

Instantonen, adjungierte Bahnen, parabolische Bündel und konforme Feldtheorien

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Christian Adler
aus Hamburg

Hamburg

1999

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

aufgrund der Gutachten von Prof. Dr. P. Slodowy
und Prof. Dr. O. Riemenschneider

Hamburg, den 2. Juni 1999

Prof. Dr. H. Daduna
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Nilpotente Bahnen und Modulräume	6
1.1 Aktionen reductiver Gruppen	6
1.2 Algebraische Quotienten	8
1.3 Instabilität und Nullformen	9
1.4 Symplektische Quotienten	14
1.5 Der adjungierte Quotient	19
1.6 Nilpotente Bahnen und Instantonen	29
2 Parabolische Bündel und konforme Feldtheorien	36
2.1 Familien, Deformationen und Modulräume	36
2.2 Parabolische Bündel	40
2.3 Konforme Feldtheorien	56
A Fusionsringe, Superauswahlsektoren und Unterfaktoren	67
A.1 C^* - und von Neumann-Algebren	69
A.2 Inklusionsmatrix und Bratteli-Diagramm	70
A.3 Unterfaktoren	72
Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Diese Arbeit behandelt einen Zusammenhang zwischen nilpotenten adjungierten Bahnen in einfachen Lie Algebren und SL_2 -äquivarianten Prinzipalbündeln über der projektiven Ebene. Motiviert ist unsere Untersuchung durch eine Arbeit von P.Kronheimer, in der er eine Beziehung zwischen gewissen sehr symmetrischen Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen — sogenannten Instantonen — und den nilpotenten Bahnen in der Lie-Algebra \mathfrak{g} einer zusammenhängenden einfachen algebraischen Gruppe G herstellt.

Die Yang-Mills-Gleichungen treten in der mathematischen Physik im Rahmen von Eichtheorien auf und sind Verallgemeinerungen der aus der Elektrodynamik bekannten Maxwell-Gleichungen für nicht-abelsche Eichtheorien: Vom differentialgeometrischen Standpunkt aus definiert das elektromagnetische Potential einen Zusammenhang A in einem $U(1)$ -Prinzipalbündel über einer orientierten Riemannschen 4-Mannigfaltigkeit M , der Raum-Zeit. Das elektromagnetische Feld ist die zugehörige Krümmung F_A und die Maxwellschen Gleichungen nehmen (im Vakuum) die Gestalt

$$d F_A = 0, \quad d * F_A = 0$$

an; hierbei ist $*$ der durch Metrik und Orientierung induzierte Hodge-Operator. In Yang-Mills Theorien ersetzt man nun $U(1)$ durch andere, nicht-abelsche Eichgruppen — in der Physik häufig durch $SU(n)$. Yang-Mills Theorien besitzen eine unendlich-dimensionale Symmetriegruppe \mathcal{K} , nämlich die (unitären) Automorphismen des zugrundeliegenden Prinzipalbündels, d.h. (lokal) matrix-wertige Funktionen, und Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen werden mithin parametrisiert durch einen Raum $\mathcal{A}_{YM}/\mathcal{K}$ von \mathcal{K} -Bahnen von (unitären) Zusammenhängen. Dieser Raum ist unendlich-dimensional; schränkt man sich jedoch auf solche Lösungen ein, für die $*F_A = -F_A$ gilt, so wird der resultierende Parameterraum endlich-dimensional. Stellt man noch zusätzliche Symmetrie-Forderungen an die Lösungen, so erhält man Kronheimer's Korrespondenz zwischen Instantonen und nilpotenten Bahnen, vgl. Abschnitt 1.6.

Mittels der Penrose-Twistor-Transformation lassen sich die von Kronheimer betrachteten Instanton-Modulräume als Modulräume von $SU(2)$ -invarianten Bündeln auf der projektiven Ebene auffassen Die $SU(2)$ -Symmetrie erweitert sich jedoch unmittelbar auf eine $SL(2)$ -Symmetrie, die eine derartige "Starrheit" impliziert, daß sich die Modulräume innerhalb des Rahmens der endlich-dimensionalen algebraischen Geometrie und der Theorie der nilpotenten Bahnen in algebraischen Gruppen konstruieren lassen. Die Idee, daß dieses rein differentialgeometrisch erhaltene Resultat ein algebraisch-geometrisches Pen-

dant haben sollte, beruht auf der im endlich-dimensionalen Fall wohlbekannten Tatsache, daß zwischen Quotienten in der algebraischen bzw. symplektischen Geometrie ein enger Zusammenhang besteht. Indem wir zeigen, daß nilpotente Bahnen andererseits SL_2 -äquivariante (algebraische) G -Bündel über \mathbb{P}^2 parametrisieren, erhalten wir — wenn gleich auf indirekte Weise — ein Analogon dieser Beziehung.

Im zweiten Teil der Arbeit verallgemeinern wir dieses Resultat auf andere (halbeinfache) adjungierte Bahnen. Für regulär halbeinfache Orbits geht dies ebenfalls auf P.Kronheimer zurück, dem eine Identifikation solcher Bahnen mit einem Modulraum "singulärer" Instantonen gelungen ist. Wir verwenden hingegen das Konzept der parabolischen Bündel, was ferner gestattet, einen unmittelbaren Zusammenhang mit der zwei-dimensionalen konformen Feldtheorie aufzuzeigen.

Etwas genauer gehen wir so vor: Aus unserer Diskussion SL_2 -äquivarianter G -Bündel über \mathbb{P}^2 geht hervor, daß jedes solche Bündel insbesondere ein \mathbb{C}^* -äquivariantes G -Bündel über der projektiven Geraden induziert, das noch eine gewisse Zusatzstruktur — eine sogenannte (quasi-) parabolische Struktur — trägt. Für diese parabolischen Bündel existiert ein grober Modulraum; es stellt sich nun heraus, daß der Raum der Schnitte in einem geeigneten Geradenbündel über dem Modulraum parabolischer Bündel sich identifizieren läßt mit dem in der konformen Feldtheorie auftretenden Raum der sogenannten konformen Blöcke, vgl. Abschnitt 2.3. Von besonderem Interesse ist die Dimension dieser Schnitträume, die man mit Hilfe eines weiteren wichtigen Objektes der konformen Feldtheorie, dem Fusionsring, bestimmen kann.

In einem Anhang stellen wir schließlich eine Verbindung zwischen dem Fusionsring einer konformen Feldtheorie und der Superauswahlkategorie einer Quantenfeldtheorie her; beide Konzepte codieren jeweils die Information über die "Quantenzahlen" der Theorie und ihre Addition. Auf der operatoralgebraischen Seite (d.h. auf der Seite der Superauswahltheorie) beschränken wir uns dabei auf eine sehr spezielle Klasse von Operatoralgebren, nämlich auf von Neumann-Faktoren vom Typ II_1 .

1 Nilpotente Bahnen und Modulräume

In diesem Abschnitt sei der Grundkörper k als algebraisch abgeschlossen und von Charakteristik Null vorausgesetzt; algebraische Gruppen seien stets zusammenhängend und affin angenommen.

1.1 Aktionen reductiver Gruppen

Ist G eine affine algebraische Gruppe, so existieren eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und ein Homomorphismus $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n$ algebraischer Gruppen derart, daß ϱ eine abgeschlossene Immersion ist; daher bezeichnet man affine algebraische Gruppen auch als *lineare algebraische Gruppen*. Bei der Untersuchung von Aktionen solcher linearen algebraischen Gruppen ist es, wie wir später sehen werden, sinnvoll, die Klasse der betrachteten Gruppen weiter einzuschränken. Hierzu stellt sich im Hinblick auf Anwendungen in der Invariantentheorie der Begriff der *Reduktivität* als nützlich heraus. Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe, $\mathfrak{R}(G)$ ihr Radikal (d.h. die maximale zusammenhängende, auflösbare, normale Untergruppe von G) und $\mathfrak{R}_u(G)$ das unipotente Radikal von G (d.h. der unipotente Teil von $\mathfrak{R}(G)$).

Definition 1.1.1 G heißt **reduktiv**, falls $\mathfrak{R}_u(G) = \{e\}$ und **halbeinfach**, falls $\mathfrak{R}(G) = \{e\}$.

Beispiele: (i) GL_n ist reduktiv; insbesondere ist die multiplikative Gruppe $G_m := \mathrm{GL}_1$ reduktiv.

(ii) Die sogenannten *klassischen Gruppen* SL_n , Sp_{2n} , SO_n sind reduktiv.

Sei nun G eine reductive Gruppe und X eine algebraische Varietät (jeweils über dem Grundkörper k).

Definition 1.1.2 Unter einer **regulären Aktion** von G auf X versteht man einen Morphismus $\alpha : G \times X \rightarrow X$ derart, daß

$$(i) \quad \forall x \in X : \alpha(e, x) = x,$$

$$(ii) \quad \forall x \in X, \forall g, h \in G : \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x) \quad .$$

Alternativ heißt X (genauer: das Tripel (G, X, α)) eine **G -Varietät**.

Beispiele: (i) Sei $G := \mathrm{GL}_n$, $X := \mathbb{A}_k^n = k^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha : G \times X &\longrightarrow X \\ (A, v) &\longmapsto A.v \end{aligned}$$

regulär.

(ii) Ist $\alpha : G \times X \rightarrow X$ eine reguläre Aktion und $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus algebraischer Gruppen, so ist

$$\begin{aligned} \beta : H \times X &\rightarrow X \\ (h, x) &\mapsto \alpha(\varphi(h), x) \end{aligned}$$

eine reguläre Aktion von H auf X .

(iii) Sei $Y \subset X$ eine G -stabile Untervarietät einer G -Varietät (G, X, α) (d.h. $G \cdot Y \subset Y$); dann ist die Einschränkung von α auf Y eine reguläre Aktion.

Sei V ein endlich-dimensionaler k -Vektorraum. Die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ der bijektiven linearen Transformationen von V ist eine lineare algebraische Gruppe: jede Wahl einer Basis in V liefert einen Isomorphismus zu einer GL_n , wobei $n = \dim V$.

Definition 1.1.3 *Einen Homomorphismus $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ algebraischer Gruppen nennt man eine **rationale Darstellung** von G auf V .*

Bemerkungen: (i) Eine Darstellung $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ induziert eine reguläre Aktion von G auf V vermöge $(g, v) \mapsto (\varrho(g))(v)$; man spricht deshalb auch von einer *linearen Operation* von G auf V und nennt V einen G -Modul.

(ii) Die Definition läßt sich unmittelbar auf beliebige (d.h. auch unendlich-dimensionale) k -Vektorräume übertragen. Für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum V heißt die Darstellung $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ *lokal endlich*, falls jeder Vektor $v \in V$ in einem endlich-dimensionalen Teilraum $W \subset V$ enthalten ist derart, daß zum einen $\varrho(g) \cdot W = W$ gilt für alle $g \in G$ und zum anderen die Einschränkung $\varrho|_W : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$ eine rationale Darstellung im obigen Sinne ist. Ist insbesondere (G, X, α) eine affine G -Varietät, so wird der Ring $\mathcal{O}(X)$ der regulären Funktionen auf X vermöge Translation zu einem G -Modul, d.h.

$$\begin{aligned} \tau : G &\rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{O}(X)) \\ g &\mapsto \tau_g : f \mapsto f \circ g^{-1} \end{aligned}$$

ist eine rationale Darstellung.

(iii) Wir erinnern daran, daß eine algebraische Gruppe G *linear reduktiv* heißt, falls jede Darstellung von G vollständig reduzibel ist; während in Charakteristik Null Reduktivität und lineare Reduktivität äquivalent sind, sind in positiver Charakteristik $p > 0$ algebraische Gruppen genau dann linear reduktiv, wenn die Zusammenhangskomponente G_0 der Eins ein Torus $(\mathbb{G}_m)^r$ und die Ordnung von G/G_0 zu p prim ist [58].

(iv) Jede affine G -Varietät läßt sich im folgenden Sinne “linearisieren”: Operiert eine reductive Gruppe G regulär auf einer affinen Varietät X , so existieren ein G -Modul V und eine G -äquivariante abgeschlossene Immersion $X \hookrightarrow V$.

Ein zentrales Resultat der Invariantentheorie ist Hilbert’s Endlichkeitssatz.

Theorem 1.1.1 *Sei G eine lineare reductive Gruppe und X eine affine G -Varietät. Dann ist der Invariantenring $(\mathcal{O}(X))^G$ endlich erzeugt.*

Bemerkungen: (i) D.Mumford [55] konnte diese Aussage allgemein für Aktionen reductiver Gruppen auf affinen Varietäten zeigen, d.h. auch für den Fall positiver Charakteristik $p > 0$.¹

(ii) Der Invariantenring $(\mathcal{O}(X))^G$ ist offenbar reduziert, d.h. er enthält keine nicht-trivialen nilpotenten Elemente; folglich ist das maximale Spektrum von $(\mathcal{O}(X))^G$ wieder eine affine Varietät, die man mit $X//G$ bezeichnet. Die Inklusion $(\mathcal{O}(X))^G \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ definiert einen Morphismus $\pi : X \rightarrow X//G$, den sogenannten (*algebraischen*) *Quotienten* von X nach G .

1.2 Algebraische Quotienten

Am Ende des letzten Abschnittes haben wir mit dem maximalen Spektrum des Invariantenringes $(\mathcal{O}(X))^G$ ein Beispiel für einen Quotienten kennengelernt. Der Begriff des algebraischen Quotienten läßt sich etwas allgemeiner formulieren. Sei dazu G reaktiv und X eine G -Varietät mit Strukturgarbe \mathcal{O}_X .

Definition 1.2.1 *Ein Morphismus $\pi : X \rightarrow Y$ heißt ein (**algebraischer**) **Quotient**, falls π auf den G -Bahnen konstant ist und die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (i) *Für jede affine offene Untermenge $U \subset Y$ ist das Urbild $\pi^{-1}(U)$ affin;*
- (ii) *$\pi^* : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G$ ist ein Isomorphismus.*

Wie im obigen Fall einer affinen G -Varietät bezeichnet man den Quotienten mit $\pi : X \rightarrow X//G$.

¹Streng genommen konnte Mumford den Endlichkeitssatz für *geometrisch reductive* Gruppen beweisen; erst später hat W.Haboush die Äquivalenz von (gruppentheoretischer) Reduktivität und Mumford’s geometrischer Reduktivität gezeigt [24].

Beispiele: (i) Sei $\pi : X \rightarrow X//G$ ein Quotient und $Y \subset X//G$ eine lokal abgeschlossene Untervarietät; dann ist auch $\pi : \pi^{-1}(Y) \rightarrow Y$ ein algebraischer Quotient.

(ii) Der kanonische Morphismus $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ ist der Quotient unter der skalaren \mathbb{C}^* -Aktion.

(iii) Sei $\pi : X \rightarrow Y$ ein G -Prinzipalbündel, d.h. X ist eine G -Varietät derart, daß

- alle Bahnen isomorph zu G sind,
- die Fasern von π G -Bahnen sind,
- π in der etalen Topologie lokal trivial ist.

Dann ist $\pi : X \rightarrow Y$ ein Quotient.

Falls ein Quotient existiert, so ist er eindeutig bestimmt, und der Morphismus $\pi : X \rightarrow X//G$ besitzt einige interessante Eigenschaften: Er ist G -abgeschlossen (d.h. das Bild einer G -stabilen abgeschlossenen Untermenge ist abgeschlossen) und G -separierend (d.h. disjunkte G -stabile abgeschlossene Untermengen haben disjunkte Bilder). Aus der Surjektivität des Quotienten und der G -Abgeschlossenheit folgt unmittelbar, daß $X//G$ die Quotiententopologie trägt. Ferner enthält jede Faser von π genau eine abgeschlossene Bahn: Sei $\bar{x} \in X//G$. Da \mathcal{O}_X Noethersch ist, gibt es eine G -Bahn $\mathcal{O} \subset \pi^{-1}(\bar{x})$ derart, daß der Abschluß $\overline{\mathcal{O}}$ minimal ist in der Menge der Bahnabschlüsse. Da jede Bahn offen in ihrem Abschluß ist, muß \mathcal{O} dann abgeschlossen sein. Die Eindeutigkeit ist eine Konsequenz der Trennungseigenschaft. Es ist im allgemeinen nicht richtig, daß $X//G$ alle G -Bahnen parametrisiert. Ist dies der Fall, d.h. sind alle G -Bahnen abgeschlossen, so spricht man von einem *geometrischen Quotienten*.

1.3 Instabilität und Nullformen

Sei G eine zusammenhängende reductive Gruppe und V ein endlichdimensionaler G -Modul.

Definition 1.3.1 Ein Element $v \in V$ heißt **instabil** (oder eine **Nullform**) bezüglich G , falls der Abschluß seiner Bahn den Ursprung $0 \in V$ enthält, d.h. falls $0 \in \overline{G \cdot v}$. Anderenfalls heißt v **semistabil**.

Ist $\pi : V \rightarrow V//G$ der zugehörige Quotient, so ist ein Element $v \in V$ instabil genau dann, wenn es in der Faser $N(V) := \{v \in V \mid \pi(v) = \pi(0)\}$ liegt. Eine Charakterisierung dieser Faser liefert das Hilbert-Mumford Kriterium.

Theorem 1.3.1 *Ein Element $v \in V$ ist instabil bezüglich G genau dann, wenn es einen Homomorphismus $\lambda : \mathbf{G}_m \rightarrow G$ algebraischer Gruppen gibt derart, daß v bezüglich $\lambda(\mathbf{G}_m)$ instabil ist.*

G.Kempf [35] und G.Rousseau [63] haben unabhängig voneinander das ursprünglich von D.Mumford [55] gestellte Problem gelöst, zu einer gegebenen Nullform v eine Klasse Λ_v "optimaler" Einparameter-Untergruppen anzugeben. Aufbauend auf diesen Resultaten erhielt W.Hesselink [29] eine Stratifikation des Nullkegels $N(V)$, die sich beispielsweise für die Untersuchung der Kohomologie von Quotienten als sehr nützlich erwiesen hat [38], vgl. auch [60]. Diese geometrische Beschreibung von $N(V)$ ist auch für unsere Zwecke von Bedeutung und soll daher ein wenig detaillierter besprochen werden; das zentrale Ergebnis wird der Satz von Kempf-Rousseau sein.

Sei $X_*(G) := \text{Hom}(\mathbf{G}_m, G)$ die Menge aller Einparameter-Untergruppen (kurz: 1-PUG) und $X^*(G) := \text{Hom}(G, \mathbf{G}_m)$ die Gruppe der multiplikativen Charaktere. Ist insbesondere T ein Torus, so stehen die Gruppen $X_*(T)$ und $X^*(T)$ in perfekter Dualität:

$$\begin{aligned} X_*(T) \times X^*(T) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\lambda, \chi) &\longmapsto \langle \lambda, \chi \rangle, \end{aligned}$$

mit $(\chi \circ \lambda)(t) = t^{\langle \lambda, \chi \rangle}$ für alle $t \in \mathbf{G}_m$. $X_*(G)$ ist enthalten in der Menge $\mathbf{M}(G) := (X_*(G) \times \mathbb{N}) / \sim$ der Kogewichte, wobei $(\mu, m) \sim (\nu, n)$, falls $n\mu = m\nu$. Die Konjugation $\text{int}(g)(h) = ghg^{-1}$ in G läßt sich zu einer G -Aktion auf $\mathbf{M}(G)$ ausdehnen. Ist T ein Torus, so ist $\mathbf{M}(T) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, und $\mathbf{M}(G)$ ist die Vereinigung der Vektorräume $\mathbf{M}(T)$, wobei T die maximalen Tori von G durchläuft.

Definition 1.3.2 *Unter einer Norm auf $\mathbf{M}(G)$ versteht man eine Abbildung $q : \mathbf{M}(G) \rightarrow \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Ist $\lambda \in \mathbf{M}(G)$ von Null verschieden, so ist $q(\lambda) > 0$;*
- (ii) *Für $\lambda \in \mathbf{M}(G)$ und $g \in G$ gilt: $q(\text{int}(g)(\lambda)) = q(\lambda)$;*
- (iii) *Ist T ein Torus in G , so existiert ein inneres Produkt (\cdot, \cdot) auf dem Vektorraum $\mathbf{M}(T)$ mit $q(\lambda) = (\lambda, \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbf{M}(T)$.*

Bemerkungen: (i) Nach [56] existiert auf $\mathbf{M}(G)$ stets eine Norm; diese ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt (sie ist allerdings (bis auf positive Vielfache) eindeutig für einfache algebraische Gruppen). Da im folgenden die meisten Betrachtungen von der Wahl der Norm abhängen, fixieren wir von jetzt ab eine Norm q .

- (ii) Ist $\lambda \in \mathbf{M}(G)$, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $n\lambda \in X_*(G)$.

Um zu prüfen, ob ein Element $v \in V$ instabil ist, hat D.Mumford [56] das folgende numerische Kriterium angegeben: Sei $\lambda \in \mathbf{M}(G)$ und $\mu = n\lambda$ eine 1-PUG. Sei $\varrho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ eine rationale Darstellung von G . Betrachte die Zerlegung von V in die Gewichtsräume bezüglich der \mathbf{G}_m -Darstellung $\varrho \circ \mu : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{GL}(V)$, d.h. die Zerlegung $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, wobei $V_i := \{v \in V \mid \varrho(\mu(t))(v) = t^i v \text{ für alle } t \in \mathbf{G}_m\}$. Sei $v = \sum_{i \in \mathbb{Z}} v_i$ mit $v_i \in V_i$ die entsprechende Zerlegung eines Vektors $v \in V$; setze $m := \min\{i \in \mathbb{Z} \mid v_i \neq 0\}$ und definiere

$$m(v, \lambda) := \begin{cases} n^{-1}m & \text{falls } m \geq 0 \\ -\infty & \text{falls } m < 0 \end{cases} .$$

Offenbar ist v genau dann instabil, wenn es ein $\lambda \in \mathbf{M}(G)$ gibt mit der Eigenschaft, daß $m(v, \lambda) > 0$ ist. Setze $q^*(v) := \min\{q(\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{M}(G), m(v, \lambda) > 0\}$.

Definition 1.3.3 Die optimale Klasse für ein instabiles Element $v \in V$ ist gegeben durch

$$\Lambda_v := \{\lambda \in \mathbf{M}(G) \mid m(v, \lambda) > 0, q(\lambda) = q^*(v)\} .$$

Der Satz von Kempf-Rousseau sagt nun einerseits, daß optimale Einparameter-Untergruppen stets existieren, andererseits gestattet er, zu einem instabilen Vektor $v \in V$ gewisse geometrische Objekte zu assoziieren, insbesondere eine parabolische Untergruppe P_v von G .

Satz 1.3.1 Sei $v \in V$ instabil bezüglich G . Dann ist die optimale Klasse für v nicht leer: $\Lambda_v \neq \emptyset$.

Beweisskizze: Sei T ein maximaler Torus in G und $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi$ die Eigenraumzerlegung bezüglich T ; sei $v = \sum v_\chi$, $v_\chi \in V_\chi$, die zugehörige Zerlegung von v und definiere den Träger von v bezüglich T als die endliche Menge

$$\text{Tr}_T(v) := \{\chi \in X^*(T) \mid v_\chi \neq 0\} .$$

Für $\lambda \in X_*(T)$ gilt dann $m(v, \lambda) = \min_{\chi \in \text{supp}_T(v)} \langle \lambda, \chi \rangle$, was gestattet, $m(v, \cdot)$ zu einer linearen Funktion auf $\mathbf{M}(T)$ auszudehnen. Wir nehmen zunächst an, daß v bezüglich T instabil ist und suchen ein bezüglich aller $\mu \in \mathbf{M}(T)$ optimales $\lambda \in \mathbf{M}(T)$; anschließend nutzen wir aus, daß alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind.

Sei also $\lambda \in \mathbf{M}(T)$ und setze

$$q^*(\text{Tr}_T(v)) := \min\{q(\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{M}(T), m(v, \lambda) > 0\} .$$

Ist $q^*(\text{Tr}_T(v))$ endlich, so existiert nach [30] ein eindeutig bestimmtes Element $\delta = \delta(\text{Tr}_T(v))$ in $\mathbf{M}(T)$ derart, daß v bezüglich δ instabil ist (d.h. $m(v, \delta) > 0$) und $q(\delta) = q^*(\text{Tr}_T(v))$, d.h. die Norm von

δ ist minimal im obigen Sinne; δ löst somit das “Optimierungsproblem” innerhalb von T . Da alle maximalen Tori konjugiert sind, gilt $q^*(v) = \min\{q^*(\text{Tr}_T(g.v)) \mid g \in G\}$; aber der Träger von $g.v$ bezüglich T ist natürlich für alle $g \in G$ in der (endlichen) Menge der Gewichte von V enthalten. Folglich gibt es ein $h \in G$ derart, daß $q^*(v) = q^*(\text{Tr}_T(h.v)) = q^*(\text{Tr}_{h^{-1}Th}(v))$. Setze $T_0 := h^{-1}Th$ und sei $\delta_0 = \delta(\text{Tr}_{T_0}(v))$ in $M(T_0)$. Dann ist δ_0 in Λ_v . ■

Bemerkung: W.Hesselink [29], [30] folgend haben wir $X_*(G)$ durch die größere Menge $M(G)$ der Kogewichte ersetzt, was dazu führt, daß unsere optimale Klasse Λ_v aus “fraktionellen” Einparameter-Untergruppen besteht; diese sind aber zu den “echten” 1-PUG der Kempfschen optimalen Klasse proportional, d.h. zu $\lambda \in \Lambda_v$ gibt es eine eindeutig bestimmte positive rationale Konstante c derart, daß $\mu = c \cdot \lambda \in X_*(G)$ optimal ist im Sinne von Kempf [35]. Etwas ungenau werden wir daher auch von den Elementen von Λ_v als optimalen Einparameter-Untergruppen sprechen.

Zu jeder 1-PUG λ (und damit nach vorstehender Bemerkung auch zu jedem $\lambda \in \Lambda_v$) ist in natürlicher Weise eine parabolische Untergruppe $P(\lambda)$ von G assoziiert, nämlich

$$P(\lambda) := \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ existiert in } G\};$$

$P(\lambda)$ ist das semidirekte Produkt des unipotenten Radikals

$$U(\lambda) := \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = e\}$$

und des reduktiven Zentralisators $Z(\lambda)$ von $\lambda(\mathbf{G}_m)$ in G :

$$P(\lambda) = U(\lambda) \rtimes Z(\lambda).$$

Folglich liefert jede optimale Einparameter-Untergruppe $\lambda \in \Lambda_v$ eine zugehörige “schlimmste” parabolische Untergruppe im Sinne von [56]. Mit dieser Vorbemerkung können wir den zweiten Teil des Satzes von Kempf-Rousseau formulieren.

Satz 1.3.2 *Sei v instabil bezüglich G . Dann gilt:*

- (i) *Es existiert eine parabolische Untergruppe P_v von G mit der Eigenschaft, daß $P_v = P(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Lambda_v$.*
- (ii) *Sei $\lambda \in \Lambda_v$, $\mu \in M(G)$; dann gilt $\mu \in \Lambda_v$ genau dann, wenn es ein $p \in P_v$ gibt mit $\mu = \text{int}(p)(\lambda)$.*

Beweisskizze: Sei $\lambda \in \Lambda_v$. Da die Norm auf der Konjugationsklasse von λ konstant ist und außerdem $m(v, \lambda) = m(p.v, \lambda)$ für alle $p \in P(\lambda)$, gilt $\text{int}(p)(\lambda) \in \Lambda_v$. Sei nun $\mu \in \Lambda_v$ ein weiteres Element der optimalen Klasse für v . Als Konsequenz der Bruhat-Zerlegung gibt es einen maximalen Torus T von G in $P(\lambda) \cap P(\mu)$. Man findet daher Elemente $a \in P(\lambda)$ und $b \in P(\mu)$ derart, daß $\text{int}(a)(\lambda) = \delta(\text{Tr}_T(v)) = \text{int}(b)(\mu)$. Somit ist $P(\delta) = P(\text{int}(a)(\lambda)) = \text{int}(a)(P(\lambda)) = P(\lambda)$ und analog $P(\delta) = P(\mu)$, also $P(\lambda) = P(\mu)$ und $\mu = \text{int}(p)(\lambda)$, wobei $p = b^{-1}a \in P(\lambda)$. ■

Bemerkung: Fassen wir die bisherige Diskussion zusammen, so können wir zu einem instabilen Vektor $v \in V$ zum einen eine parabolische Untergruppe P_v von G assoziieren, zum anderen eine "natürliche" Klasse von Homomorphismen $\lambda : \mathbf{G}_m \rightarrow G$, die v destabilisieren; durch Festlegen eines maximalen Torus T in P_v läßt sich sogar in eindeutiger Weise eine optimale Einparameter-Untergruppe $\lambda_T : \mathbf{G}_m \rightarrow T$ auswählen.

Wie oben erwähnt, ist die Theorie der optimalen Einparameter-Untergruppen ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung der Geometrie der Nullfaser $N(V)$; definiere eine Äquivalenzrelation \sim auf $N(V)$ vermöge

$$v \sim w \iff \text{es existiert ein } g \in G \text{ derart, daß } \Lambda_v = \Lambda_{g.w} .$$

Definition 1.3.4 Eine Äquivalenzklasse $G[v] := \{x \in N(V) \mid x \sim v\}$ heißt ein **Stratum** von $N(V)$.

W.Hesselink konnte zeigen [29], daß $N(V)$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Strata ist, von denen jedes eine irreduzible, G -stabile Varietät ist. Ferner konnte er Springer's Auflösung der nilpotenten Varietät einer halbeinfachen Lie-Algebra verallgemeinern: Sei Z ein Stratum und \bar{Z} sein Abschluß; Hesselink konstruiert dann eine Auflösung von \bar{Z} mit Hilfe eines geeigneten Vektorbündels über einem homogenen Raum G/P (hierbei ist $P = P_v$ die zu einem Vektor v des betrachteten Stratums assoziierte parabolische Untergruppe). Wir werden auf einige dieser Punkte später zurückkommen.

