

# **Mikroskopische Verkehrsmodelle: Baustelle und wandernde Wellen**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Mathematik, Informatik  
und Naturwissenschaften  
der Universität Hamburg

vorgelegt  
im Department Mathematik  
von  
Tilman Seidel  
aus Göttingen

Hamburg  
2007

Als Dissertation angenommen vom Department  
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Ingenuin Gasser  
und Prof. Dr. Bodo Werner

Hamburg, den 17. September 2007

Prof. Dr. Jens Struckmeier  
Leiter des Departments Mathematik

Lina gewidmet



MICROSCOPIC TRAFFIC MODELS —  
ROAD WORKS AND TRAVELLING WAVES

**Abstract.** Microscopic car-following models usually describe the movement of  $N$  cars on a circular road. It is very common to perform a stability and bifurcation analysis of those solutions that are constant in headways and velocities. By a generalization of these quasi-stationary solutions it is possible to understand a wider range of traffic phenomena, e.g. a road works scenario. In the first part of the present work I show the existence of Neimark-Sacker bifurcations and so-called *tube-solutions*, that bifurcate from the homogeneous traffic situation.

The second part is dedicated to a better collaboration between microscopic and macroscopic traffic modelers. I present the results of the car-following models from a macroscopic point of view. For this aim I use both  $x$ - $t$ -descriptions of the underlying simulations and fundamental diagrams of traffic flow.



# Einleitung

Was hat eine Hopfverzweigung mit dem Straßenverkehr zu tun? – Während diese Frage in den neunziger Jahren zur Zeit der ersten *Optimal-Velocity*-Modelle wie dem von Bando u. a. (1995) noch revolutionär war, gibt es mittlerweile eine ganze Reihe von Verkehrsmodellierern, die für die mikroskopische Modellierung des Straßenverkehrs einen Nutzen in der Verwendung von dynamischen Systemen und Verzweigungstheorie sehen. Allein in den vergangenen sechs Jahren hat die Anzahl der Arbeiten in diesem Bereich stark zugenommen.

Igarashi u. a. (2001) beispielsweise beschreiben in einem Verkehrsmodell mit *retardierten* Differentialgleichungen das Auftreten subkritischer Hopfverzweigungen unter Dichteänderungen, an denen im Verkehr ein Übergang zwischen freiem und zähfließendem Fluss stattfindet. Im Gegensatz dazu führt Huijberts (2002) in einem Modell *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für eine zum Kreis geschlossene Buslinie eine detaillierte Stabilitätsanalyse stationärer Lösungen durch. Er endet mit einem Verweis auf Hopfverzweigungen, ohne diese jedoch weiter zu untersuchen.

Es kristallisiert sich heraus, dass es für die Reaktionszeit der Verkehrsteilnehmer zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten der Modellierung gibt. Bei Gasser u. a. (2004) sowie Gasser u. a. (2007) wird ausschließlich der Ansatz

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau} f(x_{j+1} - x_j, \dot{x}_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (0.1)$$

verwendet, bei dem die Zeit  $\tau$  auch als Sensitivität aufgefasst werden kann, mit der die Fahrer auf eine Geschwindigkeitsänderung reagieren. Das Modell beschreibt also die Beschleunigung  $\ddot{x}_j$  des  $j$ ten Fahrzeugs in einer Schlange von  $N$  Fahrzeugen in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit  $\dot{x}_j$  und dem Abstand zum Vordermann  $x_{j+1} - x_j$ . In den beiden Arbeiten verfolgen die Autoren eine sehr ausführliche Verzweigungsanalyse verschiedener Modellvarianten von (0.1). So wird der erste Ljapunov-Koeffizient, der für die Richtung der periodischen Lösungen an der Hopfverzweigung entscheidend ist, in allen Fällen explizit berechnet, und es werden unter Zuhilfenahme des Softwarepaketes AUTO2000 von Doedel u. a. (2001) globale Verzweigungsdiagramme erstellt.

Die zweite Möglichkeit der Modellierung einer Fahrerreaktionszeit  $\tau$  führt zu einem System retardierter Differentialgleichungen folgender Art:

$$\ddot{x}_j(t) = f(x_{j+1}(t - \tau) - x_j(t - \tau), \dot{x}_j(t)), \quad j = 1, \dots, N. \quad (0.2)$$

Safonov u. a. (2002) weisen auch in einem solchen System Hopfverzweigungen und periodische Lösungen nach und finden in Abhängigkeit von dem Delay-Parameter  $\tau$  sogenannte chaotische Attraktoren für besonders große Reaktionszeiten.

## Einleitung

Auch Orosz u. a. (2004) sowie Orosz u. a. (2005) entwickeln eine Systemtik zur theoretischen und numerischen Analyse der zeitverzögerten Modelle (0.2), die sich direkt mit den von Gasser u. a. (2004) betrachteten Systemen vergleichen lässt. In Orosz und Stépán (2006) wird sogar explizit eine lokale Approximation an die hopfperiodischen Lösungen im Delay-System durch eine aufwendig berechnete Normalform angegeben.

Mit dieser Arbeit möchte ich zwei noch offene Fragen aus der mikroskopischen Verkehrsmodellierung beantworten, die sich aus dem Studium der erwähnten Literatur stellen.

1. Welche Auswirkungen hat eine Baustelle auf den Verkehr?
2. Welche makroskopischen Strukturen stehen hinter den mikroskopischen Verzweigungsphänomenen?

Die erste Frage lässt sich ohne Weiteres aus der Modellierung heraus motivieren. Die Baustelle ist in dieser Arbeit nur ein Synonym für eine Verengung (engl. *bottle-neck*) der Fahrbahn, einer kleinen Steigung oder einfach einer örtlichen Geschwindigkeitsbegrenzung. Alle bisher untersuchten und oben erwähnten Modelle lassen die lokale Fahrbahnbeschaffenheit bisher außer Acht. Aber nicht nur aufgrund der Modellierung, auch aus Sicht der Dynamischen Systeme ist eine periodische Störung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen – und eine solche wird die Baustelle im Kreisverkehr sein – leicht zu rechtfertigen. So führt Kuznetsov u. a. (1992) eine lückenlose Verzweigungsanalyse eines periodisch angeregten Räuber-Beute-Modells durch und erhält Verzweigungsdiagramme in dem ursprünglichen Parameter  $b$  und der Störung  $\epsilon$ .

Da in einem gestörten Kreisverkehrsmodell nicht mehr von vornherein klar ist, welche Lösungen überhaupt noch die Grundlage der Verzweigungsanalyse bilden können, verwende ich in Teil I sogenannte *Ponies-on-a-Merry-Go-Round*-Lösungen – von Aronson, Golubitsky und Mallet-Paret (1991) eingeführte diskrete wandernde Wellen. Wie sich herausstellen wird, ist dieser Lösungstyp wegen der zugrunde liegenden symmetrischen Eigenschaften sehr geeignet für eine Untersuchung der betrachteten *Car-Following*-Modelle.

In Teil II beschäftige ich mich mit der zweiten oben gestellten Frage nach den makroskopischen Strukturen. Dort gebe ich zu Beginn eine kurze Einführung in die makroskopische Verkehrsmodellierung und fasse einige Arbeiten zusammen, die sich bereits mit Übergängen zwischen mikroskopischen und makroskopischen Modellen auseinandersetzen. Es ist mir ein besonderes Anliegen, über die Art meiner Darstellungen (Weg-Zeit-Diagramme, Fundamentaldiagramme) zu vermitteln, welchen Nutzen die Resultate aus der Verzweigungsanalyse von *Car-Following*-Modellen für die entsprechenden Modelle makroskopischer Erhaltungsgleichungen haben.

*In einem Bächlein helle, da schoss in froher Eil  
Die launische Forelle vorüber wie ein Pfeil.  
C. F. D. Schubart, F. Schubert*

## Danksagung

Auch die vergangenen drei Jahre sind manchmal froh und manchmal launisch, auf jeden Fall aber eilig vorübergeschossen. Zurückblickend liegt es mir am Herzen, den Personen zu danken, die dazu beigetragen haben, dass mir die Arbeit an meiner Dissertation so viel Freude bereitet hat.

Zu allererst danke ich meinem Doktorvater Prof. Ingenuin Gasser, dass er mich von Beginn an motiviert hat, meinen eigenen Weg zu gehen, ohne dabei die Möglichkeit der Rückkopplung durch ihn aus den Augen zu verlieren. So habe ich mich stets unterstützt gefühlt, zu Konferenzen zu fahren und Gespräche mit anderen zu suchen.

Prof. Bodo Werner sei herzlich gedankt für die manchmal stundenlangen Sitzungen in seinem Büro, in denen er meine verzweigungstheoretischen Bemühungen kritisch hinterfragt hat. Ich habe sehr viel gelernt!

Für offenen Augen und Ohren in fachlichen Gesprächen und Emails danke ich weiterhin Gabriele Siritto, Matteo Franca, Michael Herty, Alois Steindl, Alex Jäger und Carsten Grahn.

Da ich das Glück hatte in einer außerordentlich netten Büroatmosphäre zu arbeiten, danke ich den Kollegen in meiner Nähe dafür sehr. Insbesondere Caro für die Bürohälfte, Matze für Fragen nach dem aktuellen Stand und L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, Eugen für alle im ersten Moment elementar-mathematischen Probleme, die sich in der Regel als furchtbar kompliziert herausstellten.

Nicht zuletzt danke ich meiner Schwester Chrissi für alles, was sie so (aus)macht.

Tilman Seidel  
Hamburg, den 28. September 2007

## *Einleitung*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>vii</b>
<b>I. Mikroskopische Verzweigungsanalyse</b>	<b>1</b>
<b>1. Grundlagen</b>	<b>3</b>
1.1. Hopfverzweigung . . . . .	3
1.2. Rotationen . . . . .	5
1.2.1. Stabilität . . . . .	5
1.2.2. Diskrete dynamische Systeme . . . . .	7
<b>2. Modellbildung</b>	<b>9</b>
2.1. Ein <i>Car-Following</i> -Modell . . . . .	9
2.2. Modellerweiterungen . . . . .	11
2.2.1. Drängler und abstandsabhängige Reaktionszeiten . . . . .	12
2.2.2. Individuelles Fahrverhalten . . . . .	16
2.2.3. Baustelle . . . . .	18
2.3. Problemstellung . . . . .	19
<b>3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen</b>	<b>21</b>
3.1. Abstraktion von der Ruhelage . . . . .	21
3.2. Geometrie von Lösungen . . . . .	23
3.3. Diskrete wandernde Wellen . . . . .	26
<b>4. Numerische Auswertung</b>	<b>33</b>
4.1. Vergleich von $\Pi$ und $\pi$ : Numerische Fehler . . . . .	35
4.2. Stabilitätsanalyse . . . . .	36
4.3. Geschlossene invariante Kurven . . . . .	40
4.4. Ein Poincaré-Schnitt aus Sicht der Fahrzeuge . . . . .	42
<b>5. Zusammenfassung Teil I</b>	<b>45</b>
<b>II. Makroskopischer Übergang</b>	<b>47</b>
<b>6. Historischer Kontext und Motivation</b>	<b>49</b>

<b>7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten</b>	<b>51</b>
7.1. Technische Vorgehensweise . . . . .	51
7.2. Der Fall $\epsilon = 0$ : wandernde Wellen . . . . .	52
7.2.1. Rückstau . . . . .	55
7.2.2. Vorwärtsstau . . . . .	58
7.3. Der Fall $\epsilon > 0$ : Baustelle <i>und</i> wandernde Wellen . . . . .	59
7.3.1. Die POM $x^\epsilon$ . . . . .	60
7.3.2. Quasi-POMs . . . . .	60
7.3.3. Zwei parallele Attraktoren . . . . .	64
<b>8. Fundamentaldiagramme</b>	<b>67</b>
<b>9. Zusammenfassung Teil II</b>	<b>71</b>
<b>10. Fazit</b>	<b>73</b>
<b>Farbtafeln</b>	<b>75</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>

**Teil I.**

# **Mikroskopische Verzweigungsanalyse**



# 1. Grundlagen

## 1.1. Hopfverzweigung

Gegeben sei die autonome, gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \tag{1.1}$$

mit einem  $C^k$ -Vektorfeld  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $k \geq 2$ ) und dem reellen Parameter  $\alpha$ . Im Punkt  $(x^0, \alpha^0)$  besitze  $f$  eine Nullstelle, so dass (1.1) für  $\alpha = \alpha^0$  die Ruhelage  $x^0$  als Lösung hat.

Ist die Matrix  $D_x f(x^0, \alpha^0)$  regulär, so existiert nach dem Satz über implizite Funktionen für  $\alpha$ -Werte in der Nähe von  $\alpha^0$  ein Zweig von Ruhelagen  $x^\alpha$ . In diesem Fall ist die folgende Definition sinnvoll.

**DEFINITION 1.** *Im Spektrum der Matrix  $D_x f(x^0, \alpha^0)$  existiere ein konjugiert komplexes Paar algebraisch einfacher Eigenwerte  $\lambda(\alpha^0), \overline{\lambda(\alpha^0)}$  mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

(i)  $\Re(\lambda(\alpha^0)) = 0,$

(ii)  $\frac{\partial \Re(\lambda(\alpha^0))}{\partial \alpha} \neq 0.$

Weiterhin gelte für keinen der übrigen  $n - 2$  Eigenwerte die Bedingung (i). Dann heißt  $(x^0, \alpha^0)$  Hopfverzweigungspunkt.

In einem Hopfverzweigungspunkt ändert sich die Attraktivität der Ruhelage  $x^0$  in zwei Eigenrichtungen, indem die zugehörigen Eigenwerte bei Änderung des Parameters  $\alpha$  über die imaginäre Achse wandern. Falls für  $\alpha < 0$  zum Beispiel alle Eigenwerte negative Realteile haben, ist  $x^0$  zunächst stabil und wird dann bei wachsendem  $\alpha$  irgendwann instabil. Die zugehörigen Phasenportraits sind nicht mehr *topologisch äquivalent*, es hat eine *Verzweigung* stattgefunden.

**SATZ 1** (Hopf). *Die Differentialgleichung (1.1) besitze den Hopfverzweigungspunkt  $(x^0, \alpha^0)$ . Dann gilt:*

1. *Es gibt eine  $C^{k-2}$ -Funktion  $(x, \alpha) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , so dass für kleine  $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$  alle Punkte  $(x(\sigma), \alpha(\sigma))$  auf geschlossenen Orbits liegen. Dabei ist die Periode dieser Orbits näherungsweise  $\frac{2\pi}{|\lambda(0)|}$ , der Radius in  $x$  wächst wie  $\sqrt{\alpha}$  und es gilt  $(x(0), \alpha(0)) = (x^0, \alpha^0)$ .*
2. *Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $(x^0, \alpha^0)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , in der jeder geschlossene Orbit von der Art derer aus 1.) ist.*

## 1. Grundlagen

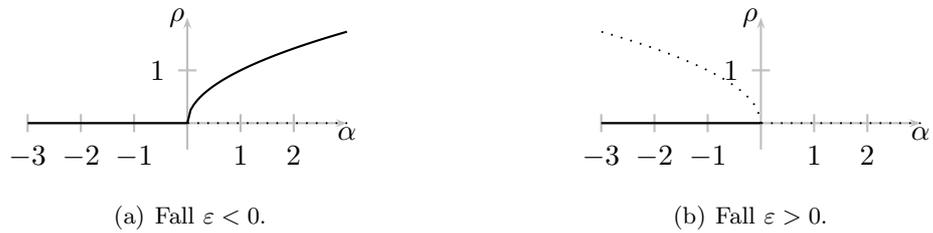


Abbildung 1.1.: Hopf-Normalform im Verzweigungsdiagramm; durchgezogene Linien entsprechen stabilen Lösungen, gepunktete instabilen.

In der Literatur tritt der Satz von Hopf in unterschiedlichen Varianten auf. An dieser Stelle sei neben dem zu Grunde liegenden Artikel von Hopf (1942) das Buch von Marsden und McCracken (1976) genannt, in dem der Satz sehr anschaulich über eine Poincaré-Abbildung hergeleitet wird. Desweiteren sei auf das Standardwerk von Kuznetsov (1998) verwiesen, das von der sogenannten Hopf-Normalform (siehe unten) ausgeht und die dort gefundene Dynamik Schritt für Schritt in immer allgemeineren Systemen mit den entsprechenden Voraussetzungen nachweist. In beiden Fällen findet man auch noch eine Aussage über die Art der abzweigenden periodischen Lösungen hinsichtlich ihrer Stabilität (unter Zuhilfenahme des sogenannten *vague attractors*, oder des *ersten Ljapunov-Koeffizienten*).

Im folgenden einfachsten Beispiel für eine Hopfverzweigung lassen sich die geschlossenen Orbits als konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung nachweisen.

**BEISPIEL 1** (Normalform in  $\mathbb{R}^2$ ). Das System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

besitzt den Hopfverzweigungspunkt  $(x, \alpha) = (0, 0)$ ; in der Polarkoordinatenschreibweise

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

lassen sich für  $\alpha \neq 0$  sofort periodische Lösungen der Art  $\rho = \sqrt{\alpha}$  finden. Die Dynamik des Systems geht für unterschiedliches  $\varepsilon$  aus den Verzweigungsdiagrammen in Abb. 1.1 hervor.

Im Allgemeinen heißt eine Hopfverzweigung *superkritisch*, wenn sie topologisch äquivalent zum Fall  $\varepsilon < 0$  ist, ansonsten *subkritisch* ( $\varepsilon > 0$ ).

## 1.2. Rotationen

Gegeben sei das autonome System

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

wobei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine auf der offenen Menge  $U \in \mathbb{R}^n$  lipschitz-stetige Funktion sei. Die Schreibweise  $x(t, x_0)$  berücksichtige die (stetige) Abhängigkeit der Lösung  $x$  vom Anfangswert  $x_0$  zum Anfangszeitpunkt  $t_0$ ; ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei ab jetzt  $t_0 = 0$ , da (1.2) autonom ist. Weiterhin existiere für  $x(t_0) = x(0) = x_0 \in U$  eine Lösung auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , so dass folgende Definition Sinn macht.

**DEFINITION 2.** *Die Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} U \times I & \rightarrow U \\ (x_0, t) & \mapsto x(t, x_0) \end{cases}$$

heißt Fluss der Differentialgleichung (1.2).

Für den Fluss kann man sehr leicht verschiedene Eigenschaften einsehen, zum Beispiel, dass  $\Phi(\cdot, t) : U \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist, unter der Voraussetzung, dass das Vektorfeld  $f$  (wie in unseren Modellen später) differenzierbar ist. Die stetige Abhängigkeit einer Lösung vom Anfangswert, vom Vektorfeld sowie – in parameterabhängigen Systemen – vom Parameter unter lipschitz-stetigem  $f$  lässt sich entsprechend auf den Fluss  $\Phi$  übertragen. Literatur hierzu findet sich in den meisten Lehrbüchern über Differentialgleichungen, je nach Geschmack in mühevollster Liebe zum Detail (Amann 1983, Kap. 10) oder auch knapper (Guckenheimer und Holmes 1983, Einleitung S. 2).

**DEFINITION 3.** *Eine Lösung  $x^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (1.2), die für ein minimales  $T \in \mathbb{R}$  und ein  $\Lambda \in \mathbb{R}^n$  die Bedingung*

$$x^0(t + T) = x^0(t) + \Lambda \quad (1.3)$$

erfüllt, heißt Rotation. Die Zeit  $T$  heißt Umlaufzeit.

Bis auf den konstanten Verschiebungsvektor  $\Lambda$  haben Rotationen starke Ähnlichkeit mit periodischen Lösungen von Differentialgleichungen. Es liegt daher auf der Hand, auch für eine Stabilitätsanalyse die Theorie der periodischen Orbits zu übertragen. Im folgenden Abschnitt folge ich weitestgehend den Werken von Guckenheimer und Holmes (1983) und Kuznetsov (1998).

### 1.2.1. Stabilität

Notiert man für den Fluss  $\Phi$  einer autonomen Differentialgleichung die Variable  $t$  für die Zeitabhängigkeit als Index von  $\Phi$ , so spricht man bei festem  $t$  häufig auch von der Zeit- $t$ -Abbildung

$$\Phi_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

von (1.2). Ich verwende diese Schreibweise aus Gründen der Übersichtlichkeit und werde im Folgenden auch hier vom Fluss sprechen, da der Unterschied formaler Natur ist.

## 1. Grundlagen

Weiterhin sei zu einem Fluss  $\Phi_t$  durch

$$\Psi_t(\xi) := \Phi_t(\xi) - \Lambda$$

immer eine Funktion  $\Psi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, die in folgender Weise mit einer gegebenen Rotation  $x^0$  verknüpft ist: jeder Punkt  $\xi$  aus dem Orbit  $\mathcal{O}$  von  $x^0$  mit Umlaufzeit  $T$  ist ein Fixpunkt von  $\Psi_T$ .

**DEFINITION 4** (Stabilität von Fixpunkten). *Der Fixpunkt  $\xi$  einer Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stabil, falls für jede Umgebung  $U$  von  $\xi$  eine Umgebung  $V \subset U$  existiert, so dass der Schluss*

$$x \in V \Rightarrow F^n(x) \in U$$

*für alle  $n$  aus  $\mathbb{N}$  erfüllt ist. Hierbei ist  $F^n := F \circ F \dots F \circ F$  die  $n$ -fache Anwendung von  $F$ .*

*Weiter heißt ein stabiler Fixpunkt  $\xi$  zusätzlich asymptotisch stabil, falls es eine Umgebung  $V$  von  $\xi$  gibt, so dass der Abstand von  $\xi$  zu  $F^n(x)$  für alle  $x$  aus  $V$  bei wachsendem  $n$  beliebig klein wird:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = \xi.$$

**DEFINITION 5** (Orbitale Stabilität). *Eine Lösung  $x^0$  von (1.2) heißt orbital stabil, wenn ihr Orbit  $\mathcal{O}$  als Punktmenge stabil ist; das heißt, wenn es zu jeder Umgebung  $U$  von  $\mathcal{O}$  eine Umgebung  $V \subset U$  von  $\mathcal{O}$  gibt, so dass für alle positiven  $t$  der Schluss*

$$\xi \in V \Rightarrow \Phi_t(\xi) \in U$$

*erfüllt ist.*

*Ist  $\mathcal{O}$  zusätzlich attraktiv, so heißt  $x^0$  orbital asymptotisch stabil.*

Bei Fixpunkten von Abbildungen kann man asymptotische Stabilität wie bei zeitkontinuierlichen Systemen anhand der Linearisierung feststellen. Man beachte jedoch, dass das folgende Kriterium ausschließlich für *hyperbolische* Fixpunkte gilt; das sind solche, bei denen kein Eigenwert der Ableitung auf dem Einheitskreis liegt.

**LEMMA 1** (Asymptotische Stabilität von Fixpunkten, Kuznetsov (1998)). *Sei  $\xi$  ein Fixpunkt der differenzierbaren Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

- 1. Besitzt das Differential  $DF(\xi)$  nur Eigenwerte, die dem Betrage nach echt kleiner als Eins sind, so ist  $\xi$  asymptotisch stabil.*
- 2. Besitzt  $DF(\xi)$  hingegen mindestens einen Eigenwert, der dem Betrage nach echt größer als Eins ist, so ist  $\xi$  instabil.*

**KOROLLAR 1.** *Sei  $\xi$  ein Fixpunkt von  $\Psi_T$  aus dem Orbit der Rotation  $x^0$ .*

- 1. Besitzt  $D\Psi_T(\xi)$  nur Eigenwerte, die dem Betrage nach echt kleiner als Eins sind, so ist  $x^0$  orbital asymptotisch stabil.*

2. Besitzt  $D\Psi_T(\xi)$  mindestens einen Eigenwert, der dem Betrage nach echt größer als Eins ist, so ist  $x^0$  instabil.

Völlig analog zu periodischen Lösungen definieren wir:

**DEFINITION 6.** Die Eigenwerte von  $D\Psi_T(\xi)$  heißen Floquetmultiplikatoren von  $x^0$ .

**BEMERKUNG 1.** Es sei noch einmal daran erinnert, dass die Aussage von Korollar 1 nur ein hinreichendes Kriterium für orbitale asymptotische Stabilität darstellt. Aus der Stabilitätstheorie periodischer Lösungen ist bekannt, dass unter den Eigenwerten der Ableitung der entsprechenden Zeit-T-Abbildung auf einem periodischen Orbit immer mindestens einer Eins ist. Die letzten beiden Aussagen ließen sich hierauf also gar nicht anwenden. In Kapitel 3.2 wird sich herausstellen, dass das Hilfsmittel der Wahl auch im Falle einer Rotation ein (etwas verallgemeinerter) Poincaré-Schnitt mit Poincaré-Abbildung ist.

### 1.2.2. Diskrete dynamische Systeme

Führt man bei der Betrachtung zeit-kontinuierlicher Systeme Abbildungen wie den Fluss  $\Phi_t$  oder  $\Psi_t$  aus dem letzten Abschnitt ein oder, wie bereits angesprochen, eine Poincaré-Abbildung, so gelangt man direkt zur Verzweigungstheorie der *diskreten* dynamischen Systeme. Sowohl für die theoretische Analyse des Modells als auch in den numerischen Teilen meiner Arbeit ist es sehr hilfreich, mit deren Grundlagen vertraut zu sein. So hellt sich zum Beispiel auf einmal alles auf, wenn man bei einer scheinbar „wilden“ Lösung einer Differentialgleichung weiß, dass sie auf einem Torus liegt.

Gegeben sei das parameterabhängige diskrete dynamische System

$$x \mapsto F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

mit einem genügend glatten  $F$ . Für  $\alpha = \alpha_0$  besitze  $F$  den *nicht-hyperbolischen* Fixpunkt  $x_0$ , es gelte also

$$F(x_0, \alpha_0) = x_0,$$

sowie

$$|\lambda| = 1$$

für einen Eigenwert  $\lambda$  von  $D_x F(x_0, \alpha_0)$ .

Geht man davon aus, dass  $\lambda$  bei Veränderungen von  $\alpha$  in der Nähe von  $\alpha_0$  über den Einheitskreis wandert, so findet nach Lemma 1 eine Verzweigung in  $(x_0, \alpha_0)$  statt. Qualitativ unterscheidet man drei verschiedene Typen von Verzweigungen, je nachdem, ob  $\lambda = 1$  (Umkehrpunkt),  $\lambda = -1$  (Periodenverdopplung) oder  $|\lambda| = 1$  mit  $\lambda \neq \pm 1$  (Torusverzweigung) gilt (Abb. 1.2). Ich möchte an dieser Stelle lediglich etwas genauer auf die Torusverzweigung (auch Neimark-Sacker-Verzweigung) eingehen.

Genau wie bei der Hopfverzweigung von Ruhelagen gewöhnlicher Differentialgleichungen gibt es auch hier eine Normalform, auf die sich letztlich jede Torusverzweigung zurückführen lässt. Für  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$  sei die Abbildung  $F$  folgendermaßen definiert:

$$F(\mathbf{x}, \alpha) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{x} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (1.4)$$

## 1. Grundlagen

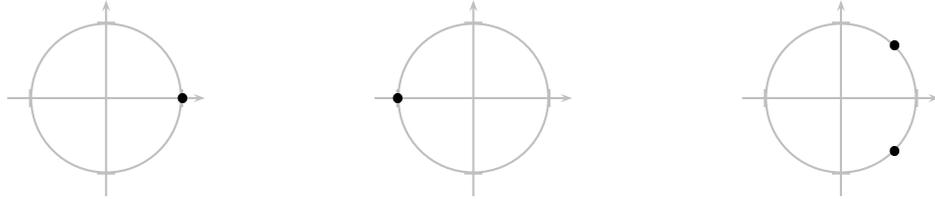


Abbildung 1.2.: Eigenwerte in drei kritischen Fällen: Umkehr-, Periodenverdopplungs- und Torusverzweigungspunkt (von links nach rechts).

Seien hierbei  $\theta$ ,  $a$  und  $b$  glatt vom Parameter  $\alpha$  abhängig mit  $0 < \theta(0) < \pi$ , sowie  $a(0) \neq 0$ . Für ein beliebiges  $\alpha$  besitzt  $F$  den Fixpunkt  $x_1 = x_2 = 0$  mit der Linearisierung

$$A_\alpha := DF(\mathbf{x}, \alpha) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von  $A_\alpha$  sind das konjugiert komplexe Paar  $\lambda_{1,2}(\alpha) = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta}$ , das für  $\alpha = 0$  über den Einheitskreis wandert.

Es lässt sich zeigen, vgl. Kuznetsov (1998), dass  $F$  für  $\alpha < 0$  eine weitere Lösung besitzt, deren Orbit auf einem geschlossener Kreis vom Radius

$$\rho(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{a}} + O(\alpha)$$

um den Ursprung liegt. Für  $a = 1$ ,  $b = 0$  sowie  $\rho^2 = (x_1^2 + x_2^2) = -\alpha + O(\alpha)$  zum Beispiel vereinfacht sich  $F$  zu der Drehung

$$F(\mathbf{x}, \alpha) = (1 + g(\alpha)) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

mit  $g(\alpha) = O(\alpha)$ . Bei jeder Torusverzweigung ist das Phasendiagramm topologisch äquivalent zu dem von (1.4), wobei das Charakteristikum eine *geschlossene invariante Kurve* ist, auf der Lösungsorbits liegen.

In einem zeit-kontinuierlichen System, das eine periodische Lösung  $x^p(t)$  besitzt, ist jeder Punkt  $\xi$  aus dem Orbit von  $x^p$  ein Fixpunkt des Flusses beziehungsweise einer geeigneten Poincaré-Abbildung  $F$ . Lässt sich nun für  $F$  eine Torusverzweigung in  $\xi$  nachweisen, so müssen bei entsprechender Parameterwahl Lösungen der Differentialgleichung existieren, die auf einem topologischen Torus liegen.

