

**Untersuchungen zur Klassifikation von
Benz-Ebenen durch Schließungssätze**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Olaf Bröcker
aus Lüneburg

Hamburg
1999

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. H.-J. Samaga
und Prof. Dr. Dr. h.c. W. Benz

Hamburg, den 7. Mai 1999

Prof. Dr. H. Daduna,
Dekan des Fachbereiches Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlegende Begriffe und Strukturen	4
1.1 Definitionen und Bezeichnungen	4
1.2 Ableitung einer Benz-Ebene	8
1.3 Miquelsche Benz-Ebenen	9
1.4 Nicht-miquelsche Benz-Ebenen	15
1.5 Die Schließungssätze: $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen	21
2 Klassifikation durch Schließungssätze	23
2.1 Grundlegende Ergebnisse	23
2.2 Allgemeine Miquel-Bedingung	26
2.3 Klassifikation von Möbius-Ebenen	28
2.3.1 Ausartungen des Satzes von Miquel	28
2.3.2 Ergebnisse	30
2.4 Klassifikation von Laguerre-Ebenen	37
2.4.1 Ausartungen des Satzes von Miquel	37
2.4.2 Ergebnisse	40
2.5 Klassifikation von Minkowski-Ebenen	70
2.5.1 Ausartungen des Satzes von Miquel	70
2.5.2 Ergebnisse	75
3 Sätze vom büschelartigen Typ	98

3.1	Der Büschelsatz in linearen Räumen	98
3.2	Der Büschelsatz in Laguerre-Ebenen	101
3.3	Büschelsatzausartungen in Laguerre-Ebenen	101
3.4	Ergebnisse	108
	Überblick über die miquelschen Bedingungen	111
	Möbius-Fall	111
	Laguerre-Fall	113
	Minkowski-Fall	116
	Überblick über die büschelartigen Bedingungen	120
	Laguerre-Fall	120
	Symbolverzeichnis	122
	Literaturverzeichnis	123
	Index	127
	Zusammenfassung	129
	Abstract	130
	Lebenslauf	131

Einleitung

Charakterisierungsfragen bestimmen weite Teile der Mathematik. Dahinter steht die Idee einer möglichst einfachen Beschreibung bestimmter Sachverhalte bzw. Strukturen. So spiegeln zum Beispiel die Peano-Axiome vollständig die Struktur dessen wieder, was wir in unserem unpräzisen alltäglichen Sprachgebrauch unter *Zahlen* bzw. *zählen* verstehen. Diese Axiome liefern alle Eigenschaften, die wir den *Zahlen* zuschreiben wollen, wir charakterisieren also durch eine Axiomatik die *Zahlen*. In der Geometrie gibt es ebenfalls zahlreiche Charakterisierungsfragen, man denke zum Beispiel an pappus'sche oder desargues'sche Ebenen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Charakterisierung von Benz-Ebenen durch Schließungssätze. Die grundlegende Struktur ist hierbei durch die Axiomatik der Benz-Ebene gegeben, eine Axiomatik, die ihrerseits eine Zusammenfassung der Axiomaten von Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen darstellt. Zur Charakterisierung bestimmter Benz-Ebenen, d.h. zur Klassifikation, haben sich in der Vergangenheit zwei Schließungssätze als wichtig herausgestellt, der Satz von Miquel und der Büschelsatz, die unter die $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen fallen. Zwei recht einfache und übersichtliche Konstellationen von Punkten und Kreisen – den grundlegenden Objekten von Benz-Ebenen – können dazu benutzt werden, Benz-Ebenen als eine gewisse algebraische Struktur darzustellen, man spricht auch von der Koordinatisierung von Benz-Ebenen. Der Satz von Miquel und der Büschelsatz haben also in Benz-Ebenen eine analoge Bedeutung wie der Satz von Pappus bzw. der Satz von Desargues in projektiven Ebenen. So kann man Benz-Ebenen, die den Satz von Miquel erfüllen, mit nicht-trivialen Ebenenschnitten mit einem Ellipsoid, Kegel ohne Spitze über einer Ellipse bzw. einschaligen Hyperboloid in projektiven Räumen $PG(3, \mathbb{F})$ über einem kommutativen Körper \mathbb{F} identifizieren. Gilt statt des Satzes von Miquel der Büschelsatz, so ist der zugrundeliegende Körper nicht notwendig kommutativ und es sind auch Ebenenschnitte mit Ovoiden und Kegeln ohne Spitze über Ovalen zulässig. Wir stellen in Kapitel 1 die grundlegenden Strukturen, die Schließungssätze sowie

Beispiele für miquelsche und nicht-miquelsche Benz-Ebenen vor.

In den Voraussetzungen des Satzes von Miquel und des Büschelsatzes treten acht Punkte auf, die in einer bestimmten Weise mit sechs Kreisen inzidieren. Gibt es zu zwei Punkten einen Kreis, der mit beiden Punkten inzidiert, so sagen wir, daß die Punkte verbindbar sind. Im Vordergrund dieser Arbeit steht die Fragestellung, ob Charakterisierungen auch noch mit abgeschwächten Voraussetzungen im Satz von Miquel und im Büschelsatz möglich sind. Wir lassen die Anforderungen an die Anzahl der Punkte sowie die Notwendigkeit der Verbindbarkeit von zwei beteiligten Punkten fallen und erhalten eine große Vielfalt von *Bedingungen vom miquelschen Typ* bzw. *Bedingungen vom büschelartigen Typ* mit reduzierter Punktezahl und mit nicht verbindbaren Punkten. Es sind dies insgesamt 119 Bedingungen vom miquelschen Typ in Benz-Ebenen und 17 Bedingungen vom büschelartigen Typ in Laguerre-Ebenen, die in den Abschnitten 2.3.1, 2.4.1, 2.5.1 bzw. 3.3 entwickelt werden. Die Hauptaufgabe lautet nun, unter diesen Bedingungen Verbindungen zu finden, d.h. wir folgern aus bestimmten Bedingungen den Satz von Miquel, der bekannterweise miquelsche Benz-Ebenen charakterisiert. Wir bauen auf den Ergebnissen von Artzy [3], Benz [8], [7], [12], [11], Chen [19], Samaga [46], [47], [48], Schaeffer [50], [49] und v.d. Waerden [56] auf und erhalten zusammenfassend als Resultat, daß

- in Möbius-Ebenen alle 8- und 7-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Möbius-Ebenen charakterisieren,
- in Möbius-Ebenen mindestens drei der sieben 6-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Möbius-Ebenen charakterisieren,
- in Möbius-Ebenen 5-Punkte- und 4-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ existieren, die miquelsche Möbius-Ebenen nicht charakterisieren,
- in Laguerre-Ebenen drei der vier 8-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Laguerre-Ebenen charakterisieren,
- in Laguerre-Ebenen eine 8-Punkte-Bedingung vom miquelschen Typ die miquelschen Laguerre-Ebenen nicht charakterisiert,
- in Laguerre-Ebenen alle 7-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Laguerre-Ebenen charakterisieren,
- in Laguerre-Ebenen elf der siebzehn 6-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Laguerre-Ebenen charakterisieren,
- in Laguerre-Ebenen zwei 6-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Laguerre-Ebenen nicht charakterisieren,
- in Minkowski-Ebenen acht der zehn 8-Punkte-Bedingungen vom miquelschen Typ miquelsche Minkowski-Ebenen charakterisieren.

Für den Büschelsatz liegen in der Literatur weit weniger Arbeiten vor als für

den Satz von Miquel. Zu Ausartungsfragen des Büschelsatzes findet man beispielsweise die grundlegende Arbeit von Benz [11]. In der vorliegenden Arbeit erarbeiten wir einen systematischen Zugang zu den Ausartungen des Büschelsatzes in Laguerre-Ebenen. Weiterhin werden zahlreiche Zusammenhänge zwischen den Bedingungen hergestellt, die aber nicht zur Charakterisierung von miquelschen bzw. ovoidalen Ebenen ausreichen.

Die Fragestellungen dieser Arbeit sind hauptsächlich aus Arbeiten von Prof. Dr. H.-J. Samaga hervorgegangen, insbesondere standen Fragen nach abgeschwächten miquelschen Bedingungen im Vordergrund, wobei keine weiteren Axiome zu denen der Benz-Ebene hinzugenommen werden sollten. Ich danke hiermit Herrn Prof. Dr. H.-J. Samaga für die Aufgabenstellung und Betreuung der Arbeit. Einen besonderen Dank möchte ich auch an Herrn Dr. M. Hintz aussprechen, der einen großen Teil der Beweise aus Abschnitt 2.4.2 gelesen hat.

Kapitel 1

Grundlegende Begriffe und Strukturen

In diesem Kapitel geben wir die Definition für Benz-Ebenen¹ an. Der Namensgeber dieser Inzidenzstruktur ist W. Benz, der Kreis-Ebenen systematisch untersucht und u.a. eine einheitliche algebraische Grundlegung dieser durchgeführt hat².

Aus der Definition der Benz-Ebene werden sich drei verschiedene Typen von Benz-Ebenen ergeben; dies sind die Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Ebenen (s. Abschnitt 1.1). In Abschnitt 1.2 gehen wir auf die innere Struktur einer Benz-Ebene, der sogenannten *Ableitung* näher ein.

Verschiedene Klassen von Benz-Ebenen, insbesondere deren Konstruktion, stehen im Mittelpunkt der Abschnitte 1.3 und 1.4.

1.1 Definitionen und Bezeichnungen

Es sei \mathcal{P} eine Menge, deren Elemente wir *Punkte* nennen. Es sei weiterhin $\mathcal{G} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{P})$; die Elemente von \mathcal{G} nennen wir *Erzeugende* und schließlich sei I eine Indexmenge.

Definition 1.1. $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *Gitter*, wenn es eine Partition $\mathcal{G} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i$ von \mathcal{G} gibt, so daß gilt:

(G1) Für alle $P \in \mathcal{P}$ und für alle $i \in I$ existiert genau ein $g \in \mathcal{G}_i$ mit $P \in g$.

¹Diese Definition geht auf Kroll[38] und Steinke[53] zurück.

²Siehe auch Benz[10].

- (G2) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ und für alle $(g, h) \in \mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j$ gilt $|g \cap h| = 1$.
 $|g| \geq 2$.

Punkte P, Q , die nicht gemeinsam auf einer Erzeugenden liegen, nennen wir *nicht-parallel* („ $P \parallel Q$ “). Punkte P, Q , die auf einer gemeinsamen Erzeugenden liegen sollen *parallel* heißen („ $P \parallel Q$ “). Sei $\mathcal{K} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{P})$ (die Elemente von \mathcal{K} nennen wir *Kreise*). Für $M \subset \mathcal{P}$ definieren wir $\mathcal{K}(M) = \{K \in \mathcal{K} \mid M \subset K\}$; M heißt *konzyklisch*, wenn $\mathcal{K}(M) \neq \emptyset$.

Definition 1.2. $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ heißt *Benz-Ebene*, wenn $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ein Gitter ist mit $|I| \leq 2$ und wenn die folgenden Axiome gelten:

- (B1) Jede Erzeugende schneidet jeden Kreis in genau einem Punkt.
 (B2) Drei paarweise nicht-parallele Punkte legen einen Kreis eindeutig fest.
 (B3) Zu jedem Kreis k , zu jedem Punkt $P \in k$ und zu jedem nicht zu P parallelen Punkt $Q \in \mathcal{P} \setminus k$ existiert genau ein Kreis l mit $k \cap l = \{P\}$.
 (B4) Es existiert ein Kreis mit mindestens drei Punkten und ein weiterer Punkt außerhalb des Kreises. Jeder Kreis enthält mindestens einen Punkt.

Definition 1.3. Eine Benz-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ heißt *Möbius-, Laguerre-* bzw. *Minkowski-Ebene*, wenn $|I|$ gleich 0, 1 bzw. 2 ist.

Durch \mathcal{G} werden Äquivalenzrelationen $\parallel_i, i \in I$ auf \mathcal{P} induziert, denn trivialerweise gilt für alle Punkte $P: P \parallel_i P, i \in I$. Weiterhin gilt für alle Punkte $P, Q: \text{Aus } P \parallel_i Q \text{ folgt } Q \parallel_i P \text{ für } i \in I$. Schließlich folgt für drei Punkte P, Q, R mit $P \parallel_i Q$ und $Q \parallel_i R$, daß sowohl P und Q als auch Q und R auf einer gemeinsamen Erzeugenden liegen. Aus dem Gitteraxiom (G1) folgt unmittelbar $P \parallel_i R, i \in I$.

Äquivalenzklassen werden wir für $P \in \mathcal{P}$ mit $[P]_{\parallel_i}$ bezeichnen. Äquivalenzklassen sind also gerade die Erzeugenden. Im Laguerre-Fall werden wir in späteren Abschnitten abkürzend \parallel benutzen. Im Minkowski-Fall sprechen wir auch von *1-parallel* bzw. *2-parallel*, je nachdem, in welcher Relation die Punkte stehen. Später (s. Abschn. 1.2) wird klar werden, warum in der Definition der Benz-Ebene die Einschränkung $|I| \leq 2$ gegeben ist.

Bemerkung 1.4. i) Man kann leicht zeigen, daß bei Laguerre- und Minkowski-Ebenen die Tatsache, daß jeder Kreis mindestens einen Punkt enthält, aus den Axiomen folgt, denn angenommen, die leere Menge wäre ein Kreis; dann gibt es nach (B4) einen Punkt und nach (B1) einen dazu parallelen

Punkt in der leeren Menge, Widerspruch. Für Möbius-Ebenen müssen wir allerdings fordern, daß die leere Menge kein Kreis ist.

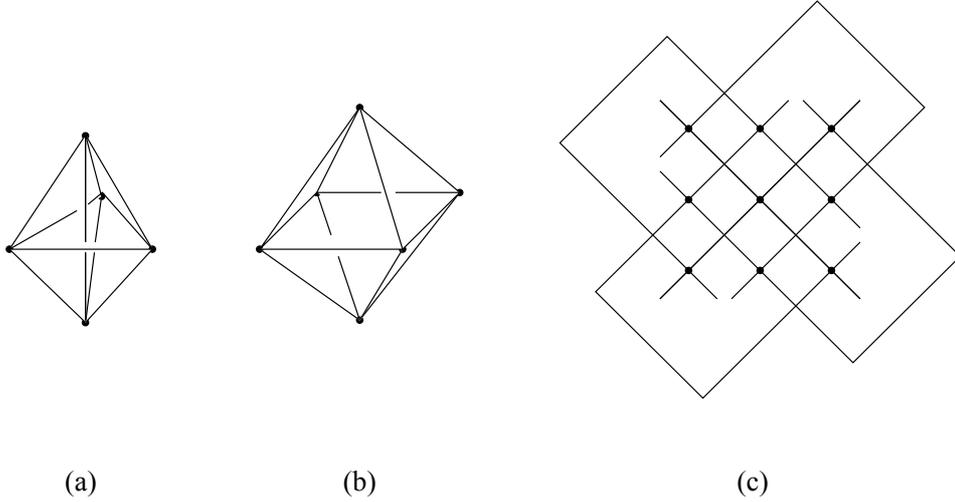
ii) Für Laguerre- und Minkowski-Ebenen folgt wegen (B4) und auf Grund der Existenz mindestens eines Parallelismus, daß jeder Kreis mindestens drei Punkte enthält. Für Möbius-Ebenen zeigen wir diese Tatsache wie folgt: Zunächst schließen wir den Fall aus, daß es 1-elementige Kreise gibt: Angenommen, es gibt einen Kreis $l = \{P\}$. Nach (B4) gibt es einen Kreis l_1 mit mindestens drei Punkten A, B, C und einen weiteren, nicht auf l_1 liegenden Punkt D . In jedem Fall ($P \notin \{A, B, C, D\}$, $P \in \{A, B, C\}$ und $P = D$) können wir zwei verschiedene Berührungskreise ($\neq l$) an l in P durch einen weiteren, von P verschiedenen Punkt, finden; Widerspruch. Es kann auch keine 2-elementigen Kreise geben, denn angenommen, es gibt einen Kreis $l = \{P, Q\}$ mit $P \neq Q$, dann gibt es nach (B4) zwei Punkte A, B , so daß die vier Punkte A, B, P, Q nicht gemeinsam auf einem Kreis liegen. Es seien l_1 und l_2 die eindeutig bestimmten Kreise durch die Punkte A, B und P bzw. A, B und Q . Nach (B3) existiert ein eindeutig bestimmter Kreis l_3 , der A und Q enthält und für den $l_1 \cap l_3 = \{A\}$ gilt. Wegen $B \notin l_3$ gilt $l_2 \neq l_3$ und wegen $P \notin l_3$ folgt $l_3 \cap l = \{Q\}$. Andererseits gilt nach Konstruktion $l_2 \cap l = \{Q\}$, Widerspruch zur Eindeutigkeit des Berührungskreises.

In Figur 1.1 sind die Minimalmodelle angegeben, die man je nach vorausgesetzter Indexmenge I erhält. Figur 1.1(a) zeigt das Minimalmodell einer Möbius-Ebene. Je drei Punkte bilden einen Kreis, d.h. man erhält eine Struktur aus fünf Punkten und zehn Kreisen.

In Figur 1.1(b) ist das Minimalmodell einer Laguerre-Ebene angegeben. Nach Voraussetzung gibt es eine Parallelklasse mit mindestens zwei verschiedenen Punkten. Durch die Existenz weiterer Kreise gelangt man zu einer Struktur aus sechs Punkten, acht Kreisen und drei Parallelklassen mit je zwei Punkten. In Figur 1.1(b) sind diejenigen Punkte parallel, die nicht durch eine Linie verbunden sind. Je drei Punkte, die paarweise durch eine Linie verbunden sind, stellen einen Kreis dar.

Das Minimalmodell einer Minkowski-Ebene ist in Figur 1.1(c) zu sehen, Geht man wegen (B4) von einem Kreis mit drei Punkten aus und berücksichtigt (G2), so gelangt man zu neun Punkten. Verbindet man jetzt noch je drei nicht-parallele Punkte zu einem Kreis (s. Figur 1.1(c)), so erhält man eine Struktur aus neun Punkten, sechs Kreisen und sechs Parallelklassen (je drei für jeden Parallelismus) mit je drei Punkten. Auch hier besteht jeder Kreis aus genau drei Punkten. Es sei angemerkt, daß wir zur Konstruktion dieser Ebene das Axiom (B3) nicht benötigt haben. Benz-Ebenen mit $|I| = 2$,

jedoch ohne (B3) werden auch (B^*) -Geometrien genannt³. Damit ist Figur 1.1(c) auch das Minimalmodell einer (B^*) -Geometrie.



FIGUR 1.1

Wir schließen diesen Abschnitt mit der

Definition 1.5. Für eine Benz-Ebene mit Indexmenge $I \in \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ und Punkte A_1, \dots, A_n , $n \geq 3$ definieren wir

- i) $(A_1 A_2 \cdots A_n)_r \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{K}(\{A_1, \dots, A_n\}) \neq \emptyset.$
- ii) $(A_1 A_2 \cdots A_n)_a \quad :\Leftrightarrow \quad$ Für $|I| \geq 1$ existiert genau ein $(g, h) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_{|I|}$ mit $\{A_1, \dots, A_n\} \subset g \cup h$ und es gibt ein $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ mit $A_i \parallel_k A_j$ für ein $k \in I.$
- iii) $(A_1 A_2 \cdots A_n)_{ar} \quad :\Leftrightarrow \quad (A_1 A_2 \cdots A_n)_a$ oder $(A_1 A_2 \cdots A_n)_r.$

Kreise vom Typ i) nennen wir *regulär*, Kreise vom Typ ii) *ausgeartet*. Die Forderung $n \geq 3$ hat zur Folge, daß reguläre und ausgeartete Kreise eindeutig bestimmt sind. In den anderen Fällen geht die Eindeutigkeit verloren. Zum einen bezeichnen wir mit $(A_1 \cdots A_n)_a$ bzw. $(A_1 \cdots A_n)_r$ den durch die Punkte A_1, \dots, A_n eindeutig bestimmten ausgearteten bzw. regulären Kreis, zum anderen fassen wir $(A_1 \cdots A_n)_a$ bzw. $(A_1 \cdots A_n)_r$ als die Menge derjenigen Punkte auf, die mit dem entsprechenden Kreis inzidieren. Eine analoge Bedeutung hat $(A_1 \cdots A_n)_{ar}$. Die Menge aller regulären (bzw. ausgearteten) Kreise bezeichnen wir mit \mathcal{K}_r (bzw. \mathcal{K}_a). Außerdem sei $\mathcal{K}_{ar} = \mathcal{K}_a \cup \mathcal{K}_r$.

³ (B^*) soll an Hans Beck (1876-1942) erinnern, der bereits 1910 in [6] ein Modell für die pseudo-euklidische Geometrie angab.

1.2 Ableitung einer Benz-Ebene

Für jeden Punkt X sei X_{\parallel} die Menge aller zu X parallelen Punkte und \mathcal{G}_X die Menge aller Parallelklassen, die mindestens zwei Punkte enthalten, aber nicht X . Wir betrachten eine Benz-Ebene $\mathbb{B} = (\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ und einen festen Punkt $A \in \mathcal{P}$. Dann ist

$$\mathbb{A}(\mathbb{B}, A) := (\mathcal{P} \setminus A_{\parallel}, \{k \in \mathcal{K} \mid A \in k\} \cup \mathcal{G}_A, \epsilon)$$

bekanntlich eine affine Ebene. Wir nennen diese Ebene die *im Punkt A abgeleitete affine Ebene der Benz-Ebene \mathbb{B}* . Den projektiven Abschluß dieser Ebene bezeichnen wir mit $\mathbb{P}(\mathbb{B}, A)$, wobei l_{∞} die zugefügte Ferngerade sei. Da jeder Parallelismus \parallel_i eine Parallelklasse in $\mathbb{A}(\mathbb{B}, A)$ induziert, können wir diese Parallelklasse in $\mathbb{P}(\mathbb{B}, A)$ als Fernpunkt ∞_i interpretieren.

Wenn k ein Kreis ist, der A nicht enthält, definieren wir

$$\bar{k} := (k \setminus A_{\parallel}) \cup W,$$

wobei $W \subset l_{\infty}$ die Menge aller Fernpunkte ist, die von Parallelismen induziert werden. Jede Gerade der abgeleiteten projektiven Ebene – dies sind definitionsgemäß die Kreise von \mathbb{B} , die A enthalten – hat höchstens zwei Punkte mit k gemeinsam. Für jeden Punkt $B \in k$, B nicht-parallel zu A , ist der Kreis $l \in \mathcal{K}_r$, der A enthält und k in B berührt, in \mathbb{A} eine eindeutig bestimmte Tangente \bar{l} an \bar{k} in B . Wir geben die

Definition 1.6. Eine nicht-leere Punktmenge \mathcal{O} einer projektiven Ebene heißt *Oval*, wenn gilt:

- (i) Jede Gerade hat mit \mathcal{O} höchstens zwei Punkte gemeinsam.
- (ii) An jedem Punkt von \mathcal{O} existiert genau eine Gerade der projektiven Ebene, die genau den gegebenen Punkt mit \mathcal{O} gemeinsam hat (*Tangente*).

Das bedeutet, daß jeder Kreis $k \in \mathcal{K}_r$, der den Ableitungspunkt A nicht enthält, ein Oval \bar{k} in der projektiven Ableitung $\mathbb{P}(\mathbb{B}, A)$ induziert, falls W

höchstens zwei Punkte enthält. In Möbius-Ebenen ist die Menge W leer, d.h. $l_\infty \cap \bar{k}$ ist leer für jedes Oval \bar{k} . Damit gilt $k = \bar{k}$. In Laguerre-Ebenen besteht W aus genau einem Punkt. Damit ist l_∞ Tangente an jedem Oval \bar{k} . In Minkowski-Ebenen enthält W genau zwei Punkte, so daß l_∞ mit jedem Oval \bar{k} zwei Punkte gemeinsam hat.

Würden wir die Existenz von mehr als zwei Parallelismen voraussetzen, so gäbe es eine Gerade, die mit \bar{k} mehr als zwei Punkte gemeinsam hat, d.h. \bar{k} ist kein Oval. Die Existenz solcher Ovale ist grundlegend für die Koordinatisierung einer Benz-Ebene ist.

Leitet man die in Figur 1.1 angegebenen Minimal-Ebenen in einem Punkt ab, so erhält man in allen drei Fällen die aus vier Punkten und sechs Geraden bestehende minimale affine Ebene.

1.3 Miquelsche Benz-Ebenen

Es sei $PG(3, \mathbb{F})$ der 3-dimensionale projektive Raum über einem Körper \mathbb{F} , weiter sei \mathbb{P} die Punktmenge, \mathbb{G}_Π die Geradenmenge und \mathbb{E} die Ebenenmenge des zugrundeliegenden projektiven Raumes.

Definition 1.7. \mathcal{Q} heißt *Quadroid*, wenn \mathcal{Q} kein Unterraum oder Ebenenpaar ist und wenn folgende Axiome gelten:

(Q1) Für alle $g \in \mathbb{G}_\Pi$ mit $|g \cap \mathcal{Q}| \geq 3$ gilt $g \subset \mathcal{Q}$.

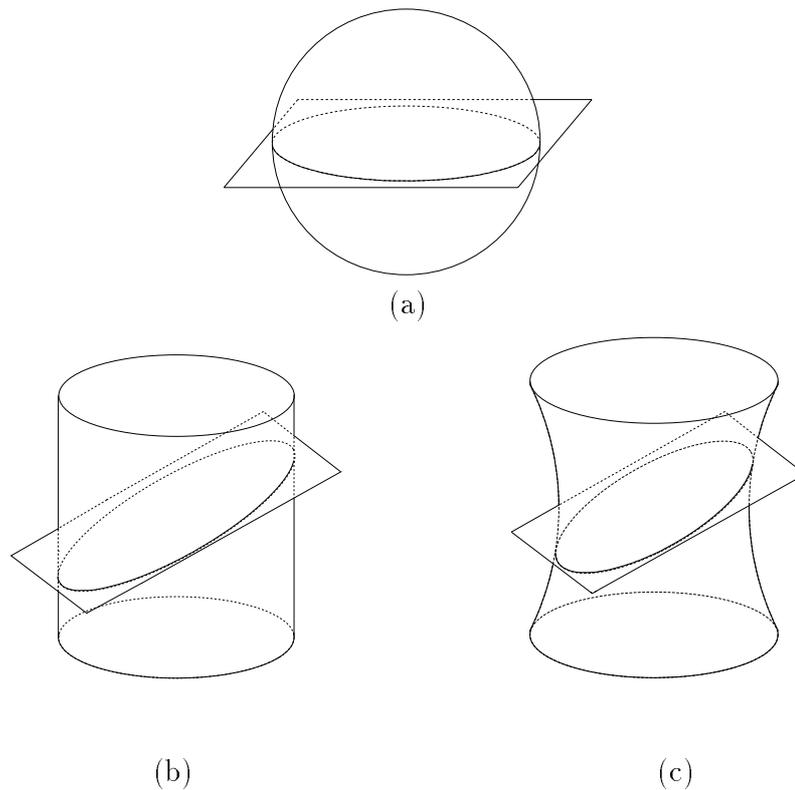
(Q2) Für alle $P \in \mathcal{Q}$ gilt:

$$E_P := \{g \in \mathbb{G}_\Pi \mid g \cap \mathcal{Q} = \{P\} \text{ oder } P \in g \subset \mathcal{Q}\} \in \mathbb{E} \text{ oder } \mathbb{P}.$$

Es sei nun $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ ein Quadroid ⁴ in $PG(3, \mathbb{F})$. Weiter sei $S = \{q \in \mathcal{Q} \mid E_q = \mathbb{P}\}$, $\mathbb{G}' = \{g \in \mathbb{G}_\Pi \mid g \subset \mathcal{Q}\}$, $\mathbb{G} = \{g \setminus S \mid g \in \mathbb{G}'\}$, $\mathcal{K} = \{E \cap \mathcal{Q} \mid E \in \mathbb{E}, E \cap \mathcal{Q} \in \mathcal{O}_E\}$, wobei \mathcal{O}_E die Menge der Ovale in der Ebene E sei (siehe Definition 1.6 für die Definition eines Ovals). Je nach Beschaffenheit der Menge \mathbb{G} werden hierdurch gewisse Äquivalenzrelationen auf $\mathcal{Q} \setminus S$ induziert. Die daraus resultierenden Äquivalenzklassen seien in \mathcal{G} zusammengefaßt. Nach [30] ist die Struktur $(\mathcal{Q} \setminus S, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ eine Benz-Ebene.

Definition 1.8. Benz-Ebenen, die isomorph zu einer Benz-Ebene $(\mathcal{Q} \setminus S, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ sind, nennen wir *ovoidal*; falls das zugrundeliegende Quadroid eine Quadrik in $PG(3, \mathbb{F})$ mit kommutativem Körper \mathbb{F} ist, nennen wir die Benz-Ebene *miquelsch*.

⁴Siehe auch Kroll [38].



FIGUR 1.2

Es sind die nicht-ausgearteten Quadriken vom Index 1, die einschaligen Hyperboloide und alle Kegel genau die Quadriken, die Quadroide sind. Siehe Figur 1.2 zur Veranschaulichung der Konstruktion ((a) Möbius-Ebene, (b) Laguerre-Ebene, (c) Minkowski-Ebene). Gelegentlich werden die miquelschen Benz-Ebenen auch *klassische* Benz-Ebenen genannt.

Wir geben nun im miquelschen Fall die explizite Konstruktionsmethode an und erhalten durch stereographische Projektion auch eine ebene Darstellung der miquelschen Benz-Ebenen. Die hier gewählte Konstruktion miquelscher Benz-Ebenen findet man in Fisher [23]. In der genannten Arbeit werden alle Betrachtungen für \mathbb{R} durchgeführt, können aber ohne weiteres auf beliebige Körper \mathbb{F} erweitert werden. Lediglich der Fall $\text{char } \mathbb{F} = 2$ bedarf einer besonderen Behandlung. Hier unterscheiden sich die Laguerre-Ebenen auf fundamentale Weise von Möbius- bzw. Minkowski-Ebenen, denn es gilt:

Für je zwei Kreise k und l ist die Menge der Kreise, die k berühren und mit l einen nicht-leeren Durchschnitt haben, entweder eine Menge von Berühr-

*kreisen an l oder keiner dieser Kreise berührt l .*⁵

Aus den hier vorgestellten Modellen ergeben sich durch *stereographische Projektionen* die sogenannten ebenen Modelle.

Wir beginnen mit dem Möbius-Fall und betrachten den 3-dimensionalen reellen Raum. Es sei

$$Q_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die Einheitssphäre und $N = (0, 0, 1)$ ihr *Nordpol*. Wir bilden die Punkte von $Q_1 \setminus \{N\}$ auf die Menge der Punkte der Ebene $E_1 : z = 0$ ab:

$$\sigma_1 : \begin{cases} Q_1 \setminus \{N\} & \Leftrightarrow E_1 \\ X & \Leftrightarrow \overline{NX} \cap E_1 \end{cases}$$

wobei \overline{NX} die Gerade durch die Punkte N und X sei. Den bislang nicht berücksichtigten Punkt N bilden wir auf einen fiktiven Fernpunkt ∞ ab, so daß wir eine fortgesetzte Abbildung

$$\bar{\sigma}_1 : \begin{cases} Q_1 & \Leftrightarrow E_1 \cup \{\infty\} \\ X & \Leftrightarrow \overline{NX} \cap E_1, \text{ falls } X \neq N \\ N & \Leftrightarrow \infty \end{cases}$$

erhalten.

Sei H eine Ebene. Wir sprechen von einem *ebenen Schnitt* $H \cap Q_1$, falls $|H \cap Q_1| > 1$ und nennen einen solchen Schnitt auch *nicht-trivial*. Man kann beweisen (s. Benz [10]):

Satz 1.9. *i) $\bar{\sigma}_1$ ist eine Bijektion von Q_1 auf $E_1 \cup \{\infty\}$.*

ii) Jedes σ_1 -Bild eines ebenen Schnittes ist ein Kreis und jedes σ_1 -Urbild eines Kreises ist ein ebener Schnitt. Ebenenschnitte durch N führen unter $\bar{\sigma}_1$ auf Geraden, die den Punkt ∞ enthalten. \square

Das Ebenenschnittmodell besteht aus den Punkten von Q_1 und den nicht-trivialen Ebenenschnitten von Q_1 . Das aus $\bar{\sigma}_1$ hervorgehende ebene Modell

⁵Dieses Ergebnis basiert auf einer grundlegenden Aussage über Kegel in projektiven Räumen über Körpern der Charakteristik 2; s. Hirschfeld [33].

besteht aus der erweiterten Ebene $E_1 \cup \{\infty\}$, den Kreisen und den um ∞ erweiterten Geraden in dieser Ebene.

Im Laguerre-Fall betrachten wir wieder den 3-dimensionalen reellen Raum. Es sei

$$Q_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 = 1\}$$

der Zylinder mit Radius 1. Der *Nordpol* N sei, wie im Möbius-Fall, der Punkt $(0, 0, 1)$. Es sei g die Menge aller Punkte von Q_2 mit $z = 1$. Wir bilden die Punkte von $Q_2 \setminus g$ auf die Ebene $E_2 : z = 0$ ab:

$$\sigma_2 : \begin{cases} Q_2 \setminus g & \leftrightarrow E_2 \\ X & \leftrightarrow \overline{NX} \cap E_2. \end{cases}$$

Hiermit haben wir eine Bijektion von $Q_2 \setminus g$ auf E_2 . Auch im Laguerre-Fall soll die genannte Abbildung so erweitert werden, daß alle Punkte von Q_2 erfaßt werden. Zur Motivation dieser Fortsetzung geben wir die Projektionsformeln an. Die Abbildungsvorschrift lautet

$$(x, y, z) \xleftrightarrow{\sigma_2} \left(\frac{x}{1 \leftrightarrow z}, \frac{y}{1 \leftrightarrow z} \right)$$

bzw.

$$(x, y) \xleftrightarrow{\sigma_2^{-1}} \left(\frac{2x}{x^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{x^2 \leftrightarrow 1}{x^2 + 1} \right).$$

Ist H eine Ebene, so ist $H \cap Q_2$ ein *ebener* oder *nicht-trivialer Schnitt*, falls H nicht parallel zur Zylinder-Achse $\{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ist. Sei $H : ax + y + bz + c = 0$ die Ebene eines ebenen Schnittes. Dann gilt

$$[H \cap (Q_2 \setminus g)]^{\sigma_2} = \{(x, y) \mid y + \frac{b+c}{2}x^2 + \frac{c \leftrightarrow b}{2} + ax = 0\}.$$

Wegen $H \cap g = \{(0, \leftrightarrow b \leftrightarrow c, 1)\}$ können wir σ_2 fortsetzen durch

$$(0, \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c, 1)^{\sigma_2} = \frac{1}{2}(b+c) \in \mathbb{R}.$$

Damit haben wir

$$\bar{\sigma}_2 : \begin{cases} Q_2 & \Leftrightarrow E_2 \cup \mathbb{R} \\ X & \Leftrightarrow \overline{NX} \cap E_2, \text{ falls } X \notin g \\ X & \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{2}y, \text{ für } X = (0, y, 1) \in g \end{cases}$$

Man kann beweisen (s. Benz [10]):

Satz 1.10. *i) Die Abbildung $\bar{\sigma}_2$ ist eine Bijektion von Q_2 auf $E_2 \cup \mathbb{R}$.*

ii) Jedes $\bar{\sigma}_2$ -Bild eines ebenen Schnittes, der N nicht enthält, ist eine um einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ erweiterte Parabel. Jedes $\bar{\sigma}_2$ -Bild eines ebenen Schnittes, der N enthält, ist eine um einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ erweiterte Gerade. Umkehrt ist das $\bar{\sigma}_2$ -Urbild jeder erweiterten Parabel und jeder erweiterten Geraden ein ebener Schnitt. \square

Das Ebenenschnittmodell besteht aus den Punkten von Q_2 und den ebenen Schnitten von Q_2 . Das ebene Modell besteht aus den Punkten der erweiterten Ebene $E_2 \cup \mathbb{R}$ und den erweiterten Parabeln und Geraden. Da jeder Ebenenschnitt durch N unter $\bar{\sigma}_2$ auf eine Gerade projiziert wird, enthält jede Gerade zusätzlich den Punkt 0. Falls N nicht im Ebenenschnitt enthalten ist, liegt ein weiterer Punkt auf der Parabel, der der *Öffnung* der projizierten Parabel entspricht. Liegt die Schnittebene H dagegen parallel zur Zylinderachse und ist der Schnitt mit Q_2 nicht leer, so liegt mit $[H \cap Q_2]^{\bar{\sigma}_2}$ eine Menge von ein oder zwei Geraden vor, die zur y -Achse parallel sind. Diesen Geraden entsprechen den Parallelklassen.

Wir geben noch das projektive Modell der miquelschen Laguerre-Ebene an. Es sei in $PG(3, \mathbb{R})$ die Punktmenge der Laguerre-Ebene gegeben durch

$$\mathcal{P} = \{ \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \} \setminus \{ \langle 0, 0, 0, 1 \rangle \}.$$

Definiert man auf \mathcal{P} die *orthogonale Relation* $*$ durch

$$x * y : \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i y_i = 0, \quad x = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \quad y = \langle y_1, y_2, y_3, y_4 \rangle,$$

so können wir die Menge der Kreise angeben durch

$$\mathcal{K} = \{ \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle \mid x_4 \neq 0 \},$$

wobei „inzident“ durch „orthogonal“ definiert sei.

Im Minkowski-Fall sei der 3-dimensionale projektive Raum gegeben. Als Koordinaten wählen wir $\langle x, y, z, t \rangle$ wobei $t = 0$ die Gleichung der Fernebene sei. Weiter sei

$$Q_3 = \{ \langle x, y, z, t \rangle \mid x^2 \Leftrightarrow y^2 + z^2 = t^2 \}$$

das einschalige Hyperboloid. Wir wählen $N = \langle 0, 0, 1, 1 \rangle$ als *Nordpol*. Eine Ebene $E : ax + by + cz + dt = 0$ ist genau dann Tangentialebene an Q_3 , wenn $a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = d^2$ ist. Damit ist $T : z = t$ Tangentialebene an Q_3 durch N und $\alpha := T \cap Q_3$ ist die Menge aller Punkte $\langle x, y, z, t \rangle$ mit $x^2 \Leftrightarrow y^2 = 0$ und $z = t$. D.h., α besteht aus den beiden Geraden

$$\alpha_+ = \{ \langle x, y, z, t \rangle \mid x = \Leftrightarrow y, z = t \},$$

$$\alpha_- = \{ \langle x, y, z, t \rangle \mid x = y, z = t \}.$$

Es sei E_3 die Ebene $z = 0$. Dann bilden wir die Punkte von $Q_3 \setminus \alpha$ auf die Punkte von E_3 ab. Es sei u die in E_3 enthaltene Ferngerade.

$$\sigma_3 : \begin{cases} Q_3 \setminus \alpha & \Leftrightarrow E_3 \setminus u \\ X & \Leftrightarrow \overline{NX} \cap E_3. \end{cases}$$

Dann ist σ_3 eine Bijektion von $Q_3 \setminus \alpha$ auf $E_3 \setminus u$. Es seien $g_k^\pm : y = \pm(x \Leftrightarrow k)$ die Geraden mit Steigung ± 1 und g^\pm die Menge aller $g_k^\pm, k \in \mathbb{R}$. Wir setzen σ_3 fort:

$$\bar{\sigma}_3 : \begin{cases} Q_3 & \Leftrightarrow E_3 \setminus u \\ X & \Leftrightarrow \overline{NX} \cap E_3, \text{ falls } X \notin \alpha \\ N & \Leftrightarrow \infty \\ \langle 1, 1, k, k \rangle & \Leftrightarrow g_k^+ \in g^\pm, k \in \mathbb{R} \\ \langle 1, \Leftrightarrow 1, k, k \rangle & \Leftrightarrow g_k^- \in g^\pm, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ist H eine Ebene, so ist $H \cap Q_3$ ein *ebener* oder *nicht-trivialer Schnitt*, wenn H keine Tangentialebene an Q_3 ist. Man kann beweisen (s. Benz [10]):

Satz 1.11. *i) $\bar{\sigma}_3$ ist eine Bijektion von Q_3 auf $(E_3 \setminus u) \cup g^\pm \cup \{\infty\}$.*

ii) Jedes $\bar{\sigma}_3$ -Bild eines ebenen Schnittes ist eine Hyperbel, erweitert um zwei weitere Elemente aus g^\pm (falls N nicht im Ebenenschnitt enthalten ist) oder eine Gerade mit Steigung $\neq \pm 1$ erweitert um ein weiteres Element ∞ (falls N im Ebenenschnitt enthalten ist). Jedes $\bar{\sigma}_3$ -Urbild einer erweiterten Hyperbel oder einer erweiterten Geraden ist ein ebener Schnitt. \square

Das Ebenenschnittmodell besteht aus den Punkten von Q_3 und den ebenen Schnitten von Q_3 . Das ebene Modell besteht aus der erweiterten Punktmenge $(E_3 \setminus u) \cup g^\pm \cup \{\infty\}$, den erweiterten Hyperbeln und den erweiterten Geraden. Die Elemente, um die Hyperbeln erweitert werden, sind gerade deren Asymptoten. Da jeder Ebenenschnitt durch N auf eine Gerade führt, enthalten alle Geraden den Punkt ∞ . Triviale Ebenenschnitte führen, wie im Laguerre-Fall, auf entsprechende Parallelklassen.

1.4 Nicht-miquelsche Benz-Ebenen

In Abschnitt 1.3 haben wir Möbius- bzw. Laguerre-Ebenen aus einer nicht-ausgearteten Quadrik vom Index 1 bzw. einem Zylinder (im 3-dimensionalen reellen Raum) und Ebenenschnitten mit diesen konstruiert.

Jetzt wollen wir einige Beispiele für nicht-miquelsche Benz-Ebenen angeben. Darunter fallen u.a. die bereits in Abschnitt 1.3 definierten ovoidalen Benz-Ebenen, welche an anderer Stelle auch *einbettbar*⁶ genannt werden.

Während man im Fall der Möbius- und Laguerre-Ebene leicht aus einer miquelschen Möbius- bzw. Laguerre-Ebene eine entsprechende ovoidale Ebene konstruieren kann, indem man die zugrundeliegende Quadrik durch einen Ovoid⁷ bzw. durch einen Kegel über einem Oval ersetzt (dies sind Quadroide), ist die Situation bei Minkowski-Ebenen gänzlich anders, denn auf Grund eines Resultates von Buekenhout [16] gilt:

Satz 1.12. *Ist \mathbb{F} ein kommutativer Körper, dann ist jede quadratische Menge vom Index 2 in $PG(3, \mathbb{F})$ bereits eine Quadrik. \square*

⁶Dembowski und Hughes [21] verwenden in diesem Zusammenhang auch die Begriffe „eiförmig“ („egglike“) und „koordinatisierbar“.

⁷**Definition.** Eine Teilmenge \mathcal{O} eines 3-dimensionalen projektiven Raumes über einem Körper heißt *Ovoid*, falls folgendes gilt:

- i) keine Gerade hat mehr als zwei Punkte mit \mathcal{O} gemeinsam,
- ii) die Menge aller Tangenten an \mathcal{O} in einem Punkt von \mathcal{O} ist eine Ebene.

Eine spezielle nicht-miquelsche, ovoidale Klasse von Möbius-Ebenen konstruiert man wie folgt:

Es sei σ ein Endomorphismus eines kommutativer Körpers \mathbb{F} der Charakteristik 2 mit der Eigenschaft $(x^\sigma)^\sigma = x^2$ (falls $\mathbb{F} = GF(q)$, so folgt $q = 2^{2m+1}$, $x^\sigma = x^{2^{m+1}}$). Die Menge Q derjenigen Elemente des 3-dimensionalen affinen Raumes über \mathbb{F} , die die Gleichung

$$z = xy + x^{\sigma+2} + y^\sigma$$

erfüllen – zusammen mit dem Fernpunkt der z -Achse – bilden ein Ovoid in $PG(3, \mathbb{F})$. Die zugehörigen Möbius-Ebenen sind die einzigen ovoidalen Möbius-Ebenen vom Hering Typ VI.1 (siehe Tits [55]). Man nennt Q auch *Suzuki-Tits Ovoid*.

Ovoidale Laguerre-Ebenen wurden von Mäurer [43] und Löwen und Pfüller [39] charakterisiert. In Löwen und Pfüller [39] sind Methoden zur Konstruktion von Laguerre-Ebenen angegeben:

Als Punktmenge wird dort $\mathcal{P} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times \mathbb{R}$ gewählt. $\mathcal{G} = \{\{x\} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$ bildet die Menge der Parallelklassen. Zur Definition der Kreise wählen wir zwei auf \mathbb{R} differenzierbare Funktionen

$$f_i : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \mathbb{R},$$

die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} f_i(0) = f_i'(0) = 0, \\ f_i(1) = f_i(\infty) = 1. \end{array} \right\} (*)$$

Wir definieren die zwei Mengen

$$c_1 = \{(x, f_1(x)) \mid x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\} \quad \text{und}$$

$$c_2 = \{(x, \Leftrightarrow f_2(x)) \mid x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}.$$

Weiter sei Ξ eine Permutationsgruppe von \mathcal{P} . Dann definieren wir Kreise als Ξ -Bilder von c_1 und c_2 . Außerdem sollen affine Geraden, die nicht in

\mathcal{G} enthalten und um den Punkt $(\infty, 0)$ erweitert sind, als Kreise aufgefaßt werden. Wir bezeichnen mit \mathcal{K}_0 die Menge dieser Geraden und mit $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup c_1^{\Xi} \cup c_2^{\Xi}$ und die Menge aller Kreise.

Für eine geeignete Wahl von f_i und Ξ erhalten wir eine Laguerre-Ebene $\mathcal{E}_{\Xi}(f_1, f_2) = (\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{L})$. Für Ξ wählen wir

$$\Sigma = \{\sigma(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0\} \quad \text{oder}$$

$$\Lambda = \{\lambda(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0\},$$

wobei

$$(x, y)^{\sigma(a, b, c)} = (x, ay + bx + c), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$(x, y)^{\lambda(a, b, c)} = (x + b, ay + c), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$(\infty, y)^{\sigma(a, b, c)} = (\infty, ay) = (\infty, y)^{\lambda(a, b, c)}.$$

Ebenen bezüglich Σ werden *Ebenen vom Scherungs-Typ*, Ebenen bezüglich Λ *Ebenen vom Translations-Typ* genannt.

Eine Funktion f , die (*) erfüllt, nennen wir *parabolisch*, wenn f differenzierbar auf \mathbb{R} ist, und wenn f' eine monoton steigende Bijektion von \mathbb{R} ist. Eine parabolische Funktion f heißt *streng parabolisch*, wenn f zusätzlich zweimal differenzierbar ist und gilt:

(i) $\log|f'|$ ist streng konkav auf $] \Leftrightarrow \infty, 0[$ und $]0, \infty[$,

(ii) für jedes $b \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x+b)}{f(x)} = 1$.

Streng parabolische Funktionen sind z.B. die sog. Scherungsparabeln

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\beta} &= x^\alpha \quad (x \geq 0), \\
f_{\alpha,\beta} &= \beta|x|^\alpha \quad (x \leq 0), \\
f_{\alpha,\beta}(\infty) &= 1, \\
\alpha &> 1, \beta > 0.
\end{aligned}$$

Es gilt (s. Löwen und Pfüller [39], Theoreme 1,2,4,5):

Satz 1.13. *i) Sind $f, g : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ parabolisch, dann ist $\mathcal{E}_\Sigma(f, g)$ eine Laguerre-Ebene vom Scherungs-Typ.*

ii) Sind $f, g : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ streng parabolisch, dann ist $\mathcal{E}_\Lambda(f, g)$ eine Laguerre-Ebene vom Translations-Typ.

iii) Es seien f, g parabolisch. Dann gilt

$$\mathcal{E}_\Sigma(f, g) \text{ (Scherungs-Typ) ist ovoidal} \iff f = g.$$

iv) Es seien f, g streng parabolisch. Dann gilt

$$\mathcal{E}_\Lambda(f, g) \text{ (Translations-Typ) ist ovoidal} \iff f(x) = g(x) = x^2.$$

In diesem Fall ist $\mathcal{E}_\Lambda(f, g)$ sogar miquelsch. □

Durch diese Sätze kann man sowohl ovoidale, nicht-miquelsche Laguerre-Ebenen, als auch nicht-ovoidale Laguerre-Ebenen konstruieren. Hartmann [27] hat Laguerre-Ebenen angegeben, die einer Konstruktion durch Scherungsparabeln mit anderen Exponenten entspricht. Weitere Konstruktionen findet man z.B. bei Artzy und Groh [5].

