

**Zeitdiskrete Markovsche
Entscheidungsprozesse zur optimalen
Steuerung von Versicherungsunternehmen**
Der stationäre, nichtstationäre und adaptive Fall

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik, Informatik
und Naturwissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt
im Department Mathematik
von
Andreas Welbers
aus Delmenhorst

Hamburg
2007

Als Dissertation angenommen vom Department
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Gerhard Hübner
und Prof. Dr. Hans Daduna

Hamburg, den 24.01.2007

Prof. Dr. Hans Joachim Oberle
Leiter des Departments Mathematik

Für Michaela und meine Familie

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Tabellenverzeichnis	IV
Abkürzungsverzeichnis	V
Symbolverzeichnis	VI
1 Einleitung	1
1.1 Gang der Untersuchung	2
1.2 Abgrenzung zur bestehenden Literatur	4
2 Grundlagen	7
2.1 Das Markovsche Entscheidungsmodell	7
2.1.1 Optimierung bei einem beschränkten Zeithorizont	11
2.1.2 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont - die diskontierten Erlöse	13
2.1.3 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont - die durchschnittlichen Erlöse	18
2.2 Versicherungswirtschaftliche Grundlagen	19
2.2.1 Risiko, Risikoarten und Risikomaße	19
2.2.2 Unternehmensziele bei Versicherungsunternehmen	22
3 Das stationäre Ausschüttungsmodell	25
3.1 Optimierung bei einem beschränkten Zeithorizont	26
3.2 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont	37

4	Erweiterungen des Grundmodells	41
4.1	Dividenden und Rückversicherung	41
4.1.1	Proportionaler Rückversicherungsschutz	43
4.1.2	Nichtproportionaler Rückversicherungsschutz	49
4.1.3	Dynamische Wahl des Rückversicherungsschutzes	56
4.2	Dividenden und das Währungskursrisiko	65
4.2.1	Generelle Modellierung	65
4.2.2	Modellierung mit derivativen Absicherungsinstrumenten	70
4.3	Dividenden und das Kapitalanlagegeschäft	73
4.3.1	Modellierung mit einer festen Kapitalanlagemöglichkeit	74
4.3.2	ε -optimale Ausschüttungspolitik	81
4.3.3	Dynamische Wahl der Kapitalanlage	84
4.4	Das stationäre Gesamtausschüttungsmodell	88
5	Das nichtstationäre Ausschüttungsmodell	101
5.1	Das nichtstationäre Grundmodell	101
5.2	Ausschüttungsmodell mit Spätschäden	105
5.3	Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation	114
6	Das adaptive Ausschüttungsmodell	121
6.1	Das PEC-Verfahren	122
6.2	Das Bayes-Verfahren	129
7	Numerische Lösungen	141
7.1	Der Simulated Annealing-Algorithmus	142
7.2	Umsetzung des Algorithmus	145
8	Diskretes Ausschüttungsmodell	151
8.1	Versicherungswirtschaftliches Modell	151
8.2	Bankwirtschaftliches Ausschüttungsmodell	154
9	Zusammenfassung und Ausblick	159
A	Konvergenzsätze	163
B	Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße	165
C	Homogene Markov-Ketten	167
D	Das Programm	169
	Literatur	175

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ablauf eines dynamischen Systems	7
2.2	Das strategische Dreieck der Unternehmensziele	23
3.1	Ein Pfad des Kapitalprozesses bei Verwendung von π^*	31
4.1	Auszahlungsstruktur bei proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung	42
4.2	Mögliche Verläufe des Kapitalprozesses mit und ohne Rückversicherungsschutz bei bekannten Schäden	47
4.3	3D-Plot der einperiodigen Erlösfunktion $r(s, d, m)$	62
4.4	3D-Plot von $L_{T-2}(d, m)$	63
4.5	Plot der Sicherheitsschranke bei nichtproportionalem RV-Schutz	64
4.6	Zahlungsströme eines Swaps	70
4.7	$\varepsilon(s)$ -optimale Schranken für exponential(0.25)-verteilten Schaden und $T=5$	84
5.1	Pfad des Kapitalprozesses im nichtstationären Modell bei Verwendung von π^* und Periodizität der Sicherheitsschranken	104
5.2	Ablauf im Spätschaden-Modell	109
5.3	Ablauf im Modell mit zufälliger Inflation	116
7.1	Ermittlung einer optimalen Politik im Gesamtmodell	141
7.2	Nachbarschaftsstruktur für optimale Politiken im Gesamtmodell für zwei Perioden	145
7.3	Berechnung des Zielfunktional bei einem Zeithorizont $T = 3$	147
7.4	Ausgabe der berechneten Ergebnisse des SA-Algorithmus	149

Tabellenverzeichnis

1.1	Einflussgrößen auf das Kapital einer Versicherungsunternehmung	3
3.1	Erwartete Dividenden für $\mathcal{E}(0.25)$ -verteilte Schäden	35
3.2	Erwartete Dividenden für Pareto(8,3)-verteilte Schäden	36
4.1	Erwartete Ausschüttungen mit proportionalem RV-Schutz für $\mathcal{E}(0.25)$ -verteilte Schäden	48
4.2	Erwartete Ausschüttungen mit proportionalem RV-Schutz für Pareto(8,3)-verteilte Schäden	49
4.3	Erwartete Ausschüttungen bei einem Währungsswap für $\mathcal{E}(0.25)$ -verteilte Schäden	72
4.4	Erwartete Dividenden bei einem Währungsswap für Pareto(8,3)-verteilte Schäden	73
4.5	Zulässige Politiken und ihre Wertfunktionen im Modell mit festverzinslicher Kapitalanlage	80
4.6	Berechnete Werte von $V_0^\pi(s)$ für $\varepsilon(0.25)$ - und Pareto(8,3)-Verteilung	80
4.7	Summanden der $\varepsilon(s)$ -Schranke bei exponential(0.25)-verteilten Schäden	83
5.1	Parameterwerte bei exponential($\beta(t)$)-verteilten Schäden	105
5.2	Parameterwerte bei Pareto(a(t),3)-verteilten Schäden	105
5.3	Abwicklungsdreieck mit Abwicklungsdauer $\mathbf{m} = 5$	106
5.4	Abwicklungsdreieck mit Zahlenbeispielen	107
7.1	Zulässige Politiken und ihre Wertfunktionen für zwei Perioden	146
7.2	Parameterwerte und ihre Bezeichnungen	148
7.3	Berechnete Werte von $V_0^\pi(s)$ für zwei Perioden	148

Abkürzungsverzeichnis

DFA	Dynamic Financial Analysis
EM	Entscheidungsmodell
EPD	Expected Policyholder Deficit
f.s.	fast sicher
iid.	stochastisch unabhängig und identisch verteilt
MEM	Markovsches Entscheidungsmodell
PEC	Principle of Estimation and Control
RV	Rückversicherung
SA	Simulated Annealing
TailVaR	Tail-Value-at-Risk
Var	Varianz
VaR	Value-at-Risk

Allgemeine Symbole

$(\mathcal{X}, \mathcal{O})$	Topologischer Raum
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
\approx	ungefähr gleich
$\bigotimes_{t=0}^T \mathcal{F}_t$	Produkt- σ -Algebra
$\bigotimes_{t=0}^T P_t$	Produktmaß
δ_a	Dirac-Maß mit Träger $\{a\}$
\emptyset	leere Menge
\equiv	identisch
\hat{F}_t^{-1}	empirische Quantilfunktion
\hat{F}_t	empirische Verteilungsfunktion
$\mathbb{1}_C(\cdot)$	Indikatorfunktion
\mathbb{B}	Borel- σ -Algebra über \mathbb{R}
\mathbb{N}	natürliche Zahlen
\mathbb{R}, \mathbb{R}_+	reelle Zahlen, nichtnegative reelle Zahlen
\mathcal{B}_X	Borel- σ -Algebra des Topologischen Raums
$\mathcal{E}(\beta)$	Exponential(β)-Verteilung
\overline{ab}	Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten a und b
$\ \! \ $	Supremumsnorm
Δ	Wert der Differenz
$\times_{t=0}^T A_t$	kartesisches Produkt der Mengen A_t
$A \cap B, A \cup B,$	mengentheoretische Operationen
$A \subseteq B, A^C$	

$C_b(A)$	Menge aller beschränkten, stetigen und reellwertigen Funktionen auf A
$E[X_2 X_1 = x_1]$	bedingter Erwartungswert
$f^+ := \max\{f, 0\}$	Positivteil von f
$F_{X_t}^{-1}$	Quantilfunktion von X_t
F_{X_t}	Verteilungsfunktion von X_t
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$	Fakultät
$p(s, \cdot, s')$	Übergangszähldichte
$P^{X_2 X_1}$	bedingte Verteilung
$Par(a, b)$	Pareto(a,b)-Verteilung
$T(x_{(t)})$	Ordnungsstatistik

Spezielle Symbole

$(\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}_t(s), \bar{Q}_t, \bar{r}_t)$	nicht-Markovsches Entscheidungsmodell	132
$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}_{\pi s})$	Wahrscheinlichkeitsraum des nicht-MEM	133
$(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$	Aktionsraum mit zugehöriger σ -Algebra.	8
$(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t(s), Q_t, r_t)$	nichtstationäres Markovsches Entscheidungsmodell.	102
$(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), Q, r)$	Markovsches Entscheidungsmodell	8
$(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), \Theta, \mu, Q_t^\vartheta, r_t^\vartheta)$	Bayessches Entscheidungsmodell.	130
$(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^F(s), Q^F, r)$	adaptives Markovsches entscheidungsmodell	121
$(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$	Zustandsraum mit zugehöriger σ -Algebra	8
$(\Omega_M, \mathcal{F}_M, P_s^\pi)$	zugrundeliegender Wahrscheinlichkeitsraum des MEM	10
$(\rho^*, h(s), f)$	Lösungstripel für die Optimalitäts(un)gleichung des erwarteten durchschnittsoptimalen Gesamterlös/Ausschüttungsbetrags	18
(Θ, \mathfrak{T})	Parameterraum.	130
$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$	Markov-Kette	143
α	Diskontierungsfaktor.	13
$\bar{R}_\pi(\omega)$	zufälliger Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag im nicht-MEM bei Start in s und Wahl von π	133
$\bar{V}(\pi, s)$	erwarteter Gesamtausschüttungsbetrag im nicht-MEM.	133
$\bar{V}^*(s)$	optimaler Wert von $\bar{V}(\pi, s)$	133
$\bar{V}_\infty(\pi, s)$	erwarteter durchschnittlicher Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s und Wahl der Politik π für $T = \infty$	18
$\bar{V}_\infty^*(s)$	optimaler Wert von $\bar{V}_\infty(\pi, s)$	18
\mathbb{F}	Menge aller Entscheidungsregeln	9
\mathbb{K}	Menge der zulässigen Zustands-Aktions-Paare.	8
$\mathcal{A}(s)$	Menge der zulässigen Aktionen für den Zustand s	8
\mathcal{D}	Menge der potenziellen optimalen Ausschüttungspolitik.	141

\mathcal{D}_{opt}	Menge der optimalen Ausschüttungspolitiken	144
\mathcal{P}	Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße/Verteilungsfunktionen	121
μ, P^θ	a-priori-Verteilung	130
$\mu_t(h_t, \cdot)$	a-posteriori-Verteilung	131
ϕ_α^F	Diskrepanzfunktion für diskontierte Ausschüttungen	127
$\pi = \{f_t\}$	deterministische Markov-Politik	9
π^*	optimale (Markov-)Politik	11
Π_M	Menge aller deterministischen Markov-Politiken	9
$\pi_t(\cdot h_t), \delta_{f(s_t)}$	Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{A}_t	10
$\pi_{\hat{F}_t}^*$	asymptotisch optimale PEC-Politik	127
ρ	Risikomaß	21
$\tilde{V}^*(s)$	maximaler erwarteter Gesamtausschüttungsbetrag im nichtstationären Entscheidungsmodell bei Start in s	101
$\tilde{V}_\pi(s)$	erwarteter Gesamtausschüttungsbetrag im nichtstationären Entscheidungsmodell bei Start in s und Wahl von π	101
$\varepsilon_t(s)$	Schranke für die $\varepsilon(s)$ -Optimalität einer Politik (zur Zeit t) .	81
ζ	Kontrollparameter	115
$A_{\pi_i \pi_k}$	Akzeptanzwahrscheinlichkeit	143
$f_{(t)}(s)$	Entscheidungsregel (abhängig von t)	9
$G_{\pi_i \pi_k}$	Generierungswahrscheinlichkeit	142
$H(\theta)$	differenzierte Prämie	139
$H(X_{(t)})$	(Netto-)Credibility-Prämie	139
H_t	Menge der zulässigen Vorgeschichten bis t	9
$h_t \in H_t$	mögliche Vorgeschichte	9
N_{π_i}	Nachbarschaft von π_i	142
$pr_y(y, \cdot)$	Projektion auf y	85
Q	Übergangswahrscheinlichkeitsmaß	8
Q^F	Übergangswahrscheinlichkeitsmaß im adaptiven EM	121
$r(\cdot)$	einperiodige Erlösfunktion	8
$R_\pi(s)$	zufälliger Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s und Wahl der Politik π	10
T	Zeithorizont	7
$t = 0, \dots, T$	Entscheidungszeitpunkt	7
v^*	Grenzwert der Folge von Wertiterationsfunktionen	16
$V^*(s)$	maximaler erwarteter Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s für $T < \infty$	11
$V_{\infty, \alpha}^*(s)$	maximaler erwarteter diskontierter Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s für $T = \infty$	13

$V^{*,\vartheta}(s)$	maximaler erwarteter T-stufiger Bayes-Dividendenausschüttungsbetrag	131
$V^\vartheta(\pi, s)$	erwarteter T-stufiger Bayes-Dividendenausschüttungsbetrag	131
$v_n(s)$	Wertiterationsfunktionen zum Zeitpunkt n	14
$V_{(t)}(\pi, s), V_\pi(s)$	erwarteter Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s und Wahl der Politik π (bis t)	11
$V_{\infty,\alpha}(\pi, s)$	erwarteter diskontierter Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag bei Start in s und Wahl der Politik π für $T = \infty$	13
$V_{t;\infty,\alpha}^F(\pi, s)$	erwarteter diskontierter Gesamterlös/Ausschüttungsbetrag ab t bei unbekannter Verteilungsfunktion F	123

Modellparameter

$(\mathcal{I}_{(t)}, \mathfrak{J})$	Zustandsraum von I_t mit zugehöriger σ -Algebra	115
$\dot{r}(s)$	Strafkostensatz bei Verletzung des Sicherheitsziels	85
ϵ_t	zufälliger Störterm	115
γ, η	vorgegebene Parameter zur Berechnung der Sicherheits-schranken	32
λ	Sicherheitszuschlag des Versicherers	26
λ_{RV}	Sicherheitszuschlag des Rückversicherers	43
$\mathcal{A}^p(s)$	Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen bei proportionalem RV-Schutz	43
$\mathcal{A}^{np}(s)$	Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen bei nicht-proportionalem RV-Schutz	50
$\mathcal{A}_1^R(s), \mathcal{A}_2^R(s)$	Menge der zulässigen Wahrscheinlichkeitsmaße bei dynamischer Wahl der Kapitalanlage	85
$\mathcal{A}_t(z, s)$	Menge der zulässigen Ausschüttungen im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden	108
$\mathcal{M}^{np,1}, \mathcal{M}^{np,2}$	Mengen der zulässigen Selbstbehalte bei nicht-proportionalem RV-Schutz	64
$\mathcal{M}^{p,1}, \mathcal{M}^{p,2}$	Mengen der zulässigen Selbstbehalte bei proportionalem RV-Schutz	57
\mathcal{Z}_t	Zustandsraum von Z_t	107
\mathbf{m}	Abwicklungsdauer	106
$\mathfrak{R} = [0, r_{max}]$	Wertebereich für die zufällige Kapitalanlagerendite bei dynamischer Wahl der Kapitalanlage	84
μ_i, σ_i	Mittelwert, Standardabweichung der Inflationsrate	115
μ_R	Wahrscheinlichkeitsmaß für die zufällige Kapitalanlagerendite (Aktion)	84
$\tilde{V}^*(i, s)$	optimaler Wert von $\tilde{V}_\pi(i, s)$	114

$\tilde{V}^*(z, s)$	optimaler Wert von $\tilde{V}_\pi(z, s)$	107
$\tilde{V}_\pi(i, s)$	erwarteter Gesamtausschüttungsbetrag im Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation bei Start in (i, s) und Politik π	114
$\tilde{V}_\pi(z, s)$	erwarteter Gesamtausschüttungsbetrag im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden bei Start in (z, s) und Politik π ..	107
B	(Gesamt-)Prämienvolumen	25
B bzw. X	Kredit- bzw. zufälliger Tilgungsbetrag im bankwirtschaftlichen Ausschüttungsmodell	154
$B(m')$	Nettoprämieneinnahme bei nichtproportionalem RV-Schutz	49
$B(m)$	Nettoprämieneinnahme bei proportionalem RV-Schutz	43
B^F	(Gesamt-)Prämienvolumen im adaptiven EM	122
B_t	(Gesamt-)Prämienvolumen im nichtstationären EM	102
B_t^ϑ	(Gesamt-)Prämienvolumen im Bayesschen EM	130
$c(r_f)$	Kosten eines Zinsswaps pro Periode	79
$c(r_f, w_f)$	Gesamtkosten des Zins- und Währungsswaps pro Periode ..	89
$c(w_f)$	Kosten des Währungsswaps pro Periode	71
$d \in \mathcal{A}(s)$	zulässige Dividendenausschüttung	26
$F(s, d, B, x, \cdot)$	Systemfunktion für das Ausschüttungsmodell	26
$g(Z_{t+1})$	zufällige Schadensleistung des Versicherers, bestehend aus mehreren Zuwächsen	108
$h(m', X_t)$	Eigenanteil des Erstversichererschadens bei nichtproportionalem RV-Schutz	49
$h(m, X_t)$	Eigenanteil des Erstversichererschadens bei proportionalem RV-Schutz	43
I_t	zufällige Inflationsrate	115
k	Justierungsparameter für die Höhe der Dividende	32
m	Parameter für den Selbstbehalt bei proportionalem RV-Schutz	43
m'	Parameter für den Selbstbehalt bei nichtproportionalem RV-Schutz	49
m'_{min}, m'_{max}	untere und obere Schranke für m'	49
m_{min}, m_{max}	untere und obere Schranke für m	43
$P_{i,s}^\pi$	Wahrscheinlichkeitsmaß im Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation	115
$P_{z,s}^\pi$	Wahrscheinlichkeitsmaß im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden	107
$R_\pi^i(\omega)$	zufälliger Ausschüttungsbetrag im Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation	115

$R_{\pi}^z(\omega)$	zufälliger Ausschüttungsbetrag im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden	107
r_f	fixe Kapitalanlagerendite	74
$r_g(t)$	Funktion zur Modellierung des Versicherungszyklus	102
R_t	zufällige Kapitalanlagerendite	74
$s \in \mathcal{S}$	Kapitalzustand	25
$s^*(m)$	Sicherheitsschranke bei proportionalem RV-Schutz	43
$s^*(w_f)$	Sicherheitsschranke bei einem Währungsswap	71
$s_r^*, s^*(F_{r_f})$	Sicherheitsschranke bei fester Kapitalanlagerendite	81
s_W^*	Sicherheitsschranke bei zufälliger Währungskursrate	66
s_z^*	Sicherheitsschranke im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden	108
$s_{(1,2,3)}^*$	Sicherheitsschranke(n) für das Grundmodell	32
$s_{(1,2,3)}^*(m')$	Sicherheitsschranke(n) bei nichtproportionalem RV-Schutz	50
s^*, F_t	Sicherheitsschranke im adaptiven Entscheidungsmodell	121
s_R^*	Sicherheitsschranke bei zufälliger Kapitalanlagerendite	75
$s_t^{\vartheta}, s_{(1,2,3),t}^{\vartheta}$	Sicherheitsschranke(n) im Bayesschen EM	131
$s_{(1,2,3)}^*(\hat{F}_t), B(\hat{F}_t)$	Sicherheitsschranke(n), Prämienvolumen in Abhängigkeit von der empirischen Verteilungsfunktion	124
$s_{G,(1,2,3)}^*$	Sicherheitsschranke(n) im Gesamtmodell	90
$s_{t,(1,2,3)}^*$	Sicherheitsschranke(n) im nichtstationären EM	102
w_f	fixe Währungskursrate	71
W_t	zufällige Währungskursrate	65
X_t	zufällige (Gesamt-)Schadensleistung	25
$X_{(t)} := (X_1, \dots, X_t)$	Zufallsvektor für die (Gesamt-)Schadensleistungen	132
$Z_t := (Z_{t,t}, \dots, Z_{t-m,t})$	Zufallsvektor von Zuwächsen	107
$Z_{t,t+k}$	Zuwächse im Spätschadenmodell	106

Sonstige Symbole

\mathcal{G}	Menge aller Risiken	19
$H(A, B)$	Hausdorff-Metrik, d.h. der Abstand zwischen nichtleeren kompakten Teilmengen A, B eines metrischen Raums	12
L	Operator zur Darstellung der Optimalitätsgleichung	15
M	(zufälliges) Risiko	19
$M_b(\mathcal{S})$	(Banach-)Raum der beschränkten und messbaren Funktionen auf \mathcal{S}	15
m_q	Quantilwert der Verteilung von M	21

KAPITEL 1

Einleitung

Das klassische Ziel eines wirtschaftlichen Objekts ist die Maximierung des Gewinns, denn diese Erfolgsgröße gibt bei funktionierendem Wettbewerb Aufschluss über die Effektivität und Insolvenzgefahr des Unternehmens. Insbesondere auf erwerbswirtschaftliche Versicherungsunternehmen wie die *Versicherungs-Aktiengesellschaft* ist dieses Ziel übertragbar.¹

Gerade deutsche Versicherungsunternehmen sind seit der Deregulierung und Liberalisierung des einheimischen Versicherungsmarktes im Jahre 1994 einem bis dato unbekanntem Preis- und Produktwettbewerb ausgesetzt, so dass die Gewinnerzielung für die erfolgreiche Behauptung am Markt zur unmittelbaren Notwendigkeit wird.²

Eng verbunden mit dem Ziel der Gewinnmaximierung ist die Ausschüttung von Dividenden, deren Höhe im Zuge von Gewinnverwendungsentscheidungen festgelegt werden.³ Das Erwirtschaften eines hohen Gewinns zieht somit die Möglichkeit einer höheren Dividendenausschüttung nach sich. Die Entscheidung, ob und in welcher Höhe Dividenden ausgeschüttet werden, obliegt ebenso der Unternehmensführung wie die Wahl von gewinnbringenden Maßnahmen. Damit aber solche Handlungsmöglichkeiten abgeleitet werden können, wird der überwiegend durch die Schadenszahlungen und Kapitalanlagenentlöse bestimmte zufällige Periodenerfolg üblicherweise mittels des Erwartungswertoperators in eine geeignetere Form transformiert.⁴ Infolgedessen ist das Ziel der Gewinnmaximierung bzw. die Maximierung der Dividendenausschüttungen sinnvollerweise durch das Maximieren des erwarteten Gewinns bzw. der erwarteten Dividendenausschüttungen zu ersetzen.

¹ Vgl. Farny[38](S. 277), Schott[98](S. 78), Mehring[75](S. 37ff), Ferrer[41](S. 47f), Jost[60](S. 28ff) und Schinzler[96](S. 73).

² Vgl. Groffmann[48](S. 46f), Settnik [103](S. 5).

³ Vgl. Farny[38](III.563), Reischel[87] (S. 139ff), Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 325) und Stenner [105](S. 148).

⁴ Vgl. Schradin[99](S. 203f).

Die Berücksichtigung von Dividendenausschüttungen als Kriterium zur Unternehmenssteuerung liegt auch darin begründet, dass Aktionäre eine angemessene Gegenleistung für das der Versicherungs-Aktiengesellschaft zur Verfügung gestellte Eigenkapital erwarten. Aus Sicht der Aktionäre verliert das Investitionsobjekt „Versicherungsunternehmung“ genau dann an Bedeutung, falls andere Anlagemöglichkeiten auf dem Kapitalmarkt rentabler erscheinen. Ein Abzug von Aktienkapital kann aber für das Versicherungsunternehmen nicht vorteilhaft sein.⁵

1.1 Gang der Untersuchung

Das Ziel dieser Arbeit ist ein zahlungsstrombasiertes, stochastisches Gesamtmodell zur Steuerung einer Versicherungs-Aktiengesellschaft zu entwickeln, welches den speziellen Merkmalen eines Versicherungsunternehmens Rechnung trägt. Die Hauptaufgabe dieses mathematischen Modells besteht in der systematischen und zukunftsbezogenen Festlegung von Maßnahmen zur Erreichung vorher spezifizierter Unternehmensziele wie z.B. der erwarteten Dividendenausschüttungen. Aus diesem Grund ist die zukünftige Entwicklung des Unternehmens auf einem mehrperiodigen Zeitraum ein wesentlicher Bestandteil der Unternehmenssteuerung.

Dies geschieht gewöhnlich durch eine zeitdiskrete Kapitalgleichung der Form⁶

$$S_{t+1} = S_t + B_t - B_t^{re} + R_t - X_t + X_t^{re} - D_t \quad (-Kosten),$$

wobei die Bedeutung der Größen der Tabelle 1.1 zu entnehmen sind und bewusst von der bilanziellen Begriffsbildung abweichen dürfen.⁷ Dabei seien die jeweiligen Zufallsvariablen wie üblich auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ definiert.

Der aus der Langfristigkeit des Entwicklungszeitraumes begründeten Dynamik des Kapitalzustandes der Versicherungsunternehmung wollen wir mit den Methoden der *Markovschen Entscheidungsprozesse*⁸ begegnen und so ein Steuerungsmodell für einen Versicherer erarbeiten.

Dazu stellen wir im folgenden Kapitel einige Grundbegriffe und Konzepte der Theorie der Markovschen Entscheidungsprozesse vor und geben die für die Modellierung notwendigen Eigenarten einer Versicherungsunternehmung hinsichtlich der herrschenden Risikosituation und Zielbildung wieder. Letzteres erfolgt im allgemeinen Rahmen, da nicht zwischen

⁵ Vgl. Mehring[75] (S. 43), Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 391) und Schradin[99](S. 209).

⁶ Vgl. Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 3f). Eine weitere Kapitalgleichung für das Gesamtunternehmen ist z.B. auch Schäl[94] zu entnehmen.

⁷ Z.B. wollen wir nicht zwischen *gezeichneten* und *verdienten* Prämien unterscheiden. Auch die Schadensleistungen fallen der Einfachheit halber in voller Höhe an, so dass eine Rückstellungsbildung vernachlässigbar ist.

⁸ Synonym dazu wird auch häufig der Begriff der Stochastischen Dynamischen Optimierung verwendet. Generell scheinen die Methoden des Operations Research zur Lösung von Versicherungsproblemen geeignet zu sein wie die Arbeit von Brockett/Xia[23] zeigt. Dazu gehören beispielsweise auch die Arbeiten von Schott[98] und Uebis[108], die mit Hilfe von Markovschen Entscheidungsmodellen ein Prämiensteuerungsmodell entwickelten.

Variable	Bedeutung
S_t	Kapitalstand zur Zeit t
B_t	Prämieinnahme zur Zeit t
B_t^{re}	Rückversicherungsprämie zur Zeit t
R_t	Kapitalertrag zur Zeit t
X_t	zu leistende Schadenszahlung zur Zeit t
X_t^{re}	Schadensanteil des Rückversicherers zur Zeit t
D_t	Dividendenausschüttung zur Zeit t
Kosten	z.B. Personal-, Gebäude- und EDV-Kosten

Tabelle 1.1: Einflussgrößen auf das Kapital einer Versicherungsunternehmung

Lebens- und Sachversicherungsunternehmen differenziert werden soll.

In Kapitel 3 stellen wir unser stationäres Grundmodell zur Unternehmenssteuerung auf, welches wir dann in Kapitel 4 durch die Einbettung von weiteren Geschäftsfeldern eines Versicherers erweitern werden. Dabei bedeutet Stationarität, dass alle Parameter des Modells über den gesamten Zeithorizont unverändert bleiben.

Die Annahme der Stationarität werden wir in Kapitel 5 geeignet abschwächen, so dass die Untersuchung auf ein nichtstationäres Modell abzielt.

Ein weiteres Problem in Bezug auf die Unkenntnis der Verteilungsparameter stellt deren Schätzung und die Einbeziehung des Schätzverfahrens in die Bestimmung einer optimalen Politik zur Unternehmenssteuerung eines Versicherers dar. Dazu werden in Kapitel 6 die klassischen adaptiven Verfahren wie das *PEC-Verfahren* (Principle of Estimation and Control) und das *Bayes-Verfahren* vorgestellt.

Das Kapitel 7 beinhaltet sowohl ein numerisches Lösungsverfahren für den Fall, dass eindeutige mathematische Strukturaussagen nicht mehr möglich sind, als auch ein numerisches Beispiel zur Veranschaulichung dieses Verfahrens.

Weiteren Modellierungsmodifikationen, die eigentlich nicht Gegenstand dieser Arbeit sind, widmen wir uns in Kapitel 8.

Mit dem Resümee der entwickelten Ergebnisse, der Klassifizierung in bestehende Managementkonzepte und dem Ausblick auf weitere Möglichkeiten dieses Steuerungsmodells in Kapitel 9 schließt diese Arbeit ab.

1.2 Abgrenzung zur bestehenden Literatur

In der Vergangenheit haben sich einige Modellierungsansätze zur Steuerung von Versicherungsunternehmen in der aktuariellen Literatur etabliert. Dazu gehören sowohl die *stochastischen Simulationsmodelle*⁹ als auch die Modelle der *Wertorientierten Steuerung*.¹⁰

Ein weiterer häufig verwendeter Ansatz sind jene Modelle, deren Zielfunktional die Maximierung der erwarteten Dividendenausschüttungen ist, wobei jüngere Konzepte der *Ausschüttungsmodelle* die Optimierung über einem zeitstetigen Horizont verfolgen.¹¹ Obwohl das Kapital ständigen Zu- und Abflüssen von Geldbeträgen ausgesetzt ist, erscheint die Verwendung einer diskreten Zeitachse mit konstanten Periodenlängen sinnvoller zu sein als die Berücksichtigung einer stetigen Zeitachse, da die Entscheidungen auf Grund einer gründlich ermittelten Entscheidungsgrundlage wie z.B. eines Geschäftsberichts oder einer Ergebnisrechnung getroffen werden, deren Erstellung quartalsweise, halbjährlich oder jährlich erfolgt.¹²

Die Basis der zeitdiskreten Ausschüttungsmodelle bildet die Arbeit von De Finetti[30] aus dem Jahre 1957. Ausschlaggebend dafür war die für die Praxis ungeeignete Verwendung der Ruinwahrscheinlichkeit als Zielfunktional.¹³ In den Arbeiten von Borch[20][21] wurde das Optimierungsproblem schließlich für einen reellen Zustandsraum betrachtet. Zudem wurde auch die Wahl der optimalen Rückversicherungsentscheidung berücksichtigt.

Die Verwendung von *Risikonutzenfunktionen* bei Markovschen Entscheidungsmodellen¹⁴ ermöglichte die Konstruktion von risikosensitiven Ausschüttungsmodellen, in denen die Geldbeträge anhand der Risikosituation bewertet werden.¹⁵

Obwohl es bei der Bildung eines stationären Modells sicherlich Berührungspunkte mit der bestehenden Literatur geben wird, liegt einer unserer Schwerpunkte in der Entwicklung eines stationären Gesamtmodells, da oftmals nur Teilgeschäftsfelder eines Versicherers berücksichtigt wurden. Des Weiteren sind die nichtstationären und adaptiven

⁹ Diese Modelle generieren die künftige Kapitalentwicklung eines Versicherers mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen. In diesem Kontext wird auch von *Dynamic Financial Analysis* (DFA) gesprochen. Vgl. beispielsweise Beard/Pentikäinen/Pesonen[12], Bonsdorff[19], Pentikäinen[80], Lowe/Stanard[69], Warten/Sommer[110], Kaufmann/Gadmer/Klett[63] und Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29].

¹⁰ Das Ziel der *Wertorientierten Steuerung* ist die Maximierung des Marktwertes des Eigenkapitals, d.h. jede Aktivität wird mit einem Risiko verbunden und diesbezüglich bewertet. Vgl. Nell/Pohl[76], Zietsch/Fürtjes[119], Dotterweich[34] und Groffmann[48].

¹¹ Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit verweisen wir auf Bäuerle[11], Albrecher/Hartinger/Tichy[3], Tapiero[107](S. 230ff), Gerber/Shiu[47] und Mármol/Claramunt/Alegre[72] und die dort angegebene Literatur.

¹² Vgl. Schott[98](S. 81), Wenninger[111](§ 2.4) und Beard/Pentikäinen/Pesonen[12](S. 9).

¹³ Es existieren aber auch Arbeiten z.B. von Schäl[94] und Groniowska/Niemiro[49], welche die Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit als Optimierungskriterium zur Steuerung des Kapitalprozesses beinhalten.

¹⁴ Vgl. Howard/Matheson[57] und die in Jaquette[59] angegebene Literatur.

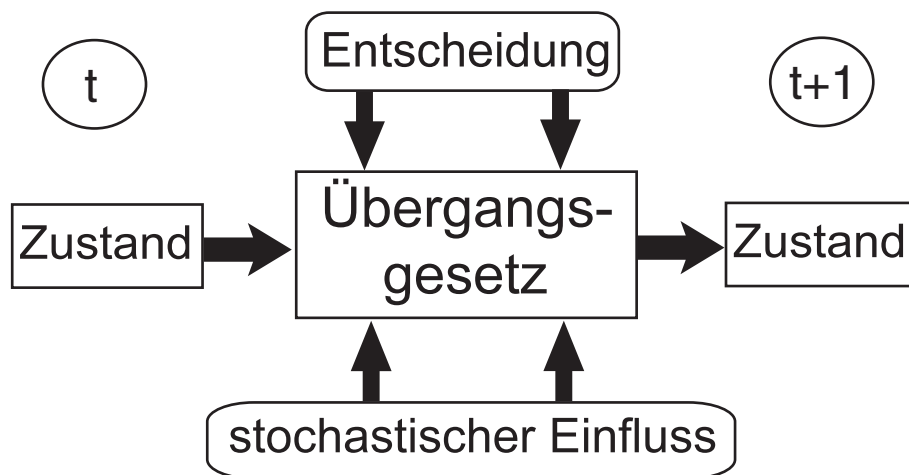
¹⁵ In diesem Zusammenhang sind auch die Arbeiten von Reischel[87], Stenner[105], Pechlivanides[79] und Frisque[43] zu sehen.

Ausschüttungsmodelle in den zuvor genannten Arbeiten bisher noch nicht erfasst worden. Diese beiden Ansätze sollen in dieser Arbeit auch ausdrücklich behandelt werden. Vor allem die adaptiven Ausschüttungsmodelle setzen eine geeignete Zielbildung voraus, so dass für den stationären Fall ebenfalls die Untersuchung hinsichtlich der diskontierten Ausschüttungen erfolgen soll.

2.1 Das Markovsche Entscheidungsmodell

In diesem Abschnitt wird ein *Markovsches Entscheidungsmodell* vorgestellt, welches eine optimale Politik zur Steuerung eines Versicherungsunternehmens festlegt. Dabei handelt es sich um ein *dynamisches System*, welches sich zu den Zeitpunkten $t = 0, \dots, T$ in einem Zustand $s_t \in \mathcal{S}$ befindet, wobei \mathcal{S} die Menge aller möglichen Zustände sei und $s_0 = s$ den Anfangszustand beschreibt (s. Abbildung 2.1). Die zeitliche Entwicklung des Systems soll

Abbildung 2.1: Ablauf eines dynamischen Systems



sowohl vom Zufall (per Störparameter) als auch vom Einfluß des Beobachters (Entscheidungen/Aktionen) abhängen. Der Übergang des Systems von s_t nach s_{t+1} erfolgt gemäß

der stationären Verteilung $Q(\cdot|s_t, a_t)$, falls der Entscheider zum Zeitpunkt t die Aktion a_t aus einer Menge von Aktionen \mathcal{A} wählt und sich das System im Zustand s_t befindet. Durch den Zustand des Systems und die Wahl der Entscheidung treten (einperiodige) Erlöse auf, die über den Entscheidungszeitraum T zu optimieren sind.

Es wird überwiegend Bezug auf Hernández-Lerma/Lasserre[53](§ 2) genommen, da diskrete Markovsche Entscheidungsprozesse mit abzählbaren Zustands- und Aktionsräumen (wie z.B. in Bertsekas[15], Derman[31], Puterman[84], Schäl[93], White[112]) zwar die Beweise für fundamentale Lösungsansätze vereinfachen, aber für die später verwendeten Modellierungsgrößen ungeeignet sind, da die Modellierung von versicherungs- und finanzmathematischen Größen auf den reellen Zahlen erfolgt. Noch allgemeinere Zustands- und Aktionsräume als die verwendeten *Borel-Räume* werden bei Hinderer[54](§ 2) untersucht.

Definition 2.1.1 (*Borel-Räume*)¹ Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist immer mit einer Borel- σ -Algebra \mathcal{B}_X versehen, d.h. mit der kleinsten σ -Algebra, welche alle offenen Teilmengen von X enthält. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) , welcher homöomorph zu einer Borelschen Menge eines vollständigen und separablen metrischen Raumes ist, heißt Borel-Raum.

Beispiele hierfür sind \mathbb{R}^n mit der gewöhnlichen Topologie, jede abzählbare Menge mit der diskreten Topologie und das Produkt einer (endlichen oder abzählbaren) Folge von Borel-Räumen.

Die vorangegangene Beschreibung eines Markovschen Entscheidungsmodells liefert die folgende formale Definition.

Definition 2.1.2 (*Markovsches Entscheidungsmodell*)

Ein stationäres Markovsches Entscheidungsmodell ist ein Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}(s)|s \in \mathcal{S}\}, Q, r)$, bestehend aus

1. einem Zustandsraum \mathcal{S} mit zugehöriger σ -Algebra \mathfrak{S} , welcher ein Borel-Raum ist und dessen Elemente $s \in \mathcal{S}$ Zustände genannt werden,
2. einem Aktionsraum \mathcal{A} mit zugehöriger σ -Algebra \mathfrak{A} , welcher ein Borel-Raum ist und dessen Elemente $a \in \mathcal{A}$ Aktionen bzw. Entscheidungen heißen,
3. einer Familie $\{\mathcal{A}(s)|s \in \mathcal{S}\}$ von nichtleeren messbaren Teilmengen von \mathcal{A} , wobei die Menge $\mathcal{A}(s)$ die zulässigen Aktionen enthält, falls sich das System im Zustand $s \in \mathcal{S}$ befindet und die Menge der zulässigen Zustands-Aktions-Paare

$$\mathbb{K} := \{(s, a)|s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\}$$

eine messbare Teilmenge von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ ist,

4. einem Übergangswahrscheinlichkeitsmaß Q von \mathbb{K} nach \mathcal{S} und
5. einer einperiodigen messbaren Erlösfunktion $r : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

¹ Vgl. z.B. Hernández-Lerma[52](S. xiv) und Bertsekas/Shreve[16](§ 7.3).

Das obige *Markovsche Entscheidungsmodell* wird als stationär bezeichnet, weil seine Komponenten nicht von einem zusätzlichen Zeitparameter t abhängen. Um sicherzugehen, dass die Menge der Entscheidungspolitiken nicht leer ist, stellen wir an die Menge \mathbb{K} außer der Messbarkeit noch einen zusätzlichen Anspruch.

Annahme 1 Die Menge \mathbb{K} enthält den Graphen einer messbaren Funktion von \mathcal{S} nach \mathcal{A} , d.h. es existiert eine messbare Funktion $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ so, dass $f(s) \in \mathcal{A}(s), \forall s \in \mathcal{S}$.

Solche Art von Aussagen, die eine Formulierung der Form „Es existiert eine messbare Abbildung...“ verwenden, werden Auswahl- oder Selektionssätze genannt. Einen Selektionssatz werden wir im nächsten Abschnitt zur Lösung eines zeitlich beschränkten Markovschen Entscheidungsmodells heranziehen. Zur Vervollständigung des Markovschen Entscheidungsmodells benötigen wir nun noch die Bezeichnung der *Vorgeschichte* und der *Politik*.

Definition 2.1.3 (Vorgeschichte) Für ein Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 2.1.2 sei für jedes $t = 0, 1, \dots$ die Menge H_t der zulässigen Vorgeschichten bis zur Zeit t wie folgt definiert:

$$H_t := \mathbb{K}^t \times \mathcal{S} = \mathbb{K} \times H_{t-1} \text{ für } t = 0, 1, \dots \text{ mit } H_0 := \mathcal{S}$$

und \mathbb{K} wie in Definition 2.1.2 (Teil 3). Eine mögliche Vorgeschichte $h_t \in H_t$ wird dargestellt durch einen Vektor der Form

$$h_t = (s_0, a_0, \dots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t),$$

wobei $(s_i, a_i) \in \mathbb{K}$ für $i = 0, \dots, t-1$ und $s_t \in \mathcal{S}$ gilt.

Definition 2.1.4 (Politik) Es sei \mathbb{F} die Menge aller messbaren Funktionen $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $f(s) \in \mathcal{A}(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$, welche Entscheidungsregeln genannt werden.

1. Eine Folge $\pi = \{f_t\} = (f_0, f_1, \dots)$ von Funktionen $f_t \in \mathbb{F}$ heißt deterministische Markov-Politik.
2. Falls die Entscheidungsregeln $f_t \in \mathbb{F}$ unabhängig von t sind, so heißt die Folge $\pi = \{f_t\}$ mit $f_t = f$ (deterministische) stationäre Politik.

Die Menge aller deterministischen Markov-Politiken wird mit Π_M bezeichnet.

Da gemäß Annahme 1 die Menge \mathbb{K} nichtleer ist, trifft dies auch auf die Menge \mathbb{F} zu. Zudem wollen wir uns auf deterministische Politiken beschränken, welche zur Untersuchung von allgemeinen Strukturaussagen im Entscheidungsmodell besser geeignet sind als randomisierte Politiken.

Bemerkung 2.1.5 Eine deterministische Politik gemäß Definition 2.1.4 kann als Sonderfall einer randomisierten Politik aufgefasst werden, da in diesem Fall das Wahrscheinlichkeitsmaß $\pi_t(\cdot|h_t)$ auf \mathcal{A} für alle $h_t \in H_t$ gleich dem Dirac-Maß mit Träger $\{f_t(s_t)\}$ bzw. $\{f(s_t)\}$ entspricht.

Mit Hilfe der Definitionen 2.1.3 und 2.1.4 können wir nun einen Wahrscheinlichkeitsraum konstruieren, um damit ein geeignetes Zielkriterium wie etwa die erwarteten Erlöse bei Verwendung einer Politik $\pi \in \Pi_M$ zu definieren. Dazu sei $(\Omega_M, \mathcal{F}_M)$ ein Messraum mit dem Produktraum $\Omega_M = \mathcal{S}_0 \times \mathcal{A}_0 \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{A}_1 \times \dots$ und der zugehörigen Produkt- σ -Algebra \mathcal{F}_M . Jedes $\omega \in \Omega_M$ definiert daher für alle $t \geq 0$ eine Folge der Form:

$$\omega = (s_0, a_0, s_1, a_1, s_2, a_2, \dots), \quad s_t \in \mathcal{S}_t, a_t \in \mathcal{A}_t,$$

wobei s_t und a_t Projektionen von Ω_M auf die jeweiligen Mengen \mathcal{S}_t und \mathcal{A}_t seien. In diesem Zusammenhang ist auch die Menge H_t der zulässigen Vorgeschichten als Restriktion von Ω_M zu sehen. Der Satz von Ionescu-Tulcea liefert für jede gegebene Markov-Politik $\pi = \{\pi_t\} \in \Pi_M$ und gegebenen Anfangszustand $s_0 = s \in \mathcal{S}_0$ die Existenz eines eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaßes P_s^π auf $(\Omega_M, \mathcal{F}_M)$ als Koppelung

$$P_s^\pi(ds_0, da_0, ds_1, da_1, \dots) = \delta_s(ds_0) \pi_0(da_0|s_0) Q(ds_1|s_0, a_0) \pi_1(da_1|s_0, a_0, s_1) \dots,$$

wobei δ_s das Dirac-Maß mit Träger $\{s\}$ sei. Ist $S_t : \Omega_M \rightarrow \mathcal{S}_t$ die Projektion von Ω_M nach \mathcal{S}_t , dann gibt die Zufallsvariable

$$R_\pi(\omega) := \sum_{t=0}^{\infty} r(S_t, f_t(S_t))$$

den Gesamterlös durch Wahl der Politik π an. Abschließend wollen wir noch die *Markov-Eigenschaft* zeigen.

Bemerkung 2.1.6 (Markov-Eigenschaft) Aus der Struktur von \mathbb{K} und Q ergibt sich für alle $C \in \mathfrak{G}$, $h_t \in H_t$ und $t \geq 0$ die folgende Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsmaße P_s^π mit $\pi \in \Pi_M$:

$$\begin{aligned} P_s^\pi(S_{t+1} \in C | h_t, f_t(s_t)) &= \int_C P_s^\pi(ds_{t+1} | h_t, f_t(s_t)) \\ &= \int_C \frac{P_s^\pi(dh_t, da_t) Q(ds_{t+1} | s_t, f_t(s_t))}{P_s^\pi(dh_t, da_t)} = Q(C | s_t, f_t(s_t)) \end{aligned}$$

und somit die Gültigkeit der Markov-Eigenschaft für die Stochastischen Prozesse $(S_t, t = 0, 1, \dots)$ auf $(\Omega_M, \mathcal{F}_M, P_s^\pi)$, $\pi \in \Pi_M$.

2.1.1 Optimierung bei einem beschränkten Zeithorizont

Wir wollen nun einen Lösungsalgorithmus für ein Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 2.1.2 bei einem beschränkten Zeithorizont $T < \infty$ angeben, wobei als Ziel-funktional die Maximierung des erwarteten Gesamterlöses über T

$$V(\pi, s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} r(S_t, f_t(S_t)) + r_T(S_T) \right]. \quad (2.1.1)$$

betrachten werden soll, falls das System in s startet. Dabei stellt r_T eine gegebene messbare Funktion auf \mathcal{S} dar, welche als *terminale Erlösfunktion* bezeichnet wird. Formal definieren wir

$$V^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} V(\pi, s) \quad (2.1.2)$$

und nennen $V^*(s)$ Wertfunktion. Damit lässt sich das Optimierungsproblem auch so formulieren:

Definition 2.1.7 (Optimalität) Eine Politik $\pi^* \in \Pi_M$ heißt optimal, falls für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt: $V(\pi^*, s) = V^*(s)$.

Das obige Optimierungsproblem kann nun stufenweise gelöst werden. Dies besagt der folgende Satz über die *Dynamische Programmierung*.

Satz 2.1.8 (Dynamische Programmierung) Es seien V_0, V_1, \dots, V_T von $t = T$ bis $t = 0$ Funktionen auf \mathcal{S} , welche rekursiv definiert sind durch

$$V_T(s) := r_T(s) \quad (2.1.3)$$

und

$$V_t(s) := \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}(s') Q(ds'|s, a) \right\} \text{ für } t = T-1, \dots, 0 \quad (2.1.4)$$

und dabei rekursiv als messbar nachgewiesen seien, und für jedes $t = 0, \dots, T-1$ gebe es eine Entscheidungsregel $f_t(s) \in \mathbb{F}$ so, dass $f_t(s) \in \mathcal{A}(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$ das Maximum von $V_t(s)$ erreicht, d.h.

$$V_t(s) = r(s, f_t(s)) + \int_{\mathcal{S}} V_{t+1}(s') Q(ds'|s, f_t(s)), \quad \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.5)$$

Dann ist die daraus resultierende (deterministische) Markov-Politik $\pi^* = (f_0, \dots, f_{T-1})$ optimal und für die Wertfunktion $V^*(s)$ gilt:

$$V^*(s) = V_0(s) = V(\pi^*, s), \quad \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.6)$$

Beweis: S. Hernández-Lerma/Lasserre[53](Theorem 3.2.1) für Kosten. ■

Bemerkung 2.1.9 (Vorwärtsform) *Gegeben seien die Funktionen V_t wie in (2.1.3) und (2.1.4). Dazu definieren wir $v_t := V_{T-t}$ für $t = 0, \dots, T$. Dann lässt sich der Lösungsalgorithmus der Dynamischen Programmierung in der „Vorwärtsform“ darstellen als*

$$v_0(s) = r_T(s), \quad v_t(s) = \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \int_{\mathcal{S}} v_{t-1}(s') Q(ds'|s, a) \right\} \quad (2.1.7)$$

für $t = 1, \dots, T$. Zudem maximiert $\tilde{f}_t := f_{T-t}$ (2.1.7), falls (2.1.5) für $f_t \in \mathbb{F}$ gilt.

Der Satz 2.1.8 stellt an das Markovsche Entscheidungsmodell den Anspruch, dass die Funktionen $V_t(s)$ wie in (2.1.4) messbar seien und ihr Maximum erreichen. Mit einigen topologischen Hilfsmitteln lässt sich nun ein Selektionssatz angeben, den wir später für reelle Zustands- und Aktionsräume angleichen wollen. Die Herleitung der folgenden topologischen Ergebnisse ist Schäl[91](§ 9) zu entnehmen.

Dazu kann auf der Menge $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ aller nichtleeren, kompakten Teilmengen eines metrischen Raumes (M, d) eine *Hausdorff-Metrik* H definiert werden durch

$$H(C_1, C_2) := \max \left\{ \sup_{c_1 \in C_1} d(c_1, C_2), \sup_{c_2 \in C_2} d(C_1, c_2) \right\}$$

mit $d(c_1, C_2) := \inf_{c_2 \in C_2} d(c_1, c_2)$. Ist (M, d) separabel, dann ist $(\mathcal{C}(\mathcal{A}), H)$ ein separabler metrischer Raum. Seien weiterhin \mathcal{S} und \mathcal{A} Borel-Räume mit zugehörigen σ -Algebren \mathfrak{S} und \mathfrak{A} , so heißt eine mengenwertige Abbildung $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ (*Borel-*)*messbar*, falls sie messbar bezüglich der Borel- σ -Algebra auf $(\mathcal{C}(\mathcal{A}), H)$ ist. Dann gilt aber auch für den Graphen von D :

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in D(s)\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Zudem heißt die mengenwertige Abbildung D *nach oben halbstetig*, falls für jede offene Teilmenge \mathcal{A}' von \mathcal{A} die Menge $\{s \in \mathcal{S} | D(s) \subset \mathcal{A}'\}$ offen in \mathcal{S} ist.

Ist $v : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einem metrischen Raum (M, d) , so heißt v *nach oben halbstetig*, falls für jede Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M , welche gegen $m \in M$ konvergiert, gilt: $\limsup_{n \rightarrow \infty} v(m_n) \leq v(m)$.

Satz 2.1.10 (Allgemeiner Selektionssatz) *Es sei die mengenwertige Abbildung $D : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$ (Borel-)messbar und die Funktion $v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ nach oben halbstetig in $a \in D(s)$ für alle $s \in \mathcal{S}$. Dann existiert eine Entscheidungsregel $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$ so, dass*

$$v(s, f(s)) = \sup_{a \in D(s)} v(s, a)$$

gilt, und die Funktion $v^(s) = \sup_{a \in D(s)} v(s, a)$ ist messbar.*

Beweis: S. Schäl[91](Theorem 12.1). ■

Satz 2.1.11 (Selektionssatz für reelle Zustands- und Aktionsräume)

Gegeben seien zwei Messräume $(\mathcal{S}, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}^m, \mathbb{B}^m)$ und $(\mathcal{A}, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Für jede stetige und beschränkte Funktion $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$u^*(s) := \sup_{a \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, a) \right\} \quad (2.1.8)$$

messbar und es existiert eine Entscheidungsregel $f \in \mathbb{F}$ so, dass (2.1.8) für alle $s \in \mathcal{S}$ sein Maximum bei $f(s) \in \mathcal{A}(s)$ erreicht, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge $\mathcal{A}(s)$ ist kompakt für alle $s \in \mathcal{S}$.
2. Die einperiodige Erlösfunktion $r : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
3. Die Funktion $\tilde{u}(s, a) := \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, a)$ ist stetig auf \mathbb{K} .

Beweis: Die Messbarkeit von (2.1.8) erfolgt wegen der Kompaktheit von $\mathcal{A}(s) \subset \mathbb{R}^n$ durch die Borelsche (Teil-)Menge

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\} \in \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A}.$$

Es bleibt übrig zu zeigen, dass das Maximum von (2.1.8) bei $f(s) \in \mathcal{A}(s)$ erreicht wird. Dies ist wegen der Stetigkeit von $r(s, \cdot) + \tilde{u}(s, \cdot)$ auf einem Kompaktum gewährleistet. ■

Falls (2.1.8) sein Maximum erreicht, so wollen wir anstatt *sup* lieber *max* schreiben. Daher weisen wir im weiteren Verlauf der Arbeit die Existenz eines Maximums mit Hilfe von Satz 2.1.11 nach.

2.1.2 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont - die diskontierten Erlöse

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung einer optimalen Politik für ein Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 2.1.2 bei einem unbeschränkten Zeithorizont mit $T = \infty$. Dabei sollen die bzgl. P_s^π erwarteten diskontierten Erlöse

$$V_{\infty, \alpha}(\pi, s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r(S_t, f_t(S_t)) \right], \pi \in \Pi_M, s \in \mathcal{S} \quad (2.1.9)$$

durch Wahl einer Politik π maximiert werden, wobei $\alpha \in (0, 1)$ ein gegebener *Diskontierungsfaktor* sei. Die zugehörige Wertfunktion werde mit

$$V_{\infty, \alpha}^*(s) := \sup_{\Pi_M} V_{\infty, \alpha}(\pi, s), \forall s \in \mathcal{S} \quad (2.1.10)$$

bezeichnet. Darüber hinaus sei

$$V_{n, \alpha}(\pi, s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f_t(S_t)) \right], \pi \in \Pi_M, s \in \mathcal{S} \quad (2.1.11)$$

der n -stufige erwartete Erlös bei Verwendung der Politik π , falls das System in s startet. Dann lässt sich $V_{\infty,\alpha}(\pi, s)$ durch den *Satz von der monotonen Konvergenz* auch darstellen als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,\alpha}(\pi, s) = V_{\infty,\alpha}(\pi, s). \quad (2.1.12)$$

Durch die Diskontierung der künftigen Zahlungen erfolgt eine zeitliche Präferenzstruktur des Entscheiders, welche den früheren Erlösen eine höhere Bedeutung beimisst als späteren Erlösen.

In diesem Abschnitt nehmen wir größtenteils Bezug auf Hernández-Lerma/Lasserre[53] (Kapitel 4), wobei dort das Optimierungsproblem für eventuell unbeschränkte Kosten behandelt wird. Jedoch ist eine entsprechende Behandlung des Optimierungsproblems für beschränkte Erlöse möglich. Wir beginnen mit den Voraussetzungen unseres Optimierungsproblems.

Annahme 2 *Für ein Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 2.1.2 gelten bei einem unbeschränkten Zeithorizont folgende Bedingungen:*

1. Die Menge $\mathcal{A}(s)$ ist kompakt für alle $s \in \mathcal{S}$.
2. Die einperiodige Erlösfunktion $r : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist nach oben halbstetig und beschränkt.
3. Die Funktion $\tilde{u}(s, a) := \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, a)$ ist stetig und beschränkt auf \mathbb{K} für jede messbare und beschränkte Funktion $u(s)$ auf \mathcal{S} . Insbesondere ist die Funktion $\tilde{u}(s, a)$ auch nach oben halbstetig, da stetige Funktionen nach oben und nach unten halbstetig sind.

Durch Annahme 2 ist die Existenz von $V_{\infty,\alpha}(\pi, s)$ gesichert, denn es gilt mit $r' \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq r \leq r' \implies 0 \leq V_{\infty,\alpha}(\pi, s) \leq \frac{r'}{1-\alpha}, \forall \pi, s. \quad (2.1.13)$$

Die Halbstetigkeit nach oben der Funktionen $r(s, a)$ und $\tilde{u}(s, a)$ setzt sich auch bei den folgenden Kompositionen dieser beiden Funktionen fort.

Lemma 2.1.12 *Es sei M ein metrischer Raum und $v, w : M \rightarrow \mathbb{R}$ nach oben halbstetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\alpha \cdot v$ mit $\alpha \geq 0$ und $v+w$ nach oben halbstetig.*

Beweis: S. Ash[7](Anhang A6).

Im vorherigen Abschnitt haben wir den Ansatz der Dynamischen Programmierung bei einem beschränkten Zeithorizont kennengelernt. Für die entsprechende Wertfunktion gilt (für diskontierte Erlöse und in der Vorwärtsform - s. Bemerkung 2.1.9):

$$v_n(s) := \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \int_{\mathcal{S}} v_{n-1}(s') Q(ds'|s, a) \right\}, \quad \forall s \in \mathcal{S}, n = 1, 2, \dots \quad (2.1.14)$$

mit $v_0(\cdot) \equiv 0$ und

$$v_n(s) = \sup_{\Pi_M} V_{n,\alpha}(\pi, s), \quad \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.15)$$

Unser Ziel ist es, die Wertfunktion $V_{\infty, \alpha}^*(s)$ als Grenzwert der Folge von Wertfunktionen für den beschränkten Zeithorizont darzustellen, also:

$$V_{\infty, \alpha}^*(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(s).$$

Dieser Lösungsweg wird *Sukzessive Approximation* genannt und die Wertfunktionen $v_n(s)$ heißen *Wertiterationsfunktionen*. Dazu führen wir nun die Operator-Schreibweise ein.

Definition 2.1.13 *Es bezeichne $M_b(\mathcal{S})$ den (Banach-)Raum der beschränkten und messbaren Funktionen auf \mathcal{S} , welcher mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ versehen ist. Für jede Funktion $u \in M_b(\mathcal{S})$ wird die Funktion Lu durch*

$$Lu(s) := \max_{a \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, a) \right\} \quad (2.1.16)$$

auf \mathcal{S} definiert.

Durch den Operator L lassen sich die Wertiterationsfunktionen wie in (2.1.14) auch folgendermaßen ausdrücken:

$$v_n(s) = Lv_{n-1}(s), n \geq 1$$

mit $v_0 := 0$. Außerdem besitzt der Operator L folgende Eigenschaften.

Lemma 2.1.14 *Es gelte Annahme 2. Dann folgt:*

- a) *Für jedes $u \in M_b(\mathcal{S})$ gilt $Lu \in M_b(\mathcal{S})$.*
- b) *Es existiert eine Entscheidungsregel $f \in \mathbb{F}$ mit*

$$Lu(s) = L_f u(s) = r(s, f) + \alpha \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, f), \forall s \in \mathcal{S}.$$

- c) *Sei $u \in M_b(\mathcal{S})$ mit $u \leq Lu$ gegeben. Dann gilt auch $u \leq V_{\infty, \alpha}^*$.*

Beweis: Der Nachweis von Teil a) und b) erfolgt wegen Annahme 2 und $u \in M_b(\mathcal{S})$ durch Satz 2.1.10, da die Funktion $v(s, a) := r(s, a) + \alpha \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, a)$ nach Lemma 2.1.12 nach oben halbstetig ist.

Für den Beweis von Teil c) sei nun eine Funktion $u \in M_b(\mathcal{S})$ so gegeben, dass diese Funktion der Ungleichung $u \leq Lu$ genügt. Nach Teil b) existiert zu Lu ein $f \in \mathbb{F}$ mit

$$u(s) \leq r(s, f) + \alpha \int_{\mathcal{S}} u(s') Q(ds'|s, f).$$

Iterieren dieser Ungleichung ergibt

$$u(s) \leq E_s^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f) \right] + \alpha^n E_s^f [u(S_n)], \forall n \geq 1, s \in \mathcal{S}, \quad (2.1.17)$$

wobei $E_s^f[u(S_n)] = \int_{\mathcal{S}} u(s') Q^n(ds'|s, f)$ und $Q^n(\cdot|s, f)$ der n -stufige Übergangskern des Markov-Prozesses (S_t) ist, falls die deterministische Politik f^∞ verwendet wird. Wir können nun die Funktion $u(s)$ wie in (2.1.17) weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} u(s) &\leq E_s^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f) \right] + \alpha^n \int_{\mathcal{S}} u(s') Q^n(ds'|s, f) \\ &\leq E_s^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f) \right] + \alpha^n \int_{\mathcal{S}} \|u\|_\infty Q^n(ds'|s, f) \\ &= E_s^f \left[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f) \right] + \alpha^n \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang von $u(s) \leq E_s^f[\sum_{t=0}^{n-1} \alpha^t r(S_t, f)] + \alpha^n \|u\|_\infty$ für $n \rightarrow \infty$ ergibt nun:

$$u(s) \leq V_{\infty, \alpha}(f, s) \leq V_{\infty, \alpha}^*(s). \blacksquare$$

Als nächstes zeigen wir, dass sich der *Fixpunktsatz von Banach* zur Ermittlung von $V_{\infty, \alpha}^*(s)$ durch die Folge $(v_n(s))_{n \geq 1}$ eignet und sich daraus eine optimale (deterministisch stationäre) unbeschränkte Politik für die diskontierten Erlöse ergibt.²

Satz 2.1.15 *Es gelte Annahme 2. Dann gilt:*

1. *Der Operator L ist eine Kontraktion.*
2. *Der Wert $v^* := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ist die eindeutige Lösung von $Lv^* = v^*$ und es gilt sogar $v^* = V_{\infty, \alpha}^*(s)$ (Konvergenz der Wertiterationfunktionen).*
3. *Eine deterministisch stationäre und unbeschränkte Politik $f_\infty^* := (f, f, f, \dots)$ ist genau dann optimal, wenn $L_f V_{\infty, \alpha}^*(s) = LV_{\infty, \alpha}^*(s)$ gilt. Für $V_{\infty, \alpha}^*(s)$ gilt dann auch:*

$$V_{\infty, \alpha}^*(s) = L_f V_{\infty, \alpha}^*(s) = Lv^* = v^*.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass L eine Kontraktion ist. Für zwei Funktionen f und g aus $M_b(\mathcal{S})$ gilt

$$f \leq g + \|f - g\|_\infty,$$

und somit wegen der *Monotonie* des Operators L

$$Lf \leq L(g + \|f - g\|_\infty). \tag{2.1.18}$$

² Dieser Zugang findet sich auch bei Bertsekas/Shreve[16](Kapitel 4) wieder.

Für die rechte Seite von (2.1.18) ergibt sich

$$\begin{aligned}
L(g + \|f - g\|_\infty) &= \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \int_{\mathcal{S}} [g(s') + \|f - g\|_\infty] Q(ds'|s, a) \right\} \\
&= \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \|f - g\|_\infty + \alpha \int_{\mathcal{S}} g(s') Q(ds'|s, a) \right\} \\
&= \max_{\mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \int_{\mathcal{S}} g(s') Q(ds'|s, a) \right\} + \alpha \|f - g\|_\infty \\
&= Lg + \alpha \|f - g\|_\infty
\end{aligned}$$

und somit die Ungleichung $Lf \leq Lg + \alpha \|f - g\|_\infty$. Zudem können wir f und g vertauschen und es folgt

$$Lg \leq Lf + \alpha \|f - g\|_\infty.$$

Durch $Lf - Lg \leq \alpha \|f - g\|_\infty$ und $Lg - Lf \leq \alpha \|f - g\|_\infty$ ergibt sich

$$\|Lf - Lg\|_\infty \leq \alpha \|f - g\|_\infty, \quad 0 < \alpha < 1$$

und somit ist L eine Kontraktion.³

Da L eine Kontraktion ist, existiert nach dem Fixpunktsatz von Banach eine eindeutige Lösung $v^* \in M_b(\mathcal{S})$ so, dass $Lv^* = v^*$ gilt. Des Weiteren konvergiert die Folge der iterierten Wertfunktionen $v_n = Lv_{n-1}$ gegen den Fixpunkt v^* . Daher bleibt nur noch $v^* = V_{\infty, \alpha}^*$ zu zeigen. Wegen (2.1.15) folgt

$$v_n(s) \geq V_{n, \alpha}(\pi, s), \quad \forall n, \pi, s,$$

d.h. für den Grenzwertübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$v^* \geq V_{\infty, \alpha}(\pi, s), \quad \forall \pi, s.$$

Da die Ungleichung für alle Politiken gilt, ergibt sich $v^* \geq V_{\infty, \alpha}^*(s)$. Die Umkehrung folgt aus Lemma 2.1.14[Teil c)], da $v^* = Lv^*$ impliziert, dass $v^* \leq V_{\infty, \alpha}^*(s)$ gilt.

Für den Beweis von Teil 3 gilt nach (2.1.10): Wenn die Politik f_∞^* optimal ist, dann folgt $V_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s) = V_{\infty, \alpha}^*(s)$. Wegen $V_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s) \in M_b(\mathcal{S})$ nach (2.1.13) gibt es für $LV_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s)$ gemäß Lemma 2.1.14(Teil b) eine optimale Entscheidungsregel $f \in \mathbb{F}$ so, dass gilt

$$L_f V_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s) = LV_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s).$$

Da sich $V_{\infty, \alpha}(f_\infty^*, s)$ durch $V_{\infty, \alpha}^*(s)$ ersetzen lässt, erhalten wir das gewünschte Ergebnis. Dann gilt aber auch

$$L_f V_{\infty, \alpha}^*(s) = LV_{\infty, \alpha}^*(s) = Lv^* = v^* = V_{\infty, \alpha}^*(s). \quad \blacksquare$$

³ Die Beweisidee findet sich auch in verkürzter Darstellung in Dynkin/Yushkevich[36](S. 136) wieder.

2.1.3 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont - die durchschnittlichen Erlöse

In diesem Abschnitt soll ein Lösungsweg für ein Markovsches Entscheidungsmodell dargestellt werden, falls das Zielkriterium die Maximierung der langfristig erwarteten Erlöse pro Zeiteinheit bei einem unbeschränkten Zeithorizont ist. In diesem Zusammenhang sprechen wir von *durchschnittsoptimalen Erlösen*.

