Schülerwissen und Lehrerwissen zur Schulalgebra
- Fachdidaktische Fehleranalysen – Eine Untersuchung an der Universidad Panamericana in Guadalajara (Mexiko)

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie der Universität Hamburg

Vorgelegt von

Clara Cristina Catarina Eccius Wellmann
Universidad Panamericana Guadalajara Mexico

Hamburg im April 2008

1. Gutachter Prof. Dr. Marianne Nolte
2. Gutachter Prof. Dr. Uwe Gellert
3. Gutachter Prof. Dr. Horst Ehni

Tag der mündlichen Prüfung: 11.06.2008

Vorwort

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit begleitet haben. Diese Dissertation wäre ohne die Unterstützung verschiedener Personen nicht möglich gewesen.

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Marianne Nolte, die unzählige Stunden aufgewendet hat, um mir mit fachlichem, sprachlichem und persönlichem Rat jederzeit zur Seite zu stehen. Herzlichen Dank für Ihr Interesse, die Betreuung und Begutachtung dieser Arbeit und für die Bereitschaft sich immer Zeit für mich zu nehmen.

Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Karl Heinz Scherler sowie Herrn Prof. Dr. Horst Ehni, und Herrn Prof. Dr. Uwe Gellert, die mit ihrer konstruktiven Kritik einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet haben.

Ich danke allen Lehrerinnen und Lehrern, die sich bereit erklärt haben an dem Interview teilzunehmen und somit zu dem Ablauf der Studie beigetragen haben.

Mein Dankeschön richtet sich auch an alle Anfangsstudierenden, die sich den Untersuchungstest unterzogen haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Mann Gabriel, meinen Kindern Luis und Christa, sowie meiner Mutter Christa, die über viele Monate und Jahre hinweg auf so vieles verzichtet haben. Ich bedanke mich ganz herzlich bei euch für euer liebevolles Verständnis.

Lieber Gabriel, ohne deine aufmunternden Worte hätte ich die Arbeit nicht schaffen können.

Guadalajara, Mexiko im April 2008 Cristina Eccius

1. Einleitung 6
2. Universidad Panamericana, Schule und Lehrerausbildung in Mexiko 12
2.1 Zur Universidad Panamericana 12
2.2 Zum mexikanischen Schulsystem..... 14
2.3 Zur Ausbildung der Mathematiklehrerinnen und -Lehrer für die verschiedenen Schuljahre 15
2.3.1 Lehrerinnen- und Lehrerausbildung 17
Primaria..... 17
Secundaria und Preparatoria: 18
2.4 Zu den Bildungsplänen 18
Vom 1. bis zum 6. Schuljahr: 19
Vom 7. bis zum 9. Schuljahr: 20
Vom 10. bis zum 12. Schuljahr: 21
3. Problemstellung – Fragen - Vorgehensweise..... 24
3.1 Folgerungen für diese Studie 26
4. Erster Teil..... 28
Leistungen der Studienanfänger mit Schwerpunkt auf Fehler bezogen auf algebraische Inhalte 28
4.1. Fehler in der Literatur bezogen auf die Inhalte des Tests..... 33
4.2 Verlauf der Untersuchung: Erster Teil..... 48
5. Zur Entwicklung und Durchführung der Tests 51
5.1 Der erste Test (siehe Anhang 1)..... 51
5.1.1. Ergebnisse: 60
5.2. Zur weiteren Entwicklung der Tests..... 61
5.3. Der zweite Test (siehe Anhang 2)..... 61
5.3.1. Ergebnisse 67
5.4 Analyse der Lösungsprozesse der Studienanfängern 74
5.4.1 Als Beispiel die Fehllösungen der Aufgabe 13: 74
5. 4. 2 Fehler, die ich bisher in der Literatur noch nicht gefunden habe:... 86
5.4.3 Fazit 107

6. Zweiter Teil: 109
Kompetenzen der Lehrenden mit Schwerpunkt auf fachlichen, fachdidaktischen und diagnostischen Kompetenzen zu den genannten Inhalten 109
Folgerungen für diese Arbeit 112
6.1 Verlauf der Untersuchung: Zweiter Teil 115
7. Vorstudien bei Lehrerinnen und Lehrern 118
7.1. Test über Lehrerwissen 118
7.2. Schriftliche Befragung zu Fehllösungen der Lernenden 129
7.3 Allgemeine Folgerungen: 150
8. Interviews 151
8.1 Theoretische Überlegungen und Beschreibung der Methode 151
8.2 Aufgaben zum Interview: 152
8.3 Interviews 157
8.3.1 Interview mit Enrique 157
8.3.2 Interview mit Pilar 160
8.3.3 Interview mit Jorge 163
8.3.4. Interview mit MiguelÁngel 166
8.3.5. Interview mit Raúl 170
8.4. Folgerungen der Interviews: 173
9. Schlussfolgerungen: 186
10. Literaturverzeichnis: 200

1. Einleitung

In meiner beruflichen Arbeit an der Universidad Panamericana in Guadalajara, Mexiko, werde ich als Mathematikdozentin für Studierende der Betriebswirtschaft und der Ingenieurwissenschaft täglich mit den Problemen der Studierenden in Bezug auf ihr mathematisches Wissen und Denken konfrontiert.

Die Probleme zeigen sich am deutlichsten in den Klassen der Studienanfänger. Hier sind die Leistungs- bzw. Vorkenntnisunterschiede der Studierenden sehr groß. Viele Studierende weisen zudem so große Lücken in den Vorkenntnissen auf, dass eine Teilnahme an dem regulären Studium in Frage gestellt scheint.

Eine Erhebung der Vorkenntnisse in Form eines Tests zeigte bei mehr als der Hälfte der Studierenden beträchtliche Defizite. Dies veranlasste die Universität, mich bei der Erforschung der damit zusammenhängenden Fragen zu unterstützen.

Neben der Einrichtung von Vorkursen habe ich deshalb systematisch Tests eingesetzt, um die Defizite genauer eingrenzen zu können und die Inhalte der Vorkurse darauf abzustimmen. Deren Auswertung bestätigte in allen Jahrgängen die bereits durchgeführten Beobachtungen. Eine Analyse der Fehler ergab Schwerpunkte in Inhalten der Mittelstufe.

Wie ist es zu erklären, dass sich bei einer so hohen Anzahl von Studierenden erhebliche Lücken in den Kenntnissen zeigten? Diese Frage veranlasste mich, mich mit den Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern zu befassen.

Die Suche nach Ursachen und Lösungen der angesprochenen Probleme hat sich zu einem größeren Projekt entwickelt, in dessen Zentrum zunehmend didaktische Fragen der Vermittlung von mathematischem Wissen und Denken gerückt sind. Die Schwierigkeiten der Studierenden bewegten mich, die Fehler zu untersuchen. Dabei konnte ich feststellen, dass ein Grossteil der Fehler vermutlich systematischen Charakter hat.

Die an der Universität zu beobachtenden Schwierigkeiten der Studierenden passen zu dem Bild zur Leistungsfähigkeit von Schülerinnen und Schülern, das sich aus der PISA-Studie ergibt.

PISA (Programme for International Student Assessment) untersucht Schülerleistungen im internationalen Vergleich. PISA ist Teil des Indikatorenprogramms der OECD, die den Mitgliedsstaaten vergleichende Daten über die Leistungsfähigkeit der Bildungssysteme zur Verfügung stellt.

Der Begriff “mathematische Grundbildung” bezeichnet die Fähigkeit, mathematische Kenntnisse und Kompetenzen funktionell zu nutzen. Die Leistungen für “mathematische Grundbildung” werden an einer Gesamtskala gemessen, mit einem Mittelwert von 500 Punkten und einer Standardabweichung von 100 Punkten, so dass, zwei Drittel der Schülerinnen und Schüler (im Alter von 15

Jahren) eine Punktzahl zwischen 400 und 600 Punkten erreichten. Es wurden fünf Stufen mathematischer Kompetenz definiert:

Stufe I: Rechnen auf Grundschulniveau
(Skalenwerte 329 – 420)

Stufe II: Elementare Modellierungen
(Skalenwerte 421 – 511)

Stufe III: Modellieren und begriffliches Verknüpfen auf dem Niveau der Sekundarstufe I.
(Skalenwerte 512 – 603)

Stufe IV: Umfangreiche Modellierungen auf Basis anspruchsvoller Begriffe
(Skalenwerte 604 – 695)

Stufe V: Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren
(Skalenwerte über 696)

Von Interesse für diese Arbeit ist das Profil der Schülerleistungen in mathematischer Grundbildung von Mexiko im Vergleich zu anderen OECD-Ländern. Mexikos Schülerinnen und Schüler haben einen Durchschnitt von 385 Punkten erreicht. Damit sind sie im Rechnen auf Grundschulniveau (Kompetenzstufe I) einzustufen.

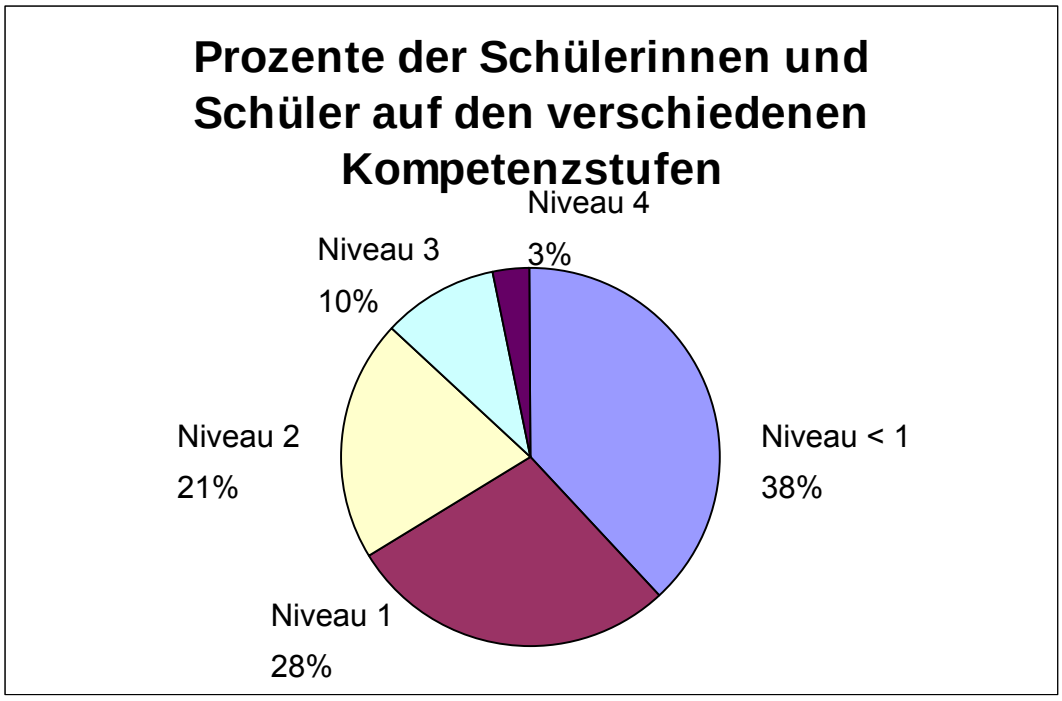
Als ausreichendes Niveau an mathematischer Grundbildung wurde die Stufe III festgesetzt: in Mexiko erreichten diese Kompetenzstufe nur 13% der beteiligten Schülerinnen und Schüler. Als Risikogruppe wurden die Schülerinnen und Schüler angesehen, die nicht die Kompetenzstufe II erreichten.

In Mexiko haben 66% der getesteten Schülerinnen und Schüler die Kompetenzstufe II nicht erreicht. Wichtig wäre zu erwähnen, dass Personen, die nicht die Kompetenzstufe II erreicht haben, mehr oder weniger lediglich über arithmetisches und geometrisches Wissen auf Grundschulniveau verfügen. (vgl. PISA, 2000).

Mexikanische Schülerinnen und Schüler, die weniger als 387 Punkte hatten (mehr als 50%), haben Schwierigkeiten einfache Aufgaben zu lösen, die eine Anwendung grundlegender Rechenfertigkeiten voraussetzen.

Obwohl bei den Faktoren, die Einfluss auf die mathematische Leistung haben könnten, zunächst nicht die Qualifikation von Lehrkräften untersucht wurde, haben sich einige Länder über einen Mangel an qualifizierten Lehrkräften beklagt. Relativ hoch ist die Sorge in Mexiko, Island, Niederlanden und England, dass eine fehlende Qualifizierung der Lehrkräfte den Lernprozess beeinträchtigen könnte. Die Ergebnisse der Befragung von Schulleitungen und Schülerinnen und Schülern weisen darauf hin, dass eine mangelnde Qualifizierung der Lehr-

kräfte als entscheidender Einflussfaktor für die unzureichende Qualifizierung der Lernenden angesehen werden könnte (vgl. PISA, 2000).



Eine Befragung von Schülerinnen und Schülern ergab folgendes: In Ländern mit recht niedrigen Durchschnittsergebnissen gibt die überwiegende Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler an, dass sie den Erwartungen ihrer Lehrkräfte gerecht werden (PISA, 2000). Wenn diese Einschätzung mit der der Lehrenden übereinstimmt und diese mit den Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler zufrieden sind, dann könnte man daraus schließen, dass entweder ihre eigene Kompetenz nicht hoch genug ist, oder das, was sie lehren nicht dem entspricht, was in PISA überprüft wurde.

Die Ergebnisse der PISA-Studie unterstützen meine Beobachtungen an der Universität. Auch die Leistungen der Studienanfänger geben Anlass zur Sorge. Meine eigenen Erfahrungen mit den massiven Schwierigkeiten der Studierenden in Ausgleichskursen[1] in elementarer Algebra und die Beobachtung von Fehlern, die sich immer wieder bei verschiedenen Anfangsstudentinnen und -studenten wiederholten, motivierte mich, mich mit dieser Problematik genauer zu befassen.

[1] Kurse, in denen Studierende darin unterstützt werden, das notwendige Niveau für das Studium der mathematischen Inhalte zu entwickeln.

Die vorliegende Arbeit basiert auf einer mehrjährigen Untersuchung (1999-2007) zu mathematischen Fertigkeiten bei Studienanfängern der Universidad Panamericana in Guadalajara, Mexiko.

Mein Ziel war es, herauszufinden, inwieweit mathematische Fertigkeiten der 5. bis 9. Schulklasse von den Studienanfängern auf einfache Aufgaben angewandt werden konnten. Der entscheidende Anlass, eine solche Untersuchung in Angriff zu nehmen, war die Beobachtung, dass viele Studierende das Studium, wegen der mathematischen Anteile in ihrem Studium, aufgaben. Bei Vereinfachungen wie:

$$\frac{4+(x-3)}{(x-3)}=4$$

entstanden Fehllösungen (wie die aufgezeichnete), die von vielen Studienanfängern gemacht wurden. Gerade solche Aufgaben brachten einen Grossteil der Studienanfänger zum Scheitern.

Das Problem war offensichtlich: Mangelndes mathematisches Wissen war sicherlich die Ursache des Scheiterns. Aber woran genau versagten sie? Studienanfänger konnten gewisse Aufgaben lösen, aber bei bestimmten Schwierigkeitsmerkmalen begingen sie Fehler. Diese Probleme traten bei bestimmten Schwierigkeitsmerkmalen auch bei Studienanfängern auf, die eine bessere Benotung im Test hatten.

Bei meiner Suche nach Erklärungen und Lösungen des Problems stieß ich u.a. auf die Bücher von NOLTE (1991), MALLE (1993), TIETZE (2000) und KROMER (1996), und entdeckte in ihnen die Fehllösungen, die auch die Studienanfängern der Universidad Panamericana machten.

Auf dieser Grundlage versuchte ich die Probleme auf zwei Ebenen zu analysieren: 1. Auf der Ebene der Lernenden. 2. Auf der Ebene der Lehrenden.

Bei den Lernenden interessierten mich die Lösungsversuche und Fehlleistungen der Studienanfänger im Hinblick auf Fehlermuster. Meine Frage lautet:

a) Welche Fehler begehen mexikanische Anfangsstudentinnen und –studenten, und welchen Fehlkonzeptionen unterliegen diese Fehler?

In diesem Zusammenhang sollen Aussagen zu Fehlern und deren Bedeutung im Lernprozess aufgearbeitet werden. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung für die Entwicklung eines Vorkurses, in dem die notwendigen Kenntnisse für die Durchführung des Studiums angeboten werden sollen.

Bei den Lehrenden stellten sich mir folgende beiden Fragen:

b) Reichen das mathematische Wissen und die Kenntnisse der Lehrerinnen und Lehrer in Mexiko aus, um Schüler-Fehlstrategien zu analysieren und für didaktische Zwecke zu nutzen?

c) Welche Einstellung haben Lehrerinnen und Lehrer zu Schülerfehlern?

In diesem Zusammenhang stehen Fragen zur generellen Vorstellung zum Lernprozess von Schülerinnen und Schülern im Vordergrund.

Dieser Fragenkomplex erwies sich als brauchbar und zugleich auch als schwierig. Schnelle Antworten auf das Problem konnte es nicht geben. Vorsichtiges Herantasten war angebracht. Die Vielfalt der Einflussfaktoren, die die Effektivität des Unterrichts bestimmen in ihrer Wechselwirkung zu untersuchen übersteigt die Möglichkeiten dieser Studie. Als wesentlich für die Problematik sollen Fragen zur inhaltlichen Eingrenzung des Problems bearbeitet werden. Deshalb und auch wegen der Unterschiedlichkeit der Kenntnisse der Studienanfänger im Fach Mathematik wurde eine Diagnostik notwendig. Ich musste feststellen, was Studienanfänger bereits konnten, und wo ihre Schwierigkeiten lagen. Deshalb beschloss ich, zunächst die Studienanfänger einem Test zu unterziehen und die Lösungsansätze näher auf Fehlermuster zu untersuchen (Kapitel 4 und 5).

Als zweiter Aspekt sollten mit einem ähnlichen Test die Kenntnisse von Lehrenden erhoben und dort zu beobachtende Fehlermuster untersucht werden. Um auf die Vorstellungen der Lehrkräfte zum Lernen einzugehen, untersuchte ich mittels eines problemzentrierten-narrativen Leitfadeninterviews die Kenntnisse der Lehrenden über Fehlermuster und Schwierigkeitsmerkmale, sowie deren Einstellung zu Fehlern (Kapitel 6).

Die Erhebung und Analyse von Fehlern sollte zum Ziel haben, didaktisch-methodische Maßnahmen zu ergreifen, in diesem Fall, um schwächere Studienanfänger zu fördern. Wie werden die Schülerinnen und Schüler unterrichtet? Diese Frage schien mir wichtig, da verschiedene Lerntheorien auch mit verschiedenen Auffassungen vom Lernen und Lehren verbunden sind. Damit einher gehen auch unterschiedliche Auffassungen von Fehlern. Diese Diskussion ist sehr stark von kognitiv-konstruktivistischen Positionen geprägt.

Fehler können nur dann didaktisch genutzt werden, wenn ein Lehrender die Fehlermuster erkennt, wenn er dadurch auf die wahrscheinlichen Denkprozesse der Lernenden schließen kann, wenn er Schwierigkeitsmerkmale einer Aufgabe entdecken kann, und auch wenn er die Fehler durch Schwierigkeitsmerkmale herausfordern kann. Die Entstehung von Fehlern, Fehlermustern und Schwierigkeitsmerkmalen werden im 4.1 Kapitel beschrieben. Welchen Einfluss diese Kenntnis auf Lehrende und ihre Lehre haben, wird im 6. Kapitel besprochen.

Im Kapitel 4.2, 6.1 und 8.1 werden der Forschungsansatz und die Methodik dieser Arbeit referiert. Mein Ansatz ist eine Vertiefungsstudie, in der ich zunächst eine quantitative Forschung, bei Anfangsstudierenden, vornahm, um später dann, wie vorher erwähnt, eine qualitative Fehleranalyse zu machen. Lehrende wurden dann in einem Interview auf Erkennung dieser Fehlermuster, der Fehlerursache und ihren Umgang mit Fehlern im Unterricht untersucht.

Ergebnisse und Resultate der Untersuchungen bei Anfangsstudierenden werden im 5. Kapitel vorgetragen, Voruntersuchungen bei Lehrenden im 7. Kapitel

und Deutungen der Leitfadeninterviews bei Lehrenden im 8. Kapitel, um dann im 9. Kapitel die Schlussfolgerungen aus der Untersuchung zu ziehen.

2. Universidad Panamericana, Schule und Lehrerausbildung in Mexiko

In diesem Kapitel möchte ich die Universidad Panamericana, das mexikanische Schulsystem und die Lehrerausbildung in Mexiko, soweit es für diese Arbeit wichtig erscheint, skizzieren. Welche Schulbildung brauchen Studienanfänger, um an der Universidad Panamericana aufgenommen zu werden? Aus welchen Schulen kommen die Studenten der Universidad Panamericana? Welche Lehrerausbildung haben Lehrer dieser Schulen gehabt?

2.1 Zur Universidad Panamericana

Die Universidad Panamericana, Campus Guadalajara ist eine private Universität in der Stadt Guadalajara, Mexiko. Guadalajara liegt im Nord-Westen von Mexiko (auch wenn Guadalajara nicht wirklich im Nord-Westen Mexikos liegt, wird sie als westlichste Großstadt als solche anerkannt), etwa 550 km von Mexiko-Stadt entfernt, und hat an die 6 Millionen Einwohner. Etwa 50% der Studierenden an der Universidad Panamericana, Guadalajara, kommen aus anderen Bundesstaaten. Viele aus den nördlicheren Bundesstaaten, wie Sonora, Sinaloa, Baja California oder auch aus Colima und Michoacán.

Foto der Universidad Panamericana

Hörsäle und Seminarräume

Hauptgebäude mit Bibliothek

Die Universidad Panamericana besteht in Guadalajara seit 1985 und hat heute ungefähr 2500 Studentinnen und Studenten, die einen der elf Studiengänge absolvieren. Fünf Studiengänge sind der Betriebswirtschaft angegliedert, drei der Ingenieurwissenschaft, wie es in der nächsten Tabelle dargestellt ist.

Betriebswirtschaft	Ingenieurwissenschaft
Marketing	Wirtschaftsingenieur
Finanzwesen	Bauingenieurwissenschaft
Buchhaltung	Mechatronik
Internationale Geschäfte	
Human Resources	

Außerdem kann man an der Universidad Panamericana Pädagogik, Rechtswissenschaft und Kommunikation studieren.

Für diese Arbeit sind die betriebswirtschaftlichen- und die ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge von Interesse, da die Untersuchung sich mit den mathematischen Kenntnissen der Studienanfänger dieser acht Studiengänge beschäftigt.

Um an der Universidad Panamericana, Guadalajara aufgenommen zu werden (sowie an allen anderen Universitäten auch), muss eine Studentin oder ein Student das Abitur bestanden haben (Bachillerato). Ein ganz geringer Anteil der Studienanfänger hat ein technisches Abitur. Da dieser Anteil weniger als 2% der Studienanfänger betrifft, werde ich in dieser Arbeit nicht weiter darauf eingehen.

Die meisten Studentinnen und Studenten der Universidad Panamericana kommen aus privaten Schulen, und in etwa 1.5% aus staatlichen Schulen.

2.2 Zum mexikanischen Schulsystem

Das ganze Schulsystem in Mexiko wird von der Secretaría de Educación Pública (SEP) überwacht und überprüft. Bildungspläne werden für staatliche wie auch für private Schulen von der SEP vorgeschrieben.[2]

[2] Auf die Bildungsrichtlinien für die Schule möchte ich später eingehen.

Die Schule bis zum Abitur, teilt sich in drei Teile auf, wie es aus der nächsten Tabelle zu ersehen ist:

Abschnitte	Primaria	Secundaria	Preparatoria
Schuldauer	1. bis 6. Schuljahr Ab 2005 wurde ein Vorschuljahr Pflicht.	7. bis 9. Schuljahr Erst seit 1993 besteht für alle Kinder Pflicht.	10. bis 12. Schuljahr Mit dem Abschluss Bachillerato (Abitur)

Es ginge für diese Arbeit vielleicht zu weit, auf einzelne Schwierigkeiten im staatlichen Schulwesen einzugehen, wie z.B. die Schwierigkeiten im Inneren des Landes genügend Schulen und Lehrer zu haben oder auf die Problematik zu verweisen, dass immer noch nicht alle Kinder eine Schule besuchen können, weil das Land und die teilweise Armut viel zu groß ist, um alle Schülerinnen und Schüler schulisch zu versorgen, obwohl sich die Regierung darum bemüht die Schulpflicht durchzusetzen. Für diese Untersuchung, möchte ich mich hauptsächlich auf die privaten Schulen beschränken, da die Studienanfänger der Universidad Panamericana zum größten Teil diese Schulen besucht haben.

2.3 Zur Ausbildung der Mathematiklehrerinnen und -Lehrer für die verschiedenen Schuljahre

Primaria	Secundaria	Preparatoria
Die Lehrerausbildung erfolgt in der staatlichen Normal[3]. Es gibt nur ganz wenig private zugelassene Normal. Heute wird die Ausbildung als Studium anerkannt.	Lehrerausbildung erfolgt an der Normal Superior. Die wenigsten Lehrkräfte haben eine solche Ausbildung. Fast ausschließlich werden die Sekundarschülerinnen und Schüler von Physikern, Mathematikern, Buchhaltern, Chemikern, Ingenieuren, u.ä. unterrichtet.	Auch in der Oberstufe unterrichten Mathematik in der Regel Lehrkräfte, die kein Lehrerstudium absolviert haben. (Fast ausschließlich Physiker, Mathematiker, Buchhalter, Chemiker und Ingenieure, u.a.) Zu erwähnen wäre, dass diese Ausbildung als solche auch nicht angeboten wird.

[3] Die Universitäten, an denen Lehrerausbildung stattfindet, heißen im ganzen Land "Normal". Dort werden nur Lehrkräfte ausgebildet.

Alle, sowohl private als auch staatliche Schulen, sind verpflichtet nur Lehrkräfte einzustellen, die eine Lehrerausbildung an staatlichen oder privaten Normales absolviert haben. (Ohne Ausnahme)	Hier empfiehlt die SEP, welche Ausbildung eine Mathematiklehrperson haben sollte. Vorgeschlagen werden die oben genannten Berufsgruppen.	Auch hier empfiehlt die SEP welche Ausbildung oder Studium die Lehrperson haben sollte.

Die Dauer der Ausbildung (3 Jahre nach der Mittelstufe) und die Garantie einer Arbeitsstelle nach der Ausbildung waren entscheidend dafür, dass viele Lehrerinnen und Lehrer der Primaria werden wollten. Das schnelle Wachstum der Anzahl schulpflichtiger Kinder brachte es mit sich, dass auch die Lehrerinnen und Lehrer der Privaten Normal schnell eine Arbeit finden konnten. Bis zum Jahre 1984, war die Voraussetzung um in die Normal aufgenommen zu werden, ein Abschluss der Secundaria[4]. An den privaten Normal wurde bis 1984 ein Abitur- und ein Lehrerinnen und Lehrerabschluss gleichzeitig angeboten. Nach 1984 musste jemand, der ins Lehramt gehen wollte, nach Abschluss der Prepartoria[5] die Normal absolvieren, die nun einem Studium gleichgesetzt wurde. Diese Entscheidung brachte ein großes Problem für die, die Lehrerinnen und Lehrer der Primaria sein wollten. Bis jetzt dauerte die Ausbildung 3 Jahre nach der Mittelstufe. Mit der Verpflichtung die Prepartoria zu absolvieren, dauerte die Ausbildung drei bis vier Jahre länger. Viele Jugendliche, die Lehrerinnen und Lehrer werden wollten, haben sich darauf hin entschlossen etwas anderes zu erlernen. Gleichzeitig haben die meisten Normales einen starken Rückgang der Studierendenanzahl erfahren. Zwar sollte damit die Lehrerausbildung auf ein höheres Niveau gestellt werden, jedoch, war man in Mexiko nicht darauf vorbereitet, dass man nun sehr viel weniger neue Lehrerinnen und Lehrer hatte. So wurden an viele Schulen im Innern des Landes Notlehrerinnen und –lehrer geschickt, die überhaupt keine Lehrerausbildung, teilweise sogar keinen richtigen Schulabschluss, hatten. (Siehe SEP, Licenciatura en Educación Primaria, S.5-18)

In der Ausbildungssituation der Lehrkräfte könnte damit eine wesentliche Ursache für das schwache Abschneiden in der PISA-Studie liegen. Nur in den ersten sechs Jahren werden die Kinder von Lehrkräften unterrichtet, die sich mit pädagogischen und didaktischen Fragen befasst haben. Dabei befassen sie sich nur in zwei Semestern mit mathematischen Inhalten. Die Ausbildung in Mathematik

[4] entspricht dem Abschluss der Mittelstufe

[5] entspricht dem Abitur

ist bei Lehrkräften der anderen Stufen höher, da die Studienanteile in Mathematik selbst bei den aufgeführten Studiengängen mit dem geringsten Anteil an Mathematik (Buchhaltung) wesentlich höher sind. Allerdings wird hier kein pädagogisches Wissen erworben. Didaktische Fragen werden überhaupt nicht bearbeitet.

In der letzten Zeit scheinen sich an den Schulen Veränderungen zu ergeben. Lehrkräfte nehmen mehr an Weiterbildungskursen zu didaktischen Fragen teil, obwohl diese sich im Allgemeinen, nicht speziell auf Mathematikdidaktik, beziehen.

2.3.1 Lehrerinnen- und Lehrerausbildung

Primaria

Lehrerinnen und Lehrer der ersten sechs Schuljahre (Primaria) unterrichten Spanisch, Mathematik, Biologie, Geographie, Geschichte und Staatskunde.

In der Normal (Lehrerausbildung für das 1. bis 6. Schuljahr) werden zwei auf Mathematikdidaktik bezogene Semester erteilt. Diese erfolgen im zweiten und dritten Semester des Studiums (Matemáticas y su Enseñanza I y II). Diese zwei Mathematikdidaktikkurse sollen die Kenntnisse (so Licenciatura en Educación Primaria, SEP (1997, S. 72)) der mathematischen Inhalte, die eine Lehrerin oder ein Lehrer in seinem späteren Beruf braucht, erweitern und konsolidieren. Vertieft werden sollen Kenntnisse über Aspekte des Lernprozesses der Kinder und die Schwierigkeiten, die die Kinder haben können.

In Mexiko werden sowohl für Lehrerinnen und Lehrer (Lehrerhandbuch) als auch für Schülerinnen und Schüler kostenlos Schulbücher vergeben. Damit sollen wichtige Voraussetzungen geschaffen werden, um den Erfolg des Bildungsplans zu erfüllen. Auch private Schulen erhalten diese Schulbücher für alle Schülerinnen und Schüler der ersten 6 Schuljahre. Private Schulen sind verpflichtet die Schulbücher während des Schuljahres durchzunehmen, jedoch verwenden viele private Schulen auch andere Mathematiklehrbücher als die vorgeschriebenen Schulbücher.

Die zwei Mathematikdidaktikkurse in der Normal beziehen sich auf diese Schulbücher und die grundlegenden Themen werden von zwei Aspekten aus, die untereinander verbunden sind, betrachtet. Erstens das Beherrschen der mathematischen Inhalte und zweitens die Form in der das Lernen in der Primaria gefördert werden kann.

Das erste Semester der Lehrerausbildung in Mathematikdidaktik umfasst folgende Themen:

a. Mathematiklernen durch Problemlösen
b. Natürliche Zahlen und das Dezimalsystem
c. Die vier Grundoperationen mit natürlichen Zahlen
d. Geometrie

Das zweite Semester der Lehrerausbildung in Mathematikdidaktik umfasst folgende Themen:

a. Messungen
b. Die rationalen Zahlen
c. Prozesse der Variabilität
d. Informationsbearbeitung, Vorhersage und Wahrscheinlichkeit. [6]

Secundaria und Preparatoria:

Die meisten Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und Preparatoria, die Mathematik unterrichten, sind Mathematiker, Physiker, Chemiker, Buchhalter, u.a.

Lehrerinnen und Lehrer mit dieser Ausbildung sind pädagogisch nicht geschult. An den meisten Schulen werden Fortbildungsprogramme vorgenommen, meistens während der Schulferien, in denen Themen der Didaktik aufgegriffen werden. Diese Fortbildung wird von jeder Schule selbst vorgenommen, so ist auch verständlich, dass die Didaktik nur ganz allgemein gehalten wird, und dass auf Themen der Mathematikdidaktik nicht eingegangen werden kann.

2.4 Zu den Bildungsplänen

Um aufzuzeigen, wie hoch die Diskrepanz zwischen den Leistungen der Studienanfänger und den Anforderungen in den Bildungsplänen ist, werden diese kurz dargestellt.

Die Bildungspläne für private und staatliche Schulen sind gleich. Insbesondere wird hier auf die mathematischen Bildungspläne eingegangen.

Die generellen Richtlinien für den Mathematikunterricht, die von der Secretaría de Educación Pública (1994) in Mexiko verfasst worden sind, legen großen Wert auf die Entwicklung der Kompetenzen zur Lösung von Sachaufgaben und Problemstellungen sowie die Entwicklung des mathematischen Denkens, ausgehend von praktischen und realitätsnahen Situationen. Als Problem wird eine Aufgabe aufgefasst, für deren Lösung kein Weg bekannt ist. Die Entwicklung von Prob-

[6] Es ginge vielleicht für diese Arbeit zu weit die einzelnen Themenbereiche zu besprechen, jedoch wäre es für eine weitere Arbeit von Nutzen diese zu analysieren und festzustellen, in wieweit Primarialehrerinnen und –lehrer diese Themen auf der einen Seite beherrschen und auf der anderen Seite selbst die Voraussetzungen für eine Unterrichtsstunde im Problemlösen erwoben haben.

lemlösefähigkeiten erfordert deshalb die Entwicklung eigenständiger mathematischer Fähigkeiten.[7]

Vom 1. bis zum 6. Schuljahr:

(entnommen aus den Planes y Programas de Estudio. Educación básica. Primaria, 2000)

In den mexikanischen Rahmenrichtlinien für die Primaria (Kl. 1 – 6) werden folgende Inhalte vorgeschlagen:

Für die Förderung der Problemlösefähigkeiten wurde das Thema Mengenlehre (endlich!) gestrichen, und die Organisation des Mathematikunterrichts in diesen ersten 6 Schuljahren in sechs Themenbereiche unterteilt:

1. Die Zahlen, ihre Beziehungen und Operationen
2. Messungen
3. Geometrie, der jetzt, im Unterschied zu vorher, eine größere Aufmerksamkeit geschenkt werden soll
4. Prozesse der Variabilität, speziell Grundkenntnisse der Proportionalität
5. Bearbeitung von Daten (Statistik)
6. Arbeiten mit der Wahrscheinlichkeit und dem Zufall.

Als allgemeine Lernziele führen die Lehrpläne die Entwicklung folgender Kompetenzen auf:

- Die Kompetenz, Mathematik als Instrument zu benutzen, um Fragestellungen zu erkennen, aufzustellen und zu lösen
- Die Kompetenz Resultate vorherzusagen und zu bestätigen (Vermutungen aufzustellen und zu überprüfen)
- Die Fähigkeit mathematische Informationen zu kommunizieren und zu interpretieren
- Die Entwicklung der Raumvorstellung
- Die Fähigkeit Resultate und Messungen zu schätzen
- Die Fähigkeit Instrumente des Messens, des Zeichnens und des Rechnens (Taschenrechner) zu gebrauchen
- Die Entwicklung des abstrakten Denkens durch verschiedene Formen des Verständnisses, unter anderem, die Systematisierung und die Generalisierung von Verfahren und Strategien.

Um die Qualität des Lernens zu steigern, ist es unumgänglich, so die Rahmenrichtlinien, dass Schülerinnen und Schüler sich für mathematische Inhalte interessieren und sie sinnvoll und funktionell finden, dass sie ihren Wert erkennen und dass sie mathematische Inhalte als Instrument betrachten, mit dessen Hilfe

[7] Es wird später darauf einzugehen sein, wie weit dieser Anspruch verwirklicht werden kann. Problemlösen wird durch eine Lernauffassung, die von einem lehrerzentrierten Unterricht ausgeht, nicht geschult.

sie Problemstellungen aus diversen Kontexten erkennen, bearbeiten und lösen können.

Vom 7. bis zum 9. Schuljahr:

Aus Educación Básica. Secundaria, Programas de Estudio, 2006. Diese Reform ist erst ab 2006 in Kraft getreten[8].

Geändert hat sich lediglich die Form, weniger die Themenbereiche. Die Themen werden jetzt aus einer anderen Sicht aus bearbeitet. Z.B. kann man erkennen, dass die Gerade aus der Perspektive der Proportionalität behandelt wird.

Die mathematischen Inhalte der Secundaria (7. – 9. Schuljahr) sind in drei Teile organisiert:

a. Bedeutung der Zahlen und algebraisches Denken
b. Form, Raum und Messungen
c. Manipulation der Information

Die Themen werden in der nächsten Tabelle aufgeführt. Im Sinne eines Spiralcurriculums werden in den verschiedenen Schuljahren die Konzepte wieder aufgenommen und vertieft.

Thema	Absichten	Was? Wann?
Zahlen und algebraisches Denken	Ergründung und Vertiefung in Algebra im Sinne der 3 Aspekte der Variablen: allgemeine Zahl, Unbekannte und funktionale Beziehung.	7. Schuljahr: a) Bedeutung und Gebrauch der Zahlen und Variablen b) Additive und multiplikative Probleme c) Lineare Gleichungen d) Zahlen mit Vorzeichen e) Potenzrechnung und Wurzelrechnung f) Funktionale Beziehung 8. Schuljahr: a) Additive und multiplikative Operationen kombiniert ax(a+1)

[8] Bildungspläne sind vorwiegend Darstellung der Inhalte.

		b) Mustererkennung und Formeln 9. Schuljahr: a) Binomische Formeln b) Quadratische Gleichungen
Form, Raum und Messungen	Dieser Teil begünstigt die Entwicklung der Kompetenz zu argumentieren. Was gemessen wird hat mit Form und Raum zu tun.	7. Schuljahr: a) Symmetrie b) Geraden und Winkel c) Ebene Figuren 8. Schuljahr: a) Geometrische Körper 9. Schuljahr: a) Ähnlichkeit in Dreiecken
Manipulation der Information	Lösen von Problemsituationen in denen eine Analyse, eine Organisation, eine Repräsentation und eine Interpretation von Daten aus verschiedenen Quellen notwendig sind. Statistik (z.B. Mittelwertbildung).	7. Schuljahr: a) Proportionales Verhältnis, Prozentrechnung b) Diagramme,Tabellen und Graphiken c) Vorstellungen über Wahrscheinlichkeit 8. Schuljahr: a) Datenverarbeitung b) Die Gerade 9. Schuljahr: a) Parallele Geraden und sich schneidende Geraden b) Quadratische Funktionen

Der Unterricht soll Aktivitäten anbieten, die für die Schüler interessant sind und die zur Reflektion anregen, Fragestellungen mit verschiedenen Lösungswegen zulassen und zur Entwicklung von Argumenten auffordern, die die Resultate bestätigen. Es wird hier noch nicht von Beweisen gesprochen.

<u>Vom 10. bis zum 12. Schuljahr:</u>

Auch in der Preparatoria wurde in den letzten Jahren (seit 2004) eine Reform durchgeführt. Sie wurde schrittweise von Semester zu Semester vorgenommen. In den letzten zwei Semestern (5. und 6. Semester, also 12. Schuljahr) wurde eine Wochenstunde Mathematik gestrichen. (SEP, Subsecretaría de Educación Superior e Investigación Científica, Dirección General del Bachillerato, DGB)

Da es sich um höhere Erziehung handelt, so DGB, soll man sich bei diesen Themen auf die Behandlung der grundlegenden Fähigkeiten konzentrieren, die die graphische Darstellung, das Modellieren und das Lösen von Problemsituationen aus der Wissenschaft, dem täglichen Leben und der Arbeitsumwelt ermöglichen. (Die Secretaría de Educación, geht davon aus, dass ein Grossteil der Schüler nach dem Abitur nicht weiter studiert, so soll auf das Arbeitsleben vorbereitet werden)

Es soll in sieben verschiedenen curricularen Orientierungen gearbeitet werden (DGB):

1. Entwicklung der Fähigkeiten des Denkens
2. Methodologie der Lösung von Problemstellungen
3. Förderung verschiedener Werte bei den Schülern, wie Haltung, Solidarität mit den Mitschülern, Teamarbeit, u.a.
4. Umwelterziehung, im Sinne der Förderung von der Gewöhnung und Realisierung des Umweltschutzes.
5. Kommunikation, der Schüler soll Gelegenheit haben seine Auffassungen und Gesichtspunkte zu analysieren, darzulegen und zu diskutieren. Dabei werden seine Fähigkeiten der schriftlichen und mündlichen Kommunikation gefördert.
6. Güte und Qualität; Beitrag zur Schulung der wissenschaftlichen Strenge, die in Verhaltensweisen der konstruktiven Kritik und der verantwortlichen Aktivität zur Geltung kommen.
7. Demokratie und Menschenrecht; Förderung des Respekts und Toleranz gegenüber divergenten Meinungen, in dem der Schüler das Recht auf Äußerung seiner eigenen mathematischen Prozesse und Resultate hat.

Die Bildungspläne sind nach Semestern, wie folgt, aufgeteilt:

Semester	Themenbereich
1. Semester (10. Schuljahr)	Wiederholung der Algebra
2. Semester (10. Schuljahr)	Geometrie und Trigonometrie
3. Semester (11. Schuljahr)	Analytische Geometrie

4. Semester (11. Schuljahr)	Funktionen
5. Semester (12. Schuljahr)	Limes und Differentialrechnung
6. Semester (12. Schuljahr)	Integralrechnung

Zu erwähnen sei hier, dass dies die vorgeschriebenen Themenbereiche sind, jedoch kann man in der Umsetzung viele Unregelmäßigkeiten finden, sowohl mit Erlaubnis der SEP, als auch eigenständige Variationen der Schulen.

Was passiert in der Realität: Eigenständige Varianten der Schulen, Unterschiede zwischen privaten und staatlichen Anbietern, große Unterschiede zwischen Stadt und Land stellen die Realisierung der Lernziele in Frage.

Viele Schulen haben die Notwendigkeit erkannt die Anzahl der Semester in Algebra von einem auf zwei zu erhöhen. Das hat jedoch zur Folge, dass die Inhalte der späteren Semester, entweder gedrängt werden, oder dass Themenbereiche wegfallen.

Außerdem ist das Preparatoriaschulsystem in Mexiko anders als in Deutschland. Im 5. oder 6. Semester kann ein Schüler sich für eine bestimmte Studienrichtung entscheiden, eventuell Betriebswirtschaft, oder Biologie, oder Physik. So haben nicht alle Schüler die gleichen Mathematikstunden.

Problematisch dabei ist, dass auch alle, die keine Mathematik im 5. und 6. Semester hatten, ein Ingenieurstudium aufnehmen können. Diese Situation bedingt, dass im Studium sehr unterschiedliche Fähigkeiten und Fertigkeiten im Fach Mathematik erwartet werden können.

3. Problemstellung – Fragen - Vorgehensweise

Problemstellung:

Viele Studentinnen und Studenten in den ersten Semestern geben das Studium auf, weil sie die mathematischen und numerischen Fächer (Buchhaltung) nicht bewältigen können.

Anfangsstudentinnen und –studenten der betriebswirtschaftlichen- und ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge benötigen ein Mindestmass an Fertigkeiten und Fähigkeiten für ein erfolgreiches Beenden ihres Studiums.

Jedes Jahr werde ich mit den Problemen von Anfangsstudentinnen und –studenten konfrontiert. Für mich als Dozentin an der Universidad Panamericana, wie auch für die Universität selbst, ist es wichtig den Hintergrund zu erforschen, aber gleichzeitig auch eine Initiative für die Lösung dieser Problematik zu finden.

Aus den ersten Beobachtungen habe ich deshalb über mehrere Jahre Instrumente entwickelt, um die auftretenden Probleme zu untersuchen. Die jeweiligen Fragestellungen machten unterschiedliche Vorgehensweisen notwendig (MAYRING 2001).

Zu Fragen nach den mathematischen Kenntnissen der Studienanfänger wurde ein Test entwickelt, der sich auf algebraische Inhalte bezog und vier realitätsbezogene Aufgaben enthielt. Der erste Test wurde 1996 an Studierenden der Betriebswirtschaft mit dem Schwerpunkt Marketing durchgeführt. Der Test wurde quantitativ ausgewertet. Gefragt wurde, welcher Prozentsatz der Studierenden die jeweilige Aufgabe lösen konnten. Die Ergebnisse dieser kleinen Gruppe zeigten, dass die Studierenden erhebliche Probleme aufwiesen. Deshalb wurde nach den Kenntnissen der Studierenden anderer Fachrichtungen gefragt.

Bis 2003 wurde der Test systematisch verändert, weil einige Aufgaben beinahe gar nicht bearbeitet wurden. Dazu gehörten Aufgaben, die Exponentialgleichungen und Logarithmen enthielten. Die Aufgaben mit Realitätsbezügen wurden bis auf eine aus dem gleichen Grund nicht mehr gestellt.

Die Ergebnisse der Testungen zwischen 1999 gehen als Vorstudie mit in diese Arbeit ein. Die in dieser Arbeit vorgenommene Analyse bezieht sich auf den Test in der Fassung von 2003. Seit dem wird der Test jedes Jahr bei Studienanfängern durchgeführt.

Die eigentliche Studie bezieht sich auf mehrere Fragen: quantitativ sollte erhoben werden, wie viele Aufgaben von einem einzelnen Studierenden richtig bear-

beitet wurden. Die Ergebnisse der Studierenden eines Studiengangs wurden zusammengefasst und in einer Grafik dargestellt. Jede Aufgabe wurde ebenfalls quantitativ ausgewertet nach dem Prozentsatz der Studierenden eines Studienganges, die diese Aufgabe richtig gelöst haben. Aus diesen Ergebnissen wurde deutlich, welche Inhaltsbereiche den Studierenden noch nicht ausreichend zur Verfügung standen.

Um genauere Informationen über die fehlenden Kompetenzen der Studierenden zu erhalten wurden (im Sinne einer Vertiefungsstudie (MAYRING 2001)) die Aufgaben einer Fehleranalyse unterzogen. Von etwa 500 Studierenden wurde jede einzelne Aufgabe auf Fehler untersucht. Die Fehler wurden interpretiert und kategorisiert. Die Kategorienbildung erfolgte theoriegeleitet an Forschungsergebnissen zu Problemen beim Erwerb algebraischer Inhalte (deduktive Kategorienanwendung (MAYRING 2000).

Die erste Zielgruppe für diese Arbeit waren Anfangsstudentinnen und –studenten der Universidad Panamericana im Jahre 1999 und später dann im Jahre 2003. 1999 besteht die Gruppe der getesteten Studienanfängern aus 156 Studierenden der Studiengänge Marketing und Internationale Geschäfte. 2003 ist die Gruppe der getesteten Studienanfänger sehr viel größer (449 Studienanfänger), da alle betriebswirtschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge untersucht wurden.

Die beobachteten Probleme veranlassten mich auf mögliche Ursachen weiter einzugehen. Im Sinne der Triangulation (FLICK 2000, MAYRING 2001) wurden verschiedene Verfahren aufeinander bezogen. Um Hypothesen für das schlechte Abschneiden der Studierenden zu entwickeln, wurden zunächst die fachlichen Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrern erhoben. Dazu wurden einer kleinen Gruppen von Lehrerinnen und Lehrern (22 Probanden) die Testaufgaben der Vorstudie gegeben. Diese Ergebnisse wurden ebenfalls quantitativ ausgewertet. Um die Hypothesen zu erhärten, wurden einige Ergebnisse zusätzlich einer qualitativen Auswertung unterzogen. Darüber hinaus wurde mit sieben Lehrern eine schriftliche Befragung durchgeführt. Ihnen wurden Schülerfehler vorgelegt. Ihre Aufgabe bestand darin, die Fehler zu erkennen, eine Ursache zu benennen und ein methodisches Vorgehen aufzuzeigen, wie im Unterricht auf solche Fehler reagiert werden könnte.

Die auf diese Weise induktiv gewonnen Hypothesen wurden in einer weiteren Studie überprüft. Mit fünf Lehrerinnen und Lehrern wurden Interviews durchgeführt.

Die Aussagen der Interviewten wurden interpretiert und kategorisiert. Die Kategorienbildung erfolgte an Hand der Forschungsfragen.

3.1 Folgerungen für diese Studie

Unterricht gestaltet sich in Wechselwirkung zwischen Lernenden und Lehrenden. Dabei können verschiedene Einflussgrößen untersucht werden. „Unterricht ist lediglich ein Angebot; ob und wie effizient dieses Angebot genutzt wird, hängt von einer Vielzahl dazwischen liegender Faktoren ab. ...Wahrnehmung/ Interpretation der Lehrkraft bzw. des Unterrichts und aktive Lernprozesse, hängen ihrerseits entscheidend von individuellen Eingangsbedingungen der Schüler und vom Klassenkontext ab" (HELMKE, 2005, S. 41-42). Die individuellen Voraussetzungen der Lernenden (hier der Studienanfänger) unter kognitiven Gesichtspunkten zu untersuchen, ist ein Ziel der Studie. Jedoch kann an dieser Stelle die Qualität des schulischen Unterrichts nur am Ertrag des Unterrichts – der Leistungen der Studienanfänger – untersucht werden. HELMKE (2005) bezeichnet den Ertrag des Unterrichts als einen Faktor, der zum Erfassen von Unterrichtsqualität gebraucht werden kann (siehe Angebots-Nutzungsmodell nach HELMKE 2005). Das Angebot wird von den Lehrenden erstellt mit der Gestaltung ihres Unterrichts. Die Nutzung sind die von ihnen ausgeführten Lernaktivitäten, die sowohl außerhalb als auch innerhalb des Unterrichts stattfinden. Die Lehrperson mit ihren verschiedenen Kompetenzen (fachliche, fachdidaktische, diagnostische und Klassenführungskompetenzen) wirkt auf den Unterricht ein.

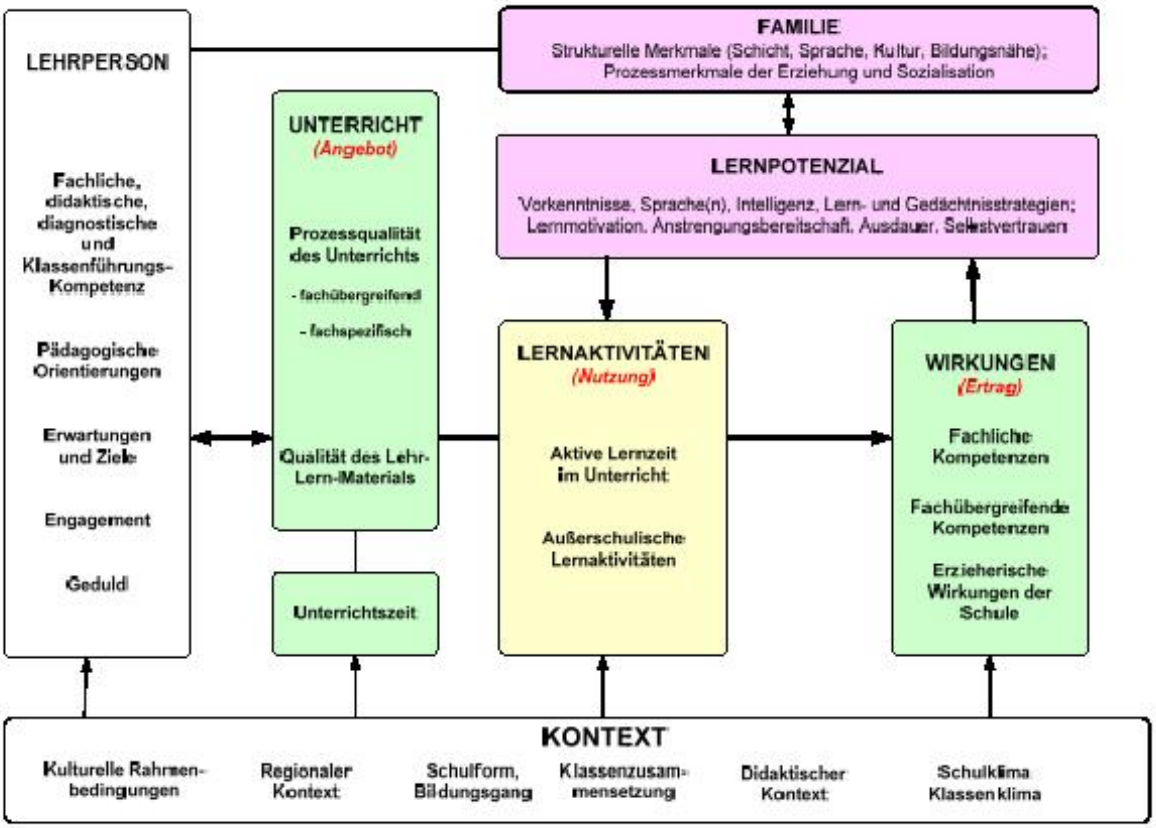


Abbildung 3.1: Angebots-Nutzungs-Modell aus *HELMKE (2006)*

Unter den verschiedenen Aspekten, die untersucht werden können, beschränkt sich die Studie auf die Untersuchung von zwei Schwerpunkten: der Erfassung der Vorkenntnisse der Studienanfänger – das ist der Ertrag der vorausgegangenen Schulzeit – und der Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrer, die in der Mittel- und Oberstufe (Secundaria und Preparatoria) unterrichten.

Im Folgenden wird die Studie in zwei Teile geteilt werden:

a) Leistungen der Studienanfänger mit Schwerpunkt auf Fehlern bezogen auf algebraische Inhalte
b) Kompetenzen der Lehrenden mit Schwerpunkt auf fachliche, fachdidaktische und diagnostische Kompetenzen zu den genannten Inhalten

4. Erster Teil

Leistungen der Studienanfänger mit Schwerpunkt auf Fehler bezogen auf algebraische Inhalte

Fehler in der Algebra können unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Kognitionstheoretische Ansätze befassen sich mit der Frage, wie in Prozessen der Informationsaufnahme und –verarbeitung Fehler zustande kommen. Ein weiterer Zugang wird über Sachanalysen gewonnen. Eine Analyse der Fehler ist insbesondere unter dem Ansatz wichtig, dass Fehler selten Zufallsprodukte, sondern systematischer Natur sind. Da Fehlstrategien Anzeichen für die Art des Denkens der Schüler bieten (RADATZ 1980; S. 72), scheint es sinnvoll, Fehler zu analysieren.

Der Rekonstruktion von Fehlern in Bearbeitungsprozessen kommt eine große Bedeutung zu, wobei der individuelle Lösungsvorgang analysiert wird. Dabei greifen sowohl NOLTE (1991, S. 7-10) als auch TIETZE (2000, S. 66 f) auf kognitionspsychologische Ansätze zurück und verbinden dies mit sachanalytischen Zugängen. Kognitionspsychologisch betrachtet entstehen Fehler bei der Informationsaufnahme und der Informationsverarbeitung, durch nicht angemessenes Wahrnehmen der Information, durch unvollständige Wahrnehmung, durch selektive Wahrnehmung, durch nicht geeignete Speicherung der Information, durch falsche Wiedergabe der Information und durch fehlerhafte Ergänzung der Information durch Mustererkennungsprozesse. Die Sachanalyse vertieft diese Perspektive, indem genau untersucht wird, welche Denkvorgänge bezogen auf einen bestimmten Inhalt zu einem Ergebnis geführt haben können.

Zur Darstellung von Prozessen der Informationsverarbeitung gibt es vielfältige Modelle, die unterschiedlich weit differenziert sind und unterschiedliche Schwerpunkte legen (siehe z.B. SCHERMER 1991 in HELMKE 2004). Für die folgenden Überlegungen ist zunächst das Modell von ANDERSON (1983,1988; aus NOLTE, 1991) ausreichend.

Die Funktionsweise des Gedächtnisses bzw. der Informationsverarbeitung wird im Modell von ANDERSON (1983,1988; aus NOLTE, 1991; S. 7) in drei Speicher untergliedert: das deklarative Gedächtnis, das prozedurale oder Produktionsgedächtnis und den Arbeitsspeicher. Schematisch kann es, wie in der Abbildung 4-1 dargestellt werden.

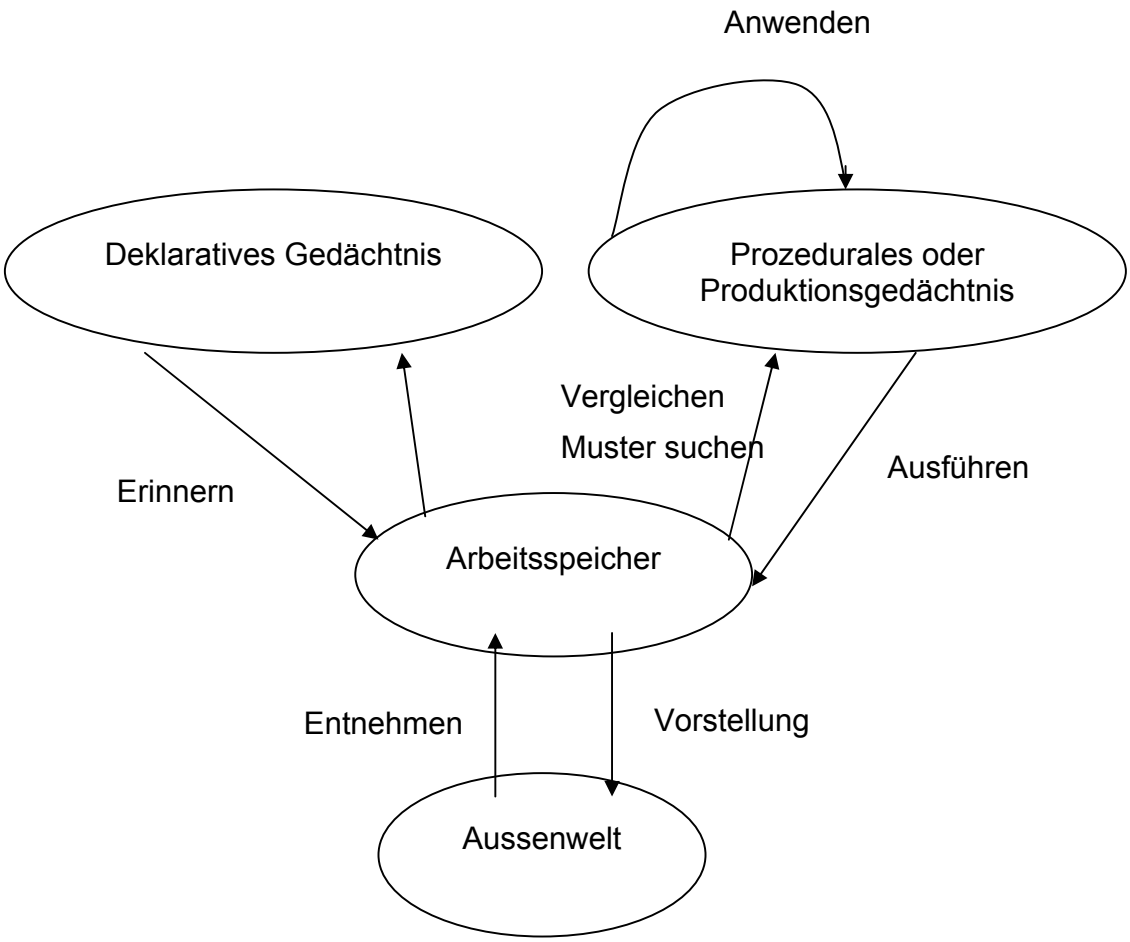


Abbildung 4-1, Modell der Funktionsweise des Gedächtnisses nach ANDERSON, 1983; S. 19 (aus NOLTE, 1991, S. 8)

Von der Außenwelt wird ein Impuls, z.B. in Form einer Aufgabe, wahrgenommen. Diese Wahrnehmung aktiviert das Netzwerk. Der Arbeitsspeicher tritt in assoziative Verbindung mit dem deklarativen Gedächtnis, welches Fakten und Episoden gespeichert hat. Assoziierte Begriffe werden in den Arbeitsspeicher geholt (von ANDERSON Aktivation genannt) und in der Auseinandersetzung mit Informationen werden passende Produktionen gesucht (vgl. NOLTE, 1991, S. 8). Dieser Prozess kann in der Bearbeitung einer Aufgabe einmal, aber auch mehrmals durchlaufen werden.

Für die weitere Untersuchung entscheidend ist die Klassifizierung von Wissen nach Verfahrensweisen/prozeduralem Wissen und Faktenwissen.

Langpaap (unv. Manuskript) unterscheidet im Rückgriff auf prozedurales Wissen drei verschiedene Fälle:

"1. Prozeduren, die sich im Alltag bewähren und hilfreich sein können (im Sinne von Schütz)

2.Prozeduren, die erworben, verstanden und automatisiert wurden.

3. Prozeduren, die zwar gelernt und automatisiert wurden, deren begriffliches Konzept jedoch nicht hinreichend verstanden worden ist."

Prozeduren bei denen im Sinne Andersons (1983) ein angemessener Bezug zu deklarativem Wissen hergestellt wird, bei denen also Verfahrensschritte mit begrifflichem Wissen abgeglichen werden, werden von GRAY / PITTA / TALL (1997) als "procept" bezeichnet, "process to do" und "concept to know".

Fehler können nach diesem Ansatz daraus resultieren, dass allein eine Prozedur gespeichert wurde, die sich an äußeren Merkmalen der Aufgabe orientiert. Damit wird die Lösung der Aufgabe fehleranfällig, insbesondere, wenn leichte Veränderungen der Präsentation der Aufgabe u.a. stattfinden.

Die gleichen Fehler können jedoch auch auftreten, wenn kein genaues Erfassen der vorliegenden Details der Aufgabe erfolgt, wie das typisch für Mustererkennungsprozesse ist.

Ein Beispiel für solche Fehler besteht nach NOLTE (1991) in einer „nicht angemessene Wahrnehmungen der Information aus der Umwelt, die häufig unvollständig sind, so dass durch Mustererkennungsprozesse die Informationen ergänzt, bzw. in ihrer Bedeutung gewichtet werden müssen" (NOLTE, 1991, S. 8). Die Deutung vorliegender Informationen bei unvollständigen Daten, die durch vorhandenes Wissen ergänzt wird, führt zur Aktivierung von Prozeduren, die nicht passend sein müssen und damit sehr leicht Fehler erzeugen können.

Fehler, die durch dieses Modell erklärt werden können, sind die Konkatenationsfehler, z.B. 3x, das als 3+x gedeutet wird. Der Erfahrung mit der Stellenwertvorstellung in 35 ist ein hoher Grad an Aktivierung gegeben worden, so wird nun die Deutung von 3x und 35 bei anscheinend gleichen Daten in einem anderen Kontext die gleiche Bedeutung gegeben (vgl. NOLTE, 1991, S 9).

Gerade dieser Fehler kann aber auch daraus resultieren, dass die Schreibweise 3x als 3 mal x nicht verstanden wurde. Wie das Wissen im deklarativen Gedächtnis gespeichert wird, bezieht sich auf "die Verständnistiefe" (vgl. HELMKE, 2004, S. 38), darauf, dass das Wissen verstanden und fachlich angemessen repräsentiert wird. Die Qualität der Speicherung hängt von einer angemessenen Vernetzung der Information ab. Erst wenn das Wissen beziehungsreich gespeichert wurde, wird es vielfältig anwendbar.

MALLE (1993) teilt in seiner Arbeit Fehler in syntaktische und semantische Aspekte ein. Dabei geht er bei den syntaktischen Aspekten (MALLE, 1993, S. 166-180) auf Fehler bei der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung, wie Fehler beim Aufruf, bei der Verarbeitung oder bei der Anwendung von Schemata ein. Erklärung über den syntaktischen und den semantischen Aspekt findet man ebenfalls bei TIETZE (2000, S. 68-69):

a) Syntaktischer Aspekt, algorithmischer Aspekt	Probleme: a) Fehler beim Aufruf einer Prozedur b) Fremdstrategien c) Prozedurlücken und deren Reparatur d) Inkonsistenz von Fehlermustern e) Einfluss fehlerhafter Vorstellungen zu mathematischen Begriffen
b) Semantischer Aspekt, begrifflicher Aspekt	Beziehung zwischen Kalkül und der beschriebenen Realität: Interpretieren von Formeln, aufstellen und interpretieren von Termen: a) Bei der Division einer Bruchzahl (kleiner als 1) wird ein Kleinerwerden erwartet b) Vorstellungen zur Null c) Unzureichende Entwicklung des Variablenbegriffs d) Arithmetische Vorstellung des Gleichheitszeichens als „Ergibt-Zeichen“ e) Klammerkonventionen können die Strategie „von links nach rechst rechnen“ nicht modifizieren f) Probleme beim Interpretieren von einfachen Formeln

Diese Ausführungen lassen sich im Modell wie folgt zuordnen: Prozeduren können dem syntaktischen Aspekt zugeordnet werden. Der semantische Aspekt bezieht sich darauf, wie das Wissen im deklarativen Gedächtnis gespeichert ist. Im Sinne ANDERSONS (1983) ist die Wechselwirkung zwischen semantischen und syntaktischen Aspekten, die Entwicklung eines „procepts“ (nach GRAY / PITTA / TALL 1997) notwendig, um über mathematische Kompetenzen zur Lösung einer Aufgabe zu verfügen. TIETZE (2000) weist darauf hin, dass je nach Situation und Aufgabe, semantische und syntaktische Prozesse aktiviert werden.