Nicht-ovoidale Laguerre-Ebenen wurden auch in Hartmann [26] behandelt. Es wird hier die Idee der affinen Moulton-Ebenen auf Laguerre-Ebenen übertragen. Als Punktmenge sei

$$\mathcal{P} = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K}$$

gegeben, wobei \mathbb{K} ein euklidischer Körper ist⁸. Wir erklären für ein festes $0 < k \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ eine binäre Verknüpfung \circ auf der Punktmenge durch

⁸Ein *euklidischer* Körper ist ein angeordneter Körper, in dem jedes positive Element ein Quadrat ist.

$$x \circ y = \begin{cases} kxy, & \text{falls } x < 0, y < 0 \\ xy, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter seien

$$\mathcal{K}_1 = \{(x, y) \mid y = a \circ (|x| \circ |x| + b \circ x + c)\} \cup \{a \mid a, b, c \in \mathbb{K}\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{(x, y) \mid y = a \circ (x \circ x + b \circ x + c)\} \cup \{a \mid a, b, c \in \mathbb{K}\}$$

die Kreismengen. Hierbei sei

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ \Leftrightarrow x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Punkte nennen wir parallel, falls sie dieselbe x -Koordinate besitzen oder beide Elemente aus \mathbb{K} sind. Es sei \mathcal{G} die Menge der Äquivalenzklassen, die sich aus der Parallelitätsrelation ergibt. Dann gilt (s. Hartmann [26]):

Satz 1.14. *Die oben konstruierten Strukturen $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_1, \mathcal{G})$ und $(\mathcal{P}, \mathcal{K}_2, \mathcal{G})$ sind nicht-ovoidale Laguerre-Ebenen. \square*

Abschließend geben wir eine Konstruktionsmethode für nicht-ovoidale Minkowski-Ebenen an (s. Artzy [5]).

Es seien für $i \in \{1, 2\}$ folgende Abbildungen definiert:

$$f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Punktmenge der zu konstruierenden Minkowski-Ebene sei durch $\mathcal{P} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$, und die Kreismenge durch

$$\mathcal{K} = \{f_{iabc} \mid i = 1, 2; a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0\} \cup \{l_{mb} \mid m, b \in \mathbb{R}, m \neq 0\},$$

definiert, wobei

$$f_{iabc} = \left\{ \left(x, cf_i \left(\frac{x \Leftrightarrow a}{c} \right) + b \right) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \right\} \cup \{(a, \infty), (\infty, b)\} \text{ und}$$

$$l_{mb} = \{(x, mx + b) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(\infty, \infty)\}.$$

Die Punkte $(\{\infty\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{\infty\})$ nennen wir *Fernpunkte*. Zwei Punkte nennen wir (\Leftrightarrow) -parallel bzw. $(+)$ -parallel, wenn sie dieselbe x -Koordinate bzw. dieselbe y -Koordinate haben. \mathcal{G} sei die Menge dieser Äquivalenzklassen, die sich aus den Parallelitätsrelationen ergibt. Weiter sei $\mathbb{M}(f_1, f_2) = (\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ und

$$G^+ = \{\gamma_{abc} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, c > 0\}$$

eine Automorphismengruppe von $\mathbb{M}(f_1, f_2)$ mit

$$\gamma_{abc} : \begin{cases} \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \\ (x, y) \mapsto (x + a, cy + b), \end{cases}$$

wobei $c \cdot \infty + d := \infty$.

Nach Artzy [5] gilt der

Satz 1.15. $\mathbb{M}(f_1, f_2)$ ist eine Minkowski-Ebene genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

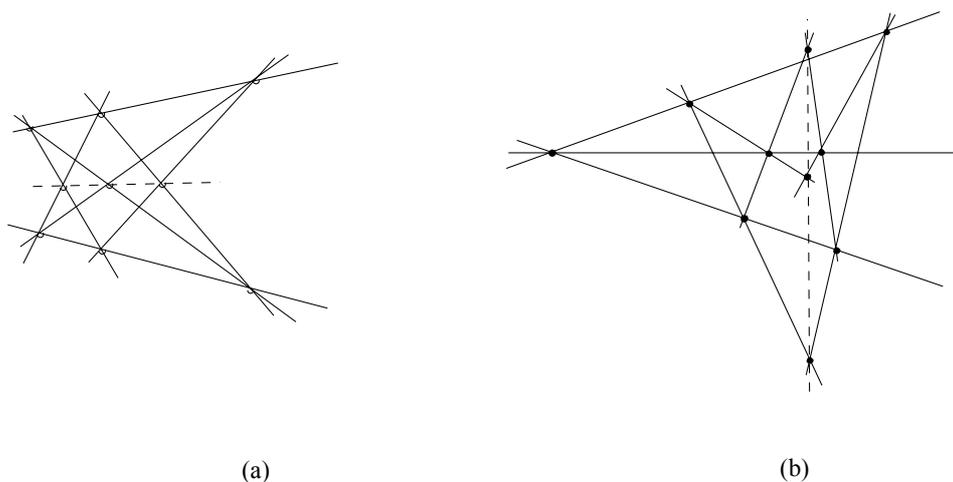
- i) f_i ist stetig für $i = 1, 2$,
- ii) f_i ist differenzierbar für $i = 1, 2$,
- iii) für alle Äste $f_i^+ := f_i|_{\mathbb{R}^+}$, $f_i^- := f_i|_{\mathbb{R}^-}$ ist die Ableitung streng monoton,
- iv) f_i^+ , f_i^- haben die x -Achse und y -Achse als Asymptote,
- v) $f_1' < 0$, $f_2' > 0$.⁹ □

Ebenfalls nach Artzy [5] wissen wir, daß $\mathbb{M}(f_1, f_2)$ genau dann eine miquelsche Minkowski-Ebene ist, wenn gilt: $f_i = \frac{r_i}{x}$, $r_1 r_2 < 0$. In allen anderen Fällen sind die Minkowski-Ebenen nicht einbettbar.

⁹ $f_1' < 0$ bedeutet: $f_1'(x) < 0$ für alle x , usf.

1.5 Die Schließungssätze: $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen

Die Sätze von Pappus (s. Figur 1.3a) und Desargues (s. Figur 1.3b) haben sich als wichtige Sätze zur Charakterisierung von projektiven Ebenen herausgestellt.

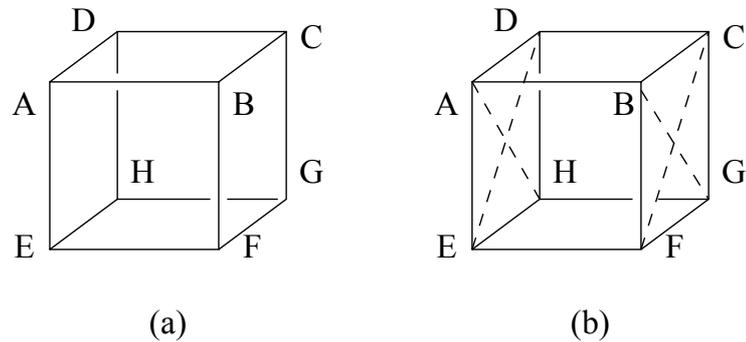


FIGUR 1.3

So charakterisiert der Satz von Desargues projektive Räume, die als Vektorräume über einem Körper darstellbar sind. Falls der Satz von Pappus gilt, ist der entsprechende Körper kommutativ.

Das Pendant dieser Sätze in Benz-Ebenen sind die sogenannten $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen. Dies ist zum einen der *Satz von Miquel*, zum anderen der *Büschelsatz*. Beide Sätze beinhalten Aussagen über acht Punkte und sechs Kreise derart, daß jeder Punkt auf genau drei Kreisen und jeder Kreis durch genau vier Punkte geht. Gegeben sei im folgenden eine Benz-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$.

Satz 1.16 (Satz von Miquel). *Lassen sich acht paarweise nicht-parallele Punkte so den Eckpunkten eines Würfels zuordnen, daß es fünfmal vorkommt, daß den Eckpunkten einer Seitenebene des Würfels vier konzyklische Punkte entsprechen, so ist dies auch bei den Eckpunkten der sechsten Seitenebene der Fall (s. Figur 1.4a).*



FIGUR 1.4

Der zweite Schließungssatz ist der

Satz 1.17 (Büschelsatz). *Es seien vier Paare von insgesamt acht paarweise nicht-parallelen Punkten gegeben. Aus den vier Punktepaaren kann man durch Zusammenstellung je zweier verschiedener Paare sechs Punktequadrupel herstellen. Kommt es dann vor, daß fünf dieser Punktequadrupel konzyklisch sind auf insgesamt mindestens vier verschiedenen Kreisen, so ist auch das letzte Punktequadrupel konzyklisch (s. Figur 1.4b).¹⁰*

Wie bei dem Satz von Miquel können wir auch hier zur abstrakten Darstellung ein Würfelmodell heranziehen. Wir wählen vier Punktepaare $\{A, B\}$, $\{C, D\}$, $\{E, F\}$ und $\{G, H\}$. Setzen wir die konzyklische Lage von A, B, C, D ; A, B, E, F ; A, B, G, H ; C, D, G, H und C, D, E, F voraus, so folgt die konzyklische Lage von E, F, G, H (s. Figur 1.4(b)).

Wir werden später sogenannte *Ausartungen* des Satzes von Miquel betrachten, bei dem weniger als acht Punkte und evtl. parallele Punkte beteiligt sind.

¹⁰Die Formulierungen des Satzes von Miquel und des Büschelsatzes findet man in dieser Form in Benz [10].

Kapitel 2

Klassifikation durch Schließungssätze

2.1 Grundlegende Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Ergebnisse bezüglich der Klassifikation von Benz-Ebenen durch Schließungssätze beschrieben werden, um einen Anknüpfungspunkt zu den eigenen Ergebnissen in den folgenden Abschnitten zu haben. Wir beginnen mit dem Satz von Miquel.

Als eines der wichtigsten Ergebnisse kann wohl die Arbeit von v.d. Waerden und Smid [56] aus dem Jahre 1935 angesehen werden. Hier wird der enge Zusammenhang zwischen der Kreisgeometrie¹ und dem Satz von Miquel einerseits und der projektiven Geometrie und dem Satz von Pappus andererseits hergestellt. In beiden Fällen gelingt es Koordinaten mit Hilfe von Schließungssätzen einzuführen und so eine algebraische Beschreibung einer zunächst rein inzidenzgeometrischen Struktur zu bekommen. In der Arbeit von v.d. Waerden und Smid [56] ist der Beweis im Laguerre-Fall nicht vollständig. Die fehlenden Beweisteile findet man aber in Chen [19]. Wir geben den vollen Satz von Miquel im Möbius- und Laguerre-Fall an, wie er in [56] formuliert wird. Die Formulierung des vollen Satzes von Miquel im Minkowski-Fall ist der Dissertation von Kaerlein [34] entnommen. Neben dem vollen Satz von Miquel benötigt Kaerlein noch eine Bedingung ($\overline{\mathcal{M}}$).

Satz 2.1 (Voller Satz von Miquel, Möbius-Fall). *Wenn drei Kreise k_1, k_2, k_3 durch einen Punkt W gehen und k_2 und k_3 sich noch in dem Punkt A_1, k_3 und k_1 im Punkt A_2, k_1 und k_3 im Punkt A_3 schneiden und diese*

¹Siehe hierzu die erwähnte Arbeit [56].

Punkte voneinander und von W verschieden sind und wenn weiter P_1, P_2, P_3 drei Punkte auf k_1, k_2 bzw. k_3 sind, verschieden von den vorigen, und wenn l_1, l_2, l_3 die Kreise durch $A_1P_2P_3, A_2P_3P_1, A_3P_1P_2$ sind und wenn schließlich $l_2 \cap l_3 = \{P_1, B\}$ gilt für B verschieden von P_2 und P_3 , so geht auch l_1 durch B .

Satz 2.2. (Voller Satz von Miquel, Laguerre- und Minkowski-Fall)

Wenn ein Punkt W auf drei Kreisen k_1, k_2, k_3 liegt, und sich k_2 und k_3 im Punkt A_1 , k_3 und k_1 im Punkt A_2 und k_1 und k_2 im Punkt A_3 schneiden, wobei A_1, A_2, A_3 paarweise und von W verschieden sind, und wenn die Punkte P_1, P_2 bzw. P_3 auf den Kreisen k_1, k_2 bzw. k_3 liegen, wobei die P_i paarweise nicht-parallel sind, und wenn die Kreise l_1, l_2 bzw. l_3 durch die Punkte $A_1P_2P_3, A_2P_3P_1$ bzw. $A_3P_1P_2$ definiert sind, und wenn $l_2 \cap l_3 = \{P_1, B\}$ gilt, so liegt B auf l_1 ².

V.d. Waerden und Smid beweisen: Setzt man die Axiome für die Möbius- bzw. Laguerre-Ebene voraus, läßt weiterhin den entsprechenden oben genannten vollen Satz von Miquel gelten, dann kann man hieraus einen verallgemeinerten Satz von Miquel beweisen. Dieser Satz wird benutzt, um Aussagen über Sehnenvierseite zu beweisen, mit deren Hilfe der affin-spezialisierte Satz von Pappus in der entsprechenden abgeleiteten Struktur bewiesen wird. An dieser Stelle greift dann der Beweis von Hessenberg [32]: Aus dem Satz von Pappus folgt der affine Satz von Desargues, der allgemeine Satz von Pappus und der allgemeine Satz von Desargues. In bekannter Weise kann man dann Koordinaten einführen und man erhält die Körpereigenschaften inklusive der Kommutativität. Schließlich wird bewiesen, daß jeder Kreis der axiomatischen Ebene in der koordinatisierten Ebene als Kegelschnitt dargestellt werden kann.

Satz 2.3 ($\overline{\mathcal{M}}$). Sind $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_3$ bis auf das Paar A_1, B_1 paarweise verschiedene Punkte, sei $A_3 = A_0, B_2 = A_2$ und seien a, c_0, c_1, c_2, c_3 Kreise mit

$$A_i, A_{i+1}, B_i, B_{i+1} \in c_i, \quad A_i \in a \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}_4.$$

Es gelte noch $a \cap c_3 = \{A_0\}$, $c_1 \cap c_2 = \{A_2\}$, $c_1 \cap c_0 = \{A_1, B_1\}$. Ist dann $B_0 \parallel B_2$ und $B_1 \parallel B_3$, dann gibt es einen Punkte R mit $R \parallel B_0, \dots, R \parallel B_3$.

Damit ist der volle Satz von Miquel bzw. die Bedingung ($\overline{\mathcal{M}}$) definiert und wir können zusammenfassend den folgenden Charakterisierungssatz angeben:

²Man beachte, daß sowohl im Möbius-, als auch im Laguerre- und Minkowski-Fall $B = P_1$ zugelassen ist.

Satz 2.4. (V.d. Waerden / Smid, 1935; Kaerlein, 1970) Die miquelschen Möbius- und Laguerre-Ebenen sind genau die Möbius- und Laguerre-Ebenen, in denen der volle Satz von Miquel gilt. Die miquelschen Minkowski-Ebenen sind genau die Minkowski-Ebenen, in denen der volle Satz von Miquel und $(\overline{\mathcal{M}})$ gelten. \square

Für Möbius-Ebenen bedeutet der volle Satz von Miquel eine Zusammenfassung der folgenden beiden Bedingungen³:

Bedingung 2.5. (\mathcal{M}_8) ⁴: Es seien A, \dots, H acht verschiedene Punkte. Gilt dann $(ABCD)_r$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$, so gilt auch $(EFGH)_r$.

Bedingung 2.6. (\mathcal{CM}_7) : Es seien A, \dots, G sieben verschiedene Punkte. Gilt dann $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ABF)_r \cap (ADH)_r = \{A\}$, so gilt auch $(AFGH)_r$.

Den Beweis für die Äquivalenz des vollen Satzes von Miquel und der beiden oben genannten Bedingungen finden man z.B. in Benz [10].

Im Jahre 1970 ist Y. Chen [17] der Beweis gelungen für den

Satz 2.7. In Möbius-Ebenen gilt: $(\mathcal{M}_8) \Rightarrow (\mathcal{CM}_7)$. \square

Vier Jahre später weist Schaeffer [50] die Umkehrung dieses Satzes nach:

Satz 2.8. In Möbius-Ebenen gilt: $(\mathcal{CM}_7) \Rightarrow (\mathcal{M}_8)$. \square

Damit ist für Möbius-Ebenen die Äquivalenz der sogenannten 7-Punkte Ausartung (\mathcal{CM}_7) und der 8-Punkte Bedingung vom miquelschen Typ (\mathcal{M}_8) gezeigt, was zur Folge hat, daß in Satz 2.1 i) in den Voraussetzungen der volle Satz von Miquel durch (\mathcal{CM}_7) oder (\mathcal{M}_8) ersetzt werden kann. Insbesondere genügt also eine miquelsche 7-Punkte Bedingung zur Charakterisierung miquelscher Möbius-Ebenen.

Für Benz-Ebenen allgemein ist die Situation anders, denn die Tatsache, daß parallele Punkte auftreten können, führt auf Sonderfälle im Laguerre- und Minkowski-Fall.

Eine einheitliche Beweisführung für die Charakterisierung von Benz-Ebenen durch eine miquelsche Bedingung findet man in Chen [19]. Hier wird eine

³Wir fassen miquelsche oder büschelartige Aussagen als Bedingungen auf, die – dann als Satz oder Lemma formuliert – in gewissen Benz-Ebenen gelten oder nicht gelten. Trotzdem verwenden wir die allgemein gebräuchlichen Begriffe „Satz von Miquel“ bzw. „Büschelsatz“, die hier konsequenterweise „Miquel-Bedingung“ bzw. „Büschel-Bedingung“ lauten müßten.

⁴ \mathcal{M} steht für Miquel.

miquelsche Bedingung $(\mathcal{M}0)$ ⁵ vorgestellt, die zur Charakterisierung miquelscher Benz-Ebenen benutzt wird.

Bedingung 2.9. $(\mathcal{M}0)$: Es seien A, \dots, H acht verschiedene Punkte und es gelte $(ABCD)_r, (ABEF)_r, (BCFG)_r, (CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$. Dann gilt $(EFGH)_{ar}$.

Für diese Bedingung konnte Chen [19] beweisen:

Satz 2.10. $(\mathcal{M}0)$ gilt in einer Benz-Ebene genau dann, wenn sie miquelsch ist. \square

Dieser Satz ist Ausgangspunkt für die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit. Die Frage nach weiteren Ausartungen wurden zum Teil schon von anderen Autoren erörtert (s. z.B. Arbeiten von Samaga, Schaeffer).

Bevor wir unsere Resultate vorstellen, wollen wir der Frage nach sinnvollen - d.h. widerspruchsfreien und nicht-trivialen - Ausartungen einer *allgemeinen Miquel-Bedingung* (\mathcal{M}_a) nachgehen. In den folgenden Abschnitten erarbeiten wir zunächst sämtliche Ausartungen von (\mathcal{M}_a) , zitieren dann bekannte Ergebnisse und geben schließlich eigene Charakterisierungen an, wobei wir den Möbius-, Laguerre- und Minkowski-Fall berücksichtigen.

2.2 Die allgemeine Form der Miquel-Bedingung

Wir definieren zunächst die *allgemeine Miquel-Bedingung*. Im Anschluß werden wir sehen, daß diese nur unter bestimmten Voraussetzungen zu sinnvollen Aussagen führen; die verbleibenden Fälle werden wir *Bedingungen vom miquelschen Typ* oder auch kurz *Ausartungen* nennen.

Wir sagen, daß sich zwei Kreise k, l im Punkt $A \in k$ *berühren*, wenn $A \in k \cap l$ mit $k \cap l = \{A\}$ oder $|k \cap l| > 2$ (in Zeichen kAl) gilt.

Definition 2.11. Für $k, l \in \mathcal{K}_{ar}; A, B \in \mathcal{P}$ mit $A, B \in k \cap l$ sei

$$k\{A, B\}l : \iff \begin{cases} k \cap l = \{A, B\} & \text{oder } k = l \text{ für } A \parallel B \\ kAl & \text{für } A \parallel B. \end{cases}$$

Bedingung 2.12. (\mathcal{M}_a) : Die Punkte $A, \dots, H \in \mathcal{P}$ und die Kreise $k_0, \dots, k_4 \in \mathcal{K}_{ar}$ erfüllen die *allgemeine Miquel-Bedingung*⁶, wenn gilt:

⁵In der zitierten Arbeit heißt der Satz $(SM0)$; wir wollen ihn abkürzend $(\mathcal{M}0)$ nennen. Die 0 soll dabei andeuten, daß keine Kreisbedingung bzgl. ausgearteter Kreise in den Voraussetzungen auftritt.

⁶Siehe auch Samaga [48].

$$\text{Aus } k_0 \left\{ \begin{array}{l} A, B \\ B, C \\ C, D \\ D, A \end{array} \right\} k_i, k_i \left\{ \begin{array}{l} B, F \\ C, G \\ D, H \\ A, E \end{array} \right\} k_{i+1} \quad \text{für } i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \quad (k_5 := k_1) \end{cases}$$

folgt: Es existiert ein $k \in \mathcal{K}_{ar}$ mit

$$k \left\{ \begin{array}{l} E, F \\ F, G \\ G, H \\ E, H \end{array} \right\} k_i \quad \text{für } i = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{cases}$$

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen allgemeinen Aussagen über Punkte und Kreise in Benz-Ebenen.

Aus der Definition für Benz-Ebenen folgt unmittelbar:

Lemma 2.13. *Es seien $k, l \in \mathcal{K}_{ar}, k \neq l$. Dann gilt*

$$|k \cap l| \in \begin{cases} \{0, 1, 2\} & \text{falls } k, l \in \mathcal{K}_r \\ \{0, 2, |g|\} & \text{falls } k, l \in \mathcal{K}_a, g \text{ ist Parallelklasse} \\ \{1, 2\} & \text{falls } k \in \mathcal{K}_r, l \in \mathcal{K}_a. \end{cases}$$

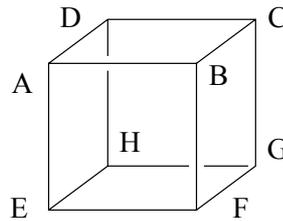
Man beachte, daß $|k \cap l| = 2$ für $k, l \in \mathcal{K}_a$ lediglich im Minkowski-Fall auftreten kann, bzw. im minimalen Laguerre-Fall, wo $|g| = 2$ gilt. \square

Lemma 2.14. *Es seien $k, l \in \mathcal{K}_r$.*

- i) Falls kAl für einen Punkt A und $B \in (k \cap l) \setminus \{A\}$, so folgt $k = l$.
- ii) Falls $\{A, B\} \subset k \cap l, A \neq B$ für Punkte A, B und $C \in (k \cap l) \setminus \{A, B\}$, so folgt $k = l$.

Beweis. i) Kreise, die sich berühren, haben genau einen Punkt gemeinsam oder sind gleich. ii) Drei paarweise verschiedene Punkte legen einen regulären Kreis eindeutig fest. \square

Aus Gründen der Einheitlichkeit führen wir einige Schreibweisen ein, wobei zur Veranschaulichung die Punktekonstellation auf einen Würfel (s. Figur 2.1) übertragen sei. Die Flächen bzw. die Diagonalfächen des Würfels repräsentieren die Kreise k_0, \dots, k_4, k aus (\mathcal{M}_a) und die Eckpunkte des Würfels liegen im Durchschnitt der Kreise, die an dieser Kante beteiligt sind. Sind Punkte mit gemeinsamer Kante im Würfel parallel zueinander, so liegt die gesamte Parallelklasse im oben genannten Durchschnitt. Das Würfelmodell sei immer so orientiert, daß der zu „schließende“ Kreis durch die untere Fläche repräsentiert wird (s. Abbildung 2.1).



FIGUR 2.1

Die Gleichheit von Punkten kennzeichnen wir durch eine doppelte Linie und die Parallelität von Punkten durch eine fette Linie im Würfelmodell.

2.3 Klassifikation von Möbius-Ebenen

2.3.1 Ausartungen des Satzes von Miquel

Wir betrachten die allgemeine Version des Schließungssatzes (\mathcal{M}_a), lassen a priori alle Fälle von zusammenfallenden Punkten zu, und stellen zunächst fest, daß zusammenfallende Punkte, die auf einer Diagonalen im Würfelmodell liegen, zu trivialen Aussagen führen. In Bröcker [13] sind sämtliche Fälle für den Laguerre-Fall für sechs bis acht Punkte ausgearbeitet worden. Entfernt man diejenigen Fälle, die Aussagen über ausgeartete Kreise enthalten, so verbleiben 18 verschiedene Bedingungen vom miquelschen Typ für Möbius-Ebenen. Wir nennen zwei Bedingungen *verschieden*, wenn es nicht möglich ist, diese durch Umbenennung der Punkte ineinander zu überführen. Wenn auf eine Berühraussage geschlossen wird, verwenden wir in der Bezeichnung der Bedingung ein „B“ (s. Schaeffer [50], [49]). Fallen dagegen Punkte auf einer senkrechten Kante im Würfel zusammen, so verwenden wir ein „C“ zur Kennzeichnung; fallen Punkte einer Kante der oberen Seite zusammen, so verwenden wir ein „D“. Zahlen im Index nummerieren verschiedene Unterfälle. Es sei das oben genannte Würfelmodell zugrunde gelegt; die in den einzelnen Bedingungen auftretenden Punkte seien als paarweise verschieden angenommen (siehe auch Übersicht auf S.111).

Bezeichnung	Bedingung
(\mathcal{M})	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_r$.
($B\mathcal{M}$)	Aus $(ABCD)_r$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(EGH)_r$.

- (CM) Aus $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_rA(ABF)_r$ folgt $(AEGH)_r$.
- (DM) Aus $(ACD)_rA(AEF)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_r$.
- (BCM) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(BCE)_rC(CDH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(CEH)_r$.
- (BD_1M) k sei ein Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- (BD_2M) Aus den Bedingungen $(ABC)_rC(CG H)_r$, $(BCEG)_r$ und $(ACEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- (CC_1M) k sei ein Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_rAkB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_r$. Dann folgt $(ABGH)_r$.
- (CC_2M) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BCF)_rC(CDH)_r$ folgt $(ACFH)_r$.
- (CDM) Aus $(ABD)_rB(BFG)_r$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BDGH)_r$ folgt $(AFGH)_r$.
- (DDM) k sei der Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$, $kC(CG H)_r$; weiter gelte $(ACFG)_r$, $(CDEH)_r$. Dann folgt $(EFGH)_r$.
- (BCD_1M) k sei ein Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ADEH)_r$ und $(ACE)_rC(CDH)_r$. Dann folgt $kE(CEH)_r$.
- (BCD_2M) Aus den zwei Berührbedingungen $(ACD)_rA(AEF)_r$ und $(ACF)_rC(CDE)_r$ folgt $(ADE)_rE(CEF)_r$.
- ($BDDM$) k sei ein Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$ und $kC(CEG)_r$; es gelte weiterhin $(ACFG)_r$. Dann folgt $(ACE)_rE(EFG)_r$.
- ($CCDM$) k sei ein Kreis, der C und D enthält mit $(ACF)_rCk$, $kD(ADE)_r$; weiter gelte $(ACD)_rA(AEF)_r$. Dann folgt $(CDEF)_r$.
- ($BBDDM$) k_1 sei ein Kreis, der A und C enthält mit k_2AkCk_4 , wobei A und E auf dem Kreis k_2 bzw. C und G auf dem Kreis k_3 liegen. Weiter gelte k_3Gk_4 , wobei E und G auf dem Kreis k_4 liegen und $(ACEG)_r$. Dann folgt k_1Ek_4 .

$(BCCDM)$	k_1 sei ein Kreis, der C und D enthält mit $(ACE)_r Ck_1$ und $k_1 D(ADE)_r$ und es sei k_2 ein Kreis, der A und E enthält mit $(ACD)_r A k_2$. Dann folgt $k_2 E(CDE)_r$.
$(CCCCM)$	Es seien k_1, k_2, k_3 und k_4 Kreise, die A und B ; B und C ; C und D bzw. A und D enthalten mit $k_4 A k_1 B k_2 C k_3 D k_4$. Dann folgt $(ABCD)_r$.

Tabelle 2.1: Miquelsche Bedingungen im Möbius-Fall.

Wir kommen nun zur Klassifikation von miquelschen Möbius-Ebenen durch die oben angegebenen miquelschen Bedingungen.

2.3.2 Ergebnisse

Zunächst leiten wir diesen Abschnitt mit bekannten Ergebnissen ein, wobei der bereits genannte Satz 2.10 die zentrale Aussage bezüglich der Koordinatisierung darstellt. Da in Möbius-Ebenen keine ausgearteten Kreise auftreten, entspricht die Bedingung $(\mathcal{M}0)$ aus Satz 2.10 der in Tabelle 2.1 genannten Bedingung (\mathcal{M}) . Damit haben wir den

Satz 2.15. *(\mathcal{M}) gilt in einer Möbius-Ebene genau dann, wenn sie miquelsch ist.* \square

Andererseits wissen wir (s. Samaga [46]), daß auf Grund der Koordinatisierbarkeit miquelscher Möbius-Ebenen sämtliche Bedingungen aus Tabelle 2.1 gelten⁷.

Satz 2.16. *In Möbius-Ebenen folgt aus (\mathcal{M}) jede der Bedingungen aus Tabelle 2.1.* \square

Weitere Ergebnisse findet man in Schaeffer [50], [49]:

Satz 2.17. *In Möbius-Ebenen gilt:*

i) $(BCM) \Leftrightarrow (BD_1\mathcal{M}) \Leftrightarrow (BM) \Leftrightarrow (CM) \Leftrightarrow (DM) \Rightarrow (\mathcal{M})$.

ii) $(CM) \Rightarrow (BD_2\mathcal{M})$

iii) $(BD_1\mathcal{M}) \Rightarrow (CC_1\mathcal{M})$

iv) $(BCM) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M})$ \square

Es sei angemerkt, daß es Schaeffer durch diese Ergebnisse ein weiteres Mal gelungen ist, die Punktezahl zu reduzieren. Tatsächlich ist nach Satz 2.17 i) nur eine 6-Punkte-Bedingung zur Charakterisierung miquelscher Möbius-Ebenen

⁷Der Nachweis erfolgt durch die sogenannte Peczar-Identität.

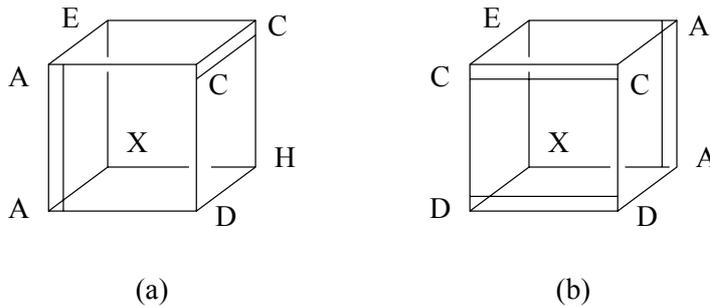
notwendig. Es stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob eine weitere Reduzierung der Punktezahl möglich ist. Für fünf Punkte liegt ein Teilergebnis vor, in dem gezeigt werden konnte, daß die 5-Punkte-Bedingung $(BCD_1\mathcal{M})$ in einer (endlichen) nicht-miquelschen Möbius-Ebene nur unter bestimmten Bedingungen an einige Kreisbüschel gilt⁸. Anders ist es bei den 4-Punkte-Bedingungen. Hier gelang Lozanov [41], [40] der Beweis für die Aussage

Satz 2.18. *Es gibt nicht-miquelsche Möbius-Ebenen, die den Bedingungen $(BCCDM)$ bzw. $(CCCCM)$ genügen. Damit sind diese Bedingungen nicht äquivalent zu (\mathcal{M}) .* \square

In den folgenden Beweisen benutzen wir statt der Schreibweise $(ABC)_r$ abkürzend (ABC) , da in Möbius-Ebenen keine ausgearteten Kreise auftreten.

Lemma 2.19. *In Möbius-Ebenen gilt: $(CDM) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M})$.*

Beweis. Es seien A, C, D, E, H fünf verschiedene Punkte; ferner gelte $(ADEH)$, $(ACE)C(CDH)$ und es sei k der Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)$ gilt. Zu zeigen ist $kE(CEH)$. Im Fall $k = (CEH)$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen $k \neq (CEH)$ an. Es sei also $k \cap (CEH) = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)$. Aus $X = C$ folgt $k = (ACE)$, was $(ACED)$ zur Folge hat. Aus $X = D$ folgt $(CDEH)$. Aus $X = H$ folgt $k = (ADEH)$. In allen genannten Fällen folgt $(ACDEH)$, Widerspruch zu $k \cap (CEH) = \{E, X\}$. Wir können also von $X \notin \{A, C, D, E, H\}$ ausgehen. Wende (CDM) auf die Punkte A, C, E, D, H, X (Figur 2.2 a) an. Es folgt $(ADHX)$. Dann gilt aber $(ADEHX)$, Widerspruch zu $k \cap (CEH) = \{E, X\}$. Es gilt also $kE(CEH)$. \square

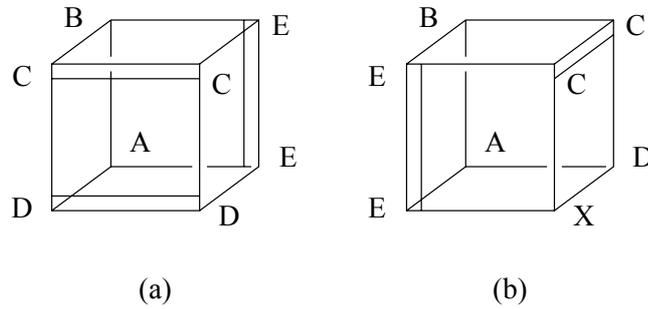


FIGUR 2.2

Lemma 2.20. *In Möbius-Ebenen gilt: $(BCD_1\mathcal{M}) \Rightarrow (BCCDM)$.*

⁸Siehe Lozanov und Eneva [42].

Beweis. Es seien A, C, D, E vier verschiedene Punkte und k_1, k_2 Kreise für die $A, E \in k_1, C, D \in k_2$ mit $(ACD)Ak_1, (ACE)Ck_2D(ADE)$ gilt. Zu zeigen ist $k_1E(ECDE)$. Im Fall $k_1 = (CDE)$ ist nichts zu zeigen. Es sei $k_1 \neq (CDE)$. Also gilt $k_1 \cap (CDE) = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. $X = A$ impliziert $(ACDE)$. $X = C$ bzw. $X = D$ implizieren $k_1 = (ACE)$ bzw. $k_1 = (ADE)$, was in beiden Fällen auf $k_1 = (ACDE)$ führt. In allen Fällen liegt ein Widerspruch zu $k_1 \cap (CDE) = \{E, X\}$ vor. Es sei also $X \notin \{A, C, D, E\}$. Wende $(BCD_1\mathcal{M})$ auf die Punkte C, A, E, D, X (Figur 2.2 b) an. Man erhält $k_2D(ADX)$. Daraus folgt zunächst $(ADX) = (ADE)$ und damit $(ADEX)$, Widerspruch zu $k_1 \cap (CDE) = \{E, X\}$. Daraus folgt $k_1E(CDE)$. \square



FIGUR 2.3

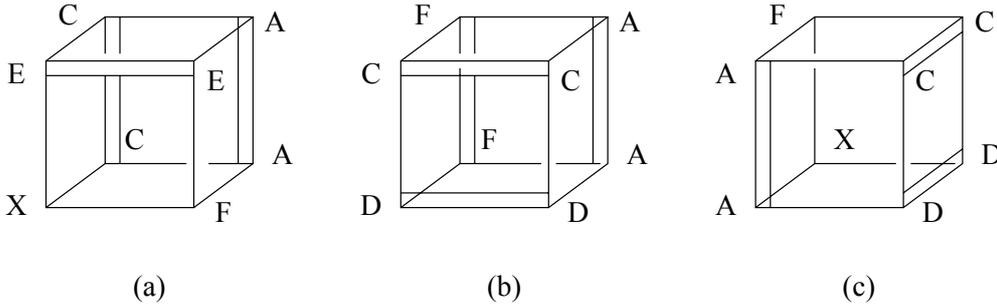
Lemma 2.21. *In Möbius-Ebenen gilt: $(CDM) \Rightarrow (BCM)$.*

Beweis. Es seien A, B, C, D, E, H sechs verschiedene Punkte und es gelte $(ABCD), (ADEH), (BCE)C(CDH)$. Zu zeigen ist $(ABE)E(CEH)$. Im Fall $(ABE) = (CEH)$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ABE) \neq (CEH)$. Sei k der Kreis durch die Punkte C und E mit $kE(ABE)$. Im Fall $k = (ABE)$ folgt $(ABCE) = (ABCDE) = (ABCDEH)$, Widerspruch zu $(ABE) \neq (CEH)$. Angenommen, es gilt $kC(CDH)$. Dann folgt wegen $(CDH)C(BC E)$ auch $kC(BC E)$, also $k = (ABCE)$ bzw. $k = (ABCDEH)$, Widerspruch zu $(ABE) \neq (CEH)$. Wir gehen jetzt von $k \cap (CDH) = \{C, X\}$ mit $C \neq X$ aus. Im Fall $X = A$ folgt $k = (ACDH)$. Im Fall $X = B$ folgt $k = (BCDEH)$. Im Fall $X = E$ folgt $k = (CDEH)$ und damit $(ACDEH)$. In allen Fällen folgt sofort $(ABCDEH)$, Widerspruch zu $k \cap (CDH) = \{C, X\}$. Im Fall $X = D$ benutzen wir Lemma 2.19 und wenden die folglich ebenfalls gültige Bedingung $(BCD_1\mathcal{M})$ auf die Punkte C, E, B, D, A an (Figur 2.3 a). Es folgt $(CDH)D(ADE)$ und daraus $(CDH)D(ADEH)$, was $(ACDEH)$ zur Folge hat, Widerspruch zu $k \cap (CDH) = \{C, X\}$. Es gilt also auch $X \neq D$. Es sei jetzt $X \notin \{A, B, C, D, E\}$. Wir wenden die Bedingung (CDM) auf die Punkte E, C, B, X, D, A an (Figur 2.3 b). Es folgt $(ADEX)$ und damit

$(ADEHX)$. Wegen $(CDGH) \cap (ADEH) = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$.
Damit gilt $(ABE)E(CEH)$. \square

Lemma 2.22. *In Möbius-Ebenen gilt: $(CCDM) \Rightarrow (BDDM)$.*

Beweis. Es seien A, C, E, F, G fünf verschiedene Punkte und k sei der Kreis durch A, C mit $(AEF)AkC(CEG), (ACFG)$. Zu zeigen ist $(ACE)E(EFG)$.
Im Fall $(ACE) = (EFG)$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ACE) \neq (EFG)$.
Sei l der Kreis durch E, F mit $lE(ACE)$. Im Fall $l = (ACE)$ folgt $(ACEF) = (ACEFG)$, Widerspruch zu $(ACE) \neq (EFG)$; also $l \neq (ACE)$. Im Fall $lE(CEG)$ folgt $(ACE)E(CEG)$. Dies bedeutet $(ACEFG)$, Widerspruch zu $(ACE) \neq (EFG)$. Sei also $l \cap (CEG) = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACEG)$. Aus $X = C$ folgt $l = (CEF)$. Aus $X = F$ folgt $(CEFG)$. In allen Fällen folgt $(ACEFG)$, Widerspruch zu $l \cap (CEG) = \{E, X\}$. Sei also $X \notin \{A, C, E, F\}$. Wende $(CCDM)$ auf die Punkte E, A, C, X, F an (Figur 2.4 a). Es folgt $(ACFX)$ und damit $(ACFGX)$. Wegen $(ACFG) \cap (CEG) = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$. Daraus folgt $(ACE)E(EFG)$. \square



FIGUR 2.4

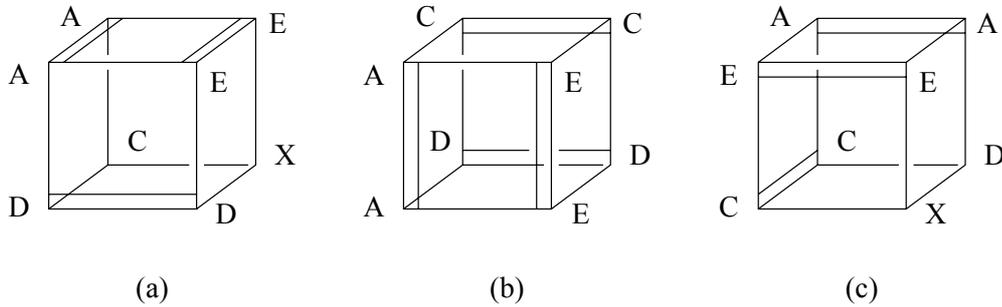
Lemma 2.23. *In Möbius-Ebenen gilt: $(BCD_1\mathcal{M}) \Rightarrow (CCDM)$.*

Beweis. Es seien A, C, D, E, F fünf verschiedene Punkte und k ein Kreis mit $C, D \in k$ und $(ADE)DkC(ACF), (ACD)A(AEF)$. Zu zeigen ist $(CDEF)$.
Angenommen, es gilt $(CDF)F(AEF)$. Wir gehen von $(CDF) \neq (AEF)$ aus, da sonst $(ACDEF)$ folgt, was zu zeigen war. Wir benutzen Lemma 2.20 und wenden die Bedingung $(BCCDM)$ auf die Punkte C, A, F, D an (Figur 2.4 b). Wir erhalten $kD(ADF)$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(ADE)D(ADF)$. Dann folgt weiter $(ADEF)$ und $(ACDEF)$, Widerspruch zu $(CDF) \neq (AEF)$. Angenommen, es gilt $(CDF) \cap (AEF) = \{F, X\}$, wobei $X \neq F$. Falls $X = A$, so folgt $(ACDF)$. Falls $X = C$, so folgt $(ACEF)$. Falls $X = D$, so folgt $(ADEF)$. In allen Fällen folgt $(ACDEF)$, Widerspruch zu $(CDF) \cap (AEF) = \{F, X\}$. Es sei also $X \notin \{A, C, D, F\}$. Wir wenden $(BCD_1\mathcal{M})$ auf die Punkte F, A, C, X, D an (Figur 2.4 c). Wir erhalten

$(ADX)Dk$. Daraus folgt $(ADX)D(ADE)$ und damit haben wir $(ADEX)$. Wegen $(ADE) \cap (AEF) = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$. Damit gilt $(CDEF)$. \square

Lemma 2.24. *In Möbius-Ebenen gilt: $(BDD\mathcal{M}) \Rightarrow (BCCD\mathcal{M})$.*

Beweis. Es seien A, C, D, E vier verschiedene Punkte und k, l zwei verschiedene Kreise mit $A, E \in k$; $C, D \in l$, $kA(ACD)$ und $(ADE)DlC(ACE)$. Zu zeigen ist $kE(CDE)$. Im Fall $k = (CDE)$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $k \neq (CDE)$. Es gibt genau einen regulären Kreis m , der die Punkte E, D enthält mit mEk . Im Fall $m = k$ folgt $m = k = (ACDE)$, Widerspruch zu $k \neq (CDE)$. Es sei $m \neq k$. Falls $mE(ACE)$ gilt, so folgt $m = k$, Widerspruch zu $m \neq k$. Im anderen Fall haben wir $m \cap (ACE) = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $m = (ADE)$, d.h. $m = k = (ADE) = (ACDE)$, Widerspruch zu $m \neq k$. Im Fall $X = D$ folgt $(ACED)$, wieder ergibt sich ein Widerspruch zu $m \neq k$. Da im Fall $X = C$ bereits die Behauptung folgt, nehmen wir auch $X \neq C$ an. Es sei also $X \notin \{A, C, D, E\}$. Wende $(BDD\mathcal{M})$ auf die Punkte A, E, D, X, C an (Figur 2.5 a). Wir erhalten $(ADE)D(CDX)$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises gilt $(CDX) = l$ und damit $l = (ACDX) = (ACDEX)$, Widerspruch zu $m \cap (ACE) = \{E, X\}$. Damit gilt $kE(CDE)$. \square



FIGUR 2.5

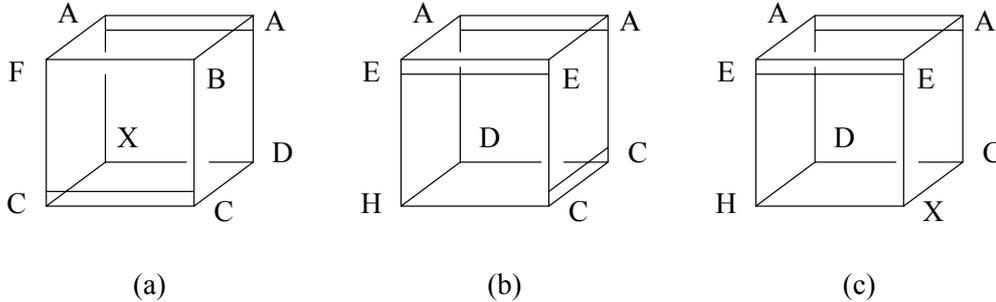
Lemma 2.25. *In Möbius-Ebenen gilt: $(BDD\mathcal{M}) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M})$.*

Beweis. Es seien A, C, D, E, H fünf verschiedene Punkte und k ein Kreis mit $A, E \in k$ und es gelte $kA(ACD)$, $(ACE)C(CDH)$ und $(ADEH)$. Zu zeigen ist $kE(CEH)$. Im Fall $k = (CEH)$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $k \neq (CEH)$. Es gibt einen eindeutig bestimmten Kreis m , der die Punkte C, E enthält mit mEk . Im Fall $m = k$ folgt $(ACDEH)$, Widerspruch zu $k \neq (CEH)$. Wir gehen jetzt von $m \neq k$ aus. Im Fall $m \cap (ADEH) = \{E\}$ folgt $m = k$, Widerspruch. Es gilt $m \cap (ADEH) = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im

Fall $X = A$ folgt $m = (ACE)$ und damit $m = k$, Widerspruch zu $m \neq k$.
 Im Fall $X = C$ folgt $(ACDEH)$, Widerspruch zu $m \cap (ADEH) = \{E, X\}$.
 Im Fall $X = D$ benutzen wir Lemma 2.24 und wenden $(BCCDM)$ auf die Punkte A, E, C, D an (Figure 2.5 b). Wir erhalten $(CDH)D(ADE)$ bzw. $(ACDEH)$, Widerspruch zu $m \cap (ADEH) = \{E, X\}$. Es ist also $X \neq D$.
 Wir setzen $X \notin \{A, C, D, E\}$ voraus und wenden $(BDDM)$ auf die Punkte E, A, C, X, D an (s. Figur 2.5 c). Wir erhalten $(ACE)C(CDX)$. Daraus folgt $(CDHX)$. Wegen $(CDH) \cap (ADFH) = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$.
 Wir erhalten $kE(CEH)$. \square

Lemma 2.26. *In Möbius-Ebenen gilt: $(BD_2M) \Rightarrow (CC_2M)$.*

Beweis. Es seien A, B, C, D, F, H sechs verschiedene Punkte. Es gelte $(ABCD)$, $(ADH)A(ABF)$ und $(BCF)C(CDH)$. Zu zeigen ist $(ACFH)$.
 Angenommen, es gilt $(ACF)A(ADH)$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises $(ACF) = (ABF)$ und damit $(ABCF) = (ABCDF) = (ABCDFH)$, insbesondere gilt also $(ACFH)$. Das gleiche Argument gilt für den Fall $(ACF) = (ADH)$. Es sei also $(ACF) \cap (ADH) = \{A, X\}$ mit $X \neq A$.
 Im Fall $X = B$ folgt $(ABCF)$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACDH)$. Im Fall $X = D$ folgt $(ACDF)$. Im Fall $X = F$ folgt $(ADFH)$. In allen Fällen folgt somit $(ABCDFH)$, Widerspruch zu $(ACF) \cap (ADH) = \{A, X\}$. Es sei also $X \notin \{A, B, C, D, F\}$.
 Wende (BD_2M) auf die Punkte F, B, A, C, D, X an (Figur 2.6 a). Es folgt $(BCF)C(CDX)$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(CDX)C(CDH)$ und damit $(CDHX)$. Wegen $(CDH) \cap (ADH) = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Es folgt $(ACFH)$. \square



FIGUR 2.6

Lemma 2.27. *In Möbius-Ebenen gilt: Aus den Bedingungen (DDM) und $(BDDM)$ folgt die Bedingung (BD_1M) .*

Beweis. Es seien A, C, D, E, G, H sechs verschiedene Punkte und k ein Kreis, der die Punkte A und E enthält. Weiter gelte $kA(ACD)$, $(CDGH)$, $(ACEG)$

und $(ADEH)$. Zu zeigen ist $kE(EGH)$. Im Fall $k = (EGH)$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $k \neq (EGH)$. Es sei l der Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den lEk gilt. Falls $l = k$, so folgt $(ACDEGH)$, Widerspruch zu $k \neq (EGH)$. Sei also $l \neq k$. Falls $H \in k$ gilt, folgt $l = k$, Widerspruch zu $l \neq k$. Es ist also $H \notin k$. Angenommen, es gilt $lE(ACEG)$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises $kE(ACEG)$, Widerspruch zu $k \neq l$. Es gilt also $l \cap (ACEG) = \{E, X\}$ mit $E \neq X$ (den Fall $l = (ACEG)$ können wir wegen $k \neq l$ ebenfalls ausschließen). Im Fall $X = A$ folgt $l = (ADEH)$ und damit $k = l$, Widerspruch zu $k \neq l$. Im Fall $X = D$ folgt $(ACDEG)$ und damit $(ACDEGH)$, Widerspruch zu $l \cap (ACEG) = \{E, X\}$. Im Fall $X = H$ folgt $(ACEGH)$, Widerspruch zu $l \cap (ACEG) = \{E, X\}$. Im Fall $X = C$ wenden wir $(BDDM)$ auf die Punkte E, A, H, C, D an (Figur 2.6 b). Es folgt $(ACEG)C(CDGH)$ und damit $(ACDEGH)$, Widerspruch zu $l \cap (ACEG) = \{E, X\}$. Es sei also im verbleibenden Fall $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Wir wenden (DDM) auf die Punkte E, A, H, X, C, D an (Figur 2.6 c). Es folgt sukzessive $(CDHX)$, $(CDGHX)$. Wegen $(CDGHX) \cap (ACEGX) = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$. Es folgt $kE(EGH)$. \square

Damit haben wir eine weitere Bedingung, die miquelsche Möbius-Ebenen charakterisiert, denn es gilt der

Satz 2.28. *In Möbius-Ebenen gilt: $(CDM) \Leftrightarrow (\mathcal{M})$.*

Beweis. Aus (\mathcal{M}) folgen nach Satz 2.16 die Bedingung (CDM) . Andererseits folgt nach Lemma 2.21 aus (CDM) die Bedingung (BCM) , welche nach Satz 2.17 zu (\mathcal{M}) äquivalent ist. \square

Abschließend geben wir noch einige Ergebnisse bezüglich der Existenz bzw. der Nicht-Existenz von miquelschen Möbius-Ebenen.