Bemerkung: An diesem Punkt sollten wir betonen, daß Hesselink's Stratifikation des Nullkegels von der Wahl der Norm abhängt; sei z.B. $G = \text{GL}_2$ und W die natürliche zweidimensionale Darstellung von G . Betrachtet man $V := W \oplus \wedge^2 W$, so besteht $N(V)$ aus vier Bahnen; die Anzahl der Strata beträgt — abhängig von q — drei oder vier [29].

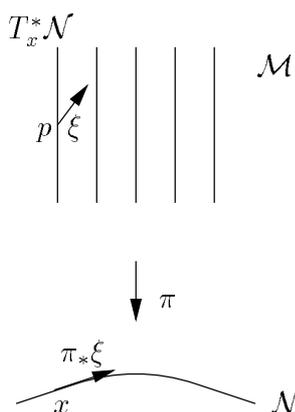
1.4 Symplektische Quotienten

In der klassischen Mechanik trifft man häufig auf Hamiltonsche dynamische Systeme mit Symmetrien, d.h. eine kompakte Gruppe operiert symplektisch (genauer: Poissonsches) auf dem Phasenraum des Systems; man kann dann vermöge des sogenannten *symplektischen Quotienten* zu einem "reduzierten" Phasenraum übergehen. Interessanterweise besteht zwischen symplektischen und algebraischen Quotienten ein enger Zusammenhang, der hier kurz besprochen werden soll, da ein unendlich-dimensionales Analogon dieser Beziehung später eine Rolle spielen wird.

Das zentrale Objekt ist die sogenannte *Impulsabbildung*, obwohl dieses wichtige Werkzeug mit geringen Einschränkungen an die Charakteristik für beliebige Körper zur Verfügung steht (vgl. beispielsweise [69]), werden wir nur den reellen bzw. komplexen Fall betrachten.

Sei also (\mathcal{M}, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, d.h. eine glatte (bzw. analytische) Mannigfaltigkeit \mathcal{M} versehen mit einer nicht-entarteten geschlossenen 2-Form ω auf \mathcal{M} .

Beispiele: (i) Das Kotangentenbündel $\mathcal{M} := T^*\mathcal{N}$ einer glatten Mannigfaltigkeit \mathcal{N} hat eine natürliche symplektische Struktur: Sei $\xi \in T_p\mathcal{M}$ ein Tangentialvektor an \mathcal{M} im Punkt $p \in T_x^*\mathcal{N}$. Die natürliche Projektion $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ induziert dann einen Tangentialvektor $\pi_*\xi$ an \mathcal{N} in x . Definiere eine 1-Form auf \mathcal{M} vermöge $\theta(\xi) := p(\pi_*\xi)$; diese Form hat in lokalen Koordinaten die Gestalt $\theta = p dq$. Die 2-Form $\omega := d\theta$ liefert dann die gewünschte symplektische Struktur.



(ii) Die Fubini-Study-Metrik auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Wir schreiben das Differential d als $d = d' + d''$, wobei d' und d'' die Differentiale bezüglich z_i und \bar{z}_i sind. Wähle homogene Koordinaten ζ_0, \dots, ζ_n auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ und

eine beliebige Linearform ζ . Dann sind $z_i = \zeta_i/\zeta$ rationale Funktionen auf $\mathbb{C}P^n$. Setze

$$H = \log \sum_{i=0}^n |z_i|^2 \quad \text{und} \quad \omega = \text{id}' d'' H .$$

Dann wissen wir

- (a) ω ist unabhängig von ζ : Sei η eine weitere Linearform. Wir müssen zeigen, daß $d' d'' \log |\zeta/\eta|^2 = 0$ ist. Für $\eta \neq 0$ ist aber $z = \zeta/\eta$ eine lokale Koordinate, und die Behauptung ist äquivalent zu

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log |z|^2 = 0 .$$

- (b) Da $d(d' d'' h) = 0$ ist für jede Funktion h , ist ω geschlossen. Explizit haben wir

$$\begin{aligned} \omega &= \text{id}' d'' \log \sum |z_i|^2 \\ &= \text{id}' \left(\frac{\sum z_i d\bar{z}_i}{\sum |z_i|^2} \right) \\ &= i \frac{\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i}{\sum |z_i|^2} - i \frac{(\sum \bar{z}_i dz_i) \wedge (\sum z_i d\bar{z}_i)}{(\sum |z_i|^2)^2} . \end{aligned}$$

- (c) Die zugehörige Hermitesche Metrik ist positiv-definit: Die Aktion von $U(n+1)$ auf $\mathbb{C}P^n$ läßt ω invariant und ist transitiv; daher genügt es, den Punkt $P = (1 : 0 : \dots : 0)$ zu betrachten. In diesem Fall läßt sich ω in der Form

$$\omega = i \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

schreiben (wähle ζ als die homogene Koordinate ζ_0), und die assoziierte Hermitesche Form $dz_i d\bar{z}_i$ ist offenbar positiv-definit.

Die so definierte Kähler-Metrik auf $\mathbb{C}P^n$ heißt *Fubini-Study-Metrik*.

Ähnlich wie eine Riemannsche Struktur auf einer Mannigfaltigkeit stellt auch eine symplektische Struktur einen Isomorphismus zwischen den Räumen der Tangentialvektoren und der 1-Formen her: Ordne jedem Tangentialvektor ξ an eine symplektische Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, ω) im Punkt x eine 1-Form θ_ξ auf $T_x \mathcal{M}$ zu durch

$$\theta_\xi(\eta) := \omega(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in T_x \mathcal{M} .$$

Bezeichne den so konstruierten Isomorphismus mit $\mathfrak{J} : T_x^* \mathcal{M} \longrightarrow T_x \mathcal{M}$. Sei nun H eine (glatte) Funktion auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Dann ist dH eine 1-Form und man erhält ein induziertes Vektorfeld $\mathfrak{J}(dH)$.

Definition 1.4.1 *Das Vektorfeld $\mathfrak{J}(dH)$ heißt **Hamiltonsches Vektorfeld** zur Hamiltonfunktion H . Angenommen, $\mathfrak{J}(dH)$ erzeugt eine einparametrische Gruppe von Diffeomorphismen $g_t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$,*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_t x = \mathfrak{J}(dH)(x) ,$$

*so heißt die Gruppe g_t der **Hamiltonsche Phasenfluß** der Hamiltonfunktion H .*

Bemerkung: Der Hamiltonsche Phasenfluß läßt die symplektische Struktur invariant [1].

Im folgenden sei K eine kompakte, zusammenhängende, halbeinfache Lie-Gruppe, welche symplektisch auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, ω) operiere² und \mathfrak{k} ihre Lie-Algebra. Die infinitesimale Aktion von K ist ein Lie-Algebra Homomorphismus von \mathfrak{k} in die Lie-Algebra der glatten Vektorfelder auf \mathcal{M} ; wir schreiben $x \mapsto a_x$ für das zu $a \in \mathfrak{k}$ assoziierte Vektorfeld auf \mathcal{M} .

Definition 1.4.2 *Eine **Impulsabbildung** für die Aktion von K auf \mathcal{M} ist eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (i) μ ist K -äquivariant bezüglich der gegebenen Operation von K auf \mathcal{M} und der koadjungierten Wirkung von K auf \mathfrak{k}^* ;
- (ii) *Es gilt*

$$\langle d\mu(x)(\xi), a \rangle = \omega(\xi, a_x)$$

für alle $x \in \mathcal{M}$, $\xi \in T_x \mathcal{M}$ und $a \in \mathfrak{k}$. Mit anderen Worten: Für $a \in \mathfrak{k}$ ist $\langle \mu(\cdot), a \rangle$ die Hamiltonfunktion, welche den durch die Wirkung von a auf \mathcal{M} gegebenen Fluß generiert.

Bemerkung: Da wir K als halbeinfach vorausgesetzt haben, ist die Existenz einer eindeutigen Impulsabbildung stets gesichert. Eine weitere hinreichende Bedingung für die Existenz einer Impulsabbildung ist das Verschwinden von $H^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ [56].

²D.h. $K \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ ist eine glatte Aktion und $g^* \omega = \omega$ für alle $g \in K$.

Beispiele: (i) Sei \mathcal{N} eine glatte Mannigfaltigkeit und K eine Lie-Gruppe von Diffeomorphismen von \mathcal{N} . Da jeder Diffeomorphismus 1-Formen auf \mathcal{N} in 1-Formen überführt, operiert K symplektisch auf $\mathcal{M} := T^*\mathcal{N}$, weil die Wirkung von K die natürliche 1-Form θ und damit auch $\omega = d\theta$ invariant läßt. Die Impulsabbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ läßt sich dann folgendermaßen beschreiben: Für $x \in \mathcal{M}$ betrachten wir die Abbildung $\Phi : K \rightarrow \mathcal{M}$, welche gegeben ist durch $\Phi(g) = g.x$. Dann induziert θ eine 1-Form $\Phi^*\theta$ auf K , deren Einschränkung auf den Tangentialraum an K im Einselement e eine Linearform auf der Lie-Algebra \mathfrak{k} ist. Anders ausgedrückt haben wir für $a \in \mathfrak{g}$, $(p, q) \in \mathcal{M}$:

$$\langle \mu(p, q), a \rangle = \langle p, a_q \rangle .$$

Operiert insbesondere $K = SO(3)$ durch Drehungen auf $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$, so ist μ gerade der Drehimpuls bezüglich des Ursprungs.

(ii) Eine kompakte Lie-Gruppe K operiere auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ vermöge einer linearen Darstellung

$$\varrho : K \rightarrow U(n+1) .$$

Dann läßt $U(n+1)$ die Fubini-Study-Form invariant und wir haben eine Impulsabbildung $\mu : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathfrak{k}^*$, die explizit gegeben ist durch

$$\langle \mu(x), a \rangle = \frac{\bar{\hat{x}}^t \varrho_*(a) \hat{x}}{2\pi i \|\hat{x}\|^2}$$

für alle $a \in \mathfrak{k}$, wobei $\hat{x} \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ein Repräsentant von $x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ist.

Betrachte das Urbild $\mu^{-1}(\zeta)$ eines Punktes $\zeta \in \mathfrak{k}^*$ unter der Impulsabbildung $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{k}^*$. Wir nehmen an, daß ζ ein regulärer Wert ist, so daß $\mu^{-1}(\zeta)$ eine Mannigfaltigkeit ist. Die Isotropiegruppe K_ζ von ζ in der koadjungierten Darstellung läßt $\mu^{-1}(\zeta)$ fest. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß K_ζ frei und "eigentlich"³ auf $\mu^{-1}(\zeta)$ operiert, macht es Sinn, den Quotienten $\mu^{-1}(\zeta)/K_\zeta$ zu betrachten.

Satz 1.4.1 $\mu^{-1}(\zeta)/K_\zeta$ besitzt eine natürliche symplektische Struktur.

Für einen Beweis dieses Satzes siehe [1].

³Die Aktion heißt "eigentlich", falls die Abbildung

$$\begin{aligned} K \times \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M} \\ (g, x) &\mapsto (g.x, x) \end{aligned}$$

eigentlich ist, d.h. wenn die Urbilder von Kompakta wieder kompakt sind.

Definition 1.4.3 *Unter der Marsden-Weinstein-Reduktion (oder dem symplektischen Quotienten) der Aktion von K auf \mathcal{M} im Punkt ζ versteht man die Mannigfaltigkeit $\mu^{-1}(\zeta)/K_\zeta$ versehen mit der natürlichen symplektischen Struktur.*

Beispiel: Sei $\mathcal{M} = \mathbb{C}^{n+1}$ mit der durch die natürliche Hermitesche Metrik induzierten symplektischen Struktur und betrachte die Wirkung von $K = U(1)$ vermöge skalarer Multiplikation. Dann ist die Impulsabbildung gegeben durch

$$\mu(z) = |z|^2,$$

und $\mu^{-1}(1)/U(1)$ ist gerade der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}P^n$. Insbesondere gilt also:

$$\mu^{-1}(1)/U(1) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*.$$

In diesem einfachen (affinen) Beispiel sehen wir, daß der symplektische Quotient nach der kompakten Gruppe $K = U(1)$ und der algebraische Quotient nach der Komplexifizierung $G = \mathbb{C}^*$ von K übereinstimmen; das ist kein Zufall und gilt auch für projektive Varietäten: Sei K eine maximale kompakte Untergruppe einer komplexen reductiven Gruppe G (d.h. G ist die Komplexifizierung von K) und G operiere vermöge einer Darstellung

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}$$

auf einer nichtsingulären projektiven Varietät $X \subset \mathbb{C}P^n$; durch Wahl geeigneter Koordinaten läßt sich ρ zu einer unitären Darstellung von K einschränken. Dann existiert eine Impulsabbildung (s.o.) und ein symplektischer Quotient $\mu^{-1}(0)/K$. Sei andererseits $X^{ss} \subset X$ die offene Teilmenge der semistabilen Punkte, d.h. derjenigen $x \in X$, für die gilt: Für jeden Repräsentanten \hat{x} von x in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ enthält $\overline{G \cdot \hat{x}}$ den Ursprung nicht. Dann existiert der Quotient von X^{ss} nach G (den wir ebenfalls mit $X//G$ bezeichnen) und ist wieder eine projektive Varietät. Die zentrale Aussage ist der folgende, auf G.Kempf und L.Ness [37] zurückgehende Satz, für dessen Beweis wir auf [56] verweisen.

Satz 1.4.2 (i) $x \in X$ ist semi-stabil genau dann, wenn der Abschluß des Orbits $G \cdot x$ das Urbild der Null unter der Impulsabbildung trifft, d.h. genau dann, wenn

$$\overline{G \cdot x} \cap \mu^{-1}(0) \neq \emptyset.$$

(ii) Die Inklusion $\mu^{-1}(0) \hookrightarrow X^{ss}$ induziert einen Homöomorphismus

$$\mu^{-1}(0)/G \longrightarrow X//G.$$

1.5 Der adjungierte Quotient

Ein interessanter und wichtiger Spezialfall eines algebraischen Quotienten ist der adjungierte Quotient. Eine reductive Gruppe G operiert auf sich vermöge Konjugation

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Aut}(G) \\ g &\mapsto \text{Int } g : x \mapsto gxg^{-1}, \end{aligned}$$

und induziert dadurch die adjungierte Darstellung auf $\mathfrak{g} = T_e G$:

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}) \\ g &\mapsto D_e(\text{Int } g). \end{aligned}$$

Wie oben erwähnt, können wir G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\text{GL}_n(k)$ (n geeignet) und mithin \mathfrak{g} mit einer Unteralgebra der $n \times n$ -Matrizen $M_n(k)$ identifizieren. Die Aktion $G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist durch Konjugation gegeben. Gemäß der allgemeinen Strukturtheorie reductiver Gruppen [6] ist \mathfrak{g} die direkte Summe ihres Zentrums \mathfrak{c} und der halbeinfachen Kommutatorunteralgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}].$$

Die Kommutatorunteralgebra zerfällt ihrerseits in eine direkte Summe einfacher Lie-Algebren; letztere sind (bis auf Isomorphie) durch das zu ihnen assoziierte (zusammenhängende) Dynkindiagramm vollständig bestimmt. Der adjungierte Quotient $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$ ist zuerst von B. Kostant [45] untersucht worden; einige seiner Resultate sollen kurz vorgestellt werden. Wir beginnen mit einer Charakterisierung der abgeschlossenen Bahnen in \mathfrak{g} , die ja durch \mathfrak{g}/G algebraisch parametrisiert werden.

Satz 1.5.1 *Für $x \in \mathfrak{g}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (i) *Die Bahn $\text{Ad}(G).x$ ist abgeschlossen.*
- (ii) *$\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, y \mapsto [x, y]$ ist ein halbeinfacher Endomorphismus.*
- (iii) *Ist $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n$ eine Darstellung mit Differential $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow M_n(k)$, so ist $d\rho(x)$ eine halbeinfache Matrix.*

Sind die (äquivalenten) Bedingungen des Satzes erfüllt, so heißt x aus naheliegenden Gründen *halbeinfach*. Mit ganz ähnlichen Begriffen lassen sich auch die instabilen Elemente in \mathfrak{g} charakterisieren.

Satz 1.5.2 *Für $x \in \mathfrak{g}$ sind äquivalent:*

- (i) *0 liegt im Abschluß $\overline{\text{Ad}(G).x}$ der Bahn von x .*

- (ii) x liegt in der Kommutatorunteralgebra $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und $\text{ad}(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ist ein nilpotenter Endomorphismus.
- (iii) $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ und für jede Darstellung $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow M_n(k)$ ist $d\rho(x)$ eine nilpotente Matrix.

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so heißt x *nilpotent*, und man nennt die Nullfaser $N(\mathfrak{g})$ die *nilpotente Varietät* von \mathfrak{g} . H.Kraft hat zeigen können, daß für $N(\mathfrak{g})$ die Hesselinkschen Strata gerade die Konjugationsklassen nilpotenter Elemente sind, vgl. [29]. Sei r der reduktive Rang von G , d.h. die Dimension eines maximalen Torus T .

Definition 1.5.1 Ein Element $x \in \mathfrak{g}$ heißt **regulär**, wenn die Dimension seiner Bahn maximal ist unter allen Orbitalen in \mathfrak{g} .

Es gilt der folgende

Satz 1.5.3 Sei x regulär und bezeichne mit $Z_G(x)$ den Zentralisator von x in G . Dann gilt:

- (i) $\dim Z_G(x) = r$.
- (ii) Ist x zudem halbeinfach, so ist $Z_G(x)$ ein maximaler Torus in G .
- (iii) Jede Faser des adjungierten Quotienten enthält eine eindeutig bestimmte reguläre Bahn. Insbesondere gibt es eine eindeutige reguläre nilpotente Bahn; diese ist dicht in $N(\mathfrak{g})$.

Bemerkung: Die Nullfaser ist (wie alle Fasern des adjungierten Quotienten) eine irreduzible, normale Varietät. Manchmal findet man in der Literatur auch für die Abschlüsse "kleinerer" Bahnen die Bezeichnung *nilpotente Varietäten*; diese sind jedoch nicht notwendig normal, vgl. [42]!

Sei nun $N_G(T)$ der Normalisator eines maximalen Torus T in G und $W := N_G(T)/T$ die Weylgruppe. Ist \mathfrak{h} die Lie algebra von T , so operiert W als endliche Spiegelungsgruppe auf \mathfrak{h} ; nach einem Theorem von C.Chevalley [8] ist der Invariantenring $k[\mathfrak{h}]^W$ ein Polynomring. Nach einem weiteren Resultat von C.Chevalley induziert die Inklusion $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ einen Isomorphismus der Quotienten $\mathfrak{h}/W \cong \mathfrak{g}/G$, so daß also insgesamt der Quotient \mathfrak{g}/G isomorph zu k^r ist ($r = \text{rk}(G) = \dim T$).

Beispiel: Betrachte die adjungierte Wirkung von $G = \text{SL}_{r+1}$ auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}$, der Algebra der spurlosen $(r+1) \times (r+1)$ -Matrizen. Der Rang von G ist r (die Diagonalmatrizen bilden einen maximalen Torus in G), und der Quotientenmorphimus $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/G$ läßt

sich realisieren, indem man einem Element $x \in \mathfrak{sl}_{r+1}$ die nicht-trivialen Koeffizienten $\chi_1(x), \dots, \chi_r(x)$ seines charakteristischen Polynoms

$$P(\lambda, x) = \det(\lambda 1 - x) = \lambda^{r+1} + \chi_1(x)\lambda^r + \dots + \chi_r(x)$$

zuordnet.

Für ein Element $x \in \mathfrak{g}$, welches in der regulären nilpotenten Bahn liegt, ist die assoziierte parabolische Untergruppe von G gerade eine Borel-Untergruppe B . Wähle einen maximalen Torus T in B ; Sei Φ das zugehörige Wurzelsystem mit positivem Teil Φ_+ . Für eine positive Wurzel $\alpha \in \Phi_+$ bezeichne α^\vee die korrespondierende Kowurzel; dann ist $\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi_+} \alpha^\vee$ optimal für x (nämlich gerade das eindeutig bestimmte Element in $X_*(T) \cap \Lambda_x$).

Zur Beschreibung von Springer's Auflösung der nilpotenten Varietät $N(\mathfrak{g})$ erinnern wir zunächst an den Begriff des assoziierten Bündels. Sei also G eine reductive algebraische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe; dann ist der natürliche Morphismus $\pi : G \rightarrow G/H$ ein H -Prinzipalbündel (lokal trivial zumindest in der etalen Topologie). Für eine beliebige H -Varietät F existiert dann der Quotient⁴ von $G \times F$ nach der H -Aktion

$$h(g, f) = (gh^{-1}, hf) \quad \text{für } h \in H, g \in G, f \in F;$$

bezeichne diesen Quotienten mit $G \times^H F$ und mit $g * f \in G \times^H F$ den H -Orbit von $(g, f) \in G \times F$. Nun operiert G auf $G \times^H F$ vermöge $g'(g * f) = gg' * f$ und durch den G -äquivarianten Morphismus

$$\begin{aligned} G \times^H F &\longrightarrow G/H \\ g * f &\longmapsto gH \end{aligned}$$

wird $G \times^H F$ zu einem G -Bündel über G/H mit Faser F ; man spricht von dem zur Faserung $G \rightarrow G/H$ und der Aktion von H auf F assoziierten Bündel, oder kurz vom *assoziierten Bündel*. Betrachte jetzt den Spezialfall einer Borel-Untergruppe B von G und beachte, daß das Kotangentiale T^*G/B des homogenen Raumes G/B mit dem assoziierten Bündel $G \times^B (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ identifiziert werden kann; hierbei ist \mathfrak{b} (die Lie-Algebra von B) eine Borelsche Unteralgebra von \mathfrak{g} . Identifiziert man \mathfrak{g} und \mathfrak{g}^* sowie die adjungierte und die koadjungierte Darstellung mittels der Killing-Form und schließlich $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ ebenfalls mit Hilfe der Killing-Form mit der Kommutatorunteralgebra $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, d.h. mit dem Nilradikal \mathfrak{n} von \mathfrak{g} , so ist Springer's Auflösung von $N(\mathfrak{g})$ gegeben durch den Morphismus (vgl. [70])

$$\begin{aligned} \mu : G \times^B (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* &\longrightarrow N(\mathfrak{g}) \\ g * n &\longmapsto \text{Ad}(g)(n). \end{aligned}$$

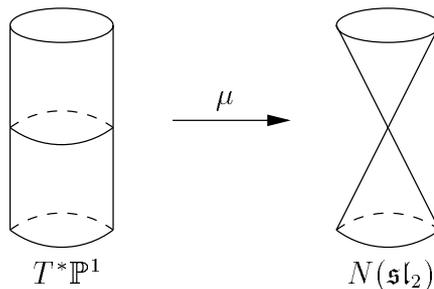
⁴Sogar als geometrischer Quotient, d.h. alle H -Bahnen sind abgeschlossen.

Bemerkung: Beachte, daß μ in der vorliegenden Situation gerade mit der Impulsabbildung übereinstimmt (die ja, wie oben erwähnt, auch in unserem “algebraischen” Kontext existiert).

Beispiel: Sei $G = \mathrm{SL}_2$ und $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$. Die Quotientenabbildung weist g seine Determinante zu:

$$\begin{aligned} \pi : \mathfrak{sl}_2 &\longrightarrow k \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} &\longmapsto -x^2 - yz . \end{aligned}$$

Die Nullfaser ist daher durch die Gleichung $x^2 + yz = 0$ gegeben und besteht aus zwei Bahnen, nämlich der trivialen und der (zweidimensionalen) regulären Bahn. Ferner identifiziert sich G/B gerade mit der projektiven Geraden \mathbb{P}^1 und Springer’s Auflösung $\mu : T^*\mathbb{P}^1 \longrightarrow N(\mathfrak{sl}_2)$ ist gegeben durch den Kollaps des Nullschnittes in $T^*\mathbb{P}^1$:



Bemerkung: Die Fasern von μ sind auch für sich genommen von Interesse und sind von verschiedenen Autoren untersucht worden, siehe z.B. [70], [10], [74] und die dort angegebenen Referenzen. Insbesondere tragen ihre höchsten Homologien Springer’s Darstellungen der Weylgruppe W von G .

Im Fall des adjungierten Quotienten hat man zu einem instabilen (d.h. nilpotenten) Element x nicht nur eine optimale destabilisierende Einparameter-Untergruppe, sondern sogar einen Homomorphismus $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}$ mit der Eigenschaft, daß $\varrho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x$; es gilt nämlich das

Theorem 1.5.1 (Jacobson-Morozov) *Für jedes nilpotente Element x einer reductiven Lie-Algebra \mathfrak{g} existiert ein Homomorphismus $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \mathfrak{g}$ von Lie Algebren mit $\varrho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x$; alle solchen Homomorphismen sind unter dem Zentralisator $Z_G(x)$ von x in der adjungierten Gruppe G zueinander konjugiert.*

Bemerkung: Der Zusammenhang mit den optimalen 1-PUG läßt sich folgendermaßen herstellen: Sei $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent und ϱ ein Jacobson-Morozov-Homomorphismus für x . Bezeichne mit $R : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$ den induzierten Homomorphismus algebraischer Gruppen. Ist $\iota : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathrm{SL}_2$ der natürliche Homomorphismus

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

und definiert man $\lambda := R \circ \iota$, so ist λ im wesentlichen (d.h. eventuell bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$, vgl. [40] oder [71]) optimal für x .

Sei jetzt $G.X$ die Bahn eines nilpotenten Elementes $X \in \mathfrak{g}$ und $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Jacobson-Morozov-Morphismus für X ; setze $H := \varrho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $Y := \varrho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sei $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$ der Zentralisator von Y in \mathfrak{g} ; dann ist $S := X + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$ eine transversale Scheibe an $G.X$ in X [70]: Da $T_X(G.X) = X + [X, \mathfrak{g}]$, hat eine transversale Scheibe die Form $s = X + \mathfrak{z}$, wobei \mathfrak{z} ein beliebiges (lineares) Komplement zu $[X, \mathfrak{g}]$ ist. Durch Verknüpfen mit der adjungierten Darstellung $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ läßt sich \mathfrak{g} als \mathfrak{sl}_2 -Modul auffassen, und durch Ausreduktion ergibt sich eine Zerlegung in irreduzible \mathfrak{sl}_2 -Moduln:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_i E_i .$$

Ferner ist

$$[X, \mathfrak{g}] = \mathrm{ad}(X)(\mathfrak{g}) = \bigoplus_i \mathrm{ad}(X)(E_i) ;$$

als Konsequenz der Darstellungstheorie von \mathfrak{sl}_2 ist nun aber $\mathfrak{z}_{E_i}(Y) = \{e \in E_i \mid [e, Y] = 0\}$ ein lineares Komplement zu $\mathrm{ad}(X)(E_i)$ in E_i , und daher $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y) = \bigoplus_i \mathfrak{z}_{E_i}(Y)$ ein Komplement zu $[X, \mathfrak{g}]$ in \mathfrak{g} .

Mit anderen Worten: Das Jacobson-Morozov Theorem gestattet die Konstruktion einer transversalen Scheibe an eine nilpotente Bahn; S trifft $G.X$ nur in X , schneidet ausschließlich solche nilpotenten Bahnen, deren Abschlüsse den Orbit $G.X$ enthalten, und diese transversal [72].

Sei nun $X \in \mathfrak{g}$ nilpotent, $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Jacobson-Morozov-Homomorphismus für X , $R : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$ der zugehörige Gruppenhomomorphismus, $\iota : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathrm{SL}_2$ wie oben der natürliche Homomorphismus und $\lambda := R \circ \iota$; bezeichne mit $\lambda^{-1} : t \mapsto (\lambda(t))^{-1}$ die zu λ inverse Gruppe. Sei $\sigma : \mathbf{G}_m \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ die gewöhnliche skalare Multiplikation und betrachte die \mathbf{G}_m -Aktion

$$\begin{aligned} j : \mathbf{G}_m \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (t, x) &\longmapsto (\sigma(t^2) \circ \mathrm{Ad}(\lambda(t^{-1}))) (x) . \end{aligned}$$

Benutzt man die Darstellungstheorie von \mathfrak{sl}_2 , um eine explizite Form für die Wirkung j zu erhalten [70], so findet man, daß diese G_m -Aktion den nilpotenten Punkt X invariant läßt, die transversale Scheibe S stabilisiert, und daß alle Punkte in S für $t \rightarrow 0$ nach X spezialisieren.

Sei r der Rang von G und seien $m_j, j = 1, \dots, r$, die Exponenten von \mathfrak{g} . Nach dem oben bereits erwähnten Resultat von Chevalley läßt sich der adjungierte Quotient als Morphismus $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_r) : \mathfrak{g} \rightarrow k^r$, realisieren, wobei die χ_j homogene Erzeuger des Invariantenringes $k[\mathfrak{g}]^G$ vom Grad $d_j = m_j + 1$ sind. Läßt man G_m vermöge j auf S und mit Gewichten $2d_j$ auf $\mathfrak{g}/G \cong k^r$ operieren, so wird die Einschränkung von χ auf die Scheibe S G_m -äquivariant [70]; es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \chi_j(j(t).s) &= \chi_j((\sigma(t^2) \circ \text{Ad}(\lambda(t^{-1}))).s) \\ &= \chi_j(\sigma(t^2).s) \\ &= t^{2d_j} \chi_j(s) . \end{aligned}$$

Nun ist es zwar nicht richtig, daß ausschließlich Elemente in der Scheibe für $t \rightarrow 0$ nach X spezialisieren⁵; aber alle solchen Elemente können mit Hilfe des unipotenten Radikals $U(\lambda^{-1})$ der zu λ^{-1} assoziierten parabolischen Untergruppe $P(\lambda^{-1})$ in die Scheibe "transportiert" werden. Genauer gilt das folgende

Lemma 1.5.1 Sei $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}(i)$ die Gewichtsraumzerlegung von \mathfrak{g} bezüglich λ . Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : U(\lambda^{-1}) \times S &\longrightarrow \bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i) \\ (u, s) &\longmapsto \text{Ad}(u)(s) \end{aligned}$$

ein G_m -äquivarianter Isomorphismus von Varietäten.