Es sei wiederum ein Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 2.1.2 gegeben. Das Optimierungsproblem lässt sich wie folgt ausdrücken:

Mit den erwarteten totalen n -stufigen Erlösen

$$V_n(\pi, s) = E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{n-1} r(S_t, f_t(S_t)) \right] \quad (2.1.19)$$

bei Wahl der Politik π und Start in s sind die erwarteten durchschnittlichen Erlöse definiert durch

$$\bar{V}_\infty(\pi, s) := \liminf_{n \rightarrow \infty} V_n(\pi, s)/n. \quad (2.1.20)$$

Somit ist eine durchschnittsoptimale Politik π^* gekennzeichnet durch

$$\bar{V}_\infty(\pi^*, s) = \sup_{\Pi} \bar{V}_\infty(\pi, s) =: \bar{V}_\infty^*(s), \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.21)$$

Annahme 3 Es gelten folgende Bedingungen:

1. Die Menge $\mathcal{A}(s)$ ist kompakt für alle $s \in \mathcal{S}$.
2. Die einperiodige Erlösfunktion $r : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist beschränkt und für alle $s \in \mathcal{S}$ ist $r(s, a)$ stetig in $a \in \mathcal{A}(s)$.
3. Für alle $s \in \mathcal{S}$ und jede beschränkte und messbare Funktion $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\int_{\mathcal{S}} h(s') Q(ds'|s, a)$ stetig in $a \in \mathcal{A}(s)$.

Satz 2.1.16 Es gelte Annahme 3. Weiterhin sei $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und messbare Funktion und ρ^* eine Konstante so, dass gilt:

$$\rho^* + h(s) = \max_{a \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, a) + \int_{\mathcal{S}} h(s') Q(ds'|s, a) \right\}, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.22)$$

Falls eine Entscheidungsregel $f(s) \in \mathcal{A}(s)$ die rechte Seite von (2.1.22) maximiert, d.h.

$$\rho^* + h(s) = r(s, f) + \int_{\mathcal{S}} h(s') Q(ds'|s, f), \forall s \in \mathcal{S},$$

so ist die stationäre Politik $f_\infty^* := (f, f, f, \dots)$ durchschnittsoptimal und es gilt

$$\bar{V}_\infty^*(s) = \bar{V}_\infty(f_\infty^*, s) = \rho^*, \forall s \in \mathcal{S}. \quad (2.1.23)$$

Beweis: S. Hernández-Lerma[52] (Theorem 2.2, S. 53).

2.2 Versicherungswirtschaftliche Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen versicherungswirtschaftliche Grundlagen insoweit vorgestellt werden, als sie bei der späteren Konstruktion eines Markovschen Entscheidungsmodells eine Rolle spielen. Zunächst muß der Begriff des Risikos geklärt werden, da Risiken dem stochastischen Einfluß im Modell entsprechen. Es werden die wichtigsten im Versicherungsunternehmen auftretenden Risikoarten vorgestellt. Die Abhandlung über Risikomaße schließt das Themengebiet „Risiko“ ab.

Danach werden die Unternehmensziele eines Versicherungsunternehmens behandelt, aus denen schließlich ein geeignetes Optimierungskriterium gewählt wird.

2.2.1 Risiko, Risikoarten und Risikomaße

Der Begriff *Risiko* hat eine Vielzahl von Bedeutungen. Ganz allgemein wird der Begriff Risiko für die Beschreibung einer Situation gebraucht, in der das Ergebnis unsicher ist. Oft wird der Begriff Risiko als Variabilität um einen erwarteten Wert bezeichnet.⁴

Definition 2.2.1 (*Risiko*)⁵ Die Menge Ω aller Zustände in der Natur beinhaltet die Ergebnisse von speziellen Zufallsexperimenten (z.B. Aktienkurse oder Schadenhöhen). Die für einen Teilaspekt des Gesamtexperiments erforderlichen Informationen (z.B. Aktienkurse) werden für jedes $\omega \in \Omega$ durch die Zufallsvariable $M : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ beschrieben, wobei in dieser Arbeit größtenteils $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ gilt.

Dann nennen wir M ein Risiko und die Menge aller Risiken bezeichnen wir mit \mathcal{G} .

Die obige Definition eines Risikos ist bewusst sehr allgemein gehalten, da besonders in einem Versicherungsunternehmen verschiedene Arten von Risiken auftreten.⁶

Die folgende Auflistung gibt einen Überblick darüber:⁷

⁴ Vgl. Harrington/Niehaus[50](S. 3), Wenninger[111](S. 13) und Artzner[5](S. 12). Dies ist auch bedingt durch die Begriffsbildung bei Farny[38](S. 16ff), wodurch „Entscheidungen nicht zu einem eindeutigen Ergebnis führen, sondern eine Vielzahl von Ergebnismöglichkeiten verursachen, die jeweils mit (bekannten oder unbekanntem) Wahrscheinlichkeiten eintreten.“

⁵ Im Sinne von Artzner[5](S. 13 oder Artzner/Delbaen/Eber/Heath[6](§ 2.2)

⁶ Obwohl in Risikomodellen für Versicherungsunternehmen häufig das versicherungstechnische Risiko betont wird und daher die anderen Risiken vernachlässigt werden, ist diese Vernachlässigung für eine praktische Risikopolitik unzuweckmäßig, denn viele historische Krisen von Versicherern waren nicht durch das versicherungstechnische Risiko, sondern durch Kapitalanlage-, Markt- oder andere Risiken verursacht (vgl. Farny[38](S. 450)). Dies wird auch durch die Krise der deutschen Lebensversicherer in den Jahren 2001 und 2002 auf Grund einer negativen Entwicklung des Kapitalmarktes unterstützt (vgl. Wenninger[111](S. 1f)).

⁷ Vgl. auch die Auflistung bei Kaufmann/Gadmer/Klett [63](S. 218) und Doherty[33](S. 268). In diesem Sinne ist auch die Arbeit von Kagermeier[61] einzuordnen. Eine ähnliche Auflistung wird auch bei Lowe/Stanard[69](S. 341ff) wiedergegeben, die zwar die Risikoarten Liability Risk, Asset Risk und Business Risk benennen, ihre Inhalte aber den hier angeführten Risikoarten entsprechen.

- Versicherungstechnisches Risiko,
- Kapitalanlagerisiko,
- Währungsrisiko,
- Externe Risiken.

Das *versicherungstechnische Risiko* entsteht durch Schwankungen des Schadenverlaufs, d.h. der Versicherer trägt das Risiko, dass der tatsächliche Schadenverlauf vom erwarteten abweicht. Die Abweichungen können zufallsbedingt sein (Zufallsrisiko), auf Änderungen der Risikofaktoren beruhen (Änderungsrisiko) oder aus einer irrtümlichen Einschätzung der Risikosituation (Diagnoserisiko) resultieren. Eine Verminderung des versicherungstechnischen Risikos kann durch Rückversicherungsschutz erfolgen.⁸

Auch das *Kapitalanlagerisiko* lässt sich durch Schwankungen beschreiben, die sich auf zukünftige Ertragsströme oder auf die Werte des Anlagenbestandes beziehen.⁹

Bei international tätigen Versicherern werden Verträge in den unterschiedlichen Währungen der jeweiligen Länder abgeschlossen. Somit gibt eine offene Währungsposition (Forderung oder Verbindlichkeit in der Fremdwährung) zusammen mit der Intensität der Wechselkursschwankungen ein Ausmaß für das *Währungsrisiko* (oder auch *Devisenkursrisiko* oder *Wechselkursrisiko* genannt) an.¹⁰

Unter dem Begriff *externe Risiken* werden Risiken zusammengefasst, die nicht direkt von den getroffenen Entscheidungen der Versicherungsunternehmung abhängig sind, sich aber auf alle bzw. einige Teilgebiete jeder Versicherungsunternehmung auswirken. Die nachstehende Auflistung gibt einige Beispiele für externe Risiken an.¹¹

- Die *Inflation* ist bei zahlungsstrombasierten Modellen eine wichtige Einflussgröße, denn sie verursacht angemessene Änderungen des Geldwertes, die sich auf alle Zahlungsströme (wie z.B. Prämieinnahmen, Schadenszahlungen, Investitionsergebnisse, Kosten etc.) niederschlagen.¹²
- Viele Versicherungssparten weisen einen Zyklus von Prämieinnahmen und betrieblichen Gewinn des Versicherers auf. Dieser Sachverhalt ist als *Versicherungszyklus* bekannt, welcher sich i.A. nicht auf den Begriff des allgemeinen Wirtschaftszyklus (wie z.B. Wirtschaftswachstum) bezieht, sondern mit Hilfe der Begriffe sogenannter „Soft“ und „Hard Markets“ am ehesten beschreiben lässt. „Soft Markets“ sind dadurch charakterisiert, dass viele Versicherer ihr Neugeschäft mit stabilen oder sogar

⁸ Vgl. Strauß, Jürgen: *Die Rückversicherungsverfahren in der Praxis*, in: Dienst[32](S. 7) oder auch Farny[38](S. 66ff), Pfeiffer[82](S. 9f), Harrington/Niehaus[50](S. 84), Lowe/Stanard[69](S. 342)

⁹ Vgl. Bonsdorff[19](S. 687), Lowe/Stanard[69](S. 343), Schradin[99](S. 137), Wenninger[111](S. 25) und Farny[38](S. 451).

¹⁰ Vgl. Schradin[99](S. 149), Lowe/Stanard[69](S. 342), Wenninger[111](§ 3.1.3) und Farny[38](S. 459f).

¹¹ Vgl. Bonsdorff[19](S. 680) und Kahane, Yehuda; Tapiero, Charles S. & Jacques, Laurent: *Concepts and Trends in the Study of Insurer's Solvency*, in: Cummins/Derrig[27](S. 227).

¹² Vgl. Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 211) und Bonsdorff[19](S. 691).

fallenden Preisen erweitern wollen. Dagegen beinhalten „Hard Markets“ eine Reduktion des Deckungsangebotes und stark ansteigende Preise. Daher beeinflussen die genannten Wettbewerbseinflüsse den Kapitalstand des Versicherers.¹³

Ein *Risikomaß* ordnet einem Risiko einen reellen Wert zu, welcher durch eine gegebene Problemstellung gekennzeichnet ist. Beispielsweise soll dem Risiko M der mittlere Betrag des Risikos zugewiesen werden. Dies geschieht durch den Erwartungswertoperator, so dass in diesem Fall die Abbildung $\rho : M \rightarrow E[M]$ ein Risikomaß ist. Mathematisch lässt sich ein Risikomaß allgemein wie folgt definieren:¹⁴

Definition 2.2.2 (*Risikomaß*) *Es sei \mathcal{G} die Menge aller Risiken. Ein Risikomaß ist eine Abbildung $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Der Begriff des Risikomaßes lässt sich anhand des Problems der adäquaten Kapitalunterlegung gut verdeutlichen. Ein positiver Wert von $\rho(M)$ für ein Risiko M kann als minimale Kapitalanforderung zur Deckung des Risikos ausgelegt werden. Dagegen deutet ein negativer Wert von $\rho(M)$ darauf hin, dass kein Kapital zur Deckung des Risikos erforderlich ist.¹⁵ Verschiedene Arten von Risikomaßen sind der folgenden Auflistung zu entnehmen.¹⁶

- *Ruinwahrscheinlichkeit*: Ein Risiko M kann ein Versicherungsunternehmen zum Ruin führen, falls das Risiko Werte oberhalb der vorhandenen Kapitalreserve s annimmt. Somit gibt die *Ruinwahrscheinlichkeit* $P(M \geq s)$ die Wahrscheinlichkeit des Ruins an. Besitzt M eine Verteilungsfunktion $F_M(m)$, so lässt sich die Ruinwahrscheinlichkeit als $1 - F_M(s)$ darstellen.
- *Value at Risk (VaR)*: Der VaR ist der kleinste Wert m_q , welcher für ein vorgegebenes $q \in (0, 1)$ der Gleichung $P(M > m_q) \leq q$ genügt und dem $(1 - q)$ -Quantil der Verteilung von M entspricht.¹⁷
- *Expected Policyholder Deficit (EPD)*: Das Risikomaß EPD geht auf Butsic[26](S. 660ff) zurück und gibt den erwarteten Fehlbetrag bei Insolvenz an. Steht dem Versicherer ein Kapitalbetrag s zur Deckung von Verlusten zur Verfügung, so führt das Ereignis $\{M > s\}$ zum Ruin. Demnach ist das Risikomaß EPD mittels $E[(M - s)^+]$ definiert und bezeichnet den durchschnittlichen Wert der Kapitalunterschreitung.
- *Conditional VaR oder TailVaR*: Der TailVaR kombiniert die beiden Risikomaße VaR und EPD zu

$$E[M | M > VaR_\alpha] = VaR_\alpha + E[M - VaR_\alpha | M > VaR_\alpha]$$

und liefert den erwarteten Wert des Fehlbetrages bei Überschreitung des VaRs.¹⁸

¹³ Vgl. Harrington/Niehaus [50](S. 133ff), Kaufmann/Gadmer/Klett[63](S. 229), aber auch Beard /Pentikäinen/Pesonen[12](S. 31f), Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 40, S. 230f), Lowe/Stanard[69](S. 343f), Pentikäinen/Rantala[81](S. 3).

¹⁴ Vgl. Artzner[5](S. 13), Artzner/Delbaen/Eber/Heath[6](S. 207), Panjer/Jing[77](S. 3).

¹⁵ Vgl. Artzner/Delbaen/Eber/Heath[6](S. 207).

¹⁶ Vgl. Venter[109](S. 287), Jost[60](§ 3.2.2) und Wenninger[111](§ 3.4.4).

¹⁷ Vgl. auch Panjer/Jing[77](S. 4).

2.2.2 Unternehmensziele bei Versicherungsunternehmen

Unternehmensziele eines Versicherungsunternehmens sind angestrebte Zustände, die nach Art, Ausmaß und Zeitbezug eindeutig formuliert sind und durch Zielentscheidungen festgelegt werden. In der Regel gibt es kein einzelnes Unternehmensziel, sondern eine Mehrzahl von Unternehmenszielen (*Zielbündel*), die in Relation zueinander stehen und nach dem Grad der Wichtigkeit geordnet sind (*Zielsystem*). In diesem Zusammenhang wird auch häufig von *Haupt- und Nebenzielen* gesprochen.¹⁹

Zunächst werden die für unsere Zwecke dienlichen Unternehmensziele nach Farny[38](S. 278ff) behandelt, welche der nachstehenden Auflistung zu entnehmen sind.²⁰

- Gewinn,
- Erhaltung oder Sicherheit.

Eine Übertragung des Hauptziels *Gewinn* auf Versicherungsunternehmen ist prinzipiell möglich. Da es verschiedene betriebswirtschaftliche Gewinnbegriffe gibt, beschränken wir uns auf den *kalkulatorischen Gewinn*, der als Summe der Leistungswerte (z.B. Prämien- und Kapitalanlageerlöse) abzüglich der Summe der Kostenwerte definiert ist. Das Hauptziel Gewinn kann aber auch als Aggregation von Teilgewinnzielen (z.B. Gewinn aus dem versicherungstechnischen Geschäft, Gewinn aus der Kapitalanlage etc.) verstanden werden, so dass die Faktoren des Gesamtgewinns der Unternehmung transparenter werden. Der zeitliche Bezug des Gewinnziels wird in der Praxis überwiegend für befristete Zeiträume formuliert, wobei ein längerer Zeitraum (mehrere Jahre) einem kürzeren Zeitraum (ein Jahr oder weniger) vorzuziehen ist, da die Zurechnung der Gewinnkomponenten auf kurze Zeiträume außerordentlich problematisch ist. Zudem ist durch die ohnehin durchzuführende Ermittlung des handelsrechtlichen Gewinns für eine Rechnungsperiode (ein Jahr) ein längerer zeitlicher Bezug praktikabler.

Aus der Natur des Versicherungsgeschäftes ergibt sich das Streben nach *Erhaltung* bzw. *Sicherheit* automatisch, da die in die Zukunft gerichteten Versicherungsschutzversprechen an die Versicherungsnehmer die Leistungserfüllung des Versicherers bei der Schadenregulierung nach sich zieht. In seiner allgemeinen Form kann das Erhaltungsziel als Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit formuliert werden. Das Ziel nach Sicherheit ist grundsätzlich kein eigenständiges Ziel des Versicherers, denn ein Versicherungsunternehmen existiert nicht, um zu existieren, sondern um Gewinn zu erzielen oder Bedarf zu decken.²¹

¹⁸ Vgl. auch Panjer/Jing[77](S. 4), Albrecht/Maurer[4](S. 675), Artzner/Delbaen/Eber/Heath[6](S. 223f) und Koryciorz[66] (S. 62).

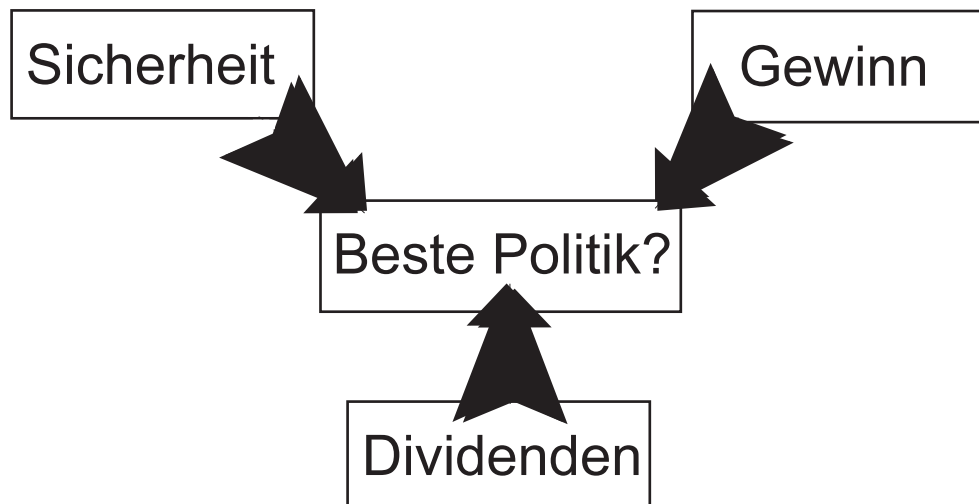
¹⁹ Vgl. Farny[38](S. 276).

²⁰ Auch nachzulesen in Liebwein[68](S. 174ff).

²¹ Schinzler[96](S. 75f) gibt im Gegensatz dazu an, dass das wichtigste Unternehmensziel das Sicherheitsstreben sei und nicht die Gewinnmaximierung, da es aufgrund der großen Anzahl von den Unternehmenserfolg beeinflussenden Parametern schwierig sei, den Gewinn bzw. die Rentabilität zu maximieren.

Daher kommt das Streben nach Sicherheit oft als Zwischen- oder Unterziel oder als einzuhaltende Nebenbedingung im Zielbündel des Versicherungsunternehmens vor und besitzt eine überwiegend begrenzte Ausprägung des Zielausmaßes (z.B. Festlegung einer höchstzulässigen Ruinwahrscheinlichkeit).

Abbildung 2.2: Das strategische Dreieck der Unternehmensziele



Quelle: Beard/Pentikäinen/Pesonen[12](Abb. 14.5.1)

Die Abbildung 2.2 stellt das in dieser Arbeit zu behandelnde Zielsystem eines kapitalorientierten Versicherungsunternehmens graphisch dar. Dabei werden die Dividendenausschüttungen gemäß Kapitel 1 im Zuge von Gewinnverwendungsentscheidungen festgelegt und stehen somit in Konkurrenz zum Erhaltungsziel, da sich ein höheres Dividendenzahlung negativ auf die finanzielle Sicherheit der Versicherungsunternehmung auswirkt.

Die Arbeit von Kaluza[62](S. 524ff), welche eine *empirische Untersuchung* von Zielvorstellungen in Versicherungsunternehmen zum Gegenstand hat, unterstützt das zugrundeliegende Zielsystem dieser Arbeit. Demnach zählt der Gewinn einer **Versicherungs-Aktiengesellschaft** zu den Hauptzielen und das Ziel der Erhaltung kann als Nebenbedingung in das Zielbündel eingebunden werden.

Schließlich sei noch auf den zeitlichen Bezug bei der Rückversicherung eingegangen. Eine kurzfristige Betrachtungsweise ist nach Schinzler[96](S. 77) schon deshalb nicht sinnvoll, da den langfristigen Vertrauensbeziehungen zwischen Erst- und Rückversicherern eine immense Bedeutung zukommt. Gerade die professionelle Rückversicherung lebt vom Vertrauen auf das beiderseitige Interesse von Erst- und Rückversicherer an einer andauernden Geschäftsbeziehung. Sollte sich ein Partner (z.B. aufgrund der kurzfristigen Maximierung der Rentabilität) aus dem Geschäft zurückziehen, weil sich die ehemals guten Ergebnisse aus diesem Geschäft verschlechtert haben, so widerstrebt das dem Streben nach Sicherheit.

Das stationäre Ausschüttungsmodell

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Entwicklung eines Markovschen Entscheidungsmodells, welches den unternehmerischen Zielen *Gewinn*, *Sicherheit* und *Dividendenausschüttungen* einer Versicherungs-Aktiengesellschaft, im Folgenden Versicherungsunternehmung genannt, genügt. Wie in Abschnitt 1.1 bereits erwähnt wurde, lässt sich die Dynamik des Kapitals der Versicherungsunternehmung mittels einer zeitdiskreten Kapitalgleichung darstellen. Um bei der Struktur der Markovschen Entscheidungsprozesse zu bleiben, gehen wir von der folgenden Situation aus:¹

$$s_{t+1} = s_t - d_t + B - X_{t+1}, \forall t \geq 0,$$

d.h. ausgehend vom vorhandenen Kapital s_t ergibt sich der zukünftige Kapitalstand s_{t+1} durch Addition des Prämienvolumens B und durch Subtraktion der Dividendenzahlung d_t und des zu leistenden (Gesamt-)Schadens X_{t+1} . Dabei wollen wir zusätzlich annehmen, dass das Prämienvolumen auf Grundlage des Erwartungswertprinzips kalkuliert wird.

Die Beschreibung des zukünftigen Kapitalstandes erfolgt deshalb durch eine in Abhängigkeit der Größen s_t, d_t, B, X_{t+1} (messbaren) *Systemfunktion*. Die Verwendung von Systemfunktionen zur Darstellung der Dynamik eines Markovschen Entscheidungsmodells ist ein gebräuchlicher Ansatz, wie der Artikel von White[113] zeigt. Formal wollen wir daher folgendes Grundmodell betrachten.

Definition 3.0.3 (*Grundmodell für Dividendenausschüttungen*)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), Q, r)$ heißt *Markovsches Ausschüttungsmodell auf einem Zeithorizont $T (\leq \infty)$* , wobei die Größen wie folgt festgelegt sind:

¹ Vgl. z.B. Hipp[56].

- $(\mathcal{S}, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Zustandsraum für den Kapitalstand.
- $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+$ sei der Aktionsraum für die Dividendenausschüttung.
- $\mathcal{A}(s) = \{d \in [0, (s - s^*)^+]\}$ mit $(s - s^*)^+ := \max\{0, s - s^*\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s^*| < \infty$ eine Sicherheitsschranke darstellt, welche durch ein vorgegebenes Risikomaß berechnet wird.²
- Q sei das Übergangsgesetz von \mathbb{K} nach \mathcal{S} und ist mittels der messbaren Systemfunktion $F(s, d, B, x) := s - d + B - x$ definiert durch

$$Q(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, x)\} F_{X_0}(dx), \quad (s, d) \in \mathbb{K}, C \in \mathfrak{G}.$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Folge von nichtnegativen und reellen iid.-Zufallsvariablen, welche eine stetige Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und einen endlichen Erwartungswert besitzen, so dass $B := (1 + \lambda) \cdot E[X_0]$ mit Sicherheitszuschlag $\lambda \geq 0$ als Konstante zu betrachten ist.³ X_0 ist ein Repräsentant dieser Folge.

- Für die einperiodige Erlösfunktion r von \mathbb{K} nach \mathbb{R}_+ gelte $r(s, d) = d$.

Das Hauptmerkmal des Grundmodells für Dividendenausschüttungen ist die einperiodige Erlösfunktion, da sie genau die gewählte Entscheidung, also die Höhe der Dividende angibt. Zudem ist es nicht gestattet, dass mittels einer Dividendenausschüttung ein Kapitalstand s^* unterschritten wird, da dies dem Ziel nach Sicherheit widersprechen würde. Daher beschäftigt sich diese Arbeit mit der Ermittlung einer optimalen Dividendenausschüttungspolitik. Dies soll nun durch die Anwendung der Methoden aus Abschnitt 2.1 geschehen.

3.1 Optimierung bei einem beschränkten Zeithorizont

Für das spezielle Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit Zeithorizont $T < \infty$ sollen in diesem Abschnitt die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen bei

² Vgl. dazu auch Korollar 3.1.6.

³ Das Prämienvolumen übersteigt daher den Erwartungswert des Gesamtschadens.

Vgl. Bühlmann[24](S. 87), Farny[38](S. 47f), Wolff[117](S. 355).

Für den Fall $E[X_0] = \infty$ können wir zum Erhalt eines endlichen Parameters für das Bruttoprämienvolumen z.B. auf das *Perzentilprinzip* im Sinne von Schmidt[97](S. 242) zurückgreifen, d.h.

$$B = (1 + \lambda) \cdot \inf\{a \in \mathbb{R}_+ \mid \mathbf{P}(X_0 > a) \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Es ist aber dann darauf zu achten, dass alle Resultate, welche aus dem erwartungswertübersteigenden Prämienvolumen resultieren, nicht mehr gültig sind.

Verwendung von $\pi \in \Pi_M$ für einen Startwert $s \in \mathcal{S}$ maximiert werden. Die Zielfunktion lautet deshalb:

$$V^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} V_\pi(s) \text{ mit } V_\pi(s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_t(S_t) \right]. \quad (3.1.1)$$

Bevor wir mit Hilfe des Hauptsatzes der Dynamischen Optimierung das obige Optimierungsproblem lösen, ist die nachstehende Eigenschaft zur Ermittlung einer optimalen Dividendenpolitik hilfreich.

Bemerkung 3.1.1 *Gegeben sei das Markovsche Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3.*

Dann gilt für jede messbare Funktion V auf \mathcal{S} nach der Transformationsformel für Maße:⁴

$$\int_{\mathcal{S}} V(s') Q(ds'|s, d) = \int_{\mathbb{R}^+} V(F[s, d, B, x]) F_{X_0}(dx), \quad (3.1.2)$$

d.h. falls eines der Integrale existiert, so auch das andere, und beide sind gleich.

Des Weiteren gibt der folgende Hilfssatz ein bekanntes aber hilfreiches Resultat an.

Hilfssatz 3.1.2 *Sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ isoton, d.h. für $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mit $d_1 \leq d_2$ gilt $v(d_1) \leq v(d_2)$. Dann folgt:*

1. *Sei $h \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $v(\cdot + h)$ isoton.*
2. *Sei $v(\cdot, \omega)$ isoton für alle ω und $v(d, \cdot)$ integrierbar bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ für alle d , dann ist $\int v(\cdot, \omega) \mu(d\omega)$ isoton.*

Beweis: Die Behauptungen folgen durch Einsetzen und durch die Isotonie des Integrals. ■

Satz 3.1.3 *Es sei ein Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit $T < \infty$ gegeben und es seien V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + \int_{\mathbb{R}^+} V_{t+1}[s - d + B - x] dF_{X_0}(x) \right\}, \quad V_T \equiv 0, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (3.1.3)$$

Hierbei gilt:

1. *Die Funktionen $V_t(s)$ sind messbar und es existiert ein Maximisator.*

⁴ Vgl. z.B. Ash[7](S. 225), Behnen/Neuhaus[13](S. 217) oder Bauer[9](S. 125f).

2. Die stationäre (deterministische) Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit

$$\mathcal{A}(s) \ni f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, \end{cases}$$

ist optimal und für die Wertfunktion gilt

$$V^*(s) = V_0(s).$$

Für die Funktionen $V_t(s)$ ($0 \leq t \leq T$) auf \mathcal{S} gemäß (3.1.3) ergibt sich damit:

$$V_t(s) = \begin{cases} 0 + EV_{t+1}(s + B - X_{t+1}) & \text{für } s \leq s^*, \\ s - s^* + EV_{t+1}(s^* + B - X_{t+1}) & \text{für } s > s^*. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Beweis: Die Gestalt von (3.1.3) leitet sich aus dem Grundmodell für Dividendenausschüttungen (Definition 3.0.3) mit Bemerkung 3.1.1 gemäß des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) ab.

Per absteigender Induktion zeigen wir für alle $t = 0, \dots, T - 1$:

$$\text{a) } u_t(s, d) := \int V_{t+1}(s - d + B - x_{t+1}) P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \text{ ist stetig auf } \mathbb{K} \quad (3.1.5)$$

und

$$\text{b) } \Delta L_t(d^*, d_*) := L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0; d^*, d_* \in \mathcal{A}(s); 0 \leq d_* \leq d^* := (s - s^*)^+ \quad (3.1.6)$$

mit $L_t(d) := d + EV_{t+1}[s - d + B - X_{t+1}]$ und somit

$$EV_{t+1}[s - d^* + B - X_{t+1}] \geq d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B - X_{t+1}]. \quad (3.1.7)$$

Teil a) liefert in Analogie zum Selektionssatz 2.1.11 die in Teil 1 behauptete Existenz eines Maximisators $f(s)$ und Messbarkeit von $V_t(s)$, da die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r(s, d)$ auf \mathbb{K} stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Teil b) zeigt die in Teil 2 behauptete Optimalität der Entscheidungsregel $f(s) = (s - s^*)^+$.

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T - 1$ ergibt sich für Teil a) die Stetigkeit der Funktion $u_{T-1}(s, d) = 0$ auf \mathbb{K} .

Für Teil b) ergibt sich: $\Delta L_{T-1}(d^*, d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass (3.1.5) und (3.1.6) bzw. (3.1.7) gilt.

Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$) für Teil a), dass die Funktion

$$V_t(s-d+B-x_t) = f^*(s-d+B-x_t) + EV_{t+1}[s-d+B-x_t+B-X_{t+1}]$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf \mathbb{K} für alle festen Werte $X_t(\omega) = x_t$ ist. Denn mit der optimalen Entscheidungsregel $f^*(s-d+B-x_t) \in \mathcal{A}(s-d+B-x_t)$, welche gemäß der Induktionsannahme existiert, gilt für jede Folge $(s_n) \rightarrow s$ und $(d_n) \rightarrow d$: $f^*(s_n-d_n+B-x_t) = f^*(s-d+B-x_t)$.

Des Weiteren gilt wegen $f_{T-1}(s) = (s-s^*)^+$ gemäß des Induktionsanfangs (Teil b)):

$$\begin{aligned} V_t(s-d+B-x_t) &\leq \left(s-d + \sum_{i=t}^{T-1} B-x_t - s^* \right)^+ \\ &\leq \underbrace{\left(s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B-x_t - s^* \right)^+}_{=: V'_t(s+B-x_t)} \end{aligned}$$

für geeignete ω mit $X_{t+1}(\omega) = \dots = X_{T-1}(\omega) = 0$, d.h. mittels

$$\int V'_t(s+B-x_t)^+ P^{X_t}(dx_t) < \infty$$

resultiert daraus die P^{X_t} -Integrierbarkeit der Funktion $V_t(s-d+B-x_t)$. Daher ist die Funktion $u_{t-1}(s, d)$ nach dem *Stetigkeitslemma* stetig auf \mathbb{K} .

Für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$) von Teil b) folgt zunächst mit $s \leq s^* \Rightarrow d^* = d_* = 0$:

$$\Delta L_{t-1}(d^*, d_*) = EV_t[s+B-X_t] - EV_t[s+B-X_t] = 0. \quad (3.1.8)$$

Für den Fall $s > s^*$ gilt gemäß der Induktionsannahme für ein festes $X_t(\omega) = x_t$:

$$\begin{aligned} &V_t[s-d+B-x_t] \\ &= \begin{cases} s-d+B-x_t-s^* \\ \quad + EV_{t+1}[s^*+B-X_{t+1}] & \text{für } s-d+B-s^* > x_t, \\ EV_{t+1}[s-d+B-x_t+B-X_{t+1}] & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit von

$$V_t[s-d^*+B-x_t] - V_t[s-d_*+B-x_t] \geq d_* - d^*, \quad (3.1.10)$$

d.h. mit der entsprechenden Fallunterscheidung folgt für (3.1.10):

- Für den Fall $s-d^*+B-s^* > x_t$ und $s-d_*+B-s^* > x_t$ folgt nach (3.1.9):

$$s-d^*+B-x_t-s^* - (s-d_*+B-x_t-s^*) = d_* - d^*.$$

- Mit $s - d^* + B - s^* \leq x_t$ und $s - d_* + B - s^* \leq x_t$ gilt gemäß (3.1.9):

$$\begin{aligned}
& V_t[s - d^* + B - x_t] - V_t[s - d_* + B - x_t] \\
&= EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}] - EV_{t+1}[s - d_* + B - x_t + B - X_{t+1}] \\
&\stackrel{(*)}{\geq} EV_{t+1}[s - d_* + B - x_t + B - X_{t+1}] \\
&\quad + d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B - x_t + B - X_{t+1}] \\
&= d_* - d^*,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen Hilfssatz 3.1.2 und (3.1.7) folgt.

- Für den Fall $s - d^* + B - s^* \leq x_t$ und $s - d_* + B - s^* > x_t$ ergibt sich wiederum nach (3.1.9):

$$\begin{aligned}
& V_t[s - d^* + B - x_t] - V_t[s - d_* + B - x_t] \\
&= EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}] \\
&\quad - (s - d_* + B - x_t - s^*) - EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}] \\
&\stackrel{(*)}{\geq} s - d^* + B - x_t - s^* + EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}] \\
&\quad - (s - d_* + B - x_t - s^*) - EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}] \\
&= d_* - d^* \pm EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}] \\
&= d_* - d^*,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen

$$\begin{aligned}
& EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}] \\
&\stackrel{(3.1.9)}{\geq} s - d^* + B - x_t - s^* + EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}]
\end{aligned}$$

erfolgt.

Wegen der schon gezeigten Integrierbarkeit von $V_t[s - d + B - x_t]$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
& \Delta L_{t-1}(d^*, d_*) \\
&= d^* + EV_t[s - d^* + B - X_t] - d_* - EV_t[s - d_* + B - X_t] \\
&= d^* - d_* \\
&\quad + \int \left(V_t[s - d^* + B - x_t] - V_t[s - d_* + B - x_t] \right) P^{X_t}(dx_t) \\
&\stackrel{(3.1.10)}{\geq} d^* - d_* + \int (d_* - d^*) P^{X_t}(dx_t) = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

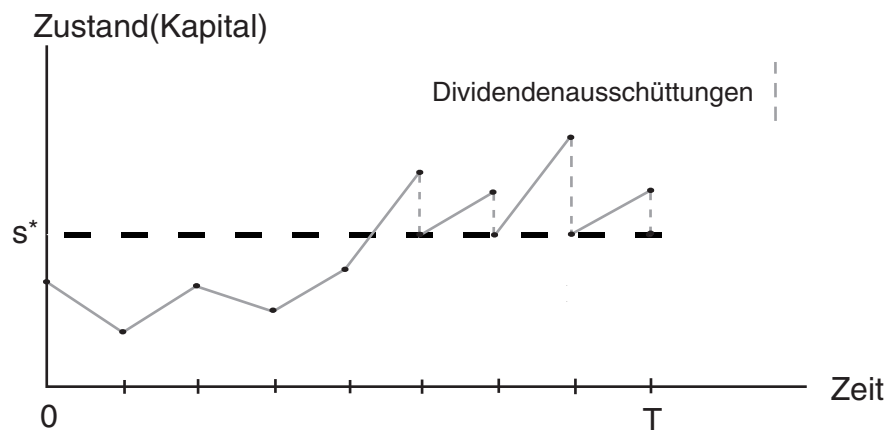
Der von uns gewählte Ansatz zur Steuerung eines Versicherungsunternehmens über die Dividendenausschüttungen ist nicht grundlegend neu, denn Dividendenausschüttungsmodelle gehen auf eine Arbeit von De Finetti[30] zurück. Ausschüttungsmodelle sind demnach als Alternative zur klassischen Ruintheorie und der Ruinwahrscheinlichkeit zu sehen,

indem die erwartete Lebenszeit eines Versicherers und somit die erwarteten (diskontierten) Dividendenzahlungen bis zum Ruin als besseres Maß für die finanzielle Stärke eines Versicherungsunternehmens geeignet ist, da aus Sicht des Versicherers das alleinige Vermeiden des Ruins und somit eine Ansammlung der Kapitalreserve ökonomisch nicht sinnvoll erscheint. Jedoch besteht hier ein großer Unterschied zu den Arbeiten von De Finetti[30] und Borch[21](S. 225), da wir nicht anfänglich von einer *Barrieren-Politik* ausgehen, sondern diese aus dem Zielsystem und der Systemfunktion resultiert. Dabei ist eine Barrieren-Politik dadurch charakterisiert, dass alle über s^* hinausgehende Beträge vollständig ausgeschüttet werden. Außerdem sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Optimalität der Barrieren-Politik bei unserer Modellierungsweise nicht immer gewährleistet sein wird, da diese sich auf die Isotonie der Funktion $L_t(d)$ gründet.

Auch die erweiterten Ansätze von Borch⁵ verwenden die maximalen (diskontierten) Dividendenzahlungen als Zielkriterium und ermitteln eine Barrieren-Politik wie π^* als optimales Resultat, wobei auf eine exakte mathematische Beweisführung verzichtet wird. Im Sinne von Borch[21](S. 156) kann der durch Einhaltung einer vorgegebenen einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit ermittelte Wert s^* als bestimmende Größe der Barrieren-Politik aufgefasst werden.

Letztendlich basiert unser Modellierungsansatz auf diesen Vorschlag, wobei wir uns eine gewisse Freiheit bei der Ermittlung des Wertes s^* behalten wollen und weitere wichtige Ergebnisse aus diesem Grundmodell folgern werden. Zum besseren Verständnis des Wertes s^* und der zugehörigen optimalen Barrieren-Politik π^* haben wir einen möglichen Verlauf des Kapitalprozesses in der Abbildung 3.1 skizziert.

Abbildung 3.1: Ein Pfad des Kapitalprozesses bei Verwendung von π^*



Eine Ausschüttungspolitik gemäß Satz 3.1.3 liefert zum Startzeitpunkt eine womöglich deutlich überhöhte Ausschüttung $f(s_0) = (s_0 - s^*)^+$, welche der bisherigen Dividendenpo-

⁵ Vgl. Borch[20](S. 226ff) oder Borch[21](S. 152ff).

litik des Versicherers widersprechen könnte. Daher empfiehlt es sich, einen *Justierungsparameter* $k \in (0, 1]$ einzuführen, der die Höhe der einperiodigen Ausschüttungen angleicht, d.h. für die Menge der zulässigen Aktionen ergibt sich dann

$$\mathcal{A}(s) = \{d \in [0, k \cdot (s - s^*)^+]\}.$$

Da der Parameter k die Struktur der optimalen Ausschüttungspolitik π^* nicht verändert, wollen wir im weiteren Verlauf der Arbeit $k \equiv 1$ setzen. Mit den entsprechenden Beweisschritten aus Satz 3.1.3 resultiert daraus das folgende Korollar.

Korollar 3.1.4 *Sei $k \in (0, 1]$ eine Konstante und ein Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit $\mathcal{A}(s) = \{d \in [0, k \cdot (s - s^*)^+]\}$ gegeben. Dann ist entsprechend Satz 3.1.3 die Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit*

$$\mathcal{A}(s) \ni f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ k \cdot (s - s^*) & \text{falls } s > s^*, \end{cases}$$

optimal und für die Wertfunktion ergibt sich

$$V_t(s) = \begin{cases} 0 + EV_{t+1}(s + B - X_{t+1}) & \text{für } s \leq s^*, \\ k \cdot (s - s^*) + EV_{t+1}((1 - k)s - ks^* + B - X_{t+1}) & \text{für } s > s^*. \end{cases}$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist der Wert s^* die bestimmende Größe der Barrieren-Politik π^* aus Satz 3.1.3. Im Folgenden wollen wir uns der Bestimmung von s^* widmen, welche nicht nur auf Grundlage der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit erfolgen kann, sondern je nach Belieben auch als Lösung jedes beliebigen Risikomaßes angesehen werden kann. Dies führt uns zu Korollar 3.1.6, wobei zuerst der Begriff der *Quantilfunktion* geklärt werden muss (s. Witting[115](§ 1.2.1)).

Definition 3.1.5 (Quantilfunktion) *Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine beliebige Verteilungsfunktion. Dann heißt die Funktion $F^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F^{-1}(y) := \inf\{x : F(x) \geq y\}$ Quantilfunktion der Verteilungsfunktion.*

Korollar 3.1.6 *Für jedes Risikomaß $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich eine (endliche) Sicherheits-schranke s^* angeben, d.h.*

1. für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. für den VaR_γ sind für vorgegebenes $0 < \gamma < 1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} P(s_1^* + B - X_0 \leq 0) &\leq \gamma, \\ P(X_0 - B \geq s_1^*) &\leq \gamma \end{aligned}$$

nach s_1^* zu lösen und es ergibt sich

$$s_1^* = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B\},$$

2. für den TailVaR folgt für vorgegebenes $\gamma \in (0, 1)$

$$s_2^* := E[X_0 - B | X_0 - B > VaR_\gamma] = \frac{1}{P(X_0 > s_1^* + B)} \int_{s_1^* + B}^{\infty} (x - B) dF_{X_0}(x).$$

Ist zudem F_{X_0} stetig und strikt isoton, so folgt

$$s_2^* = \frac{1}{\gamma} \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x dF_{X_0}(x) - B,$$

3. für den EPD ist für vorgegebenes $\eta > 0$ die Gleichung

$$E[(X_0 - (s_3^* + B))^+] = \eta$$

zu lösen und es existiert ein eindeutiger Wert s_3^* .

Beweis: Die Behauptung von Teil 1 für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit lässt sich durch elementare Umformungen zeigen. Zu beachten ist dabei, dass eine eindeutige Lösung nur bei strikter Isotonie und Stetigkeit der Verteilungsfunktion F existiert. Daher betrachten wir den Fall „ $\leq \gamma$ “ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(s_1^* + B - X_0 \leq 0) &\leq \gamma \\ P(-X_0 \leq -s_1^* - B) &\leq \gamma \\ 1 - P(X_0 < s_1^* + B) &\leq \gamma \\ F_{X_0}(s_1^* + B) &\geq 1 - \gamma \\ s_1^* &\geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt gemäß $F_{X_0}(s_1^* + B) \geq 1 - \gamma \Leftrightarrow s_1^* + B \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)$ nach Witting[115](HS 1.17) folgt.

Der VaR_γ ergibt sich analog durch

$$\gamma \geq P(s_1^* + B - X_0 \leq 0) = P(X_0 - B \geq s_1^*). \quad (3.1.11)$$

Damit genügt der Wert s_1^* mit

$$s_1^* = \inf\{x \in \mathbb{R} | x \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B\}$$

den erforderlichen Ansprüchen in Teil 1.

Für den TailVaR aus Teil 2 ergibt sich wegen Teil 1

$$\begin{aligned} s_2^* &= E[X_0 - B | X_0 - B > VaR_\gamma] = E[X_0 - B | X_0 - B > s_1^*] = E[X_0 - B | X_0 > s_1^* + B] \\ &= \frac{1}{P(X_0 > s_1^* + B)} \int_{s_1^* + B}^{\infty} (x - B) dF_{X_0}(x). \end{aligned}$$

Angesichts der Stetigkeit und der strikten Isotonie von F_{X_0} resultiert daraus

$$\begin{aligned} s_2^* &= \frac{1}{P(X_0 > F_{X_0}^{-1}(1-\gamma))} \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} (x - B) dF_{X_0}(x) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x dF_{X_0}(x) - B[1 - (1-\gamma)] \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x dF_{X_0}(x) - B. \end{aligned}$$

Für den Beweis von Teil 3 vereinfachen wir zunächst $E[(X_0 - (s_3^* + B))^+]$ mittels partieller Integration, d.h.

$$\begin{aligned} &E[(X_0 - s_3^* - B)^+] \\ &= \int_{s_3^*+B}^{\infty} x dF_{X_0}(x) - \int_{s_3^*+B}^{\infty} (s_3^* + B) dF_{X_0}(x) + \int_0^{s_3^*+B} x dF_{X_0}(x) - \int_0^{s_3^*+B} x dF_{X_0}(x) \\ &= E[X_0] - (s_3^* + B) \int_{s_3^*+B}^{\infty} 1 dF_{X_0}(x) - \int_0^{s_3^*+B} x dF_{X_0}(x) \\ &= E[X_0] - (s_3^* + B)[1 - F_{X_0}(s_3^* + B)] - x \cdot F_{X_0}(x)|_0^{s_3^*+B} + \int_0^{s_3^*+B} F_{X_0}(x) dx \\ &= E[X_0] - (s_3^* + B) + \int_0^{s_3^*+B} F_{X_0}(x) dx. \end{aligned}$$

Mittels des *Fixpunktsatzes von Banach* lösen wir nun:

$$s_3^* = \underbrace{E[X_0] - B - \eta + \int_0^{s_3^*+B} F_{X_0}(x) dx}_{:=\varphi(s_3^*)}.$$

Wegen $\varphi'(s_3^*) = F_{X_0}(s_3^* + B) \cdot \mathbb{1}_{\{s_3^*+B \geq 0\}} < 1$ ist $\varphi(s_3^*) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Kontraktion. Daher gibt es genau ein s_3^* , für das gilt $s_3^* = \varphi(s_3^*)$. ■

Eine weitere Folgerung aus der Struktur der optimalen Dividendenausschüttungspolitik ist eine geschlossene Bewertungsformel für die optimalen erwarteten Dividendenausschüttungen.

Korollar 3.1.7 *Gegeben sei das Markovsche Ausschüttungsmodell aus Definition 3.0.3. Es sei P^π das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω unter Politik π und $P_s^\pi := P^\pi(\cdot | S_0 = s)$ mit dem zugehörigen Erwartungswertoperator E_s^π . Für $\pi = \pi^*$ schreiben wir kurz P_s^* bzw. E_s^* . Weiterhin sei $F_x^*(s) := s - (s - s^*)^+ + B - x$ und $f^*(s) = (s - s^*)^+$, dann gilt*

$$V^*(s) = V_0(s) = \sum_{n=0}^{T-1} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s), \quad \forall s \in \mathcal{S},$$

wobei der erste Summand gleich $(s - s^*)^+$ ist.

Beweis: Wir zeigen per absteigender Induktion die Gültigkeit von

$$V_t(s) = \sum_{n=0}^{T-t-1} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s)$$

für alle $t = 0, \dots, T-1$ mit Hilfe von Satz 3.1.3.

Mit $V_{T-1}(s) = (s - s^*)^+$ ist der *Induktionsanfang* offensichtlich erfüllt. Weiterhin gelte für ein beliebiges $t \leq T-1$ die Gültigkeit von (3.1.12) (*Induktionsannahme*). Dann folgt für den *Induktionsschluss* ($t \rightarrow t-1$) gemäß Satz 3.1.3 und der i.i.d.-Eigenschaft von $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$\begin{aligned} V_{t-1}(s) &= (s - s^*)^+ + E_s^* V_t(F_{X_{T-t}}^*(s)) \\ &\stackrel{IA}{=} (s - s^*)^+ + E_s^* f^* \circ F_{X_{T-t}}^*(s) + E_s^* f^* \circ F_{X_1}^* \circ F_{X_{T-t}}^*(s) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{T-t} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die geschlossene Bewertungsformel aus Korollar 3.1.7 hat den numerischen Vorteil, dass eine rekursive Programmierung des Lösungsalgorithmus der *Dynamischen Programmierung* nicht erforderlich ist.⁶

Zur Verdeutlichung der gewonnenen Resultate wollen wir nun zwei Unternehmensbeispiele angeben, welche im weiteren Verlauf der Arbeit den betrachteten Ergebnissen angeglichen werden, wobei die nichttrivialen Berechnungen mit MATHEMATICA[®] erfolgten.⁷

Beispiel B.1.a Sei $s_0 = 10.06$, $T = 3$, $\lambda = 0.2$ und $X_0 \sim \mathcal{E}(\beta)$ mit $\beta = 0.25$ gegeben (*exponential(0.25)-verteilter (Gesamt-)Schaden*).

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*$	2.87707
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	2.00478
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	1.59832

Tabelle 3.1: Erwartete Dividenden für $\mathcal{E}(0.25)$ -verteilte Schäden

Weiterhin betrachten wir die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit zum Niveau $\gamma = 0.05$ als relevantes Risikomaß. Dann ergibt sich:⁸

$$B := (1 + \lambda) \cdot E[X_0] = (1 + \lambda) \cdot \frac{1}{\beta} = (1 + 0.2) \cdot 4 = 4.8,$$

⁶ Vgl. z.B. die Beispielprogramme für Warteschlangen in Sennott[102], die unter <http://www.math.ilstu.edu/~sennott/stochdynprog/TOC.html> (Stand: 13.05.2004) verfügbar sind.

⁷ Zur Übersicht der bekanntesten Schadenhöhenverteilungen siehe Schröter[100](§ 1.1.2).

⁸ Zur Erinnerung: $F_{X_0}(x) = (1 - \exp(-\alpha x)) \mathbb{1}(x \geq 0)$.

$$s^* = -\frac{1}{\beta} \cdot \ln(\gamma) - B = (-4) \cdot \ln(0.05) - 4.8 \approx 7.18293.$$

Schließlich erhalten wir mit den Werten aus Tabelle 3.1 und mit Hilfe von Korollar 3.1.7: $V^*(s) \approx 6.48$.

Beispiel B.2.a Sei $s_0 = 10.06$, $T = 3$, $\lambda = 0.2$ und $X_0 \sim \text{Par}(a, b)$ mit $a = 8$ und $b = 3$ gegeben (Pareto(8,3)-verteilter (Gesamt-)Schaden). Unter Berücksichtigung der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit zum Niveau $\gamma = 0.05$ und mit $F_{X_0}(x) = [1 - (\frac{a}{a+b})^b] \mathbb{1}(x \geq 0)$ gilt dann:

$$B := (1 + \lambda) \cdot E[X_0] = (1 + \lambda) \cdot \frac{a}{b-1} = (1 + 0.2) \cdot 4 = 4.8,$$

$$s^* = a \cdot (\gamma^{-\frac{1}{b}} - 1) - B = 8 \cdot (0.05^{-\frac{1}{3}} - 1) - 4.8 \approx 8.91536.$$

Mit den Werten aus Tabelle 3.2 und Korollar 3.1.7 folgt letztlich $V^*(s) \approx 5.408$.

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*$	1.08464
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	2.3625
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	1.96093

Tabelle 3.2: Erwartete Dividenden für Pareto(8,3)-verteilte Schäden

3.2 Optimierung bei einem unbeschränkten Zeithorizont

Wir beginnen mit der Suche nach einer optimalen Politik für das folgende (diskontierte) Optimierungsproblem

$$V_{\infty, \alpha}^*(s) := \sup_{\Pi_M} V_{\infty, \alpha}(\pi, s), \quad (3.2.1)$$

mit $V_{\infty, \alpha}(\pi, s) := E_s^\pi [\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t f_t(S_t)]$, $\pi \in \Pi_M$, $s \in \mathcal{S}$, $\alpha \in (0, 1)$, wobei die Funktion $V_{\infty, \alpha}(\pi, s)$ im Sinne von Hermann[51](S. 39) als zukünftiger *Unternehmenswert* der (ganzen) Versicherungsunternehmung zu interpretieren ist.

Satz 3.2.1 *Gegeben sei das Markovsche Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit $T = \infty$ und $\alpha < 1$.*

Dann ist die deterministisch stationäre Politik $f_\infty^ = (f(s), f(s), f(s), \dots)$ aus Satz 3.1.3 mit*

$$f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

auch optimal bzgl. (3.2.1).

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass die einperiodigen Dividendenausschüttungen beschränkt sind. Sei $t \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt wegen $s_{t+1} = s_t - d_t + B - x_t$ und mit den Ergebnissen aus Satz 3.1.3:

$$s_{t+1} = \begin{cases} s_t + B - x_t & \text{für } s_t < s^*, \\ s^* + B - x_t & \text{für } s_t \geq s^*. \end{cases}$$

Für die Menge der zulässigen Aktionen folgt dann

$$\mathcal{A}(s_{t+1}) = \begin{cases} \{d \in [0, (s_t + B - x_t - s^*)^+]\} & \text{für } s_t < s^*, \\ \{d \in [0, (B - x_t)^+]\} & \text{für } s_t \geq s^*, \end{cases}$$

und daher ist B eine obere Schranke für d . Für den Zeitpunkt $t = 0$ ist offensichtlich, dass $(s_0 - s^*)^+$ eine obere Schranke ist. Setzen wir nun $M := \max\{(s_0 - s^*)^+, B\}$, so erhalten wir: $0 \leq r(s, d) = d \leq M$. Durch die Beschränktheit von d können wir nun die Resultate aus Kapitel 2.1.2 verwenden.

Korollar 3.1.7 liefert für die Vorwärtsform der Wertfunktionen und unter Berücksichtigung der Diskontierung mit α die folgende Gestalt der Wertiterationsfunktionen

$$\begin{aligned} v_t(s) &= (s - s^*)^+ + \alpha \cdot E v_{t-1}(s - (s - s^*)^+ + B - X_1) \\ &= \sum_{n=0}^{t-1} \alpha^n E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s), \end{aligned}$$

wobei $v_0(s) \equiv 0$ gesetzt wird, da die Optimalität der Entscheidungsregel $f(s) = (s - s^*)^+$ durch die Diskontierung erhalten bleibt.

Des Weiteren führt der Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ zu

$$\begin{aligned} v^* &:= \lim_{t \rightarrow \infty} v_t(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s). \end{aligned}$$

Infolgedessen resultiert die Optimalität der Politik $f_\infty^* = (f(s), f(s), f(s), \dots)$ mit $f(s) = (s - s^*)^+$ nach Satz 2.1.15 aus der Gültigkeit von $v^* = V_{\infty, \alpha}^*(s) = L_f V_{\infty, \alpha}^*(s)$, d.h.

$$\begin{aligned} L_f V_{\infty, \alpha}^*(s) &= f(s) + \alpha \int_{\mathcal{S}} V_{\infty, \alpha}^*(s') Q(ds'|s, f(s)) \\ &= (s - s^*)^+ + \alpha \cdot E_s^*(V_{\infty, \alpha}^*(F_{X_0}^*(s))) \\ &= (s - s^*)^+ + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_0}^*(s) \\ &= (s - s^*)^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ F_{X_{n-1}}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s) \\ &= V_{\infty, \alpha}^*(s). \blacksquare \end{aligned}$$

Der Wunsch der Aktionäre nach einem in der Zeit gleichmäßigen Dividendeneinkommen⁹ führt zum Optimierungsproblem der durchschnittlichen Dividendenausschüttungen auf einem unbeschränkten Zeithorizont. Mit dem mathematischen Rüstzeug aus Abschnitt 2.1.3 sind wir zumindest für das folgende gegenüber dem Grundmodell abgewandelte Markovsche Ausschüttungsmodell in der Lage, eine durchschnittsoptimale Politik und den zugehörigen Betrag von $\bar{V}_{\infty}^*(s)$ zu ermitteln.

Definition 3.2.2 (Ausschüttungsmodell mit Sanierung) *Es gelte das Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit der folgenden Änderung. Für die messbare Systemfunktion gilt nun:*

$$F(s_t, d_t, B, x_{t+1}) = s_t - d_t + B - x_{t+1} + (s^* - s_t)^+. \quad (3.2.3)$$

Durch die Gestalt der Systemfunktion wie in (3.2.3) gewährleisten wir zu jedem Zeitpunkt die Solvenz des Versicherungsunternehmens, da die Kapitalgeber ggf. den erforderlichen Fehlbetrag $(s^* - s)^+$ zusätzlich einzahlen (*Sanierung*), d.h. die Verletzung der Sicherheitsbedingung ($s < s^*$) führt wie im Grundmodell nicht zur Einstellung des Versicherungsbetriebes und somit zum Abbruch des Optimierungsalgorithmus.¹⁰ Infolgedessen erhalten wir in Analogie zu Korollar 3.1.7 zunächst das folgende Ergebnis.

⁹ Vgl. Stenner[105](S. 150) und die dort angegebenen Quellen.

¹⁰ Vgl. z.B. die entsprechende Entscheidungsregel bei Martin-Löf[73](S. 10).

Hilfssatz 3.2.3 *Es gelte das Ausschüttungsmodell mit Sanierung aus Definition 3.2.2 mit $T < \infty$. Dann gilt die folgende Bewertungsformel für die Wertfunktion der (totalen) erwarteten Dividendenausschüttungen*

$$V^*(s) = (s - s^*)^+ + (T - 1) \cdot E(B - X_0)^+, \forall s \geq s^*.$$

Beweis: Vorab erhalten wir mit den selben Überlegungen wie in Satz 3.1.3 die Optimalität der Politik $\pi^* = (f^*(s_0), \dots, f^*(s_{T-1}))$ mit $f^*(s) = (s - s^*)^+$ für das endlichstufige Optimierungsproblem. Die Behauptung folgt schließlich gemäß Korollar 3.1.7 mit der Funktion

$$F_x^*(s) := s - (s - s^*)^+ + B - x + (s^* - s)^+ = s^* + B - x$$

in diesem Modell. ■

Dieser Hilfssatz verdeutlicht die Systematik, welche in dem Ausschüttungsmodell mit Sanierung enthalten ist. Zu jedem Entscheidungszeitpunkt t befindet sich das System nach Wahl der Aktion im Zustand s^* .¹¹ Mit Hilfe dieser Eigenschaft des Ausschüttungsmodells können wir einer optimalen Politik für das Zielkriterium der durchschnittsoptimalen Dividendenausschüttungen bestimmen.

Satz 3.2.4 *Gegeben sei das Ausschüttungsmodell mit Sanierung wie in Definition 3.2.2 mit $T = \infty$. Dann ist die deterministisch stationäre Politik $f_\infty^* = (f(s), f(s), f(s), \dots)$ mit*

$$f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, \end{cases}$$

optimal bzgl. $\bar{V}_\infty^*(s) := \sup_{\Pi} \{ \limsup_{n \rightarrow \infty} E_s^\pi [\sum_{t=0}^{n-1} f(S_t)] / n \}, \forall s \in \mathcal{S}$ und für die Wertfunktion ergibt sich:

$$\bar{V}_\infty^*(s) = E(B - X_0)^+. \quad (3.2.4)$$

Beweis: Wegen der Beschränktheit der einperiodigen Ausschüttungen für alle $t \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$0 \leq r(s, d) = d \leq \max\{(s_0 - s^*)^+, B\},$$

und den weiteren Stetigkeits- und Beschränktheitsbedingungen entsprechend den Überlegungen wie in Satz 3.1.3 ist die Annahme 3 in diesem Modell erfüllt und der Satz 2.1.16 kann angewendet werden.

¹¹ Diese Struktur des Ausschüttungsmodells ist sinngemäß auch Borch[21](S. 225) zu entnehmen.

Mit den Größen $h(s) = (s - s^*)^+$ und $\rho^* = E(B - X_0)^+$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \rho^* + h(s) &= E(B - X_0)^+ + (s - s^*)^+ \\
 &= E[s - (s - s^*)^+ + B - X_0 + (s^* - s)^+ - s^*]^+ + (s - s^*)^+ \\
 &= \int_{\mathbb{R}_+} h(F[s, f(s), B, x]) dF_{X_0}(x) + f(s) \\
 &= \int_{\mathcal{S}} h(s') Q(ds'|s, f(s)) + r(s, f(s)) \\
 &= \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + \int_{\mathcal{S}} h(s') Q(ds'|s, d) \right\}
 \end{aligned}$$

und das Tripel $(\rho^*, h(s), f(s))$ erfüllt die Optimalitätsgleichung (2.1.22). ■

Erweiterungen des Grundmodells

In diesem Kapitel wird das stationäre Dividendenausschüttungsmodell aus dem vorherigen Abschnitt durch die Einbettung mehrerer Geschäftsfelder der Versicherungsunternehmung sukzessiv erweitert. Wir beginnen mit der Berücksichtigung des Rückversicherungsschutzes und untersuchen anschließend die Struktur der Dividendenzahlungen auf der Basis des Währungskursrisikos, welches vor allem für international tätige Versicherungsunternehmen nicht unberücksichtigt bleiben darf. Die letzte Erweiterung erfolgt durch die Hinzunahme des Kapitalanlageproblems. Infolgedessen stellt die Stochastizität des Währungskursrisikos und der Kapitalanlage eine zusätzliche Anforderung an das Modell dar, die aber unter der jeweiligen Verwendung von derivativen Absicherungsinstrumenten erheblich gemindert werden kann. Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir das stationäre Gesamtmodell aufstellen, welches schließlich alle zuvor behandelten Erweiterungen beinhaltet.

4.1 Dividenden und Rückversicherung

Wie in Abschnitt 2.2.1 bereits erwähnt wurde, trägt die Rückversicherung u.a. zur Verringerung des versicherungstechnischen Risikos bei. Die beiden gebräuchlichsten Rückversicherungsarten der traditionellen Rückversicherung wollen wir zuvor kurz erläutern.¹

- *Proportionale Rückversicherung* bezeichnet die zu einem festen Prozentsatz bestimmte Aufteilung des rückzuversichernden Risikos zwischen dem Erst- und Rückversicherer, d.h. der Rückversicherer erhält einen festen Anteil an der Originalprämie, der zugleich den Anteil der zu leistenden Schadenszahlung angibt.²

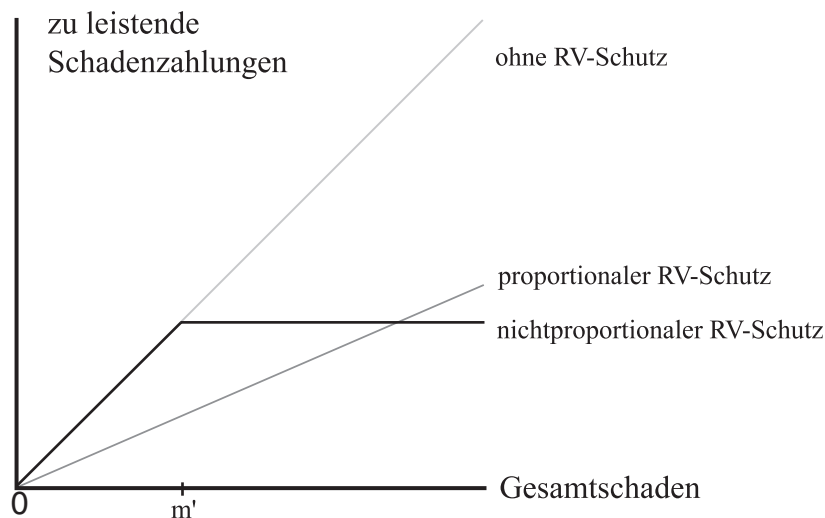
¹ Vgl. Gerathewohl[45](Kapitel 2).

² Vgl. z.B. Pfeiffer[82](S. 42), Farny[38](S. 488), Dienst[32](S. 12) und Schradin[99](§ 2.1.2.2) und die dort angegebene Literatur.

- Dagegen wird bei der *nichtproportionalen Rückversicherung* die Beteiligung des Rückversicherers auf den Schadenfall abgestellt. Die Schadenaufteilung findet so statt, dass der Erstversicherer bis zu einer vorher festgelegten Grenze, der sogenannten *Priorität* (m'), haftet. Den darüber hinausgehenden Schaden übernimmt der Rückversicherer. Die Berechnung der Nettorückversicherungsprämie erfolgt z.B. gemäß des Erwartungswertprinzips für die künftig zu leistenden Zahlungen des Rückversicherers.³

Im weiteren Verlauf der Arbeit soll nur die *Quoten-* bzw. die *Jahresüberschaden-Rückversicherung* als Hauptform der proportionalen bzw. nichtproportionalen Rückversicherung betrachtet werden, wobei das Leistungsprofil der beiden Rückversicherungsformen der Abbildung 4.1 zu entnehmen ist.

Abbildung 4.1: *Auszahlungsstruktur bei proportionaler und nichtproportionaler Rückversicherung*



Die maximalen zeitdiskreten Dividendenausschüttungen unter Berücksichtigung der Rückversicherung mit Hilfe des Ansatzes der Dynamischen Programmierung zu lösen, ist eine altbekannte Problemstellung.⁴ Allzuhäufig wird in diesem Zusammenhang nicht der Gesamtbetrag der Dividendenzahlung maximiert, sondern ihr Nutzen. Wir wollen auf die Verwendung von Nutzenfunktionen verzichten, da der Risikosituation der Versicherungsunternehmung durch eine vom Rückversicherungsschutz (RV-Schutz) abhängige Sicherheitsschranke Rechnung getragen wird.

³ Vgl. z.B. Pfeiffer[82](S. 54f), Farny[38](S. 488) und Dienst[32](S. 14).

⁴ Vgl. Frisque[43], Pechlivanides[79], Reischel[87](Kapitel 5) und Borch[20](S. 311).

4.1.1 Proportionaler Rückversicherungsschutz

Festlegung 4.1.1 (*Proportionaler Rückversicherungsschutz*)⁵

Gegeben sei das Markovsche Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3. Zudem sei $m \in [m_{\min}, m_{\max}]$ die Höhe des Selbstbehalts, der vom Erstversicherer bestimmt wird. Die messbare Funktion $h(m, x)$ gibt daher den Anteil eines Schadens an, den der Erstversicherer zu tragen hat. Wir setzen:

$$h(m, x) = m \cdot x \text{ mit } 0 < m_{\min} \leq m \leq m_{\max} = 1.$$

Jede Höhe des Selbstbehalts hat ihren Preis, den der Erstversicherer an den Rückversicherer bezahlt. Dieser Betrag wird vom eingenommenen Prämienvolumen abgezogen. Daraus resultiert die Netto-Prämieinnahme

$$\begin{aligned} B(m) &= B - (1 + \lambda_{RV}) \cdot E[X_0 - h(m, X_0)] \\ &= B - (1 + \lambda_{RV}) \cdot (1 - m) \cdot E[X_0], \quad 0 < B(m) \leq B \text{ für } m_{\min} \leq m \leq m_{\max}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{RV} > -1$ der bekannte Sicherheitszuschlag des Rückversicherers sei.

Die untere Schranke für den Selbstbehalt ergibt sich aus betriebswirtschaftlichen Gründen, da andernfalls die Netto-Prämieinnahme auch negative Werte annehmen könnte. Dies wiederum hätte zur Folge, dass das Versicherungsunternehmen mit Wahrscheinlichkeit 1 einen Verlust für die kommenden Perioden verzeichnet und sich somit der Möglichkeit von Dividendenausschüttungen beraubt.