Bemerkung 2.29. i) Zu jeder Primzahlpotenz existiert bis auf Isomorphie genau eine miquelsche Möbius-Ebene⁹.

ii) Möbius-Ebenen gerader Ordnung n sind nicht notwendig miquelsch. Sie sind es für $n = 2, 4, 16$; sie sind es nicht für $n = 2^{2m+1} \geq 8$. Die eindeutig bestimmte miquelsche Möbius-Ebene der Ordnung 2 erhält man durch die Menge aller 3-Teilmengen einer 5-Menge (Minimalmodell). Für Ordnung 4 gab Witt [57] 1938 einen Beweis. Den Beweis für die Eindeutigkeit der Möbius-Ebenen der Ordnung 16 lieferten O’Keefe und Penttila [44] 1990.

iii) Möbius-Ebenen ungerader Ordnung n sind miquelsch genau dann, wenn eine ihrer Ableitungen desarguesch ist, s. Thas [54] und Fisher, Penttila, Praeger und Royle [24].

iv) Die Frage, ob Möbius-Ebenen ungerader Ordnung n notwendig miquelsch

⁹Siehe Halder und Heise [25], Satz 12.30.

sind, ist ungeklärt. Wahr ist dies für $n = 3, 5, 7$. Dies bewiesen Witt [57] (1938), Chen [18] (1972) und Denniston [22] (1973).

v) Nicht-endliche Möbius-Ebenen sind nicht notwendig miquelsch. Siehe zum Beispiel Abschnitt 1.4.

2.4 Klassifikation von Laguerre-Ebenen

2.4.1 Ausartungen des Satzes von Miquel

Wie im Fall der Möbius-Ebenen betrachten wir auch hier die allgemeine Bedingung (\mathcal{M}_a) und beachten, daß im Fall der Laguerre-Ebenen zusätzlich auch parallele Punkte auftreten können. Bei den Bezeichnungen der einzelnen Bedingungen folgen wir dem Abschnitt 2.3 und stellen zunächst fest, daß in (\mathcal{M}_a) parallele Punkte nicht in beliebigen Kombinationen auftreten. In Bröcker [13] wurde gezeigt: i) Sind zwei Punkte mit einer gemeinsamen Kante im Würfelmodell parallel, so führt dies zu trivialen¹⁰ oder widersprüchlichen Bedingungen¹¹.

ii) Wenn im Würfelmodell zwei diagonal liegende Punkte einer Seite parallel sind, so sind die verbleibenden Punkte ebenfalls parallel, liegen aber nicht in der Parallelklasse des ersten Punktepaars.

iii) Höchstens zwei der an einer Bedingung beteiligten Punkte liegen in einer gemeinsamen Parallelklasse.

iv) Wenn diagonal liegende Punkte im Würfelmodell zusammenfallen, so folgt eine triviale Aussage oder ein Widerspruch (falls parallele Punkte beteiligt sind).

Will man also triviale bzw. widersprüchliche Bedingungen ausschließen, so folgt unmittelbar, daß Kreise mit gemeinsamer Kante im Würfelmodell nicht beide ausgeartet sein können.

Beachtet man die o.g. Einschränkungen, so ergeben sich insgesamt 40 miquelsche Bedingungen für Laguerre-Ebenen. Wir fassen diese in einer Tabelle zusammen (siehe auch Übersicht auf S.113).

¹⁰D.h. die Punkte des Schließungskreises liegen auf mindestens einem – in diesem Fall ausgearteten – Kreis.

¹¹D.h. die Punkte des Schließungskreises liegen nicht notwendig auf einem Kreis.

Bezeichnung	Bedingung
$(\mathcal{M}0)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
$(\mathcal{M}1^1)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_a$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
$(\mathcal{M}1^2)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_r$.
$(\mathcal{M}2)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_r$.
$(B\mathcal{M}0)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(EGH)_r$.
$(B\mathcal{M}1^1)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_a$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(EGH)_r$.
$(B\mathcal{M}1^2)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$ folgt $(ABE)_r E(EGH)_r$.
$(C\mathcal{M}0)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_r A(ABF)_r$ folgt $(AEGH)_{ar}$.
$(C\mathcal{M}1^1)$	Aus $(ABCD)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_r A(ABF)_r$ folgt $(AEGH)_r$.
$(C\mathcal{M}1^2)$	Aus $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADH)_r A(ABF)_r$ folgt $(AEGH)_r$.
$(D\mathcal{M}0)$	Aus $(ACD)_r A(AEF)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
$(D\mathcal{M}1^1)$	Aus $(ACD)_r A(AEF)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$ folgt $(EFGH)_r$.
$(D\mathcal{M}1^2)$	Aus $(ACD)_r A(AEF)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_r$.
$(B\mathcal{C}\mathcal{M}0)$	Aus $(ABCD)_r$, $(BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
$(B\mathcal{C}\mathcal{M}1^1)$	Aus $(ABCD)_a$, $(BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
$(B\mathcal{C}\mathcal{M}1^2)$	Aus $(ABCD)_r$, $(BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_a$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
$(BD_1\mathcal{M}0)$	k sei ein Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.

- $(BD_1\mathcal{M}1^1)$ k sei ein Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r, (CDGH)_r, (ADEH)_a$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- $(BD_1\mathcal{M}1^2)$ k sei ein Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r, (CDGH)_a, (ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- $(BD_2\mathcal{M}0)$ Aus $(ABC)_rC(CG H)_r, (BCEG)_r$ und $(ACEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- $(BD_2\mathcal{M}2)$ Aus $(ABC)_rC(CG H)_r, (BCEG)_a$ und $(ACEH)_a$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- $(CC_1\mathcal{M}0)$ k sei der Kreis, der A und B enthält mit $(ADH)_rAk$ und $kB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_r, (CDGH)_r$. Dann folgt $(ABGH)_{ar}$.
- $(CC_1\mathcal{M}1^1)$ k sei der Kreis, der A und B enthält mit $(ADH)_rAk$ und $kB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_a, (CDGH)_r$. Dann folgt $(ABGH)_r$.
- $(CC_1\mathcal{M}1^2)$ k sei der Kreis, der A und B enthält mit $(ADH)_rAk$ und $kB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_r, (CDGH)_a$. Dann folgt $(ABGH)_r$.
- $(CC_2\mathcal{M}0)$ Aus $(ABCD)_r, (ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BCF)_rC(CDH)_r$ folgt $(ACFH)_r$.
- $(CC_2\mathcal{M}1)$ Aus $(ABCD)_a, (ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BCF)_rC(CDH)_r$ folgt $(ACFH)_a$.
- $(CD\mathcal{M}0)$ Aus $(ABD)_rB(BFG)_r, (ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BDGH)_r$ folgt $(AFGH)_{ar}$.
- $(CD\mathcal{M}1)$ Aus $(ABD)_rB(BFG)_r, (ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BDGH)_a$ folgt $(AFGH)_r$.
- $(DD\mathcal{M}0)$ k sei der Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$ und $kC(CG H)_r$; weiter gelte $(ACFG)_r, (CDEH)_r$. Dann folgt $(EFGH)_{ar}$.
- $(DD\mathcal{M}1)$ k sei der Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$ und $kC(CG H)_r$; weiter gelte $(ACFG)_a, (CDEH)_r$. Dann folgt $(EFGH)_r$.
- $(BCD_1\mathcal{M}0)$ k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; es gelte weiterhin $(ADEH)_r, (ACE)_rC(CDH)_r$. Dann folgt $kE(CEH)_r$.

$(BCD_1\mathcal{M}1)$	k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; es gelte weiterhin $(ADEH)_a$, $(ACE)_rC(CDH)_r$. Dann folgt $kE(CEH)_r$.
$(BCD_2\mathcal{M}0)$	Aus den beiden Berührbedingungen $(ACD)_rA(AEF)_r$, $(ACF)_rC(CDE)_r$ folgt $(ADE)_rE(CEF)_r$.
$(BDD\mathcal{M}0)$	k sei der Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$ und $kC(CEG)_r$; es gelte weiter $(ACFG)_r$. Dann folgt $(ACE)_rE(EFG)_r$.
$(BDD\mathcal{M}1)$	k sei der Kreis, der A und C enthält mit $(AEF)_rAk$ und $kC(CEG)_r$; es gelte weiter $(ACFG)_a$. Dann folgt $(ACE)_rE(EFG)_r$.
$(CCD\mathcal{M}0)$	k sei der Kreis, der C und D enthält mit $(ACF)_rCk$ und $kD(ADE)_r$; es gelte weiterhin $(ACD)_rA(AEF)_r$. Dann folgt $(CDEF)_{ar}$.
$(BBDD\mathcal{M}0)$	k_1 sei ein Kreis, der A und C enthält mit k_2AkCk_4 , wobei A und E auf dem Kreis k_2 bzw. C und G auf dem Kreis k_3 liegen. Weiter gelte k_3Gk_4 , wobei E und G auf dem Kreis k_4 liegen und $(ACEG)_r$. Dann folgt k_1Ek_4 .
$(BBDD\mathcal{M}1)$	k_1 sei ein Kreis, der A und C enthält mit k_2AkCk_4 , wobei A und E auf dem Kreis k_2 bzw. C und G auf dem Kreis k_3 liegen. Weiter gelte k_3Gk_4 , wobei E und G auf dem Kreis k_4 liegen und $(ACEG)_a$. Dann folgt k_1Ek_4 .
$(BCCD\mathcal{M}0)$	k_1 sei der Kreis, der C und D enthält mit $(ACE)_rCk_1$ und $k_1D(ADE)_r$ und es sei k_2 der Kreis, der A und E enthält mit $(ACD)_rAk_2$. Dann folgt $k_2E(CDE)_r$.
$(CCCC\mathcal{M}0)$	Es seien k_1, k_2, k_3 und k_4 Kreise, die A und B ; B und C ; C und D bzw. A und D enthalten, mit $k_4Ak_1Bk_2Ck_3Dk_4$. Dann folgt $(ABCD)_{ar}$.

Tabelle 2.2: Miquelsche Bedingungen im Laguerre-Fall.

2.4.2 Ergebnisse

Wie im Möbius-Fall gilt auch für Laguerre-Ebenen – die minimale Laguerre-Ebene ausgenommen¹² – die Aussage:

¹²Wir schließen weiterhin immer die minimale Laguerre-Ebene aus. Da diese aus nur sechs Punkten besteht, sind die Voraussetzungen der meisten miquelschen Bedingungen

Satz 2.30. *In miquelschen Laguerre-Ebenen gelten alle 40 angegebenen Bedingungen.*

Beweis. Siehe Samaga [46]. □

Andererseits folgt nach Chen [19] (s. Satz 2.10), daß zur Charakterisierung miquelscher Laguerre-Ebenen die Bedingung $(\mathcal{M}0)$ genügt.

Satz 2.31. *Die miquelschen Laguerre-Ebenen sind genau die Laguerre-Ebenen, in denen die Bedingung $(\mathcal{M}0)$ gilt.* □

Es genügt eine miquelsche Bedingung mit sechs Punkten zur Charakterisierung miquelscher Möbius-Ebenen; in Laguerre-Ebenen funktioniert jener Beweis von Schaeffer (s. Abschnitt 2.3.2) wegen der auftretenden ausgearteten Kreise nicht mehr. Mit gänzlich anderen Methoden gelang es Artzy [3] im Jahre 1974 die miquelschen Laguerre-Ebenen durch eine Bedingung mit nur sechs Punkten zu charakterisieren.

Satz 2.32. *Die miquelschen Laguerre-Ebenen sind genau die Laguerre-Ebenen, in denen die Bedingung $(BD_1\mathcal{M}1^2)$ gilt.* □

Ein weiteres Resultat von Samaga [47] aus dem Jahr 1991 zeigt den Zusammenhang zwischen dieser und einigen anderen Bedingungen.

Satz 2.33. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_1\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (CC_1\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (DD\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (B\mathcal{M}1^1) \Leftrightarrow (C\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (D\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (D\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$.* □

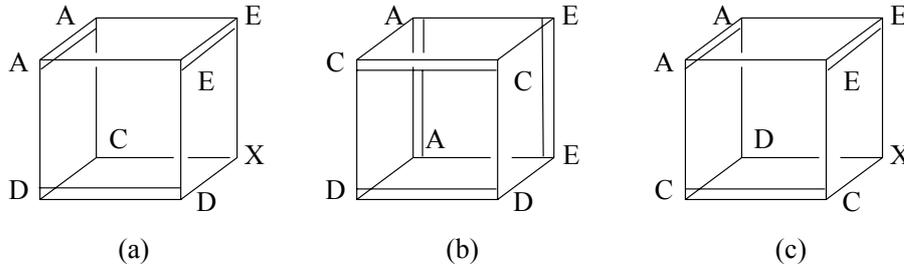
Wir kommen nun zu eigenen Ergebnissen und beweisen eine Reihe von Lemmata.

Lemma 2.34. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BDD\mathcal{M}0) \Rightarrow (BCCD\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt. Weiter sei l der reguläre Kreis, der die Punkte C und D enthält und für den $(ADE)_r DlC(ACE)_r$ gilt. Zu zeigen ist $kE(CDE)_r$. Im Fall $k = (CDE)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $k \neq (CDE)_r$. Es existiert genau ein regulärer Kreis m , der die Punkte D und E enthält und für den mEk gilt. Im Fall $m = k$ folgt $k = (ACDE)_r$, Widerspruch zu $k \neq (CDE)_r$. Wir gehen im weiteren von $m \neq k$ aus. Falls $m \cap (ACE)_r = \{E\}$ gilt, folgt $k = (ACE)_r = (ACDE)_r$, Widerspruch zu $k \neq (CDE)_r$. Es gelte nun $m \cap (ACE)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Aus $X = A$ folgt $m = (ADE)_r = k$ und damit $(ACDE)_r$, Widerspruch zu $m \neq k$. Aus $X = C$ folgt unmittelbar die

ohnehin nicht erfüllbar, d.h. die Bedingungen gelten trivialerweise. Das Minimalmodell birgt außerdem die Besonderheit, daß sich zwei verschiedene ausgeartete Kreise in genau zwei verschiedenen, parallelen Punkten schneiden.

Behauptung. Aus $X = D$ folgt $(ACDE)_r$, Widerspruch zu $k \neq (CDE)_r$. Sei also $X \notin \{A, C, D, E\}$. Wir wenden $(BDD\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, E, D, X, C an (s. Figur 2.7a) und erhalten $(AED)_r D(CDX)_r$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(CDX)_r = l$. Wegen $l \cap (ACE)_r = \{C\}$ folgt $X = C$. Damit gilt $kE(CDE)_r$. \square



FIGUR 2.7

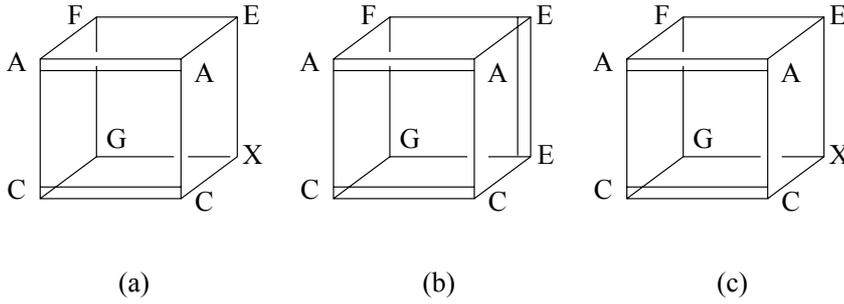
Lemma 2.35. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BDD\mathcal{M}0) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(ACE)_r C(CDH)_r$. Weiter sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt. Zu zeigen ist $kE(CEH)_r$. Im Fall $k = (CEH)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $k \neq (CEH)_r$. Es existiert ein eindeutig bestimmter regulärer Kreis m , der die Punkte C und E enthält und für den mEk gilt. Im Fall $m = k$ folgt $(ACDEH)_r$, insbesondere also die Behauptung. Wir gehen jetzt von $m \neq k$ aus. Im Fall $mE(ADEH)_r$ folgt $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $m \neq k$. Es sei $m \cap (ADEH)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Aus $X = A$ bzw. $X = C$ folgt $m = (ACE)_r$ bzw. $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $m \neq k$. Im Fall $X = H$ sind wir fertig. Im Fall $X = D$ benutzen wir die wegen Lemma 2.34 gültige Bedingung $(BCCD\mathcal{M}0)$ und wenden diese auf die Punkte C, E, A, D an (s. Figur 2.7b). Wir erhalten $lD(ADE)_r = (ADEH)_r$, wobei l der reguläre Kreis durch die Punkte C und D sei, für den $lC(ACE)_r$ gilt. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises gilt $l = (CDH)_r$. Dann folgt aber $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $m \neq k$. Es sei $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Wir wenden $(BDD\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, E, C, X, D an (s. Figur 2.7c). und erhalten $(ACE)_r C(CDX)_r = (CDHX)_r$. Wegen $(CDH)_r \cap (ADEH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Damit folgt $(CEH)_r Hk$. \square

Lemma 2.36. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ACFG)_r$, k sei ein regulärer Kreis mit $A, C \in k$, $(AEF)_r Ak$ und $kC(CEG)_r$. Zu zeigen ist $(ACE)_r E(EFG)_r$. Im Fall $(ACE)_r = (EFG)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ACE)_r \neq (EFG)_r$. Angenommen, es gibt

ein $X \neq E$ mit $(ACE)_r \cap (EFG)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ bzw. $X = C$ folgt $(AEFG)_r$ bzw. $(CEFG)_r$ und damit $(ACEFG)_r$. Aus $X = F$ bzw. $X = G$ folgt $(ACEF)_r$ bzw. $(ACEG)_r$ und damit $(ACEFG)_r$. Dies ist ein Widerspruch zu $(ACE)_r \neq (EFG)_r$. Es sei jetzt also $X \notin \{A, C, E, F, G\}$. Da X auf den Kreisen $(ACE)_r$ und $(EFG)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu A, C, E, F, G . Wir wenden $(BD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, E, F, C, X, G (s. Figur 2.8a) an. Es folgt $kC(CGX)_r$ und damit $(CEGX)_r$. Wegen $(CEG)_r \cap (ACE)_r = \{C, E\}$ und $X \neq C$ folgt $X = E$. Es gilt also $(ACE)_r E (EFG)_r$. \square



FIGUR 2.8

Lemma 2.37. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (DD\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ACEH)_r$ und $(ACFG)_r$. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte A und C , der den Kreis $(AEF)_r$ in A und den Kreis $(CGH)_r$ in C berührt. Zu zeigen ist $(EFGH)_{ar}$. Wir unterscheiden ohne Einschränkung die zwei Fälle $E \parallel G$ und $F \parallel H$.

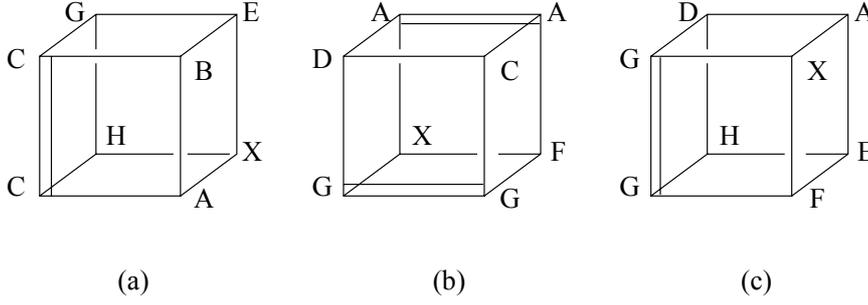
1. Fall: Sei $E \parallel G$. Es sind E, F und G drei paarweise nicht parallele Punkte, d.h. es gilt $(EFG)_r$. Angenommen, es gilt $(EFG)_r E (ACEH)_r$. Im Fall $(EFG)_r = (ACEH)_r$ schließt man auf $(ACEFGH)_r$, es gilt also insbesondere $(EFGH)_r$. Es sei im weiteren $(EFG)_r \neq (ACEH)_r$. Angenommen, es gilt $(EFG)_r \cap (ACEH)_r = \{E\}$. Da aus $(BD_1\mathcal{M}0)$ die Bedingung $(BCD_1\mathcal{M}0)$ (Lemma 2.36 und Lemma 2.35) folgt, wenden wir letztere auf die Punkte A, E, F, C, G (s. Figur 2.8b) an und erhalten $kC(CEG)_r$. Daraus folgt $(CEG)_r C (CGH)_r$, also $(CEGH)_r$ und damit $(ACEGH)_r$. Das führt auf $(ACEFGH)_r$, Widerspruch zu $(EFG)_r \neq (ACEH)_r$. Sei im verbleibenden Fall $(EFG)_r \cap (ACEH)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Aus $X = A$ folgt $(AEFG)_r$ und damit $(ACEFG)_r$. Aus $X = C$ folgt $(CEFG)_r$ und damit $(ACEFG)_r$. Aus $X = F$ folgt $(ACEFH)_r$. Aus $X = G$ folgt $(ACEGH)_r$. In allen Fällen erhält man $(ACEFGH)_r$ und damit einen Widerspruch zu $(EFG)_r \cap (ACEH)_r = \{E, X\}$. Wir gehen jetzt also von $X \notin \{A, C, E, F, G, H\}$ aus. Wende $(BD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, E, F, C, X, G an

(s. Figur 2.8c). Man erhält $kC(CGX)_r$, was $(CGX)_rC(CGH)_r$ impliziert. Daraus folgt $(CGHX)_r$. Wegen $(CGH)_r \cap (ACEH)_r = \{C, H\}$ und $X \neq C$ folgt $X = H$. Es gilt also $(EFGH)_r$.

2. Fall: Sei ohne Einschränkung $F \parallel H$. Zu zeigen ist $E \parallel G$. Angenommen, es gilt $E \not\parallel G$. Dann folgt $(EFG)_r$. Angenommen, es gilt $(EFG)_rE(ACEH)_r$. Falls $(EFG)_r = (ACEH)_r$ gilt, so erhält man einen Widerspruch zu $F \parallel H$. Sei im weiteren also $(EFG)_r \neq (ACEH)_r$. Im Fall $(EFG)_r \cap (ACEH)_r = \{E\}$ schließt man, wie in Fall 1, auf $(ACEFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Wir betrachten den verbleibenden Fall $(EFG)_r \cap (ACEH)_r = \{E, X\}$ mit $E \neq X$. Aus $X = A$ folgt sukzessive $(AEFG)_r$, $(ACEFG)_r$. Aus $X = C$ folgt $(CEFG)_r$ und damit $(ACEFG)_r$. Aus $X = F$ folgt $(ACEFH)_r$. Aus $X = G$ folgt $(ACEGH)_r$. In allen Fällen schließt man auf $(ACEFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Im Fall $X = H$ folgt $(EFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Analog zum Fall 1 können wir von $X \notin \{A, C, E, F, G, H\}$ ausgehen. Die Anwendung von $(BD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, E, F, C, X, G (s. Figur 2.8c) führt auf $kC(CGX)_r$ und damit auf $(CGX)_rC(CGH)_r$. Daraus folgt $(CGHX)_r$. Wegen $(CGH)_r \cap (ACEH)_r = \{C, H\}$ und $X \neq C$ folgt $X = H$, d.h. $F \parallel H \in (EFG)_r$, Widerspruch. Also gilt $E \parallel G$. \square

Lemma 2.38. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(\mathcal{CM}0) \Rightarrow (BD_2\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ACEH)_r$, $(BCEG)_r$, $(ABC)_rC(CGH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Im Fall $(ABE)_r = (EGH)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $(ABE)_r \cap (EGH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(AEGH)_r$ und damit $(ACEGH)_r$ und $(ABCEGH)_r$. Widerspruch zu $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Ebenso können wir schließen: $X = B \Rightarrow (BEGH)_r \Rightarrow (BCEGH)_r \Rightarrow (ABCEGH)_r$. $X = C \Rightarrow (ABCE)_r \Rightarrow (ABCEG)_r \Rightarrow (ABCEGH)_r$. $X = G \Rightarrow (ABEG)_r \Rightarrow (ABCEG)_r \Rightarrow (ABCEGH)_r$. $X = H \Rightarrow (ABEH)_r \Rightarrow (ABCEH)_r \Rightarrow (ABCEGH)_r$. In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Da X auf den Kreisen $(ABE)_r$ und $(EGH)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu A, B, E, G, H . Es sei also $X \notin \{A, B, C, E, G, H\}$. Wende $(\mathcal{CM}0)$ auf die Punkte C, B, E, G, A, X, H (s. Figur 2.9a) an. Es folgt $(ACHX)_r$. Wegen $(ACEH)_r$ folgt $(ACEHX)_r$ und $(ABCEHX)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \cap (EGH)_r = \{E, X\}$. Es gilt also $(ABE)_rE(EGH)_r$. \square



FIGUR 2.9

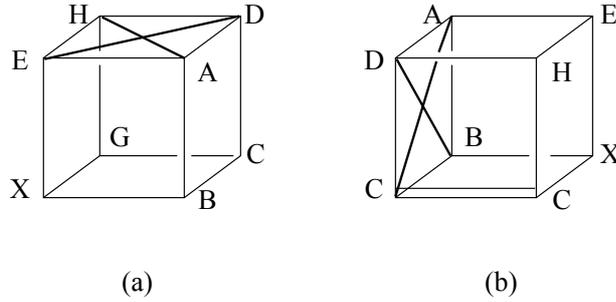
Lemma 2.39. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CM0) \Rightarrow (DM0)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ACD)_r A (AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_{ar}$. Angenommen, es gilt $(AEF)_r A (ADG)_r$. Dann folgt wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises $(ADG)_r = (ACD)_r$ und damit $(ACDG)_r$. Das bedeutet $(ACDEFGH)_r$ und wir erhalten einen Widerspruch falls $D \parallel F$ oder $C \parallel E$ bzw. $(EFGH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq A$ mit $(AEF)_r \cap (ADG)_r = \{A, X\}$. Aus $X = C$ folgt sukzessive $(ACDG)_r$, $(ACDFG)_r$, $(ACDEFGH)_r$. Widerspruch zu $(AEF)_r \cap (ADG)_r = \{A, X\}$. Ebenso folgt: $X = D \Rightarrow (ADEF)_r \Rightarrow (ADEFGH)_r$. $X = E \Rightarrow (ADEG)_r \Rightarrow (ADEGH)_r$. $X = F \Rightarrow (ADFG)_r \Rightarrow (ACDFG)_r$. $X = G \Rightarrow (AEFG)_r \Rightarrow (ACEFG)_r$. $X = H \Rightarrow (AEFH)_r \Rightarrow (ADEFH)_r$. In allen genannten Fällen folgt $(ACDEFGH)_r$, Widerspruch zu $(AEF)_r \cap (ADG)_r = \{A, X\}$. Da X auf den Kreisen $(AEF)_r$ und $(ADG)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu A, D, E, F, G . Es sei $X \notin \{A, C, D, E, F, G, H\}$. Nach Lemma 2.38 impliziert $(CM0)$ die Bedingung (BD_2M0) . Wende (BD_2M0) auf die Punkte D, C, A, G, F, X (s. Figur 2.9b) an. Es folgt $(CDG)_r G (FGX)_r$. Wende $(CM0)$ auf die Punkte G, X, A, D, F, E, H (s. Figur 2.9c) an. Es folgt $(EFGH)_{ar}$. \square

Lemma 2.40. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(M1^1) \Rightarrow (BM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_r$, $(BCEG)_r$, $(ADEH)_a$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E (EGH)_r$. Da $(ADEH)_a$ ein ausgearteter Kreis ist, folgt nach Definition $A \parallel H$ sowie $D \parallel E$. Im Fall $(ABE)_r = (EGH)_r$ erhalten wir einen Widerspruch zu $A \parallel H$. Es ist also $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $(ABE)_r \cap (EGH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(AEGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Aus $X = B$ folgt $(BEGH)_r$, $(BCEGH)_r$, $(BCDEGH)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = C$ folgt $(ABCE)_r$, $(ABCDE)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = D$ folgt $(DEGH)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = G$ folgt $(ABEG)_r$, $(ABCEG)_r$, $(ABCDEG)_r$ Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = H$ folgt $(ABEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es sei $X \notin \{A, B, C, D, E, G, H\}$. Es ist X nicht-parallel zu A, B, E , da $(ABE)_r$ und $X \in (ABE)_r$. Das gleiche

Argument gilt für den Kreis $(EGH)_r$. X ist nicht-parallel zu D wegen $D \parallel E$. Wende $(\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte E, A, D, H, X, B, C, G (s. Figur 2.10a) an. Es folgt $(BCGX)_{ar}$. Wegen $(BCEG)_r$ folgt $(BCGX)_r$ (insbesondere folgt $X \parallel C$) und damit sukzessive $(BCEGX)_r, (ABCEGX)_r, (ABCDEGX)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Es folgt $(ABE)_r E(EGH)_r$. \square



FIGUR 2.10

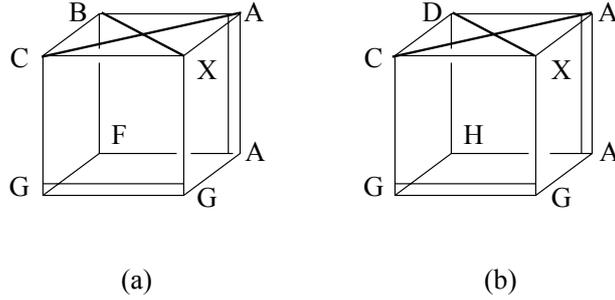
Lemma 2.41. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BM1^2) \Rightarrow (BCM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a, (ADEH)_r, (BCE)_r C(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(CEH)_r$. Im Fall $(ABE)_r = (CEH)_r$ erhalten wir einen Widerspruch zu $A \parallel C$. Es ist also $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Aus $X = B$ folgt $(BCEH)_r$ und damit $(BCDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel H$. Aus $X = C$ folgt $(ABCE)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Aus $X = D$ folgt $(ABDE)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Aus $X = H$ folgt $(ABEH)_r$ und damit $(ABDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Es sei also $X \notin \{A, B, C, D, E, H\}$. Weiterhin gilt, daß X zu keinem der Punkte A, B, C, D, E, H parallel ist, da X auf den Kreisen $(ABE)_r$ und $(CEH)_r$ liegt. Wende $(BM1^2)$ auf die Punkte D, H, E, A, C, X, B (s. Figur 2.10b) an. Dann ergibt sich $(BCX)_r C(CDH)_r$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(BCX)_r = (BCE)_r$ und damit $(BCEX)_r$ und $(ABCEX)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Daraus folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$. \square

Lemma 2.42. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM1^1) \Rightarrow (CM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(BCFG)_r, (CDGH)_r, (ABCD)_a, (ABF)_r A(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$ (es muß $A \parallel G$ gelten, da sonst $C \parallel G$ folgen würde). Sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und G enthält und für den $(ABF)_r A k$ gilt. Wegen $(ABCD)_a$ gilt $k \cap (ABCD)_a = \{A, X\}$ mit $X \parallel B$. Aus $X = B$ folgt $k = (ABG)_r A(ABF)_r$, d.h. $(ABFG)_r$ und damit $(ABCFG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Aus $X = D$ folgt $k = (ADG)_r A(ADH)_r$, d.h. $(ADGH)_r$ und

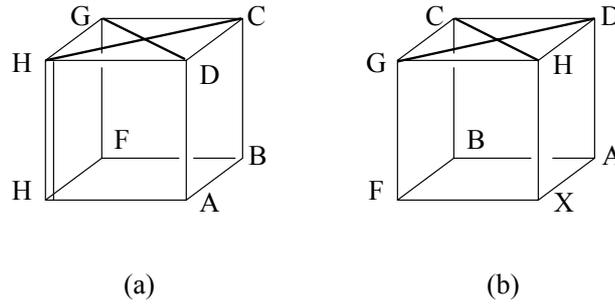
damit $(ACDGH)_r$, Widerspruch zu $A\|C$. Aus den genannten Bedingungen folgt dann sofort $X \notin \{A, B, C, D, F, G, H\}$. Wende $(BCM1^1)$ zweimal an; zum einen auf die Punkte C, X, A, B, G, F (s. Figur 2.11a) und zum anderen auf die Punkte C, X, A, D, G, H (s. Figur 2.11b). Es folgt $(CGX)_rG(AFG)_r$ bzw. $(CGX)_rG(AGH)_r$, also $(AFG)_rG(AGH)_r$. Dies bedeutet aber $(AFGH)_r$. \square



FIGUR 2.11

Lemma 2.43. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (C\mathcal{M}1^2)$.*

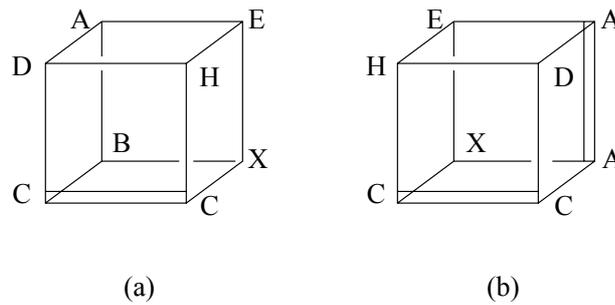
Beweis. Zum Beweis wird die Bedingung $(C\mathcal{M}1^1)$ benötigt, die aber bereits auf Grund der Gültigkeit der Bedingung $(\mathcal{M}1^1)$ und der Lemmata 2.40, 2.41 und 2.42 gilt. Es gelte $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, sowie $(ABF)_rA(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. $(ADH)_r = (FGH)_r$ kann nicht auftreten wegen $D\|G$. Angenommen, es gilt $(FGH)_r \cap (ADH)_r = \{H\}$. Wende die oben erwähnte Bedingung $(C\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte H, D, C, G, A, B, F an (s. Figur 2.12a). Es folgt $(ABFH)_r$ (der Kreis ist regulär, da A, B, F, H paarweise nicht parallel sind). Unter Beachtung der Voraussetzung $(ABF)_rA(ADH)_r$ folgt $(ABDFH)_r$ und damit $(ABCDFH)_r$, Widerspruch zu $C\|H$. Es gilt also $(ADH)_r \cap (FGH)_r = \{H, X\}$ mit $X \neq H$. Aus $X = B$ folgt $(ABDH)_r$ und damit $(ABCDH)_r$, Widerspruch zu $C\|H$. Aus $X = C$ folgt $(ACDH)_r$, Widerspruch zu $C\|H$. Aus $X = F$ folgt $(ADFH)_r$ und damit $(ABDFH)_r$ bzw. $(ABCDFH)_r$, Widerspruch zu $C\|H$. Aus $X = G$ folgt $(ADGH)_r$, Widerspruch zu $D\|G$. Es sei also $X \notin \{B, C, D, F, G, H\}$. Wende nun $(\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte G, H, D, C, F, X, A, B an (s. Figur 2.12b). Es folgt $(ABFX)_{ar}$. Da A, B, F paarweise nicht-parallele Punkte sind, liegt mit $(ABFX)_{ar}$ der reguläre Kreis $(ABFX)_r$ vor. Wegen $(ADF)_r \cap (ADH)_r = \{A\}$ folgt $X = A$ und damit $(AFGH)_r$. \square



FIGUR 2.12

Lemma 2.44. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BM0) \Rightarrow (BCM0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(ADEH)_r$ und $(BCE)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $E \neq X$ mit $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$ und damit $(ABCDEH)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Ebenso können wir folgern: $X = B \Rightarrow (BCEH)_r \Rightarrow (BCDEH)_r$. $X = C \Rightarrow (ABCE)_r \Rightarrow (ABCDE)_r$. $X = D \Rightarrow (ABDE)_r \Rightarrow (ABCDE)_r$. $X = H \Rightarrow (ABEH)_r \Rightarrow (ABDEH)_r$. In allen Fällen folgt $(ABCDEH)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Es ist also $X \notin \{A, B, C, D, E, H\}$. Außerdem ist X zu keinem der Punkte A, B, C, E, H parallel, da X auf den Kreisen $(ABE)_r$ und $(CEH)_r$ liegt. Wende $(BM0)$ auf die Punkte D, H, E, A, C, X, B (s. Figur 2.13a) an. Es folgt $(CDH)_rC(BCX)_r$. Wegen der Eindeutigkeit der Berührungskreise folgt $(BCE)_r = (BCX)_r$ und damit $(BCEX)_r$ und $(ABCEX)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Daraus folgt $(ABE)_rE(CEH)_r$. \square



FIGUR 2.13

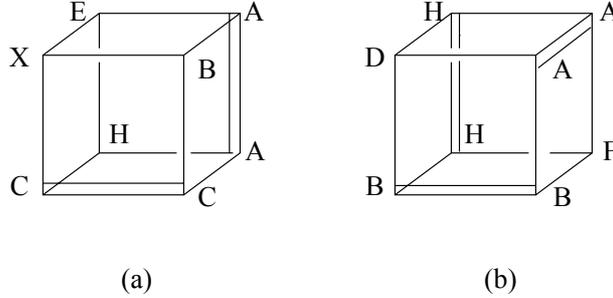
Lemma 2.45. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM0) \Rightarrow (BCD_1M0)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(ACE)_rC(CDH)_r$. Es sei k der Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt.

Zu zeigen ist $kE(CEH)_r$. Falls $k = (CEH)_r$, ist nichts zu zeigen. Sei also $k \neq (CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$. Aus $X = C$ folgt $k = (ACE)_r$ und damit $(ACDE)_r$. Aus $X = D$ folgt $(CDEH)_r$. Aus $X = H$ folgt $k = (AEH)_r$ und damit $k = (ADEH)_r$. In allen Fällen folgt $(ACDEH)_r$ und damit liegt ein Widerspruch zu $k \neq (CEH)_r$ vor. Es gilt $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Da X auf den Kreisen k und $(CEH)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu den Punkten A, C, E, H . Wende $(BCM0)$ auf die Punkte H, D, A, E, C, X (s. Figur 2.13b) an. Es folgt $(CDH)_r C(ACX)_r$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(ACX)_r = (ACE)_r$ und damit $(ACEX)_r = k$, Widerspruch zu $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Daraus folgt $kE(CEH)_r$. \square

Lemma 2.46. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM0) \Rightarrow (BCD_2M0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABC)_r A(AEH)_r$ und $(BCE)_r C(ACH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(CEH)_r$. Im Fall $(ABE)_r = (CEH)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$. Aus $X = B$ folgt $(BCEH)_r$. Aus $X = C$ folgt $(ABCE)_r$. Aus $X = H$ folgt $(ABEH)_r$. In allen Fällen folgt $(ABCEH)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Es gelte $X \notin \{A, B, C, E, H\}$. Da X auf den Kreisen $(ABE)_r$ und $(CEH)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu den Punkten A, B, C, E, H . Wende $(BCM0)$ auf die Punkte X, B, A, E, C, H (s. Figur 2.14a) an. Es folgt $(BCX)_r C(ACH)_r$ und damit $(BCX)_r = (BCE)_r$, was $(BCEX)_r$ zur Folge hat, Widerspruch zu $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Daraus folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$. \square



FIGUR 2.14

Lemma 2.47. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM0) \Rightarrow (CDM0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABD)_r B(BFG)_r$, $(BDGH)_r$, $(ABF)_r A(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_{ar}$. Wegen der Voraussetzung $(BCM0)$ gilt bereits die Bedingungen (BCD_1M0) (Lemma 2.45) und (BCD_2M0) (Lemma 2.46). Wir

unterscheiden drei Fälle:

Fall 1. $A \parallel G$,

Fall 2. $F \parallel H$,

Fall 3. $A \parallel G, F \parallel H$.

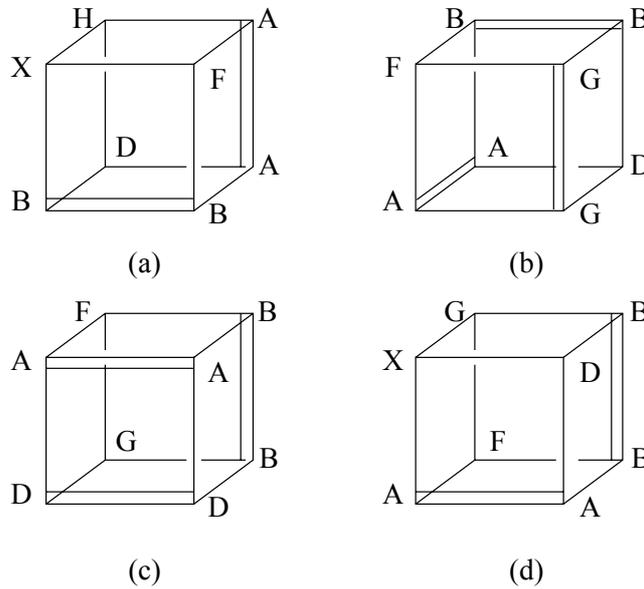
Fall 1. Es gelte $A \parallel G$. Zu zeigen ist $F \parallel H$. Angenommen $F \not\parallel H$. Dann haben wir einen regulären Kreis $(AFH)_r$. Angenommen, es gilt $(AFH)_r = (BDGH)_r$, also $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Wir gehen also von $(AFH)_r \neq (BDGH)_r$ aus. Angenommen, es gilt $(AFH)_r \cap (BDGH)_r = \{H\}$. Wende $(BCD_2\mathcal{M}0)$ auf die Punkte D, A, H, B, F an (s. Figur 2.14b). Wir erhalten $(ABD)_r B(BFH)_r$ und damit laut Voraussetzung $(BFG)_r B(BFH)_r$. Damit gilt $(BFGH)_r$ und weiter $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Wegen $(AFH)_r \neq (BDGH)_r$ folgt somit $(AFH)_r \cap (BDGH)_r = \{H, X\}$ mit $X \neq H$. $X = A$ kann nicht gelten, da $(ABDGH)_r$ ein Widerspruch zu $A \parallel G$ ist. $X = B$ impliziert $(ABFH)_r$, d.h. $(ABDFH)_r$ (falls $D \parallel F$ vorausgesetzt ist, haben wir sofort einen Widerspruch). Dann gilt aber $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Aus $X = D$ folgt $(ADFH)_r$ (falls $D \parallel F$ vorausgesetzt ist, haben wir sofort einen Widerspruch) und damit $(ABDFH)_r$. Es folgt $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Aus $X = F$ folgt $(BDFGH)_r$ und damit $(ABDFGH)_r$, (falls $D \parallel F$ vorausgesetzt ist, haben wir sofort einen Widerspruch) Widerspruch zu $A \parallel G$. Insgesamt gilt also $X \notin \{A, B, D, F, H\}$. Wende $(BCM0)$ auf die Punkte X, F, A, H, B, D an (s. Figur 2.15a). Man erhält $(ABD)_r B(BFX)_r$. Daraus folgt $(BFG)_r B(BFX)_r$ und damit gilt $(BFGX)_r$. Wegen $(BFG)_r \cap (BDGH)_r = \{B, D\}$ und $X \neq B$ folgt $X = G$, also $(ABDFGHX)_r$ Widerspruch zu $A \parallel G$. Damit gilt $X = G$, also liegt der zu A parallele Punkt G auf dem regulären Kreis $(AFH)_r$, Widerspruch. Daraus folgt $F \parallel H$, bzw. $(AFGH)_a$.

Fall 2. $F \parallel H$. Zu zeigen ist $A \parallel G$. Angenommen es gilt $A \not\parallel G$. Daraus folgt $(AFG)_r$. Wie in Fall 1 gehen wir von $(AFG)_r \neq (BDGH)_r$ aus. Angenommen, es gilt $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G\}$. Wende $(BCD_2\mathcal{M}0)$ auf die Punkte F, G, B, A, D an (s. Figur 2.15b). Man erhält $(ABF)_r A(ADG)_r$. Daraus folgt $(ADH)_r A(ADG)_r$ und damit $(ADGH)_r$, bzw. $(ABDGH)_r = (ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Aus diesem Grund und wegen $(AFG)_r \neq (BDGH)_r$ haben wir $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \neq G$. Der Fall $X = A$ führt auf $(ABDGH)_r$ und damit gilt $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Im Fall $X = B$ erhalten wir $(ABFG)_r$ und damit $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Der Fall $X = F$ führt auf $(BDGFH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. Der Fall $X = D$ läßt sich wie folgt widerlegen: Aus $X = D$ folgt $(ADFG)_r$. Wende $(BCD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, B, F, D, G an (s. Figur 2.15c). Wir erhalten $(ADH)_r D(BDGH)_r$. Daraus folgt $(ABDGH)_r = (ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel H$. D.h. wir haben $X \notin \{A, B, D, F, G\}$. Wenden wir jetzt

(BCM_0) auf die Punkte X, D, B, G, A, F an (s. Figur 2.15d), so erhalten wir $(ABF)_r A(ADX)_r$. Daraus folgt $(ADH)_r A(ADX)_r$ und damit $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (BDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Also liegt der zu F parallele Punkt H auf dem regulären Kreis $(AFG)_r$, Widerspruch. Daraus folgt $A \parallel G$, bzw. $(AFGH)_a$.