Beweis: Wegen $X \in \mathfrak{g}(2)$ definiert die adjungierte Wirkung eine lineare Abbildung

$$\text{ad}(X) : \bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}(i) \longrightarrow \bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i) ,$$

denn als Folge der Jacobi-Identität gilt ja: $[\mathfrak{g}(i), \mathfrak{g}(j)] \subset \mathfrak{g}(i + j)$. Aus der Darstellungstheorie von \mathfrak{sl}_2 ergibt sich nun zum einen, daß diese Abbildung injektiv ist und zum anderen, daß ihr Bild ein lineares Komplement zu $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y)$ ist (s.o.). Ferner ist $\bigoplus_{i < 0} \mathfrak{g}(i)$ gerade die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(\lambda^{-1})$ von $U(\lambda^{-1})$; somit erhält man einen linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} D_{(0,x)}\varphi : \mathfrak{u}(\lambda^{-1}) \oplus \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y) &\longrightarrow \bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i) \\ (n, z) &\longmapsto \text{ad}(X)(n) + z . \end{aligned}$$

⁵Vielmehr gilt $\{x \in \mathfrak{g} \mid \lim_{t \rightarrow 0} j(t)(x) = X\} = X \oplus \bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i)$.

Folglich ist φ zunächst ein lokaler analytischer Isomorphismus von Varietäten. Darüber hinaus gilt (für $u \in U(\lambda)^{-1}$ und $s \in S$):

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\lambda(t^{-1}).u)(j(t).s) &= \lambda(t^{-1})u\lambda(t)\sigma(t^2)\lambda(t^{-1})s\lambda(t)\lambda(t^{-1})u^{-1}\lambda(t) \\ &= \sigma(t^2)\lambda(t^{-1})usu^{-1}\lambda(t) \\ &= j(t).\text{Ad}(u)(s) ; \end{aligned}$$

läßt man daher G_m auf $U(\lambda^{-1})$ vermöge λ^{-1} , auf S vermöge j und auf $\bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i)$ ebenfalls vermöge j operieren, so ist φ bezüglich dieser G_m -Aktionen äquivariant. Da die Gewichte dieser Aktionen sämtlich positiv sind, vgl. [70], folgt mit [72], Lemma 8.1, zusammen mit der Isomorphie des Differentials $D_{(0,x)}\varphi$ die Behauptung. ■

Sei nun X_+ ein nilpotentes Element in \mathfrak{g} , ϱ_+ ein Jacobson-Morozov-Homomorphismus für X_+ und $S_+ := X_+ + \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(Y_+)$ die mit Hilfe von ϱ_+ konstruierte transversale Scheibe an $G.X_+$. Sei \mathcal{O}_- die Bahn eines beliebigen nilpotenten Elementes in \mathfrak{g} ; wir wollen den Durchschnitt $\mathcal{O}_- \cap S_+$ geometrisch beschreiben. Aus den bisherigen Ausführungen ergibt sich, daß

- $\mathcal{O}_- \cap S_+$ überhaupt nur dann nicht leer ist, wenn $G.X_+$ im Abschluß von \mathcal{O}_- enthalten ist;
- wir insbesondere eine Beschreibung von \mathcal{O}_- erhalten, falls X_+ (und damit ϱ_+) trivial ist.

Bemerkenswerterweise parametrisiert $\mathcal{O}_- \cap S_+$ eine gewisse Klasse von SL_2 -äquivarianten Bündeln über der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 ; dies soll im folgenden erläutert werden. Zunächst stellen wir die relevanten Begriffe vor.

Definition 1.5.2 *Unter einem SL_2 -äquivarianten G -Prinzipalbündel versteht man ein G -Prinzipalbündel $\pi : X \rightarrow Y$ mit einer algebraischen SL_2 -Aktion von links auf X und Y derart, daß π SL_2 -äquivariant ist, d.h. π vertauscht mit der gegebenen SL_2 -Aktion, und die SL_2 -Aktion mit der Rechtsaktion von G vertauscht.*

Betrachte folgende Aktion von SL_2 auf der projektiven Ebene \mathbb{P}^2 : Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine irreduzible Darstellung V_n von SL_2 der Dimension n ; SL_2 operiere auf \mathbb{P}^2 vermöge der Darstellung $V_1 \oplus V_2$. Unter dieser Aktion zerfällt \mathbb{P}^2 in drei Bahnen, nämlich in $\{0\}$, $k^2 \setminus \{0\}$ und eine Gerade \mathbb{P}^1 . Bezeichnet man mit B die Standard-Boreluntergruppe von SL_2 und mit U ihr unipotentes Radikal, so identifizieren sich diese Bahnen mit den homogenen Räumen $\text{SL}_2/\text{SL}_2 \cong \{0\}$, $\text{SL}_2/U \cong k^2 \setminus \{0\}$ und $\text{SL}_2/B \cong \mathbb{P}^1$. Wir interessieren uns für G -Prinzipalbündel über \mathbb{P}^2 , die bezüglich dieser SL_2 -Aktion auf

der Basis äquivariant sind, d.h. solche, für die die obige Aktion zu einer SL_2 -Aktion auf $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ liftet. Als Konsequenz der Definition haben wir für jeden Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ eine Aktion des Stabilisators $\Sigma_p := \{g \in \mathrm{SL}_2 \mid g.p = p\}$ von p auf der Faser über p , d.h. einen Morphismus $\Sigma_p \times G \rightarrow G$; da die Linksaktion von Σ_p auf der Faser aber mit der Rechtsaktion von G auf sich vertauscht, erhalten wir einen Homomorphismus $\Phi_p : \Sigma_p \rightarrow G$ algebraischer Gruppen; dies gibt Anlaß zu folgender

Definition 1.5.3 Sei $\pi : X \rightarrow Y$ ein SL_2 -äquivariantes G -Prinzipalbündel und $y \in Y$; dann ist eine **Rahmung** von $\pi : X \rightarrow Y$ in y eine Fixierung der Aktion des Stabilisators Σ_y von y auf der Faser $\pi^{-1}(y) \cong G$ (und damit eine Fixierung des Homomorphismus $\Phi_y : \Sigma_y \rightarrow G$)⁶. Fixiert man Φ_y nur bis auf Konjugation in G , so sprechen wir von einer **schwachen Rahmung**. Sind über verschiedenen Punkten y_1, \dots, y_n Rahmungen bzw. schwache Rahmungen gegeben, so bezeichnen wir das entsprechende Bündel mit $(X, \pi, Y; \Phi_{y_1}, \dots, \Phi_{y_n})$.

Sei $R_+ : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$ der durch ϱ_+ induzierte Homomorphismus; entsprechend ist zu einem Jacobson-Morozov-Homomorphismus ϱ_- für $X_- \in \mathcal{O}_-$ ein Homomorphismus $R_- : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$ assoziiert. Wir können jetzt die "gewisse Klasse" der durch $\mathcal{O}_- \cap S_+$ parametrisierten Bündel spezifizieren.

Satz 1.5.4 $\mathcal{O}_- \cap S_+$ parametrisiert Isomorphieklassen von SL_2 -äquivarianten G -Prinzipalbündeln $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_-|_U, R_+|_B)$ über der projektiven Ebene, die über $\mathrm{SL}_2/B \cong \mathbb{P}^1$ trivial sind, über einem (und damit jedem) Punkt $p \in \mathrm{SL}_2/B$ mit der durch ϱ_+ induzierten Rahmung und über einem beliebig aber fest gewählten Punkt $p' \in \mathrm{SL}_2/U$ mit der durch ϱ_- induzierten schwachen Rahmung versehen sind.

Beweis: Es ist bequem, zu dem zur Prinzipalfaserung $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ und der adjungierten Wirkung von G auf \mathfrak{g} assoziierten Vektorbündel über \mathbb{P}^2 mit Faser \mathfrak{g} überzugehen. Wir führen den Beweis im wesentlichen in zwei Schritten; zunächst überlegen wir uns, daß beim "Verkleben" des Bündels über den beiden Bahnen $\{0\}$ und $k^2 \setminus \{0\}$ keinerlei Freiheit besteht und somit keine Parameter (oder "Moduli") auftreten. Jedes SL_2 -äquivariante Vektorbündel über k^2 (mit der natürlichen Aktion von SL_2 auf k^2) ist nämlich trivial; dies läßt sich leicht einsehen: Sei $p \in k^2 \setminus \{0\}$; da jede U -Darstellung Einschränkung einer Darstellung von SL_2 ist (vgl. [40]), liftet die U -Aktion auf der Faser $\pi^{-1}(p) \cong \mathfrak{g}$ zu einer SL_2 -Aktion. Der Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2 \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{SL}_2 \times \mathfrak{g} \\ (g, x) &\longmapsto (g, g.x) \end{aligned}$$

⁶D.h. wir legen die Wirkung der Generatoren von Σ_y auf der Faser bzw. ihre Bilder in G unter Φ_y fest.

induziert dann einen SL_2 -äquivalenten Isomorphismus

$$\mathrm{SL}_2 \times^U \mathfrak{g} \cong \mathrm{SL}_2/U \times \mathfrak{g},$$

d.h. jedes SL_2 -äquivalente \mathfrak{g} -Bündel über $k^2 \setminus \{0\}$ ist trivial. Es gibt aber genau ein SL_2 -äquivalentes Bündel (mit Faser \mathfrak{g}), über k^2 , das auf $k^2 \setminus \{0\}$ mit dem trivialen Bündel $\mathrm{SL}_2/U \times \mathfrak{g}$ übereinstimmt (mit "echter" Aktion auf SL_2/U und \mathfrak{g}), nämlich das triviale Bündel.

Im zweiten Schritt untersuchen wir die Freiheit beim "Verkleben" des Bündels über $\mathrm{SL}_2/U \cup \mathrm{SL}_2/B$; hierzu bemerken wir zunächst, daß $k^2 \setminus \{0\} \cup \mathbb{P}^1$ isomorph ist zum Hyperebenenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ über der projektiven Geraden, d.h. wir betrachten SL_2 -äquivalente Vektorbündel über $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Da jedes SL_2 -äquivalente Vektorbündel über $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ aufgrund der Homogenität durch seine Einschränkung auf eine Faser von $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \rightarrow \mathbb{P}^1$ bereits vollständig bestimmt ist, können wir uns auf die Faser $L_\infty \cong k$ über einem Punkt $\{\infty\} \in \mathbb{P}^1$ einschränken und haben daher folgende Situation vorliegen: Für $z \neq 0$, $z \in k$, operiert U auf der Faser $\pi^{-1}(z)$ des Bündels $k \times \mathfrak{g} \rightarrow k$, und auf $\pi^{-1}(0)$ haben wir eine B -Aktion (die zu einer SL_2 -Aktion liften muß, da das Bündel $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ über der "unendlichen Geraden" SL_2/B trivial sein soll). Als Konsequenz der Rahmung unterliegt die resultierende Aktion von $B = T \times U$ ($T \cong \mathbf{G}_m$ ein maximaler Torus von SL_2) auf $k \times \mathfrak{g}$ nun starken Restriktionen. Sei $\lambda_+ := R_+ \circ \iota$ und J_+ die durch λ_+ induzierte \mathbf{G}_m -Aktion auf \mathfrak{g} , d.h.

$$\begin{aligned} J_+ : \mathbf{G}_m \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (t, x) &\longmapsto (\sigma(t^2) \circ \mathrm{Ad}(\lambda_+(t^{-1}))) (x). \end{aligned}$$

Betrachte den Punkt $(0, 0) \in k \times \mathfrak{g}$. Die \mathbf{G}_m -Aktion auf $k \times \mathfrak{g}$ ist nun vollständig lokal, d.h. durch die \mathbf{G}_m -Aktion auf $T_{(0,0)}(k \times \mathfrak{g}) = T_{(0,0)}k \times T_{(0,0)}\mathfrak{g}$ bestimmt. Diese ist ihrerseits durch die U -Aktion auf der Faser über dem Basispunkt $(0, 0)$ festgelegt (da jede U -Darstellung Einschränkung einer SL_2 -Darstellung ist), und T operiert auf $k \times \mathfrak{g}$ notwendigerweise vermöge

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_m \times k \times \mathfrak{g} &\longrightarrow k \times \mathfrak{g} \\ (t, z, x) &\longmapsto (t^{-1}z, \lambda_+(t).x). \end{aligned}$$

Statt der U -Aktion betrachten wir (äquivalent dazu) die Wirkung der Lie-Algebra $\mathfrak{u} \cong \mathfrak{kn}$ von U ; für die Operationen von T und \mathfrak{u} muß folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt sein:

$$(t \circ n \circ t^{-1}).(z, x) = (t^2 \cdot n).(z, x),$$

wobei $(t^2 \cdot n)$ die skalare Multiplikation in \mathfrak{u} meint. Die Rahmung impliziert ferner, daß n für $z = 0$ durch (Adjunktion mit) X_+ operieren soll.

Außerdem soll über dem “dicken” Orbit, d.h. für ein festes $z \neq 0$ auf der Geraden L_∞ , n vermöge (Adjunktion mit) einem Element $X_- \in \mathcal{O}_-$ wirken; wir setzen daher an:

$$n.(z, x) = (z, j_+(z)(X_-).x),$$

und prüfen zunächst die Verträglichkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} (t \circ n \circ t^{-1}).(z, x) &= (t \circ n).(tz, \lambda_+(t^{-1}).x) \\ &= t.(tz, j_+(tz)(X_-)\lambda_+(t^{-1}).x) \\ &= (z, \lambda_+(t)j_+(tz)(X_-)\lambda_+(t^{-1}).x) \\ &= (z, \lambda_+(t)\sigma(t^2 z^2)\lambda_+(z^{-1}t^{-1})X_- \lambda_+(tz)\lambda_+(t^{-1}).x) \\ &= (z, \sigma(t^2 z^2)\lambda_+(z^{-1})X_- \lambda_+(z).x) \\ &= (z, \sigma(t^2)j_+(z)(X_-).x) \\ &= (t^2 \cdot n).(z, x). \end{aligned}$$

Damit nun auch die Bedingung

$$\lim_{z \rightarrow 0} n.(z, x) = (0, \text{Ad}(X_+)(x))$$

erfüllt ist, muß X_- nach Fußnote 5 in $X_+ \oplus \bigoplus_{i < 2} \mathfrak{g}(i)$ liegen, kann also nach Lemma 1.5.1 mit Hilfe von $U(\lambda_+^{-1}) = \{g \in G \mid \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_+(z^{-1})g\lambda_+(z) = e\}$ in die Scheibe S_+ transportiert werden. Die Transformation $X_- \mapsto u.X_-$, $u \in U(\lambda_+^{-1})$ ist aber ein “gerahmter” Bündelautomorphismus von $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_-|_U, R_+|_B)$.

Somit haben wir folgende Bijektion etabliert: Jedes SL_2 -äquivariante G -Bündel $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_-|_U, R_+|_B)$ über \mathbb{P}^2 induziert vermöge der Rahmungen zwei Homomorphismen $R_-, R_+ : \text{SL}_2 \rightarrow G$ algebraischer Gruppen und mithin zwei Homomorphismen $\varrho_-, \varrho_+ : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$. Die Bilder von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ unter ϱ_- bzw. ϱ_+ liefern dann ein Paar (X_-, X_+) von nilpotenten Elementen in \mathfrak{g} . Da R_- lediglich von einer schwachen Rahmung herrührt, liegt X_- zwar nicht notwendigerweise in S_+ , aber es existiert stets eine (gerahmte) Eichtransformation, die X_- in die Scheibe hineintransportiert; gegebenenfalls nach Anwendung eines solchen Bündelautomorphismus (d.h. durch Übergang zu einem zum ursprünglichen äquivalenten Bündel) hat man also (der Äquivalenzklasse von) $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_-|_U, R_+|_B)$ einen Punkt $X_- \in \mathcal{O}_- \cap S_+$ zugeordnet.

Identifiziert man umgekehrt einen Punkt $X_- \in \mathcal{O}_- \cap S_+$ mit dem Paar (X_-, X_+) , so ist zu einem solchen Paar auf folgende Weise ein SL_2 -äquivariantes gerahmtes G -Bündel über \mathbb{P}^2 assoziiert: (X_-, X_+) induziert vermöge des Jacobson-Morozov-Theorems ein Paar ϱ_-, ϱ_+ von Homomorphismen von \mathfrak{sl}_2 nach \mathfrak{g} (eindeutig bis auf Konjugation mit Elementen des Zentralisators von X_- bzw. X_+ in der adjungierten

Gruppe, siehe oben) und somit via Exponentiation Homomorphismen $R_-, R_+ : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$ algebraischer Gruppen. R_+ bzw. R_- liefern dann eine Rahmung bzw. eine schwache Rahmung des SL_2 -äquivarianten G -Bündels und man erhält das zu $X_- \in \mathcal{O}_- \cap S_+$ (bzw. zu (X_-, X_+)) assoziierte Bündel $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_-|_U, R_+|_B)$. Damit ist der Satz bewiesen. ■

1.6 Nilpotente Bahnen und Instantonen

Die Überlegungen des vorherigen Abschnittes sind motiviert durch ein auf P. Kronheimer [43] zurückgehendes Resultat über einen Zusammenhang zwischen nilpotenten Bahnen und Modulräumen von sogenannten *Instantonen*; letztere spielen in der Physik eine Rolle, da sie spezielle Lösungen der Yang-Mills Gleichungen sind. Was sind Instantonen (aus mathematischer Sicht)? Sei X eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (in unserem Fall wird X der vierdimensionale Euklidische Raum \mathbb{R}^4 bzw. seine konforme Kompaktifizierung S^4 sein) und E ein Hermitesches Vektorbündel über X vom Rang r (äquivalent dazu könnten wir auch ein $U(r)$ -Prinzipalbündel betrachten).⁷ Einen Zusammenhang A in E kann man vermöge einer kovarianten Ableitung d_A auf E definieren, d.h. durch eine lineare Abbildung

$$d_A : \Omega_X^0(E) \longrightarrow \Omega_X^1(E),$$

welche die Leibniz-Regel

$$d_A(fs) = f d_A(s) + df \cdot s$$

erfüllt; hierbei bezeichnet $\Omega_X^p(E)$ den Raum der bündelwertigen p -Formen auf X (d.h. den Raum der glatten Schnitte in $\wedge^p T^*X \otimes E$), f eine glatte, komplexwertige Funktion auf X und s einen Schnitt in E . Diese kovariante Ableitung induziert in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung (die wir ebenfalls mit d_A bezeichnen)

$$d_A : \Omega_X^p(E) \longrightarrow \Omega_X^{p+1}(E),$$

die der verallgemeinerten Leibniz-Regel

$$d_A(\alpha \wedge \beta) = (d_A \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d_A \beta, \quad \alpha \in \Omega_X^p(E), \beta \in \Omega_X^q(E)$$

genügt. Folglich ist die Differenz zweier Zusammenhänge eine $E \otimes E^*$ -wertige 1-Form auf X , so daß der Raum aller Zusammenhänge in E ein (unendlich-dimensionaler) affiner Raum ist. Ganz ähnlich überlegt man sich, daß der Raum \mathcal{A} der unitären Zusammenhänge (dies sind

⁷Statt mit Vektorbündeln kann man allgemeiner auch mit K -Bündeln über X arbeiten, wobei K eine beliebige kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe ist

solche, die mit der Hermiteschen Struktur auf E verträglich sind) ein affiner Raum ist (mit Modellen im Raum der 1-Formen mit Werten in dem Bündel $\text{End}(E)$ der schief-adjungierten Endomorphismen von E). Ferner kommutiert

$$d_A \circ d_A : \Omega_X^0(E) \longrightarrow \Omega_X^2(E)$$

mit der Multiplikation mit glatten Funktionen. Für einen beliebigen glatten Schnitt s in E gilt daher

$$d_A \circ d_A(s) = F_A s ,$$

wobei $F_A \in \Omega_X^2(\text{End}(E))$. Die bündelwertige 2-Form F_A ist die Krümmung des unitären Zusammenhanges A . Das Yang-Mills Funktional auf \mathcal{A} ordnet einem Element $A \in \mathcal{A}$ das Quadrat der L^2 -Norm der zugehörigen Krümmungsform F_A zu:

$$S_{YM}(A) = \|F_A\|^2 = \int_X |F_A|^2 \text{vol}_g ;$$

hierbei ist die Volumenform vol_g durch die Riemannsche Metrik g auf X und die Orientierung gegeben. Die Yang-Mills Gleichungen sind gerade die Euler-Lagrange Gleichungen für das Funktional S_{YM} , und lassen sich mit Hilfe des Hodge-Operators $*$ in der Form

$$d_A * F_A = 0$$

schreiben. Insbesondere erhält man für $K = U(1)$ die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik.

Sei nun speziell $\dim_{\mathbb{R}} X = 4$. Dann induziert der Hodge-Operator eine Aufspaltung

$$\Omega_X^2(\text{End}(E)) = \Omega_+^2(\text{End}(E)) \oplus \Omega_-^2(\text{End}(E)) ,$$

und damit eine Zerlegung der Krümmungsform in

$$F_A = F_A^+ \oplus F_A^- .$$

Definition 1.6.1 Ein Zusammenhang A in E heißt **anti-selbstdual** (kurz: **ASD**) oder ein **Instanton**, falls $F_A^+ = 0$.

Nun sind die Yang-Mills Gleichungen noch invariant unter der Gruppe \mathcal{K} der unitären Automorphismen von E . Ihre Lösungen werden daher (grob gesprochen, vgl. nachstehende Bemerkung) parametrisiert durch einen Raum $\mathcal{B} := \mathcal{A}_{YM}/\mathcal{K}$ von Äquivalenzklassen unitärer Zusammenhänge in E (d.h. durch den Raum der \mathcal{K} -Bahnen in \mathcal{A}_{YM}), und der Modulraum der Instantonen ist ein endlich-dimensionaler (!) Unterraum von \mathcal{B} , vgl. [11].

Bemerkung: Wir haben die Situation stark vereinfacht dargestellt. Betrachtet man nämlich den Modulraum der *glatten* Zusammenhänge, so erhält man ein Objekt, das nicht in der Kategorie der (differenzierbaren) Banach-Mannigfaltigkeiten liegt; die auftretende Schwierigkeit sei anhand der Eichtransformationen verdeutlicht. Seien X eine kompakte, glatte Mannigfaltigkeit, K eine kompakte Lie-Gruppe (z.B. $SU(r)$) und $\text{Map}(X, K)$ die Gruppe der *glatten* Abbildungen von X in K . $\text{Map}(X, K)$ ist eine (unendlich-dimensionale) Lie-Gruppe (mit Modellen in $\text{Map}(X, \mathfrak{k})$): Sei U eine offene Umgebung der Eins in K , die vermöge der Exponentialabbildung homöomorph ist zu einer offenen Menge \check{U} in \mathfrak{k} ; dann ist $\mathcal{U} = \text{Map}(X, U)$ eine offene Umgebung der Identität in $\text{Map}(X, K)$, welche homöomorph ist zu einer offenen Menge $\check{\mathcal{U}} = \text{Map}(X, \check{U})$ in dem Raum $\text{Map}(X, \mathfrak{k})$. Die Mengen $\mathcal{U}_f = \mathcal{U} \cdot f$, $f \in \text{Map}(X, K)$, sind dann ebenfalls homöomorph zu $\check{\mathcal{U}}$ und induzieren einen Atlas. **Aber:** Die Topologie auf $\text{Map}(X, \mathfrak{k})$ ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und aller ihrer partiellen Ableitungen; hierdurch wird $\text{Map}(X, \mathfrak{k})$ zu einem Fréchet-, nicht jedoch zu einem Banachraum! Methoden und Techniken aus der Theorie der Banach-Mannigfaltigkeiten sind jedoch an zahlreichen Stellen essentiell; man muß daher zunächst bezüglich einer (geeigneten) Sobolev-Norm vervollständigen und anschließend die Unabhängigkeit des Modulraumes vom Sobolev-Index zeigen [11].

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun Kronheimer's Resultat erläutern. Sei dazu \mathfrak{k} die Lie-Algebra einer kompakten, zusammenhängenden halbeinfachen Lie-Gruppe K und G die Komplexifizierung von K . Identifiziere $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ mit dem Raum $L(\mathfrak{su}(2), \mathfrak{k})$ der linearen Abbildungen von $\mathfrak{su}(2)$ nach \mathfrak{k} vermöge der Zuordnung

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \ni (A_1, A_2, A_3) \longmapsto A : e_i \mapsto A_i \in L(\mathfrak{su}(2), \mathfrak{k}) .$$

Hierbei ist (e_1, e_2, e_3) eine Basis von $\mathfrak{su}(2)$ mit Relationen

$$-2e_1 = [e_2, e_3] \quad -2e_2 = [e_3, e_1] \quad -2e_3 = [e_1, e_2] .$$

Ein Element des Pfadraumes $\mathcal{P} := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, L(\mathfrak{su}(2), \mathfrak{k}))$ ist demnach gegeben durch ein Tripel

$$A(t) = (A_1(t), A_2(t), A_3(t)) ;$$

sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ der Unterraum bestehend aus solchen Pfaden $A(t)$, die dem

folgenden System von Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= -2A_1 - [A_2, A_3] \\ \frac{dA_2}{dt} &= -2A_2 - [A_3, A_1] \\ \frac{dA_3}{dt} &= -2A_3 - [A_1, A_2].\end{aligned}$$

Seien nun insbesondere $\varrho_-, \varrho_+ \in L(\mathfrak{su}(2), \mathfrak{k})$ Lie-Algebra-Homomorphismen und bezeichne mit $\mathcal{C}(\varrho_-) \subset L(\mathfrak{su}(2), \mathfrak{k})$ die Mannigfaltigkeit bestehend aus allen Homomorphismen, die unter der adjungierten Wirkung von K zu ϱ_- konjugiert sind. Sei $\mathcal{M}(\varrho_-, \varrho_+) \subset \mathcal{M}$ der Raum derjenigen Lösungen des obigen Differentialgleichungssystems, die den Randbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} A(t) \in \mathcal{C}(\varrho_-) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \varrho_+$$

genügen. Bezeichnet man der Einfachheit halber die Ausdehnungen von ϱ_- und ϱ_+ zu Homomorphismen komplexer Algebren mit denselben Symbolen, so gilt:

Theorem 1.6.1 (Kronheimer) $\mathcal{M}(\varrho_-, \varrho_+)$ und $\mathcal{O}_- \cap S_+$ sind diffeomorph.

Zur Interpretation von $\mathcal{M}(\varrho_-, \varrho_+)$ als Modulraum von Instantonen gelangt man durch folgende Überlegung: Man faßt $\mathfrak{su}(2)$ als Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf $SU_2 \cong S^3$ auf; aus dieser Sicht wird A zu einer Lie-Algebra-wertigen 1-Form, d.h. zu einer Zusammenhangsmatrix, auf S^3 , die als Folge der Linksinvarianz einen invarianten Zusammenhang in einem SU_2 -äquivarianten K -Prinzipalbündel $P \rightarrow S^3$ definiert. Obiges Gleichungssystem ist in der mathematischen Physik bekannt als die Gradientenflußgleichung des sogenannten Chern-Simons Funktionals, vgl. [11], und ihre Lösungen (d.h. also die Elemente von \mathcal{M}) stehen in eineindeutiger Beziehung zu $SU(2)$ -invarianten Lösungen der anti-selbstdualen Yang-Mills Gleichungen auf dem Zylinder $S^3 \times \mathbb{R}$ über S^3 [19]. Die Randbedingungen stellen sicher, daß sich der ASD-Zusammenhang A auf die konforme Kompaktifizierung S^4 von $S^3 \times \mathbb{R}$ fortsetzen läßt. Die SU_2 -Aktion auf S^4 hat zwei Fixpunkte $\{0\}$ und $\{\infty\}$, so daß SU_2 auf den Fasern über diesen Punkten operiert, d.h. man erhält zwei Homomorphismen $R_-, R_+ : SU_2 \rightarrow K$ (die mit ϱ_-, ϱ_+ durch die Exponentialabbildung verknüpft sind). P.Kronheimer ist es damit gelungen, $\mathcal{M}(\varrho_-, \varrho_+)$ mit einem Modulraum gerahmter Instantonen zu identifizieren, der aus SU_2 -invarianten Instantonen modulo SU_2 -invarianter Eichtransformationen besteht, die im Unendlichen die Identität sind. Genauer: Sei

$$\mathcal{A}_{\text{ASD}}^{SU(2)} := \{A \in \mathcal{A}_{YM} \mid F_A^+ = 0, A \text{ ist } SU(2)\text{-invariant}\}$$

und

$$\mathcal{K}_0^{SU(2)} := \{g \in \mathcal{K} \mid g \text{ ist } SU(2)\text{-invariant, } g(\{\infty\}) = \text{id}\}.$$

Dann identifiziert sich $\mathcal{M}(\varrho_-, \varrho_+)$ mit dem Modulraum $\mathcal{A}_{\text{ASD}}^{SU(2)} / \mathcal{K}_0^{SU(2)}$ gerahmter Instantonen. Um das Bild zu vervollständigen sei erwähnt, daß das obige System von Differentialgleichungen durch die Substitutionen $T_i := \exp(2t)A_i$, $i = 1, 2, 3$, und $s := -\frac{1}{2} \exp(-2t)$ in die *Nahmschen Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= -[T_2, T_3] \\ \frac{dT_2}{dt} &= -[T_3, T_1] \\ \frac{dT_3}{dt} &= -[T_1, T_2] \end{aligned}$$

übergeht; diese Gleichungen sind von S.Donaldson [13] im Zusammenhang mit der Klassifikation magnetischer Monopole ausführlich untersucht worden (mit etwas anderen Randbedingungen). Wir fassen die Diskussion zusammen im

Korollar 1.6.1 *Es bestehen eindeutige Beziehungen zwischen*

- (i) SL_2 -äquivarianten gerahmten G -Prinzipalbündeln über der projektiven Ebene;
- (ii) SU_2 -invarianten gerahmten Instantonen über S^4 ;
- (iii) Lösungen der Nahmschen Gleichungen mit obigen Randbedingungen.

