

# Bloch-Oszillationen ultrakalter bosonischer Atome in höheren Bändern eines bipartiten optischen Gitters

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
an der Fakultät für  
Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Fachbereich Physik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Carl Hippler

Hamburg

2021

Gutachter der Dissertation	Prof. Dr. Andreas Hemmerich Prof. Dr. Henning Moritz
Mitglieder der Prüfungskommission:	Prof. Dr. Andreas Hemmerich Prof. Dr. Henning Moritz Prof. Dr. Klaus Sengstock Prof. Dr. Ludwig Mathey Prof. Dr. Daniela Pfannkuche
Vorsitzende der Prüfungskommission:	Prof. Dr. Daniela Pfannkuche
Vorsitzender des Promotionausschusses:	Prof. Dr. Wolfgang Hansen
Leiter des Fachbereichs Physik:	Prof. Dr. Günter H. W. Sigl
Dekan der MIN-Fakultät:	Prof. Dr. Heinrich Graener

Datum der Disputation: 31.03.2022

## **Eidesstattliche Versicherung / Declaration on oath**

Hiermit versichere ich an Eides statt, die vorliegende Dissertationsschrift selbst verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt zu haben.

Hamburg, den 22.12.2021

---

Unterschrift der Doktorandin / des Doktoranden



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Experimente mit ultrakalten bosonischen Atomen in einem bipartiten quadratischen optischen Gitter vorgestellt. Das Gitter weist die Besonderheit auf, dass die Potenzialtiefendifferenz benachbarter Gittertöpfe kontinuierlich verändert werden kann. Dies ermöglicht die Anregung von Atomen in höhere Bloch-Bänder des Gitters.

Wir nehmen die in den Energieminima höherer Bänder kondensierten Atome als Ausgangspunkt für die Demonstration von Bloch-Oszillationen. Es wird eine Kraft auf die Atome erzeugt, welche zu einer linearen Bewegung im zweidimensionalen Quasiimpulsraum führt. Wir untersuchen die Bloch-Oszillationen in verschiedenen Bändern für zwei grundlegende Richtungen der Kraft, wobei auch der Betrag der Kraft variiert wird. Für jede Messung werden zu unterschiedlichen Zeitpunkten Band-Mapping-Bilder aufgenommen, so dass sich die Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum verfolgen lässt. Wir zeigen, wie sich aus den Messdaten jeweils die Frequenz der Bloch-Oszillation bestimmen lässt. Die so ermittelten experimentellen Frequenzwerte werden mit den theoretischen, in einer Simulation berechneten Werten verglichen.

Wir wenden das Werkzeug des Transports von Atomen im Quasiimpulsraum an, um orbitale Physik in höheren Bändern des Gitters zu erforschen. Es wird eine neue Methode der Kondensation von Atomen im zweiten und im siebten Band präsentiert, bei der die Atome bereits vor der Anregung in das jeweilige Band zu einem der beiden  $X$ -Punkte transportiert werden. Zudem wird eine Josephson-ähnliche Oszillationsdynamik zwischen den Zuständen an den  $X$ -Punkten des zweiten Bandes beobachtet.



# Abstract

In this thesis, we present experiments with ultracold bosonic atoms in a bipartite square optical lattice. The lattice offers the possibility to continuously tune the difference in potential depth of neighbouring wells. This enables us to excite atoms into higher Bloch bands of the lattice.

Starting with atoms condensed at the energy minima of higher Bloch bands, we demonstrate Bloch oscillations in the bipartite lattice. A force is applied to the atoms, leading to a linear motion in the two-dimensional quasimomentum space. We investigate the Bloch oscillations in certain bands for two general directions of the force, also varying the magnitude of the force. For each measurement band-mapping images at different times are recorded such that one can track the motion of the atoms in quasimomentum space. We show how to determine the frequency of the Bloch oscillations from the measured data. The experimentally obtained values for the frequency are then compared to the theoretical values one would expect from a simulation.

We make use of the tool of transporting atoms in quasimomentum space to explore orbital physics in higher bands. We show a new method to condense atoms in the second and seventh band, transporting the atoms to one of the two  $X$ -points before exciting them to the particular bands. Moreover, dynamics between the  $X$ -points in the second band resembling a Josephson oscillation is observed.



# Publikationen

J. Vargas, M. Nuske, R. Eichberger, C. Hippler, L. Mathey, und A. Hemmerich, *Orbital Many-Body Dynamics of Bosons in the Second Bloch Band of an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **126**, 200402 (2021)

T. Kock, C. Hippler, A. Ewerbeck, und A. Hemmerich, *Orbital optical lattices with bosons*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **49**, 042001 (2016)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Ultrakalte Quantengase in optischen Gittern . . . . .	1
1.2	Atome in höheren Bändern eines optischen Gitters . . . . .	3
1.3	Bloch-Oszillationen . . . . .	5
1.4	Diese Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Optische Gitter</b>	<b>11</b>
2.1	Optisches Dipolpotenzial . . . . .	11
2.2	Einfaches eindimensionales und zweidimensionales Gitter . . . . .	13
2.3	Bipartites zweidimensionales optisches Gitter . . . . .	15
2.4	Berücksichtigung der Anisotropie des bipartiten 2D-Gitters . . . . .	18
2.5	Bravais-Gitter und Wigner-Seitz-Zelle . . . . .	20
2.6	Reziprokes Gitter . . . . .	21
2.7	Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit gitterperiodischem Potenzial . . . . .	22
2.8	Bandstruktur des eindimensionalen Gitterpotenzials . . . . .	24
2.9	Bandstruktur des zweidimensionalen Gitterpotenzials . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>33</b>
3.1	Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats aus $^{87}\text{Rb}$ -Atomen . . . . .	33
3.1.1	Vakuumkammer . . . . .	33
3.1.2	Magnetooptische Fallen . . . . .	35
3.1.3	Experimenteller Ablauf der MOT-Phase . . . . .	36
3.1.4	Atome in statischen Magnetfeldern . . . . .	37
3.1.5	Neues Spulensystem . . . . .	38
3.1.6	Magnetischer Transport und Quadrupol-Ioffe-Falle . . . . .	39
3.1.7	Evaporatives Kühlen . . . . .	40
3.1.8	Abbildungssystem . . . . .	42
3.2	Realisierung des bipartiten zweidimensionalen optischen Gitters . . . . .	43
3.2.1	Aufbau des Gitters . . . . .	43
3.2.2	Auf einem Piezoaktor montierter Umlenkspiegel und Bedeutung der Zeitphasendifferenz $\vartheta$ . . . . .	45
3.2.3	Regelung der Zeitphasendifferenz . . . . .	46
3.2.4	Bestimmung der Zeitphasendifferenz aus dem Signal des Stabilisierungslichts . . . . .	47
3.3	Kalibrierung der Zeitphasendifferenz . . . . .	50
3.3.1	Impulsspektrum . . . . .	50
3.3.2	Impulsspektrum im ersten Band bei $\vartheta = \pi/2$ . . . . .	51
3.4	Lasersystem für das optische Gitter . . . . .	53

3.5	Positionierung der Linsen im Gitteraufbau . . . . .	53
3.5.1	Die Ausgangssituation . . . . .	54
3.5.2	Versetzen der achromatischen Linsen . . . . .	54
3.6	Bestimmung der Gittertiefe und der Anisotropieparameter . . . . .	55
3.6.1	Potenzialtiefen der 1D-Gitter . . . . .	55
3.6.2	Gitterspektroskopie . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Anregung in höhere Bänder des Gitters</b>	<b>61</b>
4.1	Anregung in das zweite Bloch-Band . . . . .	61
4.2	Adressierbare Bänder . . . . .	64
4.3	Anregung in das vierte und siebte Band . . . . .	66
4.4	Grundzustand im zweiten Band . . . . .	68
4.4.1	$p$ -Orbitale des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit Wechselwirkung . . . . .	68
4.4.2	Komplexe Überlagerung der Bloch-Zustände an den $X$ - Punkten . . . . .	69
4.4.3	Aufhebung der Entartung der Bandminima . . . . .	71
4.4.4	Besetzung der $X$ -Punkte bei von $90^\circ$ verschiedenem Schnittwin- kel der Gitterstrahlen . . . . .	74
4.5	Oszillation zwischen den $X$ -Punkten verschiedener Bänder . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Bloch-Oszillationen im bipartiten optischen Gitter</b>	<b>81</b>
5.1	Semiklassische Bewegungsgleichungen . . . . .	81
5.2	Entwicklung des Zustands eines Teilchens im Gitter bei Anwesen- heit einer externen Kraft . . . . .	82
5.3	Zeitentwicklung eines Wellenpakets während der Bloch-Oszillation	83
5.4	Bewegung im zweidimensionalen Quasiimpulsraum . . . . .	84
5.5	Erzeugung eines Potenzialgradienten am Ort der Atome . . . . .	86
5.5.1	Verschiebung des Fallenminimums . . . . .	86
5.5.2	Spulen für die Erzeugung der Kraft . . . . .	87
5.6	Experimenteller Ablauf . . . . .	89
5.7	Einstellen der Spulenströme . . . . .	91
5.8	Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise während einer Messreihe	93
5.8.1	Querschnitte durch die Brillouin-Zonen . . . . .	94
5.8.2	Ursache der Verschiebung . . . . .	97
5.9	Messungen mit „horizontaler“ Richtung der Kraft . . . . .	99
5.9.1	Erstes Band . . . . .	99
5.9.2	Zweites Band . . . . .	103
5.9.3	Viertes Band . . . . .	107
5.10	Messungen mit „diagonaler“ Richtung der Kraft . . . . .	112
5.10.1	Erstes Band . . . . .	113
5.10.2	Zweites Band . . . . .	115
5.10.3	Viertes Band . . . . .	118
5.11	Simulation der Kraft und Übersicht über die Messergebnisse . . . . .	121
5.12	Dekohärenzeffekte bei Bloch-Oszillationen . . . . .	125

<b>6</b>	<b>Anwendungen des Transports im Quasiimpulsraum</b>	<b>127</b>
6.1	Bloch-Zener-Oszillationen in den untersten beiden Bändern . . . . .	127
6.2	Transport zum $X$ -Punkt vor der Anregung ins zweite und siebte Band . . . . .	129
6.3	Rekondensation der Atome im zweiten Band nach Transport zum energetisch höheren $X$ -Punkt . . . . .	135
6.4	Oszillation zwischen den $X_{\pm}$ -Punkten im zweiten Band . . . . .	137
<b>7</b>	<b>Ausblick</b>	<b>141</b>
7.1	Rekondensationsdynamik im zweiten Band . . . . .	142
7.2	Studium von Bloch-Zener-Oszillationen . . . . .	144
7.3	Atominterferometer zur Bestimmung der Berry-Krümmung . . . . .	145
<b>A</b>	<b>Bose-Einstein-Kondensation</b>	<b>147</b>
A.1	Ultrakalte bosonische Gase . . . . .	147
A.2	$s$ -Wellen-Stöße und Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	147
A.3	Thomas-Fermi-Näherung . . . . .	149
<b>B</b>	<b>Der zweidimensionale harmonische Oszillator</b>	<b>151</b>
B.1	Kartesische Koordinaten . . . . .	151
B.2	Polarkoordinaten . . . . .	152
<b>C</b>	<b>Wannier-Funktionen und Tight-Binding-Modell des 1D-Gitters</b>	<b>157</b>
<b>D</b>	<b>Tight-Binding-Modell im bipartiten zweidimensionalen Gitter</b>	<b>159</b>
<b>E</b>	<b>Wechselwirkung und Verteilung der Atome im optischen Gitter, Bose-Hubbard-Modell</b>	<b>163</b>
<b>F</b>	<b>Zeitliche Entwicklung des Wellenpakets im Ortsraum während der Bloch-Oszillation</b>	<b>167</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>169</b>



# 1 Einleitung

Ultrakalte Quantengase in optischen Gittern stellen einzigartige Modellsysteme für die Quantensimulation von komplexen Vielteilchensystemen dar. Da der Hilbert-Raum eines Quantensystems exponentiell mit dessen Größe wächst, ist es nur schwer möglich, ein aus vielen Teilchen bestehendes System mit Hilfe eines klassischen Computers zu simulieren [Fey82]. Aufgrund der hohen Komplexität von Festkörpern sind viele Phänomene, die in diesen auftreten, noch unverstanden. Durch interferierende Laserstrahlen lassen sich periodische Potenziale für neutrale Atome erzeugen, sogenannte optische Gitter. Die Atome ordnen sich periodisch im Gitter an, so dass sich lichtgebundene Kristalle ausbilden. Mit den Atomen im Gitter lassen sich Hamilton-Operatoren realisieren, die bestimmte Aspekte anderer Quantensysteme, zum Beispiel von Festkörperkristallen, nachbilden.

## 1.1 Ultrakalte Quantengase in optischen Gittern

Von besonderer Bedeutung für Experimente mit optischen Gittern sind ultrakalte Quantengase, welche Temperaturen in der Größenordnung von einigen zehn Nanokelvin besitzen. Bei solch geringen Temperaturen spielen Quanteneffekte eine dominante Rolle. Einen Meilenstein beim Erreichen von ultrakalten Quantengasen stellt die erstmalige experimentelle Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats (BEC) in dünnen atomaren Gasen im Jahr 1995 dar [And95, Bra95, Dav95a]. Dieser neue Quantenzustand war in den 1920er-Jahren von Satyendranath Bose und Albert Einstein vorhergesagt worden [Bos24, Ein25]. Für seine experimentelle Realisierung wurden Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl E. Wieman 2001 mit dem Nobelpreis geehrt. Neben der Kondensation von Bose-Gasen gelang auch die Erzeugung von entarteten Fermi-Gasen [DeM99, Sch01, Tru01]. Durch diese wissenschaftlichen Erfolge standen von nun an Ensembles aus miteinander wechselwirkenden, der Quantenstatistik folgenden Atomen für Experimente zur Verfügung.

Die ersten Jahre auf dem damit neu eingeführten Fachgebiet ultrakalter Atome waren geprägt von der Untersuchung kohärenter Materiewellen und damit verbundener Phänomene. So konnte man die Interferenz zweier überlagerter Bose-Einstein-Kondensate beobachten [And97], die langreichweitige Phasenkohärenz eines BECs [Blo00] sowie quantisierte Vortizes und Vortex-Gitter [Mat99, Mad00, AS01]. Auch gelang die Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats aus schwach gebundenen Fermionenpaaren [Gre03b, Joc03, Zwi03]. Bahnbrechend war die Beobachtung des BEC-BCS-Übergangs, bei welchem das Bose-Einstein-Kondensat aus den Fermionenpaaren in einen suprafluiden BCS-Zustand mit schwach wechselwirkenden Cooper-Paaren übergeht [Bar04, Bou04, Reg04, Zwi04]. Wichtig

war hierbei, dass es mit Hilfe von Feshbach-Resonanzen möglich geworden war, die Wechselwirkung zwischen den Teilchen in einem nie zuvor erreichten Maße zu kontrollieren [Chi10].

Die ersten Experimente mit Atomen in optischen Gittern wurden Anfang der Neunzigerjahre durchgeführt [Ver92, Jes92, Hem93]. Es wurden thermische Ensembles aus atomaren Gasen in dissipativen Lichtpotenzialen gefangen, durch welche die Atome gekühlt wurden. Die mit Laserkühlung erreichbaren Temperaturen liegen in der Größenordnung von hundert Mikrokkelvin. Wenn man Atome dieser Temperatur im Gitter fangen möchte, ist die benötigte Gittertiefe so groß, dass kaum Tunnelprozesse zwischen benachbarten Gitterplätzen stattfinden können. Quantenentartete Bose- und Fermi-Gase hingegen lassen sich bereits in relativ flachen Gitterpotenzialen fangen, in denen Tunnelprozesse zwischen den Gitterplätzen stattfinden können.

Die quantenmechanische Beschreibung von ultrakalten Atomen im optischen Gitter ähnelt sehr stark der von Elektronen im Potenzial der Ionenrümpfe in einem Festkörperkristall. Atome im optischen Gitter stellen also ein Modellsystem dar, bei dem das Gitterpotenzial die Rolle des Potenzials der Ionenrümpfe einnimmt und die Atome die Rolle der Elektronen. Man konnte theoretisch zeigen, dass sich ein Bose-Einstein-Kondensat im untersten Bloch-Band eines konservativen optischen Gitterpotenzials durch ein Hubbard-Modell beschreiben lässt, einem Modell aus dem Gebiet der Festkörperphysik [Jak98]. In diesem Modell wird das Wechselspiel des Tunnelns der Atome zwischen benachbarten Gitterplätzen und der Wechselwirkung der Atome beschrieben. Das Bose-Hubbard-Modell, also das Hubbard-Modell für Bosonen im optischen Gitter, konnte experimentell demonstriert werden, wobei sich der Quantenphasenübergang vom Suprafluid zum Mott-Isolator beobachten ließ [Gre02]. In der Zeit nach diesem Durchbruch wurde untersucht, wie sich die Dimension des Systems auf diesen Phasenübergang auswirkt [Stö04, Köh05, Spi07], zudem gelang die Realisierung eines Mott-Isolators in einem fermionischen System [Jör08].

Optische Gitter als Modellsysteme bieten im Vergleich zu realen Festkörpern den Vorteil, dass sich viele relevante Systemparameter im Experiment leicht kontrollieren lassen [Mor06, Blo08]. Hierzu zählen zum Beispiel die Dimension des Systems sowie Tiefe und Geometrie des Gitterpotenzials. Diese Eigenschaften lassen sich über die Parameter der verwendeten Laserstrahlen einstellen: Wellenlänge, Polarisierung, Intensität und räumliche Anordnung der Strahlen. Desweiteren kann man die Anzahl der Teilchen auf den Gitterplätzen, Vorzeichen und Stärke der Wechselwirkung zwischen den Teilchen sowie durch die Wahl der Atomspezies die Art der Quantenstatistik (Bose- oder Fermi-Statistik) einstellen. Einige der genannten Parameter lassen sich auch mit hoher Präzision zeitlich ändern während eines Experimentdurchlaufs. In den letzten Jahren sind viele experimentelle Apparaturen entstanden, in denen In-Situ-Abbildungen der Atome im Gitter mit Auflösung der einzelnen Gitterplätze aufgenommen werden können. Beispiele hierfür sind in [Bak10, She10, Hal15, Omr15] zu finden. Optische Gitter stellen damit einen Baukasten für die Verwirklichung komplexer Quantenvielteilchensysteme dar, mit denen Festkörperphänomene simuliert werden können, die in Festkörpern selbst schwer zugänglich sind, beispielsweise die Hochtemperatursupralei-

tung [Lew07, Blo12].

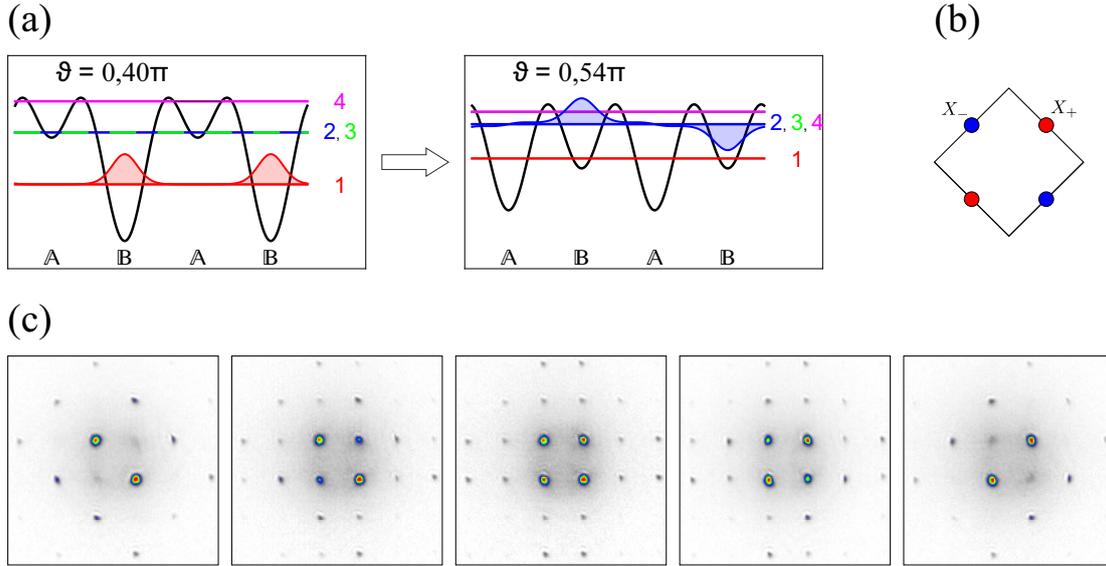
Mit Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern wurden anfangs vor allem Experimente durchgeführt, bei denen die Teilchen den Grundzustand im Gitter besetzen. Hierbei wird an jedem Gitterplatz lokal der Grundzustand besetzt und es gilt das Feynmansche „no-node theorem“, welches besagt, dass die Grundzustands-Wellenfunktion eines bosonischen Vielteilchensystems positiv definit gewählt werden kann und damit keinen Knoten besitzt [Fey98]. Es wurden nun unkonventionelle bosonische Zustände erzeugt, die diesem Theorem nicht unterliegen. Hierzu zählen die Erzeugung künstlicher Eichfelder, zum Beispiel durch laserunterstütztes Tunneln [Lin09, Dal11, Aid11, Aid13, Miy13], sowie das Einstellen der Tunnelkopplungen zwischen benachbarten Gitterplätzen durch „Schütteln“ des Gitters, wodurch es zur Ausbildung von Grundzuständen mit komplexwertiger Wellenfunktion kommt [Str11, Str12, Zen09, Jot14].

## 1.2 Atome in höheren Bändern eines optischen Gitters

Seit einigen Jahren liegt bei Experimenten in optischen Gittern ein besonderes Augenmerk auf der Untersuchung von Atomen in höheren Bloch-Bändern. Hierbei werden orbitale Zustände besetzt und die Wellenfunktion weist eine nodale Struktur auf. Die orbitalen Wellenfunktionen unterscheiden sich in der Orientierung und der Anzahl der azimuthalen und radialen Knoten. Es sind auch Entartungen von Zuständen möglich. In diesem Fall kann die Wechselwirkungsenergie als kleinste Energieskala die Wellenfunktion der Atome in den höheren Bändern mitbestimmen. Orbitale Freiheitsgrade haben eine besondere Bedeutung bei chemischen Bindungen.

Im Jahr 2007 wurde die Anregung von Bosonen in das zweite Band eines einfachen quadratischen Gitters demonstriert [MÖ7]. Dabei wurden die inkohärenten Atome im Grundzustand des Gitters mit Hilfe eines stimulierten Raman-Übergangs in das zweite Bloch-Band transferiert. Die Atome relaxieren anschließend durch Stöße und Tunnelprozesse und kondensieren am Minimum des zweiten Bandes. Es bildet sich jedoch nur in einer Dimension Kohärenz aus aufgrund der stark anisotropen Tunnelkopplung zwischen benachbarten  $p$ -Orbitalen.

In unserer Arbeitsgruppe werden seit einigen Jahren ebenfalls Experimente mit Atomen in höheren Bändern optischer Gitter durchgeführt, die in der Forschungscommunity großen Anklang gefunden haben. Es wird dabei ein zweidimensionales interferometrisches Gitter mit einer bipartiten quadratischen Struktur verwendet, in welches ein Kondensat von Rubidium-87-Atomen geladen wird. In diesem Gitter gibt es zwei Klassen von Gittertöpfen,  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ , die wie die weißen und schwarzen Felder eines Schachbretts angeordnet sind und deren Potenzialtiefendifferenz  $\Delta V$  sich im Experiment kontrollieren lässt. Durch eine dynamische Änderung von  $\Delta V$  kann man die Atome gezielt wie in einem Fahrstuhl in höhere Bänder transferieren, wo sie an den Bandminima kondensieren und Zustände mit langreichweitiger Kohärenz ausbilden (siehe Abbildung 1.1(a)). Die hierbei erzeugten Kondens-



**Abbildung 1.1:** (a) Anregung von Atomen in das zweite Band des bipartiten Gitters. Die mit der Potenzialtiefendifferenz der beiden Gittertopfklassen verknüpfte Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  wird schnell von einem Start- zu einem Zielwert gefahren. Im zweiten Band besetzen die Atome auf den flachen Gittertöpfen  $s$ -Orbitale und auf den tiefen  $p$ -Orbitale. Gezeigt wird der Querschnitt durch das Gitterpotenzial bei der anfänglichen (links) und finalen (rechts) Gitterkonfiguration. Eingezeichnet ist jeweils die Lage der ersten vier Bänder und die Wellenfunktionen des Grundzustands im zweiten Band. (b) Lage des  $X_+$ - und  $X_-$ -Punktes in der ersten Brillouin-Zone. (c) In früheren Experimenten aufgenommene Impulsspektren bei verschiedenen Werten der Energiedifferenz  $\Delta E \equiv E_2(X_-) - E_2(X_+)$  zwischen den  $X_{\pm}$ -Punkten.  $\Delta E$  nimmt dabei von links nach rechts zu und ist beim mittleren Spektrum annähernd null. Man sieht, dass sich die Besetzung der  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkte in Abhängigkeit von  $\Delta E$  ändert [Öls13].

sate gehen ebenfalls über das no-node theorem hinaus [Wu09].

In vorangegangenen Experimenten an unserer Apparatur konnte die Kondensation bosonischer Rubidium-87-Atome an den Energieminima des zweiten Bandes, welche sich an den Punkten  $X_+$  und  $X_-$  befinden (siehe Abbildung 1.1(b)), gezeigt werden [Wir11]. Die Wellenfunktion des Kondensats setzt sich aus  $s$ -Orbitalen in den flachen Gittertöpfen und einer Überlagerung von  $p_x$ - und  $p_y$ -Orbitalen in den tiefen Gittertöpfen zusammen. Die  $s$ -Orbitale fungieren als isotrope Tunnelbrücken zwischen den ausgerichteten  $p$ -Orbitalen, so dass sich eine langreichweitige zweidimensionale Kohärenz ausbilden kann. Es wird auf diese Weise ein unkonventioneller suprafluider Zustand realisiert.

Eine wichtige Erkenntnis dieser Versuche war, dass die  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkte bei ausgeglichenen Intensitäten der vier im Gitter miteinander interferierenden Laserstrahlen energetisch entartet sind und es zu einer komplexen Superposition der beiden  $p$ -Orbitale von der Form  $p_x \pm ip_y$  kommt [Öls13]. Dadurch wird der Raum, den die Atome in den tiefen Gittertöpfen ausfüllen, maximiert und die Wechselwirkungsenergie der Atome minimiert. Eine solche Superposition tritt auch im supraleitenden Festkörper Strontiumruthenat auf, in welchem es zu einer unkonventionellen Paarung von Elektronen kommt [Mae01]. Sind die Intensitäten

der vier Laserstrahlen hingegen nicht ausgeglichen, ist der Energieunterschied  $\Delta E$  zwischen den beiden  $X$ -Punkten ungleich null. Ab einer bestimmten Größe von  $|\Delta E|$  wird nur noch einer der beiden  $X$ -Punkte besetzt. Abbildung 1.1(c) zeigt Impulsspektren für verschiedene Werte von  $\Delta E$ . Dass sich bei energetischer Entartung der beiden  $X$ -Punkte tatsächlich eine komplexe Superposition der Bloch-Zustände an den  $X_{\pm}$ -Punkten ausbildet, konnte in [Koc15] demonstriert werden.

Auch wurde an unserer Apparatur die Kondensation von Atomen im vierten Band sowie das Verhalten beim Stimmen durch eine vermiedene Bandkreuzung des zweiten, dritten und vierten Bandes untersucht [Ö11, Ö12]. Zudem wurde an einem anderen, in den letzten Jahren aufgebauten Experiment in unserer Arbeitsgruppe ein entartetes Fermigas in höheren Bändern eines bipartiten optischen Gitters realisiert [Hac21].

Vor Kurzem konnte ein Kondensat im zweiten Bloch-Band eines optischen Gitters mit hexagonaler Bornitrid-Geometrie erzeugt werden [Wan21]. Dieses stellt ein chirales atomares Suprafluid mit globalem Drehimpuls dar. Ähnlich wie an unserem Experiment lassen sich hier Atome durch das Ändern der Potenzialtiefendifferenz zweier Subgitter in höhere Bänder anregen. Die Besonderheit ist dabei, dass sich bei der Besetzung von nur einem der beiden Bandminima an den  $K$ -Punkten eine komplexe Wellenfunktion der Form  $p_x \pm ip_y$  ausbildet.

## 1.3 Bloch-Oszillationen

Seit der Einführung der Quantenmechanik ist es von fundamentalem Interesse, die Dynamik eines Teilchens in einem periodischen Potenzial zu verstehen. Die Eigenzustände des Teilchens sind die Bloch-Funktionen, welche über das Gitter delokalisiert sind. Felix Bloch war Ende der 1920er-Jahre zu dem Schluss gekommen, dass, wenn man eine Kraft in Form eines elektrischen Feldes auf die Elektronen in einem Kristallgitter wirken lässt, die Elektronen nicht kontinuierlich beschleunigt werden, sondern eine Oszillationsbewegung im Quasiimpulsraum ausführen. Das Vorzeichen der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen ändert sich also periodisch mit der Zeit [Blo29].

Bloch-Oszillationen sind bisher nicht experimentell an Elektronen in einem natürlichen Gitter beobachtet worden, da in einem solchen System die Bloch-Periode, also die Periodendauer der Bloch-Oszillation, deutlich größer ist als die Zerfallszeit des Systems. Der Zerfall findet aufgrund von Kollisionen der Elektronen mit Defekten und Störstellen des Kristalls sowie Streuung an Phononen statt. Ein weiterer Grund für Dekohärenz ist die Wechselwirkung zwischen den Elektronen. Aufgrund der Relaxation ist die kohärente Entwicklung auf eine relativ kurze Zeit begrenzt, in der der Quasiimpuls nur einen kleinen Teil der Brillouin-Zone durchlaufen kann. Es werden im Folgenden einige Meilensteine der Erforschung von Bloch-Oszillationen genannt, welche die Vielfältigkeit des Forschungsfeldes ausdrücken.

In den frühen Neunzigerjahren konnten Bloch-Oszillationen an Elektronen in Halbleiter-Supergittern beobachtet werden [Fel93, Was93]. Diese Heterostrukturen besitzen im Vergleich zu Volumenkristallen einen deutlich größeren Abstand der Gitterplätze und eine geringere Dichte der Ladungsträger, so dass die Bloch-

Periode kleiner ist als die Relaxationszeit. Zerfallsprozesse spielen hier aber nach wie vor eine große Rolle.

Im Jahr 1996 wurden Bloch-Oszillationen auch an kalten thermischen bosonischen Atomen in einem eindimensionalen optischen Gitter beobachtet [BD96]. Die Systeme der Atome in den künstlich erzeugten Lichtkristallen haben gegenüber Festkörperkristallen den Vorteil, dass keine Defekte vorhanden und die Kohärenzzeiten relativ lang sind. In dem durchgeführten Experiment wurden die Atome mit einer Quasiimpulsverteilung, die kleiner ist als die Breite der Brillouin-Zone, präpariert, so dass sich die Kohärenzlänge über mehrere Perioden des Gitterpotenzials erstreckt. Durch eine zeitliche Modulation der Frequenzdifferenz der beiden gegenläufigen Gitterstrahlen erzeugt man ein bezüglich des Laborsystems beschleunigtes Gitter, so dass die Atome eine Inertialkraft bezüglich des Gittersystems sehen, welche die Bloch-Oszillation antreibt.

Durch die Realisierung von Bose-Einstein-Kondensaten wurde es möglich, Bloch-Oszillationen an schwach wechselwirkenden ultrakalten Atomen zu beobachten [And98, Mor01]. Zudem konnte das Phänomen auch an Lichtpulsen in photonischen Kristallen [Per99, Mor99] und sogar in mechanischen Systemen [Gut06] demonstriert werden. Da die Frequenz der Bloch-Oszillation vom Betrag der treibenden Kraft abhängt, eignen sich Bloch-Oszillationen zur präzisen Messung von Kräften, insbesondere der Gravitationskraft [Tar12, Pol11, And13].

In [Gus08] wird gezeigt, wie es sich auf die Bloch-Oszillation eines BECs auswirkt, wenn die Streulänge in der Umgebung einer Feshbach-Resonanz variiert wird. Es kann beim Ausschalten der Wechselwirkung über einen Zeitraum von einigen Sekunden eine Bloch-Oszillation mit tausenden Perioden beobachtet werden. Bereits zuvor waren langlebige Bloch-Oszillationen von schwach wechselwirkenden Strontium-Atomen beobachtet worden [Fer06]. Ein Bloch-Oszillations-Interferometer, bei dem die Wechselwirkung zwischen den Atomen ebenfalls über eine Feshbach-Resonanz ausgeschaltet werden kann, wird in [Fat08] vorgestellt. In [Hal10, Alb09] werden Bloch-Oszillationen bei Anwesenheit einer modulierten Kraft untersucht.

Bloch-Oszillationen konnten desweiteren in Ensembles aus nichtwechselwirkenden quantenentarteten Fermionen beobachtet werden [Roa04]. Hierbei findet Interferenz von identischen Fermionen statt, die in einem vertikal ausgerichteten optischen Gitter gefangen sind. Aufgrund des Fehlens der Wechselwirkung kann die Zeitevolution über mehr als hundert Perioden verfolgt werden.

Auch wurde demonstriert, dass Bloch-Oszillationen sogar bei kontinuierlicher Translationssymmetrie des Systems stattfinden können, ohne Anwesenheit von diskreter Translationssymmetrie, wie es in einem optischen Gitter der Fall wäre. Es wird die Situation eines Fremdatoms in einer eindimensionalen Quantenflüssigkeit betrachtet, wobei eine Bloch-Oszillations-Dynamik aufgrund von starken Quantenkorrelationen stattfindet [Mei17].

In [Kef16, Geo17] wird eine Methode eingeführt, um Bloch-Oszillationen eines BECs in einer Cavity kontinuierlich und ohne das Durchführen einer auf die Materiewelle destruktiv wirkenden Messung zu beobachten. Während der Bloch-Oszillation kommt es zu einer Variation des Dichteprofiles der Materiewelle in der Cavity, wodurch sich die Resonanzfrequenz der Cavity und damit die

von der Cavity transmittierte Lichtintensität ändert. Letztere kann mit einem Photodetektor gemessen werden, woraus sich die Phase der Bloch-Oszillation bestimmen lässt, ohne direkte Messung an den Atomen.

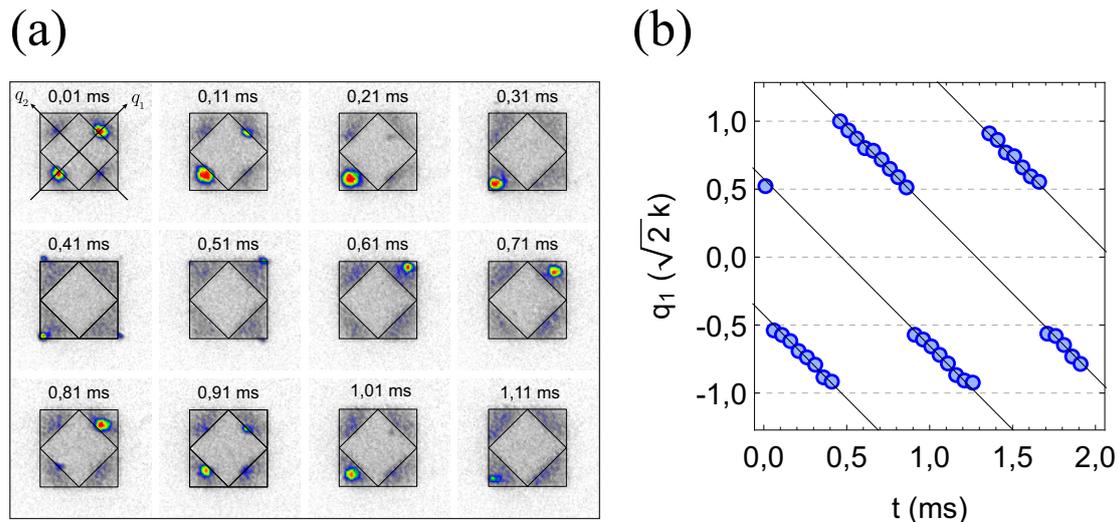
Bloch-Oszillationen mit einer großen Amplitude im Ortsraum werden in [Gei18] demonstriert. Im Regime mit großer Tunnelkopplung und schwacher statischer Kraft lassen sich Bloch-Oszillationen mit einer Amplitude von hunderten von Gitterplätzen im untersten und im ersten angeregten Band beobachten.

In der theoretischen Physik haben Bloch-Oszillationen ebenfalls reges Interesse hervorgerufen. So werden sie beispielsweise als ein Werkzeug gesehen, mit dessen Hilfe im optischen Gitter nach feinen Abweichungen von Vielteilchensystemen von der Ein-Teilchen-Beschreibung gesucht werden kann [Hol00]. Wichtige theoretische Forschungsthemen sind Wannier-Stark-Zustände [Glü01, Mak15a, Mak15b], Dekohärenzeffekte und der Einfluss der Wechselwirkung zwischen den Atomen auf die Bloch-Oszillation [Kol03a, Buc03, Wit05, Pon06, Mah14] sowie Bloch-Zener-Oszillationen [Bre06].

Es sind insbesondere auch zweidimensionale Gitterpotenziale, die in Abhängigkeit von der Stärke eines Interferenzterms entweder separabel oder nichtseparabel sind, theoretisch untersucht worden [Kol03b, Wit04]. In solchen Systemen, zu denen das in unserer Apparatur realisierte optische Gitter gehört, hängt die Energielücke zwischen den Bändern von dem Interferenzterm ab. Sie stellen ideale Modellsysteme für das Studium von Landau-Zener-Übergängen dar und eignen sich gut für die Untersuchung von kohärenten Bloch-Zener-Oszillationen. Diese sind eine Verallgemeinerung von Bloch-Oszillationen, wobei an vermiedenen Bandkreuzungen Landau-Zener-Übergänge stattfinden können.

Experimentell wurden Bloch-Zener-Oszillationen genutzt für die Realisierung eines Stückelberg-Interferometers mit ultrakalten Atomen in einem optischen Gitter, das eine aus zwei Bändern bestehende Miniband-Struktur besitzt [Kli10]. Durch zwei teilweise Landau-Zener-Übergänge zwischen den beiden Bändern lässt sich der Bandabstand bei einem beliebigen Wert des Quasiimpulses und damit die Bandstruktur des Gitters bestimmen. In [Ueh13b, Ueh13a] werden Bloch-Zener-Oszillationen systematisch an einem ultrakalten Fermigas studiert. Mit ihrer Hilfe wird die Position von Dirac-Punkten in einem Honigwabengitter bestimmt, bei welchem sich der Energie-Offset der beiden Subgitter einstellen lässt. Das Wellenpaket wird während eines Bloch-Zyklus sukzessive aufgespalten und wiedervereint, wobei die Bandkreuzungen an den Dirac-Punkten für das atomare Wellenpaket wie Strahlteiler wirken.

Bei Experimenten mit Bloch-Oszillationen von ultrakalten Atomen in höheren Bändern eines optischen Gitters lässt sich orbitale Physik mit dem Werkzeug des Transports im Quasiimpulsraum verbinden. Hierbei wird die Präparation von maßgeschneiderten Quantenzuständen in höheren Bändern an beliebigen Positionen der Brillouin-Zone ermöglicht. Man kann Rekondensationsphänomene untersuchen, wenn die Atome an eine Position abseits des Minimums des adressierten Bandes transportiert werden [Sha20]. Zudem wird die Erforschung einer Oszillation zwischen den Bloch-Zuständen der beiden Minima des zweiten Bandes möglich [Hem19]. Wenn man die Atome auf geschlossenen Pfaden im Quasiimpulsraum bewegt, kann die Berry-Krümmung, die mit Bandkreuzungen



**Abbildung 1.2:** Bloch-Oszillation im zweiten Band bei diagonaler ( $-(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ ) Richtung der Kraft. (a) Die sich im zweiten Bloch-Band unter dem Einfluss der Kraft bewegenden Atome werden nach einer variablen Zeit  $t$  mit Hilfe der Band-Mapping-Technik auf die zweite Brillouin-Zone abgebildet. Eingezeichnet sind die Umrisse der ersten und zweiten Brillouin-Zone. (b) Auftragung der Quasiimpulskoordinate  $q_1$  (siehe erstes Bild in (a)) gegen die Zeit.

im Gitter verbunden ist, gemessen werden [Duc15, Li16].

## 1.4 Diese Arbeit

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Realisierung von Bloch-Oszillationen ultrakalter bosonischer Atome in höheren Bändern eines quadratischen bipartiten optischen Gitters. Durch eine schnelle kontrollierte Änderung der Potenzialtiefendifferenz  $\Delta V$  der beiden Klassen von Gittertöpfen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  lassen sich die Rubidium-87-Atome beispielsweise in das zweite, vierte und siebte Band anregen. Es werden Messungen von Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Band vorgestellt, wobei wir uns auf zwei grundlegende Richtungen der Kraft konzentrieren: der „horizontalen“ Richtung (parallel zur x-Achse des Gitters) und der „diagonalen“ Richtung (im Winkel von  $45^\circ$  zur x-Achse). Die Kraft wird durch das instantane Einschalten eines zusätzlichen Magnetfeldes erzeugt und kann in Richtung und Betrag in der Gitterebene (x-y-Ebene) variiert werden. Es wird gezeigt, wie sich aus der Analyse der Band-Mapping-Bilder einer Messung die Bloch-Periode ermitteln lässt (siehe Abbildung 1.2). Die experimentell für die Frequenz ermittelten Werte sollen mit den theoretischen Werten, die sich aus einer Modellierung des Magnetfeldes der Spulenkonfiguration ergeben, verglichen werden. Anschließend stellen wir Anwendungen des Transports im Quasiimpulsraum unseres bipartiten Gitters vor. Hierzu zählt eine neuartige Methode der Erzeugung eines Kondensats im zweiten und siebten Band, bei welcher die Atome bereits vor der Änderung von  $\Delta V$  an die Stelle des Bandminimums transportiert werden. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

- Im zweiten Kapitel werden die physikalischen Grundlagen von Atomen in einem optischen Gitter dargelegt. Es werden die Ausbildung des Gitterpotentials sowie die Entstehung der Bandstruktur diskutiert. Insbesondere wird hierbei auf das in unseren Experimenten verwendete zweidimensionale bipartite Gitter eingegangen.
- Das dritte Kapitel behandelt den experimentellen Aufbau unserer Apparatur. Es erfolgt eine Beschreibung der Maschine, mit der sich ein Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidium-87-Atomen erzeugen lässt. Dieses dient als Ausgangspunkt für die Experimente im optischen Gitter. Es wird erklärt, wie das bipartite Gitter realisiert wird und wie sich die sogenannte Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  einstellen und kontrollieren lässt. Zudem wird verdeutlicht, dass sich anhand von Kalibrierungsmessungen bestimmte Gitterparameter bestimmen lassen. Zu diesen zählen die Gittertiefe, aber auch andere Parameter, welche die Anisotropie des Gitters ausdrücken.
- Kapitel 4 widmet sich dem Anregungsmechanismus, mit dem sich Kondensate in höheren Bändern des optischen Gitters erzeugen lassen. Es werden die Anregungssequenzen für das zweite, vierte und siebte Band präsentiert. Wir gehen in dem Kapitel genauer auf die Grundzustände im zweiten Band ein, welche in Abhängigkeit von der Energiedifferenz der Punkte  $X_+$  und  $X_-$  entweder eine Besetzung von nur einem  $X$ -Punkt oder eine komplexe Superposition beider  $X$ -Punkte darstellen. Zum Abschluss des Kapitels wird eine Oszillation zwischen den Zuständen in verschiedenen Bändern an einem der beiden  $X$ -Punkte demonstriert.
- Im fünften Kapitel legen wir zunächst die theoretischen Grundlagen von Bloch-Oszillationen dar, wobei auch genauer auf die Bewegung im Quasiimpulsraum des zweidimensionalen Gitters eingegangen wird. Es wird erklärt, wie an unserem Experiment eine Kraft auf die Atome erzeugt wird, so dass sie sich durch den reziproken Raum bewegen und Bloch-Oszillationen ausführen. Es werden Bloch-Oszillationen in drei verschiedenen Bändern und bei zwei grundlegenden Richtungen der Kraft vorgestellt. Zum Nachvollziehen der Bewegung durch den Quasiimpulsraum werden zu verschiedenen Zeitpunkten Band-Mapping-Bilder aufgenommen. Durch deren Analyse ist es möglich, für jede Messung die Frequenz der Bloch-Oszillation zu bestimmen. Es erfolgt ein Vergleich mit den theoretisch aus einer Simulation der Magnetfelder berechneten Frequenzen.
- Kapitel 6 demonstriert experimentelle Anwendungen des Transports von Atomen im Quasiimpulsraum. So werden neuartige Anregungsmethoden für das zweite und siebte Band vorgestellt, bei denen im Unterschied zu den bisherigen Sequenzen die Atome bereits vor der schnellen Änderung der Zeitphasendifferenz an einen der  $X$ -Punkte des ersten Bandes transportiert werden. Auch präsentieren wir ein Phänomen, bei welchem nach einem Transport der Atome an einen der  $X$ -Punkte des ersten Bandes und einer schnellen Zeitphasenrampe in das zweite Band eine Oszillation zwischen dem  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt beobachtet werden kann.

- Das siebte Kapitel schließlich fasst die experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf zukünftige Experimente im bipartiten Gitter.

## 2 Optische Gitter

Ein idealer Festkörper stellt eine streng periodische Anordnung von Atomen dar. Lange Zeit war ungeklärt, wie sich Elektronen im Festkörper bewegen können, ohne von den positiv geladenen Atomrümpfen beeinträchtigt zu werden. Diese Fragestellung wurde von Felix Bloch Ende der 1920er-Jahre beantwortet. Die Antwort liegt darin, dass die Elektronenwellen im Festkörper eine gitterperiodische Modulation besitzen. Diese Wellen, welche man als *Bloch-Wellen* bezeichnet, werden in einem perfekt periodischen Festkörper nicht gestreut. Abweichungen von der strengen Periodizität führen jedoch zu Streuprozessen. In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Physik von ultrakalten Atomen beschrieben werden, die sich in einem periodischen, mit Hilfe von Laserstrahlen erzeugten Gitterpotenzial befinden. Es werden dabei die Entstehung des optischen Gitterpotenzials in verschiedenen Dimensionen und das Zustandekommen der Bandstruktur im Gitter beschrieben. Insbesondere gehen wir dabei auf das an unserer Apparatur realisierte bipartite zweidimensionale optische Gitter ein.

### 2.1 Optisches Dipolpotenzial

Optische Dipolpotenziale kommen durch die Wechselwirkung von Atomen mit Laserstrahlen zustande. Im Folgenden orientieren wir uns an [Gri00]. Befindet sich ein Atom in einem Laserstrahl mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , wird es durch das elektrische Feld  $\vec{E}$  des Lichts polarisiert und erhält ein Dipolmoment  $\vec{d}$ , welches mit der gleichen Frequenz wie das elektrische Feld schwingt. Für die Amplitude  $d_0$  des induzierten Dipolmoments gilt

$$d_0 = \alpha(\omega) E_0, \quad (2.1)$$

wobei  $E_0$  die Amplitude des elektrischen Feldes und  $\alpha$  die im Allgemeinen komplexe *Polarisierbarkeit* sind. Ein Dipol erfährt in einem elektrischen Feld das Potenzial

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\frac{1}{2} \langle \vec{d} \circ \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I \quad (2.2)$$

mit der Lichtintensität  $I = 1/2 \varepsilon_0 c |E_0|^2$ . Die Dipolkraft auf ein Atom im Lichtfeld beträgt dann

$$\vec{F}_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_{\text{dip}}(\vec{r}). \quad (2.3)$$

Bei der Erzeugung des Dipolpotenzials wird Energie aus dem Lichtfeld absorbiert und anschließend spontan in Form von Dipolstrahlung emittiert. Die Rate der absorbierten Leistung ist gegeben durch

$$P_{\text{abs}}(\vec{r}) = \langle \dot{\vec{d}} \circ \vec{E} \rangle_t = \frac{\omega}{\varepsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\vec{r}). \quad (2.4)$$

Damit verbunden ist die *Streurate* der Photonen, welche sich als

$$\Gamma_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{P_{\text{abs}}(\vec{r})}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\varepsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\vec{r}) \quad (2.5)$$

schreiben lässt.

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Polarisierbarkeit  $\alpha$  sehr kompliziert. Ein theoretisches Modell für die Bestimmung von  $\alpha$  ist das *semiklassische Modell*. Hierbei wird das Atom als Zwei-Niveau-Quantensystem behandelt, welches mit einem klassischen Lichtfeld wechselwirkt. In dem Modell tritt die Dämpfungsrate  $\Gamma$  auf, für welche man

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3} |\langle e | \hat{\mu} | g \rangle|^2 \quad (2.6)$$

erhält, mit dem elektrischen Dipol-Operator  $\hat{\mu}$ .

In Dipolfällen wird zumeist sehr stark rotverstimmt Licht verwendet, so dass Sättigungseffekte vernachlässigt werden können und die Streurate  $\Gamma_{\text{sc}}$  klein ist gegenüber  $\Gamma$ . In diesem Fall gelten für das Dipolpotenzial und die Streurate:

$$V_{\text{dip}}(\vec{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\vec{r}) \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\vec{r}) \quad (2.8)$$

Die beiden obigen Formeln sind gültig für jede Frequenz  $\omega$  des den Oszillator treibenden Laserlichts. Bei vielen Experimenten gilt, dass die Verstimmung  $\Delta = \omega - \omega_0$  deutlich kleiner ist als die Resonanzfrequenz des atomaren Übergangs,  $|\Delta| \ll \omega_0$ . In diesem Fall ergeben sich durch Anwendung der sogenannten *Rotating-Wave-Approximation* [All75] die vereinfachten Formeln:

$$\boxed{V_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^2} \frac{\Gamma}{\Delta} I(\vec{r})} \quad (2.9)$$

$$\boxed{\Gamma_{\text{sc}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\vec{r})} \quad (2.10)$$

Anhand der Gleichungen 2.9 und 2.10 lassen sich wesentliche Aspekte der Physik von Dipolfällen mit stark verstimmt Lichtfeldern beschreiben. Zum Beispiel spielt das Vorzeichen des Detunings eine große Rolle: Für rotverstimmt Laserlicht ( $\Delta < 0$ ) ist das Dipolpotenzial negativ und die Atome werden in das Lichtfeld hineingezogen. Die Potenzialminima liegen damit an den Stellen mit maximaler Intensität. Ist das Laserlicht hingegen blauverstimmt ( $\Delta > 0$ ), werden die Atome durch die Dipolkraft aus dem Lichtfeld herausgedrückt und die Potenzialminima befinden sich an den Intensitätsminima.

Aus den Gleichungen erkennt man auch, dass das Dipolpotenzial proportional zu  $I/\Delta$ , die Streurate jedoch proportional zu  $I/\Delta^2$  ist. Um in einer Dipolfalle Atome zu fangen, will man ein möglichst großes Dipolpotenzial erzeugen, wofür hohe Lichtintensitäten notwendig sind. Bei Erhöhung der Intensität nimmt jedoch

auch die Streurrate zu, so dass es empfiehlt, eine relativ große Verstimmung zu verwenden, um die Streurrate so gering wie möglich zu halten.

Bei Alkali-Atomen, wie dem in unserem Experiment verwendeten  $^{87}\text{Rb}$ , hängt das Dipolpotenzial von der Unterstruktur der Energieniveaus ab. Der angeregte Zustand spaltet sich durch Spin-Bahn-Kopplung in zwei Feinzustände auf, so dass im Spektrum die beiden für Alkali-Atome charakteristischen  $D_1$ - und  $D_2$ -Linien auftreten. Typischerweise ist die im Experiment verwendete Verstimmung des Laserlichts deutlich größer als die Hyperfeinaufspaltung der angeregten Zustände. Das genaue Aussehen der Hyperfeinstruktur spielt dann keine Rolle und es muss nur die Feinstruktur berücksichtigt werden. Unter diesen Bedingungen gilt [Web03]:

$$V_{\text{dip}} = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_{\text{eff}}^3} \left( \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{\omega_{\text{eff}} - \omega} + \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{\omega_{\text{eff}} + \omega} \right) \cdot I \quad (2.11)$$

$$\Gamma_{\text{sc}} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_{\text{eff}}^3} \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{eff}}} \right)^3 \left( \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{\omega_{\text{eff}} - \omega} + \frac{\Gamma_{\text{eff}}}{\omega_{\text{eff}} + \omega} \right)^2 \cdot I \quad (2.12)$$

Hierbei ist  $\omega_{\text{eff}} = 1/3\omega_1 + 2/3\omega_2$  die effektive Übergangsfrequenz der beiden  $D$ -Linien und  $\Gamma_{\text{eff}} = 1/3\Gamma_1 + 2/3\Gamma_2$  die effektive Linienbreite.

## 2.2 Einfaches eindimensionales und zweidimensionales Gitter

Ein eindimensionales Gitter lässt sich erzeugen, indem man einen Laserstrahl in sich selbst zurückreflektiert, so dass die beiden Strahlen zu einer stehenden Welle interferieren (siehe Abbildung 2.1(a)). Wir nehmen die Strahlen zunächst als ebene Wellen an und betrachten die ortsabhängige Intensität  $I$  bei Überlagerung der elektrischen Felder von einlaufender und reflektierter Welle:

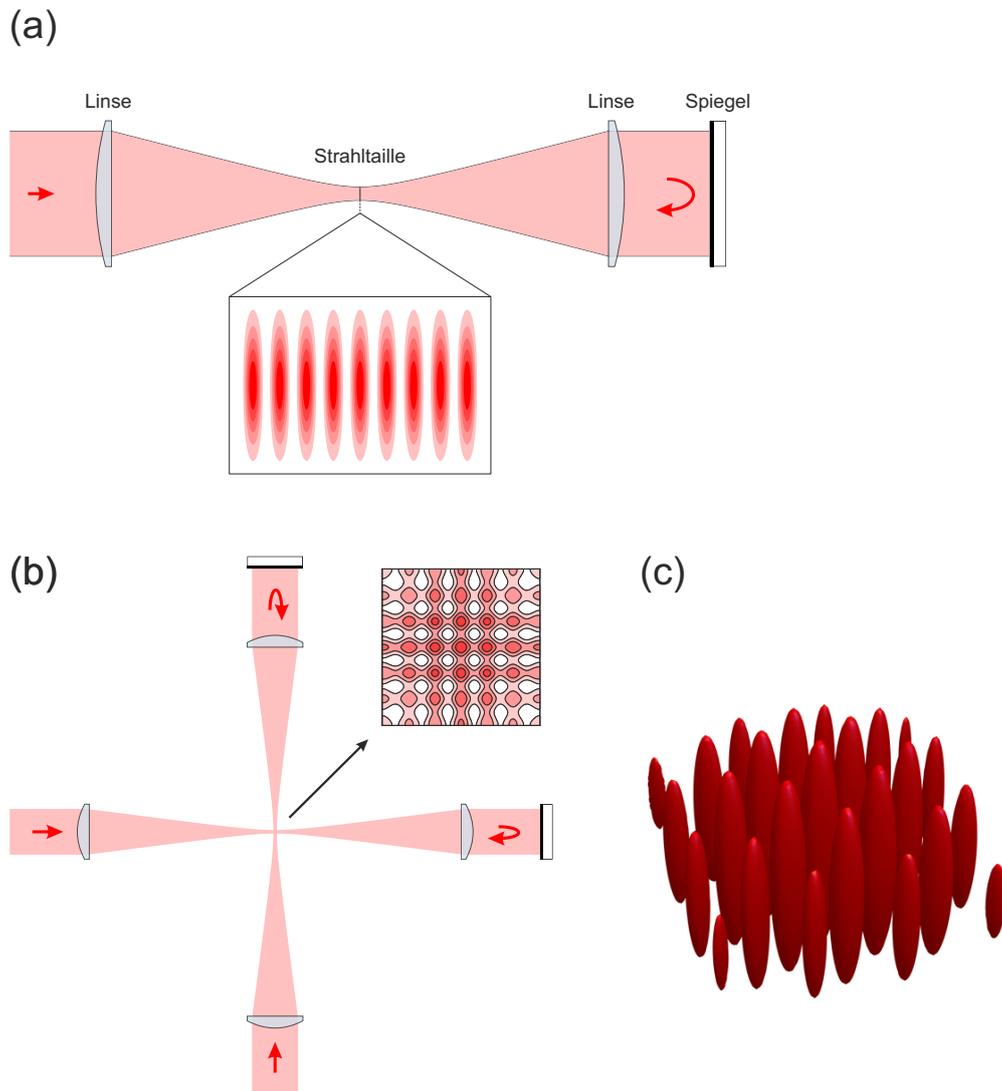
$$I \sim |E_{\text{in}} + E_{\text{ref}}|^2 = |E_0 e^{ikx} + E_0 e^{-ikx}|^2 = 4|E_0|^2 \cos^2(kx) \quad (2.13)$$

Hierbei ist  $E_0$  die Amplitude des elektrischen Feldes und  $k = 2\pi/\lambda$  die Wellenzahl des Laserlichts mit der Wellenlänge  $\lambda$ . Das Dipolpotenzial ist proportional zur Intensität und lässt sich damit schreiben als

$$V(x) = -V_0 \cos^2(kx). \quad (2.14)$$

Es entsteht ein periodisches Potenzial, deren Minima im Abstand von  $\lambda/2$  angeordnet sind.

Durch Überlagerung von stehenden Laserwellen in verschiedenen Raumrichtungen lassen sich periodische Potenziale in höheren Dimensionen erzeugen. Ein einfaches quadratisches optisches Gitter kann man mit zwei orthogonal zueinander ausgerichteten Laserstrahlen erzeugen, die jeweils in sich zurückreflektiert werden, wie in Abbildung 2.1(b) dargestellt. Falls in den beiden Gitterrösten zueinander orthogonale Polarisationen verwendet werden, findet zwischen den beiden Ästen



**Abbildung 2.1:** (a) Strahlengang des Laserstrahls bei einem einfachen eindimensionalen Gitter. Der einlaufende Strahl wird mit Hilfe einer Linse fokussiert. An der Position der Strahltaile befinden sich für gewöhnlich die Atome. Der anschließend wieder divergierende Strahl wird mit Hilfe einer zweiten Linse kollimiert und am Spiegel reflektiert, bevor er über die zweite Linse wieder fokussiert wird. Das kleinere untere Bild veranschaulicht die Intensitätsverteilung des Strahls. Es kommt zur Ausbildung von Intensitätsmaxima im Abstand von  $\lambda/2$ . (b) Strahlengang der Laserstrahlen bei einem einfachen quadratischen Gitter. An dem Ort, an dem sich die Fokusse der vier Strahlen befinden, bildet sich das zweidimensionale optische Gitterpotenzial aus. (c) Anordnung der Atome in röhrenförmigen Strukturen im zweidimensionalen optischen Gitter. Strahlradius, Radius an der Strahltaile und Abstand der Gitterplätze sind nicht maßstabsgetreu dargestellt.

keine Interferenz statt. Falls die Polarisierungen nicht perfekt linear oder nicht perfekt orthogonal zueinander sind, kann es dennoch zu einer schwachen Interferenz zwischen verschiedenen Ästen kommen. Dies lässt sich durch die Verwendung von verschiedenen Frequenzen in den beiden Gitterästen verhindern. Ist die gewählte Frequenzdifferenz ausreichend groß, kommt im effektiven, zeitgemittelten Potenzial der Interferenzterm nicht mehr vor. Typische Frequenzdifferenzen in Experimenten mit optischen Gittern liegen im Bereich einiger 100 kHz.

Das Potenzial eines einfachen quadratischen Gitters ist gegeben durch

$$V(x, y) = -V_0(\cos^2(kx) + \cos^2(ky)). \quad (2.15)$$

Die Gittertiefe  $V_0$  wird üblicherweise in Einheiten der Rückstoßenergie (auf Englisch: *recoil energy*)  $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2 / 2m$  angegeben.  $m$  ist hierbei die Atommasse. Die Rückstoßenergie ist die kinetische Energie, die ein ruhendes Atom durch den Rückstoß bei der Absorption eines Photons erhält.

## 2.3 Bipartites zweidimensionales optisches Gitter

In unserem Experiment werden für die Erzeugung des zweidimensionalen Gitterpotenzials die gleiche Polarisation und Frequenz in den beiden Gitterästen verwendet. Es handelt sich um ein sogenanntes *interferometrisches optisches Gitter*. Es interferieren am Ort der Atome vier Strahlen miteinander – die beiden einlaufenden und die beiden zurückreflektierten Strahlen.

Die einlaufenden Gitterstrahlen sind entlang der x- und y-Richtung ausgerichtet. Die Polarisation steht senkrecht dazu und zeigt in die z-Richtung. Die einzelnen vier miteinander interferierenden Wellen sind gegeben durch:

$$\vec{E}_x^{(+)}(x, y, t) = E_0 e^{+ikx} e^{-i\omega t} e^{+i\vartheta/2} \vec{e}_z \quad (2.16)$$

$$\vec{E}_x^{(-)}(x, y, t) = E_0 e^{-ikx} e^{-i\omega t} e^{+i\vartheta/2} \vec{e}_z \quad (2.17)$$

$$\vec{E}_y^{(+)}(x, y, t) = E_0 e^{+ikx} e^{-i\omega t} e^{-i\vartheta/2} \vec{e}_z \quad (2.18)$$

$$\vec{E}_y^{(-)}(x, y, t) = E_0 e^{-ikx} e^{-i\omega t} e^{-i\vartheta/2} \vec{e}_z \quad (2.19)$$

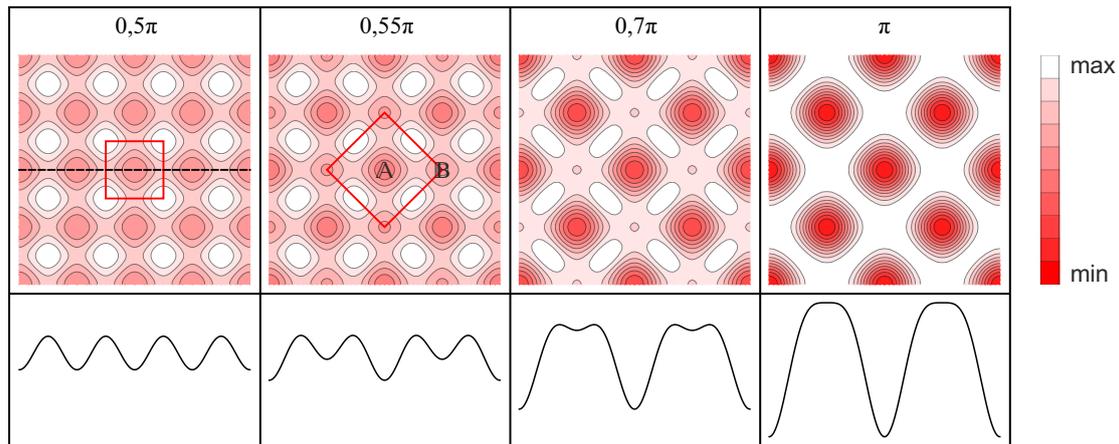
Die Strahlen im x-Ast des Gitters besitzen eine zusätzliche Phase  $\vartheta$  gegenüber den Strahlen im y-Ast, welche wir als *Zeitphasendifferenz* bezeichnen. Diese ist ein im Experiment kontrollierbarer Parameter und wird über einen auf einem Piezoaktor montierten Umlenkspiegel eingestellt, wie in Abschnitt 3.2 im Detail beschrieben wird. Das resultierende elektrische Feld ergibt sich durch Addition der vier Felder:

$$\vec{E}(x, y, t) = \vec{E}_x^{(+)} + \vec{E}_x^{(-)} + \vec{E}_y^{(+)} + \vec{E}_y^{(-)} \quad (2.20)$$

$$= 2E_0 e^{-i\omega t} \left( e^{+i\vartheta/2} \cos(kx) + e^{-i\vartheta/2} \cos(ky) \right) \vec{e}_z \quad (2.21)$$

Das Gitterpotenzial ist proportional zur Intensität des Laserlichts und damit zum Betragsquadrat des elektrischen Feldes. Man erhält:

$$\boxed{V_{2D}(x, y; \vartheta) = -V_0 (\cos^2(kx) + \cos^2(ky) + 2 \cos \vartheta \cos(kx) \cos(ky))} \quad (2.22)$$



**Abbildung 2.2:** Gittergeometrie des bipartiten zweidimensionalen Gitters für vier verschiedene Werte der Zeitphasendifferenz,  $\vartheta \in \{0,5\pi; 0,55\pi; 0,7\pi; \pi\}$ . Oben werden Konturenplots des Gitterpotenzials gezeigt. Unten sind Querschnitte durch das Potenzial entlang der schwarzen gestrichelten Linie dargestellt. Rot eingezeichnet ist die Einheitszelle des Gitters für die Fälle  $\vartheta = \pi/2$  und  $\vartheta \neq \pi/2$ .

Das bipartite quadratische Gitterpotenzial ist damit die Summe zweier eindimensionaler Gitterpotenziale in x- und in y-Richtung sowie eines Interferenzterms, der von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  abhängt. Diese kann Werte zwischen 0 und  $\pi$  annehmen. Abbildung 2.2 veranschaulicht die Gittergeometrie für verschiedene Werte von  $\vartheta$ .

Für  $\vartheta = \pi/2$  verschwindet der Interferenzterm in Gleichung 2.22. Es ergibt sich ein einfaches quadratisches Gitter, in welchem alle Gittertöpfe die gleiche Tiefe besitzen. Für  $\vartheta \neq \pi/2$  lässt sich das Gitter in zwei Subgitter mit verschiedener Potenzialtiefe unterteilen. Es gibt zwei Klassen von Gittertöpfen,  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ , deren Potenzialtiefendifferenz

$$\Delta V(\vartheta) = V_{\mathbb{B}}^{(\min)} - V_{\mathbb{A}}^{(\min)} = -4V_0 \cos \vartheta \quad (2.23)$$

beträgt. Die Einheitszelle des Gitters muss die beiden Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  enthalten, weshalb man in Analogie zur Festkörperphysik auch von einer *zweiatomigen Basis* spricht.

In den Spezialfällen  $\vartheta = 0$  und  $\vartheta = \pi$  verschwindet eines der beiden Subgitter, da die zugehörigen Gittertöpfe zu Punkten zusammenschrumpfen. Diese Punkte sind durch Linien gleichen Potenzials miteinander verbunden. Im Vergleich zum einfachen quadratischen Gitter bei  $\vartheta = \pi/2$  hat sich der absolute Wert des Potenzialminimums verdoppelt. Die Höhe des Potenzialwalls zwischen benachbarten Gitterplätzen hat sich sogar vervierfacht.

Im Experiment werden für die Realisierung von optischen Gittern fokussierte Gaußsche Laserstrahlen verwendet. Die Intensitätsverteilung eines Gaußschen Strahls, der sich in x-Richtung ausbreitet, ist gegeben durch

$$I(\vec{r}) = \frac{2P}{\pi w^2(x)} e^{-\frac{2r^2}{w^2(x)}}. \quad (2.24)$$

$P$  stellt die optische Leistung dar und  $w(x) = w_0 \sqrt{1 + (x/x_0)^2}$  den *Strahlradius*, wobei  $w_0$  der Radius an der *Strahltaille* (auf Englisch: *waist*) und  $x_0 = \pi w_0^2 / \lambda$  die *Rayleigh-Länge* sind. Für das elektrische Feld des Gaußschen Strahls gilt entsprechend

$$E(\vec{r}) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}, \quad (2.25)$$

mit einer Konstanten  $A_0$ . Die an unserem Experiment verwendete Wellenlänge für den Gitterlaser beträgt  $\lambda = 1064$  nm. Der Radius an der Strahltaille beträgt etwa  $w_0 = 100$   $\mu\text{m}$ , so dass sich für die Rayleigh-Länge  $x_0 = 30$  mm ergibt. Die Ausdehnung der atomaren Wolke ist deutlich kleiner als die Rayleigh-Länge, der Strahl besitzt damit im gesamten von den Atomen eingenommenen Raum näherungsweise den Radius  $w_0$ . Unter Berücksichtigung der Gaußschen Form der Laserstrahlen ergibt sich für das zweidimensionale Potenzial im Zentrum des Gitters:

$$\begin{aligned} V_{2D}(\vec{r}; \vartheta) &= -\frac{V_0}{4} \left| e^{-2\frac{y^2+z^2}{w_0^2}} e^{i\vartheta/2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + e^{-2\frac{x^2+z^2}{w_0^2}} e^{-i\vartheta/2} (e^{iky} + e^{-iky}) \right|^2 \\ &= -V_0 \left( e^{-2\frac{y^2+z^2}{w_0^2}} \cos^2(kx) + e^{-2\frac{x^2+z^2}{w_0^2}} \cos^2(ky) \right. \\ &\quad \left. + 2e^{-\frac{x^2+y^2+2z^2}{w_0^2}} \cos(\vartheta) \cos(kx) \cos(ky) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Hierbei wurde angenommen, dass alle Strahlen den gleichen Tailenradius  $w_0$  besitzen und sich die Tailen im gleichen Punkt befinden. Senkrecht zur Gitterebene – in z-Richtung – ist der Einschluss durch das Gitterpotenzial gering. Aus diesem Grund ist die Verteilung der Atome auf einem Gitterplatz in dieser Richtung relativ ausgedehnt und die Atome bilden im Gitter röhrenförmige Strukturen aus, wie in Abbildung 2.1(c) veranschaulicht.

Während sich die Atome im optischen Gitterpotenzial befinden, ist im Experiment zusätzlich die Magnetfalle angeschaltet, deren Potenzial gegeben ist durch

$$V_{\text{mag}} = \frac{m}{2} \omega_{\text{mag}}^2 (x^2 + y^2 + z^2). \quad (2.27)$$

Es soll hier angenommen werden, dass die Magnetfalle isotrop ist, also in allen drei Raumrichtungen die gleiche Fallenfrequenz  $\omega_{\text{mag}}$  besitzt. Sowohl die Gauß-Form der Gitterstrahlen als auch die Magnetfalle tragen zu einem einhüllenden Potenzial bei, welches dafür sorgt, dass benachbarte Gittertöpfe der gleichen Klasse ( $\mathbb{A}$  oder  $\mathbb{B}$ ) unterschiedlich tief sind. Eine harmonische Näherung des durch die Gaußschen Laserstrahlen zustandekommenden einhüllenden Potenzials liefert für den Einschluss in der Gitterebene (x-y-Ebene) und in z-Richtung die Frequenzen

$$\omega_r^2 = \frac{4V_0(1 + \cos \vartheta)}{mw_0^2} \quad (2.28)$$

$$\omega_z^2 = \frac{8V_0(1 + \cos \vartheta)}{mw_0^2}. \quad (2.29)$$

Für den gesamten Einschluss in der Gitterebene und in z-Richtung erhält man dann die Frequenzen

$$\Omega_r^2 = \omega_r^2 + \omega_{\text{mag}}^2 \quad (2.30)$$

$$\Omega_z^2 = \omega_z^2 + \omega_{\text{mag}}^2. \quad (2.31)$$

## 2.4 Berücksichtigung der Anisotropie des bipartiten 2D-Gitters

Bei der Herleitung von Gleichung 2.22 waren wir davon ausgegangen, dass die vier miteinander interferierenden Strahlen die gleiche Amplitude des elektrischen Feldes besitzen. In der experimentellen Realität kommt es an jeder Grenzfläche zwischen Glas und Luft bzw. Glas und Vakuum zu Verlusten in der Lichtleistung. Pro Grenzfläche nimmt die optische Leistung um etwa 4% ab. Da die beiden retro-reflektierten Strahlen am Ort der Atome jeweils vier Grenzflächen mehr durchlaufen haben als die einlaufenden, ist ihre Leistung ohne Kompensation der Verluste um den Faktor  $0,96^4 \approx 0,85$  reduziert.

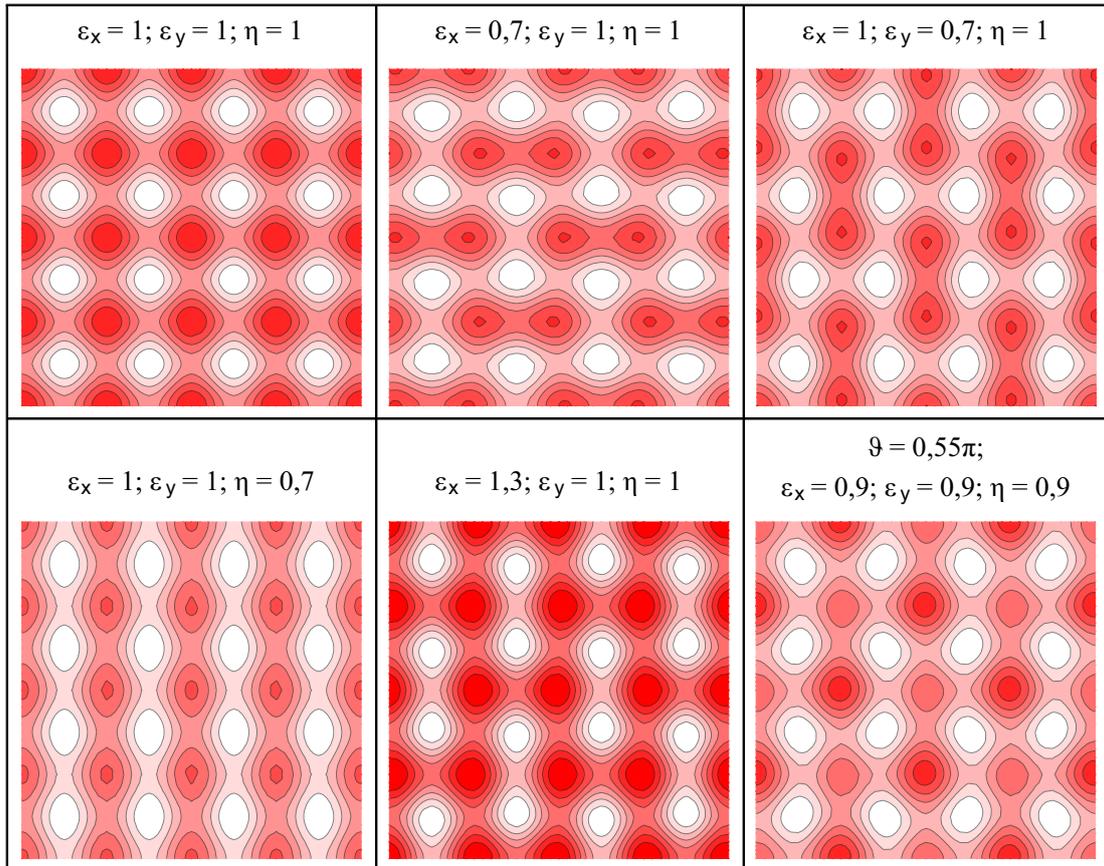
Die Gitterstrahlen im x- und y-Ast haben ihren Ursprung in einem gemeinsamen Laserstrahl, der auf dem Gittertisch aus einer Faser ausgekoppelt und durch einen Strahlteiler in die beiden Gitteräste aufgespalten wird. Möglicherweise geschieht diese Aufteilung nicht exakt im Verhältnis 50:50, so dass die beiden einlaufenden Strahlen ein etwas von eins abweichendes Amplitudenverhältnis  $\eta_y = E_{y,0}/E_{x,0}$  besitzen können. Ebenfalls kann es einen Einfluss auf die relative Feldstärke der vier Strahlen am Ort der Atome haben, dass die Fokusse der Strahlen sich an etwas unterschiedlichen Positionen befinden. Hierauf wird in Abschnitt 3.5 genauer eingegangen.

Wir wollen hier das im vorherigen Abschnitt betrachtete einhüllende Potenzial vernachlässigen. Wir führen nun in Gleichung 2.22 Parameter ein, welche die relative Abschwächung der Feldamplituden der vier Strahlen ausdrücken. Das Gitterpotenzial hat dann die Form

$$V(x, y, \vartheta) = -\frac{V_0}{4} \left| e^{i\vartheta/2} (e^{ikx} + \varepsilon_x e^{-ikx}) + e^{-i\vartheta/2} \eta_y (e^{iky} + \varepsilon_y e^{-iky}) \right|^2. \quad (2.32)$$

$\eta_y$  gibt das Amplitudenverhältnis der einlaufenden Strahlen im x- und im y-Ast nach der Aufteilung am Strahlteiler an.  $\varepsilon_x$  bzw.  $\varepsilon_y$  beschreibt die Abschwächung des retroreflektierten Strahls im Vergleich zum einlaufenden im x- bzw. y-Ast. Wir bezeichnen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\eta_y$  als *Anisotropieparameter*.

Für  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \eta_y = 1$  besitzt das Gitter neben der Translationsinvarianz weitere Symmetrien, die zur Diedergruppe  $D_4$  gehören. Dies ist die Symmetriegruppe eines Quadrats und beinhaltet die vierfache Rotationssymmetrie ( $C_4$ -Symmetrie) sowie zusätzliche Spiegelsymmetrien. Ist mindestens einer der Anisotropieparameter ungleich eins, wird die  $C_4$ -Symmetrie des Gitters gebrochen. Der Interferenzterm in Gleichung 2.22 verschwindet dann auch bei  $\vartheta = \pi/2$  nicht vollständig. Abbildung 2.3 zeigt das Gitterpotenzial bei verschiedenen Werten der drei Anisotropieparameter. Bis auf das Bild rechts unten beträgt die



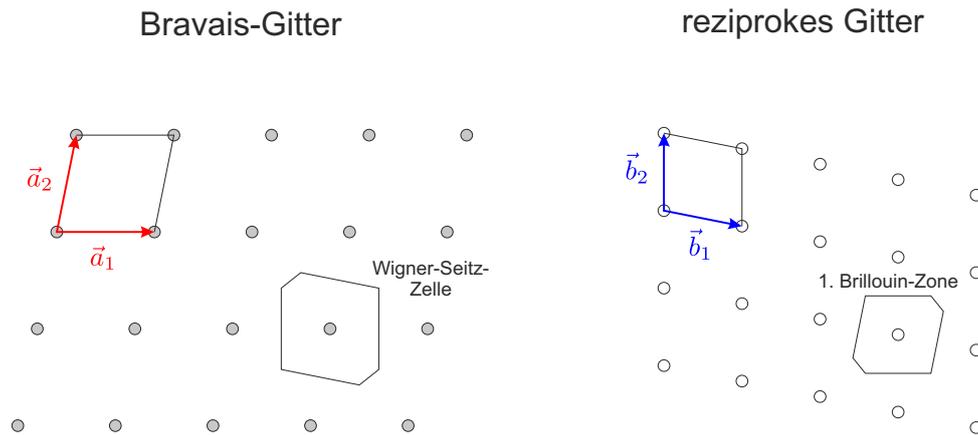
**Abbildung 2.3:** Konturdarstellung des zweidimensionalen Gitterpotenzials für verschiedene Werte der Anisotropieparameter  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\eta \equiv \eta_y$ . Die Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  beträgt  $\vartheta = \pi/2$ , bis auf die Gitterkonfiguration unten rechts ( $\vartheta = 0,55\pi$ ).

Zeitphasendifferenz  $\vartheta = \pi/2$ . Um den Effekt von  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\eta_y$  zu verstehen, ist in den Konturdarstellungen jeweils ein Parameter von eins verschieden (bis auf den Plot rechts unten).

Für  $\varepsilon_x < 1$  hat der reflektierte Strahl im x-Ast eine geringere Feldamplitude als der einlaufende, es kommt es zu einer Modifikation des Gitters in x-Richtung. Die Potenzialbarrieren werden abwechselnd angehoben und abgesenkt, so dass Doppeltopfsysteme entstehen. Innerhalb von diesen wird die Tunnelamplitude erhöht. Analog kommt es für  $\varepsilon_y < 1$  zur Ausbildung von in y-Richtung ausgerichteten Doppeltöpfen.

Falls man eine Möglichkeit hat, die Verluste an den Grenzflächen überzukompensieren, kann man  $\varepsilon$ -Werte größer eins erreichen. Die Amplitude des zurücklaufenden Strahls ist dann größer als die des einlaufenden. Realisiert werden kann dies dadurch, dass sich der Fokus des einlaufenden Strahls in einem Abstand vom Ort der Atome befindet, der Fokus des reflektierten Strahls hingegen genau an der Position der Atome liegt (siehe hierzu Abschnitt 3.5). In diesem Fall werden die Potenzialbarrieren entlang von hexagonalen Strukturen im Gitter abgesenkt.

Für  $\eta_y \neq 1$  sind, falls  $\varepsilon_x, \varepsilon_y = 1$ , die Gittertiefen der 1D-Gitter in x- und y-Richtung verschieden. Daraus folgt, dass für  $\eta_y < 1$  die Potenzialbarriere zwischen



**Abbildung 2.4:** Beispiel für ein zweidimensionales Bravais-Gitter und das zugehörige reziproke Gitter. Für das Bravais-Gitter sind die primitiven Gittervektoren, die primitive Gitterzelle und die Wigner-Seitz-Zelle eingezeichnet und für das reziproke Gitter die Basis-Vektoren, die von ihnen aufgespannte Einheitszelle sowie die Wigner-Seitz-Zelle, welche als erste Brillouin-Zone bezeichnet wird.

benachbarten Gittertöpfen in x-Richtung größer als in y-Richtung ist. Für  $\eta_y > 1$  ist es genau andersherum.

Der Unterschied in der Potenziertiefe zwischen Gittertöpfen der Klassen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  hängt ebenfalls von den Anisotropieparametern ab. Es gilt:

$$\Delta V(\vartheta) = -V_0(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)\eta_y \cos \vartheta \quad (2.33)$$

## 2.5 Bravais-Gitter und Wigner-Seitz-Zelle

Wir orientieren uns im Folgenden an [Gro14]. Eine periodische räumliche Struktur lässt sich durch das Konzept des *Bravais-Gitters* beschreiben. Das Bravais-Gitter spezifiziert das Raumgitter, auf dem die Basiseinheiten des Gitters angeordnet sind. An jedem Punkt des Raumgitters befindet sich eine Basis, die aus nur einem oder auch mehreren Gitterplätzen (im Falle eines Festkörpers: Atomen) bestehen kann. Das zweidimensionale optische Gitter in unserem Experiment mit dem Potenzial 2.22 hat zum Beispiel eine Basis aus zwei Gittertöpfen.