MALLE (1993) und TIETZE (2000) verwenden in ihren Untersuchungen die Begriffe "Schema" und "Prozedur". Bevor weiter auf Fehler eingegangen wird soll zunächst geklärt werden, wie sie diese Begriffe "Schema" und "Prozedur" deuten:

Schema	Information wird im Gedächtnis in eine spezifische Struktur der Repräsentation verwandelt, welche bei Bedarf aufgerufen werden kann. Schemata enthalten Wissen über Handlungen oder Beziehungen (MALLE, 1993, S. 160) Es enthält Leerstellen (für Zahlvariablen und Variablen für Operationen, „Slots“ genannt), die in einer spezifischen Situation besetzt werden müssen. (TIETZE, 2000, S. 66) Aufruf eines Schemas geschieht aufgrund von „Etiketten“. Wie gut ein Schema angewandt werden kann, hängt davon ab, wie die Bestandteile miteinander vernetzt sind. Man braucht ein Metawissen über ein Schema, das uns sagt, in welchen Fällen dieses Schema anwendbar ist, und in welchen Fällen nicht. Fehler entstehen: a) Bei der Art der Verarbeitung von fehlender oder unerwarteter Information b) Durch nicht erlaubte Anwendung eines Schemas c) Durch mangelndes Metawissen d) Durch nicht zureichende Aufnahme von spezifischen Merkmalen, nach Shevarev (1946, aus MALLE (1993, S. 162) Konnexion genannt. Merkmale lösen eine bestimmte Verhaltensweise aus[9]. e) Durch unvernetzte oder wenig vernetzte Schemata Ein Beispiel für ein Schema ist (MALLE, 1993, S.164): Für eine Aufgabe wie x (x + 5), wird aus dem Gedächtnis ein Schema wie a Δ (b o c) = (a Δ b) o (a Δ c) geholt, in dem die Variablen (x und 5) in die Buchstaben und die Operationen (Mal und Plus) in die Symbole eingesetzt werden. Es handelt sich hier um eine Anwendung des Distributivgesetzes. Diese Anwendungen können auch fehlerhaft vorgenommen werden, da bei einer Aufgabe wie x (5·x), zweimal die Symbole mit einem Malzeichen eingesetzt und zu 5x mal x^2 verarbeitet werden. Bei dieser fehlerhaften Anwendung eines Schemas, geht klar hervor, weswegen ein Metawissen für jedes Schema vorhanden

[9] Siehe dazu auch die Aussagen zu "fehlerhafte Verbindungen" S. 34

	sein muss, und weswegen es wichtig ist, dass sowohl allgemeine als auch spezifische Merkmale in ein Schema aufgenommen werden müssen („constriants“). Jedes Schema bedarf einer Anpassung (Adaptation) an die gestellte Aufgabe, die oft eine Verallgemeinerung eines Schemas ist und einer Verarbeitung der Information (Assimilation). Fehler können sich in jeder Phase des Prozesses ergeben.
Prozedur	Prozeduren werden von Schemata oder einer anderen Prozedur aufgerufen. Sie sind sequentielle Abläufe und sind Abbildung von mathematischen Algorithmen und Regeln. (TIETZE, 2000, S. 67)

Bei Lösungsprozessen in algebraischen Umformungen, nimmt eine Schülerin oder ein Schüler aus einem algebraischen Ausdruck visuelle Informationen auf. Da diese Informationen nicht unmittelbar angewendet werden können, muss mittels einer kognitiven Verarbeitung eine Adaptation des Schemas auf den algebraischen Ausdruck erfolgen, welches die Anwendung des betreffenden Schemas ermöglicht, wonach eine bestimmte Handlung vollzogen wird. Es besteht nach MALLE (1993, S. 164) eine Komplementarität zwischen Schemata und Prozeduren, da Schemata zu ihrer Anwendung Prozeduren bedürfen und Prozeduren durch Schemata gesteuert werden. Gesteuert wird dieser Prozess durch Metawissen, heuristische Strategien und wird von einer Kontrollinstanz kontrolliert. (Oft fehlen Metawissen, heuristische Strategien und Kontrolle (MALLE, 1993, S. 164). Dieses Modell kann mit dem Modell von ANDERSON verglichen werden, in dem Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung zu den kognitiven Aspekten der Erklärung von Fehllösungsprozessen gehört.

4.1. Fehler in der Literatur bezogen auf die Inhalte des Tests

In dieser Arbeit beschränkt sich die Darstellung der Fehler in der Literatur auf solche, die direkt im Zusammenhang mit den ausgewählten Inhalten der Tests stehen.

Neben übergeordneten Klassifizierungen (wie Informationsaufnahme- und Informationsverarbeitungsfehler) ist es für die konkrete Arbeit an Inhalten wichtig die genaue Vorgehensweise von Lernenden und den damit verbundenen begrifflichen Aspekten zu erfassen.

Das bedeutet, Fehler müssen sachanalytisch und im Detail betrachtet werden. Eine inhaltliche Analyse von Fehlern ermöglicht eine weitere Klassifizierung.

Es bedeutet auch, dass eine Hierarchie der Klassifizierungen vorgenommen werden kann:

1. Fehler im Detail: 3x0=3
2. Deutung: a) Perseveration der 3; b) Verwechslung der neutralen Elemente 0 und 1; c) Operationszeichen nicht erkannt.

3. Fehlerhafte Informationsaufnahme und -verarbeitung

Fehler in der Arithmetik werden in unterschiedlichen Zusammenhängen von z.B. JOST u.a. (1997); RADATZ (1980, 1984), LORENZ/RADATZ (1993); PADBERG (2005) und NOLTE (2000) beschrieben.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf Fehlern in der Algebra. Dabei beziehe ich mich überwiegend auf MALLE (1993); NOLTE (1991); SHEVAREV (1946) und TIETZE (2000).

Die nächste Tabelle ist eine Aufstellung der in der Literatur zu findenden Untersuchungen über arithmetische und algebraische Fehler, die für meine Untersuchung relevant waren.

Fehler	**Beispiel**
0. Arithmetik	
0A. Fehler bei der Hierarchie der Operationen	4 + 5 x 3 – 2 = 9 x 3 – 2 = 27 – 2 = 25 Punktrechnung geht vor Strichrechnung ist nicht berücksichtigt worden
0B. Nicht erkennen von impliziten Klammern	Bei $\sqrt{16+9} = 4+9 = 13$ wird nicht beachtet, dass (16+9) unter dem Wurzelzeichen eine implizite (nicht Sichtbare) Klammer hat. Eine andere implizite Klammer sind die Seiten einer Gleichung, u.s.w.
0B. Bruchrechnung 1. Invertierung des 2. Faktors bei einer Multiplikation PADBERG (2002, S. 143)	$\frac{5}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{5 \times 8}{9 \times 3}$ Wird zur Division
2. Ungünstige Vorgehensweise	

einer Multiplikation von Brüchen Arbeiten auf syntaktischer Ebene (Regeln automatisiert) PADBERG (2002, S. 185)	$\frac{8}{3} \times \frac{9}{16} = \frac{8 \times 9}{3 \times 16} = \frac{72}{48}$ Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner, Regel automatisiert, könnte vorher gekürzt werden.
0D. Perseverationsfehler Ein Teil der aufgenommenen Information bleibt im Gedächtnis haften und wird weiter verwendet. RADATZ (1985).	3 x 0 = 3
I. Von der Arithmetik zur Algebra	
IA: *Konkatenationsfehler:* In der Arithmetik ist Zusammengeschriebenes additiv verknüpft, in der Algebra bestehen sowohl die additive als auch die multiplikative Verknüpfung	In der Arithmetik: 4 ½ = 4 + ½ In der Algebra: 3x ist multiplikativ Verknüpft 43 x ist additiv in 43 und multiplikativ in (43)x verknüpft.
Dadurch entstehen Fehler wie: NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)	3x + 4y = 7xy oder 6x = 36 x = 30
IB: Umgang mit der Null „Null ist nichts, die kann man weglassen“ TIETZE (2000, S. 70)	für x = 0 ist x + 1/x = 1 a / 0 = a

„Null verändert nichts“ TIETZE (2000, S. 68 u. 70) PADBERG (2005, S. 40)	$0 \cdot 5 = 5$
II. Fehler im Zusammenhang mit dem Gleichheitszeichen	
IIA. Fehler im Zusammenhang mit dem Gleichheitszeichen: NOLTE (1991, S. 48) MALLE (1993, S. 137) TIETZE (2000, S. 68 u. 72) Gleichheitszeichen als Aufgabe-Ergebnis-Deutung; Interpretation eines Aktionszeichens Ausdrücke wie: x + 3 werden als „unausgeführte Rechnungen“ interpretiert MALLE (1993, S. 136) IIB. Eingeschränkte Vorstellungen führen zu unvollständiger Wahrnehmung: NOLTE (1991, S. 48) IIC. Inkorrekte Anwendung von Gleichheitszeichen:	 $x + 3 = 3x$ $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ Ausdrücke wie 4a werden akzeptiert, aber 4a + 5 nicht, so wird 4a+5 zu 9a 2x+3+x = 15 + x 2x + 3 + x = 15 das x am Ende wird ignoriert
III. Fehlerhafte Verbindungen	
IIIA. Fehlerhafte Verbindungen: Das heißt, fehlerhafte Assoziation zwischen Aufgabenelementen und	$a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$ Es werden allgemeine Eigenschaften oder Merkmale aufgenommen

Handlungen. NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE (2000, S. 70) Eine unvollständige Erfassung der Merkmale trifft auf ungeeignete Schemata oder Prozeduren.	und z.B. als (a, m, n) gespeichert, jedoch werden die spezifischen Merkmale nicht aufgenommen und nicht gespeichert.
IIIB. Verwendung zu offener Schemata: Schüler haben keine genaue Vorstellung über Handlungen, die sie durchzuführen haben. Grund dafür ist ein Schema ohne Einschränkungen oder ein Mangel an Metawissen. MALLE (1993, S. 181) TIETZE (2000, S. 70)	$(a^2 + b^3)^2 = a^4 + b^6$ Keine präzise Vorstellung des Distributivgesetzes $3a^2 + 15b^3 = 18a^3b^3$ Gleiche Potenzen kann man zusammenfassen
IIIC. Zu enge Eingangsmerkmale: Einige Prozeduren können nicht vom Schüler aufgerufen werden, weil sie auf gedanklichen Widerstand stoßen, dieses geschieht bei Aufgaben in denen z.B. eine Substitution vorgenommen werden muss. TIETZE (2000, S.70)	Von $(a+b)^2$ zu $(2ab+3c)^2$ Von $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ zu $(x+2)^m \cdot (x+2)^n$ Bei der Inversenbildung, die einen Bruch in der Form von n/m erfordert und 5 ½ nicht verarbeiten kann.
IIID. Verwendung unpassender Ersatzschemata: Besteht eine Lücke im Lösungsprozess, oder findet der Schüler kein	Von $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zu $(a \cdot b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[10] In Mexiko kommt dieses auch vor, weil Schülerinnen und Schüler nicht „kürzen“, sondern „eliminieren“ und mit dem Begriff „eliminieren“ nichts „übrig bleibt“.

passendes Schema, wird ein Ersatzschema verwendet (auch „bug-repair“ – Theorie genannt, vgl. TIETZE (2000, S. 71) und MALLE (1993, S. 184). Die Reparatur erfolgt oft im Sinne, „lasse den störenden Term weg“ TIETZE (2000, S. 70) MALLE (1993, S. 184)	Von $\frac{ab}{a} = b$ zu $\frac{ax+b}{x} = a+b$ Von $\frac{1}{x} = x^{-1}$ und $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ zu $\frac{1}{x+x^2} = x^{-1} + x^{-2}$
IIIE. Streich- und Weglassschemata Streichschemata: Gehören zu den zu offenen Schemata, greifen auf Mustererkennungen zurück und projizieren diese in die Aufgabe hinein, ohne auf die Termstruktur zu achten. Zu diesen Fehlern gehören Kürzungsfehler und auch andere Umformungen nach Musterbeispielen. Weglassschemata: Durch Kürzungen mit einem Streichschema, kann es vorkommen, dass Operationszeichen ohne Operanden übrigbleiben, diese Operationszeichen werden dann einfach weggelassen.[10] MALLE (1993, S. 182)	$\frac{3x}{2-x} = \frac{3}{2}$ $\frac{x}{2x-y} = \frac{}{2-y} = 2-y$ hier wird auch oft der Bruchstrich weggelassen. $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Rightarrow x = y+z$ die 1 im Zähler wird mittels einer Division durch 1, „gekürzt“.
IIIF. Interferenz von Schemata: Wenn eine bestimmte Aufgabe mehrere Schemata aufruft, treten diese in einen Kompetenzkonflikt und Schemata überlagern sich. MALLE (1993, S. 185)	Bei Fehlern wie: $(x-9)^2 = (x-3)(x+3)$ treten in Konkurrenz folgende Schemata: $A^2 = A \cdot A$ $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ und (-A) (-B) = + AB
IV: Fehlerhafte Verallgemeinerungen	
IVA. Übergeneralisierung Bei der Anwendung eines verallge-	

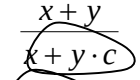
meinerten Schemas kommt es oft vor, dass das Schema nicht genügend eingeschränkt wurde. NOLTE (1991, S. 61) MALLE (1993, S. 172,173) TIETZE (2000, S. 70)	Wird das Schema; Δ (b o c) = (Δ b) o (Δ c) nicht auf den Typ der Operationen hin eingeschränkt, so wird das Schema übergeneralisiert, und es entstehen Fehler wie: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
IVB. Neutrale Elemente: Unkritisch werden auch Operationen mit neutralen Elementen vorgenommen, wie: a + 0 = a und a · 1 = a die Zahlen 0 und 1 sind hier die neutralen Elemente, wird im Gedächtnis nicht der Zusammenhang mit dem neutralen Element (welches) gespeichert kommt es später zu Fehlern, wie:	a · 0 = a[11] a ·1/a = 0
IVC. Nicht Speicherung der bestimmenden Eigenschaften: Zu Fehlern führt auch das Distributivgesetz, wenn nicht erkannt wird, dass bestimmte Eigenschaften einer Operation in Bezug auf eine andere Operation gespeichert wurden.	Das Schema: a Δ (b o c) = (a Δ b) o (a Δ c) führt zu Fehlern wie: $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$
IVD. Ein weiterer Fall des Übergeneralisierens ist folgender Fehler anhand von Musterbeispielen: (x – 7) (x + 3) = 0 → x = 7 ; x = - 3	(x – 7)(x + 3)= 3 → x – 7 = 3 und

[11] Einige fehlerhafte Lösungen wiederholen sich, können aber von verschiedenen Prozessen verursacht worden sein.

Fehler der Übergeneralisierung ist: MALLE (1993, S. 174) TIETZE (2000, S. 73)	x + 3 = 3
IVE. Unzulässiges Linearisieren: Ist ein Sonderfall des Übergeneralisierens, der algebraische Ausdruck wird zerlegt und die Operationen werden hintereinender auf die einzelnen Teile angewandt. Es werden Linearisierungsschemata gebildet und diese werden dann unkritisch angewandt: MALLE (1993, S. 175) TIETZE (2000, S. 72)	$\sqrt{a \circ b} = \sqrt{a} \circ \sqrt{b}$ $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
IVF. Zerlegen in Teile oder Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten Oft entstehen Fehler bei der Annahme man kann alles in Teile zerlegen und dann die Operationen durchführen. Lebenspraktische Strategien, wie: „eines nach dem anderen“, „alles unter einen Hut bringen“ „wenigstens so viel wie möglich tun“, wobei man Terme eventuell weglässt. (MALLE, 1993, S. 181) TIETZE (2000, S. 73) MALLE (1993, S. 181)	„eines nach dem anderen“ $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$ „alles unter einen Hut bringen“ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ „wenigstens so viel wie möglich tun“ x + 5 = 3 – 1/x → x = - 2
IVG. Kehrwertfehler entstehen bei der Vermutung, dass man auf verschiede Terme das anwenden kann, was man bei einem Term anwenden darf. MALLE (1993, S. 176)	$\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7} \rightarrow$ $3 = x + 7$
V. Visuelle Ähnlichkeiten und unvollständige Informationsaufnahme	
VA. Fehler verursacht durch visuelle	4 x 4 = 4 + 4 = 8

Ähnlichkeiten VB. Unvollständige Informationsaufnahme: „Das Suchen nach bestimmten Merkmalen als Entlastungsphänomen im Prozess der Informationsaufnahme führt zur Verwechslung der Zeichen, NOLTE (1991, S. 67)“. Es werden Multiplikationen mit Additionen, Potenzierungen mit Multiplikationen und Divisionen mit Subtraktionen verwechselt, MALLE (1993, S. 166) weist darauf hin, dass eine „höhere“ Operation mit der „niedrigeren“ verwechselt wird. Dass heißt, dass die erstgelernte Operation vorherrscht. Es werden nicht die Details der Operation aufgenommen, womit man hier eine unvollständige Informationsaufnahme vermuten könnte. Eine andere Sichtweise wäre die Annahme, dass das Addieren und Subtrahieren mit einer Vermehrung und einer Verminderung assoziiert wird, und bei einer Aufgabe wie 5 · 4 zu dem Ergebnis 9 kommt. Diese Konnexion kann auch durch die Idee erwachsen, dass die Multiplikation auch als mehrfache Addition interpretiert wird.	25 : 5 = 25 – 5 = 20 2^3 = 2 x 3 = 6
VI. Fehler, die sich aus der Umgangssprache ergeben	
VIA. NOLTE (1991, S. 65) referiert Fehler, die durch Aufrufen des umgangssprachlichen Rahmens entstehen: VIB. a^b hat Ähnlichkeit mit ab, dieser Fehler kann noch dadurch gestützt werden, dass bei einer Erklärung das Sprachliche interferiert. a^b ist a · a · a· · ·, b mal a, also ist es ab.	804 wird zu 84, da die Addition einer Null keinen Unterschied macht (DAVIS Mc.KNIGHT, 1979, S. 109; aus NOLTE (1991, S. 65) 2^3 = 2 ·2 · 2 = 3 mal 2 = 6

MALLE (1993, S. 167)	
VII. Fehler in der Super- bzw. Subprozedur	
VIIA. „Verschiedene Befehle in einem Handlungskomplex bilden eine Prozedur, Prozeduren können einander über- oder untergeordnet sein (Super- und Subprozedur). Z.B. ist die algebraische Addition Superprozedur der arithmetischen Addition und Subtraktion. So können nach DAVIS, McKNIGHT ((1979), aus NOLTE (1991, S. 66)), Fehler in Subprozeduren im Algebraunterricht gefunden werden, oder es können für eine Superprozedur verkehrte Subprozeduren aufgerufen werden. Bei Fehlern wie: VIIB. Beschreibt NOLTE (1991, S. 66) die Interpretation aus dem enaktiven Bereich in dem man bei der Subtraktion etwas „wegnimmt“, so wird x^2 von $2x^2$ „weggenommen“. VIIC. Es besteht aber auch die Möglichkeit die Interpretation vorzunehmen, dass ein Schüler den Term $2x^2$ nicht als multiplikativ verknüpft ansieht, sondern innerlich additiv verknüpft hat.	$2x^2 – x^2 = 2$
VIII. Deeper Level Rules und Bildung unpassender Bedarfsschemata	
VIIA. MATZ (1980, aus NOLTE (1991, S. 68f) beschreibt, dass Fehler einem Schema mit tieferem Hintergrund unterliegen. Z.B. der schon vorher beschriebene Fehler kann als Hintergrund ein Schema in Form von: „auf die konkreten Zahlen kommt es nicht an“ haben. MATZ bezeichnet ein Fehler dieser Art als „deeper level rules“. MALLE (1993, S. 180) vergleicht es mit einem Metaschema.	(x-2)(x-3) = 0 x - 2= 0 oder x – 3 = 0 wird unzulässig verallgemeinert zu (x-2)(x-3) = 8 x - 2= 8 oder x – 3 = 8

Das Schema: Wird von MATZ als „surface rule“ bezeichnet, von MALLE als Bedarfsschema. Metaschemata können bei Bedarf Bedarfsschemata generieren. Entsprechend des Beispiels aus NOLTE (1991, S. 68f) werden die Zahlen a und b als irrelevant angesehen und von Schülerinnen und Schülern oft auch c, wodurch der Fehler entsteht.	(x – a)(x – b)= c → x – a = c und x – b = c
IX. Fehler, die sich aus dem Umgang mit der Struktur ergeben	
IXA. Umgang mit der Struktur NOLTE (1991, S. 45) „Beachtet eine Schülerin oder ein Schüler nicht die Strukturen in der Arithmetik, so führt dieses zur nicht Beobachtung der Strukturen in der Algebra (NOLTE, 1991, S.45)“. PETITO ((1979) aus NOLTE (1991, S. 45) beobachtete, dass gleichstrukturierte Terme je nach Größe oder Eigenschaften der entsprechenden Zahlen unterschiedlich schwer empfunden wurden. IXB. Erkennen von Termstrukturen: MALLE (1993, S. 190f) verweist auf die wichtige Bedeutung der Erkennung von Termstrukturen in der Algebra. Bei seinen Untersuchungen erwies es sich, dass einige Schülerinnen und Schüler Termstrukturen nicht erkennen konnten, manchmal waren sie nicht einmal in der Lage in einem Term irgendeine Struktur zu erkennen.	Bei Aufgaben, in denen gleichartige Bestandteile im Zähler und Nenner waren, wurden diese als Teilterme interpretiert.  wurde x + y als Teilterm interpretiert:
X. Umgang mit Klammern	

XA. Vorherrschende Strategie ist es von links nach rechts zu rechnen. Oft sehen Schülerinnen und Schüler keinen Unterschied in einer Aufgabe mit oder ohne Klammern (BOOTH, 1984, S.31, aus NOLTE; 1991, S. 45). Ein Beispiel aus einer eigenen Erfahrung wäre: Schüler sollten die Formel für die Errechnung des Flächeninhalts eines Trapezes aufstellen (6. Schuljahr); die meisten fanden die Formel: NOLTE (1991, S. 45) XB. MALLE (1993, S.192) referiert Fälle in denen Fehler von Schülerinnen und Schülern gemacht werden, weil sie Klammern setzen, wo sie sie sehen wollen. Oft ist dieses der Fall, wenn sie bekannte Formeln (zum Teil) wiedererkennen.	B + b / 2 · h, wo die Klammer (B +b), keine Bedeutung hatte. Bei $a^2 - b^2 \cdot c^2 + d^2$ wurden „imaginäre“ Klammern gesetzt, $\left[a^2 - b^2\right] \cdot \left[c^2 + d^2\right]$
XI. Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien	
Schülerinnen und Schüler verlieren oft, bei der Ausführung einer Unterprozedur die Kontrolle über den Gesamtablauf der Lösung der Aufgabe. (MALLE, 1993, S. 186)	$2\left(\frac{x}{2} - 3\right) = x - 3$ Möglicherweise hat sie/er anfangs an das Distributivgesetz gedacht, jedoch nach der Unterprozedur der Multiplikation des Bruches, die Multiplikation von 2 x 3 „vergessen“.
XII. Fremdstrategien	
Fremdstrategien zielen auf Vereinfachung ab, sie drängen adäquate Lösungsstrategien zurück. (TIETZE, 2000, S. 70) Für Aufgaben, die unterschiedlich schwierig empfunden werden (wenn auch gleich in ihrer Struktur) werden unterschiedliche Lösungsansätze ge-	3 ½ x = 6 ½ x = 3 abgeleitet von: 6 ½ - 3 ½ = 3

wählt. Stress und algorithmische Unsicherheit spielen eine wesentliche Rolle.	
XIII. Reparatur von Prozesslücken	
TIETZE (2000, S. 71); MALLE (1993, S. 184) Unter einem Handlungsdruck wird eine Schülerin oder ein Schüler eine Prozedur nicht abbrechen, wenn er auf eine Prozedurlücke stößt, sondern die Lücke „reparieren“, ein anderes Schema anwenden. Diese Reparatur einer Prozedurlücke wird auch „bug-repair“-Theorie genannt (vgl. BROWN/Van LEHN, 1980)	MALLE (1993, S. 184) $(a \cdot b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ TIETZE (2000, S. 71) Kehrwertbildung von gemischten Zahlen ist an die Kehrwertbildung von Brüchen der Art n/m gebunden. 3 ½ = 2/1 = 3 2/1
XIV. Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata	
Mangelhafte „Buchstabenschemata“ referiert TIETZE (2000, S. 71) bei Fehlern wie: Interviews belegen, dass x^3 als drei Objekte gesehen wird. Dadurch auch die Form in der x^3 von Studierenden ausgesprochen wird „x drei“. Einfluss auf Algorithmen haben auch fehlerhafte Vorstellungen zu mathematischen Begriffen (TIETZE, 2000, S. 71) Buchstaben stellt sich der Studierende hier als Objektnamen fehlerhaft vor. Dieser Fehler wird von anderen Autoren auch als ein Konkatenationsfehler angesehen (siehe oben)	$x^3 - x = x^2$ „ein x geht weg“ Ein anderer Fehler: 4a+3b = 7ab
XV. Fehler durch Vorherrschen algebraischer Vorstellungen	
Vorherrschende algebraische Vorstellungen rufen Fehler hervor, wie: Sie sind Produkt einer fehlenden Entwicklung von den zugrundeliegenden	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ oder (selbst beobachtet)

Bedeutungen (TIETZE, 2000, S. 72).	$\frac{e^x}{e^y} = \frac{x}{y}$
XVI. Ursachen in früheren Lernphasen	
Wenn in einer früheren Lernphase, Aufgaben vereinfacht wurden, wie: könnte eine Schülerin oder ein Schüler Kürzungsprozesse durchführen, wie: (SHEVAREV, aus MALLE, 1993, S. 169)	$\frac{8a \cdot 12b}{6a \cdot 10b} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5}$ $\frac{a^8 \cdot b^{12}}{a^6 \cdot b^{10}} = \frac{a^4 b^6}{a^3 b^5}$
XVII. Verlust der Übersicht Man muss bei Umformungen und Lösen einer Gleichung drei Dinge beachten: 1. Art der Tätigkeit 2. Das Ziel 3. Den geplanten Weg zu diesem Ziel MALLE (1993, S. 202)	Es wird oft eine Umformung mit einer Lösung einer Gleichung verwechselt und andersherum.
XVIII. Beim Lösen von Gleichungen XVIIIA. Verfallen in ein Zahleneinsetzen XVIIIB. Isolieren einer falschen Unbekannten XVIIIC. Unbekannte durch sich selbst ausdrücken XVIIID. Umformungen, die nicht zum Ziel führen XVIIIE. In einen Zirkel kommen MALLE (1993, S. 202f)	
XIX. Unklare Schreibweise	Aus $\frac{1}{3+x}$, wird durch eine unklare Schreibweise: 1/3+x = 1/3 + x

Die Klassifikation der Fehler, wie sie hier vorgenommen wurde, hat einige Überschneidungen, die nicht zu vermeiden waren, da bestimmte Fehler einer unterschiedlichen Ursache unterliegen können. Für die konkrete Arbeit mit Schülerinnen und Schülern oder Studierenden ist es wichtig, sich der verschiedenen Deutungsmöglichkeiten bewusst zu sein, da sich aus unterschiedlichem Zustandekommen der Fehler eine unterschiedliche Intervention ergeben kann.

In der folgenden Analyse der Fehler der Studienanfänger der Universidad Panamericana, werde ich die Klassifikation der Fehler, wie sie hier referiert wird, aufnehmen.

Fehler können, wahrscheinlich immer als Informationsaufnahme- oder Informationsbearbeitungsfehler angesehen werden.

SHEVAREV bringt solche Fehler in Verbindung mit Fragen nach der Häufigkeit von bestimmten Aufgabenstellungen, durch die Schülerinnen und Schüler an bestimmte Formen eher gewöhnt sind. Solche Beobachtungen sind wichtig für die Entwicklung von Curricula. Im Zusammenhang mit Fehlern im Verständnis von Variablen wurden im Zuge der Reform des Mathematikunterrichts in Deutschland bewusst von Anfang an Aufgaben mit einbezogen, bei denen eine, mehrere oder keine Lösungen möglich waren, um das Verständnis von Variablen nicht auf das von Unbekannten einzuengen (NOLTE im Gespräch). Damit sollte bestimmten Fehlern in der Informationsaufnahme vorliegender Gleichungen und Ungleichungen und damit auch der Deutung von Zeichen vorgebeugt werden.

Um entsprechende Maßnahmen für den Algebraunterricht zu entwickeln, sowohl für einen Vorkurs an der Universität als auch für den Unterricht an Schulen, scheint es unerlässlich, dass außer einer Klassifikation nach Fehlern in der Informationsaufnahme und -verarbeitung weitere Analysen erfolgen, nämlich wie, wann, wo in der Informationsaufnahme oder –verarbeitung der Fehler entstand.

In den weiteren Darstellungen beziehe ich mich deshalb im Detail auf inhaltliche Fehler und inhaltsspezifische Klassifizierungen.

NOLTE (1991, S. 10) erwähnt, dass das Modell von ANDERSON (z.B.), den gesamten Bereich der Emotionen nicht anspricht.

In dieser Arbeit, wird auf den Bereich der Emotionen und deren Ursachen, die nicht spezifische, mathematische Inhalte betreffen, nicht eingegangen. Dieses sollte nicht interpretiert werden, als seien diese Bereiche nicht wichtig. (Bei den Interviews der Lehrerinnen und Lehrern zeigt sich ganz besonders bei einem Lehrer, die Besorgnis um die Emotionen).

4.2 Verlauf der Untersuchung: Erster Teil

Erste Frage: Welche Wissenslücken wiesen Studienanfänger der Universidad Panamericana in Mathematik auf?

1. Zielgruppe: Studienanfänger

Vom Jahr 1996- 2006 mit Schwerpunkt auf 2003

1a. Erster Test (1999) (156 Studierende, Marketing und Internationale Geschäfte)

(siehe Anhang 2)

Quantitative Studie:

Informationen: Prozentsatz der richtig gelösten Aufgaben

Themenbereiche, die von Studierenden nicht beherrscht wurden

Die Ergebnisse der ersten Testung zeigten, dass Studienanfänger oft große mathematische Defizite aufwiesen. Es wurde deutlich, welche Themenbereiche von Studierenden wegen mangelnder Kenntnisse oder Unsicherheiten nicht in Angriff genommen wurden, sowie in welchen Themenbereichen Anfangsstudierende Fehler machten.

Ich bemerkte sehr bald, dass „Wissenslücken“ nicht das ausschließliche und eigentliche Problem waren, sondern, dass erstens die Anfangsstudentinnen und –studenten einige Aufgaben nach einem bestimmten Schema falsch bearbeiteten, und dass eine Vielzahl von Studierenden die gleiche falsche Antwort gab. Außerdem wurden gewisse Aufgaben von den meisten Studierenden nicht bearbeitet. Deswegen schien es mir wichtig, einige Umänderungen am ersten Test vorzunehmen. Einige Aufgaben wurden entfernt und andere neu eingesetzt, da ich merkte, dass bestimmte Aufgabenmerkmale Fehler verursachten. Durch diese Erkenntnis kam eine neue Frage auf:

Zweite Frage: Welche Schwierigkeiten können bei Studierenden beobachtet werden?

Kann man das Versagen im Spezialfall (hier eine Aufgabe mit Schwierigkeitsmerkmalen) als ein Symptom einer allgemeinen Schwäche auffassen?

Es interessierte mich nun weniger die Bewertung einer Aufgabe nach Falsch-Richtig, sondern eine scharfe Beobachtung der Verfahrensweisen, um eine Fehleranalyse vornehmen zu können. Studierende hatten beispielsweise Kenntnisse zum Lösungsverfahren linearer Gleichungen, jedoch häuften sich Fehler bei bestimmten Aufgabenstellungen. Spezielle Fehlermuster können nur in solchen Aufgaben entdeckt werden, die das betreffende Schwierigkeitsmerkmal enthalten. Das Phänomen Fehler und Fehlermuster wurde von zentraler Bedeutung, sowie die Untersuchung der zugrundeliegenden Ursachen für die Fehlermuster.

Diese Erkenntnis erforderte eine Veränderung des ersten Tests:

a) Ich entnahm ihm die Aufgaben, die mich zu dieser Erkenntnis gebracht hatten und konstruierte (durch die Erfahrung meiner Dozentenarbeit) einige neue Aufgaben, bei denen ein bestimmtes fehlerauslösendes Schwierigkeitsmerkmal festzustellen war, um gezielt Fehlermuster bei den Studierenden zu suchen mit der Absicht, diese Fehlstrategien als Basis für Maßnahmen zu ihrer späteren Behebung zu verwenden.

b) Ich entfernte Aufgaben, die von keinem oder fast keinem Studienanfänger im ersten Test gelöst worden waren (weniger als 10%). Bei Logarithmen- und Exponentialaufgaben konnte man vermuten, dass diese während der Schulzeit nicht oder nur oberflächlich durchgenommen worden waren (später komme ich zu der Erkenntnis, dass vermutlich Lehrerinnen und Lehrer diese Aufgaben auch nicht beherrschen). Textaufgaben mit Realitätsbezügen erfordern von den Studierenden eine Fähigkeit der Interpretation und Formulierung der Lösung, die sie nicht bewältigen konnten. Geblieben ist eine einzige Textaufgabe (siehe Aufgabe 42, zweiter Test, Anhang 2)

c) Da ich das Versagen in einem Spezialfall (einer Aufgabe mit einem Schwierigkeitsmerkmal) nicht als Symptom einer allgemeinen Schwäche oder Unkenntnis sehe, enthält der Test auch Aufgaben ohne eine bestimmte „Falle“. So konnten gleichzeitig auch themenbezogene Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten festgestellt werden. Die Aufgaben wurden gestuft: z.B. wurde eine einfache lineare Gleichung, die vermutlich von den meisten Studienanfängern gelöst werden würde, vorgegeben und später dann eine

lineare Gleichung mit bestimmten Schwierigkeitsmerkmalen, z.B. Auftreten von Bruchzahlen.

d) Der Zeitpunkt für die Durchführung des Tests bei Studienanfängern ist die erste Studienwoche, vor jeglicher Wiederholung gewisser mathematischer Inhalte und Verfahren. Auf diese Weise kann untersucht werden, mit welchen Vorkenntnissen die Studierenden und mit evtl. verfestigten Fehlermustern sie das Studium begannen.

1b. Zweiter Test (449 Studierende, aller Ingenieurwissenschaften und Betriebswirtschaften, Schwerpunkt 2003)

Quantitative Studie und

Qualitative Studie als Vertiefungsstudie, in der eine Fehleranalyse an Extremfällen untersucht wurde.

Informationen: Prozentansatz der richtig gelösten Aufgaben.

Themenbereiche, die von Studierenden nicht beherrscht wurden

Zusätzliche Informationen: Es wurde festgestellt, dass sich bei Studierenden bei bestimmten Aufgabenmerkmalen Fehler häuften, und dass man eventuell jedem Studierenden auf verschiedener Weise helfen musste.

Fazit:

Der erste Teil dieser Studie (bei Studienanfängern) verbindet quantitative mit qualitativen Verfahren. Die Tests sollen quantitative Aussagen zu mehreren Stichproben liefern. Die Ergebnisse im Jahre 2003 werden mit Techniken der Fehleranalyse interpretiert. Zur Entwicklung der Tests erfolgt eine sachanalytische Charakterisierung der Testaufgaben.

5. Zur Entwicklung und Durchführung der Tests

Für die Universidad Panamericana war es in erster Linie wichtig, Themenbereiche festzustellen, in denen unsere Studienanfänger besonders schwach schienen. So hatte der Test zunächst eine diagnostische Funktion. Es sollte erhoben werden, welche Kenntnisse und Fertigkeiten bei den Studienanfängern vorhanden waren und welche Inhalte in einem Vorkurs nachgearbeitet werden sollten.

Da ich keinen Zugang zu schon vorhandenen Tests hatte, entwickelte ich einen Test, der, aufgrund der Beobachtungen der Schwierigkeiten der Studienanfänger, Aufgaben zu einem bestimmten Inhalt ohne fehlerauslösende Merkmale und mit fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmalen enthielt.

5.1 Der erste Test (siehe Anhang 1)

Im Juli 1999 wurden 156 Studienanfänger der Universidad Panamericana (Marketing und Internationale Geschäfte) mit dem ersten Test (siehe Anhang 1), getestet.

Fachliche Anforderungen im Test entsprachen dem Bildungsplan der Secretaría de Educación Pública für das 5. – 9. Schuljahr. Der Test überprüft überwiegend Faktenwissen. Aufgaben mit Realitätsbezügen sollten Eindrücke über die Anwendbarkeit des Wissens geben.

Inhalte des Tests waren:

a) Arithmetik
b) Exponentenregeln
c) Umgang mit Monomen und Polynomen
d) Faktorisierung
e) Vereinfachung von algebraischen Brüchen
f) Lineare Gleichungen
g) Quadratische Gleichungen
h) Simultane lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten
i) Graphik einer linearen und einer quadratischen Funktion
j) Sachanalyse in Form von Textaufgaben mit Realitätsbezügen.

In der nächsten Tabelle sollen die Aufgaben des ersten Tests besprochen werden. Warum wurde jede einzelne Aufgabe gewählt? Welcher Zweck wurde bei jeder Aufgabe in der Untersuchung verfolgt? Unter der Nummer der Aufgabe

wird der Prozentanteil der Studierenden wiedergegeben, die die betreffende Aufgabe richtig gelöst haben.

Hauptteil der Tests bei Studierenden ist der zweite Test, so soll hier, bei jeder Aufgabe gleich der Prozentanteil der richtig gelösten Aufgabe mit angegeben werden.

Prozentanteile richtig gelöster Aufgaben haben zu Entscheidungen über die Modifikation des ersten Tests geführt.

# der Aufgabe und Prozentanteil richtig gelöster Aufgabe	Testaufgabe	Intentionen für die Untersuchung
A. Der Test beginnt mit ganz einfachen Rechenaufgaben, in denen man ersehen kann, ob der Studierende ganz bestimmte Rechenvorgänge beherrscht, z.B. die Hierarchie der Operationen (z.B. Punktrechnung geht vor Strichrechnung).		
1 14,7%	$4 - 2 \cdot 3 + 10 =$	Hierarchie der Operationen: Wird die Regel Punktrechnung geht vor Strichrechnung angewendet? Unerwartet viele Studierende machten dabei Fehler.
2 10.9%	$-4^2 =$	Hierarchie der Operationen: Hier sollte sich das Vorzeichen nicht mit der Potenz verändern. Viele Studierende verwechseln zudem Potenzieren und Multiplizieren.
3 45.5%	$7 \cdot 4 \div 2 \cdot 0 =$	Hierarchie der Operationen: Rechenoperationen mit der gleichen Hierarchie werden von links nach rechts gelöst. Umgang mit der Null: Durch Fehler im Umgang mit der Null ist der Prozentanteil richtiger Lösungen eventuell zu hoch. Ohne eine Darstellung des Lösungsprozesses ist nicht zu ersehen, ob der Studierende die Aufgabe als: 28:2x0= 14x0 = 0 gelöst hatte, oder mit dem Fehler 28: (2x0)= 28/0 = 0.

4 33.3%	$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} \div \frac{3}{10} =$	Viele Studierende können mit der Division von zwei Brüchen umgehen. Wenn es drei Brüche sind, werden oft fehlerhafte Generalisationen vorgenommen.
5 1,3%	log 0,01 =	Elementares Wissen über Logarithmen mit der Basis 10. log 10^{-2} = -2 *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*[12]
6 3,2%	ln e – ln e^2 =	Faktenwissen über Subtraktion von natürlichen Logarithmen und Vereinfachung des Resultates. ln e – ln e^2 = ln (e/ e^2) = ln e^{-1} = -1 *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
7 4,5%	$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{21} =$	Die Multiplikation von Brüchen kann durchgeführt werden, nachdem vorher gekürzt wurde oder ohne vorheriges Kürzen. Prozedur: Alle Zähler multiplizieren (das ist die Zahl im Zähler) und alle Nenner multiplizieren (das wäre die Zahl in Nenner). Bei diesem Algorithmus[13] entstehen oft Rechenfehler sowohl bei der Multiplikation, als auch beim anschließenden Kürzen.
8 8,9%	$\sqrt[3]{0{,}008} =$	Verständnis der Studierenden über Wurzelrechnung mit Dezimalzahlen: Sind sie in der Lage, 0,008 als 8×10^{-3} anzusehen, um die Wurzel korrekt zu ziehen?
9 25%	$\sqrt[3]{-27} =$	Studierende verwechseln oft die Kubik- mit der Quadratwurzel. Quadratwurzeln könnten im Bereich der Reellen Zahlen nicht aus negativen Zahlen gezogen werden. Studierende nehmen hier oft eine unzulässige Verallgemeinerung auf die Kubikwurzel vor.

[12] Aufgaben, die als zu schwer gekennzeichnet sind, sind bei der Auswertung aufgefallen durch den niedrigen Prozentsatz der richtigen Studierendenlösungen und sind bei einem späteren Test untersucht worden auf die Möglichkeit ihrer Entfernung.

[13] Oft werden Bruchzahlen multipliziert ohne auf die Zahlenwerte zu achten und günstig zu kürzen: Alle Zähler multiplizieren (das ergibt den neuen Zähler) und alle Nenner multiplizieren (das wäre die Zahl in Nenner). Diese Vorgehensweise wird als Algorithmus bezeichnet.

10 44,2%	$\sqrt{\frac{1}{16}} =$	Die Quadratwurzel von einem Bruch (1/16) als die Division von zwei einfachen Quadratwurzeln: Erkennen die Studierenden die entsprechenden Regeln? $\sqrt{\frac{1}{16}} = \sqrt{1} / \sqrt{16} =$ 1/4 Wurzelziehen wird oft mit der Division verwechselt
B. Der zweite Teil des Tests soll Auskunft über das Faktenwissen und prozedurales Wissen zu Exponentenregeln geben. Dieser Teil des Tests beschäftigt sich mit den Potenzregeln, ganze, als auch Potenzen in Bruchform oder Wurzeln, sowohl im Zahlenbereich als auch im algebraischen Bereich. Welche Fehler werden bei den einzelnen Aufgaben gemacht?		
11 20,2%	$\sqrt[6]{\sqrt{x^{12}}} =$	Potenzregeln, wie Potenz von Potenzen müssten angewendet werden, mit Potenzen in Form von Brüchen, oder auch als Index der Wurzeln. Studierende wenden oft eine nicht adäquate Regel an.
12 18,6%	$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{5}}} =$	Exponenten müssten subtrahiert werden, jedoch werden sie oft dividiert (durch die Ähnlichkeit mit einem Bruch), oder auch falsch subtrahiert, durch einen Fehler in der Bruchrechnung. Es soll auch untersucht werden, wie Studierende mit der Basis (die erhalten bleibt) umgehen.
13 18,6%	$\frac{(x+1)^{m+3}}{(x+1)^{m+5}} =$	Ähnlich wie bei Aufgabe 12, nur sind die Exponenten nicht numerisch, sondern algebraisch. Die Absicht war hier Konzeptionen zu fehlerhaften „Kürzungsprozessen“ zu erforschen.
14 16,7%	$3^{-2} =$	Wie gehen Studierende mit negativen Exponenten um? Aus 3^{-2} wird oft eine -3^2.
15 6,4%	$10^{-3} \cdot \frac{10^5}{10^{-2}} =$	Multiplikation einer Zahl mit negativem Exponenten mit einem Bruch in dem auch negative Exponenten im Nenner sind. Bei dieser Aufgabe können Studierende diverse fehlerhafte Strategien anwenden, erstens bei der Multiplikation von der ganzen

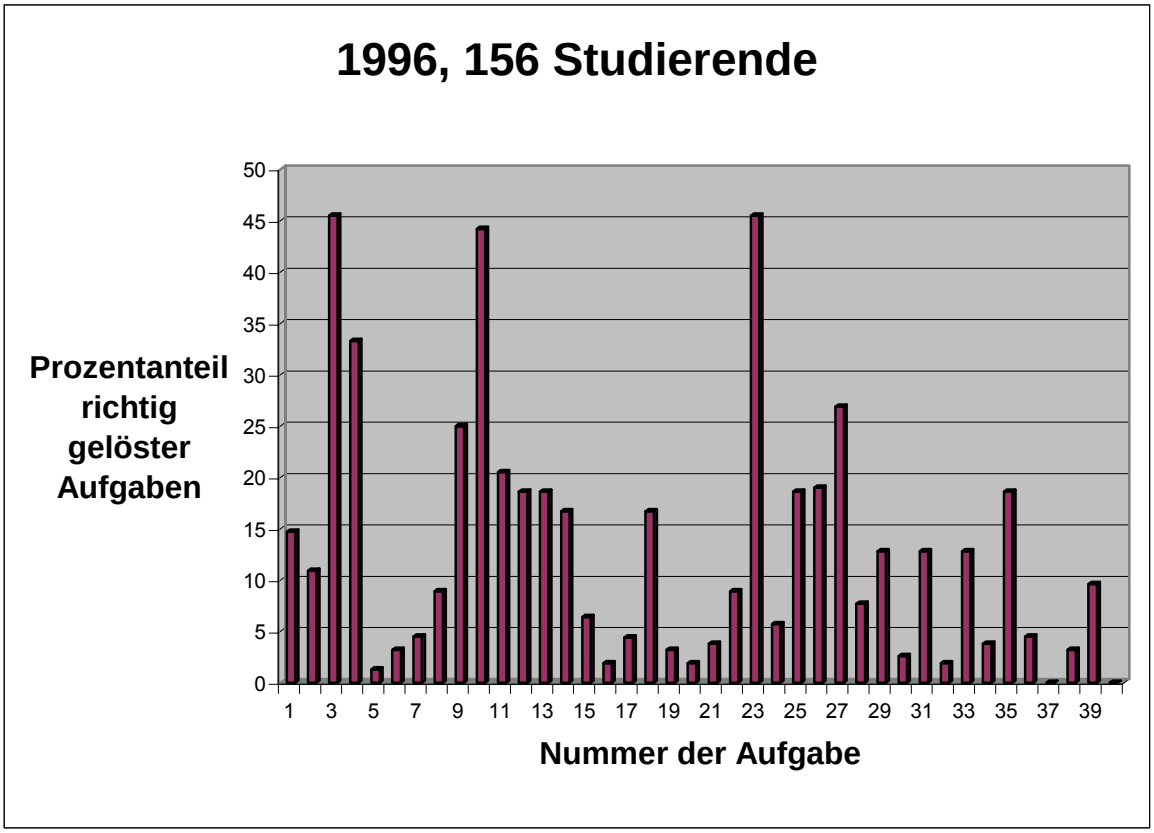
		Zahl (sie wird oft mit dem Zähler und dem Nenner multipliziert) und zweitens mit dem negativen Exponenten.
16 1,9%	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}} =$	Hier soll eine Umformung bei einem Bruchterm vorgenommen werden, wo die Studierenden sich der dritten Binomischen Formel bedienen müssen, um diese vorzunehmen. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer*
C. Der nächste Abschnitt soll das Faktorisieren von Termen überprüfen. Das Faktorisieren ist bei der Vereinfachung von Ausdrücken, bei der Vereinfachung von algebraischen Brüchen und bei der Lösung quadratischer Gleichungen von Bedeutung. Jede der Faktorisierungen basiert auf den verschiedenen binomischen Formeln.		
17 4,4%	$4x^2+17x+4=$	Bei dieser Aufgabe muss der Studierende seine Kenntnisse über die Struktur der Multiplikation zweier Binomen anwenden. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
18 16,7%	$4a^2-12ab+9b^2=$	Zweite binomische Formel, meistens haben die Studierenden Schwierigkeiten beim Erkennen der binomischen Formel. Viele Studierende versuchen es auch mit dem „Satz von Vieta“.
19 3,2%	$9z^4+20z^2+16=$	Eine Ergänzung, um Faktorisieren zu können, muss hier vorgenommen werden. Studierende kommen nicht leicht auf den Gedanken, dass man bei einem Ausdruck eine gewisse Menge addieren und dann wieder subtrahieren kann. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
20 1,9%	$x^2+1-(x-3)(x^2+1)$	Faktorisieren eines gemeinsamen Terms, wie (x^2+1), ist für Studierende schwierig, obwohl sie andere Faktorisationen mit gemeinsamen Termen vornehmen können, z.B. x^2 + 4x = x (x+4)
D. Operationen und Vereinfachungen von algebraischen Ausdrücken mit Brüchen. Dieser Teil des Tests untersucht Kenntnisse über Division von		

Polynomen, Manipulation mit Vorzeichen, um einen Bruch kürzen zu können, und Kürzungsprozesse bei algebraischen Brüchen. Es wird untersucht, welche Konzeptionen über Faktoren im Zähler und Nenner bestehen.		
21 3,8%	$\frac{z^4+z^3+5z^2+3z-2}{z+1}=$	Polynomdivision: Studienanfänger „kürzen“ oft aus der Summe in einem Bruch. So können bei dieser Aufgabe „Kürzungsprozesse“ der Studierenden untersucht werden. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
22 8,9%	$\frac{2a-2b}{3b-3a}=$	Die Faktorisation ist nicht schwierig, jedoch muss, um zu kürzen, eine Manipulation mit den Vorzeichen gemacht werden. Diese fällt den Studierenden schwer und ist fehlerhaft.
23 45,5%	$\frac{(x-3)(x+1)}{(x+1)}=$	Konzeptionen des Kürzens in einem Bruch: ein großer Prozentsatz der Studienanfängern löst diese Aufgabe korrekt. In den meisten Fällen wird ein Streichschema angewendet.
24 5,7%	$\frac{(z+2)(z-1)-3(z+2)}{(z+2)}=$	Das Streichschema wird auf diese Aufgabe übertragen, ohne sich zu vergewissern, dass die gekürzten Faktoren auch Faktoren des ganzen Zählers und des ganzen Nenners sind.
25 18,6%	$\frac{3(y+4)-2}{y+4}=$	Auch bei dieser Aufgabe entstehen Lösungsprozesse bei denen ein Streichschema von Studierenden vorgenommen wird.
26 1,9%	$\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}=$	Fehlerhafte Streichschemata werden auch bei dieser Aufgabe vorgenommen, als auch nicht erlaubte Linearisierungsprozesse. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
E. Lösung von Gleichungen und Ungleichungen. Dieser Teil soll die Fertigkeiten bei der Lösung von Gleichungen untersuchen. Um einen Differentialrechnungskurs zu absolvieren muss jeder Studienanfänger Gleichungen verschiedener Art lösen können, unter ihnen lineare- und quadratische Gleichungen, sowie logarithmische und Exponential- als auch Ungleichungen.		
27 26,9%	$x(x-3)-3(x-2)=x^2$	Nach den Umformungen ist es eine lineare Gleichung. Merkmal der Schwierigkeit ist das Distributivgesetz bei der -3(x-2), wobei Feh-

		ler bei den Vorzeichen entstehen.
28 7,7%	$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0$	Faktorisation des Zählers ist (x-2)(x-3), womit x = 3 die einzige Lösung der Gleichung ist, weil der Nenner gleich (x-2) ist. Geprüft wird hier, ob der Studienanfänger sich darüber klar ist, dass x = 2 keinen Lösungswert darstellt. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
29 12,8%	$3-\frac{x+1}{4}=5$	"Zur anderen Seite herüber bringen" bezeichnet Konzeptionen, die bei Studienanfängern oft zu finden sind. Die 4 wird auf die „andere Seite gebracht“, in dem 5 x 4 multipliziert wird, ohne die 3 auf der linken Seite der Gleichung zu beachten.
30 2,6%	$3^{3x-1}=9^{x-3}$	Wie weit werden Exponentialgleichungen erinnert? Z.B. Einsetzen von 3^2 statt 9, womit beide Seiten der Gleichung die gleiche Basis haben. Diese Aufgabe wurde von den meisten nicht bearbeitet. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
31 12,8%	$4x^2=x$	Teilen Studienanfänger die Gleichung durch „x“ und lassen damit einen Lösungswert „verschwinden“? Es weist auf eine unzureichende Kenntnis über Lösungsmethoden der Gleichungen hin. Wenn durch eine Variable geteilt wird, kann es sein, dass ein Lösungswert „verschluckt“ wird.
32 1,9%	log x + log (x+3) = 1	Faktenwissen über Logarithmen und die Summe von Logarithmen werden hier erfragt, als auch die Definition von Logarithmus. log (x)(x+3) = 1; 1 ist der Exponent zu dem die Basis des Logarithmus erhöht werden muss, um (x)(x+3) zu erhalten. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
33 12,8%	$3x^2+8=10x$	Bei dieser quadratischen Gleichung wird gefragt, ob Studienanfänger den Wert von a, b und c für die quadratische Formel erkennen. Zusätzlich muss die Formel für das Lösen

		einer quadratischen Gleichung angewendet werden.
34 3,8%	$3x - 4(x-3) \leq 2$	Bei den Unformungen entsteht eine Ungleichung mit - x auf der linken Seite der Ungleichung. Da die Ungleichung mit (-1) multipliziert werden muss, muss auch das Ungleichheitszeichen die Richtung wechseln. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
F. Nachgefragt wurden hier die Kenntnisse der Studienanfänger über die grafische Darstellung einer Geraden und einer Parabel. Es zeigte sich, dass die meisten Studierenden eine Tabelle angefertigt, die Punkte aufgezeichnet und verbunden haben.		
35 18,6%	x – 3y = 6 Skizziere die Funktion	Viele Studierende können eine Tabelle anfertigen, wenn auch oft mit Fehlern. Sie merken jedoch nicht, wenn ein Punkt nicht auf der Geraden liegt und verbinden die Punkte trotzdem. Außerdem haben sie Schwierigkeiten mit der Identifikation von "x" und „y".
36 4,5%	$x^2 + 2x - 8 = y$ Skizziere die Funktion	In wie weit erkennen Anfangsstudenten, dass der Graph dieser Funktion eine Parabel ist? Oft werden Daten in einer Tabelle angefertigt, von -2<x<2, (höchstwahrscheinlich noch Konzeptionen aus der Schulzeit) so dass, der Schnittpunkt mit der „x"Achse bei x = -4 nicht aufgezeichnet wird. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
G. Aufgaben mit Realitätsbezügen sollten die Anwendbarkeit des Wissens untersuchen. Die Sachaufgaben sind aus der Physik, aus dem Bankleben, aus dem täglichen Leben, bei einer herabgesetzten Ware und eine Aufgabe aus einer Mathematikolympiade für 12-13 jährigen Schülerinnen und Schüler. Nicht alle erfordern eine algebraische Lösungsform, sondern der Studienanfänger hätte auch andere Methoden probieren können, wie „trial and error" Methoden.		
37 0%	Ein Schiff legt in der gleichen Zeit 3 Meilen flussaufwärts oder 5 Meilen flussabwärts zurück.	Um diese Aufgabe lösen zu können, musste der Studienanfänger die Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit kennen. Studierende können im Allgemeinen aus den Daten, die ihnen zur Verfügung stehen, keine

	Wenn die Geschwindigkeit des Wassers flussabwärts 8 Meilen pro Stunde beträgt. Welche Geschwindigkeit würde das Schiff bei stillem Wasser haben?	Gleichungen aufstellen. So sollte hier überprüft werden, ob der Studierende einfache Gleichungen aufstellen und anschließend lösen kann. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
38 3,2%	Man möchte 15 000 Pesos bei zwei verschiedenen Banken anlegen. Die Bank A bietet 10% jährliche Zinsen an und die Bank B, 20%. Wenn man genau 2 000 Pesos im Jahr von beiden Banken an Zinsen erhalten möchte. Wie viel Geld muss man bei jeder Bank anlegen?	Bei dieser Aufgabe war es nicht unbedingt notwendig eine algebraische Aufstellung von Gleichungen zu finden. Studierende hätten auch eine „trial and error" Methode anwenden können, da auch das Resultat eine ganze Zahl ist. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*
39 9,6%	Eine Ware hat einen Preis von 680 Pesos. Der ursprüngliche Preis ist 15% herabgesetzt worden. Wie teuer war die Ware bevor der Preis herabgesetzt wurde?	Es sollte untersucht werden, ob Studienanfänger sich darüber im Klaren sind, dass der Preis von dem 15% herabgesetzt werden, unbekannt ist. Die meisten Studienanfänger lösen die Aufgabe indem sie 15% von 680 errechnen und diese Menge dann zu 680 dazurechnen. Konzeptionen zu Prozentaufgaben werden hier erfragt, welches ist der Wert, von dem die 15% abgezogen werden müssen?
40 0%	Wenn eineinhalb Katzen im Durchschnitt eineinhalb Mäuse in eineinhalb Tagen fressen. Wie viele Mäuse würden 6 Katzen in 6 Tagen fressen?	Diese Aufgabe ist eine Denksportaufgabe aus einer Mathematikolympiade. Die häufigste Lösung der Studierenden ist 6 Mäuse. *Diese Aufgabe erwies sich als zu schwer.*



5.1.1. Ergebnisse:

1. Bei Aufgaben, die von weniger als 5% der Anfangsstudierenden richtig gelöst wurden, konnte man vermuten:

a) Die Aufgabe wurde von vielen Studierenden nicht bearbeitet, sie erwies sich als zu schwer (z.B. Aufgabe 32). Logarithmen und Exponentialgleichungen wurden von Studierenden nicht bearbeitet, als auch Sachaufgaben mit Realitätsbezügen.

b) Es häuften sich bei diesen Aufgaben Fehler (Fehlermuster), die von einem in der Aufgabe enthaltenen Schwierigkeitsmerkmal hervorgerufen wurde (z.B. Aufgabe 24).

2. Inhalte, wie z.B. Vereinfachung von algebraischen Brüchen, wurden von Studierenden während ihrer Schulzeit thematisiert (siehe Kürzungsprozesse in Aufgabe 23). Bei Aufgabe 25, die auch eine Vereinfachung eines algebraischen Bruchs darstellt, häuften sich Fehler. Der Unterschied zwischen den Aufgaben verursacht einen Musterfehler, der von MALLE (1993) als Streichschema eingestuft wird.

Ohne solide algebraische Vorkenntnisse war ein Absolvieren eines Differentialrechnungskurses nicht möglich. Zur Entwicklung eines Vorkurses sollten die Schwierigkeiten der Studienanfänger genauer erfasst werden.

Konfrontiert mit den großen Schwierigkeiten vieler Studienanfänger, versuchte ich die Fehler zu untersuchen um genau festzustellen, welche Merkmale ausschlaggebend für bestimmte Fehler waren. Unterschiedliche Lösungsprozesse mit unterschiedlichen Fehlern, oft auch Fehler, die viele Studierende machten, löste das Interesse einer genaueren Analyse aus. Ebenfalls entdeckte ich, dass unscheinbare Details oft fehlerauslösend wirkten.

Ich modifizierte den Test, Aufgaben, die zu schwierig schienen, habe ich entfernt und neue Aufgaben aufgestellt.

5.2. Zur weiteren Entwicklung der Tests

Dieser Test führte zur Durchführung einer Längsschnittstudie, die sich von 1996 bis heute erstreckt. Die wiederholte Erhebung hatte zum Ziel:

a) Wiederholten sich die gleichen Fehler bei den gleichen Schwierigkeitsmerkmalen?

b) War es jedes Jahr notwendig einen Algebrakurs einzusetzen?

Die Gruppen, mit denen der Test durchgeführt wurde, wurden erweitert, so dass fast alle Studierenden der Ingenieurwissenschaften und der Betriebswirtschaften in mehreren Jahrgängen getestet werden konnten. Schwerpunkt dieser Arbeit liegt bei den Testungen vom Juli 2003.

Die Auswertung der Tests wurde vertieft. Die einfache Erhebung von Fehlerschwerpunkten wurde durch systematische Fehleranalysen ergänzt. Viele Studierende hatten ähnliche Fehler gemacht, so dass es sinnvoll schien, Fehlermuster festzustellen. Die Ergebnisse lassen vermuten, dass ganz bestimmte Vorstellungen zu diesen Phänomenen führten. Eine systematische Analyse sollte die Grundlage bieten, um mehr über Vorstellungen und Denkprozesse der Studierenden zu erfahren und dies für die Entwicklung eines Algebrakurses zu nutzen.

5.3. Der zweite Test (siehe Anhang 2)

Der zweite Test besteht aus 42 Aufgaben. Im Folgenden sollen die Aufgaben, a) die entfernt wurden, auf die Gründe ihrer Beseitigung besprochen werden, b) die vereinfacht wurden c) die neu dazugekommenen Aufgaben auf ihre Zwecke analysiert werden.

a) Aufgaben, die entfernt wurden:

Aufgaben wurden entfernt, da sie von vielen Studierenden nicht bearbeitet wurden (z.B. Aufgabe 16), einige, wenn auch nicht alle, weil kaum ein Studierender sie richtig gelöst hat (z.B. Aufgabe 19).

Aufgabe	Warum wurde die Aufgabe entfernt?
5. log 0,01 =	Logarithmen sind höchstwahrscheinlich in der Schule nicht genügend bearbeitet worden.
6. $\ln e - \ln e^2 =$	Siehe 5.
16. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}} =$	Rationalisierungsprozesse bedürfen der Kenntnis der 3. Binomischen Formel und ihre Anwendung auf die Rationalisierung. Sie werden durch die Anwendung der Taschenrechner immer weniger gefordert.
17. Faktorisiere: $4x^2+17x+4=$	Die Faktorisierung erwies sich als zu schwer. Es hätten verschiedene Methoden angewandt werden können. (Trial-and-error, Satz von Vieta)
19. Faktorisiere: $9z^4+20z^2+16=$	Hier sollte eine Ergänzung mit plus-minus $4z^2$ vorgenommen werden, um dann in einem zweiten Schritt mit der 3. binomischen Formel zu Faktorisieren. Sie erwies sich als zu schwer.
22. Vereinfache: $\frac{2a-2b}{3b-3a}$ =	Prozesse, bei denen mit Vorzeichen gearbeitet werden muss, erwiesen sich als sehr fehleranfällig.
26. Vereinfache: $\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y}$	Diese Aufgabe bestand aus mehreren Schritten, erst Faktorisieren mit der 3. binomischen Formel innerhalb der Wurzel und die Multiplikation von zwei Wurzeln, später dann x-y als die Multiplikation von zwei Wurzeln erkennen; $\frac{\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}\sqrt{x-y}}$, eine Wurzel im Zähler kann mit einer im Nenner gekürzt werden.
28. $\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0$	Diese Aufgabe verlangt von den Studierenden eine etwas tiefere Analyse der zwei x-Werte, x = 2 und x = 3, für die der Zähler Null ergibt. Lösungswert dieser Gleichung ist nur x = 3, da bei x = 2 der Nenner

	Null ist.
30. $3^{3x-1} = 9^{x-2}$	Exponentialgleichungen werden von Studienanfängern fast nicht bearbeitet. Ursache liegt vielleicht in einer Unsicherheit, da diese Themen nur flüchtig durchgenommen wurden.
32. log x + log (x+3) = 1	Aufgaben mit Logarithmen werden von Studienanfängern fast nicht bearbeitet. Ursache liegt wahrscheinlich darin, dass diese Themen nur flüchtig durchgenommen wurden.
34. 3x – 4 (x – 3) ≤ 2	Ungleichungen wurden von den Studierenden nicht gelöst.
36. Skizziere die Funktion: $y = x^2 + 2x - 8$	Quadratische Funktionen werden von Anfangsstudierenden meistens mit Hilfe einer Tabelle x-y gezeichnet. Viele Studierenden haben Schwierigkeiten damit, den Scheitelpunkt zu finden.
37. , 38. und 40.	Realitätsbezogene Aufgaben, die von weniger als 5% der Studienanfänger gelöst wurde.

b) Aufgaben, die vereinfacht wurden

Bei jeder der Vereinfachungen wird erläutert, warum ich annehme, dass die Aufgabe im 2. Test einfacher zu sein scheint.

Von der Aufgabe (1. Test)	Zur Aufgabe (2. Test)
8. $\sqrt[3]{0{,}008} =$ Die Kubikwurzel einer Dezimalzahl ist schwieriger als eine:	7. $\sqrt{0{,}16} =$ Quadratische Wurzel einer Dezimalzahl.
18. Faktorisiere: $4a^2 - 12ab + 9b^2 =$ Mit dem Koeffizienten 4 der a^2, haben Studierende Schwierigkeiten.	27. Faktorisiere: $z^2 - 16z + 64 =$ Der Koeffizient 1 der z^2, ist einfacher.
20. Faktorisiere: $x^2 + 1 - (x-3)(x^2+1) =$ Der Term (x – 3) bringt zusätzliche	26. Faktorisiere: $x^2 + 1 - 3x \cdot (x^2+1) =$ Der Term 3x statt (x – 3) der mit (x^2+1)

Schwierigkeiten, da auch das Distributivgesetz beachtet werden muss.	multipliziert wird scheint einfacher.
31. $4x^2 = x$ Durch „x“ teilen ist der erste Gedanke, dabei wird der Lösungswert x= 0 „verschluckt“.	37. $2x^2 + 2x = 0$ Studierende kommen bei dieser Aufgabe wahrscheinlich weniger auf den Gedanken durch „x“ zu teilen.
33. $3x^2 + 8 = 10x$ Das Erkennen der Koeffizienten a, b und c, wird dadurch erschwert, dass 10x auf der anderen Gleichungsseite steht.	38. $2x^2 - x - 15 = 0$ Hier sind die Koeffizienten direkt zu ersehen.

c) Aufgaben, die dazugekommen sind:

Es sind bewusst einfache Aufgaben, an denen man bestimmte Prozesse der Studierenden nachvollziehen konnte und an denen man Vorstellungen zu Inhalten ersehen konnte. (Z.B. $\sqrt{4^2 + 3^2} =$ oder $\frac{x+3}{x-4} =$)

2. $2 + 3\sqrt{3} - 4 =$	Die Hierarchie der Operationen ist entscheidend bei der Vereinfachung dieser Aufgabe. Überprüft wurde, wie Studierende mit einer Wurzel umgehen. Zu bemerken ist, dass sie diese nicht mit dem Taschenrechner lösen konnten.
10. $\sqrt{4^2 + 3^2} =$	Untersucht werden soll, ob der Studierende Streichschemata anwendet, und welchen Unterschied er in dieser und der 18. Aufgabe sieht.
12. $b^{3x+1}b^{1-3x} =$	Verwechslungen bei der Informationsaufnahme und der Informationsverarbeitung manifestieren sich leicht in dieser Aufgabe. In wie weit haben Studierende die Exponentenregeln mit ihren generellen oder spezifischen Merkmalen aufgenommen?
15. $\left(-3x^{-4}\right)^2 =$	Unterschiedliche Auffassung einer Quadrierung von einem Koeffizienten

	und eines Exponenten wird hier erforscht.
18. $\sqrt{x^2 + y^2} =$	Steht im Zusammenhang mit der Aufgabe 10. a) Aufgabe 10 richtig, Aufgabe 18 falsch (wahrscheinlich ein Problem des „muss irgendetwas machen“ b) Aufgabe 10 Streichschemata, Aufgabe 18 auch mit einem Streichschemata vereinfacht.
19. $\frac{25x^{-1}y^4z^{-2}}{-5x^2y^{-1}z^{-4}} =$	Durch diese Aufgabe konnten verschiedene Aspekte untersucht werden: Konzeptionen der Division, die oft als ein Abziehen angesehen wird Konzeptionen der Exponentenregeln, wenn diese mit positiven und negativen Exponenten zusammenhängen.
20. $14x^2 - 6xy + 8yx - 3y^2 =$	Absicht war, zu analysieren, ob Studierende gleichnamige Terme erkennen, auch wenn diese nicht gleich geschrieben sind (6xy und 8yx). Außerdem könnten einige Studierende Konkatenationsprobleme aufweisen.
21. $3(x-2) + 4(3-x) - (x+5) =$	Konkatenationsprobleme werden auch hier offensichtlich, und die Anwendung eines Distributivgesetzes, in dem das Vorzeichen der 5 wechselt.
22. $(z^2 - 5z + 4)(z-1) =$	Diese Multiplikation wird mechanisch vorgenommen und weist darauf hin, dass Studierende mit Multiplikationen zweier algebraischer Ausdrücke vertraut sind.
25. Faktorisiere: $9y^2 + 6y + 1 =$	Absicht von der 24. bis 28. Aufgabe, alle fundamentalen Methoden des Faktorisierens zu untersuchen. Bei welcher Methode haben Anfangsstudierende mehr Schwierigkeiten?