## 2. Modellbildung

### 2.1. Ein Car-Following-Modell

Wir betrachten eine Straße der Länge  $L$ , die zu einem Kreis geschlossen ist und auf der  $N$  Autos fahren. Sei  $x_j$  die Position des  $j$ ten Fahrzeugs auf der Straße zur Zeit  $t$ . Dann beschreibt das System

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau}(V(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

die Beschleunigung von jedem Auto in Abhängigkeit von seinem Abstand  $x_{j+1} - x_j$  zum Vordermann (engl. *headway*) und seiner eigenen Geschwindigkeit  $\dot{x}_j$ . Es sei erwähnt, dass mit  $x_{N+1} := x_1 + L$  die geschlossene, kreisförmige Straße eine technische Voraussetzung ist, um zu garantieren, dass jeder Fahrer einen Vordermann besitzt. Die Konstante  $\tau$  ist eine Möglichkeit, die Reaktionszeit der Fahrer zu modellieren,  $V$  ist eine sogenannte *Richtgeschwindigkeits-Funktion* (engl. *optimal velocity function*). In Abhängigkeit von den Abständen  $x_{j+1} - x_j$  ist sie positiv, monoton steigend, erfüllt  $V(0) = 0$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = V_{max}$  und besitzt einen eindeutigen Wendepunkt  $x_w$  (Fig. 2.1). Beispiele für  $V$  sind

$$V(x) = \frac{\tanh 2(x - 1) + \tanh 2}{1 + \tanh 2}, \quad (2.2)$$

vorgeschlagen von Bando u. a. (1995) bei der ersten Erwähnung dieses Typs von *Optimal-Velocity-Car-Following-Modellen*, oder

$$V(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad (2.3)$$

von Mahnke und Kaupuzs (1999).

**BEMERKUNG 2.** Wie erwähnt fahren die Verkehrsteilnehmer bei allen in dieser Arbeit untersuchten Modellen im Kreis. Es ist daher notwendig, sich darüber Gedanken zu machen, wie man dies mathematisch formuliert: Welches sind geeignete Koordinaten, um den Kreisverkehr zu beschreiben? Naheliegender wäre es, das Vektorfeld auf der Sphäre zu definieren:

$$f : (S \times \mathbb{R})^N \rightarrow (S \times \mathbb{R})^N.$$

Insbesondere bei der qualitativen Stabilitäts- und Verzweigungstheorie könnte man dann auf (manchmal lästige) konstante Verschiebungen im Phasenraum um die Kreislänge  $L$  verzichten. Zum Beispiel wäre es nicht mehr notwendig, die Abbildung  $\Psi_t$  anstelle vom Fluss  $\Phi_t$  einzuführen. Später in Kapitel 3 führe ich Rotationen im oben definierten Sinn ein, die auf  $S^N$  periodische Lösungen wären.

## 2. Modellbildung

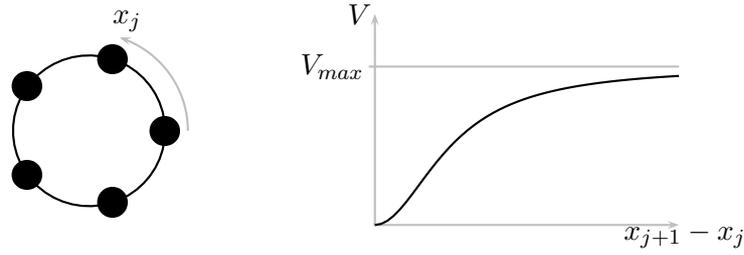


Abbildung 2.1.: Das Grundmodell (hier  $N = 5$ ) mit Richtgeschwindigkeit  $V$ .

Ich habe mich dennoch entschieden, kartesische Koordinaten  $x$  zu verwenden, welche die gefahrenen Kilometer der Verkehrsteilnehmer messen; nicht zuletzt, weil ich die numerischen Routinen mit AUTO2000 und MATLAB ohnehin in diesen Koordinaten implementieren muss.

In der Verkehrsmodellierung ist man an zwei verschiedenen Lösungstypen interessiert: auf der einen Seite an dem frei fließenden Verkehr, bei dem die Fahrzeuge mit konstanter Geschwindigkeit fahren und, auf der anderen Seite, an zäh fließendem Verkehr, in dem es zu Staus und Stop-And-Go-Verhalten kommt. Vom mathematischen Standpunkt aus sehe ich Lösungen, die in Abständen und Geschwindigkeiten *periodisch* sind, als vereinfachte, aber geeignete Beschreibungsmöglichkeit für die letztgenannte Situation.

Die Differentialgleichungen (2.1) lassen sich in ein  $2N$ -dimensionales System in den Abständen  $y_j := x_{j+1} - x_j$  und Relativgeschwindigkeiten  $y_{N+j} := \dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j$  transformieren<sup>1</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_j = y_{N+j} \\ \dot{y}_{N+j} = \frac{1}{\tau} (V(y_{j+1}) - V(y_j) - y_{N+j}) \end{array} \right\}, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Dieses System besitzt die Ruhelage  $y^0$  mit

$$\left. \begin{array}{l} y_j^0 = \frac{L}{N} \\ y_{N+j}^0 = 0, \end{array} \right\} \forall j = 1, \dots, N,$$

die im  $x$ -System der *quasi*-stationären Lösung

$$x_j^0(t) := V \left( \frac{L}{N} \right) t + j \frac{L}{N}, \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

entspricht.

<sup>1</sup>Die Notation  $(y_1, \dots, y_N, y_{N+1}, \dots, y_{2N})$  bzw. später auch  $(x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots, x_{2N})$  ist formal nicht ganz korrekt, da sie mit der Definition des  $(N+1)$ ten Fahrers konkurriert;  $y_{N+1}$  ist doppeldeutig. Aus Zusammenhang sollte im Folgenden aber stets eindeutig hervorgehen, wann es sich dabei um die Geschwindigkeit des ersten Fahrers und wann um seine Position als Vorgänger des letzten handelt.

Sowohl vom mathematischen Standpunkt her, als auch aus Sicht der Modellierung ist es sinnvoll, nach der Stabilität dieser Lösung zu fragen: Ist die gleichmäßig fließende Verkehrssituation stabil, oder reicht eine kleine Störung, um sie aus dem Gleichgewicht zu bringen? Bei Gasser u. a. (2004) führt diese Frage über die Matrix

$$A := Df^y(y^0)$$

zu den charakteristischen Gleichungen

$$0 = \lambda^2 + \lambda + \beta \left(1 - e^{ik\frac{2\pi}{N}}\right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

wobei  $f^y$  hier die rechte Seite von (2.4) und  $\beta := V'\left(\frac{L}{N}\right)$  ein Parameter ist. Dort wird weiterhin gezeigt, dass sich das System um eine Gleichung reduzieren lässt, so dass der permanent auftretende Eigenwert  $\lambda = 0$  von  $A$  (setze in (2.5)  $k = N$ ) schlicht wegfällt und somit für die Stabilität von  $y^0$  keine Rolle spielt.

Es ergeben sich ein einfach zu analysierendes Spektrum, das über  $\beta$  stetig von  $L$  und  $N$  abhängt, und eine Hopfverzweigung, die genau dann eintritt, wenn für ein  $k \in \{1 \dots N\}$  die algebraische Bedingung

$$V'\left(\frac{L}{N}\right) = \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}. \quad (2.6)$$

erfüllt ist.

Bei fester Anzahl der Autos  $N$  ist die Kreislänge  $L$  ein geeigneter (wenn auch in der Realität unnatürlicher) Verzweigungsparameter. Mit der numerischen Verzweigungssoftware AUTO2000 lassen sich dann die an den Hopfverzweigungspunkten abzweigenden periodischen Lösungen verfolgen, so dass globale Verzweigungsdiagramme entstehen (Abb. 2.2).

## 2.2. Modellerweiterungen

Die Gleichungen (2.1) bilden ein sehr einfaches und schnell zu analysierendes Verkehrsmodell. Ausgehend von diesem Grundsystem sind der Phantasie des Modellierers keine Grenzen gesetzt, um die verschiedensten Phänomene aus dem Straßenverkehr über zusätzliche Terme und Parameter in die Modellgleichungen zu integrieren. Natürlich besteht dabei grundsätzlich die Gefahr, dass das Modell dadurch immer komplizierter wird, so dass einzelne Resultate hinter einer Wolke von Parametern verschwinden.

Ich möchte in diesem Abschnitt unter 2.2.1 zunächst auf zwei Erweiterungsmöglichkeiten des Grundmodells mit identischem Fahrverhalten aller Verkehrsteilnehmer (2.1) eingehen, über deren Diskussion ausführlich bei Gasser u. a. (2007) nachzulesen ist. Im Anschluss werde ich als Ergänzung zu Gasser u. a. (2004) eine naheliegende Möglichkeit beschreiben, mit der auch im Falle individueller Fahrer eine Hopfverzweigung im entsprechenden Modell gefunden werden kann.

## 2. Modellbildung

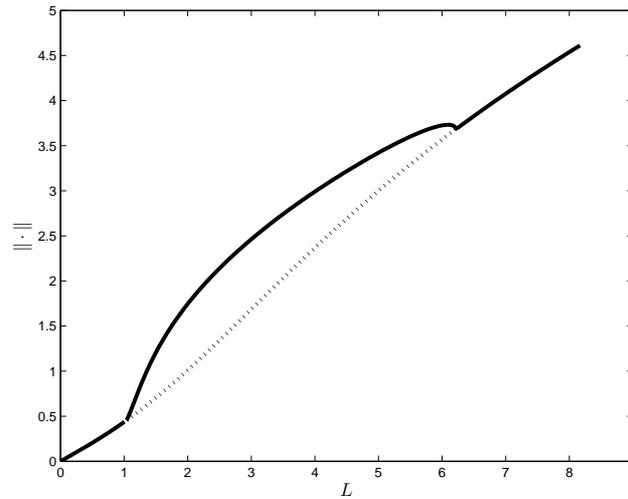


Abbildung 2.2.: Verzweigungsdiagramm. Die Lösung  $y^0$ , die in Abhängigkeit von der Kreislänge  $L$  an zwei Hopfverzweigungen instabil wird (gepunktet). Dazwischen liegt ein stabiler Zweig periodischer Lösungen.

### 2.2.1. Drängler und abstandsabhängige Reaktionszeiten

Für  $j = 1, \dots, N$  sei das System

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau(x_{j+1} - x_j)} \left( V(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j + \alpha \cdot (\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j) \cdot F(x_{j+1} - x_j) \right) \quad (2.7)$$

gegeben. In diesem Modell gibt es zwei wesentliche Veränderungen gegenüber dem Grundmodell:

1. Die Funktion  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  modelliert hier eine Abhängigkeit der Reaktionszeit der Fahrer vom Abstand zum Vordermann. Je kleiner der Abstand ist, desto besser sollen die Fahrer reagieren. Mit  $(\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j)$  ist ein zusätzlicher Term in der Gleichung, aus dem eine umso größere Beschleunigung resultiert, je größer die Geschwindigkeitsdifferenz zum Vordermann ist.
2. Der Parameter  $\alpha$  gewichtet diesen Term in folgender Weise: wächst  $\alpha$ , so legen die Fahrzeuge einen vergleichsweise aggressiven Fahrstil an den Tag („drängeln“). Die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soll dieses Verhalten lediglich auf Situationen mit kleinem Abstand beschränken.

Beispiele für  $\tau$  und  $F$  sind

$$\tau(x) = \frac{x^\delta}{1 + x^\delta} \quad \text{und} \quad F(x) = \frac{1}{(1 + x)^\gamma}, \quad \delta, \gamma > 0.$$

Die erste Frage, die sich stellt, bevor man über die direkten Auswirkungen der Veränderungen von (2.7) gegenüber dem Grundmodell sprechen kann, ist sicherlich, ob die oben beschriebene Verzweigungsanalyse überhaupt in dieser Situation durchgeführt werden kann. Entscheidend hierfür ist, ob die Eliminierung des Nulleigenwertes über eine Reduktion des Systems möglich ist und somit der Nachweis einer Hopfverzweigung gelingt. Dies ist auch hier ohne allzugroßen zusätzlichen technischen Aufwand möglich. Wie auch im einfachen Fall ergeben sich, je nach Parameterwahl, globale Verzweigungsdiagramme.

Die interessanteste Auswirkung des zusätzlichen Aggressivitätsterms ist, dass das System bei wachsender Aggressivität in folgendem Sinn stabiler wird. Je größer  $\alpha$  ist, desto weiter rücken die beiden Hopfverzweigungen, an denen die quasistationäre Lösung instabil wird, zusammen. Der instabile Bereich von  $y^0$  wird kleiner. Diese Erkenntnis wird von Gasser u. a. (2007) sowohl numerisch als auch analytisch nachgewiesen und deckt sich mit Beobachtungen in einem Modell zellulärer Automaten von Olmos und Munoz (2004) für den Straßenverkehr in Bogota.

Die variable Reaktionszeit  $\tau(x)$  übt wiederum einen ganz anderen Einfluss auf die Lösungen von (2.7) aus. Sie wirkt bei kleinen Abständen wie ein Puffer auf die Fahrzeuge, so dass sie insbesondere in den periodischen Lösungen ihre Geschwindigkeit stärker reduzieren und somit weniger dazu tendieren, ihren Vordermann zu überholen. Wird ein Abstand zwischenzeitlich nämlich irgendwann mal Null, ist dies aus Sicht der hier beschriebenen Modelle eine unphysikalische, nicht beabsichtigte Lösung.

Sowohl die spezielle Kopplung der Differentialgleichungen (2.7), als auch die numerischen Simulationen legen die Vermutung nahe, dass die periodischen Lösungen, die an den Hopfverzweigungen auftreten, eine *Wandernde-Wellen*-Gestalt haben. Der verwendete Modellansatz in der Arbeit von Stumpf (2005) basiert auf dieser Feststellung. Eine ausschöpfende Theorie, die ausschließlich symmetrische Aspekte der untersuchten Systeme voraussetzt, bietet einführend die Arbeit von Leite und Golubitsky (2006), ausführlich das Standardwerk von Golubitsky und Stewart (2002).

Während für das sich nun anschließende Resultat in diesem Zusammenhang sehr elementare, nahe am Modell liegende Mittel verwendet werden, skizziere ich in der nachfolgenden Bemerkung 3 zusätzlich eine Symmetrieanalyse der betroffenen Eigenvektoren, die lokal dieselbe Einsicht bringt.

**SATZ 2.** *Die periodischen Lösungen hinter den in System (2.7) auftretenden Hopfverzweigungen sind in dem Sinne diskrete wandernde Wellen, dass sie sich in den Geschwindigkeiten und Abständen der einzelnen Fahrzeuge komponentenweise nur durch die Phasenverschiebung  $k\frac{T_p}{N}$  unterscheiden.*

*Beweis.* Das Modell kann in ein System in den Abständen  $\phi_j$  und Geschwindigkeiten  $\psi_j$  (nicht Relativgeschwindigkeiten) umgeschrieben werden:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_j &= \psi_{j+1} - \psi_j, & j = 1, \dots, N \\ \dot{\psi}_j &= \frac{1}{T(\phi_j)} [V(\phi_j) - \psi_j + \alpha \cdot (\psi_{j+1} - \psi_j) F(\phi_j)], & j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.8)$$

Durch eine Reduktion des Systems auf  $(2N - 1)$  Gleichungen kann man auch hier zeigen, dass ein Stabilitätswechsel der stationären Lösung bei einer bestimmten Länge  $L^H$  in

## 2. Modellbildung

einer Hopfverzweigung stattfindet. Es zweigen  $T_p$ -periodische Lösungen  $(\phi^p, \psi^p) \in \mathbb{R}^{N+N}$  ab. Die zu zeigende Behauptung lässt sich folgendermaßen formulieren. Es muss eine Phasenverschiebung  $\tau := k \cdot \frac{T_p}{N}$  geben, so dass gilt

$$\begin{aligned}\phi_{j+1}^p(t) &= \phi_j^p(t + \tau), & j = 1, \dots, N, \\ \psi_{j+1}^p(t) &= \psi_j^p(t + \tau), & j = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Sei  $(\phi^1, \psi^1)$  eine  $T_p$ -periodische Lösung, die im Hopfpunkt abzweigt. Definiere eine neue periodische Lösung  $(\phi^2, \psi^2)$  durch

$$\phi^2 = A_N \phi^1 \quad \text{sowie} \quad \psi^2 = A_N \psi^1,$$

mit

$$A_N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Auch  $(\phi^2, \psi^2)$  hat die Periode  $T_p$ . Für  $j = 1, \dots, N$  gilt

$$\begin{aligned}\psi_{j+1}^2 - \psi_j^2 &= \psi_{j+1+1}^1 - \psi_{j+1}^1 \\ &= \dot{\phi}_{j+1}^1 \\ &= \dot{\phi}_j^2,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{1}{T(\phi_j^2)} [V(\phi_j^2) - \psi_j^2 + \alpha \cdot (\psi_{j+1}^2 - \psi_j^2) F(\phi_j^2)] \\ = \frac{1}{T(\phi_{j+1}^1)} [V(\phi_{j+1}^1) - \psi_{j+1}^1 + \alpha \cdot (\psi_{j+2}^1 - \psi_{j+1}^1) F(\phi_{j+1}^1)] = \dot{\psi}_{j+1}^1 \\ = \dot{\psi}_j^2. \quad (2.9)\end{aligned}$$

Also ist  $(\phi^2, \psi^2)$  ebenfalls eine Lösung von (2.8). Beide  $T_p$ -periodischen Lösungen besitzen *hinter der Hopfverzweigung* gemäß Satz 1 denselben eindeutigen Orbit im  $\mathbb{R}^{2N-1}$ . Für zwei Lösungen einer Differentialgleichung mit lipschitz-stetiger rechter Seite, die in einem Orbit liegen, gilt aber, dass sie lediglich phasenverschoben sind:

Sei hierfür die Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(x, t)$$

mit den Lösungen  $x^1$  und  $x^2$  gegeben, die beide im Orbit  $\mathcal{O}$  liegen. Für ein  $x_0 \in \mathcal{O}$  gelte

$$x^1(t_1) = x_0, \quad \text{sowie} \quad x^2(t_2) = x_0.$$

Sei nun eine dritte Lösung durch

$$x^3(t) := x^2(t + t_2 - t_1)$$

definiert. Dann löst  $x^3$  mit

$$x^3(t_1) = x^2(t_2) = x_0,$$

dasselbe Anfangswertproblem wie  $x^1$ , weshalb diese beiden Lösungen nach dem Satz von Picard und Lindelöf übereinstimmen. Also sind  $x^1$  und  $x^2$  gerade um  $t_2 - t_1$  phasenverschoben.

Zu klären ist jetzt nur noch, warum die Phasenverschiebung zwischen  $(\phi^1, \psi^1)$  und  $(\phi^2, \psi^2)$  gerade ein Vielfaches von  $\frac{T_p}{N}$  ist.

Die Phasenverschiebung sei hierfür zunächst mit  $\tau$  bezeichnet. Ohne Weiteres lässt sich nun obiges Prinzip fortsetzen und eine Lösung  $(\phi^3, \psi^3)$  konstruieren, die gegenüber  $(\phi^1, \psi^1)$  folglich um  $2\tau$  verschoben sein muss. Schließlich gelangt man sukzessive zu  $(\phi^{N+1}, \psi^{N+1}) = (\phi^1, \psi^1)$  mit einem Phasenschub von  $N\tau$ . Da aber wegen der Periodizität

$$N\tau = k \cdot T_p$$

gelten muss, schließt man

$$\tau = k \frac{T_p}{N}.$$

‡

**BEMERKUNG 3.** Eine andere Möglichkeit, etwas über die Symmetrie der periodischen Lösungen zu erfahren, ist es sich die Struktur des Eigenvektors  $v$  zum Hopf-Eigenwert  $\lambda = i\omega$  anzusehen. Die in einer Ruhelage linearisierte Lösung  $x^l$  hat ja in Richtung von  $v$  die Form

$$x^l(t) = \dots v \cdot e^{\lambda t} \dots$$

Gasser u. a. (2007) führen eine Stabilitätsanalyse von (2.8) über die Linearisierung der Nullruhelage in einem System mitbewegter Koordinaten durch. Sie führt auf die Eigenwerte der Matrix

$$M = \left( \begin{array}{c|c} O_N & D \\ \hline \frac{\beta}{\tau} I_N & \frac{\gamma}{\tau} D - \frac{1}{\tau} I_N \end{array} \right),$$

wobei  $\beta = V'(\frac{L}{N})$ ,  $\tau = T(\frac{L}{N})$  und  $\gamma = \alpha F(\frac{L}{N})$  Konstanten in Abhängigkeit von der kritischen Dichte  $\frac{L}{N}$  sind. Weiterhin ist die Matrix  $D$  über

$$D := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

definiert,  $O_N$  bezeichne die Nullmatrix, sowie  $I_N$  die Einheitsmatrix in  $\mathbb{R}^{N \times N}$ .

Definiert man nun  $A \in \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ ,

$$A := \left( \begin{array}{c|c} A_N & O_N \\ \hline O_N & A_N \end{array} \right),$$

## 2. Modellbildung

so gilt folgende Symmetrieeigenschaft für  $M$ :

$$M \cdot A = A \cdot M.$$

Daraus folgt, dass zu jedem Eigenvektor  $v$  auch  $Av$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  ist, also im selben Eigenraum liegt. Da die Dimension des Eigenraumes von  $v$  im hier untersuchten Fall des algebraisch einfachen Hopf-Eigenwertes  $i\omega$  eins ist, muss es ein Skalar  $e^{i\phi} \in \mathbb{C}$  geben, so dass gilt:

$$e^{i\phi} \cdot v = Av.$$

Da die  $N$ te Potenz von  $A$  wieder die Einheitsmatrix ist, folgt

$$e^{iN\phi} \cdot v = v,$$

weshalb

$$\phi = \frac{2k\pi}{N}, \quad k \in \{1, \dots, N\},$$

ist. Also gilt mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$v_{j+1} = v_j \cdot e^{i\omega k \frac{T}{N}}. \quad (2.10)$$

Gasser u. a. (2004) berechnen im Anhang ihrer Arbeit als Hilfsmittel für den ersten Ljapunov-Koeffizienten für das einfache Modell ohne Drängler und mit konstanter Reaktionszeit den Eigenvektor zum ersten Eigenwert  $i\omega_1$ , der über die imaginäre Achse wandert. Seine Komponenten erfüllen gerade die Eigenschaft (2.10) für  $k = 1$ . Im allgemeineren Fall von Modell (2.8) ist die Rechnung wesentlich komplizierter und führt für obiges  $\phi$  beim  $k$ ten Eigenwert  $\omega_k$  auf eine Gleichung der Art

$$e^{i\phi} = 1 + \frac{i\omega_k(1 + i\omega_k\tau)}{\beta + i\omega_k\gamma}.$$

Es bleibt in diesem Zusammenhang zu zeigen, dass diese sich beim  $k$ ten Eigenwert in der Hopfverzweigung unter Verwendung der von Gasser u. a. (2004) hergeleiteten Bedingung im Wesentlichen gerade zu

$$\phi_k = \frac{2\pi k}{N}$$

auföst, also zu einer *Wellenzahl*  $k$  führt. Auch die numerische Verzweigungsanalyse mit AUTO2000 untermauert diese Vermutung.

### 2.2.2. Individuelles Fahrverhalten

Gegeben sei eine von mir im Folgenden *inhomogen* genannte Verkehrssituation, bei der jedem Fahrer ein persönliches Verhalten in Form einer individuellen Reaktionszeit  $\tau_j$  und einer eigenen Richtgeschwindigkeitsfunktion  $V_j$  zugeschrieben wird:

$$\ddot{x}_j = \frac{1}{\tau_j} (V_j(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j) \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (2.11)$$

**LEMMA 2** (Gasser u. a. (2004)). *System (2.11) besitzt eine Lösung  $x^0$  mit konstanter Geschwindigkeit  $c$ , wobei die  $x_j^0$  durch*

$$x_j^0(t) = ct + \sum_{k=1}^{j-1} d_k, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.12)$$

mit geeignet gewählten Abständen  $d_k$  gegeben sind.

Da (2.11) nicht mehr in ein System mit Relativgeschwindigkeiten transformiert werden kann, führen die Autoren Gasser u. a. (2004) ein mitbewegtes Koordinatensystem

$$y := x - x^0$$

ein, in dem die Nulllösung in  $y$  der quasi-stationären Lösung  $x^0$  entspricht:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_j = y_{N+j} \\ \dot{y}_{N+j} = \frac{1}{\tau_j}(V_j(d_j + y_{j+1} - y_j) - c - y_{N+j}) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.13)$$

Hierfür stellen sie die charakteristische Gleichung für die Linearisierung des Systems in der Null auf; sie lautet

$$\prod_{j=1}^N (\tau_j \lambda^2 + \lambda + \beta_j) - \prod_{j=1}^N \beta_j = 0. \quad (2.14)$$

Diese lässt sich nicht mehr ohne weiteres analytisch lösen, allein der permanent auftretende Eigenwert Null ist offensichtlich.

Alternativ hierzu lässt sich (2.11) aber wie im Falle der Drängler in ein System in den Abständen und *Geschwindigkeiten* transformieren:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_j = z_{j+1} - z_j \\ \dot{z}_j = \frac{1}{\tau_j}(V_j(y_j) - z_j) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.15)$$

Im Gegensatz zu (2.13) kann man in (2.15) eine der ersten  $N$  Gleichungen für die Abstände eliminieren und in der entsprechenden Gleichung für die Geschwindigkeit  $z_j$  das auftretende  $y_j$  durch

$$y_j = L - \sum_{i \neq j} y_i$$

ersetzen. Dadurch behält man alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2.14) bis auf die Null und kann wie im Falle der homogenen Fahrersituation eine (mindestens) numerische Analyse von Hopfverzweigungen durchführen.

Die Analyse des frei fließenden Verkehrs vermöge der quasi-stationären Lösung  $x^0$  ist bisher in allen beschriebenen Fällen immer mit dem Finden einer geschickten Transformation zur Vermeidung des Nulleigenwertes verbunden. Dieser Eigenwert scheint mit

## 2. Modellbildung

der linearen Stabilität von  $x^0$  nichts zu tun zu haben, sein Auftreten ist vielmehr an die Eigenschaft

$$L = \sum_{j=1}^N y_j$$

gekoppelt – also an die kreisförmige Anordnung der Fahrbahn. Mit anderen Worten: mit den bisher verwendeten Techniken lässt sich zwar die Dynamik aller obiger Modellvarianten beschreiben, aber nicht genau erklären, warum der permanente Eigenwert Null vorliegt. Bei der im folgenden Abschnitt zu besprechenden Modellerweiterung versagt die bisherige Herangehensweise nun gänzlich; Abschnitt 2.2.3 dient unter anderem als Motivation für eine neue Perspektive auf die Lösungen der Modellgleichungen.

### 2.2.3. Baustelle

Einem Großteil der untersuchten Car-Following-Modelle aus der Literatur liegt eine gewisse Homogenität der Fahrbahn zugrunde, das heißt die Lösungen sind bis auf Rotationen *aller* Fahrer auf dem Kreis eindeutig, da dieser auf der ganzen Länge  $L$  dieselben Eigenschaften hat.

Im Folgenden betrachte ich ein Modell, in dem die Beschleunigung der Verkehrsteilnehmer zusätzlich vom Ort auf dem Kreisverkehr abhängt. Es lautet

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = x_{N+j} \\ \dot{x}_{N+j} = V_{max}(x_j, \epsilon) \cdot V(x_{j+1} - x_j) - x_{N+j} \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Konkret ist daran neu, dass die vormalig konstante Maximalgeschwindigkeit  $V_{max}$  nun vom Ort  $x_j$  abhängt:

$$V_{max} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Dabei soll  $V_{max}$  so beschaffen sein, dass die Geschwindigkeit an einer Stelle des Kreises kleiner wird (wie in einer Baustelle), sonst überall im Wesentlichen konstant ist. Dies lässt sich technisch zum Beispiel mit einer Gauß-ähnlichen Funktion

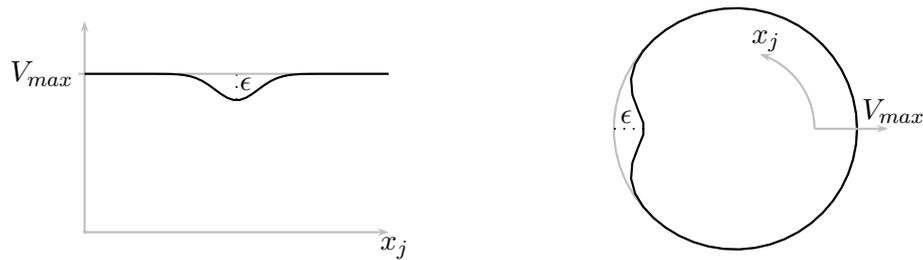
$$V_{max1}(x, \epsilon) = -\epsilon e^{-(x - \frac{L}{2})^2} + 1, \quad (2.18)$$

erreichen oder mit einem polynomialen Ansatz

$$V_{max2}(x, \epsilon) = \begin{cases} -\epsilon(1 - (x - \frac{L}{2})^2)^2 + c, & \text{falls } \frac{L}{2} - 1 < x < \frac{L}{2} + 1, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.19)$$

(siehe Abb. 2.3 links). Verbindet man die beiden Enden der  $x$ -Achse miteinander und schließt dadurch den Kreis, so entsteht (zufälligerweise) ein Bild, dass der realistischen Vorstellung einer Spurverengung durch eine Baustelle schon sehr nahe kommt (Abb. 2.3 rechts).