Bemerkung 4.1.2 *Durch die Wirkung des proportionalen RV-Schutzes ändern sich die folgenden Größen im Modell:*

- Für die Systemfunktion ergibt sich unter Berücksichtigung des proportionalen Rückversicherungsschutzes:

$$F(s_t, d_t, m, B, x_{t+1}) = s_t - d_t + B(m) - m \cdot x_{t+1}.$$

- Die Schranke für das Sicherheitsniveau s^* ist auch abhängig von der Wahl von m und somit eine Funktion von $[m_{\min}, 1]$ nach \mathbb{R} . Dadurch ändert sich auch die Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen:

$$\mathcal{A}^P(s) = [0, (s - s^*(m))^+].$$

Wir können nun zeigen, dass in diesem Modell die Struktur der Dividendenpolitik wie in Satz 3.1.3 beibehalten wird, falls weiterhin die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen auf einem endlichen Zeithorizont T durch Wahl von $\pi \in \Pi_M$ maximiert werden sollen.

⁵ Vgl. Schäl[94].

Satz 4.1.3 Gegeben sei ein Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 3.0.3 auf einem endlichen Zeithorizont mit Festlegung 4.1.1 und Bemerkung 4.1.2. Zudem seien V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}^p(s)} \{d + EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_0)\}, V_T(s) \equiv 0, s \in \mathcal{S}, \quad (4.1.1)$$

wobei der Parameter $m \in [m_{\min}, 1]$ mit $|s^*(m)| < \infty$ fest sei. Hierbei gilt:

1. Die Funktionen $V_t(s)$ sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die stationäre (deterministische) Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit

$$f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*(m) \\ s - s^*(m) & \text{falls } s > s^*(m) \end{cases}$$

ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen bei proportionalem Rückversicherungsschutz.

Beweis: Die Funktionen $V_t(s)$ leiten sich aus der Zielfunktion und dem Übergangsgesetz des speziellen Markovschen Entscheidungsmodells aus Definition 3.0.3 gemäß des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) und Bemerkung 3.1.1 mit der entsprechenden Systemfunktion wie in Bemerkung 4.1.2 ab.

Per absteigender Induktion zeigen wir für alle $t = 0, \dots, T - 1$:

$$\text{a) } u_t(s, d) := \int V_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot x_{t+1}) P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \text{ ist stetig auf } \mathbb{K} \quad (4.1.2)$$

und

$$\text{b) } \Delta L_t(d^*, d_*) := L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0; d^*, d_* \in \mathcal{A}(s); 0 \leq d_* \leq d^* := (s - s^*(m))^+ \quad (4.1.3)$$

mit $L_t(d) := d + EV_{t+1}[s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1}]$ und somit

$$EV_{t+1}[s - d^* + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \geq d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B(m) - m \cdot X_{t+1}]. \quad (4.1.4)$$

Teil a) liefert in Analogie zum Selektionssatz 2.1.11 die in Teil 1 behauptete Existenz eines Maximisators $f(s)$ und Messbarkeit von $V_t(s)$, da die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r(s, d)$ auf \mathbb{K} stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Teil b) zeigt die in Teil 2 behauptete Optimalität der Entscheidungsregel $f(s) = (s - s^*(m))^+$.

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T - 1$ ergibt sich für Teil a) die Stetigkeit der Funktion $u_{T-1}(s, d) = 0$ auf \mathbb{K} .

Für Teil b) ergibt sich: $\Delta L_{T-1}(d^*, d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass (4.1.2) und (4.1.3) bzw. (4.1.4) gilt.

Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) für Teil a), dass die Funktion

$$\begin{aligned} V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t) \\ = f^*(s - d + B(m) - m \cdot x_t) + EV_{t+1}[s - d + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \end{aligned}$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf \mathbb{K} für alle festen Werte $X_t(\omega) = x_t$ ist. Denn mit der optimalen Entscheidungsregel $f^*(s - d + B(m) - m \cdot x_t) \in \mathcal{A}(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$, welche gemäß der Induktionsannahme existiert, gilt für jede Folge $(s_n) \rightarrow s$ und $(d_n) \rightarrow d$: $f^*(s_n - d_n + B(m) - m \cdot x_t) = f^*(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$.

Des Weiteren gilt wegen $f_{T-1}(s) = (s - s^*(m))^+$ gemäß des Induktionsanfangs (Teil b)):

$$\begin{aligned} V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t) &\leq \left(s - d + \sum_{i=t}^{T-1} B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) \right)^+ \\ &\leq \underbrace{\left(s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) \right)^+}_{=: V'_t(s + B(m) - m \cdot x_t)} \end{aligned}$$

für geeignete ω mit $X_{t+1}(\omega) = \dots = X_{T-1}(\omega) = 0$, d.h. mittels

$$\int V'_t(s + B(m) - m \cdot x_t)^+ P^{X_t}(dx_t) < \infty$$

resultiert daraus die P^{X_t} -Integrierbarkeit der Funktion $V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$. Daher ist die Funktion $u_{t-1}(s, d)$ nach dem *Stetigkeitslemma* stetig auf \mathbb{K} .

Für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) von Teil b) folgt zunächst mit $s \leq s^*(m) \Rightarrow d^* = d_* = 0$:

$$\Delta L_{t-1}(d^*, d_*) = EV_t[s + B(m) - m \cdot X_t] - EV_t[s + B(m) - m \cdot X_t] = 0. \quad (4.1.5)$$

Für den Fall $s > s^*(m)$ gilt gemäß der Induktionsannahme für ein festes $X_t(\omega) = x_t$:

$$\begin{aligned} V_t[s - d + B(m) - m \cdot x_t] \\ = \begin{cases} s - d + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) \\ \quad + EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] & \text{für } \frac{s - d + B(m) - s^*(m)}{m} > x_t, \\ EV_{t+1}[s - d + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit von

$$V_t[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t] - V_t[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t] \geq d_* - d^*, \quad (4.1.7)$$

d.h. mit der entsprechenden Fallunterscheidung folgt für (4.1.7):

- Für den Fall $s - d^* + B(m) - s^*(m) > m \cdot x_t$ und $s - d_* + B(m) - s^*(m) > m \cdot x_t$ folgt nach (4.1.6):

$$s - d^* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) - (s - d_* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m)) = d_* - d^*.$$

- Mit $s - d^* + B(m) - s^*(m) \leq m \cdot x_t$ und $s - d_* + B(m) - s^*(m) \leq m \cdot x_t$ gilt gemäß (4.1.6):

$$\begin{aligned} & V_t[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t] - V_t[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t] \\ &= EV_{t+1}[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\quad - EV_{t+1}[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\stackrel{(*)}{\geq} EV_{t+1}[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\quad + d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &= d_* - d^*, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen Hilfssatz 3.1.2 und (4.1.4) folgt.

- Für den Fall $s - d^* + B(m) - s^*(m) \leq m \cdot x_t$ und $s - d_* + B(m) - s^*(m) > m \cdot x_t$ ergibt sich wiederum nach (4.1.6):

$$\begin{aligned} & V_t[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t] - V_t[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t] \\ &= EV_{t+1}[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\quad - (s - d_* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m)) - EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\stackrel{(*)}{\geq} s - d^* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) + EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\quad - (s - d_* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m)) - EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &= d_* - d^* \pm EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &= d_* - d^*, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen

$$\begin{aligned} & EV_{t+1}[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \\ &\stackrel{(4.1.6)}{\geq} s - d^* + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m) + EV_{t+1}[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{t+1}] \end{aligned}$$

erfolgt.

Wegen der schon gezeigten Integrierbarkeit von $V_t[s - d + B(m) - m \cdot x_t]$ gilt daher:

$$\begin{aligned} & \Delta L_{t-1}(d^*, d_*) \\ &= d^* + EV_t[s - d^* + B(m) - m \cdot X_t] - d_* - EV_t[s - d_* + B(m) - m \cdot X_t] \\ &= d^* - d_* \\ &\quad + \int \left(V_t[s - d^* + B(m) - m \cdot x_t] - V_t[s - d_* + B(m) - m \cdot x_t] \right) P^{X_t}(dx_t) \\ &\stackrel{(4.1.7)}{\geq} d^* - d_* + \int (d_* - d^*) P^{X_t}(dx_t) = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Der Satz 4.1.3 liefert eine optimale Dividendenausschüttungspolitik für einen festen Selbstbehalt m . Dabei sind wir aufgrund der Langfristigkeit der Rückversicherungsverträge (vgl. S. 23) von einem konstanten Parameter m ausgegangen. In Abschnitt 4.1.3 schwächen wir diese Annahme so ab, dass zu jedem Zeitpunkt auch die optimale Wahl des Selbstbehaltes berücksichtigt wird.

Bemerkung 4.1.4 *Mit den entsprechenden Beweisschritten aus Korollar 3.1.6 gilt für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. VaR*

$$s_1^*(m) := m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m)$$

und für den TailVaR ergibt sich analog

$$\begin{aligned} s_2^*(m) &:= E[m \cdot X_0 - B(m) | m \cdot X_0 - B(m) > m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m)] \\ &= [\mathbf{P}(X_0 > F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma))]^{-1} \int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{\infty} [m \cdot x - B(m)] dF_{X_0}(x) \\ &= \frac{m}{\gamma} \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{\infty} x dF_{X_0}(x) \right) - B(m). \end{aligned}$$

Abbildung 4.2: Mögliche Verläufe des Kapitalprozesses mit und ohne Rückversicherungsschutz bei bekannten Schäden

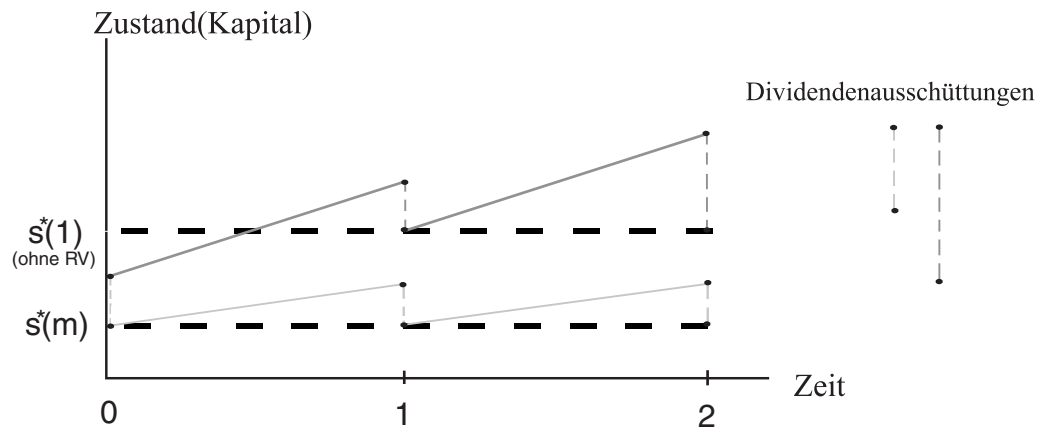


Abbildung 4.2 zeigt anschaulich, inwieweit sich RV-Schutz im Modell auswirkt. Durch den RV-Schutz verbessert das Versicherungsunternehmen zwar seine Risikosituation in der Hinsicht, dass eine geringere Sicherheitskapitalunterlegung nötig ist, vermindert aber möglicherweise gleichzeitig den zukünftigen Gewinn und somit den (erwarteten) Dividendenbetrag.

Die Bewertungsformel aus Korollar 3.1.7 behält in diesem Modell ihre Gültigkeit mit den Funktionen $f^*(s) = [s - s^*(m)]^+$ und $F_x^*(s) := s - [s - s^*(m)]^+ + B(m) - m \cdot x$, d.h.

$$V^*(s) = \sum_{n=0}^{T-1} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s) \quad (4.1.8)$$

mit dem ersten Summanden gleich $[s - s^*(m)]^+$.

Des Weiteren erfolgt mit den Beweisschritten aus 3.2.1 auch die Optimalität der Politik $f_\infty^* = (f(s), f(s), \dots)$ mit $f(s) = [s - s^*(m)]^+$ für die diskontierten Dividendenausschüttungen bei einem unbeschränkten Zeithorizont.

Beispiel B.1.b (Fortsetzung von Beispiel B.1.a)

Mit den Werten $m = 0.3$ und $\lambda_{RV} = 0.25$ folgt für das Nettoprämienvolumen

$$B(m) = B - (1 + \lambda_{RV})(1 - m) \cdot E[X_0] = 4.8 - 1.25 \cdot 0.7 \cdot 4 = 1.3$$

und die minimale Selbstbehaltsgrenze m_{min} ergibt sich als Lösung von $B(m_{min}) = 0$, d.h.

$$m_{min} = \frac{(1 + \lambda_{RV})E[X_0] - B}{(1 + \lambda_{RV})E[X_0]} = \frac{5 - 4.8}{5} = 0.04.$$

Gemäß Bemerkung 4.1.4 gilt für die Sicherheitsschranke $s^*(m)$

$$s^*(0.3) = -0.3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot \ln(0.05) - 1.3 \approx 2.295.$$

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*(m)$	7.765
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	0.50616
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	0.3864

Tabelle 4.1: Erwartete Ausschüttungen mit proportionalem RV-Schutz für $\mathcal{E}(0.25)$ - verteilte Schäden

Mit den Werten aus Tabelle 4.1 erhalten wir wegen (4.1.8) als Ergebnis für die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen $V_0^{0.3}(s) \approx 8.6576$.

Beispiel B.2.b (Fortsetzung von Beispiel B.2.a)

Mit den obigen Parameterwerten m und λ_{RV} gilt weiterhin $B(m) = 1.3$ und $m_{min} = 0.04$. Jedoch ergibt sich für das Sicherheitsniveau $s^*(m)$

$$s^*(m) = 0.3 \cdot 8 \cdot (0.05^{-\frac{1}{3}} - 1) - 1.3 \approx 2.815.$$

Entsprechend den Werten aus Tabelle 4.2 folgt dann wegen (4.1.8) für die erwarteten Ausschüttungen $V_0^{0.3}(s_0) \approx 8.3204$.

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*(m)$	7.245
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	0.605
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	0.4704

Tabelle 4.2: Erwartete Ausschüttungen mit proportionalem RV-Schutz für Pareto(8,3)-verteilte Schäden

4.1.2 Nichtproportionaler Rückversicherungsschutz

In Analogie zu Festlegung 4.1.1 treffen wir folgende Annahmen für den nichtproportionalen Rückversicherungsschutz.

Festlegung 4.1.5 (Nichtproportionaler Rückversicherungsschutz)

Gegeben sei das spezielle Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3. Zudem sei $m' \in [m'_{min}, m'_{max}]$ die Höhe des Selbstbehalts und die messbare Funktion $h(m', x)$ gibt den Anteil eines Schadens an, den der Erstversicherer zu tragen hat, d.h.

$$h(m', x) = \min\{m', x\} \text{ mit } 0 < m'_{min} \leq m' \leq m'_{max} = \infty.$$

Die daraus resultierende Netto-Prämieneinnahme lässt sich leicht mittels partieller Integration⁶ und wegen $EX_0 = EX_0^+ = \int_0^\infty [1 - F_{X_0}(x)]dx$ darstellen als:

$$\begin{aligned} B(m') &= B - (1 + \lambda_{RV}) \cdot E[X_0 - h(m', X_0)] \\ &= B - (1 + \lambda_{RV}) \cdot \left(E[X_0] - \int_0^{m'} [1 - F_{X_0}(x)]dx \right) \\ &= B - (1 + \lambda_{RV}) \int_{m'}^\infty [1 - F_{X_0}(x)]dx, \quad 0 < B(m') \leq B \text{ für } m'_{min} \leq m' \leq m'_{max}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_{RV} > -1$ wiederum der bekannte Sicherheitszuschlag des Rückversicherers sei.

Die entsprechenden Änderungen für die Systemfunktion und für die Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen im Modell mit nichtproportionalen Rückversicherungsschutz sind der folgenden Bemerkung zu entnehmen.

Bemerkung 4.1.6 Durch die Wirkung des nichtproportionalen Rückversicherungsschutzes ändern sich die folgenden Größen im Modell:

- Für die Systemfunktion ergibt sich unter Berücksichtigung des nichtproportionalen Rückversicherungsschutzes:

$$F(s_t, d_t, m', B, x_{t+1}) = s_t - d_t + B(m') - \min\{m', x_{t+1}\}.$$

⁶ Vgl. Reischel[87](S. 288f) und Mack[70](S. 335).

- Durch die Wahl des Selbstbehaltes ändert sich auch die Schranke für das Sicherheitsniveau s^* und wir schreiben dafür $s^*(m')$. Die zugehörige Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen lautet daher:

$$\mathcal{A}^{np}(s) = [0, (s - s^*(m'))^+].$$

Die Ermittlung der Sicherheitsschranke $s^*(m')$ kann durch das folgende Korollar 4.1.7 erfolgen. Wegen der gestutzten Verteilungsfunktion des Gesamtschadens ist es durchaus sinnvoller, keine exakte Lösung für $s^*(m')$ zu suchen, sondern die Sicherheitsschranke innerhalb eines gewissen Bereiches zu finden. Dadurch ergibt sich zu jedem kapitalorientierten Risikomaß eine minimal zulässige Sicherheitsschranke, welche unseren Ansprüchen genügt. Dabei müssen wir aufgrund der gestutzten (Schadens-)Verteilungsfunktion den TailVaR anpassen.

Korollar 4.1.7 Für jedes Risikomaß $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich ein Sicherheitsniveau $s^*(m')$ für das Dividendenausschüttungsmodell mit nichtproportionalen Rückversicherungsschutz angeben, d.h.

1. für ein vorgegebenes $0 < \gamma \leq 1$ gilt

(a) für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. für den VaR $_\gamma$

$$\begin{aligned} \rho_{Ruin}(X_0) &:= P(s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_0\} \leq 0) \leq \gamma \\ \rho_{VaR}(X_0) &:= P((\min\{m', X_0\} - B(m')) > s^*(m')) \leq \gamma \end{aligned}$$

und $s_1^*(m')$ ist eindeutig bestimmbar durch

$$s_1^*(m') = \begin{cases} F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m') & \text{falls } m' > F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \\ m' - B(m') & \text{sonst,} \end{cases}$$

(b) für den TailVaR

$$\rho_{TailVaR_\gamma}(X_0) := E[\min\{m', X_0\} - B(m') | \min\{m', X_0\} - B(m') \geq VaR_\gamma]$$

und $s_2^*(m')$ lässt sich berechnen durch

$$s_2^*(m') = \begin{cases} m' - B(m') & \text{falls } m' \leq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \\ \frac{1}{\gamma} [\int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{m'} x dF_{X_0}(x) - B(m') \cdot \gamma + m'(1 - F_{X_0}^{-1}(m'))] & \text{sonst,} \end{cases}$$

2. für ein vorgegebenes $\eta > 0$ gilt für den EPD

$$\rho_{EPD}(X_0) := E[\min\{m', X_0\} - s_3^*(m') - B(m')]^+ \leq \eta$$

und die näherungsweise Bewertung des Wertes $s_3^*(m')$ erfolgt durch

$$s_3^*(m') = \begin{cases} \frac{m' - \eta}{1 - F_{X_0}(m')} - B(m') & \text{falls } \eta > m' \cdot F_{X_0}(m'), \\ m' - B(m') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst Teil 1a. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{s_1^*(m') + B(m') - \min(m', X_0) \leq 0\} \\ &= \mathbf{P}\{s_1^*(m') + B(m') - \min\{m', X_0\} \leq 0\} \\ &= \mathbf{P}\{(m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - s_1^*(m')\}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Für den Fall $m' < s_1^*(m') + B(m')$ gilt für (4.1.9):

$$\mathbf{P}\{s_1^*(m') + B(m') - \min\{m', X_0\} \leq 0\} = 0 \ (\leq \gamma).$$

Daher ergibt sich $s_1^*(m') = \inf\{x \in \mathbb{R} : x > m' - B(m')\} = m' - B(m')$ für diesen Fall. Gilt nun $m' \geq s_1^*(m') + B(m')$, also $s_1^*(m') \leq m' - B(m')$, so folgt nach ein paar Umformungen für $\mathbf{P}\{\min(m', X_0) \geq B(m') + s_1^*(m')\} \leq \gamma$ bzw. $\mathbf{P}\{X_0 \geq B(m') + s_1^*(m')\} \leq \gamma$

$$s_1^*(m') \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m'),$$

da sonst $\mathbf{P}\{(m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - s_1^*(m')\} = 1 \ (> \gamma)$ gelten würde. Daraus resultiert die Ungleichungskette

$$m' - B(m') \geq s_1^*(m') \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m')$$

und $s_1^*(m') = F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m')$ ist der kleinste zulässige Wert für $m' > F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)$.

Für den Teil 1b ergibt sich vorab:

$$\begin{aligned} s_2^*(m') &= E[\min\{m', X_0\} - B(m') | \min\{m', X_0\} - B(m') \geq VaR_\gamma] \\ &= E[\min\{m', X_0\} - B(m') | \min\{m', X_0\} \geq B(m') + VaR_\gamma]. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Gilt weiterhin $m' > F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)$, so folgt wegen $VaR_\gamma = F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m')$ gemäß Teil 1a für (4.1.10):

$$\begin{aligned} & E[\min\{m', X_0\} - B(m') | \min\{m', X_0\} \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)] \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma))} \int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{\infty} [\min\{m', x\} - B(m')] dF_{X_0}(x) \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma))} \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{m'} (x - B(m')) dF_{X_0}(x) + [m' - B(m')][1 - F_{X_0}(m')] \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{m'} x dF_{X_0}(x) - B(m')(F_{X_0}(m') - 1 + \gamma) + [m' - B(m')][1 - F_{X_0}(m')] \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)}^{m'} x dF_{X_0}(x) - \gamma \cdot B(m') + m'[1 - F_{X_0}(m')] \right). \end{aligned}$$

Für den Fall $m' \leq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)$ gilt für (4.1.10):

$$\begin{aligned} s_2^*(m') &= E[\min\{m', X_0\} - B(m') | \min\{m', X_0\} \geq m'] \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq m')} \int_{m'}^{\infty} [\min\{m', x\} - B(m')] dF_{X_0}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq m')} ([m' - B(m')][1 - F_{X_0}(m')]) \\
&= m' - B(m'),
\end{aligned}$$

d.h. die Gleichheit von $s_2^*(m') = s_1^*(m')$ für diesen Fall.

Der Beweis von Teil 2 erfolgt für $\eta > 0$ durch

$$\begin{aligned}
&E[\min\{m', X_0\} - s_3^*(m') - B(m')]^+ \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} [m' - (m' - x)\mathbb{1}_{\{x \leq m'\}} - s_3^*(m') - B(m')]^+ dF_{X_0}(x) \\
&= \int_0^{m'} [x - s_3^*(m') - B(m')]^+ dF_{X_0}(x) + \int_{m'}^{\infty} [m' - s_3^*(m') - B(m')]^+ dF_{X_0}(x) \leq \eta.
\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die linke Seite der Ungleichung (4.1.11) Null ergibt, falls $m' \leq s_3^*(m') + B(m')$ gilt, d.h. $s_3^*(m') = m' - B(m')$ ist der kleinste Wert, für den diese Bedingung erfüllt ist. Für den umgekehrten Fall „ $m' > s_3^*(m') + B(m')$ “ ergibt sich für (4.1.11):

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_3^*(m') + B(m')} [x - s_3^*(m') - B(m')] dF_{X_0}(x) + (m' - s_3^*(m') - B(m'))(1 - F_{X_0}(m')) \\
&= - \int_0^{s_3^*(m') + B(m')} F_{X_0}(x) dx + (m' - s_3^*(m') - B(m'))(1 - F_{X_0}(m')) \\
&\leq [m' - s_3^*(m') - B(m')](1 - F_{X_0}(m')) \\
&\leq m' - (s_3^*(m') + B(m'))(1 - F_{X_0}(m')) \quad (\leq \eta).
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Daher resultiert aus (4.1.12) und $s_3^*(m') < m' - B(m')$ die Ungleichungskette

$$m' - B(m') > s_3^*(m') \geq \frac{m' - \eta}{1 - F_{X_0}(m')} - B(m'),$$

welche dann die näherungsweise kleinste Lösung $s_3^*(m') = (m' - \eta) \cdot (1 - F_{X_0}(m'))^{-1} - B(m')$ zulässt, falls $\eta > m' \cdot F_{X_0}(m')$ gilt. ■

Das Korollar 4.1.7 bietet uns die Möglichkeit zu jedem fest gewählten Selbstbehalt und Risikomaß eine minimal zulässige Sicherheitsschranke zu bestimmen. Damit kann nun die Maximierung der (totalen) erwarteten Dividendenausschüttungen auf einem endlichen Zeithorizont T durch Wahl von $\pi \in \Pi_M$ erfolgen.

Satz 4.1.8 *Gegeben sei das endlich-stufige Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit $s \in \mathcal{S}$ und es gelte Festlegung 4.1.5 mit Bemerkung 4.1.6, $|s^*(m')| < \infty$ und $m' \in [m'_{\min}, \infty]$ sei fest gewählt. Seien weiterhin V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}^{np}(s)} \{d + EV_{t+1}[s - d + B(m') - \min\{m', X_0\}]\}, \quad V_T(s) \equiv 0. \tag{4.1.13}$$

Hierbei gilt:

1. Die Funktionen $V_t(s)$ aus (4.1.13) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die stationäre (deterministische) Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit

$$f(s_t) := \begin{cases} s_t - s^*(m') & \text{falls } s_t > s^*(m'), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.1.14)$$

ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen bei nichtproportionalem Rückversicherungsschutz.

Beweis: Die Gestalt der Funktionen $V_t(s)$ folgt wiederum aus der Zielfunktion und dem Übergangsgesetz des speziellen Markovschen Entscheidungsmodells aus Definition 3.0.3 gemäß des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) und Bemerkung 3.1.1 mit der entsprechenden Systemfunktion wie in Bemerkung 4.1.6.

Per absteigender Induktion zeigen wir für alle $t = 0, \dots, T - 1$:

$$\text{a) } u_t(s, d) := \int V_{t+1}(s-d+B(m')-\min\{m', x_{t+1}\})P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \text{ ist stetig auf } \mathbb{K} \quad (4.1.15)$$

und

$$\text{b) } \Delta L_t(d^*, d_*) := L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0; d^*, d_* \in \mathcal{A}(s); 0 \leq d_* \leq d^* := (s - s^*(m'))^+ \quad (4.1.16)$$

mit $L_t(d) := d + EV_{t+1}[s - d + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}]$ und somit

$$EV_{t+1}[s - d^* + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \geq d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}]. \quad (4.1.17)$$

Teil a) liefert in Analogie zum Selektionssatz 2.1.11 die in Teil 1 behauptete Existenz eines Maximisators $f(s)$ und Messbarkeit von $V_t(s)$, da die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r(s, d)$ auf \mathbb{K} stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Teil b) zeigt die in Teil 2 behauptete Optimalität der Entscheidungsregel $f(s) = (s - s^*(m'))^+$.

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T - 1$ ergibt sich für Teil a) die Stetigkeit der Funktion $u_{T-1}(s, d) = 0$ auf \mathbb{K} .

Für Teil b) ergibt sich: $\Delta L_{T-1}(d^*, d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass (4.1.15) und (4.1.16) bzw. (4.1.17) gilt.

Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) für Teil a), dass die Funktion

$$\begin{aligned} & V_t(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}) \\ &= f^*(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}) \\ & \quad + EV_{t+1}[s - d + B(m) - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \end{aligned}$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf \mathbb{K} für alle festen Werte $X_t(\omega) = x_t$ ist. Denn mit der optimalen Entscheidungsregel $f^*(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}) \in \mathcal{A}(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\})$, welche gemäß der Induktionsannahme existiert, gilt für jede Folge $(s_n) \rightarrow s$ und $(d_n) \rightarrow d$: $f^*(s_n - d_n + B(m') - \min\{m', x_t\}) = f^*(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\})$. Des Weiteren gilt wegen $f_{T-1}(s) = (s - s^*(m'))^+$ gemäß des Induktionsanfangs (Teil b):

$$\begin{aligned} V_t(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}) &\leq \left(s - d + \sum_{i=t}^{T-1} B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') \right)^+ \\ &\leq \underbrace{\left(s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') \right)^+}_{=: V'_t(s + B(m') - \min\{m', x_t\})} \end{aligned}$$

für geeignete ω mit $X_{t+1}(\omega) = \dots = X_{T-1}(\omega) = 0$, d.h. mittels

$$\int V'_t(s + B(m') - \min\{m', x_t\})^+ P^{X_t}(dx_t) < \infty$$

resultiert daraus die P^{X_t} -Integrierbarkeit der Funktion $V_t(s - d + B(m') - \min\{m', x_t\})$. Daher ist die Funktion $u_{t-1}(s, d)$ nach dem *Stetigkeitslemma* stetig auf \mathbb{K} . Für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) von Teil b) folgt zunächst mit $s \leq s^*(m') \Rightarrow d^* = d_* = 0$:

$$\Delta L_{t-1}(d^*, d_*) = EV_t[s + B(m') - \min\{m', X_t\}] - EV_t[s + B(m') - \min\{m', X_t\}] = 0. \quad (4.1.18)$$

Für den Fall $s > s^*(m')$ gilt gemäß der Induktionsannahme für ein festes $X_t(\omega) = x_t$:

$$\begin{aligned} &V_t[s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}] \\ &= \begin{cases} s - d + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') & \text{für } s - d + B(m') - s^*(m') > \min\{m', x_t\}, \\ +EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] & \\ EV_{t+1}[s - d + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit von

$$V_t[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\}] - V_t[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\}] \geq d_* - d^*, \quad (4.1.20)$$

d.h. mit der entsprechenden Fallunterscheidung folgt für (4.1.20):

- Für den Fall $s - d^* + B(m') - s^*(m') > \min\{m', x_t\}$ und $s - d_* + B(m') - s^*(m') > \min\{m', x_t\}$ folgt nach (4.1.19):

$$s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') - (s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m')) = d_* - d^*.$$

- Mit $s - d^* + B(m') - s^*(m') \leq \min\{m', x_t\}$ und $s - d_* + B(m') - s^*(m') \leq \min\{m', x_t\}$ gilt gemäß (4.1.19):

$$\begin{aligned}
& V_t[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\}] - V_t[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\}] \\
&= EV_{t+1}[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\quad - EV_{t+1}[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\stackrel{(*)}{\geq} EV_{t+1}[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\quad + d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&= d_* - d^*,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen Hilfssatz 3.1.2 und (4.1.17) folgt.

- Für den Fall $s - d^* + B(m') - s^*(m') \leq \min\{m', x_t\}$ und $s - d_* + B(m') - s^*(m') > \min\{m', x_t\}$ ergibt sich wiederum nach (4.1.19):

$$\begin{aligned}
& V_t[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\}] - V_t[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\}] \\
&= EV_{t+1}[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\quad - (s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m')) \\
&\quad - EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\stackrel{(*)}{\geq} s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') \\
&\quad + EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\quad - (s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m')) \\
&\quad - EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&= d_* - d^* \pm EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&= d_* - d^*,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen

$$\begin{aligned}
& EV_{t+1}[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}] \\
&\stackrel{(4.1.19)}{\geq} s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\} - s^*(m') + EV_{t+1}[s^*(m') + B(m') - \min\{m', X_{t+1}\}]
\end{aligned}$$

erfolgt.

Wegen der schon gezeigten Integrierbarkeit von $V_t[s - d + B(m') - \min\{m', x_t\}]$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
& \Delta L_{t-1}(d^*, d_*) \\
&= d^* + EV_t[s - d^* + B(m') - \min\{m', X_t\}] - d_* - EV_t[s - d_* + B(m') - \min\{m', X_t\}] \\
&= d^* - d_* \\
&\quad + \int \left(V_t[s - d^* + B(m') - \min\{m', x_t\}] - V_t[s - d_* + B(m') - \min\{m', x_t\}] \right) P^{X_t}(dx_t) \\
&\stackrel{(4.1.20)}{\geq} d^* - d_* + \int (d_* - d^*) P^{X_t}(dx_t) = 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

4.1.3 Dynamische Wahl des Rückversicherungsschutzes

In diesem Abschnitt soll die Wahl des Faktors m auf jeder Stufe erfolgen. Dabei berücksichtigen wir explizit den proportionalen Rückversicherungsschutz (RV-Schutz) und betrachten die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit als relevantes Risikomaß, da andernfalls mit mehr Schwierigkeiten zu rechnen ist. Es wird daher folgendes Entscheidungsmodell benötigt, welches generell auch bei nichtproportionalem RV-Schutz zu verwenden ist.

Definition 4.1.9 (Ausschüttungsmodell mit Wahl des RV-Schutzes)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), Q, r)$ heißt Markovsches Ausschüttungsmodell mit Wahl des Faktors m auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$, wobei die Größen wie folgt festgelegt sind:

- $(\mathcal{S}, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Zustandsraum für das Kapital.
- $\mathcal{A} = [0, s^+] \times [m_{\min}, m_{\max}] \subseteq \mathbb{R}_+^2$ sei der Aktionsraum für die Dividendenzahlung und den Faktor m .
- $\mathcal{A}(s) = \{(d, m) \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}(s - d + B(m) - h(X_0, m) \leq 0) \leq \gamma\} \cup \{\{0\} \times [m_{\min}, m_{\max}]\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, da andernfalls die Möglichkeit von $\mathcal{A}(s) = \emptyset$ besteht.
- Q sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{S} und ist mittels der messbaren Systemfunktion $F(s, d, m, B, X_0) := s - d + B(m) - h(X_0, m)$ definiert durch

$$Q(C|s, d, m) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, m, B, x)\} F_{X_0}(dx), \quad (s, d, m) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}, C \in \mathfrak{S}.$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ wie bisher eine Folge von nichtnegativen und reellen iid.-Zufallsvariablen, welche eine stetige Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und einen endlichen Erwartungswert besitzen. Für einen Repräsentanten dieser Folge schreiben wir X_0 .

- Für die einperiodige Erlösfunktion r von \mathbb{K} nach \mathbb{R}_+ gilt $r(s, d, m) = d$.

Dabei seien die messbaren Funktionen $B(m)$ und $h(X_t, m)$ entsprechend Festlegung 4.1.1 oder 4.1.5 bestimmt.

Durch die Verwendung der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit kann die Menge $\mathcal{A}(s)$ entsprechend Bemerkung 4.1.4 und Korollar 4.1.7(Teil 1a) umformuliert werden.

Bemerkung 4.1.10 Mit der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit gilt für die Menge der zulässigen Ausschüttungen und Selbstbehalte $\mathcal{A}(s)$:

1. $\mathcal{A}^p(s) = \{(d, m) \in \mathcal{A} \mid 0 \leq d \leq [s - m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m)]^+\}$ bei proportionalem RV-Schutz,
2. $\mathcal{A}^{np}(s) = \mathcal{A}'(s) \cup \mathcal{A}''(s)$ bei nichtproportionalem RV-Schutz mit

$$\mathcal{A}'(s) := \{(d, m) \in [0, s^+] \times [m_{\min}, F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)] \mid 0 \leq d \leq (s - [m - B(m)])^+\}$$
 und

$$\mathcal{A}''(s) := \{(d, m) \in [0, s^+] \times [F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \infty] \mid 0 \leq d \leq (s - [F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m)])^+\}.$$

Bei der Verwendung von proportionalem RV-Schutz lässt sich mit Hilfe der Linearität der Funktion $-m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m)$ ⁷ der Aktionsbereich des Selbstbehaltes m in die *konvexen Mengen*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{p,1} &:= \{m \in [m_{\min}, m_{\max}] \mid s - m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m) \leq 0\} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}^{p,2} &:= \{m \in [m_{\min}, m_{\max}] \mid s - m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m) \geq 0\}\end{aligned}$$

zerlegen. Dabei heißt eine Menge *konvex*, wenn mit je zwei ihrer (beliebig gewählten) Punkte auch deren Verbindungsstrecke in der Menge liegt, d.h. wenn für alle $a, b \in M$ gilt

$$\overline{ab} := \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq M.$$

Daher folgt die Zerlegung von $\mathcal{A}^p(s) = \mathcal{A}^{p,1}(s) \cup \mathcal{A}^{p,2}(s)$ mit $\mathcal{A}^{p,1}(s) := \{0\} \times \mathcal{M}^{p,1}$ und $\mathcal{A}^{p,2}(s) := \{(d, m) \in [0, s^+] \times \mathcal{M}^{p,2} \mid 0 \leq d \leq s - m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m)\}$, wobei die Mengen $\mathcal{A}^{p,1}(s)$ und $\mathcal{A}^{p,2}(s)$ wiederum konvex sind wie der folgende Hilfssatz zeigt.

Hilfssatz 4.1.11 *Die Mengen $\mathcal{A}^{p,1}(s)$ und $\mathcal{A}^{p,2}(s)$ sind konvex.*

Beweis: Der Nachweis für $\mathcal{A}^{p,1}(s)$ ist trivial und die Konvexität der Menge $\mathcal{A}^{p,2}(s)$ ergibt sich mit beliebigen Paaren $(d_0, m_0), (d_1, m_1) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)$ und einer Zahl $k \in (0, 1)$ durch

$$\begin{aligned}(1 - k)d_0 + k \cdot d_1 & \\ &\leq (1 - k)[s - m_0 \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m_0)] + k \cdot [s - m_1 \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m_1)] \\ &= s - [(1 - k)m_0 - k \cdot m_1] \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B((1 - k)m_0 - k \cdot m_1),\end{aligned}$$

d.h. $((1 - k)d_0 + k \cdot d_1, (1 - k)m_0 + k \cdot m_1) \in \mathcal{A}^{p,2}(s), \forall k \in (0, 1)$. ■

Die Menge der zulässigen Aktionen in konvexe Mengen zu unterteilen, ist ein notwendiger Schritt auf dem Weg zu einer optimalen Politik, da sich die Eigenschaften Konvexität und Konkavität nur auf diesen Mengen nachweisen lassen. Im Grundmodell aus Abschnitt 3 war eine Zerlegung nicht nötig, da das Intervall $\mathcal{A}(s) := [0, (s - s^*)^+]$ schon als konvexe Menge konstruiert wurde.

Für das spezielle Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 4.1.9 mit Zeithorizont $T < \infty$ sollen in diesem Abschnitt wiederum die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen bei Verwendung von $\pi \in \Pi_M$ für einen Startwert $s \in \mathcal{S}$ maximiert werden, d.h. die Zielfunktion lautet

$$V^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} V_\pi(s) \quad \text{mit} \quad V_\pi(s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} r(S_t, f_t(S_t)) \right]. \quad (4.1.21)$$

Daher führt dieses Optimierungsproblem aufgrund der Zusammensetzung von $\mathcal{A}(s)$ zu einer Maximierung auf den jeweiligen Mengen $\mathcal{A}^{p,1}(s)$ und $\mathcal{A}^{p,2}(s)$.

Einige Eigenschaften von konvexen Funktionen, die so auch beispielsweise in der Lagerhaltungstheorie von Bedeutung sind⁸, sind dem nachstehenden Hilfssatz zu entnehmen.

⁷ Für $B(m)$ siehe auch Festlegung 4.1.1.

⁸ Vgl. Bertsekas[14](S. 69).

Hilfssatz 4.1.12 Sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:

1. Sei $h \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $v(\cdot + h)$ konvex.
2. Sei $c \in \mathbb{R}_+$. Dann ist auch $v(c \cdot x)$ konvex.
3. Sei $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$. Dann ist auch $c_1 \cdot v + c_2 \cdot w$ konvex.
4. Sei $v(\cdot, \omega)$ konvex für alle ω und $v(x, \cdot)$ integrierbar bzgl. eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ für alle x , dann ist $\int v(\cdot, \omega) \mu(d\omega)$ konvex.

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Konvexität durch Einsetzen, wobei im letzten Teil die Isotonie des Integrals verwendet wird. ■

Mit Hilfe von Hilfssatz 4.1.12 können wir nun die Struktur einer optimalen Dividendenpolitik untersuchen.

Satz 4.1.13 Es sei ein Markovsches Ausschüttungsmodell mit Wahl des Faktors m auf jeder Stufe für den proportionalen RV-Schutz wie in Definition 4.1.9 gegeben. Weiterhin seien V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit

$$V_t(s) = \max_{(d,m) \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + \int_{\mathbb{R}^+} V_{t+1}[s - d + B(m) - m \cdot x] dF_{X_0}(x) \right\}, \quad V_T \equiv 0. \quad (4.1.22)$$

Dann folgt:

1. Die Funktionen $V_t(s)$ sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die Politik $\pi^* = (f_0(s), f_1(s), \dots, f_{T-1}(s))$ mit

$$\mathcal{A}(s) \ni f_t(s) = \begin{cases} (0, m_1^*) & \text{falls } \mathcal{A}^{p,2}(s) = \emptyset, \\ (s - s^*(m_2^*), m_2^*) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.1.23)$$

für alle $t = 0, \dots, T - 2$ und

$$\mathcal{A}(s) \ni f_{T-1}(s) = \begin{cases} (0, m) \text{ mit } m \in \mathcal{M}^{p,1} \text{ beliebig} & \text{falls } \mathcal{A}^{p,2}(s) = \emptyset, \\ (s - s^*(m_2^*), m_2^*) & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist optimal.

Dabei gilt:

- (a) $m_1^* = \max\{\mathcal{M}^{p,1}\}$ oder $m_1^* = \min\{\mathcal{M}^{p,1}\}$,
- (b) $m_2^* = \max\{\mathcal{M}^{p,2}\}$ oder $m_2^* = \min\{\mathcal{M}^{p,2}\}$.

Beweis: Zunächst sei erwähnt, dass die Zerlegung der Menge $\mathcal{A}(s)$ die folgende Darstellung der Optimalitätsgleichung (4.1.22) liefert

$$\begin{aligned} V_t(s) &= \max \left\{ \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} \{d + EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1})\}, \right. \\ &\quad \left. \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)} \{d + EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1})\} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{m \in \mathcal{M}^{p,1}} L_t^{p,1}(0, m), \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)} L_t^{p,2}(d, m) \right\}, \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} L_t^{p,1}(0, m) &:= EV_{t+1}(s + B(m) - m \cdot X_{t+1}) \quad \text{und} \\ L_t^{p,2}(d, m) &:= d + EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1}). \end{aligned}$$

Für den Zeitpunkt $T - 1$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} V_{T-1}(s) &= \max \left\{ \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} d, \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)} d \right\} \\ &= \max \left\{ 0, \max_{m \in \mathcal{M}^{p,2}} \{s - m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m)\} \right\} \\ &= [s - \underbrace{(m^* \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m^*))}_{=: s^*(m^*)}]^+ \end{aligned}$$

für mindestens ein $m^* \in [m_{min}, m_{max}]$. Somit ergibt sich auch die Optimalität der Entscheidungsregel

$$f_{T-1}(s) = \begin{cases} (0, m) \text{ mit } m \in \mathcal{M}^{p,1} \text{ beliebig} & \text{falls } \mathcal{A}^{p,2}(s) = \emptyset, \\ (s - s^*(m^*), m^*) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei aufgrund der Konvexität der Funktion $-s^*(m)$ entweder $m^* = \max\{\mathcal{M}^{p,2}\}$ oder $m^* = \min\{\mathcal{M}^{p,2}\}$ gilt.

Angenommen es gilt Teil 1, so folgt schließlich die Behauptung von Teil 2 durch den Nachweis per absteigender Induktion, dass für alle $t = 0, \dots, T - 2$ die Funktion $L_t^{p,1}(0, m)$ konvex auf $\mathcal{M}^{p,1}$ ist und die Funktion $L_t^{p,2}(d, m)$ isoton in d und konvex auf $\mathcal{M}^{p,2}$ ist.

Für den *Induktionsanfang* zum Zeitpunkt $t = T - 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V_{T-2}(s) &= \max \left\{ \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} E[s + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+, \right. \\ &\quad \left. \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)} \{d + E[s - d + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+\} \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \max \left\{ \max_{m \in \mathcal{M}^{p,1}} E[s + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+, \right. \\ &\quad \left. \max_{m \in \mathcal{M}^{p,2}} \{s - s^*(m) + E[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+\} \right\}, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen der Isotonie der Funktion $L_t^{p,2}(d, m)$ in d nach Satz 4.1.3 für festes m folgt. Wegen der Konvexität der Funktionen $-s^*(m)$ und

$$E[s + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+$$

entsprechend Hilfssatz 4.1.12 (Teil 1), wobei infolgedessen auch die Konvexität der Funktion $E[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_{T-1} - s^*(m^*)]^+$ folgt, erhalten wir die Gültigkeit des Induktionsanfangs und somit die Optimalität der Entscheidungsregel

$$f_{T-2}(s) = \begin{cases} (0, m_1^*) & \text{falls } \mathcal{A}^{p,2}(s) = \emptyset, \\ (s - s^*(m_2^*), m_2^*) & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $m_1^* = \max\{\mathcal{M}^{p,1}\}$ oder $m_1^* = \min\{\mathcal{M}^{p,1}\}$ bzw. $m_2^* = \max\{\mathcal{M}^{p,2}\}$ oder $m_2^* = \min\{\mathcal{M}^{p,2}\}$.

Weiterhin gelte die *Induktionsannahme* für $t \leq T - 2$, so dass die Funktionen

$$\begin{aligned} L_t^{p,1}(0, m) &:= EV_{t+1}(s + B(m) - m \cdot X_{t+1}), \quad \text{und} \\ L_t^{p,2}(d, m) &:= d + EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1}) \end{aligned}$$

konvex in m und ggf. isoton in d seien. Damit erhalten wir auch die Optimalität der Entscheidungsregel $f_t(s)$ wie in (4.1.23) und für die Wertfunktion ergibt sich

$$V_t(s) = \begin{cases} EV_t(s + B(m_1^*) - m_1^* \cdot X_{t+1}) & \text{falls } \mathcal{A}^{p,2}(s) = \emptyset, \\ s - s^*(m_2^*) + EV_t(s^*(m_2^*) + B(m_2^*) - m_2^* \cdot X_{t+1}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Demnach folgt für ein festes $X_t(\omega') = x_t$ und mindestens ein $m^* \in [m_{min}, m_{max}]$

$$\begin{aligned} &V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t) \\ &= [s - d + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m^*)]^+ \\ &\quad + EV_{t+1}[s - d + B(m) - m x_t - [s - d + B(m) - m x_t - s^*(m^*)]^+ + B(m^*) - m^* X_{t+1}] \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

und die Funktion $V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$ besitzt wie zuvor bewiesen mit $B(m) \leq B, \forall m$ eine P^{X_t} -integrierbare Majorante

$$\begin{aligned} &V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t) \\ &\leq \int [s - d + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m)]^+ P^{X_t}(dx_t) + (T - 1 - t) \cdot B \end{aligned}$$

und ist aufgrund der Induktionsannahme zudem konvex in m .

Der *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) ergibt sich nun durch

$$\begin{aligned} V_{t-1}(s) &= \max \left\{ \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} EV_t[s + B(m) - m \cdot X_t], \right. \\ &\quad \left. \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,2}(s)} \{d + EV_t[s - d + B(m) - m \cdot X_t]\} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} EV_t[s + B(m) - m \cdot X_t], \right. \\ &\quad \left. \max_{m \in \mathcal{M}^{p,2}} \{s - s^*(m) + EV_t[s^*(m) + B(m) - m \cdot X_t]\} \right\} \end{aligned}$$

mit der Isotonie der Funktion $L_{t-1}^{p,2}(d, m)$ in d entsprechend Satz 4.1.3. Wegen der Konvexität und Integrierbarkeit der Funktion $V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$ folgt die Konvexität von $EV_t[s - d + B(m) - m \cdot X_t]$ bzw. $EV_t[s + B(m) - m \cdot X_t]$ nach Hilfssatz 4.1.12 (Teil 3), was den Beweis von Teil 1 vervollständigt.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass die Messbarkeit der Funktion $V_t(s)$ wie in (4.1.24) und die Existenz eines Maximisators $f_t(s)$ wie in der Behauptung von Teil 1 gilt. Dies soll teilweise mittels des Selektionssatzes 2.1.11 für die einzelnen Funktionen $\max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} \{\cdot\}$ und $\max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{p,1}(s)} \{\cdot\}$ erfolgen, denn die Messbarkeit dieser Funktionen liefert wegen (4.1.24) auch die Messbarkeit von $V_t(s)$.

Da sowohl die Kompaktheit der Mengen $\mathcal{A}^{p,1}(s)$ und $\mathcal{A}^{p,2}(s)$ wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit dieser Mengen als auch die Stetigkeit von $r(s, d, m) := d$ auf $\mathbb{K} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}$ in diesem Modell erfüllt sind, ist nur noch die Stetigkeit und Beschränktheit von $\nu_{t+1}(s, d, m) := EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{t+1})$ auf \mathbb{K} für alle t mit $t \in \{0, \dots, T-2\}$ zu überprüfen. Wegen der Nichtnegativität der einperiodigen Erlösfunktion und der Existenz einer Majorante für die Wertfunktion wie in Teil 2 ergibt sich sofort für alle $t = 0, \dots, T-2$ und für alle $(s, d, m) \in \mathbb{K}$:

$$0 \leq V_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot x_{t+1}) \leq [s - d + B(m) - m \cdot x_{t+1} + (T-2-t) \cdot B - s^*(m^*)]^+ \quad (4.1.26)$$

für ein festes $X_{t+1}(\omega') = x_{t+1}$ und somit die Beschränktheit der Funktion $\nu_{t+1}(s, d, m)$ gemäß der *Isotonie des Integrals*. Die Stetigkeit von ν_{t+1} wird per absteigender Induktion gezeigt, d.h.

$$\nu_{t+1}(s, d, m) \text{ ist stetig auf } \mathbb{K}, \forall t = 0, \dots, T-2. \quad (4.1.27)$$

Der *Induktionsanfang* zum Zeitpunkt $T-2$ liefert mit $V_{T-1}(s) = [s - s^*(m^*)]^+$:

$$\nu_{T-1}(s, d, m) = \int_{\mathbb{R}_+} [s - d + B(m) - m \cdot x - s^*(m^*)]^+ dF_{X_0}(x).$$

Wegen der Optimalität von $d = [s - s^*(m^*)]^+$ existiert für alle $(s, d, m) \in \mathbb{K}$ eine $P^{X_{t+1}}$ -integrierbare Majorante zu $V_{T-1}(s - d + B(m) - m \cdot X_{T-1})$. Da zudem die Funktion $[s - d + B(m) - m \cdot x_{T-1} - s^*(m^*)]^+$ für alle $X_{t+1}(\omega') = x_{t+1}$ stetig auf \mathbb{K} ist, erhalten wir durch das *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4) die Stetigkeit von $\nu_{T-1}(s, d)$ auf \mathbb{K} .

Für die *Induktionsannahme* gelte (4.1.27) für $t \leq T-2$. Dann folgt für den *Induktionsschluss* ($t \rightarrow t-1$) für ein festes $X_t(\omega') = x_t$:

$$\begin{aligned} & V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t) \\ &= \begin{cases} s - d + B(m) - m \cdot x_t - s^*(m^*) & \text{falls} \\ \quad + EV_{t+1}(s^*(m^*) + B(m^*) - m^* \cdot X_{t+1}) & \quad x_t < \frac{s - d + B(m) - s^*(m^*)}{m}, \\ EV_{t+1}(s - d + B(m) - m \cdot x_t + B(m^*) - m^* \cdot X_{t+1}) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Demnach ist die Funktion $V_t(s - d + B(m) - m \cdot x_t)$ wegen der Induktionsannahme stetig auf \mathbb{K} für ein festes $X_t(\omega') = x_t$. Die Behauptung folgt schließlich mit Hilfe der Integrierbarkeit gemäß (4.1.26) wiederum aus dem *Stetigkeitslemma*. ■

Zur Veranschaulichung der Dynamik in diesem Modell sind die Funktionen $L_{T-1}(d, m) = r(s, d, m)$ für festes s und $L_{T-2}(d, m)$ mit den Daten aus Beispiel B.1.b (exponentialverteilter Gesamtschaden) in den Abbildungen 4.3 und 4.4 dargestellt. Zunächst ist in

Abbildung 4.3: 3D-Plot der einperiodigen Erlösfunktion $r(s, d, m)$

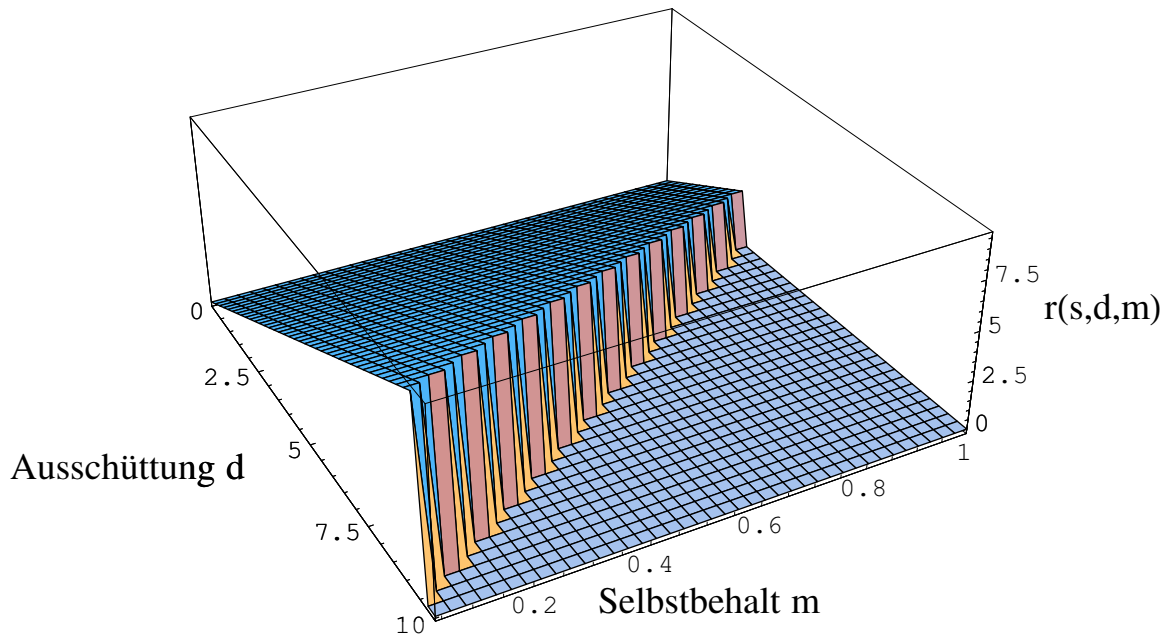
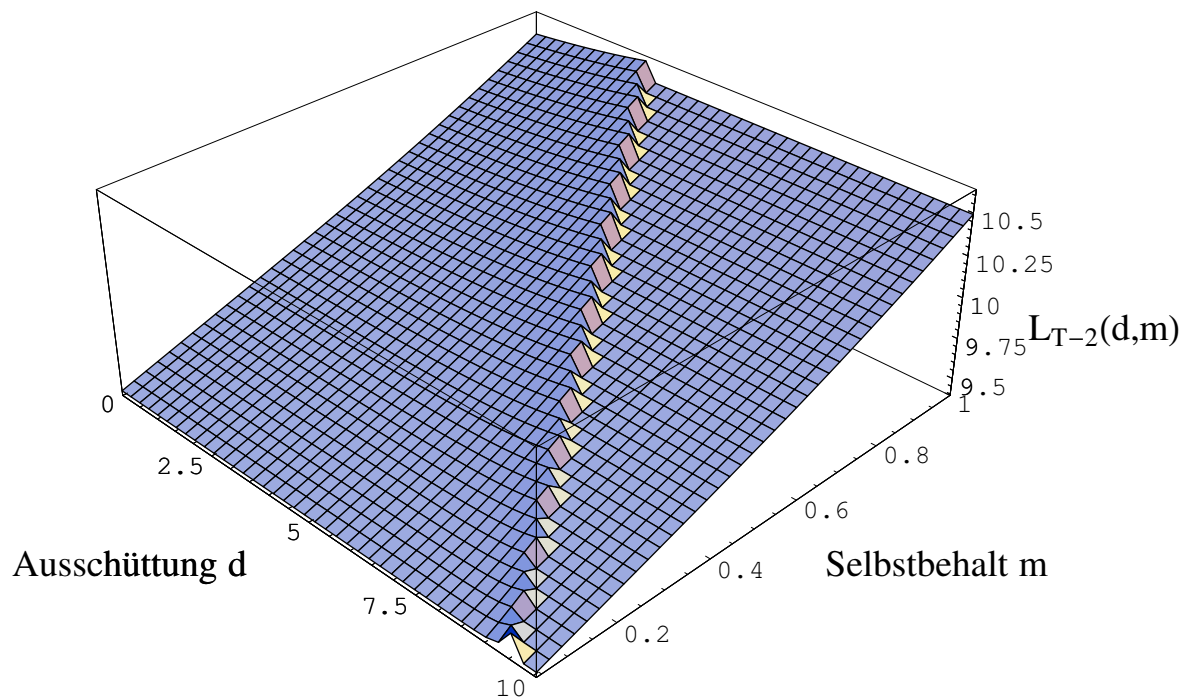


Abbildung 4.3 zu erkennen, dass für die Menge der zulässigen Aktionen gilt: $\mathcal{A}^{p,2}(s) \neq \emptyset$. Andernfalls würde die einperiodige Erlösfunktion nur den Wert 0 annehmen. Außerdem ist zu erkennen, dass die Sicherheitsfunktion in Abhängigkeit des Selbstbehaltes $s^*(m) := m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m)$ linear ist, denn die Ausschüttungsbeträge $s - s^*(m)$, $\forall m$ befinden sich gerade auf der oberen Kante.

Die Linearität der Funktion $s^*(m)$ in m und die nichtleere Menge $\mathcal{A}^{p,2}(s)$ lassen sich durch einen Plot der Funktion $L_{T-2}(d, m)$ ebenfalls deutlich darstellen, denn die zugehörigen Punkte $s - s^*(m)$ liegen jetzt auf der „geknickten“ Diagonalen in Abbildung 4.4. Es zeigt sich aber auch, dass der Unterschied zwischen einer sofortigen Ausschüttung ($d > 0$) und einer Nichtausschüttung ($d = 0$), welche eine Gesamtausschüttung des zulässigen Betrages zum Endzeitpunkt $T - 1$ nachschiebt, nicht so erheblich ist wie bei der einperiodigen Erlösfunktion. Dennoch bleibt die Isotonie von $L_{T-2}(d, m)$ in d für festes m bestehen.

Abbildung 4.4: 3D-Plot von $L_{T-2}(d, m)$ 

Eine weitere Eigenschaft dieses Modells, welche die optimale Wahl des Selbstbehaltes betrifft, lässt sich anhand dieser Abbildungen entnehmen, denn der Antitonie der Funktion $r(s, d, m)$ in m für feste Werte s, d steht die Isotonie von $L_{T-2}(d, m)$ in m für festes d gegenüber. Dies lässt sich damit begründen, dass die Monotieeigenschaften der Funktionen $s^*(m)$ und $E[B(m) - m \cdot X_0]^+$ voneinander abweichen können.⁹

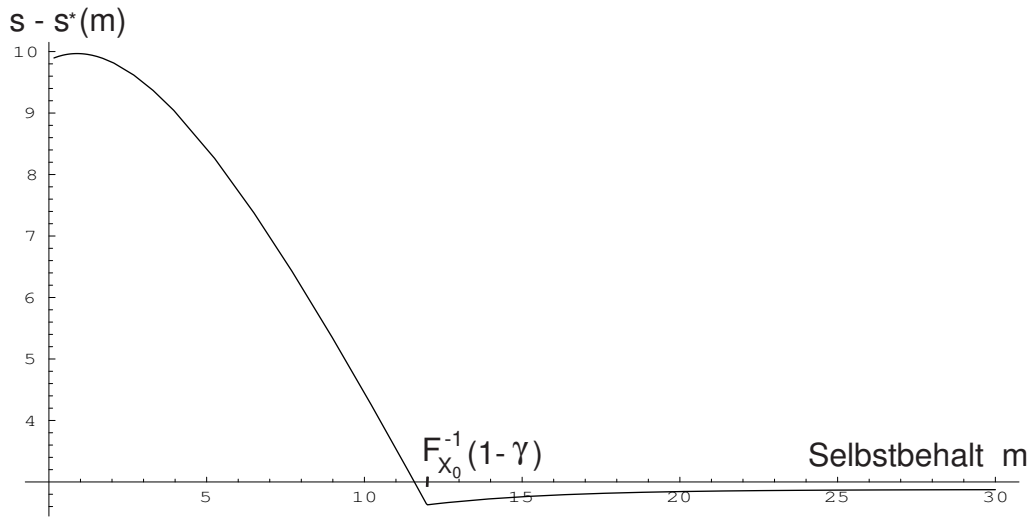
Aufgrund der aus der Verwendung von *nichtproportionalem RV-Schutz* resultierenden unhandlichen Verteilungsfunktion geben wir nun in Analogie zu der zuvor behandelten Version mit proportionalem RV-Schutz die Konstruktionsschritte für ein dynamisiertes Ausschüttungsmodell an. Hierbei ist zu beachten, dass die Menge der zulässigen Aktionen diesmal in vier Teilmengen zerlegt werden muss.

Wie die Abbildung 4.5 offenkundig zeigt, besteht die Notwendigkeit dieser Zerlegung nun darin, dass die Funktion $s - s^*(m)$ in zwei Abschnitte unterteilt werden kann, in denen sie konkav verläuft. Infolgedessen verfügt die Menge $\mathcal{A}^{np}(s)$ nicht über die Eigenschaft der Konvexität. Daher erfolgt die Aufspaltung von $\mathcal{A}^{np}(s)$ in die Mengen $\mathcal{A}'(s)$ und $\mathcal{A}''(s)$

⁹ Vgl. dazu auch S. 47.

entsprechend Bemerkung 4.1.10 (Teil 2). Eine weitere Zerlegung der Mengen $\mathcal{A}'(s)$ und

Abbildung 4.5: *Plot der Sicherheitsschranke bei nichtproportionalem RV-Schutz*



$\mathcal{A}''(s)$ ist erforderlich, da es sich bei diesen Mengen nicht notwendigerweise um konvexe Mengen handelt. Mit Hilfe der Mengen

$$\mathcal{M}^{np,1} := \{m \in [m_{min}, F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma)] | s - m + B(m) > 0\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{M}^{np,2} := \{m \in [F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \infty) | s - F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m) > 0\}$$

ergibt sich daher

$$\mathcal{A}'(s) = \underbrace{\{(d, m) \in [0, s^+] \times \mathcal{M}^{np,1} | 0 \leq d \leq s - m + B(m)\}}_{\mathcal{A}^{np,a}(s)} \cup \{0\} \times (\mathcal{M}^{np,1})^C$$

$$\mathcal{A}''(s) = \underbrace{\{(d, m) \in [0, s^+] \times \mathcal{M}^{np,2} | 0 \leq d \leq s - F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) + B(m)\}}_{\mathcal{A}^{np,b}(s)} \cup \{0\} \times (\mathcal{M}^{np,2})^C.$$

Mit der Konkavität des Nettoprämienvolumens $B(m)$, welche aus der Konkavität der Funktion $h(m, x) = \min\{m, x\}$ resultiert, folgt demnach die Konvexität der jeweiligen Teilmengen. Für die zugehörige Optimalitätsgleichung gilt daher

$$V_t(s) = \max \left\{ \begin{aligned} & \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{np,a}(s)} \{d + EV_{t+1}[s - d + B(m) - \min\{m', X_{t+1}\}]\}, \\ & \max_{m \in (\mathcal{M}^{np,1})^C} EV_{t+1}[s + B(m) - \min\{m', X_{t+1}\}], \\ & \max_{(d,m) \in \mathcal{A}^{np,b}(s)} \{d + EV_{t+1}[s - d + B(m) - \min\{m', X_{t+1}\}]\}, \\ & \max_{m \in (\mathcal{M}^{np,2})^C} EV_{t+1}[s + B(m) - \min\{m', X_{t+1}\}] \end{aligned} \right\}.$$

4.2 Dividenden und das Währungskursrisiko

Das *Währungskursrisiko* entfaltet genau dann seine volle Wirkung, wenn das Versicherungsunternehmen international tätig ist.¹⁰ Da die ausländischen Aktivitäten der Mutterunternehmung meist durch deren Tochterunternehmungen vollzogen werden, gehen wir von folgender Situation aus: Zu jedem Entscheidungszeitpunkt $t \geq 1$ wird der jeweilige Saldo $(B - X_t)$ des versicherungstechnischen Geschäfts der Tochterunternehmung in der Heimatwährung bilanziert, d.h. das Mutterunternehmen verbucht den Wert $W_t \cdot (B - X_t)$, wobei W_t den Währungskurs darstellt. Die Folge des Risikos bzw. der Unsicherheit besteht hier nun darin, dass ein möglicher Gewinn aus dem versicherungstechnischen Geschäft der Tochterunternehmung bei ungünstiger Entwicklung des Wechselkurses niedriger ausfällt als wenn der entsprechende Gewinn in der Heimatwährung erzielt wäre. Auf der anderen Seite besteht natürlich auch die Chance, dass sich der Gewinn bei einem günstigen Verlauf des Wechselkurses höher darstellen lässt als das Pendant in der Heimatwährung. Für den Fall eines versicherungstechnischen Verlustes der Tochterunternehmung verhält sich die obige Argumentation genau andersherum.¹¹

Abschnitt 4.2.1 behandelt das Dividendenausschüttungsmodell mit Währungskursrisiko ohne Absicherung mit derivativen Finanzinstrumenten. Da aber Versicherungsunternehmen diese Instrumente durchaus zur Absicherung gegenüber des Währungskursrisikos verwenden¹², widmen wir uns dieser gesonderten Problemstellung im darauf folgenden Abschnitt.

4.2.1 Generelle Modellierung

Die Berücksichtigung des Währungskursrisikos führt zu folgendem Markovschen Entscheidungsmodell.

Definition 4.2.1 *Es gelte das spezielle Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit den folgenden Änderungen. Für die messbare Systemfunktion setzen wir:*

$$F(s_t, d_t, B, w_{t+1}, x_{t+1}) = s_t - d_t + w_{t+1}(B - x_{t+1}),$$

wobei W_t eine Folge von nichtnegativen und reellwertigen iid.-Zufallsvariablen (auch unabhängig von X_t) mit zugehöriger Verteilungsfunktion $F_{W_t}(w) = F_{W_0}(w)$ und $E[W_0] < \infty$ sei. Infolgedessen gilt für das Übergangsgesetz Q mit den Dichten f_{X_0} bzw. f_{W_0} von F_{X_0} bzw. F_{W_0}

$$Q(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, w, x)\} f_{W_0}(w) f_{X_0}(x) dx dw, \forall C \in \mathfrak{G}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

¹⁰ Vgl. dazu auch Abschnitt 2.2.1.