Ein zweidimensionales Bravais-Gitter besteht aus allen Punkten  $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2$  mit  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Die Vektoren  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  bezeichnet man als *primitive Gittervektoren*. Ein Beispiel für ein zweidimensionales Raumgitter wird in Abbildung 2.4 gezeigt. Das Bravais-Gitter ist invariant gegenüber diskreten Translationen um einen Vektor  $\vec{T} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2$ . Zwei Punkte des Gitters sind immer durch einen Vektor  $\vec{T}$  miteinander verbunden. Die Längen der Gittervektoren werden als Gitterkonstanten bezeichnet. Die Wahl der Gittervektoren ist nicht eindeutig.

Die primitiven Gittervektoren spannen ein Parallelogramm auf, welches man als die *primitive Gitterzelle* oder Einheitszelle bezeichnet. Wenn man diese primitive Gitterzelle um alle existierenden Translationsvektoren  $\vec{T}$  verschiebt, wird der gesamte Raum ohne Überlappungen oder Löcher ausgefüllt. Die primitive Git-

terzelle ist die Einheitszelle mit dem kleinstmöglichen Flächeninhalt, sie enthält genau einen Punkt des Raumgitters.

Man kann immer eine primitive Gitterzelle mit der vollen Symmetrie des Bravais-Gitters auswählen. Die dabei am häufigsten verwendete Zelle ist die *Wigner-Seitz-Zelle*. Sie befindet sich um einen Gitterpunkt herum und ist der Bereich, der diesem Gitterpunkt näher ist als allen anderen Gitterpunkten. Im zweidimensionalen Bravais-Gitter erhält man die Wigner-Seitz-Zelle wie folgt: Man zieht Verbindungslinien von dem Gitterpunkt zu den benachbarten Gitterpunkten und zeichnet die Mittelsenkrechten dieser Linien ein. Die umschlossene Fläche um den Gitterpunkt herum ist die Wigner-Seitz-Zelle.

## 2.6 Reziprokes Gitter

Wir betrachten ein Bravais-Gitter  $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2$  und eine ebene Welle  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_0 e^{i\vec{k} \circ \vec{r}}$ . Im Allgemeinen hat die ebene Welle nicht die Periodizität des Bravais-Gitters. Der Satz aller Wellenvektoren  $\vec{k}$ , für die sich ebene Wellen mit der Periodizität des Bravais-Gitters ergeben, bildet das zum Bravais-Gitter *reziproke Gitter*. Dass eine ebene Welle die Periodizität des Bravais-Gitters hat, bedeutet, dass sie invariant ist unter der Verschiebung um einen beliebigen Gittervektor  $\vec{R}$ , das heißt  $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R})$ . Für die reziproken Gittervektoren, welche wir mit  $\vec{G}$  bezeichnen wollen, gilt  $e^{i\vec{G} \circ \vec{R}} = 1$ . Diese Bedingung lässt sich auch schreiben als  $\vec{G} \circ \vec{R} = 2\pi l$  mit  $l \in \mathbb{Z}$ .

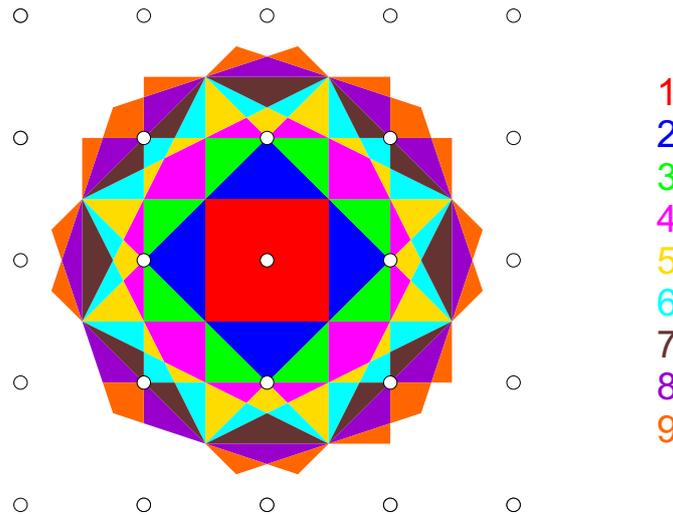
Für ein zweidimensionales Gitter lassen sich die Basisvektoren des reziproken Gitters wie folgt aus den primitiven Gittervektoren des Bravais-Gitters berechnen:<sup>1</sup>

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2} \vec{a}_2 \times (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \quad (2.34)$$

$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|^2} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \times \vec{a}_1 \quad (2.35)$$

Um die Kreuzprodukte zu bestimmen, müssen  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  durch Hinzufügen einer Nullkomponente in  $z$ -Richtung zu dreidimensionalen Vektoren ergänzt werden. Das reziproke Gitter besteht dann aus allen Vektoren  $\vec{G} = m_1\vec{b}_1 + m_2\vec{b}_2$  ( $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ). Die Wigner-Seitz-Zelle des reziproken Gitters heißt *erste Brillouin-Zone*. Sie besitzt die volle Symmetrie des Gitters. Die Konstruktion der ersten Brillouin-Zone erfolgt analog zu der der Wigner-Seitz-Zelle des Bravais-Gitters: Man zeichnet die Verbindungslinien eines Punktes des reziproken Gitters mit den benachbarten Gitterpunkten ein. Die Mittelsenkrechten dieser Verbindungslinien umranden die erste Brillouin-Zone. Sie heißen *Bragg-Linien*, da alle Wellenvektoren  $\vec{k}$ , die auf ihnen enden, die Bragg-Bedingung erfüllen. Die  $n$ -te Brillouin-Zone ist nun definiert als der Bereich im reziproken Raum, der durch das Überschreiten von genau  $n - 1$  Bragg-Linien erreicht wird. Dies ist also die Fläche zwischen den

<sup>1</sup>Man erhält die reziproken Basis-Gittervektoren des 2D-Gitters, in dem man in die Formeln für die reziproken Gittervektoren  $\vec{b}_i$  ( $i = 1; 2; 3$ ) des 3D-Gitters, zum Beispiel  $\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{V} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$  mit  $V = |(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \circ \vec{a}_3|$ , für  $\vec{a}_3$  den Einheitsvektor  $\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}$  einsetzt.



**Abbildung 2.5:** Die ersten neun Brillouin-Zonen eines einfachen quadratischen Gitters.

Bragg-Linien ( $n - 1$ )-ter und  $n$ -ter Ordnung. Abbildung 2.5 zeigt das Aussehen der ersten neun Brillouin-Zonen für ein einfaches quadratisches Gitter.

## 2.7 Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit gitterperiodischem Potenzial

Wir betrachten nun ein einzelnes Teilchen im periodischen Gitterpotenzial  $V$ . Das Potenzial ist invariant unter Verschiebung um einen Gittervektor  $\vec{R}$ ,  $V(\vec{r} + \vec{R}) = V(\vec{r})$ . Der Hamilton-Operator für das Teilchen im Gitter lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}). \quad (2.36)$$

Die Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung stellen die *Bloch-Funktionen*  $\psi_{n,\vec{q}}(\vec{r})$  dar, die zugehörigen Eigenenergien werden mit  $E_n(\vec{q})$  bezeichnet. Hierbei sind  $n$  ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ) der diskrete *Bandindex* und  $\vec{q}$  der kontinuierliche *Quasiimpuls*. Nach dem *Bloch-Theorem* lassen sich die Bloch-Funktionen als Produkt einer ebenen Welle und einer Funktion  $u_{n,\vec{q}}(\vec{r})$  mit der Periodizität des Gitterpotenzials schreiben:

$$\boxed{\psi_{n,\vec{q}}(\vec{r}) = u_{n,\vec{q}}(\vec{r}) e^{i\vec{q} \circ \vec{r}} \quad \text{mit} \quad u_{n,\vec{q}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{n,\vec{q}}(\vec{r})} \quad (2.37)$$

Die Bloch-Funktionen stellen damit ebene Wellen dar, die von den Funktionen  $u_{n,\vec{q}}(\vec{r})$  periodisch moduliert werden. Die Funktionen  $u_{n,\vec{q}}(\vec{r})$  erfüllen die Gleichung:

$$\boxed{\hat{H}_{\vec{q}} u_{n,\vec{q}}(\vec{r}) = E_{n,\vec{q}} u_{n,\vec{q}}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \hat{H}_{\vec{q}} = \frac{(\hat{p} + \hbar\vec{q})^2}{2m} + V(\vec{r})} \quad (2.38)$$

Sowohl die Bloch-Funktionen als auch die Energieeigenwerte sind periodisch mit  $\vec{q}$ . Bloch-Wellen, deren Quasiimpulse sich um einen reziproken Gittervektor  $\vec{G}$

unterscheiden, sind identisch. Das Gleiche gilt für die Energieeigenwerte:

$$\psi_{n, \vec{q} + \vec{G}}(\vec{r}) = \psi_{n, \vec{q}}(\vec{r}) \quad (2.39)$$

$$E_n(\vec{q} + \vec{G}) = E_n(\vec{q}) \quad (2.40)$$

Die Wellenzahl  $\vec{q}$  einer Bloch-Funktion ist offensichtlich nicht eindeutig definiert. Es gibt deshalb eine Konvention, um den Index  $\vec{q}$  einer Bloch-Welle eindeutig festzulegen. Diese besteht darin,  $\vec{q}$  aus der ersten Brillouin-Zone zu wählen. Falls  $\vec{q}'$  nicht in der ersten Brillouin-Zone liegt, existiert immer ein reziproker Gittervektor  $\vec{G}$ , so dass  $\vec{q} = \vec{q}' + \vec{G}$  in der ersten Brillouin-Zone liegt. Die Begrenzung des Quasiimpulses auf die erste Brillouin-Zone (*reduziertes Zonenschema*) ist nicht notwendig, es wird manchmal auch das *erweiterte Zonenschema* verwendet, in welchem der Quasiimpuls aus einer beliebigen Brillouin-Zone gewählt werden kann.

Ebene Wellen sind Impulseigenzustände. Hingegen sind Bloch-Wellen keine Eigenzustände des Impulsoperators. Der Wellenvektor  $\vec{q}$  stellt einen verallgemeinerten Impuls im periodischen Medium dar. Im Gitter gibt es keine allgemeine, sondern nur eine diskrete Translationsinvarianz. Deshalb ist der Impuls nicht streng, sondern nur bis auf einen reziproken Gittervektor erhalten.

Das Gitterpotenzial  $V(\vec{r})$  kann als Fourier-Reihe nach den reziproken Gittervektoren  $\vec{G}$  entwickelt werden. Die Wellenfunktion  $\psi(\vec{r})$  des Teilchens im Gitter lässt sich nach ebenen Wellen entwickeln,

$$V(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} V_{\vec{G}} e^{i\vec{G} \circ \vec{r}} \quad (2.41)$$

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{q}} C(\vec{q}) e^{i\vec{q} \circ \vec{r}}, \quad (2.42)$$

mit Fourier-Koeffizienten  $V_{\vec{G}}$  bzw.  $V_{\vec{q}}$ . Es kann gezeigt werden, dass sich die Bloch-Funktionen ebenfalls als Fourier-Reihe schreiben lassen:

$$\psi_{n, \vec{q}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} C_{\vec{q} + \vec{G}} e^{i(\vec{q} + \vec{G}) \circ \vec{r}} \quad (2.43)$$

Man erkennt, dass die Bloch-Welle aus ebenen Wellen zusammengesetzt ist, deren Wellenzahlen sich um reziproke Gittervektoren unterscheiden.

Die Funktion  $E_n(\vec{q})$  stellt das Energiespektrum des Teilchens dar, dieses beschreibt die Energie in Abhängigkeit vom Quasiimpuls. Für festes  $n$  besitzt  $E_n(\vec{q})$  einen endlichen Wertebereich. Man bezeichnet  $E_n(\vec{q})$  als *Energieband*. Die verschiedenen Bänder sind durch verbotene Bereiche, die Bandlücken, voneinander getrennt.

Für ein Teilchen in einem flachen Gitter sieht die Energie-Impuls-Beziehung ähnlich aus wie die für ein freies Teilchen, falls  $\vec{q}$  nicht zu nah an der Grenze der ersten Brillouin-Zone liegt. In dem Fall oszilliert  $u_{n, \vec{q}}$  mit kleiner Amplitude um einen konstanten Wert herum. Im Grenzfall eines freien Teilchens ist  $u_{n, \vec{q}}(\vec{r})$  konstant und die Bloch-Funktion geht in eine ebene Welle über.

## 2.8 Bandstruktur des eindimensionalen Gitterpotenzials

In diesem Abschnitt orientieren wir uns an [Gre03a] und betrachten ein Teilchen in einem eindimensionalen Gitterpotenzial

$$V(x) = -V_0 \cos^2(kx) = -\frac{V_0}{4} (e^{2ikx} + e^{-2ikx} + 2) . \quad (2.44)$$

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für das Teilchen lautet

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} - V_0 \cos^2(kx) \right) \psi(x) = E\psi(x) , \quad (2.45)$$

mit dem Impulsoperator  $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ . Die Lösungen dieser Gleichung sind, wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, die Bloch-Funktionen  $\psi_{n,q}(x) = u_{n,q}(x)e^{iqx}$ .

Da das Gitterpotenzial  $V(x)$  und die Funktionen  $u_{n,q}(x)$  räumlich periodisch sind mit der gleicher Periode, lassen sie sich als diskrete Fourier-Reihen schreiben:

$$V(x) = \sum_r \tilde{V}_r e^{2rikx} \quad (2.46)$$

$$u_{n,q}(x) = \sum_l c_l^{(n,q)} e^{2likx} \quad (2.47)$$

Einsetzen in Gleichung 2.38 liefert für den Term der kinetischen Energie

$$\frac{(\hat{p} + \hbar q)^2}{2m} u_{n,q}(x) = \sum_l \frac{\hbar^2}{2m} (2l \cdot k + q)^2 c_l^{(n,q)} e^{2likx} \quad (2.48)$$

und für den Term des Potenzials

$$V(x)u_{n,q}(x) = \sum_{r,l} \tilde{V}_r e^{2(r+l)ikx} c_l^{(n,q)} , \quad (2.49)$$

so dass man die Gleichung

$$\sum_l \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (2l \cdot k + q)^2 - E_{n,q} + \sum_r \tilde{V}_r e^{2rikx} \right] c_l^{(n,q)} e^{2likx} = 0 . \quad (2.50)$$

erhält. Mit Gleichung 2.44 sind die Fourier-Koeffizienten  $\tilde{V}_r$  in Gleichung 2.46 direkt erkennbar:  $\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{-1} = -V_0/4$ . Wir können  $\tilde{V}_0 = 0$  setzen, da wir den Nullpunkt der Energie frei wählen können. Gleichung 2.50 vereinfacht sich damit zu

$$\sum_l \left[ \left( \frac{\hbar^2}{2m} (2l \cdot k + q)^2 - E_{n,q} \right) c_l^{(n,q)} - \frac{V_0}{4} (c_{l-1}^{(n,q)} + c_{l+1}^{(n,q)}) \right] e^{2likx} = 0 . \quad (2.51)$$

Es folgt, dass die Terme in den eckigen Klammern gleich null sein müssen:

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} (2l \cdot k + q)^2 - E_{n,q} \right) c_l^{(n,q)} - \frac{V_0}{4} (c_{l-1}^{(n,q)} + c_{l+1}^{(n,q)}) = 0 . \quad (2.52)$$

Wir wollen nun die Schrödinger-Gleichung in Matrixform schreiben:

$$\sum_{l'} H_{l,l'} c_{l'}^{(n,q)} = E_{n,q} c_l^{(n,q)} \quad (2.53)$$

Diese Gleichung lässt sich auch schreiben als

$$H \vec{c}_{n,q} = E_{n,q} \vec{c}_{n,q}, \quad (2.54)$$

wobei  $\vec{c}_{n,q}$  der Vektor mit den Einträgen  $c_l^{(n,q)}$  und  $H$  die Matrix mit den Einträgen  $H_{l,l'}$  darstellt. Man sieht, dass die diagonalen Matrixelemente ( $l = l'$ ) gleich  $\hbar^2/2m(2l \cdot k + q)^2$  sind. Die Matrixelemente, für die  $|l - l'| = 1$  gilt, sind gegeben durch  $-V_0/4$ . Alle anderen Matrixelemente sind gleich null, so dass  $H$  wie folgt aussieht:

$$H = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & -\frac{V_0}{4} & \frac{\hbar^2}{2m}(-2k+q)^2 & -\frac{V_0}{4} & & & \\ & & -\frac{V_0}{4} & \frac{\hbar^2}{2m}q^2 & -\frac{V_0}{4} & & \\ & & & -\frac{V_0}{4} & \frac{\hbar^2}{2m}(2k+q)^2 & -\frac{V_0}{4} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

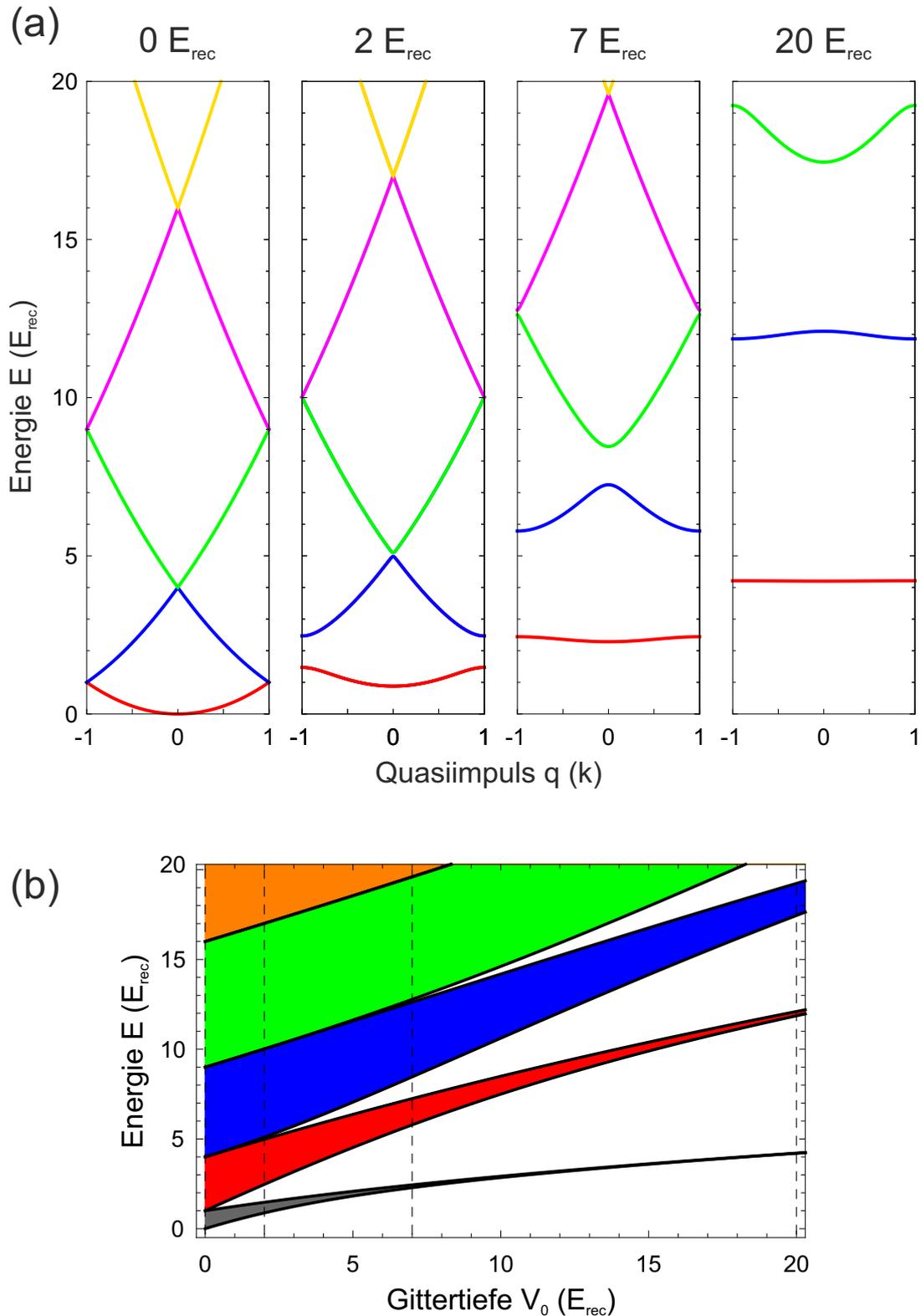
Die Energieeigenwerte von  $H$  lassen sich numerisch durch Diagonalisieren der Matrix berechnen. Bei der sich ergebenden Diagonalmatrix stehen die Eigenwerte von  $H$  auf der Diagonalen. Für die numerische Rechnung schneidet man die Hamilton-Operator-Matrix bei betragsmäßig großen Werten von  $l$  ab, da die zugehörigen Koeffizienten  $c_l^{(n,q)}$  sehr klein werden.

Die Eigenwerte  $E_{n,q}$  der Matrix  $H$  bilden für einen festen Index  $n$  das  $n$ -te Band. Die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{c}_{n,q}$  definieren über die Gleichungen 2.47 und 2.37 die Bloch-Funktionen  $\psi_{n,q}(x)$ .

Abbildung 2.6(a) zeigt die Struktur der ersten fünf Bänder für verschiedene Gittertiefen  $V_0$  im reduzierten Zonenschema. Die Potentialtiefe variiert dabei von 0 bis  $20 E_{\text{rec}}$ . Die Energien sind jeweils bezüglich des Minimums von  $V(x)$  dargestellt. Im Grenzfall  $V_0 \equiv 0$  stellen die Bänder Abschnitte der Parabel  $E = \hbar^2 q^2 / 2m$  dar, die in die erste Brillouin-Zone verschoben worden sind. Wenn man die Gittertiefe erhöht, entstehen Lücken zwischen den Bändern. Außerdem nimmt die Breite der Bänder ab, also die Differenz zwischen größtem und kleinstem Energiewert der Bänder. Die Bänder nähern sich dabei immer mehr den Energieniveaus eines harmonischen Oszillators mit dem Potenzial eines einzelnen Gittertopfes an, so dass die Bandlücken gegen  $\hbar\omega$  konvergieren.  $\omega$  ist dabei die Frequenz aus der harmonischen Näherung des Gittertopfes.

In Abbildung 2.6(b) wird die Breite der untersten Bänder in Abhängigkeit von der Gittertiefe veranschaulicht. Bei fester Gittertiefe  $V_0$  nimmt die Breite der Bänder mit zunehmendem Bandindex  $n$  zu. Man erkennt auch hier, dass mit zunehmender Gittertiefe die Breite eines Bandes mit festem Index  $n$  geringer wird.

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, dass die Bloch-Zustände  $|n, \vec{q}\rangle$  Linearkombinationen von Eigenzuständen des Impulsoperators  $\hat{p}$  darstellen. Die Im-



**Abbildung 2.6:** (a) Bandstruktur der ersten fünf Bänder des eindimensionalen cosinusförmigen Gitterpotenzials für verschiedene Werte der Gittertiefe,  $V_0 \in \{0, 2, 7, 20\} \times E_{\text{rec}}$ . (b) Energiebereich der ersten fünf Bänder des eindimensionalen Gitterpotenzials in Abhängigkeit von der Gittertiefe  $V_0$ . Gestrichelte Linien sind bei den in (a) verwendeten Werten der Gittertiefe eingezeichnet.

pulse der beteiligten Zustände unterscheiden sich dabei um reziproke Gittervektoren  $\vec{G}$ . Für das eindimensionale Gitter ist der Bloch-Zustand  $|n, q\rangle$  eine Linearkombination der Impulseigenzustände  $|\hbar(q + 2l \cdot k)\rangle$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ). Die Impulse der Zustände unterscheiden sich also um Vielfache von  $2\hbar k$ . Im optischen Gitter gibt es eine einfache physikalische Interpretation für diese Tatsache: Das Atom im Gitter kann ein Photon mit Impuls  $\hbar k$  aus einem der beiden gegenläufigen Laserstrahlen absorbieren und das Photon durch stimulierte Emission in den anderen Laserstrahl abgeben. Durch diesen Prozess ändert sich der Impuls des Atoms um  $2\hbar k$ . Jeder Bloch-Zustand ist daher eine Linearkombination von Impulseigenzuständen, die durch den Übergang von zwei, vier, sechs, ... Photonen miteinander gekoppelt sind [Dah97].

Wir wollen nun die Physik an der Grenze der Brillouin-Zone näher beleuchten. Für ein eindimensionales Gitter ist die erste Brillouin-Zone der Bereich  $]-\pi/a; +\pi/a]$ , mit der Gitterkonstante  $a$ . Wenn sich ein Teilchen an der Grenze der Brillouin-Zone befindet, ist die Wellenlänge  $\lambda_{\text{Teilchen}}$  der Teilchenwelle doppelt so groß wie der Abstand zwischen zwei Gitterplätzen:

$$|q| = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{Teilchen}}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\text{Teilchen}} = \frac{2\pi}{|q|} = 2a \quad (2.56)$$

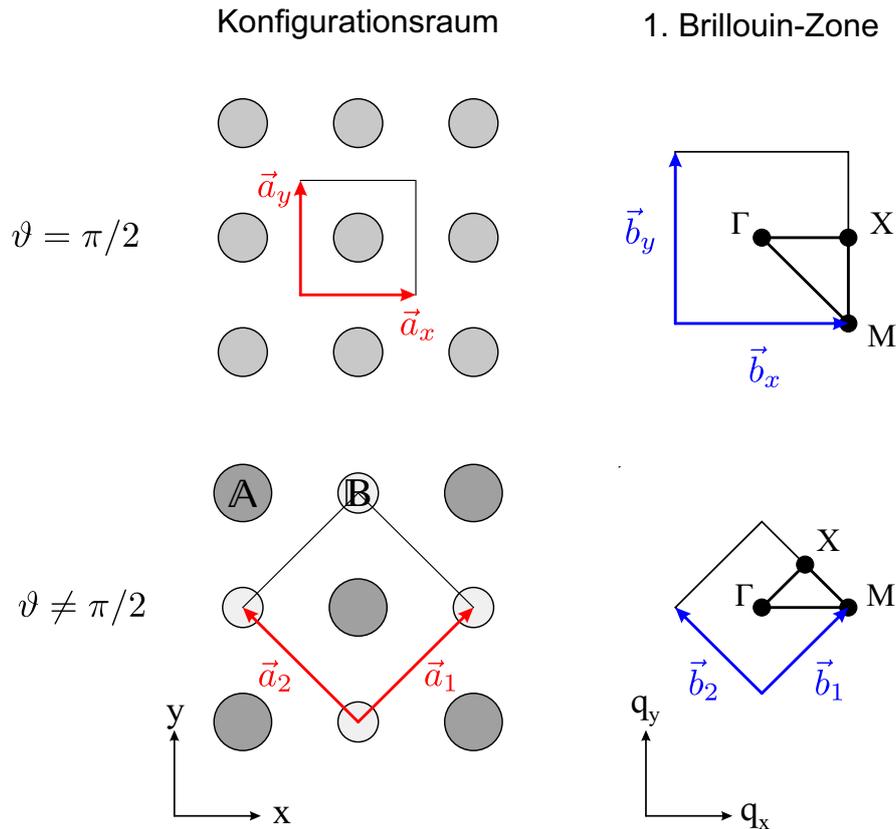
Jeder Gitterplatz wirkt für die Teilchenwelle als Streuzentrum, an welchem Bragg-Streuung stattfindet. Für die von benachbarten Streuzentren zurückreflektierten Teilwellen beträgt der Laufwegunterschied  $2a$ . Für  $q = \pi/a$  beträgt der Phasenunterschied für von benachbarten Gitterplätzen reflektierten Wellen  $2\pi$  und es findet konstruktive Interferenz statt. Durch die Überlagerung von einlaufender und reflektierter Teilchenwelle bildet sich eine Stehwelle aus. Zusätzlich zu der Welle mit Quasiimpuls  $q = \pi/a$  entsteht also eine Welle mit Quasiimpuls  $q = -\pi/a$ . Es ist damit keine Unterscheidung zwischen Wellen der beiden Quasiimpulse  $q = \pm\pi/a$  möglich, weshalb die beiden Werte des Quasiimpulses äquivalent sind. Die Kopplung der Zustände bei  $q = \pm\pi/a$  führt zur Entstehung der Bandlücke an der Grenze der Brillouin-Zone. Es kommt zur Aufspaltung der entarteten Zustände in zwei Zustände mit verschiedener Energie. Beide Zustände sind eine Mischung der Zustände  $q = \pm\pi/a$  zu gleichen Anteilen.

## 2.9 Bandstruktur des zweidimensionalen Gitterpotenzials

Um die Bandstruktur des zweidimensionalen Gitters zu ermitteln, muss – wie im Falle des einfachen eindimensionalen Gitters – die Schrödinger-Gleichung gelöst werden, wobei man die Eigenfunktionen und zugehörigen Eigenwerte des Hamilton-Operators sucht.

Wir betrachten das zweidimensionale optische Gitterpotenzial 2.22. Für die Zeitphasendifferenz  $\vartheta = \pi/2$  liegt ein einfaches quadratisches Gitter vor und die primitiven Gittervektoren sind durch

$$\boxed{\vec{a}_x = a \vec{e}_x, \quad \vec{a}_y = a \vec{e}_y} \quad (2.57)$$



**Abbildung 2.7:** Schematische Darstellung des zweidimensionalen Gitters im Konfigurationsraum und der ersten Brillouin-Zone. Wir gehen von dem Gitterpotenzial 2.22 aus und betrachten den Fall  $\vartheta = \pi/2$ , in welchem ein einfaches quadratisches Gitter vorliegt, sowie den Fall  $\vartheta \neq \pi/2$ , für den wir ein bipartites Gitter erhalten. Eingezeichnet sind jeweils die Einheitszelle und die primitiven Gittervektoren im Ortsraum sowie die Basisvektoren des reziproken Gitters.

gegeben, mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_{x;y}$  in x- bzw. y-Richtung (siehe Abbildung 2.7). Die reziproken Basisvektoren des Quasiimpulsraums lauten entsprechend

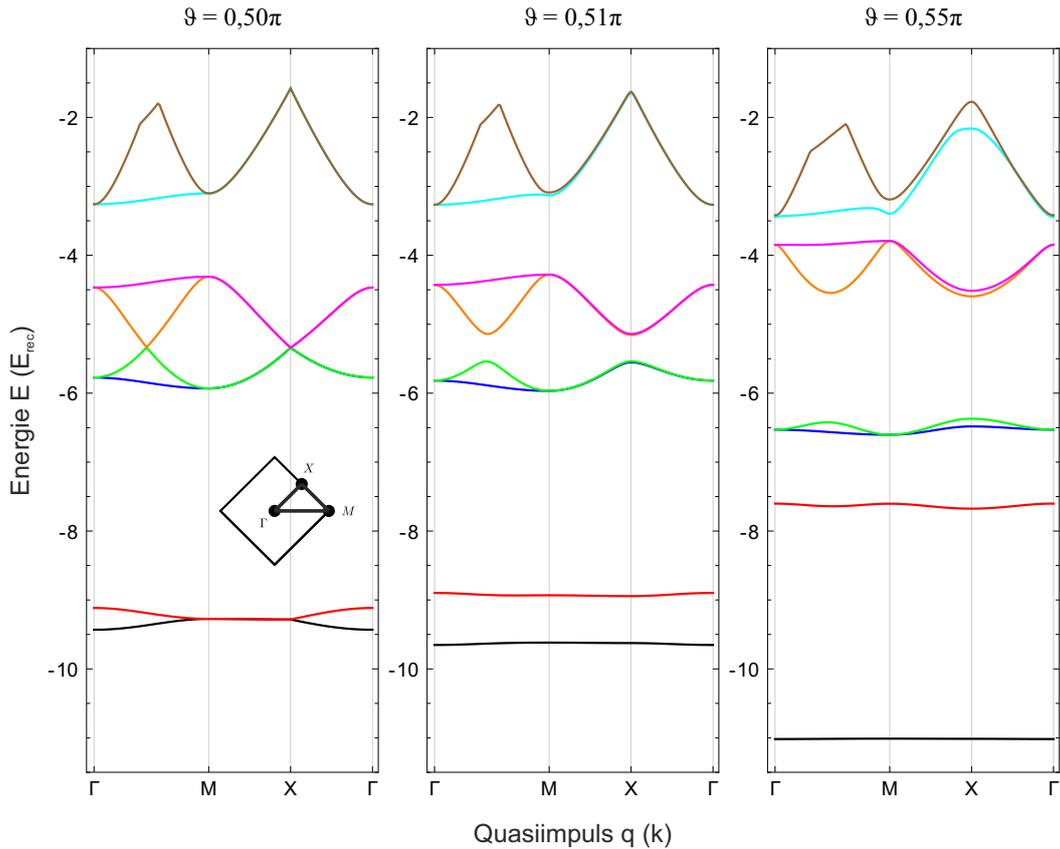
$$\vec{b}_1 = 2\pi/a \vec{e}_x, \quad \vec{b}_2 = 2\pi/a \vec{e}_y. \quad (2.58)$$

Die Lösungen für die Energie aus der Bandstrukturechnung lassen sich dann in Abhängigkeit von den Quasiimpulskoordinaten  $q_x$  und  $q_x$  schreiben.

Im Fall  $\vartheta \neq \pi/2$ , wenn der Interferenzterm in Gleichung 2.22 also nicht verschwindet, erhält man ein Gitter mit zweiatomiger Basis. Es kommt zur Aufspaltung in zwei Subgitter  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  unterschiedlicher Potenzialtiefe. Dies ist auch der Fall, wenn man Anisotropieparameter ungleich eins einführt gemäß Gleichung 2.32, selbst für  $\vartheta = \pi/2$ . Die primitiven Gittervektoren des bipartiten Gitters sind gegeben durch

$$\vec{a}_1 = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y), \quad \vec{a}_2 = a(-\vec{e}_x + \vec{e}_y). \quad (2.59)$$

Die Einheitszelle besteht nun also aus zwei Gittertöpfen, je einem der Klassen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ . Im Vergleich zum  $\pi/2$ -Gitter ist die quadratische Einheitszelle um  $45^\circ$



**Abbildung 2.8:** Bandstruktur des zweidimensionalen Gitterpotenzials 2.22 entlang des Pfades  $\Gamma M X \Gamma$  für drei verschiedene Werte der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Es sind die untersten acht Bänder dargestellt. Die Gittertiefe beträgt  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ . Die Symmetriepunkte beziehen sich auf die kleinere, um  $45^\circ$  gedrehte erste Brillouin-Zone des bipartiten Gitters. Eine mögliche Anisotropie des Gitters wird in der Rechnung nicht berücksichtigt.

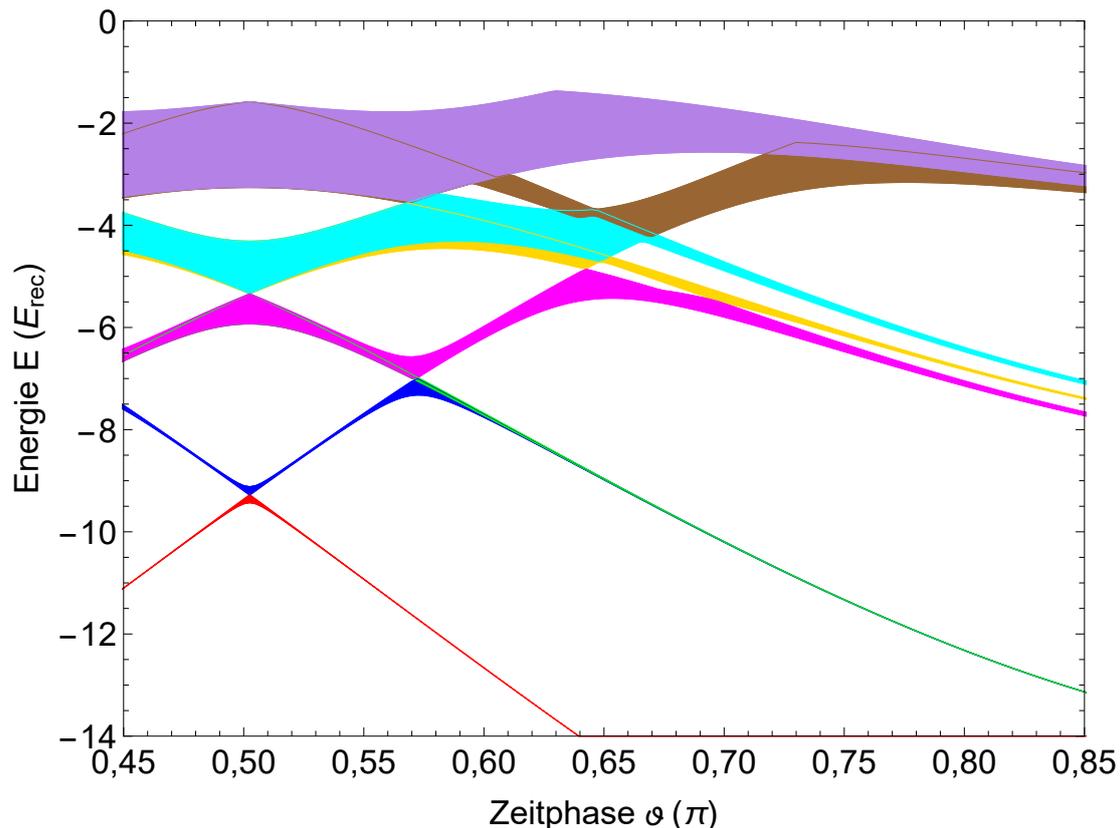
gedreht und ihre Kantenlänge um den Faktor  $\sqrt{2}$  vergrößert. Die reziproken Basis-Gittervektoren lauten

$$\vec{b}_1 = \frac{\pi}{a} (\vec{e}_x + \vec{e}_y), \quad \vec{b}_2 = \frac{\pi}{a} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y). \quad (2.60)$$

Die erste Brillouin-Zone ist ebenfalls um  $45^\circ$  gedreht im Vergleich zum einfachen quadratischen Gitter, ihre Kantenlänge jedoch um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  verkleinert. Wir stellen die Bandstruktur in den Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  des um  $45^\circ$  gedrehten Koordinatensystems dar:  $\vec{q} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2$ , wobei  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$  und  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$  die Einheitsvektoren des gedrehten Koordinatensystems sind. Die neuen Koordinaten sind gegeben durch

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_x + q_y), \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-q_x + q_y). \quad (2.61)$$

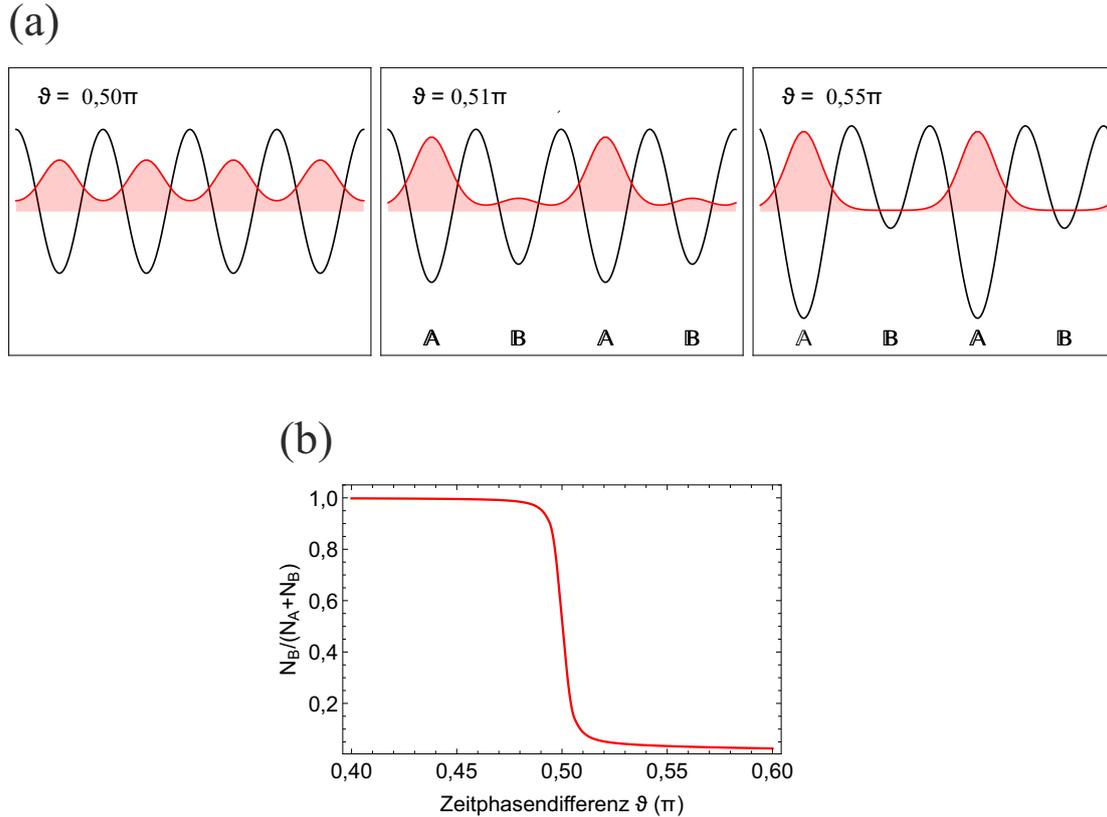
Häufig gibt man die Bandstruktur entlang eines Pfades durch bestimmte Symmetriepunkte an. Diese Punkte sind für eine quadratische erste Brillouin-Zone die folgenden:  $\Gamma$  (Schwerpunkt der Brillouin-Zone),  $X$  (Mittelpunkt des Randes),  $M$



**Abbildung 2.9:** Energiebereich der ersten acht Bänder in Abhängigkeit von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  bei fester Gittertiefe  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ . Es wird für jedes Band der Bereich zwischen minimaler und maximaler Energie des Bandes gezeigt.

(Eckpunkt). Es gibt zwei nichtäquivalente  $X$ -Punkte, die im Falle des bipartiten Gitters mit  $X_+$  und  $X_-$  bezeichnet werden. Abbildung 2.8 zeigt die Bandstruktur des zweidimensionalen Gitters bei einer Gittertiefe  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$  für verschiedene Werte der Zeitphasendifferenz entlang des Pfades  $\Gamma M X \Gamma$ . Da die Anisotropie des Gitters in dieser Rechnung nicht berücksichtigt wird, spielt es hier keine Rolle, ob der  $X_+$ - oder  $X_-$ -Punkt verwendet wird. Beide  $X$ -Punkte sind energetisch entartet. Mathematische Details zur Berechnung der Bandstruktur des bipartiten Gitters lassen sich zum Beispiel in [Ö113] finden.

Um die Bandstruktur bei  $\vartheta = \pi/2$  mit derjenigen bei anderen Zeitphasenwerten  $\vartheta \neq \pi/2$  vergleichen zu können, haben wir sie ebenfalls in Abhängigkeit von den Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  der kleineren, um  $45^\circ$  gedrehten ersten Brillouin-Zone dargestellt. Aufgrund des kleineren Definitionsbereiches der Energiefunktionen  $E_n(\vec{q})$  werden die einzelnen Bänder der größeren Brillouin-Zone zusammengeschoben, so dass sich aus ihnen jeweils zwei Bänder in der kleineren Brillouin-Zone ergeben. Die Bänder, die entlang des Teilpfades  $MX$  aufeinanderliegen, stellen im Bild der größeren ersten Brillouin-Zone ein einzelnes Band dar. Man kann erkennen, dass sich bei  $\vartheta = 0,51\pi$  die ersten beiden Bänder entlang dieses Weges bereits deutlich aufgespalten haben. Auch ist eine deutliche Energielücke der Bänder drei und vier zu den Bändern fünf und sechs entstanden. Diese sowie der Abstand des zweiten Bandes zum ersten sind bei  $\vartheta = 0,55\pi$  noch größer.



**Abbildung 2.10:** (a) Bloch-Funktion  $\psi_{1,\Gamma}(x, y)$  am  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes entlang eines Querschnitts durch das Gitter in  $x$ -Richtung für drei verschiedene Werte der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Die Gittertiefe ist konstant bei  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ . Eingezeichnet ist jeweils auch der Querschnitt durch das Gitterpotenzial. Während bei  $\vartheta = \pi/2$  alle Gittertöpfe gleich stark besetzt sind, spaltet sich das Gitter für  $\vartheta \neq \pi/2$  in zwei Klassen von Gittertöpfen auf. Für zunehmendes  $\vartheta$  werden die tieferen Gittertöpfe immer stärker und die flacheren immer schwächer besetzt. (b) Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $N_B/(N_A + N_B)$  in den Gittertöpfen  $\mathbb{B}$  in Abhängigkeit von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ .

Die Lage der Bänder in Abhängigkeit von der Zeitphasendifferenz wird in Abbildung 2.9 gezeigt. Die Gittertiefe  $V_0$  bleibt dabei konstant. Beim Erhöhen der Zeitphasendifferenz, ausgehend von  $\vartheta = \pi/2$ , kommt es zur Einführung einer Differenz der Potentialtiefe zwischen benachbarten Gittertöpfen, so dass sich zwei Klassen von Töpfen,  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ , ausbilden. Das unterste Band spaltet sich dabei in zwei Bänder auf. Mit größer werdendem  $\vartheta$  fällt eines dieser Bänder energetisch immer weiter ab, während die Energie des zweiten Bandes ansteigt. In diesem Bereich von  $\vartheta$  kann man die Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  in einem vereinfachten Bild als lokale harmonische Oszillatoren und die Bänder eins und zwei als jeweils unterstes Oszillator-Energieniveau verstehen. Die Breite beider Bänder ist hier relativ klein, wie es auch bei den Niveaus eines harmonischen Oszillators der Fall ist. Der Abstand des ersten und zweiten Bandes wächst fast linear mit  $\vartheta$  an. An bestimmten Punkten haben verschiedene Bänder eine ähnliche Energie. So berühren sich zum Beispiel bei  $\vartheta \approx 0,57\pi$  das zweite, dritte und vierte Band. An dieser Stelle nimmt die Bandbreite zu.

Es sei angemerkt, dass die Bänder  $E_{n,\bar{q}}(\vartheta)$  symmetrisch zu  $\vartheta = \pi/2$  sind, das heißt  $E_{n,\bar{q}}(\pi/2 + \Delta\vartheta) = E_{n,\bar{q}}(\pi/2 - \Delta\vartheta)$ , was man auch schreiben kann als  $E_{n,\bar{q}}(\vartheta) = E_{n,\bar{q}}(\pi - \vartheta)$ .

Wenn wir Atome in das unterste Band des Gitters laden, hängt die Besetzung der beiden Klassen von Gittertöpfen von der Zeitphasendifferenz ab. Abbildung 2.10(a) zeigt den Realteil der Bloch-Funktion entlang eines Querschnittes in x-Richtung. Eingezeichnet ist auch der Querschnitt des Gitterpotenzials entlang des gleichen Pfades. Man kann erkennen, dass bereits für  $\vartheta = 0,51\pi$  der Anteil der Wellenfunktion in den flacheren Gittertöpfen  $\mathbb{B}$  bei der verwendeten Gittertiefe relativ klein wird.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einem Gittertopf ist gegeben durch das Integral des Betragsquadrates der Bloch-Funktion über den Bereich des Gittertopfs:

$$n_{\mathbb{A};\mathbb{B}} = \int_{\mathbb{A};\mathbb{B}} dx dy |\psi_{1,\Gamma}(x, y)|^2 \quad (2.62)$$

In Abbildung 2.10(b) ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Gittertöpfen  $\mathbb{B}$  in Abhängigkeit von der Zeitphasendifferenz für eine feste Gittertiefe dargestellt. Für  $\vartheta = \pi/2$  ergibt sich eine gleichgroße Aufenthaltswahrscheinlichkeit von  $1/2$  in den Gittertöpfen  $\mathbb{A}$ - und  $\mathbb{B}$ . Erhöht man die Zeitphasendifferenz, nimmt die Besetzung der  $\mathbb{B}$ -Gittertöpfe relativ schnell ab.

# 3 Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel wird unsere Apparatur zur Erzeugung von ultrakalten bosonischen Quantengasen in höheren Bändern eines bipartiten quadratischen optischen Gitters vorgestellt. Wir erklären zunächst, wie in der Apparatur ein Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidium-87-Atomen erzeugt wird. Anschließend legen wir die konkrete Realisierung des bipartiten optischen Gitters im Experiment dar. Eine detaillierte Beschreibung des experimentellen Aufbaus lässt sich auch in [Wir13, Ö13] finden.

## 3.1 Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats aus $^{87}\text{Rb}$ -Atomen

Bei unserer Apparatur besteht der grundlegende Ablauf zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats zunächst darin, dass aus sogenannten Dispensern, welche sich in der Vakuumkammer befinden, Rubidiumatome emittiert werden. Diese werden anschließend durch zwei aufeinanderfolgende magneto-optische Fallen gefangen und gekühlt. Anschließend werden die Atome in eine magnetische Falle umgeladen, in welcher das Bose-Einstein-Kondensat erzeugt wird. Die kondensierten Atome dienen als Ausgangspunkt für die Experimente im optischen Gitter.

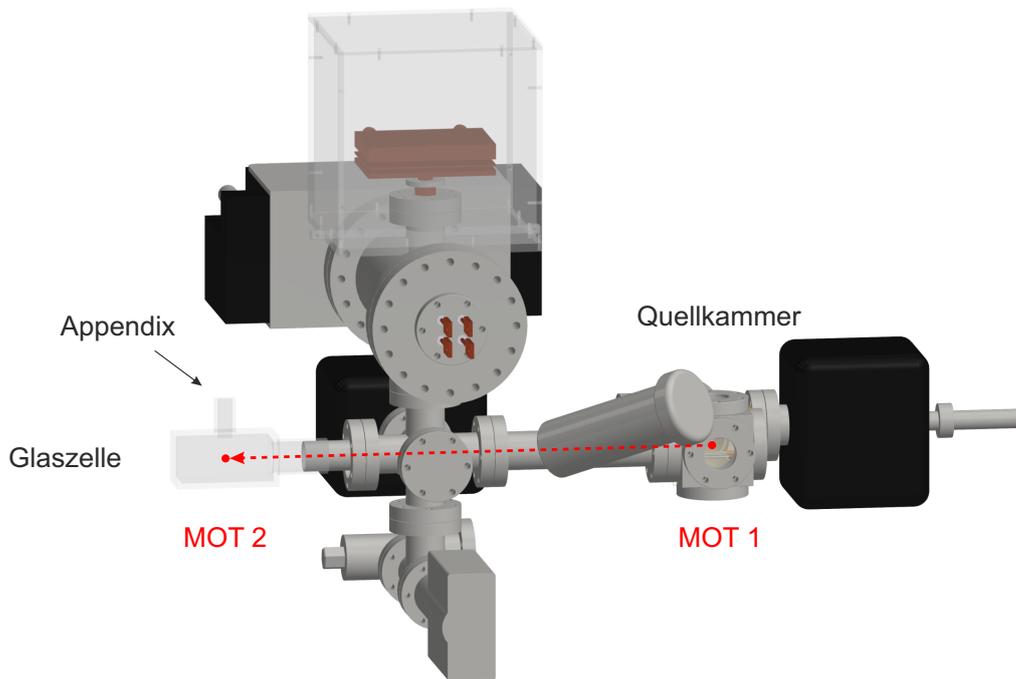
### 3.1.1 Vakuumkammer

Details des Aufbaus des Vakuumsystems sind in [Wir07, Gil07, Ö107, Kö07, Wir13, Ö113, Koc16a] zu finden. Die in unserem Experiment verwendete Vakuumkammer besteht aus zwei Teilen: einer *Quellkammer* und dem „wissenschaftlichen“ Teil der Kammer, der *Glaszelle*. In der Quellkammer befindet sich ein Paar von Dispensern, durch welche ein Gleichstrom  $I$  im Bereich von 2,6 bis 3,1 A fließt. Durch den Stromfluss heizen sich die Dispenser auf und es werden Rubidiumatome in das Vakuum emittiert. Der Strom wird so eingestellt, dass die für das Experiment benötigte Atomzahl zur Verfügung steht.

Bei den emittierten Atomen sind alle Isotope von Rubidium vorhanden. Am häufigsten kommt hierbei das stabile Isotop  $^{85}\text{Rb}$  vor mit einer Häufigkeit von 72,2% in natürlichem Rubidium. Das radioaktive Isotop  $^{87}\text{Rb}$  besitzt eine Häufigkeit von 27,8%.<sup>1</sup> Da wir in unserem Experiment ein Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidium-87-Atomen erzeugen wollen, sind die Wellenlängen des für das Kühlen der Atome verwendeten Laserlichts auf Übergänge im Rubidium-87-Atom stabilisiert. Rubidium-85-Atome werden damit nicht in der magneto-optischen Falle

---

<sup>1</sup>Die Halbwertszeit von  $^{87}\text{Rb}$  liegt bei  $4,81 \cdot 10^{10}$  Jahren.

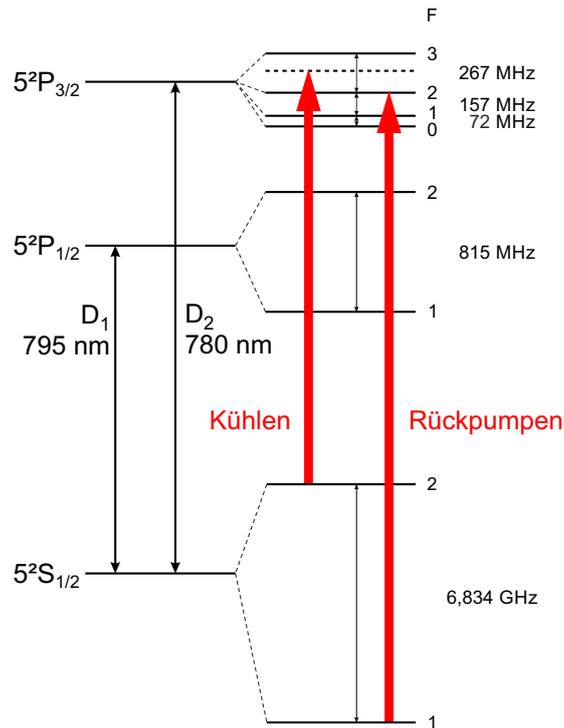


**Abbildung 3.1:** Aufbau des Vakuumsystems der experimentellen Apparatur. Aus den Dispensern in der Quellkammer werden Rubidiumatome emittiert und in der MOT 1 gekühlt und gefangen. Durch einen Laserstrahl werden die Atome über eine differenzielle Pumpstrecke hinweg in die Ultrahochvakuum-Glazzelle transportiert, wo die Atome in der MOT 2 gefangen und weiter gekühlt werden.

gefangen und auch nicht in die magnetische Falle umgeladen, in welcher das Bose-Einstein-Kondensat erzeugt wird.

In der Quellkammer beträgt der Druck  $\sim 10^{-7}$  mBar. In der Glazzelle herrscht ein Druck von  $\sim 10^{-11}$  mBar, so dass hier ein Ultrahochvakuum (UHV) vorliegt. Beide Teile sind durch eine differenzielle Pumpstrecke miteinander verbunden. Dadurch wird verhindert, dass das Hintergrundgas der Quellkammer, welches aus nicht in der MOT 1 gefangenen Rubidiumatomen und anderen Verunreinigungen besteht, in den wissenschaftlichen Teil der Kammer gelangt. Solche Verunreinigungen des UHV können zu einer deutlichen Verringerung der Lebensdauer der untersuchten Quantengase führen.

Die Glazzelle hat die Form eines Quaders mit den Maßen  $50 \times 50 \times 100$  mm, auf dem sich ein weiterer, kleinerer Quader mit den Maßen  $20 \times 10 \times 35$  mm befindet, welcher als *Appendix* bezeichnet wird. Die Maße beziehen sich auf den Abstand von Außenwand zu Außenwand. Die Wandstärke des größeren Quaders beträgt 5 mm, die des Appendix 3 mm. Im Zentrum des größeren Quaders befindet sich die MOT 2, in welche die Atome horizontal aus der MOT 1 transportiert werden. Hier werden sie gefangen und weiter gekühlt. Für die Erzeugung des BECs und die Experimente im optischen Gitter werden die Atome in der Magnetfalle vertikal über eine Distanz von 5,5 cm in den oberen Teil des Appendix transportiert. Der Vorteil dieses Glazzellenaufsatzes besteht darin, dass die Spulen der Magnet-



**Abbildung 3.2:** Fein- und Hyperfeinstruktur des  $^{87}\text{Rb}$ -Atoms. Die Abstände der Energieniveaus sind nicht maßstabsgetreu.

falle relativ nah an den Atomen positioniert werden können. Dadurch kann das erforderliche starke Magnetfeld mit moderater elektrischer Leistung erzeugt werden.

### 3.1.2 Magnetooptische Fallen

Die beiden magnetooptischen Fallen stellen in unserem Experiment den ersten Kühlschritt auf dem Weg zu einem quantenentarteten Bose-Gas dar. In der MOT 1 werden die in den drei Raumrichtungen eingestrahelten Laserstrahlen jeweils in sich selbst zurückreflektiert. Einer der dabei verwendeten Spiegel ist ein auf der Rückseite verspiegeltes  $\lambda/4$ -Plättchen, in dessen Mitte sich ein Loch mit einem Durchmesser von  $0,8\text{ mm}$  befindet. Im Bereich dieses Lochs wird das einlaufende Licht nicht zurückreflektiert, so dass der Strahlungsdruck hier nicht ausgeglichen ist und die Rubidiumatome eine Kraft erfahren, welche sie in Richtung der Wissenschaftskammer beschleunigt. Die Atome werden dabei horizontal, also parallel zum optischen Tisch verschoben. In der Wissenschaftskammer werden die Atome in der MOT 2 gefangen und weiter gekühlt. Der Abstand zwischen den Positionen von MOT 1 und MOT 2 beträgt  $50\text{ cm}$ . In der MOT 2 werden drei Paare von gegenläufigen Laserstrahlen verwendet, die in drei zueinander senkrecht stehenden Richtungen verlaufen.

Das Licht zum Betreiben der beiden magnetooptischen Fallen stammt aus zwei selbstgebaute Diodenlasern mit externer Cavity. Beide Laser werden jeweils auf das Signal einer Doppler-freien Sättigungsspektroskopie von gasförmigen

Rubidiumatomen in einer Glaszelle stabilisiert. Dabei wird eine Kombination aus Pound-Drever-Hall-Stabilisierung und Frequenz-Modulations-Spektroskopie verwendet [Dre83, Bla01, Bjo80, Bjo83].

Für den MOT-Kühlprozess wird in unserem Experiment der  $D_2$ -Übergang des Rubidium-87-Atoms bei einer Wellenlänge von 780 nm verwendet (siehe Abbildung 3.2). Einer der beiden Diodenlaser („*Master*“) wird auf die Crossover-Resonanz CO[2,2,3] der Rubidium-Spektroskopie stabilisiert. Der Master-Laser stellt das Seed-Licht für zwei selbstgebaute *Tapered Amplifier (TA)* bereit, von denen je einer das Licht für die MOT 1 und die MOT 2 erzeugt. Die TAs verstärken dabei das Licht, wobei die spektralen Eigenschaften nahezu erhalten bleiben. Das Licht des Master-Lasers ist rotverstimmt gegenüber dem Übergang  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ . Durch Absorption des Lichts können einige Atome in den Zustand  $F' = 2$  angeregt werden, von wo aus sie in den Grundzustand  $F = 1$  zerfallen können. Dieser Zustand ist dunkel und die Atome stehen dort nicht für den Kühlprozess zur Verfügung. Die Aufgabe des Lichtes des zweiten Diodenlasers („*Repumper*“) ist es, diese Atome vom Grundzustand  $F = 1$  wieder in den Zustand  $F' = 2$  zurückzupumpen, so dass der Kühlkreislauf geschlossen wird. Der Repumper-Laser wird auf die Crossover-Resonanz CO[1,1,2] stabilisiert. Mit Hilfe von akustooptischen Modulatoren (AOM) in Doppel-Durchlauf-Konfiguration wird das durch die TAs verstärkte Master-Licht zu der reinen Linie PL[2,3] hin verschoben und das Licht des Repumpers über einen AOM in Einzel-Durchlauf-Konfiguration zu der reinen Linie PL[1,2] hin. Für den Pump-Strahl (siehe nächster Abschnitt) und das horizontale und vertikale Abbildungssystem wird ebenfalls ein Teil des Lichts vom TA der MOT 2 verwendet.

#### 3.1.3 Experimenteller Ablauf der MOT-Phase

In der MOT 1 werden kontinuierlich Atome gefangen und gekühlt. Ein einzelner Durchlauf des Experiments dauert etwa 40 s und beginnt mit dem Laden der MOT 2, in welche die Atome mit Hilfe eines der MOT-1-Strahlen („*Push-Strahl*“) transportiert werden. Um das Laden der MOT 2 zu beginnen, werden die MOT-2-Spulen an- und das Laserlicht zum Kühlen und Rückpumpen zugeschaltet. Die MOT 2 wird dann für ungefähr 12 s geladen. Die Zahl der hierbei gefangenen Atome liegt in der Größenordnung von  $10^9$ . Die Wolke aus Rubidium-87-Atomen ist mehrere Millimeter groß und besitzt eine Temperatur in der Größenordnung von  $100 \mu\text{K}$ .

Zum Erreichen einer möglichst großen Phasenraumdichte wird das Ensemble nach dem Laden der MOT stärker komprimiert durch eine Erhöhung des magnetischen Gradienten bei gleichzeitiger größerer Rotverstimmung. Man erhält eine sogenannte komprimierte MOT (auf Englisch: *compressed MOT*, *CMOT*). Durch den größeren Magnetfeldgradienten erhöht sich die Rückstellkraft in Richtung der Fallenmitte, und durch die größere Verstimmung verringert sich der Strahlungsdruck. Der Radius, innerhalb von dem Atome in der MOT gefangen werden, sinkt, und die Lebensdauer der Atome in der Falle nimmt stark ab, weshalb diese Phase mit einer Dauer von 40 ms relativ kurz gehalten wird.

Um die Temperatur weiter abzusenken, wird nun für eine Dauer von 5 ms die

Technik der *optischen Melasse* angewendet: Das MOT-Magnetfeld wird instantan ausgeschaltet, die Laserfrequenz wird noch weiter verstimmt von der Frequenz während der MOT-Ladephase und man reduziert die Intensität des Lichtes. Durch das Fehlen des magnetischen Gradienten gibt es keine Rückstellkraft im Ortsraum. Die Atome werden durch die Laserstrahlen ausschließlich abgebremst und ihre Temperatur nimmt auf etwa  $30\ \mu\text{K}$  ab.

Bis hierhin sind die Rubidiumatome über alle Hyperfein-Zeeman-Zustände verteilt. Es wird nun ein zusätzlicher Laserstrahl (*Pump-Strahl*) verwendet, um die Atome in einen bestimmten Zeeman-Zustand zu überführen. Durch diesen Schritt wird die spätere Zahl der Atome in der Magnetfalle erhöht. Es werden nun zwei Laserstrahlen in gegenläufiger Richtung auf die Atome eingestrahlt. Sie sind beide  $\sigma_+$ -polarisiert, da sie Übergänge mit  $\Delta m_F = +1$  treiben sollen. Am Ende dieser Pump-Phase soll nur der Zeeman-Zustand mit  $m_F = +2$  besetzt werden. Der Grund für die Verwendung von zwei Strahlen in gegenläufiger Richtung ist, dass ein Impulsübertrag auf die Atome vermieden werden soll. Das Pump-Licht, dessen Frequenz um  $-60\ \text{MHz}$  gegenüber der atomaren Resonanz verstimmt ist, wird für eine Dauer von  $400\ \mu\text{s}$  eingestrahlt. Die große Verstimmung hilft dabei, dass das Laserlicht auch das Zentrum des optisch dichten Ensembles erreicht. Damit während des Pumpvorgangs eine Quantisierungsachse vorgegeben ist, wird eine der beiden MOT-Spulen instantan (in etwa  $100\ \mu\text{s}$ ) eingeschaltet. Durch das Magnetfeld werden die Hyperfein-Zeeman-Zustände um mehrere Megahertz voneinander getrennt. Über verschiedene Zustände  $|F = 3, m_{F'}\rangle$  werden die Atome in den Zustand  $|F = 2, m_F = +2\rangle$  gepumpt, welcher aufgrund der starken Verstimmung des Laserlichts effektiv dunkel ist. In diesem Zustand werden die Atome nun in die Magnetfalle umgeladen.

### 3.1.4 Atome in statischen Magnetfeldern

Ein klassischer magnetischer Dipol mit Dipolmoment  $\vec{\mu}$ , der sich in einem magnetischen Feld  $\vec{B}$  befindet, besitzt die potenzielle Energie  $E = -\vec{\mu} \circ \vec{B}$ . Bei inhomogenem Magnetfeld wirkt auf den Dipol eine Kraft  $\vec{F}_{\text{mag}} = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \circ \vec{B})$ . Abhängig von der Ausrichtung von  $\vec{\mu}$  und  $\vec{B}$  zueinander zeigt diese Kraft entweder zu höheren oder geringeren Beträgen des Magnetfeldes.

Innerhalb eines Atoms existieren mehrere magnetische Momente, die mit den verschiedenen Drehimpulsen im Atom verbunden sind: dem Bahndrehimpuls  $L$ , der von der räumlichen Bewegung der Elektronen in ihren Orbitalen herrührt, dem Elektronenspin  $S$  und dem Kernspin  $I$ . Diese Drehimpulse eines Atoms interagieren miteinander über ihre eigenen Felder und koppeln sich, abhängig von der relativen Stärke der Wechselwirkung, zu einem neuen Set von Quantenzahlen. So koppeln der orbitale Drehimpuls und der Elektronenspin zum Gesamtdrehimpuls der Elektronen  $J$ , wodurch sich die Feinstruktur des Atoms ergibt. Der Kernspin  $I$  koppelt schließlich mit  $J$  zum Gesamtdrehimpuls  $F$ , wodurch die Hyperfeinstruktur bestimmt wird.

Für Rubidium-87 beträgt die Fein-Aufspaltung des angeregten Zustands in die beiden Niveaus  $5^2\text{P}_{1/2}$  und  $5^2\text{P}_{3/2}$   $7,1\ \text{THz}$ . Im Spektrum kommen die beiden für Alkali-Atome charakteristischen D-Linien vor: die *D<sub>1</sub>-Linie* des Übergangs

$^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$  mit der Wellenlänge 795 nm und die  $D_2$ -Linie des Übergangs  $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$  mit der Wellenlänge 780 nm. Durch die Kopplung von  $J$  mit dem Kernspin  $I = 3/2$  spaltet sich der Grundzustand in zwei Zustände auf, deren Abstand 6,8 GHz beträgt. Die Hyperfein-Aufspaltung der angeregten Zustände liegt in der Größenordnung von 100 MHz. Die Fein- und Hyperfeinstruktur von  $^{87}\text{Rb}$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

Wenn sich das Atom in einem externen Magnetfeld befindet, wird der Hyperfeinzustand mit Gesamtdrehimpuls  $F$  in seine Zeeman-Zustände mit verschiedenen Werten der magnetischen Quantenzahl  $m_F$  aufgespalten. Hierbei ist  $F$  eine gute Quantenzahl für schwache Magnetfelder, da die Kopplung der Drehimpulse innerhalb des Atoms bestehen bleibt. Man nennt diesen Bereich des Magnetfeldes *Zeeman-Regime*. Bei starken Magnetfeldern koppeln die einzelnen Drehimpulse des Atoms individuell an das externe Magnetfeld, hier sind  $J$  und  $I$  gute Quantenzahlen. Diesen Bereich des magnetischen Feldes bezeichnet man als *Paschen-Back-Regime*.

Mit den in unserem Experiment auf die Rubidium-Atome wirkenden Magnetfeldern befinden wir uns im Zeeman-Regime und der Hyperfein-Zustand mit Gesamtdrehimpuls  $F$  spaltet sich wie folgt auf:

$$\boxed{E_B = g_F \mu_B m_F |\vec{B}|} \quad (3.1)$$

Hierbei ist  $g_F$  der Hyperfein-Landé-Faktor. Generell lassen sich Zeeman-Zustände eines Hyperfeinzustandes einteilen in sogenannte *high-field-seeking states*, für welche  $g_F m_F < 0$  gilt, und *low-field-seeking states* mit  $g_F m_F > 0$ . Da ein quasistatisches magnetisches Feld an einem Ort ohne Stromfluss kein lokales Maximum haben kann [Win84], würden sich Atome in high-field-seeking states zu den Quellen der Felder bewegen und können damit nicht gefangen werden. Es ist nur ein Fangen der Atome in low-field-seeking states möglich.

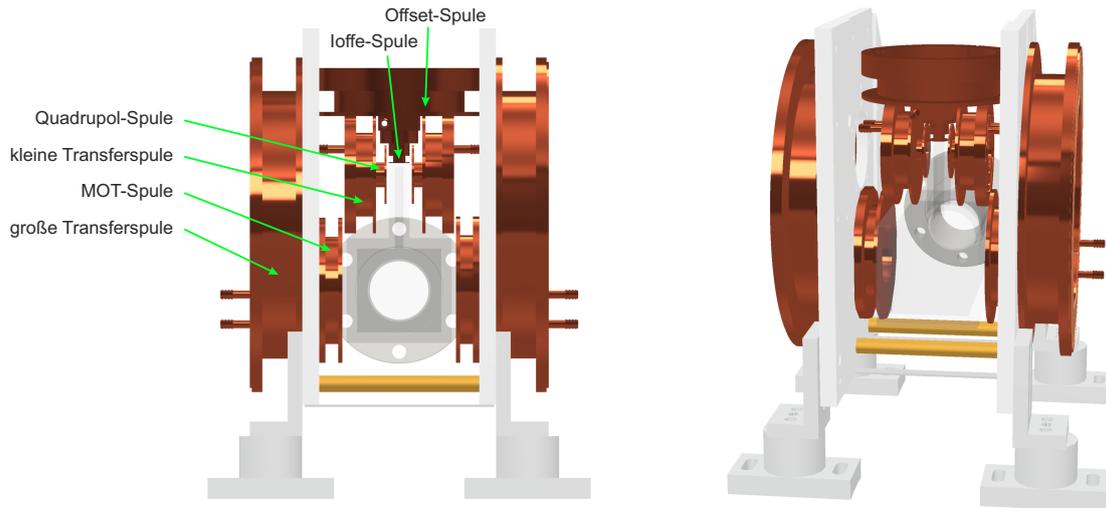
Ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}$  in einem externen Magnetfeld  $\vec{B}$  erfährt ein Drehmoment und präzediert um den magnetischen Feldvektor mit der Larmor-Frequenz  $\omega_L = m_F g_F \mu_B |\vec{B}| / \hbar$ . Wenn sich Atome durch die Falle bewegen, sehen sie ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld, so dass prinzipiell Übergänge zwischen den  $m_F$ -Zuständen möglich sind. Es finden keine Übergänge zwischen den  $m_F$ -Zuständen statt, wenn das magnetische Moment dem Feld adiabatisch folgt. Dies ist der Fall, wenn die Bedingung

$$\frac{|\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}|}{B} \ll \omega_L \quad (3.2)$$

erfüllt wird [Met99].

### 3.1.5 Neues Spulensystem

Im Rahmen dieser Arbeit war es notwendig, die bis dahin im Experiment eingesetzten wassergekühlten Spulen auszutauschen. Diese waren beim Fertigungsprozess aus verschiedenen Einzelkomponenten zusammengelötet worden. Die Lötstellen einiger Spulen waren im Laufe der Zeit stark korrodiert, so



**Abbildung 3.3:** Aufbau des neuen Spulensystems, gezeigt in einer Ansicht von vorne und schräg von vorne.

dass Wasser aus den Spulenkörpern heraustropfte. Es gelangte Wasser auf die Außenseite der Vakuumkammer, so dass das Abbilden der Atome mit dem Absorptionsabbildungssystem nicht mehr möglich war. Außerdem kam es durch das Austreten des Wassers aus den Spulen zu Vibrationen im Experiment. Es wurden neue Spulen designt, bei denen durch eine geänderte Herstellungsmethode der Korrosionsprozess vermieden und die Haltbarkeit erhöht werden sollte. Die Einzelteile wurden nun miteinander verschweißt und nicht mehr zusammengelötet. Die Position der Spulen im experimentellen Aufbau, die Abmessungen der Spulenkörper und die Anzahl der Windungen blieben im Wesentlichen gleich. Die neuen Spulen sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Details zu den Parametern der einzelnen Spulen lassen sich in [Koc16a] finden.

Beim Austausch des Spulensystems wurde zudem eine neue Halterung für die Ioffe-Spule eingebaut. Im alten Aufbau konnte der Abstand der Ioffe-Spule zum atomaren Ensemble durch ein System aus Konterschrauben und Federn flexibel eingestellt werden. Im neuen Design lässt sich der Abstand durch Distanzschrauben anpassen. Dadurch ist das System deutlich weniger anfällig für thermische Drifts, und durch den Verzicht auf bewegliche Teile erhöht sich die mechanische Stabilität. Vor dem Umbau wurden die Spulen vom Kühlwasser der Hauswasserversorgung durchflossen. Um Korrosion zu vermeiden, werden die Spulen nun von einem speziellen Kühlwasser der Firma van-der-Heyden durchflossen. Die Kühlung des Wassers erfolgt durch ein von der gleichen Firma hergestelltes Kühlmobil, welches wiederum von der Hauswasserversorgung gekühlt wird.

### 3.1.6 Magnetischer Transport und Quadrupol-Ioffe-Falle

Es soll hier kurz beschrieben werden, wie der magnetische Transport der Atome in den Appendix vonstattengeht.

Die Atome werden nach der MOT-Phase in die Magnetfalle umgeladen und in dieser von der Position der zweiten MOT über eine vertikale Strecke von 5,5 cm

in den oberen Teil des Appendix transportiert. Für den magnetischen Transport werden drei Spulenpaare verwendet, deren Achsen sich in verschiedenen Höhen befinden: die *großen* und *kleinen Transferspulen* sowie die *Quadrupolspulen*, welche Teil der Quadrupol-Ioffe-Falle sind.

Durch Verändern der Ströme durch die Spulen kann das Zentrum der Falle bewegt werden. Während des Transports werden die Ströme durch die großen und kleinen Transferspulen hoch- und runtergerampft und schließlich die Quadrupolspulen eingeschaltet. Alle Rampen erfolgen in Form von kubischen glatten Funktionen. Insgesamt beträgt die Zeit des magnetischen Transports 0,91 s.

Die während des magnetischen Transports eingesetzten Spulen werden jeweils von entgegengesetzt gerichteten gleichen Strömen durchflossen, so dass sich in ihrer Mitte ein Minimum des Magnetfeldes ergibt, in dem die Atome gefangen werden. Das von diesen Spulen realisierte Fallenpotenzial ist linear und besitzt die Form  $V(x, y, z) \approx A\sqrt{2x^2 + y^2 + 4z^2}$ , mit einer Konstanten  $A$ , die proportional zum Spulenstrom ist. Das Potenzial der Magnetfalle wächst linear in allen Raumrichtungen.

Der Nachteil einer linearen Magnetfalle ist, dass das magnetische Feld im Fallenzentrum gleich null ist. Dadurch wird die Bedingung 3.2 hier nicht mehr erfüllt und es können Majorana-Spin-Übergänge der Atome zu nicht fangbaren Hyperfein-Zeeman-Zuständen stattfinden [Ket99]. Für die Erzeugung eines BECs durch evaporatives Kühlen ist es daher notwendig, dass das magnetische Feld im Bereich des atomaren Ensembles von null verschieden ist. Dies wird erreicht durch die Verwendung einer kleinen einzelnen Spule, der sogenannten *Ioffe-Spule*, deren Symmetrieachse in  $z$ -Richtung zeigt und damit orthogonal zur Achse des Quadrupolspulenpaares ausgerichtet ist. Wenn das Feld der Ioffe-Spule ausreichend groß ist, kommt es nicht mehr zu einem Nulldurchgang des Magnetfelds und es herrscht ein von null verschiedenes Feld am Ort des Fallenminimums. Das Potenzial dieser sogenannten *QUIC-Falle* (von Englisch: *quadrupole-Ioffe configuration*) hat im Bereich des Minimums annähernd die Form eines anisotropen harmonischen Oszillators.

Um das Ensemble adiabatisch von der linearen Magnetfalle in die QUIC-Falle umzuladen, ist eine weitere Spule notwendig, die sogenannte *Offset-Spule*. Sie besitzt die gleiche Symmetrieachse wie die Ioffe-Spule, hat jedoch einen deutlich größeren Durchmesser. Wenn die Offset-Spule während des Hochrampens des Ioffe-Spulen-Feldes ausgeschaltet wäre, würde das Fallenminimum soweit in Richtung der Oberseite des Appendix verschoben werden, dass die Atome die Glaswand berührten. Die Offset-Spule ermöglicht es, das Fallenminimum auch bei angeschalteter Ioffe-Spule an einer ähnlichen vertikalen Position zu halten.

#### 3.1.7 Evaporatives Kühlen

Nach dem Umladen in die QUIC-Falle wird die Temperatur der Atome durch evaporatives Kühlen abgesenkt, so dass sich ein Bose-Einstein-Kondensat ausbildet. Der Kühleffekt bei diesem Kühlmechanismus, der auch als Verdampfungskühlen bezeichnet wird, beruht auf dem gezielten Entfernen der Atome mit der höchsten Energie in einer thermischen Verteilung und einem anschließenden Rethermalisi-

sieren durch elastische Kollisionen, wodurch wieder Atome zu höheren Energien hin verteilt werden. Die mittlere Energie der Atome nimmt dabei ab, so dass ihre Temperatur sinkt [Dav95b, Dav95c, Ket99]. Verdampfungskühlen kann man auch im alltäglichen Leben beobachten, wenn sich zum Beispiel dampfender heißer Kaffee abkühlt.

In unserer Apparatur werden für das evaporative Kühlen Radiowellen mit einer Frequenz im Megahertz-Bereich eingestrahlt, wodurch Übergänge zwischen verschiedenen Zeeman-Zuständen mit  $\Delta m_F = \pm 1$  getrieben werden. Insbesondere werden Atome mit  $m_F = +2$  in den Zustand mit  $m_F = +1$  überführt. Die Frequenz der Radiowellen wird dabei in einer optimierten Rampe von einem Startwert (59 MHz) bis zu einem Zielwert, welcher bei etwa 4 MHz liegt, durchgestimmt. Die Gesamtdauer der Rampe beträgt 15,5 s, im Anschluss wird die Frequenz für 1 s konstant gehalten. Es wird ein Bose-Einstein-Kondensat mit typischerweise  $5 \cdot 10^4$  Atomen erzeugt.

Das für die Kühlung verwendete Radiofrequenzsignal wird von einem Signalgenerator VFG150 der Firma Toptica erzeugt. Das Signal wird anschließend von einem Verstärker mit geringem Rauschen und einer Ausgangsleistung von 1 W verstärkt und über eine Antenne abgestrahlt. Diese besteht aus einer einzigen Schleife aus Kupferdraht mit einem Durchmesser von 20 mm. Ein parallel zur Antenne geschalteter Schaltkreis sorgt für die Impedanzanpassung. Die Symmetrieachse der Leiterschleife zeigt in Richtung des Potenzialminimums der QUIC-Falle.

Während der Evaporation betragen die Fallenfrequenzen  $\omega_x = 2\pi \times 156$  Hz,  $\omega_y = 2\pi \times 148$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \times 37$  Hz. Die Ströme durch die Ioffe-Spule und die Quadrupol-Spulen sind hierbei  $I_{\text{Ioffe}} = 2,41$  A,  $I_{\text{Quadr}} = 3,0$  A. Die Offset-Spule ist ausgeschaltet, also  $I_{\text{Offset}} = 0$ .

Hohe Fallenfrequenzen sind für die Evaporation wichtig, da es bei hohen Dichten vermehrt zu Stößen kommt. Hingegen ist für die Experimente in optischen Gittern ein dekomprimiertes und möglichst homogenes BEC von Vorteil, da sich die Atome dann gleichmäßig im Gitter verteilen können. Die Falle wird nun durch eine Änderung der Spulenströme „geöffnet“, so dass das BEC dekomprimiert wird und die Fallenfrequenzen in den drei Raumrichtungen ähnliche Werte aufweisen. Die Dekomprimierung erfolgt dabei vor allem in x- und in y-Richtung, in z-Richtung bleibt die Fallenfrequenz nahezu unverändert. Die Position des Fallenminimums verschiebt sich geringfügig beim Öffnen der Falle, wodurch eine Oszillation des BECs angeregt werden kann. Eine solche Schwingung ist unerwünscht und wird an unserem Experiment dadurch verhindert, dass das Fallenminimum am Umkehrpunkt der Oszillation instantan an die Position des BECs verschoben wird.

Nach dem Übergang zur geöffneten Falle betragen die Fallenfrequenzen  $\omega_x = 2\pi \times 42$  Hz,  $\omega_y = 2\pi \times 45$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \times 35$  Hz. Die Spulenströme sind nun  $I_{\text{Ioffe}} = 2,70$  A,  $I_{\text{Quadr}} = 3,0$  A und  $I_{\text{Offset}} = 6,0$  A.

Die Fallenfrequenzen lassen sich messen, indem man in der Magnetfalle den Strom einer Spule kurzzeitig ändert und ihn dann wieder auf seinen ursprünglichen Wert zurücksetzt. So wird gezielt eine Oszillation des BECs angeregt, aus der man die Frequenz durch einen Fit bestimmen kann.

### 3.1.8 Abbildungssystem

In unserer Apparatur können die Atome mit Hilfe von zwei Abbildungssystemen aus unterschiedlichen Perspektiven abgebildet werden. Das *vertikale* Abbildungssystem bildet die Atome in der x-y-Ebene ab. Das *horizontale* Abbildungssystem besitzt einen Winkel von ein paar Grad zur x-Achse, es erfolgt hier annähernd eine Abbildung in der y-z-Ebene. Jedes Abbildungssystem beinhaltet eine eigene Kamera (PCO Pixelfly).

