

# **Numerische Lösung der stationären Diffusionsgleichung mit Homogenisierungsmethoden**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Mathematik, Informatik  
und Naturwissenschaften  
der Universität Hamburg

vorgelegt  
im Department Mathematik  
von  
Matthias Kabel  
aus Bad Oldesloe

Hamburg  
2007

Als Dissertation angenommen vom Department  
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Jens Struckmeier  
und Prof. Dr. Axel Klar

Hamburg, den 05. November 2007

Prof. Dr. Jens Struckmeier  
Leiter des Departments Mathematik

Für meine Eltern



# Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit soll die stationäre Diffusionsgleichung

$$(0.1) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für ein zusammengesetztes Material, dessen Komponenten fein gemischt sind, untersucht werden. Ist das Material zusätzlich periodisch, so kann man von der Existenz zweier charakteristischer Skalen ausgehen, erstens einer makroskopischen Skala, die das globale Verhalten beschreibt und zweitens einer mikroskopischen oder Porenskala, auf der die Periodizitätszelle  $Y = ]0, l_1[ \times \cdots \times ]0, l_n[$  beschrieben wird. Ein natürlicher Weg dann die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Größe  $\epsilon$  der Pore zu beschreiben, besteht darin, (0.1) in der Form

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit

$$A^\epsilon(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

für ein  $Y$ -periodisches  $A$  zu schreiben.

Die Homogenisierungstheorie versucht Aussagen über den „Grenzwert“

$$u^0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon$$

aufzustellen. Unter Homogenisierung versteht man aber nicht die Bestimmung von  $u^0$ , sondern das Aufstellen einer Differentialgleichung für  $u^0$ . Im Fall der stationären Diffusionsgleichung ist diese Differentialgleichung (die auch homogenisierte Differentialgleichung genannt wird) vom selben Typ mit konstanten Koeffizienten. Das Ziel der Homogenisierung besteht also letztlich in der Berechnung des effektiven oder homogenisierten Diffusionskoeffizienten  $A^0$ , s. d.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{in } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

erfüllt wird. Ersetzt man das Ausgangsproblem für  $u^\epsilon$  durch das homogenisierte Problem, so muss man also statt einem Problem zwei lösen. Zusätzlich muss ja zuerst der homogenisierte Diffusionskoeffizient  $A^0$  berechnet werden. Dafür ist das homogenisierte Problem eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und daher (numerisch) wesentlich leichter zu lösen als die Differentialgleichung für  $u^\epsilon$ .

## Einleitung

Wie sich leider herausstellt ist die Konvergenz von  $u^\epsilon$  gegen  $u^0$  nur schwach in  $H_0^1(\Omega)$ . Wirft man jedoch einen Blick auf den Beweis mittels Multiskalenansatz

$$u^\epsilon(x) = u^0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

in Bakhvalov und Panasenko (1989), Kapitel 4, §1, so sieht man, dass für die asymptotische Entwicklung erster Ordnung  $u_1^\epsilon(x) = u^0(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon u_1(x, \frac{x}{\epsilon})$  gilt

$$u_1^\epsilon(x) = u^0(x) - \epsilon \sum_{i=1}^n \chi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x),$$

wobei  $\chi_i$  für  $i = 1, \dots, n$  Lösung des so genannten Zellproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)\nabla\chi_i) = -\operatorname{div}(A(y)e_i) \text{ in } Y, \\ \chi_i \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle \chi_i \rangle_Y = 0 \end{cases}$$

auf der Periodizitätszelle  $Y$  ist. Eben diese Zelllösungen werden aber ohnehin zwingend benötigt, um den homogenisierten Diffusionskoeffizienten  $A^0$  mittels der Gleichung

$$A^0 e_i = \langle -A\nabla\chi_i + A e_i \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y -A\nabla\chi_i + A e_i \, dy$$

zu bestimmen (siehe Satz 3.4). Statt sich mit der homogenisierten Lösung  $u^0$  zufrieden zu geben, kann man also ohne wesentlichen Mehraufwand die asymptotische Entwicklung erster Ordnung verwenden. Diese hat den zusätzlichen Vorteil, dass man ihren Approximationsfehler in der  $H^1$ -Norm abschätzen kann

$$\|u^\epsilon - u_1^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\sqrt{\epsilon}).$$

Bezüglich der  $L^2$ -Norm kann man auf diese Weise aber noch keine Verbesserung der Approximationseigenschaft erzielen

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)} &= O(\epsilon), \\ \|u^\epsilon - u_1^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} &= O(\epsilon). \end{aligned}$$

Andererseits wird in Neuss u. a. (2001) bewiesen, dass bei geeigneter Wahl der rechten Seite für die Finite Elemente Näherungen  $u_h^\epsilon$ ,  $u_H^0$  und  $\chi_{i,\hat{h}}$  gilt

$$\left\| u_h^\epsilon(x) - I_h \left( u_H^0(x) - \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_H^0}{\partial x_i}(x) \chi_{i,\hat{h}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2),$$

falls  $A$  (im Sinne von Definition 3.3) symmetrisch ist. Dabei garantiert die Symmetrie von  $A$  die Inklusion  $u_1^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ .

Im ersten Teil der Arbeit werde ich diese Aussage für den eindimensionalen analytischen Fall unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an die Quelle  $f$  sogar bezüglich der  $L^\infty$ -Norm nachweisen (siehe Satz 3.13). Es wird sich außerdem herausstellen, dass im nicht symmetrischen Fall ein zusätzliches Korrekturproblem mit konstanten Koeffizienten die quadratische Approximationseigenschaft erhält.

Im zweiten Teil untersuche ich zunächst für den ein- und zweidimensionalen Fall, unter welchen Voraussetzungen an die Regularität des Diffusionskoeffizienten und der Quelle sowie der Wahl der Finite Element Räume sich die quadratische Approximationseigenschaft auf die Finite Element Näherung der korrigierten asymptotischen Entwicklung erster Ordnung überträgt (siehe die Sätze 5.6 und 5.7 sowie die Korollare 5.11 und 5.12). Dabei wird insbesondere von der Regularität der Lösungen elliptischer Gleichungen mit periodischen Randbedingungen Gebrauch gemacht. Diese werde ich bereits im ersten Teil der Arbeit aus der inneren Regularität von Lösungen elliptischer Gleichungen folgern (siehe Satz 2.20 und Satz 2.23).

Direkt im Anschluss fasse ich meine numerischen Ergebnisse für isotrope Medien zusammen. Abschließend werde ich dann noch kurz ein Zweigitterverfahren vorstellen, das auf den zur Bestimmung der korrigierten asymptotischen Entwicklung benötigten Komponenten beruht und die Laufzeiten mit einem klassischen präkonditionierten Verfahren der konjugierten Gradienten (PCG-Verfahren) für verschiedene Zellgrößen vergleichen.

## Danksagung

Bei Prof. Dr. J. Struckmeier möchte ich mich für das schöne Thema und die vertrauensvolle Arbeitsatmosphäre bedanken.

Boris von Loesch danke ich herzlich für die vielen anregenden Diskussionen und seine zahlreichen Hilfestellungen in Programmierfragen.

Tilman Seidel möchte ich besonders für seine Aufmunterungen in schwierigen Phasen meiner Promotion danken.

Hamburg, 12. November 2007

Matthias Kabel

## *Einleitung*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>I. Theorie</b>	<b>1</b>
<b>1. Funktionalanalysis</b>	<b>3</b>
1.1. Banach- und Hilberträume . . . . .	3
1.1.1. Lineare Abbildungen normierter Räume . . . . .	5
1.1.2. Lemma von Lax-Milgram . . . . .	6
1.1.3. Schwache Konvergenz . . . . .	7
1.1.4. Céa-Lemma . . . . .	11
1.1.5. Aubin-Nitsche-Lemma . . . . .	12
1.2. Die Räume $L^p(\Omega)^n$ . . . . .	12
1.3. H�olderr�ume . . . . .	13
1.4. Sobolevr�ume . . . . .	14
1.4.1. Spursatz . . . . .	14
1.4.2. Der Raum $H^{-1}(\Omega)$ . . . . .	16
1.4.3. Der Raum $H^1_{\text{per}}(Y)$ . . . . .	17
<b>2. Elliptische Differentialgleichungen</b>	<b>19</b>
2.1. Schwache Lösungen . . . . .	19
2.1.1. Dirichletprobleme . . . . .	19
2.1.2. Periodische Randbedingungen . . . . .	21
2.2. Regularität . . . . .	22
2.2.1. Dirichletprobleme . . . . .	22
2.2.2. Periodische Randbedingungen . . . . .	23
<b>3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen</b>	<b>27</b>
3.1. Zellprobleme . . . . .	28
3.2. Klassische Ergebnisse . . . . .	29
3.3. Eindimensionaler Fall . . . . .	30
3.4. Verbesserte $L^2$ -Konvergenz . . . . .	33
3.5. Beispiel . . . . .	41

<b>II. Numerik</b>	<b>45</b>
<b>4. Finite Elemente</b>	<b>47</b>
4.1. Dreieckelemente . . . . .	48
4.2. Rechteckelemente . . . . .	50
4.3. Interpolation . . . . .	53
4.4. Globaler Interpolationfehler . . . . .	54
4.5. Inverse Ungleichung . . . . .	56
4.6. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme . . . . .	57
4.6.1. Dirichletprobleme . . . . .	57
4.6.2. Periodische Randbedingungen . . . . .	58
<b>5. Finite Element Näherungen</b>	<b>61</b>
5.1. Asymptotische Approximation erster Ordnung . . . . .	62
5.2. Originalproblem . . . . .	68
5.3. Korrekturproblem . . . . .	68
5.4. Numerische Ergebnisse . . . . .	72
5.4.1. Eindimensionaler Fall . . . . .	73
5.4.2. Zweidimensionaler Fall . . . . .	79
5.5. Zweigitterverfahren . . . . .	86
<b>Fazit</b>	<b>89</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>91</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>
<b>Index</b>	<b>95</b>

**Teil I.**  
**Theorie**



# 1. Funktionalanalysis

In diesem Kapitel werde ich die notwendigen funktionalanalytischen Grundlagen für die Lösungstheorie elliptischer Differentialgleichungen, die Homogenisierungstheorie elliptischer Differentialgleichungen und die Fehlerabschätzung von Finite Element Näherungen zusammenfassen.

## 1.1. Banach- und Hilberträume

**Definition 1.1.** Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$$

heißt *Norm* auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $E$ , falls

1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$ ,
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$  (Dreiecksungleichung)

gilt. Dann heißt  $E$  *normierter Raum* und die Norm von  $E$  wird mit  $\|\cdot\|_E$  bezeichnet.

Auf einem normierten Raum  $E$  wird in natürlicher Weise eine Metrik induziert:

$$d(x, y) := \|x - y\|_E \quad \forall x, y \in E.$$

**Definition 1.2.** Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig*. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

**Definition 1.3.** Sei  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot)_H : (x, y) \in H \times H \mapsto (x, y)_H \in \mathbb{K}$$

heißt *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), falls

1.  $(x, x)_H > 0 \iff x \neq 0$ ,
2.  $(x, y)_H = \overline{(y, x)_H} \quad \forall x, y \in H$ ,
3.  $(\lambda x + \mu y, z)_H = \lambda(x, z)_H + \mu(y, z)_H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in H$

## 1. Funktionalanalysis

gilt.

**Satz 1.4** (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Ist  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$ , so ist*

$$|(x, y)_H|^2 \leq (x, x)_H \cdot (y, y)_H \quad \forall x, y \in H.$$

*Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.*

*Beweis.* Für  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt:

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_H = (x, x)_H + \lambda \overline{(x, y)_H} + \bar{\lambda} (x, y)_H + \lambda \bar{\lambda} (y, y)_H.$$

Ist  $y \neq 0$ , so setzt man  $\lambda = -\frac{(x, y)_H}{(y, y)_H}$  und erhält

$$(x, x)_H - \frac{|(x, y)_H|^2}{(y, y)_H} - \frac{|(x, y)_H|^2}{(y, y)_H} + \frac{|(x, y)_H|^2}{(y, y)_H} \geq 0,$$

d. h.

$$(x, x)_H \cdot (y, y)_H \geq |(x, y)_H|^2.$$

Für  $y = 0$  ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung trivialerweise erfüllt.

Sind  $x$  und  $y$  linear abhängig und ist  $y \neq 0$  (für  $y = 0$  gilt trivialerweise Gleichheit), so ist  $x = \alpha y$  und es gilt

$$\begin{aligned} |(x, y)_H|^2 &= |\alpha|^2 (y, y)_H \cdot (y, y)_H \\ &= \alpha \bar{\alpha} (y, y)_H \cdot (y, y)_H \\ &= (\alpha y, \alpha y)_H \cdot (y, y)_H \\ &= (x, x)_H \cdot (y, y)_H \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt

$$(x, x)_H \cdot (y, y)_H = |(x, y)_H|^2,$$

so folgt für  $y \neq 0$  (für  $y = 0$  sind  $x$  und  $y$  trivialerweise linear abhängig) aus dem ersten Teil des Beweises

$$(x + \lambda y, x + \lambda y)_H = 0$$

für  $\lambda = -\frac{(x, y)_H}{(y, y)_H}$ , d. h.  $x + \lambda y = 0$ . Also sind  $x$  und  $y$  linear abhängig.  $\square$

**Lemma 1.5.** *Ist  $H$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$ , so definiert*

$$\|\cdot\| : x \in H \mapsto \sqrt{(x, x)_H} \in \mathbb{R}_+$$

*eine Norm*

*Beweis.* Die Dreiecksungleichung folgt unter Verwendung der elementaren Ungleichung  $\Re z \leq |z|$  aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.4).  $\square$

**Definition 1.6.** Ein *Hilbertraum*  $H$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_H$ , der zusätzlich ein Banachraum bezüglich der zum Skalarprodukt assoziierten Norm, d. h. bezüglich

$$\|x\|_H = \sqrt{(x, x)_H}$$

ist.

*Bemerkung.* In einem Hilbertraum  $H$  lautet die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung unter Verwendung der zum Skalarprodukt assoziierten Norm

$$|(x, y)_H| \leq \|x\|_H \cdot \|y\|_H \quad \forall x, y \in H.$$

### 1.1.1. Lineare Abbildungen normierter Räume

**Definition 1.7.** Eine lineare Abbildung  $\Lambda : E \rightarrow F$  zwischen normierten Räumen  $E, F$  heißt *Operator* und falls der Bildraum  $F$  der Skalarenkörper ist auch *Funktional*.

**Satz 1.8.** Für eine Operator  $\Lambda : E \rightarrow F$  sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\Lambda$  ist stetig.
2.  $\Lambda$  ist stetig in 0.
3.  $\Lambda$  ist beschränkt, d. h. es existiert ein  $M \geq 0$  mit

$$\|\Lambda(x)\|_F \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

4.  $\Lambda$  ist gleichmäßig stetig.

*Beweis.* •  $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$  gilt offensichtlich ( $\Lambda$  ist linear).

- $2 \Rightarrow 3$ : Wäre 3 falsch, so würde zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in E$  mit  $\|\Lambda(x_n)\|_F > n\|x_n\|_E$  existieren. Da  $\Lambda$  linear ist, folgt  $x_n \neq 0$  und damit auch  $\|x_n\|_E \neq 0$ , d. h. man kann  $y_n := x_n/(n\|x_n\|_E)$  definieren. Wegen  $\|y_n\|_E = 1/n$  ist  $(y_n)$  eine Nullfolge. Andererseits gilt

$$\|\Lambda(y_n)\|_F = \frac{\|\Lambda(x_n)\|_F}{n\|x_n\|_E} > 1,$$

d. h.  $(\Lambda(y_n))$  konvergiert nicht gegen  $\Lambda(0) = 0$  im Widerspruch zu 2. □

Die Menge der stetigen Operatoren wird mit  $L(E, F)$  bezeichnet.

**Satz 1.9.** Die Abbildung  $\|\cdot\|_{L(E, F)} : L(E, F) \rightarrow \mathbb{R}_+$  definiert durch

$$\|\Lambda\|_{L(E, F)} := \inf\{M \geq 0 \mid \|\Lambda(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \forall x \in E\}$$

definiert eine Norm auf  $L(E, F)$ , die sog. *Operatornorm*. Ist  $F$  vollständig so auch  $L(E, F)$ .

## 1. Funktionalanalysis

*Beweis.* Werner (1997), Satz II.1.4, Seite 47. □

*Bemerkung.* Für die Operatornorm gilt

$$\|\Lambda\|_{L(E,F)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\Lambda(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|\Lambda(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\Lambda(x)\|_F,$$

sowie

$$(1.10) \quad \|\Lambda(x)\|_F \leq \|\Lambda\|_{L(E,F)} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

**Definition 1.11.** Der Raum  $L(E, \mathbb{K})$  der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum  $E$  heißt der *Dualraum* von  $E$  und wird mit  $E'$  bezeichnet. Das Bild  $x'(x)$  von  $x \in E$  unter  $x' \in E'$  wird mit  $(x', x)_{E', E}$  bezeichnet. Der Dualraum  $E'' := (E')'$  von  $E'$  heißt *Bidualraum* von  $E$ .

**Korollar 1.12.** Der Dualraum eines normierten Raums  $E$ , versehen mit der Operatornorm

$$\|x'\|_{E'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(x', x)_{E', E}|}{\|x\|_E},$$

und sein Bidualraum (ebenfalls versehen mit der entsprechenden Operatornorm) sind stets Banachräume und es gilt

$$|(x', x)_{E', E}| \leq \|x'\|_{E'} \|x\|_E.$$

*Beweis.* Da  $\mathbb{K}$  vollständig ist, folgt dies aus Satz 1.9. □

### 1.1.2. Lemma von Lax-Milgram

Von fundamentaler Bedeutung für Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen von Lösungen elliptischer Randwertprobleme ist das Lemma von Lax-Milgram.

**Definition 1.13.** Sei  $H$  ein reeller Hilbertraum. Eine Bilinearform  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *stetig*, falls ein  $\beta > 0$  existiert, s. d.

$$a(u, v) \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H$$

und *koerziv* falls ein  $\alpha > 0$  existiert, s. d.

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

Eine symmetrische, stetige und koerzive Bilinearform  $a$  heißt *H-elliptisch*.

**Lemma 1.14** (Lemma von Lax-Milgram). *Ist  $a$  eine stetige und koerzive Bilinearform so existiert für alle  $f \in H'$  eine eindeutige Lösung des Problems*

$$(1.15) \quad a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H$$

und außerdem erfüllt die Lösung die Abschätzung

$$\|u\|_H \leq \alpha^{-1} \|f\|_{H'},$$

wobei  $\alpha$  die Koerzivitätskonstante von  $a(\cdot, \cdot)$  ist.

*Beweis.* Ciarlet (1978), Theorem 1.1.3, S.8 und Remark 1.1.3, S.9 oder Jikov u. a. (1994), Lemma 1.3, S. 8.  $\square$

**Satz 1.16.** *Sei  $a$  eine  $H$ -elliptische Bilinearform. Dann ist (1.15) die Eulergleichung assoziiert mit dem Variationsproblem*

$$(1.17) \quad E = \inf_{v \in H} F(v), \quad F(v) = \frac{a(v, v)}{2} - (f, v).$$

*Beweis.* Jikov u. a. (1994), S. 8.  $\square$

### 1.1.3. Schwache Konvergenz

Die Homogenisierungstheorie untersucht das Verhalten einer Folge von schwachen Lösungen ( $u^\epsilon$ ) elliptischer Randwertprobleme. Da im Allgemeinen keine starke Konvergenz vorliegt, wird die Folge auf schwache Konvergenz untersucht.

**Definition 1.18.** Es seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *Isometrie*, wenn für alle  $x, x' \in X$  gilt

$$d_X(x, x') = d_Y(f(x), f(x')).$$

Die beiden Räume heißen *isometrisch*, falls eine surjektive Isometrie existiert.

*Bemerkung.* Eine Isometrie ist stets stetig und injektiv.

*Beweis.* Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Isometrie. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x') \\ \Rightarrow d_X(x, x') &= d_Y(f(x), f(x')) = 0 \\ \Rightarrow x &= x'. \end{aligned}$$

$\square$

**Definition 1.19.** Ein stetiger Operator  $\Lambda \in L(E, F)$  heißt *Isomorphismus*, falls  $\Lambda$  bijektiv und  $\Lambda^{-1}$  stetig ist. Gilt  $\|\Lambda(x)\|_F = \|x\|_E$  für alle  $x \in E$ , d. h. ist  $\Lambda$  bezüglich der von den Normen induzierten Metriken  $d_E(x, x') = \|x - x'\|_E$  und  $d_F(y, y') = \|y - y'\|_F$  isometrisch, so heißt  $\Lambda$  *isometrisch*. Einen isometrischen Operator nennt man kurz *Isometrie*. Normierte Räume zwischen denen ein (isometrischer) Isomorphismus existiert, heißen (*isometrisch*) *isomorph*, in Zeichen  $E \simeq F$  (bzw.  $E \cong F$ ).

**Definition 1.20.** Seien  $E$  und  $F$  normierte Räume und  $\Lambda \in L(E, F)$ . Der *adjungierte Operator* (teilweise auch *transponierte Operator* genannt) ist gegeben durch

$$\Lambda' : \begin{cases} F' \rightarrow E' \\ y' \mapsto y' \circ \Lambda \end{cases}$$

## 1. Funktionalanalysis

**Satz 1.21.** *Die Abbildung*

$$, : \begin{cases} L(E, F) \rightarrow L(F', E') \\ \Lambda \mapsto \Lambda' \end{cases}$$

*ist linear und isometrisch, aber im Allgemeinen nicht surjektiv.*

*Beweis.* Werner (1997), Satz III.4.2, S. 110. □

Für  $x \in E$  kann auf kanonische Weise eine Abbildung

$$i(x) : x' \in E' \longmapsto (x', x)_{E', E} \in \mathbb{K}$$

definiert werden. Offensichtlich ist  $i(x)$  linear und wegen  $|(x', x)_{E', E}| \leq \|x'\|_{E'} \|x\|_E$  sogar stetig, d. h.  $i(x) \in E''$ .

**Satz 1.22.** *Die lineare Abbildung  $i_E : E \rightarrow E''$  ist eine (i. Allg. nicht surjektive) Isometrie, d. h. es gilt  $\|i_E(x)\|_{E''} = \|x\|_E$  für alle  $x \in E$ .*

*Beweis.* Die Aussage folgt aus dem Satz von Hahn-Banach (siehe Werner (1997), Theorem III.1.5, Seite 97 und Korollar III.1.7, Seite 98). □

**Definition 1.23.** Ein Banachraum  $E$  heißt *reflexiv*, falls  $i_E$  surjektiv ist.

*Bemerkung.* Ein unvollständiger Raum kann nicht reflexiv sein, da  $E''$  vollständig ist und für reflexive Räume nach Definition  $E \cong E''$  gilt.

**Lemma 1.24.** *Sind  $E, F$  reflexive Banachräume, so ist auch  $E \times F$  ein reflexiver Banachraum*

*Beweis.* Für Elemente  $x' \in E', y' \in F'$  seien  $\tilde{x}', \tilde{y}' \in (E \times F)'$  definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(x, y) &= x'(x) \quad \forall (x, y) \in E \times F, \\ \tilde{y}'(x, y) &= y'(y) \quad \forall (x, y) \in E \times F. \end{aligned}$$

Um nun zu zeigen, dass  $E \times F$  reflexiv ist, muss man zu jedem  $z'' \in (E \times F)''$  ein  $(x_0, y_0) \in E \times F$  finden, s. d.  $i_{E \times F}(x_0, y_0) = z''$ . Sei also  $z'' \in (E \times F)''$  vorgegeben und  $x'' \in E'', y'' \in F''$  definiert durch

$$\begin{aligned} x''(x') &= z''(\tilde{x}') \quad \forall x' \in E', \\ y''(y') &= z''(\tilde{y}') \quad \forall y' \in F'. \end{aligned}$$

Da  $E$  und  $F$  reflexiv sind existieren dann  $x_0 \in E$  und  $y_0 \in F$  mit  $x''(x') = x'(x_0)$  bzw.  $y''(y') = y'(y_0)$  und daher folgt für alle  $x' \in E', y' \in F'$ :

$$\begin{aligned} z''(\tilde{x}' + \tilde{y}') &= x''(x') + y''(y') = x'(x_0) + y'(y_0) = \tilde{x}'(x_0, y_0) + \tilde{y}'(x_0, y_0) \\ &= (\tilde{x}' + \tilde{y}')(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass sich jedes  $z' \in (E \times F)'$  in der Form  $\tilde{x}' + \tilde{y}'$  mit  $x' \in E'$  und  $y' \in F'$  schreiben lässt. Dies kann man einfach erreichen, indem man

$$\begin{aligned} x'(x) &= z'(x, 0) \quad \forall x \in E, \\ y'(y) &= z'(0, y) \quad \forall y \in F \end{aligned}$$

setzt. □

**Definition 1.25.** Eine Folge  $(x_n)$  in einem normierten Raum  $E$  heißt *schwach konvergent* gegen  $x$  (in Zeichen:  $x_n \rightharpoonup x$  schwach in  $E$ ), falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x', x_n)_{E', E} = (x', x)_{E', E} \quad \forall x' \in E'.$$

*Bemerkung.* Die Eindeutigkeit des schwachen Limes ist eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach (siehe Werner (1997), Theorem III.1.5, Seite 97 und Korollar III.1.6, Seite 98).

**Lemma 1.26.** In einem normierten Raum  $E$  ist jede gegen  $x \in E$  konvergente Folge  $(x_n)$  schwach konvergent gegen  $x$ .

*Beweis.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x', x_n)_{E', E} - (x', x)_{E', E}| \stackrel{(1.10)}{\leq} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x'\|_{E'} \|x - x_n\|_E = 0.$$

□

**Lemma 1.27.** Ist  $\dim E < \infty$ , so sind schwache und starke Konvergenz gleichwertig.

*Beweis.* Siehe Cioranescu und Donato (1999), Proposition 1.13, Seite 13. □

**Lemma 1.28.** Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.

*Beweis.* Die Aussage ist eine Konsequenz des Satzes von Banach-Steinhaus (siehe Werner (1997), Theorem IV.2.1, Seite 125 und Korollar IV.2.3, Seite 126). □

**Definition 1.29.** Ein normierter Raum  $E$  heißt *gleichmäßig konvex*, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, s. d.

$$\|x\|_E, \|y\|_E \leq 1, \|x - y\|_E \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_E \leq 1 - \delta.$$

**Satz 1.30.** Es gilt:

1. Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.
2. Jeder gleichmäßig konvexe Banachraum ist reflexiv.

## 1. Funktionalanalysis

*Beweis.* 1. Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $\varepsilon \leq 2$  (ansonsten ist nichts zu zeigen). Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x + y\|_H^2 &= (x + y, x + y)_H = \|x\|_H^2 + (x, y)_H + (y, x)_H + \|y\|_H^2, \\ \|x - y\|_H^2 &= (x - y, x - y)_H = \|x\|_H^2 - (x, y)_H - (y, x)_H + \|y\|_H^2.\end{aligned}$$

Addition der Gleichungen liefert

$$\|x + y\|_H^2 + \|x - y\|_H^2 = 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2) \leq 4.$$

Damit folgt  $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_H^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$  und somit

$$\left\|\frac{x + y}{2}\right\|_H \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < 1 - \frac{\varepsilon^2}{8},$$

d. h. für  $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8}$  ist die Bedingung der gleichmäßigen Konvexität erfüllt.

2. Satz von Milman (siehe Hirzebruch und Scharlau (1996), Satz 18.1, Seite 79). □

**Lemma 1.31.** *Sei  $E$  ein normierter Raum und  $(x_n)$  eine Folge in  $E$ . Aus der starken Konvergenz*

$$x_n \rightarrow x \in E$$

folgt

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \text{ schwach in } E, \\ \|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_E. \end{cases}$$

*Ist  $E$  gleichmäßig konvex, so gilt auch die Umkehrung.*

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Proposition 1.17, Seite 14. □

**Satz 1.32.** *Sei  $E$  reflexiv und  $(x_n)$  eine beschränkte Folge in  $E$ . Dann gilt:*

1. *Es existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$  und  $x \in E$ , s. d.*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ schwach in } E.$$

2. *Hat jede schwach konvergente Teilfolge von  $(x_n)$  denselben Grenzwert  $x \in E$ , so folgt*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ schwach in } E.$$

*Beweis.* 1. Satz von Eberlein-Šmuljan (siehe Yosida (1974), Seite 141).

