Deformationen und Degenerationen von Liealgebren und Liegruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Claudia Daboul

aus Rehovoth

Hamburg
1999

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Peter Slodowy
und Prof. Dr. Helmut Strade

Hamburg, den 2. Februar 1999

Prof. Dr. Hans Daduna
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Überblick

Das bekannteste Beispiel für eine Degeneration einer Liegruppe ist der Übergang der Lorentzgruppe in die Galileigruppe für den Limes $c \to \infty$ der Lichtgeschwindigkeit c.

Die ersten Arbeiten, die sich systematisch mit solchen Übergängen bei Liealgebren befassen, kommen aus der mathematischen Physik. Die einfachste Familie von Degenerationen, die jedoch bereits eine große Zahl von interessanten Beispielen bietet, wird von den sogenannten Inonü-Wigner-Kontraktionen gebildet. Sie wurden von Inonü und Wigner in [IW] erstmals ausführlich untersucht und von Saletan verallgemeinert (siehe [Sa]). [1]

Aus mathematischer Sicht hat das Thema Deformationen und Degenerationen von Liealgebren starke Bezüge zur Deformationstheorie von Algebren einerseits und zur geometrischen Invariantentheorie andererseits. Die Theorie der Deformationen von allgemeinen, nicht notwendig assoziativen Algebren wurde von Gerstenhaber [Ge] begründet. Dabei interessiert man sich für alle Algebren, die aus einer gegebenen, $\mathfrak{g}_0$, durch „kleine“ Störung der Strukturkonstanten hervorgehen können. „Infinitesimale“ Deformationen „erster Ordnung“ werden dabei durch die Cohomologiegruppe $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ beschrieben.

In der geometrischen Invariantentheorie (vgl. [Kr]) wird die Problematik vom Standpunkt der Bahnengeometrie der $\mathrm{GL}(V)$-Operation auf der algebraischen Menge $\mathrm{Lie}(V)$ der Liealgebrastrukturen auf einem Vektorraum V betrachtet.

Aus der Vereinigung beider Standpunkte ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den Begriffen „Deformation“ und „Degeneration“ (vgl. [FH]). Zu jeder Degeneration $\mathfrak{g}_0$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ existiert eine Deformation von $\mathfrak{g}_0$ mit „generischer Faser “ $\mathfrak{g}$.

Kontraktionen sind spezielle Degenerationen. Eine Kontraktion einer gegebenen Liealgebra wird induziert durch eine generisch reguläre Einparameterfamilie ϕ_t von Transformationen auf dem unterliegenden Vektorraum, die für $t = 0$ singulär wird. Bei Kontraktionen bildet ϕ_0 stets einen Homomorphismus von der degenerierten in die ursprüngliche Liealgebra. Die von Inonü, Wigner und Saletan betrachteten Kontraktionen hängen stets linear vom Parameter t ab. Die naheliegendsten nichtlinearen Kontraktionen sind die sogenannten filtrierten bzw. die damit zusammenhängenden graduierten Kontraktionen. Filtrierte Kontraktionen wurden, oft unter der Bezeichnung „verallgemeinerte Inonü-Wigner-Kontraktionen“, von verschiedenen Autoren definiert (vgl. z.B. Weimar-Woods [We2], Guillemin/Sternberg in [GS, §55]). Graduierte Kontraktionen werden in de Montigny/Patera [dMP] und Moody/Patera [MP]) betrachtet. (Dort werden auch sogenannte nichtkontinuierliche Kontraktionen behandelt, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.)

[1] Zur Bedeutung von Kontraktionen in der mathematischen Physik vergleiche auch Segal [Seg, insbes. die Seiten 255 ff.] sowie Gilmore [Gi, Ch. 10], Hermann [Her, Ch. 11: Limits and contractions of Lie groups.], Guillemin-Sternberg [GS, Ch.V: Contractions of symplectic homogenous spaces].

Vom algebraisch geometrischen Standpunkt, der z.B. in [FH] eingenommen wird, sind Deformationen von Liealgebren ihrerseits Liealgebren über geeigneten Ringen. Ein solcher Ring ist i.a. ein diskreter Bewertungsring A mit Restklassenkörper k, der k enthält. Jede A-Liealgebra kann man als eine Deformation ihrer „speziellen Faser", d.h. der durch den Basiswechsel $A \to k$ entstehenden k-Liealgebra, betrachten. Durch den Basiswechsel $A \to K$ mit $K = \mathrm{Quot}(A)$ erhält man aus einer Deformation eine Liealgebra über K. Ist $\tilde{\mathfrak{g}}$ eine K-Liealgebra und $\mathfrak{a}$ eine A-Unteralgebra von $\tilde{\mathfrak{g}}$ mit $\mathfrak{a} \otimes_A K \cong \tilde{\mathfrak{g}}$, so bezeichnet man $\mathfrak{a}$ als eine A-Form von $\tilde{\mathfrak{g}}$. Die Degenerationen einer vorgegebenen k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ entsprechen somit den A-Formen von $\mathfrak{g} \otimes_k K$.

Die algebraisch geometrische Sichtweise ergibt eine Verbindung zu Loopalgebren, denn wenn man von den Laurentpolynomen $k[t, t^{-1}]$ zum Körper $K = k((t))$ mit dem Bewertungsring $A = k[[t]]$ (als Komplettierungen von $k[t, t^{-1}]$ bzw. $k[t]$) übergeht, wird aus der Loopalgebra $\mathfrak{g} \otimes_k k[t, t^{-1}]$ die Liealgebra $\mathfrak{g} \otimes_k K$ mit $K = k((t))$. Diese bezeichnen wir auch als formale Loopalgebra.

Ist $\mathfrak{g}$ einfach, so ist die zugehörige Loopalgebra eine affine Kac-Moody-Algebra modulo Zentrum. Diese Verbindung kann man zur Konstruktion vieler Degenerationen von einfachen Liealgebren verwenden. Die einfachen Loopalgebren besitzen die Parahoriunteralgebren als prominente A-Formen (mit $A = \mathbb{C}[t]$). Bei der Untersuchung der zugehörigen Degenerationen der unterliegenden einfachen Liealgebra spielt auch der getwistete Fall ein Rolle. Die Parahoriunteralgebren gehören zur Familie der graduierten Kontraktionen, innerhalb derer sie gerade diejenigen Kontraktionen bilden, bei denen die zugehörige Graduierungsgruppe eine endliche zyklische Gruppe ist. Jede $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung einer Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper korrespondiert zu einem Automorphismus, dessen Ordnung m teilt. Daher lassen sich die zyklisch graduierten Kontraktionen von einfachen Liealgebren mittels der von Kac stammenden Klassifikation der Automorphismen endlicher Ordnung von einfachen Liealgebren (hier Satz 2.22) beschreiben. Allgemein (nicht nur für einfache Liealgebren) sind die zu zyklisch graduierten Kontraktionen gehörigen A-Formen stets positive Unteralgebren von getwisteten Loopalgebren (Satz 1.56). Für einfache Liealgebren entsprechen diese nach „Enttwistung" genau den Parahoriunteralgebren von getwisteten und ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebren (Satz 2.33, dieser wurde sinngemäß schon in [DD] veröffentlicht.).

Da $k((t))$ ein lokaler Körper ist, ergibt sich ein Zusammenhang zu den Arbeiten [BT] von Bruhat und Tits, in denen eine Strukturtheorie reduktiver (insbesondere halbeinfacher) Gruppen über beliebigen lokalen Körpern entwickelt wurde. Die Konstruktion von A-Gruppenschemata, die ihrerseits zu A-Formen der zugehörigen Liealgebren führen, spielt im Werk von Bruhat-Tits eine fundamentale Rolle. Solche A-Formen werden ausgehend von konvexen Teilmengen im zugehörigen Tits-Gebäude oder, allgemeiner, mittels konkaver Funktionen auf den Wurzeln der Gruppe gewonnen. Diese Techniken liefern damit eine weitere Quelle für Degenerationen von Liealgebren. Der Stabilisator P_Ω einer konvexen Menge Ω ist genau dann eine

Parahoriuntergruppe, wenn Ω eine Facette im Bruhat-Tits-Gebäude ist. Dadurch ergibt sich ein Einordnung der zyklisch graduierten Kontraktionen als Spezialfall. Bei der Bruhat-Tits-Konstruktion ist es a priori nicht offensichtlich, daß die zugehörigen Degenerationen auch Kontraktionen sind. Dies läßt sich in diesem Fall explizit durch Anwendung von affinen Weylgruppenoperationen zeigen (Satz 2.57).

Andererseits folgt diese Aussage auch aus einem allgemeineren Resultat. Wir können nämlich zeigen, daß jede Degeneration einer algebraischen Gruppe isomorph zu einer Kontraktion ist (Satz 3.44). Da die wie oben konstruierten Degenerationen von Liealgebren stets zu Degenerationen von Gruppen korrespondieren, sind auch diese zu Kontraktionen isomorph.

Auch die mittels der Bruhat-Tits-Konstruktion gewonnenen Kontraktionen gehören zur Familie der graduierten Kontraktionen. Der ungetwistete Fall ergibt gerade die durch das Wurzelgitter graduierten Kontraktionen. Diese entsprechen genau denjenigen A-Formen von ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebren, die eine Cartan-Unteralgebra enthalten (Satz 2.44). Der durch einen Diagrammautomorphismus ν getwistete Fall ergibt diejenigen Kontraktionen, bei denen die zugehörige Graduierungsgruppe das Produkt der von ν erzeugten zyklischen Gruppe $\langle\nu\rangle$ mit dem Wurzelgitter des zugehörigen gefalteten Wurzelsystems ist. Diese Degenerationen entsprechen denjenigen A-Formen von getwisteten affinen Kac-Moody-Algebren, die eine Cartan-Unteralgebra enthalten und ν-diagonalisierbar sind (Satz 2.45).

Ein wichtiger Aspekt dieser Arbeit ist die Behandlung von Deformationen und Degenerationen auf der Gruppenebene. Bei der Deformation einer Liealgebren ändert sich nur die Lieklammer, der unterliegende Vektorraum bleibt unverändert. Bei der Deformation einer algebraischen Gruppe ändert sich hingegen i.a. auch die Struktur der zugrundeliegenden Varietät. Beispielsweise ist die Gruppenmannigfaltigkeit von $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ homöomorph zu $\mathrm{S}^3/\{\pm 1\}$. (SU_2 ist homöomorph zu S^3, der Gruppe der Quaternionen von Betrag 1) ([Hei, Ch.I.4, Satz 5 und 24]). Eine zusammenhängende abelsche Liegruppe ist ein Produkt aus Torus und affinem Raum. Der Torus ist seinerseits ein Produkt von 1-dimensionalen Tori, welche entweder isomorph zu $\mathrm{SO}_{1,1} \cong \mathbb{R}^*$, oder zu $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sind. Die unterliegenden Varietäten sind die Hyperbel bzw. der Einheitskreis S^1. Bei der Kontraktion von $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ zu einer abelschen Liealgebra, muß also $\mathrm{S}^3/\{\pm 1\}$ in ein Produkt aus Hyperbeln, Kreislinien und Geraden übergehen. Das gleiche Phänomen kann man sogar schon in einer Dimension beobachten. In Abschnitt 3.3.4 wird die Kontraktion der kompakten Gruppe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ in die nicht kompakte Gruppe $\mathrm{E}_{n-1}(\mathbb{R})$ beschrieben. Für $n = 2$ degeneriert auf der Ebene der Gruppenmannigfaltigkeiten der Kreis zur Geraden. Algebraisch ist dies nach Komplexifizierung der Übergang von der multiplikativen Gruppe G_m in die additive Gruppe G_a. Es stellt sich die Frage, ob sich diese Kontraktion, die auf der Ebene der Liealgebren trivial ist, denn eine abelsche Liealgebra läßt sich nicht weiter degenerieren, auf der Ebene der Gruppen auch umkehren ließe, d.h. ob auch ein Übergang von E_1 nach SO_2 (algebraisch von der additiven Gruppe G_a in die multiplikative Gruppe

G_m) möglich ist. Um das zu präzisieren, muß der Begriff der Degeneration von Liegruppen zuerst genauer festgelegt werden. (Die Frage kann dann durch einen bekannten Satz (siehe z.B. [WW, The.2.2], hier Satz 3.87) negativ beantwortet werden.) Ein Degenerationsbegriff für algebraische Gruppen muß eine Degeneration auf jeder strukturellen Ebene beinhalten, insbesondere muß auch die unterliegende Varietät eine Degeneration (von Varietäten) erfahren. Auf diesen Aspekt wird in den oben genannten Arbeiten lediglich von Wigner und Inonü eingegangen. Sie begnügen sich jedoch mit dem Nachweis der Konvergenz der Campbell-Baker-Haussdorff-Formeln. Demgegenüber werden in dieser Arbeit die Degenerationen auf der Gruppenebene in algebraischer Form als glatte Gruppenschemata über geeigneten eindimensionalen Ringen konstruiert.

Wir gehen von folgender Situation aus: Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und G eine algebraische Gruppe über k mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$. Das Ziel ist es, die Degeneration $\mathfrak{a}$ zu einer Degeneration der Gruppe G zu liften, das heißt ein affines Gruppenschema $\mathcal{G}$ mit generischer Faser G und Liealgebra $\mathfrak{a}$ zu konstruieren. Dann ist die Liealgebra der speziellen Faser $\mathcal{G}_k$ von $\mathcal{G}$ isomorph zur speziellen Faser der Degeneration $\mathfrak{a}$.

Daß eine solche Liftung nicht eindeutig ist, zeigt schon das oben erwähnte Beispiel der trivialen Kontrakion der eindimensionalen Liealgebra.

Die Hauptergebnisse für das Liftungsproblem sind zwei verschiedene Möglichkeiten zur Liftung von Degenerationen. Die erste Möglichkeit basiert auf der von Bruhat und Tits in [BT, II] verwendeten Methode zur Konstruktion von glatten Gruppenschemata mittels des sogenannten schematischen Abschlusses von Darstellungen. In Satz 3.63 wird gezeigt, daß diese Konstruktion zur Liftung von Degenerationen von Liealgebren angewendet werden kann, d.h. insbesondere daß die so konstruierten Gruppenschemata die richtigen Liealgebren haben. Es folgt, daß zu jeder Degeneration $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ ein solches Gruppenschema konstruiert werden kann, wenn eine konservierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ existiert, die zu einer Darstellung von G korrespondiert (Korollar 3.64). Konservierte Darstellungen wurden bereits in [IW] definiert. Sie sind, unabhängig von der hier betrachteten Konstruktion, für möglich Anwendungen von Degenerationen von Liealgebren von großem Interesse. Wir können zeigen (Satz 1.60), daß die adjungierte Darstellung stets konserviert ist, wenn die Limesalgebra der Degeneration ein triviales Zentrum hat. Es folgt wiederum (Korollar 3.65), daß alle Degenerationen, bei denen das Zentrum der Limesalgebra trivial ist, eine Liftung besitzen.

Eine von der obigen unabhängige Möglichkeit zur Liftung von Degenerationen ergibt sich aus dem Neron-Blowup, der in einem Artikel [WW] von Waterhouse und Weisfeiler auftritt. Mit dieser Konstruktion können alle Inonü-Wigner-Kontraktionen, nicht nur die mit trivialem Zentrum, auf die Gruppenebene fortgesetzt werden (Satz 3.85). Diese Konstruktion ist daher in gewissem Sinne komplementär zu der Konstruktion mittels konservierter Darstellungen. Sie kann verallgemeinert werden zu einer Liftungskonstruktion für graduierte und filtrierte Kontraktionen.

In Kapitel 1 werden die oben genannten Ansätze beschrieben, auf ihre Allgemeinheit hin untersucht und zueinander in Beziehung gesetzt. In Abschnitt 1.1 werden Deformationen definiert und der Zusammenhang zu Liealgebren über Funktionenringen etabliert. In Abschnitt 1.2 werden Degenerationen eingeführt und die relevanten Grundbegriffe aus der Invariantentheorie wiedergegeben. Außerdem werden einige halbstetige Invarianten von Liealgebren beschrieben (Satz 1.20). Für die Dimension 3 wird die Varietät Lie_3 und der zugehörige Modulraum der 3-dimensionalen Liealgebren genauer untersucht. Der Zusammenhang zwischen Deformationen und Degenerationen wird durch den grundlegenden Satz 1.21 von Grunewald und O'Halloran wiedergegeben. Mit Hilfe dieses Satzes kann man auch Degenerationen als Liealgebren über diskreten Bewertungsringen betrachten. Es wird ein geeigneter Isomorphiebegriff, der Begriff der starken Äquivalenz von Degenerationen, eingeführt. In Abschnitt 1.3 werden Kontraktionen eingeführt. Diese müssen im allgemeinen nicht, wie bei [IW] und [Sa], linear vom Parameter t abhängen. Wir können allgemein zeigen, daß der Kern von ϕ_0 als Ideal der Limesalgebra stets nilpotent ist (Satz 1.28). Eine abstrakte Einordnung der Kontraktionen unter die Degenerationen einer Liealgebra gibt Satz 1.32. Es wird eine Normalform für verallgemeinerte Kontraktionen angegeben (Satz 1.34). Der lineare Fall wird in den Unterabschnitten 1.3.1 und 1.3.2 behandelt. Die filtrierten Kontraktionen, die den verallgemeinerten Kontraktionen entsprechen, bei denen die Normalform (24) Diagonalgestalt hat, werden in Abschnitt 1.4 untersucht. Insbesondere werden in Unterabschnitt 1.4.1 die durch eine endliche zyklische Gruppe graduierten Kontraktionen den positiven Unteralgebren von getwisteten Loopalgebren zugeordnet. In Abschnitt 1.5 werden konservierte Darstellungen eingeführt, die in Kapitel 3 zur Konstruktion von Fortsetzungen von Kontraktionen auf die Gruppenebene verwendet werden.

In Kapitel 2 geht es um Degenerationen von reduktiven Liealgebren. Zunächst wird gezeigt, daß eine formale Degeneration einer einfachen k-Liealgebra nach der Skalarenerweiterung $k[[t]] \to k((t))$ stets eine getwistete formale Loopalgebra ergibt (Korollar 2.13). Wir geben für dieses bekannte Resultat eine Beweisskizze, die auf der Klassifikation der Automorphismen endlicher Ordnung von affinen Kac-Moody-Algebren durch Bausch und Rousseau [BR] basiert. Im darauf folgenden Abschnitt wird dann gezeigt, daß sich diese getwisteten Algebren bis auf Isomorphie schon alle durch Twisten mit einem Diagrammautomorphismus ergeben (vgl. [Ka, §8]). In Abschnitt 2.1 werden alle zyklisch graduierten Kontraktionen von einfachen Liealgebren klassifiziert. Die zugrundeliegende Klassifikation der Automorphismen endlicher Ordnung von einfachen Liealgebren wird ebenfalls wiedergegeben. Außerdem verwenden wir einige Resultate aus [OV], um die Struktur der Limesalgebren zu beschreiben (Satz 2.26). Weiterhin wird gezeigt, daß die zugehörigen A-Formen genau den parabolischen Unteralgebren von getwisteten und ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebren entsprechen. In Abschnitt 2.2 wird die Bruhat-Tits-Konstruktion von A-Formen mittels konkaver Funktionen beschrieben. Diese A-Formen werden dadurch charakterisiert, daß sie eine affine Cartanunteralgebra enthalten. Da insbesondere alle Parahoriunteralgebren unter diese A-Formen fallen, sind auch die zyklisch graduierten Kontraktionen auf diese Art beschreibbar. Schließlich wird gezeigt, daß diese A-Formen stets „positiviert" werden können, in dem Sinne, daß man einen Isomorphismus zu einer echten Kontraktionen angeben kann. Für diejenigen A-Formen, die einer konvexen Teilmenge des Tits-Gebäudes entsprechen, kann man einen Vergleich der Nullteile dieser Kontraktionen mit denen der zyklisch graduierten Kontraktionen herleiten (Abschnitt 2.2.4). Die Vermutung, daß die bei Bruhat und Tits auftretenden $\mathbb{C}[|t|]$-Formen dadurch charakterisiert seien, daß sie als komplexe Unteralgebren der Loopalgebren integrabel im Sinne der Theorie der Kac-Moody-Gruppen [Ka2] sind, läßt sich bei genauerer Betrachtung nicht aufrecht erhalten, denn jede Inonü-Wigner-Kontraktion ist integrabel (Satz 2.65). Dies wird in Abschnitt 2.3 gezeigt.

Im dritten Kapitel geht es schließlich um Gruppenschemata, die eine vorgegebene Degeneration von Liealgebren fortsetzen. In Abschnitt 3.3 wird eine Möglichkeit zur Konstruktion solcher Gruppenschemata mit Hilfe von konservierten Darstellungen beschrieben. Zuvor werden die Grundlagen über glatte Gruppenschemata bereitgestellt (Abschnitt 3.1). In Abschnitt 3.2 wird gezeigt, daß jede Degeneration einer algebraischen Gruppe zu einer Kontraktion isomorph ist. In Unterabschnitt 3.3.3 wird ein Kriterium hergeleitet, mit dessen Hilfe man die Torsionsfreiheit eines A-Schemas, mit glatter generischer und spezieller Faser feststellen kann. Auch zeigen wir, daß jedes A-Gruppenschema in jedem Punkt regulär ist, wenn die spezielle Faser die gleiche Dimension wie die generische Faser hat (Satz 3.75). In Abschnitt 3.4 wird schließlich die auf dem Neron-Blowup basierende Konstruktion vorgestellt und gezeigt, daß damit alle Inonü-Wigner-Kontraktionen auf die Gruppenebene fortgesetzt werden können. Dies wird angewendet auf die Kontraktion von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ in die dreidimensionale Heisenbergalgebra. Außerdem wird ein Satz wiedergegeben ([WW, The.2.2]), der zeigt, daß die Kontraktion der additiven in die multiplikative Gruppe nicht möglich ist. In Abschnitt 3.5 konstruieren wir kanonische Liftungen für graduierte und filtrierte Kontraktionen.

In Anhang A werden einige für diese Arbeit grundlegenden Begriffe aus der algebraischen Geometrie wie zum Beispiel affine Schemata, darstellbare Funktoren, Flachheit angegeben. Anhang B gibt eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Basisringe der in dieser Arbeit betrachteten Deformationen, nämlich der Dedekindringe und ihrer Lokalisierungen, der diskreten Bewertungsringe.

An dieser Stelle möchte ich mich noch einmal herzlich für die Förderung meiner Promotion durch ein Promotionsstipendium der Stadt Hamburg bedanken. Weiterhin danke ich dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg für die Möglichkeit, diese Arbeit im Rahmen einer Anstellung als wissenschaftliche Mitarbeiterin fertigzustellen.

Ich danke allen, die diese Arbeit ganz oder teilweise Korrektur gelesen haben. Mein besonderer Dank gilt Prof. P. Slodowy für die interessante Themenstellung sowie die Betreuung und mannigfache Hilfe bei der Anfertigung dieser Arbeit.

1. Deformationen, Degenerationen und Kontraktionen von Liealgebren

1.1. **Deformationen.** Sei k ein Körper und $\mathfrak{g}_0 = (V, [\,.,\,.]_0)$ eine Liealgebra über k mit unterliegendem Vektorraum V und Lieklammer $[\,.,\,.]_0$. Eine Deformation von $\mathfrak{g}_0$ ist ein Weg (in einer geeigneten Kategorie), der in der Menge $\mathrm{Lie}(V)$ aller Lieklammern auf V verläuft und bei $[\,.,.]_0$ beginnt. Ist $V \cong k^n$ endlichdimensional, so ist $\mathrm{Lie}(V)$ eine algebraische Teilmenge von k^{n^3}. Identifiziert man nämlich eine Lieklammer auf V mit dem n^3-Tupel $(c_{ij}^k)_{i,j,k=1\ldots n}$ ihrer Strukturkonstanten bezüglich einer fest gewählten Basis von V, so lassen sich Antisymmetrie und Jacobiidentität durch das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & c_{ii}^k = 0 \qquad c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad \text{für } i,j,k = 1\ldots n \\
& \sum_{k=1}^{n} (c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m) = 0 \qquad \text{für } i,j,l,m = 1\ldots n
\end{aligned}
$$

ausdrücken. Die durch das Gleichungssystem (1) beschriebene Teilmenge von k^{n^3} wird mit $\mathrm{Lie}_n(k)$ bezeichnet.

Einer Deformation entspricht somit ein Weg in $\mathrm{Lie}_n(k)$, das heißt ein n^3-Tupel $(c_{ij}^k(t))_{i,j,k=1\ldots n}$ von Funktionen des Parameters t. Dieses n^3-Tupel genügt nun seinerseits dem Gleichungssystem (1), das heißt es repräsentiert eine Liealgebra über einem geeigneten Funktionenring.

Um Deformationen von Liealgebren zu klassifizieren, ist es sinnvoll, sich bei diesen Funktionen auf eine bestimmte Kategorie festzulegen. Man stellt also eine Bedingung der Art:

$$
(2) \qquad c_{ij}^k \in A, \text{ für } i,j,k = 1\ldots n,
$$

wobei A eine eindimensionale kommutative k-Algebra ist. Das einfachste Beispiel wäre $A = k[t]$. Im algebraisch geometrischen Kontext kann man die Situation wie folgt beschreiben: Ist γ eine affine algebraische Kurve in $\mathrm{Lie}_n(k)$ so entspricht der Einbettung von γ in $\mathrm{Lie}_n(k)$ ein surjektiver Homomorphismus von k-Algebren: $k[\mathrm{Lie}_n] \to k[\gamma]$. Die Bilder der Erzeuger c_{ij}^k von $k[\mathrm{Lie}_n]$ in $k[\gamma] = k[\mathrm{Lie}_n]/I(\gamma)$ bilden die Strukturkonstanten einer Liealgebra über $k[\gamma]$. Eine Parametrisierung von γ ist ein surjektiver Morphismus von einem eindimensionalen affinen k-Schema $\mathrm{Spec}(A)$ nach γ. Eine Parametrisierung wird gegeben durch eine Einbettung von k-Algebren von $k[\gamma]$ in A. Trivialerweise ist γ in diesem Sinne durch sich selbst parametrisiert. Man kann γ immer regulär parametrisieren, indem man gegebenenfalls zur Normalisierung $\tilde{\gamma}$ von γ übergeht. Die Normalisierung eines solchen eindimensionalen Ringes ist immer regulär und damit ein Dedekindring (siehe Satz B.12). Da man bei Deformationen stets einen festen Ausgangspunkt $\mathfrak{g}_0$ hat, betrachtet man meistens einen in einem Punkt t_0 lokalisierten Dedekindring, also einen diskreten Bewertungsring (siehe Satz B.12) wie z.B. $k[t]_{(t)}$. Aus formalen Gründen ist es sinnvoll, zur Komplettierung überzugehen, nämlich zu dem vollständigen lokalen Ring $k[|t|]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in k. Der Ring $k[|t|]$ ist nach dem Cohenschen Strukturtheorem [Ha, The.5.5.A] als vollständige reguläre eindimensionale lokale k-Algebra eindeutig bestimmt. Man kann Lokalisierung und Vervollständigung als eine Lokalisierung im strengeren Sinne, nämlich im analytischen, statt im algebraischen Sinne betrachten. Mehr zu Dedekindringen, diskreten Bewertungsringen und formalen Potenzreihen in Anhang B. [2]

Eine Liealgebra über A sei genau wie über einem Körper definiert als ein freier A-Modul zusammen mit einer Lieklammer, also einem antisymmetrischen Produkt, das der Jacobiidentität genügt. Ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V, so ist $(b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1)$ eine Basis des freien A-Moduls $V \otimes_k A$. Wir können nun jeder Deformation eine Liealgebra über A mit unterliegendem freiem A-Modul $V \otimes_k A$ zuordnen, indem wir setzen

$$[b_i \otimes 1, b_j \otimes 1] := \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k b_k \otimes 1. \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{g}$ eine A-Liealgebra und $f : A \to B$ ein Homomorphismus von k-Algebren, so ist in kanonischer Weise $\mathfrak{g}_B := \mathfrak{g} \otimes_A B$ eine B-Liealgebra. Hat $\mathfrak{g}$ bezüglich einer Basis $(b_1, \dots, b_n)$ die Strukturkonstanten $c_{ij}^k \in A$, $i, j, k = 1, \dots, n$, so ist $\mathfrak{g}_B$ als B-Modul frei mit Basis $(b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1)$ und die zugehörigen Strukturkonstanten sind $f(c_{ij}^k)_{i,j,k=1,\dots,n}$. Man sagt dann auch, daß $\mathfrak{g}_B$ durch den Skalarenwechsel $A \to B$ aus $\mathfrak{g}$ hervorgeht.

Sei A eine k-Algebra, $t_0 \in \operatorname{Spec}(A)$ ein ausgezeichneter Punkt mit Restklassenkörper $k(t_0) = k$ und $\mathfrak{a}$ eine Liealgebra über A, dann sei $\mathfrak{a}_k := \mathfrak{a} \otimes_A k$, wobei das Tensorprodukt bezüglich der kanonischen Abbildung von A nach k gebildet wird.

Definition 1.1. Sei k ein Körper und $\mathfrak{g}_0$ eine k-Liealgebra. Eine *Deformation* von $\mathfrak{g}_0$ ist eine Liealgebra $\mathfrak{a}$ über einer k-Algebra A zusammen mit einem ausgezeichneten Punkt $t_0 \in \operatorname{Spec}(A)$ mit Restklassenkörper $k(t_0) = k$ und einem Isomorphismus von k-Liealgebren zwischen $\mathfrak{g}_0$ und der Liealgebra $\mathfrak{a}_k$. Wir bezeichnen dann $\mathfrak{a}$ auch als *Deformation von* $\mathfrak{g}_0$ *über* A. Die Liealgebra $\mathfrak{a}_k$ bezeichnen wir in diesem Zusammenhang auch als *Limesalgebra* oder als *spezielle Faser* der Deformation $\mathfrak{a}$. Zwei Deformationen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{g}_0$ über A heißen *isomorph*, wenn die zugehörigen A-Liealgebren isomorph sind vermöge eines Isomorphismus $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$, der auf $\mathfrak{g}_0$ die Identität induziert. Dies ist so zu verstehen, daß $\psi' = f_0 \circ \psi$ ist, wenn $\psi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}_k$,

[2] Eine mögliche Verallgemeinerung besteht darin, mehr als einen Deformationsparameter zuzulassen. Die Krull-Dimension des Rings A in Gleichung (2) entspricht dann der Zahl der Deformationsparameter. So kann man zum Beispiel die Unbestimmten c_{ij}^k als die Strukturkonstanten einer Liealgebra über dem Koordinatenring $k[\mathrm{Lie}_n]$ von Lie_n betrachten. Diese hat die universelle Eigenschaft, daß jede weitere Liealgebra über einer beliebigen k-Algebra A durch einen eindeutig bestimmten Skalarenwechsel von $k[\mathrm{Lie}_n] \to A$ daraus hervorgeht. Dies hängt damit zusammen, daß Lie_n ein darstellbarer Funktor ist. Dazu siehe Anhang A.

$\psi' : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}'_k$ die jeweiligen Isomorphismen von $\mathfrak{g}_0$ in die spezielle Faser sind und f_0 den durch f induzierten Isomorphismus der speziellen Faser bezeichnet. Eine Deformation von $\mathfrak{g}_0$ heißt *trivial*, wenn sie isomorph zu $\mathfrak{g}_0 \otimes_k A$ ist.

Definition 1.2. Sei $f : A \to B$ ein Monomorphismus von k-Algebren, $\mathfrak{b}$ eine B-Liealgebra. Diese kann dann durch Restriktion der Skalare auf A auch als A-Liealgebra betrachtet werden. Eine *A-Form* von $\mathfrak{b}$ ist eine A-Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{b} \cong \mathfrak{a} \otimes_A B$. Zwei A-Formen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ von $\mathfrak{b}$ heißen *isomorph*, wenn sie als A-Liealgebren isomorph sind.

Ist $\mathfrak{a}$ eine Deformation über einem Integritätsring A mit Quotientenkörper K, dann ist $\mathfrak{a}$ eine A-Form der K-Lialgebra $\mathfrak{a}_K$, wenn $\mathfrak{a}$ als Unteralgebra von $\mathfrak{a}_K$ aufgefaßt wird, vermöge der kanonischen Einbettung, die durch $a \mapsto a \otimes 1$ definiert ist.

Beispiel 1.3. Die abelsche Liealgebra läßt sich in jede andere Liealgebra derselben Dimension deformieren. Seien nämlich $\underline{c}_{ij}^k$ die Strukturkonstanten einer beliebigen Liealgebra $\mathfrak{g}$ der Dimension n, dann definieren die parameterabhängigen Strukturkonstanten

$$c_{ij}^k(t) = t\underline{c}_{ij}^k \tag{4}$$

eine Deformation der abelschen Liealgebra in die Liealgebra $\mathfrak{g}$, denn für $t = 0$ beschreiben sie die abelsche Liealgebra $(V, [\,.,.])$, für $t = 1$ die Liealgebra $\mathfrak{g}$. Formal läßt sich dieser Weg auch umkehren, und als Deformation der Liealgebra $\mathfrak{g}$ in die abelsche Liealgebra $(V, [\,.,.])$ betrachten

$$c_{ij}^k(t) = (t-1)\underline{c}_{ij}^k. \tag{5}$$

Dabei gibt es aber einen grundlegenden Unterschied. Im ersten Fall ist nämlich $\mathfrak{g}_t$ für alle $t \neq 0$ isomorph zu $\mathfrak{g}_1$, also generisch isomorph zu $\mathfrak{g}_1$. Im zweiten Fall ist dagegen $\mathfrak{g}_t$ generisch isomorph zu $\mathfrak{g}_0$ und nur für den speziellen Parameterwert $t = 1$ isomorph zu $\mathfrak{g}_1 = (V, [,])$. Dies drückt sich auch darin aus, daß die zweite Deformation über einem im Nullpunkt lokalisierten Ring trivial ist, da dann $1 - t$ invertierbar ist.

1.1.1. *Infinitesimale Deformationen.*

Definition 1.4. Für einen Ring R sei $R^{\mathrm{du}}(t) := R[t]/(t^2)$ der Ring der *Dualzahlen über R* (mit Parameter t).

Definition 1.5. *Infinitesimale Deformationen* sind Deformationen über dem Ring der Dualzahlen $k^{\mathrm{du}}(t)$ über k.

Es gilt:

Satz 1.6 (Gerstenhaber [Ge]). *Die infinitesimalen Deformationen von $\mathfrak{g}_0$ können mit den Elementen der zweiten Cohomologiegruppe von $\mathfrak{g}_0$ mit Werten in der adjungierten Darstellung identifiziert werden.*

Beweis: Sei

$$\gamma_t(x,y) = \gamma_0(x,y) + t\dot{\gamma}_0(x,y) \tag{6}$$

Dann ist $\dot{\gamma}_0 : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$ eine antisymmetrische bilineare Abbildung, also eine 2-Cokette mit Werten in der adjungierten Darstellung. Die Jacobiidentität ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_t(\gamma_t(x,y),z) + zykl(x,y,z) \\ &= \gamma_t(\gamma_0(x,y) + t\dot{\gamma}_0(x,y),z) + zykl(x,y,z) \\ &= \gamma_0(\gamma_0(x,y),z) + t\dot{\gamma}_0(\gamma_0(x,y),z) + \gamma_0(t\dot{\gamma}_0(x,y),z) + zykl(x,y,z) \\ &= t\,(\dot{\gamma}_0(\gamma_0(x,y),z) + \gamma_0(\dot{\gamma}_0(x,y),z) + zykl(x,y,z)) \end{aligned}$$

Schreiben wir der Deutlichkeit halber wieder die gewohnte $[.,.]$ statt γ_0 so ergibt sich

$$0 = \dot{\gamma}_0([x,y]_0,z) + [\dot{\gamma}_0(x,y),z]_0 + zykl(x,y,z) \tag{7}$$

Dies ist genau die Bedingung dafür, daß $\dot{\gamma}_0$ ein 2-Cozykel mit Werten in der adjungierten Darstellung ist. Bleibt zu zeigen, daß zwei infinitesimale Deformationen γ und μ genau dann isomorph sind, wenn $\dot{\gamma}_0 - \dot{\mu}_0$ ein Corand ist. Sei ψ ein Automorphismus von $V \otimes_k k^{\mathrm{du}}(t)$, der für $t = 0$ die Identität auf V ist:

$$\psi_t = \mathrm{id}_V + t\dot{\psi}_0, \quad \text{mit } \dot{\psi}_0 \in \mathrm{End}(V) \tag{8}$$

($\psi \in \mathrm{T}_{\mathrm{id}}(\mathrm{Aut}(V))$). Da $\mathrm{End}(V) = \mathrm{C}^1(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0)$ ergibt (8) eine Bijektion zwischen $\mathrm{T}_{\mathrm{id}}(\mathrm{Aut}(V))$ und $\mathrm{C}^1(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0)$. Wir zeigen jetzt, daß ψ genau dann ein Isomorphismus zwischen den infinitesimalen Deformationen γ und μ ist, wenn $\dot{\gamma}_0 - \dot{\mu}_0 = d\dot{\psi}_0$. Die Bedingung dafür, daß ψ ein Isomorphismus ist lautet

$$\psi_t(\gamma_t(x,y)) = \mu_t(\psi_t(x),\psi_t(y)). \tag{9}$$

Schreibt man sie aus, so wird sie zu

$$\begin{aligned} &\gamma_0(x,y) + t\left(\dot{\gamma}_0(x,y) + \dot{\psi}_0(\gamma_0(x,y))\right) = \\ &\mu_0(x,y) + t\left(\dot{\mu}_0(x,y) + \mu_0(\dot{\psi}_0(x),y) + \mu_0(x,\dot{\psi}_0(y))\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Da $\gamma_0 = \mu_0 = [.,.]_0$ ist, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$(\dot{\gamma}_0 - \dot{\mu}_0)(x,y) = [\dot{\psi}_0(x),y]_0 + [x,\dot{\psi}_0(y)]_0 - \dot{\psi}_0([x,y]_0) = d\dot{\psi}_0(x,y). \tag{11}$$

□

Aus den Whiteheadlemmata ergibt sich [Ja, Ch.III,Theorem 13], daß für eine halbeinfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ und einen nichttrivialen $\mathfrak{g}$-Modul V die erste und zweite Cohomologiegruppe von $\mathfrak{g}$ mit Werten in V verschwinden.[3] Daher gilt

[3] Tatsächlich verschwinden sogar alle höheren Cohomologiegruppen von $\mathfrak{g}$ mit Werten in einem nichttrivialen $\mathfrak{g}$-Modul (siehe [CE, Th.24.1].)

Korollar 1.7. *Eine halbeinfache Liealgebra hat keine nichttrivialen infinitesimalen Deformationen.*

1.2. **Degenerationen.** Zwei Liealgebren $(V,[.,.]_1)$ und $(V,[.,.]_2)$ sind genau dann isomorph, wenn ein $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ existiert, so daß $\phi([x,y]_1) = [\phi(x),\phi(y)]_2$ für alle $x,y \in V$, das heißt wenn $[.,.]_1 = \phi^{-1}([\phi(.),\phi(.)]_2)$. Definieren wir also eine Rechtsoperation von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{Lie}(V)$, durch

$$[.,.].\phi := \phi^{-1}([\phi(.),\phi(.)])$$

für $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ und $[.,.] \in \mathrm{Lie}(V)$, so ist der zugehörige Bahnenraum $M_1 := \mathrm{Lie}(V)/\mathrm{GL}(V)$ gerade die Menge der Isomorphieklassen von Liealgebren mit unterliegendem Vektorraum V. Der Stabilisator einer Liealgebra entspricht dabei der Automorphismengruppe der Liealgebra.

In Koordinaten bezüglich einer beliebigen, aber fest gewählten, Basis von $\mathfrak{g}$ sei $U \in \mathrm{GL}_n(A)$ die darstellende Matrix von ϕ. Die Koeffizienten von U^{-1} seien mit oberen Indizes u^{ij} bezeichnet. Dann gilt für die Strukturkonstanten (c_{ij}^k) von μ und $c_{ij}'^k$ von $\mu.\phi$ die Transformationsformel

$$c_{ij}'^k = \sum_{l,m,p} u^{kp}\, c_{lm}^p\, u_{li} u_{mj}. \tag{12}$$

Bemerkung 1.8. Der Bahnenraum wird mit der von $\mathrm{Lie}(V)$ ererbten Quotiententopologie in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum. Dieser wird oft auch als Modulraum (hier der Menge der n-dimensionalen Liealgebren) bezeichnet. Er ist keine algebraische Menge mehr. Man stößt hier auf ein Phänomen, das in der Invariantentheorie häufig auftaucht. Im Raum M_1, der die Quotiententopologie von $\mathrm{Lie}(V)$ trägt, liegt ein einzelner Punkt, nämlich der Nullpunkt, dicht. Infolgedessen ist jede stetige Funktion auf M_1, also jede stetige Invariante von $\mathrm{Lie}(V)$ unter $\mathrm{GL}(V)$, konstant. Daß der Nullpunkt, der ja der abelschen Liealgebra entspricht, in M_1 dicht liegt, ergibt sich aus Beispiel 1.3. (Man kann das im Kontext der Gruppenoperation auch so beschreiben: die Liealgebren $(V,[.,.])$ und $(V,t[.,.])$ sind für $t \in k^*$ isomorph (vermöge $t\,\mathrm{id}_V$). Daher enthält der Abschluß der Bahn von $[.,.]$ die Gerade $k[.,.]$, also insbesondere die Null.) Da alle Gleichungen in (1) homogen (vom Grad eins oder zwei) sind, ist $\mathrm{Lie}(V)$ ein (quadratischer) affiner Kegel über einer projektiven algebraischen Menge $\mathbb{P}(\mathrm{Lie}(V))$. Daher sind auch die irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Lie}(V)$ affine Varietäten, die ihrerseits als affine Kegel über quadratischen projektiven Varietäten betrachtet werden können. Es bietet sich nun an, wie bei der Betrachtung des Modulraums der ebenen Kubiken in [Kr, Ch.I.7.], den Nullpunkt aus dem Modulraum herauszunehmen und statt dessen $M = M_1 \setminus \{\bar{0}\} = \mathrm{Lie}(V) \setminus \{0\}/\mathrm{GL}(V) = \mathbb{P}(\mathrm{Lie}(V))/\mathrm{PGl}(V) = (\mathrm{Lie}(V) \setminus \{0\}/\mathrm{SL}(V))/(k^*)$ als Modulraum zu betrachten. Trotzdem kann man nicht erwarten, einen gut separierten algebraischen Quotienten zu erhalten. Dies zeigt schon das Beispiel Lie_3.

Definition 1.9. Eine *Degeneration einer Liealgebra* $\mathfrak{g} \in Lie(V)$ ist ein Element des Abschlusses (bezüglich der Zariski-Topologie) des Orbits von $\mathfrak{g}$ unter der kanonischen Operation von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\mathrm{Lie}(V)$.

Es gilt insbesondere der folgende Satz aus [Kr, II.2.2]

Satz 1.10. *Ist G eine algebraische Gruppe und X eine affine G-Menge, so ist jeder Orbit offen in seinem Abschluß.*

Beweis: Die Abbildung $G \to \overline{O(x)}, g \mapsto x.g$ ist ein dominanter Morphismus. Daher enthält das Bild eine dichte offene Teilmenge Y von $\overline{O(x)}$ [Kr, AI.3.3]. Da $O(x) = \bigcup_{g \in G} Y.g$ ist auch $O(x)$ offen und dicht in $\overline{O(x)}$. □

Korollar 1.11. *Der Begriff der Degeneration induziert eine Ordnungsrelation auf dem Bahnenraum der n-dimensionalen Liealgebren, indem man setzt:*

$$O(x) \leq O(y) :\Leftrightarrow x \in \overline{O(y)}.$$

Beweis: Man überlegt sich leicht, daß mit $x \in \overline{O(y)}$ auch $O(x) \subseteq \overline{O(y)}$. Daher ist die Relation wohldefiniert. Die Reflexivität ist trivial. Die Transitivität folgt aus $O(x) \subseteq \overline{O(y)} \Longleftrightarrow \overline{O(x)} \subseteq \overline{O(y)}$. Die Antisymmetrie folgt aus Satz 1.10. □

Die Ordnungsrelation auf dem Bahnenraum wird durch das *Hassediagramm* dargestellt. Dies ist ein Graph, bei dem jedem Knoten ein Orbit entspricht, und jede Kante eine Beziehung der Form „$a \leq b$“, mit $a \neq b$ und a maximal mit dieser Eigenschaft, zwischen ihrem unteren und ihrem oberen Ende darstellt. Als Beispiel siehe Abbildung 1.

Satz 1.12. *Ist $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so stimmt der Zariskiabschluß eines Orbits mit dem Abschluß bezüglich der durch die euklidische Norm induzierten Topologie überein.*

Beweis: Siehe [Kr, Anhang 1 Satz 7.2.]. □

Bemerkung 1.13. Einfache Liealgebren über Körpern der Charakteristik Null sind rigide, das heißt ihr GL_n-Orbit ist offen in Lie_n. Dies folgt aus einem Theorem von Richardson, nach dem das Verschwinden von $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ über Körpern der Charakteristik Null Rigidität impliziert (siehe [OV, Theorem 2.4]). Die Umkehrung gilt nur unter der Einschränkung, daß die Lieklammer von $\mathfrak{g}$ ein regulärer Punkt in $\mathrm{Lie}(V)$ ist. Da alle Orbiten als homöomorphes Bild von GL_n irreduzibel sind, ist jeder Orbit in einer irreduziblen Komponente von Lie_n enthalten. Für eine einfache Liealgebra über einem Körper der Charakteristik 0 bildet daher der Orbitabschluß $\overline{O(\mathfrak{g})}$ eine irreduzible Komponente von Lie_n.

Als algebraische Teilmenge des $n^2(n-1)/2$-dimensionalen affinen Raums aller antisymmetrischen Algebren mit den Koordinaten c_{ij}^k mit $1 \leq i < j \leq n$ und $k = 1, \ldots, n$ ist Lie_n die Nullstellenmenge der Familie $(f_{ijlm} = \sum_{k=1}^n (c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m +$

$c_{li}^k c_{kj}^m))_{i,j,l,m=1\ldots n}$. Es ist nicht klar, welche Dimension Lie_n hat[4], geschweige denn welche Struktur sie hat. Es ist bekannt, daß sie im allgemeinen weder reduziert noch irreduzibel noch glatt ist (siehe [OV]).

Für kleine n läßt sich Lie_n berechnen:

Lie_2 ist isomorph zur affinen Ebene k^2 mit den Koordinaten c_{12}^1 und c_{12}^2 und die Operation von GL_2 auf Lie_2 ist die Rechts-Operation: $(x,y)^t.U = \det(U)U^{-1}(x,y)^t$. Hier gibt es unabhängig vom zugrundeliegenden Körper k nur zwei Orbiten. Es sind die gleichen, wie die Orbiten unter der kanonischen Operation von GL_2, denn für alle $S \in \mathrm{GL}_2$ gilt $S(x,y)^t = (x,y).U$ für $U = (\det(S)S)^{-1}$. Der eine dieser Orbiten ist die Menge, die nur aus dem Nullpunkt besteht. Dieser entspricht der abelschen Liealgebra. Der zweite Orbit ist ganz $k^2 \setminus \{0\}$. Er entspricht der einzigen nichttrivialen 2-dimensionalen Liealgebra.

Auch für $n = 3$ sind alle möglichen Isomorphieklassen von Liealgebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper bekannt.

Satz 1.14. [Ja, Ch.I.] *Sei k algebraisch abgeschlossen. Ist $\mathfrak{g}$ eine nichtabelsche dreidimensionale Liealgebra, so ist $\mathfrak{g}$ entweder isomorph zu $sl_2(k)$ oder isomorph zu einer Liealgebra der Form*

$$\mathfrak{g}(X) := \mathfrak{v} \rtimes kX, \tag{13}$$

wobei $\mathfrak{v}$ zweidimensional abelsch ist und $X \in M_2(k)$ auf $\mathfrak{v}$ durch Multiplikation von links operiert. Es ergibt sich eine Einparameterfamilie $(\mathfrak{g}_s)_{s\in k}$ von Liealgebren und zwei weitere Isomorphieklassen, nämlich

$$\mathfrak{g}_s := \mathfrak{g}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & s\end{pmatrix}\right), \quad \tilde{\mathfrak{g}}_1 := \mathfrak{g}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right), \quad h_3 \cong \mathfrak{g}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right). \tag{14}$$

Die Liealgebren $\mathfrak{g}_s$ und $\mathfrak{g}_{s'}$ sind genau dann isomorph, wenn s und s' invers zueinander sind.

Beweis: Bei der Klassifikation der dreidimensionalen Liealgebren kann man wie in [Ja] nach der Dimension der abgeleiteten Liealgebra vorgehen. Ist $\dim(\mathfrak{g}') = 3$, so ist $\mathfrak{g}$ einfach (also über einem algebraisch abgeschlossenen Körper isomorph zu sl_2). Für $\dim(\mathfrak{g}') = 2$ wird in [Ja] gezeigt, daß $\mathfrak{g}$ von der Form (13) ist. Mit $\dim(\mathfrak{g}') = 1$ gibt es bis auf Isomorphie nur zwei Liealgebren, und man sieht leicht, daß sie ebenfalls von der Form (13) sind. Mit Hilfe des folgenden Lemmas, durch das die Isomorphietypen von Liealgebren der Form $\mathfrak{g}(X)$, in Bijektion zu den Konjugationsklassen

[4] Der Ausdruck $s_{ijlm}^k = (c_{ij}^k c_{kl}^m + c_{jl}^k c_{ki}^m + c_{li}^k c_{kj}^m)$ ist invariant unter zyklischer Vertauschung von i, j und l und geht bei Vertauschung von i und j in sein Negatives über. Daher gilt für jede Permutation $\pi \in S_3 : s_{ijlm}^k = (-1)^{\mathrm{sign}(\pi)} s_{\pi(i)\pi(j)\pi(l)m}^k$. Dies überträgt sich auf die Ausdrücke f_{ijlm}. Insbesondere verschwindet f_{ijlm}, wenn zwei von den Indizes i, j, l gleich sind. Es genügt also die f_{ijlm} mit $i < j < l$ zu betrachten. Dann bleiben immer noch $n^2(n-1)(n-2)/6$ Gleichungen übrig. Für $n > 5$ sind dies mehr Gleichungen als Parameter, das heißt die f_{ijlm} können im allgemeinen nicht algebraisch unabhängig sein.

in $\mathrm{M}_2(k)$ von Matrizen bis auf skalare Vielfache gestellt werden, können wir die Isomorphietypen wie folgt bestimmen.

Die zu $\mathfrak{g}_s$ mit $s \neq 1$ gehörigen Matrizen X_s gehören in $\mathrm{M}_2(k)$ zum Orbit der Matrizen mit zwei verschiedenen Eigenwerte im Verhältnis s. Für $s = 1$, das heißt zwei gleiche Eigenwerte ungleich Null, sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich X diagonalisierbar oder nicht diagonalisierbar. Der diagonalisierbare Fall ergibt $\tilde{\mathfrak{g}}_1$.

Sind beide Eigenwerte gleich Null, so ergibt der diagonalisierbare Fall die abelsche Liealgebra, der nicht diagonalisierbare Fall die dreidimensionale Heisenbergalgebra h_3.[5] □

Lemma 1.15. *Die Isomorphietypen von Liealgebren der Form $\mathfrak{g}(X)$, stehen in Bijektion zu den Konjugationsklassen in $M_2(k)$ von Matrizen bis auf skalare Vielfache.*

Beweis: Es ist klar, daß $\mathfrak{g}(X) \cong \mathfrak{g}(\lambda SXS^{-1})$ für $\lambda \in k^*$, $S \in \mathrm{GL}_2(k)$. Bleibt zu zeigen, daß aus $\mathfrak{g}(X) \cong \mathfrak{g}(Y)$ folgt $Y = \lambda SXS^{-1}$ für geeignete $\lambda \in k^*$, $S \in \mathrm{GL}_2(k)$. Sei V der unterliegende Vektorraum von $\mathfrak{g}(X)$ und $\mathfrak{g}(Y)$, $V = kx \oplus \mathfrak{v} = ky \oplus \mathfrak{v}$ mit $\mathrm{ad}(x)|_{\mathfrak{v}} = X$ und $\mathrm{ad}(y)|_{\mathfrak{v}} = Y$. Sei nun $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{g}(X)$ nach $\mathfrak{g}(Y)$. Ist $X = 0$, so auch Y, andernfalls gilt $\ker(X) = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}(X))$ (das Zentrum von $\mathfrak{g}(X)$) und $\mathrm{im}(X) = \mathfrak{g}(X)'$ (die abgeleitete Liealgebra). Ist $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}(X)) = \mathfrak{g}(X)'$, so folgt, daß X konjugiert ist zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Das gleiche gilt dann für Y. Andernfalls ist $\mathfrak{v} = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}(X)) \oplus \mathfrak{g}(X)' = \mathrm{Z}(\mathfrak{g}(Y)) \oplus \mathfrak{g}(Y)'$ und daher $\psi(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}$. Sei $S : \mathfrak{v} \to \mathfrak{v}$ die Einschränkung von ψ auf $\mathfrak{v}$. Es ist $\psi(x) = \mu y + v$ für ein $\mu \in k^*, v \in \mathfrak{v}$. Also ist $\mathrm{ad}(\psi(x)) = \mu\,\mathrm{ad}(y)$. Es gilt für alle $w \in \mathfrak{v}$: $S(X(w)) = \psi([x,w]) = [\psi(x), \psi(w)] = \mu[y, \psi(w)] = \mu Y(S(w))$. Also ist $Y = \mu^{-1}SXS^{-1}$. □

Auch alle möglichen Kontraktionen von 3-dimensionalen Liealgebren über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind bekannt. Dies wurde zum Beispiel von E.Weimar-Woods in [We] ausgeführt (siehe auch [OV]).

Satz 1.16. *Das Hassediagramm von Lie_3 ohne den Nullpunkt ist in Figur 1 gegeben.*

- *Im Orbitabschluß von sl_2 liegen außer der abelschen Liealgebra, die euklidische Algebra $e_2 \cong \mathfrak{g}_{-1}$ und die Heisenbergalgebra h_3.*
- *Alle Liealgebren der Familie $\mathfrak{g}_s$ haben die Heisenbergalgebra als Degeneration. Für $s \neq 1$ ist dies die einzige nichtabelsche Degeneration von $\mathfrak{g}_s$. Im Abschluß von $\mathfrak{g}_1$ liegt außerdem noch die Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}}_1$.*
- *Sowohl h_3 als auch $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ haben keine nichtabelschen Degenerationen.*
- *Die Liealgebren der Familie $\mathfrak{g}_s$ haben jeweils 5-dimensionale Orbiten. Zusammen bilden ihre Orbitabschlüsse eine 6-dimensionale abgeschlossene Teilmenge*

[5] Die $2n+1$-dimensionale Heisenbergalgebra ist eine 1-dimensionale zentrale Erweiterung der abelschen Liealgebra W der Dimension $2n$. Der zugehörige 2-Cozyklus auf W mit Werten im Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{h}_3) = k \cdot c$ wird durch eine nicht ausgeartete symplektische Form β auf W gegeben: $[w, w'] = \beta(w, w')c$. Bezüglich einer geeigneten Basis $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, c)$ wird h_{2n+1} durch die Relationen $[p_i, q_j] = \delta_{ij}c$, $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = [c, p_i] = [c, q_i] = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben.

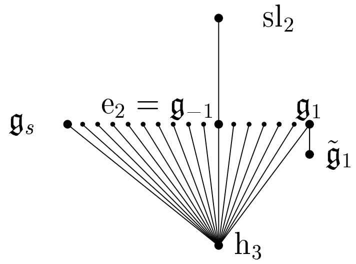


Abbildung 1. Hassediagramm von Lie_3 ohne den Nullpunkt (vgl. Satz 1.16).

von Lie_3*. Der Durchschnitt dieser Menge mit dem Orbitabschluß von* sl_2 *ist der Orbitabschluß von* $\mathfrak{g}_{-1}$*. Diese Liealgebra ist isomorph zur euklidische Liealgebra* e_2*.*

- *Der Orbit von* $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ *ist* 3*-dimensional. Die Dimension des Orbits von* h_3 *ist ebenfalls gleich* 3*.*

Beweisidee: Man kann dieses Ergebnis mittels einer Identifikation mit 3×3-Matrizen „zu Fuß“ nachrechnen, siehe z.B. [We]. Man faßt dazu die 9 Koordinaten c_{ij}^k mit $1 \leq i < j \leq 3$ und $k = 1, 2, 3$ in eine quadratische Matrix Z zusammen. Diese ist definiert durch $z_{1k} = c_{23}^k$, $z_{2k} = c_{31}^k$ und $z_{3k} = c_{12}^k$ für $k = 1, 2, 3$. Lie_3 bildet damit eine (durch die Jacobiidentität festgelegte) abgeschlossene GL_3-Untermenge des Raums $\mathrm{M}_3(k)$ unter der Operation $Z.U = \det(U)U^{-1}ZU^{-1t}$, für $Z \in \mathrm{M}_3(k)$, $U \in \mathrm{GL}_3(k)$. Die Bahnen dieser Operation entsprechen den Äquivalenzklassen von Bilinearformen auf k^3 unter Basiswechsel und skalaren Vielfachen. Wenn nämlich ein $S \in \mathrm{GL}_3(k)$ und $\lambda \in k^*$ existieren, so daß $Z' = \lambda SZS^t$, dann gilt $Z' = Z.U$ für $U = \det(S)\lambda S^{-1}$. (Wenn k alle Quadratwurzeln enthält, sind dies auch schon die Äquivalenzklassen bezüglich Basiswechsel, denn $\lambda SZS^t = S'ZS'^t$ mit $S' = \sqrt{\lambda}S$.) Das Gleichungssystem für die Jacobiidentität sieht folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} -z_{23} & z_{13} & (z_{21} - z_{12}) \\ -z_{22} & z_{21} & 0 \\ -z_{12} & z_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{31} \\ z_{32} \\ z_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_{12}z_{23} - z_{22}z_{13} \\ z_{11}z_{23} - z_{21}z_{13} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Die Dimensionen der Orbiten kann man nach der Formel $\dim(O(\mathfrak{g})) = \dim(\mathrm{GL}_3) - \dim(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})) = 9 - \dim(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ berechnen. Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{g}$ kann man zum Beispiel als den Stabilisator der zugehörigen Matrix Z berechnen. Lie_3 hat mindestens zwei irreduzible Komponenten. Eine davon wird durch den Raum der symmetrischen Matrizen gebildet. Die Jacobiidentität (15) ist für symmetrische Matrizen Z stets erfüllt. Dieser Raum hat die gleiche Dimension wie Lie_3 nämlich 6, und ist als linearer Unterraum irreduzibel. Tatsächlich ist sl_2 darin enthalten und da der Orbit von sl_2 die Dimension 6 hat, muß diese irreduzible Komponente der Orbitabschluß von sl_2 sein.

Im folgenden Abschnitt (Beispiel 1.36) werden wir sehen, daß die Degenerationen von sl_2 als einfache Inonü-Wigner-Kontraktionen beschreibbar sind.[6] Daß sl_2 keine weiteren Degenerationen hat, ergibt sich aus der Identifikation ihres Orbitabschlusses mit der Menge der symmetrischen 3×3-Matrizen. Die anderen irreduziblen Komponenten sind enthalten in der Menge $\{Z \mid \det(Z+Z^\dagger)=0\}$. Die Degenerationen innerhalb der Teilmenge der Liealgebren der Form $\mathfrak{g}(X)$ lassen sich nach Lemma 1.15 auf die entsprechenden Degenerationen der sie beschreibenden Matrizen $X \in \mathrm{M}_2(k)$ zurückführen. Sei $\mathfrak{a}_{s,t} := \mathfrak{g}\left(\begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & ts \end{pmatrix}\right)$. Dann ist $\mathfrak{a}_{s,t} \cong \mathfrak{g}_s$ für $t \neq 0$ und $\mathfrak{a}_{s,0} \cong \mathrm{h}_3$. Für $s \neq 1$ hat $\mathfrak{g}_s$ keine weitere nichttriviale Degeneration. (Schon aus Dimensionsgründen würde lediglich noch $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ in Frage kommen.) Für $s \neq 0$ gilt nämlich $\overline{O(X_s)} = V((\mathrm{tr}X)^2 - \frac{(1+s)^2}{s}\det X)$ (es bezeichne $V(f)$ die Nullstellenmenge von f) bzw. $\overline{O(X_0)} = V(\det X)$. h_3 und $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ haben schon aus Dimensionsgründen keine nichtabelschen Degenerationen. □

Bemerkung 1.17. Die Familie $(\mathfrak{g}_s)_{s\in k}$ kann als Deformationen von $\mathfrak{g}_0$ aufgefaßt werden. Dies ist ein typisches Beispiel für eine Deformation, die keine Degeneration ist.

Tatsächlich sind alle Isomorphieklassen von Liealgebren der Dimension kleiner gleich 6 bekannt und die irreduziblen Komponenten von Lie_n kann man für $n \leq 7$ beschreiben (siehe [OV]).

Definition 1.18. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{N}$ auf einem topologischen Raum X heißt *halbstetig nach oben*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{-1}(]-\infty, n[)$ ist offen in X. Sie heißt *halbstetig nach unten*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{-1}(]n, \infty[)$ ist offen in X.

Satz 1.19. *Ist Y eine Teilmenge eines topologischen Raums X, $y \in \partial Y$ und f eine nach oben (bzw. nach unten) halbstetige Funktion auf X, die auf Y konstant gleich n ist, dann gilt $f(y) \geq n$ (bzw. $f(y) \leq n$).*

Beweis: Sei f nach oben halbstetig. Wäre $f(y) < n$, dann wäre der Durchschnitt von Y mit $f^{-1}(]-\infty, f(y)[)$ leer, daher könnte $f^{-1}(]-\infty, f(y)[)$ keine Umgebung von y enthalten, denn jede Umgebung von y schneidet Y. Also wäre $f^{-1}(]-\infty, f(y)[)$ nicht offen. Widerspruch! Der Beweis für nach unten halbstetige Funktionen geht genauso. □

[6]Tatsächlich sind alle in $\mathrm{Lie}_3(k)$ auftretenden Degenerationen von dieser Art, wenn k algebraisch abgeschlossen ist. Für $k = \mathbb{R}$ gibt es eine Degeneration, die keine einfache Inonü-Wigner-Kontraktion ist.

Dies ist insbesondere auf halbstetige G-invariante Funktionen anwendbar. Es gilt dann: Ist μ_0 eine Degeneration von μ, dann ist für eine nach oben halbstetige G-invariante Funktion $f(\mu_0) \geq f(\mu)$ und für eine nach unten halbstetige G-invariante Funktion $f(\mu_0) \leq f(\mu)$.

Satz 1.20. *Folgende invarianten Größen sind nach unten halbstetig auf $\mathrm{Lie}_n(k)$:*

- *Der Rang der Killingform,*
- *für $i \in \mathbb{N}$ die Dimension des i-ten Gliedes der abgeleiteten Reihe, insbesondere die Dimension der abgeleiteten Liealgebra,*
- *die Dimension des i-ten Gliedes der absteigenden Zentralreihe.*

Folgende invarianten Größen sind nach oben halbstetig auf $\mathrm{Lie}_n(k)$:

- *Die Dimension des Zentrums,*
- *für Liealgebren über Körpern der Charakteristik 0 die Dimension des (auflösbaren) Radikals.*

Beweis: Die Verknüpfung einer nach oben (unten) halbstetigen Funktion mit einer stetigen Funktion ist wieder nach oben (unten) halbstetig. Auf $\mathrm{M}(l \times m, k)$ und damit auch auf $\mathrm{Bil}(n \times n, k)$ (Bilinearformen) und $\mathrm{Hom}(V, W)$ für endlichdimensionale Vektorräume V, W, ist der Rang eine nach unten halbstetige Funktion, denn es gilt $f^{-1}(]-\infty, n]) = \{X \in \mathrm{M}(l \times m, k) \mid \mathrm{rang}(X) < n+1\}$ ist der Durchschnitt über die Nullstellenmengen aller $n+1 \times n+1$-Unterdeterminanten und ist damit abgeschlossen bezüglich der Zariskitopologie. Entsprechend ist $\dim(\ker(X)) = m - \mathrm{rang}(X)$ eine nach oben halbstetige Funktion von X. Nun ist die Zuordnung $\mathrm{Lie}_n(k) \to \mathrm{Bil}(n \times n, k)$, die μ auf die Killingform abbildet, ein Morphismus, insbesondere Zariskistetig. Da der Rang auf $\mathrm{Bil}(n \times n, k)$ halbstetig nach unten ist, ist somit der Rang der Killingform eine nach unten halbstetige Funktion auf $\mathrm{Lie}_n(k)$.

Die Dimension der abgeleiteten Liealgebra ist gleich dem Rang der linearen Abbildung $\phi(\mu) : V \otimes_k V \to V$, die definiert ist durch $v \otimes w \mapsto \mu(v, w)$ und die Zuordnung $\mu \mapsto \phi(\mu)$ ist ein Morphismus. Analog ist für $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ die Dimension $\dim(\mathfrak{g}^{(i)})$ der i-ten abgeleiteten Algebra gleich dem Rang der Abbildung

$$\phi^{(i)}(\mu) : \underbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}_{2i \text{ mal}} \to V,$$

$$v_1 \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes w_i \mapsto \mu(\cdots \mu(\mu(v_1, w_1), \cdots), \mu(v_i, w_i)).$$

Analog ist die Dimension $\dim(\mathfrak{g}^i)$ gleich dem Rang von

$$\phi^i(\mu) : \underbrace{V \otimes_k V \otimes_k \cdots \otimes_k V}_{i+1 \text{ mal}} \to V,$$

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \mapsto \mu(v_1, \mu(v_2, \mu(\ldots, \mu(v_i, v_{i+1}) \ldots).$$

Das Zentrum von (V, μ) ist der Kern von $\mathrm{ad}_\mu : V \to \mathrm{Hom}(V, V)$. Auch die Zuordnung $\mu \mapsto \mathrm{ad}_\mu$ ist ein Morphismus, daher ist die Dimension des Zentrums nach oben halbstetig.

Für eine Liealgebra über einem Körper der Charakteristik 0 gilt: Das auflösbare Radikal $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ ist das orthogonale Komplement der abgeleiteten Liealgebra bezüglich der Killingform (siehe [Ja, Ch.3.Th.5.]). Sei κ' die Killingform der abgeleiteten Liealgebra von $\mathfrak{g}$. Dann gilt $\dim(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})) = \dim((\mathfrak{g}')^\perp) = n - \dim(\mathfrak{g}') + \dim(\mathfrak{g}' \cap (\mathfrak{g}')^\perp) = n - \mathrm{rang}(\kappa')$, denn $\dim(\mathfrak{g}' \cap (\mathfrak{g}')^\perp) = \dim(\ker(\kappa')) = \dim(\mathfrak{g}') - \mathrm{rang}(\kappa')$. Per Definition ist $\mathrm{rang}(\kappa') = \mathrm{rang}(\psi_{\kappa'})$ mit $\psi_{\kappa'} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}', \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}', k))$ gegeben durch $\psi_{\kappa'}(x) = \kappa'(x, .)$. Sei $\tilde{\mu} : V \otimes_k V \to \mathfrak{g}'$ gegeben durch $v \otimes w \mapsto \mu(v, w)$. Die Abbildung $\tilde{\mu}$ ist surjektiv. Daher ist $\tilde{\mu}^* : \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}', k) \to \mathrm{Hom}(V \otimes_k V, k)$ mit $\tilde{\mu}^*(\Phi) = \Phi \circ \tilde{\mu}$ injektiv. Aus beidem folgt, daß $\mathrm{rang}(\psi_{\kappa'}) = \mathrm{rang}(\tilde{\mu}^* \circ \psi_{\kappa'} \circ \tilde{\mu})$. Nun ist aber $\tilde{\mu}^* \circ \psi_{\kappa'} \circ \tilde{\mu} = \tilde{\mu}^* \circ \psi_\kappa \circ \tilde{\mu}$ und die Zuordnung $\mu \mapsto \tilde{\mu}^* \circ \psi_\kappa \circ \tilde{\mu}$ ist ein Morphismus von $\mathrm{Lie}_n(k)$ nach $\mathrm{Hom}(V \otimes_k V, \mathrm{Hom}(V \otimes_k V, k))$. Somit ist $\mathrm{rang}(\kappa')$ nach unten halbstetig auf $\mathrm{Lie}_n(k)$ und daher ist $\dim(\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}))$ nach oben halbstetig auf $\mathrm{Lie}_n(k)$.