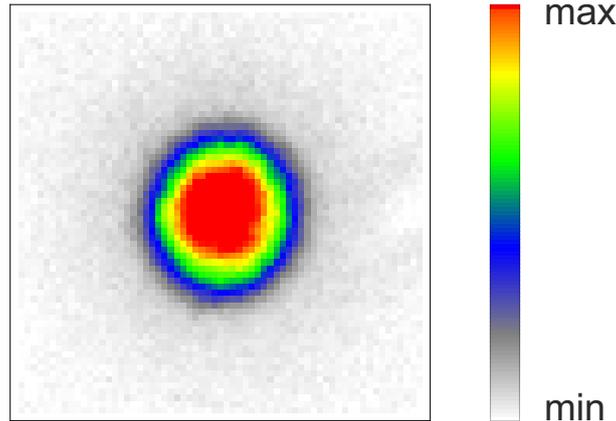
Die Objektive vor den Kameras bestehen jeweils aus zwei achromatischen Linsen mit dem Durchmesser 2,5 cm. Die Positionen der Linsen sind so gewählt, dass sich die Atome ungefähr im Abstand der Brennweite  $f_1$  von der ersten Linse und die Kamera ungefähr im Abstand  $f_2$  von der zweiten Linse befindet. Beim vertikalen Abbildungssystem betragen die Brennweiten  $f_1 = f_2 = 160$  mm, beim horizontalen Abbildungssystem  $f_1 = 160$  mm und  $f_2 = 250$  mm. Die Messdaten zu den in dieser Arbeit vorgestellten Experimenten wurden mit Hilfe des vertikalen Abbildungssystems aufgenommen. Das horizontale Abbildungssystem wird vor allem bei der Feinjustage des Gitters oder für Kontrollmessungen genutzt.

Beim Abbildungsvorgang wird resonantes Licht auf die Atome eingestrahlt. Die aufgenommenen Bilder der Atome sind zunächst Graustufenbilder. In jedem Pixel des CCD-Sensors der Kamera wird die Intensität des auftreffenden Lichtes gemessen. An den Stellen, an denen sich Atome befinden, erfolgt eine Abschwächung des Abbildungslicht durch Absorption. Direkt im Anschluss an ein mit Atomen aufgenommenes Bild wird ein Referenzbild mit eingeschaltetem Abbildungslicht, jedoch ohne Atome, aufgezeichnet. Das Referenzbild wird von dem Bild mit den Atomen abgezogen, so dass man die optische Dichte  $D$  der Atomverteilung in Abhängigkeit vom Ort bestimmen kann (für eine mathematische Beschreibung siehe [Wir13]). Mit Hilfe unserer Labview-Auswertungssoftware lassen sich die Werte der optischen Dichte unter Berücksichtigung des Absorptionsquerschnittes der  $^{87}\text{Rb}$ -Atome jeweils in eine Atomzahl übersetzen. Für die Anzahl  $N$  der Atome in der Fläche des Pixels an der Position mit den Koordinaten  $(u, v)$  gilt:

$$N(u, v) = D(u, v) \cdot \frac{A_{\text{pixel}}}{\sigma_0 f_{\text{abs}}^2} \quad (3.3)$$

Hierbei sind  $\sigma_0 = 3\lambda^2/2\pi$  der Absorptionsquerschnitt bei der Resonanz,  $A_{\text{pixel}}$  die Fläche eines Pixels und  $f_{\text{abs}}$  die Vergrößerung des Abbildungssystems.

Zur Aufnahme einer Absorptionsabbildung von den Atomen schaltet man alle Fallenpotenziale instantan aus und lässt das atomare Ensemble für eine Expansionszeit (auf Englisch: *time of flight*) von  $t_{\text{TOF}} = 30$  ms frei expandieren. Der Abbildungsstrahl wird dabei für 0,4 ms eingeschaltet. Abbildung 3.4 zeigt ein mit dem vertikalen Abbildungssystem aufgenommenes Bild des BECs. Die Atomverteilung wird hierbei mit Hilfe einer Farbskala veranschaulicht.



**Abbildung 3.4:** Mit dem vertikalen Abbildungssystem aufgenommenes Bild des BECs in Farbskalendarstellung. Es wurde über drei Messungen gemittelt.

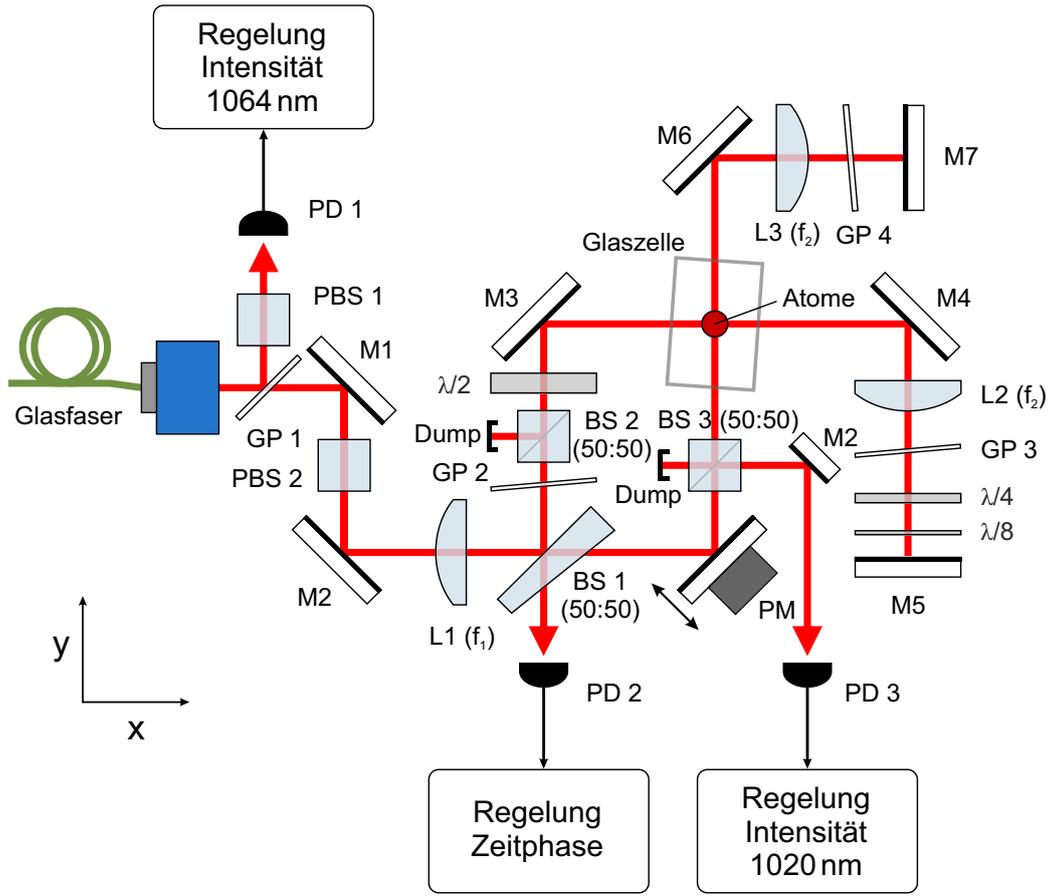
## 3.2 Realisierung des bipartiten zweidimensionalen optischen Gitters

Die optischen Elemente des interferometrischen Gitteraufbaus befinden sich auf einer horizontal ausgerichteten Aluminiumplatte („Gittertisch“) mit den Maßen  $355 \times 345 \times 15$  mm. Der Laserstrahl verläuft in einer Höhe von 25 mm über der Platte. Die auf der Platte montierten optischen Elemente und der Verlauf der Gitterstrahlen sind schematisch in Abbildung 3.5 dargestellt.

### 3.2.1 Aufbau des Gitters

Das optische Gitterpotenzial wird von Laserlicht der Wellenlänge 1064 nm gebildet. Das Licht wird in Form eines Gaußschen Laserstrahls aus einer polarisationserhaltenden Single-Mode-Glasfaser ausgekoppelt und mit Hilfe einer asphärischen Linse kollimiert, so dass sich ein Strahl mit einem Strahlradius von 1 mm ergibt. Die Polarisation des Strahls, welche in die vertikale Richtung zeigt und damit senkrecht zur Gitterebene steht, wird anschließend durch einen polarisierenden Strahlteilerwürfel (PBS 2) gereinigt. Am 50:50-Strahlteilerplättchen (BS 1) kommt es zur Aufspaltung des Lichts in den x- und den y-Gitterrast. Früher wurde im Experiment ein nichtpolarisierender Strahlteilerwürfel verwendet. Ein kleiner Teil des Lichtes wurde an seinen Oberflächen zurückreflektiert und verursachte unerwünschte Reflexe auf der Fotodiode, welche das Interferometer-Signal zur Stabilisierung der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  misst. Das nun verwendete Plättchen besitzt zwei nicht zueinander parallele Flächen, so dass mögliche Rückreflexe nicht mit dem einlaufenden Strahl überlagert sind.

Die achromatische Linse (L1) mit der Brennweite  $f_1 = 350$  mm, welche sich vor dem Strahlteilerplättchen befindet, fokussiert den Laserstrahl auf die Atome. Auf die genaue Position der Fokusse der vier miteinander interferierenden Strahlen wird in Abschnitt 3.5 eingegangen. Das Gitter wird so justiert, dass sich die beiden Gitteräste am Ort der Atome im rechten Winkel schneiden, hier bildet sich das zweidimensionale optische Gitterpotenzial aus. Die Waist-Radien der



**Abbildung 3.5:** Aufbau zur Realisierung des bipartiten zweidimensionalen Gitters. Hierbei stehen die Abkürzungen für: Spiegel (M), Linse (L), Piezospiegel (PM), Strahlteiler (BS), polarisierender Strahlteiler (PBS), Fotodiode (PD), Glasplättchen (GP);  $\lambda/2$ ,  $\lambda/4$ ,  $\lambda/8$  stehen für die entsprechenden Wellenplättchen.

Strahlen betragen jeweils ungefähr  $w_0 \approx 100 \mu\text{m}$ . Vor den beiden Spiegeln (M5, M7), die die Strahlen in den beiden Gitterrösten wieder zurückreflektieren, ist jeweils eine achromatische Linse (L2, L3) mit der Brennweite  $f_2 = 200 \text{ mm}$  positioniert. Durch diese Linse wird der Strahl vor der Reflexion kollimiert und beim Zurücklaufen wieder fokussiert.

Für die Experimente mit Atomen im optischen Gitter ist es wichtig, die Intensität des Gitterlichts kontrollieren zu können. Um dies zu erreichen, befindet sich hinter dem Faserauskoppler auf der Gitterplatte ein Glasplättchen (GP 1), welches einen kleinen Teil des Lichts aus dem Strahl herausreflektiert. Dieses Licht trifft auf eine Fotodiode und dient als Signal für die Intensitätsregelung des 1064-nm-Lichtes.

Im Gitter gibt es noch Licht einer weiteren Wellenlänge – 1020 nm –, welches aufgrund seiner geringen Intensität keinen nennenswerten Beitrag zum Gitterpotential leistet und ausschließlich der Stabilisierung der Zeitphasendifferenz dient (siehe Abschnitt 3.2.3). Die Intensität dieses Lichts wird ebenfalls geregelt. Dazu wird ein Teil des Lichts über den 50:50-Strahlteiler im y-Gitterrast (BS 3) aus dem Strahl herausreflektiert und seine Intensität nach zweistufiger Filterung auf einer

Fotodiode gemessen.

Die Fotodiodensignale für die Intensitätsregelung vom 1064-nm- und 1020-nm-Licht werden auf den Eingang von je einem Proportional-Integral-Regler (PI-Regler) gegeben. Der Ausgang des Reglers ist mit einem elektronisch steuerbaren Oszillator verbunden, welcher einen AOM treibt.

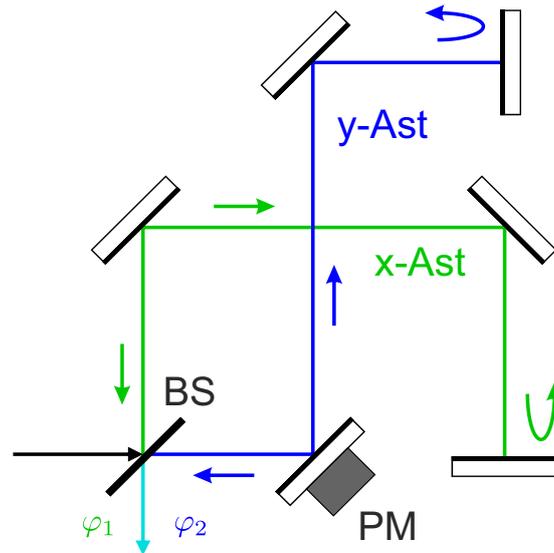
### 3.2.2 Auf einem Piezoaktor montierter Umlenkspiegel und Bedeutung der Zeitphasendifferenz $\vartheta$

Die beiden Gitteräste werden mit Hilfe von Umlenkspiegeln (M3, PM) auf die Atome feinjustiert. Wie in Abschnitt 2.3 gesehen, bildet sich das Gitterpotenzial durch die Interferenz von vier Laserstrahlen – den beiden einlaufenden und den beiden zurückreflektierten – aus. Die genaue Form des Potenzials hängt von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  zwischen den beiden Gitterästen ab. Ein wichtiges Merkmal unseres Gitters ist, dass sich die Zeitphasendifferenz und damit der Unterschied der Potenzialtiefe der beiden Klassen von Gittertöpfen,  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ , regeln lässt.  $\vartheta$  hängt von der optischen Weglängendifferenz der beiden Gitteräste ab und kann über diese eingestellt werden. Der Umlenkspiegel für den einlaufenden Laserstrahl des y-Astes (PM) ist auf einem Piezoaktor befestigt. Durch das Anlegen einer Spannung an den Piezoaktor ändert sich dessen Ausdehnung, so dass der Umlenkspiegel im Mikrometerbereich vor- und zurückgefahren werden kann. Der einlaufende y-Gitterstrahl legt dann einen kürzeren oder längeren Weg bis zu den Atomen zurück, so dass sich am Ort der Atome die relative Phase der einlaufenden Wellenfronten in x- und y-Richtung ändert.

Die retroreflektierenden Spiegel (M5, M7) geben die Position der Knotenpunkte der Lichtintensität vor. Auf den Spiegeln selbst addieren sich die elektrischen Felder von einlaufendem und reflektiertem Strahl zu null aufgrund des Phasensprungs von  $\pi$  bei der Reflexion. Das optische Gitter wird von zwei stehenden Wellen gebildet, einer in x- und einer in y-Richtung. Bei beiden stehenden Wellen schwingt an den Stellen der Wellenbäuche die Summe der elektrischen Felder zwischen dem Maximum und dem Minimum hin und her. Die Phase zwischen diesen beiden Schwingungen entspricht der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Die Lichtintensität und das zu dieser proportionale Gitterpotenzial ergibt sich aus einer zeitlichen Mittelung des Betragsquadrats der Summe der elektrischen Felder beider stehenden Wellen.

Wir wollen anmerken, dass es beim Vor- und Zurückfahren des Umlenkspiegels im Bereich einiger Mikrometer zu einem kleinen Versatz des einlaufenden y-Gitterstrahls und damit auch des zurückreflektierten Strahls kommt. Aufgrund der geringen Größe dieses Versatzes im Vergleich zum Durchmesser des Bose-Einstein-Kondensats in der Magnetfalle von etwa  $20\ \mu\text{m}$  spielt er praktisch keine Rolle.

In der Theorie ließe sich die Zeitphasendifferenz auch über Variation der Position der Rückreflexspiegel einstellen. Dies würde zusätzlich auch die Lage der Knoten des Interferenzmusters verändern. In unserem Gitter bleibt die Position der Knoten hingegen konstant.



**Abbildung 3.6:** Die beiden am Michelson-Strahlteiler (BS) überlagerten zurückreflektierten Strahlen des x- und y-Gitterastes haben auf ihrem Weg durch den Gitteraufbau eine Phase  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  aufgesammelt. Der Unterschied zwischen beiden Phasen entspricht dem Doppelten der Zeitphasendifferenz,  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\vartheta$ .

### 3.2.3 Regelung der Zeitphasendifferenz

Es soll nun beleuchtet werden, wie in unserem Experiment die Regelung der Zeitphasendifferenz realisiert wird.

Die Strahlen der beiden Gitteräste treffen nach der Rückreflexion wieder am Strahlteilerplättchen (BS in Abbildung 3.6) zusammen, wo das Licht zuvor in die beiden Äste aufgespalten worden war. Wir schauen uns nun das Interferenzsignal der beiden überlagerten Strahlen an. Dieses hängt von den Phasen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ab, die das Licht beim Hin- und Zurücklaufen im x- bzw. y-Ast erhalten hat. Der gesamte Gitteraufbau erinnert damit an ein *Michelson-Interferometer*. Ändert sich durch das Verstellen des Umlenkspiegels auf dem Piezoaktor die optische Weglänge im y-Gitterast, wird man eine Änderung im Interferometersignal beobachten.

Wenn man das Interferometersignal des 1064-nm-Gitterlichts direkt zum Regeln der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  verwenden würde, wäre es mit einer einfachen Regelschaltung nicht möglich, die Intensität des Lichts und damit die Tiefe des Gitters in einem Experimentzyklus zu verändern und gleichzeitig  $\vartheta$  zu kontrollieren. Denn man wüsste bei einer Änderung des Interferometersignals nicht, ob diese durch eine Änderung der Intensität oder eine Änderung der Zeitphasendifferenz geschieht. Eine Änderung der Gittertiefe ist aber zum Beispiel beim Laden des BECs in das optische Gitter, wobei die Laserleistung adiabatisch hochgerampft wird, notwendig. Desweiteren geht die Steigung des Interferometersignals in der Umgebung von Extrema gegen null. Das bedeutet, dass sich in diesem Bereich bei einer Änderung der Zeitphasendifferenz das Signal nur wenig ändert. In diesem Bereich ist keine optimale Regelung möglich, ohne die Verstärkung des Regelkreises anzupassen.

Aus diesen Gründen wird für die Zeitphasenregelung das Licht eines zweiten

Lasers mit der Wellenlänge 1020 nm verwendet, welches mit dem 1064-nm-Licht überlagert ist. Aufgrund der gemeinsam im Gitter genutzten optischen Elemente ist es vorteilhaft, eine Wellenlänge zu verwenden, die nicht zu stark von 1064 nm verschieden ist. Auf der anderen Seite soll sie sich gut durch optische Filter von 1064 nm separieren lassen.

Die Leistung des 1020-nm-Lichtes im Gitter ist während des Experimentzyklus konstant bei etwa  $50 \mu\text{W}$  und damit deutlich geringer als die des 1064-nm-Lichtes, welche typischerweise bei 100 mW liegt. Der Beitrag des 1020-nm-Lichtes zum optischen Dipolpotenzial ist damit vernachlässigbar, dieses Licht wird ausschließlich für die Stabilisierung von  $\vartheta$  verwendet.

Wie beim Gitterlicht mit der Wellenlänge 1064 nm, interferiert das retrofletierte 1020-nm-Licht beider Äste am Strahlteilerplättchen. Um das Interferometersignal dieses Lichts zum Regeln der Zeitphasendifferenz verwenden zu können, muss das Licht vom Gitterlicht getrennt werden. Hierfür werden dichroitische Spiegel und optische Filter verwendet. Nach dem Trennen der Lichtanteile erhält man für jede Wellenlänge ein separates Interferometersignal, welches mit einer Fotodiode gemessen wird.

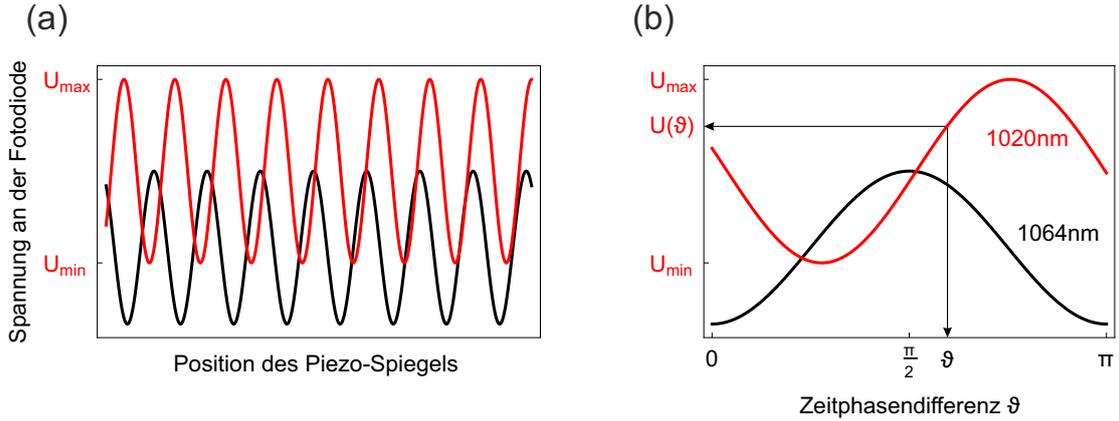
Das 1020-nm-Interferometersignal stellt die Regelgröße beim Stabilisieren der Zeitphasendifferenz dar. Beim Durchstimmen des Piezoaktors – der Umlenkspiegel wird hierbei vor- und zurückgefahren – sind im Fotodiodensignal des 1020-nm-Interferometers mehrere Interferenzmaxima und -minima zu erkennen. Beim Einstellen der Zeitphasenregelung betrachtet man das 1020-nm- und das 1064-nm-Fotodiodensignal gleichzeitig auf einem Oszilloskop. Hierbei ergibt sich ein ähnliches Bild wie in Abbildung 3.7(a). Das 1064-nm-Signal wird nicht direkt zum Stabilisieren verwendet, dient jedoch dem Finden der richtigen Regelflanke des 1020-nm-Signals. Innerhalb eines Experimentzyklus wird die Zeitphasendifferenz häufig um  $\pi/2$  herum variiert. In dem Fall ist es hilfreich, diejenige Flanke zu verwenden, deren Mitte ungefähr dem Zeitphasenwert  $\vartheta = \pi/2$  entspricht.

Die Regelung der Zeitphasendifferenz erfolgt über einen PI-Regler, auf dessen Eingang das Fotodiodensignal des 1020-nm-Interferometers gegeben wird. Der Regel-Ausgang ist mit einem Hochspannungsverstärker verbunden. Um Resonanzfrequenzen des Piezoaktors zu unterdrücken, bei denen dieser unkontrollierte Schwingungen ausführen würde, wird der Ausgang des Hochspannungsverstärkers gefiltert [Wir13]. Das gefilterte Signal wird schließlich auf den Piezoaktor des Umlenkspiegels gegeben.

#### 3.2.4 Bestimmung der Zeitphasendifferenz aus dem Signal des Stabilisierungslichts

Wie bereits erwähnt, stellt bei der Stabilisierung der Zeitphasendifferenz das Fotodiodensignal des 1020-nm-Interferometers die Regelgröße dar. Es stellt sich die Frage, wie sich das Spannungssignal der Fotodiode in die Zeitphasendifferenz des Gitterlichts mit der Wellenlänge 1064 nm umrechnen lässt.

Die Zeitphasendifferenz ist abhängig von der Differenz des optischen Weges im x- und y-Ast. Wir betrachten dabei in beiden Gitterästen die optische Weglänge  $s_i$  ( $i = x; y$ ) vom Strahlteilerplättchen BS 1 (siehe Abbildung 3.5) bis zum re-



**Abbildung 3.7:** Interferometersignale des Gitterlichts mit der Wellenlänge 1064 nm (schwarz) und des Stabilisierungslichts mit der Wellenlänge 1020 nm (rot). (a) Aussehen der Interferometersignale des Gitterlichts und Stabilisierungslichts beim Durchstimmen der Position des auf einem Piezoaktor montierten Umlenkspiegels. (b) Zusammenhang des Spannungssignals des 1020-nm-Lichts und der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  des 1064-nm-Lichts. Es ist oft hilfreich, für die Zeitphasenregelung eine Flanke des 1020-nm-Signals zu verwenden, in deren Mitte die Zeitphasendifferenz  $\vartheta = \pi/2$  beträgt. Es sei bemerkt, dass hier das invertierte 1064-nm-Interferometersignal zu sehen ist, wie es auch beim Einstellen der Zeitphasenregelung an unserer Apparatur angezeigt wird. Eigentlich nimmt das Interferometersignal des Gitterlichts bei  $\vartheta = \pi/2$  ein Minimum an.

troreflektierenden Spiegel (M5 bzw. M7). Der Unterschied  $\Delta s = s_x - s_y$  dieser beiden optischen Weglängen bestimmt die Zeitphasendifferenz über die Relation  $\vartheta = k\Delta s = 2\pi/\lambda \Delta s$ . Die Weglängendifferenz kann über den Umlenkspiegel auf dem Piezoaktor eingestellt werden. Nach der Reflexion an den retroreflektierenden Spiegeln laufen die beiden Strahlen den Weg zum Strahlteilerplättchen zurück. Dabei ergibt sich erneut ein optischer Weglängenunterschied von  $\Delta s$ , so dass der Strahl im x-Ast erneut eine Phasendifferenz von  $\vartheta$  gegenüber dem Strahl im y-Ast erhält. Die gesamte Phasendifferenz zwischen beiden Strahlen beträgt nun also  $2\vartheta$ . Im Folgenden verwenden wir die Indizes „1064“ und „1020“, um auszudrücken, auf welche Wellenlänge sich die jeweilige Größe bezieht.

Wir betrachten zunächst das 1064-nm-Licht. Für die Intensität der beiden am Strahlteilerplättchen überlagerten und miteinander interferierenden Strahlen gilt:

$$I_{1064} \sim |E_0 e^{-i\omega t} (\varepsilon_x \cdot e^{i2\vartheta_{1064}} + \eta_y \varepsilon_y)|^2 \quad (3.4)$$

$$= |E_0|^2 (\varepsilon_x^2 + \eta_y \varepsilon_x \varepsilon_y \cdot 2 \cos(2\vartheta_{1064}) + \eta_y^2 \varepsilon_y^2) \quad (3.5)$$

$$\sim \left[ \frac{1}{2} (\varepsilon_x^2 + \eta_y^2 \varepsilon_y^2) + \eta_y \varepsilon_x \varepsilon_y \cos(2\vartheta_{1064}) \right] \quad (3.6)$$

Man kann erkennen, dass das Interferometer-Signal maximal wird für  $2\vartheta_{1064} = n \cdot 2\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), also für  $\vartheta_{1064} = n \cdot \pi$ . Das Interferometer-Signal wird minimal für  $2\vartheta_{1064} = (2n + 1) \cdot \pi$ , also für  $\vartheta_{1064} = (n + 1/2) \cdot \pi$ . Für die maximale und die

minimale Spannung des 1064-nm-Interferometers gilt nun

$$U_{\max}^{(1064)} \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_x^2 + 2\eta_y \varepsilon_x \varepsilon_y + \eta_y^2 \varepsilon_y^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \eta_y \varepsilon_y)^2 \quad (3.7)$$

$$U_{\min}^{(1064)} \sim \frac{1}{2}(\varepsilon_x^2 - 2\eta_y \varepsilon_x \varepsilon_y + \eta_y^2 \varepsilon_y^2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \eta_y \varepsilon_y)^2. \quad (3.8)$$

Die interferierenden Strahlen erzeugen in der Fotodiode eine Spannung, die proportional ist zur Intensität des Lichts. Sie lässt sich schreiben als

$$U_{1064}(\vartheta_{1064}) = \frac{U_{\max}^{(1064)} - U_{\min}^{(1064)}}{2} \cos(2\vartheta_{1064}) + \frac{U_{\max}^{(1064)} + U_{\min}^{(1064)}}{2}. \quad (3.9)$$

Nun schauen wir uns das 1020-nm-Licht an. Es gilt analog für die Fotodiodenspannung  $U_{1020}$  des 1020-nm-Interferometers:

$$U_{1020}(\vartheta_{1020}) = \frac{U_{\max}^{(1020)} - U_{\min}^{(1020)}}{2} \cos(2\vartheta_{1020}) + \frac{U_{\max}^{(1020)} + U_{\min}^{(1020)}}{2}. \quad (3.10)$$

Die Zeitphasendifferenz des Stabilisierungslichtes (1020nm) ergibt sich aus der Zeitphasendifferenz des Gitterlichtes (1064nm), indem man sie mit dem Verhältnis der Wellenlängen skaliert. Außerdem muss sie noch um einen bestimmten Offset  $\vartheta_{\text{offset}}$  verschoben werden, da der einlaufende 1020-nm-Strahl beim Aufspalten am Strahlteilerplättchen eine andere Zeitphase hat als der 1064-nm-Strahl:

$$2\vartheta_{1020} = 2\vartheta_{1064} \cdot \frac{\lambda_{1064}}{\lambda_{1020}} + \vartheta_{\text{offset}} \quad (3.11)$$

Wenn man dies in Gleichung 3.10 einsetzt, ergibt sich:

$$U_{1020}(\vartheta_{1064}) = \frac{U_{\max}^{(1020)} - U_{\min}^{(1020)}}{2} \cos\left(2\vartheta_{1064} \cdot \frac{\lambda_{1064}}{\lambda_{1020}} + \vartheta_{\text{offset}}\right) + \frac{U_{\max}^{(1020)} + U_{\min}^{(1020)}}{2} \quad (3.12)$$

Nach  $\vartheta_{1064}$  umgestellt erhält man:

$$\vartheta_{1064}(U_{1020}) = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{1020}}{\lambda_{1064}} \left( \arccos\left[ \frac{2U_{1020} - U_{\max}^{(1020)} - U_{\min}^{(1020)}}{U_{\max}^{(1020)} - U_{\min}^{(1020)}} \right] - \vartheta_{\text{off}} \right) \quad (3.13)$$

Wir haben einen Ausdruck hergeleitet, über den man aus der Fotodiodenspannung des interferierenden Stabilisierungslichtes die Zeitphasendifferenz des Gitterlichtes berechnen kann. Wir lassen die Indizes für die Wellenlängen im Folgenden weg, behalten dabei aber im Hinterkopf, dass sich die Spannungen auf das 1020-nm-Licht beziehen und die Zeitphasendifferenz auf das 1064-nm-Licht. Es bleibt noch die Größe  $\vartheta_{\text{offset}}$  zu bestimmen. Hierzu wird die Spannung  $U_{\frac{\pi}{2}}$  ermittelt, bei der sich die Zeitphasendifferenz  $\vartheta = \pi/2$  einstellt. Dafür macht man sich zunutze, dass das Impulsspektrum der Atome im ersten Band des Gitters sehr stark von  $\vartheta$  abhängt und man für  $\vartheta = \pi/2$  ein charakteristisches Muster erhält. Auf diese Weise lässt sich sehr präzise die Fotodiodenspannung ermitteln, bei der

eine Zeitphasendifferenz von  $\pi/2$  vorliegt. Das Verfahren wird in Abschnitt 3.3 genauer beschrieben. Es gilt für  $\vartheta_{\text{offset}}$ :

$$\vartheta_{\text{offset}} = -\frac{\lambda_{1064}}{\lambda_{1020}}\pi + \arccos\left[\frac{2U_{\frac{\pi}{2}} - U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}\right] \quad (3.14)$$

Setzt man dies in Gleichung 3.13 ein, so erhalten wir schließlich die gesuchte Abhängigkeit der Zeitphasendifferenz des Gitterlichts von der Fotodiodenspannung des 1020-nm-Interferometers:

$$\vartheta_{1064}(U) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda_{1020}}{\lambda_{1064}} \left[ \arccos\left(\frac{2U - U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}\right) - \arccos\left(\frac{2U_{\frac{\pi}{2}} - U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}\right) \right] \quad (3.15)$$

$U_{\text{max}}$ ,  $U_{\text{min}}$  und  $U_{\frac{\pi}{2}}$  können sich mit der Zeit ändern, zum Beispiel durch unerwünschte Reflexe. Deshalb werden diese Größen für jede Messreihe neu ermittelt.

Wie bereits im vorherigen Kapitel angemerkt wurde, fällt die Gittergeometrie um  $\vartheta = \pi/2$  herum symmetrisch aus, das heißt, dass die Zeitphasenwerte  $\pi/2 - \Delta\vartheta$  und  $\pi/2 + \Delta\vartheta$  die gleiche Gittergeometrie beschreiben. Diese Tatsache kann man auch so ausdrücken, dass die Zeitphasenwerte  $\vartheta$  und  $\pi - \vartheta$  für die gleiche Gittergeometrie stehen. So ist zum Beispiel die Gittergeometrie für  $\vartheta = 0,4\pi$  die gleiche wie für  $\vartheta = 0,6\pi$ . Der Unterschied bei beiden Konfigurationen ist, dass in dem einen Fall die  $\mathbb{A}$ -Gitterklasse die tieferen Töpfe bildet, im anderen Fall ist es die  $\mathbb{B}$ -Klasse.

### 3.3 Kalibrierung der Zeitphasendifferenz

Die Zeitphasendifferenz des Gitters wird kalibriert durch die Bestimmung der Spannungen  $U_{\text{max}}$ ,  $U_{\text{min}}$  und  $U_{\frac{\pi}{2}}$  in Formel 3.15.  $U_{\text{max}}$  und  $U_{\text{min}}$  lassen sich beim Durchfahren des auf dem Piezoaktor montierten Umlenkspiegels direkt ermitteln als das Maximum und das Minimum des 1020-nm-Interferometersignals. Für die Bestimmung von  $U_{\frac{\pi}{2}}$  ist es notwendig, das Impulsspektrum der Atome im ersten Band des zweidimensionalen optischen Gitters zu betrachten.

#### 3.3.1 Impulsspektrum

Impulsspektren werden mit Hilfe der *TOF*-Methode (von Englisch: *time of flight*) aufgenommen. Hierbei werden im Experiment alle Potenziale, also die Magnetfalle und das Gitterpotenzial, instantan ausgeschaltet. Der präparierte Zustand kann sich nun frei in der Zeit entwickeln. Die Wellenpakete auf den einzelnen Gitterplätzen expandieren und beginnen sich zu überlappen. Die Gitterplätze sind dabei die Ausgangspunkte von Materiewellen, die miteinander interferieren. Im Fernfeld kommt es dabei zur Ausbildung von charakteristischen Interferenzmaxima, den sogenannten *Bragg-Maxima*.

Der Zustand des Systems wird auf eine Basis von ebenen Wellen projiziert. Bloch-Funktionen zum Quasiimpuls  $\vec{q}$  bestehen aus Komponenten mit den Impulsen  $\vec{p} = \hbar\vec{q} + \hbar\vec{G}$ . Hierbei steht  $\vec{G}$  für die reziproken Gittervektoren. Atome mit dem Quasiimpuls  $\vec{q}$  werden im Impulsspektrum auf die verschiedenen Impulse  $\vec{p}$  verteilt. Der Beitrag eines Impulses  $\vec{p}$  findet sich nach einer Expansionszeit  $t$  am Ort  $\vec{r} = \vec{v} \cdot t = \vec{p} \cdot t/m$ , wobei  $m$  die Masse des  $^{87}\text{Rb}$ -Atoms ist. Bei ausreichend groß gewählter Expansionszeit, die an unserem Experiment  $t_{\text{TOF}} = 30 \text{ ms}$  beträgt, sind die Impulskomponenten deutlich voneinander getrennt.

Die Dichteverteilung des Gitterzustandes im Impulsraum ist nach [Blo08] gegeben durch

$$n(\vec{p}) = \langle \hat{\psi}^\dagger(\vec{p}) \hat{\psi}(\vec{p}) \rangle = |\tilde{w}(\vec{p})|^2 \sum_{\vec{R}, \vec{R}'} \langle \hat{b}_{\vec{R}}^\dagger \hat{b}_{\vec{R}'} \rangle e^{i\vec{p} \cdot (\vec{R} - \vec{R}')} . \quad (3.16)$$

Hierbei bezeichnen  $\vec{R}$  und  $\vec{R}'$  die Gittervektoren.  $\tilde{w}(\vec{p})$  ist die Fourier-Transformierte der Wannier-Funktion im Ortsraum (für die Wannier-Funktionen siehe Anhang C). Das Betragsquadrat von  $\tilde{w}(\vec{p})$  stellt die Einhüllende der Impulsverteilung dar. Die Korrelationsfunktion  $\langle \hat{b}_{\vec{R}}^\dagger \hat{b}_{\vec{R}'} \rangle$  beschreibt, wie die Atome miteinander interferieren. Gibt es eine feste Phasenbeziehung zwischen Atomen auf benachbarten Gitterplätzen, interferieren die Materiewellen konstruktiv miteinander und man sieht Interferenz-Maxima in Abständen, die den reziproken Gittervektoren entsprechen.

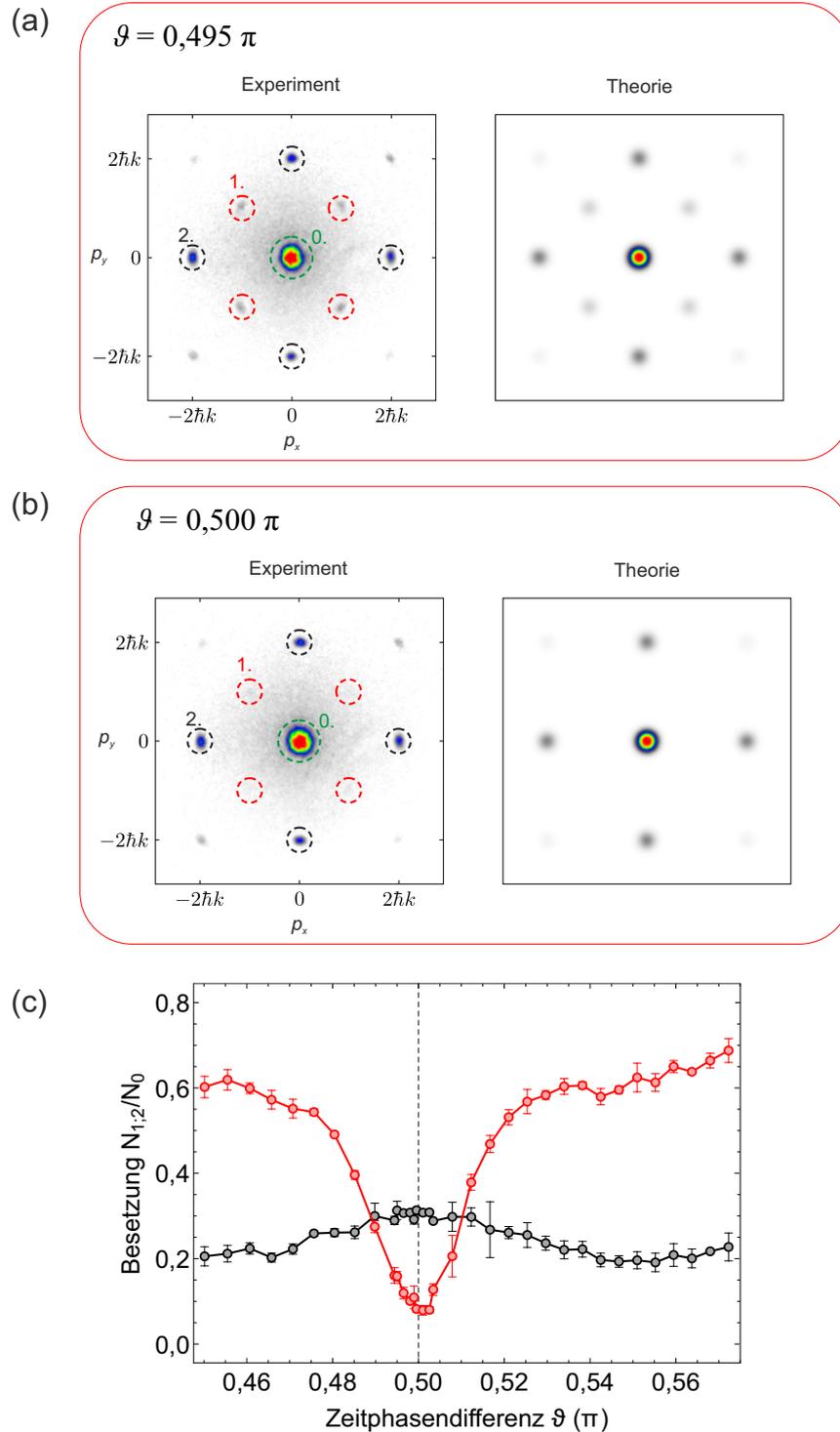
Die Breite der Bragg-Maxima ist nicht infinitesimal klein aufgrund der Endlichkeit des Systems. Sie ist umgekehrt proportional zur Anzahl der miteinander interferierenden Streuzentren, also der Gitterplätze. Berücksichtigt man eine repulsive Wechselwirkung zwischen den Atomen, werden die Bragg-Maxima weiter verbreitert.

### 3.3.2 Impulsspektrum im ersten Band bei $\vartheta = \pi/2$

Wir wollen die Atome adiabatisch bei verschiedenen Zeitphasenwerten ins optische Gitter laden. Die Atome besetzen dabei jeweils den  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes.

Die Zeitphasendifferenz  $\vartheta = \pi/2$  stellt einen besonderen Fall der Gittergeometrie dar. Hier ist die Differenz  $\Delta V$  der Potenzieltiefe der Gittertopfklassen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  gleich null. Im ersten Band ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Grundzustandes auf allen Töpfen gleich groß. Die Bloch-Funktion am  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes besteht aus Komponenten mit dem Impuls  $\vec{0}$  und den Impulsen  $\hbar\vec{G}$ , wobei  $\vec{G} = 2\hbar k(m, n)^T$  ( $m, n \in \mathbb{Z}$ ) für die reziproken Gittervektoren des  $\pi/2$ -Gitters steht. Der Abstand zwischen den Bragg-Maxima in x- und in y-Richtung beträgt  $2\hbar k$ .

Für  $\vartheta \neq \pi/2$  ist auch  $\Delta V$  von null verschieden. Beim adiabatischen Laden des Gitters ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Atome in den flacheren Gittertöpfen geringer als in den tieferen. Es treten nun zusätzliche Impulskomponenten auf. Wie wir bereits gesehen haben, ist die erste Brillouin-Zone des Gitters um  $45^\circ$  gedreht und ihre Kantenlänge um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  verkleinert gegenüber dem  $\pi/2$ -Gitter. Es ändert sich die Orientierung der reziproken Gittervektoren. Zwischen den Bragg-Maxima ergibt sich in diagonaler Richtung ein Abstand von  $\sqrt{2}\hbar k$ .



**Abbildung 3.8:** Experimentell aufgenommene und theoretisch berechnete Impulsspektren bei den Zeitphasenwerten (a)  $\vartheta = 0,495 \pi$  und (b)  $\vartheta = 0,500 \pi$  bei einer Gittertiefe von  $V_0 = 7,9 E_{\text{rec}}$ . Man sieht, dass die Bragg-Maxima 1. Ordnung, die bei  $\vartheta = 0,495 \pi$  vorhanden sind, bei  $\vartheta = 0,500 \pi$  verschwinden. (c) Besetzung der Bragg-Maxima 1. Ordnung (rot) und 2. Ordnung (schwarz). Es wird hierbei die gesamte Atomzahl in den Bragg-Maxima 1. bzw. 2. Ordnung durch die Atomzahl im zentralen Bragg-Maximum (0. Ordnung) dividiert. In (a) und (b) sind die ROIs eingezeichnet, die für die Bestimmung der Atomzahlen verwendet werden.

Die zusätzlichen Bragg-Maxima sind nur für  $\vartheta \neq \pi/2$  vorhanden. Variiert man die Zeitphasendifferenz um  $\pi/2$  herum, so kommt es zu einem resonanzartigen Verschwinden dieser Maxima bei  $\vartheta = \pi/2$ . Abbildung 3.8(a) zeigt die Impulsspektren für die Zeitphasenwerte  $\vartheta = 0,500\pi$  und  $\vartheta = 0,495\pi$ . Man erkennt deutlich, dass die rot markierten Bragg-Maxima 1. Ordnung, die bei  $\vartheta = 0,495\pi$  vorhanden sind, bei  $\vartheta = 0,500\pi$  nahezu vollständig verschwinden.

In Abbildung 3.8(b) ist die Besetzung der Bragg-Maxima 1. und 2. Ordnung des in Abhängigkeit von  $\vartheta$  dargestellt. Die Atomzahl in den Maxima wurde normiert auf die Atomzahl im zentralen Bragg-Peak mit dem Impuls  $\vec{p} = \vec{0}$ . Man kann einen starken Abfall der Besetzung der Maxima 1. Ordnung in der Umgebung von  $\vartheta = \pi/2$  erkennen. Wenn man das Impulsspektrum für verschiedene eingestellte Sollwerte der Fotodiodenspannung des 1020-nm-Interferometers aufnimmt, wird man feststellen, bei welchem dieser Werte man die Zeitphasendifferenz  $\pi/2$  erreicht. Dieser Wert ist die gesuchte Spannung  $U_{\frac{\pi}{2}}$ .

### 3.4 Lasersystem für das optische Gitter

Das für die Erzeugung des optischen Gitters verwendete Laserlicht mit der Wellenlänge  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  wird von einem hochstabilen Festkörperlaser des Typs Mephisto der Firma Innolight (jetzt zu Coherent gehörend) bereitgestellt. Er besitzt eine Ausgangsleistung von 2 W. Das zur Stabilisierung der Zeitphase dienende Licht mit der Wellenlänge 1020 nm stammt von einem selbstgebauten Diodenlaser. Das Licht beider Laser wird mit Hilfe eines dichroitischen Spiegels, der die Wellenlänge 1020 nm transmittiert und die Wellenlänge 1064 nm reflektiert, überlagert und gemeinsam in die Gitterfaser eingekoppelt.

Es steht in unserer Appratur zusätzlich ein 10-W-Faserverstärker zur Verfügung, der mit einem Teil des Mephisto-Lichts geseedet werden kann. Das Licht des Faserverstärkers wurde früher für das optische Gitter genutzt und soll in der Zukunft für die Realisierung einer gekreuzten Dipolfalle verwendet werden. Das direkt vom Mephisto ausgegebene Licht hat gegenüber dem im Faserverstärker verstärkten Licht den Vorteil, dass das Hintergrundspektrum geringer ist. Bei der Lichtverstärkung in einem Faserverstärker entsteht durch verstärkte spontane Emission (auf Englisch: *amplified spontaneous emission*, (ASE)) eine breite Hintergrundverteilung im optischen Spektrum (siehe zum Beispiel [Hip13]).

Das Mephisto-Licht kann in unserem Experiment außerdem für eine dritte Gitterachse in vertikaler Richtung verwendet werden.

### 3.5 Positionierung der Linsen im Gitteraufbau

Im Gitteraufbau befindet sich direkt vor dem 50:50-Strahlteilerplättchen, welches den aus der Gitterfaser ausgekoppelten Strahl in den x- und den y-Ast aufspaltet, eine achromatische Linse mit der Brennweite  $f_1 = 350 \text{ mm}$ . Die Linse wurde im Rahmen dieser Arbeit im Vergleich zum früheren Aufbau etwa 20 mm weiter von den Atomen entfernt positioniert. Der Grund dafür soll im Folgenden erläutert werden.

### 3.5.1 Die Ausgangssituation

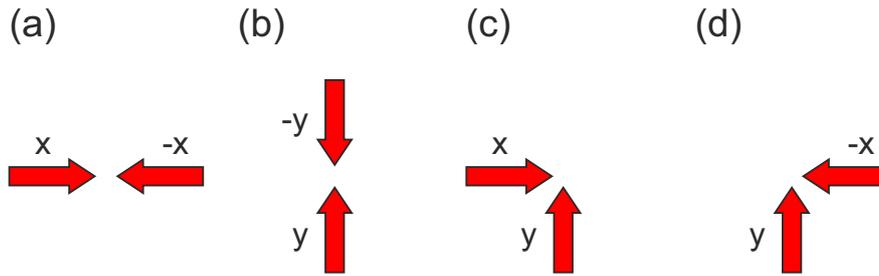
In [Wir13, Ö113, Koc16a] wurde demonstriert, dass sich die Besetzung der Zustände an den  $X_{\pm}$ -Punkten im zweiten Bloch-Band über die Energiedifferenz  $\Delta E$  zwischen den beiden Zuständen einstellen lässt (siehe auch Abschnitt 4.4.3). Bei dem in diesen Arbeiten verwendeten Aufbau liegen die Fokusse der vier im Gitter miteinander interferierenden Laserstrahlen an der Position der Atome. An jeder Grenzfläche von Luft und Glas sowie Glas und Vakuum treten Verluste in der Feldamplitude der Strahlen auf, so dass die retroreflektierten Strahlen im Vergleich zu den einlaufenden eine Abschwächung erfahren. Zur deutlichen Verringerung dieser Abschwächung wurden im früheren Aufbau Antireflexionsplättchen an den Außenseiten des Appendix angebracht.

Um die Energiedifferenz  $\Delta E$  variieren zu können, war im Strahlengang des einlaufenden Strahls des x-Astes ein  $\lambda/2$ -Plättchen platziert worden. Mit dessen Hilfe wurde die lineare Polarisation des einlaufenden Strahls um einen bestimmten Winkel aus der vertikalen Richtung herausgedreht. Vor dem retroreflektierenden Spiegel war ein  $\lambda/4$ -Plättchen positioniert worden, welches beim zweimaligen Durchlaufen ebenfalls wie ein  $\lambda/2$ -Plättchen wirkt. Dieses  $\lambda/4$ -Plättchen wurde nun so eingestellt, dass die Polarisation des zurücklaufenden x-Strahls wieder in die vertikale Richtung zeigt. Für die Erzeugung des optischen Gitterpotenzials spielt bei den interferierenden Strahlen nur der Anteil der Polarisation in vertikaler Richtung – also die Projektion des Polarisationsvektors auf den vertikalen Einheitsvektor – eine Rolle. Über die Drehung der Polarisation des einlaufenden Strahls ließ sich das Verhältnis der Feldamplituden in vertikaler Richtung von einlaufendem und zurückreflektiertem Strahl einstellen. Zusätzlich zum  $\lambda/4$ -Plättchen wurde ein  $\lambda/8$ -Plättchen eingebaut, welches sich zwischen dem  $\lambda/4$ -Plättchen und dem Retroreflektierspiegel befindet. Die Polarisation des einlaufenden Strahls erhält beim Durchlaufen der Oberflächen der optischen Elemente im Gitteraufbau einen zirkularen Anteil und würde sich ohne das  $\lambda/8$ -Plättchen nicht wieder als lineare Polarisation einstellen lassen.

### 3.5.2 Versetzen der achromatischen Linsen

Es wurde versucht, die Anisotropieparameter des Gitters so einzustellen, dass  $\Delta E = 0$  gilt und sowohl im x- als auch im y-Ast die Amplituden von einlaufendem und retroreflektiertem Strahl ausgeglichen sind. Hierfür wäre prinzipiell die Methode infrage gekommen, dass man im y-Strahl die gleiche Technik anwendet wie im x-Strahl und die Amplituden durch die Verwendung einer Kombination von Wellenplättchen ausgleicht. Dies wurde nicht umgesetzt aufgrund der folgenden Überlegung: Bei der Überlagerung von zwei einlaufenden Strahlen mit einem Anteil der Polarisation in horizontaler Richtung kommt es, wenn der Schnittwinkel der Strahlen nicht exakt  $90^\circ$  beträgt, zu einer schwachen Interferenz der beiden horizontalen Anteile. Es entsteht ein zusätzliches flaches diagonales Gitter, das dem bipartiten Gitter aufmoduliert ist.

Hinzu kommt, dass die Antireflexionsplättchen vom Appendix entfernt wurden. Der Grund hierfür war, dass Umbauarbeiten an der Apparatur stattfanden und der Einbau einer gekreuzten Dipolfalle möglich gemacht werden sollte. Das zwischen



**Abbildung 3.9:** Die bei der Gitterkalibrierung verwendeten vier eindimensionalen Gitter.

den Antireflexionsplättchen und dem Glas des Appendix verwendete Immersionsöl wurde als nicht kompatibel mit den hohen optischen Intensitäten, die mit der Dipolfalle verbunden sind, angesehen.

Es wurde daher eine andere Methode gewählt, um die Parameter  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  auf eins zu setzen: Die Linse (L1, siehe Abbildung 3.5) vor dem Strahlteiler, welche den einlaufenden Strahl auf die Atome fokussiert, wurde ungefähr 20 mm in Richtung der Gitterfaser verschoben. Der Fokus der einlaufenden x- und y-Strahlen befindet sich nun also etwa 20 mm vor der Position der Atome. Die Linsen in den hinteren Teilen der Gitterröste (L2, L3) wurden so verschoben, dass sich die Fokusse der retroreflektierten Strahlen nach wie vor an der Position der Atome befinden. Dass sich der Fokus des zurückreflektierten Strahls an der Position der Atome befindet, lässt sich daran erkennen, dass die Potenzialtiefe des zugehörigen 1D-Gitters in x- bzw. y-Richtung ihr Maximum erreicht. Durch das Versetzen der Linsen erreicht man ein Angleichen der Feldamplituden von einlaufenden und retroreflektierten Strahlen.

Die Reflexionsverluste wurden durch das Versetzen der Linse vor dem Strahlteilerplättchen überkompensiert, so dass man die zurücklaufenden Strahlen abschwächen muss, um die Amplitudenverhältnisse von reflektiertem und einlaufendem Strahl auf eins zu setzen. Das Abschwächen wird realisiert durch die Installation von jeweils einem Glasplättchen im Bereich zwischen der Linse L2 bzw. L3 und dem retroreflektierenden Spiegel in den beiden Gitterrösten. Das Glasplättchen wird zweimal durchlaufen und reflektiert einen kleinen Teil des Lichtes aus dem Hauptstrahl heraus. Durch Drehen des Plättchens lassen sich der Einfallswinkel des Strahls auf die Glasfläche und damit die Stärke der Abschwächung einstellen.

## 3.6 Bestimmung der Gittertiefe und der Anisotropieparameter

### 3.6.1 Potenzialtiefen der 1D-Gitter

Durch Blockieren des Strahlwegs von bestimmten Strahlen im zweidimensionalen Gitter lassen sich verschiedene eindimensionale optische Gitter erzeugen. Blockiert man zum Beispiel den y-Ast des Gitters, erhält man ein 1D-Gitter in x-

Richtung. Für die Bestimmung der Gittertiefe  $V_0$  und der Anisotropieparameter  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\eta_y$  betrachten wir die folgenden vier Überlagerungen von Strahlenpaaren zu eindimensionalen Gittern (siehe Abbildung 3.9):

- (a) einlaufender und retroreflektierter Strahl in x-Richtung: 1D-Gitter in x-Richtung
- (b) einlaufender und retroreflektierter Strahl in y-Richtung: 1D-Gitter in y-Richtung
- (c) einlaufende Strahlen in x- und in y-Richtung: diagonales x-y-Gitter
- (d) zurückreflektierter Strahl in x-Richtung und einlaufender Strahl in y-Richtung: diagonales  $(-x)$ -y-Gitter

Für die Erzeugung des  $(-x)y$ -Gitters wird die lineare Polarisation des einlaufenden Strahls in x-Richtung mit Hilfe des  $\lambda/2$ -Plättchens parallel zur Gitterebene eingestellt und die Polarisation des zurücklaufenden Strahls mit Hilfe der Kombination aus  $\lambda/4$ - und  $\lambda/8$ -Plättchen in die vertikale Richtung gedreht (siehe Abbildung 3.5). Zum Einstellen der vertikalen Polarisation wird mit Hilfe eines D-förmigen Spiegels ein kleiner Teil des Lichts aus dem zurücklaufenden Strahl herausreflektiert und dieser mit einem polarisierenden Strahlteiler untersucht. Man erhält ein Gitter, in welchem der retroreflektierte Strahl des x-Astes mit dem einlaufenden Strahl des y-Astes interferiert. Die beiden Strahlen interferieren nicht mit dem einlaufenden Strahl des x-Astes.

Ziel ist es nun, die Abhängigkeit der Gittertiefen der vier eindimensionalen Gitter von der optischen Gitterleistung zu bestimmen. Daraus lassen sich die Abhängigkeit der Gittertiefe  $V_0$  des zweidimensionalen Gitters von der Gitterleistung sowie die Anisotropieparameter  $\eta_y$ ,  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  ermitteln. Es gilt für die Potenziale der vier eindimensionalen Gitter:

$$V_x(x) = \frac{V_0}{4} |e^{ikx} + \varepsilon_x e^{-ikx}|^2 \quad (3.17)$$

$$= -V_0 \varepsilon_x \cos^2 kx + \text{konst.} \quad (3.18)$$

$$V_y(y) = -\frac{V_0}{4} |\eta_y (e^{iky} + \varepsilon_y e^{-iky})|^2 \quad (3.19)$$

$$= -V_0 \eta_y^2 \varepsilon_y \cos^2 ky + \text{konst.} \quad (3.20)$$

$$V_{xy}(x, y) = -\frac{V_0}{4} |e^{ikx} + \eta_y e^{iky}|^2 \quad (3.21)$$

$$= -V_0 \eta_y \cos^2 \left[ \frac{k}{2}(x - y) \right] + \text{konst.} \quad (3.22)$$

$$V_{(-x)y}(x, y) = -\frac{V_0}{4} |\varepsilon_x e^{-ikx} + \eta_y e^{iky}|^2 \quad (3.23)$$

$$= -V_0 \eta_y \varepsilon_x \cos^2 \left[ \frac{k}{2}(x + y) \right] + \text{konst.} \quad (3.24)$$

Für die Gittertiefen der eindimensionalen Gitter gilt:

$$V_{x,0} = V_0 \varepsilon_x \quad (3.25)$$

$$V_{y,0} = V_0 \eta_y^2 \varepsilon_y \quad (3.26)$$

$$V_{xy,0} = V_0 \eta_y \quad (3.27)$$

$$V_{(-x)y,0} = V_0 \eta_y \varepsilon_x \quad (3.28)$$

Daraus lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\varepsilon_x = \frac{V_{(-x)y,0}}{V_{xy,0}} \quad (3.29)$$

$$\eta_y = \frac{V_{(-x)y,0}}{V_{x,0}} \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_y = \frac{V_{y,0}}{V_{xy,0}} \cdot \frac{1}{\eta_y} = \frac{V_{x,0} \cdot V_{y,0}}{V_{xy,0} \cdot V_{(-x)y,0}} \quad (3.31)$$

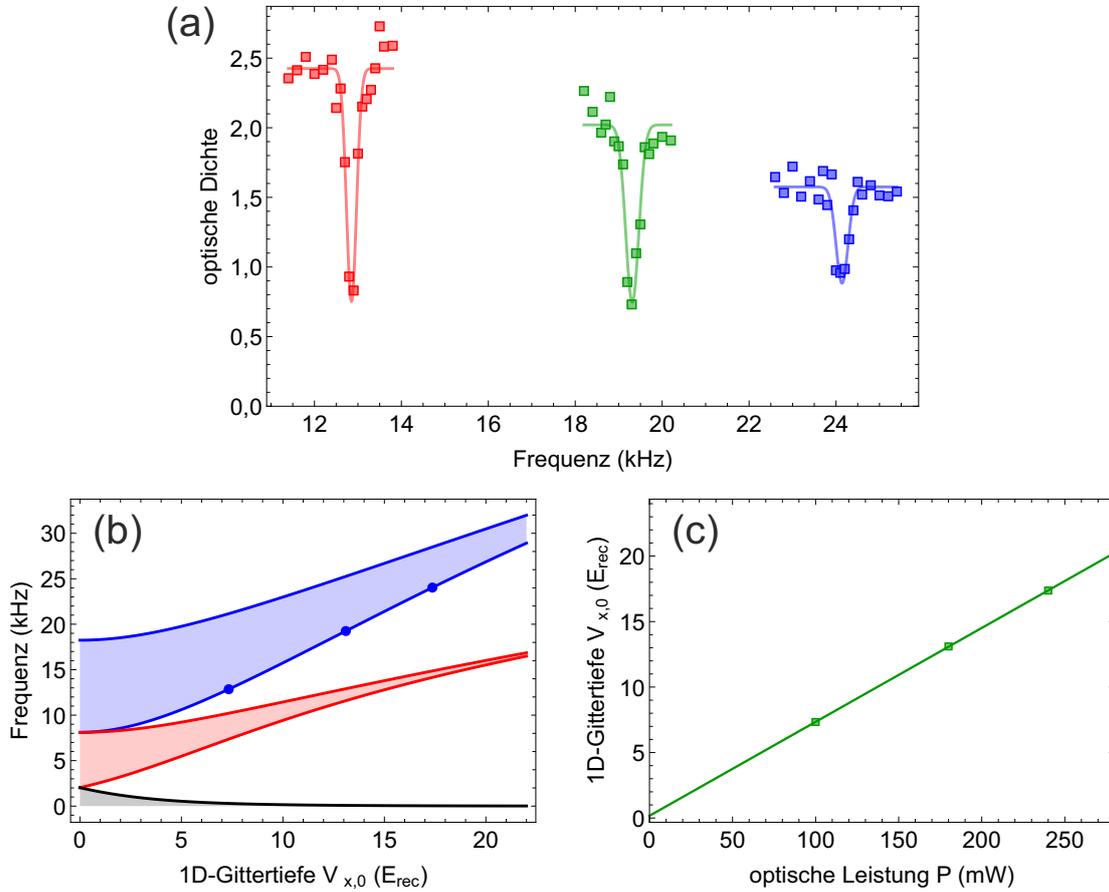
$$V_0 = \frac{V_{x,0}}{\varepsilon_x} = \frac{V_{x,0} \cdot V_{xy,0}}{V_{(-x)y,0}} \quad (3.32)$$

### 3.6.2 Gitterspektroskopie

Um die Gittertiefen der 1D-Bänder zu ermitteln, wird die Leistung des aus der Gitterfaser ausgekoppelten Lichts mit Hilfe eines AOMs zeitlich moduliert [Hec02]. Dadurch werden Atome vom ersten in das dritte Band angeregt, was man als einen Raman-Prozess verstehen kann. Durch die Amplitudenmodulation mit der Frequenz  $\omega$  entstehen im Licht sogenannte Seitenbänder mit den Frequenzen  $\omega_0 + \omega$  und  $\omega_0 - \omega$ , wobei  $\omega_0$  die Trägerfrequenz ist. Die Beat-Signale der Seitenbänder mit dem Träger-Signal sind hierbei in Phase.

Die Modulation der Gitterleistung wird für 40 ms durchgeführt und die Stärke der Modulation liegt im Bereich von weniger als einem Prozent. Zum Übergang vom ersten ins dritte Band kommt es, wenn die Modulationsfrequenz der Energiedifferenz zwischen den Bändern entspricht. Die Atome werden dabei vom  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes zum  $\Gamma$ -Punkt des dritten Bandes transferiert. Beim Bandübergang nimmt der kohärente Anteil im Impulsspektrum ab und es kommt zu einem resonanzartigen Abfall der optischen Dichte der Impulskomponente  $\vec{p} = \vec{0}$ . Die Übergangsfrequenz lässt sich durch den Fit des Spektrums mit einer Gauß-Funktion bestimmen. Wir ermitteln die Übergangsfrequenzen für verschiedene Werte der Gitterleistung  $P$ . In Abbildung 3.10(a) sind für das 1D-Gitter in y-Richtung die Resonanzen für drei verschiedene Gitterleistungen dargestellt.

Mit Hilfe einer 1D-Bandstrukturrechnung lässt sich die theoretische Frequenz des Übergangs vom ersten ins dritte Band in Abhängigkeit von der Gittertiefe bestimmen. Auf diese Weise erhält man aus der gemessenen Übergangsfrequenz die 1D-Gittertiefe bei der verwendeten optischen Leistung. Abbildung 3.10(b)



**Abbildung 3.10:** (a) Spektrum der Anregung vom ersten in das dritte Bloch-Band für das 1D-Gitter in x-Richtung bei einer Modulation der Gitterleistung. Die Atome befinden sich anfangs am  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes. Gezeigt wird die optische Dichte des zentralen Bragg-Maximums beim Durchstimmen der Modulationsfrequenz. Das Spektrum wurde für eine Lichtleistung von 100 mW (rot), 180 mW (grün) und 240 mW (blau) aufgenommen. Die Lichtleistung ist hierbei die gesamte aus der Gitterfaser ausgekoppelte Leistung des Gitterlichts. (b) Energiebereich der ersten drei Bänder im eindimensionalen Gitter in Abhängigkeit von der Gittertiefe. Mit Hilfe einer Bandstrukturrechnung lassen sich die theoretischen Übergangsfrequenzen in Abhängigkeit von der 1D-Gittertiefe bestimmen. Mit diesem Zusammenhang lässt sich umgekehrt aus den gemessenen Übergangsfrequenzen jeweils die 1D-Gittertiefe ermitteln. Die Wertepaare aus berechneter Gittertiefe und gemessener Übergangsfrequenz sind für das 1D-Gitter in x-Richtung eingezeichnet. (c) Auftragung der drei Wertepaare aus eingestellter Gitterleistung und der durch die Amplitudenmodulation bestimmten Gittertiefe  $V_{x,0}$  des eindimensionalen Gitters in x-Richtung. Die durchgezogene Linie stellt einen linearen Fit durch die drei Punkte dar.

zeigt den theoretisch berechneten Energiebereich der ersten drei Bänder mit den eingezeichneten Wertepaaren aus gemessener Resonanzfrequenz und zugeordneter Gittertiefe. Wenn man schließlich den bei den Messungen verwendeten optischen Leistungen die zugehörigen Gittertiefen zuordnet und die Wertepaare plottet, erhält man das Diagramm in Abbildung 3.10(c). Ein linearer Fit liefert die gesuchte Abhängigkeit der Gittertiefe von der optischen Leistung.

Wie die Abhängigkeit der Gittertiefe von der Gitterleistung bestimmt wird, wurde hier exemplarisch für das 1D-Gitter in x-Richtung demonstriert. Für die anderen drei 1D-Gitter ist analog vorzugehen. Aus den Gittertiefen lassen sich dann mit den Gleichungen 3.32 die 2D-Gittertiefe  $V_0$  und die Anisotropieparameter berechnen.



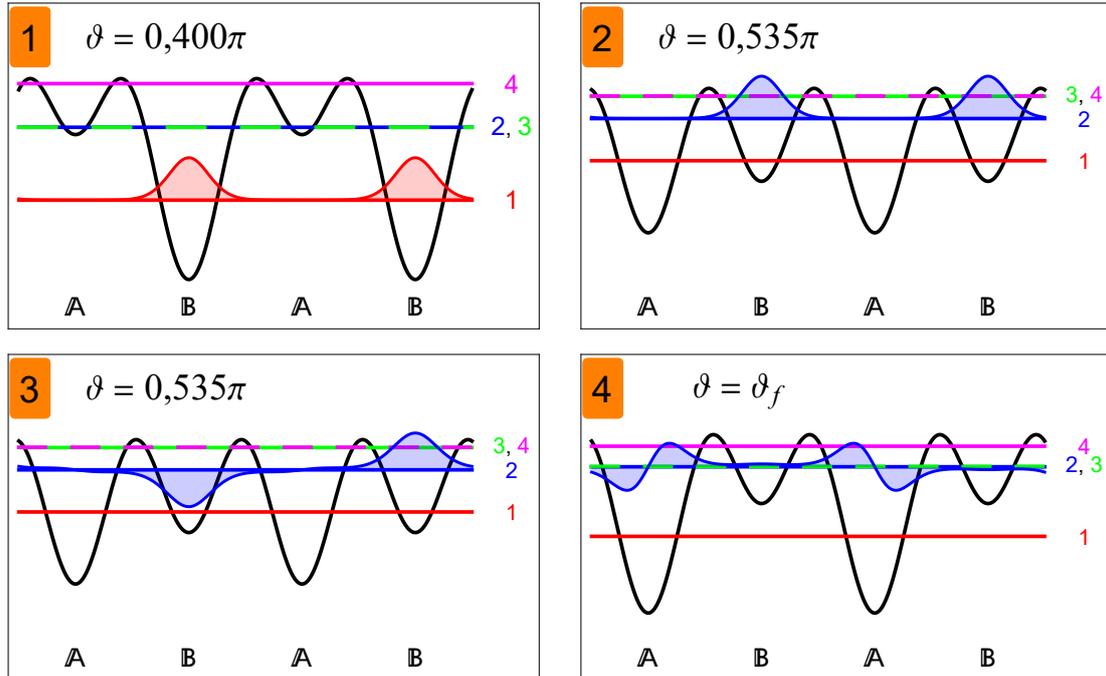
# 4 Anregung in höhere Bänder des Gitters

Die Besonderheit unseres bipartiten optischen Gitter besteht darin, dass es mit ihm auf relativ einfache Weise möglich ist, Atome in höhere Bänder anzuregen, wie bereits in [Wir13, Ö113] demonstriert wurde. Die Atome werden dabei zu Beginn in die tiefere Klasse von Gittertöpfen geladen und anschließend wie in einem Fahrstuhl in die Nähe von lokalen Zuständen der anderen Klasse von Gittertöpfen gefahren. Wir stellen zunächst am Beispiel des zweiten Bandes dar, wie der Anregungsmechanismus im Detail funktioniert. Zudem wird das Schema für eine Anregung in die Bänder vier und sieben vorgestellt. Wir beschreiben, welcher Zustand sich im zweiten Band nach einer Kondensation der Atome an den Bandminima einstellt, worüber in [Wir11, Ö12] berichtet wurde. Es wird schließlich ein Versuch vorgestellt, in dem nach einem Quench der Zeitphasendifferenz eine Oszillation zwischen den Zuständen verschiedener Bänder beobachtet werden kann.

## 4.1 Anregung in das zweite Bloch-Band

Das Schema der Anregung von Atomen in das zweite Band ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Zu Beginn des Experimentzyklus werden die Atome bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,4\pi$  adiabatisch in das erste Band des Gitters geladen. Die Gittertiefe beträgt nach dem Laden ins Gitter  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ . Wie in Kapitel 3 beschrieben, wird die Zeitphasendifferenz über die Position des auf einem Piezoaktor montierten Umlenkspiegels im y-Ast eingestellt. Die Regelgröße ist dabei das Michelson-Interferometer-Signal des 1020-nm-Stabilisierungslichtes. Für  $\vartheta \neq \pi/2$  besteht das Gitter aus zwei Klassen von Gittertöpfen mit unterschiedlicher Potenzieltiefe. Wir bezeichnen die bei  $\vartheta = 0,4\pi$  tieferen Gittertöpfe mit  $\mathbb{B}$  und die flacheren mit  $\mathbb{A}$ . Bei der gewählten Zeitphasendifferenz und Gittertiefe befinden sich die Atome ausschließlich in den tieferen Gittertöpfen  $\mathbb{B}$  (siehe auch Abschnitt 2.9). Hier besetzen sie die lokalen  $1s$ -Orbitale (zur Benennung der lokalen Zustände in der Näherung eines Gittertopfes als zweidimensionaler harmonischer Oszillator siehe Anhang B). Es besteht bei den zu diesem Zeitpunkt eingestellten Gitterparametern keine feste Phasenbeziehung zwischen benachbarten Gitterplätzen, die Atome zeigen keine Kohärenz. Dies ist energetisch vorteilhaft im Hinblick auf den zu präparierenden Zustand.

Nun wird die Zeitphasendifferenz innerhalb von 0,3 ms mit Hilfe einer kubischen, glatten Funktion zum Wert  $\vartheta = 0,535\pi$  gerammt (2). Die Atome werden dabei in den lokalen  $1s$ -Orbitalen der  $\mathbb{B}$ -Töpfe energetisch nach oben gefahren, während sich die lokalen  $1s$ -Orbitale der  $\mathbb{A}$ -Töpfe energetisch nach unten bewegen. Die Rampe wird deshalb so schnell durchgeführt, damit die Atome nicht von den  $\mathbb{B}$ -

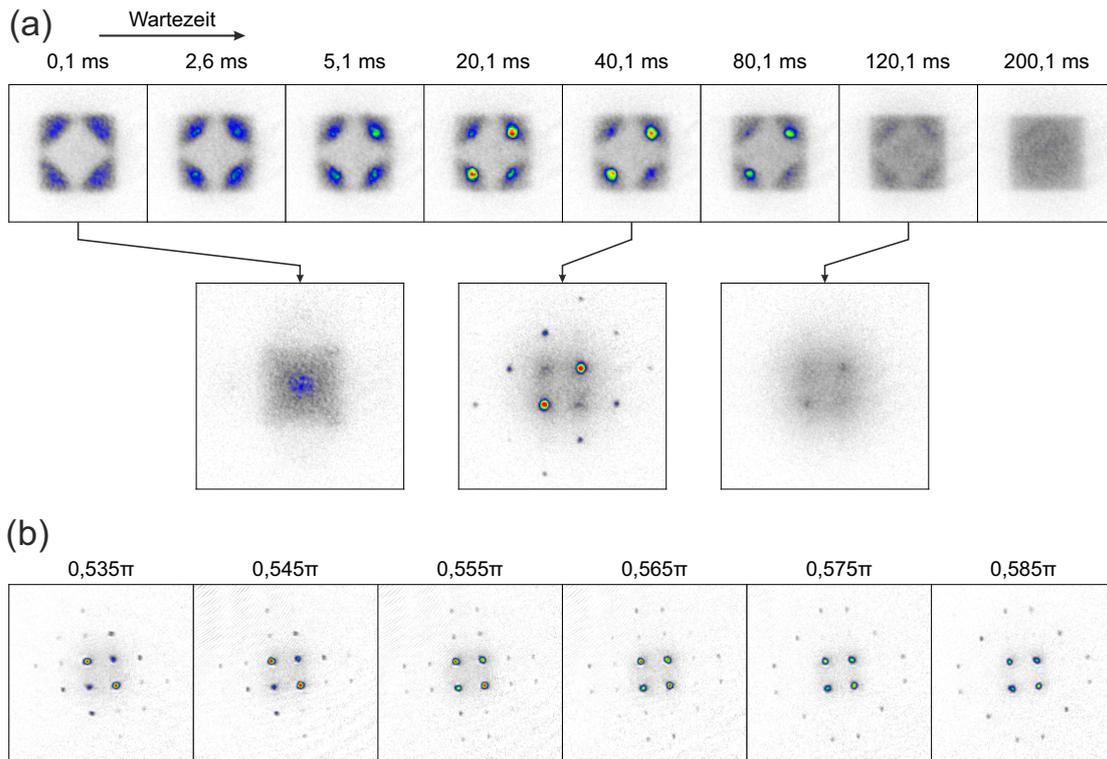


**Abbildung 4.1:** Schema der Anregung von Atomen in das zweite Bloch-Band: (1) Die Atome werden adiabatisch bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,4\pi$  in das optische Gitter geladen. Die Gittertiefe beträgt  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ . Die Atome besetzen ausschließlich die B-Gittertöpfe. Es liegt keine feste Phasenbeziehung zwischen ihnen vor. (2) Die Zeitphasendifferenz wird nichtadiabatisch zu  $\vartheta = 0,535\pi$  gerammt, die Atome bleiben dabei in den 1s-Orbitalen der B-Gittertöpfe. (3) Die Atome thermalisieren und kondensieren an den X-Punkten des zweiten Bloch-Bandes, es bildet sich eine feste Phasenbeziehung der Atome im Gitter aus. (4) Die Zeitphasendifferenz kann optional adiabatisch zu einem finalen Wert  $\vartheta \in [0,535\pi; 0,595\pi]$  gefahren werden. Dabei wird die Besetzung der 2p-Orbitale in den Gittertöpfen der Klasse A erhöht.

in die A-Töpfe tunneln, wenn beide 1s-Orbitale sich kreuzen. Die nach unten gewanderten 1s-Orbitale der A-Töpfe bilden das erste Bloch-Band, und die nach oben gewanderten 1s-Orbitale der B-Töpfe, in welchen sich die Atome befinden, das zweite Bloch-Band. Die Atome, die sich vorher im ersten Band befanden, wurden also in das zweite Band des Gitters angeregt.

Zu Beginn besetzen die Atome das zweite Band homogen, wie man in Abbildung 4.2(a) sehen kann. Durch Kollisionen rethermalisieren die Atome und der Großteil von ihnen kondensiert an den Minima des zweiten Bandes, welche sich an den X-Punkten befinden. Je nachdem, wie groß die Energiedifferenz zwischen den X-Punkten ist, wird entweder der  $X_+$ -Punkt, der  $X_-$ -Punkt oder eine Superposition beider Punkte besetzt. Bei der hier dargestellten Kondensation waren die Gitterparameter so eingestellt, dass die Bandenergie am  $X_+$ -Punkt geringer als am  $X_-$ -Punkt ist. Die Atome kondensieren daher an Ersterem.

Bei der Kondensation findet eine Umverteilung der durch die Anregung in das System eingebrachten Energie statt. Es wird Energie in die z-Richtung dissipiert, in der nur ein geringer Einschluss im Gitter vorliegt. Längs dieser Raumrichtung führt die dissipierte Energie zu Phasenfluktuationen innerhalb der röhrenförmigen



**Abbildung 4.2:** (a) Band-Mapping-Bilder (oben) und Impulsspektren (unten) der Kondensation und des Zerfalls der Atome im zweiten Band. (b) Impulsspektrum nach der letzten adiabatischen Rampe für verschiedene Zielwerte der Zeitphase. Für jeden Zeitphasenwert wurde über drei Realisierungen gemittelt.

Kondensate auf den einzelnen Gitterplätzen.

An den  $X$ -Punkten setzt sich die entsprechende Bloch-Funktion aus den  $1s$ -Orbitalen auf den flachen Gittertöpfen  $\mathbb{B}$  und den  $2p$ -Orbitalen auf den tiefen Gittertöpfen  $\mathbb{A}$  zusammen. Es stellt sich eine langreichweitige feste Phasenbeziehung zwischen den Gitterplätzen ein. Zwischen benachbarten Gittertöpfen der gleichen Klasse ändert sich die Phase dabei um  $\pi$ . Die Atome besetzen den energetisch niedrigsten Zustand und bilden ein metastabiles Kondensat im zweiten Band (3).

Durch ein weiteres, langsames Erhöhen der Zeitphasendifferenz innerhalb von 5 ms zu Werten  $\vartheta \in [0,535\pi; 0,595\pi]$  lässt sich gezielt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Atome in den  $p$ -Orbitalen der tiefen Gittertöpfe erhöhen. Diese Rampe ist adiabatisch, die Atome bleiben also im zweiten Band des Gitters (4). In dem Bereich, in dem es zu einer Kreuzung der lokalen Zustände der harmonischen Näherung der Gittertöpfe kommt, nehmen die Bandbreite und die Tunnelkopplung zu benachbarten Gittertöpfen stark zu. Aus Abbildung 4.2(b) ist ersichtlich, dass im Impulsspektrum der Anteil höherer Beugungsordnungen zunimmt. Der Grund hierfür liegt darin, dass beim Erhöhen der Zeitphasendifferenz die Tiefe der  $\mathbb{A}$ -Gittertöpfe zunimmt. Dadurch wird die Fourier-Transformierte  $\tilde{w}(\vec{p})$  in Gleichung 3.16 breiter. Im Unterschied zu den in (a) gezeigten Aufnahmen sind die Anisotropieparameter des Gitters so eingestellt, dass beide  $X$ -Punkte signifikant besetzt werden.

Eine wichtige Voraussetzung dafür, die Kondensation von Atomen in einem

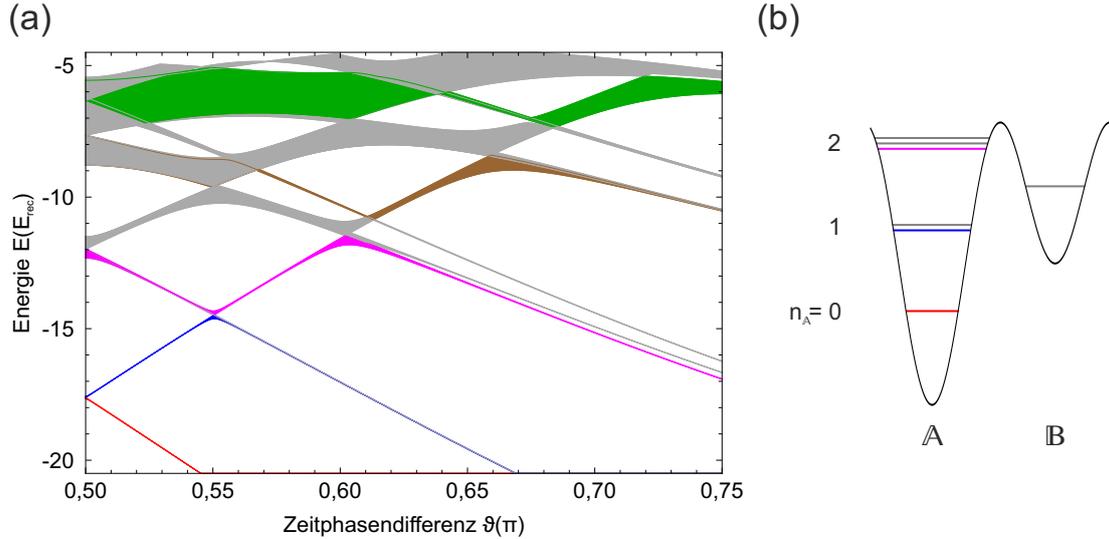
angeregten Band beobachten zu können, ist, dass das Thermalisieren auf einer kleineren Zeitskala stattfindet als Relaxationsprozesse, durch die Atome in andere Bänder zerfallen. Zum Relaxieren der Atome vom zweiten in andere Bänder kommt es vor allem durch zwei Prozesse: Zum einen finden Zweikörperstöße von Atomen im zweiten Band statt, bei denen ein Atom Energie verliert und in das erste Band fällt. Der Stoßpartner nimmt die abgegebene Energie auf und gelangt dadurch in ein höheres Band. Ein Teil der Energie kann auch in die  $z$ -Richtung dissipiert werden. Zum anderen gibt es Zweikörperstöße, bei denen beide Atome in den Grundzustand fallen, wobei die Energiedifferenz vollständig in die  $z$ -Richtung abgegeben wird.