Es stellt sich nun, ganz allgemein gesprochen, die Frage, was sich durch die Einführung der ortsabhängigen Höchstgeschwindigkeit im Modell ändert. Genau genommen ist von

Abbildung 2.3.: Eine  $\epsilon$ -Baustelle im Kreisverkehr.

besonderem Interesse, was sich gerade nicht ändert. Zum Beispiel liegt die Vermutung nahe, dass sich bei einer kleinen Baustelle, das heißt bei einer infinitesimal kleinen Störung  $\epsilon$ , die Verkehrslage auch nicht sonderlich unterscheidet im Vergleich zur Situation ohne Baustelle.

Man kann unvoreingenommen sogar noch einen Schritt weiter gehen und überlegen, was passiert, wenn man bei einem gleichmäßig fließenden (*stabilen quasistationären*) Verkehr im Kreis an einer Stelle eine kleine Reduzierung der Höchstgeschwindigkeit vornimmt. Wahrscheinlich werden die Autos an dieser Stelle kurz dazu gezwungen, langsamer zu fahren, beschleunigen danach aber gleich wieder. Diese Bewegung wird sich vielleicht noch ein klein wenig auf die nachfolgenden Fahrer auswirken, aber bei der nächsten Umrundung unter Umständen wieder „vergessen“ sein.

In Abbildung 2.4 ist das Phasenportrait des ersten Autos einer Simulation zu dieser Situation zu sehen. Tatsächlich wird wie vermutet aus der quasistationären Lösung eine Lösung, bei der die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort periodisch ist; die  $x$ -Achse ist daher modulo der Kreislänge  $L$  aufgetragen.

In System (2.16) scheitert der Versuch einer Stabilitätsanalyse über Ruhelagen also bereits an der Existenz einer quasi-stationären Lösung.

## 2.3. Problemstellung

Für Lösungen von Kreisverkehrsmodellen ist eine Formulierung gesucht, die in einfachen Fällen äquivalent zur bereits bekannten quasi-stationären Lösungen ist, mit der sich aber im Allgemeinen eine größere Bandbreite von Modellen, insbesondere solche mit ortsabhängiger Richtgeschwindigkeit, analysieren lässt.

## 2. Modellbildung

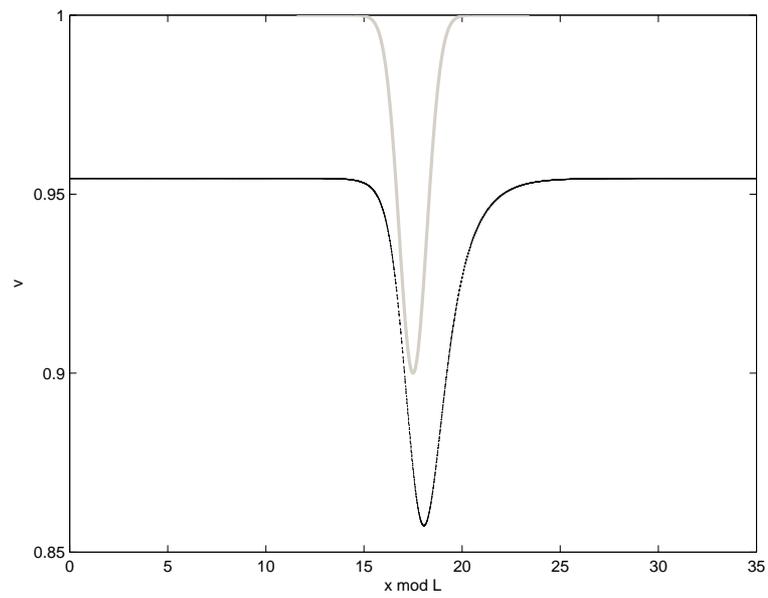


Abbildung 2.4.: „Baustellen-Lösung“ für  $\epsilon = 0.1$  ( $N = 20$ ,  $L = 35$ ) und ortsabhängige Maximalgeschwindigkeit  $V_{max}(x, \epsilon)$  (grau).

## 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

Bereits die bloße Formulierung eines im Kreis angeordneten Car-Following-Modells legt nahe, dass unter den Lösungen des zugrundeliegenden Systems Rotationen im Sinne von Kapitel 1.2 zu erwarten sind. Gilt doch für jeden Fahrer, dass er nach einer gewissen Zeit  $T$ , nachdem er den Kreis der Länge  $L$  einmal umrundet hat, wieder am gleichen Ort ist. Braucht er, unabhängig vom Startpunkt, für eine Umrundung immer dieselbe Zeit, so ist bereits die Bedingung

$$x_j(t + T) = x_j(t) + L$$

für Rotationen erfüllt.

### 3.1. Abstraktion von der Ruhelage

Gehen wir noch einmal von dem Modell (2.11) für individuelles Fahrverhalten in  $2N$  Koordinaten aus:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = x_{N+j} \\ \dot{x}_{N+j} = \frac{1}{\tau_j} (V_j(x_{j+1} - x_j) - x_{N+j}) \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Der Vektor  $\Lambda \in \mathbb{R}^{2N}$  sei durch

$$\Lambda_j := L, \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_{N+j} := 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

definiert. Für die nach Lemma 2 quasi-stationäre Lösung  $x^0$  von (3.1) gilt dann

$$x^0(t + T) = x^0(t) + \Lambda,$$

mit  $T = \frac{L}{c}$  (vgl. Bedingung (1.3))<sup>1</sup>. Wir erinnern uns, dass  $x^0$  in den Koordinaten  $y_j = x_{j+1} - x_j$  einer Ruhelage  $y^0$  entspricht.

Ich werde auch im Folgenden immer den Buchstaben  $x$  für das ursprüngliche System und  $y$  für das System in den Abständen verwenden. Passend dazu bezeichne  $f^x$  die rechte Seite, sowie  $\Phi_t^x$  den Fluss von (3.1), andererseits seien  $f^y$  und  $\Phi_t^y$  die analogen Abbildungen von (2.4). Da die Vektorfelder in beiden Fällen insbesondere durch die

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass die quasi-stationäre Lösung  $x^0$  in den ersten  $N$  Komponenten lediglich die Eigenschaften einer rotierenden Lösung hat, während sie in den zweiten  $N$  Komponenten – den Geschwindigkeiten – sogar *periodisch* ist.

### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

Restriktionen an die Richtgeschwindigkeit  $V$  lipschitz-stetig sind, sind die Flüsse auch wohldefiniert. Wie in Kapitel 1.2.1 sei  $\Psi_t^x$  definiert durch

$$\Psi_t^x(\xi) := \Phi_t^x - \Lambda.$$

Um die Stabilität von  $y^0$  zu analysieren, muss man sich das linearisierte System

$$\dot{y} = Df^y(y^0)y$$

ansehen. Es besitzt die Fundamentallösungen

$$Y(t) := e^{Df^y(y^0) \cdot t},$$

wobei durch  $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$  hier die Matrixexponentialfunktion  $e : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert ist. Man kann sich schnell wieder klarmachen, dass der in einer Ruhelage linearisierte Fluss  $D\Phi_t^y(y^0)$  gerade diesen Fundamentallösungen entspricht:

$$\begin{aligned} (D\Phi_t^y(y^0))' &= D(\Phi_t^y(y^0))' \\ &= D[f(\Phi_t^y(y^0))] \\ &= Df(\Phi_t^y(y^0)) \cdot D(\Phi_t^y(y^0)) \\ &= Df(y^0) \cdot D(\Phi_t^y(y^0)) \end{aligned}$$

Also erfüllt  $D\Phi_t^y(y^0)$  (in allen Spalten) die lineare Differentialgleichung  $\dot{y} = Df(y^0) \cdot y$ , weshalb

$$D\Phi_t^y(y^0) = Y(t)$$

folgt.

Das  $x$ -System (3.1) besitzt in jedem Punkt  $\xi$  aus dem Orbit der Rotation  $x^0$  die Linearisierung  $\dot{x} = Df^x(\xi)x$  mit der Systemmatrix  $Df^x(\xi)$ , deren Eigenwerte mit denen von  $Df^y(y^0)$  übereinstimmen. Da (3.1) autonom ist, gilt auch hier

$$\begin{aligned} D\Phi_t^x(\xi) &= e^{Df^x(\xi) \cdot t} \\ &= e^{Df^y(y^0) \cdot t}. \end{aligned}$$

Für einen Eigenwert  $\lambda$  von  $Df^y(y^0)$  ist also  $e^{t\lambda}$  Eigenwert von  $D\Phi_t^x(\xi)$ . Berücksichtigt man noch, dass  $D\Psi_t^x(\xi) = D\Phi_t^x(\xi)$  ist, lässt sich also folgender Sachverhalt formulieren:

**LEMMA 3.** *Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  der Linearisierung  $Df^y(y^0)$  des  $y$ -Systems in der Ruhelage  $y^0$  gehört genau ein Floquetmultiplikator  $e^{T\lambda}$  von  $x^0$  (Abb. 3.1).*

Das Lemma 3 stellt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den  $x$ - und den  $y$ -Lösungen her. Um über die lineare Stabilität der Rotation  $x^0$  Aussagen im Sinne von Kapitel 1.2.1 zu treffen, ist es notwendig, über den anscheinend auftretenden Floquetmultiplikator  $e^{T \cdot 0} = 1$  zu sprechen. Dies soll im folgenden Abschnitt unter Verwendung einer etwas geometrischeren Theorie – wie bei der Stabilität von periodischen Lösungen allgemein üblich – geschehen.

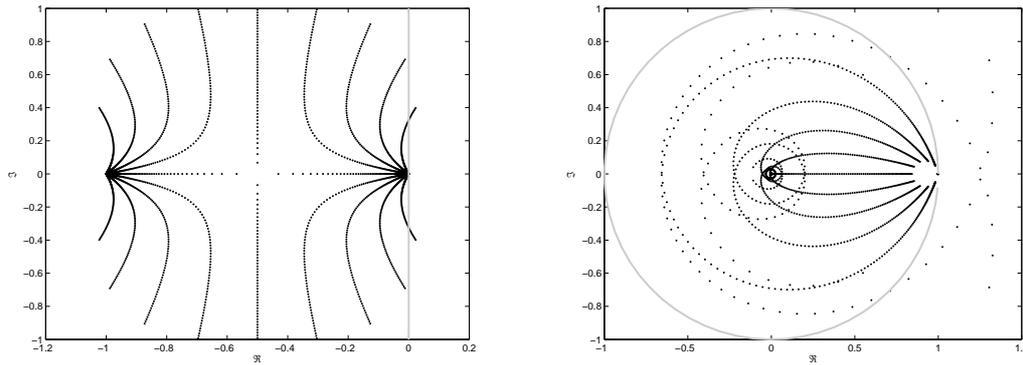


Abbildung 3.1.: Links das Spektrum von  $Df^y(y^0)$  unter Variation von  $L$  bei  $N = 10$ ; rechts die Floquetmultiplikatoren der Rotation  $x^0$ . Die imaginäre Achse wird durch die Exponentialabbildung auf den Einheitskreis abgebildet (jeweils grau).

### 3.2. Geometrie von Lösungen

Es sei

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (3.2)$$

ein Car-Following-Modell von einem der hier untersuchten Typen (z. B. (2.4), (2.16) oder (3.1)) mit dem Fluss  $\Phi$ , der Rotation  $x^0$  als Lösung (Umlaufzeit  $T$ ) und der wie oben gewählten Abbildung  $\Psi = \Phi - \Lambda$ . Ganz analog zu periodischen Lösungen kann man zeigen, dass  $x^0$  generisch schon mindestens einen Floquetmultiplikator 1 besitzen muss:

Für jedes  $t$  ist der Punkt  $x^0(t)$  aus der Rotation Fixpunkt von  $\Psi_T$ . Es gilt also

$$\Psi_T(x^0(t)) = x^0(t).$$

Leitet man diese Gleichung nach der Zeit ab, folgt

$$D\Psi_T(x^0(t))\dot{x}^0(t) = \dot{x}^0(t). \quad (3.3)$$

Der Tangentialvektor  $\dot{x}^0(t)$  an der Lösung ist also in Bezug auf die Matrix  $D\Psi_T(x^0(t))$  immer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Insbesondere ist nach Lemma 3 und unter Berücksichtigung der Resultate von Gasser u. a. (2004) auch klar, dass dieser algebraisch einfach ist.

Um nun eine Aussage über die orbital *asymptotische* Stabilität einer Rotation  $x^0$  zu erhalten, muss der Begriff des Poincaré-Schnitts (Transversale) aus der Theorie der periodischen Lösungen auf geschlossenen Orbits etwas erweitert werden. Der Orbit von  $x^0$  ist nicht geschlossen, so dass ein zu einem Zeitpunkt  $t$  erreichter Punkt  $\xi$  nie wieder getroffen wird; allerdings wird zum Zeitpunkt  $t + T$  gerade der Ort  $\xi + \Lambda$  erreicht. Es klingt also plausibel, zwei Ebenen  $\Sigma$  und  $\Sigma + \Lambda$  einzuführen, die in den Punkten  $\xi$  und

### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

$\xi + \Lambda$  parallel zueinander liegen und von  $x^0$  zum Zeitpunkt  $t$  beziehungsweise  $t + T$  (transversal) durchstoßen werden (Abb. 3.2).

Da das Modell stetig von den Parametern und Anfangswerten abhängt, bildet der Fluss  $\Phi_t$  eine Umgebung  $U$  von  $\xi$  stetig in eine Umgebung  $\xi + \Lambda$  ab. Durch

$$\Pi : U \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$$

sei nun mit

$$\Pi(\eta) := \Phi_{T(\eta)}(\eta) - \Lambda, \text{ für } \eta \in U \cap \Sigma,$$

die Poincaré-Abbildung definiert. Dabei ist  $\tau$  eine Art Wiederkehrzeit, die stetig von  $\eta$  abhängt  $\tau(\xi) = T$  erfüllt. Genau wie in der Stabilitätstheorie periodischer Lösun-

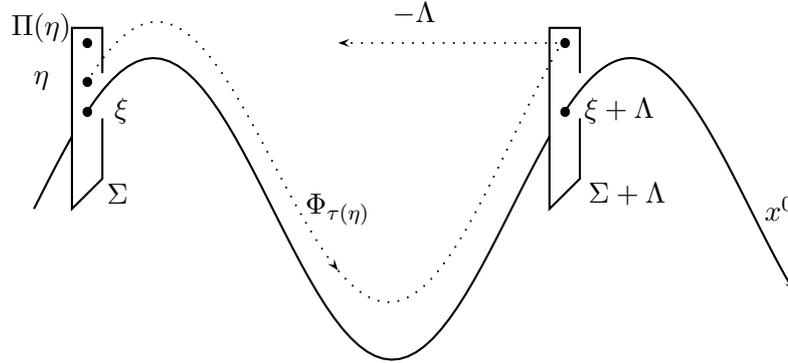


Abbildung 3.2.: Die transversalen Schnitte  $E_k$  an den Punkten  $\xi_k$  zur Zeit  $t_k$

gen (Guckenheimer und Holmes 1983, Kap. 1.5.) entspricht nun die Matrix  $D\Pi(\xi)$  (bis auf Basistransformation) der Matrix  $D\Psi_T(\xi)$ , wenn man diejenige Zeile und Spalte wegstreicht, die zum algebraisch einfachen Floquetmultiplikator 1 gehören.

Unter Berücksichtigung von Lemma 1 lässt sich der folgende Sachverhalt formulieren.

**SATZ 3.** Gegeben sei das autonome Modell (3.2) mit der Rotation  $x^0$ , die für ein  $T > 0$  und ein  $\Lambda \in \mathbb{R}^{2N}$  die Bedingung

$$x^0(t + T) = x^0(t) + \Lambda$$

erfüllt. Es gilt:

1. Es existiert ein Floquetmultiplikator 1 von  $x^0$ .
2. Sind die übrigen Floquetmultiplikatoren betragsmäßig kleiner als 1, so ist  $x^0$  orbital asymptotisch stabil.
3. Gibt es einen Floquetmultiplikator, der betragsmäßig größer als 1 ist, so ist  $x^0$  instabil.

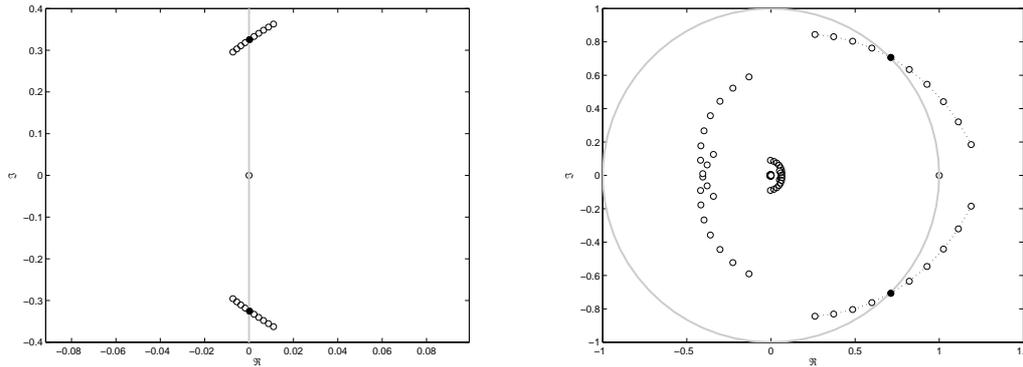


Abbildung 3.3.: Eigenwerte in der Hopfverzweigung gegenüber Floquetmultiplikatoren in der Torusverzweigung;  $N = 5$ ,  $V_{max} = 1$ ,  $L \approx 14$ .

Lemma 3 über die Korrespondenz zwischen den Eigenwerten der Ruhelage  $y^0$  einerseits und den Floquetmultiplikatoren der Rotation  $x^0$  andererseits liefert unter Verwendung der Poincaré-Abbildung  $\Pi$  nicht nur Stabilitätsaussagen von  $x^0$ , sondern auch eine weitere wichtige Schlussfolgerung. Zu einem rein imaginären Eigenwert  $\lambda = i\omega$  (mit  $\omega \neq 0$ ) von  $y^0$  gehört der Floquetmultiplikator  $e^{iT\omega}$  (im Allgemeinen ungleich 1 und  $-1$ ), der auf dem Einheitskreis liegt. Ein Paar solcher Eigenwerte vom Betrag eins der linearisierten Poincaré-Abbildung  $\Pi$  charakterisiert eine *Neimark-Sacker* Verzweigung eines Fixpunktes von  $\Pi$  (Abb. 3.3, siehe Kap. 1.2.2).

Wie bereits angedeutet, ähnelt die Torusverzweigung von Fixpunkten diskreter Systeme in gewisser Hinsicht der Hopfverzweigung bei Ruhelagen von Differentialgleichungen: beim Überschreiten des Einheitskreises wechselt ein Fixpunkt seine Stabilität, während gleichzeitig eine *geschlossene invariante Kurve* entsteht. Dieser Sachverhalt erinnert stark an die periodischen Lösungen, die in einem Hopfpunkt abzweigen. Um die beiden Verzweigungen klar voneinander abzugrenzen, präzisiert die folgende Definition den Begriff der invarianten Kurve.

**DEFINITION 7** (Diskrete dynamische Systeme). *Gegeben sei das diskrete dynamische System*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto F(x). \end{aligned}$$

1. Die Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = F^m(x_0), x_0 \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}\}$$

heißt Orbit in  $x_0$ .

2. Eine Kurve in  $\mathbb{R}^n$  heißt invariante Kurve, wenn zu jedem Punkt  $x$  auf der Kurve auch jede Iterierte  $F^m(x)$  auf der Kurve liegt.

### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

Durch zweiten Teil der Definition wird ein Unterschied der Torusverzweigung zur Hopfverzweigung deutlich. Eine invariante Kurve *ist kein periodischer Orbit!* Es können zwar periodische Orbits auf der Kurve liegen, aber es kann auch sein, dass ein Startwert  $x_0$  auf einer invarianten Kurve nie wieder von einer Iterierten von  $F$  getroffen wird. Dies ist der Fall, wenn die zugehörige Rotationszahl irrational ist (vgl. Hasselblatt und Katok (2003)). Daher ist es auch numerisch schwieriger, Lösungen auf einer invarianten Kurve im Parameterraum zu verfolgen (siehe Kapitel 4).

### 3.3. Diskrete wandernde Wellen

In Kapitel 2.2.3 habe ich das Modell (2.16) mit einer orts- (und vom Parameter  $\epsilon$ ) abhängigen Maximalgeschwindigkeit  $V_{max}$  eingeführt. Es war die Frage offen geblieben, welche Eigenschaften der Lösung  $x^0$  erhalten bleiben, wenn man den Baustellen-Parameter  $\epsilon$  vergrößert. Auf den kommenden Seiten führe ich zur Behandlung dieses Problems eine sogenannte *reduzierte* Poincaré-Abbildung  $\pi$  ein, mit deren Hilfe sich Rotationen mit einer zusätzlichen symmetrischen Eigenschaft finden lassen.

Aronson u. a. (1991) führen für Rotationen in Systemen mit  $Z_n$ -symmetrischen Lösungen folgende Bezeichnung ein, die ich übernehmen werde:

**DEFINITION 8.** *Eine Rotation  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  mit Umlaufzeit  $T$ , für die zusätzlich für alle  $j = 1, \dots, n$*

$$x_j(t + \frac{T}{n}) = x_{j+1}(t)$$

*gilt, heißt Ponies-On-A-Merry-Go-Round-Lösung<sup>2</sup> (kurz: POM).*

Aus dem Bereich der Strömungs-Transport-Gleichungen ist der Begriff der wandernden Wellen bekannt; POMs sind *diskrete* wandernde Wellen.

Ich beginne zunächst wieder mit der einfachsten homogenen Verkehrssituation (zur besseren Übersicht sei im Folgenden immer  $\tau = 1$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = x_{N+j} \\ \dot{x}_{N+j} = V(x_{j+1} - x_j) - x_{N+j} \end{array} \right\}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

Die quasi-stationäre Lösung  $x^0$  von (3.4) ist eine POM, da für alle  $j = 1, \dots, N$  gilt (vgl. Abb. 3.4):

$$\begin{aligned} x_j^0(t + \frac{T}{N}) &= ct + c\frac{T}{N} + j\frac{L}{N} \\ &= ct + \frac{Lc}{cN} + j\frac{L}{N} \\ &= ct + (j+1)\frac{L}{N} \\ &= x_{j+1}^0(t). \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Merry-go-round: engl. für Karussell



### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

Nun ist jeder Punkt  $\xi$  aus dem Orbit der POM  $x^0$  nicht nur Fixpunkt von  $\Psi_T$ , sondern auch von  $\psi_{\frac{T}{N}}$ . Untersucht man die Symmetrieeigenschaften des Vektorfeldes  $f$ , so gilt die folgende (bis auf  $l$ ) Äquivarianzbedingung:

$$Af(x) = f(A(x+l)). \quad (3.6)$$

Hiermit lässt sich zeigen, dass nicht nur die Funktion  $g_1(t) := \Phi_t(A^T x - l)$ , sondern auch  $g_2(t) := A^T \Phi_t(x) - l$  das Anfangswertproblem

$$\dot{g} = f(g), \quad g(0) = A^T x - l$$

lösen, weshalb

$$\Phi_t(A^T x - l) = A^T \Phi_t(x) - l$$

gilt. So erhält man mit

$$(A^T)^N = Id$$

die folgende Beziehung zwischen den beiden Zeit-t-Abbildungen  $\Psi_{\frac{T}{N}}$  und  $\Psi_T$ :

$$\Psi_{\frac{T}{N}}^N(x) = A^T \Phi_{\frac{T}{N}} \left( \dots A^T \Phi_{\frac{T}{N}} \left( A^T \Phi_{\frac{T}{N}}(x) - l \right) - l \dots \right) - l = \Psi_T(x).$$

**DEFINITION 9.** Sei  $x^0$  eine POM,  $\xi$  ein Punkt aus ihrem Orbit,  $\Sigma$  ein Poincaré-Schnitt in  $\xi$  und  $U$  eine Umgebung von  $\xi$ . Dann ist durch

$$\pi : U \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$$

mit

$$\pi(\eta) := A^T \cdot \Phi_{T(\eta)}(x) - l, \text{ für } \eta \in U \cap \Sigma,$$

die reduzierte Poincaré-Abbildung  $\pi$  definiert. Dabei ist  $T(\eta)$  die Wiederkehrzeit, bei der  $\Sigma$  zum ersten Mal erneut durchstoßen wird.

Auf der POM gilt gerade

$$\pi(\xi) = \psi_{\frac{T}{N}}(\xi) = \xi,$$

also  $T(\xi) = \frac{T}{N}$ . Außerdem ist nach Konstruktion die  $N$ -fache Anwendung der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  gleichbedeutend mit der einmaligen Anwendung von  $\Pi$ . Daher erhält man folgendes Lemma:

**LEMMA 4.** Sei  $x^0$  eine POM, sowie  $\xi$  ein Punkt auf ihrem Orbit. Die Zahl  $\lambda^N$  ist genau dann Eigenwert von  $D\pi(\xi)$ , wenn  $\lambda$  Eigenwert von  $D\Pi(\xi)$  ist.

**DEFINITION 10.** Die Eigenwerte von  $D\pi(\xi)$  werden von nun an Floquetmultiplikatoren von  $x_0$  bezüglich  $\pi$  und die von  $D\Pi(\xi)$  Floquetmultiplikatoren von  $x_0$  bezüglich  $\Pi$  genannt.

Die Aussage von Lemma 4 ist bei der weiteren Untersuchung von POM-Lösungen in zweierlei Hinsicht von großer Bedeutung. Erstens steckt bereits die gesamte Dynamik einer Rotation mit der Wandernden-Wellen-Eigenschaft in den Eigenwerten von  $\pi$ ; denn die Anzahl der Eigenwerte diesseits und jenseits des Einheitskreises bei  $\Pi$  und  $\pi$  ist gleich. Zweitens lässt sich nun feststellen, dass bei der POM  $x^0$  eine *Torusverzweigung der Abbildung  $\Pi$*  in einem Punkt  $\xi$  aus dem Orbit von  $x^0$  einhergeht mit einer *Torusverzweigung von  $\pi$*  in demselben Punkt.

Ich formuliere nun das Hauptresultat dieses ersten Teils, mit dessen Hilfe ein Großteil der Verzweigungsanalysen des Kreisverkehrmodells nahtlos auf den Fall  $\epsilon > 0$  übertragen werden kann.

**SATZ 4** (Existenz von POMs bei kleinen Baustellen). *Für  $\epsilon > 0$  sei eine Schar von Richtgeschwindigkeitsfunktionen durch*

$$V_\epsilon : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & V_{max}(x, \epsilon) \cdot V(y) \end{cases}$$

*definiert, wobei jedes  $V(y)$  positiv und monoton steigend ist, einen eindeutigen Wendepunkt besitzt und  $V(0) = 0$ , sowie  $\lim_{y \rightarrow \infty} V(y) = 1$  erfüllt.*

*Für kleine  $\epsilon$  besitzt das System*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = V_\epsilon(x_j, x_{j+1} - x_j) - y_j \end{array} \right\}, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

*das im Fall  $\epsilon = 0$  gerade das System 3.4 ist, Rotationen  $x^\epsilon$  mit Umlaufzeit  $T(\epsilon)$ ,  $T \in C^k$ ,  $T(0) = L/V(\frac{L}{N})$  als Lösungen, für die gilt:*

$$x_j^\epsilon \left( t + \frac{T(\epsilon)}{N} \right) = x_{j+1}^\epsilon(t), \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

*Die  $x^\epsilon$  sind also POMs.*

*Beweis.* Gegeben sei der Poincaré-Schnitt  $\Sigma$ . Ich definiere in diesem Zusammenhang die reduzierte Poincaré-Abbildung neu, so dass sie nun zusätzlich ebenfalls von  $\epsilon$  abhängt:

$$\pi : \begin{cases} \Sigma \times \mathbb{R} & \rightarrow & \Sigma \\ (x, \epsilon) & \mapsto & A^T \cdot \Phi_{\tau(x, \epsilon)}(x, \epsilon) - l. \end{cases}$$

Weiterhin sei  $\xi$  ein Punkt aus dem Orbit der POM  $x^0$ . Dann ist  $\xi$  Fixpunkt von  $\pi(\cdot, 0)$  mit  $\tau(\xi, 0) = \frac{L}{cN}$ , beziehungsweise gilt

$$g(\xi, 0) = 0,$$

wenn man die Funktion  $g$  wie folgt definiert:

$$g(x, \epsilon) = \pi(x, \epsilon) - x.$$

### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

Um nach dem Satz über implizite Funktionen einen nach  $\epsilon$  parametrisierten Zweig von Fixpunkten von  $\pi$  nachzuweisen, muss die Matrix

$$D_\xi g(\xi, 0) = D_\xi \pi(\xi, 0) - E$$

regulär sein. Nun hat aber  $D_\xi \pi(\xi, 0)$  als Eigenwerte gerade die Floquetmultiplikatoren von  $x^0$  bezüglich  $\pi$ . Da der konstante Eigenwert Eins algebraisch einfach ist (!), entfällt er bei der Restriktion der Abbildung auf die Transversale  $\Sigma$ .