Fall 3. $A \parallel G, F \parallel H$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. Es gilt $(AFG)_r$. Wir gehen wieder von $(AFG)_r \neq (BDGH)_r$ aus. Angenommen, es gilt $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G\}$. Wende (BCD_2M_0) auf die Punkte F, G, B, A, D an (s. Figur 2.15b). Wir erhalten $(ABF)_r A(ADG)_r$ und damit $(ADH)_r A(ADG)_r$. Das führt auf $(ADGH)_r$ und dies auf $(ABDGH)_r$, Widerspruch zu $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G\}$. Daraus folgt $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \neq G$.

Aus $X = A$ folgt $(ABDGH)_r$ und damit $(ABDFGH)_r$, Widerspruch zu $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G, X\}$. Aus $X = B$ folgt $(ABFG)_r$ und damit $(ABDFG)_r$, s. Fall $X = A$. Aus $X = F$ folgt $(BDFG)_r$, Widerspruch zu $(AFG)_r \cap (BDGH)_r = \{G, X\}$. Im Fall $X = H$ ist nichts zu zeigen. Der Fall $X = D$ läßt sich analog zu Fall 2 behandeln. Es sei also $X \notin \{A, B, D, F, G\}$ vorausgesetzt. Wende (BCM_0) auf die Punkte X, D, B, G, A, F an (s. Figur 2.15d). Wir erhalten $(ABF)_r A(ADX)_r$. Daraus folgt $(ADH)_r A(ADX)_r$ und daraus $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (BDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$ und damit $(AFGH)_r$. \square



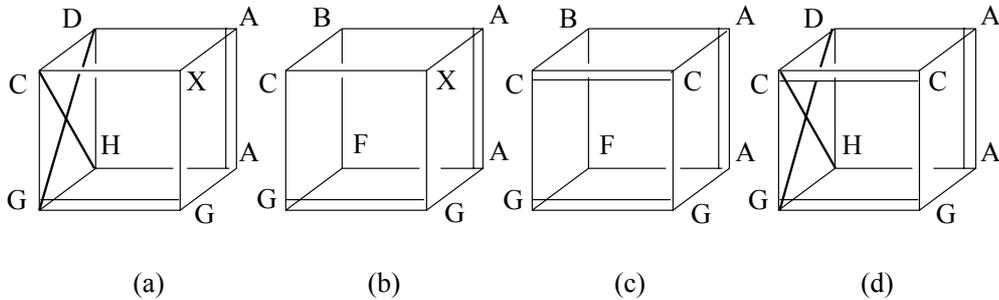
FIGUR 2.15

Lemma 2.48. *In Laguerre-Ebenen gilt: Aus der Gültigkeit von $(BCM0)$ und $(BCM1^2)$ und (BCD_1M1) folgt $(CM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ABF)_rA(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. Nach Voraussetzung ist $A\|G$. Es sei k der Kreis durch die Punkte A und G , der $(ABF)_r$ in A berührt. Es existiert ein Punkt $X \neq A$ mit $(ABCD)_r \cap k = \{A, X\}$, da im Fall $X = A$ sofort $(ABCD)_r = (ABF)_r = (ADH)_r$ folgt, Widerspruch zu $C\|H$. Aus $X = B$ folgt sukzessive $k = (ABFG)_r$, $k = (ABCFG)_r$, $k = (ABCD FG)_r$, Widerspruch zu $D\|G$. Aus $X = D$ folgt $k = (ADG)_r$, Widerspruch zu $D\|G$. Aus $X = F$ folgt $k = (AFG)_r$ und damit $(ABFG)_r$ (s. Fall $X = B$). Aus $X = G$ folgt $(ABCDG)_r$, Widerspruch zu $D\|G$. Aus $X = H$ folgt $(ABCDH)_r$, Widerspruch zu $C\|H$. Es ist also $X \notin \{A, B, D, G, H\}$. Da X auf den Kreisen $(ABCD)_r$ und k liegt, ist X nicht-parallel zu A, B, C, D, G, H .

1. Fall: $X \neq C$. Wende $(BCM1^2)$ auf die Punkte C, X, A, D, G, H an (s. Figur 2.16a). Es folgt $(AGH)_rG(CGX)_r$. Wende außerdem $(BCM0)$ auf die Punkte C, X, A, B, G, F an (s. Figur 2.16b). Wir erhalten $(CGX)_rG(AFG)_r$ und damit $(AFG)_rG(AGH)_r$. Wegen der Eindeutigkeit der Berührungskreise bedeutet das $(AFG)_r = (AGH)_r$, also $(AFGH)_r$.

2. Fall: $X = C$. Da $(BCM0)$ gilt, folgt mit Lemma 2.45 die Gültigkeit der Bedingung (BCD_1M0) . Diese wenden wir auf die Punkte C, A, B, G, F an (s. Figur 2.16c) und erhalten $(AFG)_rG\tilde{k}$, wobei \tilde{k} der Kreis durch C, G ist, der $(ABCD)_r$ in C berührt. Wende außerdem (BCD_1M1) auf die Punkte C, A, D, G, H an (s. Figur 2.16d). Wir erhalten $(AGH)_rG\tilde{k}$. Zusammen haben wir damit $(AFG)_r = (AGH)_r$, also $(AFGH)_r$. \square

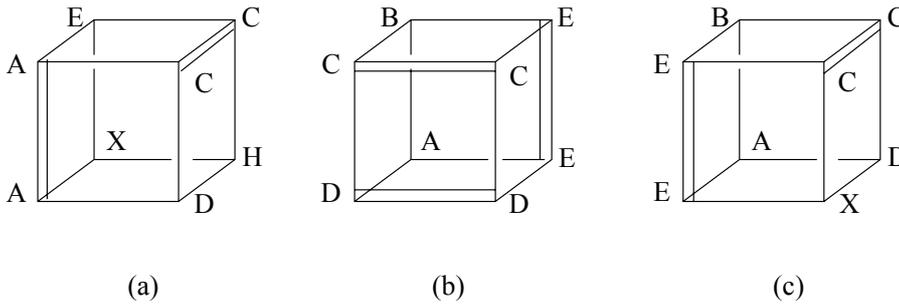


FIGUR 2.16

Lemma 2.49. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CDM0) \Rightarrow (BCD_1M0)$; $(CDM0) \Rightarrow (BCD_1M1)$.*

Beweis. Im Fall (BCD_1M0) gelte $(ADEH)_r$, im Fall (BCD_1M1) gelte $(ADEH)_a$. Weiter gelte $(ACE)_rC(CDH)_r$; es sei k ein Kreis mit $A, E \in k$

und $kA(ACD)_r$. Zu zeigen ist $kE(CEH)_r$. Im Fall $k = (CEH)_r$ ist nicht zu zeigen. Es sei also $k \neq (CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Im Fall $(BCD_1\mathcal{M}0)$ gilt: Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$. Aus $X = C$ folgt $k = (ACE)_r$ und damit $k = (ACDE)_r$. Aus $X = D$ folgt $(CDEH)_r$. Aus $X = H$ folgt $k = (AEH)_r$ und damit $k = (ADEH)_r$. In allen genannten Fällen folgt $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Im Fall $(BCD_1\mathcal{M}1)$ gilt: Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Aus $X = C$ folgt $k = (ACE)_r$ und damit $k = (ACDE)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = D$ folgt $(CDEH)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = H$ folgt $k = (AEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es ist also $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Da X auf den Kreisen k und $(CEH)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu A, C, D, E, H . Wende $(CD\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, C, E, D, H, X (s. Figur 2.17a) an. Im Fall $(BCD_1\mathcal{M}0)$ erhalten wir $(ADHX)_r$. Dann gilt aber $(ADEHX)_r$, was $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$ widerspricht. Es folgt also $kE(CEH)_r$. Im Fall $(BCD_1\mathcal{M}1)$ erhalten wir $(ADHX)_a$ bzw. $(ADEHX)_a$, Widerspruch zu $X \not\parallel A, D, E, H$. Es folgt auch hier $kE(CEH)_r$. \square



FIGUR 2.17

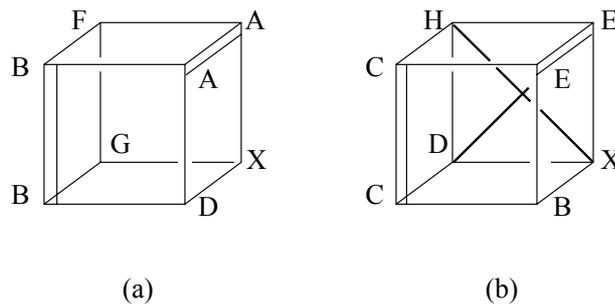
Lemma 2.50. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CD\mathcal{M}0) \Rightarrow (BC\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(ADEH)_r$, $(BCE)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Sei k der reguläre Kreis durch die Punkte C und E mit $kE(ABE)_r$. Angenommen, es gilt $k = (CDH)_r$. Dann folgt sukzessive $(CDEH)_r$, $(ACDEH)_r$ und $(ABCDEH)_r$ und damit auch die Behauptung (außer im Fall $B \parallel H$; hier erhalten wir einen Widerspruch). Wir gehen im Weiteren von $k \neq (CDH)_r$ aus. Angenommen, es gilt $k \cap (CDH)_r = \{C\}$. Dann folgt wegen $(CDH)_rC(BCE)_r$ auch $kC(BCE)_r$ und damit $k = (BCE)_r$, $k = (ABCE)_r$, $k = (ABCDE)_r$, Widerspruch zu $k \cap (CDH)_r = \{C\}$. Es gilt also $k \cap (CDH)_r = \{C, X\}$ mit $C \neq X$. Im Fall $X = A$ folgt $k = (ACE)_r$, Widerspruch zu $k \neq (ABE)_r$. Aus $X = B$ folgt $k = (BCE)_r$, Widerspruch zu $k \neq (ABE)_r$. Aus $X = E$ folgt sukzessive $(CDEH)_r$, $(BCDEH)_r$

(im Fall $B\parallel H$ haben wir sofort einen Widerspruch), $(ABCDEH)_r$, $k = (ABCDEH)_r$, Widerspruch zu $k \cap (CDH)_r = \{C, X\}$. Falls $X = D$ gilt, so benutzen wir Lemma 2.49 und wenden die Bedingung (BCD_1M0) auf die Punkte C, E, B, D, A an (s. Figur 2.17b). Es folgt $(CDH)_r D(ADE)_r$ und damit $(CDH)_r D(ADEH)_r$, also $(ACDEH)_r$. Wir erhalten den gleichen Widerspruch wie im Fall $X = E$. Es gilt also auch $X \neq D$. Wir gehen von $X \notin \{A, B, C, D, E\}$ aus. Jetzt wenden wir die Bedingung $(CDM0)$ auf die Punkte E, C, B, X, D, A an (s. Figur 2.17c). Es folgt $(ADEX)_r$ (der Kreis ist regulär, da A, D und E paarweise nicht-parallele Punkte sind) und damit $(ADEHX)_r$. Wegen $(ADEH)_r \cap (CDH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Damit folgt $k = (CEH)_r E(ABE)_r$. \square

Lemma 2.51. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CDM0) \Rightarrow (CDM1)$.*

Beweis. Es gelte $(BDGH)_a$, $(ADH)_r A(ABF)_r$, $(ABD)_r B(BFG)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. Im Fall $(AFG)_r = (ADH)_r$ folgt $(ADFGH)_r$, Widerspruch zu $D\parallel G$. Es ist also $(AFG)_r \neq (ADH)_r$. Die Annahme $(AFG)_r \cap (ADH)_r = \{A\}$ kann nicht gelten, da mit der Voraussetzung sofort $(ABF)_r A(ABG)_r$, also $(ABFG)_r$ folgt. Dann gilt aber auch $(ABDFG)_r$, was der Voraussetzung $D\parallel G$ widerspricht. Es folgt $(AFG)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$ mit $A \neq X$. Aus $X = B$ folgt $(ABDH)_r$, Widerspruch zu $B\parallel H$. Aus $X = D$ folgt $(ADFG)_r$, Widerspruch zu $D\parallel G$. Aus $X = F$ folgt $(ADFH)_r$ und damit $(ABDFH)_r$, Widerspruch zu $B\parallel H$. Aus $X = G$ folgt $(ADGH)_r$, Widerspruch zu $D\parallel G$. Es gilt also $X \notin \{A, B, D, F, G\}$. Wende $(CDM0)$ auf die Punkte B, A, F, D, X, G an (s. Figur 2.18a). Es folgt $(BDGX)_a$. Wegen $X \in (ADH)_r$ und $X\parallel D$ folgt $X\parallel B$ ($X\parallel H$). Da X auf dem regulären Kreis $(ADH)_r$ liegt, der mit dem ausgearteten Kreis $(BDGH)_a$ die Punkte D, H gemeinsam hat und wegen $X\parallel H$ folgt $X = H$ und somit $(AFGH)_r$. \square



FIGUR 2.18

Lemma 2.52. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CDM1) \Rightarrow (BCM1^2)$.*

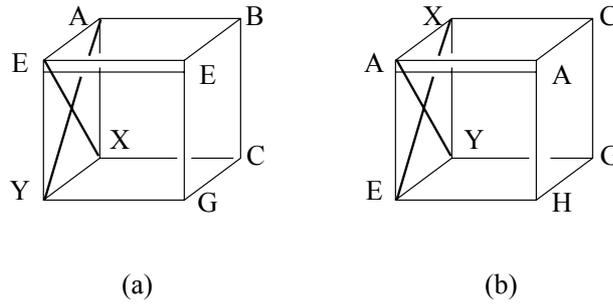
Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(ADEH)_a$, $(BCE)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r = (CEH)_r$. Dann folgt $(ABCEH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es gilt also $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Es existiert ein eindeutig bestimmter regulärer Kreis k durch B und E , der den regulären Kreis $(CEH)_r$ im Punkt E berührt, d.h. $kE(CEH)_r$. Im Fall $k = (CEH)_r$ folgt $(BCEH)_r$ und damit $(BCDEH)_r$, Widerspruch zu $D\|E$. Es ist also $k \neq (CEH)_r$. Weiter existiert ein $X \in k$ mit $X\|H$. Wegen $H\|B, C, D, E$ folgt $X \notin \{B, C, D, E\}$. Im Fall $X = H$ folgt $k = (BEH)_r$ und damit $k = (CEH)_r$, Widerspruch zu $k \neq (CEH)_r$. Also ist $X \neq H$. Wende $(CDM1)$ auf die Punkte C, E, H, B, X, D an (s. Figur 2.18b). Es folgt $(BCDX)_r$. Da B, C, D paarweise nicht-parallele Punkte sind und $(ABCD)_r$ gilt, folgt $(ABCDX)_r$. Wegen $X\|A$ folgt $X = A$, also $(ABE)_rE(CEH)_r$. \square

Satz 2.53. *Die miquelschen Laguerre-Ebenen sind genau die Laguerre-Ebenen, in denen $(CDM0)$ gilt.*

Beweis. Aus $(CDM0)$ folgt mit Lemma 2.50 die Gültigkeit der Bedingung $(BCM0)$ und mit Lemma 2.51 die Gültigkeit der Bedingung $(CDM1)$. Mit Lemma 2.52 folgt $(BCM1^2)$. Mit Lemma 2.49 folgt aus $(CDM0)$ auch (BCD_1M1) . Damit haben wir die Voraussetzungen von Lemma 2.48 erfüllt und es folgt $(CM1^2)$, wodurch nach Satz 2.31 und Satz 2.33 miquelsche Laguerre-Ebenen charakterisiert werden. \square

Lemma 2.54. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(DM1^1) \Rightarrow (BCM0)$.*

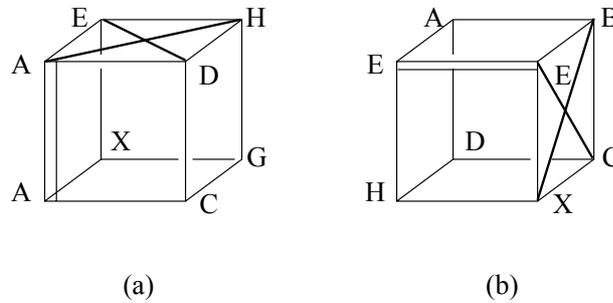
Beweis. Es gelte $(ABC)_rA(AEH)_r$, $(ACGH)_r$ und $(BCEG)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r = (EGH)_r$. Dann folgt $(ABEGH)_r$ (im Fall $B\|H$ erhalten wir einen Widerspruch) und damit $(ABCEGH)_r$. Insbesondere gilt also $(ABE)_rE(EGH)_r$. Wir gehen von $(ABE)_r \neq (EGH)_r$ aus. Sei k der reguläre Kreis mit $E, G \in k$ und $kA(ABE)_r$. Im Fall $k = (ABE)_r$ folgt $k = (ABEG)_r$ und damit $k = (ABCEG)_r$. Dann folgt $(ABCEGH)_r$, Widerspruch zu $(ABE)_r \neq (EGH)_r$ (bzw. Widerspruch zu $B\|H$, falls dies vorausgesetzt ist). Wir setzen also $k \neq (ABE)_r$ voraus. Dann existiert ein zu E paralleler Punkt X auf dem Kreis $(ABC)_r$. Weiterhin existiert ein zu A paralleler Punkt Y auf dem Kreis k . Wegen $A\|E$ folgt sofort $X \neq Y$. Außerdem gilt $X \notin \{A, B, C, G, H\}$ und $Y \notin \{B, C, E, G, H\}$. Im Fall $X = E$ folgt $(ABCE)_r = (ABCEG)_r$, Widerspruch zu $k \neq (ABE)_r$. Im Fall $Y = A$ folgt $k = (AEG)_rE(ABE)_r$, d.h. $(ABEG)_r = (ABCEG)_r$, Widerspruch zu $k \neq (ABE)_r$. Also gilt $X \neq E$ und $Y \neq A$. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte E, B, A, Y, G, C, X an (s. Figur 2.19a). Wir erhalten $(CGXY)_r$. Nochmalige Anwendung von $(DM1^1)$ auf die Punkte A, C, X, E, H, G, Y (s. Figur 2.19b) führt auf $(EGHY)_r$. Insbesondere liegt also H auf dem Kreis $k = (EGY)_r$. Daraus folgt $k = (EGH)_rE(ABE)_r$. \square



FIGUR 2.19

Lemma 2.55. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CM1^1) \Rightarrow (BD_1M1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_a$, $(ACEG)_r$, $(CDGH)_r$. Weiter sei k ein Kreis durch die Punkte A, E mit $kA(ACD)_r$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Im Fall $k = (EGH)_r$ ist nichts zu zeigen. Sei also $k \neq (EGH)_r$. Weiter sei $k \cap (EGH)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$ angenommen. Aus $X = A$ folgt $(AEGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Aus $X = C$ folgt $(CEGH)_r$ und damit $(ACEGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Aus $X = D$ folgt $k = (ADE)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = G$ folgt $k = (AEG)_r$ und damit $k = (ACEG)_r = (ACDEG)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Aus $X = H$ folgt $k = (AEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es gilt also $X \notin \{A, C, D, E, G, H\}$. Wende $(CM1^1)$ auf die Punkte A, D, H, E, C, G, X (Figur 2.20a) an. Wir erhalten $(ACGX)_r$ und damit $(ACEGX)_r$, Widerspruch zu $k \cap (EGH)_r = \{E, X\}$. Damit folgt $kE(EGH)_r$. \square



FIGUR 2.20

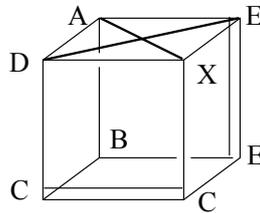
Lemma 2.56. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(DM1^1) \Rightarrow (BM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(ADEH)_r$, $(CDGH)_r$, $(BCEG)_a$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Im Fall $(ABE)_r = (EGH)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Es existiert genau ein regulärer Kreis k , der die Punkte E und H enthält und für den $(ABE)_rEk$ gilt. Da ein regulärer und ein

ausgearteter Kreis genau zwei Punkte gemeinsam haben, gilt $k \cap (BCEG)_a = \{E, X\}$ mit $X \parallel B \parallel G$. Da X nicht in der Parallelklasse von C bzw. E liegt, folgt $X \neq C$ bzw. $X \neq E$. Da A und D keine Punkte des Kreises $(BCEG)_a$ sind, folgt außerdem $X \neq A$ und $X \neq D$. Aus $X = B$ folgt $k = (BEHX)_r$ und damit $(ABEHX)_r$, Widerspruch zu $k \cap (BCEG)_a = \{E, X\}$. Es ist $X \notin \{A, B, C, D, E, H\}$. Im Fall $X = H$ folgt $H \parallel G$ oder $H \parallel C$, in jedem Fall aber ein Widerspruch. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D (s. Figur 2.20b) an. Es folgt $(CDHX)_r$ und damit $(CDGHX)_r$. Wegen $X \parallel B \parallel G$ und $X \neq B$ folgt $X = G$, also $k = (EGH)_r E(ABE)_r$. \square

Lemma 2.57. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM1^1) \Rightarrow (BCM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r, (ADEH)_a, (BCE)_r C(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(CEH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r = (CEH)_r$. Dann folgt $(ABCEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es ist also $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Es existiert ein eindeutig bestimmter regulärer Kreis k mit $C, E \in k$ und $kE(ABE)_r$. Weiterhin gibt es ein $X \in k$ mit $X \parallel H$. Wegen $H \parallel B, C, D, E$ folgt $X \notin \{B, C, D, E\}$. Es ist $X \neq A$, da sonst $k = (ACE)_r$ und damit $(ABCE)_r$ folgt. Das bedeutet $(ABCDE)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Wende $(BCM1^1)$ auf die Punkte D, X, E, A, C, B an (s. Figur 2.21). Es folgt $(CDX)_r C(BCE)_r$. Mit der Voraussetzung $(BCE)_r C(CDH)_r$ folgt $(CDX)_r C(CDH)_r$ und damit $(CDHX)_r$. Da C, D, H paarweise nicht-parallele Punkte sind und wegen $X \parallel H$ und $X \neq A$ folgt $X = H$ und damit $(ABE)_r E(CEH)_r$. \square

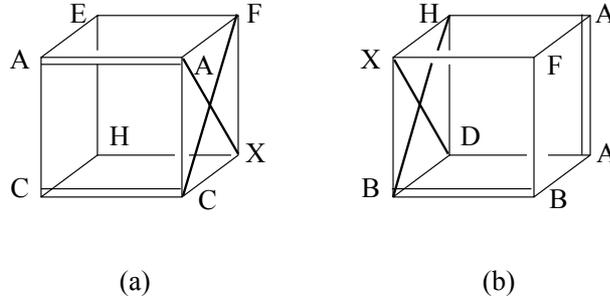


FIGUR 2.21

Lemma 2.58. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_1M1^1) \Rightarrow (DDM1)$.*

Beweis. Es sei k ein regulärer Kreis, der die Punkte A und C enthält und für den $(AEF)_r AkC(CG H)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACEH)_r, (ACFG)_a$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$. Da E, F, H paarweise nicht-parallele Punkte sind, folgt $(EFH)_r$. Sei $X \in (EFH)_r$ mit $X \parallel A$. Es ist $X \neq E, X \neq F$ und $X \neq H$, da $E \parallel A, F \parallel A$ bzw. $H \parallel A$. Die Fälle $X = A$ bzw. $X = C$ führen auf $(ACEFH)_r$. A, C können aber wegen $C \parallel F$ nicht gemeinsam auf einem regulären Kreis liegen. Es ist also $X \notin \{A, C, E, F, H\}$. Wende (BD_1M1^1) auf die Punkte

A, F, E, C, X, H (Figur 2.22a) an. Man erhält $kC(CHX)_r$ und wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises $(CHX)_r = (CGH)_r$. Wegen $X\|A\|G$ und $X \neq A$ folgt dann $X = G$, also $(EFGH)_r$. \square



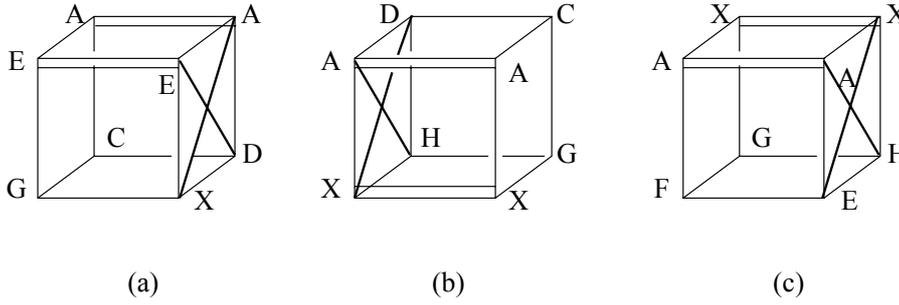
FIGUR 2.22

Lemma 2.59. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM1^2) \Rightarrow (CDM1)$.*

Beweis. Es gelte $(BDGH)_a$, $(ABD)_rB(BFG)_r$, $(ADH)_rA(ABF)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. Es gibt ein $X \in (AFH)_r$ mit $X\|G$ (und damit auch $X\|D$ nach Voraussetzung). Wegen $G\|A, B, F, H$ folgt $X \notin \{A, B, F, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt $(ADFH)_r$ und damit $(ABDFH)_r$, Widerspruch zu $B\|H$. Wende $(BCM1^2)$ an auf die Punkte X, F, A, H, B, A, D (s. Figur 2.22b). Hieraus folgt $(ABD)_rB(BFX)_r$. Mit der Voraussetzung $(ABD)_rB(BFG)_r$ folgt $(BFX)_rB(BFG)_r$ und damit $(BFGX)_r$. Da B, F, G paarweise nicht-parallele Punkte sind und $X\|G$ gilt, folgt $X = G$ und damit $(AFGH)_r$. \square

Lemma 2.60. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(DDM1) \Rightarrow (BD_1M1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ACEG)_r$, $(ADEH)_a$. Ferner sei k_1 der eindeutig festgelegte reguläre Kreis durch die Punkte A und E , für den $k_1A(ACD)_r$ gilt. Zu zeigen ist $k_1E(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $k_1 = (EGH)_r$. Dann folgt $(ACDE)_r$, Widerspruch zu $D\|E$. Es ist also $k_1 \neq (EGH)_r$. Betrachte den eindeutig festgelegten regulären Kreis k , der die Punkte E und G enthält und den regulären Kreis k_1 in E berührt, d.h. kEk_1 . Im Fall $k = k_1$ folgt $k = k_1 = (AEG)_r = (ACEG)_r = (ACDEG)_r$, Widerspruch zu $D\|E$. Es gilt $k \neq k_1$. Der Kreis k enthält einen Punkt X mit $X\|H$. Da $H\|C, D, E, G$ gilt, ist $X \notin \{C, D, E, G\}$. Im Fall $X = A$ folgt $k = (AEG)_r$. Mit dem gleichen Schluß wie im Fall $k = k_1$ erhält man einen Widerspruch. Wende $(DDM1)$ auf die Punkte E, A, G, X, D, C an (s. Figur 2.23a). Es folgt $(CDGX)_r$ und damit $(CDGHX)_r$. Wegen $X\|H$ folgt $X = H$ und damit $(EGH)Ek_1$. \square



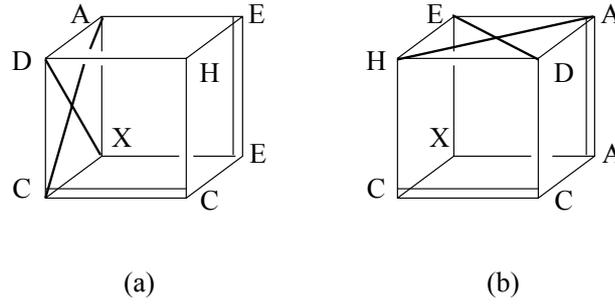
FIGUR 2.23

Lemma 2.61. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(DDM1) \Rightarrow (DM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ACFG)_r$, $(ADEH)_a$, $(ACD)_rA(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$. Der reguläre Kreis $(ACFG)_r$ und der ausgeartete Kreis $(ADEH)_a$ schneiden sich in zwei Punkten, sagen wir $(ACFG)_r \cap (ADEH)_a = \{A, X\}$, wobei $X \parallel D \parallel E$ gilt. Wegen $X \parallel D$ folgt $X \notin \{A, C, F, G, H\}$. Aus $X = D$ folgt $(ACDFG)_r$ und damit $(ACDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Aus $X = E$ folgt $(ACEFG)_r$ und damit $(ACDEFG)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Insgesamt gilt also $X \notin \{A, C, D, E, F, G, H\}$. Sei k der reguläre Kreis mit $A, X \in k$ und $kA(ACD)_r$ (und damit auch $kA(AEF)_r$). Angenommen, es gilt $k = (ACD)_r$. Dann folgt $k = (ACDFG)_r = (ACDEFG)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Damit gilt $k \neq (ACD)_r$. Wende (BD_1M1^1) (diese Bedingung gilt nach Lemma 2.60) auf die Punkte A, C, D, X, G, H an (s. Figur 2.23b). Es folgt $kX(GHX)_r$. Wende nun $(DDM1)$ auf die Punkte A, X, F, E, H, G an (s. Figur 2.23c). Es folgt $(EFGH)_r$. \square

Lemma 2.62. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM1^2) \Rightarrow (BCM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$, $(ADEH)_r$, $(BCE)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r = (CEH)_r$. Dann folgt $(ABCEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Wir gehen also von $(ABE)_r \neq (CEH)_r$ aus. Es gibt einen eindeutig bestimmten regulären Kreis k , der die Punkte A und E enthält und für den $kE(CEH)_r$ gilt. Angenommen, es gilt $k = (CEH)_r$. Dann gilt $k = (ACEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel C$. Es ist demnach $k \neq (CEH)_r$. Weiterhin gibt es ein $X \in k$ mit $X \parallel B$. Wegen $B \parallel A, C, E, H$ folgt $X \notin \{A, C, E, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt $k = (ADE)_r = (ADEH)_r = (ACDEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es ist also $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Wende $(BCM1^2)$ auf die Punkte D, H, E, A, C, E, X an (s. Figur 2.24a). Es folgt $(CEX)_rC(CDH)_r$. Mit der Voraussetzung $(BCE)_rC(CDH)_r$ folgt $(CEX)_rC(BCE)_r$ und damit $(BCEX)_r$. Wegen $X \neq D$ und $X \parallel B$ folgt $X = B$ und damit $(ABE)_rE(CEH)_r$. \square



FIGUR 2.24

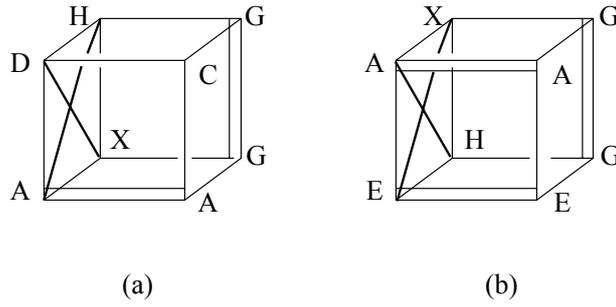
Lemma 2.63. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM_1^1) \Rightarrow (BCD_1M_1)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_a$, $(ACE)_rC(CDH)_r$. Es sei k der Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt.

Zu zeigen ist $kE(CEH)_r$. Im Fall $k = (CEH)_r$ folgt $(ACEH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es ist also $k \neq (CEH)_r$. Angenommen, es gibt ein $X \neq E$ mit $k \cap (CEH)_r = \{E, X\}$. Aus $X = A$ folgt $(ACEH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Aus $X = C$ folgt $k = (ACE)_r$ und damit $k = (ACDE)_r$, Widerspruch zu $D\|E$. Aus $X = D$ folgt $(CDEH)_r$, Widerspruch zu $D\|E$. Aus $X = H$ folgt $k = (AEH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es gilt $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Da X auf den Kreisen k und $(CEH)_r$ liegt, ist X nicht-parallel zu den Punkten A, C, E, H . Wende (BCM_0) auf die Punkte H, D, A, E, C, X (s. Figur 2.24b) an. Es folgt $(CDH)_rC(ACX)_r$. Wegen der Eindeutigkeit des Berührungskreises folgt $(ACX)_r = (ACE)_r$ und damit $(ACEX)_r = k$, Widerspruch zu $A\|H$. Daraus folgt $kE(CEH)_r$. \square

Lemma 2.64. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCM_1^2) \Rightarrow (BD_1M_1^1)$.*

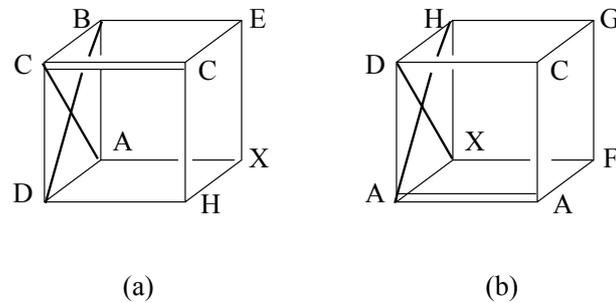
Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ACEG)_r$, $(ADEH)_a$. Ferner sei k_1 der eindeutig bestimmte reguläre Kreis durch die Punkte A und E , für den $k_1A(ACD)_r$ gilt. Zu zeigen ist $k_1E(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $k_1 = (EGH)_r$. Dann folgt $k_1 = (AEGH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es ist also $k_1 \neq (AEGH)_r$. Betrachte den eindeutig festgelegten regulären Kreis k , der die Punkte G und H enthält und den Kreis $(ACEG)_r$ in G berührt, d.h. $kG(ACEG)_r$. Aus $k = (ACEG)_r$ folgt $k = (ACEGH)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es ist also $k \neq (ACEG)_r$. Auf k liegt ein Punkt X mit $X\|E$. Wegen $E\|A, C, G, H$ folgt $X \notin \{A, C, G, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt $k = (DGH)_r = (CDGH)_r$ und damit wegen $kG(ACEG)_r$ auch $k = (ACEG)_r$, Widerspruch zu $k \neq (ACEG)_r$. Es gilt also $X \notin \{A, C, D, G, H\}$. Wende (BCM_1^2) auf die Punkte D, C, G, H, A, X an (s. Figur 2.25a). Es folgt $(ACD)_rA(AGX)_r \Rightarrow k_1A(AGX)_r$. Wegen Lemma 2.62 und Lemma 2.63 gilt mit (BCM_1^2) auch (BCD_1M_1) . Wende (BCD_1M_1) auf die Punkte A, G, X, E, H an (s. Figur 2.25b). Es folgt $k_1E(EGH)_r$. \square



FIGUR 2.25

Lemma 2.65. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(DM1^1) \Rightarrow (BCM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r, (ABCD)_a, (BCE)_r, C(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_r, E(CEH)_r$. Im Fall $(ABE)_r = (CEH)_r$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $(ABE)_r \neq (CEH)_r$. Wir nehmen $(ABE)_r \cap (CEH)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$ an. Wegen $A \parallel C$ folgt $X \neq A$ und $X \neq C$. Aus $X = B$ folgt sukzessive $(BCEH)_r, (BCDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Aus $X = D$ folgt $(ABDE)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Aus $X = H$ folgt $(ABEH)_r$ und damit $(ABDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Es ist also $X \notin \{A, B, C, D, E, H\}$. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte C, E, B, D, H, X, A (s. Figur 2.26a) an. Es ergibt sich $(ADHX)_r$ und damit $(ADEHX)_r$, bzw. $(ABDEHX)_r$, Widerspruch zu $B \parallel D$. Es folgt $(ABE)_r, E(CEH)_r$. \square



FIGUR 2.26

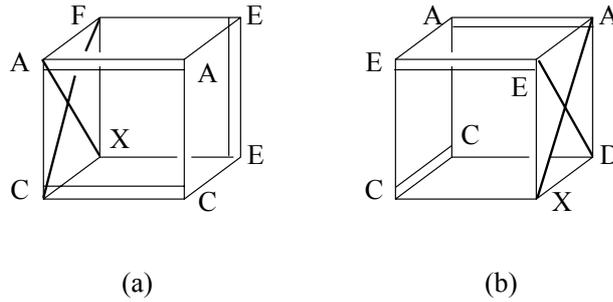
Lemma 2.66. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BM1^2) \Rightarrow (DM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r, (ACFG)_r, (ADEH)_a, (ACD)_r, A(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$. Auf dem eindeutig festgelegten regulären Kreis $(FGH)_r$ liegt ein Punkt X mit $X \parallel E$. Aus $X \parallel A, C, F, G, H$ folgt $X \notin \{A, C, F, G, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt sukzessive $(DFGH)_r, (CDFGH)_r, (ACDFGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel H$. Es gilt also auch $X \neq D$. Wende $(BM1^2)$ auf die Punkte

D, C, G, H, A, F, X an (s. Figur 2.26b). Es folgt $(ACD)_r A(AFX)_r$. Zusammen mit der Voraussetzung $(ACD)_r A(AEF)_r$ folgert man $(AEF)_r A(AFX)_r$. Das bedeutet $(AEFX)_r$. Wegen $X \parallel E$ folgt $X = E$. Damit gilt $(EFGH)_r$. \square

Lemma 2.67. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCD_1\mathcal{M}1) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es sei k_0 der reguläre Kreis, der A, C enthält und für den $k_0 A(AEF)_r$ und $k_0 C(CEG)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACFG)_a$. Zu zeigen ist $(ACE)_r E(EFG)_r$. Angenommen, es gilt $(ACE)_r = (EFG)_r$. Dann folgt $(ACEFG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Es sei k der eindeutig festgelegte reguläre Kreis, der E, F enthält und für den $k E(ACE)_r$ gilt. Außerdem sei $X \in k$ der Punkt, der parallel zu G liegt. Aus $G \parallel C, E, F$ folgt $X \notin \{C, E, F\}$. Im Fall $X = A$ folgt $k = (AEF)_r$ und damit $(ACEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel F$. Es gilt also auch $X \neq A$. Wende $(BCD_1\mathcal{M}1)$ auf die Punkte A, E, F, C, X an (s. Figur 2.27a). Es folgt $k_0 C(CEX)_r$ und damit $(CEX)_r C(CEG)_r$. Das bedeutet $(CEGX)_r$; wegen $X \parallel G$ folgt $X = G$. Wir erhalten $(ACE)_r E(EFG)_r$. \square



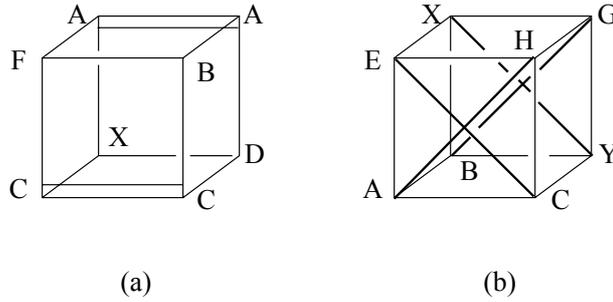
FIGUR 2.27

Lemma 2.68. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BDD\mathcal{M}1) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $k A(ACD)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACE)_r C(CDH)_r$, $(ADEH)_a$. Zu zeigen ist $k E(ECH)_r$. Wegen $D \parallel E$ folgt sofort $k \neq (ACD)_r$. Sei l der reguläre Kreis durch die Punkte C und E mit $l E k$. Falls $l = k$, dann folgt $l = k = (ACE)_r$ und damit $(ACDE)_r$, Widerspruch zu $D \parallel E$. Es gilt also $l \neq k$. Es existiert ein $X \in l$ mit $X \parallel A$. Wegen der Voraussetzungen folgt sofort $X \notin \{C, D, E\}$. Aus $X = A$ folgt $k = (ACE)_r$ und damit $(ACDE)_r$ Widerspruch zu $D \parallel E$. Es gilt also auch $X \neq A$. Wende $(BDD\mathcal{M}1)$ auf die Punkte E, A, C, X, D an (s. Figur 2.27b). Es folgt $(ACE)_r C(CDX)_r$ und damit $(CDX)_r = (CDH)_r$. Es gilt also $(CDHX)_r$. Wegen $X \parallel H$ und $X \neq A$ folgt $X = H$ und damit $k E(ECH)_r$. \square

Lemma 2.69. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_2\mathcal{M}0) \Rightarrow (CC_2\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r, (ADH)_r A(ABF)_r, (BCF)_r C(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ACFH)_r$. Da die Punkte A, C und F paarweise nicht parallel sind, gilt $(ACF)_r$. Im Fall $(ACF)_r A(ADH)_r$ folgt $(ABF)_r A(ACF)_r$ und damit $(ABCF)_r$. Dann gilt auch $(ABCDFH)_r$, insbesondere also die Behauptung (bzw. erhalten wir einen Widerspruch im Fall $B\parallel H$ oder im Fall $D\parallel F$). Mit dem gleichen Argument schließt man im Fall $(ACF)_r = (ADH)_r$. Wir gehen im weiteren von $(ABF)_r \neq (ACF)_r$ aus. Dann gilt $(ACF)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$ mit $X \neq A$. Im Fall $X = B$ folgt $(ABCF)_r$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACDH)_r$. Im Fall $X = D$ folgt $(ACDF)_r$. Im Fall $X = F$ folgt $(AFDH)_r$. Im allen Fällen folgt $(ABCDFH)_r$ und damit ein Widerspruch zu $(ABF)_r \neq (ACF)_r$. Wir gehen jetzt von $X \notin \{A, B, C, D, F\}$ aus. Wende $(BD_2\mathcal{M}0)$ auf die Punkte F, B, A, C, D, X an (s. Figur 2.28a). Es folgt $(BCF)_r C(CDX)_r$. Wegen $(CDX)_r C(CDH)_r$ folgt $(CDHX)_r$. Wegen $(CDH)_r \cap (ADH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$ und wir erhalten $(ACFH)_r$. \square



FIGUR 2.28

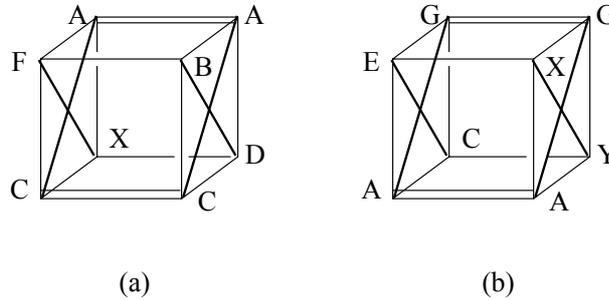
Lemma 2.70. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(\mathcal{M}2) \Rightarrow (BD_2\mathcal{M}2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABC)_r C(CG H)_r, (ACEH)_a, (BCEG)_a$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r = (EGH)_r$. Dann folgt $(ABEGH)_r$, Widerspruch zu $A\parallel H$. Es gilt also $(ABE)_r \neq (EGH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r \cap (EGH)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEGH)_r$, Widerspruch zu $A\parallel H$. Im Fall $X = B$ folgt $(BEGH)_r$, Widerspruch zu $B\parallel G$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEGH)_r$, Widerspruch zu $C\parallel E$. Im Fall $X = G$ folgt $(ABEG)_r$, Widerspruch zu $B\parallel G$. Im Fall $X = H$ folgt $(ABEH)_r$, Widerspruch zu $A\parallel H$. Es gilt also $X \notin \{A, B, C, E, G, H\}$. Es gibt einen zu X parallelen Punkt Y , der auf dem Kreis $(CGH)_r$ liegt. Es gilt $Y \neq X$, da sonst $(CGHX)_r = (EGHX)_r$ – also $(CEGHX)_r$ – folgt, Widerspruch zu $C\parallel E$. Wegen $X \in (ABE)_r \cap (EGH)_r$ und $X \notin \{A, B, E, G, H\}$ folgt $X\parallel A, B, E, G, H$. Aus $Y = A$ folgt $(ACGH)_r$, Widerspruch zu $A\parallel H$.

Aus $Y = B$ folgt $(BCGH)_r$, Widerspruch zu $B\|G$. Aus $Y = C$ folgt $C\|X\|E$. Damit gilt wegen $X \in (ABE)_r$ auch $X = E$, Widerspruch zur Annahme. Aus $Y = E$ folgt $(CEGH)_r$, Widerspruch zu $C\|E$. Aus $Y = G$ folgt $G\|X\|B$ und wegen $X \in (ABE)_r$ dann $X = B$, Widerspruch zur Annahme. Aus $Y = H$ folgt $H\|X\|A$ und wegen $X \in (ABF)_r$ haben wir $X = A$, Widerspruch zur Annahme. Aus $Y = X$ folgt $(CGHX)_r$, Widerspruch (s.o.). Damit haben wir $Y \notin \{A, B, C, E, G, H, X\}$. Wende Satz $(\mathcal{M}2)$ auf die Punkte E, H, G, X, A, C, Y, B an (s. Figur 2.28b). Es folgt $(ABCY)_r$ und damit $(ABCGHY)_r$, Widerspruch zu $A\|H$. Es folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$. \square

Lemma 2.71. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_2\mathcal{M}2) \Rightarrow (CC_2\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$, $(ABF)_rA(ADH)_r$, $(BCF)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ACFH)_a$. Wegen $A\|C$ folgt $(ACF)_a$. Sei $X \in (ADH)_r$ mit $X\|F$. Aus $X \in \{A, B, C, D\}$ folgt (in dieser Reihenfolge) $A\|F, B\|F, C\|F, D\|F$, was den Voraussetzungen widerspricht. Aus $X = F$ folgt $(ADFH)_r$ und damit $(ABDFH)_r$, Widerspruch zu $B\|D$. Es ist also $X \notin \{A, B, C, D, F\}$. Wende $(BD_2\mathcal{M}2)$ auf die Punkte F, B, A, C, D, X (Figur 2.29a) an. Man erhält $(BCF)_rC(CDX)_r$ und damit $(CDX)_r = (CDH)_r$. Dann gilt $(CDHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (CDH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Damit haben wir $(ACFH)_a$. \square



FIGUR 2.29

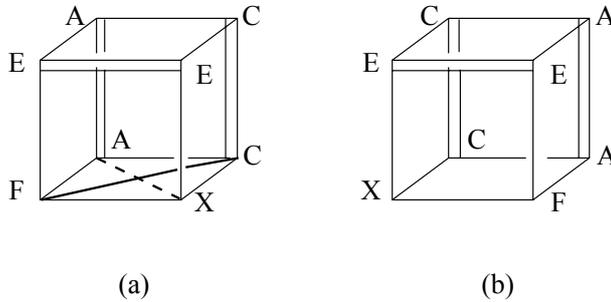
Lemma 2.72. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BD_2\mathcal{M}2) \Rightarrow (BBDD\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es sei $(ACEG)_a$ und k_0 ein regulärer Kreis durch die Punkte A und C , k_1 der reguläre Kreis durch die Punkte A und E mit k_0Ak_1 . Weiter sei k_2 der reguläre Kreis durch die Punkte C und G mit k_0Ck_2 und schließlich sei k_3 der reguläre Kreis durch die Punkte E und G mit k_2Gk_3 . Zu zeigen ist k_3Ek_1 . Angenommen, es gilt $k_3 = k_1$. Dann folgt $k_1 = k_3 = (AEG)_r$, Widerspruch zu $A\|G$. Es gilt also $k_3 \neq k_1$. Mit dem gleichen Argument schließt man auf $k_0 \neq k_2$. Angenommen, es gilt $k_1 \cap k_3 = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Dann

folgt sofort $X \parallel A, C, E, G$ (insbesondere gilt dann auch $X \notin \{A, C, E, G\}$). Auf dem Kreis k_2 liegt ein Punkt $Y \parallel X$. Daraus folgt $Y \notin \{A, C, E, G\}$. Im Fall $Y = X$ folgt $k_3 = (CEGX)_r$, Widerspruch zu $C \parallel E$. Es gilt also $Y \neq X$. Wende $(BD_2\mathcal{M}2)$ auf die Punkte E, X, G, A, Y, C an (s. Figur 2.29b). Es folgt $k_1 = (AEX)_r A(ACY)_r$. Es liegt also Y auf k_0 . Damit haben wir $k_0 \cap k_2 = \{C, Y\}$, Widerspruch zu $k_0 C k_2$ und $k_0 \neq k_1$. Es folgt $k_3 E k_1$. \square

Lemma 2.73. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CCDM0) \Rightarrow (BDDM1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und C enthält und für den $(AEF)_r A k C(CEG)_r$ gilt. Weiterhin gelte $(ACFG)_a$. Zu zeigen ist $(ACE)_r E(EEFG)_r$. Angenommen, es gilt $(ACE)_r = (EEFG)_r$. Dann folgt $(ACEFG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Es ist also $(ACE)_r \neq (EEFG)_r$. Sei l der reguläre Kreis, der die Punkte E und F enthält und für den $(ACE)_r E l$ gilt. Im Fall $(ACE)_r = l$ folgt $l = (ACEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel F$. Es gilt also $(ACE)_r \neq l$. Aus $l E(CEG)_r$ folgt $(ACE)_r E(CEG)_r$ und damit $(ACEG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Damit gilt $l \cap (CEG)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACEG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel G$. Im Fall $X = C$ folgt $l = (CEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel F$. Im Fall $X = F$ folgt $(CEFG)_r$, Widerspruch zu $C \parallel F$. Es gilt also $X \notin \{A, C, E, F\}$. Wende $(CCDM0)$ an auf die Punkte E, C, A, F, X (s. Figur 2.30a). Es folgt $A \parallel X \parallel G$. Wegen $X \in (CEG)_r$ und $X \neq A$ folgt $X = G$, also $l = (EEFG)_r$, d.h. $(EEFG)_r E(ACE)_r$. \square



FIGUR 2.30

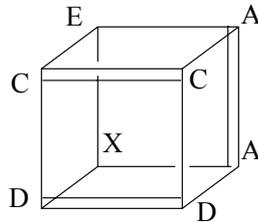
Lemma 2.74. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(CCDM0) \Rightarrow (BDDM0)$.*

Beweis. Es sei k der Kreis durch A, C mit $(AEF)_r A k C(CEG)_r, (ACFG)_r$. Zu zeigen ist $(ACE)_r E(EEFG)_r$. Angenommen, es gilt $(ACE)_r = (EEFG)_r$. Dann folgt $(ACEFG)_r$ und damit die Behauptung. Wir gehen im weiteren von $(ACE)_r \neq (EEFG)_r$ aus. Es sei l der reguläre Kreis durch die Punkte E und F für den $l E(ACE)_r$ gilt. Im Fall $l = (ACE)_r$ folgt $(ACEF)_r$ und damit $(ACEFG)_r$, Widerspruch zu $(ACE)_r \neq (EEFG)_r$. Weiter sei $l \neq (ACE)_r$.