Die Lebensdauer der Atome im zweiten Band hängt stark von der Zeitphasendifferenz des Gitters ab. Der Grund für die Wahl von  $0,535\pi$  als Zeitphasenwert für die Kondensation besteht darin, dass hier die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Atome in den lokalen  $p$ -Orbitalen der tiefen Gittertöpfe sehr gering ist. Die Bloch-Funktionen der  $X$ -Punkte bestehen also fast ausschließlich aus den lokalen  $1s$ -Orbitalen in den flachen Gittertöpfen. Dadurch befinden sich die Atome lokal im Grundzustand und können nicht in das erste Band zerfallen, welches fast ausschließlich Anteile in den tiefen Gittertöpfen besitzt. Bei  $\vartheta = 0,535\pi$  ist die Lebensdauer im zweiten Band maximal. Sie nimmt ab, wenn man den Zielwert der Zeitphasendifferenz nach der adiabatischen Rampe erhöht. Der Grund dafür ist, dass sich die Besetzung der  $2p$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen erhöht, wodurch das Überlappintegral der Bloch-Funktionen am  $X$ -Punkt der Bänder eins und zwei zunimmt. Es kommt zu einem verstärkten Zerfall.

## 4.2 Adressierbare Bänder

Abbildung 4.3(a) zeigt den Verlauf der Bänder bei einer Erhöhung der Zeitphasendifferenz, ausgehend von  $\vartheta = \pi/2$ . Die Gittertiefe  $V_0$  bleibt dabei konstant. Die bei einer Erhöhung von  $\vartheta$  aufsteigenden Bänder lassen sich den lokalen Zuständen des Gittertopfes  $\mathbb{A}$  zuordnen, die abfallende Bänder denen des Gittertopfes  $\mathbb{B}$ . Man kann dabei erkennen, dass die Bänder gruppiert auftreten. Dies sieht man besonders deutlich ab den Punkten, an denen das aufsteigende  $1s$ -Orbital des Gittertopfes  $\mathbb{B}$  abfallende Zustände des Gittertopfes  $\mathbb{A}$  gekreuzt hat und sich wieder von diesen entfernt. Die absteigenden Bänder ähneln immer mehr den Zuständen eines lokalen harmonischen Oszillators und werden relativ schmal mit keinem oder einem nur geringen energetischen Abstand. Die Anzahl der Bänder in solch einer Gruppe ist gleich der Entartung der entsprechenden Zustände des zweidimensionalen harmonischen Oszillators (siehe Abbildung 4.3(b)). Die Gruppen lassen sich durch die Hauptquantenzahl  $n_{\mathbb{A}}$  aus der Näherung des  $\mathbb{A}$ -Gittertopfes als harmonischer Oszillator benennen und bestehen aus  $n_{\mathbb{A}} + 1$  Zuständen.

Im bipartiten quadratischen Gitter sind die Bloch-Funktionen aus Orbitalen aufgebaut, die den Eigenzuständen des harmonischen Oszillators in Polarkoordinaten ähneln. Wie in Anhang B beschrieben wird, sind die Zustände mit der Quantenzahl  $n$ , die das Energieniveau angibt,  $(n + 1)$ -fach entartet. Die einzelnen Gittertöpfe stellen jedoch keine perfekten isotropen harmonischen Oszillatoren dar. Sie besitzen keine kontinuierliche Rotationssymmetrie, sondern



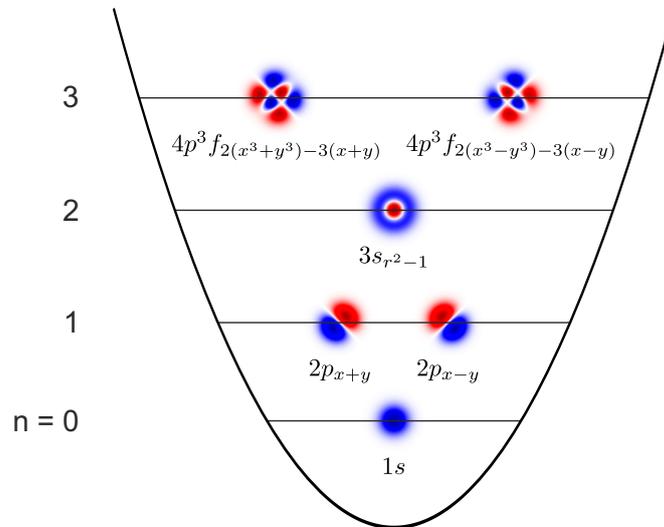
**Abbildung 4.3:** (a) Energiebereich der ersten zwölf Bänder im bipartiten optischen Gitter in Abhängigkeit von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Für die Bandstrukturrechnung wurden eine Gittertiefe von  $V_0 = 12 E_{\text{rec}}$  sowie die Parameter  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \eta_y) = (1, 1, 1)$  verwendet. Farblich eingezeichnet sind die durch nichtadiabatisches Rampen der Zeitphasendifferenz adressierbaren Bänder, wie das erste (rot), zweite (blau), vierte (magenta), siebte (braun) und elfte Band (grün). (b) Lokale Energieniveaus der Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  im vereinfachten Bild, dass man die Gittertöpfe näherungsweise als harmonische Oszillatoren betrachtet. Zu einer Gruppe im Gittertopf  $\mathbb{A}$  mit der Hauptquantenzahl  $n_{\mathbb{A}}$  gehören  $n_{\mathbb{A}} + 1$  Zustände. Die den adressierbaren Bändern entsprechenden lokalen Oszillatorniveaus im  $\mathbb{A}$ -Topf sind ebenfalls farblich markiert.

nur eine diskrete  $D_4$ -Symmetrie, weshalb der Hamilton-Operator  $\hat{H}$  und der Drehimpulsoperator  $\hat{L}_z$  nicht kommutieren. Die orbitalen Zustände sind maximal zweifach entartet [Wir13].

Betrachtet man den harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten, so sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators durch die Quantenzahlen  $(n_x, n_y)$  bestimmt, welche für die Anzahl der Quanten in x- und y-Richtung stehen. Durch die Brechung der kontinuierlichen Rotationssymmetrie wird die  $(n_x + n_y + 1)$ -fache Entartung der Zustände aufgehoben. Es können nur noch Zustände mit vertauschten Quantenzahlen,  $(n_x, n_y)$  und  $(n_y, n_x)$ , die gleiche Energie besitzen. Innerhalb einer Gruppe mit festem  $n \equiv n_x + n_y$  besitzt derjenige Zustand die geringste Energie, bei dem  $|n_x - n_y|$  maximal wird.

Es stellt sich heraus, dass die adressierbaren Bänder in unserem System diejenigen sind, die dem untersten Zustand einer Gruppe von lokalen Zuständen im Gittertopf  $\mathbb{A}$  entsprechen. So lassen sich in unserem Gitter gezielt das zweite, vierte, siebte und einige weitere höhere Bänder besetzen. Andere Bänder wie das dritte, fünfte und sechste lassen sich nicht gezielt adressieren, da sie relativ kleine Bandlücken zu den benachbarten Bändern besitzen.

Die zu den adressierbaren Bändern gehörenden Wellenfunktionen lassen sich aus den Eigenfunktionen des zweidimensionalen harmonischen Oszillators zusammensetzen. Sie sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Bänder bestehen dabei aus einer Komposition der  $1s$ -Orbitale in den flachen  $\mathbb{B}$ -Töpfen und höheren



**Abbildung 4.4:** Orbitale Anteile der Bloch-Funktionen der adressierbaren Bänder. Diese Orbitale ergeben sich aus der Überlagerung von Eigenfunktionen des zweidimensionalen harmonischen Oszillators in Polarkoordinaten. Die Quantenzahl  $n$  steht für die Gesamtenergie des Zustands. Unter den Orbitalen ist jeweils die Bezeichnung angegeben (siehe Anhang B).

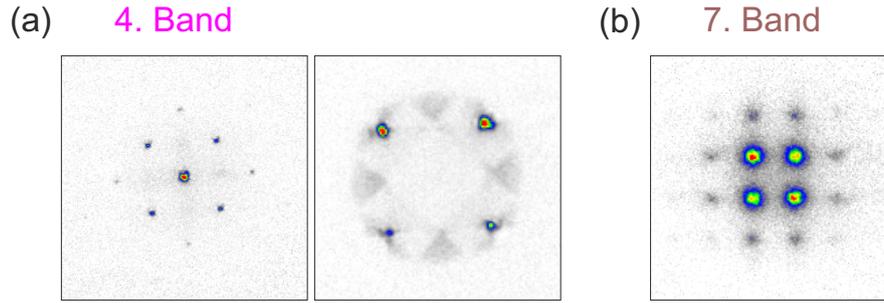
Orbitalen in den  $\mathbb{A}$ -Töpfen. Die Grundzustände der adressierbaren Bänder bilden sich entweder am  $\Gamma$ -Punkt oder an den  $X_{\pm}$ -Punkten aus.

Die Anregung zu höheren Bändern findet so statt, dass Atome zu Beginn bei einer Zeitphasendifferenz  $\vartheta < 0,5\pi$  in das Gitter geladen werden und die  $1s$ -Orbitale der tieferen  $\mathbb{B}$ -Töpfe besetzen. Durch eine schnelle, nicht adiabatische Rampe wird die Zeitphasendifferenz nun so eingestellt, dass sich das  $1s$ -Orbital energetisch in der Nähe, aber unterhalb einer Gruppe von lokalen Zuständen des Topfes  $\mathbb{A}$  befindet. Die Atome bevölkern dann ein Band, welches hauptsächlich von den  $1s$ -Orbitalen der  $\mathbb{B}$ -Töpfe gebildet wird. Aufgrund der geringen Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf den nun tieferen Gittertöpfen  $\mathbb{A}$  ist die Lebensdauer relativ groß und die Atome können zu einem metastabilen Zustand in dem Band kondensieren. Erhöht man nun adiabatisch die Zeitphasendifferenz, steigt die Besetzung in den Töpfen  $\mathbb{A}$  an und die Lebensdauer nimmt ab.

### 4.3 Anregung in das vierte und siebte Band

Um Atome vom ersten Band in höhere Bänder als das zweite anzuregen, wurde die Anregungssequenz dahingehend abgewandelt, dass nun eine zweigeteilte Rampe der Zeitphasendifferenz stattfindet und sich außerdem die Gittertiefe während der Sequenz ändert.

Zu Beginn werden die Atome bei  $\vartheta = 0,4\pi$  adiabatisch innerhalb von 160 ms in ein tiefes Gitter geladen. Durch die größere Potenzieltiefe wird bei der Rampe der Zeitphasendifferenz das Tunneln auf die gekreuzten Orbitale verhindert. Die Zeitphasenrampe findet in zwei Teilen statt, einem schnellen und einem langsamen. Beim ersten Teil  $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_2$  geht es darum, das  $1s$ -Orbital der  $\mathbb{B}$ -Töpfe, auf wel-



**Abbildung 4.5:** (a) Impulsspektrum und Band-Mapping-Abbildung der Atome im vierten Band. (b) Impulsspektrum der Atome im siebten Band.

chen sich die Atome befinden, energetisch zwischen zwei benachbarten Gruppen lokaler Zustände der  $\mathbb{A}$ -Töpfe zu positionieren. Für die Anregung ins vierte Band bringt man das  $1s$ -Orbital zwischen die beiden Gruppen lokaler Zustände mit den Energie-Quantenzahlen  $n_{\mathbb{A}} = 1$  und  $n_{\mathbb{A}} = 2$ . Für die Anregung ins siebte Band fährt man das  $1s$ -Orbital zwischen die Gruppen lokaler Zustände mit  $n_{\mathbb{A}} = 2$  und  $n_{\mathbb{A}} = 3$ . Die Gittertiefe wird während der ersten Rampe konstant gehalten. Anschließend wird die Zeitphasendifferenz in einer langsameren Rampe zum finalen Wert  $\vartheta_3$  erhöht, so dass das  $1s$ -Orbital energetisch näher an die über ihnen liegende Gruppe lokaler Zustände der Töpfe  $\mathbb{A}$  heranrückt. Zeitgleich wird die Gittertiefe abgesenkt, was zu einer Verstärkung von Tunnelprozessen führt. Man wartet nun eine bestimmte Zeit, damit die Atome am Minimum oder den Minima des adressierten Bandes kondensieren können.

Für die Anregung in das vierte Band ergibt sich die folgende optimierte Anregungssequenz:

	schnelle Rampe	langsame Rampe	Konden- sation
Dauer	$300 \mu\text{s}$	$2 \text{ ms}$	$10,5 \text{ ms}$
Zeitphasendifferenz $\vartheta (\pi)$	$0,40 \longrightarrow$	$0,56 \longrightarrow$	$0,60$
Gittertiefe $V_0 (E_{\text{rec}})$	$16,8$	$\longrightarrow$	$9,1$

Die Optimierung der Anregung in das siebte Band liefert die Sequenz:

	erste Rampe	zweite Rampe	Konden- sation
Dauer	$500 \mu\text{s}$	$500 \mu\text{s}$	$14,5 \text{ ms}$
Zeitphasendifferenz $\vartheta (\pi)$	$0,40 \longrightarrow$	$0,59 \longrightarrow$	$0,67$
Gittertiefe $V_0 (E_{\text{rec}})$	$20,6$	$\longrightarrow$	$9,1$

Alle Rampen bei der Anregung ins vierte und siebte Band stellen kubische glatte Funktionen dar.

Im vierten Band kondensieren die Atome am  $\Gamma$ -Punkt. Impulsspektrum und Band-Mapping-Bild nach der Kondensation sind in Abbildung 4.5(a) dargestellt.

Im Impulsspektrum ist ein kreuzförmiger Hintergrund zu sehen, welcher sich durch die Akkumulation von Atomen in der Umgebung des  $M$ -Punktes erklären lässt.

Im siebten Band wird eine gleichzeitige Kondensation am  $X_+$ - und am  $X_-$ -Punkt beobachtet. Der Energieunterschied der Zustände an diesen Punkten ist um eine Größenordnung geringer als im zweiten Band, weshalb sich die Entartung der beiden Punkte im siebten Band leichter herstellen lässt. Das heißt, die Besetzungsdifferenz der  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkte im siebten Band reagiert weniger sensitiv auf eine Änderung der Anisotropieparameter  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  und  $\eta_y$  als im zweiten Band (siehe hierzu auch Abschnitt 4.4). Das Impulsspektrum im siebten Band ist in Abbildung 4.5(b) zu sehen.

Nach der Kondensation im vierten bzw. siebten Band kann die Zeitphasendifferenz, wie in Schritt (4) bei der Anregung ins zweite Band, adiabatisch erhöht werden, um die Besetzung in den Orbitalen in den tiefen Gittertöpfen zu erhöhen. Für das vierte Band wird in diesem Gittertopf das Orbital  $3s_{1-r^2}$  des zweidimensionalen harmonischen Oszillators besetzt, für das siebte Band sind es die Hybridorbitale  $4p^3 f_{2(x^3+y^3)-3(x+y)}$  und  $4p^3 f_{2(x^3-y^3)-3(x-y)}$ . Hybridorbitale ergeben sich durch die Superposition von energetisch entarteten Orbitalen des zweidimensionalen harmonischen Oszillators.

## 4.4 Grundzustand im zweiten Band

### 4.4.1 $p$ -Orbitale des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit Wechselwirkung

In diesem und den folgenden beiden Abschnitten orientieren wir uns an [Ö113]. Es wird zunächst ein vereinfachtes Modell aufgestellt, mit dem die grundlegende Physik der Wechselwirkung von Bosonen in den  $p$ -Orbitalen eines Gittertopfes untersucht wird. Dazu betrachten wir den ersten angeregten Zustand eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators, der mit zwei identischen Bosonen besetzt ist. Die Eigenzustände mit der Hauptquantenzahl  $n = 1$  haben die Form von in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ausgerichteten  $p$ -Orbitalen, wir schreiben sie im Ortsraum als  $\phi_{p_{x;y}}(\vec{r})$ . Wir verwenden eine Fock-Basis, welche die Besetzung der beiden  $p$ -Orbitale angibt,  $|\psi\rangle = |n_x, n_y\rangle$ , wobei  $N_{x;y}$  die Anzahl der Teilchen im  $p_x$ - bzw.  $p_y$ -Orbital sind. Es sind dann die drei Fock-Zustände  $|2, 0\rangle$ ,  $|1, 1\rangle$  und  $|0, 2\rangle$  möglich.

Ohne das Vorliegen einer Wechselwirkung zwischen den Teilchen sind die drei Fock-Zustände energetisch entartet. Wenn man eine Wechselwirkung in Form eines repulsiven Kontaktpotenzials annimmt, können die Bosonen innerhalb eines  $p$ -Orbitals sowie auch zwischen verschiedenen  $p$ -Orbitalen miteinander wechselwirken. Wenn die beiden Bosonen innerhalb des gleichen Orbitals  $p_x$  oder  $p_y$  miteinander wechselwirken, bezeichnen wir die Wechselwirkungsenergie mit  $U_p$ . Wechselwirken sie in verschiedenen Orbitalen  $p_x$  und  $p_y$  miteinander, haben sie die Wechselwirkungsenergie  $V_p$ . Definiert sind die Größen wie folgt:

$$U_p = g \int d^2r |\phi_{p_{x;y}}(\vec{r})|^4, \quad V_p = g \int d^2r |\phi_{p_x}(\vec{r})|^2 |\phi_{p_y}(\vec{r})|^2 \quad (4.1)$$

In der Bose-Hubbard-Beschreibung ergibt sich für die Wechselwirkung der Atome in den  $p$ -Orbitalen der Hamilton-Operator

$$\hat{H}_{p,\text{int}} = \frac{U_p}{2} \sum_{\mu \in \{x,y\}} \hat{n}_\mu (\hat{n}_\mu - 1) + V_p \sum_{\mu, \nu, \mu \neq \nu} \hat{n}_\mu \hat{n}_\nu + \frac{V_p}{2} \sum_{\mu, \nu, \mu \neq \nu} \hat{p}_\mu^\dagger \hat{p}_\mu^\dagger \hat{p}_\nu \hat{p}_\nu. \quad (4.2)$$

$\hat{p}_\mu^\dagger$  und  $\hat{p}_\mu$  sind der Erzeugungs- und Vernichtungsoperator für ein Boson im  $p_\mu$ -Orbital.  $\hat{n}_\mu$  stellt den Operator für die Teilchenzahl im  $p_\mu$ -Orbital dar. Der letzte Term in Gleichung 4.2 beschreibt einen paarweisen Austausch der Teilchen zwischen den beiden  $p$ -Orbitalen, er wird als *Josephson-* oder *Austauschterm* bezeichnet.

Eine Berechnung der Überlappintegrale in Gleichung 4.1 ergibt  $U_p = 3V_p$ . Wir wollen nun eine andere Basis für die Zustände des harmonischen Oszillators wählen und schreiben den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator als

$$\hat{H}_{p,\text{int}} = \frac{U_p}{2} \left( \hat{n}_p^2 - \frac{1}{3} \hat{L}_z^2 \right). \quad (4.3)$$

Hierbei sind  $\hat{n}_p = \hat{p}_x^\dagger \hat{p}_x + \hat{p}_y^\dagger \hat{p}_y$  der Operator für die Teilchenzahl in beiden Moden und  $\hat{L}_z = -i(\hat{p}_x^\dagger \hat{p}_y - \hat{p}_y^\dagger \hat{p}_x)$  die  $z$ -Komponente des Drehimpulsoperators.  $\hat{n}_p$  und  $\hat{L}_z$  besitzen gemeinsame Eigenzustände, diese sind

$$\psi_0 = \frac{1}{2} (p_x^\dagger p_x^\dagger + p_y^\dagger p_y^\dagger) |0, 0\rangle, \quad (4.4)$$

$$\psi_{\pm 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (p_x^\dagger \pm ip_y^\dagger)^2 |0, 0\rangle. \quad (4.5)$$

Die zugehörigen Eigenenergien lauten

$$E_0 = \frac{4}{3} U_p, \quad (4.6)$$

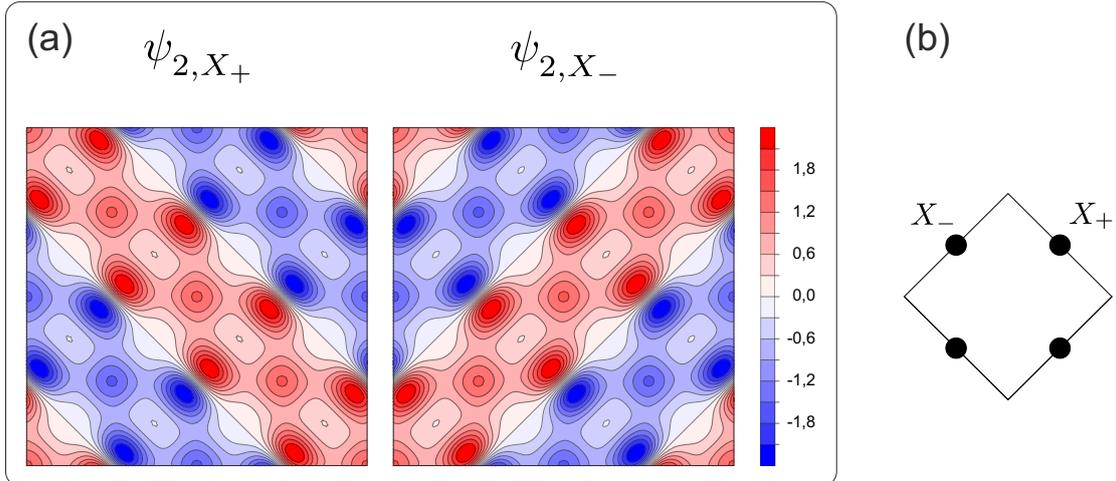
$$E_{\pm 2} = \frac{2}{3} U_p. \quad (4.7)$$

Der Index  $0, \pm 2$  steht hierbei für den Drehimpuls  $L_z$ . Durch die Wechselwirkung nimmt die Energie aller drei Zustände zu, wobei die Energiezunahme für  $\psi_0$  doppelt so groß ist wie für die beiden anderen Zustände.  $\psi_{\pm 2}$  sind die beiden Grundzustände,  $\psi_0$  liegt energetisch höher. Es zeigt sich hier, dass die Energie des Zwei-Teilchen-Zustandes minimal wird, wenn der Betrag des Drehimpulses maximal ist.

Die Zustände  $\psi_{\pm 2}$  stellen eine Superposition der beiden  $p$ -Orbitale mit einem komplexen Phasenfaktor dar. Der anschauliche Grund für die geringere Energie dieser Zustände ist, dass hier die Teilchen stärker delokalisiert sind.

#### 4.4.2 Komplexe Überlagerung der Bloch-Zustände an den X-Punkten

Wir wollen nun die Betrachtung vom zweidimensionalen harmonischen Oszillator auf das zweidimensionale bipartite optische Gitter erweitern. Unter der Annahme



**Abbildung 4.6:** (a) Konturenplot der Bloch-Funktionen  $\psi_{2,X_-}$  und  $\psi_{2,X_+}$  im Ortsraum. (b) Lage der  $X_{\pm}$ -Punkte in der ersten Brillouin-Zone.

voller Symmetrie des Gitters gibt es im zweiten Band zwei entartete Energieminima bei den Punkten  $X_+$  und  $X_-$ . Die zugehörigen Bloch-Zustände  $\psi_{2,X_+}$  und  $\psi_{2,X_-}$  stellen jeweils eine Komposition aus  $1s$ -Orbitalen in den flachen  $\mathbb{B}$ -Töpfen und  $2p$ -Orbitalen in den tiefen  $\mathbb{A}$ -Töpfen dar. Die lokal in den tiefen Töpfen besetzten Orbitale sind im Falle des Zustandes am  $X_+$ -Punkt die  $2p_{x+y}$ - und im Falle des Zustandes am  $X_-$ -Punkt die  $2p_{x-y}$ -Orbitale. Beide  $p$ -Orbitale stehen orthogonal zueinander. Die Ortsraumwellenfunktionen beider Zustände werden in Abbildung 4.6 veranschaulicht.

Die Wechselwirkungsenergie der Atome in den tiefen Gittertöpfen hat die gleiche Form wie in Gleichung 4.3 für den zweidimensionalen harmonischen Oszillator. Im Bose-Hubbard-Modell gibt es nun noch einen weiteren Term, der die Wechselwirkungsenergie der Atome in den  $s$ -Orbitalen in den flachen Gittertöpfen darstellt:

$$U_s = g \int d^2r |\phi_s(\vec{r})|^4 \quad (4.8)$$

Für den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator erhält man damit:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{U_p}{2} \sum_{\vec{R} \in \mathbb{A}} \left( \hat{n}_{p,\vec{R}}^2 - \frac{1}{3} \hat{L}_{z,\vec{R}}^2 \right) + \frac{U_s}{2} \sum_{\vec{R} \in \mathbb{B}} \hat{n}_{s,\vec{R}} (\hat{n}_{s,\vec{R}} - 1) \quad (4.9)$$

$\hat{n}_{s,\vec{R}}$  ist der Operator für die Teilchenzahl im  $s$ -Orbital am Gitterplatz  $\vec{R}$ .

Für ein tiefes Gitter spielt der Tunnelterm keine Rolle und die Wechselwirkungsenergie bestimmt die Ordnung der Atome im Gitter. Eine Minimierung der Wechselwirkungsenergie wird durch eine komplexe Superposition der beiden  $p$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen erreicht,

$$\boxed{\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{2,X_+} \pm i\psi_{2,X_-})}. \quad (4.10)$$

Im Falle eines flacheren Gitters, in dem das Tunneln eine Rolle spielt, bleibt die komplexe Superposition bestehen. Für die Minimierung der Energie bildet sich

die lokale Phase der Wellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen so aus, dass zwischen benachbarten Gittertöpfen keine Knoten der Wellenfunktion liegen. Bei dem durch die komplexe Überlagerung erzeugten Zustand gibt es einen Phasengradienten innerhalb der  $p$ -Orbitale, der zu einem Kreisstrom der Atome in den tiefen Gittertöpfen führt. Außerdem liegt ein Phasengradient entlang des Randes der Einheitszellen vor, so dass ein Kreisstrom zwischen den  $1s$ -Orbitalen stattfindet. Bei beiden Kreisströmen wechselt die Drehrichtung zwischen benachbarten Einheitszellen.

### 4.4.3 Aufhebung der Entartung der Bandminima

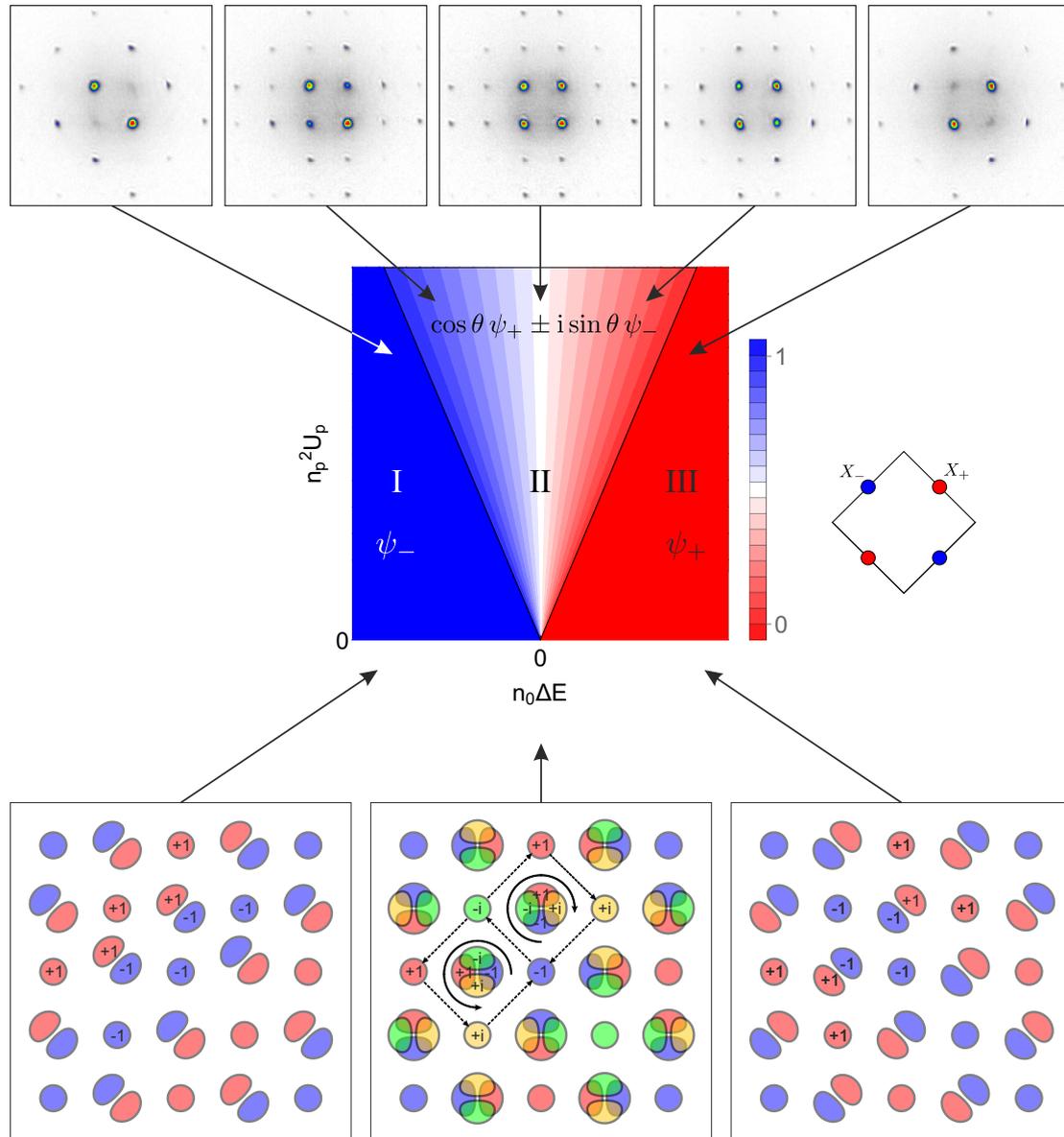
Im vorherigen Abschnitt wurde angenommen, dass das Gitter die volle Symmetrie besitzt und die Bandminima am  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt energetisch entartet sind. Im Experiment ist die volle Symmetrie im Allgemeinen nicht gegeben, da die Anisotropieparameter  $\eta_y$ ,  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  von eins verschieden sind. Zudem ist der Winkel, unter dem sich der  $x$ - und  $y$ -Ast des Gitters schneiden, nicht exakt  $90^\circ$ . Es ändert sich die Höhe der Potenzialbarriere zwischen benachbarten Gitterplätzen. Wenn die Tunnelamplitude für die eine diagonale Richtung,  $\vec{e}_1 = 1/\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ , leicht verschieden von der Tunnelamplitude für die andere, dazu senkrechte diagonale Richtung,  $\vec{e}_2 = 1/\sqrt{2}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ , ist, kommt es zur Aufhebung der Entartung der Zustände an den beiden  $X$ -Punkten. Ist zum Beispiel das Tunneln entlang der Richtung  $\vec{e}_1$  stärker als in der Richtung  $\vec{e}_2$ , weist ein Band entlang der Strecke  $\Gamma X_+$  in der ersten Brillouin-Zone eine größere Breite auf als entlang der Strecke  $\Gamma X_-$ . Die Energie am  $X_+$ -Punkt ist dann geringer als am  $X_-$ -Punkt.

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, lassen sich die Anisotropieparameter über die Glasplättchen im Gitter-Setup einstellen (GP2, GP3, GP4 in Abbildung 3.5). Diese unbeschichteten Glasplättchen reflektieren einen geringen Teil der Leistung aus den Gitterstrahlen heraus und schwächen sie dadurch ab. Über die Stärke der Abschwächung lässt sich die Energiedifferenz  $\Delta E = E_2(X_-) - E_2(X_+)$  der Bloch-Zustände an den  $X_\pm$ -Punkten einstellen.  $\Delta E$  ist damit ein Parameter, der verwendet werden kann, um die relative Besetzung der beiden  $X$ -Punkte zu variieren. Wie wir sehen werden, gibt es in Abhängigkeit von diesem Parameter verschiedene Quantenphasen in einem Phasendiagramm. Wir orientieren uns bei der folgenden Betrachtung an [Ö13].

Unser Ziel ist die Bestimmung des Grundzustandes des zweiten Bandes in Abhängigkeit von  $\Delta E$ . Es wird angenommen, dass die Wechselwirkungsenergie kleiner ist als die kinetische Energie. Für eine große Energiedifferenz  $|\Delta E|$  erwarten wir, dass nur der energetisch tieferliegende  $X$ -Punkt besetzt wird. Der Grundzustand ist dann eine der Bloch-Funktionen  $\psi_{2,X_+}$  oder  $\psi_{2,X_-}$ . Bei energetischer Entartung der Bandenergien an den  $X_\pm$ -Punkten ist eine komplexe Superposition beider Zustände zu erwarten. Wir machen daher den folgenden Ansatz für die Wellenfunktion im zweiten Band:

$$\psi(\varphi, \theta) = \cos \theta \cdot \psi_+ + e^{i\varphi} \sin \theta \cdot \psi_- \quad (4.11)$$

$\theta \in [0; \pi/2]$  beschreibt die relative Besetzung der beiden  $X$ -Punkte,  $\varphi$  gibt die Relativphase zwischen den beiden Moden an. Die Zustände sind normiert bezüglich



**Abbildung 4.7:** Quantenphasendiagramm für die Besetzung der Bloch-Zustände  $\psi_- \equiv \psi_{2,X_-}$  und  $\psi_+ \equiv \psi_{2,X_+}$  im Grundzustand des zweiten Bandes. Konkret gibt die Farbe die Besetzung  $\sin \theta$  des Zustands  $\psi_-$  an ( $\theta \in [0; \pi/2]$ , siehe Gleichung 4.11). Auf den Achsen aufgetragen sind die Energiedifferenz  $n_0 \Delta E$  mit  $\Delta E = E_2(X_-) - E_2(X_+)$  sowie die Wechselwirkungsenergie in den  $p$ -Orbitalen,  $n_p^2 U_p$ . In den Bereichen (I) und (III) liegt jeweils eine gestreifte Phase vor, hier wird ausschließlich der energetisch tieferliegende Bloch-Zustand besetzt, also entweder  $\psi_- \equiv \psi_{2,X_-}$  oder  $\psi_+ \equiv \psi_{2,X_+}$ . Für den sich dazwischen befindenden Bereich (II) besteht der Grundzustand aus einer komplexen Superposition  $\cos \theta \cdot \psi_+ + e^{i\varphi} \sin \theta \cdot \psi_-$  der beiden Bloch-Zustände, wobei sich die Besetzung von  $\psi_-$  und  $\psi_+$  graduell ändert. Für die drei Quantenphasen ist unten jeweils die Phasenbeziehung zwischen den lokalen Orbitalen dargestellt, aus denen sich der Grundzustand zusammensetzt. Oben werden Impulsspektren bei verschiedenen Energiedifferenzen  $\Delta E$  gezeigt.

der Teilchenzahl  $n_0$  innerhalb einer Einheitszelle:  $n_0 = \int d^2r |\psi|^2 = \int d^2r |\psi_{\pm}|^2$ . Die beiden Moden  $\psi_{\pm}$  sind die Eigenzustände des Hamilton-Operators ohne Wechselwirkung. Sie sind zueinander orthogonal und die zugehörigen Energien unterscheiden sich um  $\Delta E$ .

$$\hat{H}_0 \psi_{\pm} = \mp \frac{\Delta E}{2} \psi_{\pm} \quad (4.12)$$

Es soll nun das Funktional der Gesamtenergie des Systems,

$$E[\psi(\varphi, \theta)] = \int d^2r \left( \psi^* \hat{H}_0 \psi + \frac{g}{2} |\psi|^4 \right), \quad (4.13)$$

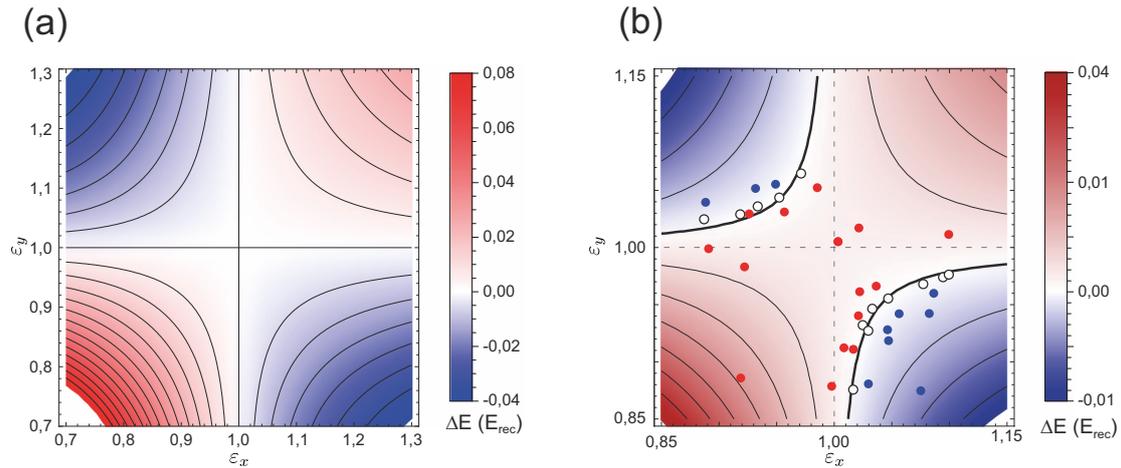
minimiert werden. Als Ergebnis erhält man: Ist  $|\Delta E|$  größer als die Wechselwirkungsenergie, so wird nur der energetisch tieferliegende  $X$ -Punkt besetzt. Wenn man  $|\Delta E|$  verringert, kommt es ab einem bestimmten Schwellenwert zur Besetzung beider  $X$ -Punkte. Der Phasenwinkel beträgt  $\varphi = \pm\pi/2$ , so dass sich wieder eine komplexe Superposition von  $\psi_+$  und  $\psi_-$  einstellt. Es lässt sich zeigen, dass der Besetzungswinkel  $\theta$  die folgende Gleichung erfüllt:

$$\boxed{\cos 2\vartheta = \frac{3n_0 \Delta E}{2n_p^2 U_p}} \quad (4.14)$$

$n_p$  stellt die relative Besetzung der  $p$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen dar und steigt beim Erhöhen der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  an. Die Besetzung der beiden komplex überlagerten Zustände wird also vom Verhältnis der Energiedifferenz  $\Delta E$  der beiden Bloch-Zustände und der Wechselwirkungsenergie  $U_p$  in den  $p$ -Orbitalen gegeben. Es gibt zwei konkurrierende Effekte, wobei der eine durch ein großes  $|\Delta E|$  und der andere durch ein großes  $U_p$  gefördert wird. Ein großes  $|\Delta E|$  begünstigt die Besetzung des energetisch tieferliegenden  $X$ -Punktes, so dass die Ein-Teilchen-Bloch-Energie minimiert wird. Ein großes  $U_p$  begünstigt hingegen die gleichzeitige Besetzung beider  $X$ -Punkte, da dann in den tiefen Gittertöpfen beide  $p$ -Orbitale bevölkert werden, so dass die Wechselwirkungsenergie der Teilchen minimiert wird.

Die komplexe Superposition bildet sich aus, wenn  $n_0 \Delta E$  und die Wechselwirkungsenergie  $n_p^2 U_p$  in der gleichen Größenordnung liegen. Wenn  $|n_0 \Delta E|$  einen bestimmten Schwellenwert überschreitet, kommt es zur ausschließlichen Besetzung des tieferliegenden  $X$ -Punktes. Die Verringerung der Ein-Teilchen-Bloch-Energie führt dann zu einer größeren Energieabsenkung als die Verringerung der Wechselwirkungsenergie durch die Besetzung beider  $p$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen. Für  $\Delta E > 0$  wird dann der  $X_+$ -, für  $\Delta E < 0$  der  $X_-$ -Punkt besetzt.

Es ergibt sich aus der theoretischen Betrachtung ein Quantenphasendiagramm, welches in Abbildung 4.7 gezeigt wird. Im Diagramm ist auf der x-Achse die Energiedifferenz  $n_0 \Delta E$  und auf der y-Achse die Wechselwirkungsenergie in den  $p$ -Orbitalen,  $n_p^2 U_p$ , aufgetragen. Es gibt in dem Phasendiagramm drei Bereiche: jeweils einen, in dem nur der  $X_+$ - bzw. der  $X_-$ -Punkt besetzt wird (I und III). Diese Bereiche bezeichnet man als *gestreifte Phasen*. Dazwischen liegt der Bereich, in dem es zur komplexen Superposition der Zustände beider  $X$ -Punkte kommt (II).



**Abbildung 4.8:** Konturplot der theoretisch berechneten Energiedifferenz zwischen den Bloch-Zuständen am  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt im zweiten Band in Abhängigkeit von den Anisotropieparametern  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$ . Die übrigen Gitterparameter betragen  $V_0 = 7 E_{\text{rec}}$ ,  $\vartheta = 0,54\pi$  und  $\eta_y = 1$ . Die Rechnung berücksichtigt den Schnittwinkel der Gitterstrahlen des x- und y-Astes. Für diesen wurden die Werte (a)  $90^\circ$  und (b)  $90,255^\circ$  verwendet. In (b) sind einzelne Messpunkte eingezeichnet, deren Farbe das Vorzeichen der relativen Besetzungsdifferenz  $\Delta N = (N(X_+) - N(X_-))/(N(X_+) + N(X_-))$  der beiden  $X$ -Punkte angibt. An den weißen Messpunkten liegt eine Gleichbesetzung beider  $X$ -Punkte vor. Abbildungen adaptiert aus [Eic18].

In diesem Bereich ändert sich die Besetzung der beiden  $X$ -Punkte graduell mit der Energiedifferenz  $n_0 \Delta E$ . Man nennt ihn *chirale Phase*, aufgrund der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Kreisströme auf den tiefen Gitterplätzen sowie entlang der Ränder der Einheitszellen. Es sei angemerkt, dass die orbitalen Zustände auf den tiefen Gitterplätzen,  $p_{x+y} \pm ip_{x-y}$ , physikalisch gleich den Zuständen  $p_x \pm ip_y$  sind. Im Experiment reicht bereits eine Energiedifferenz  $\Delta E$  in der Größenordnung von  $10^{-2} E_{\text{rec}}$  aus, dass nur ein Bloch-Zustand makroskopisch besetzt wird.

#### 4.4.4 Besetzung der $X$ -Punkte bei von $90^\circ$ verschiedenem Schnittwinkel der Gitterstrahlen

Beim Einstellen der relativen Besetzung der Zustände an den  $X_\pm$ -Punkten des zweiten Bandes war bei früheren Messungen davon ausgegangen worden, dass die Energiedifferenz  $\Delta E$  beider Zustände auf die folgende Weise von den Anisotropieparametern des Gitters abhängt [Ö113]:

$$\Delta E \approx \alpha(V_0, \vartheta)(\varepsilon_x - 1)(\varepsilon_y - 1) \quad (4.15)$$

Der Faktor  $\alpha(V_0, \vartheta)$  ist hierbei eine Funktion der Gittertiefe  $V_0$  und der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Aus der Formel folgt, dass die Energiedifferenz an den beiden  $X$ -Punkten auf null gebracht werden kann, wenn man in mindestens einem der beiden Gitteräste die Amplituden von einlaufendem und zurückreflektiertem Strahl ausgleicht. Es zeigte sich jedoch das Folgende: Wenn man durch das Einstellen

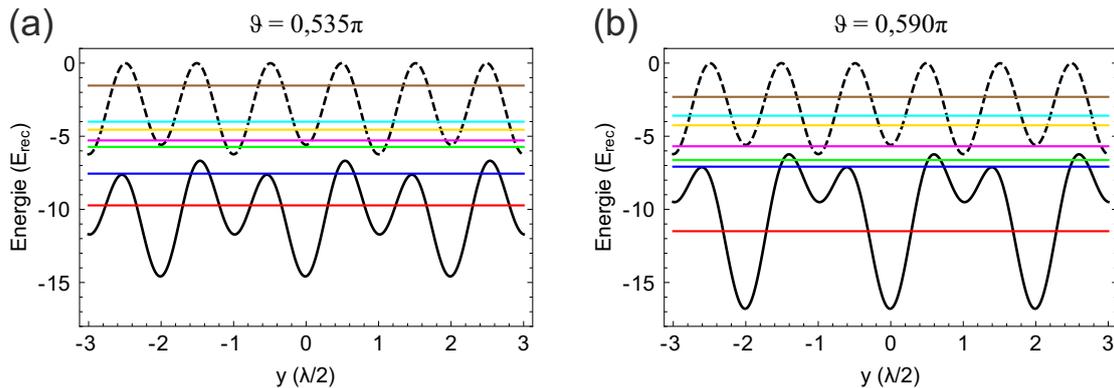
des Anisotropieparameters  $\varepsilon_x$  eine Entartung der Zustände  $\psi_{2,X_{\pm}}$  hergestellt hatte, blieb diese beim Verändern von  $\varepsilon_y$  nicht bestehen. Die Besetzung der X-Punkte änderte sich relativ stark beim Verändern von  $\varepsilon_y$ . Der Grund hierfür liegt darin, dass der Schnittwinkel der Gitterstrahlen nicht exakt  $90^\circ$  beträgt. Gleichung 4.15 gilt nur für einen Winkel von genau  $90^\circ$ . Für diesen Wert des Winkels liegt immer dann eine Entartung beider X-Punkte vor, wenn man sich in einem Diagramm, bei welchem in x-Richtung  $\varepsilon_x$  und in y-Richtung  $\varepsilon_y$  aufgetragen ist, auf den Achsen  $\varepsilon_x = 1$  oder  $\varepsilon_y = 1$  befindet (siehe Abbildung 4.8(a)). Experimentelle Messungen und eine theoretische Betrachtung in [Eic18] zeigen, dass bereits für eine Abweichung des Winkels im Bereich von ein paar Zehntelgrad die Punkte mit ausgeglichener Besetzung der X-Punkte nicht mehr auf diesen Achsen liegen, sondern auf Hyperbeln, die bezüglich des Punktes  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y) = (1, 1)$  zentriert sind. Dies ist in Abbildung 4.8(b) dargestellt.

## 4.5 Oszillation zwischen den X-Punkten verschiedener Bänder

In Abschnitt 4.1 wurde beschrieben, dass man im optionalen vierten Schritt der Präparation von Atomen im zweiten Band die Zeitphasendifferenz adiabatisch innerhalb von 5 ms von  $\vartheta = 0,535\pi$  zu einem finalen Wert  $\vartheta_f$  rampt. Das System hat dabei Zeit, sich an die sich ändernde Gittergeometrie anzupassen, und die Atome bleiben im zweiten Band. Führt man die Rampe der Zeitphasendifferenz in einer deutlich kürzeren Zeit aus, ist die Adiabaticität nicht mehr gegeben, so dass es zu Anregungen in andere Bänder kommt. Die schnelle Rampe der Zeitphasendifferenz bezeichnen wir als *Quench*.

Wir führen die ersten drei Schritte der Sequenz aus Abschnitt 4.1 aus und lassen die Atome bei  $\vartheta_i = 0,535\pi$  im zweiten Band kondensieren. Eine Gitterkalibrierung ergab für die in diesem Abschnitt vorgestellten Messungen die Gitterparameter  $V_0 = 6,3 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 1,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,93$  und  $\eta_y = 0,96$ . Bei diesen Werten besitzt der Bloch-Zustand am  $X_+$ -Punkt des zweiten Bandes eine geringere Energie als der am  $X_-$ -Punkt. Bei der Kondensation der Atome im zweiten Band wird ausschließlich der  $X_+$ -Punkt bevölkert. Wir schreiben den kohärenten Zustand, in dem sich die Atome befinden, als  $|2, X_+\rangle_i$ , wobei der Index „i“ kennzeichnen soll, dass es sich um einen Bloch-Zustand des Gitters bei der initialen Zeitphasendifferenz  $\vartheta_i = 0,535\pi$  handelt.

Durch den anschließenden Quench der Zeitphasendifferenz zum Wert  $\vartheta_f$  ändert sich die relative Potenzialtiefendifferenz der Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  und das Gitter besitzt nun neue Bloch-Zustände, die durch den Index „f“ gekennzeichnet werden. Bei den hier beschriebenen Messungen liegt  $\vartheta_f$  im Bereich von  $0,565\pi$  bis  $0,590\pi$ . Die Atome befinden sich direkt nach dem Quench nach wie vor im Zustand  $|2, X_+\rangle_i$ . Dieser ist jedoch kein Eigenzustand der neuen Gitterkonfiguration. Der Zustand wird auf die Zustände  $|n, X_+\rangle_f$  projiziert, welche die neuen Bloch-Zustände am  $X_+$ -Punkt in den verschiedenen Bändern  $n$  darstellen. Der zeitab-



**Abbildung 4.9:** Gitterkonfiguration bei den Zeitphasenwerten (a)  $\vartheta = 0,535\pi$  und (b)  $\vartheta = 0,590\pi$ . Es ist der Verlauf des Gitterpotenzials in  $y$ -Richtung dargestellt. Die durchgezogene schwarze Linie entspricht dem Potenzial  $V(x = 0, y)$  und die gestrichelte schwarze Linie dem Potenzial  $V(x = \lambda/4, y)$ , wobei das Gitterpotenzial  $V(x, y)$  durch Gleichung 2.32 gegeben ist. Ebenfalls eingezeichnet sind die Bandenergien am  $X_+$ -Punkt für die Bänder eins bis sieben. Für die Gitterparameter wurden die experimentell gemessenen Werte  $V_0 = 6,3 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 1,05$ ,  $\varepsilon_y = 0,93$  und  $\eta_y = 0,96$  verwendet.

hängige Zustand der Atome lässt sich wie folgt schreiben:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \alpha_n |n, X_+\rangle_f e^{iE_n(X_+)t/\hbar} \quad (4.16)$$

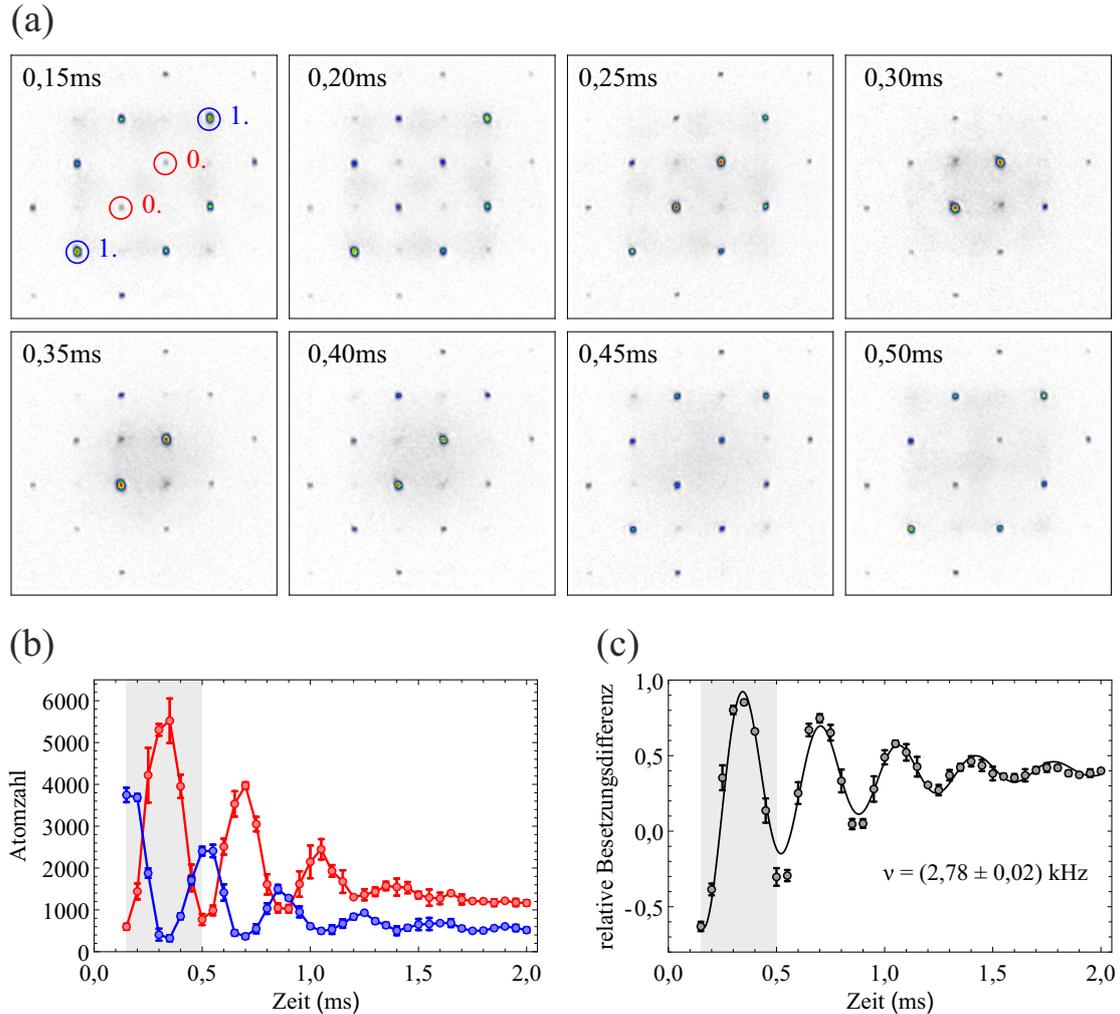
$$\text{mit } \alpha_n = {}_f\langle n, X_+ | {}_i\langle 2, X_+ \rangle_i \in \mathbb{C} \quad (4.17)$$

Es sei  $E_n(X_+)$  die zum Zustand  $|n, X_+\rangle_f$  gehörende Eigenenergie. Wir wollen zunächst beispielhaft das System nach einem Zeitphasen-Quench von  $\vartheta_i = 0,535\pi$  zu  $\vartheta_f = 0,590\pi$  betrachten, welcher innerhalb von 0,2 ms stattfindet. Abbildung 4.9 veranschaulicht die Gitterkonfiguration bei der Anfangs- und Endzeitphasendifferenz. Es wird ein Querschnitt durch das Gitterpotenzial in  $y$ -Richtung gezeigt. Ebenfalls eingezeichnet sind die Energien  $E_n(X_+)$  der Bänder eins bis sieben am  $X_+$ -Punkt.

Abbildung 4.10(a) zeigt das Impulsspektrum der Atome in der finalen Gitterkonfiguration bei  $\vartheta_f = 0,590\pi$  zu verschiedenen Zeitpunkten nach dem Quench. Man kann erkennen, dass die Besetzung der Bragg-Maxima nicht zeitlich konstant ist, sondern ein oszillatorisches Verhalten zeigt. Insbesondere fällt auf, dass die Besetzung der Bragg-Maxima 0. Ordnung ( $\vec{q} = \pm k/2(1, 1)$ , rote ROIs) und der Bragg-Maxima 1. Ordnung ( $\vec{q} = \pm 3k/2(1, 1)$ , blaue ROIs) gegeneinander oszillieren. Nimmt die Atomzahl in den rotmarkierten ROIs (vom Englischen: *region of interest*) ab, wächst sie in den blaumarkierten ROIs an, und umgekehrt. In Abbildung 4.10(b) ist die gesamte Atomzahl in den roten und blauen Bereichen dargestellt. Berechnet man nun die relative Besetzungsdifferenz der Atome in den Bragg-Maxima 0. und 1. Ordnung,

$$\Delta N = \frac{N_0 - N_1}{N_0 + N_1}, \quad (4.18)$$

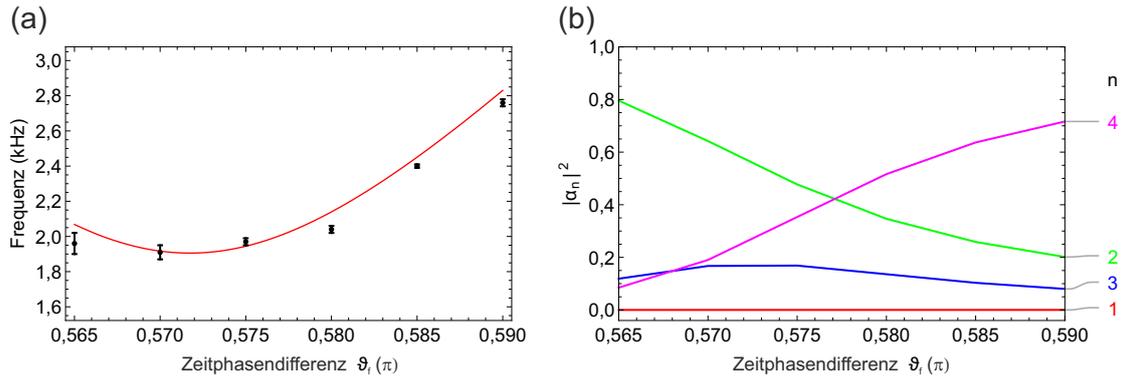
erhält man bei der Auftragung gegen die Zeit den Plot in Abbildung 4.10(c). Es kann eine gedämpfte Oszillation über mehrere Perioden beobachtet wer-



**Abbildung 4.10:** (a) Impulsspektrum der Atome im Gitter zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  nach dem Quench der Zeitphasendifferenz von  $\vartheta_i = 0,535\pi$  zu  $\vartheta_f = 0,59\pi$ . (b) Auftragung der Atomzahl in den in (a) eingezeichneten ROIs gegen die Zeit  $t$ : Gesamte Atomzahl in den Bragg-Maxima 0. Ordnung bei  $\vec{q} = \pm k/2(1, 1)$  (rot) und gesamte Atomzahl in den Bragg-Maxima 1. Ordnung bei  $\vec{q} = \pm 3k/2(1, 1)$  (blau). Man erkennt deutlich ein oszillierendes Verhalten der Atomzahlen. Die Verbindungslinien dienen nur dem Führen des Auges. (c) Auftragung der relativen Populationsdifferenz  $\Delta n = (N_0 - N_1)/(N_0 + N_1)$  gegen die Zeit  $t$ . Der grau markierte Bereich in (b) und (c) ist der Zeitraum, in dem die Messzeitpunkte aus (a) liegen. Die durchgezogene schwarze Linie stellt einen Fit mit einer harmonisch oszillierenden Funktion dar, deren Amplitude exponentiell abfällt.

den. Durch einen Fit mit einer Funktion der Form  $f(t) = A \exp(-t/\tau_1) + B \exp(-t/\tau_2) \sin(2\pi\nu t + \varphi) + C$  lässt sich die Frequenz  $\nu$  der Oszillation bestimmen. Für die vorgestellte Messung ergibt sich  $\nu = (2,78 \pm 0,02) \text{ kHz}$ .

Führt man eine solche Messung für verschiedene Zeitphasenwerte  $\vartheta_f \in [0,565\pi; 0,590\pi]$  durch und ermittelt jeweils die Oszillationsfrequenz, ergeben sich die in Abbildung 4.11(a) dargestellten Werte. Ein Vergleich mit der Bandstrukturrechnung zeigt, dass diese Frequenzen dem Energieunterschied am  $X_+$ -Punkt



**Abbildung 4.11:** (a) Experimentell bestimmte Frequenzen der Oszillation zwischen der Besetzung der Bragg-Maxima 0. und 1. Ordnung in Abhängigkeit von der finalen Zeitphasendifferenz  $\vartheta_f$  nach dem Quench (schwarze Punkte). Die Werte stimmen gut überein mit den aus der Bandstrukturrechnung ermittelten Energieunterschieden (geteilt durch  $h$ ) zwischen dem zweiten und vierten Band am  $X_+$ -Punkt bei  $\vartheta = \vartheta_f$  (durchgezogene rote Linie). (b) Betragsquadrat  $|\alpha_n|^2$  der Koeffizienten aus Gleichung 4.17 für die ersten vier Bänder.

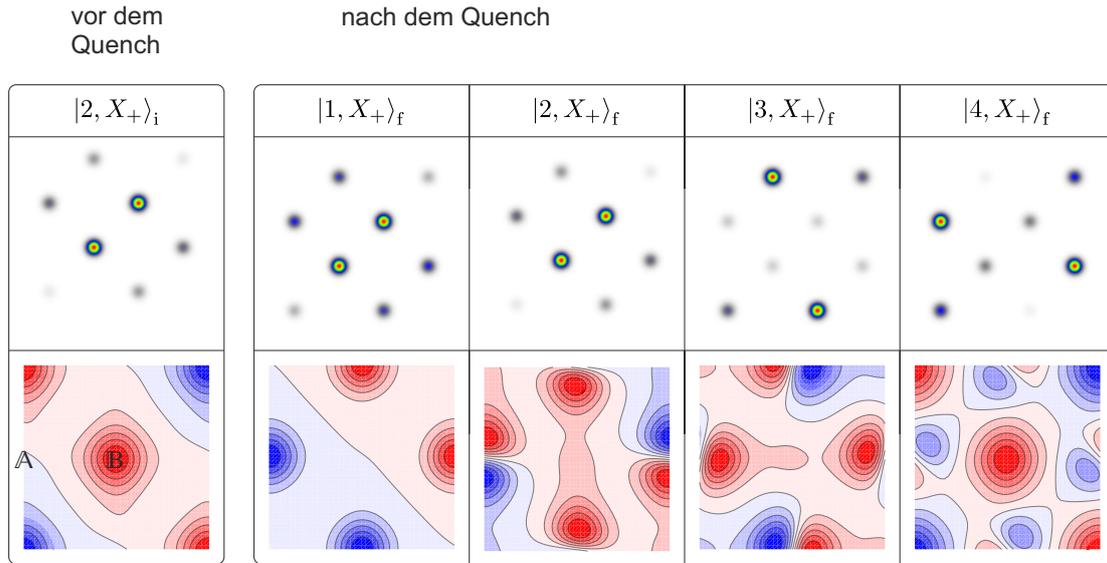
zwischen dem zweiten und vierten Band in der finalen Gitterkonfiguration entsprechen:

$$\nu_{2,4} = (E_4(X_+) - E_2(X_+))/h \quad (4.19)$$

Die experimentellen Werte stimmen hierbei gut mit den theoretischen überein. Offenbar besitzt der Zustand der Atome nach dem Quench dominante Anteile am  $X_+$ -Punkt des zweiten und vierten Bandes. Die Oszillation im Impulsspektrum ergibt sich aus der unterschiedlichen Zeitentwicklung beider Anteile.

Dass in der Tat das zweite und vierte Band große Beiträge zum Zustand nach dem Quench liefern, wird durch Abbildung 4.11(b) verdeutlicht. Hier ist das Betragsquadrat  $|\alpha_n|^2$  der Koeffizienten aus Gleichung 4.17 in Abhängigkeit von  $\vartheta_f$  dargestellt. Für  $\vartheta_f = 0,590\pi$  ergeben sich als Beiträge der Bänder zwei, drei und vier  $|\alpha_2|^2 = 0,20$ ,  $|\alpha_3|^2 = 0,08$  und  $|\alpha_4|^2 = 0,72$ . Die Beiträge des ersten Bandes sowie der Bänder mit  $n > 4$  sind vernachlässigbar. Der Anteil des zweiten Bandes fällt mit zunehmendem  $\vartheta_f$  ab, während der des vierten Bandes anwächst. Der Beitrag des dritten Bandes ist für die betrachteten Zeitphasenwerte relativ gering und liegt zwischen etwa 0,08 und 0,16. Der Grund hierfür ist, dass der Bloch-Zustand  $|3, X_+\rangle_f$  eine andere Parität besitzt als  $|2, X_+\rangle_i$ .

Die Impulsspektren des Anfangszustandes bei  $\vartheta_i = 0,535\pi$  sowie der ersten vier Bloch-Zustände  $|n, X_+\rangle_f$  in der finalen Gitterkonfiguration bei  $\vartheta_f = 0,590\pi$  werden in Abbildung 4.12 gezeigt. Im unteren Teil der Abbildung wird der Realteil der Bloch-Funktionen am  $X_+$ -Punkt in einem Konturplot dargestellt. Das erste Band leistet bei der Komposition des Anfangszustandes aus den neuen Eigenzuständen einen vernachlässigbaren Beitrag, da ausschließlich die Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  besetzt werden. Beim Zustand  $|2, X_+\rangle_i$  befindet sich hingegen fast die gesamte Besetzung in den Gittertöpfen  $\mathbb{B}$ , der Anteil in den  $p$ -Orbitalen der tiefen Gittertöpfe  $\mathbb{A}$  ist gering. Der Zustand im vierten Band liefert einen großen Beitrag in der Komposition des Anfangszustands, da bei beiden Zuständen die Besetzung der Töpfe  $\mathbb{A}$  relativ groß ist.



**Abbildung 4.12:** Bloch-Zustände an den  $X_+$ -Punkten bestimmter Bänder vor (Index „i“) und nach (Index „f“) dem Quench der Zeitphasendifferenz. Oben: Theoretisch berechnete Impulsspektren der Bloch-Zustände. Unten: Konturenplots des Realteils der Bloch-Zustände im Ortsraum.

Für die Dämpfung der beobachteten Oszillation kommen verschiedene Ursachen infrage. Das System befindet sich nach dem Quench nicht im Gleichgewicht. Die Atome thermalisieren, wodurch die Besetzung des  $X_+$ -Punktes zerfällt. So wird im zweiten Band möglicherweise auch der  $X_-$ -Punkt teilweise besetzt, da sich die Position im Phasendiagramm in Abbildung 4.7 ändert. Im vierten Band zerfallen die Atome vom  $X_+$ -Punkt in die Umgebung des Bandminimums am  $\Gamma$ -Punkt. In geringem Umfang gehen in dem betrachteten Zeitintervall bereits Atome in das erste Band über. Zur Dekohärenz kann es auch kommen, da die Gittertiefe aufgrund des einhüllenden Potentials, welches durch die Magnetfalle und die Gaußsche Form der Gitterstrahlen hervorgerufen wird, vom Ort abhängt. Die Bandabstände sind damit in verschiedenen Bereichen des Gitters unterschiedlich groß und damit auch die Oszillationsfrequenz.



# 5 Bloch-Oszillationen im bipartiten optischen Gitter

Dieses Kapitel widmet sich der experimentellen Untersuchung von Bloch-Oszillationen im bipartiten quadratischen optischen Gitter. Nach einer theoretischen Einführung zeigen wir, wie an unserer Apparatur die Kraft erzeugt wird, welche für die Bewegung der Atome im zweidimensionalen Quasiimpulsraum sorgt. Es werden Messungen von Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Band für zwei verschiedene Richtungen der Kraft vorgestellt, wobei auch der Betrag der Kraft variiert wird. Abschließend erfolgt ein Vergleich der experimentell ermittelten Werten der Bloch-Frequenz mit den Ergebnissen aus einer Simulation.

## 5.1 Semiklassische Bewegungsgleichungen

In Kapitel 2 wurden die Zustände von Atomen in einem periodischen Gitterpotenzial beschrieben. Es soll nun auf die Atome zusätzlich eine externe Kraft  $\vec{F}$  wirken. Wir wollen die Dynamik der Teilchen semiklassisch beschreiben, das heißt, dass die externe Kraft klassisch behandelt wird, wohingegen die Bandstruktur, in der sich die Atome bewegen, auf einer quantenmechanischen Betrachtung beruht.

Wir machen die Annahme, dass sich die Wellenfunktion der Atome im Gitter als ein Wellenpaket mit einer schmalen Verteilung des Quasiimpulses  $\vec{q}$  schreiben lässt. Der Zustand soll also eine Quasiimpulsverteilung mit einer Breite  $\Delta q$  besitzen, die deutlich kleiner als die Breite der ersten Brillouin-Zone ist. Die Verteilungsfunktion  $g(\vec{q} - \vec{q}_0)$  sei um einen Wert  $\vec{q}_0$  herum zentriert und die Atome befinden sich im  $n$ -ten Bloch-Band des Gitters. Dann kann man den atomaren Zustand schreiben als

$$\psi(\vec{r}) = \int d^3q g(\vec{q} - \vec{q}_0) \psi_{n,\vec{q}}(\vec{r}). \quad (5.1)$$

Bei der semiklassischen Betrachtung ersetzen wir in der klassischen Gleichung  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  den Impuls  $\vec{p}$  durch den Quasiimpuls  $\vec{q}$ . Die sogenannten *semiklassischen Bewegungsgleichungen* lauten dann:

$$\boxed{\vec{F} = \hbar \frac{d\vec{q}}{dt}} \quad (5.2)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle \hat{r} \rangle = \langle \hat{v} \rangle_n(\vec{q}) = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_q E_n(\vec{q})} \quad (5.3)$$

Die Änderung des Erwartungswertes der Position des Teilchens ist die Gruppengeschwindigkeit  $\langle \hat{v} \rangle_n(\vec{q})$  des Wellenpakets. Für die semiklassische Beschreibung

wird angenommen, dass die externe Kraft konstant ist über die Ausdehnung des Wellenpakets.

Eine Bedingung für die Realisierung von Bloch-Oszillationen ist, dass der Zustand der Atome im Gitter durch die Einwirkung der Kraft adiabatisch verändert wird. Das bedeutet, dass die zeitliche Änderungsrate des Quasiimpulses und damit die Kraft  $\vec{F}$  betragsmäßig nicht zu groß sein dürfen. Bei zu schneller Änderung von  $\vec{q}$  sind Landau-Zener-Übergänge zwischen benachbarten Bändern möglich. Die Landau-Zener-Bedingung für den Verbleib eines Teilchens im gleichen Band ist

$$\hbar \left| \langle n, \vec{q}(t) | \frac{d}{dt} | n', \vec{q}(t) \rangle \right| \ll \Delta, \quad (5.4)$$

wobei  $\Delta$  die Bandlücke zwischen den Bändern mit den Indizes  $n$  und  $n'$  darstellt und der Quasiimpuls an den Stellen ausgewertet wird, an denen sich die beiden Bänder energetisch nähern. Mit Gleichung 5.2 lässt sich die Bedingung schreiben als

$$|\vec{F}| \ll \frac{\Delta}{|\langle n, \vec{q} | \vec{\nabla}_q | n', \vec{q} \rangle|}. \quad (5.5)$$

Bei der Wahl der Gittertiefe und der Kraft sind die folgenden Aspekte zu berücksichtigen: Zum einen benötigt man eine bestimmte Gittertiefe, damit die Bandlücke ausreichend groß ist. Eine Verringerung der Kraft würde ebenfalls dazu beitragen, dass das Adiabazitätskriterium leichter erfüllt wird. Auf der anderen Seite ist ein bestimmter Betrag der Kraft notwendig, damit innerhalb der Lebensdauer des präparierten Systems mehrere Perioden der Bloch-Oszillation beobachtet werden können.

## 5.2 Entwicklung des Zustands eines Teilchens im Gitter bei Anwesenheit einer externen Kraft

Der Hamilton-Operator für ein Teilchen, das sich in einem periodischen Gitterpotential  $V(\vec{r})$  befindet und auf das eine konstante externe Kraft  $\vec{F}$  wirkt, lautet

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}) - \vec{F} \circ \hat{r}.$$

Das Teilchen sei zum Zeitpunkt  $t = 0$ , in welchem die Kraft eingeschaltet wird, im Bloch-Zustand  $\psi_{n, \vec{q}(0)}$ . Dieser ist ein Eigenzustand des Hamilton-Operators 2.36 aus Kapitel 2, jedoch keiner von  $\hat{H}'$ . Der Quasiimpuls ist nun eine Größe, die sich zeitlich ändert. Wir machen für die zeitabhängige Wellenfunktion des Teilchens den Ansatz [Pei97]

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i\vec{q}(t) \circ \vec{r}} \tilde{u}(\vec{r}, t). \quad (5.6)$$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung  $i\hbar d\Psi(\vec{r}, t)/dt = \hat{H}'\Psi(\vec{r}, t)$  erhält man für die Funktion  $\tilde{u}$ :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{u}(\vec{r}, t) = \left[ \frac{(\hat{p} + \hbar\vec{q}(t))^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \tilde{u}(\vec{r}, t) \quad (5.7)$$

Der hier auftretende Hamilton-Operator hat die Form von dem in Gleichung 2.38 eingeführten Operator  $\hat{H}_{\vec{q}}$ , dessen Eigenzustände die Funktionen  $u_{n,\vec{q}(t)}$  sind. Wir nehmen an, dass die Adiabazitätsbedingung 5.5 erfüllt wird. Dann bleibt der Bandindex zeitlich konstant und  $\tilde{u}$  ist bis auf einen Phasenfaktor gleich der Funktion  $u_{n,\vec{q}(t)}$ . Die Zeitentwicklung des anfänglichen Bloch-Zustands  $|n, \vec{q}(0)\rangle$  ist gegeben durch

$$\hat{U}(t) |n, \vec{q}(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\vec{q}(t')) dt'} |n, \vec{q}(t)\rangle, \quad (5.8)$$

mit dem Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}$ . Zu jedem Zeitpunkt  $t$  besitzt die Wellenfunktion  $\Psi$  damit die Form eines Bloch-Zustands. Nach Gleichung 5.2 gilt für die Zeitentwicklung des Quasiimpulses bei Anwesenheit einer konstanten Kraft:

$$\vec{q}(t) = \vec{q}(0) + \frac{\vec{F}t}{\hbar} \quad (5.9)$$

Das Teilchen durchläuft den reziproken Raum also mit konstanter Änderungsrate des Quasiimpulses.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass sich das Teilchen in einem eindimensionalen Gitter befindet und die Kraft entlang der Gitterrichtung wirkt. Da die Funktion  $u_{n,q}(x)$  periodisch mit  $q$  ist, ist die zeitabhängige Wellenfunktion des Teilchens  $\Psi(x, t)$  periodisch mit der Zeit. Die Periodendauer wird *Bloch-Periode* genannt und beträgt

$$\tau_B = \frac{\hbar}{|F|a} = \frac{2\hbar k}{|F|}, \quad (5.10)$$

mit der Gitterkonstante  $a = \lambda/2 = \pi/k$  und der Laserwellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$ . In dieser Zeit ändert sich der Quasiimpuls um  $2\pi/a$ , was einem vollständigen Durchlaufen der ersten Brillouin-Zone entspricht. Die Gruppengeschwindigkeit der Teilchenwelle  $\langle v \rangle_n(q)$ , welche durch Gleichung 5.3 gegeben ist, stellt eine periodische Funktion des Quasiimpulses dar. Da sich während der Messung  $q$  linear mit der Zeit ändert, ist die Gruppengeschwindigkeit auch periodisch mit der Zeit, mit der Bloch-Periode 5.10 als Periodendauer. Der zeitliche Mittelwert der Gruppengeschwindigkeit beträgt null, ihr Vorzeichen wechselt periodisch zwischen positiv und negativ. Man bezeichnet die durch das Anlegen der Kraft stattfindenden periodischen Bewegungen des Teilchens im Gitter als *Bloch-Oszillationen*.

### 5.3 Zeitentwicklung eines Wellenpakets während der Bloch-Oszillation

Wir betrachten weiterhin ein Teilchen im eindimensionalen Gitter und nehmen an, dass sich der Zustand des Teilchens als Wellenpaket gemäß Gleichung 5.1 schreiben lässt. Der Zustand des Teilchens zum Zeitpunkt  $t = 0$  lautet dann

$$|\psi(0)\rangle = \int dq g(q - q_0) |n, q\rangle. \quad (5.11)$$

Mit Gleichung 5.8 sieht der Zustand zum Zeitpunkt  $t$  wie folgt aus:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle = \int dq g(q - q_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(q + Ft'/\hbar) dt'} |n, q + Ft/\hbar\rangle \quad (5.12)$$

Die im Wellenpaket vertretenen Quasiimpulse entwickeln sich also alle gleich mit der Zeit. Zum Zeitpunkt  $t = \tau_B$  haben sich diese Quasiimpulse jeweils um  $2k$  geändert, wobei  $k$  die Wellenzahl des Gitterlichts ist. Ein Bloch-Zustand  $|n, q\rangle$  ist dann in den Zustand  $|n, q + 2k\rangle$  überführt worden, welcher dem anfänglichen Zustand  $|n, q\rangle$  mit einem zusätzlichen Phasenfaktor entspricht:

$$\begin{aligned} \hat{U}(\tau_B) |n, q\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} E(q + Ft'/\hbar) dt'} |n, q + 2k\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} E(q + Ft'/\hbar) dt'} |n, q\rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

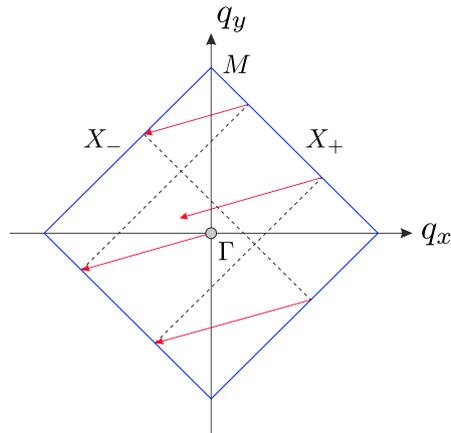
Der Zustand des Teilchens nach einer Bloch-Periode ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau_B)\rangle &= \hat{U}(\tau_B) |\Psi(0)\rangle \\ &= \int dq g(q - q_0) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} E(q + Ft'/\hbar) dt'} |n, q + Ft/\hbar\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_B} E(q + Ft'/\hbar) dt'} |\Psi(0)\rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Faktor  $\exp(-i/\hbar \int_0^{\tau_B} E(q + Ft'/\hbar) dt')$  hängt nicht mehr von  $q$  ab, da jeweils über die komplette Brillouin-Zone integriert wird. Zusammengefasst befindet sich das Teilchen nach einer Bloch-Periode wieder in seinem anfänglichen Zustand mit einem zusätzlichen Phasenfaktor. Es sei an dieser Stelle auf Abschnitt F hingewiesen, in welchem die Zeitentwicklung eines Wellenpaketes im Ortsraum beschrieben wird.

## 5.4 Bewegung im zweidimensionalen Quasiimpulsraum

Bei Anwesenheit einer Kraft  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  kommt es zu einer linearen Bewegung des atomaren Wellenpakets im zweidimensionalen Quasiimpulsraum. Um die Bewegung der Atome im reziproken Raum nachverfolgen zu können, werden wir in diesem Kapitel häufig Band-Mapping-Bilder der Atome vorstellen. In diesen werden Atome, die sich im  $n$ -ten Band befinden, auf die  $n$ -te Brillouin-Zone projiziert. Hierauf werden wir in Abschnitt 5.6 genauer eingehen. Die Band-Mapping-Bilder stellen den Quasiimpuls der Atome im erweiterten Zonenschema dar. Man kann die einzelnen Segmente der Brillouin-Zone des Bandes, in das die Atome geladen wurden, durch Addition von reziproken Gittervektoren auf die erste Brillouin-Zone projizieren, so dass man vom erweiterten zum reduzierten Zonen-Schema gelangt. Wenn die Atome in dieser Darstellung die Grenze der ersten Brillouin-Zone erreichen, findet eine Bragg-Reflexion statt. Dabei wird der Quasiimpuls um einen reziproken Gittervektor verschoben und die Atome



**Abbildung 5.1:** Bewegung eines atomaren Wellenpakets im zweidimensionalen Quasiimpulsraum bei Anwesenheit einer Kraft  $\vec{F} = (F_x, F_y)$ . Für ein rationales Verhältnis  $F_x/F_y = q/r$  ( $q, r \in \mathbb{Z}$ ) ergibt sich eine periodische Trajektorie. Im dargestellten Fall gilt  $F_x/F_y = 7/2$  und die Bewegung startet am  $\Gamma$ -Punkt der 1. Brillouin-Zone.

erscheinen an einer anderen Stelle der Brillouin-Zone-Grenze, von der aus sie ihren Weg durch den Quasiimpulsraum fortsetzen. Es ergibt sich eine Bewegung, wie in Abbildung 5.1 veranschaulicht.

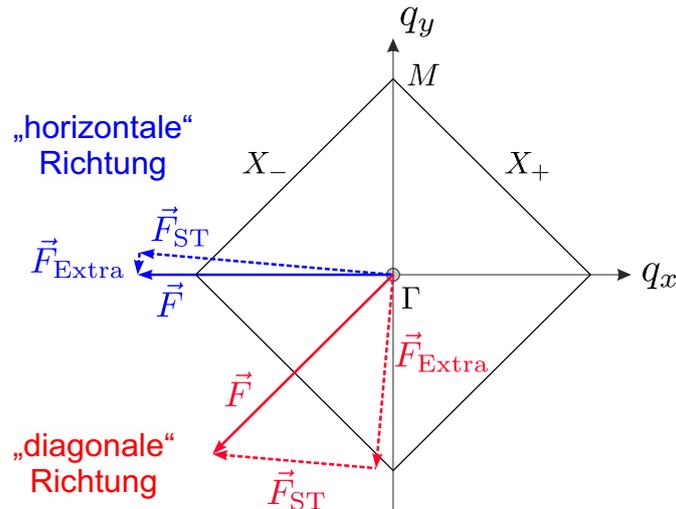
Solange die Kraft klein genug ist, dass die Adiabazitätsbedingung erfüllt wird und keine Landau-Zener-Übergänge stattfinden, besteht die Dynamik aus einer Superposition von zwei unabhängigen Bewegungen in  $q_x$ - und in  $q_y$ -Richtung [Kol03b, Wit04]. Beide Bewegungen stellen jeweils eine eindimensionale Bloch-Oszillation dar, mit den Bloch-Perioden  $T_{B,x} = \hbar/F_x k$  und  $T_{B,y} = \hbar/F_y k$ . Für ein rationales Verhältnis der Kraftkomponenten  $F_x/F_y = q/r$  ( $q, r \in \mathbb{Z}$ ) ergibt sich eine periodische Trajektorie. Man kann eine gesamte Bloch-Periode  $T_B$  definieren als das kleinste gemeinsame Vielfache von  $T_{B,x}$  und  $T_{B,y}$ .

Betrachtet man den Erwartungswert  $\langle \vec{r} \rangle$  der Position des Wellenpakets im Ortsraum, so erhält man für dessen Bewegung bei einem rationalen Verhältnis  $F_x/F_y$  ebenfalls eine Überlagerung von zwei orthogonalen Oszillationen in x- und y-Richtung, eine sogenannte *Lissajous-Oszillation*. Die Form der Lissajous-Figur hängt dabei vom Verhältnis der Bloch-Perioden in x- und in y-Richtung sowie von der Phasendifferenz zwischen den beiden eindimensionalen Oszillationen ab. Diese Phasendifferenz ist durch den Startpunkt der Bewegung im Quasiimpulsraum gegeben,  $\Delta\varphi = 2\pi(p_{0,x} - p_{0,y})/\hbar$ .