Jeder Eigenwert  $\lambda$  von  $D_\xi g(\xi, 0)$  korrespondiert nun mit genau einem Eigenwert  $(1+\lambda)$  von  $D_\xi \pi(\xi, 0) - E$ . Setzt man nun  $T(\epsilon) := \tau(\xi(\epsilon), \epsilon)$ , folgt die Behauptung.  $\sharp$

**BEMERKUNG 4.** 1. In diesem Fall habe ich die reduzierte Poincaré-Abbildung verwendet, um einen  $\epsilon$ -Zweig von POMs für das besprochene Modell nachzuweisen. Ebenso könnte man einen Zweig von einfachen Rotationen nachweisen, wenn man  $\pi$  durch die Abbildung  $\Pi$  austauscht. So ist es beispielsweise ohne Weiteres möglich den Fall der inhomogenen Fahrer auf Baustellen zu übertragen.

2. Ich möchte hier kurz eine weitere, völlig andere Beweismethode skizzieren, die sich allerdings ausschließlich auf den symmetrischen Fall der POMs anwenden lässt und die sich funktionalanalytischer Methoden bedient.

Die triviale POM  $x^0$  im Modell ohne Baustelle erfüllt in jeder Komponente das *zweidimensionale* System

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = V(x(t + \frac{T}{N}) - x(t)) - y(t) \end{array} \right\}.$$

Für eine allgemeine Lösung lässt sich die neue Variable  $\xi(t)$  als Abweichung von der Lösung  $x^0(t)$  durch

$$\xi(t) := x(t) - x^0(t)$$

definieren. Das Besondere an diesen mitbewegten Koordinaten  $\xi$  ist, dass einer Rotation  $x(t)$  mit der Umlaufzahl  $T = \frac{L}{c}$  gerade eine  $T$ -periodische Lösung  $\xi(t)$  entspricht:

$$\begin{aligned} \xi(t + T) &= x(t + T) - ct - cT - \frac{L}{N} \\ &= x(t) + L - ct - cT - \frac{L}{N} \\ &= x(t) + L - ct - c\frac{L}{c} - \frac{L}{N} \\ &= \xi(t). \end{aligned}$$

Skaliert man die Zeit noch mit der Umlaufzeit  $T$ , so interessieren wir uns in folgendem System gerade für die 1-periodischen Lösungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = T [TV(\xi(\cdot + \frac{T}{N}) - \xi + \frac{L}{N}) - (\eta + L)] \end{array} \right\}.$$

Auch das  $\epsilon$ -Baustellen-Modell kann auf dieselbe Weise umgeschrieben werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = \eta \\ \dot{\eta} = T [TV_\epsilon(\xi + x^0, \xi(\cdot + \frac{T}{N}) - \xi + \frac{L}{N}) - (\eta + L)] \end{array} \right\}. \quad (3.8)$$

Eine POM des ursprünglichen System (3.7) kann eindeutig identifiziert werden mit einer 1-periodischen Lösung von (3.8). Nun kann man einen Operator  $F_\epsilon$  in den entsprechenden Banachräumen definieren.

$$F_\epsilon(T, \xi, \eta) := \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi' - \eta \\ \eta' - T [TV_\epsilon(\xi + x^0, \xi(\cdot + \frac{1}{N}) - \xi + \frac{L}{N}) - (\eta + L)] \end{pmatrix}$$

Hierbei ist  $(\xi, \eta)^T \in C_1^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ , weiterhin sind  $L \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , und  $V_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die um  $\epsilon$  erweiterte Richtgeschwindigkeitsfunktion.

Für  $\epsilon = 0$  gilt an der Stelle  $r_0 := \left( \frac{L}{V(\frac{L}{N})}, 0, 0 \right)$

$$F_0(r_0) = 0.$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen (auf Banachräumen) lässt sich ein Zweig von Nullstellen  $r_\epsilon$  von  $F$  nachweisen, der einem Zweig von POMs entspricht.

Während der hier skizzierte Ansatz in erster Linie zum analytischen Beweis eines Störungsergebnisses dient, ist er auch aus Sicht der Numerik interessant. Bereits Stumpf (2005) beschäftigt sich theoretisch mit einem funktionalanalytischen (retardierten) Ansatz für die Ausgangsgleichungen (2.1), hingegen nutzt Jäger (2006) das erste Mal die Eigenschaften des wesentlich kleineren Systems (3.8) auch numerisch aus. Dabei ist von besonderer Bedeutung, dass die Anzahl der Fahrzeuge  $N$  nur noch ein Parameter ist, der nicht mehr die Größe des Systems bestimmt.

Satz 4 bietet vor dem Hintergrund der eingeführten Theorie über Rotationen und POMs aus den vorigen Kapiteln die Möglichkeit vielfältiger numerischer Analysen. Die beiden Poincaré-Abbildungen  $\Pi$  und  $\pi$  können nun numerisch berechnet und ihre Ableitungen für lineare Stabilitätsuntersuchungen ausgewertet werden. Außerdem lassen sich bestimmte Poincaré-Schnitte  $\Sigma$  finden, die für die Modellierung des Kreisverkehrs besonders geeignet scheinen.

Bevor ich Untersuchungen dieser Art im folgenden Kapitel präsentiere, sei an dieser Stelle mit Definition 11 noch folgende Sprachregelung getroffen, die sich an den Terminus *quasi-periodisch* anlehnt. Es spielen ja bei Verzweigungen von Rotationen zwei Zeiten eine Rolle, die bei den abzweigenden Lösungen überlagert sind – die Umlaufzeit  $T$  und die Entsprechung zur Hopf-Periode  $T_p$  bei  $\epsilon = 0$ .

**DEFINITION 11.** *Eine Lösung, die zu einer geschlossenen invarianten Kurve um den Fixpunkt einer der beiden Poincaré-Abbildungen  $\Pi$  oder  $\pi$  gehört, nennen wir Röhrenlösung (Abb. 1). Genauer soll eine Röhrenlösung, die*

### 3. Rotationen und diskrete wandernde Wellen

1. von einem Fixpunkt von  $\Pi$  abzweigt, Quasi-Rotation und eine solche, die
2. von einem Fixpunkt von  $\pi$  abzweigt, Quasi-POM

heißen<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Selbst wenn der Eindruck entsteht, so hat das Präfix *quasi* hier nicht die Bedeutung des Wörtchens *fast*, sondern erinnert – wie gesagt – an miteinander konkurrierende Perioden.

## 4. Numerische Auswertung

Zu Beginn des numerischen Teils meiner Arbeit stelle ich in den beiden folgenden Algorithmen meine Vorgehensweise zur Berechnung der Poincaré-Abbildung  $\Pi$  (Vorwärts-Schießverfahren) und die daraus resultierende Berechnung der Eigenwerte der Ableitung der Zeit- $T$ -Abbildung  $\Psi_T$  schematisch vor.

**ALGORITHMUS 1.** Berechnung von  $\Pi(\eta)$  und  $T$ :

1. **Initialisierung** von  $\eta$ , Umlaufzeit  $T_0$  und Transversale  $\Sigma$  durch  $\xi$  im Orbit  $\mathcal{O}$  einer Rotation  $x^0$ .
2. **Integration** der Differentialgleichung:

$$\bar{\eta} := \text{ode45}(\eta, T_0)$$

3. **While**  $\bar{\eta} \notin \Sigma + \Lambda$ 
  - a) Verkleinerung oder Vergrößerung der Umlaufzeit, je nachdem ob  $\bar{\eta}$  hinter oder vor  $\Sigma$  liegt:  $T_{j+1} := T_j \pm \varepsilon$
  - b)  $\bar{\eta} := \text{ode45}(\eta, T_{j+1})$
4. **End**
5.  $\Pi(\eta) := \bar{\eta} - \Lambda$ ,  $T := T_{j+1}$

**ALGORITHMUS 2.** Floquetmultiplikatoren von  $x_0$ :

1. Berechnung einer **Nullstelle**  $\xi$  von

$$\Pi(\eta) - \Lambda = 0$$

2. Berechnung der **Umlaufzeit**  $T$  für  $\xi \in \mathcal{O}$  mit Algorithmus 1
3. Berechnung der **Floquetmultiplikatoren** (inkl. 1) über

$$\text{eig}(D\Psi_T(\eta))$$

Völlig analog zu Algorithmus 1 lässt sich dieselbe Prozedur mit der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  durchführen. In folgenden Darstellungen von Floquetmultiplikatoren werden also immer  $2N$  (und nicht  $2N-1$ ) Eigenwerte zu sehen sein, unter denen der Multiplikator Eins ist. Numerisch ist dies auch eine Art Selbstkontrolle über die Richtigkeit der Ergebnisse.

#### 4. Numerische Auswertung

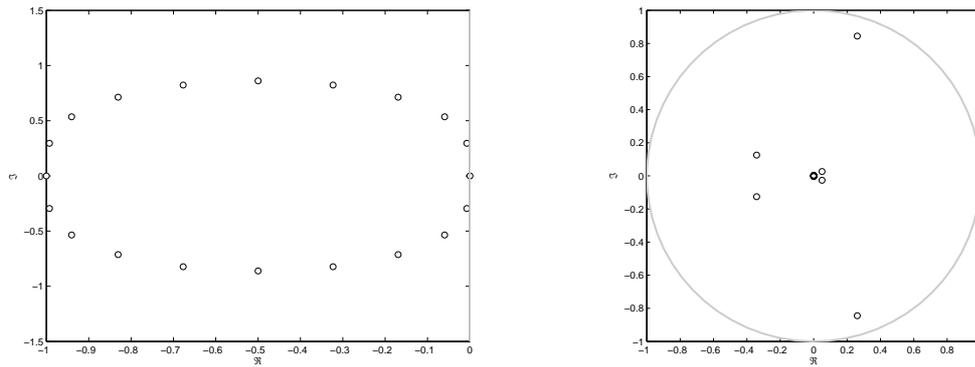


Abbildung 4.1.: Eigenwerte von  $Df(y^0)$  und daraus resultierende Floquetmultiplikatoren;  $N = 10$ ,  $V_{max} = 1$ ,  $L = 14.5$ .

**BEMERKUNG 5.** Für die reduzierte Poincaré-Abbildung  $\pi$  sind die Eigenwerte der Matrix  $D\Psi_{\frac{T}{N}}$  nicht genau die Floquetmultiplikatoren. Vielmehr gilt hier

$$\lambda \in \sigma(D\pi) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A_{2N} \cdot D\Psi_{\frac{T}{N}}),$$

der Unterschied liegt also in der Indexverschiebungsmatrix  $A_{2N}$ . Diese bewirkt allerdings lediglich eine Drehung der Eigenwerte, weshalb die Beträge – und somit die Aussagekraft über die Stabilität – unverändert bleiben.

Ich möchte betonen, dass diese Arbeit keinesfalls den Anspruch hat, neue Beiträge zur numerischen Pfadverfolgung von Fixpunkten zu leisten (dahingehend verweise ich auf die mächtigen Werkzeuge von Doedel u. a. (2001) oder im retardierten Fall Engelborghs u. a. (2001)). Vielmehr geht es mir darum, die theoretischen Aussagen des letzten Kapitels mit numerischen Beispielen zu belegen.

So lässt sich Lemma 3 über die Korrespondenz der Eigenwerte und Floquetmultiplikatoren numerisch überprüfen (Abb. 4.1). Mit einem Blick auf die Floquetmultiplikatoren bezüglich  $\Pi$  stellt man fest, dass das Bild „nicht ganz so schön“ aussieht wie die Darstellung des Spektrums  $\sigma(Df(y^0))$ . Dies liegt in erster Linie daran, dass die Multiplikatoren von so unterschiedlicher Größenordnung sind, dass ein Großteil von ihnen in der Nähe der Null zusammenzuschmelzen scheint. Der Grund hierfür ist, dass sich (wie bei Gasser u. a. (2004) nachzulesen) die linke Hälfte des Spektrums insbesondere bei geringer Dichte um den Wert  $-1$  konzentriert. Dieser wird nun durch die Exponentialabbildung nach  $e^{-T}$  geschiftet. Das Spektrum der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  hingegen sieht wesentlich gleichmäßiger aus (Abb. 4.2 links). Ich möchte diesen Sachverhalt im Folgenden noch einmal etwas präzisieren, um vor allem darauf aufmerksam zu machen, dass die Konsequenzen nicht nur kosmetischer Natur sind.

#### 4.1. Vergleich von $\Pi$ und $\pi$ : Numerische Fehler

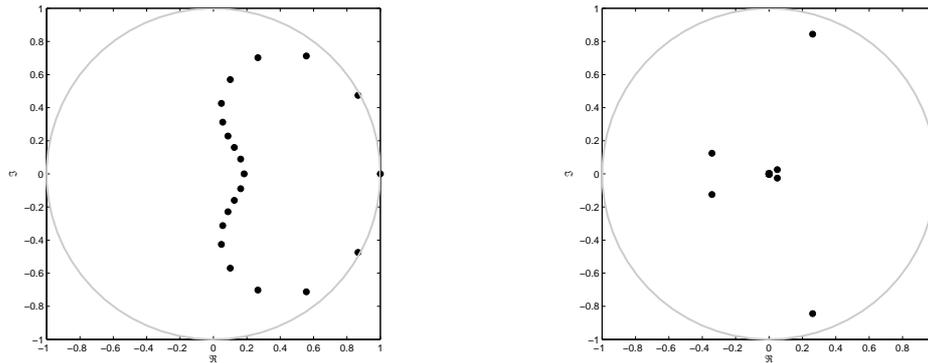


Abbildung 4.2.: Floquetmultiplikatoren bezüglich  $\pi$  (links) und  $\Pi$ .

### 4.1. Vergleich von $\Pi$ und $\pi$ : Numerische Fehler

Sei  $\lambda = \alpha + i\omega$  ein Eigenwert von  $Df(y^0)$  ist und  $\mu = re^{i\phi}$  derjenige Floquetmultiplikator der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$ , für den nach den Lemmata 3 und 4

$$\mu^N = e^{T\lambda}$$

gilt. Dann berechnet sich der komplexe Betrag  $r$  von  $\mu$  zu

$$r = e^{\frac{T}{N}\alpha}.$$

Wenn sich nun zwei Eigenwerte von  $Df(y^0)$  um  $\Delta := \alpha_1 - \alpha_2$  unterscheiden, so wird dies durch die Exponentialabbildung je nach Umlaufzeit  $T$  massiv verstärkt. Die Beträge der entsprechenden Floquetmultiplikatoren bezüglich  $\Pi$  können sich also mit

$$\Delta_{\Pi} = e^{T\Delta}$$

bereits um mehrere Größenordnungen unterscheiden. Dieser Effekt wird hingegen bei den Multiplikatoren bezüglich der reduzierten Poincaré-Abbildung stark abgeschwächt:

$$\Delta_{\pi} = e^{\frac{T}{N}\Delta}.$$

Bei numerischen Rechnungen mit Werten, die sich über mehrere Größenordnungen erstrecken, ist immer mit Fehlern in der Genauigkeit der Ergebnisse zu rechnen. Ich habe die Floquetmultiplikatoren von  $x^0$  bezüglich  $\Pi$  für das Beispiel ( $N = 10, V_{max} = 1, L = 14.5$ ) auf drei verschiedene Weisen berechnet:

1. über die numerische Berechnung von  $\Pi$  und die anschließende Ermittlung der Eigenwerte von  $D\Psi_T$  (ROTSTAB),
2. über die numerische Berechnung von  $\pi$ , die anschließende Ermittlung von  $\sigma(D\Psi_{\frac{T}{N}})$  und Bildung der  $N$ -ten Potenz der Eigenwerte, sowie

#### 4. Numerische Auswertung

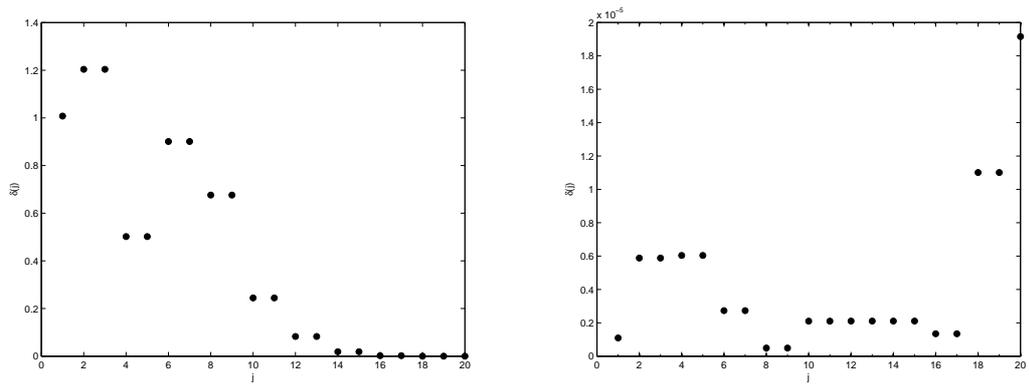


Abbildung 4.3.: Fehler bei der numerischen Berechnung der Floquetmultiplikatoren über  $\Pi$  (links) und  $\pi$ .

3. theoretisch über Lemma 3 und  $e^{T\lambda}$ .

Abbildung 4.3 zeigt die Fehler bei der Berechnung von 1. und 2. in Bezug auf 3. Genauer gesagt habe ich die 20 Multiplikatoren dem Betrag nach sortiert ( $x$ -Achse) und darüber den jeweiligen relativen Fehler  $\delta_j$  aufgetragen. Im linken Teil des Bildes kann man sehr gut erkennen, dass bei der direkten Berechnung von  $\Pi$  die Fehler bei den betragsmäßig kleineren Floquetmultiplikatoren sehr groß sind, während (im rechten Bild) alle von derselben Größenordnung  $10^{-5}$  sind.

## 4.2. Stabilitätsanalyse

**Baustelle** Für  $\epsilon > 0$  lassen sich die Floquetmultiplikatoren nur noch numerisch finden. Die Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen auf der linken Seite jeweils die Floquetmultiplikatoren einer POM. Rechts sind im instabilen Fall (Abb.4.4) zur Veranschaulichung die Geschwindigkeiten  $\dot{x}_j$  aller  $N$  Fahrzeuge über dem Ort  $x_j$  aufgetragen – man kann deutlich erkennen, dass die Phasenkurven zu Beginn noch alle übereinanderliegen bis sich Störungen aufschwingen. Im stabilen Fall (Abb.4.5) ist zusätzlich die Geschwindigkeit  $\dot{x}_1$  des ersten Autos über dem wirklichen Ort im Kreis ( $x_1$  modulo  $L$ ) zu sehen. Mit den beiden senkrechten grauen Streifen ist die Lage der Baustelle markiert.

Verfolgt man die Torusverzweigung der POM  $x^\epsilon$  in der  $L/\epsilon$ -Parameterenebene, so erhält man Abbildung 4.6. Rechts von der entstandenen Kurve sind die POMs stabil, links werden sie instabil, und an ihre Stelle treten (lokal) die sogenannten Quasi-POMs (Definition 11). Auf der horizontalen  $L$ -Achse ist der einzige Fall ( $\epsilon = 0$ ) zu sehen, auf dem der Stabilitätswechsel von  $x^0$  (bzw.  $y^0$ ) in einer *Hopf*verzweigung stattfindet.

Abbildung 4.6 ist exemplarisch für den Fall  $N = 5$  erstellt worden. Diese Arbeit liefert weder eine theoretische Existenzaussage für eine derartige Neimark-Sacker-Kurve noch eine (lokale) Beschreibung für deren etwaige Form. Satz 4 garantiert ausschließlich einen

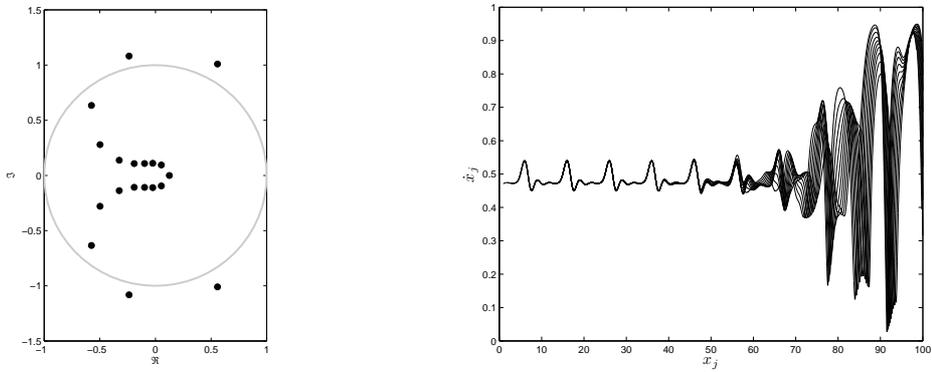


Abbildung 4.4.:  $N = 10, L = 10, V_{max} = 1, \epsilon = 0.1$ .

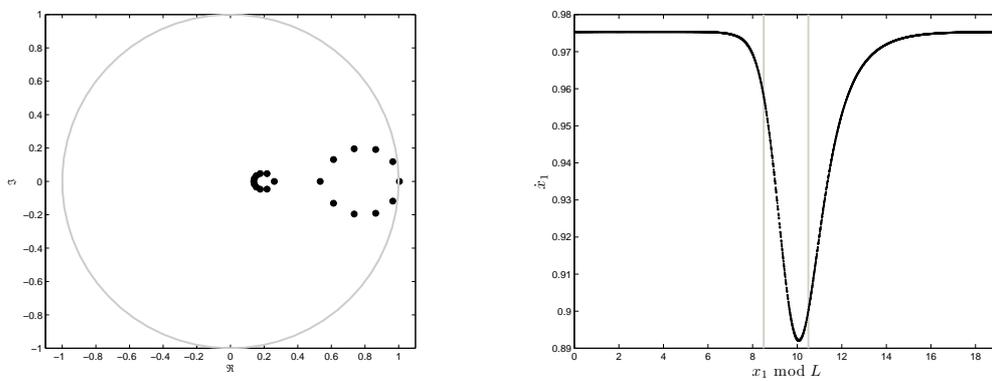


Abbildung 4.5.:  $N = 10, L = 19, V_{max} = 1, \epsilon = 0.1$ .

#### 4. Numerische Auswertung

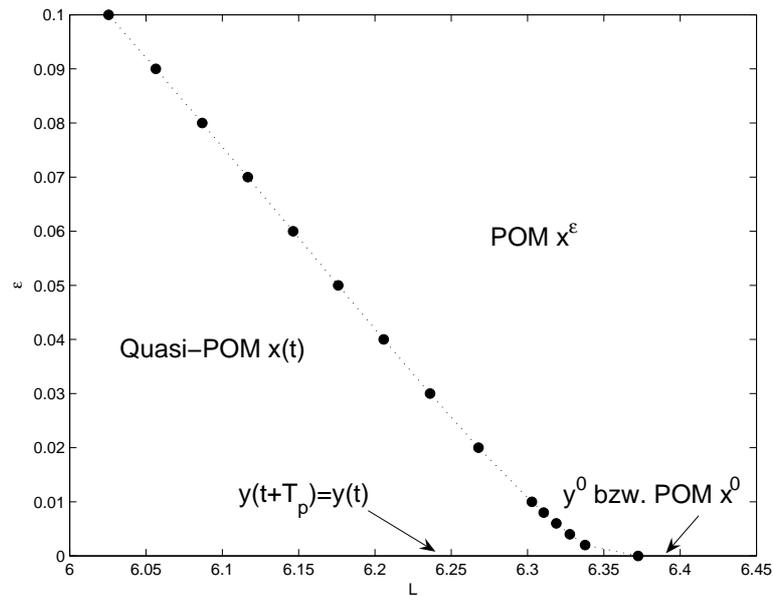


Abbildung 4.6.: Hopfverzweigung

Zweig von POMs (Rotationen) für ein festes  $L$ . Dennoch denke ich, dass die Existenz einer solchen Kurve mit den entsprechenden Methoden gezeigt werden kann (strukturelle Stabilität).

**Pfadverfolgung** Im vorigen Abschnitt habe ich diskutiert, unter welcher Poincaré-Abbildung bei der Berechnung der Floquetmultiplikatoren die größeren Fehler auftreten. Die Abbildung  $\pi$  scheint dabei weniger Fehler als  $\Pi$  zu produzieren. In einem anderen Zusammenhang hat sie hingegen nicht nur Vorteile, und zwar bei der Verfolgung der Floquetmultiplikatoren bei veränderlichem Verzweigungsparameter (z. B.  $L$ ) über den Einheitskreis hinweg.

Die einfachen Newton-basierten Programme, die ich verwende, sind eigentlich keine Pfadverfolgungsprogramme im eigentlichen Sinn, vielmehr suchen sie bei fester Parameterwahl eine Lösung mit bestimmter Eigenschaft unter der Annahme, dass diese existiert. In unmittelbarer Nähe von Verzweigungspunkten kann es zu Problemen bei der Verfolgung eines Zweiges von Lösungen kommen. Allerdings funktionieren die Routinen einwandfrei, solange sich die Floquetmultiplikatoren in einigem Abstand vom Einheitskreis befinden. Abbildung 4.7 zeigt die exakt berechneten Zweige von Multiplikatoren für  $\epsilon = 0$  für  $\pi$  (links) und  $\Pi$  unter Variation von  $L$ . Die Eigenwerte im linken Bild schmiegen sich zwiebförmig fast bis an den Einheitskreis, während die im rechten Bild etwas steiler über ihn hinweg wandern.

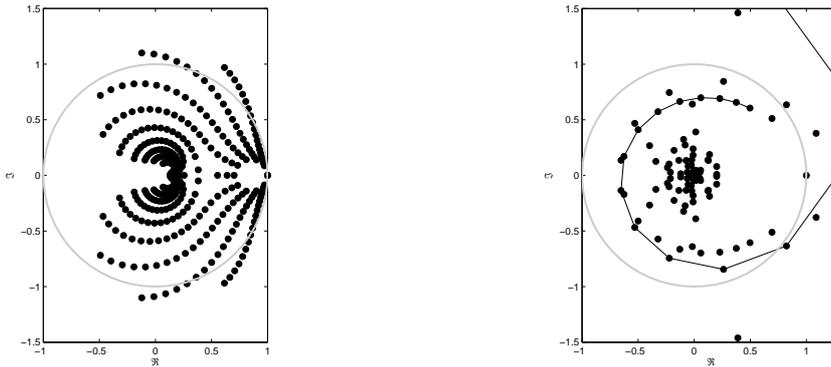


Abbildung 4.7.: Floquetmultiplikatoren bezüglich  $\pi$  (links) und  $\Pi$ ;  $N = 10, V_{max} = 1, \epsilon = 0, L = 10 \dots 20$ .

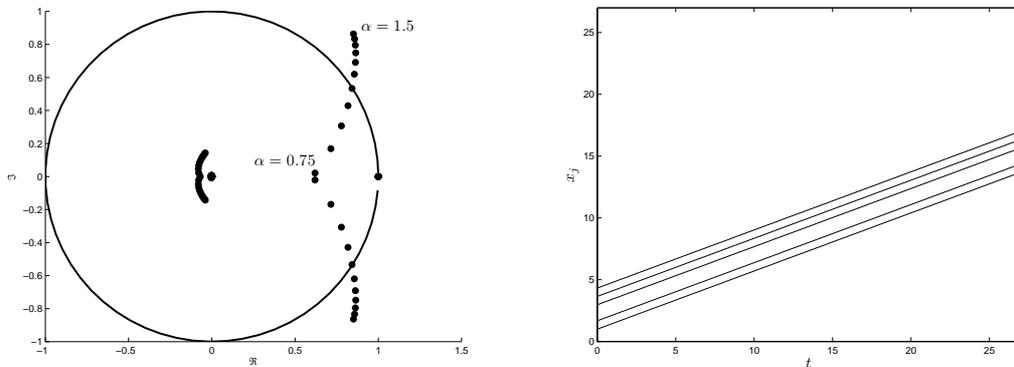


Abbildung 4.8.: Ein stabilisierender LKW.

**Individuelle Fahrer** Auch in einer inhomogenen Verkehrssituation, wenn die Fahrer sich zum Beispiel nach unterschiedlichen Richtgeschwindigkeitsfunktionen  $V_j$  (Modell (2.11)) richten, lässt sich ohne Weiteres auf dieselbe Art die Stabilität der entsprechenden Rotation  $x^0$  (Lemma 2) berechnen.

Seien beispielsweise  $N = 5$  Fahrzeuge auf einer Straße der Länge  $L = 4$  gegeben, die zwar alle dieselbe Reaktionszeit  $\tau_j = 1$  besitzen, aber unterschiedlich schnell fahren können. Die Autos 1, 3, 4 und 5 haben eine Maximalgeschwindigkeit  $V_{j,max} = 1.5$ , Fahrzeug 2 hingegen ist in der Lage maximal  $V_{2,max} = \alpha$  schnell zu fahren, wobei  $\alpha$  Werte zwischen 1.5 und 0.75 in Schritten von 0.075 annimmt (Verzweigungsparameter). Fahrzeug 2 könnte zum Beispiel ein LKW sein. Abbildung 4.8 (links) zeigt die Floquetmultiplikatoren von  $x^0$  bezüglich  $\Pi$  für unterschiedliche  $\alpha$ . Im homogenen Fall ist  $x^0$  (also die alte quasi-stationäre Lösung) instabil. Bei kleiner werdendem  $\alpha$  wandern zwei Multiplikatoren über den Einheitskreis – wie nicht anders zu erwarten ist, stabilisiert

#### 4. Numerische Auswertung

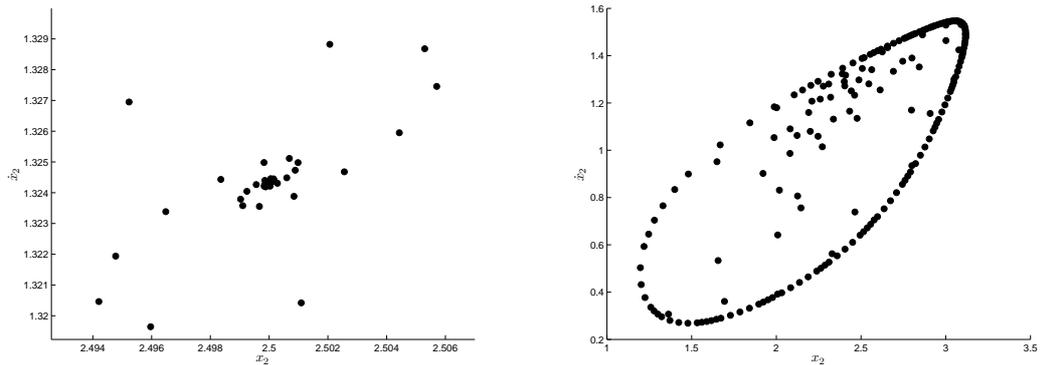


Abbildung 4.9.: Stabiler Fixpunkt der Poincaré-Abbildung in der Poincaré-Ebene ( $x_2/\dot{x}_2$ -Projektion),  $\epsilon = 0$ ,  $N = 5$ ,  $V_{max} = 2$ ,  $L = 7$  (links), sowie invariante Kurve für  $L = 5.5$ .

der langsamen LKW die Situation. In Abbildung 4.8 (rechts) sind die Trajektorien  $x_j^0(t)$  für  $\alpha = 0.75$  zu sehen.