2. Angenommen  $x$  wäre nicht schwacher Grenzwert der Folge  $(x_n)$ , dann gäbe es ein  $x' \in E'$  und ein  $\varepsilon > 0$ , s. d. für eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  gilt:

$$|(x', x_{n_k})_{E',E} - (x', x)_{E',E}| \geq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Laut 1. besitzt die Folge  $x_{n_k}$  eine schwach konvergente Teilfolge, die ebenfalls mit  $x_{n_k}$  bezeichnet werde. Für diese gilt nach Voraussetzung

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ schwach in } E$$

im Widerspruch zur Konstruktion der Teilfolge. □

**Lemma 1.33.** *Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $E$  und  $(y_n)$  eine Folge in  $E'$  für die gelte*

$$\begin{cases} x_n \rightharpoonup x \text{ schwach in } E, \\ y_n \rightarrow y \text{ stark in } E'. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, x_n)_{E',E} = (y, x)_{E',E}.$$

*Beweis.* Unter Verwendung von Korollar 1.12 und Lemma 1.28 ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |(y_n, x_n)_{E',E} - (y, x)_{E',E}| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |(y_n - y, x_n)_{E',E} + (y, x_n - x)_{E',E}| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|_{E'} \|x_n\|_E + \lim_{n \rightarrow \infty} |(y, x_n - x)_{E',E}| \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

#### 1.1.4. Céa-Lemma

Das folgende Lemma wird später benutzt, um die Genauigkeit von Finite Element Näherungen gegen den Approximationsfehler abzuschätzen. Daher hängt die Genauigkeit stark von der Regularität der Lösung ab.

**Lemma 1.34** (Céa-Lemma). *Sei  $V$  ein Hilbertraum,  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $V$ -elliptische Bilinearform,  $f \in V'$  und  $V_h \subset V$ . Sind  $u \in V$  und  $u_h \in V_h$  die nach dem Lemma von Lax-Milgram 1.14 eindeutigen Lösungen von*

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (f, v), \quad \forall v \in V, \\ a(u_h, v) &= (f, v), \quad \forall v \in V_h, \end{aligned}$$

so gilt

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

wobei  $\beta$  die Stetigkeitskonstante und  $\alpha$  die Koerzivitätskonstante von  $a(\cdot, \cdot)$  ist.

*Beweis.* Brenner und Scott (2002), Theorem 2.8.1, S. 64 oder Braess (2003), Lemma 4.2, S. 53. □

## 1. Funktionalanalysis

### 1.1.5. Aubin-Nitsche-Lemma

Wie man dem Approximationssatz (Satz 4.19) entnehmen kann, wird der Approximationsfehler bzgl. schwächerer Normen ordnungsmäßig besser. Um dies auf die Abschätzung der Genauigkeit der Finite Element Näherung zu übertragen, wird folgendes Lemma verwendet.

**Lemma 1.35** (Aubin-Nitsche-Lemma). *Sei  $H$  ein Hilbert-Raum mit der Norm  $|\cdot|$  und dem Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ . Es sei  $V$  ein Unterraum, der durch die Norm  $\|\cdot\|$  zum Hilbert-Raum wird und  $V_h \subset V$ . Ferner sei die Einbettung*

$$V \hookrightarrow H$$

*stetig und  $\overline{V} = H$ . Dann gilt*

$$|u - u_h| \leq \beta \|u - u_h\| \sup_{g \in H} \left( \frac{1}{|g|} \inf_{v \in V_h} \|\varphi_g - v\| \right),$$

*wobei  $\varphi_g \in V$  die eindeutige Lösung der Gleichung*

$$a(v, \varphi_g) = (g, v), \quad \forall v \in V,$$

*und  $\beta$  die Stetigkeitskonstante von  $a(\cdot, \cdot)$  ist.*

*Beweis.* Ciarlet (1978), Theorem 3.2.4, S. 137 oder Braess (2003), Lemma 7.6, S. 87.  $\square$

## 1.2. Die Räume $L^p(\Omega)^n$

Die  $L^p$ -Räume werden in jedem Buch über Funktionalanalysis eingeführt. Ich möchte an dieser Stelle lediglich einige Eigenschaften auf vektorwertige Funktionen, deren Komponenten  $L^p$ -Funktionen sind, übertragen.

**Lemma 1.36.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte, offene Menge. Für  $u \in L^2(\Omega)^n$  ist  $|u| = |u|_2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right)^{1/2} \in L^2(\Omega)$  und es gilt*

$$\| |u|_2 \|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)^n} = \left( \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

*Beweis.* Zunächst ist  $|u|_2^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$  messbar, da alle  $u_i$  nach Voraussetzung messbar sind. Aufgrund der Stetigkeit der Wurzel ist laut Rudin (1999), Satz 1.7, Seite 11, auch  $|u|_2$  messbar. Aus

$$\begin{aligned} \| |u|_2 \|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_i^2 dx \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned}$$

folgt schließlich  $|u|_2 \in L^2(\Omega)$ .  $\square$

**Korollar 1.37.** Sind  $u, v \in L^2(\Omega)^n$ , so folgt

$$\|u \cdot v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)^n} \|v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

*Beweis.* Unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Hölderschen Ungleichung für  $p = 2$  folgt:

$$\begin{aligned} \|u \cdot v\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |u \cdot v| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u|_2 |v|_2 \, dx \leq \| |u|_2 \|_{L^2(\Omega)} \| |v|_2 \|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)^n} \|v\|_{L^2(\Omega)^n} \end{aligned}$$

□

**Satz 1.38.** Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für  $1 < p < \infty$  ist  $L^p(\mathcal{O})$  gleichmäßig konvex und damit auch reflexiv.

*Beweis.* Der Satz von Clarkson (Hirzebruch und Scharlau (1996), Satz 17.1, S. 75) liefert zusammen mit Satz 1.30 die Aussage. □

**Korollar 1.39.** Für  $1 < p < \infty$  und  $n \in \mathbb{N}$  ist der Raum  $L^p(\mathcal{O})^n$  reflexiv.

*Beweis.* Die Aussage folgt mit Lemma 1.24 aus Satz 1.38. □

Um die Notation nicht unnötig zu komplizieren, werde ich im folgenden statt  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)^n}$  auch  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  schreiben.

### 1.3. Hölderräume

Hölder Stetigkeit ist eine Verallgemeinerung der Lipschitz Stetigkeit. Im weiteren Verlauf wird sich die Hölder Stetigkeit als geeignete Voraussetzung an die Koeffizienten der elliptischen Gleichung herausstellen.

**Definition 1.40.** Sei  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Funktion  $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (gleichmäßig) Hölder stetig zum Exponenten  $\gamma$ , falls

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathcal{O})} := \sup_{x,y \in \mathcal{O}, x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} < \infty.$$

**Definition 1.41.** Der Hölderraum

$$C^{k,\gamma}(\overline{\mathcal{O}})$$

besteht aus allen Funktionen  $u \in C^k(\overline{\mathcal{O}})$  für die

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\mathcal{O}})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{O}})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\mathcal{O})}$$

endlich ist.

## 1.4. Sobolevräume

Als geeignete Lösungsräume für elliptische Differentialgleichungen haben sich die Sobolevräume herausgestellt.

**Definition 1.42.** Seien  $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$  und  $\alpha$  ein Multiindex. Dann heißt  $v$  die *schwache Ableitung* oder *verallgemeinerte  $\alpha$ -te Ableitung* von  $u$  (in Zeichen:  $D^\alpha u = v$ ), falls

$$\int_{\mathcal{O}} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathcal{O}} v \varphi \, dx$$

für alle Testfunktionen  $\varphi \in C_0^\infty$  gilt.

**Definition 1.43.** Für  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  offen bezeichnet  $W^{k,p}(\mathcal{O}) \subset L^p(\mathcal{O})$  den *Sobolevraum* aller Funktionen  $u$  mit schwacher Ableitung  $D^\alpha u$  in  $L^p(\mathcal{O})$  für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$

$$W^{k,p}(\mathcal{O}) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) \mid D^\alpha u \in L^p(\mathcal{O}) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Bezüglich der *Sobolevnorm*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathcal{O})} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathcal{O})}, & p = \infty \end{cases}$$

ist  $W^{k,p}(\mathcal{O})$  ein Banachraum. Außerdem wird  $W^{k,p}(\mathcal{O})$  versehen mit der *Sobolevhalbnorm*

$$|u|_{W^{k,p}(\mathcal{O})} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_{\mathcal{O}} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathcal{O})}, & p = \infty. \end{cases}$$

$H^k(\mathcal{O})$  ist der Hilbertraum  $W^{k,2}(\mathcal{O})$  versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathcal{O})}$$

Die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\mathcal{O})$  in  $W^{k,p}(\mathcal{O})$  wird mit  $W_0^{k,p}(\mathcal{O})$  bezeichnet.

### 1.4.1. Spursatz

Um für Funktionen  $u \in H^1(\Omega)$  sinnvoll Randbedingungen definieren zu können, wird der folgende Satz benötigt ( $u \in H^1(\Omega)$  ist nur fast überall definiert).

**Satz 1.44.** Sei  $\Omega$  eine offene, beschränkte Menge, s. d.  $\partial\Omega$  Lipschitz stetig ist. Dann existiert eine eindeutig lineare stetige Abbildung

$$\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega),$$

s. d. für alle  $u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  gilt  $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$ . Die Funktion  $\gamma(u)$  heißt Spur von  $u$  auf  $\partial\Omega$ .

*Beweis.* Siehe Gagliardo (1957) und Ding (1996). □

**Definition 1.45.** Für Lipschitz stetiges  $\partial\Omega$  setzt man

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\partial\Omega) &= \gamma(H^1(\Omega)), \\ H^{-1/2}(\partial\Omega) &= H^{1/2}(\partial\Omega)' \end{aligned}$$

und versieht  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  mit der Norm

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} |u|^2 dS + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+1}} dS_x dS_y.$$

**Lemma 1.46.** Ist  $\partial\Omega$  Lipschitz stetig, so gilt

1. Die Menge  $\{u|_{\partial\Omega} : u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$  liegt dicht in  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .
2.  $H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$  ist kompakt.
3. Es existiert eine lineare stetige Abbildung

$$\tilde{\gamma} : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$$

mit

$$(\gamma \circ \tilde{\gamma}) = \text{id}$$

und

$$\|\tilde{\gamma}(g)\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall g \in H^{1/2}(\partial\Omega).$$

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.32, S. 51. □

Wie nicht anders zu erwarten, erfüllen die Elemente von  $H_0^1(\Omega)$  die Randbedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

**Satz 1.47.** Für Lipschitz stetiges  $\partial\Omega$  gilt

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | \gamma(u) = 0\}.$$

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.34, S.52. □

1. Funktionalanalysis

**1.4.2. Der Raum  $H^{-1}(\Omega)$**

Für den Dualraum von  $H_0^1$  gibt es eine häufig benutzte Charakterisierung.

**Definition 1.48.** Sei  $\Omega$  eine beschränkte, offene Menge.  $H^{-1}(\Omega)$  bezeichnet den mit der Operatornorm versehenen Dualraum von  $H_0^1(\Omega)$ , d. h.

$$H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'.$$

und

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} |(F, u)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}|.$$

**Lemma 1.49.** Sei  $F \in H^{-1}(\Omega)$ . Dann existieren  $n + 1$  Funktionen  $f_0, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$ , s. d.

$$F = f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}.$$

*Beweis.* Adams und Fournier (2003), Theorem 3.12, S. 64. □

**Lemma 1.50.** Für eine Folge  $(u^\epsilon)$  in  $H_0^1(\Omega)$  sind folgende Aussagen gleichwertig

1.  $u^\epsilon \rightharpoonup u^0$  schwach in  $H_0^1(\Omega)$ .
2.  $\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \text{ schwach in } L^2(\Omega), \\ \nabla u^\epsilon \rightharpoonup \nabla u^0 \text{ schwach in } L^2(\Omega)^n. \end{cases}$

*Beweis.* • 2  $\Rightarrow$  1: Ist  $u' \in H^{-1}(\Omega)$ , so existieren nach Lemma 1.49 Funktionen  $v_0 \in L^2(\Omega)$  und  $v \in L^2(\Omega)^n$ , s. d.

$$u' = v_0 + \operatorname{div} v.$$

Somit folgt unter Verwendung von  $(L^2(\Omega)^n)' = (L^2(\Omega)')^n = L^2(\Omega)^n$

$$\begin{aligned} (u', u^\epsilon)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= (v_0, u^\epsilon)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (\operatorname{div} v, u^\epsilon)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= (v_0, u^\epsilon)_{L^2(\Omega)', L^2(\Omega)} - (v, \nabla u^\epsilon)_{(L^2(\Omega)^n)', L^2(\Omega)^n} \\ &\rightarrow (v_0, u^0)_{L^2(\Omega)', L^2(\Omega)} - (v, \nabla u^0)_{(L^2(\Omega)^n)', L^2(\Omega)^n} \\ &= (v_0, u^0)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (\operatorname{div} v, u^0)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &= (u', u^0)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

d. h.  $u^\epsilon \rightharpoonup u^0$  schwach in  $H_0^1(\Omega)$ .

- 1  $\Rightarrow$  2: Aus  $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  folgt zunächst  $(L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$  und damit unmittelbar

$$u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \text{ schwach in } L^2(\Omega).$$

Laut Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.42, Seite 54,55 gilt  $\operatorname{div} v \in H^{-1}(\Omega)$  für  $v \in (L^2(\Omega)^n)' = (L^2(\Omega)')^n = L^2(\Omega)^n$  und daher folgt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} (v, \nabla u^\epsilon)_{(L^2(\Omega)^n)', L^2(\Omega)^n} &= -(\operatorname{div} v, u^\epsilon)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \\ &\rightarrow -(\operatorname{div} v, u^0)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (v, \nabla u^0)_{(L^2(\Omega)^n)', L^2(\Omega)^n}, \end{aligned}$$

d. h.  $\nabla u^\epsilon \rightharpoonup \nabla u^0$  schwach in  $L^2(\Omega)^n$ . □

**Lemma 1.51.** *Für Lipschitz stetiges  $\partial\Omega$  gilt*

$$H^1(\Omega)' = H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

*Beweis.* Die lineare stetige Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} H^1(\Omega)' \rightarrow H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ u' \mapsto (u'|_{H_0^1}, u' \circ \tilde{\gamma}) \end{cases}$$

besitzt die Inverse

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} H^{-1}(\Omega) \oplus H^{-1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)' \\ (u', g') \mapsto g' \circ \gamma + u' \circ (\operatorname{id} - \tilde{\gamma} \circ \gamma) \end{cases}$$

□

### 1.4.3. Der Raum $H_{\text{per}}^1(Y)$

Im Rahmen der Homogenisierungstheorie für elliptische Differentialgleichungen mit periodischen Diffusionskoeffizienten und insbesondere bei der Ermittlung des homogenisierten Diffusionskoeffizienten müssen Probleme mit periodischen Randbedingungen gelöst werden. Wie schon bei den Dirichletschen Randbedingungen setzt man die periodischen Randbedingungen um, indem man einen geeigneten Funktionenraum konstruiert.

**Definition 1.52.** Sei  $Y$  ein Intervall in  $\mathbb{R}^n$ , d. h.

$$Y = ]0, l_1[ \times \cdots \times ]0, l_n[.$$

Eine fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  definierte Funktion  $\chi$  heißt dann *Y-periodisch*, falls fast überall in  $\mathbb{R}^n$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt

$$\chi(x + kl_i e_i) = \chi(x).$$

Mit  $\chi^\#$  wird die *periodische Fortsetzung* einer fast überall auf  $Y$  definierten Funktion bezeichnet, d. h. fast überall in  $Y$  setzt man für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\chi^\#(y + kl_i e_i) = \chi(y).$$

## 1. Funktionalanalysis

**Definition 1.53.** Sei  $\Omega$  eine beschränkt, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^1(\Omega)$ . Der Mittelwert  $\langle f \rangle_\Omega$  von  $f$  ist definiert durch

$$\langle f \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(x) dx.$$

**Lemma 1.54.** Sei  $\chi$  eine  $Y$ -periodische Funktion mit  $\chi|_Y \in L^1(Y)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Definiert man für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\chi^\epsilon(x) = \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

so gilt

$$\begin{aligned} \int_{y_0+Y} \chi(y) dy &= \int_Y \chi(y) dy \\ \int_{\epsilon(y_0+Y)} \chi^\epsilon(x) dx &= \epsilon^n \int_Y \chi(y) dy \end{aligned}$$

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Lemma 2.3, S. 27. □

**Definition 1.55.** Sei  $Y$  ein Intervall in  $\mathbb{R}^n$  und

$$C_{\text{per}}^\infty(Y) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid f \text{ } Y\text{-periodisch}\}.$$

Dann bezeichnet  $H_{\text{per}}^1(Y)$  den Abschluss von  $C_{\text{per}}^\infty(Y)$  in  $H^1(Y)$  (bzgl.  $\|\cdot\|_{H^1(Y)}$ ).

**Lemma 1.56.**  $u \in H_{\text{per}}^1(Y)$  hat die gleiche Spur auf gegenüberliegenden Seiten des Intervalls  $Y$ .

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.49, S. 56. □

**Definition 1.57.** Der Quotientenraum

$$\mathcal{W}_{\text{per}}(Y) = H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$$

ist bezüglich

$$\|\bar{\chi}\|_{\mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = \|\nabla \chi\|_{L^2(Y)}, \quad \forall \chi \in \bar{\chi}$$

ein Banachraum und ein Hilbertraum für das Skalarprodukt

$$(\bar{\chi}, \bar{\psi})_{\mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = (\nabla \chi, \nabla \psi)_{L^2(Y)}, \quad \forall \chi \in \bar{\chi}, \psi \in \bar{\psi}.$$

Des weiteren kann der Dualraum  $(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$  identifiziert werden mit der Menge

$$\{f \in (H_{\text{per}}^1(Y))' \mid f(c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}\},$$

wobei

$$(f, \bar{\chi})_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = (f, \chi)_{(H_{\text{per}}^1(Y))', H_{\text{per}}^1(Y)}, \quad \forall \chi \in \bar{\chi}.$$

*Beweis.* Die Poincaré-Wirtinger Ungleichung (Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.38, Seite 53) impliziert wegen  $\|\nabla \chi\|_{L^2(Y)} = 0$ , dass  $\|\chi - \langle \chi \rangle_Y\|_{L^2(Y)} = 0$  ist. Somit ist  $\chi$  eine Konstante, d. h.  $\bar{\chi} = 0$ .

Die Vollständigkeit von  $\mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  folgt aus der Vollständigkeit von  $H_{\text{per}}^1(Y)$ . □

## 2. Elliptische Differentialgleichungen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das Lemma von Lax-Milgram (Lemma 1.14) benutzt um Aussagen über die Lösbarkeit elliptischer Randwertprobleme zu erhalten.

Im zweiten Abschnitt zitiere ich die Regularitätsaussagen bei Nullrandbedingungen und wende dann die Aussagen über innere Regularität von schwachen Lösungen elliptischer Gleichungen auf Probleme mit periodischen Randbedingungen an.

**Definition 2.1.** Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $A = (a_{ij}) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $b : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $c : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  gegebene Funktionen. Der Differentialoperator zweiter Ordnung in *Divergenzform*

$$(2.2) \quad Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + \langle b, \nabla u \rangle + cu$$

heißt *elliptisch*, falls  $A(x)$  fast überall in  $\mathcal{O}$  positiv definit ist und *gleichmäßig elliptisch*, falls ein  $\alpha > 0$  existiert, s. d.

$$\langle A(x)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

fast überall in  $\mathcal{O}$ .

**Definition 2.3.** Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \alpha < \beta$  bezeichnet  $M(\alpha, \beta, \mathcal{O})$  die Menge der  $n \times n$  Matrizen  $A = (a_{ij}) \in L^\infty(\mathcal{O})^{n \times n}$ , s. d.

1.  $\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \alpha|\xi|^2$ ,
2.  $|A(x)\xi| \leq \beta|\xi|$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$  und fast überall in  $\mathcal{O}$ .

### 2.1. Schwache Lösungen

#### 2.1.1. Dirichletprobleme

**Definition 2.4.** Sei  $\Omega$  eine beschränkte, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  heißt eine Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  der Variationsaufgabe

$$a(u, v) = (f, v)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

mit

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

## 2. Elliptische Differentialgleichungen

schwache Lösung des Problems

$$(2.5) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Lemma 2.6.** *Ist  $\partial\Omega$  ein Lipschitz stetiger Rand,  $A \in C^1(\overline{\Omega})^{n \times n}$ ,  $f \in C^0(\overline{\Omega})$  und  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , so ist  $u$  genau dann eine Lösung von*

$$(2.7) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \forall x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

falls  $u$  schwache Lösung von (2.5) ist.

*Beweis.* Ist  $u$  Lösung von (2.7), so gilt zunächst  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Multiplikation der ersten Gleichung von (2.7) mit einer Funktion  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  und anschließende partielle Integration liefert

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ist  $v \in H_0^1(\Omega)$ , so existiert per Definition eine Folge  $(v_k)$  in  $C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\|v - v_k\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Somit folgt unter Verwendung von Korollar 1.37

$$\begin{aligned} \left| a(u, v) - \int_{\Omega} f v \, dx \right| &= \left| a(u, v) - a(u, v_n) + a(u, v_n) - \int_{\Omega} f v \, dx \right| \\ &= \left| a(u, v - v_n) - \int_{\Omega} f(v_n - v) \, dx \right| \\ &\leq |a(u, v - v_n)| + \left| \int_{\Omega} f(v_n - v) \, dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla(v - v_n) \, dx \right| + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(v - v_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_n - v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

d. h. es gilt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx = (f, v)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ist umgekehrt  $u$  schwache Lösung von (2.5), so gilt zunächst  $u|_{\partial\Omega} = 0$ . Außerdem folgt mit partieller Integration

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div}(A\nabla u) - f)v \, dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

und somit  $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ . □

**Satz 2.8.** Sei  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ . Dann existiert für alle  $f \in H^{-1}(\Omega)$  eine eindeutige Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  der Gleichung

$$a(u, v) = (f, v)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Die Lösung erfüllt zusätzlich die Abschätzung

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha},$$

wobei  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ .

*Beweis.* Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz 1.4) und der Poincaré Ungleichung (Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.35, S.52) folgt für  $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$ , dass die Bilinearform  $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  koerziv und stetig ist. Damit ist der Satz eine direkte Folgerung des Lemmas von Lax-Milgram (Lemma 1.14).  $\square$

### 2.1.2. Periodische Randbedingungen

**Definition 2.9.** Für  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$  heißt eine Lösung  $u \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  der Variationsaufgabe

$$(2.10) \quad a(\bar{u}, \bar{v}) = (f, \bar{v})_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)}, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y),$$

mit

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_Y A(y) \nabla u \cdot \nabla v \, dy, \quad \forall u \in \bar{u}, v \in \bar{v}$$

schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch.} \end{cases}$$

**Satz 2.11.** Sei  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$   $Y$ -periodisch. Dann existiert für alle  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$  eine eindeutige Lösung  $\bar{u} \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  der Gleichung (2.10). Die Lösung erfüllt zusätzlich die Abschätzung

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} \leq \frac{\|f\|_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'}}{\alpha}.$$

*Beweis.* Die Aussage ist eine direkte Konsequenz des Lemmas von Lax-Milgram (Lemma 1.14).  $\square$

Durch Wahl eines geeigneten Repräsentanten von  $\bar{u}$  kann man dann sogar das Problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle u \rangle_Y = 0 \end{cases}$$

## 2. Elliptische Differentialgleichungen

in  $H_{\text{per}}^1(Y)$  lösen, wobei  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$ . Die zugehörige Variationsaufgabe in

$$W_{\text{per}}(Y) = \{v \in H_{\text{per}}^1(Y) \mid \langle v \rangle_Y = 0\}$$

lautet

$$(2.12) \quad \int_Y A \nabla u \cdot \nabla v \, dy = (f, v)_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', W_{\text{per}}(Y)}, \quad \forall v \in W_{\text{per}}(Y),$$

wobei zu beachten ist, dass  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$  auch als Element von  $(W_{\text{per}}(Y))'$  aufgefasst werden kann. Laut Satz 2.11 gilt

**Satz 2.13.** *Sei  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$   $Y$ -periodisch. Dann existiert für alle  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$  eine eindeutige Lösung  $u \in W_{\text{per}}(Y)$  der Gleichung (2.12). Die Lösung erfüllt zusätzlich die Abschätzung*

$$\|u\|_{W_{\text{per}}(Y)} \leq \frac{\|f\|_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'}}{\alpha}.$$

*Bemerkung.* Für  $Y$ -periodisches  $h \in L^2(Y)^n$  ist  $f = -\text{div } h \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$ . Dabei ist für  $\bar{v} \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$

$$(-\text{div } h, \bar{v})_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = (h, \nabla v)_{L^2(Y)}, \quad \forall v \in \bar{v}.$$

## 2.2. Regularität

Wie bereits angekündigt, werde ich nun die Regularität von Lösungen elliptischer Randwertprobleme betrachten. Die Resultate werden im weiteren Verlauf bei der Abschätzung des Approximationsfehlers (siehe auch Satz 4.19) und damit indirekt zur Abschätzung der Genauigkeit der Finite Element Näherung verwendet.

### 2.2.1. Dirichletprobleme

Als erstes betrachte ich die Lösung  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  elliptischer Randwertprobleme

$$(2.14) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene beschränkt Teilmenge ist und  $L$  der Differentialoperator (2.2)

**Satz 2.15.** *Sei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz stetigen Koeffizienten  $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter seien  $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$  und  $f \in L^2(\Omega)$ . Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems (2.14) und  $\partial\Omega$  ein  $C^2$ -Rand, so ist  $u \in H^2(\Omega)$  und zusätzlich gilt die Abschätzung*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{n, \alpha, M, \partial\Omega} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

mit

$$M = \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}, \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \right\},$$

*Beweis.* Gilbarg und Trudinger (2001), Theorem 8.12, S. 186.  $\square$

*Bemerkung.* Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  die eindeutige schwache Lösung von (2.14), so gilt sogar

$$(2.16) \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{n,\alpha,a_{ij},\Omega} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dies ist z. B. für  $b_i = c = 0$  erfüllt.

*Beweis.* Gilbarg und Trudinger (2001), Theorem 8.6, S. 182 und Corollary 8.7, S. 183.  $\square$

**Satz 2.17.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes konvexes, polygonal berandetes Gebiet,  $L$  gleichmäßig elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz stetigen Koeffizienten  $a_{ij}$ . Weiter seien  $b_i = c = 0$  und  $f \in L^2(\Omega)$ . Ist  $u \in H_0^1(\Omega)$  schwache Lösung des elliptischen Randwertproblems (2.14), so ist  $u \in H^2(\Omega)$  und es gilt (2.16).