□

Ein endlich erzeugter Erweiterungskörper K von k vom Transzendenzgrad 1, oder mit anderen Worten ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper von $k(t)$, sei, wie in Hartshorne [Ha, Ch.I.§6], als Funktionenkörper der Dimension 1 (über k) bezeichnet.

Der folgende auf Grunewald und O'Halloran [GH] zurückgehende Satz gibt einen Zusammenhang zwischen Degenerationen und Deformationen.

Satz 1.21. *Sei k algebraisch abgeschlossen. Die Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ ist genau dann eine Degeneration von $\mathfrak{g}$, wenn eine diskrete Bewertungs-k-Algebra A mit Restklassenkörper k, wobei $K = Quot(A)$ ein Funktionenkörper der Dimension 1 ist, und eine n-dimensionale Liealgebra $\mathfrak{a}$ über A existieren, so daß gilt*

$$\mathfrak{a} \otimes_A K \cong \mathfrak{g} \otimes_k K \tag{16}$$

und

$$\mathfrak{a} \otimes_A k = \mathfrak{g}_0. \tag{17}$$

Beweisidee: Sei μ_1 die Lieklammer von $\mathfrak{g}$ und μ die Lieklammer von $\mathfrak{a}$ und $\phi \in \mathrm{GL}(V_K)$ der Isomorphismus in (16). Dann kann man Gleichung (16) auch so formulieren:

$$(\mu_1)_K.\phi = (\mu)_K \quad \text{in } \mathrm{Lie}_n(K). \tag{18}$$

„⇒“: Sei $\mu_0 \in \overline{O(\mu_1)}$ gegeben. Es existiert eine Kurve μ in $\overline{O(\mu_1)}$, die μ_0 enthält. Sei $\xi_{\mu_1} : \mathrm{GL}_n(k) \to \overline{O(\mu_1)}$ der durch $\phi \mapsto \mu_1.\phi$ definierte Morphismus und Φ das Urbild von μ unter ξ_{μ_1}. Weiter sei $\overline{\xi}_{\mu_1} : \Phi \to \mu$ die Einschränkung von ξ_{μ_1} auf Φ. Es gilt nun, wenn wir Φ als Element von $\mathrm{GL}_n(k[\Phi])$ betrachten,

$$(\mu_1)_{k[\Phi]}.\Phi = (\mu)_{k[\Phi]} \quad \text{in } \mathrm{Lie}_n(k[\Phi]), \tag{19}$$

wobei $(\mu)_{k[\Phi]}$ durch Basiserweiterung bezüglich dem zu $\overline{\xi}_{\mu_1}$ dualen Morphismus $\overline{\xi}^\sharp_{\mu_1} : k[\mu] \to k[\Phi]$ gebildet wird. Es gilt also eine Gleichung analog zu (18). Die Dimension von Φ ist aber im allgemeinen größer als Eins. Sei $\mu' := \mu \cap O(\mu_1)$. Der Morphismus $\overline{\xi}'_{\mu_1} : \Phi \to \mu'$ ist surjektiv. Um einen eindimensionalen Ring zu erhalten, über dem (18) gilt, sucht man einen Schnitt $\phi : \mu' \to \Phi$ der Überlagerung $\overline{\xi}'_{\mu_1} : \Phi \to \mu'$. Dann gilt $(\mu_1)_{k[\phi]}.\phi = (\mu')_{k[\phi]}$ in $\mathrm{Lie}_n(k[\phi])$. (Dies folgt aus (19) und der Natürlichkeit der Transformation $\mathrm{Lie}_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{Lie}_n$ (siehe Anhang A).) Da μ' in μ dicht liegt, haben $k[\mu']$ und $k[\mu]$ den gleichen Quotientenkörper K und die Gleichungen (16) und (17) gelten über $A_1 = k[\mu]$. Um einen regulären Ring zu erhalten, geht man zum ganzen Abschluß $k[\nu]$ von $k[\mu]$ in K über. Indem man nun in einem Punkt ν_0 von ν, der über μ_0 liegt, lokalisiert, bekommt man einen regulären lokalen Ring wie im Satz. (Vergleiche Anhang B).

Die eigentliche Schwierigkeit liegt in der Konstruktion des Schnittes ϕ von $\overline{\xi}'_{\mu_1}$. Tatsächlich ist es nicht immer möglich, einen solchen Schnitt zu finden. Man kann sich aber behelfen und einen endlichen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K sowie einen Morphismus $\tilde{\phi} : k[\Phi] \to \tilde{K}$ finden, so daß $\tilde{\phi} \circ \overline{\xi}'^{\sharp}_{\mu_1}$ die Inklusion von $k[\mu']$ in $\tilde{K}$ ist. Siehe [GH, Lemma1]. Dann gilt: $(\mu_1)_{\tilde{K}}.\tilde{\phi} = (\mu')_{\tilde{K}}$ in $\mathrm{Lie}_n(\tilde{K})$. Man erhält den Ring A nun, indem man den ganzen Abschluß von $k[\mu]$ in $\tilde{K}$ bildet und wie oben lokalisiert.

Für die Beweisrichtung „$\Leftarrow$“ ist es wesentlich, daß zu $\mu \in \mathrm{Lie}_n(A)$ stets eine affine Kurve ν existiert, so daß der zu μ gehörige Morphismus $s^\sharp_\mu : k[\mathrm{Lie}_n] \to A$ über $k[\nu]$ faktorisiert.[7] Wir nehmen o.B.d.A. an, daß μ nicht aus $\mathrm{Lie}_n(k)$ ist, denn in dem Fall wäre $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}$. Das Bild von $s^\sharp_\mu$ in A ist dann eine endlich erzeugte Integritäts-k-Algebra A_1, die nicht nur aus k besteht. Es gilt daher $1 \leq \dim(A_1) = \mathrm{tr.deg}_k(\mathrm{Quot}(A_1)) \leq \mathrm{tr.deg}_k(K) = 1$ (siehe [Ha, Ch.I.The.1.8A]), A_1 hat also die Dimension 1, entspricht also einer affinen Kurve. Sei A'_1 der ganze Abschluß von A_1 in $\mathrm{Quot}(A_1)$ und $A_2 =: k[\nu]$ der ganze Abschluß von A'_1 in K (Tatsächlich ist A_2 gleich dem algebraischen Abschluß von A_1 in K, wegen der Transitivität der algebraischen Abhängigkeit (siehe [ZS, Vol.I.Ch.5.The.2.])). Da K ein endlicher Erweiterungskörper von $\mathrm{Quot}(A'_1)$ ist, ist A_2 nach [Ha, Ch.1.The.6.3.A.] wieder ein Dedekindring. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und $\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{m} \cap A_2$. Es ist $\mathfrak{m}_0 \neq (0)$, da sonst $\mathrm{Quot}(A_2) \subseteq k$ wäre. Daher entspricht $\mathfrak{m}_0$ einem abgeschlossenen Punkt ν_0 von ν. Dann ist A die Lokalisierung von A_2 an der Stelle ν_0, denn die Lokalisierung von A_2 nach $\mathfrak{m}_0$ ist ein diskreter Bewertungsring, der von A dominiert wird und ist damit nach [Ha, Ch.I.The.6.1.A.] gleich A. Für alle bis auf endlich viele $t \in \mathrm{Spec}_{\max}(A_2)$ ist ϕ_t definiert und $\det(\phi_t) \neq 0$ (denn $(\det(\phi))^{-1} \in K$ ist für alle bis auf endlich viele t definiert) (siehe [Ha, Ch.I Lemma 6.5]). Sei $s^\sharp_\nu : k[\mathrm{Lie}_n] \to k[\nu]$ gleich $s^\sharp_\mu$ mit A_2 als Bildmenge. Nach obigem ist $s_\nu(t) = \mu_1.\phi_t \in O(\mu_1)$ für eine dichte offene Teilmenge von ν. Daher ist $\mathrm{im}(s_\nu) \subset \overline{O(\mu_1)}$, insbesondere ist $\mu_0 = s_\nu(\nu_0) \in \overline{O(\mu_1)}$. $\square$

Lemma 1.22. *Seien A und A' diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k und seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ die maximalen Ideale von A bzw. A'. Weiter sei $i : A \to A'$ eine*

[7] An dieser Stelle wird gebraucht, daß K ein Funktionenkörper der Dimension 1 über k ist.

Einbettung von k-Algebren. Dann gilt $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{m}'$, wenn A als Unteralgebra von A' betrachtet wird, und ist $\mathfrak{a}$ eine A-Liealgebra, dann gilt:

$$\mathfrak{a} \otimes_A k = (\mathfrak{a} \otimes_A A') \otimes_{A'} k. \tag{20}$$

Beweis: Seien $\pi : A \to A/\mathfrak{m}$ und $\pi' : A' \to A'/\mathfrak{m}'$ die jeweiligen Restklassenabbildungen. Da k in kanonischer Weise in A und A' eingebettet ist, indem $\lambda \in k$ mit $\lambda\, 1_A$ bzw. $\lambda\, 1_{A'}$ identifiziert wird und da i ein Homomorphismus von k-Algebren ist, induziert dieser die Identität auf k. Da $k \setminus \{0\}$ in beiden Algebren genau die Menge der Einheiten bildet, folgt $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{m}'$. Die zweite Aussage sieht man leicht auf der Ebene der Strukturkonstanten, denn es gilt offenbar $\pi = \pi' \circ i$, nach kanonischer Identifikation von $A/\mathfrak{m}$ bzw. $A'/\mathfrak{m}'$ mit k. □

Im folgenden sei (unter Mißbrauch der Sprache) mit dem Begriff Degeneration von $\mathfrak{g}$ (über A) stets eine A-Liealgebra gemeint, die die Bedingung (16) von Satz 1.21 über einem endlichen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von $K = \mathrm{Quot}(A)$ erfüllt:

Definition 1.23. Sei $\mathfrak{g}$ eine k-Liealgebra und A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k. Dann ist eine *Degeneration von $\mathfrak{g}$ über A* eine A-Liealgebra $\mathfrak{a}$, so daß eine endliche Körpererweiterung $\tilde{K}/K$ von $K = \mathrm{Quot}(A)$ existiert, so daß

$$\mathfrak{a} \otimes_A \tilde{K} \cong \mathfrak{g} \otimes_k \tilde{K}.$$

Die k-Liealgebra

$$\mathfrak{a} \otimes_A k =: \mathfrak{g}_0$$

heißt die *Limesalgebra* der Degeneration. Der Zusatz „über A“ wird weggelassen, wenn aus dem Kontext hervorgeht, um welchen Ring es sich handelt, oder wenn dieser nicht genau spezifiziert werden soll. Unter einer *formalen Degeneration* sei eine Degeneration über dem Ring der formalen Potenzreihen verstanden. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und $\bar{A}$ die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung von A (siehe Definition B.16). Nach Korollar B.18 ist diese isomorph zu $k[|t|]$. Die Degeneration $\mathfrak{a} \otimes_A \bar{A}$ bezeichnen wir als *die zu $\mathfrak{a}$ assoziierte formale Degeneration*. Nach Lemma 1.22 hat diese die gleiche Limesalgebra wie $\mathfrak{a}$. Zwei Degenerationen von $\mathfrak{g}$ über A heißen *isomorph*, wenn sie als A-Liealgebren isomorph sind. Wir bezeichnen zwei Degenerationen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{g}$ als *äquivalent*, wenn ihre Limesalgebren isomorph sind. Dabei können $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ auch über zwei verschiedenen diskreten Bewertungs-k-Algebren A, A' mit Restklassenkörper k definiert sein. Weiterhin bezeichnen wir zwei Degenerationen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ wie oben als *stark äquivalent*, wenn nach Identifikation von $\bar{A}$ und $\bar{A}'$ mit $k[|t|]$ durch geeignete Isomorphismen folgendes gilt:

1. Zu A und A' existieren m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$ und formale Degenerationen $\mathfrak{a}_1$ über $k[|t^{m_1}|]$ und $\mathfrak{a}_2$ über $k[|t^{m_2}|]$ von $\mathfrak{g}$, so daß die zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gehörigen formalen Degenerationen aus diesen durch die Basiswechsel $k[|t^{m_i}|] \hookrightarrow k[|t|]$ für $i = 1, 2$ hervorgehen.
2. Nach Identifikation von $k[|t^{m_i}|]$ mit $k[|t|]$ durch $t^{m_i} \mapsto t$ für $i = 1, 2$ sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ isomorph.

Bemerkung 1.24. Der Vorteil dieser Definition, bei der endliche Erweiterungen zugelassen sind, ist, daß sie es uns erlaubt, auch A-Formen von „getwisteten Versionen" von über k definierten K-Liealgebren als Degenerationen zu bezeichnen (Vergleiche Kapitel 2). Ist A ein Dedekindring, so ist auch $\tilde{A}$ ein Dedekindring (siehe [ZS, vol.1,Th.19]). Sei $\tilde{A}_1$ der ganze Abschluß von A in $\tilde{K}$. Dann existiert mindestens eine maximales Ideal $\mathfrak{m}_1$ von $\tilde{A}_1$, so daß $\mathfrak{m} = A \cap \tilde{A}_1$ („going up"-Theorem). Sei $\tilde{A}$ die Lokalisierung von $\mathfrak{m}_1$ nach einem solchen Ideal $\mathfrak{m}_1$. Nach Lemma 1.22 hat die $\tilde{A}$-Algebra $\tilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \otimes_A \tilde{A}$ die gleiche Limesalgebra:

$$\tilde{\mathfrak{a}} \otimes_{\tilde{A}} k \cong \mathfrak{a} \otimes_A k \cong \mathfrak{g}_0.$$

Daher ergibt sich aus Satz 1.21, daß die Limesalgebra dann auch tatsächlich eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ im Sinne des Orbitabschlusses ist. Auch für formale Degenerationen ist obige Definition sinnvoll, denn jede algebraische Erweiterung von $K = k((t))$, für einen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k, ist in einer Erweiterung der Form $k((t^{\frac{1}{n}}))$ enthalten und der ganze Abschluß von $k[|t|]$ in $k((t^{\frac{1}{n}}))$ ist $k[|t^{\frac{1}{n}}|]$ (siehe Satz 2.7). Daher ist o.B.d.A. auch $\tilde{\mathfrak{a}}$ eine formale Degeneration, wenn $\mathfrak{a}$ eine formale Degeneration ist.

Bemerkung 1.25. Die Bedingung für starke Äquivalenz läßt sich für die Strukturkonstanten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ bezüglich geeigneter Basen ausdrücken als $c_{ij}^k(t) = c_{ij}'^k(t^{\frac{m_1}{m_2}})$. Offensichtlich impliziert starke Äquivalenz auch Äquivalenz.

Bemerkung 1.26. Ist $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_0$ isomorph zur Limesalgebra von $\mathfrak{a}$ vermöge $\psi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}_k$, dann ist $(\mathfrak{a}, \psi)$ eine Deformation von $\mathfrak{g}_0$ im Sinne von Definition 1.1. Sind nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ isomorphe Degenerationen von $\mathfrak{g}_0$, dann kann man die Isomorphismen $\psi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}_k$ und $\psi' : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{a}'_k$ so wählen, daß auch die zugehörigen Deformationen $(\mathfrak{a}, \psi)$ und $(\mathfrak{a}', \psi')$ isomorph sind.

1.3. **Kontraktionen.** Klassisch werden Kontraktionen folgendermaßen beschrieben: Sei ϕ_t eine Familie von Endomorphismen, die für $t \neq 0$ regulär ist, für $t = 0$ aber singulär wird. Sei $\mu_t = \mu_1.\phi_t$. Falls $\mu_0 = \lim_{t \to 0} \mu_t$ existiert, so heißt $\mathfrak{g}_0 = (V, \mu_0)$ die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ.

Wir verwenden eine etwas abstraktere Definition.

Definition 1.27. Sei $\mathfrak{g} = (V, \mu_1)$ gegeben. Sei A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k und Quotientenkörper K. Sei $\phi \in \mathrm{End}(V_A) \cap \mathrm{GL}(V_K)$. Falls nun $\mu := (\mu_1)_K.\phi$ in $\mathrm{Lie}_n(A)$ liegt, und somit eine Liealgebra $\mathfrak{a} = (V_A, \mu)$ über A definiert, so wird diese als *Kontraktion* von $\mathfrak{g}$ mit ϕ bezeichnet und $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{a} \otimes_A k$ wird als *Limesalgebra* der Kontraktion bezeichnet. Jede Kontraktion ist auch auch eine Degeneration, denn $\mathfrak{a} \otimes_A K$ ist vermöge ϕ zu $\mathfrak{g} \otimes_k K$ isomorph (vgl. Abschnitt 1.2, insbesondere (18)). Wir bezeichnen zwei Kontraktionen als isomorph, bzw. stark äquivalent, bzw. äquivalent, wenn sie als Degenerationen isomorph, bzw. stark äquivalent, bzw. äquivalent sind.

Satz 1.28. *Ein notwendiges Kriterium für die Existenz der Kontraktion von* $\mathfrak{g}$ *mit* ϕ *ist, daß* $\phi_0(V)$ *eine Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$ *bildet. Im Fall der Existenz ist die Limesalgebra eine Erweiterung von* $\mathfrak{u} := im\,\phi_0$ *mit einem nilpotenten Ideal* $\mathfrak{v} := ker\,\phi_0$. *Wir haben die exakte Sequenz*

$$0 \to \mathfrak{v} \to \mathfrak{g}_0 \stackrel{\phi_0}{\to} \mathfrak{u} \to 0. \tag{21}$$

Beweis: Wenn die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ existiert, dann liefert $\phi_0 = \pi_{A,k}(\phi) \in \mathrm{End}(V_k)$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{g}_0$ nach $\mathfrak{g}$, denn die Gleichung

$$\phi(\mu(.,.)) = \mu_1(\phi(.), \phi(.)) \tag{22}$$

überträgt sich auf alle $t \in \mathrm{Spec}(A)$, auch wo $\det(\phi)$ verschwindet. Das Bild des Homomorphismus ϕ_0 ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und der Kern ein Ideal von $\mathfrak{g}_0$. Es bleibt daher nur zu zeigen, daß $\mathfrak{v} := \ker\phi_0$ als Unteralgebra von $\mathfrak{g}_0$ nilpotent ist. Nach dem Satz von Engel ist eine Liealgebra, deren Elemente ad-nilpotent sind, selber nilpotent. Sei ad_t die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}_t$. Für $x \in \mathfrak{g}$ gilt $\mathrm{ad}_t(x) = \phi_t^{-1}\mathrm{ad}(\phi_t(x))\phi_t$, denn für alle $y \in \mathfrak{g}$ gilt $(\mathrm{ad}_t(x))(y) = [x,y]_t = \phi_t^{-1}([\phi_t(x), \phi_t(y)]) = \phi_t^{-1}(\mathrm{ad}(\phi_t(x))(\phi_t(y)))$. Für $t \neq 0$ ist also $\mathrm{ad}_t(x)$ ähnlich zu $\mathrm{ad}(\phi_t(x))$ in $\mathrm{End}(V)$. Insbesondere stimmen die charakteristischen Polynome überein. Da das charakteristische Polynom als Abbildung von $M_n(k)$ in den Polynomring $k[X]$ stetig ist, folgt daraus, daß $\chi(\mathrm{ad}_0(x)) = \chi(\mathrm{ad}(\phi_0(x))) = \chi(0) \equiv X^n$ für $x \in \ker\phi_0$. Somit ist $\mathrm{ad}_0(x)$ nilpotent für all $x \in \mathfrak{v}$. □

Definition 1.29. Die Unteralgebra $\phi_0(\mathfrak{g})$ wird als der *Nullteil* der Kontraktion bezeichnet.

Die Nullteile von Kontraktionen sind offenbar durch die zugehörige Degeneration nicht eindeutig bestimmt. Zum Beispiel ist jede Degeneration einer abelschen Liealgebra abelsch. Diese triviale Degeneration kann aber als Kontraktion bezüglich verschiedener Transformationen ϕ mit unterschiedlichen Nullteilen beschrieben werden. Es gilt jedoch:

Satz 1.30. *Ist* $\mathfrak{g}_0$ *die Limesalgebra einer Kontraktion von* $\mathfrak{g}$ *mit Nullteil* $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{u}_1$ *eine halbeinfache Unteralgebra von* $\mathfrak{g}_0$, *dann enthält* $\mathfrak{u}$ *eine zu* $\mathfrak{u}_1$ *isomorphe Unteralgebra.*

Beweis: Sei die Kontraktion durch $\phi \in \mathrm{Aut}(V_A)$ definiert. Nach Satz 1.28 ist $\ker(\phi_0)$ nilpotent, also im Radikal $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}_0)$ enthalten (sogar im nilpotenten Radikal $\mathrm{Rad}_n(\mathfrak{g}_0)$). Daher faktorisiert die kanonische Projektion $\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}_0) =: \mathfrak{q}_1$ über $\pi : \mathfrak{u} \to \mathfrak{q}_1$. Da eine halbeinfache Unteralgebra von $\mathfrak{g}_0$ in einen Levifaktor eingebettet werden kann (siehe [Ja, III.§9.Cor.1]), ist $\mathfrak{u}_1$ in $\mathfrak{q}_1$ einbettbar. Der Levifaktor $\mathfrak{u}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{u})$ von $\mathfrak{u}$ ist isomorph zu $\mathfrak{q}_1/\pi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{u}))$. Da $\pi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{u}))$ ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{q}_1$ ist, ist $\mathfrak{u}_1 \cap \pi(\mathrm{Rad}(\mathfrak{u})) = (0)$. Daher ist $\mathfrak{u}_1$ in einen Levifaktor von $\mathfrak{u}$ und damit in $\mathfrak{u}$ einbettbar. □

Bei einer Kontraktion hat man also mehr strukturelle Informationen als bei einer beliebigen Degeneration. Allgemein kann man Degenerationen als verallgemeinerte Kontraktionen auffassen:

Definition 1.31. Sei $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ und $\phi : \mathfrak{a} \otimes_A K \to \mathfrak{g} \otimes_k K$ ein Isomorphismus. Dann bezeichnen wir das Paar $(\mathfrak{a}, \phi)$ als *verallgemeinerte* Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ. Eine verallgemeinerte Kontraktion entspricht also einer Degeneration zusammen mit einer Einbettung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}_K$, d.h. einer A-Form im Sinne von Definition 1.2.

Ausgehend von $\mathfrak{g}$ und einem $\phi \in \mathrm{GL}(V_K)$, stellt sich die Frage, ob die verallgemeinerte Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ existiert. Es gilt:

Satz 1.32. *Die verallgemeinerte Kontraktion $\mathfrak{a} = (V_A, (\mu_1)_K.\phi)$ von $\mathfrak{g}$ mit ϕ existiert genau dann, wenn der A-Untermodul $\phi(V_A)$ in $\mathfrak{g}_K$ eine A-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_K$ bildet. Dann ist $\mathfrak{a}$ als A-Liealgebra zu dieser Unteralgebra isomorph. Die Degeneration ist genau dann isomorph zu einer Kontraktion, wenn ein Automorphismus ψ von $\mathfrak{g}_K$ existiert, der $\phi(V_A)$ in die „positive“ Unteralgebra $\mathfrak{g}_A$ von $\mathfrak{g}_K$ abbildet, d.h. $\psi \in Aut(\mathfrak{g}_K)$ mit $\psi \circ \phi \in Aut(\mathfrak{g}_K) \cap End(\mathfrak{g}_A)$.*

Beweis: Die Abbildung $\phi\ |_{V_A}\colon V_A \to \phi(V_A)$ ist A-linear und bijektiv, also ein Isomorphismus von A-Moduln. Seien $x, y \in V_A$. Dann gilt per Definition:

$$\phi((\mu.\phi)(x,y)) = \mu(\phi(x), \phi(y)). \tag{23}$$

Daher ist $(\mu.\phi)(V_A, V_A) \subset V_A$ genau dann, wenn $\mu(\phi(V_A), \phi(V_A)) \subset \phi(V_A)$, also ist $(V_A, \mu.\phi)$ genau dann eine wohldefinierte A-Liealgebra, wenn $\phi(V_A)$ mit der Lieklammer $\mu\ |_{\phi(V_A)\times\phi(V_A)}$ eine A-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_K$ ist, und falls dies der Fall ist, ist ϕ nach (23) ein Isomorphismus. □

Die Frage, wann eine Degeneration eine Kontraktion ist, das heißt also nach obigem Satz, wann der Isomorphismus von Satz 1.21 aus $\mathrm{End}(V_A)$ gewählt werden kann, ist für Liealgebren ein offenes Problem. Wir werden jedoch in Abschnitt 3.2 zeigen, daß jede Degeneration einer algebraischen Gruppe eine Kontraktion ist.

Um mögliche Degenerationen zu finden, muß man nicht beliebige $\phi \in \mathrm{GL}(V_K)$ in Betracht ziehen, sondern man kann sich, wie im folgenden gezeigt wird, auf eine Normalform beschränken.

Lemma 1.33. *Ist $\mu \in Lie(V)$ und $\phi \in GL(V_K)$, dann ist $\mu.\phi \in Lie(V_A)$ genau dann, wenn für alle $\psi \in GL(V_A)$ gilt $\mu.\phi\psi \in Lie(V_A)$ und in diesem Fall gilt $(\mu.\phi\psi)_0 = (\mu.\phi)_0.(\psi)_0$, d.h. die kontrahierten Liealgebren sind isomorph.*

Beweis: In Koordinaten betrachtet ist dies offensichtlich. □

Satz 1.34. *Sei A ein diskreter Bewertungsring mit uniformisierendem Element t. In jeder Nebenklasse von $GL_n(K)$ bezüglich $GL_n(A)$ existiert genau ein Element der*

Gestalt:

$$
(24)\qquad \begin{pmatrix}
t^{k_1} & t^{k_1-d_{12}}a_{12} & \dots & \dots & t^{k_1-d_{1n}}a_{1n} \\
0 & t^{k_2} & t^{k_2-d_{23}}a_{23} & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & t^{k_{n-1}} & t^{k_{n-1}-d_{n-1,n}}a_{n-1,n} \\
0 & \dots & \dots & 0 & t^{k_n}
\end{pmatrix}
$$

mit $k_i, d_{ij} \in \mathbb{Z}$, $d_{ij} > 0$ *für alle* i, j, $a_{ij} \in A^* \cup \{0\}$.

Beweis: Sei v die Bewertungsfunktion von K (siehe Kapitel A). Zunächst kann jede Matrix U in $\mathrm{GL}_n(K)$ durch elementare Spaltenumformungen über A in obere Dreiecksform gebracht werden. (Permutiere zuerst die Spalten, so daß $v(u_{n,i}) \geq v(u_{nn})$. Dann ziehe geeignete Vielfache der n-ten Spalte von den anderen ab, so daß $u_{n,j}$ für $j < n$ zu Null wird. usw.). Ist U eine obere Dreiecksmatrix mit $u_{ii} = t^{k_i}x_i$ mit $x_i \in A^*$, so ist $U\mathrm{Diag}[x_1^{-1}, \dots, x_1^{-1}]$ eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalkomponenten t^{k_i}. Ist nun $u_{ij} \neq 0$ und $v(u_{ij}) \geq k_i$ für ein $j > i$, dann ist $u_{ij}t^{-k_i} \in A$ und man kann das $u_{ij}t^{-k_i}$-fache der i-ten Spalte von der j-ten abziehen und u_{ij} wird zu Null. Geht man von unten nach oben vor, so erreicht man die beschriebene Gestalt.[8].

Diese Normalform ist eindeutig bestimmt: Seien $U = \mathrm{Diag}[t^{k_1}, \dots, t^{k_n}](E_n + t^{-1}N)$, $U' = \mathrm{Diag}[t^{k'_1}, \dots, t^{k'_n}](E_n + t^{-1}N')$ wobei $k_i, k'_i \in \mathbb{Z}$ und N, N' strikte obere Dreiecksmatrizen aus $\mathrm{GL}_n(A^{-1})$ seien. Angenommen $U = U'X$ mit $X \in \mathrm{GL}_n(A)$. Dann ist $X = U'^{-1}U = (E_n + t^{-1}N')^{-1}\mathrm{Diag}[t^{k_1-k'_1}, \dots, t^{k_n-k'_n}](E_n + t^{-1}N)$. Dabei ist nach der Formel für die geometrische Reihe und da N' nilpotent ist $(E_n + t^{-1}N')^{-1} = \sum_{k=0}^{n}(-t^{-1}N')^k$ wieder von der Form $E_n + t^{-1}N''$ mit N'' strikte obere Dreiecksmatrix aus $\mathrm{GL}_n(A^{-1})$. Die Matrizen dieser Form bilden eine Untergruppe H in $\mathrm{GL}_n(A^{-1})$ (vergleiche auch das Kapitel über die Parahoriuntergruppen). Die Diagonalelemente von X sind daher $t^{k_1-k'_1}, \dots, t^{k_n-k'_n}$, sie müssen in A liegen, also $k_i \geq k'_i$ für $i = 1, \dots, n$. Da $X \in \mathrm{GL}_n(A)$ ist auch $X^{-1} \in Gl_n(A)$, also folgt $k_i = k'_i$ für $i = 1, \dots, n$. Somit ist $X = (E_n + t^{-1}N'')(E_n + t^{-1}N)$ wieder aus obiger Gruppe H und es gilt offensichtlich $H \cap \mathrm{GL}_n(A) = \{E_n\}$. Also ist $X = E_n$ und $U = U'$. □

Auf eine Transformation ϕ in Normalform kann man nun noch von links die Automorphismen von $\mathfrak{g}$ anwenden, ohne daß sich an den zugehörigen Degeneration, oder der Frage ihrer Existenz, etwas ändert.

Durch Einsetzen der Normalform (24) in die Transformationsformel (12) wird diese zwar vereinfacht, im allgemeinen aber nicht soweit, daß man das entstehende Gleichungssystem für die k_i, d_{ij} und a_{ij} lösen kann. Dies geht höchstens für sehr einfache Liealgebren, bei denen fast alle Strukturkonstanten verschwinden.

Es liegt nun nahe, Degenerationen bei denen die Normalform eine spezielle, besonders einfache Gestalt annimmt zu untersuchen. So werden wir in Abschnitt 1.4

[8]Man kann eine obere Dreiecksgestalt auch aus der Iwasawazerlegung von $\mathrm{GL}_n(K)$ mit maximal kompakter Untergruppe $\mathrm{GL}_n(A)$ ableiten (siehe [Ga, Ch.17.6])

die Degenerationen, bei denen die Normalform Diagonalgestalt hat, untersuchen. Ein anderer Spezialfall ist der im folgenden Abschnitt betrachtete Fall der linearen Kontraktionen.[9]

1.3.1. *Der lineare Fall.* In Satz 1.28 hatten wir gesehen, daß eine notwendige Bedingung für die Existenz der Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ ist, daß $\phi_0(\mathfrak{g})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ bildet. Der folgende Satz zeigt, daß zu jeder Unteralgebra $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{g}$ eine Kontraktion mit $\phi_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{u}$ existiert, so daß die exakte Sequenz (21) spaltet und $\mathfrak{v}$ abelsch ist. Dies sind die einfachsten Kontraktionen, die Inonü-Wigner-Kontraktionen.

Satz 1.35 (Inonü,Wigner [IW]). *Sei $\mathfrak{u}$ ein Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{v}$ ein Vektorraumkomplement von $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{g}$ und $p_\mathfrak{u}$ und $p_\mathfrak{v}$ die zugehörigen Projektoren. Dann gilt: Die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit $\phi_t = p_\mathfrak{u} + tp_\mathfrak{v}$ existiert und die Limesalgebra $\mathfrak{g}_0$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathfrak{v} \rtimes \mathfrak{u}$. Darin ist $\mathfrak{v}$ als Unteralgebra abelsch und als $\mathfrak{u}$-Modul isomorph zum Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{g}$ als $\mathfrak{u}$-Modul unter der adjungierten Darstellung.*

Beweis: Es ist $\phi_t^{-1} = p_\mathfrak{u} + t^{-1}p_\mathfrak{v}$. Sei nun $x = u + v$, $y = u' + v'$ mit $u, u' \in \mathfrak{u}$ und $v, v' \in \mathfrak{v}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (25) \qquad [x,y]_t &= p_\mathfrak{u}([u+tv, u'+tv']) + t^{-1}p_\mathfrak{v}([u+tv, u'+tv']) \\ (26) \qquad &= [u,u'] + p_\mathfrak{v}([u,v'] - [u',v]) + O(t), \end{aligned}$$

wobei die Bezeichnung $O(t)$ für beliebige Terme steht, die Vielfache von t sind und somit für $t = 0$ verschwinden. Daran kann man sofort $[x,y]_0 = [u,u'] + p_\mathfrak{v}([u,v'] - [u',v])$ ablesen, woraus die Behauptung folgt. □

Beispiel 1.36. Für $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ kann man alle Inonü-Wigner-Kontraktionen bestimmen. Man kennt nämlich bis auf Konjugation durch Automorphismen alle Unteralgebren von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$. Es gilt: Jedes Element von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ ist entweder nilpotent oder halbeinfach, alle nilpotenten Elemente in $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ sind konjugiert und je zwei von Null verschiedene halbeinfache Elemente sind bis auf einen skalaren Faktor konjugiert (siehe [Ko, 2.3]). Sei (h,e,f) mit $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$ und $[h,f] = -2f$ eine Chevalleybasis von sl_2. Dann ist also jede 1-dimensionale Unteralgebra von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu $\mathbb{C}e$ oder zu $\mathbb{C}h$. Da jede 2-dimensionale Unteralgebra eine 1-dimensionale enthält, kann man sich leicht überlegen, daß jede 2-dimensionale Unteralgebra von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu $\mathbb{C}e + \mathbb{C}h$ ist. Man rechnet leicht nach, daß die Inonü-Wigner-Kontraktionen bezüglich $\mathbb{C}h$ und $\mathbb{C}e + \mathbb{C}h$ stark äquivalent sind, also insbesondere dieselbe Limesalgebra, nämlich die euklidische Algebra e_2, haben.

[9] Hier gilt in Normalform: $k_i \in \{0,1\}$ für alle i, $a_{ij} = 0$, falls $k_i = 0$ und $d_{ij} = 1$, falls $k_i = 1$ und $a_{ij} \neq 0$. Man hat also gewisse Zeilen, die nur eine 1 auf der Diagonalen und sonst lauter Nullen enthalten, und andere Zeilen, die t auf der Diagonalen und Koeffizienten, die entweder gleich Null, oder nicht durch t teilbar sind in den Komponenten rechts der Diagonalen enthalten. Achtung: Man kann *nicht* o.B.d.A. alle Einsen nach vorne sortieren!

Die Kontraktion bezüglich $\mathbb{C}e$ ergibt als Limesalgebra die Heisenbergalgebra h_3. Alle Degenerationen von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ im Sinne des Orbitabschlusses lassen sich also durch Inonü-Wigner-Kontraktionen erreichen.

Beispiel 1.37. In $\mathrm{so}_3(\mathbb{R})$ ist jedes von Null verschiedene Element bis auf einen skalaren Faktor konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Man überlegt sich leicht, daß keine 2-dimensionale Unteralgebra von $\mathrm{so}_3(\mathbb{R})$ existiert. Die Kontraktion von $\mathrm{so}_3(\mathbb{R})$ mit

$$\phi_t\left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a & tb \\ -a & 0 & tc \\ -tc & -tb & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Inonü-Wigner-Kontraktion mit $\mathfrak{u} \cong \mathrm{so}_2$, wobei $\mathfrak{v}$ als $\mathfrak{u}$-Modul isomorph zur natürlichen Darstellung von so_2 auf $\mathbb{R}^2$ ist. Die Limesalgebra ist die euklidische Algebra $\mathrm{e}_2(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{g}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. (Ihre Komplexifizierung ergibt die Kontraktion aus Beispiel 1.36.) Die Degeneration $\mathrm{h}_3(\mathbb{R})$ von $\mathrm{so}_3(\mathbb{R})$ kann durch zwei Inonü-Wigner-Kontraktionen erreicht werden. Man überlegt sich nämlich leicht, daß $\mathrm{e}_2(\mathbb{R})$ durch eine Inonü-Wigner-Kontraktion in $\mathrm{h}_3(\mathbb{R})$ übergeht. Man kann sich auch überlegen (siehe [We]), daß die Degeneration $\mathrm{h}_3(\mathbb{R})$ von $\mathrm{so}_3(\mathbb{R})$ auch durch keine Saletankontraktion (siehe nächster Abschnitt) erreichbar ist.

Die zu Inonü-Wigner-Kontraktionen gehörigen A-Liealgebren kann man immer leicht angeben. Für obige Kontraktion ist die zugehörige $\mathbb{R}[t]$-Liealgebra beispielsweise isomorph zu der von der Menge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & a(t) & t\,b(t) \\ -a(t) & 0 & t\,c(t) \\ -t\,b(t) & -t\,c(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a(t), b(t), c(t) \in \mathbb{R}[t] \tag{28}$$

gebildeten Unteralgebra von $\mathrm{gl}_3(\mathbb{R}[t])$.

Beispiel 1.38. Beispiel 1.37 läßt sich auf beliebige Dimensionen n verallgemeinern. Dabei ist $\mathfrak{u}$ die zu so_{n-1} isomorphe Unteralgebra

$$\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{so}_{n-1} \right\} \tag{29}$$

von so_n. Es ist bekannt, daß hier $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ ein infinitesimaler symmetrischer Raum ist und daß dieser äquivalent zur natürlichen Darstellung von so_{n-1} ist. Die Limesalgebra dieser Inonü-Wigner-Kontraktion ist somit die euklidische Liealgebra e_{n-1}.

Wenn man die Äquivalenzklasse von $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ als $\mathfrak{u}$-Modul nicht kennt, kann man die Kontraktion auch leicht „zu Fuß" berechnen:

$$\mathrm{so}_n = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{so}_{n-1} \wedge v \in k^{n-1} \right\}, \tag{30}$$

$$\phi_t \left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A & t\,v \\ -t\,v^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

die Lieklammer auf so_n ist folgende:

$$\mu \left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & v' \\ -v'^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} AA' - A'A + (v'v^t - vv'^\dagger) & Av' - A'v \\ -(Av' - A'v)^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Für die parameterabhängige Lieklammer folgt:

$$\mu_t \left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & v' \\ -v'^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} AA' - A'A + t^2(v'v^t - vv'^\dagger) & Av' - A'v \\ -(Av' - A'v)^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Es ist dann offensichtlich, daß die Limesalgebra isomorph zu $\mathrm{e}(n-1)$ ist.

Bemerkung 1.39. Das Beispiel funktioniert analog für

$$\mathrm{so}_{p,q} = \mathrm{so}(J) = \left\{ X \in gl(n, \mathbb{R}) \mid X^\dagger J = -JX \right\} \tag{34}$$

mit $J = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$. Als Limesalgebra erhält man $\mathrm{e}_{p,q-1} = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes \mathrm{so}_{p,q-1}$.

Beispiel 1.40. Das bekannteste Beispiel einer Kontraktion in der Physik ist die Kontraktion der inhomogenen Lorentzgruppe in die Galileigruppe für den Übergang zur unendlichen Lichtgeschwindigkeit. Die zugehörige Kontraktion der homogenen Lorenz-Liealgebra $\mathrm{so}_{3,1}$ in die Liealgebra der homogenen Galileitransformationen, welche isomorph ist zu e_3, der Liealgebra der euklidischen Bewegungen, läßt sich als Spezialfall des obigen Beispiels betrachten, wenn man $t := \frac{1}{c}$ setzt. Die definierende Bilinearform des Minkowskiraums wird bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^4$ beschrieben durch die Matrix

$$J(c) = \mathrm{Diag}[1, 1, 1, -c^2].$$

Die zu $J(c)$ gehörige orthogonale Liealgebra ist

$$\mathrm{so}(J(c)) = \left\{ X \in \mathrm{gl}_4(\mathbb{R}) \mid X^\dagger J(c) = -J(c)X \right\} \tag{35}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ \frac{1}{c^2} v^\dagger & 0 \end{pmatrix} \mid A = -A^\dagger, v \in \mathbb{R}^3 \right\}. \tag{36}$$

Für alle $c \neq 0$ ist die Liealgebra $\mathrm{so}(J(c))$ isomorph zu $\mathrm{so}(J(1)) = \mathrm{so}_{3,1}$. Der Isomorphismus $\psi_c : \mathrm{so}_{3,1} \to \mathrm{so}(J(c))$ wird innerhalb von $\mathrm{gl}_4(\mathbb{R})$ durch Konjugation mit $\mathrm{Diag}[1, 1, 1, \frac{1}{c}]$ gegeben. Für den Limes $c \to \infty$ erhält man die Limes-Algebra

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A = -A^\dagger, v \in \mathbb{R}^3 \right\}, \tag{37}$$

also die euklidische Algebra e_3.

Ein weiteres physikalisches Beispiel ergibt die dynamische Symmetrie des Keplerpotentials (vgl. [DDS]). Die Symmetrie-Liealgebra so_4 der gebundenen Zustände zu fester Bindungsenergie $E < 0$ wird beim Übergang $E = 0$ in die Liealgebra e_3 der euklidischen Bewegungen kontrahiert.

1.3.2. *Die Verallgemeinerung von Saletan.* In den Arbeiten [IW] und [Sa] von Inonü, Wigner und Saletan, in denen Kontraktionen zum ersten Mal systematisch untersucht wurden, wurde vereinfachenderweise angenommen, daß die Familie ϕ_t affin linear von t abhängt:

$$\phi_t = \phi_0 + t\psi. \tag{38}$$

Man kann dann auch o.B.d.A. annehmen, daß $\phi_1 = \mathrm{id}_V$ ist, denn nach Lemma 1.33 können wir ϕ_t von rechts mit ϕ_1^{-1} multiplizieren, ohne daß sich das Konvergenzverhalten oder der Isomorphietyp der Limesalgebra ändern. Dann ist $\phi_t = \phi_0 + t(\mathrm{id}_V - \phi_0)$, insbesondere hängt ϕ_t mit dieser Normierung nur von ϕ_0 ab.

Allgemein haben wir die ϕ_0-invariante Zerlegung von V in den Hauptraum von ϕ_0 zum Eigenwert 0 und sein ϕ_0-invariantes Komplement:

$$V = V_R \oplus V_N \text{ mit } V_R := \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathrm{im}(\phi_0^r), \quad V_N = \bigcup_{r=0}^{\infty} \ker(\phi_0^r). \tag{39}$$

Wir betrachten eine etwas allgemeinere Situation als den linearen Fall:

$$\phi_t = \phi_0 + t\psi_t, \quad \text{mit } (\psi_t)|_{V_N} \in \mathrm{GL}((V_N) \otimes_k A) \text{ und } \psi_t \text{ kommutiert mit } \phi_0. \tag{40}$$

Offenbar fällt der lineare Fall darunter mit $\psi_t = \mathrm{id} - \phi_0$, denn $(\mathrm{id} - \phi_0)|_{V_N} = \mathrm{id}_{V_N} - \phi_0|_{V_N}$ ist invertierbar, da $\phi_0|_{V_N}$ nilpotent ist (genau wie in (43)). Wir haben dann

$$\phi_t \equiv \begin{pmatrix} (\phi_0)_1 + t(\psi_t)_1 & 0 \\ 0 & (\phi_0)_2 + t(\psi_t)_2 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

mit $(\phi_0)_1$ invertierbar, $(\phi_0)_2$ nilpotent und $(\psi_0)_2$ invertierbar. Dann sind für kleine t auch $(\phi_0)_1 + t(\psi_t)_1$ und $(\psi_t)_2$ invertierbar und wir können wieder Lemma 1.33 anwenden und durch Multiplikation von rechts mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} ((\phi_0)_1 + t(\psi_t)_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\psi_t)_2^{-1} \end{pmatrix}$$

erreichen, daß

$$\phi_t \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V_R} & 0 \\ 0 & \eta_t + t\,\mathrm{id}_{V_N} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

mit einer nilpotenten Matrix $\eta_t = (\phi_0)_2(\psi_t)_2^{-1}$, ohne daß sich am Konvergenzverhalten oder an der Limesalgebra etwas ändert.

Ist insbesondere $\phi_t = \phi_0 + t(\mathrm{id}_V - \phi_0)$ und ist $\ker\phi_0 \cap \mathrm{im}\phi_0 = \{0\}$, so verschwindet η_t und wir haben genau die Situation des Satzes von Inonü und Wigner mit $\mathfrak{u} = \mathrm{im}(\phi_0)$ und $\mathfrak{v} = \ker(\phi_0)$.

Das Inverse von $\eta_t + t\,\mathrm{id}_{V_N}$ läßt sich mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe hinschreiben:

$$(\eta_t + t\,\mathrm{id}_{V_N})^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r. \tag{43}$$

(Die Reihe konvergiert, da η_t nilpotent ist.)

Es ist $\phi_t = p_{V_R} + (\eta_t + t\,\mathrm{id}_{V_R})p_{V_N}$ und $\phi_t^{-1} = p_{V_R} + \sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r p_{V_N}$. Sei nun $x = u + v$, $y = u' + v'$ mit $u, u' \in V_R$ und $v, v' \in V_N$. Dann gilt mit der Bezeichnung $p_{V_R}([.,.]) =: [.,.]_R$ und $p_{V_N}([.,.]) =: [.,.]_N$

$$\begin{aligned}[x,y]_t = {} & [u + \eta_t v + tv, u' + \eta_t v' + tv']_R + \\ & \sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r [u + \eta_t v + tv, u' + \eta_t v' + tv']_N\end{aligned} \tag{44}$$

mit

$$\begin{aligned}&[u + \eta_t v + tv, u' + \eta_t v' + tv']_R = \\ &\qquad [u,u']_R + [u, \eta_t v']_R + [\eta_t v, u']_R + [\eta_t v, \eta_t v']_R + O(t)\end{aligned}$$

und mit $\tilde{u} = u + \eta_t v$, $\tilde{u}' = u' + \eta_t v'$

$$[\tilde{u} + tv, \tilde{u}' + tv']_N = [\tilde{u}, \tilde{u}']_N + t([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + t^2[v, v']_N.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r [\tilde{u} + tv, \tilde{u}' + tv']_N = \\ &\sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r [\tilde{u}, \tilde{u}']_N + \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r}(-\eta_t)^r([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + \\ &\qquad + \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r+1}(-\eta_t)^r [v, v']_N = \\ &([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + t[v, v']_N - \eta_t[v, v']_N + \\ &\qquad + \sum_{r=0}^{\infty} t^{-(r+1)}(-\eta_t)^r ([\tilde{u}, \tilde{u}']_N - \eta_t([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + \eta_t^2[v, v']_N)\end{aligned}$$

Die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ_t existiert genau dann, wenn für alle x, y

$$[\tilde{u}, \tilde{u}']_N - \eta_0([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + \eta_0^2[v, v']_N = 0. \tag{45}$$

Diese Bedingung kann man äquivalent durch die folgenden drei Spezialfälle ausdrücken:

- $v = v' = 0$:

$$[u, u']_N = 0 \qquad \forall u, u' \in V_R. \tag{46}$$

  Das heißt V_R bildet eine Unteralgebra $\tilde{\mathfrak{u}}$ von $\mathfrak{g}$.
- $v = u' = 0$:

$$[u, \eta_0 v']_N = \eta_0 [u, v']_N \qquad \forall u \in V_R, v' \in V_N. \tag{47}$$

  Das heißt η_0 ist ein Automorphismus des $\tilde{\mathfrak{u}}$-Moduls $V_N \cong \mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{u}}$.
- $u = u' = 0$:

$$[\eta_0 v, \eta_0 v']_N = \eta_0([\eta_0 v, v']_N - [\eta_0 v', v]_N) - \eta_0^2 [v, v']_N \qquad \forall v, v' \in V_N. \tag{48}$$

Die Lieklammer der Limesalgebra ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
[x, y]_0 = {} & [u, u'] + [u, \eta_0 v']_R + [\eta_0 v, u']_R + [\eta_0 v, \eta_0 v']_R + ([\tilde{u}, v']_N - [\tilde{u}', v]_N) + \\
& -\eta_0 [v, v']_N \\
= {} & [u, u'] + [u, \eta_0 v']_R + [\eta_0 v, u']_R + [\eta_0 v, \eta_0 v']_R + [u, v']_N + [\eta_0 v, v']_N + \\
& -[u', v]_N - [\eta_0 v', v]_N - \eta_0 [v, v']_N
\end{aligned}$$

Auch die Lieklammer kann man äquivalenterweise durch die folgenden drei Spezialfälle ausdrücken:

- $v = v' = 0$:

$$[u, u']_0 = [u, u'] \qquad \forall u, u' \in V_R. \tag{49}$$

  Das heißt die Unteralgebra $\tilde{\mathfrak{u}}$ mit dem unterliegenden Vektorraum V_R bleibt bei der Kontraktion erhalten.
- $v = u' = 0$:

$$[u, v']_0 = [u, \eta_0 v']_R + [u, v']_N \qquad \forall u \in V_R, v' \in V_N. \tag{50}$$

  Der $\tilde{\mathfrak{u}}$-Moduls $V_N \cong \mathfrak{g}_0/\tilde{\mathfrak{u}}$ ist isomorph zu dem entsprechenden $\tilde{\mathfrak{u}}$-Modul $\mathfrak{g}/\tilde{\mathfrak{u}}$ der ursprünglichen Algebra.
- $u = u' = 0$:

$$[v, v']_0 = [\eta_0 v, \eta_0 v']_R + [\eta_0 v, v']_N - [\eta_0 v', v]_N + \eta_0 [v, v']_N \qquad \forall v, v' \in V_N. \tag{51}$$

Der Nilpotenzgrad einer nilpotenten Liealgebra $\mathfrak{n}$ sei die größte ganze Zahl q mit $\mathfrak{n}^q \neq (0)$. So ist zum Beispiel der Nilpotenzgrad einer abelschen Liealgebra gleich Null. Der Nilpotenzgrad eines nilpotenten Endomorphismus ξ sei die größte ganze Zahl q mit $\xi^q \neq 0$. An Gleichung (51) kann man sehen, daß der Nilpotenzgrad des Ideals $\mathfrak{v} = \ker(\phi_0)$ höchstens gleich dem Nilpotenzgrad von η_0 ist. ($\eta_0^q = 0 \Rightarrow \mathfrak{v}^q = 0$.)

Man kann leicht nachrechnen, daß (45) äquivalent ist zu der Bedingung (52) im folgenden Satz, die der in [Sa] entspricht. Ebenso kann man die Lieklammer kürzer schreiben, nämlich wie in [Sa] als (53).

Wir erhalten den Satz von Saletan:

Satz 1.41 (Saletan). *Unter der Voraussetzung (40) an die Familie ϕ_t, insbesondere wenn ϕ_t affin linear von t abhängt, gilt mit den Bezeichnungen von oben: Die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ_t existiert genau dann, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{g}$*

$$[\phi_0(x), \phi_0(y)]_N - \phi_0[\phi_0(x), y]_N + \phi_0[\phi_0(y), x]_N + \phi_0^2[x, y]_N = 0 \tag{52}$$

Die Lieklammer der Limesalgebra ist dann gegeben durch

$$[x, y]_0 = \phi_{0R}^{-1}[\phi_0(x), \phi_0(x)]_R - \phi_0[x, y]_N + [\phi_0(x), y]_N - [\phi_0(y), x]_N. \tag{53}$$

Man kann nun nachrechnen, daß auch die kontrahierte Liealgebra $\mathfrak{g}_0$ wieder die Bedingung (52) erfüllt. Daraus ergibt sich folgendes

Korollar 1.42. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.41 gilt*

- *Wenn die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ durch ϕ_t existiert, dann existiert auch die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ durch ϕ_t^r für $r = 1, 2, \ldots$. Dadurch erhält man eine Folge von Liealgebren $(\mathfrak{g}_{0r})_{r=1,2,\ldots}$ mit unterliegendem Vektorraum V, deren Länge dem Nilpotenzgrad q von ϕ_0 auf V_N entspricht, und deren letztes Glied die Inonü-Wigner-Kontraktion von $\mathfrak{g}$ mit ϕ_t^q ist.*
- *In jeder Liealgebra dieser Folge bilden die Räume $\phi_0^r(V)$ für $r = 1, \ldots, q$ Unteralgebren, wobei die Struktur der Unteralgebra $\phi_0^q(V)$ in allen Algebren der Sequenz übereinstimmt.*
- *Die Kerne $\ker\phi_0^r$ bilden nilpotente Ideale in $\mathfrak{g}^{(0)r+j}$, $(j = 0, 1, .)$, wobei der Nilpotenzgrad des Ideals $\ker\phi_0^r$ höchstens gleich $q - r$ ist.*

Schon in vier Dimensionen gibt es Beispiele (siehe [Sa]) für Saletan-Kontraktionen, die durch keine Folge von Inonü-Wigner-Kontraktionen erreicht werden können. Wie bereits erwähnt, ist keine einfache Familie von Kontraktionen bekannt, durch die alle Degeneration (hier Elemente des Orbitabschlusses) von Liealgebren erreicht werden können, denn es ist ja nicht einmal klar, ob jede Degeneration eine Kontraktion ist.

Mit Lemma 1.33 kann man noch einige spezielle Situationen vereinfachen und gelegentlich auf die oben untersuchte Situation zurückspielen. Hat man zum Beispiel

$$\phi_t(V_R) \subseteq V_R, \tag{54}$$

so ist ϕ_t bezüglich einer geeigneten Basis von V equivalent zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V_R} & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V_R} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{V_R} & X \\ 0 & \mathrm{id}_{V_N}, \end{pmatrix}$$

also nach Lemma 1.33 equivalent zu einem ϕ'_t mit

$$\phi'_t(V_R) \subseteq V_R, \text{ und } \phi'_t(V_N) \subseteq V_N. \tag{55}$$

1.4. **Filtrierte und Graduierte Kontraktionen.** Wir betrachten nun die verallgemeinerten Kontraktionen, bei denen die Normalform (24) Diagonalgestalt hat.

Das sind die filtrierten verallgemeinerten Kontraktionen. Man geht dabei aus von einer Zerlegung des unterliegenden Vektorraums V von $\mathfrak{g}$:

$$V = \bigoplus_{i=-M}^{N} V_i \tag{56}$$

mit $M, N \in \mathbb{Z}$ so daß $-M \leq N$ und $V_{-M} \neq (0)$. Die Familie ϕ_t operiert dann auf den direkten Summanden V_i jeweils durch Multiplikation mit t^i. Sei p_i die zu der Zerlegung (56) gehörige Projektion auf V_i. Dann ist

$$\phi_t = \sum_{i=-M}^{N} t^i \mathrm{p}_i. \tag{57}$$

Für diese verallgemeinerten Kontraktionen ist es sehr einfach, Bedingungen für die Existenz der Limesalgebra zu finden und ihre Struktur zu beschreiben.

Satz 1.43. *Sei ϕ wie in (57). Dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der verallgemeinerten Kontraktion von $\mathfrak{g} = (V, [.,.])$ mit ϕ, daß*

$$[V_j, V_i] \subset \bigoplus_{l=-M}^{j+i} V_l, \quad \textit{für alle } j, i \in \{-M, \ldots, N\}, \tag{58}$$

das heißt daß die Flagge $W_{-M} \subset \cdots \subset W_N$ mit $W_j = \bigoplus_{i=-M}^{j} V_i$ eine Filtrierung von $\mathfrak{g}$ ist. Die Limesalgebra ist dann die zugehörige $\mathbb{Z}$-graduierte Liealgebra:

$$[x, y]_0 = \sum_{j,i} p_{j+i}\left([p_j(x), p_i(y)]\right) \quad \textit{für alle } x, y \in V. \tag{59}$$

Beweis: Die Degeneration von $\mathfrak{g}$ mit ϕ existiert genau dann, wenn $[v, v']_0$ für je zwei Vektoren $v \in V_j, v' \in V_i$ mit $j, i \in \{-M, \ldots, N\}$ existiert. Dann ist $[v, v']_t = \sum_{l=-M}^{N} t^{j+i-l} \mathrm{p}_l([v, v'])$. Daher ist die Existenz von $[v, v']_0$ gleichbedeutend damit, daß $\mathrm{p}_l([v, v']) = 0$ für alle $l > j + i$. Dies ist äquivalent zu (58). Dann gilt offenbar: $[v, v']_0 = \mathrm{p}_{j+i}([v, v'])$. □

Definition 1.44. Eine (verallgemeinerte) Kontraktion wie in Satz 1.43 bezeichnen wir als *filtrierte* (verallgemeinerte) Kontraktionen.

Bemerkung 1.45. Wenn die Flagge $W_{-M} \subset \cdots \subset W_N$ mit $W_j = \bigoplus_{i=-M}^{j} V_i$ eine Filtrierung von $\mathfrak{g}$ ist, dann bilden die W_{-i} mit $i \geq 0$ Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ und die W_{-i} mit $i > 0$ sind nilpotent. Ist $j > i \geq 0$, so ist W_{-j} ein Ideal von W_{-i}. Ist zum Beispiel $\mathfrak{g}$ selber nilpotent, so kann man $W_{-i} := \mathfrak{g}^{i-1}$ (das $(i-1)$-te Glied der absteigenden Zentralreihe) setzen und V_{-i} als ein Komplement zu W_{-i-1} in W_{-i} definieren. Dies ergibt eine filtrierte verallgemeinerte Kontraktion, die keine echte Kontraktion ist. (Sie kann natürlich immer noch zu einer echten Kontraktion isomorph oder äquivalent sein.)

Bemerkung 1.46. Man kann die Bedingung (58) für die Existenz der verallgemeinerten filtrierten Kontraktion mit ϕ auch schreiben als

$$[x,y] = \sum_{j,i} \sum_{l=-M}^{j+i} \mathrm{p}_l\left([\mathrm{p}_j(x), \mathrm{p}_i(y)]\right) \quad \text{für alle } x,y \in V. \tag{60}$$

Im Vergleich mit (59) sieht man, daß für eine geeignete Basis von V, nämlich eine, die sich aus Basen der V_i zusammensetzt, die Strukturkonstanten beim Übergang zur Limesalgebra jeweils entweder gleich bleiben oder zu Null werden.

Aus Satz 1.43 und Satz 1.32 folgt sofort:

Korollar 1.47. *Für eine filtrierte Kontraktion gilt mit den Bezeichnungen von Satz 1.43:*

- *Die zugehörige Degeneration ist als A-Liealgebra isomorph zu der A-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_K$, die gebildet wird durch*

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=-M}^{N} V_i \otimes_k t^i A. \tag{61}$$

- *Durch (56) ist eine $\mathbb{Z}$-Graduierung der Limesalgebra $\mathfrak{g}_0$ gegeben, insbesondere bildet $\mathfrak{u} = (V_0, [.,.]_0 \,|_{V_0 \times V_0})$ eine Unteralgebra und die V_i, $i = -M, \ldots, N$, bilden jeweils $\mathfrak{u}$-Moduln bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}_0$.*
- *Die Unteralgebra $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{g}_0$ ist isomorph zu W_0/W_{-1}. Die Struktur von V_i als $\mathfrak{u}$-Modul ergibt sich aus der Struktur der Ausgangsliealgebra $\mathfrak{g}$ wie folgt: V_i ist isomorph zum Quotienten W_i/W_{i-1}, wenn die W_i als $\mathfrak{u}$-Moduln bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ betrachtet werden. Ist insbesondere $\mathfrak{u}$ reduktiv, so ist jedes V_i als $\mathfrak{u}$-Untermodul bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$ wählbar.*
- *Die verallgemeinerte Kontraktion ist eine echte Kontraktion, wenn $M \leq 0$ ist. Dann ist $\mathfrak{u}$ der Nullteil und die exakte Sequenz (21) aus Satz 1.28 spaltet, d.h. $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{v} \rtimes \mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v} = ker(\phi_0) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$, das Ideal $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{g}_0$ ist nilpotent und sein Nilpotenzgrad ist höchstens gleich N.*
- *Ist $M = 0$ und $N = 1$, so ist die Kontraktion eine Inonü-Wigner-Kontraktion und jede Inonü-Wigner-Kontraktion läßt sich auf diese Art beschreiben.*

Nun betrachten wir den speziellen Fall von Filtrierungen, die aus Graduierungen entstehen. Sei Γ eine abelsche Gruppe und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra, die durch Γ graduiert ist

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma. \tag{62}$$

Sei p_γ die zugehörige Projektion auf $\mathfrak{g}_\gamma$. Weiter sei $f : \Gamma \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung, so daß gilt:

$$f(\gamma + \gamma') \leq f(\gamma) + f(\gamma') \quad \text{für alle } \gamma, \gamma' \in \Gamma \text{ mit } [\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{\gamma'}] \neq (0). \tag{63}$$

Eine solche Funktion bezeichenen wir als *fast-konkav* bezüglich $\mathfrak{g}$. (Die Bezeichnung „konkav“ wird in Abschnitt 2.2 vergeben.)

Satz 1.48. *Seien* Γ *und* f *wie oben. Dann existiert die verallgemeinerte Kontraktion mit*

(64) $$\phi_t = \sum_{\gamma \in \Gamma} t^{f(\gamma)} p_\gamma$$

und die Lieklammer der Limesalgebra ist für $x \in \mathfrak{g}_\gamma, y \in \mathfrak{g}_{\gamma'}$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ *gegeben durch:*

(65) $$[x,y]_0 = \begin{cases} [x,y] & \textit{falls } f(\gamma) + f(\gamma') = f(\gamma + \gamma'), \\ 0 & \textit{falls } f(\gamma) + f(\gamma') > f(\gamma + \gamma'). \end{cases}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß mit

(66) $$V_i := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) = i} \mathfrak{g}_\gamma$$

für $i \in \mathbb{Z}$ die Bedingung (58) von Satz 1.43 erfüllt ist. Dies folgt aber offensichtlich aus der Bedingung (63) an f. $\square$

Definition 1.49. Eine (verallgemeinerte) Kontraktion wie in Satz 1.48 bezeichnen wir als *graduierte* (verallgemeinerte) Kontraktionen.

Auch Korollar 1.47 formulieren wir noch einmal speziell für graduierte Kontraktionen:

Korollar 1.50. *Sei eine graduierte Kontraktion, wie in Satz 1.48 gegeben. Dann gilt:*

- *Die zugehörige Degeneration ist als* A*-Liealgebra isomorph zu der* A*-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}_K$*, die gebildet wird durch*

(67) $$\mathfrak{a}_f = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{g}_\gamma \otimes_k t^{f(\gamma)} A.$$

- *Die Zerlegung (62) ist auch eine Graduierung der Limesalgebra* $\mathfrak{g}_0$*. Sie ist für* $\mathfrak{g}_0$ *eine „Verfeinerung“ der* $\mathbb{Z}$*-Graduierung*

(68) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i \quad \textit{mit } V_i := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) = i} \mathfrak{g}_\gamma.$$

  Dabei bildet wieder $\mathfrak{u} = V_0 = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) = 0} \mathfrak{g}_\gamma$ *eine Unteralgebra und die* V_i, $i = -M, \ldots, N$*, bilden jeweils* $\mathfrak{u}$*-Moduln bezüglich der adjungierten Darstellung von* $\mathfrak{g}_0$.
- *Als* $\mathfrak{u}$*-Modul ist dabei* V_i *isomorph zum Quotienten* W_i/W_{i-1}*, wenn* W_i *wieder wie in Satz 1.43 gebildet wird.*

- *Die graduierte verallgemeinerte Kontraktion ist eine echte Kontraktion, wenn $f(\Gamma) \subset \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $\mathfrak{u} = (V_0, [.,.]\,|_{V_0 \times V_0})$ der Nullteil. Die exakte Sequenz (21) aus Satz 1.28 spaltet, d.h. $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{v} \rtimes \mathfrak{u}$. Dabei ist*

$$\mathfrak{v} \;=\; ker(\phi_0) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) > 0} \mathfrak{g}_\gamma = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i, \tag{69}$$

  wobei die zweite Zerlegung einer Zerlegung von $\mathfrak{v}$ als $\mathfrak{u}$-Modul bildet. Der Nilpotenzgrad von $\mathfrak{v}$ ist höchstens gleich $\max\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$.
- *Ist $f(\Gamma) \subset \{0, 1\}$, so ist die Kontraktion eine Inonü-Wigner-Kontraktion.*

Die Bedingungen von Satz 1.48 gelten zum Beispiel, wenn (56) bereits eine $\mathbb{Z}$-Graduierung von $\mathfrak{g}$ ist. Dann ist die Degeneration trivial. Sie gelten aber auch, wenn (56) nur eine $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung bildet. In diesem Fall kann man die zugehörige Kontraktion wie folgt beschreiben.

1.4.1. *Mit einer zyklischen Gruppe graduierte Kontraktionen.* Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k. Sei σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ dessen Ordnung m teilt, d.h. $\sigma^m = \mathrm{id}_\mathfrak{g}$, also teilt das Minimalpolynom von σ das Polynom $X^m - 1 \in k[X]$, insbesondere sind alle seine Eigenwerte m-te Einheitswurzeln. Wenn der Körper k eine primitive m-te Einheitswurzel ζ_m enthält, dann zerfällt $\mathfrak{g}$ in die Eigenräume von σ zu den Potenzen von ζ_m:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\overline{m-1}} \tag{70}$$

mit

$$\sigma(\mathfrak{g}_{\bar{j}}) = \zeta_m^j \mathfrak{g}_{\bar{j}} \qquad \text{mit } \bar{j} := j + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ für } j \in \mathbb{Z}. \tag{71}$$

Umgekehrt wird zu jeder Graduierung wie in (70) durch (71) ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ definiert, dessen Ordnung m teilt.

Bemerkung 1.51. Ist die Ordnung von σ gleich m, so bezeichnen wir die Graduierung als echte $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung. Andernfalls ist die Ordnung von σ ein echter Teiler m_1 von m, $m = m_1 m_2$, und es gilt $\mathfrak{g}_{\bar{j}} = (0)$ falls $m_2 \nmid j$. Das bedeutet, daß die Graduierung als eine $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z}$-Graduierung mit $\mathfrak{g}_{j+m_1\mathbb{Z}} := \mathfrak{g}_{m_2 j + m\mathbb{Z}}$ betrachtet werden kann.