	Diese Aufgabe wird durch die erste binomische Formel faktorisiert.
27. $x^2 - 12x + 35 =$	Strukturen, wie der Satz von Vieta fordern eine andere Form des Faktorisierens.
32. Vereinfache den Ausdruck: $\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b} =$	Welche Konzeptionen haben Studierende von der Subtraktion von algebraischen Brüchen? Spiegeln sich Konzeptionen der numerischen Brüche wider, wie Zähler minus Zähler und Nenner minus Nenner? Wird die Aufgabe durch einen erlernten Mechanismus vereinfacht?
35. $\frac{x+3}{x-4} = 0$	Erkennen Studierende, dass es genügt, wenn in dieser Aufgabe der Zähler gleich Null gesetzt wird? Bestehen Schwierigkeiten bei der Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung mit (x – 4)? Ist für Studierende die Multiplikation von 0 (x – 4) = x – 4? Konzeptionen mit der Null können hier untersucht werden.
36. $x^2 - 4x + 3 = 0$	Von der 36. bis zur 39. Aufgabe werden quadratische Gleichungen erfragt. Auch wenn die Lösungsform nach einer bestimmten Form (36. und 37. Faktorisieren und 38. und 39. durch die quadratische Formel) gelöst werden sollten, sind diese Aufgaben bei der Bewertung als korrekt angesehen worden, wie immer sie auch gelöst wurde.
39. $z^2 - 9 = 0$	Erforscht werden sollte, ob Studierende die quadratische Formel richtig anwenden können, nämlich mit dem Wert für b=0. Wenn die Aufgabe heuristisch gelöst wird, entfällt Studierenden meistens

	eine Lösung, z = - 3.
40. Bestimme den Schnittpunkt der zwei Geraden: $x - y = 2$ $y - 2x = 1$	Diese Aufgabe konnte sowohl algebraisch als auch graphisch gelöst werden. Bei der algebraischen Lösungsform wurden die Schwierigkeiten mit den Zeichen untersucht. Bei der graphischen Lösungsform sind die Schwierigkeiten der graphischen Darstellung einer Geraden untersucht worden.

5.3.1. Ergebnisse

Getestet wurden insgesamt 449 Studienanfänger, der Universidad Panamericana, der ingenieurwissenschaftlichen- und der betriebswirtschaftlichen Studien, im Juli 2003. Der Test wurde von Mathematikprofessoren jeder Studienbranche oder auch von mir selbst, durchgeführt mit den Anweisungen:

1. Es darf kein Taschenrechner gebraucht werden.
2. Dieser Test ist ein Einstufungstest, er wird nicht benotet und hat auch keine Folgen für die Endnote des 1. Semesters in Mathematik
3. Es hat keinen Sinn, wenn abgeschrieben wird, da der Test, wie gesagt, als Einstufung gelten soll.
4. Die Zeit ist nicht vorgeschrieben, jedoch haben alle Studienanfänger nicht länger als 1 Stunde am Test gearbeitet.

In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht der einzelnen Studienbranchen, mit der Anzahl der getesteten Studienanfänger und dem Durchschnitt aller Studienanfängern der betreffenden Studienbranche im Test geboten.

Studienbranche	**Anzahl der Anfangsstudierenden, die einem Test unterzogen wurden**	**Durchschnittsprozente des richtig gelösten Tests**
Mechatronik	53	42%
Bauingenieur	45	44%
Wirtschaftsingenieur	40	55%
Finanzwesen	67	32%

Buchhaltung	40	33%
Internationale Geschäfte	91	30%
Marketing	70	27%
Human Resources	43	23%
	Gesamtanzahl: 449 Studienanfänger, die untersucht wurden	Durchschnitt: 35,75%

Eine weitere statistische Analyse des Tests wurde unter zwei verschiedenen Aspekten durchgeführt:

a) Welcher Anteil der Studienanfänger jeder Studienbranche hat welche Note (hier als Anteil des richtig gelösten Tests ausgedrückt) erreicht?

b) Welchen Prozentsatz richtig gelöster Aufgabe wurde bei jeder der 42 Aufgaben von den Studienanfängern jeder Studienbranche erzielt?

Durch diese letzte statistische Analyse konnte ich feststellen, bei welchen Aufgaben (und somit auch Themenbereichen) Studienanfänger besonders schwach schienen.

Das Studiensystem an der Universidad Panamericana bietet für jede Studienbranche einen Studienplan, der Semesterweise aufgebaut ist, bei dem die Studierenden einer Studienbranche nur unter sich sind. Folglich musste die quantitative statistische Analyse der Testungen für jede Studienbranche durchgeführt werden, um jedem Mathematikprofessor eine Übersicht über die Schwierigkeiten seiner Studierenden zu bieten, die durch die Resultate und Erkenntnisse dieser Studie dokumentiert waren.

Aspekt der Untersuchung	Erwartete Information
a	Wie ist die Verteilung der Noten der Gruppe, der einzelnen Studienbranchen? Haben alle Studienanfänger die gleiche mathematische Vorbildung? Besteht ein Unterschied (beträchtlicher) in der mathematischen Vorbildung der Studierenden?
b	Welcher Anteil der Studierenden haben jede einzelne Aufgabe richtig lösen können? Besteht eine Relation zwischen gewählten Aufgaben und die-

	sem Anteil? Bei welchen Themenbereichen vermutet man eine nicht ausreichende mathematische Vorbildung?

Als Beispiel soll jeweils eine Graphik aus einer ingenieurwissenschaftlichen und einer betriebswirtschaftlichen Studienbranche gegenübergestellt oder verglichen werden. Die Statistiken der anderen Studienbranchen sind im Anhang 11 nachzulesen.

Aspekt a)

Studierende der Ingenieurwissenschaften haben einen besseren Durchschnitt als Studierende der Betriebswirtschaften. Dieses war zu erwarten und hat sich nur bestätigt.

Bei Studierenden, die weniger als 30% der getesteten Aufgaben richtig bearbeiteten, kann man vermuten, dass ihre mathematische Vorbildung vermutlich nicht ausreichen würde, um einen Differentialkurs zu belegen.

Studierende mit über 50% richtiger Lösungsprozesse, haben wahrscheinlich einige Schwierigkeiten (eventuell mit fehlerauslösenden Schwierigkeitsmerkmalen).

Konzentrieren sich die Prozentanteile der Studierenden mit gewissen Noten auf ein nicht so großes Intervall, kann man wahrscheinlich annehmen, dass die mathematische Vorbildung mehr oder weniger einheitlich ist. Konzentrieren sich die Prozentanteile der Studierenden auf niedrige Noten, besteht die Möglichkeit, dass die Vorbildung der meisten Studierenden einer Studienbranche auch niedrig ist (z. B. Marketing).

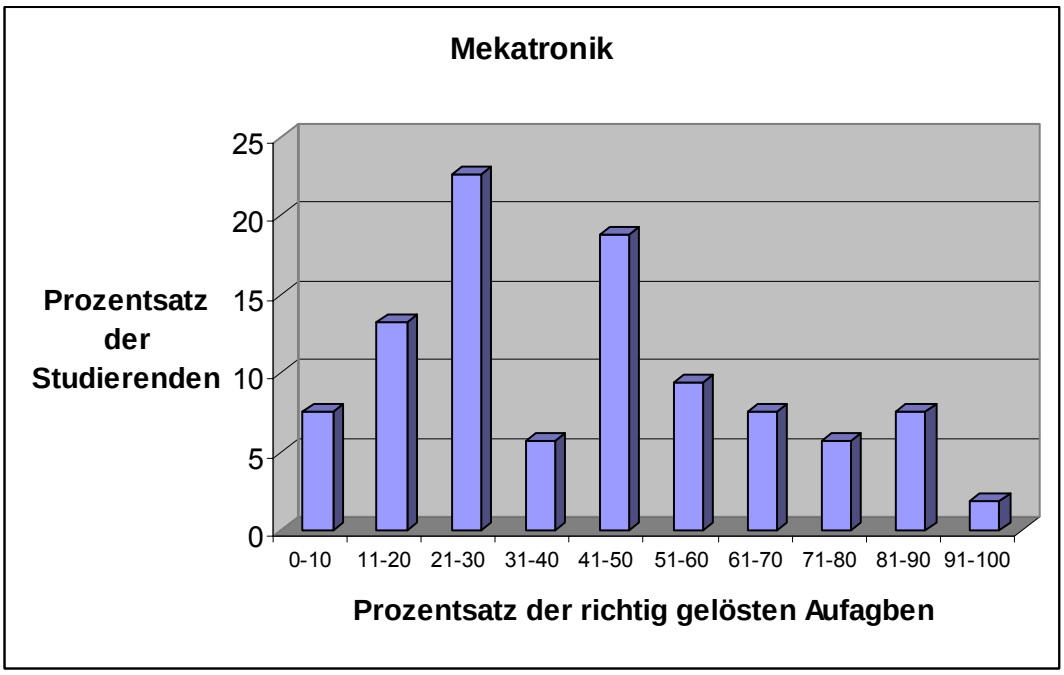
Studienbranchen, bei denen Notenschwerpunkte auf mehr als einem Intervall liegen und eventuell auch noch entfernt voneinander sind, könnten darauf hinweisen, dass die Studienanfängern dieser Studienbranche eine sehr unterschiedliche mathematische Vorbildung haben (z.B. Mechatronik).

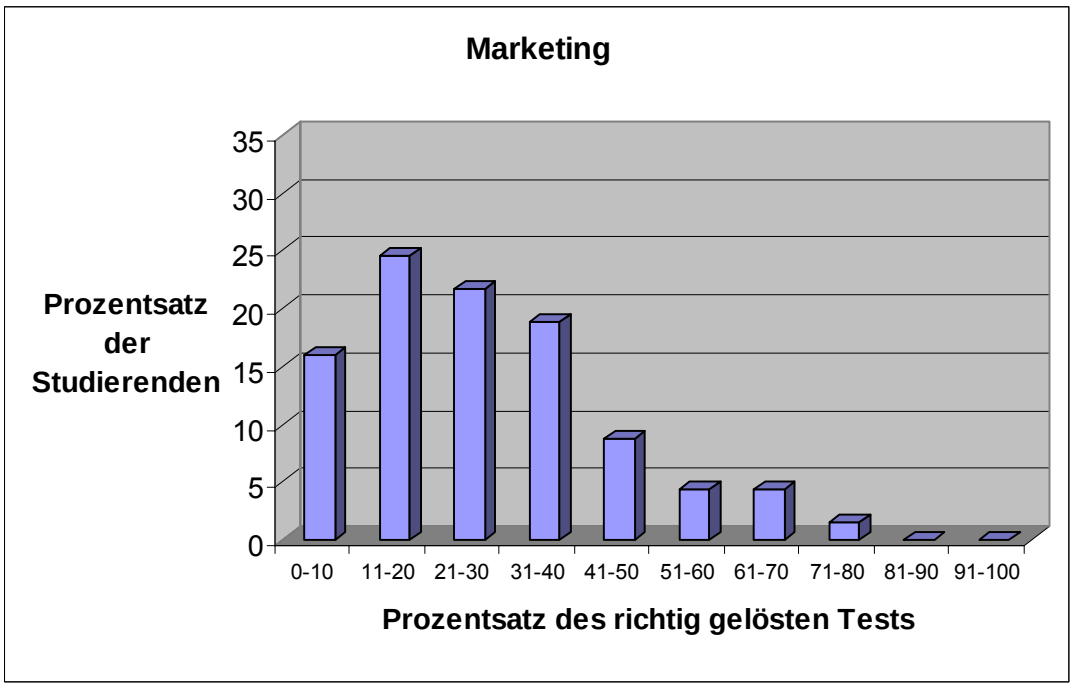
In allen Studiengängen erwies sich ein großer Unterschied bei der mathematischen Vorbildung oder Leistung der Studierenden.

Ingenieurwissenschaftliche Studiengänge haben einen größeren Anteil an Studienanfänger mit einem höheren mathematischen Niveau.

Betriebswirtschaftliche Studiengänge haben einen niedrigeren Anteil von Studienanfängern mit mehr als 50% richtig beantwortenden Aufgaben.

Als Beispiel kann man die folgenden Darstellungen vergleichen. Mechatronik hat 2 Schwerpunkte; bei 21 – 30% und 41 – 59% richtig gelöster Aufgaben. Bei Marketing konzentrieren sich 80% der Anfangsstudierenden auf einem Intervall von 0 – 40% richtig gelöster Aufgaben.





Diese Studie macht deutlich, dass die Studienanfänger an der Universidad Panamericana bezogen auf ihre mathematische Vorbildung eine heterogene Gruppe bilden (dieses in jeder Studienbranche). Es ist sehr wahrscheinlich, dass

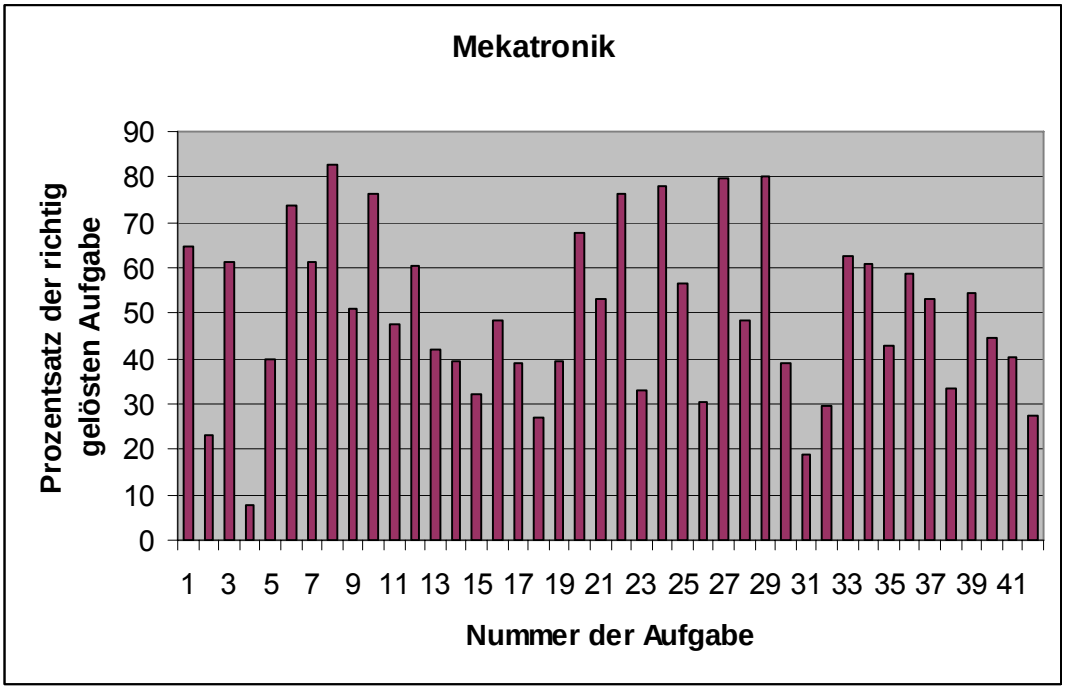
einige Studienanfänger nicht den Anforderungen der Mathematikfächer folgen können. Deshalb sollten zusätzlich Algebrakurse eingesetzt werden.

Aber welche Themenbereiche sollten in diesen Algebrakursen durchgenommen werden?

Aspekt b)

Um diese Frage beantworten zu können, musste eine weitere Studie vorgenommen werden. Für jeden Studierenden wurde eine Tabelle angelegt, der man entnehmen konnte, welche Aufgabe im Einzelnen richtig gelöst wurden und welche nicht. Später wurde dann die Analyse pro Aufgabe fertig gestellt mit der Zusammenstellung aller Studienanfänger pro Studienbranche.

Ich stellte bei den Diagrammen fest, wie unterschiedlich die Prozentanteile der richtig gelösten Aufgaben war. Später analysierte ich den Zusammenhang dieser Unstetigkeit in Aufgaben, die scheinbar gleich waren, aber ein fehlerauslösendes Merkmal hatten. (vol Aufgaben 24-26)



Folgerungen:

1. Bei gewissen „ähnlichen“ Aufgaben ist der Prozentanteil der richtig gelösten Aufgaben stark gesunken (vgl. Aufgaben 29, von 80% der Studierenden richtig gelöst und Aufgabe 30, nur von 39% der Studierenden richtig gelöst, die Vereinfachungen von algebraischen Brüchen darstellen).
2. Gewisse Aufgaben wurden im Allgemeinen von Studierenden aller Studiengänge mit einem relativen hohen Prozentsatz gelöst (vgl. Beispiels-

weise Aufgabe 24, eine Faktorisation mit einer zweiten binomischen Formel).

3. Aufgaben, die bei ingenieurwissenschaftlichen Studienbranchen mit niedrigerem Prozentsatz gelöst wurden, schienen bei betriebswirtschaftlichen Studienbranchen auch Schwierigkeiten auszulösen. Das heißt, dass bei allen Studienanfängern eine bestimmte Aufgabe, mit einem fehlerauslösenden Merkmal, besonders schwierig schien (vgl. Aufgabe 2).

Diese Erkenntnisse waren wichtig, jedoch nicht ausreichend. Deshalb wurden die Aufgaben nach Themenbereiche gegliedert, um den verschieden Studienbranchen eine Liste aufzustellen, welche Themen wahrscheinlich von der Mehrheit ihrer Studierenden nicht beherrscht wurden.

Die einzelnen Themenbereiche umfassten einige Aufgaben. Einige Aufgaben wurden verschiedenen Themenbereichen zugeordnet, da sie unter zwei Aspekten untersucht werden konnten (vgl. Exponenten in Z, Aufgaben 17 und 18 und gebrochenrationale Terme, Aufgaben 17 und 18).

In der folgenden Tabelle werden die Katalogisierungen vorgestellt, mit den dazugehörigen Aufgabennummern:

Themenbereich	Nummer der Aufgaben
Hierarchie	1, 2, 3, 4, 15
Bruchrechnung in der Arithmetik	5, 6
Wurzelrechnung in Q	7, 8, 9, 10
Wissenschaftliche Notation	11
Exponenten mit Variablen	12, 13
Exponenten in Q	11, 14, 16, 17, 18
Gebrochenrationale Terme	16, 17, 18
Monome	14, 19
Operationen mit Polynomen	20, 21, 22, 23
Faktorisation	24, 25, 26, 27, 28
Vereinfachung algebraischer Brüche	29, 30, 31, 32
Lineare Gleichungen	33, 34, 35
Quadratische Gleichungen	36, 37, 38, 39

Schnittpunkte zweier Geraden	40
Graph einer Geraden	41
Textaufgabe mit Realitätsbezug	42

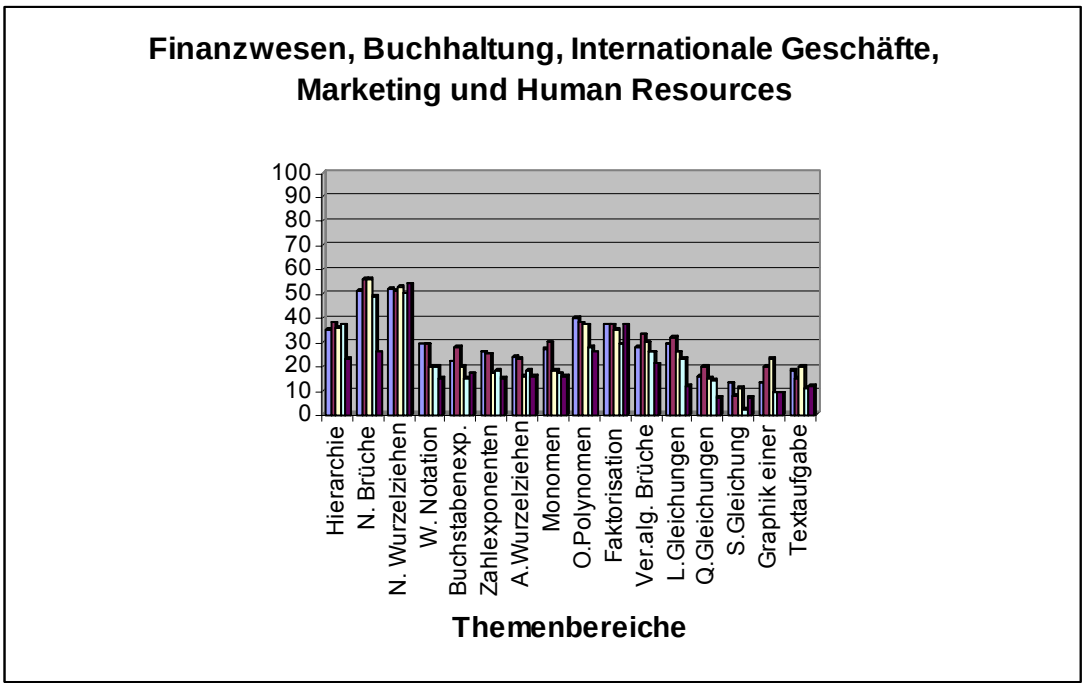
Pro Studiengang wurde eine Graphik erstellt sowie eine komparative Graphik für Ingenieurwissenschaften und Betriebswirtschaften (siehe Anhang 12).

Fast kein Themenbereich wird in irgendeiner Studienbranche zu mehr als 60% beherrscht. Damit kann man annehmen, dass die Studienanfänger zum größten Teil die angegebenen Themenbereiche nicht ausreichend beherrschen.

Beim Vergleich der betriebswirtschaftlichen Studienbranchen kann man feststellen, dass diese in etwa die gleichen Schwierigkeiten aufweisen, da die einzelnen Durchschnitte, zu den verschiedenen Themenbereichen in etwa gleich sind. Human Resources und Marketing haben in einigen Themenbereichen die niedrigsten Durchschnitte. Eventuell liegt dieses auch am Profil der Studierenden jeder einzelnen Studienbranchen (vgl. Finanzwesen mit Human Resources).

Folgerungen:

In allen Studienbranchen wurden Themenbereiche wie z. B. die Hierarchie in Operationen oder das Lösen linearer und quadratischer Gleichungen nicht beherrscht. Damit sind massive Schwierigkeiten bei der Teilnahme an Kursen wie Differential- und Integralrechnung zu erwarten.



5.4 Analyse der Lösungsprozesse der Studienanfängern

Da ich keinen Bezug zum Unterricht hatte, versuchte ich Zugang zu Studierendenfehllösungen über Deutungen zu finden.

Die im Kapitel 4.1 beschriebenen Fehlstrategien und Fehlermuster dienen der Deutung und Einstufung der Fehler. Die Lösungen der Studierenden wurden auf Fehllösungen hin untersucht. Einbezogen werden hierbei typische, sehr häufig zu beobachtende Fehler, aber auch Fehler, die eher als Einzelfälle zu bezeichnen sind. Damit werden gezielt Extremfälle (siehe FLICK 2005) erhoben.

Auswertung und Deutungen der Studierendenlösungen von den 42 gestellten Aufgaben des zweiten Tests, können im Anhang 3-9 nachgelesen werden.

5.4.1 Als Beispiel die Fehllösungen der Aufgabe 13:

Erkenntnisse die gewonnen wurden:

1) Die Vielfalt der verschiedenen Fehllösungsprozesse der Studierenden ist groß. Jeder Studierende denkt anders, jeder Studierende hat verschiedene Fehlvorstellungen, die in Kombination mit der Fragestellung zu sehr verschiedenen Prozessen führen, das heißt, man müsste, um Studierenden helfen zu können, auf die Individualität des Denkens eines jeden Studierenden eingehen. Es käme die Überlegung auf, wie man jeder ein-

zelnen Schülerin oder Schüler helfen könnte. Bestimmt nicht mit einem und den gleichen methodischen Maßnahmen.

2) Bei vielen Fehllösungen konnten verschiedene Verläufe der Gedanken des Studierenden ermittelt werden, die zu einem einzigen falschen Resultat führten. Als Lehrender ist der Lösungsprozess des einzelnen Studierenden nicht immer eindeutig, es bestehen mehrere möglichen Gedankengänge des Studierenden, so kann ich auch nicht mit einer Erklärung helfen, die nicht auf die Fehlerursache, des bestimmten Studierenden, zurückgreift.
3) Nicht jede Aufgabe konnte in Hinsicht auf den möglichen Gedankengang des Studierenden interpretiert werden. Bei einigen Prozessen ist es evident, dass man nur in einem Gespräch mit dem betreffenden Studierenden sein Denken nachvollziehen kann und die Ursache erst dann ermitteln kann.
4) Da keine Gespräche mit Studierenden geführt wurden, ist die Deutung des Gedankengangs eine Möglichkeit. Bei einigen Fehlern, konnte eine Parallele mit der in der Literatur beschriebenen Musterfehler gezogen werden.
5) Einige Fehler konnten so nicht in der Literatur gefunden werden. Sie konnten ganz generell auf Informationsaufnahme- oder –verarbeitungsfehler zurückgeführt werden. Diese Klassifizierung ist wenig hilfreich, wenn es darum geht, Studierenden zu helfen. Diese Studierendenlösungen wurden mit: "In der Literatur bis jetzt nicht gefunden", gekennzeichnet.

Testaufgabe 13

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$	$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m} = 2x-10$ ✓ $\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m} = \frac{(mx-5m+2x-10)}{mx-5m} =$	Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation MALLE (1993, S. 166) Streichschemata MALLE(1993, S.184) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993,S.190f)

Die Lösungen stammen von zwei verschiedenen Studierenden, dessen Vereinfachung zum gleichen Ausdruck geführt hat, was nicht voraussetzt, dass sie denselben Gedankengang hatten. Auffallend ist, dass bei der ersten Vereinfachungsform, der Studierende seinen Prozess als richtig empfindet. Es soll hier auf zwei Möglichkeiten der Interpretation der Vorgehensweise der Studierenden – gedeutet als möglicher Verlauf der Schülergedanken – eingegangen werden:

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

A) „Ich vereinfache in dem ich die Exponenten voneinander abziehe.

Dann habe ich $(x - 5)^2$; 2 mal $(x - 5) = 2x - 10$“

B) „(m + 2) wird mit (x – 5) multipliziert, in dem ich jeden Term der ersten Klammer, mit jedem Term der zweiten Klammer multipliziere.

m (x- 5) multipliziere ich auch, im Nenner.

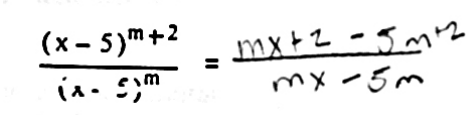
Dann habe ich den Ausdruck: $\frac{xm - 5m + 2x - 10}{xm - 5m}$

Gleiche Terme im Zähler und Nenner „kürze“ ich.“

Deutung:

A) Ansatz richtig vorgenommen. Im zweiten Schritt wahrscheinlich Verwechslung der Potenzzahl mit einer Multiplikation, soweit der erste Teil richtig vereinfacht wurde.

B) Dieser Prozess besteht aus zwei verschiedenen Fehlstrategien, 1. die Verwechslung der Potenz mit einem Koeffizienten (wahrscheinlich in der Informationsaufnahme), so dass dieser statt potenziert multipliziert wird, sowohl im Zähler als auch im Nenner. Später dann eine Fehlstrategie, die sich bei dem Kürzungsprozess verdeutlicht und auf Streichschemata hinweisen (MALLE, 1993, S. 184). Möglicherweise besteht gleichzeitig eine Schwierigkeit in der Erkennung der Termstruktur (NOLTE, 1991, S. 45; MALLE, 1993, S. 190f)

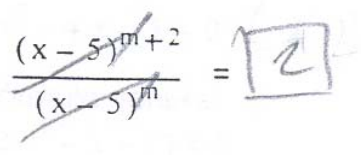
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		Verwechslung der Potentiation mit der Multiplikation NOLTE (1991,S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„(m + 2) muss mit (x – 5) multipliziert werden, als auch m mit (x – 5); danach weiß ich nicht weiter“

Deutung:

Bei der Imformationsaufnahme fasst er eine Multiplikation statt einer Potentiation auf, jedoch, auch wenn die Multiplikation im Zähler nicht korrekt erfolgt, weiß der Studierende nach seinem ersten Prozessschritt nicht weiter.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Nichterkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE (1993, S. 190f) Streichschemata MALLE (1993, S. 182) Weglassschemata MALLE (1993, S. 182) Verwechslung der Potentiation mit der Multiplikation MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich kürze zuerst (x – 5) im Zähler mit der (x – 5) im Nenner.

2. Es bleibt m + 2 im Zähler und m im Nenner.

3. Dann kürze ich m im Zähler mit m im Nenner.

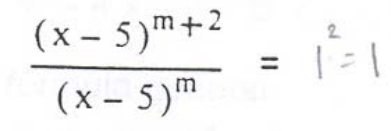
4. Übrigbleibt eine 2.“

Deutung:

Durchstreichen weist auf Kürzungsprozesse hin, die auf eine Interpretation eines Bruches hindeuten. Der Studierende hat zwei verschiedene Kürzungsprozesse vorgenommen. Es geht aus seinem Prozess nicht klar hervor, welchen Kürzungsprozess er zuerst vornimmt. Wahrscheinlich erkennt der Studierende die Struktur des Terms nicht, da er Kürzungsprozesse wie bei einfachen Brü-

chen vornimmt ohne Berücksichtigung der Exponenten. Man könnte die 2, die nun im Zähler steht als Weglassschemata deuten, da keine Basis erhalten bleibt, und die Potenz zu einer Zahl im Zähler wird.

Vielleicht hat er aber eine fehlerhafte Aufnahme der Information indem er statt eine Potentiation, eine Multiplikation interpretiert, damit er die Kürzungen vornehmen kann. Auf diese Deutung weist die 2 hin, die nach den Kürzungsprozessen ihre Kondition als Potenz verloren hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Kürzungsschemata MALLE(1993, S. 182) Nicht adäquate Auffassung des Terms NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Potenzen müssen subtrahiert werden.

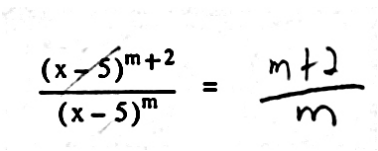
2. (x – 5) / (x – 5) = 1

3. Also erhalte ich 1^2 was gleich 1 ist."

Deutung:

Obwohl kein Lösungsweg auf die Denkweise des Studierenden hinweist, ist anzunehmen, dass dieser zwei verschiede Aspekte der Brüche gleichzeitig angewandt hat. 1. Möglicherweise einen korrekten Ansatz, in dem er die Potenzen subtrahiert; (m + 2) – m = 2 oder eventuell auch eine Kürzung der (m+2)/m = 2, aber gleichzeitig (x – 5)/ (x – 5) teilt und eine 1 erhält. Dadurch entsteht eine $1^2 = 1$. Die Schwierigkeit besteht wahrscheinlich in einer nicht adäquaten Auffassung des Terms, da er bei einem und dem gleichen Term zwei verschiedene Auffassungen interpretiert, einen Exponenten und einen Bruch, den man kürzen kann.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?

$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Umgang mit der Struktur NOLTE (1991, S. 45) Falsche Informations-aufnahme SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 Streichschema und Weglassschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

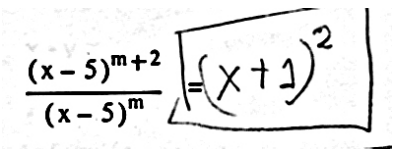
„1. (x – 5) / (x – 5) = 1, vielleicht auch gar nichts.

2. Es bleibt (m +2)/ m“

Deutung:

a. Termstruktur ist nicht erkannt worden, die Basiszahlen sind im Bruch gekürzt worden, was durch das Streichschema zu ersehen ist. Die Exponenten verlieren ihre Kondition als Exponenten und werden zu Zähler und Nenner, jeweils m + 2 und m. Dieses kann als eine Art von Weglassschemata interpretiert werden, da die Basiszahlen wegfallen und dann die Exponenten als Zahlen im Zähler und Nenner stehen.

b. Es besteht auch die Möglichkeit, dass der Studierende die Potentiationen mit Multiplikationen verwechselt, und dadurch keine Hemmungen bei der Kürzung hat, so kann hier eine nicht adäquate Informationsaufnahme interpretiert werden. Es könnte auch ein Fehler sein, der durch visuelle Ähnlichkeiten hervorgerufen wurde.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Termstruktur nicht erkannt NOLTE (1991, S. 45)

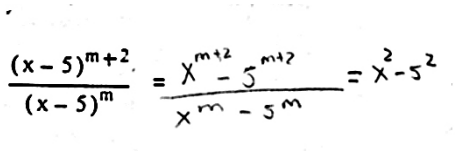
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Potenzen werden subtrahiert.

2. (- 5) / (- 5) = 1, und zwar + 1."

Deutung:

Wahrscheinlich kennt der Studierende die Exponentenregeln, jedoch hat er Schwierigkeiten mit der Termstruktur, er visualisiert die Binomen getrennt und interpretiert einerseits (- 5)/ (- 5) als eine plus 1, jedoch (x) / (x) als x. Aus dem Lösungsprozess geht nicht hervor, ob er es getrennt „gekürzt" hat und dann wieder vereinigt hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Unzulässige Linearisierung MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73 Streichschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich verteile die Potenzen auf die einzelnen Summanden des Binoms

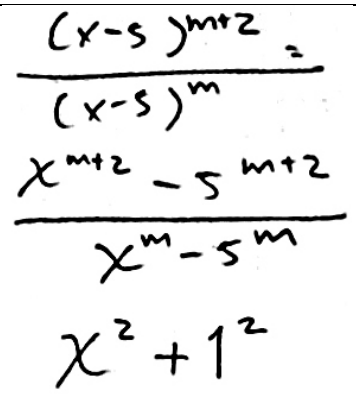
$(x-5)^{m+2} = x^{m+2} - 5^{m+2}$; das gleiche führe ich auch im Nenner durch.

2. $x^{m+2} / x^{m} = x^{2}$, $5^{m+2} / 5^{m} = 5^{2}$, das Minuszeichen bleibt erhalten"

Deutung:

Informationsaufnahme fasst einen Exponenten auf, jedoch wird bei der Informationsverarbeitung ein Distributivgesetz angewandt (eventuell ein Linearisierungsprozess (MALLE, 1993, S 175; TIETZE, 2000, S. 73). Im nächsten Schritt wird nach MALLE(1993, S. 182) ein „Musterbeispiel" in die Vereinfachung des Bruches hineinprojiziert und gekürzt. Später wird der Prozess der Linearisierung nicht rückgängig gemacht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?

$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		Unzulässiger Linearisierungsprozess MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73 Streichschema MALLE(1993, S. 182)

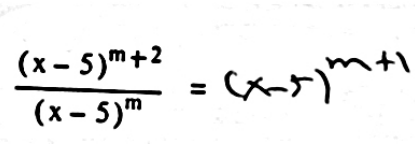
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Potenzen werden auf die einzelnen Summanden verteilt.

2. $x^{m+2} / x^m = x^2$, $-5^{m+2} / -5^m = 1^2$; dadurch, dass -5 / -5 = 1 ist."

Deutung:

Vermutlich ein unzulässiger Linearisierungsprozess, oder auch ein „der Reihe nach abarbeiten" (MALLE, 1993, S. 175; TIETZE, 2000, S. 73). Projektion eines Musterbeispiels, wie in der vorherigen Aufgabe; mit der Differenz, dass hier nicht nur die Potenzen subtrahiert werden, sondern auch die (-5)/(-5) dividiert wurde. Dieses weist wiederum auf ein Streichschema hin, in dem die Basiszahlen gekürzt werden, $-5^{m+2} / -5^m$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		Assoziierung einer Division mit einer Verminderung. NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

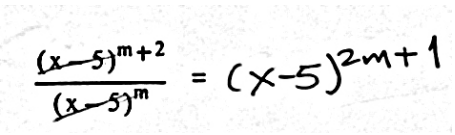
„1. Da es sich um eine Division handelt, muss subtrahiert werden.

2. Einmal $(x - 5)^m$ muss abgezogen werden,

3. also bleibt $(x - 5)^{m+1}$"

Deutung:

Möglicherweise verwechselt der Studierende die Division mit einer Subtraktion. Er zieht wahrscheinlich einmal $(x - 5)^{m}$ von $(x - 5)^{m+1}$ ab. Der Gedanke resultiert vermutlich durch die Annahme, dass die Division mit einer Verminderung assoziiert wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Assoziierung der Division mit einer Verminderung NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166) Weglassschemata MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

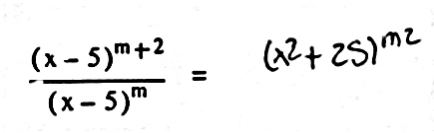
„1. Einmal nehme ich (x – 5) weg, im Exponenten ist 2 – 1 = 1

2. Ich habe aber 2 mal $(x - 5)^{m}$

3. Also: $(x - 5)^{2m+1}$."

Deutung:

Der Fehler resultiert voraussichtlich aus der Annahme, dass bei der Division eine Verminderung interpretiert wird. Durch das Streichschema ist zu ersehen, dass der Studierende einmal (x-5) von $(x-5)^{m+2}$ abgezogen hat, und erhält $(x-5)^{m+1}$. Es generiert sich hier ein Weglassschema, da der Studierende nun „m" im Exponenten irgendwohin schreiben muss. Er addiert dieses „m" zu dem resultierenden Exponenten, m + 1 + m = 2m + 1.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Zu offene Schemata NOLTE (1991, S. 61) MALLE (1993, S. 172, 173) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

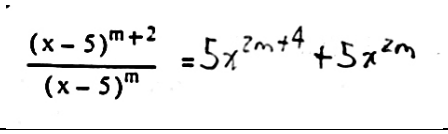
„1. (x – 5) muss ich quadrieren, (x^2 + 25)

2. Potenz ist dann m+m; m2“

Deutung:

Da der Prozess nicht in seinen einzelnen Schritten aufgeschrieben wurde, geht nicht klar hervor, welches der Gedankengang war. Anzunehmen ist wahrscheinlich, dass der Studierende zuerst $(x - 5)^2$ errechnet hat, wobei durch einen Fehler von zu offenen Schemata, Schemata ohne Einschränkungen $(x - 5)^2$ gleich x^2 + 25 ist. Dieses Resultat erfolgt auch durch eine Übergeneralisierung des Schemas $\Delta(a \circ b) = (\Delta a) \circ (\Delta b)$.

Danach hat der Studierende ein Problem mit den beiden Exponenten m, die er dann zu m2 zusammenzählt.

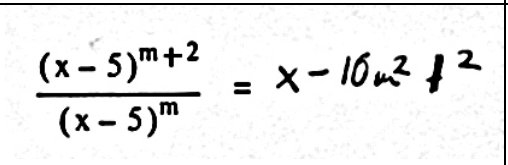
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		Vermutlich Konkatenationsfehler

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

???

Deutung:

Konkatenationsprobleme scheinen hier eine entscheidende Rolle zu spielen, (x-5) wird zu 5x, 2 mal m+2 zu 2m + 4;

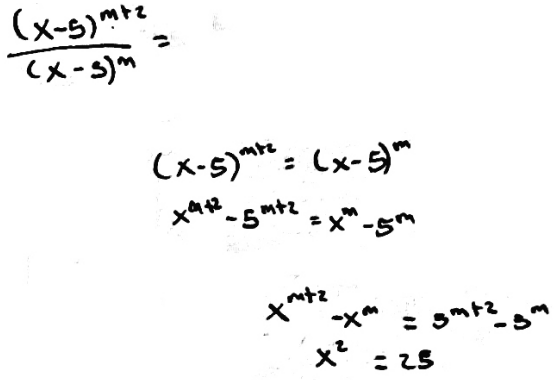
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

???

Deutung:

??? Eventuell eine Andeutung auf eine binomische Formel, durch die 10 zu erkennen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Verlust der Art der Tätigkeit MALLE (1993, S. 202) Unzulässiger Linearisierungsprozess MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Den Term im Nenner bringe ich auf die andere Seite der Gleichung

2. Potenzen werden auf die Summanden verteilt.

3. Jetzt bringe ich die gleichen Basen auf die gleiche Seite der Gleichung

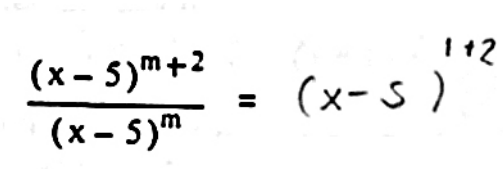
4. $x^{m+2} - x^{m} = x^{2}$; $5^{m+2} - 5^{m} = 5^{2} = 25$

5. Die Gleichung ist dann x 2 = 25.“

Deutung:

Der Studierende verlor die Übersicht über den Prozessablauf, da er die Art der Tätigkeit verwechselt. Er macht aus einem algebraischen Ausdruck eine Gleichung, in dem er den Nenner auf „die andere Seite bringt“. Danach werden noch zwei weitere Fehlstrategien angewandt, nämlich ein Linearisierungsprozess bei der Verteilung der Exponenten auf die einzelnen Summanden, und später dann ein Fehler bei der Subtraktion von ähnlichen Termen, die als Division (wahrscheinlich auf die Originalaufgabe zurückkommend) aufgefasst werden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur

		beschrieben?
		Umgang mit der Struktur NOLTE (1991, S. 45) Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169) Streichschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Schülergedanken:

„1. Ich habe einen Bruch, ich kann also m durch m teilen, und erhalte 1 im Exponenten, dann muss ich noch die 2 addieren.

Deutung:

Die Termstruktur ist vermutlich nicht erkannt worden, da der Studierende Teilweise einen einfachen Bruch interpretiert. Die Exponenten werden „gekürzt“ m / m = 1; diese Schwierigkeit könnte aus früheren Lernphasen erwachsen, da der Studierende die Bedeutungen der Brüche mit Basiszahlen und Exponenten wahrscheinlich nicht erfasst hat. Es besteht bei dieser „Kürzung“ eine Art Streichschema, denn es wird nicht auf die 2, die addiert wird, geachtet. Der Studierende erkennt wahrscheinlich ein Musterbeispiel m/m = 1 in der Aufgabe. Der Studierende führt aber seine Basis weiter mit.

5. 4. 2 Fehler, die ich bisher in der Literatur noch nicht gefunden habe:

Kriterium Studierendenlösungen in diese Kategorie einzuteilen waren:

1) Mangelnde Begriffsvorstellungen zu den Inhalten der Aufgabe
2) Fehler, die nicht unter in der Literatur angegebenen Fehlermustern beschrieben werden konnten
3) Fehler, die nicht auf ähnliche Fehler in der Literatur bezogen werden konnten
4) Eventuell auch Lösungsprozesse, die mehrere Fehler enthielten

Im Folgenden sollen einige Fehler, in der Form, wie sie in der Arbeit besprochen wurden, aufgeführt werden.

Aufgabe: 8

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{\frac{1}{9}} =$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$ Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Operationszeichen werden weiterhin mitgeschrieben, auch wenn die Operation ausgeführt wurde.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Ich ziehe die Wurzel aus 1/9, das ist 1/3; also ist die Wurzel 1/3”

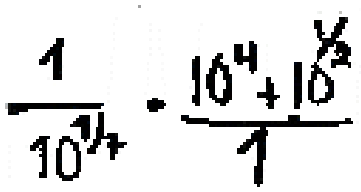
***Deutung**:*

Vermutlich nimmt der Studierende das Wurzelzeichen auf, realisiert die Operation, aber berücksichtigt nicht, dass er nun die Wurzel schon gezogen hat, und das Wurzelzeichen als Operationszeichen schon gebraucht wurde und danach nicht mehr niedergeschrieben wird.

Diese Situation findet sich auch oft beim Integrieren wieder.

Aufgabe 11:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrie-

		ben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$	 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Falsche Informationsverarbeitung Unzureichendes erkennen der Termaufbaus (nach SHEVAREV 1946 in NOLTE 1991, S. 60f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. 10^{-7} bedeutet $1/10^{1/7}$.

2. 10^4 verändert sich nicht. 10^{-2} im Nenner wird zu $10^{½}$ im Zähler.

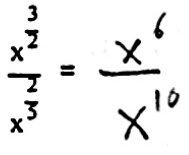
3. Beide Bruchzahlen werden multipliziert.

4. Der zweite Bruch wird zu einer Summe umgeformt"

Deutung:

Statt 10-7 zu 1/107 umzuformen, wurde die Umformung erneut angewendet, so dass 1/10 hoch 1/7 entsteht. Dies kann als eine fehlerhafte Verarbeitung von Informationen gedeutet werden, denn er scheint die Information angemessen aufgenommen zu haben, da er die angebrachte Regel anwendet. In dieser Form wird der Fehler noch nicht in der Literatur beschrieben. Der zweite Fehler bezieht sich auf das Additionszeichen im Zähler. Das kann im Sinne Shevarevs (1946, in NOLTE 1991, S. 60f) als unzureichendes Erkennen des Termaufbaus gedeutet werden.

Aufgabe 14:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$	 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Fehlerhafte Assoziationen zwischen Aufgabenelementen und Handlungen NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE(2000, S. 70)

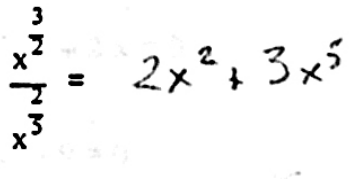
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner sind die neuen Exponenten der „x“ im Zähler und im Nenner.“

Deutung:

Da kein Gedankengang nachzuvollziehen ist, ist zu vermuten, dass der Studierende annimmt, dass die Exponenten multipliziert werden müssen. Ob er später dann $x^{\frac{6}{10}} = \frac{x^6}{x^{10}}$ gleichsetzt ist auch zu vermuten, wobei man auf ein mangelhaftes Verständnis der Brüche als Exponenten schließen könnte.

Aufgabe 14:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$	 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Ungenügende Auffassung der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei einer Division von zwei Brüchen kommt der Nenner des Bruches im Nenner hoch in den Zähler.

2. Er wird zum Exponenten der 3x.

3. Der Nenner des Bruches in Zähler kommt in den Nenner, und wird zum Exponenten von 2x.“

Deutung:

Es äußert sich bei diesem Prozess eine ungenügende Auffassung der Termstruktur. Erstens, weil aus einer Division eine Addition wird und zweitens, weil einige Exponenten zu Koeffizienten werden. Eventuell ist die Auffassung in der Form:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{2}{5}x} \;;\; 3x^5 + 2x^2$$

Die 5 im Nenner kommt hoch in den Zähler als Exponent von 3x, die 2 im Nenner des Zählers, wird Exponent von 2x im Nenner. Es verliert sich die Struktur des Hauptbruches.

Aufgabe 21:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$3\cdot(x-2)+4\cdot(3-x)-(x+5)$	$3x-6+12-4x-x+5$ $-2x+11$ $2x-11$	Verlust der Kontrolle einer Unterprozedur MALLE (1993, S. 186) Interferenz von Schemata MALLE (1993, S. 185) Falsche Interpretation des Gleichheitszeichens NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S.68 u. 72) Wechseln der Vorzeichen bei einem algebraischen Ausdruck (wahrscheinlich durch eine Interpretation einer Gleichung)
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse die Klammern auf, bei der letzten Klammer wechsle ich das Vorzeichen von „x“ und der +5.

2. Danach fasse ich alle ähnlichen Terme zusammen.

3. Ich ändere alle Vorzeichen, aus -2x+11 wird 2x - 11“

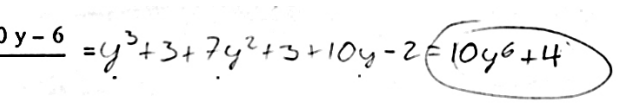
Deutung:

Bei dieser Vereinfachung kann man zwei Fehler aufspüren.

Der erste Fehler resultiert bei der Addition von -6 -5, die zu +11 addiert wird.

Der zweite Fehler ergibt sich aus der Vorstellung der Operationen, die bei der Lösung einer Gleichung angewandt werden können, die fälschlicherweise auf einen algebraischen Ausdruck übertragen wurden. Eventuell besteht bei dem Studierenden keine klare Vorstellung der Unterschiede einer Gleichung und eines algebraischen Ausdrucks. Die Interpretation des Gleichheitszeichens spielt wahrscheinlich eine entscheidende Rolle bei diesem Fehler.

Aufgabe 30:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}$		Reparatur, ignorieren von y im Nenner MALLE(1993, S.184) TIETZE(2000, S. 70) Verwechslung einer Division mit einer Addition (wenig häufig) MALLE (1993, S. 67) Konkatenationsfehler Oder mangelhaftes Buchstabenschema NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135) TIETZE(2000, S. 71)
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??

Deutung:

Der Studierende macht eine Reparatur in einer Prozesslücke, in dem er „y“ ignoriert.

Nach y^3 und $7y^2$ addiert er jeweils eine 3, die wahrscheinlich aus dem Nenner kommt.

Bei 10y addiert er keine 3 mehr, sondern dividiert - 6/3 = -2

Er addiert dann die 3 + 3 – 2 = 4; die Koeffizienten von y^3 und $7y^2$ ignoriert er auch und setzt ein mangelhaftes Buchstabenschema ein, wobei er sich wahrscheinlich die Variablen als Objektnamen vorstellt, $y^3 + y^2 + y = y^6$, als Koeffizienten nimmt er den Koeffizienten von y.

Aufgabe 30:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}$	$= y^2+\frac{7}{3}+y\ \frac{10}{3}\ y-2$	Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ziffern werden durch 3 geteilt, Variablen, durch y.

2. 7 durch 3 ist 7/3; 10 durch 3 ist 10/3 und – 6 durch 3 ist – 2.

3. $y^3 / y = y^2$, $y^2 / y = y$; $y / y = y$.“

Deutung:

Bei diesem Lösungsprozess manifestieren sich verschiedene Probleme:

a) Die Verknüpfung der Terme ist additiv, was sich durch Konkatenationsfehler äußert. $7y^2$ wird additiv interpretiert und 7 durch 3 und y^2 durch y geteilt, es werden sogar Pluszeichen gesetzt, die aber bei 10/3 und y wiederum nicht mitgeschrieben werden, es wird y 10/3 y ohne Vorzeichen nebeneinander geschrieben.

b) Der Studierende hat eine Division aufgenommen, er führt auch Divisionen aus. Jedoch wird vermutlich die Struktur des Termaufbaus nicht erkannt, da der Studierende den Nenner in zwei Divisionen teilt, durch y und durch 3. Weitere Fehler werden in der Auffassung gemacht, dass die Zahlen durch 3 und die Variablen durch y geteilt werden.

c) Musterbeispiele wie: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; werden übergeneralisiert, und falsch appliziert.

Aufgabe 30:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3} = 3y^3+21y^2+11y+30y-18$ Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		Verwechslung der Division mit der Multiplikation einerseits und mit der Addition beim Term y MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere erst mal alle Summanden des Zählers mal 3.

$(y^3+7y^2+10y-6)\cdot 3 = 3y^3+21y^2+30y-18$

„y“ das im Nenner zurückgeblieben ist, muss ich im Zähler addieren, und zwar zu 10y; 10y + y = 11y.“

Deutung:

Der Studierende verwechselt eine Division von Polynomen mit einer Multiplikation. Er verarbeitet die Multiplikation in dem er die 3 mit allen Summanden des Zählers multipliziert, außerdem addiert er zur 10y das y des Nenners.

$(y^3+7y^2+10y-6)\cdot 3+10y+y = 3y^3+21y^2+30y-18+11y$

Aufgabe 24:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2-16z+64 = -48z$		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41); MALLE (1993, S. 135) *Eine implizite 1 als Koeffizient wird nicht beachtet*[14]

[14] Diese Art von Fehler wurde in der Literatur nicht referiert.

Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Gleichheitszeichen als Aktionszeichen aufgefasst NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000. S. 68 und 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Von z^2 ziehe ich z ab, da es eine Subtraktion ist.

2. 64 -16 = 48, aber da 64 ein positives Vorzeichen hat und 16 ein negatives Vorzeichen hat, hat das Resultat ein negatives Vorzeichen.

3. z – 48 = – 48z“

Deutung:

Von z^2 wurde z abgezogen, - 16 + 64 = - 48. Der Koeffizient von z^2 wurde nicht berrücksicht, weil wahrscheinlich ein impliziter Koeffizient 1 nicht aufgenommen wird. Diese Fehler resultieren von defizienten Auffassungen der Konkatenation in Algebra, der Studierende hat keine klare Vorstellung der Zusammensetzung der Terme, und dass diese in der Algebra multiplikativ und nicht additiv sind.

z und z ist z Quadrat

16 und z ist 16z

So wird die Aufgabe als: z+z-16-z+64 aufgefasst. Auch wenn dann einige Vorzeichen nicht den wirklichen Vorzeichen korrespondieren. Resultat wäre:

z – 48 , was dann zu – 48 z verarbeitet wird, da z – 48 nicht als Resultat angesehen werden kann, wahrscheinlich durch die Deutung des Gleichheitszeichens als Aufgabe-Ergebnis und seine Interpretation als Aktionszeichen.

Aufgabe 24:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 =$	$z(z) - 4(4z) + (8)(8)$	Fehlvorstellungen zum Begriff Faktorisation
Fehler im Begriff der Faktorisierung in der Literatur bisher noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss Faktoren bilden, jeder Summand kann als Multiplikation ausgedrückt werden.

2. $z^2 = z\ (z)$

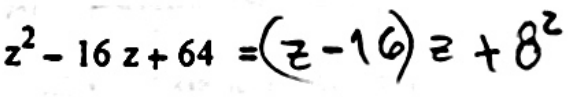
3. $-16z = -4\ (4z)$

4. Und $64 = (8)(8)$."

Deutung:

Es besteht möglicherweise keine klare Vorstellung des Begriffs Faktorisierung eines algebraischen Ausdrucks, der Studierende hat eine Faktorisierung der einzelnen Summanden vorgenommen, in dem er die einzelnen Terme in Faktoren zerlegt hat. Auffallend ist, dass der Studierende bei seiner Umformung keinen Fehler, in dem Sinne, begeht, jedoch ist die Transformation, die er vornimmt, keine Faktorisierung.

Aufgabe 24:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64$		Kein Begriff von Faktorisierung eines Ausdrucks, dieser wird nur in den Teilen durchgeführt, die den gemeinsamen Faktor z enthalten.
Fehler im Begriff der Faktorisierung in der Literatur bisher noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei $z^2 - 16z$ habe ich einen gemeinsamen Faktor (z).

2. $z^2 - 16z = (z - 16)\ z$

3. $64 = 8^2$

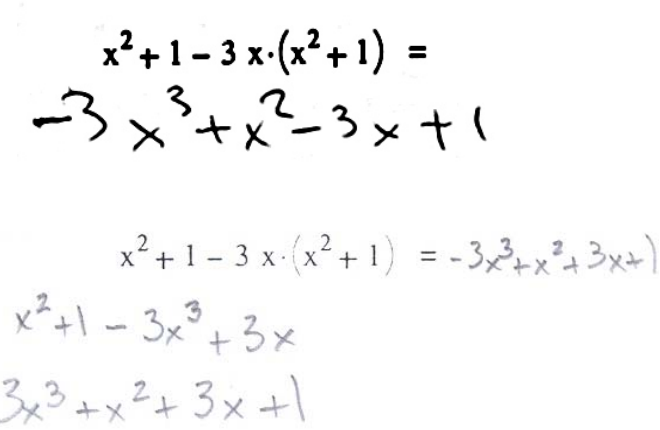
4. So wäre alles als Faktoren ausgedrückt."

Deutung:

Es wird ein gemeinsamer Faktor „z" in den ersten zwei Summanden erkannt.

$64 = 8^2$, was auch zwei Faktoren sind. Es scheint, dass der Begriff „faktorisieren eines algebraischen Ausdrucks" nicht als ein Ausdruck, der nur Faktoren hat, verstanden wird. Zwischen Faktoren dürften keine Plus- oder Minuszeichen stehen, was möglicherweise vom Studierenden nicht erkannt wurde. Es werden gewisse Faktoren gebildet, $z^2 - 16z = (z - 16)\ z$ und 8^2.

Aufgabe 26:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden, Konzept der Faktorisierung	Begriff der Faktorisierung ist nicht vorhanden Im zweiten Fall: Fehler beim Distributivgesetz, Verlust der Kontrolle über den Gesamtablauf MALLE (1993,S. 186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss die Klammer ausmultiplizieren, dieses erfolgt durch ein Distributivgesetz.

2. Danach gebe ich die Summanden in einer geordneten Form wieder."

Deutung:

Beide Lösungsprozesse starten mit der Auffassung, dass man die Klammer auflösen muss.

Im ersten Fall ist diese korrekt aufgelöst, aber kein Faktorisierungsprozess durchgeführt worden.

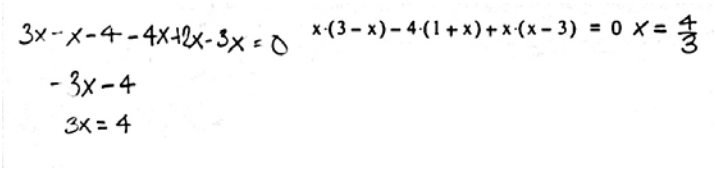
Im zweiten Fall ist ein Fehler bei dem Distributivgesetz zu erkennen, da er das Vorzeichen von – 3x (1) nicht mitmultipliziert und dadurch +3x erhält.

Beide Studierende haben keine Vorstellung vom Begriff Faktorisierung und wie eine Faktorisierung im Endeffekt aussieht.

Es kann auch sein, dass die Studierenden dadurch, dass sie nicht faktorisieren konnten, einen Zwangszug gemacht haben, im Sinne eines „tue so viel wie

möglich“, vielleicht zählt es doch. Diese Idee erwächst wahrscheinlich, da in Mexiko viele Lehrer Teilpunkte vergeben für eine Teilleistung, auch wenn diese nicht unbedingt mit der Lösung der Aufgabenstellung zu tun hat.

Aufgabe 26:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x (3 – x) – 4(1 + x) + x (x – 3) = 0	 Fehler durch das nicht Mitführen des Gleichheitszeichens in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Nichtbeachtung der Prozedurhierarchie MALLE (1993, S. 186) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Fehlvorstellungen zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71) Nichtmitführen des Gleichheitszeichens

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse als erstes die Klammern auf. Bei jeder Klammer muss ich ein Distributivgesetz anwenden.

2. x(3) = 3x und ich muss noch x abziehen; - 4 (1+x) = - 4 – 4x; x (x – 3)= zweimal x – 3x.

3. - 3x – 4 = 0; 3x = 4, beide Vorzeichen habe ich gewechselt.

4. x = 4/3.“

Deutung:

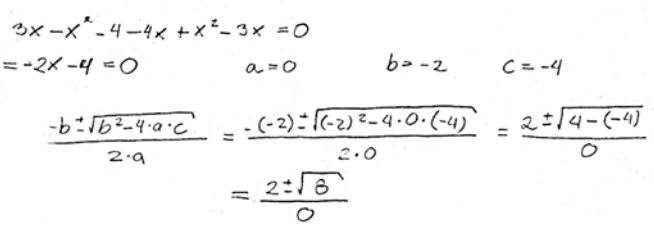
Die erste Klammer wird fehlerhaft aufgelöst, da nur der erste Term in der Klammer mit x multipliziert worden ist. Bei der zweiten Klammerauflösung besteht kein Fehler. Die dritte Klammer wird wiederum falsch aufgelöst, für den Studierenden ist x(x)= 2x und x (-3) = -3x.

Dadurch, dass die zweite Klammer richtig aufgelöst wurde, könnte man annehmen, dass der Studierende das Distributivgesetz kennt und auch richtig anwenden kann. Bei der ersten Klammerauflösung scheint es ein Problem der Nichtbeachtung der Prozedurhierarchien zu sein. Bei der dritten Klammer manifestiert

sich ein Konkatenationsproblem oder eine mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata, da x (x)= 2x ist.

Ein weiterer Fehler entsteht von -3x – 4 zu 3x = 4, vermutlich, weil der Studierende eine Gleichung, die er zu lösen hat, in seinen Gedanken, mitführt. Der Fehler generiert sich durch die unvollständige Schreibweise, manchmal schreibt er das Gleichheitszeichen und die Null mit, manchmal nicht.

Aufgabe 26:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x (3 – x) – 4(1 + x) + x (x – 3) = 0	 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Unangebrachte Informationsverarbeitung Fehlerhefte Informationsaufnahme seiner Schreibweise Perseverationsproblem RADATZ (1980) Null verändert nichts TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere zuerst die Klammern, dann vereinfache ich ähnliche Terme.

2. – 2x – 4 = 0; ich hatte x^2, also ist es eine quadratische Gleichung, die ich mit der Formel für quadratische Gleichungen lösen kann; a = 0, b = - 2 und c = - 4.

3. Ich setze die Daten in die Formel ein, ich kann beim letzten Schritt nicht weiterrechnen."

Deutung:

Es wird eine korrekte Multiplikation der Klammern vorgenommen, bei der Vereinfachung der ähnlichen Terme, erfolgt ein Fehler, wahrscheinlich addiert er 3x + 3x und subtrahiert dann 4x zu – 2x. Man könnte eine fehlerhafte Informationsverarbeitung interpretieren.

Der nächste Schritt muss vermutlich eine Nachfolge von der Idee sein, dass er während der Multiplikation von den Klammern, x^2 deutet, und so meint, dass er eine quadratische Gleichung zu lösen hat. Der Studierende konnte vermutlich nicht interpretieren, dass die quadratischen Terme sich gegenseitig aufgehoben haben. Die Interpretation der Werte für a, b und c, ist möglicherweise logisch,

aber die Anwendung der Formel kann unter diesen Umständen nicht erfolgen. Der Studierende kommt in einen Konflikt, als er durch Null teilt und bricht seinen Lösungsweg ab.

Es erfolgt noch ein anderer Fehler, in der Diskriminante, als er 4 (0) (-4) multipliziert, da das Resultat - 4 ist. Obwohl die Multiplikation der Zahlen richtig aufgeschrieben wurde, und sogar die – 4 in Klammern steht, ist die Informationsaufnahme des Studierenden eine Multiplikation von 4 (0) und eine Subtraktion von 4. Es könnte auch sein, dass er ein Perseverationsproblem aufweist, 0 (- 4) = - 4 oder, dass die Vorstellung vorherrscht, dass die Null nichts verändert.

Aufgabe 35:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x+3}{x-4}=0$ $x^2-\frac{3}{4}=0$ $x^2=3$ $x=\sqrt{3}$		Unklare Vorstellungen zu den Regeln zur Isolierung einer Unbekannten Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE (1993, S. 190f) Hineinprojizieren eines Musterbeispiels MALLE (1993, S. 174) TIETZE (2000 S. 73) Ursachen in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169)
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x und x ist x^2, 3 durch 4 mit dem Vorzeichen ist – ¾,

2. Bei der Gleichung $x^2 – ¾ = 0$, werde ich die störende 4 „hinübermultiplizieren“

3. Da ich 4 mit 0 multipliziere, bleibt die Gleichung: $x^2 = 3$

4. Der Wert für x = $\sqrt{3}$."

Deutung:

Der Studierende identifiziert vermutlich die Termstruktur nicht in einer angebrachten Form. Es hat den Anschein, als zerlege er den Bruch in zwei Teile:

$\frac{x+3}{x-4} = \frac{x}{x} - \frac{3}{4} = x^2 - \frac{3}{4}$ wobei, es auffällt, dass er x/x zu x^2 verarbeitet, vielleicht durch die Idee, dass x nicht „verschwinden" kann.

Beim nächsten Schritt resultiert der Fehler durch die Annahme, man könne die 4 auf der anderen Seite der Gleichung multiplizieren. Wahrscheinlich sind seine Vorstellungen zu den Regeln um eine Unbekannte zu isolieren, nicht klar. Gemeint ist, dass der Studierende nicht die gleiche Operation auf beiden Seiten der Gleichung vornimmt, in dem er jede Gleichungsseite als einen Term ansieht.

$$4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 4 \cdot 0$$

Er könnte auch, wie beim letzten Lösungsprozess das gleiche Musterbeispiel in die Aufgabe hineinprojiziert haben.

Die Hauptwurzel von 3 ist $\sqrt{3}$, jedoch generieren sich bei der Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ zwei Lösungen, nämlich $+\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$. Die Ursache dieses Fehlers könnte in früheren Lernphasen liegen, da der Studierende die Bedeutung der Gleichung mit ihren Lösungen nicht erfasst hat.

Aufgabe 39:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 9 = 0$ $z^2 = 0 + 9$ $z^2 = 9$ $z = \sqrt{9}$ $z = 3$	$z = 3$	Ursachen in früheren Lernphasen (Arithmetik) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 169)
Fehlinterpretation in der Lösungsmenge in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 9 addiere ich auf beiden Seiten der Gleichung.

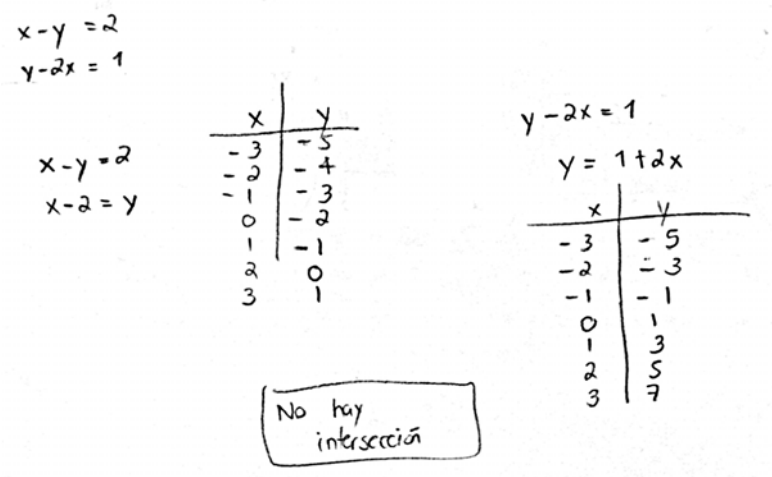
2. Die Wurzel von 9 ist 3.“

Deutung:

Der Studierende hat den Lösungsprozess, im Gegensatz zum vorhergehenden Prozess, weitergeführt. Er zieht auf beiden Seiten der Gleichung die quadratische Wurzel, erhält. Identifiziert aber bei der Lösungsmenge nur die positive Wurzel von 9, nämlich + 3.

Die Hauptwurzel von 9 ist 3, jedoch generieren sich bei der Lösung der Gleichung $z^2 = 9$ zwei Lösungen, nämlich + 3 und –3. Die Ursache dieses Fehlers könnte in früheren Lernphasen liegen (in der Arithmetik), da der Studierende die Bedeutung der Gleichung mit ihren Lösungen nicht erfasst hat.

Aufgabe 40:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x - y = 2$ $y - 2x = 1$	 Fehlvorstellung in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Keine Vorstellung über die Charakteristika der Schnittpunkte von zwei Geraden, als gemeinsamen Punkt (mit den gleichen x- und y-Werten)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich stelle zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade, für beide setze ich x-Werte von -3 zu 3 ein, und errechne die jeweiligen y-Werte.