*Beweis.* Kadlec (1964), Grisvard (1985), Theorem 3.2.1.2 und Theorem 3.2.1.3.  $\square$

### 2.2.2. Periodische Randbedingungen

Nun betrachte ich die Differentialgleichung mit periodischen Randbedingungen auf einem Intervall  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , d. h.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle u \rangle_Y = 0. \end{cases}$$

Im folgenden werde ich die  $H^2$ -Regularität nachweisen. Dazu verwende ich folgende Aussage über die innere Regularität von schwachen Lösungen elliptischer Differentialgleichungen

**Satz 2.18.** Sei  $u \in H^1(\Omega)$  schwache Lösung der Differentialgleichung

$$Lu = f \text{ in } \Omega,$$

wobei  $L$  gleichmäßig elliptisch mit gleichmäßig Lipschitz stetigen Koeffizienten  $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Weiter seien  $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$  und  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gilt  $u \in H^2(\Omega')$  für jede offene, kompakt in  $\Omega$  enthaltene Menge  $\Omega' \subset\subset \Omega$  und

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq C_{n,\alpha,M,d} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}),$$

wobei

$$M = \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}, \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right\},$$

$$d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega).$$

Zusätzlich gilt fast überall in  $\Omega$

$$Lu = f.$$

## 2. Elliptische Differentialgleichungen

*Beweis.* Gilbarg und Trudinger (2001), Theorem 8.8, S. 183. □

**Lemma 2.19.** *Ist  $u \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  schwache Lösung des Problems*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \end{cases}$$

*so ist  $u$  auch schwache Lösung von*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } y_0 + Y$$

*für beliebiges  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ , falls  $a_{ij}$   $Y$ -periodisch sind und  $f \in (\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'$ .*

*Beweis.* Unmittelbare Konsequenz von Lemma 1.54. □

**Satz 2.20.** *Sei  $\bar{u} \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  schwache Lösung des Problems*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \end{cases}$$

*wobei  $-\operatorname{div}(A\nabla u)$  gleichmäßig elliptisch mit  $Y$ -periodischen Koeffizienten  $a_{ij}$  ist. Sind  $a_{ij}$  gleichmäßig Lipschitz stetig und  $f \in L^2(Y)$  (mit  $\langle f \rangle_Y = 0$ ), d. h.*

$$(f, \bar{v})_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = \int_Y f v \, dy \quad \forall v \in \bar{v},$$

*so gilt  $u \in H^2(Y)$  mit*

$$\|u\|_{H^2(Y)} \leq C_{n,\alpha,M} (\|f\|_{L^2(Y)} + \|u\|_{H^1(Y)}),$$

*für alle  $u \in \bar{u}$ , wobei*

$$M = \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})} \right\}.$$

*Für den Repräsentanten von  $u$  von  $\bar{u}$  mit  $\langle u \rangle_Y = 0$  gilt sogar*

$$\|u\|_{H^2(Y)} \leq C_{n,\alpha,M,Y} \|f\|_{L^2(Y)},$$

*falls  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$ .*

*Beweis.* Zunächst existieren ein  $Y' \subset\subset Y$  und  $y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, 2^n$  mit

$$(2.21) \quad \bar{Y} \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} (y_i + Y').$$

Nach Lemma 2.19 ist  $u$  schwache Lösung von

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } y_i + Y$$

für  $i = 1, \dots, 2^n$ . Nach Satz 2.18 gilt  $u \in H^2(y_i + Y')$  mit

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(y_i+Y')} &\leq C_{n,\alpha,M}(\|f\|_{L^2(y_i+Y)} + \|u\|_{H^1(y_i+Y)}) \\ &= C_{n,\alpha,M}(\|f\|_{L^2(Y)} + \|u\|_{H^1(Y)}) \end{aligned}$$

und daher wegen der Inklusion (2.21) auch

$$u \in H^2(Y)$$

sowie

$$\|u\|_{H^2(Y)} \leq C_{n,\alpha,M}(\|f\|_{L^2(Y)} + \|u\|_{H^1(Y)}).$$

Ist nun zusätzlich  $\langle u \rangle_Y = 0$  so folgt aus der Poincaré-Wirtinger Ungleichung (siehe z. B. Cioranescu und Donato (1999), Proposition 3.38, S. 53)

$$\|u\|_{L^2(Y)} \leq C_Y \|\nabla u\|_{L^2(Y)}$$

und damit für  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$  nach Satz 2.11

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(Y)} &\leq \sqrt{1 + C_Y} \|\nabla u\|_{L^2(Y)} \\ &= \sqrt{1 + C_Y} \|\bar{u}\|_{W_{\text{per}}(Y)} \\ &\leq \frac{\sqrt{1 + C_Y}}{\alpha} \|f\|_{L^2(Y)}, \end{aligned}$$

also

$$\|u\|_{H^2(Y)} \leq C_{n,\alpha,M,Y} \|f\|_{L^2(Y)}.$$

□

Auch höhere Regularität bei periodischen Randbedingungen kann mühelos aus den entsprechenden Aussagen über höhere innere Regularität gefolgert werden.

**Satz 2.22.** *Sei  $u \in H^1(\Omega)$  schwache Lösung der Differentialgleichung*

$$Lu = f \text{ in } \Omega,$$

wobei  $L$  gleichmäßig elliptisch ist. Sind  $a_{ij} \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$ ,  $b_i, c \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$  und  $f \in H^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ , so gilt  $u \in H^{k+2}(\Omega')$  für jede offene, kompakt in  $\Omega$  enthaltene Menge  $\Omega' \subset\subset \Omega$  mit

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega')} \leq C_{n,\alpha,M,d}(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)})$$

und

$$\begin{aligned} M &= \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})}, \|b_i\|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})}, \|c\|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})} \right\}, \\ d &= \text{dist}(\Omega', \partial\Omega). \end{aligned}$$

Zusätzlich gilt fast überall in  $\Omega$

$$Lu = f.$$

## 2. Elliptische Differentialgleichungen

*Beweis.* Gilbarg und Trudinger (2001), Theorem 8.10, S. 186. □

Hieraus folgt analog zu Satz 2.20

**Satz 2.23.** Sei  $\bar{u} \in \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$  schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \end{cases}$$

wobei  $-\operatorname{div}(A\nabla u)$  gleichmäßig elliptisch mit  $Y$ -periodischen Koeffizienten  $a_{ij}$  ist. Sind  $a_{ij} \in C^{k,1}(\bar{Y})$  und  $f \in H^k(Y)$  (mit  $\langle f \rangle_Y = 0$ ), d. h.

$$\langle f, \bar{v} \rangle_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))', \mathcal{W}_{\text{per}}(Y)} = \int_Y f v \, dy \quad \forall v \in \bar{v},$$

so gilt  $u \in H^{k+2}(Y)$  mit

$$\|u\|_{H^{k+2}(Y)} \leq C_{n,\alpha,M} (\|f\|_{H^k(Y)} + \|u\|_{H^1(Y)}).$$

für alle  $u \in \bar{u}$ , wobei

$$M = \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})} \right\}.$$

Für den Repräsentanten von  $u$  von  $\bar{u}$  mit  $\langle u \rangle_Y = 0$  gilt sogar

$$\|u\|_{H^{k+2}(Y)} \leq C_{n,\alpha,M,Y} \|f\|_{H^k(Y)},$$

falls  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$ .

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

Sei  $\Omega$  eine beschränkte, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\epsilon > 0$  ein Parameter. Für  $Y$ -periodisches  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$  definiert man  $A^\epsilon$  fast überall auf  $\mathbb{R}^n$  durch

$$(3.1) \quad A^\epsilon(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Dann ist  $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$  für alle  $\epsilon > 0$ . Laut Satz 2.8 besitzt somit das Problem

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f & \text{in } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für  $f \in H^{-1}(\Omega)$  und jedes  $\epsilon > 0$  eine eindeutige Lösung  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ .

Die Homogenisierungstheorie versucht nun Aussagen über das Verhalten der Folge  $(u^\epsilon)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  zu treffen. Der klassische (formale) Weg ist ein Multiskalenansatz

$$u^\epsilon(x) = u^0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

Einsetzen und anschließender Vergleich von Termen gleicher Ordnung (bzgl.  $\epsilon$ ) ergibt als erstes die Unabhängigkeit des Terms nullter Ordnung von der feinen Skala ( $u^0(x, y) = u^0(x)$ ).

Als nächstes definiert man periodische Hilfsprobleme (die so genannten Zellprobleme), aus denen sich einerseits der homogenisierte (konstante!) Diffusionskoeffizient  $A^0$  berechnen lässt, d. h.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{in } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und andererseits der Term erster Ordnung vermittelt

$$u_1(x, y) = -\sum_{i=1}^n \chi_i(y) \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x)$$

bestimmt werden kann, wobei  $\chi_i$  die Lösungen der Zellprobleme sind.

Nach der Berechnung der homogenisierten Lösung  $u^0$  liegen also bereits alle Komponenten der asymptotischen Entwicklung erster Ordnung

$$u_1^\epsilon(x) = u^0(x) - \epsilon \sum_{i=1}^n \chi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_i}(x)$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

vor. Im Gegensatz zur homogenisierten Lösung  $u^0$  konvergiert diese sogar stark gegen die Lösung des Ausgangsproblems (3.2) für  $\epsilon \rightarrow 0$ .

In Neuss u. a. (2001), Theorem 3.4, S. 10, wird unter der Voraussetzung, dass der Diffusionskoeffizient  $A$  symmetrisch ist, für Finite Element Näherungen eine verbesserte  $L^2$ -Konvergenz nachgewiesen.

Symmetrie von  $Y$ -periodischem  $A = (a_{ij}) \in M(\alpha, \beta, Y)$  ist dabei folgendermaßen definiert (siehe auch Bakhvalov und Panasenko (1989), §6.3)

**Definition 3.3.** Eine Abbildung  $A : Y \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt  $k$ -symmetrisch, falls für  $i, j = 1, \dots, n$  gilt

$$(-1)^{\delta_{ik}} a_{ij}^{\#}(y_1, \dots, y_{k-1}, -y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) (-1)^{\delta_{kj}} = a_{ij}^{\#}(y),$$

wobei  $a_{ij}^{\#}$  die periodische Fortsetzung von  $a_{ij}$  ist. Ist  $A$   $k$ -symmetrisch für alle  $k = 1, \dots, n$ , so heißt  $A$  symmetrisch.

*Bemerkung.* Im Fall  $A(x) = a(x)I$  ist  $A$  symmetrisch, falls

$$a^{\#}(y_1, \dots, y_{k-1}, -y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) = a^{\#}(y)$$

d. h. falls die periodische Fortsetzung von  $a$  invariant unter Spiegelungen an den Hyperflächen  $\{x \in \mathbb{R}^n | x_k = 0\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ist. Im eindimensionalen Fall ist dies erfüllt, falls  $a^{\#}$  eine gerade Funktion ist. Den zweidimensionalen Fall mache man sich am Beispiel geschichteter Medien klar.



Nachdem ich die Zellprobleme und den homogenisierten Diffusionskoeffizienten exakt definiert habe, werde ich beweisen, dass im eindimensionalen Fall die verbesserte  $L^2$ -Konvergenz der asymptotischen Entwicklung erster Ordnung für symmetrisches  $A$  auch analytisch gilt.

Nach einer Korrektur von  $u_1^{\epsilon}$  um die Lösung eines weiteren elliptischen Randwertproblems mit konstanten(!) Koeffizienten gilt die verbesserte  $L^2$ -Konvergenz sogar ohne Symmetrievoraussetzungen.

### 3.1. Zellprobleme

Für jedes  $\xi \in \mathbb{R}^n$  existiert nach Satz 2.13 eine eindeutige Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)\nabla\chi_{\xi}) = -\operatorname{div}(A(y)\xi) \text{ in } Y, \\ \chi_{\xi} \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle \chi_{\xi} \rangle_Y = 0 \end{cases}$$

in  $W_{\text{per}}(Y)$ , da  $-\text{div}(A(y)\xi) \in (W_{\text{per}}(Y))'$ . Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  setzt man

$$\chi_i = \chi_{e_i}.$$

*Bemerkungen.* 1. Nach Satz 2.11 gilt

$$\|\chi_i\|_{W_{\text{per}}(Y)} \leq \frac{\|A(y)e_i\|_{L^2(Y)}}{\alpha}.$$

2. Sind die Koeffizientenfunktionen  $a_{ij} \in C^{m-2,1}(\bar{Y}) \cap H^{m-1}(Y)$  so gilt für die Lösungen  $\chi_i$  der Zellprobleme nach Satz 2.23

$$\chi_i \in H^m(Y).$$

### 3.2. Klassische Ergebnisse

**Satz 3.4.** *Sei  $\Omega$  eine beschränkte, offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$   $Y$ -periodisch,  $A^\epsilon$  definiert durch (3.1) und  $f \in H^{-1}(\Omega)$ . Dann gilt für die Lösung  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  von (3.2)*

1.  $u^\epsilon \rightharpoonup u^0$  schwach in  $H_0^1(\Omega)$ ,
2.  $A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0$  schwach in  $L^2(\Omega)^n$ ,

wobei  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$  die Lösung des homogenisierten Problems

$$(3.5) \quad \begin{cases} -\text{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{in } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

ist. Dabei ist  $A^0$  eine konstante, elliptische Matrix, die folgendermaßen durch die Lösungen der Zellprobleme bestimmt wird

$$A^0 \xi = \langle -A \nabla \chi_\xi + A \xi \rangle_Y.$$

Ist  $A$  symmetrisch, so auch  $A^0$ .

*Beweis.* Cioranescu und Donato (1999), Theorem 6.1, S. 112 und Corollary 6.10, S. 118.  $\square$

Für die asymptotische Entwicklung erster Ordnung von  $u^\epsilon$  gelten folgende Aussagen.

**Satz 3.6.** *Sei  $u^0 \in H_0^1(\Omega)$  die Lösung des homogenisierten Problems (3.5). Dann gilt für*

$$u_1^\epsilon(x) = u^0(x) - \epsilon \sum_{k=1}^n \chi_k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x) = u^0(x) - \epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \cdot \nabla u^0(x)$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

1. Ist  $\partial\Omega$  Lipschitz-stetig,  $u^0 \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $\chi_k \in W^{1,\infty}(Y)$  so ist

$$\|u^\epsilon - u_1^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\sqrt{\epsilon}).$$

2. Ist  $u^0 \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $\chi_k \in W^{1,\infty}(Y)$ , so folgt

$$\|u^\epsilon - u^0\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon).$$

*Beweis.* 1. Jikov u. a. (1994), S. 28.

2. Jikov u. a. (1994), S. 29, 30. □

### 3.3. Eindimensionaler Fall

Der Beweis der verbesserten  $L^2$ -Konvergenz wird starken Gebrauch von Integraldarstellungen der asymptotischen Entwicklung erster Ordnung  $u_1^\epsilon(x)$  machen. Darum leite ich sie noch mal in geeigneter Form für beliebiges  $f \in H^{-1}(\Omega)$  her.

Sei also  $\Omega = ]x_0, x_1[$  ein offenes Intervall und  $Y = ]0, l[$ . Zunächst möchte ich noch einmal daran erinnern, dass aus dem Sobolevschen Einbettungssatz (Adams und Fournier (2003), Theorem 4.12, S.85) die kompakte Einbettung

$$H^1(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$$

folgt und damit insbesondere  $H^{-1}(\Omega) \supset L^1(\Omega)$  gilt.

Für  $a \in M(\alpha, \beta, Y)$  und  $f \in H^{-1}(\Omega)$  ist folgendes Problem zu lösen

$$(3.7) \quad \begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( a^\epsilon \frac{du^\epsilon}{dx} \right) = f & \text{in } \Omega = ]x_0, x_1[, \\ u^\epsilon = 0 & \text{auf } \partial\Omega = \{x_0, x_1\}. \end{cases}$$

Laut Definition von  $M(\alpha, \beta, Y)$  ist  $a \in L^\infty(Y)$  eine  $l$ -periodische Funktion mit  $0 < \alpha \leq a(y) \leq \beta < \infty$ .

Nach Lemma 1.49 existieren  $f_0, f_1 \in L^2(\Omega)$  mit

$$f = f_0 + \frac{df_1}{dx}.$$

Die schwache Formulierung lautet damit

$$\int_{\Omega} a^\epsilon \frac{du^\epsilon}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_{\Omega} \left( f_0 v - f_1 \frac{dv}{dx} \right) dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt

$$-\frac{d}{dx} \left( a^\epsilon \frac{du^\epsilon}{dx} + f_1 \right) = f_0$$

und per Integration somit

$$\frac{du^\epsilon}{dx} = \frac{1}{a^\epsilon} (-F_0(x) - f_1(x) + c_1),$$

wobei

$$F_0(x) = \int_{x_0}^x f_0 ds$$

und  $c_1$  eine Integrationskonstante ist. Erneutes Integrieren liefert schließlich

$$u^\epsilon(x) = - \int_{x_0}^x \frac{F_0(s)}{a^\epsilon(s)} ds - \int_{x_0}^x \frac{f_1(s)}{a^\epsilon(s)} ds + c_1 \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} + c_2.$$

Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$c_1 = \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{F_0(s)}{a^\epsilon(s)} ds + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(s)}{a^\epsilon(s)} ds \right),$$

$$c_2 = 0.$$

Das Zellproblem für  $\xi = e_1 = 1 \in \mathbb{R}$  lautet

$$\begin{cases} -\frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{d\chi}{dy}(y) \right) = -\frac{da}{dy}(y) \text{ in } Y = ]0, l[, \\ \chi \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle \chi \rangle_Y = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst

$$(3.8) \quad \frac{d\chi}{dy}(y) = 1 + \frac{c_1}{a(y)}$$

und damit

$$\chi(y) = y + \int_0^y \frac{c_1}{a(s)} ds + c_2.$$

Aus  $\chi(0) = \chi(l)$  und  $\langle \chi \rangle_Y = 0$  folgt

$$l + \int_0^l \frac{c_1}{a(s)} ds = 0,$$

$$\frac{1}{l} \left( \frac{l^2}{2} + \int_0^l \int_0^t \frac{c_1}{a(s)} ds dt + lc_2 \right) = 0$$

also

$$c_1 = -l \left( \int_0^l \frac{ds}{a(s)} \right)^{-1},$$

$$c_2 = -\frac{l}{2} - \frac{c_1}{l} \int_0^l \int_0^t \frac{ds}{a(s)} dt$$

$$= -\frac{l}{2} + \left( \int_0^l \frac{ds}{a(s)} \right)^{-1} \int_0^l \int_0^t \frac{ds}{a(s)} dt.$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

Einsetzen ergibt für die Lösung des Zellproblems

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \chi(y) &= \left(y - \frac{l}{2}\right) + l \left(\int_0^l \frac{ds}{a(s)}\right)^{-1} \left(\frac{1}{l} \int_0^l \int_0^t \frac{ds}{a(s)} dt - \int_0^y \frac{ds}{a(s)}\right) \\ &= \left(y - \frac{l}{2}\right) + l \left(\int_0^l \frac{ds}{a(s)}\right)^{-1} (\langle A \rangle_Y - A(y)), \end{aligned}$$

wobei

$$A(y) = \int_0^y \frac{ds}{a(s)}.$$

Andererseits erhält man durch einsetzen von  $c_1$  in (3.8)

$$-a(y) \frac{d\chi}{dy}(y) + a(y) = -c_1 = l \left(\int_0^l \frac{ds}{a(s)}\right)^{-1},$$

woraus für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten nach Satz 3.4 folgt

$$(3.10) \quad a^0 = \left\langle -a(y) \frac{d\chi}{dy}(y) + a(y) \right\rangle_Y = l \left(\int_0^l \frac{ds}{a(s)}\right)^{-1}.$$

Als homogenisiertes Problem ergibt sich

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a^0 \frac{du^0}{dx}\right) = f & \text{in } \Omega = ]x_0, x_1[, \\ u^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega = \{x_0, x_1\}. \end{cases}$$

Dessen Lösung lautet analog zu Problem (3.7)

$$u^0(x) = - \int_{x_0}^x \frac{F_0(s)}{a^0} ds - \int_{x_0}^x \frac{f_1(s)}{a^0} ds + c_1 \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^0} + c_2$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &= \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^0}\right)^{-1} \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{F_0(s)}{a^0} ds + \int_{x_0}^{x_1} \frac{f_1(s)}{a^0} ds\right), \\ &= \frac{1}{x_1 - x_0} \left(\int_{x_0}^{x_1} F_0(s) ds + \int_{x_0}^{x_1} f_1(s) ds\right) \\ &= \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Mit Einsetzen der Integrationskonstanten folgt

$$\begin{aligned} u^0(x) &= - \int_{x_0}^x \frac{F_0(s)}{a^0} ds - \int_{x_0}^x \frac{f_1(s)}{a^0} ds + \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega \frac{x - x_0}{a^0} \\ &= -\frac{1}{a^0} \left(\int_{x_0}^x (F_0(s) + f_1(s)) ds - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega (x - x_0)\right). \end{aligned}$$

Für die asymptotische Entwicklung erster Ordnung von  $u^\epsilon$  benötigt man nun nur noch die erste Ableitung von  $u^0$ :

$$\frac{du^0}{dx}(x) = -\frac{1}{a^0} (F_0(x) + f_1(x) - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega).$$

Es folgt mit (3.9) und (3.10)

$$\begin{aligned} u_1^\epsilon(x) &= u^0(x) - \epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{du^0}{dx}(x) \\ &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x (F_0(s) + f_1(s)) ds + \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega (x - x_0) + \right. \\ &\quad \left. \epsilon \left( \left( \frac{x}{\epsilon} - \frac{l}{2} \right) + a^0 \left( \langle A \rangle_Y - A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right) \right) (F_0(x) + f_1(x) - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega) \right] \\ &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x (F_0(s) + f_1(s)) ds - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega x_0 + x(F_0(x) + f_1(x)) + \right. \\ &\quad \left. \epsilon a^0 \left( \langle A \rangle_Y - A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{l}{2a^0} \right) (F_0(x) + f_1(x) - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega) \right] \\ &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x (F_0(s) + f_1(s)) ds - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega x_0 + x(F_0(x) + f_1(x)) \right] + \\ &\quad \epsilon \left( \langle A \rangle_Y - A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{l}{2a^0} \right) (F_0(x) + f_1(x) - \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega) \\ &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x (F_0(s) + f_1(s)) ds + \langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega (x - x_0) \right] + \\ &\quad \epsilon \left[ \left( A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{a^0} \frac{x}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] (\langle F_0 + f_1 \rangle_\Omega - (F_0(x) + f_1(x))). \end{aligned}$$

### 3.4. Verbesserte $L^2$ -Konvergenz

Da  $u^\epsilon$  und  $u^0$  die selben Randbedingungen erfüllen, ist es offensichtlich, dass die asymptotische Entwicklung erster Ordnung  $u_1^\epsilon$  von  $u^\epsilon$  im Allgemeinen kein Element von  $H_0^1(\Omega)$  ist. Eine Konsequenz hiervon ist die (im Vergleich zum symmetrischen Fall) niedrigere Konvergenzordnung von  $u^\epsilon - u_1^\epsilon$  bzgl.  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ . Die nahe liegende Korrektur von  $u_1^\epsilon$  ist die Lösung von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla v^\epsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ v^\epsilon = u_1^\epsilon = -\epsilon \sum_{k=1}^n \chi_k\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Die numerische Bestimmung von  $v^\epsilon$  ist allerdings genauso aufwendig wie das Originalproblem (3.2). Daher ersetze ich im Korrekturproblem den Diffusionskoeffizienten  $A^\epsilon$  durch den homogenisierten Diffusionskoeffizienten  $A^0$ , s. d. zur numerischen Berechnung

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

der Korrekturlösung ein lokal (nahe am Rand) verfeinertes Gitter genügt

$$(3.11) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla v_0^\epsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ v_0^\epsilon = u_1^\epsilon = -\epsilon \sum_{k=1}^n \chi_k \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{\partial u^0}{\partial x_k}(x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Im folgenden werde ich im eindimensionalen Fall eine verbesserte  $L^2$ -Konvergenz von  $\tilde{u}_1^\epsilon := u_1^\epsilon - v_0^\epsilon$  unter geeigneten Voraussetzungen an  $f$  nachweisen.

*Bemerkung.* Falls  $\Omega$  sich aus Elementarzellen zusammensetzt und  $A$  symmetrisch ist, gilt  $v_0^\epsilon \equiv 0$  (Neuss u. a. (2001), Corollary 2.4, S. 5), d. h. bereits die asymptotische Entwicklung erster Ordnung weist in diesem Fall die verbesserte  $L^2$ -Konvergenzordnung auf.

Sei  $f \in L^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ . Dann ist  $F : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f \, ds$$

eine absolut stetige Funktion auf  $\Omega = ]x_0, x_1[$  mit  $\frac{dF}{dx} = f$  (fast überall in  $\Omega$ ). Als asymptotische Entwicklung erster Ordnung ergibt sich

$$u_1^\epsilon(x) = \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x F(s) \, ds + \langle F \rangle_\Omega (x - x_0) \right] + \epsilon \left[ \left( A \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \frac{1}{a^0} \frac{x}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] (\langle F \rangle_\Omega - F(x)).$$

Das Korrekturproblem (3.11) im eindimensionalen Fall lautet

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( a^0 \frac{dv_0^\epsilon}{dx} \right) = 0 & \text{in } \Omega = ]x_0, x_1[, \\ v_0^\epsilon = u_1^\epsilon = -\epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du^0}{dx}(x) & \text{auf } \partial\Omega = \{x_0, x_1\}. \end{cases}$$

Wegen

$$u_1^\epsilon(x_0) = \epsilon \left[ \left( A \left( \frac{x_0}{\epsilon} \right) - \frac{1}{a^0} \frac{x_0}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] \langle F \rangle_\Omega,$$

$$u_1^\epsilon(x_1) = \epsilon \left[ \left( A \left( \frac{x_1}{\epsilon} \right) - \frac{1}{a^0} \frac{x_1}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] (\langle F \rangle_\Omega - \langle f \rangle_\Omega (x_1 - x_0))$$

folgt

$$v_0^\epsilon(x) = \epsilon \left[ \left( A \left( \frac{x_0}{\epsilon} \right) - \frac{1}{a^0} \frac{x_0}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] \langle F \rangle_\Omega \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + \epsilon \left[ \left( A \left( \frac{x_1}{\epsilon} \right) - \frac{1}{a^0} \frac{x_1}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \right] (\langle F \rangle_\Omega - \langle f \rangle_\Omega (x_1 - x_0)) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

An dieser Stelle sollte folgendes beachtet werden: Da  $A(y) - y/a^0$  eine  $l$ -periodische Funktion ist, gilt laut Cioranescu und Donato (1999), Theorem 2.6, S. 33,

$$A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{a^0} \frac{x}{\epsilon} \rightharpoonup \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \text{ schwach* in } L^\infty(\mathbb{R}).$$

Also gilt für die durch

$$h(y) = \left(A(y) - \frac{y}{a^0}\right) - \left(\langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0}\right)$$

definierte  $l$ -periodische Funktion  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$

$$h^\epsilon \rightharpoonup \langle h \rangle_Y = 0 \text{ schwach* in } L^\infty(\mathbb{R}).$$

Einsetzen ergibt für die korrigierte asymptotische Entwicklung erster Ordnung

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^\epsilon = u_1^\epsilon - v_0^\epsilon &= \frac{1}{a^0} \left[ - \int_{x_0}^x F(s) ds + \langle F \rangle_\Omega (x - x_0) \right] + \epsilon \left[ h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - F(x)) - \right. \\ &\quad \left. h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \langle F \rangle_\Omega \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} - h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - \langle f \rangle_\Omega (x_1 - x_0)) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right] \end{aligned}$$

Für das Ausgangsproblem (3.7) gilt (falls  $f \in L^1(\Omega)$ )

$$u^\epsilon(x) = - \int_{x_0}^x \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds + \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds \right) \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)}.$$

Zunächst ergibt die Parametertransformation  $t = \frac{s}{\epsilon}$  für  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} &= \epsilon \int_{\frac{x_0}{\epsilon}}^{\frac{x}{\epsilon}} \frac{dt}{a(t)} = \epsilon \left[ A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - A\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right] = \epsilon \left[ \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) + \frac{1}{a^0} \frac{x - x_0}{\epsilon} \right] \\ &= \frac{x - x_0}{a^0} + \epsilon \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right). \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \frac{x - x_0}{a^0}, \\ A_1^\epsilon(x) &= h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

gilt dann

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \\
&= \frac{A_0(x) + \epsilon A_1^\epsilon(x)}{A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1)} \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \frac{A_0(x) + \epsilon A_1^\epsilon(x)}{A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1)} - \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \frac{A_0(x_1)(A_0(x) + \epsilon A_1^\epsilon(x)) - A_0(x)(A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1))}{A_0(x_1)(A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1))} \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \frac{\epsilon}{A_0(x_1)} \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1)} \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \frac{\epsilon}{A_0(x_1)} \left[ \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)} + \right. \\
&\quad \left. \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1)} - \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)} \right] \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \frac{\epsilon}{A_0(x_1)} \left[ \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)} - \right. \\
&\quad \left. \epsilon \frac{A_1^\epsilon(x_1)(A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1))}{A_0(x_1)(A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1))} \right] \\
&= \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \epsilon \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)^2} - \epsilon^2 \frac{A_1^\epsilon(x_1)(A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1))}{A_0(x_1)^2(A_0(x_1) + \epsilon A_1^\epsilon(x_1))}.
\end{aligned}$$

Weil  $h$  als stetige  $l$ -periodische Funktion auf  $\mathbb{R}$  beschränkt ist, gilt dies auch für  $A_1^\epsilon$ . Da außerdem  $A_0$  auf  $\Omega$  durch  $(x_1 - x_0)/a^0$  beschränkt ist, ergibt sich für  $x \in \Omega$

$$\left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} = \frac{A_0(x)}{A_0(x_1)} + \epsilon \frac{A_0(x_1)A_1^\epsilon(x) - A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)^2} + O(\epsilon^2).$$