Im Fall $lE(CEG)_r$ würde $(ACE)_rE(CEG)_r$, also $(ACEG)_r$ folgen. Dies bedeutet wiederum $(ACEFG)_r$, Widerspruch zu $(ACE)_r \neq (EFG)_r$. Es gilt also $l \cap (CEG)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACEG)_r$. Im Fall $X = C$ folgt $l = (CEF)_r$ und damit $(ACEF)_r$. Im Fall $X = F$ folgt $(CEFG)_r$. In allen genannten Fällen folgt $(ACEFG)_r$, Widerspruch zu $(ACE)_r \neq (EFG)_r$. Es gilt also $X \notin \{A, C, E, F\}$. Wende $(CCDM0)$ auf die Punkte E, A, C, X, F an (s. Figur 2.30b). Es folgt $(ACFX)_r$ (da A, C, F paarweise nicht-parallel sind). Dann folgt $(ACFGX)_r$. Wegen $(ACFG)_r \cap (CEG)_r = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$ und damit $(ACE)_rE(EFG)_r$. \square

Lemma 2.75. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCD_1M0) \Rightarrow (BCCDM0)$.*

Beweis. Es sei k_1 der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $k_1A(ACD)_r$ gilt. Es sei k_2 der reguläre Kreis durch die Punkte C und D und es gelte $(ACE)_rCk_2D(ADE)_r$. Zu zeigen ist $k_1E(CDE)_r$. Angenommen, es gilt $k_1 = (CDE)_r$. Dann folgt $(ACDE)_r$ und damit die Behauptung. Wir gehen von $k_1 \neq (CDE)_r$ aus. Angenommen, es gilt $k_1 \cap (CDE)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDE)_r$. Im Fall $X = C$ folgt $k_1 = (ACE)_r$ und damit $(ACDE)_r$. Im Fall $X = D$ folgt $k_1 = (ADE)_r$ und damit $(ACDE)_r$. In allen Fällen erhält man einen Widerspruch zu $k_1 \cap (CDE)_r = \{E, X\}$. Es gilt also $X \notin \{A, C, D\}$. Wende (BCD_1M0) auf die Punkte C, A, E, D, X an (s. Figur 2.31). Man erhält $k_2D(ADX)_r$ und damit $(ADX)_r = (ADE)_r$, d.h. $(ADEX)_r = (ACDEX)_r$, Widerspruch zu $k_1 \cap (CDE)_r = \{E, X\}$. Es gilt also $k_1E(CDE)_r$. \square



FIGUR 2.31

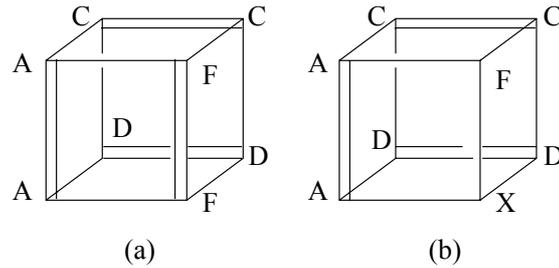
Lemma 2.76. *In Laguerre-Ebenen gilt: $(BCD_1M0) \Rightarrow (CCDM0)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte C und D enthält und für den $(ADE)_rDkC(ACF)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACD)_rA(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(CDEF)_{ar}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

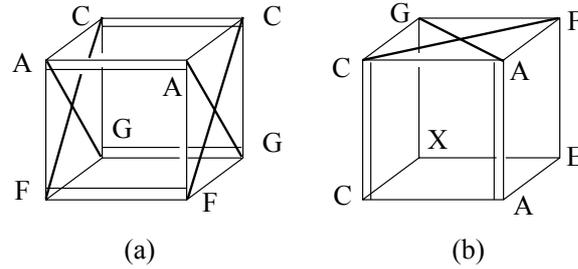
1. Ohne Einschränkung sei $C \parallel E$,
2. $D \not\parallel F$.

Fall 1. Es gelte $C \parallel E$. Zu zeigen ist $D \parallel F$. Angenommen, es gilt $D \not\parallel F$. Dann folgt $(CDF)_r$. Es ist $(AEF)_r \neq (CDF)_r$, sonst erhält man einen Widerspruch zu $C \parallel E$. Angenommen, es gilt $(AEF)_r F (CDF)_r$. Nach Lemma 2.75 gilt auch $(BCCDM0)$. Wende $(BCCDM0)$ auf die Punkte A, F, C, D an (s. Figur 2.32a). Wir erhalten $kD(ADF)_r$. Damit gilt $(ADF)_r D (ADE)_r$ und dann auch $(ADEF)_r = (ACDEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel E$. Daraus folgt, daß $(AEF)_r \cap (CDF)_r = \{F, X\}$ mit $X \neq F$ gilt. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDF)_r = (ACDEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel E$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel E$. Im Fall $X = D$ folgt $(ADEF)_r = (ACDEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel E$. Es gilt also $X \notin \{A, C, D, F\}$. Wende (BCD_1M0) auf die Punkte A, F, C, X, D an (s. Figur 2.32b). Wir erhalten $kD(ADX)_r$ und damit $(ADE)_r D (ADX)_r$, also $(ADEX)_r$. Wegen $(ADE)_r \cap (AEF)_r = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$. Der zu C parallele Punkt E liegt damit auf dem regulären Kreis $(CDF)_r$, Widerspruch. Also gilt $D \parallel F$ und damit $(CDEF)_a$.

Fall 2. Es gelte $D \not\parallel F$. Zu zeigen ist $(CDEF)_r$. Angenommen, es gilt $(AEF)_r F (CDF)_r$. Analog zu Fall 1 schließt man auf den Kreis $(ACDEF)_r$; insbesondere gilt also auch $(CDEF)_r$. Wir gehen im weiteren von $(AEF)_r \neq (CDF)_r$ aus. Dann gilt aber $(AEF)_r \cap (CDF)_r = \{F, X\}$ mit $X \neq F$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDF)_r$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACEF)_r$. Im Fall $X = D$ folgt $(ADEF)_r$. In allen Fällen folgt $(ACDEF)_r$, Widerspruch zu $(AEF)_r F (CDF)_r$. Wir gehen jetzt von $X \notin \{A, C, D, F\}$ aus, wenden wie im Fall 1 (BCD_1M0) an und erhalten $kD(ADX)_r = (ADEX)_r$. Wegen $(ADE)_r \cap (AEF)_r = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$ und damit $(CDEF)_r$. □



FIGUR 2.32



FIGUR 2.33

Lemma 2.77. *In Laguerre-Ebenen gilt: Aus der Gültigkeit von $(BBDD\mathcal{M}1)$ und $(CC_1\mathcal{M}1^1)$ folgt $(DD\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und C enthält und für den $(AEF)_r AkC(CG H)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACFG)_a, (ACEH)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$. Angenommen es gilt $(CGH)_r G(EFG)_r$. Im Fall $(CGH)_r = (EFG)_r$ folgt $(CEFGH)_r$, Widerspruch zu $C\|F$. Wir gehen von $(CGH)_r \neq (EFG)_r$ aus. Wende $(BBDD\mathcal{M}1)$ auf die Punkte A, C, F, G an (s. Figur 2.33a). Es folgt $(AEF)_r F(EFG)_r$ und damit $(AEFG)_r$, Widerspruch zu $A\|G$. Daraus folgt also $(EFG)_r \cap (CGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \neq G$. Wegen $A\|G$ folgt $X \neq A$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEFG)_r$, Widerspruch zu $C\|F$. Im Fall $X = E$ folgt $(CEGH)_r$ und damit $(ACEGH)_r$, Widerspruch zu $A\|G$. Im Fall $X = F$ folgt $(CFGH)_r$, Widerspruch zu $C\|F$. Es gilt also $X \notin \{A, C, E, F, G\}$. Wende $(CC_1\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte C, A, F, G, E, X an (s. Figur 2.33b). Wegen $(ACEH)_r \cap (CGH)_r = \{C, H\}$ und $X \neq C$ folgt $X = H$ und damit $(EFGH)_r$. \square

Die Beweise lassen nun Schlüsse auf die Charakterisierung von Benz-Ebenen zu.

Satz 2.78. *(Charakterisierung miquelscher Laguerre-Ebenen)*

i) *Gilt in einer Laguerre-Ebene eine der folgenden miquelschen 8-Punkte-Bedingungen, so ist die Laguerre-Ebene miquelsch:*

$(\mathcal{M}0), (\mathcal{M}1^1), (\mathcal{M}1^2)$.

ii) *Gilt in einer Laguerre-Ebene eine der folgenden miquelschen 7-Punkte-Bedingungen, so ist die Laguerre-Ebene miquelsch:*

$(B\mathcal{M}0), (B\mathcal{M}1^1), (B\mathcal{M}1^2), (C\mathcal{M}0), (C\mathcal{M}1^1), (C\mathcal{M}1^2), (D\mathcal{M}0), (D\mathcal{M}1^1), (D\mathcal{M}1^2)$.

iii) *Gilt in einer Laguerre-Ebene eine der folgenden miquelschen 6-Punkte-Bedingungen, so ist die Laguerre-Ebene miquelsch:*

$(BC\mathcal{M}0), (BC\mathcal{M}1^1), (BC\mathcal{M}1^2), (BD_1\mathcal{M}0), (BD_1\mathcal{M}1^1), (BD_1\mathcal{M}1^2), (CC_1\mathcal{M}1^2), (CD\mathcal{M}0), (CD\mathcal{M}1), (DD\mathcal{M}0), (DD\mathcal{M}1)$.

Beweis. i) Nach Satz 2.31 charakterisiert $(\mathcal{M}0)$ miquelsche Laguerre-Ebenen. Nach Satz 2.33 gilt: $(\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (\mathcal{M}1^2)$ und nach Lemma 2.43 und Satz 2.33 gilt $(\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (C\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$.

ii) Nach Satz 2.33 gilt $(\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (B\mathcal{M}1^1) \Leftrightarrow (C\mathcal{M}1^2) \Leftrightarrow (D\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (D\mathcal{M}1^2)$. Nach Lemma 2.39 gilt $(C\mathcal{M}0) \Rightarrow (D\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$. Nach Lemma 2.54, Lemma 2.47, Satz 2.53 und Satz 2.33 gilt: $(D\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (BC\mathcal{M}0) \Rightarrow (CD\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$. Nach Lemma 2.44, Lemma 2.47, Satz 2.53, Satz 2.33 gilt $(B\mathcal{M}0) \Rightarrow (BC\mathcal{M}0) \Rightarrow (CD\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$. Nach Lemma 2.66 gilt $(B\mathcal{M}1^2) \Rightarrow (D\mathcal{M}1^1)$ und damit ebenfalls $(\mathcal{M}0)$.

iii) In ii) haben wir bereits für $(BC\mathcal{M}0)$, $(CD\mathcal{M}0)$ Die Äquivalenz zu $(\mathcal{M}0)$ gezeigt. Nach Lemma 2.60, Lemma 2.58, Lemma 2.61 und Teil i) gilt $(DD\mathcal{M}1) \Leftrightarrow (BD_1\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (D\mathcal{M}1^1) \Leftrightarrow (\mathcal{M}0)$. Nach Satz 2.33 sind auch die Bedingungen $(BD_1\mathcal{M}1^2)$, $(CC_1\mathcal{M}1^2)$, $(DD\mathcal{M}0)$ äquivalent zu $(\mathcal{M}0)$. Für die verbleibenden Fälle schließen wir wie folgt: Nach Lemma 2.37 gilt $(BD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (DD\mathcal{M}0)$. Nach Lemma 2.52 und Lemma 2.64 gilt $(CD\mathcal{M}1) \Rightarrow (BC\mathcal{M}1^2) \Rightarrow (BD_1\mathcal{M}1^1)$. Nach Lemma 2.57 und Lemma 2.64 gilt $(BC\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (BC\mathcal{M}1^2) \Rightarrow (BD_1\mathcal{M}1^1)$. \square

Satz 2.79. *In Laguerre-Ebenen gelten die folgenden Implikationen bzgl. miquelscher Bedingungen:*

i) $(BCD_1\mathcal{M}1) \Leftrightarrow (BDD\mathcal{M}1) \Leftrightarrow (CCD\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (BDD\mathcal{M}0) \Leftrightarrow (BCD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (BCCD\mathcal{M}0)$,

ii) $(\mathcal{M}2) \Rightarrow (BD_2\mathcal{M}2) \Rightarrow (CC_2\mathcal{M}1)$; $(BD_2\mathcal{M}2) \Rightarrow (BBDD\mathcal{M}1)$;
 $(BD_2\mathcal{M}0) \Rightarrow (CC_2\mathcal{M}0)$

Beweis. i) Folgt nach Lemmata 2.68, 2.67, 2.73, 2.74, 2.35, 2.76, 2.34.

ii) Folgt nach Lemmata 2.70, 2.71, 2.72, 2.69. \square

Das nicht alle miquelschen Bedingungen gleichwertig sind, beweist der

Satz 2.80. *Es gibt eine nicht-miquelsche Laguerre-Ebene¹³, in der die miquelsche Bedingung $(\mathcal{M}2)$ gilt. Insbesondere erfüllt diese Ebene auch die Bedingungen $(BD_2\mathcal{M}2)$, $(CC_2\mathcal{M}1)$, $(BBDD\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Siehe Bröcker [14] und Satz 2.79ii). \square

Neuere Ergebnisse von Schroth [52] zeigen, daß die Aussage von Satz 2.80 auf beliebige ovoidale Laguerre-Ebenen ausgeweitet werden kann.

Damit liegen nach Satz 2.79ii) vier Kandidaten von miquelschen Schließungssätzen vor, die evtl. eine Charakterisierung ovoidaler Laguerre-Ebenen

¹³Die hier verwendete Laguerre-Ebene haben wir in Abschnitt 1.4 angegeben. Es handelt sich um eine Laguerre-Ebene vom Scherungstyp von Löwen und Pfüller. Siehe auch Satz 1.13.

darstellen¹⁴. Abschließend geben wir Ergebnisse über die Existenz bzw. Nicht-Existenz von Laguerre-Ebenen an.

Bemerkung 2.81. i) Zu jeder Primzahlpotenz $n = p^m$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine miquelsche Laguerre-Ebene der Ordnung n (s. Halder und Heise [25]).

ii) Laguerre-Ebenen gerader Ordnung sind nicht notwendig miquelsch; sie sind es für $n = 2, 4$.

iii) Die Frage, ob Laguerre-Ebenen gerader Ordnung notwendig einbettbar sind, konnte bislang nicht beantwortet werden.

iv) Laguerre-Ebenen ungerader Ordnung sind genau dann miquelsch, wenn mindestens eine ihrer Ableitungen desarguesch ist; s. Chen und Kaerlein [20].

v) Laguerre-Ebenen der Ordnung 3, 5 oder 7 sind miquelsch.

vi) Laguerre-Ebenen unendlicher Ordnung sind nicht notwendig einbettbar; siehe z.B. Hartmann [26].

2.5 Klassifikation von Minkowski-Ebenen

2.5.1 Ausartungen des Satzes von Miquel

Die Ausartungen des Satzes von Miquel im Minkowski-Fall wurden bereits von Samaga [48] für sechs bis acht beteiligte Punkte bestimmt. Wir ergänzen diese um die noch fehlenden Ausartungen mit fünf und vier beteiligten Punkten. Wir gehen – wie in [48] gezeigt – von Würfelmodellen aus, in denen keine zwei Punkte mit gemeinsamer Kante parallel sind und keine zwei Punkte in diagonalen Lage gleich sind. Die 51 Ausartungen aus [48] ergänzen wir um 10 weitere Ausartungen mit vier bis fünf Punkten (siehe auch Bröcker [15]) und geben diese in der folgenden Tabelle an (siehe auch Übersicht auf S.116).

Bezeichnung	Bedingung
$(\mathcal{M}0)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
$(\mathcal{M}1^1)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_a$, $(ABEF)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
$(\mathcal{M}1^2)$	Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.

¹⁴Es ist hier insbesondere ein Beweis von Schroth zu nennen, in dem für endliche und für lokalkompakte, zusammenhängende, endlichdimensionale Laguerre-Ebenen aus der Gültigkeit von $(\mathcal{M}2)$ die Ovoidalität der betreffenden Laguerre-Ebene hergeleitet wird.

- ($\mathcal{M}2^1$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_a$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$, $A\|_F$, $B\|_D$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{M}2^2$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$, $A\|_F$, $B\|_G$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($\mathcal{M}2^3$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_r$, $A\|_F$, $C\|_H$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{M}2^4$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_r$, $A\|_F$, $D\|_G$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($\mathcal{M}3^1$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_a$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_a$ und $(ADEH)_r$ mit $A\|_F$, $B\|_D$, $C\|_H$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{M}3^2$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_a$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_a$ mit $A\|_F$, $B\|_G$, $D\|_E$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($\mathcal{M}4$) Aus den Bedingungen $(ABCD)_r$, $(ABEF)_a$, $(BCFG)_a$, $(CDGH)_a$ und $(ADEH)_a$ mit $A\|_F$, $B\|_G$, $C\|_H$ und $D\|_E$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}0$) Aus $(ABCD)_r$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}1^1$) Aus $(ABCD)_a$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}1^2$) Aus $(ABCD)_r$, $(BCEG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}2^1$) Aus $(ABCD)_a$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_r$ mit $A\|_C$, $D\|_G$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}2^2$) Aus $(ABCD)_a$, $(BCEG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$ mit $A\|_C$, $B\|_G$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}2^3$) Aus $(ABCD)_r$, $(BCEG)_a$, $(CDGH)_r$ und $(ADEH)_a$ mit $A\|_H$ und $C\|_E$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($B\mathcal{M}3$) Aus $(ABCD)_a$, $(BCEG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$ mit $A\|_C$, $B\|_G$, $D\|_E$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- ($C\mathcal{M}0$) Aus $(ABCD)_r$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_rA(ABF)_r$ folgt $(AFGH)_{ar}$.
- ($C\mathcal{M}1^1$) Aus $(ABCD)_a$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_rA(ABF)_r$ folgt $(AFGH)_{ar}$.
- ($C\mathcal{M}1^2$) Aus $(ABCD)_r$, $(BCFG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADH)_rA(ABF)_r$ folgt $(AFGH)_{ar}$.

- ($\mathcal{CM}2^1$) Aus $(ABCD)_a, (BCFG)_a, (CDGH)_r, (ADH)_r A(ABF)_r$ mit $A\|_C, B\|_G$ folgt $(AFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{CM}2^2$) Aus $(ABCD)_r, (BCFG)_a, (CDGH)_a, (ADH)_r A(ABF)_r$ mit $B\|_G, C\|_H$ folgt $(AFGH)_r$.
- ($\mathcal{DM}0$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_r, (CDGH)_r, (ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{DM}1^1$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_a, (CDGH)_r, (ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{DM}1^2$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_r, (CDGH)_a, (ADEH)_r$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{DM}2^1$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_a, (CDGH)_r, (ADEH)_a$ mit $A\|_G, D\|_E$ folgt $(EFGH)_{ar}$.
- ($\mathcal{DM}2^2$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_a, (CDGH)_a, (ADEH)_r$ mit $A\|_G$ und $C\|_H$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($\mathcal{DM}3$) Aus $(ACD)_r A(AEF)_r, (ACFG)_a, (CDGH)_a, (ADEH)_a$ mit $A\|_G, C\|_H, D\|_E$ folgt $(EFGH)_r$.
- ($\mathcal{BCM}0$) Aus $(ABCD)_r, (BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
- ($\mathcal{BCM}1^1$) Aus $(ABCD)_a, (BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_r$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
- ($\mathcal{BCM}1^2$) Aus $(ABCD)_r, (BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_a$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
- ($\mathcal{BCM}2$) Aus $(ABCD)_a, (BCE)_r C(CDH)_r$ und $(ADEH)_a$ mit $A\|_C, D\|_E$ folgt $(ABE)_r E(CEH)_r$.
- ($\mathcal{BD}_1\mathcal{M}0$) k sei der Kreis, der die Punkte A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r, (CDGH)_r, (ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- ($\mathcal{BD}_1\mathcal{M}1^1$) k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_a, (CDGH)_r, (ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- ($\mathcal{BD}_1\mathcal{M}1^2$) k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_r, (CDGH)_a, (ADEH)_r$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- ($\mathcal{BD}_1\mathcal{M}2^1$) k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_a, (CDGH)_a, (ADEH)_r$ mit $A\|_G, C\|_H$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.

- $(BD_1\mathcal{M}2^2)$ k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_a$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$, $A\|_G$ und $D\|_E$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- $(BD_1\mathcal{M}3)$ k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; weiter gelte $(ACEG)_a$, $(CDGH)_a$, $(ADEH)_a$ mit $A\|_G$, $C\|_H$, $D\|_E$. Dann folgt $kE(EGH)_r$.
- $(BD_2\mathcal{M}0)$ Aus $(ABC)_rC(CG H)_r$, $(BCEG)_r$ und $(ACEH)_r$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- $(BD_2\mathcal{M}2)$ Aus $(ABC)_rC(CG H)_r$, $(BCEG)_a$ und $(ACEH)_a$ folgt $(ABE)_rE(EGH)_r$.
- $(CC_1\mathcal{M}0)$ k sei der Kreis, der A und B enthält mit $(ADH)_rAk$ und $kB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_r$. Dann folgt $(ABGH)_{ar}$.
- $(CC_1\mathcal{M}1^1)$ k sei der Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_rAkB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_a$, $(CDGH)_r$. Dann folgt $(ABGH)_{ar}$.
- $(CC_1\mathcal{M}1^2)$ k sei der Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_rAkB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_a$. Dann folgt $(ABGH)_{ar}$.
- $(CC_1\mathcal{M}2)$ k sei der Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_rAkB(BCG)_r$; weiter gelte $(ABCD)_a$, $(CDGH)_a$ mit $A\|_C$, $D\|_G$. Dann folgt $(ABGH)_{ar}$.
- $(CC_2\mathcal{M}0)$ Aus $(ABCD)_r$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BCF)_rC(CDH)_r$ folgt $(ACFH)_r$.
- $(CC_2\mathcal{M}1)$ Aus $(ABCD)_a$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BCF)_rC(CDH)_r$ folgt $(ACFH)_a$.
- $(CD\mathcal{M}0)$ Aus $(ABD)_rB(BFG)_r$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BDGH)_r$ folgt $(AFGH)_{ar}$.
- $(CD\mathcal{M}1)$ Aus $(ABD)_rB(BFG)_r$, $(ABF)_rA(ADH)_r$ und $(BDGH)_a$ folgt $(AFGH)_r$.
- $(DD\mathcal{M}0)$ k sei der Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_rAkC(CG H)_r$; weiter gelte $(ACFG)_r$, $(ACEH)_r$. Dann folgt $(EFGH)_{ar}$.
- $(DD\mathcal{M}1)$ k sei der Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_rAkC(CG H)_r$; weiter gelte $(ACFG)_a$, $(ACEH)_r$. Dann folgt $(EFGH)_{ar}$.

(DDM2)	k sei der Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_r AkC(CGH)_r$; weiter gelte $(ACFG)_a$, $(CDEH)_a$, $A \parallel H$ und $C \parallel F$. Dann folgt $(EFGH)_{ar}$.
(BCD ₁ M0)	k sei der Kreis, der A und E enthält mit $kA(ACD)_r$; es gelte weiterhin $(ADEH)_r$, $(ACE)_r C(CDH)$. Dann folgt $kE(CEH)_r$.
(BCD ₁ M1)	k sei der Kreis, der A , E enthält mit $kA(ACD)_r$; es gelte weiterhin $(ADEH)_a$, $(ACE)_r C(CDH)$. Dann folgt $kE(CEH)_r$.
(BCD ₂ M0)	Aus den beiden Berührbedingungen $(ACD)_r A(AEF)_r$ und $(ACF)_r C(CDE)_r$ folgt $(ADE)_r E(CEF)_r$.
(BDDM0)	k sei der Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_r AkC(CEG)_r$; weiter gelte $(ACFG)_r$. Dann folgt $(ACE)_r E(EFG)_r$.
(BDDM1)	k sei der Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_r AkC(CEG)_r$; weiter gelte $(ACFG)_a$. Dann folgt $(ACE)_r E(EFG)_r$.
(CCDM0)	k sei der Kreis, der die Punkte C , D enthält mit $(ACF)_r Ck$ und $kD(ADE)_r$; weiter gelte $(ACD)_r A(AEF)_r$. Dann folgt $(CDEF)_{ar}$.
(BBDDM0)	k_1 sei ein Kreis, der A und C enthält mit $k_2 Ak_1 Ck_3$, wobei A und E auf dem Kreis k_2 bzw. C und G auf dem Kreis k_3 liegen. Weiter gelte $k_3 Gk_4$, wobei E und G auf dem Kreis k_4 liegen und $(ACEG)_r$. Dann folgt $k_2 Ek_4$.
(BBDDM1)	k_1 sei der Kreis, der A und C enthält mit $k_2 Ak_1 Ck_3$, wobei A und E auf dem Kreis k_2 bzw. C und G auf dem Kreis k_3 . Weiter gelte $k_3 Gk_4$, wobei E und G auf dem Kreis k_4 liegen und $(ACEG)_a$. Dann folgt $k_2 Ek_4$.
(BCCDM0)	k_1 sei der Kreis, der die Punkte C und D enthält mit $(ACE)_r Ck_1 D(ADE)_r$ und es sei k_2 der Kreis, der A und E enthält mit $(ACD)_r Ak_2$. Dann folgt $k_2 E(CDE)_r$.
(CCCCM0)	Es seien k_1, k_2, k_3 und k_4 Kreise, die A und B ; B und C ; C und D ; A und D enthalten und es gelte $k_4 Ak_1 Bk_2 Ck_3 Dk_4$. Dann folgt $(ABCD)_{ar}$.

Tabelle 2.3: Miquelsche Bedingungen im Minkowski-Fall.

2.5.2 Ergebnisse

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Ergebnissen zur Klassifikation von Minkowski-Ebenen. Dazu definieren wir zunächst die *Hyperbelstruktur* (B^*) ¹⁵; unter Hinzunahme des *Berühraxioms* erhalten wir das Axiomensystem der *Minkowski-Ebene*, welches äquivalent ist zu unserem Axiomensystem der Benz-Ebene mit zwei-elementiger Indexmenge. Durch Hinzunahme eines weiteren Axioms – des Symmetrieaxioms – erhalten wir die *symmetrischen Minkowski-Ebenen*. Die Klasse der symmetrischen Minkowski-Ebenen entspricht der Klasse der ovoidalen Minkowski-Ebenen. Es sei ein Gitter $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ für $I = \{1, 2\}$ gegeben. Die Parallelitätsrelationen, die sich aus \mathcal{G} ergeben, bezeichnen wir mit $\|_+$ und $\|_-$. Weiter sei $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

Definition 2.82. $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \|_+, \|_-)$ heißt (B^*) -Geometrie oder *Hyperbelstruktur* $:\Leftrightarrow$

- (H1) Zu $P, Q \in \mathcal{P}$ existiert genau ein $X \in \mathcal{P}$ mit $P\|_+X\|_-Q$.
- (H2) Zu $(P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{K}$ existieren eindeutig bestimmte Punkte $P_+, P_- \in k$ mit $P_+\|_+P\|_-P_-$.
- (H3) Es existieren drei paarweise nicht-parallele Punkte. Durch drei paarweise nicht-parallele Punkte geht genau ein Kreis.

Das *Berühraxiom* lautet

- (H4) Zu nicht-parallelen Punkten P, Q mit $P \in k \in \mathcal{K}$ existiert genau ein $l \in \mathcal{K}$ mit $Q \in l$ und l berührt k in P .

Das Axiomensystem (H1) bis (H4) ist offensichtlich äquivalent zu dem Axiomensystem der Benz-Ebene mit $|I| = 2$ (Minkowski-Ebene).

Für einen Punkt P und einen Kreis k existieren nach (H2) eindeutig bestimmte Punkte P_+, P_- mit $P_+\|_+P\|_-P_-$. Nach (H1) existiert ein eindeutig bestimmter Punkt, der plus-parallel zu P_- und minus-parallel zu P_+ ist; wir bezeichnen diesen Punkt mit P^k .

Definition 2.83. Zwei Kreise k, l heißen *symmetrisch*, geschrieben $k \circ l$, wenn mit P auch P^l auf k liegt.

In jeder Kettengeometrie gilt das *Symmetrieaxiom*

¹⁵Die Bezeichnung (B^*) soll an Hans Beck (1876–1942) erinnern, der bereits 1910 (Beck [6]) mit diesem Axiomensystem arbeitete. Die Bezeichnung stammt von Benz [9] und [10].

(S) Seien $k, l \in \mathcal{K}$ und es existiere $P \in k \setminus l$ mit $P^l \in k$. Dann gilt $k \circ l$.

Hyperbelstrukturen, die außerdem (S) erfüllen, sind Minkowski-Ebenen (s. Artzy [2], [1], Heise-Karzel [31], Samaga [45]). Nach Artzy [2] und Karzel [36] gilt, daß jede symmetrische Hyperbelstruktur bereits eine Kettengeometrie ist; wir können also eine Einbettung eines einschaligen Hyperboloids in einen dreidimensionalen pappusschen projektiven Raum finden, wobei unsere symmetrische Hyperbelstruktur isomorph zum Ebenenschnittmodell mit dem Hyperboloid ist. Damit kann man also jede Kettengeometrie über kommutativen Körpern als Hyperbelstruktur auffassen, die das Symmetrieaxiom (S) erfüllt und umgekehrt findet man zu jeder solchen Hyperbelstruktur einen kommutativen Körper, so daß die zugehörige Kettengeometrie isomorph dazu ist. In Hyperbelstrukturen, die das Symmetrieaxiom erfüllen, kann man die Gültigkeit von (H4) nachweisen. Umgekehrt folgt aus den Axiomen (H1) bis (H4) (Minkowski-Ebenen) nicht die Gültigkeit von (S).

Durch den vollen Satz von Miquel (Satz 2.2) können wir miquelsche Minkowski-Ebenen charakterisieren.

Satz 2.84. *Die Klasse der miquelschen Minkowski-Ebenen entspricht der Klasse der Minkowski-Ebenen, die den vollen Satz von Miquel erfüllen.* \square

Schaeffer [51] ist eine Charakterisierung durch eine übersichtlichere Form des vollen Satzes von Miquel gelungen:

Satz 2.85. *Die Klasse der miquelschen Minkowski-Ebenen entspricht der Klasse der Minkowski-Ebenen, die (M0) erfüllen¹⁶.* \square

Nach Samaga [46] haben wir außerdem den

Satz 2.86. *In Hyperbelstrukturen folgt aus dem Symmetrieaxiom jede der in Tabelle 2.3 angegebenen Bedingungen.* \square

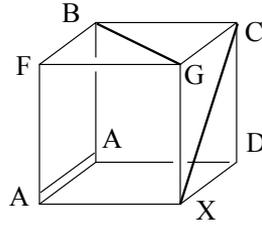
Wir kommen jetzt zu eigenen Ergebnissen, wobei wir einige Zusammenhänge zwischen den einzelnen Bedingungen vom miquelschen Typ aufzeigen.

Lemma 2.87. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(BM2^1) \Rightarrow (CM2^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r, (BCFG)_a$ mit $B \parallel_- G, (CDGH)_a$ mit $C \parallel_- H$ und $(ABF)_r A(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$. Es gilt $A \parallel G$ ¹⁷. Dann haben wir den regulären Kreis $(AFG)_r$ und es gilt $(AFG)_r \cap (CDGH)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel_- C \parallel_- H$. Dann gilt $X \parallel_- A, B, D, F, G$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACFG)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Wende $(BM2^1)$ auf die Punkte F, G, C, B, A, X, D an (s. Figur 2.34). Es folgt $(ABF)_r A(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (CDGH)_a = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$ und damit $(AFGH)_r$. \square

¹⁶Die Bedingung (M0) findet man in Tabelle 2.3.

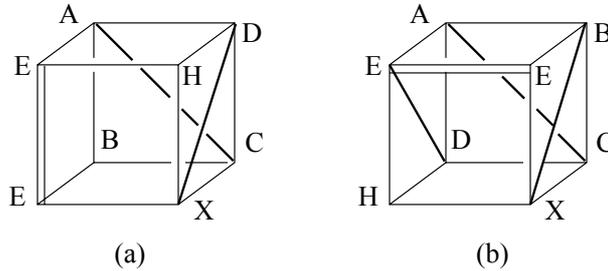
¹⁷ \parallel steht als Abkürzung für \parallel_+ und \parallel_- .



FIGUR 2.34

Lemma 2.88. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(CM2^2) \Rightarrow (BM2^1)$.*

Beweis. Es gelte $(BCEG)_r$, $(ADEH)_r$, $(ABCD)_a$ mit $A \parallel_- C$ und $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(EGH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den $(ABE)_r E k$ gilt. Es ist $k \cap (CDGH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- G \parallel_- D$. Damit folgt sofort $X \parallel_- A, C, E, H$ und damit $X \notin \{A, C, E, H\}$. Im Fall $X \parallel B$, also $X \parallel_- B$ oder $X \parallel_+ B$, folgt $B \parallel_- D$ bzw. $X = D$ (s. unten). In beiden Fällen haben wir einen Widerspruch zur Voraussetzung. Im Fall $X = D$ folgt $k = (DEH)_r = (ABDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_+ D$. Wende $(CM2^2)$ auf die Punkte E, H, D, A, X, C, B an (s. Figur 2.35a). Es folgt $(BCEGX)_r$ wegen der Voraussetzung $(BCEG)_r$. Wegen $X \parallel_- G$ folgt $X = G$, also $k = (EGH)_r E(ABE)_r$. \square



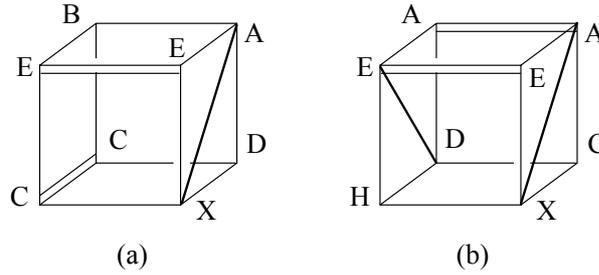
FIGUR 2.35

Lemma 2.89. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DM3) \Rightarrow (BM3)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ABCD)_a$ mit $A \parallel_- C$, $(BCEG)_a$ mit $B \parallel_- G$ und $(ADEH)_a$ mit $D \parallel_- E$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(EGH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte E und H mit $k E(ABE)_r$. Es gilt $(BCEG)_a \cap k = \{E, X\}$ mit $X \parallel_- G \parallel_- B$. Es folgt $X \parallel_- A, C, D, E, H$ und damit $X \notin \{A, C, D, E, H\}$. Im Fall $X = B$ folgt $k = (BEH)_r = (ABEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_+ H$. Wende $(DM3)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.35b). Es folgt $(CDGHX)_r$ wegen $(CDGH)_r$. Wegen $X, G \in (CDGHX)_r$ und $X \parallel_- G$ folgt $X = G$, also $k = (EGH)_r E(ABE)_r$. \square

Lemma 2.90. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(BCM1^1) \Rightarrow (BCM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(ADEH)_a$ mit $A\|_H$ und $(CDH)_rC(BC E)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Sei k der reguläre Kreis durch die Punkte C und E mit $kE(ABE)_r$. Es gilt $(ADEH)_a \cap k = \{E, X\}$ mit $X\|_A\|_H$. Dann folgt $X\|_B, C, D, E$. Im Fall $X = A$ folgt $k = (ACE)_r = (ABCE)_r = (ABCDE)_r$, Widerspruch zu $D\|_+E$. Wende $(BCM1^1)$ auf die Punkte E, A, B, C, X, D an (s. Figur 2.36a). Es folgt $(BCE)_rC(CDX)_r$. Hieraus erhält man wegen der Eindeutigkeit des Berührkreises $(CDHX)_r$. Aus $X\|_H$ folgt $X = H$, also $k = (CEH)_rE(ABE)_r$. \square



FIGUR 2.36

Lemma 2.91. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DDM2) \Rightarrow (BD_1M2^2)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt. Weiter gelte $(CDGH)_r$, $(ACEG)_a$ mit $A\|_G$ und $(ADEH)_a$ mit $D\|_E$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Den Fall $k = (EGH)_r$ können wir ausschließen, da sonst $(AEGH)_r$ folgt, was im Widerspruch zu $A\|_G$ steht. Es gelte also $k \neq (EGH)_r$. Es sei l der reguläre Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den lEk gilt. Wir haben dann $(ACEG)_a \cap l = \{E, X\}$ mit $X\|_A\|_G$. Es folgt $X\|_C, D, E, H$. Im Fall $X = A$ folgt $l = (AEH)_r$, Widerspruch zu $A\|_+H$. Wende $(DDM2)$ auf die Punkte E, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.36b). Es folgt $(CDHX)_r = (CDGHX)_r$. Wegen $X\|_G$ folgt $X = G$, also $(EGH)_rEk$. \square

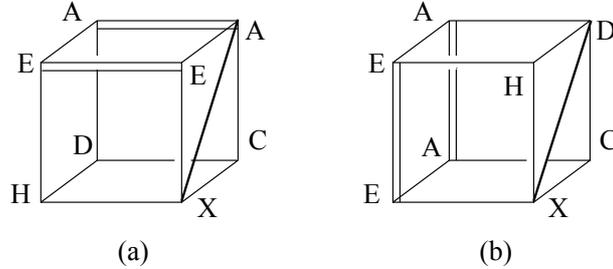
Lemma 2.92. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DDM2) \Rightarrow (BD_1M3)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und E enthält und für den $kA(ACD)_r$ gilt. Weiter gelte $(CDGH)_a$ mit $C\|_H$, $(ACEG)_a$ mit $A\|_G$ und $(ADEH)_a$ mit $D\|_E$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Aus $k = (EGH)_r$ folgt $(AEGH)_r$, Widerspruch zu $A\|_G$. Wir gehen also von $k \neq (EGH)_r$ aus. Es sei l der reguläre Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den lEk gilt. Dann haben wir $l \cap (ACEG)_a = \{E, X\}$ mit $X\|_A\|_G$. Es folgt $X\|_C, D, E, H$. Im Fall $X = A$ folgt $l = (AEH)_r$, Widerspruch zu $A\|_+H$. Wende $(DDM2)$ auf die Punkte E, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.36b). Es folgt $(CDHX)_a$, also $(CDGHX)_a$. Wegen $(ACEG)_a \cap (CDGH)_a = \{C, G\}$

(nach Voraussetzung haben die beiden ausgearteten Kreise keine Erzeugende gemeinsam) und $X \neq C$ folgt $X = G$ und damit $l = (EGH)_r Ek$. \square

Lemma 2.93. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DDM1) \Rightarrow (BD_1\mathcal{M}2^1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte A und E mit $(ACD)_r Ak$. Weiter gelte $(ADEH)_r$, $(ACEG)_a$ mit $A \parallel_- G$, $(CDGH)_a$ mit $C \parallel_- H$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Der Fall $k = (EGH)_r$ führt auf einen Widerspruch zu $A \parallel_- G$. Wir gehen also von $k \neq (EGH)_r$ aus. Es sei l der reguläre Kreis durch die Punkte E und H mit kEl . Es gilt $l \cap (ACEG)_a = \{E, X\}$ mit $X \parallel_- A \parallel_- G$. Dann folgt $X \parallel_- C, D, E, H$. Im Fall $X = A$ folgt $l = k = (AEH)_r = (ADEH)_r = (ACDEH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- H$. Wende $(DDM1)$ auf die Punkte E, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.37a). Es folgt $(CDHX)_a$, also $(CDGHX)_a$. Wegen $(CDGH)_a \cap (ACEG)_a = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$ und damit $(EGH)_r Ek$. \square



FIGUR 2.37

Lemma 2.94. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(CC_1\mathcal{M}1^2) \Rightarrow (BD_1\mathcal{M}1^2)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte A und E mit $(ACD)_r Ak$. weiter gelte $(ACEG)_r$, $(ADEH)_r$ und $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $k = (EGH)_r$. Dann folgt $(AEGH)_r = (ACEGH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ H$. Wir gehen von $k \neq (EGH)_r$ aus. Es sei l der reguläre Kreis durch die Punkte E und H mit kEl . Es gilt $l \cap (CDGH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- D \parallel_- G$. Dann gilt $X \parallel_- A, C, E, H$. Im Fall $X = D$ folgt $l = (DEH)_r = (ADEH)_r = k$ und damit $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ H$. Wende $(CC_1\mathcal{M}1^2)$ auf die Punkte E, H, D, A, X, C an (s. Figur 2.37b). Es folgt $(ACEX)_r = (ACEGX)_r$. Wegen $X \parallel_- G$ folgt $X = G$. Damit erhalten wir $l = (EGH)_r Ek$. \square

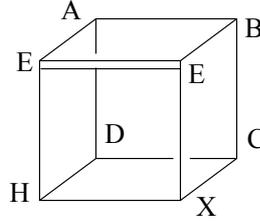
Lemma 2.95. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DDM1) \Rightarrow (BD_1\mathcal{M}1^1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte A und E mit $(ACD)_r Ak$. Weiter sei $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$, $(ACEG)_a$ mit $A \parallel_- G$. Zu zeigen ist $kE(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $k = (EGH)_r$. Dann folgt $(AEGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- G$. Wir gehen von $k \neq (EGH)_r$ aus. Es sei l der reguläre

Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den lEk gilt. Dann haben wir $(ACEG)_a \cap l = \{E, X\}$ mit $X \parallel -A \parallel -G$. Dann gilt $X \parallel -C, D, E, H$. Im Fall $X = A$ folgt $l = (AEH)_r = (ADEH)_r = k$ und damit $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ E$. Wende $(DDM1)$ auf die Punkte E, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.37a). Es folgt $(CDHX)_r$ und damit $(CDGHX)_r$. Wegen $X \parallel -G$ und $X \neq C$ folgt $X = G$, also $l = (EGH)_rEk$. \square

Lemma 2.96. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DM0) \Rightarrow (BCM0)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r, (ADEH)_r, (BCE)_r, C(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den $kE(ABE)_r$ gilt. Im Fall $B \parallel H$ folgt $k \neq (BCE)_r$. Falls $B \parallel H$ und $k = (BCE)_r$, so folgt $(BCEH)_r = (BCDEH)_r = (ABCDEH)_r$. Insbesondere folgt also die Behauptung. Wir gehen jetzt von $k \cap (BCE)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$ aus. Aus dieser Bedingung folgt $X \notin \{A, B, D, H\}$. Weiterhin gilt $X \parallel B, C, E, H$. Wende $(DM0)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.38a). Es folgt $(CDHX)_r$. Wegen $(BCE)_r \cap (CDH)_r = \{C\}$ folgt $X = C$ und damit $k = (CEH)_rE(ABE)_r$. \square



(a)

FIGUR 2.38

Lemma 2.97. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DM1^2) \Rightarrow (BCM1^1)$.*

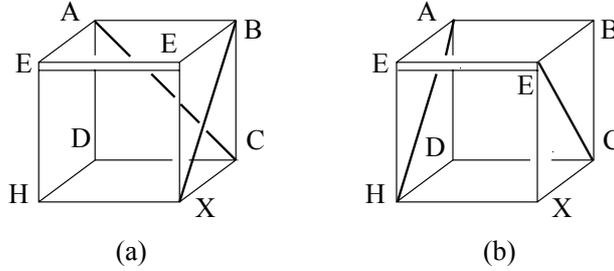
Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 2.96 zu führen, wobei statt des regulären Kreises $(ABCD)_r$ der ausgeartete Kreis $(ABCD)_a$ mit $B \parallel -D$ verwendet wird. \square

Lemma 2.96 wurde von Samaga in [48], Satz 6.5i), bewiesen für (B^*) -Geometrien. Zusätzlich zu [48], Korollar 6.2i), können wir durch einen anderen Beweis in Lemma 2.96 noch Lemma 2.97 folgern.

Lemma 2.98. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DM2^2) \Rightarrow (BM2^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $A \parallel -C$, $(BCEG)_a$ mit $B \parallel -G$, $(CDGH)_r, (ADEH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte E und H mit $kE(ABE)_r$. Dann gilt $k \cap (BCEG)_a = \{E, X\}$ mit $X \parallel -B \parallel -G$. Es gilt $X \parallel -A, C, D, E, H$. Im Fall $X = B$ folgt

$k = (BEH)_r$, also $(ABEH)_r = (ABDEH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_+ D$. Wende $(DM2^2)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.39a). Es folgt $(CDHX)_r = (CDGHX)_r$. Wegen $X \parallel_- G$ folgt $X = G$. Damit haben wir $k = (EGH)_r E(ABE)_r$. \square



FIGUR 2.39

Lemma 2.99. *In Minkowski-Ebenen gilt: $(DM2^1) \Rightarrow (BM2^3)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(BCEG)_a$ mit $C \parallel_- E$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$ mit $A \parallel_- H$. Zu zeigen ist $(ABE)_r E(EGH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte E und H mit $kE(ABE)_r$. Dann gilt $k \cap (BCEG)_a = \{E, X\}$ mit $X \parallel_+ B \parallel_+ G$. Es gilt $X \parallel_+ A, C, D, E, H$. Im Fall $X = B$ folgt $k = (BEH)_r$, also $(ABEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- H$. Wende $(DM2^1)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.39b). Es folgt $(CDHX)_r = (CDGHX)_r$. Wegen $X \parallel_- G$ folgt $X = G$. Damit haben wir $k = (EGH)_r E(ABE)_r$. \square

Lemma 2.100. *In Minkowski-Ebenen gilt:*

- i) $(CM1^2) \Rightarrow (DM2^2)$,
- ii) $(CM2^1) \Rightarrow (DM2^2)$,
- iii) $(DM1^1) \Rightarrow (DM2^2)$.