### 4.3. Geschlossene invariante Kurven

Zur Erinnerung: Abbildung 2.2 zeigt ein Verzweigungsdiagramm mit Verzweigungsparameter  $L$  für das  $y$ -System ohne Baustelle. Die Ruhelage  $y^0$  wechselt an zwei Hopfverzweigungen ihre Stabilität. Zwischen diesen Hopfpunkten liegt ein Zweig stabiler periodischer Lösungen – die Hopfverzweigungen sind beide superkritisch (zum ersten Ljapunov-Koeffizienten siehe Gasser u. a. (2004)). Im  $x$ -System wird die Ruhelage zur Rotation, die Stabilitätswechsel bleiben erhalten und finden an Torusverzweigungen statt.

In Abb. 4.9 ist links ein stabiler Fixpunkt von  $\Pi$  zu sehen; auf der rechten Seite ist die stabile geschlossene invariante Kurve für  $L = 5.5$  abgebildet.

Auch von der numerischen Seite her lässt sich an dieser Stelle noch einmal gut verdeutlichen, dass die einfache Verkehrssituation ohne Baustelle und mit homogenem Fahrverhalten aus Sicht der Rotationen nur ein Spezialfall ist. Wann immer im System Rotationen  $x^0$  oder  $x^\epsilon$  vorkommen, kann man eine numerische Analyse der Floquetmultiplikatoren durchführen und gegebenenfalls sogar invariante Kurven suchen (siehe Abb. 4.10 für  $\epsilon = 0.1$ ). Ohne Weiteres lassen sich diese allerdings numerisch nur finden, wenn *stabile* Orbits auf ihnen liegen.

Die Gestalt der Röhrenlösungen ist zunächst einmal völlig offen. Wie auf einem Torus kann es sein, dass es einfache periodische Lösungen gibt, aber auch 2- 3- oder  $n$ -periodische Lösungen. Viel wahrscheinlicher ist es sogar, dass man Trajektorien bekommt, die den Torus bzw. die Röhre nach unendlicher Zeit völlig überdecken. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Umlaufzeit  $T$  der zugrundeliegenden Rotation und die Schwingungsdauer, die der *Hopf-Periode*  $T_p$  im Falle der Verzweigung von  $y^0$  entspricht,

### 4.3. Geschlossene invariante Kurven

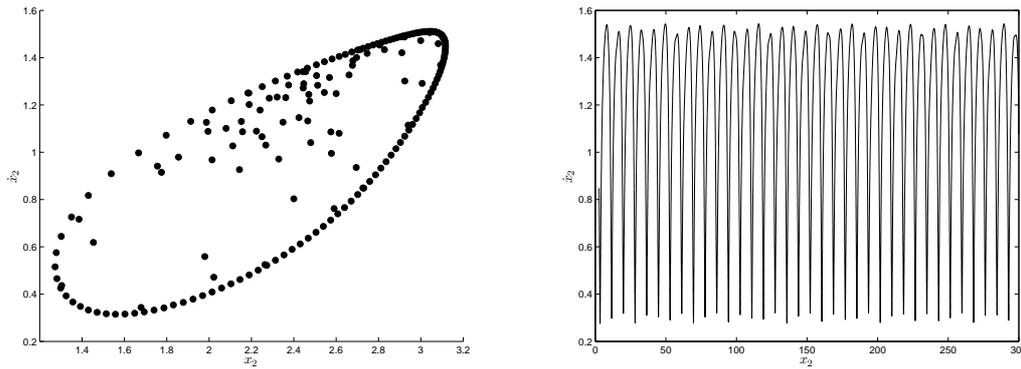


Abbildung 4.10.: Eine invariante Kurve auf Poincaré-Ebene ( $x_2/\dot{x}_2$ -Projektion), sowie ein zugehöriger Orbit ohne erkennbare Periode;  $\epsilon = 0.1$ ,  $N = 5$ ,  $V_{max} = 2$ ,  $L = 5.5$ .

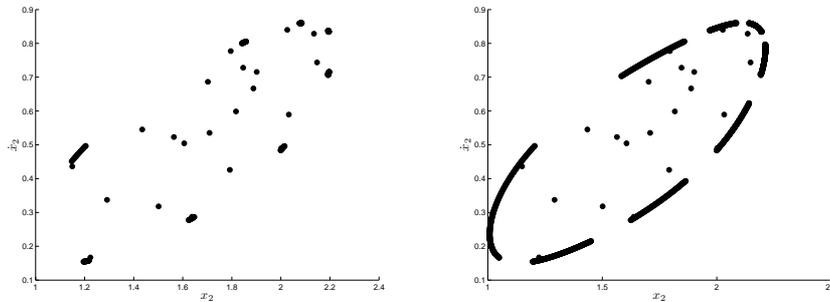


Abbildung 4.11.: Orbit auf invarianter Kurve;  $N = 5$ ,  $L = 4$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $V_{max} = 1.5$  (200 und 2000 Iterationen).

nicht *kommensurabel* sind. In der Farbtafel 1 ist die dreidimensionale Projektion einer Quasi-POM auf die Koordinaten  $x_2, x_3, \dot{x}_2$  zu sehen. Die schwarzen Punkte markieren in diesem Raum das Durchstoßen durch die Transversale  $\Sigma = \{x_1 = c\}$  (mehr zur Vorstellung dieses Poincaré-Schnitts in Abschnitt 4.4). Leicht täuschen lassen kann man sich bei einem numerischen Blick auf die Poincaré-Schnitte, indem man zum Beispiel eine 8-periodische Rotation mit einer Lösung verwechselt, die sich nach großer Anzahl von Iterationen als unperiodisch herausstellt und die invariante Kurve komplett ausfüllt (Abb. 4.11). Dennoch möchte ich in so einem Fall betonen, dass eine solche Lösung aus Sicht der Autofahrer einen quasi-periodischen Charakter hat. Im zugehörigen Phasendiagramm (Abb. 4.12) kann man deutlich zwei verschiedene Schwingungsanteile erkennen: eine Schwingung höherer Frequenz, die durch die Neimark-Sacker-Verzweigung entsteht und eine langsamere durch die Baustelle ( $\epsilon = 0.1$ ).

#### 4. Numerische Auswertung

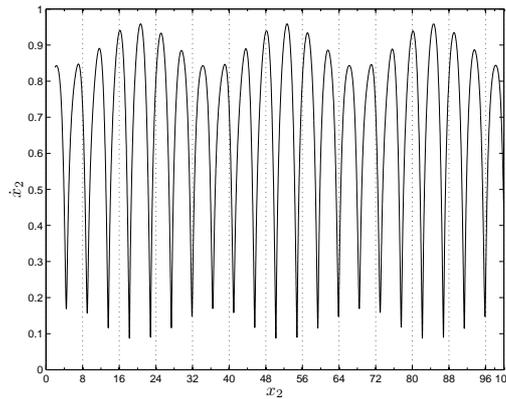


Abbildung 4.12.: Phasenportrait für ein Fahrzeug nach 2000 Iterationen.

#### 4.4. Ein Poincaré-Schnitt aus Sicht der Fahrzeuge

Die Abschnitte eines Lehrbuchs über Verzweigungstheorie, in denen es um die Stabilitätsanalyse periodischer Lösungen mit Hilfe von Poincaré-Abbildungen geht, enthalten sehr häufig das Attribut „geometrisch“ (vgl. Abschnitt 3.2). Das ist auch nicht verwunderlich, da man diese Theorie zum Beispiel im Unterschied zu der auf Floquet (1883) basierenden Theorie, mit einfachen Skizzen von transversalen Flächen veranschaulichen kann. Dennoch sind die Poincaré-Schnitte im Allgemeinen Mannigfaltigkeiten im hochdimensionalen Raum, der für die Autofahrer im Kreisverkehr relativ abstrakt bleibt.

Ich will an dieser Stelle eine für die Verkehrsteilnehmer anschauliche – an den Straßenverkehr angepasste – Interpretation der abstrakten Transversalen

$$\Sigma := \{ \mathbf{x} = (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{N+N} \mid x_1 \bmod L = c \}$$

im Zusammenhang mit der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  geben; nämlich die Verkehrsmessung. Das besondere an  $\pi$  ist die Matrix  $A_{2N}$ , die für eine Umnummerierung der Fahrzeuge nach dem Durchqueren von  $\Sigma$  sorgt, so dass jeder Index in jedem Schritt um ein Fahrzeug verschoben wird. Konkret bedeutet dies, dass die Transversale wie ein Blitzlicht funktioniert, das immer dann ausgelöst wird, wenn der nächste Fahrer an der Stelle  $c$  im Kreis vorbeifährt. Im Gegensatz zur Realität wird aber jedes Mal nicht nur die Geschwindigkeit des aktuellen Fahrzeugs gemessen, sondern gleichzeitig die Orte und Geschwindigkeiten *aller* auf dem Kreis fahrenden Autos.

Entspricht die aktuelle Verkehrslage gerade einer POM, so ist der zeitliche Abstand zwischen dem Durchqueren der Messstelle  $c$  zweier Autos konstant  $\tau(\mathbf{x}, \epsilon)$ , außerdem gibt es  $(N - 1)$  Punkte auf dem Kreis, an denen sich die übrigen Autos bei jeder Messung mit derselben Geschwindigkeit befinden. Abbildung 4.13 zeigt die Situation einer instabilen POM mit fünf beteiligten Fahrzeugen, die sich in eine Quasi-POM einschwingt.

Auf der senkrechten Achse ist über dem Kreis die Geschwindigkeit aufgetragen. Die Orbits in  $x_i/\dot{x}_i$ -Koordinaten, die von der reduzierten Poincaré-Abbildung erzeugt wer-

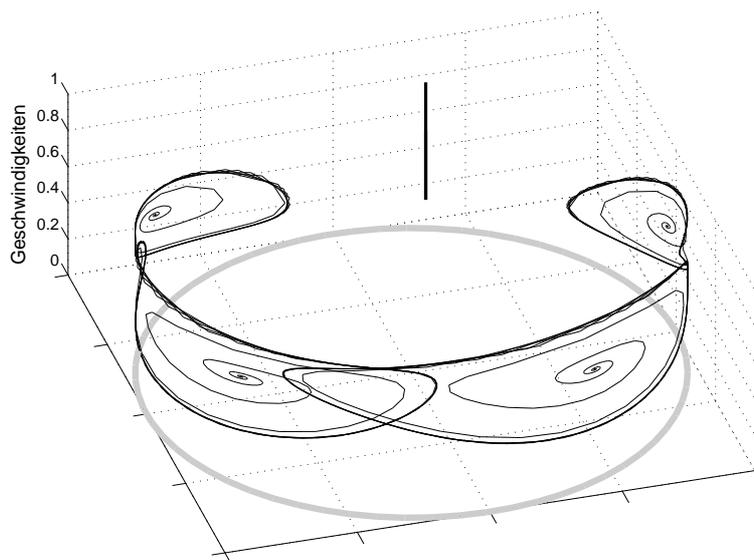


Abbildung 4.13.: Veranschaulichung der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  für die Fahrzeuge auf dem Kreis; vgl. auch Farbtafel 2.

den, müssen in der Nähe der Neimarck-Sacker-Verzweigung auf geschlossenen invarianten Kurven liegen. Auf der Abbildung sind tatsächlich vier (schwarze) Ellipsen zu erkennen, die spiralförmig aus den vier Fixpunkten entstehen, welche die POM repräsentieren. Nicht schwer zu erraten ist, dass die schwarze senkrechte Linie direkt gegenüber vom Betrachter die Stelle  $c$  im Kreis markiert, an der die „Messung“ durchgeführt wird – an dieser Stelle ändert sich lediglich die Geschwindigkeit der vorbeifahrenden Fahrzeuge.

Für die Berechnung der Floquetmultiplikatoren ist die konkrete Wahl der konstanten Messstelle  $c$  irrelevant, da die Stabilität unabhängig von den transversalen Schnitten ist. Daher habe ich den Parameter in den meisten numerischen Routinen durch die Startposition des ersten Fahrzeugs festgelegt. Erst für die Erstellung der Fundamentaldiagramme in Kapitel 8 bekommt das Messstelle eine größere Bedeutung.

#### 4. Numerische Auswertung

## 5. Zusammenfassung Teil I

In den vergangenen Kapiteln habe ich die Verzweigungsanalysen von Gasser u. a. (2004) und Gasser u. a. (2007) verallgemeinert. Über die Einführung des Baustellenparameters  $\epsilon$ , beziehungsweise der ortsabhängigen Richtgeschwindigkeit  $V_\epsilon$ , ist es nun möglich, komplexe Verkehrssituationen zu betrachten. Ganz besonders hervorzuheben ist, dass man mit dem neuen Modell (3.7) nicht nur in der Lage ist, Simulationen durchzuführen, sondern eine völlig analoge Analyse der Dynamik durchzuführen. Indem die ursprünglichen quasi-stationären Lösungen als Rotationen oder diskrete wandernde Wellen (POMs) aufgefasst werden, lässt sich die Verzweigung des sogenannten freien Verkehrs (engl. *free flow*) in pulsierende Staulösungen über Neimarck-Sacker-Verzweigungen ebenso erklären wie im einfachen Fall der Hopfverzweigungen. Darüber hinaus bietet die neue Theorie eine sehr einfache Erklärung für das Auftreten des konstanten Nulleigenwertes. Aus Sicht der Floquetmultiplikatoren für die Rotation  $x^0$  (Lemma 3) ist dieser genauso generisch wie der Einsmultiplikator bei einer periodischen Lösung. Das Mittel der Wahl für die Stabilitätsanalyse ist ein geeigneter Poincaré-Schnitt.

In den Tabellen 5.1 und 5.2 auf der nächsten Seite habe ich die bisherigen Untersuchungen zusammengefasst. Die beiden Spalten „ $L$  groß“ und „ $L$  klein“ enthalten Informationen über die jeweiligen Attraktoren vor und nach der Verzweigung.

$L$	groß (kleine Dichte)		klein (große Dichte)
	<b>Lemma 3, Lemma 4, Satz 3:</b>		<b>Satz 2:</b>
$\epsilon = 0$	$y^0, \dot{x}^0$ stationär	triv. POM $x^0$ Umlaufzeit $T = \frac{L}{c}$	$y(t), \dot{x}(t)$ Röhrenlsg. $x(t)$ $T_p$ -periodisch „quasi-POM“
Stabilität	$\sigma(Df(y^0))$ <i>analytisch</i>	Floquetmult. bzgl. $\pi$ <i>analytisch</i>	
	<b>Satz 4:</b>		
$\epsilon > 0$		POM $x^\epsilon$ Umlaufzeit $T(\epsilon)$	Röhrenlsg. $x(t)$ „quasi-POM“
Stabilität		Floquetmult. bzgl. $\pi$ <i>numerisch</i>	

Tabelle 5.1.: Mikroskopische Dynamik im untersuchten Modell (homogene Fahrer).

$L$	groß (kleine Dichte)		klein (große Dichte)
	<b>Lemma 3, Lemma 4, Satz 3:</b>		
$\epsilon = 0$	$y^0, \dot{x}^0$ stationär	triv. Rotation $x^0$ Umlaufzeit $T = \frac{L}{c}$	$y(t), \dot{x}(t)$ Röhrenlsg. $x(t)$ $T_p$ -periodisch „quasi-Rotation“
Stabilität		Floquetmult. bzgl. $\Pi$ <i>numerisch</i>	
	<b>Satz 4 mit <math>\Pi</math> statt <math>\pi</math>:</b>		
$\epsilon > 0$		Rotation $x^\epsilon$ Umlaufzeit $T(\epsilon)$	Röhrenlsg. $x(t)$ „quasi-Rotation“
Stabilität		Floquetmult. bzgl. $\Pi$ <i>numerisch</i>	

Tabelle 5.2.: Mikroskopische Dynamik im untersuchten Modell (inhomogene Fahrer).

**Teil II.**

**Makroskopischer Übergang**



## 6. Historischer Kontext und Motivation

Der Beginn der makroskopischen Verkehrsmodellierung wird meist in der Arbeit von Lighthill und Whitham (1955) gesehen. Die Autoren beschreiben den Verkehr mit Hilfe einer Erhaltungsgleichung in Verkehrsdichte  $\rho(x, t)$  und Verkehrsfluss  $q(x, t)$ :

$$\rho_t + q_x = 0. \quad (6.1)$$

Die fluiddynamische Begründung für die Gleichung ist die Annahme, dass sich die Anzahl der Fahrzeuge auf dem betrachteten Straßenabschnitt nicht ändert. Im Allgemeinen wird der Verkehrsfluss wiederum in Abhängigkeit von der Dichte angenommen:

$$q = q(\rho) = \rho V_e(\rho),$$

wobei  $V_e(\rho)$  gerade die Geschwindigkeit angibt, bei der sich der Verkehr im Gleichgewicht befindet. Diese *Equilibrium*sgeschwindigkeit ist eine weitere Annahme des Modells; eine sehr einfache Möglichkeit der Realisierung ist zum Beispiel

$$V_e(\rho) = 1 - \rho, \quad \rho \in [0, 1].$$

Die Kontinuitätsgleichung (6.1) lässt sich also auch folgendermaßen formulieren:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho V_e(\rho)) = 0.$$

Einige Zeit später haben sowohl Whitham (1974) als auch Payne und FREFLO (1979) das Modell um eine zusätzliche Gleichung für die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v(x, t)$  erweitert:

$$\partial_t v + v \partial_x v = \frac{1}{T_r} \left( \frac{1}{2\rho} \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_e(\rho) - v \right), T_r \in \mathbb{R}.$$

Dabei hängt die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit an einem Ort  $\partial_t v$  ab von der

$$\textit{Konvektion} \quad v \partial_x v$$

(Fortbewegung der Fahrzeuge bei der Geschwindigkeit  $v$ ), der sogenannten

$$\textit{Antizipation} \quad \frac{1}{T_r} \frac{1}{2\rho} \frac{dV_e}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

(Reaktion eines Fahrzeugs auf die es umgebende Verkehrssituation) sowie von der

$$\textit{Relaxation} \quad \frac{1}{T_r} (V_e(\rho) - v),$$

## 6. Historischer Kontext und Motivation

welche die Anpassung der aktuellen Geschwindigkeit an die Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $V_e$  regelt. Weitere einführende Erklärungen lassen sich auch in dem deutschsprachigen Buch von Helbing (1997) nachlesen.

Nachdem Daganzo (1995) diese sogenannten *Second-Order-Modelle* in einem „*Requiem for second order fluid approximations of traffic flow*“ regelrecht zerrissen hatte, sind sie bei Aw und Rascle (2000) durch das modifizierte System

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2) - \rho^2 P'(\rho) \partial_x v = A \frac{\rho}{T_r} (V_e(\rho) - v) \end{array} \right\}, A, T_r \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

erneut zum Leben erweckt worden (die Verwendung der Variable  $P$  erinnert an einen Druck in den fluiddynamischen Entsprechungen). Darüber hinaus haben Aw u. a. (2002) zwei Jahre später eine Variante von (6.2), nämlich

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho w) + \partial_x(v \rho w) = A \frac{\rho}{T_r} (V_e(\rho) - v) \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

diskutiert; hierbei ist  $w = v + P(\rho)$ . Dort stellen sie eine explizite Verbindung zu dem mikroskopischen Modell

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_j = v_j \\ \dot{v}_j = C \frac{v_{j+1} - v_j}{(x_{j+1} - x_j)^{\gamma+1}} + \frac{A}{T_r} V\left(\frac{\Delta x}{x_{j+1} - x_j}\right) - v_j \end{array} \right\}, C, A, T_r \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{N}, \quad (6.4)$$

her, indem sie zeigen, dass (6.4) in Lagrange-Koordinaten (dabei ist  $x$  im Gegensatz zu den Eulerschen Koordinaten nicht der absolute Ort, sondern eine Position auf der Fahrzeugschlange) eine natürliche Diskretisierung von (6.3) darstellt. Das System (6.4) ist im Wesentlichen äquivalent zu der in dieser Arbeit in Abschnitt 2.2.1 aufgeführten Variante (2.7) des Grundmodells mit aggressivem Fahrverhalten.

Schließlich möchte ich noch die Arbeiten von Greenberg u. a. (2003) und Greenberg (2004) erwähnen. Dort wird eine Analyse von auftretenden wandernden Wellen durchgeführt, wobei in Greenberg (2004) für die Simulationen ausschließlich ein Car-Following-Modell der Art von (6.4) verwendet wird

Jene Publikation ist eine der Motivationen für den folgenden Abschnitt meiner Arbeit.

# 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

## 7.1. Technische Vorgehensweise

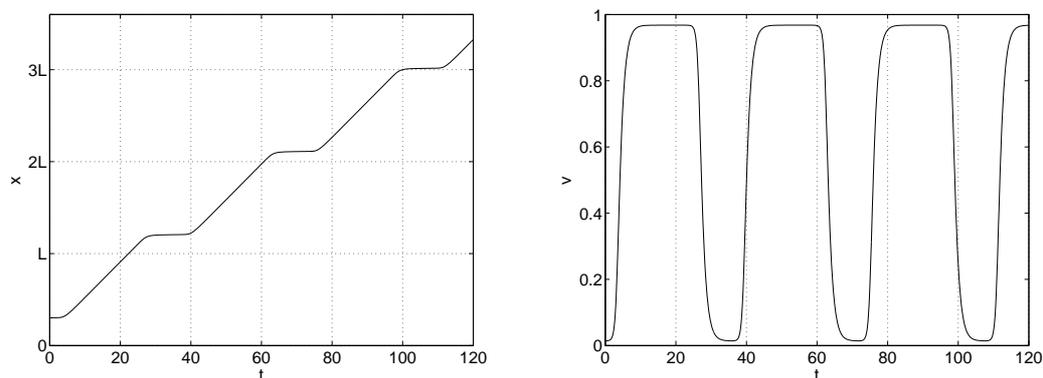


Abbildung 7.1.: Trajektorien eines Fahrzeug: Ort (links) und Geschwindigkeit.

Im ersten Teil dieser Arbeit beschreibe ich den Verkehr ausschließlich aus mikroskopischer Perspektive. Dem  $j$ ten Fahrzeug wird eine Trajektorie

$$(t, x_j(t), \dot{x}_j(t))$$

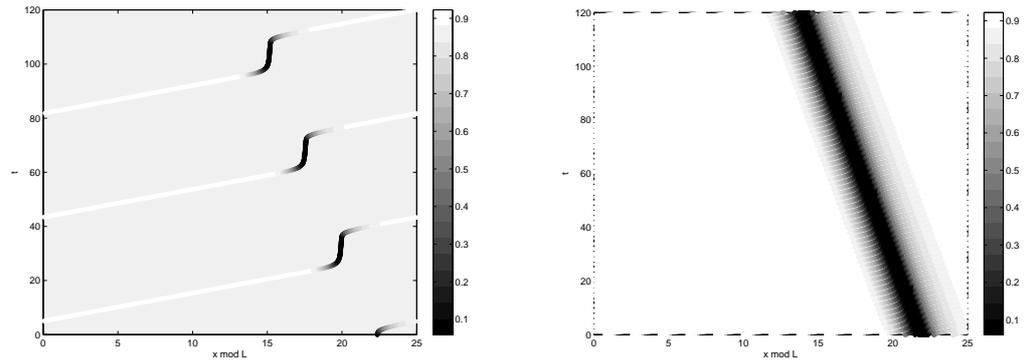
zugewiesen, entlang derer es sich bewegt (Abb. 7.1). Demgegenüber steht nun also die gerade historisch eingeordnete makroskopische Sicht des Verkehrs, bei der der Transport charakteristischer, skalarer Größen wie Verkehrsdichte  $\rho$  und -geschwindigkeit  $v$  in Raum und Zeit, also

$$\rho(x, t) \text{ und } v(x, t),$$

im Zentrum stehen.

Es folgt nun ein neuer Zugang zu diesem Thema, und zwar die *makroskopische Interpretation* der in Kapitel 2 beschriebenen mikroskopischen Modelle. Ich beginne damit, dass ich die Informationen aus Abb. 7.1 in *einem* Bild darstelle: auf der x-Achse wird der „echte“ Ort auf dem Kreis  $(x \bmod L)$  aufgetragen, auf der y-Achse die Zeit  $t$ . Die Trajektorie wird entsprechend der Geschwindigkeit  $v$  eingefärbt (vgl. Farbabbildung 7.2(a)).

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten



(a) Ein Fahrzeug; vgl. Farbtafel 3.

(b) Alle Fahrzeuge; vgl. Farbtafel 4.

Abbildung 7.2.: Die Trajektorie des  $j$ ten Fahrzeugs wird nach der Geschwindigkeit  $\dot{x}_j(t)$  eingefärbt.

Verfährt man entsprechend mit den übrigen Fahrzeugen, entsteht ein (scheinbar makroskopisches) Höhenlinienbild der Geschwindigkeit einer Autoschlange über dem Ort und der Zeit (Abb. 7.2(b)).

Setzt man

$$\rho_j(t) := \frac{1}{x_{j+1}(t) - x_j(t)} \quad (7.1)$$

die *individuelle Dichte* des  $j$ ten Fahrzeugs zur Zeit  $t$ , so lässt sich ganz analog ein makroskopisches Dichteprofil erstellen (Abb. 7.3).

Der folgende Abschnitt widmet sich der Struktur der alten hopfperiodischen Lösungen und trifft einige Aussagen über deren Gestalt aus Sicht der eingeführten makroskopischen Größen.

### 7.2. Der Fall $\epsilon = 0$ : wandernde Wellen

Wir betrachten erneut die einfachste Version des mikroskopischen Verkehrsmodells:

$$\ddot{x}_j = V(x_{j+1} - x_j) - \dot{x}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.2)$$

Mit der entsprechenden Koordinatentransformation ließen sich aufgrund von Hopfverzweigungen Lösungen nachweisen, die in den Geschwindigkeiten und Abständen periodisch waren. Diese Tatsache lässt sich nun (in der Sprache der  $x$ -Koordinaten) folgendermaßen formulieren:

**LEMMA 5.** *System (7.2) hat  $T_p$ -periodische Geschwindigkeiten  $\dot{x}_j(t)$  und Abstände  $x_{j+1}(t) - x_j(t)$  genau dann, wenn es ein  $L_p > 0$  gibt, so dass*

$$x_j(t + T_p) = x_j(t) + L_p, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7.3)$$

*gilt.*

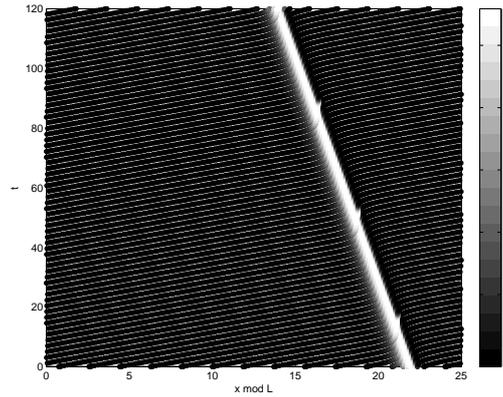


Abbildung 7.3.: Hier wird die Trajektorie des  $j$ ten Fahrzeugs nach der  $j$ ten Dichte  $\rho_j(t)$  eingefärbt; vgl. Farbtafel 5.

*Beweis.* Ist Eigenschaft (7.3) erfüllt, so folgt sofort, dass die Geschwindigkeiten und die Abstände  $T_p$ -periodisch sind. Für die Rückrichtung betrachte man

$$x_j(t + T_p) = x_j(t) + \underbrace{\int_t^{t+T_p} \dot{x}_j(s) ds}_{L_p(t,j)}.$$

Mit  $\dot{x}_j(s) = \dot{x}_j(s + T_p)$  gilt  $L_p(t_1, j) = L_p(t_2, j)$ , weshalb  $L_p$  unabhängig von  $t$  ist. Außerdem folgt aus der Periodizität der Abstände

$$\begin{aligned} L_p(t, j+1) - L_p(t, j) &= \int_t^{t+T_p} \dot{x}_{j+1}(s) - \dot{x}_j(s) ds \\ &= x_{j+1}(t + T_p) - x_j(t + T_p) - (x_{j+1}(t) - x_j(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist  $L_p$  konstant. ‡

**DEFINITION 12.**  $L_p$  heißt Umlauflänge zur Periode  $T_p$ .

Eine sehr anschauliche, unmittelbare Konsequenz von Lemma 5 ist die Tatsache, dass der folgende Eindruck, den die Abbildungen 4 und 5 vermitteln, richtig ist:

**LEMMA 6.** Die Isolinien der charakteristischen makroskopischen Größen Geschwindigkeit, Dichte und Fluss bei hopfperiodischen Lösungen sind Geraden mit der Steigung

$$\sigma = \frac{T_p}{L_p - L}.$$

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

*Beweis.* Dass die Isolinien für ein Fahrzeug Geraden mit der angegebenen Steigung sind, ist mit (7.3) trivial (Abb. 7.4). Es bleibt also zu zeigen, dass das  $j$ te Fahrzeug nach der Zeit  $\frac{T_p}{N}$  dieselbe Isolinie überquert wie der Vorgänger ( $j + 1$ ).