Dabei ist der Term  $O(\epsilon^2)$  unabhängig von  $x \in \Omega$ . Durch Einsetzen der Definitionen von  $A_0$  und  $A_1^\epsilon$  erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
\left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \epsilon \left[ \frac{A_1^\epsilon(x)}{A_0(x_1)} - \frac{A_0(x)A_1^\epsilon(x_1)}{A_0(x_1)^2} \right] + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \epsilon \left[ \frac{a^0}{x_1 - x_0} \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{a^0}{x_1 - x_0} \left( h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) \right] + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Partielle Integration absolut stetiger Funktionen (Saks (1937), Theorem 14.8, S. 104)

liefert einerseits

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds &= \left[ F(s) \int_0^s \frac{dt}{a^\epsilon(t)} \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \left( f(s) \int_0^s \frac{dt}{a^\epsilon(t)} \right) ds \\ &= F(x) \int_0^x \frac{dt}{a^\epsilon(t)} - \epsilon \int_{x_0}^x f(s) A\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \\ &= \epsilon F(x) A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \epsilon \int_{x_0}^x f(s) A\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \end{aligned}$$

und andererseits

$$\int_{x_0}^x F(s) ds = [F(s)s]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x f(s)s ds = xF(x) - \int_{x_0}^x f(s)s ds.$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^x \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds - \frac{1}{a^0} \int_{x_0}^x F(s) ds \\ &= \epsilon F(x) \left( A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{a^0} \frac{x}{\epsilon} \right) - \epsilon \int_{x_0}^x f(s) \left( A\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \frac{1}{a^0} \frac{s}{\epsilon} \right) ds \\ &= \epsilon \left( F(x) h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right) \end{aligned}$$

und damit insbesondere

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds - \frac{1}{a^0} \int_{x_0}^{x_1} F(s) ds = \epsilon \left( F(x_1) h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) - \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right),$$

also

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds = \frac{x_1 - x_0}{a^0} \langle F \rangle_\Omega + \epsilon \left( h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \langle f \rangle_\Omega (x_1 - x_0) - \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right).$$

Hieraus wiederum folgt

$$\begin{aligned} &\left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds \right) \int_{x_0}^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \\ &= \frac{x - x_0}{a^0} \langle F \rangle_\Omega + \epsilon \left[ \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) \langle F \rangle_\Omega - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \left( h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) - h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) \langle F \rangle_\Omega + \right. \\ &\quad \left. h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \langle f \rangle_\Omega (x - x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2) \\ &= \frac{x - x_0}{a^0} \langle F \rangle_\Omega + \epsilon \left[ \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) \langle F \rangle_\Omega + \right. \\ &\quad \left. h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \langle f \rangle_\Omega (x - x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

Für das Ausgangsproblem (3.7) impliziert dies

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) &= -\frac{1}{a^0} \int_{x_0}^x F(s) ds + \epsilon \left[ \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - F(x) h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \right] + \frac{x-x_0}{a^0} \langle F \rangle_\Omega + \\
&\quad \epsilon \left[ \left( h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) - \frac{x_1-x}{x_1-x_0} h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \right) \langle F \rangle_\Omega + \right. \\
&\quad \left. h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) \langle f \rangle_\Omega (x-x_0) - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2) \\
&= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_{x_0}^x F(s) ds + \langle F \rangle_\Omega (x-x_0) \right] + \epsilon \left[ h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - F(x)) - \right. \\
&\quad \left. \frac{x-x_0}{x_1-x_0} h\left(\frac{x_1}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - \langle f \rangle_\Omega (x_1-x_0)) - \frac{x_1-x}{x_1-x_0} h\left(\frac{x_0}{\epsilon}\right) \langle F \rangle_\Omega \right] + \\
&\quad \epsilon \left[ \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

$$u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x) = \epsilon \left[ \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2).$$

Aus  $h^\epsilon \rightharpoonup \langle h \rangle_Y = 0$  schwach\* in  $L^\infty(\mathbb{R})$  folgt per Definition

$$(3.12) \quad \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \rightarrow 0$$

für alle  $x \in \bar{\Omega}$ . Die Höldersche Ungleichung impliziert

$$\left| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

und daher folgt mit dem Satz von Lebesgue für  $1 \leq p < \infty$

$$\left\| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right\|_{L^p(\Omega)} &= \left\| \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right\| \left\| \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq (x_1-x_0) \left| \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

folgt für  $1 \leq p < \infty$

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} = o(\epsilon).$$

*Bemerkung.* Aussage (3.12) ist im Wesentlichen nur das klassische Lemma von Riemann-Lebesgue (Rudin (1999), S.125).

Ist  $f \in H^1(\Omega)$ , so liefert partielle Integration (siehe Cioranescu und Donato (1999), Theorem 3.33, S. 51, mit

$$H(y) = \int_0^y h(s) ds$$

für  $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} & |u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x)| \\ & \leq \epsilon \left| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + O(\epsilon^2) \\ & = \epsilon^2 \left| \left[ f(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \right]_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{df}{dx}(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \right. \\ & \quad \left. \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \left( \left[ f(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx}(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right) \right| + O(\epsilon^2) \\ & \leq \epsilon^2 \left( (|f(x)| + 2|f(x_0)| + |f(x_1)|) \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2 \left\| \frac{df}{dx} \right\|_{L^1(\Omega)} \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) + O(\epsilon^2) \\ & = \epsilon^2 \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( |f(x)| + 2|f(x_0)| + |f(x_1)| + 2 \left\| \frac{df}{dx} \right\|_{L^1(\Omega)} \right) + O(\epsilon^2) \\ & = \epsilon^2 \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |f(x)| + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

wobei  $O(\epsilon^2)$  von  $f$  abhängig ist ( $H \in L^\infty(\mathbb{R})$ , da  $\langle h \rangle_Y = 0$ ).

Damit folgt für  $f \in H^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon^2 \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|f\|_{L^p(\Omega)} + O(\epsilon^2),$$

d. h.

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

Aus  $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega)$  (Sobolevscher Einbettungssatz) folgt für alle  $f \in H^1(\Omega)$

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

Als nächstes betrachte ich den Fall, dass  $f$  eine Treppenfunktion ist

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{]z_{k-1}, z_k[},$$

wobei  $x_0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = x_1$ . Dann gilt für alle  $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| &= \left| \sum_{k=1}^N c_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| \\ &= \left| \epsilon \sum_{k=1}^N c_k \int_{\frac{z_{k-1}}{\epsilon}}^{\frac{z_k}{\epsilon}} h(t) dt \right| \\ &\leq 2\epsilon \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^N |c_k| \end{aligned}$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

und somit

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

Abschließend sei  $f$  stückweise  $H^1$ -Funktion, d. h.

$$f = \sum_{k=1}^N f_k \chi_{]z_{k-1}, z_k[},$$

mit  $f_k \in H^1(\Omega_k)$ ,  $\Omega_k := ]z_{k-1}, z_k[$  und  $x_0 = z_0 < z_1 < \dots < z_N = x_1$ . Dann gilt nach eventuellem Hinzufügen der Sprungstelle  $x \in \Omega$ , also  $z_i = x$  für ein  $i \in \{0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} |u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x)| &\leq \epsilon \left| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + O(\epsilon^2) \\ &\leq \epsilon \left| \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + \epsilon \left| \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + O(\epsilon^2) \\ &\leq \epsilon \sum_{k=1}^i \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_k(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + \epsilon \sum_{k=1}^N \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} f_k(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + O(\epsilon^2) \\ &\leq 2\epsilon^2 \sum_{k=1}^N \left| \left[ f_k(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \right]_{z_{k-1}}^{z_k} - \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{df_k}{dx}(s) H\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right| + O(\epsilon^2) \\ &\leq 2\epsilon^2 \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \sum_{k=1}^N (|f_k(z_{k-1})| + |f_k(z_k)|) + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{df_k}{dx} \right\|_{L^1(\Omega_k)} \right) + O(\epsilon^2) \\ &\leq 4N\epsilon^2 \|H\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \|f_i\|_{L^\infty(\Omega)} + O(\epsilon^2), \end{aligned}$$

wobei der Term  $O(\epsilon^2)$  unabhängig von  $x = z_i$  ist. Es folgt

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

**Satz 3.13.** *Ist  $f \in L^1(\Omega)$ , so gilt für die korrigierte asymptotische Entwicklung erster Ordnung  $\tilde{u}_1^\epsilon$  von  $u^\epsilon$*

$$u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x) = \epsilon \left[ \int_{x_0}^x f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} f(s) h\left(\frac{s}{\epsilon}\right) ds \right] + O(\epsilon^2).$$

mit

$$\begin{aligned} h(y) &= \left( A(y) - \frac{y}{a^0} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) \\ &= \left( \int_0^y \frac{ds}{a(s)} - \frac{y}{a^0} \right) - \left( \frac{1}{l} \int_0^l \int_0^y \frac{ds}{a(s)} dy - \frac{l}{2a^0} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} = o(\epsilon)$$

für jedes  $1 \leq p < \infty$ .

Für stückweise  $H^1$ -Funktionen  $f$  (und damit insbesondere für Treppenfunktionen) gilt sogar

$$\|u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

### 3.5. Beispiel

In diesem Abschnitt überprüfe ich exemplarisch an einem Beispiel, dass die Korrektur der asymptotischen Entwicklung erster Ordnung  $u_1^\epsilon$  notwendig ist, um die in Satz 3.13 bewiesene quadratische Konvergenz zu erhalten.

**Beispiel.** Sei  $\Omega = Y = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ ,  $f \equiv \lambda \in \mathbb{R}$  und

$$a(y) = \frac{1}{2 + \sin(2\pi y)}.$$

Dann gilt für die Lösung  $u^\epsilon$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(s) ds = \lambda x, \\ \langle F \rangle_\Omega &= \frac{\lambda}{2}, \\ u^\epsilon(x) &= - \int_0^x \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds + \left( \int_0^1 \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \right)^{-1} \left( \int_0^1 \frac{F(s)}{a^\epsilon(s)} ds \right) \int_0^x \frac{ds}{a^\epsilon(s)} \\ &= - \lambda x^2 - \lambda \frac{\epsilon}{4\pi^2} \left( -2\pi x \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) + \epsilon \sin\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) \right) + \\ &\quad \lambda \frac{\left(4\pi^2 - 2\pi\epsilon \cos\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right)\right) \left(2\pi x + \epsilon \sin^2\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right)\right)}{4\pi^2 \left(2\pi + \epsilon \sin^2\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)\right)} \end{aligned}$$

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

und für die Näherungslösungen

$$\begin{aligned}
\langle f \rangle_\Omega &= \lambda, \\
A(y) &= \int_0^y \frac{ds}{a(s)} = 2y + \frac{\sin^2(\pi y)}{\pi}, \\
\langle A \rangle_Y &= \int_0^1 \int_0^y \frac{ds}{a(s)} dy = 1 + \frac{1}{2\pi}, \\
a^0 &= \left( \int_0^1 \frac{ds}{a(s)} \right)^{-1} = \frac{1}{2}, \\
h(y) &= \left( A(y) - \frac{y}{a^0} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{l}{2a^0} \right) = \frac{\sin^2(\pi y)}{\pi} - \frac{1}{2\pi} = -\frac{\cos(2\pi y)}{2\pi}, \\
u^0(x) &= -\frac{1}{a^0} \left( \int_0^x F(s) ds - \langle F \rangle_\Omega x \right) = -2 \left( \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{\lambda}{2} x \right) = \lambda(x - x^2), \\
u_1^\epsilon(x) &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_0^x F(s) ds + \langle F \rangle_\Omega x \right] + \\
&\quad \epsilon \left[ \left( A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \frac{1}{a^0} \frac{x}{\epsilon} \right) - \left( \langle A \rangle_Y - \frac{1}{2a^0} \right) \right] (\langle F \rangle_\Omega - F(x)) \\
&= \lambda(x - x^2) + \epsilon \left( \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right)}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \right) \left( \frac{\lambda}{2} - \lambda x \right) \\
&= \lambda(x - x^2) + \epsilon \lambda \frac{x - \frac{1}{2}}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right), \\
\tilde{u}_1^\epsilon(x) &= \frac{1}{a^0} \left[ -\int_0^x F(s) ds + \langle F \rangle_\Omega x \right] + \epsilon \left[ h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - F(x)) - \right. \\
&\quad \left. h\left(\frac{0}{\epsilon}\right) \langle F \rangle_\Omega (1 - x) - h\left(\frac{1}{\epsilon}\right) (\langle F \rangle_\Omega - \langle f \rangle_\Omega) x \right] \\
&= \lambda(x - x^2) + \epsilon \left[ \lambda \frac{x - \frac{1}{2}}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) + \frac{\lambda}{4\pi} (1 - x) + \frac{\lambda}{4\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{\epsilon}\right) x \right].
\end{aligned}$$

Es folgt für die Fehler, falls  $\epsilon = \frac{1}{N}$  ist.

$$\begin{aligned}
u^\epsilon(x) - u^0(x) &= \epsilon \lambda \sin\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right) \frac{2\pi(1 - 2x) - \epsilon(2 \cos\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{\epsilon}\right))}{4\pi^2}, \\
u^\epsilon(x) - u_1^\epsilon(x) &= \epsilon \lambda \frac{2\pi(1 - 2x) - \epsilon(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) + 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right))}{8\pi^2}, \\
u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x) &= -\epsilon^2 \lambda \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right) - 2 \sin\left(\frac{2\pi x}{\epsilon}\right)}{8\pi^2}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon(x) - u^0(x)\|_{L^\infty} &= O(\epsilon), \\ \|u^\epsilon(x) - u_1^\epsilon(x)\|_{L^\infty} &= O(\epsilon), \\ \|u^\epsilon(x) - \tilde{u}_1^\epsilon(x)\|_{L^\infty} &= O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

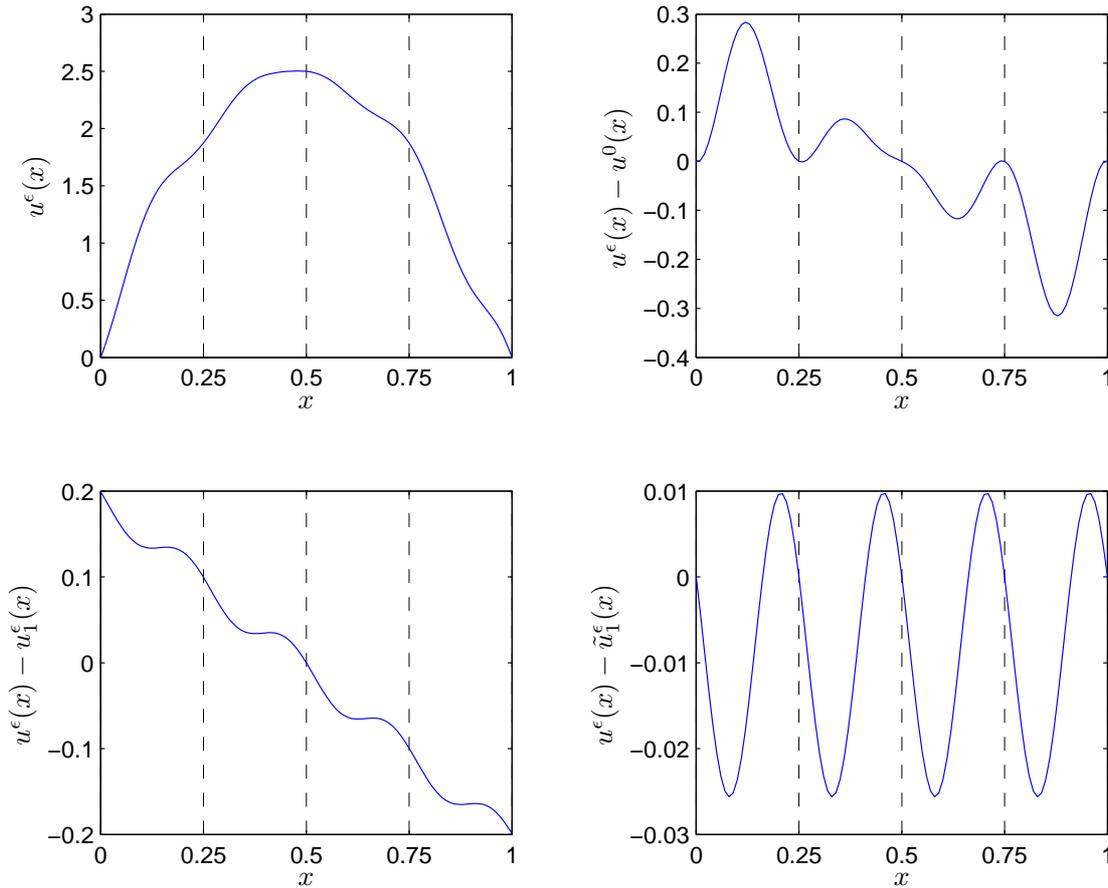


Abbildung 3.1.: Analytische Lösung und Approximationsfehler bei geschichteten Medien für  $\epsilon = 1/4$ .

Die Abbildung 3.1 macht noch einmal deutlich, dass die Größenordnung des Fehlers (bzgl. der  $L^\infty$ -Norm) der homogenisierten Lösung  $u^0$  durch Hinzunahme des Terms erster Ordnung nicht verkleinert wird und außerdem die Randbedingungen verletzt werden. Erst die Lösung des Korrekturproblems (3.11) sorgt dafür, dass die Größenordnung des Fehlers gesenkt wird.

### 3. Homogenisierung elliptischer Differentialgleichungen

*Bemerkung.* Die Konvergenzordnung der  $H^1$ -Norm des Fehlers wird durch die Korrektur (im Allgemeinen) nicht beeinflusst.

**Teil II.**  
**Numerik**



## 4. Finite Elemente

Nachdem im ersten Teil der Arbeit ausschließlich analytische Untersuchungen gemacht wurden, sollen diese im Folgenden numerisch überprüft werden. Das Mittel der Wahl dazu sind Finite Elemente. Während Finite Elemente zur Lösung von Dirichletproblemen in fast jedem Buch über Numerik partieller Differentialgleichungen behandelt werden, konnte ich für periodische Randbedingungen keine adäquate Quelle auftreiben.

Mein Ansatz (den bestimmt auch schon andere verfolgt haben) beruht auf „periodischen“ Zerlegungen, bei denen die Interpolation einer periodischen Funktion selbst wieder periodisch ist.

Beim Implementieren der periodischen Randbedingungen ist die Vorstellung, dass man eigentlich gar keine Randbedingungen hat und stattdessen das Problem auf dem Torus betrachtet, sehr hilfreich.

Zunächst sei an die klassische Definition Finiter Elemente erinnert (siehe Ciarlet (1978), §2.3, S. 78ff).

**Definition 4.1.** Ein *Finites Element* ist ein Tripel  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist eine abgeschlossene beschränkte Menge mit  $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$  und stückweise glattem Rand.
2.  $\mathcal{P}$  ist ein endlich dimensionaler Funktionenraum auf  $K$ . Die Elemente von  $\mathcal{P}$  heißen *Formfunktionen* (engl. *shape functions*).
3.  $\mathcal{N}$  ist eine Basis des Dualraums  $\mathcal{P}'$  von  $\mathcal{P}$ . Die Elemente von  $\mathcal{N}$  heißen *Knotenvariablen* (engl. *nodal variables*) und liegen im Dualraum eines größeren Funktionsraumes.

**Definition 4.2.** Sei  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  ein Finites Element. Die zu  $\mathcal{N}$  duale Basis von  $\mathcal{P}$  heißt *nodale Basis* (engl. *node basis*) von  $\mathcal{P}$

Die 3. Bedingung von Definition 4.1 kann auch folgendermaßen formuliert werden.

**Lemma 4.3.** Sei  $\mathcal{P}$  ein endlich dimensionaler Vektorraum und  $\mathcal{N}$  eine Teilmenge des Dualraumes  $\mathcal{P}'$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $\mathcal{N}$  ist eine Basis von  $\mathcal{P}'$ .
2.  $N(\varphi) = 0$  für alle  $N \in \mathcal{N}$  impliziert  $\varphi = 0$ .

*Beweis.* Brenner und Scott (2002), Lemma 3.1.4, S.70. □

#### 4. Finite Elemente

*Bemerkung.* Da die Elemente von  $\mathcal{N}$  in der Regel Auswertungen von Funktionen und ihrer Ableitungen in Punkten von  $K$  sind, bezeichnet man die Knotenvariablen auch als verallgemeinerte Interpolationsbedingungen.

Werden ausschließlich Funktionsauswertungen verwendet, so spricht man von einem *Lagrange Element*.

Im Rahmen dieser Arbeit wird  $\mathcal{P}$  stets einer der folgenden Polynomräume sein.

**Definition 4.4.**  $\mathcal{P}_k^n$  bezeichnet die Menge aller Polynome in  $n$  Variablen vom Grad  $\leq k$

$$\mathcal{P}_k^n = \left\{ P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha x^\alpha \right\}.$$

Das  $n$ -fache Tensorprodukt von  $\mathcal{P}_k^1$  mit sich selbst wird mit  $\mathcal{Q}_k^n$  bezeichnet

$$\mathcal{Q}_k^n = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{P}_k^1 = \left\{ Q(x) = \sum_{\alpha_i \leq k} c_\alpha x^\alpha \right\}.$$

#### 4.1. Dreieckelemente

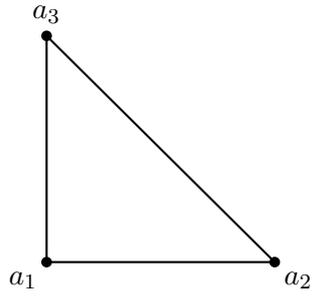
**Definition 4.5.** Die konvexe Hülle  $K$  von  $n + 1$  Punkten  $a_i \in \mathbb{R}^n$ , welche nicht in einer Hyperebene des  $\mathbb{R}^n$  liegen, heißt *n-Simplex*

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Die Punkte  $a_i$  heißen *Ecken* des  $n$ -Simplex  $K$ . Für  $0 \leq m \leq n$  ist eine *m-Fläche* des  $n$ -Simplex  $K$  ein  $m$ -Simplex, dessen  $(m + 1)$  Ecken auch Ecken von  $K$  sind. Insbesondere heißt ein  $(n - 1)$ -Simplex *Seite* und ein 1-Simplex *Kante* des  $n$ -Simplex  $K$ .

Für ein  $n$ -Simplex  $K \subset \mathbb{R}^n$  werde ich die Dreieckelemente aus Tabelle 4.1 benutzen. Dabei steht  $\bullet$  für die Vorgabe des Funktionswertes und  $\odot$  für die Vorgabe des Funktionswertes und des Gradienten. Des Weiteren seien

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2}(a_i + a_j), \quad 1 \leq i < j \leq n + 1, \\ a_{iij} &= \frac{1}{3}(2a_i + a_j), \quad i \neq j, \\ a_{ijk} &= \frac{1}{3}(a_i + a_j + a_k), \quad i < j < k. \end{aligned}$$

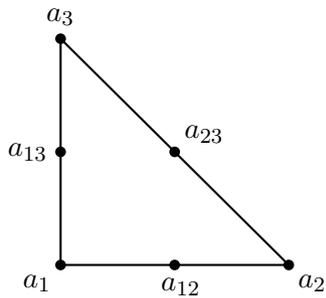


Lineares Dreieckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = n + 1,$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a_i) | 1 \leq i \leq n + 1\}$$

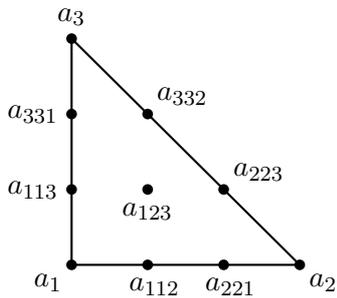


Quadratisches Dreieckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_2^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2},$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a) | a \in \{a_i | 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i < j \leq n + 1\}\}$$



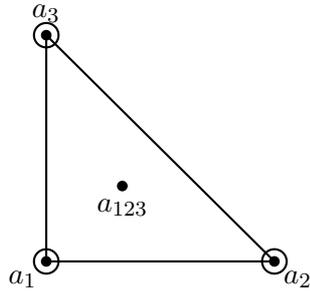
Kubisches Dreieckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_3^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{6},$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a) | a \in \{a_i | 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n + 1, i \neq j\} \cup \{a_{ijk} | 1 \leq i < j < k \leq n + 1\}\}$$

Tabelle 4.1.: Darstellung der verwendeten Dreieckelemente.



Hermitesches Dreieckelement

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}_3^n, \\ \dim \mathcal{P} &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}, \\ \mathcal{N} &= \{P \mapsto P(a) \mid a \in \{a_i \mid 1 \leq i \leq n+1\} \\ &\quad \cup \{a_{ijk} \mid 1 \leq i < j < k \leq n+1\}\} \\ &\quad \cup \{P \mapsto \partial_j P(a) \mid 1 \leq j \leq n, \\ &\quad \quad \{a \in \{a_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}\}\} \end{aligned}$$

Tabelle 4.1.: Darstellung der verwendeten Dreieckelemente.

## 4.2. Rechteckelemente

**Definition 4.6.** Ein  $n$ -Rechteck  $K \subset \mathbb{R}^n$  oder Rechteck für  $n = 2$  ist eine Menge der Form

$$K = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n\}.$$

Eine Seite von  $K$  ist eine der Mengen

$$\{a_j\} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [a_i, b_i], \quad 1 \leq j \leq n,$$

oder

$$\{b_j\} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [a_i, b_i], \quad 1 \leq j \leq n.$$

Als Kanten bezeichnet man die Mengen

$$[a_j, b_j] \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \{a_i\}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

und

$$[a_j, b_j] \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \{b_i\}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

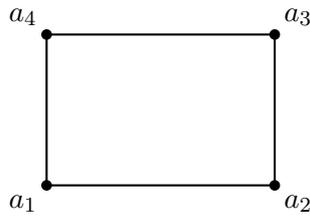
Für ein  $n$ -Rechteck  $K \subset \mathbb{R}^n$  bzw. Rechteck  $K \subset \mathbb{R}^2$  im Falle des Bogner-Fox-Schmitt Elements werde ich die Finiten Elemente aus Tabelle 4.2 benutzen. Dabei steht  $\bullet$  für die

Vorgabe des Funktionswertes und  $\odot$  für die Vorgabe des Funktionswertes, der ersten Ableitungen und der gemischten zweiten Ableitung. Des Weiteren werden die Punkt-  
mengen

$$\tilde{M}_k^n = \left\{ x = \left( \frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \dots, \frac{i_n}{k} \right) \in \mathbb{R}^n \mid i_j \in \{0, 1, \dots, k\} \right\},$$

$$M_k^n = F_K(\tilde{M}_k^n),$$

benutzt, wobei  $F_K$  eine Abbildung der Form  $F_K(x) = D_K x + b_K$  mit einer Diagonalmatrix  $D_K$  und einem Vektor  $b_K \in \mathbb{R}^n$  ist, s. d.  $K = F_K([0, 1]^n)$ .

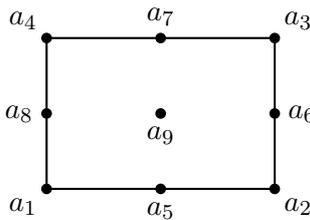


Bilineares Rechteckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = 2^n,$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a) \mid a \in M_1^n\}$$

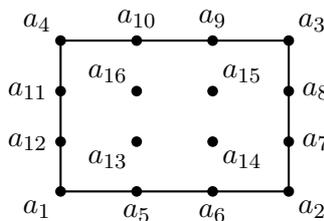


Biquadratisches Rechteckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_2^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = 3^n,$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a) \mid a \in M_2^n\}$$



Bikubisches Rechteckelement

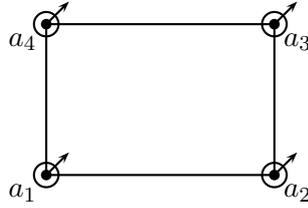
$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_3^n,$$

$$\dim \mathcal{P} = 4^n,$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a) \mid a \in M_3^n\}$$

Tabelle 4.2.: Darstellung der verwendeten Rechteckelemente.

#### 4. Finite Elemente



Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelement

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q}_3^2,$$

$$\dim \mathcal{P} = 16,$$

$$\mathcal{N} = \{P \mapsto P(a), \\ P \mapsto \partial_1 P(a), P \mapsto \partial_2 P(a), \\ P \mapsto \partial_{12} P(a) \mid a \in M_1^2\}$$

Tabelle 4.2.: Darstellung der verwendeten Rechteckelemente.