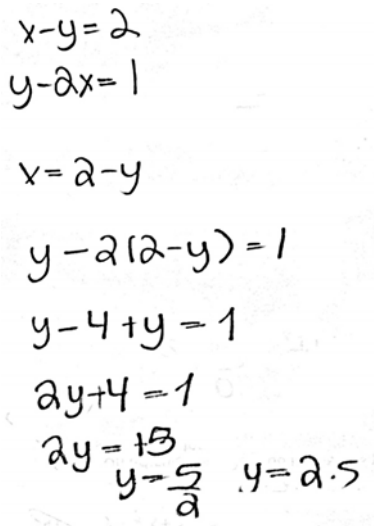
2. Es gibt keinen Schnittpunkt.“

Deutung:

Obwohl, der erste Punkt (-3, -5) für beide Geraden der gleiche ist, und somit der Schnittpunkt der Geraden ist, wird dieses durch den Studierenden nicht erkannt. Es besteht die Möglichkeit, dass er eine Graphik der Geraden aufstellen wollte, jedoch der Aufwand zu groß war und den Prozess abgebrochen hat. Es ist auch

möglich, dass er keine adäquate Vorstellung darüber hat, dass jedes Wert-Paar einen Punkt auf der jeweiligen Geraden ist, und dass, wenn die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben, es den Schnittpunkt darstellt.

Aufgabe 40:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unangebrachte Vorstellungen zum Schnittpunkt von zwei Geraden, fehlen der Berechnung vom x-Wert.
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich werde diese Aufgabe algebraisch lösen.

2. Das Substitutionsverfahren zur Lösung von simultanen linearen Gleichungen ist mir bekannt.

3. Bei der ersten Gleichung isoliere ich x, um es dann in die zweite Gleichung einzusetzen. x – y = 2 daraus folgt: x = 2 – y

4. Nun setze ich diesen Wert für „x“ in die zweite Gleichung ein.

y – 2 x = 1; y – 2 (2 – y) = 1; y + 4 + y = 1; 2y + 4 = 1

5. Die – 4 kommt auf die andere Gleichungsseite, ach nein, sie muss auf der anderen Gleichungsseite addiert werden.

6. Ich isoliere y; y = 2,5.“

Deutung:

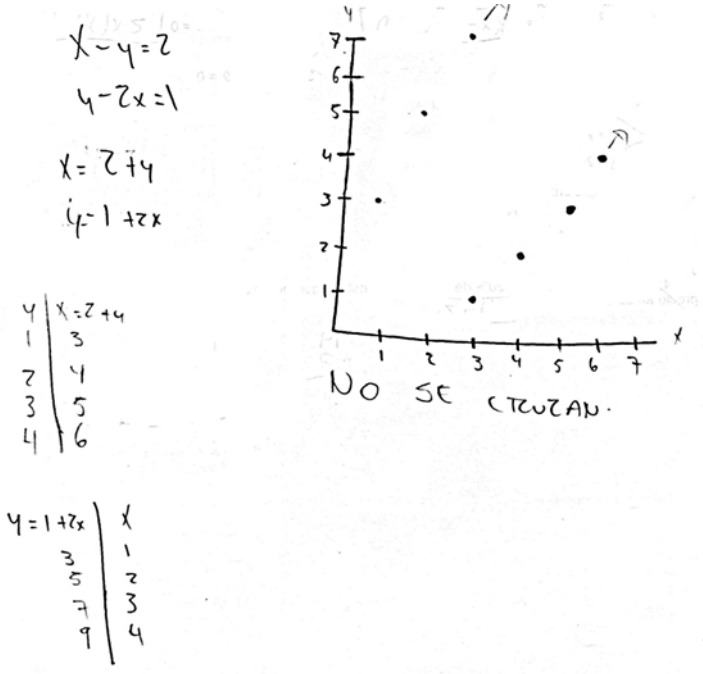
Der Studierende macht ein Substitutionsverfahren, um den Schnittpunkt der beiden Geraden algebraisch zu errechnen.

Es ist zu erkennen, dass der Studierende etwas unsicher bei den Umformungen oder Isolierungen ist, besonders, wenn diese auf der Addition oder Subtraktion basieren. In der sechsten Prozesszeile ist zu erkennen, dass er die – 4 mit einem leichten Strich in eine + 4 verwandelt, wahrscheinlich um zu wissen, dass er sie auf der anderen Seite der Gleichung addieren muss. Dieses hat er anfangs nicht getan, denn man kann eine – 3 unter der + 5 im nächsten Schritt erkennen.

Gerade dieser Fehler, bei der Isolierung von x, um die Substitution vornehmen zu können, ist dem Studierenden unterlaufen. Von x – y = 2 wird x = 2 – y.

Alle anderen Schritte sind korrekt ausgeführt, jedoch wird nicht der Schnittpunkt spezifiziert, da nur der y-Wert angegeben wird.

Aufgabe 40:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unangebrachte Vorstellung zum Begriff lineare Funktion, als eine kontinuierliche Linie (Gerade). Vorstellung des Koordinaten-Systems, wahrscheinlich nur zum ersten Quadranten. Verlängerung der Geraden in andere Quadranten nicht erfolgt, dadurch auch ein nicht erkennen des Schnittpunkts.
Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei der ersten Gleichung isoliere ich x, so muss ich y-Werte einsetzen, was ich in einer Tabelle wiedergeben kann.

2. Bei der zweiten Gleichung isoliere ich y und setze x-Werte ein.

3. Für jede Tabelle (Gleichung) trage ich die x- und y-Werte (als Punkte) in ein Koordinaten-System ein.

4. Die Punkte werden wahrscheinlich (wenn ich weitere positive Zahlen einsetze) sich nach oben hin fortführen.

5. Es ist kein Schnittpunkt zu erkennen. (No se cruzan, sie kreuzen sich nicht)."

Deutung:

Der Studierende stellt zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade. Bei der ersten Gleichung isoliert er x = 2 + y, in der Tabelle gibt er y die Werte von 1 bis 4 und errechnet den x-Wert.

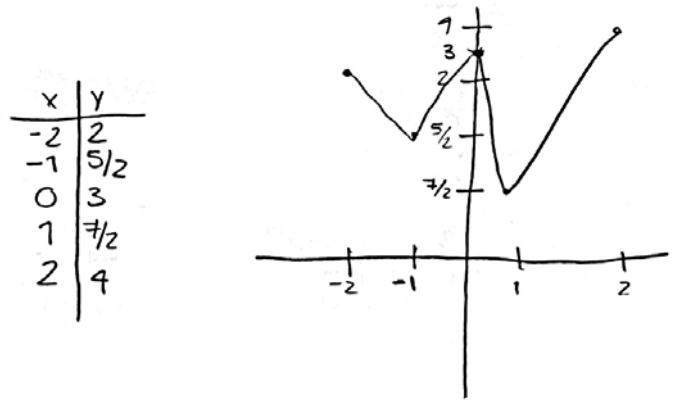
Bei der zweiten Gleichung isoliert er y = 1 + 2x, und gibt für x die Werte von 1 bis 4.

Dann trägt er diese Punkte für beide Geraden in ein Koordinaten-System ein. Er verbindet, für jede Gerade, die Punkte nicht, und verlängert auch nicht die Geraden, um einen Schnittpunkt zu finden. Eine mögliche Deutung wäre, dass der Studierende mechanisch die „Punkte" für jede Gerade errechnet, diese in das Koordinaten-System einträgt, jedoch keine angebrachte Vorstellung zum Begriff Funktion hat. So wäre es fraglich, ob der Studierende die Punkte, die er in der Tabelle errechnet, als spezifische Punkte auf einer Geraden interpretiert, und weiß, dass sie durch eine gerade Linie verbunden werden können und diese Linie verlängert werden kann. Außerdem scheint die Vorstellung einer Geraden, die unendlich, nach beiden Seiten fortgeführt werden kann, nicht vorhanden zu sein, obwohl er nach oben hin (siehe Lösungsprozess) zwei Pfeile eingezeichnet hat.

Vermutlich hat der Studierende auch limitierte Vorstellungen über die einzusetzenden Werte von „y" oder „x", da er nur positive Werte einsetzt.

Aufgabe 41:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?

 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Keine adäquate Vorstellung einer Funktion, die eine Gerade darstellt. Fehler bei der Interpretation der Punkte, die die y-Werte der Geraden repräsentieren, wenn diese eine Fraktion darstellen.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich setze eine Tabelle auf, in der ich x die Werte von -2 bis 2 gebe, um dann die y-Werte zu errechnen.

2. Jedes Paar von x- und y-Werte trage ich in das Koordinaten-System ein.

3. Dann verbinde ich die fünf Punkte."

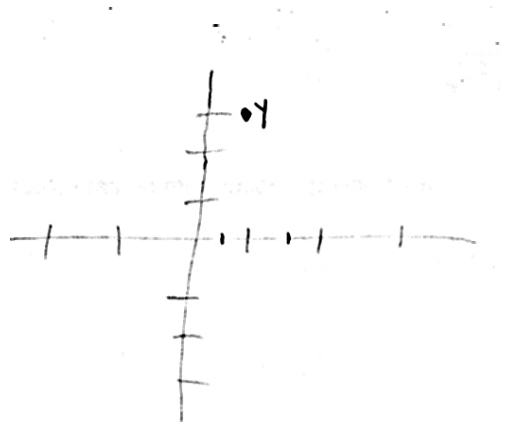
Deutung:

Der Studierende hat wahrscheinlich keine Vorstellungen zu den Funktionen, die eine Gerade repräsentieren. Dieser Fehler resultiert vermutlich durch eine Fehlinterpretation der gebrochenen Werte für y, wie in der Tabelle zu ersehen ist, die y-Werte werden korrekt errechnet, aber auf dem Koordinaten-System falsch eingetragen. Anscheinend interpretiert der Studierende die Brüche, 5/2 und 7/2 als 2/5 und 2/7, da der Wert 5/2 „größer" ist als der Wert 7/2. Dieses weist darauf hin, dass der Studierende zwar mit Brüchen rechnen kann, jedoch deren Wert nicht interpretieren kann.

Es scheint auch, als habe der Studierende wenig Beziehung zu differenzierbaren Funktionen, da er die lineare Funktion mit Punkten einzeichnet, die nicht differenzierbar sind, wie z.B. x = -1, x =0 und x = 1.

x	-2	-1	0	1	2
y	½ (-2)+3=2 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet	½(-1)+3=5/2 Korrekt errechnet, falsch eingezeichnet	½(0)+3= 3 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet	½(1)+3 = 7/2 Korrekt errechnet, falsch eingezeichnet	½(2)+3=4 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet

Aufgabe 41:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y = \frac{1}{2}x + 3$  Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		Keine adäquate Vorstellung einer Funktion, die eine Gerade darstellt.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss eine Graphik der Funktion y = ½ x + 3 aufstellen, dazu brauche ich Anhaltspunkte.

2. Der y-Wert ist 3 und der x-Wert ½. Der Punkt (1/2, 3) ist die Graphik."

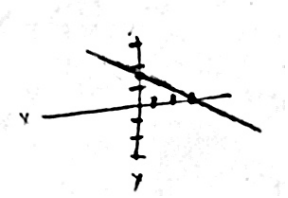
Deutung:

Der Studierende identifiziert bei der Gleichung zwei Werte, ½ und 3. Statt diese als die Steigung der Geraden und den Schnittpunkt mit der y-Achse zu interpretieren, setzt er sie mit den Koordinaten eines Punktes gleich. Der Fehler resultiert wahrscheinlich durch eine mechanische Identifikation von zwei Werten (m und b) einer linearen Gleichung (y = mx + b).

Da eine lineare Funktion im Koordinaten-System durch Punkte aufgezeichnet werden kann, besteht vermutlich die vorher genannte Interpretation. Es könnte sein, dass der Studierende diesen Punkt:

Aufgabe 41:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?

$y = \frac{1}{2}x + 3$  Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden	Vereinfachung durch eine Fremdstrategie TIETZE (2000, S. 70) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y = ½ x + 3; ist x = 0 so ist y = 3

2. Ist y = 0, so ist 0 = ½ x + 3; x = 3/2.

3. Die Punkte (0,3) und (3/2, 0) werden in das Koordinaten-System eingesetzt.

4. Ich verbinde beide Punkte zu einer Geraden."

Deutung:

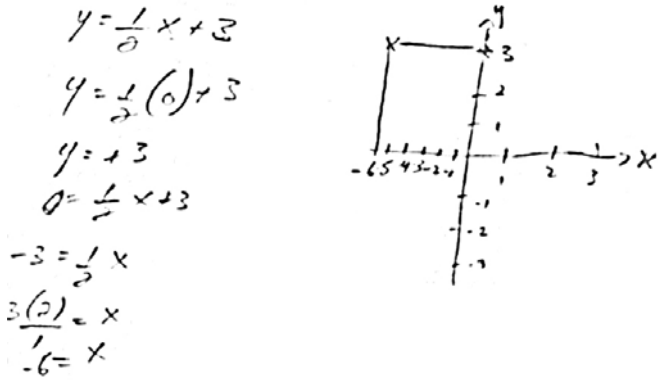
Der Studierende hat die Vorstellung, dass die Gleichung durch eine Gerade repräsentiert werden kann, und dieses durch die jeweiligen Schnittpunkte mit den Achsen erfolgen kann.

Die Fehler resultieren bei der Interpretation und Errechnung dieser Schnittpunkte. Die Kalkulation des Schnittpunktes mit der y-Achse erfolgt korrekt, jedoch wird der Punkt durch eine vermutliche Verwechslung der x- und y-Achse falsch eingetragen, nämlich als Schnittpunkt mit der x-Achse. Der Studierende hat die x- und y-Achse benannt, so dass kein Zweifel bei den Achsen besteht.

Bei der Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse entsteht möglicherweise ein Fehler bei der Isolation der Variablen „x". Eventuell weist der Studierende Konkatenationsprobleme auf, da er ½ x + 3 als 3/2 x und x = 3/2 interpretiert. Es könnte auch durch den Studierenden eine Fremdstrategie zur Vereinfachung der Aufgabe angewandt worden sein, im Sinne: 0 = ½ x + 3; 0 = 3/2 x ; daraus folgt: x = 3/2. Dieser Wert für x ist in der Graphik, als Schnittpunkt mit der y-Achse, zu erkennen, da kein Lösungsprozess vorliegt. Der Punkt (3/2 , 0) wird auch als Punkt (0, 3/2) eingesetzt.

Vermutlich hat der Studierende keine adäquate Vorstellung zum Begriff, Schnittpunkte mit den Achsen und wahrscheinlich auch Schwierigkeiten mit der Lokalisierung der Punkte (x- und y-Werte) im Koordinaten-System.

Aufgabe 41:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
 Fehler in der Literatur bisher noch nicht gefunden		„Null ist nichts, die kann man weglassen“ TIETZE (2000, S. 68 und 70) Die x- und y-Werte, die die Gleichung erfüllen werden nicht als Punkte auf der Geraden interpretiert.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y = ½ x + 3; ist x = 0 so ist y = 3

2. Ist y = 0, 0 = ½ x + 3; ist x = - 6.

3. Diesen Punkt (- 6, 3) muss ich im Koordinaten-System eintragen.“

Deutung:

Der Studierende kalkuliert die Schnittpunkte mit den Achsen, x = 0 und y = 3 und y= 0 und x = - 6, jedoch interpretiert er diese nicht als Punkt (0, 3) (Schnittpunkt mit der y-Achse), und Punkt (- 6, 0) (Schnittpunkt mit der x-Achse).

Vermutlich hat der Studierende keine klare Vorstellung darüber, dass beim Einsetzen des Wertes einer der Variablen, und Berechnung der anderen Variablen, die Gleichung erfüllt wird, und diese beiden Werte einen Punkt auf der Graphik der Funktion darstellen. Der Studierende hat zwei Punkte errechnet, diese aber nicht als solche identifiziert. Es besteht auch die Möglichkeit, dass der Studierende die Werte x = 0 und y = 0 als „Null ist nichts, die kann man weglassen“ interpretiert.

Der Studierende lokalisiert auf dem Koordinaten-System den Punkt (- 6, 3). Dadurch, dass er keine Kurve oder Gerade erhält, scheint er auch keine Vorstellungen zum Begriff Funktion zu haben.

5.4.3 Fazit

Eine differenzierte Analyse der Fehler zeigt, dass die Studierenden unzureichend über Prozeduren verfügen, um die Aufgaben lösen zu können. Dies kann aus unzureichenden Mustererkennungsprozessen resultieren: Dazu gehören

Verwechslungen von Operationen wie Produkt und Potenz. Ebenfalls darunter könnten Kürzungsprozesse aus Summen, fallen. In diesem Sinne können viele der beschriebenen Fehler als Fehler in der Informationsaufnahme und –verarbeitung klassifiziert werden.

Darüber hinaus ist zu fragen, ob fehlerhafte Prozesse in der Informationsverarbeitung aus einer begrifflichen Unschärfe resultieren. Welches Wissen wird abgerufen, wenn eine bestimmte Prozedur gewählt wird? Orientieren sich die Studierenden an Oberflächenmerkmalen der Terme oder fragen sie gleichermaßen nach der Bedeutung der Terme? Ein Wurzelzeichen über einem mehrstelligen Term lässt es nicht zu, allein ein einzelnes Glied eines Terms zu betrachten.

Die Vorgehensweise der Studierenden und die teilweise elementaren Fehler lassen nicht nur die Aussage zu, dass diesen Studierenden wesentliche Voraussetzungen fehlen, um an einem Kurs zur Differential- und Integralrechnung teilzunehmen. Die Ergebnisse stellen darüber hinaus in Frage, wie weit die Studierenden genügend Einsicht in die entsprechenden Verfahren entwickelt haben.

6. Zweiter Teil:

Kompetenzen der Lehrenden mit Schwerpunkt auf fachlichen, fachdidaktischen und diagnostischen Kompetenzen zu den genannten Inhalten

Anfangsstudierende begehen eine Vielfalt von Fehlern, wenn sie einfache arithmetische Aufgaben und algebraische Vereinfachungen, Umformungen oder Aufgaben lösen sollen (vgl. Kapitel 5). Woran könnte es liegen, dass sich bei Anfangsstudierenden Fehler häufen?

Fragen wie:

- Haben Lehrende in der Secundaria und Preparatoria diese Fehler nicht bemerkt?
- Machen Lehrende selber Fehler?
- Haben Lehrende vielleicht versucht, Fehler in einer nicht adäquaten Form, zu beheben?

haben mich veranlasst, mich näher mit Lehrenden der Secundaria und Preparatoria zu befassen.

Welche Voraussetzungen muss ein Lehrender erfüllen, um mathematische Inhalte erfolgreich zu lehren und Fehler effektiv zu beheben? Das professionelle Wissen von Lehrerinnen und Lehrern äußert sich bei vielen Entscheidungen und Handlungen. Es ist nach BROMME und STRÄSSER (1988) ein sehr komplexes Wissen, das vielfältige Facetten aufweist. „Das professionelle Wissen des Lehrers ist eine Mischung von pädagogischen, fachdidaktischen und Stoffbezogenen Kenntnissen, Faustregeln, Erfahrungen und Einstellungen zu diesem Wissen. Wir meinen damit das Wissen (im weitestem Sinne), das der Berufsausübung zugrunde liegt und das einen Lehrer von einem pädagogisch interessierten Laien unterscheidet (BROMME & STRÄSSER, 1988).“

Kompetenzen der Lehrenden sind nach HELMKE (2005) einer der wesentlichen Faktoren, die die Qualität des Unterrichts bestimmen.

Diese Position wird auch von HILL, ROWAN & BALL (2001) bezogen auf den Mathematikunterricht vertreten. Unter den verschiedenen Komponenten dieser Kompetenzen betrachten sie das mathematische Wissen der Lehrenden als wesentlich für die Leistungen der Schülerinnen und Schüler. Aus ihren Untersuchungen folgern sie, dass eine Steigerung der mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bei den mathematischen Kenntnissen der Lehrenden ansetzen muss. *"We found teachers' mathematical knowledge was significantly related to student achievement gains in both first and third grades, controlling for*

key student and teacher-level covariates. While this result is consonant with findings from the educational production function literature, our result was obtained using a measure of the specialized mathematical knowledge and skills used in teaching mathematics. This result provides support for policy initiatives designed to improve students' mathematics achievement by improving teachers' mathematical knowledge".

Welcher Art soll jedoch dieses Wissen sein? Genügt es mehr Mathematik zu studieren? BALL & BRASS (2000) vermuten, dass sich das mathematische Wissen, das zum Lehren gebraucht wird, von Wissen über Mathematik anderer Spezialisten unterscheidet.

„BALL & BRASS (2000) suggest that mathematical knowledge for teaching is different from mathematical knowledge used by other specialists."

Über mehr als drei Jahrzehnte ist versucht worden, die Komponenten des Wissens der Mathematiklehrenden zu identifizieren. *„Se ha intentado identificar diferentes dominios de conocimiento específico y caracterizar la forma en que el profesor hace uso de ese conocimiento en las situaciones de enseñanza de las matemáticas, abordando el problema desde muy diversas perspectivas teóricas (SANCHEZ, 2000)."*

SHULMAN (1986) und BROMME (1986) haben das Wissen der Lehrenden (Professionswissen) in drei Komponenten aufgeteilt: Fachwissen (content knowledge), fachdidaktisches Wissen (pedagogical content knowledge) und allgemeines pädagogisches Wissen (pedagogical knowledge) (vgl. KRAUSE et al, 2006).

Diese Unterscheidung wird ebenfalls von MA (1999) in ihrer komparativen Studie über Lehrerwissen von Lehrenden in China und USA vorgenommen. Auch MA (1999, siehe z. B. S. 145, 37, 69) zeigt in ihren Untersuchungen, dass die Qualität des Lehrerwissens direkten Einfluss auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler hat. Ein limitiertes mathematisches Verständnis der Lehrenden begrenzt auch die Möglichkeiten der Schülerinnen und Schüler in der Entwicklung ihres konzeptuellen Lernens voranzukommen. Als Problem sieht sie an, dass einige der von ihr befragten Lehrende sich überwiegend auf die Vermittlung prozeduralen Wissens beziehen. Dies allein ist nicht ausreichend, um das Verständnis der mathematischen Zusammenhänge der Schülerinnen und Schüler zu fördern; aber gar ein ungeeignetes Prozedur-Verständnis hat noch schwerwiegendere Folgen in der Lehre.

NEUBRAND (2006, COACTIV) ergänzt die professionelle Handlungskompetenz der Lehrenden und unterscheidet vier verschiedene Wissensgebiete (Professionswissen, Überzeugungen, motivationale Orientierungen und selbstregulative Fähigkeiten). In Anlehnung an SHULMANN (1986) und BROMME (1986), teilt er das Professionswissen in Fachwissen, fachdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen ein und ergänzt es um zwei weitere Kompetenzbereiche (Organisations-/Interaktionswissen und Beratungswissen). (Siehe Abbildung unten).

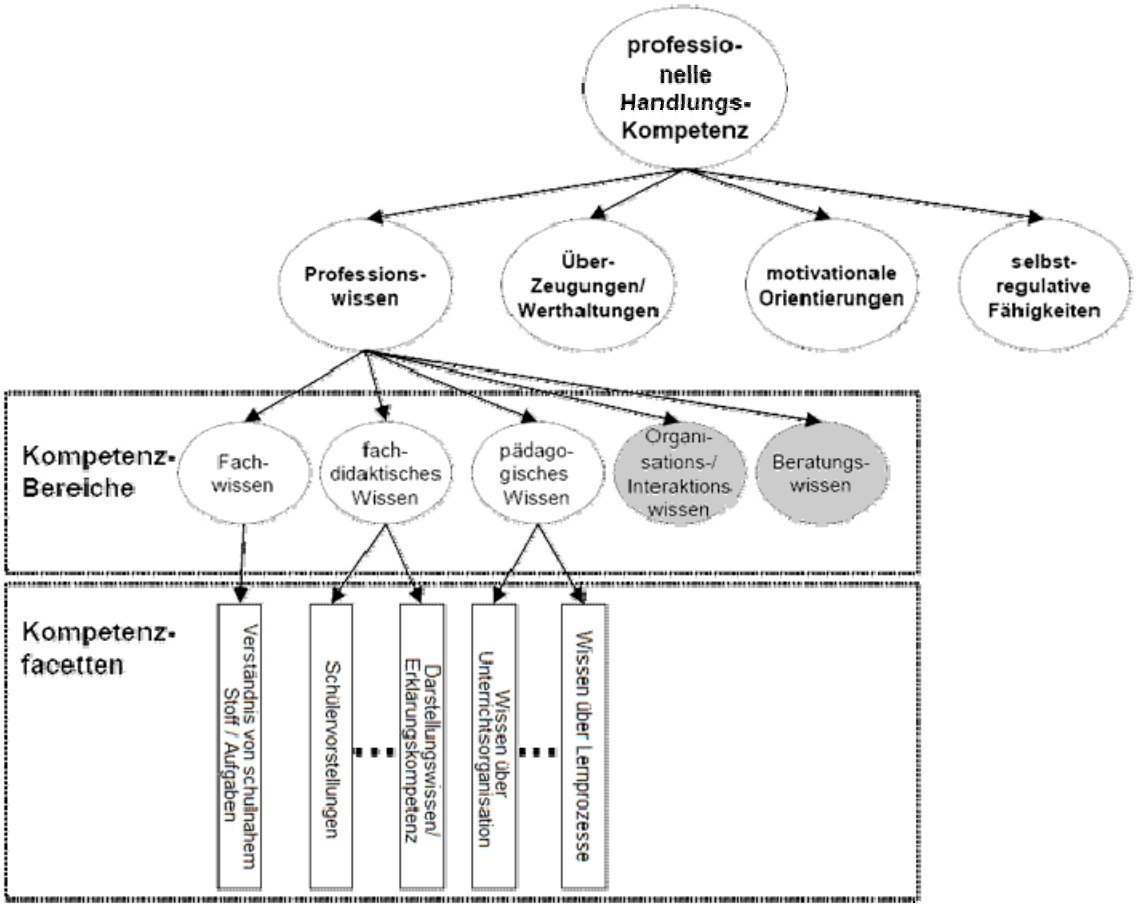


Abbildung 6.1: Professionelle Handlungskompetenz, NEUBRAND (2006, COACTIV)

Lehrpersonen gestalten durch ihre professionelle Handlungskompetenz ein Unterrichtsangebot (vgl. HELMKE 2006, Seite 24 dieser Arbeit), das von Schülerinnen und Schülern in Form von Lernaktivitäten genutzt werden soll. Die Fehler von Schülerinnen und Schüler führen zu der Frage, in welcher Beziehung dieses zum Lehrerprofessionswissen stehen könnte. Besteht also eine Verbindung zwischen Professionswissen und Schülerleistungen, scheint es sinnvoll, die Ursachen und Probleme der Studienanfänger aus der Sicht der Kompetenzen von Lehrerinnen und Lehrer zu untersuchen.

Möchte man alle Bestandteile der professionellen Handlungskompetenz der Lehrenden erfassen, müsste man auch als eine mögliche Ursache der Defizite in den Leistungen von Jugendlichen in internationalen Vergleichen auf die Lehrerausbildung hinweisen.

„Die Untersuchung der Wirksamkeit von Lehrerausbildung ist nur dann sinnvoll, wenn man davon ausgeht, dass Lehrerhandeln Schülerleistungen beeinflusst und das Lehrerhandeln mindestens zum Teil von der Qualität der Lehrerausbildung abhängt (BLÖMEKE, 2003, S. 3)“.

Erwähnt wurde in dieser Studie die von SEP (Secretaría de Educación Pública) geforderte Ausbildung der Lehrenden für die verschiedenen Schuljahre. Es ist offensichtlich, dass eine Vergleichsstudie der Lehrerausbildung (wie TEDS-M) wichtig ist, um Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen, teilnehmenden Länder zu erfassen.

Die Vergleichsstudie TEDS-M (Learning to Teach Mathematics- Teacher Education Development Study), an der auch Mexiko teilnimmt, hat sich folgende Ziele gesetzt (vgl. BLÖMEKE, LEHMANN & KAISER, 2007):

Bis Mitte 2007, soll ein internationaler Vergleich über Lehrerbildungssysteme, Profile der Ausbildungswege von Mathematiklehrern für Primarstufe und Sekundarstufe ermittelt werden. Es sollte auch eine Analyse über die verschieden Schulcurricula als Referenzrahmen geliefert werden.

Ende 2007 sollen Vergleiche über Inhalte und der Umfang von Mathematik, Mathematikdidaktik, Erziehungswissenschaft und Schulpraxis in der Lehrerausbildung vorgenommen werden, so wie Profile der Lehrerausbildner/innen erstellt werden.

Ende 2008, sollen Wissen, Einstellungen und Handlungsoptionen von zukünftigen Mathematiklehrpersonen, sowohl in der zweiten Phase als auch im letzten Jahr der Ausbildung (Professionelle Kompetenz) erfasst werden.

Folgerungen für diese Arbeit

In der vorliegenden Arbeit kann nur ein Teil der angesprochenen Aspekte untersucht werden. Es werden die drei Kompetenzbereiche Fachwissen, fachdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen bei Lehrenden untersucht im Zusammenhang mit den Fehlern, die Anfangsstudierende begehen. Die genannten Kompetenzbereiche sollen als Basis der Kategorisierung sowohl in der 2. Vorstudie bei Lehrenden als auch bei den Interviews dienen, deswegen soll auf diese Kompetenzbereiche näher eingegangen werden (vgl. NEUBRAND 2006):

a) **Fachliches Wissen** bezieht sich u. a. auf das Verständnis der zu lehrenden mathematischen Inhalte.

Wenn mathematische Aufgaben mit bestimmten Eigenschaften gestellt werden, kann man einerseits Schülerinnen- und Schülerwissen überprüfen (vgl. Kapitel 5), man könnte aber auch mit diesen Aufgabenstellungen Zugang zu professionellen Lehrerinnen- und Lehrerwissen gewinnen (NEUBRAND, 2006), in dem die fachlichen Kenntnisse der Lehrenden angesprochen werden.

In der 1. Vorstudie wurde fachliches Wissen von Lehrenden untersucht in Form von Test 1.

b) **Fachdidaktisches Wissen** umfasst Wissen über Schülervorstellungen zu diesen Inhalten sowie Wege, Schülerinnen und Schülern Gelegenheiten zu ge-

ben, sich dieses Wissen anzueignen und Wege, eigenes Wissen darzustellen, mathematische Inhalte Lernenden zugänglich zu machen. Fachdidaktisches Wissen ist auch die Fähigkeit der Lehrerin oder des Lehrers Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu erkennen. Fehler sind Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern, die durch das diagnostische Wissen der Lehrenden erkannt werden sollten. Erkennt ein Lehrender die Fehlerursachen, kann er daraus Konsequenzen für den Mathematikunterricht ziehen und Fördermaßnahmen ableiten.

Kenntnis und Verständnis der Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler setzt beim Lehrer voraus, dass er Fehler identifiziert, dass er sie beschreiben kann, dass er sie klassifiziert und typisiert, dass er dadurch zu einer adäquaten Fehlertherapie gelangt, dass er die Fehlerursachen erkennt. Diagnose und Therapie von Schülerinnen- und Schülerfehler könnten die Kompetenzen von Lehrenden übersteigen (vgl. RADATZ 1985). Durch die Analyse von Fehllösungen soll fachdidaktisches Wissen und Fachkenntnisse der Lehrerinnen und Lehrer untersucht werden.

In der 2. Vorstudie und in den fünf Interviews sollen Lehrende Fehler der Anfangsstudierenden erkennen und deren Ursache feststellen. Hier wird die Fähigkeit der Lehrenden, Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu interpretieren, untersucht.

„Wenn Lernen, vom Lehrenden, als ein aktiver, von dem Lernenden selbst zu bestimmender Prozess betrachtet wird, kommt dem Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht eine bedeutsame Rolle zu (SCHOY-LUTZ, 2005).“

Methodisches Vorgehen bei dem Versuch der Behebung und des Umgangs von Fehlern, setzt voraus, dass Lehrende die Ursache der Fehler erkennen. Die Interpretation der Interviews geht sowohl auf das Erkennen der Fehler als auch auf die methodischen Vorgehensweisen der Lehrenden ein, in Hinsicht auf welche Rolle Fehler im Unterricht haben und welche methodische Maßnahme zur Behebung der Fehler vorgeschlagen wird. So sind Vorstellungen zum Lehr-Lernprozess der Lehrenden von Bedeutung.

c) **Pädagogisches Wissen** geht vom Wissen über Lernprozesse bis zum Wissen über Unterrichtsorganisation. Für diese Arbeit sind Vorstellungen über Lehr-Lernprozesse von Bedeutung. Pädagogisches Wissen spiegelt sich oft im fachdidaktischen Wissen wieder.

Welche Vorstellungen haben Lehrende über Lehren und Lernen?

Eine Theorie (Lerntheorie, welche auch immer) ist in ihren Erkenntnissen idealtypisch, das bedeutet, dass sie nicht so einfach in der Praxis, in allen ihren Idealvorstellungen, ausgeführt werden kann. “Die Theorie”, so KLINGBERG (1990, S. 167), "im Kopf des Lehrers ist eine Legierung seiner Theorie, die stark empi-

risch, aber auch durch eigene Ideen, Grundsätze usw. strukturiert ist, und wissenschaftlicher Theoriekomponenten. Die Erfahrungen, die Lehrende machen, sind durch ihre bisherige Erfahrung und durch Theorie determiniert, vor allem aber durch eigene Tätigkeit." Damit wird die Gefahr ausgedrückt, dass die eigenen Erfahrungen als Lernender in einem rezeptiven Unterricht, insbesondere ohne eine bewusste Auseinandersetzung mit konstruktivistischen Ansätzen, vom Lehrenden weitergeführt werden.

Je nach Auffassung der Lehr-Lernvorstellung der Lehrenden werden Fehler beispielsweise bei einer eher kognitiv-konstruktivistischen Lehr-Lernvorstellung als Begleiterscheinung im Lernprozess angesehen, sie sind eine Gelegenheit, um daraus zu lernen. Werden Fehler angekreidet und als störend im Lernprozess angesehen, weist dieses auf eine eher behavioristischen Lehr- Lernvorstellung hin.

"Im Sinne des Konstruktivismus ist Lernen auf den aktiven Umgang mit Informationen zurückzuführen. Dies schließt nicht aus, dass Lehrende Wissen in Form von Vorträgen anbieten, dass Lehrende zu bestimmten Vorgehensweisen und Prozeduren anleiten. Auch für das belehrende Lernen gilt, dass Kinder nur das Lernen, was sie selbst sich zu eigen gemacht haben. Der Trugschluss des behavioristischen Ansatzes besteht darin, aus gelehrten Inhalten darauf zu schließen, was sich ein Lernender davon angeeignet hat. Das Wissen um die Notwendigkeit Wissen mit bisher erworbenem zu verknüpfen, das Wissen, dass bereits die Aufnahme von Informationen davon abhängig ist, wie weit eine Person dazu bereit ist bezüglich ihrer Aufmerksamkeit, ihres Interesses, ihrer Vorkenntnisse u.ä. macht es für Lehrende unabdingbar den Lernprozess eines Lernenden als Begleiter aufzufassen, der versucht den Lernenden zu verstehen, ihn anzuregen und zu unterstützen. Beschränkt sich das Unterrichten auf Anleiten und Vormachen, sind die Möglichkeiten des Lernenden seine eigenen Wege zu gehen, stark eingeengt. Lernende müssen verstehen was sie tun, wenn sie sich Neues aneignen, Aufgaben bearbeiten und Prozeduren verwenden." (NOLTE unv. Manuskript).

Ein beträchtlicher Unterschied besteht wahrscheinlich in der Ausbildung, sowohl bei den Lehrenden in der Primaria, als auch bei Lehrenden der Secundaria und Preparatoria (an privaten Schulen). Lehrende der Primaria erwerben weniger mathematische Kompetenzen, besuchen jedoch mehr Kurse zu pädagogischen Fragen, jedoch nicht auf Mathematikdidaktik bezogen. Die zweiten haben mehr mathematische Kompetenzen (bedingt durch die mathematischen Anteile ihrer jeweiligen Studiengänge), aber weniger Kompetenzen in pädagogischen Fragen, und vermutlich sehr wenig Kenntnisse der Mathematikdidaktik. Wieweit liegen dann die Schwierigkeiten der Studierenden an dem Professionswissen der Lehrenden?

6.1 Verlauf der Untersuchung: Zweiter Teil

2. Zielgruppe: Lehrerinnen und Lehrer

Man sollte annehmen, dass eine Lehrerin oder ein Lehrer nicht nur Aufgaben richtig lösen kann, die zu den Inhalten der Klassenstufen gehören, die sie/er unterrichtet und ein solides Fachwissen haben, sondern auch verschiedene Lösungsstrategien ausarbeiten und verstehen.

Es generierte sich die dritte Forschungsfrage:

Dritte Frage: Verfügen Lehrerinnen und Lehrer über ausreichende Mathematikkenntnisse?

Könnte die mangelnde Qualifikation der Studierenden mit einer mangelnden Qualifikation der Lehrkräfte erklärt werden?

Es folgte eine Vorstudie, in der ich erfassen wollte, ob man bei Lehrerinnen und Lehrern der 6. – 12. Klasse auch Fehler und „Wissenslücken" finden konnte. Studentinnen und Studenten der Universidad Panamericana haben zum größten Teil private Schulen besucht. Deshalb wurde diese Vorstudie, wie auch die zweite Vorstudie und das Interview, mit Lehrerinnen und Lehrern von Privatschulen durchgeführt. Die Zusammenstellung der verschiedenen Gruppen erfolgte in zufälliger Weise.

Für die Voruntersuchung wurde der erste Test von 1999 herangezogen.

2a. Erste Vorstudie: Lehrerwissen mit dem ersten Test (Anhang 1) (21 Lehrerinnen und Lehrer verschiedener privaten Schulen):

Quantitative Auswertung

Informationen: Welche Fehler machen Lehrerinnen und Lehrer des 6. – 12. Schulklasse, welche Wissenslücken weisen sie auf?

Wie weit können Lehrerinnen und Lehrer Schülerinnen und Schülern bei ihren Fehlern helfen, wenn sie selbst Fehler machen?

Auf Seiten der Schülerinnen und Schüler werden Fehler als Möglichkeit aufgefasst, dem Lernprozess genauer zu folgen, das Verständnis der Lernenden zu erfassen und Rückmeldungen für die methodische Herangehensweise zu erhalten. Wenn Lehrerinnen und Lehrer Schülerfehler nicht aufgreifen und nur ein Faktenwissen, wie z.B. 4 x 4 = 16 immer wiederholen, dann ist es notwendig auch bei den Lehrkräften Kenntnisse, mathematisches Wissen und Einstellung zu Fehlern zu untersuchen. Es handelt sich hier um eine mathematikdidaktische Frage.

Da diese Arbeit die Fehlstrategien und Fehlermuster der Studierenden untersucht, liegt die nächste Frage auf der Hand:

Vierte Frage: Reicht das mathematische Wissen und die Kenntnisse der Lehrerinnen und Lehrer aus, um Schüler-Fehlstrategien und –Fehlermuster zu analisieren und für didaktische Zwecke zu nutzen?

2b. Zweite Vorstudie: Erkennen der Schülerinnen- und Schülerfehler und Vorschlag für Hilfeleistung (7 Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und Preparatoria verschiedener Schulen):

Qualitative Auswertung

Informationen: Entdecken sie die vorgelegten Studierendenfehler? Welches methodische Vorgehen schlagen sie vor? Erkennen sie die Ursache der Fehler?

Ist das eigene Denken und Entwickeln der Lernenden von großer Wichtigkeit, so kommt auch der konstruktivistischen Einstellung zu den Fehlern eine besondere Bedeutung zu. Fehler sollten im Unterricht konstruktiv genutzt werden, dafür ist aber eine besondere Einstellung der Lehrkräfte zu Fehlern wichtig. Hier liegt die Frage nahe:

Fünfte Frage: Welche Einstellung haben Lehrerinnen und Lehrer zu Schülerfehlern?

Mit den Erkenntnissen dieser Vorstudien, die „Wissenslücken“ auch bei Lehrenden ergab und der Tatsache, dass in der zweiten Vorstudie Lehrende oft nur die richtige Lösung der Aufgabe niedergeschrieben haben, wurden 5 Lehrerinnen und Lehrer einem Interview unterzogen.

2c. Problemzentriertes-narratives Interview von 5 Lehrerinnen und Lehrer:

Qualitative Auswertung über die Erkennung der Fehler und die Vorschläge für Hilfen für ihre Schülerinnen und Schüler sowohl als auch die Befragung nach dem Stellenwert der Fehler im Unterricht

Die Befragungen der Lehrkräfte werden als qualitative Studie durchgeführt. Die Form der Befragung ist halbstandardisiert: bestimmte Fragen werden vorgegeben, weitere Fragen werden durch den weiteren Verlauf des Gesprächs bestimmt. Diese Vorgehensweise lässt sich weder als rein problemzentriertes Interview, noch als narratives Interview (nach MAYRING 2002, S.67) beschreiben. Ausgehend von der Vorlage von Aufgaben mit fehlerhaften Studierendenlösungen werden die Lehrkräfte aufgefordert sich zu äußern. Dieser Teil könnte als Orientierung am problemzentrierten Interview beschrieben werden. Die weiterführenden Fragen nach möglichen methodischen Maßnahmen ist eine eher am narrativen Interview ausgerichtete Form der Befragung. In diesem Kontext werden "typische Geschehensabläufe" (siehe MAYRING 2002, S. 73) erfragt, subjektive Bedeutungszuweisungen (a.a.O.) erhoben. Hier sollten die eigenen Äußerungen so wenig wie möglich unterbrochen werden. Die letzte Frage nach Kenntnissen zu konstruktivistischen Ansätzen sowie dem Stellenwert von Fehlern im Unterricht soll den Lehrkräften ebenfalls Gelegenheit gegeben werden, sich frei zu ihren eigenen Unterrichtserfahrungen zu äußern, dieses jedoch angeleitet durch Fragen zu einer ganz bestimmten theoretischen Position.

7. Vorstudien bei Lehrerinnen und Lehrern

Um einen Überblick über Kompetenzen der Lehrpersonen zu gewinnen, wurden zwei Vorstudien durchgeführt.

1. Mittels des ersten Tests wurden 22 Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und Preparatoria aus verschiedenen privaten Schulen (von August 2003- September 2003) untersucht.

   Dabei standen besonders folgende Aspekte im Mittelpunkt:

   a. Machen Lehrerinnen und Lehrer selbst Fehler in ihren Lösungsprozessen?
   b. Sind diese Fehler denen der Studierenden gleich?
   c. Beherrschen sie die wesentlichsten Themenbereiche der Schulmathematik?
   d. Verwenden sie besondere Verfahren, Einstellungen oder Lösungsformen, die sich bei Studierenden widerspiegeln?

2. Um der Frage nach der diagnostischen und didaktischen Kompetenz der Lehrenden nachzugehen, wurden sieben Lehrende der Secundaria und Preparatoria (Februar 2004) einem Fragebogen unterzogen, auf dem sechs fehlerhafte Studierendenlösungen wiedergegeben waren. Lehrende sollten sich zu diesen Fehllösungen äußern.

   Damit erhoben werden sollte:

   a. Bemerken Lehrerinnen und Lehrer die Fehler der Schülerinnen und Schüler?
   b. Sind Lehrende in der Lage die Ursachen der jeweiligen Fehler zu erkennen?
   c. Welches sind die Hilfestellungen, die sie den Schülerinnen und Schülern bieten würden?

7.1. Test über Lehrerwissen

Zur Analyse des fachlichen Lehrerwissens, wurde der erste Test eingesetzt (siehe Anhang 2). Für Studierende wurde dieser Test, wie im 6. Kapitel erwähnt wurde, verändert, jedoch schien es mir wichtig den Lehrerinnen- und Lehrertest unverändert zu lassen, da in ihm Themenbereiche erfragt werden, die von Studierenden nicht bearbeitet wurden (Logarithmen und Exponentialgleichungen).

Die 22 befragten Lehrerinnen und Lehrer stammen aus verschiedenen privaten Schulen. Den Lehrern wurde freigestellt, ob sie ihren Namen oder ein Pseudo-

nym verwenden wollten. Die meisten Lehrerinnen und Lehrer haben die Möglichkeit anonym zu bleiben nicht in Anspruch genommen.

Die Lösungszeit war nicht festgelegt, so dass Lehrerinnen und Lehrer genügend Zeit hatten, um die Fragen des Tests zu beantworten. Sie wurden mit Einverständnis der Schulleitungen befragt. Es sollte festgestellt werden, welche Schwierigkeiten ihre Schülerinnen und Schüler haben könnten, oder eventuell auch sie selbst, da später diese Fehler thematisiert werden sollten.

Die statistische Auswertung der Lehrerinnen- und Lehrertests erfolgt in gleicher Form, wie bei dem Test der Studierenden.

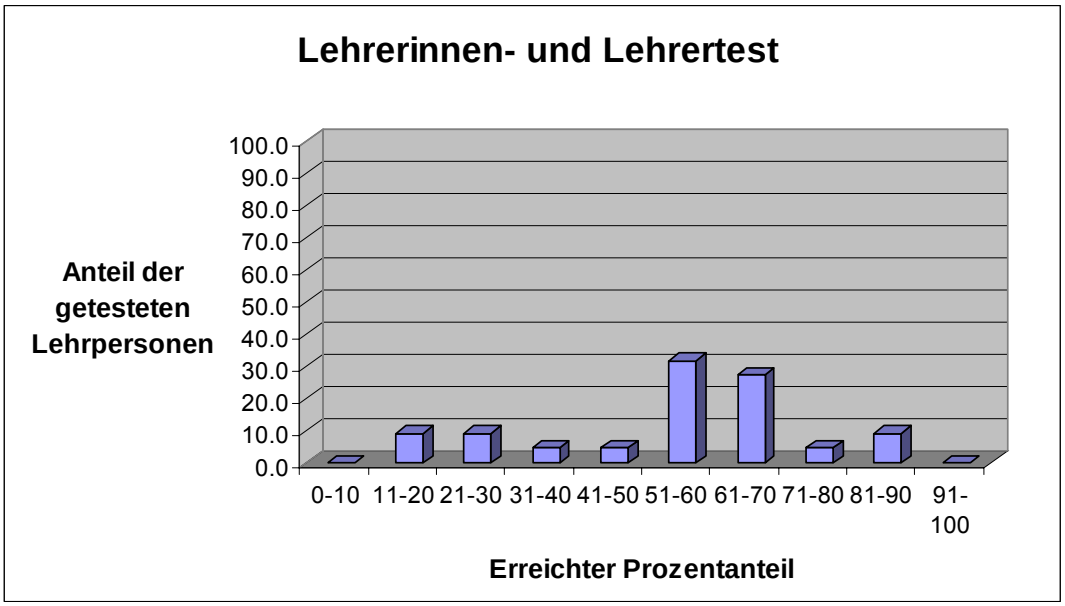
Schuljahre in denen unterrichtet wird	Erreichter Durchschnitt der Lösungen bei den Lehrenden
Secundaria (7 Lehrerinnen und Lehrer)	41,8%
Preparatoria (15 Lehrerinnen und Lehrer)	63,8%
Genereller Durchschnitt	56,5%

Hier ist ein klarer Unterscheid zwischen den Leistungen der getesteten Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und der Preparatoria zu erkennen. Es scheint, als hätten Lehrerinnen und Lehrer der Preparatoria eine bessere mathematische Grundausbildung.

In der nächsten Graphik kann man feststellen, dass die getesteten Lehrerinnen- und Lehrerprozentanteile eine relativ große Streuung haben. Es sind von 17% bis zu 88% richtig gelöster Aufgaben gefunden worden.

Ungefähr 60% der getesteten Lehrerinnen und Lehrer haben eine Note von 5 – 7 erreicht[15]. Nur 2 der 22 untersuchten Lehrendentest haben eine Note über 8 erreicht.

[15] Die Noten in Mexiko reichen von 0 – 10. Das bedeutet, dass man das Erreichen der Leistung von 0% bis 100% beschreiben kann. Ein Lehrer mit einer Note 8 hat damit etwa 80% der geforderten Leistungen erbracht.

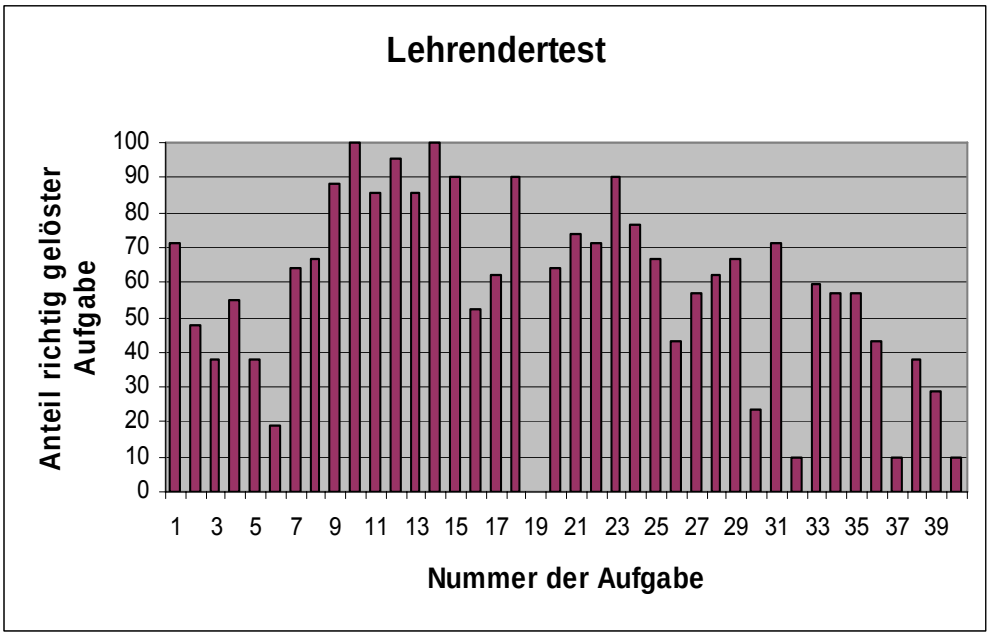


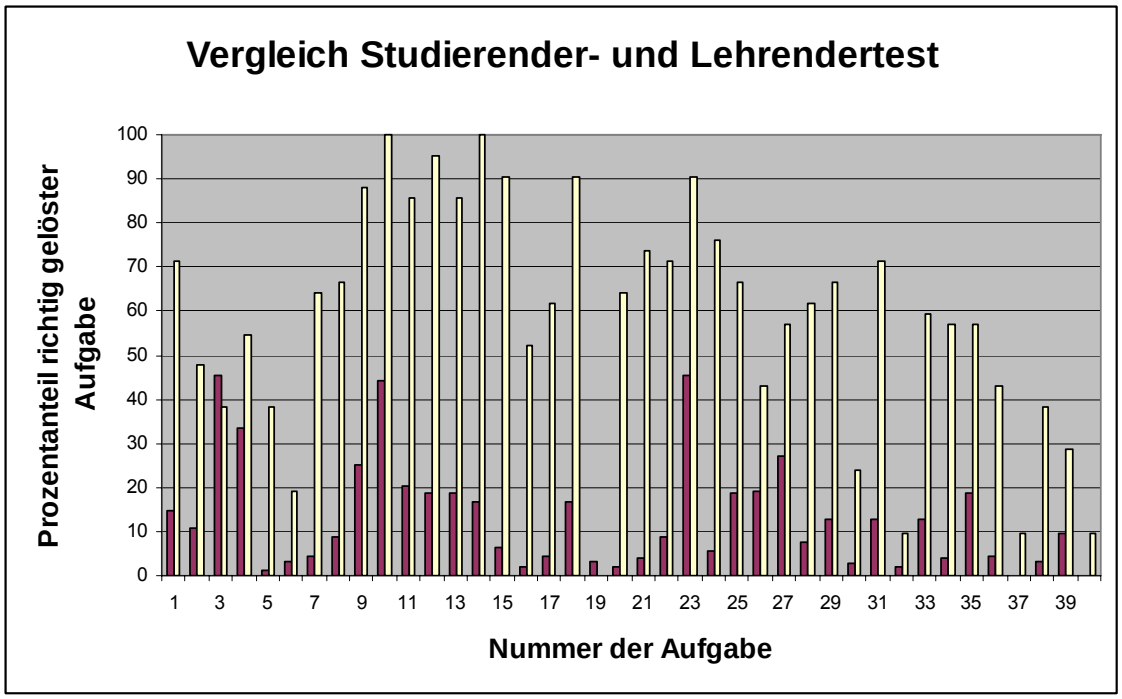
Wie bei den Studierenden ist auch hier bei den Lehrendentests, analysiert worden, wie viel Prozent der Lehrenden, die jeweilige Aufgabe gelöst haben.

Auffallend sind die Prozentanteile gewisser Aufgaben, die unter 10% erhalten haben. (Siehe Aufgabe 19 mit 0% und Aufgaben 32, 37 und 40).

Wichtig wäre, zu erwähnen, dass die Aufgaben mit einem niedrigen Prozentsatz, von den Lehrenden eher nicht bearbeitet, als falsch beantwortet wurden.

Bei einem Vergleich des Studierendentests (erster Test) und dem gleichen angewandten Test für Lehrerinnen und Lehrer fällt auf, dass die Schwankungen der richtig gelösten Aufgaben in beiden Fällen ähnlich verlaufen.





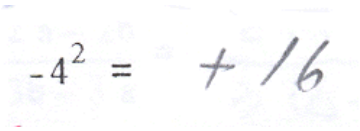
Eine vorsichtige Analyse der Lösungen von Lehrenden brachte folgende Feststellungen:

a. Lehrerinnen und Lehrer zeigen in ihren Lösungsprozessen weniger Fehler als Anfangsstudierende. Es wurden beispielsweise bei Lehrenden keine Strich- und Weglassschemata gefunden, obwohl bei der Aufgabe zwei (-4^2) bei 50% der getesteten Lehrenden ein Hierarchiefehler gefunden wurde.

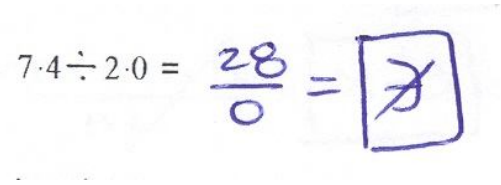
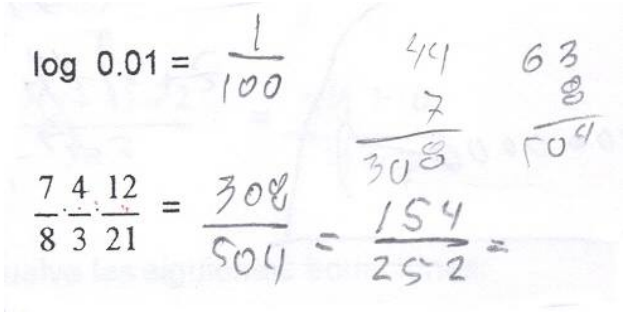
b. Aufgaben, die den Lehrenden zu schwierig erschienen, oder Themenbereiche in denen sie sich wahrscheinlich nicht sicher fühlten, wurden von ihnen eher nicht bearbeitet, als falsch beantwortet, z.B. die Aufgaben 5, 6, 30 und 32, die Logarithmen und Exponentialgleichungen behandelten. Aufgabe 19 erforderte ein etwas elaborierteres Faktorisieren und die Sachaufgaben 37 bis 40 wurden mit sehr niedrigem Prozentanteil richtig gelöst.

c. Ich stellte fest, dass Lehrende einige charakteristische Lösungsformen zeigten, die von den Studierenden übernommen werden. Es ist zu vermuten, dass diese Übernahme an verschiedenen Stellen vorgenommen wird, ohne dass eine angemessene Begriffsbildung erfolgt ist (siehe z.B. die Zeichnung zu $y = (x – 6): 3$, der Lehrende berechnet zum Zeichnen einer Geraden mehrere Punkte). Hier ist zu erwarten, dass auch die Schülerinnen und Schüler anhand der Geradengleichung nicht erkennen können, dass damit eine Gerade beschrieben wird[16].

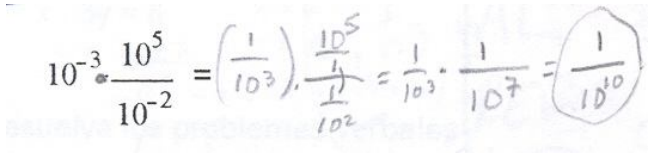
Im Folgenden sollen einige Lösungen von Lehrpersonen wiedergegeben werden, bei denen besondere Charakteristika auftraten.

Vorgegebene Aufgabe und Lösungsprozess	Schuljahr in dem, vom betreffenden Lehrenden, unterrichtet wird. Kommentar
	Preparatoria-Lehrender Dieser Hierarchiefehler spiegelt sich bei den Studierenden wider. Es könnte sein, dass der Lehrende hier unsicher bezüglich seiner Lösung war, denn die Schreibweise ein Pluszeichen vor der 16 zu notieren, ist wenig üblich. Es könnte sein, dass

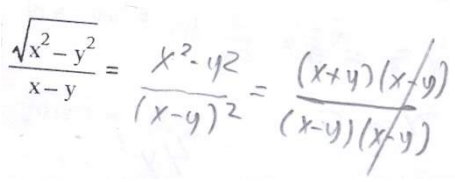
[16] Von den fast 500 getesteten Studierenden haben weniger als 5 eine Gerade anhand zweier Punkte oder unter Verwendung der Steigung und des Schnittpunkts der y-Achse gezeichnet.

	er zuerst ein – 16 niedergeschrieben hat, und dann daraus ein + 16 gemacht hat. Der Lehrende ist nicht ganz sicher in der Hierarchie der Operationen.
	Preparatoria-Lehrender Wieder ein Fehler bei der Hierarchie der Operationen, in diesem Fall, bei der Division und Multiplikation. Die Operationen wurden in der Form $((7 \cdot 4) \div (2 \cdot 0)$ [17]ausgeführt. Man kann annehmen, dass der Lehrende auf diese Weise Klammern gesetzt hat. Der Lehrende begeht Fehler mit der Hierarchie der Operationen, er errechnet diese Aufgabe nicht von links nach rechts.
	Preparatoria-Lehrender Man kann hier zwei Lösungsprozesse analysieren: 1) log 0,01 = Der Lehrende hat wahrscheinlich den log einfach fallen lassen, und nur die 0,01 in 1 /100 verwandelt. Eventuell beherrscht er das Thema Logarithmen nicht. 2) Bei der Multiplikation der

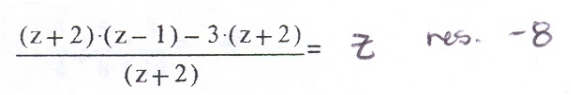
[17] Hier wird eine in Deutschland unübliche Schreibweise des Divisionszeichens verwandt.

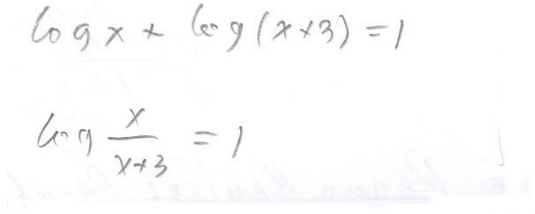
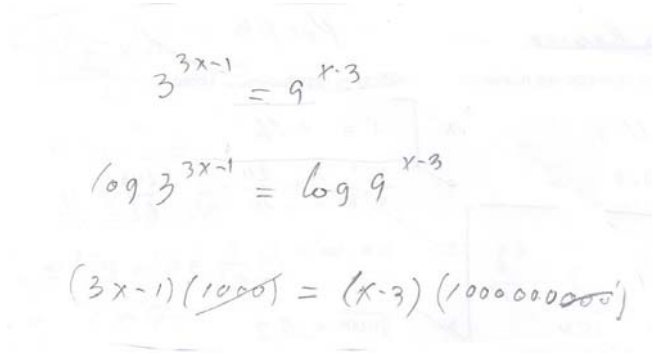
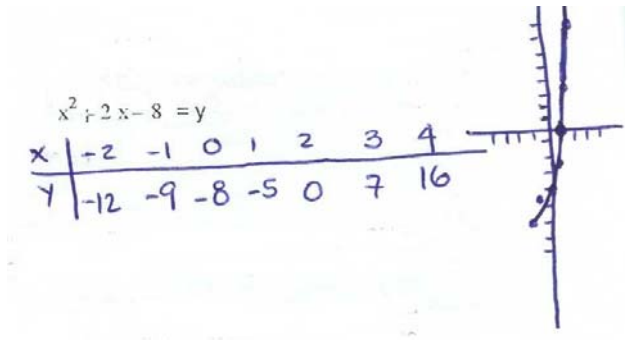
	Brüche wird vom Lehrenden die algorithmische Form[18] gewählt, in dem er erst zwei der drei Ziffern im Zähler und im Nenner multipliziert und dann mit der dritten Ziffer multipliziert. Er verrechnet sich bei der ersten Multiplikation von 4 x 12, da er 44 erhält, statt 48. Es geht auch klar aus dem Prozess hervor, dass der Lehrende die Vereinfachung des Bruches abbricht. Er hat keinen vollkommen gekürzten Bruch am Ende seines Prozesses. Studierende nehmen wahrscheinlich diese Prozesse von den Lehrenden auf und lösen algorithmisch (alle Faktoren im Zähler und alle Faktoren im Nenner werden jeweils miteinander multipliziert) und kürzen die Brüche nicht zu Ende oder gar nicht.
	Preparatoria-Lehrender Der Lehrende hat den Lösungsweg über die Transformation der negativen Exponenten gewählt. 10^{-3} = 1/ 10^{3} usw. Er wählt nicht die Regeln der Exponenten, um das Resultat zu errechnen. Begeht einen Fehler beim Algorithmus der Division von zwei Brüchen. In Mexiko ist ein Algorithmus sehr verbreitet, in dem bei der Division von zwei Brü-

[18] Unter algorithmischer Form wird verstanden, dass das Ausmultiplizieren von Zähler und Nenner vor dem Kürzen erfolgt, ohne dass berücksichtigt wird, dass vor der Multiplikation gekürzt, und damit die Terme vereinfacht werden könnten.

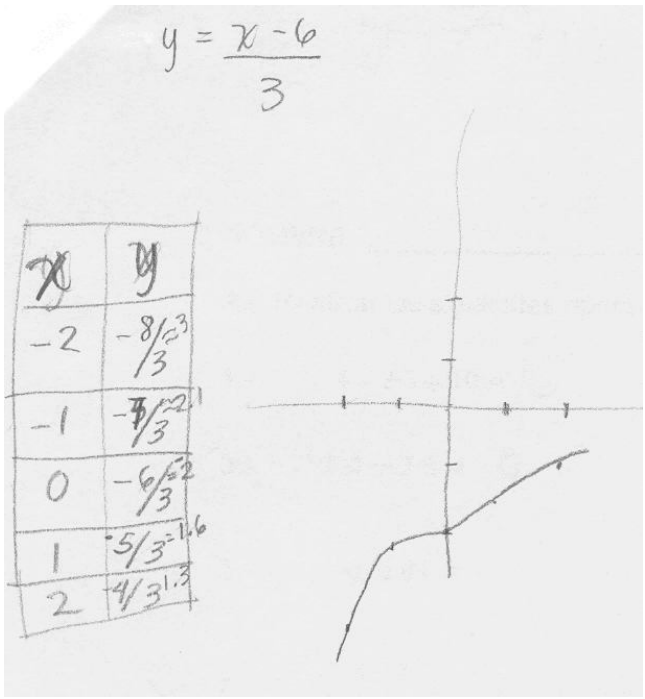
	chen, die Extreme multipliziert werden[19] und als neuer Zähler niedergeschrieben wird, und dann werden die mittleren Ziffern multipliziert, und als neuen Nenner niedergeschrieben. In der folgenden Form: $\frac{\frac{10^5}{1}}{\frac{1}{10^2}} = \frac{10^5 \cdot 10^2}{1 \cdot 1}$ Diesen Algorithmus hat der Lehrende verwechselt, da er es gerade andersherum bearbeitet. Lehrender verwechselt die Elemente im Algorithmus
	Preparatoria-Lehrender Eine ganz typische fehlerhafte Vorgehensweise der Studierenden besteht darin, dass sie bei einem algebraischen Ausdruck diesen willkürlich potenzieren, mit der Begründung, dass sie im Zähler und im Nenner das Gleiche machen. Dieser Fehler resultiert aus der Übergeneralisierung der Regel: Man kann in einem Bruch Zähler und Nenner mit der gleichen Menge (ungleich Null) multiplizieren und/oder dividieren, ohne dass sich der Wert des Bruches verändert. Bei diesem Prozess entdeckte ich diese Auffassung beim Leh-

[19] Diese Vorgehensweise ist als ein Rezept zu verstehen: die Brüche werden übereinander notiert, die beiden außen stehenden Zahlen werden multipliziert und nach oben gesetzt, die mittleren Zahlen multipliziert und unten notiert. Ohne eine Referenz zu haben wird das Vorgehen sehr fehleranfällig. Es ist zu fragen, welche Vorstellung von Bruchzahlen bei den Probanden vorhanden ist.

	renden. Zähler und Nenner wurde quadriert. Der Lehrende übergeneralisiert die fundamentale Regel der Bruchrechnung.
	Secundaria-Lehrender Auffallend ist die Form in der das Resultat präsentiert wird. Wahrscheinlich hat, obwohl keine Notation des Prozesses vorliegt, der Lehrende im Zähler die Operationen ausgeführt und dann eine Division von Polynomen vorgenommen. Es scheint, als habe er einen Fehler bei der Division gemacht. Mögliche fehlerhafte Rechnung: $(z+2)(z-1)-3(z+2) = z^2 - 2z - 8$ $(z^2 - 2z - 8) / (z+2)$ ist, wenn das Vorzeichen bei – 2z falsch war, z und man hat einen Rest von – 8. Der Lehrende faktorisiert nicht und kürzt auch nicht die Aufgabe, so dass er die vorher genannten Operationen durchgeführt haben könnte. z Rest – 8 ist eine inkorrekte Form um; $z - \frac{8}{z+2}$ zu referieren, sie ist in Mexiko wenig üblich in der Algebra. Lehrender weist algorithmische Formen in seinen Lösungsprozessen auf.