¹¹ Zu der Verwendung von *Währungskonten* bei Versicherungskonzernen siehe auch Farny[38](S. 460) bzw. Schradin[99](§ 2.2.4.1) und Sievers[104](§ II.2.12 und § II.2.3), deren Hauptaugenmerk auf Rückversicherungsunternehmen liegt, da diese eine größere internationale Aktivität aufweisen als Erstversicherer.

¹² Vgl. z.B. Harrington/Niehaus[50](S. 320) und SIGMA[101](S. 20).

Die aus Definition 4.2.1 resultierenden Größen für das Modell lassen sich hier wie folgt verdeutlichen.

Bemerkung 4.2.2 *Mit der Berücksichtigung des Währungskursrisikos ergeben sich folgende Eigenschaften:*

1. Aus Bemerkung 3.1.1 folgt hier für jede messbare Funktion V auf \mathbb{R} :

$$\int_{\mathcal{S}} V(s') Q(ds'|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} V(F[s, d, B, w, x]) dF^{(W_0, X_0)}(w, x).$$

2. Das Sicherheitsniveau ist nun insbesondere von der Verteilungsfunktion des Wechselkurses F_{W_0} abhängig und wir verwenden dafür die Schreibweise s_W^* .¹³ Für die kompakte Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen ergibt sich dann:

$$\mathcal{A}(s) = [0, (s - s_W^*)^+].$$

Die entsprechende Aussage über eine optimale Ausschüttungspolitik für Dividenden unter Berücksichtigung des Währungskursrisikos ist dem nachstehenden Satz zu entnehmen.

Satz 4.2.3 *Es sei ein endlich-stufiges Markovsches Entscheidungsmodell wie in Definition 4.2.1 mit Bemerkung 4.2.2 gegeben und es seien V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \{d + EV_{t+1}(s - d + W_{t+1}[B - X_{t+1}])\}, V_T(s) \equiv 0, s \in \mathcal{S}, \quad (4.2.1)$$

wobei die Verteilungsfunktion F_{W_0} fest gewählt und $|s_W^*| < \infty$ sei. Hierbei gilt:

1. Die Funktionen $V_t(s)$ in (4.2.1) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die stationäre (deterministische) Politik $\pi^* = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1}))$ mit

$$f_t(s) := \begin{cases} s - s_W^* & \text{falls } s > s_W^*, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2.2)$$

ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen.

Beweis: Die Gestalt der Funktionen $V_t(s)$ leitet sich aus der Zielfunktion und dem Übergangsgesetz des speziellen Markovschen Entscheidungsmodells aus Definition 4.2.1 entsprechend des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) und Bemerkung 4.2.2 ab.

¹³ Durch Wahl eines Risikomaßes und der Systemfunktion $F(s, d, B, w, x)$ in diesem Modell kann s_W^* analog zu den bisherigen Abschnitten bestimmt werden.

Per absteigender Induktion zeigen wir für alle $t = 0, \dots, T - 1$:

$$\text{a) } u_t(s, d) := \int V_{t+1}[s - d + W_{t+1}(B - X_{t+1})] d(P^{W_{t+1}} \otimes P^{X_{t+1}}) \text{ ist stetig auf } \mathbb{K} \quad (4.2.3)$$

und

$$\text{b) } \Delta L_t(d^*, d_*) := L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0; d^*, d_* \in \mathcal{A}(s); 0 \leq d_* \leq d^* := (s - s_W^*)^+ \quad (4.2.4)$$

mit $L_t(d) := d + EV_{t+1}[s - d + W_{t+1}(B - X_{t+1})]$ und somit

$$EV_{t+1}[s - d^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \geq d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + W_{t+1}(B - X_{t+1})]. \quad (4.2.5)$$

Teil a) liefert in Analogie zum Selektionssatz 2.1.11 die in Teil 1 behauptete Existenz eines Maximisators $f(s)$ und Messbarkeit von $V_t(s)$, da die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r(s, d)$ auf \mathbb{K} stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K} := \{(s, a) | s \in \mathcal{S}, a \in \mathcal{A}(s)\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Teil b) zeigt die in Teil 2 behauptete Optimalität der Entscheidungsregel $f(s) = (s - s_W^*)^+$.

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T - 1$ ergibt sich für Teil a) die Stetigkeit der Funktion $u_{T-1}(s, d) = 0$ auf \mathbb{K} .

Für Teil b) ergibt sich: $\Delta L_{T-1}(d^*, d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass (4.2.3) und (4.2.4) bzw. (4.2.5) gilt.

Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) für Teil a), dass die Funktion

$$\begin{aligned} & V_t(s - d + w_t(B - x_t)) \\ &= f^*(s - d + w_t(B - x_t)) \\ & \quad + EV_{t+1}[s - d + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \end{aligned}$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf \mathbb{K} für alle festen Werte $W_t(\omega) = w_t$, $X_t(\omega) = x_t$ ist. Denn mit der optimalen Entscheidungsregel $f^*(s - d + w_t(B - x_t)) \in \mathcal{A}(s - d + w_t(B - x_t))$, welche gemäß der Induktionsannahme existiert, gilt für jede Folge $(s_n) \rightarrow s$ und $(d_n) \rightarrow d$: $f^*(s_n - d_n + w_t(B - x_t)) = f^*(s - d + w_t(B - x_t))$.

Des Weiteren gilt wegen $f_{T-1}(s) = (s - s_W^*)^+$ gemäß des Induktionsanfangs (Teil b)):

$$\begin{aligned} & EV_t[s - d + W_t(B - X_t)] \\ & \leq \underbrace{\int \dots \int \left(s + \sum_{i=t}^{T-1} W_i \cdot B - W_t \cdot X_t - s_W^* \right)^+ d(P^{W_t} \otimes P^{X_t} \otimes \dots \otimes P^{W_{T-1}})}_{=: EV_t[s + W_t(B - X_t)]} < \infty \end{aligned}$$

für geeignete ω mit $X_{t+1}(\omega) = \dots = X_{T-1}(\omega) = 0$, d.h. es resultiert daraus die Integrierbarkeit der Funktion $V_t[s - d + w_t(B - x_t)]$. Daher gilt auch hier das *Stetigkeitslemma* und die Funktion $u_{t-1}(s, d)$ ist stetig auf \mathbb{K} .

Für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$) von Teil b) folgt zunächst mit $s \leq s_W^* \Rightarrow d^* = d_* = 0$:

$$\Delta L_{t-1}(d^*, d_*) = EV_t[s + W_t(B - X_t)] - EV_t[s + W_t(B - X_t)] = 0. \quad (4.2.6)$$

Für den Fall $s > s_W^*$ gilt gemäß der Induktionsannahme für feste $W_t(\omega) = w_t, X_t(\omega) = x_t$:

$$\begin{aligned} & V_t[s - d + w_t(B - x_t)] \\ &= \begin{cases} s - d + w_t(B - x_t) - s_W^* \\ \quad + EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] & \text{für } s - d + w_t \cdot B - s_W^* > w_t \cdot x_t, \\ EV_{t+1}[s - d + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit von

$$V_t[s - d^* + w_t(B - x_t)] - V_t[s - d_* + w_t(B - x_t)] \geq d_* - d^*, \quad (4.2.8)$$

d.h. mit der entsprechenden Fallunterscheidung folgt für (4.2.8):

- Für den Fall $s - d^* + w_t \cdot B - s_W^* > w_t \cdot x_t$ und $s - d_* + w_t \cdot B - s_W^* > w_t \cdot x_t$ folgt nach (4.2.7):

$$s - d^* + w_t(B - x_t) - s_W^* - (s - d_* + w_t(B - x_t) - s_W^*) = d_* - d^*.$$

- Mit $s - d^* + w_t \cdot B - s_W^* \leq w_t \cdot x_t$ und $s - d_* + w_t \cdot B - s_W^* \leq w_t \cdot x_t$ gilt gemäß (4.2.7):

$$\begin{aligned} & V_t[s - d^* + w_t(B - x_t)] - V_t[s - d_* + w_t(B - x_t)] \\ &= EV_{t+1}[s - d^* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\ &\quad - EV_{t+1}[s - d_* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\ &\stackrel{(*)}{\geq} EV_{t+1}[s - d_* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\ &\quad + d_* - d^* - EV_{t+1}[s - d_* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\ &= d_* - d^*, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen Hilfssatz 3.1.2 und (4.2.5) folgt.

- Für den Fall $s - d^* + w_t \cdot B - s_W^* \leq w_t \cdot x_t$ und $s - d_* + w_t \cdot B - s_W^* > w_t \cdot x_t$ ergibt

sich wiederum nach (4.2.7):

$$\begin{aligned}
& V_t[s - d^* + w_t(B - x_t)] - V_t[s - d_* + w_t(B - x_t)] \\
&= EV_{t+1}[s - d^* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&\quad - (s - d_* + w_t(B - x_t) - s_W^*) - EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&\stackrel{(*)}{\geq} s - d^* + w_t(B - x_t) - s_W^* + EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&\quad - (s - d_* + w_t(B - x_t) - s_W^*) - EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&= d_* - d^* \pm EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&= d_* - d^*,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen

$$\begin{aligned}
& EV_{t+1}[s - d^* + w_t(B - x_t) + W_{t+1}(B - X_{t+1})] \\
&\stackrel{(4.2.7)}{\geq} s - d^* + w_t(B - x_t) - s_W^* + EV_{t+1}[s_W^* + W_{t+1}(B - X_{t+1})]
\end{aligned}$$

erfolgt.

Wegen der schon gezeigten Integrierbarkeit von $V_t[s - d + w_t(B - x_t)]$ gilt daher:

$$\begin{aligned}
& \Delta L_{t-1}(d^*, d_*) \\
&= d^* + EV_t[s - d^* + W_t(B - X_t)] - d_* - EV_t[s - d_* + W_t(B - X_t)] \\
&= d^* - d_* \\
&\quad + \int \left(V_t[s - d^* + w_t(B - x_t)] - V_t[s - d_* + w_t(B - x_t)] \right) d(P^{W_t} \otimes P^{X_t})(w_t, x_t) \\
&\stackrel{(4.2.8)}{\geq} 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Die optimale Ausschüttungspolitik aus Satz 4.2.3 ist kein unerwartetes Resultat, denn durch die Unsicherheit des versicherungstechnischen Ergebnisses haben wir im Grundmodell schon festgestellt, dass aus Sicht der Anteilseigner der Versicherungsunternehmung eine sofortige Dividendenzahlung sinnvoller erscheint als eine spätere. Dieser Sachverhalt wird hier noch verstärkt, da sich die Unsicherheit nun auch auf das Prämienvolumen niederschlägt. Dadurch wird die Risikoaversion der Anteilseigner nicht verändert, so dass die Optimalität einer sofortigen Dividendenausschüttung erhalten bleibt.

In Hinblick auf Korollar 3.1.7 sieht die Bewertungsformel für die erwarteten Dividendenausschüttungen im Modell mit Währungskursrisiko für alle Startzustände $s \in \mathcal{S}$ wie folgt aus:

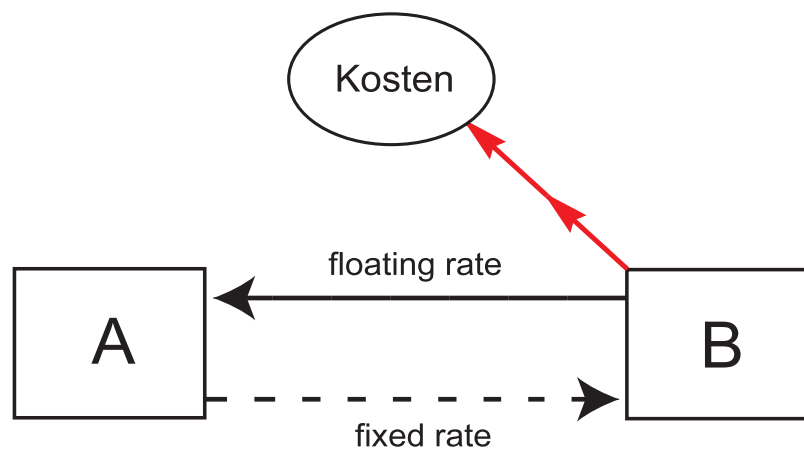
$$V^*(s) = V_0(s) = \sum_{n=0}^{T-1} E_s^* f^* \circ F_{X_n, W_n}^* \circ \dots \circ F_{X_0, W_0}^*(s) \quad (4.2.9)$$

mit den Funktionen $F_{x,w}^*(s) := s - (s - s_W^*)^+ + w(B - x)$ und $f^*(s) = (s - s_W^*)^+$.

4.2.2 Modellierung mit derivativen Absicherungsinstrumenten

Das älteste und einfachste Instrument zur Reduktion des Währungskursrisikos ist das *Termingeschäft*, welches den aktuellen Kassakurs, der um den Zinsunterschied zwischen den Währungen angepasst wird, auf einen zukünftigen Termin festschreibt. Eine standardisierte und börsengehandelte Variante des Termingeschäfts ist der *Währungsfuture*. Nach dem gleichen Prinzip funktioniert der *Währungsswap*, der die Wechselkurse zu einer Anzahl von Transaktionsterminen festschreibt und somit als eine Kombination von mehreren Währungsfutures aufgefasst werden kann.¹⁴ Die hier verwendete Modifikation eines Währungsswaps wird durch Abbildung 4.6 illustriert.

Abbildung 4.6: Zahlungsströme eines Swaps



Schließt das Versicherungsunternehmen *B* mit einem Verhandlungspartner *A* ein Swapgeschäft ab, so wollen wir davon ausgehen, dass die Partei *B* ihr gesamtes versicherungstechnisches Ergebnis - bewertet zum aktuellen Währungskurs (*floating rate*) - abgibt und im Gegenzug den entsprechenden Betrag des versicherungstechnischen Ergebnisses in der Heimatwährung erhält, welcher zum vereinbarten festen Währungskurs (*fixed rate*) ermittelt wird. Infolgedessen schlagen sich die Kosten des Währungsswaps in dem durch das Austauschverhältnis festgelegten impliziten Währungskurs nieder. Zudem kann eine angemessene Bewertung des Kreditrisikos (Ausfallrisikos) der Gegenpartei *A* den Preis zusätzlich beeinflussen. Damit ein Swapgeschäft schließlich abgeschlossen wird, werden die fälligen Vermittlungsgebühren und Spesen an den Vermittler überwiesen.¹⁵ Für diese Situation wollen wir auch den Fall betrachten, dass das Versicherungsunternehmen *B* einen bereits bestehenden Swap erwirbt, d.h. der Verkäufer des Swaps übernimmt dadurch die Rolle des Vermittlers.

¹⁴ Vgl. Fastrich/Hepp[39](S. 35).

¹⁵ Vgl. Fastrich/Hepp[39](§8.4 und §8.5) und Wenninger[111](S. 110 und S. 189).

Daher liegt der weiteren Untersuchung dieses Abschnitts das folgende Markovsche Entscheidungsmodell zugrunde.

Definition 4.2.4 *Es gelte das spezielle Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 3.0.3 mit der folgenden Änderung:*

Für die messbare Systemfunktion setzen wir unter Berücksichtigung eines Swap-Vertrages mit fester Währungsrate $0 < w_f < \infty$ und den zugehörigen Kosten $0 < c(w_f) < \infty$:

$$\begin{aligned} F(s_t, d_t, w_f, B, X_{t+1}) &= s_t - d_t + w_f(B - X_{t+1}) - c(w_f) \\ &= s_t - d_t + w_f \cdot B - c(w_f) - w_f X_{t+1} \\ &= s_t - d_t + B(w_f) - w_f X_{t+1}, \end{aligned}$$

wobei $B(w_f) := w_f \cdot B - c(w_f) \geq 0$ gelten soll. Das Übergangsgesetz Q lässt sich darstellen durch

$$Q(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, w_f, x)\} dF_{X_0}(x), \quad \forall C \in \mathfrak{G}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

Da durch den Swap-Vertrag die Stochastizität des Währungskurses eliminiert wird, erhalten wir die weiteren einfachen Folgerungen für das Modell.

Bemerkung 4.2.5 *Mit der Berücksichtigung eines Swap-Vertrages für das Währungskursrisiko ergeben sich folgende Eigenschaften:*

1. *Aus Bemerkung 3.1.1 folgt hier für jede messbare Funktion V auf \mathbb{R} :*

$$\int_{\mathcal{S}} V(s') Q(ds'|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} V(F[s, d, B, w_f, x]) dF_{X_0}(x).$$

2. *Das Sicherheitsniveau s^* lässt sich in Abhängigkeit von dem im Swap-Vertrag vereinbarten Währungskurs w_f darstellen und wir schreiben dafür $s^*(w_f)$. Für die kompakte Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen ergibt sich dann:*

$$\mathcal{A}(s) = [0, (s - s^*(w_f))^+].$$

Da die Struktur dieses Entscheidungsmodells eine große Ähnlichkeit mit der Struktur des erweiterten Ausschüttungsmodells mit proportionalem RV-Schutz¹⁶ aufweist, ergibt sich leicht die folgende Aussage über die optimale Ausschüttungspolitik.

Satz 4.2.6 *Gegeben sei das Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 4.2.4 mit Bemerkung 4.2.5 und es seien die Funktionen V_0, \dots, V_T rekursiv definiert auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \{d + EV_{t+1}(s - d - c(w_f) + w_f[B - X_{t+1}])\}, \quad V_T(s) \equiv 0, \quad s \in \mathcal{S}, \quad (4.2.10)$$

wobei die Werte w_f und $c(w_f)$ fest gewählt seien und $|s^*(w_f)| < \infty$. Hierbei gilt:

¹⁶ Vgl. Abschnitt 4.1.1.

1. Die Funktionen $V_t(s)$ in (4.2.10) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die stationäre (deterministische) Politik $\pi^* = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1}))$ mit

$$f_t(s) := \begin{cases} s - s^*(w_f) & \text{falls } s > s^*(w_f), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen.

Beweis: Der Beweis folgt direkt aus Satz 4.1.3, indem $B(m) = B(w_f)$, $s^*(m) = s^*(w_f)$ und $m \cdot X_{t+1} = w_f \cdot X_{t+1}$ gesetzt wird. ■

Die Bewertungsformel aus Korollar 3.1.7 hat in diesem Modell mit den Funktionen $f^*(s) = [s - s^*(w_f)]^+$ und $F_x^*(s) := s - [s - s^*(w_f)]^+ + B(w_f) - w_f \cdot x$ die folgende Gestalt

$$V^*(s) = \sum_{n=0}^{T-1} E_s^* f^* \circ F_{X_n}^* \circ \dots \circ F_{X_1}^*(s)$$

mit dem ersten Summanden gleich $[s - s^*(w_f)]^+$. Damit setzen wir die bekannten Beispiele fort.

Beispiel B.1.c (Fortsetzung von Beispiel B.1.a)

Mit dem Wert $w_f = 1.0188$ ergibt sich für die Kostenfunktion $c(w_f)$ des Währungsswaps $c(w_f) = 0.049 \cdot w_f \approx 0.05$ und in Analogie zu Bemerkung 4.1.4 folgt daher

$$\begin{aligned} B(w_f) &:= w_f \cdot B - c(w_f) = 4.84024, \\ s^*(w_f) &:= w_f \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(w_f) \approx 7.14269. \end{aligned}$$

Mit den Werten aus Tabelle 4.3 erhalten wir wegen (4.2.9) mit dem Dirac-Maß δ_{w_f} für

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*(w_f)$	2.91731
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	2.00762
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	1.59392

Tabelle 4.3: Erwartete Ausschüttungen bei einem Währungsswap für $\mathcal{E}(0.25)$ -verteilte Schäden

P^{W_t} für die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen $V_0^{w_f=1.0188}(s_0) \approx 6.519$. Daher ist mit der stärkeren Heimatwährung ein höherer Gesamtausschüttungsbetrag zu erzielen, da im Gegensatz zu Beispiel B.1.a sowohl das Sicherheitsniveau einen niedrigeren Wert annimmt, als auch der erwartete Periodengewinn höher ist.

Beispiel B.2.c (Fortsetzung von Beispiel B.2.a)

Mit den obigen Werten für w_f und $c(w_f)$ gilt hier $B(w_f) = 4.84024$ und

$$s^*(w_f) = 1.0188 \cdot 8 \cdot (0.05^{-\frac{1}{3}} - 1) - 4.84024 \approx 9.13295$$

für das Sicherheitsniveau. Weiterhin folgt mit den Werten aus Tabelle 4.4 wegen (4.2.9)

Zeit	Ausschüttung	Wert
0	$s - s^*(w_f)$	0.92705
1	$E_s^* f^* \circ F_{X_1}^*(s)$	2.3619
2	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	1.96086

Tabelle 4.4: Erwartete Dividenden bei einem Währungsswap für Pareto(8,3)-verteilte Schäden

mit dem Dirac-Maß δ_{w_f} für die Wertfunktion $V_0^{w_f=1.0188}(s_0) \approx 5.25$. Infolgedessen sind in diesem Fall die totalen erwarteten Dividendenausschüttungen niedriger als in Beispiel B.2.a, da die Modifikation des Gesamtschadenverteilungsquantils durch den Währungskurs schwerer wiegt als der höher erzielte Periodengewinn.

4.3 Dividenden und das Kapitalanlagegeschäft

Unter dem Begriff des *Kapitalanlagegeschäftes* ist ein eigener Geschäftsbereich der Versicherungsunternehmung zu verstehen, dessen Aufgabe es ist, sowohl genügend Geld für die Auszahlung der versicherungstechnischen Leistungen zu gewährleisten als auch die zugesagte Verzinsung des Sparguthabens eines Versicherungsnehmers zu erwirtschaften. Letzteres bezieht sich hauptsächlich auf Lebensversicherungsunternehmen. Die Ursache des Kapitalanlagegeschäftes beruht vor allem auf den Besonderheiten des Versicherungsgeschäftes, namentlich der Vorauszahlung der Prämien, der Abwicklung von Spar-/Entspargeschäften in der Lebensversicherung und der Bereitstellung von Eigenkapital für das Versicherungsgeschäft, sofern es frei verfügbar und nicht gebunden ist.¹⁷

Im Modell wird das Kapitalanlagegeschäft durch die Möglichkeit einer Investitionsentscheidung berücksichtigt. Dadurch verändert sich auch die Risikosituation der Versicherungsunternehmung, da das *Kapitalanlagerisiko* nun nicht mehr vernachlässigbar ist.¹⁸ Falls davon ausgegangen wird, dass das zur Verfügung stehende Kapital vollständig investiert wird, so ist durch eine geschickte Modellierung kein zusätzlicher Parameter für die Investitionsentscheidung erforderlich. Dies bedeutet für das Modell folgendes: Wird eine Dividende d ausgeschüttet, so wird der Restbetrag $s - d$ angelegt, welcher zum nächsten

¹⁷ Vgl. Farny[38](S. 734).

¹⁸ Vgl. dazu auch Abschnitt 2.2.1.

Entscheidungszeitpunkt eine (positive oder negative) Rendite erwirtschaftet. Solche Modelle werden *Konsum-Investitions-Modelle* genannt, wobei der Konsum in unserem Fall als Dividendenausschüttung zu verstehen ist. Diese Modelle beschäftigen sich mit der optimalen Wahl des Konsums, d.h. der Abführung von Geldmitteln aus einem Portfolio, so dass der Gesamtnutzen maximiert wird.¹⁹ Da das Kapitalanlagerisiko bei der Bestimmung der Sicherheitsschranke s^* erfasst wird, wollen wir wiederum auf die Verwendung von Nutzenfunktionen verzichten.

4.3.1 Modellierung mit einer festen Kapitalanlagemöglichkeit

In diesem Abschnitt wollen wir eine optimale Ausschüttungspolitik herleiten, falls nur eine Möglichkeit zur Kapitalanlage zur Verfügung steht. Wir betrachten daher folgendes Entscheidungsmodell.

Definition 4.3.1 *Zu dem Markovschen Ausschüttungsmodell aus Definition 3.0.3 fügen wir eine Folge von iid.-Zufallsvariablen $(R_t)_{t \in \mathbb{N}}$ (auch unabhängig von X_t) hinzu mit $R_t \geq -1$ und zugehöriger Verteilungsfunktion $F_{R_t}(r) = F_{R_0}(r)$, so dass $\infty > E[R_0] > 0$ gilt.²⁰ Dabei gibt R_t eine zufällige Kapitalanlagerendite an. Somit ergibt sich für die messbare Systemfunktion*

$$F(s_t, d_t, B, r_{t+1}, x_{t+1}) = s_t - d_t + B + (s_t - d_t) \cdot r_{t+1} - x_{t+1}$$

und für das Übergangsgesetz Q gilt demnach

$$Q(C|s, d) = \int_{-1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, r, x)\} f_{R_0}(r) f_{X_0}(x) dx dr, \forall C \in \mathfrak{S}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

Durch die Wahl der Höhe des Investitionsbetrages $s_t - d_t$ ergibt sich schließlich das erwirtschaftete Investitionsergebnis aus dem Produkt $(s_t - d_t) \cdot R_{t+1}$. Soll die Rendite R_{t+1} als eine deterministische Größe aufgefasst werden, so kann eine festverzinsliche Kapitalanlage mit der zugehörigen Einpunkt-Verteilungsfunktion

$$F_{R_0}(r) := \begin{cases} 1 & \text{falls } r = r_f \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3.1)$$

ausgedrückt werden. Dabei entspricht der Wert r_f einer festen Rendite.

Gemäß Definition 4.3.1 lassen sich die benötigten Größen des Modells wie folgt konkretisieren, wobei die Überlegungen anlog zu den bisherigen Abschnitten in Kapitel 4 sind.

¹⁹ Vgl. dazu z. B. Duffie[35](S. 195ff), Pliska[83] (S. 162ff) und Samuelson[89](S. 239ff), die den Lösungsalgorithmus der Dynamischen Programmierung verwenden.

²⁰ Der Grund dafür, dass die Zufallsvariablen R_t mit -1 nach unten beschränkt sind, liegt darin, dass der Investor höchstens sein gesamtes investiertes Kapital verlieren kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn $(1 + R_t) = 0$ gilt. Vgl. dazu auch Assaf/Baryshnikov/Stadje[8]. Generell ist natürlich auch eine Modellierung mit einer nichtnegativen Zufallsvariable $\tilde{R}_t = 1 + R_t$ denkbar.

Bemerkung 4.3.2 *Mit der Berücksichtigung des Kapitalanlagegeschäftes ergeben sich folgende Eigenschaften:*

1. Entsprechend Bemerkung 3.1.1 folgt hier für jede messbare Funktion V auf \mathbb{R} :

$$\int_S V(s') Q(ds'|s, d) = \int_{[-1, \infty) \times \mathbb{R}_+} V(F[s, d, B, r, x]) dF^{(R_0, X_0)}(r, x).$$

2. Das Sicherheitsniveau s^* hängt insbesondere von der Verteilungsfunktion der Kapitalanlage F_{R_0} ab. Wir schreiben dafür s_R^* . Infolgedessen steht

$$\mathcal{A}(s) = [0, (s - s_R^*)^+]$$

für die kompakte Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen.

Auch im erweiterten Modell sollen zunächst die (totalen) erwarteten Dividendenausschüttungen auf einem endlichen Zeithorizont T durch Wahl von $\pi \in \Pi_M$ maximiert werden. Wie bei der Berücksichtigung des nichtproportionalen Rückversicherschutzes wird die optimale Dividendenpolitik durch die Konvexität der Wertfunktion bestimmt. Zuvor benötigen wir aber noch eine hilfreiche Aussage bezüglich der Integrierbarkeit.

Hilfssatz 4.3.3 *Gegeben sei das erweiterte Markovsche Ausschüttungsmodell wie in Definition 4.3.1 mit $t \in \{0, \dots, T-1\}$. Weiterhin liegen Realisationen $R_1(\omega) = r_1, X_1(\omega) = x_1, \dots, R_{T-1}(\omega) = r_{T-1}, X_{T-1}(\omega) = x_{T-1}$ vor und außerdem sei $\pi_t = (d_t, \dots, d_{T-2})$ eine beliebige Politik. Dann gilt für alle $t' \in \{t+1, \dots, T-1\}$ und festes s_t :*

$$s_{t:t'} = s_t \cdot \prod_{n=t+1}^{t'} (1+r_n) + \sum_{n=t+1}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1+r_m)(B-x_n) + B-x_{t'} - \sum_{n=t}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1+r_m)d_n. \quad (4.3.2)$$

Beweis: Der ausführliche Beweis erfolgt induktiv. Der *Induktionsanfang* mit $t' = t+1$ liefert:

$$\begin{aligned} s_{t:(t+1)} &= s_t(1+r_{t+1}) + B - x_{t+1} - (1+r_{t+1})d_t \\ &= (s_t - d_t)(1+r_{t+1}) + B - x_{t+1} \\ &= F(s_t, d_t, B, r_{t+1}, x_{t+1}). \end{aligned}$$

Für die *Induktionsannahme* gelte (4.3.2) für beliebiges $t' \in \{t+1, \dots, T-2\}$. Dann folgt für den *Induktionsschluss* ($t' \rightarrow t'+1$) entsprechend der gültigen Systemfunktion:

$$\begin{aligned} s_{t:(t'+1)} &= (s_{t:t'} - d_{t'})(1+r_{t'+1}) + B - x_{t'+1} \\ &= s_t \cdot (1+r_{t'+1}) \cdot \prod_{n=t+1}^{t'} (1+r_n) + \left(\sum_{n=t+1}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1+r_m)(B-x_n) + B-x_{t'} \right) (1+r_{t'+1}) \\ &\quad - \left(\sum_{n=t}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1+r_m)d_n \right) (1+r_{t'+1}) - (1+r_{t'+1})d_{t'} + B - x_{t'+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_t \cdot \prod_{n=t+1}^{t'+1} (1+r_n) + \sum_{n=t+1}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'+1} (1+r_m)(B-x_n) + (B-x_{t'}) (1+r_{t'+1}) \\
&\quad - \sum_{n=t}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'+1} (1+r_m) d_n - (1+r_{t'+1}) d_{t'} + B - x_{t'+1} \\
&= s_t \cdot \prod_{n=t+1}^{t'+1} (1+r_n) + \sum_{n=t+1}^{t'} \prod_{m=n+1}^{t'+1} (1+r_m)(B-x_n) + B - x_{t'+1} - \sum_{n=t}^{t'} \prod_{m=n+1}^{t'+1} (1+r_m) d_n. \blacksquare
\end{aligned}$$

Satz 4.3.4 *Gegeben sei das Markovsche Entscheidungsmodell mit fester Kapitalanlage-möglichkeit wie in Definition 4.3.1 mit Bemerkung 4.3.2. Ferner sei die Verteilungsfunktion F_{R_0} fest gewählt und $|s_R^*| < \infty$. Seien weiterhin V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \{d + EV_{t+1}(B + (s-d) \cdot (1+R_{t+1}) - X_{t+1})\}, \quad V_T(s) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \quad (4.3.3)$$

für $0 \leq t \leq T-1$, dann folgt:

1. Die Funktionen $V_t(s)$ von (4.3.3) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die deterministische (Markov-)Politik $\pi^* = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1}))$ mit

$$f_t(s) := \begin{cases} s - s_R^* & \text{falls } s > s_R^*, L_t(s - s^*) \geq L_t(0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

und $L_t(d) := d + EV_{t+1}(s - d + B + (s-d) \cdot R_{t+1} - X_{t+1})$ ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen.

Beweis: Die Gestalt der Funktionen V_t wie in (4.3.3), welche sich aus der Zielfunktion und dem Übergangsgesetz des hier zu betrachtenden Markovschen Entscheidungsmodells aus Definition 4.3.1 gemäß des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) und Bemerkung 4.3.2 ableitet, erbringt den Nachweis der Messbarkeit gemäß Teil 1 mit dem eindeutigen Wahrscheinlichkeitsmaß $Q = P^{R_0} \otimes P^{X_0}$ durch Satz 2.1.11, wobei die Beschränktheit von $V_t(s)$ aus der Beschränktheit der einperiodigen Ausschüttungen resultiert und wiederum $\mathbb{K} \in \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A}$ gilt.

Für den Beweis von Teil 2 zeigen wir die Konvexität von $L_t(d) := d + EV_{t+1}(s - d + B + (s-d) \cdot R_{t+1} - X_{t+1})$ in d . Zum Zeitpunkt $t = T-1$ gilt für den *Induktionsanfang*:

$$L_{T-1}(d) = d.$$

Daher ist die Funktion $L_{T-1}(d)$ konvex in d und die Intervallenden von $\mathcal{A}(s)$ sind Kandidaten für das Maximum, was die Optimalität von $f_{T-1}(s)$ wie in (4.3.4) ergibt.

Weiterhin gelte für ein beliebiges $t \leq T - 2$ die *Induktionsannahme*: $L_t(d)$ ist konvex in d . Daraus folgt die Gestalt der Wertfunktion $V_t(s)$:

$$V_t(s) = \begin{cases} s - s_R^* + EV_{t+1}(s_R^* + B + s_R^* R_{t+1} - X_{t+1}) & \text{falls } s > s_R^*, \\ L_t(s - s^*) \geq L_t(0), & \\ 0 + EV_{t+1}(s + B + s \cdot R_{t+1} - X_{t+1}) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.3.5)$$

und daraus wiederum die Optimalität von $f(s)$ wie in (4.3.4) und die Konvexität der Wertfunktion in s .

Für den *Induktionsschritt* ($t \rightarrow t - 1$) muss noch gezeigt werden, dass $L_{t-1}(d)$ konvex in d ist. Da $V_t(s - d + B + (s - d)R_t(\omega) - X_t(\omega))$ für festes ω nach Hilfssatz 4.1.12 (Teil 1) konvex ist, ergibt sich die Konvexität der Funktion

$$L_{t-1}(d) = d + EV_t(s - d + B + (s - d)R_t(\omega) - X_t(\omega))$$

aus Teil 3 des Hilfssatzes 4.1.12, falls die Wertfunktion bzgl. ω integrierbar ist. Die Integrierbarkeit leitet sich durch die folgende integrierbare Majorante ab, denn es gilt mit einer beliebigen Politik $\tilde{\pi} = (\tilde{d}_t, \dots, \tilde{d}_{T-1})$:

$$V_t(s_t) = \sum_{n=t}^{T-1} \tilde{d}_n \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=t}^{T-1} (s_n - s_R^*)^+ = \sum_{n=t}^{T-1} (s_{t:n} - s_R^*)^+, \quad (4.3.6)$$

wobei (*) wegen $\tilde{d}_n \leq (s_n - s_R^*)^+$ erfolgt. Mit Hilfsatz 4.3.3 folgt für (4.3.6) weiter

$$\begin{aligned} & (s_t - s_R^*)^+ + (s_{t:(t+1)} - s_R^*)^+ + \dots + (s_{t:(T-1)} - s_R^*)^+ \\ &= (s_t - s_R^*)^+ + (s_t(1 + R_{t+1}) + B - X_{t+1} - (1 + R_{t+1})d_t - s_R^*)^+ + \dots \\ & \dots + \left(s_t \prod_{n=t+1}^{T-1} (1 + R_n) + \sum_{n=t+1}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1 + R_m)(B - X_n) + B - X_{T-1} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - \sum_{n=t}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1 + R_m)d_n - s_R^* \right)^+ \\ & \stackrel{(*)}{\leq} (s_t - s_R^*)^+ + (s_t(1 + R_{t+1}) + B - X_{t+1} - s_R^*)^+ + \dots \\ & + \left(s_t \prod_{n=t+1}^{T-1} (1 + R_n) + \sum_{n=t+1}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1 + R_m)(B - X_n) + B - X_{T-1} - s_R^* \right)^+, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen $\tilde{d}_t = \dots = \tilde{d}_{T-1} = 0$ gilt. Daher ergibt sich für $V_t(s-d+B+(s-d)R_t-X_t)$

$$\begin{aligned} & V_t(s-d+B+(s-d)R_t-X_t) \\ & \leq (s-d+B+(s-d)R_t-X_t-s_R^*)^+ \\ & \quad + \left((s-d) \prod_{n=t}^{t+1} (1+R_n) + (1+R_{t+1})(B-X_t) + B-X_{t+1}-s_R^* \right)^+ + \dots \\ & \quad + \left((s-d) \prod_{n=t}^{T-1} (1+R_n) + \sum_{n=t}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1+R_m)(B-X_n) + B-X_{T-1}-s_R^* \right)^+. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\tilde{S}_{t'} = (s-d) \prod_{n=t}^{t'} (1+R_n) + \sum_{n=t}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1+R_m)(B-X_n) + B-X_{t'} - s_R^*$$

für alle t' mit $t' \in \{t, \dots, T-1\}$ folgt dann weiter

$$\begin{aligned} & E_{R_t, X_t, \dots, R_{T-1}, X_{T-1}} V_t(s-d+B+(s-d)R_t-X_t) \\ & \leq E_{R_t, X_t, \dots, R_{T-1}, X_{T-1}} (\tilde{S}_t)^+ + E_{R_t, X_t, \dots, R_{T-1}, X_{T-1}} (\tilde{S}_{t+1})^+ + \dots + E_{R_t, X_t, \dots, R_{T-1}, X_{T-1}} (\tilde{S}_{T-1})^+ \\ & = \int \int_0^{\kappa_t} \underbrace{F_{X_t}(x_t)}_{\leq 1} dx_t dF_{R_t}(r_t) + \int \dots \int_0^{\kappa_{t+1}} \underbrace{F_{X_{t+1}}(x_{t+1})}_{\leq 1} dx_{t+1} \dots dF_{R_t}(r_t) + \dots \\ & \quad + \iint \dots \int \int_0^{\kappa_{T-1}} \underbrace{F_{X_{T-1}}(x_{T-1})}_{\leq 1} dx_{T-1} dF_{R_{T-1}}(r_{T-1}) \dots dF_{X_t}(x_t) dF_{R_t}(r_t) \\ & \leq E_{R_t} [(s-d)(1+R_t) + B - s_R^*] \\ & \quad + E_{R_t, X_t, R_{t+1}} \left[(s-d) \prod_{n=t}^{t+1} (1+R_n) + (B-X_t)(1+R_{t+1}) + B - s_R^* \right] + \dots \\ & \quad + E_{R_t, X_t, \dots, R_{T-1}} \left[(s-d) \prod_{n=t}^{T-1} (1+R_n) + \sum_{n=t}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1+R_m)(B-X_n) + B - s_R^* \right] \\ & = (s-d)(1+E[R_t]) + B - s_R^* \\ & \quad + (s-d) \prod_{n=t}^{t+1} (1+E[R_n]) + (B-E[X_t])(1+E[R_{t+1}]) + B - s_R^* + \dots \\ & \quad + (s-d) \prod_{n=t}^{T-1} (1+E[R_n]) + \sum_{n=t}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1+E[R_m])(B-E[X_n]) + B - s_R^* \\ & \leq (T-t) \left((s-d) \prod_{n=t}^{T-1} (1+E[R_n]) + \sum_{n=t}^{T-2} \prod_{m=n+1}^{T-1} (1+E[R_m])(B-E[X_n]) + B - s_R^* \right) \\ & < \infty \end{aligned}$$

mit $\kappa_{t'} = (s - d) \prod_{n=t}^{t'} (1 + r_n) + \sum_{n=t}^{t'-1} \prod_{m=n+1}^{t'} (1 + r_m) (B - x_n) + B - s_R^*$ wegen $\infty > E[R_0] > 0$ und $\infty > B > E[X_0] > 0$ und der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen R_t und X_t . Dabei ergeben sich die inneren Integrale mit Hilfe der partiellen Integration und werden ggf. gleich Null gesetzt. Damit haben wir insgesamt die Optimalität von $f_{t-1}(s)$ wie in (4.3.4) gezeigt. ■

Der Satz 4.3.4 zeigt, dass wegen der Konvexität die Optimalität der zulässigen Dividendenausschüttung $s - s_R^*$ nicht mehr gesichert ist, sofern ausreichendes Kapital für die Ausschüttung zur Verfügung steht ($s > s_R^*$). Aus betriebswirtschaftlicher Sicht lässt sich dies wie folgt interpretieren: Ein hoher Kapitalstand hat zur Folge, dass die Chance auf ein gutes Investitionsergebnis und die damit einhergehende spätere Dividendenausschüttung höher bewertet wird als diese Möglichkeit verstreichen zu lassen und sofort eine Dividende auszuschütten. Andererseits lässt ein niedriger Kapitalstand oberhalb des Sicherheitsniveaus den Schluss zu, dass es vorteilhafter ist, sofort eine Ausschüttung vorzunehmen und einen entsprechend geringeren Betrag zu investieren, da die Chance, ein höheres Investitionsergebnis mit einem höheren Anlagebetrag zu generieren, als zu gering eingestuft wird. Bei diesem Fall fällt die Risikoaversion der Kapitaleigner stärker ins Gewicht als die erhofften Renditeerwartungen, da in dieser Situation ein Unterschreiten des Sicherheitsniveaus als wahrscheinlicher gilt. Für den Fall einer festverzinslichen Rendite sind die vorangehenden Aussagen separat in der nachfolgenden Bemerkung aufgelistet.

Bemerkung 4.3.5 Sei $F_{R_0}(r)$ wie in (4.3.1) gegeben und beschreibe r_f die zugehörige feste Rendite. Dann folgt:

1. Die Funktion $\dot{L}_t(d) := d + EV_{t+1}[B + (s - d) \cdot (1 + r_f) - X_{t+1}]$ ist auch konvex in d .
2. Werden Zinsderivate miteinbezogen, so bleibt die Konvexität der Funktion

$$\tilde{L}_t(d) := d + EV_{t+1}[B - c(r_f) + (s - d) \cdot (1 + r_f) - X_{t+1}]$$

erhalten, wobei der Wert $c(r_f)$ fest gewählt ist und als anfallende Kosten pro Entscheidungsperiode bei Abschluß eines Zinsderivats zu verstehen ist.

Beispiel B.1.d (Fortsetzung von Beispiel B.1.a)

Mit einer festverzinslichen Kapitalanlagerendite $r_f = 0.035$ ergibt sich zunächst für die Sicherheitsschranke, welche nach der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit bestimmt wird:

$$s_{r_f}^* = s^*(F_{r_f=0.035}) = \frac{1}{1 + r_f} \left(F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B \right) \approx 6.94.$$

Mit den Hilfsfunktionen

$$U_1(s) := \iint \{ \check{s}(1 + r_f) + 2B - X_1 - [\check{s}(1 + r_f) + B - X_1 - s_{r_f}^*]^+ (1 + r_f) - X_2 - s_{r_f}^* \}^+ dP^{X_1} dP^{X_2}$$

für $\tilde{s} := \min\{s, s_{r_f}^*\}$ und

$U_2(s) :=$

$$\iint \{s(1+r_f) + 2B - X_1 - [s(1+r_f) + B - X_1 - s_{r_f}^*]^+(1+r_f) - X_2 - s_{r_f}^*\}^+ dP^{X_1} dP^{X_2}$$

sind die zur Ermittlung einer optimalen Politik notwendigen Wertfunktionen der Tabelle 4.5 zu entnehmen, d.h. mit den zugehörigen Werten gemäß Tabelle 4.6 ergibt sich

Politik	Wertfunktion
(1,1,1)	$(s - s_{r_f}^*)^+ + \int [(s - (s - s_{r_f}^*)^+)(1+r_f) + B - x_1 - s_{r_f}^*]^+ dP^{X_1}(x_1) + U_1(s)$
(0,1,1)	$\int [s(1+r_f) + B - x_1 - s_{r_f}^*]^+ dP^{X_1}(x_1) + U_2(s)$
(1,0,1)	$(s - s_{r_f}^*)^+ + \dots$ $\iint [\min\{s, s_{r_f}^*\}(1+r_f)^2 + \sum_0^1 (1+r_f)^{1-n} (B - x_{n+1}) - s_{r_f}^*]^+ dP^{X_1}(x_1) dP^{X_2}(x_2)$
(0,0,1)	$\iint [s(1+r_f)^2 + \sum_0^1 (1+r_f)^{1-n} (B - x_{n+1}) - s_{r_f}^*]^+ dP^{X_1}(x_1) dP^{X_2}(x_2)$

Tabelle 4.5: Zulässige Politiken und ihre Wertfunktionen im Modell mit festverzinslicher Kapitalanlage

die Optimalität der Politik $\pi^* = (f(s), f(s), f(s))$ mit $f(s) = (s - s_{r_f}^*)^+$ und es gilt $V_0^{r_f=0.035}(s_0) \approx 7.061$.

Beispiel B.2.d (Fortsetzung von Beispiel B.2.a)

Unter Berücksichtigung der festverzinslichen Rendite $r_f = 0.035$ ergibt sich in diesem Fall entsprechend des obigen Beispiels $s^*(F_{r_f=0.035}) \approx 8.614$. Mit den einer zulässigen Politik zugeordneten Werten der Funktion $V_0^\pi(s)$, welche der Tabelle 4.6 zu entnehmen sind, erhalten wir wiederum die Optimalität von $\pi^* = (f(s), f(s), f(s))$ mit $f(s) = (s - s_{r_f}^*)^+$ und das Ergebnis $V_0^{r_f=0.035}(s_0) \approx 6.189$.

Politik	$V_0^\pi(s)$ für $\varepsilon(0.25)$ -Verteilung	$V_0^\pi(s)$ für $Pareto(8,3)$ -Verteilung
(0,0,1)	6.23138	5.57471
(1,0,1)	6.71944	5.74837
(1,1,1)	7.06094	6.18925
(0,1,1)	6.77056	4.89513

Tabelle 4.6: Berechnete Werte von $V_0^\pi(s)$ für $\varepsilon(0.25)$ - und $Pareto(8,3)$ -Verteilung

Damit ist in beiden Beispielen der erwartete Gesamtbetrag der diskontierten Dividendenausschüttungen unter Berücksichtigung einer festverzinslichen Kapitalanlagemöglichkeit erwartungsgemäß höher als im Grundmodell (s. Beispiel B.1.a bzw. B.2.a).

4.3.2 ε -optimale Ausschüttungspolitik

In dieser Sektion wollen wir eine Schranke so angeben, dass die Optimalität der deterministischen Markov-Politik $\pi' = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit der Abkürzung $s_r^* = s^*(F_{r_f})$ für $r_f > 0$ und

$$\mathcal{A}(s) \ni f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s_r^*, \\ s - s_r^* & \text{falls } s > s_r^*, \end{cases}$$

im Ausschüttungsmodell mit fester und deterministischer Kapitalanlagemöglichkeit gilt. Dies führt uns zum Begriff der ε -Optimalität im Sinne von Hinderer[55](S. 293), wobei wir eine zustandsabhängige Schranke betrachten wollen.

Definition 4.3.6 (ε -optimale Politik)

Es sei $\pi \in \Pi$ eine Politik und $\varepsilon(s)$ eine messbare Funktion für $s \in \mathcal{S}$. Dann heißt π $\varepsilon(s)$ -optimal, falls

$$V(\pi, s) \geq V(s) - \varepsilon(s), \quad \varepsilon(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$

Satz 4.3.7 Gegeben sei das Markovsche Ausschüttungsmodell mit fester Kapitalanlagemöglichkeit wie in Definition 4.3.1 mit $|s_r^*| < \infty$. Dann ist die (deterministische Markov-)Politik $\pi' = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit $\mathcal{A}(s) \ni f(s) := [s - s_r^*]^+ \varepsilon(s_0)$ -optimal. Dabei ist die nichtnegative Funktion $\varepsilon(s_0)$ mit $s = s_0$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P^{X(n)} := P^{X_n} \otimes P^{X_{n+1}} \otimes \dots \otimes P^{X_{T-2}}$$

wie folgt definiert

$$\varepsilon(s) := r_f \cdot [s - s_r^*]^+ + \sum_{n=1}^{T-2} r_f \cdot E_{X(n)}[\tilde{S}_n - s_r^*]^+,$$

wobei $\tilde{S}_n = s \cdot (1 + r_f)^{T-1-n} + \sum_{m=n}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-m} (B - X_m)$ gilt und $E_{X(n)}$ den Erwartungswertoperator bzgl. $P^{X(n)}$ bezeichnet.

Beweis: Mit der Politik $\pi'_t := (f(s_0), \dots, f(s_{T-1-t}))$ und der Funktion

$$\varepsilon_t(s) := r_f \cdot [s - s_r^*]^+ + \sum_{n=t+1}^{T-2} r_f \cdot E_{X(n)}[\tilde{S}_n - s_r^*]^+ \quad (4.3.7)$$

mit \tilde{S}_n und $P^{X(n)}$ wie oben reicht es entsprechend Definition 4.3.6 aus, die Ungleichung

$$V(\pi'_t, s) \geq V_t(s) - \varepsilon_t(s), \quad \varepsilon_t(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathcal{S}, \quad \forall t = 0, \dots, T-2 \quad (4.3.8)$$

per absteigender Induktion zu zeigen, denn die Behauptung folgt schließlich mit $t = 0$ und wegen $V(\pi'_{T-1}, s) = V_{T-1}(s)$ nach Satz 4.3.4 mit $\varepsilon_{T-1}(\cdot) \equiv 0$.

Für den *Induktionsanfang* mit $t = T - 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_{T-2}(s) - V_{T-2}(\pi'_{T-2}, s) &\stackrel{(*)}{=} E[s(1+r_f) + B - X_{T-1} - s_r^*]^+ - [s - s_r^*]^+ \\
&\quad - E[s_r^*(1+r_f) + B - X_{T-1} - s_r^*]^+ \\
&= \begin{cases} \int_{s_r^*(1+r_f)+B-s_r^*}^{s(1+r_f)+B-s_r^*} F_{X_{T-1}}(x) dx - [s - s_r^*]^+ & \text{falls } s \geq s_r^*, \\ - \int_{s(1+r_f)+B-s_r^*}^{s_r^*(1+r_f)+B-s_r^*} F_{X_{T-1}}(x) dx - [s - s_r^*]^+ & \text{falls } s < s_r^*, \end{cases} \\
&\stackrel{(1)}{\leq} (1+r_f)[s - s_r^*]^+ - [s - s_r^*]^+ = r_f \cdot [s - s_r^*]^+ = \varepsilon_{T-2}(s),
\end{aligned}$$

wobei $(*)$ aufgrund von $r_{T-2}(s, f^*(s)) = 0$ folgt, da die Konvexität der Funktion

$$L_{T-2}(d) = d + EV_{T-1}(B + (s-d) \cdot (1+r_f) - X_{T-1})$$

gemäß Satz 4.3.4 sonst $r_{T-2}(s, f^*(s)) = [s - s_r^*]^+$ mit $V_{T-2}(s) - V_{T-2}(\pi'_{T-2}, s) = 0$ zur Folge hat.

Gelte weiterhin für ein beliebiges $t \leq T - 2$ die *Induktionsannahme*:

$$V(\pi'_t, s) \geq V_t(s) - \varepsilon_t(s), \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

mit der Funktion $\varepsilon_t(s)$ wie in (4.3.7), dann resultiert daraus zunächst mit Hilfe der Isotonie des Integrals

$$\begin{aligned}
EV_t(\pi'_t, s(1+r_f) + B - X_t) + E\varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] \\
\geq EV_t(s(1+r_f) + B - X_t). \quad (4.3.9)
\end{aligned}$$

Für den *Induktionsschritt* ($t \rightarrow t - 1$) ergibt sich vorab

$$V_{t-1}(s) - V_{t-1}(\pi'_{t-1}, s) = V_{t-1}(s) - [s - s_r^*]^+ - EV_t(\pi'_t, (s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t). \quad (4.3.10)$$

Wegen der Konvexität von $L_{t-1}(d)$ betrachten wir zuerst den Fall $r_{t-1}(s, f^*(s)) = 0$ und es gilt für (4.3.10):

$$\begin{aligned}
V_{t-1}(s) - V_{t-1}(\pi'_{t-1}, s) \\
&= EV_t(s(1+r_f) + B - X_t) - [s - s_r^*]^+ - EV_t(\pi'_t, (s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t) \\
&\stackrel{(4.3.9)}{\leq} EV_t(\pi'_t, s(1+r_f) + B - X_t) + E\varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] \\
&\quad - [s - s_r^*]^+ - EV_t(\pi'_t, (s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t) \quad (4.3.11)
\end{aligned}$$

Mit $s \geq s_r^*$ folgt für (4.3.11)

$$\begin{aligned}
V_{t-1}(s) - V_{t-1}(\pi'_{t-1}, s) &\leq E[s(1+r_f) + B - X_{T-1} - s_r^*]^+ + E\varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] \\
&\quad - [s - s_r^*]^+ - E[s_r^*(1+r_f) + B - X_{T-1} - s_r^*]^+ \\
&\stackrel{wg.(1)}{=} r_f \cdot [s - s_r^*]^+ + E\varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] = \varepsilon_{t-1}(s)
\end{aligned}$$

und andernfalls mit $s < s_r^*$

$$\begin{aligned} V_{t-1}(s) - V_{t-1}(\pi'_{t-1}, s) &\leq EV_t(\pi'_t, s(1+r_f) + B - X_t) + E \varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] \\ &\quad - [s - s_r^*]^+ - EV_t(\pi'_t, s(1+r_f) + B - X_t) \\ &= r_f \cdot [s - s_r^*]^+ + E \varepsilon_t[s(1+r_f) + B - X_t] = \varepsilon_{t-1}(s). \end{aligned}$$

Für den Fall $r_{t-1}(s, f^*(s)) = [s - s_r^*]^+$ ergibt sich für (4.3.10):

$$\begin{aligned} &V_{t-1}(s) - V_{t-1}(\pi'_{t-1}, s) \\ &= [s - s_r^*]^+ + EV_t((s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t) - [s - s_r^*]^+ \\ &\quad - EV_t(\pi'_t, (s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t) \\ &\stackrel{(4.3.9)}{\leq} E \varepsilon_t[(s - [s - s_r^*]^+) \cdot (1+r_f) + B - X_t] \\ &= \begin{cases} E \varepsilon_t[s_r^* \cdot (1+r_f) + B - X_t] = \varepsilon_{t-1}(s_r^*) \leq \varepsilon_{t-1}(s) & \text{falls } s \geq s_r^*, \\ E \varepsilon_t[s \cdot (1+r_f) + B - X_t] + r_f \cdot [s - s_r^*]^+ = \varepsilon_{t-1}(s) & \text{falls } s < s_r^*, \end{cases} \end{aligned}$$

und somit insgesamt die Gültigkeit von (4.3.8). ■

Beispiel B.1.e (Fortsetzung von Beispiel B.1.d)

Mit den Werten aus Beispiel B.1.d ergibt sich die $\varepsilon(s)$ -Optimalität der Politik $\pi' = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit $f(s) := [s - s_r^*]^+$ und $s_r^* = 6.94$ zu der Schranke $\varepsilon(s)$ mit

$$\varepsilon(s) = r_f \cdot [s - s_r^*]^+ + \sum_{n=1}^3 r_f \cdot E_{X_{(n)}}[\tilde{S}_n - s_r^*]^+$$

und somit $\varepsilon(10.06) = 0.76186$, wobei die entsprechenden Größen der folgenden Tabelle zu entnehmen sind. Zudem illustriert die Abbildung 4.7 den Verlauf der Schrankenwerte

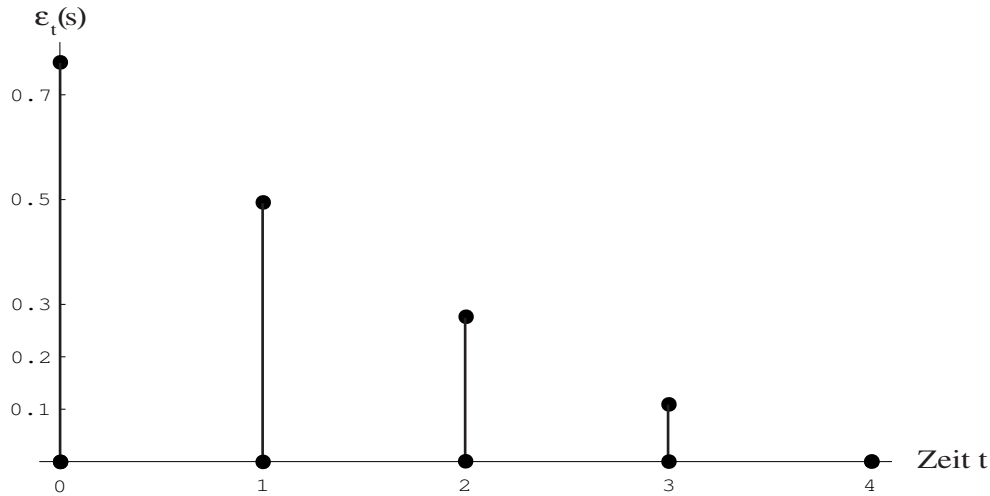
Summanden	Betrag
$r_f \cdot [s - s_r^*]^+$	0.1092
$E_{X_{(3)}}[s(1+r_f) + B - X_3 - s_r^*]^+$	0.167224
$E_{X_{(2)}}[s(1+r_f)^2 + (1+r_f)(B - X_2) + B - X_3 - s_r^*]^+$	0.218166
$E_{X_{(1)}}[s(1+r_f)^3 + (1+r_f)^2(B - X_1) + (1+r_f)(B - X_2) + B - X_3 - s_r^*]^+$	0.26727

Tabelle 4.7: Summanden der $\varepsilon(s)$ -Schranke bei exponential(0.25)-verteilten Schäden

$\varepsilon_t(s)$ für den Zeithorizont $T = 5$.

Aufgrund der Gleichheit von $V(\pi'_4, s) = V_4(s)$ folgt $\varepsilon_4(s) = 0$ und je weiter wir uns dem Startzeitpunkt $t = 0$ nähern, desto höher fällt der Betrag der $\varepsilon_t(s)$ -Schranke aus. Damit ist die $\varepsilon(s)$ -Optimalität von π'_t durch einen der beiden Punkte gemäß Abbildung 4.7 zu jedem Zeitpunkt $t \leq 3$ gekennzeichnet.

Abbildung 4.7: $\varepsilon(s)$ -optimale Schranken für exponential(0.25)-verteilten Schaden und $T=5$



4.3.3 Dynamische Wahl der Kapitalanlage

An dieser Stelle wollen wir das Ausschüttungsmodell mit Kapitalanlage dahingehend verallgemeinern, dass zu jedem Entscheidungszeitpunkt eine Investitionsentscheidung zu treffen ist, welche in ähnlicher Weise zu der Arbeit von Assaf/Baryshnikov/Stadje[8] durch Wahl einer Verteilung aus einer Familie von Verteilungen charakterisiert ist. Jede Zufallsvariable mit solch einer Verteilung steht daher für eine stochastische Kapitalanlagemöglichkeit.

Dabei nutzen wir die Tatsache aus, dass die deterministischen Parameter für die Auszahlungen durch das *Dirac-Maß* dargestellt werden können. Zudem wollen wir die Kapitalerträge nach oben beschränken, so dass die Existenz einer optimalen Politik einfacher nachzuweisen ist.

Definition 4.3.8 (*Ausschüttungsmodell mit Wahl der Kapitalanlage*)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), Q, r)$ heißt Markovsches Ausschüttungsmodell mit Wahl der Kapitalanlage auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$, wobei die Größen wie folgt festgelegt sind:

- $(\mathcal{S}, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Zustandsraum für das Kapital.
- $\mathcal{A} := \{\delta_d \otimes \mu_R\}$ sei der Aktionsraum und beinhaltet alle relevanten Produktmaße auf \mathbb{R}_+^2 , wobei δ_d ein Dirac-Maß mit Träger $\{d\}$ für die Dividendenausschüttung darstellt, welche nur Werte zwischen 0 und s^+ annehmen darf, und μ_R das (induzierte) W -Maß für eine Zufallsvariable R auf einer beschränkten und konvexen Menge $\mathfrak{R} := [0, r_{max}] \subset \mathbb{R}_+$ mit $r_{max} > 0$ ist.
- $\mathcal{A}(s) = \{\delta_d \otimes \mu_R \in \mathcal{A} \mid \mathbf{P}([s - d]R + B - X_0 \leq 0) \leq \gamma\} \cup \{\delta_{d=0} \otimes \delta_{R=\dot{r}}\} \neq \emptyset$ sei die Menge der zulässigen Aktionen für ein $\gamma \in (0, 1)$, wobei $\dot{r}(s) < 1$ eine reelle

Zahl in Abhängigkeit des Kapitalstands ist und als Strafkostensatz bei Verletzung des Sicherheitsziels zu interpretieren ist.

- Q sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{S} und ist mittels der messbaren Systemfunktion $F(s, d, B, R, X_0) := (s - d) \cdot R + B - X_0$ definiert durch

$$\begin{aligned} & Q(C|s, \delta_d \otimes \mu_R) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_C\{F(s, y, B, r, x)\} d(\delta_d \otimes \mu_R \otimes \mu_{X_0})(y, r, x), (s, \delta_d \otimes \mu_R) \in \mathcal{S} \times \mathcal{A}, C \in \mathfrak{G}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ wie bisher eine Folge von nichtnegativen und reellen iid.-Zufallsvariablen (auch unabhängig von R) mit endlichem Erwartungswert. Für einen Repräsentanten dieser Folge schreiben wir X_0 und μ_{X_0} bezeichne die zugehörige Verteilung.

- Die einperiodige Erlösfunktion

$$r(s, \delta_d \otimes \mu_R) := \int \mu_R(dr) \int \delta_d(dy) pr_y(y, r) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq s+\}} = d$$

ist eine nichtnegative Abbildung von \mathbb{K} nach \mathbb{R}_+ mit der Projektion $pr_y(y, r)$ auf die y -Komponente.

Mit den topologischen Hilfsmitteln aus Anhang B zeigen wir zunächst die Kompaktheit der Menge $\mathcal{A}(s)$.

Lemma 4.3.9 Sei $|s| < \infty$ gegeben und $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}_1^R(s) \cup \mathcal{A}_2^R(s)$ gemäß Definition 4.3.8 die Menge der zulässigen Aktionen mit $\mathcal{A}_1^R(s) := \{\delta_d \otimes \mu_R \in \mathcal{A} | \mathbf{P}([s - d]R + B - X_0 \leq 0) \leq \gamma\}$ und $\mathcal{A}_2^R(s) := \{\delta_{d=0} \otimes \delta_{R=r}\}$. Dann ist die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt.

Beweis: Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{A}_2^R(s)$ reicht es für den Fall $\mathcal{A}_1^R(s) \neq \emptyset$ aus, die Kompaktheit dieser Menge zu betrachten, da die Vereinigung von zwei kompakten Mengen wieder kompakt ist und andernfalls $\emptyset \cup \mathcal{A}_2^R(s) = \mathcal{A}_2^R(s)$ gilt.

Zunächst sei erwähnt, dass $\mathcal{A}_1^R(s)$ straff ist, weil nach Billingsley[17](S. 37) eine beliebige Familie von W-Maßen auf \mathbb{R}^2 - und somit auch auf \mathbb{R}_+^2 - straff ist. Infolgedessen ergibt sich nach dem Satz von Prohorov die relative Kompaktheit von $\mathcal{A}_1^R(s)$.

Die Behauptung folgt dann aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}_1^R(s)$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini gilt

$$\mathbf{P}([s - d]R + B - X_0 \leq 0) = \int \left(\int \mathbb{1}_{\{(s-y)r+B-x \leq 0\}} \mu_{X_0}(dx) \right) d(\delta_d \otimes \mu_R)(y, r),$$

und demzufolge ist das lineare Funktional

$$I_{\bar{u}}(\delta_d \otimes \mu_R) : (\delta_d \otimes \mu_R) \mapsto \mathbf{P}([s - d]R + B - X_0 \leq 0)$$

stetig bezüglich der schwachen Topologie. Dabei ist $\tilde{u}(y, r) := \int \mathbb{1}_{\{(s-y)r+B-x \leq 0\}} \mu_{X_0}(dx)$ aufgrund des *Stetigkeitslemmas* (s. Lemma A.4) eine beschränkte, reellwertige und stetige Funktion auf \mathbb{R}_+^2 . Somit ist die Menge

$$C_{\tilde{u}} := \left\{ (\delta_d \otimes \mu_R) : \int \tilde{u}(y, r) d(\delta_d \otimes \mu_R) \leq \gamma \right\}$$

für jedes \tilde{u} abgeschlossen. Wegen

$$\mathcal{A}_1^R(s) = \bigcap_{0 \leq \tilde{u} \leq 1} C_{\tilde{u}}$$

ist die Menge $\mathcal{A}_1^R(s)$ auch abgeschlossen, da ein beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist. ■

Mit Hilfe von Lemma 4.3.9 sind wir nun in der Lage, für das Optimierungsproblem

$$V^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} V_\pi(s) \quad \text{mit} \quad V_\pi(s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} r(S_t, \delta_{d \in [0, S_t^+]} \otimes \mu_R) \right]$$

zumindest die Existenz einer optimalen (Markov-)Politik nachzuweisen.

Satz 4.3.10 *Es sei ein Markovsches Ausschüttungsmodell mit dynamischer Wahl der Kapitalanlage wie in Definition 4.3.8 gegeben und es gelte für $0 \leq t \leq T-1$ und $s \in \mathcal{S}$ die (zugehörige) Optimalitätsgleichung*

$$V_t(s) = \max_{(\delta_d \otimes \mu_R) \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, \delta_d \otimes \mu_R) + \int V_{t+1}([s-y]r+B-x) d(\delta_d \otimes \mu_R \otimes \mu_{X_0})(y, r, x) \right\} \quad (4.3.12)$$

mit $V_T \equiv 0$. Dann ist die Funktion auf der rechten Seite von (4.3.12) messbar und es existiert eine optimale Entscheidungsregel.

Beweis: Zunächst gilt, dass die kompakten Mengen $\mathcal{A}(s)$ nach Bauer[9](§ 25) Borelsche (Teil-)Mengen darstellen. Demnach folgt die (Borel-)Messbarkeit von

$$\mathbb{K} := \{(s, \delta_d \otimes \mu_R) \mid s \in \mathcal{S}, \delta_d \otimes \mu_R \in \mathcal{A}(s)\}.$$

Mit der Kompaktheit von $\mathcal{A}(s)$ nach Lemma 4.3.9 sind dann in Analogie zu dem *allgemeinen Selektionssatz* 2.1.10 für alle $s \in \mathcal{S}$ noch folgende Eigenschaften zu zeigen:

1. die Stetigkeit der einperiodigen Erlösfunktion $r(s, \delta_d \otimes \mu_R)$ auf $\mathcal{A}(s)$,
2. die Stetigkeit der Funktion $\int V_{t+1}([s-y]r+B-x) d(\delta_d \otimes \mu_R \otimes \mu_{X_0})(y, r, x)$ auf $\mathcal{A}(s)$.