Aus Satz 1.48 folgt

Satz 1.52. *Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra mit einer $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung wie in (70), so existiert die Kontraktion mit*

$$\phi_t = \sum_{j=0}^{m-1} t^j p_{\mathfrak{g}_{\bar{j}}}. \tag{72}$$

Für die Limesalgebra $\mathfrak{g}_0$ dieser Kontraktion gilt:

- *Die zugehörige Degeneration ist als A-Liealgebra isomorph zu der A-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_K$, die gebildet wird durch*

(73)
$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{g}_{\bar{j}} \otimes_k t^j A.$$

- *Es verschwinden genau die Lieprodukte* $[.,.] : \mathfrak{g}_{\bar{i}} \times \mathfrak{g}_{\bar{j}} \mapsto \mathfrak{g}_{\overline{i+j}}$, *für die* $i + j \geq m$ *ist, alle anderen bleiben erhalten.*
- *Durch (70) ist eine* $\mathbb{Z}$*-Graduierung der Limesalgebra gegeben. Die Unteralgebra* $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ *der homogenen Elemente vom Grad* 0 *ist auch der Nullteil der Kontraktion. Die exakte Sequenz (21) aus Satz 1.28 spaltet, d.h.* $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{v} \rtimes \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, *wobei hier* $\mathfrak{v} = ker(\phi_0) = \mathfrak{g}_{\bar{1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\overline{m-1}}$. *Der Nilpotenzgrad von* $\mathfrak{v}$ *ist höchstens gleich* $m - 1$.
- *Ist* $m = 2$, *so ist die Kontraktion eine Inonü-Wigner-Kontraktion. Umgekehrt ist die Inonü-Wigner-Kontraktion zur Unteralgebra* $\mathfrak{u}$ *genau dann von der obigen Art, wenn* $\mathfrak{u}$ *ein Vektorraumkomplement* $\mathfrak{v}$ *in* $\mathfrak{g}$ *besitzt, so daß die Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$ *eine* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-Graduierung von* $\mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{u}$ *und* $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = \mathfrak{v}$ *darstellt.*

Bemerkung 1.53. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann man die in (72) auftretenden Projektoren $\mathrm{p}_{\mathfrak{g}_{\bar{j}}}$ in Termen von σ ausdrücken:

(74)
$$\mathrm{p}_{\mathfrak{g}_{\bar{j}}} = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma - \zeta_m^i \mathrm{id}_V}{\zeta_m^j - \zeta_m^i} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta_m^{-jk} \sigma^k$$

Im folgenden betrachten wir formale Degenerationen, also $A = k[|t|]$.

Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von $\mathfrak{g}$, die aus Basen von $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ bis $\mathfrak{g}_{\overline{m-1}}$ zusammengesetzt ist und $(c_{ij}^k)_{i,j,k=1\ldots n}$ die zugehörige Familie von Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $j(i)$ definiert durch die Beziehung $b_i \in \mathfrak{g}_{\overline{j(i)}}$. Da σ ein Automorphismus ist gilt $c_{il}^k = 0$, falls $j(i) + j(l) \not\equiv j(k) \mod m$. Es gilt:

$$\begin{aligned} c_{il}^k(t) &= \sum_{k',i',l'} \delta_{kk'}\, t^{-j(k)}\, c_{i'l'}^{k'}\, \delta_{ii'}\, t^{j(i)} \delta_{ll'} t^{j(l)}. \\ &= t^{j(i)+j(l)-j(k)} c_{il}^k \\ &= \begin{cases} c_{il}^k & \text{falls } j(i) + j(l) = j(k), \\ t^m\, c_{il}^k & \text{falls } j(i) + j(l) = j(k) + m. \end{cases} \end{aligned} \tag{75}$$

Diese Strukturkonstanten definieren also auch eine Liealgebra über $k[|t^m|]$. Diese ist offenbar isomorph zu

(76)
$$\mathfrak{p}_+(\sigma) := \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{g}_{\bar{j}} \otimes t^j\, k[|t^m|]$$

und die $k[|t|]$-Liealgebra $\mathfrak{a}$ aus (73) geht aus ihr durch die Skalarenerweiterung $k[|t^m|] \to k[|t|]$ hervor.

Definition 1.54. Sei σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\sigma^m = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$. Die *getwistete formale Loopalgebra*[10] $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ ist folgende Lielalgebra über dem Körper $k((t^m))$:

$$\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) := \bigoplus_{j=0}^{m-1} \mathfrak{g}_{\bar{j}} \otimes t^j\, k((t^m)). \tag{77}$$

Weiter sei $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma) := \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, \mathrm{ord}(\sigma))$, wobei $\mathrm{ord}(\sigma)$ die Ordnung von σ bezeichne.

Bemerkung 1.55. Es folgt aus Bemerkung 1.51, daß mit den Bezeichnungen von Definition 1.54 die $k((t^m))$-Liealgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ isomorph zur $k((t^{\mathrm{ord}(\sigma)}))$-Liealgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma)$ ist, wenn man die Körper $k((t^m))$ und $k((t^{\mathrm{ord}(\sigma)}))$ durch die Vorschrift $t^m \mapsto t^{\mathrm{ord}(\sigma)}$ miteinander identifiziert.

$\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist eine $k[|t^m|]$-Form der getwisteten formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$. Sie ist eine formale Degeneration von $\mathfrak{g}$, denn die Liealgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \otimes_K \tilde{K}$ über dem Erweiterungskörper $\tilde{K} = k((t))$ von $K = k((t^m))$ ist isomorph zu $\mathfrak{g} \otimes_k \tilde{K}$ vermöge ϕ_t in $\mathrm{GL}(n, k((t)))$.

Man kann $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ auch als Unteralgebra von $\mathfrak{g}_{\tilde{K}}$ betrachten. Sie ist die Unteralgebra aller formalen Loops ξ mit der Äquivarianz-Eigenschaft:

$$\sigma\xi(t) = \xi(\zeta_m t) \tag{78}$$

bzw. die Fixpunktunteralgebra des Automorphismus $\tilde{\sigma}$ von $\mathfrak{g}_{\tilde{K}}$, der gegeben ist durch

$$\tilde{\sigma}(\xi(t)) = \sigma(\xi(\zeta_m^{-1} t). \tag{79}$$

Als k-Algebra betrachtet trägt $\mathfrak{g}_{\tilde{K}}$ durch $\mathrm{grad}(t) = 1$ und $\mathrm{grad}(x) = 0$ für $x \in \mathfrak{g}$ eine kanonische $\mathbb{Z}$-Graduierung. Diese ist mit $\tilde{\sigma}$ verträglich und überträgt sich daher auf $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$. Die Summe der homogenen Unterräume mit nichtnegativem Grad, von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ bezüglich der kanonischen $\mathbb{Z}$-Graduierung bezeichnen wir als die „positive Unteralgebra“ von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$.

Satz 1.56. *Die zu einer graduierten Kontraktion mit einer endlichen zyklischen Graduierungsgruppe wie in Satz 1.52 gehörige formale Degeneration $\mathfrak{p}_+(\sigma)$, ist als $k[|t^m|]$-Liealgebra isomorph zur „positiven Unteralgebra“ der mit σ getwisteten formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$.*

Beispiel 1.57. Betrachten wir wieder die Kontraktion von so_n aus Beispiel 1.38. Dies ist eine graduierte Kontraktion und zwar bezüglich $\sigma = \mathrm{Int}\left(\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

[10] Die *Loopalgebra* $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ mit Werten in einer k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist definiert als $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g} \otimes_k k[t, t^{-1}]$. Sie kann als die Liealgebra der polynomialen Schleifen mit Werten in $\mathfrak{g}$ interpretiert werden. Die formale Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes_k k((t))$ ist eigentlich keine Liealgebra von Schleifen in $\mathfrak{g}$ mehr, sondern die Liealgebra der Laurentreihen mit Werten in $\mathfrak{g}$, die in $t = 0$ keine wesentliche Singularität haben.

Als Unteralgebra von $\mathrm{so}_n(\mathbb{C}((t)))$ hat $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma,2) = \mathfrak{g}^{\tilde{\sigma}}_{\mathbb{C}((t))}$ die Gestalt

$$\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma,2) = \left\{ \begin{pmatrix} A & tv \\ -tv^\dagger & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{so}_{n-1}(\mathbb{C}((t))) \wedge v \in \mathbb{C}((t))^{n-1} \right\}. \tag{80}$$

Die positive Unteralgebra $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist der Durchschnitt von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma,2)$ mit $\mathrm{so}_n(\mathbb{C}[|t|])$.

1.5. **Konservierte Darstellungen.** Schon bei Inonü und Wigner [IW] wird der Zusammenhang von Kontraktionen mit der Darstellungstheorie betont. Sei ρ_1 eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum W. Wenn $\phi \in \mathrm{GL}_n(A)$ eine Kontraktion von $\mathfrak{g}$ induziert, dann definiert die Verknüpfung $\rho_1 \circ \phi$ einen injektiven Homorphismus von Liealgebren von $\mathfrak{a} = (V_A, \mu_1.\phi)$ nach $\mathrm{gl}(W_A)$ das heißt eine treue Darstellung von $\mathfrak{a}$ auf W. Im allgemeinen ist $\rho_1 \circ \phi_0$ jedoch keine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_0$ mehr, da ϕ_0 nicht injektiv ist.

Definition 1.58. Sei $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ mit Lieklammer $\mu = \mu_1.\phi$ für $\phi \in \mathrm{GL}_n(K)$. Eine *konservierte Darstellung* ist ein Homomorphismus $\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{gl}(W_A)$ von A-Liealgebren, so daß $(\rho)_K$ äquivalent zu $(\rho_1)_K \circ \phi$ ist und so daß $\rho_0 = \pi_{A,k}(\rho)$ eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}_k$ auf W ist.

Da $(\rho)_K$ äquivalent zu $(\rho_1)_K \circ \phi$ ist, existiert ein $\sigma \in \mathrm{GL}(W_K)$, so daß

$$\rho(x) = \sigma^{-1} \circ \rho_1(\phi(x)) \circ \sigma \quad \forall x \in \mathfrak{g}_K. \tag{81}$$

Klassisch kann man dies auch wie folgt formulieren: Sei wieder ϕ_t eine Familie von Vektorraum-Automorphismen, die eine Kontraktion von $\mathfrak{g}$ induziert. Die Verknüpfung $\rho_1 \circ \phi_t$ definiert für $t \neq 0$ eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_t$ auf W. Da ϕ_0 i.a. nicht injektiv ist, ist jedoch $\rho_1 \circ \phi_0$ i.a. auch keine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_0$ mehr. Eine *konservierte Darstellung* ist eine Familie $\rho_t : \mathfrak{g}_t \to \mathrm{gl}(W)$ von Darstellungen, so daß ρ_t für $t \neq 0$ äquivalent zu $\rho_1 \circ \phi_t$ ist, für alle $x \in \mathfrak{g}$ der Grenzwert

$$\rho_0(x) := \lim_{t \to 0} \rho_t(x)$$

existiert und ρ_0 eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_0$ auf W ist. Da ρ_t äquivalent zu $\rho_1 \circ \phi_t$ ist, existieren jeweils $\sigma_t \in \mathrm{GL}(W)$, so daß

$$\rho_t(x) = \sigma_t^{-1} \circ \rho_1(\phi_t(x)) \circ \sigma_t \quad \forall x \in \mathfrak{g}. \tag{82}$$

Beispiel 1.59. Sei ρ_1 die natürliche Darstellung von so_n. Für die Kontraktion aus Beispiel 1.38 hatten wir

$$\rho_1 \circ \phi_t \left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} A & t\,v \\ -t\,v^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Eine konservierte Darstellung ist gegegeben durch

$$\rho_t := \mathrm{Ad}(\mathrm{Diag}[1,\ldots,1,t]) \circ \rho_1 \circ \phi_t. \tag{84}$$

Damit ist

$$\rho_t\left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A & v \\ -t^2\, v^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{85}$$

und

$$\rho_0\left(\begin{pmatrix} A & v \\ -v^\dagger & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Konservierte Darstellungen ermöglichen es, Kontraktionen von Liealgebren auf Liegruppen zu übertragen (siehe Kapitel 3). Es ist daher von fundamentaler Bedeutung, daß sehr viele Kontraktionen eine konservierte Darstellung haben, nämlich die adjungierte Darstellung:

Satz 1.60. *Die adjungierte Darstellung ist für eine Degeneration genau dann konserviert, wenn das Zentrum der Limesalgebra trivial ist.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_t(x)(y) &= [x,y]_t \\ &= \phi_t^{-1}([\phi_t(x), \phi_t(y)]_1) \\ &= (\phi_t^{-1} \circ \mathrm{ad}_1(\phi_t(x)) \circ \phi_t)(y) \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{ad}_t(x) = \phi_t^{-1} \circ \mathrm{ad}_1(\phi_t(x)) \circ \phi_t$, das heißt es gilt (81) mit $\sigma = \phi$. □

2. Deformationen und Degenerationen von halbeinfachen Liealgebren

Für alle hier betrachteten Körper sei die Charakteristik gleich Null.

Jede einfache Liealgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 ist nach dem auf E. Cartan zurückgehenden Klassifikationssatz für einfache Liealgebren eindeutig bestimmt durch ihr Wurzelsystem (siehe [Hu1, Theorem 14.3]). Dieses ist von einem der Isomorphie-Typen A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4 oder G_2. Nach dem Theorem von Chevalley [Hu1, Ch.25.2], kann eine einfache Liealgebra bezüglich einer geeigneten Basis (Chevalleybasis) durch ganzzahlige Strukturkonstanten beschrieben werden. Eine solche Familie von Strukturkonstanten beschreibt über jedem Körper der Charakteristik 0, eine einfache Liealgebra des sogenannten zerfallenden (oder entfalteten [Ti]) Typs A_l, $B_l, \ldots$.

Wir wollen in diesem Abschnitt die möglichen Isomorphietypen von $k((t))$-Liealgebren bestimmen, die die Liealgebra $\mathfrak{a}\otimes_{k[[t]]}k((t))$ annehmen kann, wenn $\mathfrak{a}$ eine formale Degeneration einer einfachen k-Liealgebra ist. Dies wird auf die Klassifikation aller absolut einfachen Liealgebren über $k((t))$ hinauslaufen. Zunächst etwas allgemeine Theorie, die i.w. aus [Ja, Ch.X] entnommen ist.

Über einem nicht algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es neben dem zerfallenden Typ noch weitere Isomorphie-Typen von einfachen Liealgebren. Man unterscheidet zunächst zwischen absolut einfachen und nicht absolut einfachen Liealgebren.

Definition 2.1. Eine K-Liealgebra heißt *absolut einfach*, wenn $\mathfrak{g}\otimes_K \bar{K}$ einfach über dem algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K ist. Eine absolut einfache Liealgebra, heißt vom Typ $X = A_l, B_l, \ldots$, wenn $\mathfrak{g}_{\bar{K}}$ vom Typ X ist.

Definition 2.2. Das *Zentroid* einer Liealgebra $\mathfrak{g} = (V, [\,.,\,.])$ ist die Menge aller $\phi \in \mathrm{End}(V)$, die mit allen $\mathrm{ad}(x)$, $x \in \mathfrak{g}$ kommutieren, das heißt für die gilt: $\phi([x,y]) = [\phi(x), y] = [x, \phi(y)]$ für alle $x, y \in \mathfrak{g}$.

Satz 2.3. [Ja, Ch.X.Th.1] *Das Zentroid einer einfachen Liealgebra ist ein kommutativer Körper.*

Das Zentroid ist offenbar endlichdimensional über dem Grundkörper, da es in $\mathrm{End}(V)$ enthalten ist. Man kann jede Liealgebra in kanonischer Weise als Liealgebra über ihrem Zentroid auffassen. Als solche ist sie stets absolut einfach. Eine Liealgebra ist genau dann über ihrem Grundkörper absolut einfach, wenn das Zentroid von $\mathfrak{g}$ gleich dem Grundkörper ist. Es gilt

Satz 2.4. *Sei $L : K$ eine endliche Körpererweiterung und $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra über L. Dann ist $\mathfrak{g}$ auch als K-Liealgebra, das heißt nach Einschränkung der Skalare von L auf K, einfach und jede einfache aber nicht absolut einfache K-Liealgebren entsteht aus einer absolut einfachen Liealgebra über ihrem Zentroid durch Einschränkung der Skalare.*

Beweis des ersten Teils: Angenommen $\mathfrak{i}$ sei ein nichttriviales Ideal von $\mathfrak{g}$ als K-Algebra. Dann ist Span($\mathfrak{i}$,L) ein Ideal von $\mathfrak{g}$ über L, also Span($\mathfrak{i}$,L)=$\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ist, läßt jedes Element von $\mathfrak{g}$ sich als Summe von Kommutatoren schreiben. Sei $x = [y, z]$ ein solcher Kommutator. Da $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{i}$ über L aufgespannt wird läßt y sich schreiben als $y = \sum_i \lambda_i y_i$ mit $\lambda_i \in L$ und $y_i \in \mathfrak{i}$. Damit liegt $x = \sum_i [y_i, \lambda_i z]$ auch schon in $\mathfrak{i}$. Also liegt auch jede Summe von Kommutatoren in $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{i} = \mathfrak{g}$. Zum Beweis der zweiten Teils der Aussage von Satz 2.4 siehe [Ja, Ch.X.Th.2]. □

Zum Beispiel ist jede reelle einfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ entweder eine reelle Form einer komplexen einfachen Liealgebra, das heißt $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist einfach, oder sie ist eine Reellifizierung einer komplexen einfachen Liealgebra, das heißt, sie entsteht aus einer komplexen einfachen Liealgebra durch Einschränkung des Skalarengebietes von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}$ (vgl. [Ti]).

Im folgenden konzentrieren wir uns auf absolut einfache Liealgebren.

Satz 2.5. *Sei $\mathfrak{g}$ absolut einfach über K vom Typ X, dann existiert eine endliche Galoiserweiterung L von K, so daß $\mathfrak{g} \otimes_K L$ isomorph zur zerfallenden einfachen Liealgebra vom Typ X ist.*

Beweis: Da $\mathfrak{g} \otimes_K \bar{K}$ isomorph zum zerfallenden Typ ist, existiert zu jeder Basis von $\mathfrak{g}$ ein $U \in \mathrm{GL}_n(\bar{K})$ so daß für das Tupel $c := (c_{ij}^k)$ der zugehörigen Strukturkonstanten gilt: $c.U = \bar{c}$, wobei $\bar{c}$ das Tupel der Strukturkonstanten bezüglich einer Chevalleybasis ist. Nun ist aber U bereits in $\mathrm{GL}_n(L)$ mit $L := K(\{u_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\})$ enthalten, und L ist eine endliche algebraische Erweiterung von K, denn alle u_{ij} sind in $\bar{K}$ und damit algebraisch über K. Somit ist $\mathfrak{g} \otimes_K L$ isomorph zum zerfallenden Typ. Da wir $\mathrm{char}(K) = 0$ voraussetzen, ist K perfekt, daher ist jede endliche Erweiterung von K separabel, und jede separable Erweiterung ist in einer Galoiserweiterung enthalten. Daher kann man L durch eine Galoiserweiterung $\tilde{L}$ von K ersetzen. □

Korollar 2.6. *Sei $A = k[[t]]$ und $K = k((t))$. Die durch eine formale Deformation $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}_0$ induzierte Liealgebra $\mathfrak{a}_K := \mathfrak{a} \otimes_A K$ ist genau dann absolut einfach, wenn $\mathfrak{g}_0$ die Limesalgebra einer formalen Degeneration der zerfallenden einfachen k-Liealgebra desselben Typs ist.*

Beweis: Folgt sofort aus der Isomorphie $\mathfrak{a} \otimes_A \tilde{K} \cong \mathfrak{a}_K \otimes_K \tilde{K}$, die für jeden endlichen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K gilt. Per Definition ist $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}_1$, wenn für einen endlichen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K die linke Seite isomorph zu $\mathfrak{g}_1 \otimes_k \tilde{K}$ ist und nach Satz 2.5 ist $\mathfrak{a}_K$ genau dann absolut einfach, wenn für einen endlichen Erweiterungskörper $\tilde{K}$ von K die rechte Seite isomorph zu $\mathfrak{g}_1 \otimes_k \tilde{K}$ ist. □

Es reicht nach Satz 2.5 zur Klassifikation aller absolut einfachen K-Liealgebren aus, eine Familie von endlichen Erweiterungen mit der Eigenschaft, daß jede endliche

Erweiterung in einem Mitglied der Familie enthalten ist, sowie alle K-Formen der zugehörigen zerfallenden einfachen Liealgebren zu betrachten. Ist zum Beispiel der algebraische Abschluß $\bar{K}$ eine endliche Erweiterung von K, so genügt es die K-Formen der zerfallenden einfachen Liealgebren über $\bar{K}$ zu klassifizieren. Für $K = k((t))$ gibt folgender Satz eine Familie von Körpererweiterungen, mit der oben beschriebenen Eigenschaft.

Satz 2.7. [Ei, Cor.13.15] *Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, so ist der algebraische Abschluß des Körpers $k((t))$ der Körper $\bigcup_{m=1}^{\infty} k((t^{\frac{1}{m}}))$ und der ganze Abschluß von $k[[t]]$ in $k((t^{\frac{1}{m}}))$ ist $k[[t^{\frac{1}{m}}]]$.*

Jede endliche algebraische Erweiterung von $k((t))$ ist also enthalten in einer Erweiterung der Form $k((t^{\frac{1}{m}}))$. Die Galoisgruppe dieser Erweiterung ist zyklisch von der Ordnung m. Sie wird erzeugt von der Abbildung $a(t^{\frac{1}{m}}) \mapsto a(\zeta_m t^{\frac{1}{m}})$ mit einer primitiven m-ten Einheitswurzel ζ_m. Es folgt sofort:

Korollar 2.8. *Jede formale Degeneration einer zerfallenden einfachen k-Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist nach einem Skalarenwechsel der Form $k[|t|] \to k[|t^{\frac{1}{m}}|]$ isomorph zu einer $k[|t|]$-Form der ungetwisteten affinen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$.*

Bei der Betrachtung von Degenerationen ist es also an sich nicht notwendig, die nichtzerfallenden Isomorphietypen zu betrachten, da man durch den Übergang $t \to t^{\frac{1}{m}}$ stets zum zerfallenden Typ gelangt. Wir wollen trotzdem auf eine genauere Beschreibung hinaus.

Im folgenden Satz sei eine K-Form von $\mathfrak{g}$ eine als K-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ spezifizierte K-Form (also formal ein Paar bestehend aus einer K-Form und einer Einbettung der K-Form in $\mathfrak{g}$). Eine K-Unteralgebra $\mathfrak{k}$ ist genau dann eine K-Form in diesem Sinne, wenn sie $\mathfrak{g}$ über L aufspannt und jede über K linear unabhängige Familie von Elementen von $\mathfrak{k}$ auch über L linear unabhängig ist.

Sei $L : K$ eine Körpererweiterung und $\mathfrak{g}$ eine L-Liealgebra. Dann sei $\mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ die Menge aller Automorphismen von $\mathfrak{g}$ als K-Liealgebra. Für eine absolut einfache Liealgebra sind alle K-linearen Automorphismen semilinear für $\mathfrak{g}$ über L, das heißt zu jedem $\tau \in \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ existiert ein Element γ_τ der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L : K)$, so daß für $\lambda \in L$ und $x \in \mathfrak{g}$ gilt $\tau(\lambda.x) = \gamma_\tau(\lambda).\tau(x)$ (siehe [Ja, Ch.X,Th.5]). Der folgende Satz entspricht im wesentlichen [Ja, Ch.X.Th.6] für Liealgebren formuliert.

Satz 2.9. *Sei $L : K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe Γ. Sei $\mathfrak{g}$ eine zerfallende einfache L-Liealgebra. Dann besteht eine Bijektion zwischen K-Formen von $\mathfrak{g}$ und Gruppenmonomorphismen $\Phi : \Gamma \to Aut_K(\mathfrak{g})$ mit der Eigenschaft, daß*

$$\Phi(\gamma)(\lambda.x) = \gamma(\lambda).\Phi(\gamma)(x) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, \lambda \in L, x \in \mathfrak{g}.$$

Beweis: Sei $\mathfrak{k}$ eine vorgegebene K-Form von $\mathfrak{g}$ und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $\mathfrak{k}$, die gleichzeitig eine Basis von $\mathfrak{g}$ über L ist. Dann wird eine Einbettung Φ mit den verlangten Eigenschaften definiert durch $\Phi(\gamma)(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) := \sum_{i=1}^n \gamma(\lambda_i) b_i$. Sei andererseits die Einbettung Φ der Galoisgruppe von $L : K$ in die Gruppe der K-linearen Automorphismen von $\mathfrak{g}$ vorgegeben. Dann ist die Fixpunktalgebra $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}^{\Phi(\Gamma)}$ eine K-Form von $\mathfrak{g}$. Es ist klar, daß die Menge der Fixpunkte von Γ eine K-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ bildet. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{k}$ über L aufgespannt wird und daß jede über K linear unabhängige Teilmenge von $\mathfrak{k}$ auch über L linear unabhängig ist. Sei $m = |\Gamma| = [L : K]$. Setze $\Psi := \frac{1}{m}\sum_{\gamma\in\Gamma}\Phi(\gamma)$. Dies ist, wie man sich leicht überlegt, ein Projektionsoperator auf $\mathfrak{k}$. Sei $l_1, \ldots, l_m$ eine Basis von L über K. Die $m \times m$-Matrix $M := (\gamma(l_j))_{\gamma\in\Gamma, j=1,\ldots,m}$ ist regulär (siehe [Ja]). Sei $x \in \mathfrak{g}$. Aus der Invertierbarkeit von M folgt, daß x Linearkombination der Elemente $y_j := \Psi(l_j x) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(l_j)\Phi(\gamma)(x)$ ist. Also wird $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{k}$ aufgespannt.

Seien $x_1, \ldots, x_r \in \mathfrak{k}$ linear unabhängig über K. Durch Induktion nach r wird gezeigt, daß die x_i auch über L linear unabhängig sind. Der Fall $r = 1$ ist trivial. Nun sei $\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i = 0$. Ist $\lambda_i = 0$ für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$, dann folgt aus der Induktionvoraussetzung, daß $\lambda_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$. Ist nun $\lambda_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, so kann man o.B.d.A. annehmen, daß $\lambda_1 = 1$ ist. Außerdem muß mindestens eines der λ_i nicht in K liegen. Sei o.B.d.A. $\lambda_2 \in L \setminus K$, dann existiert ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(\lambda_2) \neq \lambda_2$. Daraus erhält man eine Linearkombination $\sum_{i=1}^r(\lambda_i - \gamma(\lambda_i))x_i = 0$ mit weniger als r von Null verschiedenen Koeffizienten. Widerspruch! Also ist $\mathfrak{k}$ eine K-Form von $\mathfrak{g}$. □

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß bei der Entsprechung von K-Formen und Einbettungen der Galoisgruppe in $\mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g})$ isomorphe K-Formen zu konjugierten Einbettungen gehören und umgekehrt. Zum Beweis siehe [Ja, Ch.X.Th.7].

Korollar 2.10. *Sei $L : K$ eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung m. Ist $\mathfrak{g}$ eine absolut einfache Liealgebra über K, so daß $\mathfrak{g}_L$ zerfallend ist, dann existiert ein semilinearer Automorphismus τ von $\mathfrak{g}_L$ der Ordnung m, dessen assoziiertes Gruppenelement γ_τ ein Erzeuger der Galoisgruppe ist und dessen Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}$ ist. Ist umgekehrt $\tilde{\mathfrak{g}}$ eine zerfallende einfache Liealgebra über L und τ ein semilinearer Automorphismus von $\tilde{\mathfrak{g}}$ der Ordnung m mit $\langle\gamma_\tau\rangle = \Gamma$, dann ist die Fixpunktalgebra von τ eine K-Form von $\tilde{\mathfrak{g}}$ und als solche absolut einfach.*

Beweis: Nach Satz 2.9 existiert zu $\mathfrak{g}$ ein Gruppenmonomorphismus $\Phi : \Gamma \to \mathrm{Aut}_K(\mathfrak{g}_L)$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_L^{\Phi(\Gamma)}$. Ist $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ zyklisch, so gilt $\mathfrak{g}_L^{\Phi(\Gamma)} = \mathfrak{g}_L^{\Phi(\gamma)}$ und $\tau := \Phi(\gamma)$ ist ein semilinearer Automorphismus wie oben. Ist umgekehrt τ vorgegeben, so wird Φ festgelegt durch $\Phi(\gamma_\tau) = \tau$. □

Zum Beispiel ist für $L : K = \mathbb{C} : \mathbb{R}$ die Galoisgruppe $\Gamma = \{1, \gamma\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei γ die Konjugation in $\mathbb{C}$ ist. Die reellen absolut einfachen Liealgebren vom Typ X sind genau die Fixpunktalgebren der $\mathbb{R}$-linearen Involutionen der einfachen $\mathbb{C}$-Liealgebra $\mathfrak{g}$ vom Typ X mit der Eigenschaft, daß $\tau(z.x) = \bar{z}.\tau(x)$ für alle $z \in \mathbb{C}, x \in \mathfrak{g}$. Diese Automorphismen, werden auch als semilineare Involutionen von $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Tatsächlich kann man diese in Bijektion bringen mit den Automorphismen der Ordnung 2 von einfachen Liealgebren über $\mathbb{C}$, wobei Konjugationsklassen einander entsprechen (siehe [OV, Ch.4.]). Somit stehen die Isomorphieklassen von reellen Formen einer einfachen $\mathbb{C}$-Liealgebra in Bijektion zu den Involutionen bis auf Konjugation. Diese können dem im nächsten Abschnitt angegebenen Klassifikationssatz für Automorphismen endlicher Ordnung, Satz 2.22, entnommen werden.

Korollar 2.11. *Sei $\mathfrak{g}$ die zerfallende einfache Liealgebra über k vom Typ X. Zu jeder absolut einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}_1$ über $k((t))$ vom Typ X existieren ein $m \in \mathbb{N}$, eine primitive m-te Einheitswurzel ζ_m und ein $k((t^m))$-linearer Automorphismus τ der Ordnung m von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes_k k((t))$ mit*

$$\tau(t.x) = \zeta_n t \tau(x) \text{ für alle } x \in \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}), \tag{87}$$

so daß $\mathfrak{g}_1$ isomorph ist zur Fixpunktalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})^\tau$, wenn $k((t))$ durch $t \mapsto t^m$ mit $k((t^m))$ identifiziert wird.

Beweis: Sei $\mathfrak{g}_1$ eine absolut einfache Liealgebra über $k((t))$ vom Typ X. Nach Satz 2.5 und Satz 2.7 existiert zu $\mathfrak{g}_1$ ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $\mathfrak{g}_1 \otimes_{k((t))} k((t^{\frac{1}{m}}))$ isomorph zum zerfallenden Typ, das heißt zu $\mathfrak{g} \otimes_k k((t^{\frac{1}{m}}))$ ist. Letztere ist isomorph zu $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ mit dem Parameter $\tilde{t} := t^{\frac{1}{m}}$. Wir erhalten Korollar 2.11, indem wir Korollar 2.10 auf die Erweiterung $L : K = k((\tilde{t})) : k((\tilde{t}^m))$ anwenden. □

Im folgenden Korollar geht es um die Klassifikation der absolut einfachen Liealgebren über dem Körper $k((t))$. Nach Korollar 2.11 genügt es dafür, die Automorphismen endlicher Ordnung von formalen Loopalgebren mit der Eigenschaft (87) zu klassifizieren. Die Aussage des Korollars ist wohlbekannt. Wir geben dafür eine Beweisidee an, die auf der Klassifikation der Automorphismen endlicher Ordnung von affinen Kac-Moody-Algebren durch Bausch und Rousseau [BR] basiert. Wir gehen dabei von der unbewiesenen Annahme aus, daß die betrachteten Automorphismen von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ mit Automorphismen der polynomialen Loopalgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ identifiziert werden können.

Lemma 2.12. (Vermutung) *Sei $m \in \mathbb{N}$. Jeder $\mathbb{C}((t^m))$-lineare Automorphismus der formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, ist konjugiert zu einem Automorphismus, der als Fortsetzung eines Automorphismus endlicher Ordnung der polynomialen Loopalgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ entsteht.*

Korollar 2.13. *Sei $\mathfrak{g}$ die zerfallende einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$ vom Typ X_l. Jede absolut einfache Liealgebra über $\mathbb{C}((t))$ vom Typ X_l entsteht durch Twisten der formalen Loopalgebra $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t^{\frac{1}{m}}))$ mit einem Automorphismus der Ordnung m von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Alle $\mathbb{C}$-linearen Automorphismen endlicher Ordnung von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ sind bis auf Konjugation klassifizierbar. Sie entsprechen nämlich den Automorphismen endlicher

Ordnung der zugehörigen affinen Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(C)$, wobei C die verallgemeinerte Cartanmatrix vom Typ $X_l^{(1)}$ sei. Es gilt

$$\mathfrak{g}(C)'/\mathrm{Z}(\mathfrak{g}(C)) \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathcal{L}(\mathfrak{g}). \tag{88}$$

Daher induziert ein Automorphismus von $\mathfrak{g}(C)$ einen Automorphismus von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Die Automorphismen endlicher Ordnung von $\mathfrak{g}(C)$ für eine affine Kac-Moody-Algebra sind bis auf Konjugation klassifiziert nach [BR]. (Vergleiche auch den folgenden Abschnitt, wo die entsprechende Klassifikation für die einfachen Liealgebren beschrieben wird.) Ein Automorphismus von $\mathfrak{g}(C)$ ist durch den von ihm induzierten Automorphismus von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ bereits eindeutig bestimmt (siehe [BR, Remarque S.19]). Auch läßt sich jeder Automorphismus endlicher Ordnung von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}(C)$ liften. Nach Lemma 2.12 kann jeder Automorphismus endlicher Ordnung von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ als Fortsetzung eines Automorphismus endlicher Ordnung von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ betrachtet werden. Jeder Automorphismus der Ordnung m von $\mathfrak{g}(C)$ ist konjugiert zu einem Automorphismus der Form

$$\tau = \nu \exp\left(\mathrm{ad}\left(\frac{2\pi i}{m} h_0\right)\right). \tag{89}$$

Dabei ist ν ein Automorphismus des affinen Dynkindiagramms $X_l^{(1)}$. Dieser stabilisiert eine Cartanunteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}(C)$, und es ist $h_0 \in \mathfrak{h}$ mit $\nu(h_0) = h_0$ und $\alpha_i(h_0) \in \mathbb{Z}$ für alle einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}(C)$. Ist $r = \mathrm{ord}(\nu)$ und $m = \mathrm{ord}(\tau)$, so gilt $r|m$. Die Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}(C)^\nu$ eines Diagrammautomorphismus ν von $\mathfrak{g}(C)$ hat stets die Form $\mathfrak{g}(\tilde{C}) \oplus R$, wobei $\tilde{C}$ ihrerseits eine affine verallgemeinerte Cartanmatrix, und R eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{g}(C)$ ist. Die Matrix $\tilde{C}$ ist eindeutig bestimmt. (Wie sie sich aus C und ν ergibt, wird in [BR, 3.2.] beschrieben.) Sei $\tilde{\Delta} \subseteq \mathfrak{h}^{\nu *}$ das zugehörige Wurzelsystem, δ die kleinste positive imaginäre Wurzel von Δ und $\tilde{\delta}$ die kleinste positive imaginäre Wurzel von $\tilde{\Delta}$. Dann existiert eine positive ganze Zahl s mit

$$\delta|_{\mathfrak{h}^\nu} = s\tilde{\delta}. \tag{90}$$

Nach [BR, App.2.7.Rem.] ist ein Automorphismus wie in (89) stets $\mathbb{C}[t^k, t^{-k}]$-linear, mit $k = m/s$. Daher kann ein solcher Automorphismus nur dann von der Form (87) sein, wenn die Konstante s gleich 1 ist. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn ν durch einen Diagrammautomorphismus $\bar{\nu}$ des Unterdiagramms X_l von $X_l^{(1)}$ induziert wird. Dies impliziert, daß ν als Automorphismus von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ die Form $\bar{\nu} \otimes \mathrm{id}$ und τ die Form $\sigma \otimes \gamma_m$ hat, wobei σ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$ der Ordnung m ist und γ_m auf $\mathbb{C}((t))$ definiert ist durch $a(t) \mapsto a(\zeta_m t)$ für $a \in \mathbb{C}((t))$. Also ist τ von der Form $\tilde{\sigma}$ aus (79)(wenn man ζ_m durch die primitive m-te Einheitswurzel $\zeta_m' = \zeta_m^{-1}$ ersetzt). Also ist die Fixpunktunteralgebra von der Form $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$. □

In Abschnitt 2.1.2 wird gezeigt, daß für eine einfache Liealgebra $\mathfrak{g}$ jede getwistete Loopalgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ zu einer mit einem Diagrammautomorphismus $\bar{\nu}$ getwisteten

Loopalgebra $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \bar{\nu}, r)$ „enttwistet“ werden kann. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle schon festgehalten:

Korollar 2.14. *Jede einfache Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}}$ über $\mathbb{C}((t))$ ist isomorph zu einer getwisteten oder ungetwisteten affinen Kac-Moody-Loop-Algebra unter dem Skalarenwechsel $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}((t))$. Ist $\tilde{\mathfrak{g}}$ vom Typ X_l, dann ist die zugehörige affine Kac-Moody-Algebra von der Form $\mathfrak{g}(C)$ mit der affinen Cartan-Matrix C vom Typ $X_l^{(r)}$ (in der Notation von* [Ka]*) für ein $r \in \{1, 2, 3\}$. Dem zerfallenden Typ entspricht dabei die ungetwistete affine Kac-Moody-Algebra, d.h. $r = 1$.*

Beweis: Folgt aus Korollar 2.13 zusammen mit dem Enttwistungssatz von Kac, Satz 2.28 bzw. [Ka, The.8.5.]. □

2.1. **Zyklisch graduierte Kontraktionen.** Im folgenden werden die Degenerationen von einfachen Liealgebren bestimmt, die wie in Satz 1.52 durch $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierungen entstehen. Die dazugehörigen A-Formen sind nach Satz 1.56 positive Unteralgebren von getwisteten Loopalgebren. Mithilfe des Enttwistungssatzes von Kac [Ka, The.8.5.] werden wir zeigen, daß diese in Bijektion zu Parahoriunteralgebren (siehe Def. 2.30) von affinen Kac-Moody-Algebren stehen. Obwohl, wie wir in Korollar 2.8 gesehen haben, jede formale Degeneration einer einfachen Liealgebra per Skalarenerweiterung $k((t)) \to k((t^{\frac{1}{m}}))$ einer A-Form einer zerfallenden, also ungetwisteten, einfachen Liealgebra über K entspricht, ist hierbei auch der getwistete Fall von Bedeutung, denn bei der Skalarenerweiterung gehen Parahoriunteralgebren der getwisteten affinen Algebren nicht in Parahoriunteralgebren der ungetwisteten affinen Algebren über.

2.1.1. *Die Klassifikation der Automorphismen endlicher Ordnung einer einfachen komplexen Liealgebra.* Zunächst etwas allgemeines über die Automorphismengruppe einer einfachen Liealgebra. Für eine Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper k gilt: Ist $x \in \mathfrak{g}$ und $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent, so ist $\exp(\mathrm{ad}(x))$ wohldefiniert und beschreibt einen Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Ein Automorphismus σ von $\mathfrak{g}$ wird als *innerer* (oder invarianter [Ja]) Automorphismus bezeichnet, wenn er ein Produkt von Automorphismen der Form $\exp(\mathrm{ad}(x))$, mit $x \in \mathfrak{g}$ und $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent ist (siehe [Ja, S.265]), andernfalls wird σ als äußerer Automorphismus bezeichnet. Die inneren Automorphismen bilden, wie man sich leicht überlegt, einen Normalteiler in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Dieser wird auch als adjungierte Gruppe von $\mathfrak{g}$, in Zeichen $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, bezeichnet. Tatsächlich ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ eine algebraische Gruppe (als algebraische Menge definiert durch (12), wenn man darin $c_{ij}^{\prime k} = c_{ij}^k$ gleich den Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$ bezüglich irgendeiner Basis setzt) und $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ ist darin die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements.

Bemerkung 2.15. Ist k algebraisch abgeschlossen, so besitzt $\mathrm{ad}(x)$ die Jordanzerlegung in eine Summe aus einem diagonalisierbaren $\mathrm{ad}(x)_s$ und einem nilpotenten Endomorphismus $\mathrm{ad}(x)_n$, welche miteinander kommutieren. Wenn für den Körper k die Exponentialfunktion wohldefiniert ist, dann ist damit auch $\exp(\mathrm{ad}(x))$ für jedes

Element x von $\mathfrak{g}$ definiert, nämlich als Produkt von $\exp(\mathrm{ad}(x)_s)$ und $\exp(\mathrm{ad}(x)_n)$. Zu der Jordanzerlegung von $\mathrm{ad}(x)$ in $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ korrespondiert in einer halbeinfachen Liealgebra die abstrakte Jordanzerlegung, daß heißt zu jedem $x \in \mathfrak{g}$ existieren kommutierende Elemante x_s und x_n in $\mathfrak{g}$ mit $x = x_s + x_n$ und so daß $\mathrm{ad}(x_s)$ bzw. $\mathrm{ad}(x_n)$ den halbeinfachen bzw. nilpotenten Anteil von $\mathrm{ad}(x)$ bilden. Tatsächlich sind in einer halbeinfachen Liealgebra über einem Körper k mit $\mathrm{char}(k) = 0$ und $k = \bar{k}$ alle Automorphismen der Form $\exp(\mathrm{ad}(x))$ mit $x \in \mathfrak{g}$ innere Automorphismen. Wegen der abstrakten Jordanzerlegung, genügt es, sich zu überlegen, daß die Automorphismen der Form $\exp(\mathrm{ad}(x))$, wobei $\mathrm{ad}(x)$ diagonalisierbar ist, innere Automorphismen sind. Dies folgt aus einer allgemeineren Aussage, [Ja, Ch.IX,Prop.3] welche lautet: Sei τ ein Automorphismus, der eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}$ elementweise fixiert, dann ist τ ein innerer Automorphismus. Da jedes ad-diagonalisierbare Element x von $\mathfrak{g}$ in einer Cartanunteralgebra $\mathfrak{h}$ enthalten ist, sind die Voraussetzungen für $\tau = \exp(\mathrm{ad}(x))$ erfüllt.

Definition 2.16. Sei $C \equiv (c_{ij})$ die Cartanmatrix von $\mathfrak{g}$. Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(C)$ von C ist definiert als die Gruppe aller Permutationen $\pi \in S_l$, so daß $c_{\pi(i)\pi(j)} = c_{ij}$.

Die Gruppe $\mathrm{Aut}(C)$ kann man auch mit der Symmetriegruppe des Dynkindiagramms von $\mathfrak{g}$ identifizieren, denn eine Permutation, die die Cartanmatrix von $\mathfrak{g}$ invariant läßt, läßt auch das Dynkindiagramm von $\mathfrak{g}$ invariant und umgekehrt. Daher wird $\mathrm{Aut}(C)$ als die Gruppe der *Diagrammautomorphismen* von $\mathfrak{g}$ bezeichnet.

Definition 2.17. Sei $\mathfrak{g}$ eine zerfallende einfache Liealgebra über einem Körper der Charakteristik 0, $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra, $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I := \{1, \ldots, |\Pi|\}\}$ eine Basis des Wurzelsystems von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$ und $(E_i)_{i \in I}$ mit $0 \neq E_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ eine Familie von Erzeugenden der Wurzelräume zu den einfachen Wurzeln. Ein solches Tupel $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, (E_i)_{i \in I})$ bezeichnen wir wie in [Bou7-8, Ch.VIII.§4.1] als „Épinglage" (Festnagelung).

Satz 2.18. *Gegeben sei eine Épinglage* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, (E_i)_{i \in I})$. *Sei* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *die Untergruppe von* $Aut(\mathfrak{g})$ *der Automorphismen von* $\mathfrak{g}$, *die* $\mathfrak{h}$ *stabilisieren,* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$ *die Untergruppe von* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *der Automorphismen von* $\mathfrak{g}$, *die* $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ *(bezüglich der kontragredienten Darstellung) stabilisieren und* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, (E_i)_{i \in I})$, *die Untergruppe von* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$, *der Automorphismen, die die Familie* $(E_i)_{i \in I}$ *stabilisiert. Dann gilt:*

1. $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, (E_i)_{i \in I}) \cong Aut(C)$.
2. $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi) \cong T \rtimes Aut(C)$, *wobei* $T = Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi) \cap Int(\mathfrak{g})$ *ein Torus in* $Aut(\mathfrak{g})$ *mit Liealgebra* $\mathfrak{h}$ *ist. Insbesondere ist* T *zusammenhängend und daher gleich* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)^\circ$. *Über* $\mathbb{C}$ *erhält man* T *als* $\exp(ad(\mathfrak{h}))$.
3. $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = N \rtimes Aut(C)$, *wobei* $N = Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap Int(\mathfrak{g})$ *der Normalisator von* T *in* $Int(\mathfrak{g})$ *ist. Es ist* $N/T \cong W$ *die Weylgruppe von* $\mathfrak{g}$ *und* $Aut(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^\circ = T$.

4. *$Aut(\mathfrak{g}) \cong Int(\mathfrak{g}) \rtimes Aut(C)$ und $Int(\mathfrak{g}) = Aut(\mathfrak{g})^\circ$. Die Liealgebra von $Aut(\mathfrak{g})$ ist isomorph zu $\mathfrak{g}$.*

Beweisidee: (Für die Details siehe [Bou7-8, Ch.VIII.]). Durch jede Épinglage wird eine Einbettung von $\mathrm{Aut}(C)$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ festgelegt, indem man für $\pi \in \mathrm{Aut}(C)$ setzt $\pi(E_i) = E_{\pi(i)}$ und $\pi(E_{-i}) = E_{-\pi(i)}$. (Die E_{-i} sind eindeutig bestimmt durch $[E_i, E_{-i}] = h_i$ und h_i durch $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ für alle $j \in I$). Die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ operiert in offensichtlicher Weise auf der Menge der Épinglagen von $\mathfrak{g}$. Man kann zeigen, daß $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ einfach transitiv auf der Menge der Épinglagen von $\mathfrak{g}$ operiert und daß der Stabilisator einer Épinglage isomorph zu $\mathrm{Aut}(C)$ ist, vermöge der zugehörigen Einbettung von $\mathrm{Aut}(C)$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Ähnlich zeigt man, daß auch die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ der Automorphismen von $\mathfrak{g}$, welche $\mathfrak{h}$ stabilisieren ein semidirektes Produkt ist, nämlich $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rtimes \mathrm{Aut}(C)$ (siehe [Bou7-8, Ch.VIII.§5.2.Cor. zu Prop.4]), analog für $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$ (siehe [Bou7-8, Ch.VIII.§5.2.Cor.2 zu Prop.2]). $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist das semidirekte Produkt von $\mathrm{Aut}(C)$ und $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (siehe [Bou7-8, Ch.VIII.§5.3.Cor.1], [Ja, Ch.IX]). □

Bis zum Ende dieses Abschnitts sei nun $k = \mathbb{C}$, also alle auftretenden Liealgebren komplex.

Satz 2.19. *Die Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ eines Automorphismus endlicher Ordnung einer einfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist eine reduktive Unteralgebra und ist $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine maximale torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, dann ist der Zentralisator von $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Siehe [Ka, §8 Lemma 8.1.b,c]. □

Satz 2.20. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra und σ ein Automorphismus endlicher Ordnung von $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine maximale torale Unteralgebra von $\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \mathfrak{g}^\sigma$. Dann gilt: σ ist konjugiert zu einem Automorphismus der Form*

$$\nu\,\tau \qquad \textit{mit } \tau = \exp\left(ad\,\frac{2\pi i}{m} h_\sigma\right), \tag{91}$$

wobei ν ein Diagramm-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist und $h_\sigma \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ mit $\alpha(h_\sigma) \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$.

Beweis: Sei $\mathfrak{h} = Z(\mathfrak{h}_{\bar{0}})$ der Zentralisator von $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ in $\mathfrak{g}$. Nach Satz 2.19 ist $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}$. Daher enthält $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ ein reguläres Element h von $\mathfrak{g}$ und es ist $\mathfrak{h} = Z(h)$. Daher wird $\mathfrak{h}$ von σ stabilisiert. Durch h ist vermöge $\Phi_+ := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(h) > 0\}$ und $\Phi_- := -\Phi_+$ eine Zerlegung $\Phi = \Phi_+ \dot\cup \Phi_-$ des Wurzelsystem Φ in positive und negative Wurzeln definiert. Damit ist auch eine Basis Π des Wurzelsystems als die Menge der unzerlegbaren Elemente von Φ_+ festgelegt. Da h von σ fixiert wird, stabilisiert σ die durch h festgelegte Basis Π, d.h. $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi)$ und σ läßt sich nach Satz 2.18.2 in eindeutiger Weise schreiben als ein Produkt $\sigma = \nu\tau_1$ mit einem Diagrammautomorphismus ν und einem inneren Automorphismus $\tau_1 = \exp(\mathrm{ad}(h_1))$

für ein $h_1 \in \mathfrak{h}$. Sei nun r die Ordnung von ν und $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\bar{q}\in\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\bar{q}}(\nu)$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in Eigenräume bezüglich ν. (Die Schreibweise $\mathfrak{g}_{\bar{q}}(\nu)$ soll dazu dienen, Verwechslungen mit den Eigenräumen $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ bezüglich σ auszuschließen.) Sei $\mathrm{p}_{\mathfrak{g}^\nu}$ die Projektion auf $\mathfrak{g}_{\bar{0}}(\nu)$ bezüglich obiger Zerlegung. Ist nun $h_1 \notin \mathfrak{h}_{\bar{0}}$, dann zeigen wir: es existiert ein $h' \in \mathfrak{h}$ so daß $\exp(\mathrm{ad}(h'))\sigma\exp(-\mathrm{ad}(h')) = \nu\exp(\mathrm{ad}(\tilde{h}_\sigma))$ mit $\tilde{h}_\sigma = \mathrm{p}_{\mathfrak{g}^\nu}(h_1)$. Dies ist äquivalent zu $\exp(\mathrm{ad}(h'))\nu\exp(\mathrm{ad}(h_1 - h'))\nu^{-1} = \nu\exp(\mathrm{ad}(\tilde{h}_\sigma))\nu^{-1}$ und für $h \in \mathfrak{h}$ gilt allgemein $\nu\exp(\mathrm{ad}(h))\nu^{-1} = \exp(\mathrm{ad}(\nu(h)))$. Daher ist obige Gleichung erfüllt, wenn für h' gilt $(\nu - \mathrm{id})(h') = \nu(h_1) - \tilde{h}_\sigma$. Da nun $\mathrm{p}_{\mathfrak{g}^\nu}(\nu(h_1) - \tilde{h}_\sigma) = 0$ ist, liegt $\nu(h_1) - \tilde{h}_\sigma$ in der Summe der Eigenräume von ν zu Eigenwerten ungleich 1 und auf diesem Raum ist $\nu - \mathrm{id}$ invertierbar. Daher existiert ein solches h'. Da nun ν und τ kommutieren, muß die Ordnung von beiden m teilen. Für τ impliziert das, daß $\exp(m\alpha(\tilde{h}_\sigma)) = \mathrm{id}$, d.h. $m\,\alpha(\tilde{h}_\sigma) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in \Phi$. Setze nun $h_\sigma = \frac{m}{2\pi i}\tilde{h}_\sigma$. □

Sei σ ein Automorphismus der Ordnung m von $\mathfrak{g}$ und r die Ordnung des Bildes von σ in der Quotientengruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, also die kleinste natürliche Zahl, so daß σ^r ein innerer Automorphismus ist. Dann wird σ als (m, r)-Automorphismus bezeichnet. Die Zahl r hängt offenbar nur von der Konjugationsklasse von σ ab und sie ist gleich der Ordnung von ν in (91). Die Fixpunktalgebra von σ hat stets den gleichen Rang wie die Fixpunktalgebra von ν. Insbesondere erkennt man einen inneren Automorphismus daran, daß die Fixpunktunteralgebra denselben Rang wie $\mathfrak{g}$ hat.

Die Diagrammautomorphismen der einfachen Liealgebren lassen sich wie folgt beschreiben: Durch Betrachtung der Dynkindiagramme[11] erkennt man sofort, daß $\mathrm{Aut}(C) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für $C \equiv A_l$ mit $l \geq 2, D_l$ mit $l \geq 5$ und E_6, $\mathrm{Aut}(C) \cong S_3$ für $C \equiv D_4$ und $\mathrm{Aut}(C) \cong \{e\}$ für alle andereren Dynkindiagramme. In S_3 sind die drei Elemente der Ordnung 2 zueinander konjugiert und die beiden Elemente der Ordnung 3 sind zueinander konjugiert. Daher genügt in allen Fällen die Angabe der Ordnung, um einen Diagrammautomorphismus bis auf Konjugation festzulegen. Der Rang l der Fixpunktalgebra ist gleich der Zahl der Orbiten von ν. Die nichttrivialen Diagrammautomorphismen von sl_n sind für ungerades n in $\mathrm{Aut}(\mathrm{sl}_n)$ konjugiert zu $X \mapsto -X^t$ für $X \in \mathrm{sl}_n$ in der natürlichen Darstellung von sl_n, für gerades n zu $X \mapsto JX^tJ$ mit einer antisymmetrischen Matrix J, für die $J^2 = -E_n$ ist (siehe Beispiel 2.25). Die Fixpunktalgebra eines Diagrammautomorphismus ist daher für sl_n isomorph zu so_n, also vom Typ B_l falls $n = 2l + 1$ ungerade ist, und isomorph zu sp_n vom Typ C_l falls $n = 2l$ gerade ist. Der nichttriviale Diagrammautomorphismus der Ordunung 2 von so_n mit $n = 2l$ ist konjugiert zu $X \mapsto -JX^tJ$ mit $J = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, also die Involution aus Beispiel 1.57. Die Fixpunktunteralgebra ist isomorph zu so_{n-1}, also vom Typ B_l. Die Fixpunktunteralgebra des Diagrammautomorphismus der Ordnung 3 von so_8 ist vom Typ G_2. Die Fixpunktunteralgebra

[11] Man erhält das Dynkindiagramm der einfachen Liealgebra vom Typ X_n durch Streichen des nullten Knotens (in Figur 2 ausgefüllt dargestellt) des affinen Diagramms $X_n^{(1)}$ (siehe Figur 2).

des Diagrammautomorphismus der Ordnung 2 der einfachen Liealgebra vom Typ E_6 ist vom Typ F_4 (siehe [Ka, Prop.7.9.b)]).

Sei nun $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra vom Typ X_n, $\nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ein Diagrammautomorphismus der Ordnung r und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}} \oplus \mathfrak{g}_{-\bar{1}}$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in Eigenräume bezüglich ν. Die Struktur dieser Zerlegung hängt eng mit dem affinen Dynkindiagramm $X_n^{(r)}$ zusammen. Es ist das Dynkindiagramm der zugehörigen getwisteten Kac-Moody-Algebra. Sei eine Épinglage $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, (E_i)_{i \in I})$, die durch ν stabilisiert wird, fest gewählt, $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Sei $\bar{I} \subset I$ ein Vertretersystem der Orbiten von ν. Weiter sei $\tilde{r} : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ die Restriktion von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Die Menge

$$\bar{\Pi} := \{\bar{\alpha}_i := \tilde{r}(\alpha_i) \mid i \in \bar{I}\} \tag{92}$$

bildet eine Basis des Wurzelsystems $\bar{\Phi}_0$ von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ bezüglich $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ (siehe [BR, B-III,S.31]). Für $i \in \bar{I}$ sei $O(i)$ der Orbit von i unter ν. Eine Épinglage $(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{h}_{\bar{0}}, \bar{\Pi}, (\bar{E}_i)_{i \in \bar{I}})$ erhält man, indem man setzt:

$$\bar{E}_i := \sum_{j \in O(i)} E_j. \tag{93}$$

Sei $\bar{\theta}_0$ das höchste Gewicht des $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Moduls $\mathfrak{g}_{-\bar{1}}$ (dieser ist stets irreduzibel (siehe [Ka, Prop.7.9.g)])),

$$\bar{\theta}_0 = \sum_{i \in \bar{I}} a_i \bar{\alpha}_i. \tag{94}$$

Für $r = 1$ ist $\bar{\theta}_0$ die größte Wurzel von Φ, für $r \neq 1$ und $X_n^{(r)} \neq A_{2l}^{(2)}$ ist sie die größte kurze Wurzel von $\bar{\Phi}_0$ bezüglich $\bar{\Pi}$, für $X_n^{(r)} = A_{2l}^{(2)}$ ist sie das doppelte der größten kurzen Wurzel von $\bar{\Phi}_0$ (vergleiche (103)). Sei $\bar{\alpha}_0 := -\bar{\theta}_0$. Sei $\alpha \in \tilde{r}^{-1}(\bar{\alpha}_0)$ und $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$. Ein nichtverschwindendes Element $\bar{E}_0 \in (\mathfrak{g}_{\bar{1}})_{\bar{\alpha}_0}$ erhält man dann durch die Projektion auf $\mathfrak{g}_{\bar{1}}(\nu)$ (siehe (74)):

$$\bar{E}_0 := \sum_{q=0}^{r-1} \zeta_r^{-q} \nu^q (E_\alpha). \tag{95}$$

Satz 2.21. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

- *Der $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ ist irreduzibel und äquivalent zu $\mathfrak{g}_{-\bar{1}}$.*
- *Das niedrigste Gewicht des $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Moduls $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ ist $-\bar{\theta}_0$.*
- *Die Elemente $(\bar{E}_i)_{i \in \bar{I}_0}$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Die Aussagen entsprechen [Ka, Prop. 8.3.d,f und a]. Eine detaillierte Betrachtung der einzelnen Fälle findet man in [Ka, Ch.7.9]. □

Sei $\bar{I}_0 := \bar{I} \cup \{0\}$. Sei $(.|.)$ die durch die Killingform von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ induzierte Bilinearform. Dann bilden die Koeffizienten $(2(\bar{\alpha}_j|\bar{\alpha}_i)/(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i))_{i,j \in \bar{I}_0}$ eine affine verallgemeinerte Cartanmatrix vom Typ $X_n^{(r)}$.

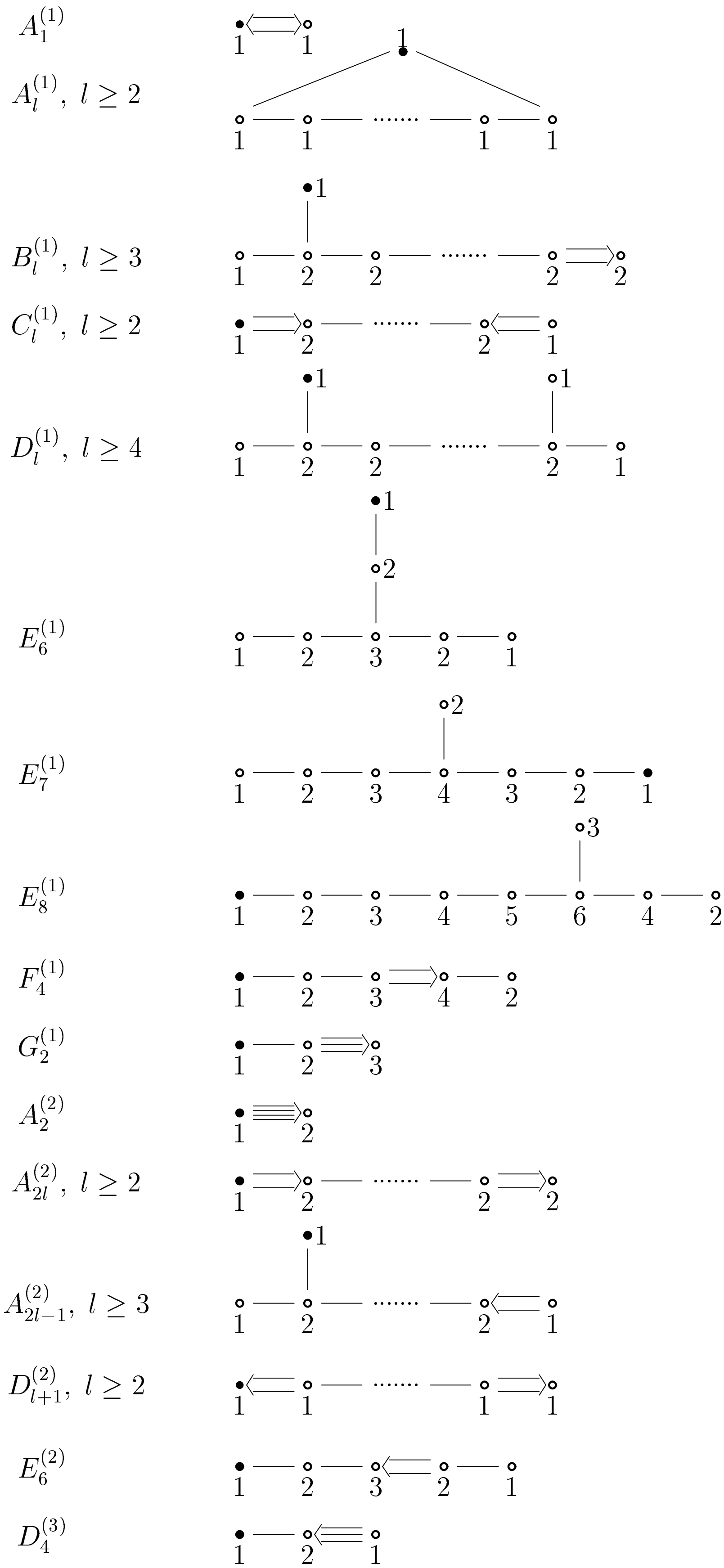


Abbildung 2. Affine Dynkindiagramme.

Es sei eine Numerierung der Knoten des Dynkindiagramms $X_n^{(r)}$ von 0 bis l vorgegeben, wobei der Knoten mit der Nummer 0 durch den ausgefüllten Kreis in Figur 2 gekennzeichnet sei[12]. Sei $\psi : \bar{I}_0 \to \{0, \dots, l\}$ eine Bijektion mit $\psi(0) = 0$ und so daß $2(\bar{\alpha}_j|\bar{\alpha}_i)/(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i) = c_{\psi(i)\psi(j)}$ für $i, j = 0, \dots, l$, wobei die c_{ij} die Koeffizienten der verallgemeinerten Cartan-Matrix vom Typ $X_l^{(r)}$ bezüglich der vorgegebenen Numerierung seien. Wir identifizieren nun $\bar{I}_0$ mit $\{0, \dots, l\}$ vermöge ψ. Die Koeffizienten der Knoten der affinen Dynkin-Diagramme (siehe Figur 2) seien entsprechend mit $a_0, \dots, a_l$ durchnumeriert. Es ist $a_0 = 1$ und a_i wie in (94) für $i = 1, \dots, l$.

Der nun folgende Klassifikationssatz für Automorphismen endlicher Ordnung geht zurück auf Kac [Ka3].

Satz 2.22. *Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra vom Typ X_n und ν ein Diagrammautomorphismus von $\mathfrak{g}$ der Ordnung r. Sei l der Rang der Fixpunktalgebra von ν, $a_0, \dots, a_l$ die Koeffizienten des Dynkindiagramms $X_n^{(r)}$ und das Erzeugendensystem $(\bar{E}_i)_{i\in\{0,\dots,l\}}$ wie in (93) und (95) definiert. Seien $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_l)$ ein Tupel von teilerfremden nichtnegativen ganzen Zahlen mit der Eigenschaft:*

$$r\left(\sum_{i=0}^{l} a_i s_i\right) = m. \tag{96}$$

Dann ist durch die Relationen

$$\sigma_{\mathbf{s};r}(\bar{E}_i) = \zeta_m^{s_i}\bar{E}_i \text{ für } i = 0 \dots l \tag{97}$$

ein (m, r)-Automorphismus $\sigma_{\mathbf{s};r}$ von $\mathfrak{g}$ wohldefiniert. Umgekehrt ist jeder (m, r)-Automorphismus zu einem solchen Automorphismus konjugiert. Die durch zwei Tupel (s_i) und (s_i') wie oben definierten Automorphismen sind genau dann zueinander konjugiert, wenn (s_i) und (s_i') durch einen Automorphismus des affinen Dynkindiagramms $X_n^{(r)}$ auseinander hervorgehen. Die Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ von $\sigma_{s;r}$ ist eine reduktive Unteralgebra vom Rang l. Das Dynkindiagramm des halbeinfachen Anteils der Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}_{\bar{0}}'$ ist das von den Knoten i mit $s_i = 0$ gebildete Unterdiagramm des affinen Dynkindiagramms vom Typ $X_n^{(r)}$.

Beweis: Siehe [Ka, Theorem 8.6. und Prop. 8.6.]. □

Beispiel 2.23. Um alle Automorphismen endlicher Ordnung einer bestimmten einfachen Liealgebra, zum Beispiel von so_8 zu bestimmen, muß man alle zugehörigen affinen Dynkindiagramme betrachten. In diesem Fall gibt es davon 3, nämlich $D_4^{(1)}$, $D_4^{(2)}$ und $D_4^{(3)}$ (siehe Figur 3). Fragen wir nun zum Beispiel nach den Automorphismen

[12] Wir wählen den 0-ten Knoten jeweils so, daß die verbleibenden Knoten das Dynkindiagramm der Fixpunktunteralgebra des zugehörigen Diagrammautomorphismus bilden. Bei dem Diagramm $A_{2l}^{(2)}$ unterscheidet sich diese Wahl des 0-ten Knotens von der in [Ka]. Mit unserer Wahl vereinheitlichen sich aber einige Aussagen im Vergleich zu [Ka], zum Beispiel ist der 0-te Koeffizient des Dynkin-Diagramms (siehe Figur 2) stets gleich 1.

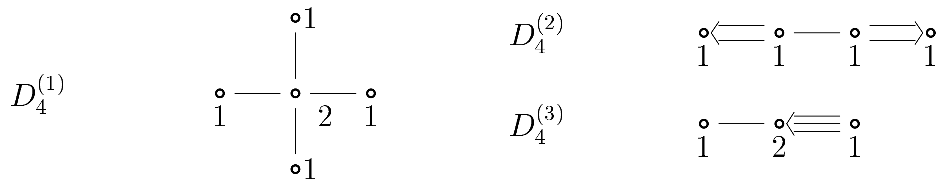


Abbildung 3. affine Dynkindiagramme vom Typ $D_4^{(r)}$.

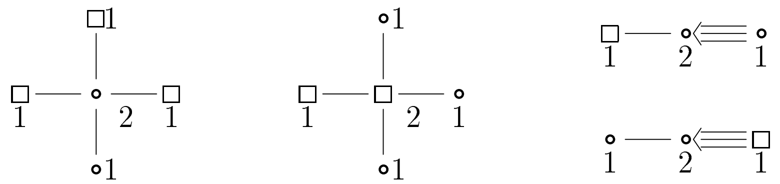


Abbildung 4. Automorphismen der Ordnung 3 von so_8.

der Ordnung 3 von so_8, so fällt $D_4^{(2)}$ weg, denn alle dazu assoziierten Automorphismen haben nach (96) eine durch $r = 2$ teilbare Ordnung. Es ergeben sich die durch Figur 4 skizzierten vier Möglichkeiten. Dabei bedeutet ein quadratischer Knoten, daß $s_i = 1$ ist und ein runder Knoten, daß $s_i = 0$ ist. Das Dynkindiagramm der Fixpunktunteralgebra ist also jeweils durch das von den runden Knoten aufgespannte Diagramm gegeben und ist in den 4 Fällen jeweils gleich $A_2, A_1 \times A_1 \times A_1, G_2$ bzw. A_2.

Um die gemäß Satz 1.52 zu den $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-graduierten Kontrakionen von einfachen Liealgebren gehörigen Limesalgebren genauer zu beschreiben, wollen wir nun die dabei auftretenden Darstellungen von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ auf $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ betrachten.