	Preparatoria- Lehrender Lehrender ist nicht ganz sicher in den Operationen mit Logarithmen. Er verwechselt die Summe zweier Logarithmen mit der Subtraktion zweier Logarithmen. Könnte es sein, dass der Lehrende nicht auf das Fundament der Logarithmen zurückgreifen kann, um die Regeln nachzuprüfen? Lehrender kennt sich in der Logarithmenrechnung nicht gut aus.
	Preparatoria-Lehrender Lehrender weiß, dass der log mit einem Zehnerlogarithmus zu tun hat, weiß auch, dass er den Exponenten mit dem log multiplizieren kann, jedoch interpretiert er ihn als 10^3 und 10^9. Lehrender kennt einige Regeln der Logarithmen, da er nach der Anwendung von Logarithmen auf beiden Seiten der Gleichung die Exponenten multipliziert. Jedoch kann er den Ausdruck log 3 nicht interpretieren. Lehrender beherrscht die Logarithmen nicht.
	Preparatoria-Lehrender Aus diesem Lösungsprozess kann man entnehmen, dass der Lehrende die Graphik einer quadratischen Funktion eher durch das Berechnen der Werte in einer Tabelle vornimmt, als die wichtigsten Daten der Parabel zu suchen (Scheitel-

	punkt, die Schnittpunkte mit den Axen und eine Analyse nach wohin die Parabel aufgeht). Man kann auch erkennen, dass diese Tabelle mit x-Werten von -2 bis 4 angefertigt wurde, wobei, beim Einsetzen der -2 ein Rechenfehler entsteht, wahrscheinlich durch die Annahme, dass $(-2)^2 = -4$ ist. So ist die Parabel unvollständig, da sie nicht ihre wichtigsten Eigenschaften aufweist. Diese Formen der graphischen Darstellung anhand einer Tabelle sind bei Studierenden sehr verbreitet, sie berechnen eine Tabelle einer linearen Funktion und können, wie vorher gezeigt wurde, (durch einen eventuellen Rechenfehler) eine gezackte Linie erhalten. Lehrender stellt eine Graphik durch algorithmische Formen auf, durch Tabulationen. Dabei können wichtige Informationen der Graphiken oder Funktionen entfallen. Werden von Schülerinnen und Schülern Tabulationen von x = -2 bis x = 2 angefertigt, ohne Rücksicht auf die Besonderheiten einer Funktion?

	Secundaria-Lehrender Der Lehrende fertigt eine Tabelle an, in der er Bruchzahlen erhält, die er, um sie in das Koordinatensystem einzeichnen zu können, in Dezimalzahlen ausdrückt. Dabei geht er mit den Daten sehr flexibel um, 8/3 = 3, 7/3 = 2,1. Beim Zeichnen der Daten in das Koordinatensystem und dem Verbinden der einzelnen Punkte entsteht eine Kurve und nicht eine Gerade. Der Lehrende lässt die „Gerade“ so stehen. Hat der Lehrende erkannt, dass die Funktion, die er aufzeichnen sollte, eine Gerade war? Akzeptiert er bei Schülerinnen und Schülern eine solche Gerade? Kann dieses bei Schülerinnen und Schülern zu Fehlern führen?

Man erkennt in diesen Prozessen eine klare Tendenz zur algorithmischen Lösung der Aufgaben, sei es eine Graphik, die durch Tabulationen durchgeführt wurde, oder einen Algorithmus bei der Multiplikation von Brüchen.

Eine andere Frage ist, wie weit Lehrende der Secundaria und Preparatoria Themenbereiche wie Logarithmen und Exponentialgleichungen beherrschen. Können dann Anfangsstudierende sie beherrschen?

Diese erste vorläufige Studie führte zu der Frage, ob Lehrende Schülerfehler entdecken können und ob sie Lernenden Hilfestellungen anbieten können.

7.2. Schriftliche Befragung zu Fehllösungen der Lernenden

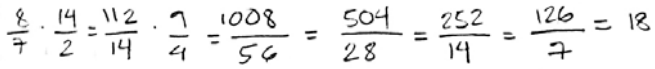
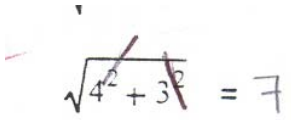
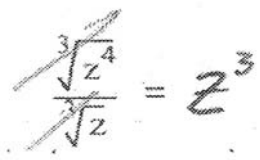
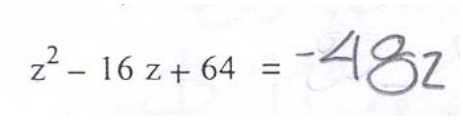
Dazu wurden sieben Lehrerinnen und Lehrern (Februar 2004) verschiedener privaten Schulen ein Fragebogen mit Fehllösungen von Anfangsstudierenden vorgelegt; mit der Überschrift:

Bei jeder der nächsten Schülerinnen- und Studierendenlösungen analisieren Sie die Problematik der Schülerin oder Schüler, die Fehlerursache und

wie Sie meinen, dass der Schülerin oder dem Schüler geholfen werden kann.

Den Lehrerinnen und Lehrern wurde freigestellt, ob sie ihren Namen auf die Fragebögen schreiben wollten, oder ob sie ein Pseudonym verwenden wollten. So steht auf einigen Fragebögen der Vorname der Lehrerin oder des Lehrers, oder auch nur ein z.B. Dreieck.

Die vorgelegten Aufgabenlösungen wurden dem zweiten Test entnommen:

1		Entdeckt werden sollte der Missbrauch des Gleichheitszeichen und in wie weit, vom Lehrenden erkannt wurde, dass die Aufgabe in einer strikt algorithmische Form gelöst wurde. Lösen der Aufgabe durch Kürzungen weist auf Flexibilität im Bruchrechnen hin.
2		Ein Abarbeiten „eins nach dem anderen“ und hineinprojizieren eines Musterbeispiels $\sqrt{a^2} = a$, führen zu Fehlern. Lehrende sollten die Ursache dieses Fehlers entdecken.
3		Übergeneralisierung der Kürzungsprozesse in einem algebraischen Bruch.
4		Keine angebrachten Fatorisierungskonzepte. Konkatenationsprobleme, eher als ein Erkennen, dass nicht ähnliche Terme addiert

		wurden, welches die Folge darstellt.
5	$\frac{y\cdot(y+2)+(y+2)}{y+2} = y^2+2y$	Streich- und Weglass-schema, keine Berück-sichtigung der 1 in der Division und des „al-leingelassenen“ Plus-zeichens. Schwierigkeiten beim Erkennen der Term-struktur
6	$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m} = \frac{x^{m+2}-5^{m+2}}{x^m-5^m}$ x^2+1^2	Verteilung der Potenzen auf die einzelnen Sum-manden. Hineinprojizie-ren von Musterbeispie-len a/a, ohne Berück-sichtigung der Subtrak-tion im Zähler und Nen-ner des Bruches. Ver-schiedenartige Bearbei-tung der „Divisionen“, je nach empfundenem Schwierigkeitsgrad.

Die beantworteten Fragebögen der sieben befragten Lehrerinnen und Lehrer sind nach Aufgabennummern getrennt worden, um einen besseren Eindruck zu bekommen. Bei jeder Antwort wird der Kommentar der Lehrerin oder des Lehrers übersetzt dazugeschrieben. Ich versuchte getreu zu übersetzen, jedoch musste an einigen Stellen der Kontext mit einbezogen werden.

Bei der Deutung der schriftlichen Befragung und bei den Interviews, wurden die Aussagen kategorisiert. Die Kategorienbildung ist einerseits theoriengeleitet, aber andererseits, auch empiriegeleitet, da sie auf die Aussagen von Lehrenden eingehen. Kategorien wurden wie folgt gebildet.

7.3 Kategorienbildung:

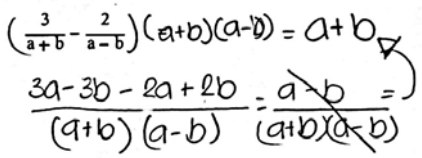
Hauptinteresse der Studie ist die Analyse der Studierendenfehler und das Erkennen/das Reagieren/das methodische Vorgehen und der Verständnisprozess der Lehrerinnen und Lehrer in Hinsicht auf diese Fehler.

Dem empirischen Material (sowohl der schriftliche Befragung zu Fehllösungen als auch der Interviews zu Studierendenfehllösungen), wurden Begriffe bzw.

Kodes zugeordnet, in denen Daten und Phänomene es zu erfassen galt, die zunächst möglichst nahe am Text formuliert waren. Diese erste Phase bestand in einer abschnittsweisen offenen Kodierung (vgl. FLICK 2004, S. 259). Die Begriffe, sollten Antwort auf die Forschungsfragen geben:

Als Beispiel zur offenen Kodierung, dieser Abschnitt, aus dem Interview mit Enrique (erster Teil, Aufgabe 4):

E: Das negative Zeichen, das negative Zeichen betrifft immer, betrifft den ganzen Bruch. Tatsache, die hier nicht beachtet wird.



1. Kodierung: Enrique erkennt einen der Fehler „Das negative Zeichen...Tatsache, die nicht beachtet wurde“, jedoch nicht die ganze Problematik der Fehllösung.

2. Kodierung: Enrique beschreibt, was der Studierende hätte Denken müssen „das Minuszeichen betrifft immer den ganzen Bruch“

3. Kodierung: Enriques Ausdrucksweise ist nicht präzise genug: „Betrifft den ganzen Bruch“.

4. Kodierung: Enrique erfasst die Ursache des Fehlers nicht

Da die Kodierungen und spätere Kategorisierungen an den Forschungsfragen orientiert werden sollten, standen die Forschungsfragen als thematische Struktur im Vordergrund.

- Erkennen Lehrende, dass Aufgaben Fehler enthalten?
- Erkennen sie alle Fehler in einer Aufgabe?
- Welche methodischen Maßnahmen halten sie bei den jeweiligen Fehlern für angebracht?
- Lässt sich daraus eine generelle Haltung zur Lehr-Lernvorstellung ableiten?
- Welche allgemeinen Aussagen machen sie zur Bedeutung und zum Umgang mit Fehlern in ihrem Unterricht?

Im offenen Kodieren entstanden eine Vielzahl von Kategorien, die im nächsten Schritt (weiteren Überarbeitungen) verfeinert und differenziert wurden. Es wurden diejenigen Kategorien ausgewählt, die vielversprechend erschienen. Beispielsweise:

Identifikation des Fehlers: Unvollständig

Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrenden

Beschreibung der korrekten Vorgehensweise

Es erwies sich, dass, beispielsweise, diese Kategorien, auch auf den weiteren Verlauf der einzelnen Interviews angewandt werden konnten, als auch auf die anderen Interviews, womit ein Ziel der Kodierung und Kategorisierung erreicht wurde, das Herausarbeiten von Gemeinsamkeiten in und Unterschieden zwischen den verschiedenen Interviews (vol FLICK 2004, S.275).

Die im zweiten Schritt erfassten Kategorien sollen zu Überkategorien zusammengefasst werden. Die Einteilung des Professionswissens soll Fundament für die Kategorienbildung sein (Fachwissen, fachdidaktisches Wissen und pädagogisches Wissen).

Fachliches Wissen:	Verständnis der zu lehrenden mathematischen Inhalte
Fachdidaktisches Wissen:	Wissen über Schülervorstellungen zu den Inhalten Wege der Aneignung der mathematischen Inhalte Kenntnisse über Denkweisen der Schülerinnen und Schüler
Pädagogisches Wissen:	Wissen über Lernprozesse

Jedoch erwies es sich, dass durch die verschiedenen Forschungsfragen eine weitere „Quer-Kategorienbildung“ erfolgen musste:

A) Fähigkeiten der Lehrenden: z.B. Haben diese die Fehler erkannt? Beschreiben sie die Vorgehensweise der Studierenden?

B) Reaktion auf Fehler: z.B. Weist er auf einen Regelverstoss hin? Kreidet er Fehler an?

C) Methodisches Vorgehen: z.B. Zeigt er den Schülerinnen und Schülern, wie die Aufgabe richtig vereinfacht wird? Schlägt der Lehrende mehr Übung vor?

D) Ursachen vom Lehrenden zitiert: z.B. Macht er mangelnde Kompetenz anderer Lehrer für Schülerfehler verantwortlich? Macht er mangelndes Üben der Schülerinnen und Schüler für die Fehllösungen verantwortlich?

E) Verständnis vom Lernprozess: z.B. Hilft Wiederholung der Inhalte Fehler vermeidenden? Glaubt er das Verständnis durch wiederholtes Üben zu erreichen?

F) Erfassen der Ursache: Hat er die Ursache des Fehlers erkannt? Der Lehrende sollte beispielsweise erkennen, dass bei einem Fehler wie x+3 = 3x ein Konkatenationsfehler besteht.

G) Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge: Gibt er Hinweise auf begriffliche Zusammenhänge?

Im Folgenden sollen die „Querkategorien“, die für diese Arbeit ausgearbeitet wurden, eingestuft werden unter Professionswissen der Lehrenden.

Als erste „Querkategorie“ wurden die Fähigkeiten der Lehrenden aufgezeigt.

Können sie die Fehler identifizieren? Ist die Aufgabe richtig oder falsch gelöst? Ohne ein fachliches Wissen des Lehrenden könnte ein Fehler nicht erkannt werden? Ein Lehrender konnte beispielsweise, in einer Aufgabe, einen von mehreren Fehlern entdecken, die Identifikation erfolgte unvollständig (vgl. Ausschnitt aus Enriques Interview weiter oben).

Gebraucht ein Lehrender eine unangebrachte Ausdrucksweise, die sich später bei Schülerfehlern widerspiegelt?

Macht ein Lehrender selber Fehler bei der Lösung/Vereinfachung der Aufgaben?

	A) Fähigkeiten des Lehrers:
Fachliches Wissen:	1) Identifikation des Fehlers a) richtig b) nein c) unvollständig d) vollständig 2) Interpretation der Vorgehensweise des Schülers 5) Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers 7) Identifiziert Defizite (nicht beherrschte Inhalte) durch Fehler 8) Macht selber Fehler 9) Kein weiteres Erkennen der Fehler während des Interviews
Fachdidaktisches Wissen:	3) Bezeichnet Fehler als Muster 4) Beschreibung anderer Musterfehler

	6) Falscher Hinweis auf die Ursache
Pädagogisches Wissen:	10) Erkennt den Stellenwert des Fehlers im Lernprozess des Schülers nicht

Wie reagiert ein Lehrender auf Fehler?

Zeigt er seinen Schülerinnen und Schülern den korrekten Weg?

Nutzt er Fehler um eventuell eigene methodische Vorgehensweisen zu reflektieren?

Einige der Kategorien überschneiden sich, wie z.B. „so wird es gemacht“, kann als fachliches Wissen eingestuft werden aber auch als Instrument um fachdidaktisches und pädagogisches Wissen des Lehrers zu untersuchen. Der Lehrende weiß, wie eine Aufgabe hätte gelöst werden sollen, meint eventuell es sei ein Weg zur Aneignung des mathematischen Inhalts, und weist somit vermutlich auf seine Lehrvorstellungen hin.

	B) Reaktion der Lehrer auf Fehler
Fachliches Wissen:	So wird es gemacht
Fachdidaktisches Wissen:	So wird es gemacht Fehler ankreiden Weist auf Regelverstoß hin Verlangt eine Korrekte Wiederholung Diskutiert Fehler mit Schülern
Pädagogisches Wissen:	Nutzt Fehler um eigene methodische Vorgehensweisen zu reflektieren (z.B. Zweifelt an eigenen Vorgehensweisen) Weist die Klasse auf den Fehler hin Nimmt sich Zeit (Geduld mit langsamen Lernern) Kritisiert vorsichtig-möchte Gefühle nicht verletzen

Methodische Vorschläge werden von einer bestimmten Vorstellung vom Lernen getragen: Sind diese eher lehrerzentriert, so wird man in den Interviews Aussagen finden, die auf Übertragung des Wissens, Schrittweises zerlegen der Inhalte, zeigen, vormachen, nachvollziehendes Lernen, Regellernen und Routineanforderungen, u.s.w, hinweisen.

Kategorien sind dem eher lehrerzentrierten und eher schülerzentrierten Unterrichtsformen entnommen. Diese Kategorien können je nach Kontext (Verlauf des Interviews) in deren Interpretationen variieren.

	C) Methodisches Vorgehen der Lehrer
Fachliches Wissen:	4) Zeigen (vormachen) 6) Hinweis auf Regeln: a) Warum nicht b) Wann ja
Fachdidaktisches Wissen:	1) Mehr vom Gleichen 2) Üben 4) Zeigen (vormachen) 5) Zeigen (durch Mitschüler) 6) Hinweis auf Regeln: a) Warum nicht b) Wann ja 7) Veranschaulichungen 8) Systematisch Fehler einbauen 11) Themen kombinieren 12) Neue Veranschaulichungen versuchen 13) Erklärungen 10) Inhalte vereinfachen 16) Diagnostik 21) Umgang mit Fehlern 22) Bedeutungszuweisung
Pädagogisches Wissen:	9) Aufmerksamkeitslenkung 14) Motivation a) intrinsische b) extrinsische

	15) Extrastunden 17) Vertrauen geben, alles Fragen zu dürfen 18) Aufmerksamkeit durch Entspannung erzeugen 19) Neue Methoden versuchen 20) Kognitiver Konflikt

Ursachen der Fehler, die von Lehrenden zitiert wurden, konnten in drei Unterkategorien eingeteilt werden: Ursache beim Schüler, Ursache beim Lehrer und Ursache bei den Inhalten.

Wer oder was ist für die Schülerfehler verantwortlich? Vorausgegangener Unterricht, oder eventuell mangelnde Kompetenz bei Lehrenden? Fehlende Vorkenntnisse oder mangelndes Üben könnten Aussagen der Lehrenden sein, weswegen Schülerinnen und Schüler Fehler machen.

	D) Ursachen, von Lehrern benannt		
	1) Beim Schüler	**2) Beim Lehrer**	**3) Bei Inhalten**
Fachliches Wissen:		a)Vorausgegangener Unterricht	
Fachdidaktisches und pädagogisches Wissen	a) Fehlerhafte Informationsaufnahme b) Fehlerhafte Prozedur c) Verwechslung von Prozeduren d) Mangelndes Üben e) Fehlende Vorkenntnisse f) Mangelnde Fähigkeit zur Abstraktion g) Festigung von falschen Verfahren h) Schüler hören nicht auf Lehrer i) Für Schüler machen Erklärungen keinen Sinn j) Schüler lernt nur für die	b) Mangelnde Kompetenz c) Nicht genug Nachdruck d) Kann sich nicht verständlich machen	a) Besonders Anspruchsvoll b) Andere (z. B. Spezifische Schwierigkeiten mit der Null)

	Klassenarbeit und vergisst dann k) Keine Anstrengungsbereitschaft		

Besonders wichtig schien mir die „Querkategorie“: Verständnis vom Lernprozess. Hier konnte ich einige Hinweise auf das fachdidaktische und pädagogische Wissen der Lehrenden finden, wenn auch schon Hinweise zuvor evident wurden.

Haben Lehrende bestimmte Vorstellungen über Lernprozesse (pädagogisches Wissen) dann werden diese auf ihren Mathematikunterricht (fachdidaktisches Wissen) übertragen.

	E) Verständnis vom Lernprozess
Fachliches Wissen:	
Fachdidaktisches Wissen und Pädagogisches Wissen:	1) Erkenntnis durch Anleitung a) Aufzeigen b) Üben c) Einsicht 2) Üben = Mechanisieren 3) Erkenntnisse des Schülers mit Unterstützung des Lehrers 4) Identifikation von Fehlern hilft Fehler vermeiden (Stelle des Fehlers finden) 5) Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden (Regeln noch einmal durchgehen) 6) Kollaboratives Lernen 7) Fragendentwickelnden Unterricht 8) Kognitiver Konflikt

Unter „Erfassen der Ursache“ eines bestimmten Fehlers sollte von Lehrenden angegeben werden, welchen fehlerhaften Gedankengängen der betreffende Schüler nachgegangen ist. Konkatenationsfehler, oder auch hineinprojizieren von Musterbeispielen u.a., wie sie in der Deutung der Fehler im Kapitel 5.4 angegeben wurden.

	F) Erfassen der Ursache

Fachliches Wissen:	
Fachdidaktisches Wissen: Kenntnisse über Denkweisen der Schülerinnen und Schüler	1) Ja, die Ursache des Fehlers wurde erfasst 2) Nein, die Ursache der Fehlers wurde nicht erfasst
Pädagogisches Wissen:	

	G) Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge
Fachliches Wissen:	
Fachdidaktisches Wissen: Wissen über Aneignung mathematischer Inhalte	1) Ja 2) Nein
Pädagogisches Wissen:	

Lehrende haben sich oft vom konkreten Beispiel gelöst und haben andere Musterfehler angegeben und diese besprochen.

H) Löst sich vom konkreten Beispiel

Besonders Raúl war die affektive Komponente im Lernprozess wichtig.

I) Affektive Komponente im Lernprozess

Eine Aussage, die auch oft gefunden wurde war, dass einige Schülerinnen und Schüler (in etwa 20%) einen beträchtlichen Rückstand aufweisen.

J) Beobachtet, dass einige Schülerinnen und Schüler im Rückstand sind

Eine wichtige Frage schien mir, ob Lehrende bis zur Zeit des Interviews Gelegenheit gehabt haben, an einem Mathematikdidaktikfortbildungskurs teilzunehmen. Wie kann ein Lehrender sich über Ursachen und methodische Maßnahmen zur Behebung von Fehlern Gedanken machen, wenn er nicht mathematikdidaktisch gefördert wird?

K) Teilnahme an Fortbildungskurse in Mathematikdidaktik: Ja, Nein

So konnte ich nach den Kategorisierungen, durch die Häufigkeit der Kategorien und Subkategorien der schriftlichen Befragung als und auch der Interpretation der Interviews, Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei Lehrenden verstellen.

Als erstes, sollen die Aussagen in der schriftlichen Befragung der 7 Lehrenden, zu Studierendenfehlern, an Hand der Kategorisierungen vorgenommen werden. Dazu sollen die häufigsten Kategorien, jeweils, an einem Beispiel erläutert werden.

Die Befunde der einzelnen Lehrenden findet man im Anhang 10 wieder.

Die Häufigkeit der betreffenden Kategorie wurde in [] angegeben.

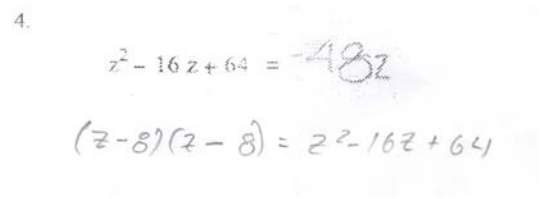
A1a: Identifikation des Fehlers (richtig) [32]; A1b: nicht identifiziert [9]

Lehrende haben zum größten Teil die Fehler identifiziert, dass heißt, sie wussten, dass ein Fehlprozess vorlag.

Es soll hier ein typisches Beispiel einer nicht Identifikation eines Fehlers dokumentiert werden.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Pedro, Aufgabe 4:

Von ihm wurde kein Kommentar gegeben.



Pedro hat die Aufgabe nach den Angaben: Faktorisiere, gelöst. Jedoch geht klar hervor, dass Pedro die Art des Fehlers nicht erkannt hat.

Fehler identifizieren, ist der erste Schritt, ohne eine Fehleridentifikation kann einer Schülerin oder einem Schüler nicht geholfen werden.

Unvollständige Identifizierung von Fehlern (wenn mehrere Fehler in einer Aufgabe vorhanden sind) kann wahrscheinlich nicht den gesamten Gedankengang der Studierenden nachverfolgen und somit eine Schwierigkeit zur Fehlerbehebung sein.

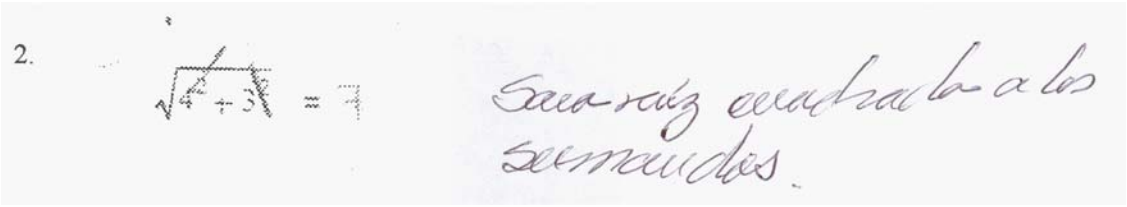
Fehler nicht identifizieren, weist auf eine mangelnde fachliche- und diagnostische Kompetenz der Lehrerin oder des Lehrers hin. Schülerinnen und Schülern kann nicht geholfen werden, wenn Lehrerinnen und Lehrer die Fehler nicht erkennen.

A2: Interpretation der Vorgehensweise des Schülers [10]

Lehrende haben den Lösungsprozess beschrieben, also erwähnt, wie der Schüler vorgegangen ist.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von José Antonio, Aufgabe 2:

„Zieht die quadratische Wurzel aus den Summanden“



José Antonio hat als Ursache die Vorgehensweise angegeben.

Aus der Beschreibung der Vorgehensweise kann man zwar den Fehler eventuell erkennen, jedoch wird dadurch noch keine Fehlerursache erkannt.

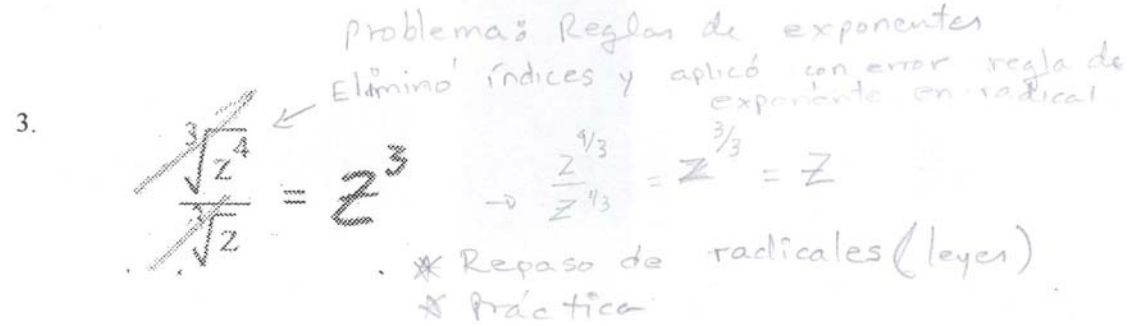
A5: Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers [7]

Lehrende haben in der Beschreibung oder Suche nach dem Fehler, eine unangebrachte Ausdrucksweise gebraucht (eliminieren, statt kürzen, etc.)

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Navega, Aufgabe 3:

„Er löst nicht die Teile, die die Operation zusammensetzen, sondern eliminiert das was gleich ist.

Braucht die grundlegenden und fundamentalen Operationen des Hantierens mit Wurzeln.“



Der Studierende hat einen Lösungsprozess vorgenommen, in dem er „eliminiert hat“. Diese unangebrachte Ausdrucksweise eines Lehrers führt bei Schülerinnen und Schüler zu Fehlern, die mit der Interpretation „eliminiert, nichts bleibt übrig (0)“ zusammenhängen.

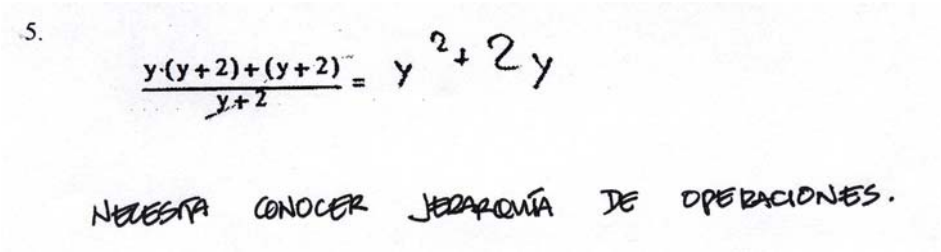
Unangebrachte Ausdrucksweisen der Lehrerinnen und Lehrer führen bei Schülerinnen und Schülern zu Fehlern.

A6: Falscher Hinweis auf die Ursache [11]

Lehrende gaben eine Fehlerursache an, mit deren Erklärung die Schüler wahrscheinlich nicht ihre Fehler hätten einsehen können.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Vidrio, Aufgabe 5:

„Muss die Hierarchie der Operationen besser kennen“



Sowohl für ein methodisches Vorgehen: Wiederholung der Inhalte als auch als ein Hinweis für die Ursache, würde die Hierarchie der Operationen diesen Fehler nicht erklären. Dieser Fehler ist nach MALLE (1993) ein Hineinprojizieren eines Musterbeispiels.

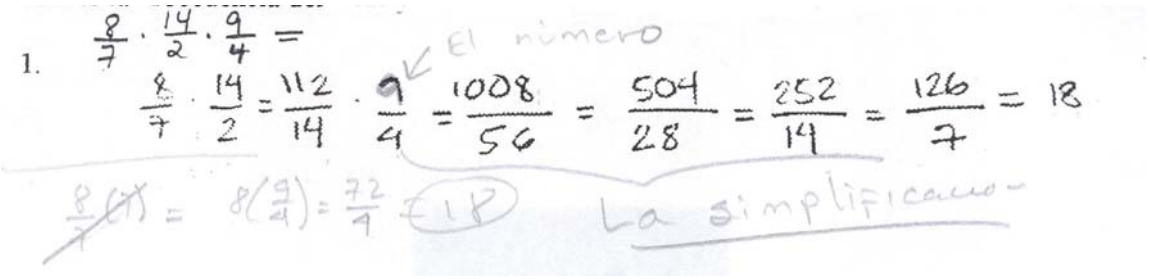
Besteht ein falscher Hinweis auf die Ursache des Fehlers, kann einer Schülerin oder einem Schüler wenig geholfen werden.

A8: Macht selber Fehler [3]

In drei Lehrendenausführungen wurden Fehler entdeckt.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Navega, Aufgabe 1:

„Das Kürzen“



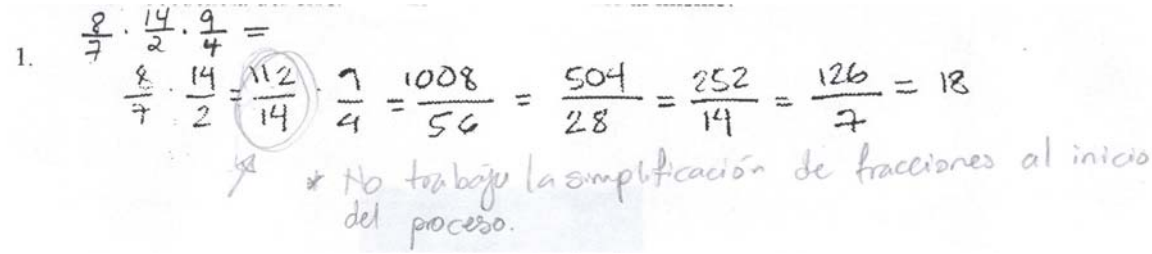
In der Ausführung von Navega (siehe unten), ist ein Missbrauch des Gleichheitszeichens zu erkennen. Der erste Term ist nicht dem zweiten gleich. Er erkennt den Fehler des Missbrauchs des Gleichheitszeichens bei dem Studierenden nicht, er macht den gleichen Fehler.

B1: So wird es gemacht [2]

Lehrer beschreiben die Form in der die Aufgabe hätte gelöst werden müssen. Dieses „so wird es gemacht“ hängt stark mit C4 zusammen (Zeigen (vormachen)).

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Dreieck, Aufgabe 1:

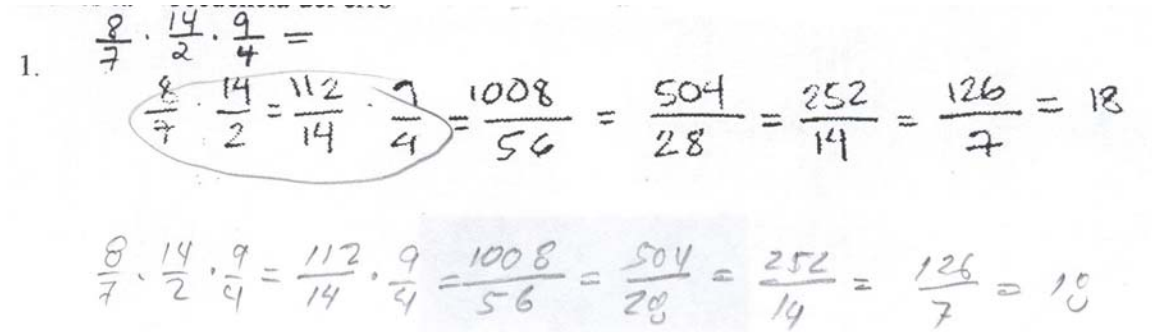
„Es wurde die Vereinfachung der Brüche am Anfang des Prozesses nicht bearbeitet“



So hätte es gemacht werden müssen, die Bearbeitung der einzelnen Kürzungen während der Ausführung der Aufgabe. Geht nicht auf eine Kürzung der gesamten Aufgabe ein, nur immer in den Zwischenresultaten.

B2: Fehler ankreiden [1]

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Pedro, Aufgabe 1:



Von Pedro wurde die Stelle, wo ein Missbrauch des Gleichheitszeichens vorkommt, eingekreist. Als weitere Erklärung löst er die Aufgabe korrekt, unter dem Prozess des Studierenden.

Es geht zwar nicht klar hervor, dass er den Missbrauch des Gleichheitszeichens meint, aber es ist anzunehmen.

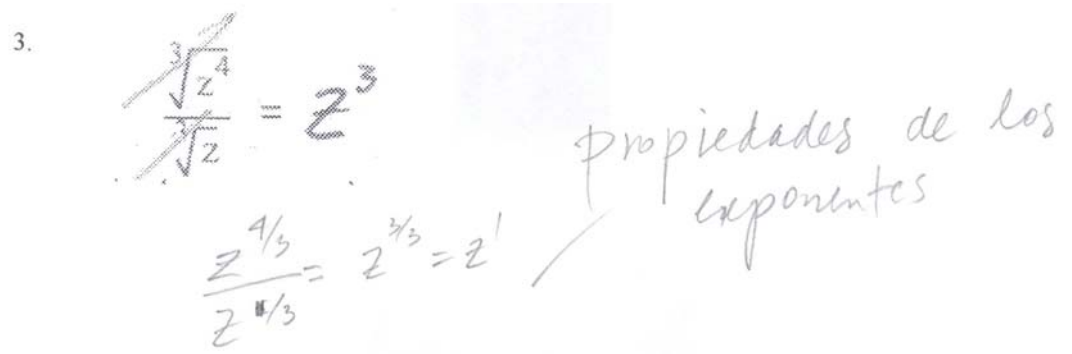
Ein ankreiden der Stelle wo ein Fehler besteht, hilft ohne Kommentar der Schülerin oder dem Schüler wenig weiter.

B3: Weist auf Regelverstoß hin [6]

Sechs Mal ist auf ein Regelverstoß hingewiesen worden, Regelverstoß hängt stark mit C6 zusammen (Hinweis auf Regeln, warum nicht, wann ja).

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Vidiro, Aufgabe 3:

„Regeln der Exponenten“



Vidrio hat als Kommentar geschrieben: „Regeln der Exponenten". Er weist hiermit wahrscheinlich auf einen Regelverstoß hin, und eine Anweisung auf die durchzuführenden Maßnahmen: Exponentenregeln bearbeiten.

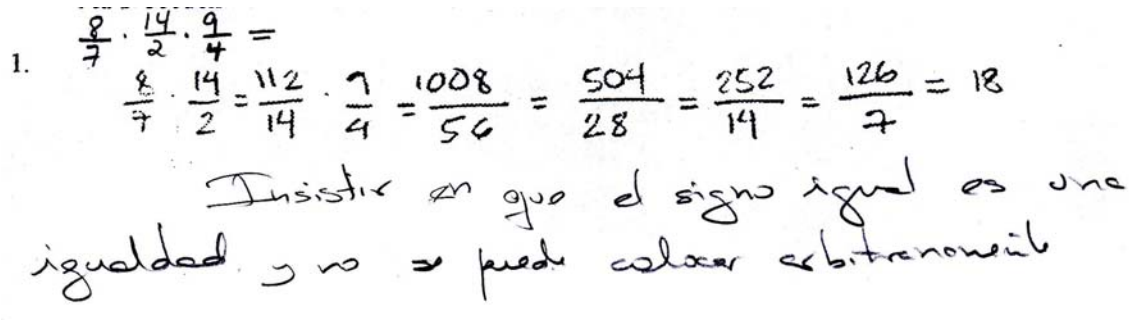
Der Fehler kann nicht mit einem Verstoß auf die Exponentenregeln erklärt werden, so ist dieser Hinweis für die Fehlerbehebung nicht nützlich.

C3: Begriffsbildung [1]

Auf eine begriffliche Ebene wurde in einer Aufgabe eingegangen.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Miriam: Aufgabe 1:

„Insistieren, dass das Gleichheitszeichen eine Gleichheit ist und nicht willkürlich gesetzt werden kann."



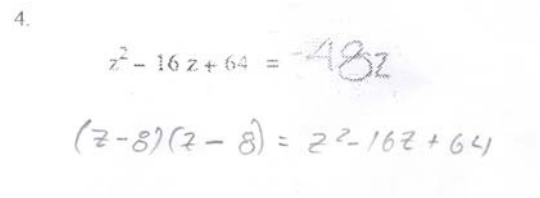
Miriam hat den Missbrauch des Gleichheitszeichens erkannt und weist darauf hin, dass man bei Schülerinnen und Schülern auf die Vorstellung der Gleichheit eingehen muss. Dieses ist ein Ansatz zu einer Begriffsbildung.

C4: Zeigen (vormachen) [19]

In 19 Fällen haben Lehrende unter dem Schülerlösungsprozess die Aufgabe korrekt gelöst wiedergegeben. Es kann sein, dass sie sie erst selber lösen wollten, oder es kann auch ein Hinweis auf ein Zeigen (vormachen) sein.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Pedro, Aufgabe 4:

„Kein Kommentar“



Pedro hat bei den meisten Aufgaben die richtige Lösungsform darunter-geschrieben. Seine Hilfe an Schülerinnen und Schüler wäre wahrscheinlich, die Aufgabe zusammen mit den Schülerinnen und Schülern lösen, um die Fehler zu vermeiden.

Zeigen (Vormachen) ist wenig Hilfreich für Schülerinnen und Schüler, die Fehler machen, es wird nicht auf die Fehlerursache eingegangen.

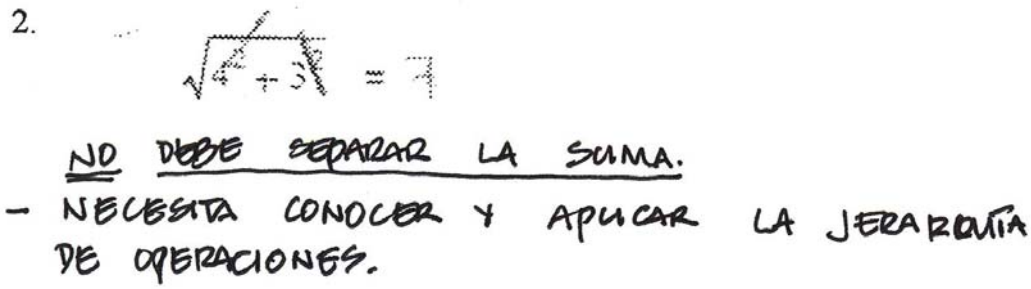
C6a: Hinweis auf Regeln (warum nicht) [2]

Hinweis darauf, warum gewisse Regeln nicht angewandt werden durften.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Sergio, Aufgabe 2:

„Er darf nicht die Summe trennen.

Er muss die Hierarchie der Operationen besser kennen und anwenden“



Der Regelverstoß liegt in der Trennung der Summanden, als Hilfe bietet Sergio ein nochmaliges erarbeiten der Regeln der Hierarchie der Operationen.

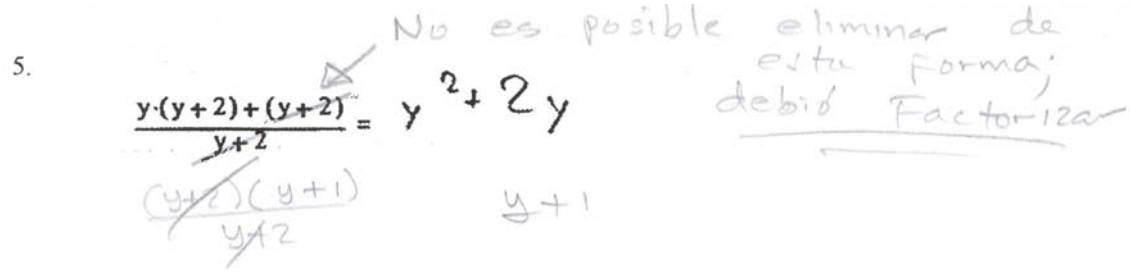
Warum gegen die Regeln der Vereinfachung verstoßen wurde ist wenig Hilfreich, um Fehler zu beheben.

C6b: Hinweis auf Regeln (wann ja) [3]

Auch wurden Hinweise erteilt, wann eine bestimmte Regel angewandt werden durfte.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Navega, Aufgabe 5:

„Es ist nicht möglich in dieser Form zu Eliminieren, er hätte faktorisieren müssen."



Der Studierende hätte nicht in dieser Form „eliminieren" dürfen, (Verstoß); er hätte zuerst faktorisieren sollen (dann ist die „Elimination" möglich)

Zuerst hätte faktorisiert werden müssen, sonst kann die Vereinfachung des algebraischen Bruches nicht vorgenommen werden können.

Ein Hinweis auf wann eine Regel angewandt werden darf ist bei der Fehlerbehebung wenig hilfreich. Studierende würden den Fehler durch diese Erklärung nicht einsehen.

D1e: Fehlende Vorkenntnisse [5]

Fehlende Vorkenntnisse der Schüler werden oft als Ursache des Fehlers angegeben.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Dreieck, Aufgabe 5:

„Hat keine Idee von einer Vereinfachung, auch nicht von einer Multiplikation mit Buchstaben (Variablen)."

Keine Idee haben ist ein Hinweis auf fehlende Vorkenntnisse. Der Studierende hat, nach Dreieck, keine Idee der Kürzung oder der Multiplikation mit Buchstaben (Variablen). Der Studierende weist aber auf gewisse Kenntnisse der Vereinfachung von algebraischen Brüchen hin, da er ein Streichschema (Kürzungsverfahren) anwendet. Die Ursache des Fehlers liegt nicht bei fehlenden Vorkenntnissen.

Eine Schülerin oder einen Schüler darauf hinweisen, dass er keine Idee hat, ist wenig hilfreich, um einen Fehler zu beheben.

E5: Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden (Regeln noch einmal durchgehen) [8]

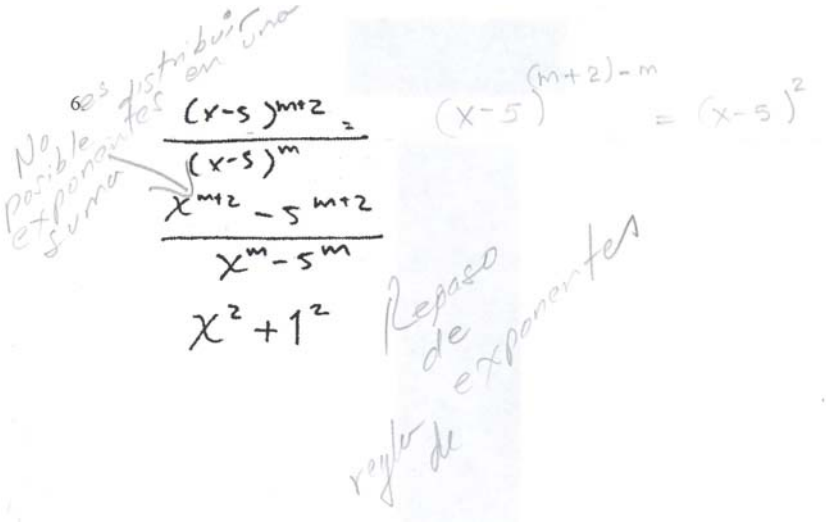
Da viele Lehrende auf einen Verstoß der Regeln hingewiesen haben, eine Beschreibung der Vorgehensweise und somit eine Beschreibung warum eine Regel falsch angewandt wurde, und ein Hinweis, unter welchen Bedingungen die Regel doch anwendbar ist, wurde acht Mal vorgeschlagen, die Regeln noch einmal im Unterricht zu thematisieren.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Navega: Aufgabe 6:

„Eine Distribution der Exponenten auf die Summanden ist nicht möglich.

Hilfe: Wieder durchnehmen der Exponentenregeln."

Navega schlägt als methodisches Vorgehen eine Wiederholung der Exponentenregeln vor. Dass die Ursache des Fehlers nicht durch ein nochmaliges durchnehmen der Exponentenregeln behoben werden kann, ist Navega nicht klar.



Regeln im Unterricht noch einmal zu bearbeiten ist für eine Fehlerbehebung wenig hilfreich, da die Fehler oft einer anderen Ursache unterliegen.

F1: Erfassen der Ursache (ja) [1]

F2: Erfassen der Ursache (nein) [38]

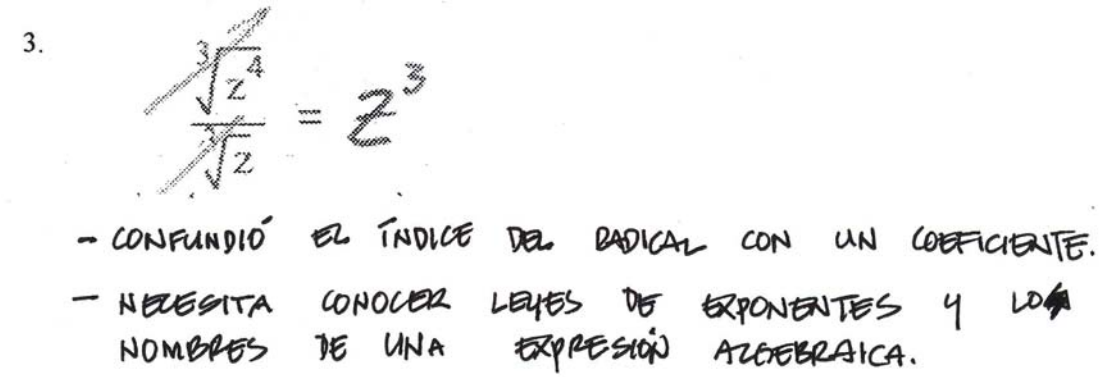
Überwiegend konnten Lehrende die Ursache der Fehler nicht erkennen. Sie sind vorwiegend auf die Beschreibung der Fehler und Regelverletzungen eingegangen.

Als Beispiel soll die einzige Fehlerursachenerfassung genannt werden, auch wenn diese nicht ausführlich erfolgte.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Sergio: Aufgabe 3:

„Verwechselt den Wurzelindex mit einem Koeffizienten

Muss die Exponentenregeln besser kennen und die Namen in einem algebraischen Ausdruck“



Sergio gibt einen Hinweis auf eine mögliche Ursache: der Studierende hat die Wurzelindexe mit Koeffizienten verwechselt. Diese Ursache wurde in der Form in der Literatur noch nicht beschrieben, könnte aber den Streichschemata zugeordnet werden (vgl. MALLE, 1993)

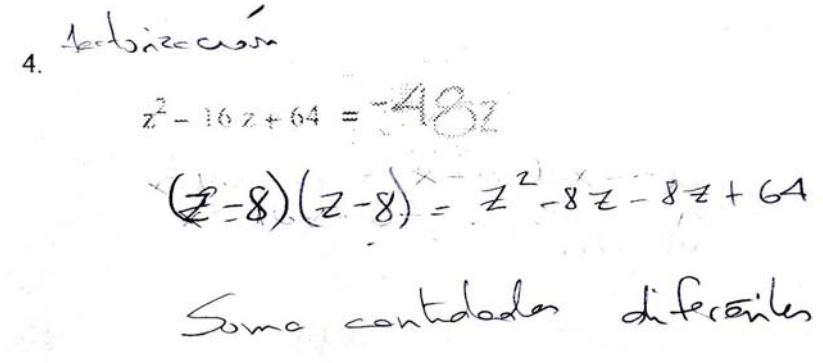
Obwohl Sergio nicht mehr auf die Wurzelzeichen eingeht, ist ein erster und auch einziger Ansatz in dieser schriftlichen Befragung zur Erkennung einer Fehlerursache.

G1: Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge [1]

Auch wenn nur eine der Lehrerinnen oder Lehrer auf begriffliche Zusammenhänge einging, schien mir wichtig, diese zu dokumentieren.

Beispiel aus der schriftlichen Befragung von Miriam, Aufgabe 4:

„Addiert ungleiche Mengen“



Miriam meint wahrscheinlich nicht ähnliche Terme, (Términos no semejantes).

Sie weist nicht auf ein Konkatenationsproblem hin, womit die wahrscheinliche Ursache des Fehlers bestimmt wäre und eine mögliche Hilfe, jedoch ist ein Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge zu erkennen.

7.3 Allgemeine Folgerungen:

1. Die meisten Lehrerinnen und Lehrer, geben keine Erklärung des Fehlers im Sinne einer Ursache an. Ansätze findet man in der Feststellung eines vermutlichen Streichschemata der Aufgabe 3, aber nicht direkt als solches, sondern in der Beschreibung einer „Elimination“ des Wurzelzeichens, oder der Verwechslung des Wurzelzeichens mit einem Koeffizienten.

2. Als Hauptgründe der Fehler werden die Regel der Hierarchie der Operationen und die Exponentenregeln aufgeführt. Oft sind die Fehler durch das korrekte Anwenden dieser Regeln nicht erklärbar.

3. Nicht alle Lehrerinnen und Lehrer erkennen alle Fehler, wie z.B. den Missbrauch des Gleichheitszeichens (Aufgabe 1) und der Konkatenationsfehler (Aufgabe 4).

4. In vielen Fällen beschreiben Lehrerinnen und Lehrer den Prozess, was nicht unbedingt auf die möglichen Ursachen der Fehler hinweist. Beschreiben eines Fehlers könnte der erste Schritt zu einer Fehleranalyse sein, jedoch bietet die Beschreibung als solche und ein richtiger Prozess des Lehrenden, für Schülerinnen und Schüler von wenig Hilfe. Man kann nur dann helfen, wenn man versteht in welchem Prozessschritt und warum (welche Gedankengänge zugrunde liegen) die Schülerin oder der Schüler von der Norm abweicht.

5. Ursachen werden oft in Verletzungen von Regeln gesehen. M.E. kann man oft gar nicht den Fehler durch die Verletzung der Regel dokumentieren. Die Ursache liegt oft auf einer anderen Ebene. (Z.B. Hineinprojizieren von Musterbeispielen)

Diese Vorstudie, lässt auf eine mögliche mangelnde diagnostische- und didaktische Lehrerkompetenz schließen, da die befragten Lehrenden fast keine Ursache für Fehler angaben. Angebot zur Hilfe war meistens die nochmalige Erklärung der Regeln, die ihres Erachtens verletzt wurden. Anzeichen einer unvollständigen diagnostischen Kompetenz und Wissen über Lernprozesse, werden durch diese Studie evident.

Bei den Interviews soll auf diese Aspekte näher eingegangen werden. Es werden ebenfalls Studierendenfehllösungen vorgegeben, die von den Lehrenden analysiert werden sollen. Erkennen die Lehrenden die Fehler der Studierenden? Haben sie sich Gedanken über die mögliche Ursache der Fehler gemacht?

Da ich bei Lehrenden einen überwiegend prozedural ausgerichteten Ansatz in deren bisherigen Äußerungen gefunden habe, schien es mir wichtig im Interview noch zwei weitere Fragen zu stellen:

Welche Einstellung haben sie zu Fehlern? Haben diese im konstruktivistischen Unterricht einen besonderen Stellenwert?

8. Interviews

In dieser Arbeit wird die Erfassung der methodischen und fachlichen Kompetenzen der Mathematiklehrkräfte eingeschränkt auf das Erkennen von Fehlern und Vorschlägen zu methodischen Maßnahmen beim Auftreten der Fehler. Damit wird nicht das breite Spektrum an Faktoren aufgegriffen, das von NEUBRAND (2006) als Professionswissen beschrieben wird.

Da im Rahmen dieser Arbeit nicht auf alle Aspekte eingegangen werden kann, beziehen sich die in den Interviews erhobenen Fragen auf die Punkte Verständnis von schulischem Stoff / Aufgaben (Fachwissen), diagnostische Kompetenz und Erklärungswissen (fachdidaktische Kompetenz) und Wissen über Lernprozesse (pädagogisches Wissen).

Ziele der Interviews waren:

- Erkennen die Lehrer, dass Aufgaben Fehler enthalten?
- Erkennen sie alle Fehler in einer Aufgabe?
- Welche methodischen Maßnahmen halten sie bei den jeweiligen Fehlern für angebracht?
- Lässt sich daraus eine generelle Haltung zur Lehr-Lernvorstellung ableiten?
- Welche allgemeinen Aussagen machen sie zur Bedeutung und zum Umgang mit Fehlern in ihrem Unterricht?

8.1 Theoretische Überlegungen und Beschreibung der Methode

Genereller Überblick bei den Interviews:

- Um die Offenheit während der Interviews zu sichern, wurde den Lehrerinnen und Lehrern als erstes die Angst um ihren Arbeitsplatz genommen. Es wurde ihnen versichert, dass ihre Aussagen allein für wissenschaftliche Zwecke genutzt werden würden und nichts von dem Geäußerten an Dritte, z.B. ihre Schulleitungen, weiter gegeben würde.
- Es wurden Zettel vorbereitet mit Aufgabenbearbeitungen von Studierenden aus der bisherigen Untersuchung, die Fehler enthielten (siehe Anhang 5). Dazu sollten sich die Lehrerinnen und Lehrer äußern.
- Zunächst wurden die Aufgaben von den Lehrerinnen und Lehrern angesehen, die meisten haben zuerst die Fehler gesucht.

- Daraus ergab sich die nächste Frage: Stellen Sie sich vor, dass das die Lösung eines Schülers ist, z.B. an der Tafel, wie würden Sie darauf eingehen?
- Im Anschluss daran verlief das Interview nicht mehr standardisiert, weil die weiteren Fragen davon abhingen, was die Interviewten an Antworten gaben.
- Im nächsten Schritt wurde versucht die Einstellung zu Fehlern und mit der Frage zum Konstruktivismus allgemein zum Lernen zu erfassen: Wie werden die Fehler in Ihrem Unterricht behandelt?

Die Deutungen der Interviews werden in diesem Kapitel wiedergegeben. Die Originale befinden sich im Anhang 5-9. Bei der Übersetzung wurde versucht, sich so genau wie möglich an den Worten des Interviewten zu orientieren, aber gleichzeitig ergeben sich zwangsläufig aus der Übersetzung Veränderungen, z.B. in der Satzstellung. Die Übersetzungen sollten so vorgenommen werden, dass der Sinn des Gesprochenen nachvollziehbar wird. Damit besteht die Gefahr, dass diese Veränderungen bereits eine Interpretation beinhalten. Im Weiteren wird der Sprachgebrauch der Interviewten bezogen auf die Verwendung geschlechtsspezifischer Bezeichnungen beibehalten.

Den Aussagen der Interviews wurden Kategorien zugewiesen, aus denen man, erst bei jedem einzelnen Interview und später dann aus den 5 Interviews, Folgerungen ziehen kann.

Gedeutet werden die Aussagen der Interviewten im Sinne der interpretativen Unterrichtsforschung.

8.2 Aufgaben zum Interview:

Stellen Sie sich vor, dass eine Schülerin oder ein Schüler die folgenden Aufgaben an der Wandtafel löst, was würden Sie der Schülerin oder dem Schüler zu seinem Lösungsansatz sagen?

1. Löse:

$\frac{8}{7} \times \frac{14}{2} \times \frac{9}{4} =$ $\frac{8}{7} \cdot \frac{14}{2} = \frac{112}{14} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1008}{56} = \frac{504}{28} = \frac{252}{14} = \frac{126}{7} = 18$

2. Rechne aus: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 7$

3. Vereinfache: $\frac{y\cdot(y+2)+(y+2)}{y+2} = y^2+2y$

4. Vereinfache: $\left(\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}\right)(a+b)(a-b) = a+b$

$\frac{3a-3b-2a+2b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} =$

5. Faktorisiere: $z^2 - 16z + 64 = -48z$

Im Folgenden sollen die vorgegebenen Aufgaben kommentiert werden:

Welche Fehler oder Eigenschaften sollten die Lehrerinnen und Lehrer entdecken?

Welche Charakterisierung der Fehler ist in jedem der Fälle wichtig, um einer Schülerin oder einem Schüler zu helfen?

Vorgegebene Aufgabe:

1. Errechne: $\frac{8}{7}\times\frac{14}{2}\times\frac{9}{4} =$

$\frac{8}{7}\cdot\frac{14}{2} = \frac{112}{14}\cdot\frac{9}{4} = \frac{1008}{56} = \frac{504}{28} = \frac{252}{14} = \frac{126}{7} = 18$

a) Fehlerhafter Gebrauch des Gleichheitszeichens:

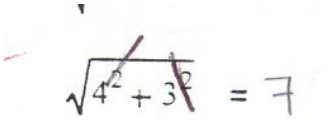
Das Ergebnis ist richtig, aber zu bemerken wäre, dass der Studierende das Gleichheitszeichen nicht richtig gebraucht. Anfangsstudenten müssten in der

Lage sein, das Gleichheitszeichen als Zeichen für Gleichheit, Gleichwertigkeit oder wechselseitige Austauschbarkeit anzusehen (PADBERG, 1996). Hier wurde die Transitivität des Gleichheitszeichens verletzt. Der Anfangsstudent hat diese Aufgabe als eine Art Kettenaufgabe aufgefasst, im Sinne wie sie NOLTE (1991, S. 49) beschreibt, das Gleichheitszeichen wird nicht als Relationszeichen verstanden, sondern als Befehl. Befehle werden hintereinender ausgeführt, und der Wert links ist mit dem Resultat rechts nicht übereinstimmend.

b) Lösung erfolgt durch Anwendung einer Mechanisierung, statt Kürzungen am Anfang durchzuführen. Dieses ist nicht ein Fehler, es weist nur darauf hin, dass während der Unterrichtsstunden möglicherweise sehr stark mit algorithmischen Verfahren gearbeitet wurde.

Vorgegebene Aufgabe:

2. Rechne aus:



a) “Kürzung” oder “Durchstreichen” vom Wurzelzeichen und den beiden Hochzahlen.

Das Wurzelzeichen hat einen distributiven Charakter durch den Studierenden erhalten, so wird, die Wurzel wahrscheinlich in zwei Teile geteilt. Nach MALLE (1993, Seite 172) hat der Student eine Übergeneralisierung vorgenommen, und das allgemeine Schema

$$\Diamond (a \circ b) = (\Diamond a) \circ (\Diamond b)$$

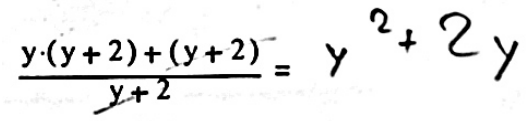
angewendet, ohne darauf zu achten, dass das Schema nur bei bestimmten Operationszeichen anwendbar ist, und dass das Schema wahrscheinlich ohne spezifische Merkmale gespeichert wurde. Die Wurzel in zwei Teile zu teilen ist bei einer Addition unter dem Wurzelzeichen nicht zulässig.

Wahrscheinlich ist das vorher genannte Schema nicht mit allen allgemeinen und spezifischen Merkmalen gespeichert worden.

b) Musterbeispiele wie $\sqrt{a^2} = a$ werden in die Aufgabe hineinprojiziert (MALLE, 1993, S. 171) und eventuell durch eine „Lebensnahe Weisheit“ (eins nach dem anderen) getrennt bearbeitet.

Vorgegebene Aufgabe:

3. Vereinfache:



a) Schwierigkeiten mit den Streichschemata und Kürzungsverfahren

Nach MALLE (1993, S. 171) hat der Student ein Musterbeispiel in die Aufgabe "hineinprojiziert". Das Musterbeispiel ist: $\frac{a}{a}$

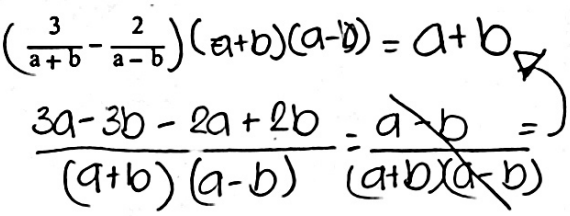
b) Ist ein Musterbeispiel "hineinprojiziert", besteht noch die Frage nach der 1, die durch das dividieren zwei gleicher Terme entsteht.

c) Fragwürdig bleibt auch die Tatsache des Pluszeichens, das stehen bleibt und keinen Summanden hat.

d) Hinweis auf die nicht erfasste Struktur des Terms

Vorgegebene Aufgabe:

4. Vereinfache:



a) Ein richtiger Ansatz, nicht klar erkennbar, (was auch für die Interviewten eine Schwierigkeit darstellen sollte) da der Studierende mit (a+b)(a-b) multipliziert, aber anscheinend nicht dividiert. In seinem Denkprozess holt er es nach, was beim gemeinsamen Nenner (a+b)(a-b) zu erkennen ist.

b) Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes bei der Multiplikation mit der -2, die im Zähler des zweiten Bruches steht und mit (a+b) multipliziert wird. (Dieser Lösungsprozess wurde von den Studienanfängern übersprungen)

c) Noch ein Fehler besteht nach der Kürzung vom Faktor (a-b) im Nenner mit (a-b) im Zähler. Bei der Kürzung müsste eine 1 im Zähler stehen und ein Faktor (a+b) im Nenner. Der Studierende "verliert" die 1 im Zähler und „holt" die (a+b) vom Nenner in den Zähler.

MALLE (1993, S. 176) beschreibt diese Fehler mit dem Überbegriff: Verwendung unadäquater Schemata. Streichschemata oder Weglassschemata haben die Charakteristik, dass oft, durch das Streichen, Operationszeichen ohne Operanden übrig bleiben. In diesem Fall schreibt der Studierende keine 1, aber auch keine 0 in den Zähler. Da ein Bruch ohne Zähler übrig bleibt, lässt der Studierende den Bruchstrich weg, und kommt zu dem Ergebnis (a + b).

Vorgegebene Aufgabe:

5.) Faktorisiere: $z^2 - 16z + 64 = -48z$

Der Studienanfänger hat, erstens nicht faktorisiert, was auf ein mangelndes Verständnis der Faktorisation zurückzuführen ist oder darauf, dass er die Möglichkeit, eine binomische Formel anzuwenden nicht erkannt hat. Zweitens hat er ungleiche Terme zusammengefasst.

Dies kann auch als Konkatentionsfehler verstanden werden: $z + z = z^2$

Ebenfalls können Probleme mit Sammelschemata vermutet werden

Nach Malle (1993, S. 179) werden von Schülern und Studenten Sammelschemata gebildet. Diese, durch ein Beispiel wie: $3m \cdot 3m = 3\ m^2$, entwickeln ein Schema, bei dem Maßeinheiten am Schluss gesammelt werden können. Werden die Variablen so aufgefasst, entstehen Fehler wie hier gezeigt wird.

Außerdem erwähnt Malle, dass eine falsche Auffassung des Gleichheitszeichens, auch zu diesen Fehlern führen kann. “Es muss am Schluss der Rechnung immer eine einzige Zahl herauskommen”.

KENT (1978, S.29; aus NOLTE, 1991) führt diesen Fehler auf den Umgang mit Mengen zurück. “Die Addition zweier Zahlen wird abgeleitet aus der Vorstellung der Vereinigung disjunkter Mengen, deren Zahleigenschaften addiert die Zahleigenschaft der Vereinigungsmenge ergeben (NOLTE, 1991, S. 37)

MALLE (1993, S 136) führt diesen Fehler auch auf ein “Festhalten an der alten Auffassung der Konkatenation” der Arithmetik zurück. Die Konkatenation (Nebeneinanderstellung von Buchstaben bzw. Zahlen) ist in der Arithmetik anders als in der Algebra. Ist dieser Unterschied nicht erfasst worden, kommt es zu diesen Fehlern.

8.3 Interviews

8.3.1 Interview mit Enrique

Kurzbeschreibung von Enrique

Enrique unterrichtet gegenwärtig vom 9.-12. Schuljahr an einer privaten Schule. Insgesamt arbeitet er seit 14 Jahren als Mathematiklehrer.

Er studierte Ingenieur für Elektronik und Kommunikation.

Dieses Interview wurde als Erstes durchgeführt. Einige Fragen wurden in den weiteren Interviews verändert, jedoch soll dieses Interview trotzdem mit aufgenommen werden, weil typische Reaktionen, die sich auch in den anderen Interviews zeigten, deutlich werden.

Zum ersten Teil des Interviews

In der ersten Aufgabe erkennt Enrique den Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht, jedoch erkennt er, dass die Aufgabe hätte einfacher gelöst werden können, wenn der Studierende vorher gekürzt hätte. Während er bei der zweiten Aufgabe allein auf den Fehler eingeht, nimmt er bei der dritten Bezug darauf, dass er seine Schüler immer auf diese Problematik hinweist.

„*Immer sage ich meinen Schülern, um eine Beseitigung (Eliminación, Eliminieren) vornehmen zu können, muss die Form eines Produktes bestehen, wenn ich eine Summe habe, darf ich nie annullieren*.“ Er verwendet dabei das Wort "beseitigen" als ein anderes Wort für "Kürzen". "Beseitigen" (eliminar) wird von mexikanischen Schülerinnen und Schülern häufig verwendet. Es bezieht sich darauf, dass zwei gleichwertige Terme „gekürzt“ 1 oder nichts ergeben. Die ursprünglichen Terme fallen quasi weg. Mit dieser Bezeichnung ist jedoch auch ein Fehler verbunden, der sich aus der umgangssprachlichen Verwendung des Wortes ergibt: sowohl die Terme, als auch die 1 wird weggelassen, sie werden „eliminiert“.

In der vierten und fünften Aufgabe wird allein Bezug auf die Fehler genommen. „*Das negative Zeichen, das negative Zeichen betrifft immer, betrifft den ganzen Bruch. Tatsache, die hier nicht beachtet wird*.“ Die Beobachtungen beziehen sich auf die Vorgehensweise, die zu dem Fehler führt: Er vermutet, dass falsch gerechnet wurde, dass Regeln nicht beachtet werden. Es ist zu fragen, wie weit die Form der Fragestellung dies beeinflusst hat.

Seine Ausführungen zur dritten Aufgabe erwecken den Anschein, als würde Enrique die Schüler auf die richtige Prozedur hinweisen. Er würde ihnen die Fehler zeigen und sagen, was sie falsch gemacht haben. Da er insgesamt sich überwiegend auf Prozeduren bezogen hat, wird nicht deutlich wie weit er bei seinen Erläuterungen versucht ein Verständnis bei den Schülern zu erzeugen.

Zum zweiten Teil des Interviews

Enrique würde bei jeder Aufgabe, die fehlerhaft gelöst wird, zuerst dem Schüler die richtige Lösungsform zeigen.