Bemerkung: Die Korrespondenz zwischen (i) und (ii) ist eine äquivariante Version eines Theorems von S.Donaldson [14], welches eine Bijektion zwischen gerahmten Instantonen über S^4 (mit Eichgruppe K) und holomorphen G -Bündeln über \mathbb{P}^2 mit gegebener Trivialisierung über der "Geraden im Unendlichen" etabliert. Donaldson's Beweis benutzt allerdings nicht die Geometrie nilpotenter Bahnen, sondern die *Penrose-Faserung* $\pi : \mathbb{P}^3 \rightarrow S^4$: Die Wahl einer komplexen Struktur auf \mathbb{R}^4 entspricht der Fixierung einer Ebene $P \subset \mathbb{P}^3$ durch die Faser $\pi^{-1}(\infty)$; die Einschränkung von π liefert den Isomorphismus $P \setminus \pi^{-1}(\infty) \cong \mathbb{R}^4$. Gemäß der Ward-Korrespondenz liftet ein anti-selbstdualer Zusammenhang über S^4 zu einem holomorphen Bündel über \mathbb{P}^3 , und eine Trivialisierung in $\infty \in S^4$ liftet zu einer Trivialisierung über $\pi^{-1}(\infty)$. Die Restriktion dieses Bündels über \mathbb{P}^3 auf P liefert dann die angegebene Beziehung.

Kehren wir noch einmal zurück zur allgemeinen Situation; wir haben in Abschnitt 1.4 bereits angedeutet, daß der Satz von Kempf-Ness eine unendlich-dimensionale Entsprechung hat. Wir schicken voraus, daß für das Folgende die Vervollständigung des Raumes \mathcal{A} der unitären Zusammenhänge essentiell ist, da eine Theorie der symplektischen Reduktion im unendlich-dimensionalen Kontext unseres Wissens nur für den Fall der Wirkung einer Hilbert-Lie-Gruppe auf einer Hilbert-Mannigfaltigkeit existiert, vgl. [28]. Sei also X speziell eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$ mit Kähler-Form ω und E ein Hermitesches Vektorbündel über X ; dann definiert

$$\Omega(\alpha, \beta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{Tr} (\alpha \wedge \beta) \wedge \omega^{n-1}, \quad \alpha, \beta \in \Omega_X^1(\text{End}(E)),$$

eine Kähler-Form auf dem Raum \mathcal{A} der unitären Zusammenhänge in E , und die Eichgruppe \mathcal{K} der unitären Bündelautomorphismen läßt Ω invariant. Die Lie-Algebra von \mathcal{K} ist gerade der Raum $\Omega_X^0(\text{End}(E))$ der Schnitte in $\text{End}(E)$, und es gilt [11], [56]:

Satz 1.6.1 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A} &\longrightarrow \Omega_X^{2n}(\text{End}(E)) \\ A &\longmapsto \frac{1}{8\pi^2} F_A \wedge \omega^{n-1} \end{aligned}$$

ist eine Impulsabbildung für die Aktion von \mathcal{K} auf \mathcal{A} .

Bemerkung: Wir identifizieren hierbei $\Omega_X^{2n}(\text{End}(E))$ mit $\Omega_X^0(\text{End}(E))^*$ vermöge Integration über X , vgl. [11].

Nun wissen wir einerseits, daß eine holomorphe Struktur \mathcal{E} in E einen Operator

$$\bar{\partial}_{\mathcal{E}} : \Omega_X^{p,q}(E) \longrightarrow \Omega_X^{p,q+1}(E)$$

definiert mit der Eigenschaft, daß ein Schnitt s in E holomorph ist genau dann, wenn $\bar{\partial}_{\mathcal{E}} s = 0$. Überdies existiert ein unitärer Zusammenhang

$$d_A : \Omega_X^0(E) \longrightarrow \Omega_X^1(E),$$

dessen $(0,1)$ -Komponente gerade $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}$ ist. Andererseits ist die $(0,1)$ -Komponente eines unitären Zusammenhanges d_A von der Form $\bar{\partial}_{\mathcal{E}}$ für eine (eindeutig bestimmte) holomorphe Struktur \mathcal{E} in E genau dann, wenn die zugehörige Krümmungsform F_A vom Typ $(1,1)$ ist. Somit können wir den Raum $\mathcal{A}^{(1,1)}$ der unitären Zusammenhänge mit

Krümmung vom Typ $(1, 1)$ mit dem Raum der holomorphen Strukturen in E identifizieren. $\mathcal{A}^{(1,1)}$ ist eine unendlich-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit in \mathcal{A} ⁸, und zwei holomorphe Strukturen sind isomorph genau dann, wenn sie in derselben \mathcal{G} -Bahn liegen; hierbei ist \mathcal{G} die Komplexifizierung der Eichgruppe \mathcal{K} .

Bemerkung: Das Quadrat der Norm von μ stimmt auf $\mathcal{A}^{(1,1)}$ bis auf eine Konstante mit dem Yang-Mills-Funktional $\|F_A\|^2$ überein [11].

Analog zur endlich-dimensionalen Situation hat man folgenden

Satz 1.6.2 *Jede \mathcal{G} -Bahn in $\mathcal{A}^{(1,1)}$ enthält höchstens eine \mathcal{K} -Bahn unitärer Yang-Mills Zusammenhänge⁹, und ein \mathcal{G} -Orbit enthält einen irreduziblen unitären Yang-Mills Zusammenhang genau dann, wenn der Orbit stabil ist, d.h. wenn das assoziierte holomorphe Bündel diese Eigenschaft besitzt.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in [11] oder [56].

Bemerkung: Im allgemeinen existieren “gute” Modulräume nur für stabile Bündel. In unserer Situation, d.h. für $X = \mathbb{P}^2$, stellt die Trivialisierung über \mathbb{P}^1 die Stabilität sicher [3].

⁸Die komplexe Struktur auf \mathcal{A} wird durch Identifikation eines unitären Zusammenhanges mit dem zugehörigen $\bar{\partial}$ -Operator induziert.

⁹ $A \in \mathcal{A}$ ist ein Yang-Mills Zusammenhang, falls

$$d_A * F_A = 0.$$

2 Parabolische Bündel und konforme Feldtheorien

Sei k wieder ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null, G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende einfache algebraische Gruppe und \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra. Statt der zu nilpotenten Elementen assoziierten Jacobson-Morozov Homomorphismen sollen jetzt jedoch die parabolischen Untergruppen von G im Vordergrund stehen mit dem Ziel, zum einen auch nicht nilpotente adjungierte Bahnen als Modulräume (parabolischer Bündel) zu realisieren, zum anderen, einen Funktor von der Kategorie der markierten algebraischen Kurven in die Kategorie der endlich-dimensionalen k -Vektorräume anzugeben, der den Axiomen einer (rationalen) konformen Quantenfeldtheorie genügt.

2.1 Familien, Deformationen und Modulräume

Ein zentraler Punkt in der konformen Feldtheorie ist die Konstruktion eines (projektiv flachen) Vektorbündels über dem Modulraum der n -punktierten Kurven; wie wir später sehen werden, stehen Schnitte in diesem Bündel nämlich in enger Beziehung zu den sogenannten n -Punkt-Funktionen der Theorie. Doch zunächst wollen wir einige Einzelheiten zum Modulraum der markierten algebraischen Kurven angeben.

Definition 2.1.1 Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata¹⁰ und $y \in Y$ ein Punkt. Ferner seien $k(y) := \mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y$ der zugehörige Restklassenkörper und $\text{Spec } k(y) \rightarrow Y$ der natürliche Morphismus. Dann definiert man die **Faser** von f über y als das Schema

$$X_y = X \times_Y \text{Spec } k(y).$$

Die Faser X_y ist ein Schema über $k(y)$, und der ihr unterliegende topologische Raum ist homöomorph zu $f^{-1}(y) \subset X$.

Beispiel: Seien

$$X := \text{Spec } k[x, y, z]/(zy - x^2)$$

und

$$Y := \text{Spec } k[z].$$

¹⁰Es ist natürlich, die etwas abstraktere Sprache der Schemata zu verwenden, auch wenn wir hauptsächlich an Varietäten (d.h. ganzen, separierten Schemata von endlichem Typ) interessiert sind, vgl. nachstehendes Beispiel. Die verwendeten Begriffe aus der algebraischen Geometrie findet man beispielsweise in dem Buch von R.Hartshorne [27] erläutert.

Der Morphismus $f : X \rightarrow Y$ sei durch den natürlichen Homomorphismus $k[z] \rightarrow k[x, y, z]/(zy - x^2)$ induziert. Dann sind X und Y ganz und von endlichem Typ über k ; außerdem ist f surjektiv. Identifiziere die abgeschlossenen Punkte von Y mit Elementen von k . Dann ist für ein von Null verschiedenes Element $a \in k$ die Faser X_a eine irreduzible, reduzierte Kurve in \mathbb{A}^2 , nämlich die durch $ay = x^2$ gegebene ebene Kurve; X_0 ist jedoch ein nicht-reduziertes Schema (nämlich — anschaulich gesprochen — eine “doppelte” Kurve)!

Wir können also einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ als eine Familie von Schemata (den Fasern) auffassen, die durch die Punkte von Y parametrisiert werden.

Definition 2.1.2 Sei X_0 ein festes Schema über k . Unter einer **Familie von Deformationen** von X_0 versteht man einen flachen Morphismus $f : X \rightarrow Y$, Y zusammenhängend, zusammen mit einem Punkt $y_0 \in Y$ derart, daß $k(y_0) = k$ und $X_{y_0} \cong X_0$. Die Fasern X_y , $y \neq y_0$, heißen auch **Deformationen** von X_0 .

Ähnliche Defomationsbegriffe hat man auch in einer Reihe anderer Fälle, beispielweise:

- Sei X ein Schema und E ein Vektorbündel über X . Eine durch ein Schema S parametrisierte Deformation mit Basispunkt $s_0 \in S$ ist ein Vektorbündel $\mathbb{E} \rightarrow X \times S$ zusammen mit einem Isomorphismus $\mathbb{E}_{s_0} \cong E$. Entsprechend kann man natürlich auch etwas allgemeiner Deformationen von G -Prinzipalbündeln über X betrachten.
- Für ein affines Schema X mit isolierter Singularität wird man auf die Deformationstheorie isolierter Singularitäten geführt.

Beispiel: Familien von Darstellungen, vgl.[41]. Sei G eine reductive Gruppe und X ein Schema. Wir erinnern daran, daß man unter einem G -Vektorbündel über X ein Vektorbündel $E \rightarrow X$ mit einer algebraischen G -Aktion versteht derart, daß

- die Projektion $\pi : E \rightarrow X$ G -äquivariant ist;
- die Aktion linear ist auf den Fasern $E_x := \pi^{-1}(x)$ (d.h. für alle $g \in G$ und $x \in X$ ist die Abbildung $v \mapsto g.v$ von E_x nach $E_{g.x}$ linear).

Ist insbesondere die Wirkung von G auf X trivial, so kann man ein G -Vektorbündel über X als algebraische Familie von Darstellungen auffassen (für jedes $x \in X$ operiert ja der Stabilisator $G_x \cong G$

auf der Faser E_x): Sei

$$\mathrm{Rep}_n(G) := \{\varrho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n \mid \varrho \text{ ist eine Darstellung}\}$$

die Menge der n -dimensionalen Darstellungen von G .

$\mathrm{Rep}_n(G)$ ist offenbar eine Untermenge der Menge aller Morphismen von G nach $M_n(k)$; letztere identifiziert sich ihrerseits mit $\mathcal{O}(G) \otimes M_n(k)$. Eine Abbildung $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Rep}_n(G)$ heiße *algebraisch*, falls das Bild von X in $\mathcal{O}(G) \otimes M_n(k)$ enthalten ist in einem endlich-dimensionalen Unterraum U derart, daß $\varphi : X \longrightarrow U$ ein Morphismus von Schemata ist; die algebraischen Abbildungen von X nach $\mathrm{Rep}_n(G)$ stehen dann in Bijektion mit den G -Vektorbndelstrukturen auf dem trivialen Bündel $X \times k^n \longrightarrow X$.

Das Modulproblem besitzt nun zwei Aspekte: Die lokale Theorie beschäftigt sich mit der Untersuchung des Parameterraumes in der Nähe des Basispunktes y_0 , während sich die globale Theorie — wie der Name schon sagt — mit globalen Eigenschaften befaßt. Die lokale Theorie ist im wesentlichen durch Arbeiten von M.Schlessinger [64] und M.Artin [2] recht gut verstanden, aber die globalen Aspekte sind nur in relativ wenigen Fällen in zufriedenstellendem Maße bekannt, beispielsweise für

- algebraische Kurven,
- Vektorbündel bzw. allgemeiner G -Prinzipalbündel über algebraischen Kurven [59], [62], [47],
- stabile Abbildungen algebraischer Kurven in projektive Schemata (ber \mathbb{C}) [20].

In den meisten Fällen, in denen das globale Modulproblem gelöst worden ist, hat sich Mumford's Geometrische Invariantentheorie als essentielles Hilfsmittel erwiesen. Leider besteht in der physikalischen Literatur zur konformen Feldtheorie häufig eine gewisse Verwirrung darüber, ob und in welchem Sinne Modulräume geometrischer Objekte existieren; wir wollen die auftretenden Schwierigkeiten anhand eines für uns später relevanten Beispiels erläutern, nämlich für den Modulraum projektiver, nichtsingulärer Kurven.

Wir betrachten zunächst Kurven vom Geschlecht $g = 1$, d.h. elliptische Kurven. Zur Beschreibung von Isomorphieklassen solcher Kurven ist es nützlich, sich eine (beliebige) elliptische Kurve \mathcal{E} als projektive ebene Kubik vorzustellen, und man überlegt sich leicht, daß man die affine definierende Gleichung in der speziellen Form $y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)$,

$\lambda \neq 0, 1$, wählen kann.¹¹ Bezeichne die zugehörige Kurve mit \mathcal{E}_λ . Nun sind zwei solche Kurven \mathcal{E}_λ und $\mathcal{E}_{\lambda'}$ genau dann isomorph, wenn es einen Automorphismus von \mathbb{P}^1 gibt, der $\{0, 1, \infty, \lambda\}$ in $\{0, 1, \infty, \lambda'\}$ überführt, was genau dann der Fall ist, wenn $\lambda' \in \{\lambda, 1 - \lambda, \lambda^{-1}, 1 - \lambda^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}, -\lambda(1 - \lambda)^{-1}\}$. Die Menge der Isomorphieklassen elliptischer Kurven ist somit gerade der Quotient von $k - \{0, 1\}$ nach der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_3 , und die rationale Funktion

$$j(\lambda) = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2}$$

liefert einen Isomorphismus zwischen diesem Quotienten und der affinen Geraden \mathbb{A}^1 . Mit anderen Worten: Der Modulraum \mathfrak{M}_1 algebraischer Kurven vom Geschlecht eins ist isomorph zu \mathbb{A}^1 , trägt also auf natürliche Weise die Struktur einer algebraischen Varietät.

Allgemeiner ist der Modulraum \mathfrak{M}_g der Isomorphieklassen von projektiven, nichtsingulären algebraischen Kurven vom Geschlecht g zunächst einmal nur eine Menge; man möchte \mathfrak{M}_g jedoch aus naheliegenden Gründen gerne mit einer algebraischen Struktur versehen. Im günstigsten Fall könnte man hoffen, \mathfrak{M}_g in folgendem Sinne als universellen Parameterraum für Familien von Kurven vom Geschlecht g zu realisieren: Fordere die Existenz einer flachen Familie $\mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{M}_g$ von Kurven (vom Geschlecht g) derart, daß für jede andere solche Familie $X \rightarrow T$ ein eindeutiger Morphismus $T \rightarrow \mathfrak{M}_g$ existiert mit der Eigenschaft, daß X der Pullback von \mathcal{X} ist. \mathfrak{M}_g wäre dann ein sogenannter *feiner Modulraum*; unglücklicherweise existiert ein solcher feiner Modulraum weder im Fall algebraischer Kurven noch für die meisten anderen geometrischen Objekte, wie z.B. Vektorbündel über Kurven oder die oben erwähnten stabilen Abbildungen von Kurven in ein projektives Schema. Die obige universelle Eigenschaft kann jedoch abgeschwächt werden in einer Weise, die die Existenz (sogar als quasiprojektive Varietät) von Parameterräumen für Kurven beliebigen Geschlechts sicherstellt.

Definition 2.1.3 *Unter einem groben Modulraum projektiver algebraischer Kurven vom Geschlecht g versteht man ein Schema \mathfrak{M}_g mit folgenden Eigenschaften:*

- *Die abgeschlossenen Punkte von \mathfrak{M}_g stehen in Bijektion mit den Isomorphieklassen von (nichtsingulären) Kurven vom Geschlecht g .*
- *Für eine beliebige flache Familie $X \rightarrow T$ von Kurven vom Geschlecht g gibt es einen Morphismus $h : T \rightarrow \mathfrak{M}_g$ derart, daß X_t*

¹¹Äquivalent dazu kann man \mathcal{E} als verzweigte zweifache Überlagerung von \mathbb{P}^1 mit Verzweigungspunkten $0, 1, \infty$ und λ auffassen.

für jeden abgeschlossenen Punkt $t \in T$ in der durch $h(t) \in \mathfrak{M}_g$ gegebenen Isomorphieklasse liegt.

Bemerkungen: (i) Das Konzept des groben Modulraumes läßt sich auch auf andere Objekte als Kurven übertragen; in einigen Fällen möchte man jedoch an der eineindeutigen Beziehung zwischen Familien $X \rightarrow T$ und Morphismen $T \rightarrow \mathfrak{M}$ festhalten und nimmt dafür in Kauf, daß das universelle Objekt \mathfrak{M} kein Schema mehr ist, sondern ein sogenannter *Stack*.

(ii) Ähnlich wie im Fall $g = 1$ betrachtet man für höheres Geschlecht zunächst das Modulproblem für Kurven C vom Geschlecht g mit gegebener Wahl einer projektiven Einbettung; dies führt auf eine quasiprojektive Varietät — das sogenannte *Hilbert-Schema* — auf dem eine reductive Gruppe (nämlich PGL_n für geeignetes n) operiert. \mathfrak{M}_g wird dann realisiert als Quotient des Hilbert-Schemas nach dieser reductiven Gruppe [56]. Damit steht — und das ist ein wichtiger Punkt an dieser Stelle — Mumford's GIT als leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung. Dies gestattet insbesondere eine natürliche Kompaktifizierung von \mathfrak{M}_g , indem man Isomorphieklassen sogenannter *stabiler* Kurven hinzunimmt; hierbei heißt eine Kurve stabil, wenn sie höchstens gewöhnliche Doppelpunkte besitzt [12].

(iii) Schließlich seien in Verallgemeinerung der Situation für Kurven p_1, \dots, p_n abgeschlossene Punkte auf einer projektiven, nicht-singulären Kurve C . Für solche n -punktierten Kurven ist das Modulproblem ebenfalls gelöst worden: Es existiert ein grober Modulraum $\mathfrak{M}_{g,n}$ und dieser besitzt wie im nicht-punktierten Fall eine natürliche Kompaktifizierung (die sogenannte Knudson-Deligne-Mumford Kompaktifizierung) $\overline{\mathfrak{M}}_{g,n}$ [12]. Diesem Objekt kommt, wie wir gleich sehen werden, in der konformen Feldtheorie eine zentrale Bedeutung zu.

2.2 Parabolische Bündel

In diesem Abschnitt sei als Generalvoraussetzung $k = \mathbb{C}$ angenommen. Sei B eine Borel-Untergruppe von G und T ein maximaler Torus in B ; sei Φ das zugehörige Wurzelsystem und $\Pi \subset \Phi$ die Menge der einfachen Wurzeln.¹² Zu jeder Untermenge $\Sigma \subset \Pi$ gehört eine (Standard-) parabolische Untergruppe $P_\Sigma \supset B$ und umgekehrt (a priori könnte man auch Σ durch $\Pi - \Sigma$ ersetzen; wir folgen der Konvention in der Literatur zur konformen Feldtheorie, vgl. [49]); insbesondere hat man $P_\emptyset = B$ und $P_\Pi = G$.

¹²Diese entsprechen den Vertices im Dynkin-Diagramm.

Sei ferner C eine (nichtsinguläre) projektive algebraische Kurve und betrachte abgeschlossene Punkte p_1, \dots, p_n in C , die durch Standard-Parabolische P_1, \dots, P_n gelabelt seien; bezeichne mit $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ die assoziierten Untermengen einfacher Wurzeln und setze $\Gamma_i := \Pi - \Sigma_i$, $i = 1, \dots, n$. Der Einfachheit halber bezeichnen wir mit einem unterstrichenen Buchstaben das entsprechende n -Tupel, d.h. $\underline{p} := (p_1, \dots, p_n)$ etc.; ferner meint im folgenden G -Bündel stets G -Prinzipalbündel.

Definition 2.2.1 *Ein quasi-parabolisches G -Bündel vom Typ \underline{P} ist ein G -Bündel $\pi : X \rightarrow C$ zusammen mit einem Element F_i in der Faser des assoziierten Bündels $X \times^G (G/P_i)$ über p_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Ein parabolisches G -Bündel vom Typ $(\underline{P}, \underline{m})$ ist ein quasi-parabolisches G -Bündel vom Typ \underline{P} versehen mit Gewichten $(m_{ij})_{j \in \Gamma_i}$ für jedes i , wobei die m_{ij} streng positive ganze Zahlen sind.*

Unser Interesse an (quasi-) parabolischen Bündeln rührt her von einer Arbeit von P.Kronheimer [44], in der es ihm gelungen ist, regulär halbeinfache adjungierte Bahnen als Modulräume von "singulären" Instanzen zu realisieren. Sei dazu wieder \mathfrak{k} die Lie-Algebra einer kompakten, zusammenhängenden einfachen Lie-Gruppe K , $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ eine Cartan Unteralgebra und G die Komplexifizierung von K . Ausgangspunkt von Kronheimer's Analyse sind erneut die *Nahmschen Gleichungen* bzw. die dazu äquivalenten Gleichungen (vgl. Kapitel 1)

$$\begin{aligned} \frac{d A_1}{d t} &= -2A_1 - [A_2, A_3] \\ \frac{d A_2}{d t} &= -2A_2 - [A_3, A_1] \\ \frac{d A_3}{d t} &= -2A_3 - [A_1, A_2] . \end{aligned}$$

Der Unterschied zum Fall nilpotenter Bahnen liegt in den Randbedingungen: zunächst einmal steht für nicht-nilpotente Bahnen das Jacobson-Morozov Theorem nicht zur Verfügung, mit dessen Hilfe sich für ein nilpotentes Element $X_+ \in \mathfrak{g}$ eine transversale Scheibe S_+ an $G.X_+$ konstruieren ließ. Wir haben aber gesehen, daß für $X_+ = 0$ und damit für den trivialen Homomorphismus $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$ die Scheibe S_+ mit der ganzen Lie-Algebra übereinstimmte und man folglich für diesen Spezialfall eine Beschreibung der nilpotenten Bahnen als Modulräume erhält. Zur Charakterisierung der regulär halbeinfachen Bahnen wählt P.Kronheimer ganz analog folgende Randbedingung für das Verhalten bei $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 0 ,$$

d.h. jedes $A_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, strebt für $t \rightarrow +\infty$ gegen Null. Sei nun $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$; die modifizierte Randbedingung für $t \rightarrow -\infty$ lautet dann: Es existiert ein $g \in K$ derart, daß $e^{2t} A_i(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ gegen

$\text{Ad}(g)(\tau_i)$ strebt ($i = 1, 2, 3$). Der Raum der Lösungen des obigen Systems mit diesen Randbedingungen sei mit $\mathcal{M}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ bezeichnet.

Definition 2.2.2 Ein Tripel $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ heißt **regulär**, falls der Durchschnitt der Zentralisatoren $\mathfrak{z}_{\mathfrak{t}}(\tau_i)$ nur aus der Cartan Unter algebra \mathfrak{t} besteht.

Theorem 2.2.1 Kronheimer Sei (τ_1, τ_2, τ_3) regulär und $T \subset G$ ein maximaler Torus; dann ist $\mathcal{M}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ diffeomorph zum homogenen Raum G/T , d.h. zu einem regulär halbeinfachen adjungierten Orbit.

Kronheimer hat weiter gesehen, daß sich $\mathcal{M}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ganz analog zur Diskussion im ersten Teil als Modulraum SU_2 -äquivarianter gerahmter ASD-Zusammenhänge im trivialen G -Bündel über der 4-Sphäre auffassen läßt, allerdings handelt es sich dabei nicht um gewöhnliche Instantonen (d.h. solche endlicher Energie), sondern um ASD-Zusammenhänge mit einem "Pol" im Ursprung $0 \in S^4$, vgl. [44]: A ist eine schwache Lösung¹³ der linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} d^*A &= 0 \\ d^+A &= 2\pi^2 \left(\sum_{i=1}^3 \tau_i \omega_i \right) \delta_0 ; \end{aligned}$$

hierbei meint $d^+ : \Omega^1(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^+(\mathbb{R})$ die Linearisierung der anti-selbstdualen Yang-Mills Gleichung und $\{\omega_i\}$ ist eine Basis der selbstdualen 2-Formen im Ursprung. P.Kronheimer bezeichnet das Tripel (τ_1, τ_2, τ_3) als das "Residuum" des Zusammenhanges. Fixiert man eine komplexe Struktur auf \mathbb{R}^4 (verträglich mit Metrik und Orientierung) und identifiziert mithin \mathbb{R}^4 mit \mathbb{C}^2 , so ist klar (da Lösungen der anti-selbstdualen Yang-Mills Gleichungen insbesondere die Integrierbarkeit des zugehörigen $\bar{\partial}$ -Operators sicherstellen, s.o.), daß ein SU_2 -äquivariantes Instanton auf $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ein SL_2 -äquivariantes G -Bündel über $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ induziert. Die Rahmung des Instantons garantiert, daß letzteres sich auf die "Gerade im Unendlichen" ausdehnen läßt und dort trivialisiert ist. In vollständiger Entsprechung mit unserer obigen Diskussion für den nilpotenten Fall liefert also jeder Punkt in $\mathcal{M}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ ein SL_2 -äquivariantes G -Bündel über $\mathbb{P}^2 \setminus \{0\}$ mit einer "gewissen Singularität" im Ursprung, das über der unendlichen Geraden trivialisiert ist. Die Struktur der Singularität läßt sich interessanterweise mit Hilfe parabolischer Bündel charakterisieren.

Wir haben oben gesehen, daß sich die Analyse SL_2 -äquivarianter G -Bündel über \mathbb{P}^2 reduzieren läßt auf G -Prinzipalbündel über einer

¹³D.h. eine Lösung im Sinne von Distributionen

projektiven Geraden durch den trivialen Orbit $\{0\}$ und einen unendlich fernen Punkt $\{\infty\} \in \mathrm{SL}_2/B$ (zusammen mit einer B -Aktion). Insbesondere haben wir über diesen beiden Punkten Homomorphismen $R_0, R_\infty : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$. In Anlehnung an Kronheimers Arbeit wollen wir im folgenden stets annehmen, daß R_∞ der triviale Homomorphismus ist.

Lemma 2.2.1 *Jedes SL_2 -äquivariante gerahmte G -Bündel $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_0, R_\infty)$ induziert ein quasi-parabolisches \mathbb{C}^* -äquivariantes G -Bündel über der 2-punktierten projektiven Geraden $(\mathbb{P}^1; \{0\}, \{\infty\})$ vom Typ $(P(R_0 \circ \iota), G)$.¹⁴*

Beweis: Die Einschränkung von $(X, \pi, \mathbb{P}^2; R_0, R_\infty)$ auf eine Gerade $L_{0,\infty}$ durch $\{0\}$ und $\{\infty\}$ liefert natürlich ein G -Bündel über \mathbb{P}^1 , das aufgrund der Homogenität der Situation nicht von der Wahl des unendlich fernen Punktes $\{\infty\}$ abhängt. Ferner haben wir oben gesehen, daß zu jedem Jacobson-Morozov Homomorphismus $\varrho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathfrak{g}$ (und damit auch zu jedem Homomorphismus $R : \mathrm{SL}_2 \rightarrow G$) auf die angegebene Weise eine parabolische Untergruppe assoziiert werden kann (nämlich gerade die Kempfsche “schlimmste” Parabolische zu $\varrho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), von der wir annehmen können, daß sie Standard-Form hat.¹⁵ Offenbar wird der triviale Homomorphismus R_∞ von ganz G zentralisiert, also ist der Typ des quasi-parabolischen Bündels $(P(R_0 \circ \iota), G)$. Die \mathbb{C}^* -Aktion ist die oben angegebene Operation des Torus von SL_2 .¹⁶ ■

Bemerkung: Um zu illustrieren, daß man in der Tat noch etwas mehr Struktur zur Verfügung hat, führen wir uns zunächst die differentialgeometrische Situation vor Augen: Da sich die Situation von \mathbb{P}^2 auf $\mathbb{P}^1 \cong S^2$ reduziert, macht die ASD-Bedingung keinen Sinn mehr; sie wird ersetzt durch die Forderung der Flachheit des Zusammenhanges. Man wird daher auf die Untersuchung $U(1)$ -äquivarianter flacher K -Bündel über $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Trivialisierung im Unendlichen geführt. Die “Singularität” im Ursprung bedeutet, daß der Zusammenhang A nicht-triviale Monodromie besitzt:

¹⁴Hierbei ist $\iota : G_m \rightarrow \mathrm{SL}_2$ wie im ersten Abschnitt der natürliche Homomorphismus $t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. Äquivalent dazu kann man auch die Restriktion von R_0 auf einen maximalen Torus $T \cong G_m$ von SL_2 betrachten.