Wir folgen dabei i.w. [OV, Ch.3.11.]. Sei wieder $\nu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ein Diagrammautomorphismus der Ordnung r und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}(\nu) \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}(\nu)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}}(\nu) \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}(\nu) \oplus \mathfrak{g}_{-\bar{1}}(\nu)$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in Eigenräume bezüglich ν. Weiter sei $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}$, die durch ν stabilisiert wird und $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine Cartanunteralgebra der Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}^{\nu}$. (Dies ist äquivalent dazu, daß $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ eine Cartanunteralgebra der Fixpunktalgebra $\mathfrak{g}^{\sigma_{\mathbf{s};r}}$ für alle $\sigma_{\mathbf{s};r}$ wie in Satz 2.22 ist.) Sei $\mathfrak{h}_{\bar{q}} := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\bar{q}}(\nu)$ für $\bar{q} \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Sei Φ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ und $\bar{\Phi} := \{\alpha|_{\mathfrak{h}_{\bar{0}}} \mid \alpha \in \Phi\}$. Für $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$ sei $\mathfrak{g}_{\bar{\alpha}}$ der zugehörige Gewichtsraum von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Man kann zeigen, siehe z.B. [Ka, §7.9,7.10], daß $\bar{\Phi}$ ein nicht notwendig reduziertes Wurzelsystem bildet und daß für alle $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$, $\bar{q} \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ und

(98) $$\mathfrak{g}_{\bar{\alpha},\bar{q}} := \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \cap \mathfrak{g}_{\bar{q}}(\nu), \quad \mathfrak{g}_{0,\bar{q}} := \mathfrak{h}_{\bar{q}}$$

gilt

(99) $$\dim(\mathfrak{g}_{\bar\alpha,\bar q}) \le 1, \quad \dim(\mathfrak{g}_{0,\bar q}) = (n-l)/(r-1) \quad \text{für } \bar q \neq 0,\ r \neq 1.$$

Für $\bar q \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ sei

(100) $$\bar\Phi_{\bar q} := \{\bar\alpha \in \bar\Phi \mid \mathfrak{g}_{\bar\alpha,\bar q} \neq \{0\}\}.$$

Im Fall $A_{2l-1}^{(2)}$ ist $\bar\Phi = BC_l$ und hat drei Wurzellängen:

(101) $$\bar\Phi = BC_l = \bar\Phi_s \dot\cup \bar\Phi_m \dot\cup \bar\Phi_l \quad \text{mit } \bar\Phi_l = 2\bar\Phi_s,$$

wobei $\bar\Phi_s$, $\bar\Phi_m$ bzw. $\bar\Phi_l$ die Mengen der kurzen, mittleren bzw. langen Wurzeln in $\bar\Phi$ bezeichnen. In allen anderen Fällen mit $r > 1$ ist das Wurzelsystem $\bar\Phi$ reduziert und hat zwei Wurzellängen:

(102) $$\bar\Phi = \bar\Phi_s \dot\cup \bar\Phi_l = \bar\Phi_{\bar 0}.$$

Wir haben folgende Liste (siehe [Ka, Ch.7])

(103) $$\begin{array}{lcr}
A_{2l-1}^{(2)} & \bar\Phi_{\bar 0} = C_l & \bar\Phi_{\bar 1} = \bar\Phi_s \\
D_{l+1}^{(2)} & \bar\Phi_{\bar 0} = B_l & \bar\Phi_{\bar 1} = \bar\Phi_s \\
E_6^{(2)} & \bar\Phi_{\bar 0} = F_4 & \bar\Phi_{\bar 1} = \bar\Phi_s \\
D_4^{(3)} & \bar\Phi_{\bar 0} = G_2 & \bar\Phi_{\bar 1} = \bar\Phi_{\bar 2} = \bar\Phi_s \\
A_{2l}^{(2)} & \bar\Phi_{\bar 0} = B_l = \bar\Phi_s \cup \bar\Phi_m & \bar\Phi_{\bar 1} = \bar\Phi_s \cup \bar\Phi_m \cup \bar\Phi_l.
\end{array}$$

Wir definieren nun ein erweitertes System, das man als die Menge der Gewichte von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}_{\bar 0} \times \langle \nu \rangle$ (oder dem zugehörigen Quasitorus in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (siehe [OV])) betrachten kann:

(104) $$\tilde\Phi := \{(\bar\alpha, \bar q) \mid \bar\alpha \in \bar\Phi \cup \{0\}, \bar q \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} \text{ und } \mathfrak{g}_{\bar\alpha,\bar q} \neq \{0\}\}.$$

Die entsprechende Zerlegung

(105) $$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\tilde\alpha \in \tilde\Phi} \mathfrak{g}_{\tilde\alpha} \text{ mit } \mathfrak{g}_{(\bar\alpha,\bar q)} := \mathfrak{g}_{\bar\alpha,\bar q} \text{ wie in (98)}$$

bezeichnen wir als ν-Wurzelraumzerlegung. Setzt man nun

(106) $$\tilde\Pi := \{\tilde\alpha_i := (\bar\alpha_i, \bar 0) \mid i \in \{1,\dots,l\}\} \cup \{\tilde\alpha_0 := (\bar\alpha_0, \bar 1)\},$$

so gibt es für alle $\tilde\alpha \in \tilde\Phi$ eine Darstellung

(107) $$\tilde\alpha = \sum_{i=0}^{l} k_i \tilde\alpha_i \text{ mit } k_i \in \mathbb{N}_0 \text{ für alle } i \in \{0,\dots,l\}.$$

Dies folgt daraus, daß die $(\bar E_i)_{i \in \bar I_0}$ ein Erzeugendensystem bilden. Diese Darstellung ist nicht eindeutig. Sei $\mathbf{k}(\tilde\alpha) := (k_0,\dots,k_l) \in \mathbb{N}_0^{l+1}$ ein Tupel, so daß (107) gilt. Seien $\mathbf{s}$ und $\sigma = \sigma_{\mathbf{s};r}$ ein Tupel und ein (m,r)-Automorphismus wie in Satz 2.22. Aus (97) folgt, daß σ auf $\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}$ durch den skalaren Wert $\zeta_m^{\mathbf{k}(\tilde{\alpha})\cdot\mathbf{s}}$ operiert, wobei der Punkt „$\cdot$" das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Es gilt also

$$\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \subseteq \mathfrak{g}_{\overline{\mathbf{k}(\tilde{\alpha})\cdot\mathbf{s}}}, \quad \text{und daher} \quad \mathfrak{g}_{\bar{j}} = \bigoplus_{\tilde{\alpha}:\, \overline{\mathbf{k}(\tilde{\alpha})\cdot\mathbf{s}}=\bar{j}} \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \quad \text{für } \bar{j} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}. \tag{108}$$

Für $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}$ sei $j_\sigma(\tilde{\alpha}) \in \{0, \ldots, m-1\}$ so gewählt, daß $\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{j}}$. Für einen (m,r)-Automorphismus σ sei $\mathbf{s}(\sigma) = (s_0, \ldots, s_l)$ so gewählt, daß σ zu $\sigma_{\mathbf{s};r}$ konjugiert ist (siehe Satz 2.22). Sind ν und $\mathbf{s}$ gegeben, dann sei das Element $h_\sigma \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ in (91) so gewählt, daß für die einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ gilt $\bar{\alpha}_i(h_\sigma) = s_i$ für $i = 1, \ldots, l$. Dann folgt aus (96)

$$s_0 = \frac{m}{r} + \bar{\alpha}_0(h_\sigma). \tag{109}$$

Sei $\tau = \exp\left(\operatorname{ad} \frac{2\pi i}{m} h_\sigma\right)$. Für $\tilde{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{q})$ und $x \in \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}$ gilt

$$\nu\tau(x) = \zeta_m^{\bar{\alpha}(h_\sigma)} \zeta_r^q\, x = \zeta_m^{\bar{\alpha}(h_\sigma)+q\frac{m}{r}}\, x. \tag{110}$$

Durch Anwendung auf die Erzeugenden $(\bar{E}_i)_{i\in\bar{I}_0}$ folgt aus Satz 2.22, daß dann $\nu\tau = \sigma_{\mathbf{s};r}$ ist. Allgemein gilt für $\tilde{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{q})$ mit $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi} \cup \{0\}$ und $q \in \{0, \ldots, r-1\}$:

$$j_\sigma(\tilde{\alpha}) \equiv \mathbf{k}(\tilde{\alpha}) \cdot \mathbf{s} \equiv \bar{\alpha}(h_\sigma) + q\,\frac{m}{r} \mod m. \tag{111}$$

Für $X \subset \{0, \ldots, l\}$ sei

$$T(X) := \{\mathbf{t} = (t_0, \ldots, t_l) \mid t_i \in \mathbb{N}_0 \text{ für alle } i \text{ und } t_i = 0 \text{ für } i \in X\}. \tag{112}$$

Sei $X_\sigma := \{i \in \bar{I}_0 \mid s_i = 0\}$. Für ein Tupel $\mathbf{t} \in X_\sigma$ sei

$$\tilde{\alpha}_{\mathbf{t}} := \sum_{i=0}^{l} t_i \tilde{\alpha}_i, \tag{113}$$

und

$$\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}} := \{\tilde{\alpha}_{\mathbf{t}} + \sum_{i\in X_\sigma} \lambda_i \tilde{\alpha}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{N}_0\} \cap \tilde{\Phi}. \tag{114}$$

Offenbar bildet dann

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{t}} := \bigoplus_{\tilde{\alpha}\in\tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}} \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \tag{115}$$

einen $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Untermodul von $\mathfrak{g}$. Für $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in T(X_\sigma)$ gilt entweder $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{t}'}$ oder $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbf{t}'} = \{0\}$. (Da die Darstellung von $\tilde{\alpha}$ als Linearkombination der $\tilde{\alpha}_i$ nicht eindeutig ist, kann auch für $\mathbf{t} \neq \mathbf{t}'$ der Fall $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{t}'}$ auftreten.)

Satz 2.24. [OV, Ch.3.11] *Mit den Bezeichnungen von Satz 2.22 gilt:*

- *Als $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul ist $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ dual zu $\mathfrak{g}_{-\bar{j}}$.*

- *Die $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ zerfallen ihrerseits in Untermoduln der Form $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}}$ wie in (115), es ist*

$$\mathfrak{g}_{\bar{j}} = \bigoplus'_{\mathbf{t}\in T(X_\sigma):\, \overline{\mathbf{t}\cdot\mathbf{s}}=\bar{j}} \mathfrak{g}_{\mathbf{t}} \quad \text{für } \bar{j} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tag{116}$$

  wobei der Strich in $\bigoplus'$ bedeute, daß jedes $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}}$ nur einfach auftrete.
- *Die $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}}$ sind irreduzibel bis auf die folgende Ausnahme: Sei $X_n^{(r)} = A_n^{(2)}$ mit $n \geq 4$ oder $X_n^{(r)} = E_6^{(2)}$ und $\mathbf{t}^* := (t_0, \dots, t_l)$ mit $t_i = 0$ für $i \in X_\sigma$ und $t_i = a_i$ sonst. Dann ist $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*} \subseteq \mathfrak{g}_{\overline{m/2}}$ und für gewisse σ kommt es vor, daß $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$ reduzibel ist.*
- *Für den $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$ gilt: Es gibt eine Zerlegung des halbeinfachen Anteils $\mathfrak{g}'_{\bar{0}}$ von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ in Ideale*

$$\mathfrak{g}'_{\bar{0}} = (\mathfrak{g}'_{\bar{0}})_0 \oplus (\mathfrak{g}'_{\bar{0}})_1 \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}'_{\bar{0}})_M \tag{117}$$

  und eine dazu korrespondierende Zerlegung von $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$,

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*} = (\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_0 \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_1 \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_M, \tag{118}$$

  so daß gelten
  - *$(\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_0$ ist als $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul trivial,*
  - *für $p = 1, \dots, M$ ist $(\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_p$ ein treuer irreduzibler $(\mathfrak{g}'_{\bar{0}})_p$-Modul,*
  - *für $p \neq q \in \{0, \dots, M\}$ operiert $(\mathfrak{g}'_{\bar{0}})_p$ trivial auf $(\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*})_q$.*

  Diese Zerlegungen hängen nur von X_σ ab. Insbesondere ist die Anzahl der nichttrivialen irreduziblen Komponenten von $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$ als $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul höchstens so groß wie die Anzahl der einfachen Ideale von $\mathfrak{g}'_{\bar{0}}$.

Beweis: Aus der Invarianz der Killingform von $\mathfrak{g}$ bezüglich σ folgt, daß $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ und $\mathfrak{g}_{-\bar{j}}$ durch die Killingform nichtausgeartet gepaart sind. Die Dualität von $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ und $\mathfrak{g}_{-\bar{j}}$ folgt dann aus der Invarianz der Killingform bezüglich der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$. Für alle $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}$ ist $\overline{\mathbf{k}(\tilde{\alpha}) \cdot \mathbf{s}} = \overline{\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}}$. Daher folgt aus (108)

$$\mathfrak{g}_{\mathbf{t}} \subset \mathfrak{g}_{\overline{\mathbf{t}\cdot\mathbf{s}}}. \tag{119}$$

Wegen (107) ist $\Phi = \bigcup_{\mathbf{t}\in T(X_\sigma)} \Phi_{\mathbf{t}}$. Daraus folgt (116). In [OV, Lem.3.9] wird gezeigt, daß $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}}$ irreduzibel ist, wenn $\dim(\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}) = 1$ ist für alle $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}_{\mathbf{t}}$. Die Beweisidee ist dabei folgende: Sei $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Liealgebra, V ein $\mathfrak{g}$-Modul, dessen Gewichte alle die Multiplizität 1 haben, und dessen Gewichte alle modulo dem Wurzelgitter Q äquivalent sind. Sei Q_+ die von den positiven Wurzeln erzeugte Halbgruppe. Nimmt man nun an, es gäbe zwei verschiedene höchste Gewichte λ_1, λ_2, so enthält die Schnittmenge $\lambda_1 - Q_+$ und $\lambda_2 - Q_+$ ein dominantes Gewicht. Dieses ist daher ein Gewicht beider Moduln, im Widerspruch zur Annahme, daß seine Multiplizität 1 ist.

Wegen (99) kann der $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}}$ also nur dann reduzibel sein, wenn $(0, \bar{q}) \in \Phi_{\mathbf{t}}$ und $\dim(\mathfrak{g}_{(0,\bar{q})}) = (n-l)/(r-1) > 1$ ist. Letzteres gilt nur in den Fällen $A_{2l}^{(2)}$ mit $l \geq 2$, $A_{2l-1}^{(2)}$ mit $l \geq 3$ und $E_6^{(2)}$. Insbesondere ist dann stets $r = 2$. Die Dimensionen

$A_{2l}^{(2)},\ l \geq 2$

$A_{2l-1}^{(2)},\ l \geq 3$

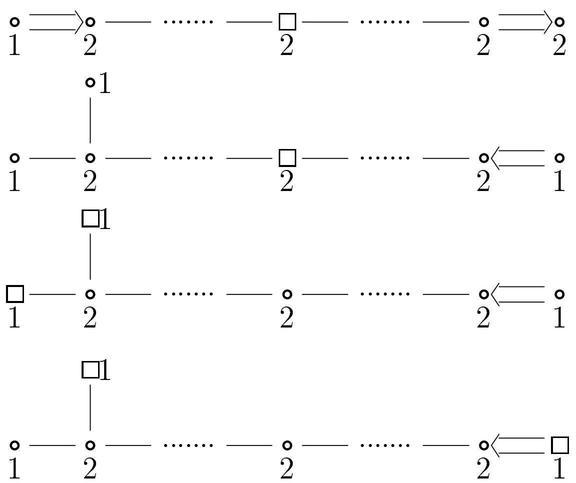


Abbildung 5. Äußere Automorphismen der Ordnung 4 von sl_n

von $\mathfrak{g}_{(0,\bar{1})}$ sind dann l, bzw. $l-1$, bzw. 2. Für $r = 2$ ist $(0, \bar{1}) = \sum_{i=0}^{l} a_i \tilde{\alpha}_i \in \Phi_{\mathbf{t}^*}$. Es gilt $\overline{\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{s}} = \overline{\sum_{i=0}^{l} a_i s_i} = \overline{m/2}$. Da $\mathbf{t}^*$ durch X_σ festgelegt ist, ist es auch $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$. Für die Aussage über die Zerlegung von $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$ in irreduzible Komponenten siehe [OV, Ch.3.11]. Das folgende Beispiel zeigt, daß es tatsächlich vorkommt, daß $\mathfrak{g}_{\mathbf{t}^*}$ reduzibel ist. □

Beispiel 2.25. (aus [OV]) Sei $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}_n$. Auf $\mathbb{C}^n$ sei eine Bilinearform definiert durch

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & E_i \end{pmatrix} \quad \text{mit } i \notin \{0, n\}, \quad n - i = 2j \text{ und } J_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_j \\ -E_j & 0 \end{pmatrix}. \tag{120}$$

Dann sei $\sigma(X) := -JX^tJ^{-1}$. Man überlegt sich leicht, daß dies ein Automorphismus der Ordnung 4 ist. Die Fixpunktunteralgebra ist

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}} = \{X \in \mathrm{sl}_n \mid XJ = -JX^t\} \cong \mathrm{sp}_{2j} \oplus \mathrm{so}_i. \tag{121}$$

Die zugehörigen Dynkindiagramme entsprechen den ersten drei Diagrammen in Figur 5. Hier tritt der Fall ein, daß der $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ nicht irreduzibel ist. Tatsächlich ist er isomorph zur direkten Summe der natürlichen Darstellungen von sp_{2j} und so_i (siehe [OV, S.122]). (Für die hier ausgeschlossenen Fälle $i = 0$ oder $i = n$ würden wir Involutionen erhalten. Die Fixpunktunteralgebren wären dann sp_n bzw. so_n.)

Zur vollständigen Beschreibung der Limesalgebra einer $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-graduierten Kontraktion sind noch die Produkte $[\mathfrak{g}_{\bar{j}}, \mathfrak{g}_{\bar{j}'}]$ zu betrachten, die ja, mit $j, j' \in 0, \ldots, m-1$ genau dann verschwinden, wenn $j + j' > m - 1$ ist, und andernfalls erhalten bleiben (Satz 1.52). Hierfür haben wir folgende Strukturaussagen, von denen die letzte von P. Slodowy stammt:

Satz 2.26. *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 2.22. Außerdem sei wieder für $\tilde\alpha \in \tilde\Phi$ die Zahl $j_\sigma(\tilde\alpha) \in \{0,\ldots,m-1\}$ so gewählt, daß $\mathfrak{g}_{\tilde\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar j}$. Für die Limesalgebra der Kontraktion bezüglich der durch σ induzierten $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-Graduierung gilt für $\tilde\alpha = (\bar\alpha,\bar q)$, $\tilde\beta = (\bar\beta,\bar q') \in \tilde\Phi$ mit $\bar q,\bar q' \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$:*

$$(122)\qquad [\mathfrak{g}_{\tilde\alpha},\mathfrak{g}_{\tilde\beta}]_0 = \begin{cases} \mathfrak{g}_{\tilde\alpha+\tilde\beta} & \textit{falls } j_\sigma(\tilde\alpha)+j_\sigma(\tilde\beta) < m \textit{ und } \bar\alpha \neq 0 \textit{ oder } \bar\beta \neq 0 \\ \{0\} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Das Zentrum der Limesalgebra ist stets trivial. Ist $s_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \{0,\ldots,l\}$ so gilt: Die durch die Lieklammer von $\mathfrak{g}$ definierte Abbildung

$$(123)\qquad \phi_j : \underbrace{\mathfrak{g}_{\bar 1}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{g}_{\bar 1}}_{j\text{-mal}} \to \mathfrak{g}_{\bar j} : \quad x_1\otimes\cdots\otimes x_j \mapsto [x_1,[\ldots,[x_{j-1},x_j]\ldots]]$$

ist für $j = 2,\ldots,m-1$ ein Epimorphismus von $\mathfrak{g}_{\bar 0}$-Moduln und diese Relation bleibt für die Limesalgebra erhalten.

Beweis: Aus [Ka, Remark 7.9.b)] folgt

$$(124)\qquad [\mathfrak{g}_{\tilde\alpha},\mathfrak{g}_{\tilde\beta}] = \mathfrak{g}_{\tilde\alpha+\tilde\beta},\ \text{wenn } \bar\alpha \neq 0 \text{ oder } \bar\beta \neq 0.$$

Mit Satz 1.52 und (108) folgt (122). Sei $\mathfrak{z}$ das Zentrum der Limesalgebra. Da $\mathfrak{z}$ invariant unter $\mathrm{ad}(\mathfrak{h}_{\bar 0})$ und ν ist, gilt $\mathfrak{z} = \bigoplus_{\tilde\alpha\in\tilde\Phi} \mathfrak{z}\cap\mathfrak{g}_{\tilde\alpha}$. Da für $\tilde\alpha = (\bar\alpha,\bar q)$ mit $\bar\alpha \neq 0$ gilt $\dim(\mathfrak{g}_{\tilde\alpha}) = 1$ und $[\mathfrak{h}_{\bar 0},\mathfrak{g}_{\tilde\alpha}] = \mathfrak{g}_{\tilde\alpha}$, ist in diesem Fall $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{g}_{\tilde\alpha} = \{0\}$. Ist $\tilde\alpha = (0,\bar 0)$ und $h \in \mathfrak{g}_{\tilde\alpha} = \mathfrak{h}_{\bar 0}$, so existiert ein $\bar\beta \in \bar\Phi$ mit $\bar\beta(h) \neq 0$ und ein $x \in \mathfrak{g}_{(\bar\beta,\bar 0)}$ mit $[h,x] = [h,x]_0 = \bar\beta(h)\,x \neq 0$. Also ist $\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}_{\bar 0} = \{0\}$. Sei nun $q \in \{1,\ldots,r-1\}$. Für $h \in \mathfrak{h}\setminus\{0\}$ existiert stets ein $\alpha_{i_1} \in \Pi$ mit $\alpha_{i_1}(h) \neq 0$. Da allgemein $\nu\alpha(h) = \alpha(\nu^{-1}(h))$, ist $\alpha_{i_1} \notin \Phi^\nu$ für $h \in \mathfrak{h}_{\bar q}\setminus\{0\}$. Es ist dann $\bar\alpha_i = \alpha_{i_1}|_{\mathfrak{h}_{\bar 0}} \in \bar\Pi$ eine einfache Wurzel von $\bar\Phi$ (siehe (92)). Für $\bar\alpha \in \bar\Phi$ wird der Raum $\mathfrak{g}_{(\bar\alpha,\bar q)}$ aufgespannt von

$$(125)\qquad \bar E_{\bar\alpha}^{(\bar q)} = \sum_{p=0}^{r-1} \zeta_r^{-qp} E_{\nu^p(\alpha)} \neq 0 \quad \text{für } \alpha \notin \Phi^\nu$$

(vergleiche [Ka, Remark 7.9.b)]). Daher ist $\bar\alpha_i \in \bar\Pi\cap\bar\Phi_{\bar 1} \subset \bar\Phi_s$ eine kurze einfache Wurzel (siehe (103)). Wie man leicht nachrechnet, gilt allgemein für $h \in \mathfrak{h}_{\bar q}$, $\alpha \in \Phi$ und $\bar\alpha = \alpha|_{\mathfrak{h}_{\bar 0}}$

$$(126)\qquad [h, \bar E_{\bar\alpha}^{(\bar q')}] = \alpha(h)\,\bar E_{\bar\alpha}^{(\bar q'+\bar q)}.$$

Insbesondere haben wir $[h,\bar E_{\bar\alpha_i}^{(\bar 0)}] = \alpha_{i_1}(h)\bar E_{\bar\alpha_i}^{(\bar q)} \neq 0$ nach Wahl von α_{i_1}. Für $\tilde\alpha = (0,\bar q)$ ist $j_\sigma(\tilde\alpha) = q\,\frac{m}{r}$. Für $\tilde\beta = \tilde\alpha_i = (\bar\alpha_i,\bar 0)$ mit $\bar\alpha_i \in \bar\Pi_s$ (eine kurze einfache Wurzel von $\bar\Phi$) ist

$$j_\sigma(\tilde\alpha_i) = s_i = \frac{1}{a_i}\left(\frac{m}{r} - \sum_{\substack{i'=0\\ i'\neq i}}^{l} a_{i'}s_{i'}\right) \leq \frac{m}{r}.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $s_i < \frac{m}{r}$, denn der Fall $s_i = \frac{m}{r}$ tritt genau dann ein, wenn $s_{i'} = 0$ für alle $i' \neq i$ und $a_i = 1$ ist, was für eine kurze einfache Wurzel äquivalent dazu ist, daß $\bar{\alpha}_i$ durch einen Diagrammautomorphismus von $X_n^{(r)}$ auf $\bar{\alpha}_0$ abgebildet wird, das heißt nach Satz 2.22, daß der betrachtete Automorphismus σ konjugiert zu $\nu = \sigma_{(1,0,\ldots,0);r}$ ist. Dann ist also $j_\sigma(\tilde{\alpha}) + j_\sigma(\tilde{\beta}) < m$ und die Lieklammer zwischen $\mathfrak{h}_{\bar{q}}$ und $\mathfrak{g}_{\tilde{\beta}}$ bleibt bei der durch σ definierten Kontraktion erhalten. Daher ist auch $\mathfrak{h}_{\bar{q}} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$ und daher ist $\mathfrak{z} = \{0\}$.

Daß die Abbildung ϕ_j aus (123) einen Homomorphismus von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Moduln ergibt, folgt aus j-facher Anwendung der Jacobiidentität für $\mathfrak{g}$. Dies ergibt für alle y in $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{ad}(y)([x_1,[\ldots,[x_{j-1},x_j]\ldots]]) = [\operatorname{ad}(y)(x_1),[\ldots,[x_{j-1},x_j]\ldots]] + \cdots + \\
&+[x_1,[\ldots,[\operatorname{ad}(y)(x_{j-1}),x_j]\ldots] + [x_1,[\ldots,[x_{j-1},\operatorname{ad}(y)(x_j)]\ldots]].
\end{aligned} \tag{127}
$$

Also ist $\phi_j(y.(x_1 \otimes \cdots \otimes x_j)) = \operatorname{ad}(y)(\phi_j(x_1 \otimes \cdots \otimes x_j)$. Ist nun $s_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \{0,\ldots,l\}$, so sind die Erzeugenden $(\bar{E}_i)_{i \in \bar{I}_0}$ alle in $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ oder in $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ enthalten. $\mathfrak{g}_{\bar{j}}$ wird daher aufgespannt von Elementen der Form $[y,z]$ mit $y \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ und $z \in \operatorname{im}(\phi_j)$. Da $\operatorname{im}(\phi_j)$ ein $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-Modul ist, sind aber diese $[y,z]$ bereits in $\operatorname{im}(\phi_j)$ enthalten, also ist $\mathfrak{g}_{\bar{j}} = \operatorname{im}(\phi_j)$. □

2.1.2. *Wurzelraumzerlegung und Enttwistung von* $\mathfrak{p}_+(\sigma)$. In diesem Abschnitt wenden wir uns den formalen Degenerationen $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ (nach (76)) zu, die zu den zyklisch graduierten Kontraktionen von einfachen Liealgebren gehören. Wo nichts anderes gesagt wird, gelten die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts.

Beispiel 2.27. sl_2 hat nur innere Automorphismen. Alle Automorphismen endlicher Ordnung sind daher nach Satz 2.20 und Satz 2.22 konjugiert zu einem Automorphismus der Form

$$\sigma = \operatorname{Ad}\left(\begin{pmatrix} \zeta_{2m}^{s_1} & 0 \\ 0 & \zeta_{2m}^{m-s_1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{mit } \operatorname{ggT}(s_1, m) = 1.$$

σ hat die Ordnung m, denn

$$\begin{pmatrix} \zeta_{2m}^{s_1} & 0 \\ 0 & \zeta_{2m}^{m-s_1} \end{pmatrix}^m = \pm E_2$$

und $\operatorname{Ad}(-E_2) = \mathrm{id}$. Beim Twisten mit σ erhält man die positive Unteralgebra der getwisten Loopalgebra

$$\mathfrak{p}_+(\sigma) = \mathbb{C}[|t^m|]\, h \oplus \mathbb{C}[|t^m|] t^{s_1}\, e \oplus \mathbb{C}[|t^m|] t^{m-s_1}\, f.$$

Betrachtet man die zugehörigen Kontraktionen, so stellt man fest, daß sich immer die Inonü-Wigner-Kontraktion von sl_2 bezüglich $\mathfrak{u} = \mathbb{C}h$ ergibt, wenn man t^m durch t ersetzt. Diese Redundanz wird im folgenden beseitigt werden.

Zur Definition von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma)$ und $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma,m)$ siehe (77). Für $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}$ sei wieder $j_\sigma(\tilde{\alpha}) \in \{0,\ldots,m-1\}$ dadurch festgelegt, daß $\mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \subseteq \mathfrak{g}_{\bar{j}}$.

Satz 2.28. *Sei σ ein (m,r)-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ und ν der zugehörige Diagrammautomorphismus. Dann ist die formale Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma)$ als $\mathbb{C}((t))$-Liealgebra isomorph zu $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$ nach der Substitution $\tilde{t} = t^{\frac{m}{r}}$. Insbesondere ist jede mit einem inneren Automorphismus getwistete formale Loopalgebra isomorph zur zerfallenden einfachen Liealgebra über $\mathbb{C}((t))$. Für $\tilde{\alpha} = (\bar{\alpha},\bar{q})$ mit $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi} \cup \{0\}$ und $q \in \{0,\ldots,r-1\}$ ist der Enttwistungshomomorphismus $\Phi : \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma) \to \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu,m)$ festgelegt durch die Vorschrift*

$$x \otimes t^{j_\sigma(\tilde{\alpha})} \mapsto x \otimes t^{j_\sigma(\tilde{\alpha})-\bar{\alpha}(h_\sigma)} \quad \text{für } x \in \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}}. \tag{128}$$

Durch $\mathbb{C}((t))$-lineare Fortsetzung ist Φ auf ganz $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\sigma)$ festgelegt.

Beweis: Siehe [Ka, Th.8.5]. □

Durch das Tupel $\mathbf{s}$ ist nach [Ka, §1.5.] eine $\mathbb{Z}$-Graduierung der formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$, die sogenannte $\mathbb{Z}$-Graduierung vom Typ $\mathbf{s}$, festgelegt. Diese ergibt sich daraus, daß man für ein System $e_0,\ldots,e_l,f_0,\ldots,f_l$ von Chevalleyerzeugenden und eine Cartanunteralgebra $\mathfrak{h}$ der affinen Kac-Moody-Algebra vom Typ $X_n^{(r)}$ setzt:

$$\deg e_i = -\deg f_i = s_i \quad \text{für } i = 0,\ldots,l, \quad \deg(\mathfrak{h}) = 0. \tag{129}$$

In $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$ kann man die e_i nach geeigneter Skalierung der $\bar{E}_i$ identifizieren als

$$e_0 = \bar{E}_0 \otimes t, \quad e_i = \bar{E}_i \otimes 1, \quad \text{für } i = 1,\ldots,l \tag{130}$$

(siehe [Ka, §8.3]). Sei $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)_k$ der Raum der homogenen Elemente vom Grad k bezüglich der $\mathbb{Z}$-Graduierung vom Typ $\mathbf{s}$. Dann sei

$$\mathfrak{p}_+(\mathbf{s}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}_0} \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)_k. \tag{131}$$

Die kanonische $\mathbb{Z}$-Graduierung auf $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$, die durch $\mathrm{grad}(x) = 0$ für $x \in \mathfrak{g}$ und $\mathrm{grad}(t) = 1$ gegeben war (siehe Abschnitt 1.4), wird durch das Tupel $(1,0,\ldots,0)$ definiert. Sei $\mathfrak{n}_+ \subset \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$ die von $e_0,\ldots,e_l$ erzeugte Unteralgebra von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$. Diese können wir über $\mathbb{C}$ auch wie folgt zerlegen:

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\bar{\alpha}\in\bar{\Phi}_{0+}} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \oplus \bigoplus_{k>0} \mathfrak{g}_{\bar{k}}(\nu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}t^k. \tag{132}$$

Bemerkung 2.29. Definiert man entsprechend $\mathfrak{n}_-$ als das Erzeugnis der f_i, so erhält man die sogenannte Dreieckszerlegung $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (siehe [Ka, Ch.1.]).

Definition 2.30. Sei $\mathfrak{g}$ eine einfache $\mathbb{C}$-Liealgebra. Die Unteralgebra $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ bezeichnen wir als *Standard-Iwahoriunteralgebra*. Alle zu ihr unter einem $\mathbb{C}$-linearen Automorphismus von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$ konjugierten Unteralgebren bezeichnen wir als *Iwahoriunteralgebren* von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$. Jede Unteralgebra von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$, die eine Iwahoriunteralgebra enthält, bezeichnen wir als *Parahoriunteralgebra* von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$.

Bemerkung 2.31. Die formalen Loopalgebren sind Liealgebren von einfachen Gruppen über dem diskret bewerteten Körper $\mathbb{C}((t))$. Diese Gruppen besitzen jeweils ein endliches und ein affines sogenanntes Tits-System (vgl. [BT], [Ga] oder [Bou4-6], siehe auch Abschnitt 3.2). Die Parahori bzw. Iwahoriuntergruppen, deren Liealgebren die Parahori bzw. Iwahoriunteralgebren sind, entsprechen den parabolischen bzw. minimal parabolischen Untergruppen bezüglich dem affinen Tits-System.

Da $\deg(e_i) = s_i \geq 0$ ist für $i = 0, \ldots, l$ und $\deg(\mathfrak{h}) = 0$ ist, ist $\mathfrak{b}$ in jeder Unteralgebra der Form $\mathfrak{p}_+(\mathbf{s})$ enthalten, das heißt diese sind stets Parahoriunteralgebren.

Für $\mathbf{s} = (s_0, \ldots, s_l)$ sei $X_{\mathbf{s}} := \{i \in \{0, \ldots, l\} \mid s_i = 0\}$. Dann hängt $\mathfrak{p}_+(\mathbf{s})$ nur von $X_{\mathbf{s}}$, nicht von den Werten der $s_i \neq 0$ ab. Sei nämlich Δ das affine Wurzelsystem von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$, Δ_- die Menge der negativen Wurzeln, $\{a_0, \ldots, a_l\}$ eine Basis von Δ und $\Delta_{-0} = \{a \in \Delta_- \mid a = \sum_{i \in X_{\mathbf{s}}} k_i a_i\}$ (Zur Unterscheidung von den endlichen Wurzeln schreiben wir die affinen Wurzeln mit lateinischen Buchstaben). Dann ist:

$$\mathfrak{p}_+(\mathbf{s}) = \mathfrak{b} + \sum_{a \in \Delta_{-0}} \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)_a. \tag{133}$$

Achtung: Darin können auch negative Potenzen von t auftreten. Dies ist immer dann der Fall, wenn $s_0 = 0$ ist.

Bemerkung 2.32. Nach der Theorie der Titssysteme gibt es eine Bijektion zwischen den echten Teilmengen von $\{0, \ldots, l\}$ und Konjugationsklassen von Parahoriunteralgebren von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$. Auf der Gruppenebene gilt nach Bruhatzerlegung: $P_X = BW_X B$, wobei B die Standard-Iwahoriuntergruppe des zugehörigen affinen Titssystem und W die von den Erzeugern r_i mit $i \in X$ erzeugte Untergruppe der affinen Weylgruppe ist. Jede Parahoriuntergruppe von G ist zu genau einer Untergruppe der Form P_X konjugiert. Die zugehörige Menge X wird als der *Typ* von P bezeichnet. Die zugehörigen Parahoriunteralgebren $\mathfrak{p}_X$ sind definiert durch

$$\mathfrak{p}_X = \mathfrak{b} + \sum_{a \in \Delta_{-0}} \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)_a \tag{134}$$

mit $\Delta_{-0}(X) = \{a \in \Delta_- \mid a = \sum_{i \in X} k_i a_i$ für geeignete $k_i \in \mathbb{Z}\}$.

Satz 2.33. *Wir identifizieren $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu, m)$ mit $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ vermöge der Substitution $\tilde{t} = t^{\frac{m}{r}}$. Dann gilt: Das Bild von $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ unter dem Enttwistungsisomorphismus Φ ist die durch $X = X_\sigma$ bestimmte Parahori-Unteralgebra $\mathfrak{p}_X$ von $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \nu)$. Insbesondere ist die durch σ definierte graduierte Kontraktion von $\mathfrak{g}$ stark äquivalent zu der durch durch $\mathfrak{p}_X$ beschriebenen formalen Degeneration.*

Beweis: Siehe [DD, The.3]. □

Beispiel 2.34. $\bar{\mathcal{L}}(\mathrm{sl}_2)$ hat bis auf Konjugation nur zwei echte Parahoriunteralgebren, die Borelunteralgebra

$$\mathfrak{b} = \mathbb{C}[|t|]\, h \oplus \mathbb{C}[|t|]\, e \oplus \mathbb{C}[|t|] t\, f.$$

sowie

$$\mathfrak{p} = \mathbb{C}[|t|]\, h \oplus \mathbb{C}[|t|]\, e \oplus \mathbb{C}[|t|]\, f.$$

Als Kontraktion entspricht die erste der Inonü-Wigner-Kontraktion von sl_2 bezüglich $\mathfrak{u} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$, die zweite entspricht der trivialen Kontraktion. Wir hatten schon in Beispiel 1.36 bemerkt, daß die Inönü-Wigner-Kontraktion $\mathfrak{a} = \mathbb{C}[|t|]\, h \oplus \mathbb{C}[|t|]t\, e \oplus \mathbb{C}[|t|]t\, f$ bezüglich $\mathfrak{u} = \mathbb{C}h$ stark äquivalent zu der durch $\mathfrak{b}$ definierten ist und offenbar ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_+(\sigma) \otimes_{\mathbb{C}[|t^2|]} \mathbb{C}[|t|]$ mit $\sigma = \mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ (vergleiche Beispiel 2.27).

Beispiel 2.35. Die formale Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathrm{so}_n, \sigma, m)$ aus 1.57 ist für gerade $n > 4$ echt getwistet, da σ ein Diagrammautomorphismus ist. Für die nicht einfache Liealgebra $\mathrm{so}_4(\mathbb{R})$ ist $\bar{\mathcal{L}}(\mathrm{so}_4, \sigma, m)$ vom Typ $A_1^{(1)}$. Diesen kann man als einen Spezialfall ($l = 1$) der Familie $D_{l+1}^{(2)}$ ansehen (siehe Figur 2). Die zugehörige Parahoriunteralgebra $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist die H-Algebra aus [DDS] (vgl. auch [DD]).

2.2. **Mit dem Wurzelgitter graduierte Degenerationen.** Wir geben zunächst die Definition von konkaven Funktionen aus [BT, I.(6.4.1)]. Wir zeigen dann, daß wir den Bildbereich der Funktionen auf $\mathbb{Z}$ einschränken können, um zu graduierten Kontraktionen zu kommen, wie sie in Abschnitt 1.4 eingeführt wurden.

Auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sei $k + \infty := \infty + k := \infty$, für $k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definition 2.36. [BT, I.(6.4.3)] Sei Φ ein nicht notwendig reduziertes endliches Wurzelsystem. Eine Abbildung $f : \Phi \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *konkav*, wenn für jede endliche Familie (α_i) von Elementen von Φ mit $\sum_i \alpha_i \in \Phi$ gilt:

$$f\left(\sum_i \alpha_i\right) \leq \sum_i f(\alpha_i). \tag{135}$$

Satz 2.37. [BT, I.Prop.(6.4.5)] *Eine Abbildung $f : \Phi \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist genau dann konkav, wenn*

$$f(\alpha + \beta) \leq f(\alpha) + f(\beta) \text{ für } \alpha, \beta \in \Phi \text{ mit } \alpha + \beta \in \Phi \tag{136}$$

$$f(\alpha) + f(-\alpha) \geq 0. \tag{137}$$

Für $k \in \mathbb{R}$ sei $\psi(k)$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich k ist. Sie ist durch die Eigenschaft, daß $\psi(k) - 1 < k \leq \psi(k)$ eindeutig bestimmt:

$$\psi(k) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k\}. \tag{138}$$

Für $k \in \mathbb{R}$ gilt also $\psi(k) = -[-k]$, wobei die eckigen Klammern die Gaußklammer (oder Entierfunktion) bezeichnen. Sei $\psi(\infty) = \infty$.

Lemma 2.38. *Ist $f : \Phi \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konkav, so ist auch $f_{\mathbb{Z}} := \psi \circ f : \Phi \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ konkav.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß

$$A_0 \leq \sum_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \psi(A_0) \leq \sum_{i=1}^{n} \psi(A_i) \qquad \forall\, A_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \tag{139}$$

Dafür reicht es zu zeigen, $a \leq b \Rightarrow \psi(a) \leq \psi(b)$ und $\psi(a+b) \leq \psi(a) + \psi(b)$. Beides folgt offensichtlich aus der Definition. □

Sei nun $\mathfrak{g}$ eine einfache Liealgebra über $\mathbb{C}$ vom Typ X_n, $A = \mathbb{C}[|t|]$, $K = \mathbb{C}((t))$. Sei Φ das Wurzelsystem und $\mathfrak{h}$ eine Cartanunteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei ν ein Diagrammautomorphismus der Ordnung r von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_{\bar{j}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\bar{j}}(\nu)$ und $\bar{\Phi} = \Phi \mid_{\mathfrak{h}_{\bar{0}}}$. Den ungetwisteten Fall betrachten wir als den Spezialfall mit $\nu = \mathrm{id}$, insbesondere sei $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mathrm{id}) = \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Dann ist z.B. auch $\bar{\Phi} = \Phi$. Allgemein verwenden wir wieder die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1.

Sei nun $f : \bar{\Phi} \to \mathbb{Z}$ konkav. (Der Fall, wo f den Wert ∞ annimmt ist für unsere Anwendungen nicht weiter interessant. Er kann auch bei der in Unterabschnitt 2.2.2 beschriebenen Konstruktion von konkaven Funktionen durch Teilmengen von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ ausgeschlossen werden, indem nur beschränkte Teilmengen von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ betrachtet werden.) Es ist leicht zu sehen, daß die triviale Fortsetzung (d.h. durch 0) von f auf das Wurzelgitter $\bar{Q} = \langle \bar{\Phi} \rangle$ von $\mathfrak{g}_{\bar{0}}(\nu)$ bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkav im Sinne von Abschnitt 1.4 ist, d.h. die Bedingung (63) für die Existenz der graduierten verallgemeinerten Kontraktion erfüllt. Die zugehörige Degeneration ist nach Korollar 1.50 isomorph zu der folgenden A-Unteralgebra von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$:

$$\mathfrak{a}_f := \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|] \oplus \bigoplus_{\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}} \mathfrak{g}_{\bar{\alpha}} \otimes_{\mathbb{C}} t^{f(\bar{\alpha})} \mathbb{C}[|t|]. \tag{140}$$

Im getwisteten Fall wollen wir aber, wie bei den zyklisch graduierten Kontraktionen aus Abschnitt 2.1, die konstruierten Degenerationen mit A-Formen der getwisteten Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ identifizieren. Sei $\langle \nu \rangle \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ die von ν erzeugte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Folgende Aussage ist offensichtlich:

Bemerkung 2.39. Eine bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkave Funktion $F : \bar{Q} \times \langle \nu \rangle \to \mathbb{Z}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$F((\bar{\alpha}, \bar{j})) \equiv j \ (r) \quad \text{für alle } \bar{\alpha} \in \bar{\Phi} \cup \{0\}, j \in \mathbb{Z}, \tag{141}$$

liefert eine $\mathbb{C}[|t^r|]$-Form der getwisteten formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$, nämlich

$$\mathfrak{a}_F(\nu) := \bigoplus_{\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi}} \mathfrak{g}_{\tilde{\alpha}} \otimes_{\mathbb{C}} t^{F(\tilde{\alpha})} \mathbb{C}[|t^r|]. \tag{142}$$

Lemma 2.40. *Sei $F : \bar{Q} \times \langle \nu \rangle \to \mathbb{Z}$ eine bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkave Funktion. Dann gilt*

$$F((0, \gamma)) \geq 0 \text{ für alle } \gamma \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}. \tag{143}$$

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ gilt $r\gamma = \bar{0}$. Angenommen $F((0,\gamma)) < 0$. Dann gilt für $\bar{\alpha} \in \Phi$.

$$F((\bar{\alpha}, i\gamma)) \leq F((\bar{\alpha}, (i-1)\gamma)) + F((0,\gamma)) < F((\bar{\alpha}, (i-1)\gamma)) \tag{144}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $F((\bar{\alpha}, r\gamma)) = F((\bar{\alpha}, \bar{0}))$. □

Die konkaven Funktionen $f : \bar{\Phi} \to \mathbb{Z}$ denken wir uns stets auf $\bar{\Phi} \cup \{0\}$ trivial fortgesetzt. Dann gelten immer noch die Bedingungen (136) und (137) von Satz 2.37. Tatsächlich ist Bedingung (137) dann überflüssig, da sie von Bedingung (136) impliziert wird.

Satz 2.41. *Sei $F : \bar{Q} \times \langle \nu \rangle \to \mathbb{Z}$ eine bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkave Funktion. Dann ist die wie folgt definierte Funktion $\bar{F} : \bar{\Phi} \to \mathbb{Z}$ konkav:*

$$\bar{F}(\bar{\alpha}) := \min\{F((\bar{\alpha}, \gamma)) \mid \gamma \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\}. \tag{145}$$

Ist umgekehrt $f : \bar{\Phi} \to \mathbb{Z}$ eine konkave Funktion, so erhalten wir durch

$$\tilde{f}((\bar{\alpha}, \bar{j})) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq f(\bar{\alpha}) \wedge n \equiv j \ (r)\} \tag{146}$$

eine bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkave Funktion $\tilde{f} : \bar{Q} \times \langle \nu \rangle \to \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei F gegeben und $\bar{F}$ definiert wie in (145). Es ist zu zeigen, daß für alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\Phi}$ gelten $\bar{F}(\bar{\alpha}) + \bar{F}(\bar{\beta}) \geq \bar{F}(\bar{\alpha} + \bar{\beta})$ und $\bar{F}(\bar{\alpha}) + \bar{F}(-\bar{\alpha}) \geq 0$. Sei $\bar{F}(\bar{\alpha}) = F((\bar{\alpha}, \gamma_1))$, $\bar{F}(\bar{\beta}) = F((\bar{\beta}, \gamma_2))$, $\bar{F}(-\bar{\alpha}) = F((-\bar{\alpha}, \gamma_3))$. Dann gelten

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) + f(\bar{\beta}) &= F((\bar{\alpha}, \gamma_1)) + F((\bar{\beta}, \gamma_2)) \\ &\geq F((\bar{\alpha} + \bar{\beta}, \gamma_1 + \gamma_2)) \\ &\geq f(\bar{\alpha} + \bar{\beta}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) + f(-\bar{\alpha}) &= F((\bar{\alpha}, \gamma_1)) + F((-\bar{\alpha}, \gamma_3)) \\ &\geq F((0, \gamma_1 + \gamma_2)) \\ &\geq 0 \quad \text{nach Lemma 2.40.} \end{aligned}$$

Sei umgekehrt f gegeben und $\tilde{f}$ definiert wie in (146). Es ist zu zeigen, daß für alle $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi} \cup \{0\}$ mit $\tilde{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{i})$, $\tilde{\beta} = (\bar{\beta}, \bar{j})$ wo $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi} \cup \{0\}$ gelten $\tilde{f}(\tilde{\alpha}) + \tilde{f}(\tilde{\beta}) \geq \tilde{f}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$. Dies sieht man folgendermaßen: Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{\alpha}) + \tilde{f}(\tilde{\beta}) &\geq f(\bar{\alpha}) + f(\bar{\beta}) \\ &\geq f(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \end{aligned}$$

und

$$\tilde{f}(\tilde{\alpha}) + \tilde{f}(\tilde{\beta}) \equiv i + j \quad (r).$$

Daher gilt nach Definition von $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}) \leq \tilde{f}(\tilde{\alpha}) + \tilde{f}(\tilde{\beta}).$$

□

Lemma 2.42. *Ist $F : \bar{Q} \times \langle \nu \rangle \to \mathbb{Z}$ eine bezüglich $\mathfrak{g}$ fast-konkave Funktion mit der Eigenschaft (141) und gilt außerdem*

$$F\left((0,\gamma)\right) \in \{0,\ldots,r-1\}, \tag{147}$$

dann gilt

$$\tilde{\bar{F}} = F. \tag{148}$$

Beweis: Sei $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$ und γ so gewählt, daß

$$\bar{F}(\bar{\alpha}) = F\left((\bar{\alpha},\gamma)\right).$$

Aus (141) und (147) folgt, daß

$$F\left((0,\bar{i})\right) = i \quad \text{für } i = 0,\ldots,r-1.$$

Daher gilt

$$F\left((\bar{\alpha},\gamma)\right) + F\left((0,\bar{i})\right) \geq F\left((\bar{\alpha},\gamma+\bar{i})\right) \geq F\left((\bar{\alpha},\gamma)\right). \tag{149}$$

Weil $F\left((\bar{\alpha},\gamma+\bar{i})\right) \equiv i \quad (r)$ ist, gilt daher

$$F\left((\bar{\alpha},\gamma+\bar{i})\right) = \bar{F}(\bar{\alpha}) + i \quad \text{für } i = 0,\ldots,r-1. \tag{150}$$

Die Tildeoperation hat allgemein die Eigenschaft:

$$f(\bar{\alpha}) \equiv j \quad (r) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}\left((\bar{\alpha},\bar{j}+\bar{i})\right) = f(\bar{\alpha}) + i \quad \text{für } i = 0,\ldots,r-1. \tag{151}$$

Daraus folgt

$$\tilde{\bar{F}}\left((\bar{\alpha},\gamma+\bar{i})\right) = \bar{F}(\bar{\alpha}) + i = F\left((\bar{\alpha},\gamma+\bar{i})\right) \quad \text{für } i = 0,\ldots,r-1. \tag{152}$$

□

Korollar 2.43. *Jede konkave Funktion f auf $\bar{\Phi}$ bestimmt eine $\mathbb{C}[|t^r|]$-Form der getwisteten formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g},\nu)$, welche die „Cartanunteralgebra“ $\tilde{\mathfrak{h}} := \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{h}_{\bar{j}} \otimes_{\mathbb{C}} t^j\mathbb{C}[|t^r|]$ enthält, nämlich*

$$\mathfrak{p}_f := \mathfrak{a}_{\tilde{f}}(\nu). \tag{153}$$

Beweis: Man bilde $\tilde{f}$ wie in Satz 2.41. Diese hat offenbar die Eigenschaft (141) von Bemerkung 2.39 und liefert somit die $\mathbb{C}[|t^r|]$-Form $\mathfrak{a}_{\tilde{f}}(\nu)$. Offensichtlich ist $\tilde{\mathfrak{h}}$ in $\mathfrak{a}_{\tilde{f}}(\nu)$ enthalten. □

Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß auch die Umkehrung von Korollar 2.43 gilt.

2.2.1. *A-Formen, die eine affine Cartanunteralgebra enthalten.*

Satz 2.44. *Jede $\mathbb{C}[|t|]$-Form $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$, die $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|]$ enthält, läßt sich in der Form (140) mit einer konkaven Funktion f schreiben.*

Beweis: Nach [Ka, Prop.1.5.] zerfällt die $\mathbb{C}[|t|]$-Form $\mathfrak{a}$ als $\mathfrak{h}$-Untermodul von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$ betrachtet:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|] \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{a}_\alpha \quad \text{mit } \mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))\alpha}. \tag{154}$$

Da $\mathfrak{a}$ eine $\mathbb{C}[|t|]$-Form von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$ ist und

$$\mathfrak{a} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)) = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{a}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)),$$

muß gelten

$$\mathfrak{a}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)) = \mathfrak{g}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t)).$$

Insbesondere ist $\mathfrak{a}_\alpha \neq \emptyset$. Da $\mathfrak{a}$ ein freier $\mathbb{C}[|t|]$-Modul ist und alle projektiven $\mathbb{C}[|t|]$-Moduln frei sind (Satz B.11), ist $\mathfrak{a}_\alpha$ ein freier $\mathbb{C}[|t|]$-Untermodul von $\mathfrak{g}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((t))$. Da $\mathfrak{g}$ eindimensional ist, ist

$$\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} M_\alpha, \tag{155}$$

wobei M_α ein freier Untermodul von $\mathbb{C}((t))$ als $\mathbb{C}[|t|]$-Modul ist. Daher ist M_α von der Form $M_\alpha = t^{f(\alpha)}\mathbb{C}[|t|]$ für ein eindeutig bestimmtes $f(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Sei $\{h_i, i = 1, \ldots, l, e_\alpha, \alpha \in \Phi\}$ eine Chevalleybasis von $\mathfrak{g}$ wie in [Hu1, 25.2.]. Bezüglich der Basis $(h_i, t^{f(\alpha)} e_\alpha \mid i \in I, \quad \alpha \in \Phi)$ hat $\mathfrak{a}_f$ die Strukturkonstanten:

$$\begin{aligned} c_{\alpha,\beta}^{\alpha+\beta}(t) &= t^{f(\alpha)+f(\beta)-f(\alpha+\beta)} c_{\alpha,\beta}^{\alpha+\beta} \text{ falls } \alpha+\beta \in \Phi \\ c_{\alpha,-\alpha}^{i}(t) &= t^{f(\alpha)+f(-\alpha)} c_{\alpha,-\alpha}^{i} \\ c_{i,\alpha}^{\alpha}(t) &= -c_{\alpha,i}^{\alpha}(t) = c_{i,\alpha}^{\alpha} = \alpha(h_i) \end{aligned} \tag{156}$$

und alle anderen Strukturkonstanten verschwinden. Die Strukturkonstanten $c_{\alpha,\beta}^{\alpha+\beta}$ mit $\alpha + \beta \in \Phi$ sind stets von Null verschieden. (Für eine Chevalleybasis sind sie gleich $\pm(r+1)$, wobei r die größte ganze Zahl ist, so daß $\beta - r\alpha$ noch in Φ liegt.) Daher sind die Bedingungen (136) und (137) von Satz 2.37 notwendig dafür, daß $\mathfrak{a}$ eine $\mathbb{C}[|t|]$-Algebra ist und daher muß f tatsächlich konkav sein. □

Satz 2.45. *Jede $\mathbb{C}[|t^r|]$-Form der getwisteten formalen Loopalgebra $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$, die von $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \times \langle\nu\rangle$ stabilisiert wird und die Cartanunteralgebra $\tilde{\mathfrak{h}} := \bigoplus_{j=0}^{r-1} \mathfrak{h}_{\bar{j}} \otimes_{\mathbb{C}} t^j \mathbb{C}[|t^r|]$ enthält, läßt sich in der Form $\mathfrak{p}_f$ wie in (153) mit einer konkaven Funktion f auf $\bar{\Phi}$ schreiben. Insbesondere sind alle Parahoriunteralgebren von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ von dieser Form.*

Beweis: Da $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ als $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \times \langle\nu\rangle$-Modul diagonalisierbar ist, ist es auch jeder $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \times \langle\nu\rangle$-Untermodul (man kann genauso wie in [Ka, Prop.1.5.] argumentieren). Der Beweis geht genau wie im ungetwisteten Fall, nur mit $\tilde{\Phi}$ anstelle von Φ. Man hat dann zum Beispiel in Analogie zu (155)

$$\mathfrak{a}_{(\bar{\alpha},\bar{j})} = \mathfrak{g}_{(\bar{\alpha},\bar{j})} \otimes_{\mathbb{C}} t^j M_{(\bar{\alpha},\bar{j})} \quad \text{mit } j \in 0,\dots r-1, \bar{\alpha} \neq 0 \tag{157}$$

mit einem freien Untermodul $M_{(\bar{\alpha},\bar{j})} = t^{rk((\bar{\alpha},\bar{j}))}\mathbb{C}[|t^r|]$ von $\mathbb{C}((t^r))$ als $\mathbb{C}[|t^r|]$-Modul. Man erhält eine Funktion F auf $\tilde{\Phi}$ mit den Eigenschaften (141) und (147) durch die Festsetzung $F((\bar{\alpha},\bar{j})) = j + rk((\bar{\alpha},\bar{j}))$ und offenbar ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_F(\nu)$ per Konstruktion. Die wie in Satz 2.41 gebildete Funktion $f := \bar{F}$ ist die gesuchte konkave Funktion auf $\bar{\Phi}$, denn nach Lemma 2.42 reproduziert diese die Funktion F mittels der Tilde-Operation, d.h. $\mathfrak{p}_f = \mathfrak{a}$. Die Strukturkonstanten betrachtet man nun bezüglich einer Basis $h_i \in \mathfrak{h}$ und $e_{\tilde{\alpha}}$ mit $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Phi} \setminus \{0\}$ wie in [Ka, Rem.7.9.b)]. Insbesondere sind wieder die Strukturkonstanten $c_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}$ mit $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi} \setminus \{0\}$ von Null verschieden. Daraus folgt wieder, daß f tatsächlich konkav sein muß. □

2.2.2. *Konstruktion von konkaven Funktionen.* Wir folgen [BT, I.6.4]. Sei $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ die Cartanunteralgebra der zerfallenden reellen Form von $\mathfrak{g}^\nu$, also der von den $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Phi_0}$ aufgespannte reelle Unterraum von $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Jeder nichtleeren Teilmenge $\Omega \subseteq \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ wird folgende Abbildung $f_\Omega : \bar{\Phi} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zugeordnet:

$$f_\Omega(\bar{\alpha}) := \inf_{\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \{k \in \mathbb{R} \mid \forall_{x\in\Omega}\ \bar{\alpha}(x) \geq -k\}.$$

Den Wert ∞ nimmt f_Ω genau dann an, wenn $\bar{\alpha}(\Omega)$ nicht nach unten beschränkt ist. Andernfalls besitzt $\bar{\alpha}(\Omega)$ ein reelles Infimum, denn nach Voraussetzung ist Ω nicht leer. Die Bedingung $\forall_{x\in\Omega}\ \bar{\alpha}(x) \geq -k$ ist dann äquivalent zu $\inf \bar{\alpha}(\Omega) \geq -k$ bzw. $k \geq -\inf \bar{\alpha}(\Omega)$. Also ist

$$\{k \in \mathbb{R} \mid \forall_{x\in\Omega}\bar{\alpha}(x) \geq -k\} = [-\inf \bar{\alpha}(\Omega), \infty[\tag{158}$$

und somit ist

$$f_\Omega(\bar{\alpha}) \;=\; -\inf_{\mathbb{R}} \bar{\alpha}(\Omega). \tag{159}$$

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß Ω beschränkt ist.

Satz 2.46. [BT, I(6.4.3)] *Die Funktion f_Ω ist konkav.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für jede endliche Familie $(\bar{\alpha}_i)$ von Elementen von $\bar{\Phi}$ mit $\sum_i \bar{\alpha}_i \in \bar{\Phi}$ gilt:

$$f_\Omega\left(\sum_i \bar{\alpha}_i\right) \leq \sum_i f_\Omega(\bar{\alpha}_i), \tag{160}$$

also

$$\inf_{\mathbb{R}}\left(\sum_i \bar{\alpha}_i\right)(\Omega) \geq \sum_i \inf_{\mathbb{R}} \bar{\alpha}_i(\Omega). \tag{161}$$

Letztere Ungleichung gilt, weil die rechte Seite eine untere Schranke für $(\sum_i \bar{\alpha}_i)(\Omega)$ ist, denn für $x \in \Omega$ gilt:

$$\left(\sum_i \bar{\alpha}_i\right)(x) = \sum_i \bar{\alpha}_i(x) \geq \sum_i \inf \bar{\alpha}_i(\Omega) \tag{162}$$

□

Man kann o.B.d.A. annehmen, daß Ω abgeschlossen ist, denn $f_\Omega = f_{\bar{\Omega}}$, da offenbar stets $\inf \bar{\alpha}(\Omega) = \inf \bar{\alpha}(\bar{\Omega})$. Genauso kann man o.B.d.A. annehmen, daß Ω konvex ist, denn $f_\Omega = f_{\bar{\Omega}^{\mathrm{konv}}}$, wenn $\bar{\Omega}^{\mathrm{konv}}$ den konvexen Abschluß von Ω bezeichnet, da $\inf \bar{\alpha}(\Omega) = \inf \bar{\alpha}(\bar{\Omega}^{\mathrm{konv}})$ für alle $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$.

Es gilt offensichtlich

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow f_{\Omega_1} \leq f_{\Omega_2}. \tag{163}$$

Sei f eine konkave Funktion auf $\bar{\Phi}$. Dann sei

$$\Omega_f := \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid \bar{\alpha}(x) \geq -f(\bar{\alpha}) \text{ für alle } \bar{\alpha} \in \bar{\Phi}\}. \tag{164}$$

Es gilt offenbar

$$\Omega_{f_\Omega} = \bar{\Omega}. \tag{165}$$

Weiterhin ist offensichtlich $f(\bar{\alpha}) \geq -\inf \bar{\alpha}(\Omega_f)$ für alle $\bar{\alpha}$, daher gilt für jede konkave Funktion

$$f \geq f_{\Omega_f}. \tag{166}$$

Bemerkung 2.47. Es gibt auch konkave Funktionen, die nicht von der Form f_Ω (und auch nicht von der Form $(f_\Omega)_{\mathbb{Z}}$) sind. Dies zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.48. Sei $\bar{\Phi}$ vom Typ B_2 und $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\}$ eine Basis von $\bar{\Phi}$, wobei $\bar{\alpha}_1$ die längere der beiden einfachen Wurzeln sei, dann wird durch $f(\bar{\alpha}_1) = f(\bar{\alpha}_2) = 2$, $f(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) = f(\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2) = 4$ und $f(-\bar{\alpha}_1) = f(-\bar{\alpha}_2) = f(-\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) = f(-\bar{\alpha}_1 - 2\bar{\alpha}_2) = 0$ eine konkave Funktion definiert. (Für das Wurzelsystem B_2 gilt: Jede lange Wurzel läßt sich auf genau eine Art als Summe von zwei kurzen Wurzeln schreiben und jede kurze Wurzel läßt sich auf genau zwei Arten als Summe von einer kurzen und einer langen Wurzel schreiben. Damit kann man die Bedingung (136) leicht explizit nachprüfen.) Für f gilt

$$f_{\Omega_f}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) = 3 < f(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2).$$

Also ist f nicht von der Form f_Ω.

Lemma 2.49. *Jede lineare Funktion ist konkav und eine konkave Funktion ist genau dann linear, wenn*

$$f = f_{\{x\}} \quad \textit{für ein } x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}. \tag{167}$$

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Sei f linear. Dann existiert genau ein x mit $\bar{\alpha}_i(x) = -f(\bar{\alpha}_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Aus der Linearität von f folgt, daß $\bar{\alpha}(x) = -f(\bar{\alpha})$ für alle $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$. Also ist $\Omega_f = \{x\}$ und $f = f_{\{x\}}$. Umgekehrt ist klar, daß f_Ω für eine Einpunktmenge $\Omega = \{x\}$ stets linear ist. □

Lemma 2.50. *Ist f konkav, so ist $\Omega_f \neq \emptyset$.*

Beweis: Aus [BT, Prop.(6.4.6)] ergibt sich, daß zu f stets eine lineare Funktion f_l existiert mit $f \geq f_l$. Offensichtlich gilt für je zwei konkave Funktionen

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \Omega_{f_1} \subseteq \Omega_{f_2}. \tag{168}$$

Ist daher $f_l = f_{\{x\}}$, so gilt $x \in \Omega_f$. □

In Bezug auf die durch konkave Funktionen erzeugbaren $\mathbb{C}[|t^r|]$-Formen von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ bzw. $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ interessieren wir uns wiederum nur für die zugehörigen ganzzahligen Funktionen $f_\mathbb{Z} = -[-f]$ bzw. die daraus wie in Satz 2.41 gebildeten Funktionen $\tilde{f}_\mathbb{Z}$ auf $\tilde{\Phi}$. Es wird sich daher zeigen, daß wir o.B.d.A. annehmen können, daß Ω „Facetten-abgeschlossen“ ist, was im nächsten Abschnitt erklärt wird.

2.2.3. *Das affine Gebäude.* Sei Δ das Wurzelsystem von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$. Jeder affinen Wurzel $a = \bar{\alpha} + k\delta$ kann man den affinen Halbraum $H_a = \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid \bar{\alpha}(x) + k \geq 0\}$ zuordnen. (In [BT] wird das affine Wurzelsystem als die Menge dieser affinen Halbräumen definiert (vergleiche [BT, I.(1.3.7)]).) Weiter seien $H_a^+ = \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid \bar{\alpha}(x) + k > 0\}$ und $H_a^- = \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid \bar{\alpha}(x) + k < 0\}$. Wir definieren außerdem die zugehörige *Wand* $\eta_a := \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid \bar{\alpha}(x) + k = 0\}$. Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller solchen Wände.

Definition 2.51. Für $M \subset \Delta$ sei

$$X_M := \bigcap_{a \in M} \eta_a \setminus \bigcup_{a \notin M} \eta_a, \tag{169}$$

für $M = \emptyset$ sei

$$X_\emptyset := \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{a \in \Delta} \eta_a. \tag{170}$$

Eine *Facette* von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ ist eine Zusammenhangskomponente einer Menge der Form X_M. Eine l-dimensionale Facette, also eine Facette maximaler Dimension, wird als *Kammer* bezeichnet. Kammern sind also Zusammenhangskomponenten von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{a \in \Delta} \eta_a$.

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Facetten paarweise disjunkt sind, und daß ihre Vereinigung ganz $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ ist.

Definition 2.52. Für $\Omega \subset \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ sei der *Facettenabschluß* $\bar{\Omega}^\mathcal{F}$ (bezüglich Δ) der Abschluß der Vereinigung aller Facetten, die mit $\bar{\Omega}^{\text{konv}}$ nichtleeren Schnitt haben. $\bar{\Omega}^\mathcal{F}$ ist immer konvex.

Sei ab nun $\Omega = \bar{\Omega}^{\text{konv}}$. Wir sagen eine Wand η_a zerteilt Ω, wenn $\Omega \backslash \eta_a$ mehr als eine Zusammenhangskomponente hat. Dies ist offenbar äquivalent dazu, daß $\overset{\circ}{\Omega} \cap \eta_a \neq \emptyset$ ist, wenn $\overset{\circ}{\Omega}$ das Innere von Ω bezeichnet, und auch dazu, daß $\Omega \cap H_a^+ \neq \emptyset$ und $\Omega \cap H_a^- \neq \emptyset$.