Im Rahmen dieser Arbeit untersuchen wir Bloch-Oszillationen für zwei verschiedene Richtungen der Kraft (siehe Abbildung 5.2):

- (a)  $\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot (-\vec{e}_x)$ ; die Kraft ist also entgegengesetzt gerichtet zum einlaufenden Strahl der x-Achse des Gitters; wir bezeichnen diese Richtung im Folgenden als die „horizontale“ Richtung.
- (b)  $\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot (-1/\sqrt{2})(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ ; diese Richtung wollen wir als die „diagonale“ Richtung bezeichnen.

Abbildung 5.2 veranschaulicht diese beiden Richtungen und stellt dar, wie sich



**Abbildung 5.2:** In dieser Arbeit untersuchte Trajektorien im zweidimensionalen Quasimpulsraum: horizontale Richtung  $\vec{F} = -\|\vec{F}\| \vec{e}_x$  und diagonale Richtung  $\vec{F} = -\|\vec{F}\| (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ . Für beide Richtungen ist dargestellt, wie sich die Gesamtkraft  $\vec{F}$  aus den Kraftkomponenten  $\vec{F}_{ST}$  und  $\vec{F}_{Extra}$  von kleiner Transferspule und Extra-Spule zusammensetzt.

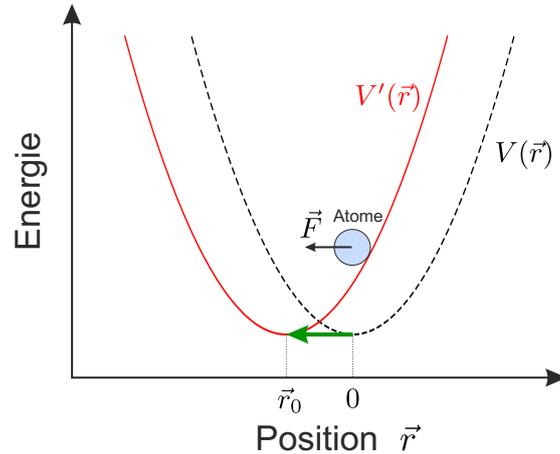
die resultierende Kraft aus den Einzelkräften der beiden Bloch-Spulen zusammensetzt. Auf diese Spulen kommen wir im nächsten Abschnitt zu sprechen.

## 5.5 Erzeugung eines Potenzialgradienten am Ort der Atome

Der Ausgangspunkt sind Atome, die in einem bestimmten Band im zweidimensionalen bipartiten Gitter kondensiert worden sind. Um Atome ins erste Band zu laden, wird die Gitterleistung innerhalb von 160 ms adiabatisch hochgerampft. Für eine Anregung der Atome in höhere Bänder wie das zweite oder vierte wird eine Sequenz verwendet, wie sie in Kapitel 4 beschrieben wurde.

### 5.5.1 Verschiebung des Fallenminimums

Für die Beobachtung von Bloch-Oszillationen im 2D-Gitter benötigen wir eine externe Kraft, deren Vektor in der Gitterebene (x-y-Ebene) liegt. Die Kraft kann durch eine instantane Verschiebung des Zentrums der Magnetfalle, in welcher sich das Bose-Einstein-Kondensat befindet, erzeugt werden, wie in Abbildung 5.3 dargestellt [Gre03a]. Wir betrachten ein dreidimensionales harmonisches Magnetfallenpotenzial, für das wir gleiche Frequenzen in den drei Raumrichtungen annehmen. Ohne Verschiebung hat das Potenzial die Form  $V(\vec{r}) = m/2 \omega_{\text{mag}}^2 (x^2 + y^2 + z^2)$ . Ein Verschieben des Fallenminimums um die Strecke  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)^T$  in der



**Abbildung 5.3:** Das Minimum des harmonischen Fallenpotenzials  $V(\vec{r})$  wird durch einen zusätzlichen magnetischen Feldgradienten instantan vom Ursprung zur Position  $\vec{r} = \vec{r}_0$  verschoben. Die Atome bleiben am Ort  $\vec{0}$  und erfahren im neuen Potenzial  $V'(\vec{r})$  die Kraft  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V'(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}}$ .

Gitterebene führt zum Potenzial

$$V'(\vec{r}) = \frac{m}{2}\omega_{\text{mag}}^2 ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2) \quad (5.15)$$

$$= \frac{m}{2}\omega_{\text{mag}}^2 (x^2 + y^2 + z^2) - m\omega_{\text{mag}}^2 (x_0 \cdot x + y_0 \cdot y) + \frac{m}{2}\omega_{\text{mag}}^2 (x_0^2 + y_0^2) \quad (5.16)$$

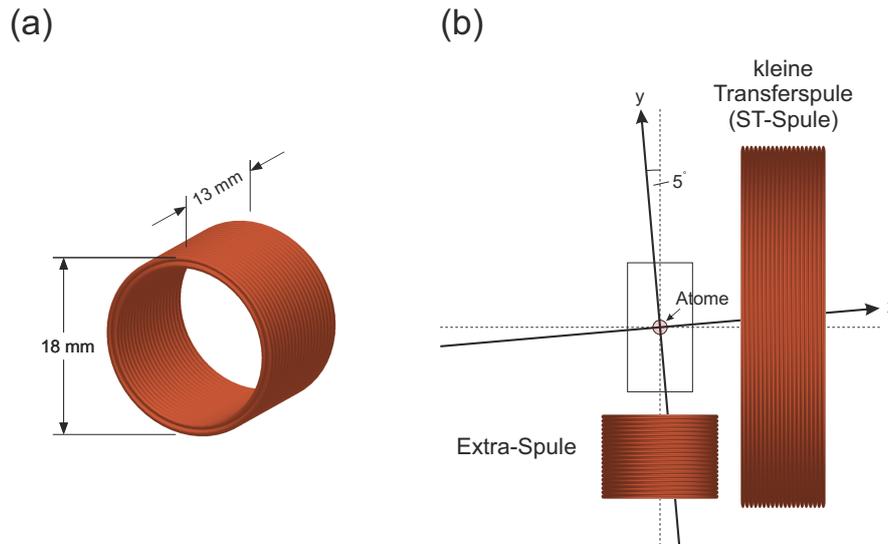
$$= V(\vec{r}) - \vec{\nabla}V(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0} \circ \vec{r} + c \quad (5.17)$$

Das Potenzial  $V'(\vec{r})$  mit verschobenem Fallenminimum ist die Summe von drei Termen: dem ursprünglichen Potenzial  $V(\vec{r})$ , einem Term mit linearer Abhängigkeit von den Koordinaten  $x$  und  $y$ , der den Gradienten an der Position des neuen Fallenminimums beinhaltet, und einem Offset  $c$ . Die Atome können der plötzlichen Verschiebung des Fallenminimums nicht folgen und befinden sich nach wie vor am Ort  $\vec{r} = \vec{0}$ . Im neuen Potenzial wirkt auf sie nun die Kraft

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V'(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \vec{\nabla}V(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_0}. \quad (5.18)$$

### 5.5.2 Spulen für die Erzeugung der Kraft

Erreichen lässt sich die Verschiebung des Fallenzentrums durch das Anlegen eines zusätzlichen magnetischen Offsetfeldes. In unserem experimentellen Aufbau werden hierfür zwei Magnetspulen genutzt, deren Achsen senkrecht zueinander stehen. Sie sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Eine der beiden Spulen ist die bereits in Kapitel 3 erwähnte kleine Transferspule (*ST-Spule*, vom Englischen *small transfer coil*). Diese wird im experimentellen Zyklus zur Erzeugung eines BECs für den magnetischen Transport der Atome in den Appendix der Glaszelle verwendet. Die ST-Spule besitzt 64 Windungen Kupferdraht, welche auf einen ebenfalls aus Kupfer bestehenden Spulenkörper aufgewickelt sind. Letzterer



**Abbildung 5.4:** Für die Erzeugung des magnetischen Offsetfeldes werden eine der beiden kleinen Transferspulen (ST-Spulen) sowie eine zusätzlich zum Spulenaufbau hinzugefügte Spule verwendet, welche als Extra-Spule bezeichnet wird. (a) Aussehen und Maße der Extra-Spule. Sie besteht aus zwei Lagen von Kupferdraht mit insgesamt 40 Windungen. (b) Position der beiden Spulen relativ zur Glaszelle und zu den Gitterachsen. Die Achsen beider Spulen stehen senkrecht zueinander und bilden mit der x- bzw. y-Achse des zweidimensionalen Gitters einen Winkel von  $5^\circ$ .

besitzt einen Durchmesser von 40 mm, und der Draht ist bis zu einem Außendurchmesser von 56 mm gewickelt worden. Die Spulenlänge beträgt 8 mm, und der Abstand des Spulenzentrums von den Atomen 16,5 mm. Für den elektrischen Widerstand der ST-Spule wurde  $R_{ST} = 0,5 \Omega$  gemessen. Weitere Parameter der ST-Spule sind in [Koc16a] aufgelistet. Die Achse der Spule besitzt einen Winkel von  $5^\circ$  bezüglich der x-Richtung des Gitters.

Beim in Abschnitt 3.1.6 beschriebenen magnetischen Transport der Rubidium-Atome in die Spitze des Appendix werden beide in unserer Apparatur vorhandenen kleinen Transferspulen verwendet. Sie werden von entgegengesetzt gerichteten gleichen Strömen durchflossen, so dass ein magnetisches Quadrupolfeld erzeugt wird. Für das Verschieben des Fallenzentrums der Magnetfalle, in welcher die Atome während der Experimente im optischen Gitter gefangen sind, ist nur eine der beiden Spulen notwendig. Eine spezielle elektrische Schaltung sorgt dafür, dass nur eine der beiden ST-Spulen während der Bloch-Oszillationen angesteuert wird.

Die zweite Spule für die Erzeugung eines Magnetfeldgradienten wurde nachträglich zu dem in Kapitel 3 vorgestellten Spulenaufbau hinzugefügt. Wir bezeichnen sie als *Extra-Spule*. Es handelt sich um 40 aneinandergeliebte<sup>1</sup> Windungen von Kupferdraht, wobei der Drahtdurchmesser 0,643 mm beträgt. Die Windungen verteilen sich auf zwei Schichten mit jeweils 20 Windungen. Die Spule besitzt einen äußeren Durchmesser von 18 mm und eine Länge von 13 mm. Das Spulenzentrum ist ungefähr 21 mm von den Atomen entfernt. Für den elektrischen Widerstand der Spule haben wir  $R_{\text{Extra}} = 0,2 \Omega$  gemessen. Befestigt ist die Spule

<sup>1</sup>Der verwendete Kleber ist „Loctite 9496“.

an einem Halter aus dickem Kupferdraht. Beim Design der Extra-Spule und ihres Halters wurde berücksichtigt, dass die Spule nah am Appendix positioniert werden kann, das heißt, dass sie in den engen Raum zwischen den beiden kleinen Transferspulen hineinpasst. Andererseits muss der y-Gitterrast nach wie vor die Atome erreichen können, ohne abgeschnitten zu werden. Wir wollen die ST- und die Extra-Spule, die die Kraft für den Transport der Atome im reziproken Raum erzeugen, im Folgenden als „Bloch-Spulen“ bezeichnen.

Die beiden Spulen sind über die sie steuernde elektronische Schaltung jeweils mit einer Kondensatorbank verbunden, also mehreren parallel geschalteten Kondensatoren gleichen Typs. Jede dieser Kondensatorbänke lässt sich auf eine manuell einstellbare Spannung aufladen. Über Polung und Stärke der Ströme durch die Bloch-Spulen lassen sich Richtung und Betrag der auf die Atome wirkenden Kraft einstellen. Die Gesamtkapazität der Kondensatoren zum Betrieb der kleinen Transferspule liegt bei  $\approx 200$  mF, für die Extra-Spule beträgt sie  $\approx 300$  mF. Diese großen Kapazitäten ermöglichen es, dass der Strom durch die Bloch-Spulen über die Zeit von einigen Millisekunden nahezu konstant gehalten werden kann. Die Zeit, in der sich mit unserer Apparatur kohärente Bloch-Oszillationen der Rubidiumatome beobachten lassen, liegt in dieser Größenordnung. Damit ist gewährleistet, dass auf die Atome während der Messung eine konstante Kraft wirkt. Die Ströme durch die Bloch-Spulen erreichen nach etwa  $100 \mu\text{s}$  ihr Maximum.

Die beiden Kondensatorbänke werden jeweils über ein separates Netzgerät mit Spannung versorgt. Der Strom für die Bloch-Oszillationen lässt sich nicht direkt durch die Netzgeräte bereitstellen, da deren Schaltzeiten deutlich größer sind als die hier benötigten Anschaltzeiten des Stromes.

## 5.6 Experimenteller Ablauf

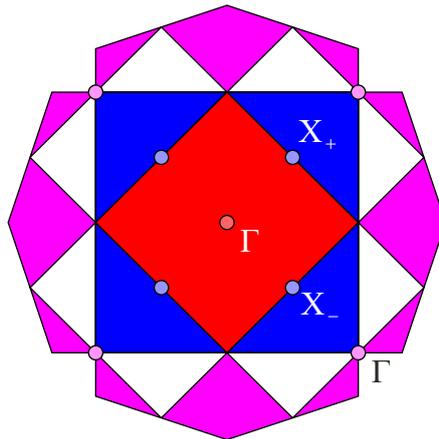
Vor der Aufnahme der in diesem Kapitel vorgestellten Messungen wurde eine Gitterkalibrierung durchgeführt, wobei mit Hilfe der in Abschnitt 3.6 beschriebenen Methode die Gitterparameter ermittelt wurden. Es ergaben sich hierbei die Werte:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0,939 & V_0 &= 76,16 E_{\text{rec}}/W \cdot P_L & (5.19) \\ \varepsilon_y &= 0,901 \\ \eta_y &= 1,041 \end{aligned}$$

$P_L$  steht für die Leistung des aus der Gitterfaser ausgekoppelten Laserlichts mit der Wellenlänge  $\lambda = 1064$  nm.

Es soll in diesem Abschnitt der experimentelle Ablauf bei der Messung von Bloch-Oszillationen in unserer Apparatur skizziert werden. Wir laden zunächst die Atome in das Band des optischen Gitters, in dem wir die Bloch-Oszillationen untersuchen wollen. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns dabei auf die folgenden drei Bänder:

- (a) 1. Band bei  $\vartheta = 0,500\pi$
- (b) 2. Band bei  $\vartheta = 0,535\pi$
- (c) 4. Band bei  $\vartheta = 0,600\pi$



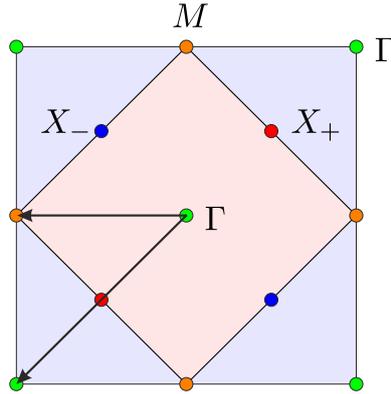
**Abbildung 5.5:** Brillouin-Zonen der Bänder 1, 2 und 4, in welchen im Rahmen dieser Arbeit Bloch-Oszillationen untersucht werden. Eingezeichnet sind die Kondensationspunkte der Atome in diesen Bändern, welche als Ausgangspunkte der Bloch-Oszillationen dienen.

In Kapitel 4 wurde beschrieben, wie ein Kondensat aus Rubidiumatomen in den verschiedenen Bändern erzeugt werden kann. Bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,535\pi$  besitzt die Lebensdauer im zweiten Band ihr Maximum aufgrund der geringen Besetzung der  $2p$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen. Entsprechend wird im vierten Band die Lebensdauer bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,600\pi$  maximal aufgrund der geringen Besetzung der  $3s$ -Orbitale in den tiefen Gittertöpfen.

Nach dem Laden in das zu untersuchende Band wird für eine variable Zeit  $t$  der elektrische Strom durch die beiden Bloch-Spulen schnell angeschaltet. Es kommt zur instantanen Verschiebung des Fallenminimums, so dass nun eine Kraft  $\vec{F}$  auf die Atome wirkt. Nach Gleichung 5.9 findet eine lineare Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum statt.

Die Ströme durch die beiden Bloch-Spulen werden nach der Zeit  $t$  ebenfalls instantan ausgeschaltet. Das Fallenminimum springt wieder an seine ursprüngliche Position  $\vec{r} = \vec{0}$  zurück – den Ort, an dem sich die Atome befinden. Es wirkt damit keine Kraft mehr auf die Atome und die Bewegung im reziproken Raum stoppt. Wir nehmen nun ein *Band-Mapping*-Bild der Atome auf. Hierbei wird die Lichtintensität des optischen Gitters innerhalb von 1,5 ms in einer annähernd exponentiellen Funktion heruntergerampt, anschließend wird die Magnetfalle instantan ausgeschaltet. Nach einer Flugzeit von  $t_{\text{TOF}} = 30$  ms, in welcher sich die atomare Wolke frei entwickeln kann, wird ein Absorptionsbild der Atome aufgenommen. Bei der Band-Mapping-Technik folgen die Atome dem Gitterpotenzial adiabatisch. Ein Bloch-Zustand im  $n$ -ten Band mit dem Quasiimpuls  $\vec{q}$  wird auf den Zustand eines freien Teilchens mit dem Impuls  $\vec{p}$  abgebildet.  $\vec{p}/\hbar$  liegt in der  $n$ -ten Brillouin-Zone und ist um einen reziproken Gittervektor gegenüber dem Quasiimpuls  $\vec{q}$  aus dem reduzierten Zonenschema verschoben.

Die Zeit  $t$ , während der die Kraft angeschaltet ist, wird in einer Messreihe variiert, um die Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum nachvollziehen zu können. Für jeden Wert von  $t$  werden drei Absorptionsbilder aufgenommen, welche



**Abbildung 5.6:** Symmetriepunkte der 1. und 2. Brillouin-Zone. Die Bewegung der Atome verläuft exakt in die horizontale Richtung, wenn sich bei einer Bewegung in der 1. Brillouin-Zone zu einem bestimmten Zeitpunkt eine symmetrische Besetzung der vier den  $M$ -Punkt repräsentierenden Punkte ergibt. Eine exakt in die diagonale Richtung verlaufende Bewegung liegt vor, wenn man bei einer Bloch-Zener-Oszillation zwischen dem ersten und zweiten Band zu einem bestimmten Zeitpunkt eine symmetrische Besetzung der vier Repräsentanten des  $\Gamma$ -Punktes des zweiten Bandes erhält.

im Auswertungsprozess gemittelt werden.

Der Startwert des Quasiimpulses  $\vec{q}_0$  entspricht den Kondensationspunkten  $(q_x, q_y)$  der Atome in den betrachteten Bändern. Beim Laden des BECs ins erste Band akkumulieren sich die Atome am  $\Gamma$ -Punkt  $(0, 0)$ . Wenn sie in das zweite Band geladen werden, kondensieren sie bei den eingestellten Gitterparametern 5.19 am  $X_+$ -Punkt, zu welchem die beiden äquivalenten Punkte  $\pm k/2 (1, 1)$  gehören. Im vierten Band findet wiederum eine Kondensation am  $\Gamma$ -Punkt statt. In Abbildung 5.5 ist das Aussehen der ersten, zweiten und vierten Brillouin-Zone dargestellt, auf welche die Atome im ersten, zweiten bzw. vierten Band mit Hilfe der Band-Mapping-Technik abgebildet werden. Eingezeichnet sind auch die genannten Kondensationspunkte der Bänder.

## 5.7 Einstellen der Spulenströme

Die kleine Transferspule und die Extra-Spule verschieben jeweils durch das von ihnen erzeugte Offset-Magnetfeld das Fallenminimum in Richtung ihrer Spulenachse. In die gleiche Richtung wirkt jeweils die von ihnen verursachte Kraft. Je größer der Strom durch eine der Spulen, desto größer ist die von ihr erzeugte Kraft. Die Polarität des Stroms bestimmt dabei das Vorzeichen der Kraft.

Bei Bloch-Oszillationen in der „horizontalen“ Richtung  $-\vec{e}_x$  wird die Kraft überwiegend von der kleinen Transferspule erzeugt. Da die Spulenachse mit der  $x$ -Achse des Gitters einen Winkel von etwa  $5^\circ$  bildet, ist auch eine kleine Kraft der Extra-Spule notwendig, um die Bewegung der Atome entlang des  $x$ -Gitterastes auszurichten, wie in Abbildung 5.2 dargestellt ist.

Um die Ströme der Bloch-Spulen genau so einzustellen, dass sich die Atome genau in die horizontale Richtung bewegen, wählen wir zunächst einen bestimmten Wert des Stromes durch die ST-Spule und passen anschließend die Bewegungs-

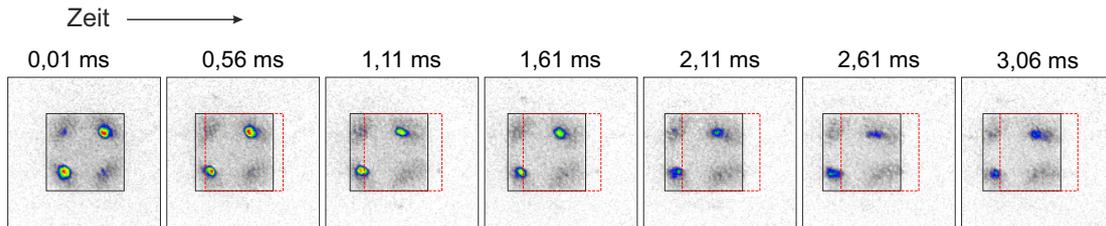
richtung mit Hilfe des Stromes durch die Extra-Spule präzise an. Man kann hierfür zum Beispiel die Atome im ersten Band bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,5\pi$  mit Hilfe der Band-Mapping-Technik betrachten. Zu Beginn befinden sie sich am  $\Gamma$ -Punkt. Bei optimaler Einstellung der Kraft in horizontaler Richtung bewegen sich die Atome auch nach möglichst vielen Perioden der Bloch-Oszillation noch genau durch den  $M$ -Punkt des ersten Bandes. Dass man diesen präzise trifft, lässt sich durch eine symmetrische Besetzung der vier äquivalenten Punkte, die den  $M$ -Punkt des ersten Bandes repräsentieren, sicherstellen. Diese vier Punkte sowie die weiteren Symmetriepunkte der ersten und zweiten Brillouin-Zone sind in Abbildung 5.6 dargestellt.

In der diagonalen Richtung tragen beide Bloch-Spulen ungefähr gleich stark zur Erzeugung der Kraft bei. Zum Einstellen der Ströme kann man beispielsweise ebenfalls Atome im ersten Band bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,5\pi$  betrachten. Wie oben beschrieben, sind die Anisotropieparameter des Gitters von eins verschieden, wodurch das unterste Band, welches man in der isotropen Situation  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \eta_y = 1$  vorfindet, in zwei Bänder mit geringem Bandabstand aufgespalten wird. Beim Beschleunigen des atomaren Wellenpakets in diagonalen Richtung kommt es ab einer gewissen Stärke der Kraft zum Übergang eines signifikanten Anteils der Atome in das zweite Band. Setzt man die Beschleunigung fort, kommt es zu einer Serie von Bloch-Zener-Oszillationen von Atomen zwischen dem ersten und zweiten Band. Wir können nun ein ähnliches Kriterium anwenden wie beim Einstellen der horizontalen Bewegungsrichtung: Die Kraft zeigt exakt in die diagonale Richtung, wenn es nach möglichst vielen Perioden der Bloch-Zener-Oszillation zwischen dem ersten und zweiten Band zu einer symmetrischen Besetzung an den vier Punkten kommt, die den  $\Gamma$ -Punkt der zweiten Brillouin-Zone repräsentieren.

Für die horizontale und die diagonale Kraftrichtung sollen in den einzelnen Bändern mehrere Messungen durchgeführt werden, bei denen der Betrag der Kraft variiert wird. Es wurden die in der folgenden Tabelle gezeigten Paare der Ströme ( $I_{ST}, I_{EC}$ ) von kleiner Transfer- und Extra-Spule ermittelt, für die sich eine horizontale bzw. diagonale Bewegung durch den Quasiimpulsraum ergibt:

#	horizontal		diagonal	
	$I_{ST}$ (mA)	$I_{EC}$ (mA)	$I_{ST}$ (mA)	$I_{EC}$ (A)
1	113	88	59	0,52
2	152	118	90	0,79
3	204	159	120	1,05
4	300	236	169	1,48
5	372	237	237	2,07
6	450	350	281	2,46

Man beachte, dass der Strom der Extra-Spule bei der horizontalen Kraftrichtung in Milliampere, bei der diagonalen Richtung hingegen in Ampere angegeben ist. Wie man sieht, wird für die diagonale Kraftrichtung ein Strom der Extra-Spule benötigt, der ungefähr neunmal so groß ist wie der der kleinen Transferspule. Dieser Unterschied in der benötigten Stromstärke ist dadurch zu erklären, dass



**Abbildung 5.7:** Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten bei der Bloch-Oszillation in horizontaler Richtung im zweiten Band bei den Spulenströmen  $(I_{ST}, I_{EC}) = (450 \text{ mA}, 350 \text{ mA})$ . Es wurden hier jeweils die Zeitpunkte ausgewählt, bei denen sich die Atome am  $X_+$ -Punkt befinden. Deutlich zeigt sich eine Verschiebung der Umrise der Brillouin-Zonen in die negative x-Richtung, wobei der Unterschied der Brillouin-Zonen-Position zwischen dem ersten und dem letzten Bild etwa 14 Bildpixel beträgt.

zum einen das Zentrum der Extra-Spule weiter von den Atomen entfernt ist als das der ST-Spule, und dass zum anderen die ST-Spule mehr als anderthalb mal so viele Windungen wie die Extra-Spule besitzt.

Die Bestimmung der Spulenströme erfolgt jeweils durch die Messung der an einem in Reihe geschalteten Leistungswiderstand  $R_L = 0,1 \Omega$  abfallenden Spannung.

Zu jedem der in der obigen Tabelle dargestellten Wertepaare wird eine Messreihe mit Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Band aufgenommen.

## 5.8 Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise während einer Messreihe

Bevor wir uns den beobachteten Bloch-Oszillationen in den verschiedenen Bändern zuwenden, wollen wir unser Augenmerk auf einen Effekt richten, der sich in allen Bloch-Oszillations-Messungen bemerkbar macht. Dazu wollen wir beispielhaft Band-Mapping-Bilder betrachten, die wir bei der Messung im zweiten Band in horizontaler Richtung (Spulenströme  $(I_{ST}, I_{EC}) = (450 \text{ mA}, 350 \text{ mA})$ ) aufgenommen haben und die in Abbildung 5.7 dargestellt sind. Es wurden hierbei die Zeitpunkte ausgesucht, an denen sich der kohärente Anteil der Atome am  $X_+$ -Punkt befindet.

Im atomaren Ensemble ist ein geringer inkohärenter Hintergrund vorhanden, welcher sich in den Band-Mapping-Bildern vor allem in einer homogenen Besetzung der zweiten, in geringerer Stärke auch der ersten Brillouin-Zone zeigt. Es handelt sich hierbei um thermische Atome, die nicht in den jeweiligen Bändern kondensiert sind. Mit unserer Anregungsmethode haben wir das zweite Bloch-Band adressiert, die Atome in der ersten Brillouin-Zone stammen aus einem Zerfall von Atomen aus dem zweiten in das erste Band. Betrachtet man nun die Umrise der Brillouin-Zonen in den einzelnen Bildern, so ist zu erkennen, dass sich diese mit der Zeit immer weiter nach links bewegen. Zwischen dem ersten Bild bei  $t = 0,01 \text{ ms}$  und dem letzten bei  $3,06 \text{ ms}$  beträgt die Verschiebung etwa 15 Pixel.

Eine solche Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umriss mit der Zeit lässt sich in verschiedener Stärke bei allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Bloch-Oszillations-Messungen feststellen. Bei den Messungen mit horizontaler Krafrichtung verschieben sich die Brillouin-Zonen fast ausschließlich parallel zur x-Achse. Bei diagonaler Krafrichtung findet auch eine Verschiebung in y-Richtung statt, jedoch in etwas geringerem Maße als in x-Richtung. Die Verschiebung wächst mit zunehmender Zeit immer weiter an, wobei sie sich exponentiell einem Grenzwert anzunähern scheint. Dieser Grenzwert ist umso größer, je größer der Betrag der Kraft ist.

Wir sind daran interessiert, die Bewegung der kohärenten Atome im Quasiimpulsraum zu untersuchen. Hierbei kommt es auf die Position der Atome relativ zu den einzelnen Brillouin-Zonen-Umrissen an. Um diese Bewegung analysieren zu können, ist es notwendig, die Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umriss aus den Bildern herauszurechnen. Mit welcher Methode dies gelingt, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

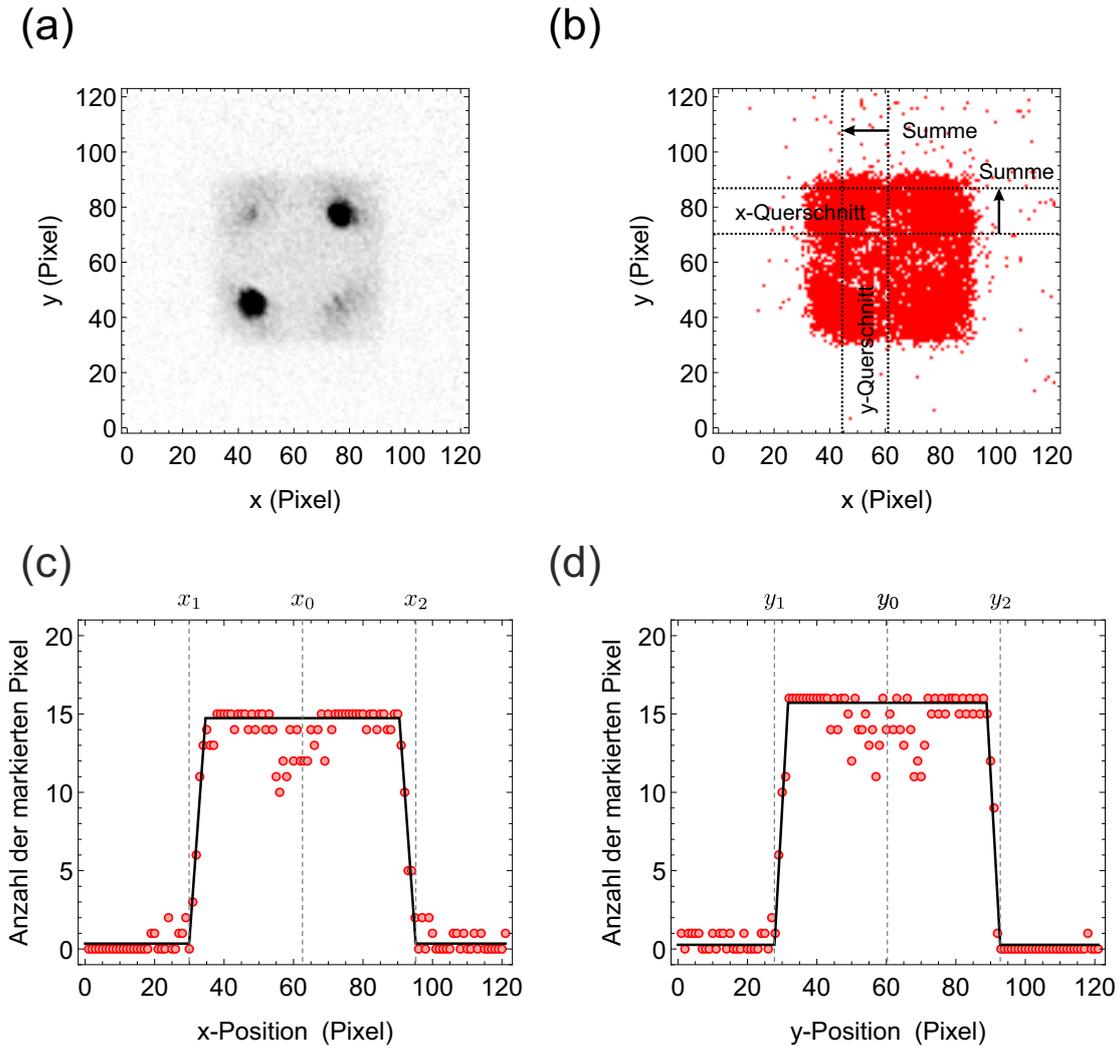
### 5.8.1 Querschnitte durch die Brillouin-Zonen

Wir wollen in diesem Abschnitt einen detaillierteren Blick darauf werfen, wie sich die von der Zeit abhängende Position der Brillouin-Zonen-Umriss bestimmen lässt. Dazu betrachten wir wieder exemplarisch die bereits im vorherigen Abschnitt erwähnte Messung in horizontaler Krafrichtung im zweiten Band (siehe Abbildung 5.7).

Die nach dem Experimentdurchlauf mittels Absorptionsabbildung aufgenommenen Bilder der Atome werden mit Hilfe der Labview-Auswertungssoftware so umgerechnet, dass die einzelnen Pixelwerte die Anzahl der Atome im Bereich des Pixels darstellen. Die verschiedenen zum gleichen Zeitpunkt  $t$  gehörenden Aufnahmen werden gemittelt. Wir normieren diese gemittelten Bilder nun so, dass alle Pixelwerte einer Messreihe zwischen null und eins liegen. Dafür dividieren wir alle Pixelwerte durch den maximalen Pixelwert aller gemittelten Bilder der Messung. Man erhält ein Graustufenbild wie das in Abbildung 5.8(a).

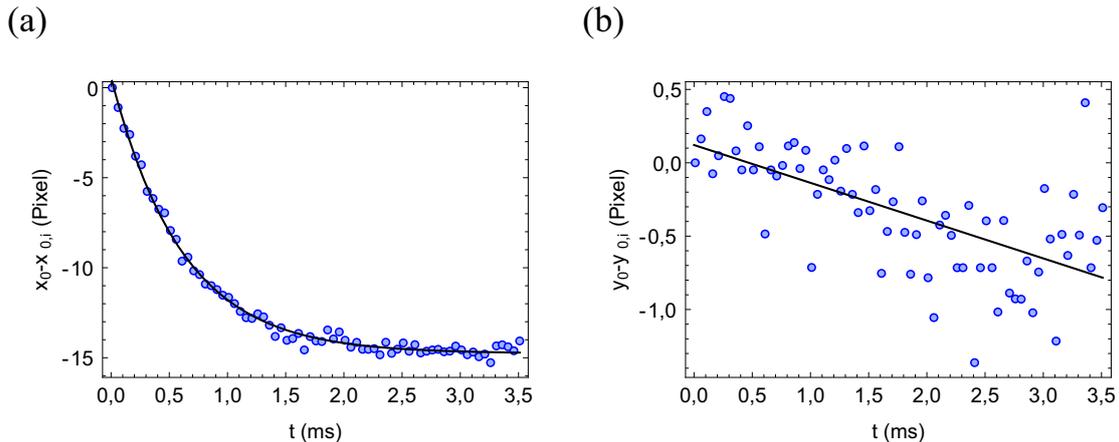
Für die Bestimmung der Verschiebungstrecke in Abhängigkeit von der Zeit ist es hilfreich, den Umriss der besetzten Brillouin-Zonen, im betrachteten Beispiel der zweiten, zu markieren. Wir legen nun einen bestimmten Schwellenwert fest und wählen in jedem normierten Graustufenbild diejenigen Pixel aus, deren Werte oberhalb dieser Schwelle liegen. Der Schwellenwert muss groß genug sein, dass möglichst wenige Pixel außerhalb der ersten und zweiten Brillouin-Zone ausgewählt werden. Er muss jedoch klein genug sein, dass nach Möglichkeit die gesamte zweite Brillouin-Zone, eventuell auch die erste Brillouin-Zone, ausgewählt werden. In Abbildung 5.8(b) sind die in (a) ausgewählten Pixel im Bereich der ersten und zweiten Brillouin-Zone rot markiert dargestellt. Den ausgewählten Punkten weisen wir nun den Wert 1 zu, allen anderen den Wert 0, so dass man ein binäres Bild erhält.

Wir wollen nun die Querschnitte in x- und y-Richtung in diesem Bild bestimmen. Für den Querschnitt in x-Richtung betrachten wir den in Abbildung 5.8(b) eingezeichneten horizontalen Streifen. Für jede Position in x-Richtung summieren



**Abbildung 5.8:** Bestimmung der Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise durch Betrachtung von Querschnitten durch die Band-Mapping-Bilder. (a) Band-Mapping-Aufnahme einer Messung im zweiten Band in Graustufendarstellung. Normiert man alle Pixelwerte auf Zahlen zwischen 0 und 1 und wählt alle Pixel aus, die größer sind als ein Schwellenwert von 0,05 (rot markiert), erhält man das Bild in (b). Der horizontale und vertikale Streifen geben den Bereich an, in dem der Querschnitt in x- bzw. y-Richtung bestimmt wird. (c),(d) Querschnitte durch das binäre Bild in x- bzw. y-Richtung. Um schärfere Kurven zu erhalten, wurde für den x-Querschnitt bei jeder x-Position über eine Breite von 16 Pixeln in y-Richtung summiert. Analog wurde beim y-Querschnitt vorgegangen.

wir die Pixelwerte entlang der Breite des Streifens auf, welche hier 16 Pixel beträgt. Dabei ergibt sich das in Abbildung 5.8(c) dargestellte Profil. Da die einzelnen Pixel nur die Werte null oder eins annehmen können, ergibt sich für die Summe jeweils eine natürliche Zahl. Der Grund für die Summation ist, dass sich dadurch schärfere Kanten im Profil ergeben. An der Stelle, an der die zweite Brillouin-Zone beginnt, ist im Profil ein Sprung von 0 auf einen konstanten höheren Wert zu sehen; dort, wo sie endet, springt die Summe der Pixelwerte wieder auf 0 zurück. Analog zur x-Richtung gehen wir auch in der y-Richtung



**Abbildung 5.9:** Verschiebung des Brillouin-Zonen-Mittelpunktes  $(x_0; y_0)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  bei der Messung im zweiten Band mit den Spulenströmen  $(I_{ST}; I_{EC}) = (450 \text{ mA}; 350 \text{ mA})$ . (a) und (b) zeigen die Verschiebung von  $x_0$  bzw.  $y_0$ . Die Koordinaten werden hierbei relativ zu denen zum Zeitpunkt  $t_i = 0,01 \text{ ms}$  angegeben. Die durchgezogenen Linien stellen Fits an die Daten dar. Im Fall der x-Koordinate wurde ein exponentieller Fit verwendet, im Fall der y-Koordinate ein linearer Fit.

vor.

Das die ersten beiden Brillouin-Zonen repräsentierende Plateau im x-Profil hat ungefähr die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Wenn wir einen entsprechenden Fit durchführen, werden dabei die in der Abbildung eingezeichneten Parameter  $x_1$  und  $x_2$  bestimmt. Das Zentrum des Plateaus befindet sich dann an der Position  $x_0 = (x_2 - x_1)/2$ . Ein analoger Zusammenhang gilt für die y-Richtung. Wir erhalten auf diese Weise den Mittelpunkt  $(x_0; y_0)$  der Brillouin-Zonen-Struktur.

Wendet man diese Methode auf alle Bilder einer Messung an, lässt sich die Verschiebung des Brillouin-Zonen-Mittelpunkts in Abhängigkeit von der Zeit bestimmen. Die Abbildungen 5.9(a) und (b) zeigen die mit dieser Methode ermittelte Verschiebung in x- bzw. y-Richtung. Die Position des Brillouin-Zonen-Mittelpunkts wird hierbei relativ zu  $x_{0,i}$  bzw.  $y_{0,i}$  angegeben, den Koordinaten zum ersten Messzeitpunkt  $t_i = 0,01 \text{ ms}$ . Man kann erkennen, dass sich der Brillouin-Zonen-Mittelpunkt nach 3,5 ms um etwa 15 Pixel in die negative x-Richtung verschoben hat. Die Punkte der Verschiebung in x-Richtung lassen sich gut fitten durch eine exponentiell abfallende Funktion. In y-Richtung findet während der Messung nur eine kleine Verschiebung statt, wobei die Streubreite um diesen Fit annähernd so groß ist wie die Änderung des Funktionswertes des Fits in der betrachteten Zeit.

In einigen Band-Mapping-Bildern der in diesem Abschnitt betrachteten Messung in horizontaler Richtung im zweiten Band befindet sich das Wellenpaket der Bloch-oszillierenden Atome am Rande der zweiten Brillouin-Zone oder ragt aufgrund der Wechselwirkungsverbreiterung sogar aus der zweiten Brillouin-Zone in den Raum höherer Brillouin-Zonen heraus. Für jeden Zeitpunkt ist darauf zu achten, dass der Streifen für die Berechnung des Querschnittes in x-Richtung nicht in einem Bereich von über die Brillouin-Zone herausragenden kohärenten Atomen liegt.

In diesem Abschnitt haben wir die Bestimmung der Brillouin-Zonen-Verschiebung exemplarisch für eine Messreihe im zweiten Band in horizontaler Richtung der Kraft demonstriert. Für die Messungen in diagonaler Krafrichtung im zweiten Band kann man analog vorgehen. Auf ähnliche Weise lässt sich auch für die Messungen in den Bändern eins und vier bei horizontaler sowie diagonaler Krafrichtung die Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise bestimmen. Für gleiche Ströme durch die Bloch-Spulen ergibt sich für das erste und vierte Band hierbei eine ähnliche Verschiebung wie für das zweite Band.

Anstelle der Betrachtung von Querschnitten durch Binärbilder könnte man sich prinzipiell auch die Querschnitte in den Graustufenbildern anschauen, in welchen die Pixel beliebige Werte zwischen null und eins annehmen können. Dabei müsste jedoch eine kompliziertere Fitfunktion verwendet werden, die sich aus mehreren Gauß-Funktionen zusammensetzt. Dies liefert nicht so gute Ergebnisse wie das Fitten der Querschnitte der Binärbilder mit Hilfe der trapezförmigen Funktion.

Bei den im Folgenden in der Arbeit vorgestellten Messungen ist die Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise aus den Bildern herausgerechnet worden. Bei den Band-Mapping-Bildern, die wir vorstellen werden, befinden sich die Brillouin-Zonen-Umrise daher immer an der gleichen Stelle.

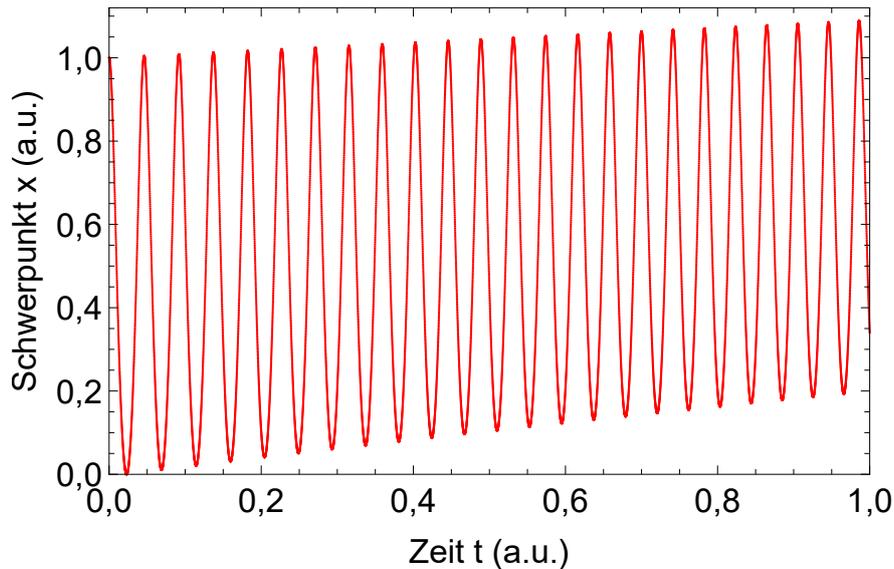
## 5.8.2 Ursache der Verschiebung

Es stellt sich die Frage, woher die zeitliche Verschiebung der Brillouin-Zonen-Umrise kommt. Nach den semiklassischen Gleichungen würde man diese nicht erwarten.

Bei der Beschreibung von Bloch-Oszillationen von Atomen im optischen Gitter macht man die idealisierte Annahme, dass die Kraft auf die Atome räumlich und damit auch zeitlich konstant ist. Zudem geht man von einer unendlichen Ausdehnung des Gitterpotenzials und damit der Bloch-Funktionen aus. Mit diesen Annahmen lassen sich die semiklassischen Bewegungsgleichungen 5.2 und 5.3 herleiten, die uns zur theoretischen Beschreibung der Bloch-Oszillationen dienen.

Im Experiment befinden sich die Atome in einem kombinierten Potenzial aus dem periodischen Gitter und der harmonischen Magnetfalle. Beim Verschieben des Fallenminimums durch einen zusätzlichen Magnetfeldgradienten ergibt sich für die Atome eine lineare Abhängigkeit der Kraft von der Position. Eine räumlich konstante Kraft würde nur für ein lineares Magnetfallenpotenzial vorliegen. Das harmonische Magnetfallenpotenzial im Experiment lässt sich in einer Dimension schreiben als  $V_{\text{trap}}(x) = 1/2 m\omega^2 x^2$ , mit der Fallenfrequenz  $\omega$ . Während der Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum verändert sich auch ihre Position im Ortsraum geringfügig, so dass die Kraft linear in dem Bereich variiert, in dem sich die Atome bewegen.

Es sei  $x(t)$  der Schwerpunkt des atomaren Wellenpakets im Ortsraum. Verwendet man in den semiklassischen Bewegungsgleichungen die Tight-Binding-Bandenergie C.8 aus Anhang C, so erhält man für den Schwerpunkt und den



**Abbildung 5.10:** Theoretisch berechnete Bewegung des Schwerpunkts eines atomaren Wellenpakets während einer Bloch-Oszillation in Abhängigkeit von der Zeit. Man erkennt, dass sich der Nulldurchgang der Oszillation mit zunehmender Zeit immer weiter nach oben verschiebt.

Quasiimpuls des Wellenpakets die folgenden Gleichungen:

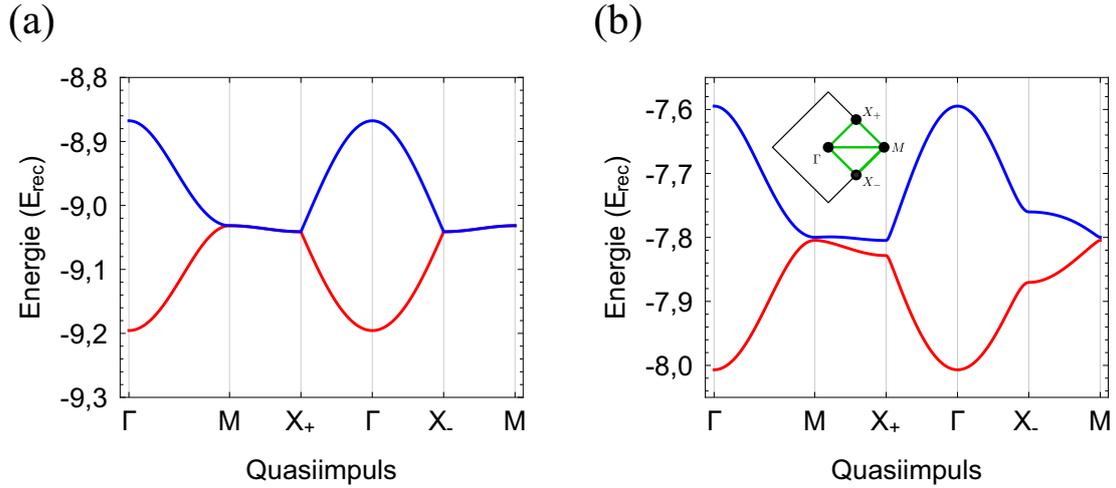
$$\frac{\partial}{\partial t}x(t) = 2Ja \sin(qa) \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t) = \frac{1}{\hbar}\langle F \rangle(t) \quad (5.21)$$

$J$  ist hierbei die Tunnelamplitude für das Tunneln zwischen benachbarten Gitterplätzen. Integriert man Gleichung 5.21 und setzt für die Kraft  $\langle F \rangle = -\partial V_{\text{trap}}(x)/\partial x = -m\omega^2 x$  ein, so ergibt sich:

$$q(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' \langle F \rangle(x(t')) + q_0 = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' m\omega^2 x(t') + q_0 \quad (5.22)$$

Diese Gleichung lässt sich numerisch lösen, indem man von einer Startposition  $x_0$  ausgeht und nun berechnet, wie sich  $x$  in sehr kleinen Zeitintervallen  $\Delta t$  gemäß dem Wert der Kraft zu dem jeweiligen Zeitpunkt ändert. Auf diese Weise kann man die zeitliche Entwicklung des Schwerpunktes bestimmen. Diese ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Man kann erkennen, dass  $x$  oszilliert und sich die Ruheposition der Oszillation mit der Zeit verschiebt. Es kann mit dieser näherungsweisen Lösung nicht die annähernd exponentielle zeitliche Verschiebung der Ruheposition aus dem Experiment reproduziert werden. Jedoch stimmt das Resultat qualitativ mit dem Experiment überein in der Hinsicht, dass die Verschiebung mit zunehmender Zeit anwächst, wobei ihre Änderungsrate abnimmt.



**Abbildung 5.11:** Bandstrukturrechnung der ersten beiden Bänder des bipartiten quadratischen Gitters bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,50\pi$  und der Gittertiefe  $V_0 = 6,9 E_{\text{rec}}$ . (a) Isotroper Fall  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \eta_y = 1$ . Es liegt ein einfaches quadratisches Gitter vor. (b) Anisotroper Fall mit den bei den BO-Messungen im ersten Band verwendeten Parametern  $\varepsilon_x = 0,94$ ,  $\varepsilon_y = 1,04$ ,  $\eta_y = 0,90$ . Die Bandenergien sind jeweils dargestellt entlang des in (b) eingezeichneten Pfades in der kleineren, um  $45^\circ$  gedrehten ersten Brillouin-Zone.

## 5.9 Messungen mit „horizontaler“ Richtung der Kraft

Wir wenden uns nun der Untersuchung von Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Bloch-Band des bipartiten quadratischen Gitters zu. In diesem Abschnitt wollen wir Messungen mit horizontaler Richtung der Kraft präsentieren. Es wird dabei für jedes betrachtete exemplarisch eine Messung vorgestellt und erläutert, auf welche Weise sie analysiert werden kann. Ziel ist es dabei, den Quasiimpuls in Abhängigkeit von der Zeit darzustellen und die Frequenz der Bloch-Oszillation zu ermitteln.

### 5.9.1 Erstes Band

Zunächst sollen Bloch-Oszillationen im ersten Band untersucht werden. Die Zeitphasendifferenz des Gitters wird dabei auf  $\vartheta = 0,50\pi$  eingestellt.

Im idealen Fall, dass die Intensitäten der Gitterstrahlen perfekt ausgeglichen sind, würde für die Anisotropieparameter  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \eta_y = 1$  gelten und es läge ein einfaches quadratisches Gitter vor. Die natürliche Wahl für die erste Brillouin-Zone wäre dann das größere Quadrat, dessen Kanten in x- und y-Richtung ausgerichtet sind. Wir können die Bandstruktur eines solchen Gitters jedoch auch mit der kleineren, um  $45^\circ$  gedrehten ersten Brillouin-Zone als Definitionsbereich darstellen. Hierbei erscheint das unterste Band als zwei Bänder, die entlang der Pfade  $MX_+$  und  $X_-M$ , welche auf der Grenze der Brillouin-Zone liegen, entartet sind. Dies ist in Abbildung 5.11(a) zu sehen.

Da die Anisotropieparameter, wie in Gleichung 5.19 angegeben, gibt es Ab-

weichungen der Bandstruktur von der des einfachen quadratischen Gitters. Die Bandstruktur der Bänder eins und zwei für die im Experiment eingestellten Parameter wird in Abbildung 5.11(b) gezeigt. Die im isotropen Fall bestehende Entartung entlang der Pfade  $MX_+$  und  $MX_-$  ist aufgehoben, es kommt zur Entstehung einer Bandlücke. Die Bandstrukturrechnung ergibt, dass der Abstand der beiden Bänder am  $M$ -Punkt  $0,005 E_{\text{rec}}$ , am  $X_+$ -Punkt  $0,024 E_{\text{rec}}$  und am  $X_-$ -Punkt  $0,110 E_{\text{rec}}$  beträgt. Eine Folge der Anisotropie des Gitters ist also, dass der Bandabstand am  $X_+$ - und am  $X_-$ -Punkt unterschiedlich groß ist.

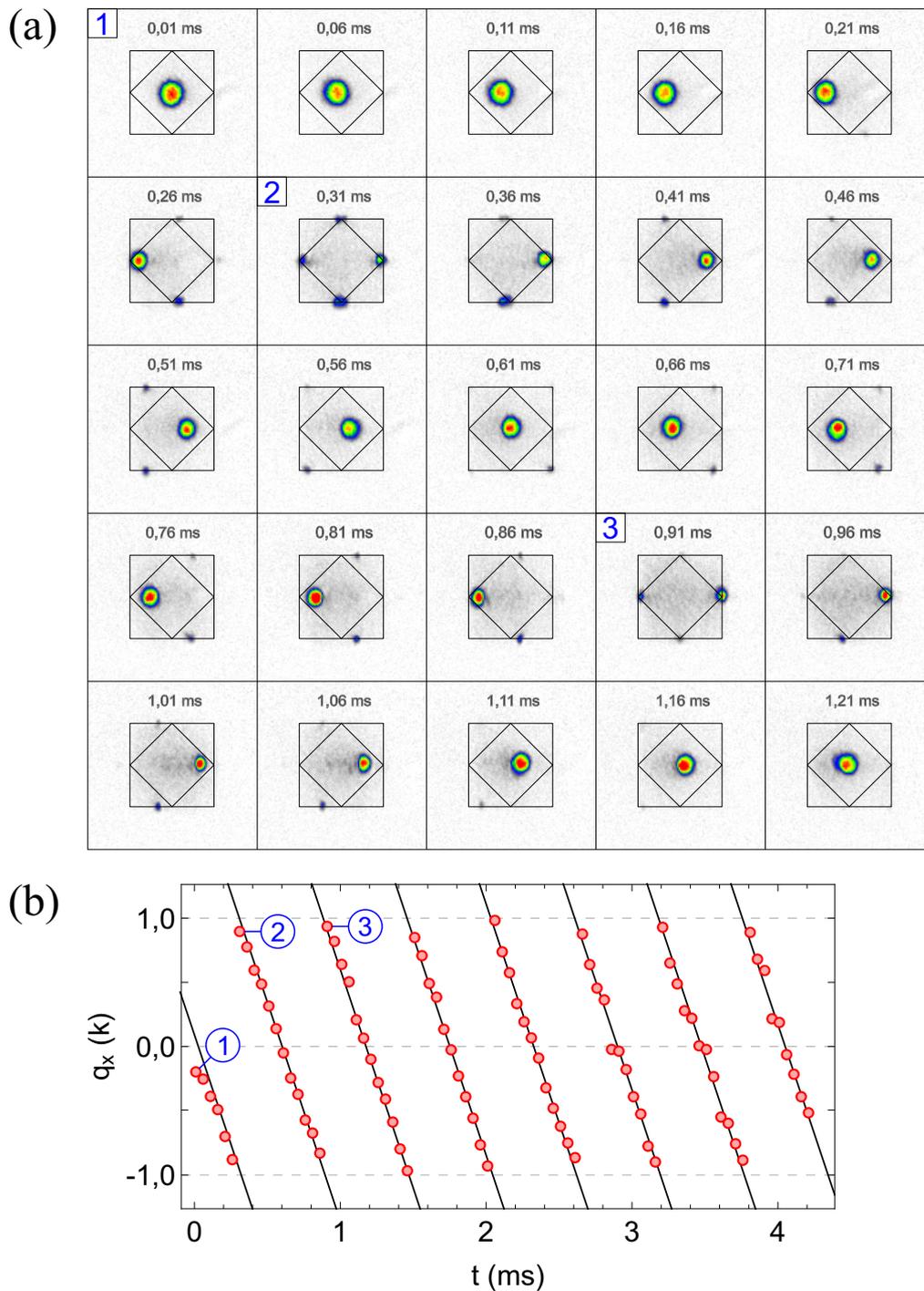
In Abbildung 5.12(a) sind beispielhaft Band-Mapping-Bilder der Messung im ersten Band bei den Spulenströmen  $(I_{\text{ST}}, I_{\text{ST}}) = (372 \text{ mA}, 289 \text{ mA})$  zu sehen. Dargestellt sind die Bilder bis zu einer Zeit von 1,21 ms. Die Atome bewegen sich während der Bloch-Oszillation in die negative  $x$ -Richtung, wobei sich nach Gleichung 5.9 eine lineare Bewegung ergibt.

Das Wellenpaket mit den kohärenten Atomen startet am  $\Gamma$ -Punkt  $(0, 0)$  und bewegt sich in Richtung des den  $M$ -Punkt repräsentieren Punktes  $k(-1, 0)$ , welchen sie nach etwa 0,3 ms erreicht. Die Angabe der Punkte im Quasiimpulsraum erfolgt hier jeweils in den Koordinaten  $(q_x, q_y)$ . Es findet nun Bragg-Reflexion statt, so dass die Atome an den vier Eckpunkten der ersten Brillouin-Zone,  $k(\pm 1, 0)$  und  $k(0 \pm 1)$ , die für den  $M$ -Punkt stehen, auftreten.

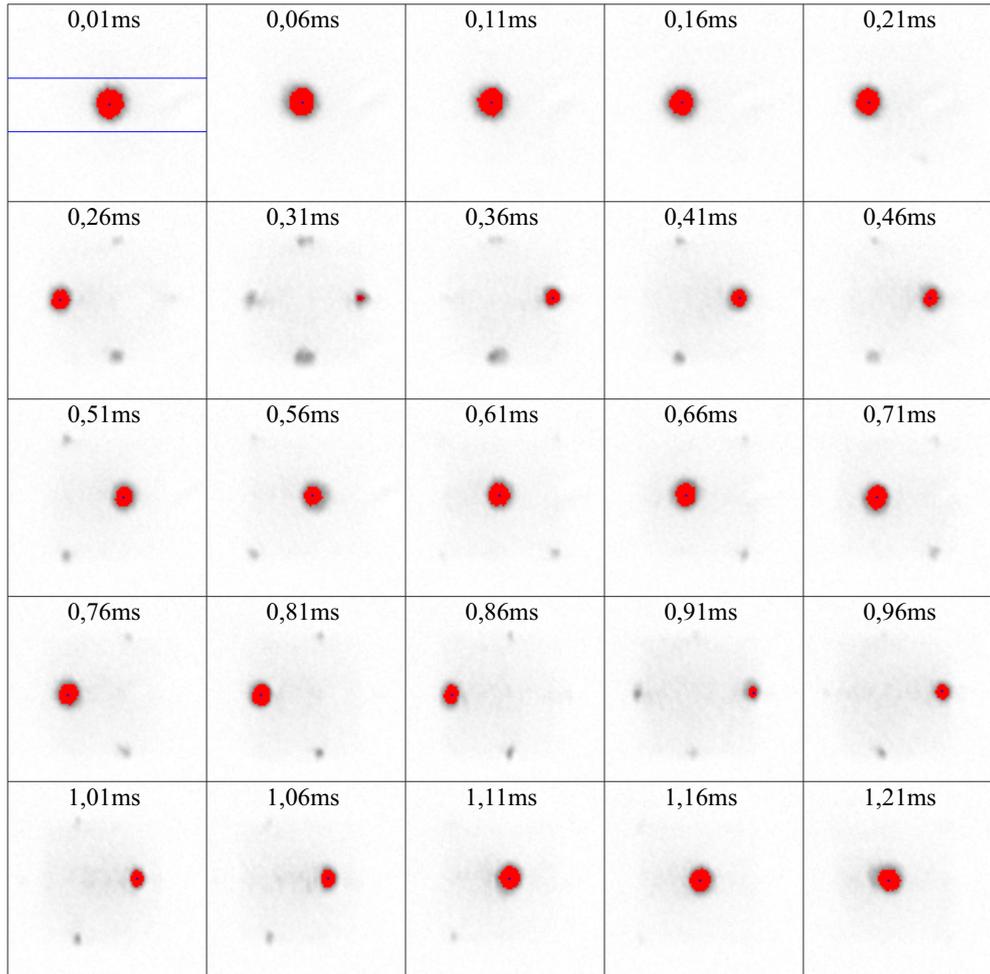
Bragg-Reflexion im optischen Gitter erfolgt analog zur Beugung von Licht am Kristallgitter eines Festkörpers. Es wird eine Materiewelle an einer Lichtstruktur gebeugt, wobei die wellenartigen Atome für bestimmte Werte des Wellenvektors sehr stark mit dem Potenzial wechselwirken [Pei97]. Bragg-Reflexion findet für alle Wellenvektoren der atomaren Welle statt, die auf den Rändern der Brillouin-Zonen enden. Diese Brillouin-Zonen-Ränder stellen die Bragg-Linien dar, auf welchen die *Bragg-Bedingung* erfüllt wird. Diese ist äquivalent zur *von-Laue-Bedingung*. Ein Wellenvektor  $\vec{k}$  erfüllt diese Bedingung, wenn ein anderer Wellenvektor  $\vec{k}'$  mit  $\|\vec{k}'\| = \|\vec{k}\|$  und ein reziproker Gittervektor  $\vec{G}$  existieren, so dass  $\vec{k}' - \vec{k} = \vec{G}$  gilt. Es entsteht dann eine reflektierte Welle mit einem betragsmäßig gleichgroßen Wellenvektor  $\vec{k}'$ , der bezüglich des Wellenvektors  $\vec{k}$  der einlaufenden Welle um einen reziproken Gittervektor  $\vec{G}$  verschoben ist. Die vier den  $M$ -Punkt repräsentierenden Punkte im Quasiimpulsraum unterscheiden sich untereinander jeweils um einen reziproken Gittervektor und sind damit über die Bragg-Reflexion miteinander gekoppelt.

Die Atome gelangen bei der weiteren Bewegung im reziproken Raum durch Bragg-Reflexion an den rechten Eckpunkt der ersten Brillouin-Zone, von wo aus sie wieder zurück zum  $\Gamma$ -Punkt transportiert werden. Hier beginnt der Prozess von Neuem. Es ergibt sich also eine periodische Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum – eine Bloch-Oszillation. Diese ist ein Quanteneffekt, der in der Wellen-Natur der Atome begründet ist.

Durch den geringen Abstand zwischen dem ersten und zweiten Band am  $M$ -Punkt können an dieser Stelle Landau-Zener-Übergänge stattfinden, wobei ein Teil der Atome aus dem ersten in das zweite Band übergeht. In den Band-Mapping-Bildern kann man dies für  $t > 0,31 \text{ ms}$  sehen: Der Großteil der Atome bewegt sich weiterhin in der ersten Brillouin-Zone und befindet sich damit im ersten Band. Man kann jedoch deutlich am oberen und unteren Rand



**Abbildung 5.12:** Bloch-Oszillation im ersten Band bei horizontaler Kraftrichtung (Spulenströme  $(I_{ST}, I_{EC}) = (372 \text{ mA}, 289 \text{ mA})$ ). (a) Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten während der Messung. (b) Komponente  $q_x$  des mittleren Quasiimpulses des sich durch den Quasiimpulsraum bewegenden atomaren Wellenpakets in Abhängigkeit von der Zeit. Die Zahlen an einzelnen Messpunkten vereinfachen die Zuordnung der entsprechenden Band-Mapping-Bilder. Die durchgezogenen Linien stellen einen stückweise linearen Fit an die Messpunkte dar. Für die Bloch-Periode ergibt sich aus dem Fit  $T_{BO} = (0,573 \pm 0,009) \text{ ms}$ .



**Abbildung 5.13:** Selektierte Regionen (rot markiert) der kohärenten Atome bei der in diesem Abschnitt betrachteten Messung im ersten Band bei horizontaler Krafrichtung (Spulenströme  $(I_{ST}, I_{EC}) = (372 \text{ mA}, 289 \text{ mA})$ ). Aus den selektierten Pixeln wird der mittlere Quasiimpuls des atomaren Wellenpakets berechnet.

Atome erkennen, die eine Bewegung in der zweiten Brillouin-Zone ausführen. Außerdem ist in den Bildern sichtbar, dass während der Bloch-Oszillation durch Streuprozesse thermische Atome entstehen, welche die ersten beiden Bänder zunehmend auf homogene Weise ausfüllen. Es soll nun eine Darstellung der Position der kohärenten Atome im Quasiimpulsraum in Abhängigkeit von der Zeit gefunden werden, aus welcher sich die Periodendauer der Bloch-Oszillation durch einen Fit ermitteln lässt.

In den Band-Mapping-Bildern heben sich die kohärenten Atome durch eine deutlich höhere optische Dichte vom thermischen Hintergrund ab. Die thermischen Atome besetzen die erste Brillouin-Zone und auch die zweite, da das zweite Band nur durch eine kleine Bandlücke vom ersten Band getrennt ist. Wir wollen nun in den Band-Mapping-Bildern jeweils die Regionen auswählen, die zu den kohärenten Atomen gehören. Dies geschieht dadurch, dass wir einen bestimmten Schwellenwert festlegen und alle Pixel selektieren, deren Werte größer als dieser Schwellenwert sind. Dieser muss die folgenden Eigenschaften haben: Einerseits

sollen nach Möglichkeit alle Pixel im Bereich der kohärenten Atome ausgewählt werden. Auf der anderen Seite sollen in der Auswahl keine Pixel im Bereich des inkohärenten thermischen Hintergrunds vorhanden sein.

Abbildung 5.13 zeigt die in verschiedenen Band-Mapping-Bildern ausgewählten Bereiche kohärenter Atome, welche hier rot markiert sind. Zur Vereinfachung der Analyse beschränken wir den Bildbereich auf einen horizontalen Streifen in der Mitte, wie im ersten Bild angedeutet. Wir erhalten dadurch bei der Bestimmung der x-Komponente des Quasiimpulses eine Kurve, die sich besser mit Hilfe von linearen Funktionen fitten lässt. Die kohärenten Atome bilden innerhalb dieses Streifens ein oder – wenn sie sich in der Umgebung des  $M$ -Punktes befinden –, auch zwei Wellenpakete. In letzterem Fall, dass zwei Wellenpakete im Streifen vorliegen, wählen wir nur die Pixel im Bereich des Pakets mit der größeren Atomzahl aus.

Wir berechnen nun für jedes Band-Mapping-Bild aus den ausgewählten Pixeln den mittleren Quasiimpuls  $\vec{q}$  der Atome. Hierzu werden die Koordinatenvektoren  $(u_j, v_j)$  aller Pixel  $j$  jeweils mit der von dem Pixel repräsentierten Atomzahl  $n_j$  gewichtet aufsummiert:

$$\vec{q} = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{A}} n_j} \sum_{j \in \mathcal{A}} n_j \cdot (u_j, v_j) \quad (5.23)$$

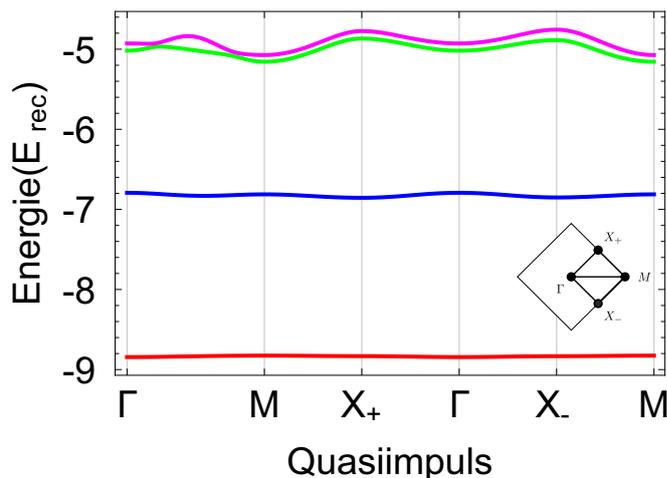
Die Summe läuft hierbei über alle Pixel  $j \in \mathcal{A}$ , mit der Menge  $\mathcal{A}$  aller selektierten Pixel. Wir schreiben den mittleren Quasiimpuls  $\vec{q}$  mit einer Tilde, da wir mit Gleichung 5.23 nicht direkt einen Vektor im reziproken Raum berechnen, sondern einen Längeneinheitsvektor, dessen Komponenten in Pixeln angegeben sind.

Bei horizontaler Richtung der Kraft ändert sich die x-Komponente des Quasiimpulses mit der Zeit, während die y-Komponente konstant bleibt. Wir tragen nun die x-Komponente des mittleren Quasiimpulses gegen die Zeit auf und erhalten das Diagramm in Abbildung 5.12(b). Hierbei haben wir die x-Komponente von  $\vec{q}$ , die in Pixeln als Längeneinheit angegeben wird, in die Einheit des reziproken Raumes umgerechnet. Man kann erkennen, dass die Messpunkte auf parallelen Geraden liegen, wobei benachbarte Geraden jeweils den gleichen Abstand besitzen. Die Punkte auf einer Geraden gehören zu einer einzelnen Durchquerung der ersten Brillouin-Zone, wobei sich  $q_x$  von  $+k$  zu  $-k$  ändert. Es findet anschließend eine Bragg-Reflexion zum gegenüberliegenden Eckpunkt der Brillouin-Zone statt, woraufhin eine erneute Durchquerung der ersten Brillouin-Zone beginnt. Die ersten Messpunkte ( $t \lesssim 0,15$  ms) liegen nicht auf einer Gerade, da man sich hier in der Anhaltphase der Spulenströme befindet und die Kraft noch nicht ihr Maximum erreicht hat.

Die Messpunkte können mit einer stückweise linearen Funktion gefittet werden, deren Teilfunktionen die Form  $g_n(t) = A(t - n \cdot T) + B$  ( $n \geq 0$ ) besitzen. Der Fitparameter  $T$  entspricht hierbei der Bloch-Periode  $T_{\text{BO}}$ . Für die vorgestellte Messung erhält man aus dem Fit die Bloch-Periode  $T_{\text{BO}} = (0,573 \pm 0,009)$  ms.

## 5.9.2 Zweites Band

Wir schauen uns in diesem Abschnitt eine Bloch-Oszillation der Atome im zweiten Band des optischen Gitters an. Die Kraft zeigt nach wie vor in die horizontale



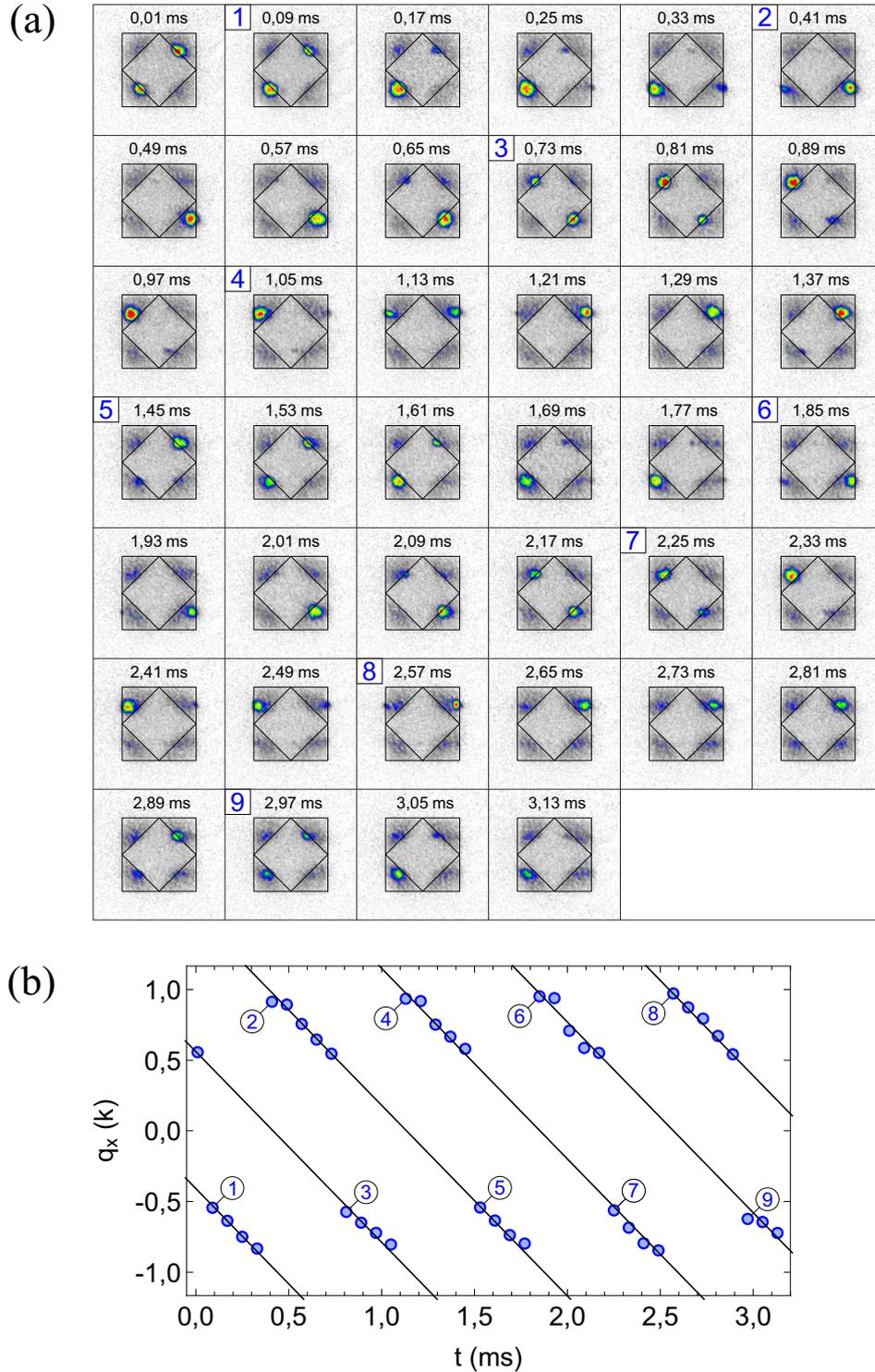
**Abbildung 5.14:** Theoretischer Verlauf der ersten vier Bänder des bipartiten quadratischen Gitters für die bei den Bloch-Oszillations-Messungen im zweiten Band verwendeten Werte der Gitterparameter:  $\vartheta = 0,535\pi$  und  $V_0 = 6,85 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 0,94$ ,  $\varepsilon_y = 0,90$ ,  $\eta_y = 1,04$ ,  $V_0 = 6,9 E_{\text{rec}}$  verwendet.

Richtung. Ausgangspunkt sind hier Atome, die bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,535\pi$  im zweiten Band am  $X_+$ -Punkt kondensiert worden sind. Der durch eine Bandstrukturrechnung bei den eingestellten Gitterparametern ermittelte theoretische Verlauf der ersten vier Bänder ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Der Abstand des zweiten Bandes zum ersten sowie zum dritten und vierten Band ist mit jeweils etwa  $2 E_{\text{rec}}$  relativ groß. Es sind daher keine Landau-Zener-Übergänge vom zweiten Band in andere Bänder zu erwarten.

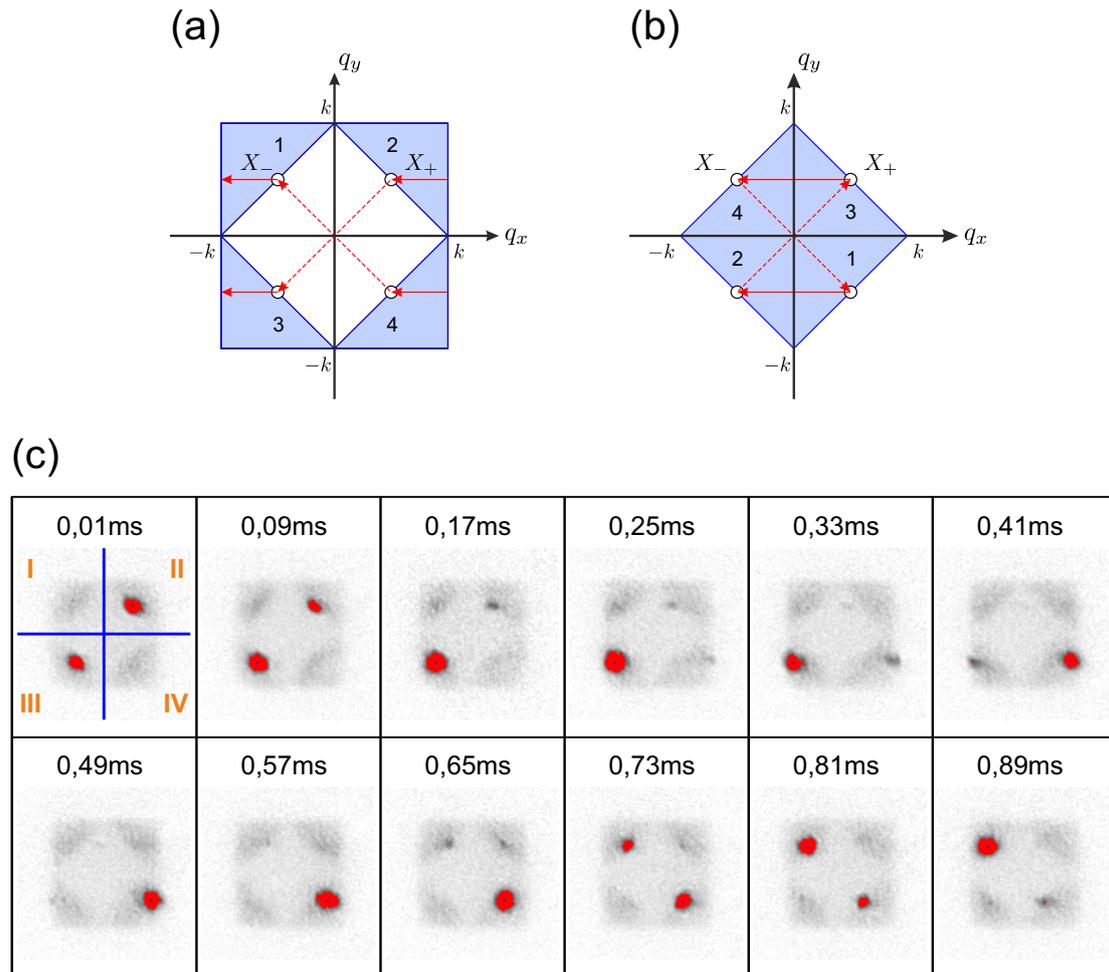
Abbildung 5.15(a) zeigt die Band-Mapping-Bilder einer Messung im zweiten Band mit horizontaler Krafrichtung (Spulenströme  $(I_{\text{ST}}, I_{\text{EC}}) = (152 \text{ mA}, 118 \text{ mA})$ ). Nach dem Einschalten der Kraft vollführen die Atome eine Bloch-Oszillation im zweiten Band, welche sich in den Band-Mapping-Bildern als eine periodische Bewegung in der zweiten Brillouin-Zone darstellt.

In Abbildung 5.16(a) wird diese Bewegung schematisch veranschaulicht. Die Atome starten am  $X_+$ -Punkt, der sich an den beiden äquivalenten Punkten  $\pm k/2(1, 1)$  befindet. Durch Bragg-Reflexion gelangen sie vollständig in das 3. Segment der zweiten Brillouin-Zone. Hier bewegen sie sich in horizontaler Richtung weiter, wobei sie nach dem Erreichen des linken Randes auf der rechten Seite erscheinen. Die Pfade in den Teilstücken 3 und 4 der zweiten Brillouin-Zone sind im reduzierten Zonenschema miteinander verbunden (siehe Abbildung 5.16(b)), es findet hier also keine Bragg-Reflexion statt beim Übergang vom einen Teil zum anderen. Die Atome erreichen bei der Hälfte des Bloch-Zyklus den  $X_-$ -Punkt, welcher sich an den äquivalenten Punkten  $\pm k/2(-1, 1)$  befindet. Sie gelangen durch Bragg-Reflexion vom vierten ins erste Segment und bewegen sich horizontal weiter. Schließlich erscheinen die Atome im Segment 2, wobei analog zum oben genannten Grund wiederum keine Bragg-Reflexion stattfindet.

Für die Analyse der Messungen im zweiten Band teilen wir die Band-Mapping-Bilder jeweils in vier Teile, welche wir im Folgenden als Quadranten bezeichnen wollen. Diese sind im ersten Bild in Abbildung 5.16(c) skizziert. Jeder Quadrant

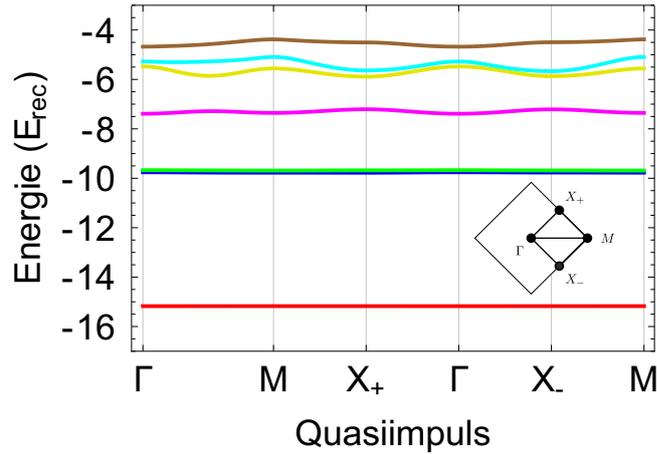


**Abbildung 5.15:** Bloch-Oszillation im zweiten Band bei horizontaler Krafrichtung (Spulenströme  $(I_{ST}, I_{EC}) = (152 \text{ mA}, I_{ST} = 118 \text{ mA})$ ). (a) Band-Mapping-Bilder. Die Atome vollführen eine oszillatorische Bewegung in der zweiten Brillouin-Zone. (b) Komponente  $q_x$  des mittleren Quasiimpulses der Atome in Abhängigkeit von der Zeit. Da die Bewegung in der zweiten Brillouin-Zone stattfindet, befinden sich die Messpunkte im Wertebereich  $]-k; -0,5k]$  und  $]0,5k; k]$ . Die durchgezogenen Linien stellen einen stückweise linearen Fit an die Messpunkte dar. Die aus dem Fit ermittelte Bloch-Periode beträgt  $T_{BO} = (1,436 \pm 0,009) \text{ ms}$ .