¹⁵Da jede Parabolische zu einer Standard-Parabolischen konjugiert ist, kann man dies stets erreichen.

¹⁶Eigentlich hat man sogar eine B -Aktion; wir sind aber später nur daran interessiert, daß in den Fixpunkten der \mathbb{C}^* -Aktion auf natürliche Weise quasi-parabolische Strukturen gegeben sind, nämlich durch die zum induzierten Homomorphismus $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow G$ assoziierte parabolische Untergruppe $P(\lambda)$ von G .

Die Krümmung von A verschwindet über $S^2 \setminus \{0\}$ und in $\{0\}$ ist die Krümmung (im Sinne von Distributionen) gegeben durch

$$F_A = \tau \delta_0 ,$$

wobei $\tau \in \mathfrak{k}$ ein Element der Lie-Algebra von K ist, von dem wir annehmen wollen, daß es regulär ist, d.h. die adjungierte Bahn von τ soll die maximal mögliche Dimension haben. Das "Residuum" τ bestimmt dann das Monodromieelement (bzw. seine Konjugationsklasse): Die $U(1)$ -Aktion gestattet nämlich die Wahl eines ausgezeichneten Logarithmus, so daß man nicht nur ein Element $\exp(\tau) \in K$, sondern sogar $\tau \in \mathfrak{k}$ erhält. Diese "singulären" Bündel mit vorgegebenem Residuum τ werden nun gerade durch die adjungierte Bahn von τ parametrisiert, da sich alle solchen Bündel lediglich in der Wahl der Trivialisierung im Unendlichen unterscheiden [44]. Berücksichtigt man ferner, daß die Krümmung nicht anderes ist als die Impulsabbildung für die Aktion der Eichgruppe auf dem unendlich-dimensionalen affinen Raum der Zusammenhänge im trivialen Bündel über S^2 , so kann man die adjungierte Bahn von τ also auffassen als eine Art verallgemeinerter Marsden-Weinstein-Reduktion.¹⁷ Von besonderem Interesse sind nun solche (regulären) adjungierten Bahnen, die zusätzlich eine gewisse "Quantisierungsbedingung" erfüllen (bzw. die assoziierten Konjugationsklassen von K); für solche konnte A.Kirillov nämlich zeigen, daß sie in eineindeutiger Beziehung zu den irreduziblen Darstellungen von K stehen [38]. Als Beispiel betrachten wir $G = SU(2)$; dann entsprechen die irreduziblen Darstellungen den Konjugationsklassen von Matrizen der Form

$$g := \begin{pmatrix} e^{2\pi i \vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i \vartheta} \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in \mathbb{Q} .$$

Wir kommen nun zur algebraisch-geometrischen Beschreibung der Situation mit Hilfe parabolischer Bündel. Sei also G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende einfache algebraische Gruppe vom Rang r , \mathfrak{g} ihre Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Cartan Unteralgebra von \mathfrak{g} . Sei $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ ein r -Tupel positiver ganzer Zahlen, dem wir in offensichtlicher Weise eine parabolische Untergruppe P von G zuordnen: Die P definierende Untermenge Σ von Π bestehe aus denjenigen einfachen Wurzeln $\alpha_i \in \Pi$, für die $m_i = 0$ ist. Nach Konstruktion induziert (m_1, \dots, m_r) einen Satz von parabolischen Gewichten \underline{m} für

¹⁷Auf diese Weise reproduziert man (zugegebenermaßen auf einem großen Umweg) das wohlbekannt Resultat, daß adjungierte Bahnen eine symplektische Struktur tragen, siehe z.B. [1].

P .¹⁸ Andererseits liefert ein solches Tupel (m_1, \dots, m_r) aber auch ein integrales dominantes Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, indem man $\lambda := \sum m_i \lambda_i$ setzt, wobei die λ_i die fundamentalen dominanten Gewichte sind. Auf diese Weise erhält man also eine Bijektion zwischen integralen dominanten Gewichten und parabolischen Strukturen; diese Beobachtung wird weiter unten im Zusammenhang mit konformen Feldtheorien noch zum Tragen kommen. Ferner operiere die multiplikative Gruppe G_m in natürlicher Weise auf \mathbb{P}^1 ; bezeichne die beiden Fixpunkte dieser Aktion mit $\{0\}$ bzw. $\{\infty\}$. Dann gilt:¹⁹

Satz 2.2.1 G_m -äquivalente parabolische Bündel vom Typ (P, \underline{m}) über der punktierten projektiven Geraden $(\mathbb{P}^1; \{0\})$ mit Trivialisierung im Unendlichen²⁰ werden durch die (ko-) adjungierte Bahn von λ parametrisiert.

Beweis: Bei fest gewähltem λ und damit bei vorgegebenem Typ (P, \underline{m}) unterscheiden sich solche Bündel nämlich ausschließlich durch die Wahl der Trivialisierung in $\{\infty\}$, vgl. auch obige Bemerkung. ■

Beispiel: Sei $G = \mathrm{SL}_2$, d.h. vom Typ A_1 . In diesem Fall gibt es nur eine einfache Wurzel α (das Dynkin-Diagramm besteht nur aus einem Vertex) und ein fundamentales Gewicht λ . Entsprechend besteht das "Tupel" \underline{m} nur aus einer positiven ganzen Zahl m . Faßt man ein dominantes integrales Gewicht $m\lambda$ vermöge Exponentiation als Charakter χ_m der Borel-Untergruppe $B \subset G$ auf, so erhält man ein assoziiertes Geradenbündel $G \times^B \mathbb{C}_{\chi_m}$ (indem man B auf \mathbb{C} vermöge χ_m operieren läßt), dessen Dual $(G \times^B \mathbb{C}_{\chi_m})^\vee$ sich mit der m -ten Potenz des Hyperebenenbündels $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ identifiziert. Nach dem Borel-Weil Theorem trägt $H^0(G/B, (G \times^B \mathbb{C}_{\chi_m})^\vee)$ die $(m+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von SL_2 .

Im Hinblick auf die Anwendung in der konformen Feldtheorie benötigen wir eine detailliertere Beschreibung des Modulraumes quasi-parabolischer G -Bündel über einer Kurve C . Hierzu ist es nützlich, sich zunächst den Spezialfall der G -Bündel anzuschauen (in diesem Fall hat man schlicht keine Punkte auf C markiert). Sei dazu C eine nichtsinguläre projektive irreduzible Kurve und $p \in C$ ein abgeschlossener Punkt; bezeichne die affine Kurve $C \setminus p$ mit C^* .²¹ Ist G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe,

¹⁸Vgl. Definition 2.2.1 für die Definition parabolischer Gewichte.

¹⁹Letztlich als Konsequenz von Satz 1.5.4

²⁰ G_m operiere trivial auf der Faser über $\{\infty\}$, d.h. der induzierte Homomorphismus $G_m \rightarrow G$ algebraischer Gruppen sei der triviale Homomorphismus.

²¹Einen Beweis des nicht-trivialen Faktums, daß $C \setminus p$ tatsächlich affin ist, findet man beispielsweise in dem Buch von W.Fulton [22].

so seien für eine beliebige \mathbb{C} -Algebra A die A -rationalen Punkte von G mit $G(A)$ bezeichnet. Ferner seien $\widehat{\mathcal{O}}_p$ die Vervollständigung des lokalen Ringes \mathcal{O}_p von C in p und \widehat{k}_p der Quotientenkörper von $\widehat{\mathcal{O}}_p$. Zu diesen Daten betrachten wir die folgenden drei Objekte:

- $\mathcal{G} := G(\widehat{k}_p)$ (die "Schleifengruppe" zu G);
- $\mathcal{P} := G(\widehat{\mathcal{O}}_p)$ (die natürliche maximale parahorische Untergruppe von G);
- $\mathcal{P}^- := G(k[C^*])$ (die Untergruppe von G bestehend aus allen Morphismen von C^* nach G).

Sei $\mathcal{X}(G, C)$ die Menge der Isomorphieklassen von G -Bündeln über C .

Satz 2.2.2 Die Menge $\mathcal{X}(G, C)$ steht in Bijektion zur Menge der Doppelnebenklassen $\mathcal{P}^- \backslash \mathcal{G} / \mathcal{P}$.

Dieser Satz ist natürlich wohlbekannt, vgl. beispielsweise [46], [61]. Der Beweis ist jedoch instruktiv und soll daher kurz skizziert werden; er beruht ganz wesentlich auf dem folgenden Resultat von Harder [25].

Lemma 2.2.2 Jedes G -Prinzipalbündel über C^* ist trivial.

Beweis des Satzes: Man definiert zunächst eine Abbildung $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}(G, C)$ in folgender Weise: Seien $\iota_1 : \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p) \rightarrow C$ und $\iota_2 : C^* \hookrightarrow C$; ι_1 und ι_2 liefern eine Überdeckung von C und wir betrachten die trivialen G -Bündel über den beiden "Karten" $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p)$ und C^* . Dann identifiziert sich das Produkt

$$F := \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p) \times_C C^*$$

mit $\text{Spec}(\widehat{k}_p)$, und nach einem "Verklebungs"-Lemma von Grothendieck [53] genügt es, einen Automorphismus des trivialen G -Bündels über $\text{Spec}(\widehat{k}_p)$ (d.h. ein Element von \mathcal{G}) anzugeben, um ein G -Bündel über C zu spezifizieren.

Seien nun $g, g' \in \mathcal{G}$; dann sind $\varphi(g)$ und $\varphi(g')$ genau dann isomorph, wenn es zwei Isomorphismen

$$\theta_1 : \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p) \times G \rightarrow \text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p) \times G$$

und

$$\theta_2 : C^* \times G \rightarrow C^* \times G$$

von G -Bündeln gibt derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(\widehat{k}_p) \times G & \xrightarrow{\theta_1|_{\text{Spec}(\widehat{k}_p)}} & \text{Spec}(\widehat{k}_p) \times G \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ \text{Spec}(\widehat{k}_p) \times G & \xrightarrow{\theta_2|_{\text{Spec}(\widehat{k}_p)}} & \text{Spec}(\widehat{k}_p) \times G \end{array}$$

kommutativ ist. Nun ist jeder Isomorphismus θ_1 (bzw. θ_2) durch ein Element $h \in \mathcal{P}$ (bzw. $h' \in \mathcal{P}^-$) gegeben, so daß $\varphi(g)$ genau dann zu $\varphi(g')$ isomorph ist, wenn es Elemente $h \in \mathcal{P}$ und $h' \in \mathcal{P}^-$ gibt mit der Eigenschaft, daß $h'^{-1}gh = g'$. Folglich faktorisiert φ über $\mathcal{P}^- \setminus \mathcal{G}/\mathcal{P}$ und induziert eine Injektion $\bar{\varphi} : \mathcal{P}^- \setminus \mathcal{G}/\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}(G, C)$; da jedes G -Bündel über $\text{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_p)$ trivial ist, ist $\bar{\varphi}$ auch surjektiv. ■

In Verallgemeinerung dieses Resultates konnten Y.Laszlo und C.Sorger [49] zeigen, daß die Menge $\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P})$ der Isomorphieklassen von quasi-parabolischen G -Bündeln vom Typ \underline{P} in eindeutiger Beziehung stehen zur Menge $\mathcal{P}^- \setminus (\mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i)$ der \mathcal{P}^- -Nebenklassen in $\mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i$; hierbei operiert \mathcal{P}^- auf \mathcal{G}/\mathcal{P} durch Linksmultiplikation und auf G/P_i vermöge der Auswertung $e_{P_i} : \mathcal{P}^- \rightarrow G, \phi \mapsto \phi(p_i)$. Das klingt zwar ziemlich abstrakt, ist aber im Prinzip ganz einfach, wie das folgende Beispiel aus der komplexen Analysis verdeutlicht.

Beispiel: Sei $C = \mathbb{P}^1$ und $G = \text{SL}_n$, d.h. wir betrachten holomorphe Vektorbündel über der Riemannschen Zahlenkugel. Wähle Karten $U_0 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ und $U_\infty := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$. Da U_0 und U_∞ Steinsch sind, sind die Restriktionen jedes Vektorbündels E über \mathbb{P}^1 auf U_0 bzw. U_∞ notwendigerweise trivial. Folglich erhält man E durch Verkleben von $U_0 \times \mathbb{C}^n$ und $U_\infty \times \mathbb{C}^n$ vermöge einer holomorphen Abbildung

$$\gamma : U_0 \cap U_\infty \rightarrow \text{SL}_n .$$

Nach einem Resultat von Birkhoff faktorisiert γ in $\gamma_- \lambda \gamma_+$, wobei γ_- (bzw. γ_+) holomorph auf U_∞ (bzw. U_0) und λ ein Homomorphismus der Form $z \mapsto \text{diag}(z^{a_1}, \dots, z^{a_n})$ ist. Durch Koordinatenwechsel vermöge γ_+ auf $U_0 \times \mathbb{C}^n$ und γ_-^{-1} auf $U_\infty \times \mathbb{C}^n$ läßt sich E somit auch durch λ als "Verklebungsabbildung" konstruieren und ist daher isomorph zu einer direkten Summe $L^{a_1} \oplus \dots \oplus L^{a_n}$ von Geradenbündeln (hierbei ist L das Hopf-Bündel). Diese Variante des Birkhoffschen Resultates geht auf Grothendieck zurück.

Die obigen Bijektionen zwischen Isomorphieklassen von G -Bündeln und Doppelnebenklassen lösen das Modulproblem zunächst leider nur auf der Ebene der Stacks. Wir wollen als nächstes zeigen, daß $X(\underline{p}, \underline{P}) := \mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i$ zwar keine algebraische Varietät im herkömmlichen Sinne ist ($X(\underline{p}, \underline{P})$ ist unendlich-dimensional), aber immerhin noch die Struktur einer sogenannten *Ind-Varietät* trägt, vgl. [68].

Definition 2.2.3 *Unter einer Ind-Varietät versteht man eine Menge X zusammen mit einer Filtrierung*

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$$

derart, daß

$$(i) \bigcup_{n \geq 0} X_n = X$$

(ii) Jedes X_n ist eine \mathbb{C} -Varietät und die Inklusionen $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ sind abgeschlossene Immersionen.

Sind alle X_n affin (bzw. projektiv), so spricht man auch von einer affinen (bzw. projektiven) Ind-Varietät. Ind-Varietäten muten auf den ersten Blick etwas exotisch an, doch man überlegt sich leicht, daß beispielsweise jeder separable \mathbb{C} -Vektorraum eine Ind-Varietät ist. Insbesondere ist natürlich auch jede \mathbb{C} -Varietät X eine Ind-Varietät ($X_n = X$ für jedes n).

Definition 2.2.4 Sind X und Y zwei Ind-Varietäten mit Filtrierungen X_n und Y_n , so heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ein **Morphismus**, falls es für jedes $n \geq 0$ eine Zahl $m(n) \geq 0$ gibt derart, daß $f(X_n) \subset Y_{m(n)}$ und $f|_{X_n} : X_n \rightarrow Y_{m(n)}$ ein Morphismus von \mathbb{C} -Varietäten ist.

Ebenso läßt sich in enger Analogie zum endlich-dimensionalen Fall jede Ind-Varietät mit einer Topologie versehen ($U \subset X$ ist per definitionem offen, falls für jedes n der Durchschnitt $U \cap X_n$ in X_n Zariski-offen ist), und auch das Konzept des Tangentialraumes in einem Punkt $x \in X$ läßt sich übertragen, indem man $T_x X$ als den Limes $n \rightarrow \infty$) der Zariski Tangentialräume $T_x X_n$ definiert. Schließlich überlegt man sich, daß endliche Produkte von Ind-Varietäten in kanonischer Weise wieder Ind-Varietäten sind (für zwei Ind-Varietäten X und Y mit Filtrierungen X_n und Y_n setze man $(X \times Y)_n := X_n \times Y_n$).

Definition 2.2.5 Eine Ind-Varietät G heißt eine **Ind-Gruppe**, falls G (als Menge) eine Gruppenstruktur trägt und die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2^{-1} \end{aligned}$$

ein Morphismus ist. Ein **Homomorphismus** von Ind-Gruppen ist ein Homomorphismus von Gruppen, der überdies ein Morphismus der zugrundeliegenden Ind-Varietäten ist.

Ist G eine Ind-Gruppe und X eine Ind-Varietät, so spricht man von einer G -Ind-Varietät, falls G auf X (im mengentheoretischen Sinne) operiert und die Aktion $G \times X \rightarrow X$ ein Morphismus von Ind-Varietäten ist. Ind-Varietäten sind in vielerlei Hinsicht ein natürlicher Ausgangspunkt einer "unendlich-dimensionalen algebraischen Geometrie". Für unsere Belange ist das folgende Resultat von I. Shafarevich [68] von Bedeutung.

Satz 2.2.3 Sei G eine Ind-Gruppe mit Einselement e ; dann trägt der Tangentialraum $T_e G$ an G in e in natürlicher Weise die Struktur einer Lie-Algebra.

Schließlich wollen wir der Vollständigkeit halber noch die Entsprechung eines Vektorbündels über einer Ind-Varietät angeben. Sei dazu Y eine Ind-Varietät mit Filtrierung Y_n . Dann versteht man unter einem Vektorbündel (vom Rang r) über Y eine Ind-Varietät E zusammen mit einem Morphismus $\pi : E \rightarrow Y$ derart, daß $E_n \rightarrow Y_n$ für jedes n ein Vektorbündel (vom Rang r) im herkömmlichen Sinne ist; hierbei ist $E_n := \pi^{-1}(Y_n)$. Sind $\pi : E \rightarrow Y$ und $\pi' : E' \rightarrow Y$ zwei Vektorbündel über Y und $\varphi : E \rightarrow E'$ ein Morphismus von Ind-Varietäten, so heißt φ ein *Bündelhomomorphismus*, falls $\pi' \circ \varphi = \pi$ und darüber hinaus $\varphi|_{E_n} : E_n \rightarrow E'_n$ für alle n ein Bündelhomomorphismus endlich-dimensionaler Vektorbündel ist. Diese Definition läßt sich in naheliegender Weise auf Prinzipalbündel verallgemeinern; für uns ist jedoch im wesentlichen der Spezialfall der Geradenbündel (d.h. $r = 1$) von Interesse.

Definition 2.2.6 Sei Y eine Ind-Varietät. Dann heißt die abelsche Gruppe $\text{Pic}(Y)$ der Isomorphieklassen von Geradenbündeln über Y die **Picard-Gruppe** von Y ; die Gruppenstruktur ist hierbei durch das Tensorprodukt von Geradenbündeln gegeben.

Lemma 2.2.3 Sei $\underline{P} = (P_1, \dots, P_n)$ ein n -Tupel von (Standard-) parabolischen Untergruppen der zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden einfachen algebraischen Gruppe G . Dann ist $X(\underline{p}, \underline{P}) := \mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i$ eine Ind-Varietät.

Beweis: Da die endlich-dimensionalen homogenen Räume G/P_i trivialerweise Ind-Varietäten sind und wie oben bereits erläutert endliche Produkte von Ind-Varietäten in kanonischer Weise wieder Ind-Varietäten sind müssen wir nur zeigen, daß \mathcal{G}/\mathcal{P} eine Ind-Varietät ist. Dies ist von P.Slodowy in [73] bewiesen worden; wir wollen sein Argument hier kurz skizzieren: Fixiere eine Borel-Untergruppe $B \subset G$ und einen maximalen Torus $T \subset B$ und sei B die Standard-Borelsche der "Schleifengruppe" $\mathcal{G} = G(\mathbb{C}((t)))$. Ferner sei $N(T)$ der Normalisator von T in G und $\text{Mor}(\mathbb{C}^*, N(T))$ die Gruppe aller regulären Abbildungen $f : \mathbb{C}^* \rightarrow N(T)$; letztere enthält T als normale Untergruppe, und der Quotient $\widehat{W} := \text{Mor}(\mathbb{C}^*, N(T))/T$ ist die zu G gehörende affine Weylgruppe. Es ist klar, daß \widehat{W} die (endliche) Weylgruppe W von G als Untergruppe enthält. Nun besitzt die verallgemeinerte Fahnenmannigfaltigkeit $X := \mathcal{G}/\mathcal{P}$ in Analogie zum endlich-dimensionalen Fall eine Bruhat-Zerlegung

$$X = \bigcup_{w \in \widehat{W}/W} Bw\mathcal{P}/\mathcal{P}.$$

Als Coxetergruppe besitzt \widehat{W} eine Partialordnung \preceq (die sogenannte Bruhat-Ordnung), die eine Partialordnung \preceq in \widehat{W}/W induziert:

$$u \bmod W =: u \preceq v := v \bmod W, \quad u, v \in \widehat{W},$$

falls es ein $w \in W$ gibt mit

$$u \preceq vw.$$

Für jedes $\mathfrak{w} \in \widehat{W}/W$ definiert man dann die (verallgemeinerte) Schubert Varietät

$$X_{\mathfrak{w}} := \bigcup_{v \preceq \mathfrak{w}} BvP/P,$$

und erhält eine Filtrierung von X , indem man setzt:

$$X_n := \bigcup X_{\mathfrak{w}};$$

hierbei meint \bigcup die Vereinigung über solche Schubert Varietäten, für die (mit $\mathfrak{w} = w \bmod W$) die "invariante Länge" $l(w)$ von w kleiner ist als n ; hierbei ist die "invariante Länge" definiert als das Minimum der gewöhnlichen Längenfunktion $l : \widehat{W} \rightarrow \mathbb{N}$ über die W -Nebenklasse von w : $l(w) := \min \{l(ws) \mid s \in W\}$.

Sei nun $l > 0$ eine beliebige positive ganze Zahl und \mathcal{H}_l die Basisdarstellung der zu G assoziierten affinen ungetwisteten Kac-Moody Algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ zum Level l , vgl. [33]; sei v_l der Höchstgewichtsvektor in \mathcal{H}_l . Als Konsequenz der Bruhat-Zerlegung ist dann die Abbildung

$$\begin{aligned} \eta_l : X &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_l) \\ gP &\longmapsto [gv_l] \end{aligned}$$

injektiv, und P.Slodowy konnte zeigen, daß für jedes n ein endlich-dimensionaler Unterraum $V_n \subset \mathcal{H}_l$ existiert derart, daß $\eta_l(X_n)$ in $\mathbb{P}(V_n)$ Zariski abgeschlossen ist. Versieht man X_n so mit der Struktur einer (reduzierten) projektiven Varietät, daß die Einschränkung $\eta_l|_{X_n}$ eine abgeschlossene Immersion wird, so erhält man auf X die Struktur einer projektiven Ind-Varietät. Wir sollten anmerken, daß diese Struktur von der Wahl des Levels l völlig unabhängig ist [73]. ■

Ferner konnte Kumar [46] folgende Aussage beweisen.

Lemma 2.2.4 \mathcal{P}^- ist eine Ind-Gruppe.

Beweis: Wir folgen dem Beweis in [46]. Wähle eine Einbettung $G \hookrightarrow \mathrm{SL}_N \subset M_N$ (von der die Konstruktion nicht abhängt) und eine \mathbb{C} -Basis $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ von $\mathbb{C}[C^*]$ derart, daß $\mathrm{ord}_p f_n \leq \mathrm{ord}_p f_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, d.h. die Ordnung der Polstelle von f_n in p wachse monoton in n . Sei $\mathrm{Mor}(C^*, M_N)$ die Menge aller Morphismen von C^* nach

M_N und $\iota : \mathcal{P}^- \hookrightarrow \text{Mor}(C^*, M_N)$ die natürliche Injektion. Die Idee ist nun, eine Filtrierung von \mathcal{P}^- durch eine Filtrierung von $\text{Mor}(C^*, M_N)$ zu induzieren. Sei dazu Mor_n der endlich-dimensionale Vektorraum von Morphismen $\varphi : C^* \rightarrow M_N$ mit der Eigenschaft, daß sämtliche Matrixeinträge höchstens Pole der Ordnung n haben. Hierdurch erhält man eine Filtrierung $\text{Mor}_0 \subseteq \text{Mor}_1 \subseteq \text{Mor}_2 \dots$ von $\text{Mor}(C^*, M_N)$; setze $\mathcal{P}_n^- := \iota^{-1}(\text{Mor}_n)$. Nun gibt es für jedes n offenbar ein $k(n)$ derart, daß sich ein beliebiger Morphismus $\varphi = (\varphi_{ij}) \in \text{Mor}_n$ in der Form $\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^{k(n)} z_{ij}^k f_k$ schreiben läßt. Koordinatisiert man Mor_n durch die (z_{ij}^k) , so ist \mathcal{P}_n^- als Nullstellengebilde von Polynomen in den (z_{ij}^k) eine abgeschlossene (reduzierte) Untervarietät in Mor_n und \mathcal{P}^- wird hierdurch mit der Struktur einer affinen Ind-Varietät versehen. Aus dieser Konstruktion ist klar, daß \mathcal{P}^- mit der punktweisen Multiplikation zu einer Ind-Gruppe wird. ■

Kumar zeigt [46] weiter, daß die Linksmultiplikation von \mathcal{P}^- auf \mathcal{G}/\mathcal{P} ein Morphismus von Ind-Varietäten ist. Läßt man also \mathcal{P}^- auf \mathcal{G}/\mathcal{P} durch Linksmultiplikation und auf den homogenen Räumen G/P_i durch die Auswertung

$$\begin{aligned} e_{p_i} : \mathcal{P}^- &\longrightarrow G \\ \varphi &\longmapsto \varphi(p_i) \end{aligned}$$

operieren, so erhält man unmittelbar

Lemma 2.2.5 $X(\underline{p}, \underline{P}) := \mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i$ ist eine \mathcal{P}^- -Ind-Varietät.

Im nächsten Schritt wollen wir ein homogenes Geradenbündel auf \mathcal{G}/\mathcal{P} angeben, von dem sich zeigen läßt, daß es die Picard-Gruppe $\text{Pic}(\mathcal{G}/\mathcal{P})$ erzeugt; Einzelheiten findet man in [73], [46] und [61].

Für jeden separablen Vektorraum V definiert man das tautologische Geradenbündel \mathcal{L}_V auf $\mathbb{P}(V)$ wie folgt: Als Menge sei

$$\mathcal{L}_V := \{(l, v) \in \mathbb{P}(V) \times V \mid v \in l\};$$

dann ist \mathcal{L}_V Zariski abgeschlossen in der Ind-Varietät $\mathbb{P}(V) \times V$ und läßt sich mit einer Ind-Struktur versehen derart, daß $\mathcal{L}_V \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \times V$ eine abgeschlossene Immersion ist. Die Projektion $\mathcal{L}_V \rightarrow \mathbb{P}(V)$ auf den ersten Faktor macht \mathcal{L}_V dann zu einem Geradenbündel über $\mathbb{P}(V)$.

Beispiel: Sei $V = \mathbb{C}^2$. Dann ist \mathcal{L}_V gerade die ‘‘Aufblasung’’ (blow-up) des Ursprungs in \mathbb{C}^2 .

Sei nun \mathcal{H}_1 die Basisdarstellung zum Level $l = 1$ der zu G assoziierten affinen Kac-Moody Algebra, $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}$ das tautologische Bündel über $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}^*$ das zu $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}$ duale Bündel. Definiere dann das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)$ als den Pullback von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}^*$ vermöge $\iota_1 : \mathcal{G}/\mathcal{P} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ und setze $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(l) := \mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)^{\otimes l}$.

Lemma 2.2.6 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \text{Pic}(\mathcal{G}/\mathcal{P}) \\ l &\longmapsto [\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(l)] \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Es stellt sich die Frage, was sich in der allgemeineren Situation quasi-parabolischer Bündel über $\text{Pic}(\mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i)$ aussagen läßt. Wir wollen uns überlegen, daß gilt:

Lemma 2.2.7 $\text{Pic}(\mathcal{G}/\mathcal{P} \times \prod_{i=1}^n G/P_i) \cong \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1) \times \prod_{i=1}^n X(P_i)$, wobei $X(P_i)$ die Charaktergruppe von P_i ist.

Zum Beweis dieses Resultates machen wir folgende Vorüberlegung: Die Schleifengruppe \mathcal{G} operiert zwar (im mengentheoretischen Sinne) auf \mathcal{G}/\mathcal{P} , aber diese Aktion läßt sich nicht zu einer \mathcal{G} -Aktion auf dem Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)$ fortsetzen; man muß daher zu einer zentralen Erweiterung $\tilde{\mathcal{G}}$ von \mathcal{G} übergehen, und es gibt ein kanonisches Verfahren, sich diese zentrale Erweiterung zu verschaffen, nämlich mit Hilfe der sogenannten *Mumford-Gruppe* (vgl. [61]). Diese ist als Menge gegeben durch

$$\{(g, \varphi) \mid g \in \mathcal{G}, \varphi : g^* \mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)\},$$

d.h. durch Paare (g, φ) bestehend aus einem Gruppenelement $g \in \mathcal{G}$ und einem Automorphismus φ von $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)$, der die Aktion von g auf der Basis induziert. Die Produktstruktur ist gegeben durch

$$(g, \varphi)(g', \varphi') = (gg', \varphi\varphi').$$

Die Mumford-Gruppe von $\mathcal{L}_{\mathcal{H}_1}^*$ ist gerade $\text{GL}(\mathcal{H}_1)$. Da sich \mathcal{H}_1 zu einer projektiven Darstellung $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \text{PGL}(\mathcal{H}_1)$ integrieren läßt, erhält man durch den Pullback (vermöge π) der zentralen Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow \text{PGL}(\mathcal{H}_1) \longrightarrow 1$$

eine zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1.$$

Da außerdem die Einschränkung von \mathcal{H}_1 auf $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]]$ zu einer Darstellung $\mathcal{P} \rightarrow \text{GL}(\mathcal{H}_1)$ integriert werden kann, spaltet die obige exakte Sequenz kanonisch über \mathcal{P} und $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)$ ist gerade das zum Charakter $\text{pr}_1 : \mathbf{G}_m \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{G}_m$ assoziierte Geradenbündel über \mathcal{G}/\mathcal{P} .

