} \right) \ dx. \end{split}$$

Substituiere $y := \frac{x}{|I_i^k|} \Longrightarrow dy = \frac{1}{|I_i^k|} dx$

$$r_{ij}^{k} = \frac{|I_{i}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_{i}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} y - \frac{\sum_{m=0}^{j-1} |I_{m}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} \right) \varphi \left(y - \frac{\sum_{m=0}^{i-1} |I_{m}^{k}|}{|I_{i}^{k}|} \right) dy$$

Substituiere $z := y - \frac{\sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|}$

$$r_{ij}^{k} = \frac{|I_{i}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_{i}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} z - \frac{\left(\sum_{m=0}^{j-1} - \sum_{m=0}^{i-1}\right) |I_{m}^{k}|}{|I_{j}^{k}|} \right) \varphi(z) dz$$
 (4.7)

Betrachtet werden nun die fünf Fälle $i-j=0,\,i-j=1,\,i-j=-1,\,i-j>1$ und i-j>-1.

Bemerkung 4.3.1 Die Ableitung von $\varphi(z)$ verschwindet für alle Werte außer für z=0 und z=1. Da φ an diesen Stellen unstetig ist, muß die Ableitung wieder mit Hilfe von Distributionen berechnet werden (siehe Abschnitt 4.1.1). Da im folgenden bei allen Fällen das Argument von φ' in Gleichung (4.7) null oder eins für z=0 oder z=1 wird, sofern es im Integrationsintervall [0,1] liegt, also an den Intervallenden des Integrationsintervalls, erhält man erneut bei allen Rechnungen den Faktor 1/2 (statt 1) beim Integral der Delta-Distribution. Siehe hierzu die Seiten 66 bis 70.

$$i - j = 0$$

$$r_{ii} = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z)\varphi(z) \ dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$i - j = 1$$

$$r_{i,i-1} = \frac{|I_i^k|}{|I_{i-1}^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_i^k|}{|I_{i-1}^k|} z + \frac{|I_{i-1}^k|}{|I_{i-1}^k|} \right) \varphi(z) dz$$
$$= \frac{|I_i^k|}{|I_{i-1}^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_i^k|}{|I_{i-1}^k|} (z+1) \right) \varphi(z) dz$$

 φ legt das Integrations
intervall I:=[0,1] fest. Wann wird das Argument von φ' null bzw. eins? Für
 $z=-\frac{|I_{i-1}^k|}{|I_i^k|}<0$, also

 $z \notin I$ bzw. $z = 0 \in I$. In letzerem Fall gilt $\varphi'(1) = -1$. Mit Bemerkung 4.3.1 gilt insgesamt

$$r_{i,i-1} = \frac{|I_i^k|}{|I_{i-1}^k|} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{|I_i^k|}{2|I_{i-1}^k|}.$$

i - j = -1

$$r_{i,i+1} = \frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} z - \frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} \right) \varphi(z) dz$$
$$= \frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} \int_{\mathbb{R}} \varphi' \left(\frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} (z-1) \right) \varphi(z) dz.$$

 φ legt das Integrationsintervall I := [0, 1] fest.

Wann wird das Argument von φ' null bzw. eins? Für $z=1\in I$ bzw. $z=\frac{|I_{i+1}^k|}{|I_i^k|}\notin I$. Für z=1 ist $\varphi'(0)=1$, und mit Bemerkung 4.3.1 berechnet man

$$r_{i,i+1} = \frac{|I_i^k|}{|I_{i+1}^k|} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{|I_i^k|}{2|I_{i+1}^k|}.$$

$$i-j>1$$

 φ legt das Integrations
intervall I:=[0,1] fest. Das Argument von φ'
wird null bei

$$z = -\frac{1}{|I_i^k|} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{i-1} - \sum_{m=0}^{j-1} |I_m^k|\right)}_{\text{nicht leer, da } i > j} < 0$$

und eins bei

$$z = -\frac{1}{|I_i^k|} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{i-1} - \sum_{m=0}^{j} |I_m^k|\right)}_{\text{nicht leer, da } i-1>j} < 0.$$

Beide Werte für z sind kleiner als null und liegen demnach nicht im Integrationsintervall. Wir erhalten daher

$$r_{ii} = 0$$
.

$$i-j > -1$$

Dieser Fall wird analog zum vorigen (i - j > 1) betrachtet. Die Werte für z, für die das Argument von φ' null bzw. eins wird, liegen wieder außerhalb des Integrationsintervalls I = [0, 1]. Daher gilt erneut

$$r_{ij} = 0.$$

Nach dieser Fallunterscheidung erhält man insgesamt die Matrix

$$R^{k} = \text{tridiag} \left\{ -\frac{|I_{i}^{k}|}{2|I_{i-1}^{k}|}, 0, \frac{|I_{i}^{k}|}{2|I_{i+1}^{k}|} \right\}.$$

Nun müssen die diskreten Werte s_i^0 noch mit den passenden Basisfunktionen

$$\varphi_i^k(x) = \frac{1}{|I_i^k|} \varphi\left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|}\right)$$

multipliziert werden, und man erhält so die Ableitungen.

Differentiationsmatrix versus Finite Differenzen

Im folgenden wird gezeigt, daß im unstrukturierten Fall die Vorschrift zur Berechnung der Ableitung, die mit Hilfe der Differentiationsmatrix berechnet wurde, sich von der unterscheidet, die man mittels des Finite-Differenzen-Verfahren erhält. Im Anschluß daran wird die Güte beider Verfahren betrachtet.

Für die Ableitung mit der Differentiationsmatrix gilt

$$(s_i^k)' = \frac{1}{2|I_{i+1}^k|} s_{i+1}^k - \frac{1}{2|I_{i-1}^k|} s_{i-1}^k,$$

wobei die s_i^k wieder die diskreten Zellmittel darstellen.

Für die Finiten Differenzen erhält man mit Taylorentwicklung:

$$f\left(x + \frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2}\right) = f(x) + \frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2}f'(x) + \dots$$
$$f\left(x - \frac{|I_i^k| + |I_{i-1}^k|}{2}\right) = f(x) - \frac{|I_i^k| + |I_{i-1}^k|}{2}f'(x) + \dots$$

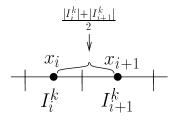


Abbildung 4.2: Unstrukturiertes Intervall mit Zellen I_i^k und Zellmittelpunkten x_i

$$\iff s_{i+1}^k \approx s_i^k + \frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2} (s_i^k)'$$

$$s_{i-1}^k \approx s_i^k - \frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2} (s_i^k)'$$

$$\implies s_{i+1}^k - s_{i-1}^k \approx \left(\frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2} + \frac{|I_i^k| + |I_{i-1}^k|}{2}\right) (s_i^k)'$$

$$= \frac{|I_{i-1}^k| + 2|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2} (s_i^k)'.$$

Man erhält also für die Ableitung mit Finite Differenzen (symmetrische Differenz)

$$(s_i^k)' \approx \frac{2}{|I_{i-1}^k| + 2|I_i^k| + |I_{i+1}^k|} (s_{i+1}^k - s_{i-1}^k)$$

$$= \frac{1}{\frac{|I_{i-1}^k| + |I_i^k|}{2} + \frac{|I_i^k| + |I_{i+1}^k|}{2}} (s_{i+1}^k - s_{i-1}^k).$$

Bei den Finiten Differenzen werden also die (halben) Intervalle links und rechts vom diskreten $Punkt\ x_i$ (Mittelpunkt des Intervalls) genommen, bei der Differentiationsmatrix die Intervalle rechts und links vom $Intervall\ I_i^k$. Ein weiterer Unterschied ist, daß die Gewichtungen bei Finiten Differenzen für die Werte s_{i-1}^k und s_{i+1}^k gleich ist, bei der Differentiationsmatrix unterschiedlich. Bei den numerischen Tests wird sich zeigen, daß dies im linearen Fall zur Inkonsistenz des Verfahrens führt.

Es wurden Tests mit einem zufällig erzeugten unstrukturierten Intervall durchgeführt. Das Intervall bestand aus 10.000 Teilintervallen der Größenordnung 1. Zwei sich berührende Teilintervalle hatten eine Größendifferenz von höchstens fünf Prozent. Da die Berechnungen der hier benutzten Differentiationsmatrizen nur für periodische Funktionen gelten (siehe

Funktion	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler
$\frac{1}{10}x$	8.00e-00	2.46e+01
$\sin(x)$	9.43e-02	1.75e-01
$\sin(x)\cos(x)$	2.85e-01	4.78e-01

Tabelle 4.1: L_1 -, L_{∞} -Fehler für die Berechnung der Ableitung mit der Differentiationsmatrix

Funktion	L_1 -Fehler	L_{∞} -Fehler
$\frac{1}{10}x$	0e-00	0e-00
$\sin(x)$	9.41e-02	1.59e-01
$\sin(x)\cos(x)$	2.85e-01	4.70e-01

Tabelle 4.2: L_1 -, L_∞ -Fehler für die Berechnung der Ableitung mit Finiten Differenzen

Bemerkung 4.1.4), wurde bei den Tests der Wert des ersten und letzten Teilintervalls nicht berücksichtigt.

Drei verschiedene Funktionen wurden betrachtet und für die Lösungen jeweils die L_1 - und L_{∞} -Fehler berechnet. Die Zellmittel der Funktionen und die ihrer jeweiligen Ableitungen wurden mit Gauß-Quadratur mit zwei Stützstellen (exakt bis Ordnung 2) berechnet.

Sofort fällt auf, daß bei der ersten Funktion $\frac{1}{10}x$ der Fehler der Ableitung, die mit der Differentiationsmatrix berechnet wurde, mit 8.00e-00 bzw. 2.46e+01 unakzeptabel groß ist, wohingegen die Ableitung, die mit den Finite Differenzen berechnet wurde, exakt berechnet werden konnte. Letzteres ist nicht verwunderlich, da die symmetrische Differenz des Differenzenverfahrens für unstrukturierte Intervalle konsistent von der Ordnung 1 ist (durch die unstrukturierten Intervalle geht eine Ordnung verloren). Für die Ableitung, die mit der Differentiationsmatrix berechnet wurde, zeigt dies jedoch, daß dieses Verfahren im linearen Fall inkonsistent ist.

Für die beiden anderen Funktionen $\sin(x)$ und $\sin(x)\cos(x)$, die mit keinem der Verfahren exakt berechnet werden können, sind die Resultate bzgl. der Berechnung mit der Differentiationsmatrix besser. Die Fehler liegen für beide Verfahren in der Größenordnung 10^{-1} , 10^{-2} . Die berechneten L_1 - und L_{∞} -Fehler unterscheiden sich bei diesen Funktionen für beide Methoden kaum. Jedoch sind die Werte für die Berechnung mit der Finite-Differenzen-Methode besser als die mit der Differentiationsmatrix.

Daß die Ergebnisse für Funktionen, die mit beiden Verfahren nicht exakt berechnet werden können, ähnliche Resultate für Differentiationsmatrix und Finite Differenzen liefern, ist zwar positiv anzumerken, jedoch scheint es wegen der Inkonsistenz im linearen Fall nicht sinnvoll, die Theorie der Differentiationsmatrizen auf zwei Dimensionen zu erweitern.