Die von mir für die numerischen Ergebnisse des nächsten Abschnitts verwendete C++-Bibliothek `getfem++`<sup>1</sup> unterstützt bis auf das Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelement bereits sämtliche Finiten Elemente aus den Tabellen 4.1 und 4.2. Bei der Erweiterung von `getfem++` um eben dieses Finite Element musste ich im Wesentlichen nur eine duale Basis der Knotenvariablen angeben. Mittels elementarer Rechnungen erhielt ich folgende Formfunktionen als duale Basis von  $\mathcal{N}$  auf dem Einheitsquadrat  $K = [0, 1]^2$ .

$$p_1(x, y) = 1 - 3x^2 + 2x^3 - 3y^2 + 9x^2y^2 - 6x^3y^2 + 2y^3 - 6x^2y^3 + 4x^3y^3$$

$$p_2(x, y) = 3x^2 - 2x^3 - 9x^2y^2 + 6x^3y^2 + 6x^2y^3 - 4x^3y^3$$

$$p_3(x, y) = 9x^2y^2 - 6x^3y^2 - 6x^2y^3 + 4x^3y^3$$

$$p_4(x, y) = 3y^2 - 9x^2y^2 + 6x^3y^2 - 2y^3 + 6x^2y^3 - 4x^3y^3$$

$$p_5(x, y) = x - 2x^2 + x^3 - 3xy^2 + 6x^2y^2 - 3x^3y^2 + 2xy^3 - 4x^2y^3 + 2x^3y^3$$

$$p_6(x, y) = -x^2 + x^3 + 3x^2y^2 - 3x^3y^2 - 2x^2y^3 + 2x^3y^3$$

$$p_7(x, y) = -3x^2y^2 + 3x^3y^2 + 2x^2y^3 - 2x^3y^3$$

$$p_8(x, y) = 3xy^2 - 6x^2y^2 + 3x^3y^2 - 2xy^3 + 4x^2y^3 - 2x^3y^3$$

$$p_9(x, y) = y - 3x^2y + 2x^3y - 2y^2 + 6x^2y^2 - 4x^3y^2 + y^3 - 3x^2y^3 + 2x^3y^3$$

$$p_{10}(x, y) = 3x^2y - 2x^3y - 6x^2y^2 + 4x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2x^3y^3$$

$$p_{11}(x, y) = -3x^2y^2 + 2x^3y^2 + 3x^2y^3 - 2x^3y^3$$

$$p_{12}(x, y) = -y^2 + 3x^2y^2 - 2x^3y^2 + y^3 - 3x^2y^3 + 2x^3y^3$$

$$p_{13}(x, y) = xy - 2x^2y + x^3y - 2xy^2 + 4x^2y^2 - 2x^3y^2 + xy^3 - 2x^2y^3 + x^3y^3$$

$$p_{14}(x, y) = -x^2y + x^3y + 2x^2y^2 - 2x^3y^2 - x^2y^3 + x^3y^3$$

$$p_{15}(x, y) = x^2y^2 - x^3y^2 - x^2y^3 + x^3y^3$$

$$p_{16}(x, y) = xy^2 + 2x^2y^2 - x^3y^2 + xy^3 - 2x^2y^3 + x^3y^3$$

<sup>1</sup><http://home.gna.org/getfem/>

### 4.3. Interpolation

Der nächste Schritt besteht darin, das betrachtete Gebiet  $\Omega$  mit Finiten Elementen zu überdecken.

**Definition 4.7.** Eine endliche Menge  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_l\}$  von Finiten Elementen heißt *Zerlegung* eines Gebietes  $\Omega$ , falls

1.  $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,
2.  $\bigcup_{i=1}^l \overset{\circ}{K}_i = \overline{\Omega}$ .

Um eine Funktion  $u$  bezüglich einer Zerlegung interpolieren zu können, definiert man zunächst die Interpolation über einem einzelnen Finiten Element.

**Definition 4.8.** Zu einem gegebenem Finiten Element  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  sei  $\{p_i | 1 \leq i \leq k\}$  die zu  $\mathcal{N}$  duale Basis. Sind alle  $N_i \in \mathcal{N}$  für eine Funktion  $u$  definiert, so heißt

$$I_K u = I_{(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})} u = \sum_{i=1}^k N_i(u) p_i$$

die *lokale Interpolation* von  $u$ .

Die lokalen Interpolationen setzt man nun auf triviale Weise zu einer globalen Interpolation zusammen.

**Definition 4.9.** Sei  $\Omega$  ein Gebiet mit Zerlegung  $\mathcal{K}$  in Finite Elemente  $(K_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{N}_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Sind die partiellen Ableitungen der Knotenvariablen maximal von der Ordnung  $m$ , so ist die *globale Interpolation* von  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  definiert durch

$$I_{\mathcal{K}} u|_{K_i} = I_{K_i} u, \quad \forall K_i \in \mathcal{K}.$$

Um Regularitätsaussagen für die globale Interpolation zu erhalten, ist eine weitere Forderung an die Zerlegung des Gebietes nötig.

**Definition 4.10.** Eine *Triangulierung* eines Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Zerlegung  $\mathcal{K}$  von  $\Omega$  in  $n$ -Simplexe, s. d.

3. Jede Seite eines  $n$ -Simplex  $K$  der Zerlegung  $\mathcal{K}$  ist entweder Teilmenge des Randes  $\partial\Omega$  oder Seite eines anderen  $n$ -Simplex  $K'$  der Zerlegung  $\mathcal{K}$ .

**Definition 4.11.** Eine *reguläre Rechteckzerlegung* eines Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Zerlegung von  $\Omega$  in  $n$ -Rechtecke, s. d.

3. Jede Seite eines  $n$ -Rechtecks  $K$  der Zerlegung  $\mathcal{K}$  ist entweder Teilmenge des Randes  $\partial\Omega$  oder Seite eines anderen  $n$ -Rechtecks  $K'$  der Zerlegung  $\mathcal{K}$ .

#### 4. Finite Elemente

*Bemerkung.* Bei Triangulierungen und regulären Rechteckzerlegungen sind sog. hängende Ecken ausgeschlossen.

Damit sind lokale Verfeinerungen von regulären Rechteckzerlegungen (die selbst wieder reguläre Rechteckzerlegungen sind) nur begrenzt möglich.

**Definition 4.12.** Sei  $\mathcal{K}$  eine Triangulierung oder reguläre Rechteckzerlegung des Gebietes  $\Omega$ . Die globale Interpolation hat die *Differenzierbarkeitsordnung*  $r$ , falls  $I_{\mathcal{K}}u \in C^r(\overline{\Omega})$  für alle  $u \in C^m(\overline{\Omega})$ . Der Raum

$$V_{\mathcal{K}} = \{I_{\mathcal{K}}u | u \in C^m(\overline{\Omega})\}$$

heißt dann  *$C^r$  Finiter Element Raum*.

**Lemma 4.13.** Die Lagrange Elemente aus den Tabellen 4.1 und 4.2 sind  $C^0$  Elemente und das Bogner-Fox-Schmitt Rechteck aus Tabelle 4.2 ist ein  $C^1$  Element, d. h. zu einer gegebenen Triangulierung bzw. regulären Rechteckzerlegung  $\mathcal{K}$  erfüllt die globale Interpolation  $I_{\mathcal{K}}u \in C^0(\overline{\Omega})$  für die Lagrange Elemente und  $I_{\mathcal{K}}u \in C^1(\overline{\Omega})$  für das Bogner-Fox-Schmitt Rechteck.

*Beweis.* Ciarlet (1978), § 2.3, S. 95 und Brenner und Scott (2002), Proposition 3.3.17, S. 81. □

### 4.4. Globaler Interpolationsfehler

Um den Fehler der globalen Interpolation abschätzen zu können, benötigt man eine Möglichkeit, die Fehler der lokalen Interpolationen auf den einzelnen Finiten Elementen zu vergleichen.

**Definition 4.14.** Zwei Finite Elemente  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  und  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$  heißen *affin äquivalent*, falls es eine invertierbare affine Abbildung  $F(x) = Ax + b$  gibt mit

1.  $F(K) = \tilde{K}$ ,
2.  $F^*\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$ ,
3.  $F_*\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}$ .

Dabei ist  $F^*$  der *Pull-back* von  $F$  (d. h.  $F^*(\tilde{p}) = \tilde{p} \circ F$ ) und  $F_*$  der *Push-forward* von  $F$  (d. h.  $(F_*N)(\tilde{p}) = N(F^*(\tilde{p}))$ ).

**Beispiel.** Je zwei Finite Elemente vom selben Typ aus den Tabellen 4.1 und 4.2 sind laut Ciarlet (1978), §2.3, S.84f, affin äquivalent.

Zur Fehlerabschätzung des globalen Interpolationsfehlers genügt sogar folgende schwächere Äquivalenz der Finiten Elemente.

**Definition 4.15.** Die Finiten Elemente  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  und  $(K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})$  heißen *interpolationsäquivalent*, falls

$$I_{(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})} u = I_{(K, \mathcal{P}, \tilde{\mathcal{N}})} u$$

für alle hinreichen glatten  $u$ .

Zwei Finite Elemente  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  und  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$  heißen *fast affin äquivalent*, falls es Knotenvariablen  $\hat{\mathcal{N}}$  gibt, s. d.  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  affin äquivalent zu  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  und  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \hat{\mathcal{N}})$  seinerseits interpolationsäquivalent zu  $(\tilde{K}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{N}})$  ist.

Zusätzlich zu der Vergleichbarkeit von Finiten Elementen muss man auch noch rein geometrische Bedingungen an die Zerlegung stellen.

**Definition 4.16.** Eine Menge  $\Omega$  heißt *sternförmig* bzgl.  $B$ , falls für alle  $x \in \Omega$  die konvexe Hülle von  $\{x\} \cup B$  in  $\Omega$  enthalten ist.

**Definition 4.17.** Sei  $(\mathcal{K}_h)_{0 < h \leq 1}$  eine Familie von Zerlegungen von  $\Omega$ , s. d.

$$\max_{K \in \mathcal{K}_h} (\text{diam } K) \leq h \text{ diam } \Omega.$$

Bezeichnet  $B_K$  die größte in  $K$  enthaltene Kugel, s. d.  $K$  bzgl.  $B_K$  sternförmig ist, so heißt die Familie  $(\mathcal{K}_h)$  *quasiuniform*, wenn es eine Zahl  $\rho > 0$  gibt, s. d.

$$\text{diam } B_K \geq \rho \text{ diam } K$$

für jedes  $K \in \mathcal{K}_h$  und alle  $0 < h \leq 1$ . Die Familie heißt *uniform*, falls sogar

$$\min_{K \in \mathcal{K}_h} (\text{diam } B_K) \geq \rho h \text{ diam } \Omega$$

für alle  $0 < h \leq 1$  gilt.

Da die globale Interpolation im Allgemeinen nur lokal, d. h. auf den einzelnen Elementen der Zerlegung  $\mathcal{K}$  regulär ist, führt man die folgenden zerlegungsabhängigen Sobolevnormen ein.

**Definition 4.18.** Zu einer Zerlegung  $\mathcal{K}_h$  von  $\Omega$  sei

$$\|u\|_{s,p,h} = \begin{cases} \left( \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \|u\|_{W^{s,p}(K)}^p \right)^{1/p} & \text{falls } p < \infty, \\ \max_{K \in \mathcal{K}_h} \|u\|_{W^{s,\infty}(K)} & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

*Bemerkung.* Für  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  gilt selbstverständlich

$$\|u\|_{s,p,h} = \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)}.$$

**Satz 4.19** (Approximationssatz). *Sei  $(\mathcal{K}_h)_{0 < h \leq 1}$  eine quasiuniforme Familie von Zerlegungen von  $\Omega$  und für das Finite Element  $(K, \tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{N})$  und  $1 \leq p \leq \infty$  gelte*

1.  $K$  ist sternförmig bzgl. einer Kugel,

#### 4. Finite Elemente

2.  $\mathcal{P}_{m-1} \subset \mathcal{P} \subset W^{m,\infty}(K)$ ,
3.  $\mathcal{N} \subset (C^l(\overline{K}))'$
4. a)  $m - l - n \geq 0$ , falls  $p = 1$ ,  
b)  $m - l - n/p > 0$ , falls  $p > 1$ ,

für geeignetes  $m$  und  $l$ . Weiter seien alle Finiten Elemente  $(\tilde{K}, \mathcal{P}_{\tilde{K}}, \mathcal{N}_{\tilde{K}})$ ,  $\tilde{K} \in \mathcal{K}_h$ ,  $0 < h \leq 1$  fast affin äquivalent zu  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ . Dann ist für  $0 \leq s \leq m$

$$\|u - I_h u\|_{s,p,h} \leq C_{l,m,n,p,\rho} h^{m-s} |u|_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

Für  $0 \leq s \leq l$  gilt zusätzlich

$$\|u - I_h u\|_{s,\infty,h} \leq C_{l,m,n,p,\rho} h^{m-s-n/p} |u|_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega).$$

*Beweis.* Brenner und Scott (2002), Corollary 4.4.24, S. 110. □

*Bemerkung.* Bei Verwendung von  $C^r$  Finite Element Räumen hat die globale Interpolation per Definition die Differenzierbarkeitsordnung  $r$  und damit ist  $I_h u \in W^{r+1,p}$  für  $1 \leq p \leq \infty$ , also

$$\|u - I_h u\|_{s,p,h} = \|u - I_h u\|_{W^{s,p}(\Omega)}$$

für alle  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  und  $0 \leq s \leq \min\{m, r+1\}$ .

### 4.5. Inverse Ungleichung

In diesem Abschnitt möchte ich nur die inverse Ungleichung zwischen verschiedenen Normen auf Finite Element Räumen in ihrer globalen Version zitieren. Ich werde sie später dazu verwenden, um Abschätzungen auf stärkere Normen zu übertragen.

**Satz 4.20** (inverse Ungleichung). Sei  $(\mathcal{K}_h)_{0 < h \leq 1}$  eine uniforme Familie von Zerlegungen von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Für das Finite Element  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  und  $1 \leq p, q \leq \infty$  gelte

$$\mathcal{P} \subset W^{l,p}(K) \cap W^{m,q}(K),$$

mit geeignetem  $0 \leq m \leq l$ . Ist dann  $(\tilde{K}, \mathcal{P}_{\tilde{K}}, \mathcal{N}_{\tilde{K}})$  für jedes  $\tilde{K} \in \mathcal{K}_h$  das zu  $(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$  affin äquivalente Element und

$$V_h = \left\{ u \text{ messbar und } u|_{\tilde{K}} \in \mathcal{P}_{\tilde{K}} \forall \tilde{K} \in \mathcal{K} \right\},$$

so gilt

$$\|u\|_{l,p,h} \leq C_{l,p,q,\rho} h^{m-l+\min\{0, n/p-n/q\}} \|u\|_{m,q,h} \quad \forall u \in V_h.$$

*Beweis.* Brenner und Scott (2002), Theorem 4.5.11, S.112. □

## 4.6. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme

An dieser Stelle muss man nur noch geeignete Finite Element Räume konstruieren, um Fehlerabschätzungen für Finite Element Näherungen der Lösungen elliptischer Randwertprobleme zu erhalten.

### 4.6.1. Dirichletprobleme

**Satz 4.21.** *Sei  $(\mathcal{K}_h)_{0 < h \leq 1}$  eine quasiuniforme Familie von Triangulierungen oder regulären Rechteckerlegungen von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $C^0$  Elementen, die die Voraussetzungen des Approximationssatzes (Satz 4.19) für  $p = 2$  erfüllt. Ist  $u$  die schwache Lösung von (2.5) zu vorgegebenem  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , d. h.*

$$a(u, v) = (f, v)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

und  $u_h$  die Finite Elemente Approximation in

$$V_h = \left\{ v = (v_K)_{K \in \mathcal{K}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_h} \mathcal{P}_K \mid \exists u \in H_0^1(\Omega), u|_K \in C^l(K), v_K = I_K u, \forall K \in \mathcal{K}_h \right\},$$

d. h.

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h,$$

so gilt

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\alpha, \beta, l, m, n, \rho} h^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)},$$

falls  $u \in H^m(\Omega)$ .

*Beweis.* Zunächst gilt per Definition

$$I_h(H_0^1(\Omega) \cap C^l(\Omega)) \subset V_h.$$

Da  $C^0$ -Elemente verwendet werden ist außerdem

$$V_h \subset H_0^1(\Omega),$$

s. d. eine Kombination des Approximationssatzes (Satz 4.19) mit dem Céa-Lemma (Lemma 1.34) die Aussage liefert.  $\square$

**Korollar 4.22.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.17 und  $m = 2$  sowie  $l = 0$  in den Voraussetzungen des Approximationssatzes (Satz 4.19) ergibt sich insbesondere*

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\alpha, \beta, \rho} h |u|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\alpha, \beta, \rho, A, \Omega} h \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Korollar 4.23.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.21 gilt*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} h \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Gilt außerdem  $f \in L^2(\Omega)$  und damit  $u \in H^2(\Omega)$ , so ist

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\alpha, \beta, \rho, A, \Omega} h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Beweis.* Anwendung des Aubin-Nitsche-Lemmas (Lemma 1.35).  $\square$

### 4.6.2. Periodische Randbedingungen

In diesem Abschnitt übertrage ich die Aussage von Korollar 4.23 auf periodische Randbedingungen. Damit das Céa-Lemma (Lemma 1.34) angewendet werden kann, muss  $V_h \subset V = \{u \in H_{\text{per}}^1(Y) | \langle u \rangle_Y = 0\}$  für den Finite Element Raum  $V_h$  gelten. Dies führt zu folgender

**Definition 4.24.** Eine Zerlegung  $\mathcal{K}$  von  $Y \subset \mathbb{R}^n$  heißt *periodisch*, falls für hinreichend glatte  $Y$ -periodische Funktionen  $u$  auch die globale Interpolation  $I_{\mathcal{K}}u$   $Y$ -periodisch ist.

*Bemerkung.* Am einfachsten kann man eine periodische Zerlegung mit „symmetrischen“ Rechteckelementen erhalten: Ist  $\mathcal{K}$  eine reguläre Rechteckzerlegung von  $Y$  in bis auf Translation identische  $C^0$  Rechteckelemente  $K_i = y_i + ]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$  und sind die Knotenvariablen Auswertung der zu interpolierenden Funktion und ihrer Ableitungen, die auf dem Rand symmetrisch bzgl. der Halbierenden  $\{x | x_j = (y_i)_j + (b_j - a_j)/2\}$  verteilt sind, so ist die Rechteckzerlegung periodisch.

Diese Bedingung erfüllen z. B. alle Rechteckelemente aus Tabelle 4.2.

Man könnte auch Dreieckelemente verwenden, aber da das zu zerlegende Gebiet  $Y$  ohnehin schon ein  $n$ -Rechteck ist, wäre dies nicht besonders sinnvoll.

**Satz 4.25.** Sei  $u \in V = \{u \in H_{\text{per}}^1(Y) | \langle u \rangle_Y = 0\}$  schwache Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ in } Y, \\ u \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle u \rangle_Y = 0. \end{cases}$$

Ist  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$   $Y$ -periodisch,  $a_{ij} \in C^{m-2,1}(\overline{Y})$ ,  $f \in H^{m-2}(Y)$  (mit  $\langle f \rangle_Y = 0$ ) und ist  $(\mathcal{K}_h)_{0 < h \leq 1}$  eine quasiuniforme Familie periodischer Triangulierungen oder periodischer regulärer Rechteckzerlegungen von  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , die die Voraussetzungen des Approximationssatzes (Satz 4.19) für  $p = 2$  und  $m \geq 2$  erfüllt, so gilt für die Finite Element Näherung  $u_h$  in

$$V_h = \left\{ v = (v_K)_{K \in \mathcal{K}_h} \in \prod_{K \in \mathcal{K}_h} \mathcal{P}_K \mid \langle v \rangle_Y = \sum_{K \in \mathcal{K}_h} \langle v_K \rangle_K = 0, \right. \\ \left. \exists u \in H_{\text{per}}^1(Y), u|_K \in C^l(K), v_K = I_K u, \forall K \in \mathcal{K}_h \right\}$$

die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{H^1(Y)} \leq C_{\alpha, \beta, l, m, n, \rho, Y} h^{m-1} \|u\|_{H^m(Y)} \leq C_{\alpha, \beta, l, m, n, \rho, M, Y} h^{m-1} \|f\|_{H^{m-2}(Y)}$$

mit

$$M = \max \left\{ \|a_{ij}\|_{C^{m-2,1}(\overline{Y})} \right\}.$$

#### 4.6. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme

*Beweis.* Nach Satz 2.23 gilt  $u \in H^m(Y)$  und

$$\|u\|_{H^m(Y)} \leq C_{n,\alpha,M,Y} \|f\|_{H^{m-2}(Y)}.$$

Laut Approximationsatz (Satz 4.19) gilt für die globale Interpolation  $I_h u$

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{H^1(Y)} &\leq C_{l,m,n,\rho} h^{m-1} |u|_{H^m(Y)}, \\ \|u - I_h u\|_{L^2(Y)} &\leq C_{l,m,n,\rho} h^m |u|_{H^m(Y)}. \end{aligned}$$

Daher folgt wegen  $\langle u \rangle_Y = 0$  und  $\|\cdot\|_{L^1(Y)} \leq C_{|Y|} \|\cdot\|_{L^2(Y)}$  (Adams und Fournier (2003), Theorem 2.14, S. 28) mit  $\tilde{I}_h u = I_h u - \langle I_h u \rangle_Y$

$$\begin{aligned} \left\| u - \tilde{I}_h u \right\|_{H^1(Y)} &= \|u - I_h u + \langle I_h u \rangle_Y\|_{H^1(Y)} \\ &\leq \|u - I_h u\|_{H^1(Y)} + \|\langle I_h u \rangle_Y\|_{H^1(Y)} \\ &= \|u - I_h u\|_{H^1(Y)} + |Y| |\langle u - I_h u \rangle_Y| \\ &\leq \|u - I_h u\|_{H^1(Y)} + |Y| \|u - I_h u\|_{L^1(Y)} \\ &\leq \|u - I_h u\|_{H^1(Y)} + C_{|Y|} \|u - I_h u\|_{L^2(Y)} \\ &\leq C_{l,m,n,\rho,|Y|} h^{m-1} |u|_{H^m(Y)}. \end{aligned}$$

$(V, \|\cdot\|_{H^1(Y)})$  ist als vollständiger Unterraum von  $H^1(Y)$  ein Hilbertraum. Wegen  $V_h \subset V$  impliziert das Céa-Lemma (Lemma 1.34)

$$\|u - u_h\|_{H^1(Y)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(Y)},$$

also folgt die Aussage wegen  $\tilde{I}_h u \in V_h$ . □

**Satz 4.26.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.25 ohne  $f \in L^2(Y)$  gilt*

$$\|u - u_h\|_{L^2(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,l,m,n,\rho,M,Y} h \|u - u_h\|_{H^1(Y)}.$$

*Beweis.* Sei

$$H = \{u \in L^2(Y) \mid \langle u \rangle_Y = 0\}.$$

Da bzgl.  $\|\cdot\|_{L^2(Y)}$   $L^2(Y) = \overline{C_0^\infty(Y)}$  (Adams und Fournier (2003), Corollary 2.30, S. 38) und somit auch  $L^2(Y) = \overline{C_{\text{per}}^\infty(Y)}$ , also insbesondere  $L^2(Y) = \overline{H_{\text{per}}^1(Y)}$  gilt, folgt  $H = \overline{V}$ , denn sei  $u \in H$  so existiert zunächst eine Folge  $u_i \in H_{\text{per}}^1(Y)$  mit  $u_i \rightarrow u$  in  $L^2(Y)$ . Wegen  $|\langle u_i - u \rangle_Y| \leq \|u_i - u\|_{L^1(Y)} \leq C_{|Y|} \|u_i - u\|_{L^2(Y)} \rightarrow 0$  (siehe Adams und Fournier (2003), Theorem 2.14, S. 28) folgt  $\langle u_i \rangle_Y \rightarrow \langle u \rangle_Y = 0$ . Definiert man nun  $v_i := u_i - \langle u_i \rangle_Y \in V$  so folgt unmittelbar  $\|v_i - u\|_{L^2(Y)} \leq \|u_i - u\|_{L^2(Y)} + |Y| |\langle u_i \rangle_Y| \rightarrow 0$ .

Mit dem Aubin-Nitsche-Lemma (Lemma 1.35) und Satz 4.25 folgt nun sofort die Aussage des Satzes. □

#### 4. Finite Elemente

**Korollar 4.27.** *Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.26  $f \in L^2(Y)$  (mit  $\langle f \rangle_Y = 0$ ), so gilt sogar*

$$\|u - u_h\|_{L^2(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,l,m,n,\rho,M,Y} h^2 \|f\|_{L^2(Y)}.$$

*Beweis.* Erneute Anwendung von Satz 4.25. □

*Bemerkung.* Im Fall  $m > 2$  folgt direkt aus Satz 4.25 die quadratische Konvergenz bzgl. der  $L^2$ -Norm.

*Bemerkung.* Sind die Koeffizientenfunktionen  $a_{ij} \in C^{m-2,1}(\bar{Y}) \cap H^{m-1}(Y)$  so gilt nach Satz 4.25 für eine geeignete Finite Elemente Approximation  $\chi_{i,h}$  der Lösungen  $\chi_i$  der Zellprobleme

$$(4.28) \quad \|\chi_i - \chi_{i,h}\|_{H^1(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,l,m,n,\rho,M,Y} h^{m-1} \|\operatorname{div} A^i\|_{H^{m-2}(Y)},$$

wobei  $A^i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$  die  $i$ -te Spalte von  $A$  ist. Korollar 4.27 liefert im Fall  $m = 2$  zusätzlich

$$(4.29) \quad \|\chi_i - \chi_{i,h}\|_{L^2(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,l,m,n,\rho,M,Y} h^2 \|\operatorname{div} A^i\|_{L^2(Y)}.$$

## 5. Finite Element Näherungen

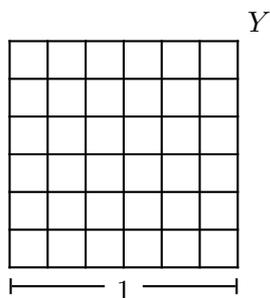
In diesem Kapitel werde ich durch eine geeignete Wahl von Finite Element Räumen dafür sorgen, dass eine eventuell vorhandene analytische quadratische  $L^2$ -Konvergenz der korrigierten asymptotischen Entwicklung erster Ordnung bei den Finite Element Näherungen erhalten bleibt.

Nach Satz 3.13 liegt im eindimensionalen Fall stets quadratische  $L^2$ -Konvergenz vor. Demgegenüber werden die numerischen Untersuchungen ein Indiz dafür sein, unter welchen Voraussetzungen quadratische  $L^2$ -Konvergenz der korrigierten asymptotischen Entwicklung erster Ordnung (im zweidimensionalen Fall) erwartet werden kann.

Da der eindimensionale Fall aufgrund der  $C^\infty$ -Regularität des Randes und der kompakten Einbettung  $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$  wesentlich einfacher zu untersuchen ist, beschränke ich mich in den folgenden Abschnitten auf den zweidimensionalen Fall und der Gegenüberstellung der vergleichbaren Ergebnisse, die ich für den eindimensionalen Fall erhalten habe.

Bei der Berechnung der Finite Element Näherung der asymptotischen Entwicklung erster Ordnung, des Korrekturproblems und des Originalproblems werden die Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 verwendet. Dass es sinnvoll ist, gerade diese Finite Element Räume zu benutzen, wird sich erst im Verlaufe dieses Abschnitts ergeben. Trotzdem sollte man schon jetzt einen Blick auf die Notation werfen.

### Finite Element Räume auf der Elementarzelle

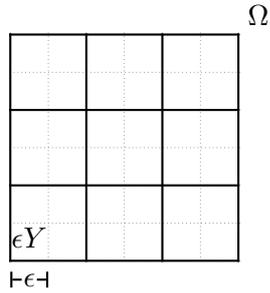


- $(\mathcal{K}_{\hat{h}})_{0 \leq \hat{h} \leq 1}$ : quasiuniforme Familie von periodischen regulären Rechteckzerlegungen mit bikubischen Rechteckelementen zur Interpolation der Diffusionskoeffizienten  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$ ,
- $(\mathcal{K}_{\hat{h}})_{0 \leq \hat{h} \leq 1}$ : uniforme Familie periodischer regulärer Rechteckzerlegungen mit Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelementen oder Hermite-Elementen (im eindimensionalen Fall) als Ansatzraum für die Finite-Element-Näherung der Zelllösungen  $\chi_i$ .