Dabei gehen wir o.B.d.A. davon aus, dass $\mathcal{A}(s) \neq \{\delta_{d=0} \otimes \delta_{R=r}\}$ gilt.

- Die Stetigkeit der einperiodigen Erlösfunktion $r(s, \delta_d \otimes \mu_R)$ auf $\mathcal{A}(s)$ ergibt sich für festes $(\delta_d \otimes \mu_R) \in \mathcal{A}(s)$ durch

$$\begin{aligned} r(s, \delta_d \otimes \mu_R) &= \int pr_y(y, r) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq s+\}} d(\delta_d \otimes \mu_R)(y, r) \\ &= \int \underbrace{\left(pr_y(y, r) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq s+\}} + s^+ \cdot \mathbb{1}_{\{y > s+\}} \right)}_{=: \dot{u}(y, r)} d(\delta_{d \in [0, s+]} \otimes \mu_R)(y, r), \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

d.h. die Funktion $pr_y(y, r) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq s+\}}$ lässt sich auf \mathbb{R}_+^2 so stetig fortsetzen, dass sich der Wert der Erlösfunktion wegen $\int s^+ \cdot \mathbb{1}_{\{y > s+\}} d(\delta_{d \in [0, s+]} \otimes \mu_R)(y, r) = 0$ nicht verändert. Damit ist die Funktion $\dot{u}(y, r)$ ein Element von $C_b(\mathbb{R}_+^2)$, d.h. der Menge aller beschränkten, stetigen und reellwertigen Funktionen auf \mathbb{R}_+^2 , und $r(s, \delta_d \otimes \mu_R)$ ist bzgl. der schwachen Topologie stetig auf $\mathcal{A}(s)$.

- Die Stetigkeit von $\int V_{t+1}([s - y]r + B - x) d(\delta_d \otimes \mu_R \otimes \mu_{X_0})(y, r, x)$ auf $\mathcal{A}(s)$ ist für alle $t = 0, \dots, T - 2$ mit Hilfe von

$$\int \left(\int V_{t+1}([s - y]r + B - x) \mu_{X_0}(dx) \right) d(\delta_d \otimes \mu_R)(y, r) \quad (4.3.14)$$

durch $\check{u}_t(y, r) := \int V_{t+1}([s - y]r + B - x) \mu_{X_0}(dx) \in C_b(\mathbb{R}_+^2)$ für alle $t = 0, \dots, T - 2$ per absteigender Induktion zu zeigen, denn dadurch ist (4.3.14) auch stetig bzgl. der schwachen Topologie.

Der *Induktionsanfang* für $t = T - 2$ ergibt sich durch

$$\check{u}_{T-2}(y, r) = \int V_{T-1}([s - y]r + B - x) \mu_{X_0}(dx) = \int r([s - y]r + B - x, \delta_d \otimes \mu_R) \mu_{X_0}(dx),$$

denn mit Hilfe einer Hintereinanderschaltung von stetigen Abbildungen

$$(y, r) \mapsto [s - y]r + B - x \mapsto r([s - y]r + B - x, \delta_d \otimes \mu_R)$$

ist $\check{u}_{T-2}(y, r)$ stetig auf ganz \mathbb{R}_+^2 für festes x . Unter Hinzunahme der Integrierbarkeits-Eigenschaft $\check{u}_{T-2}(y, r) \leq \int (s \cdot r_{max} + B - x) \mu_{X_0}(dx) < \infty$ ist die Funktion $\check{u}_{T-2}(y, r)$ nach dem *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4) und wegen der Beschränktheit ein Element von $C_b(\mathbb{R}_+^2)$.

Gelte weiterhin die *Induktionsannahme*: $\check{u}_t(y, r) \in C_b(\mathbb{R}_+^2)$ für ein $t \leq T - 2$. Dann ist

$$r(s, \delta_d \otimes \mu_R) + \int \left(\int V_{t+1}([s - y]r + B - x) \mu_{X_0}(dx) \right) d(\delta_d \otimes \mu_R)(y, r) \quad (4.3.15)$$

stetig und beschränkt auf $\mathcal{A}(s)$. Da für festes $(\delta_d \otimes \mu_R) \in \mathcal{A}(s)$ die Funktion in (4.3.15) nach dem *Stetigkeitslemma* stetig in s ist, so gilt dies auch für die Funktion $V_t(s)$ wegen der Existenz eines Maximisators in $\mathcal{A}(s)$.

Der *Induktionsschluss* ($t \rightarrow t - 1$) ergibt sich nun durch die Hintereinanderschaltung von stetigen Abbildungen

$$(y, r) \mapsto [s - y]r + B - x \mapsto V_t([s - y]r + B - x)$$

für beliebige s, x . In Analogie zu (4.3.2) ergibt sich wegen

$$V_t([s - y]r + B - x) \leq s \cdot (r_{max})^{T-t-1} + \sum_{n=t+1}^{T-2} B \cdot (r_{max})^{T-n-1} + B$$

die Stetigkeit von $\check{u}_{t-1}(y, r)$ in (y, r) nach dem *Stetigkeitslemma*. Dadurch folgt auch die Beschränktheit von $\check{u}_{t-1}(y, r)$ auf \mathbb{R}_+^2 , denn es gilt

$$0 \leq \int V_t([s - y]r + B - x) \mu_{X_0}(dx) \leq s \cdot (r_{max})^{T-t-1} + \sum_{n=t+1}^{T-2} B \cdot (r_{max})^{T-n-1} + B.$$

Wegen der Stetigkeit von $V_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ für alle $(\delta_d \otimes \mu_R) \in \mathcal{A}(s)$ entsprechend (4.3.15) und der Existenz eines Maximisators ist diese Funktion auch $\mathfrak{S} - \mathbb{B}_+$ -messbar, wobei $\mathbb{B}_+ := \{\mathbb{R}_+ \cap \tilde{B} : \tilde{B} \in \mathbb{B}\}$ eine Borel- σ -Algebra über \mathbb{R}_+ definiert, denn für alle halboffenen Intervalle $(s', s''] \subset \mathbb{R}_+$ gilt

$$\{s \in \mathcal{S} : s' < V_t(s) \leq s''\} \in \mathfrak{S}$$

und das Mengensystem $\mathcal{G}_+ := \{(s', s''] : s' \leq s'', s' \geq 0\}$ erzeugt gerade die Borel- σ -Algebra \mathbb{B}_+ , was den Beweis vervollständigt. ■

4.4 Das stationäre Gesamtausschüttungsmodell

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse aus den vorherigen Abschnitten zu einem versicherungsunternehmerischen Gesamtmodell mit festen Parametern für den RV-Schutz und die Kapitalanlage zusammenfassen, welches unseren Zielsetzungen (Gewinn, Dividenden, Sicherheit) genügt. Aufgrund der fehlenden Isotonie-Eigenschaft von $L_t(d)$ bei gewissen Erweiterungen des Grundmodells erfolgt die Untersuchung dieses Abschnitts auf einem beschränkten Zeithorizont. Dazu wollen wir zunächst das entsprechende Markovsche Entscheidungsmodell definieren.

Definition 4.4.1 *Es wird folgendes Markovsches Entscheidungsmodell betrachtet, welches im Folgenden (stationäres) Gesamtausschüttungsmodell genannt wird:*

- $T \in \mathbb{N}$ sei der endliche Zeithorizont.
- $(\mathcal{S}, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Zustandsraum für das Kapital.
- $\mathcal{A} = \mathbb{R}_+$ sei der Aktionsraum für die Dividendenzahlung.
- $\mathcal{A}(s) = \{d \in [0, (s - s_G^*)^+]\}$ mit $(s - s_G^*)^+ := \max\{0, s - s_G^*\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s_G^*| < \infty$ eine Konstante ist und für das geforderte Sicherheitsniveau im (Gesamt-)Modell steht.

- Q sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{S} und ist mittels der messbaren Systemfunktion

$$F(s, d, B, m^{(l)}, h(X_{t+1}, m^{(l)}), r_f, w_f) \\ := (s - d)(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)$$

definiert durch

$$Q(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, m^{(l)}, h(x, m^{(l)}), r_f, w_f)\} F_{X_0}(dx), \quad (s, d) \in \mathbb{K}, C \in \mathfrak{G}.$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Folge von nichtnegativen und reellen iid.-Zufallsvariablen, welche eine stetige Verteilungsfunktion $F_X(x)$ und einen endlichen Erwartungswert besitzen. Für einen Repräsentanten dieser Folge schreiben wir wie bisher X_0 . Ferner seien $B(m^{(l)})$ und $h(X_t, m^{(l)})$ messbare Funktionen, die entsprechend Festlegung 4.1.1 oder 4.1.5 bestimmt sind, und $c(r_f, w_f)$ sei eine Funktion von $(0, \infty) \times (0, \infty)$ nach \mathbb{R}_+ . Dabei gibt die Funktion $c(\cdot, \cdot)$ die Kosten eines Zins- und Währungsswaps an.

- Für die einperiodige Erlösfunktion r von \mathbb{K} nach \mathbb{R}_+ gilt $r(s, d) = d$.

Für das Gesamtausschüttungsmodell wollen wir eine weitere Bedingung angeben, welche wie folgt zu interpretieren ist. Würden wir ein (Gesamt-)Modell ohne Kapitalanlage-möglichkeit betrachten, d.h.

$$F(s, d, B, m^{(l)}, h(X_{t+1}, m^{(l)}), w_f) := s - d + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(w_f),$$

so würde das Versicherungsunternehmen mit Wahrscheinlichkeit 1 einen Verlust erwirtschaften, falls $w_f \cdot B(m^{(l)}) < c(w_f)$ gilt. Daraus ergibt sich der Schluß, dass das (im Ausland) umgesetzte Nettoprämienvolumen zumindest den laufenden Kosten des Währungskursswaps entsprechen muss, denn andernfalls wäre keine Gewinnerzielung möglich. Eine Verletzung dieser Bedingung wäre betriebswirtschaftlich unsinnig und würde unseren Zielsetzungen widersprechen.

Da bei der Berücksichtigung einer Kapitalverzinsung auch negative Kapitalzinsen (genau dann, falls $s < 0$) generiert werden dürfen, so wollen wir an dieser Stelle dennoch annehmen, dass die Kosten des Zins- und Währungskursswaps²¹ durch das Prämienvolumen gedeckt sind.

Festlegung 4.4.2 *Im Gesamtausschüttungsmodell gilt folgende Bedingung:*

$$w_f B(m^{(l)}) \geq c(r_f, w_f).$$

Die für die weitere Untersuchung notwendigen Merkmale des Gesamtausschüttungsmodells sind der nachfolgenden Bemerkung zu entnehmen.

²¹ Zu Aufbau, Einsatz und Bewertung von Swap-Verträgen siehe auch Hull[58](§ 7).

Bemerkung 4.4.3 Gemäß Bemerkung 3.1.1 folgt hier für das Gesamtausschüttungsmodell

$$\int_{\mathcal{S}} V(s')Q(ds'|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} V[F(s, d, B, m^{(l)}, h(x, m^{(l)}), r_f, w_f)]F_{X_0}(dx).$$

für jede messbare Funktion V auf \mathbb{R} .

Das Gesamtausschüttungsmodell wie in Definition 4.4.1 behandelt sowohl die Verwendung von Rückversicherungsschutz gemäß Abschnitt 4.1 als auch die in der Praxis gebräuchliche Nutzung von derivativen Absicherungsinstrumenten hinsichtlich der Kapitalanlage und der Wechselkursrate entsprechend Bemerkung 4.3.5 und Kapitel 4.2.2. Der immense Vorteil von den hier betrachteten Zins- und Währungskursswaps besteht in unserem Modell nun darin, dass die Berechnung des Sicherheitsniveaus s_G^* einfacher zu handhaben ist. Das folgende Lemma bestätigt dies.

Lemma 4.4.4 Für jedes Risikomaß $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich ein erforderliches Sicherheitsniveau s_G^* für das Gesamtausschüttungsmodell in Abhängigkeit von der Rückversicherungsart ermitteln. Insbesondere bedeutet das für einen festen Selbstbehalt $m_{\min}^{(l)} \leq m^{(l)} \leq m_{\max}^{(l)}$ und für vorgegebene Werte $0 < \gamma \leq 1$ und $\eta > 0$:

1. Bei der Verwendung von proportionalen RV-Schutz mit $m_{\max} = 1$, $B(m)$ wie in Festlegung 4.1.1 und $h_1(X_t, m) = m \cdot X_t$ gilt, dass

- (a) für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. für den VaR_γ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_{G,1}^*(1+r_f) + w_f[B(m) - m \cdot X_0] - c(r_f, w_f) \leq 0) &\leq \gamma \\ \mathbf{P}(s_{G,1}^* < (c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - m \cdot X_0]) / [1+r_f]) &\leq \gamma \end{aligned}$$

nach $s_{G,1}^*$ zu lösen sind und daraus die folgende Lösung resultiert

$$s_{G,1}^* = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{w_f[m \cdot F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f} \right\},$$

- (b) für den TailVaR folgt

$$s_{G,2}^* = E \left[\frac{c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - mX_0]}{1+r_f} \mid \frac{c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - mX_0]}{1+r_f} > VaR_\gamma \right]$$

und mit der Zusatzannahme der Stetigkeit und strikten Isotonie von F_{X_0} dann weiterhin gilt

$$s_{G,2}^* = \frac{w_f}{(1+r_f)\gamma} \left(m \cdot \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x F_{X_0}(dx) + \gamma[c(r_f, w_f)/w_f - B(m)] \right),$$

(c) für den EPD die Gleichung

$$E[(w_f[m \cdot X_0 - B(m)] + c(r_f, w_f))/(1 + r_f) - s_{G,3}^*]^+ = \eta$$

zu lösen ist und ein eindeutiger (von F_{X_0} abhängiger) Wert $s_{G,3}^*$ existiert.

2. Bei der Verwendung von nichtproportionalen RV-Schutz mit $m'_{max} = \infty$, $B(m')$ wie in Festlegung 4.1.5 und $h_2(X_t, m') = \min\{m', X_t\}$ gilt, dass

(a) für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. für den VaR_γ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_{G,1'}^*(1 + r_f) + w_f[B(m') - h_2(X_0, m')] - c(r_f, w_f) \leq 0) &\leq \gamma \\ \mathbf{P}(s_{G,1'}^* < (c(r_f, w_f) - w_f[B(m') - h_2(X_0, m')])/(1 + r_f)) &\leq \gamma \end{aligned}$$

nach $s_{G,1'}^*$ zu lösen sind und sich folgende Lösung ergibt:

$$s_{G,1'}^* = \begin{cases} \frac{w_f}{1+r_f} [F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f] & \text{falls } m' > F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \\ \frac{w_f}{1+r_f} [m' - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f] & \text{sonst,} \end{cases}$$

(b) für den TailVaR mit der messbaren Funktion

$$\zeta(X_0) := (c(r_f, w_f) + w_f[B(m') - h_2(X_0, m')])/(1 + r_f)$$

folgt

$$s_{G,2'}^* := E[\zeta(X_0) | \zeta(X_0) > VaR_\gamma]$$

und mit der Stetigkeit und strikten Isotonie von F_{X_0} dann weiterhin gilt

$$s_{G,2'}^* = \begin{cases} \frac{w_f}{(1+r_f)^\gamma} \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{m'} x F_{X_0}(dx) \\ + \frac{w_f}{(1+r_f)^\gamma} \left[\frac{c(r_f, w_f)}{w_f} - B(m') \right] (F_{X_0}(m') - 1 + \gamma) & \text{falls } m' \leq F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(c) für den EPD die Gleichung

$$E[(w_f[h_2(X_0, m') - B(m')] + c(r_f, w_f))/(1 + r_f) - s_{G,3'}^*]^+ = \eta$$

zu lösen ist und die näherungsweise Bewertung des Wertes $s_{G,3'}^*$ daher erfolgt durch

$$s_{G,3'}^* = \begin{cases} \frac{m' \cdot w_f (1+r_f)^{-1} - \eta}{1 - F_{X_0}(m')} + \frac{c(r_f, w_f) - w_f B(m')}{1+r_f} & \text{falls } \eta > m' \cdot w_f \cdot F_{X_0}(m')/(1 + r_f), \\ \frac{[m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)}{1+r_f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Wir beweisen zunächst Teil 1. Für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit folgt nach ein paar Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(s_{G,1}^*(1+r_f) + w_f[B(m) - m \cdot X_0] - c(r_f, w_f) \leq 0) &\leq \gamma \\ \mathbf{P}(-m \cdot X_0 \leq [-s_{G,1}^*(1+r_f) + c(r_f, w_f)]/w_f - B(m)) &\leq \gamma \\ \mathbf{P}(X_0 \geq [s_{G,1}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f)][m \cdot w_f]^{-1} + B(m)/m) &\leq \gamma \end{aligned}$$

und daraus wiederum ergibt sich für den Wert $s_{G,1}^*$:

$$s_{G,1}^* \geq \frac{w_f[m \cdot F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f}.$$

Da der VaR_γ ein Quantilmaß ist, genügt der Wert $s_{G,1}^*$ mit

$$s_{G,1}^* = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{w_f[m \cdot F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f} \right\}$$

insgesamt den Forderungen von Teil 1a.

Für den $TailVaR$ aus Teil 1b ergibt sich wegen Teil 1a

$$\begin{aligned} s_{G,2}^* &= E \left[\frac{c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - mX_0]}{1+r_f} \mid \frac{c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - mX_0]}{1+r_f} > VaR_\gamma \right] \\ &\stackrel{(*)}{=} E \left[\frac{c(r_f, w_f) - w_f[B(m) - mX_0]}{1+r_f} \mid X_0 > F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) \right] \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 > F_{X_0}^{-1}(1-\gamma))} \cdot \frac{w_f}{1+r_f} \cdot \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} (m \cdot x - B(m) + c(r_f, w_f)/w_f) dF_{X_0}(x) \\ &= \frac{w_f}{\gamma(1+r_f)} \left(m \cdot \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x F_{X_0}(dx) + \gamma[c(r_f, w_f)/w_f - B(m)] \right), \end{aligned}$$

wobei (*) aus der Stetigkeit und strikten Isotonie von F_{X_0} resultiert.

Den Nachweis von Teil 1c liefert der *Fixpunktsatz von Banach*. Dazu vereinfachen wir zunächst den Erwartungswert $E[(w_f[m \cdot X_0 - B(m)] + c(r_f, w_f))/(1+r_f) - s_{G,3}^*]^+$:

$$\begin{aligned} &E[(w_f[m \cdot X_0 - B(m)] + c(r_f, w_f))/(1+r_f) - s_{G,3}^*]^+ \\ &= \int_{\frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f}}^{\infty} \left(\frac{w_f[m \cdot x - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f} - s_{G,3}^* \right) dF_{X_0}(x) \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{w_f[m \cdot x - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f} - s_{G,3}^* \right) dF_{X_0}(x) \\ &\quad - \int_0^{\frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f}} \left(\frac{w_f[m \cdot x - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1+r_f} - s_{G,3}^* \right) dF_{X_0}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{w_f[m \cdot E[X_0] - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1 + r_f} - s_{G,3}^* \\
&\quad - \int_0^{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)} \frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f} \left(\frac{w_f[m \cdot x - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1 + r_f} - s_{G,3}^* \right) dF_{X_0}(x) \\
&= \frac{w_f[m \cdot E[X_0] - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1 + r_f} - s_{G,3}^* + \frac{w_f \cdot m}{1 + r_f} \int_0^{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)} \frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f} F_{X_0}(x) dx,
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen durch partielle Integration erfolgt. Infolgedessen hat die Fixpunktgleichung $s_{G,3}^* = \varphi(s_{G,3}^*)$ mit

$$\varphi(s_{G,3}^*) := \frac{w_f[m \cdot E[X_0] - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1 + r_f} + \frac{w_f \cdot m}{1 + r_f} \cdot \int_0^{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)} \frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f} F_{X_0}(x) dx.$$

nach dem Fixpunktsatz genau eine Lösung $s_{G,3}^*$, da die differenzierbare Funktion $\varphi(s_{G,3}^*)$ mit

$$|\varphi'(s_{G,3}^*)| = F_{X_0} \left(\frac{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m)}{m \cdot w_f} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{s_{G,3}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m) \geq 0\}} < 1$$

eine Kontraktion ist.

Für den Beweis von Teil 2a betrachten wir zunächst die Herleitung für die Ruinwahrscheinlichkeit. Es gilt mit $h_2(X_0, m') := \min\{m', X_0\} = m' - (m' - X_0)^+$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(s_{G,1'}^*(1+r_f) + w_f[B(m') - h_2(X_0, m')] - c(r_f, w_f) \leq 0) \\
&= \mathbf{P}\left(\min\{m', X_0\} \geq B(m') + \frac{1+r_f}{w_f} s_{G,1'}^* - c(r_f, w_f)/w_f\right) \\
&= \mathbf{P}\left((m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - \frac{1+r_f}{w_f} s_{G,1'}^* + c(r_f, w_f)/w_f\right) \tag{4.4.1}
\end{aligned}$$

Für den Fall $m' < B(m') + (1+r_f) \cdot s_{G,1'}^*/w_f - c(r_f, w_f)/w_f$ gilt für (4.4.1):

$$\mathbf{P}\left((m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - \frac{1+r_f}{w_f} s_{G,1'}^* + c(r_f, w_f)/w_f\right) = 0 (\leq \gamma)$$

und daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
s_{G,1'}^* &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} : x > \left[m' - B(m') + \frac{c(r_f, w_f)}{w_f}\right] \cdot \frac{w_f}{1+r_f}\right\} \\
&= \left[m' - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f\right] \cdot \frac{w_f}{1+r_f}.
\end{aligned}$$

Andernfalls folgt mit $m' \geq B(m') + (1+r_f) \cdot s_{G,1'}^*/w_f - c(r_f, w_f)/w_f$ für (4.4.1):

$$\mathbf{P}\left((m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - \frac{1+r_f}{w_f} s_{G,1'}^* + c(r_f, w_f)/w_f\right) \leq \gamma \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{P}\left(X_0 \geq m' - B(m') - \frac{1+r_f}{w_f} s_{G,1'}^* + c(r_f, w_f)/w_f\right) \leq \gamma,$$

da sonst $\mathbf{P}\{(m' - X_0)^+ \leq m' - B(m') - (1+r_f) \cdot s_{G,1'}^* \cdot w_f^{-1} + c(r_f, w_f)/w_f\} = 0$ gelten würde. Insgesamt ergibt sich daher

$$[m' - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f] \frac{w_f}{1+r_f} \geq s_{G,1'}^* \geq \frac{w_f}{1+r_f} [F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f].$$

Daraus resultiert der folgende kleinste Wert für $s_{G,1'}^*$:

$$s_{G,1'}^* = \frac{w_f}{1+r_f} \cdot [F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m') + c(r_f, w_f)/w_f],$$

falls $m' > F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)$ gilt. Dasselbe Resultat ergibt sich auch für den VaR_γ wegen

$$\gamma \geq \rho_{VaR_\gamma}(\{c(r_f, w_f) - w_f[B(m') - (m' - (m' - X_0)^+)]\}/[1+r_f]).$$

Mit der Hilfsfunktion $\zeta(X_0) := (c(r_f, w_f) + w_f[B(m') - h_2(X_0, m')])/(1+r_f)$ ergibt sich für den Teil 2b vorab:

$$\begin{aligned} s_{G,2'}^* &= E\left[\zeta(X_0) \mid \zeta(X_0) \geq VaR_\gamma\right] \\ &= E\left[\zeta(X_0) \mid \min\{m', X_0\} \geq \frac{c(r_f, w_f) - w_f B(m') - (1+r_f) VaR_\gamma}{w_f}\right] \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Gilt weiterhin $m' > F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)$, so folgt wegen $VaR_\gamma = \frac{w_f}{1+r_f} \cdot [F_{X_0}^{-1}(1-\gamma) - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}]$ gemäß Teil 2a für (4.4.2):

$$\begin{aligned} &E[\zeta(X_0) \mid \min\{m', X_0\} \geq F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)] \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq F_{X_0}^{-1}(1-\gamma))} \frac{w_f}{1+r_f} \int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} [\min\{m', x\} - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}] dF_{X_0}(x) \\ &= \frac{w_f}{\gamma(1+r_f)} \cdot \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{m'} [x - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}] dF_{X_0}(x) \right. \\ &\quad \left. + [m' - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}][1 - F_{X_0}(m')] \right) \\ &= \frac{w_f}{\gamma(1+r_f)} \cdot \left(\int_{F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)}^{m'} x dF_{X_0}(x) - \gamma[B(m') - c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}] + m'[1 - F_{X_0}(m')] \right). \end{aligned}$$

Für den Fall $m' \leq F_{X_0}^{-1}(1-\gamma)$ gilt für (4.4.2):

$$\begin{aligned} s_{G,2'}^* &= E[\zeta(X_0) \mid \min\{m', X_0\} \geq m'] \\ &= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq m')} \cdot \frac{w_f}{1+r_f} \cdot \int_{m'}^{\infty} [\min\{m', x\} - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}] dF_{X_0}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbf{P}(X_0 \geq m')} \cdot \frac{w_f}{1+r_f} \cdot ([m' - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}][1 - F_{X_0}(m')]) \\
&= m' - B(m') + c(r_f, w_f) \cdot w_f^{-1}
\end{aligned}$$

und somit die Gleichheit von $s_{G,2'}^* = s_{G,1'}^*$ für diesen Fall.

Der Beweis von Teil 2c erfolgt für $\eta > 0$ durch

$$\begin{aligned}
&E[(w_f[h_2(X_0, m') - B(m')] + c(r_f, w_f))/(1+r_f) - s_{G,3'}^*]^+ \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \left(([m' - (m' - x)\mathbb{1}_{\{x \leq m'\}} - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)) \cdot (1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^* \right)^+ dF_{X_0}(x) \\
&= \int_0^{m'} \left(([x - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)) \cdot (1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^* \right)^+ dF_{X_0}(x) \\
&\quad + \int_{m'}^\infty \left(([m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)) \cdot (1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^* \right)^+ dF_{X_0}(x) \leq \eta. \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die linke Seite der Ungleichung (4.4.3) Null ergibt, falls $m' \leq [s_{G,3'}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m')] \cdot w_f^{-1}$ gilt, d.h. $s_{G,3'}^* = \{[m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)\} \cdot (1+r_f)^{-1}$ ist der kleinste Wert, für den diese Bedingung erfüllt ist. Für den umgekehrten Fall ($m' > [s_{G,3'}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m')] \cdot w_f^{-1}$) ergibt sich für (4.4.3):

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{s_{G,3'}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m')}{w_f}} \left(([x - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)) \cdot (1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^* \right) dF_{X_0}(x) \\
&\quad + [([m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f))(1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^*] \cdot [1 - F_{X_0}(m')] \\
&= -\frac{w_f}{1+r_f} \cdot \int_0^{\frac{s_{G,3'}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m')}{w_f}} F_{X_0}(x) dx \\
&\quad + [([m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f))(1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^*] \cdot [1 - F_{X_0}(m')] \\
&\leq [([m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f))(1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^*] \cdot [1 - F_{X_0}(m')] \\
&\leq \frac{m' \cdot w_f}{1+r_f} + [(c(r_f, w_f) - w_f B(m'))(1+r_f)^{-1} - s_{G,3'}^*] \cdot [1 - F_{X_0}(m')] \quad (\leq \eta), \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

wobei das Gleichheitszeichen mittels partieller Integration erfolgt. Daher resultiert aus (4.4.4) und $m' > [s_{G,3'}^*(1+r_f) - c(r_f, w_f) + w_f B(m')] \cdot w_f^{-1}$ die Ungleichungskette

$$\frac{[m' - B(m')]w_f + c(r_f, w_f)}{1+r_f} > s_{G,3'}^* \geq \frac{m' \cdot w_f \cdot (1+r_f)^{-1} - \eta}{1 - F_{X_0}(m')} + \frac{c(r_f, w_f) - w_f B(m')}{1+r_f},$$

welche dann die näherungsweise kleinste Lösung

$$s_{G,3'}^* = \frac{m' \cdot w_f (1+r_f)^{-1} - \eta}{1 - F_{X_0}(m')} + \frac{c(r_f, w_f) - w_f \cdot B(m')}{1+r_f}$$

zulässt, falls $\eta > m' \cdot w_f \cdot F_{X_0}(m')/(1+r_f)$ gilt. ■

Bevor die Untersuchung im Gesamtausschüttungsmodell erfolgt, wollen wir ein hilfreiches Mittel herleiten, welches uns später von Nutzen sein wird. Es handelt sich dabei um die Darstellung des zukünftigen Zustands $s_{t:t'}$ zum Zeitpunkt $t' \geq t$, welcher sich aus dem (Anfangs-)Zustand s_t zu einem beliebigen Zeitpunkt $t < T - 1$ und der gültigen Systemfunktion ergibt, falls der Schadensverlauf vollständig bekannt sei.

Hilfssatz 4.4.5 *Gegeben sei das Gesamtausschüttungsmodell wie in Definition 4.4.1 mit $t \in \{0, \dots, T - 1\}$. Weiterhin liegen Realisationen $X_1(\omega) = x_1, \dots, X_{T-1}(\omega) = x_{T-1}$ vor, außerdem sei $\pi_t = (d_t, \dots, d_{T-2})$ eine beliebige Politik. Dann gilt für alle t' mit $t' \in \{t, \dots, T - 1\}$:*

$$s_{t:t'} = s_t(1+r_f)^{t'-t} + \sum_{n=t}^{t'-1} (1+r_f)^{t'-1-n} (w_f[B(m^{(n)}) - h(x_{n+1}, m^{(n)})] - c(r_f, w_f) - (1+r_f)d_n). \quad (4.4.5)$$

Beweis: Der Beweis erfolgt durch mehrmaliges Anwenden der Systemfunktion. ■

Nun können wir im Gesamtausschüttungsmodell eine optimale (Markov-)Politik herleiten, falls die (total) erwarteten Dividendenausschüttungen maximiert werden sollen, also:

$$V_\pi(s) := E_\pi^s \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_t(S_t) \right], \quad V^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} V_\pi(s), s \in \mathcal{S}.$$

Satz 4.4.6 *Gegeben sei das Gesamtausschüttungsmodell wie in Definition 4.4.1 mit Bemerkung 4.4.3 und $w_f B(m^{(l)}) \geq c(r_f, w_f)$. Ferner sei das geforderte Sicherheitsniveau s_G^* endlich und entsprechend Lemma 4.4.4 bestimmt. Seien weiterhin V_0, \dots, V_T rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + EV_{t+1}[(s-d) \cdot (1+r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)] \right\} \quad (4.4.6)$$

für $s \in \mathcal{S}$, $0 \leq t \leq T - 1$ und $V_T(s) \equiv 0$, dann folgt:

1. Die Funktionen V_t von (4.4.6) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die deterministische (Markov-)Politik $\pi^* = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1}))$ mit

$$f_t(s) := \begin{cases} s - s_G^* & \text{falls } s > s_G^*, L_t(s - s_G^*) \geq L_t(0), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.4.7)$$

und $L_t(d) := d + EV_{t+1}[(s-d) \cdot (1+r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)]$ ist optimal bzgl. der maximal erwarteten Dividendenausschüttungen.

Beweis: Die Gestalt der Funktionen V_t leitet sich aus der Zielfunktion und dem Übergangsgesetz des Gesamtausschüttungsmodells aus Definition 4.4.1 gemäß des Hauptsatzes der Dynamischen Programmierung (Satz 2.1.8) und Bemerkung 4.4.3 ab. Die in Teil 1 behauptete Messbarkeit und Existenz eines Maximisators ist u.a. wegen $\mathbb{K} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}$ durch Satz 2.1.11 gesichert, wobei die Stetigkeit des Übergangsgesetzes zum Schluß nachgewiesen wird.

Für den Beweis von Teil 2 gilt es zu zeigen, dass die Funktionen

$$L_t(d) := d + EV_{t+1}[(s - d) \cdot (1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)]$$

konvex in d sind, denn daraus resultiert die Optimalität der Entscheidungsregel $f_t(s)$ wie in (4.4.7). Daher weisen wir per absteigender Induktion nach, dass die Funktionen $L_t(d)$ für alle $t = 0, \dots, T - 1$ konvex in d sind.

Der *Induktionsanfang* erfolgt sofort mit $L_{T-1}(d) = d + EV_T(\cdot) = d$.

Weiterhin gelte für ein $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass die Funktion $L_t(d)$ konvex in d sei. Dann ergibt sich für die Wertfunktion $V_t(s)$ zu diesem Zeitpunkt

$$V_t(s) = \begin{cases} s - s_G^* & \text{falls } s > s_G^*, \\ +EV_{t+1}[s_G^*(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)] & L_t(s - s_G^*) \geq L_t(0), \\ EV_{t+1}[s(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)] & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.4.8)$$

und somit die Konvexität dieser Funktion in s .

Für den *Induktionsschritt* $t \rightarrow t - 1$ zeigen wir nun die Konvexität der Funktion

$$EV_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_t, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)]$$

in d , denn daraus ergibt sich die Konvexität der Funktion $L_{t-1}(d)$. Zunächst gilt nach Hilfssatz 4.1.12 (Teil 1 und 2) die Konvexität der Funktion

$$V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})] - c(r_f, w_f)]$$

in d wegen der Konvexität der Funktion $V_t(s)$ in s für ein festes ω . Ist schließlich die Funktion $V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})] - c(r_f, w_f)]$ integrierbar bzgl. ω , so ist auch der Erwartungswert dieser Funktion nach Hilfssatz 4.1.12 (Teil 3) konvex in d , was den Beweis vervollständigen würde. Die Integrierbarkeit leitet sich durch die folgende integrierbare Majorante ab, denn es gilt mit festen Werten $X_{t+1}(\omega) = x_{t+1}, \dots, X_{T-1}(\omega) = x_{T-1}$ und beliebiger Politik $\tilde{\pi} = (\tilde{d}_t, \dots, \tilde{d}_{T-1})$:

$$V_t(s_t) = \sum_{n=t}^{T-1} \tilde{d}_n \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{n=t}^{T-1} (s_n - s_G^*)^+ = \sum_{n=t}^{T-1} (s_{t:n} - s_G^*)^+, \quad (4.4.9)$$

wobei (*) wegen $\tilde{d}_n \leq (s_n - s_G^*)^+$ erfolgt. Mit Hilfsatz 4.4.5 folgt für (4.4.9) weiter

$$\begin{aligned}
V_t(s_t) &\leq (s_{t:t} - s_G^*)^+ + ([s_{t:t} - \tilde{d}_t](1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(x_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f) - s_G^*)^+ + \dots \\
&\quad + \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} - s_G^* \right. \\
&\quad \quad \left. + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} (w_f[B(m^{(l)}) - h(x_{n+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f) - (1 + r_f)\tilde{d}_n) - s_G^* \right)^+ \\
&\leq (s_{t:t} - s_G^*)^+ + (s_{t:t}(1 + r_f) + w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f) - s_G^*)^+ + \dots \\
&\quad + \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} (w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f) - s_G^*) \right)^+, \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

wobei das Ungleichheitszeichen aus $x_{t+1} = \dots = x_{T-1} = 0$ und $\tilde{d}_{t+1} = \dots = \tilde{d}_{T-1} = 0$ resultiert. Mit $(1 + r_f) > 0$ und $w_f \cdot B(m^{(l)}) \geq c(r_f, w_f) > 0$ folgt dann für $(s_t =) s_{t:t} \geq 0$:

$$\begin{aligned}
V_t(s_t) &\leq \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^* \right)^+ \\
&\quad + \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^* \right)^+ + \dots \\
&\quad + \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^* \right)^+ \\
&= (T - t) \cdot \left(s_{t:t}(1 + r_f)^{T-t-1} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^* \right)^+
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t, m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)] \\
\leq (T - t) \cdot \left(C_1 - w_f(1 + r_f)^{T-t-1} h(X_t, m^{(l)}) \right)^+, \quad (4.4.11)
\end{aligned}$$

wobei $C_1 := (s - d)(1 + r_f)^{T-t} + \sum_{n=t-1}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^*$ gilt. Gelte andernfalls $s_t < 0$ so ergibt sich für (4.4.10):

$$V_t(s_t) = (T - t) \cdot \left(s_{t:t} + \sum_{n=t}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^* \right)^+$$

und weiter

$$\begin{aligned}
V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t, m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)] \\
\leq (T - t) \cdot \left(C_2 - w_f(1 + r_f)^{T-t-1} h(X_t, m^{(l)}) \right)^+ \quad (4.4.12)
\end{aligned}$$

mit $C_2 := (s - d)(1 + r_f) + \sum_{n=t-1}^{T-2} (1 + r_f)^{T-2-n} [w_f B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f)] - s_G^*$. Für die unterschiedlichen Rückversicherungsarten muss letztendlich noch die Integrierbarkeit der Majorante von (4.4.11) bzw. (4.4.12) gezeigt werden. Dazu sei $C := \max\{C_1, C_2\}$. Bei der Verwendung von proportionalem RV-Schutz folgt mit $w_f, m > 0$ und $r_f > -1$:

$$E[C - m \cdot w_f (1 + r_f)^{T-t-1} X_t]^+ = \int_0^{\frac{C}{m \cdot w_f (1 + r_f)^{T-t-1}}} (C - m \cdot w_f (1 + r_f)^{T-t-1} \cdot x) dF_{X_0}(x) < \infty.$$

Wird andernfalls nichtproportionaler Rückversicherungsschutz verwendet und gilt zudem $m' < C \cdot w_f^{-1} (1 + r_f)^{-(T-t-1)}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & E[C - w_f (1 + r_f)^{T-t-1} (m' - (m' - X_t)^+)]^+ \\ &= \int_0^{m'} (C - w_f (1 + r_f)^{T-t-1} \cdot x) dF_{X_0}(x) + [C - m' \cdot w_f (1 + r_f)^{T-t-1}]^+ \cdot [1 - F_{X_0}(m')] \\ &= C \cdot [2 - F_{X_0}(m')] - w_f (1 + r_f)^{T-t-1} \left(m' [1 - F_{X_0}(m')] + \int_0^{m'} x dF_{X_0}(x) \right) < \infty, \end{aligned}$$

bzw. für den Fall $m' \geq C \cdot w_f^{-1} (1 + r_f)^{-(T-t-1)}$:

$$\begin{aligned} & E[C - w_f (1 + r_f)^{T-t-1} (m' - (m' - X_t)^+)]^+ \\ &= \int_0^{\frac{C}{w_f (1 + r_f)^{T-t-1}}} (C - w_f (1 + r_f)^{T-t-1} \cdot x)^+ dF_{X_0}(x) < \infty. \end{aligned}$$

Für den abschließenden Nachweis von Teil 1 ist noch per absteigender Induktion zu zeigen, dass die Funktionen

$$u_t(s, \cdot) := EV_{t+1}[(s - d) \cdot (1 + r_f) + w_f [B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})] - c(r_f, w_f)] \quad (4.4.13)$$

für alle $t = 0, 1, \dots, T - 2$ stetig auf der Menge $\mathcal{A}(s)$ sind. Für den *Induktionsanfang* bei $t = T - 2$ ergibt sich

$$u_{T-2}(s, d) = \int [(s - d) \cdot (1 + r_f) + w_f [B(m^{(l)}) - h(X_{T-1}, m^{(l)}) - s_G^*]^+ dP^{X_{T-1}} < \infty, \quad (4.4.14)$$

d.h. es gilt insbesondere

- Die Funktion $g(X_{T-1}, d) := [(s - d) \cdot (1 + r_f) + w_f [B(m^{(l)}) - h(X_{T-1}, m^{(l)}) - s_G^*]^+]$ ist $P^{X_{T-1}}$ -integrierbar.
- Die Funktion $g(X_{T-1}, d)$ ist für jeden festen Wert $X_{T-1}(\omega) = x_{T-1}$ stetig in d .
- Es existiert für alle $d \in \mathcal{A}(s)$ wegen (4.4.14) eine $P^{X_{T-1}}$ -integrierbare Funktion $g(X_{T-1}) := [s \cdot (1 + r_f) + w_f [B(m^{(l)}) - h(X_{T-1}, m^{(l)}) - s_G^*]^+ \geq 0$ mit

$$|g(X_{T-1}, d)| \leq g(X_{T-1}), \quad \forall X_{T-1}(\omega) = x_{T-1}.$$

Daher ist die Funktion $u_{T-2}(s, \cdot)$ nach dem *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4) stetig auf $\mathcal{A}(s)$. Gelte weiterhin für ein $t \leq T - 2$ die *Induktionsannahme*, dass die Funktion $u_t(s, \cdot)$ wie in (4.4.13) stetig auf $\mathcal{A}(s)$ sei. Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$), dass die Funktion

$$\begin{aligned} & V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)] \\ &= \begin{cases} (s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t, m^{(l)})\} - c(r_f, w_f) - s_G^* & \text{für Fall (A)} \\ + EV_{t+1}[s_G^*(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)] \\ EV_{t+1}[C'(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_{t+1}, m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)] & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

mit $C' := [(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)]$ gemäß der Induktionsannahme stetig auf $\mathcal{A}(s)$ für alle festen Werte $X_t(\omega) = x_t$ ist, wobei die Bedingungen

$$L_t(0) \leq L_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)]$$

und $(s - d)(1 + r_f) + w_f \cdot B(m^{(l)}) - c(r_f, w_f) - s_G^* \cdot w_f^{-1} \geq h(X_t, m^{(l)})$ zu Fall (A) zusammengefasst sind.

Des Weiteren gilt wie in Teil 2 gezeigt die Integrierbarkeit von $V_t[(s - d)(1 + r_f) + w_f\{B(m^{(l)}) - h(X_t(\omega), m^{(l)})\} - c(r_f, w_f)]$ bzgl. ω . Daher liefert das *Stetigkeitslemma* die Stetigkeit der Funktion

$$u_{t-1}(s, \cdot) := \int [(s - d) \cdot (1 + r_f) + w_f[B(m^{(l)}) - h(X_t, m^{(l)}) - s_G^*]^+ dP^{X_t}$$

auf $\mathcal{A}(s)$, was den Beweis vervollständigt. ■

Mit den zugehörigen Beispielen wie in den vorherigen Abschnitten befassen wir uns in Kapitel 7.

Das nichtstationäre Ausschüttungsmodell

In den vorherigen Abschnitten haben wir ein Markovsches Ausschüttungsmodell für den stationären Fall entwickelt. Demzufolge sind alle relevanten Größen des Modells während des gesamten Zeithorizontes unverändert geblieben. Im Gegensatz dazu werden wir jetzt eine zeitliche Abhängigkeit der Größen involvieren. Die Motivation für ein nichtstationäres Dividenausschüttungsmodell liegt zum einen an variierenden Schadenverteilungen (z.B. ist in der Kraftverkehrsversicherung ein deutlicher Unterschied zwischen der Schadensleistung im Sommer und der Schadensleistung im Winter vorstellbar) und zum anderen an der in Abschnitt 2.2.1 behandelten Fluktuation der Versicherungsprämien aufgrund von Versicherungszyklen.

Zudem kann die Annahme, dass Schadenseintritt und -regulierung während der gleichen Periode erfolgen, abgeschwächt werden. Etwas allgemeiner ist dies die Problematik der *Spätschäden*, die sich auch in einem nichtstationären Ausschüttungsmodell mit endlichem Zeithorizont behandeln lässt. Ebenso können in einem solchen Modell zufallsabhängige Diskontierungsfaktoren berücksichtigt werden. Man spricht dann von einer *zufälligen Inflation*.

5.1 Das nichtstationäre Grundmodell

Zu dem Optimierungsproblem der maximalen erwarteten Dividendenzahlungen gehört in diesem Abschnitt das Zielfunktional

$$\tilde{V}_\pi(s) := E_s^\pi \left[\sum_{t=0}^{T-1} f_t(S_t) \right], \quad \tilde{V}^*(s) := \sup_{\pi \in \Pi_M} \tilde{V}_\pi(s), \quad s \in \mathcal{S}.$$

Für die oben genannten Probleme führen wir das folgende nichtstationäre Modell ein.

Definition 5.1.1 (nichtstationäres Grundmodell für Ausschüttungen)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t(s_t), Q_t, r_t)$ heißt nichtstationäres Markovsches Ausschüttungsmodell auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ mit $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ und den folgenden Änderungen gegenüber Definition 3.0.3:

- Die minimale Kapitalanforderung für den Versicherer $|s_t^*| < \infty$ sei diesmal von der Zeit abhängig. Dadurch ergibt sich für die Menge der zulässigen Dividendenausschüttungen

$$\mathcal{A}_t(s) = \{d \in [0, (s - s_t^*)^+]\}, \quad s \in \mathcal{S}.$$

- Mit der messbaren Systemfunktion $F(s_t, d_t, B_t, x_{t+1}) = s_t - d_t + B_t - x_{t+1}$ folgt für das Übergangsgesetz Q_t :

$$Q_t(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}^+} 1_C\{F(s, d, B_t, x)\} F_{X_{t+1}}(dx), \quad (s, d) \in \mathbb{K}, \quad C \in \mathfrak{G},$$

wobei $(X_t)_{t \geq 1}$ eine Folge von reellen, nichtnegativen und unabhängigen Zufallsvariablen (welche aber nicht mehr identisch verteilt sind) mit stetiger Verteilungsfunktion $F_{X_t}(x)$ und endlichem Erwartungswert sei. Infolgedessen gilt natürlich auch $0 \leq B_t := (1 + \lambda) \cdot E[X_{t+1}] < \infty$. Soll das Prämienvolumen zudem gewissen Zyklen ausgesetzt sein, so gilt insgesamt

$$0 \leq B_t := (1 + \lambda) \cdot E[X_{t+1}] \cdot [1 + r_g(t)] < \infty \quad (5.1.1)$$

und die (deterministische) Funktion $r_g(t) > -1$ modelliert den Versicherungszyklus.¹

Entsprechend Bemerkung 3.1.1 gilt dann für jede messbare Funktion \tilde{V} auf \mathcal{S} die Gleichheit von

$$\int_{\mathcal{S}} \tilde{V}(x) Q_t(dx|s, d) = \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{V}(F[s, d, B_t, x]) F_{X_{t+1}}(dx). \quad (5.1.2)$$

Zudem kann in Analogie zu Korollar 3.1.6 das (zeitabhängige) Sicherheitsniveau s_t^* mit Hilfe der entsprechenden Risikomaße bestimmt werden. Da der Unterschied nur in der zeitabhängigen Verteilungsfunktion besteht, geben wir nur die Ergebnisse ohne einen expliziten Nachweis an.

Lemma 5.1.2 Für jedes Risikomaß $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq T-1$ lässt sich eine endliche und zeitabhängige Sicherheitsschranke $s_{t,1}^*$ angeben, d.h.

1. für die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bzw. für den VaR_γ sind für vorgegebenes $0 < \gamma < 1$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} P(s_{t,1}^* + B_t - X_{t+1} \leq 0) &\leq \gamma, \\ P(X_{t+1} - B_t > s_{t,1}^*) &\leq \gamma \end{aligned}$$

nach $s_{t,1}^*$ zu lösen und es ergibt sich

$$s_{t,1}^* = \inf\{x \in \mathbb{R} | x \geq F_{X_{t+1}}^{-1}(1 - \gamma) - B_t\},$$

¹ Vgl. dazu auch S. 20.

2. für den TailVaR folgt für vorgegebenes $\gamma \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} s_{t,2}^* &= E[X_{t+1} - B_t | X_{t+1} - B_t > VaR_\gamma] \\ &= \frac{1}{P(X_{t+1} > s_{t,1}^* + B_t)} \int_{s_{t,1}^* + B_t}^{\infty} (x - B_t) dF_{X_{t+1}}(x). \end{aligned}$$

Gelte zudem die Stetigkeit und strikte Isotonie von $F_{X_{t+1}}$, so folgt

$$s_{t,2}^* = \frac{1}{\gamma} \int_{F_{X_{t+1}}^{-1}(1-\gamma)}^{\infty} x dF_{X_{t+1}}(x) - B_t,$$

3. für den EPD ist für vorgegebenes $\eta > 0$ die Gleichung

$$E[(X_{t+1} - (s_{t,3}^* + B_t))^+] = \eta$$

zu lösen und es existiert ein eindeutiger Wert $s_{t,3}^*$.

Der folgende Satz liefert für das obige nichtstationäre Markovsche Ausschüttungsmodell eine optimale Dividendenpolitik.

Satz 5.1.3 *Es sei ein nichtstationäres Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 5.1.1 mit $T < \infty$ gegeben und es seien $\tilde{V}_0, \dots, \tilde{V}_T$ rekursiv definierte Funktionen auf \mathcal{S} mit*

$$\tilde{V}_t(s) := \max_{d \in \mathcal{A}_t(s)} \left\{ d + \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{V}_{t+1}[s - d + B_t - x] dF_{X_{t+1}}(x) \right\}, \quad \tilde{V}_T \equiv 0, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (5.1.3)$$

Hierbei gilt:

1. Die Funktionen \tilde{V}_t von (5.1.3) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die (deterministische Markov-)Politik $\pi^* = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1}))$ mit

$$\mathcal{A}_t(s) \ni f_t(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s_t^*, \\ s - s_t^* & \text{falls } s > s_t^*, \end{cases}$$

ist optimal und für die Wertfunktion gilt

$$\tilde{V}^*(s) = \tilde{V}_0(s).$$

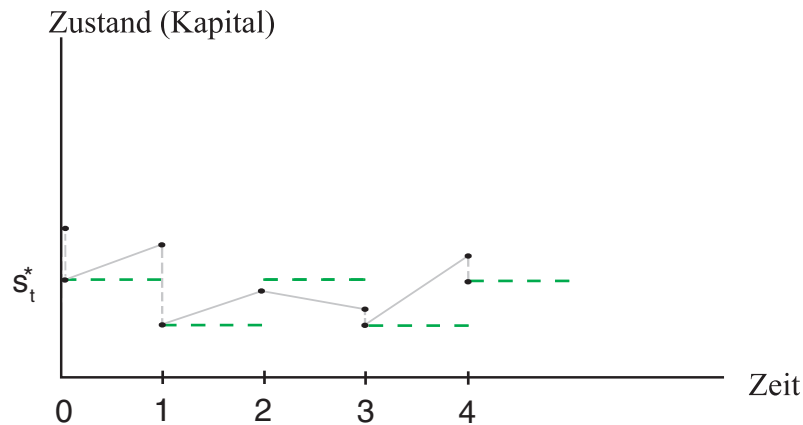
Für die Funktion $V_t(s)$ auf \mathcal{S} wie in (5.1.3) ergibt sich dann

$$\tilde{V}_t(s) = \begin{cases} 0 + E\tilde{V}_{t+1}(s + B_t - X_{t+1}) & \text{für } s \leq s_t^*, \\ s - s_t^* + E\tilde{V}_{t+1}(s_t^* + B_t - X_{t+1}) & \text{für } s > s_t^*. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar aus der zeitlichen Invarianz des Dynamischen Programmierungs-Algorithmus nach Hernández-Lerma/Lasserre[53](S. 32). ■

Selbstverständlich bleibt die Optimalität einer sofortigen Ausschüttung in diesem Fall erhalten, da diese letztendlich durch die Verteilungsfunktion $F_{X_{t+1}}(x)$ begründet ist. Daran ändert auch die Zeitabhängigkeit nichts. Jedoch kann die im nichtstationären Modell resultierende Politik nicht mehr im Sinne von Definition 2.1.4(Teil 2) wie bisher als eine (deterministische) stationäre Politik aufgefasst werden, so dass die Methoden für die Zielfunktionale auf einem unbeschränkten Zeithorizont gemäß Abschnitt 3.2 nicht mehr geeignet sind.

Abbildung 5.1: Pfad des Kapitalprozesses im nichtstationären Modell bei Verwendung von π^* und Periodizität der Sicherheitsschranken



Ein möglicher Verlauf des Kapitalprozesses im nichtstationären Ausschüttungsmodell ist der Abbildung 5.1 zu entnehmen. Dabei gehen wir davon aus, dass die Variation der Schadenverteilungen, auch bedingt durch den Versicherungszyklus, periodisch ist.

Demnach setzen wir in Anlehnung an Pentikäinen/Rantala[81](S. 14f) für die Funktion $r_g(t)$

$$r_g(t) = z_m \cdot \sin(2\pi t/T_s + \nu), \quad (5.1.5)$$

d.h. in unserem Fall modelliert eine Sinusfunktion den Versicherungszyklus. Dabei bezeichnet z_m die Amplitude, T_s die Länge der Periode und ν die Phasenvariable.

Beispiel B.1.f (Nichtstationäre Modifikation von Beispiel B.1.a)

Es sei die Zyklusfunktion $r_g(t) := \sin(\pi t + 0.65)/6$ für $t = 0, 1, 2$ und die Intensitätsfunktion $\beta(t) := 0.25 - 0.2 \cdot \sin^2(\pi \cdot t/2)$ gegeben. Dann ergibt sich für das Prämienvolumen B_t mit Hilfe von (5.1.1) und für das Sicherheitsniveau $s_t^* = -\ln(0.05)/\beta(t) - B_t (= s_{t,1}^*)$

gemäß Lemma 5.1.2 aufgrund der exponential($\beta(t)$)-verteilten Zufallsvariablen X_t folgende Werte, die der nachstehenden Tabelle zu entnehmen sind mit der Funktion

$$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s) := \iint (s_0^* + B_0 - x_1 - [s_0^* + B_0 - x_1 - s_1^*]^+ + B_1 - x_2 - s_2^*)^+ dP^{X_1}(x_1) dP^{X_2}(x_2). \quad (5.1.6)$$

t	B_t	s_t^*	Ausschüttung	Wert
0	5.28415	6.69878	$s - s_0^*$	3.3622
1	4.31585	10.66280	$\int (s_0^* + B_0 - x_1 - s_1^*)^+ dP^{X_1}(x_1)$	0.1599
2	5.28415	6.69878	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	2.6719

Tabelle 5.1: Parameterwerte bei exponential($\beta(t)$)-verteilten Schäden

Schließlich erhalten wir in Analogie zum stationären Grundmodell den maximalen Betrag der erwarteten Dividendenausschüttungen: $\tilde{V}^*(s) \approx 6.194$.

Beispiel B.2.e (Nichtstationäre Modifikation von Beispiel B.2.a)

Mit der obigen Zyklusfunktion und den Intensitätsfunktionen $a(t) := 8 - 0.5 \cdot \sin^2(t \cdot \pi/2)$ und $b(t) \equiv 3$ ergeben sich mit $B_t = [1 + r_g(t)] \cdot (1 + \lambda) \frac{a(t)}{b(t) - 1}$ und $s_t^* = s_{t,1}^* = \frac{a(t)}{\sqrt[3]{0.05}} - a(t) - B_t$ die in Tabelle 5.2 aufgeführten Parameterwerte mit der Funktion aus (5.1.6).

t	B_t	s_t^*	Ausschüttung	Wert
0	5.28415	8.43119	$s - s_0^*$	1.6288
1	4.04611	8.81202	$\int (s_0^* + B_0 - x_1 - s_1^*)^+ dP^{X_1}(x_1)$	2.4409
2	5.28415	8.43119	$E_s^* f^* \circ F_{X_2}^* \circ F_{X_1}^*(s)$	1.7704

Tabelle 5.2: Parameterwerte bei Pareto($a(t), 3$)-verteilten Schäden

Daher erhalten wir als Ergebnis für die erwarteten Ausschüttungen $\tilde{V}^*(s) \approx 5.84$.

5.2 Ausschüttungsmodell mit Spätschäden

Wir wollen in diesem Abschnitt das Ausschüttungsmodell in der Hinsicht verallgemeinern, dass die (Gesamt-)Schadensleistungen einer Periode nicht mehr im gleichen Zeitraum beglichen werden. Oftmals verstreicht zwischen dem Eintritt eines Schadenfalls und dessen

endgültiger Regulierung eine gewisse Zeit, die sich z.B. durch die Prüfung des Schadensfalls begründet. Auf der Ebene der Gesamtschäden kann sich dadurch die Regulierung aller Schäden bezüglich eines *Anfallzeitpunktes* über einen größeren *Abwicklungszeitraum* erstrecken. In diesem Fall wird von *Spätschäden* gesprochen, welche sich hinsichtlich der Anfall- und Abwicklungszeitpunkte strukturiert in einem Abwicklungsdreieck darstellen lassen.²

Anfall-zeitpunkt	Abwicklungszeitraum					
	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5
t	$Z_{t,t}$	$Z_{t,t+1}$	$Z_{t,t+2}$	$Z_{t,t+3}$	$Z_{t,t+4}$	$Z_{t,t+5}$
t+1		$Z_{t+1,t+1}$	$Z_{t+1,t+2}$	$Z_{t+1,t+3}$	$Z_{t+1,t+4}$	$Z_{t+1,t+5}$
t+2			$Z_{t+2,t+2}$	$Z_{t+2,t+3}$	$Z_{t+2,t+4}$	$Z_{t+2,t+5}$
t+3				$Z_{t+3,t+3}$	$Z_{t+3,t+4}$	$Z_{t+3,t+5}$
t+4					$Z_{t+4,t+4}$	$Z_{t+4,t+5}$
t+5						$Z_{t+5,t+5}$

Tabelle 5.3: Abwicklungsdreieck mit Abwicklungsdauer $m = 5$

Die Tabelle 5.3 zeigt Schadenszahlungen $Z_{t,t+i}$ zu mehreren aufeinander folgenden Anfallzeitpunkten, welche in den folgenden Abwicklungsjahren $i = 0, \dots, 5$ geleistet wurden. Dabei ist für die richtige Modellbildung zu beachten, dass die Beträge $Z_{t,t+i}$ für beliebige t mit wachsendem i tendenziell abnehmen und schließlich gleich Null werden. Daher unterstellen wir, dass jeder Schaden entweder zum Anfallzeitpunkt selbst oder zu den $m \in \mathbb{N}$ folgenden Abwicklungszeitpunkten beglichen wird.

Definition 5.2.1 (Zuwächse) *Es sei $\{Z_{t,t+k}\}_{t \geq -m, k \in \{0, \dots, m\}}$ eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in (\mathbb{R}, \mathbb{B}) und bedingter Verteilung $P^{Z_{t,t+k}|Z_{t,t+k-1}}$ für $k \neq 0$ und Verteilung $P^{Z_{t,t}}$ für $k = 0$. Die Elemente $Z_{t,t+k}$ werden als Zuwächse bezeichnet und geben eine Zahlung für Schäden an, welche zum Zeitpunkt t verursacht wurden und k Perioden später geleistet werden. Weiterhin stellt $(Z_{t-j,t})_{0 \leq j \leq m}$ für alle $t \in \mathbb{N}$ eine Familie von unabhängigen Zuwächsen dar.*

Mit Hilfe der Zuwächse kann nun die zu leistende Schadenszahlung für jede Periode t durch $\sum_{j=0}^m Z_{t-j,t}$ angegeben werden. Wir wollen dies anhand eines Abwicklungsdreiecks wie in Tabelle 5.4 illustrieren, welches als Realisation des Abwicklungsdreiecks aus Tabelle 5.3 zu verstehen ist.

Damit hat der Versicherer zum gegenwärtigen Zeitpunkt $t + 5$ eine Schadensleistung in Höhe von $\sum_{j=0}^5 Z_{t+5-j,t+5} = 5746$ zu erbringen, welche sich als Summe der grau eingefärbten Spaltenelemente ergibt. Umgekehrt lässt sich natürlich auch jede bekannte Höhe der

² Vgl. Mack[70](§ 3.1) und Radtke/Schmidt[86](S. 7ff).

Tabelle 5.4: Abwicklungsdreieck mit Zahlenbeispielen

Anfall- zeitpunkt	Abwicklungsjahr					
	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5
t	1001	854	568	565	347	148
t+1		1113	990	671	648	422
t+2			1265	1168	800	744
t+3				1490	1383	1007
t+4					1725	1536
t+5						1889

Quelle: Radtke/Schmidt[86](S. 10)

Gesamtschadenzahlung in die jeweiligen Anteile der zugehörigen Anfallzeitpunkte aufspalten. Deshalb gibt ein (Zufalls-)Vektor $Z_t := (Z_{t,t}, \dots, Z_{t-m,t})^T \in \mathcal{Z}_t$ zusammen mit den Randverteilungen gemäß Definition 5.2.1 die zukünftige Dynamik des Schadenstandes an und wir setzen dafür

$$P^{Z_{t+1}|Z_t=z_t}(dz_{t+1}) := P^{Z_{t+1},t+1}(dz_{t+1,t+1}) \otimes \bigotimes_{j=1}^m P^{Z_{t+1-j},t+1|Z_{t+1-j,t}}(dz_{t+1-j,t+1}). \quad (5.2.1)$$

Wie in den Abschnitten zuvor sollen die erwarteten Dividendenausschüttungen bei Start in $(Z_0, S_0) = (z, s) \in \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{S}_0$ durch Wahl einer deterministischen Politik maximiert werden, d.h. es soll

$$\tilde{V}^*(z, s) = \sup_{\pi \in \Pi_M} \tilde{V}_\pi(z, s) = \sup_{\pi \in \Pi_M} \int R_\pi^z(\omega) P_{z,s}^\pi(d\omega), \quad (5.2.2)$$

bestimmt werden. Dazu gehört der Wahrscheinlichkeitsraum

$$\left(\bigotimes_{t=0}^T (\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t), \bigotimes_{t=0}^T (\mathfrak{Z}_t \otimes \mathfrak{S}_t \otimes \mathfrak{A}_t), P_{z,s}^\pi \right)$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß³

$$P_{z,s}^\pi := \delta_{\mathcal{Z}_0}(dz_0) \otimes \delta_{\mathcal{S}_0}(ds_0) \bigotimes_{t=0}^{T-1} \left(\delta_{f(s_t)}(da_t) \otimes P^{Z_{t+1}|Z_t=z_t}(dz_{t+1}) \otimes \delta_{\mathcal{S}_{t+1}}(ds_{t+1}) \right) \otimes \delta_{f(s_T)}(da_T)$$

und den zukünftigen Ausschüttungen $R_\pi^z(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} r(Z_t, S_t, f(S_t))$, wobei $S_{t+1} : \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{S}_0 \times \mathcal{A}_0 \times \mathcal{Z}_1 \times \dots \rightarrow \mathcal{S}_{t+1}$ wiederum für $t \geq 1$ die Projektion auf \mathcal{S}_{t+1} ist.

³ Statt des Dirac-Maßes $\delta_{\mathcal{Z}_0}$ können wir auch eine Startverteilung P^{Z_0} betrachten, falls der Startwert Z_0 zufällig sein soll.

Definition 5.2.2 (Ausschüttungsmodell mit Spätschäden)

Das Tupel $(\mathcal{Z} \times \mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}_t(z, s), Q_t, r_t)$ heißt Markovsches Ausschüttungsmodell mit Spätschäden auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$, wobei die Größen für $t \leq T$ wie folgt festgelegt sind:

- $(\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t, \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}^{m+1}, \mathbb{B}^{m+1})$ sei der Zustandsraum für die Spätschäden und das Kapital.
- $\mathcal{A}_t = \mathbb{R}_+$ sei der Aktionsraum für die Dividendenausschüttungen.
- $\mathcal{A}_t(z, s) = \{d \in [0, (s - s_z^*)^+]\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s_z^*| < \infty$ eine Konstante ist.⁴
- Q_t sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$ nach $\mathcal{Z}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}$ zur Zeit t und ist mittels der messbaren Funktion $g(Z_{t+1}) := \sum_{i=0}^m Z_{t+1-i, t+1}$ und der messbaren Systemfunktion $F_t(s, d, B_t, Z_{t+1}) := s - d + B_t - g(Z_{t+1})$ definiert durch

$$Q_t(C|z, s, d) = \int_{\mathcal{Z}} P^{Z_{t+1}|Z_t=z}(dz_{t+1}) \int_{\mathcal{S}} \delta_{F_t(s, d, B_t, z_{t+1})}(ds_{t+1}) \mathbb{1}_C(z_{t+1}, s_{t+1})$$

mit $(z, s, d) \in \mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$, $C \in \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{S}$. Dabei bezeichnet $Z_t : \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{S}_0 \times \mathcal{A}_0 \times \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{S}_1 \times \mathcal{A}_1 \dots \rightarrow \mathcal{Z}_t$ für $t \geq 1$ die Projektion auf \mathcal{Z}_t mit $Z_t = (Z_{t,t}, \dots, Z_{t-m,t})^T$ und steht für einen nichtnegativen (Zufalls-)Vektor mit dem Produktmaß entsprechend (5.2.1), so dass der Erwartungswertvektor $EZ_t := (EZ_{t,t}, \dots, EZ_{t-m,t})^T$ (in jeder Komponente) positiv und endlich ist. Infolgedessen ist das Prämienvolumen $B_t := (1 + \lambda) \cdot \sum_{i=0}^m EZ_{t+1-i, t+1} < \infty$ mit Sicherheitszuschlag $\lambda \geq 0$ als Konstante zu betrachten.

- Die einperiodige Erlösfunktion $r_t(z, s, d) := d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s - s_z^*)^+\}}$ sei eine Abbildung von $\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$ nach \mathbb{R}_+ .

Die Abbildung 5.2 illustriert nochmal die Abfolge der einzelnen Stationen im Ausschüttungsmodell mit Spätschäden.

Die Lösung des Optimierungsproblems (5.2.2) lässt sich auch in diesem Fall mit Hilfe des Algorithmus der Dynamischen Programmierung ermitteln.

