Name: Helene Dörksen
Titel: Shape Representations of Digital Sets based on Convexity Properties
Published: 2005

Abstract

The only sets which can be handled on computers are discrete or digital sets that means the sets containing a finite number of elements. The discrete nature of digital images makes it necessary to develop suitable systems and methods since a direct use of classical theories is not possible or not adaptable.

The dealing with geometrical properties of digital sets is important in many applications of image processing. The topic of digital geometry is to recognize and to describe these properties. Apart from the theoretical foundations, the efficient procedures and techniques play a key role in scientific computation.

In digital geometry it is not a simple task to testing convexity of a set [1]. In 1928, Tietze [2] proved that convexity of a set in $\mathbb{R}^2$ can be decided locally in a time which is proportional to the length of its boundary. Unfortunately, in digital plane $\mathbb{Z}^2$ convexity cannot be observed locally [3]. One deals with the problem to decide whether a part of the boundary of a digital set is convex or not by some method which is "as local as possible".

Discrete lines, discrete line segments and digitally convex sets are basic constructs of digital geometry. The boundary of a digital set on $\mathbb{Z}^2$ can be decomposed into convex and concave parts by the method proposed in this paper. This technique is related to the characterization of discrete lines by Debled-Rennesson and Reveillès [4]. For this decomposition we can easily find a (continuous) polygonal set which represents the shape of the digital set and has the same convexity properties, i.e. it is faithful. However, the disadvantage of the presented decomposition is the fact that the corresponding polygonal representation can possess vertices whose coordinates are not integers.

An alternative possibility would be polygonal representations of digital sets which are no longer faithful. For the boundary of a digital set we can find a polygonal representation which is discrete and possesses "only few" uncorresponding parts. The both representations, i.e. a faithful one and a representation with "only few" uncorresponding parts, can be performed in the time proportional to the length of the boundary.

It is a well-known fact that sets inherit convexity from their lower dimensional plane sections. Plane sections of digital sets and sections of sets which are transformed using some affine mapping are investigated. We were able to show that the geometrical and topological structures of the sections can be described by lower dimensional theory. Furthermore, the concept of d-convexity is introduced and studied here. A way how to construct the d-convex hull of an arbitrary set from $\mathbb{Z}^3$ is shown.

---

[1] Klette, R.: Digital Geometry – The birth of a new discipline. *Computer Science Department of the University of Auckland, CITR at Tamaki Campus*, CITR–TR–79, 2001.

[2] Tietze, H.: Bemerkungen über konvexe und nichtkonvexe Figuren. *J. Reine Angew. Math.*, **160**:67–69, 1929.

[3] Eckhardt, U.: Digital lines and digital convexity. In G.Bertrand, et al, eds: *Digital and Image Geometry*. LNCS, **2243**:207–226, Springer-Verlag, 2001.

[4] Debled-Rennesson, I., and J.-P. Reveillès: A linear algorithm for segmentation of digital curves. *Int. J. Pattern Recognition, Artif. Intell.*, **9**:635–662, 1995.

Name: Helene Dörksen
Titel: Shape Representations of Digital Sets based on Convexity Properties
Jahr der Drucklegung: 2005

Zusammenfassung

Digitale Objekte sind als Mengen mit ganzzahligen Koordinaten interpretierbar. Die diskrete Natur digitaler Bilder macht es erforderlich, angepasste Begriffsysteme und Methoden zu entwickeln, denn eine direkte Verwendung klassischer Theorien ist nicht möglich. In zahlreichen Anwendungen ist es von großer Bedeutung, Bildinhalte unter Berücksichtigung der geometrischen Eigenschaften zu erkennen und zu beschreiben. Neben der theoretischen Analyse spielt die Entwicklung effizienter Algorithmen eine sehr wichtige Rolle.

Die Verifikation der Konvexität einer Menge ist im digitalen Kontext eine nichttriviale Aufgabe [1]. Im Jahre 1928 zeigte Tietze [2], dass die Konvexität einer Menge aus $\mathbb{R}^2$ (sogar allgemein in d Dimensionen) lokal entschieden werden kann mit einem Aufwand, der proportional ist zur Länge ihres Randes. In der digitalen Ebene $\mathbb{Z}^2$ (und auch im $\mathbb{Z}^d$) ist dagegen eine lokale Entscheidung nicht möglich [3]. Man befasst sich daher mit dem Problem, zu entscheiden, ob ein Teil des Randes einer digitalen Menge konvex oder konkav ist, indem man ein Verfahren benutzt, welches "so lokal wie möglich" ist.

Diskrete Geraden, Strecken und digitale konvexe Mengen sind Grunddefinitionen der digitalen Geometrie. In dieser Arbeit wurde eine Methode entwickelt für die Zerlegung des Randes einer Menge aus $\mathbb{Z}^2$ in konvexe und konkave Teile. Die Methode basiert auf Eigenschaften von digitalen Geraden nach Debled-Rennesson und Reveillès [4]. Zu dieser Zerlegung kann eine (kontinuierliche) polygonale Menge bestimmt werden, die die From der digitalen Menge repräsentiert, das heisst, dass ihr Rand gleiche Konvexitätseigenschaften besitzt, wie die digitale Ausgangsmenge. Man bezeichnet eine solche Darstellung als treu. Nachteilig ist hierbei die Tatsache, dass eine treue Darstellung Ecken mit nicht ganzzahligen Koordinaten haben kann.

Eine alternative Möglichkeit stellen polygonale Darstellungen dar, die "fast treu" sind und deren Ecken ganzzahlige Koordinaten haben. Sowohl treue als auch "fast treue" Darstellungen können mit einem Aufwand bestimmt werden, der proportinal zur Randlänge ist.

Es ist wohlbekannt, dass Mengen die Konvexität von ihren ebenen Schnitten erben. Ebene Schnitte digitale Mengen sowie Schnitte digitaler Mengen unter affinen Transformationen werden hier untersucht. Es wird gezeigt, wie deren geometrische und topologische Strukturen zu beschreiben sind. Ein Algorithmus zur Berechnung der d-konvexen Hülle einer Menge aus $\mathbb{Z}^3$ beschließt die Arbeit.

---

[1] Klette, R.: Digital Geometry – The birth of a new discipline. *Computer Science Department of the University of Auckland, CITR at Tamaki Campus*, CITR–TR–79, 2001.

[2] Tietze, H.: Bemerkungen über konvexe und nichtkonvexe Figuren. *J. Reine Angew. Math.*, **160**:67–69, 1929.

[3] Eckhardt, U.: Digital lines and digital convexity. In G.Bertrand, et al, eds: *Digital and Image Geometry*. LNCS, **2243**:207–226, Springer-Verlag, 2001.

[4] Debled-Rennesson, I., and J.-P. Reveillès: A linear algorithm for segmentation of digital curves. *Int. J. Pattern Recognition, Artif. Intell.*, **9**:635–662, 1995.