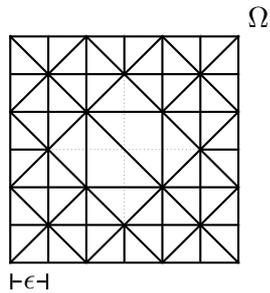
Tabelle 5.1.: Darstellung der verwendeten Finite Element Räume.

## 5. Finite Element Näherungen

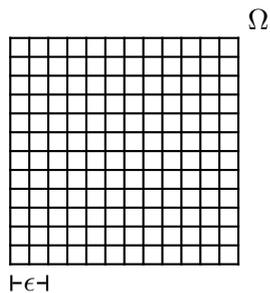
### Finite Element Räume auf $\Omega$



- $(\mathcal{K}_{\tilde{H}})_{0 \leq \tilde{H} \leq 1}$ : quasiuniforme Familie von regulären Rechteckzerlegungen mit bikubischen Rechteckelementen zur Interpolation der Quelle  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,
- $(\mathcal{K}_H)_{0 \leq H \leq 1}$ : uniforme Familie von regulären Rechteckzerlegungen mit Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelementen oder Hermite-Elementen (im eindimensionalen Fall) als Ansatzraum für die Finite Element Näherung der Lösung  $u^0$  des homogenisierten Problems,



- $(\mathcal{T}_{\tilde{H}})_{0 \leq \tilde{H} \leq 1}$ : quasiuniforme Familie von Triangulierungen mit quadratischen Dreieckelementen als Ansatzraum für die Finite Element Näherung der Lösung  $v_0^\epsilon$  des Korrekturproblems,



- $(\mathcal{K}_h)_{0 \leq h \leq 1}$ : uniforme Familie von regulären Rechteckzerlegungen mit biquadratischen Rechteckelementen als Ansatzraum für die Finite Element Näherung der Lösung  $u^\epsilon$  des Originalproblems.

Tabelle 5.1.: Darstellung der verwendeten Finite Element Räume.

## 5.1. Asymptotische Approximation erster Ordnung

In diesem Abschnitt soll der Unterschied der asymptotischen Approximation erster Ordnung  $u_1^\epsilon$  und der zugehörigen Finite Element Näherung untersucht werden. Dazu ist es zunächst zwingend notwendig zu untersuchen, wie sich die Verwendung von Finite Element Näherungen  $\chi_{i,\hat{h}}$  für die Zellprobleme auf den homogenisierten Diffusionskoeffizienten  $A^0$  auswirkt.

Der erste Fehler den man dabei macht, entsteht beim Interpolieren von  $A = (a_{ij}) \in M(\alpha, \beta, Y)$ . Ist  $(K_{\tilde{h}})$  eine quasiuniforme Familie von Unterteilungen von  $Y$ , so gilt laut Approximationssatz (Satz 4.19) bei Verwendung von kubischen Lagrange-Elementen für

### 5.1. Asymptotische Approximation erster Ordnung

die Interpolation  $A_{\tilde{h}}$  von  $A \in H^4(Y)$

$$\|A - A_{\tilde{h}}\|_{L^\infty} \leq C_\rho \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)}.$$

Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} (A_{\tilde{h}}(y)\lambda, \lambda) &= (A(y)\lambda, \lambda) + ((A_{\tilde{h}} - A)(y)\lambda, \lambda) \\ &\geq \alpha \|\lambda\|_2^2 - \|(A_{\tilde{h}} - A)(y)\lambda\|_2 \|\lambda\|_2 \\ &\geq \alpha \|\lambda\|_2^2 - \|(A_{\tilde{h}} - A)\|_{L^\infty} \|\lambda\|_2^2 \end{aligned}$$

für hinreichend kleine  $\tilde{h} > 0$

$$(5.1) \quad (A_{\tilde{h}}(y)\lambda, \lambda) \geq \frac{\alpha}{2} \|\lambda\|_2^2.$$

Hiermit lässt sich nun der interpolationsbedingte Fehler abschätzen, den man bei der Bestimmung der Finite Element Näherungen  $\chi_{i,\hat{h}}$  macht. Sei also wie gehabt  $\chi_{i,\hat{h}}$  die Finite Element Approximation von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)\nabla\chi_i) = -\operatorname{div}(A(y)e_i) \text{ in } Y, \\ \chi_i \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle \chi_i \rangle_Y = 0 \end{cases}$$

und  $\tilde{\chi}_{i,\hat{h}}$  die Finite Element Approximation von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A_{\tilde{h}}(y)\nabla\tilde{\chi}_i) = -\operatorname{div}(A_{\tilde{h}}(y)e_i) \text{ in } Y, \\ \tilde{\chi}_i \text{ } Y\text{-periodisch,} \\ \langle \tilde{\chi}_i \rangle_Y = 0. \end{cases}$$

Wegen

$$-\operatorname{div}(A_{\tilde{h}}\nabla(\chi_{i,\hat{h}} - \tilde{\chi}_{i,\hat{h}})) = -\operatorname{div}((A_{\tilde{h}} - A)\nabla\chi_{i,\hat{h}} + (A - A_{\tilde{h}})e_i)$$

folgt unter Verwendung von (5.1)

$$\begin{aligned} \|\chi_{i,\hat{h}} - \tilde{\chi}_{i,\hat{h}}\|_{H^1(Y)} &\leq \frac{2}{\alpha} \left\| \operatorname{div}((A_{\tilde{h}} - A)\nabla\chi_{i,\hat{h}} + (A - A_{\tilde{h}})e_i) \right\|_{(\mathcal{W}_{\text{per}}(Y))'} \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left\| (A_{\tilde{h}} - A)\nabla\chi_{i,\hat{h}} + (A - A_{\tilde{h}})e_i \right\|_{L^2(Y)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left( \|A_{\tilde{h}} - A\|_{L^\infty(Y)} \|\chi_{i,\hat{h}}\|_{H^1(Y)} + \|A - A_{\tilde{h}}\|_{L^2(Y)} \right) \\ &\leq C_{\alpha,\rho,Y} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Um den Fehler von  $\tilde{\chi}_{i,\hat{h}}$  bezüglich der analytischen Lösung  $\chi_i$  abschätzen zu können fehlen somit nur noch eine Abschätzung für den Fehler von  $\chi_{i,\hat{h}}$ .

## 5. Finite Element Näherungen

Im Verlaufe der Abschätzung wird es nötig sein, die inverse Ungleichung aus Satz 4.20 zu benutzen. Dies bedingt die Verwendung einer affinen Familie von Finite Element Räumen. Da später auch noch die globale  $C^1$ -Differenzierbarkeit der Finiten Element Approximation benötigt wird, gelangt man nahezu automatisch zur Verwendung des Bogner-Fox-Schmitt Elementes (siehe Ciarlet (1978), Theorem 2.2.15, S. 77 und S. 85), welches normalerweise für die Lösung von elliptische Gleichungen vierter Ordnung auf Rechteckgebieten verwendet wird. Damit dies definiert ist muss man allerdings höhere Regularitätsvoraussetzungen an  $\chi$  stellen:

$$\chi \in H^4(\Omega).$$

Laut Satz 2.23 ist dies unter der Voraussetzung  $A \in C^{2,1}(\bar{Y}) \cap H^3(Y)$  erfüllt.

Der Approximationssatz (Satz 4.19) und Satz 4.25 implizieren für eine uniforme Familie  $(\mathcal{K}_{\hat{h}})_{0 < \hat{h} \leq 1}$  periodischer regulärer Rechteckzerlegungen mit Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelementen

$$\begin{aligned} \|\chi - I_{\hat{h}}\chi\|_{H^1(Y)} &\leq C_{\rho}\hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)}, \\ \|\chi - \chi_{\hat{h}}\|_{H^1(Y)} &\leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y}\hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Die inverse Ungleichung (Satz 4.20) liefert, da die Zerlegung insbesondere uniform ist, sogar

$$(5.2) \quad \|\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{W^{1,\infty}(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y}\hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\rho,Y}\frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} |A|_{H^4(Y)},$$

denn

$$\begin{aligned} \|\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{W^{1,\infty}(Y)} &\leq \|\chi - I_{\hat{h}}\chi\|_{W^{1,\infty}(Y)} + \|\chi_{\hat{h}} - I_{\hat{h}}\chi\|_{W^{1,\infty}(Y)} + \|\chi_{\hat{h}} - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{W^{1,\infty}(Y)} \\ &\leq C_{\rho}\hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + \frac{C_{\rho}}{\hat{h}} \left( \|\chi_{\hat{h}} - I_{\hat{h}}\chi\|_{H^1(Y)} + \|\chi_{\hat{h}} - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{H^1(Y)} \right) \\ &\leq C_{\rho}\hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + \frac{C_{\rho}}{\hat{h}} \left( \|\chi - \chi_{\hat{h}}\|_{H^1(Y)} + \|\chi - I_{\hat{h}}\chi\|_{H^1(Y)} + \right. \\ &\quad \left. C_{\alpha,\rho,Y}\tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \right) \\ &\leq C_{\rho}\hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + \frac{C_{\rho}}{\hat{h}} \left( C_{\alpha,\beta,\rho,Y}\hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\rho,Y}\tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \right) \\ &= C_{\alpha,\beta,\rho,Y}\hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\rho,Y}\frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} |A|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Als nächstes gilt es zu untersuchen, wie sich dieser Fehler bei der Berechnung des homogenisierten Diffusionskoeffizienten fortsetzt. Seien also

$$\tilde{a}_{ik}^0 = \left\langle a_{ij,\tilde{h}}\delta_{jk} + a_{ij,\tilde{h}}\frac{\partial \tilde{\chi}_{k,\hat{h}}}{\partial y_j} \right\rangle_Y$$

### 5.1. Asymptotische Approximation erster Ordnung

die Komponenten des homogenisierten Diffusionskoeffizienten, die man für die Finite Element Näherungen  $\tilde{\chi}_{k,\hat{h}}$  und eine Interpolation  $a_{ij,\tilde{h}}$  der Diffusionskoeffizienten  $a_{ij}$  durch kubische Lagrange-Elemente erhält. Dann gilt

$$a_{ik}^0 - \tilde{a}_{ik}^0 = \left\langle a_{ik} - a_{ik,\tilde{h}} \right\rangle_Y + \left\langle a_{ij,\tilde{h}} \frac{\partial(\chi_k - \tilde{\chi}_{k,\hat{h}})}{\partial y_j} \right\rangle_Y + \left\langle (a_{ij} - a_{ij,\tilde{h}}) \frac{\partial \chi_k}{\partial y_j} \right\rangle_Y,$$

also mit  $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$

$$\begin{aligned} |Y| \cdot |a_{ik}^0 - \tilde{a}_{ik}^0| &\leq \|a_{ik} - a_{ik,\tilde{h}}\|_{L^1(Y)} + \|A_{i,\tilde{h}}\|_{L^2(Y)} \|\chi_k - \tilde{\chi}_{k,\hat{h}}\|_{H^1(Y)} + \\ &\quad \|A_i - A_{i,\tilde{h}}\|_{L^2(Y)} \|\chi_k\|_{H^1(Y)} \\ &\leq \|a_{ik} - a_{ik,\tilde{h}}\|_{L^1(Y)} + \|A_{i,\tilde{h}} - A_i\|_{L^2(Y)} \|\chi_k - \tilde{\chi}_{k,\hat{h}}\|_{H^1(Y)} + \\ &\quad \|A_i\|_{L^2(Y)} \|\chi_k - \tilde{\chi}_{k,\hat{h}}\|_{H^1(Y)} + \|A_i - A_{i,\tilde{h}}\|_{L^2(Y)} \|\chi_k\|_{H^1(Y)} \\ &\leq C_{\rho,Y} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} (1 + \|\chi\|_{H^1(Y)}) + \\ &\quad C_{\alpha,\beta,\rho,Y} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} (C_{\rho,Y} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} + \|A\|_{L^2(Y)}) \\ &\leq C_{\rho,Y,\chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Gesamtnorm  $\|\cdot\|_G$  (welche mit der euklidischen Norm verträglich ist) folgt unmittelbar

$$(5.3) \quad \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \leq C_{\rho,Y,\chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)}.$$

Für  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$  existiert nach Cioranescu und Donato (1999), Proposition 6.12, S. 118, ein  $\alpha_0 > 0$  mit

$$(A^0 \lambda, \lambda) \geq \alpha_0 \|\lambda\|_2^2.$$

Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} (\tilde{A}^0 \lambda, \lambda) &= (A^0 \lambda, \lambda) + ((\tilde{A}^0 - A^0) \lambda, \lambda) \\ &\geq \alpha_0 \|\lambda\|_2^2 - \|(\tilde{A}^0 - A^0) \lambda\|_2 \|\lambda\|_2 \\ &\geq \alpha_0 \|\lambda\|_2^2 - \|\tilde{A}^0 - A^0\|_G \|\lambda\|_2^2 \end{aligned}$$

für hinreichend kleine  $\tilde{h}, \hat{h} > 0$

$$(\tilde{A}^0 \lambda, \lambda) \geq \frac{\alpha_0}{2} \|\lambda\|_2^2.$$

Die letzten beiden Ergebnisse erlauben nun, den Unterschied der Lösung  $u^0$  der homogenisierten Gleichung von der Finite Element Näherung der fehlerbehafteten homogenisierten Gleichung abzuschätzen.

## 5. Finite Element Näherungen

Noch einmal zur Erinnerung: Im folgenden ist  $u^0$  die Lösung der homogenisierten Gleichung,  $u_H^0$  die Finite Element Näherung von  $u^0$ , d. h.

$$\int_{\Omega} A^0 \nabla u_H^0 \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

für alle  $v \in V_H$ . Weiter ist  $\tilde{u}^0$  die Lösung der homogenisierten Gleichung mit fehlerbehafteten Diffusionskoeffizienten  $\tilde{A}^0$  und  $\tilde{u}_H^0$  die Finite Element Näherung von  $\tilde{u}^0$ , d. h.

$$\int_{\Omega} \tilde{A}^0 \nabla \tilde{u}_H^0 \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f_{\tilde{H}} v \, dx$$

für alle  $v \in V_H$ , wobei  $f_{\tilde{H}}$  die Interpolation von  $f$  mit biquadratischen Rechteckelementen bezüglich einer quasiuniformen Familie  $(\mathcal{K}_{\tilde{H}})_{0 \leq \tilde{H} \leq 1}$  regulärer Rechteckzerlegungen ist. Zunächst gilt offensichtlich

$$\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla (u^0 - \tilde{u}^0)) = \operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla u^0) + f = \operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u^0)$$

und daher nach Cioranescu und Donato (1999), Theorem 4.16, S. 72 und Gleichung (5.3)

$$\begin{aligned} \|u^0 - \tilde{u}^0\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left\| \operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u^0) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha_0} \left\| (\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_{\alpha_0, \rho, Y, \chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für die (analytische) Lösung von

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla \hat{u}_{\tilde{H}}^0) = f_{\tilde{H}} & \text{in } \Omega, \\ \hat{u}_{\tilde{H}}^0 = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gilt

$$-\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla (\tilde{u}^0 - \hat{u}_{\tilde{H}}^0)) = f - f_{\tilde{H}},$$

also folgt mit dem Approximationssatz (Satz 4.19) für  $f \in H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}^0 - \hat{u}_{\tilde{H}}^0\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{2}{\alpha_0} \|f - f_{\tilde{H}}\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \|f - f_{\tilde{H}}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\alpha_0, \rho} \tilde{H}^2 |f|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

**Satz 5.4.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein konvexes, in Rechtecke zerlegbares Gebiet,  $f \in H^2(\Omega)$  und  $a_{ij} \in C^{2,1}(\bar{Y}) \cap H_{\text{per}}^4(Y)$ . Dann gilt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1*

$$\begin{aligned} \|u^0 - \tilde{u}_H^0\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C_{\alpha_0, \rho, Y, \chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ &\quad C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, A, \Omega} \tilde{H}^2 |f|_{H^2(\Omega)} + C_{\alpha, \beta, \rho, A, \Omega} H \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

## 5.1. Asymptotische Approximation erster Ordnung

*Beweis.* Korollar 4.22 impliziert

$$\left\| \hat{u}_H^0 - \tilde{u}_H^0 \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\alpha, \beta, \rho, A, \Omega} H \|f_{\tilde{H}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Unter Verwendung dieses Satzes folgt

**Satz 5.5.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4 gilt*

$$\left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A, f, \chi, u^0} \left( \hat{h}^2 + \frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} + \tilde{H}^2 + H \right).$$

*Beweis.* Unter Verwendung der  $L^\infty$ -Abschätzung (siehe (5.2))

$$\|\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{L^\infty(Y)} \leq C_{\alpha, \beta, \rho, Y} \hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha, \rho, Y} \frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} |A|_{H^4(Y)}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) (\nabla u^0(x) - \nabla \tilde{u}_H^0(x)) + \left( \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) (\nabla u^0(x) - \nabla \tilde{u}_H^0(x)) + \left( \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \right) (\nabla \tilde{u}_H^0(x) - \nabla u^0) + \right. \\ & \quad \left. \left( \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \right) \nabla u^0 \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\chi\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla u^0 - \nabla \tilde{u}_H^0\|_{L^2(\Omega)} + \|\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla \tilde{u}_H^0 - \nabla u^0\|_{L^2(Y)} + \\ & \quad \|\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}\|_{L^\infty(Y)} \|\nabla u^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{\alpha_0, \rho, Y, \chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A, \chi} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ & \quad C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, A, \chi, \Omega} \tilde{H}^2 |f|_{H^2(\Omega)} + C_{\alpha, \beta, \rho, A, \chi, \Omega} H \|f\|_{L^2(\Omega)} + \\ & \quad \left( C_{\alpha, \beta, \rho, Y} \hat{h}^2 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha, \rho, Y} \frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} |A|_{H^4(Y)} \right) \left( C_{\alpha_0, \rho, Y, \chi} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \right. \\ & \quad C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \\ & \quad \left. C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, A, \Omega} \tilde{H}^2 |f|_{H^2(\Omega)} + C_{\alpha, \beta, \rho, A, \Omega} H \|f\|_{L^2(\Omega)} + |u^0|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C_{\alpha_0, \alpha, \beta, \rho, Y, A, f, \chi, u^0} \left( \hat{h}^2 + \frac{\tilde{h}^3}{\hat{h}} + \tilde{H}^2 + H \right). \end{aligned}$$

□

## 5. Finite Element Näherungen

### 5.2. Originalproblem

Aus dem bisher gezeigten und Korollar 4.23 folgt.

**Satz 5.6.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.4 gilt*

$$\left\| u^\epsilon - u^0 + \epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

genau dann, wenn

$$\left\| u^\epsilon - \tilde{u}_H^0 + \epsilon \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

für  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$ .

Für den eindimensionalen Fall ergibt sich völlig analog.

**Satz 5.7.** *Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $f \in H^2(\Omega) \subset C^1(\Omega)$  und  $a \in C^{2,1}(\overline{Y}) \cap H_{\text{per}}^4(Y) \subset C_{\text{per}}^3(Y)$  so gilt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1*

$$\left\| u^\epsilon - u^0 + \epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

genau dann, wenn

$$\left\| u^\epsilon - \tilde{u}_H^0 + \epsilon \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{d\tilde{u}_H^0}{dx} \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

für  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$ .

*Bemerkung.* Natürlich wäre es jetzt noch interessant, den Fehler  $\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$  abzuschätzen um bei den numerischen Untersuchungen  $h$  geeignet wählen zu können. Laut Korollar 4.23 gilt zwar

$$\|u^\epsilon - u_h^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\alpha,\beta,\rho,A^\epsilon,\Omega} h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

aber wie die Konstante  $C_{\alpha,\beta,\rho,A^\epsilon,\Omega}$  von  $\epsilon$  abhängt ist nicht klar.

Im eindimensionalen Fall kann man ganz direkt zeigen, dass  $C_{\alpha,\beta,\rho,A^\epsilon,\Omega} = O(\epsilon^{-1})$ .

### 5.3. Korrekturproblem

Jetzt bleibt also nur noch der letzte Term, d.h. die Lösung des Korrekturproblems zu untersuchen. Dazu möchte ich  $\left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) - \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{H^1(\Omega)}$  abschätzen. Damit dies überhaupt definiert ist, muss  $\chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x), \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \in H^1(\Omega)$  gelten. Hinreichend hierfür wären die folgenden Eigenschaften der homogenisierten Lösung  $u^0$ ,

der Lösung der Zellprobleme  $\chi$  sowie der entsprechenden Finite Element Näherungen  $\tilde{u}_H^0$  und  $\tilde{\chi}_{\hat{h}}$

$$\begin{aligned} u^0, \tilde{u}_H^0 &\in H^2(\Omega), \\ \chi, \tilde{\chi}_{\hat{h}} &\in W^{1,\infty}. \end{aligned}$$

Während dies für  $\chi$  und  $\tilde{\chi}_{\hat{h}}$  bereits erfüllt ist und  $u^0$  dies unter den Voraussetzungen von Satz 2.17 erfüllt, bedingt die Voraussetzung an  $\tilde{u}_H^0$  die Verwendung von Elementen, welche global einmal stetig differenzierbar sind. Da ich wie schon bei den Abschätzungen für  $\chi$  und  $\tilde{\chi}_{\hat{h}}$  eine inverse Ungleichung benutzen möchte, muss die Familie von Finiten Element Räumen außerdem affin sein.

All diese Voraussetzungen erfüllt wiederum das Bogner-Fox-Schmitt Element. Damit dies definiert ist muss allerdings  $u^0 \in H^4(\Omega)$  gelten.

Da  $u^0$  diese Voraussetzung in der Regel nur erfüllt, falls  $\partial\Omega$  ein  $C^4$ -Rand ist (siehe Evans (1998), Theorem 5, S.323) ist die Verwendung der Bogner-Fox-Schmitt Elemente für  $u^0$  durchaus kritisch zu betrachten, da Gebiete, die aus Rechtecken zusammengesetzt werden keinen  $C^4$ -Rand besitzen. Darum sollten die folgenden Ausführungen auch mehr als Motivation für die Wahl der Finiten Element Räume angesehen werden.

Laut Approximationsatz (Satz 4.19) gilt für eine quasiuniforme Familie  $(K_H)$  regulärer Rechteckzerlegungen bei Verwendung von Bogner-Fox-Schmitt Elementen

$$\begin{aligned} \|u^0 - I_H u^0\|_{H^2(Y)} &\leq C_\rho H^2 |u^0|_{H^4(Y)}, \\ \|u^0 - I_H u^0\|_{H^1(Y)} &\leq C_\rho H^3 |u^0|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Ceá-Lemmas (Lemma 1.34) ergibt sich

$$\|u^0 - u_H^0\|_{H^1(Y)} \leq C_{\alpha,\beta,\rho} H^3 |u^0|_{H^4(Y)}.$$

Die inverse Ungleichung (Satz 4.20) liefert bei uniformer Zerlegung

$$\|u_H^0 - I_H u^0\|_{H^2(Y)} \leq \frac{C_\rho}{H} \|u_H^0 - I_H u^0\|_{H^1(Y)}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|u^0 - u_H^0\|_{H^2(Y)} &\leq \|u^0 - I_H u^0\|_{H^2(Y)} + \|u_H^0 - I_H u^0\|_{H^2(Y)} \\ &\leq C_\rho H^2 |u^0|_{H^4(Y)} + \frac{C_\rho}{H} \|u_H^0 - I_H u^0\|_{H^1(Y)} \\ &\leq C_\rho H^2 |u^0|_{H^4(Y)} + \frac{C_\rho}{H} \left( \|u^0 - u_H^0\|_{H^1(Y)} + \|u^0 - I_H u^0\|_{H^1(Y)} \right) \\ &\leq C_\rho H^2 |u^0|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho} H^2 |u^0|_{H^4(Y)} \\ &= C_{\alpha,\beta,\rho} H^2 |u^0|_{H^4(Y)}. \end{aligned}$$

Weiter gilt

## 5. Finite Element Näherungen

**Satz 5.8.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $a_{ij} \in C^{2,1}(\bar{Y}) \cap H_{\text{per}}^4(Y)$  und  $f \in H^3(\Omega)$ . Dann gilt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1

$$\begin{aligned} \|u_H^0 - \tilde{u}_H^0\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y,\chi,u^0} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A,u^0} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha_0,\rho} H^3 |f|_{H^3(\Omega)}, \\ \|u_H^0 - \tilde{u}_H^0\|_{H^2(\Omega)} &\leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y,\chi,u^0} \frac{\tilde{h}^3}{H} |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A,u^0} \frac{\hat{h}^3}{H} |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha_0,\rho} H^2 |f|_{H^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Wegen

$$-\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla(u_H^0 - \tilde{u}_H^0)) = -\operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u_H^0) + f - f_H$$

folgt mit Abschätzung (5.3)

$$\begin{aligned} \|u_H^0 - \tilde{u}_H^0\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left\| -\operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u_H^0) + f - f_H \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left( \left\| (\tilde{A}^0 - A^0) \nabla u_H^0 \right\|_{L^2(\Omega)} + \|f - f_H\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left( \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \|u_H^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f - f_H\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left( \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \left( \|u^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u^0 - u_H^0\|_{H_0^1(\Omega)} \right) + \|f - f_H\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y,\chi,u^0} \tilde{h}^3 |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A,u^0} \hat{h}^3 |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha_0,\rho} H^3 |f|_{H^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die inverse Ungleichung impliziert dann unmittelbar bei uniformer Zerlegung

$$\|u_H^0 - \tilde{u}_H^0\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{\alpha,\beta,\rho,Y,\chi,u^0} \frac{\tilde{h}^3}{H} |A|_{H^4(Y)} + C_{\alpha,\beta,\rho,Y,A,u^0} \frac{\hat{h}^3}{H} |\chi|_{H^4(Y)} + C_{\alpha_0,\rho} H^2 |f|_{H^3(\Omega)}.$$

□

Zusammen ergibt sich damit.

**Satz 5.9.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $a_{ij} \in C^{2,1}(\bar{Y}) \cap H_{\text{per}}^4(Y)$  und  $f \in H^3(\Omega)$ . Für  $u^0 \in H^4(\Omega)$  gilt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 mit  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$

$$\left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{H^1(\Omega)} = O(\epsilon).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) - \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{H^1(\Omega)} &= \left\| \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) (\nabla u^0(x) - \nabla u_H^0(x)) + \right. \\ &\quad \left. (\chi - \tilde{\chi}_{\hat{h}}) \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u_H^0(x) + \tilde{\chi}_{\hat{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) (\nabla u_H^0(x) - \nabla \tilde{u}_H^0(x)) \right\|_{H^1(\Omega)} = O(\epsilon). \end{aligned}$$

□

Aus dem bisher gezeigten folgt.

**Satz 5.10.** Für die Lösung  $v_0^\epsilon$  des Korrekturproblems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla v_0^\epsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ v_0^\epsilon = -\epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u^0(x) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und der Diskretisierung  $\tilde{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon$  der Lösung  $\tilde{v}_0^\epsilon$  des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla \tilde{v}_0^\epsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \tilde{v}_0^\epsilon = -\epsilon \tilde{\chi}_{\hat{h}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gilt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 mit  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$

$$\left\| v_0^\epsilon - \tilde{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)} = O\left(\epsilon^2 + \left\| v_0^\epsilon - v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)} + \epsilon^3 \left\| v_0^\epsilon - v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Dabei muss  $\mathcal{T}_{\hat{H}}$  so gewählt sein, dass die Randdaten  $\epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u^0(x)$  und  $\epsilon \tilde{\chi}_{\hat{h}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla \tilde{u}_H^0(x)$  auf  $\mathcal{T}_{\hat{H}}$  aufgelöst werden können.