Aus Satz 2 ist bekannt, dass die an den Hopfverzweigungen abzweigenden Lösungen im transformierten System der Abstände und Geschwindigkeiten lediglich phasenverschobene Koordinaten besitzen. Genauer gilt:

$$y_{j+1}(t) = y_j \left( t + k \frac{T_p}{N} \right), \quad (7.4)$$

$$\text{sowie } \dot{x}_{j+1}(t) = \dot{x}_j \left( t + k \frac{T_p}{N} \right), \quad (7.5)$$

für ein  $k \in \mathbb{N}$ . Unter Berücksichtigung von Bemerkung 3 setze ich von nun an  $k = 1$  und wähle somit den äußersten Zweig von Hopf-periodischen Lösungen aus. Also folgt aus Beziehung (7.5):

$$x_j \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_{j+1}(t) = s_j \text{ (konstant).}$$

Wegen (7.4) beziehungsweise wegen

$$x_{j+1} \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_{j+2}(t) = x_j \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_{j+1}(t)$$

ist  $s_j =: s$  für alle  $j$  gleich. Mit Lemma 5 folgt nun

$$\begin{aligned} Ns &= x_j \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_{j+N}(t) \\ &= x_j \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_j(t) - L \\ &= L_p - L. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$x_j \left( t + \frac{T_p}{N} \right) - x_{j+1}(t) = \frac{L_p - L}{N} \quad \forall j = 1, \dots, N,$$

womit die Behauptung folgt. ‡

**BEMERKUNG 6.** In Anlehnung an Satz 2 und Bemerkung 3 über die Struktur der hopfperiodischen Lösungen und die Wellenzahl  $k$ , muss ich an dieser Stelle ergänzen, dass bei einer tatsächlich auftretenden periodischen Lösung mit Wellenzahl  $k > 1$  natürlich entsprechend

$$\sigma = k \frac{T_p}{L_p - L}$$

gilt.

**BEMERKUNG 7.** Aus makroskopischer Sicht ist  $c := \frac{1}{\sigma}$  die Wellengeschwindigkeit, mit der sich der Stau fortbewegt.

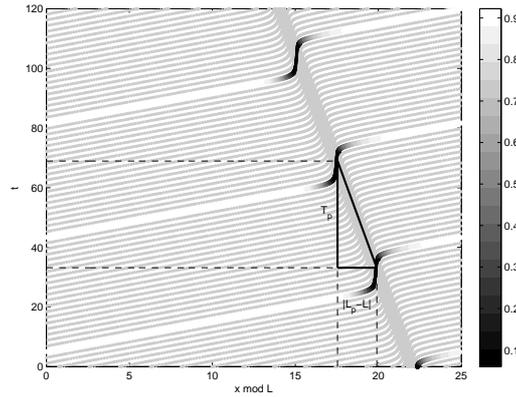


Abbildung 7.4.: Berechnung der Steigung; vgl. Farbtafel 6.

Wie wir sehen, lässt sich offensichtlich die für eine Welle charakteristische makroskopische Größe (ihre Geschwindigkeit  $c$ ) aus *der* charakteristischen mikroskopischen Größe einer periodischen Lösung – nämlich ihrer Periode  $T_p$  – berechnen. Der Ausdruck für  $\sigma$  ist vergleichsweise einfach, da sein Vorzeichen ausschließlich vom Nenner ( $L_p - L$ ) abhängt. Ist  $\sigma$  negativ, bedeutet dies, dass sich der an der Hopfverzweigung entstandene Stau nach hinten bewegt.

### 7.2.1. Rückstau

Um ein Kriterium für diesen Rückstau herzuleiten, sei an dieser Stelle noch einmal an Bedingung (2.6) erinnert, unter der bei festem  $N$  mit konstantem Abstand  $\frac{L}{N}$  die erste Hopfverzweigung für  $k = 1$  auftritt:

$$V' \left( \frac{L}{N} \right) = \frac{1}{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right)}.$$

Weiterhin gilt für die Periode  $T_p$  in der Nähe der Hopfverzweigung

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{2\pi}{\sin \left( \frac{2\pi}{N} \right) V' \left( \frac{L}{N} \right)} \\ &= 2\pi \frac{1 + \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right)}{\sin \left( \frac{2\pi}{N} \right)} \\ &= \frac{2\pi}{\sin \left( \frac{2\pi}{N} \right)} + \frac{2\pi}{\tan \left( \frac{2\pi}{N} \right)} \\ &\stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} N + N = 2N. \end{aligned} \tag{7.6}$$

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

Geht man direkt hinter der Hopfverzweigung von einer mittleren Fahrzeuggeschwindigkeit  $V\left(\frac{L}{N}\right)$  aus, folgt somit:

$$L_p \approx T_p \cdot V\left(\frac{L}{N}\right) \approx 2N \cdot V\left(\frac{L}{N}\right).$$

Bei wachsendem  $N$  konvergiert die rechte Seite von (2.6) gegen  $\frac{1}{2}$ , weshalb die Definition folgender asymptotischer Größen Sinn macht:

**DEFINITION 13.** *Es definiere*

1.  $T_p^\infty := 2N$  die asymptotische Periode,

2.  $y_\infty$ , implizit gegeben durch

$$V'(y_\infty) = \frac{1}{2},$$

den asymptotischen Hopfabstand, beziehungsweise

3.  $L^\infty := y_\infty \cdot N$  die asymptotische Hopflänge, sowie

4.  $L_p^\infty := 2NV(y_\infty)$  die asymptotische Umlauflänge.

**LEMMA 7.** *Für eine gegebene Richtgeschwindigkeit  $V$  gilt*

$$L_p^\infty < L^\infty \Leftrightarrow \frac{V(y_\infty)}{y_\infty} < V'(y_\infty). \quad (7.7)$$

*Beweis.* Nach Definition gilt sowohl

$$V'(y_\infty) = \frac{1}{2},$$

als auch

$$\frac{L_p^\infty}{2L^\infty} = N \frac{V(y_\infty)}{L^\infty} = \frac{V(y_\infty)}{y_\infty},$$

weshalb die Behauptung folgt. ‡

**DEFINITION 14.** *Ist bei einer gegebenen Richtgeschwindigkeit  $V$  im asymptotischen Hopfabstand  $y_\infty$  die Bedingung (7.7) erfüllt, so spreche ich im Folgenden von einer staukritischen Hopfverzweigung; die abzweigende periodische Lösung soll in diesem Zusammenhang auch Rückstau genannt werden.*

Die scheinbar technische Bedingung (7.7) für die Bildung eines Rückstaus lässt sich auch noch aus makroskopischer Sicht interpretieren. Betrachten wir hierzu einmal den Verkehrsfluss  $q$  in Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $v(\rho)$ :

$$q(\rho) := \rho \cdot v(\rho).$$

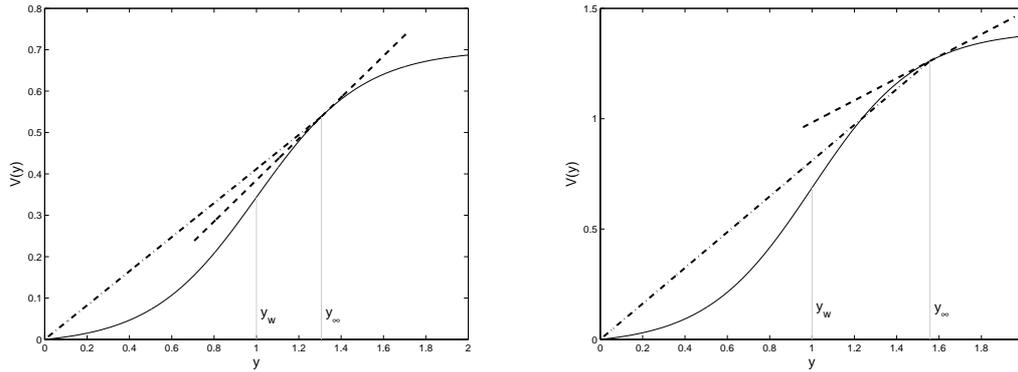


Abbildung 7.5.: Nur im linken Bild ist ein Rückstau im Sinne von (7.7) möglich. Wichtig ist immer das Steigungsdreieck  $\frac{V(y_\infty)}{y_\infty}$  (strich-punktiert) gegenüber  $V'(y_\infty)$  (gestrichelt).

Dann gilt in der *asymptotischen Hopfdichte*  $\rho_\infty := \frac{1}{y_\infty}$ :

$$q(\rho_\infty) = \rho_\infty V\left(\frac{1}{\rho_\infty}\right). \quad (7.8)$$

Leitet man (7.8) ab, folgt

$$\begin{aligned} q'(\rho_\infty) &= V\left(\frac{1}{\rho_\infty}\right) - \frac{1}{\rho_\infty} V'\left(\frac{1}{\rho_\infty}\right) \\ &= V(y_\infty) - y_\infty V'(y_\infty). \end{aligned}$$

Folgende Aussage ist also zu Lemma 7 äquivalent:

**KOROLLAR 2.** *Ein Rückstau entsteht genau dann wenn*

$$q'(\rho_\infty) < 0 \quad (7.9)$$

*gilt.*

**BEMERKUNG 8.** So schön und einfach Bedingung (7.9) auch ist, so ist sie doch in zweierlei Hinsicht lediglich ein asymptotisches Resultat. Erstens wird mit  $y_\infty$  der Grenzübergang für  $N$  gegen unendlich impliziert, zweitens liegen die beobachteten periodischen Lösungen eben lediglich *in der Nähe* der Hopfverzweigung, so dass die tatsächlichen Geschwindigkeiten  $\dot{x}_j(t)$  beispielsweise unterhalb von  $V\left(\frac{L}{N}\right)$  liegen können. Dadurch ist es möglich, dass die Umlauflänge  $L_p \approx T_p \cdot V\left(\frac{L}{N}\right)$  kleiner als

$$T_p \cdot V\left(\frac{L}{N}\right)$$

ist und somit auch kleiner als  $L$  wird, obwohl (7.9) verletzt ist.

Dennoch liefert Korollar 2 eine sehr gute Orientierung über die Tendenz einer Rückstaubildung in einer bestimmten Verkehrslage.

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

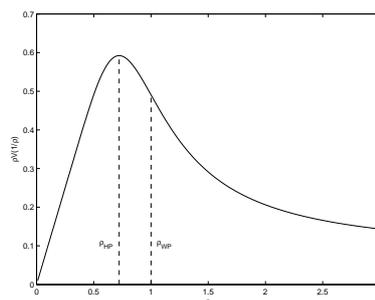


Abbildung 7.6.: Fundamentaldiagramm.

### 7.2.2. Vorwärtsstau

Ich möchte nun noch einmal etwas genauer auf das Fundamentaldiagramm der Richtgeschwindigkeit  $V\left(\frac{1}{\rho}\right)$  in Abbildung 7.6 eingehen. Die von Gasser u. a. (2004) angegebene Bedingung (2.6) sowie die geforderte Form von  $V$  lassen ausschließlich zu, dass Hopfverzweigungen im beschriebenen Modell entweder gar nicht, doppelt oder paarweise auftreten, je nachdem, wo sich die waagerechte Gerade  $\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right)^{-1}$  und die glockenförmige Ableitung  $V'$  schneiden. Genauer gesagt ist es so, dass bei wachsendem  $V_{max}$  immer zwei Hopfverzweigungen im eindeutigen Wendepunkt  $y_w$  von  $V$  entstehen.

Interessanterweise ist

$$\rho_w := \frac{1}{y_w}$$

nun gerade der Wendepunkt von  $q(\rho) = \rho V\left(\frac{1}{\rho}\right)$ , da für die zweite Ableitung von  $q$

$$q''(\rho) = \frac{1}{\rho^3} V''\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

gilt. Da der Punkt  $\rho_h$ , an dem  $q'$  sein Vorzeichen wechselt, bei  $V$  nicht ganz so hervorsticht, ist es also durchaus hilfreich, sich den Verkehrsfluss  $q$  der quasi-stationären Lösung anzusehen. So ist wegen  $q_w > q_h$  unmittelbar einleuchtend, dass beim Auftreten eines Paares von Hopfverzweigungen in  $q_w$  immer periodische Lösungen in Form eines Rückstaus entstehen.

Naheliegender ist nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Hopfverzweigungen nicht staukritisch sind, wie es also zu einem Stau kommen kann, der sich in Fahrtrichtung vorwärts bewegt. Theoretisch läßt sich diese Frage mit Hilfe von Korollar 2 sofort beantworten: man wähle lediglich  $V_{max}$  genügend groß, so dass die asymptotische kritische Dichte  $\rho_\infty$  links vom Hochpunkt  $\rho_h$  liegt. Bei kleinem  $N$  muss man besonders darauf achten, dass in der tatsächlichen Hopfdichte  $\rho_N$  die Bedingung  $q'(\rho_N) > 0$  erfüllt ist. Dann erhält man zum Beispiel für  $N = 5$  und  $V_{max} = 1.3$  einen Vorwärtsstau (Abb. 7.7(a)). Für wachsendes  $N$  ist die Situation, wie wir sehen werden, allerdings komplizierter.

### 7.3. Der Fall $\epsilon > 0$ : Baustelle und wandernde Wellen

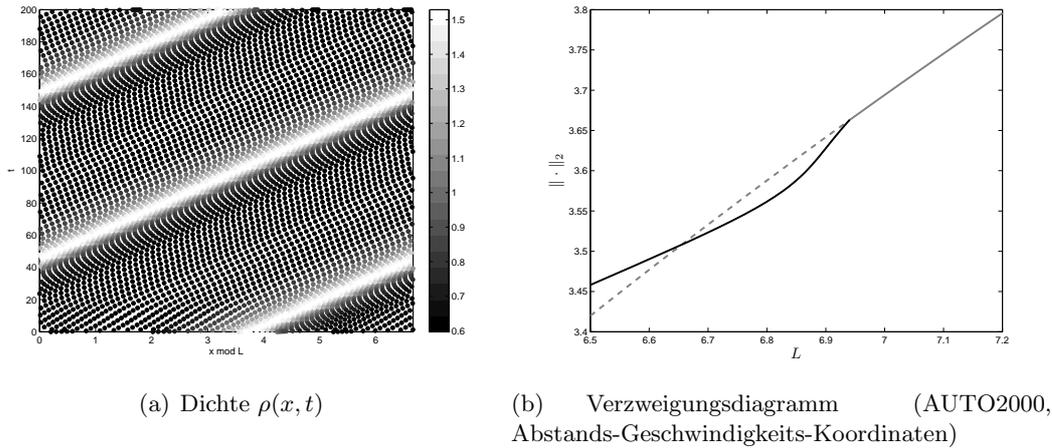


Abbildung 7.7.: Vorwärtsstau bei  $N = 5, L \approx 6.67, V_{max} = 1.3, \epsilon = 0$ ; vgl. Farbtafel 7

Die oben betrachteten periodischen Lösungen sind lediglich diejenigen, die direkt in der Hopfverzweigung abzweigen. Diese können je nach dem Vorzeichen des ersten Ljapunov-Koeffizienten stabil (superkritisch) oder instabil (subkritisch) sein. In jedem Fall ist dies aber eine ausschließlich lokale Eigenschaft, die nichts über das globale Verhalten der Lösungen aussagt. So kann der Ast der periodischen Lösungen in beiden Fällen seine Stabilität ändern – zum Beispiel an einem Umkehrpunkt. In Abbildung 7.7(b) ist ein Ausschnitt aus dem Verzweigungsdiagramm zur nebenstehenden Simulation zu sehen. Die Hopfverzweigung ist superkritisch, es folgt ein Zweig stabiler periodischer Lösungen, die ihre Stabilität nicht ändern.

Gasser u. a. (2004) geben eine konkrete Formel für den ersten Ljapunov-Koeffizienten an und stellen fest, dass die Hopfverzweigung unter Verwendung der Bando-Funktion (2.2) immer superkritisch ist. Dies würde bedeuten, dass man für jedes  $N$  bei entsprechendem  $V_{max}$  eine noch so kleine Umgebung der kritischen Dichte  $\rho_N$  finden müsste, in der sich ein Vorwärtsstau beobachten ließe. Tatsächlich sehen die Verzweigungsdiagramme bereits bei acht und zehn Fahrzeugen aus wie in Abbildung 7.8 dargestellt: auf dem Bild scheinen subkritische Hopfverzweigungen zu sein, obwohl diese lokal superkritisch sein müssen. Erst in einiger Entfernung *vor* der Verzweigung ändert sich die Stabilität der abzweigenden Lösungen in einem Umkehrpunkt, was zu einem langen stabilen Ast periodischer Lösungen bis hinter den Hopfpunkt führt, deren Periode allerdings nichts mehr mit der asymptotischen Periode ( $\approx 2N$  siehe oben) zu tun hat. Diese attraktiven Lösungen sind es aber, in die sich das System einschwingt.

### 7.3. Der Fall $\epsilon > 0$ : Baustelle und wandernde Wellen

Die im vergangenen Abschnitt formulierten Aussagen über die Gestalt der in Geschwindigkeit und Abstand periodischen Lösungen aus makroskopischer Sicht lassen sich vor allem deshalb so klar treffen, da als Instrument noch die  $((x_{j+1} - x_j), \dot{x}_j)$ -Koordinaten

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

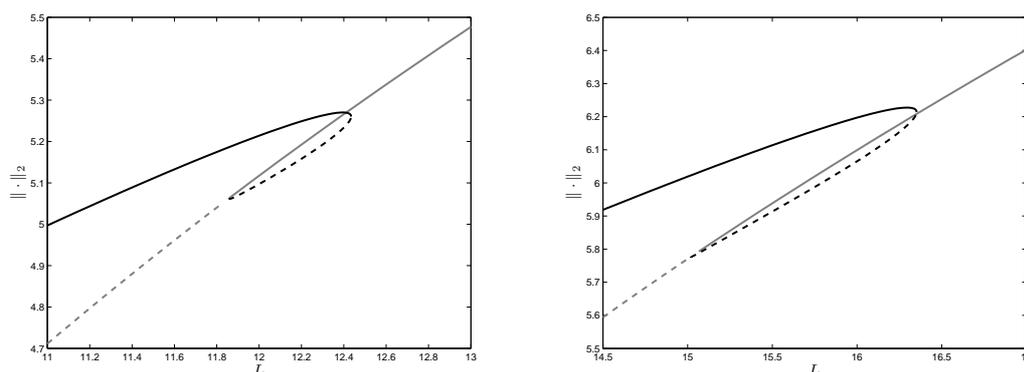


Abbildung 7.8.: Verzweigungsdiagramme für  $N = 8, V_{max} = 1.3$  (links) und  $N = 10, V_{max} = 1.3$ .

mit der Hopfverzweigung zur Verfügung stehen. Im Baustellenfall, den ich in Teil I der Arbeit ausführlich eingeführt habe, ist die Situation (auf dem Torus beziehungsweise auf der Röhre) wesentlich komplexer.

### 7.3.1. Die POM $x^\epsilon$

Ich beginne mit der (wenig überraschenden) Tatsache, dass im grundsätzlich gleichmäßig fließenden Verkehr vor einer kleinen Baustelle zu jeder Zeit ein kleiner Stau ist.

**LEMMA 8.** *Für  $\epsilon > 0$  führt eine POM  $x^\epsilon$  zu einer stehenden Welle im  $x/t$ -Diagramm der relevanten makroskopischen Größen (Abb. 7.9).*

*Beweis.* Sei  $T$  die Umlaufzeit der POM  $x^\epsilon$ . Dann gilt für alle  $j = 1, \dots, N$

$$x_j^\epsilon(t + T) = x_j^\epsilon(t) + L, \quad (7.10)$$

sowie

$$x_j^\epsilon\left(t + \frac{T}{N}\right) = x_{j+1}^\epsilon(t). \quad (7.11)$$

Sei für ein  $j$  die Geschwindigkeit  $v(x_0, t_0) := \dot{x}_j^\epsilon(t_0)$  im Ort  $x_0$  zur Zeit  $t_0$  definiert. Das nächste Fahrzeug, das nach der Zeit  $\frac{T}{N}$  die Stelle  $x_0$  passiert, trägt die Nummer  $(j - 1)$ . Seine Geschwindigkeit ist mit (7.11) ebenfalls  $v(x_0, t_0)$ . Dies gilt für alle weiteren Fahrzeuge, bis sich der Kreis im  $j$ ten schließt. Entsprechendes gilt für die Abstände und somit für die von mir verwendete Dichte.  $\sharp$

### 7.3.2. Quasi-POMs

Natürlich stellt sich die Frage, welche Form die bisher interessantesten Lösungen, nämlich die von den POMs in einer Neimark-Sacker-Verzweigung abzweigenden Quasi-POMs

### 7.3. Der Fall $\epsilon > 0$ : Baustelle und wandernde Wellen

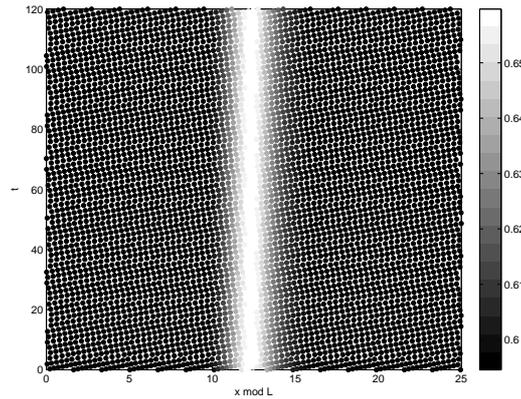


Abbildung 7.9.: Senkrechter Stau (POM) bei  $N = 15, L = 25, V_{max} = 1, \epsilon = 0.1$ ; vgl. Farbtafel 9

(Definition 11), aus makroskopischer Sicht haben. Besonders spannend ist, wie die beiden unterschiedlichen Schwingungstypen miteinander korrespondieren. Auf der einen Seite steht die ortperiodische von außen angeregte Störung durch die Baustelle, auf der anderen Seite die selbsterregte Schwingung durch die Torusverzweigung, die im Fall ohne Baustelle eine hopfperiodischen Lösung wird. Die Abbildungen 7.10(a) und 7.10(b) stellen dies sehr anschaulich dar. Für  $\epsilon = 0.1$  ist in etwa noch der in der vergleichbaren Situation ohne Baustelle (Abb. 7.7(a) sowie Abschnitt 7.2.2) auftretende Stau zu erkennen, der nach vorne transportiert wird. Gleichzeitig wird dieser aber in der Baustellenregion um ungefähr 30 Prozent verstärkt. Daneben in Abbildung 7.10(b) sieht man die zu Abbildung 7.3 passende Situation: auch im Fall des Rückstaus ist der Dichteberg vor der Baustelle in etwa 30 Prozent höher als ohne Baustelle. Hier kann man die ursprüngliche wandernde Welle allerdings noch deutlicher erkennen. Da der Rückwärtsstau im Beispiel eine größere Steigung hat, ist die räumliche Ausdehnung der Bereiche maximaler Dichte (hell/weiß) wesentlich kleiner als im Fall des Vorwärtsstaus. Außerdem ist zu beobachten, dass die weißen Spitzen des Rückwärtsstaus nicht *in*, sondern in einem Abstand *vor* der Baustelle liegen. Erhöht man den Parameter  $\epsilon$ , so wird der Einfluss der Baustelle so groß, dass die Struktur der ursprünglichen wandernden Welle ohne Baustelle nicht mehr zu erkennen ist. Stattdessen ist allerdings ein sehr interessantes Phänomen zu beobachten (Abb. 7.11): Betrachtet man die makroskopische Dichte  $\rho(x, t)$  (Abb. 7.11(a)) sowie die Geschwindigkeit  $v(x, t)$  (Abb. 7.11(b)), so sind vor der Baustelle auf einmal Strukturen von wandernden Wellen zu erkennen, die eine sichtbar größere Wellenzahl zu haben scheinen als bei kleinem  $\epsilon$  (Abb. 7.10(b)).

Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass durch ein vergleichsweise großes  $\epsilon$  die Verteilung der Fahrzeuge auf dem Kreis in eine permanente Schiefelage gerät. Abbildung 7.11(c) zeigt die auftretenden Dichten  $\rho_j$  sämtlicher Fahrzeuge im Kreis übereinander in Abhängigkeit vom Ort  $x \bmod L$  für die darüber abgebildeten Simulation. Zu sehen

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

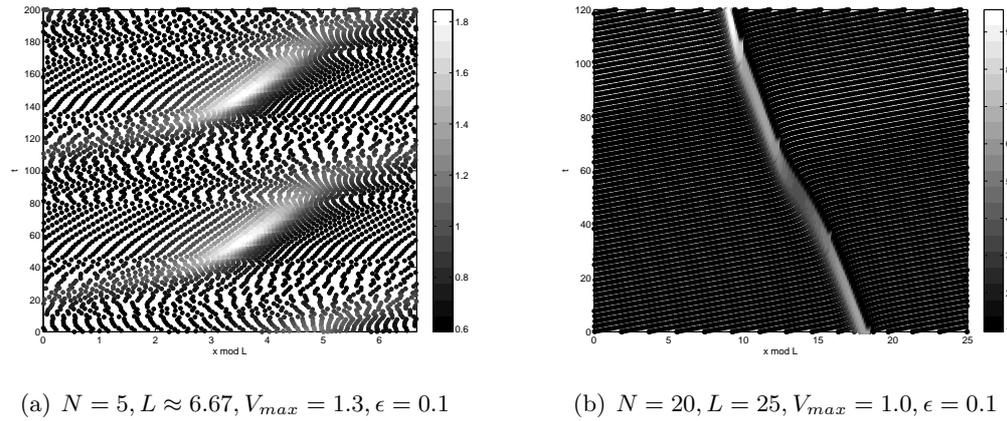


Abbildung 7.10.: Makroskopische Dichtebilder; vgl. Farbtafeln 8 und 10.

Intervall in $x \bmod L$	(4, 14)
Intervalllänge $L$	10
durchschnittl. Dichte $\rho$	1
Anzahl Fahrzeuge $N$	10
$T_p(L, N)$ numerisch	17.43
$L_p(L, N)$ numerisch	8.32
$\sigma = \frac{T_p}{L_p - L}$	-10.39

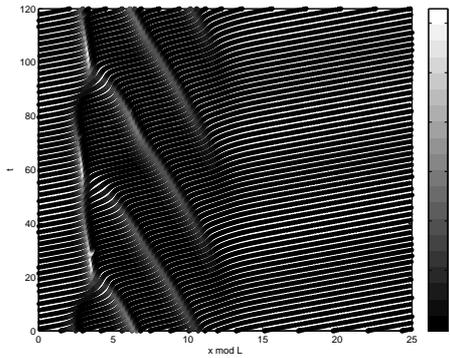
Tabelle 7.1.: Bereichsweise Berechnung der Steigung von Stau-Geraden.

sind also alle Dichten, die an Beobachtern an festen Orten  $x$  in der Zeit  $t = 0 \dots 120$  vorüberziehen. *Hinter* der Baustelle ist die Situation ziemlich eindeutig: dort herrscht die ganze Zeit über eine fast konstante Dichte  $\rho(x, t) = 0.5$ , was einer (ebenso konstanten) Fahrzeuganzahl von etwa fünf Verkehrsteilnehmern im Intervall (14, 25) entspricht. Das bedeutet, dass zu jeder Zeit auf dem Rest der Strecke eine mittlere Fahrzeuganzahl von 15 herrscht. Abbildung 7.11(c) verdeutlicht, dass die Lage *vor* der Baustelle noch etwas komplexer ist: in beiden Fällen gibt es dort zwei Dichteanhäufungen – eine schmale, aber hohe Spitze und einen etwas flacheren, aber dafür breiten Berg ungefähr zwischen den Orten 4 und 14.

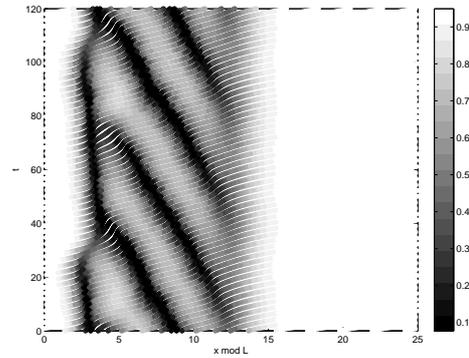
In Tabelle 7.1 vergleiche ich eben diesen letzteren Streckenabschnitt mit den numerischen Ergebnissen des Kreisverkehrs ohne Baustelle bei  $N = 10, L = 10, V_{max} = 1$  – also bei konstanter mittlerer Dichte  $\frac{L}{N} = 1$ . Interessanterweise entspricht die resultierende Steigung  $\sigma$  der dort entstehenden hopfperiodischen Stauwellen ungefähr der beobachteten Geradensteigung im Streckenabschnitt (4, 14) von Abb. 7.11(c).

**BEMERKUNG 9.** 1. Es bleibt hier offen, wie es zu den sehr steilen (fast senkrechten) Stauwellen im Streckenabschnitt (0, 4) kommt. Auf jeden Fall markieren sie eine Trennlinie zwischen dem dichteren und dem weniger dichten Bereich.