Satz 5.2.3 *Es sei ein Markovsches Ausschüttungsmodell mit Spätschäden gegeben. Weiterhin seien $\tilde{V}_0, \dots, \tilde{V}_T$ rekursiv definierte Funktionen auf $\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t$ mit*

$$\tilde{V}_t(z, s) = \max_{d \in \mathcal{A}_t(z, s)} \left\{ r_t(z, s, d) + \int_{\mathcal{Z}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}[z_{t+1}, s - d + B_t - g(z_{t+1})] P^{Z_{t+1}|Z_t=z}(dz_{t+1}) \right\} \quad (5.2.3)$$

mit $r_t(z, s, d) := d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s - s_z^*)^+\}}$ und $\tilde{V}_T \equiv 0$. Dann folgt:

⁴ Dabei kann der Wert s_z^* entsprechend den bisherigen Abschnitten z.B. mittels der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit für $\gamma \in (0, 1)$ ermittelt werden, d.h. als Lösung von

$$\mathbf{P}(s_z^* + B_t - g(Z_{t+1}) \leq 0 | Z_t = z) \leq \gamma.$$

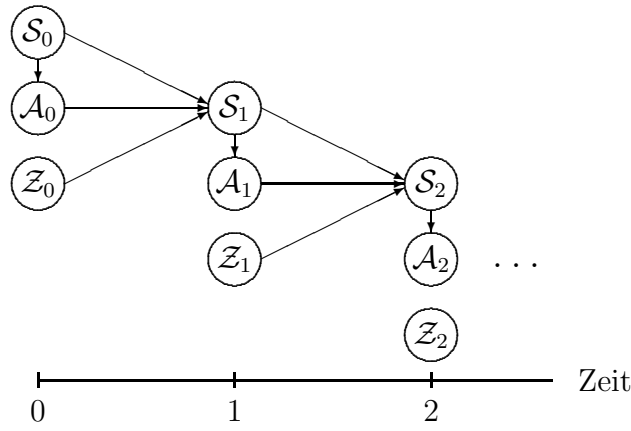


Abbildung 5.2: Ablauf im Spätschaden-Modell

1. Die Funktionen \tilde{V}_t von (5.2.3) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die (deterministische Markov-)Politik $\pi^* = (f_0^*(z, s), \dots, f_{T-1}^*(z, s)) \in \Pi_M$ mit $\Pi_M := \{\pi = \{f_t\} | f_t : \mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t \rightarrow \mathcal{A}_t \text{ (messbar) mit } f_t(z, s) \in \mathcal{A}_t(z, s)\}$ und

$$\mathcal{A}_t(z, s) \ni f_t^*(z, s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s_z^*, \\ s - s_z^* & \text{falls } s > s_z^*, \end{cases}$$

ist optimal und für die Wertfunktion gilt:

$$\tilde{V}^*(z, s) = \tilde{V}_0(z, s). \quad (5.2.4)$$

Für die Funktion $\tilde{V}_t(z, s)$ auf $\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t$ gemäß (5.2.3) ergibt sich dann

$$\tilde{V}_t(z, s) = \begin{cases} 0 + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{für } s \leq s_z^*, \\ s - s_z^* + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (5.2.4) und (5.2.3) für ein beliebiges Paar $(z, s) \in \mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t$. Zu einer beliebigen Politik $\pi \in \Pi_M$ sei die Funktion

$$R_t^z(\pi, z, s) := E^\pi \left[\sum_{n=t}^{T-1} r_n(Z_n, S_n, f(Z_n, S_n)) | Z_t = z, S_t = s \right]$$

definiert als die künftig erwarteten Ausschüttungen ab dem Zeitpunkt t durch Wahl von π und Start in (z, s) . Per absteigender Induktion können wir nun für eine optimale Politik π^* zeigen: $R_t^z(\pi^*, z, s) = \tilde{V}_t(z, s)$, $\forall t = 0, \dots, T-1$. Erst einmal gilt für $t = T-1$:

$$R_{T-1}^z(\pi^*, z, s) = r_{T-1}(z, s, f^*(z, s)) = f^*(z, s) = \tilde{V}_{T-1}(z, s).$$

Per *Induktionsannahme (IA)* gelte nun

$$R_{t+1}^z(\pi^*, z, s) = \tilde{V}_{t+1}(z, s)$$

für ein $t \leq T - 2$. Für die Funktion $R_t^z(\pi^*, z, s)$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} R_t^z(\pi^*, z, s) &= E^{\pi^*} \left[\sum_{n=t}^{T-1} r_n(Z_n, S_n, f^*(Z_n, S_n)) \mid Z_t = z, S_t = s \right] \\ &= r_t(z, s, f^*(z, s)) + \int_{\mathcal{Z}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} R_{t+1}^z(\pi^*, z', s') Q_t(d(z', s') \mid z, s, f^*(z, s)) \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} r_t(z, s, f^*(z, s)) + \int_{\mathcal{Z}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(z', s') Q_t(d(z', s') \mid z, s, f^*(z, s)) \\ &= \max_{\mathcal{A}_t(z, s)} \left\{ r_t(z, s, d) + \int_{\mathcal{Z}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}[z_{t+1}, s - d + B_t - g(z_{t+1})] P^{Z_{t+1} \mid Z_t=z}(dz_{t+1}) \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \tilde{V}_t(z, s), \end{aligned}$$

wobei (*) aus (5.2.3) resultiert. Daher ergibt sich $\tilde{V}^*(z, s) \stackrel{(5.2.2)}{=} R_0^z(\pi^*, z, s) = \tilde{V}_0(z, s)$.

Falls die Behauptung von Teil 1 zutrifft, so genügt es für den Beweis von Teil 2 per absteigender Induktion zu zeigen, dass für $L_t(d) := d + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d + B_t - g(Z_{t+1})]$ und den zulässigen Aktionen $d^*, d_* \in \mathcal{A}_t(z, s)$ mit $0 \leq d_* \leq d^* := (s - s_z^*)^+$ gilt

$$\Delta L_t(d^*, d_*) := L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1 \quad (5.2.6)$$

und somit

$$E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d^* + B_t - g(Z_{t+1})] \geq d_* - d^* - E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d_* + B_t - g(Z_{t+1})]. \quad (5.2.7)$$

Der *Induktionsanfang* für $t = T - 1$ ergibt sofort: $\Delta L_{T-1}(d^*, d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Für die *Induktionsannahme* gelte (5.2.6) für ein $t \leq T - 1$ und somit

$$\tilde{V}_t(z, s) = \begin{cases} s - s_z^* + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{für } s > s_z^*, \\ E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$) mit $s \leq s_z^* \Rightarrow d^* = d_* = 0$:

$$\Delta L_{t-1}(d^*, d_*) = E\tilde{V}_t[Z_t, s + B_{t-1} - g(Z_t)] - E\tilde{V}_t[Z_t, s + B_{t-1} - g(Z_t)] = 0. \quad (5.2.9)$$

Für den Fall $s > s_z^*$ gilt gemäß (5.2.8) für ein festes $Z_t(\omega) = z_t$:

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_t[z_t, s - d + B_{t-1} - g(z_t)] \\ &= \begin{cases} s - d + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^* \\ \quad + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{für } s - d + B_{t-1} - s_z^* > g(z_t), \\ E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit von

$$\tilde{V}_t[s - d^* + B_{t-1} - g(z_t)] - \tilde{V}_t[s - d_* + B_{t-1} - g(z_t)] \geq d_* - d^*, \quad (5.2.11)$$

d.h. mit der entsprechenden Fallunterscheidung folgt für (5.2.11):

- Für den Fall $s - d^* + B_{t-1} - s_z^* > g(z_t)$ und $s - d_* + B_{t-1} - s_z^* > g(z_t)$ folgt nach (5.2.10):

$$s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^* - (s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^*) = d_* - d^*.$$

- Mit $s - d^* + B_{t-1} - s_z^* \leq g(z_t)$ und $s - d_* + B_{t-1} - s_z^* \leq g(z_t)$ gilt gemäß (5.2.10):

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_t[s - d^* + B_{t-1} - g(z_t)] - \tilde{V}_t[s - d_* + B_{t-1} - g(z_t)] \\ &= E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \quad - E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \stackrel{(*)}{\geq} E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \quad - E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ &= d_* - d^*, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen Hilfssatz 3.1.2 und (5.2.7) folgt.

- Für den Fall $s - d^* + B_{t-1} - s_z^* \leq g(z_t)$ und $s - d_* + B_{t-1} - s_z^* > g(z_t)$ ergibt sich wiederum nach (5.2.10):

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_t[s - d^* + B_{t-1} - g(z_t)] - \tilde{V}_t[s - d_* + B_{t-1} - g(z_t)] \\ &= E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \quad - (s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^*) - E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \stackrel{(*)}{\geq} s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^* + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \quad - (s - d_* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^*) - E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] \\ &= d_* - d^* \pm E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] \\ &= d_* - d^*, \end{aligned}$$

wobei (*) wegen

$$\begin{aligned} & E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] \\ & \stackrel{(5.2.10)}{\geq} s - d^* + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^* + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] \end{aligned}$$

erfolgt.

Vorausgesetzt die Integrierbarkeitsbedingungen (s. Teil 1) sind erfüllt, so gilt

$$\begin{aligned}
& \Delta L_{t-1}(d^*, d_*) \\
&= d^* + E\tilde{V}_t[Z_t, s - d^* + B_{t-1} - g(Z_t)] - d_* - E\tilde{V}_t[Z_t, s - d_* + B_{t-1} - g(Z_t)] \\
&= d^* - d_* \\
&\quad + \int \left(\tilde{V}_t[z_t, s - d^* + B_{t-1} - g(z_t)] - \tilde{V}_t[z_t, s - d_* + B_{t-1} - g(z_t)] \right) P^{Z_t|Z_{t-1}=z}(dz_t) \\
&\stackrel{(5.2.11)}{\geq} d^* - d_* + \int (d_* - d^*) P^{Z_t|Z_{t-1}=z}(dz_t) = 0.
\end{aligned}$$

In Analogie zu den Beweisschritten wie im Selektionssatz 2.1.11 reicht es für Teil 1 aus, die Stetigkeit der Funktion

$$\tilde{u}_t(z, s, \cdot) := \int_{\mathcal{Z}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(z', s') Q_t(d(z', s') | z, s, \cdot), \quad \forall t = 0, 1, \dots, T-2$$

auf $\mathcal{A}_t(z, s)$ per absteigender Induktion nachzuweisen, da die Menge $\mathcal{A}_t(z, s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r_t(z, s, d) := d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s - s_z^*)^+\}}$ auf dieser Menge stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K}_t := \{(z, s, a) | (z, s) \in \mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t, a \in \mathcal{A}_t(z, s)\} \in \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T-2$ ergibt sich mit $|V_{T-1}(z, s)| = (s - s_z^*)^+ < \infty$ und der *Transformationsformel (TF)*:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{T-2}(z, s, d) &= \int_{\mathcal{Z}_{T-1} \times \mathcal{S}_{T-1}} \tilde{V}_{T-1}(z', s') Q_{T-2}(d(z', s') | z, s, d) \\
&= \int_{\mathcal{Z}_{T-1} \times \mathcal{S}_{T-1}} (s_{T-1} - s_z^*)^+ d \left(P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}(z_{T-1}) \otimes \delta_{F_t(s, d, B_{T-2}, z_{T-1})}(s_{T-1}) \right) \\
&\stackrel{\text{TF}}{=} \int_{\mathcal{Z}_{T-1}} \underbrace{(s - d + B_{T-2} - g(z_{T-1}) - s_z^*)^+}_{=: \tilde{h}(z_{T-1}, d)} P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}(dz_{T-1}).
\end{aligned}$$

Daher gilt also

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{Z}_{T-1}} \tilde{h}(z_{T-1}, d) P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}(dz_{T-1}) \\
& \leq \int_{\mathcal{Z}_{T-1}} (s - d + B_{T-2} - z_{T-1, T-1} - s_z^*)^+ P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}(dz_{T-1}) \\
& \leq \int_{\mathcal{Z}_{T-1}} (s + B_{T-2} - z_{T-1, T-1} - s_z^*)^+ P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}(dz_{T-1}) \\
& = \int_{\mathcal{Z}_{T-1}} (s + B_{T-2} - z_{T-1, T-1} - s_z^*)^+ P^{Z_{T-1, T-1}}(dz_{T-1, T-1}) \\
& = \int_{\mathbb{R}} (s + B_{T-2} - z_{T-1, T-1} - s_z^*) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq z_{T-1, T-1} \leq s + B_{T-2} - s_z^*\}} P^{Z_{T-1, T-1}}(dz_{T-1, T-1}) \\
& < \infty.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Zusammenfassend resultiert daraus

- Die Funktion $\tilde{h}(z_{T-1}, d) := (s - d + B_{T-2} - g(z_{T-1}) - s_z^*)^+$ ist integrierbar bzgl. $P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}$.
- Die Funktion $\tilde{h}(z_{T-1}, d)$ ist für festes $Z_{T-1}(\omega) = z_{T-1}$ stetig in d .
- Es existiert für alle $d \in \mathcal{A}_{T-1}(z, s)$ wegen (5.2.12) eine $P^{Z_{T-1}|Z_{T-2}=z}$ -integrierbare Funktion $\tilde{h}(z_{T-1}) := (s + B_{T-2} - z_{T-1, T-1} - s_z^*)^+ \geq 0$ auf \mathcal{Z}_{T-2} mit

$$|\tilde{h}(z_{T-1}, d)| \leq \tilde{h}(z_{T-1}), \quad \forall z_{T-1} \in \mathcal{Z}_{T-1}.$$

Demnach ist die Funktion $\tilde{u}_{T-2}(z, s, \cdot)$ nach dem *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4) stetig auf $\mathcal{A}_{T-2}(z, s)$. Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T - 2$ die *Induktionsannahme*, dass die Funktion

$$\tilde{u}_t(z, s, \cdot) := \int_{\mathcal{Z}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(z', s') Q_t(d(z', s')|z, s, \cdot)$$

stetig auf $\mathcal{A}_t(z, s)$ sei. Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t - 1$), dass die Funktion

$$\begin{aligned}
& \tilde{V}_t(z_t, s - d + B_{t-1} - g(z_t)) \\
& = \begin{cases} E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s - d + B_{t-1} - g(z_t) + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{für } g(z_t) \geq s - d + B_{t-1} - s_z^*, \\ s - d + B_{t-1} - g(z_t) - s_z^* + E\tilde{V}_{t+1}[Z_{t+1}, s_z^* + B_t - g(Z_{t+1})] & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf $\mathcal{A}_{t-1}(z, s)(= \mathcal{A}_t(z, s))$ für alle festen Werte

$Z_t(\omega) = z_t$ ist. Des Weiteren gilt für $V_t(z_t, s - d + B_{t-1} - g(z_t))$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(z_t, s - d + B_{t-1} - g(z_t)) &\leq \underbrace{\left(s - d + \sum_{i=t-1}^{T-1} B_i - g(z_t) - s_z^* \right)^+}_{=: \check{h}(z_t, d)} \\ &\leq \underbrace{\left(s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B_i - g(z_t) - s_z^* \right)^+}_{=: \check{h}(z_t)} \end{aligned}$$

für geeignete ω mit $Z_t(\omega) = \dots = Z_{T-1}(\omega) = 0$, d.h. mittels

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Z}_t} \check{h}(z_t) P^{Z_t|Z_{t-1}=z}(dz_t) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B_i - z_{t-1, t-1} - s_z^* \right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq z_{t-1, t-1} \leq s + \sum_{i=t-1}^{T-1} B_i - s_z^*\}} P^{Z_{t-1, t-1}}(dz_{t-1, t-1}) < \infty \end{aligned}$$

resultiert daraus die $P^{Z_t|Z_{t-1}=z}$ -Integrierbarkeit der Funktion $V_t(z_t, s - d + B_{t-1} - g(z_t))$. Daher gilt auch hier das *Stetigkeitslemma* und die Funktion

$$\tilde{u}_{t-1}(z, s, \cdot) := \int_{\mathcal{Z}_t \times \mathcal{S}_t} \tilde{V}_t(z', s') Q_{t-1}(d(z', s') | z, s, \cdot)$$

ist stetig auf $\mathcal{A}_{t-1}(z, s)$, was den Beweis vervollständigt. ■

5.3 Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation

In diesem Abschnitt wollen wir die auszuschüttenden Dividenden nicht mit einem festen Diskontierungsfaktor bewerten, d.h. mit einem konstanten internen Rechnungszins, sondern diese mit Hilfe der *Inflationsrate* I_t angleichen.

Demzufolge sollen diesmal die erwarteten inflationsbereinigten Dividendenausschüttungen durch Wahl einer deterministischen Politik mit Startwert $(I_0, S_0) = (i, s) \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{S}_0$ maximiert werden

$$\tilde{V}^*(i, s) = \sup_{\pi \in \Pi_M} \tilde{V}_\pi(i, s) = \sup_{\pi \in \Pi_M} \int R_\pi^i(\omega) P_{i, s}^\pi(d\omega), \quad (5.3.1)$$

wobei das obige Zielfunktional zur Konstruktion des folgenden Wahrscheinlichkeitsraums führt

$$\left(\bigotimes_{t=0}^T (\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t), \bigotimes_{t=0}^T (\mathcal{I}_t \otimes \mathcal{G}_t \otimes \mathcal{A}_t), P_{i, s}^\pi \right)$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß⁵

$$P_{i,s}^\pi := \delta_{\mathcal{I}_0}(di_0) \otimes \delta_{\mathcal{S}_0}(ds_0) \bigotimes_{t=0}^{T-1} \left(\delta_{f_t(s_t)}(da_t) \otimes P^{I_{t+1}|I_t=i_t}(di_{t+1}) \otimes \delta_{\mathcal{S}_{t+1}}(ds_{t+1}) \right) \otimes \delta_{f_T(s_T)}(da_T)$$

und den zukünftigen Ausschüttungen $R_\pi^i(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} r(I_t, S_t, f_t(S_t))$, wobei $S_{t+1} : \mathcal{I}_0 \times \mathcal{S}_0 \times \mathcal{A}_0 \times \mathcal{I}_1 \times \dots \rightarrow \mathcal{S}_{t+1}$ wie bisher mit $t \geq 1$ für die Projektion auf \mathcal{S}_{t+1} steht. Daher soll die Dynamik der zufälligen (und von den X_t unabhängigen) Inflationsrate I_t auf einem Messraum $(\mathcal{I}_t, \mathfrak{I}_t)$ mit einem geeigneten autoregressiven Zeitreihenprozess modelliert werden⁶

$$I_t - \mu_i = \zeta \cdot [I_{t-1} - \mu_i] + \sigma_i \cdot \epsilon_t,$$

wobei ζ mit $0 < \zeta < 1$ für einen Kontrollparameter steht, σ_i bzw. μ_i die Standardabweichung bzw. den Mittelwert des Störterms kennzeichnet und $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen iid.-Zufallsvariablen mit $E[\epsilon_t] = 0$ und $Var[\epsilon_t] = 1$ bezeichnet, so dass mit der zugehörigen Verteilung $P^{I_t|I_{t-1}=i_{t-1}}$ eine entsprechende Modifikation des Übergangsgesetzes erforderlich ist. Zudem

Dadurch entsteht das folgende nichtstationäre Markovsche Entscheidungsmodell.

Definition 5.3.1 (Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation)

Das Tupel $(\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t, \mathcal{A}_t, \mathcal{A}(s), Q_t, r_t)$ heißt Markovsches Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$, wobei die Größen für $t \leq T$ wie folgt festgelegt sind:

- $(\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t, \mathfrak{I} \otimes \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}^2)$ sei der Zustandsraum für die Inflationsrate und das Kapital.
- $\mathcal{A}_t = \mathbb{R}_+$ sei der Aktionsraum für die Dividendenausschüttungen.
- $\mathcal{A}(s) = \{d \in [0, (s - s^*)^+]\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s^*| < \infty$ gemäß Korollar 3.1.6 ermittelt wird.
- Q_t sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$ nach $\mathcal{I}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}$ zur Zeit t und ist mittels der messbaren Systemfunktion $F(s, d, B, X_{t+1}) := s - d + B - X_{t+1}$ definiert durch

$$Q_t(C|i, s, d) = \int P^{I_{t+1}|I_t=i}(di_{t+1}) \int P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \mathbb{1}_C(i_{t+1}, F(s, d, B, x_{t+1}))$$

mit $(i, s, d) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$, $C \in \mathfrak{I} \otimes \mathfrak{S}$ und den Bezeichnungen wie im Grundmodell (Definition 3.0.3) mit dem Zusatz $E[I_{t+1}|I_t = i] < \infty$, $\forall t = 0, \dots, T-1$.

⁵ Das Dirac-Maß $\delta_{\mathcal{I}_0}$ kann durch eine Startverteilung P^{I_0} ersetzt werden, falls der Startwert I_0 zufällig sein soll.

⁶ Vgl. Daykin/Pentikäinen/Pesonen[29](S. 218ff). Weitere Modellierungsansätze der Inflationsrate sind z.B. auch Eberts/Maurer[37] zu entnehmen.

- Die einperiodige Erlösfunktion $r_t(i, s, d) := i \cdot d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s-s^*)_+\}}$ sei eine Abbildung von $\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$ nach \mathbb{R}_+ .

Die Abbildung 5.3 verdeutlicht den Ablauf der einzelnen Stationen in diesem Modell und zeigt, warum die Sicherheitsschranke gemäß Korollar 3.1.6 bestimmt werden kann, denn die zukünftigen Zustände des Kapitals sind nicht von der Inflationsrate abhängig.

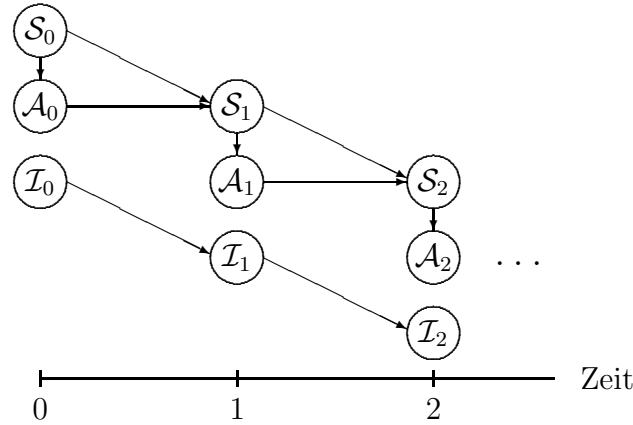


Abbildung 5.3: Ablauf im Modell mit zufälliger Inflation

Die Lösung des Optimierungsproblems (5.3.1) lässt sich auch in diesem Fall mit Hilfe des Algorithmus der Dynamischen Programmierung ermitteln.

Satz 5.3.2 Es sei das Markovsche Ausschüttungsmodell mit zufälliger Inflation gegeben. Weiterhin seien $\tilde{V}_0, \dots, \tilde{V}_T$ rekursiv definierte Funktionen auf $\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t$ mit

$$\tilde{V}_t(i, s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r_t(i, s, d) + \int P^{I_{t+1}|I_t=i}(di_{t+1}) \int \tilde{V}_{t+1}[i_{t+1}, s - d + B - x_{t+1}] P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \right\} \quad (5.3.2)$$

mit $r_t(i, s, d) := i \cdot d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s-s^*)_+\}}$ und $\tilde{V}_T \equiv 0$. Dann folgt:

1. Die Funktionen \tilde{V}_t von (5.3.2) sind messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die (deterministische Markov-)Politik $\pi^* = (f_0^*(s), \dots, f_{T-1}^*(s)) \in \Pi_M$ mit

$$\mathcal{A}(s) \ni f_t^*(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, L_t(s - s^*) \geq L_t(0), \end{cases}$$

und $L_t(d) := r_t(i, s, d) + E\tilde{V}_{t+1}(I_{t+1}, s - d + B - X_{t+1})$ ist optimal und für die Wertfunktion gilt

$$\tilde{V}^*(i, s) = \tilde{V}_0(i, s). \quad (5.3.3)$$

Für die Funktion $\tilde{V}_t(i, s)$ auf $\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t$ gemäß (5.3.2) ergibt sich dann

$$\tilde{V}_t(i, s) = \begin{cases} 0 + E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s + B - X_{t+1}] & \text{für } s \leq s^*, \\ s - s^* + E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s^* + B - X_{t+1}] & \text{für } s > s^*, L_t(s - s^*) \geq L_t(0). \end{cases} \quad (5.3.4)$$

Beweis: In Analogie zum Beweis von Satz 5.2.3 zeigen wir zunächst die Gültigkeit von (5.3.3) und (5.3.2) für ein beliebiges Paar $(i, s) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t$. Zu einer beliebigen Politik $\pi \in \Pi_M$ sei die Funktion

$$R_t^i(\pi, i, s) := E^\pi \left[\sum_{n=t}^{T-1} r_n(I_n, S_n, f_n(S_n)) \mid I_t = i, S_t = s \right]$$

definiert als die künftig erwarteten Ausschüttungen ab dem Zeitpunkt t durch Wahl von π und Start mit (i, s) . Per absteigender Induktion können wir nun für eine optimale Politik π^* zeigen:

$$R_t^i(\pi^*, i, s) = \tilde{V}_t(i, s), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Zunächst gilt für $t = T-1$:

$$R_{T-1}^i(\pi^*, i, s) = r_{T-1}(i, s, f_{T-1}^*(s)) = i \cdot f_{T-1}^*(s) = \tilde{V}_{T-1}(i, s).$$

Somit folgt mit Hilfe der *Induktionsannahme (IA)*, dass für ein beliebiges $t = 0, \dots, T-3$

$$R_{t+1}^i(\pi^*, i, s) = \tilde{V}_{t+1}(i, s)$$

gelte, für die Funktion $R_t^i(\pi^*, i, s)$:

$$\begin{aligned} & R_t^i(\pi^*, i, s) \\ &= E^{\pi^*} \left[\sum_{n=t}^{T-1} r_n(I_n, S_n, f_n^*(S_n)) \mid I_t = i, S_t = s \right] \\ &= r_t(i, s, f_t^*(s)) + \int_{\mathcal{I}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} R_{t+1}^i(\pi^*, i', s') Q_t(d(i', s') \mid i, s, f_t^*(s)) \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} r_t(i, s, f_t^*(s)) + \int_{\mathcal{I}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(i', s') Q_t(d(i', s') \mid i, s, f_t^*(s)) \\ &= \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r_t(i, s, d) + \int P^{I_{t+1} \mid I_t=i}(di_{t+1}) \int \tilde{V}_{t+1}[i_{t+1}, s - d + B - x_{t+1}] P^{X_{t+1}}(dx_{t+1}) \right\} \\ &\stackrel{(*)}{=} \tilde{V}_t(i, s), \end{aligned}$$

wobei (*) aus (5.3.2) resultiert. Daher ergibt sich $\tilde{V}^*(i, s) \stackrel{(5.3.1)}{=} R_0^i(\pi^*, i, s) = \tilde{V}_0(i, s)$.

Falls die Behauptung von Teil 1 zutrifft, so genügt es zum Nachweis von Teil 2 per

absteigender Induktion zu zeigen, dass für alle $t = 0, \dots, T-1$ und $(i, s) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t$ gilt

$$L_t(d) := r_t(i, s, d) + E\tilde{V}_{t+1}(I_{t+1}, s - d + B - X_{t+1}) \text{ ist konvex in } d. \quad (5.3.5)$$

Der *Induktionsanfang* für $t = T-1$ ergibt sich sofort durch $L_{T-1}(d) = i \cdot d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s-s^*)^+\}}$. Gelte weiterhin für ein beliebiges $t \leq T-2$ die *Induktionsannahme*, dass die Funktion $L_t(d)$ konvex in d sei. Demnach folgt für die Gestalt der Wertfunktion $\tilde{V}_t(i, s)$

$$\tilde{V}_t(i, s) = \begin{cases} s - s^* + E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s^* + B - X_{t+1}] & \text{falls } s > s^*, L_t(0) \leq L_t(s - s^*), \\ 0 + E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s + B - X_{t+1}] & \text{sonst,} \end{cases}$$

und somit die Konvexität von $\tilde{V}_t(i, s)$ in s . Dann folgt für den *Induktionsschritt* ($t \rightarrow t-1$), dass für feste Werte $I_t(\omega) = i_t$ und $X_t(\omega') = x_t$ die Funktion $\tilde{V}_t[i_t, s - d + B - x_t]$ konvex nach Hilfssatz 4.1.12 (Teil 1) ist. Somit ergibt sich die Konvexität der Funktion $L_{t-1}(d) := r_{t-1}(i, s, d) + E\tilde{V}_t(I_t, s - d + B - X_t)$ in d mit Hilfe von Teil 3 des Hilfssatzes 4.1.12, falls die Wertfunktion $\tilde{V}_t[I_t, s - d + B - X_t]$ bzgl. $P^{I_t|I_{t-1}=i} \otimes P^{X_t}$ -integrierbar ist. Die Integrierbarkeit leitet sich durch eine integrierbare Majorante ab, denn es gilt mit einer beliebigen (deterministischen) Politik $\tilde{\pi}_t = (\tilde{f}_t(S_t), \dots, \tilde{f}_{T-1}(S_{T-1}))$ und für das Wahrscheinlichkeitsmaß mit $(i_{t-1}, s_{t-1}) = (i, s)$ und $d \in \mathcal{A}(s)$

$$P_{i,s}^{d,\tilde{\pi}_t}(d\omega) := \delta_{\mathcal{I}_{t-1}} \otimes \delta_{\mathcal{S}_{t-1}} \otimes \delta_{\mathcal{A}_{t-1}} \otimes Q_{t-1}(d(i_t, s_t)|i_{t-1}, s_{t-1}, d) \otimes \delta_{\mathcal{A}_t}(d\tilde{f}_t) \\ \bigotimes_{n=t+1}^{T-2} \left(Q_n(d(i_{n+1}, s_{n+1})|i_n, s_n, \tilde{f}_n) \otimes \delta_{\mathcal{A}_{n+1}}(d\tilde{f}_{n+1}) \right)$$

auf dem Produktraum $\Omega_{t-1} := \mathcal{I}_{t-1} \times \mathcal{S}_{t-1} \times \mathcal{A}_{t-1} \times \mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t \times \dots \times \mathcal{A}_{T-1}$

$$E_{i,s}^{d,\tilde{\pi}_t}[\tilde{V}_t(I_t, S_t)] = \int \sum_{n=t}^{T-1} I_n(\omega) \cdot \tilde{f}(S_n(\omega)) P_{i,s}^{d,\tilde{\pi}_t}(d\omega). \quad (5.3.6)$$

Dabei seien $I_t : \Omega_{t-1} \rightarrow \mathcal{I}_t$ bzw. $S_t : \Omega_{t-1} \rightarrow \mathcal{S}_t$ die Projektionen von Ω_{t-1} nach \mathcal{I}_t bzw. \mathcal{S}_t . Zudem ergibt sich mit dem Zeitpunkt

$$t^* := \sup_{n \geq t-1} \left\{ \int pr_{i_n}(i_{t-1}, \dots, i_{T-1}) d\left(\delta_{\mathcal{I}_{t-1}} \otimes \bigotimes_{m=t}^{T-1} P^{I_m|I_{m-1}} \right)(i_{t-1}, \dots, i_{T-1}) \quad (< \infty) \right\},$$

zu dem die größte Inflationsrate ab dem Zeitpunkt t zu erwarten ist⁷, die folgende integrierbare Majorante für (5.3.6), wobei wiederum alle zukünftigen Schäden gleich Null gesetzt werden und $pr_{i_n}(i_{t-1}, \dots, i_{T-1})$ für die Projektion auf \mathcal{I}_n steht:

$$E_{i,s}^{d,\tilde{\pi}_t}[\tilde{V}_t(I_t, S_t)] \leq \int [(s - d + (t^* - t - 1) \cdot B - x_t)^+ + (T - t^* - 1) \cdot B] P^{X_t}(dx_t) \\ \int pr_{i_{t^*}}(i_{t-1}, \dots, i_{T-1}) d\left(\delta_{\mathcal{I}_{t-1}} \otimes \bigotimes_{m=t}^{T-1} P^{I_m|I_{m-1}} \right)(i_{t-1}, \dots, i_{T-1}).$$

⁷ Damit meinen wir in Bezug auf den gebräuchlichen Sprachjargon die kleinste Inflationsrate, so dass der künftige Geldbetrag aufgewertet bzw. am geringsten abgewertet wird.

Entsprechend den Beweisschritten wie im Selektionssatz 2.1.11 genügt es für Teil 1, die Stetigkeit der Funktion

$$\tilde{u}_t(i, s, \cdot) := \int_{\mathcal{I}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(i', s') Q_t(d(i', s') | i, s, \cdot), \quad \forall t = 0, 1, \dots, T-2$$

auf der Menge $\mathcal{A}(s)$ per absteigender Induktion zu zeigen, da die Menge $\mathcal{A}(s)$ kompakt ist und die einperiodige Erlösfunktion $r_t(i, s, d) := i \cdot d \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq d \leq (s-s^*)^+\}}$ auf dieser Menge stetig ist. Zudem ist die Menge der zulässigen Zustands-Aktionen-Paare eine Borelsche (Teil-)Menge, d.h.

$$\mathbb{K}_t := \{(i, s, a) | (i, s) \in \mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t, a \in \mathcal{A}_t(i, s)\} \in \mathfrak{I} \otimes \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A}.$$

Für den *Induktionsanfang* bei $t = T-2$ ergibt sich mit $|\tilde{V}_{T-1}(i, s)| = i \cdot (s - s^*)^+ < \infty$ und der *Transformationsformel (TF)*:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{T-2}(i, s, d) &= \int_{\mathcal{I}_{T-1} \times \mathcal{S}_{T-1}} \tilde{V}_{T-1}(i', s') Q_{T-2}(d(i', s') | i, s, d) \\ &\stackrel{\text{TF}}{=} \int_{\mathcal{I}_{T-1}} P^{I_{T-1} | I_{T-2}=i}(di_{T-1}) \int (s - d + B - x_{T-1} - s^*)^+ P^{X_{T-1}}(dx_{T-1}) \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Daher gilt also

- Die Funktion $\tilde{h}(i_{T-1}, x_{T-1}, d) := i_{T-1} \cdot (s - d + B - x_{T-1} - s^*)^+$ ist $P^{I_{T-1} | I_{T-2}=i} \otimes P^{X_{T-1}}$ -integrierbar.
- Die Funktion $\tilde{h}(i_{T-1}, x_{T-1}, d)$ ist für feste Werte $I_{T-1}(\omega) = i_{T-1}$ und $X_{T-1}(\omega') = x_{T-1}$ stetig in d .
- Es existiert für alle $d \in \mathcal{A}(s)$ wegen (5.3.7) eine $P^{I_{T-1} | I_{T-2}=i} \otimes P^{X_{T-1}}$ -integrierbare Funktion $\tilde{h}(i_{T-1}, x_{T-1}) := i_{T-1} \cdot (s + B - x_{T-1} - s^*)^+ \geq 0$ mit

$$|\tilde{h}(i_{T-1}, x_{T-1}, d)| \leq \tilde{h}(i_{T-1}, x_{T-1}), \quad \forall i_{T-1}, x_{T-1}.$$

Demnach ist die Funktion $\tilde{u}_{T-2}(i, s, \cdot)$ nach dem *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4) stetig auf $\mathcal{A}(s)$. Nun gelte für ein beliebiges $t \leq T-2$ die *Induktionsannahme*, dass die Funktion

$$\tilde{u}_t(i, s, \cdot) := \int_{\mathcal{I}_{t+1} \times \mathcal{S}_{t+1}} \tilde{V}_{t+1}(i', s') Q_t(d(i', s') | i, s, \cdot)$$

stetig auf $\mathcal{A}(s)$ sei. Dann folgt für den *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$), dass die Funktion

$$\begin{aligned} &\tilde{V}_t(i_t, s - d + B - x_t) \\ &= \begin{cases} i_t(s - d + B - x_t - s^*) & \text{für } x_t \leq s - d + B - s^* \text{ und} \\ \quad + E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s^* + B - X_{t+1}] & L_t(0) \leq L_t(s - d + B - x_t - s^*), \\ E\tilde{V}_{t+1}[I_{t+1}, s - d + B - x_t + B - X_{t+1}] & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

gemäß der Induktionsannahme stetig auf $\mathcal{A}(s)$ für alle festen Werte $I_t(\omega) = i_t$ und $X_t(\omega') = x_t$ ist. Des Weiteren gilt wie in Teil 2 gezeigt die $P^{I_t|I_{t-1}=i} \otimes P^{X_t}$ -Integrierbarkeit der Funktion $\tilde{V}_t[I_t, s - d + B - X_t]$. Daher liefert das *Stetigkeitslemma* die Stetigkeit der Funktion

$$\tilde{u}_{t-1}(i, s, \cdot) := \int_{\mathcal{I}_t \times \mathcal{S}_t} \tilde{V}_t(i', s') Q_{t-1}(d(i', s')|i, s, \cdot)$$

auf $\mathcal{A}(s)$, was den Beweis vervollständigt. ■

Das adaptive Ausschüttungsmodell

In den vorherigen Abschnitten haben wir optimale Politiken zur Steuerung eines Versicherungsunternehmens unter der Annahme hergeleitet, dass die Parameter bzw. die Verteilungsfunktionen der stochastischen Komponenten vollständig bekannt seien. Diese Annahme wird in diesem Abschnitt nicht mehr zutreffend sein, so dass die Schätzung und das Einbeziehen dieser Schätzverfahren der unbekannt Parameter eine zusätzliche Anforderung an das Modell stellt. In diesem Fall wird von *adaptiven Markovschen Entscheidungsmodellen* gesprochen. Insbesondere soll in diesem Abschnitt die (Gesamt-) Schadensverteilungsfunktion unbekannt sein.

Definition 6.0.3 (Adaptives Markovsches Ausschüttungsmodell)

Es sei $F \in \mathcal{P}$ der unbekannt Parameter, und zwar die Verteilungsfunktion von X_t . \mathcal{P} sei ein Borel-Raum mit zugehöriger Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, welcher alle Verteilungsfunktionen über \mathbb{R} beinhaltet. F_t sei der (vom Zufall abhängige) Schätzwert von F zur Zeit t . Außerdem sei $s^{*,F_t} (\in \mathbb{R})$ der zu F_t gehörige Risikoparameter und B^{F_t} die aufgrund des Schätzwertes F_t festgelegte Prämie.

Dann heißt die Familie $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), Q^F, r)$ von Ausschüttungsmodellen mit $T = \infty$ ein Adaptives Markovsches Ausschüttungsmodell, wobei die Größen wie folgt festgelegt sind:

- $(\mathcal{S}, \mathcal{G}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ wie in Definition 3.0.3.
- $(\mathcal{A}, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ wie in Definition 3.0.3.
- $\mathcal{A}^{F_t}(s) = \{d \in \mathcal{A} \mid s - d \geq s^{*,F_t}\} = \{d \in [0, (s - s^{*,F_t})^+]\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s^{*,F_t}| < \infty$ gilt.
- Q^F sei das Übergangsgesetz von $\mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{P}$ nach \mathcal{S} und ist mittels der messbaren Systemfunktion

$$F(s_t, d_t, B^{F_t}, X_{t+1}) := s_t - d_t + B^{F_t} - X_{t+1} \tag{6.0.1}$$

definiert durch

$$Q^F(C|s, d) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B^{F_t}, x)\} dF(x), \forall C \in \mathfrak{G}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Folge von nichtnegativen und reellen iid.-Zufallsvariablen mit (unbekannter) Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{P}$, welche einen endlichen Erwartungswert besitzen, so dass $B^F := (1 + \lambda) \cdot E[X_0]$ mit Sicherheitszuschlag $\lambda \geq 0$ das bzgl. der unbekanntes (Gesamt-)Schadenverteilungsfunktion ermittelte (Brutto-)Prämienvolumen darstellt.

- Die einperiodige Erlösfunktion $r(s, d) := d$ sei eine messbare und nichtnegative Abbildung von \mathbb{K} nach \mathbb{R} .

Beginnend mit dem „klassischen“ PEC-Verfahren (*Principle of Estimation and Control*) setzen wir unsere Untersuchung mit dem *Bayes-Verfahren* fort, welches für die Situation geeignet ist, in der eine Verteilungsannahme für den unbekanntes Verteilungsparameter zugrundeliegt. In beiden Fällen gehen wir aufgrund der Gestalt der Systemfunktion wie in (6.0.1) vom Grundmodell für Dividendenausschüttungen aus, da es für dieses Modell explizite Darstellungen der Wertfunktionen gibt.

Im Allgemeinen werden adaptive Verfahren für Problemstellungen auf einem unbeschränkten Zeithorizont herangezogen¹, da die Konvergenz der Schätzer gegen den „wahren“ Parameter zu asymptotischen Ergebnissen führt. Daher sind allgemeine Optimalitätsbedingungen nur für den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ zu erzielen.² Dies gilt aber nicht notwendigerweise für das Bayes-Verfahren, welches auch für endlichstufige Zielfunktionale geeignet ist.

6.1 Das PEC-Verfahren

Das PEC-Verfahren nach Mandl[71] ermittelt aus der aktuellen Information auf jeder Stufe eine neue Schätzung für den unbekanntes Verteilungsparameter, wobei der Informationsstand auf jeder Stufe um eine weitere Beobachtung wächst. Auf der jeweiligen Stufe wird die Entscheidung dann so gewählt, als ob die aktuelle Schätzung mit dem „wahren“ Parameterwert übereinstimmt. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass zum Startzeitpunkt schon eine Schätzung \hat{F}_0 vorliegt.

Wegen der zuvor genannten Asymptotik der Optimalitätsbedingungen liegt dem PEC-Verfahren folgender Optimalitätsbegriff zugrunde.

Definition 6.1.1 *Eine Politik π im adaptiven Markovschen Entscheidungsmodell heißt asymptotisch optimal bzgl. der diskontierten Erlöse, falls für alle Startzustände $s \in \mathcal{S}$ und alle $F \in \mathcal{P}$ gilt*

$$|V_{t:\infty, \alpha}^F(\pi, s) - E_s^{\pi, F} V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t)| \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

¹ Das bedeutet in unserem Fall die Maximierung der diskontierten bzw. durchschnittlichen Dividendenausschüttungen.

² Vgl. Hernández-Lerma[52](S. 8).

wobei die Funktion

$$V_{t;\infty,\alpha}^F(\pi, s) := E_s^{\pi,F} \sum_{n=t}^{\infty} \alpha^{n-t} \cdot f_n(S_n)$$

die erwarteten diskontierten Ausschüttungen ab dem Zeitpunkt t darstellt.

Der Hintergrund von Definition 6.1.1 ist folgender. Für die erwarteten diskontierten Erlöse ist es unmöglich für die „wahre“ aber unbekannte Verteilungsfunktion F bzw. F_{X_0} optimale Politiken zu finden, da bei der Berechnung von $V_{\infty,\alpha}^F(\pi, s) = E_s^{\pi,F}[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t f_t(S_t)]$ aufgrund der Unkenntnis von F Fehler hinsichtlich der Wahl der Entscheidung auftreten. Daher erlauben wir die Existenz von Fehlentscheidungen bis zum Zeitpunkt t und vergleichen dann die unter Verwendung der Politik π ermittelten (erwarteten) diskontierten Erlöse bei Start in $s \in \mathcal{S}$ mit den optimalen (erwarteten) diskontierten Erlösen, falls das System mit $S_t \in \mathcal{S}$ gestartet wird. Daraus resultiert der auf Schäl[92] zurückgehende Begriff der *asymptotischen Optimalität*.

Ein konsistenter Schätzer für die unbekannte Schadenverteilungsfunktion ist nach dem *Satz von Glivenko-Cantelli* die empirische Verteilungsfunktion

$$\hat{F}_t(x) = \frac{1}{t+1} \sum_{j=0}^t \mathbb{1}_{(0,x]}(x_j), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

für eine Beobachtung $x_{(t)} = (x_0, \dots, x_t)$ von (Gesamt-)Schäden, so dass $\hat{F}_t \rightarrow F$ für $t \rightarrow \infty$ in \mathcal{P} gilt. Sind für $\omega \in \mathcal{P} \times \Omega_M$ die Realisierungen der Projektionen $S_1(\omega), \dots, S_t(\omega)$ und $f_1(S_1(\omega)), \dots, f_t(S_t(\omega))$ bei Wahl einer Markov-Politik gegeben, so resultiert daraus mittels der Systemfunktion auch die Beobachtung $x_{(t)}$ mit vorgegebenen Wert x_0 , d.h. für $t \geq 1$ ist

$$\hat{F}_t^\omega(x) = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^t \mathbb{1}_{(0,x]}(S_{j-1}(\omega) - f_{j-1}(S_{j-1}(\omega)) + B^F - S_j(\omega))$$

eine Zufallsvariable über $(\mathcal{P} \times \Omega_M, \mathcal{B}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{F}_M, P_s^{\pi,F})$.

In Anlehnung an die vorherigen Modellierungsschritte ist auch die geforderte Sicherheitschranke von der empirischen Verteilungsfunktion abhängig. Dies erfordert in Anbetracht von Korollar 3.1.6 einen konsistenten Schätzer für die Quantilfunktion $F^{-1}(\cdot)$. Dafür benötigen wir den Begriff der *Ordnungsstatistik* im Sinne von Gänsler/Stute[44](S. 147).

Bemerkung 6.1.2 (*Ordnungsstatistik*)

Die Komponenten eines Punktes $x_{(t)} = (x_0, \dots, x_t)$ des \mathbb{R}^n lassen sich der Größe nach anordnen und es resultiert der Vektor $(x_{\uparrow 0}, x_{\uparrow 1}, \dots, x_{\uparrow t})$ mit $x_{\uparrow 0} \leq x_{\uparrow 1} \leq \dots \leq x_{\uparrow t}$. Man nennt die Abbildungen

$$\begin{aligned} T(x_{(t)}) &:= (x_{\uparrow 0}, x_{\uparrow 1}, \dots, x_{\uparrow t}) \quad \text{bzw.} \\ T_i(x_{(t)}) &:= x_{\uparrow i} \quad \text{für } i = 0, \dots, t \end{aligned}$$

die Ordnungsstatistik bzw. i -te Ordnungsgröße des \mathbb{R}^n . Ist also $X = (X_0(\omega), \dots, X_t(\omega))$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor, so ist $X_{\uparrow i}(\omega) := T_i \circ X$ eine Zufallsvariable und $T \circ X = (X_{\uparrow 0}(\omega), X_{\uparrow 1}(\omega), \dots, X_{\uparrow t}(\omega))$ ein n -dimensionaler Zufallsvektor.

Für die rechtsseitig-stetige empirische Quantilfunktion $\hat{F}_t^{-1}(u)$ mit

$$x = (x_0, \dots, x_t) \mapsto \hat{F}_t^{-1}(u) := \begin{cases} \sum_{i=0}^t x_{\uparrow i} \cdot \mathbb{1}_{[\frac{i}{t+1}, \frac{i+1}{t+1})}(u) & \text{für } u < 1, \\ x_{\uparrow 0} & \text{für } u = 1, \end{cases}$$

welche sich auf die Ordnungsstatistik gemäß Bemerkung 6.1.2 begründet, gilt nach Witting/Müller-Funk[116](Satz 7.108, S. 576) die starke Konsistenz

$$\hat{F}_t^{-1}(u) \rightarrow F^{-1}(u) \quad F\text{-f.s.} \quad (6.1.1)$$

für eine Stetigkeitsstelle $u \in (0, 1)$ von $F^{-1}(\cdot)$. Infolgedessen sind wir in der Lage, für ein beliebiges kapitalorientiertes Risikomaß die starke Konsistenz von $s^*(\hat{F}_t)$ zu folgern.

Lemma 6.1.3 (Starke Konsistenz der empirischen Sicherheitsschranken)

Sei $\hat{F}_t(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der stetigen und strikt isotonen Verteilungsfunktion $F_{X_0}(x)$ und $\hat{F}_t^{-1}(u), u \in (0, 1)$ die rechtsseitig-stetige Version der Stichprobenquantilfunktion von $F_{X_0}^{-1}(u)$. Dann gilt:

1. (VaR) Die Folge $\{s_1^*(\hat{F}_t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_1^*(\hat{F}_t) := \hat{F}_t^{-1}(1 - \gamma) - B(\hat{F}_t)$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $s_1^* = F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B^F$ mit $\gamma \in (0, 1)$.
2. (TailVaR) Die Folge $\{s_2^*(\hat{F}_t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit $s_2^*(\hat{F}_t) := \gamma^{-1} \int_{\hat{F}_t^{-1}(1-\gamma), \infty} x d\hat{F}_t(x) - B(\hat{F}_t)$ konvergiert für $t \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $s_2^* = \gamma^{-1} \int_{(F_{X_0}^{-1}(1-\gamma), \infty)} x dF_{X_0}(x) - B^F$.
3. (EPD) Die Folge der Lösungen $\{s_3^*(\hat{F}_t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ von

$$\int x d\hat{F}_t(x) - B(\hat{F}_t) - s_3^*(\hat{F}_t) + \int_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]} \hat{F}_t(x) dx = \eta$$

konvergiert für $t \rightarrow \infty$ fast sicher gegen die Lösung s_3^* von

$$E[X_0] - s_3^* - B^F + \int_{[0, s_3^* + B^F]} F_{X_0}(x) dx = \eta.$$

Beweis: Wegen der stetigen Abbildung $\psi : (x, y) \rightarrow x - y$, der fast sicheren Konvergenz von

$$B(\hat{F}_t) = (1 + \lambda) \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t X_n \rightarrow (1 + \lambda) \cdot E[X_0] = B^F \quad (6.1.2)$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahlen und der fast sicheren Konvergenz von

$$\hat{F}_t^{-1}(1 - \gamma) \rightarrow F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) \quad (6.1.3)$$

nach (6.1.1) ergibt sich die Behauptung von Teil 1 nach Lemma A.1, d.h.

$$\psi(\hat{F}_t^{-1}(1-\gamma), B(\hat{F}_t)) \rightarrow \psi(F_{X_0}^{-1}(1-\gamma), B^F) \quad f.s.$$

Für den Beweis von Teil 2 vereinfachen wir die Integrale durch Substitution mit $u = \hat{F}_t(x)$ bzw. mit $u = F_{X_0}(x)$ und erhalten

$$s_{2'}^*(\hat{F}_t) := \gamma^{-1} \int_{(1-\gamma, 1)} \hat{F}_t^{-1}(u) du - B(\hat{F}_t) \quad \text{bzw.} \quad s_{2'}^* = \gamma^{-1} \int_{(1-\gamma, 1)} F_{X_0}^{-1}(u) du - B^F.$$

Aufgrund der Gültigkeit von Gleichung (6.1.2) untersuchen wir zunächst die Konvergenz von $\int_{(1-\gamma, 1)} \hat{F}_t^{-1}(u) du - \int_{(1-\gamma, 1)} F_{X_0}^{-1}(u) du$. Es gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{F}_t^{-1} - F_{X_0}^{-1}) = 0 \quad f.s.$ nach (6.1.3) und weiterhin $|\hat{F}_t^{-1} - F_{X_0}^{-1}| \leq |\hat{F}_t^{-1} + F_{X_0}^{-1}| = \hat{F}_t^{-1} + F_{X_0}^{-1} \quad f.s.$ mit

$$\int_{(1-\gamma, 1)} |\hat{F}_t^{-1}(u) + F_{X_0}^{-1}(u)| du = \int_{(1-\gamma, 1)} \hat{F}_t^{-1}(u) du + \int_{(1-\gamma, 1)} F_{X_0}^{-1}(u) du < \infty.$$

Daher ist $\hat{F}_t^{-1} + F_{X_0}^{-1}$ eine (bzgl. des Lebesgue-Maßes) integrierbare Majorante der Folge $\hat{F}_t^{-1} - F_{X_0}^{-1}$ und nach dem *Satz von der majorisierten Konvergenz* (s. Satz A.3) folgt daher für $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{(1-\gamma, 1)} \hat{F}_t^{-1}(u) du - \int_{(1-\gamma, 1)} F_{X_0}^{-1}(u) du \right| &\leq \int_{(1-\gamma, 1)} |\hat{F}_t^{-1}(u) - F_{X_0}^{-1}(u)| du \\ &= \int_{(1-\gamma, 1)} |\hat{F}_t^{-1}(u) - F_{X_0}^{-1}(u) - 0| du \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und somit die fast sichere Konvergenz von $\int_{(1-\gamma, 1)} \hat{F}_t^{-1}(u) du \rightarrow \int_{(1-\gamma, 1)} F_{X_0}^{-1}(u) du$ für $t \rightarrow \infty$. Mit den stetigen Abbildungen $\psi_1 : (x, y) \rightarrow x \cdot y$ und $\psi : (x, y) \rightarrow x - y$ und wegen (6.1.2) ergibt sich wiederum entsprechend Lemma A.1 die fast sichere Konvergenz von

$$\frac{1}{\gamma} \int_{(\hat{F}_t^{-1}(1-\gamma), \infty)} x d\hat{F}_t(x) - B(\hat{F}_t) \rightarrow \frac{1}{\gamma} \int_{(F_{X_0}^{-1}(1-\gamma), \infty)} x dF_{X_0}(x) - B^F.$$

Der Nachweis für den EPD aus Teil 3 folgt aus der Umstellung nach η :

$$\begin{aligned} E[X_0] - \int x d\hat{F}_t(x) - [B^F - B(\hat{F}_t)] - [s_3^* - s_3^*(\hat{F}_t)] \\ + \int \left[F_{X_0}(x) \cdot \mathbb{1}_{\{x \leq s_3^* + B^F\}} - \hat{F}_t(x) \cdot \mathbb{1}_{\{x \leq s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)\}} \right] dx = 0. \quad (6.1.4) \end{aligned}$$

Da (6.1.4) nur sinnvoll ist, falls $s_3^*(\hat{F}_t)$ gegen einen Wert s_3^* konvergiert, untersuchen wir zunächst hinsichtlich dieser Annahme das hintere Integral auf Konvergenz. Dazu definieren wir Zufallsvariablen $Y_t = \mathbb{1}_{[x, \infty)}(s_3^*(\hat{F}_t^\omega) + B(\hat{F}_t^\omega))$ und $Y = \mathbb{1}_{[x, \infty)}(s_3^* + B^F)$, die nur Werte

0 oder 1 annehmen können. Gemäß der Definition der fast sicheren Konvergenz muss dann gelten

$$\mathbf{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \{|Y_t - Y| > \epsilon\}) = 0, \quad \forall \epsilon > 0. \quad (6.1.5)$$

Der interessante Fall ist natürlich $0 < \epsilon < 1$ und für (6.1.5) können wir nach Bauer[10](S. 34) auch schreiben: $\mathbf{P}\{Y_t \neq Y \text{ für unendlich viele } t\} = 0$, d.h. die punktweise f.s.-Konvergenz von $Y_t \rightarrow Y$ ist nur für $x = s_3^* + B^F$ nicht gesichert. Aber es gilt $\forall x \neq s_3^* + B^F$ mit der stetigen Abbildung $\psi : (x, y) \rightarrow x \cdot y$:

$$\hat{F}_t(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]}(x) \rightarrow F_{X_0}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^* + B^F]}(x) \quad f.s. \quad (6.1.6)$$

und $\hat{F}_t(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]}(x) \leq \hat{F}_t(x) < \infty$. Damit ist die Funktion

$$\hat{F}_t(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]}(x) - F_{X_0}(x) \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^* + B^F]}(x)$$

für alle $x \neq s_3^* + B^F$ erklärt. Da die Menge $\mathcal{N}_X = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x = s_3^* + B^F\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, gilt (6.1.6) wegen der Unempfindlichkeit bei λ -Nullmengen auch $\forall x$ und damit folgt nach dem *Satz von Lebesgue*

$$\int \hat{F}_t \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]} d\lambda \rightarrow \int F_{X_0} \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^* + B^F]} d\lambda.$$

und mit der fast sicheren Konvergenz von $\int x d\hat{F}_t(x) \rightarrow E[X_0]$ und $B(\hat{F}_t) \rightarrow B^F$ nach (6.1.2) konvergiert die linke Seite von (6.1.4) gegen 0.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass die linke Seite von (6.1.4) nicht gegen 0 konvergiert für

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_3^*(\hat{F}_t) = \hat{s}_3^* (\neq s_3^*). \quad (6.1.7)$$

Angenommen es gelte (6.1.7), dann reicht es aus, die Konvergenz von

$$|s_3^*(\hat{F}_t) - s_3^*| + \int \left| F_{X_0} \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^* + B^F]} - \hat{F}_t \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^*(\hat{F}_t) + B(\hat{F}_t)]} \right| d\lambda$$

zu betrachten. Daher würde sich für den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ gemäß des Satzes von Lebesgue ergeben

$$|\hat{s}_3^* - s_3^*| + \int \left| F_{X_0} \cdot \mathbb{1}_{[0, s_3^* + B^F]} - F_{X_0} \cdot \mathbb{1}_{[0, \hat{s}_3^* + B^F]} \right| d\lambda \geq |\hat{s}_3^* - s_3^*| > 0,$$

was den Beweis vervollständigt. ■

Mit Lemma 6.1.3 können wir nun für die anfangs formulierten Zielfunktionale optimale Politiken ermitteln, falls die empirische Verteilungsfunktion als konsistenter Schätzer für die unbekannte Schadenverteilungsfunktion verwendet wird.

Satz 6.1.4 *Gegeben sei das adaptive Ausschüttungsmodell wie in Definition 6.0.3. Weiterhin sei $(\hat{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der empirischen Verteilungsfunktionen. Dann ist die folgende PEC-Politik $\pi_{\hat{F}_t}^* = (f^*(s_0, \hat{F}_0), f^*(s_1, \hat{F}_1), \dots)$ mit*

$$f^*(s_t, \hat{F}_t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s_t \leq s^*(\hat{F}_t), \\ s_t - s^*(\hat{F}_t) & \text{falls } s_t > s^*(\hat{F}_t), \end{cases}$$

asymptotisch optimal bzgl. der diskontierten Dividendenausschüttungen, wobei der Wert $s^(\hat{F}_t)$ gemäß Lemma 6.1.3 bestimmt wird.*

Beweis: Für den Beweis von Teil 1 führen wir die *Diskrepanzfunktion*

$$\phi_\alpha^F(S_t, f_t(S_t)) := r(S_t, f_t(S_t)) + \alpha \int V_{\infty, \alpha}^{*, F}(s') Q(ds' | S_t, f_t(S_t)) - V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t)$$

von $\mathbb{K} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ ein und es gilt somit

$$\begin{aligned} \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} \phi_\alpha^F(S_t, f_t(S_t)) &= \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} \left[r(S_t, f_t(S_t)) + \alpha \int V_{\infty, \alpha}^{*, F}(s') Q(ds' | S_t, f_t(S_t)) \right. \\ &\quad \left. - V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t) \right] \\ \sum_{t=n}^{\infty} \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} \phi_\alpha^F(S_t, f_t(S_t)) &= E_s^{\pi, F} \left[\sum_{t=n}^{\infty} \alpha^{t-n} r(S_t, f_t(S_t)) \right] + \sum_{t=n}^{\infty} \alpha^{t-n+1} E_s^{\pi, F} [V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_{t+1})] \\ &\quad - \sum_{t=n}^{\infty} \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t) \\ &= V_{n: \infty, \alpha}^F(\pi, s) + \sum_{t=n+1}^{\infty} \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t) \\ &\quad - \sum_{t=n}^{\infty} \alpha^{t-n} E_s^{\pi, F} V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t) \\ &= V_{n: \infty, \alpha}^F(\pi, s) - E_s^{\pi, F} V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_n). \end{aligned}$$

Daher ist die asymptotische Optimalität der diskontierten Dividendenausschüttungen im adaptiven Ausschüttungsmodell gleichbedeutend mit der stochastischen Konvergenz von $|\phi_\alpha^F(S_t, f_t(S_t))| \rightarrow 0$ bzgl. $P_s^{\pi, F}$. Insbesondere ist dann für den konsistenten Schätzer \hat{F}_t von $F \in \mathcal{P}$ und alle Startzustände $s \in \mathcal{S}$ der Nachweis

$$|\phi_\alpha^F(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t))| \rightarrow 0, P_s^{\pi, F}\text{-f.s.} \quad (6.1.8)$$

zu erbringen.³

Gemäß Satz 3.2.1 gilt die Optimalität von $f_t(s_t) = (s_t - s^{*, F})^+$ bei unbekannter Verteilungsfunktion F . Daher folgt mit den n -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeitsmaßen

³ Für weitere Details s. Hernández-Lerma[52](§ 2.5).

$Q_{(n)}^F(\cdot|S_t, (f_t(S_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1})))$ bzw. $\tilde{Q}_{(n)}^F(\cdot|S_t, (f^*(S_t, \hat{F}_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1})))$ für die Diskrepanzfunktion

$$\begin{aligned}
& |\phi_\alpha^F(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t))| \\
&= \left| r(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t)) + \alpha \int V_{\infty, \alpha}^{*, F}(s') Q(ds'|S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t)) - V_{\infty, \alpha}^{*, F}(S_t) \right| \\
&= \left| f^*(S_t, \hat{F}_t) - f_t(S_t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int f_{t+n}(y) \tilde{Q}_{(n)}^F(dy|S_t, (f^*(S_t, \hat{F}_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int f_{t+n}(y) Q_{(n)}^F(dy|S_t, (f_t(S_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \right|. \quad (6.1.9)
\end{aligned}$$

Durch Iteration mit der Systemfunktion

$$\begin{aligned}
& F_{t+1} \circ F_t(S_t, f_t(S_t), B^F, X_{t+1}) \\
&= S_t - f_t(S_t) + B^F - X_{t+1} - f_{t+1}(S_t - f_t(S_t) + B^F - X_{t+1}) + B^F - X_{t+2}
\end{aligned}$$

für alle t ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int f_{t+n}(y) Q_{(n)}^F(dy|S_t, (f_t(S_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \\
&= \int f_{t+n}(y - f_{t+n-1}(y) + B^F - X_{t+n}) dP_F^{X_{t+n}} Q_{(n-1)}^F(dy|S_t, (f_t(S_t), \dots, f_{t+n-2}(S_{t+n-2}))) \\
&\quad \vdots \\
&= \int f_{t+n} \circ F_{t+n-1} \circ \dots \circ F_t(S_t, f_t(S_t), B^F, X_{t+1}) d(P_F^{X_{t+1}} \otimes \dots \otimes P_F^{X_{t+n}})
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
& \int f_{t+n}(y) \tilde{Q}_{(n)}^F(dy|S_t, (f^*(S_t, \hat{F}_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \\
&= \int f_{t+n} \circ F_{t+n-1} \circ \dots \circ F_t(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t), B^F, X_{t+1}) d(P_F^{X_{t+1}} \otimes \dots \otimes P_F^{X_{t+n}}).
\end{aligned}$$

Zudem erhalten wir für alle $n \geq 1$ durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung

und der Ungleichung⁴ $|g^+ - h^+| \leq |g - h|$ für meßbare Funktionen g, h

$$\begin{aligned}
& \left| \alpha^n \int f_{t+n}(y) \tilde{Q}_{(n)}^F(dy | S_t, (f^*(S_t, \hat{F}_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \right. \\
& \quad \left. - \alpha^n \int f_{t+n}(y) Q_{(n)}^F(dy | S_t, (f_t(S_t), \dots, f_{t+n-1}(S_{t+n-1}))) \right| \\
& \leq \alpha^n \int \left| f_{t+n} \circ F_{t+n-1} \circ \dots \circ F_t(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t), B^F, X_{t+1}) \right. \\
& \quad \left. - f_{t+n} \circ F_{t+n-1} \circ \dots \circ F_t(S_t, f_t(S_t), B^F, X_{t+1}) \right| d(P_F^{X_{t+1}} \otimes \dots \otimes P_F^{X_{t+n}}) \\
& \leq \underbrace{n \cdot \alpha^n}_{=: M_n} \cdot |s^*(\hat{F}_t) - s^{*,F}|.
\end{aligned}$$

Infolgedessen kann (6.1.9) gliedweise abgeschätzt werden und es ergibt sich wegen der Konvergenz von $\sum M_n = M$ mit nichtnegativen Partialsummen M_n

$$|\phi_\alpha^F(S_t, f^*(S_t, \hat{F}_t))| \leq |s^*(\hat{F}_t) - s^{*,F}| + \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \alpha^n \cdot |s^*(\hat{F}_t) - s^{*,F}| \leq (M+1) \cdot |s^*(\hat{F}_t) - s^{*,F}|$$

und somit die Gültigkeit von (6.1.8) gemäß Lemma 6.1.3. ■

Mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion $\hat{F}_t(x)$ lässt sich die Struktur des PEC-Verfahrens auf jeder Stufe auch wie folgt ausdrücken:

1. Beobachte Schaden x_t und berechne „neue“ empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_t(x)$.
2. Bestimme die Politik $\pi_{\hat{F}_t}^*$, die optimal ist, falls $\hat{F}_t(x)$ die „wahre“ (Gesamt-) Schadenverteilungsfunktion ist.
3. Wähle die Ausschüttung d_t gemäß der Entscheidungsregel $f^*(s_t, \hat{F}_t)$ von $\pi_{\hat{F}_t}^*$.

Es ist daher deutlich erkennbar, dass das PEC-Verfahren nur dann sinnvoll ist, falls zum Startzeitpunkt schon eine Schätzung für die Schadenverteilungsfunktion vorliegt. Für den Fall, dass keine Schätzung existiert, ist das im nächsten Abschnitt vorgestellte Bayes-Verfahren besser geeignet.

6.2 Das Bayes-Verfahren

Das Bayes-Verfahren ist für den Fall nützlich, dass zwar der Parameter der Schadenverteilung unbekannt ist, aber eine Annahme über die Verteilung des unbekanntem Parameters

⁴ Es gilt:

$$\begin{aligned}
f^+ &= (f + g - g)^+ \leq (f - g)^+ + g^+ \Rightarrow f^+ - g^+ \leq (f - g)^+ \leq \max\{(f - g)^+, (g - f)^+\} \\
g^+ &= (g + f - f)^+ \leq (g - f)^+ + f^+ \Rightarrow g^+ - f^+ \leq (g - f)^+ \leq \max\{(g - f)^+, (f - g)^+\}
\end{aligned}$$

und somit $|f^+ - g^+| = \max\{f^+ - g^+, g^+ - f^+\} \leq \max\{(f - g)^+, (g - f)^+\} = |f - g|$.

vorliegt. Die Betrachtungsweise kann sowohl auf der Ebene des Gesamtkollektivs erfolgen, d.h. in diesem Fall ist die Gesamtschadenverteilung von dem unbekanntem Parameter abhängig, als auch auf der einzelvertraglichen Ebene. Letztere ermöglicht dem Versicherer, dem Einzelrisiko eine differenzierte Prämie zuzuordnen, dessen Schadenverteilung von seinem unbekanntem Strukturparameter abhängig ist. Eine Gesamtausschüttung der Dividenden kann dann über Summation der Einzelverträge erfolgen.

Ein naheliegender Ansatz besteht nun darin, die bzgl. der Verteilungsannahme des unbekanntem Parameters gemittelten erwarteten Dividendenausschüttungen zu maximieren. Dies führt dann zu einem *Bayesschen Entscheidungsmodell* im Sinne von Rieder[88].