Lemma 2.53. *Jede Wand die $\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ zerteilt, zerteilt auch Ω.*

Beweis: Aus der Definition der Facetten folgt, daß eine Facette durch keine Wand zerteilt werden kann. Daraus folgt: wenn η_a die Menge $\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ zerteilt, dann existieren Facetten $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F}_1 \subset H_a^+$ und $\mathcal{F}_2 \subset H_a^-$. Beide haben mit Ω nichtleeren Schnitt. Daraus folgt $\Omega \cap H_a^+ \neq \emptyset$ und $\Omega \cap H_a^- \neq \emptyset$, d.h. η_a zerteilt Ω. □

Satz 2.54. *Es ist $\tilde{f_{\Omega\mathbb{Z}}} = \tilde{f_{\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}\mathbb{Z}}}$, insbesondere sind die durch Ω und $\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ definierten $\mathbb{C}[|t^r|]$-Formen von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \nu)$ dieselben.*

Beweis: Da $\Omega \subset \bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ gilt

$$\tilde{f_{\Omega\mathbb{Z}}} \leq \tilde{f_{\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}\mathbb{Z}}}.$$

Für $\tilde{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{j})$ mit $j \in 0, \ldots, r-1$ und $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$ ist

$$\tilde{f_{\Omega\mathbb{Z}}}(\tilde{\alpha}) = \min \left\{ k \in j + r\mathbb{Z} \mid k \geq -\inf \bar{\alpha}(\bar{\Omega}) \right\}. \tag{171}$$

Angenommen

$$k := \tilde{f_{\Omega\mathbb{Z}}}(\tilde{\alpha}) < \tilde{f_{\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}\mathbb{Z}}}(\tilde{\alpha}). \tag{172}$$

Dann gilt

$$-\inf \bar{\alpha}(\bar{\Omega}) \leq k < -\inf \bar{\alpha}(\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}). \tag{173}$$

Da $\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ konvex ist, existiert ein $x \in \overset{\circ}{\bar{\Omega}}{}^{\mathcal{F}}$, so daß

$$\bar{\alpha}(x) = -k \tag{174}$$

ist. Da $(\bar{\alpha}, \bar{j}) \in \tilde{\Phi}$ und $k \in j + r\mathbb{Z}$ ist, ist $a := \bar{\alpha} + k\delta \in \Delta$ und die zugehörige Wand η_a zerteilt $\bar{\Omega}^{\mathcal{F}}$ aber nicht Ω im Widerspruch zu Lemma 2.53. □

2.2.4. *Durchschnitte von Parahoriunteralgebren.* Seien $a_i \in \{0, \ldots, l\}$ die einfachen Wurzeln von Δ. Die affine Weylgruppe W wird als Untergruppe der Gruppe der affin linearen Transformationen von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ realisiert. Sie wird erzeugt durch die Spiegelungen an der Hyperebenen η_{a_i} mit $i \in \{0, \ldots, l\}$.

Die affine Weylgruppe stabilisiert die Menge aller Wände in $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ und überführt daher auch Facetten in Facetten. Tatsächlich kann die Menge der Facetten in natürlicher Weise als simplizialer Komplex betrachtet werden. Dieser stellt eine Realisierung des sogenannten Coxeterkomplexes von W dar (siehe [Ga, Ch.12]). Die *fundamentale Weylkammer* ist die Menge

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i \in \{0, \ldots, l\}} H_{a_i}^+. \tag{175}$$

(Man überlegt sich leicht, daß dies eine Kammer ist.) Der Abschluß $\bar{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation der Weylgruppe auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$. Sei $\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{C}}$ eine Facette. Dann definiert man den *Typ* $X(\mathcal{F})$ *von* $\mathcal{F}$ als

$$X(\mathcal{F}) := \{i \in \{0, \ldots, l\} \mid \mathcal{F} \subset \eta_{a_i}\}. \tag{176}$$

Es gilt nun: Jede Facette in $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ ist durch die affine Weylgruppe zu genau einer Facette in $\bar{\mathcal{C}}$ konjugiert. Daher ist der Typ von $\mathcal{F}$ für jede Facette wohldefiniert, nämlich als der Typ der zugehörigen Facette in $\bar{\mathcal{C}}$. Der folgende Satz folgt auf der Gruppenebene aus [BT, Prop.(7.4.4.)].

Satz 2.55. *Sei $\mathcal{F}$ eine Facette der fundamentalen Weylkammer. Dann gilt für $f = f_{\mathcal{F}}$ und $X = X(\mathcal{F})$*

$$\mathfrak{p}_f = \mathfrak{p}_X. \tag{177}$$

Beweis: Seien $\{\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_l\}$ die einfachen Wurzeln von $\bar{\Phi}$ und $\{a_0, \ldots, a_l\}$ die einfachen Wurzeln von Δ. Wir identifizieren a_i mit $\bar{\alpha}_i$ für $i = 1, \ldots, l$ und $a_0 = \delta - \bar{\theta}_0$ wie in [Ka, (8.3.6)]. Aus der Definition der fundamentalen Weylkammer $\mathcal{C}$ folgt, daß

$$\bar{\mathcal{C}} = \{x \in \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \mid -\bar{\theta}_0(x) \geq -1 \quad \text{und } \bar{\alpha}_i(x) \geq 0 \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, l\}\,\}. \tag{178}$$

Daher gilt zunächst einmal

$$\bar{\alpha}(x) \geq 0 \quad \text{für alle } \bar{\alpha} \in \bar{\Phi}^+,\ x \in \bar{\mathcal{C}}. \tag{179}$$

Es folgt

$$f_\Omega(\bar{\alpha}) = -\inf \bar{\alpha}(\Omega) \leq 0 \quad \text{für alle } \bar{\alpha} \in \bar{\Phi}^+,\ \Omega \subseteq \bar{\mathcal{C}}. \tag{180}$$

Daraus folgt, daß $\mathfrak{p}_{f_\Omega}$ alle Wurzelräume zu positiven Wurzeln von Δ enthält und damit eine Parahoriunteralgebra von $\bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ ist. Als solche ist sie eindeutig bestimmt durch ihren Typ, d.h. durch die Menge $X = \{i \in \{0, \ldots, l\} \mid \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)_{-a_i} \subset \mathfrak{p}_f\}$. Für $\bar{\alpha} \in \bar{\Phi}$, $k \in \mathbb{Z}$ sind die folgenden drei Zeilen äquivalent:

$$f_\Omega(\bar{\alpha}) = -f_\Omega(-\bar{\alpha}) = k \tag{181}$$

$$-k = \inf(\bar{\alpha}(\Omega)) = -\inf(-\bar{\alpha}(\Omega)) = \sup(\bar{\alpha}(\Omega)) \tag{182}$$

$$\Omega \subset \eta_{\bar{\alpha}+k\delta}. \tag{183}$$

Insbesondere gelten

$$\Omega \subset \eta_{a_0} \iff f_\Omega(-\bar{\theta}_0) = 1 \wedge f_\Omega(\bar{\theta}_0) = -1 \quad \iff \quad \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)_{-a_0} \subset \mathfrak{p}_f \tag{184}$$

und für $i \in \{1, \ldots, l\}$

$$\Omega \subset \eta_{a_i} \iff f_\Omega(\bar{\alpha}_i) = 0 \wedge f_\Omega(-\bar{\alpha}_i) = 0 \quad \iff \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)_{-a_i} \subset \mathfrak{p}_f. \tag{185}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Durch Satz 2.55 ergibt sich eine Einordnung der Twistkonstruktion aus Abschnitt 2.1. Die dort konstruierten A-Formen $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ sind ja, wie in Abschnitt 2.1.2 gezeigt wurde, isomorph zu den Parahoriunteralgebren $\mathfrak{p}_X$, welche durch die Menge X der einfachen affinen Wurzeln vom Grad 0 eindeutig bestimmt ist. Nach Satz 2.22 und Satz 2.28 läßt sich umgekehrt zu jeder echten Teilmenge X der Menge $\{0, \ldots ,l\}$ ein Automorphismus σ angeben, so daß $\mathfrak{p}_X$ isomorph zu $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist.

Man überlegt sich leicht, daß für zwei konkave Funktionen f_1, f_2 auch die Funktion $\max(f_1, f_2)$ wieder konkav ist, und daß gilt:

$$\mathfrak{p}_{\max(f_1,f_2)} = \mathfrak{p}_{f_1} \cap \mathfrak{p}_{f_2}. \tag{186}$$

Auch gilt $f_{\Omega_1\cup\Omega_2} = \max(f_{\Omega_1}, f_{\Omega_2})$. Daraus folgt $\mathfrak{p}_{\Omega_1\cup\Omega_2} = \mathfrak{p}_{\Omega_1} \cap \mathfrak{p}_{\Omega_2}$. Jede beschränkte Facetten-abgeschlossene Menge Ω läßt sich in endlich viele Facetten zerlegen:

$$\Omega = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_N. \tag{187}$$

Damit ist die A-Form $\mathfrak{p}_\Omega$ ein endlicher Durchschnitt von Parahoriunteralgebren (zu ggf. verschiedenen Iwahoriunteralgebren):

$$\mathfrak{p}_\Omega = \mathfrak{p}_{\mathcal{F}_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_{\mathcal{F}_N}. \tag{188}$$

Aus Satz 1.30 folgt, daß der Nullteil der Degeneration $\mathfrak{p}_f$, wenn diese einer Kontraktion entspricht, mindestens den halbeinfachen Anteil der reduktiven Unteralgebra

$$\mathfrak{g}_{0m} = \mathfrak{h}_{\bar{0}} \oplus \bigoplus_{\bar{\alpha}\in\bar{\Phi}^0(f)} \mathfrak{g}_{(\bar{\alpha},\bar{0})} \quad \text{mit } \bar{\Phi}^0(f) := \{\bar{\alpha} \in \bar{\Phi} \mid f(\bar{\alpha}) + f(-\bar{\alpha}) = 0\} \tag{189}$$

enthalten muß und für $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist dies genau der Nullteil. Offenbar ist $\mathfrak{g}_{0m}$ im ungetwisteten Fall stets regulär, d.h. $\mathfrak{h}$-diagonalisierbar, und im getwisten Fall $\mathfrak{h}_{\bar{0}} \times \langle\nu\rangle$-diagonalisierbar.

Aus obigem folgt $\bar{\Phi}^0(f_{\Omega_1\cup\Omega_2}) = \bar{\Phi}^0(f_{\Omega_1}) \cap \bar{\Phi}^0(f_{\Omega_2})$, falls $f_{\Omega_1} \geq 0$ für $i = 1, 2$.

Die Durchschnittsbildung in (188) überträgt sich daher auf die Mindestnullteile der zugehörigen kontrahierten Algebren, falls alle $f_{\mathcal{F}_i} \geq 0$ sind. Für eine Vereinigung von Facetten wie oben ist dies genau dann der Fall, wenn alle beteiligten Facetten den Nullpunkt berühren. Ist nämlich $0 \in \bar{\mathcal{F}}$, so gilt $f_{\mathcal{F}} = f_{\bar{\mathcal{F}}} \geq f_{\{0\}} = 0$. Ist andererseits $0 \notin \bar{\mathcal{F}}$, so folgt, daß für mindestens eine Wurzel $\bar{\alpha}$ das Intervall $\bar{\alpha}(\bar{\mathcal{F}})$ die Null nicht enthält ($\{0\}$ und $\bar{\mathcal{F}}$ liegen auf verschiedenen Seiten einer Wand $\eta_{\bar{\alpha}+k\delta}$). Daher ist entweder $f_{\mathcal{F}}(\bar{\alpha})$ oder $f_{\mathcal{F}}(-\bar{\alpha})$ negativ.

Im nächsten Abschnitt werden konkave Funktionen durch die affine Weylgruppe so verschoben, daß die zugehörigen Algebren in einer Parahoriunteralgebra liegen.

Die Nullteile von Parahori-Unteralgebren von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$ sind (wie in Abschnitt 2.1.1 ausgeführt wurde) stets Fixpunktalgebren von Automorphismen endlicher Ordnung von $\mathfrak{g}$. Daher sind die Mindestnullteile der durch die A-Formen $\mathfrak{p}_\Omega$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}((t))}$ mit beschränktem Ω definierten Kontraktionen von $\mathfrak{g}$ jeweils endliche Durchschnitte von Fixpunktalgebren von Automorphismen endlicher Ordnung von $\mathfrak{g}$, die in derselben Nebenklasse bezüglich $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ in $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ liegen und dieselbe Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ bzw. $\mathfrak{h}_0^\nu$ von $\mathfrak{g}$ fixieren.

2.2.5. *Positivität von f.* Wenn alle Werte von f nichtnegativ sind, ist klar, daß die A-Form $\mathfrak{p}_f$ zu einer echten Kontraktion von $\mathfrak{g}$ gehört.

Im allgemeinen kann f jedoch auch negative Werte annehmen. Trotzdem ist, wie wir im folgenden zeigen werden, $\mathfrak{p}_f$ stets isomorph zu einer A-Form von $\mathfrak{g}$, die zu einer Kontraktion assoziiert ist.

Lemma 2.56. *Seien f und g konkave Funktionen auf $\bar{\Phi}$. Wenn $s := f - g : \bar{\Phi} \to \mathbb{Z}$ linear ist, dann definieren f und g in (156) dieselben Strukturkonstanten, also isomorphe Degenerationen.*

Beweis: Die Strukturkonstanten in (156) stimmen überein, wenn für alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\Phi}$ mit $\bar{\alpha} + \bar{\beta} \in \bar{\Phi}$

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) + f(\bar{\beta}) - f(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) &= g(\bar{\alpha}) + g(\bar{\beta}) - g(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \quad \text{und} \\ f(\bar{\alpha}) + f(-\bar{\alpha}) &= g(\bar{\alpha}) + g(-\bar{\alpha}). \end{aligned} \tag{190}$$

Dies ist äquivalent dazu, daß für alle $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\Phi}$ mit $\bar{\alpha} + \bar{\beta} \in \bar{\Phi}$

$$s(\bar{\alpha}) + s(\bar{\beta}) = s(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \text{ und } s(\bar{\alpha}) = -s(-\bar{\alpha}). \tag{191}$$

□

Sei $\mathring{W}$ die Weylgruppe des endlichen Wurzelsystems $\bar{\Phi}$. Sie kann identifiziert werden mit dem Stabilisator des Nullpunkts von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ in W. Sei $Q^\vee$ das Cowurzelgitter des Wurzelsystems $\bar{\Phi}$, d.h. das von den Cowurzeln $h_i = \bar{\alpha}_i^\vee$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Gitter in $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$. Die affine Weylgruppe läßt sich dann stets als semidirektes Produkt von $\mathring{W}$ mit einem Untergitter von $Q^\vee$, welches als Gruppe von Translationen von $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ aufgefaßt wird, beschreiben, und zwar

$$W = M \rtimes \mathring{W} \quad \text{mit } M = \begin{cases} Q^\vee & \text{falls } r = 1 \text{ oder } \Delta \equiv A_{2l}^{(2)}, \\ \langle \bar{\Phi}_l^\vee \rangle & \text{sonst.} \end{cases} \tag{192}$$

Im getwisteten Fall, mit Ausnahme von $A_{2l}^{(2)}$, ist also das Gitter der Translationen in W das von den langen Cowurzeln aufgespannte Teilgitter von $Q^\vee$, während es im ungetwisteten Fall immer das ganze Cowurzelgitter ist.

Satz 2.57. *Ist f eine konkave Funktion auf $\bar{\Phi}$, dann ist die zugehörige Degeneration $\mathfrak{p}_f$ stark äquivalent zu einer Kontraktion.*

Beweis: Die Menge Ω_f enthält nach Lemma 2.50 mindestens einen Punkt. Daher enthält der Facettenabschluß $\bar{\Omega}_f^{\mathcal{F}}$ eine Facette $\mathcal{F}$. Die affine Weylgruppe $W = M \rtimes \mathring{W}$ (siehe (192)) operiert auf den konkaven Funktionen wie folgt. Sei $w = (\bar{w}, q) \in W$ mit $\bar{w} \in \mathring{W}$ und $q \in M$. Dann sei

$$(w.f)(\bar{\alpha}) = f((\bar{w})^{-1}(\bar{\alpha})) + \bar{\alpha}(q), \tag{193}$$

wobei die Operation von $\mathring{W}$ auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}^*$ die zu der Operation auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ duale sei. Da die Elemente der endlichen Weylgruppe $\mathring{W}$ zu Automorphismen von $\mathfrak{g}$ korrespondieren, sind die Strukturkonstanten in (156) invariant unter $\mathring{W}$, also z.B. $c_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}} = c_{\bar{w}\tilde{\alpha},\bar{w}\tilde{\beta}}^{\bar{w}(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})}$. für $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\Phi}$. Zusammen mit Lemma 2.56 folgt, daß die Degenerationen $\mathfrak{p}_{w.f}$ und $\mathfrak{p}_f$ isomorph sind. Die Operation von W auf den Funktionen ist mit der Operation auf $\mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}}$ verträglich, d.h. es gilt $\Omega_{w.f} = w.\Omega_f$. Sei nun $w \in W$ so gewählt, daß $w.\mathcal{F} \subset \bar{\mathcal{C}}$ ist. Dann gilt nach (166) und (163)

$$w.f \geq f_{w.\Omega_f} \geq f_{w.\mathcal{F}}. \tag{194}$$

Daher gilt

$$\mathfrak{p}_f \cong \mathfrak{p}_{w.f} \subset \mathfrak{p}_X. \tag{195}$$

Da nun $\mathfrak{p}_X$ immer vermöge dem Inversen des Enttwistungsisomorphismus Ψ stark äquivalent zu einer Degeneration $\mathfrak{p}_+(\sigma)$ ist, und diese einer echten Kontraktion entspricht, wird auch $\mathfrak{p}_{w.f}$ durch Ψ^{-1} auf eine Degeneration abgebildet, die einer echten Kontraktion entspricht. □

Bemerkung 2.58. Ist G eine algebraische Gruppe über $\mathbb{C}((t^r))$ mit $\mathrm{Lie}(G) = \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ und ist (G, B, N, S) ein affines Titssystem mit Weylgruppe W. Dann gilt nach [BT, (5.2.2.)]

$$nP_\Omega n^{-1} = P_{\pi(n).\Omega} \text{ für alle } n \in N,\ \Omega \subset \mathfrak{h}_{\bar{0}\mathbb{R}} \tag{196}$$

wenn π der kanonische Homomorphismus $\pi : N \to N/(B \cap N) \cong W$ ist. Ist daher $\pi(n) = w$ so ist

$$\mathfrak{p}_{w.f} = \mathrm{Ad}(n)(\mathfrak{p}_f). \tag{197}$$

2.3. **Integrabilität der Inonü-Wigner-Kontraktionen.** In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß alle Inonü-Wigner-Kontraktionen integrabel im Sinne von [Ka2] sind.

Definition 2.59. Ist $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra und ρ eine lineare Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf einem Vektorraum V, so heißt ein Element $x \in \mathfrak{g}$

- ρ-lokal-endlich, wenn für alle $v \in V$ der von der Menge $\{\rho(x)^n(v) \mid n \in \mathbb{N}\}$ aufgespannte Unterraum von V endlichdimensional ist.
- ρ-halbeinfach, wenn V in Eigenräume von $\rho(x)$ zerfällt.
- ρ-lokal-nilpotent, wenn für alle $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\rho(x)^n(v) = 0$ existiert.

Bemerkung 2.60. Ist V endlichdimensional, so ist jedes Element x lokal endlich und jedes lokal nilpotente x ist nilpotent. Die im endlichdimensionalen geläufige Jordanzerlegung der Endomorphismen in den halbeinfachen und den nilpotenten Anteil läßt sich auf den Fall, daß V unendlichdimensional ist, verallgemeinern: Jedes lokal endliche Element ist Summe eines halbeinfachen und eines lokal nilpotenten Elements, welche miteinander kommutieren.

Definition 2.61. Eine Liealgebra heißt *integrabel*, wenn sie von ad-lokal-endlichen Elementen erzeugt wird.

Definition 2.62. Eine Unteralgebra $\mathfrak{u}$ einer Liealgebra $\mathfrak{g}$ heißt integrable Unteralgebra, wenn sie als Liealgebra integrabel ist und alle $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}}$-lokal-endlichen Elemente von $\mathfrak{u}$ auch $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-lokal endlich sind.

Beispiel 2.63. Die Unteralgebra $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|]$ der Loopalgebra ist abelsch, also ist jedes ihrer Elemente ad-nilpotent, also ist $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|]$ als $\mathbb{C}$-Liealgebra integrabel. Sie ist aber keine integrable Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ über $\mathbb{C}$, da insbesondere die Elemente der Form th mit $h \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ nicht $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$-lokal endlich sind: Sei $\alpha \in \Phi$ mit $\alpha(h) \neq 0$, dann ist $\mathrm{ad}(th)^n e_\alpha = t^n \alpha(h)^n e_\alpha$ und die Familie $(\mathrm{ad}(th)^n e_\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ spannt den unendlichdimensionalen Unterraum $\mathbb{C}e_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} t\,\mathbb{C}[|t|]$ auf.

Beispiel 2.64. Die $\mathbb{C}[|t|]$-Form

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\,\mathbb{C}[|t|] = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[|t|] \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} t\,\mathbb{C}[|t|] \tag{198}$$

mit dem Nullteil $\mathfrak{h}$ ist integrabel. Die Liealgebra $\mathfrak{a}_1$ läßt sich nämlich als $\mathbb{C}$-Liealgebra wie folgt in ein semidirektes Produkt zerlegen:

$$\mathfrak{a}_1 = \left(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} t^2\,\mathbb{C}[|t|] \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \otimes_{\mathbb{C}} t\,\mathbb{C}[|t|] \right) \rtimes (\mathbb{C}\,\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\,t)\,. \tag{199}$$

Der erste Faktor bildet offenbar ein Ideal von $\mathfrak{a}_1$. Dieses ist für sich genommen eine integrable Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, da es von $\mathfrak{h}$ und von Wurzelvektoren erzeugt wird und alle Wurzelvektoren ad-lokal-nilpotent sind. Der zweite Faktor $t\mathfrak{h} = \mathbb{C}\mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}t$ enthält zwar, wie Beispiel 2.63 zeigt, lauter Elemente, die nicht ad-lokal endlich sind, trotzdem liegt er in dem Erzeugnis der ad-lokal endlichen Elemente von $\mathfrak{a}_1$: Es bezeichne $(.\,|\,.)$ die normierte invariante Form auf $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ gemäß [Ka]. Da $\mathfrak{h}$ von den Elementen der Form

$$h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] \qquad \alpha \in \Phi_+,\ e_\alpha \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})_\alpha,\ f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})_{-\alpha},\ (e_\alpha | f_\alpha) = 1$$

erzeugt wird, genügt es zu zeigen, daß die Elemente der Form $t\,h_\alpha$ von ad-lokal endlichen Elementen erzeugt werden. Da e_α ad-nilpotent ist, ist $\exp(\mathrm{ad}(e_\alpha))$ ein wohldefinierter Automorphismus von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Da tf_α ad-nilpotent ist, ist auch sein Bild unter $\exp(\mathrm{ad}(e_\alpha))$ ad-nilpotent. Es ist

$$\exp(\mathrm{ad}(e_\alpha))(tf_\alpha) = \left(\mathrm{id} + \mathrm{ad}(e_\alpha) + \frac{1}{2}\mathrm{ad}(e_\alpha)^2 \right)(tf_\alpha) = tf_\alpha + th_\alpha - te_\alpha. \tag{200}$$

Somit ist

$$t\,h_\alpha = \exp(\mathrm{ad}(e_\alpha))(tf_\alpha) - tf_\alpha + te_\alpha \tag{201}$$

Summe von ad-nilpotenten Elementen.

Genau wie für $\mathfrak{a}_1$ sieht man auch, daß die Unteralgebra

$$\mathfrak{a}_2 := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} t\,\mathbb{C}[|t|] \tag{202}$$

integrabel ist. Damit gilt

Satz 2.65. *Jede Inonü-Wigner Kontraktion einer halbeinfachen Liealgebra ist integrabel.*

Beweis: Eine Inonü-Wigner-Kontraktion mit beliebigem Nullteil $\mathfrak{g}_0$, hat die Form

$$\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{a}_2, \tag{203}$$

wobei der Nullteil $\mathfrak{g}_0$ als Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ aus ad-lokal-endlichen Elementen von $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ besteht, also auch integrabel ist. Die Summe von zwei integrablen Unteralgebren ist aber stets wieder eine integrable Unteralgebra, da die ad-lokal-endlichen Elemente der beteiligten Unteralgebren per Definition auch $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}(\mathfrak{g})}$-lokal-endlich sind.

□

3. Deformationen und Degenerationen auf der Gruppenebene

In diesem Kapitel werden Deformationen und Degenerationen von affinen algebraischen Gruppen eingeführt und die Liftung von Degenerationen von Liealgebren zu Degenerationen von Gruppen behandelt.

Zur Erinnerung: Affine algebraische Gruppen sind identifizierbar mit linear algebraischen Gruppen, denn jede affine algebraische Gruppe ist isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe einer GL_n (siehe zum Beispiel [Hu2, 8.6.]).

3.1. Gruppenschemata und Deformationen.

Zunächst einige grundlegende Definitionen und Sätze über affine Gruppenschemata und ihre Liealgebren. Die in diesem Abschnitt eingeführten Begriffe stammen größtenteils aus [Wa]. Einige weitere Grundbegriffe finden sich im Anhang.

In diesem Unterabschnitt sei A, wo nichts anderes angegeben wird, ein beliebiger Ring.

Definition 3.1. [Ha, IV§4 p.324] Ein A-*Gruppenschema* ist ein A-Schema $\mathcal{G}$ zusammen mit Morphismen:

- dem Eins-Schnitt $e : \mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{G}$,
- dem Inversen $i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,
- dem Produkt $p : \mathcal{G} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,

so daß gelten

1. „neutrales Element“: $p \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{G}}, e \circ \pi) = p \circ (e \circ \pi, \mathrm{id}_{\mathcal{G}}) = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$, wobei $\pi : \mathcal{G} \to \mathrm{Spec}(A)$ die kanonische Projektion sei,
2. „Inverses“: $p \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{G}}, i) = p \circ (i, \mathrm{id}_{\mathcal{G}}) = e \circ \pi$,
3. „Assoziativität“: $p \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{G}} \times p) = p \circ (p \times \mathrm{id}_{\mathcal{G}})$.

Bemerkung 3.2. Eine affine algebraische Gruppe über einem Körper k ist per Definition eine algebraische Teilmenge eines k^n mit einer Gruppenstruktur, wobei das Produkt $p : G \times G \to G$ und das Inverse $i : G \to G$ Morphismen sind. Da G affin ist, entsprechen dem Produkt und dem Inversen die dualen Morphismen $p^\sharp : k[G] \to k[G] \otimes_k k[G]$ und $i^\sharp : k[G] \to k[G]$. Die Gruppeneigenschaften wie Assoziativität usw. lassen sich durch Bedingungen an diese Morphismen ausdrücken. Auf analoge Art kommt man jetzt von affinen Gruppenschemata zu Hopfalgebren.

Zur Notation: Für zwei Morphismen $f_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$, $f_2 : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$ von affinen Schemata sei $f_1 \times f_2$ der dadurch induzierte Morphismus von $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ nach $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$. Der duale Morphismus $(f_1 \times f_2)^\sharp : A[\mathcal{Y}_1] \otimes_A A[\mathcal{Y}_2] \to A[\mathcal{X}_1] \otimes_A A[\mathcal{X}_2]$ ist dann $f_1^\sharp \otimes f_2^\sharp$. Sind $f_1 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_1$, $f_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_2$ zwei Morphismen von affinen Schemata mit demselben Definitionsbereich $\mathcal{X}$, dann ist in kanonischer Weise ein Morphismus von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2$ definiert. Diesen bezeichnen wir mit (f_1, f_2). Den dualen Morphismus $(f_1, f_2)^\sharp : A[\mathcal{Y}_1] \otimes_A A[\mathcal{Y}_2] \to A[\mathcal{X}_1]$ schreiben wir als $(f_1^\sharp, f_2^\sharp)$. Er ist festgelegt durch $r_1 \otimes r_2 \mapsto f_1^\sharp(r_1) f_2^\sharp(r_2)$ für $r_1 \in A[\mathcal{Y}_1]$, $r_2 \in A[\mathcal{Y}_2]$.

Definition 3.3. Eine *A-Hopfalgebra* ist eine A-Algebra $A[\mathcal{X}]$ zusammen mit folgenden Morphismen:

- der Coeins (dem Eins-Schnitt) $e^\sharp : A[\mathcal{X}] \to A$,
- dem Coinversen $i^\sharp : A[\mathcal{X}] \to A[\mathcal{X}]$,
- dem Coprodukt $\Delta : A[\mathcal{X}] \to A[\mathcal{X}] \otimes_A A[\mathcal{X}]$

mit folgenden Eigenschaften:

1. „neutrales Element“: $(\mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}, e^\sharp) \circ \Delta = (e^\sharp, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}$,
2. „Inverses“: $(\mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}, i^\sharp) \circ \Delta = (i^\sharp, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta = \psi_{A,A[\mathcal{G}]} \circ e^\sharp$, wobei $\psi_{A,A[\mathcal{G}]} : A \to A[\mathcal{G}]$ die kanonische Inklusion sei,
3. „Assoziativität“: $(\mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta$.

Definition 3.4. Ein *Morphismus* von Gruppenschemata $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ ist ein Morphismus von Schemata: $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, der mit der Multiplikation verträglich ist, das heißt: $p_{\mathcal{H}} \circ (f \times f) = f \circ p_{\mathcal{G}}$. Ein *Morphismus* $F : A[\mathcal{H}] \to A[\mathcal{G}]$ von Hopfalgebren $A[\mathcal{H}]$ und $A[\mathcal{G}]$ ist ein Homomorphismus von A-Algebren, für den gilt:

$$(F \otimes F) \circ \Delta_{\mathcal{H}} = \Delta_{\mathcal{G}} \circ F. \tag{204}$$

Mit dieser Definition überträgt sich die Antiäquivalenz zwischen Ringen und affinen Schemata (siehe Bem. A.28) auf Hopfalgebren und Gruppenschemata.

Satz 3.5. [DG, II§1.1.6.Prop.] *Der Funktor $A[\mathcal{X}] \to Spec(A[\mathcal{X}])$ liefert eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der Hopfalgebren über einem Ring A und der Kategorie der A-Gruppenschemata.*

Beweis: Dies folgt daraus, daß offensichtlich alle Bedingungen an die Morphismen e, i, p bzw. $e^\sharp, i^\sharp, \Delta$, sowie die Definition der Morphismen in den beiden Kategorien durch die Antiäquivalenz zwischen A-Algebren und affinen A-Schemata ineinander übergehen. □

Jedes affine A-Gruppenschema kann in kanonischer Weise als darstellbarer Funktor (siehe Definiton A.38) von A-Algebren nach Gruppen betrachtet werden: Sei B eine A-Algebra und $\psi_B : A \to B$ der zugehörige Homomorphismus $a \mapsto a.1$ für $a \in A$. Dann erklärt man auf der Menge

$$\mathcal{G}(B) := \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\mathcal{G}], B) \tag{205}$$

eine Gruppenstruktur, indem neutrales Element, Inverses und Produkt wie folgt definiert werden:

$$e_B := \psi_B \circ e^\sharp, \tag{206}$$

$$a^{-1} := a \circ i^\sharp \quad \text{für } a \in \mathcal{G}(B), \tag{207}$$

$$ab := (a, b) \circ \Delta \quad \text{für } a, b \in \mathcal{G}(B). \tag{208}$$

Bemerkung 3.6. Ist B eine A-Algebra und $A[\mathcal{G}]$ eine Hopfalgebra, dann ist auch $A[\mathcal{G}] \otimes_A B =: B[\mathcal{G}]$ eine Hopfalgebra über B, denn Coeins, Coinverses und Coprodukt lassen sich durch B-lineare Fortsetzung auf diese übertragen. Dies wird als

Basiswechsel bezeichnet. Man schreibt auch $\mathcal{G}_B$ für das B-Gruppenschema, das aus A durch den Basiswechsel $A \to B$ entsteht. Insbesondere lassen sich die klassischen Gruppen $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}_n$, etc. für jeden Ring A definieren, da sie über $\mathbb{Z}$ definiert sind. Das gleiche gilt für die multiplikative Gruppe $\mathrm{G_m}$ und die additive Gruppe $\mathrm{G_a}$ eines Rings, oder zum Beispiel die Gruppe μ_n der n-ten Einheitswurzeln mit $B[\mu_n] = B[X]/(X^n - 1)$.

Bemerkung 3.7. Ein affines A-Gruppenschema kann in kanonischer Weise als Familie von affinen Gruppenschemata über den Restklassenkörpern k_t, $t \in \mathrm{Spec}(A)$[13] angesehen werden. Seine Fasern $\mathcal{G}_t$ (siehe Def. A.36) bilden nämlich in kanonischer Weise affine Gruppenschemata mit den Koordinatenringen $k_t[\mathcal{G}_t] = A[\mathcal{G}] \otimes_A k_t$. Es ist also $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{k_t}$ und wir verwenden beide Schreibweisen, insbesondere schreiben wir $\mathcal{G}_K$ mit $K = \mathrm{Quot}(A)$ für die generische Faser eines A-Gruppenschemas.

Es gilt das Theorem von Cartier:

Satz 3.8 (Cartier)**.** [Wa, 11.4.] *Hopfalgebren über Körpern der Charakteristik Null sind reduziert.*

Ist daher $\mathrm{char}(k_t) = 0$ und k_t algebraisch abgeschlossen, dann entspricht $\mathcal{G}_t$ einer algebraischen Gruppe über k_t, insbesondere gilt $k_t[\mathcal{G}_t] = k_t[\mathcal{G}(k_t)]$.

Beispiel 3.9. Über einem Körper der endlichen Charakteristik p ist das Gruppenschema μ_p der p-ten Einheitswurzeln nicht reduziert, denn in Charakteristik p gilt $(X+Y)^p = X^p + Y^p$, daher ist $X - 1$ nilpotent in $k[\mu_p]$.

Definition 3.10. Ein Schema $\mathcal{X}$ heißt *equidimensional*, wenn jede irreduzible Komponente von $\mathcal{X}$ die gleiche Dimension hat.

Zur Definition des im folgenden verwendeten Begriffs der Flachheit und einiger seiner Konsequenzen siehe Anhang A.0.6.

Satz 3.11. *Sei A eine endlich erzeugte Integritäts-k-Algebra oder ein diskreter Bewertungsring mit Restklassenkörper k. Sei $K = Quot(A)$ und $\mathcal{X}$ ein reduziertes endlich erzeugtes flaches affines A-Schema. Wenn A ein diskreter Bewertungsring ist, sei $\mathcal{X}$ reduziert und $\mathcal{Z}_k \neq \emptyset$ für jede irreduzible Komponente $\mathcal{Z}$ von $\mathcal{X}$. Dann gilt: Ist $\mathcal{X}_K$ equidimensional von der Dimension n, dann ist auch $\mathcal{X}$ equidimensional, und zwar von der Dimension $n + dim(A)$, und alle Fasern $\mathcal{X}_{k_t}$, $t \in Spec(A)$ sind ebenfalls equidimensional von der Dimension n.*

Beweis: Jedes flache Schema ist torsionsfrei (siehe den Beweis von Satz B.22). In einem torsionsfreien Schema liegt die generische Faser dicht (siehe Satz 3.51). Daher ist jede irreduzible Komponente von $\mathcal{X}$ der Abschluß einer irreduziblen Komponente

[13] Um Verwechslungen mit dem Körper der rationalen Funktionen über k zu vermeiden, schreiben wir k_t statt $k(t)$ für den Restklassenkörper von A in $t \in \mathrm{Spec}(A)$.

der generischen Faser. Damit folgt die Behauptung für eine endlich erzeugte Integritäts-k-Algebra A aus Satz A.52 und für einen diskreten Bewertungsring A aus Satz A.57. □

Definition 3.12. [BT, II.8.15] Ein Schema heißt *regulär* (oder nichtsingulär), wenn alle seine lokalen Ringe regulär sind (siehe Def. B.5). Ein Schema $\mathcal{X}$ über einem Körper K heißt geometrisch regulär, wenn $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathrm{Spec}(\bar{K})$ regulär ist.

Definition 3.13. [DG, I.3.1.1] Eine A-Algebra heißt *endlich präsentiert*, wenn sie isomorph zu einem Quotienten eines Polynomrings $A[X_1, \dots, X_n]$ nach einem endlich erzeugten Ideal ist.

Definition 3.14. [BT, II.1.2.9 und 1.2.2] Sei A ein Integritätsring. Ein affines A-Schema $\mathcal{X}$ heißt *glatt*, wenn folgendes gilt:

1. $A[\mathcal{X}]$ ist als A-Algebra endlich präsentiert.
2. $\mathcal{X}$ ist flach.
3. Alle Fasern von $\mathcal{X}$ sind geometrisch regulär.

$\mathcal{X}$ heißt *glatt von relativer Dimension n*, wenn außerdem alle Fasern von $\mathcal{X}$ equidimensional von der Dimension n sind (vgl. [Ha, III.10.2])[14].

Nach Satz 3.11 ist die letzte Bedingung für ein flaches affines A-Schema über einer endlich erzeugten k-Algebra oder für ein flaches reduziertes affines A-Schema über einem diskreten Bewertungsring, wenn man voraussetzt, daß jede irreduzible Komponente von $\mathcal{X}$ mit der speziellen Faser $\mathcal{X}_k$ nichtleeren Schnitt hat, äquivalent dazu, daß $\mathcal{X}$ equidimensional von der Dimension $n + \dim(A)$ ist.

Satz 3.15. *Sei k ein Körper der Charakteristik 0, A ein Dedekindring, der als k-Algebra endlich erzeugt ist, oder eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k. Ein irreduzibles Gruppenschema $\mathcal{G}$ über A ist genau dann glatt von relativer Dimension $n = \dim(A[\mathcal{G}]) - 1$, wenn es endlich erzeugt und torsionsfrei ist.*

Beweis: Über einem Dedekindring ist Flachheit äquivalent zu Torsionsfreiheit (siehe Satz B.22). Da A noethersch ist, ist jede endlich erzeugte A-Algebra auch endlich präsentiert, denn nach dem Hilbertschen Basissatz ([ZS, I.IV.I.S201]) ist auch $A[X_1, \dots, X_n]$ noethersch und damit jedes Ideal von $A[X_1, \dots, X_n]$ endlich erzeugt. Da A eine k-Algebra ist, ist k in A enthalten. Damit ist k auch in allen Restklassenkörpern k_t mit $t \in \mathrm{Spec}(A)$ enthalten. Daher haben alle Restklassenkörper die Charakteristik Null. Nach dem Theorem von Cartier sind daher alle Fasern $\mathcal{G}_t$ reduziert. Die Fasern eines Gruppenschemas sind genau dann geometrisch regulär, wenn sie reduziert sind, denn über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, hier

[14] In [Ha, III.10.2] wird eine ganz analoge Definition für nicht notwendig affine Schemata gegeben, die aber als von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k vorausgesetzt werden.

dem algebraischen Abschluß des jeweiligen Restklassenkörpers k_t, ist ein reduziertes Gruppenschema eine algebraische Gruppe im Sinne von [Hu2] und diese hat keine singulären Punkte. Da die generische Faser von $\mathcal{G}$ reduziert ist und dicht liegt, ist auch $\mathcal{G}$ reduziert (siehe Satz 3.54.2.). Daß $\mathcal{G}$ equidimensional ist und alle Fasern die Dimension n haben, folgt mit Satz 3.11 daraus, daß die spezielle Faser von $\mathcal{G}$ nichtleer ist, da der Einsschnitt jede Faser von $\mathcal{G}$ trifft. □

Bemerkung 3.16. Die Tatsache, daß Flachheit schon Glattheit impliziert, ist eine bemerkenswerte Eigenschaft von Gruppenschemata. Im allgemeinen impliziert Flachheit eines equidimensionalen Schemas nur die Gleichheit der Dimension der Fasern (Satz A.52), nicht aber, daß alle Fasern regulär sind. Ein Standardbeispiel ist das Schema $k[t,x,y]/(xy-t)$. Für $t \neq 0$ sind die Fasern Hyperbeln, über $t=0$ ist die Faser die Vereinigung der x-Achse und der y-Achse, hat also einen singulären Punkt $(0,0)$. Es gibt auch flache Schemata, bei denen nicht reduzierte Fasern auftreten, siehe z.B. [Ha, II.Example 3.3.1.]. Solche Phänomene können bei affinen Gruppenschemata nicht auftreten. Es kommt allerdings vor, daß ein irreduzibles Gruppenschema eine reduzible spezielle Faser hat (siehe die Beispiele in Abschnitt 3.3.4).

Beispiel 3.17. Algebraische Gruppen über Körpern der Charakteristik 0 sind glatt. Ist G glatt über A und B eine A-Algebra, dann ist auch G_B glatt über B (siehe [Ha, III.§10.Prop.10.1.(b)]). Insbesondere sind die klassischen Gruppen GL_n, SL_n, SO_n[15] und Sp_n glatt über jedem Ring. Ein Beispiel für ein Gruppenschema über einem Dedekindring, das Torsion hat, also nicht flach ist, ist folgendes: Es sei $A = k[|t|]$ und das A-Gruppenschema $\mathcal{G} \equiv O(J)$ die Isometriegruppe der durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ definierten symmetrischen Bilinearform[16]. Der Koordinatenring von $\mathcal{G}$ ist $A[\mathcal{G}] = A[a,b,c,d,z]/(a^2+tc^2-1, ab+tcd, b^2+td^2-t, (ad-bc)z-1)$. Die spezielle Faser ist die Gruppe

(209)
$$G(k) = \mathrm{GL}_2(k) \cap \left\{ X \mid X^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(k) \mid d \neq 0 \right\}.$$

Diese hat also die Dimension 2, während die Dimension der generischen Faser 1 ist, was bei einem flachen Schema nicht vorkommen kann. Man kann hier auch direkt ein Torsionselement angeben, zum Beispiel $a-(ad-bc)d$, denn $t(a-(ad-bc)d) = b(ab+tcd) - a(b^2+td^2-t) \in I(\mathcal{G})$.

Zur Definition eines $\mathcal{G}$-Moduls, einer linearen Darstellung und $\mathcal{G}$-Invarianz siehe Def.A.44 und Def.A.46. Im folgenden sollen Liealgebren von glatten affinen Gruppenschemata erklärt werden.

[15] Dieser Fall ist in Charakteristik 2 nichttrivial (siehe [DGfr, III,§5,2.3]).

[16] Der durch $\mathcal{G}$ beschriebene darstellbare Funktor von A-Algebren nach Gruppen ordnet also einer A-Algebra B jeweils die Gruppe $\mathcal{G}(B) = \{X \in \mathrm{GL}_2(B) \mid X^\dagger J X = J\}$ zu.

Definition 3.18. Sei B eine A-Algebra und M ein B-Modul. Eine *Derivation* von B ist eine A-lineare Abbildung $\delta : B \to M$ mit der Eigenschaft

$$\delta(a.b) = a.\delta(b) + b.\delta(a). \tag{210}$$

Sei $\mathrm{Der}_A(B, M)$ die Menge der A-linearen Derivationen von B nach M. Die Menge $\mathrm{Der}_A(B, B)$ wird auch einfach als Menge der Derivationen von B bezeichnet. Sie bildet eine Liealgebra, wenn man setzt:

$$[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta. \tag{211}$$

Definition 3.19. Ist $\mathcal{G}$ ein A-Gruppenschema, so ist $A[\mathcal{G}]$ ein $\mathcal{G}$-Modul wenn man für eine A-Algebra B, $g \in \mathcal{G}(B)$ und $r \in A[\mathcal{G}]$ setzt

$$g.r = \left((g \circ \mathrm{i}^\sharp, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta\right)(r). \tag{212}$$

[17] $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A[\mathcal{G}])$ ist ein $\mathcal{G}$-Modul, wenn man für eine A-Algebra B, $g \in \mathcal{G}(B)$ und $\delta \in \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A[\mathcal{G}])$ setzt

$$g.\delta = (g \circ \mathrm{i}^\sharp, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta \circ \delta \circ (g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta. \tag{213}$$

[18]

Satz 3.20. *Eine Derivation* $\delta \in \mathit{Der}_A(A[\mathcal{G}], A[\mathcal{G}])$ *ist genau dann* $\mathcal{G}$*-invariant, wenn*

$$\Delta \circ \delta = (\mathit{id}_{A[\mathcal{G}]} \otimes \delta) \circ \Delta. \tag{214}$$

Beweis: Es ist $i(g).g.r = r$ d.h. $\left((g \circ \mathrm{i}^\sharp, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta\right)^{-1} = (g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta$. Daher läßt sich $\mathcal{G}$-Invarianz auch schreiben als:

$$(g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta \circ \delta = \delta \circ (g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta \quad \text{für alle } g. \tag{215}$$

Da $\delta \circ (g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]})(r_1 \otimes r_2) = \delta(g(r_1)r_2) = g(r_1)\delta(r_2)$, ist dies äquivalent zu

$$(g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ \Delta \circ \delta = (g, \delta) \circ \Delta = (g, \mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}) \circ (\mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}, \delta) \circ \Delta \quad \text{für alle } g. \tag{216}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Dies kann man genauso für allgemeine „$\mathcal{G}$-invariante Operatoren" zeigen (siehe [Wa, 12.1]).

---

[17] Man kann dies aus der klassischen Definition der Translation von r mit g ableiten: $\mathcal{G}$ ist ein Gruppenfunktor, von A-Algebren nach Gruppen, $A[\mathcal{G}]$ entspricht ein Funktor $F_{A[\mathcal{G}]}$ von A-Algebren nach Mengen, der jeder A-Algebra B den B-Modul $A[\mathcal{G}] \otimes_A B = B[\mathcal{G}]$ zuordnet. Zu einem Element $r \in B[\mathcal{G}]$ korrespondiert eine Abbildung von $\mathcal{G}(B) \to B$, wenn man setzt $r(a) := a(r)$ für $a \in \mathcal{G}(B) = \mathrm{Hom}_A(A[\mathcal{G}], B)$. Für eine A-Algebra B sei $\tau_B : \mathcal{G}(B) \times B[\mathcal{G}] \to B[\mathcal{G}]$ definiert durch $g.r(x) = r(g^{-1}x)$ für alle x. (Dies taugt natürlich nur zur Definition, wenn $A[\mathcal{G}]$ als Menge von Funktionen auf $\mathcal{G}$ definiert werden kann und damit r durch seine Werte auf $\mathcal{G}$ eindeutig bestimmt ist.) Die Morphismen τ_B definieren eine natürliche Transformation von $\mathcal{G} \times F_{A[\mathcal{G}]} \to F_{A[\mathcal{G}]}$. Für die Hopfalgebra $A[\mathcal{G}]$ entspricht sie obiger Definition.

[18] Dies ist wie oben aus der klassischen Definition $(g.\delta)(r) := g.(\delta(g^{-1}.r))$ ableitbar.

Definition 3.21. Die $\mathcal{G}$-invarianten Derivationen bilden, wie man leicht nachrechnet, eine Lieunteralgebra von $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A[\mathcal{G}])$. Diese wird als die *Liealgebra von* $\mathcal{G}$, in Zeichen $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$, bezeichnet.

Sei A als $A[\mathcal{G}]$-Modul betrachtet, indem man für $r \in A[\mathcal{G}]$ und $a \in A$ setzt: $r.a = e^\sharp(r)a$. Dann kann man $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ als die Menge der „Punktderivationen im neutralen Element“ verstehen. Es gilt:

Satz 3.22. [Wa, Th.12.2] *Sei $\mathcal{G}$ ein affines A-Gruppenschema. Sei $A(\epsilon) := A^{du}(\epsilon)$ der Ring der Dualzahlen über A (siehe Def.1.4) und sei $\mathcal{G}(A(\epsilon)) \to \mathcal{G}(A)$ der durch den Algebrahomomorphismus $\psi_{A(\epsilon)} : A(\epsilon) \to A$ festgelegte Morphismus $G(\psi_{A(\epsilon)})$. Dann gibt es kanonische Bijektionen zwischen den Mengen:*

1. *$Lie(\mathcal{G})$,*
2. *$Der_A(A[\mathcal{G}], A)$,*
3. *$ker(\mathcal{G}(A(\epsilon)) \to \mathcal{G}(A))$.*

Beweis: Siehe [Wa, 12.2]. □

Die Lieklammer auf $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ ist

$$[\delta_1, \delta_2] = ((\delta_1, \delta_2) - (\delta_2, \delta_1)) \circ \Delta \tag{217}$$

(siehe [Wa, S.94]). Für Betrachtungen von linearen Gruppen ist die dritte Beschreibung der Liealgebren oft am geeignetsten. Für eine Untergruppe von GL_n kann die Menge der Punkte in $\mathcal{G}(A(\epsilon))$, die auf die Identität in $\mathcal{G}(A)$ abgebildet werden, identifiziert werden mit der Menge $\{C \in M(n \times n, A) \mid E_n + \epsilon C \in \mathcal{G}(A(\epsilon))\}$ (siehe [Wa, 12.3.(b)]). Dann ist die zugehörige Punktderivation die folgende:

$$\begin{aligned} \delta_C : A[\mathcal{G}] &\rightarrow A \\ r &\mapsto \epsilon^{-1}(r(E_n + \epsilon C) - r(E_n)) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(r(E_n + \epsilon C)) \mid_{\epsilon=0} . \end{aligned} \tag{218}$$

Definition 3.23. Sei $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ gemäß Satz 3.22 identifiziert mit $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$. Ist $R : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ein Homomorphismus von Gruppenschemata, dann ist die Ableitung $dR : \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \to \mathrm{Lie}(\mathcal{H})$ definiert durch $dR(x) = x \circ R^\sharp$. Wenn $R : G \to H$ eine abgeschlossene Einbettung ist, dann ist dR injektiv (siehe [Wa, Cor.S.94]).

Satz 3.24. *Sei $\mathcal{G}$ ein glattes A-Gruppenschema, dann gilt:*

1. *Für jede A-Algebra B ist*
$$Lie(\mathcal{G}_B) \cong Lie(\mathcal{G}) \otimes_A B.$$
2. *Ist A ein diskreter Bewertungsring, so ist $Lie(\mathcal{G})$ als A-Modul frei vom Rang $dim(\mathcal{G}) - 1$.*

Beweis: In [DG, II,§4,4.8.] wird gezeigt, daß für ein glattes Gruppenschema Punkt 1. gilt und äquivalent dazu ist, daß der A-Modul $\omega_{\mathcal{G}/A} = \omega_e$ der Differentiale in e (siehe [DG, II,§4,3.4]) endlich erzeugt und projektiv ist. (Es ist $\omega_e \cong I/I^2$, mit

$I = \ker(e^\sharp)$ (siehe [DG, II.§4,3.1]).) Es gilt nach [DG, II,§4,3.6 Cor.]: $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_B) \cong \mathrm{Hom}_A(\omega_{\mathcal{G}/A}, B)$ als B-Modul. Sei nun A ein diskreter Bewertungsring, dann ist nach Satz B.11 jeder projektive Modul frei. Aus [Ro, Th.2.4] folgt, daß ein freier A-Modul V von endlichem Rang isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(V, A)$ ist. Also ist $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ frei vom gleichen Rang wie $\omega_{\mathcal{G}/A}$. Wegen 1. ist $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_K) \cong \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \otimes_A K$, also ist

$$\mathrm{Rang}_A(\mathrm{Lie}(\mathcal{G})) = \dim_K(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \otimes_A K) \tag{219}$$
$$= \dim_K(\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_K)) \tag{220}$$
$$= \dim(\mathcal{G}_K) \tag{221}$$
$$= \dim(\mathcal{G}) - 1. \tag{222}$$

□

Ist $\mathfrak{a}$ eine Deformation von $\mathfrak{g}$ über A und $\mathcal{G}$ ein glattes A-Gruppenschema mit $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{a}$, dann folgt aus Satz 3.24, daß die Liealgebra der Faser $\mathcal{G}_{k(t_0)}$ von $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist. Ist $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$, so ist die Liealgebra $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_K)$ isomorph zu $\mathfrak{g}_K$ und die Liealgebra der Faser $\mathcal{G}_{k(t_0)}$ von $\mathcal{G}$ isomorph zur Limesalgebra von $\mathfrak{a}$. Somit macht es Sinn $\mathcal{G}$ als „Liftung“ von $\mathfrak{a}$ zu bezeichnen.

Definition 3.25. Sei $\mathfrak{a}$ eine Deformation oder Degeneration von $\mathfrak{g}$ über A. Ein glattes A-Gruppenschema $\mathcal{G}$ mit

$$\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \cong \mathfrak{a} \tag{223}$$

bezeichnen wir als *Liftung* von $\mathfrak{a}$.

Der Begriff der Deformation wird folgendermaßen auf affine algebraische Gruppen über k übertragen (vergleiche Definition 1.1):

Definition 3.26. Sei k ein Körper. Eine *Deformation einer affinen algebraischen Gruppe G_0 über k* ist ein glattes affines A-Gruppenschema $\mathcal{G}$ über einer Integritäts-k-Algebra A zusammen mit einem ausgezeichneten Punkt $t_0 \in \mathrm{Spec}(A)$ mit Restklassenkörper $k(t_0) = k$ und einem Isomorphismus ψ von k-Gruppenschemata zwischen G_0 und der Faser $\mathcal{G}_{t_0}$. Zwei Deformationen $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ von G_0, die über demselben Ring A mit demselben ausgezeichneten Punkt t_0 definiert sind, heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ von A-Gruppenschemata existiert, so daß $\psi' = f \circ \psi$, wenn $\psi : G_0 \to \mathcal{G}_{t_0}$ und $\psi' : G_0 \to \mathcal{G}'_{t_0}$ die zugehörigen Isomorphismen zwischen G_0 und der jeweiligen ausgezeichneten Faser sind.

Auch der Begriff der Degeneration (vergleiche Def. 1.23) läßt sich in kanonischer Weise übertragen:

Definition 3.27. Sei k ein Körper und A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k und $K = \mathrm{Quot}(A)$. Eine *Degeneration einer affinen algebraischen Gruppe G über k* ist ein glattes affines A-Gruppenschema $\mathcal{G}$, so daß eine endliche Körpererweiterung $\tilde{K}/K$ von $K = \mathrm{Quot}(A)$ existiert, so daß $G_{\tilde{K}}$ isomorph zu $\mathcal{G}_{\tilde{K}}$ ist. Die spezielle Faser $\mathcal{G}_k$ heißt dann die *Limesgruppe* der Degeneration. Zwei

Degenerationen $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ von G heißen *isomorph*, wenn sie als A-Gruppenschemata isomorph sind. Sie heißen *äquivalent*, wenn ihre speziellen Fasern isomorph sind, wobei $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ auch über zwei verschiedenen diskreten Bewertungs-k-Algebren A, A' mit Restklassenkörper k definiert sein können. Weiterhin bezeichnen wir zwei Degenerationen $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ als *stark äquivalent*, wenn nach Identifikation der jeweiligen Komplettierungen $\bar{A}$ und $\bar{A}'$ mit $k[|t|]$ durch geeignete Isomorphismen folgendes gilt:

1. Zu A und A' existieren m_1, $m_2 \in \mathbb{N}$ und formale Degenerationen $\mathcal{G}_1$ über $k[|t^{m_1}|]$ und $\mathcal{G}_2$ über $k[|t^{m_2}|]$ von G, so daß die zu $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ gehörigen formalen Degenerationen aus diesen durch die Basiswechsel $k[|t^{m_i}|] \hookrightarrow k[|t|]$ für $i = 1, 2$ hervorgehen.
2. Nach Identifikation von $k[|t^{m_i}|]$ mit $k[|t|]$ durch $t^{m_i} \mapsto t$ für $i = 1, 2$ sind $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ isomorph.

Definition 3.28. Ein endlich präsentiertes flaches affines Gruppenschema $\mathcal{G}$ über einem Integritätsring heißt auch ein *Modell* seiner generischen Faser ([WW]). Eine *Modell-Abbildung* (engl. „Model map“ [WW]), ist ein Morphismus von A-Gruppenschemata, der auf der generischen Faser einen Isomorphismus induziert. Ein Modell $\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}_K$ heißt *absolut minimal*, wenn $A[\mathcal{G}]$ in jeder A-Hopfunteralgebra von $K[\mathcal{G}]$ enthalten ist. Ein Modell $\mathcal{G}$ von $\mathcal{G}_K$ heißt *relativ minimal*, wenn zu jedem Modell $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}_K$ eine Modellabbildung von $\mathcal{G}'$ nach $\mathcal{G}$ existiert.

Ist $f : \mathcal{G}' \to \mathcal{G}$ eine Modellabbildung, so ist der duale Morphismus $f^\sharp : A[\mathcal{G}] \to A[\mathcal{G}']$ der zugehörigen Hopfalgebren injektiv, denn wäre $\ker(f^\sharp) \neq \{0\}$, so wäre auch $\ker(f^\sharp_K) = \ker(f^\sharp) \otimes_A K \neq \{0\}$, aber $f^\sharp_K$ ist nach Voraussetzung ein Isomorphismus.

Definition 3.29. Sei k ein Körper und A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k und $K = \mathrm{Quot}(A)$. Eine *(verallgemeinerte) Kontraktion* einer affinen algebraischen Gruppe G über k ist ein Paar $(\mathcal{G}, P)$, bestehend aus einer Degeneration $\mathcal{G}$ von G, sowie einem Isomorphismus von K-Gruppenschemata $P : \mathcal{G}_K \to G_K$. Das Paar $(\mathcal{G}, P)$ heißt *Kontraktion*, wenn $P^\sharp(A[G]) \subseteq A[\mathcal{G}]$. Wir schreiben dann auch $\bar{P}$, um die zugehörige Modellabbildung zu bezeichnen. Die spezielle Faser $\mathcal{G}_k$ heißt die *Limesgruppe* der (verallgemeinerten) Kontraktion. Zwei verallgemeinerte Kontraktionen $(\mathcal{G}, P)$, $(\mathcal{G}', P')$ heißen *isomorph* wenn $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ als A-Gruppenschemata isomorph sind. Sie heißen *äquivalent*, wenn ihre speziellen Fasern isomorph sind und *stark äquivalent*, wenn sie als Degenerationen stark äquivalent sind.

Bemerkung 3.30. Für G, k, A, K wie oben und G zusammenhängend gilt nach Satz 3.15, daß jedes Modell von G_K über A glatt ist und damit einer verallgemeinerten Kontraktion von G entspricht.

Satz 3.31. *Ist $(\mathcal{G}, P)$ eine (verallgemeinerte) Kontraktion von G, so ist $(\mathfrak{a}, \phi) := (Lie(\mathcal{G}), dP)$ eine (verallgemeinerte) Kontraktion von $\mathfrak{g} := Lie(G)$.*

Beweis: Klar. □

Bemerkung 3.32. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß jede formale (d.h. über $k[|t|]$ definierte) verallgemeinerte Kontraktion einer algebraischen Gruppe G über einem Körper der Charakteristik 0 zu einer echten Kontraktion isomorph ist. Damit ist auch jede Degeneration einer Liealgebra, die zu einer Degeneration einer Gruppe korrespondiert, isomorph zu einer Kontraktion.

3.2. **Degenerationen von algebraischen Gruppen sind Kontraktionen.** Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, $A = k[|t|]$ und $K = k((t))$. Weiter sei v die zugehörige Bewertung von K und G eine zusammenhängende algebraische Gruppe über k.

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß jede formale Degeneration von G isomorph zu einer Kontraktion ist, genauer daß jedes Modell von G_K eine Modellabbildung nach G_A besitzt, das heißt daß G_A relativ minimal ist. Dazu verwenden wir einen bekannten Satz von Bruhat und Tits, der besagt, daß in einem affinen Titssystem die maximalen beschränkten Untergruppen die Parahoriuntergruppen sind. Jede algebraische Gruppe ist in eine SL_n mit geeignetem N einbettbar, denn G besitzt stets eine treue lineare Darstellung R (siehe Satz [Hu2, 8.6.]), also eine Einbettung in eine GL_M für ein $M \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich eine Einbettung in Sl_{M+1}, wobei $g \in G$ durch $R(g) \times \det(R(g))^{-1}$ operiert. Wir werden zeigen, daß wenn $G \subset \mathrm{SL}_n(k)$ und $\mathcal{G}$ ein Modell von G_K ist, $\mathcal{G}(A)$ eine beschränkte Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(K)$ ist. Damit ist sie in einer maximalen Parahoriuntergruppe P von $\mathrm{SL}_n(K)$ enthalten. Jede maximale Parahoriuntergruppe von $\mathrm{SL}_n(K)$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}_n(A)$. Damit ist $\mathcal{G}(A)$ in $P \cap G(K) \cong G(A)$ enthalten. Die Einbettung der Gruppe $\mathcal{G}(A)$ in die Gruppe $G(A)$ bestimmt eindeutig eine Modellabbildung von $\mathcal{G}$ nach G_A. Um dies zu zeigen brauchen wir die Aussage, daß ein Modell $\mathcal{G}$ durch die Menge $\mathcal{G}(A)$ seiner ganzen Punkte eindeutig bestimmt ist. Dies wird im folgenden mittels einer geeigneten Version des Satzes über implizite Funktionen gezeigt.

Lemma 3.33. *Es gilt* $k[\mathcal{G}] = k[\mathcal{G}(k)]$.

Beweis: Da wir $k = \bar{k}$ voraussetzen und da $k[\mathcal{G}]$ nach dem Theorem von Cartier reduziert ist, folgt dies sofort aus [Wa, 4.5.Cor.S33] (oder direkt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz). □

Satz 3.34. [BouC, III.§4.6 Cor.2.] *Seien n, N ganze Zahlen mit $0 \leq n < N$ und $r = (r_{n+1}, \ldots, r_N)$ ein System von $N-n$ Elementen von $A[X_1, \ldots, X_N]$; Sei $J_r^{(N-n)}(X)$ die Minorante der Jacobymatrix $r'(X)$, die von den Spalten vom Index j mit $n+1 \leq j \leq N$ gebildet wird. Sei $a \in A^N$, so daß $J_r^{(N-n)}(a)$ in A invertierbar ist und $r(a) \equiv 0 \mod \mathfrak{m}^{\times N}$ ([19]). Dann existiert genau ein $x = (x_1, \ldots, x_N) \in A^N$, so daß $x_j = a_j$ für $1 \leq j \leq n$, $x \equiv a \mod \mathfrak{m}^{\times N}$ und $r(x) = 0$.*

[19] Sei $\mathfrak{m}^{\times N}$ das N-fache direkte Produkt von $\mathfrak{m}$ mit sich selbst.

Beweis: Der Satz ist ein Spezialfall von [BouC, III.§4.6 Cor.2.], da das Paar $(A,(t))$ die Henselschen Bedingungen erfüllt und $A[X_1,\dots,X_N] \subseteq A\{X_1,\dots,X_N\}$ (siehe [BouC]). □

Korollar 3.35. *Sei $A = k[|t|]$ und $\mathcal{G}$ ein Modell von G. Sei $\pi : A \to k$ die Restklassenabbildung. Dann ist $\mathcal{G}(\pi)(\mathcal{G}(A)) = \mathcal{G}(k)$.*

Beweis: Sei $A[\mathcal{G}] = A[X_1,\dots,X_N]/(r_1,\dots,r_M)$ und sei n die Dimension von G. Dann ist $M \geq N-n$. Sei $r = (r_1,\dots,r_M)$ (das Tupel, nicht das Ideal). Da G glatt ist, gilt $\operatorname{rang}_K(r'(\xi)) = N-n$ für alle $\xi \in G(K)$. Da $\mathcal{G}(k)$ glatt ist, gilt genauso $\operatorname{rang}_k(\bar{r}'(\xi_0)) = N-n$ für alle $\xi_0 \in G(k)$, wobei $\bar{r}$ das Bild von r in $k[\mathcal{G}]^M$ sei. Es gibt daher in jedem Punkt $\xi_0 \in G(k)$ ein $(N-n)$-Tupel $\tilde{r} := (r_{i_1},\dots,r_{i_{N-n}})$ und eine Permutation von $(X_1,\dots,X_N)$, so daß $J_{\tilde{r}}^{(N-n)}(\xi_0)$ in A invertierbar ist. Damit ist Satz 3.34 anwendbar auf $a := \xi_0$ als Element von A^N betrachtet. Wir erhalten somit ein Element $\xi \in \mathcal{G}(A)$ mit $\mathcal{G}(\pi)(\xi) = \xi_0$. □

Lemma 3.36. *Sei $\mathcal{G}$ ein Modell von G_K. Sei $r \in K[G]$. Dann existiert ein kleinstes $i \in \mathbb{Z}$, so daß $t^i r \in A[\mathcal{G}]$.*

Beweis: Sei $r \in K[G] = A[\mathcal{G}] \otimes_A K$. Dann existieren $j_1 \in \mathbb{N}$ und $r_0,\dots,r_N \in A[\mathcal{G}]$, so daß r sich schreiben läßt als

$$r = \sum_{i=0}^{j_1} r_i \otimes t^{-i}. \tag{224}$$

Insbesondere ist $t^{j_1} r \in A[\mathcal{G}]$. Angenommen $t^{-j} r \in A[\mathcal{G}]$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann haben wir in $A[\mathcal{G}]$ eine aufsteigende Idealkette:

$$\cdots \subseteq (t^{-j} r) \subseteq (t^{-j-1} r) \subseteq \cdots . \tag{225}$$

Da $A[\mathcal{G}]$ noethersch ist, wird diese Kette stationär, d.h. es existieren ein $j_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q \in A[\mathcal{G}]$, so daß $t^{-j_0} q r = t^{-j_0-1} r$. Da G zusammenhängend ist, ist $K[G]$ ein Integritätsring, also ist $q = t^{-1}$. Damit ist $K \subseteq A[\mathcal{G}]$. Dies steht aber im Widerspruch zur Existenz des Einsschnitts $e_{\mathcal{G}}^{\sharp} \in \operatorname{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\mathcal{G}], A)$. □

Lemma 3.37. *Ein Modell $\mathcal{G}$ von G_K ist durch die Gruppe $\mathcal{G}(A)$ seiner ganzen Elemente eindeutig bestimmt, genauer gilt:*

$$A[\mathcal{G}] = \{r \in K[G] \mid r(\xi) \in A \quad \text{für alle } \xi \in \mathcal{G}(A)\}. \tag{226}$$

Beweis: Die Inklusion „$\subseteq$“ ist offensichtlich. Sei umgekehrt $r \in K[G]$ mit $r(\xi) \in A$ für alle $\xi \in \mathcal{G}(A)$. Sei $i \in \mathbb{Z}$ minimal mit der Eigenschaft, daß $t^i r \in A[\mathcal{G}]$. Ein solches i existiert nach Lemma 3.36. Falls $i \leq 0$ sind wir fertig. Andernfalls haben wir $r' = t^i r \in A[\mathcal{G}] \setminus tA[\mathcal{G}]$. Sei $\psi_k : A[\mathcal{G}] \to k[\mathcal{G}]$ der kanonische Morphismus. Da $\ker(\psi_k) = tA[\mathcal{G}]$ ist, ist $\bar{r} := \psi_k(r') \neq 0$. Es gilt nun $\bar{r}(\mathcal{G}(\pi)(\xi)) = \pi(r'(\xi)) =$

$\pi(t^i r(\xi)) = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{G}(A)$. Da nach Korollar 3.35 $\mathcal{G}(\pi)(\mathcal{G}(A)) = \mathcal{G}(k)$ ist, folgt mit Lemmma 3.33 $\bar{r} = 0$. Widerspruch! □

Es folgt sofort

Korollar 3.38. *Ist $\mathcal{G}(A) \subseteq G(A)$, dann ist $A[G] \subseteq A[\mathcal{G}]$, das heißt wir haben eine Modellabbildung von $\mathcal{G}$ nach G_A.*

Definition 3.39. [BT, I.(3.1.1)] Eine *Bornologie* auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{B}$ von Teilmengen von X für die gilt:

- $\mathcal{B}$ ist invariant unter endlichen Vereinigungen,
- $\mathcal{B}$ enthält alle endlichen Teilmengen von X,
- für $M \in \mathcal{B}$ und $M' \subseteq M$ ist auch $M' \in \mathcal{B}$.

Die Elemente von $\mathcal{B}$ werden als *beschränkt* (bezüglich $\mathcal{B}$) bezeichnet. Wenn X eine Gruppe ist, dann heißt $\mathcal{B}$ *verträglich mit der Gruppenstruktur*, wenn für M, $M' \in \mathcal{B}$ stets gilt $M^{-1}M' \in \mathcal{B}$.