Durch Training, das heißt, durch Übungsaufgaben, könnten nach Enrique Fehler behoben werden. Er geht nicht auf die Ursachen der Fehler ein. „*Ich würde ihm die korrekte Lösungsform zeigen, ihm empfehlen, das Thema zu lernen. Wahrscheinlich würde ich ihm eine Serie von Übungsaufgaben zum selben Thema geben, damit er sein Wissen verstärkt.*“

„*Manchmal liegt es daran, dass die Schüler nicht aufpassen, an Ablenkungen die vorkommen. Gelegentlich liegt es daran, dass sie, bei einer Ungewissheit nicht nachfragen*“. Er ist der Meinung, dass die Schüler nicht genug aufpassen und sich leicht ablenken lassen, und dass bei einigen Inhalten mehr Nachdruck gemacht werden müsste, womit er durchblicken lässt, dass sein Unterricht eher lehrerzentriert erfolgt.

Zum dritten Teil des Interviews

Enrique lässt Schülerfehler durch Mitschüler korrigieren. Enrique meint, dass eine Schülerin oder ein Schüler ihren/seinen Fehler entdeckt, in dem er die nicht angewandte Prozedur weiterverfolgt (*„muss ich zuerst faktorisieren oder kürzen*“ (wahrscheinlich hat die Schülerin oder der Schüler den Fehler beim kürzen schon gemacht). Man kann wahrscheinlich nicht behaupten, dass die Schülerin oder der Schüler den Fehler eingesehen hat.

Die Auffassung von „Verstehen“ geht aus seinen Bemerkungen nicht klar hervor, er meint, dass das Verständnis aus der wiederholten Übung erwächst, oder aus der Mechanisation, z.B. bei der Multiplikation. Wahrscheinlich ist für Enrique das „Verstehen“ mit Fertigkeiten verbunden.

Enrique ist der Meinung, dass Inhalte von Lehrenden anderer Schuljahre nicht klar genug erläutert wurden, und insistiert auf eigene klare Erläuterungen, wenn die Schülerin oder der Schüler nach dem „Warum“ fragt. „E*s wurde ihnen nie der Irrtum geklärt und viele Lehrer (*er meint hier Lehrende der vorausgegangenen Schuljahre*) merken kaum die Fehler, die ein Schüler begeht. Der Schüler macht die Fehler weiter und meint er löst die Aufgaben korrekt*.“

Man könnte einen eher lehrerzentrierten Unterrichtsstil von Enrique vermuten.

Zum vierten Teil des Interviews

Enrique ist der Ansicht, dass Schülerinnen und Schüler ihre Fehler einsehen könnten, wenn man mit ihnen Schrittweise den Lösungsprozess durchführt. Er begründet seine Erläuterungen und Erklärungen mit den Regeln und Gesetzen, die verletzt wurden.

Im Sinne von KILPATRICK (1995) macht Enrique an der Tafel Fehler, um Schülerinnen und Schüler zu provozieren und ihre Aufmerksamkeit aufrechtzuerhalten, in dem er Extrapunkte verteilt. „*Ein Fehler gibt manchmal einen Extrapunkt, weil der Schüler einen Fehler entdeckt. Ich denke, so suchen sie auch bei sich selbst Fehler.*“ Es geht nicht klar hervor, ob Enrique die „gleichen“ Fehler, wie die Schülerinnen und Schüler machen würden, an die Wandtafel schreibt. Er hofft, dass durch diese Technik, Schülerinnen und Schüler mit ihren eigenen Prozessen auch kritischer umzugehen lernen.

Enrique meint, dass ungefähr 20% seiner Schülerinnen und Schüler einen großen Rückstand aufweisen, sie können nicht multiplizieren, also Inhalte vom 2. und 3. Schuljahr. „*In den verschiedenen Schulen ist mir ein gemeinsamer Nenner aufgefallen, dass die Schüler nicht das kleine Einmaleins können*.“

Deutung der Kategorien, die beim Interview mit Enrique häufig auftraten:

(Tabelle in Anhang 17a am Schluss)

Enriques methodisches Vorgehen zentriert sich auf „so wird es gemacht“ und „zeigen, vormachen“. Er weist auf den Regelverstoß hin, und beschreibt häufig wann eine Regel angewandt werden darf, und wann nicht.

Ursache der Fehler sieht er hauptsächlich im vorausgegangenen Unterricht, in der Verwechslung von Prozeduren und dass Nachdruck (von Lehrenden) fehlt.

Enrique, obwohl er sich bewusst ist, dass er nicht immer die Einsicht in die Schülerfehler erreicht, meint, er könne durch Übungsaufgaben (mehr vom Gleichen), und eine schrittweise Erklärung des Lösungsprozesses das Verständnis der Schülerinnen und Schüler über ihre Fehler gewinnen. Das methodische Vorgehen von Enrique weist auf einen eher lehrerzentrierten Unterrichtsstil hin, auch wenn er Schülerfehler von Mitschülern korrigieren lässt. Er stellt Schülerinnen und Schüler vor die Alternative: „*muss ich zuerst faktorisieren oder kürzen*“, womit er eigentlich den korrekten Lösungsprozess angibt, und es fraglich erscheint, ob die Schülerin oder der Schüler wirklich ihren/seinen eigenen Fehler entdeckt und einsieht.

Enriques Antworten waren teilweise sehr allgemein, er geht nicht spezifisch auf die einzelnen Prozesse, Fehler und Ursachen ein.

Enrique ist interessiert an Fortbildung (hat bis jetzt keine Gelegenheit gehabt eine Fortbildung in Mathematikdidaktik zu besuchen), er möchte gerne wissen, wie man Inhalt den Schülerinnen und Schülern besser verständlich machen kann. Auch ist er interessiert, wie man lernschwachen Lernenden helfen kann: „*Vielleicht (*Fortbildung*) in der Methodologie, wie ich es den Schülern besser verständlich machen kann. Manchmal glaubt man, man hat es gut erklärt, und später sagen die Schüler, dass sie nicht verstanden haben oder dass es ihnen schwerfällt. Vielleicht auch, wie man Mathematik denen Schülern erklären kann, die im Rückstand sind, oder auch, wie man bei ihnen das Niveau steigern kann.“*

8.3.2 Interview mit Pilar

Kurzbeschreibung von Pilar

Pilar unterrichtet z.Z. an einer privaten Mädchenschule in den Klassen vom 7. – 9. Schuljahr. Sie hat die Normal Superior absolviert und ist seit 19 Jahren als Mathematiklehrerin tätig. Sie hat, als ihre Kinder geboren wurden, einige Zeit ausgesetzt, jedoch weiterhin Nachhilfeunterricht erteilt.

Zum ersten Teil des Interviews

„Stell dir vor, dass ein Schüler (die Prozesse sind von verschiedenen Anfangsstudierenden) diese Lösungen an die Wandtafel geschrieben hat. Was würdest du dem Schüler sagen? Was fällt dir auf?“

Pilar erkennt sehr viele Fehler. Sie erkennt sie als typische. „*Ich sehe ein sehr normales Muster*“. Sie geht auf die Häufigkeit ein, mit der sie auftreten. Sie versucht dem zu begegnen, indem sie bestimmte Schwierigkeitsmerkmale immer wieder aufgreift, damit die Schüler damit vertrauter werden. Außerdem weist sie sie darauf hin, dass es Oberflächenmerkmale der Terme gibt, die eine ganz bestimmte Prozedur erfordern. „*Das magische Wort MAL, für die Schülerinnen, und für die Schüler auch, hat dieses Wort, für sie, oft keinen Sinn*.“

Die methodischen Maßnahmen, die sie ergreift, beziehen sich auf veränderte Vorgaben.

Aber sie merkt, dass das nicht genug ist. Sie bespricht sich mit z.B. einer Freundin, ohne zu einer Lösung zu kommen. Sie bemerkt auf Seiten der Schülerinnen und Schüler bestimmte Regelverletzungen und versucht ihnen zu begegnen, indem sie Aufgabenstellungen anpasst. Sie versucht nicht zu ergründen, welche Vorstellungen der Lernenden dafür verantwortlich sein könnten, dass diese Fehler gemacht werden. Deshalb verbleibt auch sie letztlich auf der Ebene der Verfahrensweisen und will damit eine Einsicht in die Strukturen und Gesetzmäßigkeiten der Lernenden vermitteln.

Zum zweiten Teil des Interviews

Für Pilar ist eines der Hauptprobleme, das Erkennen der Operation die durchzuführen ist, und dessen Charakteristika, womit sie wahrscheinlich die jeweiligen Gesetzte meint. „*Als Erstes, dass sie unterscheiden lernen, welche Operation verlangt wird, und welche Charakteristika diese Operation mit sich bringt. Sie muss Summanden von Faktoren unterscheiden*“.

„*Wenn sie einen Summanden von einem Faktor unterscheiden könnte, weil sie hier den Fehler macht, dass sie Summanden wie Faktoren löst.“ „ Das magische Wort MAL*“ bezieht sich auf das Erkennen der Termstruktur, die auf Erläuterungen von begrifflichen Zusammenhängen hinweist. Nach MALLE (1993), weist

Pilar, ohne sich darüber bewusst zu sein, auf die spezifischen Merkmale eines Schemas hin. Die eigentliche Fehlerursache erkennt Pilar nicht.

Zum dritten Teil des Interviews

Eine wichtige Aussage in diesem Teil, ist, dass Pilar sich bewusst ist, dass sie jeden Tag mit solchen Fehlern konfrontiert wird. Jedoch hat es den Anschein, dass Pilar Fehler eher korregiert, im dem sie eine richtige Lösung im Heft verlangt, als auf die Problematik im Sinne der Ursache einzugehen. „“*nein, nein, nein“, radiere es aus und schreibe es nochmal drunter, erinnere dich, dass wir solche Ketten nicht schreiben können. Dieses ist nicht wahr, sehe mal hier, auch nicht dieses mal dieses ergibt 18 (sie zeigt mit dem Finger auf zwei Teile, die in der ersten Aufgabe nicht gleich sind).*“

Sie geht besonders auf die Characteristika der Kürzungsformen ein, indem sie sehr emphatisch auf das Malzeichen hinweist.

Nachdem sie die richtige Lösungsform mit den Schülerinnen ein und nochmal durchgegangen ist, übt sie ähnliche Augaben. Mehr vom Gleichen ist wenig hilfreich.

Eine andere Feststellung ist, dass Pilar versucht die Themen miteinender zu kombinieren, um z.B. bei den quadratischen Gleichungen auch binomische Formeln wieder aufzunehmen.

Weiterhin ist die Betroffenheit wichtig, mit der sie auf die Schülerfehler verweist. Es lässt ihre eigene Arbeit als Sysiphosprozess erscheinen, die von ihr Durchhaltevermögen erfordert.

„*Beharren, beharren, beharren, es ihnen in verschiedenen Kleidern vorführen*.“ Für die Lehrerin erfordert das Unterrichten Beharrlichkeit und die Notwendigkeit, bestimmte Probleme in anderer Form vorzugeben. "Vorführen" ist eine sehr starke Formulierung für die lehrerzentrierte Vorgehensweise.

Zum vierten Teil des Interviews

Es fällt auf, dass Pilar etwas über den Konstruktivismus weiss, jedoch nie die Gelegenheit gehabt hat, ihn auf ihren Mathematikunterricht zu beziehen.

Pilar kann, wahrscheinlich, die Fehler, und ihren Stellenwert im Konstruktivismus oder im Mathematikunterricht nicht deuten.

Ursache der Fehler sind für sie fehlerhafte Prozeduren, also Fehler in der Informationsverarbeitung und ein Mangel an Übung. Pilar gibt während des Interviews andere Musterfehler an.

Sie kreidet Fehler an, ist sehr emphatisch „*nein, nein, nein*“, wenn sie einen Fehler entdeckt, und meint, dass ein korrektes Wiederholen der Aufgabe, Schüler zur Einsicht der Fehler, hilft

„Für Schülerinnen machen Erklärungen, die sie gibt, oft keinen Sinn", „Schüler hören nicht auf Lehrer" und „Lehrer können sich nicht verständlich machen", weisen darauf hin, dass ihr Unterricht zwar noch lehrerzentriert erfolgt, sie aber merkt, dass sie mit Erklärungen wenig Erfolg hat.

Deutung der Kategorien, die beim Interview mit Pilar häufig auftraten:

(Tabelle mit Kategorien in Anhang 18a am Schluss)

Pilar interpretiert oft die Vorgehensweise ihrer Schülerinnen, verbleibt dadurch auf der Ebene der Verfahrensweisen und will damit eine Einsicht in die Strukturen und Gesetzmäßigkeiten der Lernenden vermitteln.

Pilar nutzt Fehler, um eigene methodische Vorgehensweisen zu reflektieren, da sie die Fehler immer und immer wieder bei ihren Schülerinnen entdeckt: „*Mich bedrückt, dass wir etwas falsch machen, weil sie es nicht lernen*." Und „*Ich möchte gerne wissen, wie man es schaffen könnte, dass die Schülerinnen es wirklich verstehen*."

Pilar kreidet Fehler an, sie verlangt eine Wiederholung der Aufgaben, „*radiere es aus und schreibe es nochmal drunter*". Ihr Verständnis vom Lernprozess ist, dass sie sich Erkenntnis ihrer Schülerinnen erhofft, durch eine Wiederholung der richtig gelösten Aufgabe. Sowohl das Ankreiden von Fehlern als eine Wiederholung der richtig gelösten Aufgaben weisen auf ein Verständnis vom Lernprozess hin, welches eher lehrerzentriert ist.

Pilar erfasst die Ursachen der Fehler nicht, auch wenn sie bei bestimmten Aufgaben Hinweise auf begriffliche Zusammenhänge gibt.

8.3.3 Interview mit Jorge

Kurzbeschreibung von Jorge:

Jorge unterrichtet z. Zt. an einer privaten Mädchenschule, die alle Schulklassen, vom 1. bis zum 12. Schuljahr umfasst. Er unterrichtet von der 9. bis 12. Klasse, und hat auch auf anderen, aber immer privaten Schulen, unterrichtet. Er hat 9 Jahre als Lehrer Erfahrung. Er erlernte Bautechniker an einer Technischen Schule.

Zum ersten Teil des Interviews

" Stell Dir vor, dass eine Schülerin an der Wandtafel die nächsten Aufgaben löst. Was würdest du ihr über ihren Lösungsweg sagen?"

Jorge erkennt viele der Fehler nicht:

Aufgabe 1: Missbrauch des Gleichheitszeichens

Aufgabe 3: Weglassen der 1 bei der Kürzung

Aufgabe 4: Weglassschemata der 1 im Zähler und einer Verlegung des Nenners in den Zähler; Missbrauch des Gleichheitszeichens und Form in der die Aufgabe mit (a+b) und (a – b) multipliziert wird.

Er beschränkt sich in allen Aufgabenstellungen darauf Prozeduren zu betrachten. Er merkt zu den Lösungsprozessen an, wie sie hätten korrekt gelöst werden können. Auch seine Hinweise zu fehlenden Kenntnissen (zum Faktorisieren) beziehen sich auf Vorschläge zur korrekten Vorgehensweise: Er weist darauf hin, dass der Zähler hätte faktorisiert werden sollen, um dann einen Faktor des Zählers mit y + 2 aus dem Nenner zu eliminieren (so wörtlich). Dabei geht er mit Fachbegriffen nicht sehr sorgfältig um: Zähler und Nenner eines Bruches bezeichnet er als "*Zahlen von oben und Zahlen von unten*". Er spricht von „eliminieren" bei einer Kürzung, was für die Schüler eine falsche Vorstellung der Kürzung mit sich bringen könnte.

Zum zweiten Teil des Interviews

"Wie würdest du deinem Schüler helfen, oder jedem einzelnen dieser Schüler helfen"

Jorge geht davon aus, dass eine Nachhilfe von Nutzen ist. „*Ich würde dort anfangen, wo sie die Fehler machen, eine Diagnostik vornehmen und ihnen dann mitteilen, wo sie die Fehler machen*". Er würde die Fehler und Schwierigkeiten der Schüler „diagnostizieren", was eher den Anschein hat, den Fehler zu identifizieren, und dann dort ansetzen, wo der Fehler gemacht wurde.

Bei allen Hilfeangeboten, geht er davon aus, dass einzelnen Rechengesetze nicht erkannt werden oder nicht bekannt sind. „*Dieser Schüler scheitert an der Tatsache, dass man die Potenzen nicht mit dem Wurzelzeichen kürzen kann, da ein Zeichen in der Mitte steht*."

Seine Maßnahmen würden wahrscheinlich im nochmaligen Erklären der jeweiligen Rechengesetze bestehen. Man erkennt bei Jorge eine starke Tendenz zur Wiederholung der Gesetze, gegen die verstoßen wurde. Jedoch scheint bei einigen Aufgaben das Gesetz, das er als Ansatz zur Behebung des Fehlers angibt, nicht weiterzuhelfen, da der Fehler durch diesen Verstoß nicht erklärt werden könnte.

Zum dritten Teil des Interviews

Jorge beschreibt zunächst, dass er seine Schülerinnen und Schüler begrüßt. Er geht auf die Bedeutung der Motivation ein und beschreibt einen Unterrichtsverlauf, der sehr stark lehrerzentriert ist.

"Ich gebe ihnen das Vertrauen, zu fragen, und auch während der Stunde teilzunehmen mit Aufgaben, die an der Wandtafel gelöst werden."

Dabei ist er sehr darauf bedacht, das Selbstgefühl der Schülerinnen nicht zu zerstören.

"ich tadele sie nicht des Fehlers wegen, genau andersherum, in sachter Weise, sehr vorsichtig und einer angebrachten Weise lasse ich sie wissen, weißt du, du hast einen Fehler begangen".

Partnerarbeiten werden zugelassen, aber beaufsichtigt: "*Oft arbeiten sie auch während der Stunde zu zweit, wo die eine der anderen helfen kann, aber immer mit meiner Aufsicht.*" Fehler werden von ihm als Möglichkeiten gesehen zu lernen und eigene Fehler zu vermeiden. *"…, sondern der ganzen Gruppe, vorsichtig, dieser Fehler wurde gemacht, damit ihr ihn nicht auch macht. Was hat sie gemacht?*" Die Hinweise, die er gibt, beziehen sich auf die Vorgabe von Prozeduren: "*Dieses kann nicht gemacht werden, mach dieses und dieses*." Denn er betrachtet Fehler als Hindernisse im Lernprozess: "*Ein Fehler würde, den Gedankengang behindern, die Kreativität behindern, welche gerade vom Konstruktivismus gefordert werden. Es könnte uns vom Lernen abwenden*."

Das Vorschreiben, wie eine Aufgabe gelöst hätte werden müssen, soll Fehler beheben, jedoch ist er sich gleichzeitig bewusst, dass er es manchmal nicht schafft. Wie weit seine Vorgehensweise hilfreich ist, ob eine Schülerin seine Erklärung verstanden hat, bleibt fraglich, auch wenn sie unter seiner Aufsicht ähnliche Aufgaben löst, da ein Effekt des Nachahmens nachhängt.

Er korrigiert Fehler in dem es sie ankreidet und den korrekten Lösungsprozess dazuschreibt, geht aber nicht auf die Ursachen der Fehler ein, sondern sieht sie wahrscheinlich als ein nicht Erlernt haben, von vorherigen Themen, womit er Lehrende anderer Schuljahre verantwortlich macht. Andererseits ist er sich bewusst, dass seine Hilfen zur Korrektion von Fehlern nicht immer den erwünschten Effekt der Behebung haben.

Deutung der Kategorien, die beim Interview mit Jorge häufig auftraten:

(Tabelle mit Kategorien in Anhang 19a am Schluss)

Jorge erkennt einige Fehler, jedoch erkennt er Fehler oft unvollständig, dass heißt, dass er bei bestimmten Aufgaben nicht weiter vordringt, um alle Fehler, und alle Konsequenzen der fehlerhaften Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu identifizieren.

Methodische Vorschläge werden von einer bestimmten Vorstellung vom Lernen getragen: Vormachen, nachmachen, auf Regelverstoß hinweisen, Fehler als Hindernisse im Lernprozess zu betrachten, und sind einem eher lehrerzentrierten Unterrichtsstil zuzuweisen.

Jorge ist der Ansicht, dass die Fehler an fehlenden Vorkenntnissen liegen.

Jorge ist sich der Grenzen seiner Vorgehensweise bewusst, und sehr daran interessiert, sich zu mathematikdidaktischen Fragen weiter zu bilden.

8.3.4. Interview mit Miguel Ángel

Kurzbeschreibung von Miguel Ángel:

Miguel Angel lehrt an einer privaten Jungenschule seit 13-14 Jahren. Mathematik. Studierte nach einem Abbruch der Betriebswirtschaft, Informatik. Er hat auch einen Lehrauftrag an der Universidad Panamericana, in Finanzmathematik.

Zum ersten Teil des Interviews

Miguel Ángel erkennt nicht alle Fehler, bei der ersten Aufgabe geht er nicht auf den Missbrauch des Gleichheitszeichens ein.

Das Streichschema der zweiten Aufgabe wird nicht von Miguel Ángel erwähnt, er geht primordiell auf den Regelverstoß ein. Das Problem der „Kürzung“ ohne eine 1 zu erhalten, fällt ihm nicht auf. *„Bei der Zweiten; ach, typischer Fehler. 4 zum Quadrat plus 3 zum Quadrat und die Wurzel, er beherrscht hier die Gesetze der Radikale nicht. Er kann nicht trennen. Was er macht ist eine Vereinfachung der Wurzel mit dem Quadrat, aber das kann er nicht machen, weil es Summanden sind, nur mit Produkten, man muss die Regeln der Wurzeln noch mal durchnehmen.“*

Die Entzifferung des Studierendendenkprozesses, der vierten Aufgabe, fällt ihm schwer. Er erkennt einige Züge, jedoch braucht er lange, um die Denksequenz zu entdecken. Eines der Absichten bei diesem Prozess war gerade dieses Erkennen des Denkprozesses, da man als Lehrender oft vor diesem Problem steht. Möchte man einer Schülerin oder einem Schüler helfen, so muss man deren Denkprozess verfolgen können. *„Den Rat den ich ihm geben würde, auch wenn das Resultat korrekt ist, ein wenig mehr Ordnung in seinen Operationen, das Konzept ist für ihn klar, aber die Anordnung verfehlt er.“* Miguel Ángel muss die Aufgabe erst selber lösen, um den Vorzeichenfehler zu entdecken. Er geht auch nur auf einen der Fehler ein. Das Weglassschema, nach der Kürzung wird nicht erwähnt. Bei seinem eigenen Prozess entfällt ihm der Nenner des Bruches.

Zum zweiten Teil des Interviews

Miguel Ángel würde durch diese Art von Aufgaben die Schwierigkeiten identifizieren. Er würde dann die betreffenden Themen noch einmal durchnehmen und üben. Sein Hilfeangebot ist eher lehrerzentriert, ich wiederhole die Erklärung und du übst dann. *„Mit diesem könnte ich klar identifizieren, bei welchen Aspekten er versagt, um sie wieder durchzunehmen, mehr Übung, als in anderen Sachen.“*

Er scheint sich typische Fehler seiner Schüler näher angesehen zu haben, beschreibt sie, geht aber auf die Fehlerursachen nicht ein, bleibt lediglich bei der Beschreibung der Vorgehensweisen. Auch wenn die Beschreibung wichtig ist,

reicht sie nicht aus, um eine adäquate Hilfestellung zu finden. Nochmaliges üben ist wenig hilfreich.

Er befasst sich mit zwei Fehlern, a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ und b) der Bruchrechnung. Bei diesen Feststellungen schweift er vom eigentlichen Thema ab und stellt eigene Hypothesen auf, in der Hinsicht, dass Lehrende der Primaria wahrscheinlich zu wenig Fachwissen aufweisen und Lehrende der Secundaria und Preparatoria vermutlich wenig pädagogisches Wissen haben. *„Dieses liegt hauptsächlich, eine eigene Hypothese, an sehr schlechten, sehr schlechten Fundamenten der Primaria (1. bis 6. Schuljahr)",* womit er die Lehrenden der Primaria verantwortlich macht.

Zum dritten Teil des Interviews

Miguel Ángel verändert ständig seine Unterrichtsformen, da er seine Schüler zum Üben von Aufgaben „zwingen" will. Zu wenig üben, ist für ihn die Ursache der vielen Fehler.

Sicherlich sind Aufgaben, die zu leicht sind für Schüler kein Lernen, aber seine Interpretation einer zu schwierigen Aufgabe scheint nicht im Sinne von Vygotsky und der Phase der nächsten Entwicklungsstufe zu sein. Eine schwierige Aufgabe kann von Schülern immer dann bewältigt werden, wenn die Vorkenntnisse dazu bereit sind.

Eine Aufgabe mit dem Lehrer zusammen zu lösen, durch lautes Denken, kann einen Lehrer auf die Schwierigkeiten des Schülers aufmerksam machen, jedoch meinte Miguel Ángel, dass diese Art der Arbeit im Unterricht zu langwierig ist.

„*Dann habe ich dieses Schuljahr, 7 Schüler ausgesucht, die ich glaubte, eine bessere Begabung und vor allen Dingen die Bereitschaft und das Interesse hatten, und habe ihnen meine Idee vorgeschlagen. Jeder von euch nimmt sich 3 Schüler, und hilft ihnen bei der Bearbeitung der Aufgaben."*

Kollaboratives Lernen wird für Miguel Ángel mit dem Zweck verwendet, dass Schüler die Aufgaben „bearbeiten müssen", also zwangsläufig wird mehr geübt, wovon seine Überlegungen ausgingen. Übung ist das, was fehlt.

Schüler, die anderen helfen, haben auch viel gelernt, sie haben ihre Kenntnisse vertieft, in dem sie die Fragen und Probleme der Mitschüler beantworten mussten.

Zum vierten Teil des Interviews

Fehler sind für Miguel Ángel eine Gelegenheit zu wachsen, ob dieser Ausdruck durch eine Lebensweisheit „aus Fehlern kann man lernen" erwächst, geht nicht hervor. Er geht nicht weiter darauf ein, wie er diese Gelegenheit nutzt. *„Es ist eine Gelegenheit zu wachsen, in Hinsicht auf das Konzept, eine große Gelegenheit, man muss sie ausnutzen. Als Lehrer kann man genau wissen, wo die Fehler behaftet sind, um ihn daran zu erinnern, den Zwerg, welche Inhalte er*

verstärken muss, ihnen weitere Übungsaufgaben aufzugeben. Du hast die Gelegenheit jedem einzelnen Schüler zu helfen, bei diesen Fehlern und du holst sie schnell raus (er meint die Fehlvorstellung).“

Regeln wieder durchzugehen und viel üben ist vorläufig die Hilfe, die er seinen Schülern anbietet, obwohl er später auf eine Art fragendentwickelnden Unterrichtsstil mit hervorrufen eines kognitiven Konflikts hinweist (vgl. KILPATRICK, 1995). Er konfrontiert seine Schüler mit Widersprüchen, 5 = 7 und 0 mal wie viel ist 5?

Er hat in seiner Unterrichtszeit viele typische Fehler bei seinen Schülern entdeckt.

Vermutlich beschreibt er die Phasen beim Mathematiklernen (konkret, graphisch oder ikonisch und abstrakt) in Hinsicht auf Piagets Entwicklungsphasen. Er bemüht sich einen signifikativen Unterricht zu erteilen (vgl. AUSUBEL), in dem er die verschiedenen Themen vernetzt.

Er beschreibt, dass er bei seinem Unterricht oft probiert und Elemente modifiziert, um seinen „Erfolg“ (besseres Lernen seiner Schüler) zu verbessern. *„Lasst uns die Situation ändern, und die Schüler besser vorbereiten“.* Es ist zu erkennen, dass Miguel Ángel sich sehr bemüht seinen Unterricht zu verbessern.

Deutung der Kategorien, die beim Interview mit Miguel Ángel häufig auftraten:

(Tabelle mit Kategorien in Anhang 20a am Schluss)

Obwohl Miguel Ángel viele Fehler als Typische ansieht, geht aus dem Interview hervor, dass er nicht alle Studierendenfehler erkennt. Er dokumentiert während des Interviews noch andere typischen Fehler, die er, durch die Jahre hinweg, entdeckt hat. Er möchte gerne in seinem Unterricht diese Fehler beseitigen, dadurch ändert er ständig seine Unterrichtsformen, bis er das kollaborative bearbeiten der Aufgaben, als ein bewährtes Modell empfunden hat.

Er geht nur einmal tiefer in die Ursache eines Fehlers ein, der dritten Aufgabe, wo er die Termstruktur und die Subterme analysiert, in dem er auf den wahrscheinlichen Gedankengang des Schülers eingeht. Er stellt alternative Fragen wie: *„Du hast hier ein Pluszeichen, hast du dann ein oder zwei Terme?“*

Miguel Ángel weist oft auf den Regelverstoß hin und auf unter welchen Bedingungen eine Regel verwendet werden kann. Sein methodisches Vorgehen ist hauptsächlich Üben nach der Erklärung, wobei er sich auf Mitschüler stützt.

Er sucht die Verantwortung der Schülerfehler hautsächlich in der Tatsache, dass

a) zu wenig geübt wird

b) Inhalte, die falsch gelehrt wurden, also auch typische Fehler bei Lehrern.

Da er meint, seine Schüler üben nicht genug, hat er fortlaufend Formen gesucht, um die Schüler zum Üben zu bringen, fand diese Form in der kollaborativen Bearbeitung der Aufgaben.

Seine Hilfeangebote sind nochmaliges Durcharbeiten der Inhalte, Rückverweis auf Regeln, gegen die verstoßen wurde, und viel üben, was ein Hinweis auf lehrerzentrierte Unterrichtsformen ist.

Bei einem Beitrag über den Umgang mit der Null, beschreibt er die Umkehroperationen als Argumentation für das Verständnis der 5/0. Mir schien diese Form besonders auffallend, da in Mexiko wenig über die Umkehroperationen gearbeit wird.

In seiner Suche nach Antworten auf die Fragen der Unterrichtsgestaltung hat Miguel Ángel sich Wissen angeeignet, dass er nun in seinen Unterrichtsstunden ausprobiert, analysiert und eventuell modifiziert, je nach Resultaten. Jedoch ist er in seinen Aussagen oft der Meinung: Man tut viel und doch erzielt man kein besonderes Ergebnis. Er selbst hat gewisse Themen mit seinen Schülern bearbeitet und nach einiger Zeit, obwohl sie es vorher „gekonnt" hatten, haben sie alles vergessen und machen die gleichen Fehler. Man kann sich da fragen, ob die Fehlerbehebung nicht effektiv war, weil er eigentlich nicht auf die Ursache des Fehlers eingehen konnte.

Miguel Ángel beschreibt, dass ein Lehrender verschiedene Kenntnisse aufweisen muss, womit er einige Phasen des Professionswissens der Lehrenden beschreibt.

a) *Fachkenntnisse*
b) *Didaktische Kenntnisse, wo er es nicht unterteilt in generelle didaktische Kenntnisse und fachspezifische Fachkenntnisse*
c) *Kontrolle über die Gruppe*

Unter Kontrolle über die Gruppe meint er wahrscheinlich eine Klassenführungskompetenz, auch wenn sein Ausdruck „Kontrolle über die Gruppe" eher Lehrerzentriert erscheint.

Miguel Ángel hat sich in den Jahren, seit dem er unterrichtet, sehr darum bemüht in der Literatur nachzulesen, wie er seinen Unterricht besser gestalten kann.

8.3.5. Interview mit Raúl

Kurzbeschreibung von Raúl

Raúl ist 46 Jahre alt, hat Chemieingenieur an der Universidad de Guadalajara (die staatliche Universität in Guadalajara) studiert. Er unterrichtet an einer privaten Jungenschule in der Secundaria (vom 7. – 9. Schuljahr).

Die etwaige Einteilung in den anderen Interviews (1. – 4. Teil) konnte bei Raúl nicht durchgeführt werden, da er oft sprunghaft von einer Idee zur anderen wechselte. So habe ich versucht immer wieder das Interview auf meine Fragen zu richten, was an einigen Stellen auch ziemlich schwer war. Nur ein erster Teil des Interviews konnte man klar hervorheben, nämlich die Analyse der einzelnen Aufgaben, auch wenn einige andere Gedanken in seinen Bemerkungen zur Geltung kommen.

Zum ersten Teil des Interviews

Raúl erkennt nicht alle Fehler, z.B. sieht er in der 4. Aufgabe keinen Fehler, nicht den Vorzeichenfehler und auch nicht das Weglassschema.

Bei Aufgaben mit erkannten Fehlern, beschreibt er die Vorgehensweise des Schülers, meistens mit einem Hinweis auf bestimmende Charakteristika der Regeln.

Seine Form, Schüler auf Fehler hinzuweisen, ist sie ankreiden, auch oft mit Kommentaren wie: *„man sieht, dass du nicht gelernt hast, ich weiß, dass du es kannst, versuche es noch einmal*“.

Zu den anderen Teilen des Interviews

Raúl fokussiert sich auf den Prozess der Bearbeitung, was im Prinzip gut ist, wenn auch bedacht wird, dass er in der 1. und 2. Secundaria unterrichtet. In den Schulklassen wird in Mexiko der Algebraanfangsunterricht erteilt. Er ist der Ansicht, dass ein Schüler die Prozesse im kleinsten Detail lernen muss, damit er keine Fehler macht. *„Wenn ich den Prozess sehe, das Resultat offenbar falsch ist. Deswegen gehe ich mit ihnen auf alle Details ein, ich markiere Vorzeichen, inklusive schreibe Fragezeichen hin, ich schreibe ein Kommentar dazu...“*

So geht er vermutlich mit ihnen immer wieder die Prozesse durch, „zeigen (vormachen*)“ „. Ich möchte, dass sie es so machen, wie ich es ihnen gezeigt habe, die Potenzen errechnen, dann addieren und zuletzt die Wurzel ziehen.“.* Wann kann eine Regel angewandt werden, wann nicht. Dass Ursache der Fehler oft nicht in dem Verstoß einer Regel liegt, ist Raúl nicht bewusst. Ein Wiederholen der Inhalte (Regeln noch einmal erarbeiten) hilft seiner Ansicht nach, Fehler vermeiden. Sein Verständnis vom Lernprozess ist wahrscheinlich, dass die Erkenntnis durch Anleitung erfolgt: Aufzeigen des Lösungsweges, üben und dann zwangsläufig die Erkenntnis.

Verantwortlich macht er fehlende Vorkenntnisse, dass Schüler nur für die Klassenarbeit lernen und dann alles vergessen, und dass sie nicht bereit sind, sich

anzustrengen. *„Dann für deine Untersuchung, weil wirklich viele Schüler berechnend sind, der einfachste Weg, der unkomplizierteste Weg. Die mindeste Bemühung.“*

Er ist der Überzeugung, dass, wenn er oftmals den Aufgabentyp vorgeführt hat, liegt es nicht mehr an ihm. *„Schwierigkeiten des Behaltens und der Wiederholung der Aufgabe (wahrscheinlich im Sinne einer Analogie der Aufgaben), das hängt nicht mehr vom Lehrer und nicht mehr von akademischen Situationen ab.“*

Für Raúl sind viele Fehler durch Nervosität bedingt. Jedoch ist während des Interviews, auch wenn vom Interviewer nachgefragt wurde, nicht klar geworden, welche Fehler er als zufällig hält (Raúl konnte kein Beispiel für zufällige Fehler geben). Bei der Rückfrage von zwei der konkreten Aufgabenstellungen, hat er gemeint, diese Fehler unterliegen einem konzeptuellen Fehler.

Raúl hat sich, während des Interviews, den Schülern mit Lernschwierigkeiten, wahrscheinlich auch denen, die Hyperaktiv sind, zugewandt. Raúl kennt seine Schüler schon nach der ersten Unterrichtswoche, womit er zeigt, dass er sehr an ihnen interessiert ist. So ist er oft auf affektive Komponenten des Lernprozesses eingegangen. Der Interviewer ist sich dieser Tatsachen bewusst, jedoch war dieses nicht das Ziel der Untersuchung.

Während des Interviews wollte Raúl den Interviewer davon überzeugen, dass eine affektive Komponente im Lernprozess besteht, jedoch ist er wahrscheinlich nicht in der Lage, zu verstehen, dass eine Aversion der Mathematik gegenüber, oft durch Misserfolge (viele Fehler) entstand. So lange man, Schülern nicht helfen kann, die Fehler einzusehen, und in ihren Prozessen weiterhin sich Fehler häufen, werden sie auch keinen Gefallen an der Mathematik finden. Fehler ankreiden, Prozeduren noch einmal bearbeiten, die Regeln noch einmal durchnehmen, wird wenig zur Fehlerbehebung helfen. Auch er erkennt, dass viele Schüler im Rückstand sind.

Deutung der Kategorien, die beim Interview mit Raúl häufig auftraten:

(Tabelle mit Kategorien in Anhang 21a am Schluss)

Raúl interpretiert oft die Vorgehensweise des Schülers. Immer wieder geht er auf die Frage ein, ob die Inhalte schon bearbeitet wurden. Sind Inhalte schon bearbeitet worden, so erinnert er Schüler an die Regeln, die sie durchgenommen haben und weist darauf hin, dass Schüler das korrekte Anwenden von Regeln „vergessen“ haben. Sind die Inhalte noch nicht erarbeitet worden, beschreibt er im Detail alle Einzelheiten des Prozesses, damit er klar verstanden wird. Er unterscheidet zwischen Fehlern im Lernprozess und Fehlern nach beschlossenem Lernprozess.

Sein methodisches Vorgehen ist eher Zeigen (Vormachen) und darauf hinweisen, wann eine Regel hätte angewandt werden dürfen. Ursache der Fehler sieht Raúl in fehlenden Vorkenntnissen und in keiner Antrengungsbereitschaft von Seiten der Schüler. Die mangelnde

Anstrengungsbereitschaft ist, nach Raúl, auf die Form der Evaluation an der Schule, in der er tätig ist zurückzuführen.

Raúl erkennt nicht alle Fehler und ist der Ansicht, dass viele Fehler durch Nervosität (also zufälliger Art) hervorgerufen werden. Er kann jedoch kein konkretes Beispiel für einen Nervositätsfehler angeben, und benennt Fehler der 2. und 3. vorgegebenen Aufgabe als konzeptuale Fehler, wobei nicht klar hervorgeht, was für ihn ein konzeptualer Fehler ist. Zu vermuten ist, dass er den konzeptualen Fehler als einen Fehler in der Prozedur ansieht, da er auf die Regeln und den Regelverstoss hinweist.

Raúl ist sich den Schwierigkeiten vieler seiner Schüler bewusst, auch dass er Schüler mit Lernschwierigkeiten hat. Er versucht immer wieder darauf hinzuweisen, dass man vom Schüler ausgehen muss. Es ist zu ersehen, dass er sich bemüht, seine Schüler zu verstehen, mit ihrem eigenen Lernpotenzial. (vgl. Angebot-Nutzung Modell, HELMKE, S. 24). Das Lernpotenzial beeinflusst die Nutzung, diese den Ertrag oder Wirkung, der Ertrag hat aber wiederum Einfluss auf das Lernpotenzial. Verändert sich der Ertrag nicht, wird sich auch kaum das Lernpotenzial ändern.

8.4. Folgerungen der Interviews:

Obwohl sich die Interviews deutlich unterscheiden, gibt es gewisse Muster, die bei der Auswertung der Kategorisierungen in den Vordergrund traten. Die in [ ] gesetzte Zahlen ist die Häufigkeit des aufgetretenen Kategorie.

A) Fähigkeiten des Lehrers:

Identifikation des Fehlers (richtig) [11]; Identifikation des Fehlers (unvollständig) [9]:

Lehrerinnen und Lehrer erkennen im Allgemeinen die leicht zu ersehenen Musterfehler, jedoch ist von vielen ein Eindringen in die weiteren Fehler der gleichen Aufgabe, nicht erfolgt.

Identifikation des Fehlers vollständig:

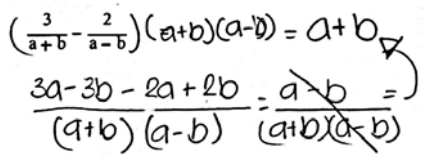
Aus dem Interview mit Pilar (Aufgabe 1):

„Ich sehe ein sehr normales Muster, für die Schüler ist es selbstverständlich erst zwei multiplizieren (sie deutet auf die ersten zwei Brüche), und dann beim Resultat noch einen Bruch dazuschreiben.

Für sie hat dieses keine Sequenz, alle Gleichheitszeichen sind wie Ketten."

Identifikation des Fehlers unvollständig:

Aus dem Interview mit Jorge (Aufgabe 4):



„Hier hat der Jugendliche ein Zeichenfehler, er scheitert an der Multiplikation, in dem Moment, wo der gemeinsame Faktor bleibt, der gemeinsame Nenner und in dem Moment in dem die gekreuzte Multiplikation vorgenommen wird, bei den Klammern verfehlt er das Zeichen. Genau wie oben (womit er die anderen Aufgaben meint) mit dem Zeichenfehler eliminiert er Terme, die man nicht eliminieren darf, nein, dieses ist ein Zeichenfehler, dort ist er im Irrtum."

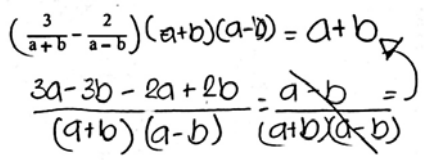
Interpretation des Vorgehensweise des Schülers [15]:

Interpretieren der Vorgehensweise der Schüler ist wohl der erste Schritt, (im Sinne von RADATZ, Beschreibung des Fehlers) um einen Fehler auf seine Ursache hin zu untersuchen. Zuerst muss erkannt werden, wie der Schüler vorgegangen ist. Wert auf die Analyse des Lösungsprozesses wird z.B. von Raúl gelegt. Aber bleibt er nicht bei dieser Aussage stehen? Macht er es wirklich? Hiermit wird die Frage auf die Ursache nicht geklärt.

Bei der 4. Aufgabe erwiesen sich Schwierigkeiten, die Vorgehensweise des Studierenden zu verfolgen.

Aus dem Interview mit Raúl: Raúl beschreibt die Vorgehensweise des Studierenden, erkennt jedoch den Fehler oder die Fehler nicht. Eine Beschreibung der Vorgehensweise ist nicht immer fehlererkennend.

Raúl: Aufgabe 4



„Ich weiss, das machen meine Schüler auch. In einem Bruch vereinfachen, multiplizieren, nein, ich gucke gerade, es ist eine Subtraktion, nicht wahr?

Er ermittelt den gemeinsamen Nenner, dividiert ihn, und hat dann hier gleich die Multiplikation ermittelt, siehe hier, noch einmal, gut. So wie ich es mache, man müsste erst die Multiplikation niederschreiben, bevor ich multipliziere, dieses kann zu Fehlern führen.

Es scheint als sei hier kein Fehler, aber hier, nein, hier ist auch kein Fehler (er zeigt auf die Vereinfachung des Zählers). Sie sind gut zusammengezählt, er hat die Umformung perfekt vorgenommen.“

Bezeichnet Fehler als Muster: alltäglich, allgemein u. findet man oft [7]:

Lehrerinnen und Lehrer haben die Fehler in den vorgelegten Aufgaben oft als Muster benannt. Sie kommen oft vor, es sind immer die gleichen.

Aus dem Interview mit Pilar (Aufgabe1):

„Ich sehe ein sehr normales Muster, für die Schüler ist es selbstverständlich erst zwei multiplizieren (sie deutet auf die ersten zwei Brüche), und dann beim Resultat noch einen Bruch dazuschreiben.“

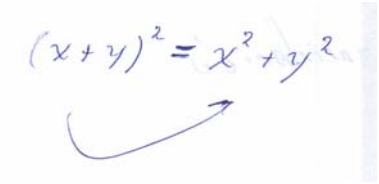
Bei einem Gespräch mit einer Freundin: „Und wir überlegen, wie wir es machen könnten, aber es sind klassische Fehler, häufige Fehler.“

Beschreibung anderer Fehlermuster [9]:

Oft wurde von den Lehrenden auf andere typischen Fehler hingewiesen. Lehrende beobachten also bei ihren Schülerinnen und Schülern gewisse Fehler, die sich wiederholen.

Aus dem Interview mit Miguel Ángel:

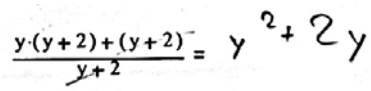
Ich werde dir einige zeigen, nein, einen Fehler mit dem du dein Leben lang kämpfst.



Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers [9]:

Lehrende verwenden oft unangebrachte Ausdrucksweisen, missverständliche Wörter wie eliminieren und durchstreichen. Diese Ausdruckweise kann bei Schülern Fehlvorstellungen erzeugen, die dann später als Fehler auftreten (beim Eliminieren in einem Bruch bleibt die Vorstellung einer Null). Jorge verwendet beispielsweise für den Zähler den Ausdruck „oben“, und für den Nenner den Ausdruck: „unten“.

Aus dem Interview mit Jorge (Aufgabe 3):



„Dem Schüler fehlt das Wissen über das Faktorisieren. Wo es dem Schüler einfacher wäre, den Ausdruck von oben mit dem gemeinsamen Faktor zu faktorisieren, um dann doch die Klammern zu eliminieren. Eine Klammer von oben mit dem Term y + 2 von unten, jetzt ja, die Rechnung geht schneller. Hier fehlt dem Jugendlichen gerade die Kenntnis der Faktorisation.“

Ein weiteres Beispiel ist aus dem Interview mit Enrique

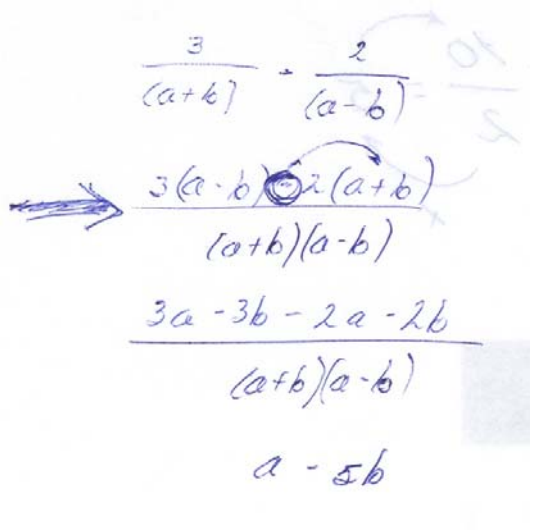
Aus dem Interview mit Enrique (Aufgabe 2):

„Dieses kann ich nur machen, wenn ich eine Zahl habe, die den gleichen Exponenten hat wie der Wurzelindex, dann kann ich das Durchstreichen vornehmen. Die Quadratwurzel von 4 zum Quadrat ist 4.“

Kein weiteres Erkennen der Fehler während des Interviews [5]:

Nur Miguel Ángel hat bei einer der Aufgaben (4), während des Interviews einen neuen Fehler entdeckt. Er hat während des Interviews die Aufgabe selber vereinfacht, und ist dadurch auf einen der Fehler gestoßen. Miguel Ángel hat die Stelle des Fehlers mit einem Pfeil markiert.

Wenn Fehler am Anfang des Interviews nicht erkannt worden sind, sind sie in späteren Phasen des Interviews auch nicht erkannt worden, mit der genannten Ausnahme von Miguel Ángel bei der vierten Aufgabe. Dass heißt, dass Lehrerinnen und Lehrer an ihren ersten Feststellungen festgehalten haben.



Erkennt den Stellenwert des Fehlers im Unterricht (nein) [5]:

Keiner der Interviewten hat während des Interviews einen Hinweis auf den Stellenwert des Fehlers genutzt, um daran die Begriffsbildung der Schülerinnen und Schüler zu überprüfen. Lehrende sagen, dass es wichtig ist Fehler zu erkennen und nutzen ihn, um den Lösungsprozess noch mal vorzuführen. Sie nutzen den Fehler aber nicht, um daran begriffliche Aspekte zu klären. Miguel Ángel interpretiert die Gelegenheit im Sinne einer Identifikation der Defizite seiner Schüler, um Inhalte erneut zu wiederholen. Raúl reagiert auf Fehler eher in einer lehrerzentrierten Form: Fehler ankreiden, Schüler hat nicht genug gelernt, Inhalte müssen wiederholt werden.

B) Reaktion auf Fehler

So wird es gemacht [8]:

So wird es gemacht: war eine Reaktion in der ersten Phase des Interviews, in der die Lehrenden Fehler entdeckten. Bei der Entdeckung der Fehler wurde von den Lehrenden oft beschrieben, wie die Aufgabe hätte gelöst (vereinfacht) werden müssen. Es zeigt sich auch an anderen Stellen der Interviews, und kann auch leicht mit Zeigen (vormachen) im Zusammenhang stehen. Dieser Hinweis, identifiziert einen eher lehrerzentrierten Unterricht. Eventuell besteht nur ein Interesse auf die richtig gelöste Form.

Aus dem Interview mit Enrique (Aufgabe 2):

„Ich habe eine Summe, die korrekte Vorgehensweise wäre hier, 4 zum Quadrat zu rechnen, 16 plus 9 ist 25 y dann ziehe ich die Quadratwurzel, 5."

Fehler ankreiden [7]:

Lehrerinnen und Lehrer kreiden die Fehler an, in sehr verschiedenen Formen und auch mit verschiedenen Absichten. Die Schülerin oder der Schüler soll sehen in welchem Schritt er sich geirrt hat, eventuell wird auch ein Hinweis auf eine bestimmte Regelverletzung dazugeschrieben. Diese Handlungsweise ist auch auf einen eher lehrerzentrierten Unterricht zurückzuführen.

Aus dem Interview mit Pilar (Aufgabe 1):

„„nein, nein, nein", radiere es aus und schreibe es nochmal drunter, erinnere dich, dass wir solche Ketten nicht schreiben können."

Weist auf Regelverstoß hin [10]:

Hinweisen auf einen Regelverstoß beschreibt zwar die Regel die falsch angewandt wurde, jedoch hilft einer Schülerin oder einem Schüler das Wissen über welche Regel verletzt wurde wenig. Dadurch ist er sich nicht bewusst, weswegen er einen bestimmten Fehler macht (Streichschemata können ein hineinprojizieren von Musterbeispielen sein, und sind nicht auf Regelverletzung zurückzuführen (vgl. NOLTE, MALLE).

Aus dem Interview mit Raúl (Aufgabe 2):

„In der Situation # 2, sollte man ihn daran erinnern, wenn der Inhalt schon durchgenommen worden war, dass es nicht zulässig ist, zuerst die Wurzel zu ziehen, wie man es sehen kann, nicht wahr?"

Zweifel an eigenen Vorgehensweisen [8]:

Wenn Fehler immer wieder auftreten, und Lehrende viele verschiedene Maßnahmen aufgenommen haben, sich die Fehler aber weiter häufen, ist bei einigen Lehrenden ein Zweifel an der eigenen Vorgehensweise aufgetreten. Pilar bespricht sich beispielsweise mit einer Freundin, und fragt auch die Interviewerin nach der Lösung. Raúl sagt es nicht direkt, sondern sagt, nach vielen Anstrengungen trägt der Lehrer keine Schuld mehr.

Aus dem Interview mit Pilar:

„(Die Lösungsprozesse sind von Studierenden): Klar, aber ich könnte auch sagen, dass sie von meinen Schülerinnen sind. Und das deprimiert

mich mehr, weil ich denke, ich arbeite soviel daran, wie können sie immer dieselben Fehler machen?“

C) Methodisches Vorgehen:

Üben [10]:

Zur Fehlerbehebung wurde Üben als eine wichtige Komponente dargestellt. Schüler müssen mehr üben, um weniger Fehler zu machen. Fehler werden aber nicht auf ihre Ursache untersucht, so können sich durch vieles Üben Fehler zementieren (vgl. MALLE). Üben bedeutet wahrscheinlich auch, dass die Einsicht über das Üben erfolgt. Das viele Üben, durch das die Mechanisierung erfolgt und die Einsicht daraufhin erwartet wird, scheint lehrerzentrierten Unterricht als Grundlage zu haben.

Aus dem Interview mit Enrique:

„Manchmal fehlt auch mehr Übung, weil wir sie ein und noch einmal üben, damit sie sie verstehen können. Manchmal sind sie nicht aufmerksam, aber es fehlt auch mehr Übung.“

Aus dem Interview mit Miguel Ángel an zwei verschiedenen Stellen:

Miguel Ángel möchte, dass seine Schüler mehr üben, er versucht verschiedene Unterrichtsformen, damit sie mehr üben.

„Ich musste in irgendeiner Form garantieren, dass geübt wurde…

Ich fange gerade mit dem Experiment an“ (er lässt Schüler in Gruppen eine Serie von Aufgaben lösen). „Aber es hat recht gut funktioniert, es ist zwar neu, aber meine Idee war üben.“

Zeigen (vormachen) [12]:

Durch ein wiederholtes Vormachen, die Aufgabe schrittweise vorführen, erhoffen sich Lehrende eine Fehlerbehebung. Diese methodische Maßnahme ist auf einen eher lehrerzentrierten Unterricht zurückzuführen.

Aus dem Interview mit Raúl (Aufgabe 1):

„Ich mache mit ihnen im Unterricht viel, eh, die Methode, einen Weg. Wenn sie diesen in mentaler Form machen, könnten sie es richtig lösen, aber ich möchte lieber, dass sie es systematisieren. Ich möchte, dass sie es so machen, wie ich es ihnen gezeigt habe, die Potenzen errechnen, dann addieren und zuletzt die Wurzel ziehen.“

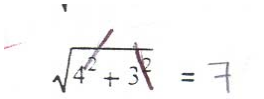
Aus dem Interview mit Jorge:

„In den Klassenarbeiten detektiere ich, wo die Fehler sind, ich kreide sie an und schreibe den richtigen Lösungsprozess dazu.“

Hinweis auf Regeln (wann ja) [15]:

Weisen Lehrende auf einen Regelverstoß hin und beschreiben, warum eine bestimmte Regel nicht hätte angewandt werden sollen, folgt der Hinweis, wann und unter welchen Bedingungen die Regeln doch angewandt werden dürfen. Ein Verweis auf die Merkmale (sowohl generelle als auch spezifische), kann ein Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge sein, jedoch kann damit nicht die Ursache der Fehler erkannt werden. Ist die Ursache des Fehlers nicht erkannt, kann durch ein Hinweis auf die Regeln (wann sie angewandt werden kann) nicht ausreichend, um Schülerinnen und Schülern zu helfen.

Aus dem Interview mit Raúl (Aufgabe 2)



„Dieses sind Fehler, die Terme müssen in Form von Produkten dastehen, um vereinfachen zu können, nicht wahr?“

Themen kombinieren [5]:

Kombination von Themen wird wahrscheinlich von Lehrenden in der Form von Rückgreifen auf vorher Gelerntes interpretiert. Z.B. bei quadratischen Gleichungen wird auf das Thema Faktorisieren von algebraischen Ausdrücken zurückgegriffen.

Aus dem Interview mit Pilar:

„Man kann ein wenig die Themen kombinieren, bei den quadratischen Gleichungen kann ich nochmal die binomischen Formeln durchnehmen, auch wenn sie es lieber mit der Multiplikation der Binome lösen, macht nichts, Hauptsache ist, dass sie es richtig machen.“

D) Ursachen:

1) Beim Schüler:

Fehlerhafte Informationsaufnahme [6] und Fehlerhafte Prozedur [5]:

Fehlerhafte Informationsaufnahme und Prozeduren waren ein häufiger Hinweis auf die Fehlerursache. Diese Klassifikation der Fehler ist zu generell, um Schülerinnen und Schülern helfen zu können.

Aus dem Interview mit Pilar: bei der Multiplikation von (a+b)(a-b)

„Sie machen einen häufigen, Fehler , sie multiplizieren nur den ersten mit dem ersten Term und den zweiten mit dem zweiten Term, sie vergessen den Rest der Operation."

Fehlende Vorkenntnisse [11]:

Ursache der Fehler wird von Lehrenden oft als ein fehlen der Vorkenntnisse der Schülerinnen und Schüler angesehen.

Aus dem Interview mit Jorge (Aufgabe 5):

„Dieser Schüler hat keine Idee, was ähnliche Terme sind, es fehlt ihm die Identifikation, ja, welches ähnliche Terme sind, um den Ausdruck vereinfachen zu können."

Keine Anstrengungsbereitschaft [6]:

Schüler lernen nicht genug, sie strengen sich nicht genug an. Bei Kommentaren wie, sie lernen nur für eine Klassenarbeit und vergessen es dann wieder und keine Anstrengungsbereitschaft, schieben Lehrende die „Schuld" des Versagens der Schülerinnen und Schüler dem Schüler selber zu. In wiefern diese Anstrengungen durch einen nicht vorteilhaften Unterricht erzeugt werden geht wahrscheinlich nur den Lehrenden ein, die an ihrer Lehrvorgehensweise gezweifelt haben.

Aus dem Interview mit Raúl:

„…weil wirklich viele Schüler berechnend sind, der einfachste Weg, der unkomplizierteste Weg. Die mindeste Bemühung."

2) Beim Lehrer:

Vorausgegangener Unterricht [10]:

Im vorausgegangenen Unterricht sind den Schülerinnen und Schülern die Inhalte nicht gut genug erklärt worden, deswegen machen sie heute Fehler. Auch hier wird auf einen lehrerzentrierten Unterricht hingewiesen.

Aus dem Interview mit Miguel Ángel:

"Ich denke, dass auch dieses Problem eines der Primaria ist. Es wird automatisch widergegeben, ein Algorithmus, von dem du gesprochen hast. Sie kennen ihre Algorithmen aber wissen oft nicht warum es so geht."

Mangelnde Kompetenz [6]:

Bei der mangelnden Kompetenz wurde sowohl die eigene (wenn ein Lehrender es so kommentiert hat) als auch die bei anderen Lehrenden beobachtete Kompetenz. Besonders Miguel Ángel geht auf Fehler ein, die er bei Lehrenden beobachtet hat. So können manchmal Fehler auch „erlernt" worden sein, von einem Lehrenden, der Fehler „lehrt".

Aus dem Interview mit Enrique:

„Diese Konfusion stammt von früheren Schuljahren. Als wäre es den Schülern nicht klar genug erläutert worden und sie multiplizieren zwei Brüche in dem sie den Zähler des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruches multiplizieren und als ihren Zähler niederschreiben. All diese Art von Konfusionen handhaben die Schüler, und es wurde ihnen nie der Irrtum geklärt und viele Lehrer merken kaum die Fehler, die ein Schüler begeht. Der Schüler macht die Fehler weiter und meint er löst die Aufgaben korrekt."

E) Verständnis vom Lernprozess

Erkenntnis durch Anleitung [11]:

Aufzeigen des Lösungsweges und Üben, führen zur Einsicht. Lehrer zeigt vor, Schüler üben, dann wird von den Schülern eingesehen, verweist auf eine eher behavioristische Lehreinstellung.

Aus dem Interview mit Raúl:

„Hier würde ich, der Gruppe oder den Personen, oder dem Jugendlichen, der den Fehler gemacht hat, nahe legen, dass mehr als das Resultat, dass er die Aufgabe vor mir, bearbeiten soll, von Anfang an."

Erkenntnisse des Schülers durch Unterstützung des Lehrers[5]:

Fünf Mal erweckten Lehrende den Eindruck, dass die Erkenntnisse der Schüler unmittelbar durch die Unterstützung (man verstehe unter Unterstützung: denke an das, was wir durchgenommen haben, siehe, so kannst du das nicht machen, hier begehst du gerade einen Fehler, musst du erst faktorisieren oder kürzen) der Lehrenden erfolgt. Raúl ist der Ansicht, dass die Schüler unter seiner Aufsicht, die Aufgaben haben lösen können, jedoch „was passiert" in einer Klassenarbeit?

Aus dem Interview mit Enrique:

„Dann, versuche ich, dass die Korrektur nicht von meiner Seite aus kommt, sondern, dass er selber merkt, wo er den Fehler begeht, selbstverständlich mit meiner Unterstützung, ich sage ihm, wie er es an der Tafel

schreiben soll. (Dieser Satz scheint ein Widerspruch zu sein, die Interpretation ist, dass Enrique dem Schüler beim Lösungsprozess hilft, was erst im nächsten Absatz geklärt wird.)“

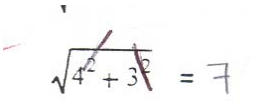
Aus dem Interview mit Jorge:

„Den Schüler fragen; “hast du verstanden (eine bestimmte Erklärung), was ich in deine Klassenarbeit geschrieben habe?”, “Ja, Lehrer, nein Lehrer” und je nachdem, unter meiner Aufsicht auch während der Unterrichtsstunden, sehen, ob es funktioniert hat oder nicht.“

Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden [8]:

Immer wieder die Inhalte wiederholen und die Regeln durchnehmen hilft Schülerinnen und Schülern wenig, um ihre Fehler einzusehen. Diese unterliegen oft ganz anderen Ursachen, so dass ein wiederholtes Durchnehmen der Inhalte überhaupt nicht auf die Fehlervorstellungen eingeht. Auch diese Art, den Unterricht zu gestalten ist eher lehrerzentriert.

Aus dem Interview mit Miguel Ángel (Aufgabe 2):



„Bei der Zweiten; ach, typischer Fehler. 4 zum Quadrat plus 3 zum Quadrat und die Wurzel, er beherrscht hier die Gesetze der Radikale nicht. Er kann nicht trennen. Was er macht ist eine Vereinfachung der Wurzel mit dem Quadrat, aber das kann er nicht machen, weil es Summanden sind, nur mit Produkten, man muss die Regeln der Wurzeln noch einmal durchnehmen.“

Lehrerzentriert [18]:

Sehr oft sind die Kommentare als ein Hinweis auf lehrerzentrierten Unterricht interpretiert worden. Besonders in den Bemerkungen über das Verständnis von Lernprozess. Beispielsweise sagt Raúl: Ich bin ein Übermittler von Kenntnissen.

Aus dem Interview mit Raúl (Aufgabe 1)

„Ich möchte, dass sie es so machen, wie ich es ihnen gezeigt habe“

Da Raúl sich in seinen Aussagen im Interview sehr mit Jugendlichen mit Lernschwierigkeiten beschäftigt, ist anzunehmen, dass er diese Form des Unterrichts wählt, um besonders Jugendlichen mit Lernschwierigkeiten zu helfen.

F) Erfassen der Ursache (nein) [37] und

G) Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (ja) [8]:

Es sind bei einigen Kommentaren Hinweise auf begriffliche Zusammenhänge gefunden worden, besonders bei Pilar und Enrique. Beispielsweise Pilar mit ihrem „magischen Wort MAL (Multiplikation)“ bei dem sie auf eine Oberflächenstruktur der Terme eingeht. Bei keinem Interview ist eine der Ursachen der Fehler angegeben worden. Lehrer zentrieren ihre Kommentare auf den Regelverstoß, warum die betreffende Regel nicht angewandt werden sollte und unter welchen Bedingungen sie angewandt werden darf.

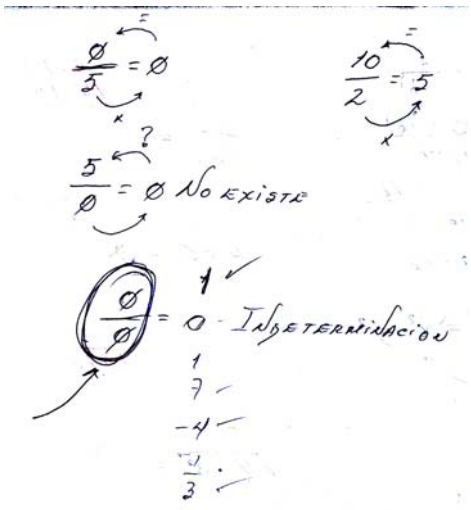
Aus dem Interview mit Pilar (Aufgabe 3):

„Ich sage ihnen, die Pluszeichen, die drinnen sind…, die in einer Klammer sind, die stören nicht, weil sie als Inkognito da sind, aber die dazwischen sind, das sind die, die wir sehen müssen. An Stelle des Pluszeichens (sie zeigt auf das Pluszeichen in der 3. Aufgabe) müsste ein MAL (ein Malzeichen) stehen. Ich versuche, so an sie heranzukommen, verstehst du?“

H) Löst sich vom konkreten Beispiel [10]:

Lehrende sind oft vom konkreten Beispiel abgekommen, da ihnen im (Allgemeinen) andere Fehler und Fehlermuster einfielen, die sie besprechen wollten. Bei Raúl war eine starke Tendenz sich von den konkreten Beispielen zu trennen, um auf die affektiven Komponenten im Unterricht einzugehen.

Aus dem Interview mit Miguel Ángel (löst sich von den konkreten Aufgabe):



„Wenn ich an die Null denke (er schreibt auf das Blatt, 0/5 und 5/0:

Wie schwer fallen sie ihnen.

5/0 = 0 0/5 = 0

Lasst uns reflektieren, und hier findest du die Schwierigkeiten. Lasst uns zuerst 10/2 rechnen, um zuerst zu verstehen, dass ein Bruch eine Division ist, hast du das verstanden, gut, es ist gleich 5.

Wie könntest du das beweisen? Hier antworten viele: multipliziere die 5 x 2 und du erhältst 10.

Wenn du mir sagst, dass 0/5 = 0 ist, (er zeigt auf seine Aufzeichnung und schreibt weiter) dann heißt das, dass Null mal 5 Null ist.

(Er geht auf die nächste Operation ein, 5/0). Wenn das hier 0 ist, was passiert dann, Null mal wie viel ist dann 5.

„Nein, irgendeine Zahl mal 0, ergibt 0. OK, das hast du gut in der Primaria gelernt. Dann existiert keine Zahl, die multipliziert mit 0 eine 5 ergibt.

(Nun zeigt Miguel Ángel auf 0/0), wie schwierig, „es ist Null", kann sein, aber warum nicht 1, oder 7, oder -4, oder 1/3? In Mathematik können es nicht zwei oder mehr Resultate sein, man kann es nicht bestimmen. Es besteht eine Unbestimmung."

Miguel Ángel versucht das Problem mit der Null an Hand von Umkehroperationen zu erläutern.

I) Affektive Komponente im Lernprozess [7]:

Interviewte haben sich oft vom konkreten Beispiel gelöst: a) Sie gingen auf andere Musterbeispiele ein; b) sie haben Fehler und deren Ursache als nicht so wichtig angesehen und sind dem durch Einschalten anderer Aspekte ausgewichen. Ein besonderes Beispiel bietet Raúl, der auch nicht nach nachdrücklicher Nachfrage auf die Fehler eingegangen ist, sondern eher auf affektive Komponenten im Lernprozess hingewiesen hat verbunden mit dem Hinweis, der Interviewer sollte sich mehr mit dieser Komponente im Lernprozess beschäftigen. Seine Kommentare galten auch Schülern mit evidenten Lernschwierigkeiten.

Aus dem Interview mit Enrique:

Kontext Fortbildung in Mathematikdidaktik zu Themen wie: Wie kann ich meinen Schülerinnen helfen?