4.3.2 Berechnung auf $V^k \oplus W^k$

Die skalierten Versionen des verallgemeinerten Wavelets ψ_i^k der verallgemeinerten Multiskalenanalyse (siehe hierzu auch Abschnitt 2.3.2) sind gegeben durch

$$\psi_{i}^{k+1} := \sum_{l} g_{l} \varphi_{2i+l}^{k} \quad \text{mit} \quad g_{l} = (-1)^{l} \frac{|I_{2i+l}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|}, \quad l = 0, 1$$

$$= \frac{|I_{2i}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi_{2i}^{k} + \frac{|I_{2i+1}^{k}|}{|I_{i}^{k+1}|} \varphi_{2i+1}^{k}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|I_{i}^{k+1}|}, & x \in I_{2i}^{k}, \\ -\frac{1}{|I_{i}^{k+1}|}, & x \in I_{2i+1}^{k}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit berechnen sich die d_i^k zu

$$\begin{split} d_i^k &= \langle f, \psi_i^k \rangle \\ &= \frac{1}{|I_i^k|} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_i^k \left(\frac{x - \sum_{m=0}^{i-1} |I_m^k|}{|I_i^k|} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{|I_i^k|} \left(\int_{|I_{2i}^{k-1}|} f(x) \, dx - \int_{|I_{2i+1}^{k-1}|} f(x) \, dx \right). \end{split}$$

Dies ergibt die Matrix:

$$P^{k,k+1} = \begin{bmatrix} \frac{|I_{2i}^k|}{|I_i^{k+1}|} & \frac{|I_{2i+1}^k|}{|I_i^{k+1}|} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{|I_{2i}^k|}{|I_i^{k+1}|} & \frac{|I_{2i+1}^k|}{|I_i^{k+1}|} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \hline \frac{|I_{2i}^k|}{|I_i^{k+1}|} & -\frac{|I_{2i+1}^k|}{|I_i^{k+1}|} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{|I_{2i}^k|}{|I_i^{k+1}|} & -\frac{|I_{2i+1}^k|}{|I_i^{k+1}|} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{bmatrix}$$

Die Projektion auf $V^k \oplus W^k$ lautet analog zu P_{V^k}

$$P_{V^1 \oplus W^1}(f) = \sum_{i} |I_i^k| (s_i^k \varphi_i^k + d_i^k \psi_i^k).$$

Berechnung der Projektion der Ableitung nach gewohnter Manier ergibt die Matrizen

$$\begin{array}{lll} r_{ij}^k &=& |I_i^k||I_j^k| < (\varphi_j^k)', \psi_i^k > \text{ (Berechnung siehe voriges Kapitel)}, \\ a_{ij}^k &=& |I_i^k||I_j^k| < (\psi_j^k)', \psi_i^k >, \\ b_{ij}^k &=& |I_i^k||I_j^k| < (\varphi_j^k)', \psi_i^k >, \\ c_{ij}^k &=& |I_i^k||I_j^k| < (\psi_j^k)', \varphi_i^k >. \end{array}$$

Die Berechnung der Matrizen ist etwas aufwendiger, jedoch bleibt dem Leser der Großteil der Rechnung erspart.

In Kurzform gilt für das Wavelet

$$\psi_i^k = \sum_{l} g_l \, \varphi_{2i+l}^{k-1} = \sum_{l} \frac{1}{|I_{2i+1}^{k-1}|} g_l \, \varphi \left(\frac{x - \sum_{m=0}^{2i+l-1} |I_m^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} \right).$$

Ableiten von ψ_i^k und Einsetzen der Funktionen in die obige Formel für die a_{ij}^k ergibt nach Substitution

$$a_{ij}^{k} = \sum_{l} \sum_{l'} \frac{|I_{i}^{k}||I_{j}^{k}|}{|I_{2j+l'}^{k-1}||I_{2i+l}^{k-1}|} g_{l} g_{l'}$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi \left(\frac{|I_{2j+l'}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} z - \frac{\left(\sum_{m=0}^{2i+l-1} - \sum_{m=0}^{2j+l'-1}\right) |I_{m}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} \right) dz.$$

Bei der Berechnung des Integrales müssen genau wie bei der Berechnung der r_{ij}^k die fünf Fälle $i-j=0,\ i-j=1,\ i-j=-1,\ i-j>1$ und i-j>-1 betrachtet werden. Bei jeder Rechnung werden wiederum die vier Kombinationen von l=0,1 und l'=0,1 berücksichtigt.

Man errechnet insgesamt für die Matrix A eine Tridiagonalmatrix mit Nullen auf der Diagonale. Wenn man die Intervalle äquidistant wählt oder entsprechend der Waveletkonditionen, erhält man die Matrix A aus Abschnitt 4.2.2 bzw. Abschnitt 4.1.2 zurück.

$$A^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ \frac{|I_{2i}^{k-1}| \cdot |I_{2i+1}^{k-1}|}{2 |I_{i}^{k}|} \cdot \frac{|I_{i-1}^{k}|}{|I_{2i-1}^{k-1}|^{2}}, \ 0, \ -\frac{|I_{2i}^{k-1}| \cdot |I_{2i+1}^{k-1}|}{2 |I_{i}^{k}|} \cdot \frac{|I_{i+1}^{k}|}{|I_{2i+2}^{k-1}|^{2}} \right\}.$$

Um die Matrizen B^k und C^k zu berechnen, benötigt man die verallgemeinerte Skalierungsgleichung (2.3.2). Man erhält schließlich die Darstellungen

$$b_{ij}^{k} = \sum_{l} \sum_{l'} \frac{|I_{i}^{k}||I_{j}^{k}|}{|I_{2j+l'}^{k-1}||I_{2i+l}^{k-1}|} g_{l} a_{l'}$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi \left(\frac{|I_{2j+l'}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} z - \frac{\left(\sum_{m=0}^{2i+l-1} - \sum_{m=0}^{2j+l'-1}\right) |I_{m}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} \right) dz$$

$$c_{ij}^{k} = \sum_{l} \sum_{l'} \frac{|I_{i}^{k}||I_{j}^{k}|}{|I_{2j+l'}^{k-1}||I_{2i+l}^{k-1}|} a_{l} g_{l'}$$

$$\cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi'(z) \varphi \left(\frac{|I_{2j+l'}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} z - \frac{\left(\sum_{m=0}^{2i+l-1} - \sum_{m=0}^{2j+l'-1}\right) |I_{m}^{k-1}|}{|I_{2i+l}^{k-1}|} \right) dz.$$

Man beachte, daß die Vorfaktoren, die aus den Intervallängen bestehen, und die Integrale für A, B und C identisch sind. Die unterschiedlichen Ergebnisse resultieren allein aus den Faktoren g_l und a_l .

Insgesamt erhält man für B und C die Darstellungen

$$B^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ -\frac{|I_{2i}^{k-1}||I_{2i+1}^{k-1}|}{2|I_{i}^{k}|} \frac{|I_{i-1}^{k}|}{|I_{2i-1}^{k-1}|^{2}}, \frac{|I_{2i+1}^{k-1}|}{|I_{2i}^{k-1}|}, -\frac{|I_{2i}^{k-1}||I_{2i+1}^{k-1}|}{2|I_{i}^{k}|} \frac{|I_{i+1}^{k}|}{|I_{2i+2}^{k-1}|^{2}} \right\}$$
und
$$C^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ \frac{|I_{2i}^{k-1}||I_{2i+1}^{k-1}|}{2|I_{i}^{k}|} \frac{|I_{i-1}^{k}|}{|I_{2i-1}^{k-1}|^{2}}, -\frac{|I_{2i+1}^{k-1}|}{|I_{2i}^{k-1}|}, \frac{|I_{2i}^{k-1}||I_{2i+1}^{k-1}|}{2|I_{i}^{k}|} \frac{|I_{i+1}^{k}|}{|I_{2i+2}^{k-1}|^{2}} \right\}.$$

Alle drei Matrizen beinhalten dieselben Größen als Einträge. Setze daher

$$C_i^k := \frac{|I_{2i}^{k-1}| \cdot |I_{2i+1}^{k-1}|}{|I_i^k|} \quad \text{und} \quad C_i^{k-1} := \frac{|I_{2i+1}^{k-1}|}{|I_{2i}^{k-1}|},$$

$$C_{i-1}^k := \frac{|I_{i-1}^k|}{|I_{2i-1}^{k-1}|^2} \quad \text{und} \quad C_{i+1}^k := \frac{|I_{i+1}^k|}{|I_{2i+2}^{k-1}|^2}.$$

Der Beitrag C_i^k enthält Intervallängen, die zum Intervall I_i^k mit $|I_i^k|=|I_{2i}^k|+|I_{2i+1}^k|$ gehören, analog $C_{i\pm 1}^k$. C_i^{k-1} besteht aus den feinen Zellen, die zum groben Intervall I_i^k gehören.

So können die Matrizen übersichtlicher geschrieben werden als

$$A^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ \frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i-1}^{k}, 0, -\frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i+1}^{k} \right\}$$

$$B^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ -\frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i-1}^{k}, C_{i}^{k-1}, -\frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i+1}^{k} \right\}$$

$$C^{k} = \operatorname{tridiag} \left\{ \frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i-1}^{k}, -C_{i}^{k-1}, \frac{1}{2} C_{i}^{k} C_{i+1}^{k} \right\}$$

Wählt man alle Teilintervalle äquidistant, erhält man — wie zu erwarten war — das Ergebnis mit der strukturieren VMSA zurück.

Kapitel 5

Detektion von Phänomenen

Numerische Simulationen strömungsmechanischer Vorgänge liefern schon im Zweidimensionalen unüberschaubar große Datensätze. Das Problem ist, die Daten relevanter Informationen — bei Problemen der Gasdynamik handelt es sich meist um die typischen Phänomene Stoß und Kontaktunstetigkeit — herauszufiltern. Auch für dieses Problem der Phänomenerkennung liefert die verallgemeinerte Skalenanalyse einen Ansatz. Mit Hilfe der berechneten Rekonstruktionsfehler, die beim Übergang vom feinsten Gitter zum nächstgröberen entstehen, und der Rankine-Hugoniot-Bedingungen, die den Zusammenhang zwischen den Werten der Zustandsvariablen vor und hinter Unstetigkeiten und der Geschwindigkeit der Unstetigkeitskurve beschreiben, können Stöße und Kontaktunstetigkeiten leicht voneinander getrennt werden (siehe hierzu auch Abschnitt 1.3). Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen ermöglichen dann eine genauere Lokalisierung der Unstetigkeiten.

Zum Sprachgebrauch: Zum "Streifen" der Unstetigkeit gehören diejenigen Zellen, die mit Hilfe der Rekonstruktionsfehler als Teil des Stoßes oder der Kontaktunstetigkeit erkannt wurden (stets in gelb abgebildet). Die "Linie" der Unstetigkeit liegt stets im Streifen der Unstetigkeit und liefert eine genauere Lokalisierung der Unstetigkeitskurve (in schwarz abgebildet). "Markiert" ist eine Zelle, die als Teil einer Unstetigkeit detektiert wurde.

In Abschnitt 5.1 wird der Algorithmus beschrieben, mit dem die Rekonstruktionsfehler von Stößen und Kontaktunstetigkeiten voneinander getrennt werden. Dies resultiert in Streifen von Unstetigkeiten, die jeweils einige Zellen breit sind. Die Anzahl dieser Zellen hängt von der Art der Unstetigkeit und der Güte der verwendeten numerischen Lösung ab. Es gibt jedoch einzelne Zellen, die nicht markiert sind, obwohl (fast) alle ihre Nachbarn markiert sind. Diese Zellen liegen demnach im Streifen der Unstetigkeit und bilden dort Löcher. Der Algorithmus, der auch diese Zellen markiert, ist Inhalt von

Abschnitt 5.2. Abschnitt 5.3 enthält das Lokalisieren der Unstetigkeitslinie und Abschnitt 5.4 die numerischen Resultate.

Die einzelnen Schritte werden ausführlich an der numerischen Lösung des Problems "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" erläutert, das auch schon in Kapitel 3 bei der Datenkompression als Beispiel diente.

5.1 Trennen von Stoß und Kontaktunstetigkeit

Aus dem ersten Kapitel ist bekannt, daß die Werte der Dichte sowohl über Stößen als auch über Kontaktunstetigkeiten springen, der Druck jedoch über Kontaktunstetigkeiten konstant bleibt. Wie schon in Kapitel 1 bezeichnen die eckigen Klammern die Differenz der Werte vor und hinter dem Sprung: $[u] = u_l - u_r$.

Damit gilt

für Stöße: $[\rho] \neq 0$, $[p] \neq 0$,

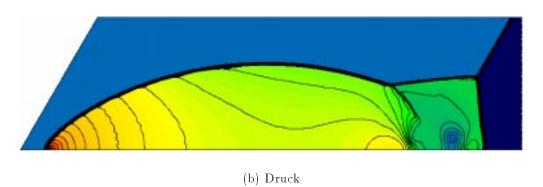
für Kontaktunstetigkeiten: $[\rho] \neq 0$, [p] = 0.

Dies kann man deutlich an den Strömungsbildern von Dichte und Druck in Abbildung 5.1 sehen. In der rechten unteren Ecke des Strömungsfeldes der Dichte sieht man eine Kontaktunstetigkeit in Form einer Nase, die im Strömungsfeld des Drucks nicht vorhanden ist. Auf den Abbildungen der Rekonstruktionsfehler von Dichte und Druck kann man jedoch ebenfalls beim Druck gespeicherte Fehler entlang der Kontaktunstetigkeit feststellen, siehe Abbildungen 5.2 und 5.3.