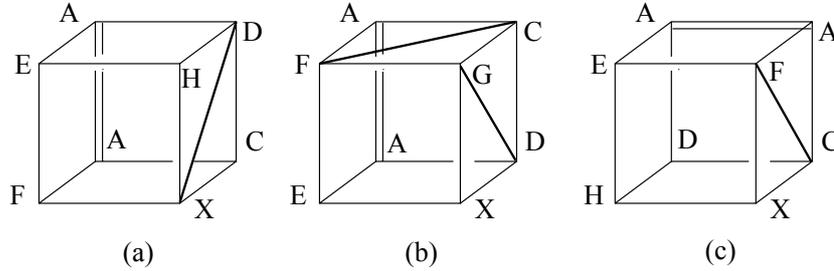
Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(ACFG)_a$ mit $C \parallel_- F$, $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$, $(ACD)_r A(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$.

i) Es gilt $(EFH)_r \cap (CDGH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- D \parallel_- G$. Dann gilt $X \parallel_- A, C, E, F, H$. Im Fall $X = D$ folgt $(DEFH)_r = (ADEFH)_r = (ACDEFH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Wende $(CM1^2)$ auf die Punkte E, H, D, A, F, X, C an (s. Figur 2.40a). Es folgt $X \parallel_+ A \parallel_+ G$. Wegen $G \parallel_- X \parallel_+ G$ folgt $X = G$.

ii) Es gilt $(EFG)_r \cap (CDGH)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel_+ C$. Dann gilt $X \parallel_+ A, D, E, F$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEFG)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Wende $(CM2^1)$ auf die Punkte F, G, C, A, E, X, D an (s. Figur 2.40b). Es folgt $(ADEHX)_r$. Wegen $(ADEH)_r \cap (CDGH)_a = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$.

iii) Es gilt $(EFH)_r \cap (ACFG)_a = \{F, X\}$ mit $X \parallel_+ A$. Dann gilt $X \parallel_+ C, D, E, F, H$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEFH)_r = (ADEFH)_r = (ACDEFH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte E, F, A, H, X, C, D an

(s. Figur 2.40c). Es folgt $X \parallel_- D \parallel_- G$. Wegen $(ACFG)_a \cap (CDGH)_a = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$. \square



FIGUR 2.40

Lemma 2.101. *In Minkowski-Ebenen gilt:*

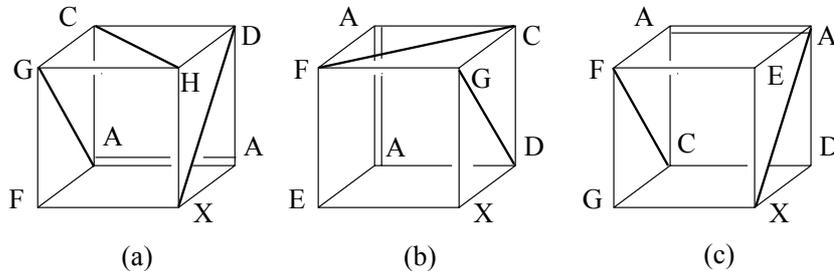
- i) $(BM3) \Rightarrow (DM3)$,
- ii) $(CM2^1) \Rightarrow (DM3)$,
- iii) $(DM2^1) \Rightarrow (DM3)$.

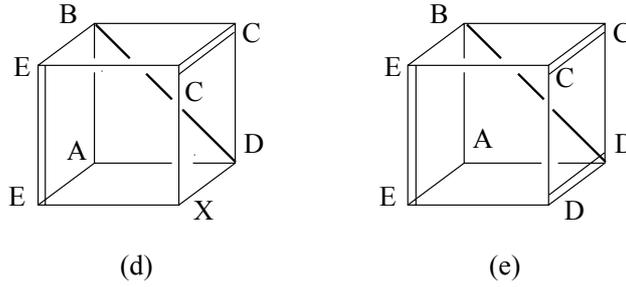
Beweis. Es gelte $(ADEH)_a$ mit $A \parallel_- H$, $(ACFG)_a$ mit $C \parallel_- F$, $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$, $(ACD)_r A(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$.

i) Es gilt $(FGH)_r \cap (ADEH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_+ D \parallel_+ E$. Dann gilt $X \parallel_+ A, C, F, G, H$. Im Fall $X = D$ folgt $(DFGH)_r$, Widerspruch zu $D \parallel_- G$. Wende $(BM3)$ auf die Punkte G, H, D, C, F, X, A an (s. Figur 2.41a). Es folgt $(ACD)_r A(AEFX)_r$. Wegen $(AEF)_r \cap (ADEH)_a = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$.

ii) Es gilt $(EFG)_r \cap (CDGH)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel_+ C \parallel_+ H$. Dann gilt $X \parallel_+ A, D, E, F, G$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEFG)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Wende $(CM2^1)$ auf die Punkte F, G, C, A, E, X, D an (s. Figur 2.41b). Es folgt $X \parallel_- A \parallel_- H$. Wegen $X \parallel_+ H$ folgt $X = H$.

iii) Es gilt $(EFG)_r \cap (ADEH)_a = \{E, X\}$ mit $X \parallel_- A \parallel_- H$. Dann gilt $X \parallel_- C, D, E, F, G$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEFG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_+ G$. Wende $(DM2^1)$ auf die Punkte F, E, A, G, X, D, C an (s. Figur 2.41c). Es folgt $X \parallel_+ C \parallel_+ H$. Wegen $X \parallel_- H$ folgt $X = H$. \square

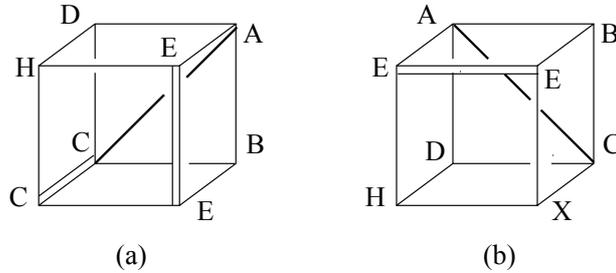




FIGUR 2.41

Lemma 2.102. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(CDM1)$ und (BCD_1M1) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(BCM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $B\|_D$, $(ADEH)_r$, $(BCE)_rC(CDH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(CEH)_r$. Sei k der reguläre Kreis durch die Punkte C und E mit $kE(ABE)_r$. Angenommen, es gilt $kC(CDH)_r$. Dann folgt $kC(BCE)_r$, also $k = (BCE)_r$. Damit haben wir $k = (ABCE)_r$, Widerspruch zu $A\|_+C$. Es ist also $k \cap (CDH)_r = \{C, X\}$ mit $X \neq C$. Aus dieser Bedingung schließen wir $X \notin \{A, B\}$. Im Fall $X = D$ folgt $k = (CDE)_r$. Wende (BCD_1M1) auf die Punkte E, C, B, D, A an (s. Figur 2.41e). Es folgt $(CDH)_rD(ADEH)_r$ und damit $(ACDEH)_r$, Widerspruch zu $A\|_+C$. Es ist also $X \neq D$. Im Fall $X = E$ haben wir $(CDEH)_r = (ACDEH)_r$, Widerspruch zu $A\|_+C$. Wende $(CDM1)$ auf die Punkte E, C, B, X, D, A an (s. Figur 2.41d). Es folgt $(ADEX)_r$ und damit $(ADEHX)_r$. Wegen $(ADEH)_r \cap (CDH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$, also $k = (CEH)_rE(ABE)_r$. \square

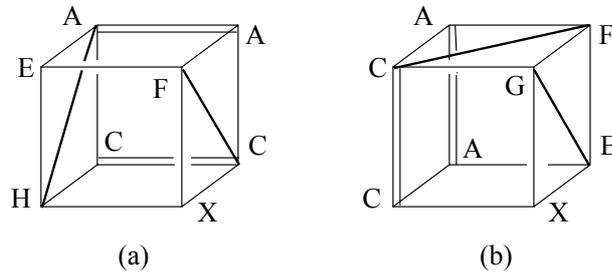


FIGUR 2.42

Lemma 2.103. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(DM1^2)$, $(BCM1^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(BM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $A\|_C$, $(BCEG)_r$, $(CDGH)_r$, $(ADEH)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte E und H enthält und für den $kE(ABE)_r$ gilt. Angenommen, es gilt $kE(BCEG)_r$. Dann folgt $(ABE)_r = (BCEG)_r$, also $(ABCEG)_r$, Widerspruch zu $A\|_C$. Wir gehen also von $k \cap (BCEG)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$

aus. Im Fall $X = A$ schließen wir auf $(ABCEG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Analog können wir die Fälle $X \in \{B, D, H\}$ ausschließen. Im Fall $X = C$ wenden wir $(BCM1^2)$ auf die Punkte H, E, A, D, C, B an (s. Figur 2.42a) an. Es folgt $(CDH)_r C(BCE)_r$. Dies bedeutet $(CDGH)_r C(BCEG)_r$, also $(BCDEGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_+ D$. Es folgt $X \neq C$. Wende $(DM1^2)$ auf die Punkte E, B, A, H, X, C, D an (s. Figur 2.42b). Es folgt $(CDHX)_r$ und damit $(CDGHX)_r$. Aus $(BCEG)_r \cap (CDGH)_r = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$ und damit $(ABE)_r E(EGH)_r$. \square



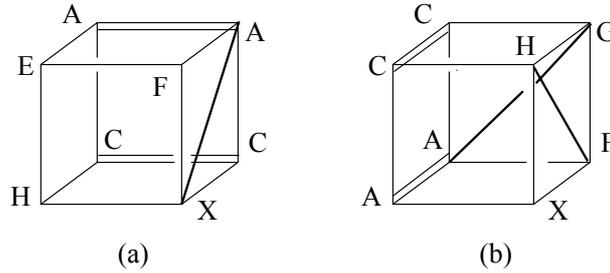
FIGUR 2.43

Lemma 2.104. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen (BD_1M2^2) , (CC_1M2) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DDM2)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und C enthält mit $(AEF)_r A k C (CGH)_r$. Weiter gelte $(ACFG)_a$ mit $C \parallel_- F$ und $(ACEH)_a$ mit $A \parallel_- H$. Zu zeigen ist $(EFGH)_{ar}$ (im ausgearteten Fall mit $E \parallel_- G$).

1. Fall: $E \parallel_- G$. Dann haben wir den regulären Kreis $(EFH)_r$ und es gilt $(EFH)_r \cap (ACFG)_a = \{F, X\}$ mit $X \parallel_+ G \parallel_+ A$. Es folgt $X \parallel_+ C, E, F, H$ und damit $X \notin \{C, E, F, H\}$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEFH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- H$. Wende (BD_1M2^2) auf die Punkte E, F, A, H, X, C an (s. Figur 2.43a). Es folgt $kC(CHX)_r$ (es ist $(CGH)_r$ ein regulärer Kreis) und damit $(CGHX)_r$. Wegen $X \parallel_+ G$ und $G, X \in (CGHX)_r$ folgt $X = G$, also $(EFGH)_r$.

2. Fall: Trivialerweise tritt der Fall $E \parallel_+ G$ nicht auf. Angenommen, es gilt ohne Einschränkung $E \parallel_- G$. Zu zeigen ist $F \parallel_+ H$. Es gilt $(EFG)_a \cap (CGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \parallel_+ F$. Dann ist $X \parallel_+ A, C, E, G$ und damit $X \notin \{A, C, E, G\}$. Im Fall $X = F$ folgt $(CFGH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Wende (CC_1M2) auf die Punkte C, G, F, A, X, E an (s. Figur 2.43b). Wegen $C \parallel_+ E$ folgt $(ACEX)_a$ mit $X \parallel_- A \parallel_- H$. Wegen $X \in (CGH)_r$, $X \neq G$ und $X \parallel_- H$ folgt $X = H$, also $(EFGH)_a$. \square



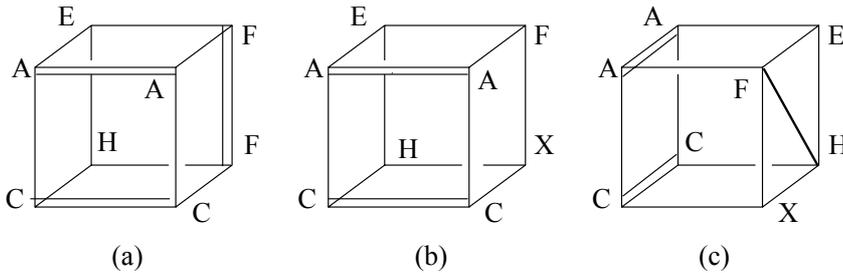
FIGUR 2.44

Lemma 2.105. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BD_1\mathcal{M}1^1)$, $(BD_1\mathcal{M}2^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DD\mathcal{M}1)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und C enthält und für den $(AEF)_r AkC(CG H)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACEH)_r$ und $(ACFG)_a$ mit $A\|_G$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$ oder $(EFGH)_a$ mit $F\|_H$.

1. Fall: $F\|_H$. Dann gilt $(EFH)_r \cap (ACFG)_a = \{F, X\}$ mit $X\|_A\|_G$. Es ist $X\|_C, E, F, H$ und damit $X \notin \{C, E, F, H\}$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEFH)_r = (ACEFH)_r$, Widerspruch zu $C\|_+F$. Wende $(BD_1\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte E, F, A, H, X, C an (s. Figur 2.44a). Es folgt $kC(CHX)_r$ und damit $(CGHX)_r$. Wegen $X, G \in (CGHX)_r$, $X\|_G$ folgt $X = G$, also $(EFGH)_r$.

2. Fall: Trivialerweise tritt der Fall $F\|_+H$ nicht auf. Es gelte ohne Einschränkung $F\|_H$. Zu zeigen ist $E\|_+G$. Es folgt $(FGH)_a \cap (ACEH)_r = \{H, X\}$ mit $X\|_+G$. Es gilt $X\|_+A, C, F, H$ und damit $X \notin \{A, C, F, H\}$. Im Fall $X = G$ folgt $(ACEGH)_r$, Widerspruch zu $A\|_G$. Wende $(BD_1\mathcal{M}2^2)$ auf die Punkte C, H, G, A, X, F an (s. Figur 2.44b). Es folgt $kA(AFX)_r$ und damit $(AEFX)_r$. Wegen $(AEF)_r \cap (ACEH)_r = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$ und damit $(EFGH)_a$. \square



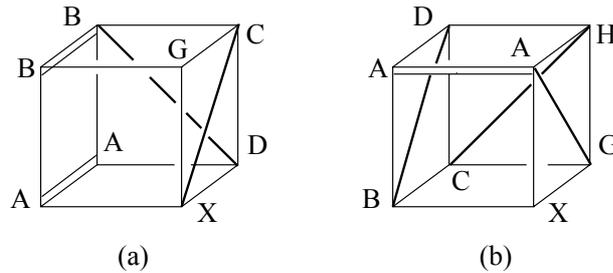
FIGUR 2.45

Lemma 2.106. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BCD_1\mathcal{M}0)$, $(BD_1\mathcal{M}0)$, $(BD_1\mathcal{M}1^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DD\mathcal{M}0)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis durch die Punkte A und C mit $(AEF)_r AkC(CG H)_r$. Es sei $(ACFG)_r$, $(ACEH)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_{ar}$.

1. Fall: $F \parallel H$. Dann haben wir den regulären Kreis $(EFH)_r$. Angenommen, es gilt $(EFH)_r F(ACFG)_r$. Wende $(BCD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, F, E, C, H an (s. Figur 2.45a). Wir erhalten $kC(CFH)_r$ und wegen $kC(CG H)_r$ dann $(CFGH)_r = (ACFGH)_r = (ACEFGH)_r$. Insbesondere folgt die Behauptung $(EFGH)_r$. Wir gehen jetzt von $(EFH)_r \cap (ACFG)_r = \{F, X\}$ mit $X \neq F$ aus. In jedem der Fälle $X \in \{A, C, E, H\}$ folgt $(ACEFH)_r$ und wir erhalten einen Widerspruch zu $(EFH)_r \cap (ACFG)_r = \{F, X\}$. Wende $(BD_1\mathcal{M}0)$ auf die Punkte A, F, E, C, X, H an (s. Figur 2.45b). Es folgt $kC(CHX)_r$. Dann folgt $(CGHX)_r$. Wegen $(CGH)_r \cap (ACFG)_r = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$, also $(EFGH)_r$.

2. Fall: Ohne Einschränkung gelte $F \parallel_- H$. Zu zeigen ist $E \parallel_+ G$. Die Punkte E, F, H legen eindeutig einen ausgearteten Kreis fest. Es gilt $(EFH)_a \cap (ACFG)_r = \{F, X\}$ mit $X \parallel_+ E$. Damit gilt $X \parallel_+ A, C, F, H$. Insbesondere gilt $X \notin \{A, C, F, H\}$. Wende $(BD_1\mathcal{M}1^2)$ auf die Punkte A, F, E, C, X, H an (s. Figur 2.45c). Es folgt $kC(CHX)_r$ und damit $(CGHX)_r$. Wegen $(CGH)_r \cap (ACFG)_r = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$, also $(EFGH)_a$. \square



FIGUR 2.46

Lemma 2.107. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BD_1\mathcal{M}2^1)$, $(DM3)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CC_1\mathcal{M}2)$.*

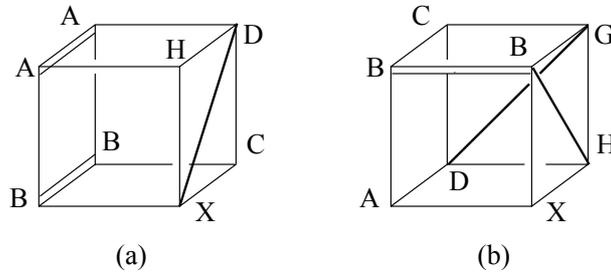
Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $B \parallel_- D$, $(CDGH)_a$ mit $C \parallel_- H$. Weiter sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und B enthält und für den

$(ADH)_r A k B(BCG)_r$ gilt. Zu zeigen ist $(ABGH)_r$ oder $(ABGH)_a$ mit $A \parallel_- G$.

1. Fall: $A \parallel G$. Es gilt $(ABG)_r \cap (CDGH)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel_- C \parallel_- H$. Dann folgt $X \parallel_- A, B, D, G$ und damit $X \notin \{A, B, D, G\}$. Wende $(BD_1\mathcal{M}2^1)$ auf die Punkte B, G, C, A, X, D an (s. Figur 2.46a). Es folgt $kA(ADX)_r$. Damit haben wir $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (CDGH)_a = \{D, H\}$, $X \parallel_- H$ folgt $X = H$, also $(ABGH)_r$.

2. Fall: $A \parallel_+ G$ tritt nicht auf, da sonst $C \parallel_+ G$ folgt, Widerspruch zur Voraussetzung. Es gelte ohne Einschränkung $A \parallel_- G$. Dann folgt $(AGH)_a \cap k = \{A, X\}$ mit $X \parallel_+ H$. Wir haben $X \parallel_+ A, C, D, G$ und damit $X \notin \{A, C, D, G\}$. Im Fall $X = H$ folgt $k = (ABH)_r = (ABDH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- D$. Angenommen, es gilt $X \neq H$. Wende $(DM3)$ auf die Punkte A, H, D, B, X, G, C

an (s. Figur 2.46b). Es folgt $(BCGX)_r$. Wegen $k \cap (BCG)_r = \{B\}$ ($k = (BCG)_r$ kann man sofort zum Widerspruch führen) folgt $X = B$, Widerspruch zu $X \neq B$. Wir haben also $X = B$ und damit $(ABGH)_a$. \square



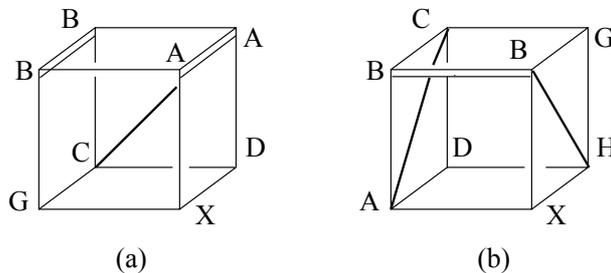
FIGUR 2.47

Lemma 2.108. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen (BD_1M1^2) , $(DM2^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung (CC_1M1^2) .*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$. Weiter sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_r AkB(BCG)_r$. Zu zeigen ist $(ABGH)_r$ oder $(ABGH)_a$ mit $B \parallel_- H$.

1. Fall: $B \parallel H$. Dann haben wir den regulären Kreis $(ABH)_r$ und es gilt $(ABH)_r \cap (CDGH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- D \parallel_- G$. Es folgt $X \parallel_- A, B, C, H$ und damit $X \notin \{A, B, C, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt $(ABDH)_r = (ABCDH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ H$. Wende (BD_1M1^2) auf die Punkte A, H, D, B, X, C an (s. Figur 2.47a). Es folgt $kB(BCX)_r$ und damit $(BCGX)_r$. Wegen $X \parallel_- G$ folgt $X = G$, also $(ABGH)_r$.

2. Fall: Angenommen, es gilt $B \parallel_- H$. Zu zeigen ist $A \parallel_+ G$. $(BGH)_a \cap k = \{B, X\}$ mit $X \parallel_+ G$. Damit folgt $X \parallel_+ B, C, D, H$, Im Fall $X = G$ folgt $k = (ABCG)_r = (ABCDG)_r$, Widerspruch zu $D \parallel_- G$. Angenommen, es gilt $X \neq A$. Wende $(DM2^2)$ auf die Punkte B, G, C, A, X, H, D an (s. Figur 2.47b). Es folgt $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap k = \{A\}$ ($(ADH)_r = k$ kann man ausschließen) folgt $X = A$, Widerspruch zu $X \neq A$. Wir erhalten $X = A$ und damit $(ABGH)_a$. \square



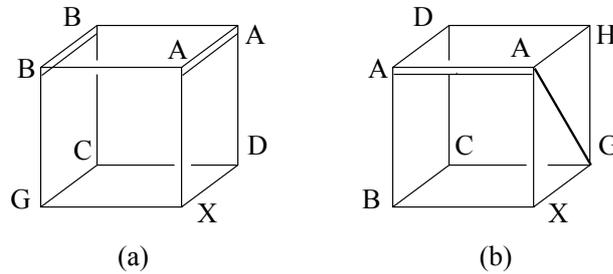
FIGUR 2.48

Lemma 2.109. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(DDM1)$, $(DM2^1)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung (CC_1M1^1) .*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $A \parallel_- C$, $(CDGH)_r$. Weiter sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und B enthält mit $(ADH)_r A k B (BCG)_r$. Zu zeigen ist $(ABGH)_r$ oder $(ABGH)_a$ mit $B \parallel_- H$.

1. Fall: $A \parallel G$. Angenommen, es gilt $(ABG)_r A (ADH)_r$. Es folgt dann $k = (ABG)_r = (ADH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Es gilt also $(ABG)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$ mit $X \neq A$. Jeder der Fälle $X \in \{B, C, D, G\}$ führt auf einen Widerspruch zur Voraussetzung. Insbesondere gilt auch $X \parallel A$, B, C, D, G . Wende $(DDM1)$ auf die Punkte B, A, G, X, D, C an (s. Figur 2.48a). Es folgt $(CDGX)_r$ (wegen $D \parallel G$). Damit erhalten wir $(CDGHX)_r$. Wegen $(CDGH)_r \cap (ADH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. Wir erhalten $(ABGH)_r$.

2. Fall: $B \parallel_+ H$ tritt nicht auf, da sonst $D \parallel_+ H$ folgt, Widerspruch. Angenommen, es gilt $B \parallel_- H$. Zu zeigen ist $A \parallel_+ G$. Es gilt $(BGH)_a \cap k = \{B, X\}$ mit $X \parallel_+ G$. Damit haben wir $X \parallel_+ B, C, D, H$. Im Fall $X = G$ folgt $k = (ABG)_r = (ABCG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Angenommen, es gilt $X \neq A$. Wende $(DM2^1)$ auf die Punkte B, G, C, A, X, H, D an (s. Figur 2.48b). Es folgt $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap k = \{A\}$ ($(ADH)_r = k$ läßt sich sofort ausschließen) folgt $X = A$, Widerspruch zu $X \neq A$, Widerspruch. Wir haben also $X = A$ und damit $(ABGH)_a$. \square



FIGUR 2.49

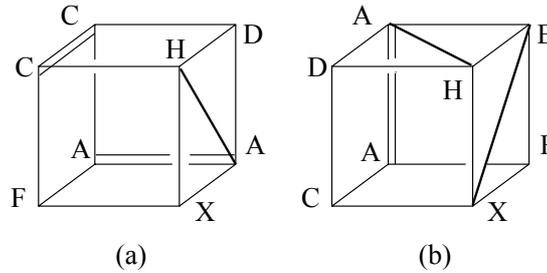
Lemma 2.110. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(DM1^1)$, $(DDM0)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung (CC_1M0) .*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_r$. Weiter sei k der reguläre Kreis, der die Punkte A und B enthält und für den $(ADH)_r A k B (BCG)_r$ gilt. Zu zeigen ist $(ABGH)_{ar}$.

1. Fall: $A \parallel G$. Wir haben den regulären Kreis $(ABG)_r$. Angenommen, es gilt $(ABG)_r A (ADH)_r$. Dann folgt aus der Eindeutigkeit des Berührkreises $k = (ABG)_r$ und damit $k = (ABCDGH)_r$. Im Fall $B \parallel H$ haben wir einen Widerspruch, im Fall $B \parallel_+ H$ folgt die Behauptung. Wir gehen deshalb

von $(ABG)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$ mit $X \neq A$ aus. Aus $X \in \{B, C, D, G\}$ folgt $(ABCDGH)_r$, Widerspruch zu $(ABG)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$. Wende $(DDM0)$ auf die Punkte B, A, G, X, D, C an (s. Figur 2.49a). Wegen $(CDGX)_r$ folgt $(CDGHX)_r$. Aus $(CDGH)_r \cap (ADH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ leiten wir $X = H$ ab. Damit folgt $(ABGH)_r$.

2. Fall: Ohne Einschränkung sei $A \parallel_- G$. Zu zeigen ist $B \parallel_+ H$. Da H nicht-parallel ist zu A haben wir den eindeutig bestimmten ausgearteten Kreis $(AGH)_a$ und es gilt $(AGH)_a \cap k = \{A, X\}$ mit $X \parallel_+ H$. Aus dieser Bedingung folgt sofort $X \parallel A$. Im Fall $X = H$ folgt $k = (ABCDGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- G$. Im Fall $X \parallel_+ C$ folgt $C \parallel_+ H$, Widerspruch. Dann gilt auch $X \neq C$. Das gleiche Argument gilt auch in den Fällen $X = D$ und $X = G$. Angenommen, es gilt $X \neq B$. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte A, H, D, B, X, G, C an (s. Figur 2.49b). Es folgt $(BCGX)_r$. Wegen $k \cap (BCGX)_r = \{B\}$ ($k = (BCG)_r$ können wir ausschließen) folgt $X = B$, Widerspruch zu $X \neq B$. Wir erhalten $X = B$ und damit $(ABGH)_a$. \square



FIGUR 2.50

Lemma 2.111. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BCM1^1)$ und $(CM2^1)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CDM1)$.*

Beweis. Es gelte $(ACF)_r C(CDH)_r$, $(ACD)_r A(AEF)_r$ und $(ADEH)_a$ mit $A \parallel_- H$. Zu zeigen ist $(CEFH)_r$ oder $(CEFH)_a$ mit $C \parallel_- E$.

1. Fall: $F \parallel H$. Dann ist $(CFH)_r$ ein eindeutig bestimmter regulärer Kreis und es gilt $(CFH)_r \cap (ADEH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_+ E \parallel_+ D$. Aus den Voraussetzungen folgt unmittelbar $X \parallel_+ A, C, F, H$ und damit $X \notin \{A, C, F, H\}$. Im Fall $X = D$ folgt $(ACF)_r = (CDH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- H$. Wende $(BCM1^2)$ auf die Punkte C, H, D, F, X, A an (s. Figur 2.50a). Es folgt $(ACD)_r A(AFX)_r$ und damit $(AEFX)_r$. Wegen $(AEF)_r \cap (ADEH)_a = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$, also $(CEFH)_r$.

2. Fall: $F \parallel_+ H$ (Der Fall $F \parallel_- H$ tritt wegen $A \parallel_- H$ nicht auf). Zu zeigen ist $C \parallel_- E$. Es gilt $(EFH)_a \cap (CDH)_r = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- E$. Es folgt $X \parallel_- A, D, F, H$. Im Fall $X = E$ folgt $(CDEH)_r$, Widerspruch zu $D \parallel_+ E$. Angenommen, es gilt $X \neq C$. Wende $(CM2^1)$ auf die Punkte D, H, E, A, C, X, F

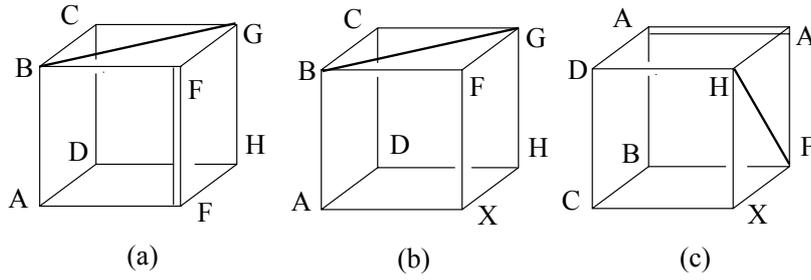
an (s. Figur 2.50b). Es folgt $(ACFX)_r$. Aus $(CDH)_r \cap (ACF)_r = \{C\}$ ($(CDH)_r = (ACF)_r$ kann man ausschließen) folgt $X = C$, Widerspruch zu $X \neq C$. Wir erhalten $X = C$ und damit folgt $(CEFH)_a$ mit $C \parallel_- E$. \square

Lemma 2.112. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(\mathcal{M}1^1)$, $(\mathcal{CM}1^1)$, $(\mathcal{DM}1^1)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(\mathcal{CM}1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r$, $(CDGH)_r$, $(BCFG)_a$ mit $B \parallel_- G$ und $(ADH)_r A(ABF)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$ oder $(AFGH)_a$ mit $F \parallel_- H$.

1. Fall: $F \parallel H$. Dann sind A, F, H und F, G, H jeweils drei paarweise nicht parallele Punkte, wir haben also $(AFH)_r$ und $(FGH)_r$. Im Fall $(AFH)_r = (FGH)_r$ liegt die Behauptung vor. Wir betrachten den Fall $(AFH)_r \neq (FGH)_r$. Wegen $B \parallel_- G$ folgt $(ABF)_r \neq (FGH)_r$. Angenommen, es gilt $(ABF)_r F(FGH)_r$. Wende $(\mathcal{CM}1^1)$ auf die Punkte B, F, G, C, A, H, D an (s. Figur 2.51a). Es folgt $(ADFH)_r$. Dann gilt $(ABDFH)_r = (ABCDFH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Also haben die Kreise $(ABF)_r$ und $(FGH)_r$ genau zwei Punkte gemeinsam, d.h. $(ABF)_r \cap (FGH)_r = \{F, X\}$ mit $X \neq F$. Im Fall $X = B$ folgt $(BFGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$. Im Fall $X = C$ folgt $(CFGH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Im Fall $X = D$ folgt $(ABDF)_r = (ABCDF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Im Fall $X = G$ folgt $(ABFG)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$. Im Fall $X = H$ folgt $(ABFH)_r = (ABDFH)_r = (ABCDFH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- F$. Hiermit und mit $(ABF)_r \cap (FGH)_r = \{F, X\}$ folgt dann $X \parallel B, F, G, H$. Angenommen, es gilt $X \neq A$. Wende $(\mathcal{M}1^1)$ auf die Punkte B, F, G, C, A, X, H, D an (s. Figur 2.51b). Es folgt $(ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r A(ABF)_r = \{A\}$ ($(ADH)_r = (ABF)_r$ impliziert sukzessive $(ABDFH)_r$, $(ABCDFH)_r$, $(ABCDFGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$) schließen wir auf $X = A$, Widerspruch zu $X \neq A$. Wir erhalten $X = A$, also $(AFGH)_r$.

2. Fall: $F \parallel_- H$. Zu zeigen ist $A \parallel_+ G$. Es gilt $(AFH)_a \cap (CDGH)_r = \{H, X\}$ mit $X \parallel_+ A$. Damit haben wir $X \notin \{B, C, D, F, H\}$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDGH)_r = (ABCDGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$. Wende $(\mathcal{DM}1^1)$ auf die Punkte D, H, A, C, X, F, B an (s. Figur 2.51c). Es folgt $(BCFX)_a = (BCFGX)_a$. Wegen $(BCFG)_a \cap (CDGH)_r = \{C, G\}$, $X \neq C$ folgt $X = G$, also $(AFGH)_a$. \square



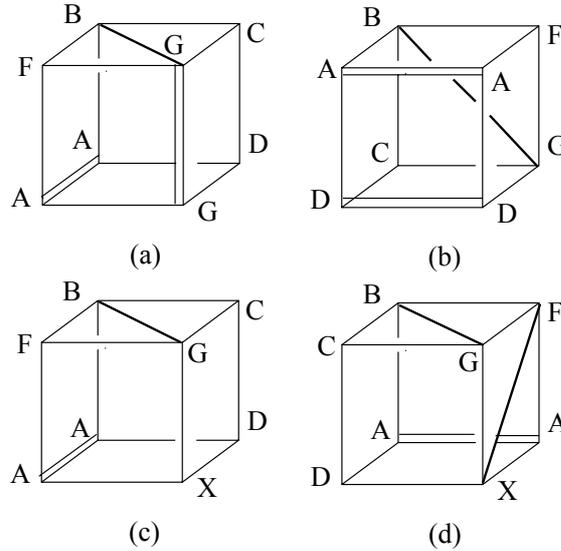
FIGUR 2.51

Lemma 2.113. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BM1^1)$, $(BM2^2)$, $(BCM1^1)$, (BD_1M1^1) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CM1^2)$.*

Beweis. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in 2.112.

1. Fall: Es sei $A \parallel G$. Dann haben wir die regulären Kreise $(AFG)_r$ und $(AGH)_r$. Angenommen, es gilt $(AFG)_r G (CDGH)_r$. Wende $(BCM1^1)$ auf die Punkte F, G, C, B, A, G, D an (s. Figur 2.52a). Es folgt $(ABF)_r A (ADG)_r$. Damit folgt $(ABCDGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- D$. Es gilt also $(AFG)_r \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \neq G$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDGH)_r = (ABCDGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$. Im Fall $X = B$ folgt $(ABFG)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_- G$. Im Fall $X = C$ folgt $(ACFG)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Im Fall $X = F$ folgt $(CDFGH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Im Fall $X = D$ wenden wir (BD_1M1^1) auf die Punkte A, F, B, D, G, C an (s. Figur 2.52b). Es folgt $(ADH)_r D (CDGH)_r$, Widerspruch zur Voraussetzung. Wir haben also $X \notin \{A, B, C, D, F, G\}$. Wende $(BM1^1)$ auf die Punkte F, G, C, B, A, X, D an (s. Figur 2.52c). Es folgt $(ABF)_r A (ADX)_r = (ADHX)_r$. Mit $(ADH)_r \cap (CDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$, also $(AFGH)_r$.

2. Fall: $A \parallel_+ G$. Zu zeigen ist $F \parallel_- H$. Es folgt $(AFG)_a \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \parallel_- F$. Damit haben wir $X \notin \{A, B, C, D, G\}$. Im Fall $X = F$ folgt $(CDFGH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Wende $(BM2^2)$ auf die Punkte C, G, F, B, D, X, A an (s. Figur 2.52d). Es folgt $(ABF)_r A (ADX)_r = (ADHX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (CDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$, also $(AFGH)_a$. \square



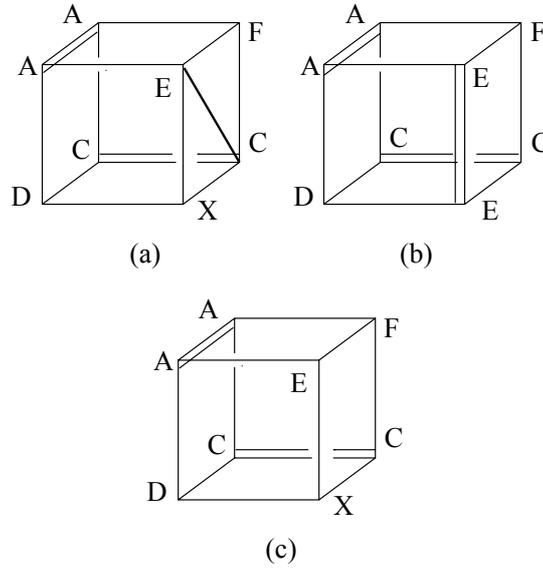
FIGUR 2.52

Lemma 2.114. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen (BCM_0) , (BCM_1^2) , (BCD_2M_0) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CCDM_0)$.*

Beweis. Es sei k der reguläre Kreis, der die Punkte C und D enthält und für den $(ACF)_r C k D (ADE)_r$ gilt. Weiter gelte $(ACD)_r A (AEF)_r$. Zu zeigen ist $(CDEF)_{ar}$.

1. Fall: Ohne Einschränkung nehmen wir den Fall $C \parallel_- E$ an. Zu zeigen ist $D \parallel_+ F$. Es gilt $(CEF)_a \cap (ADE)_r = \{E, X\}$ mit $X \parallel_+ F$. Dann haben wir $X \parallel_+ A, C, E$. Im Fall $X = F$ folgt $(ADEF)_r = (ACDEF)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_- E$. Angenommen, es gilt $X \neq D$. Wende (BCM_1^2) auf die Punkte A, E, F, D, X, C an (s. Figur 2.53a). Es folgt $(ACF)_r C (CDX)_r$, also $k = (CDX)_r$. Wegen $k D (ADE)_r$ (den Fall $k = (ADE)_r$ kann man ausschließen) folgt $X = D$, Widerspruch zu $X \neq D$. Damit haben wir $X = D$, also $(CDEF)_a$.

2. Fall: $C \parallel E$. Dann haben wir den regulären Kreis $(CEF)_r$. Im Fall $(CEF)_r E (ADE)_r$ wenden wir (BCD_2M_0) auf die Punkte A, E, F, D, C an (s. Figur 2.53b). Es folgt $(ACF)_r C (CDE)_r = k$. Damit haben wir $k = (ACDE)_r = (ACDEF)_r$, insbesondere die Behauptung (im Fall $D \parallel F$ liegt ein Widerspruch vor). Im Fall $(CEF)_r \cap (ADE)_r = \{E, X\}$ mit $X \neq E$ folgt $X \notin \{A, C, F\}$, ansonsten liegt ein Widerspruch zu $(CEF)_r \cap (ADE)_r = \{E, X\}$ vor. Angenommen, es gilt $X \neq D$. Wende (BCM_0) auf die Punkte A, E, F, D, X, C an (s. Figur 2.53c). Es folgt $(ACF)_r C (CDX)_r = k$. Wegen $k \cap (ADE)_r = \{D\}$ folgt $X = D$, Widerspruch zu $X \neq D$. Damit haben wir $X = D$, also $(CDEF)_r$. \square



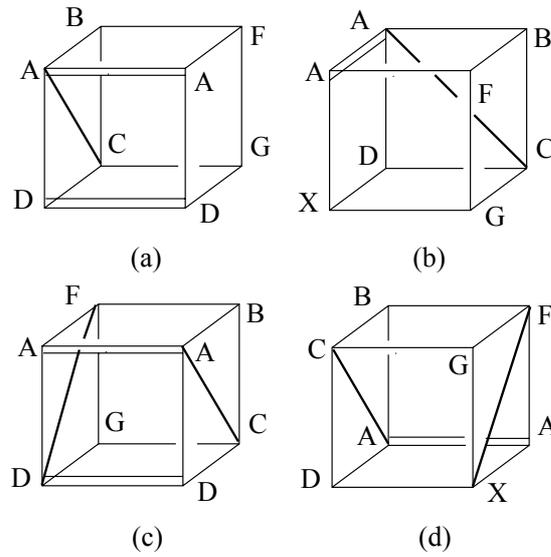
FIGUR 2.53

Lemma 2.115. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BM2^3)$, $(DM1^1)$, (BD_1M1^1) , (BD_1M2^2) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_a$ mit $A \parallel_- C$, $(BCFG)_r$, $(CDGH)_r$ und $(ADH)_r A(ABF)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$ oder $(AFGH)_a$ mit $F \parallel_- H$.

1. Fall: $A \parallel_+ G$. Es ist $(AFG)_r$ ein regulärer Kreis. Angenommen, es gilt $(AFG)_r A(ADH)_r$. Dann folgt $(AFG)_r = (ABF)_r$ und damit $(ABFG)_r = (ABCFG)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Es gilt also $(AFG)_r \cap (ADH)_r = \{A, X\}$ mit $X \neq A$. Falls $X \in \{B, C, F, G\}$, so erhalten wir Widersprüche zu den Voraussetzungen. Im Fall $X = D$ wenden wir (BD_1M1^1) auf die Punkte A, F, B, D, G, C an (s. Figur 2.54a). Es folgt $(ADH)_r D(CDGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Insgesamt haben wir somit $X \notin \{A, B, C, D, F, G\}$. Wende $(DM1^1)$ auf die Punkte A, F, B, X, G, C, D an (s. Figur 2.54b). Es folgt $(CDGX)_r = (CDGHX)_r$. Wegen $(CDGH)_r \cap (ADH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$, also $(AFGH)_r$.

2. Fall: $A \parallel_+ G$. Dann folgt $(AFG)_a \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \parallel_- F$. Damit haben wir $X \parallel_- A, B, C, D$. Im Fall $X = F$ folgt $(CDFGH)_r = (BCDFGH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_+ D$. Im Fall $X = D$ wenden wir (BD_1M2^2) auf die Punkte A, B, F, D, C, G an (s. Figur 2.54c). Es folgt $(ADH)_r D(CDGH)_r$, Widerspruch zur Voraussetzung. Insgesamt gilt also $X \notin \{A, B, C, D, F, G\}$. Wende $(BM2^3)$ auf die Punkte C, G, F, B, D, X, A an (s. Figur 2.54d). Es folgt $(ABF)_r A(ADX)_r$. Wegen $(ADH)_r \cap (CDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$ und damit $(AFGH)_a$. \square



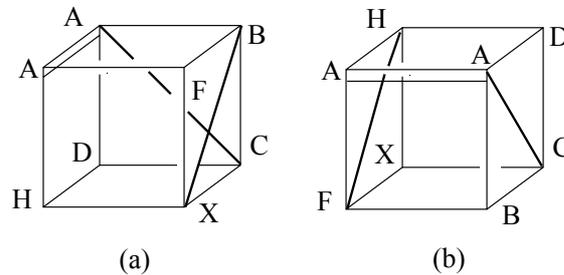
FIGUR 2.54

Lemma 2.116. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(DM2^1)$, $(DM2^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(CM2^1)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ABCD)_a$ mit $A \parallel_- C$, $(BCFG)_a$ mit $B \parallel_- G$ und $(ABF)_r A(ADH)_r$. Zu zeigen ist $(AFGH)_r$ oder $(AFGH)_a$ mit $F \parallel_- H$.

1. Fall: $F \parallel H$. Wir haben den regulären Kreis $(AFH)_r$ und es gilt $(AFH)_r \cap (BCFG)_a = \{F, X\}$ mit $X \parallel_- B \parallel_- G$. Es folgt $X \parallel_- A, C, D, F, H$. Im Fall $X = B$ folgt $(ABFH)_r = (ABDFH)_r$, Widerspruch zu $B \parallel_+ D$. Wende $(DM2^2)$ auf die Punkte A, F, B, H, X, C, D an (s. Figur 2.55a). Es folgt $(CDGHX)_r$. Wegen $(CDGH)_r \cap (BCFG)_a = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$.

2. Fall: $F \parallel_- H$. Dann haben wir $(AFH)_a \cap (CDGH)_r = \{H, X\}$ mit $X \parallel_+ A$. Es folgt $X \parallel_+ B, C, D, F, H$. Im Fall $X = A$ folgt $(ACDGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- C$. Wende $(DM2^1)$ auf die Punkte A, D, H, F, B, C, X an (s. Figur 2.55b). Es folgt $(BCFGX)_a$. Wegen $(BCFG)_a \cap (CDGH)_r = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$. \square



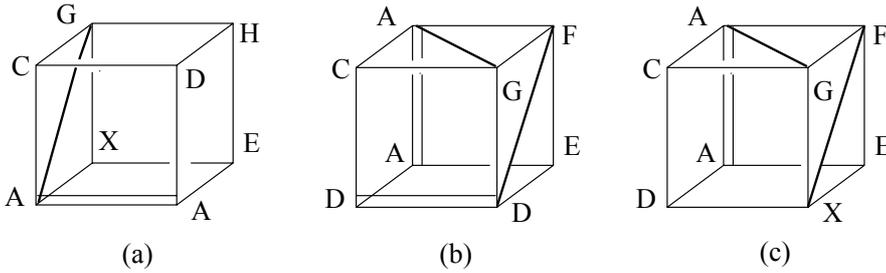
FIGUR 2.55

Lemma 2.117. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BM1^1)$, $(CM2^1)$, $(BCM2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DM1^1)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(CDGH)_r$, $(ACFG)_a$ mit $A \parallel_- G$ und $(ACD)_r A(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$ oder $(EFGH)_a$ mit $F \parallel_- H$.

1. Fall: $E \parallel_+ G$. Dann haben wir $(EGH)_r \cap (ACFG)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel_+ C$. Dann folgt $X \parallel_+ A, D, E, G, H$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEGH)_r$, $(CDEGH)_r$, bzw. $(ACDEGH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_+ G$. Wende $(BM1^1)$ auf die Punkte C, D, H, G, A, E, X an (s. Figur 2.56a). Es folgt $(ACD)_r A(AEFX)_r$. Wegen $(AEF)_r \cap (ACFG)_a = \{A, F\}$ und $X \neq A$ folgt $X = F$.

2. Fall: $E \parallel_- G$. Dann gilt $(EFG)_a \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \parallel_- F$. Dann gilt $X \parallel_- A, C, E, G$. Im Fall $X = F$ folgt $(CDFGHH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ F$. Im Fall $X = D$ wenden wir $(BCM2)$ auf die Punkte C, G, F, A, D, E an (s. Figur 2.56b). Es folgt $(CDGH)_r D(ADEH)_r$, Widerspruch zu $A \parallel_- G$. Es ist also $X \notin \{A, C, D, E, F, G\}$. Wende $(CM2^1)$ auf die Punkte C, G, F, A, D, X, E an (s. Figur 2.56c). Es folgt $(ADEHX)_r$. Wegen $(ADEH)_r \cap (CDGH)_r = \{D, H\}$ und $X \neq D$ folgt $X = H$. \square



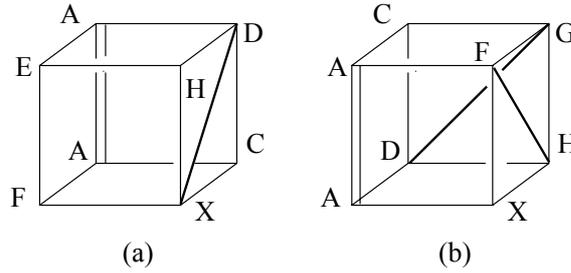
FIGUR 2.56

Lemma 2.118. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(CM1^2)$, $(CM2^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DM1^2)$.*

Beweis. Es gelte $(ADEH)_r$, $(ACFG)_r$, $(CDGH)_a$ mit $D \parallel_- G$ und $(ACD)_r A(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$ oder $(EFGH)_a$ mit $F \parallel_- H$.

1. Fall: $F \parallel_- H$. Dann gilt $(EFH)_r \cap (CDGH)_a = \{H, X\}$ mit $X \parallel_- D$. Dann gilt $X \parallel_- A, C, E, F, H$. Im Fall $X = D$ folgt $(DEFH)_r = (ACDEFH)_r$, Widerspruch zu $C \parallel_+ H$. Wende $(CM1^2)$ auf die Punkte E, H, D, A, F, X, C an (s. Figur 2.57a). Es folgt $(ACFGX)_r$. Wegen $(ACFG)_r \cap (CDGH)_a = \{C, G\}$ und $X \neq C$ folgt $X = G$.