**Abbildung 5.16:** Bewegung im zweiten Band bei horizontaler Krafrichtung. Die Bewegung wird schematisch (a) in der zweiten Brillouin-Zone (erweitertes Zonenschema) und (b) in der ersten Brillouin-Zone (reduziertes Zonenschema) dargestellt. Sich entsprechende Segmente in der ersten und zweiten Brillouin-Zone sind mit der gleichen Zahl markiert. (c) Graustufenbilder einer Messung im zweiten Band in horizontaler Krafrichtung (Spulenströme  $(I_{ST}, I_{EC}) = (152 \text{ mA}, 118 \text{ mA})$ ). Rot markiert sind die selektierten Pixel im Bereich der kohärenten Atome. Wie im ersten Bild eingezeichnet, wird eine Unterteilung in vier Quadranten vorgenommen, von denen jeder eines der vier dreieckigen Teilstücke der zweiten Brillouin-Zone enthält. Blau markiert ist jeweils der Schwerpunkt des Atompaketes mit den meisten Atomen in einem Bild.

enthält eines der vier dreieckigen Segmente der zweiten Brillouin-Zone. Für jeden Quadranten werden nun, sofern in ihm kohärente Atome vorhanden sind, Atomzahl und mittleren Quasiimpuls des atomaren Wellenpakets bestimmt. Die Unterteilung der Bilder in vier Teile ermöglicht die individuelle Betrachtung der einzelnen Bildteile zu jedem Zeitpunkt  $t$ . Das ist praktisch, weil es einem erlaubt, dasjenige Wellenpaket zu bestimmen, in welchem sich die größte Anzahl von Atomen befindet. Die Position dieses größten Wellenpaketes im reziproken Raum wollen wir gegen die Zeit auftragen und für die Bestimmung der Bloch-Periode verwenden.



**Abbildung 5.17:** Bandstrukturrechnung der Bänder eins bis sieben für die bei den Bloch-Oszillations-Messungen im vierten Band verwendeten Werte der Gitterparameter:  $\vartheta = 0,60\pi$ ,  $V_0 = 9,1 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 0,94$ ,  $\varepsilon_y = 0,90$ ,  $\eta_y = 1,04$ .

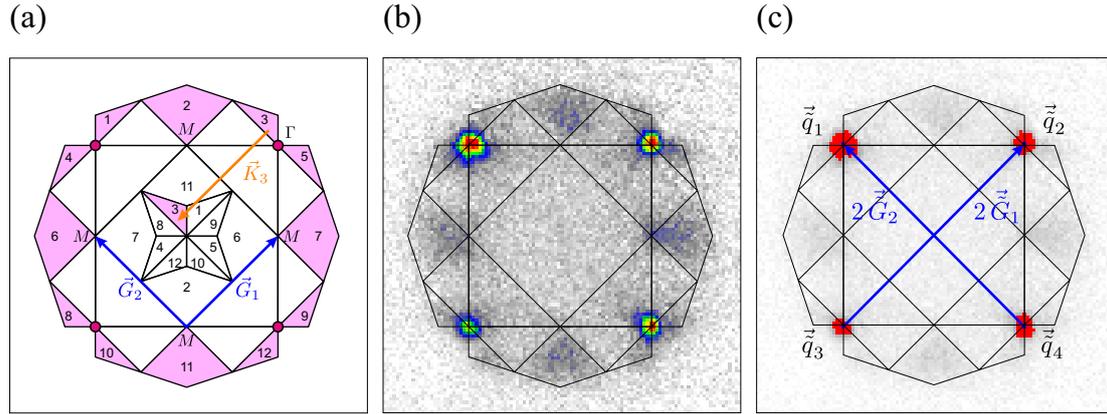
Abbildung 5.16(c) zeigt verschiedene Band-Mapping-Bilder der hier exemplarisch betrachteten Messung in einer Graustufendarstellung. Rot markiert sind die Regionen der kohärenten Atome. Die zugehörigen Pixel wurden in einem ähnlichen Verfahren selektiert, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Wir bestimmen nun für einen bestimmten Zeitpunkt  $t$  die Zahl kohärenter Atome im Quadranten  $i \in \{I, \dots, IV\}$ , indem wir die Summe  $N_i = \sum_{j \in \mathcal{A}_i} n_j$  berechnen. Das heißt, wir summieren die Pixelwerte  $n_j$  der in diesem Quadranten ausgewählten Pixel auf. Für das Atompaket mit der größten Atomzahl berechnen wir dann analog zum vorherigen Abschnitt mit Hilfe von Gleichung 5.23 den mittleren Quasiimpuls. Dieser ist in Abbildung 5.16(c) jeweils blau markiert.

Trägt man die x-Koordinate des mittleren Quasiimpulses gegen die Zeit auf, erhält man den Graphen in Abbildung 5.15(b). Die Messpunkte liegen auf zueinander parallelen Geraden, wobei benachbarte Geraden den gleichen Abstand besitzen. Wie bereits erwähnt, besitzen die berechneten Quasiimpulse zunächst die Längeneinheit Bildpixel. Für die Darstellung im Diagramm wird die Einheit des reziproken Raumes verwendet. Die Datenpunkte liegen in einer oberen und einer unteren Region des Wertebereiches,  $]k/2; k]$  und  $] -k; -k/2]$ . Dieser Bereich entspricht den möglichen Werten von  $q_x$  in der zweiten Brillouin-Zone bei dem im Experiment verwendeten Pfad. Der dazwischenliegende Bereich entspricht der ersten Brillouin-Zone.

Die Messpunkte können durch eine stückweise lineare Funktion mit den Teilfunktionen  $g_n(t) = A \cdot (t - n \cdot T) + B$  ( $n \geq 0$ ) gefittet werden. Die Bloch-Periode  $T_{\text{BO}}$  ist durch das Doppelte des Fitparameters  $T$  gegeben. Für die hier vorgestellte Messung ergibt sich  $T_{\text{BO}} = (1,436 \pm 0,009)$  ms.

### 5.9.3 Viertes Band

Nachdem wir uns bereits für das erste und zweite Band die Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum angeschaut haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt Bloch-Oszillationen im vierten Band zuwenden. Ausgangspunkt sind dabei bei  $\vartheta = 0,60\pi$



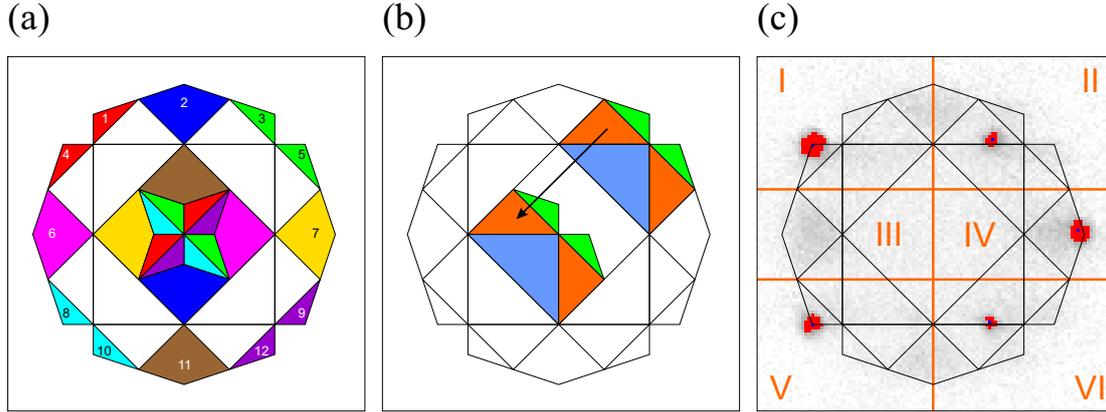
**Abbildung 5.18:** (a) Die zwölf Segmente der vierten Brillouin-Zone. Jedes Segment lässt sich durch Addition eines reziproken Gittervektors auf das ihm entsprechende Teilstück in der ersten Brillouin-Zone abbilden. (b) Band-Mapping-Bild zu Beginn einer Bloch-Oszillation im vierten Band. Die Atome sind am  $\Gamma$ -Punkt des vierten Bandes kondensiert und befinden sich an den vier äquivalenten Punkten, die den  $\Gamma$ -Punkt der vierten Brillouin-Zone repräsentieren. (c) Die Vektoren zwischen diagonal gegenüberliegenden Repräsentanten des  $\Gamma$ -Punkts entsprechen dem Doppelten der reziproken Basis-Gittervektoren  $\vec{G}_1$  bzw.  $\vec{G}_2$ .

am  $\Gamma$ -Punkt des vierten Bandes kondensierte Atome. Die Bandstrukturrechnung in Abbildung 5.17 zeigt die Lage der Bänder in dieser Gitterkonfiguration. Der Abstand des vierten Bandes von den nah beieinanderliegenden Bändern zwei und drei ist mit etwa  $1,4 E_{\text{rec}}$  relativ groß. Gleiches gilt für den Abstand des vierten Bandes zum fünften und sechsten Band, welcher ungefähr  $1,4 E_{\text{rec}}$  bzw.  $1,6 E_{\text{rec}}$  beträgt.

Die vierte Brillouin-Zone, auf welche die Atome im vierten Band beim Band-Mapping abgebildet werden, ist deutlich stärker untergliedert als die erste und zweite Brillouin-Zone und besteht aus insgesamt zwölf verschiedenen Segmenten, wie in Abbildung 5.18(a) dargestellt. Da die Bewegung in der vierten Brillouin-Zone aufgrund von dessen Kleingliedrigkeit etwas unübersichtlich ist, haben wir das Ziel, sie in der ersten Brillouin-Zone darzustellen. Jedes Segment  $j$  der vierten Brillouin-Zone lässt sich hierbei durch Addition eines reziproken Gittervektors  $\vec{K}_j$  auf das entsprechende Teilstück in der ersten Brillouin-Zone abbilden. Diese reziproken Gittervektoren sind Linearkombinationen der reziproken Basis-Gittervektoren  $\vec{G}_1 = k(1, 1)$  und  $\vec{G}_2 = k(-1, 1)$ :

$$\begin{aligned}
 \vec{K}_1 &= -\vec{G}_2 & \vec{K}_7 &= -\vec{G}_1 + \vec{G}_2 \\
 \vec{K}_2 &= -\vec{G}_1 - \vec{G}_2 & \vec{K}_8 &= -\vec{G}_1 \\
 \vec{K}_3 &= -\vec{G}_1 & \vec{K}_9 &= \vec{G}_2 \\
 \vec{K}_4 &= -\vec{G}_2 & \vec{K}_{10} &= \vec{G}_1 \\
 \vec{K}_5 &= -\vec{G}_1 & \vec{K}_{11} &= \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \\
 \vec{K}_6 &= \vec{G}_1 - \vec{G}_2 & \vec{K}_{12} &= \vec{G}_2
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Wir wollen zunächst die reziproken Basis-Gittervektoren aus den aufgenommenen



**Abbildung 5.19:** (a) Schema der vierten Brillouin-Zone. Segmente, die um den gleichen reziproken Gittervektor zu verschieben sind, um sie auf ihren Entsprechungen in der ersten Brillouin-Zone abzubilden, sind in der gleichen Farbe dargestellt. (b) Die farblich markierten Segmente der zweiten (blau), dritten (orange) und vierten (grün) Brillouin-Zone müssen um den gleichen reziproken Gittervektor verschoben werden, um sie auf die erste Brillouin-Zone abzubilden. (c) Unterteilung der Band-Mapping-Bilder der Messungen im vierten Band in sechs Bildteile. Für jeden Bildteil wird der Schwerpunkt der kohärenten Atome bestimmt, sofern in ihm welche vorhanden sind.

Messdaten ermitteln. Abbildung 5.18(b) zeigt das Band-Mapping-Bild zu Beginn der Bloch-Oszillation im vierten Band. Die Atome sind am  $\Gamma$ -Punkt kondensiert, so dass sie an den vier äquivalenten Punkten  $k(\pm 1, \pm 1)$  der vierten Brillouin-Zone auftreten. Abbildung 5.18(c) zeigt die gleiche Aufnahme wie in (b) in einer Graustufendarstellung. Die Bereiche der kohärenten Atome am  $\Gamma$ -Punkt sind rot markiert. Die blau markierten Pixel zeigen jeweils den mittleren Quasiimpuls der einzelnen Atompakete.

Um anzudeuten, dass ein aus den Band-Mapping-Bildern ermittelter „reziproker Vektor“ nicht direkt dem reziproken Raum angehört, sondern seine Komponenten aus Pixeln als Längeneinheit angegeben werden, versehen wir sein Formelzeichen mit einer Tilde. Die Vektoren  $\vec{G}_1$  und  $\vec{G}_2$  lassen sich nun aus den Koordinaten der vier für den  $\Gamma$ -Punkt stehenden Punkte bestimmen: Die Vektoren zwischen diagonal gegenüberliegenden  $\Gamma$ -Punkten sind gleich dem Doppelten der Vektoren  $\vec{G}_1$  und  $\vec{G}_2$  (siehe Abbildung 5.18(c)):

$$\vec{G}_1 = \frac{1}{2} (\vec{q}_2 - \vec{q}_3) \quad (5.25)$$

$$\vec{G}_2 = \frac{1}{2} (\vec{q}_1 - \vec{q}_4) \quad (5.26)$$

Die Positionen  $\vec{q}_i$  der vier äquivalenten Punkte lassen sich analoge zu der in Abschnitt 5.9.1 beschriebenen Methode zur Berechnung des mittleren Quasiimpulses eines Wellenpakets bestimmen.

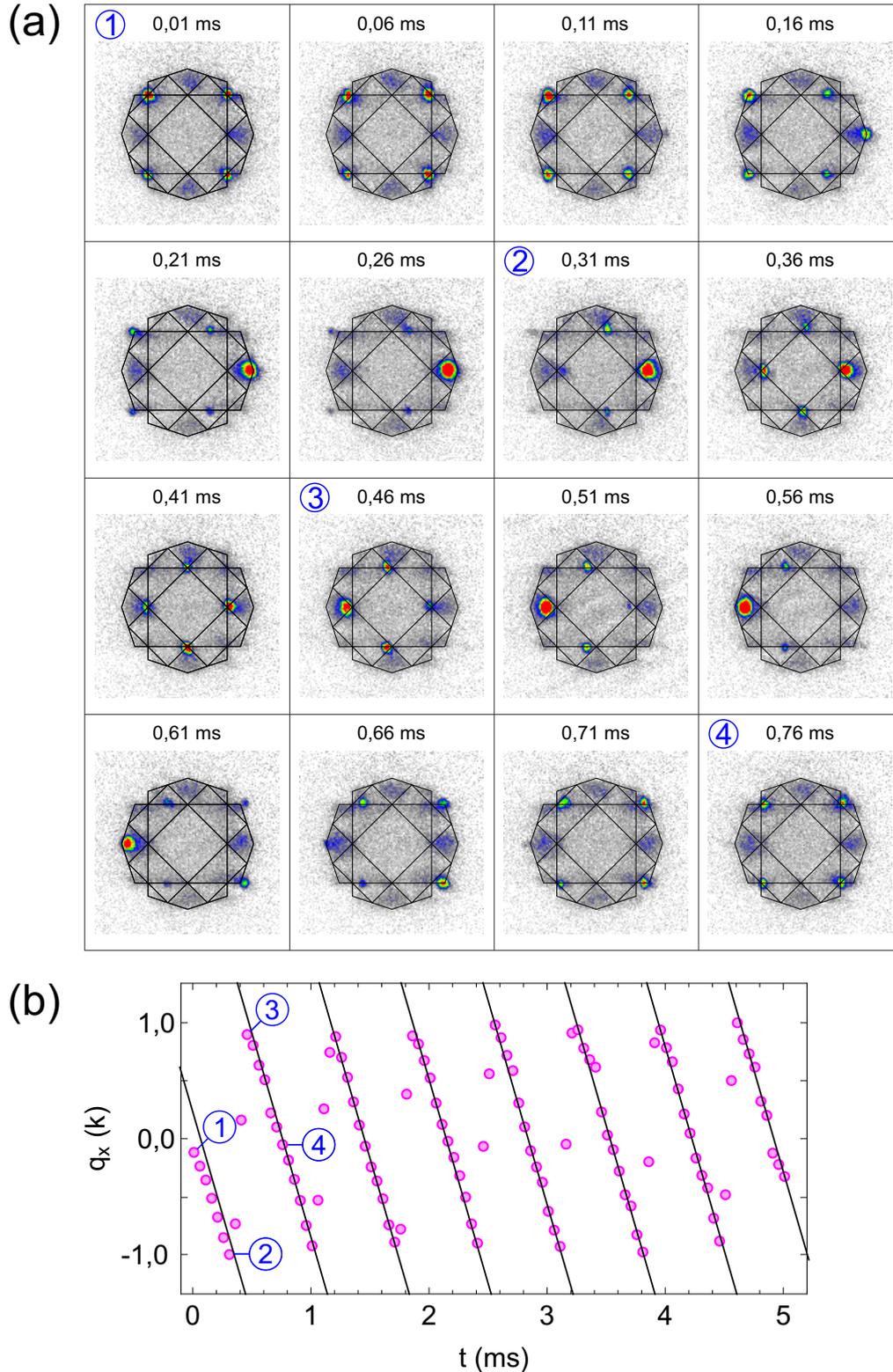
Wie man aus den Gleichungen 5.24 erkennen kann, sind einige der Vektoren  $\vec{K}_j$  gleich: Es kommen bei den zwölf Vektoren insgesamt acht verschiedene Linearkombinationen der Vektoren  $\vec{G}_1$  und  $\vec{G}_2$  vor. Die zwölf Segmente der vierten Brillouin-Zone lassen sich damit zu acht Gruppen zusammenfassen,

wobei alle Elemente einer Gruppe um den gleichen Vektor verschoben werden müssen für eine Abbildung in die erste Brillouin-Zone. Diese Gruppen werden in Abbildung 5.19(a) veranschaulicht, wobei zum gleichen reziproken Vektor gehörende Segmente mit der gleichen Farbe ausgefüllt sind.

Nach dieser Vorbetrachtung schauen wir uns nun die Messung einer Bloch-Oszillation im vierten Band bei den Spulenströmen  $(I_{ST}, I_{EC}) = (300 \text{ mA}, 236 \text{ mA})$  an. Diese wird in Abbildung 5.20(a) gezeigt, wobei ein vollständiger Bloch-Zyklus zu sehen ist. Man kann erkennen, dass sich in den Band-Mapping-Bildern die Atompakete nicht nur in der vierten, sondern auch in der zweiten oder dritten Brillouin-Zone bewegen. So sieht man zum Beispiel, dass sich ein Teil der kohärenten Atome vom Punkt  $k(1, 1)$  an der Grenze zwischen der zweiten und dritten Brillouin-Zone entlang zum Punkt  $k(0, 1)$ , der für den  $M$ -Punkt steht, bewegt. Anschließend verläuft die Bewegung wieder entlang der Grenze der zweiten und dritten Brillouin-Zone zum Punkt  $k(-1, 1)$ , welcher den  $\Gamma$ -Punkt repräsentiert. Als Ursache für die Bewegung außerhalb der vierten Brillouin-Zone kann vermutet werden, dass der Band-Mapping-Vorgang nicht vollständig adiabatisch abläuft. Atome, die sich im vierten Band entlang des Pfades  $\Gamma M$  bewegen, gehen beim Ausschalten des Gitterlichts zum Teil in das zweite oder dritte Band über und werden auf die entsprechende Brillouin-Zone abgebildet. Für Atome am  $\Gamma$ -Punkt des zweiten, dritten und vierten Bandes sind die vier äquivalenten Punkte, auf die sie bei der Bandkartografierung projiziert werden, die gleichen. Falls die Atome sich also an dieser Position des Quasiimpulsraumes befinden, spielen Bandübergänge beim Band-Mapping keine Rolle. Ähnliches gilt für die kohärenten Atome am  $M$ -Punkt. Für Quasiimpulse auf der Linie zwischen  $\Gamma$ - und  $M$ -Punkt kommt es beim Herunterrampen der Gitterleistung zu vermiedenen Bandkreuzungen des vierten Bandes mit dem zweiten bzw. dritten Band, so dass hier Übergänge in das zweite oder dritte Band möglich sind.

Die teilweise Projektion von Atomen des vierten Bandes in die zweite oder dritte Brillouin-Zone erfordert bei der Analyse besondere Aufmerksamkeit. Es stellt sich die Frage, wie man diese Atome ebenfalls in die erste Brillouin-Zone verschieben kann mit Hilfe eines reziproken Gittervektors, so dass sie mit in die Berechnung des Quasiimpulses eingehen. Dazu betrachten wir Abbildung 5.19(b). Die grünen Segmente der vierten Brillouin-Zone sowie die angrenzenden orangenen Segmente der zweiten und die blauen Segmente der dritten Brillouin-Zone müssen um den gleichen reziproken Gittervektor verschoben werden, um sie in die erste Brillouin-Zone abzubilden. Es ist für die Analyse der Messreihen im vierten Band bei horizontaler Bewegungsrichtung sinnvoll, die Band-Mapping-Bilder so wie in Abbildung 5.19(c) gezeigt in sechs Teilstücke zu unterteilen. Ein Atompaket, dessen mittlerer Quasiimpuls sich im Teilstück  $i$  ( $i \in \{I, \dots, VI\}$ ) befindet, wird dann um einen bestimmten reziproken Gittervektor  $\vec{K}_i$  verschoben für die Darstellung in der ersten Brillouin-Zone.

Für ein Band-Mapping-Bild zum Zeitpunkt  $t$  werden zunächst die Pixel im Bereich der kohärenten Atompakete selektiert und hieraus die mittleren Quasiimpulse  $\vec{q}_i$  der einzelnen Atompakete  $i$  berechnet, was analog zu der in Abschnitt 5.9.1 beschriebenen Methode erfolgt. Abhängig davon, in welchem der Teilstücke I bis VI sich der Punkt  $\vec{q}_i$  befindet, wird er um einen entsprechenden



Vektor  $\vec{K}_i \in \{\vec{K}_I, \dots, \vec{K}_{VI}\}$  verschoben, um ihn auf die erste Brillouin-Zone abzubilden. Die zu den einzelnen sechs Teilstücken des Bildes gehörenden reziproken Gittervektoren sind:

$$\begin{aligned} \vec{K}_I &= -\vec{G}_2 & \vec{K}_{IV} &= -\vec{G}_1 + \vec{G}_2 \\ \vec{K}_{II} &= -\vec{G}_1 & \vec{K}_V &= \vec{G}_1 \\ \vec{K}_{III} &= \vec{G}_1 - \vec{G}_2 & \vec{K}_{VI} &= \vec{G}_2. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Den mittleren Quasiimpuls  $\vec{q}$  aller kohärenten Atome des Bildes in der ersten Brillouin-Zone erhält man, indem man die um die Vektoren  $\vec{K}_i$  verschobenen Quasiimpulse der einzelnen Atompakete mit dem Gewicht der im Paket enthaltenen Atome aufaddiert. Man bildet also den „Schwerpunkt“ der in die erste Brillouin-Zone verschobenen Quasiimpuls-„Schwerpunkte“ der einzelnen Atompakete:

$$\vec{q} = \frac{1}{\sum_i n_i} \sum_i n_i (\vec{q}_i + \vec{K}_i) \quad (5.28)$$

Man führt diese Rechnung für die Bilder zu allen Zeitpunkten  $t$  durch. Das Ergebnis für den gesamten mittleren Quasiimpuls in der ersten Brillouin-Zone in Abhängigkeit von der Zeit wird in Abbildung 5.20(b) gezeigt. Hier werden die ermittelten Werte in der Einheit des reziproken Raumes angegeben. Man erkennt, dass die Messpunkte annähernd einer Sägezahnfunktion folgen, sie liegen auf parallelen Geraden und vollführen scharfe Sprünge beim Übergang von einem geraden Abschnitt zum nächsten. Die Punkte lassen sich, ähnlich wie in Abschnitt 5.9.1, mit einer stückweise linearen Funktion der Form  $g_n(t) = A(t - n \cdot T) + B$  ( $n \geq 0$ ) fiten. Aus dem Fit erhält man für die Bloch-Periode  $T_{BO} = T = (0,69 \pm 0,01)$  ms.

Am elegantesten für die Analyse wäre es wohl, wenn man die Band-Mapping-Bilder mit einer Maske in der Form der vierten Brillouin-Zone versehen und man jeden Pixel im Bereich der kohärenten Atome einem der zwölf Segmente zuordnen könnte. Dann hätte man jeden der Pixel direkt mit den reziproken Gittervektoren 5.24 in die erste Brillouin-Zone verschieben können. Eine solche Unterteilung der Bilder wäre aufgrund der Kleingliedrigkeit und nicht rechtwinkligen Formen der Segmente deutlich aufwendiger gewesen als die hier vorgenommene Wahl der sechs Bildteile.

## 5.10 Messungen mit „diagonaler“ Richtung der Kraft

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns der Situation zugewandt, dass die Atome im Gitter einer Kraft in der negativen x-Richtung ausgesetzt sind,  $\vec{F} \sim (-\vec{e}_x)$ . Für jedes der Bänder eins, zwei und vier haben wir beispielhaft eine Messung vorgestellt, anhand von der die Analyse der aufgenommenen Band-Mapping-Bilder zur präzisen Bestimmung der Frequenz der Bloch-Oszillation

beschrieben wurde. Wir wollen nun die Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum beim Vorliegen einer Kraft in „diagonaler Richtung“,  $\vec{F} \sim (-\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ , betrachten und hierbei auf ähnliche Weise vorgehen.

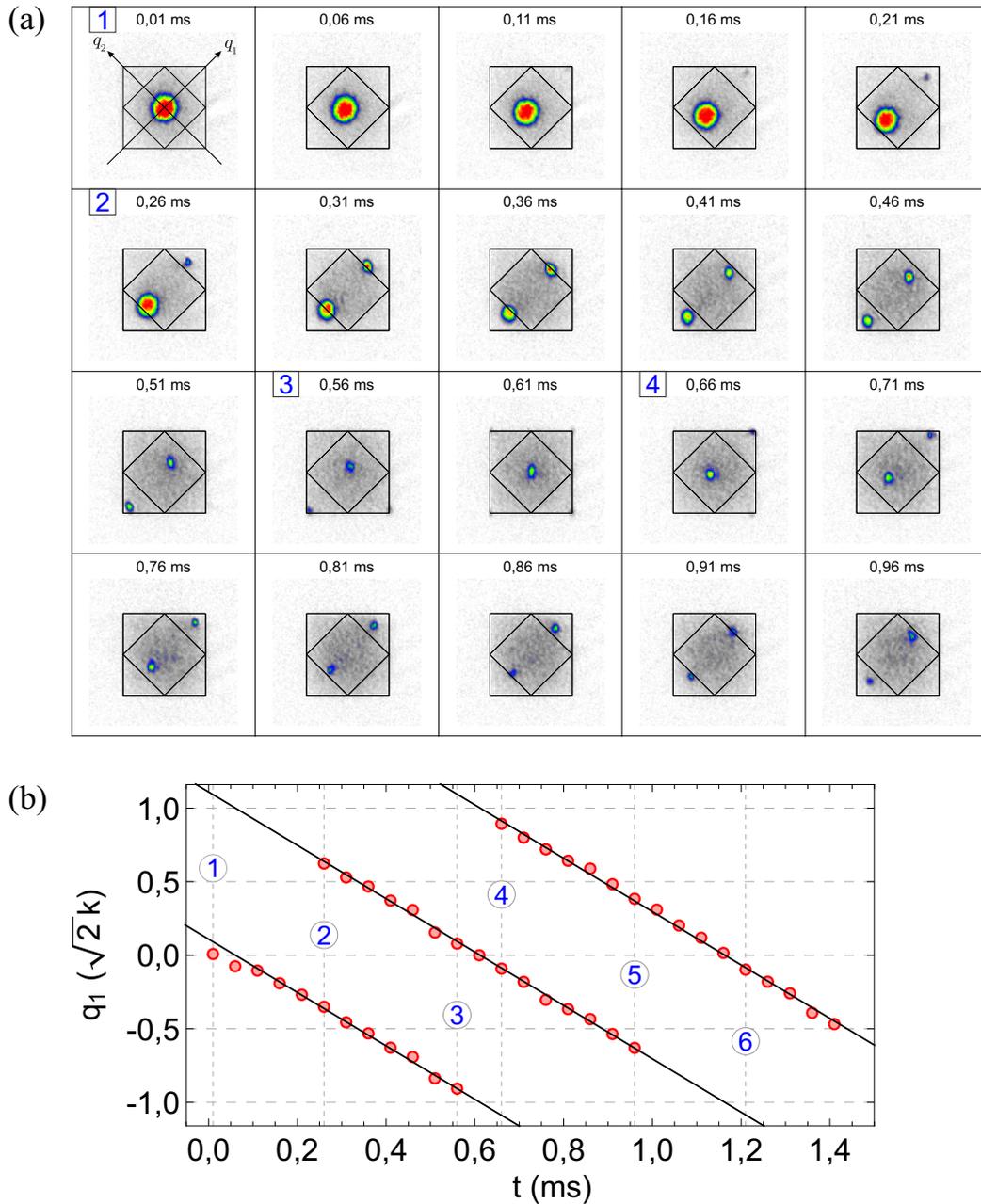
### 5.10.1 Erstes Band

Wir betrachten in diesem Abschnitt Atome, die bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,50\pi$  in das erste Band geladen worden sind. In Abbildung 5.21(a) ist beispielhaft die Bloch-Oszillations-Messung in diagonaler Richtung mit den Spulenströmen  $(I_{ST}; I_{EC}) = (169 \text{ mA}; 1,48 \text{ A})$  dargestellt. In den Band-Mapping-Bildern ist zu erkennen, dass sowohl die erste als auch die zweite Brillouin-Zone bereits zum Zeitpunkt  $t = 0,01 \text{ ms}$ , der kleinsten in der Messung eingestellten Zeit, homogen mit thermischen Atomen gefüllt sind. Die inkohärenten Atome besetzen das erste und zweite Band, zwischen denen bei den verwendeten Gitterparametern 5.19 nur eine geringe Bandlücke von  $5 \cdot 10^{-3} E_{\text{rec}}$  vorliegt (für den theoretischen Verlauf der ersten beiden Bänder siehe Abbildung 5.11).

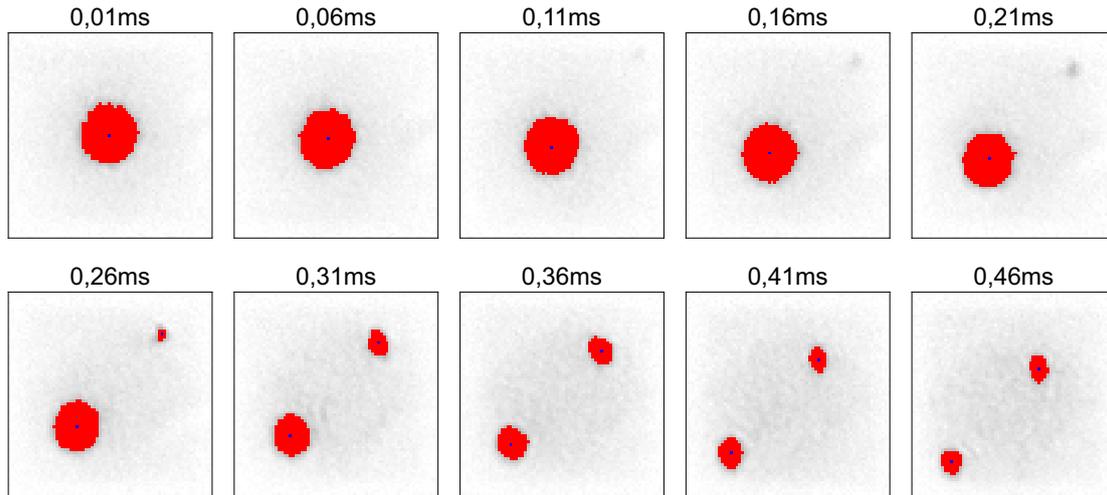
Unter der Wirkung der diagonalen Kraft bewegen sich die Atome nun vom  $\Gamma$ - in Richtung des  $X_+$ -Punktes. Der Abstand der Bänder eins und zwei wird vom  $\Gamma$ - zum  $X_+$ -Punkt immer kleiner. Beträgt der Abstand am  $\Gamma$ -Punkt noch  $\Delta E(\Gamma) = 0,41 E_{\text{rec}}$ , ist er am  $X_+$ -Punkt auf  $\Delta E(X_+) = 0,02 E_{\text{rec}}$  abgefallen. Man erkennt in den Band-Mapping-Bildern, dass bereits kurz nach dem Start ( $t = 0,11 \text{ ms}$ ) ein zunächst kleines zweites Atompaket in der Umgebung des  $\Gamma$ -Punktes des zweiten Bandes sichtbar wird, dessen Größe mit der Zeit zunimmt. Dies könnte daran liegen, dass das Adiabazitätskriterium bei der Bewegung der Atome vom  $\Gamma$ - zum  $X_+$ -Punkt immer schlechter erfüllt wird aufgrund der abnehmenden Bandlücke. Es kommt in zunehmendem Maße zu Übergängen ins zweite Band und der Zustand der Atome entwickelt sich in eine Überlagerung des ersten und zweiten Bandes. Es könnte auch sein, dass das Anschalten der Kraft nicht langsam genug erfolgt mit Blick auf die Adiabazitätsbedingung. Möglicherweise findet auch das Band-Mapping nicht vollständig adiabatisch statt, so dass Atome im ersten Band auf die zweite Brillouin-Zone projiziert werden.

Am  $X_+$ -Punkt sind zwei gleichgroße Atompakete zu sehen. Die beiden Punkte  $\pm k/2 (1, 1)$ , die den  $X_+$ -Punkt repräsentieren, sind hierbei durch Bragg-Reflexion miteinander gekoppelt. Bei der folgenden Bewegung zum  $\Gamma$ -Punkt verbleibt ein Teil der Atome in der ersten Brillouin-Zone Band, ein ähnlich großer Teil bewegt sich in der zweiten Brillouin-Zone weiter. Die Positionen der beiden Wellenpakete im Quasiimpulsraum unterscheiden sich um den reziproken Gittervektor  $\vec{G}_1$ . Die Atome erreichen schließlich wieder den  $\Gamma$ -Punkt, wobei im Band-Mapping-Bild eine Besetzung des  $\Gamma$ -Punktes des ersten Bandes am Punkt  $(0, 0)$  als auch – in deutlich geringerem Maße – eine Besetzung des  $\Gamma$ -Punktes des zweiten Bandes an den vier äquivalenten Punkten  $k(\pm 1, \pm 1)$  zu sehen ist ( $t = 0,61 \text{ ms}$ ). Im weiteren Verlauf bewegen sich wiederum je ein Atompaket in der ersten und in der zweiten Brillouin-Zone. In der Messung lassen sich also Bloch-Zener-Oszillationen beobachten, bei denen ständige Übergänge der Atome vom ersten in das zweite Band stattfinden.

Wir wollen nun den Quasiimpuls der an der Bloch-Zener-Oszillation beteiligten



**Abbildung 5.21:** Bloch-Oszillation im ersten Band bei diagonaler Krafrichtung (Spulenströme  $(I_{ST}; I_{EC}) = (169 \text{ mA}; 1,48 \text{ A})$ ). (a) Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  der Bloch-Oszillation. (b) Aus den Messdaten berechnete mittlere Quasiimpulse der in den Band-Mapping-Bildern auftretenden Atompakete in Abhängigkeit von der Zeit. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  gibt es ein oder zwei Atompakete. Aufgetragen ist die Projektion des Quasiimpulses  $\vec{q}$  auf den Einheitsvektor  $\vec{e}_1 = 1/\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ , was der Quasiimpulskomponente  $q_1$  entspricht (siehe das im ersten Band-Mapping-Bild eingezeichnete Koordinatensystem). Die durchgezogenen Linien stellen einen stückweise linearen Fit an die ermittelten Punkte dar. Aus dem Fit ergibt sich eine Bloch-Periode von  $T_{BO} = (0,551 \pm 0,003) \text{ ms}$ .



**Abbildung 5.22:** Graustufendarstellung von Band-Mapping-Bildern der Bloch-Oszillation im ersten Band bei diagonaler Krafrichtung, Spulenströme  $(I_{ST}; I_{EC}) = (169\text{ mA}; 1,48\text{ A})$ . Die in der Region der kohärenten Atompakete liegenden Pixel sind rot und die Schwerpunkte der Atompakete blau markiert. Gezeigt werden die Bilder der ersten zehn Messzeitpunkte  $t$ .

Atome in Abhängigkeit von der Zeit darstellen. Wir wählen zunächst die Regionen der kohärenten Atome in den Band-Mapping-Bildern aus (siehe Abbildung 5.22). Anschließend berechnen wir für alle Atompakete eines Bilder jeweils den mittleren Quasiimpuls unter Verwendung von Formel 5.23.

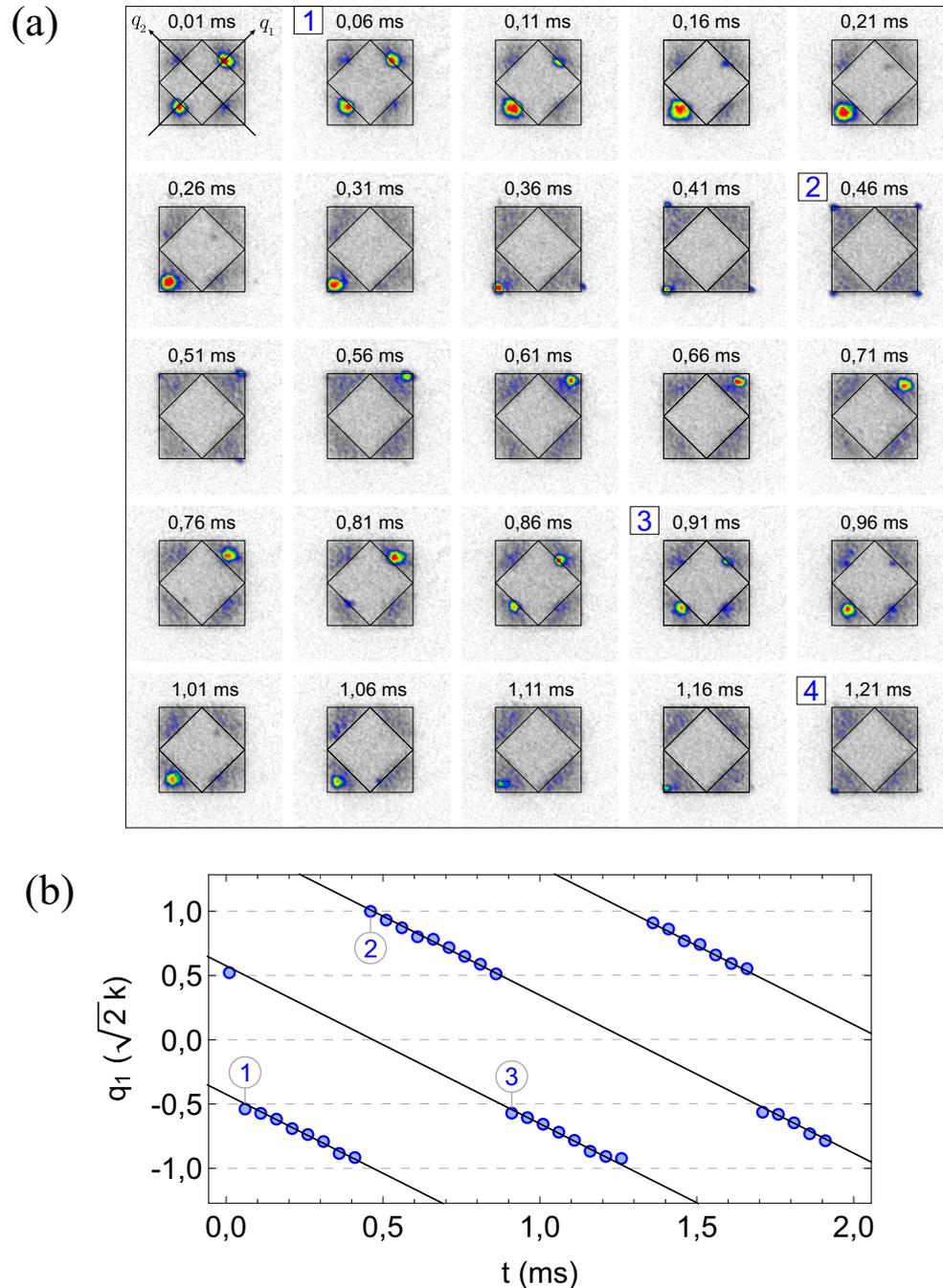
Entlang der diagonalen Trajektorie im reziproken Raum ändert sich sowohl die  $x$ - als auch die  $y$ -Komponente des Quasiimpulses. Wir können den Quasiimpuls auch in den Koordinaten der kleineren, gedrehten Brillouin-Zone ausdrücken (siehe erstes Band-Mapping-Bild in Abbildung 5.21):

$$\vec{q} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= 1/\sqrt{2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \\ \vec{e}_2 &= 1/\sqrt{2} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y) \end{aligned} \quad (5.29)$$

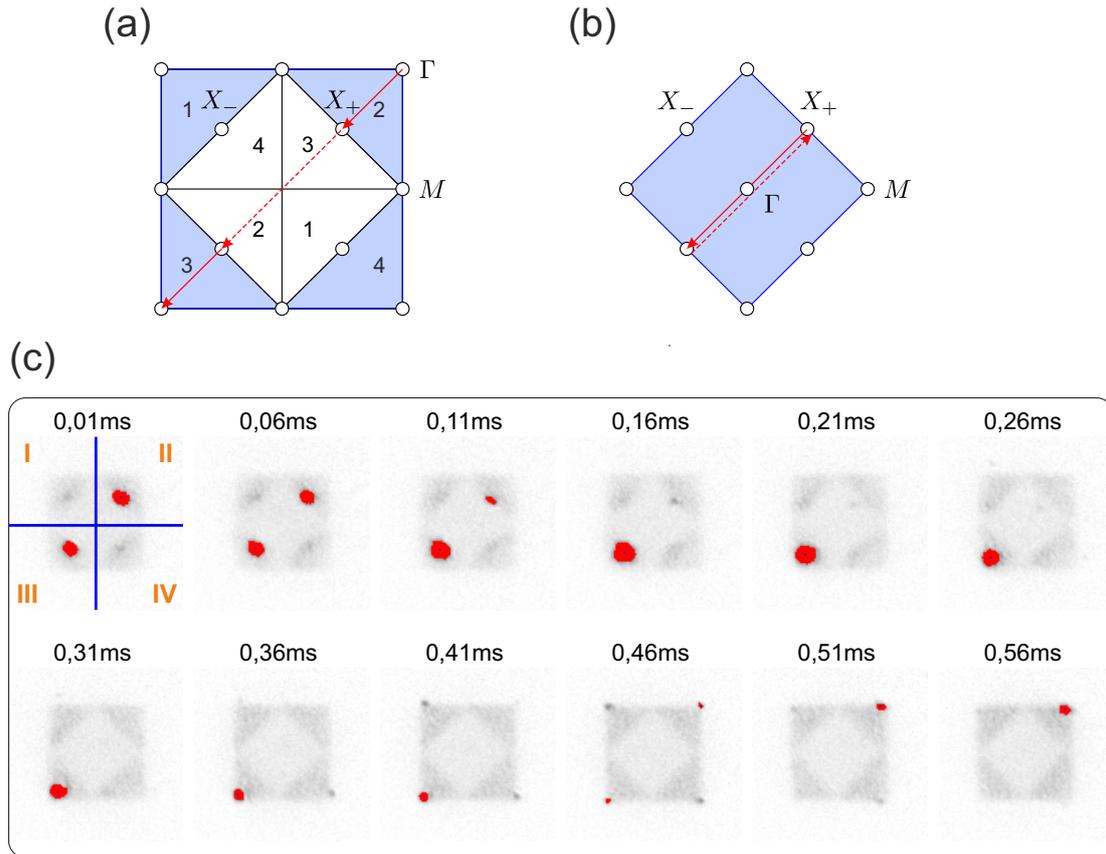
Beim Auftragen der Koordinate  $q_1 = \vec{q} \circ \vec{e}_1$  gegen die Zeit ergibt sich der Plot in Abbildung 5.21(b). Die Koordinate  $q_2$  ändert sich nicht mit der Zeit. Im Diagramm geben wir die berechneten Quasiimpulswerte in der Einheit des reziproken Raumes an. Die Periodendauer der im Experiment beobachteten Bloch-Zener-Oszillation lässt sich, wie in den vorherigen Abschnitten, mit Hilfe einer stückweise linearen Funktion mit den Teilfunktionen  $g_n(t) = A \cdot (t - n \cdot T) + B$  ( $n \geq 0$ ) bestimmen. Für die hier vorgestellte Messreihe beträgt die Bloch-Periode  $T_{BO} = (0,551 \pm 0,003)$  ms.

### 5.10.2 Zweites Band

Wir gehen nun von Atome aus, die bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,535\pi$  am  $X_+$ -Punkt des zweiten Bandes kondensiert sind. Abbildung 5.23(a) zeigt exemplarisch Aufnahmen der Bloch-Oszillation in diagonaler Richtung bei den Spulenströmen  $(I_{ST}; I_{EC}) = (120\text{ mA}; 1,05\text{ A})$ . In den Band-Mapping-Bildern befinden sich die Atome zu Beginn an den beiden äquivalenten Punkten  $\pm k/2 (1, 1)$ , die den  $X_+$ -Punkt repräsentieren. Die Bewegung der Atome in der zweiten Brillouin-Zone ist



**Abbildung 5.23:** Bloch-Oszillation im zweiten Band bei diagonaler Richtung der Kraft (Spulenströme  $(I_{ST}; I_{EC}) = (120 \text{ mA}; 1,05 \text{ A})$ ). (a) Band-Mapping-Bilder für  $0,01 \text{ ms} \leq t \leq 1,21 \text{ ms}$ . (b) Mittlerer Quasiimpuls des Atompakets mit der größten Atomzahl. Aufgetragen wird die Quasiimpuls-Komponente  $q_1$  (siehe das im ersten Bild eingezeichnete Koordinatensystem). Die durchgezogenen Linien stellen stückweise lineare Fits mit äquidistanten linearen Teilfunktionen an die Messpunkte dar. Die aus dem Fit ermittelte Bloch-Periode beträgt  $T_{BO} = (0,81 \pm 0,03) \text{ ms}$ .



**Abbildung 5.24:** Veranschaulichung der Bloch-Oszillation im zweiten Band bei diagonaler Krafrichtung (a) im erweiterten Zonenschema und (b) im reduzierten Zonenschema. Bei Letzterem wird die Bewegung in der ersten Brillouin-Zone dargestellt. (c) Ausgewählte Regionen (rot markiert) im Bereich der Atompakete in den Bildteilen II und III bei der Bloch-Oszillations-Messung im zweiten Band, Spulenströme  $(I_{ST}; I_{EC}) = (120 \text{ mA}; 1,05 \text{ A})$ . Aus den markierten Regionen werden die Schwerpunkte der Atompakete im Quasiimpulsraum berechnet. Befindet sich in beiden Bildteilen jeweils ein Atompaket, wird der Schwerpunkt des Atompakets mit der größeren Atomzahl verwendet. Blau markiert ist jeweils der mittlere Quasiimpuls des größeren Atompakets. Die Koordinate  $q_1$  dieses mittleren Quasiimpulses wird in Abbildung 5.23 gegen die Zeit aufgetragen.

in Abbildung 5.24(a) skizziert. Die Atome werden zunächst vollständig in das 3. Segment der zweiten Brillouin-Zone überführt. Von diesem aus bewegen sie sich zum  $\Gamma$ -Punkt, wobei sie an den vier äquivalenten Eckpunkten  $k(\pm 1, \pm 1)$  der zweiten Brillouin-Zone auftreten. Hier findet keine Bragg-Reflexion statt, da sich die Atome im reduzierten Zonenschema in der Mitte der ersten Brillouin-Zone befinden, wie in Abbildung 5.24(b) veranschaulicht. Vom  $\Gamma$ -Punkt aus bewegen sich die Atome schließlich wieder zum  $X_{+}$ -Punkt, von wo aus die Bewegung von neuem beginnt.

Für die Analyse der zeitlichen Entwicklung des Quasiimpulses des atomaren Wellenpakets unterteilen wir die Band-Mapping-Bilder wieder in vier Bildteile (siehe Abbildung 5.24(c)). Da die Bewegung der kohärenten Atome sich vor allem in den Quadranten II und III abspielt, wollen wir in der Analyse nur diese beiden

Bildteile betrachten. In den Quadranten I und IV treten nur dann kohärente Atome auf, wenn sich das Wellenpaket in der Umgebung des  $\Gamma$ -Punktes befindet.

Wir gehen ähnlich vor wie in den vorherigen Abschnitten und selektieren durch die Wahl eines geeigneten Schwellenwertes die Pixel in den Bereichen der kohärenten Atome. Dies wird in Abbildung 5.24(c) gezeigt. Wir wollen nun die mittleren Quasiimpulse der einzelnen Atompakete in einem Band-Mapping-Bild bestimmen, wofür wir Gleichung 5.23 verwenden. Falls zu einem Zeitpunkt in beiden Bildteilen II und III jeweils ein Atompaket vorliegt, verwenden wir den Quasiimpuls des Pakets mit der größeren Atomzahl  $N_i = \sum_{j \in A_i} n_j$  ( $i \in \{\text{II}, \text{III}\}$ ).

Der Quasiimpuls soll in den Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  der kleineren, um  $45^\circ$  gedrehten Brillouin-Zone dargestellt werden. Es ändert sich nur die Koordinate  $q_1$  während der Bloch-Oszillation,  $q_2$  bleibt konstant bei null. Die Auftragung von  $q_1$  gegen die Zeit ist in Abbildung 5.23(b) zu sehen. Hierbei haben wir den zunächst in Pixeln angegebenen mittleren Quasiimpuls  $\vec{q}$  im Band-Mapping-Bild in die Einheiten des reziproken Raumes umgerechnet. Man kann erkennen, dass die möglichen Werte von  $q_1$  bei der diagonalen Bloch-Oszillation im zweiten Band in den Intervallen  $\sqrt{2}k ] - 1; -1/2]$  und  $\sqrt{2}k ] 1/2; 1]$  liegen. Die Breite  $\sqrt{2}k$  des dazwischenliegenden Wertebereiches entspricht der Ausdehnung der ersten Brillouin-Zone in diagonalen Richtung.

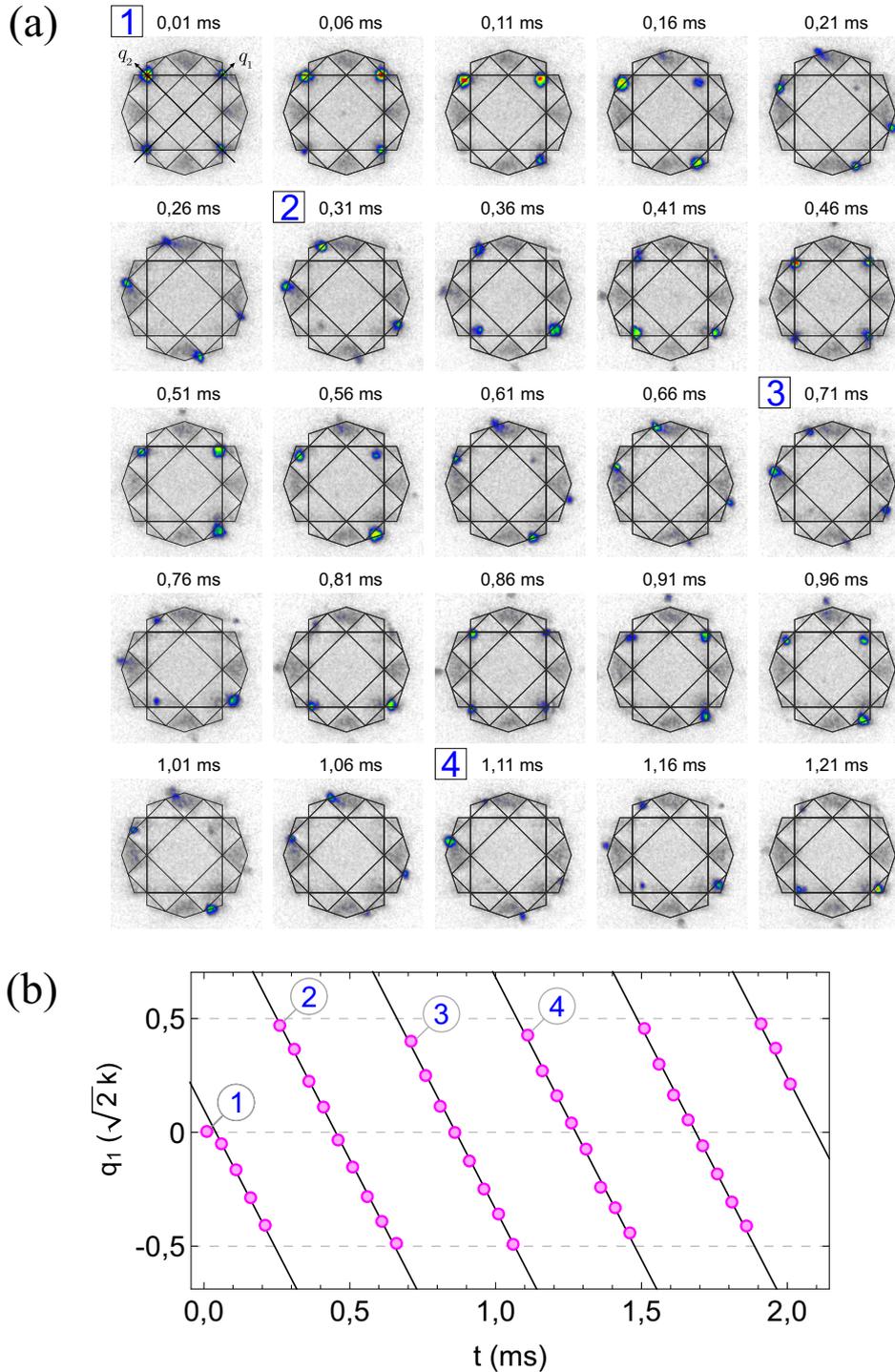
Die Messpunkte liegen auf parallelen Geraden, bei denen benachbarte Geraden gleiche Abstände besitzen. Ein Fit mit einer stückweise linearen Funktion, deren Teilfunktionen die Form  $g_n(t) = A(t - n \cdot T) + B$ , ( $n \geq 0$ ) haben, liefert die Bloch-Periode  $T_{\text{BO}} = T$ . Diese beträgt bei der betrachteten Messreihe  $T_{\text{BO}} = (0,81 \pm 0,03)$  ms.

### 5.10.3 Viertes Band

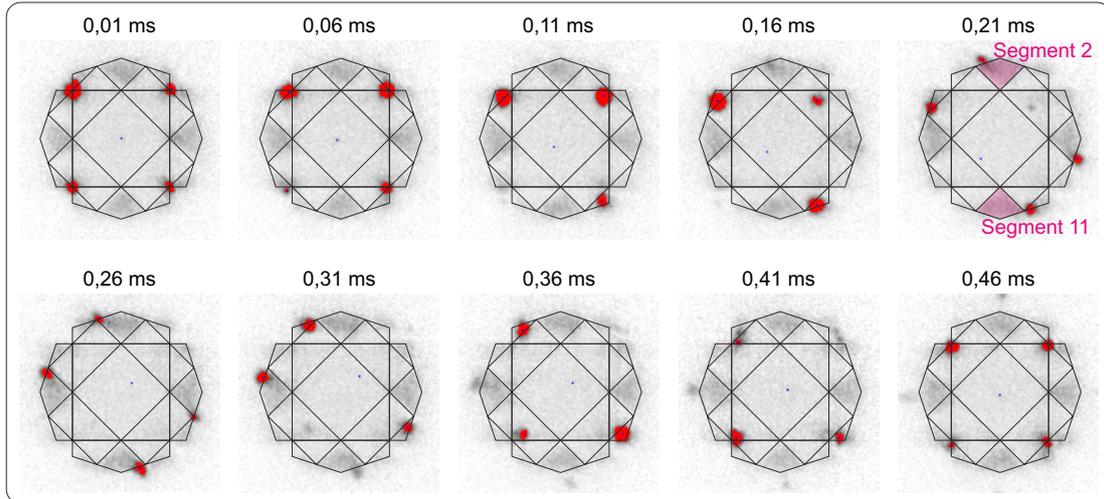
Wir wollen die Bloch-Oszillationen in diagonalen Richtung abschließen durch das Vorstellen von Ergebnissen im vierten Band. Hierbei sind der Ausgangspunkt Atome, die bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,60\pi$  am  $\Gamma$ -Punkt des vierten Bandes kondensiert worden sind. Band-Mapping-Bilder einer exemplarischen Bloch-Oszillation im vierten Band bei den Spulenströmen  $(I_{\text{ST}}; I_{\text{EC}}) = (237 \text{ mA}; 2,07 \text{ A})$  sind in Abbildung 5.25(a) dargestellt.

Wie bereits in Abschnitt 5.9.3 beschrieben, ist die vierte Brillouin-Zone stark untergliedert und besteht aus insgesamt zwölf Segmenten. Bei den Messreihen im vierten Band mit horizontaler Krafrichtung hatten wir eine Unterteilung der Band-Mapping-Bilder in sechs Teilstücke vorgenommen. Dies war möglich, da sich die Atompakete während der Bloch-Oszillation nicht in den Segmenten 2 und 11 in Abbildung 5.19 aufhalten – vom  $M$ -Punkt abgesehen. Das ist bei der hier betrachteten diagonalen Bewegungsrichtung etwas anders, wie im Folgenden kurz dargelegt wird.

Abbildung 5.26 zeigt Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$ , dargestellt in Graustufen. Durch die Selektion aller Pixel, die über einem bestimmten Schwellenwert liegen, lassen sich die Bildregionen auswählen, in denen sich die kohärenten Atompakete befinden. Diese sind rot markiert. Für  $t = 0,21$  ms beispielsweise kann man erkennen, dass sich ein kleineres Atompaket



**Abbildung 5.25:** Bloch-Oszillation im vierten Band bei diagonaler Richtung der Kraft (Spulenströme ( $I_{ST}; I_{EC} = (237 \text{ mA}; 2,07 \text{ A})$ )) (a) Band-Mapping-Bilder für  $t \leq 1,21 \text{ ms}$ . (b) Quasiimpuls in Abhängigkeit von der Zeit. Aufgetragen ist die Koordinate  $q_1$  des Quasiimpulses in dem im ersten Band-Mapping-Bild eingezeichneten Koordinatensystem. Die durchgezogenen Linien entsprechen einem stückweise linearen Fit, aus welchem sich die Bloch-Periode zu  $T_{BO} = T = (0,41 \pm 0,01) \text{ ms}$  ergibt.

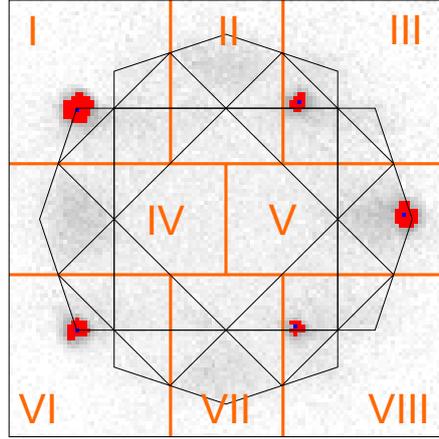


**Abbildung 5.26:** Band-Mapping-Bilder in Graustufendarstellung der Messung im vierten Band (Spulenströme  $(I_{ST}; I_{EC}) = (237 \text{ mA}; 2,07 \text{ A})$ ). Rot markiert sind die Regionen der kohärenten Atompakete. Die blauen Punkte stellen die mittleren Quasiimpuls der einzelnen Atompakete sowie den daraus berechneten mittleren Quasiimpuls aller Atompakete in der ersten Brillouin-Zone dar.

in der Umgebung von Segment 2 befindet – jedoch nicht in der vierten Brillouin-Zone, sondern an der Grenze zwischen der fünften und sechsten Brillouin-Zone. Offenbar kommt es beim Herunterrampen der Gitterleistung zu Übergängen vom vierten ins fünfte und sechste Band. Um diese Atome in die erste Brillouin-Zone zu verschieben, müssen sie um den gleichen reziproken Gittervektor verschoben werden, als wenn sie sich in Segment 2 befänden. Es ist daher sinnvoll, im Vergleich zu Abschnitt 5.9.3 einen weiteren Bildausschnitt hinzuzufügen, der Segment 2 und den umgebenden Bereich, in dem kohärente Atome in der fünften und sechsten Brillouin-Zone zu sehen sind, enthält. Aus ähnlichen Gründen ist ein Bildausschnitt um Segment 11 hinzuzufügen. Es ergibt sich damit eine Unterteilung der Band-Mapping-Bilder in insgesamt acht Bildausschnitte, wie in Abbildung 5.27 dargestellt.

Wir wollen die Bewegung der Atome im Quasiimpulsraum auf anschauliche Weise darstellen, wobei der Quasiimpuls – wie bereits bei den Messungen im vierten Band bei horizontaler Krafrichtung – in der ersten Brillouin-Zone angegeben werden soll. Hierfür benötigen wir die Basis-Vektoren  $\vec{G}_1$  und  $\vec{G}_2$  des reziproken Gitters, angegeben in Bildpixeln als Längeneinheit. In Abschnitt 5.9.3 wurde bereits beschrieben, wie man diese Vektoren aus den Band-Mapping-Bildern ermittelt.

Für jedes in einem Band-Mapping-Bild selektierte Atompaket  $i$  wird nun gemäß Gleichung 5.23 der mittlere Quasiimpuls  $\vec{q}_i$  berechnet. In Abhängigkeit von dem Bildausschnitt, in dem sich  $\vec{q}_i$  befindet, muss der Quasiimpuls um den entsprechenden reziproken Gittervektor  $\vec{K}_i \in \{\vec{K}_I, \dots, \vec{K}_{VIII}\}$  verschoben werden, um ihn auf die erste Brillouin-Zone abzubilden. Die acht zu verwendenden reziproken Gittervektoren lauten:



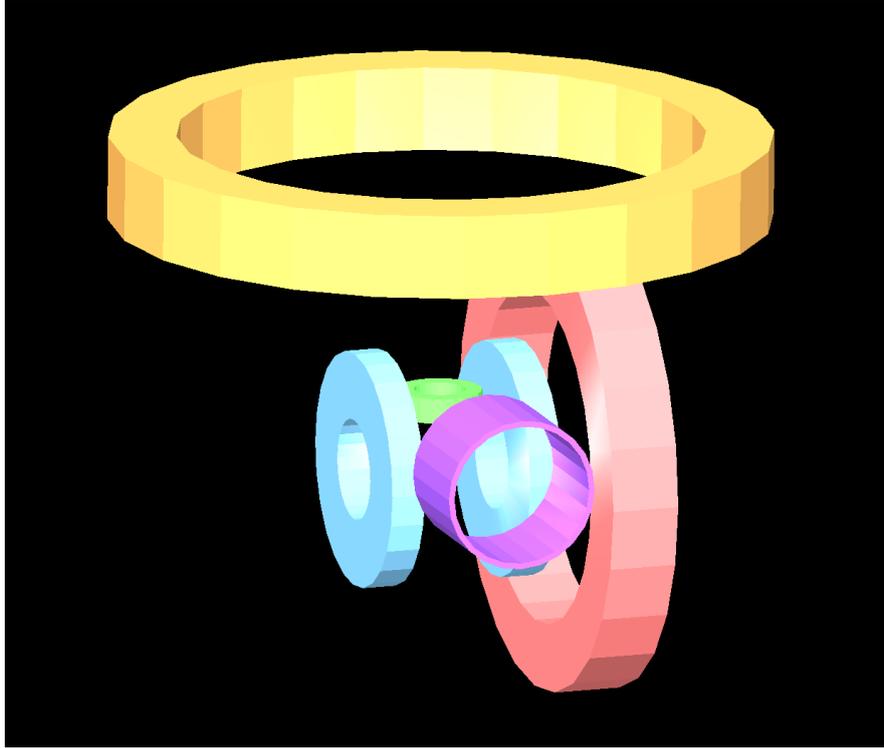
**Abbildung 5.27:** Unterteilung der Band-Mapping-Bilder in acht Teilstücke. Für jedes Teilstück gibt es einen zugehörigen reziproken Gittervektor  $\vec{K}_i$ ,  $i \in \{I, \dots, VIII\}$ , mit dessen Hilfe sich der mittlere Quasiimpuls der kohärenten Atome in diesem Teilstück in die erste Brillouin-Zone verschieben lässt.

$$\begin{aligned}
 \vec{K}_I &= -\vec{G}_2 & \vec{K}_V &= -\vec{G}_1 + \vec{G}_2 \\
 \vec{K}_{II} &= -\vec{G}_1 - \vec{G}_2 & \vec{K}_{VI} &= \vec{G}_1 \\
 \vec{K}_{III} &= -\vec{G}_1 & \vec{K}_{VII} &= \vec{G}_1 + \vec{G}_2 \\
 \vec{K}_{IV} &= \vec{G}_1 - \vec{G}_2 & \vec{K}_{VIII} &= \vec{G}_2 .
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Der in der ersten Brillouin-Zone angegebene gesamte „Schwerpunkt“  $\vec{q}$  aller Atompakete kann dann mit Gleichung 5.28 berechnet werden. Anschließend bestimmen wir – wie bereits bei den Bloch-Oszillationen im ersten und zweiten Band in diagonaler Richtung –, die Komponente  $\tilde{q}_1$  des Quasiimpulses in der Richtung des reziproken Gittervektors  $\vec{G}_1$ :  $\tilde{q}_1 = \vec{q} \cdot \vec{G}_1 / \|\vec{G}_1\|$ . In Abbildung 5.23(b) ist diese Quasiimpulsordinate in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt, wobei wir sie nun in den Einheiten des reziproken Raumes angeben. Die Messpunkte liegen auf abfallenden Geraden, die sich mit stückweise linearen Funktionen  $g_n(t) = A(t - n \cdot T) + B$  ( $n \geq 0$ ) fitten lassen. Für die hier betrachtete Messung ergibt aus dem Fit eine Bloch-Frequenz von  $T_{\text{BO}} = T = (0,41 \pm 0,01)$  ms.

## 5.11 Simulation der Kraft und Übersicht über die Messergebnisse

In diesem Kapitel haben wir Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Band bei zwei grundlegenden Richtungen der Kraft  $\vec{F}$ , der horizontalen und der diagonalen Richtung, vorgestellt. Für beide Richtungen wurde der Betrag der Kraft variiert und dabei jeweils die Frequenz der Bewegung durch den Quasiimpulsraum bestimmt.



**Abbildung 5.28:** Darstellung der Spulen, welche in der Simulation des Magnetfeldes mit Hilfe des Programms *BiotSavart* verwendet wurden. Die Atome werden in der aus den beiden Quadrupol-Spulen (blau), der Ioffe-Spule (grün) und der Offset-Spule (orange) gebildeten Magnetfalle gefangen. Durch das schnelle Anschalten einer der beiden kleinen Transferspulen (rot) und der Extra-Spule (violett) wird das Fallenminimum instantan verschoben, so dass eine Kraft auf die Atome erzeugt wird.

Durch das schnelle Anschalten von kleiner Transferspule und Extra-Spule kommt es zu einer instantanen Verschiebung des Fallenminimums. Die Atome verbleiben an der Position des bisherigen Fallenminimums und erfahren im neuen Potenzial eine Kraft. Das Potenzial der Magnetfalle lässt sich mit Hilfe des Programms *BiotSavart* simulieren. Im Programm lassen sich die Spulen detailliert nachbilden und das von ihnen erzeugte ortsabhängige Magnetfeld  $\vec{B}$  präzise berechnen. Die in der Simulation verwendeten Spulen sind in Abbildung 5.28 dargestellt.

Die potenzielle Energie der Atome im Magnetfeld der Spulen ist durch Gleichung 3.1 gegeben. Mit  $m_F = +2$  und  $g_F = +1/2$  ergibt sich hieraus  $V_{\text{mag}}(\vec{r}) = \mu_B \|\vec{B}(\vec{r})\|$ , mit dem Bohrschen Magneton  $\mu_B$ . Durch die Kenntnis des Magnetfelds in Abhängigkeit vom Ort lässt sich dann die Kraft  $\vec{F}$  berechnen mit  $\vec{F}(\vec{r}) = -\mu_B \vec{\nabla} \|\vec{B}(\vec{r})\|$ .

Bei einer Bloch-Oszillation gilt zwischen dem Betrag der Kraft,  $F \equiv \|\vec{F}\|$ , und der Frequenz  $\nu_B$  der Bloch-Oszillation der Zusammenhang

$$\nu_B = \frac{F}{\hbar q_{\text{span}}}, \quad (5.31)$$

wobei  $q_{\text{span}}$  den während einer Bloch-Periode durchlaufenen Quasiimpuls in

	$I_{ST}$ (mA)	$I_{EC}$ (A)	$F_{\text{theor}}$ ( $10^{-24}$ N)	$\nu_{B,\text{theor}}$ (kHz)	$\nu_{B,\text{exp}}$ (kHz)		
					1. Band	2. Band	4. Band
<b>horizontal</b>	113	0,088	0,679	0,545	0,599±0,005	0,575±0,008	0,593±0,005
	152	0,118	0,922	0,740	0,698±0,007	0,696±0,004	0,707±0,005
	204	0,159	1,239	0,995	1,006±0,009	0,963±0,002	0,935±0,004
	300	0,236	1,828	1,468	1,503±0,008	1,453±0,003	1,442±0,002
	372	0,289	2,286	1,835	1,740±0,003	1,729±0,003	1,705±0,005
	450	0,350	2,753	2,210	1,986±0,005	2,009±0,002	1,935±0,021
<b>diagonal</b>	59,3	0,52	0,608	0,690	0,586±0,003	–	–
	90,4	0,79	0,919	1,043	0,958±0,008	0,938±0,012	–
	120	1,05	1,218	1,383	1,242±0,007	1,229±0,008	1,205±0,009
	169	1,48	1,720	1,953	1,811±0,011	1,781±0,006	1,696±0,007
	237	2,07	2,403	2,729	2,459±0,006	2,442±0,009	2,431±0,008
	281	2,46	2,854	3,241	2,868±0,014	2,889±0,007	2,789±0,013

**Tabelle 5.1:** Übersicht über die bei den jeweiligen Spulenströmen theoretisch berechneten Werten für Kraft und Bloch-Frequenz sowie die experimentell für die Bänder eins, zwei und vier ermittelten Messwerte der Bloch-Frequenz für die Messreihen in horizontaler und diagonaler Richtung.

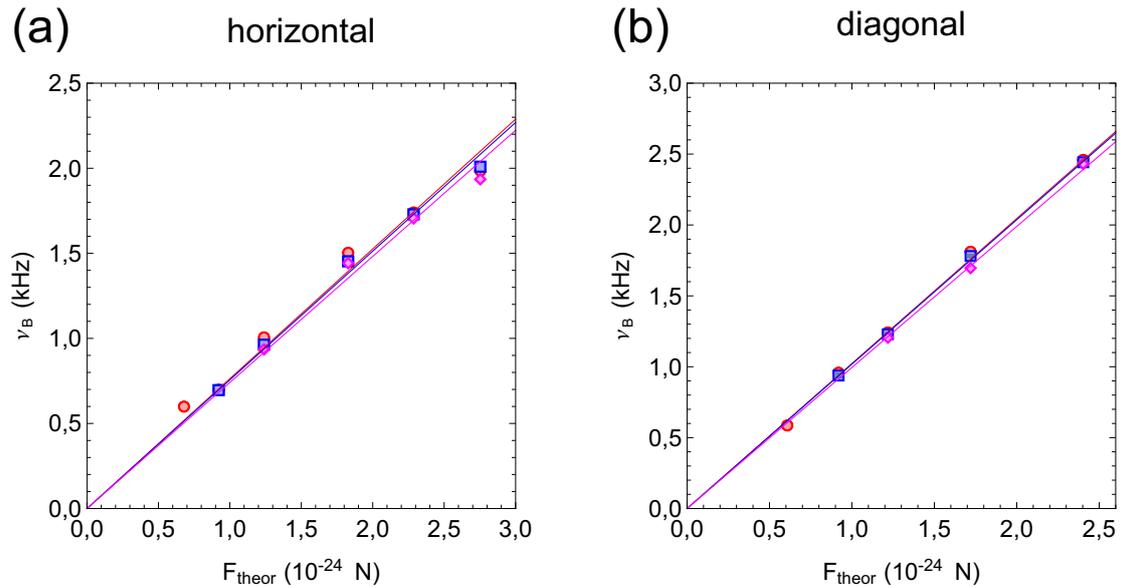
Richtung der Kraft darstellt. Für die horizontale Richtung entspricht  $q_{\text{span}}$  der Ausdehnung der ersten Brillouin-Zone in x-Richtung,  $q_{\text{span}} = 2k$ . Hierbei ist  $k = 2\pi/1064\text{nm}$  die Wellenzahl des Gitterlichts. Für die diagonale Richtung ist  $q_{\text{span}}$  gleich der Breite der ersten Brillouin-Zone in der diagonalen Richtung,  $q_{\text{span}} = \sqrt{2}k$ . Es gilt damit:

$$\begin{array}{ll}
 \nu_B = \frac{F}{2\hbar k} & \text{horizontal} \\
 \nu_B = \frac{F}{\sqrt{2}\hbar k} & \text{diagonal}
 \end{array} \tag{5.32}$$

Bei gleichem Betrag der Kraft ist also die Bloch-Frequenz bei diagonaler Bewegung durch den Quasiimpulsraum um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer als bei horizontaler Bewegung.

In Tabelle 5.1 sind für die einzelnen, in den Bloch-Oszillations-Messungen verwendeten Strompaare ( $I_{ST}, I_{EC}$ ) jeweils die theoretisch berechnete Kraft und Bloch-Frequenz dargestellt. Ebenso sind die experimentellen, mit Hilfe der in diesem Kapitel vorgestellten Analysemethoden ermittelten Werte der Bloch-Frequenz für die verschiedenen Bänder eingetragen. Man kann erkennen, dass die experimentell bestimmten Werte der Bloch-Frequenz für das erste, zweite und vierte Band bei festem Strompaar gut miteinander übereinstimmen. Betrachtet man alle experimentellen Frequenzwerte, die zum gleichen Strompaar gehören, liegt der relative Unterschied zwischen kleinstem und größtem Wert der Bloch-Frequenz zwischen etwa 1 und 7% (bezogen auf den Mittelwert), je nachdem, welches Strompaar man auswählt.

Nach den Gleichungen 5.32 ist die Frequenz  $\nu_B$  der Bloch-Oszillation proportional zur auf die Atome wirkenden Kraft  $F$ . Wir tragen darum für beide Rich-



**Abbildung 5.29:** Experimentell ermittelte Frequenzen  $\nu_B$  der Bloch-Oszillationen, aufgetragen gegen die in der Simulation berechnete Kraft  $F_{\text{theor}}$ , für die Messungen in (a) horizontaler und (b) diagonaler Krafrichtung. Dargestellt sind die Messpunkte für das erste (rote Kreise), zweite (blaue Quadrate) und vierte Band (magentafarbene Diamanten). Die durchgezogenen Linien sind Fitgeraden für die Messpunkte eines Bandes, wobei jeweils die gleiche Farbe wie für die zu fittenden Messpunkte verwendet wird.

tungen der Kraft, horizontal und diagonal, jeweils die experimentell bestimmten Bloch-Frequenzen für das erste, zweite und vierte Band gegen die theoretisch berechnete Kraft auf, was in Abbildung 5.29 zu sehen ist. Man kann erkennen, dass die experimentellen Frequenzen näherungsweise auf Geraden durch den Ursprung liegen. Es wurde für jedes der Bänder eins, zwei und vier ein eigener linearer Fit durch den Koordinatenursprung durchgeführt. Bei der horizontalen als auch der diagonalen Krafrichtung ergeben sich aus dem Fit jeweils ähnliche Steigungen der Geraden. Sowohl bei der horizontalen als auch bei der diagonalen Richtung gibt es eine leichte Tendenz, dass die Steigung vom ersten bis zum vierten Band abnimmt.

Ein Grund für die Unterschiede der experimentell bestimmten Werte für das erste, zweite und vierte Band bei festen Spulenströmen könnte sein, dass die Bloch-Frequenz in geringem Maße von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  abhängt. Zusätzlich zum periodischen Gitterpotenzial und dem harmonischen magnetischen Potenzial erfahren die Atome einen externen Einschluss durch die Gaußsche Form der Gitterstrahlen. Dieses einhüllende Potenzial sollte in der Theorie keinen Einfluss auf die Kraft haben, da die Gitterstrahlen so justiert worden sind, dass das Minimum dieses Potenzials am Ort der Atome liegt. Der Gradient des einhüllenden Potenzials und damit die aus dem Potenzial resultierende Kraft beträgt dann null am Ort der Atome. Es kann jedoch sein, dass es zu einer leichten Dejustage des Gitters gekommen war, so dass ein geringer, von null verschiedener Gradient vorgelegen hat, welcher von der Zeitphasendifferenz abhängt. Zudem könnten während der Messreihen thermische Drifts im experimentellen Aufbau

stattgefunden haben. Durch solche Drifts kann sich die Position des Fallenminimums – sowohl die des unverschobenen als auch die des durch die Bloch-Spulen verschobenen Minimums – geringfügig ändern. Möglicherweise ist auch die von den Netzgeräten ausgegebene Spannung, auf welche die Kondensatorbänke der Bloch-Spulen aufgeladen werden, kleinen zeitlichen Änderungen unterworfen.

Vergleicht man für die horizontale Richtung die experimentellen Werte der Bloch-Frequenz mit den theoretischen, so sieht man, dass für das erste Strompaar (113 mA, 88 mA) die experimentellen Werte etwa 5 bis 10% über dem theoretischen Wert liegen. Beim Erhöhen des Stroms ändert sich das Vorzeichen der Abweichung, so dass beim sechsten Strompaar (450 mA, 350 mA) die experimentellen Werte nun 9 bis 12% unter dem theoretischen Wert liegen. Für die diagonale Krafrichtung ergibt sich für alle Spulenstrompaare eine negative Abweichung der experimentellen Werte von den theoretischen. Diese beträgt zwischen  $-7$  und  $-15\%$ .

Eine Ursache für die Abweichungen der im Experiment bestimmten Frequenzen von den theoretisch berechneten könnte sein, dass die Position der Extra-Spule im experimentellen Aufbau nur ungefähr, jedoch nicht exakt bekannt ist. Aufgrund der beengten Verhältnisse im Spulenaufbau ließ sich der Abstand der Spule von der Position der Atome nur näherungsweise messen. Auch ist es möglich, dass die tatsächliche Anzahl der Windungen der im Experiment verwendeten Spulen geringfügig von der angenommenen Anzahl abweicht.

## 5.12 Dekohärenzeffekte bei Bloch-Oszillationen

In den Band-Mapping-Bildern der in diesem Kapitel gezeigten Messungen kann man erkennen, dass die Anzahl der kohärenten Atome, die an der Bloch-Oszillation teilnehmen, mit der Zeit abnimmt. Dies geschieht auf einer Zeitskala, die deutlich kleiner ist als die Zerfallszeiten der Atome in dem jeweiligen Band. In diesem Abschnitt sollen Effekte genannt werden, die für eine Abnahme der Kohärenz während der Bloch-Oszillation verantwortlich sind. Zu diesen zählen die dynamische Instabilität, die Landau-Instabilität sowie die Bildung von Solitonen und Vortizes.

Die *dynamische Instabilität* ist eine Eigenschaft von nichtlinearen Systemen und tritt auf, wenn das Eigenspektrum der Anregungen des Systems komplexe Frequenzen enthält. Beliebig kleine Störungen der Wellenfunktion können dann exponentiell anwachsen, was schließlich zur Zerstörung des Anfangszustandes führt. Die Bedingungen für dynamische Instabilität werden von einem BEC mit repulsiver Wechselwirkung in einem periodischen Gitterpotenzial erfüllt. Das Phänomen ist einzigartig in BEC-Bloch-Wellen und kommt nicht in ebenen BEC-Wellen im freien Raum vor [Wu01].

Durch eine Analyse der Gross-Pitaevskii-Gleichung kann gezeigt werden, dass Bloch-Wellen in bestimmten Regionen des Quasiimpulsraumes nicht dynamisch stabil sind und es hier zum exponentiellen Anwachsen von Störungen kommen kann. Die Lebensdauer des Bose-Einstein-Kondensats in einem bestimmten Band hängt damit stark vom Quasiimpulszustand ab. Mit größer werdendem  $q$ , vom

Zentrum bis zur Grenze der Brillouin-Zone hin, kann sich die Lebensdauer drastisch um mehrere Größenordnungen ändern [Fal04].

Wenn sich das Kondensat tief in der instabilen Region des Quasiimpulsraumes befindet, kommt es zur schnellen Ausbildung von komplexen Strukturen im Dichteprofil des atomaren Ensembles. Die Gleichphasigkeit der Atome im Kondensat wird aufgehoben und es findet eine Fragmentierung statt. Es bilden sich Phasendomänen aus, die sich im Impulsspektrum als interferenzartige Strukturen darstellen. Besonders gut sichtbar ist dieses Verhalten für größere Gittertiefen und nahe der Grenze der Brillouin-Zone. Der Effekt kann nicht durch ein einfaches Aufheizen des Ensembles erklärt werden.