Diese Fehler entstehen durch Oszillationen, die durch die lokale Rekonstruktion des Strömungsfeldes mit Hilfe der diskreten numerischen Daten entstehen. Dies kann man am einfachsten sehen, wenn man sich Querschnitte der rekonstruierten Funktionen auf diesem Gebiet anschaut. Die vier Querschnitte in Abbildung 5.4 beziehen sich auf das Rechteck, das auf dem jeweils feinsten Gitter in den Abbildungen 5.2 und 5.3 zu sehen ist. Sie wurden horizontal ("W-O"), vertikal ("N-S") und diagonal ("NW-SO" und "SW-NO") genommen; dabei verlaufen alle Schnitte durch den Schwerpunkt des Rechtecks. Besonders gut sind Oszillationen an den Teilabbildungen (a) und (d) zu sehen. Die gespeicherten Rekonstruktionsfehler sind jedoch so klein, daß man durch geeignete Wahl des Trennungsparameters ζ (siehe weiter unten) dieses Problem umgehen kann.



(a) Dichte



(/

Abbildung 5.1: Numerische Lösung des Problems "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes"

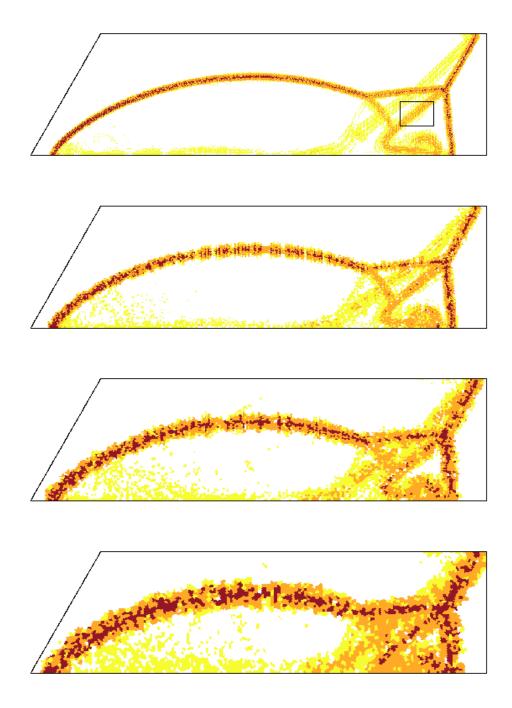


Abbildung 5.2: Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes – skalierte Rekonstruktionsfehler der Dichte mit den Toleranzgrenzen $\varepsilon=10^{-4}$ in gelb, $\varepsilon=10^{-3}$ in orange und $\varepsilon=10^{-2}$ in braun

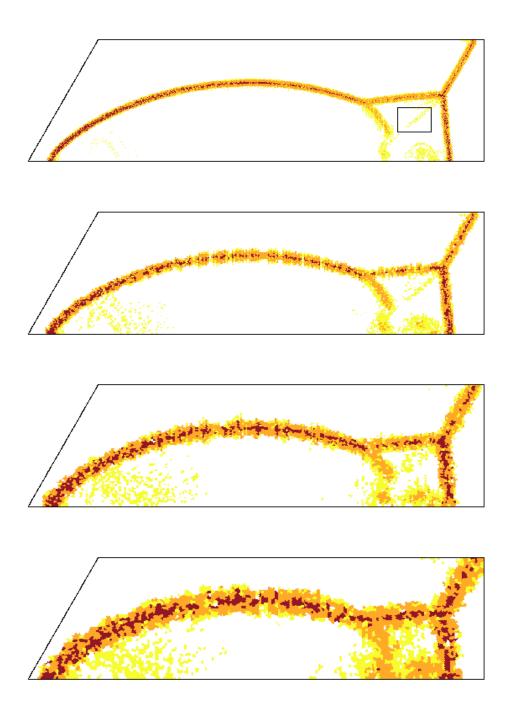


Abbildung 5.3: Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes – skalierte Rekonstruktionsfehler des Drucks mit den Toleranzgrenzen $\varepsilon=10^{-4}$ in gelb, $\varepsilon=10^{-3}$ in orange und $\varepsilon=10^{-2}$ in braun

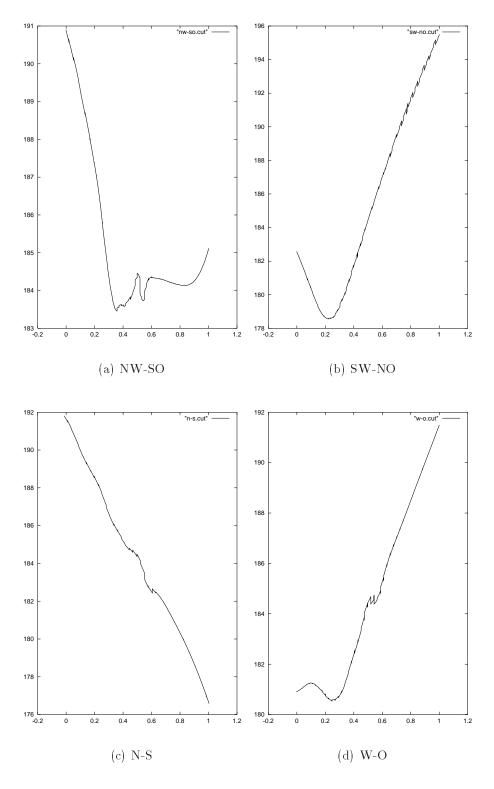


Abbildung 5.4: Querschnitte durch die rekonstruierten Lösungen

Bemerkung 5.1.1 Im gesamten fünften Kapitel wurden alle Rekonstruktionsfehler, mit denen gerechnet wurde, vor dem Detektieren auf das Einheitsintervall projiziert. Dies ist notwendig, um absolute Trennungsparameter benutzen zu können, da die verschiedenen Zustandsvariablen sehr unterschiedliche Wertebereiche besitzen. Dies ist deutlich in den Abbildungen 5.5 und 5.6 zu sehen, auf denen die Rekonstruktionsfehler von Dichte und Druck ohne Skalierung abgebildet sind. Die Fehler des Drucks umfassen die gesamte Farbskala und nehmen sogar Werte größer hundert an (Werte größer $\varepsilon = 10$ sind rot gekennzeichnet), wohingegen die Dichte nur wenige Fehler größer $\varepsilon = 1$ (in dunkelblau abgebildet) aufweist.

Man beachte außerdem, daß für die Detektion von Phänomenen nur zwei Gitter notwendig sind, die die Rekonstruktionsfehler auf dem feinsten Gitter liefern. Fehler auf gröberen Gittern werden nicht benutzt, da sie keine weiteren Informationen liefern, sondern die Unstetigkeiten lediglich verschmieren, siehe alle vier Abbildungen 5.2, 5.3, 5.5 und 5.6 der skalierten und unskalierten Fehler für Dichte und Druck. Es wurden jeweils die Rekonstruktionsfehler auf den ersten vier Gittern berechnet.

Der Trennungsparameter ζ gibt die Größe an, ab der die Rekonstruktionsfehler als relevant gelten. So können Stöße und Kontaktunstetigkeiten mit folgendem Algorithmus separiert werden:

- Für alle Zellen Ω_i^k :
 - Falls (Dichte $(\Omega_i^k) > \zeta$ und Druck $(\Omega_i^k) > \zeta$) Markiere Ω_i^k als Zelle eines Stoßes.
 - Falls (Dichte $(\Omega_i^k) > \zeta$ und Druck $(\Omega_i^k) < \zeta$) Markiere Ω_i^k als Zelle einer Kontaktunstetigkeit.

Das Ergebnis der Trennung mit Trennungsparameter $\zeta=10^{-2}$ findet man in Abbildung 5.7. Beim Vergleich mit den Strömungsbildern (Abbildung 5.1) sieht man, daß Stöße und Kontaktstetigkeit klar voneinander getrennt werden konnten, abgesehen von einzelnen Zellen, die das Bild verunreinigen. Diese Verunreinigungen verschwinden teilweise (diejenigen, die eigentlich zum Stoß gehören) durch Verkleinern des Trennungsparameters, jedoch enthalten dann die Streifen der Unstetigkeiten auch mehr Löcher, d.h. mehr nicht detektierte Zellen. Besonders muß dabei auf die Kontaktunstetigkeit geachtet werden, da sie weniger stark ausgeprägt ist als die Stöße. Die Störungen unten links vor dem Stoß (also rechts davon) resultieren daraus, daß sich die Werte in diesem Bereich von Zelle zu Zelle sehr stark ändern.

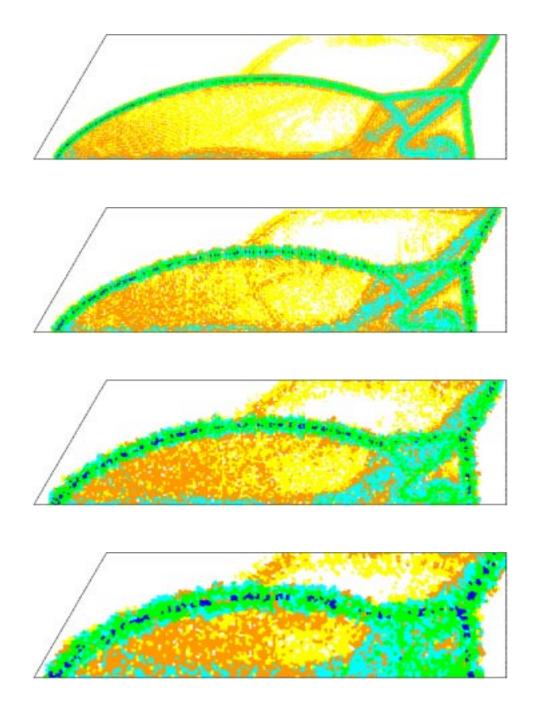


Abbildung 5.5: Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes – unskalierte Rekonstruktionsfehler der Dichte mit den Toleranzgrenzen $\varepsilon=10^{-4}$ in gelb, $\varepsilon=10^{-3}$ in orange, $\varepsilon=10^{-2}$ in hellblau, $\varepsilon=10^{-1}$ in grün und $\varepsilon=1$ in dunkelblau

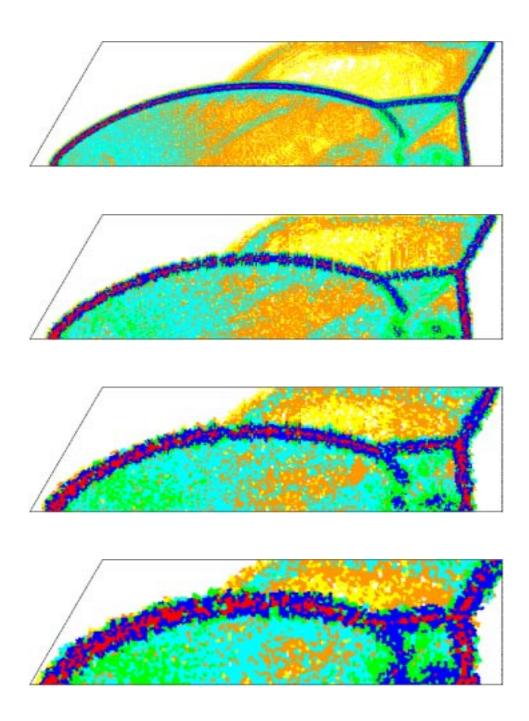


Abbildung 5.6: Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes – unskalierte Rekonstruktionsfehler des Drucks mit den Toleranzgrenzen $\varepsilon=10^{-4}$ in gelb, $\varepsilon=10^{-3}$ in orange, $\varepsilon=10^{-2}$ in hellblau, $\varepsilon=10^{-1}$ in grün, $\varepsilon=1$ in dunkelblau und $\varepsilon=10$ in rot

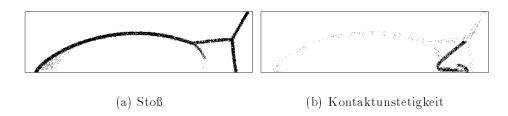


Abbildung 5.7: Mittels VMSA getrennte Phänomene

5.2 Füllen der Löcher in den Streifen der Unstetigkeiten

Außer den einzelnen Zellen, die nicht markiert, aber deren Nachbarn (fast) alle markiert sind, gibt es solche, die markiert sind, obwohl der überwiegende Teil ihrer Nachbarn nicht markiert ist. Diese Zellen gehören also zu keinem Unstetigkeitsstreifen und stellen daher Störungen dar. Da beide Arten von isolierten Zellen das genaue Lokalisieren der Unstetigkeit erschweren, wird im folgenden ein Algorithmus angegeben, der die noch nicht markierten Zellen im Streifen der Unstetigkeiten markiert und einzelne, über das Gebiet verteilte Zellen, löscht.