Durch die Bewertung des Körpers K wird in natürlicher Weise eine mit der Gruppenstruktur verträgliche Bornologie auf $G(K)$ festgelegt:

Definition 3.40. Eine Teilmenge M der Gruppe $G(K)$ heißt *beschränkt*, wenn für jede reguläre Funktion $r \in K[G]$ die Menge $v(r(M)) \subset \mathbb{Z}$ nach unten beschränkt ist. Die Menge aller beschränkten Teilmengen von $G(K)$ wird mit $\mathcal{B}(v)$ bezeichnet. Sie bildet offenbar eine mit der Gruppenstruktur verträgliche Bornologie.

Es gilt:

Lemma 3.41. *Ist $\mathcal{G}$ ein affines A-Gruppenschema mit generischer Faser G, dann ist $\mathcal{G}(A) \subset G(K)$ beschränkt bezüglich $\mathcal{B}(v)$.*

Beweis: Sei $r \in K[G] = A[\mathcal{G}] \otimes_A K$ wie in (224). Dann ist für $\xi \in \mathcal{G}(A) = \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\mathcal{G}], A)$

$$r(\xi) = \xi(r) = \sum_{i=0}^{j_1} t^{-i}\xi(r_i), \tag{227}$$

also ist offenbar $v(r(\xi)) \geq -j_1$ für alle $\xi \in \mathcal{G}(A)$, also ist $\mathcal{G}(A)$ beschränkt. □

Lemma 3.42. *Ist $U \subseteq G$ Untergruppe, dann ist*

$$\mathcal{B}_U(v) = \{M \cap U \mid M \in \mathcal{B}_G(v)\}. \tag{228}$$

Beweis: Sei ψ_U die Einbettung von U in G.

„$\subseteq$“: Sei $r \in K[G]$ und $M_1 \in \mathcal{B}_U(v)$. Für $\xi \in M_1$ gilt $r(\xi) = \xi(\psi_U^\sharp(r))$. Also ist $v(r(M_1)) = v(\psi_U^\sharp(r)(M_1))$ beschränkt.

„$\supseteq$“: Sei $\bar{r} \in A[U]$ und $M_1 = M \cap U$, dann existiert $r \in A[G]$, so daß $\bar{r} = \psi_U^\sharp(r)$ und $v(\bar{r}(M \cap U)) = v(r(M \cap U))$ ist beschränkt. □

Sei G eine halbeinfache algebraische Gruppe über k, Φ das endliche Wurzelsystem von G und T ein maximaler Torus von G. Da $k = \bar{k}$ ist, ist G zerfallend und T ein zerfallender Torus von G. Für $\alpha \in \Phi$ sei U_α die eindeutig bestimmte zusammenhängende Untergruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}_\alpha$ (siehe [BT, I.6.1.3b)]). Die Gruppen U_α sind jeweils isomorph zur additiven Gruppe $\mathrm{G_a}$ vermöge

$$\begin{aligned} x_\alpha : \mathrm{G_a} &\to U_\alpha \\ u &\mapsto \psi_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Sei G_α die durch U_α und $U_{-\alpha}$ erzeugte Untergruppe von G. Auch sei der Homomorphismus $\psi_\alpha : \mathrm{SL}_2 \to G_\alpha$ wie in [BT, I.6.1.3b)] gewählt. Sei B_1 die Boreluntergruppe von G, die T und die U_α mit $\alpha \in \Phi_+$ enthält. Außerdem sei $M_\alpha := T\,\psi_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Die Untergruppen U_α, G_α und B_1 sind abgeschlossene Untergruppen von G. Ein Titssystem ist ein Tupel (G, B, N, S), wobei G eine Gruppe und B und N gewisse Untergruppen von G sind. Dabei ist N der Normalisator von $N \cap B$ in G, die Quotientengruppe $W := N/(N \cap B)$ ist eine Coxetergruppe, sie wird als die Weylgruppe des Titssystems bezeichnet, und S ist ein System von Erzeugenden von W, dessen Elemente die Ordnung 2 haben ist. Außerdem müssen einige weitere Bedingungen erfüllt sein. Zur Definition siehe [Bou4-6, Ch.IV§2.1] oder [BT, I.1.2.6]. Tatsächlich ist das System S in einem Titssystem durch G, B und N schon eindeutig bestimmt und braucht daher bei der Beschreibung eines Titssystems nicht explizit angegeben werden. Ein Titssystem heißt *affin*, wenn seine Weylgruppe isomorph zur Weylgruppe eines affinen Wurzelsystems ist.

Zu $G(K)$ gehört in kanonischer Weise ein affines Titssystem $(G(K), B, N, S)$. Dabei ist $B := (G(\pi))^{-1}(B_1(k))$ und N der Normalisator von $T(A)$ in $G(K)$. Daß dies ein Titssystem ist, dessen Weylgruppe die affine Weylgruppe zu Φ ist, wurde von Iwahori und Matsumoto in [IM, Prop.2.24] gezeigt. Die Untergruppe B in diesem kanonischen affinenen Titssystems von $G(K)$ wird als *Iwahoriuntergruppe* von $G(K)$ bezeichnet. Jede echte Untergruppe von $G(K)$, die eine Konjugierte von B enthält, wird als *Parahoriuntergruppe* von $G(K)$ bezeichnet. Zu jeder echten Teilmenge X von S gibt es genau eine Parahoriuntergruppe P_X, die B enthält. Sie ist gegeben als $P_X = \bigcup_{w \in W_X} BwB$, wobei W_X die von den Erzeugern aus X erzeugte Untergruppe von W ist.

Für $G = \mathrm{SL}_n(K)$ ist T die Menge der Diagonalmatrizen, B_1 die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}_n(k)$ und B ist die Menge der Matrizen M in $\mathrm{SL}_n(K)$ mit $v(m_{ij}) \geq 0$ für alle i, j und $v(m_{ij}) > 0$ für $i > j \in \{1, \ldots, N\}$.

Satz 3.43. [BT2, Prop.6.] *Sei G eine einfach zusammenhängende einfache algebraische Gruppe und $(G(K), B, N, S)$ das oben beschriebene affine Titssystem, dann ist jede beschränkte Untergruppe von $G(K)$ in einer Parahoriuntergruppe von $G(K)$ enthalten.*

Satz 3.44. *Jede verallgemeinerte Kontraktion einer affinen algebraischen Gruppe G ist isomorph zu einer echten Kontraktion.*

Beweis: Jede affine algebraische Gruppe ist in eine SL_n für ein $N \in \mathbb{N}$ einbettbar. Sei nun $(\mathcal{G}, P)$ eine verallgemeinerte Kontraktion von G, dann ist $\mathcal{G}(A)$ nach Lemma 3.42 eine beschränkte Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(K)$ und damit nach Satz 3.43 in einer maximalen Parahoriuntergruppe von $\mathrm{SL}_n(K)$ enthalten. Die maximalen Parahoriuntergruppen von $\mathrm{SL}_n(K)$ sind gerade diejenigen, deren Typ eine l-elementige Teilmenge von $\{0, \ldots, l\}$ ist. Aufgrund der kreisförmigen Gestalt des zugehörigen affinen Dynkindiagramms $A_l^{(1)}$ (siehe Abbildung 2) bilden diese Typen jeweils ein Unterdiagramm vom Typ A_l und je zwei Typen von maximalen Parahoriunteralgebren sind durch einen Diagrammautomorphismus des Diagramms $A_l^{(1)}$ ineinander überführbar. Die maximalen Parahoriuntergruppen von $\mathrm{SL}_n(K)$ sind daher jeweils durch einen Automorphismus von $\mathrm{GL}_n(K)$ in $\mathrm{SL}_n(A)$ überführbar. Wir haben daher eine kanonische Einbettung von $\mathcal{G}(A)$ in $\mathrm{SL}_n(A)$. Da $G(A) = G(K) \cap \mathrm{SL}_n(A)$, erhalten wir eine Einbettung von $\mathcal{G}(A)$ in $G(A)$ und daraus mit Korollar 3.38 eine Modellabbildung von $\mathcal{G}$ nach G_A. $\square$

3.3. **Liftung von Degenerationen mittels konservierter Darstellungen.** Sei G eine algebraische Gruppe über k mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ über einem diskreten Bewertungsring A. Das Ziel ist es nun, eine Liftung von $\mathfrak{a}$ mit generischer Faser G zu konstruieren.

Es wird gezeigt (Satz 3.63 und Korollar 3.64), daß zu jeder Degeneration $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{g}$ eine Liftung konstruiert werden kann, wenn eine konservierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ existiert, die die Ableitung einer treuen Darstellung von G ist.

Dies ist auf viele Degenerationen anwendbar. Zum Beispiel kann man bei allen Degenerationen, bei denen das Zentrum der Limesalgebra trivial ist, die Konstruktion auf die adjungierte Darstellung anwenden, denn nach Beispiel 1.60 ist diese dann eine konservierte Darstellung. Dann ist die generische Faser isomorph zu $G^{\mathrm{ad}} = \mathrm{Int}(G) \cong G/\mathrm{Z}(G)$ (über Körpern der Charakteristik Null[20]). Man kann aber auch stets das Zentrum von G konservieren, indem man eine beliebige treue Darstellung von G als direkten Summanden zur adjungierten Darstellung hinzufügt (siehe das Beispiel der Kontraktionen von sl_2 in Abschnitt 3.3.4).

Ist das Zentrum der Limesalgebra nichttrivial, also die adjungierte Darstellung der Limesalgebra nicht treu, so erhalten wir mit derselben Konstruktion immerhin noch ein glattes Gruppenschema, dessen Liealgebra $\mathfrak{a}_{ad}$ enthält (siehe das Beispiel in Abschnitt 3.3.5).

Alle hier betrachteten Darstellungen seien endlichdimensional.

[20]In [Bo, I.(3.8)S.133] wird gezeigt, daß für algebraische Gruppen über Körpern endlicher Charakteristik der Kern von Ad größer als $\mathrm{Z}(G)$ sein kann.

3.3.1. *Der schematische Abschluß.* Dieser Abschnitt entstammt größtenteils dem Abschnitt über Schemata im zweiten Band des Buches „Reduktive Gruppen über lokalen Körpern" von Bruhat und Tits [BT] (vgl. auch [GD, I.6.10.]).

Definition 3.45. Sei $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ ein Morphismus von Schemata und sei $\mathcal{Y}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$. Man sagt *f bildet $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{Y}$ ab*, wenn f über $i_\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ faktorisiert. Für affine Schemata ist dies äquivalent dazu, daß $\ker(i_\mathcal{Y}^\sharp) \subseteq \ker(f^\sharp)$.

Definition 3.46. [Ha, Ch.II Exe.3.11.d] Sei $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ ein Morphismus von Schemata. Das *abgeschlossene Bild von f* [BT] (oder auch das schematheoretische Bild von f [Ha]) ist das eindeutig bestimmte abgeschlossene Unterschema $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$ mit der Eigenschaft: Der Morphismus f bildet $\mathcal{Z}$ in $\mathcal{Y}$ ab, und wenn $\mathcal{Y}'$ ein weiteres abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$ ist, so daß $\mathcal{Z}$ durch f in $\mathcal{Y}'$ abgebildet wird, dann wird $\mathcal{Y}$ durch $i_\mathcal{Y} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}'$ abgebildet. Das abgeschlossene Bild von f wird auch $\overline{f(\mathcal{Z})}$ geschrieben.

Die Schreibweise $\overline{f(\mathcal{Z})}$ wird gerechtfertigt durch folgenden Satz:

Satz 3.47. [GD, I.Prop.(6.10.5)] *Sei $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ ein Morphismus von A-Schemata. Der unterliegende topologische Raum des abgeschlossenenen Bildes von f ist der Abschluß von $f(\mathcal{Z})$ als Teilmenge des unterliegenden topologischen Raums von $\mathcal{X}$.*

Im affinen Fall gilt:

Satz 3.48. *Seien $\mathcal{X} = Spec(A)$ und $\mathcal{Z} = Spec(C)$ affine Schemata und $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ induziert durch $f^\sharp : A \to C$. Dann ist das abgeschlossene Bild von f in $\mathcal{X}$ das affine Schema $Spec(im(f^\sharp))$.*

Beweis: Sei $B := \mathrm{im}(f^\sharp)$ und $\mathcal{Y} := \mathrm{Spec}(B)$. Der Ringhomomorphismus $f^\sharp : A \to C$ faktorisiert in kanonischer Weise über B, es ist $f^\sharp = f'^\sharp \circ i_\mathcal{Y}^\sharp$, wobei $i_\mathcal{Y}^\sharp : A \to B$ surjektiv und $f'^\sharp : B \to C$ injektiv ist. f bildet also in $\mathcal{Y}$ ab. Sei $\mathcal{Y}'$ ein weiteres abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$ und $g : \mathcal{Z} \to \mathcal{Y}'$ ein Morphismus, so daß $f = i_{\mathcal{Y}'} \circ g$. Dann ist $\mathcal{Y}'$ affin, denn jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas ist affin, und wir haben eine Zerlegung $f^\sharp = g^\sharp \circ i_{\mathcal{Y}'}^\sharp$, d.h. insbesondere $\ker(i_{\mathcal{Y}'}^\sharp) \subseteq \ker(f^\sharp) = \ker(i_\mathcal{Y}^\sharp)$. Also wird $\mathcal{Y}$ durch $i_\mathcal{Y}$ in $\mathcal{Y}'$ abgebildet. □

Bemerkung 3.49. Seien $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(A)$ und $\mathcal{Z} = \mathrm{Spec}(C)$ affine Schemata und $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ induziert durch $f^\sharp : A \to C$. Dann gilt für $f(\mathcal{Z})$ als Teilmenge des unterliegenden topologischen Raums von $\mathcal{X}$:

$$f(\mathcal{Z}) = \{(f^\sharp)^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{Z}\} \tag{229}$$

$$= \{\mathfrak{p} \in \mathcal{X} \mid \ker(f^\sharp) \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{und } f^\sharp(\mathfrak{p}) \in \mathcal{Z}\}. \tag{230}$$

Für den schematischen Abschluß von f gilt daher

$$\overline{f(\mathcal{Z})} = \{(f^\sharp)^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(\mathrm{im}(f^\sharp))\} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{X} \mid \ker(f^\sharp) \subseteq \mathfrak{p}\}. \tag{231}$$

Definition 3.50. Wenn $f : Y \to X$ eine Immersion ist (siehe Def. A.30), nennt man das abgeschlossene Bild von f auch den *schematischen Abschluß* von $\mathcal{Y}$ in $\mathcal{X}$. Man schreibt dann auch $\overline{\mathcal{Y}}$ statt $\overline{f(\mathcal{Y})}$.

Im folgenden interessieren wir uns insbesondere für den schematischen Abschluß eines abgeschlossenen Unterschemas der generischen Faser eines affinen Schemas.

Satz 3.51. *Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K. Sei $\mathcal{X}$ ein affines A-Schema. Der kanonische Morphismus $j_{\mathcal{X}}^{\sharp} : A[\mathcal{X}] \to K[\mathcal{X}_K] = A[\mathcal{X}] \otimes_A K$ ist genau dann injektiv, wenn $A[\mathcal{X}]$ torsionsfrei ist. Äquivalent dazu ist, daß die generische Faser $\mathcal{X}_K$ dicht in $\mathcal{X}$ liegt.*

Beweis: Folgt sofort aus [Ro, Theorem 3.71], denn dies ergibt

$$\ker j_{\mathcal{X}}^{\sharp} = \{x \in A[\mathcal{X}] \mid a.x = 0 \quad \text{für ein } a \in A\} = \mathrm{Torsion}(A[\mathcal{X}]). \tag{232}$$

Ist $\ker(j_{\mathcal{X}}^{\sharp}) = \{0\}$, dann ist $\bar{\mathcal{X}}_K = \mathrm{Spec}(A[\mathcal{X}]/\ker(j_{\mathcal{X}}^{\sharp})) = \mathrm{Spec}(A[\mathcal{X}]) = \mathcal{X}$. □

Bemerkung 3.52. In der Situation von Satz 3.51 gilt allgemein für $\bar{\mathcal{X}}_K$ als Teilmenge von $\mathcal{X}$

$$\bar{\mathcal{X}}_K = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{X} \mid \mathrm{Torsion}(A[\mathcal{X}]) \subseteq \mathfrak{p}\}. \tag{233}$$

Lemma 3.53. [BT, II.1.2.5] *Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K. Sei $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ ein Morphismus von affinen A-Schemata. Sind $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Z}$ torsionsfrei, $\mathcal{Y}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$ und bildet $f_K : \mathcal{Z}_K \to \mathcal{X}_K$ in $\mathcal{Y}_K$ ab, so bildet f in $\mathcal{Y}$ ab.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\ker(f^\sharp)$ das Ideal $I(\mathcal{Y})$ enthält. Es ist $j_{\mathcal{Z}}^{\sharp} \circ f^\sharp = f_K^\sharp \circ j_{\mathcal{X}}^\sharp$. Da $j_{\mathcal{Z}}^\sharp$ injektiv ist, ist $\ker(f^\sharp) = \ker(f_K^\sharp \circ j_{\mathcal{X}}^\sharp) = j_{\mathcal{X}}^{\sharp -1}(\ker(f_K^\sharp)) \supseteq j_{\mathcal{X}}^{\sharp -1}(I(\mathcal{Y}_K)) \supset I(\mathcal{Y})$. □

Satz 3.54. [BT, II.1.2.6] *Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K und $\mathcal{X}$ ein affines A-Schema. Sei $\mathcal{X}$ torsionsfrei, Y ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}_K$ und sei f die Verknüpfung der Einbettung von Y in $\mathcal{X}_K$ und der kanonischen Einbettung von $\mathcal{X}_K$ in $\mathcal{X}$. Dann gilt für den schematischen Abschluß $\mathcal{Y}$ von Y in $\mathcal{X}$:*

1. *$\mathcal{Y}$ ist torsionsfrei.*
2. *Wenn Y reduziert ist, dann ist auch $\mathcal{Y}$ reduziert.*
3. *Wenn Y irreduzibel ist, dann ist auch $\mathcal{Y}$ irreduzibel.*
4. *$\mathcal{Y}$ ist eine A-Form oder Fortsetzung (prolongement) von Y d.h. $\mathcal{Y}_K = Y$.*
5. *$\mathcal{Y}$ ist das einzige torsionsfreie abgeschlossene Unterschema von $\mathcal{X}$ mit generischer Faser Y.*

Beweis: Wir haben folgende Sitution

$$Y \overset{f_1}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_K \overset{j_{\mathcal{X}}}{\hookrightarrow} \mathcal{X} \quad \text{dual dazu} \quad K[Y] \overset{f_1^\sharp}{\twoheadleftarrow} K[\mathcal{X}_K] \overset{j_{\mathcal{X}}^\sharp}{\hookleftarrow} A[\mathcal{X}], \tag{234}$$

wobei f_1 die Einbettung von Y in $\mathcal{X}_K$ und $f = j_{\mathcal{X}} \circ f_1$ sei. Es ist $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{im}(f^\sharp))$, und $\mathrm{im}(f^\sharp)$ ist als A-Untermodul von $K[Y]$ torsionsfrei. Daher gilt 1. Ein affines Schema ist genau dann reduziert, wenn sein Koordinatenring keine nilpotenten Elemente hat. Dies überträgt sich auch auf Unteralgebren. Daraus folgt 2. Ein affines Schema ist genau dann irreduzibel, wenn das Nilradikal seines Koordinatenrings prim ist. Auch diese Eigenschaft überträgt sich auf Unterringe, denn ist R_1 Unterring von R, so gilt $\mathrm{Nil}(R_1) = \mathrm{Nil}(R) \cap R_1$ ist Primideal in R_1, denn der Durchschnitt eines Primideals mit einem Unterring ist stets ein Primideal des Unterrings. Daraus folgt 3. Es ist $\mathcal{Y}_K = \mathrm{Spec}(\mathrm{im}(f^\sharp) \otimes_A K)$ und $\mathrm{im}(f^\sharp) \otimes_A K \cong \mathrm{im}(f_1^\sharp) = K[Y]$. Daraus folgt 4. Sei $\mathcal{Y}'$ ein weiteres abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$ mit generischer Faser Y. Sei $j_{\mathcal{Y}'} : Y \to \mathcal{Y}'$ der kanonische Morphismus von der generischen Faser nach $\mathcal{Y}'$ und $i_{\mathcal{Y}'} : \mathcal{Y}' \to \mathcal{X}$ die Einbettung von $\mathcal{Y}'$ in X. Dann ist $i_{\mathcal{Y}'} \circ j_{\mathcal{Y}'} = f$, d.h. $\mathcal{Y}'$ ist ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathcal{X}$, über das f faktorisiert. Daher faktorisiert $i_{\mathcal{Y}}$ über $\mathcal{Y}'$, d.h. es existiert eine Einbettung $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}'$ mit $i_{\mathcal{Y}} = i_{\mathcal{Y}'} \circ g$. Da $i_{\mathcal{Y}'}$ injektiv ist, gilt $j_{\mathcal{Y}'} = g \circ j_{\mathcal{Y}}$. Der zu g duale Ringhomomorphismus $g^\sharp : A[\mathcal{Y}'] \to A[\mathcal{Y}]$ ist surjektiv und es ist $j^\sharp_{\mathcal{Y}'} = j^\sharp_{\mathcal{Y}} \circ g^\sharp$. Da $j^\sharp_{\mathcal{Y}}$ injektiv ist, ist $\ker(g^\sharp) = \ker(j^\sharp_{\mathcal{Y}'}) = \mathrm{Torsion}(A[\mathcal{Y}'])$. Wenn $A[\mathcal{Y}']$ torsionsfrei ist, sind also $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Y}'$ isomorph. □

Durch die Identifikation von Flachheit und Torsionsfreiheit ergibt sich:

Korollar 3.55. *In der Situation von Satz 3.54 sei A ein Prüferring und $\mathcal{X}$ ein flaches A-Schema. Dann ist der schematische Abschluß von Y in $\mathcal{X}$ eine flache A-Form von Y.*

Über einem Prüferring, insbesondere über einem Dedekindring, bleibt auch die Gruppenstruktur beim schematischen Abschluß erhalten. Es gilt nämlich:

Satz 3.56. [BT, II.1.2.7] *Sei A ein Integritätsring mit Quotientenkörper K, $\mathcal{G}$ ein A-Gruppenschema und $\mathcal{Y}$ ein flaches Unterschema, so daß $\mathcal{Y}_K$ ein Untergruppenschema von $\mathcal{G}_K$ ist. Dann ist auch $\mathcal{Y}$ wieder ein Gruppenschema.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß das Produkt $p\,|_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, das Inverse $i\,|_{\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ und der Einsschnitt $e : \mathrm{Spec}(A) \to \mathcal{X}$ jeweils in $\mathcal{Y}$ abbilden. Da $\mathcal{Y}$ flach ist, ist auch $\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ flach. Aus Lemma A.34 folgt $(\mathcal{Y} \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathcal{Y})_K \cong (\mathcal{Y}_K \times_{\mathrm{Spec}(K)} \mathcal{Y}_K)$. Daher ergibt Lemma 3.53, daß $p\,|_{\mathcal{Y}\times\mathcal{Y}}\colon \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ über $\mathcal{Y}$ faktorisiert und dasselbe gilt für i und e. □

Daher folgt zusammen mit Korollar 3.55

Korollar 3.57. *Ist A ein Prüferring mit Quotientenkörper K, dann gilt: Ist $\mathcal{G}$ ein flaches A-Gruppenschema und U ein Untergruppenschema von $\mathcal{G}_K$, dann ist der schematische Abschluß $\mathcal{U}$ von U in $\mathcal{G}$ ein flaches Gruppenschema mit generischer Faser U.*

Ein abgeschlossenes Unterschema eines endlich erzeugten Schemas ist endlich erzeugt. Daher folgt aus Korollar 3.57 und Satz 3.15

Korollar 3.58. *Sei k ein Körper der Charakteristik 0, A ein Dedekindring, der als k-Algebra endlich erzeugt ist, oder eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k und sei $K = Quot(A)$. Dann gilt: Ist $\mathcal{G}$ ein endlich erzeugtes torsionsfreies A-Gruppenschema und U ein Untergruppenschema von $\mathcal{G}_K$, dann ist der schematische Abschluß $\mathcal{U}$ von U in $\mathcal{G}$ ein glattes Gruppenschema mit generischer Faser U.*

Über einem Basisring, der kein Dedekindring ist, wie zum Beispiel dem Polynomring in zwei Veränderlichen, kommt es vor, daß der schematische Abschluß einer Untergruppe der generischen Faser eines glatten Gruppenschemas kein Gruppenschema ist (siehe z.B. [BT, II.§3.2.15]).

3.3.2. *Schematischer Abschluß von Darstellungen und Liftung von Degenerationen.* Im folgenden gelten, wo nichts anderes angegeben ist, die folgenden Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und A ein Dedekindring, der als k-Algebra endlich erzeugt ist, oder eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k, Quotientenkörper K und uniformisierendem Parameter t. (Ab Lemma 3.62 werden nur noch diskrete Bewertungsringe A betrachtet.) Weiter sei G eine algebraische Gruppe über k mit Liealgebra $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ eine Degeneration von $\mathfrak{g}$ über A, so daß $\mathfrak{a} \otimes_A K \cong \mathfrak{g} \otimes_k K$. Außerdem sei $\phi : \mathfrak{a} \otimes_A K \to \mathfrak{g} \otimes_k K$ ein Isomorphismus. Wir identifizieren $\mathfrak{a}$ mit der Unteralgebra $\mathfrak{a} \otimes 1$ von $\mathfrak{a} \otimes_A K$ als A-Algebra, betrachten die Restriktion von ϕ auf $\mathfrak{a} \otimes 1$ als Einbettung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}_K$ und bezeichnen diese ebenfalls mit ϕ.

Satz 3.59. *Mit den Bezeichnungen von Korollar 3.58 gilt. Sei R eine treue Darstellung von G auf einem K-Vektorraum W und sei M ein endlich erzeugter projektiver A-Modul, so daß $W = M \otimes_A K$. Der schematische Abschluß $\mathcal{G}$ von G in $GL(M)$ ist ein glattes Gruppenschema mit generischer Faser G.*

Beweis: Das Gruppenschema $\mathrm{GL}(M)$ ist affin und für einen endlich erzeugten projektiven A-Modul M glatt ([BT, II.1.4.1.]). $\mathrm{GL}(W)$ ist die generische Faser von $\mathrm{GL}(M)$ und $\mathcal{G}$ ist der schematische Abschluß der Untergruppe $R(G(K))$ von $\mathrm{GL}(W)$ in $\mathrm{GL}(M)$. Aus Korollar 3.58 folgt sofort die Behauptung. □

Bemerkung 3.60. In der Situation von Satz 3.59 hat man stets eine kanonische treue Darstellung des Gruppenschemas $\mathcal{G}$ auf M, nämlich die stetige Fortsetzung $\bar{R}$ von R im Sinne von [BT, II,1.2.4]. Sie ist gegeben durch $\bar{R}^\sharp := R^\sharp \circ j^\sharp_{\mathrm{GL}(W)}$.

Sei $\mathrm{gl}(M) := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(M))$. Aus [Wa, 12.2.Cor.] folgt

Korollar 3.61. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.59 gilt $d\bar{R} : Lie(\mathcal{G}) \to gl(M)$ ist eine treue Darstellung von $Lie(\mathcal{G})$ auf M.*

Im folgenden sei A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k. Zum Beweis des folgenden Satzes brauchen wir ein Lemma.

Lemma 3.62. *Sei $\pi : A \to k$ die Residuenabbildung und $\pi^{(m)} : A^m \to k^m$ die durch komponentenweise Anwendung von π induzierte Abbildung. Sei N ein endlich erzeugter freier A-Untermodul von A^m, so daß $\pi^{(m)}(N) = k^m$, dann ist $N = A^m$.*

Beweis: Diese Aussage folgt sofort aus Nakayamas Lemma, siehe [Ei, Cor. 4.8.b.]. (Sie gilt ebenso für jeden endlich erzeugten Untermodul eines endlich erzeugten Moduls über einem lokalen Ring.) $\square$

Satz 3.63 (Hebbarkeitssatz für Degenerationen von Liealgebren). *Sei $R : G(K) \to GL_N(K)$ eine treue Darstellung, $\rho := dR : \mathfrak{g} \otimes_k K \to gl_N(K)$. Gilt dann*

1. $(\rho \circ \phi)(\mathfrak{a}) \subseteq gl_N(A)$,
2. $dim_k((\rho \circ \phi)_k(\mathfrak{a} \otimes_A k)) = dim_k(\mathfrak{g})$,

dann ist der schematische Abschluß $\mathcal{G} := \overline{R(G(K))}$ von $R(G(K))$ in $GL_N(A) \cong GL(A^N)$ eine Liftung von $\mathfrak{a}$ mit generischer Faser $G(K)$.

Beweis: Nach Satz 3.59 ist $\mathcal{G}$ ein glattes A-Gruppenschema. Es genügt daher zu zeigen: Es ist $\phi(\mathfrak{a}) = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) = \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ als Unteralgebra von $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_K) = \mathrm{Der}_K(K[\mathcal{G}], K)$.
„$\subseteq$": Sei $x \in \mathfrak{a}$. Nach Voraussetzung ist $(\rho \circ \phi)(x) \in \mathrm{gl}_N(A)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A &\supseteq (\rho \circ \phi)(x)\,(A[\mathrm{GL}_N]) \\ &= \phi(x)\left(R^\sharp\,(A[\mathrm{GL}_N])\right) \\ &= \phi(x)\,(A[\mathcal{G}])\,, \quad \text{denn } R^\sharp \text{ ist nach Konstruktion von } \mathcal{G} \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Es gilt also $\phi(x)\,(A[\mathcal{G}]) \subseteq A$, d.h. $\phi(x) \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$.
„$\supseteq$": Seien $\bar{\rho} : \mathrm{Lie}(\mathcal{G}) \to \mathrm{gl}_N(A)$ durch $\bar{\rho}(x) = \rho(x)$ und $\bar{\phi} : \mathfrak{a} \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ durch $\bar{\phi}(x) = \phi(x)$ definiert. Dies sind nach Konstruktion von $\mathcal{G}$ bzw. dem eben gezeigten wohldefinierte A-Algebra-Homomorphismen. Außerdem ist nach Voraussetzung $\overline{\rho \circ \phi} : \mathfrak{a} \to \mathrm{gl}_N(A)$ mit $(\overline{\rho \circ \phi})(x) = (\rho \circ \phi)(x)$ wohldefiniert. Offenbar gilt

$$\overline{\rho \circ \phi} = \overline{\rho} \circ \overline{\phi}. \tag{235}$$

Daraus folgt

$$\left(\overline{\rho \circ \phi}\right)_k = \left(\overline{\rho} \circ \overline{\phi}\right)_k = \overline{\rho}_k \circ \overline{\phi}_k. \tag{236}$$

Nach Voraussetzung ist $\dim_k\left(\left(\overline{\rho \circ \phi}\right)_k(\mathfrak{a}_k)\right) = \dim_k(\mathfrak{g})$. Daraus folgt, daß $\overline{\phi}_k$ surjektiv ist und damit mit Lemma 3.62, daß $\overline{\phi}$ surjektiv ist. $\square$

Satz 3.63 kann insbesondere auf konservierte Darstellungen (siehe Abschnitt 1.5) angewendet werden.

Korollar 3.64. *Sei $R_1 : G(k) \to GL_N(k)$ eine treue Darstellung, $\rho_1 := dR_1 : \mathfrak{g} \to gl_N(k)$, $\sigma \in GL_N(K)$ und $\tilde{\rho}$ eine konservierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ mit*

$$\tilde{\rho}(x) = \sigma^{-1}\rho_1 \circ \phi(x)\sigma \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{a}. \tag{237}$$

Sei dann $R : G(K) \to GL_N(K)$ definiert durch:

$$R(g) := \sigma^{-1}(R_1)_K(g)\sigma \quad \text{für alle } g \in G(K). \tag{238}$$

Dann ist $\mathcal{G} := \overline{R(G(K))}$ eine Liftung von $\mathfrak{a}$ mit generischer Faser $G(K)$.

Beweis: Die Darstellung $R := \mathrm{Int}(\sigma^{-1}) \circ R_1$ von G hat die Ableitung $\rho := dR = \mathrm{Ad}(\sigma^{-1}) \circ \rho_1$, denn die Ableitung von Darstellungen vertauscht mit der Konjugation durch σ. Per Definition der konservierten Darstellung sind daher die Voraussetzungen von Satz 3.63 erfüllt. □

Korollar 3.65. *Ist $Z(\mathfrak{a}_k) = (0)$, dann liefert die adjungierte Darstellung eine Liftung von $\mathfrak{a}$, nämlich $\mathcal{G} = \overline{(Int(\phi^{-1}) \circ Ad)(G(K))}$ mit generischer Faser $Ad(G(K))$.*

Beweis: Nach Satz 1.60 ist die adjungierte Darstellung konserviert, wenn das Zentrum der Limesalgebra trivial ist und es gilt Gleichung (237) mit ϕ anstelle von σ. Damit folgt die Behauptung aus Korollar 3.64. □

Bemerkung 3.66. Bekanntlich ist $A[\mathrm{GL}_N] \cong A[X_{11}, \dots, X_{NN}, Z]/(\det(X)Z - 1)$. In der Situation von Satz 3.63 sei nun $R_{ij} := R^\sharp(X_{ij})$ der (ij)-te Matrixkoeffizient. Dann ist $A[\mathcal{G}]$ die von den R_{ij} und $R^\sharp(Z)$ erzeugte Unteralgebra von $K[G]$. Gemäß Satz 3.48 ist nämlich $A[\mathcal{G}] = \mathrm{im}(R^\sharp \circ j^\sharp_{\mathrm{GL}_N})$. Daher wird $A[\mathcal{G}]$ von den Bildern der Erzeuger von $A[\mathrm{GL}_N]$ erzeugt. (Diese Aussage läßt sich auch auf die Sitution von Satz 3.59 verallgemeinern (siehe [BT, II.1.4.3.]).)

Beispiele folgen in Unterabschnitt 3.3.4.

3.3.3. *Grundsätzliches zur Berechnung des schematischen Abschlußes.* Wir wissen nach Korollar 3.58, daß der schematische Abschluß einer abgeschlossenen Untergruppe der generischen Faser eines glatten Gruppenschemas unter geeigneten Voraussetzungen existiert und glatt ist. In konkreten Fällen möchten wir ihn aber auch als darstellbaren Funktor, das heißt durch eine (endliche) Familie von Gleichungen beschreiben. Es liegt folgende Situation vor: Es ist ein affines Gruppenschema $\mathcal{G}$ über A gegeben und man möchte nun den schematischen Abschluß einer gewissen Untergruppe U der generischen Faser bestimmen. Der schematische Abschluß $\bar{U}$ von U in $\mathcal{G}$ ist die von den Restklassen gewisser Erzeuger $X_1, \dots, X_M$ von $K[\mathcal{G}]$ erzeugte A-Unteralgebra von $K[U] = K[\mathcal{G}]/I(U)$. Das Unterschema U wird definiert durch endlich viele Relationen $r_1, \dots, r_N \in K[X_1, \dots, X_M]$, so daß $I(U) = (r_1, \dots, r_N)$ ist. Man kann o.B.d.A. annehmen, daß die r_i bereits in $A[X_1, \dots, X_M]$ liegen, da man andernfalls immer mit einem geeigneten Element a von A multiplizieren kann, so daß $a\,r_i \in A[X_1, \dots, X_M]$ und die so erhaltenen Relationen das gleiche Ideal von $K[\mathcal{G}]$ erzeugen. Betrachtet man nun die A-Algebra $A[\mathcal{U}_1] = A[\mathcal{G}]/(r_1, \dots, r_N)$, so hat diese die Eigenschaft, daß $A[\mathcal{U}_1] \otimes_A K = K[U]$. Sie hat also die richtige generische Faser und das Bild von $A[\mathcal{U}_1]$ in $K[U]$ unter dem kanonischen Morphismus $j^\sharp_{\mathcal{U}_1}$ ist gerade die von $X_1, \dots, X_N$ erzeugte Unteralgebra $A[\bar{U}]$. Wenn $A[\mathcal{U}_1]$ torsionsfrei ist, so ist $j^\sharp_{\mathcal{U}_1}$ injektiv und liefert einen Isomorphismus $\bar{U} \cong \mathcal{U}_1$. Dann wird der darstellbare Funktor $\bar{U}$ durch $r_1, \dots, r_N$ gegeben. Es kann aber auch sein, daß $A[\mathcal{U}_1]$ Torsion hat, d.h. $T := \mathrm{Torsion}(A[\mathcal{U}_1]) = \ker(j^\sharp_{\mathcal{U}_1}) \neq (0)$. Dann gilt $A[\bar{U}] \cong A[\mathcal{U}_1]/T$. Wenn $A[\mathcal{U}_1]$ noethersch ist, ist T endlich erzeugt, es genügen also endlich viele Torsionselemente $t_1, \dots, t_{N'}$ als zusätzliche Relationen um $\bar{U}$ vollständig zu beschreiben. Wie kann man nun feststellen, ob man genügend Torsionselemente gefunden hat, d.h. ob $A[\mathcal{U}_1]/(t_1, \dots, t_{N'})$ torsionsfrei ist?

Zunächst wird man die Dimensionen der Fasern prüfen. Nach Satz A.52 ist eine notwendige Bedingung für Torsionsfreiheit, daß alle Fasern die gleiche Dimension haben. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 3.67. Betrachte $\mathcal{G} = \mathrm{Spec}(A[\mathrm{O}_2]/(t(\det - 1)))$. Die generische Faser ist offenbar $\mathrm{SO}_2(K)$, während die spezielle Faser $\mathrm{O}_2(k)$ ist. Beide sind eindimensional. Trotzdem hat $\mathcal{G}$ Torsion, $T = (\det - 1)$.

Lokal kann man von der Gleichheit der Faserdimension auf die Flachheit schließen, wenn der Koordinatenring des betrachteten Gruppenschemas die Cohen-Macaulay-Eigenschaft hat. Es gilt:

Satz 3.68. [Ei, Th.18.16.b.] *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein regulärer lokaler Ring, $(B, \mathfrak{n})$ ein lokaler noetherscher Cohen-Macaulay-Ring und $f : A \to B$ ein lokaler Morphismus von lokalen Ringen, d.h. $f(\mathfrak{m}).B \subseteq \mathfrak{n}$. Dann gilt: B ist genau dann flach als A-Modul, wenn $dim(B) = dim(A) + dim(B/\mathfrak{m}B)$.*

Wir werden in Satz 3.73 sehen, daß die Dimensionsbedingung in Satz 3.68 für einen lokalen Ring äquivalent dazu ist, daß die spezielle Faser von $\mathrm{Spec}(B)$ dieselbe Dimension wie die generische Faser hat. Leider ist Satz 3.68 auf unser Problem nicht praktisch anwendbar. Wir werden sehen, Satz 3.75, daß das Schema aus Beispiel 3.67 Cohen-Macaulay ist. Es erfüllt auch global die Dimensionsbedingung. Trotzdem ist es nicht flach. Das liegt daran, daß man die Dimensionsbedingung lokal überprüfen muß. Tatsächlich ist die Dimensionsbedingung genau in den Punkten verletzt, die nicht im Abschluß der generischen Faser liegen. Entsprechend sind auch genau die zu diesen Punkten gehörigen lokalen Ringe nicht torsionsfrei.

Allgemeiner formuliert lautet die Frage: *Wann ist ein affines A-Schema $\mathcal{X} = Spec(B)$ torsionsfrei, wenn man voraussetzt, daß die generische Faser glatt und irreduzibel ist?*

Lemma 3.69. *Ist $\phi : R \to S$ ein Epimorphismus von Ringen, so besteht eine Bijektion zwischen Primidealen von S und Primidealen von R, die $ker(\phi)$ enthalten. Ist außerdem $ker(\phi)$ prim oder äquivalenterweise S ein Integritätsring, so ist das Bild von jedem Primideal von R entweder prim oder gleich ganz S.*

Beweis: Das Urbild eines Primideals unter einem Ringhomomorphismus ist ein Primideal, welches den Kern enthält. Auch ist klar, daß das Bild eines Ideals von R ein Unterring von S ist und ein Ideal, wenn ϕ surjektiv ist. Es gilt: $\phi^{-1}(\phi(I)) =$

$I + \ker(\phi)$. Daher ist $\phi(I) = S$ genau dann, wenn $I + \ker(\phi) = R$ ist. Sei I prim und $ab \in \phi(I)$ mit $a = \phi(\tilde{a})$ und $b = \phi(\tilde{b}) \in S$. Dann ist $\tilde{a}\tilde{b} \in \phi^{-1}(I) = I + \ker(\phi)$. Ist $\ker(\phi) \subseteq I$ oder $\ker(\phi)$ prim, dann ist $I + \ker(\phi)$ prim oder gleich R, also $\tilde{a} \in I + \ker(\phi)$ oder $\tilde{b} \in I + \ker(\phi)$, also $a \in \phi(I)$ oder $b \in \phi(I)$. Daher ist $\phi(I)$ prim.

□

Sei $B := A[X]$, $T := \text{Torsion}(B) = \ker(j^\sharp_{\mathcal{X}})$ die Menge der Torsionselemente von B und $\tilde{B} = B/T$. Dann ist $\text{Spec}(\tilde{B})$ ein torsionsfreies Schema mit der gleichen generischen Faser wie $\mathcal{X}$. Es ist daher gleich dem schematischen Abschluß $\bar{\mathcal{X}}_K$ der generischen Faser $\mathcal{X}_K$ in $\mathcal{X}$. Da nach Voraussetzung die generische Faser von $\mathcal{X}$ reduziert und irreduzibel ist, ist nach Satz 3.54.2. und 3. auch $\bar{\mathcal{X}}_K$ reduziert und irreduzibel. $\tilde{B}$ ist also ein Integritätsring, d.h. T ist ein Primideal.

Die Epimorphismen $B \to B_k$ und $B \to \tilde{B}$ seien mit π und ψ bezeichnet.

Lemma 3.70. *Es gilt $T \cap (t) = tT = Rad(0)$.*

Beweis: Sei $\tau = tx \in T \cap (t)$, so folgt nach Definition der Torsion, daß auch $x \in T$ d.h. $\tau \in tT$ ist. Klar ist, daß $tT \subseteq \text{Rad}(0)$. Sei andererseits x nilpotent. Da die generische Faser und die spezielle Faser reduziert sind, gilt $\pi(x) = \psi(x) = 0$, d.h. $x \in \ker(\pi) \cap \ker(\psi) = (t) \cap T$. □

Lemma 3.71. *Ist $T \subset (t)$, so ist $T = tT$ und dann ist $T = (0)$.*

Beweis: Der erste Teil folgt aus Lemma 3.70. Ist $T = tT$, so gilt auch $T = t^n T$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der zweite Teil folgt nun daraus, daß T endlich erzeugt ist, denn sei $T = (s_1, \ldots, s_M)$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $t^N s_i = 0$ für $i = 1 \ldots M$. Dann ist $t^N T = (0)$. □

Bemerkung 3.72. Sei $(t) \subset T$: Nach Definition der Torsion folgt wieder aus $tB \subset T$ schon $B \subset T$, also $B = T$. Dann ist die generische Faser von B leer, $\tilde{B} = B_K = (0)$ und $B = B_k$ als A-Modul. Dies schließen wir aus, indem wir im folgenden $A \subseteq B$ verlangen.

Für die Dimensionen gilt:

Satz 3.73. *Sei $\mathcal{X} = Spec(B)$ ein affines A-Schema mit $A \subseteq B$, dessen generische Faser glatt und irreduzibel ist. Es ist $dim(B) = \max(dim(B_K) + 1, dim(B_k)) = \max(dim(\tilde{B}), dim(B_k))$.*

Beweis: Ist $T = (0)$, so folgt die Behauptung aus Satz 3.11. Jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von B enthält entweder T oder das Ideal $(t) = tB$, denn ist $\tau \in T \setminus \mathfrak{q}$, dann ist $t^n\tau = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $t^n \in \mathfrak{q}$, woraus induktiv $t \in \mathfrak{q}$ folgt. Geometrisch bedeutet dies, daß jedes Primideal im Abschluß der generischen Faser oder in der speziellen Faser liegt. Wie bereits bemerkt, ist T prim. Nach Bemerkung 3.72 ist $(t) \not\subseteq T$. Daher ist T ein minimales Primideal. Jede maximale Kette von Primidealen endet daher mit T oder mit einem minimalen Primideal, das (t) enthält. Ein solches existiert genau dann, wenn $T \neq (0)$ ist. Ist $T = (0)$, dann ist es das einzige minimale Primideal. (Es ist prim, da B dann Integritätsring ist.) Ist $T \neq (0)$ so kann (t) kein Primideal echt enthalten, denn dieses würde dann T enthalten, damit wäre $T \subseteq (t)$ im Widerspruch zu Lemma 3.71. Die Anwendung von Lemma 3.69 auf den Epimorphismus von B nach $\tilde{B} \cong B/T$ ergibt, daß die maximalen Primidealketten, die mit T enden, den maximalen Primidealketten von $\tilde{B}$ entsprechen. Lemma 3.69, angewendet auf den Epimorphismus $\pi : B \to B_k \cong B/(t)$ ergibt, daß die maximalen Primidealketten, die mit einem minimalen Primideal, das (t) enthält, enden, den maximalen Primidealketten von B_k entsprechen. Daraus folgt die Behauptung. □

Es folgt sofort

Korollar 3.74. *In der Situation von Satz 3.73 ist die Bedingung $dim(B) = 1 + dim(B_k)$ aus Satz 3.68 äquivalent dazu, daß die spezielle Faser von $Spec(B)$ dieselbe Dimension wie die generische Faser hat.*

Satz 3.75. *Für ein endlich erzeugtes affines A-Schema $\mathcal{X} = Spec(B)$ mit glatter irreduzibler generischer Faser und glatter spezieller Faser, so daß die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser $\mathcal{X}_k$ disjunkt sind, insbesondere für ein Gruppenschema, gilt: Wenn $dim(B_k) = dim(B_K)$ ist und $\mathcal{X}$ reduziert ist, dann ist $\mathcal{X}$ überall regulär. Insbesondere hat dann B die Cohen-Macaulay-Eigenschaft.*

Beweis: B ist Cohen-Macaulay genau dann, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{q}$ von B die Lokalisierung $B_\mathfrak{q}$ Cohen-Macaulay ist ([Ei, Prop.18.8.]). Da jeder reguläre lokale Ring Cohen-Macaulay ([Ei, S.451 bzw. Cor.10.15]) ist, genügt es zu zeigen, daß jeder lokale Ring $B_\mathfrak{q}$ bezüglich eines maximalen Ideals $\mathfrak{q}$ regulär ist.

Es gibt drei Arten von maximalen Idealen von B:

1. $\mathfrak{q} \supset T$ und $\mathfrak{q} \not\supset (t)$. Diese entsprechen geometrisch den Punkten der generischen Faser, die die spezielle Faser nicht berühren (siehe Bsp.3.76). Bei der Berechnung von $B_\mathfrak{q}$ muß man zunächst das Ideal

$$I(\mathfrak{q}) := \{x \in \mathfrak{q} \mid mx = 0 \quad \text{für ein } m \in B \setminus \mathfrak{q}\} \tag{239}$$

   herausteilen (siehe Def.A.24). In diesem Fall ist offenbar $T \subset I(\mathfrak{q})$. Somit ist $B/I(\mathfrak{q}) \cong \tilde{B}/\psi(I(\mathfrak{q}))$ und die Lokalisierung

$$B_\mathfrak{q} = (B/I(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{q}/I(\mathfrak{q})} \cong (\tilde{B}/\psi(I(\mathfrak{q})))_{(\psi(\mathfrak{q})/\psi(I(\mathfrak{q})))} = \tilde{B}_{\psi(\mathfrak{q})}.$$

   Der lokale Ring $B_\mathfrak{q}$ ist also isomorph zu einem lokalen Ring von $\tilde{B}$ und damit regulär, denn $\tilde{B}$ ist torsionsfrei und damit flach und damit nach den Voraussetzungen des Satzes auch glatt (vergleiche Definition 3.14). (Tatsächlich ist $B_\mathfrak{q}$ in diesem Fall sogar isomorph zu einem lokalen Ring von B_K, weil t in $B \setminus \mathfrak{q}$ liegt, also in $B_\mathfrak{q}$ invertierbar wird und damit $K \cong A[t^{-1}] \subseteq B_\mathfrak{q}$ ist.)
2. $\mathfrak{q} \supset (t)$ und $\mathfrak{q} \not\supset T$. Diese entsprechen geometrisch den Punkten in $\mathcal{X}_k \setminus \bar{\mathcal{X}}_K$. Hier gilt $(t) \subset I(\mathfrak{q})$ und $B_\mathfrak{q} \cong (B_k)_{\pi(\mathfrak{q})}$ ist isomorph zu einem lokalen Ring der speziellen Faser. Auch diese sind nach Voraussetzung regulär.

3. $\mathfrak{q} \supset T + (t)$. Diese entsprechen geometrisch den Punkten von $\mathcal{X}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_K$. Für die Regularität des lokalen Rings $B_\mathfrak{q}$ genügt es zu zeigen, daß auch hier wieder $T \subset I(\mathfrak{q})$, denn dann ist $B_\mathfrak{q}$ zu einem lokalen Ring von $\tilde{B}_\mathfrak{q}$ isomorph und damit regulär. Sei $n := \dim(B_K)$. Es gilt $B/(T+(t)) \cong \tilde{B}_k$. Da $\dim(\tilde{B}_k) = n$ ist, finden wir in B eine Kette von Primidealen: $\mathfrak{q}_n \supset \mathfrak{q}_{n-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_0$ mit $\mathfrak{q}_0 = T + (t)$. Die Höhe von $T + (t)$ ist 1, denn T ist das einzige Primideal, das in $T + (t)$ enthalten ist. Wäre nämlich $T \neq \mathfrak{q}' \subset T + (t)$ mit $\mathfrak{q}' \neq T + (t)$ ein Primideal, so wäre $(t) \subset \mathfrak{q}'$ oder $T \subset \mathfrak{q}'$ (echte Inklusion!). Im ersten Fall erhielten wir in B_k die Primidealkette $\pi(\mathfrak{q}_n) \supset \pi(\mathfrak{q}_{n-1}) \supset \cdots \supset \pi(\mathfrak{q}_0) \supset \pi(\mathfrak{q}')$ der Länge $n+2$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\dim(B_k) = n$. Im andern Fall erhielten wir die Primidealkette $\psi(\mathfrak{q}_n) \supset \psi(\mathfrak{q}_{n-1}) \supset \cdots \supset \psi(\mathfrak{q}_0) \supset \psi(\mathfrak{q}') \supset \psi(T) = (0)$ der Länge $n+3$ in $\tilde{B}$ im Widerspruch zu $\dim(\tilde{B}) = n+1$. Daher ist T das einzige minimale Primideal in $T + (t)$.

Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ die von T verschiedenen minimalen Primideale von B. Ist $r = 0$, also T das einzige minimale Primideal, so folgt, daß $T = \mathrm{Rad}(0) = tT = (0)$, nach Lemma 3.71. Daher ist $r = 0$ genau dann, wenn B torsionsfrei ist. Da $(t) \subset \mathfrak{m}_i$ für $i = 1, \ldots, r$, entsprechen die $\mathfrak{m}_i$ jeweils einer irreduziblen Komponente von $\mathcal{X}_k$. Auch $\pi(T + (t))$ ist ein minimales Primideal von B_k. Da die irreduziblen Komponenten von $\mathcal{X}_k$ nach Voraussetzung disjunkt sind, gilt $\pi(\mathfrak{m}_i) + \pi(T+(t)) = B_k$ und damit $\mathfrak{m}_i + T = B$ für $i = 1, \ldots, r$. Wir behaupten: Ist $r > 0$ so gilt $\bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{q}$. Zum Beweis zeigen wir induktiv: Ist $\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{q}$, dann existiert ein i mit $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{q}$. Dies führt zum Widerspruch, da dann auch $\mathfrak{m}_i + T = B$ in $\mathfrak{q}$ enthalten wäre. Für $s = 1$ ist die Induktionsbehauptung trivial. Sei nun $\bigcap_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{q}$. Ist bereits $\bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{q}$, so greift die Induktionsvoraussetzung. Andernfalls sei $x \in \bigcap_{i=1}^{s-1} \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{q}$. Dann gilt für alle $y \in \mathfrak{m}_s$, daß $xy \in \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{q}$. Daraus folgt $y \in \mathfrak{q}$ für alle $y \in \mathfrak{m}_s$, d.h. $\mathfrak{m}_s \subset \mathfrak{q}$ und damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Sei nun $f \in \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i \setminus \mathfrak{q}$ und $\tau \in T$. Dann ist $f\tau \in \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{m}_i \cap T = \mathrm{Rad}(0) = tT$. Sei $f\tau = t\tau_1$, dann folgt wie oben $\tau_1 \in T$ und wir erhalten eine Folge $\tau_n \in T$ mit der Eigenschaft $f\tau_{n-1} = t\tau_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f^n\tau = t^n\tau_n$. Da T endlich erzeugt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $t^N T = (0)$. Daher ist $f^N\tau = 0$ und es ist $f^N \notin \mathfrak{q}$, da $f \notin \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}$ prim ist, also ist $\tau \in I(\mathfrak{q})$ und daher $T \subset I(\mathfrak{q})$ wie behauptet.

□

Beispiel 3.76. Es gibt im allgemeinen Punkte in der generischen Faser eines affinen A-Schemas, die die spezielle Faser nicht berühren. Ein Beispiel dafür ist

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K). \tag{240}$$

Hier ist $\mathfrak{q} = (X_{11} - t, X_{12}, X_{21}, tX_{22} - 1)$. Wäre $(t) \subset \mathfrak{q}$, so wäre $\mathfrak{q} = A[\mathrm{SL}_2]$, da $tX_{22} - 1 \in \mathfrak{q}$.

Satz 3.77. *Sei $\mathcal{X} = Spec(B)$ ein affines A-Schema mit glatter irreduzibler generischer Faser, so daß die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser $\mathcal{X}_k$ disjunkt sind, und sei T die Menge der Torsionselemente von B. Es sind äquivalent:*

1. *B ist torsionsfrei.*
2. *T ist das einzige minimale Primideal von B.*
3. *B ist Integritätsring.*
4. *$\mathcal{X}$ ist zusammenhängend.*
5. *$\mathcal{X}_k \subset \bar{\mathcal{X}}_K$.*
6. *In jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{X}_k$ liegt ein Punkt von $\bar{\mathcal{X}}_K$.*

Beweis: Wir hatten bereits bemerkt, daß T stets prim ist. Ist B torsionsfrei, so ist daher $T = (0)$ ein Primideal, also T das einzige minimale Primideal. Ist T das einzige minimale Primideal, dann ist $T = \mathrm{Rad}(0) = tT = (0)$ nach Lemma 3.71, also ist B Integritätsring. Ist B Integritätsring, so folgt, daß $\mathcal{X}$ irreduzibel, also insbesondere zusammenhängend ist. $\mathcal{X}_k \cap \bar{\mathcal{X}}_K$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{X}_k$. Nach Voraussetzung sind alle Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{X}_k$, die nicht in $\bar{\mathcal{X}}_K$ liegen, disjunkt zu $\bar{\mathcal{X}}_K$ und somit auch Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{X}$. Also folgt 5. aus 4.. Offensichtlich folgt 6. aus 5.. Ein Element $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ liegt genau dann in $\bar{\mathcal{X}}_K$, wenn $\mathfrak{q} \supset T$. Im Beweis des vorigen Satzes hatten wir gesehen, daß B torsionsfrei ist, wenn T das einzige minimale Primideal ist. Andernfalls existiert ein weiteres minimales Primideal $\mathfrak{m}_1$. Dieses definiert eine irreduzible Komponente von $\mathcal{X}$ und damit, wie bereits bemerkt, eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{X}$ und zugleich von $\mathcal{X}_k$. Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Ideal, das $\mathfrak{m}_1$ enthält, also ein Punkt der durch $\mathfrak{m}_1$ definierten Zusammenhangskomponente von $\mathcal{X}_k$, dann ist $T \not\subset \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{m}_1 + T = B$, also liegt $\mathfrak{p}$ nicht in $\bar{\mathcal{X}}_K$. Daher folgt 1. aus 6.. □

Der letzte Punkt liefert ein praktisch verwendbares Kriterium, um Torsionsfreiheit zu prüfen. Man muß dafür in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{X}_k$ einen Punkt $\mathfrak{q}_1$ finden, so daß $\pi^{-1}(\mathfrak{q}_1) \in \bar{\mathcal{X}}_K$, d.h. $\pi^{-1}(\mathfrak{q}_1) \supset T$.

Insbesondere liefern Elemente von $\mathcal{X}(A)$, wenn $\mathcal{X}$ als darstellbarer Funktor betrachtet wird, solche Punkte. Es gilt:

Satz 3.78. *Ist $\mathcal{X}$ wie in Satz 3.77, $\mathfrak{q}_1 \in \mathcal{X}_k$ und $\mathfrak{q} \in \mathcal{X}$ mit $B/\mathfrak{q} = A$ und $\pi_k(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}_1$, so ist $\mathfrak{q}_1 \in \bar{\mathcal{X}}_K$.*

Beweis: Da $B/\mathfrak{q} = A$, ist $(t) \not\subset \mathfrak{q}$ und daher $T \subset \mathfrak{q}$, da jedes Primideal entweder (t) oder T enthält. □

3.3.4. *Eine Kontraktion von SO_n.* Dieser Abschnitt beschreibt die Anwendung des Liftungssatzes Korollar 3.64 auf die in Beispiel 1.38 beschriebenen Kontraktionen von so_n mit der konservierten Darstellung aus Beispiel 1.59. Wir verwenden die Bezeichnungen von Korollar 3.64.

Hier ist die Ausgangsdarstellung R_1 die definierende Darstellung von SO_n. Die parameterabhängige Transformation σ, durch die die Darstellung dR_1 konserviert wird, ist gegeben durch die Matrix $\sigma = \mathrm{Diag}[1, \ldots, t^{-1}]$. Für

$$X \equiv R_1(X) = \begin{pmatrix} B & w \\ v^\dagger & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_n \tag{241}$$

mit $B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$, w, $v \in K^n$, $\beta \in K$ gilt

$$R(X) = \mathrm{Int}(\sigma^{-1})(X) = \begin{pmatrix} B & t^{-1}\, w \\ t\, v^\dagger & \beta \end{pmatrix}. \tag{242}$$

Nach Bemerkung 3.66 ist $A[\mathcal{G}]$ die von den Koeffizienten von $\tilde{X} := R(X)$ erzeugte A-Unteralgebra von $K[\mathrm{SO}_n]$. Definierende Relationen für SO_n sind

$$XX^\dagger = \mathrm{E}_n, \quad \det(X) = 1. \tag{243}$$

In Termen von $\tilde{X}$ lauten diese

$$\tilde{X} J \tilde{X}^\dagger = J, \quad \det(\tilde{X}) = 1 \tag{244}$$

mit $J := \sigma^{-2} = \mathrm{Diag}[1, \ldots, t^2]$. Also beschreibt das A-Gruppenschema $\mathcal{G}$ die spezielle orthogonale Gruppe der durch J über A definierten Bilinearform.

$$\mathcal{G} = \mathrm{SO}(J). \tag{245}$$

Wie immer bei Isometriegruppen von nichtausgearteten Formen (bilinear, hermitesch usw., vgl. [Ga, Ch.7.2]) kann man die Gruppe auch als Fixpunktuntergruppe eines Automorphismus von SL_n definieren, hier

$$\tilde{X} \mapsto J \tilde{X}^{-1^\dagger} J^{-1}. \tag{246}$$

Durch Auswerten der Relationen (244) für $t = 0$ bestimmen wir die spezielle Faser von $\mathcal{G}$. Für

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} B & \tilde{w} \\ \tilde{v}^\dagger & \beta \end{pmatrix} \tag{247}$$

lauten die parameterabhängigen Relationen

$$\begin{pmatrix} B\,B^\dagger + t^2\, \tilde{w}\tilde{w}^\dagger & Bv + t^2 \tilde{w}\beta \\ v^\dagger B^\dagger + t^2 \beta \tilde{w}^\dagger & v^\dagger v + t^2 \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \tag{248}$$

und

$$\det\left(\begin{pmatrix} B\,B^\dagger + t^2\, \tilde{w}\tilde{w}^\dagger & Bv + t^2 \tilde{w}\beta \\ v^\dagger B^\dagger + t^2 \beta \tilde{w}^\dagger & v^\dagger v + t^2 \beta^2 \end{pmatrix} \right) = 1. \tag{249}$$

Für $t = 0$ ergeben sich nacheinander

$$BB^\dagger = \mathrm{E}_{n-1} \Rightarrow B \in \mathrm{O}_{n-1} \tag{250}$$

$$Bv = 0 \Rightarrow v = 0 \tag{251}$$

$$\det(\tilde{X}) = \det(B)\beta = 1 \Rightarrow \beta = \det(B). \tag{252}$$

Wir erhalten folgende treue Darstellung der speziellen Faser:

$$\mathcal{G}_k = \left\{ \begin{pmatrix} B & w \\ 0 & \det(B) \end{pmatrix} \mid B \in \mathrm{O}_{n-1}(k),\ w \in k^{n-1} \right\}. \tag{253}$$

Die Gruppe $\mathcal{G}_k$ hat also zwei Zusammenhangskomponenten, die durch $\det(B) = 1$ und $\det(B) = -1$ gegeben sind. Die Zusammenhangskomponente $\mathcal{G}_k^\circ$ der Eins ist offenbar die euklidische Bewegungsgruppe $\mathrm{E}_{n-1}(k)$. Die orthogonale Gruppe O_{n-1} ist ein semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit SO_{n-1} (siehe [Hei, I.§4.1.]) und auch $\mathcal{G}_k$ ist isomorph zu einem semidirekten Produkt, nämlich $\mathrm{E}_{n-1}(k) \rtimes \mathbb{Z}_2$. Dabei betrachte man $\mathbb{Z}_2$ als die multiplikative Gruppe $\{1, -1\}$ und lasse -1 auf SO_{n-1} durch Konjugation mit $\mathrm{Diag}[1, \dots, 1, -1]$ operieren. Ein Isomorphismus $\Psi : \mathrm{E}_{n-1}(k) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathcal{G}_k$ ist dann gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} B & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \right) \mapsto \begin{pmatrix} B\,\mathrm{Diag}[1, \dots, 1, s] & ws \\ 0 & s \end{pmatrix}. \tag{254}$$

Achtung: Die Gruppe $\mathcal{G}_k$ ist nicht, wie man vermuten könnte, isomorph zu der Gruppe $\tilde{\mathrm{E}}_{n-1}(k) = k^{n-1} \rtimes \mathrm{O}_{n-1}(k)$, welche ja ebenfalls ein semidirektes Produkt von $\mathbb{Z}_2$ mit der euklidischen Bewegungsgruppe $\mathrm{E}_{n-1}(k)$ ist. Daß diese beiden semidirekten Produkte nicht isomorph sind, zeigt insbesondere der Fall $n = 2$, der in Beispiel 3.79 noch einmal speziell betrachtet wird. Die degenerierte Gruppe $\mathcal{G}_k$ ist dann nämlich im Gegensatz zur Gruppe $\tilde{\mathrm{E}}_1$ abelsch.

Man beachte weiterhin, daß wir ohne die Bedingung $\det(\tilde{X}) = 1$ in (244) ein Gruppenschema mit Torsion erhielten (vgl. Beispiel 3.17), denn β könnte beliebig aus k^* gewählt werden und die spezielle Faser hätte eine um eins höhere Dimension. Durch die Bedingung $\det(\tilde{X}) = 1$ aber ist gewährleistet, daß keine Torsion vorliegt. Da die spezielle Faser die richtige Dimension $\frac{n^2-n}{2}$ hat, genügt es nach Satz 3.77 zu zeigen, daß ein Punkt x der durch $\beta = -1$ definierten zweiten Zusammenhangskomponente im Abschluß der generischen Faser liegt. Nach Satz 3.78 ist es dafür hinreichend, ein Element $\tilde{x} \in \mathcal{G}(A)$ zu finden, mit $\tilde{x}_k = x$. Ein solches Element ist in diesem Fall gegeben durch jedes Element der Form

$$x = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } BB^\dagger = E_{n-1} \quad \text{und } \det(B) = -1, \tag{255}$$

denn offenbar ist $\tilde{x} := x$ als Element von $\mathrm{M}_n(A)$ auch in $\mathcal{G}(A)$ enthalten. Wir haben daher

$$A[\mathcal{G}] \cong A[\tilde{X}_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n]/I(\mathcal{G}), \tag{256}$$

wobei $I(\mathcal{G})$ das von den Relationen (244) erzeugte Ideal ist.

Beispiel 3.79. Ein Spezialfall ist die Kontraktion der multiplikativen Gruppe G_m in die additive Gruppe G_a: Als Gruppenschema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k ist G_m isomorph zu SO_2. (Allgemein ist G_m isomorph zu $\mathrm{SO}_{1,1}$, womit man genauso weitermachen könnte.) Sei also für dieses Beispiel k algebraisch abgeschlossen. Sei $i := \sqrt{-1} \in k$. Es ist $k[\mathrm{SO}_2] = k[a,b,c,d]/(ad-bc-1, a^2+b^2-1, c^2+d^2-1, ac+bd)$ und $k[G_m] = k[x,y]/(xy-1)$. Ein Isomorphismus wird durch die Darstellung $R_1 : G_m \to \mathrm{SO}_2$

(257) $$R_1((x,y)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y & -i(x-y) \\ i(x-y) & x+y \end{pmatrix}$$

gegeben. Dem entspricht der k-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} k[\mathrm{SO}_2] & \stackrel{R_1^\sharp}{\to} & k[G_m] \\ a & \mapsto & \frac{1}{2}(x+y) \\ b & \mapsto & \frac{-i}{2}(x-y) \\ c & \mapsto & \frac{i}{2}(x-y) \\ d & \mapsto & \frac{1}{2}(x+y). \end{array}$$

Wir erhalten

(258) $$\mathrm{Int}(\sigma^{-1})\left(R_1((x,y))\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y & -it^{-1}(x-y) \\ it(x-y) & x+y \end{pmatrix}$$

und damit

(259) $$A[\mathcal{G}] \cong A[z_1,z_2]/(z_1^2 - t^2 z_2^2 - 1)$$

(wobei $z_1 \equiv (x+y)/2$ und $z_2 \equiv t^{-1}(x-y)/2$). Die Darstellung $\bar{R}$ sieht folgendermaßen aus:

(260) $$\bar{R}((z_1,z_2)) = \begin{pmatrix} z_1 & -iz_2 \\ it^2 z_2 & z_1 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt ist

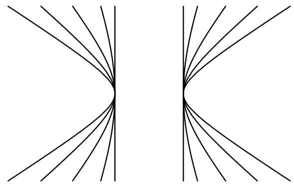
(261) $$(z_1,z_2)\cdot(z_1',z_2') = (z_1z_1' + t^2 z_2 z_2', z_2 z_1' + z_1 z_2').$$

Die Limesgruppe ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times G_a$. Ein reelles Bild dieser Degeneration ist in Abbildung 6 zu sehen.

3.3.5. *Die Kontraktionen von SL_2.* In diesem Abschnitt betrachten wir den schematischen Abschluß der adjungierten Darstellung der Kontraktionen von sl_2 gemäß Korollar 3.65, (im zweiten betrachteten Fall ist allerdings die Bedingung $\mathrm{Z}(\mathfrak{a}_k) = (0)$ von Korollar 3.65 verletzt).