Beweis von Lemma 2.2.7: Sei Σ_i die zu P_i gehörende Menge einfacher Wurzeln. Jedes Gewicht λ mit der Eigenschaft, daß $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$ für

alle $\alpha \in \Sigma_i$ definiert (vermög Exponentiation) einen Charakter von P_i , und umgekehrt kommt jeder Charakter von einem solchen Gewicht her, d.h. $X(P_i) = \{\lambda \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma_i\}$. Nach dem, was wir oben über assoziierte Bündel gesagt haben, induziert jedes $\chi \in X(P_i)$ ein Geradenbündel $L(\chi) := G \times^{P_i} \mathbb{C}_\chi$ über G/P_i . Nach [18] (vgl. auch [39]) gibt es dann eine exakte Sequenz

$$X(G) \longrightarrow X(P_i) \longrightarrow \text{Pic}(G/P_i) \longrightarrow \text{Pic}(G) ;$$

nun ist $X(G) = 0$, da G als einfach vorausgesetzt ist, und da G einfach zusammenhängend sein soll, ist auch $\text{Pic}(G)$ trivial, so daß wir einen Isomorphismus $X(P_i) \cong \text{Pic}(G/P_i)$ erhalten. Hieraus folgt zusammen mit der Vorüberlegung zum Spalten der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathbf{G}_m \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1 .$$

und dem Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1)$ die Behauptung. ■

Benutzt man das (keineswegs triviale!) Faktum, daß jeder Charakter $\chi : \mathcal{P}^- \rightarrow \mathbf{G}_m$ trivial ist ²² [49], so ergibt sich folgendes Resultat, das später im Zusammenhang mit gewissen konformen Feldtheorien — den sogenannten WZW-Modellen — noch eine wichtige Rolle spielen wird.

Lemma 2.2.8 $\text{Pic}(\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P})) \cong \mathbb{Z}\mathcal{O}_{\mathcal{G}/\mathcal{P}}(1) \times \prod_{i=1}^n X(P_i)$.

Im Hinblick auf die Anwendungen in der konformen Feldtheorie ist es zwar ausreichend, Geradenbündel über \mathcal{G}/\mathcal{P} bzw. $\mathcal{P}^- \setminus \mathcal{G}/\mathcal{P}$ zu betrachten, aus mathematischer Sicht ist dies jedoch etwas unbefriedigend; man möchte stattdessen Geradenbündel über einem groben Modulraum parabolischer Bündel und ihre Schnitte untersuchen. Zur Konstruktion eines groben Modulraumes benötigen wir den Begriff der *Stabilität*. Um eine allzu unübersichtliche Notation zu vermeiden, wollen wir uns im folgenden auf den Fall algebraischer Vektorbündel (d.h. $G = \text{SL}_n$) beschränken und ferner annehmen, daß auf C nur ein Punkt markiert ist. Eine Verallgemeinerung auf G -Prinzipalbündel für andere einfache Gruppen und endlich viele markierte Punkte findet man beispielsweise in [62] bzw. [47]; wir folgen der Darstellung in [67].

Sei also $E \rightarrow C$ ein Vektorbündel von Rang n über C und $q \in C$ ein Punkt; eine quasi-parabolische Struktur im obigen Sinne ist dann nichts anderes als die Wahl einer Fahne

$$E_q = E_q^1 \supset E_q^2 \supset \cdots \supset E_q^r$$

²²Der entscheidende Punkt ist, daß man auch im unendlich-dimensionalen Kontext die Reduziertheit der Ind-Gruppe \mathcal{P}^- zeigen kann.

in der Faser E_q über q mit $\dim E_q^i =: l_i$ und $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_r$. Man nennt das Tupel $\underline{l} := (l_1, \dots, l_r)$ auch den *Typ*²³ und die Differenzen $k_1 := l_1 - l_2, \dots, k_{r-1} := l_{r-1} - l_r, k_r := l_r$ die *Multiplizitäten* der quasi-parabolischen Struktur. Sind zusätzlich Konstanten $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =: \underline{\alpha}$ mit $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n < 1$ gegeben derart, daß in $\underline{\alpha}$ r verschiedene Elemente $\underline{\alpha}' := (\alpha'_1, \dots, \alpha'_r)$ mit $0 \leq \alpha'_1 < \dots < \alpha'_r < 1$ auftreten, und zwar α'_i genau k_i -mal, so spricht man von einer *parabolischen* Struktur und α'_i heißt das *Gewicht* von E_q^i .²⁴

Definition 2.2.7 Sind E und E' Vektorbündel über C mit quasi-parabolischen Strukturen in q , so versteht man unter einem **quasi-parabolischen Isomorphismus** einen Isomorphismus $\varphi : E \rightarrow E'$ von Vektorbündeln mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die Typen von E und E' in q übereinstimmen und der induzierte Isomorphismus $\varphi_q : E_q \rightarrow E'_q$ die quasi-parabolische Struktur respektiert: $\varphi_q(E_q^i) = E'^i_q$ für jedes i . Sind darüber hinaus parabolische Strukturen gegeben, so ist ein quasi-parabolischer Isomorphismus $\varphi : E \rightarrow E'$ ein **parabolischer Isomorphismus**, falls für alle $i \in 1, \dots, r$ die Gewichte von E_q^i und E'^i_q übereinstimmen.

Man kann nun den Begriff der *Steigung* eines Vektorbündels auf parabolische Bündel übertragen, indem man definiert:

$$\text{par } \mu(E) := \frac{\mu(E) + \sum_{i=1}^n \alpha_i}{\text{rk}(E)};$$

hierbei ist $\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\text{rk}(E)}$ die gewöhnliche Steigung des Vektorbündels E .

Definition 2.2.8 Sei $E \rightarrow C$ ein Vektorbündel über C mit einer parabolischen Struktur in $q \in C$. Dann heißt E **parabolisch semistabil** (bzw. **parabolisch stabil**), falls die parabolische Steigung $\text{par } \mu(E)$ die parabolische Steigung jedes echten Unterbündels F von E dominiert: $\text{par } \mu(F) \leq \text{par } \mu(E)$ (bzw. $\text{par } \mu(F) < \text{par } \mu(E)$). Hierbei versteht man unter einem parabolischen Unterbündel ein Unterbündel im herkömmlichen Sinne mit folgender zusätzlicher Eigenschaft: Für jedes i_0 existiert ein j derart, daß $F_q^{i_0} \subset E_q^j$, und angenommen, j_0 sei minimal mit dieser Eigenschaft, dann stimmen die Gewichte von $F_q^{i_0}$ und $E_q^{j_0}$ einschließlich ihrer Multiplizitäten überein.

²³In der Definition einer quasi-parabolischen Struktur haben wir den Typ durch eine Standard-Parabolische charakterisiert. Eine solche stabilisiert aber gerade eine Fahne in E_q und die Angabe der Dimensionen l_i ist gleichbedeutend mit der Angabe der parabolischen Untergruppe.

²⁴In der obigen Definition einer parabolischen Struktur auf einem G -Prinzipalbündel waren die parabolischen Gewichte als ganze Zahlen vorausgesetzt; durch geeignete Normierung kann man aber natürlich erreichen, daß die Gewichte zwischen 0 und 1 liegen.

Beispiel: Sei E ein Vektorbündel vom Rang 2 über C und $q \in C$ ein markierter Punkt; ferner seien α_1, α_2 zwei voneinander verschiedene Gewichte mit $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Sei der parabolische Grad von E bezüglich $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ gegeben durch

$$\text{par deg}_{\underline{\alpha}}(E) := \text{deg}(E) + \alpha_1 + \alpha_2 .$$

Fixiere eine Gerade L in der Faser E_q über q (und damit eine Fahne) und definiere für jedes Unterbündel F von E

$$\text{par deg}_{\underline{\alpha}}(F) := \begin{cases} \text{deg}(F) + \alpha_2 & \text{falls } F_q = L \\ \text{deg}(F) + \alpha_1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dann ist E (bzw. genauer das Paar (E, L)) semistabil bezüglich $\underline{\alpha}$, falls für alle echten Unterbündel

$$\text{par deg}_{\underline{\alpha}}(F) \leq \frac{1}{2} \text{par deg}_{\underline{\alpha}}(E)$$

gilt.

Schließlich hat auch die Harder-Narasimhan Filtrierung eine Entsprechung für parabolische Bündel [67]:

Satz 2.2.4 *Sei E parabolisch semistabil. Dann gibt es eine Filtrierung $E = E_1 \supset E_2 \supset \dots$ durch parabolisch semistabile Bündel E_i mit $\text{par } \mu(E_i) = \text{par } \mu(E)$ für jedes i derart, daß*

- (i) *Für jedes i ist das Quotientenbündel E_i/E_{i+1} versehen mit der natürlichen parabolischen Struktur parabolisch stabil;*
- (ii) *Das graduierte Objekt $\text{gr}(E) := \bigoplus E_i/E_{i+1}$ ist bis auf parabolische Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Definition 2.2.9 *Seien E und E' zwei parabolisch semistabile Vektorbündel mit gegebener parabolischer Struktur $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in $q \in C$ und $\text{deg}(E) = \text{deg}(E') = d$. Dann heißen E und E' **S-äquivalent**, falls $\text{gr}(E) = \text{gr}(E')$. Bezeichne die Menge der S-Äquivalenzklassen solcher Bündel mit $\mathfrak{M}(d, \underline{\alpha})$.*

In Verallgemeinerung des Resultates über die Existenz eines groben Modulraumes für Vektorbündel über Kurven konnte C.Seshadri [67] dann die folgende Aussage zeigen.

Theorem 2.2.2 *Die Menge $\mathfrak{M}(d, \underline{\alpha})$ der S-Äquivalenzklassen parabolisch semistabiler Vektorbündel vom Grad d mit parabolischer Struktur $\underline{\alpha}$ trägt die Struktur einer normalen, projektiven Varietät und wird dadurch zu einem groben Modulraum.*

Wie wir oben gesehen haben, spezifiziert die Wahl eines Levels l und eines Tupels $\underline{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_n)$, $\chi_i \in X(P_i)$, von Charakteren ein Geradenbündel $\mathcal{L}(\underline{l}, \underline{\chi})$ über $\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P})$. Schließlich kann man sich überlegen, daß Schnitte in $\mathcal{L}(\underline{l}, \underline{\chi})$ dasselbe sind wie Schnitte in einem geeigneten Geradenbündel über dem Modulraum parabolisch semistabiler Bündel. Dies läßt sich mit den in [47] oder [5] verwendeten Methoden zeigen, erfordert jedoch erhebliche technische Vorbereitungen. Da das Resultat bekannt ist, verzichten wir darauf, den allgemeinen Fall vorzustellen und begnügen uns mit dem (einfachen, aber interessanten) Spezialfall, daß keine Punkte auf C markiert sind, d.h. wir betrachten Divisoren auf dem Modulraum \mathfrak{M} semistabiler Vektorbündel vom Rang n über C (mit trivialer Determinante). In diesem Fall können wir das geeignete Geradenbündel direkt angeben.

Wir beginnen mit einer Vorbemerkung. Sei g das Geschlecht von C und in Verallgemeinerung der Jacobi-Varietät $\text{Jac}(C)$ sei $\text{Jac}^{g-1}(C)$ diejenige Varietät, welche Geradenbündel vom Grad $g-1$ über C parametrisiert. Man definiert dann den *Theta-Divisor* durch

$$\Theta := \{M \in \text{Jac}^{g-1}(C) \mid H^0(C, M) \neq 0\};$$

für jedes Geradenbündel L vom Grad $g-1$ liefert die Abbildung $M \mapsto M \otimes L^{-1}$ dann einen Isomorphismus $(\text{Jac}^{g-1}(C), \Theta) \cong (\text{Jac}(C), \Theta_L)$, wobei der Divisor Θ_L gegeben ist durch

$$\Theta_L := \{E \in \text{Jac}(C) \mid H^0(C, E \otimes L) \neq 0\}.$$

Analog kann man für Vektorbündel folgendermaßen vorgehen: Definiere für ein beliebiges Geradenbündel L vom Grad $g-1$

$$\Theta_L := \{E \in \mathfrak{M} \mid \dim H^0(C, E \otimes L) > 0\};$$

der Modulraum \mathfrak{M} übernimmt für Vektorbündel vom Rang $n > 1$ also gewissermaßen die Rolle der Jacobi-Varietät. J.Drezet und M.Narasimhan konnten zeigen [15], daß Θ_L einen (Cartier-) Divisor auf \mathfrak{M} definiert, daß das assoziierte Geradenbündel $\mathcal{L}_\Theta := \mathcal{O}(\Theta_L)$ von der Wahl von L nicht abhängt, und daß \mathcal{L}_Θ die Picard-Gruppe von \mathfrak{M} erzeugt: $\text{Pic}(\mathfrak{M}) = \mathbb{Z}\mathcal{L}_\Theta$. Dann gilt, vgl. [5], [17], [47]:

Theorem 2.2.3 $H^0(\mathfrak{M}, \mathcal{L}_\Theta^{\otimes l}) \cong H^0(\mathcal{X}(G, C), \mathcal{O}_{g/\mathcal{P}}(l))$.

2.3 Konforme Feldtheorien

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun möglich, konforme Feldtheorien in axiomatischer Weise zu definieren und eine Klasse von Theorien — die sogenannten WZW-Modelle — explizit zu konstruieren. Genauer sollte man vielleicht sagen, daß wir *ein* Axiomensystem angeben werden; es

gibt in der Literatur nämlich verschiedene Definitionen, was eine (rationale) konforme Feldtheorie sein soll [7], [21], [54], [65], und die Äquivalenz dieser Definitionen ist keineswegs klar. Wir folgen dem Ansatz in [21]; der Einfachheit halber nehmen wir wieder $k = \mathbb{C}$ an.

Sei Λ eine endliche Menge versehen mit einer Involution $\lambda \mapsto \lambda^*$ (in dem zu besprechenden Beispiel wird Λ eine geeignete Menge von Darstellungen einer einfachen Lie-Algebra sein).

Definition 2.3.1 *Unter einer n -punktierten gewichteten Kurve $(C, \underline{p}, \underline{\lambda})$ wollen wir eine stabile projektive algebraische Kurve C zusammen mit einem n -Tupel $\underline{p} := (p_1, \dots, p_n)$ ausgezeichneter nichtsingulärer Punkte verstehen, wobei jeder Punkt p_i zusätzlich mit einem Label $\lambda_i \in \Lambda$ versehen sein soll.*

Definition 2.3.2 *Eine rationale konforme Feldtheorie ist ein Funktor, der jeder n -punktierten gewichteten Kurve $(C, \underline{p}, \underline{\lambda})$ einen endlich-dimensionalen k -Vektorraum $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ zuordnet derart, daß*

RKFT 1 $V_{\mathbb{P}^1}(\emptyset) = k$.

RKFT 2 Für $\underline{\lambda}^* := (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})^* \cong V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}^*).$$

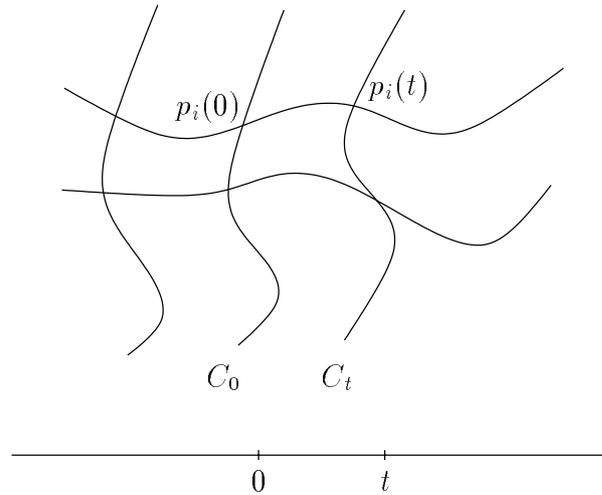
RKFT 3 *Ist $(C, \underline{p}, \underline{\lambda})$ die disjunkte Vereinigung zweier n -punktierter gewichteter Kurven $(C', \underline{p}', \underline{\lambda}')$ und $(C'', \underline{p}'', \underline{\lambda}'')$, so ist $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ gerade das Tensorprodukt der beiden Vektorräume $V_{C'}(\underline{p}', \underline{\lambda}')$ und $V_{C''}(\underline{p}'', \underline{\lambda}'')$:*

$$V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}) = V_{C'}(\underline{p}', \underline{\lambda}') \otimes V_{C''}(\underline{p}'', \underline{\lambda}'').$$

RKFT 4 *Ist $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{A}^1$ eine durch die affine Gerade \mathbb{A}^1 parametrisierte flache Familie nichtsingulärer n -punktierter Kurven, d.h. eine Familie von Kurven derart, daß die markierten Punkte $p_1(t), \dots, p_n(t)$ algebraisch vom Parameter $t \in \mathbb{A}^1$ abhängen,²⁵ so existiert für jedes $t \in \mathbb{A}^1$ ein Isomorphismus*

$$V_{C_t}(\underline{p}(t), \underline{\lambda}) \cong V_{C_0}(\underline{p}(0), \underline{\lambda}).$$

²⁵D.h. die p_i sind Schnitte von f im Sinne der algebraischen Geometrie, vgl. [27].



RKFT 5 *Angenommen, die Faser C_0 besitzt im Punkt s einen gewöhnlichen Doppelpunkt; sei \widehat{C}_0 die Normalisierung von C_0 und s separiere in die beiden Punkte $s', s'' \in \widehat{C}_0$. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$V_{C_t}(\underline{p}(t), \underline{\lambda}) \cong \sum_{\nu \in \Lambda} V_{\widehat{C}_0}(\underline{p}(0), s', s'', \underline{\lambda}, \nu, \nu^*) .$$

Bemerkung: Es stellt sich natürlich die Frage, wodurch die Forderungen **RKFT 1** bis **RKFT 5** motiviert sind. Hierzu merken wir zunächst an, daß in der physikalischen Literatur stets eine komplex-analytische Beschreibung benutzt wird, und die Vektorräume $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ außerdem als unitär angenommen werden; die Interpretation folgt dann folgender Philosophie: Die Kurve C spielt die Rolle einer zwei-dimensionalen (Euklidischen) Raum-Zeit; die grundlegenden Objekte einer Feldtheorie auf dieser Raum-Zeit sind die sogenannten n -Punkt-Funktionen, die einem n -Tupel von (primären) Feldern $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die in Punkten p_1, \dots, p_n auf der Raum-Zeit C lokalisiert sind ²⁶, eine Zahl $\langle \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle$ zuordnen. Sind die λ_i observable Felder (z.B. der Energie-Impuls-Tensor), so kann man $\langle \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle$ auffassen als den Erwartungswert einer Messung dieser Größen an den gegebenen Punkten. Solche n -Punkt-Funktionen werden gewöhnlich mit Hilfe des Feynman-Integrals ausgedrückt, das aber (mit wenigen Ausnahmen) nicht wohldefiniert ist! Die obigen Axiome umgehen diese Schwierigkeit, indem die "bekanntesten" Eigenschaften der n -Punkt-Funktionen axiomatisiert werden. Die Zahl $\langle \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle$

²⁶Wir ignorieren hier die Schwierigkeiten im Zusammenhang mit punktartig lokalisierten Feldern.

erhält man im wesentlichen durch Auswertung geeigneter Schnitte in dem durch die $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ gegebenen projektiv flachen Vektorbündel über dem Modulraum der punktierten Kurven. Genauer: Die Auswertung eines solchen Schnittes liefert einen Vektor in einem endlich-dimensionalen Vektorraum $V \cong \mathbb{C}^n$; mit Hilfe des natürlichen Skalarproduktes auf dem \mathbb{C}^n erhält man $\langle \lambda_1 \dots \lambda_n \rangle$ dann als das Quadrat der Norm dieses Vektors.

Zur Illustration wollen wir als nächstes einen nicht-trivialen Funktor angeben, der die Axiome einer rationalen konformen Feldtheorie erfüllt und dessen Konstruktion auf A.Tsuchiya, K.Ueno und Y.Yamada [75] zurückgeht. Sei dazu \mathfrak{g} die Lie-Algebra einer einfachen algebraischen Gruppe G . Wähle eine Cartan Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$; endlich-dimensionale irreduzible Darstellungen von \mathfrak{g} werden parametrisiert durch gewisse Linearformen auf \mathfrak{h} — die sogenannten *dominanten Gewichte*, die mit P_+ bezeichnet seien. Sei ferner V_λ die zu einem dominanten Gewicht $\lambda \in P_+$ gehörige Darstellung. Schließlich sei θ^\vee die zur höchsten Wurzel θ (bzgl. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$) gehörige Kowurzel; definiere den *Level* l von V_λ als die positive ganze Zahl $l := \langle \lambda, \theta^\vee \rangle$.

Die Menge Λ sei gegeben durch die Menge P_l der dominanten Gewichte mit $\text{Level} \leq l$. Die Involution auf P_l wird dadurch gegeben, daß man $\lambda \in P_l$ das zur dualen Darstellung V_λ^* assoziierte dominante Gewicht λ^* zuordnet.

Gemäß **RKFT 3** genügt es, den Vektorraum $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ für eine zusammenhängende Kurve anzugeben. Sei also C eine solche Kurve und wähle einen von den p_i 's verschiedenen Hilfspunkt q . Sei \mathfrak{F}_{C^*} die Algebra der regulären Funktionen auf der affinen Kurve $C^* := C \setminus q$; dann trägt $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}$ in natürlicher Weise die Struktur einer Lie-Algebra, indem man die Klammer definiert durch $[X \otimes f, Y \otimes g] := [X, Y] \otimes fg$. Durch Einbettung von $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}$ in die zu \mathfrak{g} assoziierte affine ungetwistete Kac-Moody Algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ erhält man eine natürliche Darstellung von $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}$, nämlich die sogenannte Basisdarstellung (*basic representation*) \mathcal{H}_l zum Level l , vgl. [33]. Andererseits operiert $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}$ auf V_{λ_i} durch $(\otimes f).v := f(p_i)X.v$, folglich auch auf dem Tensorprodukt $V_{\underline{\lambda}} := V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_n}$.

Definition 2.3.3 *Unter dem Wess-Zumino-Witten Modell vom Typ (\mathfrak{g}, l) versteht man den folgenden Funktor von der Kategorie der n -punktierten gewichteten Kurven in die Kategorie der endlich-dimensionalen k -Vektorräume:*

$$\mathbf{WZW}(C, \underline{p}, \underline{\lambda}) := \text{Hom}_{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}}(\mathcal{H}_l, V_{\underline{\lambda}}).$$

Theorem 2.3.1 (Tsuchiya-Ueno-Yamada) *Der Funktor **WZW** erfüllt die Axiome **RKFT 1** bis **RKFT 5** und definiert somit eine rationale konforme Feldtheorie.*

Sei $l \in \mathbb{Z}$ fest gewählt. Nun ist die Wahl einer Darstellung λ von G gleichbedeutend mit der Wahl einer Standard-Parabolischen P zusammen mit einem Charakter $\chi \in X(P)$. Gibt man sich folglich ein n -Tupel $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ von G -Moduln vom Level $\leq l$ vor, so wird dadurch einerseits der Typ eines quasi-parabolischen G -Bündels gegeben, andererseits nach Lemma 2.2.8 aber auch ein Geradenbündel $\mathcal{L}(l, \underline{\lambda})$ über $\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P})$. Das Hauptergebnis der Arbeit [49] besagt dann, daß der Funktor

$$(C, \underline{p}, \underline{\lambda}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P}), \mathcal{L}(l, \underline{\lambda}))$$

(zumindest für die klassischen Gruppen) dieselbe rationale konforme Feldtheorie definiert wie der Funktor **WZW**; mit anderen Worten: Die endlich-dimensionalen Vektorräume $\text{Hom}_{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{F}_{C^*}}(\mathcal{H}_l, V_{\underline{\lambda}})$ und $H^0(\mathcal{X}(G, C, \underline{p}, \underline{P}), \mathcal{L}(l, \underline{\lambda}))$ sind kanonisch isomorph.

Bemerkung: Eine explizite Beschreibung der Räume $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ ist im allgemeinen schwierig; im Zusammenhang mit den halbeinfachen adjungierten Bahnen spielt aber ja der Spezialfall $C = \mathbb{P}^1$ eine zentrale Rolle, und in diesem Fall kann man $V_{\mathbb{P}^1}(\underline{p}, \underline{\lambda})$ auf relativ elementare Weise charakterisieren. Sei nämlich U^- die von Elementen der Form $X \otimes z^{-p}$ mit $p \geq 1$ erzeugte Unter algebra von $\text{End}(\mathcal{H}_l)$ und $X_\theta \in \mathfrak{g}$ ein Eigenvektor der adjungierten Wirkung zur höchsten Wurzel θ .

Satz 2.3.1 $V_{\mathbb{P}^1}(\underline{p}, \underline{\lambda})$ besteht aus denjenigen Elementen von $V_{\underline{\lambda}}$, die sowohl von \mathfrak{g} als auch von $(X_\theta \otimes z^{-1})^{l+1}$ vernichtet werden.

Beweis: Gemäß der allgemeinen Theorie der Kac-Moody Algebren gibt es in \mathcal{H}_l einen nicht verschwindenden Vektor v , der von $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[z]]$ annihiliert wird derart, daß \mathcal{H}_l als U^- -Modul von v erzeugt wird mit $(X_\theta \otimes z^{-1})^{l+1}.v = 0$ als einziger Relation. Da sich \mathfrak{F}_{C^*} mit dem Polynomring $\mathbb{C}[z^{-1}]$ identifiziert, besteht $V_{\mathbb{P}^1}(\underline{p}, \underline{\lambda})$ gerade aus solchen Abbildungen $\mathcal{H}_l \longrightarrow V_{\underline{\lambda}}$, die sowohl \mathfrak{g} -linear als auch U^- -linear sind; solche Abbildungen sind aber bestimmt durch das Bild v' von v , mit Relationen $\mathfrak{g}.v' = 0$ und $(X_\theta \otimes z^{-1})^{l+1}.v' = 0$. ■

Wie erwähnt, ist eine explizite Beschreibung der $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ für Kurven höheren Geschlechts viel komplizierter; allerdings läßt sich zumindest die Dimension dieser Vektorräume bestimmen. Das zentrale Hilfsmittel hierzu ist der sogenannte *Fusionsring*, der — grob gesprochen — die Information darüber enthält, wie sich die in der Theorie auftretenden “Quantenzahlen” addieren.

Es soll daher im folgenden etwas detaillierter dargestellt werden, was der Fusionsring einer konformen Feldtheorie ist und wie sich aus

seiner Kenntnis die Dimension des Raumes $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ ergibt, siehe beispielsweise [76] oder [4]. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, daß die Dimension von $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ wegen **RKFT 4** nur vom Geschlecht g der Kurve und der Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ der Label abhängt (jedoch z.B. nicht von der Lage der markierten Punkte oder der Wahl einer komplexen Struktur auf C).

Sei $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ das von Λ erzeugte freie kommutative Monoid, d.h. $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ besteht (als Menge) aus (formalen) Summen $\sum n_i \lambda_i$ mit $\lambda_i \in \Lambda$ und $n_i \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren Λ mit einer Untermenge von $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ und setzen die Involution auf Λ linear zu einer Involution $x \mapsto x^*$ auf $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ fort. Sei $(C, \underline{p}, \underline{\lambda})$ eine n -punktige gewichtete Kurve vom Geschlecht g . Von den insgesamt n markierten Punkten seien n_i mit dem Element $\lambda_i \in \Lambda$ gewichtet. Für das Element

$$x = \underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_1}_{n_1\text{-mal}} + \dots + \underbrace{\lambda_i + \dots + \lambda_i}_{n_i\text{-mal}} + \dots$$

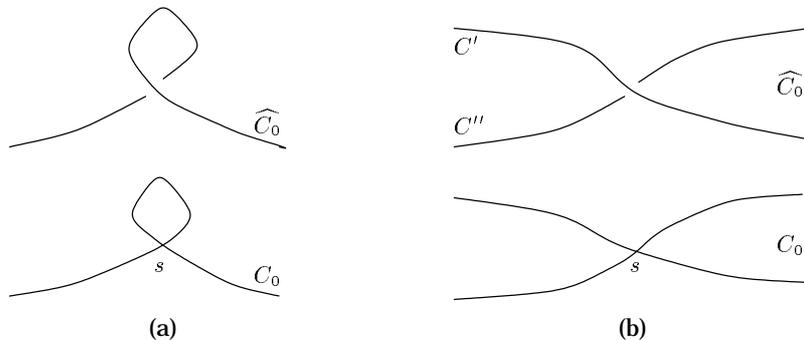
in $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ sei dann

$$N_g(x) := \dim V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}).$$

Faßt man N_g als Funktion von $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ in die natürlichen Zahlen auf, so ergeben sich aus den Axiomen **RKFT 1** und **RKFT 2** unmittelbar die beiden folgenden Eigenschaften von N_g :

- $N_0(0) = 1$;
- $N_g(x^*) = N_g(x)$.

Ferner liefert auch **RKFT 5** Einschränkungen an N_g ; es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist die Normalisierung \widehat{C}_0 der speziellen Faser C_0 vom Geschlecht $g - 1$ (Fig. (a)), oder \widehat{C}_0 ist die disjunkte Vereinigung zweier nichtsingulärer Kurven C' und C'' vom Geschlecht g' bzw. g'' mit $g' + g'' = g$ (Fig. (b)).