2. Fall: $F \parallel_+ H$. Dann gilt $(FGH)_a \cap (AEF)_r = \{F, X\}$ mit $X \parallel_+ G$. Es folgt $X \parallel_+ A, C, F, G, H$. Für $X = D$ schließen wir auf $(ADEF)_r = (ADEFH)_r$, Widerspruch zu $F \parallel_- H$. Wende $(CM2^2)$ auf die Punkte A, F, G, C, X, H, D an (s. Figur 2.57b). Es folgt $(ADEHX)_r$. Wegen $(ADEH)_r \cap (AEF)_r = \{A, E\}$ und $X \neq A$ folgt $X = E$. \square



FIGUR 2.57

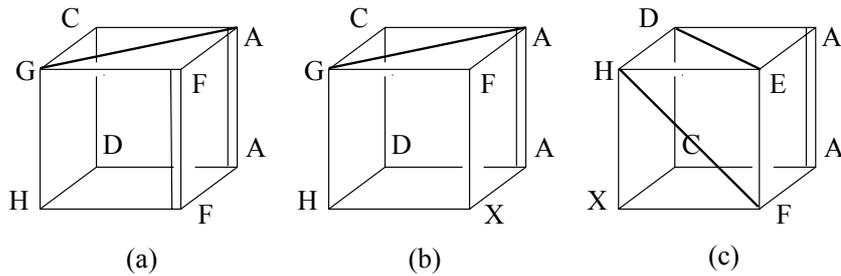
Lemma 2.119. *In Minkowski-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(CM1^1)$, $(CM2^1)$ und (CC_1M1^1) impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DM2^1)$.*

Beweis. Es gelte $(CDGH)_r$, $(ADEH)_a$ mit $D\|_E$, $(ACFG)_a$ mit $A\|_G$ und $(ACD)_rA(AEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$ oder $(EFGH)_a$ mit $F\|_H$.

1. Fall: $F\|_H$. Angenommen, es gilt $(FGH)_rF(AEF)_r$. Wende (CC_1M1^1) auf die Punkte G, F, A, C, H, D an (s. Figur 2.58a). Es folgt $D\|_F$, Widerspruch. Es gilt also $(FGH)_r \cap (AEF)_r = \{F, X\}$ mit $X \neq F$. Mit $X \in \{A, C, D, G, H\}$ schließen wir auf $(AFGH)_r$, $(ACEF)_r$, $(ADEF)_r$, $(AEFG)_r$ bzw. $(AEFH)_r$, Widerspruch zu $A\|_G$, $C\|_+F$, $D\|_E$, $A\|_G$ bzw. $A\|_+H$. Es gilt also $X \notin \{A, C, D, F, G, H\}$. Wende $(CM1^1)$ auf die Punkte G, F, A, C, H, X, D an (s. Figur 2.58b). Es folgt $E\|_D\|_X$. Wegen $X \in (AEF)_r$ erhalten wir $X = E$.

2. Fall: $F\|_H$.

Es gilt $(EFH)_a \cap (CDGH)_r = \{H, X\}$ mit $X\|_+E$. Es gilt $X\|_+A, D, F, H$. Im Fall $X = E$ folgt $(CDEGH)_r$, Widerspruch zu $D\|_E$. Im Fall $X = C$ folgt $X = C\|_+E\|_+F$, Widerspruch. Wende $(CM2^1)$ auf die Punkte H, E, A, D, X, F, C an (s. Figur 2.58c). Es folgt $X\|_A\|_G$. Wegen $X \in (CDGH)_r$ folgt dann $X = G$. □



FIGUR 2.58

Lemma 2.120. *In Minkowski-Ebenen gelten ferner die Aussagen:*
i) $(CDM0) \Rightarrow (BCD_1M0)$,

- ii) $(BDD\mathcal{M}1) \Rightarrow (BCD_1\mathcal{M}1)$,
- iii) $(CD\mathcal{M}0) \Rightarrow (BCD_2\mathcal{M}0)$,
- iv) $(BD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}0)$,
- v) $(CCD\mathcal{M}0) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}0)$,
- vi) $(BCD_1\mathcal{M}1) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}1)$,
- vii) $(BD_1\mathcal{M}1^1) \Rightarrow (BDD\mathcal{M}1)$,
- viii) $(BCD_1\mathcal{M}0) \Rightarrow (BCCD\mathcal{M}0)$.

Beweis. Siehe Bröcker [15]. □

Bemerkung 2.121. Aus Lemma 2.89 und Lemma 2.101i) folgt die Äquivalenz von $(B\mathcal{M}3)$ und $(D\mathcal{M}3)$. Die Äquivalenz von $(B\mathcal{M}2^1)$ und $(C\mathcal{M}2^2)$ folgt aus Lemma 2.88 und Lemma 2.87.

Bemerkung 2.122. Nach Samaga [48] sind die folgenden Bedingungen vom miquelschen Typ äquivalent zueinander und charakterisieren miquelsche Minkowski-Ebenen: $(\mathcal{M}0)$, $(\mathcal{M}1^2)$, $(\mathcal{M}2^1)$, $(\mathcal{M}2^2)$, $(\mathcal{M}2^3)$, $(\mathcal{M}3^1)$, $(\mathcal{M}3^2)$, $(\mathcal{M}4)$ ¹⁸.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen bekannten Ergebnissen über Minkowski-Ebenen.

- Bemerkung 2.123.**
- i) Zu jeder Primzahlpotenz existiert bis auf Isomorphie genau eine miquelsche Minkowski-Ebene (s. Halder und Heise [25]).
 - ii) Minkowski-Ebenen gerader Ordnung sind notwendig miquelsch (s. Heise [29]).
 - iii) Für ungerade Ordnung sind Minkowski-Ebenen miquelsch genau dann, wenn sie ovoidal sind. Minkowski-Ebenen sind ovoidal für die Ordnung $n \in \{3, 5, 7\}$.
 - iv) Minkowski-Ebenen ungerader Ordnung und nicht-endliche Minkowski-Ebenen sind nicht notwendig ovoidal. Zur Konstruktion von nicht ovoidalen Minkowski-Ebenen siehe Artzy [4], Hartmann [28].
 - v) Wegen Satz 1.12 sind ovoidale Minkowski-Ebenen auch miquelsch.

¹⁸Es sei angemerkt, daß $(\mathcal{M}4)$ äquivalent zum Symmetrieaxiom (S) ist.

Kapitel 3

Sätze vom büschelartigen Typ

Nachdem wir uns im vorigen Kapitel mit dem Satz von Miquel und der Klassifikation von Kreisebenen durch Sätze vom miquelschen Typ beschäftigt haben, wollen wir hier die Grundlagen für einen ähnlichen Zugang mit Hilfe des *Büschelsatzes* schaffen. Eine Arbeit von Kahn [35]¹ liefert eine Charakterisierung von ovoidalen Kreisebenen durch den Büschelsatz, wobei hier eine Konstruktion von ebenen lokal projektiven Verbänden aus den betreffenden Kreisebenen erfolgt und sich der gesamte Beweis in diesen Verbänden abspielt. Auch der Büschelsatz wird nur in ebenen lokal projektiven Verbänden formuliert. Wir stellen zunächst die oben angesprochene Konstruktion vor und formulieren dann den Büschelsatz für Laguerre-Ebenen. Wir geben die Konstruktion in lokal projektiven linearen Räumen an, da aber die Unterräume von linearen Räumen einen Verband darstellen, gibt es keine wesentlichen Unterschiede. Anschließend erarbeiten wir die Ausartungen des Büschelsatzes in Laguerre-Ebenen.

3.1 Der Büschelsatz in linearen Räumen

Ein *nicht-ausgearteter projektiver Raum* ist bekanntlich ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, wobei wir \mathcal{P} als eine Menge von *Punkten*, \mathcal{L} als eine Menge von *Geraden* und I als eine Inzidenzrelation, d.h. eine Teilmenge von $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, definieren und folgende Axiome erfüllt sind:

1. Je zwei Punkte inzidieren mit genau einer Geraden.
2. Wenn $l_i \in \mathcal{L}, i \in \mathbb{Z}_4$ vier verschiedene Geraden sind, wobei keine drei mit

¹Siehe auch Kreuzer [37].

einem gemeinsamen Punkt inzidieren, und wenn die Geradenpaare l_i, l_{i+1} , $i \in \mathbb{Z}_4$, und l_1, l_3 mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren, dann inzidieren auch l_0, l_2 mit einem gemeinsamen Punkt.

3. Jede Gerade inzidiert mit mindestens drei Punkten.

Ein *lokal projektiver linearer Raum* ist ein Quadrupel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, I)$ mit \mathcal{P} als *Punktmenge*, \mathcal{L} als *Geradenmenge*, \mathcal{E} als *Ebenenmenge* und I als Inzidenzrelation, analog zur Definition des projektiven Raumes, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

1. Je zwei Punkte inzidieren mit höchstens einer Geraden.
2. Die Ableitung² in einem Punkt $P \in \mathcal{P}$ ist ein projektiver Raum.
3. Jede Gerade inzidiert mit mindestens zwei Punkten.

Gegeben sei jetzt eine Laguerre-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$. Wir konstruieren aus dieser Struktur nun einen lokal projektiven linearen Raum (s. Kahn [35]). Dazu benötigen wir also *Punkte*, *Geraden* und *Ebenen*, die wir aus der gegebenen Laguerre-Ebene konstruieren müssen. Zunächst geben wir einige abkürzende Schreibweisen. So sei die zu einem Punkt $P \in \mathcal{P}$ gehörige Parallelklasse mit P_{\parallel} bezeichnet. Für $M \subset \mathcal{P}$ gelte entsprechend $M_{\parallel} = \bigcup_{P \in M} P_{\parallel}$. Für $P \in \mathcal{P}, k \in \mathcal{K}$ mit PIk sei die Menge aller Kreise aus \mathcal{K} , die k in P berühren³ das von k und P erzeugte *Berührbüschel*. Den eindeutig festgelegten Punkt P , der mit allen Kreisen eines Berührbüschels T inzidiert, nennen wir den *Träger* $\sigma(T)$ des Berührbüschels T . Das von k und P erzeugte *erweiterte Berührbüschel* sei das von k und P erzeugte Berührbüschel, vereinigt mit P_{\parallel} . Die Menge aller erweiterten Berührbüschel bezeichnen wir mit \mathcal{T} . Für zwei nicht-parallele Punkte $P, Q \in \mathcal{P}$ bezeichnen wir die Menge aller Kreise, die mit P und Q inzidieren als das *von P und Q erzeugte 2-Punkte-Büschel*. Der Träger eines 2-Punkte-Büschels B sind die Punkte P und Q ; wir bezeichnen den Träger wieder mit $\sigma(B)$. Analog zum erweiterten Berührbüschel definieren wir das von P und Q erzeugte *erweiterte 2-Punkte-Büschel* als das um $\{P, Q\}_{\parallel}$ erweiterte von P und Q erzeugte 2-Punkte-Büschel. Die Menge aller solcher 2-Punkte-Büschel sei mit \mathcal{B} bezeichnet.

Nun kommen wir zur Konstruktion des lokal projektiven linearen Raumes aus einer Laguerre-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$. Sei

²Die Ableitung $(\mathcal{L}(P), \mathcal{E}(P), I(P))$ der Struktur $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, I)$ in einem Punkt $P \in \mathcal{P}$ besteht aus der Menge $\mathcal{L}(P)$ aller Geraden, die mit P inzidieren und der Menge $\mathcal{E}(P)$ aller Ebenen, die mit P inzidieren und der durch $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, I)$ induzierten Inzidenzrelation $I(P)$.

³Zwei Kreise k, l berühren sich in einem Punkt P , wenn $k = l$ oder $k \cap l = \{P\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_l &:= \mathcal{P}, \\
\mathcal{L}_1 &:= \mathcal{B}, \quad \mathcal{L}_2 := \mathcal{T}, \quad \mathcal{L}_3 := \mathcal{G}, \quad \mathcal{L}_l := \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3, \\
\mathcal{E}_1 &:= \mathcal{K}, \quad \mathcal{E}_2 := \{\{g, h\} \mid g, h \in \mathcal{G}\}, \quad \mathcal{E}_l := \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2.
\end{aligned}$$

In der Definition für \mathcal{E}_2 ist der Fall $g = h$ nicht ausgeschlossen. Es ist dann $(\mathcal{P}_l, \mathcal{L}_l, \mathcal{E}_l, I_l)$ ein lokal projektiver linearer Raum, wenn wir die Inzidenzrelation I_l wie folgt festlegen (s. Kahn [35]):

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{P}_l, l \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 : \quad & P I_l l \iff P \in \sigma(l), \\
P \in \mathcal{P}_l, l \in \mathcal{L}_3 : \quad & P I_l l \iff P \in l \iff l = P_{\parallel}, \\
P \in \mathcal{P}_l, E \in \mathcal{E}_1 : \quad & P I_l E \iff P I E \text{ in } (\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G}), \\
P \in \mathcal{P}_l, E = \{g, h\} \in \mathcal{E}_2 : \quad & P I_l E \iff P \in g \cup h \iff P_{\parallel} \in E, \\
l \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, E \in \mathcal{E}_l : \quad & l I_l E \iff E \in l, \\
l \in \mathcal{L}_3, E \in \mathcal{E}_2 : \quad & l I_l E \iff l \in E.
\end{aligned}$$

In lokal projektiven linearen Räumen $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, I)$ lautet der

Büschelsatz *Wenn $l_i \in \mathcal{L}, i \in \mathbb{Z}_4$ vier verschiedene Geraden sind, wobei keine drei mit einer gemeinsamen Ebene inzidieren, und wenn die Geradenpaare $l_i, l_{i+1}, i \in \mathbb{Z}_4$, und l_1, l_3 mit einer gemeinsamen Ebene inzidieren, dann inzidieren auch l_0, l_2 mit einer gemeinsamen Ebene.*

Lemma 3.1. *Es gelte der Büschelsatz in einem lokal projektiven linearen Raum, der aus einer Laguerre-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ konstruiert wurde. Dann sind entweder alle oder keine der vier am Büschelsatz beteiligten Geraden aus $\mathcal{L}_3 = \mathcal{G}$.*

Beweis. Sei $l_1 \in \mathcal{G}$. Alle mit l_1 koplanaren, von l_1 verschiedenen Geraden l_2 sind entweder aus $\mathcal{G} \setminus \{l_1\}$ oder Elemente B aus \mathcal{B} mit $\sigma(B)_{\parallel} = l_1$. Wegen der Inzidenzvoraussetzung kommen Elemente aus \mathcal{T} nicht in Frage. Angenommen, es ist $l_2 \in \mathcal{B}$ mit $\sigma(l_2)_{\parallel} = l_1$. Welche l_3 sind dann koplanar zu l_1 und zu l_2 , so daß l_1, l_2, l_3 nicht koplanar sind? Es folgt zunächst $l_3 \neq l_1$, sonst wäre die letzte Forderung nicht erfüllt. Ein Element aus \mathcal{G} kommt damit für l_3 nicht in Frage, da l_3 dann nicht koplanar zu l_2 liegt. Es muß also $l_3 \in \mathcal{B} \setminus \{l_2\}$ gelten. l_3 liegt nur dann koplanar zu l_1 , wenn $\sigma(l_3)_{\parallel} = l_1$. Dann liegen aber l_1, l_2, l_3 koplanar, Widerspruch. Es ist also $l_2 \in \mathcal{G} \setminus \{l_1\}$. Sukzessive argumentiert man für l_3 und l_4 . \square

Es ist jeder aus einer Laguerre-Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ konstruierte lokal projektive lineare Raum, der den Büschelsatz erfüllt, ovoidal, d.h. es gibt ein Oval O in einer Hyperebene E eines projektiven Raumes $PG(3, \mathbb{F})$ über einem Körper \mathbb{F} und einen Punkt $P \in PG(3, \mathbb{F}) \setminus E$, so daß \mathcal{P} als Kegel über dem Oval O mit Scheitel P identifiziert werden kann und die Kreise den Ebenenschnitten, die nicht mit P inzidieren, entsprechen und die Erzeugenden aus Ebenenschnitten hervorgehen, die mit P inzidieren. Der Fall, daß alle Geraden aus \mathcal{G} sind,

ist damit trivial.

3.2 Der Büschelsatz in Laguerre-Ebenen

Überträgt man die Formulierung des Büschelsatzes von lokal projektiven linearen Räumen zurück auf die Struktur der Laguerre-Ebenen, so wird aus den vier Geraden und aus den Koplanaritätsforderungen eine Bedingung über sechs Kreise – eventuell ausgeartet – und vier bis acht Punkten⁴. Denn Geraden entsprechen Büscheln bzw. Erzeugenden in $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$. Zwei Ebenen mit einer gemeinsamen Geraden in $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{E}, I)$ entsprechen also zwei Kreisen, die entweder genau einen oder zwei Punkte oder aber eine Erzeugende gemeinsam haben.

Wie wir im letzten Abschnitt festgestellt haben, ist der Fall, daß alle vier Geraden aus \mathcal{G} sind, trivial, wir können ihn also ausschließen. Das hat zur Folge, daß die im zu formulierenden Büschelsatz beteiligten Punktepaare als nicht-parallel vorausgesetzt werden.

Der Büschelsatz, in Kahn [35] für lokal projektive lineare Räume formuliert, muß also für Laguerre-Ebenen wie folgt lauten:

Satz 3.2 (Büschelsatz). *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$ eine Laguerre-Ebene. Weiter seien A, B, \dots, H Punkte mit $A \parallel B$, $C \parallel D$, $E \parallel F$ und $G \parallel H$. Liegen die fünf Quadrapel*

$\{A, B, C, D\}$, $\{A, B, E, F\}$, $\{A, B, G, H\}$, $\{C, D, G, H\}$, $\{C, D, E, F\}$ auf mindestens vier Kreisen (regulär oder ausgeartet), so auch $\{E, F, G, H\}$.

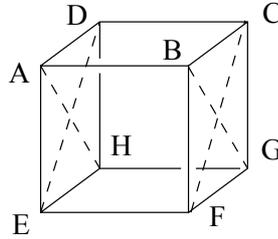
Bemerkung 3.3. Da im Büschelsatz in lokal projektiven linearen Räumen die beteiligten Geraden keine Elemente aus \mathcal{G} sind (der triviale Fall), sind zwei Ebenen, die beide mit einer Geraden inzident sind, nicht beide aus \mathcal{E}_2 . Dann können aber höchstens zwei Kreise, die im Büschelsatz auftreten, ausgeartet sein und dies können auch nur Kreise sein, die keine gemeinsamen Punkte aus A, \dots, H besitzen.

3.3 Büschelsatzausartungen in Laguerre-Ebenen

Bei der Entwicklung sämtlicher Ausartungen des Büschelsatzes gehen wir nach der Anzahl der Punkte vor, wobei wir das folgende Würfelmodell vor-

⁴Eine Aussage mit weniger als vier Punkten kann man als trivial betrachten.

aussetzen (s. Büschelsatz in 3.2).



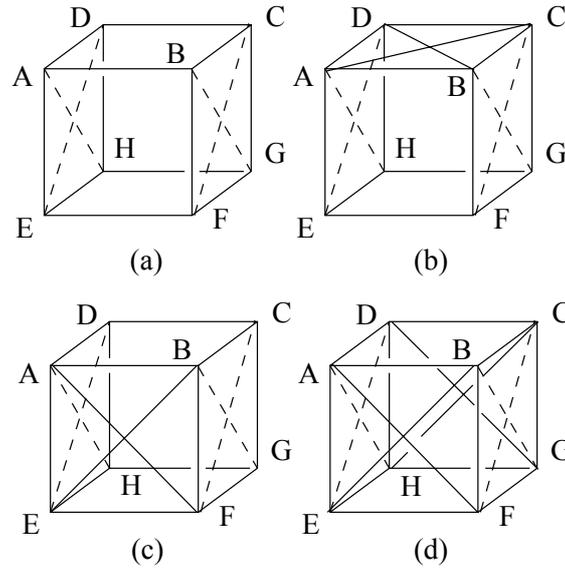
FIGUR 3.1

Wie bei dem Satz von Miquel orientieren wir das Würfelmodell so, daß der Schließungskreis dem unteren Kreis $(EFGH)_{ar}$ entspricht und es sei

$$n = |\{A, \dots, H\}|.$$

Aus dem letzten Abschnitt geht bereits hervor, daß $A \parallel B$, $C \parallel D$, $E \parallel F$ und $G \parallel H$ gelten muß um triviale Fälle auszuschließen. D.h., zwei verschiedene Punkte aus $\{A, \dots, H\}$ können nur dann parallel sein, wenn sie aus genau zwei der Mengen $\{A, B\}$, $\{C, D\}$, $\{E, F\}$, $\{G, H\}$ stammen. Für das Würfelmodell bedeutet das, daß nur diagonal liegende Punkte parallel sein können. Wenn wir aber beispielsweise $A \parallel C$ voraussetzen, so ist damit der Kreis durch die Punkte A, B, C, D als ausgeartet festgelegt. Da aber weder $B \parallel A \parallel C$ noch $D \parallel A \parallel C$ gelten darf, bleibt nur $B \parallel D \parallel A \parallel C$. Das bedeutet, daß ausgeartete Kreise lediglich in dieser Konstellation auftreten können. Damit ergeben sich für $n = 8$ folgende Fälle (s. Figur 3.2a-d):

- ($\mathcal{B}0$): $(ABCD)_r, (ABEF)_r, (ABGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_r$
 $\Rightarrow (EFGH)_{ar},$
- ($\mathcal{B}1^1$): $(ABCD)_a, (ABEF)_r, (ABGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_r$
 $\Rightarrow (EFGH)_{ar},$
- ($\mathcal{B}1^2$): $(ABCD)_r, (ABEF)_a, (ABGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_r$
 $\Rightarrow (EFGH)_r,$
- ($\mathcal{B}2$): $(ABCD)_r, (ABEF)_a, (ABGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_a$
 $\Rightarrow (EFGH)_r.$



FIGUR 3.2

In diesen und in den folgenden Bedingungen sei die Lage der Punkte so, daß mindestens vier verschiedene Kreise in den Voraussetzungen auftreten, ansonsten kann man Gegenbeispiele angeben. Die Bezeichnungen dieser Ausartungen übernehmen wir von den Bedingungen vom miquelschen Typ, schreiben aber statt 'M' den Buchstaben 'B' als Abkürzung für den **B**üschelsatz.

Wir kommen zum Fall $n = 7$, d.h. zwei der Punkte A, \dots, H fallen zusammen. Es treten hier a priori folgende Fälle auf (wir betrachten nur reguläre Kreise in den Voraussetzungen der jeweiligen Aussagen; die anderen Fälle verlaufen analog zum Fall $n = 8$):

- a. $A = B$, b. $A = C$ c. $A = E$,
- d. $E = F$, e. $E = G$,

Wir erkennen einige der Fälle als trivial bzw. widersprüchlich:

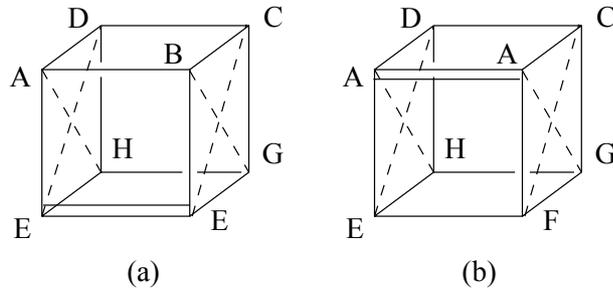
Fall b. Es gilt $(ABEF)_r, (ABGH)_r, (ADGH)_r, (ADEF)_r$. Dann folgt aber $(ABDEF)_r$ und $(ABDGH)_r$, also $(ABDEFGH)_r$.

Fall c. Es gilt $(ABCD)_r, (ABGH)_r, (CDGH)_r, (ACDF)_r$. Es folgt $(ABCDF)_r$. Hier lassen sich Beispiele und Gegenbeispiele konstruieren für die Gültigkeit von $(AFGH)_r$. Diese Konfiguration ist also widersprüchlich.

Fall e. Es gilt $(ABCD)_r, (ABEF)_r, (ABEH)_r, (CDEF)_r, (CDEH)_r$. Dann folgt $(ABEFH)_r$ und $(CDEFH)_r$, also $(ABCDEFH)_r$.

Es verbleiben die Fälle a) und d), sofern in den Voraussetzungen keine ausgearteten Kreise auftreten (s. Figur 3.3a,b):

- (BB0): $(ABCD)_r, (ABGH)_r, (CDGH)_r, (ABE)_r E(CDE)_r$
 $\Rightarrow (ABE)_r E(EGH)_r.$
 (DB0): $(ACD)_r A(AEF)_r A(AGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_r$
 $\Rightarrow (EFGH)_{ar}.$



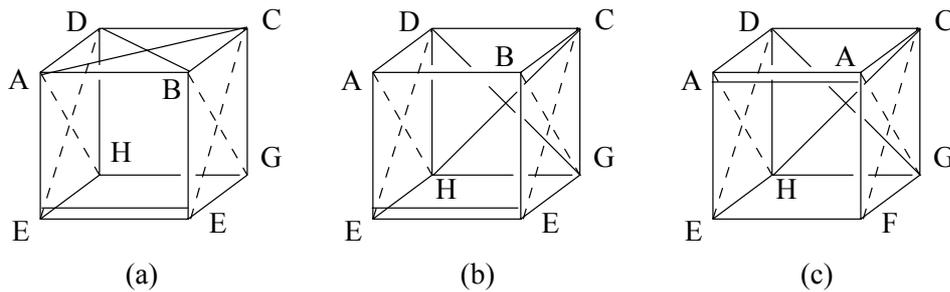
FIGUR 3.3

Es sei angemerkt, daß die Wahl der Voraussetzungen und der Folgerung einer Bedingung vom büschelartigen Typ nicht kanonisch ist. Man könnte ebenso z.B. folgende Bedingung für (BB0) zulassen:

$(ABCD)_r, (ABGH)_r, (CDGH)_r \Rightarrow (ABE)_r E(EGH)_r E(CDE)_r.$ Eine Diskussion all dieser Möglichkeiten sprengt allerdings den Rahmen dieser Arbeit.

Lassen wir jetzt noch zusätzlich ausgeartete Kreise in den Voraussetzungen zu, so sind noch drei weitere Fälle möglich (s. Figur 3.4a,b,c):

- (BB1¹): $(ABCD)_a, (ABGH)_r, (CDGH)_r, (ABE)_r E(CDE)_r$
 $\Rightarrow (ABE)_r E(EGH)_r.$
 (BB1²): $(ABCD)_r, (ABGH)_r, (CDGH)_a, (ABE)_r E(CDE)_r$
 $\Rightarrow (ABE)_r E(EGH)_r.$
 (DB1): $(ACD)_r A(AEF)_r A(AGH)_r, (CDEF)_r, (CDGH)_a$
 $\Rightarrow (EFGH)_{ar}.$



FIGUR 3.4

Weitere Fälle treten nicht auf, da sonst ein ausgearteter Kreis als Berührkreis auftritt, d.h. der Berührungspunkt ist tatsächlich eine „Berührerzeugende“, was

wir im letzten Abschnitt ausgeschlossen hatten.

Damit kommen wir zum Fall $n = 6$. Es treten zunächst zwei Fälle auf:

Fall 1. Drei oder mehr Punkte aus A, \dots, H fallen zusammen.

Fall 2. Zweimal fallen zwei Punkte zusammen.

Zu Fall 1. Es gibt fünf Möglichkeiten, daß drei Punkte zusammenfallen:

- a. $A = B = C$, b. $A = B = E$, c. $A = C = E$,
 d. $A = E = F$, e. $E = F = H$.

Zu a. Es gilt $(AEF)_r AkA(AGH)_r$ mit dem eindeutig bestimmten Kreis k , der die Punkte A, D enthält, $(ADGH)_r, (ADEF)_r$. Damit folgt $(ADEF)_r A(ADGH)_r$, also $(ADEF GH)_r$. Der Fall ist trivial.

Zu b. Es gilt $(ACD)_r AkA(AGH)_r$ mit dem eindeutig bestimmten Kreis k , der die Punkte A, F enthält, $(CDGH)_r, (ACDF)_r$. Damit folgt $(ACDF)_r A(AGH)_r$. Je nach Lage von F folgt die Behauptung oder aber $F \notin (AGH)_r$, d.h. diese Bedingung ist widersprüchlich.

Zu c. Es gilt $(ADGH)_r, (ABGH)_r$. Wie in Fall b hängt auch hier die Gültigkeit der Behauptung von der Lage der Punkte ab.

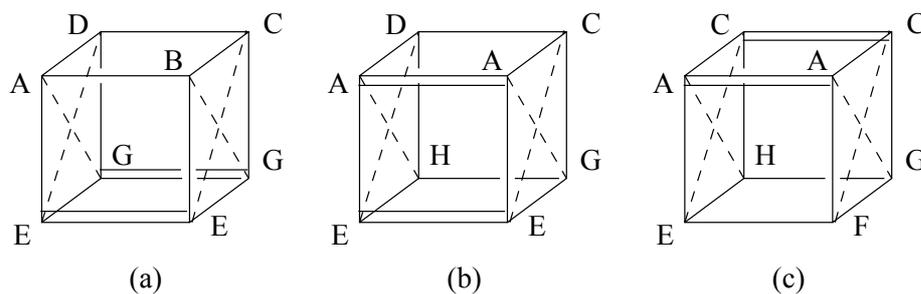
Zu d. Es gilt $(ABCD)_r, (ABGH)_r, (CDGH)_r, (ACD)_r Ak$ mit dem eindeutig bestimmten Kreis k , der die Punkte A, B enthält. Je nach Lage der Punkte folgt die Behauptung oder aber k berührt den Kreis $(AGH)_r$ nicht in E , d.h. diese Bedingung ist widersprüchlich.

Zu e. Es gilt $(ABCD)_r, (ABEG)_r, (CDEG)_r, (ABE)_r E(CDE)_r$. Damit gilt $(ABEG)_r E(CDEG)_r$, also $(ABCDEG)_r$, insbesondere also die Behauptung.

Damit ist keiner der oben aufgeführten Fälle interessant.

Zu Fall 2. Im Fall $n = 7$ haben wir festgestellt, daß wir nur dann nicht-triviale bzw. nicht-widersprüchliche Konfigurationen erhalten, falls $A = B, C = D, E = F$ oder $G = H$ gilt. Berücksichtigen wir diese Tatsache, so gibt es nur drei Fälle, falls in den Voraussetzungen keine ausgearteten Kreise auftreten (s. Figur 3.5a,b,c):

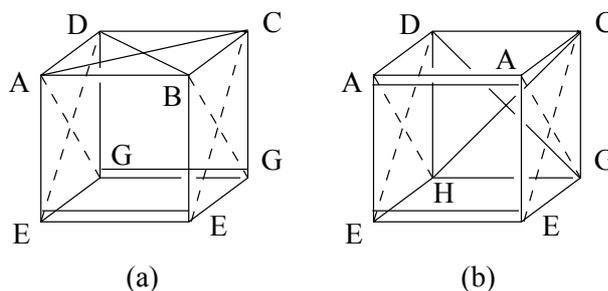
- (BBB0): $(ABCD)_r, (ABE)_r E(CDE)_r, (ABG)_r G(CDG)_r$
 \Rightarrow es gibt einen regulären Kreis k durch die Punkte E und G
 mit $(ABE)_r EkG(CDG)_r$.
 (BDB0): $(ACD)_r AkA(AGH)_r$ mit einem eindeutig bestimmten regulären
 Kreis k durch die Punkte A und $E, (CDGH)_r, kE(CDE)_r$
 $\Rightarrow (EGH)_r Ek$.
 (DDB0): $(AEF)_r AkA(AGH)_r, (CGH)_r CkC(CEF)_r$ mit einem eindeutig
 bestimmten regulären Kreis k durch die Punkte A und C
 $\Rightarrow (EFGH)_{ar}$.



FIGUR 3.5

Lassen wir auch ausgeartete Kreise in den Voraussetzungen zu, so gibt es zwei weitere Fälle (s. Figur 3.6a,b):

- ($BB\mathcal{B}1$): $(ABCD)_a, (ABG)_r, G(CDG)_r, (CDE)_r, E(ABE)_r$
 \Rightarrow es gibt einen regulären Kreis k durch die Punkte E und G
mit $(ABE)_r, Ek, G(CDG)_r$.
- ($BDB1$): $(ACD)_r, Ak, A(AGH)_r$ mit einem eindeutig bestimmten regulären
Kreis k durch die Punkte A und E , $(CDGH)_a, kE(CDE)_r$
 $\Rightarrow (EGH)_r, Ek$.



FIGUR 3.6

Wir kommen damit zum Fall $n = 5$. Es treten hier die folgenden Fälle auf:

1. Vier der Punkte fallen zusammen,
2. einmal fallen drei Punkte und einmal fallen zwei Punkte zusammen,
3. dreimal fallen zwei Punkte zusammen.

Die ersten beiden Fälle brauchen wir nicht zu untersuchen, denn bei jeder möglichen Variante würden diagonal liegende Punkte zusammenfallen, was wir weiter oben aber bereits ausgeschlossen haben.

Wir betrachten den Fall 3:

Es treten folgende Möglichkeiten auf:

- a. $A = B, C = D, E = H,$ b. $A = B, C = D, E = F,$
- c. $A = D, B = C, E = F,$ d. $A = D, B = C, E = F,$
- e. $A = B, F = G, E = H,$ f. $A = B, E = F, G = H,$
- g. $A = D, E = H, F = G,$ h. $A = D, E = F, G = H.$

Zu a. Aus $(AEF)_r AkA(AEG)_r$ mit dem eindeutig bestimmten Kreis k , der die Punkte A und C enthält und $(CEG)_r CkC(CEF)_r$ folgt $(AEFG)_r$ und $(CEFG)_r$, also $(ACEFG)_r$, trivial.

Zu c. Aus $(ABEF)_r, (ABEG)_r$ folgt bereits $(ABEFG)_r$, trivial.

Zu d. Aus $(ABGH)_r$ kann man sowohl die Gültigkeit, als auch die Ungültigkeit von $(ABE)_r E(EGH)_r$ folgern. die Bedingung ist somit widersprüchlich.

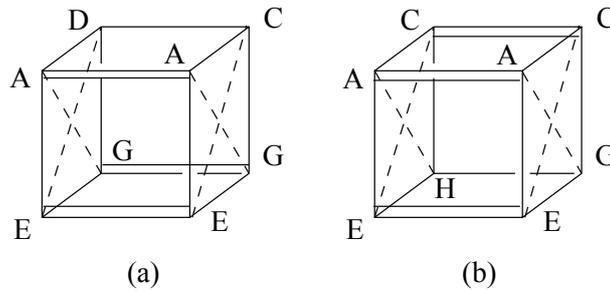
Zu e. Die Behauptung ist trivial.

Zu g. Aus $(ABEF)_r, (ACEF)_r$ folgt bereits $(ABCEF)_r$, trivial.

Zu h. Aus $(ABE)_r E(ACE)_r$ und $(ABG)_r G(ACG)_r$ folgt bereits $(ABCE)_r$ und $(ABCG)_r$, also $(ABCEG)_r$, trivial.

Wir haben also nur zwei interessante Fälle, wenn wir ausgeartete Kreise in den Voraussetzungen ausschließen (s. Figur 3.7a,b):

- $(BBDB\mathcal{B}0)$: Es gelte $(ACD)_r AkAl, (CDG)_r Gl, (CDE)_r Ek$ mit den eindeutig bestimmten Kreisen k, l , die die Punkte A, E bzw. A, G enthalten. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Kreis m durch E, G mit mEk, mGl .
- $(BDD\mathcal{B}0)$: Es gelte $(AGH)_r AkAl, (CGH)_r CkCm, mEl$ mit den eindeutig bestimmten Kreisen k, l, m , die die Punkte $A, C;$ A, E bzw. C, G enthalten. Dann folgt $(EGH)_r El$.



FIGUR 3.7

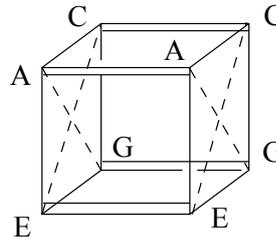
Es ist sofort einzusehen, daß in den Voraussetzungen keine ausgearteten Kreise auftreten können, d.h. im Fall $n = 5$ treten nur zwei Fälle auf.

Im verbleibenden Fall $n = 4$ schließen wir auf Grund des oben Gesagten sofort die Fälle aus, in denen mehr als zwei Punkte zusammenfallen. Wir betrachten nur den Fall, daß mehrfach genau zwei Punkte zusammenfallen:

- a. $A = B, C = D, E = F, G = H,$
 b. $A = D, B = C, E = H, F = G,$

wobei wir den Fall b als trivial ausschließen können. Es verbleibt nur der Fall (s. Figur 3.8):

($BBDDB\mathcal{B}0$): Es seien k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 Kreise, die jeweils durch die Punkte $A, C; A, E; C, G; A, G$ bzw. C, E gehen, mit $k_0Ak_1Ak_3,$ $k_0Ck_2Ck_4, k_1Ek_4, k_2Gk_3$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Kreis k_5 durch E, G mit k_5Ek_1 und k_5Gk_2 .



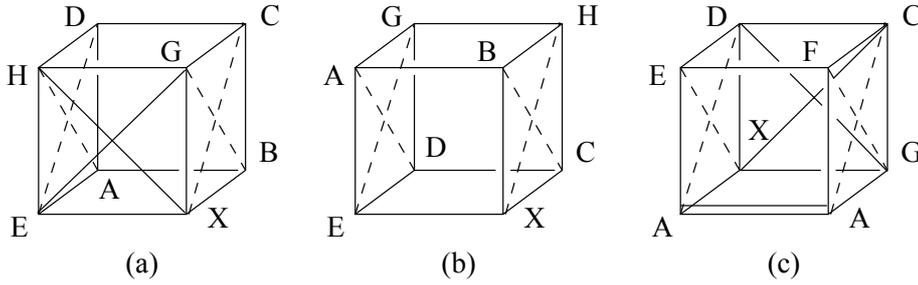
FIGUR 3.8

3.4 Ergebnisse

In diesem Abschnitt beweisen wir einige Zusammenhänge zwischen den Bedingungen vom büschelartigen Typ.

Lemma 3.4. *In Laguerre-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen ($\mathcal{B}0$) und ($\mathcal{B}1^2$) impliziert die Gültigkeit der Bedingung ($B\mathcal{B}0$).*

Beweis. Es gelte $(ABCD)_r, (CDGH)_r, (ABGH)_r$ und $(ABE)_rE(CDE)_r$. Zu zeigen ist $(ABE)_rE(EGH)_r$. Angenommen, es gilt $E\parallel G$. Dann folgt $(ABE)_r \cap (EGH)_a = \{E, X\}$ mit $X\parallel H$. Es folgt $X \notin \{A, B, C, D, E, G\}$. Im Fall $X = H$ folgt $(ABEH)_r = (ABEGH)_r$, Widerspruch zu $E\parallel G$. Wenden wir jetzt ($\mathcal{B}1^2$) auf die Punkte H, G, B, A, E, X, C, D an (s. Figur 3.9a), so erhalten wir $(CDEX)_r = (ABCDEX)_r$, Widerspruch, da in der Voraussetzung mindestens vier Kreise auftreten müssen. Es ist also $E\parallel G$. Angenommen, es gilt $(ABE)_r \cap (EGH)_r = \{E, X\}$ mit $E \neq X$. In allen Fällen $X \in \{A, B, C, D, G, H\}$ folgt unmittelbar die Behauptung. Wir gehen also von $X \notin \{A, B, C, D, G, H\}$ aus. Dann können wir ($\mathcal{B}0$) auf die Punkte A, B, H, G, X, E, D, C anwenden (s. Figur 3.9b). Es folgt $(CDEX)_r$, also $(CDEX)_r \cap (ABEX)_r = \{E, X\}$, Widerspruch zu $(ABE)_rE(CDE)_r$. Es folgt $E = X$. \square



FIGUR 3.9

Lemma 3.5. *In Laguerre-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingung $(BB1^2)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DB1)$.*

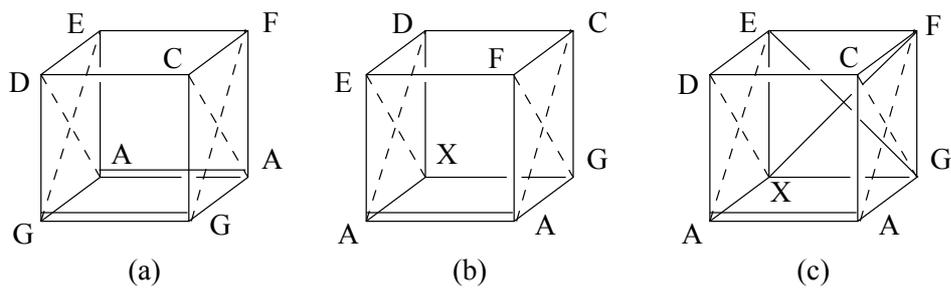
Beweis. Es gilt $(CDGH)_a$, $(ACD)_rA(AEF)_rA(AGH)_r$ und $(CDEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_r$. Es gilt $(EFG)_r \cap (CDGH)_a = \{G, X\}$ mit $X \parallel C \parallel H$. Damit gilt $X \notin \{A, D, E, F, G\}$. Im Fall $X = C$ folgt $(CEFG)_r = (ACEFG)_r = (ACDEFG)_r$, Widerspruch zu $D \parallel G$. Wir wenden $(BB1^2)$ auf die Punkte E, F, C, D, A, G, X an (s. Figur 3.9c). Es folgt $(AGX)_rA(AEF)_r$. Es folgt $(AGHX)_r \cap (CDGHX)_a = \{G, H\}$. Wegen $X \neq G$ folgt $X = H$. \square

Lemma 3.6. *In Laguerre-Ebenen gilt: Die Gültigkeit der Bedingungen $(BB0)$, $(BB1)$ und $(BBB0)$ impliziert die Gültigkeit der Bedingung $(DB0)$.*

Beweis. Es gelte $(ACD)_rA(AEF)_rA(AGH)_r$, $(CDGH)_r$, $(CDEF)_r$. Zu zeigen ist $(EFGH)_a$.

1. Fall: $E \parallel G$ und $F \parallel G$. Dann haben wir den regulären Kreis $(EFG)_r$. Angenommen, es gilt $(EFG)_rG(CDGH)_r$. Wir wenden $(BBB0)$ auf die Punkte D, C, F, E, G, A an (s. Figur 3.10a) und erhalten $(AGH)_rG(CDGH)_r$, Widerspruch. Es gilt also $(EFG)_r \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \neq G$. Im Fall $X = A$ folgt $(AEFG)_r = (AEFGH)_r$, insbesondere also $(EFGH)_r$. Im Fall $X \in \{C, D\}$ folgt $(CEFG)_r = (ACDEFGH)_r$ bzw. $(DEFG)_r = (ACDEFGH)_r$, also $(EFGH)_r$. Im Fall $X \in \{E, F\}$ folgt $(CDEGH)_r = (CDEFGH)_r$ bzw. $(CDFGH)_r = (CDEFGH)_r$, also $(EFGH)_r$. Es sei also $X \notin \{A, C, D, E, F\}$. Wir wenden $(BB0)$ auf die Punkte E, F, C, D, A, G, X an (s. Figur 3.10b) und erhalten $(AGHX)_r = (AGX)_rA(AEF)_r$. Wegen $(AGHX)_r \cap (CDGHX)_r = \{G, H\}$ und $X \neq G$ folgt $X = H$.