Der Algorithmus ist rein geometrisch motiviert. Ein datenorientierter Ansatz erscheint nicht sinnvoll, da die bestehenden Unstetigkeiten bereits datenorientiert erstellt wurden. Außerdem ist das Problem rein geometrischer Natur, da es auf Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Zellen innerhalb des Gitters basiert.

Es bezeichne #MARK die Anzahl der markierten Nachbarn. Weiterhin sei #NGB1 die Anzahl der markierten Nachbarn, die notwendig ist, um eine Zelle als im Stoß liegende zu erkennen und zu markieren. Analog ist #NGB2 die Anzahl der nicht markierten Nachbarn, die eine markierte Zelle höchstens haben darf, damit deren Markierung wieder gelöscht werden kann. Da Randzellen naturgemäß weniger Nachbarn besitzen, wurden die Kriterien für diese Zellen etwas abgeschwächt:

- Für alle Zellen Ω_i^k , die noch nicht markiert sind:
 - Suche alle Nachbarn der Zelle Ω_i^k .
 - Zähle die markierten Nachbarn: #MARK.
 - * Falls für eine innere Zelle (#MARK \geq #NGB1) Markiere Ω_i^k .

- * Falls für eine Randzelle (#MARK \geq #NGB1-1) Markiere Ω_i^k .
- Für alle markierten Zellen Ω_i^k :
 - Suche alle Nachbarn der Zelle Ω_i^k .
 - Zähle die markierten Nachbarn: #MARK.
 - * Falls für eine innere Zelle (#MARK \leq #NGB2) Lösche die Markierung von Ω_i^k .
 - * Falls für eine Randzelle (#MARK \leq #NGB2-1) Lösche die Markierung von Ω_i^k .

Abbildung 5.8 zeigt die Kontaktstetigkeit des betrachteten Problems (a) vor und (b) nach Anwendung des Füllalgorithmus'. Er wurde dreimal mit den Parametern #NGB1 = 4 und #NGB2 = 2 für die Stöße und #NGB1 = 3 und #NGB2 = 2 für die Kontaktunstetigkeit ausgeführt. Es ist gut zu erkennen, daß sowohl der Streifen vollständig gefüllt, als auch die Zellen, die nicht dazugehören, gelöscht werden konnten. Beim Stoß konnten ebenfalls die Zellen, die in Abbildung 5.7 unten links vor der Spitze des Stoßes zu sehen sind, gelöscht werden.

Der Algorithmus wurde mehrfach hintereinander ausgeführt, um einen möglichst glatten Rand bei den Phänomenen zu bekommen und alle einzelnen Zellen zu löschen. Besonders ratsam ist dies bei Kontaktunstetigkeiten, da diese schwächer ausgeprägt sind als Stöße. Bei der Wahl des Parameters #NGB1 ist jedoch Vorsicht geboten: Falls der Parameter zu klein gewählt wird (ab #NGB1 = 3), terminiert der Algorithmus beim Stoß nicht, bevor nicht das gesamte Gebiet, bei der Kontaktunstetigkeit nicht, bevor nicht die ganze Nase markiert ist. Für #NGB1 = 4 terminiert der Algorithmus nach sechs Durchläufen für den Stoß und fünf für die Kontaktunstetigkeit. Da diese jedoch mit #NGB1 = 4 zu große Löcher im Inneren und am Rand aufweist, wurde für die Kontaktunstetigkeit der Wert #NGB1 = 3 gewählt. Da (wie auch beim Stoß) nach dreimaligem Aufruf des Algorithmus' nur noch ein bis zwei Markierungen geändert werden, sind weitere Durchgänge nicht nötig.

5.3 Genaues Lokalisieren der Unstetigkeiten

Ziel ist es, die Rankine-Hugoniot-Bedingungen dazu zu benutzen, die Unstetigkeiten genauer zu lokalisieren, so daß sie im Endeffekt aus jeweils einer Linie bestehen, die ein oder zwei Zellen breit ist.

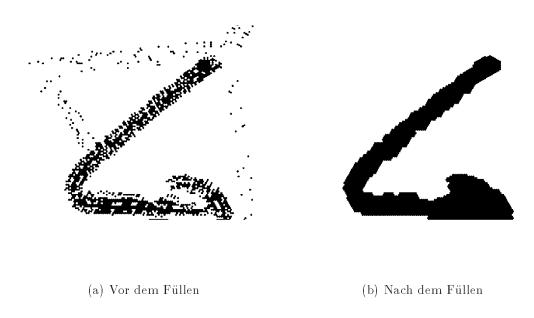


Abbildung 5.8: detektierte Kontaktunstetigkeit

5.3.1 Der Lokalisierungsalgorithmus

Die Idee besteht darin, am Ende einer Unstetigkeitskurve zu beginnen, eine Anfangszelle zu suchen und sich Zelle für Zelle vorzuarbeiten, bis man eine Linie als Unstetigkeitskurve erhält. Für Stöße ist das Suchen einer Anfangszelle relativ einfach, da sie meistens Wände berühren. Entweder sind die Stöße dadurch entstanden, daß Strömungen auf feste Wände trafen, oder aber die Stöße berühren die Wände, die das betrachtete Gebiet begrenzen, wodurch die Anfangszelle automatisch eine Randzelle ist. Man muß jedoch auch beachten, daß es mehrere Stöße und somit mehrere Gruppen von Randzellen gibt, von denen jedoch auch zwei Ränder zu einer Unstetigkeitskurve gehören können.

Welche der Nachbarzellen der jeweils zuletzt lokalisierten Zelle die Nachfolgerzelle ist, wird mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingungen (RH) berechnet. Hierbei werden die Fehler berechnet, die durch die Approximation an die Geschwindigkeit der Unstetigkeit in Normalenrichtung entstehen. Wie dies genau realisiert ist, wird in Abschnitt 5.3.2 erläutert.

Der Lokalisierungsalgorithmus lautet:

- Suche alle Gruppen von markierten Randzellen.
- Suche für jede dieser Gruppen die Startzelle Ω_i^k mit der RH-Bedingung.

- Solange die Linie nicht auf eine andere trifft, nicht auf den Rand trifft und noch markierte Zellen zur Verfügung stehen:
 - Suche die Nachbarn der Zelle Ω_i^k . (*)
 - Berechne für jede zulässige Zelle die RH-Bedingungen.
 - Wähle diejenige Zelle als neue (letzte) Zelle der Linie, die mit Hilfe der RH-Bedingungen die Geschwindigkeit der Unstetigkeit in Normalenrichtung am besten approximiert.
 - Gehe zur Zeile (*).

Eine zulässige Zelle ist hierbei eine Zelle, die markiert ist und noch nicht zur lokalisierten Linie gehört.

5.3.2 Die RH-Bedingungen

In Abschnitt 1.3 wurden die Rankine-Hugoniot-Bedingungen hergeleitet, die den Zusammenhang zwischen den Zuständen vor und hinter einer Unstetigkeit und der Geschwindigkeit der Unstetigkeitskurve beschreiben:

$$([u]\vec{c} - [F]) \cdot \vec{n} = 0$$

bzw.

$$0 = \sum_{i=1}^{2} (f_i(u_l) - f_i(u_r)) n_i - \vec{c} \cdot \vec{n} (u_l - u_r)$$
$$= \sum_{i=1}^{2} (f_i(u_l) - f_i(u_r) - c_i(u_l - u_r)) n_i.$$

Für die Euler-Gleichungen ergaben sich in kompakter Form die Bedingungen

$$\begin{split} \left[\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\right] - \vec{c}\cdot\vec{n}\left[\rho\right] &= 0, \\ \left[(\rho\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{v} + p\,\vec{n}\right] - \vec{c}\cdot\vec{n}\left[\rho\vec{v}\right] &= 0, \\ \left[\rho H\;\vec{v}\cdot\vec{n}\right] - \vec{c}\cdot\vec{n}\left[\rho E\right] &= 0. \end{split}$$

Ausgeschrieben lesen sich die Bedingungen für die Massenerhaltung als

$$(\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r) n_1 + (\rho_l v_2^l - \rho_r v_2^r) n_2 - \vec{c} \cdot \vec{n} (\rho_l - \rho_r) = 0,$$

für die Impulserhaltung als

$$\left(\rho_l(v_1^l)^2 + p_l - \rho_r(v_1^r)^2 - p_r\right)n_1 + \left(\rho_l v_1^l v_2^l - \rho_r v_1^r v_2^r\right)n_2 - \vec{c} \cdot \vec{n} \left(\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r\right) = 0$$

und

$$\left(\rho_l v_1^l v_2^l - \rho_r v_1^r v_2^r\right) n_1 + \left(\rho_l (v_2^l)^2 + p_l - \rho_r (v_2^r)^2 - p_r\right) n_2 - \vec{c} \cdot \vec{n} \left(\rho_l v_2^l - \rho_r v_2^r\right) = 0$$

und für die Energieerhaltung als

$$(\rho_l v_1^l H_l - \rho_r v_1^r H_r) n_1 + (\rho_l v_2^l H_l - \rho_r v_2^r H_r) n_2 - \vec{c} \cdot \vec{n} (\rho_l E_l - \rho_r E_r) = 0.$$

Es wurden drei Varianten dieser vier Bedingungen implementiert (die RH1-, RH2- und RH3-Methode), die im folgenden erläutert werden.

Die RH1-Methode

Die Komponenten der einzigen unbekannten Größe, der Geschwindigkeit des Stoßes, treten in der Form $\vec{c} \cdot \vec{n}$, also als Skalarprodukt auf und können daher nicht einzeln berechnet werden. Man löse daher die vier Gleichungen nach dem Skalarprodukt auf und erhält so für die Massenerhaltung

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\left(\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r\right) n_1 + \left(\rho_l v_2^l - \rho_r v_2^r\right) n_2}{\rho_l - \rho_r} =: c_\rho, \tag{5.1}$$

die Impulserhaltung

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\left(\rho_l(v_1^l)^2 + p_l - \rho_r(v_1^r)^2 - p_r\right)n_1 + \left(\rho_l v_1^l v_2^l - \rho_r v_1^r v_2^r\right)n_2}{\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r} =: c_x, \quad (5.2)$$

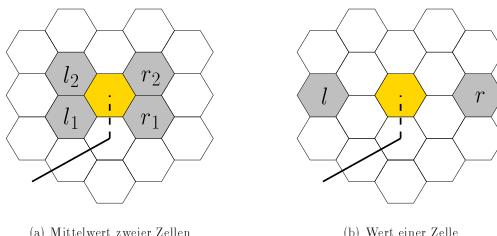
und

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\left(\rho_l v_1^l v_2^l - \rho_r v_1^r v_2^r\right) n_1 + \left(\rho_l (v_2^l)^2 + p_l - \rho_r (v_2^r)^2 - p_r\right) n_2}{\rho_l v_2^l - \rho_r v_2^r} =: c_y \quad (5.3)$$

und für die Energieerhaltung

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{\left(\rho_l v_1^l H_l - \rho_r v_1^r H_r\right) n_1 + \left(\rho_l v_2^l H_l - \rho_r v_2^r H_r\right) n_2}{\rho_l E_l - \rho_r E_r} =: c_E.$$
 (5.4)

Man berechnet für jede dieser Geschwindigkeiten der Unstetigkeiten in Normalenrichtung (5.1) – (5.4) eine Approximation $(c_{\rho}, c_x, c_y \text{ und } c_E)$ mit Hilfe der diskreten Werte und summiert die Beträge der Differenzen von jeder der Gleichungen mit jeder anderen auf. Die kleinste Differenzensumme Δ_{\min} indiziert die beste Approximation an die Rankine-Hugoniot-Bedingungen, womit die nächste Zelle der Linie feststeht:



(a) Mittelwert zweier Zellen

(b) Wert einer Zelle

Abbildung 5.9: Wahl der Werte rechts und links der Unstetigkeitslinie

- Setze $\Delta_{\min} := 1000$.
- Für alle möglichen neuen Zellen Ω_i der Linie:

- Berechne
$$\Delta := |c_{\rho} - c_x| + |c_{\rho} - c_y| + |c_{\rho} - c_E| + |c_x - c_y| + |c_x - c_E| + |c_y - c_E|.$$

- Falls
$$(\Delta < \Delta_{\min})$$

Setze $\Delta_{\min} := \Delta$.