„Manchmal sagen sie (die Schülerinnen), Mathematik, mmm, ich verstehe nicht, ich verstehe nicht, ich verstehe nicht, und sie werden auch nicht verstehen. Was kann ich bei einer solchen Situation machen, und wie kann ich Schülern mit Schwierigkeiten helfen?"

J) Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind [6]:

Aus den Aussagen der Lehrenden war zu entnehmen, dass sich alle darüber bewusst sind, dass sie einen erheblichen Anteil an Schülerinnen und Schüler haben, die im Rückstand sind. Miguel Ángel wies darauf hin, sie könnten nicht Dezimalzahlen dividieren. Auch in der Bruchrechnung seien Schüler schwach. Enrique weist auf mangelnde Kenntnisse beim Ein-mal-eins hin.

Aus dem Interview mit Miguel Ángel:

„Nein… wenn wir die Themenbereiche und Niveaus orten, wann sie in der Schule durchgenommen wurden:

Die Inhalte zur 2. und 5. Aufgabe werden in der 2. und 3. Secundaria durchgenommen, die Inhalte zu der 3. und 4. Aufgabe in der 1. Preparatoria.

Und diese Prozesse sind von Anfangsstudierenden?“

K) Fortbildungskurs in Mathematikdidaktik (nein) [5]:

Keiner der befragten Lehrerinnen und Lehrer hat bis z. Z. des Interviews die Gelegenheit gehabt, an einem Mathematikdidaktikkurs teilzunehmen. Diese Feststellung ist für das Verständnis von Schülerfehlern von großer Bedeutung, da Lehrende nicht eine Vorbildung dazu haben.

In folgender Tabelle wird die Häufigkeit der in 7.3 ausgeführten Kategorien dargestellt.

ALLE

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10a	A10b
11	3	9	1	1	15	7	2	0	7	9	3	3	2	5		4

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
8	7	10	0	1	8	1	1	2	2

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22
0	10	3	12	2	4	15	4	1	4	1	5	2	4	2	2	3	1	2	2	3	1	1	1

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D1l	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
6	5	3	3	11	1	2	1	1	2	6	1	10	6	2	1	1	0	0	0

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
11	2	5	4	8	1	3	1	18	1

Erfassen der Ursache

F1	F2
1	37

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1	G2
8	3

Verschiedenes

H	I	J	K1	K2	L
10	7	6	0	3	2

9. Schlussfolgerungen:

Problematik:

Für die Universidad Panamericana war es wichtig, festzustellen, warum viele Anfangsstudierende der Ingenieurwissenschaften und Betriebswirtschaft, das Studium in den ersten Semestern aufgeben. Diese Anfangsstudierende konnten den mathematischen Forderungen ihrer Studiengänge nicht gerecht werden. Daraus ergaben sich für die Universität zwei Fragestellungen:

Warum konnten einige Anfangsstudierende den mathematischen Forderungen nicht gerecht werden?

Wie kann man Anfangsstudierenden helfen?

Wenn mathematische Aufgaben mit bestimmten Eigenschaften gestellt werden, kann man einerseits Schülerinnen- und Schülerwissen überprüfen, man könnte aber auch mit diesen Aufgabenstellungen Zugang zu professionellen Lehrerinnen- und Lehrerwissen gewinnen. Lehrer“wissen über mathematikbezogene Schülerkognitionen kann man durch Kenntnisse über typische Fehler und Fehlvorstellungen beim Aufgabenlösen erfragen“ (NEUBRAND, 2006).

So wurde die Diagnose von Lernschwierigkeiten der Anfangsstudierenden eine wichtige Voraussetzung, um den Mathematikunterricht an der Universidad Panamericana zu gestalten.

Für diese Arbeit ergab sich eine Trennung der verschiedenen Bestandteile der Untersuchung:

A. Wissen der Anfangsstudierenden und deren Fehllösungen, und

B. Professionelles Lehrerinnen- und Lehrerwissen

A. Schülerinnen- und Schülerwissen:

I.

Es wurde durch den ersten Test festgestellt (Inhalte der Secundaria), welche Themenbereiche den Studierenden nicht geläufig waren. Diese Inhalte sollten dann in einem Vorkurs (oder später in einem Algebra-Semester) nachgearbeitet werden. Sehr bald merkte ich, dass weder Vorkurs noch ein ganzes Semester Schulalgebra, Anfangsstudierenden wirklich half. Sie wiesen weiterhin große Schwierigkeiten im Differentialrechnungskurs auf. (Meistens waren diese Schwierigkeiten auf Inhalte der Secundaria zurückzuführen, z.B. Lösen quadratischer Gleichungen)

Bei einer näheren Untersuchung der Lösungsprozesse der Anfangsstudierenden entdeckte ich, dass einfache Aufgaben eines bestimmten Inhaltes gut bearbeitet werden konnten, jedoch Aufgaben mit fehlerauslösenden Merkmalen von Anfangsstudierenden vorwiegend in typischer Weise (mit Musterfehlern) gelöst wurden. Anfangsstudierende wiesen auch Fehler (z.B. Konkatenationsfehler) auf, bei denen man annehmen musste, dass eine Wiederholung der Inhalte, fehlerhafte Konzeptionen wahrscheinlich nicht ändern konnten. Bei späteren Mathematikkursen häuften sich weiterhin die gleichen Fehler.

II.

Fehllösungen, aus dem zweiten Test, unterzog ich einer Fehleranalyse.

Welches waren die wahrscheinlichen Ursachen der Fehler?

Fehler als Informationsaufnahme- und Informationsverarbeitungsfehler einzustufen schien mir nicht akkurat genug. Ich versuchte zu deuten, an welcher Stelle der Informationsaufnahme und –verarbeitung der betreffende Fehler entstand (Kapitel 6.2.3). In der Literatur (MALLE(1993), NOLTE (1991) und TIETZE(2000)) fand ich ähnliche Fehler, aber auch einige Fehler konnte ich in der Form, wie sie von Anfangsstudierenden der Universidad Panamericana gemacht wurden, nicht in der Literatur finden.

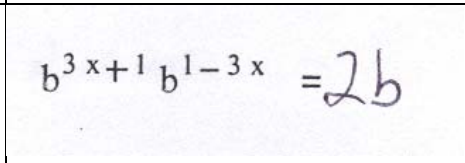
Bei der Fehleranalyse kam ich zu den folgenden Erkenntnissen:

1) Anfangsstudierende machen viele Fehler

Werden von Studierenden viele Fehler gemacht, können sie den Anforderungen eines Differentialrechnungskurses nicht folgen.

2) Eine und die gleiche fehlerhafte Lösung konnte verschiedenen Ursachen unterliegen.

Als Beispiel folgende Studierendenlösung (die möglichen Deutungen erfolgen an Hand der Literatur, es wurde kein lautes Denken der Studierenden herangezogen).

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		a) Verwechslung von Multiplikation mit der Potentiation MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67) Verwechslung der Mul-

		tiplikation mit einer Addition MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

Da hier kein Lösungsprozess vorliegt, besteht die Möglichkeit zweier Interpretationen, die ich kurz beschreiben werde:

“1. (3x+1)+(1-3x) = 2

2. b ist die Basis, die mit 2 multipliziert werden muss”

“1. (3x+1)+(1-3x) = 0

2. b x b wird zu 2b zusammengefasst.”

Deutung:

Jede dieser Möglichkeiten unterliegt wahrscheinlich einer anderen Ursache.

Es wurden die Exponenten addiert, dann aber nicht als neuer Exponent erkannt (sondern als multiplikativen Faktor 2, die 2 verliert, durch die Form in der es geschrieben wird ihre Position als Exponent und wird als Multiplikation mit der Basis niedergeschrieben. Dieses könnte als Hintergrund die Verwechslung von Potenzen und Multiplikationen haben (vgl. Malle 1993, S. 166)

Der Studierende hat die Exponenten zu Null zusammengezählt und dann b mal b als 2b interpretiert.

Durch verschiedene Fehlprozesse entsteht ein und das gleiche Resultat. Es ist wichtig, dass eine Lehrerin oder ein Lehrer verschiedene Möglichkeiten von Schülerfehlgedanken in Hinsicht auf die Ursache untersuchen kann. Interpretiert eine Lehrerin oder ein Lehrer, bei einer Schülerin oder einem Schüler einen anderen Fehlgedanken als der, der von ihr/ihm gemacht wird, so ist seine Hilfestellung zweifellos nicht die angebrachte.

3) Eine Aufgabe führte zu vielen verschiedenen Fehllösungen, so dass ich auch erkennen musste, dass viele Anfangsstudierende eine andere Denkweise haben.

Als Beispiel Testaufgabe 1, bei der verschiedene Fehllösungen entdeckt wurden:

Testaufgabe 1:

25 – 5 x 2 + 4 = 19

Alle Fehllösungsprozesse dieser Aufgabe geben einen Hinweis auf Schwierigkeiten, die sich auf die Hierarchie der Rechenoperationen beziehen. Jede der Fehllösungen kann als unterschiedliches Umgehen mit dieser Hierarchie oder

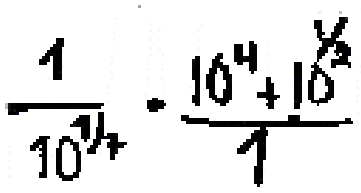
auf eine falsche Einsicht in die Hierarchie aufgefasst werden. Es werden z. T. imaginäre Klammern gesetzt, oder die Operationen von links nach rechts vorgenommen ohne weitere Regeln mit einzubeziehen. “Punktrechnung geht vor Strichrechnung” hat für diese Studierende wenig Bedeutung (vgl. Lösungsprozesse Aufgabe 1).

a)	$25-5\times 2+4=$	44
b)	$25-5\times 2+4=$	11
c)	$25-5\times 2+4=$	120
d)	$25-5\times 2+4=$	- 5

Jeder dieser Anfangsstudierenden hat eine andere Auffassung von der Hierarchie der Rechenoperationen. Mit einer allgemeinen Erläuterung oder Erklärung der Hierarchie der Operationen, würde man sicherlich nicht allen Anfangsstudierenden helfen. Eine Lehrerin oder ein Lehrer sollte auf die Problematik jeder einzelnen Schülerin oder jedes einzelnen Schülers eingehen, um dessen Fehlkonzeptionen zu verstehen und eine adäquate Hilfestellung leisten zu können. Ein Anfangsstudierender kann seine Fehler nur dann einsehen, wenn man auf seine Denkweise eingeht, um mit ihm zusammen den Fehler zu analysieren.

4. Es wurden Fehler entdeckt, die in der Literatur in der Weise noch nicht beschrieben wurden, auch wenn sie übergeordnet eingestuft werden konnten.

Beispiel:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7}\cdot\frac{10^{4}}{10^{-2}}$	 Fehler noch nicht in der Literatur gefunden	Falsche Informationsverarbeitung Unzureichendes erkennen der Termaufbaus (nach SHEVAREV 1946 in NOLTE 1991, S. 60f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. 10^{-7} bedeutet 1/10 1/7.

2. 10^{4} verändert sich nicht. 10^{-2} im Nenner wird zu $10^{½}$ im Zähler.

3. Beide Bruchzahlen werden multipliziert.

4. Der zweite Bruch wird zu einer Summe umgeformt"

Deutung:

Statt 10^{-7} zu $1/10^{7}$ umzuformen, wurde die Umformung erneut angewendet, so dass 1/10 hoch 1/7 entsteht. Dies kann als eine fehlerhafte Verarbeitung von Informationen gedeutet werden, denn er scheint die Information angemessen aufgenommen zu haben, da er die angebrachte Regel anwendet. In dieser Form wird der Fehler noch nicht in der Literatur beschrieben. Der zweite Fehler bezieht sich auf das Additionszeichen im Zähler. Das kann im Sinne Shevarevs (1946, in NOLTE 1991, S. 60f) als unzureichendes Erkennen des Termaufbaus gedeutet werden.

Ich erhebe in dieser Arbeit keinen Anspruch auf Vollständigkeit aller möglichen Fehler, da im Einzelnen die Fehllösungen der Anfangsstudierenden untersucht wurden, und eventuell nicht alle möglichen Fehllösungen, von den betreffenden Anfangsstudierenden, präsentiert wurden.

Ziel der kognitiven Fehleranalyse konzentrierte sich, in dieser Arbeit, auf die möglichen Gedanken der Schülerinnen und Schüler während der Fehlerproduktion. Lautes Denken der Anfangsstudierenden wurde in dieser Arbeit nicht herangezogen. Möchte ein Lehrender effektiv helfen, müsste er sich den Gedankengang seiner Schülerinnen oder Schüler anhören.

Die Relevanz der Befunde der Studierendenfehllösungen zogen zwangsläufig Überlegungen über den Unterricht in der Secundaria und Preparatoria mit sich. Welche Kompetenzen musste ein Lehrender haben, um Schülerinnen und Schülern helfen zu können?

B) Professionelles Lehrerinnen- und Lehrerwissen:

Schülerinnen und Schülern, als auch Anfangsstudierenden, kann nur dann geholfen werden, wenn Lehrende ihre Denkweise nachvollziehen können, wenn sie wissen, welcher Ursache (fehlerhaftem Gedankengang) der Fehler unterliegt. Abgesehen von den Fehlern, die im 1. Test von Lehrern gemacht wurden (z.B. Hierarchiefehler), haben die schriftliche Befragung und die Interviews Aufklärung über folgende Fragen gegeben:

Haben Anfangsstudierende so viele Musterfehler und Fehler aufgewiesen, weil eventuell Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und der Preparatoria diese Fehler nicht entdeckt oder rechtzeitig erkannt haben?

Als erste Folgerung der schriftlichen Befragung zu Studierendenfehler und der Interviews, stellte ich fest, dass die Probanden zwei wesentliche Charakteristika aufwiesen:

I) Probanden haben oft nicht alle Fehler erkannt:

Beispiel: Siehe Aufgabe 1:

Sowohl bei der schriftlichen Befragung als in den Interviews, ist von vielen Lehrenden der Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht erkannt worden, wohl aber eine einfachere Form der Vereinfachung der Multiplikation der gemeinen Brüche.

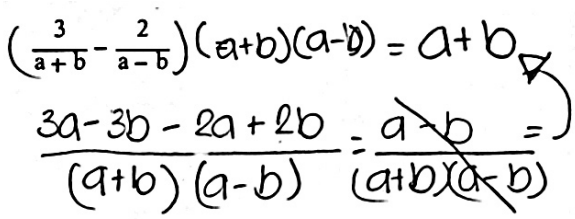
Wenn von Lehrenden nicht alle Fehler der Schülerinnen und Schüler entdeckt werden, können diese auch nicht während des Unterrichts aufgegriffen und thematisiert werden. So machen Schülerinnen und Schüler die Fehler weiter, sie wissen ja nicht, dass sie beispielsweise das Gleichheitszeichen in einer nicht adäquaten Form gebraucht haben. Diese Art von Fehler, in der Arithmetik, haben im Algebraunterricht schwerwiegendere Konsequenzen.

II) Probanden haben beim ersten entdeckten Fehler, nicht weitere Fehlkonzeptionen gesucht oder entdeckt:

Beispiel: Bei der 4. Aufgabe des Interviews hätten die folgenden Fehler gefunden werden sollen:

Vorgegebene Aufgabe:

4. Vereinfache:



a) Ein richtiger Ansatz, nicht klar erkennbar, (was auch für die Interviewten eine Schwierigkeit darstellen sollte) da der Studierende mit (a+b)(a-b) multipliziert, aber anscheinend nicht dividiert. In seinem Denkprozess holt er es nach, was beim gemeinsamen Nenner (a+b)(a-b) zu erkennen ist.

b) Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes bei der Multiplikation mit der -2, die im Zähler des zweiten Bruches steht und mit (a+b) multipliziert wird. (Dieser Lösungsprozess wurde von den Studienanfängern übersprungen)

c) Noch ein Fehler besteht nach der Kürzung vom Faktor (a-b) im Nenner mit (a-b) im Zähler. Bei der Kürzung müsste eine 1 im Zähler stehen und ein Faktor (a+b) im Nenner. Der Studierende "verliert" die 1 im Zähler und „holt" die (a+b) vom Nenner in den Zähler.

MALLE (1993, S. 176) beschreibt diese Fehler mit dem Überbegriff: Verwendung unadäquater Schemata. Streichschemata oder Weglassschemata haben die Charakteristik, dass oft, durch das Streichen, Operationszeichen ohne Operanden übrig bleiben. In diesem Fall schreibt der Studierende keine 1, aber auch keine 0 in den Zähler. Da ein Bruch ohne Zähler übrig bleibt, lässt der Studierende den Bruchstrich weg, und kommt zu dem Ergebnis (a + b).

Diesem Lösungsprozess unterliegen die vorher genannten Fehler. Die Probanden haben im Allgemeinen nur den Vorzeichenfehler entdeckt (Distributivgesetz).

Die Schwierigkeit in der Notation der Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner weist wahrscheinlich auf einen erlernten Algorithmus des Studierenden hin, der nicht vollständig ausgeführt wird. Ob sich hier, durch diese Art der Lösung, bei anderen Aufgaben Fehler zeigen könnten, bleibt fraglich.

Fehlkonzeptionen beim Streichschema (es entsteht keine 1 bei der Kürzung) und das Weglassschema, wird von keinem der Probanden erwähnt.

Wie reagieren die Probanden auf Fehler?

Die wichtigsten Tendenzen aus der Sichtung der erhobenen Daten, gaben folgende Erkenntnisse:

III) Oft wurde die Vorgehensweise der Studierenden interpretiert.

Eine Beschreibung der Vorgehensweise ist weitgehend inhaltlich- und verfahrensbezogen (vgl. RADATZ, 1985, S.22). Durch diese Technik sind Fehlermuster wahrnehmbar und beschreibbar. Die kognitive Fehleranalyse baut auf den Erkenntnissen einer deskriptiven Fehleranalyse auf. Zu Hinterfragen ist, ob diese Beschreibung der fehlerhaften Vorgehensweise Schülerinnen und Schülern hilft ihre Fehler einzusehen.

IV) Bezeichnung vorgegebener Fehler als Muster

Probanden bezeichneten viele der vorgegebenen Fehler als Muster (besonders Pilar und Miguel Ángel), dass heißt, sie haben diese Fehler schon oft bei ihren Schülerinnen und Schülern beobachtet und sich Gedanken darüber gemacht.

V) Beschreibung anderer Fehlermuster

Es ist klar aus den Interviews zu entnehmen, dass die Interviewten auch andere Fehlermuster bei Schülerinnen und Schülern erkannt haben. Dieses weist darauf hin, dass sich die Probanden mit den Fehllösungen ihrer Schülerinnen und Schüler befassen. Fraglich ist, ob dieses Erkennen von Fehlermustern ausreicht, um Schülerinnen und Schülern zu helfen, oder ob Lehrende auf der Stufe der fehlerhaften Vorgehensweise bleiben und ob sie auf Regelverstoß hinweisen.

VI) So wird es gemacht

Ein häufiges Merkmal bei den Probanden war das Vormachen der korrekten Lösungsform einer betreffenden Aufgabe. Diese Charakteristik wurde sowohl bei der schriftlichen Befragung als auch bei den Interviews vorgefunden. Sie ist für Schülerinnen und Schüler wenig hilfreich in der Behebung von Fehlern, da sie nicht auf die eigentliche Ursache des betreffenden Fehlers eingeht. Die Schülerin oder der Schüler erkennt nicht, an welcher Stelle seine Gedanken der Norm abgewichen sind oder warum.

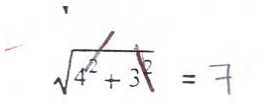
VII) Fehler ankreiden

Oft haben Probanden darauf hingewiesen, dass sie Fehler ankreiden, in sehr verschieden Weisen. Z.B. hat Pilar den Fehler angekreidet, und Pedro in der schriftlichen Befragung beispielsweise den Fehler eingekreist.

VIII) Weist auf Regelverstoß hin

Im Zusammenhang mit „So wird es gemacht“ kam der Hinweis auf den Regelverstoß. Welche Regel wurde verletzt und wann hätte die angewandte Regel eingesetzt werden können.

Beispiel aus dem Interview mit Jorge, 2. Aufgabe:



„Dieser Schüler scheitert an der Tatsache, dass man die Potenzen nicht mit dem Wurzelzeichen kürzen kann, da ein Zeichen in der Mitte steht. Hier müsste er erst die Quadrate der Zahlen errechnen, dann die Summe vornehmen, um dann die Wurzel zu ziehen. Es gibt keine andere Form, und man müsste ihm die Anweisung erteilen, dass dieses nur möglich ist, wenn die Terme multipliziert wären, aber nicht addiert.“

Können Lehrende die Ursache der Fehler der Studierenden angeben?

IX) Ursache der Fehler wurde nicht erkannt

Wesentliches Merkmal bei den Probanden war, dass diese, die Ursache der Fehler nicht erkannt haben. Bei einigen Fällen, wurde ein Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge geliefert (vol. Interview von Pilar und Miguel Ángel).

Diese neun Erkenntnisse weisen auf das professionelle Lehrerwissen der Probanden hin. Da die einzelnen Bereiche des Professionswissens der Lehrenden nicht klar getrennt werden können, sind in den Äußerungen der Probanden, Fachwissen, fachdidaktisches- und pädagogisches Wissen kombiniert analysiert worden.

Fachliches Wissen spiegelt sich in Kategorien wie: so wird es gemacht, wiest auf Regelverstoß hin und Beschreibung der Vorgehensweise des Studierenden, wider. Lehrende können im Allgemeinen die Aufgaben korrekt lösen, auch wenn man einige Fehllösungen bei Lehrenden finden konnte (vgl. Test 1, bei Lehrenden).

Eine unangebrachte Ausdrucksweise der Probanden (in verschiedenen Teilen der Interviews und der schriftlichen Befragungen) wies darauf hin, dass einige Probanden sich wahrscheinlich keine Gedanken über mathematisch korrekte

Ausdrucksweise machen. Diese unangebrachten Ausdrucksweisen könnten mit dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler später Fehler begehen, oder eventuell Schemata im Gedächtnis mit ungenügender Genauigkeit speichern.

Fachdidaktisches Wissen, ist in Bezug auf diesen Teil der Arbeit hauptsächlich in den Kenntnissen über Denkweisen der Schülerinnen und Schüler zu erkennen. Folgerung ist, dass die Probanden, die Ursache der Fehler, also die fehlerhaften Gedankengänge in den Lösungen der vorgelegten Aufgaben, nicht erkannt haben und primär auf der Ebene der Vorgehensweisen verblieben.

Wie können sie dann Schülerinnen und Schülern effektiv helfen?

Pädagogisches Wissen wird durch Hinweise auf methodische Maßnahmen nachvollziehbar. Lehrende haben hauptsächlich darauf hingewiesen, dass sie die Inhalte mit ihren Schülerinnen und Schülern noch einmal bearbeiten würden. Auch ist für die meisten Probanden Üben von großer Wichtigkeit, dass sich dabei auch eventuell Fehler zementieren können, wenn nicht auf die Fehler eingegangen wird, scheint ihnen nicht bewusst zu sein. Sie können auf die Fehlerursache aber nicht eingehen, da sie diese in den meisten Fällen nicht erkannt haben.

Üben ist keine effektive Form Fehler zu beheben. Erst Vormachen, dann Nachahmen lassen, viel Üben ist keine Garantie dass es verstanden wurde und es wird auch leicht vergessen.

Probanden sind sich bewusst, dass sie oft Schülerfehler nicht effektiv beheben können, da Schülerinnen und Schüler die gleichen Fehler später wiederholen. Besonders Pilar und Miguel Ángel haben in ihren Interviews an ihren methodischen Vorgehensweisen gezweifelt. Pilar hätte gerne eine Lösung haben wollen, und Miguel Ángel hat in der Literatur Antworten zu seinen Fragen gesucht, und dabei auf das soziale Lernen gestoßen.

Zeigen (Vormachen), Hinweis auf Regelverstoß, Inhalte noch einmal durchgehen und viel üben, weisen bei den meisten Probanden auf einen eher lehrerzentrierten Unterricht hin.

Die SEP (Secretaría de Educación Pública) ist sich bewusst, dass sowohl in den staatlichen-, als auch in den privaten Schulen, noch ein Auswendiglernen überwiegt.

„El enfoque memorístico que prevalece...en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las escuelas mexicanas, públicas y privadas....(AGUILAR, CEPEDA; INEE,2005)“

Studien, wie PISA und TEDS-M sind sicherlich eine Basis um über Lehrerinnen- und Lehrerbildung zu reflektieren.

Die PISA-Studie zeigt die großen Probleme vor denen das mexikanische Schulsystem steht, welche auch in dieser Arbeit zur Geltung kommen. Das Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación hat diese Schwierigkeiten, an Hand der PISA-Studie, untersucht:

„Los resultados obtenidos por los estudiantes mexicanos en las pruebas llamaron poderosamente la atención. Los medios de comunicación han destacado que México ocupó el último lugar entre los países miembros de la OCDE.“ (AGUILAR,CEPEDA;INEE, 2005)

Die Resultate von Mexiko in der PISA-Studie sind die niedrigsten aller OECD-Länder, dieses ist nach AGUILAR (2005) nicht verwunderlich, da Mexiko das Land ist, mit dem niedrigsten Einkommen per cápita. In der PISA-Studie ist auch erfasst worden, dass Mexiko am wenigsten Gelder für Bildung investiert. Mexiko ist sich dieser Tatsachen bewusst und hat sich trotzdem, obwohl er anderen Ländern im Nachteil ist, der Vergleichsstudie unterzogen, um seine Schülerinnen- und Schülerkompetenzen zu vergleichen (vgl. AGUILAR, 2005).

Betrachtet man die Vorbildung und Fortbildung bei Lehrerinnen und Lehrern der verschiedenen Schuljahre, besonders an privaten Schulen, kann man feststellen:

	Lehrerausbildung	Lehrerfortbildung
Primaria Von staatlichen und privaten Schulen	Alle Lehrerinnen und Lehrer müssen die Normal absolviert haben Sie ist zu 95% eine staatliche Schule mit wenigen Geldern.	Wird z.T. von der SEP geleitet, und Lehrerinnen und Lehrer aller Schulen müssen daran teilnehmen. Private Schulen organisieren ihre eigenen Fortbildungskurse, die eher in allgemeiner Didaktik angeboten werden, wenn auch in letzter Zeit Mathematikdidaktikkurse erteilt werden.
Secundaria An privaten Schulen	In sehr geringem Maß mit Normal Superior Ausbildung Z.T. keine Lehrerausbildung, nur eine fachliche Ausbildung in Chemie, Mathematik, Physik, u.a.	Für die Secundaria bietet die SEP Fortbildungskurse an, die hauptsächlich Curriculaveränderungen besprechen. Fortbildung wird von einzelnen privaten Schulen in Angriff genommen, jedoch eher in allgemeiner Didaktik und selten in Mathematikdidaktik (vergleiche Probanden, die noch nicht die Gelegenheit gehabt haben, an einer Mathematikdidaktikfortbildung teil zu nehmen).

Prepartoria An privaten Schulen	Keine Lehrerausbildung, nur eine fachliche Ausbildung, wie Chemie, Mathematik, Physik, u.a.	Fortbildung wird an den privaten Schulen eher in allgemeiner Didaktik angeboten, seltener in Mathematikdidaktik (vergleiche Probanden, keiner hat bis zur Zeit des Interviews an einem Mathematikdidaktikkurs teilnehmen können) Pilar, hat beispielsweise in einem Didaktikkurs Fragen über die Mathematikdidaktik gestellt, worauf sie keine Antwort bekommen hat.

Dass Diagnose und Therapie von Schülerfehlern die Kompetenzen von Mathematiklehrerinnen und –lehrer in vielen Fällen übersteigen (vgl. geführte Interviews), sieht RADATZ (1985, S.25) in deren „einseitig fachlicher Ausbildung und dem damit zusammenhängenden Selbstverständnis“.

Lehrerinnen und Lehrer der Secundaria und Preparatoria, die Chemie, Mathematik und Physik studiert haben, haben sich fachliches Wissen angeeignet, jedoch kein fachdidaktisches Wissen. Nur wenn „fachdidaktisches Wissen den Lehrerinnen und Lehrern zur Verfügung steht, können sie mit verschiedenen Formen der Repräsentation arbeiten, und Kenntnisse über Denkweisen der Schülerinnen und Schüler (conceptions and perceptions) vorhanden sein (vgl. NEUBRAND, 2005)“.

„Developing understanding in mathematics is an important but difficult goal. Being aware of student difficulties and the sources of the difficulties, and designing instruction to diminish them, are important steps in achieving this goal. Student difficulties in learning written symbols, concepts and procedures can be reduced by creating learning environments that help students build connections between their formal and informal mathematical knowledge; using appropriate representations depending on the given problem context; and helping them connect procedural and conceptual knowledge (YETKIN, 2003)“

Bewusst waren sich alle Probanden der Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler, jedoch konnten sie die Ursache der Fehler nicht entdecken, und ihre methodischen Maßnahmen zur Behebung der Fehler waren in den meisten Fällen mehr Übung und ein nachmaliges durchnehmen der Inhalte oder Wiederholung der Regeln (hauptsächlich wann eine Regel angewandt werden kann und wann nicht).

Ausblick

Als Idealvorstellung im Mathematikunterricht im allgemeinen und in der Schulalgebra im besonderen, verbindet man oft die Bearbeitung von Aufgabenstellungen mit fehlerlosen, richtigen Lösungen dieser Aufgaben. Dieses ist jedoch eine sehr eingeschränkte Sicht bezogen auf das Lösen mathematischer Aufgaben. Insbesondere in Problemlöseprozessen, aber auch in Lernprozessen werden Fehler heute als Chance betrachtet, Aufschluss über Herangehensweisen von Lernenden zu erhalten. Fehler in Problemlöseprozessen werden als Zwischenschritte in diesen Prozessen angesehen, werden als natürliche Begleiterscheinungen in Lern- und Problemlöseprozessen betrachtet, die damit nicht grundsätzlich negativ zu bewerten sind. Anders ist es hingegen, wenn es um den Abruf von gelerntem Wissen geht, um die Anwendung von Prozeduren, die als Handwerkszeug zur Verfügung stehen sollten. Dann ist es erwünscht, dass möglichst keine Fehler gemacht werden. Die analysierten Testaufgaben bezogen sich auf solche Inhalte. Die Studienanfänger sollten hier auf in der Schule gelerntes Wissen sicher zurückgreifen können.

Die Untersuchung hat gezeigt, dass sowohl Anfangsstudierende, aber auch Lehrerinnen und Lehrer der Mittel- und Oberstufe einem erwünschten Idealtypus nicht entsprechen: Sie machen Fehler! Das Fehlermachen gehört offensichtlich auch in Bereichen, die sicher zur Verfügung stehen sollten, noch dazu; es scheint fester Bestandteil im individuellen mathematischen Wissen und Denken von den meisten Anfangsstudierenden und auch in weiten Bereichen von Lehrerinnen und Lehrern, zu sein. Dies stellt bezogen auf die Vermittlung von fachlichem Wissen und Prozeduren ein Problem dar.

Die Frage, wie diesem Problem zu begegnen ist, stellt sich bezogen auf die Studienanfänger ebenso wie bezogen auf die Lehrerinnen und Lehrer. Studienanfänger müssen offensichtlich schulisches Wissen nacharbeiten. Hier bietet eine veränderte Perspektive auf Fehler, diese als Chance zu sehen, die Möglichkeit, Fehler zu nutzen, um über diese an das fehlerhafte Wissen und Denken heranzukommen, das diese Fehler erzeugt. Der Fehler bzw. die Suche nach fehlerhaftem mathematischen Wissen und Denken wird somit zur produktiven Stelle, um die aufgezeigte Problematik anzugehen und zu beheben.

Wie man diesem Wissen und Denken auf die Spur kommen kann, wurde in der vorliegenden didaktischen Fehleranalyse gezeigt. Für die Lehrenden ergeben sich verschiedene Ansatzpunkte. Fachliche Grundlagen sollten soweit zur Verfügung stehen, dass die zu vermittelnden Inhalte beherrscht werden. Erst das ermöglicht es, Fehler zu identifizieren. Darüber hinaus gehören fachdidaktische Inhalte zu den entscheidenden Kompetenzen der Lehrenden. Erst das Wissen um den Umgang mit Fehlern an den verschiedenen Stellen im Lernprozess, eine daraus resultierende veränderte Einstellung zu Fehlern macht es möglich, diese im Unterricht konstruktiv zu nutzen.

In der vorliegenden Untersuchung wurde aus den Äußerungen der Lehrenden zu den Fehlern deutlich, dass diese didaktisch nicht produktiv, sondern negativ

besetzt sind. Daraus ergibt sich keine Möglichkeit, qualitative Fehleranalysen als Möglichkeit zu begreifen, Schülerinnen und Schüler in ihrem Lernprozess zu unterstützen, in dem man auf ihre Vorgehensweise und ihre Gedanken eingeht. Dementsprechende fachdidaktische Kompetenzen zu erwerben ist eine weitere wichtige Voraussetzung für einen Mathematikunterricht, der Fehler produktiv nutzt.

Wenn man „fachdidaktische Kompetenz“ als Fähigkeit der Vermittlung versteht, dann stellt sich folgende Frage: Wie soll ein Lehrer zwischen der „Logik des Schülerdenkens“ und der Logik der Mathematik vermitteln? Wenn er in Erfahrung bringt, wie der Lernende denkt, kann er seine breitere Wissensbasis nutzen, Angebote zu machen, an die der Lerndende anknüpfen kann. Wenn er nicht von dem Denken der Lernenden ausgeht, kann er Wissen anbieten, aber nur schwer einschätzen, ob dieses vom Lernenden verstanden werden kann. Die fachliche Kompetenz, d.h. die richtige mathematische Lösung selbst zu beherrschen, ist in beiden Fällen Voraussetzung.

Zeigen wie ein Verfahren geht, Fehler zu diagnostizieren und anzukreiden, muss ein Lehrender beherrschen. Aber dieses Verfahren weist auf ein Lehr-Lernverständnis, das von einer konstruktivistischen Perspektive aus fragwürdige Vorstellungen enthält. Kann mathematisches Wissen und Denken wie ein Stempel einem Lernenden aufgedrückt werden? Muss es nicht selbst erfahren werden? Die pädagogische und didaktische Kompetenz mit Schülerwissen- und denken umzugehen, es zu verstehen, aufzugreifen, für den Unterricht zu nutzen, geht von einem Lehr-Lernverständnis aus, das den Lernenden als Subjekt seines Lernprozesses begreift, von einem aktiven Lernprozess auf der Basis des individuellen Zugangs zu Inhalten. Neben der Orientierung an der Sache der Mathematik, geht es um eine Orientierung am Denken und Handeln der Schülerinnen und Schüler, damit diese sich die Mathematik selbst zu eigen machen können, damit sie Inhalte und Verfahrensweisen verstehen und anwenden können. Anfangsstudierende der betriebswirtschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Fächer brauchen die algebraischen Inhalte, um sie in Problemkontexten anwenden zu können. Anwendung setzt jedoch Einsicht in die Inhalte und Prozeduren voraus.

Der in der Arbeit aufgezeigte Mangel v. a. an mathematikdidaktischer Kompetenz muss von zwei Seiten her angegangen werden. Die eine Seite ist struktureller Natur und bildungspolitisch zu bearbeiten. Lehrende brauchen ein solideres und für den Unterricht spezifisches Fachwissen. Sie brauchen mehr didaktisches und pädagogisches Wissen, zu denen z. B. die Fehleranalysen einen wichtigen Beitrag leisten, um Lernprozesse gestalten zu können. Maßnahmen dazu beziehen sich auf Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.

Der inhaltliche Kern der in dieser Untersuchung fokussiert ist, bezieht sich auf die fachdidaktische sachanalytisch geprägte Herangehensweise an Fehler in der Schulalgebra. Die hier beschriebenen Deutungsversuche zeigen, dass ein und derselbe Fehler auf verschiedene Weise zustande gekommen sein kann. Aus den unterschiedlichen Interpretationen ergeben sich unterschiedliche He-

rangehensweisen. Sich damit auseinander zu setzen halte ich für eine günstige Methode in der Lehrerfortbildung. Lautes Denken der Lernenden, das sicherlich für viele ungewohnt sein dürfte, würde die Präzision der Interpretationen weiterhin erhöhen. Mehr Hinterfragen von Prozeduren sollte die Beziehung zwischen deklarativem und prozeduralem Wissen weiterentwickeln und würde darüber hinaus auch die Vernetzung von Regeln, Darstellungen, Gleichungen und weiteren Inhalten fördern. Die Fähigkeit zur Verbalisierung von Sachverhalten, unterstützt die spätere Kommunikation über Modelle und Verfahrensweisen, der im beruflichen Alltag von Studierenden betriebswirtschaftlicher und ingenieurwissenschaftlicher Fächer eine große Bedeutung zu kommt.

Damit schlägt diese Untersuchung einen Bogen zwischen Schule, Universität und Berufsalltag.

10. Literaturverzeichnis:

Verwendete Literatur:

AGUILAR R., Miguel Á.; CEPEDA H. Beatriz; (2005)

Instituto Nacional par ala Evaluación de la Educación,

PISA para Docentes; la evaluación como oportunidad de aprendizaje; Comisión Nacional de Libros de Textos Gratuitos, México, D.F.

BROMME, Rainer &STEINBRING, Heinz (1981)

Lokale und Globale Aspekte des Lehrerwissens, dargestellt am Beispiel der Stochastik; April (1981), Occasional Paper 8; Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BROMME, Rainer & STRÄSSER, Rudolf (1988)

Mathematik: Die Beziehung verschiedener Typen des Wissens im Denken von Berufsschullehrern, (April 1988), Occasional Paper 101, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BROWN, J.S., VANLEHN (1980)

Rapair Theory, a Generative Theory of Bugs in Procedural Skills. Cognituve Sciece 4, S. 379-426.

FLICK, U., KARDORFF, E.v., STEINKE, I. (Hrsg.) (2000)

Qualitative Forschung. Ein Handbuch. Rowohlt.Reinbek:

FLICK, Uwe. (2005)

Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung. Rowohlt Tb. 3. Auflage

GRAY, E.M., PITTA, D. & TALL, D.O (1997).

The nature of the object as an integral component of numerical processes. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 115–130). Lahti.

HELMKE, Andreas (2005)

Unterrichtsqualität; Erfassen, Bewerten, Verbessern; 4. Auflage; Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung, Deutschland.

HELMKE, A. (2004).

Unterrichtsqualität: Erfassen, Bewerten, Verbessern (3. Aufl.). Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung

HILL, ROWAN & BALL (in press)

Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement, in press at American Educational Research Journal,

heute: HILL, ROWAN & BALL (2005)

Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement, American Educational Research Journal, 2005, S: 371-406

JOST, Dominik, ERNI, Jakob und SCHMASSMANN, Margaret (1997)

Mit Fehlern muss gerechnet werden, Verlagsinstitutfür Lehrmittel, Zürich.

KILPATRICK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro & RICO, LUIS; (1995)

Educación Mathemática; Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación, Historia; Grupo Editorial Iberamérica S.A. de C.V., México, D.F.

KLINGBERG, Lothar (1990)

Lehrende und Lernende im Unterricht, Volk und Wissenverlag GmbH, Berlin.

KROMER, G., (1996)

Schwierigkeitenvon Schülern mit der Algebra, Dissertation. Freiburg.

LORENZ, Jens, Holger und RADATZ, Hendrik (1993)

Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht, Schroedel Verlag, GmbH, Hamburg.

MA, Liping (1999)

Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mah-wah, New Jersey, USA.

MALLE, Günther (1993)

Didaktische Problema der elementaren Algebra; Vieweg, Wiesbaden

MAYRING, Phillip (2002)

Einführung in die Qualitative Forschung, Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

NOLTE, Marianne (1991)

Strukturmomente des Unterrichts und ihre Bedeutung für das Lernen; Franzbecker, Bad Salzdetfurth, Deutschland.

NOLTE, Marianne (2000)

Rechenschwächen und gestörte Sprachrezeption. Beeinträchtigte Lernprozesse im Mathematikunterricht und in der Einzelförderung, Klinkhardt, Bad Heilbrunn, Deutschland

PADBERG, Friedhelm, (2005)

Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, 3. Auflage; Spektrum, Elsevier GmbH, München, Deutschland.

PADBERG, Friedhelm (2002)

Didaktik der Bruchrechnung, Gemeine Brüche-Dezimalbrüche. Spektrum, Akademischer Verlag GmbH, Ulm.

PADBERG, Friedhelm (1996)

Didaktik der Arithmetik, Spektrum Academischer Verlag GmbH, 2. Auflage,Heidelberg

RADATZ, Hendrik (1985)

Möglichkeiten und Grenzen der Fehleranalyse im Mathematikunterricht, in: MU 6/1985.

RADATZ, Hendrik (1980)

Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Vieweg, Braunschweig.

SHEVAREV, P.A., (1946) (1975)

An Experiment in the Psychological Analysis of Algebraic Errors.

In: Soviet Studies in the Psychology of Learning and eaching Mathematics, Vol 12, Stanford, Cal.

SCHOY-LUTZ, Monika (2005)

Fehlerkultur inm Mathematikunterricht. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung anhand der Unterrichtseinheit „Einführung in die Satzgruppe des Pytagoras“. Verlag Franzbecker.

SEP (Secretaría de Educación Básica), Dirección General de Desarrollo Curricular (2006)

Educación Básica, Secundaria, Pln de Estudios 2006, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública) (David Block Sevilla, Hrsg.) (1997)

La enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria I y II; Tercera Edición, SEP, México.

SEP (Secretaría de Educación Pública) (2000)

Planes y Programas de Estidio, Educación Básica Primaria

TIETZE, Uwe-Peter, KLIKA, Manfred und WOLPERS, Hans (Hrsg) (2000)

Mathematikunterricht in der Sekudarstufe II, Band 1, 2. Auflage, Vieweg, Germany.

WIELAND, Gregor (2002)

Beiträge zur Lehrerbildung (20(3); 2002)

YETKIN, Elif (2003)

Student Difficulties in Learning Elemental Mathematics

ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education

BALL, D; BASS, H. & HILL, H. (2006)

Knowing and Using Mathematical Knowledge in Teaching: Lerning What Matters

Verfügbar über: http://mscenters.org/mmla/fall06/Knowing.doc

(20.2.2007)

CHOTT, Peter O. (1999)

Ansätze zur Förderung einer „Fehlerkultur". Lernförderung in der Schule durch Fehlerprophylaxe und Fehlermanagment. PADForum H3/1999/S 238-248

Verfügbar über: http://www.schulpaed.de/pdf/a-fehl.pdf

(7. 9. 2004)

KAISER, Gabriele; Ohne Jahrangabe:

TEDS-M

Verfügbar über: http://72.14.253.104/search?q=cache:PDPbh2OwWuIJ:www.erzwiss.uni-hamburg.de/Personal/Gkaiser/pdf-forsch/tedsm.pdf+TEDS-M+Kaiser&hl=es&ct=clnk&cd=3&gl=mx

(27.7.2007)

KRAUSS, Stephan; KUNTER, Mareike; BRUNNER, Martin; BAUMERT, Jürgen; BLUM, Werner; NEUBRAND, Michael, JORDAN, Alexander, LÖWEN, Katrin.

COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender

Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz

Verfügbar über:

http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/publikationen/coaktiv%20artikel.pdf.

(12.06.2007)

MAYRING, Philipp (2000, Juni). Qualitative Inhaltsanalyse [28 Absätze]. Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research [On-line Journal], 1(2).

Verfügbar über: http://www.qualitative-research.net/fqs-texte/2-00/2-00mayring-d.htm

(24.6.2007)

MAYRING, Philipp (2001, Februar). Kombination und Integration qualitativer und quantitativer Analyse [31 Absätze] : Forum Qualitative Sozialforschung/ Forum Qualitative Social Research (Online-Journal), 2 (1).

Verfügbar über http://www.qualitative-research.net/fqs-texte/1-01/1-01mayring-d.htm

(24.6.2007)

NEUBRAND, Michael; (2006)

Professionalität von Mathematik-Lehrerinnen und –Lehrern: Konzeptualisierung und Ergebnisse aus der COACTIV- und der PISA-Studie.

(13.6.2006)

http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.htm

NEUBRAND, Michael (2005)

Professionelles Wissen von Mathematik-Lehrerinnen und Lehrern: onzepte und Ergebnisse aus der PISA- und der COACTIV-Studie und Konsequenzen für die Lehrerausbildung

Verfügbar über:

http://72.14.253.104/search?q=cache:Yj_hp0dCKjUJ:87.230.14.253/fileadmin/dokumente/Vortrag_Prof_Neubrand.doc+Neubrand+coactiv+2005&hl=es&ct=clnk&cd=7&gl=de

(6.6.2006)

PISA 2000:

Die Studie im Überblick

http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/PISA_im_Ueberblick.pdf

(23.6.2004)

SANCHEZ, Ma.V. (2000)

La enseñanza de las Matemáticas y la formación matemática de los profesores. Una perspectiva desde la Didáctica de las Matemáticas.

Verfügbar über: http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/vsanchez210100.html

(15.6.2004)

SEP, Dirección General de Bachillerato (DGB) (2005-2007)

http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_2osem/MATEMATICAS-II.pdf

http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_3ersem/MATEMATICAS-III.pdf

http://72.14.253.104/search?q=cache:7onq-0ip2SsJ:www.cobach.edu.mx/programasPDF/propedeutico/matematicas_financieras_I.pdf+DGB+Planes+de+estudio+matem%C3%A1ticas&hl=es&ct=clnk&cd=23&gl=ar

Manuales:

SEP, Dirección General de Bachillerato (DGB) (2005-2007)

Dirección de Coordinación Académica

Matemáticas I, Matemáticas IV

SEP, Licenciatura en Educación Primaria

http://www.ene.edu.mx/plan_estudios_primaria.html

http://ses4.sep.gob.mx/dg/dgespe/cuader/cuad16/3plan.htm

http://72.14.253.104/search?q=cache:rFizdSm-_tAJ:www.afsedf.sep.gob.mx/archivos/noticias_edu/B008%2520270208%2520ANIVERSARIO%2520NORMAL.doc+SEP+escuela+Normal+plan+de+estudios&hl=es&ct=clnk&cd=7&gl=ar

Weitere für die Arbeit wichtige Literatur:

ABEL, Jürgen, et al; (1998)

Einführung in die Empirische Pädagogik, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart, Deutschland.

BAUERSFELD, Heinrich; KIESSWETTER, Karl; (2006)

Wie fördert man mathematisch besonds befähigte Kinder?; Mildenberger Verlag GmbH, Offenburg, Deutschland.

BAUMERT, J., KLIEME, E., NEUBRAND, M., PRENZEL, M., SCHIEFELE, U., SCHNEIDER,

W., STANAT, P., TILLMANN, K.-J. & WEISS, M. (Hrsg.). (2001). *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich.*

Opladen: Leske + Budrich.

BAUMGART, Franzjörg (Hrsg); (2001)

Entwicklungs- und Lerntheorien; Klinkhardt, Bad Heilbrunn, Deutschland.

BISHOP, Alan J. (1999)

Enculturación matemática, La educación Matemática desde la Perspectiva Cultural, Temas de Educación, Paidós, Barcelona, España.

BROMME, Rainer (1986)

Der Lehrer als Experte-Entwurf eines Forschungsansatzes: Denken und Wissen vin Lehrern aus der Perspektive neuerer Forschung zum Problemlösen (Februar 1986), Occasional Paper 77, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BROMME, Rainer und DOBSLAW, Gudrun (1986)

Teachers' Intructional Quality and their Explanation of Students' Understanding; (Januar 1986), Occasional Paper 76, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BROMME, Rainer (1983)

Teachers'cognitive Activities (Mai 1983), Occasional Paper 32, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BROMME, Rainer und STEINBRING, Heinz (1981)

Lokale und globale Aspekte des Lehrerwissens, Occasional Paper 8, Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

BUTH, Manfred; (2001)

Planung und Vorbereitung von Mathematikunterricht, Reuter + Klöckner, 2. Auflage, Hamburg, Deutschland.

CHAMORRO, Ma. Del Carmen, (Hrsg); (2003)

Didáctica de las Mathemáticas; Pearson Educación, Madrid, España.

CELIS RAMÍREZ, Víctor (1993)

Principales causas operacionales que ocasionan un Bajo ïndice de Eficiencia en el Aprendizaje de la Matemática, Educación Jalisco, México

DANCKWERTS, Rainer und VOGEL, Dankwart (2006)

Analysis verständlich unterrichten; Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Elsevier, GmbH, München.

DIAZ BARRIGA, Frida und HERNÁNDEZ ROJAS, Gerardo (1998)

Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo, Mc. Graw Hill, México.

FILLOY YAGÜE, Eugenio; (1999)

Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa, Grupo Editorial Iberamérica, S.A. de C.V., México.

FRANKE, Marianne; (2001)

Didaktik der Geometrie; Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg.

GARCÍA BLANCO, M.M. (1997)

Conocimiento profesional del Profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje, Kronos, Sevilla, España.

GERSTER, Hans-Dieter, (1990)

Lerndefizite als Folge con Lehrdefiziten? Erfahrungen aud der Analyse von Schülerfehlern bei schriftlichen Rechenverfahren (S. 56 – 74) in Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis Hrsg. LORENZ (1990)

GÓMEZ, Joan; (2002)

De la enseñanza al aprendizje de las matemáticas; Ediciones Paidós Ibérica, S.A., Barcelona, España.

GRZESIK, Jürgen und ANHALT, Elmar; (1994)

Unterricht, der Zyklus von Lehren und Lernen, Ernst Klett Verlag für Wissen und Bildung GmbH, Stuttgart.

GUTIÉRREZ SÁENZ, Raúl (2001)

Introducción a la Didáctica, 10. Edición, Editorial Esfinge, S.A. de C.V.,Naucalpan, México.

HAMEYER, Uwe (2000)

Entdeckendes Lernen, Wiechmann, Jürgen (Hrsg) (2000)

HASEMANN, Klaus (1988)

Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse

JMD 9 (88), 2/3 , S. 95 – 161

HAUSMANN, Kristina und REISS, Matthias (1990) Hrsg.

Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse, Verlag für Psychologie, Göttingen.

HERNÁNDEZ FERNÁNDEZ, Herminda, DELGADO RUBÍ, Juan Raúl & FERNÁNDEZ de ALAÍZA, Bertha (1998)

Cuestiones de didáctica de la matemática, Serie Educación, Homo Sapiens, Ediciones, Argentina

HESS, Kurt (2003)

Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Einstellungen, Umsetzungen und Wirkungen im mathematischen Anfangsunterricht, h.e.p. Verlag AG, Bern, Schweiz.

KELLE, Udo (2003)

Die Entwicklung kausaler Hypothesen in der qualitativen Sozialforschung. Methodologische überlegeungen zu einem häufig vernachlässigten Aspekt qualitativer Therie- und Typenbildung, ZDM, 2003, Vol 35(6)

KRAUTHAUSEN, Günter (1998)

Lerne-Lehren-Lehrenlernen, zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe, Klett-Schulbuchverlag, Leipzig.

KRAUTHAUSEN, Günther; SCHERER, PETRA; (2001)

Einführung in die Mathematikdidaktik; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Deutschland.

KRUMMHEUER, Götz (1994)

Der mathematische Anfangsunterricht. Anregungen für ein neues Verstehen für mathematische Lehr-Lern Prozesse, Deutscher Studien Verlag, Weinheim.

LAMBERTI, Jürgen; (2001)

Einstieg in die Methoden empirischer Forschung; dgvt-Verlag, Tübingen, Deutschland.

LLINARES, Salvador (1994)

La enseñanza de la s Matemáticas en la educación intermedia Capítulo II (pág. 147 – 340), Ediciones Rialp, S.A., Madrid (Hrg. Víctor García Hoz)

LEUDERS, Timo (2001)

Qualität im Mathematikunterricht. Cornelsen Verlag Scriptor, Berlin, Germany.

LOMPSCHER,J. Und SCHULZ,G. (1997)

Leben, Lernen und Lehren in der Grundschule, Luchterhand Verlag, Neuwied, Berlin

LÓPEZ PUIG, Anna (1997)

Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas, un enfoque constructivista, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Fundación Colegio Los Pinos, Salamanca, España.

LORENZ, Jens Holger; (Hrsg), (1990)

Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis, Aulis Verlag Duebner & Co. KG, Köln.

LORENZ, Jens Holger; RADATZ, Hendrik (2004)

Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht; Schroedel Verlag GmbH, Hannover, Deutschland

LORENZ, Jens Holger; (2005)

Lernschwache Rechner fördern; Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co., Berlin, Deutschland.

NACIONAL COUNCIL of TEACHERS of MATHEMATICS ; (2002 Yearbook)

LITWILLER, Bonnie, (2002 Yearbook Editor) Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions, NCTM, USA.

NOLTE Marianne (Hrsg); (2004)

Der Mathe-Treff für Mathe-Fans; Franzbecker, Hildesheim, Deutschland.

NUBIOLA, Jaime (1999)

El taller de la filosofía. Introducción a la escritura filosófica, Ediciones Universidad de Navarra, S.A., Pamplona, España.

ORTON, A. (1990)

Didáctica de las Matemáticas; Ediciones Morata, S.A., Madrid.

PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma (1994)

Didáctica de las Matemáticas: aportes y reflexiones, Paidós, Argentina

PETKO, Dominik, WALDIS, Monika, PAULI, Christine und REUSSER, Kurt (2003)

Methodologische Überlegungen zur Videogestützten Forschung in der Mathematikdidaktik, ZDM 2003, Vol 35 (6).

PORLÁN, Rafael y RIVERO, Ana (1998)

El Conocimiento de los Profesores, Serie Fundamentos # 9, Colección Investigación y Enseñanza, Sevilla, España.

RADATZ, Hendrik & SCHIPPER, Wilhelm; (2002)

Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen; Schroedel Verlag GmbH; Hannover, Deutschland.

RADATZ, Hendrik und RICKMEYER, Knut (1996)

Aufgaben zur Differenzierung, Schiedek Schulbuchverlag, Hannover.

RADATZ, Hendrik und RICKMEYER, Knut (1991)

Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen, Schroedel Verlag GmbH, Hannover, Deutschland.

RADATZ, Hendrik (1979)

Fehleranalyse um Mathematikunterricht, Vieweg, Braunschweig.

REISS, Kristina (2003)

Was sind und was sollen Bildungsstandards

Mathematik Lehren, Heft 118, 2003

ROSAS SÁNCHEZ, Ma. Elena y CASANOVA del ÁNGEL, Francisco (1998)

Estudio del Rendimiento académico curricular de la licenciatura en ingeniería civil: Conocimientos teóricos básicos; Revista: Educación Matemática, Vol. 10, No. 1, Abril 1998.

REUSSER, Kurt & MESSNER, Helmut (2002)

Das Curriculum der Lehrerinnen- und Lehrerbildung

Beiträge zur Lehrerbildung, 20 (3), 2002

SANCHEZ, Victoria (1994)

La enseñanza de las Matemáticas en la educación intermedia, Capítulo II, (pág. 147 – 340), Ediciones Rialp. S. A., Madrid

SCHERER, Petra; BÖNIG, Dagmar; (Hrsg); (2004)

Mathematik für Kinder, Mathematik vin Kindern; Grundschulverband-Arbeitskreis Grundschule e.V.; Hannover, Deutschland.

SCHERER, Petra; (1999)

Prouktives Lernen für Kinder mit Lernschächen, Fórdern durch Fordern; Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig, Deutschland.

SCHNEIDER, Edith; (2004)

Professionalität von Lehrerinnen und Lehrern

ZDM 2004 Vol. 36 (1)

SELTER, Christoph & SPIEGEL, Hartmut; (1997)

Wie Kinder rechnen; Ernst Klett Grundschulverlag GmbH, Leipzig, Deutschland.

TIETZE, Uwe-Peter (1988)

Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik- Theroienbildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung, JMD 9(88)2/3, S. 163-204.

TRIGUEROS, M.; REYES, A.; URSINI, S. Y QUINTERO, R. (1996)

Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. Enseñanza de las Ciencias, 1996, 14 (3), 351-363

VICENTE, Lidia & GEROMPINI, Ana (1992)

Didáctica Matemática en Acción, Ediciones Braga, S.A., Argentina

VOLLRATH, Hans-Joachim; (2001)

Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Deutschland.

VOLLRATH, Hans-Joachim; (1999)

Algebra in der Sekundarstufe; Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Deutschland.

WACHSMUTH, Ipke (1985)

Mathematische Fertigeiten und Mathematikverständnis, Verlag Barbara Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

WELLENREUTER, M. (1986)

Zur Methodologie „der Fehleranalyse“ in der mathematikdidaktischen Forschung – oder: Wieewit sind Fehleranalysen fehlerhafte Anaysen?; JMD 7 (1986) 4; S. 269-303

WIATER, Werner (1999)

Von Schüler her unterrichten, Auer Verlag GmbH, Donauwörth.

WIECHMANN, Jürgen, (Hrsg) (2000)

Zwölf Unterrichtsmethoden, Vielfalt für Praxis; Beltz Verlag, Germany.

WIELAND, Gregor (2004)

Entdeckendes Lernen und Produktives Üben; aus SCHERER, Petra & BÖMING, Dagmar (Hrsg) Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern, Beltz, Hemsbach, Garmany

WINTER, Heinrich (1984)

Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht

Grundschule 16: 24-29

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER Gerhard N. (2000),

Das Zahlenbuch, Lehrerband, Ernst Klett Schulbuchverlag, Leipzig, 1. Auflage.

WITTMANN, Erich Ch. & MÜLLER Gerhard N. (2001),

Handbuch produktiver Rechenübungen, Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH, 2. Auflage, Stuttgart, Deutschland.

WUNDERL, Mario (1999);

SchülerInnenfehler in Mathematikaufgaben der schriftlichen AHS-Matura, Wien.

Hausarbeit im Fach Mathematik am Institut für Mathematik der Universität Wien

ZECH, Friedrich (1998);

Grundkurs Mathematikdidaktik, Beltz (Pädagogik), 9. Auflage, Germany

Internet:

ALLERBAUER, Kurt

Verfügbar über: www.schule:suedtirol.it/blikk/angebote/reformpaedagogik/rp24861.htm

(16.01.2005)

ALLERBAUER, Kurt

Verfügbar über: http://www.mevis.de/~albers/Veranstaltungen/Entdeckendes L/

(16. 1. 2005)

ANDERSON, J.R.; REDER, L.M.; SIMON, H. (2000)

Applications and Misapplications of Cognitive Psychology to Mathematics Education. Texas Educational Review.

Verfügbar über: http://act-r.psy.cmu.edu/papers/misapplied.html

(20.9.2005)

BASTABLE, Virginia (1996)

Chapter 5; Recommendations for High School Teacher Preparation

Verfügbar über: http://www.cbmsweb.org/MET_Document/chapter_5.htm

(26.3.2004)

BAUMERT, Jürgen, NEUBRAND, Michael, KUNTER, Mareike, KRAUSS, Stefan, BRUNNER, Martin, KLUSMANN, Uta (2004)

Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetanz

Verfügbar über: http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/biqua/berlin_kassel.html

(22. 6. 2005)

BLANCO, L.J. (2004)

Competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas

Seminario, Granada (ICMI-E y UGR)

Verfügbar über: http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/Materi/ponentes/LJBlanco/LoBlanco.pdf

(4. 7. 2005)

BLANCO, L.J. et. al. (2002)

Posición del Área de Conocimiento Didáctica de la Matemática ante la Formación del Profesorado de Matemáticas en Educación Secundaria.

Verfügbar über: http://www.rsme.es/cornis/educ/secundaria.pdf

(4. 7. 2005)

BLANCO, L.J. (1994)

Practical Knowledge of Mathematics Teaching in Expert Elementary School Teachers

Verfügbar über: http://teleline.terra.es/personal/ljblanco/pag3g.html

(4.7.2005)

BLUM, Werner und BIERMANN, Mark; 2001;Eine ganz normale Unterrichtsstunde? Aspekte von "Unterrichtsqualität" in Mathematik.

Verfügbar über:

http://72.14.203.104/search?q=cache:ItHKYUjffAwJ:home.ph-frei-burg.de/leudersfr/mathelier/download/Biermann%2520Blum%25202001%2520Guter%2520Unterricht.pdf+Unterrichtsqualit%C3%A4t+Mathematik&hl=es&gl=de&ct=clnk&cd=3

(14.3. 2003)

BLUM, Werner; BAUMERT, Jürgen; NEUBRAN, Michael; KRAUSS, Stefan; BRUNNER, Martin; JORDAN, Alexander; und KUNTER, Mareike. (Ohne Jahresangabe) COACTIV – A Project for Measuring and Improving the Professional Expertise of Mathematics Teachers
Verfügbar über:http://stwww.weizmann.ac.il/Gmath/ICMI/Blum_COACTIV_ICMI15_prop_1.doc (18.6.2006)

BÖHMER, Maria, Pisa 2003, Fakten und Folgerungen

Verfügbar über: www.cducsu/Seite01-08

(20. 3. 2004)

BORASI, Raffaella (1997)

An analysis of the learning needs of teachers engaging in school matheamtics reform

Verfügbar über: http://www.rochester.edu/radiate/C/c2a_need.htm

(23.8.2006)

BORNELEIT, P.; DANCKWERTS, R.; HENN, H.-W; WEIGAND, H.-G.

Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe,

Verfügbar über: http://blk.mat.uni-bayreuth.de/aktuell/db/13/KMK_expertise.pdf

(2. 9. 2005)

COACTIV

Verfügbar über:

http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.htm?/coactiv/fragestellung/fragestellung.htm

(12. 8. 2006)

Entdeckendes und Induktives Lernen

Verfügbar über:

www. psychologie.uni-greifswald.de/~entpsycho/downloads_hk/pp1_0203/7verstehen.pdf+entdeckendes+Lernen&ht=es

(12. 1. 2004)

DIAZ, Barriga; Alejandro

Verfügbar über:

http://66.102.7.104/search?q=cache:FOamEw5GnfMJ:camel.math.ca/Events/CMS-SMM-2006/abs/pdf/ed.pdf+tenoch+Cedillo&hl=es&gl=mx&ct=clnk&cd=13

(12.3.2007)

GARCÍA BLANCO, M.M. (1997)

Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.

Verfügbar über: http://www.revistafuentes.org/htm/article.php?id_volumen=7&id_article=68

(10. 6. 2007)

GRAY, PITTA and TALL (1997)

What is a scheme?

Verfügbar über: http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpubs/schemes.html

(4.3. 2006)

HANDSCHUH, K. (2002)

Konsequenzen für eine Steigerung der Effektivität und Qualität des Mathematikunterrichts. Didaktische Visionen von einem guten Mathematikunterricht.

Verfügbar über: www.semrs.aa.bw.schule.de/mathevision.htm

(5.5.2005)

KRAINER, K. (nach 2002)

Theory and Practice: Facilitating teachers' investigation into their own teaching: Reflection on Barbara's teaching experiment European Research in Mathematics Education III

Verfügbar über:

http://www.dm.unipi.it/ ~ didattica/CERME3/proceedings/Panel/Panel_krainer_cerme3.pdf

(12.1. 2005)

KRAINER, Konrad (ohne Jahrangabe)

Die Situation in Österrich aus der Sicht von ExpertInnen der Schulpraxis, der Schulaufsicht und der Wissenschaft

Die Einschätzungen zum Mathematikunterricht.

Verfügbar über: http://imst2.uni-klu.ac.at/was_ist_imst/vorprojekt/IMST%20TOP5/TOP5-21.htm

(30.7.2006)

KRIPPNER, Wolfgang (1995)

Fachdidaktische Qualifikation – Rüstzeug für eine sich ändernde Praxis?

Verfügbar über: http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/kritik.htm

(2.9.2005)

KOEHLER, M.S., & GROUWS, D.A.

Image of the Pre-service Mathematics Learner

Verfügbar über: http://www.oise.utoronto.ca/~crosstown/Math_Resources/PreserviceLearnerM.html

(4.3.2006)

KUNZE, Sebastian

Das binationale und videobasierte Lehrerinnen- und Lehrerfortbildungsprojekt „MuBiL“

Verfügbar über: http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/Forschung/MuBiL/Inhalte/mubil-www-text-begleitforschung-kuntze.htm

(2.9.2005)

LLINARES, Salvador (nach 2001)

La formación del profesorado (Ponencia en el senado)

Verfügbar über: http://www.rsme.es/cornis/edu/senado/4m.pdf

(16. 3. 2003)

LÖFFELHOLZ, Robert; PETZER, Elke und WITTE, Lars

Unterrichtsmethode 22: Entdeckendes Lernen

Verfügbar über:

www.uni-flensburg.de/mathe/zero/veranst/didmath/kontexte_fuer_entdeckendes_lernen/kontexte_fuer_entdeckendes-lernen.html

(13.12.2004)

MARTINEZ SILVA, Mario (2003)

Concepciones sobre la Enseñanza de la Resta: Un Estudio en el Ámbito de la Formación Permanente del Profesorado, Tesis Doctoral (Dra. Nuria Gorgorió) Bellaterra, Julio del 2003.

Verfügbar über: http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0611/04-162344/mms/de3.pdf

(6.06.06)

MEETOO, D. & TEMPLE, B. (2003);

Issues in multi-method research: Constructing sel-care.

International Journal of Qualitative Methods, 2(3), Articel 1. Reviewed (29.III.05)

Verfügbar über: www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/2_3final/pdf/meetootemple.pdf

(29.4.2005)

MORSE, J.M. & CHUNG, S.E. (2003)
Toward holism: The significance of methodological pluralism.
International Journal of Qualitative Methods,2(3). Article 2.Reviewed (29.III.05)
Verfügbar über: www.ualberta.ca/~iiqm/backissues/2_3final/pdf/morsechung.pdf
(26. 4.2005)

PAPINI, María Cecilia;
Algunas Explicaciones Vigotskianas para los primeros Aprendizajes del Álgebra
Relime Vo. 6, Núm.1, marzo 2003, S. 41-71
Verfügbar über:
www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/2003-6-1/3.pdf+Kieran+1989&hl=es&gl=mx&ct=clnk&cd=6
(29.6.2004)

PRENTZEL, Manfred, et al. (PISA-Konsortium Deutschland)
PISA 2003
Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichhs
Verfügbar über: http://pisa.ipn.uni-kiel.de/Ergebnisse_PISA_2003.pdf
(22.12.2004)

RAHMENPLAN Mathematik für die Grundschule
Allgemeine mathematische Kompetenzen
Verfügbar über:
http://www.hamburger-bildungsserver.de/bildungsplaene/Grundschule/M_Grd.pdf
(30.6.2003)

REISS, Kristina
Beweisen im Matheunterricht
Verfügbar über: www.math.uni-oldenburg.de/didaktik/beweisen/
(13.12.2004)

SCHERER, Petra & STEINBRING, Heinz (nach 2001)
The professionalisation of mathematics teachers' knowledge – Teachers commonly reflect feedbacks totheir own instruction activity.
Verfügbar über:

http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG11/TG11_Scherer_cerme3.pdf

(14.4.2005)

SINGER, Peter (2004)

Fachdidaktik Mathematik, eine konstruktivistische Grundlegung. Diplomarbeit zur Erlangung des Weiterbildungsdiploms der Universität-Bern in Fachdidaktik Mathematik.