*Beweis.* Sei  $\hat{v}_0^\epsilon$  die Lösung des Problems

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla \hat{v}_0^\epsilon) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \hat{v}_0^\epsilon = -\epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u^0(x) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Wegen

$$\operatorname{div}(\tilde{A}^0 \nabla (v_{0,\hat{H}}^\epsilon - \hat{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon)) = \operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla v_{0,\hat{H}}^\epsilon)$$

folgt mit Abschätzung (5.3)

$$\begin{aligned} \left\| v_{0,\hat{H}}^\epsilon - \hat{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{2}{\alpha_0} \left\| \operatorname{div}((\tilde{A}^0 - A^0) \nabla v_{0,\hat{H}}^\epsilon) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{2}{\alpha_0} \left\| (\tilde{A}^0 - A^0) \nabla v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \left\| \nabla v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2}{\alpha_0} \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \left( \left\| v_0^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| v_0^\epsilon - v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C_{\alpha_0, \beta_0} \|A^0 - \tilde{A}^0\|_G \left( \left\| \epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u^0(x) \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| v_0^\epsilon - v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &= O\left(\epsilon^3 + \epsilon^3 \left\| v_0^\epsilon - v_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)}\right). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für  $u^0 \in H^4(\Omega)$  und  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$

$$\left\| \tilde{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon - \hat{v}_{0,\hat{H}}^\epsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{\alpha_0, \beta_0} \left\| \epsilon \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u^0(x) - \epsilon \tilde{\chi}_{\hat{h}}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) \right\|_{H^1(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

Eine einfache Anwendung der Dreiecksungleichung liefert nun die Aussage.  $\square$

## 5. Finite Element Näherungen

*Bemerkung.* Der letzte Satz legt es nahe, für die Korrekturprobleme lokal am Rand verfeinerte Gitter zu verwenden.

**Korollar 5.11.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck,  $a_{ij} \in C^{2,1}(\overline{Y}) \cap H^4_{\text{per}}(Y)$  und  $f \in H^3(\Omega)$ . Gilt  $u^0 \in H^4(\Omega)$ , so folgt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 mit  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$  und geeigneter Wahl von  $\mathcal{T}_{\tilde{H}}$

$$\left\| u^\epsilon - u^0 + \epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^0(x) + v_0^\epsilon(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

genau dann, wenn

$$\left\| u^\epsilon - \tilde{u}_H^0 + \epsilon \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \tilde{u}_H^0(x) + \tilde{v}_{0,\tilde{H}}^\epsilon(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

*Beweis.* Direkte Folgerung der vorherigen Sätze. □

Im eindimensionalen Fall ist die  $H^4$ -Regularität von  $u^0$  ohne weitere Voraussetzungen garantiert. Daher gilt

**Korollar 5.12.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $a_{ij} \in C^{2,1}(\overline{Y}) \cap H^4_{\text{per}}(Y)$  und  $f \in H^3(\Omega)$ , so folgt bei Verwendung der Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 mit  $\tilde{h} = \hat{h} = H = \tilde{H} = \epsilon$

$$\left\| u^\epsilon - u^0 + \epsilon \chi \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{du^0}{dx}(x) + v_0^\epsilon(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2)$$

genau dann, wenn

$$\left\| u^\epsilon - \tilde{u}_H^0 + \epsilon \tilde{\chi}_{\tilde{h}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) \frac{d\tilde{u}_H^0}{dx}(x) + \tilde{v}_{0,\tilde{H}}^\epsilon(x) \right\|_{L^2(\Omega)} = O(\epsilon^2).$$

## 5.4. Numerische Ergebnisse

Für die numerischen Ergebnisse habe ich die Finiten Element Räume aus Tabelle 5.1 unter Verwendung der C++-Bibliothek `getfem++`<sup>1</sup> implementiert. Dafür musste ich (wie bereits erwähnt) die Bibliothek `getfem++` um das Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelement und periodische Randbedingungen erweitern. Die Laufzeituntersuchungen habe ich dann auf einem AMD Opteron<sup>2</sup> durchgeführt.

Das lokal (am Rand) verfeinerte Gitter für die Korrekturlösung habe ich erhalten, indem ich ausgehend von einer die Elementarzellenstruktur respektierenden Triangulierung die äußersten Dreiecke solange verfeinert habe, bis ihre Größe um den Faktor  $\epsilon$  kleiner als zu Beginn war.

<sup>1</sup><http://home.gna.org/getfem/>

<sup>2</sup>CPU-Frequenz 2,3 GHz, 16 GB Arbeitsspeicher

**Definition 5.13.** Als *erwartete Konvergenzordnung* oder *Estimated Order of Convergence (EOC)* einer Folge von Näherungslösungen bezeichnet man die durch

$$\text{EOC} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) = \log_2 \left( \frac{\|u^\epsilon - u_{\text{app}}^\epsilon\|}{\|u^{\epsilon/2} - u_{\text{app}}^{\epsilon/2}\|} \right)$$

definierte Folge. Ist die Berechnung der Referenzlösung zu aufwendig, so wird auch folgende Definition verwendet

$$\text{EOC} \left( \frac{\epsilon}{2} \right) = \log_2 \left( \frac{\|u_{\text{app}}^\epsilon - u_{\text{app}}^{\epsilon/2}\|}{\|u_{\text{app}}^{\epsilon/2} - u_{\text{app}}^{\epsilon/4}\|} \right).$$

*Bemerkung.* Als Abbruchkriterium für sämtliche verwendeten iterativen Löser verwende ich die Bedingung, dass das relative Residuum kleiner als  $10^{-9}$  ist, d. h.

$$\frac{\|r^k\|_2}{\|r^0\|_2} < 10^{-9},$$

wobei  $r^k$  das Residuum der  $k$ -ten Näherungslösung ist.

Bei meinen numerischen Untersuchungen beschränke ich mich auf den Fall isotroper Medien, d. h.

$$A(y) = a(y)I,$$

da ich den Einfluss der Regularität und der Symmetrie des Diffusionskoeffizienten in den Vordergrund stellen möchte. Den nicht isotropen Fall habe ich aber dennoch implementiert, da selbst bei isotropen Medien der homogenisierte Diffusionskoeffizient in der Regel nicht isotrop ist (siehe z.B. den Fall geschichteter Medien)

Des Weiteren ist in allen Beispielen  $\Omega = Y = ]0, 1[^n$  mit  $n = 1, 2$  und  $f \equiv 10$ .

In den Beispielen mit unstetigem Diffusionskoeffizienten passe ich die Finiten Element Räume aus Tabelle 5.1 natürlich geeignet an.

### 5.4.1. Eindimensionaler Fall

#### Symmetrischer Diffusionskoeffizient

Als erstes betrachte ich naheliegenderweise das theoretische Beispiel aus Abschnitt 3.5. Damit es symmetrisch wird muss ich lediglich die Elementarzelle „verschieben“, sei also

$$a(y) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi y)}.$$

Für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten ergibt sich nach (3.10)

$$a^0 = \left( \int_0^1 2 + \cos(2\pi y) dy \right)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Wie nicht anders zu erwarten kann man Tabelle 5.2 entnehmen, dass bereits die asymptotische Entwicklung erster Ordnung die Konvergenzordnung zwei bezüglich der  $L^2$ -Norm hat.

5. Finite Element Näherungen

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.1923467236	–	2.0819803733	–
1/4	0.0847374800	1.1826371250	2.0445543088	0.0261700833
1/8	0.0411170025	1.0432651302	2.0436286313	0.0006533320
1/16	0.0203702131	1.0132740234	2.0419236635	0.0012041205
1/32	0.0101605790	1.0034784511	2.0414188830	0.0003566903
1/64	0.0050771923	1.0008798167	2.0412879209	0.0000925554
1/128	0.0025382086	1.0002202797	2.0412549741	0.0000232856

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0772127500	–	0.5685815338	–
1/4	0.0193031875	1.9999999989	0.2823179077	1.0100466012
1/8	0.0048459447	1.9939892624	0.1407829454	1.0038480679
1/16	0.0012118192	1.9996034838	0.0703484634	1.0008817594
1/32	0.0003029606	1.9999725435	0.0351699746	1.0001746185
1/64	0.0000757440	1.9999268435	0.0175844877	1.0000409905
1/128	0.0000189994	1.9951751474	0.0087921843	1.0000097732

Tabelle 5.2.: EOC bei glattem symmetrischem Diffusionskoeffizient (1d).

Den benötigte Rechenaufwand zur Bestimmung der asymptotischen Approximation erster Ordnung kann man Tabelle 5.3 entnehmen.

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.00	0.00	0.00
1/4	0.01	0.01	0.00
1/8	0.00	0.01	0.01
1/16	0.01	0.02	0.02
1/32	0.01	0.04	0.17
1/64	0.02	0.17	2.98
1/128	0.02	0.70	44.31

Tabelle 5.3.: Laufzeiten (s) bei glattem symmetrischem Diffusionskoeffizient (1d).

Als nächstes betrachte ich symmetrisch geschichtete Medien, d. h.

$$a(y) = \begin{cases} 1, & |y - 0.5| > 0.25, \\ 2, & |y - 0.5| < 0.25. \end{cases}$$

Mit (3.10) ergibt sich  $a^0 = 4/3$ . Tabelle 5.4 kann man entnehmen, dass auch bei unstetigem (symmetrischem) Diffusionskoeffizienten die asymptotische Entwicklung erster

Ordnung die Konvergenzordnung zwei bezüglich der  $L^2$ -Norm hat. Den Rechenaufwand kann man für dieses Beispiel der Tabelle 5.5 entnehmen.

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0613500989	–	0.7242908035	–
1/4	0.0272739063	1.1695443230	0.7222030181	0.0041646078
1/8	0.0131775642	1.0494376233	0.7218081338	0.0007890488
1/16	0.0065300962	1.0129075745	0.7217173792	0.0001814047
1/32	0.0032576711	1.0032633067	0.7216951890	0.0000443584
1/64	0.0016279121	1.0008181332	0.7216896731	0.0000110266
1/128	0.0008138406	1.0002045923	0.7216883038	0.0000027371

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0241851245	–	0.1820357206	–
1/4	0.0060462811	2.0000000000	0.0904133748	1.0096134651
1/8	0.0015115703	2.0000000007	0.0451308104	1.0024235227
1/16	0.0003778926	1.9999999943	0.0225559106	1.0006071536
1/32	0.0000944732	1.9999996390	0.0112767682	1.0001518647
1/64	0.0000236187	1.9999777806	0.0056382357	1.0000379671
1/128	0.0000059105	1.9985738646	0.0028190995	1.0000094077

Tabelle 5.4.: EOC bei symmetrisch geschichteten Medien (1d).

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.00	0.00	0.00
1/4	0.01	0.01	0.01
1/8	0.01	0.01	0.01
1/16	0.01	0.01	0.03
1/32	0.01	0.05	0.15
1/64	0.01	0.17	3.26
1/128	0.03	0.72	50.25

Tabelle 5.5.: Laufzeiten (s) bei symmetrisch geschichteten Medien (1d).

### Unsymmetrischer Diffusionskoeffizient

Nun möchte ich tatsächlich das unsymmetrische Beispiel aus Abschnitt 3.5 numerisch untersuchen. Genau wie im analytischen Fall hat erst die korrigierte asymptotische Approximation erster Ordnung die Konvergenzordnung zwei bzgl. der  $L^2$ -Norm (Tabelle

## 5. Finite Element Näherungen

5.6). Der Mehraufwand zur Bestimmung der Lösung des Korrekturproblem ist demgegenüber vernachlässigbar (Tabelle 5.7).

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.2477964042	–	1.8597865596	–
1/4	0.1364889256	0.8603713542	1.9916267308	–0.0988102255
1/8	0.0698419379	0.9666184036	2.0310389516	–0.0282706242
1/16	0.0351073412	0.9923208504	2.0387850833	–0.0054917948
1/32	0.0175766232	0.9981148129	2.0406312711	–0.0013058172
1/64	0.0087911693	0.9995309482	2.0410874739	–0.0003224924
1/128	0.0043959415	0.9998828705	2.0412012635	–0.0000804273

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.2200091432	–	1.0391007988	–
1/4	0.1137923409	0.9511600252	0.5203655528	0.9977382440
1/8	0.0572821968	0.9902447301	0.2600209467	1.0008976133
1/16	0.0286959203	0.9972411785	0.1300091066	1.0000151665
1/32	0.0143550666	0.9992856190	0.0650057048	0.9999744448
1/64	0.0071784291	0.9998199593	0.0325030381	0.9999917557
1/128	0.0035893267	0.9999549129	0.0162515435	0.9999978323

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0595282778	–	0.6322741801	–
1/4	0.0148821527	1.9999919343	0.3150844874	1.0048115782
1/8	0.0037036281	2.0065720660	0.1573431886	1.0018240024
1/16	0.0009256049	2.0004708694	0.0786452765	1.0004827016
1/32	0.0002314040	1.9999825247	0.0393203073	1.0000855228
1/64	0.0000578525	1.9999627299	0.0196598910	1.0000192726
1/128	0.0000144329	2.0030147660	0.0098299135	1.0000047037

Tabelle 5.6.: EOC bei glattem unsymmetrischen Diffusionskoeffizienten (1d).

Als letztes eindimensionales Beispiel betrachte ich unsymmetrisch geschichtete Medien, d. h.

$$a(y) = \begin{cases} 1, & |y - 0.25| < 0.25, \\ 2, & |y - 0.75| < 0.25. \end{cases}$$

Wie im symmetrischen Fall ergibt sich  $a^0 = 4/3$ . Tabelle 5.8 kann man weiter entnehmen, dass auch bei unstetigem (unsymmetrischem) Diffusionskoeffizienten erst die korrigierte asymptotische Entwicklung erster Ordnung die Konvergenzordnung zwei bezüglich der  $L^2$ -Norm hat (Rechenaufwand: Tabelle 5.9).

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$\tilde{u}_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.01	0.01	0.01	0.00
1/4	0.00	0.00	0.00	0.00
1/8	0.00	0.00	0.01	0.01
1/16	0.00	0.01	0.02	0.03
1/32	0.01	0.05	0.07	0.18
1/64	0.01	0.18	0.23	3.30
1/128	0.03	0.72	0.91	50.83

Tabelle 5.7.: Laufzeiten (s) bei glattem unsymmetrischem Diffusionskoeffizienten (1d).

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0925609393	–	0.6652783668	–
1/4	0.0506949275	0.8685621053	0.7083091981	–0.0904211557
1/8	0.0258698624	0.9705690180	0.7183851651	–0.0203782809
1/16	0.0129994080	0.9928264588	0.7208647449	–0.0049710353
1/32	0.0065077405	0.9982172926	0.7214822244	–0.0012352570
1/64	0.0032548739	0.9995550877	0.7216364440	–0.0003083487
1/128	0.0016275624	0.9998888116	0.7216749974	–0.0000770738

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0868923178	–	0.3854987713	–
1/4	0.0446964326	0.9590689438	0.1930350435	0.9978634840
1/8	0.0225017869	0.9901201128	0.0965531954	0.9994668674
1/16	0.0112700046	0.9975514681	0.0482810554	0.9998667912
1/32	0.0056373908	0.9993886142	0.0241410854	0.9999666735
1/64	0.0028189937	0.9998473373	0.0120706123	0.9999916760
1/128	0.0014095341	0.9999618403	0.0060353148	0.9999979289

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0207245423	–	0.2093616117	–
1/4	0.0051811356	2.0000000000	0.1042954391	1.0053208664
1/8	0.0012952839	2.0000000173	0.0520994363	1.0013364011
1/16	0.0003238210	1.9999999797	0.0260436799	1.0003344504
1/32	0.0000809552	2.0000003199	0.0130210850	1.0000836425
1/64	0.0000202385	2.0000200560	0.0065104481	1.0000209185
1/128	0.0000050551	2.0012960272	0.0032552122	1.0000052455

Tabelle 5.8.: EOC bei geschichteten Medien (1d).

Ein Vergleich von Abbildung 5.1 (in dem auch die Knoten abgebildet sind) mit den analytischen Ergebnissen in Abbildung 3.1 lässt optisch keinen Unterschied erkennen.

5. Finite Element Näherungen

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$\tilde{u}_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.00	0.00	0.01	0.00
1/4	0.01	0.01	0.02	0.00
1/8	0.01	0.01	0.02	0.01
1/16	0.00	0.01	0.02	0.02
1/32	0.01	0.04	0.06	0.16
1/64	0.03	0.18	0.23	3.32
1/128	0.02	0.71	0.90	50.72

Tabelle 5.9.: Laufzeiten (s) bei geschichtete Medien (1d).

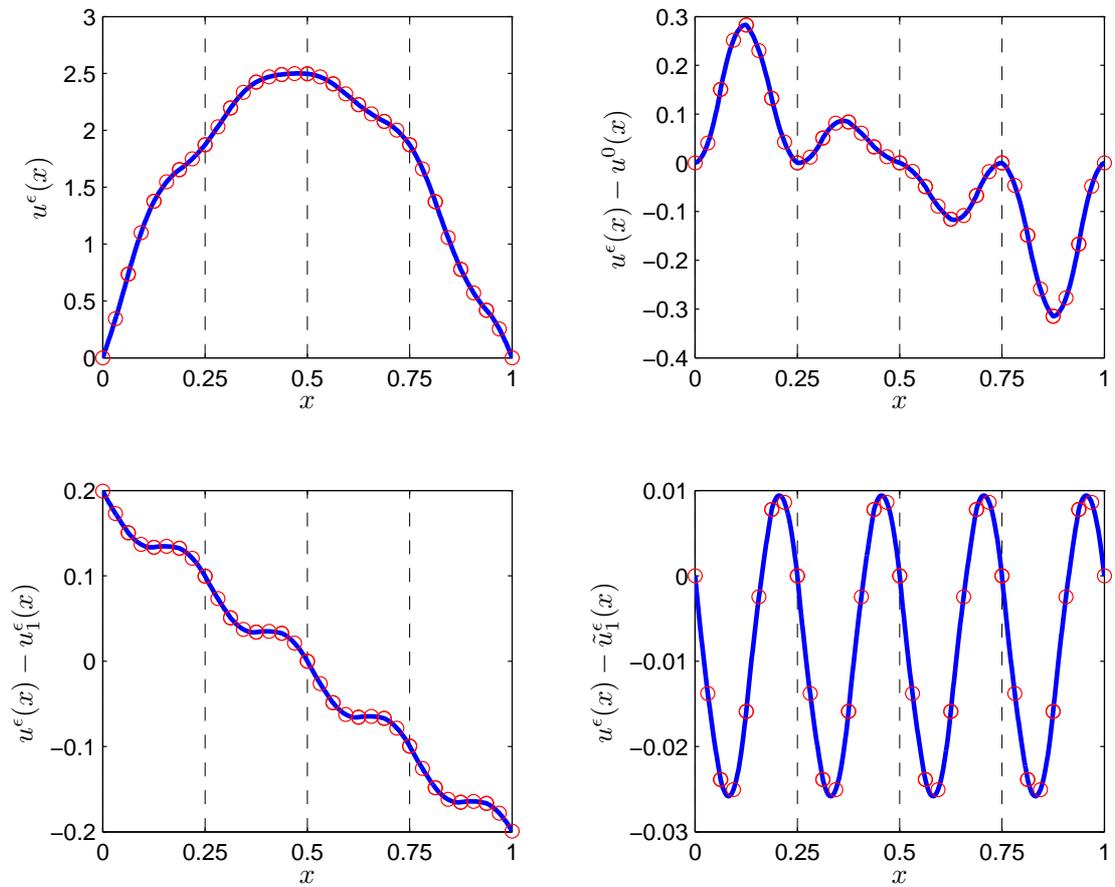


Abbildung 5.1.: Numerische Lösung und Approximationsfehler bei geschichteten Medien für  $\epsilon = 1/4$ .

### 5.4.2. Zweidimensionaler Fall

#### Symmetrischer Diffusionskoeffizient

Zunächst betrachte ich den Fall, in dem die Lösung  $v_0^\epsilon$  des Korrekturproblems (3.11) identisch verschwindet. Dies ist z.B. für *symmetrische*  $A \in M(\alpha, \beta, Y)$  der Fall (siehe Bakhvalov und Panasenko (1989), §6.3, und Neuss u. a. (2001), Corollary 2.4, S. 5). Als erstes betrachte ich ein Beispiel mit glatten Koeffizienten, sei also

$$a(y) = \frac{1}{2 + \cos(2\pi y_1) \cos(2\pi y_2)}.$$

Für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten ergibt sich numerisch

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0.52 & 0 \\ 0 & 0.52 \end{pmatrix}.$$

Tabelle 5.10 entnimmt man, dass bereits die Approximation erster Ordnung  $u_1^\epsilon$  die Konvergenzordnung 2 bzgl. der  $L^2$ -Norm und 1 bzgl. der  $H^1$ -Norm aufweist. Letzteres ist auch theoretisch gesichert (siehe Jikov u. a. (1994), S. 29, 30).

Die Frage, wie hoch der Rechenaufwand für die Approximationen im Vergleich zur Lösung des Originalproblems ist, beantwortet Tabelle 5.11. Dabei ist zu beachten, dass mit kleiner werdendem  $\epsilon$  die Zerlegungen der Elementarzelle  $Y$  und des Gebietes  $\Omega$  verfeinert werden und somit insbesondere die Bestimmung der von  $\epsilon$  unabhängigen Lösung  $u^0$  des homogenisierten Problems mit kleiner werdendem  $\epsilon$  aufwändiger wird.

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0453033143	–	0.7396763548	–
1/4	0.0198023429	1.1939454650	0.6924529308	0.0951781502
1/8	0.0096168501	1.0420347991	0.6826984688	0.0204674917
1/16	0.0047723836	1.0108544194	0.6803285078	0.0050169725
1/32	0.0023817780	1.0026710405	0.6797724979	0.0011795488
$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0150663057	–	0.2189079145	–
1/4	0.0035537233	2.0839224641	0.1194965457	0.8733552000
1/8	0.0008830151	2.0088212755	0.0617623306	0.9521698162
1/16	0.0002193059	2.0094937688	0.0310311422	0.9930103922
1/32	0.0000546916	2.0035525323	0.0155313801	0.9985307736

Tabelle 5.10.: EOC bei glattem symmetrischem Diffusionskoeffizient (2d).

Lässt man die Regularitätsforderung an die Koeffizienten fallen, so ergibt sich, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen, bezüglich der Konvergenzordnung kein qualitativer

## 5. Finite Element Näherungen

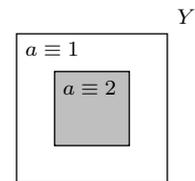
$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.02	0.03	0.03
1/4	0.02	0.05	0.14
1/8	0.07	0.57	3.30
1/16	0.31	9.42	116.37
1/32	1.52	170.09	12828.12

Tabelle 5.11.: Laufzeiten (s) bei glattem symmetrischem Diffusionskoeffizient (2d).

Unterschied (siehe die Tabellen 5.12, 5.13 und 5.14, 5.15). Hierbei sollte ich noch erwähnen, dass nicht alle Finite Element Räume aus Tabelle 5.1 verwendet werden. Zunächst approximiere ich die Koeffizientenfunktionen mit Treppenfunktionen. Außerdem ersetze ich die Bogner-Fox-Schmitt Rechteckelemente durch Lagrange Elemente, da die Zelllösungen nicht glatt sein kann.

Sei also zuerst

$$a(y) = \begin{cases} 1, & \|y - (0.5, 0.5)\|_\infty > 0.25, \\ 2, & \|y - (0.5, 0.5)\|_\infty < 0.25. \end{cases}$$



Dann ergibt sich numerisch für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.001 \\ 0.001 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0239518289	–	0.3416978653	–
1/4	0.0117225822	1.0308454275	0.3406784255	0.0043106475
1/8	0.0057796767	1.0202296871	0.3450890791	–0.0185582308
1/16	0.0028760931	1.0068784421	0.3465445275	–0.0060719180
1/32	0.0014361379	1.0019160630	0.3469459848	–0.0016703345

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0074396050	–	0.0951826775	–
1/4	0.0027864411	1.4168023867	0.0489383481	0.9597336338
1/8	0.0007968061	1.8061230500	0.0256343033	0.9328897161
1/16	0.0002080745	1.9371286759	0.0130790994	0.9708124860
1/32	0.0000528195	1.9779580265	0.0065997939	0.9867703186

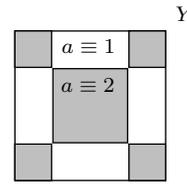
Tabelle 5.12.: EOC bei unstetigem symmetrischem Diffusionskoeffizient (2d).

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.01	0.02	0.01
1/4	0.01	0.04	0.04
1/8	0.04	0.53	1.78
1/16	0.18	9.28	84.16
1/32	1.02	169.24	6453.78

Tabelle 5.13.: Laufzeiten (s) bei unstetigem symmetrischem Diffusionskoeffizient (2d).

Als letztes symmetrisches Beispiel betrachte ich das symmetrische Schachbrett, d. h. es sei nun

$$a(y) = \begin{cases} 1, & 0.25 < y_1 < 0.75 \text{ und } y_2 < 0.25, \\ 1, & 0.25 < y_1 < 0.75 \text{ und } y_2 > 0.75, \\ 1, & 0.25 < y_2 < 0.75 \text{ und } y_1 < 0.25, \\ 1, & 0.25 < y_2 < 0.75 \text{ und } y_1 > 0.75, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Dann ergibt sich insbesondere für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten (siehe Jikov u. a. (1994), S.37)

$$A^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0163724770	–	0.3095758450	–
1/4	0.0076974322	1.0888234487	0.3139580561	–0.0202789239
1/8	0.0037765208	1.0273195215	0.3219953159	–0.0364678695
1/16	0.0018822135	1.0046274532	0.3248096859	–0.0125549533
1/32	0.0009406925	1.0006351948	0.3258576955	–0.0046474118
$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0059345065	–	0.1032529360	–
1/4	0.0013423883	2.1443260663	0.0480595898	1.1032865655
1/8	0.0003378550	1.9903259254	0.0245391079	0.9697415346
1/16	0.0000843014	2.0027753245	0.0123250493	0.9934893838
1/32	0.0000210614	2.0009553368	0.0061709050	0.9980394212

Tabelle 5.14.: EOC bei symmetrischem Schachbrettmedien (2d).

## 5. Finite Element Näherungen

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.01	0.02	0.02
1/4	0.03	0.06	0.05
1/8	0.05	0.53	1.77
1/16	0.18	9.35	84.43
1/32	1.01	169.45	6470.10

Tabelle 5.15.: Laufzeiten (s) bei symmetrischem Schachbrettmedien (2d).

### Unsymmetrischer Fall

Auch im unsymmetrischen Fall betrachte ich als erstes ein Beispiel mit glatten Koeffizienten. Genauer gesagt verallgemeinere ich das eindimensionale Beispiel aus Abschnitt 3.5

$$a(y) = \frac{1}{2 + \sin(2\pi y_1)}.$$

Nach Cioranescu und Donato (1999), Theorem 5.10, S.99 ergibt sich für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zum Fall symmetrischer Diffusionskoeffizienten verschwindet nun die Lösung des Korrekturproblems nicht mehr. Wie man der Tabelle 5.16 entnimmt erhöht die Korrektur die Konvergenzordnung bzgl. der  $L^2$ -Norm um eins. Der zusätzliche numerische Aufwand zur Bestimmung der Korrekturlösung hält sich - wie man Tabelle 5.17 entnimmt - dabei in Grenzen.

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0753795658	–	0.7568077129	–
1/4	0.0524915563	0.5220881141	0.8229203871	–0.1208260732
1/8	0.0290220394	0.8549364701	0.8596651469	–0.0630219519
1/16	0.0148975437	0.9620744180	0.8691848233	–0.0158881673
1/32	0.0074988942	0.9903247135	0.8716373795	–0.0040650825
$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0811675407	–	0.6017144340	–
1/4	0.0452225062	0.8438619550	0.3111532438	0.9514536780
1/8	0.0239634065	0.9162079399	0.1571932788	0.9850857540
1/16	0.0121963564	0.9743827882	0.0789971925	0.9926662461
1/32	0.0061268676	0.9932286336	0.0396156716	0.9957301213

Tabelle 5.16.: EOC bei glatten geschichteten Medien (2d).

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0304643433	–	0.3000975354	–
1/4	0.0083997149	1.8587093738	0.1552774971	0.9505827016
1/8	0.0021197667	1.9864348440	0.0799556498	0.9575768840
1/16	0.0005338653	1.9893577599	0.0406563081	0.9757207669
1/32	0.0001343803	1.9901539728	0.0205461175	0.9846134151

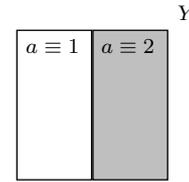
Tabelle 5.16.: EOC bei glatten geschichteten Medien (2d).

$\epsilon$	$u^0$	$u_1$	$\tilde{u}_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.02	0.03	0.04	0.04
1/4	0.02	0.05	0.09	0.14
1/8	0.08	0.59	0.98	3.35
1/16	0.30	9.66	13.19	117.86
1/32	1.48	170.51	211.23	12469.08

Tabelle 5.17.: Laufzeiten (s) bei glatten geschichteten Medien (2d).