Im ersten Fall erhält man die Rekursionsformel

$$N_g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_{g-1}(x + \lambda + \lambda^*),$$

die es gestattet, die Funktionen N_g für beliebiges g iterativ aus N_0 zu bestimmen. Im zweiten Fall erhält man C_0 aus $\widehat{C_0}$ durch Identifikation von $s' \in C'$ mit $s'' \in C''$; von den auf C_0 markierten Punkten liegen im allgemeinen einige auf C' und einige auf C'' . Seien $x' := \sum_{p_i \in C'} \lambda_i$ und $x'' := \sum_{p_j \in C''} \lambda_j$; dann ergibt sich aus **RKFT 3** und **RKFT 5** die Beziehung

$$N_g(x' + x'') = \sum_{\nu \in \Lambda} N_{g'}(x' + \nu) N_{g''}(x'' + \nu^*).$$

Für $g = 0$ lauten die aus den Axiomen einer rationalen konformen Feldtheorie resultierenden Relationen mithin:

- $N_0(0) = 1$;
- $N_0(x^*) = N_0(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$;
- $N_0(x + y) = \sum_{\nu \in \Lambda} N_0(x + \nu) N_0(x + \nu^*)$ für $x, y \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$.

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition.

Definition 2.3.4 *Unter einer Fusionsregel auf der endlichen involutiven Menge Λ versteht man eine Abbildung $N : \mathbb{N}^{(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit*

FR 1 $N(0) = 1$ und $N(\lambda) > 0$ für mindestens ein $\lambda \in \Lambda$;

FR 2 $N(x^*) = N(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$;

FR 3 Für beliebige $x, y \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ gilt: $N(x + y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} N(x + \lambda) N(y + \lambda^*)$.

Bemerkung: In der Literatur wird meist noch angenommen, daß N nicht-entartet ist in dem Sinne, daß zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein $x \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ existiert mit $N(\lambda + x) \neq 0$; ansonsten schränke man N auf $\Lambda \setminus \{\lambda\}$ ein.

Beispiele: (i) Sei $C = \mathbb{P}^1$. Für das entsprechende WZW-Modell vom Typ (\mathfrak{g}, l) definiert

$$N(\sum \lambda_i) := \dim V_{\mathbb{P}^1}(\underline{p}, \underline{\lambda})$$

eine nicht-entartete Fusionsregel auf der Menge P_l der dominanten Gewichte vom Level $\leq l$.

(ii) Sei R ein kommutativer Ring mit einem involutiven Ring-Homomorphismus $x \mapsto x^*$ und einer \mathbb{Z} -linearen Form $t : R \rightarrow \mathbb{Z}$;

ist dann die Bilinearform $(x, y) \mapsto t(xy^*)$ symmetrisch und Λ eine Orthonormalbasis (über \mathbb{Z}) bezüglich dieser Bilinearform, die das Einselement des Ringes enthält, so definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} N : \mathbb{N}^{(\Lambda)} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_{\lambda} \lambda &\longmapsto t\left(\prod \lambda^{n_{\lambda}}\right) \end{aligned}$$

eine (nicht-entartete) Fusionsregel auf Λ : Die Bedingung an t impliziert nämlich zum einen $t(x) = t(x^*)$ und $t(1) = 1$ und folglich **FR 1** und **FR 2**, zum anderen gilt für $x, y \in R$:

$$t(xy) = \sum_{\lambda \in \Lambda} t(x\lambda)t(y\lambda^*),$$

da Λ eine Orthonormalbasis ist; hieraus folgt **FR 3**. Bemerkenswerterweise gilt auch die Umkehrung: Sei $N : \mathbb{N}^{(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{Z}$ eine (nicht-entartete) Fusionsregel auf Λ und $\mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ bezeichne die von Λ generierte freie abelsche Gruppe; wir fassen Λ als Untermenge von $\mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ auf und definieren für $\lambda, \mu \in \Lambda$:

$$\lambda \cdot \mu := \sum_{\nu \in \Lambda} N(\lambda + \mu + \nu^*) \nu.$$

Durch bilineare Fortsetzung wird $\mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ mit dieser Multiplikation zu einem kommutativen Ring und wegen **FR 2** ist die fortgesetzte Involution $x \mapsto x^*$ ein Ring-Homomorphismus. Darüber hinaus existiert eine (eindeutig bestimmte) Linearform $t : \mathbb{Z}^{(\Lambda)} \rightarrow \mathbb{Z}$ derart, daß

$$N\left(\sum n_{\lambda} \lambda\right) = t\left(\prod \lambda^{n_{\lambda}}\right)$$

für alle Elemente $\sum n_{\lambda} \lambda \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$, und es gilt $t(\lambda\mu^*) = \delta_{\lambda\mu}$ für beliebige $\lambda, \mu \in \Lambda$. Für Einzelheiten vgl. [4].

Zu jeder konformen Feldtheorie ist somit ein kommutativer Ring — der sogenannte *Fusionsring* \mathcal{F} — assoziiert; dieser trägt eine symmetrische, positiv definite Bilinearform (\cdot, \cdot) , bezüglich der die Labelmenge Λ eine Orthonormalbasis bildet. Da die Involution $*$ ein Ring-Homomorphismus ist, gilt $(xy, z) = (x, y^*z)$ für alle Elemente x, y, z des Fusionsringes. Die Existenz einer solchen Bilinearform liefert starke Einschränkungen an \mathcal{F} . Insbesondere ist die “Komplexifizierung” $\mathcal{F}_{\mathbb{C}} := \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ von \mathcal{F} isomorph zum Produktring $\prod_{i=1}^{\text{card}(\Lambda)} \mathbb{C}$: Setzt man (\cdot, \cdot) nämlich zu einem Hermiteschen Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ fort und bezeichnet für $x \in \mathcal{F}$ den Endomorphismus $y \mapsto xy$ von $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ mit m_x , so ist der zu m_x adjungierte Endomorphismus wegen $(yx, z) = (y, x^*z)$ gerade

m_x^* . Da nun aber die Endomorphismen m_x für verschiedene x miteinander kommutieren, sind sie normal und damit diagonalisierbar, so daß $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ eine halbeinfache komplexe Algebra ist.

Seien nun Σ das Spektrum von $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$, d.h. die (endliche) Menge der Ring-Homomorphismen $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$, und

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}_{\mathbb{C}} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\text{card}(\Sigma)} \\ x &\longmapsto (\chi(x))_{\chi \in \Sigma} . \end{aligned}$$

Nach dem zuvor gesagten ist Φ ein Isomorphismus komplexer Algebren, und der durch $\Phi m_x \Phi^{-1}$ gegebene Endomorphismus von $\mathbb{C}^{\text{card}(\Sigma)}$ ist gerade die Multiplikation mit $\Phi(x)$, wird also in der kanonischen Basis von $\mathbb{C}^{\text{card}(\Sigma)}$ dargestellt durch die Diagonalmatrix mit Einträgen $(\chi(x))_{\chi \in \Sigma}$. Insbesondere erhält man für die Spur von m_x unmittelbar $\text{Tr } m_x = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(x)$. Sei $\omega := \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \lambda^* \in \mathcal{F}$; wegen

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu \in \Lambda} N(\lambda + \mu + \nu^*) \nu = \sum_{\nu \in \Lambda} t(\lambda \mu \nu^*) \nu$$

ist aber andererseits $\text{Tr } m_\lambda = \sum_{\nu \in \Lambda} t(\lambda \nu \nu^*) = t(\lambda \omega)$ und damit

$$t(x \omega) = \text{Tr } m_x = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(x)$$

für alle $x \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$. Substituiert man $x \rightarrow x \omega^{-1}$ ²⁷, so erhält man

$$t(x) = \sum_{\chi \in \Sigma} \frac{\chi(x)}{\chi(\omega)} .$$

Wir sind jetzt in der Lage, vermöge der oben angegebenen Rekursionsformel N_g für $g \geq 1$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} N_g(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_g \in \Lambda} N_0(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \nu_1 + \nu_1^* + \cdots + \nu_g + \nu_g^*) \\ &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_g \in \Lambda} t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \nu_1 \nu_1^* \cdots \nu_g \nu_g^*) \\ &= t(\lambda_1 \cdots \lambda_n \omega^g) . \end{aligned}$$

Mit der oben gefundenen Beziehung $t(x \omega) = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(x)$ folgt dann:

$$N_g(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n) \chi(\omega)^{g-1} .$$

Wir fassen diese Überlegungen zusammen im

²⁷ $\chi(\omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\chi(\lambda)|^2 > 0$, so daß ω in $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ invertierbar ist.

Satz 2.3.2 Ist $(C, \underline{p}, \underline{\lambda})$ eine n -punktierte gewichtete Kurve vom Geschlecht g , so gilt für jede rationale konforme Feldtheorie

$$\dim V_C(\underline{p}, \underline{\lambda}) = \sum_{\chi \in \Sigma} \chi(\lambda_1) \cdots \chi(\lambda_n) \chi(\omega)^{g-1},$$

wobei Σ die Menge der Charaktere des zugehörigen Fusionsringes ist; mit anderen Worten: Die Dimensionen der Vektorräume $V_C(\underline{p}, \underline{\lambda})$ lassen sich bestimmen, sobald man die Charaktere des Fusionsringes explizit kennt.

Beispiel (vgl. [76]): Betrachte das WZW-Modell vom Typ (\mathfrak{sl}_2, l) . Die Lie-Algebra \mathfrak{sl}_2 besitzt für jede natürliche Zahl $p \geq 0$ genau eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung, nämlich die p -te symmetrische Potenz S^p der natürlichen zwei-dimensionalen Darstellung \mathbb{C}^2 . Das Tensorprodukt zweier solcher Darstellungen ist nach der Clebsch-Gordan-Regel gegeben durch ($p \geq q$):

$$S^p \otimes S^q = S^{p+q} \oplus S^{p+q-2} \oplus \cdots \oplus S^{p-q}.$$

Da der Level von S^p gerade p ist, ist der Fusionsring \mathcal{F} der von S^0, \dots, S^l frei erzeugte \mathbb{Z} -Modul. Die Multiplikation in \mathcal{F} ergibt sich nach der obigen Vorschrift zu ($p \geq q$)

$$\begin{aligned} S^p \cdot S^q &= S^p \otimes S^q \quad \text{falls } p+q \leq l, \\ S^p \cdot S^q &= S^{2l-p-q} \oplus S^{2l-p-q-2} \oplus \cdots \oplus S^{p-q} \quad \text{falls } p+q \geq l, \end{aligned}$$

und \mathcal{F} ist der Quotientenring des Darstellungsrings von \mathfrak{sl}_2 nach dem von S^{l+1} erzeugten Ideal.

Sämtliche Charaktere des Darstellungsrings erhält man auf folgende Weise: Für eine beliebige Darstellung V von \mathfrak{sl}_2 und $a \in \mathbb{C}$ bezeichne \widehat{a}_V den durch $\begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2$ definierten Endomorphismus von V ; definiere den zugehörigen Charakter des Darstellungsrings durch $\chi_a(V) := \text{Tr } e^{\widehat{a}_V}$. Der so definierte Charakter faktorisiert genau dann über \mathcal{F} , wenn er auf S^{l+1} verschwindet. Explizit erhält man für $\chi_a(S^p)$ den Ausdruck

$$\chi_a(S^p) = \frac{\sin(p+1)a}{\sin a},$$

so daß $\chi_a(S^{l+1})$ genau dann verschwindet, wenn a von der Form $\frac{k\pi}{l+2}$ ist für $1 \leq k \leq l+1$. Anders ausgedrückt: Die Charaktere des Fusionsringes \mathcal{F} sind gerade diejenigen Charaktere des Darstellungsrings mit $a = \frac{k\pi}{l+2}$, $1 \leq k \leq l+1$. Da die Involution $*$ für \mathfrak{sl}_2

trivial ist, erhält man ferner:

$$\chi(\omega) = \sum_{p=0}^l \chi(S^p)^2.$$

Mit $a = \frac{k\pi}{l+2}$ ergibt sich wegen

$$\sum_{p=0}^l \sin^2((p+1)a) = \frac{l}{2} + 1$$

für $\chi_a(\omega)$:

$$\chi_a(\omega) = \frac{l+2}{2 \sin^2 a};$$

somit ist die Dimension des Vektorraumes $V_C(\emptyset)$ für das WZW-Modell vom Typ (\mathfrak{sl}_2, l) gegeben durch

$$\dim V_C(\emptyset) = \left(\frac{l}{2} + 1\right)^{g-1} \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{\left(\sin \frac{k\pi}{l+2}\right)^{2g-2}};$$

hierbei bezeichnet g wieder das Geschlecht von C .

A Fusionsringe, Superauswahlsektoren und Unterfaktoren

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß sich jeder rationalen konformen Feldtheorie ein (endlich erzeugter) kommutativer Ring zuordnen läßt, der die Informationen darüber enthält, welche "Ladungen" in der Theorie auftreten und wie man sie addiert — der Fusionsring. Ähnlich wie sich beispielsweise im Fall einfacher Lie-Gruppen die algebraische Struktur im Dynkin-Diagramm codieren läßt, kann man auch die im Fusionsring enthaltene Information mittels eines sogenannten *Fusionsgraphen* graphisch darstellen.

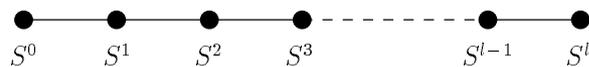
Beispiel: Wir betrachten noch einmal den Fusionsring des WZW-Modells vom Typ (\mathfrak{sl}_2, l) . Durch Ausreduktion der Tensorprodukte läßt sich die Multiplikation schreiben als

$$S^p \cdot S^q = \bigoplus_{\substack{r = |p-q| \\ p+q-r \text{ gerade} \\ r \leq \min(2l-p-q, p+q)}} S^r$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} S^1 \cdot S^0 &= S^1, \\ S^1 \cdot S^p &= S^{p-1} \oplus S^{p+1}, \quad \text{für } 0 < p < l, \\ S^1 \cdot S^l &= S^{l-1}, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt, daß der Fusionsring von S^0 und S^1 erzeugt wird. Diese Formeln kann man in folgender Weise graphisch darstellen: Der Fusionsgraph besteht aus $l + 1$ Vertizes, die den Elementen S^0, \dots, S^l entsprechen, und die zu S^p sowie S^q korrespondierenden Vertizes werden mit einer Kante verbunden, falls S^q in $S^1 \cdot S^p$ vorkommt (in diesem Beispiel treten keine Vielfachheiten auf; anderenfalls wären die Vertizes durch mehrere Kanten zu verbinden). Der resultierende Fusionsgraph ist daher ein Coxetergraph vom Typ A_{l+1} :



Es liegt die Frage nahe, welche Graphen als Fusionsgraphen einer rationalen konformen Feldtheorie auftreten können; dies ist eng mit der Frage der Klassifikation solcher Theorien verknüpft und stellt ein offenes (und sehr schwieriges) Problem der konformen Feldtheorie dar.

Andererseits ist in dem oben besprochenen Rahmen gar nicht ganz klar, inwieweit man überhaupt von einer *Quantenfeldtheorie* sprechen

kann, denn in der Quantentheorie sind Observable selbstadjungierte Operatoren auf einem (separablen) Hilbertraum, deren Eigenwerte gerade die im Experiment möglichen Meßwerte sind. Segal hat darüber hinaus in [66] gezeigt, daß die Algebra der Observablen in der Quantentheorie stets eine C^* -Algebra ist, d.h. eine Algebra von *beschränkten* Operatoren (bzw. daß man immer ohne Schwierigkeiten zu einer solchen Algebra übergehen kann). Daher ist die obige Konstruktion der n -Punkt-Funktionen formal in dem Sinne, daß beispielsweise der Energie-Impuls-Tensor — eine fundamentale Observable in jeder vernünftigen Theorie — in diesem Rahmen ein unbeschränkter Operator ist, und man folglich bei Operatorprodukten mit Domänenproblemen konfrontiert ist, die in diesem Ansatz schlicht ignoriert werden.

Die Frage nach der Ladungsstruktur einer Theorie, d.h. nach den vorkommenden Quantenzahlen und ihrer Addition, ist im Rahmen der Quantenfeldtheorie bekannt als die algebraische Theorie der Superauswahlsektoren; für eine Einführung in dieses Gebiet nebst umfangreichem Literaturverzeichnis verweisen wir auf [34]. Das für unsere Belange interessante Resultat von Doplicher und Roberts [16] besagt nun gerade, daß der “Fusionsring” bzw. etwas präziser die Superauswahlkategorie einer physikalisch sinnvollen²⁸ Quantentheorie identifiziert werden kann mit der Darstellungskategorie einer kompakten Gruppe. Grob gesprochen bedeutet dies, daß zu einer Observablenalgebra \mathfrak{A} mit gegebener Ladungsstruktur stets eine C^* -Algebra \mathfrak{F} von Quantenfeldern und eine kompakte Gruppe G — die sogenannte *globale Eichgruppe* — existieren derart, daß \mathfrak{A} der G -invariante Teil von \mathfrak{F} ist: $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G$. Unseres Wissens ist allerdings nicht klar, ob auch jede kompakte Gruppe tatsächlich auftritt.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß das Konzept des Fusionsringes, welches wir für rationale konforme Feldtheorien im Sinne von **RKFT 1** bis **RKFT 5** eingeführt haben, auch in einem a priori quantentheoretischen Rahmen Sinn macht und dort mit einer Inklusion $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}^G \subset \mathfrak{F}$ von C^* -Algebren verknüpft ist. Wir wollen in diesem Anhang eine spezielle Klasse solcher Inklusionen diskutieren, deren “Fusionsgraph”²⁹ gerade ein Coxetergraph ist.

²⁸Ohne auf Details einzugehen, bemerken wir, daß “sinnvoll” hier z.B. heißen soll, daß die zugrundeliegende Raum-Zeit der vier-dimensionale Minkowskiraum ist, daß sich Information nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann (*Lokalität* oder *Einstein-Kausalität*) etc., siehe [16] für Einzelheiten.

²⁹Wir benutzen den Begriff “Fusionsgraph” hier etwas inflationär — in der Jones-Theorie der Unterfaktoren spricht man vom *Prinzipalgraphen* einer Inklusion, siehe unten.

A.1 C^* - und von Neumann-Algebren

Wir stellen der Vollständigkeit halber einige im Zusammenhang mit Operatoralgebren wichtige Begriffe vor, vgl. [48]. Ist A ein komplexer Banachraum versehen mit einer Algebrastruktur derart, daß

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in A ,$$

so nennt man A eine *Banach-Algebra*. Existiert ferner eine normerhaltende Involution $*$ auf A mit der Eigenschaft

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \forall x \in A ,$$

so heißt A eine *C^* -Algebra*.

Ein lineares Funktional ω auf einer C^* -Algebra A heißt *positiv*, falls $\omega(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in A$. Ein positives lineares Funktional ω auf A mit $\omega(1) = 1$ wird als *Zustand* auf A bezeichnet. Bemerkenswerterweise induziert jedes positive lineare Funktional ω auf einer C^* -Algebra A eine Darstellung π_ω von A auf einem Hilbertraum \mathcal{H}_ω mit einem Vektor Ω_ω derart, daß $\pi_\omega(A)\Omega_\omega$ dicht ist in \mathcal{H}_ω und $\omega(x) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(x)\Omega_\omega \rangle \quad \forall x \in A$; dies ist die Aussage des bekannten Gelfand-Naimark-Segal-Theorems (GNS-Konstruktion).

Sei nun \mathcal{H} ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf \mathcal{H} und setze für $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid xM = Mx \quad \forall M \in \mathcal{M}\} ;$$

\mathcal{M}' ist die sogenannte *Kommutante* von \mathcal{M} und nach Konstruktion eine unitale Banach-Algebra. Ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ invariant unter der Involution, so spricht man von einer *$*$ -Unteralgebra*. Unter einer *von Neumann-Algebra* in \mathcal{H} versteht man eine $*$ -Unteralgebra \mathcal{M} von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}''$.

Da wir einige Resultate aus der Theorie der Matrix-Algebren benötigen, wollen wir diese kurz vorstellen, bevor wir uns dem interessanteren Fall unendlich-dimensionaler von Neumann-Algebren zuwenden. Offenbar ist die Algebra $M_n(\mathbb{C})$ der $n \times n$ -Matrizen eine von Neumann-Algebra, nämlich gerade der I_n -Faktor; ³⁰ dieser ist Baustein jeder endlich-dimensionalen von Neumann-Algebra in dem Sinne, daß jede solche Algebra M eine Multi-Matrix-Algebra und also isomorph zu einer direkten Summe von Faktoren ist:

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C}) .$$

³⁰Eine von Neumann-Algebra heißt ein *Faktor*, falls ihr Zentrum trivial ist; die Bezeichnung I_n bezieht sich auf die Klassifikation der sogenannten hyperfiniten Faktoren nach Murray-von Neumann und Connes, vgl. beispielsweise [9].

A.2 Inklusionsmatrix und Bratteli-Diagramm

Die im folgenden besprochene Theorie der Inklusionen von von Neumann-Algebren bzw. Unterfaktoren ist im wesentlichen von V.Jones und Mitarbeitern entwickelt worden; wir folgen der Darstellung in [23]. Für ein Paar $1 \in N \subset M$ beliebiger komplexer Algebren kann man folgende Konstruktion durchführen: Man assoziiert zu der Inklusion $N \subset M$ eine Inklusion $M \subset L$, wobei $L := \text{End}_N^r(M)$ die als Rechts- N -Modul aufgefaßte Algebra der Endomorphismen von M ist; M identifiziert sich dann mit einer Unteralgebra von L , indem man $x \in M$ mit der Linksmultiplikation $(y \mapsto xy) \in L$ identifiziert. Durch Iteration dieses Verfahrens, das auch als *fundamentale Konstruktion* bekannt ist [23], erhält man einen durch $N \subset M$ induzierten Turm

$$1 \in M_0 := N \subset M =: M_1 \subset \cdots \subset M_k \subset \dots$$

von komplexen Algebren. Definiert man den Rang $\text{rk}(M_k|M_0)$ von M_k über M_0 als die minimale Anzahl von Generatoren von M_k (als Rechts- M_0 -Modul), so gelangt man schließlich zum zentralen Begriff des *Index der Inklusion* $N \subset M$, der gegeben ist durch

$$[M : N] := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup [\text{rk}(M_k|M_0)]^{\frac{1}{k}}.$$

Wir schränken uns jetzt auf Multi-Matrix-Algebren ein. In diesem Fall kann man den Index vermöge einer sogenannten *Inklusionsmatrix* bestimmen, die wie folgt definiert ist: Für ein Paar $N \subset M$ von Faktoren findet man [23], daß der Index $[M : N]$ nichts anderes ist als das Verhältnis der Dimensionen, also

$$[M : N] = \frac{\dim_{\mathbb{C}}(M)}{\dim_{\mathbb{C}}(N)};$$

die Inklusionsmatrix Λ_N^M ist für ein Paar von Faktoren eine 1×1 -Matrix mit Eintrag $[M : N]^{\frac{1}{2}}$. Für Multi-Matrix-Algebren geht man folgendermaßen vor: Seien $\{p_i\}_{1 \leq i \leq m}$ die minimalen zentralen Idempotenten in M , d.h. $M = \bigoplus_i M p_i$ und jeder Summand $M p_i$ ist ein Faktor; entsprechend seien $\{q_j\}_{1 \leq j \leq n}$ die minimalen zentralen Idempotenten in N . Definiere für jedes Paar (i, j) :

$$M_{ij} := p_i q_j M p_i q_j \quad \text{und} \quad N_{ij} := p_i q_j N p_i q_j.$$

Aus der Theorie der Operatoralgebren ergibt sich (siehe z.B. [48]), daß für $p_i q_j \neq 0$ sowohl M_{ij} als auch N_{ij} Faktoren sind. Die Inklusionsmatrix der Inklusion $N \subset M$ ist dann die Matrix Λ_N^M mit Einträgen

$$\lambda_{ij} = 0 \quad \text{falls } p_i q_j = 0 ;$$

$$\lambda_{ij} = [M_{ij} : N_{ij}]^{\frac{1}{2}} \quad \text{falls } p_i q_j \neq 0 .$$

Bemerkung: Die Matrix Λ_N^M hat nur positive ganzzahlige Einträge, denn $[M_{ij} : N_{ij}]$ ist stets eine Quadratzahl; in der Tat ist $M_{ij} \cong N_{ij} \otimes M_{\lambda_{ij}}(\mathbb{C})$.

Es stellt sich heraus, daß für Paare von Multi-Matrix-Algebren die Matrix Λ_N^M zusammen mit den Dimensionen der minimalen Ideale in N die Inklusion $N \subset M$ vollständig bestimmt (bis auf einen inneren Automorphismus von M). Außerdem ist der Index $[M : N]$ durch das Norm-Quadrat der Inklusionsmatrix bestimmt:

$$[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2 ;$$

hierbei ist die Norm die Euklidische Operatornorm, d.h. $\|\Lambda_N^M\| := \max \{\|\Lambda_N^M \xi\| \mid \xi \in \mathbb{R}^n, \|\xi\| \leq 1\}$.

Ist $N \subset M$ eine Inklusion von Multi-Matrix-Algebren, so liefert die fundamentale Konstruktion ebenfalls eine solche Inklusion $M \subset L$, d.h. $L := \text{End}_N^r(M)$ ist wieder eine Multi-Matrix-Algebra; darüber hinaus ist die Inklusionsmatrix Λ_M^L gerade die Transponierte von Λ_N^M , so daß Λ_N^M alle Inklusionsmatrizen des Turmes

$$1 \in M_0 := N \subset M =: M_1 \subset \cdots \subset M_k \subset \dots$$

festlegt.

Bemerkung: Die Inklusionsmatrix Λ_N^M einer Inklusion $N \subset M$ von Multi-Matrix-Algebren läßt sich auch darstellungstheoretisch beschreiben [23]. Identifiziere hierzu M mit $\bigoplus_{i=1}^m \text{End}_{\mathbb{C}}(V_i)$, wobei V_i ein μ_i -dimensionaler Vektorraum sei, und betrachte die Aktion von M auf $V := \bigoplus_{i=1}^m V_i$. Ein Isomorphismus $\pi : \bigoplus_{j=1}^n M_{\nu_j}(\mathbb{C}) \rightarrow N \subset M$ mit $\pi(M_{\nu_j}(\mathbb{C})) = N q_j$ für jedes j ist dann eine Darstellung von $\bigoplus_{j=1}^n M_{\nu_j}(\mathbb{C})$ auf V . Jedes V_i ist ein nicht-trivialer N -Untermodul; sei π_i die zugehörige Unterdarstellung. Für $q_j p_i \neq 0$ ist $q_j p_i V_i = q_j V_i$ wiederum ein (nicht-trivialer) N -Untermodul, dessen zugehörige Unterdarstellung π_{ij} auf $M_{\nu_l}(\mathbb{C})$ für $l \neq j$ verschwindet, während die Einschränkung von π_{ij} auf $M_{\nu_j}(\mathbb{C})$ gerade ein Isomorphismus auf $N_{ij} \subset M_{ij} = \text{End}_{\mathbb{C}}(q_j V_i)$ ist. Die Vielfachheit dieser Darstellung ist λ_{ij} , d.h. es existiert eine Basis von $q_j V_i$ derart, daß $\pi_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ durch

$$\underbrace{\text{diag}(x_j, \dots, x_j)}_{\lambda_{ij}\text{-mal}}$$

dargestellt wird. Folglich besitzt V_i eine Basis mit der Eigenschaft, daß $\pi_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ durch $\text{diag}(x_1, \dots, x_1; x_2, \dots, x_2; \dots; x_n, \dots, x_n)$ dargestellt wird; hierbei tritt x_j gerade λ_{ij} -mal auf.

Wir kommen nun zur diagrammatischen Codierung einer Inklusion $\bigoplus_{j=1}^n M_{\nu_j}(\mathbb{C}) =: N \subset M := \bigoplus_{i=1}^m M_{\mu_i}(\mathbb{C})$ von Multi-Matrix-Algebren. Das zu einer solchen Inklusion assoziierte *Bratteli-Diagramm* $B(N \subset M)$ erhält man wie folgt: $B(N \subset M)$ besteht aus m schwarzen Vertizes b_1, \dots, b_m mit Gewichten μ_1, \dots, μ_m und n weißen Vertizes w_1, \dots, w_n mit Gewichten ν_1, \dots, ν_n ; der i -te schwarze Vertex wird mit dem j -ten weißen Vertex mit λ_{ij} Linien verbunden. Mit anderen Worten: Das Bratteli-Diagramm $B(N \subset M)$ ist ein bikolorierter, gewichteter Multigraph.

Beispiel: Sei $N := M_\nu(\mathbb{C}) \otimes 1 \subset M := M_\nu(\mathbb{C}) \otimes M_3(\mathbb{C})$; dann ist $B(N \subset M)$ der Graph



und $\Lambda_N^M = [3]$.

Zu einer (endlichen oder unendlichen) Kette $1 \in M_0 \subset M_1 \subset \dots$ von Multi-Matrix-Algebren und damit insbesondere auch zu einem durch die fundamentale Konstruktion generierten Turm läßt sich nun in offensichtlicher Weise ein Bratteli-Diagramm assoziieren, indem man bildlich gesprochen die schwarzen Vertizes der Inklusion $M_k \subset M_{k+1}$ als weiße Vertizes der Inklusion $M_{k+1} \subset M_{k+2}$ mit den entsprechenden Gewichten auffaßt.

Fassen wir noch einmal zusammen: Wir haben für eine Inklusion $N \subset M$ von Multi-Matrix-Algebren eine Matrix Λ_N^M definiert, die die Inklusion weitestgehend charakterisiert (zusammen mit den Dimensionen der minimalen Ideale von N sogar vollständig) und deren Norm-Quadrat den Index liefert. Ferner haben wir gesehen, wie wir die relevante Information im sogenannten Bratteli-Diagramm $B(N \subset M)$ codieren können.