Zur *Landau-Instabilität* kommt es, wenn sich eine ebene Welle mit einer größeren Geschwindigkeit als der lokalen Schallgeschwindigkeit fortbewegt. Das System zeigt dabei ein dissipatives Verhalten, bei welchem Phononen angeregt werden. Der kondensierte Anteil der Atome nimmt dabei ab, so dass es zu einer Reduktion der Lebensdauer des BECs kommt. Ein Mechanismus für die Dissipation liegt in der Anwesenheit einer kleinen thermischen Komponente des Kondensats begründet. Die dissipativen Prozesse finden bereits bei kleinen Werten  $q$  des Quasiimpulses statt, jedoch geschieht der Zerfall des BECs auf einer deutlich größeren Zeitskala als bei der dynamischen Instabilität.

Durch Bragg-Reflexion können *Solitonen* und *Vortizes* im Kondensat erzeugt werden. Dies führt zu einer Dämpfung der Bewegung der Atome im Gitter. In [Sco03] wurde gezeigt, dass Bragg-Reflexion zur Entstehung einer Kette von Solitonen führen kann, die schnell in Vortex-Ringe zerfallen. Starke Wechselwirkungen zwischen den Vortizes destabilisieren die Atomwolke, es findet eine explosive Ausdehnung und Fragmentierung des Ensembles statt.

# 6 Anwendungen des Transports im Quasiimpulsraum

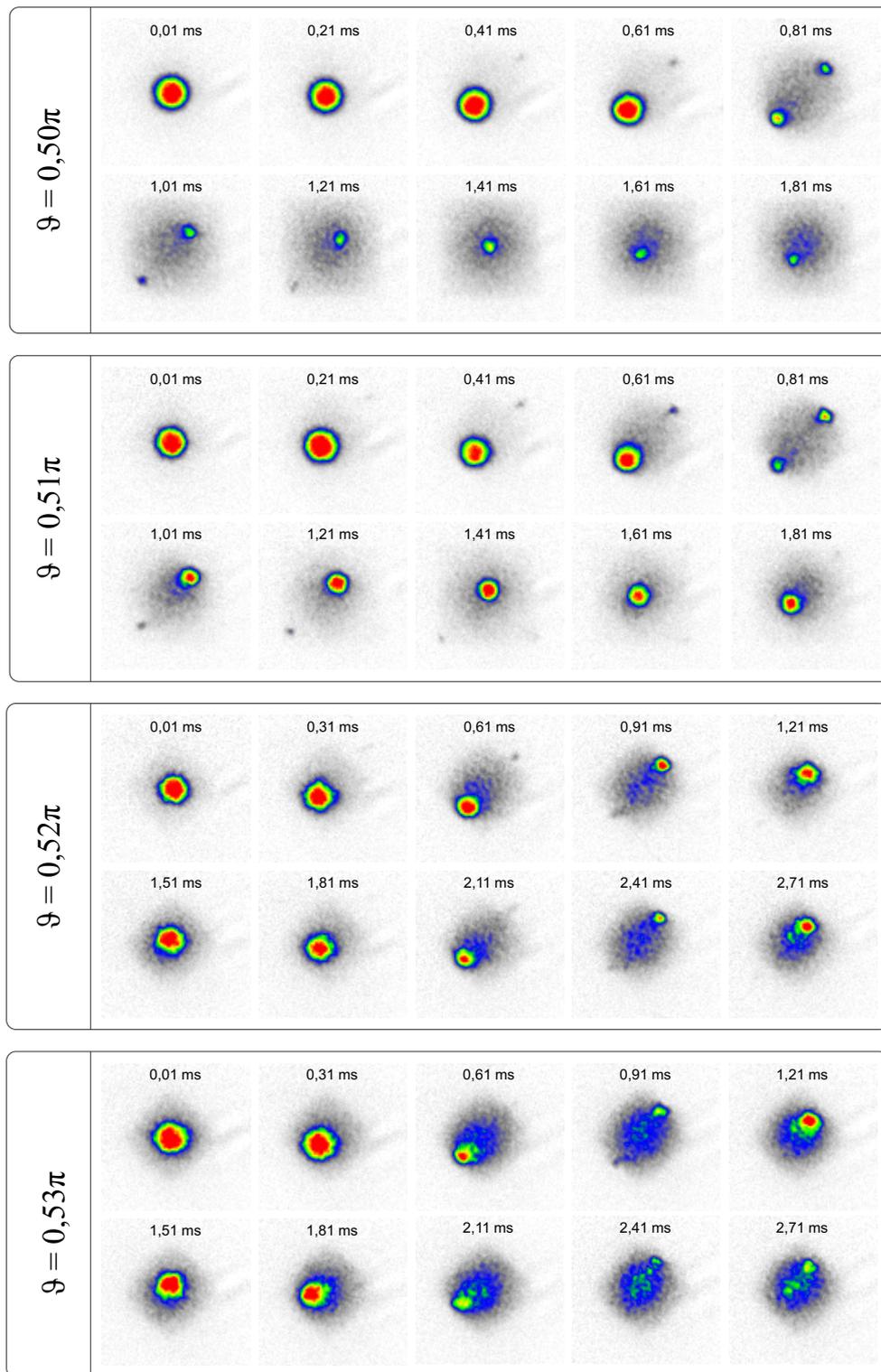
Im vorherigen Kapitel wurde die Bewegung kohärenter Atomen im Quasiimpulsraum demonstriert, die durch einen von zwei Spulen erzeugten zusätzlichen Potenzialgradienten hervorgerufen wird. Wir wollen nun zeigen, wie man sich diesen Transport zunutze machen kann, um bestimmte Phänomene im bipartiten optischen Gitter zu erforschen. Zu diesen zählen Bloch-Zener-Oszillationen, Kondensationseffekte im zweiten und siebten Band sowie eine Oszillationsdynamik in der Besetzung der  $X$ -Punkte des zweiten Bandes.

## 6.1 Bloch-Zener-Oszillationen in den untersten beiden Bändern

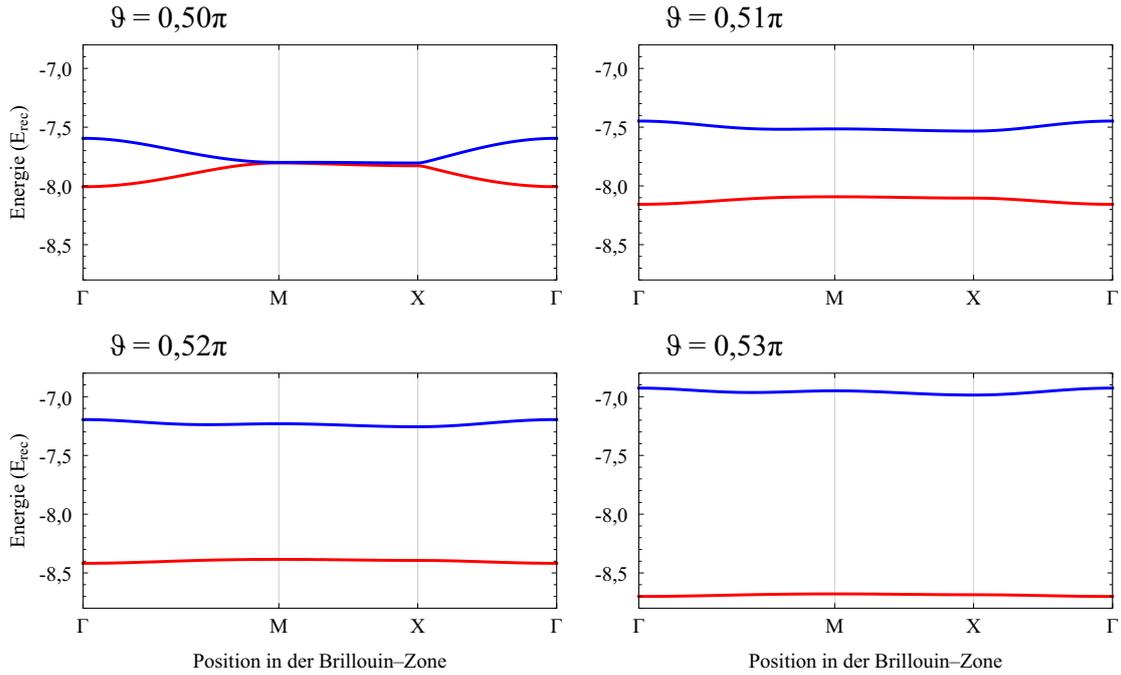
Das bipartite optische Gitter, bei welchem sich die Differenz der Potenzialtiefe von benachbarten Gittertöpfen kontinuierlich verändern lässt, ist ein ideales System für das Studium von Bloch-Zener-Oszillationen. Bei diesen finden während einer Bloch-Oszillation gleichzeitig auch Landau-Zener-Übergänge zwischen verschiedenen Bändern statt. Interessant ist es, Bloch-Zener-Oszillationen für verschiedene im Experiment realisierte Werte der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  zu untersuchen. Hier wollen wir Atome bei Werten von  $\vartheta$ , die in der Umgebung von  $0,50\pi$  liegen, in das erste Band des optischen Gitters laden und auf sie eine Kraft in diagonalen Richtung wirken lassen.

Abbildung 6.1 zeigt jeweils Band-Mapping-Bilder von Messungen, die für die vier Zeitphasenwerte  $\vartheta \in \{0,50\pi; 0,51\pi; 0,52\pi; 0,53\pi\}$  durchgeführt wurden. Die Gittertiefe betrug für alle Messungen  $V_0 = 6,9 E_{\text{rec}}$ . Man kann erkennen, dass bei  $\vartheta = 0,50\pi$  ein signifikanter Anteil der sich anfangs im ersten Band befindenden Atome am  $X_+$ -Punkt in das zweite Band übergeht. Ursache ist die geringe Bandlücke zwischen den ersten beiden Bändern am  $X_+$ -Punkt bei diesem Zeitphasenwert. Der Bandabstand beträgt hier  $\Delta_{X_+}(0,50\pi) \approx 0,02 E_{\text{rec}}$ . Die Struktur der untersten beiden Bänder bei den vier betrachteten Zeitphasenwerten ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Man kann erkennen, dass die Bandlücke am  $X_+$ -Punkt bei  $\vartheta = 0,51\pi$  bereits in einer anderen Größenordnung liegt,  $\Delta_{X_+}(0,51\pi) \approx 0,57 E_{\text{rec}}$ . Für  $\vartheta = 0,52\pi$  ist die Energiedifferenz bereits auf  $\Delta_{X_+}(0,52\pi) \approx 1,1 E_{\text{rec}}$  gewachsen und für  $\vartheta = 0,53\pi$  auf  $\Delta_{X_+}(0,53\pi) = 1,7 E_{\text{rec}}$ . In den Messungen sieht man, dass für  $\vartheta = 0,51\pi$  in deutlich geringerem Maße Übergänge vom ersten ins zweite Band statt als für  $\vartheta = 0,50\pi$ . Für  $\vartheta \geq 0,52\pi$  sind in den Band-Mapping-Bildern so gut wie keine Übergänge vom ersten ins zweite Band mehr erkennbar.

Während der Bloch-Oszillation entsteht durch Streuprozesse ein Hintergrund



**Abbildung 6.1:** Bloch-Oszillationen im ersten Band in diagonaler Richtung bei verschiedenen Werten der Zeitphasendifferenz  $\vartheta \in \{0,50\pi; 0,51\pi; 0,52\pi; 0,53\pi\}$ . Die übrigen Gitterparameter lauten  $V_0 = 6,9 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 0,94$ ,  $\varepsilon_y = 0,90$ ,  $\eta_y = 1,04$ . Die Spulenströme betragen  $(I_{\text{ST}}, I_{\text{EC}}) = (58 \text{ mA}, 575 \text{ mA})$ . Es werden Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten der Bloch-Oszillationen gezeigt. Man beachte, dass die Zeitschritte bei den oberen beiden Messungen 0,2 ms und bei den unteren beiden 0,3 ms betragen.

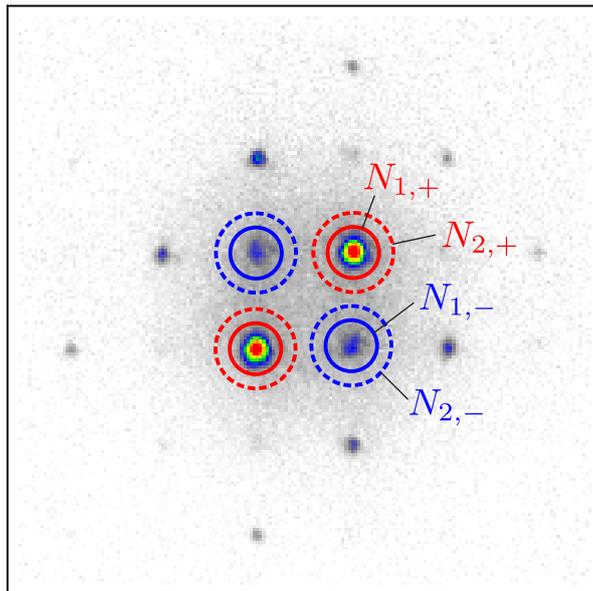


**Abbildung 6.2:** Berechnete Bandstruktur des ersten und zweiten Bloch-Bandes des bipartiten Gitters bei den vier im Experiment verwendeten Werten der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$ . Die verwendeten Werte der übrigen Gitterparameter sind  $V_0 = 6,9 E_{\text{rec}}$ ,  $\varepsilon_x = 0,94$ ,  $\varepsilon_y = 0,90$ ,  $\eta_y = 1,04$ .

aus thermischen Atomen, der die besetzten Brillouin-Zonen homogen ausfüllt. In der Messung bei  $\vartheta = 0,50\pi$  kann man sehen, dass sowohl die erste als auch die zweite Brillouin-Zone von thermischen Atomen besetzt werden. Bei  $\vartheta = 0,51\pi$  besetzen die thermischen Atome hauptsächlich die erste und nur in geringem Maße die zweite Brillouin-Zone. Für  $\vartheta \geq 0,52\pi$  lässt sich keine Besetzung der zweiten Brillouin-Zone mit thermischen Atomen mehr erkennen. Hingegen wird die Form der ersten Brillouin-Zone immer schärfer sichtbar.

## 6.2 Transport zum X-Punkt vor der Anregung ins zweite und siebte Band

In Kapitel 4 wurde eine Methode zur Erzeugung eines Kondensats an den X-Punkten des zweiten Bandes vorgestellt. Bei dieser Anregungstechnik werden die Atome zunächst bei der Gittertiefe  $V_0 \approx 7 E_{\text{rec}}$  und der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,40\pi$  in das erste Band des bipartiten optischen Gitters geladen. Die Atome besetzen anfangs nur die tiefen Gittertöpfe ( $\mathbb{B}$ ) und werden durch eine schnelle Rampe der Zeitphasendifferenz zu  $\vartheta = 0,535\pi$  wie in einem Fahrstuhl in den lokalen  $1s$ -Orbitalen energetisch nach oben gefahren, so dass sie sich in der Nähe der lokalen  $2p$ -Zustände der nun tieferen  $\mathbb{A}$ -Gittertöpfe befinden. Die Atome kondensieren – abhängig von den eingestellten Anisotropieparametern des Gitters – am  $X_+$ - oder am  $X_-$ -Punkt des zweiten Bandes, oder es bildet sich eine komplexe Superposition der Bloch-Zustände beider X-Punkte aus.



**Abbildung 6.3:** Veranschaulichung der im Text verwendeten Größen  $N_1$  und  $N_2$ . Sie bezeichnen die Atomzahl im inneren und äußeren Kreis um ein Bragg-Maxima. Wir haben hier noch Indizes  $\pm$  hinzugefügt, um zu verdeutlichen, auf welchen  $X$ -Punkt sich die dargestellten Größen jeweils beziehen.

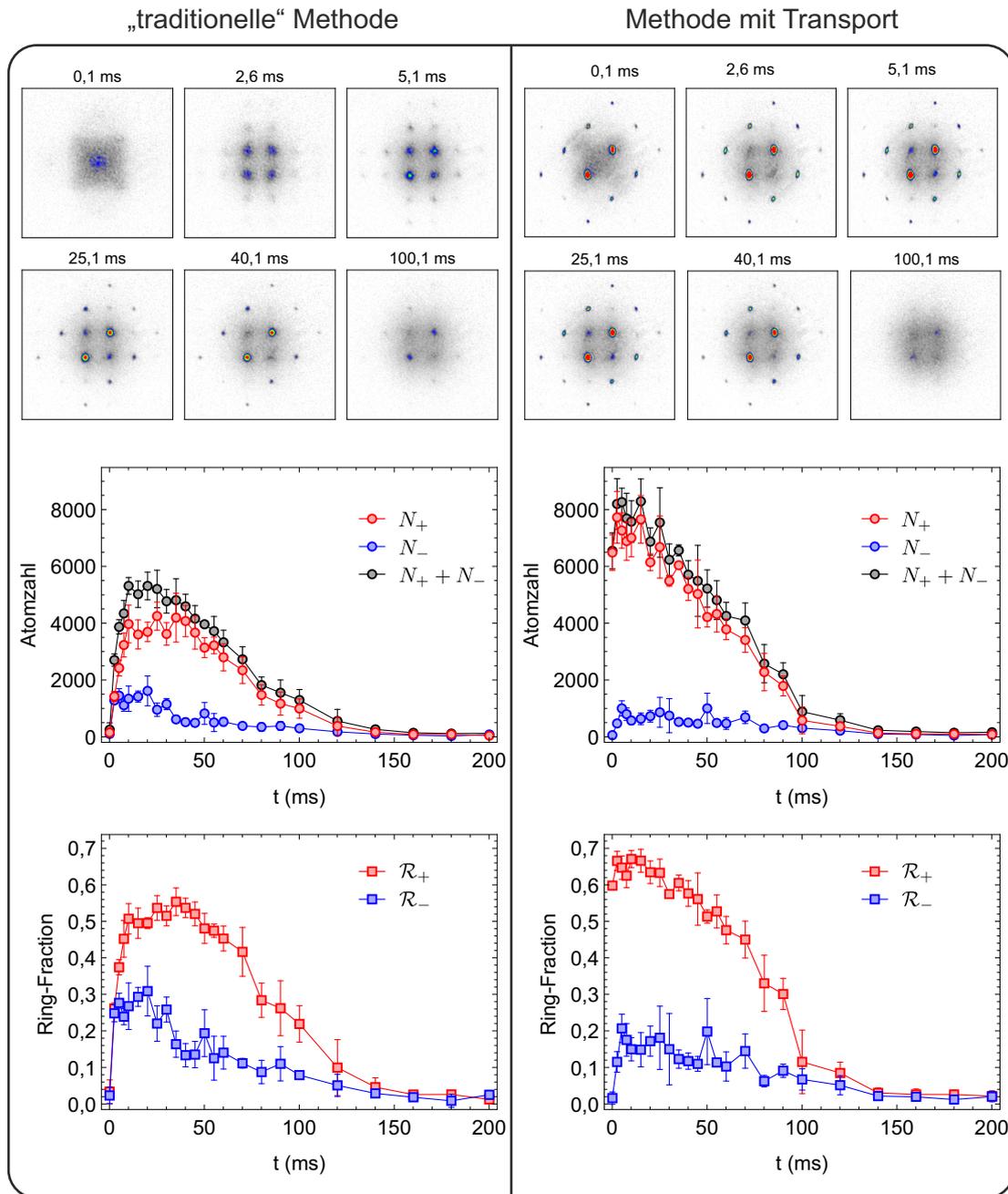
Zur Quantifizierung der kondensierten Atome schauen wir uns die zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  nach dem Zeitphasen-Quench zu  $\vartheta = 0,535\pi$  aufgenommenen Impulsspektren an. Ein Beispiel für ein solches Impulsspektrum ( $t = 25,1$  ms) ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Ziel ist es, die Anzahl der kohärenten Atome in den zum  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt gehörenden zentralen Bragg-Maxima sowie die sogenannte *Ring-Fraction* zu bestimmen.

Der aus thermischen Atomen bestehende Hintergrund des Impulsspektrums ändert sich nur langsam und kann im Bereich eines Bragg-Maximums als konstant angenommen werden. Wir legen um die vier zentralen Bragg-Maxima jeweils einen inneren und einen äußeren Kreis, so dass dadurch zwei *ROIs* (von Englisch: *region of interest*) definiert werden: eine kreisförmige innere ROI, welche die kohärenten Atome plus den inkohärenten Hintergrund enthält, und eine äußere, ringförmige ROI, in welcher sich ausschließlich inkohärente Hintergrundatome befinden. Die Anzahl der Atome im inneren Kreis bezeichnen wir mit  $N_1$ , die im äußeren Kreis mit  $N_2$ . Diese Atomzahlen lassen sich direkt mit unserem Bildauswertungsprogramm bestimmen. Die Anzahl der kohärenten Atome in einem Bragg-Maximum ergibt sich durch die Subtraktion der Anzahl der inkohärenten Atome in der ringförmigen ROI, skaliert auf die Fläche des inneren ROIs, von der Atomzahl in der inneren ROI:

$$N_{\text{coh}} = N_1 - N_{1,\text{incoh}} = N_1 - (N_2 - N_1) \cdot \frac{A_1}{A_2 - A_1}. \quad (6.1)$$

$A_1$  und  $A_2$  sind die Flächen des inneren bzw. äußeren Kreises, angegeben in der Anzahl der Bildpixel, die sich in dem Kreis befinden.

Für die Definition der Ring-Fraction betrachten wir jeweils die Atomdichte in



**Abbildung 6.4:** Kondensation der Atome im zweiten Band mit (links) und ohne (rechts) Transport im ersten Band vor der schnellen Rampe der Zeitphasendifferenz auf  $\vartheta = 0,535\pi$ . Die Gittertiefe beträgt  $V_0 = 7,6 E_{\text{rec}}$ . Gezeigt werden jeweils die Impulsspektren zu bestimmten Zeitpunkten sowie die zeitliche Entwicklung der Atomzahlen  $N_{\pm} \equiv N_{\text{coh},\pm}$  in den Bragg-Maxima 0. Ordnung der  $X_{\pm}$ -Punkte und der Ring-Fractions  $\mathcal{R}_{\pm}$ . Die Impulsspektren beider Messungen besitzen eine gemeinsame Farbskala.

der inneren und äußeren ROI eines Bragg-Maximums, also die Anzahl der Atome in der ROI geteilt durch die Fläche der ROI:

$$\varrho_{\text{in}} = \frac{N_1}{A_1} \quad (6.2)$$

$$\varrho_{\text{out}} = \frac{N_2 - N_1}{A_2 - A_1} \quad (6.3)$$

Die Ring-Fraction  $\mathcal{R}$  ist nun definiert als das Verhältnis der Differenz von  $\varrho_{\text{in}}$  und  $\varrho_{\text{out}}$  zur Summe der beiden Größen und gibt den Kontrast zwischen diesen beiden Dichten an:

$$\mathcal{R} = \frac{\varrho_{\text{in}} - \varrho_{\text{out}}}{\varrho_{\text{in}} + \varrho_{\text{out}}} = \frac{\frac{N_1}{A_1} - \frac{N_2 - N_1}{A_2 - A_1}}{\frac{N_1}{A_1} + \frac{N_2 - N_1}{A_2 - A_1}} \quad (6.4)$$

Wir wollen auf die oben in diesem Abschnitt beschriebene Technik der Anregung von Atomen ins zweite Band zurückkommen. In der linken Hälfte von Abbildung 6.4 sind für diese Anregungsmethode die gesamte kohärente Atomzahl  $N_+ \equiv N_{\text{coh},+}$  und  $N_- \equiv N_{\text{coh},-}$  in den zentralen Bragg-Maxima des  $X_+$ - bzw.  $X_-$ -Punktes sowie die Ring-Fractions  $\mathcal{R}_{\pm}$  dieser Bragg-Maxima in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Man kann erkennen, dass sich die Gesamtzahl  $N \equiv N_+ + N_-$  der kohärenten Atome an beiden  $X$ -Punkten innerhalb der ersten 10 Millisekunden quasi von null ausgehend stark erhöht. Danach findet kaum noch eine Erhöhung statt. Bei  $t = 40$  ms befinden nur am  $X_+$ -Punkt kohärente Atome. Für  $t \geq 40$  ms wird der Zerfall der Population an den  $X$ -Punkten erkennbar. Die Atome zerfallen hierbei vom zweiten in andere Bänder, vor allem in das erste. Das während der Kondensation erreichte Maximum der Atomzahl in den Bragg-Peaks des  $X_+$ -Punkts beträgt  $N_+^{(\text{max})} \approx 4200$ . Die Ring-Fraction, die ein Maß für die Phasenkohärenz des Systems ist, erreicht für die Atome im  $X_+$ -Punkt ihr Maximum bei etwa 35 ms und beträgt hier  $\mathcal{R}_+^{(\text{max})} \approx 0,55$ . Zu diesem Zeitpunkt hat sich also offenbar die Phasenbeziehung zwischen den Atomen weitgehend ausgebildet. Durch den Zerfall von kondensierten Atomen in andere Bänder verringert sich nicht nur die Atomzahl, sondern auch die Ring-Fraction, da der inkohärente Hintergrund in Relation zu den kohärenten Atomen anwächst.

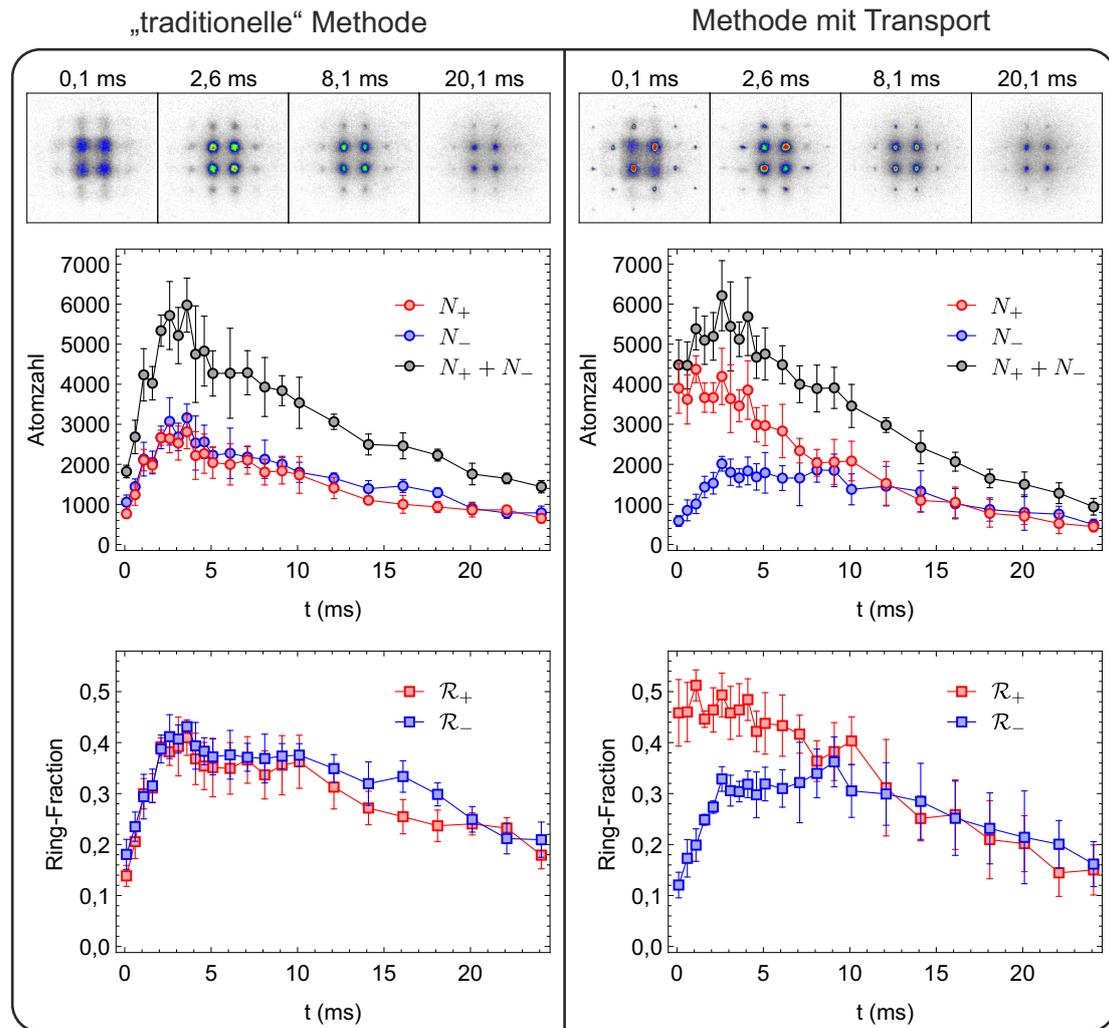
Man kann sich nun die Frage stellen, wie der Kondensationsvorgang abläuft, wenn die Atome bereits vor der Anregung in das zweite Band zum  $X_+$ -Punkt transportiert werden. Um dies zu untersuchen, laden wir die Atome zunächst bei der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,40\pi$  in das erste Band. Die Gittertiefe ist mit  $V_0 = 3,8 E_{\text{rec}}$  auf einen relativ niedrigen Wert eingestellt. Bei dieser Gittertiefe ist der Zustand der Atome am  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes kohärent. Wir bewegen die Atome nun gezielt innerhalb des ersten Bandes vom  $\Gamma$ -Punkt zum  $X_+$ -Punkt. Dieser Transport im Quasiimpulsraum findet innerhalb einer Zeit von 0,8 ms statt und entspricht dem Ausführen eines halben Bloch-Zyklus in diagonaler Richtung. Danach werden die Bloch-Spulen instantan ausgeschaltet. Anschließend rampen wir die Zeitphasendifferenz zu  $\vartheta = 0,535\pi$ , simultan wird die Gittertiefe auf  $V_0 = 7,6 E_{\text{rec}}$  erhöht. Wir nehmen das Impulsspektrum des Ensembles nach einer variablen Wartezeit  $t$  auf.

Die Ergebnisse dieser Messung sind in der rechten Hälfte von Abbildung 6.4 dargestellt. Analog zur oben beschriebenen Messung mit der „traditionellen“ Anregungsmethode – werden für die neue Anregungsmethode mit Transport zum  $X_+$ -Punkt die Anzahl der kohärenten Atome in den zentralen Bragg-Maxima der  $X_{\pm}$ -Punkte und die Ring-Fractions  $\mathcal{R}_{\pm}$  in Abhängigkeit von der Zeit gezeigt. Man kann erkennen, dass die Anzahl  $N_+$  der kohärenten Atome in den zentralen Bragg-Maxima des  $X_+$ -Punktes bereits zu Beginn bei etwa 6500 liegt und sich innerhalb der folgenden 10 Millisekunden auf den Maximalwert  $N_+^{(\max)} \approx 7700$  erhöht. Die Ring-Fraction erreicht ebenfalls bei  $t \approx 10$  ms ihr Maximum, welches bei  $\mathcal{R}_+^{(\max)} \approx 0,67$  liegt. Da die Atome sich schon vor der Kondensation am  $X_+$ -Punkt befinden, muss beim Thermalisieren deutlich weniger Energie abgegeben werden und der Kondensationsvorgang verläuft in erheblich kürzerer Zeit. Die Besetzung des  $X_-$ -Punktes fällt mit dieser Anregungstechnik geringer aus als bei der Methode ohne Transport im Quasiimpulsraum. Für beide Anregungsmethoden war die Atomzahl im BEC vor dem Laden in das erste Band mit  $N_{\text{BEC}} \approx 4,5 \cdot 10^4$  ähnlich groß.

Mit Hilfe eines der Zeitphasenrampe vorangehenden Transports vom  $\Gamma$ - zum  $X_+$ -Punkt im ersten Band kann man also ein Kondensat am  $X_+$ -Punkt erzeugen, dessen Atomzahl größer als bei der traditionellen Methode ist. Es lässt sich mit der neuen Technik eine um 83% größere Atomzahl im Kondensat am  $X_+$ -Punkt erreichen. Die maximale Ring-Fraction bezüglich der Bragg-Maxima des  $X_+$ -Punktes ist bei der neuen Methode ebenfalls größer.

Betrachtet man nach einer längeren Wartezeit, zum Beispiel bei  $t \approx 100$  ms, die Atomzahl am  $X_+$ -Punkt bei beiden Anregungsmethoden, so stellt man fest, dass sich nun bei der neuen Technik weniger Atome am  $X_+$ -Punkt befinden als bei der traditionellen. Das liegt daran, dass bei der Methode mit dem Transport die Kondensation schon nach wenigen Millisekunden abgeschlossen ist und damit sehr früh die maximale Besetzung der  $2p_{x+y}$ -Orbitale erreicht wird. Das führt dazu, dass die Rate der zu Verlusten führenden Stöße der Atome hier schon ihr Maximum annimmt. Bei der traditionellen Anregungsmethode hingegen wird die maximale Atomzahl im Kondensat erst nach etwa 35 ms erreicht, so dass hier eine hohe Stoßrate zu einem späteren Zeitpunkt als bei der neuen Methode einsetzt.

Nachdem wir uns die Anregung in das zweite Band mit einem vorangehenden Transport im Quasiimpulsraum angeschaut haben, wollen wir eine ähnliche Untersuchung auch für das siebte Band durchführen. Wir betrachten zunächst die Anregung in das siebte Band mit der „traditionellen“ Anregungsmethode, welche in Abschnitt 4.3 behandelt wurde, und verwenden die dort angegebene Sequenz. Man sieht in der linken Hälfte von Abbildung 6.5, dass es nach der Anregung zu einer gleichmäßigen Akkumulation der Atome an beiden  $X$ -Punkten kommt. Die Atome kondensieren bei der gewählten Gittereinstellung also gleichzeitig am  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt. Die gesamten kohärenten Atomzahlen  $N_+$  und  $N_-$  in den zentralen Bragg-Maxima des  $X_+$ - bzw.  $X_-$ -Punktes hat ein Maximum bei  $N_{\pm}^{(\max)} \approx 3000$ , dieses wird bei  $t \approx 4$  ms erreicht. Für  $t \gtrsim 4$  ms wird der Zerfall der Population sichtbar und die Zahl der kohärenten Atome nimmt wieder ab. Die Ring-Fraction erreicht ihr Maximum etwa zur gleichen Zeit wie die Anzahl der kohärenten Atome, dieses liegt im Bereich von  $\mathcal{R}_{\pm}^{(\max)} \approx 0,43$ .



**Abbildung 6.5:** Kondensation der Atome im siebten Band mit (links) und ohne (rechts) Transport im ersten Band vor der schnellen Rampe der Zeitphasendifferenz. Gezeigt werden jeweils die Impulsspektren zu bestimmten Zeitpunkten sowie die zeitliche Entwicklung der Atomzahlen  $N_{\pm} \equiv N_{\text{coh},\pm}$  in den Bragg-Maxima 0. Ordnung und der Ring-Fractions  $\mathcal{R}_{\pm}$ . Für die Impulsspektren beider Messungen wurde eine gemeinsame Farbskala gewählt.

Wir betrachten nun den Fall, dass dem Zeitphasen-Quench in das siebte Band ein Transport der Atome im ersten Band vorangeht. Hierzu laden wir die Atome bei der Gittertiefe  $V_{0,i} = 4,6 E_{\text{rec}}$  an den  $\Gamma$ -Punkt des ersten Bandes und transportieren sie anschließend innerhalb von 0,8 ms zum  $X_+$ -Punkt. Die Gittertiefe wird nun sehr schnell auf  $20,6 E_{\text{rec}}$  hochgefahren. Von hier an ist die Sequenz die gleiche wie bei der traditionellen Methode: Die Zeitphasendifferenz wird innerhalb von 1 ms auf den Zielwert  $\vartheta_f = 0,67\pi$  geramppt, wobei in der zweiten Hälfte der Rampe die Gittertiefe auf den finalen Wert  $V_{0,f} = 9,1 E_{\text{rec}}$  abgesenkt wird.

Die Ergebnisse mit der neuen Anregungstechnik sind in der rechten Hälfte von Abbildung 6.5 dargestellt. Es ist erkennbar, dass direkt nach der Anregung nur der  $X_+$ -Punkt mit kohärenten Atomen besetzt ist. Seine Besetzung nimmt ab, während sich die Besetzung des  $X_-$ -Punktes erhöht. Die gesamte Zahl der

kohärenten Atome in den Bragg-Maxima 0. Ordnung des  $X_-$ -Punktes erreicht ihr Maximum bei  $t \approx 3$  ms. Anschließend bleibt die Besetzung des  $X_-$ -Punktes für einige Millisekunden annähernd konstant, derweil die Population am  $X_+$ -Punkt abnimmt. Die Atomzahlen an den  $X_{\pm}$ -Punkten gleichen sich an und sind ab  $t \approx 8$  ms ähnlich groß. Zu diesem gilt  $N_+, N_- \approx 2000$ . Für  $t \gtrsim 8$  ms erfolgt eine Abnahme der kohärenten Atomzahlen am  $X_+$ - und  $X_-$ -Punkt, wobei  $N_+$  und  $N_-$  ungefähr gleich groß bleiben. Ring-Fractions der Bragg-Maxima der  $X_{\pm}$ -Punkte gleichen sich ebenfalls an mit zunehmender Zeit und sind ungefähr gleich groß ab  $t \approx 9$  ms. Zu diesem Zeitpunkt liegen sie im Bereich von  $\mathcal{R}_{\pm} \approx 0,37$ .

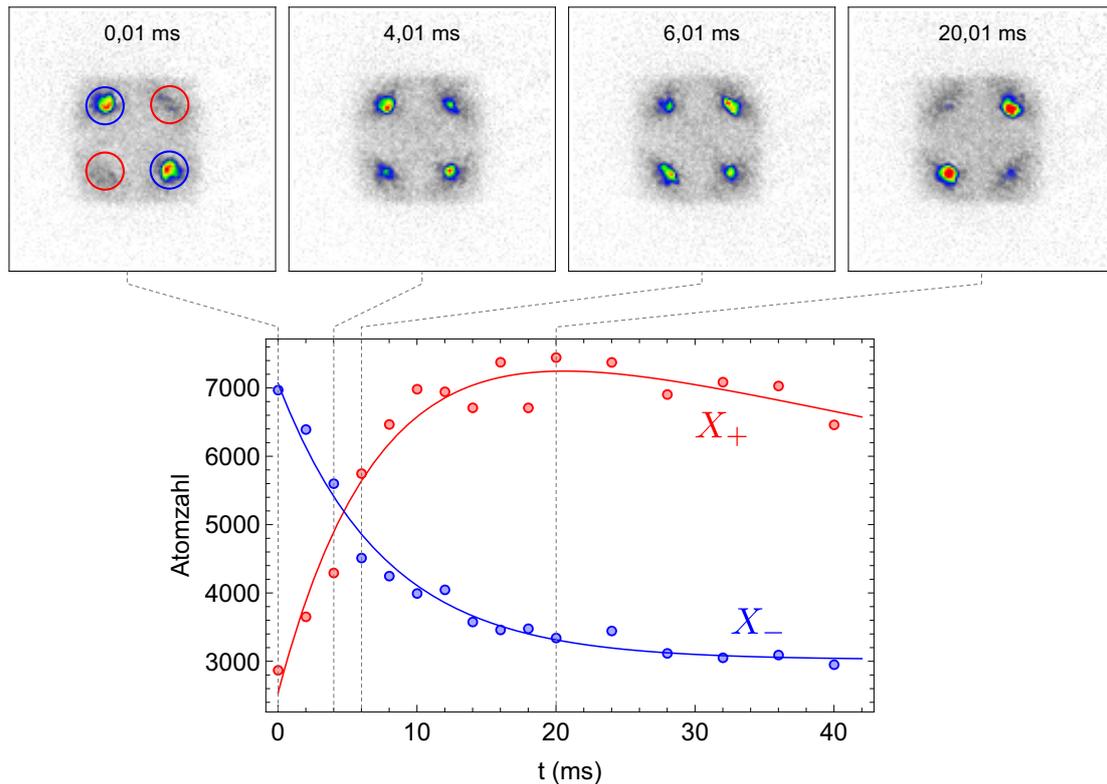
Zum Zeitpunkt  $t = 8$  ms hat man bei jeder der vorgestellten Anregungsmethoden für das siebte Band ausgeglichene Besetzungen des  $X_+$ - und  $X_-$ -Punktes. Außerdem sind die Atomzahlen  $N_+$  und  $N_-$  beim Vergleich der beiden Anregungsmethoden jeweils gleich groß. Die neue Anregungsmethode mit dem Transport hat also keinen Effekt auf die absolute Zahl der kohärenten Atome zu diesem Zeitpunkt. Jedoch gibt es einen Unterschied, der beim Betrachten der Impulsspektren in Abbildung 6.5 deutlich wird: Mit der neuen Methode wird nach dem Ausgleichen der Atomzahlen beider  $X$ -Punkte eine deutlich geringere Breite der Bragg-Maxima erreicht. Die Atome besitzen damit eine schmalere Verteilung im Quasiimpulsraum und eine größere Kohärenzlänge im optischen Gitter.

### 6.3 Rekondensation der Atome im zweiten Band nach Transport zum energetisch höheren $X$ -Punkt

Eine weitere interessante Fragestellung, die man experimentell untersuchen kann, ist: Was passiert, wenn man Atome am Energieminimum eines höheren Bandes kondensieren lässt und sie anschließend an eine andere Position im Quasiimpulsraum transportiert? Wir wollen hier die Situation betrachten, dass Atome mit der in Kapitel 4 beschriebenen „traditionellen“ Anregungsmethode am  $X_+$ -Punkt des zweiten Bandes kondensiert und anschließend zum energetisch höherliegenden  $X_-$ -Punkt transportiert werden. Hierfür wird die durch die Bloch-Spulen erzeugte Kraft für 0,60 ms angeschaltet und die Atome führen einen halben Bloch-Zyklus in horizontaler Richtung aus. Nach einer variablen Haltezeit  $t$  im Anschluss an den Transport nehmen wir Band-Mapping-Bilder auf, von denen einige in Abbildung 6.6 dargestellt sind.

Aus den Bildern kann man erkennen, dass zum Anfangszeitpunkt  $t = 0,01$  ms eine makroskopische Besetzung des  $X_-$ -Punktes vorliegt. Mit zunehmender Zeit nimmt die Besetzung des  $X_-$ -Punktes ab, während sich die Atome am  $X_+$ -Punkt akkumulieren. Ab  $t \approx 20$  ms befinden sich keine kohärenten Atome mehr am  $X_-$ -Punkt, die Atome sind am  $X_+$ -Punkt rekondensiert worden.

Wir messen die Atomzahlen am  $X_+$ -Punkt und  $X_-$ -Punkt mit Hilfe von kreisförmigen ROIs, welche in den Band-Mapping-Bildern um die  $X$ -Punkte herum gelegt werden. Im Diagramm in Abbildung 6.6 sind die Atomzahlen gegen die Zeit aufgetragen. Ausgehend vom Beginn der Messung, nimmt die Atomzahl am  $X_-$ -



**Abbildung 6.6:** Zeitliche Entwicklung der Besetzung des  $X_+$ - (rot) und des  $X_-$ -Punktes (blau) nach Transport der Atome im zweiten Band vom  $X_+$ - zum  $X_-$ -Punkt. Die Gitterparameter sind so eingestellt, dass der  $X_+$ -Punkt im zweiten Band energetisch höher liegt als der  $X_-$ -Punkt. Dargestellt ist die gesamte Atomzahl in den roten und in den blauen ROIs, die in der Aufnahme bei  $t = 0,01$  ms eingezeichnet sind. Die vier Aufnahmen über dem Diagramm sind Band-Mapping-Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  nach dem Transport. Die durchgezogenen Linien im Diagramm stellen einen simultanen exponentiellen Fit der beiden Kurven mit zwei Zeitkonstanten dar.

Punkt ab, während sich die Besetzung des  $X_+$ -Punktes erhöht. Bei  $t \approx 5$  ms sind beide Populationen gleichgroß. Zum Zeitpunkt  $t \approx 20$  ms ist die gesamte makroskopische Besetzung des  $X_-$ -Punktes zerfallen und die Atome sind am  $X_+$ -Punkt rekondensiert worden. Aufgrund von thermischen Hintergrundatomen in der ersten und zweiten Brillouin-Zone, die zu jedem Zeitpunkt in den ROIs mitgemessen werden, geht die Atomzahl in den beiden Kurven nicht gegen null.

Für  $t \gtrsim 20$  ms nimmt die Anzahl der Atome am  $X_+$ -Punkt langsam wieder ab, es wird der Zerfall der kohärenten Population in andere Bänder, vor allem das erste Band, sichtbar. Die Daten der beiden Messkurven lassen sich gut mit einem simultanen exponentiellen Fit mit zwei Zeitkonstanten fitten. Für die Rekondensation ergibt sich dabei die Zeitkonstante  $\tau_1 \approx 8$  ms, für den auf einer größeren Zeitskala stattfindenden Zerfall der kohärenten Population erhält man die Zeitkonstante  $\tau_2 \approx 90$  ms.

## 6.4 Oszillation zwischen den $X_{\pm}$ -Punkten im zweiten Band

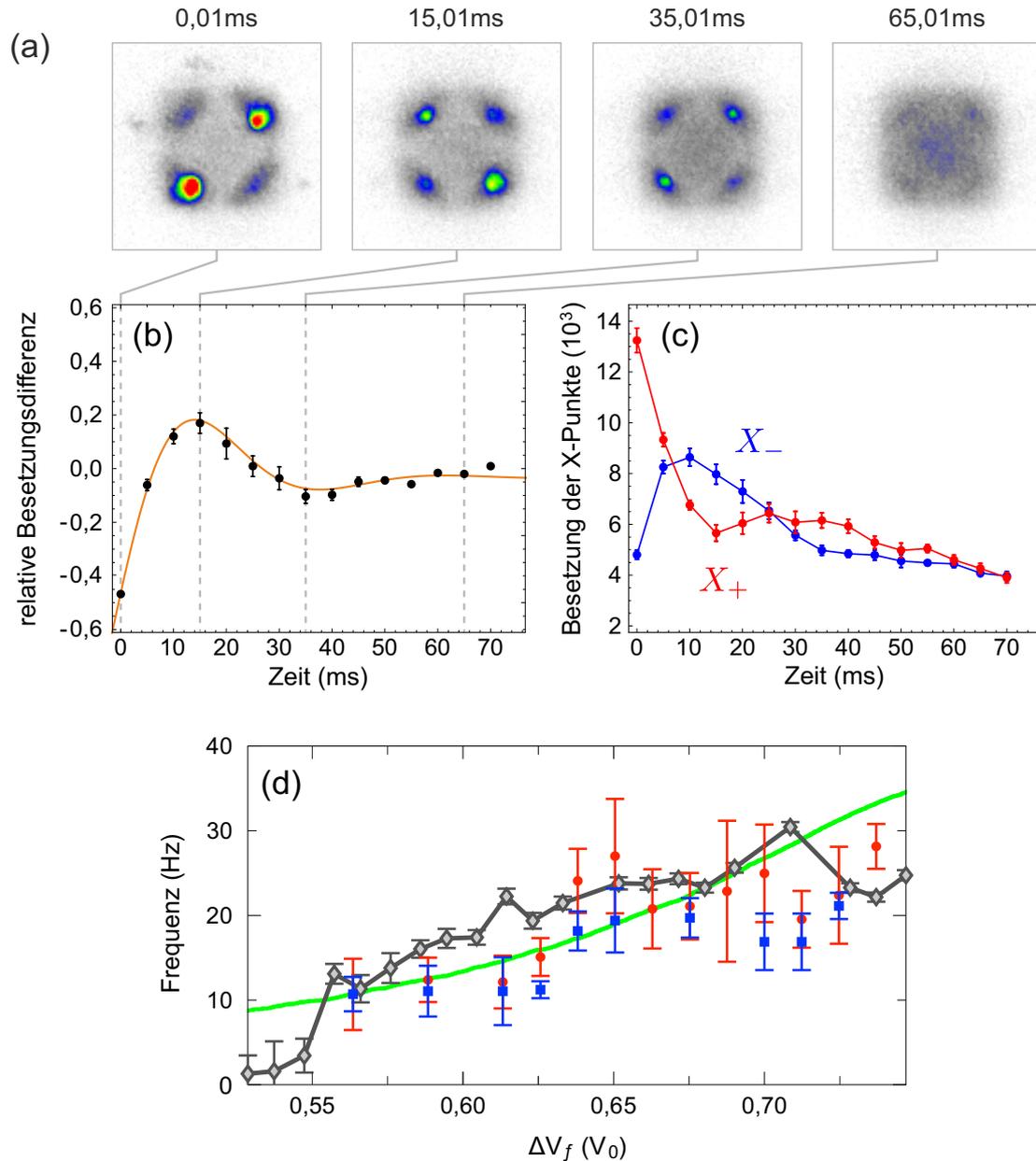
Die in diesem Kapitel vorgestellte Technik, bei der die Atome vor der Anregung in ein höheres Band im Quasiimpulsraum zur Position des Energieminimums dieses Bandes transportiert werden, kann auch verwendet werden, um Josephson-ähnliche Oszillationen in der Besetzung der  $X_{\pm}$ -Punkte im zweiten Band zu beobachten [Var21, VR21].

Hierzu werden die Anisotropieparameter des Gitters so eingestellt, dass die Minima des zweiten Bandes am  $X_{+}$ - und  $X_{-}$ -Punkt entartet sind. Wir laden die Atome bei der Gittertiefe  $V_{0,i} = 4,3 E_{\text{rec}}$  und der Zeitphasendifferenz  $\vartheta = 0,4\pi$  in das erste Band des optischen Gitters. Anschließend wird für eine Zeit von 0,65 ms der von den Bloch-Spulen erzeugte Magnetfeldgradient angeschaltet, durch welchen die Atome den halben Zyklus einer Bloch-Oszillation in diagonaler Richtung ausführen. Sie werden vom  $\Gamma$ - zum  $X_{+}$ -Punkt des ersten Bandes transportiert. Nun führen wir eine simultane Rampe der Zeitphasendifferenz zu einem Zielwert  $\vartheta_f \in [0,545\pi; 0,559\pi]$  und der Gittertiefe zu  $V_{0,f} = 7,2 E_{\text{rec}}$  durch. Nach variabler Haltezeit  $t$  wird das Impulsspektrum der Atome aufgenommen. Die Messungen werden wiederholt, wobei nun am Ende ein Band-Mapping durchgeführt wird.

Bei beiden Abbildungsmethoden wird eine stark gedämpfte Oszillation in der Besetzung des  $X_{+}$ - und des  $X_{-}$ -Punktes des zweiten Bandes beobachtet. Die in Abbildung 6.7(a) gezeigten Band-Mapping-Bilder stammen aus einer Messung mit  $\vartheta_f = 0,558\pi$ . Es seien  $N_{+}$  und  $N_{-}$  die aus den Band-Mapping-Bildern ermittelten Besetzungszahlen des  $X_{+}$ - und  $X_{-}$ -Punktes. Trägt man die relative Besetzungsdifferenz  $(N_{-} - N_{+})/(N_{-} + N_{+})$  der beiden  $X$ -Punkte gegen die Zeit auf, ergibt sich für die vorgestellte Messung das Diagramm in Abbildung 6.7(b). Abbildungsteil (c) zeigt die Auftragung von  $N_{+}$  und  $N_{-}$  gegen die Zeit. Ein Fit der Messpunkte in (b) mit einer exponentiell gedämpften harmonischen Schwingung liefert eine Oszillationsfrequenz von  $\nu_{\text{osc}} = 21,6$  Hz.

Zu der Oszillation der Besetzung kommt es durch ein Wechselspiel zweier Arten von Kollisionen der Atome im Gitter: Kollisionen der Atome innerhalb der lokalen Orbitale  $p_{x+y}$ ,  $p_{x-y}$  und  $s$ ; und Kollisionen, die zu einer Veränderung der besetzten Orbitale führen. Bei Letzterem handelt es sich um eine Wechselwirkung, bei der Atome innerhalb einer  $p$ -Orbital-Mode – also  $p_{x+y}$  oder  $p_{x-y}$  – miteinander kollidieren und dabei in die jeweils andere  $p$ -Orbital-Mode transferiert werden [Hem19]. Dies zeigt eine Analogie zu spinverändernden Kollisionen [Wid05] und ähnelt einem Paar-Tunnel-Prozess [Lia09, Bad09].

Die Oszillationsfrequenz hängt von der relativen Stärke dieser Kollisionswechselwirkungen ab, welche über eine Variation der Zeitphasendifferenz eingestellt werden kann. In Abbildung 6.7(d) sind die aus den einzelnen Messungen mit Hilfe des Fits ermittelten Oszillationsfrequenzen  $\nu_{\text{osc}}$  dargestellt. Die Auftragung erfolgt hierbei gegen die Differenz der Potenzialminima von A- und B-Gittertöpfen,  $\Delta V_f = -4V_{0,f} \cos \vartheta$ . Es sind sowohl die Frequenzen aus den Messungen mit Aufnahme des Impulsspektrums als auch die Frequenzen aus den Messungen mit Band-Mapping dargestellt. Es zeigt sich eine ansteigende Tendenz der Frequenz für zunehmendes  $\Delta V_f$ .



**Abbildung 6.7:** Oszillationsdynamik zwischen den beiden X-Punkten im zweiten Band für eine finale Zeitphasendifferenz  $\vartheta_f = 0,558\pi$ . (a) Band-Mapping-Bilder, die zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  aufgenommen wurden. (b) Relative Besetzungsdifferenz  $(N_- - N_+)/ (N_- + N_+)$  des  $X_-$ - und  $X_+$ -Punktes in Abhängigkeit von der Zeit. Die durchgezogene orangene Linie stellt einen Fit an die Messpunkte mit einer exponentiell gedämpften harmonischen Oszillation dar. (c) Absolute Besetzung des  $X_+$ - (rot) und  $X_-$ -Punktes (blau) in Abhängigkeit von der Zeit. (d) Frequenzen aus den Fits mit exponentiell gedämpfter harmonischer Schwingung, aufgetragen gegen die finale Potenzialtiefendifferenz  $\Delta V_f$  der beiden Klassen von Gittertöpfen. Hierbei sind sowohl die anhand von Impulsspektren (rote Kreise) als auch die anhand von Band-Mapping-Bildern (blaue Quadrate) bestimmten Frequenzen dargestellt. Die durchgezogene grüne Linie stellt den mit Hilfe des Zwei-Moden-Modells ermittelten Verlauf der Frequenz dar. Die mit einer durchgezogenen Linie verbundenen grauen Diamanten erhält man als Ergebnis einer Simulation mit dem Modell, welches ein klassisches Feld verwendet.

Zur theoretischen Beschreibung der Dynamik wurden zwei verschiedene Modelle verwendet: zum einen ein Zwei-Moden-Quantenmodell, in welches die Zustände  $\psi_+$  und  $\psi_-$  an den  $X_{\pm}$ -Punkten des zweiten Bandes eingehen; und zum anderen ein realistischeres, auf der Simulation eines klassischen Feldes beruhendes Modell, welches die röhrenförmigen Gitterplätze simuliert. Hierbei wird ein Tight-Binding-Ansatz mit vier Bändern gemacht und das Tunneln zwischen nächsten und übernächsten Gitterplatznachbarn sowie die Wechselwirkung der Atome auf dem gleichen Gitterplatz berücksichtigt. Beide Modelle zeigen eine quantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen.



## 7 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Experimente mit bosonischen Atomen ( $^{87}\text{Rb}$ ) in einem bipartiten zweidimensionalen optischen Gitter durchgeführt. Die Besonderheit des Gitteraufbaus besteht darin, dass mit den beiden einlaufenden und den beiden zurückreflektierten Gitterstrahlen in x- und y-Richtung vier Strahlen miteinander interferieren. Es wird ein Gitterpotenzial mit zwei Klassen von Gittertöpfen gebildet, deren Potenzialtiefendifferenz sich über die sogenannte Zeitphasendifferenz einstellen lässt. Diese wiederum wird über die Position eines auf einem Piezoaktor montierten Umlenkspiegels geregelt.

Durch einen bestimmten experimentellen Ablauf, welcher eine schnelle Rampe der Zeitphasendifferenz beinhaltet, können Atome aus dem ersten in bestimmte höhere Bänder des Gitters angeregt werden. Hierzu zählen das zweite, vierte und siebte Band. Nach der Anregung in das entsprechende Band thermalisieren die Atome und kondensieren schließlich an den Energieminima des Bandes, welche makroskopisch besetzt werden.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung von Bloch-Oszillationen in höheren Bändern des optischen Gitters. Durch das instantane Anschalten eines von zwei Spulen erzeugten zusätzlichen Magnetfeldgradienten kann eine Kraft mit variablem Betrag und beliebiger Richtung in der Gitterebene realisiert werden, durch welche sich die Atome periodische Bewegungen im zweidimensionalen Quasiimpulsraum ausführen.

Es werden zwei fundamentale Richtungen der Bewegung im Quasiimpulsraum untersucht: die „horizontale“ Richtung ( $\vec{e}_h = -\vec{e}_x$ ) und die „diagonale“ Richtung ( $\vec{e}_d = -(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ ). Für beide Richtungen werden bei verschiedenen Beträgen der Kraft Bloch-Oszillationen im ersten, zweiten und vierten Band des bipartiten Gitters experimentell beobachtet. In jeder Messung werden zu bestimmten Zeitpunkten Band-Mapping-Bilder aufgenommen, anhand von denen sich die Bewegung der Atome durch die zu dem jeweiligen Band gehörende Brillouin-Zone verfolgen lässt.

Für jedes der untersuchten Bänder wurde eine Methode entwickelt, um aus den Band-Mapping-Bildern den Quasiimpuls der kohärenten Atompakete zu ermitteln. Aus der Auftragung des Quasiimpulses gegen die Zeit kann die Bloch-Periode durch einen Fit bestimmt werden. Die bei einer festen Kraft für die verschiedenen Bänder ermittelten Bloch-Perioden stimmen gut überein.

Es wurde eine Simulation des ortsabhängigen Magnetfelds in Abhängigkeit von den Spulenströmen durchgeführt und hieraus die Kraft auf die Atome berechnet. Bei der Auftragung der experimentell ermittelten Frequenzen der Bloch-Oszillationen gegen die aus der Simulation ermittelte Kraft erhält man einen proportionalen Zusammenhang, wie man es aus den semiklassischen Bewegungsgleichungen erwartet.

Ein bipartites quadratisches Gitter bietet im Vergleich zu einem einfachen quadratischen Gitter eine vielfältige Bandstruktur. Befindet sich beispielsweise die Zeitphasendifferenz in der Umgebung von  $\pi/2$ , liegen die untersten beiden Bänder des Gitterpotenzials sehr nah beieinander. Dies wurde ausgenutzt, um Bloch-Zener-Oszillationen zu demonstrieren und die starke Abhängigkeit der Bandlücke von der Zeitphasendifferenz anschaulich zu machen.

Der Transport von Atomen im reziproken Raum eröffnet interessante Möglichkeiten zur Untersuchung von Kondensationsdynamik in höheren Bändern. So wurde experimentell gezeigt, dass Atome, die am energetisch tieferliegenden  $X$ -Punkt des zweiten Bandes kondensiert und durch eine Kraft zum höherliegenden  $X$ -Punkt transportiert worden sind, wieder am  $X$ -Punkt geringerer Energie kondensieren. Der Transport kann auch genutzt werden, um die Atome vor dem Anregen in ein höheres Band bereits zu dem Quasiimpuls zu bewegen, an dem sich das spätere Bandminimum befindet. Im zweiten Band zeigt sich mit der neuen Methode eine stark erhöhte Teilchenzahl und Ring-Fraction der kondensierten Atome im Vergleich zur traditionellen Anregungsmethode.

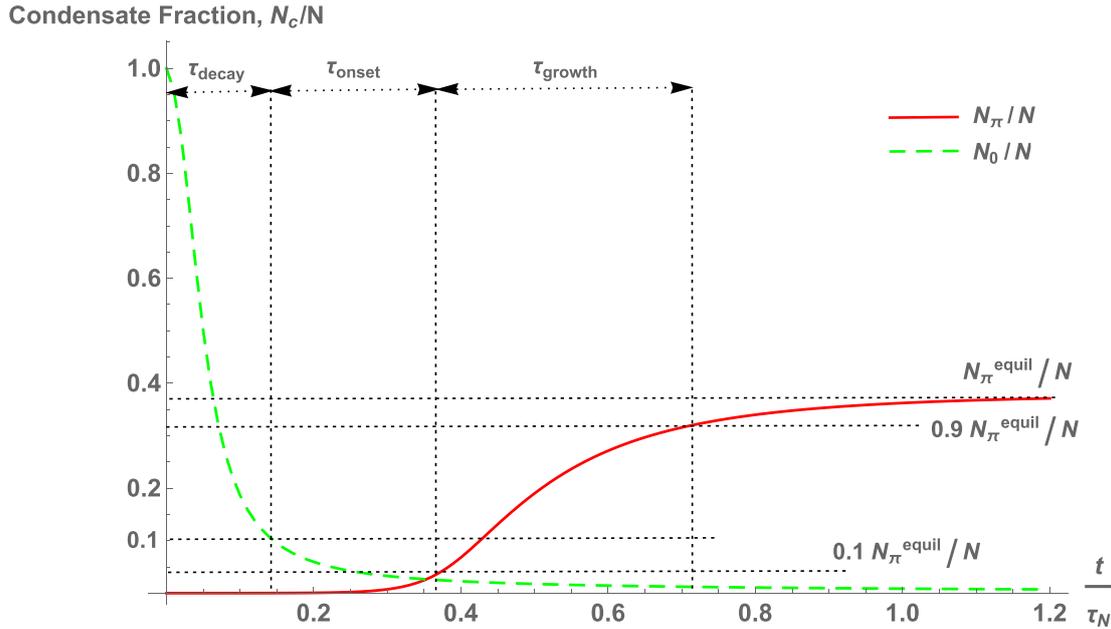
Außerdem können Oszillationen zwischen den beiden  $X$ -Punkten des zweiten Bandes beobachtet werden. Hierzu wird das Gitter so eingestellt, dass die Zustände an den beiden  $X$ -Punkten des zweiten Bandes energetisch entartet sind. Transportiert man nun die Atome vor der Anregung in das zweite Band zu einem der beiden  $X$ -Punkte, findet im zweiten Band eine stark gedämpfte harmonische Oszillation in der Besetzung beider  $X$ -Punkte statt. Diese Dynamik wird verursacht von einem Wechselspiel von Kollisionen der Atome in den lokalen Orbitalen und Kollisionen, bei welchen zwei Atome aus der einen  $p$ -Orbital-Mode in die andere überführt werden.

## 7.1 Rekondensationsdynamik im zweiten Band

In Abschnitt 6.3 wurde ein Experiment beschrieben, in welchem Atome ins zweite Band geladen werden, wo sie zunächst am energetisch tieferliegenden  $X$ -Punkt kondensieren. Mit Hilfe einer Kraft werden die Atome anschließend im Quasiimpulsraum zum anderen, höherliegenden  $X$ -Punkt transportiert. Anschließend lässt sich eine Rekondensationsdynamik beobachten, bei welcher die Atome vom energetisch höheren zum tieferliegenden  $X$ -Punkt zurückkondensieren.

Ein ähnlicher Versuch wird in [Sha20] vorgeschlagen. Ausgangspunkt der theoretischen Betrachtung ist ein System, welches sich zu Beginn nicht im Gleichgewicht befindet, da das Energiemaximum eines Bandes makroskopisch besetzt wird. Es wird der folgende Rekondensationsprozess modelliert, bei welchem das System relaxiert und die Atome wieder am Zustand geringster Energie in dem Band kondensieren.

Das Ergebnis der Modellrechnung ist, dass die Rekondensationsdynamik in drei zeitlichen Phasen abläuft, welche mit bestimmten Zeitkonstanten verbunden sind. In der ersten Phase findet auf der Zeitskala  $\tau_{\text{evap}}$  ein schneller Zerfall der sich am Energiemaximum befindenden Atome statt. Die zweite Phase ist geprägt von einer Umverteilung der Energie unter den nicht kondensierten Atomen. Sie geschieht auf einer mittellangen Zeitskala  $\tau_{\text{onset}}$ . In der dritten Phase rekondensieren

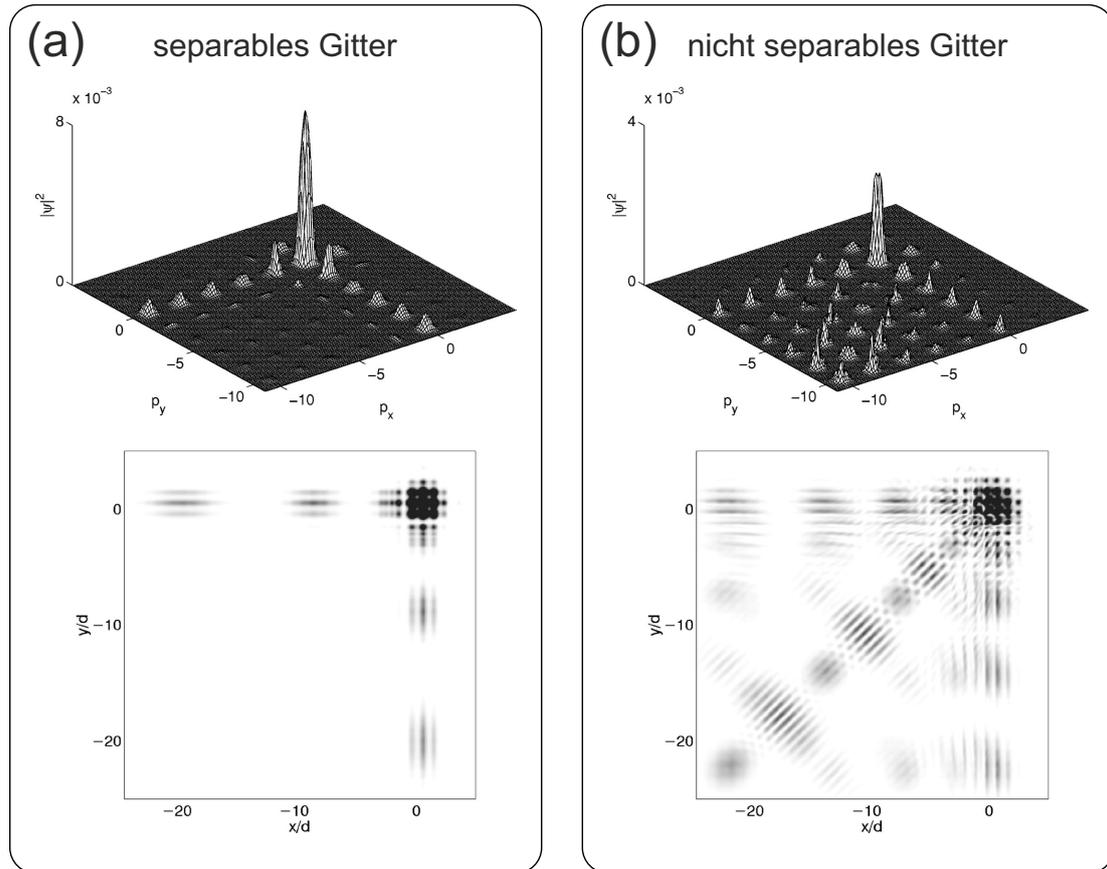


**Abbildung 7.1:** Theoretisch vorhergesagte Rekondensation der Atome am Bandminimum nach Transport zum Bandmaximum. Dargestellt ist die Atomzahl am Maximum (grün, gestrichelt) und am Minimum (rot, durchgezogen). Der Prozess besteht aus drei zeitlichen Abschnitten, die typische Zeitkonstanten besitzen: Zerfall des Kondensats am Maximum, Beginn der Kondensation am Minimum, Anwachsen des Kondensats am Minimum. Entnommen aus [Sha20].

die Atome am Bandminimum, so dass dieses makroskopisch besetzt wird. Dabei nähert sich die Atomzahl am Bandminimum exponentiell einem Sättigungswert an, mit einer großen Zeitkonstanten  $\tau_{\text{growth}}$  (siehe Abbildung 7.1). Wichtig für die Beobachtung der Rekondensationsdynamik ist, dass der Zerfall in andere Bänder deutlich langsamer vonstatten geht als die Rekondensation.

Die aufgrund des Modells erwartete Dynamik lässt sich im Experiment anhand des nach einer Flugzeit  $t_{\text{TOF}}$  aufgenommenen Impulsspektrums überprüfen. Gemäß der theoretischen Betrachtung liegen zu Beginn scharfe Bragg-Maxima der sich im Zustand der größten Energie befindenden Atome vor. Beim Zerfall der Besetzung des Bandmaximums entsteht ein Hintergrund aus nicht kondensierten Atomen. Bei der sich anschließenden Rekondensation werden die zum Zustand des Bandminimums gehörenden Bragg-Maxima ausgebildet. Mit der Zeit werden sie schärfer, da die Phasenkohärenz auf der größeren Zeitskala  $\tau_{\text{growth}}$  zunimmt.

Umsetzen könnte man dieses Proposal mit unserer experimentellen Apparatur zum Beispiel auf die Weise, dass Atome zunächst am energetisch tieferliegenden X-Punkt des zweiten Bandes kondensiert werden. Nun transportiert man sie durch das Anwenden einer Kraft zum Energiemaximum des zweiten Bandes, welches sich am  $\Gamma$ -Punkt befindet, und beobachtet die sich anschließende Dynamik.



**Abbildung 7.2:** Teilchenstrom beim teilweisen Übergang von Atomen in höhere Bänder während der Bewegung durch den Quasiimpulsraum. Dargestellt sind die Wellenfunktionen im Impulsraum (oben) und im Ortsraum (unten) zu bestimmten Zeitpunkten für ein (a) separables und (b) nicht separables Gitter. Adaptiert aus [Kol03b].

## 7.2 Studium von Bloch-Zener-Oszillationen

Wenn auf die Atome im optischen Gitter eine starke statische Kraft wirkt, verläuft die Bewegung der Atome in den Bändern nicht adiabatisch, so dass es zu Übergängen zwischen den Bändern kommt. Es finden also sogenannte Bloch-Zener-Oszillationen statt.

In der theoretischen Arbeit [Kol03b] werden Bloch-Zener-Oszillationen in einem zweidimensionalen Gitterpotenzial untersucht, welches eine ähnliche Form wie das in unserem experimentellen Aufbau realisierte besitzt:

$$V(x, y) = V_0(\cos x + \cos y + \varepsilon \cos x \cos y) \quad (7.1)$$

Der Parameter  $\varepsilon$  bestimmt hierbei die Stärke der Interferenz des x-Gitterastes mit dem y-Gitterast. Beim Vorliegen einer starken Kraft (stark in dem Sinne, dass die Adiabazitätsbedingung nicht erfüllt wird) kommt es zu einem teilweisen Übergang von Atomen in höhere Bänder, wodurch sich ein Teilchenstrom ausbildet. Es kommt zu einer schrittweisen Aufspaltung des ursprünglichen atomaren Wellenpakets in viele Atompakete, die sich getrennt voneinander bewegen und miteinander interferieren, wenn sie sich überlappen. Hierbei lässt sich für verschiedene

Werte von  $\varepsilon$  eine unterschiedliche Dynamik beobachten. Insbesondere unterscheidet sich die Dynamik in einem separablen von der in einem nichtseparablen Gitterpotenzial.

Ein separables Gitterpotenzial liegt für  $\varepsilon = 0$  vor, dies entspricht einer Zeitphasendifferenz von  $\vartheta = \pi/2$ . Das Potenzial lässt sich als Summe eines von  $x$  und eines von  $y$  abhängenden Potenzialterms schreiben. Im Falle des separablen Gitters finden Teilchenströme in  $x$ - und in  $y$ -Richtung statt (siehe Abbildung 7.2). Dies lässt sich auf die Tatsache zurückführen, dass die 2D-Wellenfunktion der Atome das Produkt von zwei 1D-Wellenfunktionen ist, welche mit dem  $x$ - und dem  $y$ -Freiheitsgrad des Gitters verknüpft sind. Falls die Kraft in die diagonale Richtung zeigt, also  $F_x = F_y$  gilt, sind die Intensitäten der beiden Teilchenströme gleich groß.

Das Gitterpotenzial ist nicht separabel für  $\varepsilon \neq 0$ , zum Beispiel für  $\varepsilon = 1$ . In dem Fall treten Teilchenströme in  $x$ - und in  $y$ -Richtung sowie in diagonaler Richtung auf. Im Vergleich zum separablen Gitterpotenzial erscheinen hier also zusätzliche Tunnelkanäle.

Die Beobachtung der Teilchenströme in Abhängigkeit vom Parameter  $\varepsilon$ , der mit der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  verbunden ist, stellt eine interessante zukünftige Herausforderung bei der Untersuchung von Bloch-Oszillationen in einem bipartiten Gitterpotenzial dar.

## 7.3 Atominterferometer zur Bestimmung der Berry-Krümmung

Will man in unserer Apparatur Atome im Quasiimpulsraum bewegen, so müssen bis zum jetzigen Zeitpunkt die Ströme durch die beiden Bloch-Spulen vor einem Experimentzyklus eingestellt werden. Während die Spulen angeschaltet sind, sind Polarität und Betrag der durch sie fließenden Ströme konstant, so dass eine zeitlich konstante Kraft erzeugt wird. Interessante Möglichkeiten würde es bieten, wenn man Richtung und Betrag der Kraft während eines Experimentdurchlaufs verändern könnte. Dies würde die Bewegung der Atome auf geschlossenen Pfaden durch den Quasiimpulsraum ermöglichen, wodurch ein Atominterferometer realisiert werden kann, welches analog zu einem Aharonov-Bohm-Interferometer funktioniert.

Der Aharonov-Bohm-Effekt lässt sich beobachten, wenn ein Elektronen-Wellenpaket in zwei Teile aufgespalten wird, die eine gegebene Fläche im Ortsraum auf separaten Wegen umlaufen. Wenn ein magnetischer Fluss durch die eingeschlossene Fläche vorliegt, kommt es durch das magnetische Vektorpotenzial zu einer messbaren Phasendifferenz zwischen den beiden Teilpaketen. Diese Phasenverschiebung hängt nur von der Geometrie des Pfades ab, jedoch nicht von der Zeit, die benötigt wird, um den Weg zurückzulegen.

Beim Atominterferometer ist, für ein einzelnes Bloch-Band, das Analogon zur magnetischen Flussdichte die sogenannte Berry-Krümmung  $\Omega_n(\vec{q})$ . Diese wird untersucht, indem man die Atome auf einem geschlossenen Pfad im Quasiimpulsraum bewegt. Entlang des Pfades sammeln sie eine geometrische Phase auf, die

Berry-Phase  $\varphi_{\text{Berry}}$ , welche im Experiment gemessen werden kann. Das Analogon zum magnetischen Vektorpotenzial stellt das Berry-Vektorpotenzial  $\vec{A}_n(\vec{q})$  (auf Englisch: *Berry connection*) dar, welches mit der Berry-Krümmung wie folgt verknüpft ist:  $\vec{\Omega}_n(\vec{q}) = \vec{\nabla}_q \times \vec{A}_n(\vec{q})$ . Die Berry-Phase ist dann gegeben durch das geschlossene Pfadintegral  $\varphi_{\text{Berry}} = \oint_C \vec{A}_n(\vec{q}) \circ d\vec{q}$ , wobei  $C$  den geschlossenen Pfad im Quasiimpulsraum angibt.

Durch das Bewegen der Atome auf geschlossenen Pfaden im reziproken Raum lässt sich mit Hilfe einer speziellen Interferometersequenz die Berry-Krümmung des Bloch-Bandes messen [Duc15]. Insbesondere ist hierbei die Berry-Krümmung in der Umgebung von Bandberührungspunkten interessant. Auf diese Weise kann man mit dem Atominterferometer die topologischen Eigenschaften des Bandes bestimmen.

Interessante topologische Phänomene sind für ein Gitter vorhergesagt worden, das entsteht, wenn man das aktuell in unserer Apparatur realisierte Gitterpotenzial  $V_{\text{H}}(x, y)$  mit einem weiteren, schwachen Gitterpotenzial  $V_{\text{S}}(x, y)$  überlagert, für welches Laserlicht mit einer Wellenzahl von  $(1/2 + \eta)k$  verwendet wird, mit  $\eta \in \{0, 1, 2, \dots\}$  und  $k$  als der Wellenzahl des Gitterlichts von  $V_{\text{H}}$ . Das zusätzliche Gitter sorgt dafür, dass die tiefe Klasse von Gittertöpfen wiederum in zwei Klassen mit leicht unterschiedlicher Tiefe eingeteilt wird. Die  $p$ -Orbitale in diesen beiden Subklassen erhalten dadurch eine etwas verschiedene Energie, so dass die energetische Entartung der beiden Zustände  $p_x + ip_y$  und  $p_x - ip_y$  im zweiten Band aufgehoben wird. Betrachtet man zunächst nur das Gitterpotenzial  $V_{\text{H}}$ , das heißt  $V_{\text{S}} \equiv 0$ , so kann man zeigen, dass es im chiralen bosonischen  $p_x \pm ip_y$ -Suprafluid natürlich vorkommende elementare Anregungen gibt. Im Anregungsspektrum treten Dirac-Punkte auf, in deren Umgebung das Anregungsspektrum linear vom Quasiimpuls abhängt und die mit einem Berry-Fluss von  $\pi$  verbunden sind. Für nichtverschwindendes  $V_{\text{S}}$  bildet sich in den Bändern des Anregungsspektrums eine Lücke aus, so dass es zu einem topologischen Phasenübergang kommt. Innerhalb der Energielücke treten topologische Randzustände (auf Englisch: *edge states*) auf, die die Zustände ober- und unterhalb der Lücke miteinander verbinden [Xu16].

# Anhang A

## Bose-Einstein-Kondensation

### A.1 Ultrakalte bosonische Gase

Wenn ein ideales Gas aus  $N$  Bosonen unter eine kritische Temperatur  $T_c$  abgekühlt wird, besetzt ein makroskopischer Teil des Ensembles den Grundzustand des Potentials  $V(\vec{r})$ . Das bedeutet, dass die Besetzung  $N_0$  des Grundzustandes unterhalb der kritischen Temperatur von der Ordnung  $N$  ist. Man bezeichnet die Atome im Grundzustand als Bose-Einstein-Kondensat (BEC). Dieser Quantenzustand wurde im Jahr 1924 von Albert Einstein auf der Grundlage einer Arbeit von Satyendranath Bose über die Statistik von Photonen theoretisch vorhergesagt [Bos24, Ein25].

Bei einem homogenen Gas findet eine Bose-Einstein-Kondensation statt, wenn die Phasenraumdichte  $n\lambda_T^3$  den Wert  $\zeta(3/2) \approx 2,612$  erreicht. Hierbei ist  $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi mk_B T}$  die thermische de-Broglie-Wellenlänge. Die Wellenlänge der Teilchen kommt in den Bereich des mittleren Teilchenabstandes  $n^{-1/3}$ . Für hohe Temperaturen ist  $\lambda_T$  klein und das Gas verhält sich klassisch [Blo08, Pet08].

In der Bose-Einstein-Statistik sind die Viel-Teilchen-Wellenfunktionen symmetrisch unter der Vertauschung von zwei Teilchen. Im Unterschied zur Fermi-Dirac-Statistik ist eine mehrfache Besetzung der Ein-Teilchen-Zustände erlaubt. Die Viel-Teilchen-Wellenfunktion eines BECs lässt sich schreiben als [Dal99]:

$$\Psi_{N_0}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N_0}) = \prod_{i=1}^{N_0} \varphi_0(\vec{r}_i) \quad (\text{A.1})$$

Der Zustand kann durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden, diese entspricht der  $N_0$ -fach besetzten Ein-Teilchen-Wellenfunktion:

$$\boxed{\psi(\vec{r}) = \sqrt{N_0} \varphi_0(\vec{r})} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 $s$ -Wellen-Stöße und Gross-Pitaevskii-Gleichung

In verdünnten atomaren Gasen wechselwirken die Atome miteinander über Zwei-Körper-Stöße, die durch die van-der-Waals-Wechselwirkung hervorgerufen werden, einer Wechselwirkung mit kurzer Reichweite. Aufgrund der Symmetrie der Streuwellenfunktion unter Vertauschung der Positionen der beiden Streupartner sind in der Partialwellenzerlegung nur Streuamplituden mit geradem Bahndrehimpuls  $l$  erlaubt. Bei ultrakalten Quantengasen findet man schließlich nur noch  $s$ -Wellen-Streuung, was bedeutet, dass nur noch die Streuamplitude mit  $l = 0$  von null verschieden ist [Blo08].

Im Regime ultrakalter Temperaturen ist die thermische de-Broglie-Wellenlänge deutlich größer als die effektive Reichweite des van-der-Waals-Potentials  $V_{\text{vdW}}(\vec{r})$ .

Dann spielt die genaue Form des Streupotenzials keine Rolle und es kann ein Kontaktpotenzial verwendet werden:

$$V(\vec{r}) = g \delta(\vec{r}) \quad (\text{A.3})$$

mit  $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ . Hierbei sind  $m$  die Atommasse,  $a_s$  die  $s$ -Wellen-Streulänge und  $\delta(\vec{r})$  die Diracsche Delta-Funktion.

Der Hamilton-Operator des Viel-Teilchen-Systems lässt sich in zweiter Quantisierung schreiben als

$$\hat{H} = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}') \right) \hat{\psi}(\vec{r}), \quad (\text{A.4})$$

wobei  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$  und  $\hat{\psi}(\vec{r})$  die Feldoperatoren sind, die ein Boson am Ort  $\vec{r}$  erzeugen bzw. vernichten. Durch Einsetzen des Kontakt-Potenzials A.3 erhält man

$$\hat{H} = \int d^3r \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \hat{\psi}(\vec{r}) + V(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{g}{2} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \right). \quad (\text{A.5})$$

Für die Feldoperatoren im Heisenberg-Bild,  $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\psi}(\vec{r}, 0) e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ , gilt die Heisenbergsche Bewegungsgleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}] \quad (\text{A.6})$$

Setzt man Gleichung A.4 ein, ergibt sich

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\psi} + V(\vec{r}) \hat{\psi} + g \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \hat{\psi}. \quad (\text{A.7})$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen, indem man eine Molekularfeld-Näherung vornimmt und den Feldoperator  $\hat{\psi}$  durch seinen komplexwertigen Erwartungswert  $\psi(\vec{r}, t) := \langle \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle$  ersetzt. Abweichungen vom Erwartungswert werden als kleine Störung angenommen, so dass sich der Feldoperator schreiben lässt als [Bog47]

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.8})$$

Wenn man dies in Gleichung A.7 einsetzt, erhält man in der 0. Ordnung der Fluktuationen die sogenannte Gross-Pitaevskii-Gleichung [Gro61, Pit61]:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + g|\psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \psi(\vec{r}, t)} \quad (\text{A.9})$$

Man erhält auf diese Weise eine Differenzialgleichung für die makroskopische Wellenfunktion  $\psi(\vec{r}, t)$ . Die Gleichung hat die Form einer nichtlinearen Schrödinger-Gleichung, wobei die Nichtlinearität von dem zusätzlichen, zur Dichte  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  proportionalen Potenzial stammt. Die Molekularfeld-Näherung ist nur dann eine gute Näherung, wenn das genaue Aussehen des Potenzials keine Rolle spielt. Dies ist der Fall, wenn die mittlere freie Weglänge der Atome,  $n^{1/3}$ , deutlich größer als die Streulänge  $a_s$  ist.