Als nächstes betrachte ich das klassische Problem geschichteter Medien. Sei also

$$a(y) = \begin{cases} 1, & y_1 < 0.5, \\ 2, & y_1 > 0.5. \end{cases}$$



Wie nach Cioranescu und Donato (1999), Theorem 5.10, S. 99, nicht anders zu erwarten, ergibt sich für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten

$$A^0 = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0301482923	–	0.2790714535	–
1/4	0.0200507515	0.5884199752	0.2977509503	–0.0934715550
1/8	0.0109363794	0.8745211066	0.3083434409	–0.0504320450
1/16	0.0055957736	0.9667256927	0.3114974056	–0.0146819900
1/32	0.0028144330	0.9914932777	0.3123237718	–0.0038222334

Tabelle 5.18.: EOC bei geschichteten Medien (2d).

5. Finite Element Näherungen

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0333610942	–	0.2312360181	–
1/4	0.0182724957	0.8684929129	0.1192249442	0.9556800265
1/8	0.0095836605	0.9310249823	0.0601919623	0.9860433521
1/16	0.0048601412	0.9795785886	0.0302273055	0.9937184678
1/32	0.0024391302	0.9946314686	0.0151488619	0.9966429737

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0102038362	–	0.1044334018	–
1/4	0.0028560276	1.8370298092	0.0532558581	0.9715710809
1/8	0.0007309319	1.9662010154	0.0272786145	0.9651698590
1/16	0.0001846220	1.9851624713	0.0138590398	0.9769430634
1/32	0.0000464546	1.9906809929	0.0069990899	0.9855880614

Tabelle 5.18.: EOC bei geschichteten Medien (2d).

Laut Tabelle 5.18 hat die Approximation erster Ordnung  $u_1^\epsilon$  nur die Konvergenzordnung 1 bzgl. der  $L^2$ -Norm, wohingegen die korrigierte Approximation erster Ordnung die Konvergenzordnung 2 bzgl. der  $L^2$ -Norm besitzt. Die Konvergenzordnung bzgl. der  $H^1$ -Norm wird durch die Korrektur im Wesentlichen unverändert gelassen.

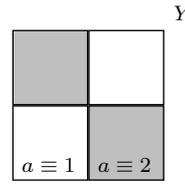
Interessant an dieser Stelle ist die Frage, wie groß der Mehraufwand für das Korrekturproblem ist. Dieser ist wie schon im Fall glatter Koeffizienten vertretbar (siehe Tabelle 5.19)

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$\tilde{u}_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.02	0.02	0.03	0.01
1/4	0.01	0.04	0.08	0.04
1/8	0.05	0.55	0.93	1.79
1/16	0.19	9.31	12.77	88.50
1/32	1.00	169.62	209.55	6907.70

Tabelle 5.19.: Laufzeiten (s) bei geschichteten Medien (2d).

Ist das Problem in beiden Richtungen unsymmetrisch, so findet man Beispiele, in denen das Korrekturproblem die Konvergenzordnung nicht verbessert. Ein mögliches Problem ist das Schachbrettproblem, d. h.

$$a(y) = \begin{cases} 1, & y_1, y_2 < 0.5, \\ 1, & y_1, y_2 > 0.5, \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Für den homogenisierten Diffusionskoeffizienten ergibt sich (siehe Jikov u. a. (1994), S.37)

$$A^0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wie man Tabelle 5.20 entnimmt, verändert die Korrektur in diesem Fall nicht die Konvergenzordnung.

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u^0\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u^0\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0161774046	–	0.2268342841	–
1/4	0.0085648440	0.9174812869	0.2563242817	–0.1763314439
1/8	0.0046063517	0.8948024023	0.2891273304	–0.1737348370
1/16	0.0024018905	0.9394541991	0.3075452366	–0.0890936420
1/32	0.0012272049	0.9687942027	0.3170389096	–0.0438612794

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - u_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0200220247	–	0.3052071004	–
1/4	0.0080652016	1.3118053713	0.2196768661	0.4744055763
1/8	0.0036548677	1.1418914178	0.1594285293	0.4624731308
1/16	0.0017417208	1.0693057915	0.1135195716	0.4899687691
1/32	0.0008500261	1.0349343740	0.0804082929	0.4975248426

$\epsilon$	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{L^2(\Omega)}$	EOC	$\ u^\epsilon - \tilde{u}_1^\epsilon\ _{H^1(\Omega)}$	EOC
1/2	0.0105382132	–	0.1795852569	–
1/4	0.0053155046	0.9873517113	0.0626434086	1.5194342947
1/8	0.0029842713	0.8328279685	0.0461270740	0.4415489371
1/16	0.0015751167	0.9219199254	0.0325400238	0.5033984726
1/32	0.0008084339	0.9622569956	0.0228024854	0.5130242220

Tabelle 5.20.: EOC bei Schachbrettmedien (2d).

Neben den sehr kurzen Laufzeiten besteht ein weiterer Vorteil der approximativen Lösung mittels Homogenisierungsmethoden darin, dass der Speicherbedarf wesentlich geringer ist, da das Originalproblem hierfür nicht assembliert werden muss (erst für das Zweigitterverfahren).

## 5. Finite Element Näherungen

$\epsilon$	$u^0$	$u_1^\epsilon$	$\tilde{u}_1^\epsilon$	$u^\epsilon$
1/2	0.01	0.02	0.03	0.01
1/4	0.02	0.05	0.08	0.05
1/8	0.05	0.54	0.91	1.76
1/16	0.18	9.30	12.67	84.52
1/32	1.03	169.62	208.99	6461.73

Tabelle 5.21.: Laufzeiten (s) bei Schachbrettmedien (2d).

Das Originalmedium  $\Omega$  setzt sich aus  $(1/\epsilon)^n$  ( $n = 1, 2$ ) Elementarzellen zusammen. Konstruiert man das Gitter für das Originalproblem aus Kopien des Gitters für die Elementarzelle, so erhöht sich auch die Anzahl der Freiheitsgrade (ungefähr) um den Faktor  $(1/\epsilon)^n$  ( $n = 1, 2$ ) (bei gleicher Wahl der Formfunktionen). Beim Assemblieren des linearen Gleichungssystems für das Originalproblem muss somit eine Matrix gespeichert werden, die wiederum eine um den Faktor  $(1/\epsilon)^n$  ( $n = 1, 2$ ) erhöhte Anzahl von nichtverschwindenden Einträgen im Vergleich zur Matrix der Zellproblemen hat.

Bei Verwendung der korrigierten asymptotischen Entwicklung erster Ordnung hingegen muss man  $n + 2$  kleine Gleichungssysteme lösen (homogenisiertes Problem +  $n$  Zellprobleme + Korrekturproblem) und dabei nur den Speicherplatz für drei kleine Matrizen zur Verfügung stellen. Damit erhält man auch für Probleme, die wegen Speichermangels nicht einmal assembliert werden können, noch gute Näherungslösungen.

### 5.5. Zweigitterverfahren

Die numerischen Ergebnisse des letzten Abschnitts zeigen, dass die Korrektur nicht in allen Fällen eine Verbesserung des Konvergenzverhaltens zur Folge hat. Daher ist es um so wichtiger, ein effektives Lösungsverfahren für das Originalproblem zu haben. Wie ich in diesem Abschnitt numerisch verifizieren kann, ist dies unter Verwendung der zur Bestimmung der korrigierten asymptotischen Approximation benötigten Finite Elemente möglich.

Ein Blick auf die Fehlerfunktionen (Abbildung 5.2) zeigt nämlich, dass sich die korrigierte asymptotische Approximation erster Ordnung sehr gut für eine Grobgitterkorrektur mit einem lokal am Rand verfeinerten Gitter eignen müsste. Genau so ein Gitter wurde aber bereits zur Bestimmung der Lösung des Korrekturproblems verwendet. Daher stehen schon sämtliche Komponenten für ein Zweigitterverfahren ohne weitere Berechnungen zur Verfügung.

1. Für die Prolongation der Grobgitterkorrektur verwende ich die bereits berechnete Interpolation von  $\mathcal{T}_{\hat{H}}$  nach  $\mathcal{K}_h$ .
2. Als Restriktion verwende ich die transponierte Interpolationsmatrix (Galerkin-Ansatz).

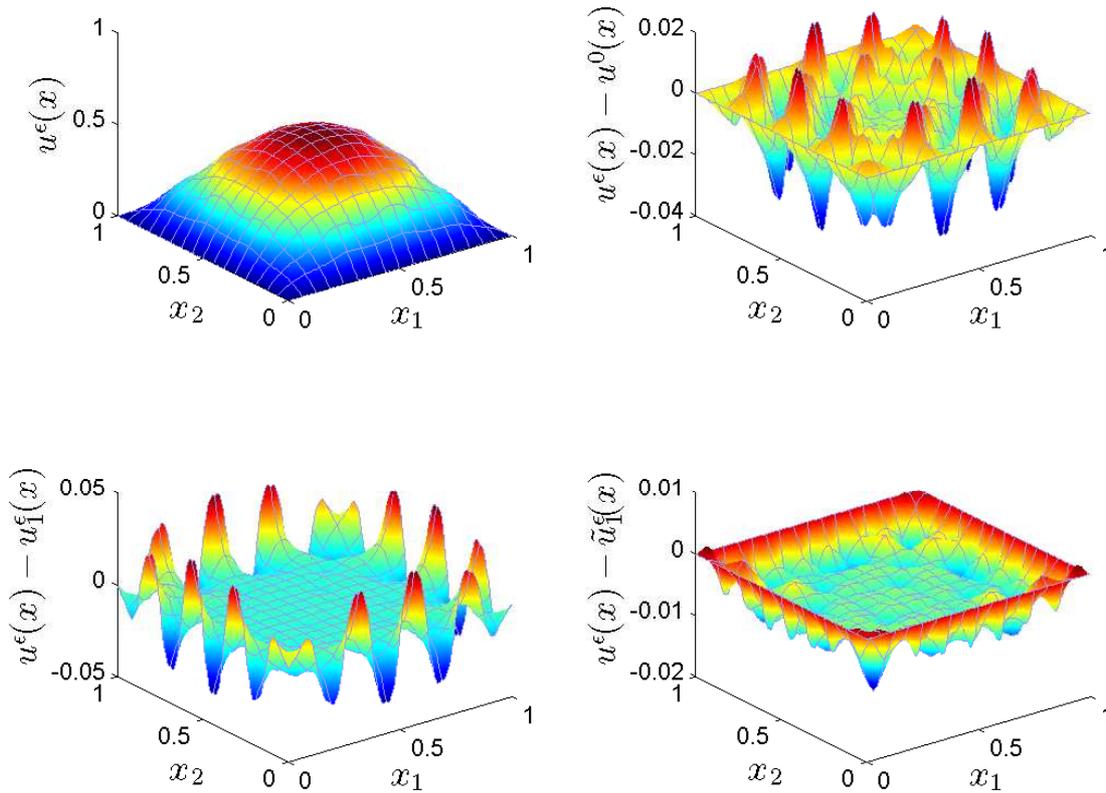


Abbildung 5.2.: Numerische Lösung und Approximationsfehler bei Schachbrettmedien für  $\epsilon = 1/4$ .

3. Als Grobgitterproblem verwende ich die Diskretisierung des homogenisierten Problems auf dem lokal am Rand verfeinerten Gitter  $\mathcal{T}_{\hat{H}}$ .
4. Als Glätter benutze ich das PCG-Verfahren, welches ich auch zur Bestimmung der Lösung des Originalproblems verwende.
5. Als Startlösung verwende ich natürlich die korrigierte asymptotische Approximation erster Ordnung.

Die interessanteste Eigenschaft dieses Zweigitterverfahrens besteht darin, mit kleiner werdendem Parameter  $\epsilon$  im Vergleich zum reinen PCG-Verfahren immer besser zu werden. Dies hat folgenden Grund: Während für großes  $\epsilon$  der Hauptteil des numerischen Aufwandes auf die Prolongation bzw. Restriktion entfällt, dreht sich dieses Verhältnis mit kleiner werdendem  $\epsilon$  sehr schnell um, s.d. schließlich der Großteil des Aufwands in den Glättungsschritten auf dem feinen Gitter steckt. Aber genau die Anzahl dieser Glättungsschritte wird durch die Grobgitterkorrektur erheblich reduziert.

Die genauen Laufzeiten und Konvergenzraten des Zweigitterverfahrens sind für das ein-

## 5. Finite Element Näherungen

dimensionale Beispiel aus Abschnitt 3.5 und für das Schachbrettmedium in den Tabellen 5.22 und 5.23 aufgeführt. Als *Konvergenzrate*  $q$  bezeichne ich den Quotienten der euklidischen Normen der letzten beiden Residuen vor dem Abbruch

$$q^m = \frac{\|r^m\|_2}{\|r^{m-1}\|_2}.$$

Die entsprechenden Laufzeiten der reinen PCG-Verfahren kann man den Tabellen 5.9 und 5.21 entnehmen.

$\epsilon$	Zeit(s)	Iterationen	Konvergenzrate
1/2	0.02	5	0.021
1/4	0.01	6	0.042
1/8	0.01	8	0.172
1/16	0.03	11	0.197
1/32	0.17	31	0.473
1/64	1.71	93	0.481
1/128	22.86	381	0.879

Tabelle 5.22.: Laufzeiten (s) und Konvergenzraten bei geschichteten Medien (1d).

$\epsilon$	Zeit(s)	Iterationen	Konvergenzrate
1/2	0.04	6	0.043
1/4	0.12	6	0.018
1/8	1.81	8	0.057
1/16	33.11	14	0.263
1/32	1003.48	36	0.621

Tabelle 5.23.: Laufzeiten (s) und Konvergenzraten bei Schachbrettmedien (2d).

Ein Blick auf die Laufzeiten legt es also nahe, dieses Zweigitterverfahren für kleines  $\epsilon \leq 1/16$  anzuwenden. Im eindimensionalen Fall hat man für  $\epsilon = 1/128$  eine um den Faktor 2.2 verkleinerte Laufzeit. Im zweidimensionalen Fall ist die Laufzeit bereits für  $\epsilon = 1/32$  um den Faktor 6.4 verkleinert und wie bereits erwähnt wird der Faktor mit kleiner werdendem  $\epsilon$  größer, s. d. ich bereits ab  $\epsilon = 1/64$  einen Ordnungsgewinn für die Laufzeit erwarte.

## Fazit

Zusammenfassend kann ich Folgendes sagen: Der eindimensionale Fall ist vollständig gelöst. Sowohl analytisch (Satz 3.13) als auch numerisch hat die korrigierte asymptotische Entwicklung erster Ordnung die quadratische Approximationseigenschaft bzgl. der  $L^2$ -Norm. Dies ist außerdem unabhängig von der Symmetrie des Diffusionskoeffizienten. Zusätzlich zeigen die numerischen Untersuchungen, dass dies auch im Fall eines unstrukturierten Diffusionskoeffizienten noch gilt, obwohl ich beim Übertragen der analytischen Eigenschaften auf die Finite Element Näherung geeignete Regularität des Diffusionskoeffizienten benötigte (siehe Satz 5.7 und Korollar 5.12).

Da sich die Beweistechnik des eindimensionalen Falls nicht auf den zweidimensionalen Fall übertragen lässt, habe ich mich auf die numerischen Untersuchungen beschränkt. Zunächst konnte ich unter zusätzlichen Regularitätsforderungen an die homogenisierte Lösung  $u^0$  zeigen, dass sich eine vorhandene quadratische  $L^2$ -Approximationseigenschaft im analytischen Fall auf die Finite Element Näherung der korrigierten asymptotischen Entwicklung erster Ordnung übertragen würde (siehe Satz 5.6 und Korollar 5.11). Dabei muss ich leider einschränkend sagen, dass es für eben diese Regularitätsforderung keine hinreichende Bedingung gibt, da der Rand des Gebietes  $\Omega$ , welches aus lauter quadratischen Zellen besteht, lediglich Lipschitz stetig ist. Trotzdem konnte ich für Diffusionskoeffizienten, die bezüglich einer Richtung symmetrisch sind, numerisch die quadratische  $L^2$ -Approximationseigenschaft beobachten (siehe z. B. die unsymmetrisch geschichteten Medien). Bei Diffusionskoeffizienten, die bzgl. aller Richtungen unsymmetrisch sind, erzielte die Korrektur im Wesentlichen keine Verbesserung.

Dies sollte einen jedoch nicht von der Benutzung des Korrekturproblems abhalten, denn wie ich zum Abschluss der Arbeit numerisch verifizieren konnte, liefert ein auf dem Korrekturproblem basierendes Zweigitterverfahren (unabhängig von Symmetrieeigenschaften des Diffusionskoeffizienten) bereits für  $\epsilon \leq 1/16$  (bzw.  $\epsilon \leq 1/64$  im eindimensionalen Fall) erheblich kürzere Laufzeiten als ein klassisches PCG-Verfahren. Ein weiterer wesentlicher Punkt ist die Beobachtung, dass dieses Zweigitterverfahren um so besser arbeitet, je kleiner  $\epsilon$  ist, d. h. je schwerer das Originalproblem ist.

*Fazit*

# Symbolverzeichnis

$(\cdot, \cdot)_H$	Skalarprodukt auf $H$ , 4
$(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$	Finites Element, 47
$\alpha$	Elliptizitätskonstante, 19
$\alpha_0$	Elliptizitätskonstante der homogenisierten Diffusionskoeffizienten, 65
$\beta$	Stetigkeitskonstante, 19
$\beta_0$	Stetigkeitskonstante der homogenisierten Diffusionskoeffizienten, 65
$\chi$	Vektor der Zelllösungen, 28
$\chi_i$	Lösungen der Zellprobleme, 28
$\mathcal{K}$	Zerlegung eines Gebietes in Finite Elemente, 53
$\mathcal{O}$	offene Menge des $\mathbb{R}^n$ , 13
$\mathcal{P}_k^n$	Polynome in $n$ Variablen vom Grad $\leq k$ , 48
$\mathcal{Q}_k^n$	Polynome die bezüglich jeder Variablen vom Grad $\leq k$ sind, 48
$\mathcal{W}_{\text{per}}(Y)$	Quotientenraum $H_{\text{per}}^1(Y)/\mathbb{R}$ , 18
$\gamma$	Spurabbildung, 15
$\langle f \rangle_\Omega$	Mittelwert von $f$ über $\Omega$ , 18
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ , 3
$\Omega$	beschränkte, offene Menge im $\mathbb{R}^n$ , 12
$C_{\text{per}}^\infty(Y)$	$Y$ -periodische unendlich oft differenzierbare Funktionen, 18
$H_{\text{per}}^1(Y)$	Abschluss von $C_{\text{per}}^\infty(Y)$ in $H^1(Y)$ , 18
$\rho$	Uniformitätskonstante einer Zerlegung, 55
$\tilde{u}_1^\epsilon$	korrigierte asymptotische Entwicklung erster Ordnung, 34
$a$	Bilinearform oder Koeffizientenfunktion im eindimensionalen Fall, 6
$A = (a_{ij})$	Diffusionskoeffizienten, 19

## Symbolverzeichnis

$C$	generische Konstante, Abhängigkeiten werden als Index angegeben, 56
$C^0$	stetige Funktionen, 20
$C^k$	$k$ -mal stetig differenzierbare Funktionen, 20
$C^\infty$	unendlich oft differenzierbare Funktionen, 14
$C^{k,\gamma}$	Funktionen aus $C^k$ , deren höchste Ableitung Hölder stetig zum Exponenten $\gamma$ ist, 13
$C_0^\infty$	unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompakten Träger, 14
$d(\cdot, \cdot)$	Metrik, 3
$E \cong F$	isometrische Isomorphie, 7
$E \simeq F$	Isomorphie, 7
$E'$	Dualraum von $E$ , 6
$E''$	Bidualraum von $E$ , 6
$H^k$	$= W^{k,2}$ , 14
$H^{-1/2}$	Dualraum von $H^{1/2}$ , 15
$H^{-1}$	Dualraum von $H_0^1$ , 16
$H^{1/2}$	$= \gamma(H^1)$ , 15
$i_E$	kanonische Isometrie von $E$ und seinem Bidualraum, 8
$I_{Ku} = I_{(K,\mathcal{P},\mathcal{N})}u$	lokale Interpolation von $u$ , 53
$I_{\mathcal{K}}u$	globale Interpolation von $u$ , 53
$L(E, F)$	stetige Operatoren, 5
$L^\infty$	beschränkte Funktionen, 12
$M(\alpha, \beta, \mathcal{O})$	geeignete Menge matrixwertiger Abbildung auf $\mathcal{O}$ , 19
$u_1^\epsilon$	asymptotische Entwicklung erster Ordnung, 28
$W^{k,p}$	Funktionen die bis zu ihrer $k$ -ten Ableitung $p$ -integrabel sind, 14
$W_0^{k,p}$	Abschluss von $C_0^\infty$ in $W^{k,p}$ , 14
$x_n \rightharpoonup x$	schwache Konvergenz, 9
$Y$	Periodizitätszelle, 27

# Literaturverzeichnis

## Adams und Fournier 2003

ADAMS, R. A. ; FOURNIER, J. J. F.: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 65: *Sobolev Spaces*. 2. Academic Press, 2003

## Bakhvalov und Panasenko 1989

BAKHVALOV, N. S. ; PANASENKO, G.: *Mathematics and its Applications: Soviet Series*. Bd. 36: *Homogenisation: Averaging Process in Periodic Media*. Kluwer Academic Publishers, 1989

## Braess 2003

BRAESS, D.: *Finite Elemente*. 3. Springer, 2003

## Brenner und Scott 2002

BRENNER, S. C. ; SCOTT, L. R.: *Texts in Applied Mathematics*. Bd. 15: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2. Springer, 2002

## Ciarlet 1978

CIARLET, P. G.: *Studies in Mathematics and its Applications*. Bd. 4: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, 1978

## Cioranescu und Donato 1999

CIORANESCU, D. ; DONATO, P.: *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. Bd. 17: *An Introduction to Homogenization*. Oxford University Press, 1999

## Ding 1996

DING, Z.: A Proof of the Trace Theorem of Sobolev Spaces on Lipschitz Domains. In: *PROC* 124 (1996), Nr. 2, S. 591–600

## Evans 1998

EVANS, L. C.: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 19: *Partial Differential Equations*. AMS, 1998

## Gagliardo 1957

GAGLIARDO, E.: Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili. In: *Ren. Sem. Mat. Univ. Padova* 27 (1957), S. 284–305

## Gilbarg und Trudinger 2001

GILBARG, D. ; TRUDINGER, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001 (Classics in Mathematics)

**Grisvard 1985**

GRISVARD, P.: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, 1985

**Hirzebruch und Scharlau 1996**

HIRZEBRUCH, F. ; SCHARLAU, W.: *Einführung in die Funktionalanalysis*. Spektrum, 1996

**Jikov u. a. 1994**

JIKOV, V. V. ; KOZLOV, S. M. ; OLEINIK, O. A.: *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer, 1994

**Kadlec 1964**

KADLEC, J.: O reguljarnosti rešenija sadači Puassona na oblasti s granicej, lokal'no podobnoj granice vypukloj oblasti. In: *Czechoslovak Math. J.* 14 (1964), S. 386–393

**Neuss u. a. 2001**

NEUSS, N. ; JÄGER, W. ; WITTUM, G.: Homogenization and Multigrid. In: *Computing* 66 (2001), S. 1–26

**Rudin 1999**

RUDIN, W.: *Reelle und Komplexe Analysis*. Oldenbourg, 1999

**Saks 1937**

SAKS, S.: *Monografie Matematyczne*. Bd. 7: *Theory of the Integral*. 2. New York, G. E. Stechert, 1937

**Werner 1997**

WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer, 1997

**Yosida 1974**

YOSIDA, K.: *Die Grundlehre der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellung*. Bd. 123: *Functional Analysis*. 4. Springer, 1974

# Index

- Abbildung
  - symmetrisch, 79
- affin äquivalent, 54
- affine Familie, 64
- Approximationssatz, 55
- Aubin-Nitsche-Lemma, 12
  
- Banachraum, 3
  - reflexiver, 8
- Bidualraum, 6
- Bilinearform
  - $H$ -elliptisch, 6
  - koerziv, 6
  - stetig, 6
  
- Céa-Lemma, 11
- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 4
  
- Dualraum, 6
  
- Ecken, 48
- elliptisch, 19
- EOC, 73
- Eulergleichung, 7
  
- fast affin äquivalent, 55
- Finite-Elemente
  - Bogner-Fox-Schmitt-Element, 64, 69
- finiter Element Raum, 54
- Finites Element, 47
- Formfunktionen, 47
- Funktional, 5
  
- Gesamtnorm, 65
- gleichmäßig elliptisch, 19
- gleichmäßig konvex, 9
- globale Interpolation, 53
  - Differenzierbarkeitsordnung, 54
  
- Hölder stetig, 13
- Hölderraum, 13
- Höldersche Ungleichung, 38
- Hilbertraum, 5
  
- Interpolation
  - globale Interpolation, 53
  - lokale Interpolation, 53
- interpolationsäquivalent, 55
- inverse Ungleichung, 56
- Isometrie, 7
- isometrisch, 7
- Isomorphismus, 7
  
- Kante, 50
- Knotenvariable, 47
- Konvergenzrate, 88
  
- Lagrange Element, 48
- Lemma
  - Aubin-Nitsche-Lemma, 12
  - Céa-Lemma, 11
  - von Lax-Milgram, 6
  - von Riemann-Lebesgue, 38
- Lipschitz stetig, 13
  
- $m$ -Fläche, 48
- Mittelwert, 18
  
- nodale Basis, 47
- Norm, 3
- normierter Raum, 3
- $n$ -Rechteck, 50
- $n$ -Simplex, 48
  
- Operator, 5
  - adjungierter, 7
  - beschränkter, 5

## *Index*

- isometrischer, 7
- stetiger, 5
- transponierter, 7
- Operatornorm, 5
  
- periodische Fortsetzung, 17
- Pull-back, 54
- Push-forward, 54
  
- quasiuniforme Zerlegung, 55
  
- Rechteck, 50
- reflexiv, 8
- reguläre Rechteckzerlegung, 53
  
- Satz
  - Approximationssatz, 55
  - von Lebesgue, 38
- schwach konvergent, 9
- schwache Ableitung, 14
- schwache Lösung, 20, 21, 24, 26, 58
- Seite, 48, 50
- Sobolevhalbnorm, 14
- Sobolevnorm, 14
- Sobolevraum, 14
- Spur, 15
- stetig
  - absolut stetig, 34
  - Hölder stetig, 13
  - Lipschitz stetig, 13
- symmetrisch, 28
  - $k$ -symmetrisch, 28
  
- Triangulierung, 53
  
- uniforme Zerlegung, 55
  
- verallgemeinerte Ableitung, 14
  
- $Y$ -periodisch, 17
  
- Zerlegung, 53
  - periodische, 58

# Zusammenfassung

Für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodisch oszillierenden Koeffizienten wird im eindimensionalen Fall quadratische  $L^2$ -Konvergenz einer korrigierten asymptotischen Entwicklung, welche durch die Homogenisierungstheorie motiviert ist, nachgewiesen.

Im zweidimensionalen Fall wird die Konvergenzordnung und ihre Abhängigkeit von der Symmetrie der Koeffizienten numerisch untersucht. Die Korrektur der asymptotischen Entwicklung auf einem lokal verfeinerten Gitter wird anschließend in ein Zweigitterverfahren eingebettet und dieses dann numerisch mit einem klassischen PCG-Verfahren verglichen.

## *Zusammenfassung*

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

---

Name	Matthias Kabel
Adresse	Auf dem Kamp 9 23867 Tönningstedt
Geburtsdatum	08.01.1977
Geburtsort	Bad Oldesloe
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

## Bildungsweg

---

08/1983–06/1987	Grundschule Seth
08/1987–06/1996	Theodor-Mommsen-Schule, Bad Oldesloe
10/1997–06/2004	Studium Mathematik, Universität Hamburg
22.07.2004	Mathematikdiplom

## Anstellungen

---

09/1999	studentischer Tutor an der Universität Hamburg
10/1999–02/2000	studentische Hilfskraft an der Universität Hamburg
04/2000–07/2000	studentische Hilfskraft an der Universität Hamburg
11/2000–02/2001	studentische Hilfskraft an der Universität Hamburg
04/2001–07/2001	studentische Hilfskraft an der Universität Hamburg
10/2004–09/2007	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Hamburg

Hamburg, 12. November 2007