Bemerkung 5.3.1 Die Werte für die Energie berechnet man leicht mit Hilfe der Zustandsgleichung (1.4) aus Kapitel 1 und der berechneten Daten für Dichte ρ , Geschwindigkeit \vec{v} und Druck p.

Die RH2-Methode

Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen reagieren sehr empfindlich auf kleine Störungen. Dies zeigt sich besonders stark in der x- bzw. y-Geschwindigkeit, falls diese Komponenten sehr klein sind, also bei Strömung in Richtung der y- oder x-Achse. Daher wird in der zweiten RH-Methode diejenige Zustandsvariable nicht benutzt, deren Wert c_* am weitesten von den anderen drei Approximationen an die Normalengeschwindigkeit der Unstetigkeit entfernt liegt. Hierfür wird für jede berechnete Näherung die Summe der Differenzen zwischen dieser Näherung und einer anderen berechnet. Der größte Wert

 Δ_{max} indiziert diejenige Näherung, die (relativ zu den anderen gesehen) den größten Fehler aufweist:

- Setze $\Delta_{\min} := 1000$.
- Für jede mögliche neue Zelle Ω_i :
 - Berechne

$$\begin{split} & \Delta_{\rho} & := & |c_{\rho} - c_{x}| + |c_{\rho} - c_{y}| + |c_{\rho} - c_{E}|, \\ & \Delta_{x} & := & |c_{x} - c_{\rho}| + |c_{x} - c_{y}| + |c_{x} - c_{E}|, \\ & \Delta_{y} & := & |c_{y} - c_{\rho}| + |c_{y} - c_{x}| + |c_{y} - c_{E}|, \\ & \Delta_{E} & := & |c_{E} - c_{\rho}| + |c_{E} - c_{x}| + |c_{E} - c_{y}|. \end{split}$$

- Falls
$$(\Delta_k > \Delta_j)$$
 $\forall j \in \{\rho, x, y, E\} \setminus \{k\}, k \in \{\rho, x, y, E\}$
 $\Delta_{\max} := \Delta_k$.

- Verfahre mit den restlichen drei Variablen wie bei der RH1-Methode und berechne so Δ .
- Falls $(\Delta < \Delta_{\min})$ Setze $\Delta_{\min} := \Delta$.

Die RH3-Methode

Bei dieser Methode werden alle möglichen Differenzen zwischen je zwei der Näherungen c_{ρ} , c_x , c_y und c_E berechnet. Die kleinste der berechneten Differenzen legt die nächste Zelle der Linie fest:

- Setze $\Delta_{\min} := 1000$.
- Für jede mögliche neue Zelle Ω_i :
 - Berechne $\Delta_{i,j} := |c_i c_j| \quad \forall i, j \in \{\rho, x, y, E\}, i \neq j.$
 - $\Delta := \min_{i,j} \Delta_{i,j}.$
 - Falls $(\Delta < \Delta_{\min})$ Setze $\Delta_{\min} := \Delta$.

Um diese Algorithmen durchführen zu können, müssen noch einige Größen näher spezifiziert werden.

Wahl des linken und rechten Wertes
 Es wurden zwei verschiedene Möglichkeiten implementiert, beide sind

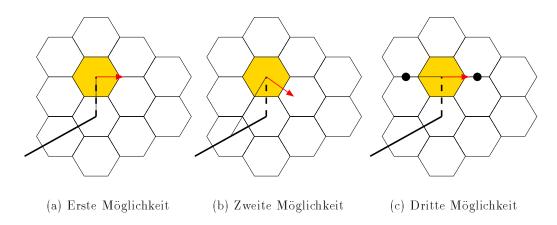


Abbildung 5.10: Wahl der Einheitsnormale auf der Linie der Unstetigkeit

in Abbildung 5.9 (a) und (b) zu sehen. Die durchgezogene Linie läuft über die bereits lokalisierten Zellen der Unstetigkeit und die gestrichelte zur eventuell neuen Zelle (gelb markiert).

- (a) Man sucht die beiden gemeinsamen Nachbarn l_1 und r_1 der letzten Zelle der Linie und der eventuell neuen. Danach bestimmt man den gemeinsamen Nachbarn l_2 bzw. r_2 von l_1 bzw. r_1 und der eventuell neuen Zelle. So erhält man rechts und links von der letzten Zelle der Linie je zwei Zellen, die die eventuell neue Zelle berühren. Die Werte der Zustandsvariablen berechnet man dann als Mittelwert der beiden Zellen l_1 und l_2 bzw. r_1 und r_2 .
- (b) Man verfährt wie in (a), nimmt jedoch als Werte rechts und links den Wert der Zelle r bzw. l, die von der eventuell neuen aus jeweils hinter den beiden Zellen liegt.

• Wahl der Einheitsnormalen

Für die Implementierung des Normaleneinheitsvektors gibt es unterschiedliche Möglichkeiten. Da man nicht weiß, wie die Linie hinter der neuen Zelle aussehen wird, kann man nicht im voraus feststellen, in welche Richtung der $\ddot{a}u$ ßere Normaleneinheitsvektor zeigt. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da sich in dem Fall nur das Vorzeichen der skalaren Größe $\vec{c} \cdot \vec{n}$ ändert, und dies in allen vier Gleichungen (5.1) bis (5.4).

Die folgenden drei Varianten wurden realisiert. Sie sind grafisch dargestellt in Abbildung 5.10. Eine Verbindungsgerade zwischen zwei Zellen ist dabei stets die Gerade zwischen den Schwerpunkten der beiden Zellen.

- (a) Normale auf der Verbindungsgerade zwischen neuer und letzter Zelle der Unstetigkeitslinie
- (b) Normale auf der Verbindungsgerade zwischen neuer und vorletzter Zelle der Unstetigkeitslinie
- (c) Normale in Richtung der Verbindungsgerade zwischen den Mittelpunkten der Schwerpunkte von l_1 und l_2 bzw. r_1 und r_2 .

Man beachte, daß die erste und dritte Möglichkeit nur im Fall strukturierter Gitter zusammenfallen.

5.4 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt werden Testrechnungen zur Lokalisierung der Unstetigkeitslinie anhand des Beispiels "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes" durchgeführt und erläutert. Bei der Ausführung der Algorithmen wird ein Zickzacklaufen der Linie von vornherein dadurch verhindert, daß eine Zelle, die einmal berührt wurde (d.h., die einmal als neue Zelle in Betracht kam), nicht mehr beachtet wird. Dies wird im folgenden "Hilfe 1" genannt. Wenn man diese Hilfe nicht benutzt, führt keine der Methoden bei den Stößen zum Erfolg.

Es gibt drei Gründe, weshalb die Methoden ohne Richtungsbeschränkung nicht stabil funktionieren:

- i. Die numerische Lösung approximiert das physikalische Experiment, aber imitiert es natürlich nicht exakt. Unstetigkeiten werden im Laufe der numerischen Berechnungen verschmiert. Die Anfangsunstetigkeit, die eine Zelle breit ist, wird mit der Zeit bis zu zehn Zellen breit (bei einem durchschnittlichem Zellendurchmesser von h = 0.005). Da die Werte zu beiden Seiten des Stoßes für die RH-Bedingungen lokal gewählt werden, sind diese Werte durch das Verschmieren der Unstetigkeiten nicht immer die richtigen, was die Approximationen an die Normalengeschwindigkeit des Stoßes verschlechtert.
- ii. Darüberhinaus gibt es Phänomene in der Lösung, wie zum Beispiel der Wirbel am Ende der Kontaktunstetigkeit, die mit Hilfe der numeri-

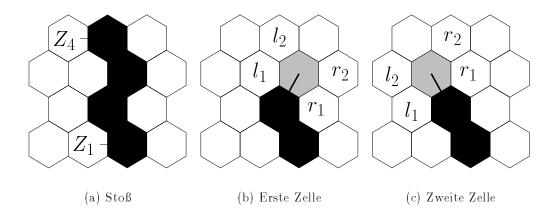


Abbildung 5.11: Störung der numerischen Werte

schen Simulationen nicht korrekt approximiert werden, so daß hier eine Lokalisierung kaum möglich ist.

iii. An einigen Stellen des Gebietes haben die Zustände der (numerischen und physikalischen) Lösung innerhalb einer Zelle große Unterschiede im Wertebereich, so wie zum Beispiel in der Abbildung 5.1 beim Druck links unten, rechts neben der Spitze des Stoßes zu sehen ist. Die diskreten Werte der Nachbarzellen der Unstetigkeit enthalten nicht die korrekten Werte, da durch die Zellmitteldiskretisierung nur ein Mittelwert der Zustände auf jeder Zelle berechnet wird. Außerdem kann aus diesem Grund der Unterschied der diskreten Zustände zwischen zwei benachbarten Zellen recht groß sein, so daß mit Werten einer Nachbarzelle ganz andere Approximationen berechnet werden, die zu einer anderen Wahl der neuen Zelle führen können.

Das folgende Beispiel 5.4.1 zeigt, wie Zellen, die nicht zur eigentlichen Unstetigkeit gehören, durch leichtes Verschmieren als Zellen der Unstetigkeitslinie lokalisiert werden.

Beispiel 5.4.1 Betrachtet wird ein Stoß, der auf einem (strukturierten) Boxgitter parallel zur y-Achse verläuft und zur Zeit t=0 mit Machzahl Ma = 10 auf Gas trifft, das sich rechts vom Stoß im Ruhezustand mit Dichte $\rho = 1.4$ und Druck p=1 befindet. Mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingungen berechnet man die Anfangszustände links vom Stoß: $\rho = 8$, $\vec{v}_l = (8.25, 0)^T$ und $p_l = 116.5$. In Abbildung 5.11 (a) sieht man einen Ausschnitt des Stoßes. Die Werte der Zustandsvariablen auf den Zellen des Stoßes

liegen zwischen den beiden Anfangszuständen links und rechts vom Stoß. Die von Dichte und x-Geschwindigkeit sind für die vier Zellen des Stoßes, die in Abbildung 5.11 (a) zu sehen sind $(Z_1$ bis $Z_4)$, in der folgenden Tabellen aufgelistet:

	Dichte	x-Geschwindigkeit
$\overline{Z_1}$	4.06395	3.32994
Z_2	7.60613	7.75766
Z_3	3.93865	3.17331
Z_4	7.50191	7.62739

Da nach Konstruktion dieses Beispiels die (Anfangs-) Geschwindigkeit des Stoßes bekannt ist, wird hier der Einfachheit halber nur die Rankine-Hugoniot-Bedingung für die Dichte betrachtet, die sich für $v_2 = 0$ vereinfacht zu:

$$\vec{c} \cdot \vec{n} = \frac{(\rho_l v_1^l - \rho_r v_1^r) n_1}{\rho_l - \rho_r}.$$
 (5.5)

Es werde mit Hilfe dieser RH-Bedingung diejenige Zelle gesucht, deren Daten die beste Näherung an die Geschwindigkeit des Stoßes liefern, also an $\vec{c} \cdot \vec{n} = 10$. Seien nun die ersten zwei Zellen Z_1 und Z_2 des Stoßes gegeben und eine neue Zelle gesucht. Abbildungen 5.11 (b) und (c) zeigen zwei Möglichkeiten für den weiteren Verlauf des Stoßes. Dabei ist die erste Möglichkeit (b) die richtige Wahl, die zweite (c) liegt neben dem eigentlichen Stoß. Als Normalenvektor wird der erste aus Abbildung 5.10 gewählt. Er steht demnach senkrecht auf der Verbindungslinie zwischen den Schwerpunkten der neuen und der letzten Zelle Z_2 . Als Werte links und rechts des Stoßes werden die Mittelwerte der beiden Zellen l_1, l_2 bzw. r_1, r_2 berechnet, siehe hierzu Abbildungen 5.11 (b) und (c). Mit dieser Wahl erfüllte die erste Möglichkeit (b) mit $\vec{c} \cdot \vec{n} = 8.39041$ bzw. mit einem Fehler von 1.60959 die RH-Bedingung (5.5) besser als die zweite, für die ein Fehler von 2.66345 berechnet wurde. Es wurde also die richtige Zelle lokalisiert.

Unstetigkeiten verschmieren jedoch im Laufe der numerischen Berechnungen, so daß der gewünschte Fall, daß der Stoß aus einer Linie von Zellen besteht, die nur eine einzige Zelle breit ist, nur beim Anfangszustand auftritt.