Sei (h,e,f) die Chevalleybasis von sl_2 aus Beispiel 1.36. Wir betrachten jetzt die Inonü-Wigner-Kontraktionen zu den Unteralgebren $\mathfrak{u} = kh$, bzw. $\mathfrak{u} = ke$. (Die

ABBILDUNG 6. Übergang der multiplikativen Gruppe in die additive Gruppe



erste entspricht [BT][II.3.3 Beispiel] nur mit einer etwas anderen Basis.) Nach Beispiel 1.36 sind diese bis auf Äquivalenz die einzigen nichttrivialen Inonü-Wigner-Kontraktionen von sl_2 und ihre Limesalgebren sind auch die einzigen nichtabelschen Degenerationen von sl_2 im Sinne des Orbitabschlußes (siehe Satz 1.16). Im ersten Fall ist die Limesalgebra die euklidische Algebra e_2 im zweiten Fall die dreidimensionale Heisenbergalgebra h_3.

Sei V der unterliegende Modul der adjungierten Darstellung von $\mathrm{sl}_2(k((t)))$. Die adjungierte Darstellung ist nicht treu für die Gruppe SL_2, sondern das Bild ist die adjungierte Gruppe $PSL_2 \cong \mathrm{SO}_3$. Deshalb nehmen wir die definierende Darstellung V_0 von SL_2 hinzu, um eine treue Darstellung R_1 zu erhalten:

(262)
$$R_1\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \equiv \left(\begin{pmatrix} ad+bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right).$$

Für die Inonü-Wigner-Kontraktion bezüglich $\mathfrak{u} = kh$ wird $A[\mathcal{G}]$ als Unteralgebra von $K[G]$ erzeugt von a, b, c, d und den Koeffizienten der Matrix

$$U^{-1}Ad\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}U \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ad+bc & -ac & bd \\ -2ab & a^2 & -b^2 \\ 2cd & -c^2 & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(263)
$$= \begin{pmatrix} ad+bc & -tac & tbd \\ -2t^{-1}ab & a^2 & -b^2 \\ 2t^{-1}cd & -c^2 & d^2 \end{pmatrix}.$$

Ein Erzeugendensystem von $A[\mathcal{G}]$ wird offenbar bereits von $a, b, c, d, t^{-1}ab = z_1$ und $t^{-1}cd = z_2$ gebildet. Es gilt

(264)
$$A[\mathcal{G}] \cong A[a, b, c, d, z_1, z_2]/(ad - bc - 1, tz_1 - ab, tz_2 - cd).$$

Es genügt zu zeigen, daß die Algebra $B = A[a,b,c,d,z_1,z_2]/(ad-bc-1, tz_1 - ab, tz_2 - cd)$ torsionsfrei ist, denn offenbar ist $B \otimes_A K = K[a,b,c,d,z_1,z_2]/(ad-bc-1, tz_1 - ab, tz_2 - cd) \cong K[G]$. Die Torsionsfreiheit von B werden wir wieder durch Untersuchung der Fasern feststellen.

Wir wollen auch die Kontraktion der Hopfalgebrastruktur von $k[\mathrm{SL}_2]$ verfolgen. Für den Einsschnitt $e^\sharp$, das Coprodukt Δ und das Coinverse $i^\sharp$ gilt in $K[\mathrm{SL}_2]$

$$\begin{aligned} e^\sharp : K[\mathrm{SL}_2] &\to K \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 0 \\ c &\mapsto 0 \\ d &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^\sharp : K[\mathrm{SL}_2] &\to K[\mathrm{SL}_2] \\ a &\mapsto d \\ b &\mapsto -b \\ c &\mapsto -c \\ d &\mapsto a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta : K[\mathrm{SL}_2] &\to K[\mathrm{SL}_2] \otimes_K K[\mathrm{SL}_2] \\ a &\mapsto a \otimes a + b \otimes c \\ b &\mapsto a \otimes b + b \otimes d \\ c &\mapsto c \otimes a + d \otimes c \\ d &\mapsto c \otimes b + d \otimes d. \end{aligned}$$

Der Einsschnitt, das Coprodukt und das Coinverse von $A[\mathcal{G}]$ übertragen sich von $K[\mathrm{SL}_2]$ durch Einschränkung auf $A[\mathcal{G}]$. Daß die Bilder dieser Einschränkungen in A bzw. $A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}]$ bzw. $A[\mathcal{G}]$ liegen ist durch Satz 3.56 gewährleistet. Für z_1 und z_2 ergeben sich:

$$\begin{aligned} e^\sharp(z_1) &= e^\sharp(z_2) = 0 \\ i^\sharp(z_1) &= t^{-1} i^\sharp(a) i^\sharp(b) = -t^{-1} bd = (ad-bc)\, t^{-1}(-b)d = -d^2 z_1 + b^2 z_2 \\ i^\sharp(z_2) &= (ad-bc)\, t^{-1}(-c)a = -a^2 z_2 + c^2 z_1 \\ \Delta(z_1) &= a^2 \otimes z_1 + z_1 \otimes (ad+bc) + b^2 \otimes z_2 \\ \Delta(z_2) &= c^2 \otimes z_1 + z_2 \otimes (ad+bc) + d^2 \otimes z_2, \end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, daß in $A[\mathcal{G}]$ gilt $ad - bc = 1$. Die spezielle Faser des Gruppenschemas $\mathcal{G}$ ist die affine algebraische Gruppe mit dem Koordinatenring

$$k[\mathcal{G}_k] = k[a,b,c,d,z_1,z_2]/(ad-bc-1, ab, cd). \tag{265}$$

$\mathcal{G}_k$ ist reduzibel mit den zwei irreduziblen Komponenten $\mathcal{G}_k^\circ = \mathcal{G}_k \cap V(b,c)$ und $\mathcal{G}_k \cap V(a,d)$. Für die Zusammenhangskomponente der Eins gilt:

$$k[\mathcal{G}_k^\circ] = k[a,d,z_1,z_2]/(ad-1) \tag{266}$$

mit dem Einsschnitt

$$\begin{array}{rcl} e^\sharp : k[\mathcal{G}_k^\circ] & \to & k \\ a & \mapsto & 1 \\ d & \mapsto & 1 \\ z_1 & \mapsto & 0 \\ z_2 & \mapsto & 0, \end{array} \tag{267}$$

dem Inversenmorphismus

$$\begin{array}{rcl} i^\sharp : k[\mathcal{G}_k^\circ] & \to & k[\mathcal{G}_k^\circ] \\ a & \mapsto & d \\ d & \mapsto & a \\ z_2 & \mapsto & -a^2 z_2 \\ z_1 & \mapsto & -d^2 z_1 \end{array} \tag{268}$$

und dem Coprodukt:

$$\begin{array}{rcl} \Delta : k[\mathcal{G}_k^\circ] & \to & k[\mathcal{G}_k^\circ] \otimes_k k[\mathcal{G}_k^\circ] \\ a & \mapsto & a \otimes a \\ d & \mapsto & d \otimes d \\ z_1 & \mapsto & a^2 \otimes z_1 + z_1 \otimes 1 \\ z_2 & \mapsto & d^2 \otimes z_2 + z_2 \otimes 1. \end{array} \tag{269}$$

Als Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(k)$ ist

$$\mathcal{G}_k^\circ \cong \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2z_1 & a^2 & 0 \\ 2z_2 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right) \mid z_1, z_2 \in k, a \in k^* \right\}. \tag{270}$$

Die zweite Zusammenhangskomponente ist

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2z_1 & 0 & -b^2 \\ 2z_2 & -b^{-2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right) \mid z_1, z_2 \in k, b \in k^* \right\}. \tag{271}$$

Die Limesgruppe ist also isomorph zu einer im allgemeinen nichttrivialen zentralen Erweiterung von $(\mathrm{E}_2(k) \rtimes \mathbb{Z}_2)$. (Die Erweiterung ist offenbar genau dann trivial, wenn die durch $x \mapsto x^2$ definierte zentrale Erweiterung $1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{G_m}(k) \to \mathrm{G_m}(k)^2 \to 1$ trivial ist, also zum Beispiel für $k = \mathbb{R}$, aber nicht für $k = \mathbb{C}$.) Wir haben auch das Zentrum von SL_2 konserviert. Genau wie bei den Kontraktionen von SO_n in

Abschnitt 3.3.4 gibt es wieder Elemente $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{G}_k^\circ$, die offensichtlich im Abschluß der generischen Faser liegen, nämlich die mit $z_1 = z_2 = 0$, woraus die Torsionsfreiheit der rechten Seite von (264) folgt.

Die zweite nichttriviale Kontraktion von sl_2 ist die Inonü-Wigner-Kontraktion bezüglich der Unteralgebra $\mathfrak{u} = ke$. Wir verfolgen auch hier den schematischen Abschluß der Darstellung, die sich aus der adjungierten und der natürlichen Darstellung von sl_2 zusammensetzt. In diesem Fall ist die adjungierte Darstellung nicht konserviert, denn die Limesalgebra ist die Heisenbergalgebra h_3 und diese hat ein nichttriviales Zentrum. Auch die direkte Summe mit der natürlichen Darstellung von sl_2 ist offenbar keine konservierte Darstellung, da die zweite Komponente gar nicht von dem Parameter t abhängt. Es ist daher nicht zu erwarten, daß der schematische Abschluß dieser Darstellung eine Liftung der Kontraktion ist. Tatsächlich ergibt sich $(\mathrm{E}_2(k) \rtimes \mathbb{Z}_2)$ als Limesgruppe und durch $\bar{\rho}$ wird lediglich ein Homomorphismus der Heisenbergalgebra in die Liealgebra von $\mathcal{G}_k$ induziert. (Ein Gruppenschema mit generischer Faser SL_2 und der Heisenberggruppe als spezieller Faser ergibt sich aber in Abschnitt 3.4 mit dem sogenannten Neron-Blowup.) Diesmal haben wir $U = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ und damit

$$U^{-1}\mathrm{Ad}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} ad+bc & -t^{-1}ac & bd \\ -2tab & a^2 & -tb^2 \\ 2cd & -t^{-1}c^2 & d^2 \end{pmatrix}.$$

$A[\mathcal{G}]$ wird erzeugt von a, b, c, d sowie

$$z_1 = t^{-1}ac, \quad z_2 = t^{-1}c^2. \tag{272}$$

Zwischen diesen Erzeugern bestehen die Relationen

$$r_1 = ad - bc - 1, \quad r_2 = cz_1 - az_2, \quad r_3 = tz_1 - ac, \quad r_4 = tz_2 - c^2. \tag{273}$$

Wie man leicht nachrechnet, können r_3 und r_4 durch die Relation

$$r_3' = -cr_1 - dr_3 + br_4 = c - t(z_1 d - z_2 b) \tag{274}$$

ersetzt werden. (Es sind dann $r_3 = ar_3' + t(z_1 r_1 + br_2)$ und $r_4 = cr_3' + t(z_2 r_1 + dr_2)$.) Mit der Relation r_3' ergeben sich nacheinander

$$c = t(z_1 d - z_2 b), \quad r_1 = ad - tb(z_1 d - z_2 b) - 1, \quad r_2 = t(z_1 d - z_2 b)z_1 - az_2 \tag{275}$$

und es ist

$$A[\mathcal{G}] \cong A[a, b, d, z_1, z_2]/(ad - tb(z_1 d - z_2 b) - 1, t(z_1 d - z_2 b)z_1 - az_2), \tag{276}$$

denn es wird sich zeigen, daß die spezielle Faser der rechten Seite zusammenhängend und damit die rechte Seite torsionsfrei ist. Es ergibt sich folgende Darstellung $\bar{R}$ von

$\mathcal{G}$ auf $M \cong A^5$:

$$\left(\begin{pmatrix} ad + tb(z_1 d - z_2 b) & -z_1 & bd \\ -2tab & a^2 & -tb^2 \\ 2t(z_1 d - z_2 b)d & -z_2 & d^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ t(z_1 d - z_2 b) & d \end{pmatrix} \right). \tag{277}$$

Der Einsschnitt, das Coinverse und das Coprodukt der Hopfalgebra $A[\mathcal{G}]$ sind in diesem Fall

$$\begin{aligned} e^\sharp : A[\mathcal{G}] &\to A \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 0 \\ d &\mapsto 1 \\ z_1 &\mapsto 0 \\ z_2 &\mapsto 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^\sharp : A[\mathcal{G}] &\to A[\mathcal{G}] \\ a &\mapsto d \\ b &\mapsto -b \\ d &\mapsto a \\ z_1 &\mapsto -d^2 z_1 + bdz_2 \\ z_2 &\mapsto z_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta : A[\mathcal{G}] &\to A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}] \\ a &\mapsto a \otimes a + t\, b \otimes (z_1 d - z_2 b) \\ b &\mapsto a \otimes b + b \otimes d \\ d &\mapsto t\,(z_1 d - z_2 b) \otimes b + d \otimes d \\ z_1 &\mapsto z_1 \otimes a^2 + (ad + tb(z_1 d - z_2 b)) \otimes z_1 + bd \otimes z_2 \\ z_2 &\mapsto z_2 \otimes a^2 + 2\,t(z_1 d - z_2 b)d \otimes z_1 + d^2 \otimes z_2. \end{aligned}$$

Der Koordinatenring der speziellen Faser ist

$$k[\mathcal{G}_k] = k[a, b, d, z_1, z_2]/(ad - 1, az_2) \cong k[a, b, d, z_1]/(ad - 1). \tag{278}$$

Die resultierende Darstellung der speziellen Faser ist gegeben durch die Matrizen:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -z_1 & ba^{-1} \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right). \tag{279}$$

Der Einsschnitt, das Coinverse und das Coprodukt der speziellen Faser sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} e^\sharp : k[\mathcal{G}_k] &\to k \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 0 \\ d &\mapsto 1 \\ z_1 &\mapsto 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^\sharp : k[\mathcal{G}_k] &\to k[\mathcal{G}_k] \\ a &\mapsto d \\ b &\mapsto -b \\ d &\mapsto a \\ z_1 &\mapsto -d^2 z_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta : k[\mathcal{G}_k] &\to k[\mathcal{G}_k] \otimes_k k[\mathcal{G}_k] \\ a &\mapsto a \otimes a \\ b &\mapsto a \otimes b + b \otimes d \\ d &\mapsto d \otimes d \\ z_1 &\mapsto z_1 \otimes a^2 + 1 \otimes z_1. \end{aligned}$$

Wenn man den Erzeuger b durch $b' = bd$ ersetzt, sieht man, daß die Limesgruppe wieder die Gruppe $(\mathrm{E}_2(k) \rtimes \mathbb{Z}_2)$, diesmal in der transponierten Matrixdarstellung, ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} e^\sharp(b') &= 0, \\ i^\sharp(b') &= -ba = -a^2 b' \\ \Delta(b') &= 1 \otimes b' + b' \otimes d^2. \end{aligned}$$

3.4. **Liftung der Inonü-Wigner-Kontraktionen mittels Neron-Blowup.** Sei wieder k ein Körper der Charakteristik 0 und A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k, Quotientenkörper K und uniformisierendem Parameter t. Weiter sei G eine algebraische Gruppe über k mit Liealgebra $\mathfrak{g}$.

Definition 3.80. Ein *Hopfideal* einer Hopfalgebra $A[\mathcal{G}]$ ist ein Ideal J, für das gilt:

1. $e^\sharp(J) = \{0\}$.
2. $i^\sharp(J) \subseteq J$.
3. $\Delta(J) \subseteq J \otimes_A A[\mathcal{G}] + A[\mathcal{G}] \otimes_A J$.

Hopfideale beschreiben Untergruppenschemata. Sei $\pi_J : A[\mathcal{G}] \to A[\mathcal{G}]/J$ der kanonische Morphismus. Die Bedingungen für ein Hopfideal bedeuten gerade, daß die Morphismen $e^\sharp$, $\pi_J \circ i^\sharp$ und $\pi_J \otimes \pi_J \circ \Delta$ über π_J faktorisieren und somit Morphismen

$$\begin{aligned} \bar{e}^\sharp &: A[\mathcal{G}]/J \to A, \\ \bar{i}^\sharp &: A[\mathcal{G}]/J \to A[\mathcal{G}]/J, \\ \bar{\Delta} &: A[\mathcal{G}]/J \to A[\mathcal{G}]/J \otimes A[\mathcal{G}]/J \end{aligned}$$

definieren. Diese beschreiben eine Hopfalgebrastruktur auf $A[\mathcal{G}]/J$. Man kann die Bedingungen von Definition 3.80 auch so interpretieren, daß für jede A-Algebra B die Menge $X(B) := \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\mathcal{G}]/J, B) \subseteq \mathcal{G}(B)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(B)$ ist. Die Bedingungen bedeuten im einzelnen:

- $e_B \in X(B)$,
- für $x \in X(B)$ gilt $x^{-1} \in X(B)$ und
- für $x, y \in X(B)$ gilt $xy \in X(B)$.

Satz 3.81. [WW, Prop.1.1] *Sei $\mathcal{G}$ ein affines A-Gruppenschemas und U eine abgeschlossene Untergruppe der speziellen Faser $\mathcal{G}_k$ von $\mathcal{G}$. Weiter sei I das Urbild des Verschwindungsideals von U unter der Restklassenabbildung von $A[\mathcal{G}]$ nach $k[\mathcal{G}_k]$. Die von $t^{-1}I$ in $K[\mathcal{G}]$ erzeugte A-Unteralgebra ist eine Unter-Hopfalgebra.*

Per Konstruktion ist das zugehörige A-Gruppenschema eine torsionsfreie, endlich erzeugte, nach Korollar 3.15 also glatte A-Form von $\mathcal{G}_K$.

Definition 3.82. Das wie oben konstruierte glatte Gruppenschema $\mathcal{G}^U$ heißt der *Neron-Blowup* von $\mathcal{G}$ bezüglich U.

Da $tA[\mathcal{G}] \subset I$, ist $A[\mathcal{G}] \subset t^{-1}I$ und damit $A[\mathcal{G}] \subset A[\mathcal{G}^U]$. Zu dieser Einbettung korrespondiert ein Morphismus $\mathcal{G}^U \to \mathcal{G}$, der die spezielle Faser von $\mathcal{G}^U$ in die Untergruppe U von $\mathcal{G}_k$ abbildet. Da nämlich $I \subset tA[\mathcal{G}^U]$ ist, faktorisiert der Morphismus $A[\mathcal{G}] \to k[\mathcal{G}_k^U] = A[\mathcal{G}^U]/tA[\mathcal{G}^U]$ über $k[U] \cong A[\mathcal{G}]/I$. Wie der folgende Satz zeigt, ist in „guten“ Fällen der Morphismus $\mathcal{G}_k^U \to U$ surjektiv und sein Kern ein affiner Raum von zu U komplementärer Dimension. (Für ein Beispiel, wo dies nicht der Fall ist siehe [WW]):

Satz 3.83. [WW, Th.1.7] *Ist $\mathcal{G}$ glatt mit zusammenhängenden Fasern und U eine glatte zusammenhängende Untergruppe von $\mathcal{G}_k$. Dann ist $\mathcal{G}^U$ glatt mit zusammenhängenden Fasern, $\mathcal{G}_k^U$ wird durch den kanonischen Morphismus $\mathcal{G}_k^U \to \mathcal{G}_k$ auf U abgebildet und der Kern ist isomorph zu einem affinen Raum G_a^r mit $r = dim(\mathcal{G}_k) - dim(U)$.*

Für uns ist nun der Spezialfall interessant, wenn $\mathcal{G} = G_A$ ist, d.h. durch Skalarenerweiterung von k nach A aus G entsteht. Sei also im folgenden $\mathcal{G} = G_A$ und U eine abgeschlossene Untergruppe von G mit Liealgebra $\mathrm{Lie}(U) = \mathfrak{u}$. Weiter sei J_k das definierende Ideal von U. Es gilt

Satz 3.84. *Mit obigen Bezeichnungen gilt: Das Gruppenschema $\mathcal{G}^U$ hat ein zu U_A isomorphes Untergruppenschema und die spezielle Faser $\mathcal{G}_k^U$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $G_a^r \rtimes U$.*

Beweis: Sei J_K das definierende Ideal von U_K und J_A^U das von $J_K \cap A[\mathcal{G}^U]$ gebildete Ideal von $A[\mathcal{G}^U]$. Dies ist ein Hopfideal, denn $e^\sharp(J_A^U) \subseteq e^\sharp(J_K) = \{0\}$, $i^\sharp(J_A^U) \subset i^\sharp(J_K) \cap i^\sharp(A[\mathcal{G}^U]) \subset J_A^U$ und $\Delta(J_A^U) \subset \Delta(J_K) \cap \Delta(A[\mathcal{G}^U]) \subseteq J_A^U \otimes_A A[\mathcal{G}^U] + A[\mathcal{G}^U] \otimes_A J_A^U$. Es gilt $A[\mathcal{G}^U] = A[\mathcal{G}] + J_A^U$, denn die rechte Seite ist eine A-Unteralgebra von $K[\mathcal{G}]$, die die Erzeuger von $A[\mathcal{G}^U]$ enthält. Damit ist $A[\mathcal{G}^U] \subseteq A[\mathcal{G}] + J_A^U$ und die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich. Weiter ist $A[\mathcal{G}] \cap J_A^U = J_A$, denn es ist $J_A^U \subseteq J_K$ und damit $A[\mathcal{G}] \cap J_A^U \subseteq A[\mathcal{G}] \cap J_K = J_A$ und die umgekehrte Inklusion ist wieder offensichtlich. Es folgt

$$A[\mathcal{G}^U]/J_A^U \cong A[\mathcal{G}]/J_A \cong A[U]. \tag{280}$$

Dieser Isomorphismus ist auch ein Isomorphismus von Hopfalgebren, da das Coprodukt auf beiden Seiten von Δ_K herkommt. Sei die dadurch induzierte Einbettung von U_A in $\mathcal{G}^U$ mit i_U bezeichnet. In der speziellen Faser haben wir nach Satz 3.83 die exakte Sequenz

$$e \to \mathrm{G}_\mathrm{a}^r \to \mathcal{G}_k^U \to U \to e \tag{281}$$

und diese spaltet durch $(i_U)_k : U \to \mathcal{G}_k^U$, was man auf der Hopfalgebrenebene leicht nachprüfen kann. □

Satz 3.85. *Das Gruppenschema $(G_A)^U$ ist eine Liftung der Inonü-Wigner-Kontraktion von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{u}$ mit generischer Faser G.*

Beweis: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$. Wir identifizieren die Liealgebra $\mathfrak{g}$ mit $\mathrm{Der}_k(k[G], k)$ und die Unteralgebra $\mathfrak{u}$ mit $\mathrm{Der}_k(k[U], k)$. Letztere entspricht der Teilmenge der $\delta \in \mathrm{Der}_k(k[G], k)$ mit $\delta(J_k) = 0$. Für $\delta \in \mathfrak{v} \setminus \{0\}$ existiert dagegen ein $r \in J_k$ mit $\delta(r) \neq 0$. Es ist $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{u}_A \oplus \mathfrak{v}_A = \mathrm{Der}_A(A[U], A) \oplus \mathfrak{v}_A$. Es gilt $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A) \subset \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ per Restriktion und $\mathrm{Der}_A(A[U], A) \subset \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A)$, da U_A nach Satz 3.84 ein Untergruppenschema von $\mathcal{G}^U$ ist. Sei $\delta \in \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$, dann gilt $t\delta(r) \in A$ für alle $r \in t^{-1}I$, da $t^{-1}I = t^{-1}J_A + A[\mathcal{G}]$. Da $e^\sharp(J) = \{0\}$ gilt auch $e^\sharp(r) \in A$. Da für $\delta \in \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ gilt $\delta(r_1 r_2) = e^\sharp(r_2)\delta(r_1) + e^\sharp(r_1)\delta(r_2)$ und $A[\mathcal{G}^U]$ von $t^{-1}I$ erzeugt wird, folgt $t\,\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A) \subset \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A)$. Daher haben wir

$$\mathrm{Der}_A(A[U], A) \oplus t\,\mathfrak{v}_A \subset \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A). \tag{282}$$

Es reicht somit die umgekehrte Inklusion zu zeigen. $\mathrm{Der}_A(A[U], A)$ ist identifizierbar mit der Teilmenge der $\delta \in \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A)$ mit $\delta(J_A^U) = 0$. Ist nun

$$\delta \in \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A) \setminus \mathrm{Der}_A(A[U], A),$$

so muß $\delta(r) \in tA$ sein für alle $r \in J_A$, denn andernfalls wäre $\delta(t^{-1}r) = t^{-1}\delta(r) \notin A$. Das bedeutet aber $\psi_k(\delta) \in \mathfrak{u}$, wenn ψ_k die kanonische Abbildung von $\mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ nach $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Also ist $\mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}^U], A) \subset \psi_k^{-1}(\mathfrak{u}) = \mathrm{Der}_A(A[U], A) \oplus t\,\mathfrak{v}_A$. □

Korollar 3.86. *Die spezielle Faser $(G_A)_k^U$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathfrak{g}/\mathfrak{u} \rtimes U$, wobei $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ als U-Modul unter der adjungierten Darstellung betrachtet sei.*

Beweis: Die Darstellung von U auf $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{u}$ ist durch ihre Ableitung eindeutig bestimmt und diese entpricht der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{u}$. □

Man kann diese Konstruktion benutzen, um die Kontraktion von sl_2 in die Heisenbergalgebra auf der Gruppenebene nachzuvollziehen. Hier ist dann

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{283}$$

Das Ideal I wird also erzeugt von

$$\{ta,\ tb,\ tc,\ td,\ a-1,\ d-1,\ c\}.$$

Also wird $A[\mathcal{G}^U]$ über A erzeugt von

$$\{a,\ b,\ c,\ d,\ z_1 = t^{-1}(a-1),\ z_2 = t^{-1}(d-1),\ z_3 = t^{-1}c\}.$$

Die Relation $r_1 := ad - bc - 1$ in Termen von $b,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ ausgedrückt ist

$$r_1 = (tz_1+1)(tz_2+1) - tbz_3 - 1 = t(tz_1z_2 + z_1 + z_2 - bz_3), \tag{284}$$

also durch t teilbar. Es gilt

$$\begin{aligned} A[\mathcal{G}^U] &\cong A[a,b,c,d,z_1,z_2,z_3]/(tz_1z_2 + z_1 + z_2 - bz_3, \\ &\qquad tz_1 - a + 1, tz_2 - d + 1, tz_3 - c) \\ &\cong\ A[b,z_1,z_2,z_3]/(tz_1z_2 + z_1 + z_2 - bz_3) \end{aligned} \tag{285}$$

(Wir werden sehen, daß die spezielle Faser von $\mathcal{G}^U$ zusammenhängend ist, daher ist die Algebra in (285) torsionsfrei.) Als Coprodukt ergibt sich

$$\begin{array}{rcl} \Delta : A[\mathcal{G}] & \to & A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}] \\ z_1 & \mapsto & t^{-1}(a\otimes a + b\otimes c - 1) = tz_1 \otimes z_1 + z_1 \otimes 1 + 1 \otimes z_1 + b \otimes z_3 \\ b & \mapsto & a\otimes b + b \otimes d = t(z_1 \otimes b + b \otimes z_2) + 1 \otimes b + b \otimes 1 \\ z_2 & \mapsto & t^{-1}(c\otimes b + d\otimes d - 1) = tz_2 \otimes z_2 + z_2 \otimes 1 + 1 \otimes z_2 + z_3 \otimes b \\ z_3 & \mapsto & t^{-1}(c\otimes a + d \otimes c) = t(z_3 \otimes z_1 + z_2 \otimes z_3) + z_3 \otimes 1 + 1 \otimes z_3. \end{array}$$

Der Koordinatenring der Limesalgebra ist

$$k[\mathcal{G}] = k[b,z_1,z_2,z_3]/(z_1 + z_2 - bz_3) \cong k[b,z_1,z_3] \tag{286}$$

mit dem Coprodukt

$$\begin{array}{rcl}\Delta : k[\mathcal{G}] & \to & k[\mathcal{G}] \otimes_k k[\mathcal{G}] \\ z_1 & \mapsto & z_1 \otimes 1 + 1 \otimes z_1 + b \otimes z_3 \\ b & \mapsto & 1 \otimes b + b \otimes 1 \\ z_3 & \mapsto & z_3 \otimes 1 + 1 \otimes z_3.\end{array}$$

Dies ist die Hopfalgebra der dreidimensionalen Heisenberggruppe mit dem Produkt

$$(b, z_3, z_1) * (b', z_3', z_1') = (b + b', z_3 + z_3', z_1 + z_1' + bz_3'). \tag{287}$$

Dies entspricht der dreidimensionalen Darstellung durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & b & z_1 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{288}$$

Auch die triviale Kontraktion läßt sich immer durch den Neron-Blowup auf die Gruppenebene heben. Hier ist $U = \{e\}$ und I das Urbild des Augmentationsideals von G unter der Projektion $\psi_k : A[G] \to k[G]$. Für eine linear algebraische Gruppe wird es erzeugt von den Relationen $X_{ij} - \delta_{ij}$ und $Z - 1$, wenn Z das Inverse der Determinante ist, und X_{ij} und Z die Nebenklassen in $A[G]$ der Erzeuger X_{ij} und $Z \in A[Gl(M)]$ sind. Der Koordinatenring des Neron-Blowups $\mathcal{G}^{\{e\}}$ wird als A-Unteralgebra von $K[G]$ erzeugt von

$$Y_{ij} = t^{-1}(X_{ij} - \delta_{ij}) \quad \text{und} \quad \tilde{Z} = t^{-1}(Z - 1). \tag{289}$$

Seien $r_1, \ldots, r_m$ definierende Relationen für G. Diese gehen über in

$$\tilde{r}_l(Y, \tilde{Z}) = r_l(tY_{ij} + \delta_{ij}, t\tilde{Z} + 1) \quad \text{für } l = 1, \ldots, m. \tag{290}$$

Da $E_n \in G$ ist, gilt

$$\tilde{r}_l(Y, \tilde{Z}) \mid_{t=0} = r_l(E_n, 1) = 0 \quad \text{für } l = 1, \ldots, m, \tag{291}$$

d.h. die $\tilde{r}_l$ sind durch t teilbar. Da $A[\mathcal{G}^{\{e\}}]$ torsionsfrei ist, muß das Verschwindungsideal von $\mathcal{G}^{\{e\}}$ also mindestens die Relationen $\hat{r}_l := t^{-1}\tilde{r}_l$ enthalten. Nun gilt offenbar

$$\hat{r}_l(Y, \tilde{Z}) \mid_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_l(tY_{ij} + \delta_{ij}, t\tilde{Z} + 1)) \mid_{t=0} = \mathrm{grad}(r_l)(E_n, 1) \cdot (Y_{ij}, \tilde{Z}), \tag{292}$$

wobei $\mathrm{grad}(r_l)(E_n, 1) \cdot (Y_{ij}, \tilde{Z})$ das Skalarprodukt des Gradienten von r_l in $(E_n, 1)$ mit dem durch $(Y_{ij}, \tilde{Z})$ gebildeten Vektor bezeichne. Durch das Verschwinden der Ausdrücke $\mathrm{grad}(r_l)(E_n, 1) \cdot (Y_{ij}, \tilde{Z})$ für $l = 1, \ldots, m$ wird aber gerade der Tangentialraum von G im neutralen Element $(E_n, 1)$, also die Liealgebra von G definiert. Da diese die gleiche Dimension wie G hat und zusammenhängend ist, definieren die Relationen $\hat{r}_l$ mit $l = 1, \ldots, m$, eine torsionsfreie A-Algebra, d.h. es ist

$$A[\mathcal{G}^{\{e\}}] = A[Y_{ij}, \tilde{Z}]/(\hat{r}_l \mid l = 1, \ldots, m). \tag{293}$$

Die Kontraktion beschreibt also einen Übergang von der linearen Gruppe G in ihre Liealgebra. Die Relation $r_1 = \det(X)Z - 1 = \det(tY + E_n)(t\tilde{Z} + 1) - 1$ geht zum Beispiel für $t = 0$ über in $\mathrm{tr}(Y) + \tilde{Z}$. Für das Coprodukt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Delta(Y_{ij}) &= \Delta(t^{-1}(X_{ij} - \delta_{ij})) \\
&= t^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{ik} \otimes X_{kj} - \delta_{ij}\right) \\
&= t^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} ((tY_{ik} + \delta_{ik}) \otimes (tY_{kj} + \delta_{kj})) - \delta_{ij}\right) \\
&= t\left(\sum_{k=1}^{n} Y_{ik} \otimes Y_{kj}\right) + \sum_{k=1}^{n} (1 \otimes Y_{ij} + Y_{ij} \otimes 1)\,, \qquad (294)
\end{aligned}$$

$$\Delta(\tilde{Z}) = t\tilde{Z} \otimes \tilde{Z} + 1 \otimes \tilde{Z} + \tilde{Z} \otimes 1. \qquad (295)$$

Wie erwartet ist also die Limesgruppe gleich $(\mathrm{Lie}(G), +)$.

Durch den folgenden Satz wird die Frage nach der Umkehrbarkeit der Kontraktion der multiplikativen Gruppe $\mathrm{G_m}$ in die additive Gruppe $\mathrm{G_a}$ beantwortet.

Satz 3.87. *Jede Degeneration von G_a über einem diskreten Bewertungsring, der einen Körper der Charakteristik Null enthält, ist gleich G_a. Insbesondere ist die Degeneration von G_a nach G_m über einem diskreten Bewertungsring, der einen Körper der Charakteristik Null enthält, nicht möglich.*

Beweis: Der Satz entspricht beinahe dem Theorem [WW, The.2.2], welches besagt, daß jedes glatte Modell von $\mathrm{G_a}$ mit zusammenhängenden Fasern gleich $\mathrm{G_a}$ ist. Im Beweis wird die Voraussetzung, daß die Fasern zusammenhängend sind, nur an einer Stelle gebraucht. Man weiß nach [WW, The.2.2], daß $\mathrm{G_a}$ ein relativ minimales Modell ist, d.h. daß zu jedem Modell $\mathcal{G}$ von $\mathrm{G_a}$ ein Morphismus $\mathcal{G} \to \mathrm{G_a}$ existiert, der auf der generischen Faser die Identität induziert. Die Voraussetzung, daß die Fasern zusammenhängend sind, wird nun gebraucht, um zu zeigen, daß das Bild von $\mathcal{G}_k$ in $(\mathrm{G_a})_k$ entweder trivial oder gleich $(\mathrm{G_a})_k$ ist. Dies gilt im Fall, daß $\mathrm{char}(k) = 0$ ist, auch ohne die Voraussetzung, daß die Fasern von $\mathcal{G}$, insbesondere $\mathcal{G}_k$, zusammenhängend sind. Das Bild von $\mathcal{G}_k$ muß nämlich eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{G_a}$ sein und jede echte abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{G_a}$ hätte eine Dimension weniger, wäre also endlich. Da $(\mathrm{G_a})_k$ aber keine nichttriviale endliche Untergruppe hat, wenn $\mathrm{char}(k) = 0$ ist, ist dieser Fall ausgeschlossen und man kann den Beweis genauso weiterführen wie in [WW]. □

3.5. **Filtrierte und Graduierte Kontraktionen von Gruppen.** Sei wieder k ein Körper der Charakteristik 0 und A eine diskrete Bewertungs-k-Algebra mit Restklassenkörper k, Quotientenkörper K und uniformisierendem Parameter t. Weiter sei G eine algebraische Gruppe über k mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\zeta_m \in k$ eine primitive m-te Einheitswurzel.

Definition 3.88. [VD, 0.7.1] Eine algebraische Gruppe G über einem Körper k heißt *unipotent*, wenn sie eine Kompositionsreihe besitzt, deren Faktoren isomorph zu $\mathrm{G_a}(k)$ sind.

Satz 3.89. [VD, 0.7.1] *Sei k ein Körper. Eine algebraische Gruppe G über k ist genau dann unipotent, wenn sie affin ist und wenn ein Erzeugendensystem $(y_1, \ldots, y_N)$ von $k[G]$ existiert, so daß*

$$\Delta(y_i) = 1 \otimes y_i + y_i \otimes 1 + \sum_j a_{ij} \otimes b_{ij}, \tag{296}$$

wobei a_{ij}, b_{ij} nur von $y_1, \ldots, y_{i-1}$ abhängen.

(Vergleiche auch [DGfr, IV,§2,n2].) Sei $\mathfrak{v}$ eine nilpotente Liealgebra. Dann kann man $\mathfrak{v}$ mit der Struktur einer unipotenten Gruppe versehen, indem man das Produkt gleich der rechten Seite der Campbell-Hausdorff-Formel (siehe [Ser1, LA S.4.17]) setzt. Dies ergibt für $x, y \in \mathfrak{v}$

$$x \cdot y := \sum_{n=1}^{\infty} z_n, \tag{297}$$

wobei

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{p+q=n} (z'_{p,q} + z''_{p,q}) \tag{298}$$

mit

$$z'_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p \\ q_1+\cdots+q_m=q-1 \\ p_i+q_i \geq 1 \\ p_m \geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \; \frac{\mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1} \ldots \mathrm{ad}(x)^{p_m}(y)}{p_1!\, q_1! \cdots p_m!} \tag{299}$$

und

$$z''_{p,q} = \sum_{\substack{p_1+\cdots+p_m=p-1 \\ q_1+\cdots+q_m=q \\ p_i+q_i \geq 1}} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \; \frac{\mathrm{ad}(x)^{p_1}\mathrm{ad}(y)^{q_1} \ldots \mathrm{ad}(y)^{q_{m-1}}(x)}{p_1!\, q_1! \cdots q_{m-1}!}. \tag{300}$$

Die ersten drei Terme sind

$$z_1 = x + y, \quad z_2 = \frac{1}{2}[x, y], \quad z_3 = \frac{1}{12}\left([x, [x, y]] + [y, [y, x]]\right). \tag{301}$$

Da $\mathfrak{v}$ nilpotent ist, ist $z_n = 0$ für alle n größer als der Nilpotenzgrad von $\mathfrak{v}$. Daher sind alle auftretenden Reihen endlich und $\mathfrak{v}$ bildet mit diesem Produkt eine algebraische Gruppe. Die Null ist darin das neutrale Element und $-x$ ist das Inverse von x.

Satz 3.90. [VD, 0.7.2.f)] *Jede unipotente algebraische Gruppe ist zu der von ihrer Liealgebra wie oben gebildeten Gruppe isomorph vermöge der Exponentialabbildung* $\exp : \mathfrak{v} \to G$, *wobei* $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ad(x)^n}{n!} \in GL(\mathfrak{v})$ *für* $x \in \mathfrak{v}$.

Sei S ein Automorphismus der Gruppe G. Dann entspricht diesem ein Automorphismus des zugehörigen, ebenfalls mit G bezeichneten, Gruppenschemas, also eine natürliche Transformation $G \to G$. Ist B eine k-Algebra, so gibe es eine kanonische Fortsetzung von S zu einem Automorphismus von G_B. Dieser wird auf $B[G_B] = k[G] \otimes_k B$ durch B-lineare Fortsetzung von $S^\sharp$ definiert und mit S_B oder einfach wieder mit S bezeichnet.

Satz 3.91. *Sei S ein Automorphismus von G der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ und*

$$k[G] = \bigoplus_{j=0}^{m-1} k[G]_{\bar{j}} \tag{302}$$

die Zerlegung von $k[G]$ in Eigenräume von $S^\sharp$ zu den Potenzen von ζ_m. Entsprechend seien $A[G]_{\bar{j}}$ die Eigenräume von $S^\sharp_A$. Sei nun $A[\mathcal{G}]$ die von den A-Untermoduln

$$t^{-j} A[G]_{\bar{j}} \quad \textit{mit } j \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{303}$$

erzeugte A-Unteralgebra von $K[G]$. Sei $\bar{P}^\sharp$ die offensichtliche Einbettung von $A[G]$ in $A[\mathcal{G}]$. Dann ist $A[\mathcal{G}]$ eine Unterhopfalgebra von $K[G]$ als A-Hopfalgebra und das Paar $(\mathcal{G}, P)$ ist eine Kontraktion von G. Ihre Ableitung ist die durch $\sigma = dS$ definierte zyklisch graduierte Kontraktion von $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{v} = ker(\phi_0) = \mathfrak{g}_{\bar{1}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\overline{m-1}}$ wie in Satz 1.52. Die Limesgruppe dieser Kontraktion ist das semidirekte Produkt der Fixpunktuntergruppe G^S mit $\mathfrak{v}$ als unipotenter Gruppe.

Beweis: Erstens ist zu zeigen, daß $A[\mathcal{G}]$ ein Modell von $K[G]$ ist. Es ist klar, daß $K[G]$ von $A[\mathcal{G}]$ über K aufgespannt wird. Die A-Algebra $A[\mathcal{G}]$ hat ein endliches Erzeugendensystem, denn sei für $i \in \{-1, \ldots, m-1\}$ das Ideal J_i das von $\bigoplus_{j=i+1}^{m-1} k[G]_{\bar{j}}$ erzeugte Ideal von $k[G]$ und die Menge $Y_i = \{y_{i1}, \ldots, y_{iR_i}\} \subset k[G]_{\bar{i}}$ so gewählt, daß die Bilder der y_{ij} ein endliches Erzeugendensystem des Ideals J_i/J_{i+1} von $k[G]/J_{i+1}$ bilden. Dann bilden die Mengen $t^{-i-1}Y_i$ ein endliches Erzeugendensystem von $A[\mathcal{G}]$.

Wir zeigen nun, daß $A[\mathcal{G}]$ eine Unterhopfalgebra von $K[G]$ ist. Da S ein Automorphismus von $k[G]$ ist, gelten:

1. $e^\sharp \circ S^\sharp = e^\sharp$, da S das neutrale Element von G in sich überführt. Ist nun $r \in k[G]_{\bar{i}}$, dann gilt $e^\sharp(r) = e^\sharp \circ S^\sharp(r) = \zeta_m^i e^\sharp(r)$. Daraus folgt $e^\sharp(k[G]_{\bar{i}}) = \{0\}$ für $\bar{i} \neq \bar{0}$. Daher ist $e^\sharp(t^{-i} A[G]_{\bar{i}}) \subseteq A$ für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ und daher $e^\sharp(A[\mathcal{G}]) \subseteq A$.
2. $S^\sharp \circ i^\sharp = i^\sharp \circ S^\sharp$, da $S(g^{-1}) = (S(g))^{-1}$ für alle $g \in G$. Daraus folgt $i^\sharp(k[G]_{\bar{i}}) \subseteq k[G]_{\bar{i}}$. Daher ist $i^\sharp(A[\mathcal{G}]) \subseteq A[\mathcal{G}]$.

3. $\Delta_k \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta_k$, bzw. $\Delta_k = (S \otimes S) \circ \Delta_k \circ S^{-1}$. Es ist $k[G] \otimes_k k[G] = \bigoplus_{i,j=0}^{m-1} k[G]_{\bar{i}} \otimes_k k[G]_{\bar{j}}$. Aus $\Delta_k = (S \otimes S) \circ \Delta_k \circ S^{-1}$ folgt für alle $l \in \{0, \ldots, m-1\}$:

$$\Delta_k(k[G]_{\bar{l}}) \subseteq \bigoplus_{\overline{i+j}=\bar{l}} k[G]_{\bar{i}} \otimes_k k[G]_{\bar{j}}. \tag{304}$$

Daraus folgt für $l, i, j \in \{0, \ldots, m-1\}$:

$$\begin{aligned}
\Delta(A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}) &= t^{-l}\Delta(A[G]_{\bar{l}}) && (305)\\
&\subseteq t^{-l} \bigoplus_{i+j=l} A[G]_{\bar{i}} \otimes_A A[G]_{\bar{j}} \oplus t^{-l} \bigoplus_{i+j=l+m} A[G]_{\bar{i}} \otimes_A A[G]_{\bar{j}} && (306)\\
&= \bigoplus_{i+j=l} A[\mathcal{G}]_{\bar{i}} \otimes_A A[\mathcal{G}]_{\bar{j}} \oplus t^m \bigoplus_{i+j=l+m} A[\mathcal{G}]_{\bar{i}} \otimes_A A[\mathcal{G}]_{\bar{j}} && (307)\\
&\subseteq A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}]. && (308)
\end{aligned}$$

Daher ist $A[\mathcal{G}]$ eine Unterhopfalgebra von $K[G]$ und somit ein Modell von $G(K)$.

Zweitens ist zu zeigen, daß die Liealgebra $\mathfrak{a} := \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$ isomorph ist zu

$$\bigoplus_{i=0}^{m-1} t^i(\mathfrak{g}_A)_{\bar{i}}, \tag{309}$$

wobei $(\mathfrak{g}_A)_{\bar{i}} = (\mathfrak{g}_{\bar{i}})_A$ der Eigenraum von σ zum Eigenwert ζ_m^i ist (vergleiche (73)). Da $S^\sharp(A[G]_{\bar{i}}) = A[G]_{\bar{i}}$ ist, gilt auch $S^\sharp(A[\mathcal{G}]) = A[\mathcal{G}]$, d.h. $S^\sharp$ ist auch ein Automorphismus von $A[\mathcal{G}]$. Damit ist auch dS ein Automorphismus von $\mathfrak{a} = \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$. Sei $\mathfrak{a}_{\bar{i}}$ der Eigenraum von dS zum Eigenwert ζ_m^i. Dann gilt:

$$\mathfrak{a}_{\bar{i}} = \{\delta \in \mathfrak{a} \mid \delta(A[G]_{\bar{j}}) = \{0\} \quad \text{für alle } \bar{j} \neq \bar{i}\}. \tag{310}$$

Dafür ist zu zeigen, daß für $\delta \in \mathfrak{a} = \mathrm{Der}_A(A[\mathcal{G}], A)$ die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\sigma(\delta) &= \delta \circ S^\sharp = \zeta_m^i \delta \quad \text{und} && (311)\\
\delta(A[G]_{\bar{j}}) &= \{0\} \quad \text{für alle } \bar{j} \neq \bar{i} && (312)
\end{aligned}$$

äquivalent sind. Die Richtung „⇒“ ist klar. Die Richtung „⇐“ folgt daraus, daß eine Derivation durch ihre Werte auf einem Erzeugendensystem eindeutig bestimmt ist. Da die Gleichung $\delta \circ S^\sharp(x) = \zeta_m^i \delta(x)$ für alle $x \in t^{-j}A[G]_{\bar{j}}$ mit $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt, gilt sie auch für alle $x \in A[\mathcal{G}]$.

Ebenso gelten

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\bar{i}} &= \{\delta \in \mathfrak{g} \mid \delta(k[G]_{\bar{j}}) = \{0\} \quad \text{für alle } \bar{j} \neq \bar{i}\} \quad \text{und} && (313)\\
(\mathfrak{g}_A)_{\bar{i}} &= \{\delta \in \mathfrak{g}_A \mid \delta(A[G]_{\bar{j}}) = \{0\} \quad \text{für alle } \bar{j} \neq \bar{i}\}. && (314)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{a}_{\bar{i}} = t^i(\mathfrak{g}_A)_{\bar{i}}, \tag{315}$$

denn $\delta \in \mathfrak{g}_K$ ist offenbar genau dann in $\mathfrak{a}_{\bar{i}}$ für $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, wenn $t^{-i}\delta$ in $(\mathfrak{g}_A)_{\bar{i}}$ ist.

Drittens ist zu zeigen, daß die spezielle Faser von $\mathcal{G}$ die behauptete Struktur hat. Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{G}$ ein zu U_A, mit $U := G^S$, isomorphes Untergruppenschema hat. Sei J_K das definierende Ideal von U_K und J_A^U das von $J_K \cap A[\mathcal{G}]$ gebildete Ideal von $A[\mathcal{G}]$. Wie im Beweis von Satz 3.84 sieht man, daß dies ein Hopfideal ist. Auch gilt wieder $A[\mathcal{G}] = A[G] + J_A^U$. Die Inklusion „$\supseteq$“ ist dabei trivial. Die Inklusion „$\subseteq$“ folgt daraus, daß $A[\mathcal{G}]_{\bar{0}} \subset A[G]$ und $A[\mathcal{G}]_{\bar{i}} \subseteq J_A^U$ für $\bar{i} \neq \bar{0}$. Letzteres gilt, weil für $r \in A[\mathcal{G}]_{\bar{i}}$ und $g \in U$ gilt $r(g) = \zeta_m^{-i} r(S(g)) = \zeta_m^{-i} r(g)$, also $r(g) = 0$. Außerdem gilt $A[G] \cap J_A^U = A[G] \cap J_K = J_A$ und daher

$$A[\mathcal{G}]/J_A^U \cong A[G]/J_A \cong A[U] \tag{316}$$

als A-Algebra. Dieser Isomorphismus ist auch ein Isomorphismus von Hopfalgebren, da das Coprodukt auf beiden Seiten von Δ_K herkommt.

Es bleibt zu zeigen, daß $N := \ker(P_k)$ unipotent ist. Die darstellende Algebra von N ist nach [Wa]

$$k[N] \;\cong\; k[\mathcal{G}] \otimes_{k[G]} k \cong k[\mathcal{G}]/(I_k \cdot k[\mathcal{G}]), \tag{317}$$

wobei wieder k durch $e^\sharp$ zu einer $k[G]$-Algebra wird und $I_k := \ker(e^\sharp)$ das Augmentationsideal von G_k sei. Die Algebra $k[\mathcal{G}]/(I_k \cdot k[\mathcal{G}])$ ist offenbar isomorph zu

$$A[\mathcal{G}]/(I_k \cdot A[\mathcal{G}] + tA[\mathcal{G}]). \tag{318}$$

Sei $I_A(N) := (I_k \cdot A[\mathcal{G}] + tA[\mathcal{G}])$. Da in kanonischer Weise

$$\begin{aligned} &A[\mathcal{G}]/I_A(N) \otimes_A A[\mathcal{G}]/I_A(N) \cong \\ &\qquad (A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}])\,/(A[\mathcal{G}] \otimes_A I_A(N) + I_A(N) \otimes_A A[\mathcal{G}]), \end{aligned} \tag{319}$$

genügt es nach Satz 3.89 zu zeigen: Es existiert ein Erzeugendensystem $(y_1, \ldots, y_R)$ von $A[\mathcal{G}]$ mit

(320)
$$\Delta(y_i) \equiv 1 \otimes y_i + y_i \otimes 1 + \sum_j a_{ij} \otimes b_{ij} \quad \mathrm{mod}\ A[\mathcal{G}] \otimes_A I_A(N) + I_A(N) \otimes_A A[\mathcal{G}],$$

mit a_{ij}, b_{ij} aus dem Erzeugnis von $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Seien nun Erzeugende $y_1, \ldots, y_R$ von $A[\mathcal{G}]$ so gewählt, daß jedes y_i in einem der $A[\mathcal{G}]_{\bar{j}}$ liegt, und so daß mit $j < j' \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt

$$y_i \in A[\mathcal{G}]_{\bar{j}} \quad \text{und } y_{i'} \in A[\mathcal{G}]_{\bar{j}'} \Rightarrow i < i'. \tag{321}$$

Sei dann $l \in \{0, \ldots, m-1\}$ und $y \in A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}$ beliebig. Wegen (307) gilt

$$\Delta(y) = \sum_i x_i \otimes z_i + \sum_j z'_j \otimes x'_j + \sum_m a_m \otimes b_m, \tag{322}$$

mit gewissen x_i, $x'_j \in A[\mathcal{G}]_{\bar{0}}$, z_i, $z'_j \in A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}$ und a_m, $b_m \in \bigcup_{i=1}^{l-1} A[\mathcal{G}]_{\bar{i}}$. Nach Definition der Hopfalgebra gilt

$$y = (\mathrm{id}_{A[\mathcal{G}]}, e^{\sharp}_{\mathcal{G}}) \circ \Delta(y). \tag{323}$$

Für $l \neq 0$ folgt daraus zusammen mit (322)

$$y = \sum_j z'_j e^{\sharp}_{\mathcal{G}}(x'_j), \tag{324}$$

da $e^{\sharp}_{\mathcal{G}}(A[\mathcal{G}]_{\bar{i}}) = \{0\}$ für $\bar{i} \neq \bar{0}$. Für $x \in A[\mathcal{G}]_{\bar{0}} \subseteq A[G]$ gilt $e^{\sharp}_{\mathcal{G}}(x) = e^{\sharp}_{G}(x)$. Daraus folgt $x - e^{\sharp}_{\mathcal{G}}(x) \in I_{G,A} \subseteq I_{G,k} \cdot A[\mathcal{G}] \subseteq I_A(N)$. Damit ist

(325)
$$\sum_j z'_j \otimes x'_j \equiv \sum_j z'_j \otimes e^{\sharp}_{\mathcal{G}}(x'_j) = y \otimes 1 \mod A[\mathcal{G}] \otimes_A I_A(N) + I_A(N) \otimes_A A[\mathcal{G}].$$

Ebenso folgt aus Definition 3.3.1. für $y \in A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}$ mit $l \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\sum_i x_i \otimes z_i \equiv 1 \otimes y \mod A[\mathcal{G}] \otimes_A I_A(N) + I_A(N) \otimes_A A[\mathcal{G}]. \tag{326}$$

Somit gilt (320) für $y \in A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}$ mit $l \in \{1, \dots, m-1\}$. Die darstellende Algebra $k[N]$ des Kerns von P_k wird bereits von den $y_i \in \bigcup_{l=1}^{m-1} A[\mathcal{G}]_{\bar{l}}$ erzeugt, da die Elemente von $A[\mathcal{G}]_{\bar{0}} = A[G]_{\bar{0}}$ modulo $I_A(N)$ kongruent zu Konstanten sind. Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 3.92. Eine Kontraktion wie in Satz 3.91 wird als *zyklisch graduierte Kontraktion von G* bezeichnet.

Auch filtrierte verallgemeinerte Kontraktionen kann man für Gruppen definieren. Dazu muß zunächst eine Filtrierung einer algebraischen Gruppe beziehungsweise einer Hopfalgebra definiert werden.

Definition 3.93. Sei I das Augmentationsideal von G. Eine *Filtrierung von G* ist eine absteigende Kette von Idealen

$$I \supset J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{N-1} \supset J_N = \{0\}, \tag{327}$$

so daß mit $J_{-1} := k[G]$ für alle $i, j \in \{-1, \dots, N\}$ gilt

1. $i^{\sharp}(J_i) \subseteq J_i$.
2. $\Delta(J_{i+j}) \subseteq J_i \otimes_k k[G] + k[G] \otimes_k J_j$.

Bemerkung 3.94. Zu einem Automorphismus endlicher Ordnung der Gruppe G korrespondiert stets eine Filtrierung von G. Diese ist durch die im Beweis von Satz 3.91 definierten J_i gegeben.

Lemma 3.95. *Ist* $I \supset J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{N-1} \supset J_N = \{0\}$ *eine Filtrierung von* $k[G]$*, dann gilt*

$$\Delta(J_l) \subseteq \sum_{\substack{i+j=l-1\\ i,j\in\{-1,\ldots,N\}}} J_i \otimes_k J_j. \tag{328}$$

Beweis: Aus Punkt 2 von Definition 3.93 folgt: Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(J_l) &\subseteq \bigcap_{i+j=l} (J_i \otimes_k k[G] + k[G] \otimes_k J_j) && (329)\\
&= \sum_{I_1\subseteq\{-1,\ldots,N\}} \left(\bigcap_{i\in I_1} J_i \otimes_k k[G] \cap \bigcap_{i\in\{-1,\ldots,N\}\setminus I_1} k[G]\otimes_k J_{l-i}\right) && (330)\\
&= \sum_{I_1\subseteq\{-1,\ldots,N\}} J_{\max(I_1)} \otimes_k J_{l-\min(\{-1,\ldots,N\}\setminus I_1)} && (331)\\
&= \sum_{i=-1}^{N} J_i \otimes J_{l-i-1}, && (332)
\end{aligned}$$

da für $I_1 \subset \{-1,\ldots,N\}$ und $i := \max(I_1)$ gilt $\min(\{-1,\ldots,N\}\setminus I_1) \leq i+1$ und für geeignete I_1 Gleichheit gilt. □

Man überlegt sich leicht, daß die Bedingung (328) umgekehrt auch Punkt 2 von Definition 3.93 impliziert. Man könnte daher in der Definition von filtrierten Kontraktionen auch (328) statt Punkt 2 verwenden.

Der folgende Satz zeigt, daß Filtrierungen von Gruppen Filtrierungen ihrer Liealgebra entsprechen.

Satz 3.96. *Ist* $I \supset J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{N-1} \supset J_N = \{0\}$ *eine Filtrierung von* $k[G]$*, dann gilt*

1. *Für eine k-Algebra B und* $i \in \{0,\ldots,N\}$ *sei*

$$X_i(B) := \{\xi \in G(B) \mid \xi(J_i) = \{0\}\} \cong Hom_{A\text{-}Alg}(k[G]/J_i, B). \tag{333}$$

Die $X_i(B)$ *bilden eine aufsteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen von* $G(B)$*:*

$$X_0(B) \subseteq X_1(B) \subseteq \cdots \subseteq X_{N-1}(B) \subseteq X_N(B) = G(B). \tag{334}$$

Es gilt für alle $i,j \in \{0,\ldots,N\}$

(a) $e_B \in X_i(B)$,

(b) $X_i(B) = X_i(B)^{-1}$,

(c) $X_i(B)X_j(B) \subseteq X_{i+j}(B)$.

Insbesondere ist $X_0(B)$ *eine Untergruppe von* $G(B)$ *(d.h.* J_0 *ist ein Hopfideal.).*

2. *Ist* $\mathfrak{g}$ *die Liealgebra von* G*, so besitzt* $\mathfrak{g}$ *eine Filtrierung:*

$$\{0\} = W_{-1} \subseteq \cdots \subseteq W_N = \mathfrak{g} \tag{335}$$

mit $W_i = \{\delta \in \mathfrak{g} \mid \delta(J_i) = \{0\}\}$*. Es gilt* $W_i \otimes_k B = T_{e_B}(X_i(B)) = Der(k[G]/J \otimes_k B, B)$.

Beweis: Punkt 1 folgt sofort aus der Definition. Bei Punkt 2 ist klar, daß $(W_i)_B$ der Tangentialraum an $X_i(B)$ in e_B ist und daß (335) gilt. Es ist nur zu zeigen, daß für $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ gilt $[W_i, W_j] \subseteq W_{i+j}$. Die Lieklammer von zwei Derivationen ist $[\delta, \delta'] = ((\delta, \delta') - (\delta', \delta)) \circ \Delta$. Sind $\delta \in W_i, \delta' \in W_j$ so folgt mit Lemma 3.95 $[\delta, \delta'](J_{i+j}) \subseteq \sum_{i'+j'=i+j-1} \delta(J_{i'})\delta'(J_{j'}) = \{0\}$, denn ist $i' + j' = i + j - 1$, so gilt $i' \geq i$ oder $j' \geq j$ und damit $\delta(J_{i'}) = \{0\}$ oder $\delta(J_{j'}) = \{0\}$. Also ist $[\delta, \delta'] \in W_{i+j}$. □

Satz 3.97 (Hebbarkeitssatz für filtrierte Kontraktionen)**.** *Sei*

$$I \supset J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{N-1} \supset J_N = \{0\} \tag{336}$$

eine Filtrierung von G*. Es sei* $I_A \supset (J_0)_A \supset (J_1)_A \supset \cdots \supset (J_{N-1})_A \supset (J_N)_A$ *die entsprechende Filtrierung von* G_A*. Sei* $A[\mathcal{G}]$ *die von* $A[G]$ *und*

$$t^{-i-1}J_i \quad \textit{mit } i \in \{0, \ldots, N\} \tag{337}$$

erzeugte A*-Unteralgebra von* $K[G]$*. Dann ist* $A[\mathcal{G}]$ *ein Modell von* $K[G]$ *und definiert somit eine verallgemeinerte Kontraktion von* G*. Ihre Liealgebra* $\mathfrak{a} := Lie(\mathcal{G})$ *ist die durch die Filtrierung (335) definierte filtrierte Kontraktion gemäß Satz 1.43.*

Beweis: Da $A[\mathcal{G}]$ ein Erzeugendensystem von $K[G]$ enthält, ist $A[\mathcal{G}]$ eine A-Form von $K[G]$. Da $k[G]$ noethersch ist, existieren endliche Mengen $Y_i = \{y_{i,1}, \ldots, y_{i,R_i}\}$ für $i = -1, \ldots, N-1$, so daß das Bild von Y_i in $k[G]/J_{i+1}$ ein endliches Erzeugendensystem des Ideals J_i/J_{i+1} bildet. Dann ist $A[\mathcal{G}] = A[G][\bigcup_{i=-1}^{N-1} t^{-i-1}Y_i]$ endlich erzeugt. Da $e^\sharp(J_i) = \{0\}$ für $i \in \{0, \ldots, N\}$, gilt auch $e^\sharp(A[\mathcal{G}]) \subseteq A$. Aus $i^\sharp(J_i) = J_i$ für alle i folgt $i^\sharp(A[\mathcal{G}]) = A[\mathcal{G}]$. Aus Lemma 3.95 folgt:

$$\Delta(t^{-l-1}(J_l)_A) \subseteq t^{-l-1} \sum_{i+j=l-1} (J_i)_A \otimes_k (J_j)_A = \sum_{i+j=l-1} t^{-i-1}(J_i)_A \otimes_k t^{-j-1}(J_j)_A. \tag{338}$$

Daher gilt $\Delta(A[\mathcal{G}]) \subset A[\mathcal{G}] \otimes_A A[\mathcal{G}]$. Also ist $A[\mathcal{G}]$ ein Modell von $K[G]$.

Es sei $\mathfrak{b}_i := \mathfrak{a} \cap (W_i)_K = \{\delta \in \mathfrak{a} \mid \delta((J_i)_K) = \{0\}\}$. Es ist klar, daß dies eine Filtrierung von $\mathfrak{a}$ ist. Ist $\delta \in (W_i)_A$, so ist $t^i\delta(r) = \delta(r) = 0$ für $r \in \bigcup_{j \geq i} t^{-j-1}(J_j)_A$ und $t^i\delta(r) = \delta(t^ir) \in A$ für $r \in t^{-j-1}(J_j)_A$ mit $j < i$. Daher ist $t^i(W_i)_A \subseteq \mathfrak{b}_i$. Sei nun $\delta \in \mathfrak{b}_i \setminus \mathfrak{b}_{i-1}$. Dann existiert ein $r \in t^{-i}(J_{i-1})_A$ mit $\delta(r) = t^{-i}\delta(t^ir) \neq 0$. Also ist $t^{-i}\delta \in (W_i)_A \setminus (W_{i-1})_A$. Daher gilt $t^i((W_i)_A \setminus (W_{i-1})_A) = \mathfrak{b}_i \setminus \mathfrak{b}_{i-1}$. Sei nun V_i ein Vektorraumkomplement zu W_{i-1} in W_i. Dann ist $\mathfrak{a}_i := t^i(V_i)_A$ ein Vektorraumkomplement zu $\mathfrak{b}_{i-1}$ in $\mathfrak{b}_i$. Es ist klar, daß $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{b}_{i-1} = \{0\}$ und daß $\mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{b}_{i-1} \subseteq \mathfrak{b}_i$, da $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{i-1} \subseteq \mathfrak{b}_i$. Sei nun $\delta \in \mathfrak{b}_i \setminus \mathfrak{b}_{i-1}$. Nach obigem ist $\delta = t^i\delta'$ für ein $\delta' \in (W_i)_A \setminus (W_{i-1})_A$. Die Derivation δ' ist von der Form $\delta' = \delta_1 + \delta_2$

mit $\delta_1 \in (W_{i-1})_A$ und $\delta_2 \in (V_i)_A \setminus \{0\}$. Da $t^i\delta_1 \in \mathfrak{b}_{i-1}$ und $t^i\delta_2 \in \mathfrak{a}_i$, ist also $\delta \in \mathfrak{b}_{i-1} \oplus \mathfrak{a}_i$. Daher ist wie behauptet

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_N = \mathfrak{a}_N \oplus \mathfrak{b}_{N-1} = \cdots = \bigoplus_{i=0}^{N} \mathfrak{a}_i = \bigoplus_{i=0}^{N} t^i (V_i)_A. \tag{339}$$

□

Beispiel ist das Neronmodell, wobei $N = 1$ ist und $J_0 = I(U)$ (das Verschwindungsideal der abgeschlossenen Untergruppe U von G.)