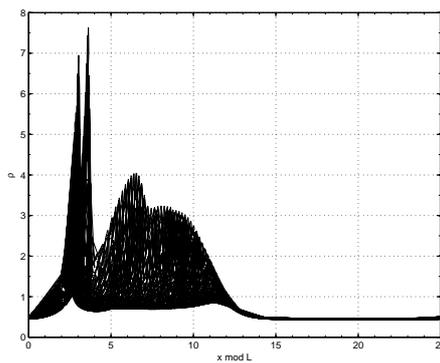
7.3. Der Fall  $\epsilon > 0$ : Baustelle und wandernde Wellen



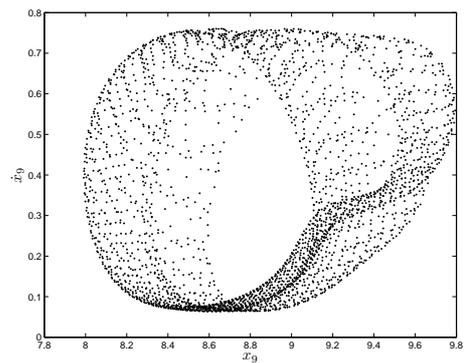
(a) Dichte  $\rho(x, t)$ .



(b) Geschwindigkeit  $v(x, t)$



(c) Dichteverteilung für  $t = 0 \dots 120$  über dem Ort; vgl. Abb. 7.11(a).



(d) Orbit unter  $\pi$ ; 3000 Iterationen mit Startwert  $(x, \dot{x})$  aus Abb. 7.11(a) bzw. 7.11(b).

Abbildung 7.11.: Eine „große“ Baustelle für  $\epsilon = 0.32$  und  $N = 20, L = 25, V_{max} = 1.0$ ; vgl. Farbtafeln 11 und 12.

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

2. Die Beobachtung, dass sich bestimmte Bereiche konstanter Dichte auf dem Kreis unabhängig von den übrigen betrachten lassen, ist ein gutes Merkmal dafür, dass die in dieser Arbeit besprochenen Phänomene nicht ausschließlich aus der Struktur des Kreises herrühren.

Abschließend zu diesem Thema ist in Abbildung 7.11(d) der Orbit von der Lösung bei großem  $\epsilon$  unter der reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  zu sehen. Dargestellt sind die Orts- und Geschwindigkeitskoordinate von dem jeweiligen Verkehrsteilnehmer mit Index 9, wobei Fahrzeug Nummer 1 dasjenige ist, das durch das Überqueren einer festen Stelle  $c$  die Auswertung von  $\pi$  auslöst. Ich habe die Projektion des Orbits auf genau diese Komponenten von  $(x, \dot{x})$  ausgewählt, da sie sich in dem Bereich  $(4, 14)$  der wandernden Dichte- und Geschwindigkeitswelle befinden.

Trotz der hohen Anzahl von Iterationen von  $\pi$  kann man nicht mehr mit Sicherheit erkennen, ob der Orbit auf einer geschlossenen invarianten Kurve liegt, dennoch lässt sich eine geometrische Struktur erahnen, die unter  $\pi$  invariant zu sein scheint.

### 7.3.3. Zwei parallele Attraktoren

Ich möchte noch auf ein weiteres Phänomen eingehen, das sich natürlicherweise aus dem baustellenlosen Fall auf die Situation mit  $\epsilon > 0$  übertragen lässt. Gasser u. a. (2004) untersuchen die Hopfverzweigungen von der sogenannten quasi-stationären Lösung auch numerisch detailliert, indem sie die Zweige von periodischen Lösungen mit AUTO2000 verfolgen und einzelne Phasenportraits sogar zeichnen. Sowohl bei einer subkritischen Hopfverzweigung nach einem Umkehrpunkt, als auch nach einer superkritischen nach mindestens zwei Umkehrpunkten, kann es durch ein „Stabilwerden“ der periodischen Lösungen zu einer Situation mit zwei Attraktoren bei festem Parameter  $L$  kommen (vgl. Verzweigungsdiagramme in Abb. 7.8).

Abbildung 7.12 zeigt dasselbe Phänomen für  $\epsilon = 0.1$ . Für die Erstellung des rechten Bilds habe ich die Anfangsdaten aus einer Pfadverfolgung mit AUTO2000 für  $\epsilon = 0$  verwendet, um den numerischen Integrator auf die abgebildete Lösung einzuschwingen. Tatsächlich ist die Situation absolut vergleichbar mit Abbildung 7.8 (rechts, dort für  $\epsilon = 0$ ), weshalb es auch nicht verwunderlich ist, dass die Neimark-Sacker-Verzweigung hier genau wie eine *nicht* staukritische Hopfverzweigung einen Vorwärtsstau produziert.

7.3. Der Fall  $\epsilon > 0$ : Baustelle und wandernde Wellen

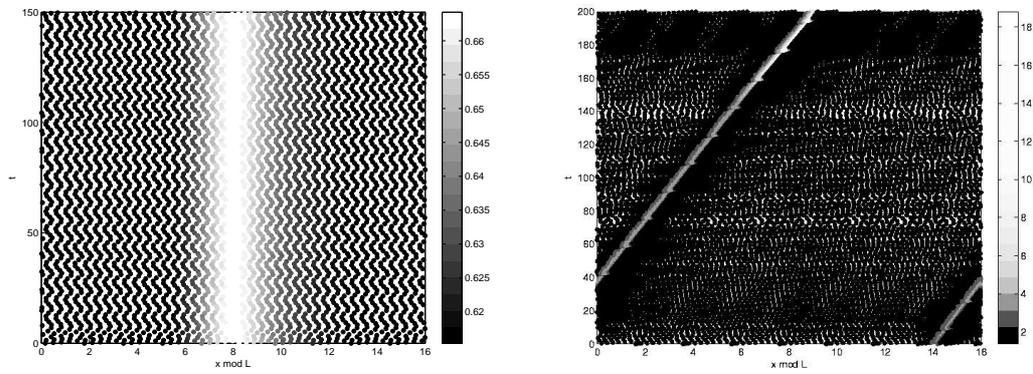


Abbildung 7.12.: Zwei Attraktoren für  $N = 10, L = 16, V_{max} = 1.3, \epsilon = 0.1$  im makroskopischen Dichtebild: POM  $x^{0.1}$  (links), sowie Quasi-POM.

## 7. Makroskopische Größen aus mikroskopischen Daten

## 8. Fundamentaldiagramme

Eine unter Verkehrsmodellierern unterschiedlicher Ausrichtung sehr verbreitete Praxis zur systematischen Aufbereitung von Daten ist die Darstellung von Simulationen in sogenannten Fundamentaldiagrammen, in denen der Verkehrsfluss  $q$  über der Verkehrsdichte  $\rho$  aufgetragen wird. Um jüngere Beispiele aus der Literatur aufzuzählen, seien hier Schadschneider und Schreckenberg (1993) genannt, die Fundamentaldiagramme in Modellen mit zellulären Automaten aufführen. Helbing (2001) berichtet in einem Übersichtsartikel von einem empirisch festgestellten Zusammenhang zwischen gemittelter Verkehrsdichte und Verkehrsfluss, der in etwa die Form eines umgekehrten kleinen Lambdas besitzt. Desweiteren widmet sich Kerner (2004) dieser Thematik in mehreren Kapiteln seines sehr anwendungsorientierten Buches.

Ich möchte mich nun mit einer Technik zur Erstellung von Fundamentaldiagrammen auseinandersetzen, die sich sehr gut mit einer Arbeit von Siebel und Mauser (2006) vergleichen lässt. Dort werden die  $\rho$ - $q$ -Diagramme aus makroskopischen Simulationen heraus erzeugt, indem ausgehend von vielen verschiedenen Anfangszuständen an vorher festgelegten Orten und Zeiten „Messungen“ in Dichte und Fluss gemacht werden. Es ergeben sich Punktwolken, die der von Helbing (2001) beschriebenen „Gespiegeltes- $\lambda$ -Form“ ähneln.

Das charakteristische Merkmal dieser Form ist stets ein nahezu linearer Zusammenhang  $q(\rho)$  bei kleinem  $\rho$ , der bei einer bestimmten Dichte aufgebrochen wird und sich in zwei scheinbar gleichberechtigte Äste von Zuständen trennt.

Die Systematik, die ich vorschlage, ist ganz auf der Verzweigungstheorie im ersten Teil dieser Arbeit gewachsen. Ich starte mit einer Simulation, von der ich im Vorhinein weiß, dass sie bei  $\epsilon = 0$  in einer attraktiven hopfperiodischen Lösung endet. Abbildung 8.1 zeigt die eingeschwungene Lösung im Fundamentaldiagramm: in *jedem* diskreten Zeitschritt  $t$  des numerischen Integrators ist *jedem* Fahrzeug  $i$  ein Punkt mit den Koordinaten

$$\rho_i(t) := 1/(x_{i+1}(t) - x_i(t)), \quad q_i(t) := \rho_i(t) \cdot v_i(t) = \dot{x}_i(t)/(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

zugeordnet.

Die Form einer zusammenhängenden (sogar) geschlossen Kurve, die in Abbildung 8.1 entsteht, mag aus makroskopischer Sicht überraschend sein, ist aber auf der Grundlage der Verzweigungen in Teil I keineswegs verwunderlich. Ich möchte dies im Folgenden anhand des bereits in Kapitel 4.4 veranschaulichten Poincaré-Schnitts  $\Sigma$  erklären. So habe ich für die Erstellung von Abbildung 8.2 (links) nur noch bestimmte Zeitschritte zugelassen, denen Punkte von lediglich *einem* Fahrzeug in Dichte und Verkehrsfluss zugeordnet werden. Und zwar lasse ich nur noch solche Zeitpunkte  $t$  zu, in denen die reduzierten Poincaré-Abbildung  $\pi$  auf  $\Sigma$  gerade ausgewertet wird (Messstelle hier immer

## 8. Fundamentaldiagramme

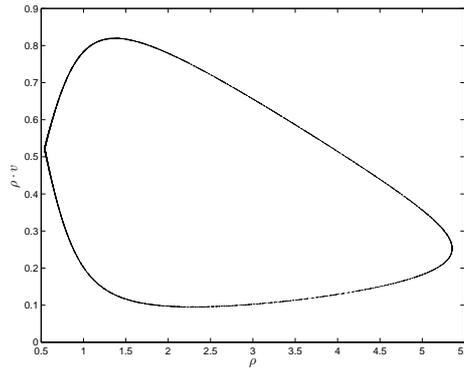


Abbildung 8.1.: Fundamentaldiagramm einer Hopf-periodischen Lösung über alle Zeitschritte ( $N = 10, L = 12, V_{max} = 1, \epsilon = 0$ ).

$x_1 = c = 4$ ). Gestartet habe ich in der quasi-stationären Lösung  $x^0$ , in der bekanntlich jeder Anfangswert (bei  $\epsilon = 0$  trivialerweise) ein Fixpunkt von  $\pi$  ist.

In den Koordinaten  $\mathbf{x} := (x, \dot{x})$  verzweigt ein stabiler Fixpunkt von  $\pi$  in einer Neimark-Sacker-Verzweigung – es entsteht eine (hochdimensionale) geschlossene invariante Kurve in  $\mathbb{R}^{N+N}$ . Auch unter der Transformation  $\varphi : \mathbb{R}^{N+N} \rightarrow \mathbb{R}^{N+N}$  mit

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}, \quad \varphi_{i+N}(\mathbf{x}) = \frac{\dot{x}_i}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

in die Koordinaten Dichte und Verkehrsfluss bleibt diese Struktur erhalten. Allein die Projektionen auf ausgewählte Koordinatenachsen können natürlich auch nicht-geschlossen sein – beispielsweise wie ein Gummiband von der Seite aus gesehen.

Die graue Kurve in Abbildung 8.2 zeigt das schon in Abbildung 7.6 gezeichnete Fundamentaldiagramm der quasi-stationären Lösung  $x^0$ . Im Gegensatz zu Siebel und Mauser (2006) lässt sich diese Kurve über den gesamten Bereich des Verzweigungsparameters  $L$  beziehungsweise der mittleren Dichte  $\frac{L}{N}$  zeichnen – die gestrichelte Linie markiert wie in Verzweigungsdiagrammen den instabilen Bereich von  $x^0$ . Wie man sieht, starten die (schwarzen) Iterationen von  $\pi$  genau in diesem Bereich der Kurve von Fixpunkten von  $\pi$  und schwingen sich spiralförmig auf eine invariante Kurve ein. Mit dem schwarzen Kreuz im Inneren ist der Mittelwert über die vorhandenen Punkte ohne Transienten gekennzeichnet. Daran, dass dieser Punkt nicht genau in der Mitte liegt, kann man erkennen, dass bestimmte Bereiche auf der invarianten Kurve viel häufiger getroffen werden als die übrigen.

Auf der rechten Seite der Abbildung 8.2 habe ich einerseits den Einschwingvorgang weggelassen und andererseits bei gleicher Anzahl von  $\pi$ -Iterationen wieder Punkte zu *allen* Fahrzeugen gezeichnet. Man erkennt sehr schön, dass die invarianten Kurven in Verkehrsfluss und -dichte zu den beteiligten Autos übereinanderliegen. Für das Erstellen von Fundamentaldiagrammen ist nun klar, dass man bei fester Anfangsparameterwahl

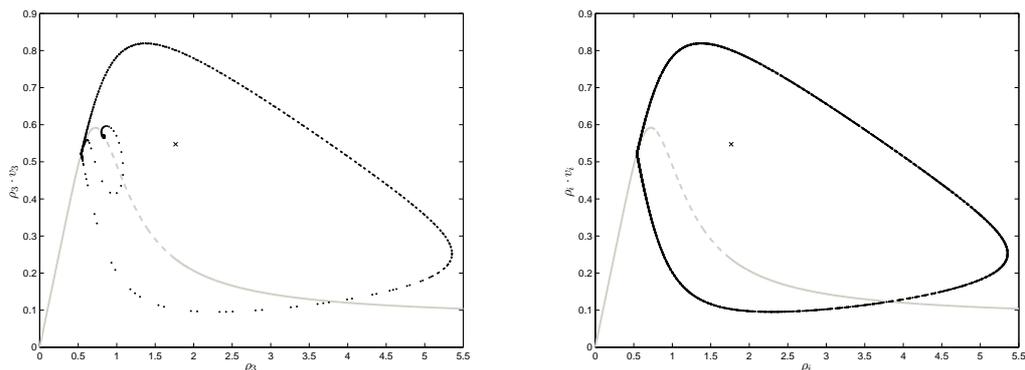


Abbildung 8.2.: Fundamentaldiagramm unter Berücksichtigung der Neimark-Sacker-Verzweigung und geschlossene invariante Kurve ( $N = 10, L = 12, V_{max} = 1, \epsilon = 0$ ).

von  $\frac{L}{N}$  entweder auf der grauen (durchgezogenen) Kurve landet, oder irgendwo auf der schwarzen Kurve.

**BEMERKUNG 10.** In diesem Zusammenhang möchte ich betonen, wie wichtig es ist, sich – wenn überhaupt – über eine *sinnvolle* Mittelung der Daten in  $\rho_i(t)$  und  $q_i(t)$  Gedanken zu machen. So werden die Fundamentaldiagramme unterschiedliche Gestalt haben, je nachdem ob die periodischen Lösungen über ein Intervall gemittelt werden, das kleiner ist als die Periode, oder über ein größeres. Auch ob an verschiedenen Orten gleichzeitig oder nur an einer Stelle gemessen wird, wirkt sich auf diese Darstellungen aus.

Abbildung 8.3 zeigt das Fundamentaldiagramm einer geschlossenen invarianten Kurve nach einer Verzweigung von  $x^\epsilon$  in eine Quasi-POM für  $\epsilon > 0$ . Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zum Fall ohne Baustelle. Erstens lässt sich für  $\epsilon > 0$  keine eindeutige Kurve für das Fundamentaldiagramm der POM  $x^\epsilon$  zeichnen, da Verkehrsfluss und -dichte für  $\epsilon > 0$  nicht mehr konstant sind. Zweitens liegen nun die einzelnen Projektionen der invarianten Kurve auf die jeweilige Fluss-Dichte-Ebene  $q_j - \rho_j$  des  $j$ ten Fahrzeugs nicht mehr übereinander. Das liegt natürlich daran, dass die  $N$  Positionen, die die Abbildung  $\pi$  in jeder Messung vorgibt, von der Lage und Größe der Baustelle abhängen.

## 8. Fundamentaldiagramme

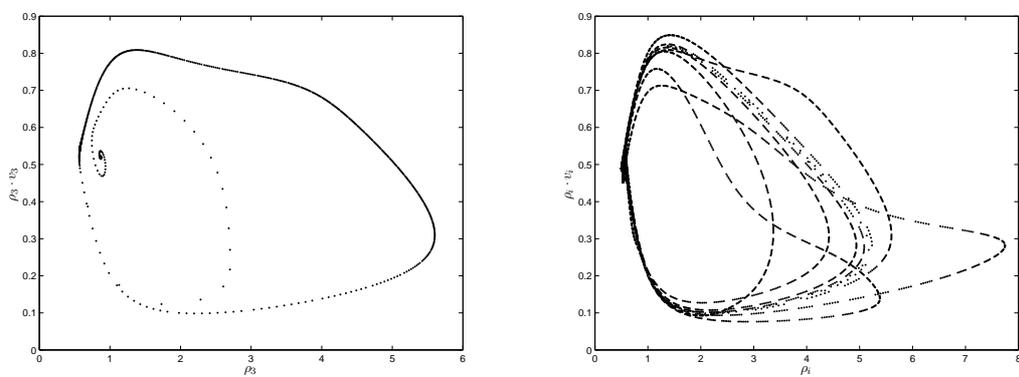


Abbildung 8.3.: Geschlossene invariante Kurve nach Verzweigung von  $x^\epsilon$  in eine Quasi-POM: ein Fahrzeug (links) und alle Fahrzeuge (rechts),  $N = 10, L = 12, V_{max} = 1, \epsilon = 0.1$  .

## 9. Zusammenfassung Teil II

Im zweiten Teil meiner Arbeit stelle ich die bisherigen Ergebnisse in Car-Following-Modellen am Beispiel des Kreisverkehrs makroskopisch dar. Dabei bewege ich mich stets nah entlang der Dynamischen Systeme und der Hilfsmittel, die durch Stabilitätswechsel und abzweigende periodische Lösungen in Hopfpunkten und Neimark-Sacker-Verzweigungen zur Verfügung stehen.

Zunächst beschränke ich mich hierbei auf den einfachen Fall ohne die fahrbahnspezifische Baustelle. Mit Lemma 5 und Lemma 6 gelingt es, einen Zusammenhang zwischen der mikroskopischen Periode einer periodischen Lösung und der Wellengeschwindigkeit der daraus resultierenden wandernden Welle im makroskopischen  $x-t$ -Diagramm herzustellen. Weiterhin gibt Lemma 7 eine eindeutige Bedingung an, unter der sich ein Stau als Bereich der geringsten Dichte entgegengesetzt der Fahrtrichtung bewegt. Diese Aussage ist asymptotischer Natur und bezieht sich auf den Bereich der periodischen Lösungen in der Nähe der Hopfverzweigung für große Fahrzeuganzahlen  $N$ . Das Korollar 2 übersetzt sie unmittelbar in makroskopische Größen – ein rückläufiger Stau aufgrund von Änderungen der mittleren Verkehrsdichte  $\frac{L}{N}$  entsteht in Bereichen, in denen der Verkehrsfluss bei steigender Dichte abnimmt.

Für den Fall der Baustelle trifft Lemma 8 eine Aussage über die Gestalt einer nicht-trivialen POM im  $x-t$ -Diagramm. Ich analysiere die sogenannten Quasi-POMs (Abschnitt 7.3.2) und den Fall von zwei parallel auftretenden Attraktoren bei einer *lokal* superkritischen aber *global* subkritischen Neimark-Sacker-Verzweigung (Abschnitt 7.3.3).

Schließlich bildet der Abschnitt über Fundamentaldiagramme eine weitere Brücke zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Modellierung des Verkehrs. Allein auf der Grundlage der Existenz von geschlossenen invarianten Kurven ist es möglich, gezielt Dichte-Fluss-Zusammenhänge für den gestauten (nicht frei fließenden) Verkehr zu zeichnen, die sich mit der gängigen Literatur in diesem Bereich vergleichen lassen.

## 9. Zusammenfassung Teil II

## 10. Fazit

Bevor ich im Folgenden die Resultate meiner Arbeit kompakt darstelle, möchte ich zunächst an die beiden in der Einleitung gestellten Fragen erinnern.

1. Welche Auswirkungen hat eine Baustelle auf den Verkehr?
2. Welche makroskopischen Strukturen stehen hinter den mikroskopischen Verzweigungsphänomenen?

Rückblickend ist nicht zu übersehen, dass sich diese Fragen zu einem gewissen Teil verselbständigt haben. Die Suche nach den Antworten hat nicht ausschließlich Neues gebracht, sondern hat ihrerseits auch dazu geführt, dass sich bereits bekannte Ergebnisse unter einem neuen Blickwinkel präsentierten. Dennoch bin ich beim Studium des Kreisverkehrs immer wieder zu den beiden Ausgangsfragen zurückgekehrt, auch um ein mir wichtiges Ziel nicht aus den Augen zu verlieren: die Modellierung von Straßenverkehr.

Ich ziehe nun eine Bilanz über die Ergebnisse dieser Arbeit; kompakte Zusammenfassungen und Verweise zu den beiden Teilen im einzelnen, fanden sich bereit in Kapitel 5 und 9.

Die erste Erkenntnis steht eigentlich schon vor der Beantwortung der oben gestellten ersten Frage. Und zwar ist es zunächst einmal tatsächlich möglich, einen Engpass in Form einer Baustelle in ein mikroskopisches Kreisverkehrsmodell zu integrieren, ohne dabei auf verzweigungstheoretische Hilfsmittel verzichten zu müssen. Dabei werden die ursprünglichen Modelle durch die Baustelle lediglich gestört – für kleine Störungen ändert sich die Verkehrslage nur lokal vor der Baustelle.

Die technische Realisierung des freien Verkehrs mit Hilfe des Lösungstyps diskreter wandernder Wellen (POMs) und Neimark-Sacker-Verzweigungen berücksichtigt die symmetrische Anordnung der Fahrer auf dem Kreis und erweitert so im Nachhinein das Verständnis bisheriger Stabilitätsanalysen (Stichwort: Nulleigenwert).

Abstrakte Techniken wie Poincaré-Abbildung und Transversale helfen nicht nur bei der Stabilitätsanalyse unterschiedlicher Verkehrslagen, sondern lassen sich sogar aus Sicht der Verkehrsteilnehmer interpretieren. Sie stellen sich als äußerst geeignete Modellierungswerkzeuge für den Kreisverkehr heraus.

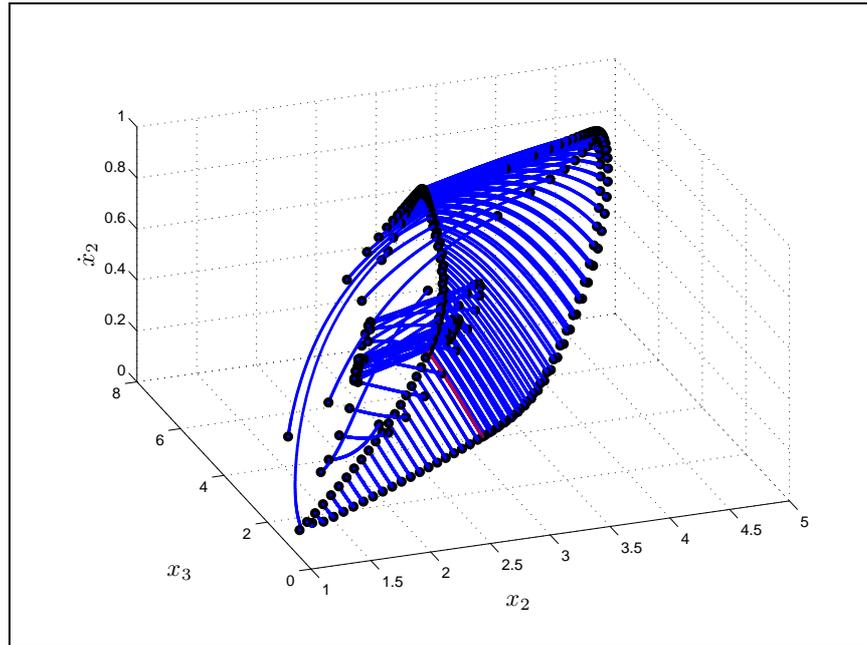
Durch die makroskopische Darstellung der Resultate mikroskopischer Modellierung lassen sich nahezu alle verkehrstechnischen Phänomene übersetzen: aus der (quasi-) stationären Lösung wird der freie Verkehr, aus der POM wird eine stehende Welle, aus einer hopfperiodischen Lösung wird eine wandernde Welle, aus der Periode wird die Wellengeschwindigkeit.

## 10. Fazit

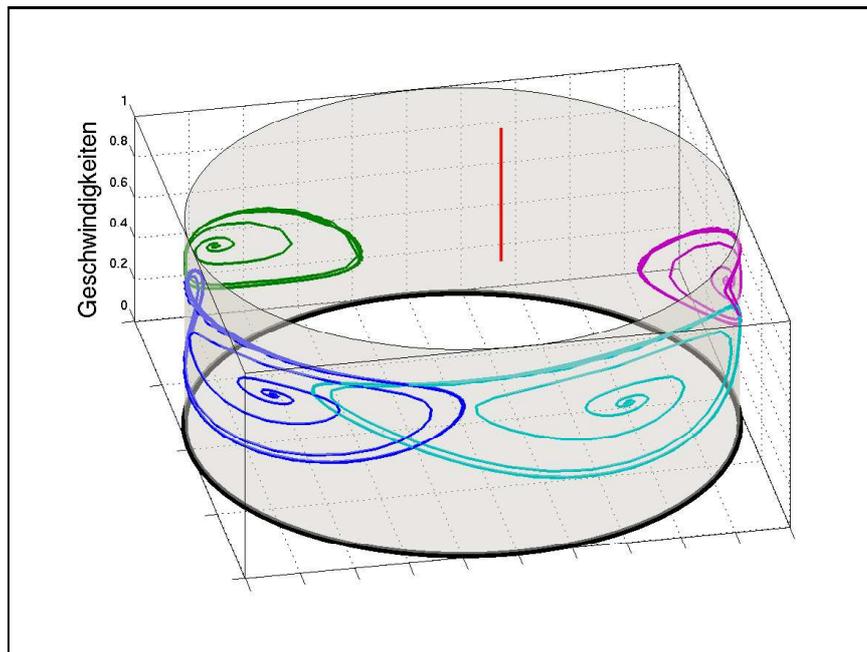
Erhöht man den Baustellenparameter immer mehr, so lassen sich aus den makroskopischen Bildern in Dichte und Geschwindigkeit wiederum Rückschlüsse auf die mikroskopische Modellierung ziehen. Aus den in dieser Arbeit sogenannten Röhrenlösungen wie zum Beispiel Quasi-POMs entstehen Verkehrslagen, die auf einmal wieder örtlich begrenzt sind. Vor und nach einer vergleichsweise großen Baustelle führen unterschiedliche mittlere Dichten zu periodischen Strukturen (bzw. wandernde Wellen) oder stationären Zuständen.

Durch die Einführung der makroskopischen Verkehrsdichte und dem Verkehrsfluss lassen sich Zusammenhänge zwischen diesen beiden Größen in Fundamentaldiagrammen darstellen. Die geschlossene Gestalt des Fundamentaldiagramms einer hopfperiodischen Lösung oder einer Röhrenlösung ist unmittelbar mit den invarianten Kurven verknüpft, die an den Neimark-Sacker-Verzweigungen entstehen.

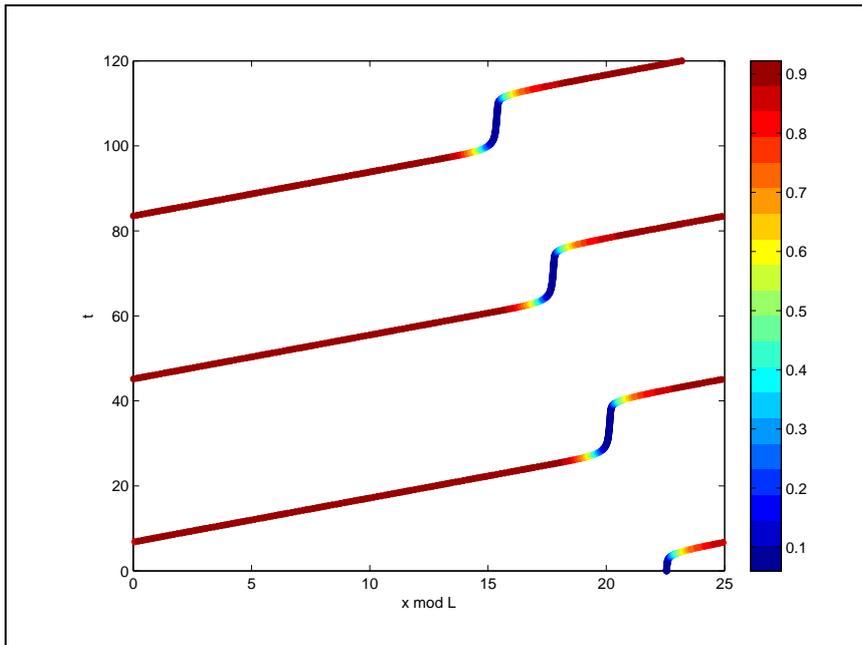
# Farbtafeln



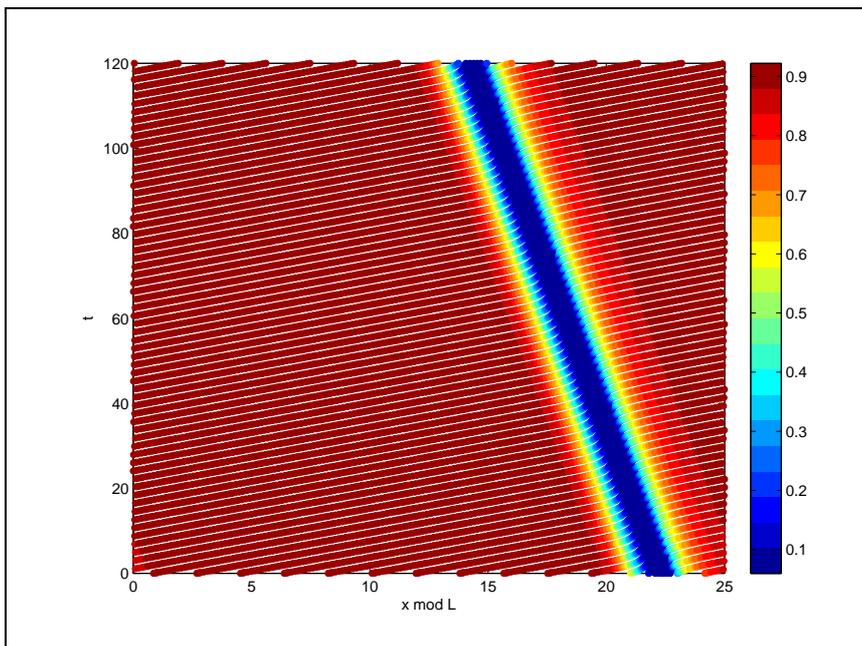
Farbtafel 1.: Die reduzierte Poincaré-Abbildung  $\pi$  auf der *Röhre*. Trajektorien des jeweiligen Autos mit dem Index 2 im Phasenraum über die Zeit  $\frac{T(\epsilon)}{N}$ .