A.3 Unterfaktoren

Wir kommen nun zu einer Klasse von Inklusionen unendlich-dimensionaler von Neumann-Algebren, den Inklusionen von II_1 -Faktoren. Wir erinnern daran, daß eine von Neumann-Algebra M ein Faktor ist, wenn ihr Zentrum $Z(M)$ nur aus den Vielfachen der Eins besteht.³¹

³¹Wir setzen alle Algebren als unital voraus.

Definition A.3.1 *Unter einem II_1 -Faktor versteht man einen unendlich-dimensionalen Faktor M , auf dem eine endliche normierte Spur $\text{Tr} : M \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $\text{Tr}(1) = 1$;
- (ii) $\text{Tr}(xy) = \text{Tr}(yx)$ für alle $x, y \in M$;
- (iii) $\text{Tr}(x^*x) \geq 0$ für alle $x \in M$.

Ein für unsere Belange besonders interessanter II_1 -Faktor ist der nach Murray und von Neumann [57] (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte hyperfinite II_1 -Faktor R , der sich mit der Clifford-Algebra eines unendlich-dimensionalen Euklidischen Raumes E identifiziert; alternativ läßt sich R auch als schwacher Abschluß der CAR-Algebra $\otimes^\infty M_2(\mathbb{C})$ in der Spur-Darstellung realisieren.³²

Als nächstes sollen die Konzepte des Index und der fundamentalen Konstruktion für den speziellen Rahmen der II_1 -Faktoren formuliert werden. Sei also $N \subset M$ eine Inklusion von II_1 -Faktoren; ferner bezeichne $L^2(M)$ den Hilbertraum, den man erhält, wenn man M bezüglich des Skalarproduktes $\langle x, y \rangle := \text{Tr}(x^*y)$ vervollständigt. Murray und von Neumann [57] haben für jeden Hilbertraum, auf dem N operiert (insbesondere also für $L^2(M)$) eine positive Zahl — die *Kopplungskonstante* zwischen N und seiner Kommutanten — eingeführt, die wir mit $\dim_N(L^2(M))$ bezeichnen.³³ Definiere

$$[M : N] := \dim_N(L^2(M)) ;$$

Jones hat gezeigt, daß diese Definition für II_1 -Faktoren zur oben angegebenen ringtheoretischen Definition äquivalent ist, vgl. [23].

Ebenso läßt sich im Fall von II_1 -Faktoren die fundamentale Konstruktion auf alternative Weise beschreiben: Sei $N \subset M$ eine Inklusion von II_1 -Faktoren mit $[M : N] < \infty$. Wir fassen die natürliche bedingte Erwartung von M auf N als orthogonale Projektion $e_N : L^2(M) \rightarrow L^2(N)$ auf und definieren L als die von M und e_N erzeugte von Neumann-Algebra, $L := \langle M, e_N \rangle$; L ist wieder ein II_1 -Faktor, so daß man durch Iteration des Verfahrens wie oben einen Turm

$$1 \in M_0 := N \subset M =: M_1 \subset \cdots \subset M_k \subset \dots$$

³²Die CAR-Algebra ist die Algebra der kanonischen Antivertauschungsrelationen, grob gesprochen also die Feldalgebra des freien Dirac-Feldes.

³³Die präzise Definition der Kopplungskonstanten ist sehr technisch, und da sie für unsere Belange nicht unbedingt notwendig ist, verweisen wir auf die Originalarbeit [57] oder das Buch von Kadison und Ringrose [48].

erhält. Die Inklusionsmatrix besitzt zwar im unendlich-dimensionalen Kontext ebenfalls ein unmittelbares Pendant, das allerdings eine Inklusion von II_1 -Faktoren nicht so weit spezifiziert wie im endlich-dimensionalen Fall. Dennoch kann man die relevante Information über eine Inklusion $N \subset M$ von II_1 -Faktoren graphisch codieren, und zwar mit Hilfe des sogenannten *Prinzipalgraphen*: Sei $N \subset M$ ein Paar von II_1 -Faktoren mit $[M : N] < \infty$. Mittels der fundamentalen Konstruktion erhält man einen Turm

$$1 \in M_0 := N \subset M =: M_1 \subset \dots \subset M_k \subset \dots ;$$

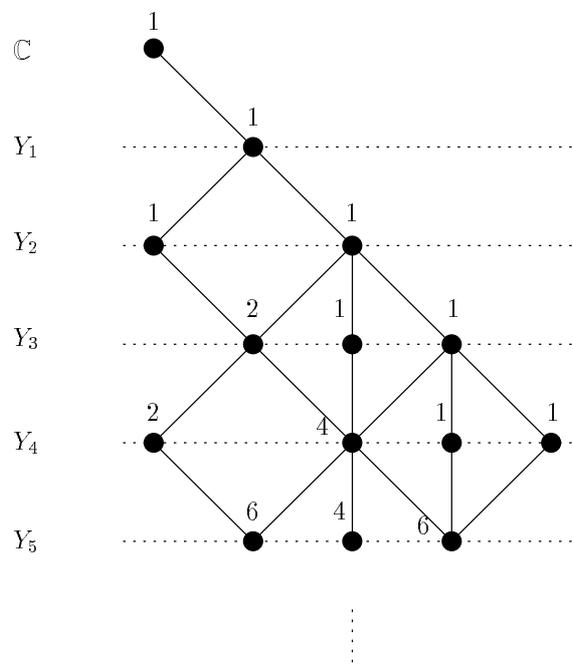
setzt man $Y_k := N' \cap M_k$, so ergibt sich der *derivierte Turm*

$$\mathbb{C} = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_k \subset \dots .$$

Lemma A.3.1 *Sei $N \subset M$ eine Inklusion von II_1 -Faktoren mit $[M : N] < \infty$. Dann gilt $\dim_{\mathbb{C}} Y_k < \infty$ für alle k .*

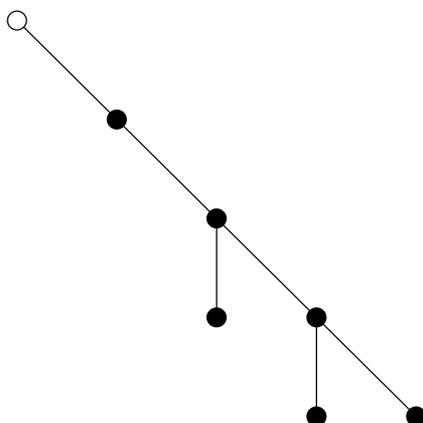
Beweis: Siehe z.B. [23]. ■

Ausgehend vom derivierten Turm der Inklusion $N \subset M$ läßt sich der Prinzipalgraph Γ auf sehr anschauliche Weise aus dessen Bratteli-Diagramm gewinnen.³⁴ Angenommen, das Bratteli-Diagramm des derivierten Turmes hätte die Gestalt



³⁴Die rein operatoralgebraische Konstruktion ist ziemlich unübersichtlich und verwendet einige tiefere Resultate aus der Theorie der Operatoralgebren; mit Blick auf die uns interessierenden Beispiele können wir jedoch auf den abstrakten Rahmen verzichten; für Einzelheiten siehe [23].

(es ist *nicht* klar, daß dieses Diagramm tatsächlich als Bratteli-Diagramm eines derivierten Turmes einer Inklusion $N \subset M$ von II_1 -Faktoren auftritt!). Dann erhält man den Prinzipalgraphen, indem man im Bratteli-Diagramm nach folgender Regel Vertices und die von Ihnen ausgehenden Kanten entfernt: Ein Vertex in der " Y_k -Ebene" wird genau dann entfernt, wenn er durch Spiegelung an der " Y_{k-1} -Ebene" aus einem Vertex der " Y_{k-2} -Ebene" hervorgeht. Ferner "vergißt" man die Gewichte (geht also zu einem ungewichteten Graphen über) und markiert den Vertex in der " Y_0 -Ebene". In dem oben skizzierten Bratteli-Diagramm erhielte man für Γ :



Bemerkung: Man sagt, das Paar $N \subset M$ habe *endliche Tiefe* genau dann, wenn Γ ein endlicher Graph ist, und definiert die Tiefe k als maximalen Abstand vom markierten Vertex \circ (in unserem Beispiel $k = 4$).

Wir haben oben erwähnt, daß nicht klar ist, welche Bratteli-Diagramme und damit welche Prinzipalgraphen in Inklusionen von II_1 -Faktoren auftreten. Umgekehrt hat man jedoch zumindest ein Teilresultat:

Satz A.3.1 (i) Sei $N \subset M$ eine Inklusion von II_1 -Faktoren mit $[M : N] < 4$; dann ist Γ ein Coxetergraph vom Typ A , D oder E ;

(ii) Ist $N \subset M$ ein Paar von II_1 -Faktoren mit $[M : N] = 4$, so ist Γ ein Coxetergraph vom Typ \tilde{A} , \tilde{D} oder \tilde{E} .

Beweis: Siehe [23]. ■

Wir wollen jetzt eine explizite Konstruktion angeben, die die Coxetergraphen vom Typ \tilde{A} , \tilde{D} und \tilde{E} tatsächlich als Prinzipalgraphen einer Inklusion realisiert; da einerseits zwischen diesen Coxetergraphen

und der Darstellungstheorie der endlichen Untergruppen von $SU(2)$ eine enge Beziehung besteht, vgl. [51], andererseits gemäß der oben erläuterten Philosophie eine Inklusion in der Quantenfeldtheorie gerade die Darstellungstheorie der globalen Eichgruppe (d.h. einer kompakten Gruppe) codiert, ist es naheliegend, eine Inklusion der Form $R^G \subset R$ zu studieren, wobei R wie oben der hyperfinite II_1 -Faktor ist ³⁵ und $G \subset SU(2)$ eine endliche Untergruppe von $SU(2)$. Dieser Ansatz ist leider zu naiv: Jones hat gezeigt, daß eine Inklusion der Gestalt $M^G \subset M$ für eine beliebige (äußere) Aktion einer endlichen Gruppe G auf einem II_1 -Faktor M stets Tiefe $k = 2$ hat.

Wir betrachten stattdessen für eine endliche Untergruppe G von $SU(2)$ die Inklusion $R^G \subset (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G$. Dann gilt:

Satz A.3.2 *Der Prinzipalgraph Γ der Inklusion $R^G \subset (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G$ ist ein Coxetergraph vom Typ A für eine zyklische Untergruppe G von $SU(2)$, vom Typ \tilde{D} für eine binäre Diedergruppe und vom Typ \tilde{E}_6, \tilde{E}_7 bzw. \tilde{E}_8 für die binäre Tetraeder-, binäre Oktaeder- bzw. binäre Ikosaedergruppe.*

Beweisskizze (vgl. [26], [23]): G operiere vermöge Konjugation auf $M_2(\mathbb{C})$ und mithin vermöge des unendlichen Tensorproduktes dieser Aktion auf der CAR-Algebra. Da diese Operation die Spur erhält, setzt sie sich zu einer Aktion auf R fort, und damit natürlich auch zu einer G -Aktion auf $R \otimes M_2(\mathbb{C})$. Mit den natürlichen bedingten Erwartungen $E_R : R \otimes M_2(\mathbb{C}) \rightarrow R$ bzw. $E_{R^G} : (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G \rightarrow R^G$ und den Einbettungen $R^G \hookrightarrow R$ sowie $(R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G \hookrightarrow R \otimes M_2(\mathbb{C})$ erhält man dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} R^G & \xleftarrow{E_{R^G}} & (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xleftarrow{E_R} & R \otimes M_2(\mathbb{C}) \end{array}$$

Zunächst ist klar, daß R^G ein II_1 -Faktor ist, denn $R^{SU(2)} \subset R^G$ enthält in seiner unitären Gruppe die unendliche symmetrische Gruppe, die auf R ergodisch operiert. Folglich besteht $(R^G)' \cap R$ aus den Vielfachen der Identität und insbesondere ist R^G ein Faktor. Sei

$$e_1 := \frac{1}{2} 1_R \otimes (e_{11} \otimes e_{22} - e_{12} \otimes e_{21} - e_{21} \otimes e_{12} + e_{22} \otimes e_{11}) ;$$

hierbei bezeichne e_{ij} die Projektion auf die entsprechende Komponente von $M_2(\mathbb{C})$. Für diese Projektion gilt:

- $e_1 x e_1 = E_R(x) e_1$;
- $(R \otimes M_2(\mathbb{C})) e_1 (R \otimes M_2(\mathbb{C})) = R \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$.

³⁵d.h. der schwache Abschluß der CAR-Algebra, siehe oben.

Aus der allgemeinen Theorie der von Neumann-Algebren ergibt sich damit, daß die fundamentale Konstruktion für die Inklusion $R \subset R \otimes M_2(\mathbb{C})$ gerade die Algebra $L := R \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C})$ liefert, wobei die Projektion e_R sich mit e_1 identifiziert. Induktiv schließt man dann, daß der von $R \subset R \otimes M_2(\mathbb{C})$ generierte Turm die Gestalt

$$R \subset R \otimes M_2(\mathbb{C}) \subset \dots \subset R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C})) \subset \dots$$

hat. Die Projektionen e_i lassen sich mit Hilfe des Shift-Endomorphismus der CAR-Algebra aus e_1 konstruieren (und sind ebenso wie e_1 $SU(2)$ -invariant). Nach [23] ist $[(R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G : R^G] = 4$, so daß der Prinzipalgraph notwendigerweise vom Typ A , \tilde{D} oder \tilde{E} ist, siehe oben.

Der Kernpunkt des Beweises ist nun folgendes Hilfsresultat [23]:

Lemma A.3.2 *Seien $N \subset M \subset P$ von Neumann-Algebren, φ ein treuer normaler Zustand auf P , e eine Projektion in $N' \cap P$ und schließlich G eine Gruppe von Automorphismen von P , die N, M, φ und e invariant läßt. Angenommen*

- (i) $eMe = Ne$;
- (ii) $\varphi(xe) = \varphi(e)\varphi(x)$ für alle $x \in M$;
- (iii) $\text{Tr} = \varphi|_{P^G}$ ist eine Spur;
- (iv) $N^G \subset M^G \subset P^G$ sind II_1 -Faktoren mit $[M^G : N^G] = [P^G : M^G] = \varphi(e)^{-1}$.

Dann gibt es einen Isomorphismus $\Phi : \langle M^G, e_{N^G} \rangle \rightarrow P^G$ derart, daß $\Phi(e_{N^G}) = e$ und $\Phi(x) = x$ für alle $x \in M^G$ gilt.

In der vorliegenden Situation erhält man damit einen Isomorphismus $\langle (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G, e_{R^G} \rangle \cong (R \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}))^G$, der e_{R^G} auf e_1 abbildet, und induktiv ergibt sich mithin der zu $R^G \subset (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G$ assoziierte Turm zu

$$R^G \subset (R \otimes M_2(\mathbb{C}))^G \subset \dots \subset (R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C})))^G \subset \dots$$

Der derivierte Turm ergibt sich wie folgt: Da $(R^G)' \cap R$ nur aus den Vielfachen der Eins besteht, gilt zunächst $(R^G)' \cap R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C})) = 1_R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C}))$ und außerdem $(R^G)' \cap (R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C})))^G = 1_R \otimes (\otimes^k M_2(\mathbb{C}))^G$, so daß der derivierte Turm gegeben ist durch

$$Y_0 = \mathbb{C} \subset (M_2(\mathbb{C}))^G \subset \dots \subset (\otimes^k M_2(\mathbb{C}))^G \subset \dots$$

Die hierin auftretenden endlich-dimensionalen von Neumann-Algebren sind aber gerade die Kommutanten der Potenzen der natürlichen Darstellung von G auf \mathbb{C}^2 , so daß man die McKay-Korrespondenz [51] zur

Berechnung des Bratteli-Diagrammes und damit auch des Prinzipalgraphen heranziehen kann: Sei Λ die Matrix, deren Zeilen und Spalten durch die irreduziblen Darstellungen von G indiziert werden und deren Eintrag an der Stelle (i, j) gerade die Vielfachheit von j im Tensorprodukt von i mit der natürlichen zwei-dimensionalen Darstellung ist. Dann ist Λ die "Adjacency"-Matrix eines Coxetergraphen vom Typ A, \tilde{D} bzw. \tilde{E} . Zur Konstruktion des Bratteli-Diagramms faßt man Λ als Inklusionsmatrix auf und startet mit dem "Dimensionsvektor" $(1, 0, \dots, 0)^t$ auf der Y_0 -Ebene. Durch explizite Rechnung prüft man sofort nach, daß man auf diese Weise genau den "richtigen" Prinzipalgraphen zu gegebener Gruppe G erhält. ■

Literatur

- [1] V.Arnol'd: Mathematische Methoden der klassischen Mechanik. Birkhäuser (1988)
- [2] M.Artin: Algebraization of formal moduli I. In: Global Analysis, Papers in honour of K.Kodaira, Hrsg. D.Spencer und S.Iyanaga, Univ. of Tokyo Press (1969), 21-71
- [3] M.Atiyah: Instantons in two and four dimensions. Commun.Math.Phys. **93** (1984), 437-451
- [4] A.Beauville: Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula. Preprint alg-geom 9405001 (1994)
- [5] A.Beauville, Y.Laszlo: Conformal blocks and generalized theta functions. Commun.Math.Phys. **164** (1994), 385-419
- [6] A.Borel: Linear algebraic groups. Springer (1991)
- [7] A.Belavin, A.Polyakov, A.Zamolodchikov: Infinite conformal symmetry in two-dimensional Quantum Field Theory. Nucl.Phys. **B241** (1984), 333-380
- [8] C.Chevalley: Invariants of finite groups generated by reflections. Amer.J.Math. **77** (1955), 778-782
- [9] A.Connes: Noncommutative geometry. Academic Press (1994)
- [10] I.Dolgachev, N.Goldstein: On the Springer resolution of the minimal unipotent conjugacy class. J.Pure Appl.Alg. **32** (1984), 33-47
- [11] S.Donaldson, P.Kronheimer: The geometry of Four-Manifolds. Clarendon Press (1990)
- [12] P.Deligne, D.Mumford: The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes Études Sci.Publ.Math. **36** (1969), 75-110
- [13] S.Donaldson: Nahm's equations and the classification of monopoles. Commun.Math.Phys. **96** (1984), 387-407
- [14] S.Donaldson: Instantons and geometric invariant theory. Commun.Math.Phys. **93** (1984), 453-460
- [15] J.Drezet, M.Narasimhan: Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. Invent.math. **97** (1989), 53-94

- [16] S.Doplicher, J.Roberts: Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. *Commun.Math.Phys.* **131**, 51 (1990)
- [17] G.Faltings: A proof of the Verlinde formula. *J.Alg.Geom.* **3** (1994), 347-374
- [18] R.Fossum, B.Iversen: On Picard groups of algebraic fibre spaces. *J.Pure Appl.Algebra* **3** (1974), 269-280
- [19] A.Floer: An instanton-invariant for 3-manifolds. *Commun.Math.Phys.* **118** (1985), 215-240
- [20] W.Fulton, R.Pandharipande: Notes on stable maps and quantum cohomology. Preprint alg-geom 9608011 (1996)
- [21] D.Friedan, S.Shenker: The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory. *Nucl.Phys. B281* (1987), 509-545
- [22] W.Fulton: Algebraic curves. W.A. Benjamin (1969)
- [23] F.Goodman, P.de la Harpe, V.Jones: Coxeter graphs and towers of algebras. Springer (1989)
- [24] W.Haboush: Reductive groups are geometrically reductive. *Ann.Math.* **102** (1975), 67-83
- [25] G.Harder: Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. *Invent.math.* **4** (1967), 165-191
- [26] P.de la Harpe, V.Jones: An introduction to C^* -algebras. Vorlesungsskript 1995
- [27] R.Hartshorne: Algebraic geometry. Springer (1977)
- [28] P.Heinzner: Moment maps and infinite-dimensional Kähler geometry. Vortrag im Rahmen des DMV-Seminars "Infinite-dimensional Kähler geometry", Oberwolfach (1995)
- [29] W.Hesselink: Desingularization of varieties of nullforms. *Invent.math.* **55** (1979), 141-163
- [30] W.Hesselink: Uniform instability in reductive groups. *Reine Angew.Math.* **303/304** (1978), 74-96
- [31] J.Humphreys: Conjugacy classes in semisimple algebraic groups. *AMS-Surveys* **43**, AMS, Providence R.I. (1995)
- [32] V.Jones: Index for subfactors. *Invent.math.* **72** (1983), 1-25

- [33] V.Kac: Infinite dimensional Lie algebras. Cambridge Univ. Press (1990)
- [34] D.Kastler (ed.): The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results. World Scientific (1990)
- [35] G.Kempf: Instability in invariant theory. Ann.Math. **108** (1978), 299-316
- [36] F.Kirwan: Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry. Math. Notes **31**, Princeton Univ. Press (1984)
- [37] G.Kempf, L.Ness: The length of a vector in a representation space. In "Algebraic geometry", Lecture Notes in Math. **732** (1979), 233-244
- [38] A.Kirillov: Elements of the theory of representations. Springer (1976)
- [39] F.Knop, H.Kraft, T.Vust: The Picard group of a G -variety. In "Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie", Hrsg. H.Kraft, P.Slodowy, T.Springer, DMV Seminar Notes, Birkhäuser (1989)
- [40] H.Kraft: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie. Aspekte der Mathematik **D1**, Vieweg (1984)
- [41] H.Kraft: G -vector bundles and the linearization problem. Can.Math.Soc.Conf.Proc. **10** (1989), 111-123
- [42] H.Kraft, C.Procesi: On the geometry of conjugacy classes in classical groups. Comment.Math.Helv. **57** (1982), 539-602
- [43] P.Kronheimer: Instantons and the geometry of the nilpotent variety. J.Diff.Geom. **32** (1990), 473-490
- [44] P.Kronheimer: A Hyper-Kählerian structure on coadjoint orbits of a semisimple complex group. J.London Math.Soc. **42** (1990), 193-208
- [45] B.Kostant: Lie group representations on polynomial rings. Amer.J.Math. **85** (1963), 327-404
- [46] S.Kumar: Infinite Grassmannians and moduli spaces of G -bundles. Preprint alg-geom 9510016 (1995)
- [47] S.Kumar, M.Narasimhan, A.Ramanathan: Infinite Grassmannians and moduli spaces of G -bundles. Math.Ann. **300** (1994), 41-75

- [48] R.Kadison, J.Ringrose: Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. I und II. Academic Press (1983)
- [49] Y.Laszlo, C.Sorger: The line bundles on the moduli of parabolic G -bundles over curves and their sections. Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. **30** (1997), 499-525
- [50] D.Luna: Slices étales. Bull.Soc.Math. France, Mémoire **33** (1973), 81-105
- [51] J.McKay: Graphs, singularities, and finite groups. Proc.Symp.Pure Math. Vol. **37** (1980), 183-186
- [52] V.Mehta, C.Seshadri: Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. Ann.Math. **248** (1980), 205-239
- [53] J.Milne: Étale Cohomology. Princeton University Press (1980)
- [54] G.Moore, N.Seiberg: Classical and quantum conformal field theory. Commun.Math.Phys. **123** (1989), 177-254
- [55] D.Mumford: Geometric invariant theory. Springer (1965)
- [56] D.Mumford, J.Fogarty, F.Kirwan: Geometric invariant theory. Springer (1994)
- [57] F.Murray, J.von Neumann: On rings of operators I+II. Ann.Math. **37** (1936), 116-229 bzw. Trans.Amer.Math.Soc. **41** (1937), 208-248
- [58] M.Nagata: Complete reducibility of rational representations of a matrix group. J.Math.Kyoto Univ. **1** (1961), 87-99
- [59] M.Narasimhan, S.Ramanan: Stable principal bundles on a compact Riemann surface. Ann.Math. **89** (1969), 14-51
- [60] L.Ness: A stratification of the null cone via the moment map. Amer.J.Math. **106** (1984), 1281-1329
- [61] A.Pressley, G.Segal: Loop groups. Clarendon Press (1986)
- [62] A.Ramanathan: Stable principal bundles on a compact Riemann surface — construction of the moduli space. Thesis, University of Bombay (1976)
- [63] G.Rousseau: Immeubles sphériques et théorie des invariants. C.R.Acad.Sci. Paris **286** (1978), 247-250
- [64] M.Schlessinger: Functors on Artin rings. Trans.Amer.Math.Soc. **130** (1968), 208-222

- [65] G.Segal: Two-dimensional conformal field theory and modular functors. Proc.Int.Cong.Math.Phys., Swansea, A.Hilger (1989), 22-35
- [66] I.Segal: Postulates for general quantum mechanics. Ann.Math. **48** (1947), 930-948
- [67] C.Seshadri: Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures. Bull.Amer.Math.Soc. **83** (1977), 124-126
- [68] I.Shafarevich: On some infinite-dimensional groups. II Math. USSR-Izv. **18** (1982), 185-194
- [69] P.Slodowy: Algebraic groups and resolutions of Kleinian singularities. Preprint RIMS-1086 (1996)
- [70] P.Slodowy: Four lectures on simple groups and singularities. Commun. of the Math.Inst., Vol. **11**, Rijksuniversiteit Utrecht (1980)
- [71] P.Slodowy: Die Theorie der optimalen Einparameteruntergruppen für instabile Vektoren. In "Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie", Hrsg. H.Kraft, P.Slodowy, T.Springer, DMV Seminar Notes, Birkhäuser (1989)
- [72] P.Slodowy: Simple singularities and simple algebraic groups. Lecture Notes in Math. **815**, Springer (1980)
- [73] P.Slodowy: On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras. Can.Math.Soc.Conf.Proc. **6** (1984) 405-442
- [74] T.Springer: The unipotent variety of a semisimple group. Proc. Bombay Colloq.Alg.Geom., Hrsg. S.Abhyankar, Oxford Univ. Press (1969), 373-391
- [75] A.Tsuchiya, K.Ueno, Y.Yamada: Conformal field theory on the universal family of curves with gauge symmetries. Adv.Stud. in Pure Math. **19** (1989), 459-566
- [76] E.Verlinde: Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory. Nucl.Phys. **B300** (1988), 360-376

Zusammenfassung

Wir betrachten die adjungierte Wirkung einer einfachen algebraischen Gruppe G auf ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} . Dann zerfällt die nilpotente Varietät

$$N(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad}(x))^N = 0 \text{ für } N \text{ hinreichend groß}\}$$

in endlich viele Bahnen. Das Jacobson-Morozov-Theorem gestattet für jedes nilpotente Element $x \in N(\mathfrak{g})$ die Konstruktion einer transversalen Scheibe S an den G -Orbit von x . Sei \mathcal{O} eine nilpotente Bahn, deren Abschluß x enthält. Wir zeigen, daß sich $\mathcal{O} \cap S$ mit einem Modulraum SL_2 -äquivarianter gerahmter G -Bündel über der projektiven Ebene identifiziert; insbesondere erhält man für triviales x eine Beschreibung der nilpotenten adjungierten Bahnen in \mathfrak{g} als Modulraum solcher Bündel.

Unter der von uns betrachteten SL_2 -Aktion zerfällt \mathbb{P}^2 in drei Bahnen, die sich mit den homogenen Räumen SL_2/SL_2 , SL_2/U und SL_2/B identifizieren lassen. Die Analyse SL_2 -äquivarianter G -Bündel über \mathbb{P}^2 reduziert sich auf G -Prinzipalbündel über einer projektiven Geraden durch den trivialen Orbit und einen unendlich fernen Punkt $\{\infty\} \in \text{SL}_2/B$, und jedes SL_2 -äquivariante gerahmte G -Bündel über der projektiven Ebene induziert ein (quasi-) parabolisches G -Bündel über \mathbb{P}^1 . Mit Hilfe dieser "dimensionalen Reduktion" gelingt es, die halbeinfachen Bahnen in \mathfrak{g} als Modulräume parabolischer Bündel zu beschreiben; letztere spielen überdies in der konformen Feldtheorie eine zentrale Rolle, die wir ebenfalls kurz diskutieren.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. P. Slodowy für die Anregung zu dieser Arbeit und die Unterstützung während der letzten Jahre herzlich bedanken. Ferner gilt mein Dank den Mitarbeitern des Mathematischen Seminars sowie des II. Instituts für Theoretische Physik, insbesondere Herrn Prof. Dr. O. Riemenschneider und Herrn Prof. Dr. K. Fredenhagen.

Für die mir während meines Aufenthaltes am Research Institute for Mathematical Sciences in Kyoto zuteil gewordene Gastfreundschaft möchte ich meinem Gastgeber Prof. Dr. K. Saito danken.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg; ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Stelle finanziert hat.

Schließlich möchte ich meinen Kommilitonen für die moralische Unterstützung und manch anregendes Gespräch danken.

Lebenslauf

Ich, Christian Adler, wurde am 20. Mai 1970 in Hamburg geboren. Von Herbst 1976 bis zum Sommer 1980 besuchte ich die Theodor-Storm-Schule in Wedel und ab Herbst 1980 dann das Johann-Rist-Gymnasium, wo ich im Mai 1989 die allgemeine Hochschulreife erlangte. Im Anschluß daran absolvierte ich von Juni 1989 bis August 1990 meinen Wehrdienst bei der Luftwaffe in Heide.

Im Oktober 1990 nahm ich mein Physikstudium an der Universität Hamburg auf und legte im September 1992 die Vordiplomprüfung ab. Ich schloß das Studium im Juni 1995 mit einer Diplomarbeit zur algebraischen Quantenfeldtheorie ab (Titel der Arbeit: *Anyonen und lokalisierte Morphismen des Federbush-Modells*). Während meines Hauptstudiums war ich vier Semester als Übungsgruppenleiter am Mathematischen Seminar tätig. Nach Abschluß des Studiums war ich zunächst für einige Monate Stipendiat des Graduiertenkollegs "Theoretische Elementarteilchenphysik", bis ich im Juli 1996 im Rahmen des von der DFG geförderten Projektes SI 12/6 "A-D-E-Klassifikationen" eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Seminar antrat. Von Dezember 1997 bis März 1998 war ich Gast am Research Institute for Mathematical Sciences in Kyoto.