Beispiel 3.98. (Für Liealgebren ist diese Kontraktion in [Gi, Ch.10] beschrieben.) Die Galileigruppe Gal_3 ist das semidirekte Produkt der euklidischen Bewegungsgruppe E_3 mit der additiven Gruppe des 4-dimensionalen affinen Raums G_a^4 in der natürlichen Darstellung von E_3 (siehe [Hei, I.§4 S.71]). Die Galileigruppe besitzt folgende Matrixdarstellung:

$$\mathrm{Gal}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} A & v & x \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{SO}_3,\ v, x \in \mathrm{G}_\mathrm{a}^3,\ \beta \in \mathrm{G}_\mathrm{a} \right\}. \tag{340}$$

Man kann die Galileigruppe als spezielle Faser einer filtrierten Kontraktion der orthogonalen Gruppe SO_5 erhalten, nämlich mit $N = 2$, $J_0 = (X_{ij} - \delta_{ij} \mid i \in \{4,5\}$ oder $j \in \{4,5\})$, dies beschreibt die zu SO_3 isomorphe Untergruppe

$$X_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{SO}_5 \tag{341}$$

von SO_5, und $J_1 = (X_{ij} \mid i = 5 \wedge j \leq 3$ oder $j = 5 \wedge i \leq 3)$. Die hierzu gehörige abgeschlossene Untermenge von SO_5 ist

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & v & 0 \\ w^\dagger & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\} \cap \mathrm{SO}_5. \tag{342}$$

Die Hopfalgebra $A[\mathcal{G}]$ wird erzeugt von a_{ij}, $\tilde{v}_i$, $\tilde{w}_i$, $\tilde{x}_i$, $\tilde{y}_i$, $i, j \in \{1,2,3\}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$, wobei sich die Relationen zwischen diesen Erzeugern ergeben aus

$$\begin{pmatrix} A & t\tilde{v} & t^2\tilde{x} \\ t\tilde{w}^\dagger & t\tilde{\alpha} + 1 & t\tilde{\beta} \\ t^2\tilde{y}^\dagger & t\tilde{\gamma} & t\tilde{\delta} + 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_5, \tag{343}$$

sowie der Torsionsfreiheit von $A[\mathcal{G}]$. Folgende Familie von Relationen beschreibt das Gruppenschema $\mathcal{G}$

$$
\begin{aligned}
&AA^\dagger + t^2\tilde{v}\tilde{v}^\dagger + t^2\tilde{x}\tilde{x}^\dagger - \mathrm{E}_3 \\
&A\tilde{w} + \tilde{v}(t\tilde{\alpha}+1) + t^2\tilde{x}\tilde{\beta} \\
&A\tilde{y} + \tilde{v}\tilde{\gamma} + \tilde{x}(t\tilde{\delta}+1) \\
&t^2\tilde{w}^\dagger\tilde{y} + \tilde{\gamma}(t\tilde{\alpha}+1) + (t\tilde{\delta}+1)\tilde{\beta} \\
&t\tilde{w}^\dagger\tilde{w} + t\tilde{\alpha}^2 + 2\tilde{\alpha} + t\tilde{\beta}^2 \\
&t^3\tilde{y}^\dagger\tilde{y} + t\tilde{\gamma}^2 + t\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta}.
\end{aligned}
\tag{344}
$$

Die Coeins, das Coinverse und das Coprodukt der Hopfalgebra $A[\mathcal{G}]$ sehen folgendermaßen aus:

$$
\begin{aligned}
&e^\sharp(a_{ij}) = \delta_{ij}, \\
&e^\sharp(\tilde{v}_i) = e^\sharp(\tilde{w}_i) = e^\sharp(\tilde{x}_i) = e^\sharp(\tilde{y}_i) = 0, \\
&e^\sharp(\tilde{\alpha}) = e^\sharp(\tilde{\beta}) = e^\sharp(\tilde{\gamma}) = e^\sharp(\tilde{\delta}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&i^\sharp(a_{ij}) = a_{ji}, \\
&i^\sharp(\tilde{v}_i) = \tilde{w}_i, \qquad i^\sharp(\tilde{w}_i) = \tilde{v}_i, \\
&i^\sharp(\tilde{x}_i) = \tilde{y}_i, \qquad i^\sharp(\tilde{y}_i) = \tilde{x}_i, \\
&i^\sharp(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}, \qquad i^\sharp(\tilde{\beta}) = \tilde{\gamma}, \\
&i^\sharp(\tilde{\gamma}) = \tilde{\beta}, \qquad i^\sharp(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(a_{ij}) &= \sum_k a_{ik}\otimes a_{kj} + t^2\tilde{v}_i\otimes\tilde{w}_j + t^4\tilde{x}_i\otimes\tilde{y}_j, \\
\Delta(\tilde{v}_i) &= \sum_j a_{ij}\otimes\tilde{v}_j + \tilde{v}_i\otimes(t\tilde{\alpha}+1) + t^2\tilde{x}_i\otimes\tilde{\gamma}, \\
\Delta(\tilde{w}_i) &= \sum_j \tilde{w}_j\otimes a_{ji} + (t\tilde{\alpha}+1)\otimes\tilde{w}_i + t^2\tilde{\beta}\otimes\tilde{y}_i, \\
\Delta(\tilde{x}_i) &= \sum_j a_{ij}\otimes\tilde{x}_j + \tilde{v}_i\otimes\tilde{\beta} + \tilde{x}_i\otimes(t\tilde{\delta}+1), \\
\Delta(\tilde{y}_i) &= \sum_j \tilde{y}_j\otimes a_{ji} + \tilde{\gamma}\otimes\tilde{w}_i + (t\tilde{\delta}+1)\otimes\tilde{y}_i, \\
\Delta(\tilde{\alpha}) &= t\sum_i \tilde{w}_i\otimes\tilde{v}_i + t\tilde{\beta}\otimes\tilde{\gamma} + t\tilde{\alpha}\otimes\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}\otimes 1 + 1\otimes\tilde{\alpha}, \\
\Delta(\tilde{\beta}) &= t^2\sum_i \tilde{w}_i\otimes\tilde{x}_i + (t\tilde{\alpha}+1)\otimes\tilde{\beta} + \tilde{\beta}\otimes(t\tilde{\delta}+1),
\end{aligned}
$$

$$\Delta(\tilde{\gamma}) = t^2 \sum_i \tilde{y}_i \otimes \tilde{v}_i + \tilde{\gamma} \otimes (t\tilde{\alpha} + 1) + (t\tilde{\delta} + 1) \otimes \tilde{\gamma},$$
$$\Delta(\tilde{\delta}) = t^3 \sum_i \tilde{y}_i \otimes \tilde{x}_i + t\tilde{\gamma} \otimes \tilde{\beta} + t\tilde{\delta} \otimes \tilde{\delta} + \tilde{\delta} \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\delta}.$$

Für die Limesgruppe ergeben die Relationen (344)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \tilde{\delta} = 0 \\ \tilde{\gamma} &= -\tilde{\beta} \\ \tilde{w} &= -A^\dagger \tilde{v} \\ \tilde{y} &= A^\dagger (\tilde{v}\tilde{\beta} - \tilde{x}). \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß die übrigen Koordinaten a_{ij}, $\tilde{v}_i$, $\tilde{x}_i$, $\tilde{\beta}$ für $t = 0$ die Hopfalgebra der Galileigruppe beschreiben, wobei die Koordinaten jeweils mit den entsprechenden Koordinaten der Galileigruppe in der Darstellung (340) identifiziert werden können.

Definition 3.99. Sei Γ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0 und $\mathcal{G}$ ein affines A-Gruppenschema. Eine *Graduierung von $\mathcal{G}$ durch* Γ ist eine Zerlegung:

$$A[\mathcal{G}] = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A[\mathcal{G}]_\gamma, \tag{345}$$

mit

1. $A[\mathcal{G}]_\gamma A[\mathcal{G}]_{\gamma'} \subseteq A[\mathcal{G}]_{\gamma+\gamma'}$,
2. $e^\sharp(A[\mathcal{G}]_\gamma) = \{0\}$ für $\gamma \neq 0$,
3. $i^\sharp(A[\mathcal{G}]_\gamma) = A[\mathcal{G}]_\gamma$,
4. $\Delta(A[\mathcal{G}]_\gamma) \subseteq \bigoplus_{\gamma'+\gamma''=\gamma} A[\mathcal{G}]_{\gamma'} \otimes_A A[\mathcal{G}]_{\gamma''}$.

Bemerkung 3.100. Man überlegt sich leicht, daß in einer Graduierung von G wie oben das Ideal

$$\langle \bigoplus_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} A[\mathcal{G}]_\gamma \rangle_{\text{Id.-Erz.}} \tag{346}$$

ein Hopfideal bildet.

Definition 3.101. Sei Γ eine abelsche Gruppe und $\mathcal{G}$ ein affines A-Gruppenschema, das durch Γ graduiert ist. Dann heißt eine Abbildung $f : \Gamma \to \mathbb{Z}$ *fastkonkav*, wenn

$$f(0) = 0 \quad \text{und } f(\gamma + \gamma') \leq f(\gamma) + f(\gamma') \quad \text{für alle } \gamma, \gamma' \in \Gamma. \tag{347}$$

Satz 3.102. *Sei Γ eine abelsche Gruppe und G eine affine algebraische Gruppe über k, die durch Γ graduiert ist und f eine nichtnegative beschränkte fastkonkave*

Funktion auf Γ*. Dann wird durch*

(348)

$$J_i := \langle \bigoplus_{\gamma\colon f(\gamma)>i} A[\mathcal{G}]_\gamma \rangle_{\textit{Id.-Erz.}} \quad \textit{für } i \in \{-1,\ldots,N\} \quad \textit{mit } N = \max\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

eine Filtrierung von G *definiert. Im Fall einer zyklischen Graduierungsgruppe* Γ *stimmen die zugehörige graduierte Kontraktion gemäß Satz 3.91 und die filtrierte Kontraktion überein.*

Beweis: Aus der Definition folgt sofort, daß $J_i \subset I$ und $i^\sharp(J_i) = J_i$. Es reicht zu zeigen: Ist $f(\gamma) > i + j$, so gilt $\Delta(k[G]_\gamma) \subset J_i \otimes k[G] + k[G] \otimes J_j$. Dafür genügt es wiederum zu zeigen, daß für γ', γ'' mit $\gamma' + \gamma'' = \gamma$ gilt $k[G]_{\gamma'} \otimes k[G]_{\gamma''} \subseteq J_i \otimes k[G] + k[G] \otimes J_j$. Da f fastkonkav ist, gilt $f(\gamma') + f(\gamma'') \geq f(\gamma) > i + j$. Daher gilt $f(\gamma') > i$ oder $f(\gamma'') > j$, also $k[G]_{\gamma'} \subseteq J_i$ oder $k[G]_{\gamma''} \subseteq J_j$. Daraus folgt die Behauptung. Also ist durch (348) eine Filtrierung definiert.

Im Fall einer zyklischen Graduierung ist $f(\bar{j}) = j$ für $j \in \{0,\ldots,m-1\}$ und $J_j = \sum_{j'=j+1}^{m-1} k[G]_{\bar{j}'}$. $A[\mathcal{G}]$ wird erzeugt von $t^{-j-1}(J_j)_A$ und $A[G]$, also von den Mengen der Form $\sum_{j'=j+1}^{m-1} t^{-(j+1)} A[G]_{\bar{j}'}$ für $j \in \{0,\ldots,m-1\}$ und $A[G]$. Offenbar ergibt dies die gleiche A-Form $A[\mathcal{G}]$ wie die von den Mengen $t^{-j} A[G]_{\bar{j}}$ für $j \in \{0,\ldots,m-1\}$ erzeugte A-Form. $\square$

In der Situation von Satz 3.102 bezeichnen wir die zugehörige filtrierte Kontraktion als *graduierte Kontraktion*.

Anhang A. Affine Schemata und darstellbare Funktoren

Die Grundlagen sind verschiedenen Quellen entnommen. Wo nichts anderes angegeben ist, gelte die Notation von [Ha]. So seien zum Beispiel alle Varietäten irreduzibel.

A.0.1. *Lokalisierung.* Dieser Teil stammt im wesentlichen aus [ZS, Teil I Ch.1§20] und [ZS, Teil I Ch.IV§9]. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Definition A.1. Eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von R heißt ein *multiplikatives System* in R, wenn sie multiplikativ abgeschlossen ist und nicht die Null enthält. Ein multiplikatives System heißt *regulär*, wenn es keine Nullteiler enthält.

Definition A.2. Sei M ein reguläres multiplikatives System in R. Der *Quotientenring* (die Lokalisierung) von R bezüglich M ist der wie folgt definierte Ring R_M bestehend aus der Menge aller Äquivalenzklassen von Paaren (a, b) mit $a \in R$ und $b \in M$ bezüglich der Äquivalenzrelation:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

Die Äquivalenzklasse von (x, y) werde mit $\overline{(x, y)}$ bezeichnet. Auf der Menge dieser Klassen werden Addition und Multiplikation definiert durch

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(ad + cb, bd)} \tag{349}$$

$$\overline{(a, b)} * \overline{(c, d)} = \overline{(ac, bd)}. \tag{350}$$

Definition A.3. Sei M ein beliebiges multiplikatives System in R. Die Menge

$$I := \{x \in R \mid mx = 0 \quad \text{für ein } m \in M\} \tag{351}$$

bildet ein Ideal in R. Sei $\bar{R} := R/I$ und $\bar{M} := (M + I)/I$. Dann ist $\bar{M}$ ein reguläres multiplikatives System in $\bar{R}$. Der *Quotientenring* (die Lokalisierung) von R bezüglich M ist definiert als $R_M := \bar{R}_{\bar{M}}$.

A.0.2. *Funktoren.* Dieser Teil stammt hauptsächlich aus [Ro, Ch.1].

Definition A.4. Eine *Kategorie* $\mathfrak{C}$ besteht aus einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ von *Objekten*, paarweise disjunkten Mengen von *Morphismen* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ zu jedem Paar (A, B) mit $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ und *Verknüpfungen* $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, C) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, C)$, i.Z.: $(f, g) \mapsto g \circ f$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für jedes Objekt A enthält $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ genau einen Morphismus id_A, genannt die Identität von A, mit der Eigenschaft, daß $f \circ \mathrm{id}_A = f$ für alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ und $\mathrm{id}_A \circ g = g$ für alle $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, A)$.
- Für je drei Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, C)$ und $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, D)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f. \tag{352}$$

Definition A.5. [Ro, Ex.1.1.] Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ heißt ein *Isomorphismus* (oder eine *Äquivalenz*), wenn ein $g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B,A)$ existiert, so daß $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definition A.6. Ein *Endobjekt* in einer Kategorie ist ein Objekt E mit der Eigenschaft, daß für alle Objekte A die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,E)$ genau ein Element enthält. Ein *Startobjekt* S ist ein Objekt, so daß für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(S,A)$ genau ein Objekt enthält.

Definition A.7. Die *duale Kategorie* $\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}$ zu einer Kategorie $\mathfrak{C}$ wird definiert durch $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}) := \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}^{\mathrm{opp}}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B,A)$ und die Verknüpfung $f \circ^{\mathrm{opp}} g := g \circ f$.

Definition A.8. Ein *kovarianter Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ zwischen zwei Kategorien $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ besteht aus einer Abbildung von $F : \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$ sowie zu je zwei Objekten $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ einer Abbildung $F : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(F(A),F(B))$, so daß gelten:

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g). \\ F(\mathrm{id}_A) &= \mathrm{id}_{F(A)} \quad \text{für alle } A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}). \end{aligned}$$

Ein *kontravarianter Funktor* von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$ ist ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}^{opp}$ oder gleichbedeutend damit ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{C}^{opp}$ nach $\mathfrak{D}$.

Definition A.9. Für jede Kategorie $\mathfrak{C}$ ist der *Identitätsfunktor* definiert als die Identität auf $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ und ebenfalls als die Identität auf allen $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$.

Beispiel A.10. Sei $(I, \leq)$ eine geordnete Menge[21]. Durch $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) = I$ und

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(a,b) = \begin{cases} \{i_{a,b}\} & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$i_{b,c} \circ i_{a,b} := i_{a,c}, \quad \text{falls } a \leq b \leq c$$

wird eine Kategorie $\mathfrak{C}((I, \leq))$ definiert. Die duale Kategorie entspricht dabei derselben Menge mit der umgekehrten Ordnungsrelation.

Definition A.11. [Ro, S.43] Eine *natürliche Transformation* τ zwischen zwei kovarianten Funktoren F, $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ besteht aus einer Klasse $(\tau_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})}$ von Morphismen mit $\tau_A \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(F(A), G(A))$, so daß für alle A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ gilt $G(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ F(f)$. Für zwei kontravariante Funktoren definiert man eine natürliche Transformation analog, nur daß dann $\tau_A \circ F(f) = G(f) \circ \tau_B$ für alle A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A,B)$.

[21] Wir meinen hier *nicht*, daß je zwei Elemente vergleichbar sein müssen. (Dies wäre eine linear geordnete Menge.) Derartige Mengen werden aber auch nicht selten als teilgeordnete Mengen (engl. „partially ordered sets“, kurz „posets“, bezeichnet.)

Definition A.12. [Ro, S.75] Sind F, $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ zwei Funktoren derselben Varianz, dann heißen F und G *natürlich äquivalent*, in Zeichen $F \cong G$, wenn eine natürliche Transformation $\tau : F \to G$ existiert, so daß jedes τ_A ein Isomorphismus ist.

Definition A.13. [Ro, S.82] Zwei Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen *äquivalent*, in Zeichen $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{D}$, wenn Funktoren $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ existieren, so daß die Verkettungen GF und FG äquivalent zum Identitätsfunktor auf $\mathfrak{C}$ bzw. $\mathfrak{D}$ sind. Ist F kovariant, so bezeichnet man F als *Äquivalenz*, ist F kontravariant, so spricht man von einer *Antiäquivalenz*.

Beispiel A.14. [Ha, Cor.3.8.] Die Kategorie der affinen algebraischen Varitäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k (mit den Homomorphismen von Varietäten und ihren Verknüpfungen als Morphismen und Verknüpfungen) ist antiäquivalent zu der Kategorie der endlich erzeugten Integritätsringe über k (mit den k-Algebrahomomorphismen und ihren Verknüpfungen als Morphismen und Verknüpfungen).

A.0.3. *Garben.* Die in diesem Unterabschnitt getroffenen Definitionen stammen im wesentlichen aus [Ha, II.§3].

Ein Spezialfall von Beispiel A.10 ist folgende Kategorie:

Beispiel A.15. Sei X ein topologischer Raum und $(T, \subseteq)$ die Menge aller offenen Teilmengen von X mit der Inklusionsrelation. Durch $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) := T$ und

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(U, V) := \begin{cases} \{i_{U,V}\} & \text{falls } U \subseteq V, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$i_{V,W} \circ i_{U,V} := i_{U,W}, \quad \text{falls } U \subseteq V \subseteq W$$

wird die Kategorie $\mathrm{Top}(X)$ definiert. Die leere Menge bildet darin ein Startobjekt, die Menge X ein Endobjekt.

Definition A.16. Eine *Prägarbe* F von Ringen auf einem topologischen Raum X ist ein kontravarianter Funktor von $\mathrm{Top}(X)$ in die Kategorie der Ringe. Dann wird für $U \subseteq V$ der Morphismus $F(i_{U,V}) : F(V) \to F(U)$ als *Restriktion von V auf U*, in Zeichen $r_{V,U}$, bezeichnet.

Definition A.17. Eine Prägarbe auf X ist ein *Garbe*, wenn gelten:

- Ist U eine offene Teilmenge von X mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ und ist für ein $f \in F(U)$ die Restriktion $r_{U,U_i}(f) = 0$ für alle $i \in I$, dann ist $f = 0$.
- Ist U eine offene Teilmenge von X mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ und ist für jedes $i \in I$ ein $f_i \in F(U_i)$ gegeben, so daß für $i, j \in I$ gilt $r_{U_i,U_i\cap U_j}(f_i) = r_{U_j,U_i\cap U_j}(f_j)$, dann existiert genau ein $f \in F(U)$ mit $r_{U,U_i}(f) = f_i$.

Definition A.18. [Ro, S.39] Sei $(I, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein *gerichtetes System* mit Indexmenge I in einer Kategorie $\mathfrak{D}$ ist ein kovarianter Funktor $G : \mathfrak{C}((I, \leq)) \to \mathfrak{D}$, wobei I eine geordnete Menge ist und $\mathfrak{C}(I)$ wie in Beispiel A.10 definiert ist.

Definition A.19. [Ro, S.41] Sei $G : \mathfrak{C}(I) \to \mathfrak{D}$ ein gerichtetes System in $\mathfrak{D}$. Ein *direkter Limes* von G ist ein Objekt $L \in \mathfrak{D}$ zusammen mit einer Familie $(f_a)_{a\in I}$ von Morphismen $f_a \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(G(a), L)$, so daß

- $$f_b \circ G(i_{a,b}) = f_a \quad \text{für alle } a, b \in I \quad \text{mit } a \leq b.$$
- Für jedes Objekt $Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$ mit einer Familie $(g_a)_{a\in I}$ von Morphismen $g_a \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(G(a), Z)$ mit der analogen Eigenschaft
$$g_b \circ G(i_{a,b}) = g_a \quad \text{für alle } a, b \in I \quad \text{mit } a \leq b$$
existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{D}}(L, Z)$, so daß
$$g_a = f \circ f_a \quad \text{für alle } a \in I.$$

Man schreibt dann $L = \lim\limits_{\to} G(a)$.

Definition A.20. Sei X ein topologischer Raum und F eine Prägarbe auf X. Für $x \in X$ bildet die Menge $U(x)$ der Umgebungen von x als Teilsystem von $\mathrm{Top}(X)$ eine geordnete Menge. Die Einschränkung von F auf $U(x)$ ist ein gerichtetes System. Der direkte Limes diese Systems heißt der *Halm* von F über x und wird mit F_x bezeichnet.

Definition A.21. Ein *Morphismus* $f : (X, F) \to (X, G)$ *von Garben* auf X ist eine natürliche Transformation zwischen F und G (vergleiche [Ha, S.62]).

A.0.4. *Affine Schemata.*

Definition A.22. Ein *lokal geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von Ringen auf X ist, so daß alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ lokale Ringe sind.

Definition A.23. Ein *Morphismus* $(f, f^\sharp) : (X, F) \to (Y, G)$ *von geringten Räumen* ist ein Paar bestehend aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $f^\sharp$ zwischen G und der *direkten Bildgarbe* $f_*(F)$ auf Y, welche definiert ist durch $f_*(F)(U) := F(f^{-1}(U))$. Ein *Morphismus von lokal geringten Räumen* ist ein Morphismus von Garben, wobei die auf den Halmen induzierten Morphismen $G_y \to f_*(F)_y$ *lokale Homomorphismen* sind, das heißt daß jeweils das Urbild des maximalen Ideals von $f_*(F)_y$ gleich dem maximalen Ideal von G_y ist.

Definition A.24. Sei R ein Ring (wie immer kommutativ mit Eins). Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Die Menge $M := R \setminus \mathfrak{p}$ bildet dann ein multiplikatives System in R. Der *lokale Ring* $R_\mathfrak{p}$ *von* R *in* $\mathfrak{p}$ ist der Quotientenring $R_{R\setminus\mathfrak{p}}$. Dieser Ring ist ein lokaler Ring. Das herauszuteilende Ideal

$$I := \{x \in R \mid mx = 0 \quad \text{für ein } m \in M\} \tag{353}$$

ist, wie sofort aus der Definition eines Primideals folgt, in $\mathfrak{p}$ enthalten. Das maximale Ideal von $R_\mathfrak{p}$ ist das Bild von $\mathfrak{p}$ unter dem kanonischen Homomorphismus von R nach $R_\mathfrak{p}$.

Definition A.25. Das *Spektrum* von R ist der folgende lokal geringte Raum: Als topologischer Raum ist $\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \lhd R \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$ mit der *Zariskitopologie*, bei der die abgeschlossenen Mengen, gerade die Mengen der Form $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq I\}$, wobei I ein Ideal von R ist, sind. Als Garbe ist $\mathrm{Spec}(R)$ wie folgt definiert: Für $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ offen sei $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in U} R_{\mathfrak{p}} \mid f(\mathfrak{p}) \in R_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p}$ und f ist *lokal Quotient von Elementen von R.*$\}$. Die letzte Bedingung bedeutet: Für alle $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine Umgebung $V \subset U$ und $a, b \in R$, so daß für alle $\mathfrak{q} \in V$ gilt $b \notin \mathfrak{q}$ und $f(\mathfrak{q}) = \overline{(a, b)} \in R_{\mathfrak{q}}$.

Definition A.26. [Ha, S.6.] Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. So ist die *Höhe* (oder Codimension [Ei]) von $\mathfrak{p}$, im Zeichen height$(\mathfrak{p})$ definiert als das Supremum der $n \in \mathbb{N}$ so daß eine Kette der Form

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \tag{354}$$

von paarweise verschiedenen Primidealen von A existiert. Die *Höhe* eines nicht notwendig primen Ideals I ist definiert als das Minimum der Höhen von Primidealen, die I enthalten. Die *Krulldimension* (kurz Dimension) eines Rings A ist das Supremum der Höhen von Primidealen von A.

Die Höhe eines Primideals $\mathfrak{p}$ von A ist, wie man sich leicht überlegt, gleich der Dimension des lokalen Rings $A_{\mathfrak{p}}$.

Definition A.27. Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum, der als lokal geringter Raum isomorph zum Spektrum eines Ringes ist.

Bemerkung A.28. Ein affinen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ ist isomorph zu $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$. Ein Morphismus von affinen Schemata wird stets durch einen Homomorphismus der zugehörigen Ringe induziert. Der Funktor $(X, \mathcal{O}_X) \mapsto \mathcal{O}_X(X)$ ist eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie der affinen Schemata und der Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins (siehe [Ha, II.Prop.2.3]).

Definition A.29. [Ha, Ch.II.§3 S.85] Ein *abgeschlossenes Unterschema* eines Schemas X ist ein Schema Y, zusammen mit einem Morphismus $i : Y \to X$, so daß der topologische Raum von Y eine abgeschlossene Teilmenge von X und i die Inklusion ist und so daß die dadurch induzierte Abbildung $i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ von Garben surjektiv ist. Der Morphismus $i : Y \to X$ heißt dann auch eine *abgeschlossene Einbettung.*

Definition A.30. Ein *offenes Unterschema* eines Schemas X ist ein Schema U, dessen topologischer Raum eine offene Teilmenge von X ist, und dessen Strukturgarbe $\mathcal{O}_U$ isormorph zur Restriktion $\mathcal{O}_X|_U$ der Strukturgarbe von X auf U ist. Ein Morphismus $f : Y \to X$ heißt eine *Immersion*, wenn f einen Isomorphismus von Y zu einem offenen Unterschema eines abgeschlossenen Unterschemas von X ergibt (siehe [Ha, S.85 und S.120]).

Definition A.31. Sei A ein Ring. Ein affines Schema X ist ein A-Schema, wenn sein Koordinatenring eine A-Algebra ist, das heißt, wenn ein Homomorphismus von $A \to \mathcal{O}(X)$ existiert. Man schreibt dann auch $A[X]$ statt $\mathcal{O}_X(X)$.

Definition A.32. Sei X ein A-Schema und $f : X \to \mathrm{Spec}(A)$ der zugehörige Morphismus. Ein Schnitt in X ist ein Morphismus $s : \mathrm{Spec}(A) \to X$ so daß $f \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(A)}$. Für ein affines A-Schema ist ein Schnitt durch einen Ringhomomorphismus $s^\sharp : A[X] \to A$ mit $s^\sharp \circ f^\sharp = \mathrm{id}_A$ gegeben.

Definition A.33. Sei A ein kommutativer Ring, M und N seien A-Moduln (o.B.d.A. Linksmoduln) dann ist das Tensorprodukt $M \otimes_A N$ ein A-Modul zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung $g : M \times N \to M \otimes_A N$ mit $g(a.m, n) = g(m, a.n)$ für alle $a \in A$, $m \in M$, $n \in N$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jedem A-Modul H und jeder bilinearen Abbildung $f : M \times N \to H$ mit $f(a.m, n) = f(m, a.n)$ für alle $a \in A$, $m \in M$, $n \in N$ existiert genau ein Homomorphismus $f' : M \otimes_A N \to H$ so daß $f = f' \circ g$.

Die Eindeutigkeit des Tensorprodukts folgt aus der universellen Abbildungseigenschaft. Das Tensorprodukt wird konstruiert als Quotient des freien A-Moduls über $M \times N$ nach den Relationen, die sich aus der Definition ergeben (siehe [Ro, Ch.1] insbes. Cor. 1.14.). Hier noch ein Lemma, das in Kapitel 3 gebraucht wird.

Lemma A.34. *Sei $R \to S$ ein Ringhomomorphismus und seien M, N zwei R-Moduln. Dann gilt $(M \otimes_R N) \otimes_R S \cong (M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S)$.*

Beweis: Nach [Ei, Prop.A 2.1] ist das Tensorprodukt kommutativ und assoziativ und für einen S-Modul U und einen R-Modul M gilt: $U \otimes_R M \cong U \otimes_S (S \otimes_R M)$. Daher gilt: $(M \otimes_R N) \otimes_R S \cong M \otimes_R (N \otimes_R S) \cong (N \otimes_R S) \otimes_R M \cong (N \otimes_R S) \otimes_S (S \otimes_R M) \cong (M \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S)$. □

Das Faserprodukt $X \times_S Y$ von Schemata sei wie in [Ha, II.3] definiert.

Satz A.35. *Das Produkt $X \times_{Spec(A)} Y$ von zwei affinen A-Schemata X und Y ist das Spektrum des Tensorproduktes $Spec(A(X) \otimes_A A(Y))$.*

(Siehe den Beweis von [Ha, II.Th.3.3.].)

Definition A.36. Sei $Y = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema und $\mathfrak{p} \in Y$. Der *Restklassenkörper* $k(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ ist definiert als der Restklassenkörper des lokalen Rings $A_\mathfrak{p}$. Die Verknüpfung des natürlichen Homomorphismus von A nach $A_\mathfrak{p}$ mit der Restklassenabbildung $A_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p})$ bezeichnen wir auch mit $\psi_\mathfrak{p} : A \to k(\mathfrak{p})$. Dadurch ist $k(\mathfrak{p})$ in natürlicher Weise eine A-Algebra. Sei X ein affines A-Schema, dann ist die *Faser von X über $\mathfrak{p} \in Spec(A)$* definiert als

$$X_\mathfrak{p} := X \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})) = \mathrm{Spec}(A[X] \otimes_A k(\mathfrak{p})). \tag{355}$$

Bemerkung A.37. Die Fasern von X über Y können als topologische Räume mit Unterräumen von X identifiziert werden, so daß X als topologischer Raum die Vereinigung seiner Fasern über Y ist (siehe [Ha, II.Ex.3.10.]). Sei zum Beispiel A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, Restklassenkörper $k = k(\mathfrak{m})$ und Quotientenkörper $K = k((0))$. Dann ist $\mathrm{Spec}(A) = \{\mathfrak{m}, (0)\}$ und für ein A-Schema X bezeichnet man die Faser $X_{(0)}$ als die *generische Faser* (wir schreiben dafür X_K statt

$X_{(0)}$) und die Faser $X_{\mathfrak{m}}$ als die *spezielle Faser* (wir schreiben dafür X_k statt $X_{\mathfrak{m}}$). Ist X ein affines A-Schema und $A \subseteq A[X]$, dann sind die generische und die spezielle Faser als Teilmengen des unterliegenden topologischen Raums von X die folgenden:

(356) $$X_K = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \cap A = (0)\}, \quad X_k = \{\mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}\}.$$

A.0.5. *Darstellbare Funktoren.* Dieser Teil stammt im wesentlichen aus [Wa].

Definition A.38. Bezeichne A-Alg die Kategorie der A-Algebren und Sets die Kategorie der Mengen. Zu einem affinen A-Schema X definiert man einen ebenfalls mit X bezeichneten Funktor $X : A\text{-Alg} \to \text{Sets}$ durch $X(B) := \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X], B)$. Jeder Funktor, der zu einem solchen Funktor äquivalent ist, heißt ein *darstellbarer Funktor*. Die Algebra $A[X]$ wird dann als *darstellende Algebra von* X bezeichnet.

Sei $A[X_1, X_2, \dots]$ ein Polynomring in abzählbar vielen Unbestimmten und sei $(r_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von Elementen von $A[X_1, X_2, \dots]$. Durch die Familie $(r_i)_{i \in I}$ ist ein Funktor $F : A\text{-Alg} \to \text{Sets}$ definiert, der jeder A-Algebra B die Lösungsmenge des durch die r_i definierten Gleichungssystems mit Werten in B zuordnet

(357) $$F(B) := \{(b_1, b_2, \dots) \mid r_i(b_1, b_2, \dots) = 0 \quad \text{für alle } i \in I.\}$$

Es gilt:

Satz A.39. *Der in (357) definierte Funktor F ist ein darstellbarer Funktor. Seine darstellende Algebra ist*

(358) $$A[F] = A[X_1, X_2, \dots]/(r_i \mid i \in I).$$

Beweis: Sei $b = (b_1, b_2, \dots) \in F(B)$. Ein Element von $\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, X_2, \dots], B)$ wird durch $X_i \mapsto b_i$ definiert. Da $r_i(b) = 0$ für alle $i \in I$, liegen die r_i im Kern dieses Homomorphismus, daher faktorisiert dieser über einen Homomorphismus $\xi_b \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F], B)$. Ist umgekehrt ein $\xi \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F], B)$ vorgegeben, so bildet das Tupel $b_\xi := (\xi(X_1), \xi(X_2), \dots)$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems, das heißt ein Element von $F(B)$, denn es gilt $0 = \xi(r_i) = r_i(\xi(X_1), \xi(X_2), \dots)$ für alle $i \in I$. Sei τ_B die Abbildung $F(B) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F], B)$ mit $\tau_B(b) = \xi_b$ und σ_B die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(A[F], B) \to F(B)$ mit $\sigma_B(\xi) := b_\xi$. Man sieht sofort, daß dies zueinander inverse Abbildungen sind, d.h. alle τ_B sind Isomorphismen. Es bleibt zu zeigen, daß durch die Familie (τ_B) eine natürliche Transformation definiert wird, d.h. für jeden Homomorphismus $f : B \to B'$ von A-Algebren gilt $\mathrm{Hom}_A(A[F], f) \circ \tau_B = \tau_{B'} \circ F(f)$. Dies ist äquivalent zu

(359) $$f \circ \xi_b = \xi_{f(b)} \quad \text{für alle } b \in B$$

und letzteres folgt sofort aus der Definition. □

Beispiel A.40. Der Funktor Lie_n, der jeder k-Algebra A die Menge der Strukturkonstanten von A-Liealgebren zuordnet ist ein darstellbarer Funktor. Er wird durch das Gleichungssystem (1) aus dem ersten Kapitel dargestellt.

Satz A.41. *Seien F, G : A-Alg $\to$ Sets darstellbare Funktoren, dann ist auch der Produktfunktor $F \times G$: A-Alg $\to$ Sets mit $B \mapsto F(B) \times G(B)$ ein darstellbarer Funktor und es gilt: $A[F \times G] \cong A[F] \otimes_A A[G]$.*

Beweis: Es ist zu zeigen: Es gibt eine natürliche Äquivalenz τ von $F \times G$ nach $\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F] \otimes_A A[G], .)$. Wir definieren τ wie folgt: Für $\phi \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F], B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[G], B)$, sei $\tau_B(\phi, \psi) := (\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F] \otimes_A A[G], B)$. (Es sei $(\phi, \psi)(f \otimes g) = \phi(f)\psi(g)$.) Man überzeugt sich leicht, daß dies eine natürliche Transformation ist. Das Inverse von τ_B ist jeweils gegeben durch $\sigma_B(\xi) = (\xi \circ i_{A[F]}, \xi \circ i_{A[G]})$ mit $i_{A[F]}(f) = f \otimes 1$ und $i_{A[G]}(g) = 1 \otimes g$ für $\xi \in \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[F] \otimes_A A[G], B)$. Man überzeugt sich wiederum leicht, daß τ_B und σ_B invers zueinander sind. □

Der folgende Satz wird in [Wa] als Yonedas Lemma bezeichnet. Andere verstehen unter Yonedas Lemma eine noch allgemeinere Aussage.

Satz A.42. *Seien F und G darstellbare Funktoren von A-Algebren nach Mengen. Dann entsprechen einander natürliche Transformationen $T : F \to G$ und A-Algebrahomomorphismen $A[G] \to A[F]$.*

Beweis: siehe [Wa, 1.3]. □

Definition A.43. Ein *Gruppenfunktor* sei ein darstellbarer Funktor mit Werten in der Kategorie Gr der Gruppen. Eine *Operation eines Gruppenfunktors $\mathcal{G}$: A-Alg $\to$ Gr auf einem Funktor F : A-Alg $\to$ Sets* ist eine natürliche Transformation von $\mathcal{G} \times F \to F$.

Definition A.44. Sei V ein A-Modul. Der Funktor $F_V : A\text{-Alg} \to \text{Sets}$ ist definiert durch $F_V(B) = V \otimes_A B$. Operiert der Gruppenfunktor $\mathcal{G}$ auf F_V derart, daß $\mathcal{G}(B)$ linear auf $V \otimes_A B$ operiert, dann heißt V ein *$\mathcal{G}$-Modul*. Durch V wird der Gruppenfunktor GL_V definiert durch $\mathrm{GL}_V(B) = \mathrm{Aut}_B(V \otimes_A B)$. Einem $\mathcal{G}$-Modul entspricht offenbar stets ein Morphismus $\mathrm{R} : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$. Man nennt R auch eine *lineare Darstellung* von $\mathcal{G}$. Eine lineare Darstellung $\mathrm{R} : \mathcal{G} \to \mathrm{GL}_V$ heißt *treu*, wenn sie eine abgeschlossene Einbettung ist.

Bemerkung A.45. Eine Darstellung von $\mathcal{G}$ auf einem freien Modul von endlichem Rang n entspricht einem Morphismus von $\mathcal{G}$ nach $(\mathrm{GL}_n)_A$.

Definition A.46. Sei $\mathcal{G}$ ein A-Gruppenschema und V ein $\mathcal{G}$-Modul. Ein Element $v \in V$ heißt *$\mathcal{G}$-invariant*, wenn für jede A-Algebra B gilt $g.\psi_B(v) = \psi_B(v)$ für alle $g \in \mathcal{G}(B)$, wobei $\psi_B(v) := v \otimes 1 \in V \otimes_A B$ sei.

Korollar A.47. *Eine Operation eines affinen Gruppenschemas $\mathcal{G}$ auf einem darstellbaren Funktor F entspricht einem A-Algebrahomomorphismus von $A[F]$ nach $A[\mathcal{G}] \otimes A[F]$.*

Beispiel A.48. Die Operation von GL_n auf Lie_n ist eine solche Operation. Der zugehörige k-Algebrenhomomorphismus von $k[\mathrm{Lie}_n] \to k[\mathrm{GL}_n] \otimes_k k[\mathrm{Lie}_n]$ ist gegeben durch die Transformationsformel (12):

$$c_{ij}^k \mapsto \sum_{l,m,p} v_{kp} u_{li} u_{mj} \otimes c_{lm}^p. \tag{360}$$

A.0.6. *Flachheit.* Vergleiche [Ei], insbesondere über die Bedeutung der Flachheit von Familien [Ei, Ch.6.].

Definition A.49. Ein Modul M über einem Ring R heißt flach, wenn der Tensorfunktor $M \otimes_R .$ exakt ist. Ein affines R-Schema X heißt flach, wenn $R[X]$ flach ist.

Da der Funktor $M \otimes_R .$ stets rechtsexakt ist, ist die Bedingung äquivalent dazu, daß $M \otimes_R .$ Monomorphismen in Monomorphismen überführt.

Besonders interessant, insbesondere für diese Arbeit, ist der Fall, wenn $f^\sharp : A \to B$ ein Ringhomomorphismus ist, und B als A-Modul flach ist, wenn also mit anderen Worten $\mathrm{Spec}(B)$ ein flaches affines A-Schema ist.

Allgemein wird Flachheit für Schemata lokal definiert: Sei $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Schemata. Dann heißt X flach über Y, wenn für alle $x \in \mathrm{Spec}(X)$ und $y = f(x)$ gilt: $\mathcal{O}_{X,x}$ ist flach als $\mathcal{O}_{Y,y}$-Modul.

Nicht vollständig trivial ist die Äquivalenz der lokalen und der globalen Definition von Flachheit für affine Schemata:

Satz A.50. *Sei $f^\sharp : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt: B ist genau dann flach als A-Modul, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B und $\mathfrak{q} = f^{\sharp-1}(\mathfrak{p})$ gilt: $B_\mathfrak{p}$ ist flach als $A_\mathfrak{q}$-Modul.*

Beweis: In [Wa] wird gezeigt, daß B genau dann als A-Modul flach ist, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B und $\mathfrak{q} = f^{\sharp-1}(\mathfrak{p})$ gilt: $B_\mathfrak{p}$ ist flach als A-Modul. Andererseits wird in [Ei] gezeigt, daß B genau dann als A-Modul flach ist, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von A gilt: $B_\mathfrak{q}$ ist flach als $A_\mathfrak{q}$-Modul. □

Die wichtigste Eigenschaft der flachen Schemata ist, daß lokal die Dimension der Fasern gleich der Dimension des Schemas minus der Dimension der Basis ist.

Satz A.51. [Ha, III.Prop.9.5] *Sei $f : X \to Y$ ein flacher Morphismus von endlichem Typ von noetherschen Schemata. Für jeden Punkt $x \in X$ gilt mit $y := f(x)$*

$$dim_x(X_y) = dim_x X - dim_y Y, \tag{361}$$

wobei für ein Schema X und einen Punkt $x \in X$ mit $dim_x X$ die Dimension des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ gemeint ist.

Für affine Schemata $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A[X])$ lautet (361)

$$\dim\left((A[X] \otimes_A k_y)_x\right) = \dim(A[X]_x) - \dim(A_y), \tag{362}$$

bzw., wenn wir den Morphismus: $A[X] \to A[X] \otimes_A k_y$ mit ψ_y bezeichnen:

$$\text{height}(\psi_y(x)) = \text{height}(x) - \text{height}(y), \tag{363}$$

wenn $\psi_y(x)$ ein Primideal von $A[X] \otimes_A k_y$ ist.

Wenn das Schema X equidimensional ist, sollten auch alle seine Fasern equidimensional sein. [Ha, III.Cor.9.6] besagt:

Satz A.52. [Ha, III.Cor.9.6] *Seien X und Y von endlichem Typ über einem Körper k und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, Y irreduzibel und X flach über Y. Dann sind äquivalent:*

- *Jede irreduzible Komponente von X hat Dimension $n + dim(Y)$*
- *Für jeden Punkt $y \in Y$ gilt: Jede irreduzible Komponente der Faser X_y hat die Dimension n.*

Wir brauchen diese Aussage auch für affine Schemata über diskreten Bewertungsringen. Diese sind als lokale k-Algebren nicht endlich erzeugt über k. In dem Beweis von [Ha, III.Cor.9.6.] wird benutzt, daß in einer irreduziblen Komponente eines Schemas, alle maximalen Ideale die gleiche Höhe haben bzw. allgemeiner

$$\dim_x(X) = \dim(X) - \dim(\bar{x}). \tag{364}$$

Dies gilt in unserer Situation nicht mehr. Als Ersatz wird die „universelle Kettenbedingung“ dienen.

Definition A.53. [Ma, 14.B] Ein Ring A erfüllt die *Kettenbedingung*, wenn für jedes Paar von Primidealen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ gilt height$(\mathfrak{p}/\mathfrak{q})$ ist endlich und gleich der Länge jeder maximalen Kette von Primidealen zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$. Ein Ring erfüllt die *universelle Kettenbedingung*, wenn A noethersch ist und jede endliche erzeugte A-Algebra die Kettenbedingung erfüllt.

Es gilt

Satz A.54. [Ma, 14.C.Th. 23] *Sei A ein noetherscher Integritätsring, der die universelle Kettenbedingung erfüllt, und B eine endlich erzeugte A-Algebra, die A enthält und selber ein Integritätsring ist, sei $\mathfrak{p} \in Spec(B)$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A$. Dann gilt*

$$height(\mathfrak{p}) = height(\mathfrak{q}) + tr.deg_A B - tr.deg_{k(\mathfrak{q})}(k(\mathfrak{p})), \tag{365}$$

wobei $tr.deg_A B := tr.deg_{Quot(A)}(Quot(B))$ sei.

Es ist stets $k(\mathfrak{p}) = B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cong \text{Quot}(B/\mathfrak{p})$.

Satz A.55. *Jede endlich erzeugte k-Algebra über einem Körper k und jeder diskrete Bewertungsring erfüllen die universelle Kettenbedingung.*

Beweis: Die erste Aussage ist [Ei, Cor.13.6.9]. Die zweite folgt daraus, daß jeder reguläre lokale Ring ein Cohen-Macaulay-Ring ist ([Ei, 18.2.S.451]) und daraus, daß jeder Cohen-Macaulay-Ring die universelle Kettenbedingung erfüllt ([Ei, Cor.18.10]). □

Korollar A.56. *Ist A ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K und Restklassenkörper k, X ein reduziertes irreduzibles affines A-Schema, dann gilt für $\mathfrak{p} \in Spec_{\max}(A[X])$*

$$height(\mathfrak{p}) = \begin{cases} dim(X_K) & falls\ \mathfrak{p} \in X_K \\ dim(X_K)+1 & falls\ \mathfrak{p} \in X_k. \end{cases} \tag{366}$$

Insbesondere gilt: Ist $X_k \neq \emptyset$, dann gilt $dim(X) = dim(X_K)+1$ und $height(\mathfrak{p}) = dim(X)$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} \in X_k$.

Beweis: Sei $B := A[X]$ und t der uniformisierende Parameter von A. Es ist offensichtlich $\mathrm{tr.deg}_A B = \mathrm{tr.deg}_K B_K$ und $\mathrm{tr.deg}_K B_K = \mathrm{dim} X_K$ nach [Ha, I.Th.1.8.A.(a)]. Sei $\mathfrak{p} \in X_K$. Dies ist äquivalent dazu, daß $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap A = (0)$ ist. Dann gilt $tB + \mathfrak{p} = B$, denn sonst wäre $\mathfrak{p}$ nicht maximal. Es existiert also ein $r \in B$ mit $tr - 1 \in \mathfrak{p}$. Es gilt $A[X]/(tX-1) \cong K$. Somit erhalten wir durch $X \mapsto r$ einen Morphismus $K \to B/\mathfrak{p}$, also ist $B/\mathfrak{p}$ eine Körpererweiterung von K. Diese ist endlich, da ja $B/\mathfrak{p}$ bereits als A-Algebra endlich erzeugt ist, also erst recht als $A[r]$-Algebra. Also ist $\mathrm{tr.deg}_K(B/\mathfrak{p}) = 0$. Sei nun $\mathfrak{p} \in X_k$, also $\mathfrak{q} = (t)$. Dann ist $\mathrm{height}(\mathfrak{q}) = 1$ und $k(\mathfrak{q}) = k$ und $B/\mathfrak{p}$ eine endliche Erweiterung von k also $\mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{q})}(k(\mathfrak{p})) = 0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz A.54. □

Dies benutzen wir, um eine Version von Satz A.52 für flache affine Schemata über diskreten Bewertungsringen zu zeigen.

Satz A.57. *Sei A ein diskreter Bewertungsring und X ein reduziertes endlich erzeugtes flaches affines A-Schema mit $Z_k \neq \emptyset$ für jede irreduzible Komponente Z von X. Dann sind äquivalent:*

1. *Jede irreduzible Komponente von X hat Dimension $n+1$*
2. *Jede irreduzible Komponente der generischen Faser X_K und jede irreduzible Komponente der speziellen Faser X_k hat die Dimension n.*

Beweis: 1. ⇒ 2.: Für diese Richtung sei o.B.d.A. X irreduzibel, denn ist $X = X_1 \cup X_2$ und X_1, X_2 abgeschlossen, so ist auch $X_y = (X_1)_y \cup (X_2)_y$ und $(X_1)_y$, $(X_2)_y$ abgeschlossen. Daher ist jede Zusammenhangskomponente von X_y in einer Faser Z_y einer Zusammenhangskomponente Z von X enthalten. Da X reduziert ist, ist dann $A[X]$ ein Integritätsring und es ist Korollar A.56 anwendbar. Es folgt sofort, daß auch die generische Faser irreduzibel ist. Aus der Flachheit Satz A.51 bzw. (363) folgt für ein maximales Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von $A[X]_K$:

$$\mathrm{height}(\bar{\mathfrak{p}}) = \mathrm{height}(\psi_K^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})) - \mathrm{height}((0)) = \mathrm{height}(\psi_K^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})). \tag{367}$$

Für ein maximales Ideal $\bar{\mathfrak{p}}$ von $A[X]_k$ folgt aus (363):

$$\mathrm{height}(\bar{\mathfrak{p}}) = \mathrm{height}(\psi_k^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})) - \mathrm{height}((t)) = \mathrm{height}(\psi_k^{-1}(\bar{\mathfrak{p}})) - 1. \tag{368}$$

Da $\psi_k^{-1}(\bar{\mathfrak{p}}) \in X_k$ maximal in $A[X]$ ist und nach Voraussetzung ein solches $\bar{\mathfrak{p}}$ existiert, folgt die Behauptung aus Korollar A.56.

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei Z eine irreduzible Komponente von X und $\mathfrak{p} \in Z$ ein abgeschlossener Punkt. Insbesondere $\mathfrak{p} \in A[X]$ maximal. Ist $\mathfrak{p} \in X_K$, dann ist $\psi_K(\mathfrak{p})$ maximal in $K[X]$ und es gilt wie oben wegen (363)

$$\text{height}(\psi_K(\mathfrak{p})) = \text{height}(\mathfrak{p}). \tag{369}$$

Also folgt aus 2.

$$\text{height}(\mathfrak{p}) = n. \tag{370}$$

Ist $\mathfrak{p} \in X_k$, dann ist $\psi_k(\mathfrak{p})$ maximal in $k[X]$ und es gilt wieder wegen (363)

$$\text{height}(\psi_k(\mathfrak{p})) = \text{height}(\mathfrak{p}) - 1. \tag{371}$$

Also folgt aus 2.

$$\text{height}(\mathfrak{p}) = n + 1. \tag{372}$$

Da nach Voraussetzung $Z_k \neq \emptyset$ ist, folgt die Behauptung. □

Anhang B. Dedekindringe und diskrete Bewertungsringe

Definition B.1. Sei k ein beliebiger Körper. Der *Ring der formalen Potenzreihen über k* ist die Menge aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Er erhält die Struktur eines kommutativen Integritätsringes, indem die Addition komponentenweise $(a+b)_n = a_n + b_n$ und die Multiplikation durch das Cauchyprodukt $(a * b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ erklärt wird. Der Ring der formalen Potenzreihen über k wird mit $k[|t|]$ bezeichnet.

Man schreibt auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ für die Folge (a_n). Der Quotientenkörper $k((t))$ von $k[|t|]$ besteht aus allen formalen Laurentreihen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ für die gilt: Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $a_n = 0$ für alle $n < -N$. Das Produkt kann man dann schreiben als $(a * b)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$. Es ist wohldefiniert, da stets nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind.

Definition B.2. [Ha, I.6.] Sei K ein Körper. Eine *diskrete Bewertung von K* ist eine surjektive Abbildung $v : K^* \to \mathbb{Z}$, mit den Eigenschaften

$$v(xy) = v(x) + v(y) \tag{373}$$

$$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y)) \tag{374}$$

Man setzt ausserdem $v(0) = \infty$. Die Menge der Elemente $x \in K$ mit nichtnegativer Bewertung bildet einen Unterring, der als *Bewertungsring von K* bezeichnet wird. Ein Integritätsring heißt *Bewertungsring*, wenn er Bewertungsring seines Quotientenkörpers bezüglich einer Bewertung ist.

Bemerkung B.3. Die Surjektivität von v ist keine wesentliche Einschränkung. In jedem Fall folgt aus $v(x^n) = nv(x)$, daß das Bild von K^* unter v ein Ideal von $\mathbb{Z}$ bildet. Wenn es das Nullideal wäre, wäre A ein Körper. Dieser Fall ist uninteressant. Andernfalls ist das Ideal von der Form $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und man kann v durch v/m ersetzen.

Beispiel B.4. Der Körper $k((t))$ ist in natürlicher Weise bewertet durch

$$v\left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k t^k\right) := m \in \mathbb{Z}, \quad \text{wobei } a_m \neq 0 \text{ sei.} \tag{375}$$

Definition B.5. Ein lokaler Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k heißt *regulär*, wenn $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(A)$ ist.

Satz B.6. *Ein diskreter Bewertungsring hat stets folgende Eigenschaften:*
- *Er ist ein lokaler Ring mit Einheitengruppe* $v^{-1}(0)$.
- *Er ist ein Hauptidealring, also insbesondere eindimensional, und ist* (t) *sein maximales Ideal, dann sind alle Ideale von der Form* (t^n).
- *Er ist regulär.*
- *Er ist noethersch.*

Beweis: Aus der Eigenschaft (373) folgt sofort, daß $v(1) = 0$ ist. Daraus ergibt sich wiederum, daß für alle $a \in K^*$ gilt $v(a) = -v(a^{-1})$. Ist A der Bewertungsring von K so besteht daher die Einheitengruppe A^* aus den Elementen mit der Bewertung 0 in K. Die Nichteinheiten von A, also die Elemente mit Bewertung größer oder gleich 1, bilden ein Ideal. Daher ist A ein lokaler Ring. A ist auch ein Hauptidealring, denn sei I ein Ideal von A und a ein Element mit minimaler Bewertung von I. Sei $b \in I$ beliebig. Da $v(b) \geq v(a)$ gilt $v(ba^{-1}) = v(b) - v(a) \geq 0$ also ist $ba^{-1} \in A$. Daher ist $b \in (a)$ für alle $b \in I$ also $I = (a)$. Enthält ein Ideal von A ein Element a, so enthält es zugleich alle Elemente mit $v(b) \geq v(a)$. Daher sind die Ideale von A genau die Mengen $I_n := \{a \in A \mid v(a) \geq n\}$. Das maximale Ideal von A ist $I_1 = (t)$ und es ist $I_n = I_1^n = (t^n)$. Daher sind I_1 und (0) die einzigen Primideale von A. Auch ist klar, daß A regulär ist, denn ist $I_1 = (t)$ so ist offenbar I_1/I_2 als A/I_1-Vektorraum eindimensional mit Basis $t + I_2$. Auch ist A offensichtlich noethersch, da jede aufsteigende Idealkette von der Form $\cdots \subseteq I_{n_j} \subseteq I_{n_{j+1}} \subseteq \ldots$ mit $1 \leq n_{j+1} \leq n_j$ ist. □

Definition B.7. Ist $I_1 = (t)$ so heißt t ein *uniformisierender Parameter* des bewerteten Körpers K.

Bemerkung B.8. Diskrete Bewertungsringe sind als lokale Ringe nicht endlich erzeugt über k. Sie haben die merkwürdige Eigenschaft, daß ihr Quotientenkörper endlich erzeugt über ihnen ist: Ist A ein diskreter Bewertungsring mit uniformisierendem Parameter t, so gilt $A[X]/(tX-1) \cong K = \mathrm{Quot}(A)$. Insbesondere hat also der 2-dimensionale Ring $A[X]$ das maximale Ideal $(tX-1)$ der Höhe 1. Die fehlende Eigenschaft, daß alle maximalen Ideale einer endlich erzeugten Algebra die gleiche Höhe haben, kann man manchmal durch die universelle Kettenbedingung ersetzen, die alle diskreten Bewertungsringe erfüllen (siehe Satz A.55). Vergleiche auch den Beweis von Satz A.57.

Satz B.9. [Ha, I.Th.6.2.A] *Für einen eindimensionalen lokalen noetherschen Integritätsring sind äquivalent:*

1. *A ist diskreter Bewertungsring.*
2. *Das maximale Ideal von A ist Hauptideal.*
3. *A ist ganz abgeschlossen.*
4. *A ist regulär.*

Definition B.10. Ein A-Modul P heißt *projektiv*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. P ist direkter Summand eines freien Moduls.
2. Jede kurze exakte Sequenz $0 \to M \to N \to P \to 0$ spaltet.
3. P hat folgende universelle Eigenschaft: Zu beliebig vorgegbenen A-Moduln, N, M und Homomorphismen $\psi : P \to M$ und $\phi : N \to M$ mit ϕ surjektiv existiert ein Homomorphismus $f : P \to N$, so daß $\psi = \phi \circ f$.

Die letzte Bedingung ist die Definition eines projektiven Moduls in [Ro, S.62]. Die Äquivalenz zur ersten Bedingung ist [Ro, Th.3.14] und die Äquivalenz zur zweiten Bedingung ist [Ro, Ex.3.7].

Satz B.11. [Ro, Cor.4.20] *Über einem Hauptidealring, insbesondere einem diskreten Bewertungsring, ist jeder projektive Modul frei.*

Satz B.12. *Für einen noetherschen Integritätsring A sind äquivalent:*

1. *A ist regulär und eindimensional.*
2. *Für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ von A ist die Lokalisierung $A_{\mathfrak{p}}$ ein diskreter Bewertungsring.*

Beweis: Da die Lokalisierung eines noetherschen Integritätsrings in einem maximalen Ideal ein noetherscher lokaler Integritätsring derselben Dimension ist, und ein Ring genau dann regulär ist, wenn alle seine Lokalisierungen regulär sind, folgt die Behauptung aus Satz B.9. □

Definition B.13. Ein noetherscher Integritätsring mit den obigen Eigenschaften wird als *Dedekindring* bezeichnet.

Bemerkung B.14. Es folgt sofort aus der Definition der Krulldimension (Def. A.26), daß in einem eindimensionalen Integritätsring jedes von (0) verschiedene Primideal maximal ist.

Es gibt viele äquivalente Definitionen von Dedekindringen. In [BouC, Ch.VII§2.2 Th.1] wird gezeigt daß der zweite Punkt von Satz B.12 äquivalent dazu ist, daß A ganz abgeschlossen ist und jedes von (0) verschiedene Primideal von A maximal ist. Letzteres ist wiederum die Definition in [Ha, S.40]. Die Eigenschaft, daß jedes Ideal in A als Produkt von Primidealen darstellbar ist, ist die Definition von [ZS, Ch.V.§6 Def.1], wobei die Eigenschaft noethersch zu sein nicht vorausgesetzt wird. In [ZS, Ch.V.§6 Th.13] wird gezeigt, daß diese Definition äquivalent zu der von Hartshorne ist. Über [ZS, Ch.V.§6 Th.12] und [Ro, Cor.4.25] ergibt sich wiederum die Äquivalenz zu der in [Ro] gegebenen Definition.

Korollar B.15.
- *Jeder diskrete Bewertungsring ist ein Dedekindring, insbesondere ist also der Ring der formalen Potenzreihen über einem Körper ein Dedekindring.*
- *Der Koordinatenring einer regulären affinen algebraischen Kurve ist ein Dedekindring, insbesondere ist der Polynomring $k[t]$ ein Dedekindring.*
- *Ist k algebraisch abgeschlossen, dann sind die Dedekindringe, die zugleich endlich erzeugte k-Algebren sind, genau die Koordinatenringe von regulären affinen Kurven über k.*

Beweis: Dies folgt sofort aus Beispiel A.14 und aus Satz B.12 (bzw. der hier gegebenen Definition eines Dedekindrings). □

Definition B.16. Sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann bilden die Mengen der Form $x + \mathfrak{m}^n$ mit $n \in N$ zusammen mit A und $\emptyset$ eine Umgebungsbasis einer Topologie. Diese heißt die $\mathfrak{m}$-*adische Topologie*. Ein lokaler Ring heißt *vollständig*, wenn er bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie vollständig ist. Man kann zeigen, daß Vervollständigung von A als topologischem Raum, also die Menge der Cauchyfolgen bezüglich der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie modulo der Menge der Nullfolgen, in natürlicher Weise die Struktur eines vollständigen lokalen Rings hat. Dieser heißt *die* $\mathfrak{m}$-*adische Komplettierung von* A siehe [Ha, I.§5].(Man kann die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung von A auch als inversen Limes $\underset{\leftarrow}{A/\mathfrak{m}^n}$ definieren.)

Wir geben hier die Hartshornesche Version der Cohenschen Struktursatzes ([Ha, I.Th.5.5.A]) wieder. Es gibt auch allgemeinere Formulierungen für nicht notwendig reguläre Ringe.

Satz B.17 (Cohen). *Ist A ein vollständiger regulärer lokaler Ring der Dimension n, der einen Körper enthält, dann ist $A \cong k[|x_1, \dots, x_n|]$, dem Ring der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten über dem Restklassenkörper k von A.*

Korollar B.18. *Die $\mathfrak{m}$-adische Komplettierung eines Dedekindrings mit Restklassenkörper k, der k enthält, in einem von (0) verschiedenen Ideal $\mathfrak{m}$ ist isomorph zu $k[|t|]$.*

Definition B.19. Sei K ein diskret bewerteter Körper mit uniformisierendem Parameter t, dann ist die *zugehörige Topologie* auf K dadurch definiert, daß die Mengen der Form $x + t^n A$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine Umgebungsbasis von $x \in K$ bilden.

Zur Topologie von diskreten Bewertungsringen siehe [Ser2, Ch.II§1]. Es gilt insbesondere

Satz B.20. [Ser2, Ch.II§1 Prop.1] *Ein diskret bewerteter Körper K ist genau dann lokal kompakt, wenn er vollständig ist und der Restklassenkörper $k = A/tA$ seines Bewertungsrings endlich ist.*

Bemerkung B.21. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt: Der Quotientenkörper K einer diskreten Bewertungs-k-Algebra, ist genau dann endlich erzeugt über k vom Transzendenzgrad 1 (also eine endliche Erweiterung des Körpers $k(t)$ der rationalen Funktionen über k), wenn A eine Lokalisierung eines endlich erzeugten k-Dedekindrings in einem maximalen Ideal ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Aus [Ha, I.Th.1.8.A.(a)] folgt, daß der Transzendenzgrad von K über k gleich der Dimension von A, also gleich 1 ist, wenn A endlich erzeugt über k ist. Dies gilt auch für Lokalisierungen von A, denn $\mathrm{Quot}(A_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Quot}(A)$.
„$\Rightarrow$“: Nach [Ha, I.Cor.6.6.] ist jeder diskrete Bewertungsring von K, der k enthält, isomorph zum lokalen Ring einer regulären Kurve. □

Ein Dedekindring ist ein noetherscher Prüferring (siehe [Ro]). Die für uns wichtigste Eigenschaft der Dedekindringe (oder allgemeiner der Prüferringe) ist die Identifikation von Flachheit und Torsionsfreiheit:

Satz B.22. [Ro, Theorem 4.33] *Ein Modul über einem Prüferring, insbesondere über einem Dedekindring, ist genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist.*

Beweisidee: „$\Rightarrow$“: Ein flacher Modul M über einem Integritätsring A ist stets torsionsfrei: Angenommen es sei $0 \neq m \in M$ und $0 \neq a \in A$, so daß $a.m = 0$ ist. A ist in natürlicher Weise in seinen Quotientenkörper K eingebettet. Das Bild dieser injektiven Abbildung unter der Tensorierung mit M ist nicht mehr injektiv, denn $m \otimes 1$ ist ungleich 0 in $M \otimes_A A \cong M$, aber gleich $a.m \otimes a^{-1} = 0$ in $M \otimes_A K$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Flachheit.
„$\Leftarrow$“: Diese Richtung ergibt sich aus mehreren nicht offensichtliche Tatsachen: jeder endlich erzeugte torsionsfreie Modul kann in einen endlich erzeugten freien Modul eingebettet werden. Freie Moduln sind projektiv und Untermoduln von projektiven Moduln sind wieder projektiv. Jeder projektive Modul ist flach ([Ro, Cor 3.46]) und ein Modul ist bereits flach, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul flach ist. □

Satz B.23. [Ro, Cor. 4.18] *Ist A ein Dedekindring, so ist jeder Untermodul eines projektiven A-Moduls projektiv.*

Daraus folgt mit Satz B.11

Korollar B.24. *Über einem Hauptidealring, insbesondere einem diskreten Bewertungsring, ist jeder Untermodul eines projektiven Moduls frei.*

Literatur

[BR] Bausch, J.,Rousseau, G.: Algèbres de Kac-Moody affines (automorphismes et formes réelles). Publ. 11, Institut Elie Cartan, Université de Nancy 1989

[BoT] Borel, A., Tits, J.: Groupes réductifs. Publ. Math. IHES **27**, 55-150 (1965)

[Bo] Borel, A.: Linear Algebraic Groups. New York: Benjamin 1969

[BouC] Bourbaki, N.: Commutative Algebra. Elements of Mathematics, Paris: Hermann 1972

[Bou4-6] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6. Éléments de Mathématique, vol. 34. Paris: Hermann 1968

[Bou7-8] Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8. Éléments de Mathématique, vol. 38. Paris: Hermann 1968

[BT] Bruhat, F., Tits, J.: Groupes réductifs sur un corps local: I. Données radicielles valuées. Publ. Math. IHES **41**, 5-252 (1972) II. Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée. Publ. Math. IHES **60**, 5-184 (1984)

[BT2] Bruhat, F., Tits, J.: Theorie des groupes: Groupes algébriques sur un corps local. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **263**, A822-A825 (1966)

[CE] Chevalley, C.,Eilenberg, S.: Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. Trans. Am. Math. Soc. **63**, 85-124 (1948)

[DD] Daboul, C., Daboul, J.: From hydrogen atom to generalized Dynkin diagrams. Physics Letters B **425**, 135-144 (1998)

[DDS] Daboul, C., Daboul, J., Slodowy, P.: The hydrogen algebra as centerless twisted Kac-Moody algebra. Physics Letters B **317**, 321-328 (1993)

[DG] Demazure, M.,Gabriel, P.: Introduction to algebraic geometry and algebraic groups. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1970

[DGfr] Demazure, M.,Gabriel, P.: Groupes Algébriques Tome 1. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1970

[Ei] Eisenbud, D.: Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1995

[EH] Eisenbud, D.,Harris, J.: Schemes: the language of modern algebraic geometry. Belmont, California: Wadsworth and Brooks 1992

[FH] Fialowski, A., O'Halloran, J.: A comparison of deformations and orbit closure. Communications in Algebra **18**, 4121-4140 (1990)

[Ga] Garret, P.: Buildings and classical groups. London: Chapman a. Hall 1997

[Ge] Gerstenhaber, M.: On the deformation of rings and algebras. Ann. Math., II. Ser. 79, 59-103 (1964)

[Gi] Gilmore, R.: Lie groups, Lie algebras and some of their applications. New York: Wiley 1974.

[GD] Grothendieck, A.; Dieudonne, J.A.: Elements de geometrie algebrique I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 166. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. IX, 1971

[GH] Grunewald, F., O'Halloran, J.: A characterization of orbit closure and applications. Journal of Algebra **116**, 163-175 (1988)

[GS] Guillemin, V., Sternberg, S.: Symplectic techniques in physics. Cambridge University press 1984

[Ha] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1977.

[Hei] Hein, W.: Struktur und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag 1990

[Her] Hermann, R.: Lie groups for physicists. New York: W.A. Benjamin Inc. 1966

[Hu1] Humphreys, J.E.: Introduction to Lie Algebras and representation theory. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1972

[Hu2] Humphreys, J.E.: Linear Algebraic Groups. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1975

[IW] Inonü, E., Wigner, E.P.: On the contraction of groups and their representations. Proceedings of the National Acad. of Sciences, USA **39**, 510-524 (1953)

[IM] Iwahori, N., Matsumoto, H.: On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups. Publ. Math. IHES **25**, 5-48 (1965)

[Ja] Jacobson, N.: Lie algebras. New York-London: Wiley Interscience 1962

[Ka] Kac, V.G.: Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed., Cambridge University Press 1990

[Ka2] Kac, V.G.: Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras. MSRI publications 4, Springer-Verlag, 167-216 (1985)

[Ka3] Kac, V.G.: Automorphisms of finite order of semi-simple Lie algebras. Funct. Analis i ego Prizloh. **3 No.3**, 94-96 (1968). Englische Übersetzung: Funct. Anal. Appl. **3**, 252-254 (1969)

[Ko] Kostant, B.: The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. Amer. J. Math. 81, 973-1032 (1959)

[Kr] Kraft, H.: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. Vieweg-Verlag 1985

[Kr2] Kraft, H.: Geometric methods in representation theory. In: Representations of algebras. Workshop Proceedings, Puebla, Mexico 1980. Lect. Notes Math. **944**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1982

[La] Landvoigt, E.: A compactification of the Bruhat-Tits building. Lect. Notes Math. **1619**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1996

[Ma] Matsumura, H.: Commutative algebra. Mathematics Lecture Note Series. New York: W. A. Benjamin, Inc. xii, 1970

[dMP] De Montigny, M., Patera, J.: Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras. Journal of Phys. A **24**, 525-547 (1991)

[MP] Moody, R.V., Patera, J.: Graded contractions of representations of Lie algebras. Journal of Phys. A **24**, 2227-2256 (1991)

[OV] Onishchik, A.L.,Vinberg, E.B.: Lie groups and Lie algebras III. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1994

[PS] Pressley, A., Segal, G.: Loop groups. Oxford: Clarendon Press 1986

[Ro] Rotman, J.: An introduction to homological algebra. Pure and Applied Mathematics, Vol. 85. New York - San Francisco-London: Academic Press. XI 1979

[Sa] Saletan, E.J.: Contraction of Lie groups. Journal of Math. Phys. **2**, 1-21 (1961)

[Seg] Segal, I.E.: A class of operator algebras determined by groups. Duke Math. J. **18**, 221-265 (1951)

[Ser1] Serre, J.P.: Lie algebras and Lie groups. Lie algebras and Lie groups. 1964 lectures given at Harvard University, New York-Amsterdam: W. A. Benjamin, Inc. (1965)

[Ser2] Serre, J.P.: Local fields. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1979

[Ti] Tits, J.: Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1967

[VD] Veisfeiler, B.Ju.; Dolgacev, I.V. (Vejsfejler, B.Yu.; Dolgachev, I.V.): Unipotent group schemes over integral rings. Math. USSR, Izv. 8(1974), 761-800 (1975)
Errata and addenda. Math. USSR, Izv. 8(1974), 1433 (1976)

[Wa] Waterhouse, W.C.: Introduction to affine group schemes. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag 1979

[We] Weimar-Woods, E.: The three-dimensional real Lie algebras and their contractions. J.Math.Phys. **32** (8), 2028-2033 (1991)

[We2] Weimar-Woods, E.: Contractions of Lie algebra representations. J.Math.Phys. **32** (10), 2660-2665 (1991)

[WW] Waterhouse, W.C., Weisfeiler, B.: One-dimensional affine group schemes. Journal of Algebra **66** (2), 550-568 (1980)

[ZS] Zariski, O., Samuel, P., Commutative algebra I.+II., Princeton: D.Van Nostrand Company Inc. 1958