2. Fall: Ohne Einschränkung gelte $E \parallel G$. Dann haben wir den ausgearteten Kreis $(EFG)_a$ und es folgt $(EFG)_a \cap (CDGH)_r = \{G, X\}$ mit $X \parallel F$. Wegen der Voraussetzungen gilt $X \notin \{A, C, D, E, G\}$. Wir wenden $(BB1^2)$ auf die Punkte D, C, F, E, A, G, X an (s. Figur 3.10c) und erhalten $(AGHX)_r = (AGX)_rA(AEF)_r$. Analog zu Fall 1 folgt jetzt $X = H$. \square

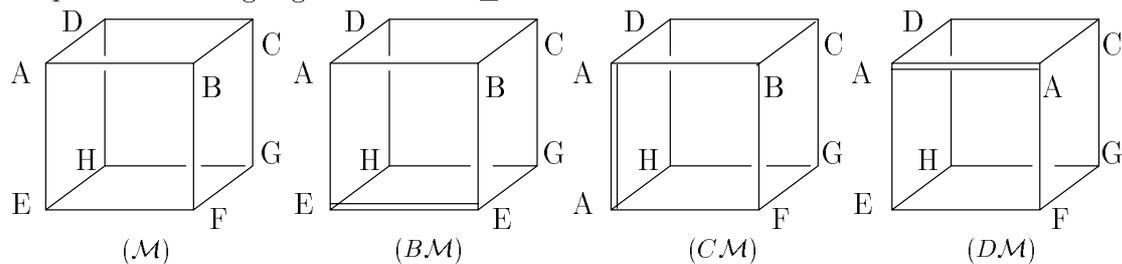


FIGUR 3.10

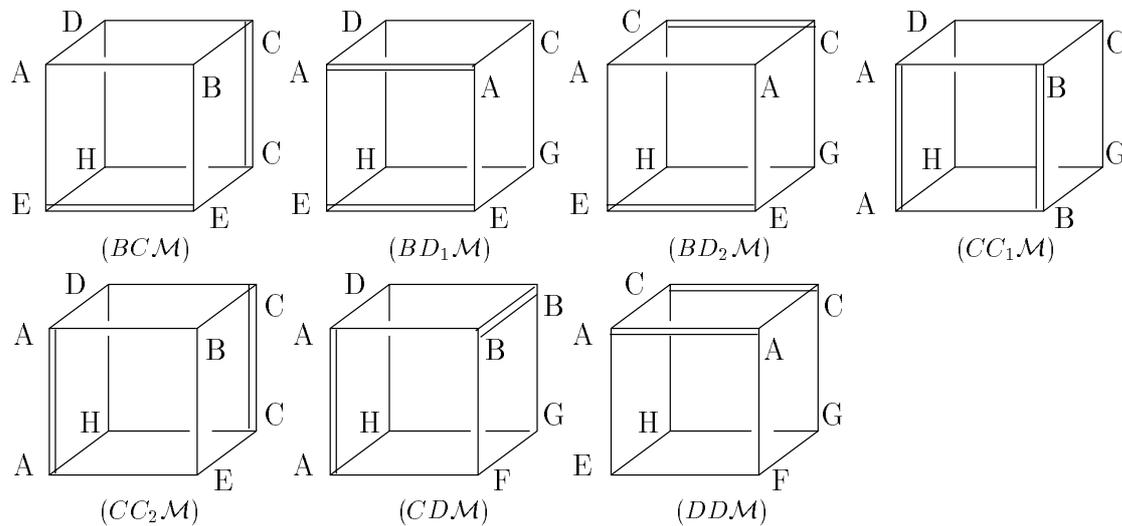
Überblick über die miquelschen Bedingungen

Möbius-Fall

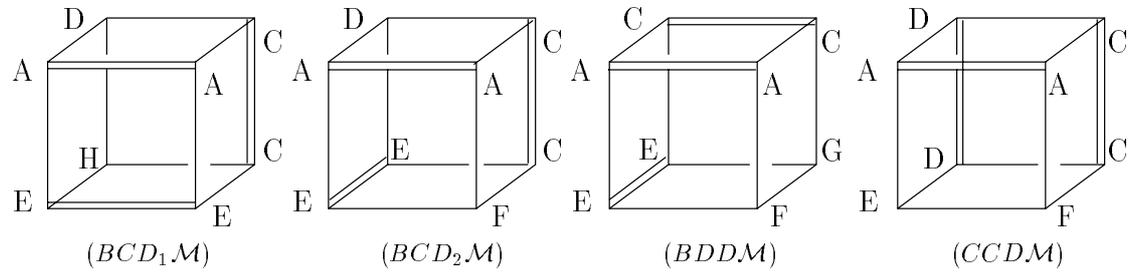
Miquelsche Bedingungen im Fall $n \geq 7$ in Möbius-Ebenen:



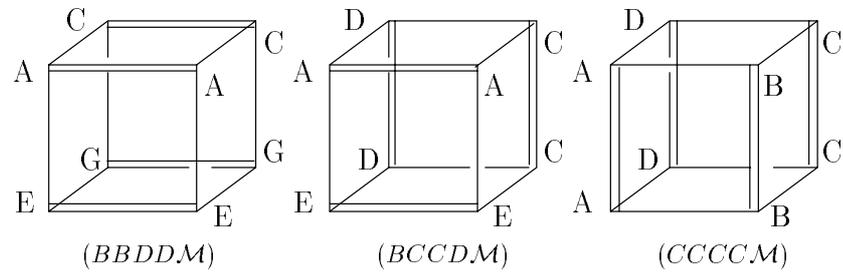
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 6$ in Möbius-Ebenen:



Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 5$ in Möbius-Ebenen:

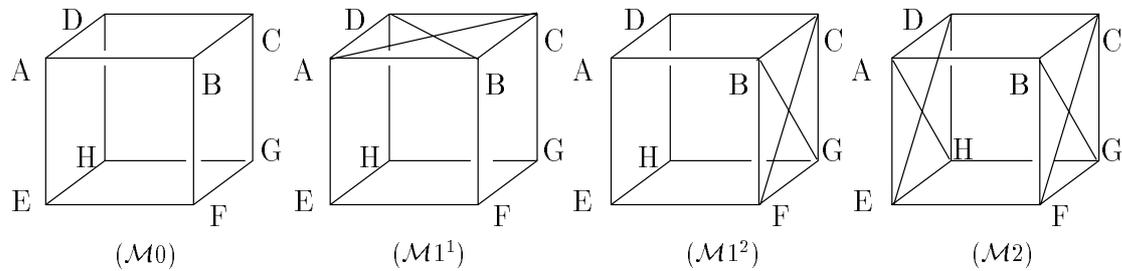


Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 4$ in Möbius-Ebenen:

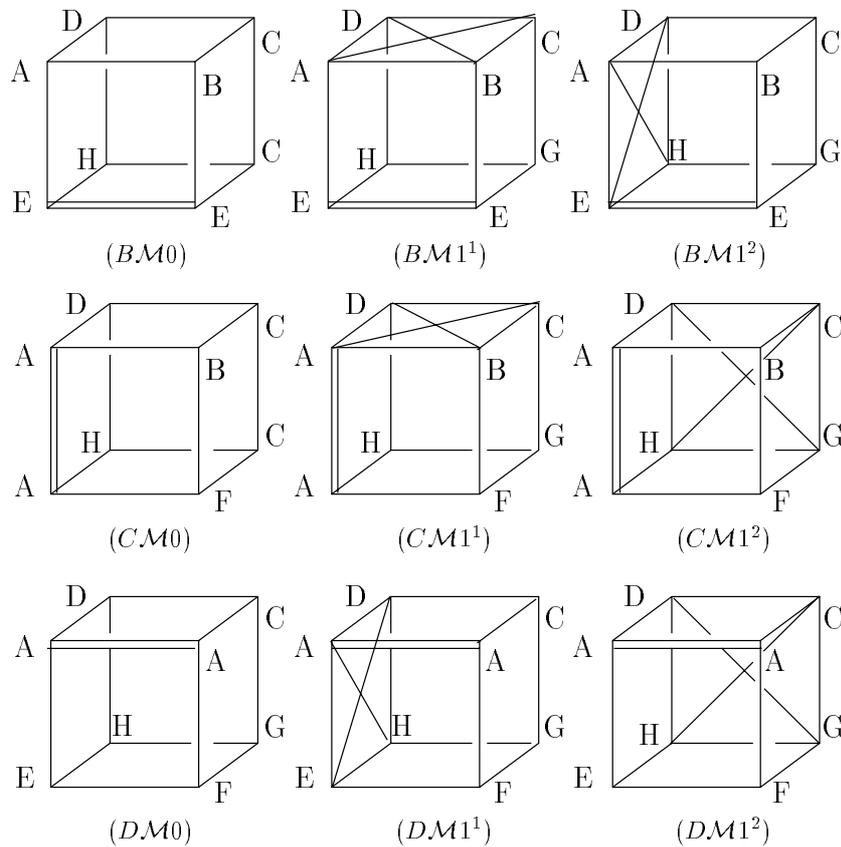


Laguerre-Fall

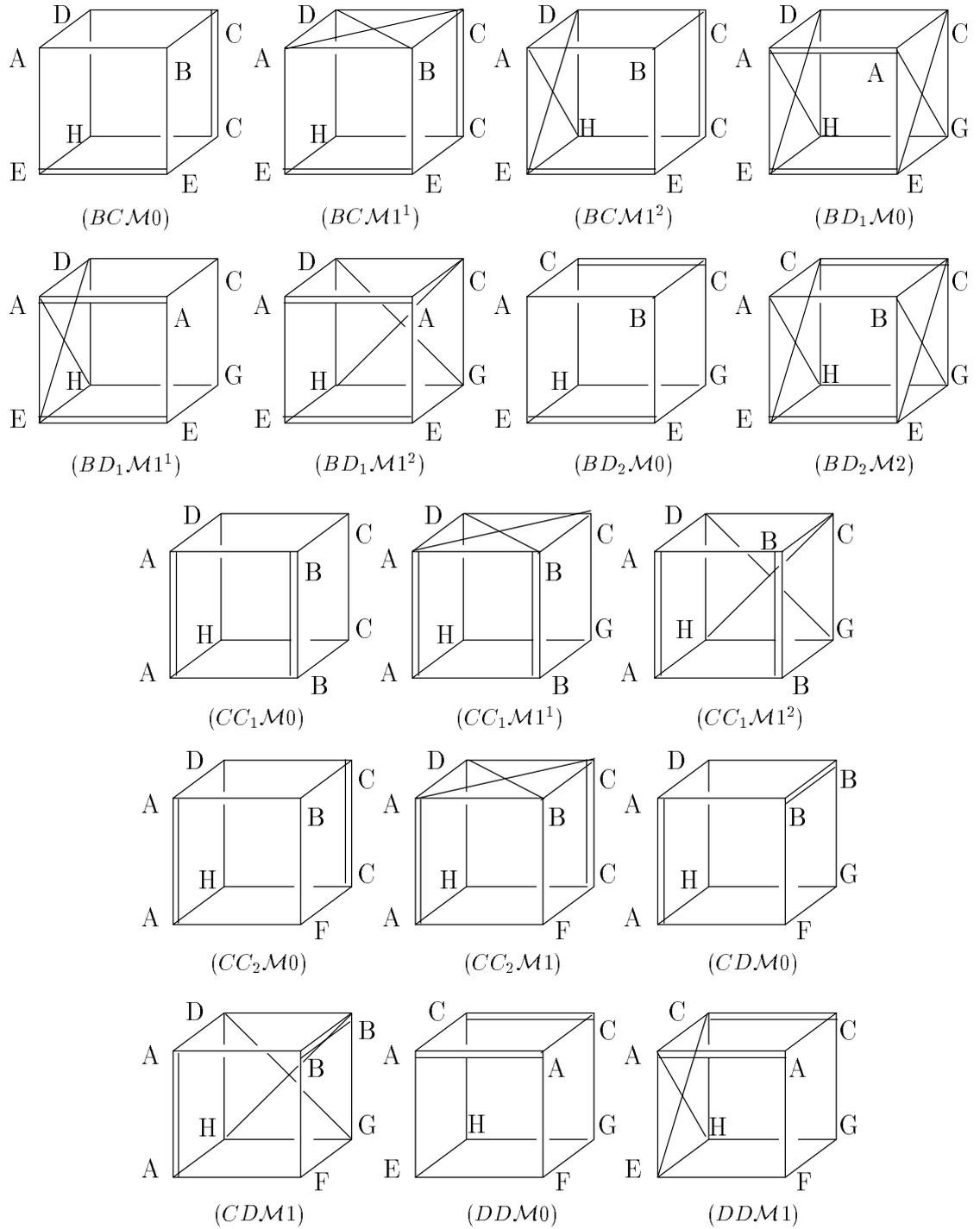
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 8$ in Laguerre-Ebenen:



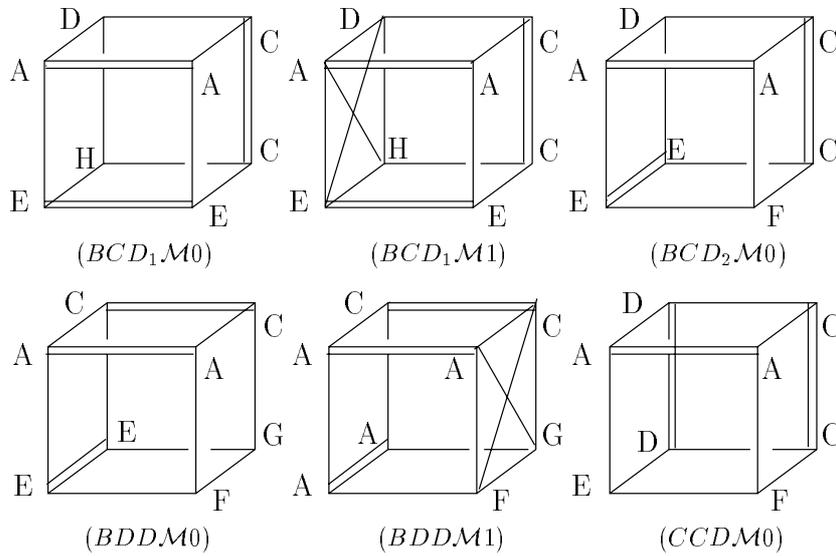
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 7$ in Laguerre-Ebenen:



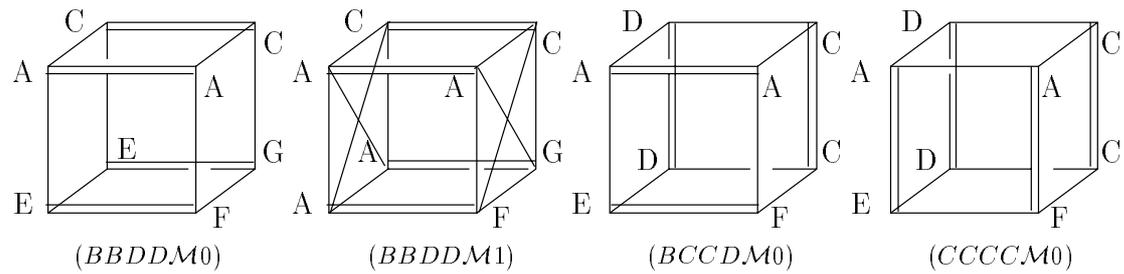
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 6$ in Laguerre-Ebenen:



Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 5$ in Laguerre-Ebenen:

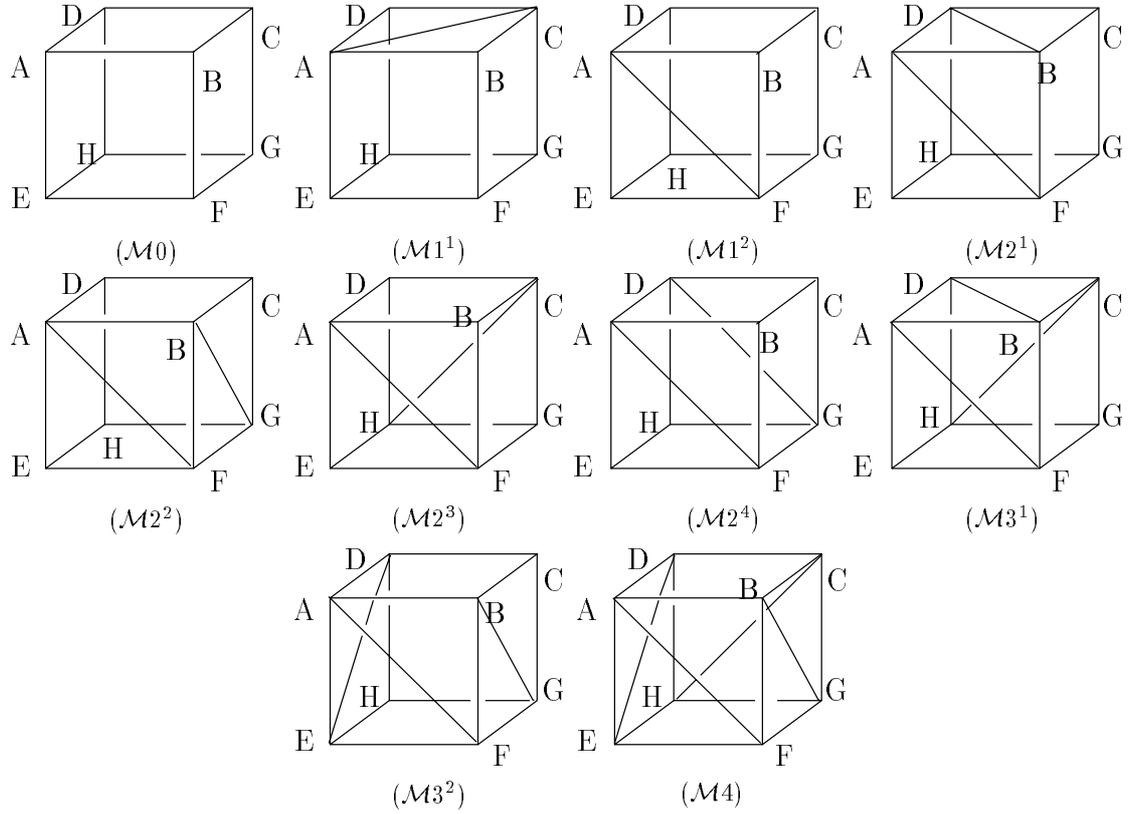


Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 4$ in Laguerre-Ebenen:

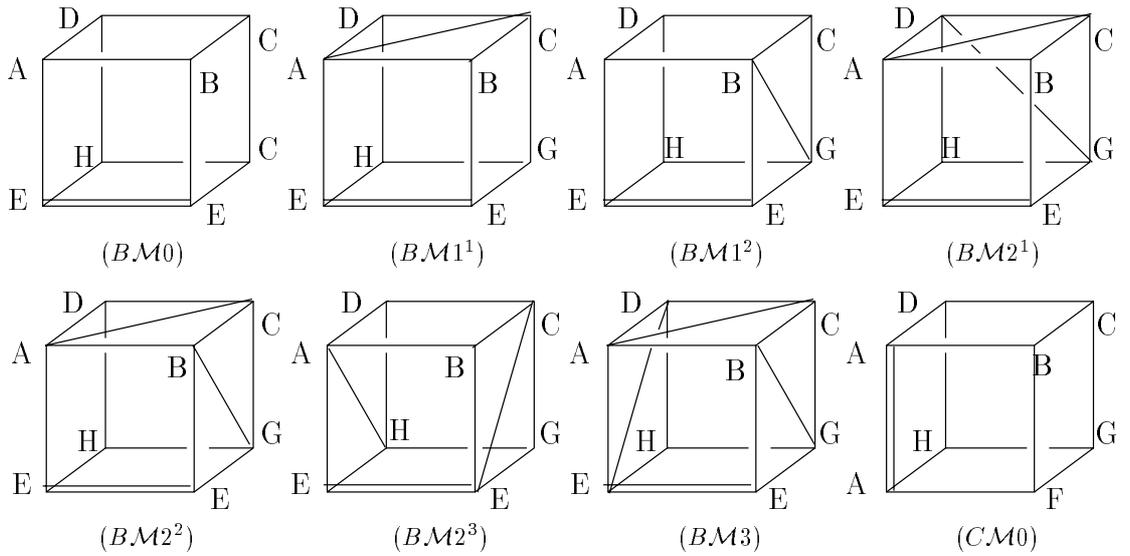


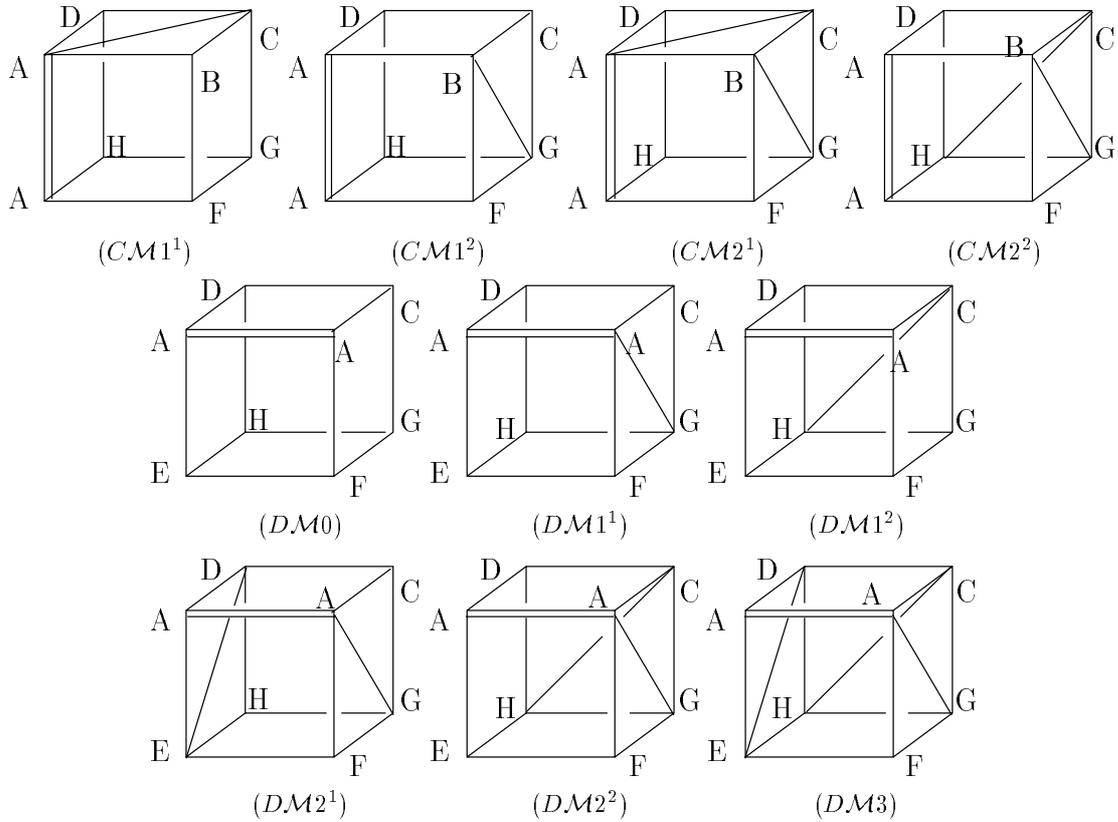
Minkowski-Fall

Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 8$ in Minkowski-Ebenen:

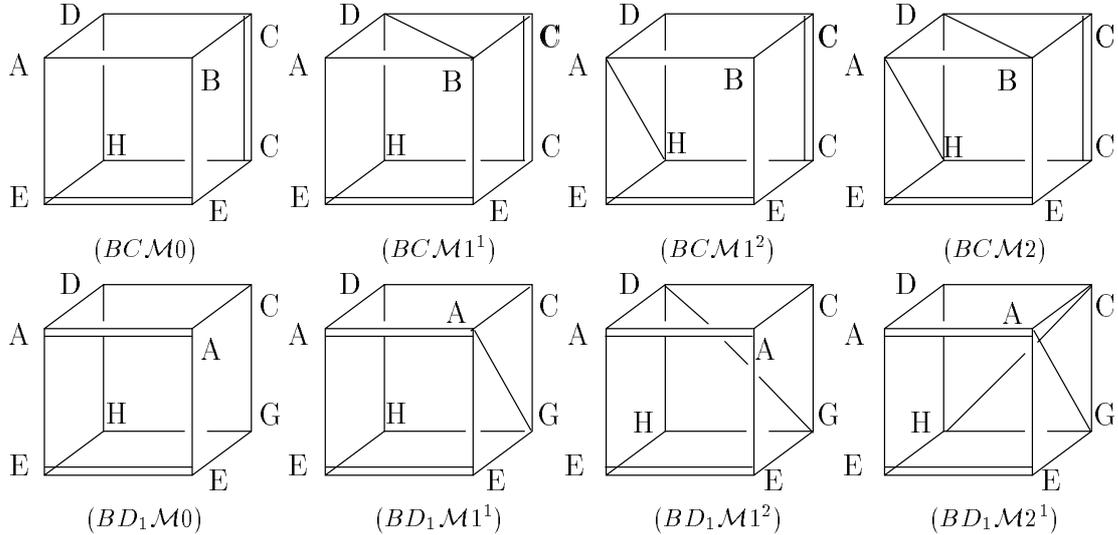


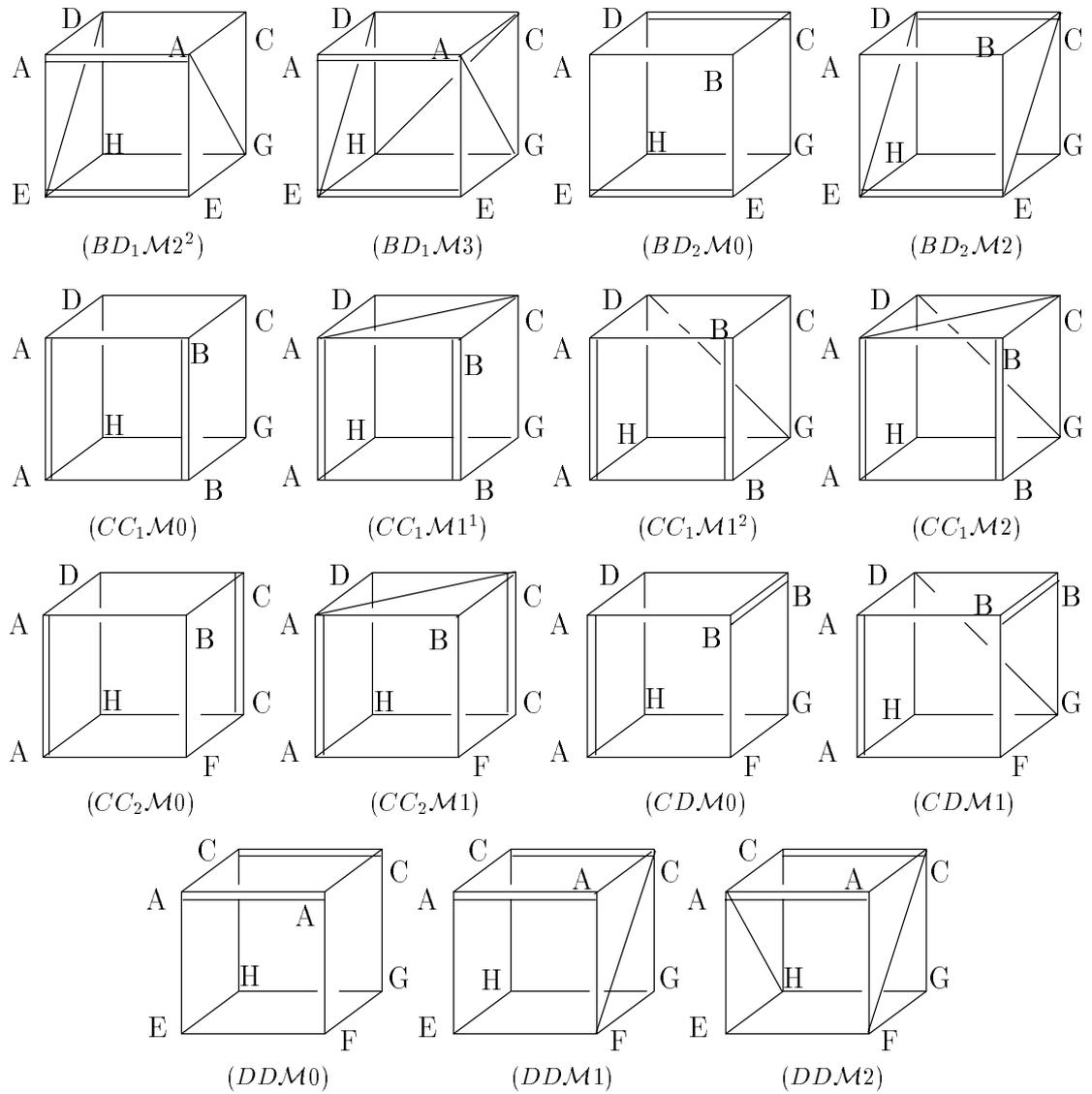
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 7$ in Minkowski-Ebenen:



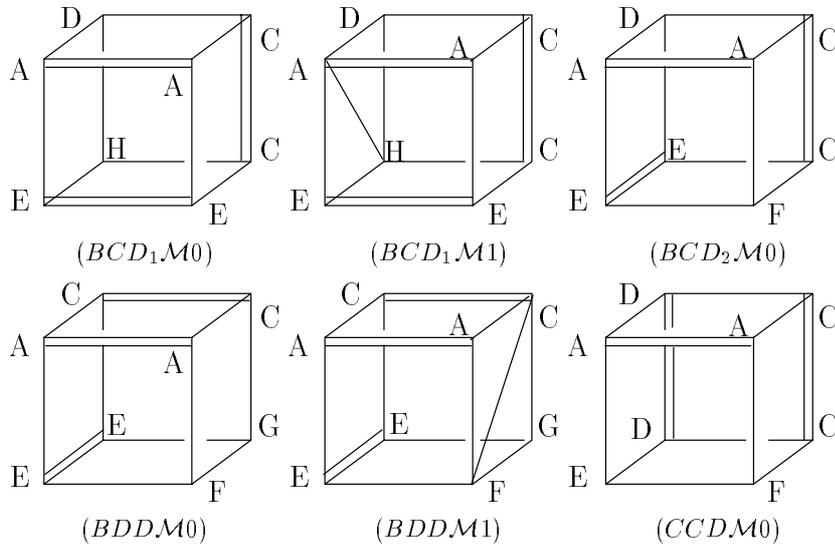


Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 6$ in Minkowski-Ebenen:

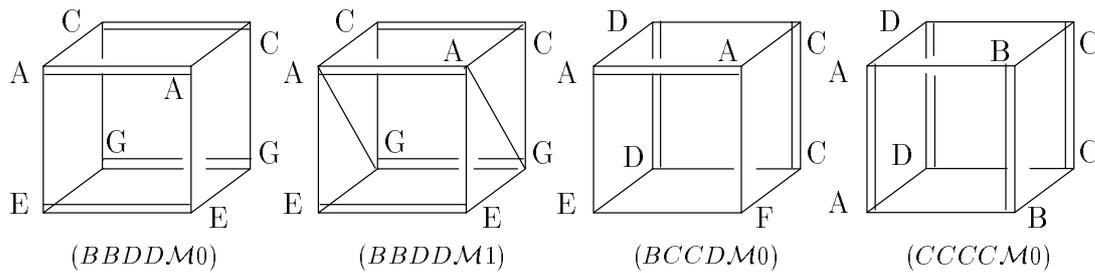




Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 5$ in Minkowski-Ebenen:



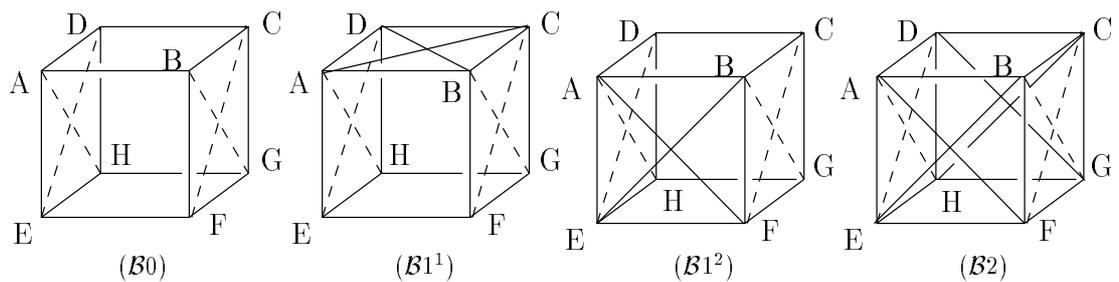
Miquelsche Bedingungen im Fall $n = 4$ in Minkowski-Ebenen:



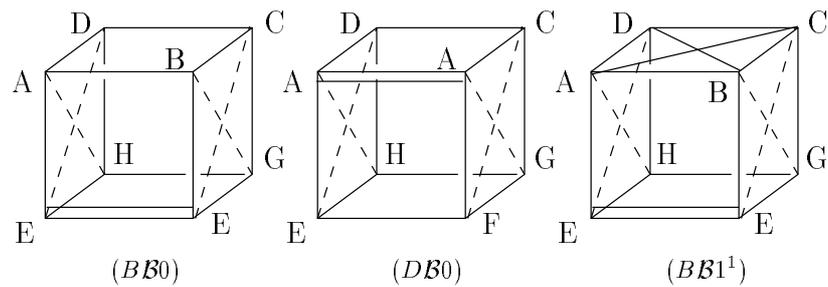
Überblick über die büschelartigen Bedingungen

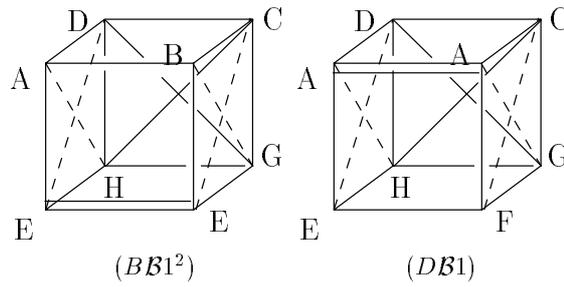
Laguerre-Fall

Büschelartige Bedingungen im Fall $n = 8$ in Laguerre-Ebenen:

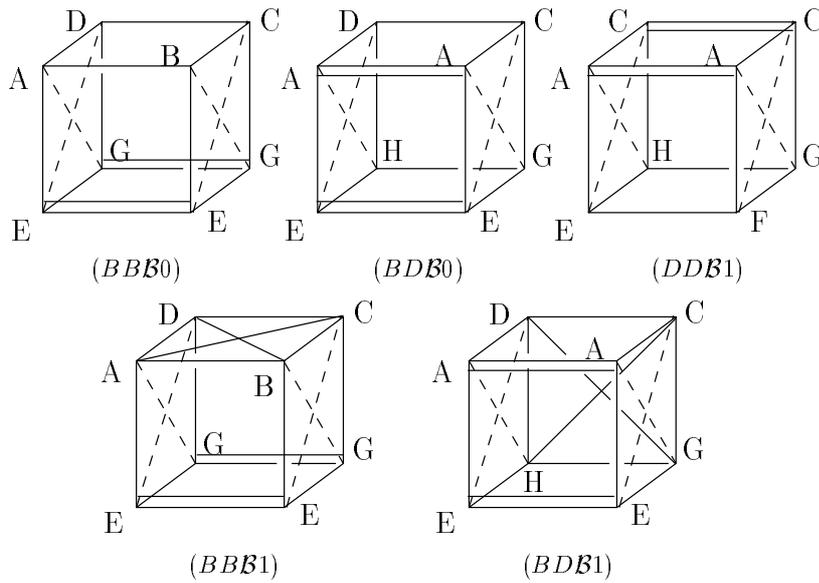


Büschelartige Bedingungen im Fall $n = 7$ in Laguerre-Ebenen:

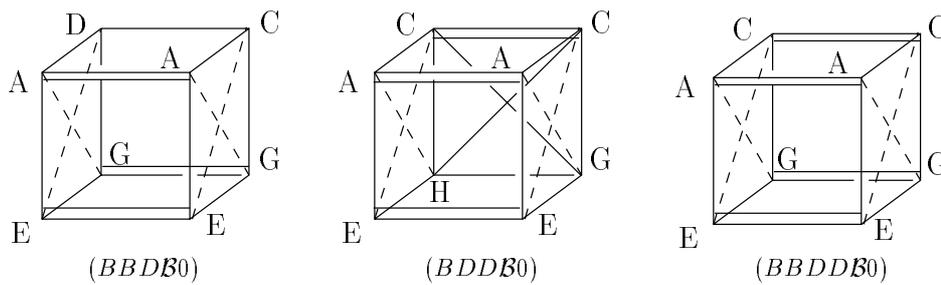




Büschelartige Bedingungen im Fall $n = 6$ in Laguerre-Ebenen:



Büschelartige Bedingungen im Fall $n \leq 5$ in Laguerre-Ebenen:



Symbolverzeichnis

\mathcal{P}	Menge der Punkte	4
\mathcal{K}	Menge der Kreise	5
\mathcal{G}	Menge der Erzeugenden	5
$(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$	Inzidenzstruktur <i>Benz-Ebene</i>	5
\parallel	nicht-parallel	5
\parallel, \parallel_i	parallel bzgl. \parallel bzw. \parallel_i	5
$[X]_{\parallel}, [X]_{\parallel_i}$	Parallelklasse von X bzgl. \parallel bzw. \parallel_i	5
X_{\parallel}	Menge der zu X parallelen Punkte ungleich X	8
\mathcal{G}_X	Menge aller Parallelklassen, die mindestens zwei Punkte enthält, aber nicht X	8
\mathbb{B}	Benz-Ebene, s. $(\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{G})$	8
$\mathbb{A}(\mathbb{B}, X)$	affine Ableitung der Benz-Ebene \mathbb{B} im Punkt X	8
$\mathbb{P}(\mathbb{B}, X)$	projektiver Abschluß von $\mathbb{A}(\mathbb{B}, X)$	8
l_{∞}	Ferngerade von $\mathbb{P}(\mathbb{B}, A)$	8
\bar{k}	Oval, das durch einen Kreis k induziert wird	8
$PG(3, \mathbb{F})$	projektiver Raum der Dimension n über dem Körper \mathbb{F}	9
\overline{NX}	Gerade durch N und X	11
$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle$	homogene Koordinaten	13
$\mathcal{E}_{\Xi}(f_1, f_2)$	Laguerre-Ebene über f_1, f_2 mit Permutationsgruppe Ξ	17
$f _A$	Einschränkung von f auf A	20
kAl	Der Kreis k berührt den Kreis l im Punkt A	26
$\sigma(T)$	Träger des Büschels T	99
\mathcal{T}	Menge aller erweiterten Berührbüschel	99
\mathcal{B}	Menge aller erweiterten 2-Punkte-Büschel	99

Literaturverzeichnis

- [1] ARTZY, R.: Addendum to “A Pascal Theorem applied to Minkowski geometry”. *J. Geom.* 3 (1973), 103–105
- [2] ARTZY, R.: A Pascal Theorem applied to Minkowski geometry. *J. Geom.* 3 (1973), 93–102
- [3] ARTZY, R.: A symmetry theorem for Laguerre planes. *J. Geom.* 5 (1974), 109–116
- [4] ARTZY, R.: Minkowski planes with derived Moulton planes. *Rend. Math.* 12 (1979), Nr. 6, 345–350
- [5] ARTZY, R. und GROH, H.: Laguerre- and Minkowski planes produced by dilatations. *J. Geom.* 26 (1986), 1–20
- [6] BECK, H.: Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften. *Trans. Amer. Math. Soc.* 11 (1910), 414–448
- [7] BENZ, W.: $(8_3, 6_4)$ -Konfigurationen in Laguerre-, Möbius- und weiteren Geometrien. *Math. Z.* 70 (1958), 283–296
- [8] BENZ, W.: Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie auf Grund von Doppelverhältnissen. *J. Reine Angew. Math.* 199 (1958), 56–90
- [9] BENZ, W.: Permutations and plane sections of a ruled quadric. *Symposia Math.* 5 (1971), 325–339
- [10] BENZ, W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1973
- [11] BENZ, W.: The Bundle Theorem with its Degenerations in the Geometry of Chains. *Research and Lecture Notes in Mathematics* 1 (1991), 3–13
- [12] BENZ, W. und MÄURER, H.: Über die Grundlagen der Laguerre-Ebenen. *Jahresber. DMV* 67 (1964), 14–42

- [13] BRÖCKER, O.: *Über Sätze vom Miquelschen Typ in Laguerre-Ebenen*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1994
- [14] BRÖCKER, O.: A Non-Miquelian Laguerre Plane Satisfying a Theorem of Miquelian Type. *J. Geom.* 61 (1998), 32–38
- [15] BRÖCKER, O.: The n -Point Conditions of Miquelian Type in Minkowski Planes, $n \leq 5$. *Preprint, Università Cattolica, Brescia* 3/98 (1998)
- [16] BUEKENHOUT, F.: Ensembles quadratiques des espaces projectifs. *Math. Z.* 110 (1969), 306–318
- [17] CHEN, Y.: Der Satz von Miquel in der Möbiusebene. *Math. Ann.* 186 (1970), 81–100
- [18] CHEN, Y.: The Steiner system $S(3,6,26)$. *J. Geom.* 2 (1972), 7–28
- [19] CHEN, Y.: A characterization of some geometries of chains. *Can. J. Math.* 26 (1974), 257–272
- [20] CHEN, Y. und KAERLEIN, G.: Eine Bemerkung über endliche Laguerre- und Minkowskiebenen. *Geom. Dedicata* 2 (1973), 193–194
- [21] DEMBOWSKI, P. und HUGHES, D.R.: On finite inversive planes. *J. London Math. Soc.* 40 (1965), 171–182
- [22] DENNISTON, R.H.F.: Uniqueness of the inversive plane of order 7. *Manuscr. math.* 8 (1973), 21–26
- [23] FISHER, J.Ch.: Models and Theorems of the Classical Circle Planes. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 63 (1993), 254–264
- [24] FISHER, J.Ch. und PENTTILA, T. und PRAEGER, C.E. und ROYLE, G.F.: Inversive planes of odd order. *European J. Combin.* 10 (1989), 331–336
- [25] HALDER, H.-R. und HEISE, W.: *Einführung in die Kombinatorik*. 1. München, Wien : Carl Hansen Verlag, 1976
- [26] HARTMANN, E.: Moulton-Laguerre-Ebenen. *Arch. Math.* 27 (1976), 424–435
- [27] HARTMANN, E.: Eine Klasse nicht einbettbarer reeller Laguerre-Ebenen. *J. Geom.* 13 (1979), 49–67

- [28] HARTMANN, E.: Beispiele nicht einbettbarer reeller Minkowski-Ebenen. *Geom. Ded.* 10 (1981), 155–159
- [29] HEISE, W.: Minkowski-Ebenen gerader Ordnung. *J. Geom.* (1974), 83
- [30] HEISE, W. und KARZEL, H.: Eine Charakterisierung der ovoidalen Kettengeometrien. *J. Geom.* 2 (1972), 69–74
- [31] HEISE, W. und KARZEL, H.: Symmetrische Minkowski-Ebenen. *J. Geom.* 3 (1973), 5–20
- [32] HESSENBERG, G.: Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Math. Ann.* 61 (1905), 161–172
- [33] HIRSCHFELD, J.W.P.: *Finite Projective Spaces of Three Dimensions*. Oxford : Clarendon Press, 1985
- [34] KAERLEIN, G.: *Der Satz von Miquel in der pseudo-euklidischen (Minkowskischen) Geometrie*. Dissertation, Universität Bochum, 1970
- [35] KAHN, J.: Locally projective-planar lattices which satisfy the bundle theorem. *Math. Z.* 175 (1980), 219–247
- [36] KARZEL, H.: Symmetrische Permutationsmengen. *Aequationes Mathematicae* 17 (1978), 83–90
- [37] KREUZER, A.: Locally Projective Spaces which Satisfy the Bundle Theorem. *J. Geom.* 56 (1996), 87–98
- [38] KROLL, H.-J.: Anordnungsfragen in Benz-Ebenen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 46 (1977), 217–255
- [39] LÖWEN, R. und PFÜLLER, U.: Two-dimensional Laguerre planes over convex functions. *Geom. Dedicata* 23 (1987), 73–85
- [40] LOZANOV, C.: Theorem of Miquel in finite nonmiquelian planes. *Potsdamer Forschungen Wiss. Schriftreihe der Pad. Hoch. "Karl Liebknecht"*. Potsdam, Reihe B. 41 (1984), 91–92
- [41] LOZANOV, C.: On the nonequivalency of the theorem of Miquel M_8 with a four-point case of the theorem M_4^2 . *Demonstratio Mathematica* XX, No. 3-4 (1987), 327–334
- [42] LOZANOV, C. und ENEVA, G.: On the realization of the five-point case of the theorem of Miquel in nonmiquelian inversive planes. *Demonstratio Mathematica* XIX, No.4 (1986), 851–862

- [43] MÄURER, H. Die Bedeutung des Spiegelungsbegriffs in der Möbius- und Laguerre-Geometrie. In: *Beiträge Geom. Alg.*. Basel : Birkhäuser, 1977, 251–257
- [44] O'KEEFE, C.M. und PENTTILA, T.: Ovoids of $PG(3,16)$ are elliptic quadrics. *J. Geom.* 38 (1990), 95–106
- [45] SAMAGA, H.-J. Beiträge zu den Grundlagen der Minkowskischen Geometrie. Staatsexamensarbeit, Universität Bochum. 1973
- [46] SAMAGA, H.-J.: A unified approach to Miquel's theorem and its degenerations. *Lect. Notes Math.* 792 (1980), 132–142
- [47] SAMAGA, H.-J.: Schließungssätze in Laguerre-Ebenen. *J. Geom.* 41 (1991), 157–161
- [48] SAMAGA, H.-J.: *Über Sätze vom Miquelschen Typ.* Habilitationsschrift, Universität Hamburg, 1991
- [49] SCHAEFFER, H.: Eine Kennzeichnung miquelscher Möbiusebenen. *Mitt. Math. Ges. Hamb.* 10 (1974), Nr. I, 179–184
- [50] SCHAEFFER, H.: Die Sieben-Punkte-Ausartungen des Satzes von Miquel in Möbiusebenen. *Math. Z.* 137 (1974), 185–196
- [51] SCHAEFFER, H. On Miquelian Benz planes. 1980. – Universität Hamburg (unveröffentlicht)
- [52] SCHROTH, A.E.: Ovoidal Laguerre Planes are Weakly Miquelian. *To appear in Arch. Math.*
- [53] STEINKE, G.F. Topological circle geometries. In: BUEKENHOUT, F. (Hrsg.): *Handbook of incidence geometry.* Elsevier Science B.V., 1995, Kapitel 24
- [54] THAS, J.A.: The affine plane $AG(2,q)$, q odd, has a unique one point extension. *Invent. Math.* 118 (1994), 133–139
- [55] TITS, J.: Une propriété caractéristique des ovoïdes associés aux groupes de Suzuki. *Arch. Math.* 17 (1966), 136–153
- [56] v.D.WAERDEN, B.L. und SMID, L.J.: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. *Math. Ann.* 110 (1935), 753–776
- [57] WITT, E.: Über Steinersche Systeme. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.* 12 (1938), 265–275

Index

- (8₃, 6₄)-Konfigurationen, 21
- (B^*)-Geometrien, 7
- 2-Punkte-Büschel, 99

- Ableitung, 4
- allgemeine Büschelbedingung, 26
- allgemeine Miquel-Bedingung, 26
- ausgearteter Kreis, 7

- Bedingungen
 - vom miquelschen Typ, 28
- Benz-Ebene, 5
 - Ableitung einer, 8
 - einbettbare, 15
 - klassische, 10
 - Minimalmodelle einer, 7
 - miquelsche, 9
 - nicht-klassische, 15
 - ovoidale, 9
- Berühraxiom, 75
- Berührbüschel, 99
- Berührung von Kreisen, 26
- Büschelsatz, 22, 100, 101

- Desargues, Satz von, 21

- Ebene
 - affine, 8
 - projektive, 8
 - Scherungs-Typ, 17
 - Translations-Typ, 17
- Ebenenschnitte, 9
- ebener Schnitt, 11, 12, 15
- ebenes Modell, 12
- egglike, 15

- einbettbar, 15
- Erzeugende, 4
- euklidischer Körper, 18

- Fernebene, 14
- Ferngerade, 8
- Fernpunkte, 20
- Funktion
 - parabolische, 17
 - streng parabolische, 17

- Geometrie
 - pseudo-euklidische, 7
- Gitter, 4

- homogene Koordinaten, 13
- Hyperbelstruktur, 75

- Kegel, 10
- Klassifikation, 23
- Körper
 - euklidischer, 18
- konzyklisch, 5
- konzyklische Punkte, 5
- koordinatisierbar, 15
- Koordinatisierung, 9
- Kreis, 5
 - ausgearteter, 7
 - regulärer, 7
- Kreise
 - symmetrische, 75

- Laguerre-Ebene, 5
- lokal projektiver linearer Raum, 99

- Minimalmodell, 6

- Minkowski-Ebene, 5
 - symmetrische, 75
- Miquel
 - Satz von, 23
 - voller Satz von, 23
- Miquel-Bedingung
 - allgemeine, 26
- miquelsch, 9
- Modell
 - ebenes, 12
- Möbius-Ebene, 5
- nicht-parallel, 5
- nicht-triviale Schnitte, 11
- Nordpol, 11, 12, 14
- orthogonale Relation, 13
- Oval, 8
- Ovoid, 15
- ovoidal, 9
- Pappus, Satz von, 21
- parallel, 5
- parallele Punkte, 5
- Parallelklasse, 8
- $PG(3, \mathbb{F})$, 9
- Projektion
 - stereographische, 11
- projektiver Raum, 9, 98
- pseudo-euklidische Geometrie, 7
- Punkte, 4
 - konzyklische, 5
 - nicht-parallele, 5
 - parallele, 5, 8
- Quadrik, 15
- Quadrik, nicht-ausgeartete, 10
- Quadroid, 9
- regulärer Kreis, 7
- Satz
 - von Desargues, 21
 - von Miquel, 21, 23
 - Ausartungen, 22
 - von Pappus, 21
- Scherungs-Laguerre-Ebene, 17
- Schnitt
 - ebener, 15
 - nicht-trivialer, 11, 12
- stereographische Projektion, 11
- Suzuki-Tits Ovoid, 16
- Symmetrieaxiom, 75
- symmetrische Kreise, 75
- symmetrische Minkowski-Ebenen, 75
- Tangente, 8
- Translations-Laguerre-Ebene, 17

Zusammenfassung

Es ist bekannt, daß der Satz von Miquel die Benz-Ebenen charakterisiert, die in den dreidimensionalen projektiven Raum über einem kommutativen Körper eingebettet werden können. Falls im Satz von Miquel Punkte zusammenfallen oder parallel sind, so sprechen wir von Ausartungen. Als Ergebnis erhalten wir, daß es 18, 40 bzw. 61 Ausartungen vom miquelschen Typ bezüglich Möbius-, Laguerre- bzw. Minkowski-Ebenen gibt. Für Möbius-Ebenen konnte Schaeffer zeigen, daß jede 8- und 7-Punkte-Ausartung zur Charakterisierung miquelscher Möbius-Ebenen herangezogen werden kann. Er konnte ebenfalls beweisen, daß dies auch für einige 6-Punkte-Ausartungen gilt. In der vorliegenden Arbeit beweisen wir dies für eine weitere 6-Punkte-Bedingung. Das Hauptresultat lautet:

Jede 7-Punkte-Ausartung vom miquelschen Typ charakterisiert die Klasse der miquelschen Laguerre-Ebenen.

Im Gegensatz zu Schaeffers Resultat ist es nicht möglich zu zeigen, daß jede 8-Punkte-Ausartung die Klasse der miquelschen Laguerre-Ebenen charakterisiert:

Es gibt mindestens vier Ausartungen vom miquelschen Typ, die in einer Klasse von Laguerre-Ebenen gültig sind, die größer ist als die miquelsche Klasse.

Für Minkowski-Ebenen ergänzen wir die Arbeit von Samaga um die 4- und 5-Punkte-Ausartungen. Es werden zahlreiche Zusammenhänge zwischen den Ausartungen in Benz-Ebenen hergestellt. Es wird weiterhin ein systematischer Zugang zu den Ausartungen des Büschelsatzes in Laguerre-Ebenen erarbeitet.

Abstract

It is well known that Miquel's Theorem characterizes the class of Benz planes that can be embedded into projective 3-space over some commutative field. Several authors investigated the so-called degenerations of Miquel's Theorem. By degenerations we mean that one allows any points involved in Miquel's Theorem to coincide or to be parallel. It turns out that there are 18, 40 and 61 of these degenerations concerning Möbius, Laguerre and Minkowski planes, resp. For Möbius planes Schaeffer proved that any 8- and 7-point degeneration characterizes the class of miquelian Möbius planes. He also proved this fact for some of the 6-point degenerations. We prove this for one more 6-point degeneration. The main result (for Laguerre planes) of this thesis reads as follows:

Any 7-point degeneration of Miquel's Theorem characterizes the class of miquelian Laguerre planes.

In contrast to Schaeffer's result for Möbius planes it is not possible to prove that every 8-point degeneration characterizes the class of miquelian Laguerre planes:

There exist at least four degenerations¹ that hold in a class of Laguerre planes bigger than the miquelian class.

Furthermore we prove for Laguerre planes that

Almost all 6-point degeneration characterize the class of miquelian Laguerre planes.

For Minkowski planes we complete Samaga's work on degenerations and develop the missing 5- and 4-point degenerations. We also give several connections between the degenerations in Benz planes. An approach to degenerations of the Bundle theorem in Laguerre planes is given.

¹That is, one 8-point degeneration, two 6-point degenerations and one 4-point degeneration.