Angenommen, der Stoß sei auf der linken Seite der Zellen Z_1 und Z_3 verschmiert, und die diskreten Werte der beiden Zellen links neben Z_1 und Z_3 seien Mittelwerte aus den Werten von Z_1 bzw. Z_3 und den Werten links vom Stoß, wobei die Werte des Stoßes doppelt gewertet werden:

$$\frac{2 \cdot \overline{u}_{Z_i} + \overline{u}_l}{3}, \qquad i = 1, 3.$$

Dies hätte Auswirkungen auf die Berechnung der ersten Zelle, da sich die Werte für die Zelle l_1 änderten. Mit den neuen Werten berechnet man einen Fehler von 3.07522, so daß die falsche Zelle (c) als neue Zelle der Stoßlinie gewählt würde, da sie die Geschwindigkeit des Stoßes nun besser approximiert.

5.4.1 Stöße – erste Schritte

Die Tests zeigen durchweg, daß die zweite Möglichkeit der Wahl des Normalenvektors (siehe Abbildung 5.10 (b) und zugehörige Erläuterung) die beste ist. Daher werden im folgenden alle Tests mit der Berechnung dieses Normalenvektors durchgeführt. Die Diskussion der Rechnungen ist nach der Wahl der Werte strukturiert: Zur Verfügung steht hierbei der Mittelwert zweier Zellen, die Nachbarn der eventuell neuen Zelle sind und links bzw. rechts von der Stoßlinie liegen (siehe hierzu Abbildung 5.9 (a) mit den zugehörigen Erläuterungen) und der Wert der einen Zelle, die jeweils hinter den beiden Nachbarn liegt (Abbildung 5.9 (b)).

Damit die Ergebnisse besser diskutiert werden können, werden die Stöße durchnumeriert, siehe hierzu die schematische Darstellung der Unstetigkeiten in Abbildung 5.12. Der gebogene Stoß, der links unten im Gebiet beginnt und durch die Reflektion des Gases an der unteren festen Wand erzeugt wurde, wird im folgenden stets "Stoß 1" genannt. Der Stoß, der von der oberen Wand schräg nach links unten läuft und noch Teil des Anfangsstoßes ist, der nach rechts transportiert wurde, wird als "Stoß 2" bezeichnet, derjenige, der von der unteren Wand nach oben läuft, als "Stoß 3" und das Verbindungsstück zwischen Stoß 1 und Stoß 2 bzw. Stoß 3 als "Verbindungsstoß". Der schwache Ausläufer an Stoß 1 und dem Verbindungsstoß sei "Stoß 4". Der Punkt, auf den der Verbindungsstoß und die Stöße 2 und 3 treffen, heißt "Tripelpunkt".

Mittelwert zweier Zellen

Hierbei ist die RH1-Methode mit Abstand die beste. Bei den anderen beiden Methoden drehen die Linien bereits nach einigen Zellen ab, und der Stoß läuft zur Wand des Streifens, was sich auf die am Anfang dieses Abschnitts gegebenen Gründe zurückführen läßt (siehe auch Beispiel 5.4.1). In Abbildung 5.13 (a) und (b) sind die Ergebnisse zu sehen. Die Linie für Stoß 1 verläuft anfangs bis auf eine kleine Störung in der Mitte des Streifens entlang, bis sie nach einiger Zeit nach ein paar falschgewählten Zellen wieder zurückläuft.

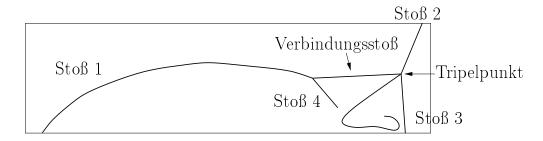


Abbildung 5.12: Schematische Darstellung des Falls "Doppel-Mach-Reflektion eines starken Stoßes"

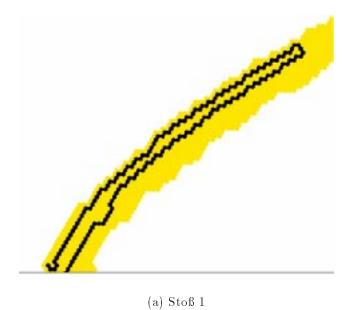
Nach Wahl einer falschen Anfangszelle am Rand läuft ein lokalisierter Stoß meist parallel zu dem Stoß, der mit der korrekten Anfangszelle detektiert wurde. Dies kommt daher, daß auf dem verschmierten Streifen des Stoßes die Approximationen in der richtigen Richtung meistens dennoch besser sind als diejenigen, die in eine falsche Richtung laufen, auch wenn sie nicht auf dem eigentlichen Stoß liegen. Dadurch kann es passieren, daß der Stoß nach ein paar falschgewählten Zellen parallel zum eigentlich lokalisierten zurückläuft. Dies ist besonders gut in Abbildung 5.15 (a) an Stoß 2 zu sehen.

Abbildung 5.13 (b) zeigt Stöße 2 und 3. Stoß 2 ist bis zum Tripelpunkt sehr gut durch die lokalisierte Linie dargestellt, läuft dann in Richtung des Stoßes 2 weiter, findet aber nicht die exakte Linie, sondern läuft im Kreis hin und her. Auch hierbei gilt das oben Gesagte über das Zurücklaufen von Stoßlinien.

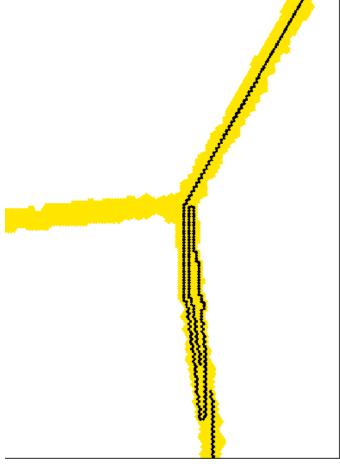
Stoß 3 hat keine Möglichkeit mehr, sich auszubilden, da ein Kreuzen der Stöße nicht zugelassen ist. Außerdem erreicht er den Rand des Streifens, der nicht zur optimalen Stoßlinie gehört.

Wert einer Zelle

Auch bei dieser Wahl der Werte ist die RH1-Methode die beste, jedoch liefern auch die beiden anderen Methoden gute oder sogar bessere Resultate für Stoß 2. In Abbildung 5.14 sind die Ergebnisse der Rechnungen mit der RH1-Methode zu sehen. Stoß 1 läuft auch hier nicht durch, legt aber ein gutes Stück mehr in die richtige Richtung ab als beim Mittelwert von zwei Zellen. Stoß 2 und 3 sind gut ausgebildet, jedoch läuft Stoß 2 am Tripelpunkt wieder zurück. Die Wahl falscher Zellen ist hier darauf zurückzuführen, daß drei Stöße aufeinanderprallen und dadurch die Werte lokal um den Tripelpunkt gestört werden. Stoß 3 läuft nicht auf dem eigentlichen Stoß entlang.

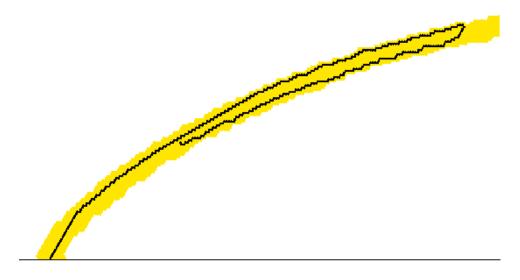




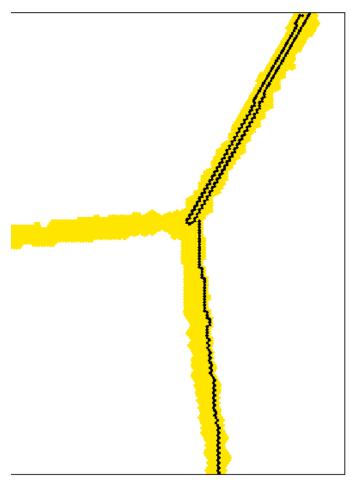


(b) Stoß 2 und 3

Abbildung 5.13: Mittelwert zweier Zellen mit der RH1-Methode



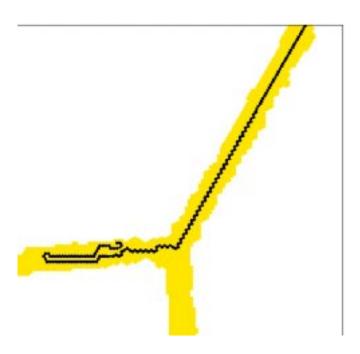
(a) Stoß 1



(b) Stoß 2 und 3

Abbildung 5.14: Wert einer Zelle mit der RH1-Methode





(b) Stoß 2 und Verbindungsstoß

Abbildung 5.15: Wert einer Zelle mit (a) der RH2- und (b) der RH3-Methode

Die Methoden RH2 und RH3 liefern sehr schlechte Ergebnisse für Stoß 1 und 3, jedoch bessere für Stoß 2. Die RH3-Methode lokalisiert Stoß 2 exakt, findet am Tripelpunkt den Weg entlang des Verbindungsstoßes, läuft dann aber nach einiger Zeit zurück (siehe Abbildung 5.15).

5.4.2 Stöße – verbesserte Methode

Die Tests aus dem vorigen Abschnitt zeigen, daß die Methoden sehr empfindlich auf Störungen reagieren, z.B. am Tripelpunkt und beim Stoß 1, was auf die Anfang Abschnitt 5.4 gegebenen Gründe zurückzuführen ist (siehe auch Beispiel 5.4.1). Dadurch wird der Verlauf der Linie oft gestört. Als Resultat läuft die Linie entweder wieder zurück oder am Rand des Streifens entlang. Um dies zu verhindern und den Lokalisierungsalgorithmus stabiler zu machen, wurden zwei weitere Bedingungen (Hilfe 2 und 3) implementiert. Alle implementierten Hilfen sind Richtungshilfen. Sie sorgen dafür, daß die durch die RH-Bedingungen berechneten Stoßlinien nicht umkehren können, so daß Stoßlinien wie zum Beispiel in Abbildung 5.15 (a) nicht zugelassen sind. Hilfe 2 wurde als erste implementiert, brachte aber oft nicht den gewünschten Erfolg. Jedoch waren auch mit dieser Hilfe Stoßlinien so wie in Abbildung 5.15 (a) nicht mehr möglich. Mit Hilfe 3 wurde eine weitere Verschärfung der Richtungsvorgabe vorgenommen. Veranschaulicht werden die erste Hilfe und diese beide Hilfen in Abbildung 5.16. Die grauen Zellen (falls von der letzten Zelle aus erreichbar) sind nicht zulässig als neue Zellen.

• Hilfe 2

Sammle alle Nachbarn der viertletzten Zelle der Linie und die Nachbarn der Nachbarn. Die neue Zelle darf nicht zu der Gruppe dieser Nachbarn gehören.

• Hilfe 3

Berechne den Richtungsvektor \vec{a} , der von der letzten der lokalisierten Linie zur eventuell neuen Zelle zeigt (wie immer wird mit den Koordinaten der Schwerpunkte gerechnet). Berechne die Richtungsvektoren \vec{b}_j , j=1,2,3, die von der viert- zur drittletzten, von der siebt- zur sechst-letzten und von der zehnt-zur neuntletzten Zelle führen. Berechne die Winkel zwischen dem ersten Vektor \vec{a} und jeweils den drei letzten Vektoren \vec{b}_j . Wenn zwei der drei Winkel größer als 120 Grad sind, ist die Zelle nicht zulässig:

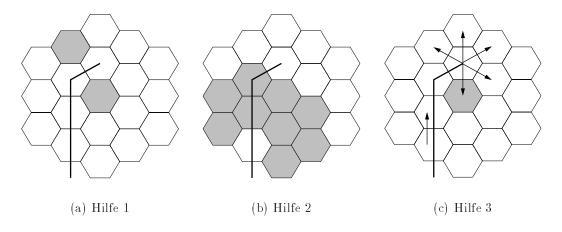


Abbildung 5.16: Hilfen zur Wahl der neuen Zelle der Unstetigkeitslinie

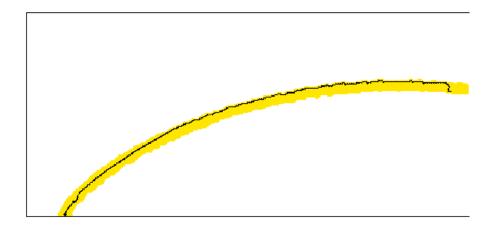
- Für alle möglichen neuen Zellen Ω_i :
 - * Berechne $W_i := \langle (\vec{a}, \vec{b_i}), j = 1, 2, 3.$
 - * Falls $(W_j > 120)$ für mindestens zwei j Ω_i ist nicht zulässig.