Zum Lösen der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung A.9 machen wir den Ansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \cdot e^{-i\mu t/\hbar} \quad (\text{A.10})$$

mit dem chemischen Potenzial  $\mu = \partial E/\partial N$ . Durch Einsetzen in Gleichung A.9 erhält man die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) + g|\phi(\vec{r})|^2 \right) \phi(\vec{r}) = \mu\phi(\vec{r}) \quad (\text{A.11})$$

### A.3 Thomas-Fermi-Näherung

Für das Verhältnis der gesamten Wechselwirkungs-Energie  $E_{\text{int}}$  des Systems und der gesamten kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  des Systems gilt im Zentrum der Falle

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \sim N \frac{a_s}{l_0}, \quad (\text{A.12})$$

wobei  $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$  die Oszillatorlänge ist, mit der Fallenfrequenz  $\omega$  [Foo05]. Für ein Bose-Einstein-Kondensat aus Alkaliatomen beträgt das Verhältnis typischerweise ungefähr  $10^3$ , so dass  $E_{\text{int}} \gg E_{\text{kin}}$  gilt. Diesen Fall bezeichnet man als das *Thomas-Fermi-Regime*. Durch Vernachlässigen des Beitrags der kinetischen Energie in Gleichung A.11 erhält man

$$\mu\phi(\vec{r}) = V(\vec{r})\phi(\vec{r}) + g|\phi(\vec{r})|^2\phi(\vec{r}). \quad (\text{A.13})$$

Umstellen nach  $|\phi(\vec{r})|^2 \equiv n(\vec{r})$  und Einsetzen des harmonischen Potenzials  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2$  liefert für die Dichteverteilung des BECs in der Falle:

$$n(x) = \frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}{g}, \quad (\text{A.14})$$

Die Dichteverteilung besitzt also die Form einer umgedrehten Parabel. Für  $\mu - V(x) \leq 0$  ist die Dichte gleich null. Der Radius des atomaren Ensembles, welcher *Thomas-Fermi-Radius* genannt wird, lässt sich aus den Nullstellen der Dichteverteilung ableiten. Man erhält:

$$r_{\text{TF}} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}} \quad (\text{A.15})$$

In der Realität ist die Parabel an den Seiten abgerundet. An den Rändern geht die Dichte gegen null, hier wird auch die Molekularfeld-Wechselwirkungs-Energie  $gn(x)$  klein und die kinetische Energie lässt sich nicht mehr vernachlässigen. Deshalb kommt es in diesem Bereich zu Abweichungen von der Thomas-Fermi-Näherung.



# Anhang B

## Der zweidimensionale harmonische Oszillator

### B.1 Kartesische Koordinaten

Wir orientieren uns an [CT09] und betrachten den Hamilton-Operator  $\hat{H}$  eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit den gleicher Oszillatorfrequenz in x- und y-Richtung,  $\omega_x = \omega_y = \omega$ :

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \hat{V}(\hat{y}) \right) \quad (\text{B.1})$$

Der Hamilton-Operator ist separierbar, das heißt, er lässt sich als Summe der Anteile der x- und der y-Richtung schreiben,  $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$ . Wir führen nun die folgenden Orts- und Impulsoperatoren ein, mit der Oszillatorlänge  $l_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} = \frac{1}{l_0} \hat{x} \quad (\text{B.2})$$

$$\hat{Y} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{y} = \frac{1}{l_0} \hat{y} \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{P}_x = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}_x = \frac{l_0}{\hbar} \hat{p}_x \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{P}_y = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \hat{p}_y = \frac{l_0}{\hbar} \hat{p}_y \quad (\text{B.5})$$

Mit diesen Operatoren lässt sich der Hamilton-Operator schreiben als

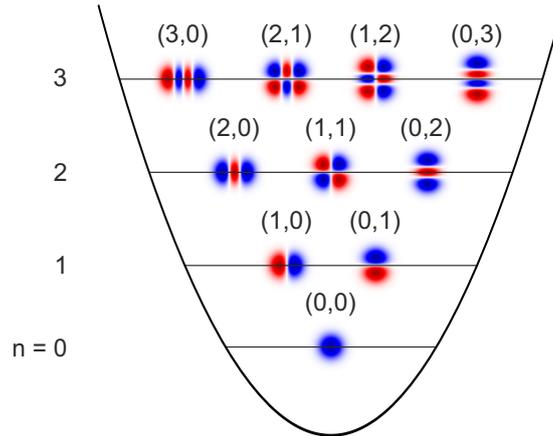
$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} \left( \hat{P}_x^2 + \hat{X}^2 + \hat{P}_y^2 + \hat{Y}^2 \right) \quad (\text{B.6})$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren für die x- und y-Richtung sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \hat{a}_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{X} - i\hat{P}_x \right), & \hat{a}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{X} + i\hat{P}_x \right) \\ \hat{a}_y^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{Y} - i\hat{P}_y \right), & \hat{a}_y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{Y} + i\hat{P}_y \right) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Die Operatoren erzeugen bzw. vernichten ein Quant in der entsprechenden Richtungskomponente. Durch die Auf- und Absteigeoperatoren sind die Operatoren  $\hat{n}_x = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x$  und  $\hat{n}_y = \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$  gegeben, welche für die Anzahl der Quanten in x- und in y-Richtung stehen. Der Hamilton-Operator kann mit den Quantenzahloperatoren geschrieben werden als

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{n}_x + \hat{n}_y + 1) . \quad (\text{B.8})$$



**Abbildung B.1:** Orbitale für  $0 \leq n \leq 3$  mit  $n \equiv n_x + n_y$ . Für die einzelnen Zustände sind die Quantenzahlen  $(n_x, n_y)$  angegeben.

Die Eigenzustände von  $\hat{H}$  sind die Fock-Zustände  $|n_x, n_y\rangle$  ( $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ ) und die zugehörigen Eigenenergien lauten  $E_{n_x, n_y} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1)$ .

Jeder Energieeigenwert  $E_n \equiv \hbar\omega(n+1)$  von  $\hat{H}$  ist  $(n+1)$ -fach entartet. Zu jedem  $E_n$  gibt es mehrere zueinander orthogonale Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Werten  $n_x$  und  $n_y$  gehören, deren Summe  $n_x + n_y$  gleich  $n$  ist.

Wir wollen nun die Darstellung der Eigenzustände im Ortsraum ermitteln. Da der Hamilton-Operator separierbar ist, lassen sich die Eigenzustände schreiben als:

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) \equiv \langle x, y | n_x, n_y \rangle = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y). \quad (\text{B.9})$$

Mit den dimensionslosen Koordinaten  $X = x/l_0$  und  $Y = y/l_0$  können wir die Schrödinger-Gleichung im Ortsraum schreiben als:

$$\hat{H}(\psi_{n_x}(X)\psi_{n_y}(Y)) = \hbar\omega \left( -\frac{\partial^2}{\partial X^2} + X^2 - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + Y^2 \right) (\psi_{n_x}(X)\psi_{n_y}(Y)) \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(n_x + n_y + 1)\psi_{n_x}(X)\psi_{n_y}(Y) \quad (\text{B.11})$$

Die Lösungen für  $\psi_{n_x}(X)$  und  $\psi_{n_y}(Y)$  sind gegeben durch [Wü98]

$$\psi_{n_x}(X) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_{n_x}(X) \quad (\text{B.12})$$

$$\psi_{n_y}(Y) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{Y^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_{n_y}(Y). \quad (\text{B.13})$$

$H_j$  ist das Hermite-Polynom  $j$ -ter Ordnung. Die Eigenfunktionen für  $n \equiv n_x + n_y = 0, 1, 2, 3$  sind in Abbildung B.1 dargestellt.

## B.2 Polarkoordinaten

Wir wollen die Symmetrieeigenschaften des Systems in die quantenmechanische Beschreibung des Oszillators miteinbeziehen und schauen uns die z-Komponente

des Drehimpulsoperators an, welche definiert ist durch

$$\hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x. \quad (\text{B.14})$$

$\hat{H}$  und  $L_z$  lassen sich wie folgt durch die Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken:

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1) \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{L}_z = i\hbar(\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y) \quad (\text{B.16})$$

$\hat{H}$  und  $\hat{L}_z$  kommutieren, es existiert daher eine Basis aus gemeinsamen Eigenzuständen von  $\hat{H}$  und  $\hat{L}_z$ .

Wir führen nun die folgenden Operatoren ein:

$$\hat{a}_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y) \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{a}_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y) \quad (\text{B.18})$$

Diese Operatoren können als Vernichtungsoperatoren eines rechts- bzw. linkszirkularen Quants aufgefasst werden. Entsprechend können die Adjungierten der Operatoren als Erzeugungsoperatoren eines rechts- bzw. linkszirkularen Quants interpretiert werden:

$$\hat{a}_d^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger) \quad (\text{B.19})$$

$$\hat{a}_g^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger) \quad (\text{B.20})$$

Man kann nun den Hamilton-Operator und den Drehimpuls durch die neuen Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken und erhält

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d + \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g + 1) \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{L}_z = \hbar (\hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d - \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g) \quad (\text{B.22})$$

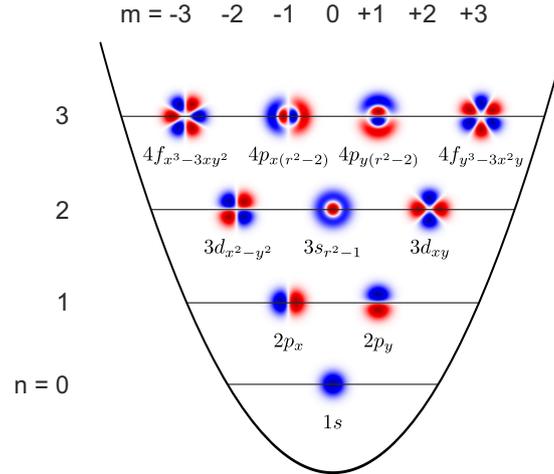
Wir führen nun die Operatoren  $\hat{n}_d = \hat{a}_d^\dagger \hat{a}_d$  und  $\hat{n}_g = \hat{a}_g^\dagger \hat{a}_g$  ein, welche für die Anzahl der rechts- bzw. linkszirkularen Quanten stehen. Hamilton- und Drehimpulsoperator lassen sich dann wie folgt schreiben:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n}_d + \hat{n}_g + 1) \quad (\text{B.23})$$

$$\hat{L}_z = \hbar(\hat{n}_d - \hat{n}_g) \quad (\text{B.24})$$

Durch die Angabe der Quantenzahlen  $n_d$  und  $n_g$  sind die gemeinsamen Eigenzustände von  $\hat{n}_d$  und  $\hat{n}_g$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Sie lauten:

$$|\chi_{n_d, n_g}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_d! n_g!}} (\hat{a}_d^\dagger)^{n_d} (\hat{a}_g^\dagger)^{n_g} |\varphi_{0,0}\rangle \quad (\text{B.25})$$



**Abbildung B.2:** Orbitale für  $0 \leq n \leq 3$  in Polarkoordinaten. Für die einzelnen Zustände sind die Drehimpulsquantenzahl  $m$  und die Bezeichnung  $(n+1)|m\rangle_{(CP)}$  angegeben.

Hierbei ist  $\varphi_{0,0}$  der Grundzustand, für diesen gilt  $n_d = n_g = 0$ .  $|\chi_{n_d, n_g}\rangle$  ist ein gemeinsamer Eigenvektor von  $\hat{H}$  und  $\hat{L}_z$  mit den Eigenwerten  $n \equiv n_d + n_g$  und  $m \equiv n_d - n_g$ :

$$\hat{H} |\chi_{n_d, n_g}\rangle = \hbar\omega(n+1) |\chi_{n_d, n_g}\rangle \quad (\text{B.26})$$

$$\hat{L}_z |\chi_{n_d, n_g}\rangle = m\hbar |\chi_{n_d, n_g}\rangle \quad (\text{B.27})$$

Der Grund, aus dem die in diesem Abschnitt eingeführten Quanten als rechts- und linkszirkulare Quanten bezeichnet werden, lässt sich folgendermaßen ersehen: Die Anwendung von  $\hat{a}_d^\dagger$  auf  $|\chi_{n_d, n_g}\rangle$  ergibt einen Zustand, der ein Energiequant  $\hbar\omega$  mehr besitzt. Der Drehimpuls hat sich um  $\hbar$  erhöht und sich damit um ein rechtsdrehendes Drehimpulsquant geändert. Entsprechend führt die Anwendung von  $\hat{a}_g^\dagger$  ebenfalls zu einer Erhöhung der Energie um ein Energiequant. Der Drehimpuls ändert sich hierbei um  $-\hbar$ , was sich so interpretieren lässt, dass sich der Drehimpuls um ein linksdrehendes Drehimpulsquant geändert hat.

Man kann leicht sehen, dass für ein bestimmtes Energieniveau  $n$  die Drehimpulsquantenzahl die Werte  $m = -n, -n+2, -n+4, \dots, n-4, n-2, n$  annehmen kann. Zu einem Paar  $(n, m)$  gehört ein bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmter Zustand  $|\chi_{n_d=(n+m)/2, n_g=(n-m)/2}\rangle$ .

Die Eigenfunktionen  $\chi_{n_d, n_g}(r, \varphi)$  in Polarkoordinaten lassen sich wie folgt ermitteln: Zunächst schreibt man die Aufsteigeoperatoren  $\hat{a}_d^\dagger, \hat{a}_g^\dagger$  durch eine Koordinatentransformation in Polarkoordinaten (für eine ausführliche Herleitung siehe [CT09]). Die Funktionen  $\chi_{n_d, n_g}(r, \varphi)$  erhält man dann durch  $n_d$ -malige Anwendung von  $\hat{a}_d^\dagger$  und  $n_g$ -malige Anwendung von  $\hat{a}_g^\dagger$  auf die Grundzustands-Wellenfunktion, welche gegeben ist durch

$$\chi_{0,0}(r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}l_0} e^{-\frac{r^2}{l_0^2}}. \quad (\text{B.28})$$

Die Funktionen mit  $(n=1, m=\pm 1)$  sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\psi_{n=1,m=1}(r, \varphi) &= \chi_{1,0}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}l_0} \frac{r}{l_0} e^{-\frac{r^2}{2l_0^2}} e^{i\varphi} \\ \psi_{n=1,m=-1}(r, \varphi) &= \chi_{0,1}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}l_0} \frac{r}{l_0} e^{-\frac{r^2}{2l_0^2}} e^{-i\varphi}\end{aligned}\tag{B.29}$$

Die Eigenfunktionen in Polarkoordinaten sind im Allgemeinen komplexwertig. Um reellwertige Funktionen zu erhalten, können Zustände mit gleichem  $n$ , aber entgegengesetzten Werten von  $m$  überlagert werden:

$$n |m|_{(\mathcal{CP})} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n,m}(r, \varphi) + \psi_{n,-m}(r, \varphi)] & \text{für } m < 0 \\ \psi_{n,m}(r, \varphi) & \text{für } m = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n,m}(r, \varphi) - \psi_{n,-m}(r, \varphi)] & \text{für } m > 0 \end{cases}\tag{B.30}$$

Hierbei steht  $(n+1) |m|_{(\mathcal{CP})}$  für die Schreibweise des Hybridorbitals in der Nomenklatur der Chemie.  $\mathcal{CP}$  ist das *charakteristische Polynom* des Orbitals. Für die orbitalen Zustände des zweidimensionalen harmonischen Oszillators führen wir eine zu den Zuständen des Wasserstoffatoms analoge Bezeichnung ein und bezeichnen die Zustände mit der z-Drehimpuls-Komponente  $|m| = 0, 1, 2, 3, \dots$  als *s*-, *p*-, *d*-, *f*-, ... Orbitale [Wir13, Öl13]. Die in Gleichung B.30 angegebenen reellwertigen Orbitale sind in Abbildung B.2 dargestellt.



# Anhang C

## Wannier-Funktionen und Tight-Binding-Modell des 1D-Gitters

Bisher haben wir die Teilchen im periodischen Potenzial des Gitters durch die Bloch-Funktionen beschrieben, welche die Eigenzustände des Hamilton-Operators darstellen und über das gesamte Gitter delokalisiert sind.

Die Verwendung von Bloch-Funktionen zur Beschreibung der Teilchen im Gitterpotenzial ist dann sinnvoll, wenn die kinetische Energie der Teilchen groß ist gegenüber der Wechselwirkungsenergie. Die Bloch-Funktionen sind Eigenzustände des Hamilton-Operators, welcher in einer Dimension durch

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \quad (\text{C.1})$$

gegeben ist. Mit zunehmendem Gitterpotenzial werden die Bänder immer flacher und die Tunnelamplitude nimmt ab. Dadurch sind die Teilchen immer stärker an einzelnen Gitterplätzen lokalisiert. Im Fall einer starken Lokalisierung der Teilchen macht es Sinn, die Wellenfunktion des Teilchens in der Basis der *Wannier-Funktionen* zu schreiben. Diese Funktionen sind jeweils auf einem bestimmten Gitterplatz lokalisiert. Außerhalb dieses Gitterplatzes besitzt die Wannier-Funktion nur geringe Anteile. Im eindimensionalen Gitter ist die Wannier-Funktion für ein am  $j$ -ten Gitterplatz lokalisiertes Teilchen im  $n$ -ten Band gegeben durch:

$$w_n(x - x_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-iqx_j} \psi_{n,q}(x) \quad (\text{C.2})$$

Hierbei sind  $x_j$  die Position des  $j$ -ten Gitterplatzes und  $N$  die Anzahl der Gitterplätze im System. Bloch- und Wannier-Funktionen sind orthonormal.

Eine Bloch-Funktion lässt sich dann wie folgt durch die Wannier-Funktionen ausdrücken:

$$\psi_{n,q}(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{iqx_j} w_n(x - x_j) \quad (\text{C.3})$$

Bei einer Bloch-Funktion kann der Phasenfaktor frei gewählt werden. Die physikalische Beschreibung des Systems ändert sich nicht, wenn man anstelle der Funktion  $\psi_{n,q}$  eine Funktion  $\tilde{\psi}_{n,q} = e^{-i\alpha_n(q)} \psi_{n,q}$  verwendet, solange der Phasenwinkel  $\alpha_n(q)$  eine reellwertige periodische Funktion darstellt. Mit verschiedenen Phasenfaktoren der Bloch-Funktionen gelangt man nach Gleichung C.2 zu unterschiedlichen Wannier-Funktionen. Durch eine geeignete Wahl der Phasenfaktoren ergeben sich maximal lokalisierte Wannier-Funktionen [Mar97, Mar12].

Wenn man den Hamilton-Operator mit Hilfe der Bloch-Funktionen in der Wannier-Darstellung diagonalisiert, erhält man [Blo08]:

$$E_n(q) = \langle \psi_{n,q} | \hat{H} | \psi_{n,q} \rangle \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j,l} \int dx w_n^*(x - x_j) e^{-iqx_j} \hat{H} w_n(x - x_l) e^{iqx_l} \quad (\text{C.5})$$

$$= \sum_l e^{-iq \cdot a \cdot l} J_n^{(l)} \quad (\text{C.6})$$

$$\text{mit } J_n^{(l)} \equiv \int dx w_n^*(x - x_l) \hat{H} w_n(x) \quad (\text{C.7})$$

Hierbei ist  $J_n^{(l)} > 0$  die Tunnelamplitude im  $n$ -ten Band für das Tunneln zwischen zwei Gitterplätzen, die sich im Abstand von  $l$  Gittereinheiten voneinander befinden.  $x_l$  ist die Position des  $l$  Gittereinheiten entfernten Gitterplatzes. Die Tunnelamplitude gibt den Energiegewinn aufgrund des Tunnelns eines Teilchens an und ist ein Maß für die Delokalisierung des Teilchens im Gitter.

Für große Gittertiefen liegt der Grenzfall starker Kopplung (auf Englisch: *tight binding*) vor. Es findet so gut wie kein Tunneln um mehr als einen Gitterplatz statt, so dass die Tunnelamplituden  $J_n^{(l)}$  mit Index  $l > 1$  sehr klein werden. Es ist dann eine geeignete Näherung, sie zu vernachlässigen. Man erhält eine analytische Lösung für die Dispersion:

$$\boxed{E_n(q) = \tilde{E}_n - 2J_n^{(1)} \cos(qa)} \quad (\text{C.8})$$

$\tilde{E}_n$  ist dabei der Erwartungswert der Energie für  $l = 0$ . Je größer die Bandbreite  $\max\{E_n(q)|q\} - \min\{E_n(q)|q\} = 4J_n^{(1)}$ , desto größer ist die Mobilität der Teilchen im Gitter.

Im 1D-Gitter gilt die *Mathieu-Gleichung*, welche einen analytischen Ausdruck für die Abhängigkeit der Tunnelamplitude  $J_1^{(1)}$  von der Gittertiefe liefert:

$$J_1^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} V_0^{\frac{3}{4}} e^{-2\sqrt{V_0}} \quad (\text{C.9})$$

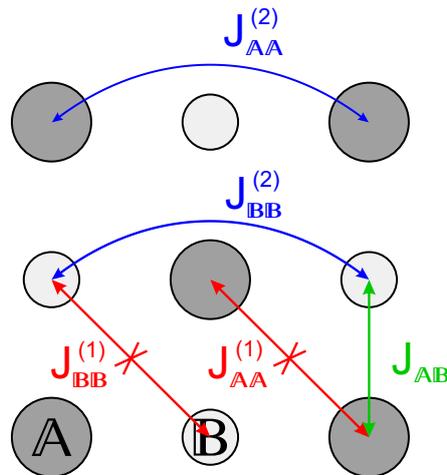
Die Wannier-Funktion für ein auf dem  $j$ -ten Gitterplatz lokalisiertes Teilchen besitzt bei niedriger Gittertiefe signifikante Anteile auf den benachbarten Gitterplätzen. Damit verbunden ist eine große Tunnelamplitude. Für große Gittertiefen nimmt der Wert der Wannier-Funktion und damit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens auf den benachbarten Gitterplätzen betragsmäßig ab. Die Tunnelamplitude wird dadurch ebenfalls kleiner.

# Anhang D

## Tight-Binding-Modell im bipartiten zweidimensionalen Gitter

Mit Hilfe des Tight-Binding-Modells lassen sich Aussagen über die dominanten Tunnelamplituden in Abhängigkeit von der Zeitphase  $\vartheta$  treffen. Die Idee des Tight-Binding-Modells besteht darin, dass für eine große Gittertiefe nur die Tunnelamplituden zu den nächsten Nachbarn relevant sind und sich Tunnelamplituden höherer Ordnung vernachlässigen lassen. Für die exakte Bestimmung von Tunnelamplituden ist die Berechnung der an einem Gitterplatz maximal lokalisierten Wannier-Funktionen notwendig, was zum Teil kompliziert ist. Die Tight-Binding-Näherung erlaubt es einem, auch ohne die Kenntnis dieser maximal lokalisierten Wannier-Funktionen die Tunnelamplituden näherungsweise zu berechnen. In diesem Abschnitt sollen exemplarisch die Tunnelamplituden für die ersten beiden Bänder bestimmt werden.

Wir unterteilen das Gitter in die beiden Subgitter und betrachten die lokalen Zustände in den Gittertöpfen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ . Beide Zustände besitzen von der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  abhängige lokale Energien  $E_{\mathbb{A}}$  und  $E_{\mathbb{B}}$ . Wir gehen davon aus, dass die Tunnelamplituden in diagonaler Richtung zwischen Gitterplätzen des gleichen Typs aufgrund von Symmetriegründen klein sind und vernachlässigt werden können:  $J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}^{(1)}, J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}^{(1)} \approx 0$ . Diese Näherung kann nur gemacht werden, wenn die Zeitphase nahe an  $\pi/2$  liegt. Im Modell werden die Tunnelkopplungen  $J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}^{(2)}$  und  $J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}^{(2)}$  zum übernächsten Nachbarn des gleichen Typs berücksichtigt, also zu den um  $\pm 2a\vec{e}_x$  und  $\pm 2a\vec{e}_y$  entfernten Gitterplätzen. Desweiteren geht die Tunnelkopplung  $J_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$  zwischen benachbarten Gittertöpfen verschiedenen Typs in die Näherung mit ein (siehe Abbildung D.1 für die Veranschaulichung der



**Abbildung D.1:** Im Tight-Binding-Modell des bipartiten quadratischen Gitters verwendete Tunnelamplituden.

Tunnelamplituden). Alle anderen Tunnelkopplungen werden als vernachlässigbar angesehen. Mit diesen Annahmen ergibt sich der folgende Hamilton-Operator für das Tight-Binding-Modell:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -J_{\mathbb{A}\mathbb{B}} \sum_{\substack{\vec{R} \in \mathbb{A} \\ \mu \in \{\pm 1\} \\ \nu \in \{x, y\}}} (\hat{a}_{\vec{R}}^\dagger \hat{a}_{\vec{R} + \mu \vec{e}_\nu} + \text{h.c.}) - J_{\mathbb{A}\mathbb{A}} \sum_{\substack{\vec{R} \in \mathbb{A} \\ \mu \in \{\pm 1\} \\ \nu \in \{x, y\}}} (\hat{a}_{\vec{R}}^\dagger \hat{a}_{\vec{R} + 2\mu \vec{e}_\nu} + \text{h.c.}) \\ & - J_{\mathbb{B}\mathbb{B}} \sum_{\substack{\vec{R} \in \mathbb{B} \\ \mu \in \{\pm 1\} \\ \nu \in \{x, y\}}} (\hat{a}_{\vec{R}}^\dagger \hat{a}_{\vec{R} + 2\mu \vec{e}_\nu} + \text{h.c.}) + E_{\mathbb{A}} \sum_{\vec{R} \in \mathbb{A}} \hat{a}_{\vec{R}}^\dagger \hat{a}_{\vec{R}} + E_{\mathbb{B}} \sum_{\vec{R} \in \mathbb{B}} \hat{b}_{\vec{R}}^\dagger \hat{b}_{\vec{R}} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Hierbei sind  $\hat{a}_{\vec{R}}^\dagger$  und  $\hat{b}_{\vec{R}}^\dagger$  die Erzeugungsoperatoren, welche ein Teilchen im Gittertopf  $\vec{R}$  des Subgitter  $\mathbb{A}$  bzw.  $\mathbb{B}$  erzeugen.  $\hat{a}_{\vec{R}}$  und  $\hat{b}_{\vec{R}}$  sind die zugehörigen Vernichtungsoperatoren. Wir wollen den Hamilton-Operator in den reziproken Raum überführen und schreiben diese Operatoren als Fourier-Reihe:

$$\hat{a}_{\vec{R}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q} \in 1.\text{BZ}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \hat{a}_{\vec{q}}, \quad \hat{b}_{\vec{R}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q} \in 1.\text{BZ}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{R}} \hat{b}_{\vec{q}} \quad (\text{D.2})$$

mit der Anzahl  $N$  der Einheitszellen des Gitters. Man erhält damit für  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = \sum_{\vec{q} \in 1.\text{BZ}} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger & \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbb{A}\mathbb{A}} + E_{\mathbb{A}} & c_{\mathbb{A}\mathbb{B}} \\ c_{\mathbb{A}\mathbb{B}} & c_{\mathbb{B}\mathbb{B}} + E_{\mathbb{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{\vec{q}} \\ \hat{b}_{\vec{q}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

mit

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{A}\mathbb{A}} &= -4J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}^{(2)} [\cos(2q_x a) + \cos(2q_y a)] \\ &= -4J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}^{(2)} \left[ \cos\left(\sqrt{2}(q_1 - q_2)a\right) + \cos\left(\sqrt{2}(q_1 + q_2)a\right) \right] \\ c_{\mathbb{B}\mathbb{B}} &= -4J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}^{(2)} [\cos(2q_x a) + \cos(2q_y a)] \\ &= -4J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}^{(2)} \left[ \cos\left(\sqrt{2}(q_1 - q_2)a\right) + \cos\left(\sqrt{2}(q_1 + q_2)a\right) \right] \\ c_{\mathbb{A}\mathbb{B}} &= -4J_{\mathbb{A}\mathbb{B}} [\cos(q_x a) + \cos(q_y a)] \\ &= -4J_{\mathbb{A}\mathbb{B}} \left[ \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2)a\right) + \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2)a\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Der Quasiimpuls ist aus der kleineren, um  $45^\circ$  gedrehten Brillouin-Zone zu wählen. Wir haben eine Koordinatentransformation durchgeführt und geben den Quasiimpuls in den Koordinaten dieser kleineren, gedrehten Brillouin-Zone an,  $\vec{q} = (q_1, q_2) \in [-\sqrt{2}\pi/a; +\sqrt{2}\pi/a]^{\otimes 2}$  (siehe Abschnitt 2.9). Die Tight-Binding-Bandstruktur lässt sich nun durch Diagonalisieren des Hamilton-Operators bestimmen. Man erhält dann Funktionen für die Energien der ersten beiden Bänder, die von den in diesem Modell verwendeten Parametern abhängen, also den Tunnelamplituden und den lokalen Energien in den Gittertöpfen  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$ :

$$E_1^{(\text{TB})} = E_1^{(\text{TB})}(\vec{q}; E_{\mathbb{A}}, E_{\mathbb{B}}, J_{\mathbb{A}\mathbb{B}}, J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}, J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}) \quad (\text{D.5})$$

$$E_2^{(\text{TB})} = E_2^{(\text{TB})}(\vec{q}; E_{\mathbb{A}}, E_{\mathbb{B}}, J_{\mathbb{A}\mathbb{B}}, J_{\mathbb{A}\mathbb{A}}, J_{\mathbb{B}\mathbb{B}}) \quad (\text{D.6})$$

Die Werte für die Parameter lassen sich nun durch einen Vergleich der Tight-Binding-Energien  $E_{1;2}^{(\text{TB})}$  an der Stelle  $\vec{q}$  mit den Energiewerten der Bloch-Bandstruktur  $E_{1,2}(\vec{q})$  ermitteln. Dabei macht man sich zunutze, dass die Tight-Binding-Energien  $E_{1;2}^{(\text{TB})}$  an bestimmten Stellen  $\vec{q}$ , zum Beispiel den Nullstellen der trigonometrischen Funktionen in den Gleichungen D.4, nur von wenigen Parametern abhängen. So gilt:

$$E_{\text{A}} = E_1^{(\text{TB})}(\pi/2, \pi/4) \quad (\text{D.7})$$

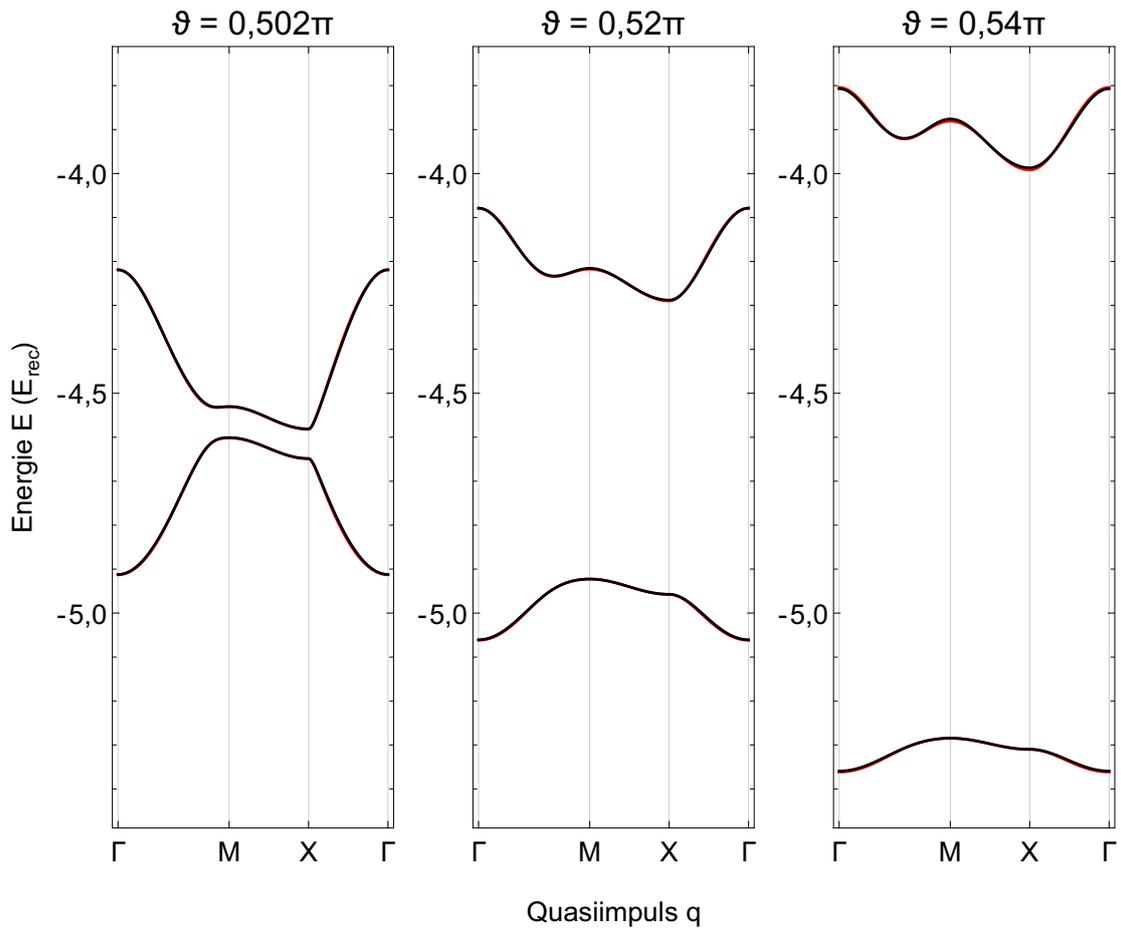
$$E_{\text{B}} = E_2^{(\text{TB})}(\pi/2, \pi/4) \quad (\text{D.8})$$

$$J_{\text{AB}} = \frac{1}{2} \sqrt{(E_1^{(\text{TB})}(\pi/4, \pi/4) - E_2^{(\text{TB})}(\pi/4, \pi/4))^2 - (E_{\text{A}} - E_{\text{B}})^2} \quad (\text{D.9})$$

$$J_{\text{A}} = \frac{1}{8} (E_1^{(\text{TB})}(\pi/2, \pi/2) - E_1^{(\text{TB})}(\pi/2, 0)) \quad (\text{D.10})$$

$$J_{\text{B}} = \frac{1}{8} (E_2^{(\text{TB})}(\pi/2, \pi/2) - E_2^{(\text{TB})}(\pi/2, 0)) \quad (\text{D.11})$$

Die Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$ , an denen die Tight-Binding-Energien ausgewertet werden, werden hier der Übersichtlichkeit halber in Einheiten der Kantenlänge der ersten Brillouin-Zone,  $\sqrt{2}/a$ , angegeben. Zur Berechnung der Parameter setzt man nun anstelle von  $E_1^{(\text{TB})}(q_1, q_2)$  und  $E_2^{(\text{TB})}(q_1, q_2)$  die Energien  $E_1(q_1, q_1)$  und  $E_2(q_1, q_2)$  der Bloch-Bandstrukturrechnung ein. Für kleine Abweichungen der Zeitphase von  $\pi/2$  erhält man mit dem Tight-Binding-Modell gute Näherungen für die Tunnelamplituden. Die Tight-Binding-Energien stellen einen guten Fit an die Energien der Bloch-Bandstruktur dar. Abbildung D.2 auf Seite 162 zeigt die Tight-Binding-Energien und Bloch-Energien der ersten beiden Bänder für ein Gitter mit der Gittertiefe  $V_0 = 4 E_{\text{rec}}$  bei den Zeitphasenwerten  $0,502\pi$ ,  $0,52\pi$  und  $0,54\pi$ .



**Abbildung D.2:** Energien der ersten beiden Bänder aus der Bloch-Bandstrukturrechnung (schwarz) und aus der Tight-Binding-Näherung (rot) für drei verschiedene Werte der Zeitphasendifferenz  $\vartheta$  in der Umgebung von  $\pi/2$ . Die Gittertiefe ist konstant bei  $V_0 = 4 E_{\text{rec}}$ . Die Tunnelamplituden und lokalen Energien der Tight-Binding-Näherung wurden durch einen Fit der Tight-Binding-Bandenergie an die Energie der Bloch-Bänder ermittelt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung des Verlaufes von Bloch- und Tight-Binding-Energien.

# Anhang E

## Wechselwirkung und Verteilung der Atome im optischen Gitter, Bose-Hubbard-Modell

Wie wir in Abschnitt 2.3 gesehen haben, sorgt im zweidimensionalen optischen Gitter das periodische Potenzial für einen starken Einschluss der Atome parallel zur Gitterebene (x-y-Ebene), so dass die Atome tubenförmige Strukturen auf den Gitterplätzen ausbilden. Zusätzlich liegt in dieser Richtung ein schwacher Einschluss durch die Gaußsche Form der Laserstrahlen und durch die Magnetfalle vor. Senkrecht dazu (in z-Richtung) existiert nur der schwache Einschluss, ebenfalls hervorgerufen durch Gaußsche Strahlenform und Magnetfalle.

Bisher wurden bei der Betrachtung von Atomen im optischen Gitter Ein-Teilchen-Gleichungen gelöst, wobei keine Wechselwirkung der Teilchen untereinander berücksichtigt wurde. In einem realen System können Atome, die sich auf demselben Gitterplatz befinden, über Stöße miteinander wechselwirken. In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie sich im Grundzustand bei einem vorgegebenen chemischen Potenzial  $\mu$  ein BEC auf die einzelnen Gitterplätze verteilt. Wir nehmen dabei ein quadratisches zweidimensionales Gitter an, die Zeitphasendifferenz des Gitterpotenzials 2.22 wird also auf  $\vartheta = \pi/2$  gesetzt.

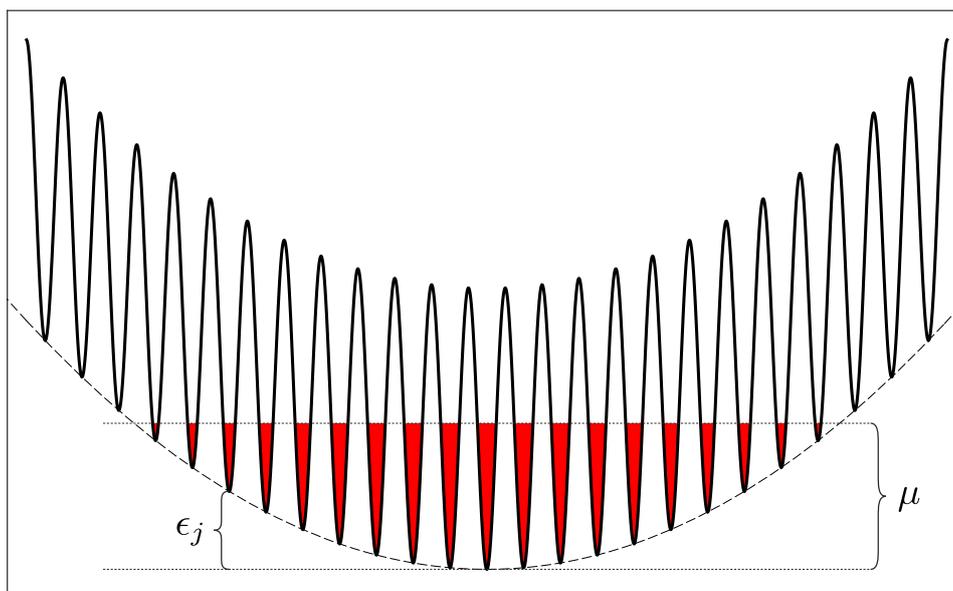
Wir nehmen an, dass wir uns im Regime schwacher Wechselwirkung befinden, das heißt, die Tunnelkopplung zwischen benachbarten Gitterplätzen ist groß gegenüber der Wechselwirkungsenergie. Das BEC im optischen Gitterpotenzial kann dann durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden, die durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung bestimmt ist [Gre03a].

Wenn das chemische Potenzial klein ist gegenüber der Falltiefe, kann die Tight-Binding-Näherung angewendet werden. Dieses Regime liegt dann vor, wenn die Wellenfunktion des Grundzustandes eine geringere Ausdehnung besitzt als der Abstand zwischen benachbarten Gitterplätzen. Die Atome im Gitter bilden dann effektiv kleine Bose-Einstein-Kondensate auf den einzelnen Gitterplätzen. Die Phasen dieser kleinen BECs sind durch das Tunneln zwischen benachbarten Gitterplätzen miteinander gekoppelt.

Wenn im Tight-Binding-Bild die Bedingung erfüllt wird, dass das chemische Potenzial deutlich kleiner ist als der Abstand der harmonischen Oszillatorniveaus eines Gittertopfes, können die Atome in dem Gittertopf durch lokalisierte makroskopische Wellenfunktionen  $\varphi_j(\vec{r})$  beschrieben werden. Für ein zweidimensionales Gitter können diese lokalisierten Wellenfunktionen als ein Produkt

$$\varphi_j(\vec{r}) = w_x(x - x_j) \cdot w_y(y - y_j) \cdot \Theta_z(z - z_j) \quad (\text{E.1})$$

gewählt werden. In x- und y-Richtung besteht die Wellenfunktion aus Wannier-Funktionen. In z-Richtung wird die Grundzustandswellenfunktion  $\Theta$  aufgrund der repulsiven Wechselwirkung der Atome verbreitert.



**Abbildung E.1:** Verteilung des BECs über das Gitter im Grundzustand. Die Atome verteilen sich so auf die Gitterplätze, dass sich ein chemisches Potenzial einstellt, das konstant ist über das Gitter.

Die makroskopische Wellenfunktion des gesamten Systems ist dann gegeben durch

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_j \psi_j \varphi_j(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \psi_j = \sqrt{\bar{n}_j} \cdot e^{i\varphi_j}, \quad (\text{E.2})$$

wobei  $\bar{n}_j$  die mittlere Atomzahl auf dem  $j$ -ten Gitterplatz ist. Auf diesem Gitterplatz herrscht eine wohldefinierte Phase  $\phi_j$ . Die gesamte Atomzahl im Gitter erhält man dann durch  $\sum_j |\psi_j|^2 = \sum_j \bar{n}_j = N$ . Für das System aus den miteinander gekoppelten kleinen BECs können wir den folgenden Hamilton-Operator aufstellen:

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \psi_i^* \psi_j + \sum_j \epsilon_j |\psi_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_j U |\psi_j|^4 \quad (\text{E.3})$$

Der erste Term steht für die *Josephson-Energie* des Systems, die Summe läuft über alle direkt benachbarten Gitterplätze. Der zweite Term berücksichtigt die Ortsabhängigkeit des einhüllenden Potentials.  $\epsilon_j = m\Omega_\rho^2 \rho_j^2/2$  ist hierbei der Energieoffset des  $j$ -ten Gitterplatzes (siehe Abbildung E.1), mit der Frequenz  $\Omega_\rho^2$  des einhüllenden Potentials und  $\rho$  als dem Abstand vom Zentrum des Gitters in der x-y-Ebene. Der dritte Term drückt die Wechselwirkungsenergie auf einem Gitterplatz aus, er enthält das Wechselwirkungs-Matrixelement

$$U = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \int d^3r |\varphi_j(\vec{r})|^4. \quad (\text{E.4})$$

Man bezeichnet Gleichung E.3 als diskrete nichtlineare Schrödinger-Gleichung oder auch als diskrete Gross-Pitaevskii-Gleichung [Cat01].

Gesucht ist nun der Grundzustand für das vorliegende kombinierte Potenzial aus periodischem Gitter- und einhüllendem Potenzial. Falls nur das periodische

Gitterpotenzial vorläge und kein zusätzliches einhüllendes Potenzial, würde die Energie des Systems durch gleiche Phasen der makroskopischen Wellenfunktionen der einzelnen Gitterplätze minimiert werden. Im Bloch-Bild würde dies dem Zustand im ersten Band mit null Quasiimpuls entsprechen ( $n = 1, q = 0$ ). Bedingung dafür, dass sich das System in einem stationären Zustand befindet, ist, dass sich die Phasen der kleinen BECs auf den einzelnen Gitterplätzen mit der gleichen Geschwindigkeit entwickeln. Dies erfordert, dass die lokalen chemischen Potenziale gleich sind.

In einer Thomas-Fermi-Näherung lässt sich die kinetische Energie in Gleichung E.3 vernachlässigen. Die gesamte Energie auf dem  $j$ -ten Gitterplatz ist dann gegeben durch

$$E_j \approx \epsilon_j |\psi_j|^2 + \frac{U}{2} |\psi_j|^4 = \epsilon_j \bar{n}_j + \frac{U}{2} \bar{n}_j^2, \quad (\text{E.5})$$

Für das chemische Potenzial auf dem  $j$ -ten Gitterplatz erhält man dann:

$$\mu_j = \frac{\partial E_j}{\partial n_j} = \epsilon_j + U \cdot \bar{n}_j = \mu = \text{konst.} \quad (\text{E.6})$$

Hieraus lässt sich für die mittlere Atomzahl auf dem  $j$ -ten Gitterplatz ableiten:

$$\bar{n}_j = \frac{1}{U} \left( \mu - \frac{m}{2} \Omega_{\varrho}^2 \varrho_j^2 \right) \quad (\text{E.7})$$

$\varrho_j$  ist hierbei der Abstand des  $j$ -ten Gitterplatzes vom Zentrum des Gitters.

Das Bose-Hubbard-Modell ist eine besondere Form des Tight-Binding-Modells, durch welches sich unter anderem der Phasenübergang vom suprafluiden Zustand zum Mott-Isolator-Zustand beschreiben lässt [Jak98, Gre02]. Für ein einfaches quadratisches Gitter, welches vorliegt, wenn man beim bipartiten Gitterpotenzial 2.22 die Zeitphasendifferenz auf  $\vartheta = \pi/2$  setzt, lautet der Bose-Hubbard-Hamilton-Operator für das unterste Band in zweiter Quantisierung:

$$\hat{H} = \sum_{\langle \vec{R}, \vec{R}' \rangle} -J^{(1)} \hat{b}_{\vec{R}}^\dagger \hat{b}_{\vec{R}'} + \sum_{\vec{R}} \varepsilon_{\vec{R}} \hat{n}_{\vec{R}} + \frac{U}{2} \sum_{\vec{R}} \hat{n}_{\vec{R}} (\hat{n}_{\vec{R}} - 1) \quad (\text{E.8})$$

Die Summe im ersten Term läuft dabei über alle benachbarten Gitterplätze  $\vec{R}$  und  $\vec{R}'$ .  $J^{(1)}$  ist die Tunnelamplitude für das Tunneln zum nächsten Gitterplatz.  $\varepsilon_{\vec{R}}$  ist das lokale Energieniveau auf dem Gitterplatz  $\vec{R}$ , das von der Einhüllenden der Falle vorgegeben wird, und  $U$  ist die Wechselwirkungsenergie pro Teilchen. Es gilt:

$$J = \int d^3r w_1(\vec{r} - \vec{R}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} + V_{2D}(\vec{r}) \right) w_1(\vec{r} - \vec{R}') \quad (\text{E.9})$$

$$U = g \int d^3r |w(\vec{r})|^4 \quad (\text{E.10})$$

mit der Wannier-Funktion  $w_1(\vec{r})$  im ersten Band.

Abhängig vom Verhältnis  $J/U$  gibt es zwei verschiedene Formen des Grundzustands der Atome. Für  $J \gg U$  sind die Atome über das gesamte Gitter delokalisiert und es stellt sich ein *suprafluid* Grundzustand ein. Im Grenzfall  $U = 0$  ist der Zustand gegeben durch [Blo08]

$$|\psi_{\text{SF},N}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left( \frac{1}{\sqrt{N_{\text{L}}}} \sum_{\vec{R}} \hat{a}_{\vec{R}}^{\dagger} \right) |0\rangle. \quad (\text{E.11})$$

$\hat{a}_{\vec{R}}^{\dagger}$  ist der Erzeugungsoperator, der ein Teilchen am Gitterplatz  $\vec{R}$  erzeugt,  $N_{\text{L}}$  ist die Anzahl der Gitterplätze und  $N$  die Anzahl der Atome.

Für den Fall  $J \ll U$  machen wir die vereinfachende Annahme, dass die Anzahl der Atome gleich der Zahl der Gitterplätze ist,  $N = N_{\text{L}}$ . Das Tunneln kann vernachlässigt werden und der Grundzustand lautet dann:

$$|\psi_{\text{MI},N}\rangle = \left( \prod_{\vec{R}} \hat{a}_{\vec{R}}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (\text{E.12})$$

Dieser *Mott-Isolator-Zustand* ist ein Produkt von Fock-Zuständen mit genau einem Atom pro Gitterplatz. Erhöht man die Tunnelkopplung  $J$ , beginnen die Atome zu tunneln. Es kommt zur Doppelbesetzung von Gitterplätzen, wobei sich die Energie um die Wechselwirkungsenergie  $U$  erhöht. Wenn  $J$  die Größenordnung von  $U$  erreicht oder größer als  $U$  wird, kommt es zum Quantenphasenübergang zum suprafluiden Zustand.

# Anhang F

## Zeitliche Entwicklung des Wellenpakets im Ortsraum während der Bloch-Oszillation

Es soll hier betrachtet werden, wie sich das Wellenpaket im Ortsraum während der Bloch-Oszillation entwickelt. Dabei orientieren wir uns an [Dah97]. Der in Gleichung 5.12 auftretende Phasenfaktor  $\exp(-i/\hbar \int_0^t E(q + Ft'/\hbar) dt')$  besitzt zum einem Zeitpunkt  $t$  für die verschiedenen Quasiimpulse  $q$ , aus welchen sich das Wellenpaket zusammensetzt, im Allgemeinen unterschiedliche Werte. Im Ortsraum sieht der Zustand  $|\psi(t)\rangle$  wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \langle x | \psi \rangle \\ &= \int dq g(q - q_0) e^{-i/\hbar \int_0^t E(q + Ft'/\hbar) dt'} \langle x | n, q + Ft/\hbar \rangle \\ &= \int dq g(q - q_0) e^{-i/\hbar \int_0^t E(q + Ft'/\hbar) dt'} e^{i(q + Ft/\hbar)x} u_{n, q + Ft/\hbar}(x) \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

Durch das Anlegen der Kraft verschiebt sich die Verteilung der Quasiimpulse gleichmäßig um den Wert  $Ft/\hbar$ , so dass die anfänglich um  $q_0 \equiv q_0(t = 0)$  zentrierte Verteilung zum Zeitpunkt  $t$  um  $q_0(t) = q_0 + Ft/\hbar$  zentriert ist. Wir wollen nun die Energie  $E(q(t))$  um  $q_0(t)$  entwickeln und schreiben den zeitabhängigen Quasiimpuls als  $q(t) = q_0(t) + (q(t) - q_0(t))$ . Der Parameter  $q(t) - q_0(t)$  ist hierbei klein gegenüber der Ausdehnung der Brillouin-Zone,  $2k$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} E(q(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n E_n}{dq^n}(q_0(t)) (q(t) - q_0(t))^n \\ &\approx E_n(q_0(t)) + \frac{dE_n}{dq}(q_0(t)) (q(t) - q_0(t)) + \frac{d^2 E_n}{dq^2}(q_0(t)) (q(t) - q_0(t))^2 \\ &= E_n(q_0(t) + \hbar \langle v \rangle_n(q_0(t))) (q(t) - q_0(t)) + \frac{\hbar^2}{2m^*(q_0(t))} (q(t) - q_0(t))^2 \\ &= E_n(q_0(t) + \hbar \langle v \rangle_n(q_0(t))) (q - q_0) + \frac{\hbar^2}{2m^*(q_0(t))} (q - q_0)^2 \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Hierbei ist die *effektive Masse*  $m^*$  definiert als:

$$\boxed{m^*(q) = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E_n(q)}{dq^2}}} \quad (\text{F.3})$$

$q$  und  $q_0$  in Gleichung F.2 stehen für die Werte von Quasiimpuls und dem Zentrum der Quasiimpulsverteilung zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Wir nehmen nun zusätzlich an,

dass  $u_{n,q}(x)$  über die Breite der Quasiimpulsverteilung nur im geringem Maße variiert und wir eine Ersetzung durch die Funktion  $u_{n,q_0(t)}$  vornehmen können. Es ergibt sich damit für die Wellenfunktion des Teilchens:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & A u_{n,q_0(t)}(x) e^{iq_0(t)x} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(q_0(t')) dt'} \\ & \times \int dq g(q - q_0) e^{i(x - \int_0^t \langle v \rangle_n(q_0(t')) dt') (q - q_0)} e^{i\left(\frac{\hbar}{2} \int_0^t \frac{dt'}{m^*(q_0(t'))}\right) (q - q_0)^2} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Liegt eine gaußförmige Verteilung des Quasiimpulses vor,  $g(q - q_0) \sim e^{-a^2(q - q_0)^2/4}$ , ergibt sich die Dichteverteilung des Teilchens im Ortsraum zu

$$|\psi(x, t)|^2 \sim |u_{n,q_0(t)}(x)|^2 \exp \left[ -\frac{2a^2(x - \int_0^t \langle v \rangle_n(q_0(t)) dt')^2}{a^4 + 4\hbar^2 \left| \int_0^t \frac{dt'}{m^*(q_0(t'))} \right|^2} \right]. \quad (\text{F.5})$$

In dieser Formel lassen sich drei Terme erkennen, die bei der Zeitentwicklung der Dichteverteilung eine Rolle spielen: Es gibt zunächst eine Modulation durch eine zeitliche Änderung von  $u_{n,q_0(t)}$ . Diese Funktion besitzt die Periode des Gitters, so dass räumliche Änderungen auf einer deutlich kleineren Skala als der Ausdehnung des Wellenpakets stattfinden, welches über das gesamte Gitter delokalisiert ist. Desweiteren findet eine Verschiebung des Zentrums der gaußförmigen Einhüllenden um den Betrag

$$\langle x \rangle = \int_0^t \langle v \rangle_n(q_0(t')) dt' \quad (\text{F.6})$$

statt. Dies bedeutet, dass sich die mittlere Position des Teilchens verschiebt. Die Verschiebung ist periodisch mit der Zeit, mit der Bloch-Periode als Periodendauer. Die Amplitude dieser Oszillation im Ortsraum beträgt  $\Delta/(2|F|)$ .

Außerdem kommt es zu einer Änderung der räumlichen Ausdehnung  $\Delta x$  des Wellenpakets. Hierbei gilt:

$$\Delta x(t) = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2}{a^4} \left| \int_0^t \frac{dt'}{m^*(q_0(t'))} \right|^2}. \quad (\text{F.7})$$

Die Ausdehnung ändert sich periodisch mit der Zeit, da das Integral über die effektive Masse ebenfalls eine zeitlich periodische Funktion ist. Während der Bloch-Oszillation findet ein Ausdehnen und Zusammenziehen des Wellenpakets statt. Nach einer Bloch-Periode besitzt es wieder die anfängliche Größe. Die Ursache für dieses Verhalten des Wellenpakets liegt darin, dass sich das Vorzeichen der effektiven Masse bei der Zeitentwicklung ändert.

# Literaturverzeichnis

- [Aid11] M. Aidelsburger, M. Atala, S. Nascimbène, S. Trotzky, Y.-A. Chen, und I. Bloch, *Experimental Realization of Strong Effective Magnetic Fields in an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **107**, 255301 (2011).
- [Aid13] M. Aidelsburger, M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes, und I. Bloch, *Realization of the Hofstadter Hamiltonian with Ultracold Atoms in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **111**, 185301 (2013).
- [Alb09] A. Alberti, V. V. Ivanov, G. M. Tino, und G. Ferrari, *Engineering the quantum transport of atomic wavefunctions over macroscopic distances*, Nature Physics **5**, 547 (2009).
- [All75] L. Allen und J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, 1975.
- [And95] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, und E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269**, 198 (1995).
- [And97] M. R. Andrews, *Observation of Interference Between Two Bose Condensates*, Science **275**, 637 (1997).
- [And98] B. P. Anderson und M. A. Kasevich, *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*, Science **282**, 1686 (1998).
- [And13] M. Andia, R. Jannin, F. Nez, F. Biraben, S. Guellati-Khélifa, und P. Cladé, *Compact atomic gravimeter based on a pulsed and accelerated optical lattice*, Phys. Rev. A **88**, 031605 (2013).
- [AS01] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, und W. Ketterle, *Observation of vortex lattices in Bose-Einstein condensates*, Science **292**, 476 (2001).
- [Bad09] P. Bader und U. R. Fischer, *Fragmented Many-Body Ground States for Scalar Bosons in a Single Trap*, Phys. Rev. Lett. **103**, 060402 (2009).
- [Bak10] W. S. Bakr, A. Peng, M. E. Tai, R. Ma, J. Simon, J. I. Gillen, S. Fölling, L. Pollet, und M. Greiner, *Probing the superfluid-to-Mott insulator transition at the single-atom level*, Science **329**, 547 (2010).
- [Bar04] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. H. Denschlag, und R. Grimm, *Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover*, Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
- [BD96] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, und C. Salomon, *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).

- [Bjo80] G. C. Bjorklund, *Frequency-modulation spectroscopy: a new method for measuring weak absorptions and dispersions*, Opt. Lett. **5**, 15 (1980).
- [Bjo83] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth, und C. Ortiz, *Frequency Modulation (FM) Spectroscopy*, Appl. Phys. B **32**, 145 (1983).
- [Bla01] E. D. Black, *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*, Am. J. Phys. **69**, 79 (2001).
- [Blo29] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Zeitschrift für Physik **52**, 555 (1929).
- [Blo00] I. Bloch, T. W. Hänsch, und T. Esslinger, *Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition*, Nature **403**, 166 (2000).
- [Blo08] I. Bloch, J. Dalibard, und W. Zwerger, *Many-body physics with ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
- [Blo12] I. Bloch, J. Dalibard, und S. Nascimbène, *Quantum simulations with ultracold quantum gases*, Nature Physics **8**, 267 (2012).
- [Bog47] N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [Bos24] S. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924).
- [Bou04] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, und C. Salomon, *Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6*, Phys. Rev. Lett. **93**, 050401 (2004).
- [Bra95] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, und R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [Bre06] B. M. Breid, D. Witthaut, und H. J. Korsch, *Bloch–Zener oscillations*, New J. Phys. **8**, 110 (2006).
- [Buc03] A. Buchleitner und A. R. Kolovsky, *Interaction-Induced Decoherence of Atomic Bloch Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **91**, 253002 (2003).
- [Cat01] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, und M. Inguscio, *Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates*, Science **293**, 843 (2001).
- [Chi10] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, und E. Tiesinga, *Feshbach resonances in ultracold gases*, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
- [CT09] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, und Laloë, *Quantenmechanik, Band 1*, De Gruyter, 2009.

- [Dah97] M. B. Dahan, *Transport et relaxation d'atomes de césium: oscillations de Bloch et résonance de diffusion*, Dissertation, l'Université Paris VI (1997).
- [Dal99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, und S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [Dal11] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliūnas, und P. Öhberg, *Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms*, Rev. Mod. Phys. **83**, 1523 (2011).
- [Dav95a] K. B. Davis, M. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, und W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [Dav95b] K. B. Davis, M. Mewes, und W. Ketterle, *An analytical model for evaporative cooling of atoms*, Appl. Phys. B **60**, 155 (1995).
- [Dav95c] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. A. Joffe, M. R. Andrews, und W. Ketterle, *Evaporative Cooling of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **74**, 5202 (1995).
- [DeM99] B. DeMarco und D. S. Jin, *Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas*, Science **285**, 1703 (1999).
- [Dre83] R. W. P. Drever, J. L. Hall, und F. V. Kowalski, *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*, Appl. Phys. B **31**, 97 (1983).
- [Duc15] L. Duca, T. Li, M. Reitter, I. Bloch, M. Schleier-Smith, und U. Schneider, *An Aharonov-Bohm interferometer for determining Bloch band topology*, Science **347**, 288 (2015).
- [Eic18] R. S. Eichberger, *Ultrakalte Quantengase in höheren Bändern eines optischen Gitters mit präziser Bandstrukturkontrolle*, Dissertation, Universität Hamburg (2018).
- [Ein25] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases — Zweite Abhandlung*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften (1925).
- [Fal04] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, und M. Inguscio, *Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **93**, 140406 (2004).
- [Fat08] M. Fattori, C. D'Errico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Jona-Lasinio, M. Modugno, M. Inguscio, und G. Modugno, *Atom Interferometry with a Weakly Interacting Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **100**, 080405 (2008).

- [Fel93] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, D. A. Miller, J. E. Cunningham, T. Meier, G. Von Plessen, P. Thomas, und S. Schmitt-Rink, *Optical investigation of block oscillations in a semiconductor superlattice*, Springer Series in Chemical Physics **46**, 454 (1993).
- [Fer06] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, und G. M. Tino, *Long-Lived Bloch Oscillations with Bosonic Sr Atoms and Application to Gravity Measurement at the Micrometer Scale*, Phys. Rev. Lett. **97**, 060402 (2006).
- [Fey82] R. P. Feynman, *Simulating physics with computers*, International Journal of Theoretical Physics **21**, 467 (1982).
- [Fey98] R. Feynman, *Statistical Mechanics: A Set Of Lectures*, Advanced Books Classics, Avalon Publishing, 1998.
- [Foo05] C. J. Foot, *Atomic physics*, Oxford University Press, 2005.
- [Gei18] Z. A. Geiger, K. M. Fujiwara, K. Singh, R. Senaratne, S. V. Rajagopal, M. Lipatov, T. Shimasaki, R. Driben, V. V. Konotop, T. Meier, und D. M. Weld, *Observation and Uses of Position-Space Bloch Oscillations in an Ultracold Gas*, Phys. Rev. Lett. **120**, 213201 (2018).
- [Geo17] C. Georges, J. Vargas, H. Keßler, J. Klinder, und A. Hemmerich, *Bloch oscillations of a Bose-Einstein condensate in a cavity-induced optical lattice*, Phys. Rev. A **96**, 063615 (2017).
- [Gil07] M. Gildemeister, *Aufbau eines Doppel-MOT-Systems für Rubidium 87*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (2007).
- [Glü01] M. Glück, F. Keck, A. R. Kolovsky, und H. J. Korsch, *Wannier-Stark States of a Quantum Particle in 2D Lattices*, Phys. Rev. Lett. **86**, 3116 (2001).
- [Gre02] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, und I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39 (2002).
- [Gre03a] M. Greiner, *Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München (2003).
- [Gre03b] M. Greiner, C. A. Regal, und D. S. Jin, *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*, Nature **426**, 537 (2003).
- [Gri00] R. Grimm, M. Weidemüller, und Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42** (2000).
- [Gro61] E. P. Gross, *Structure of a Quantized Vortex in Boson Systems*, Il Nuovo Cimento **20**, 454 (1961).
- [Gro14] R. Gross und A. Marx, *Festkörperphysik*, De Gruyter Oldenbourg, 2014.

- [Gus08] M. Gustavsson, E. Haller, M. J. Mark, J. G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, und H.-C. Nägerl, *Control of Interaction-Induced Dephasing of Bloch Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **100**, 080404 (2008).
- [Gut06] L. Gutiérrez, A. Díaz-de Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, und A. Morales, *Wannier-Stark Ladders in One-Dimensional Elastic Systems*, Phys. Rev. Lett. **97**, 114301 (2006).
- [Hac21] M. Hachmann, Y. Kiefer, J. Riebesehl, R. Eichberger, und A. Hemmerich, *Quantum Degenerate Fermi Gas in an Orbital Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **127**, 033201 (2021).
- [Hal10] E. Haller, R. Hart, M. J. Mark, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo, und H.-C. Nägerl, *Pinning quantum phase transition for a Luttinger liquid of strongly interacting bosons*, Nature **466**, 597 (2010).
- [Hal15] E. Haller, J. Hudson, A. Kelly, D. A. Cotta, B. Peaudecerf, G. D. Bruce, und S. Kuhr, *Single-atom imaging of fermions in a quantum-gas microscope*, Nature Physics (2015).
- [Hec02] J. Hecker Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaey, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, und W. D. Phillips, *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics (2002).
- [Hem93] A. Hemmerich und T. W. Hänsch, *Two-dimensional atomic crystal bound by light*, Phys. Rev. Lett. **70**, 410 (1993).
- [Hem19] A. Hemmerich, *Bosons condensed in two modes with flavor-changing interaction*, Phys. Rev. A **99**, 013623 (2019).
- [Hip13] C. Hippler, *Ein selbstgebauter Ytterbium-Faserverstärker mit 25 W Ausgangsleistung bei 1064 nm zur Realisierung eines optischen Gitters für ultrakalte RbCs-Moleküle*, Diplomarbeit, Technische Universität München (2013).
- [Hol00] M. Holthaus, *Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, 589 (2000).
- [Jak98] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, und P. Zoller, *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).
- [Jes92] P. S. Jessen, C. Gerz, P. D. Lett, W. D. Phillips, S. L. Rolston, R. J. C. Spreeuw, und C. I. Westbrook, *Observation of quantized motion of Rb atoms in an optical field*, Phys. Rev. Lett. **69**, 49 (1992).
- [Joc03] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, und R. Grimm, *Bose-Einstein condensation of molecules*, Science **302**, 2101 (2003).

- [Jör08] R. Jördens, N. Strohmaier, K. Günter, H. Moritz, und T. Esslinger, *A Mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice*, Nature **455**, 204 (2008).
- [Jot14] G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif, und T. Esslinger, *Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions*, Nature **515**, 237 (2014).
- [Kö07] K. Körber, *Magnetischer Transport kalter Rubidiumatome*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (2007).
- [Keß16] H. Keßler, J. Klinder, B. P. Venkatesh, C. Georges, und A. Hemmerich, *In situ observation of optomechanical Bloch oscillations in an optical cavity*, New J. Phys. **18**, 1 (2016).
- [Ket99] W. Ketterle, D. S. Durfee, und D. M. Stamper-Kurn, *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*, arXiv (1999).
- [Kli10] S. Kling, T. Salger, C. Grossert, und M. Weitz, *Atomic Bloch-Zener Oscillations and Stückelberg Interferometry in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **105**, 215301 (2010).
- [Koc15] T. Kock, M. Ölschläger, A. Ewerbeck, W.-M. Huang, L. Mathey, und A. Hemmerich, *Observing Chiral Superfluid Order by Matter-Wave Interference*, Phys. Rev. Lett. **114**, 115301 (2015).
- [Koc16a] T. Kock, *Ultrakalte Quantengase in einem optischen Gitterpotential mit zweiatomiger Basis*, Dissertation, Universität Hamburg (2016).
- [Koc16b] T. Kock, C. Hippler, A. Ewerbeck, und A. Hemmerich, *Orbital optical lattices with bosons*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **49**, 042001 (2016).
- [Köh05] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, C. Schori, und T. Esslinger, *Superfluid to Mott insulator transition in one, two, and three dimensions*, J. Low Temp. Phys. (2005).
- [Kol03a] A. R. Kolovsky, *New Bloch Period for Interacting Cold Atoms in 1D Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **90**, 213002 (2003).
- [Kol03b] A. R. Kolovsky und H. J. Korsch, *Bloch oscillations of cold atoms in two-dimensional optical lattices*, Phys. Rev. A **67**, 063601 (2003).
- [Öl07] M. Ölschläger, *Umladen vorgekühlter Rubidiumatome von einer MOT in eine Magnetfalle*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (2007).
- [Öl13] M. Ölschläger, *Ultrakalte Quantengase in höheren Bloch-Bändern optischer Gitterpotentiale*, Dissertation, Universität Hamburg (2013).
- [Lew07] M. Lewenstein, A. Sanpera, V. Ahufinger, B. Damski, A. Sen, und U. Sen, *Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond*, Advances in Physics **56**, 243 (2007).

- [Li16] T. Li, L. Duca, M. Reitter, F. Grusdt, E. Demler, M. Endres, M. Schleier-Smith, I. Bloch, und U. Schneider, *Bloch state tomography using Wilson lines*, Science **352**, 1094 (2016).
- [Lia09] J.-Q. Liang, J.-L. Liu, W.-D. Li, und Z.-J. Li, *Atom-pair tunneling and quantum phase transition in the strong-interaction regime*, Phys. Rev. A **79**, 033617 (2009).
- [Lin09] Y. J. Lin, R. L. Compton, K. Jiménez-García, J. V. Porto, und I. B. Spielman, *Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms*, Nature **462**, 628 (2009).
- [Mö7] T. Müller, S. Fölling, A. Widera, und I. Bloch, *State Preparation and Dynamics of Ultracold Atoms in Higher Lattice Orbitals*, Phys. Rev. Lett. **99**, 200405 (2007).
- [Mad00] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, und J. Dalibard, *Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [Mae01] Maeno, Yoshiteru and Rice, T. Maurice and Sigrist, Manfred, *The Intriguing Superconductivity of Strontium Ruthenate*, Physics Today **54**, 42 (2001).
- [Mah14] K. W. Mahmud, L. Jiang, E. Tiesinga, und P. R. Johnson, *Bloch oscillations and quench dynamics of interacting bosons in an optical lattice*, Phys. Rev. A **89**, 023606 (2014).
- [Mak15a] D. N. Maksimov, E. N. Bulgakov, und A. R. Kolovsky, *Wannier-Stark states in double-periodic lattices. I. One-dimensional lattices*, Phys. Rev. A **91**, 053631 (2015).
- [Mak15b] D. N. Maksimov, E. N. Bulgakov, und A. R. Kolovsky, *Wannier-Stark states in double-periodic lattices. II. Two-dimensional lattices*, Phys. Rev. A **91**, 053632 (2015).
- [Mar97] N. Marzari und D. Vanderbilt, *Maximally localized generalized Wannier functions for composite energy bands*, Phys. Rev. B **56**, 12847 (1997).
- [Mar12] N. Marzari, A. A. Mostofi, J. R. Yates, I. Souza, und D. Vanderbilt, *Maximally localized Wannier functions: Theory and applications*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1419 (2012).
- [Mat99] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, und E. A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein Condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [Mei17] F. Meinert, M. Knap, E. Kirilov, K. Jag-Lauber, M. B. Zvonarev, E. Demler, und H.-C. Nägerl, *Bloch oscillations in the absence of a lattice*, Science **356**, 945 (2017).

- [Met99] H. J. Metcalf und P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer Science+Business Media New York, 1999.
- [Miy13] H. Miyake, G. A. Siviloglou, C. J. Kennedy, W. C. Burton, und W. Ketterle, *Realizing the Harper Hamiltonian with Laser-Assisted Tunneling in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **111**, 185302 (2013).
- [Mor99] R. Morandotti, U. Peschel, J. S. Aitchison, H. S. Eisenberg, und Y. Silberberg, *Experimental Observation of Linear and Nonlinear Optical Bloch Oscillations*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4756 (1999).
- [Mor01] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, und E. Arimondo, *Bloch Oscillations and Mean-Field Effects of Bose-Einstein Condensates in 1D Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **87**, 140402 (2001).
- [Mor06] O. Morsch und M. Oberthaler, *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Reviews of Modern Physics **78**, 179 (2006).
- [Ö11] M. Ölschläger, G. Wirth, und A. Hemmerich, *Unconventional Superfluid Order in the F Band of a Bipartite Optical Square Lattice*, Phys. Rev. Lett. **106**, 015302 (2011).
- [Ö12] M. Ölschläger, G. Wirth, T. Kock, und A. Hemmerich, *Topologically Induced Avoided Band Crossing in an Optical Checkerboard Lattice*, Phys. Rev. Lett. **108**, 075302 (2012).
- [Öls13] M. Ölschläger, T. Kock, G. Wirth, A. Ewerbeck, C. Morais Smith, und A. Hemmerich, *Interaction-induced chiral  $p_x \pm ip_y$  superfluid order of bosons in an optical lattice*, New J. Phys. **15**, 083041 (2013).
- [Omr15] A. Omran, M. Boll, T. A. Hilker, K. Kleinlein, G. Salomon, I. Bloch, und C. Gross, *Microscopic Observation of Pauli Blocking in Degenerate Fermionic Lattice Gases*, Physical Review Letters (2015).
- [Pei97] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, und C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams*, Phys. Rev. A **55**, 2989 (1997).
- [Per99] T. Pertsch, P. Dannberg, W. Elflein, A. Bräuer, und F. Lederer, *Optical Bloch Oscillations in Temperature Tuned Waveguide Arrays*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4752 (1999).
- [Pet08] C. J. Pethick und H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, 2008.
- [Pit61] L. P. Pitaevskii, *Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas*, Soviet Physics JETP **13**, 451 (1961).
- [Pol11] N. Poli, F.-Y. Wang, M. G. Tarallo, A. Alberti, M. Prevedelli, und G. M. Tino, *Precision Measurement of Gravity with Cold Atoms in an Optical Lattice and Comparison with a Classical Gravimeter*, Phys. Rev. Lett. **106**, 038501 (2011).

- [Pon06] A. V. Ponomarev und A. R. Kolovsky, *Dipole and Bloch oscillations of cold atoms in a parabolic lattice*, Laser Physics **16**, 367 (2006).
- [Reg04] C. A. Regal, M. Greiner, und D. S. Jin, *Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs*, Phys. Rev. Lett. **92**, 040403 (2004).
- [Roa04] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, und M. Inguscio, *Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases*, Phys. Rev. Lett. **92**, 230402 (2004).
- [Sch01] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, und C. Salomon, *Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea*, Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
- [Sco03] R. G. Scott, A. M. Martin, T. M. Fromhold, S. Bujkiewicz, F. W. Sheard, und M. Leadbeater, *Creation of Solitons and Vortices by Bragg Reflection of Bose-Einstein Condensates in an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **90**, 110404 (2003).
- [Sha20] V. Sharma, S. Choudhury, und E. J. Mueller, *Dynamics of Bose-Einstein recondensation in higher bands*, Phys. Rev. A **101**, 033609 (2020).
- [She10] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, und S. Kuhr, *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator*, Nature **467**, 68 (2010).
- [Spi07] I. B. Spielman, W. D. Phillips, und J. V. Porto, *Mott-Insulator Transition in a Two-Dimensional Atomic Bose Gas*, Phys. Rev. Lett. **98**, 080404 (2007).
- [Stö04] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhl, und T. Esslinger, *Transition from a Strongly Interacting 1D Superfluid to a Mott Insulator*, Phys. Rev. Lett. **92**, 130403 (2004).
- [Str11] J. Struck, C. Ölschläger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger, und K. Sengstock, *Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices*, Science **333**, 996 (2011).
- [Str12] J. Struck, C. Ölschläger, M. Weinberg, P. Hauke, J. Simonet, A. Eckardt, M. Lewenstein, K. Sengstock, und P. Windpassinger, *Tunable Gauge Potential for Neutral and Spinless Particles in Driven Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **108**, 225304 (2012).
- [Tar12] M. G. Tarallo, A. Alberti, N. Poli, M. L. Chiofalo, F.-Y. Wang, und G. M. Tino, *Delocalization-enhanced Bloch oscillations and driven resonant tunneling in optical lattices for precision force measurements*, Phys. Rev. A **86**, 033615 (2012).

- [Tru01] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge, und R. G. Hulet, *Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms.*, Science **291**, 2570 (2001).
- [Ueh13a] T. Uehlinger, D. Greif, G. Jotzu, L. Tarruell, und T. Esslinger, *Bloch-Zener oscillations in a tunable optical honeycomb lattice*, AIP Conference Proceedings **1566**, 534 (2013).
- [Ueh13b] T. Uehlinger, D. Greif, G. Jotzu, L. Tarruell, T. Esslinger, L. Wang, und M. Troyer, *Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions*, Eur. Phys. J. Spec. Top. **217**, 121 (2013).
- [Var21] J. Vargas, M. Nuske, R. Eichberger, C. Hippler, L. Mathey, und A. Hemmerich, *Orbital Many-Body Dynamics of Bosons in the Second Bloch Band of an Optical Lattice*, Phys. Rev. Lett. **126**, 200402 (2021).
- [Ver92] P. Verkerk, B. Lounis, C. Salomon, C. Cohen-Tannoudji, J.-Y. Courtois, und G. Grynberg, *Dynamics and spatial order of cold cesium atoms in a periodic optical potential*, Phys. Rev. Lett. **68**, 3861 (1992).
- [VR21] J. A. Vargas Roco, *Non-equilibrium dynamics of ultracold quantum gases in higher bands of an optical lattice*, Dissertation, Universität Hamburg (2021).
- [Wü98] A. Wünsche, *Laguerre 2D-functions and their application in quantum optics*, Journal of Physics A: Mathematical and General **31**, 8267 (1998).
- [Wan21] X.-Q. Wang, G.-Q. Luo, J.-Y. Liu, W. V. Liu, A. Hemmerich, und Z.-F. Xu, *Evidence for an atomic chiral superfluid with topological excitations*, Nature **596**, 227 (2021).
- [Was93] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, und K. Köhler, *Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice*, Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993).
- [Web03] T. Weber, *Bose-Einstein Condensation of Optically Trapped Cesium*, Dissertation, Universität Innsbruck (2003).
- [Wid05] A. Widera, F. Gerbier, S. Fölling, T. Gericke, O. Mandel, und I. Bloch, *Coherent Collisional Spin Dynamics in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **95**, 190405 (2005).
- [Win84] W. H. Wing, *On Neutral Particle Trapping In Quasistatic Electromagnetic Fields*, Prog. Quant. Electr **8**, 181 (1984).
- [Wir07] G. Wirth, *Aufbau und Charakterisierung einer magneto-optischen Falle*, Diplomarbeit, Universität Hamburg (2007).

- [Wir11] G. Wirth, M. Ölschäger, und A. Hemmerich, *Evidence for orbital superfluidity in the P-band of a bipartite optical square lattice*, Nature Physics **7**, 147 (2011).
- [Wir13] G. Wirth, *Orbital Superfluidity in Excited Bands of an Optical Lattice*, Dissertation, Universität Hamburg (2013).
- [Wit04] D. Witthaut, F. Keck, H. J. Korsch, und S. Mossmann, *Bloch oscillations in two-dimensional lattices*, New J. Phys. **6**, 41 (2004).
- [Wit05] D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, und H. J. Korsch, *Bloch oscillations of Bose-Einstein condensates: Breakdown and revival*, Phys. Rev. E **71**, 036625 (2005).
- [Wu01] B. Wu und Q. Niu, *Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Phys. Rev. A **64**, 061603 (2001).
- [Wu09] C. Wu, *Unconventional Bose-Einstein condensations beyond the "no-node" theorem*, Modern Physics Letters B **23**, 1 (2009).
- [Xu16] Z.-F. Xu, L. You, A. Hemmerich, und W. V. Liu,  *$\pi$ -Flux Dirac Bosons and Topological Edge Excitations in a Bosonic Chiral p-Wave Superfluid*, Phys. Rev. Lett. **117**, 085301 (2016).
- [Zen09] A. Zenesini, H. Lignier, D. Ciampini, O. Morsch, und E. Arimondo, *Coherent Control of Dressed Matter Waves*, Phys. Rev. Lett. **102**, 100403 (2009).
- [Zwi03] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, und W. Ketterle, *Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules*, Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).
- [Zwi04] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, und W. Ketterle, *Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance*, Phys. Rev. Lett. **92**, 120403 (2004).



# Danksagung

Ein besonderer Dank gilt zunächst meinem Betreuer Prof. Andreas Hemmerich dafür, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, in seiner Gruppe am Experiment mit ultrakalten Bosonen in einem bipartiten optischen Gitter zu promovieren. Ich bin ihm dankbar für viele gute Ratschläge beim Durchführen der Messungen und auch für sein immenses theoretisches Fachwissen, das ich häufig in Form von kleinen Vorlesungen genießen durfte.

Professor Henning Moritz danke ich für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens meiner Doktorarbeit.

Ich danke meinem anfänglichen Mitdoktoranden Thorge Kock, der nach seiner Promotion unser Experiment als Post-Doc begleitet hat, für die gute Zusammenarbeit. Ihm verdanke ich viele wichtige Einblicke in das Experiment, ebenso Matthias Ölschläger, einem der „Gründerväter“ unseres experimentellen Aufbaus, mit dem ich im ersten halben Jahr der Doktorarbeit zusammengearbeitet habe.

Einen riesigen Dank möchte ich meinem Doktoranden-Kollegen José Vargas aussprechen. Mit ihm habe ich viele unvergessliche Momente auf und außerhalb der Arbeit erlebt. Muchas gracias, cachöjchen! Keep on rocking! :-)

Auch bei den anderen Gruppenmitgliedern möchte ich mich bedanken. Insbesondere danke ich Hans Kessler für das Organisieren von unterhaltsamen Gruppenausflügen, Raphael Eichberger für die angenehme Atmosphäre im gemeinsamen Büro und Max Hachmann für interessante Diskussionen über Physik und spannende Einblicke in die Fotografie.

Der Werkstatt des DESY danke ich für das Herstellen von wichtigen Bauteilen für unsere Apparatur wie den neu designten geschweißten Spulen. Uwe Pape und Frank Holweg möchte ich für die gute Zusammenarbeit beim Grundpraktikum danken.

Ich danke zahlreichen Mitgliedern anderer Gruppen an unserem Institut und am DESY-Campus für schöne Momente beim Mittagessen in der Kantine und auf den Treffen vom SFB.

Ich möchte mich schließlich bei meiner Familie und allen Menschen bedanken, die mich während meiner Promotion unterstützt und inspiriert haben. Petra danke ich für das Korrekturlesen der Arbeit.