Definition 6.2.1 (Bayessches Ausschüttungsmodell)

Das Tupel $(\mathcal{S}_t, \mathcal{A}_t, \mathcal{A}_t(s), \Theta, \mu, (Q_t^\vartheta), r_t^\vartheta)$ heißt Bayessches Ausschüttungsmodell, wobei die Größen wie folgt erklärt sind:

1. $(\mathcal{S}_t, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Zustandsraum zum Zeitpunkt t .
2. $(\mathcal{A}_t, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ sei der Aktionsraum zum Zeitpunkt t .
3. $\{\mathcal{A}_t(s_t) | s_t \in \mathcal{S}_t\}$ ist eine Familie von nichtleeren messbaren Teilmengen von \mathcal{A}_t , welche die Menge der zulässigen Aktionen angibt, falls sich das System zur Zeit t im Zustand s_t befindet. Zudem ist die Menge

$$\mathbb{K}_t := \{(s_t, d_t) | s_t \in \mathcal{S}_t, d_t \in \mathcal{A}_t(s_t)\}$$

der zulässigen Zustands-Aktions-Paare eine messbare Teilmenge von $\mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t$. Im Speziellen setzen wir $\mathcal{A}_t(s_t) := [0, s_t^+]$.

4. (Θ, \mathfrak{T}) sei ein Messraum, welcher als Parameterraum bezeichnet wird.
5. μ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathfrak{T} und heißt a-priori-Verteilung. Wir schreiben dafür auch P^θ .
6. Sei $F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, X_{t+1}) = s_t - d_t + B_t^\vartheta - X_{t+1}$ die Systemfunktion, wobei $(X_{t+1})_{t \in \mathbb{N}_0}$ für eine Folge von bedingt unabhängigen, nichtnegativen und reellwertigen Zufallsvariablen mit gegebener Verteilung $P^{X_{t+1}|\vartheta}(\cdot)$ steht und $B_t^\vartheta := (1 + \lambda) \cdot E[X_{t+1}|\vartheta]$ gilt. Für jedes $\vartheta \in \Theta$ ist dann mit

$$Q_t(\vartheta, s_t, d_t, E) = Q_t^\vartheta(s_t, d_t, E) = \int \mathbb{1}_E[F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, X_{t+1})] dP^{X_{t+1}|\vartheta}, E \in \mathfrak{S}$$

ein Übergangswahrscheinlichkeitsmaß von $\Theta \times \mathbb{K}_t$ nach \mathcal{S}_{t+1} definiert.

7. Die einperiodige Erlösfunktion $r_t(\vartheta, s_t, d_t) = d_t \cdot \mathbb{1}_{\{d_t \in [0, (s_t - s_t^*(\vartheta))^+]\}}$ sei eine messbare und nichtnegative Abbildung von $\Theta \times \mathbb{K}_t$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die als einperiodige Dividendenausschüttung interpretiert wird.

Im Gegensatz zum Grundmodell (s. Kapitel 3) ist die Sicherheitsschranke nicht mehr Bestandteil der Menge der zulässigen Aktionen, sondern schränkt die Höhe der einperiodigen Erlösfunktion ein. Dieser Modellierungsschritt scheint zweckmäßiger zu sein, da sonst die einperiodigen Erlöse nicht mehr explizit vom Parameter ϑ abhängen würden.

Bemerkung 6.2.2 (Bayes-Sicherheitsschranke)

Im Hinblick auf die vorherigen Abschnitte kann der Parameter $s_t^*(\vartheta) > 0$ für jedes $\vartheta \in \Theta$ und $t = 0, 1, \dots$ folgendermaßen bestimmt werden

1. (VaR) $P^{X_{t+1}|\vartheta}(X_{t+1} - B_t^\vartheta > s_{1,t}^{*,\vartheta}) \leq \gamma, \gamma \in (0, 1),$
2. (TailVaR) $s_{2,t}^{*,\vartheta} = \left[P^{X_{t+1}|\vartheta}(X_{t+1} > s_{1,t}^{*,\vartheta} + B_t^\vartheta) \right]^{-1} \cdot \int (X_{t+1} - B_t^\vartheta)^+ dP^{X_{t+1}|\vartheta},$
3. (EPD) $\int [X_{t+1} - (s_{3,t}^{*,\vartheta} + B_t^\vartheta)]^+ dP^{X_{t+1}|\vartheta} = \eta, \eta > 0.$

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine deterministische Politik zu bestimmen, welche diesmal die erwarteten T-stufigen Bayes-Dividendenausschüttungen maximiert. Darunter verstehen wir eine Folge $\pi = (f_t)_{t \geq 0}$ von messbaren Abbildungen $f_t : H_t \rightarrow \mathcal{A}_t$, so dass $f_t(h_t) \in \mathcal{A}_t(s_t)$ gilt und $\pi_t(\cdot|h_t)$ die Einpunktverteilung auf $f_t(h_t)$ darstellt. Durch Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraumes

$$\left(\Theta \times \bigotimes_{t=0}^{T-1} (\mathcal{S}_t \times \mathcal{A}_t), \mathfrak{T} \otimes \bigotimes_{t=0}^{T-1} (\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{A}), \tilde{P}_{\pi_s} \right)$$

mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\tilde{P}_{\pi_s} := \mu \otimes \tilde{P}_{\pi_s}^\vartheta = \mu \otimes \delta_s \otimes \bigotimes_{t=0}^{T-2} (\pi_t \otimes Q_t) \otimes \pi_{T-1}$$

lässt sich die Problemstellung daher als

$$V^{*,\vartheta}(s) := \sup_{\pi \in \Pi} V^\vartheta(\pi, s) = \sup_{\pi \in \Pi} \int_{\Theta} \mu(d\vartheta) \int \tilde{P}_{\pi_s}^\vartheta(d\omega) R_\pi^\vartheta(\omega) \quad (6.2.1)$$

mit $R_\pi^\vartheta(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} r_t(\vartheta, s_t, d_t)$ formulieren.

Damit (6.2.1) definiert ist, konstruieren wir den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum

Bemerkung 6.2.3 Die Übergangswahrscheinlichkeit $Q_t^\vartheta(s_t, d_t, \cdot)$ besitzt eine Übergangsdichte $q_t^\vartheta(s_t, d_t, s_{t+1}) = \mathbb{1}_{\mathcal{S}_{t+1}}[F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, x_{t+1})] P^{X_{t+1}|\vartheta}(dx_{t+1})$.

Die Bemerkung 6.2.3 vereinfacht die Beweise im Bayesschen Entscheidungsmodell für den Fall, dass eine Übergangsdichte existiert. Eine weitere wichtige Größe im Bayesschen Entscheidungsmodell stellt die *a-posteriori-Verteilung* dar, die für $h_t \in H_t$ gemäß der Bayes-Formel definiert ist durch

$$\mu_t(h_t, C) = \frac{\int_C \mu_{t-1}(h_{t-1}, d\vartheta) q_{t-1}^\vartheta(s_{t-1}, d_{t-1}, \cdot)}{\int_{\Theta} \mu_{t-1}(h_{t-1}, d\vartheta) q_{t-1}^\vartheta(s_{t-1}, d_{t-1}, \cdot)}, \quad C \in \mathfrak{T}, \quad (6.2.2)$$

falls der Nenner positiv und endlich ist, und durch $\mu_t(h_t, C) = \mu_{t-1}(h_{t-1}, C)$ andernfalls. Wegen der rekursiven Darstellung von (6.2.2) folgt mit der Anfangsbedingung $\mu_0 := \mu$ für die Dichte mit Hilfe von Bemerkung 6.2.3:

$$\mu_t(h_t, d\vartheta) = \frac{\mu(d\vartheta) \prod_{i=0}^{t-1} q_i^\vartheta(s_i, d_i, \cdot)}{\int_{\Theta} \mu(d\vartheta) \prod_{i=0}^{t-1} q_i^\vartheta(s_i, d_i, \cdot)} = \frac{P^\theta(d\vartheta) \prod_{i=0}^{t-1} P^{X_{i+1}|\vartheta}(dx_{i+1})}{\int_{\Theta} P^\theta(d\vartheta) \prod_{i=0}^{t-1} P^{X_{i+1}|\vartheta}(dx_{i+1})} = P^{\theta|X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta) \quad (6.2.3)$$

mit den Bezeichnungen $X_{(t)} := (X_1, \dots, X_t)$ und $x_{(t)} := (x_1, \dots, x_t)$. Obwohl die Dichte der a-posteriori-Verteilung letztendlich nur von der Schadenbeobachtung bis zum Zeitpunkt t abhängt, ist es doch sinnvoller den gesamten Verlauf des Systems zu berücksichtigen, da dies konform zu der obigen Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraumes ist.

Gemäß Rieder[88](Lemma 3.2) können wir auch in unserem Bayesschen Ausschüttungsmodell folgendes Ergebnis ermitteln.

Lemma 6.2.4 *Es sei $\bar{Q}_t(h_t, d_t, E) := \int_{\Theta} \mu_t(h_t, d\vartheta) \int \mathbb{1}_E[F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, X_{t+1})] dP^{X_{t+1}|\vartheta}$ mit $E \in \mathfrak{G}$ das Übergangswahrscheinlichkeitsmaß von $H_t \times \mathcal{A}_t$ nach \mathcal{S}_{t+1} für $0 \leq t \leq T-1$ und $(h_t, d_t) \in H_t \times \mathcal{A}_t$. Für eine nichtnegative und messbare Funktion $r_{t+1} : \Theta \times \mathbb{K}_{t+1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $t \geq 0$ gilt dann*

$$\begin{aligned} & \int r_{t+1} d(\mu_t \otimes Q_t \otimes \pi_{t+1}) \\ &= \int \bar{Q}_t(h_t, d_t, ds_{t+1}) \int \pi_{t+1}(d d_{t+1} | h_{t+1}) \int \mu_{t+1}(h_{t+1}, d\vartheta) r_{t+1}(\vartheta, s_{t+1}, d_{t+1}). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Beweis: Es gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \int r_{t+1} d(\mu_t \otimes Q_t^\vartheta \otimes \pi_{t+1}) \\ &= \int \mu_t(h_t, d\vartheta) \int Q_t^\vartheta(s_t, d_t, d s_{t+1}) \int \pi_{t+1}(d d_{t+1} | h_{t+1}) r_{t+1}(\vartheta, s_{t+1}, d_{t+1}) \\ &\stackrel{(6.2.2)}{=} \int \bar{Q}_t(h_t, d_t, d s_{t+1}) \int \pi_{t+1}(d d_{t+1} | h_{t+1}) \int_{\Theta} \mu_{t+1}(h_{t+1}, d\vartheta) r_{t+1}(\vartheta, s_{t+1}, d_{t+1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Zur Lösung eines Bayesschen Entscheidungsmodells wird üblicherweise die Reduktion auf ein zugehöriges *nicht-Markovsches Entscheidungsmodell* durchgeführt.

Definition 6.2.5 (nicht-Markovsches Ausschüttungsmodell)

Das Tupel $(\bar{\mathcal{S}}_t, \bar{\mathcal{A}}_t, \bar{\mathcal{A}}_t(s), (\bar{Q}_t), \bar{r}_t)$ heißt nicht-Markovsches Ausschüttungsmodell, wobei die Größen wie folgt definiert sind:

1. $\bar{\mathcal{S}}_t = \mathcal{S}_t$ wie in Definition 6.2.1(Teil 1).
2. $\bar{\mathcal{A}}_t = \mathcal{A}_t$ wie in Definition 6.2.1(Teil 2).
3. $\{\bar{\mathcal{A}}_t(s) | s \in \mathcal{S}_t\} = \{\mathcal{A}_t(s) | s \in \mathcal{S}_t\}$ wie in Definition 6.2.1(Teil 3).

4. $\bar{Q}_t(h_t, d_t, E) := \int_{\Theta} \mu_t(h_t, d\vartheta) \int \mathbb{1}_E[F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, X_{t+1})] dP^{X_{t+1}|\vartheta}$ mit $E \in \mathfrak{S}$ sei das Übergangswahrscheinlichkeitsmaß von $H_t \times \mathcal{A}_t$ nach \mathcal{S}_{t+1} wie in Lemma 6.2.4.
5. Die einperiodige Erlösfunktion $\bar{r}_t(h_t, d_t) := \int_{\Theta} \mu_t(h_t, d\vartheta) \cdot d_t \cdot \mathbb{1}_{\{d_t \in [0, (s_t - s_t^*(\vartheta))^+\]}$ sei eine messbare und nichtnegative Abbildung von $H_t \times \mathcal{A}_t$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei $s_t^*(\vartheta)$ entsprechend Bemerkung 6.2.2 bestimmt wird.

Zu dem nicht-Markovschen Entscheidungsmodell können wir einen entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum so konstruieren, dass die maximal erwarteten Dividendenausschüttungen erklärt sind. Dazu sei

$$\bar{P}_{\pi s} = \delta_{s_0} \otimes \bigotimes_{t=0}^{T-2} (\pi_t \otimes \bar{Q}_t) \otimes \pi_{T-1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\bar{\Omega} = H_{T-1} \times \mathcal{A}_{T-1}$ mit der entsprechenden Produkt- σ -Algebra $\bar{\mathcal{F}} = \bigotimes_{t=0}^{T-1} (\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{A})$. Für die Wertfunktion gilt dann

$$\bar{V}^*(s) = \sup_{\pi \in \Pi} \bar{V}(\pi, s) = \sup_{\pi \in \Pi} \int_{\bar{\Omega}} \bar{P}_{\pi s}(d\omega) \bar{R}_\pi(\omega) \quad (6.2.5)$$

mit $\bar{R}_\pi(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} \bar{r}_t(h_t, d_t)$.

Der nachfolgende Satz zeigt die Gleichheit der Wertfunktionen $V^{*,\vartheta}(s)$ im Bayesschen und $\bar{V}^*(s)$ im nicht-Markovschen Entscheidungsmodell gemäß Rieder[88](Theorem 5.2).

Satz 6.2.6 *Gegeben sei ein Bayessches Entscheidungsmodell wie in Definition 6.2.1. Dann gilt für das zugehörige nicht-Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 6.2.5:*

$$\bar{V}^*(s) = V^{*,\vartheta}(s).$$

Beweis: Mit Hilfe von (6.2.1) und (6.2.5) ergibt sich

$$\bar{V}(\pi, s) = E_{\pi s} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \bar{r}_t(h_t, d_t) \right] = \sum_{t=0}^{T-1} E_{\pi s} \bar{r}_t(h_t, d_t)$$

und $V^\vartheta(\pi, s) = \int_{\Theta} \mu(d\vartheta) E_{\pi s}^\vartheta [\sum_{t=0}^{T-1} r_t(\vartheta, s_t, d_t)] = \sum_{t=0}^{T-1} \int_{\Theta} \mu(d\vartheta) E_{\pi s}^\vartheta r_t(\vartheta, s_t, d_t)$, d.h. es reicht zu zeigen, dass

$$E_{\pi s} \bar{r}_t(h_t, d_t) = \int_{\Theta} \mu(d\vartheta) E_{\pi s}^\vartheta r_t(\vartheta, s_t, d_t) \quad (6.2.6)$$

gilt, denn daraus resultiert die Gleichheit von $\bar{V}^*(s)$ und $V^{*,\vartheta}(s)$. Sei \mathcal{H}_t die Projektion auf H_t . Für die linke Seite von (6.2.6) folgt daher

$$\begin{aligned}
& \int_{H_t} (\bar{P}_{\pi_s})_{\mathcal{H}_t}(d h_t) \int_{\mathcal{A}_t} \pi_t(d d_t | h_t) \int_{\Theta} \mu_t(h_t, d\vartheta) r_t(\vartheta, s_t, d_t) \\
&= \int_{H_{t-1}} (\bar{P}_{\pi_s})_{\mathcal{H}_{t-1}}(d h_{t-1}) \int_{\mathcal{A}_{t-1}} \pi_{t-1}(d d_{t-1} | h_{t-1}) \\
&\quad \int_{\mathcal{S}_t} \bar{Q}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}, d s_t) \int_{\mathcal{A}_t} \pi_t(d d_t | h_t) \int_{\Theta} \mu_t(h_t, d\vartheta) r_t(\vartheta, s_t, d_t) \\
&\stackrel{(1)}{=} \int_{H_{t-1}} (\bar{P}_{\pi_s})_{\mathcal{H}_{t-1}}(d h_{t-1}) \int_{\mathcal{A}_{t-1}} \pi_{t-1}(d d_{t-1} | h_{t-1}) \int r_t(\vartheta, s_t, d_t) d(\mu_{t-1} \otimes Q_{t-1}^\vartheta \otimes \pi_t) \\
&\stackrel{(2)}{=} \int_{H_{t-1}} (\bar{P}_{\pi_s})_{\mathcal{H}_{t-1}}(d h_{t-1}) \int_{\mathcal{A}_{t-1}} \pi_{t-1}(d d_{t-1} | h_{t-1}) \\
&\quad \int_{\Theta} \mu_0(d\vartheta) \prod_{i=0}^{t-2} Q_i^\vartheta(s_i, d_i, d s_{i+1}) \left(\prod_{i=0}^{t-2} \bar{Q}_i(h_i, d_i, d s_{i+1}) \right)^{-1} \\
&\quad \int_{\mathcal{S}_t} Q_{t-1}^\vartheta(s_{t-1}, d_{t-1}, d s_t) \int_{\mathcal{A}_t} \pi_t(d d_t | h_t) r_t(\vartheta, s_t, d_t) \\
&= \int_{\Theta} \mu_0(d\vartheta) \delta_s(d s_0) \int_{\mathcal{A}_0} \pi_0(d d_0 | h_0) \int_{\mathcal{S}_1} Q_0^\vartheta(s_0, d_0, d s_1) \dots \\
&\quad \dots \int_{\mathcal{A}_{t-1}} \pi_{t-1}(d d_{t-1} | h_{t-1}) \int_{\mathcal{S}_t} Q_{t-1}^\vartheta(s_{t-1}, d_{t-1}, d s_t) \int_{\mathcal{A}_t} \pi_t(d d_t | h_t) r_t(\vartheta, s_t, d_t) \\
&= \int_{\Theta} \mu(d\vartheta) E_{\pi_s}^\vartheta r_t(\vartheta, s_t, d_t),
\end{aligned}$$

wobei Lemma 6.2.4 (1) liefert, (2) durch mehrmaliges Anwenden von (6.2.2) erfolgt und $\delta_s(d s_0)$ das Dirac-Maß auf $s = s_0$ ist. ■

Gemäß Satz 6.2.6 läßt sich die Bayes-Politik durch Dynamische Optimierung im nicht-Markovschen Entscheidungsmodell bestimmen. Die dazu notwendigen Voraussetzungen liefert der folgende Satz.

Satz 6.2.7 *Es sei $h_{t-1} \in H_{t-1}$ fest gewählt und $\bar{\mathbb{F}}_{t-1}$ die Menge aller messbaren Funktionen $f : H_{t-1} \rightarrow \mathcal{A}_{t-1}$ mit $f(h_{t-1}) \in \mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})$. Für jede auf \mathcal{S}_t stetige und beschränkte Funktion $v : H_{t-1} \times \mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1}) \times \mathcal{S}_t \rightarrow \mathbb{R}$ ist*

$$v^*(h_{t-1}) := \sup_{\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})} \left\{ \bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}) + \int \bar{Q}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}, d s_t) v(h_t) \right\} \quad (6.2.7)$$

messbar und erreicht sein Maximum bei $f(h_{t-1}) \in \bar{\mathbb{F}}_{t-1}$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Menge $\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})$ ist ein Kompaktum für alle $s_{t-1} \in \mathcal{S}_{t-1}$.

2. Die Funktion $\bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1})$ ist stetig auf \mathbb{K}_{t-1} .

3. Das Übergangswahrscheinlichkeitsmaß \bar{Q} ist stetig, d.h. die Funktion $\tilde{v}(h_{t-1}, d_{t-1}) := \int \bar{Q}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}, ds_t) v(h_{t-1}, d_{t-1}, s_t)$ ist für jede Funktion $v(h_t)$ wie oben stetig und beschränkt auf \mathbb{K}_{t-1} .

Beweis: Es gelten die Beweisschritte vom Selektionssatz (Satz 2.1.11). ■

Zumindest für das *Bayessche Entscheidungsmodell mit Sanierung* (vgl. Definition 3.2.2) zeigen wir explizit die Bestimmung der Wertfunktion $\bar{V}^*(s)$.

Satz 6.2.8 *Es gelte das nicht-Markovsche Entscheidungsmodell wie in Definition 6.2.5 mit der Systemfunktion*

$$F(s_t, d_t, B_t^\vartheta, X_{t+1}) = s_t - d_t + B_t^\vartheta - X_{t+1} + [s^*(\vartheta) - s_t]^+.$$

Weiterhin sei $s^*(\theta_n)$ eine nichtnegative messbare Funktion auf Θ , welche für $0 \leq n \leq T-1$ und festes $\theta_n(\omega) = \vartheta \in \Theta$ gleich dem Wert von $s_n^*(\vartheta)$ gemäß Bemerkung 6.2.2 entspricht. Dann ist die Politik $\pi^*(f(h_0), \dots, f(h_{T-1}))$ mit $\mathcal{A}_t(s_t) \ni f(h_t) := E[(s_t - s^*(\theta_t))^+ | h_t]$ optimal und für die Wertfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{V}^*(s) &= \bar{V}_0(h_0) \\ &= E[s_0 - s^*(\theta_0)]^+ + \sum_{n=0}^{T-2} E_{\theta_0, X_1, \dots, X_{n+1}, \theta_{n+1}} [s^*(\theta_n) + B_n(\theta_n) - X_{n+1} - s^*(\theta_{n+1})]^+. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Dabei ist der Erwartungswert auf der rechten Seite definiert durch

$$\begin{aligned} &\int P^{\theta_0}(d\vartheta_0) \int P^{X_1|\theta_0=\vartheta_0}(dx_1) \int P^{\theta_1|X_{(1)}=x_{(1)}}(d\vartheta_1) \dots \\ &\quad \int P^{\theta_n|X_{(n)}=x_{(n)}}(d\vartheta_n) \int P^{X_{n+1}|\theta_n=\vartheta_n}(dx_{n+1}) \\ &\quad \int [s^*(\vartheta_n) + B_n(\vartheta_n) - X_{n+1} - s^*(\vartheta_{n+1})]^+ P^{\theta_{n+1}|X_{(n+1)}=x_{(n+1)}}(d\vartheta_{n+1}) \end{aligned}$$

mit $B_n(\vartheta_n) := (1 + \lambda) \cdot E[X_{n+1} | \vartheta_n]$ für festes $\theta_n(\omega) = \vartheta_n$.

Beweis: Wir zeigen für $0 \leq t \leq T-1$ per absteigender Induktion die Gleichung

$$\bar{V}_t(h_t) = E[(s_t - s^*(\theta_t))^+ | h_t] + \sum_{n=t}^{T-2} E_{\theta_0, X_1, \dots, X_{n+1}, \theta_{n+1}} [s^*(\theta_n) + B(\theta_n) - X_{n+1} - s^*(\theta_{n+1})]^+ \quad (6.2.9)$$

und überprüfen dabei die Bedingungen von Satz 6.2.7. Dann gilt auch die Optimalität von $f(h_t) = E[(s_t - s^*(\theta_t))^+ | h_t]$. Sei $h_{T-1} \in H_{T-1}$ fest gegeben, dann folgt für die Wertfunktion

zum Zeitpunkt $T - 1$ (*Induktionsanfang*):

$$\begin{aligned}
& \bar{V}_{T-1}(h_{T-1}) \\
&= \sup_{\mathcal{A}_{T-1}(s_{T-1})} \{\bar{r}_{T-1}(h_{T-1}, d_{T-1})\} \\
&= \sup_{\mathcal{A}_{T-1}(s_{T-1})} \int d_{T-1} \cdot \mathbb{1}_{\{d_{T-1} \leq s_{T-1} - s^*(\vartheta_{T-1})\}} \cdot \mathbb{1}_{\{s_{T-1} \geq s^*(\vartheta_{T-1})\}} P^{\theta_{T-1} | X_{(T-1)} = x_{(T-1)}}(d\vartheta_{T-1}).
\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

Setzt man nun die drei Möglichkeiten

$$\begin{aligned}
d_{T-1}^1 &= s_{T-1} - (1 - k_1) \cdot s^*(\theta_{T-1}) \text{ mit } 0 < k_1 \leq 1, \\
d_{T-1}^2 &= k_2 \cdot [s_{T-1} - s^*(\theta_{T-1})] \text{ mit } 0 \leq k_2 < 1 \text{ und} \\
d_{T-1}^3 &= s_{T-1} - s^*(\theta_{T-1})
\end{aligned}$$

in (6.2.10) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= E[\{s_{T-1} - (1 - k_1) \cdot s^*(\theta_{T-1})\} \cdot \mathbb{1}_{\{s^*(\theta_{T-1}) \leq (1 - k_1) \cdot s^*(\theta_{T-1})\}} | h_{T-1}] \\
&\leq k_2 \cdot E[\{s_{T-1} - s^*(\theta_{T-1})\}^+ | h_{T-1}] \\
&\leq E[\{s_{T-1} - s^*(\theta_{T-1})\}^+ | h_{T-1}] \\
&\leq s_{T-1},
\end{aligned}$$

d.h. $\bar{V}_{T-1}(h_{T-1}) = E[(s_{T-1} - s^*(\theta_{T-1}))^+ | h_{T-1}]$ und $f(h_{T-1})$ ist optimal. Daraus resultiert die Stetigkeit von $\bar{V}_{T-1}(h_{T-1})$ auf \mathcal{S}_{T-1} nach dem *Stetigkeitslemma* (s. Lemma A.4).

Gelte für ein $t \leq T - 1$ die *Induktionsannahme*, dass $\bar{V}_t(h_t)$ für ein festes $h_t \in H_t$ der Gleichung (6.2.9) genügt und $f(h_t)$ optimal ist, dann folgt wiederum aus dem *Stetigkeitslemma*, dass $\bar{V}_t(h_t)$ stetig auf \mathcal{S}_t ist. Die gleiche Argumentation liefert dann für ein festes $h_{t-1} \in H_{t-1}$ die Stetigkeit von

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(h_{t-1}, d_{t-1}) &:= \int \bar{Q}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}, ds_t) \bar{V}_t(h_{t-1}, d_{t-1}, s_t) \\
&= \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)} = x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1} = \vartheta_{t-1}}(dx_t) \\
&\quad \int [(s_{t-1} - d_{t-1} + B(\vartheta_{t-1}) - x_t - s^*(\vartheta_t))^+ + \xi] P^{\theta_t | X_{(t)} = x_{(t)}}(d\vartheta_t)
\end{aligned}$$

auf \mathbb{K}_{t-1} mit der Hilfsfunktion

$$\xi := \sum_{n=t}^{T-2} E_{\theta_0, X_1, \dots, X_{n+1}, \theta_{n+1}} [(s^*(\theta_n) + B_n(\theta_n) - X_{n+1} - s^*(\theta_{n+1}))^+ | h_t].$$

Dabei gilt nach Ash[7](S. 225) wiederum:

$$\begin{aligned} & \int \bar{Q}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}, ds_t) \bar{V}_t(h_{t-1}, d_{t-1}, s_t) \\ &= \int P^{\theta_{t-1}|X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \\ & \quad \int \bar{V}_t(h_{t-1}, d_{t-1}, F[s_{t-1}, d_{t-1}, B_{t-1}(\vartheta_{t-1}), x_t]) P^{X_t|\theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t). \end{aligned}$$

Zudem ergibt sich wegen der Stetigkeit der Funktion $\bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1})$ auf \mathbb{K}_{t-1} und der Kompaktheit von $\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})$ die Messbarkeit von

$$\bar{V}_{t-1}(h_{t-1}) = \sup_{\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})} \{ \bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}) + \tilde{v}(h_{t-1}, d_{t-1}) \} \quad (6.2.11)$$

aus Satz 6.2.7 und demzufolge existiert ein Maximisator von (6.2.11).

Für den *Induktionsschluss* ($t \rightarrow t-1$) bleibt noch zu zeigen, dass $\bar{V}_{t-1}(h_{t-1})$ die entsprechende Gestalt von (6.2.9) hat und $f(h_{t-1})$ optimal ist. Es ergibt sich für (6.2.11):

$$\begin{aligned} & \bar{V}_{t-1}(h_{t-1}) \\ &= \sup_{\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})} \left\{ \bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}) + \int P^{\theta_{t-1}|X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t|\theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \right. \\ & \quad \left. \int \{ [s_{t-1} - d_{t-1} + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t - s^*(\vartheta_t) + (s^*(\vartheta_{t-1}) - s_{t-1})^+]^+ + \xi \} P^{\theta_t|X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \right\} \\ &= \sup_{\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})} \left\{ \bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}) + \int P^{\theta_{t-1}|X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t|\theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \right. \\ & \quad \int [(s_{t-1} - d_{t-1} + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t - s^*(\vartheta_t) + (s^*(\vartheta_{t-1}) - s_{t-1})^+]^+ P^{\theta_t|X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & \quad \left. + \int P^{\theta_{t-1}|X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t|\theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \int \xi P^{\theta_t|X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \right\} \\ &= \sup_{\mathcal{A}_{t-1}(s_{t-1})} \left\{ \bar{r}_{t-1}(h_{t-1}, d_{t-1}) + \int P^{\theta_{t-1}|X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t|\theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \right. \\ & \quad \int [s_{t-1} - d_{t-1} + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t - s^*(\vartheta_t) + (s^*(\vartheta_{t-1}) - s_{t-1})^+]^+ P^{\theta_t|X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & \quad \left. + \sum_{n=t}^{T-2} E_{\theta_0, X_1, \dots, X_{n+1}, \theta_{n+1}} [(s^*(\theta_n) + B_n(\theta_n) - X_{n+1} - s^*(\theta_{n+1}))^+ | h_{t-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Wie beim Induktionsanfang verwenden wir nun die drei Möglichkeiten

$$\begin{aligned} d_{t-1}^1 &= s_{t-1} - (1 - k_1) \cdot s^*(\theta_{t-1}) \text{ mit } 0 < k_1 \leq 1, \\ d_{t-1}^2 &= k_2 \cdot [s_{t-1} - s^*(\theta_{t-1})] \text{ mit } 0 \leq k_2 < 1 \text{ und} \\ d_{t-1}^3 &= s_{t-1} - s^*(\theta_{t-1}) \end{aligned}$$

für die zulässige Aktion und bezeichnen mit $\bar{V}_{t-1}^i(h_{t-1})$, $i = 1, 2, 3$, die zugehörigen Werte von (6.2.12).

Zum Nachweis der Behauptung überprüfen wir noch die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) \geq \bar{V}_{t-1}^2(h_{t-1}) \text{ und } \bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) \geq \bar{V}_{t-1}^1(h_{t-1}),$$

denn daraus resultiert die Optimalität von $f(h_{t-1}) = E[(s_{t-1} - s^*(\theta_{t-1}))^+ | h_{t-1}]$ und die Gültigkeit von (6.2.9) für die Funktion $\bar{V}_{t-1}(h_{t-1})$. Es folgt in der verkürzten Darstellung für $\bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) - \bar{V}_{t-1}^2(h_{t-1})$ mit der Bezeichnung $s^*(\vartheta_{t-1}) = s_{\vartheta_{t-1}}^*$:

$$\begin{aligned} & \bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) - \bar{V}_{t-1}^2(h_{t-1}) \\ &= (1 - k_2) \cdot E[(s_{t-1} - s^*(\theta_{t-1}))^+ | h_{t-1}] + \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int [s_{t-1} - [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t - s_{\vartheta_t}^* + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+]^+ P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & - \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int [s_{t-1} - k_2 [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t - s_{\vartheta_t}^* + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+]^+ P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & \stackrel{(1)}{\geq} (1 - k_2) \cdot E[(s_{t-1} - s^*(\theta_{t-1}))^+ | h_{t-1}] \\ & - (1 - k_2) \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+ \mathbb{1}_{\{s_{\vartheta_t}^* \leq s_{t-1} - k_2 (s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*)^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+\}} P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & \geq (1 - k_2) \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+ \mathbb{1}_{\{s_{\vartheta_t}^* \leq s_{t-1} - k_2 (s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*)^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+\}} P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & - (1 - k_2) \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+ \mathbb{1}_{\{s_{\vartheta_t}^* \leq s_{t-1} - k_2 (s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*)^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+\}} P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & = \int P^{\theta_{t-1} | X_{(t-1)}=x_{(t-1)}}(d\vartheta_{t-1}) \int P^{X_t | \theta_{t-1}=\vartheta_{t-1}}(dx_t) \\ & \int 0 \cdot \mathbb{1}_{\{s_{t-1} \geq s^*(\vartheta_{t-1})\}} \cdot \mathbb{1}_{\{s^*(\vartheta_t) \leq (1 - k_2)s_{t-1} + k_2 s^*(\vartheta_{t-1}) + B(\vartheta_{t-1}) - x_t\}} P^{\theta_t | X_{(t)}=x_{(t)}}(d\vartheta_t) \\ & = 0, \end{aligned}$$

wobei das Ungleichheitszeichen an der Stelle (1) durch die negativen Werte von

$$(F[s_{t-1}, [s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*]^+, B_{t-1}^{\vartheta_{t-1}}, x_t] - s_{\vartheta_t}^*) \cdot \mathbb{1}_{\{s_{\vartheta_t}^* \leq s_{t-1} - k_2 (s_{t-1} - s_{\vartheta_{t-1}}^*)^+ + B_{t-1}(\vartheta_{t-1}) - x_t + (s_{\vartheta_{t-1}}^* - s_{t-1})^+\}}$$

erfolgt. Mit $k_2 = 0$ folgt aus $\bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) \geq \bar{V}_{t-1}^2(h_{t-1})$ auch $\bar{V}_{t-1}^3(h_{t-1}) \geq \bar{V}_{t-1}^1(h_{t-1})$, was den Beweis vervollständigt. ■

Abschließend wollen wir die aus Satz 6.2.8 resultierenden Größen in Zusammenhang mit der Credibility-Theorie stellen.⁵ Die *Credibility-Theorie* behandelt die Bestimmung von erfahrungstarierten Prämien, welche in Verbindung zum individuellen Schadenverlauf des Versicherungsnehmers stehen. Die Notwendigkeit für eine Erfahrungstarifizierung lässt sich schon alleine daraus ableiten, dass eine risikoadäquate Kalkulation der Versicherungsprämie eines Einzelrisikos unter der Annahme eines homogenen Kollektivs nicht sinnvoll erscheint. Daher kann der individuelle Schadenverlauf einen Hinweis auf die Güte des Einzelrisikos geben.

Das Grundmodell der Credibility-Theorie geht nun davon aus, dass jedes Risiko aus dem Kollektiv durch einen Struktur- bzw. Risikoparameter $\vartheta \in \Theta$ charakterisiert wird. Durch diese Unterscheidung erhält jedes Risiko eine differenzierte (Netto-)Prämie $H(\theta) = E[X|\theta = \vartheta]$, wobei die Zufallsvariable θ aus der Unkenntnis des Versicherers über den Risikoparameter ϑ resultiert. Eine möglichst gute Schätzung von $H(\theta)$ führt zur (Netto-)Credibility-Prämie $H(X_{(t)}) = E[H(\theta)|X_{(t)} = x_{(t)}]$, welche sich bei bedingter Unabhängigkeit der X_1, X_2, \dots unter $\theta = \vartheta$ und gegebenen Dichten $f_X(x|\theta)$ und $f_\theta(\vartheta)$ wie folgt darstellen lässt:

$$\begin{aligned} E[H(\theta)|X_{(t)} = x_{(t)}] &= \int_{\Theta} H(\vartheta) \cdot f_\theta(\vartheta|X_{(t)} = x_{(t)}) d\vartheta \\ &= \int_{\Theta} H(\vartheta) \frac{f_{(\theta, X_{(t)})}(\vartheta, x_{(t)})}{f_{X_{(t)}}(x_{(t)})} d\vartheta \\ &= \int_{\Theta} H(\vartheta) \frac{f_{X_{(t)}}(x_{(t)}|\theta = \vartheta) f_\theta(\vartheta)}{f_{X_{(t)}}(x_{(t)})} d\vartheta \\ &= \int_{\Theta} H(\vartheta) \frac{\prod_{i=1}^t f_{X_i}(x_i|\theta = \vartheta) f_\theta(\vartheta)}{\int_{\Theta} \prod_{i=1}^t f_{X_i}(x_i|\theta = \vartheta) f_\theta(d\vartheta)} d\vartheta. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Dichte der a-posteriori-Verteilung wie in (6.2.3) der Dichte $\frac{\prod_{i=1}^t f_{X_i}(x_i|\theta = \vartheta) f_\theta(\vartheta)}{\int_{\Theta} \prod_{i=1}^t f_{X_i}(x_i|\theta = \vartheta) f_\theta(d\vartheta)}$ zur Berechnung der (Netto-)Credibility-Prämie entspricht und die Dichte $f_\theta(\vartheta)$ mit der Dichte der a-priori-Verteilung wie in Definition 6.2.1(Teil 5) übereinstimmt. Beinhaltet der Parameterraum (Θ, \mathfrak{T}) aus Definition 6.2.1(Teil 4) die zulässigen Risikoparameter der Einzelrisiken, so kann $B(\vartheta)$ wie in Definition 6.2.1(Teil 6) als differenzierte Bruttoprämie aufgefasst werden und die Größe $E[B(\theta_n)|X_{(n)} = x_{(n)}]$ gemäß (6.2.8) als (Brutto-)Credibility-Prämie interpretiert werden. Daher kann das Bayessche Entscheidungsmodell im Sinne von Bühlmann/Gisler[25](§ 1.2.4) auch als ein Ausschüttungsmodell im Credibility-Kontext verstanden werden.

Zu generellen Eignung von Ausschüttungsmodellen mit Sanierung sei an dieser Stelle angemerkt, dass diese zwar aus theoretischer Sicht interessante Resultate für das Bayes-Modell

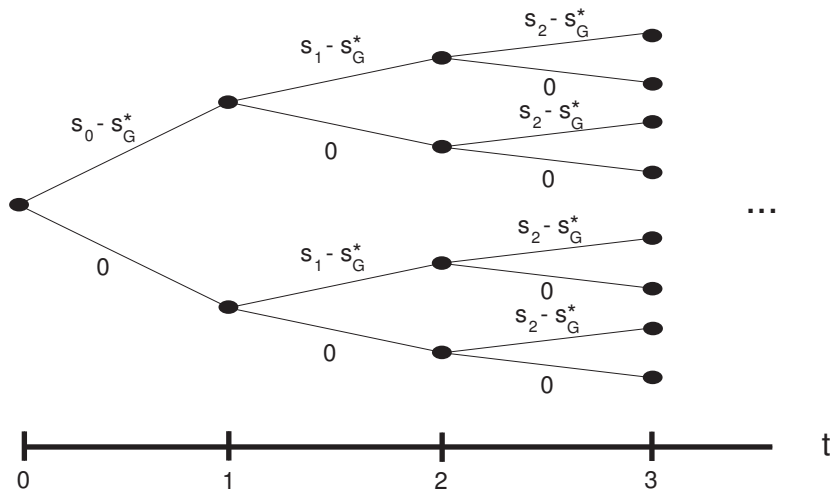
⁵ Zur Credibility-Theorie siehe auch Bühlmann/Gisler[25](§ 1), von Schaaffhausen[90], Bühlmann[24](§ 4.3.3), und Wolfsdorf[118](§ 3.5).

und das Kriterium der durchschnittsoptimalen Ausschüttungen (vgl. S. 39) liefern, aber deren Anwendungsmöglichkeit für die Praxis grundsätzlich überprüft werden muss. Dies ist nach Stenner[105](S. 224) damit zu begründen, dass die angenommene Sanierungsgarantie der Unternehmenseigner zur Abschaffung der Risikoreserve führt, denn jede Abweichung von der geforderten Risikoreserve s^* wird zu Beginn einer beliebigen Periode von den Eigentümern durch die Zuführung von zusätzlichen Geldmitteln ausgeglichen.

Numerische Lösungen

Die Ergebnisse aus den Abschnitten 4.1.2, 4.3 und 4.4 haben gezeigt, dass die Konvexität der zugehörigen Funktion $L_t(d)$ keine eindeutige Strukturaussage über die optimale Politik auf einem beschränkten Zeithorizont ermöglicht.

Abbildung 7.1: Ermittlung einer optimalen Politik im Gesamtmodell



Graphisch wird dieser Sachverhalt durch Abbildung 7.1 verdeutlicht, da jeder Kandidat für eine optimale Politik durch einen Pfad im Baumdiagramm charakterisiert ist. Als Teilergebnis erhalten wir daher für das Gesamtmodell eine endliche Menge \mathcal{D} mit

$$\mathcal{D} = \{\pi \in \Pi_M \mid \pi = (f_0(s_0), \dots, f_{T-1}(s_{T-1})), f_t(s_t) \in \{0, (s_t - s_G^*)^+\}, t = 0, 1, \dots, T-1\},$$

welche die optimale Politik $\pi^* \in \Pi_M$ im Gesamtausschüttungsmodell enthält. Zu jeder Politik $\pi \in \mathcal{D}$ kann die entsprechende Funktion $V_\pi(s) = E_s^\pi[\sum_{t=0}^{T-1} f_t(S_t)]$ berechnet werden, so dass sich das Optimierungsproblem

$$V_{\pi^*}(s) := \max_{\pi \in \mathcal{D}} V_\pi(s) \quad (7.0.1)$$

im Prinzip durch den Vergleich aller Funktionswerte von $V_\pi(s)$ lösen lässt. Da aber die Anzahl der Elemente von \mathcal{D} mit größerem Zeithorizont zunimmt, kann solch ein Vergleich sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Daher scheint es sinnvoller zu sein, sich eines stochastischen Verfahrens zu bedienen, welches mit Hilfe des Zufalls versucht, eine optimale Politik schneller zu finden.

Dazu wollen wir im folgenden Abschnitt den *Simulated Annealing-Algorithmus* vorstellen. Die für das Gesamtmodell zugehörige Umsetzung des Algorithmus bei einem dreiperiodigen Zeithorizont wird in Abschnitt 7.2 behandelt.

7.1 Der Simulated Annealing-Algorithmus

Das *Simulated Annealing* ist ein stochastisches Verfahren, welches nach gewissen Regeln Punkte eines diskreten Lösungsraums generiert und diese bei Verbesserung der Zielfunktion annimmt. Falls sich der Zielfunktionswert aber verschlechtert, so besteht dennoch die Möglichkeit, dass der generierte Punkt akzeptiert wird. Dabei werden geringe Verschlechterungen wahrscheinlicher akzeptiert als größere. In unserem Fall soll der Simulated Annealing-Algorithmus Politiken aus der Menge \mathcal{D} erzeugen und deren Zielfunktionswerte $V_\pi(s)$ vergleichen, wobei wir uns auf die Beschreibung des Verfahrens in Aarts/Korst[1] beziehen.

Für die Generierung und Akzeptanz eines neuen Punktes ist nur der aktuelle Punkt und sein Funktionswert von Bedeutung. In diesem Sinne ist das Verfahren gedächtnislos und die Modellierung erfolgt durch eine *Markov-Kette* $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit endlichem Zustandsraum \mathcal{D} für $T < \infty$. Dabei setzen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette (s. Anhang C) aus den Generierungs- und Akzeptanzwahrscheinlichkeiten zusammen.

Definition 7.1.1 (*Generierungswahrscheinlichkeit*)

Für jeden Zustand $\pi_i \in \mathcal{D}$ bezeichnet N_{π_i} die Nachbarschaft von π_i . Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein neuer Punkt $\pi_k \in N_i$ ausgehend von π_i erzeugt wird, heißt Generierungswahrscheinlichkeit $G_{\pi_i \pi_k}$ und ist wie folgt definiert

$$G_{\pi_i \pi_k} := \frac{1}{|N_{\pi_i}|}, \quad \forall \pi_k \in N_{\pi_i}, \quad (7.1.1)$$

wobei $|N_{\pi_i}| = |N_{\pi_j}|$ für alle $\pi_i, \pi_j \in \mathcal{D}$ gilt.

Definition 7.1.2 (*Akzeptanzwahrscheinlichkeit*)

Sei $\pi_i \in \mathcal{D}$ und $\pi_k \in N_i$ ein mit Wahrscheinlichkeit $G_{\pi_i \pi_k}$ generierter Punkt. Die Wahr-

scheinlichkeit, dass der neue Punkt π_k angenommen wird, heißt Akzeptanzwahrscheinlichkeit $A_{\pi_i\pi_k}$ und wird mit Hilfe eines Kontrollparameters $\xi > 0$ definiert durch

$$A_{\pi_i\pi_k}(\xi) := \exp\left(-\frac{[V_{\pi_i}(s) - V_{\pi_k}(s)]^+}{\xi}\right), \quad \forall \pi_i \in \mathcal{D}, \pi_k \in N_i. \quad (7.1.2)$$

Definition 7.1.3 Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette gemäß Definition C.1 mit zugehöriger Übergangswahrscheinlichkeit $P_{\pi_i\pi_k}$, welche definiert ist durch

$$P_{\pi_i\pi_k}(\xi) := \begin{cases} G_{\pi_i\pi_k} A_{\pi_i\pi_k}(\xi) & \text{für } \pi_i \neq \pi_k, \\ 1 - \sum_{\pi_l \in \mathcal{D}, \pi_l \neq \pi_i} P_{\pi_i\pi_l}(\xi) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die den Simulated Annealing-Algorithmus modellierende Markov-Kette.

Satz 7.1.4 Sei $\xi > 0$ fest gewählt und eine den Simulated Annealing-Algorithmus modellierende Markov-Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit endlichem Zustandsraum \mathcal{D} und den zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß obiger Definition gegeben. Existiert zudem eine geeignete Nachbarschaftsstruktur durch

$$\forall \pi_i, \pi_k \in \mathcal{D}, \exists p \geq 1, \exists \pi_0, \dots, \pi_p \in \mathcal{D}$$

$$\text{mit } \pi_0 = \pi_i, \pi_p = \pi_k \text{ und } G_{\pi_j\pi_{j+1}} > 0, j = 0, 1, \dots, p-1,$$

so dass jeder Punkt der Menge \mathcal{D} von einem beliebigen Punkt der Menge aus erreicht wird, dann besitzt die Markov-Kette eine stationäre Verteilung

$$q_{\pi_i}(\xi) = \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_i}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)}, \quad \forall \pi_i \in \mathcal{D}. \quad (7.1.3)$$

Beweis:¹ Wir wollen an dieser Stelle nur eine Beweisskizze angeben. Zuerst wird gezeigt, dass die Markov-Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ aperiodisch und irreduzibel ist. Infolgedessen gilt die globale Gleichgewichtsgleichung und es existiert eine eindeutige stationäre Verteilung.

Die Form von (7.1.3) ergibt sich wegen $\sum_{\pi_i \in \mathcal{D}} q_{\pi_i}(\xi) = 1$ und der lokalen Gleichgewichtsgleichung mit $G_{\pi_i\pi_k} = G_{\pi_k\pi_i}$:

$$q_{\pi_i}(\xi) A_{\pi_i\pi_k}(\xi) = \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_i}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{[V_{\pi_i}(s) - V_{\pi_k}(s)]^+}{\xi}\right)$$

¹ Vgl. Aarts/Korst[1](Theorem 3.2) für das Minimierungsproblem.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{V_{\pi_k}(s) - V_{\pi_i}(s) + [V_{\pi_i}(s) - V_{\pi_k}(s)]^+}{\xi}\right) \\
&= \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{[V_{\pi_k}(s) - V_{\pi_i}(s)]^+}{\xi}\right) \\
&= q_{\pi_k}(\xi) A_{\pi_k \pi_i}(\xi). \blacksquare
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 7.1.4 kann nun das Hauptresultat des Simulating Annealing-Verfahrens angegeben werden.

Korollar 7.1.5 *Es sei $\mathcal{D}_{opt} \subset \mathcal{D}$ die Menge der optimalen Lösungen und eine Markov-Kette mit den Voraussetzungen wie in Satz 7.1.4 und einer stationären Verteilung wie in (7.1.3) gegeben. Dann folgt*

$$\lim_{\xi \downarrow 0} q_{\pi_i} = \frac{1}{|\mathcal{D}_{opt}|}, \quad \forall \pi_i \in \mathcal{D}_{opt}. \quad (7.1.4)$$

Beweis:² Mit $\lim_{x \downarrow 0} e^{c/x} = 1$ für $c = 0$ und $\lim_{x \downarrow 0} e^{c/x} = 0$ für $c < 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \downarrow 0} q_{\pi_i} &= \lim_{\xi \downarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_i}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s)}{\xi}\right)} = \lim_{\xi \downarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_i}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)} \\
&= \lim_{\xi \downarrow 0} \frac{1}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{opt}}\{\pi_i\} \\
&\quad + \lim_{\xi \downarrow 0} \frac{\exp\left(\frac{V_{\pi_i}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{opt}}\{\pi_i\} \\
&= \frac{1}{\sum_{\pi_k \in \mathcal{D}_{opt}} 1 + \lim_{\xi \downarrow 0} \sum_{\pi_k \notin \mathcal{D}_{opt}} \exp\left(\frac{V_{\pi_k}(s) - V_{\pi^*}(s)}{\xi}\right)} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{opt}}\{\pi_i\} \\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}_{opt}|} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{opt}}\{\pi_i\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Wegen Korollar 7.1.5 erhalten wir

$$\lim_{\xi \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{\xi}^{(n)}(\pi_i, \pi_k) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_{opt}}\{\pi_i\} \text{ bzw. } \lim_{\xi \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\xi}(Z_n \in \mathcal{D}_{opt}) = 1,$$

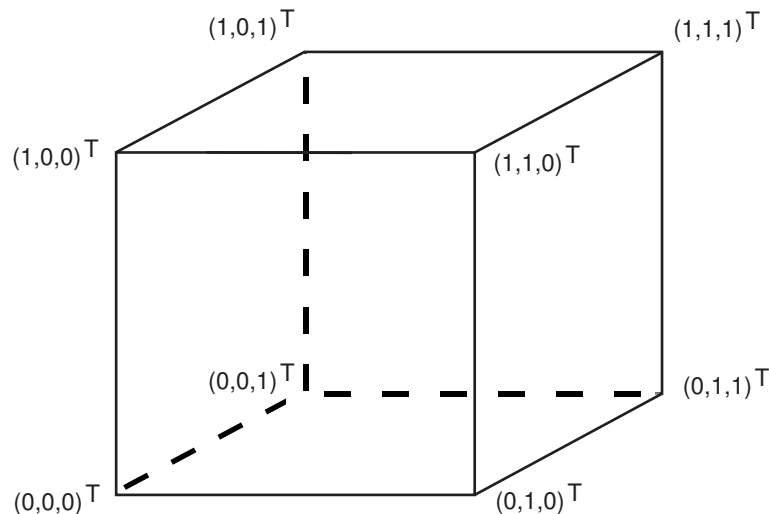
und damit die Garantie, dass der Simulated Annealing-Algorithmus asymptotisch eine optimale Lösung findet.

² Vgl. Aarts/Korst[1](Korollar 2.1).

7.2 Umsetzung des Algorithmus

Der Begriff der Nachbarschaft lässt sich in unserem Modell für $T = 3$ anhand der Abbildung 7.2 graphisch darstellen. Wird mit der Zahl 1 die Ausschüttung $(s - s_G^+)^+$ bezeichnet

Abbildung 7.2: Nachbarschaftsstruktur für optimale Politiken im Gesamtmodell für zwei Perioden



und steht die Zahl 0 für eine Nichtausschüttung, so gilt für die Menge \mathcal{D} :³

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. jede Ecke auf dem Würfel charakterisiert eine potentielle optimale Politik. Infolgedessen kann die Funktionsweise des Simulated Annealing-Algorithmus kurz skizziert werden:

1. Wähle eine Ecke des Würfels (z.B. $(0, 0, 0)^T$).
2. Bestimme von dort aus zufällig eine weitere Ecke so, dass dieser Punkt in zwei Komponenten den gleichen Wert aufweist (z.B. $(0, 1, 0)^T$).
3. Vergleiche ihre Funktionswerte. Akzeptiere auf jeden Fall den neuen Punkt, falls der Funktionswert des neuen Punktes den des alten übertrifft. Andernfalls erfolgt die Annahme oder Ablehnung des neuen Punktes durch die generierte Akzeptanzwahrscheinlichkeit (z.B. ersetze $(0, 0, 0)^T$ durch $(0, 1, 0)^T$).

³ Wegen $V_{T-1}(s) = (s - s_G^+)^+$ kann natürlich die 1 in der letzten Komponente gefordert werden. Notwendig ist diese Forderung aber nicht.

4. Fahre mit Punkt 2 fort bis die Abbruchbedingung erfüllt ist.

Der Vergleich der Funktionswerte von Punkten aus der Menge \mathcal{D} erfordert die Berechnung der zugehörigen Werte von $V_\pi(s)$ zu jeder vorgegebenen Politik, wobei die jeweiligen Ausdrücke von $V_\pi(s)$ für die relevanten Kandidaten der nachstehenden Tabelle zu entnehmen sind. Dabei kürzen wir die Funktion $c(r_f, w_f)$ mit c ab.

Politik	Wertfunktion
(1,1,1)	$(s - s_G^*)^+ + E_{X_1}[(s - (s - s_G^*)^+)(1 + r_f) + w_f[B(m) - m \cdot X_1] - c - s_G^*]^+ + E_{X_1, X_2}[F_1 \circ F_0(s, (s - s_G^*)^+, B, m, h(X_1, m), r_f, w_f) - s_G^*]^+$
(0,1,1)	$E_{X_1}[s(1 + r_f) + w_f[B(m) - m \cdot X_1] - c - s_G^*]^+ + E_{X_1, X_2}[F_1 \circ F_0(s, 0, B, m, h(X_1, m), r_f, w_f) - s_G^*]^+$
(1,0,1)	$(s - s_G^*)^+ + \dots + E_{X_1, X_2}[\min\{s, s_G^*\}(1 + r_f)^2 + \sum_0^1 (1 + r_f)^{1-n} (w_f[B(m) - m X_{n+1}] - c) - s_G^*]^+$
(0,0,1)	$E_{X_1, X_2}[s(1 + r_f)^2 + \sum_0^1 (1 + r_f)^{1-n} (w_f[B(m) - m \cdot X_{n+1}] - c) - s_G^*]^+$

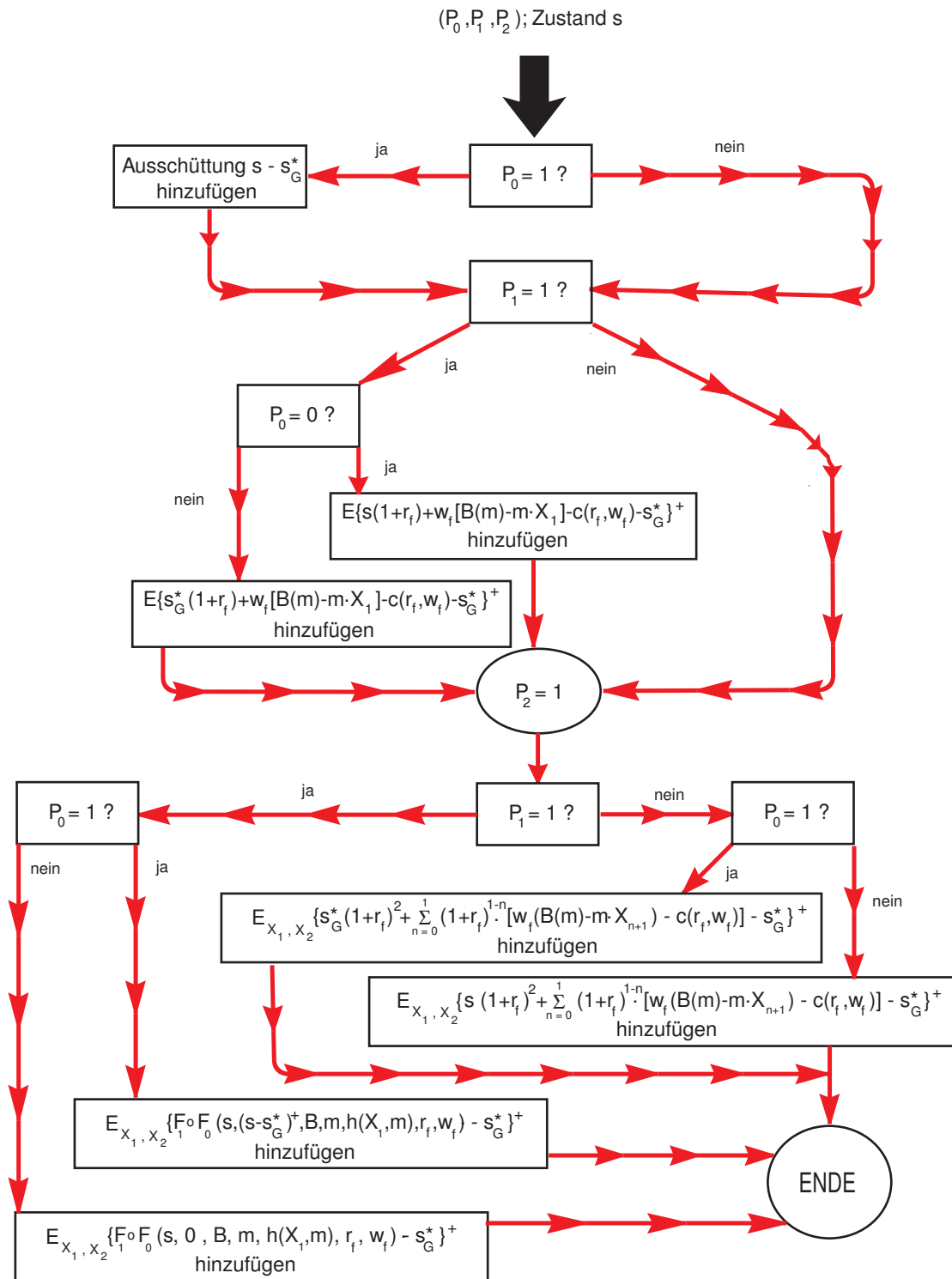
Tabelle 7.1: Zulässige Politiken und ihre Wertfunktionen für zwei Perioden

Daher muss eine softwaretechnische Umsetzung (s. Anhang D) des Simulated Annealing-Algorithmus (SA-Algorithmus) ein geeignetes Verfahren zur Berechnung des Zielfunktionalns bereitstellen. Für den Zeithorizont $T = 3$ lässt sich dies mit Hilfe der Abbildung 7.3 illustrieren. Dabei erfolgt die Berechnung eines Integrals der Dimension n , falls P_n den Wert 1 annimmt. Dazu verwenden wir die in Anhang D beschriebene *Monte-Carlo-Methode*, wobei die Parameter P_{n-1}, \dots, P_0 bei der Bestimmung künftiger Zustände nötig sind.

In Abgleich mit der obigen Funktionsweise des SA-Algorithmus sind diese Merkmale wie folgt im Programmlisting zu finden:

1. Die Startpolitik $(1, 1, 1)^T$ wird in den Zeilen 19 bis 23 ermittelt.
2. Von dieser Politik ausgehend wird zufällig die Komponente bestimmt, welche schließlich eine neue Politik generiert (Zeile 31-37).
3. Nachdem mit Hilfe der Klassenmethode `Integral` der Wert des Zielfunktionalns zu der generierten Politik bestimmt wird, erfolgt die Annahme oder Ablehnung dieser Politik in den Zeilen 53 bis 73.
4. Fortsetzung mit Teil 2.

Abbildung 7.3: Berechnung des Zielfunktional bei einem Zeithorizont $T = 3$



Im Folgenden wollen wir nun das Unternehmensbeispiel mit exponential(0.25)-verteilten Gesamtschaden entsprechend den Resultaten aus Abschnitt 4.4 für das Gesamtmodell betrachten. Demnach gilt für die durch die einperiodige Ruinwahrscheinlichkeit bestimmte Sicherheitsschranke s_G^* mit der Berücksichtigung von proportionalen RV-Schutz gemäß Lemma 4.4.4:

$$\begin{aligned} s_G^* &= \frac{w_f [m \cdot F_{X_0}^{-1}(1 - \gamma) - B(m)] + c(r_f, w_f)}{1 + r_f} \\ &= \frac{1.0188 [0.3 \cdot (-4) \cdot \ln(0.05) - 1.3] + 0.05}{1.035} \\ &= 2.30727, \end{aligned}$$

wobei die zugehörigen Parameter und ihre Variablenbezeichnungen im Programm der Tabelle 7.2 zu entnehmen sind.

Parameter	Bezeichnung	Wert
Währungskursrate w_f	<code>waehrung</code>	1.0188
Selbstbehalt m	<code>retention</code>	0.3
Nettoprämienvolumen $B(m)$	<code>NettoB</code>	1.3
Swapkosten $c(r_f, w_f)$	<code>kosten</code>	0.05
Zinsrate r_f	<code>zins</code>	0.035

Tabelle 7.2: Parameterwerte und ihre Bezeichnungen

Mit der Verwendung dieser Parameterwerte ist die mit Hilfe des SA-Algorithmus bestimmte Politik $(1, 1, 1)^T$ optimal wie die Abbildung 7.4 zeigt.

Zur Überprüfung der Optimalität sind schließlich die mit MATHEMATICA[®] durchgeführten Berechnungen des jeweiligen Zielfunktional in Tabelle 7.3 aufgelistet.

Politik	Wert von $V_0^\pi(s)$
(1,1,1)	8.7009
(0,1,1)	8.6934
(1,0,1)	8.5986
(0,0,1)	8.5767

Tabelle 7.3: Berechnete Werte von $V_0^\pi(s)$ für zwei Perioden

Abbildung 7.4: Ausgabe der berechneten Ergebnisse des SA-Algorithmus

```
Politik: (1,0,1)
Volumen: 6202183.999917235, Integral: 7.752729999896544
Volumen: 656056.9870762296, Integral: 0.820071233845287
---> Wertfunktion: 8.572801233741831
Akzeptanzw'keit: 1.0
WECHSELN !!!!!!!!!!!!!

Politik: (0,0,1)
Volumen: 6865404.457407974, Integral: 8.581755571759967
---> Wertfunktion: 8.581755571759967
Akzeptanzw'keit: 1.0
WECHSELN !!!!!!!!!!!!!

Politik: (0,1,1)
Volumen: 6533774.638176162, Integral: 8.167218297720202
Volumen: 422642.46236622264, Integral: 0.5283030779577783
---> Wertfunktion: 8.69552137567798
Akzeptanzw'keit: 1.0
WECHSELN !!!!!!!!!!!!!

Politik: (1,1,1)
Volumen: 6202183.999917235, Integral: 7.752729999896544
Volumen: 429392.7827591308, Integral: 0.5367409784489136
Volumen: 330870.06363028096, Integral: 0.4135875795378512
---> Wertfunktion: 8.70305855788331
Akzeptanzw'keit: 1.0
WECHSELN !!!!!!!!!!!!!

Politik: (0,1,1)
Volumen: 6522057.398739388, Integral: 8.152571748424235
Volumen: 419903.86346183583, Integral: 0.5248798293272948
---> Wertfunktion: 8.67745157775153
Akzeptanzw'keit: 0.7523738019566077

Optimale Politik: (1,1,1)---> Wertfunktion: 8.70305855788331
```

Diskretes Ausschüttungsmodell

Dieses Kapitel beinhaltet die Untersuchung auf einem *diskreten Zustands- und Aktionsraum* und zeigt, dass der Nachweis einer optimalen Politik über den Vergleich (\leq, \geq) von Entscheidungsregeln erfolgt.

Mit Hilfe dieser Beweisidee ist es möglich, ein Ausschüttungsmodell für ein Bankunternehmen zu entwickeln, wobei der Hauptunterschied zu der Modellierung eines Versicherungsunternehmens in den Vorzeichen der Zahlungsströme besteht, denn der deterministischen (Kredit-)Auszahlung steht der wegen des Kreditrisikos zufällige Rückzahlungsbetrag gegenüber.

8.1 Versicherungswirtschaftliches Modell

In diesem Abschnitt wollen wir folgendes versicherungswirtschaftliches Ausschüttungsmodell betrachten.

Definition 8.1.1 (*Diskretes Dividendenausschüttungsmodell*)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), p, r)$ heißt diskretes Markovsches Ausschüttungsmodell auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ mit $T < \infty$ bestehend aus:

- einem höchstens abzählbar unendlichen Zustandsraum $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$ mit einer Ordnungsrelation „ \leq “,
- einem höchstens abzählbar unendlichen Aktionsraum $(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$ mit einer Ordnungsrelation „ \leq “,
- einer Familie $\{\mathcal{A}(s) | s \in \mathcal{S}\}$ von nichtleeren messbaren Teilmengen von \mathcal{A} mit

$$\mathcal{A}(s) = \{d \in \mathcal{A} | 0 \leq d \leq (s - s^*)^+\},$$

wobei $(s-s^*)^+ := \max\{0, s-s^*\} \in \mathcal{A}$ und $|s^*| < \infty$ gilt, welche Menge der zulässigen Aktionen heißt,

- einem diskreten Übergangswahrscheinlichkeitsmaß $p(s, d, s')$ von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{S} , welches mit der messbaren Systemfunktion $F(s_t, d_t, B, X_{t+1}) := s_t - d_t + B - X_{t+1}$ definiert ist als

$$p(s, d, C) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, x)\} \cdot f(x), \quad C \in \mathfrak{S}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

Dabei ist $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Folge von nichtnegativen iid.-Zufallsvariablen auf einem höchstens abzählbar unendlichen Messraum $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$ mit Zähldichte $f(x)$, deren Erwartungswert endlich sei. Für einen Repräsentanten dieser Folge schreiben wir X_0 . Zudem sei $B := (1 + \lambda) \cdot E[X_0]$ mit $\lambda \geq 0$ eine Konstante.

- einer messbaren einperiodigen Erlösfunktion $r(s, d) := d$ von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{A} .

In Analogie zum Ausschüttungsmodell mit reellem Zustands- und Aktionsraum wollen wir nun eine optimale Politik herleiten. Dabei bezeichnet die Konstante s^* wiederum das geforderte Sicherheitsniveau, dessen Berechnung z.B. mittels der einperiodigen Ruinwahrscheinlichkeit durch $\sum_{x \in \mathcal{X}'} f(x) \leq \gamma$ erfolgen kann, wobei $\gamma \in (0, 1)$ und $\mathcal{X}' := \{x \in \mathcal{X} | x \geq s^* + B\}$ gilt.