Es wurden Rechnungen mit den erfolgreicheren RH-Methoden durchgeführt: Für die Mittelwerte aus zwei Zellen ist das die RH2-Methode, für den Wert einer Zelle alle drei Methoden RH1, RH2 und RH3. Dabei wurden die drei Hilfen einzeln oder in Kombinationen benutzt. Die besten Ergebnisse werden im folgenden dokumentiert und teilweise abgebildet.

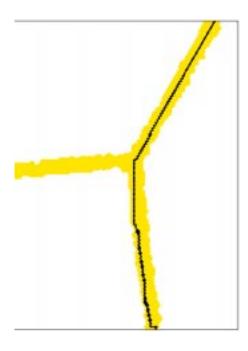
Mittelwert aus zwei Zellen

In Abbildung 5.17 (b) ist das Ergebnis von Stoß 2 und 3 unter Benutzung der Hilfe 3 zu sehen. Stoß 2 verläuft sehr gut an der Linie des originalen Stoßes entlang. Am Tripelpunkt läuft die Linie in Stoß 3, die jedoch zu sehr am Rand liegt. Die Ergebnisse für Stoß 1 sind ungenügend. Abbildung 5.17 (a) zeigt Stoß 1 unter Benutzung der Hilfen 2 und 3. Stoß 1 läuft nun sehr weit, wird aber wieder gestört und verfängt sich. Die Stöße 2 und 3 laufen ähnlich wie in Abbildung 5.17 (b) ohne große Störungen durch.

Anzumerken ist, daß die Hilfe 2 in den meisten der durchgeführten Rechnungen keinen Vorteil erbrachte.

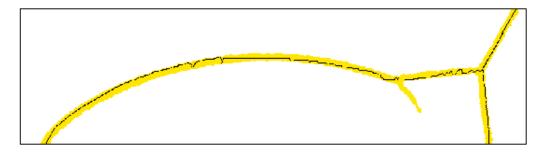






(b) Stoß 2 und 3

Abbildung 5.17: Mittelwert zweier Zellen mit der RH1-Methode und den Hilfen (a) 2 und 3 und (b) 3



(a) Gesamter Stoß

Abbildung 5.18: Wert einer Zelle mit der RH1-Methode und den Hilfen 1 und 3

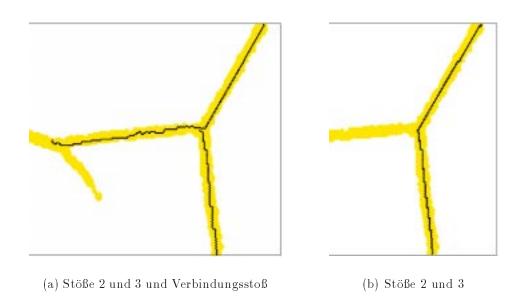
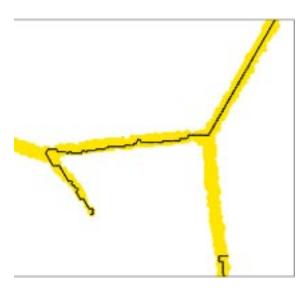


Abbildung 5.19: Wert einer Zelle mit der RH2-Methode und den Hilfen (a) 1 und 3 und (b) 2



(a) Stoß 2, Verbindungsstoß und Stoß 4

Abbildung 5.20: Wert einer Zelle mit der RH3-Methode und den Hilfen 1 und 3

Wert einer Zelle

Das beste Resultat aller Rechnungen erbrachte die RH1-Methode zusammen mit den Hilfen 1 und 3. Hierbei läuft, wie in Abbildung 5.18 zu sehen ist, Stoß 1 nur bis zu einem bestimmten Punkt. Das wird dadurch kompensiert, daß die Linie für Stoß 2 auf dem Verbindungsstoß entlang läuft, dann auf dem Streifen für Stoß 1 und dort die erste Linie erreicht. Ein Test, bei der zuerst die Linie für Stoß 2 und danach diejenige für Stoß 1 berechnet wird, zeigt, daß die Linie an demselben Punkt, an dem auch Stoß 1 gescheitert war, gestört wird. Dies läßt auf Fehler durch Verschmierung des Stoßes in der numerischen Rechnung (siehe wieder Beispiel 5.4.1) oder auf Fehler durch die Diskretisierung schließen. Die Stöße verlaufen nicht ganz störungsfrei, besonders nach dem Tripelpunkt auf dem Verbindungsstoß und auf Stoß 1. Besonders auf dem Verbindungsstoß scheinen die diskreten Werte oft zu Störungen der lokalisierten Linie zu führen. Die stete Änderung der Werte von Zelle zu Zelle vor dem Stoß 1 scheint die Linie des Stoßes an verschiedensten Stellen zu irritieren. Trotzdem ist dies das beste Ergebnis, weil für keine andere Konstellation die Stöße vollständig (bis auf den Ausläufer Stoß 4) durchlaufen werden konnten.

Wenn die Hilfen 2 und 3 benutzt werden, ist das Resultat für Stoß 1 unzureichend, für die Stöße 2 und 3 gut (ohne Abbildung). Beide Stöße konnten

vollständig lokalisiert werden, laufen jedoch nicht an allen Stellen auf der exakten Stoßlinie entlang. Wiederum liefert die Hilfe 2 keine Verbesserung.

Die RH2-Methode liefert zusammen mit Hilfe 1 und 3 das beste Resultat für die Stöße 2 und 3 und den Verbindungsstoß, abgebildet in 5.19 (a). Wenn nur die Hilfe 2 eingesetzt wird, ist das Ergebnis der Stöße 2 und 3 ohne Verbindungsstück sehr gut. Die lokalisierten Stöße laufen auf der eigentlichen Stoßlinie entlang (Abbildung 5.19 (b)). Dies ist das einzige Ergebnis, bei dem das Benutzen von Hilfe 2 bessere Resultate lieferte.

Die Rechnung mit der RH3-Methode und den Hilfen 1 und 3 war die einzige, mit der der Ausläufer Stoß 4 erreicht werden konnte. Stoß 2 läuft exakt bis zum Tripelpunkt, schlägt dann die Richtung des Verbindungsstoßes ein, erreicht mit einigen Störungen Stoß 4 und läuft bis zu dessen Ende. Die Ergebnisse findet man in Abbildung 5.20. Die Resultate für die Stöße 1 und 3 sind jedoch unzureichend.

5.4.3 Kontaktunstetigkeit

Bei der Lokalisierung der Linie der Kontaktunstetigkeit wird im Prinzip ebenso verfahren wie beim Stoß. Es schlagen jedoch alle Versuche fehl, eine geeignete Anfangszelle vom Rand zu wählen, da gerade in diesem Bereich der Verlauf der Kontaktunstetigkeit durch den Wirbel nicht trivial und dadurch besonders schwer zu beschreiben ist. Daher wurde für alle Rechnungen als Anfangszelle die äußerste obere Spitze des Streifens gewählt.

Da für Kontaktunstetigkeiten

$$[p] = 0$$

gilt, können die Terme p_l und p_r bei der Implementation der RH-Bedingung weggelassen werden. Aus programmiertechnischen Gründen (man spart eine Funktion) wurden im Rahmen dieser Arbeit dieselben Funktionen genommen, die auch schon für den Stoß verwendet wurden.

Es wurden dieselben Rechnungen wie in Abschnitt 5.4.2 durchgeführt, d.h., es wird stets mit dem Normalenvektor (b) (siehe Abbildung 5.10 (b) und dazugehörige Erläuterungen) gerechnet, der senkrecht auf der Verbindungslinie der (Schwerpunkte der) eventuell neuen und der vorletzten Zelle der Linie steht.

Für den Mittelwert von zwei Zellen als Wahl der Werte links und rechts vom

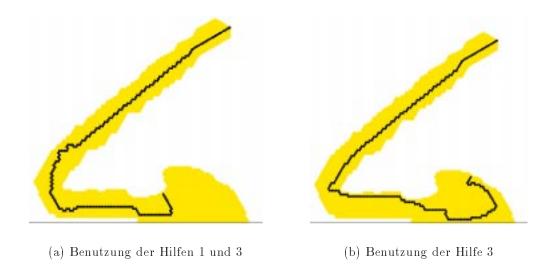


Abbildung 5.21: Mittelwert aus zwei Zellen mit der RH1-Methode

Stoß (siehe 5.9 (a)) wurde die RH1-Methode mit verschiedensten Kombinationen der drei Hilfen durchgeführt. Für den Wert einer Zelle (siehe 5.9 (b)) alle drei Methoden.

Mittelwert aus zwei Zellen

Die Ergebnisse dieser Rechnungen zeigen, daß Hilfe 2 entweder keinen Nutzen bringt oder in seltenen Fällen das Resultat sogar verschlechtert. In Abbildung 5.21 sind die lokalisierten Linien der besten Kombinationen der RH1-Methode zu sehen. Die Lösung links, die mit den Hilfen 1 und 3 gerechnet wurde, läuft gut um die Spitze der Kontaktunstetigkeit und verliert sich erst kurz vor dem Wirbel am Ende. Das gleiche Ergebnis erzielt man mit zusätzlicher Hilfe 2, die demnach überflüssig ist. Wenn man nur Hilfe 3 benutzt (Abbildung 5.21 (b)), erhält man ein nicht ganz so gutes Ergebnis, was den Verlauf im unteren Bereich betrifft, da die detektierte Linie weiter von der eigentlichen Kontaktunstetigkeit entfernt liegt. Sie läuft jedoch weiter und findet einen Weg um den Wirbel.

Die Ergebnisse für alle anderen Rechnungen sind unzureichend. Die Linien drehen spätestens an dem Punkt, an dem die Linie in Abbildung 5.21 (a) gestört wird. An dieser Stelle scheinen die Werte wieder aus einem der Anfang des Abschnitts 5.4 genannten Gründe zur Wahl falscher Zellen zu führen.

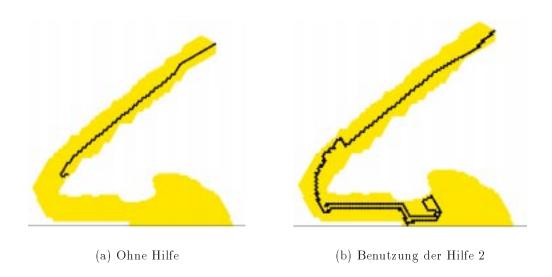


Abbildung 5.22: Wert einer Zelle mit der RH1-Methode

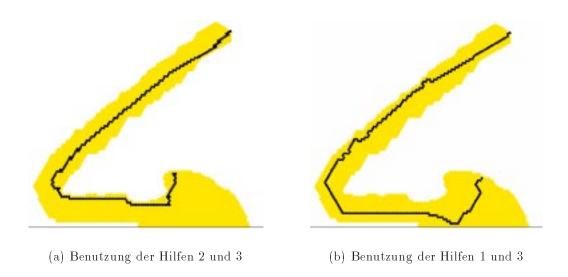


Abbildung 5.23: Wert einer Zelle mit (a) der RH1-Methode und (b) der RH2-Methode

Wert einer Zelle

Die Rechnungen mit der RH3-Methode sind alle unzureichend. Sämtliche Linien enden nach einigen Zellen am Rand des Streifens oder drehen sich.

Die RH1-Methode liefert mit den Hilfen 1 und 3 fast dasselbe Ergebnis wie bei dem Mittelwert von zwei Zellen. Lediglich die Störung vor der Spitze ist ausgeprägter (ohne Abbildung).

Überraschenderweise können hier auch mit der Hilfe 2 passable Ergebnisse erzielt werden, wie in den Abbildungen 5.22 (b) und 5.23 (a) zu sehen ist. Die RH1-Methode mit Hilfe 2 erreicht den Wirbel, die schwierigste Stelle der Kontaktunstetigkeit, dreht dann aber um. Wenn zusätzlich noch Hilfe 3 benutzt wird, durchläuft die Linie den Wirbel teilweise und läuft auch nicht wieder zurück. Jedoch läuft die Linie im unteren Bereich nicht auf der eigentlichen Kontaktunstetigkeit entlang.

Abbildung 5.22 (a) zeigt das beste Ergebnis für eine Rechnung ohne Hilfe. Die Linie findet nicht den Weg um die Spitze der Kontaktunstetigkeit.

In Abbildung 5.23 (b) ist die beste Rechnung mit der RH2-Methode abgebildet. Hilfe 2 brachte erneut keine Veränderung.