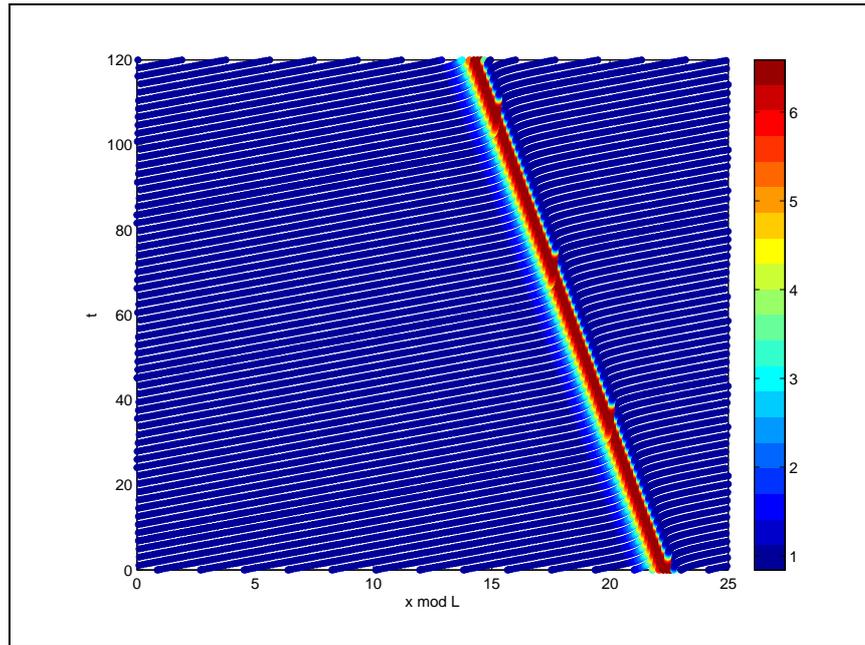
Farbtafel 2.: Poincaré-Schnitt  $\Sigma$  und reduzierte Poincaré Abbildung  $\pi$  können als globale Verkehrsmessung aufgefasst werden; im Beispiel mit fünf Autos.



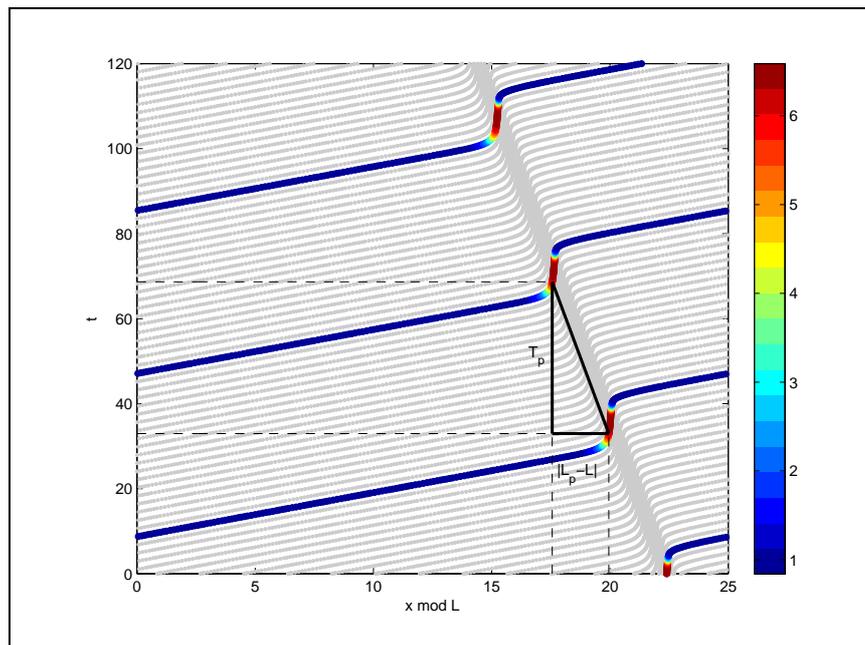
Farbtafel 3.: Makroskopische Interpretation mikroskopischer Dynamik – Vorgehensweise anhand eines Fahrzeugs.



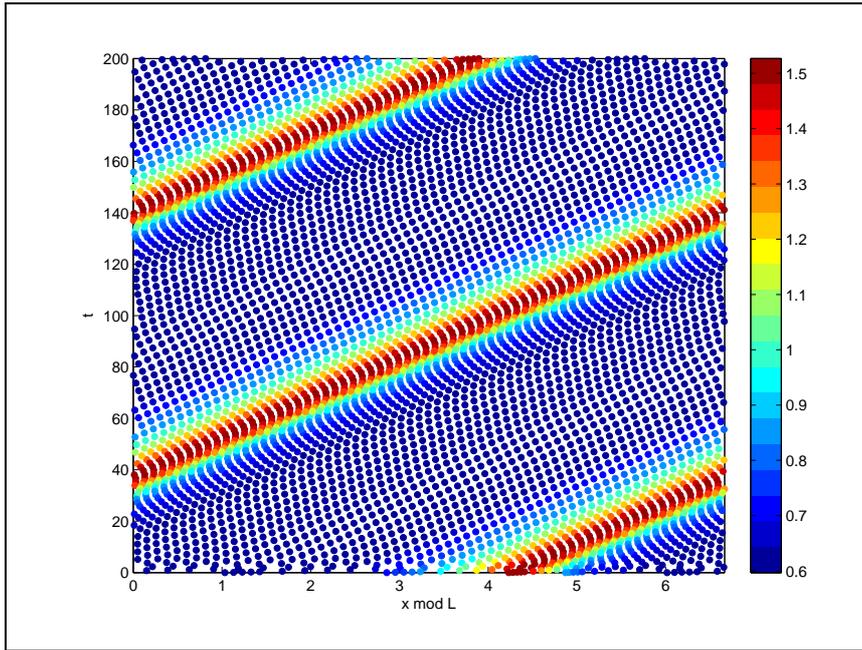
Farbtafel 4.: Darstellung der makroskopischen Geschwindigkeit  $v(x, t)$  auf der Grundlage mikroskopischer Daten.



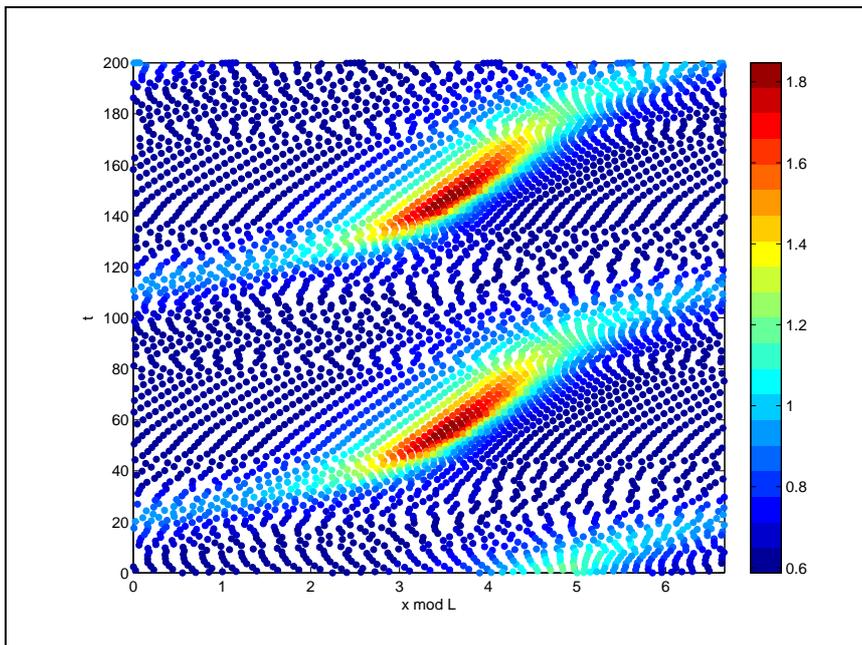
Farbtafel 5.: Darstellung der makroskopischen Dichte  $\rho(x, t)$  auf der Grundlage mikroskopischer Daten.



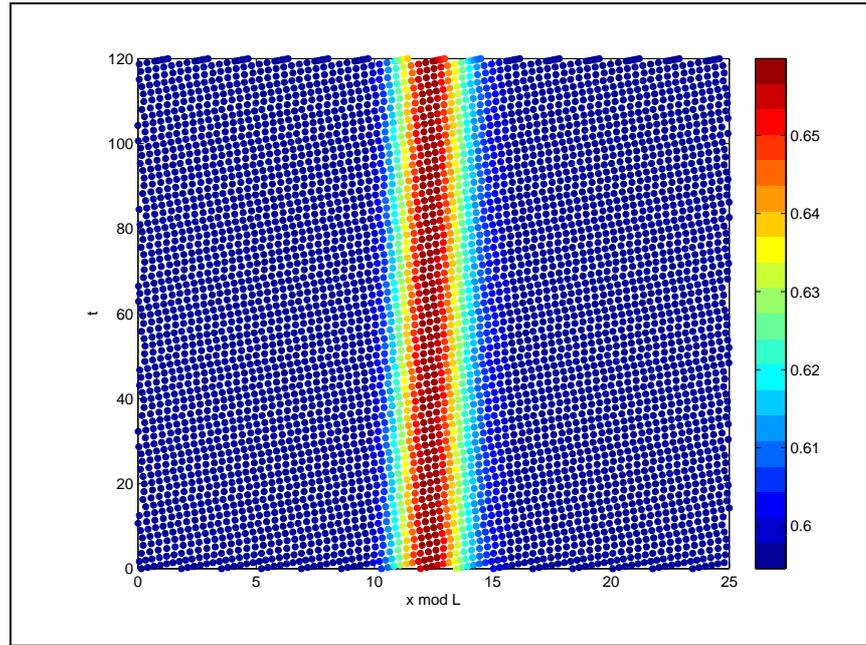
Farbtafel 6.: Berechnung der Steigung einer wandernden Welle (Wellengeschwindigkeit) in der Dichte aus der mikroskopischen Periode  $T_p$ .



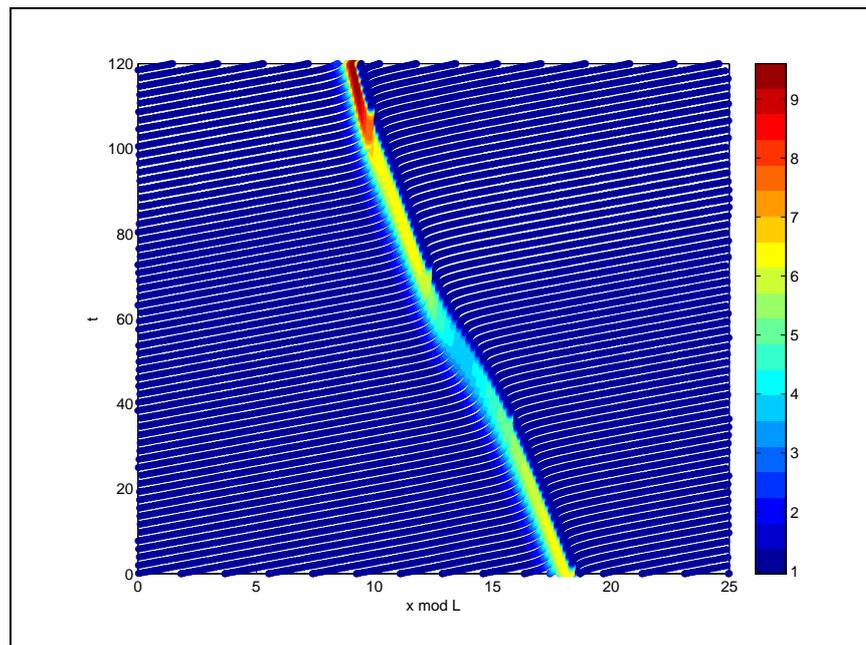
Farbtafel 7.: Vorwärtsstau im makroskopischen Dichtebild ohne Baustelle bei  $N = 5, L \approx 6.67, V_{max} = 1.3, \epsilon = 0$



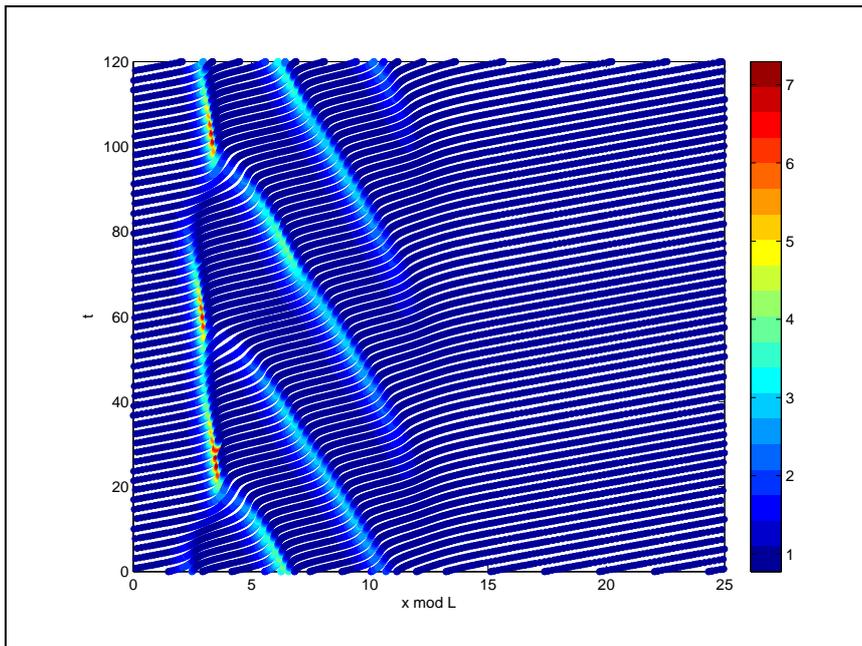
Farbtafel 8.: Vorwärtsstau im makroskopischen Dichtebild mit Baustelle bei  $N = 5, L \approx 6.67, V_{max} = 1.3, \epsilon = 0.1$ .



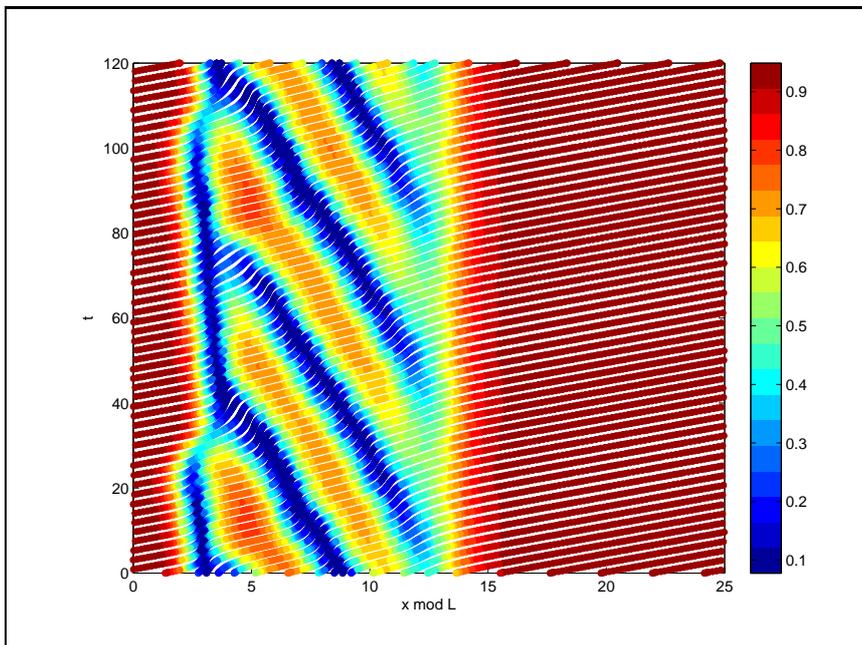
Farbtafel 9.: POM *vor* einer Neimark-Sacker-Verzweigung (geringe mittlere Dichte  $\frac{L}{N}$ ) bei  $N = 15, L = 25, V_{max} = 1, \epsilon = 0.1$ .



Farbtafel 10.: Quasi-POM *nach* einer Neimark-Sacker-Verzweigung (hohe mittlere Dichte  $\frac{L}{N}$ ) bei  $N = 20, L = 25, V_{max} = 1.0, \epsilon = 0.1$ .



Farbtafel 11.: Dichte  $\rho(x, t)$  in Verkehrslage mit vergleichsweise großer Baustelle bei  $N = 20$ ,  $L = 25$ ,  $V_{max} = 1.0$ ,  $\epsilon = 0.32$ . Örtlich begrenzte wandernde Wellen.



Farbtafel 12.: Geschwindigkeit  $v(x, t)$  für obige Situation.

*Farbtafeln*

# Literaturverzeichnis

## **Amann 1983**

AMANN, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 1983

## **Aronson u. a. 1991**

ARONSON, D. G. ; GOLUBITSKY, M. ; MALLET-PARET, J.: Ponies on a merry-go-round in large arrays of Josephson junctions. In: *Nonlinearity* 4 (1991), S. 903–910

## **Aw u. a. 2002**

AW, A. ; KLAR, A. ; MATERNE, T. ; RASCLE, M.: Derivation of Continuum Traffic Models From Microscopic Follow-The-Leader Models. In: *SIAM J. Appl. Math.* 63 (1) (2002), S. 259–278

## **Aw und Rascle 2000**

AW, A. ; RASCLE, M.: Resurrection of 'second order' models of traffic flow. In: *SIAM J. Appl. Math.* 60 (2000), S. 916–938

## **Bando u. a. 1995**

BANDO, M. ; HASEBE, K. ; NAKAYAMA, A. ; SHIBATA, A. ; SUGIYAMA, Y.: Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. In: *Phys. Rev. E* 51 (1995), S. 1035ff

## **Daganzo 1995**

DAGANZO, C.: Requiem for second order fluid approximations of traffic flow. In: *Transportation Research B* 29B (1995), S. 277–286

## **Doedel u. a. 2001**

DOEDEL, E. J. ; PAFFENROTH, R. C. ; CHAMPNEYS, A. R. ; FAIRGRIEVE, T. F. ; KUZNETSOV, Yu. A. ; SANDSTEDT, B. ; WANG, X.: AUTO2000: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equation (with HomCont) / Caltech. 2001. – Forschungsbericht

## **Engelborghs u. a. 2001**

ENGELBORGHs, K. ; LUZYANINA, T. ; SAMAeY, G.: Dde-Biftool v. 2.00: a Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations / Department of Computer Science, Concordia University. 2001. – Forschungsbericht

## **Floquet 1883**

FLOQUET, G.: Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In: *Ann. École Norm. Sup.* 12 (1883), S. 47–88

**Gasser u. a. 2007**

GASSER, I. ; SEIDEL, T. ; SIRITO, G. ; WERNER, B.: Bifurcation analysis of a class of 'car following' traffic models II: Variable Reaction Times and Aggressive Drivers. In: *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica* 2(2) (2007)

**Gasser u. a. 2004**

GASSER, I. ; SIRITO, G. ; WERNER, B.: Bifurcation analysis of a class of 'car following' traffic models. In: *Physica D* 197/3-4 (2004), S. 222–241

**Golubitsky und Stewart 2002**

GOLUBITSKY, M. ; STEWART, I.: *Progress in Mathematics*. Bd. 200: *The Symmetry Perspective*. Birkhäuser, 2002

**Greenberg 2004**

GREENBERG, J. M.: Congestion Redux. In: *SIAM J. Appl. Math.* 64 (4) (2004), S. 1175–1185

**Greenberg u. a. 2003**

GREENBERG, J. M. ; KLAR, A. ; RASCLE, M.: Congestion on multilane highways. In: *SIAM J. Appl. Math.* 63 (2003), S. 818–833

**Guckenheimer und Holmes 1983**

GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 42: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983

**Hasselblatt und Katok 2003**

HASSELBLATT, B. ; KATOK, A.: *A First Course in Dynamics*. Cambridge University Press, 2003

**Helbing 1997**

HELBING, D.: *Verkehrsdynamik: Neue physikalische Modellierungskonzepte*. Springer, 1997

**Helbing 2001**

HELBING, D.: Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems. In: *Rev. Modern Phys.* 73 (2001), S. 1067–1141

**Hopf 1942**

HOPF, E.: Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. In: *Berichte über die Verhandlungen der sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse* 94 (1942)

**Huijberts 2002**

HUIJBERTS, H. J. C.: Analysis of a continuous car-following model for a bus route: existence, stability and bifurcation of synchronous motions. In: *Physica A* 308 (2002), S. 489–517

**Igarashi u. a. 2001**

IGARASHI, Y. ; ITOH, K. ; NAKANISHI, K. ; OGURA, K. ; YOKOKAWA, K.: Bifurcation phenomena in the optimal velocity model for traffic flow. In: *Phys. Rev. E* 64 (2001), S. 047102

**Jäger 2006**

JÄGER, A.: *Retardierte Differentialgleichungen in mikroskopischen Verkehrsflussmodellen – Ein Tool zum Finden periodischer Lösungen*, Department Mathematik, Universität Hamburg, Diplomarbeit, 2006

**Kerner 2004**

KERNER, B. S.: *The Physics of Traffic: empirical freeway pattern features, engineering applications, and theory*. Springer, 2004 (Understanding Complex Systems)

**Kuznetsov 1998**

KUZNETSOV, Y. A.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 112: *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 1998

**Kuznetsov u. a. 1992**

KUZNETSOV, Yu. A. ; MURATORI, S. ; RINALDI, S.: Bifurcations and chaos in a periodic predator-prey model. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2 (1) (1992), S. 117–128

**Leite und Golubitsky 2006**

LEITE, M. ; GOLUBITSKY, M.: Homogeneous Three-Cell Networks. In: *Nonlinearity* 19 (2006), S. 2313–2363

**Lighthill und Whitham 1955**

LIGHTHILL, M. J. ; WHITHAM, G. B.: On kinematic waves: II. A theory of traffic on long crowded roads. In: *Proc. R. Soc. A* 229 (1955), S. 317–345

**Mahnke und Kaupužs 1999**

MAHNKE, R. ; KAUPUŽS, J.: Stochastic theory of freeway traffic. In: *Phys. Rev. E* 59 (1) (1999), S. 117–125

**Marsden und McCracken 1976**

MARSDEN, J. E. ; MCCRACKEN, M.: *Applied Mathematical Sciences*. Bd. 19: *The Hopf Bifurcations and Its Applications*. Springer, 1976

**Olmos und Munoz 2004**

OLMOS, L.E. ; MUNOZ, J.D: A cellular automaton model for the traffic flow in Bogota. In: *Int. J. Modern Physics C* 15 No. 10 (2004), S. 1397–1411

**Orosz u. a. 2005**

OROSZ, G. ; KRAUSKOPF, B. ; WILSON, R. E.: Bifurcations and multiple traffic jams in a car-following model with reaction-time delay. In: *Physica D* 211 (2005), S. 277–293

**Orosz und Stépán 2006**

OROSZ, G. ; STÉPÁN, G.: Subcritical Hopf bifurcations in a car-following model with reaction-time delay. In: *Proc. R. Soc.* 462 (2006), S. 2643–2670

**Orosz u. a. 2004**

OROSZ, G. ; WILSON, R. E. ; KRAUSKOPF, B.: Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time. In: *Phys. Rev. E* 70 (2004), S. 1–10

**Payne und FREFLO 1979**

PAYNE, H. J. ; FREFLO: A macroscopic simulation model of freeway traffic. In: *Transportation Research* 722 (1979), S. 68–77

**Safonov u. a. 2002**

SAFONOV, L. A. ; TOMER, E. ; STRYGIN, V. V. ; ASHKENAZY, Y. ; HAVLIN, S.: Multifractal chaotic attractors in a system of delay-differential equations modeling road traffic. In: *Chaos* 12(4) (2002), S. 1006–1014

**Schadschneider und Schreckenberg 1993**

SCHADSCHNEIDER, A. ; SCHRECKENBERG, M.: Cellular Automaton Models and Traffic Flow. In: *J. Physics A: Math. Gen.* 26 (1993), S. L679–L683

**Siebel und Mauser 2006**

SIEBEL, F. ; MAUSER, W.: On the Fundamental Diagram of Traffic Flow. In: *SIAM J. Appl. Math.* 66 (4) (2006), S. 1150–1162

**Stumpf 2005**

STUMPF, E.: *Einführung in die Theorie der retardierten Funktionaldifferentialgleichungen anhand eines Verkehrsmodells.*, Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg, Diplomarbeit, 2005

**Whitham 1974**

WHITHAM, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves.* Wiley, New York, 1974

## Zusammenfassung

Mikroskopische Verkehrsmodelle beschreiben die Bewegungen einer festen Anzahl von  $N$  Fahrzeugen auf einer (häufig zum Kreis geschlossenen) Straße. Für die Untersuchung der Dynamik ist es bereits durchaus üblich eine Stabilitäts- und Verzweigungsanalyse sogenannter quasi-stationärer Lösungen, die in den Abständen und Geschwindigkeiten konstant sind, durchzuführen.

In der vorliegenden Arbeit wird dieser Ansatz verallgemeinert, um eine größere Bandbreite von Verkehrsphänomenen – insbesondere ortsabhängige Ereignisse wie Baustellen – untersuchen zu können. Im ersten Teil zeige ich die Existenz bestimmter Rotationslösungen für eine durch eine Baustelle gestörte Situation. Die verzweigungstheoretischen Ergebnisse aus dem bereits bekannten ungestörten Fall werden bestätigt.

Der zweite Teil ist einer verbesserten Zusammenarbeit zwischen der mikroskopischen und der makroskopischen Verkehrsmodellierung gewidmet. Dort werden die Ergebnisse der Kreisverkehrsmodelle makroskopisch dargestellt und interpretiert. Es zeigt sich, dass sich bestimmte makroskopische Größen wie die Geschwindigkeit einer wandernden Welle aus mikroskopischen Kennzahlen wie der Hopf-Periode berechnen lassen. Neben Beschreibungen durch  $x$ - $t$ -Diagramme nutze ich auch die Darstellung über sogenannte Fundamentaldiagramme des Verkehrsflusses.



# Lebenslauf

Tilman Seidel  
geboren am 1.6.1978 in Göttingen  
als Sohn von Inse und Hans-Eberhard Seidel

## Bildungsweg

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| <b>10/2004 - 9/2007</b> | Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Universität Hamburg, Fachbereich (später Department) Mathematik, und Promotionsstudent              |
| <b>10/1999 - 6/2004</b> | Studium der Mathematik (Anwendungsfach: Meteorologie) an der Universität Hamburg   |
| <b>9/1998 - 9/1999</b>  | Studium der Medientechnik an der Fachhochschule Hamburg  |
| <b>7/1997 - 8/1998</b>  | Zivildienst beim Rettungsdienst Goslar, Ausbildung zum Rettungssanitäter   |
| <b>1984 - 1997</b>      | Grundschule in Göttingen und Goslar, Orientierungsstufe und Gymnasium in Goslar (Ratsgymnasium, Leistungsfächer Mathematik und Physik) |

## Vorträge Verkehrsmodellierung

- |                  |   |
|------------------|---|
| <b>30.5.2007</b> | SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems in Snowbird, Utah, USA   |
| <b>13.7.2006</b> | 17. internationales Kolloquium über Anwendungen der Informatik und der Mathematik in Architektur und Bauwesen in Weimar |
| <b>26.6.2006</b> | AIMS' Sixth International Conference on Dyn. Systems, Diff. Equations and Applications in Poitiers, Frankreich          |
| <b>30.5.2006</b> | 77. Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) in Berlin                               |
| <b>16.5.2006</b> | AG Technomathematik, TU Kaiserslautern  |
| <b>4.6.2005</b>  | Norddeutsches Kolloquium über Angewandte Analysis und Numerische Mathematik in Braunschweig                             |
| <b>30.3.2006</b> | 76. Jahrestagung der GAMM in Luxemburg  |

Hamburg, den 28. September 2007