Satz 8.1.2 *Es sei ein diskretes Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 8.1.1 gegeben und es gelte für $0 \leq t \leq T - 1$ die (zugehörige) Optimalitätsgleichung*

$$V_t(s) := \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + \sum_{x \in \mathcal{X}} V_{t+1}(s - d + B - x) \cdot f(x) \right\}, \quad V_T \equiv 0, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (8.1.1)$$

Dann folgt:

1. Die Funktion auf der rechten Seite von (8.1.1) ist messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die (deterministische Markov-)Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit

$$\mathcal{A}(s) \ni f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, \end{cases}$$

ist optimal und für die Wertfunktion gilt

$$V^*(s) = V_0(s).$$

Für die Funktion $V_t(s)$ auf \mathcal{S} gemäß (8.1.1) ergibt sich dann

$$V_t(s) = \begin{cases} 0 + EV_{t+1}(s + B - X_{t+1}) & \text{für } s \leq s^*, \\ s - s^* + EV_{t+1}(s^* + B - X_{t+1}) & \text{für } s > s^*. \end{cases} \quad (8.1.2)$$

Beweis: Teil 1 folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Selektionssatz 2.1.10, da auch im diskreten Fall die Räume $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$ und $(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$ Borel-Räume bleiben.

Für den Beweis von Teil 2 genügt es per absteigender Induktion zu zeigen, dass für die Funktion $L_t(d) := d + \sum_{x \in \mathcal{X}} V_{t+1}(s - d + B - x) f(x)$ und $d^*, d_* \in \mathcal{A}(s) \neq \{0\}$ mit $d_* \leq d^* := (s - s^*)^+$ gilt

$$L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0, \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (8.1.3)$$

Der *Induktionsanfang* für $t = T-1$ ergibt: $L_{T-1}(d^*) - L_{T-1}(d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Für die *Induktionsannahme* gelte (8.1.3) für ein $t \leq T-1$ und somit

$$EV_{t+1}(s - d^* + B - X_{t+1}) \geq d_* - d^* + EV_{t+1}(s - d_* + B - X_{t+1}). \quad (8.1.4)$$

Demnach gilt auch

$$V_t(s) = \begin{cases} s - s^* + EV_{t+1}(s^* + B - X_{t+1}) & \text{für } s > s^*, \\ EV_{t+1}(s + B - X_{t+1}) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.1.5)$$

Dann ergibt sich für (8.1.5) für ein festes $x_t \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} & V_t[s - d + B - x_t] \\ &= \begin{cases} s - d + B - x_t - s^* + \sum_{x \in \mathcal{X}} V_{t+1}[s^* + B - x] \cdot f(x) & \text{für } s - d + B - s^* > x_t, \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} V_{t+1}[s - d + B - x_t + B - x] \cdot f(x) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

Der *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$) erfolgt mit den disjunkten Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^1 &:= \{x_t \in \mathcal{X} \mid 0 \leq x_t \leq B\}, \\ \mathcal{X}^2 &:= \{x_t \in \mathcal{X} \mid B < x_t \leq s - d_* + B - s^*\}, \\ \mathcal{X}^3 &:= \{x_t \in \mathcal{X} \mid x_t > s - d_* + B - s^*\}, \end{aligned}$$

so dass $\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2 \cup \mathcal{X}^3$ gilt, denn es ergibt sich

$$\begin{aligned} & L_{t-1}(d^*) - L_{t-1}(d_*) \\ &= d^* + EV_t[s - d^* + B - X_t] - d_* - EV_t[s - d_* + B - X_t] \\ &= d^* - d_* + \sum_{x_t \in \mathcal{X}} (V_t[s - d^* + B - x_t] - V_t[s - d_* + B - x_t]) \cdot f(x_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(1)}{=} d^* - d_* + \sum_{x_t \in \mathcal{X}^1} (s - d^* + B - x_t - s^* - [s - d_* + B - x_t - s^*]) \cdot f(x_t) \\
&\quad + \sum_{x_t \in \mathcal{X}^2} \underbrace{EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}]}_{\stackrel{(8.1.6)}{\geq (s-d^*+B-x_t-s^*)+EV_{t+1}(s^*+B-X_{t+1})}} \cdot f(x_t) \\
&\quad - \sum_{x_t \in \mathcal{X}^2} (s - d_* + B - x_t - s^* + EV_{t+1}[s^* + B - X_{t+1}]) \cdot f(x_t) \\
&\quad + \sum_{x_t \in \mathcal{X}^3} EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}] \cdot f(x_t) \\
&\quad - \sum_{x_t \in \mathcal{X}^3} EV_{t+1}[s - d_* + B - x_t + B - X_{t+1}] \cdot f(x_t) \\
&\geq d^* - d_* + \sum_{x_t \in \mathcal{X}^1 \cup \mathcal{X}^2} (d_* - d^*) \cdot f(x_t) \\
&\quad + \sum_{x_t \in \mathcal{X}^3} EV_{t+1}[s - d^* + B - x_t + B - X_{t+1}] \cdot f(x_t) \\
&\quad - \sum_{x_t \in \mathcal{X}^3} EV_{t+1}[s - d_* + B - x_t + B - X_{t+1}] \cdot f(x_t) \\
&\stackrel{(2)}{\geq} d^* - d_* + \sum_{x_t \in \mathcal{X}} (d_* - d^*) \cdot f(x_t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dabei resultiert (1) aus (8.1.6) und (2) erfolgt gemäß Hilfssatz 3.1.2 durch das Ersetzen von Integration durch Summation, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathcal{X}} V_t(s - d + B - x) \cdot f(x) \\
&\leq \sum_{x \in \mathcal{X}} (s + (T - 1 - t) \cdot B - x - s^*) \cdot \mathbb{1}_{\{x \leq s + (T-1-t)B - s^*\}} f(x) < \infty. \blacksquare
\end{aligned}$$

8.2 Bankwirtschaftliches Ausschüttungsmodell

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine optimale Ausschüttungspolitik bei einem bankwirtschaftlichen Unternehmen. Da das Kerngeschäft einer Bank die Kreditvergabe ist, gehen wir von folgender vereinfachten Situation aus.

Ein Bankunternehmen vergibt zu jedem Zeitpunkt t einen Kredit der Höhe B und fordert die Rückzahlung inkl. Bearbeitungskosten und einer Gewinnmarge $(1 + \lambda) \cdot B$ mit $\lambda > 0$ zum folgenden Zeitpunkt $t + 1$ ein. Dieser Tilgungsbetrag ist angesichts des potentiellen Ausfall- bzw. Kreditrisikos des Kreditnehmers risikobehaftet, so dass eine Tilgung im Falle der Zahlungsunfähigkeit des Kreditnehmers nicht erfolgt. Demnach kann die Rückzahlung als eine 2-Punkt-Zufallsvariable X_{t+1} aufgefasst werden, wobei den Ergebnissen „Tilgung

- keine Tilgung“ positive Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, d.h. für die zugehörige Zähldichte $f(x)$ mit $p \in (0, 1)$ gilt

$$f(x) := \begin{cases} p & \text{für } x = 0, \\ 1 - p & \text{für } x = (1 + \lambda) \cdot B. \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Definition 8.2.1 (Bankwirtschaftliches Dividendenausschüttungsmodell)

Das Tupel $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mathcal{A}(s), p, r)$ heißt bankwirtschaftliches Markovsches Ausschüttungsmodell auf einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$ mit $T < \infty$, wobei die Größen wie folgt erklärt sind:

- $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$ sei der höchstens abzählbar unendlicher Zustandsraum für das Kapital, welcher mit einer Ordnungsrelation „ \leq “ versehen ist.
- $(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$ sei der höchstens abzählbar unendliche Aktionsraum für die Ausschüttungen, welcher auch mit einer Ordnungsrelation „ \leq “ versehen ist.
- $\mathcal{A}(s) = \{d \in \mathcal{A} \mid s - d \geq s^*\} = \{d \in [0, (s - s^*)^+]\}$ mit $(s - s^*)^+ := \max\{0, s - s^*\}$ sei die Menge der zulässigen Aktionen, wobei $|s^*| < \infty$ eine Konstante ist.¹
- $p(s, d, s')$ sei das Übergangswahrscheinlichkeitsmaß von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{S} , welches wegen der messbaren Systemfunktion $F(s_t, d_t, B, X_{t+1}) := s_t - d_t + X_{t+1} - B$ mit $(s, d) \in \mathbb{K}$ wie folgt definiert ist:

$$p(s, d, C) := \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{1}_C\{F(s, d, B, x)\} \cdot f(x), \quad C \in \mathfrak{S}, (s, d) \in \mathbb{K}.$$

Dabei bezeichnet $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Folge von nichtnegativen iid.-Zufallsvariablen, welche nur die Werte 0 oder $(1 + \lambda) \cdot B$ mit $(1 + \lambda) \cdot B > 0$ annehmen können und deren Zähldichte $f(x)$ die Gestalt von (8.2.1) hat. Für einen Repräsentanten dieser Folge schreiben wir X_0 .

- $r(s, d) := d$ sei eine messbare und nichtnegative Abbildung von $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ nach \mathcal{A} und heißt einperiodige Erlösfunktion .

Wie bei den bisherigen Modellen auf einem beschränkten Zeithorizont erfolgt die Ermittlung einer optimalen Ausschüttungspolitik durch den Algorithmus der Dynamischen Programmierung.

Satz 8.2.2 Es sei ein bankwirtschaftliches Markovsches Ausschüttungsmodell wie in Definition 8.2.1 gegeben und es gelte für $0 \leq t \leq T - 1$ die (zugehörige) Optimalitätsgleichung:

$$V_t(s) := \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ d + EV_{t+1}(s - d - B + X_{t+1}) \right\}, \quad V_T \equiv 0, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (8.2.2)$$

Dann folgt:

¹ Eine erste naive Überlegung führt zu $s^* = B$, so dass das Bankunternehmen bei Konkurs des Kreditnehmers mit Sicherheit solvent bleibt. Es ist jedoch durchaus möglich, ein Risikomaß zur Berechnung des Wertes s^* zu verwenden.

1. Die Funktion auf der rechten Seite von (8.2.2) ist messbar und es existiert ein Maximisator.
2. Die (deterministische Markov-)Politik $\pi^* = (f(s_0), \dots, f(s_{T-1}))$ mit

$$\mathcal{A}(s) \ni f(s) := \begin{cases} 0 & \text{falls } s \leq s^*, \\ s - s^* & \text{falls } s > s^*, \end{cases}$$

ist optimal und für die Wertfunktion gilt: $V^*(s) = V_0(s)$.

Für die Funktion $V_t(s)$ auf \mathcal{S} gemäß (8.2.2) ergibt sich dann

$$V_t(s) = \begin{cases} 0 + EV_{t+1}(s - B + X_{t+1}) & \text{für } s \leq s^*, \\ s - s^* + EV_{t+1}(s^* - B + X_{t+1}) & \text{für } s > s^*. \end{cases} \quad (8.2.3)$$

Beweis: Teil 1 folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Selektionssatz 2.1.10, da auch im diskreten Fall die Räume $(\mathcal{S}, \mathfrak{S})$ und $(\mathcal{A}, \mathfrak{A})$ Borel-Räume bleiben.

Für den Beweis von Teil 2 genügt es per absteigender Induktion zu zeigen, dass für die Funktion $L_t(d) := d + EV_{t+1}(s - d - B + X_{t+1})$ und $d^*, d_* \in \mathcal{A}(s) \neq \{0\}$ mit $d_* \leq d^* := (s - s^*)^+$ gilt:

$$L_t(d^*) - L_t(d_*) \geq 0, \forall t \in \{0, \dots, T-1\}. \quad (8.2.4)$$

Der *Induktionsanfang* für $t = T-1$ ergibt sofort: $L_{T-1}(d^*) - L_{T-1}(d_*) = d^* - d_* \geq 0$.

Für die *Induktionsannahme (IA)* gelte (8.2.4) für $t \leq T-1$ und somit für ein festes $x_t \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} & V_t(s - d - B + x_t) \\ &= \begin{cases} s - d - B + x_t - s^* + EV_{t+1}(s^* - B + X_{t+1}) & \text{für } x_t > s^* + d + B - s, \\ EV_{t+1}(s - d - B + x_t - B + X_{t+1}) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Dann ergibt sich der *Induktionsschluß* ($t \rightarrow t-1$) in Analogie zu Satz 8.1.2 durch

$$\begin{aligned} & L_{t-1}(d^*) - L_{t-1}(d_*) \\ &= d^* + EV_t(s - d^* - B + X_t) - d^* - EV_t(s - d_* - B + X_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d^* - d_* \\
&\quad + [s - d^* - B + (1 + \lambda)B - s^* + EV_{t+1}(s^* - B + X_{t+1})] \cdot \mathbf{P}(\{X_t \geq \underbrace{s^* - s + d^* + B}_{=B}\}) \\
&\quad + EV_{t+1}(s - d^* - B + X_t - B + X_{t+1}) \cdot \mathbf{P}(\{X_t < \underbrace{s^* - s + d^* + B}_{=B}\}) \\
&\quad - E(s - d_* - B + X_t - s^* + EV_{t+1}[s^* - B + X_{t+1}]) \mathbb{1}_{\{X_t \geq s^* - s + d_* + B\}} \\
&\quad - EV_{t+1}(s - d_* - B + X_t - B + X_{t+1}) \cdot \mathbf{P}(\{X_t < \underbrace{s^* - s + d_* + B}_{<B}\}) \\
&\geq d^* - d_* \\
&\quad + [s - d^* - B + (1 + \lambda)B - s^* + EV_{t+1}(s^* - B + X_{t+1})] \cdot \mathbf{P}(\{X_t = (1 + \lambda)B\}) \\
&\quad + [\underbrace{EV_{t+1}(s - d^* - B - B + X_{t+1})}_{\geq d_* - d^* + EV_{t+1}(s - d_* - B - B + X_{t+1}) \text{ lt. (IA)}} - EV_{t+1}(s - d_* - B - B + X_{t+1})] \mathbf{P}(\{X_t = 0\}) \\
&\quad - (s - d_* - B + (1 + \lambda)B - s^* + EV_{t+1}[s^* - B + X_{t+1}]) \cdot \mathbf{P}(\{X_t = (1 + \lambda)B\}) \\
&\geq d^* - d_* + (d_* - d^*) \cdot \mathbf{P}(\{X_t = (1 + \lambda)B\}) + (d_* - d^*) \cdot \mathbf{P}(\{X_t = 0\}) \\
&= d^* - d_* + (d_* - d^*) \cdot (1 - p + p) \\
&= 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, ein stochastisches dynamisches Steuerungsmodell für ein Versicherungsunternehmen auf einer diskreten Zeitachse zu entwickeln, welches die betrieblichen Zahlungsströme bzgl. eines aus *Gewinn*, *Sicherheit* und *Dividenden* bestehenden Zielsystems optimal regelt. Dabei haben sich die Methoden der zeitdiskreten *Markovschen Entscheidungsprozesse* mit reellen Zustands- und Aktionsraum als besonders geeignet erwiesen.

Die Basis für unsere Untersuchung gründet sich auf einem stationären Markovschen Ausschüttungsmodell, d.h. auf einem Entscheidungsmodell mit den zukünftigen Dividendenzahlungen als Zielfunktional. Da das (Neben-)Ziel Sicherheit bei der Konstruktion der Menge der zulässigen Ausschüttungen $\mathcal{A}(s)$ berücksichtigt wird und der erwirtschaftete Gewinn bei finanzieller Stärke vollständig als Dividendenzahlung an die Unternehmenseigner zurückfließt, genügt dieses Modell den praxisbezogenen Vorstellungen einer optimalen Unternehmenspolitik.

Die Bestimmung einer optimalen Ausschüttungspolitik bei einem beschränkten Zeithorizont erfolgt generell durch die Optimalitätsgleichung der *Dynamischen Programmierung*:

$$V_t(s) = \max_{d \in \mathcal{A}(s)} \left\{ r(s, d) + \underbrace{\int V_{t+1}(s') Q(ds'|s, d)}_{=: L_t(d)} \right\}. \quad (9.0.1)$$

In Abhängigkeit von der Problemstellung erhalten wir die Isotonie der Funktion $L_t(d)$ für jedes $s \in \mathcal{S}$ auf der rechten Seite von (9.0.1) oder zumindest die Konvexität. Falls die Gültigkeit der Isotonie gesichert ist, so besteht die Möglichkeit, die entsprechenden Optimierungsprobleme auf einem unbeschränkten Zeithorizont zu untersuchen, wobei die diskontierten Dividendenausschüttungen den Unternehmenswert der Versicherungsunternehmung darstellen, welcher als wichtiges Kriterium für die Investitionsentscheidungen

von Kapitalmarktteilnehmern fungiert. Auch die Bildung eines adaptiven Ausschüttungsmodells mit Hilfe des *PEC-* oder *Bayes-Verfahrens* ist eine weitere Folgerung der Isotonie von $L_t(d)$.

Ist zumindest die Konvexität der Funktion $L_t(d)$ erfüllt, so kann die optimale Dividendenpolitik durch ein numerisches Optimierungsverfahren ermittelt werden, wobei wir uns aufgrund der diskreten Lösungsmenge für das *Simulated Annealing-Verfahren* entschieden haben. Dabei steht der relativ einfachen Umsetzung das Problem der Ungenauigkeit gegenüber, falls die Funktionswerte zu dicht beisammen liegen. Eine weitere Alternative bietet die ε -Optimalität, so dass der Wert der erwarteten Dividendenausschüttung höchstens um den Wert ε von den maximalen erwarteten Ausschüttungen abweichen darf. Mit Hilfe der Isotonie bzw. Konvexität der Funktion $L_t(d)$ lässt sich eine optimale Dividendenpolitik wie folgt interpretieren:

- **(Isotonie)** Eine sofortige Ausschüttung ohne Verletzung der Sicherheitsbedingung weist auf eine Risikoaversion der Anteilseigner hin.
- **(Konvexität)** Das Einbehalten einer Dividendenausschüttung, sofern ausreichend Kapital zur Verfügung steht, bedeutet eine größere Gewichtung der Chance, in der zukünftigen Periode einen höheren Gewinn- bzw. Ausschüttungsbetrag zu generieren, als dieser bei einer unmittelbaren Ausschüttung möglich wäre zuzüglich des sofortigen Ausschüttungsbetrages.

Somit geschieht die Nichtausschüttung von Dividenden aufgrund der Aussicht auf eine höhere Gewinnerzielung und nicht nur wegen eines erhöhten Sicherheitsbedarfs, wobei das geforderte Sicherheitsniveau entsprechend eines gewünschten Risikomaßes bestimmt werden kann. Zudem haben wir gezeigt, dass die grundlegende Struktur dieses Modells bei Nichtstationarität erhalten bleibt.

Ein weiterer Vorteil des Ausschüttungsmodells besteht in der optionalen Erweiterung des Zustands- und Aktionsraums mit einer zusätzlichen Komponente, so dass einige Parameter des Modells über eine eigene Dynamik verfügen können. Damit kann auch die Problematik der *Spätschäden* und der *zufälligen Inflation* berücksichtigt werden.

Des Weiteren lässt sich mit der gleichen Methodik ein bankwirtschaftliches Ausschüttungsmodell herleiten, da es lediglich auf die Änderungen des Kapitalzustands in der Zeit ankommt. Dabei ist es unwichtig, welche Vorzeichen die zufallsbedingten Größen haben.

In Abgrenzung zur existierenden Literatur¹ über die Verwendung von Markovschen Entscheidungsprozessen zur Unternehmenssteuerung eines Versicherers sind die wichtigsten Merkmale unseres Ausschüttungsmodells der folgenden Auflistung zu entnehmen:

1. Wir betrachten ein Steuerungsmodell auf einer diskreten Zeitachse mit äquidistanten Zeitpunkten und weichen somit von der aktuellen Literatur ab, welche sich entweder mit der Modellierung in stetiger Zeit oder mit der Diskretisierung des Risikoreserveprozesses durch die Zeitpunkte des Schadeneintritts beschäftigt.

¹ S. dazu auch Abschnitt 1.2.

2. Im Gegensatz zu den bestehenden zeitdiskreten Modellen gehen wir weder von einer *Barrieren-Politik* aus, d.h. diese Art von Politik wird bei unserer Modellbildung nicht vorausgesetzt, sondern ist das optimale Ergebnis eines Optimierungsproblems, noch von einer konkaven Risikonutzenfunktion, welche die Geldbeträge anhand der Risikosituation im Unternehmen bewertet. Außerdem ist die Berücksichtigung von Nichtstationarität und Adaptivität bei diesen Modellen nicht erkennbar.

Angesichts der zuvor genannten Eigenschaften des Ausschüttungsmodells gibt es keine strikte Einteilung in bereits vorhandene Managementkonzepte wie das *Risiko-* oder *Asset Liability Management* (ALM).

Wir berücksichtigen zwar im Sinne des Risikomanagements die typische Risikosituation einer Versicherungsunternehmung, messen diese anhand eines festgelegten Risikomaßes und stellen geeignete Instrumente für das Management dieser Risiken bereit (z.B. RV-Schutz, Derivate), aber es ist nicht unser primäres Ziel, die Risikostruktur der Unternehmung zu verbessern.² Dies wäre der Fall, falls wir die Minimierung bzw. Maximierung der Ruin- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit betrachten würden.

Wie die Unternehmensbeispiele in Kapitel 4 zeigen, kann eine übermäßige Verbesserung der Risikosituation zu Lasten einer Verschlechterung der erwarteten Gewinnerzielung gehen und somit den erwarteten Gesamtbetrag der Dividendenausschüttungen schmälern. Auch für das ALM, welches eine Managementstrategie beschreibt, bei der simultan Unternehmensaktiva und -passiva gesteuert werden, ist das entwickelte Ausschüttungsmodell nicht generell geeignet, denn die Steuerung der Aktiva und Passiva erfolgt beim ALM hinsichtlich ihrer Laufzeit bzw. Fälligkeit so, dass diese möglichst zeitgenau aufeinander abgestimmt sind.³ In Anbetracht der diskreten Zeitachse mit konstanten Periodenlängen bleibt dieses Hauptmerkmal des ALMs weitestgehend unberücksichtigt.⁴

Daher lässt sich das Ausschüttungsmodell eher als ein Instrument für die *Strategische Planung* charakterisieren. Darunter ist ein systematischer und zukunftsbezogener Denkprozess zur Festlegung von Maßnahmen zu verstehen, durch die der betriebliche Prozessablauf als Ganzes und in allen seinen Teilen über mehrere Jahre determiniert wird.⁵ Im Sinne von Straub[106] ist aber auch darauf zu achten, dass dieser Planungsprozess ausreichend überwacht wird. Dies geschieht vor allem beim adaptiven Ausschüttungsmodell durch die fortlaufende Aktualisierung der Parameterschätzungen.

Zum Schluß sei noch auf weitere Modellierungsmöglichkeiten zur Unternehmenssteuerung eines Versicherers mit Hilfe der Markovschen Entscheidungsprozesse hingewiesen, wobei damit nicht die Kombination der einzelnen Teilmodelle gemeint ist:⁶

² Zur Thematik des Risikomanagements siehe auch Wenninger[111](§ 5.1) oder Liebwein[68](§ 2.1.2) und die dort angegebene Literatur.

³ Vgl. dazu beispielsweise die Arbeit von Jost[60].

⁴ Dies wird auch durch die Annahme unterstützt, dass die Ergebnisse aus der Kapitalanlage und dem Versicherungsgeschäft zum darauf folgenden Zeitpunkt zu- bzw. abfließen sollen.

⁵ Vgl. Msheliza[74], Ackoff[2](S. 11ff), Farny[38](§ III.52) und Daykin[29](§ 14.5).

⁶ Z.B. ist ein Gesamtmodell mit dynamischer Wahl der Kapitalanlage bzw. des RV-Schutzes und/oder

- Ein Hauptbestandteil unseres Modells war die Annahme, dass alle Informationen einer zentralen Einheit, dem Management, zufließen, so dass auf Grundlage dieser Informationen Entscheidungen getroffen werden. Diese Annahme kann dahingehend abgeschwächt werden, dass es im Sinne von Paul[78] mehrere (voneinander unabhängige) Entscheidungsträger gibt, deren Entscheidungsmöglichkeiten sich nur auf ihr verantwortliches Teilgebiet der Versicherungsunternehmung (z.B. Versicherungsgeschäft, Kapitalanlage) beschränken.
- Zu guter Letzt kann auch die Problematik der Zeitverzögerung (time delay) berücksichtigt werden. Diese äußert sich vor allem darin, dass gewählte Entscheidungen erst zu späteren Zeitpunkten wirksam werden wie die folgende Systemgleichung des Kapitalzustandes zeigt

$$s_{t+1} = s_t - d_t + B(m_{t-1}) - m_{t-1} \cdot X_{t+1}, t \in \mathbb{N}$$

Dabei tritt hier die Zeitverzögerung bei der Wahl des Selbstbehaltes m_{t-1} der proportionalen Rückversicherung auf. Denkbar wäre natürlich auch das Einbeziehen von unterschiedlichen Laufzeiten der Assets.

Konvergenzsätze

Lemma A.1 *Es sei $(X_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $i = 1, \dots, k$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, welche \mathbf{P} -fast sicher gegen X^i konvergiert und $\psi : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann folgt:*

$$\psi(X_n^1, \dots, X_n^k) \rightarrow \psi(X^1, \dots, X^k) \quad \mathbf{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis: S. Gänsler/Stute [44](Lemma 1.11.4, S. 59). ■

Lemma A.2 (Lemma von Fatou) *Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von nichtnegativen \mathcal{F} -messbaren numerischen Funktionen. Dann ist auch*

$$f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

eine nichtnegative \mathcal{F} -messbare numerische Funktion, und es gilt

$$0 \leq \int (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: S. Behnen/Neuhaus[13](Lemma 17.14). ■

Satz A.3 (Satz von Lebesgue, majorisierte Konvergenz) *Es seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und \mathcal{F} -messbare Funktionen f, g und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \mu - f.s.$
- $|f_n| \leq g \quad \mu - f.s., \forall n \in \mathbb{N}$
- $\int |g| d\mu < \infty$

gegeben. Dann sind die Funktionen f und f_n μ -integrierbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu \quad \text{sowie} \quad \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Beweis: S. Behnen/Neuhaus[13](Satz 17.15). ■

Ein weiteres für die Anwendung nützliches Resultat, welches sich auf den Satz von der majorisierten Konvergenz begründet, ist dem folgenden Lemma zu entnehmen.

Lemma A.4 (Stetigkeitslemma) Sei M ein metrischer Raum und $f : M \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Funktion $\omega \mapsto f(m, \omega)$ ist μ -integrierbar für alle $m \in M$.
2. Die Funktion $m \mapsto f(m, \omega)$ ist stetig in $m_0 \in M$ für alle $\omega \in \Omega$.
3. Es existiert eine μ -integrierbare Funktion $h \geq 0$ auf Ω mit

$$|f(m, \omega)| \leq h(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega \text{ und alle } m \in M.$$

Dann ist die auf M definierte Funktion $\phi(m) := \int f(m, \omega) \mu(d\omega)$ stetig in m_0 .

Beweis: S. Bauer[9](Lemma 16.1). ■

Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße

An dieser Stelle sollen einige Eigenschaften des Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ kurz aufgezeigt werden. Dabei halten wir uns eng an Billingsley[17](§ 1.6) und Bertsekas/Shreve[16](§ 7), wobei die entsprechenden topologischen Grundbegriffe z.B. Franz[42] zu entnehmen sind.

Zunächst sei ein Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ gegeben, welcher ein *Borel-Raum* ist, d.h. gemäß Definition 2.1.1 ein topologischer Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$, der homöomorph zu einer Borelschen (Teil-)Menge eines vollständigen und separablen metrischen Raumes ist. Demzufolge ist \mathcal{X} auch *metrisierbar* und *separabel*.

Weiterhin sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Messraum $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$. Die Menge aller W-Maße auf \mathcal{X} werde mit $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ bezeichnet. Dann definiert ein W-Maß $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ mit $u \in C_b(\mathcal{X})$ ein lineares Funktional

$$I_u(\mu) : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mu \mapsto \int u \, d\mu,$$

wobei $C_b(\mathcal{X})$ für die Menge aller reellwertigen, stetigen und beschränkten Funktionen auf \mathcal{X} steht.

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ lassen sich damit Umgebungen $\mathcal{V}_{\epsilon;u}(\mu) \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ konstruieren gemäß

$$\mathcal{V}_{\epsilon;u}(\mu) := \left\{ \mu' \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \left| \int u \, d\mu' - \int u \, d\mu \right| < \epsilon \right\}$$

mit $u \in C_b(\mathcal{X})$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Somit bildet ein System von Umgebungen

$$\mathcal{V}_{\epsilon; u_1, \dots, u_n}(\mu) := \left\{ \mu' \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \left| \int u_i \, d\mu' - \int u_i \, d\mu \right| < \epsilon, \epsilon > 0, i = 1, \dots, n \right\},$$

wobei u_1, \dots, u_n endlich viele Funktionen in $C_b(\mathcal{X})$ bezeichnen, eine beliebige *Subbasis* der Topologie \mathcal{O}_w von $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Diese Topologie \mathcal{O}_w heißt *schwache Topologie* oder *Topologie der*

schwachen Konvergenz, da die zu \mathcal{O}_w gehörige Konvergenz *schwache Konvergenz* genannt wird, d.h. es gilt

$$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mu, \text{ falls } \int u d\mu_n \rightarrow \int u d\mu, \forall u \in C_b(\mathcal{X}).$$

Demnach kann gemäß Bertsekas/Shreve[16](§ 7.4.2) auch gezeigt werden, dass $(\mathcal{P}(\mathcal{X}), \mathcal{O}_w)$ ein Borel-Raum ist, falls \mathcal{X} einer ist. Zudem ist die Stetigkeit des linearen Funktionals $I_u(\mu)$, d.h. die Urbilder offenen Mengen sind stets wieder offen, eine weitere Eigenschaft der schwachen Topologie.

Für die Optimierung ist es oftmals notwendig, dass die zugrunde liegende Menge $\Lambda \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ *kompakt* ist. Damit dies gewährleistet ist, benötigen wir noch den Begriff der *Straffheit*. Dabei heißt Λ *straff*, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K so existiert, dass $\mu(K) > 1 - \epsilon$ für alle $\mu \in \Lambda$ gilt.

Mit der Straffheit von Λ kann zumindest die *relative Kompaktheit* dieser Menge gezeigt werden. Darunter verstehen wir nach Billingsley[17](S. 35), dass jede Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda$ eine schwach konvergente Teilfolge $(\mu_{n'})_{n' \in \mathbb{N}} \rightarrow \dot{\mu}$ besitzt, wobei das W-Maß $\dot{\mu}$ selbst jedoch nicht unbedingt ein Element von Λ ist.

Satz B.1 (Satz von Prohorov)

Sei \mathcal{X} ein metrisierbarer Raum und $\Lambda \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ eine Menge von W-Maßen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}})$. Falls Λ straff ist, so ist Λ auch relativ kompakt.

Ist also $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ mit der schwachen Topologie versehen und Λ relativ kompakt, so reicht es zum Nachweis der Kompaktheit von Λ schließlich aus, die *Abgeschlossenheit* dieser Menge zu zeigen.

Homogene Markov-Ketten

Dieser Abschnitt beinhaltet einige Resultate für homogene Markov-Ketten in diskreter Zeit mit endlichem Zustandsraum entsprechend Billingsley[18](§ 8), Breiman[22](§ 6) und Fellar[40](§ 15), soweit sie zur Herleitung des Simulated Annealing-Algorithmus notwendig sind.

Definition C.1 Ein stochastischer Prozess $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) mit endlichem Zustandsraum S heißt Markov-Kette, falls die Markov-Eigenschaft gilt, d.h.

$$P(Z_{t_n} = k_n | Z_{t_{n-1}} = k_{n-1}, \dots, Z_{t_1} = k_1) = P(Z_{t_n} = k_n | Z_{t_{n-1}} = k_{n-1})$$

für $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_k \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $k_1, k_2, \dots, k_n \in S$, sofern die linke Seite erklärt ist.

Definition C.2 Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette.

1. Falls die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(Z_{m+n} = j | Z_n = i), \quad i, j \in S, n \geq 0, m \geq 1$$

definiert ist, so wird sie m -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j zur Zeit n genannt.

2. Gilt für alle m, i, j

$$P(Z_{m+n} = j | Z_n = i) = P(Z_m = j | Z_0 = i) =: p^{(m)}(i, j),$$

so heißt $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ (zeit-)homogene Markov-Kette. Dabei wird mit $\mathbf{p} = (p^{(1)}(i, j))_{i, j \in S}$ die Matrix der ein-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet.

Definition C.3 Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum und einer Übergangsmatrix \mathbf{p} . $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wird irreduzibel genannt, falls zu jedem Paar $i, j \in S$ ein $n \geq 1$ so existiert, dass $p^{(n)}(i, j) > 0$ gilt.

Definition C.4 Für eine Markov-Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit endlichem Zustandsraum und einer Übergangsmatrix \mathbf{p} sei

$$\mathcal{N}_i := \{n \in \mathbb{N}_+ : p^{(n)}(i, i) > 0\}.$$

Ist \mathcal{N}_i nichtleer, so bezeichnet der größte gemeinsame Teiler d_i von \mathcal{N}_i die Periode des Zustands i . $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt aperiodisch, falls jeder Zustand $i \in S$ die Periode 1 hat.

Definition C.5 Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum und einer Übergangsmatrix \mathbf{p} . Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung q auf S heißt stationäre Verteilung von $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, falls gilt

$$\sum_{i \in S} q_i p^{(1)}(i, j) = q_j, \quad \forall j \in S.$$

Satz C.6 Für eine irreduzible und aperiodische Markov-Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit endlichem Zustandsraum S , Übergangsmatrix \mathbf{p} und stationärer Verteilung q gilt

$$q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(i, j), \quad \forall i, j \in S$$

mit $q_i > 0$ für alle $i \in S$. Zudem ist die stationäre Verteilung q eindeutig.

Beweis: S. Billingsley[18](Theorem 8.6). ■

Lemma C.7 Sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum und Übergangsmatrix \mathbf{p} . Gilt für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung q auf S :

$$q_i p^{(1)}(i, j) = q_j p^{(1)}(j, i), \quad \forall i, j \in S,$$

so ist q eine stationäre Verteilung von $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Beweis: Das Summieren über alle Zustände $i \in S$ ergibt

$$\sum_{i \in S} q_i p^{(1)}(i, j) = \sum_{j \in S} q_j p^{(1)}(j, i) = q_j \sum_{j \in S} p^{(1)}(j, i) = q_j. \quad \blacksquare$$


```
1 import java.util.*;
2 import java.lang.Math;
3
4 public class PolitikFinden {
5
6     public static void main(String[] args) {
7         final int Periode=2;
8         final double s=10.06;
9         final double s_stern=2.30727;
10        final double control=0.09;
11        Random w= new Random();
12        Vector p= new Vector(5,5);
13        Vector pp = new Vector(5,5);
14        double akzept, wert, wert_opt;
15
16        wert_opt=0;
17        wert=0;
18
19        //Anfangspolitik ohne Wert festlegen
20        for (int i=0; i<Periode+1; i++)
21            {p.add(i, "1");
22             pp.add(i, "1");
23            }
24
25        for (int PolitikLauf=0; PolitikLauf<20; PolitikLauf++) {
26            for (int i=0; i<Periode+1; i++){
```

```

27         String hilfe2=(String)pp.get(i);
28         p.set(i,hilfe2);
29     }
30
31     //Generiere zufällig nächste Politik
32     int stelle=Math.abs(w.nextInt())%(Periode);
33
34     if (pp.get(stelle)=="1")
35         p.set(stelle,"0");
36     else
37         p.set(stelle,"1");
38
39     //Ausgabe der Politik
40     System.out.print("Politik:␣");
41     for (int n=0; n<Periode; n++)
42         System.out.print(p.get(n)+",");
43     System.out.println(p.get(Periode)+"");
44
45     //Wertfunktion zur Politik berechnen
46
47     for (int lauf=0; lauf<Periode+1; lauf++)
48         if (p.get(lauf)=="1")
49             wert+=Integral(p,lauf);
50
51     System.out.println("—>␣␣Wertfunktion:␣"+wert);
52
53     //Akzeptanzwahrscheinlichkeit berechnen
54     if (wert_opt>wert)
55         akzept=Math.exp(-(wert_opt-wert)/control);
56     else
57         akzept=1;
58
59     System.out.println("Akzeptanzw'keit:␣"+akzept);
60
61     if (w.nextDouble()<akzept)
62     { wert_opt=wert;
63       for (int n=0; n<Periode+1; n++)
64         { String hilfe3=(String)p.get(n);
65           pp.set(n,hilfe3);
66         }
67       System.out.println("WECHSELN␣!!!!!!!!!!!!");
68     }
69

```

```

70     //Zurücksetzen der Politikparameter
71     wert=0;
72     System.out.println();
73 }
74
75 System.out.print(" Optimale Politik: ");
76 for (int n=0; n<Periode; n++)
77     System.out.print(pp.get(n)+" ,");
78 System.out.print(pp.get(Periode)+"");
79 System.out.println(" —> Wertfunktion: "+wert_opt);
80 }
81
82
83 static double Integral (Vector ipol, int dimension) {
84     Random r=new Random();
85     double integralsumme, entscheidung, hvolumen;
86     double volumen, dichte;
87     double hilfsumme, s_hilfe, hilfe1, hilfe2;
88     final int Schritte=800000;
89     final double start=10.06;
90     final double kosten=0.05;
91     final double zins=0.035;
92     final double waehrung=1.0188;
93     final double NettoB=1.3;
94     final double retention=0.3;
95     final double I_s_stern=2.30727;
96     double [] x_max= new double[dimension];
97     double [] x= new double[dimension];
98     double [] s= new double[dimension+1];
99
100     integralsumme=0;
101     volumen=0;
102     hvolumen=0;
103     hilfsumme=0;
104     hilfe1=1;
105     entscheidung=0;
106
107     //Obergrenzen für jede Koordinate
108     for (int k=1; k<dimension; k++)
109         hilfe1=hilfe1*(1+zins);
110
111     for (int m=0; m<dimension; m++) {
112         hilfe2=waehrung*NettoB-kosten;

```

```

113         for (int k=1; k<m+1; k++)
114             hilfe2=hilfe2*(1+zins);
115         hilfsumme+=hilfe2;
116     }
117
118     if (dimension>0)
119         x_max[0]=(start*hilfe1*(1+zins)+hilfsumme-I_s_stern)/
120                 (hilfe1*waehrung*retention);
121
122     for (int k=1; k<dimension; k++)
123         x_max[k]=x_max[k-1]*(1+zins);
124     //Obergrenzen Ende
125
126     for (int i=0; i<Schritte; i++)
127     { //X-Werte zufällig generieren
128         for (int m=0; m<dimension; m++)
129             x[m]=r.nextDouble()*x_max[m];
130         s[0]=start;
131         for (int m=1; m<dimension+1; m++) {
132             s_hilfe=s[m-1];
133             if (ipol.get(m-1)=="1")
134                 entscheidung=Math.max(0, s_hilfe-I_s_stern);
135             else
136                 entscheidung=0;
137
138             s[m]=(s_hilfe-entscheidung)*(1+zins)
139                 +waehrung*(NettoB-retention*x[m-1])-kosten;
140         }
141         hvolumen=s[dimension]-I_s_stern;
142
143         if (hvolumen>0){ // Punkte x zulässig?
144             dichte=1;
145             for (int m=0; m<dimension; m++) //Dichte
146                 dichte=dichte*0.25*Math.exp(-0.25*x[m]);
147             volumen+=hvolumen*dichte;
148         }
149     }
150
151     //Volumen relativieren
152     for (int m=0; m<dimension; m++)
153         volumen=volumen*x_max[m];
154
155     integralsumme= volumen/Schritte;

```

```

156
157     System.out.println("Volumen: " + volumen +
158                       ", Integral: " + integralsumme);
159     return integralsumme;
160 }
161 }

```

Die Funktionsweise des Programms `PolitikFinden.java` wurde schon in Abschnitt 7 genauer betrachtet. Wir wollen an dieser Stelle beispielsweise die Berechnung eines mehrdimensionalen Integrals der Form

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(s(1+r_f)^d + \sum_{n=0}^{d-1} (1+r_f)^{d-n-1} (w_f[B(m) - m \cdot x_{n+1}] - c) - s_G^* \right)^+ dF(x_1, \dots, x_d) \quad (\text{D.0.1})$$

mit Dimension $d \geq 1$ erläutern, welche durch die Klassenmethode `Integral` erfolgt. Dabei stellt das Integral in (D.0.1) den zur Politik $(0, 0, \dots, 0, 1)$ gehörigen Ausschüttungsbetrag dar.

Zunächst erhalten wir für jede Koordinate $1 \leq i \leq d$ obere Integrationsgrenzen x_i^{max} , indem die übrigen Werte $x_j, \forall j \neq i$ gleich Null gesetzt werden, so dass die Funktion

$$g(x_1, \dots, x_d) := s \cdot (1+r_f)^d + \sum_{n=0}^{d-1} (1+r_f)^{d-n-1} (w_f[B(m) - m \cdot x_{n+1}] - c) - s_G^* \quad (\text{D.0.2})$$

den Wert Null ergibt. Diese Werte werden in den Zeilen 107-124 berechnet und haben die folgende Gestalt

$$x_i^{max} = \frac{s \cdot (1+r_f)^d + \sum_{n=0}^{d-1} (1+r_f)^{d-n-1} [w_f B(m) - c] - s_G^*}{m \cdot w_f \cdot (1+r_f)^{d-i}}.$$

Diese Integrationsgrenzen sind sogar allgemein gültig, da für jede Entscheidungsregel $f_t(s) = [s - s_G^*]^+$ gilt

$$S_{t+1} = S_t - f_t(S_t) + w_f[B(m) - m X_{t+1}] - c \leq S_t + w_f[B(m) - m X_{t+1}] - c.$$

Da mit der Menge $\mathcal{X} := [0, x_1^{max}] \times \dots \times [0, x_d^{max}] \subset \mathbb{R}^d$ alle zulässigen Punkte erfasst werden, kann für das Integral (D.0.1) mit der Funktion $h(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})$ auch geschrieben werden:

$$\int_{\mathcal{X}} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathcal{X}| \int_{\mathcal{X}} |\mathcal{X}|^{-1} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathcal{X}| \cdot \mu(h), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$$

mit $g(\mathbf{x})$ wie in (D.0.2) und der Riemann-Dichte $f(\mathbf{x})$ über \mathbb{R}^d . Dabei ist es unerheblich, dass die Funktion $g(\mathbf{x})$ auch den Wert 0 annehmen kann.

Mit Hilfe der *Monte-Carlo-Methode* im Sinne von Quarteroni/Sacco/Saleri[85](§ 9.9.3) oder Behnen/Neuhaus[13](§ 24) ist dieses Integral am einfachsten zu berechnen. Demnach wird das Integral als ein statistischer Mittelwert interpretiert. Die Berechnung des Mittelwertes $\mu(h)$ erfolgt schließlich durch das Mittel $N^{-1} \sum_{i=1}^N h(\mathbf{x}_i)$, wobei $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathcal{X}$

die N unabhängigen Stichproben mit gleichmäßiger Wahrscheinlichkeitsdichte $|\mathcal{X}|^{-1}$ darstellen, denn dieses Mittel konvergiert nach dem *Gesetz der großen Zahlen* mit Wahrscheinlichkeit 1 für $N \rightarrow \infty$ gegen den Mittelwert $\mu(h)$. Leider führt die Regularität der zu integrierbaren Funktion bei dieser Methode zu keiner Verbesserung des Integralwertes. Jedoch bietet die Monte-Carlo-Methode die Möglichkeit, mit geringem Aufwand die Stochastizität für beschränkte Kapitalanlage- und Währungskursraten zu berücksichtigen.

Die zur Integration notwendigen Punkte $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ werden in den Zeilen 127-129 generiert. Durch Iterieren mit der Systemfunktion (Zeile 130 bis 140) erhalten wir die zukünftige Ausschüttung $g(\mathbf{x})$ (Zeile 141), welche aufgrund der Entscheidungsregel $f_t(s) = (s - s_G^*)^+$ ggf. nicht beachtet wird (Zeile 143). Multiplikation mit der Dichte $f(\mathbf{x})$ liefert schließlich den Funktionswert von $h(\mathbf{x})$ (Zeile 144-147), so dass das Produkt $|\mathcal{X}| \cdot \mu(h)$ und damit auch das gewünschte Integral in den Zeilen 153 und 155 berechnet wird.

Literaturverzeichnis

- [1] Aarts, Emile & Korst, Jan: *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*, John Wiley & Sons, Chichester etc., 1989
- [2] Ackoff, Russell Lincoln: *Unternehmensplanung - Ziele und Strategien rationeller Unternehmensführung*, Oldenbourg, München [u.a.], 1972
- [3] Albrecher, Hansjörg; Hartinger, Jürgen & Tichy, Robert E.: *On the distribution of dividend payments and the discounted penalty function in a risk model with linear dividend barrier*, in: *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2005, Issue 2, 2005
- [4] Albrecht P. & Maurer, R.: *Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen*, Schäffer-Poeschel, Stuttgart, 2002
- [5] Artzner, Philippe: *Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance*, in: *North American Actuarial Journal*, Volume 3, No. 2, 1999
- [6] Artzner, Philippe; Delbaen, Freddy; Eber, Jean-Marc & Heath, David: *Coherent Measures of Risk*, in: *Mathematical Finance*, Volume 9, No. 3, 1999
- [7] Ash, R.B.: *Real Analysis and Probability*, Academic Press, New York, 1973
- [8] Assaf, David; Baryshnikov, Yuliy & Stadje, Wolfgang: *Optimal Strategies in a Risk Selection Investment Model*, in: *Adv. Appl. Prob.* 32, 2000
- [9] Bauer, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin, 2. Auflage, 1992
- [10] Bauer, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin, 4. Auflage, 1991
- [11] Bäuerle, Nicole: *Approximation of optimal reinsurance and dividend payout policies*, in: *Mathematical Finance* 14, No. 1, 2004

-
- [12] Beard, R.E.; Pentikäinen, T. & Pesonen, E.: *Risk Theory - The Stochastic Basis of Insurance*, Chapman & Hall, New York, 3. Auflage, 1984
- [13] Behnen, Konrad & Neuhaus, George: *Grundkurs Stochastik*, B.G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1995
- [14] Bertsekas, Dimitri P.: *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987
- [15] Bertsekas, Dimitri P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, Volume 1 + 2, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995
- [16] Bertsekas, Dimitri P. & Shreve, Steven E.: *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 139, Academic Press, New York, 1978
- [17] Billingsley, Patrick: *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York [u.a.], 1968
- [18] Billingsley, Patrick: *Probability and Measure*, 2. Edition, John Wiley & Sons, New York [u.a.], 1986
- [19] Bonsdorff, Heikki: *An Application of Risk Theory to Control Solvency and Financial Strength*, in: Insurer Financial Solvency, Casualty Actuarial Society, 1992
- [20] Borch, Karl: *The Mathematical Theory of Insurance - An Annotated Selection of Papers on Insurance published 1960-1972*, Lexington Books, D.C. Heath and Company, London, 1974
- [21] Borch, Karl: *Economics of Insurance*, Advanced Textbooks in Economics, Vol. 29, North-Holland, Amsterdam, 1990
- [22] Breiman, Leo: *Probability and stochastic processes : with a view toward applications*, Houghton Mifflin, Boston [u.a.], 1969
- [23] Brockett, Patrick L. & Xia, Xiaohua: *Operations Research in Insurance: A Review*, in: Transactions of Society of Actuaries, Vol. 47, 1995
- [24] Bühlmann, Hans: *Mathematical Models in Risk Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung, Band 172, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970
- [25] Bühlmann, Hans & Gisler, Alois: *A Course in Credibility and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlin [u.a.], 2005
- [26] Butsic, Robert P.: *Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications*, in: Journal of Risk and Insurance, Volume 61, No. 4, 1994

- [27] Cummins, J. David & Derrig, Richard A. (Eds.): *Financial Models of Insurance Solvency*, Kluwer Academic Publishers, Boston (u.a.), 1989
- [28] Daykin, C.D. & Hey, G.B.: *Managing Uncertainty in a General Insurance Company*, in: Journal of the Institute of Actuaries, Volume 117, 1990
- [29] Daykin, C.D.; Pentikäinen, T. & Pesonen, M.: *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London, 1994
- [30] De Finetti, Bruno: *Su una Impostazione Alternativa della Teoria Collettiva del Rischio*, in: Transactions of the XV International Congress of Actuaries 2, 1957
- [31] Derman, Cyrus: *Finite State Markovian Decision Processes*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 67, Academic Press, New York, 1970
- [32] Dienst, Hans-Rudolf (Ed.): *Mathematische Verfahren in der Rückversicherung*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 19, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1988
- [33] Doherty, Neil A.: *Integrated Risk Management : Techniques and Strategies for Managing Corporate Risk*, McGraw-Hill, New York, 2000
- [34] Dotterweich, Alexander: *Wertorientierte Steuerung von Schadenversicherungsunternehmen*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2004
- [35] Duffie, Darrell: *Security Markets - Stochastic Models*, Academic Press Inc., San Diego, 1988
- [36] Dynkin, E.B. & Yushkevich, A.A.: *Controlled Markov Processes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 235, Springer-Verlag, New York, 1979
- [37] Eberts, Elke & Maurer, Raimond: *Modelle zur Prognose der Inflationsrate*, in: *Investmentmodelle für das Asset Liability Modelling von Versicherungsunternehmen*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 31, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2002
- [38] Farny, Dieter: *Versicherungsbetriebslehre*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2. Auflage, 1995
- [39] Fastrich, Henrik & Hepp, Stefan: *Währungsmanagement international tätiger Unternehmen*, C.E. Poeschel Verlag, Stuttgart, 1991
- [40] Feller, William: *An introduction to probability theory and its applications*, Volume 1, 2. Edition, John Wiley & Sons, New York (u.a.), 1959
- [41] Ferrer, José: *Versicherungstechnische Aspekte der Deckungsbeitragsrechnung*, in: *Planung und Controlling*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 29, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1997

- [42] Franz, Wolfgang: *Topologie I - Allgemeine Topologie*, Sammlung Götschen, W. de Gruyter & Co, Berlin u.a., 4. Auflage, 1973
- [43] Frisque, Andre: *Dynamic Model of Insurance Company's Management*, in: Astin Bulletin, Volume 8, No. 1, 1974
- [44] Gänszler, Peter & Stute, Winfried: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1977
- [45] Gerathewohl, Klaus: *Rückversicherung - Grundlagen und Praxis*, Band I, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1976
- [46] Gerber, Hans U.: *Games of economic survival with discrete- and continuous-income processes*, in: Operations Research, Volume 20, 1972
- [47] Gerber, Hans U. & Shiu, Elias S.W.: *On optimal dividends: from reflection to re-fraction*, in: J. Comput. Appl. Math., Vol. 186, No.1, 2006
- [48] Groffmann, Thomas: *Marktorientierte Steuerung von Schaden- und Unfallversicherungsunternehmen*, Duncker & Humblot, Berlin, 1995
- [49] Groniowska, Agnieszka & Niemirow, Wojciech: *Controlled risk processes in discrete time: Lower and upper approximations to the optimal probability of ruin*, in: Insurance: Mathematics and Economics, Volume 36, Issue 3, 2005
- [50] Harrington, Scott E. & Niehaus, Gregory R.: *Risk Management and Insurance*, Irwin/McGraw-Hill, Boston (u.a), 1999
- [51] Hermann, Ralf Martin: *Bestimmung von Ausschüttungsstrategien mittels eines Stakeholder-orientierten Ansatzes*, Hochschulschrift Universität Ulm, Dissertation, 1998
- [52] Hernández-Lerma, Onésimo: *Adaptive Markov Control Processes*, Springer-Verlag, New York, 1989
- [53] Hernández-Lerma, Onésimo & Lasserre, Jean Bernard: *Discrete-Time Markov Control Processes - Basic Optimality Criteria*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [54] Hinderer, Karl: *Foundations of Non-stationary Dynamic Programming with Discrete Time Parameter*, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, Bd. 33, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970
- [55] Hinderer, Karl: *Approximate Solutions of Finite-Stage Dynamic Programs*, Dynamic Programming and Its Applications, Proceedings of the International Conference, Vancouver 1977, 1978

- [56] Hipp, Christian: *Optimal dividend payment under a ruin constraint: discrete time and state space*, Working Paper, 2003, Online im Internet: http://insurance.fbv.uni-karlsruhe.de/rd_download/Hippneu.pdf, Abruf: 27.02.2006
- [57] Howard, Ronald A. & Matheson, James E.: *Risk-Sensitive Markov Decision Processes*, in: *Management Science*, Vol. 18, No. 7, 1972
- [58] Hull, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*, Pearson Studium, München, 2006
- [59] Jacquette, Stratton C.: *A Utility Criterion for Markov Decision Processes*, in: *Management Science*, Vol. 23, No. 1, 1976
- [60] Jost, Christiane: *Asset-Liability Management bei Versicherungen*, Schriftenreihe Versicherung und Risikoforschung, Band 19, Gabler Verlag, Wiesbaden, 1995
- [61] Kagermeier, Thomas A.: *Gesamtrisikologie eines Versicherungsunternehmens*, WiKu-Verlag, Stuttgart und Berlin, 2004
- [62] Kaluza, Bernd: *Entscheidungsprozesse und empirische Zielforschung in Versicherungsunternehmen*, Mannheimer Reihe, Bd. 13, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1979
- [63] Kaufmann, Roger; Gadmer, Andreas & Klett, Ralf: *Introduction To Dynamic Analysis*, in: *Astin Bulletin*, Volume 31, No. 1, 2001
- [64] Königsberger, Konrad: *Analysis 1*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993
- [65] Königsberger, Konrad: *Analysis 2*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993
- [66] Koryciorz, Sven: *Sicherheitskapitalbestimmung und -allokation in der Schadenversicherung*, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Bd. 67, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2004
- [67] Kushner, Harold: *Introduction to Stochastic Control*, Holt, Rinehart and Winston Inc., New York, 1971
- [68] Liebwein, Peter: *Rückversicherung, alternativer Risikotransfer, Financial Reinsurance: Eine risikopolitisch fundierte Darstellung mit Integration in ein entscheidungsorientiertes Globalmodell (Teil 2)*, Dissertation, Universität München, 1999
- [69] Lowe, Stephen P. & Stanard, James N.: *An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer*, in: *Astin Bulletin*, Volume 27, No. 2, 1997
- [70] Mack, Thomas: *Schadenversicherungsmathematik*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 28, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2002

- [71] Mandl, P.: *Estimation and control in markov chains*, in: Advances in Applied Probability 6, 1974
- [72] Mármol, Maite; Claramunt, M. Mercé & Alegre, Antonio: *Optimal Dividend Strategies: Some Economic Interpretations for the Constant Barrier Case*, in: Journal of Actuarial Practice, Vol. 12, No. 1, 2005
- [73] Martin-Löf, Anders: *Lectures on the Use of Control Theory in Insurance*, in: Scandinavian Actuarial Journal, No. 1, 1994
- [74] Msheliza, Samuel: *Strategic Planning in Insurance*, in: Diacon, Stephen (Ed.): *A Guide to Insurance Management*, The Macmillan Press Ltd., Houndmills [u.a.], 1990
- [75] Mehring, Hans-Peter: *Substanzerhaltung von Versicherungsunternehmen*, Duncker & Humblot, Berlin, 1989
- [76] Nell, Martin & Pohl, Philipp: *Wertorientierte Steuerung von Lebensversicherungsunternehmen mittels stochastischer Prozesse*, Preprint, Working Papers on Risk and Insurance, Hamburg University, 2005
- [77] Panjer, Harry & Jing, Jia: *Solvency and Capital Allocation*, 2001, Online im Internet: http://www.stats.uwaterloo.ca/Stats_Dept/IIPR/2001-reports/IIPR-01-14.pdf, Abruf: 13.06.03
- [78] Paul, Thomas Michael: *Markoffsche Entscheidungsmodelle mit unvollständiger Information*, Hochschulschrift, Universität Ulm, Diss., 1995
- [79] Pechlivanides, Pantelis M.: *Optimal Reinsurance and Dividend Payment Strategies*, in: Astin Bulletin, Volume 10, No. 1, 1978
- [80] Pentikäinen, T.: *A Solvency Testing Model Building Approach for Business Planning*, in: Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 1978, 1978
- [81] Pentikäinen, T. & Rantala, J.: *Evaluation of the Capacity of Risk Carriers by Means of Stochastic-Dynamic Programming*, in: Astin Bulletin 12, 1981
- [82] Pfeiffer, Christoph: *Einführung in die Rückversicherung*, Gabler Verlag, Wiesbaden, 1999
- [83] Pliska, Stanley R.: *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishers Ltd., Oxford, 1997
- [84] Puterman, Martin L.: *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994
- [85] Quarteroni, A.; Sacco, R. & Saleri, F.: *Numerische Mathematik 2*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2002

- [86] Radtke, Michael & Schmidt, Klaus D. (Hrsg.): *Handbuch zur Schadenreservierung*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2004
- [87] Reischel, Michael: *Dynamische Rückversicherungs- und Ausschüttungspolitik beim Risikogeschäft*, Hamburger Reihe, Band 1, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1981
- [88] Rieder, Ulrich: *Bayesian Dynamic Programming*, in: Adv. Appl. Prob., No. 7, 1975
- [89] Samuelson, Paul A.: *Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming*, in: The Review of Economics and Statistics, Vol. 51, 1969
- [90] von Schaaffhausen, Axel: *Grundlagen der Credibility-Theorie*, in: *Beiträge zur Credibility Theorie*, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 22, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1989
- [91] Schäl, Manfred: *Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n -stage optimal policies to be optimal*, in: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, Vol. 32, 1975
- [92] Schäl, Manfred: *Estimation and control in discounted stochastic dynamic programming*, in: Stochastics, Vol. 20, 1987.
- [93] Schäl, Manfred: *Markoffsche Entscheidungsprozesse*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1990
- [94] Schäl, Manfred: *On Discrete-Time Dynamic Programming in Insurance: Exponential Utility and Minimizing the Ruin Probability*, in: Scandinavian Actuarial Journal, Vol. 2004, No. 3, 2004
- [95] Schenk, Peter: *Derivative Finanzinstrumente : Teil einer integrativen Risikopolitik in Versicherungsunternehmen*, Schriftenreihe Versicherung und Risikoforschung, Band 33, Gabler Verlag, Wiesbaden, 1998
- [96] Schinzler, Hans-Jürgen: *Gedanken zur Rentabilität in der Rückversicherung*, in: *Beiträge zur Rückversicherung - Horst K. Jannott zum 60. Geburtstag*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1988
- [97] Schmidt, Klaus D.: *Versicherungsmathematik*, Springer-Verlag, Berlin [u.a], 2002
- [98] Schott, Winfried: *Grundlegung einer rationalen dynamischen Optimierung zur Steuerung der Sicherheitszuschläge des Risikoreserveprozesses eines Versicherers bei unbegrenztem Zeithorizont*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1990
- [99] Schradin, Heinrich R.: *Finanzielle Steuerung der Rückversicherung*, Veröffentlichungen des Instituts für Versicherungswissenschaft der Universität Mannheim, Band 59, Verlag Versicherungswirtschaft GmbH, Karlsruhe, 1998

- [100] Schröter, Klaus Jürgen: *Verfahren zur Approximation der Gesamtschadenverteilung*, Karlsruher Reihe, Beiträge zur Versicherungswissenschaft, Band 1, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1994
- [101] Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft (Hg.): *Asset-Liability-Management für Versicherer*, sigma 6/2000, Zürich, 2000
- [102] Sennott, Linn I.: *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1999
- [103] Settnik, Ulrike: *Motive für Unternehmenszusammenschlüsse auf dem deregulierten deutschen Versicherungsmarkt*, Diskussionspapier, 8th Symposium on Finance, Banking and Insurance, Universität Karlsruhe, 1999, Online im Internet: <http://symposium.fbv.uni-karlsruhe.de/8th/8thpapers/settnik.doc>, Abruf: 26.01.06
- [104] Sievers, Christoph: *Das Terminwährungskursmanagement eines Versicherungsbetriebes im flexiblen Wechselkursystem*, Verlag Peter Lang AG, Bern, 1983
- [105] Stenner, Frank: *Grundlagen und betriebswirtschaftliche Konsequenzen der Ausschüttung finanzieller Mittel aus dem Risikogeschäft*, Hochschulschrift Universität Hamburg, Dissertation, 1975
- [106] Straub, E.: *Actuarial Remarks on Planning and Controlling in Reinsurance*, in: ASTIN Bulletin, Vol. 14, 1984
- [107] Tapiero, Charles S.: *Applied Stochastic Models and Control in Management*, Elsevier North-Holland, Amsterdam [u.a.], 1990
- [108] Uebis, Klaus-Dieter: *Ein Bayessches Kontrollmodell zur Erfahrungstarifizierung*, Karlsruher Reihe, Band 2, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1997
- [109] Venter, Gary G.: *Capital Allocation: An Opinionated Survey*, in: The 2003 CAS Enterprise Risk Management & Dynamic Financial Analysis Modeling Call Papers, presented at the 2003 Risk and Capital Management Seminar in Washington, 2003, Online im Internet: <http://www.casact.org/pubs/forum/03sforum/03sforum.pdf>, Abruf: 20.11.2003
- [110] Warthen, Thomas V. & Sommer, David B.: *Dynamic Financial Modeling - Issues and Approaches*, CAS Forum Spring 1999
- [111] Wenninger, Christian: *Markt- und Kreditrisiken für Versicherungsunternehmen - Quantifizierung und Management*, Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden, 2004
- [112] White, D.J.: *Markov Decision Processes*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1993
- [113] White, D.J.: *A survey of applications of Markov decision processes*, in: J. Oper. Res. Soc., Vol. 44, 1993

-
- [114] Wilmott, Paul: *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2000
- [115] Witting, Hermann: *Mathematische Statistik I*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1985
- [116] Witting, Hermann & Müller-Funk, Ulrich: *Mathematische Statistik II*, Band 2, B.G. Teubner, Stuttgart, 1995
- [117] Wolff, Karl-H.: *Versicherungsmathematik*, Springer-Verlag, Wien, 1970
- [118] Wolfsdorf, Kurt: *Versicherungsmathematik - Teil 2: Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988
- [119] Zietsch, Dietmar & Fürtjes, Heinz-Theo: *Grundzüge einer wertorientierten Steuerung im Versicherungsunternehmen*, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 2005

Zusammenfassung

Diese Arbeit hat das Ziel, ein stochastisches dynamisches Steuerungsmodell für ein Versicherungsunternehmen auf einer diskreten Zeitachse zu entwickeln, welches die betrieblichen Zahlungsströme bzgl. eines aus *Gewinn*, *Sicherheit* und *Dividenden* bestehenden Zielsystems optimal regelt. Dabei haben sich die Methoden der zeitdiskreten *Markovschen Entscheidungsprozesse* mit reellen Zustands- und Aktionsraum als besonders geeignet erwiesen.

Die Untersuchung gründet sich auf ein stationäres Markovsches Ausschüttungsmodell, d.h. auf einem Entscheidungsmodell mit der erwarteten Summe der zukünftigen Dividendenzahlungen als Zielfunktion. Da das (Neben-)Ziel Sicherheit bei der Konstruktion der Menge der zulässigen Ausschüttungen $\mathcal{A}(s)$ berücksichtigt wird und der erwirtschaftete Gewinn bei finanzieller Stärke vollständig als Dividendenzahlung an die Unternehmenseigner zurückfließt, genügt dieses Modell den praxisbezogenen Vorstellungen einer optimalen Unternehmenspolitik.

Der zentrale Schlüssel zur Bestimmung optimaler Strategien ist die Optimalitätsgleichung der *Dynamischen Programmierung*, mit der man jeweils für eine Stufe die optimale Entscheidung erhält. Für eine Reihe von Varianten des Grundmodells werden nach diesem Prinzip die optimalen Strategien bestimmt, beginnend mit der Annahme eines endlichen Zeithorizonts, insbesondere auch für Modelle mit *Rückversicherung*, mit *Währungsrisiko* oder mit *Kapitalanlage*.

In vielen Fällen ergibt sich bei jeder Stufe die Isotonie der Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Ausschüttungen. Dann hat die optimale Politik eine besonders einfache Struktur: Es wird der maximal zulässige Betrag ausgeschüttet. Dadurch wird die Untersuchung der entsprechenden Optimierungsprobleme auch bei unbeschränktem Zeithorizont erleichtert, ebenso die Betrachtung von adaptiven Ausschüttungsmodellen mit Hilfe begleitender *Parameterschätzungen* oder mit *Bayes-Modellen*.

In den meisten anderen Modellen liegt wenigstens Konvexität vor und damit die Entscheidung zwischen voller oder keiner Ausschüttung. In diesem Fall muss man in der Regel numerische Lösungsverfahren heranziehen, zum Beispiel das *Simulated-Annealing-Verfahren*, was naturgemäß nur zu näherungsweise Optimalität führt.

Durch die Flexibilität des Grundmodells sind auch nichtstationäre Modelle zugelassen. Ebenso ist eine Erweiterung des Zustands- und Aktionsraumes mit zusätzlichen Komponenten möglich, wodurch gewisse Parameter des Modells über eine eigene Dynamik verfügen können. Damit kann auch die Problematik der *Spätschäden* und der *zufälligen Inflation* berücksichtigt werden.

Außerdem lässt sich die gleiche Methodik auf ein bankwirtschaftliches Ausschüttungsmodell anwenden, da es lediglich auf die Änderungen des Kapitalzustands in der Zeit ankommt. Dabei ist es unwichtig, welche Vorzeichen die zufallsbedingten Größen haben. Die in dieser Arbeit vorgestellten und untersuchten Ausschüttungsmodelle sind ein wesentliches und nützliches Werkzeug für viele Aspekte der *Strategischen Planung* eines Versicherungsunternehmens.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name	Andreas Welbers
Geburtsdatum/-ort	25.05.1973 in Delmenhorst
Staatsangehörigkeit	Deutsch

Beruflicher Werdegang

Oktober 2002 - 30.01.2006	wissenschaftlicher Assistent an der Universität Hamburg, Schwerpunkt Stochastik
Juli 2001 - Januar 2002	Beschäftigung als Versicherungsmathematiker, Condor Lebensversicherungsgesellschaft, Hamburg, Abteilung: Jahresabschluss
seit Dezember 2006	Beschäftigung bei Ernst & Young AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft im Bereich Advisory Services/ Global Financial Services

Ausbildung/Studium

Oktober 2002 - März 2006	Promotionsstudium an der Universität Hamburg
Oktober 1996 - August 2001	Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Hamburg, Abschluss: Dipl.-Wirtschaftsmathematiker
August 1994 - Juni 1996	Ausbildung zum Kaufmann im Groß- und Außenhandel, Willenbrock Fördertechnik GmbH, Bremen
01.07.1993 - 30.06.1994	Grundwehrdienst
1979 - Mai 1993	Grundschule, Orientierungsstufe, Gymnasium, Delmenhorst, Abschluss: Abitur