Es zeigt sich auch hier, daß die RH-Bedingungen durch Approximationsfehler in der numerischen Lösung und in der Diskretisierung sowie durch komplizierte Lösungen (vor Stoß 1, beim Tripelpunkt und am Wirbel am Ende der Kontaktunstetigkeit) teilweise unstabil sind.

Die drei RH-Methoden finden ohne die Hilfsfunktionen, zumindest ohne Hilfe 1 und 3, die Linie der Unstetigkeit nicht. Auch unter Zuhilfenahme der zusätzlichen Hilfen kann man nicht genau sagen, mit welcher Kombination der Hilfen das beste Resultat erzielt wird. Man kann jedoch Tendenzen feststellen, zum Beispiel daß die RH1-Methode mit den Hilfen 1 und 3 im allgemeinen keine schlechte Wahl ist. Insgesamt konnte hierfür und für einige andere Konstellationen der Verlauf der Kontaktunstetigkeit gut approximiert werden.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene Anwendungen der verallgemeinerten Multiskalenanalye nach Harten [Har93b, Har93a, Har94] auf numerische Lösungen von strömungsmechanischen Problemen untersucht.

Eine erste Anwendung der verallgemeinerten Multiskalenanalyse auf unstrukturierte Gitter wurde von Abgrall und Harten in [AH94] durchgeführt. Die Theorie wurde in der vorliegenden Arbeit weiter formalisiert und konnte auch im Zweidimensionalen vollständig auf Operationen der linearen Algebra zurückgeführt werden. Speziell konnte hier die Darstellung der Skalenkoeffizienten mit Hilfe von Basismatrizen beschrieben werden (siehe auch [SPS95, SPSF00]).

Dies ermöglichte es, die verallgemeinerte Multiskalenanalyse auf numerische Simulationen der Euler-Gleichungen der Gasdynamik in zwei Dimensionen anzuwenden. Drei verschiedene Aspekte wurden in dieser Arbeit genauer untersucht: Datenkompression, Berechnung der Differentiationsmatrix und die Detektion von Phänomenen.

Die Daten numerischer Simulationen mehrdimensionaler Probleme benötigen sehr viel Speicherplatz, was schon im Zweidimensionalen zu Problemen führen kann. Mit der verallgemeinerten Multiskalenanalyse ist es möglich, diesen Speicherbedarf erheblich zu reduzieren, ohne die Struktur der Lösung zu verwischen. Die Tests für die Datenkompression lieferten hohe Kompressionsraten.

Die Berechnung von Ableitungen diskreter Daten ist ein nicht triviales Problem. Für Wavelets kann dies mit Hilfe von Differentiationsmatrizen durchgeführt werden. Diese Theorie wurde im Eindimensionalen auf die verallgemeinerte Multiskalenanalyse übertragen. Hierbei wurde auch der Zusammenhang zwischen der verallgemeinerten Multiskalenanalyse und der Multiskalenanalyse der Wavelets verdeutlicht. Es zeigt sich jedoch, daß die Berechnung der diskreten Ableitungen mit Hilfe der Differentiationsmatrizen im Falle der verallgemeinerten Multiskalenanalyse nicht konsistent ist.

Ein weiteres Problem der numerischen Simulationen ist die Detektion typi-

scher Phänomene in den Lösungen. Bei der Simulation der Euler-Gleichungen handelt es sich hierbei um Stöße und Kontaktunstetigkeiten. Auch hier konnte die verallgemeinerte Multiskalenanalyse erfolgreich angewendet werden. Mit ihrer Hilfe konnten die Unstetigkeiten detektiert und separiert werden. Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen ermöglichten eine weitere Lokalisierung der Unstetigkeiten. Jedoch führten diese Bedingungen, lokal auf die diskreten Werte rechts und links der Unstetigkeiten angewandt, nicht zu einer stabilen Methode. Daher wurden Hilfen eingebaut, die Richtungsbeschränkungen enthalten und die Methode so stabiler machen. Weitere Ansätze zum genauen Lokalisieren der Unstetigkeiten müssen untersucht werden.

Literaturverzeichnis

- [AH94] R. Abgrall and A. Harten, Multiresolution representation in unstructured meshes I: Preliminary report, CAM Report 94-20, University of California, Los Angeles (1994).
- [BCR91] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhin, Fast wavelet transforms and numerical algorithms I, Comm. Pure Appl. Math. **64** (1991), 141–184.
- [Bey92] G. Beylkin, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1992), 1716–1740.
- [CDP94] J.M. Carnicer, W. Dahmen, and J.M. Pena, Local decomposition of refinable spaces and wavelets, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen, Bericht Nr. 112 (1994).
- [Dau92] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 61, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [Fri93] O. Friedrich, A new method for generating inner points of trianguations in two dimensions, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **104** (1993), 77–86.
- [Fri98] O. Friedrich, Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids, J. Comp. Phys. 144 (1998), 194–212.
- [Fri99] O. Friedrich, Gewichtete wesentlich nicht-oszillierende Verfahren auf unstrukturierten Gittern, Ph.D. thesis, Universität Hamburg, 1999.
- [Gei99] C. Geiger, Multiskalentechniken und Wavelets, Institut für Angewandte Mathematik Hamburg, 1999, Vorlesungsskript.

- [Har93a] A. Harten, Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets, Appl. Numer. Math. 12 (1993), 153–192.
- [Har93b] A. Harten, Multiresolution representation of data, CAM Report 93-13, University of California, Los Angeles (1993).
- [Har94] A. Harten, Multiresolution representation of data II: General framework, CAM Report 94-10, University of California, Los Angeles (1994).
- [Hir88] C. Hirsch, Numerical computation of internal and external flows: Fundamentals of numerical discretization, vol. 1, John Wiley & Sons, 1988.
- [Hir90] C. Hirsch, Numerical computation of internal and external flows: Computational methods for inviscid and viscous flows, vol. 2, John Wiley & Sons, 1990.
- [Jam93] L. Jameson, On the wavelet based differentiation matrix, J. Sci. Comp. 8 (1993), 267–305.
- [Kan83] R.P. Kanwal, Generalized functions, theory and technique, Mathematics in Science and Engineering, vol. 171, Academic Press, 1983.
- [Kuc95] H. Kuchling, Taschenbuch der Physik, Taschenbuchverlag Leipzig-Köln, 1995.
- [LeV92] R. LeVeque, Numerical methods for conservation laws, Lectures in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 1992.
- [LMR94] A. K. Louis, P. Maas, and A. Rieder, Wavelets, B.G.Teubner, Stuttgart, 1994.
- [LSD92] M.-H. Lallemand, H. Steve, and A. Dervieux, *Unstructured multigridding by volume agglomeration: Current status*, Computers Fluids **21** (1992), 397–433.
- [Mal98] S. Mallat, A wavelet tour on signal processing, Academic Press, 1998.
- [Mey92] Y. Meyer, Wavelets and operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 37, Cambridge University Press, 1992.
- [Mey93] Y. Meyer, Wavelets: Algorithms & applications, SIAM, Philadelphia, 1993.

- [Son93] T. Sonar, Mathematische Einführung in die Strömungsmechanik, Universität Göttingen, 1993, Vorlesungsskript.
- [Son97] T. Sonar, Mehrdimensionale ENO-Verfahren zur Konstruktion nichtoszillatorischer Methoden für hyperbolische Erhaltungsgleichungen, Teubner, 1997.
- [SPS95] F. Schröder-Pander and T. Sonar, Preliminary investigations on multiresolution analysis on unstructured grids, Institutsbericht IB 223-95 A 36, Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt e. V. (1995).
- [SPSF00] F. Schröder-Pander, T. Sonar, and F. Friedrich, Generalized multiresolution analysis on unstructured grids, Numerische Mathematik (2000).
- [Swe97] W. Sweldens, The lifting scheme: A construction of second generation wavelets, Siam J. Math. Anal. 29 (1997), no. 2, 511–546.
- [VY90] E.V. Vorozhtsov and N.N. Yanenko, Methods for the localization of singularities in numerical solutions of gas dynamics problems, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, 1990.
- [Wal94] W. Walter, Einführung in die Theorie der Distributionen, Wissenschaftsverlag, 1994.
- [WC84] P. Woodward and P. Colella, The numerical simulation of twodimensional fluid flow with strong shocks, J. Comp. Phys. 54 (1984), 115–173.

Danksagung

Ganz besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Thomas Sonar für die Betreuung meiner Arbeit. Ich konnte nicht nur in fachlichen Fragen immer zu ihm kommen. Dank Internet war auch die Betreuung von Ferne im letzten Jahr kein Problem.

Herrn Prof. Dr. Carl Geiger danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Oliver Friedrich danke ich für die Überlassung seines Strömungslösers und die vielen Anregungen und Hilfen, die ich während der ersten zwei Jahre im gemeinsamen Büro von ihm bekommen habe. Bei Stefanie Schmidt bedanke ich mich für die schönen zwei Jahre in Hamburg und ihre Hilfe in der Endphase meiner Arbeit.

Ein ganz großer Dank geht an meine Eltern und meinen Freund Nicholas für ihre moralische Unterstützung. Sie hatten immer ein offenes Ohr für mich und waren immer für mich da.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden verschiedene Anwendungen der verallgemeinerten Multiskalenanalye (VMSA) nach Harten [Har93b, Har93a, Har94] auf numerische Lösungen von strömungsmechanischen Problemen untersucht.

Die Theorie der Anwendung der VMSA auf unstrukturierte Gitter wurde in der vorliegenden Arbeit weiter formalisiert und konnte auch im Zweidimensionalen vollständig auf Operationen der linearen Algebra zurückgeführt werden. Speziell konnte hier die Darstellung der Skalenkoeffizienten mit Hilfe von Basismatrizen beschrieben werden (siehe auch [SPS95, SPSF00]).

Drei verschiedene Anwendungen der VMSA wurden in dieser Arbeit genauer untersucht: Datenkompression, Berechnung der Differentiationsmatrix und die Detektion von Phänomenen.

Die Daten numerischer Simulationen mehrdimensionaler Probleme benötigen sehr viel Speicherplatz, was schon im Zweidimensionalen zu Problemen führen kann. Mit der VMSA ist es möglich, diesen Speicherbedarf erheblich zu reduzieren. Die Tests für die Datenkompression lieferten hohe Kompressionsraten.

Die Berechnung von Ableitungen diskreter Daten ist nicht trivial. Für Wavelets kann dies mit Hilfe von Differentiationsmatrizen durchgeführt werden. Diese Theorie wurde im Eindimensionalen auf die VMSA übertragen. Hierbei wurde auch der Zusammenhang zwischen der VMSA und der Multiskalenanalyse der Wavelets verdeutlicht. Es zeigt sich jedoch, daß die Berechnung der diskreten Ableitungen mit Hilfe der Differentiationsmatrizen im Falle der verallgemeinerten Multiskalenanalyse nicht konsistent ist.

Ein weiteres Problem der numerischen Simulationen ist die Detektion typischer Phänomene in den Lösungen. Bei der Simulation der Euler-Gleichungen handelt es sich hierbei um Stöße und Kontaktunstetigkeiten. Auch hier konnte die VMSA erfolgreich angewendet werden. Mit ihrer Hilfe konnten die Unstetigkeiten detektiert und separiert werden. Eine weitere Lokalisierung der Unstetigkeiten mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingungen führte nicht zu einer stabilen Methode. Weitere Ansätze müssen untersucht werden.

Lebenslauf

Name Friederike Schröder-Pander

Geburtsdatum 03.02.1973 Geburtsort Lübeck

Schule

8/1979-7/1983 Grundschule Paul-Gerhardt-Straße, Lübeck

8/1983 - 5/1992 Gymnasium Katharineum zu Lübeck

23.05.1992 Hochschulreife

Universität

10/1992 – 6/1997 Mathematikstudium mit Nebenfach Informatik

an der Universität Göttingen

14.10.1994 Vordiplom

28.06.1997 Diplom, Thema der Arbeit: "Mehrgitterverfahren

für Konvektions-Diffusions-Gleichungen auf

unstrukturierten Gittern"

Praktikum

7/1995 – 8/1995 Praktikum bei der DLR e. V. in Göttingen,

Institut für Strömungsmechanik, Abteilung Numerische Methoden

Beruf

10/1997 – 8/1999 Wissenschaftliche Mitarbeiterin des Instituts

für Angewandte Mathematik der Universität

Hamburg

9/1999 bis heute Wissenschaftliche Mitarbeiterin der Fakultät

Angewandte Wissenschaften der Universität

Gent, Belgien