Verfügbar über: www.ph-solothurn.ch/pdf/2004-11-Schriftenreihe-Mathematik.pdf+fehlerkultur+algebra&ht=de

(16.3.2005)

SCHREIBER, Alfred (2001)

Verfügbar über:

www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/gzmadi/konzepte_von_mathematikunterricht/konzepte_von_ma.html

(26.3.2005)

STRAUDT, Marlies (2000);

Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht

Verfügbar über: http://seminar-ghsmz.bildung-rp.de/ma%20entde.htm

(13.12.2004)

STRECKER, Christian (1999)

Aus Fehlern lernen und verwandte Themen

Verfügbar über: http://64.233.187.104/search?q=cache:fTkr_viaWMMJ:blkl.mat.uni-bayreuth.de/links/material/fehler.pdf+fehlerkultur+algebra&hl=de

(16.3.2005)

TIMSS-Studie

Verfügbar über: http://www.timss.mpg.de.

(30.6.2003)

WERNER, Niklas;

Verfügbar über: www.niklaswerner.de/Assets/lins/node5.html

(17.4.2007)

Anhänge

Anhang 1: 3
Erster Test: 3
Anhang 2 6
Zweiter Test: 6
Anhang 3: Arithmetik 9
Testaufgaben von 1 - 10 9
Viele Studierende bearbeiten diese Aufgabe nicht. 12
Anhang 4: Exponentenregeln 27
Testaufgaben: 11 - 18 27
Anhang 5: Verfahren mit Monomen und Polynomen 80
Testaufgaben 19 - 23 80
Anhang 6: Faktorisierungsprozesse 110
Testaufgaben: 24 - 28 110
Anhang 7: Kürzungsprozesse 143
Testaufgaben: 29 - 32 143
Anhang 5: Lineare und quadratische Gleichungen 162
Testaufgaben: 33 - 39 162
Anhang 9: Ermittlung eines Schnittpunkts von zwei Geraden, Graph einer Geraden und Aufgabe mit Realitätsbezug 199
Testaufgaben: 40 – 42 199
Anhang 16: Schriftliche Befragung von Lehrenden über Studierendenlögungen 218
Anhang 17: Interview mit Enrique 266
Zum Verlauf des Interviews 266
Erster Teil des Interviews 266
Anhang 17a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Enrique und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien: 289
Anhang 18: Interview mit Pilar 297

Anhang 18a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Pilar und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien: 316

Anhang 19: Interview mit Jorge.....322

Anhang 19a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Jorge und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien: 339

Anhang 20: Interview mit Miguel Ángel.....346

Anhang 20a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Miguel Ángel und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien: 377

Anhang 21: Interview mit Raúl 391

Anhang 21a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Raúl und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien: 423

Anhang 1:

Erster Test:

A) Errechne die Aufgaben und vereinfache sie:

1. $4 - 2 \cdot 3 + 10 =$

2. $-4^2 =$

3. $7 \cdot 4 \div 2 \cdot 0 =$

4. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} \div \frac{3}{10} =$

5. log 0,01 =

6. ln e – ln e^2 =

7. $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{12}{21} =$

8. $\sqrt[3]{0{,}008} =$

9. $\sqrt[3]{-27} =$

10. $\sqrt{\frac{1}{16}} =$

B) Vereinfache die nächsten algebraischen Ausdrücke und Aufgaben, Vereinfachungen sollen nur positive Exponenten enthalten.

11. $\sqrt[6]{\sqrt{x^{12}}} =$

12. $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{5}}} =$

13. $\frac{(x+1)^{m+3}}{(x+1)^{m+5}} =$

14. $3^{-2} =$

15. $10^{-3} \cdot \frac{10^5}{10^{-2}} =$

16. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-\sqrt{8}} =$

C) Faktorisiere die algebraischen Ausdrücke vollständig:

17. $4x^2 + 17x + 4 =$

18. $4a^2 - 12ab + 9b^2 =$

19. $9z^4 + 20z^2 + 16 =$

20. $x^2 + 1 - (x-3)(x^2+1) =$

D) Führe die angegebene Operation aus und vereinfache den jeweiligen Ausdruck:

21. $\dfrac{z^4 + z^3 + 5z^2 + 3z - 2}{z+1} =$

22. $\dfrac{2a - 2b}{3b - 3a} =$

23. $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x+1)} =$

24. $\dfrac{(z+2)(z-1) - 3(z+2)}{(z+2)} =$

25. $\dfrac{3(y+4) - 2}{y+4} =$

26. $\dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x - y} =$

E) Löse die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

27. $x(x-3) - 3(x-2) = x^2$

28. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$

29. $3 - \dfrac{x+1}{4} = 5$

30. $3^{3x-1} = 9^{x-3}$

31. $4x^2 = x$

32. log x + log (x+3) = 1

33. $3x^2 + 8 = 10x$

34. $3x - 4(x-3) \leq 2$

F) Skizziere die zwei Funktionen:

35. x – 3y = 6

36. $x^2 + 2x - 8 = y$

G) Löse die folgenden Textaufgaben:

37. Ein Schiff legt in der gleichen Zeit 3 Meilen flussaufwärts oder 5 Meilen flussabwärts zurück. Wenn die Geschwindigkeit flussabwärts des Flusses 8 Meilen pro Stunde beträgt, welche Geschwindigkeit würde das Schiff bei stillem Wasser haben?
38. Man möchte 15 000 Pesos bei zwei verschiedenen Banken anlegen. Die Bank A bietet 10% jährliche Zinsen an und die Bank B, 20% . Wenn man genau 2 000 Pesos im Jahr von beiden Banken an Zinsen erhalten möchte, wieviel Geld muss man bei jeder Bank anlegen?
39. Eine Ware hat einen Preis von 680 Pesos. Der ursprüngliche Preis ist 15% herabgesetzt worden. Wie teuer war die Ware bevor sie herabgesetzt wurde?
40. Wenn ein einhalb Katzen im Durchschnitt ein einhalb Mäuse in ein einhalb Tagen fressen, wieviel Mäuse würden 6 Katzen in 6 Tagen fressen?

Cristina Eccius Wellmann

Anhang 2

Zweiter Test:

A) Errechne die Aufgaben und vereinfache sie:

1. $25 - 5 \cdot 2 + 4 =$
2. $2 + 3 \cdot \sqrt{3} - 4 =$
3. $9 \cdot 3 \div 6 \cdot 0 =$
4. $-8^2 =$
5. $\frac{8}{7} \cdot \frac{14}{2} \cdot \frac{9}{4} =$
6. $\frac{21}{45} \div \frac{7}{15} =$
7. $\sqrt{0.16} =$
8. $\sqrt{\frac{1}{9}} =$
9. $\sqrt[3]{-64} =$
10. $\sqrt{4^2 + 3^3} =$

B) Vereinfache die nächsten algebraischen Ausdrücke und Aufgaben, Vereinfachungen sollen nur positive Exponenten enthalten.

11. $10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}} =$
12. $b^{3x+1} b^{1-3x} =$
13. $\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m} =$
14. $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}} =$
15. $(-3x^{-4})^2 =$
16. $\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$

17. $\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}} =$

18. $\sqrt{x^2 + y^2} =$

C) Führe die angegebene Operation aus und vereinfache den jeweiligen Ausdruck:

19. $\frac{25x^{-1}y^4z^{-2}}{-5x^2y^{-1}z^{-4}} =$

20. $14x^2 - 6xy + 8xy - 3y^2 =$

21. $3 \cdot (x-2) + 4 \cdot (3-x) - (x-5) =$

22. $(z^2 - 5z + 4) \cdot (z-1) =$

23. $\sqrt{x^2 + y^2} =$

D) Faktorisiere die algebraischen Ausdrücke vollständig:

24. $z^2 - 16z + 64 =$

25. $9y^2 + 6xy + 1 =$

26. $x^2 + 1 + 3x(x^2 + 1) =$

27. $x^2 - 12x + 35 =$

28. $y^3 - 9y =$

E) Vereinfache die nächtenalgebraischen Ausdrücke:

29. $\frac{(x-5)(x+3)}{x+3} =$

30. $\frac{y \cdot (y+2) + (y+2)}{y+2} =$

31. $\frac{(z+4) \cdot (z-1) + 2}{z+4} =$

32. $\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b} =$

F) Löse die folgenden linearen Gleichungen:

33. $x \cdot (3 - x) - 4 \cdot (1 + x) + x \cdot (x - 3) = 0$

34. $6 - \frac{2x}{3} = 9$

35. $\frac{x+3}{x-4} = 0$

G) Löse die quadratischen Gleichungen:

a) durch Faktorisation

36. $x^2 - 4x + 3 = 0$

37. $2x^2 + 2x = 0$

b) durch die Formel für quadratische Gleichungen

38. $2x^2 - x - 15 = 0$

39. $z^2 - 9 = 0$

H) Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden:

40. x – y = 2
y – 2x = 1

I) Skizziere die zwei Funktionen:

41. $y = \frac{1}{2}x + 3$

J) Löse die folgenden Textaufgabe:

42. Das Preisschild einer Ware ist: $ 144.00; in diesem Preis sind 20% mit einbegriffen. Welchen Preis hatte die Ware vor den Steuern?

Anhang 3: Arithmetik

Testaufgaben von 1 - 10

Der erste Teil des Tests soll Kenntnisse über die Hierarchie der Rechenoperationen, die Vereinfachungsformen bei Brüchen und den Umgang mit Wurzeln untersuchen.

In der Regel lassen sich die Ursachen der Fehler aus den schriftlichen Unterlagen nicht sicher bestimmen. Um einen Zugang zu finden, werden zunächst mögliche Gedanken der Studierenden benannt. Im nächsten Schritt werden die Vorgehensweisen interpretiert.

Dies kann sich nur auf fiktive Denkprozesse beziehen. Bei der Durchführung von Prozeduren werden Vorgehensweisen häufig nicht bewusst reflektiert. Nach DAVIS (vgl. NOLTE, 1991) können die Schritte in einem solchen Verfahren als visuell moderierte Inputs betrachtet werden. Die visuell moderierte Informationsaufnahme orientiert sich jedoch an Mustererkennungsprozessen. Eine unvollständige Mustererkennung kann Fehler produzieren, wie SHEVAREV (siehe NOLTE) ausführt.

Sehr viele der beobachteten Fehler werden in der Literatur beschrieben.[1] In der tabellarischen Auflistung finden sich die entsprechenden Angaben „Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben“ in der dritten Spalte. Teilweise werden zusätzliche Deutungen vorgenommen.

Testaufgabe 1:

25 – 5 x 2 + 4 = 19

Alle Lösungsprozesse dieser Aufgabe geben einen Hinweis auf Schwierigkeiten, die sich auf die Hierarchie der Rechenoperationen beziehen. Jede der Fehllösungen kann als unterschiedliches Umgehen mit dieser Hierarchie oder auf eine falsche Einsicht in die Hierarchie aufgefasst werden. Es werden z. T. imaginäre Klammern gesetzt, oder die Operationen von links nach rechts vorgenommen ohne weitere Regeln mit einzubeziehen. “Punktrechnung geht vor Strichrechnung” hat für diese Studierende wenig Bedeutung.

[1] Insbesondere bei Fehlern wie Perseverationsfehler, Verwechslung von 0 und 1 als neutralem Element und ähnliche Fehler sind die Angaben „Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben“ nicht vollständig, sondern sollen allein belegen, dass dieser Fehler bereits bekannt ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$25 - 5 \times 2 + 4 =$	44	"Punktrechnung geht vor Strichrechnung" PADBERG (2005, S. 125) Vorherrschende Strategie: von links nach rechts rechnen BOOT (1984, S. 31; aus NOLTE (1991, S. 45)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“25 – 5 = 20

20 x 2 = 40

40 + 4 = 44”

Deutung:

Dieser Fehler resultiert aus der Annahme, dass die Operationen von links nach rechts ausgeführt werden. Die Hierarchie, die sich in folgenden Merksatz, der häufig zur Hilfe gegeben wird “Punktrechnung geht vor Strichrechnung”, ausdrückt, wurde nicht beachtet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$25 - 5 \times 2 + 4 =$	11	Imaginäre Klammersetzung MALLE (1993, S. 192)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“5 x 2 = 10

10 wird von 25 subtrahiert

und dann auch noch die 4 subtrahieren, da diese nach dem Minuszeichen steht”

Deutung:

Erkannt wird, dass zuerst die Multiplikation vorgenommen werden muss. Das Minuszeichen wird mit dem Distributivgesetz aber auch auf die 4 übertragen, in dem eine “imaginäre” Klammer gesetzt wird. 25 – (5 x 2 + 4) (siehe MALLE 1993).

Weitere Deutung: Perseverationsfehler: 5 x 2 = 10, 10 wird von 25 subtrahiert, Subtraktion als Operation bleibt im Gedächtnis haften, deshalb wird auch 4 subtrahiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$25-5\times 2+4=$	120	Imaginäre Klammersetzung MALLE (1993, S. 192)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Multipliziert werden müssen das Resultat der Addition mit dem Resultat der Subtraktion."

Deutung:

Die Gedanken der Studierenden können auf zwei verschiedene Weisen gedeutet werden:

a) Die Hierarchie der Operationen wird hier andersherum gedeutet, erst Addition und Subtraktion, dann die Multiplikation, oder

b) der Studierende setzt imaginäre Klammern (selbst beobachtet, weil nachgefragt): (25-5)x(2+4) (siehe MALLE 1993).

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$25-5\times 2+4=$	- 5	Imaginäre Klammersetzung MALLE (1993, S. 192)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"5 wird mit der Summe von 2+4 multipliziert und von 25 abgezogen"

Deutung:

a) Eine nicht vorhandene Klammer wird bei der Summe von (2 + 4) gesetzt, so dass diese Operation erst vorgenommen wird, danach wird die Multiplikation mit der 5 vorgenommen und 30 dann von 25 abgezogen. Es besteht bei dieser Aufgabe die Möglichkeit einer falschen Informationsaufnahme. Die Aufgabe, die gerechnet wird, ist: 25 – 5 (2 + 4) = 25 – 5 (6) = 25 – 30 = - 5

Oder:

b) Vertauschen der Rechenrichtung: konsequentes Rechnen von rechts nach links

Testaufgabe 2:

$2+3\cdot\sqrt{3}-4=-2+3\cdot\sqrt{3}$

Viele Studierende bearbeiten diese Aufgabe nicht.

Diese Aufgabe sollte so weit wie möglich vereinfacht werden. Dazu ist es nicht nötig aus der 3 die Wurzel zu ziehen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2+3\cdot\sqrt{3}-4=$	1	Reparatur erfolgt im Sinne: lasse den störenden Term weg MALLE (1993, S. 184) TIETZE (2000, S.70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Die $\sqrt{3}$ ignoriere ich erst einmal, ich addiere zur 2 die 3 und subtrahiere die 4"

Deutung:

$\sqrt{3}$ wird als störend empfunden, so wird die Wurzel nach (MALLE; 1993, S.184; TIETZE; 2000, S. 70) einfach ignoriert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2+3\cdot\sqrt{3}-4=$	$\sqrt{3}$	Ignorieren der $\sqrt{3}$ bis nach der Addition und Subtraktion Reparatur: Hebe den störenden Term bis nachher auf TIETZE (2000,S. 70) MALLE (1993, S. 184)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"2 + 3 – 4 = 1; 1 $\sqrt{3}$ ist dann das Resultat"

Deutung:

Die vorhandene Multiplikation der $\sqrt{3}$ mit 3 wird nicht als hierarchisch wichtig angesehen, als ein Term, der solange er nicht arithmetisch errechnet wird, als Ganzes angesehen werden muss. So kann diese Aufgabe nur dadurch vereinfacht werden, indem 2 + 3 – 4 gerechnet wird, und die $\sqrt{3}$ dann mit dem Resultat multipliziert wird.

Testaufgabe 3:

$9 \cdot 3 \div 6 \cdot 0 = 0$

Bei dieser Aufgabe sollte neben der Kenntnis um die Hierarchie der Operationen der Umgang mit Null überprüft werden.

Leider konnte bei einigen Studierenden, die als Resultat 0 hatten, nicht analysiert werden, ob diese Antwort auf einem korrekten Prozess basierte, da die Null oft aufgeschrieben wurde, ohne dass der Lösungsweg notiert wurde.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9 \cdot 3 \div 6 \cdot 0 =$	27/0 = 0	Division durch Null RADATZ (1983, S. 83)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“9 x 3 = 27,

6 x 0 = 0

27 : 0 = 0”

Deutung:

Bei dieser Aufgabe wird deutlich, dass es teilweise nicht möglich ist, bei einer produktorientierten Betrachtung auf den zugrunde liegenden Prozess zu schließen. Es ist besteht die Möglichkeit eines Nichterkennens eines Fehlers. Beantwortet der Studierende nur mit einer Null, so kann nicht festgestellt werden, ob der Studierende die Aufgabe wirklich richtig gelöst hat. Durch eine Beobachtung der Vorgehensweise einiger Studierende, konnte ich feststellen, dass viele zwei Fehler nacheinander begangen:

a) Der erste Fehler besteht in der Annahme, dass man erst multipliziert und dann dividiert (ersten zwei Schritte) $(9 \cdot 3) \div (6 \cdot 0) = 27 / 0$

b) Der zweite Fehler geht aus dem Umgang mit der Division durch Null hervor. Der Fehler, durch Null zu dividieren (27/0 = 0), wird bei RADATZ (1983, S. 83) beschrieben.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9 \cdot 3 \div 6 \cdot 0 =$	∞	Hierarchie der Rechenoperationen Eventuell eine unangemessene Informationsaufnahme (nach SHEVAREV in MALLE, 1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“9 x 3 = 27

6 x 0 = 0

27 / 0 = ∞ “

Deutung:

a) Fehler entsteht durch die Annahme, dass erst multipliziert werden muss, und dann dividiert wird, wahrscheinlich ist die Ursache, dass man zuerst in der Schule multipliziert und dann dividiert. Wenn eine Aufgabe nur Operationszeichen der gleichen Hierarchie hat, sollte sie von links nach rechts errechnet werden.

b) Eventuell kann sich der Studierende den Term als Bruchterm notiert vorgestellt haben. Auf diese Weise kann es zu einem Mustererkennungsfehler gekommen sein: $\frac{9\times 3}{6\times 0}$ Hier könnte man eine unangemessene Informationsaufnahme vermuten.

Testaufgabe 4:

$-8^2 = -64$

Gefragt wurde nach dem Umgang mit Potenzregeln. Hier zeigten sich z.B. Verwechslungen zwischen Potenz und Multiplikation.

Gesucht wurde die Auslegung der Hierarchie der Operationen, gefunden wurden einzelne Schwierigkeiten, wie die Konfusion der Potenz mit der Multiplikation.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$-8^2 =$	64	Imaginäre Klammersetzung MALLE (1993, S.192) Umgangssprachlicher Rahmen NOLTE (1991, S. 65) MALLE (1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Minus 8 zum Quadrat ist (-8)(-8) = 64 “

Deutung:

a) Nichtbeachtung der Hierarchie der Operationen. Zuerst müsste das Quadrat von 8 errechnet werden, dann das Vorzeichen gesetzt werden.

b) Die verbalen Formen der Aufgaben (-8) zum Quadrat und -8 zum Quadrat unterscheiden sich nicht, der Studierende ist möglicherweise nie darauf aufmerksam gemacht worden. Wenn man diese subtile Unterscheidung nicht aufnimmt, kann diese Lösung einer Fehlinterpretation der verbalen Formen unterliegen.

c) Hier könnten auch fehlerhafte Mustererkennungsprozesse im Sinne von SHEVAREV (siehe NOLTE) vorliegen: Verwechslung von -8^2 und $(-8)^2$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$-8^2 =$	16	Visuelle Ähnlichkeit, Unvollständige Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Minus mal Minus ist Plus,

Zweimal 8 ist 16"

Deutung:

Das Resultat weist auf zwei verschiedene Problematiken hin:

a) Das Quadrieren des Minuszeichens wird vorgenommen, obwohl gerade das Minuszeichen nicht quadriert werden sollte. Durch die Hierarchie der Operationen wird nur die 8 potenziert, dadurch das Pluszeichen.

b) Der quadratische Exponent wird mit einer Multiplikation mit 2 verwechselt, (NOLTE 1991, S. 67; MALLE 1993, S. 166), oder es kann auch an einer fehlerhaften Informationsaufnahme liegen, da 8^2 dem 8 mal 2 ähnelt.

Testaufgabe 5:

$$\frac{8}{7}\times\frac{14}{2}\times\frac{9}{4}=2\times 9=18$$

Diese Aufgabe überprüft die Fähigkeit, Vereinfachungen durch Kürzen vorzunehmen. Einerseits sollte festgestellt werden in wie weit Studierende einen Term vereinfachen können, indem sie vor der Multiplikation von Zähler und Nenner kürzen, andererseits ob sie nach dem Berechnen der Brüche so weit wie möglich kürzen. Gefunden wurde zusätzlich eine Fehlkonzeption im Umgang mit dem Gleichheitszeichen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{8}{7}\times\frac{14}{2}\times\frac{9}{4}=$	1008 / 56	Algorithmischer Ansatz, ohne den Bruch vollkommen zu vereinfachen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Die Zähler aller Brüche werden multipliziert und zum neuen Zähler, die Nenner aller Brüche werden multipliziert und zum neuen Nenner".

Deutung:

Der Lösungsprozess weist darauf hin, dass der Studierende diese Aufgabe algorithmisch[2] löst, ohne die Zahlen im Einzelnen zu betrachten. Auffallend ist, dass der resultierende Bruch nicht gekürzt wird, und dass die Terme nicht vor dem Berechnen gekürzt werden, womit die Aufgabe einfacher zu lösen wäre.

Diese Lösungsform bringt es mit sich, dass viele Rechenfehler bei den Multiplikationen (besonders im Zähler) und bei den Versuchen zu kürzen gemacht werden können. Auf Rechenfehler bei der Multiplikation und Kürzung wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{8}{7}\times\frac{14}{2}\times\frac{9}{4}=$ $\frac{8}{7}\cdot\frac{14}{2}=\frac{112}{14}\cdot\frac{9}{4}=\frac{1008}{56}=\frac{504}{28}=\frac{252}{14}=\frac{126}{7}=18$		Missbrauch des Gleichheitszeichens RADATZ (1983, S. 70)

[2] In unseren Schulen wird häufig als Rezept für die Multiplikation von Brüchen vermittelt, jeweils die Zähler und Nenner zu multiplizieren und die erhaltenen Produkte als Zähler und Nenner zu notieren. Damit in Verbindung stehen sollte jedoch das Wissen um das, wie es in Mexiko genannt wird "fundamentale Prinzip der Bruchrechnung": Jede Bruchzahl kann im Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich 0) multipliziert oder dividiert werden, ohne dass sich der Wert der Bruchzahl verändert.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Ich multipliziere erst die ersten zwei Brüche und dann multipliziere ich den resultierenden Bruch mit dem dritten Bruch, danach kann ich den Bruch kürzen"

Deutung:

Das Endresultat ist richtig, jedoch besteht bei diesem Prozess eine fehlerhafte Verwendung des Gleichheitszeichens, da die Transitivität des Gleichheitszeichens nicht eingehalten wurde. Die Multiplikation der ersten beiden Brüche, ist nicht gleich 18. Nach RADATZ (1983, S. 70) wird die Reihenfolge der Zeichen vernachlässigt, verursacht durch die Interpretation des Gleichheitszeichens als „ergibt, kommt heraus".

Es geht aus dem Prozess hervor, dass der Studierende zwar den Bruch vereinfacht, dieses jedoch in vielen Schritten machen muss. Eventuell kann er die Divisionsregeln nicht anwenden.[3]

Testaufgabe 6:

$$\frac{21}{45} \div \frac{7}{15} = \frac{21 \times 15}{45 \times 7} = 1$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{21}{45} \div \frac{7}{15} =$	315 / 315 = 0	Verallgemeinerung; Unkritische Operationen mit neutralen Elementen MATZ (1980) aus MALLE (1993, S. 173f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"21 x 15 ist der neue Zähler, 45 x 7 ist der neue Nenner. Zwei gleiche Zahlen, die dividiert werden, ergeben 0"

Deutung:

Der Verlauf des Gedankenganges geht nicht klar aus der Lösungsform hervor, jedoch ist klar, dass der Studierende entweder den ersten Bruch mit dem rezip-

[3] Diese Aufgabe wird im Lehrerinterview eingesetzt, da ich erforschen wollte, in wie weit Lehrerinnen und Lehrer den Missbrauch des Gleichheitszeichen erkennen. Erkennt ein Lehrender diese Problematik nicht, laufen Schülerinnen und Schüler Gefahr eine Fehlkonzeption des Gleichheitszeichens zu entwickeln..

roken zweiten Bruch multipliziert hat, oder dass er eine der gängigen Formen aus der Schulzeit gebraucht, z.B. den Zähler des ersten Bruches mit den Nenner des zweiten Bruches multipliziert und als Zähler des resultierenden Bruches niederschreibt, und den Nenner des ersten Bruches mit dem Zähler des zweiten Bruches multipliziert und als Nenner des resultierenden Bruches niederschreibt. So weit ist der Lösungsprozess richtig, wenn auch lang und durch Fehler bei den Multiplikationen anfällig.

Der Fehler resultiert wahrscheinlich aus der Interpretation von 315 / 315.

a) Es kann ein Kürzungsprozess vorgenommen worden sein, in dem man bei der Kürzung die 315 im Zähler und die 315 im Nenner "eliminiert"[4]. Das Beseitigen kann jedoch zur Assoziation: "es ist etwas nicht mehr da, also entsteht eine 0" führen.

b) Es kann auch eine Fehlinterpretation der neutralen Zahlen sein. 315/315 ist eine neutrale Zahl, die mit der neutralen Zahl der Subtraktion von 315 – 315 verwechselt wird, und als 0 interpretiert wird (MALLE; 1993, S. 173-174).

Testaufgabe 7:

$\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{0{,}16} =$	0,04	Schwierigkeiten mit dem Stellenwertsystem der Dezimalzahlen. Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV, aus MALLE, 1993, S.169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Die Wurzel von 16 ist 4, ich habe zwei Stellen nach dem Komma, also 0,04"

***Deutung**:*

0,16 wird (vorläufig) vermutlich als 16 interpretiert und von 16 die Wurzel gezogen, bei der 4 besteht dann die Vorstellung, dass das Resultat 0,04 sein muss, da die vorhergehende Zahl auch zwei Stellen nach dem Komma hatte.

Wahrscheinlich werden die Erfahrungen aus dem Umgang mit natürlichen Zahlen unzulässig verallgemeinert: die Multiplikation führt zu einer Vergrößerung der Zahlen. Wird diese Vorstellung aufrechterhalten, ist das ein Hindernis zu

[4] "eliminieren" = beseitigen ist eine nicht präzise umgangssprachliche Beschreibung, die im Zusammenhang mit Kürzen häufig gebraucht wird.

verstehen, was bei der Multiplikation zweier gleicher Zahlen zwischen 0 und 1 passiert. Dadurch erfolgt eine Fehlinterpretation der Wurzeln von Zahlen, die kleiner als 1 sind.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{0{,}16} =$	$0{,}16^{2}$ oder $0{,}16^{-1/2}$	Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Verwechslung der Potenz ½ mit -½ und 2.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

a) "Die Wurzel eines Terms kann man auch als Potenz des Terms darstellen, da es eine Quadratwurzel ist, potenziere ich 0,16 mit 2."

b) "Das Wurzelzeichen hängt mit einer Bruchzahlpotenz zusammen, es wird also 0,16 hoch -1/2."

Deutung*:*

a) Wahrscheinlich resultiert $0{,}16^{2}$ aus der Vorstellung, dass jede Wurzel einer Menge als Potenz der Menge dargestellt werden kann, jedoch sind die Regeln der Brüche als Potenzen für das Wurzelziehen nicht klar. Die Relation zwischen der Quadratwurzel und der 2 besteht, jedoch nicht die Interpretation, dass die 2 der Nenner des Bruches der Potenz ist.

b) Der Zähler und der Nenner der Bruchzahl, die als Potenz der 0,16 resultiert ist richtig angewandt, jedoch geht aus dieser Lösung nicht klar hervor, wo das Minuszeichen herkommt, es ist zu vermuten, dass es mit der Idee der negativen Potenzen in den Brüchen zusammenhängt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{0{,}16} =$	0,004	Vorstellung, dass die Wurzel einer Zahl kleiner sein muss. Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV, nach MALLE (1993, S. 169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Die Wurzel von 16 ist 4, die Zahl muss kleiner sein als die Zahl zuvor, also 0,004”

***Deutung**:*

Ob der Studierende die Vorstellung besitzt, dass 0,004 x 0,004 eine Zahl ist, die 6 Stellen nach dem Komma hat, ist zu bezweifeln. Man kann vermuten, dass der Studierende keinen klaren Begriff von Dezimalzahlen hat, und auch nicht davon, dass die Quadratwurzel von 0,16 eine Zahl sein muss, die größer als 0,16 ist.

Aus diesem Lösungsprozess, oder eher Resultat geht auch hervor, dass der Studierende sich wahrscheinlich keine Gedanken über sein Resultat macht. Im Sinne von Malle (1993, S. 162) fehlt eine Kontrollinstanz.

Testaufgabe 8:

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Viele Studierende haben die Aufgabe nicht bearbeitet. Analysiert werden sollten Konzeptionen über die Wurzel eines Bruches.

Gefunden wurden auch Fehlkonzeptionen über das Wurzelzeichen selbst.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{\frac{1}{9}} =$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$ Noch nicht in der Literatur gefunden	Operationszeichen werden weiterhin mitgeschrieben, auch wenn die Operation ausgeführt wurde.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Ich ziehe die Wurzel aus 1/9, das ist 1/3; also ist die Wurzel 1/3”

***Deutung**:*

Vermutlich nimmt der Studierende das Wurzelzeichen auf, realisiert die Operation, aber berücksichtigt nicht, dass er nun die Wurzel schon gezogen hat, und das Wurzelzeichen als Operationszeichen schon gebraucht wurde und danach nicht mehr niedergeschrieben wird.

Diese Situation findet sich auch oft beim Integrieren wieder.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{\frac{1}{9}} =$	$\sqrt{0{,}15}$	Doppeltes Wurzelziehen, beim zweiten Wurzelziehen eine Verwechslung mit der Division. MALLE (1993, S.166) NOLTE (1991, S. 67) Operationszeichen werden weiterhin mitgeschrieben, auch wenn die Operation ausgeführt wurde.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die Wurzel von 1/9 ist 1/3, was gleich 0,3 ist. Dann dividiere ich durch 2, das ergibt 0,15." Er berücksichtigt nicht, dass er die Wurzel schon gezogen hat.

Deutung*:*

Die Vermutung in der vorhergehenden Operation wird auch auf diesen Prozess übertragen, mit der darauf folgenden Interpretation, dass der Studierende durch das Niederschreiben der Wurzel, ein weiteres Wurzelziehen vornimmt (wahrscheinlich eine quadratische Wurzel zieht), welches er mit einer Division durch 2 verwechselt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{\frac{1}{9}} =$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$	Kontrolle über Gesamtablauf verloren MALLE (1993, S. 186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Die Quadratwurzel von 1/9 ist das Gleiche wie 1/9 ½”

Deutung*:*

Der Studierende kann eine Quadratwurzel als Potenz (hoch ½) interpretieren, jedoch zieht er die Wurzel nicht.

a) Eine mögliche Ursache kann es sein, dass er die Quadratwurzel von 1/9 nicht ziehen kann.

b) Die andere Möglichkeit wäre, dass er nach MALLE (1994, S.186) nach der Umformung in eine Potenz, vergisst, dass er die Wurzel von 1/9 ziehen sollte.

c) Es kann auch sein, dass er gar nicht bedenkt, was er macht. Er interpretiert das Wurzelziehen nicht als Operation, sondern als andere Form der Schreibweise.

Testaufgabe 9:

$\sqrt[3]{-64} = -4$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{-64} =$	Die Aufgabe ist nicht lösbar	Informationsaufnahme (nach SHEVAREV in MALLE, 1993, S. 167) Mustererkennungsprozesse

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Die Wurzel aus einer negativen Zahl kann nicht gezogen werden"

***Deutung**:*

a) Wahrscheinlich besteht eine fehlerhafte Informationsaufnahme: der Studierende bemerkt nicht, dass es eine Kubikwurzel ist. Durch die Verwechslung mit einer Quadratwurzel schließt er auf eine Unlösbarkeit der Aufgabe im Bereich der reellen Zahlen. Man könnte sich hier noch fragen, ob der Studierende keine Lösung im Bereich der reellen Zahlen findet, oder ob er die imaginären oder komplexen Zahlen nicht kennt. (Er erkennt das Muster einer quadratischen Wurzel)

b) Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass er eine Kubikwurzel nicht zu interpretieren weiß, da man bei der Kubikwurzel drei gleiche Zahlen (mit Vorzeichen) sucht, die multipliziert -64 ergeben. Der Studierende kann nicht das Minuszeichen integrieren. So hat die Aufgabe keine Lösung.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{-64} =$	4i oder i4	Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Die Kubikwurzel von 64 ist 4, da 64 negativ ist, ist die Wurzel nicht im Bereich der reellen Zahlen, es ist eine imaginäre Zahl, 4i oder i4."

***Deutung**:*

Der Studierende hat einerseits die Information einer Kubikwurzel wahrgenommen, da er die Kubikwurzel von 64 zieht, in dem er 4 erhält. Jedoch ist zu vermuten, dass der Studierende nicht beachtet oder weiß, dass man Kubikwurzeln (im reellen Bereich) aus jeder positiven oder negativen Zahl ziehen kann. Seine Wissensgrundlage ist fehlerhaft, da er annimmt, dass eine Kubikwurzel einer negativen Zahl auch eine imaginäre Zahl ergibt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{-64} =$	± 4	Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

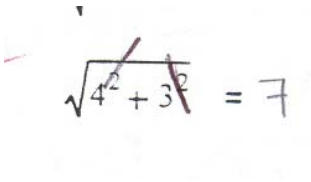
"Kubikwurzel von 64 ist ± 4."

***Deutung**:*

Die Kubikwurzel wird aus der 64 gezogen, jedoch in der Lösungsmenge {+4,-4} mit der Quadratwurzel verwechselt. Hier besteht ein weiterer Fehler, da z.B. die $\sqrt{16} = 4$ und $-\sqrt{16} = -4$ ist, und nur in einer Gleichung $x^2 = 16$ die Lösungen x = 4 und x = -4 sind.

Testaufgabe 10:

$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Mustereinsetzung, Linearisierung oder Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten. MALLE (1993, S. 171 und 181)

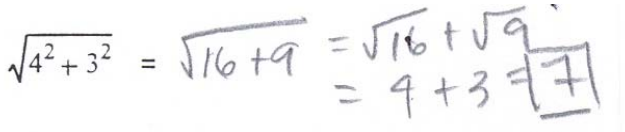
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Wurzelziehen und Quadrieren hebt sich auf"

***Deutung**:*

a) Hineinprojizieren eines Musters $\sqrt{x^2} = x$, in dem oft von Schülerinnen und Schülern eine Art "Kürzung" vorgenommen wird, und eine Aufhebung des Wurzelzeichens mit der Potenz interpretiert wird. (Malle, 1993, S. 171)

b) Deutung von $4^2 + 3^2$ als $(4 + 3)^2$, erfolgt durch die Zerlegung der Teile, d. h. eine Linearisierung ist vorgenommen worden , oder ein Rückgriff auf allgemeine Lebensweisheiten. (MALLE, 1993, S. 175 u. S. 181)

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unzulässiges Linearisieren MALLE (1993, S. 175) TIETZE (2000, S. 72) Eines nach dem anderen MALLE (1993, S. 181)

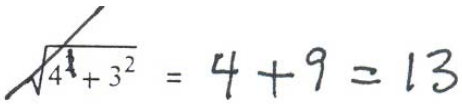
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"Erst 4^2 und dann 3^2. Dann eins nach dem anderen, $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3$"

***Deutung**:*

a) Diese Form resultiert entweder aus einem Linearisierungsprozess (siehe MALLE, 1993, S. 175 und TIETZE 2000, S. 72) oder aus der Annahme, dass man die Aufgabe in Teile zerlegen kann, um sie besser lösen zu können (vgl. Malle, 1993, S. 181).

b) Sie kann auch aus einer Verwechslung von Summen und Produkten erfolgen. Dann wäre das als fehlerhafte Informationsaufnahme zu verstehen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{4^2+3^2}=$		In dieser Form nicht in der Literatur referiert. Weist auf „Kürzungs-prozess“ hin oder eine Art Streichschema, dadurch könnte es eingeordnet werden zu: Zu offene Schemata MALLE (1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Ein Quadrat kürze ich mit der Quadratwurzel, 3^2 = 9 wird zu 4 addiert.”

Deutung:

Der Studierende projiziert ein Musterbeispiel wie $\sqrt{x^2}=x$ in die Aufgabe. Wenn $\sqrt{x^2}=x$ als Prozedur gespeichert wird, bei der sich das Wurzelzeichen und die Potenz aufheben und dies unzulässig auf andere Terme übertragen wird, kann dieser Fehler entstehen. Der Lösungsprozess (das Streichschema) weist daraufhin, dass das Wurzelzeichen mit einer Potenz “gekürzt” worden ist. Streichschemata gehören nach MALLE (1993) zu dem Bereich "zu offenen Schemata", die Termstruktur wird nicht beachtet.

Oft haben Studierende Schwierigkeiten mit „impliziten“ Klammern (Klammern, die als selbstverständlich gelten), wie z.B. unter einem Wurzelzeichen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{4^2+3^2}=$		Verwechslung der Potenz mit einer Multiplikation. Visuelle Ähnlichkeit NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"4^2 ist 4 x 2 = 8, 3^2 ist 3 x 2 = 6,

Die Wurzel muss aus der Summe von 8 + 6 gezogen werden."

***Deutung**:*

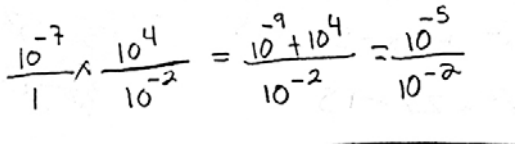
Eine Verwechslung des Exponenten 2 mit der Multiplikation ist nach MALLE (1993, S. 166) und NOLTE (1991, S. 67) häufig. Der Studierende addiert 8 + 6 nicht und zieht auch nicht die Quadratwurzel, sie bleibt indiziert. Dies kann aus den vorliegenden Zahlen resultieren. Das Ergebnis ist keine Quadratzahl.

Anhang 4: Exponentenregeln

Testaufgaben: 11 - 18

In diesem Teil werden Exponentenregeln, sowohl in arithmetischen als auch in algebraischen Aufgaben erfragt. Es soll analysiert werden, welche Konzeptionen Studierende über Exponentenregeln haben, aber auch welche Fehler sich bei jeder Aufgabe generieren.

Testaufgabe 11:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$		Unzureichendes Erkennen des Termaufbaus (nach SHEVAREV 1946 in NOLTE 1991, S. 60f); Falsche Informationsaufnahme (nach SHEVAREV in MALLE, 1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. Wenn ich Potenzen multiplizieren muss, muss ich addieren.

2. Wenn ich addieren muss, muss ich die Brüche gleichnamig machen. Dann schreibe ich in den Zähler eine Summe.

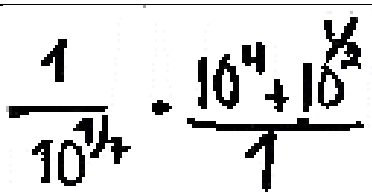
3. Es ist aber eigentlich eine Multiplikation."

Deutung:

Dieser Fehler resultiert vermutlich daraus, dass die Multiplikation von Potenzen über eine Addition der Hochzahlen erfolgt. Dieser Schüler hat die Regel unzulässig verallgemeinert, indem er sie auf die gesamte Zahl und nicht allein auf die Hochzahl bezogen hat. Dies scheint er im Zähler jedoch nur in der Notation durchgeführt zu haben, denn er hat den Zähler des mittleren Terms als Summe notiert. Trotzdem ist zu vermuten, dass er eine Summe aus der Aufgabenstel-

lung entnommen hat, denn er hat 10^{-2} als gemeinsamen Nenner gebildet. Dadurch wird 10^{-7} zu 10^{-9}. Im Resultat zeigt er jedoch, dass er die Basiszahlen (10) nicht verknüpft hat, sondern nur die Potenzen. Dieser Fehler kann im Sinne von SHEVAREV (1946) aus einem unzureichenden Merkmalsvergleich resultieren. Es vermischen sich verschiedene Fehlertypen: die Ausgangsaufgabe wird teilweise als Addition ausgeführt und teilweise werden die Regeln der Multiplikation angewendet.

Bei dieser Deutung ist die Informationsaufnahme angemessen, aber nicht die Informationsverarbeitung. Dies würde die Deutung SHEVAREVS (1946) nahelegen (siehe NOLTE 1991, S. 60), dass die Kette der aus der Information gebildeten Assoziationen nicht angemessen ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$	 Fehler noch nicht in der Literatur gefunden	Falsche Informationsverarbeitung Unzureichendes erkennen der Termaufbaus (nach SHEVAREV 1946 in NOLTE 1991, S. 60f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. 10^{-7} bedeutet $1/10^{1/7}$.

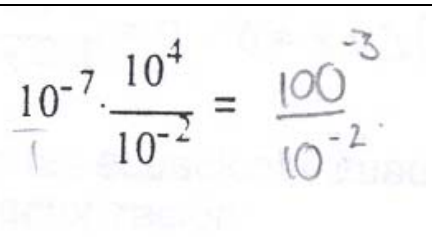
2. 10^4 verändert sich nicht. 10^{-2} im Nenner wird zu $10^{½}$ im Zähler.

3. Beide Bruchzahlen werden multipliziert.

4. Der zweite Bruch wird zu einer Summe umgeformt"

Deutung:

Statt 10-7 zu 1/107 umzuformen, wurde die Umformung erneut angewendet, so dass 1/10 hoch 1/7 entsteht. Dies kann als eine fehlerhafte Verarbeitung von Informationen gedeutet werden, denn er scheint die Information angemessen aufgenommen zu haben, da er die angebrachte Regel anwendet. In dieser Form wird der Fehler noch nicht in der Literatur beschrieben. Der zweite Fehler bezieht sich auf das Additionszeichen im Zähler. Das kann im Sinne Shevarevs (1946, in NOLTE 1991, S. 60f) als unzureichendes Erkennen des Termaufbaus gedeutet werden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$		Fehlerhafte Informationsverarbeitung SHEVAREV (1946) aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. Es ist eine Multiplikation. Bei Potenzen werden die Hochzahlen addiert: -7 + 4 = - 3.

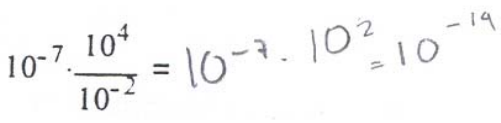
2. Es ist eine Multiplikation, Basiszahlen werden multipliziert:10 x 10 = 100

3. Der Nenner verändert sich wegen der Neutralität der 1 nicht.

4. Zähler und Nenner wurden extra bearbeitet. Damit bin ich fertig."

Deutung:

Der Studierende erkennt eine Multiplikation. Er addiert die Exponenten korrekt, multipliziert jedoch zusätzlich die Basiszahlen. Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich aus der Annahme, dass bei einer Multiplikation, die Basiszahlen auch multipliziert werden müssen, was aus einer fehlerhafte Informationsverarbeitung resultieren kann. Die Rechnung wird nicht zu Ende geführt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$		Falsche Informationsverarbeitung SHEVAREV 1946 nach NOLTE (1991, S. 60) In der zweiten Phase: Unvollständige Erfassung der Merkmale MALLE(1993, S. 160) NOLTE (1991, S. 60) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

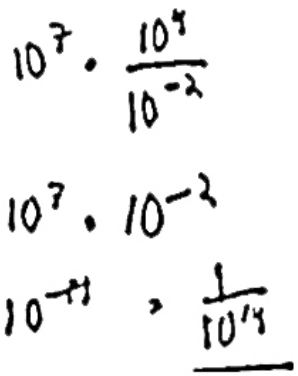
"1. Ich bearbeite zuerst die Division; 10^4 / 10^{-2}, die Exponenten werden subtrahiert, also: 4 – 2 = 2. 2.

2. 10^{-7} muss mit 10^2 multipliziert werden, ich multipliziere die Exponenten, das ergibt 10^{-14}."

Deutung:

Bei der Analyse des Prozesses scheint der Studierende verschiedene Regeln miteinander zu vermischen, da er einmal bei der Multiplikation die Exponenten multipliziert und bei der Division wahrscheinlich die Potenzzahlen subtrahiert.

Die Interpretation der ersten Phase lässt sich aus den vorliegenden Aufzeichnungen nicht sicher vornehmen. Man kann annehmen, dass die Exponenten eventuell nicht dividiert wurden, da sonst das Vorzeichen negativ sein müsste. Die mögliche Handlungsweise des Studierenden könnte sein: bei der Division zweier Terme mit der gleichen Basis, werden die Exponenten subtrahiert, jedoch ist sich der Studierende nicht bewusst, dass bei der Subtraktion einer negativen Menge der Exponent im Nenner addiert wird, was darauf hinweist, dass der Studierende entweder das Vorzeichen nicht berücksichtigt hat, oder, weil er den Rechenweg nicht komplett aufschrieb, das Vorzeichen nicht beachtet hat. Bei der Multiplikation zweier Terme mit der gleichen Basis, multipliziert der Studierende die Exponenten (-7)(2) = -14, diese Handlung könnte, nach MALLE (1993, S. 160); NOLTE (1991, S. 60) und TIETZE (2000, S. 70) ein Hinweis auf eine unvollständige Erfassung der spezifischen Merkmale sein, und so auf ungeeignete Schemata oder Prozeduren treffen, wie die Multiplikation der Exponenten.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$		Störendes Vorzeichen wird weggelassen MALLE (1993, S.181) TIETZE(2000, S. 73) Fehlerhafte Verbindungen, unvollständige Erfassung der spezifischen Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE(1993, S.160) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 10^4 / 10^{-2} ist ein Bruch, die Exponenten werde ich teilen: 4/ -2 = -2; 10 ist die neue Basis, also 10^{-2}.

10^7 mal 10^{-2} ist eine Multiplikation, in der ich die Exponenten multipliziere. Die Basis bleibt erhalten.

$10^{-14} = 1 / 10^{14}$“

Deutung:

Der erste Fehler resultiert wahrscheinlich aus einer ungenügenden Erfassung des negativen Exponenten des ersten Faktors der Aufgabe. 10^{-7} wird zu 10^7; es könnte aber auch sein, dass der Studierende, nach MALLE (1993, S. 181) störende Informationen (in diesem Fall, den negativen Exponenten) in der Aufgabe einfach weglässt, oder einfach beim Übertragen das Minuszeichen im Exponenten vergisst.

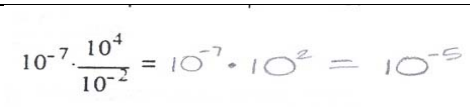
Man kann dem Lösungsprozess entnehmen, dass der Studierende konsequent bei der Division der Potenzen die Hochzahlen dividiert, und dass er bei der Multiplikation der Potenzen die Hochzahlen multipliziert. Dieser Fehler könnte Folge zwei verschiedener Auffassungen sein:

a) Spezifische Merkmale sind nicht aufgenommen worden, so werden bei der Multiplikation die Exponenten multipliziert und bei der Division die Exponenten dividiert, dadurch, dass ein ungeeignetes Schema oder Prozedur aufgerufen wird.

b) Der Studierende denkt sich bei der Division, bedingt durch die Form in der die Aufgabe geschrieben ist, dass auch die Exponenten „ein Bruch“ sind, und dividiert oder „kürzt“ sie.

Später multipliziert er die Exponenten, (-7)(2) = -14

Er erkennt jedoch, dass ein negativer Exponent, wie 10^{-14} gleich $1 / 10^{14}$ ist. Was eventuell auf ein Übersehen des nicht beachteten negativen Exponenten hinweist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}}$		Falsche Informationsverarbeitung bei der 4 – (- 2)

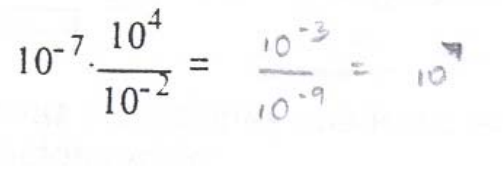
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. $10^{4} / 10^{-2} = 10^{4-2} = 10^{2}$

2. $10^{-7} \times 10^{2} = 10^{-5}$ ".

Deutung:

Der Fehler resultiert wahrscheinlich aus der Annahme, dass bei der Operation 4 – 2 (statt 4 – (- 2)) der Exponent (-2) durch sein Minuszeichen „schon" subtrahiert wird. Es könnte sein, dass der Studierende diesen Fehler nicht machen würde, wenn er die Aufgabe in den einzelnen Schritten lösen würde. Der Studierende weist durch seine weitere Lösungsform darauf hin, dass er die Exponentenregeln kennt, da bei der Multiplikation von $10^{-7} \times 10^{2} = 10^{-5}$ die Regel korrekt angewendet wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$10^{-7} \cdot \frac{10^{4}}{10^{-2}}$		Verwendung zu offener Schemata Mangel an Metawissen MALLE (1993,S.181) TIETZE (2000,S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. 10^{-7} wird mit einem Bruch multipliziert.

2. 10^{-7} wird mit 10^{4} und mit 10^{-2} multipliziert

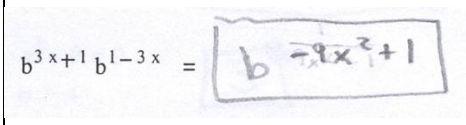
3. 10^{-3} durch $10^{-9} = 10^{7}$"

Deutung:

Der Fehler bei diesem Lösungsprozess entspringt der Vorstellung, dass bei einer Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch, sowohl Zähler, als auch Nenner mit dem ersten Faktor multipliziert werden. Dieses beruht möglicherweise auf einer nicht präzisen Vorstellung des Distributivgesetzes. Es kann auch als eine Übergeneralisierung interpretiert werden, da das Schema $a\Delta(b\Diamond c) = (a\Delta b)\Diamond(a\Delta c)$ uneingeschränkt auf die Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch übertragen wurde, $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{ac}$.

Zusätzlich besteht ein Fehler bei der Division von $10^{-3}/10^{-9}$, da 10^{7} als Resultat angegeben wird, wobei nicht klar wird, ob es ein Rechenfehler ist.

Testaufgabe 12:

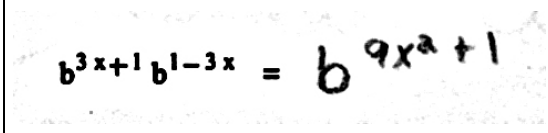
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Fehlerhafte Verbindungen mit unvollständiger Erfassung der Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993,S.160) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. Es ist eine Multiplikation, Exponenten werden multipliziert"

Deutung:

Multiplikation zweier Mengen wird aufgenommen, jedoch erfolgt der Fehler bei einer unvollständigen Erfassung der Merkmale, so dass die Exponenten multipliziert werden. Einfache Aufgaben, wie z.B. $8^2 \times 8^4 = 8^6$ werden hier nicht in Beziehung gebracht. Nach MALLE (1993, S. 160); NOLTE (1991, S. 60) und TIETZE (2000, S. 70) werden Regeln wie $A^n \times A^m = A^{n \times m}$ angewandt, weil die spezifischen Merkmale nicht aufgenommen oder nicht präzise genug gespeichert wurden.

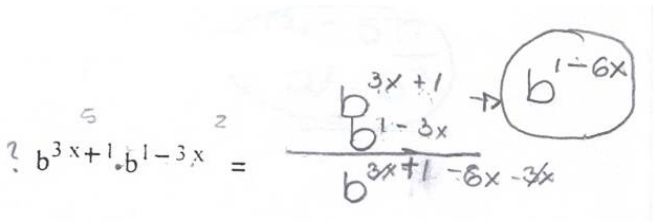
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Fehlerhafte Verbindungen mit unvollständiger Erfassung der Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993,S.160) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“Es ist eine Multiplikation, Exponenten werden multipliziert”

Deutung:

Die erste Ursache des Fehlers steht im Zusammenhang mit der vorhergehenden Aufgabenlösung, jedoch hat dieser Studierende außerdem die Schwierigkeit der Multiplikation von (3x + 1)(1 – 3x), bei der das Vorzeichen von $9x^2$ nicht korrekt ist. Da kein genauer Lösungsprozess vorliegt, kann man nicht klar erkennen wo sich der Fehler generiert hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fehlerhafte Verbindung mit unvollständiger Erfassung der Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993,S.160) TIETZE (2000, S. 70) Verwechslung der Multiplikation mit der Addition MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“1. Es ist eine Multiplikation, ich schreibe die Faktoren untereinander.

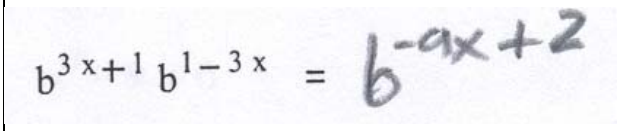
2. (3x – 1)(3x + 1) werden multipliziert.

3. 1(3x) + 1(1) + 3x(-3x) – 3x = 1 – 6x, ist der neue Exponent von b.“

Deutung:

Durch den Lösungsprozess kann man erkennen, dass die Exponenten multipliziert wurden, jedoch wurde bei 3x (- 3x) eine Mischung zwischen Multiplikation und Addition vorgenommen. Ein positives Vorzeichen multipliziert mit einem negativen Vorzeichen ergibt ein negatives Vorzeichen, dann werden die Mengen 3x und 3x addiert. MALLE referiert (1993, S.166) diesen Fehler als eine Konfusion der Multiplikation mit der Addition.

Schon allein in der Form, wie der Studierende die Lösung präsentiert, führt wahrscheinlich zu einer Fehlinterpretation. Die Lösungsform hängt mit der schriftlichen, algorithmischen Multiplikation zusammen, wie sie oft in Mexiko gelehrt wird. Er behandelt dann auch die Potenzen, als wären sie Faktoren.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verwechslung der Addition mit der Multiplikation MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“ 1. 1 + 1 werden addiert

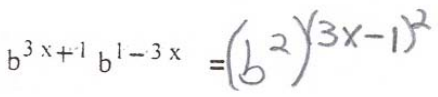
2. 3x und -3x werden “multipliziert””.

Deutung:

Für diese Aufgabenlösung bestehen zwei Deutungen:

a) Die Informationsaufnahme und die Wahl der Regel war vermutlich richtig gewählt, jedoch hat der Studierende Schwierigkeiten mit der Addition von 3x + 1 und 1 – 3x gehabt. Die Zahlen sind richtig addiert worden, jedoch kann man entnehmen, dass 3x – 3x eventuell mit einer höheren Rechenoperation verwechselt wurde, was zwar nach MALLE (1993, S.166) selten vorkommt, aber passieren kann.

b) Es könnte auch möglich sein, dass nur die ähnlichen Terme multipliziert werden, eventuell durch die dritte binomische Formel, jedoch wird aus der 1^2 (durch eine Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation) eine 2. Und aus (3x)(-3x) wird – 9x.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Falsche Informations-aufnahme SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 Interferenz von Schemata MALLE (1993, S. 185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

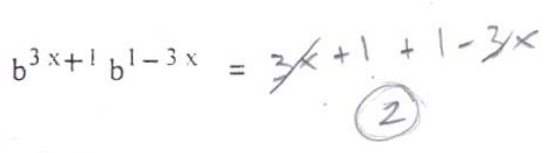
"1. b x b = b^2

2. Exponenten werden auch multipliziert

3. (3x + 1) (3x - 1) = $(3x - 1)^2$ "

Deutung:

Die Grundzahlen werden multipliziert, die neue Basis ist b^2. Vorläufig wird eine einfache Multiplikation interpretiert (wahrscheinlich eine Informationsaufnahme, ohne die Exponenten). Der gleiche Fehler der Interpretation der Multiplikation der Exponenten tritt hier wieder auf, jedoch macht der Studierende einen zusätzlichen Fehler, in dem er (3x+1)(3x-1) als $(3x–1)^2$ interpretiert. Dieser Fehler basiert vermutlich auf einer Interferenz von Schemata, von $a^2 – b^2 = (a + b)(a - b)$ zu $(3x–1)^2=(3x+1)(3x-1)$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Unangemessene Vorstellung des Gleichheitszeichens. Kontrolle über den Gesamtablauf verloren MALLE (1993, S.186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

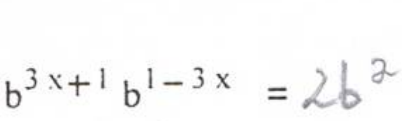
“1. Die Exponenten werden addiert

2. Das Resultat ist 2”

Deutung:

a) Aus dem Prozess geht hervor, dass der Studierende die Regeln der Exponenten kennt, jedoch verliert er während der Rechnung den Gesamtablauf der Aufgabe (MALLE, 1993, S. 186).

b) Andererseits könnte dieser Fehler dadurch resultieren, dass der Studierende den Lösungsprozess geteilt hat, statt in vollständiger Weise weiterzuverfolgen. Er hat keine angemessene Vorstellung des Gleichheitszeichens, wodurch der Prozess auch nicht weiterverfolgt werden kann, weil ganze Teile „verloren“ gehen (die Basiszahl)

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Fehlerhafte Assoziationen zwischen Aufgabenelementen und Handlungen NOLTE (1991, S.60) MALLE(1993, S.160) TIETZE(2000, S.70)

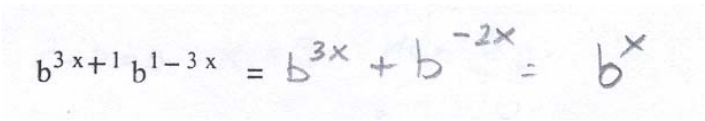
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“1.Exponenten werden addiert

2. Die neue Basis ist zweimal b.”

Deutung:

Die Exponenten wurden addiert, durch die Basiszahl 2b wird evident, dass der Studierende zweimal b, von den beiden Basiszahlen gedeutet hat. Hat der Studierende bei der Exponentenregel $A^n \times A^m = A^{n+m}$, nicht das Merkmal, bei der Umformung, die Basis bleibt unverändert gespeichert, so kann er meinen, dass die Basiszahlen eventuell auch multipliziert werden müssen, da dieses aber im Konflikt mit dem anderen, schon errechnetem Exponenten steht, werden die Basiszahlen addiert. Es besteht eine fehlerhafte Assoziation zwischen den Aufgabenelementen und den Handlungen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unangemessene Informationsaufnahme SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. Ich muss zu b^{3x} , 1 mal b^{1-3x} addieren

2. $b^{1-3x} = b^{-2x}$

3. Die 1 multipliziere ich mit b^{-2x}.

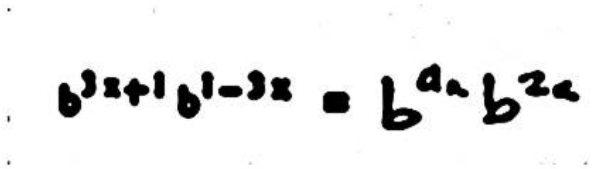
4. Ich erhalte die Addition von $b^{3x} + b^{-2x}$, bei der ich die Exponenten addiere, also b^{x}."

Deutung:

Bei diesem Prozess wird eine unzureichende Auffassung der Potenzen klar.

Es besteht die Möglichkeit, dass der Studierende die Information falsch aufnimmt, in dem eine Mischung von Potenzen und Multiplikation interpretiert wird, eventuell durch eine visuelle Ähnlichkeit, wenn die erste 1 im ersten Exponenten als eine multiplikative 1 angesehen wird. Etwa: $b^{3x} + 1b^{1-3x}$

Der weitere Prozess ist mit zwei Fehlern behaftet: $b^{3x} + 1b^{1-3x} = b^{3x} + b^{-2x} = b^{x}$, da der Studierende a) 1 – 3x = - 2x rechnet, in dem er nicht ähnliche Terme zusammenfasst. (Siehe Nolte, 1991, S.41) und b) dann jedoch wieder auf die Multiplikation der Terme $b^{3x}b^{-2x}$ zurückkommt und den Exponenten durch eine Addition berechnet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler im Exponenten NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135)

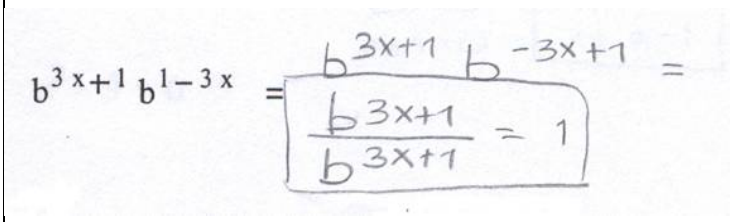
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. 3x+1 = 4x

2. 1 – 3x = 2x"

Deutung:

Bei den Exponenten werden nicht ähnliche Terme verbunden (3x + 1 = 4x), und (1 - 3x = 2x). Die Rechnung wird nicht zu Ende geführt, da wahrscheinlich keine angemessenen Vorstellungen zu den Exponentenregeln bestehen. Der beschriebene Fehler in den Exponenten ist nach NOLTE (1991, S. 41) ein Konkatenationsfehler.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Übergeneralisierung NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172, 173) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. Der Exponent im zweiten Faktor wird zu -3x+1 umgeschrieben.

2. Basiszahlen mit negativen Exponenten kommen von Zähler in den Nenner.

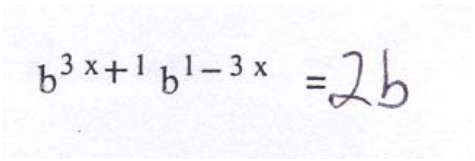
3. Das Vorzeichen von -3x verändert sich zu 3x.

4. Die Division gleicher Terme ist gleich 1"

Deutung:

Erkannt wurde die Multiplikation. Ein negatives Vorzeichen in der Potenz im Zähler kommt in den Nenner, hier fehlerhaft, da -3x + 1, wenn es als Potenz in den Nenner kommt, 3x – 1 sein müsste. Dieser Fehler beruht wahrscheinlich auf eine Übergeneralisierung, $a^{-m} = 1/a^m$, wenn m durch 3x-1 ersetzt wird, resultiert der genannte Fehler.

Es ist zu vermuten, dass nicht erkannt wird, dass – (-3x+1) zu 3x – 1 wird. Ist die Potenz nur ein Term, wechselt dieser das Vorzeichen, sind in der Potenz mehrere Terme, ändern sich alle Vorzeichen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		a) Verwechslung von Multiplikation mit der Potenzierung MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67) Verwechslung der Multiplikation mit einer Addition MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

Da hier kein Lösungsprozess vorliegt, besteht die Möglichkeit zweier Interpretationen, die ich kurz beschreiben werde:

a) “1. (3x+1)+(1-3x) = 2

2. b ist die Basis, die mit 2 multipliziert werden muss”

b) “1. (3x+1)+(1-3x) = 0

2. b x b wird zu 2b zusammengefasst.”

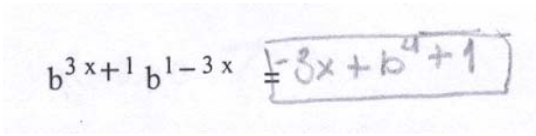
Deutung:

Jede dieser Möglichkeiten unterliegt wahrscheinlich einer anderen Ursache.

a) Es wurden die Exponenten addiert, dann aber nicht als neuer Exponent erkannt (sondern als multiplikativen Faktor 2), die 2 verliert, durch die Form, in der es geschrieben wird, ihre Position als Exponent

und wird als Multiplikation mit der Basis niedergeschrieben. Dieses könnte als Hintergrund die Verwechslung von Potenzen und Multiplikationen haben (vgl. Malle 1993, S. 166).

b) Der Studierende hat die Exponenten zu Null zusammengezählt und dann b mal b als 2b interpretiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$b^{3x-1} \cdot b^{1-3x}$		Unangebrachte Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 „Lasse den störenden Term weg“ TIETZE (2000, S. 70) MALLE(1993, S.184)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

“1. b^{3x} (b^1) = b^4

2. 1 (1) = 1

3. 1 (-3x) = -3x”

Deutung:

Die Wahrnehmung der Aufgabe ist nicht angebracht, es besteht eine Verwechslung der Zeichen, da vermutlich ein Teil als Exponenten und ein anderer Teil als Multiplikation aufgenommen wird. Der Studierende wendet das Distributivgesetz an, in dem er wahrscheinlich die 1 im zweiten Faktor einmal als b^1 ansieht, und ein zweites mal als 1. Das Distributivgesetz wird nicht vollständig angewandt, da ein Term fehlt.

In etwa: (b^{3x} + 1) (1 – 3x) = b^4 + 1 – 3x

b^4 resultiert aus der Multiplikation von b^{3x} und eventuell b^1, oder eventuell aus der Summe von b^{3x} + b^1, wobei das Distributivgesetz vollständig angewandt wurde.

Vermutlich hat der Studierende langsam die „störenden“ Terme einfach weggelassen, oder nach Belieben modifiziert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$(b^{3x+1})(b^{1-3x}) = b^4 - 3b^3x + b - 3x$		Visuelle Wahrnehmungsstörung NOLTE (2000) Inadäquate Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

"1. b^{3x} (b^1) = b^4

2. b^{3x} (-3x) = - $3b^3x$

3. 1 (b^1) = b

4. 1 (-3x) = -3x"

Deutung:

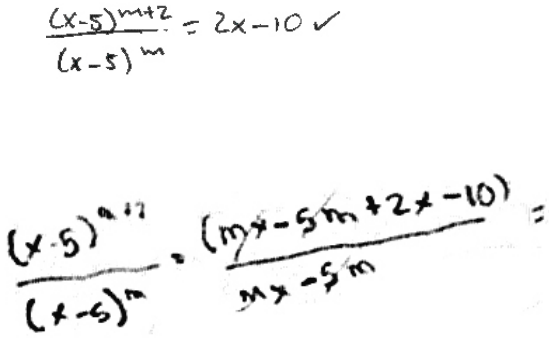
Möglicherweise hat der Studierende eine nicht adäquate Informationsaufnahme (im Sinne von Nolte(1991, S.67), da er einerseits Potenzen und andererseits Multiplikationen aufnimmt. Dieses könnte auch an einer nicht angebrachten visuellen Wahrnehmung liegen, da er konsequent den zweiten Term im Exponenten als Summanden interpretiert (NOLTE, 1991). Durch diese Interpretation wendet er ein Distributivgesetz an, und könnte die Rechnungen wie folgt vorgenommen haben:

In etwa: $(b^{3x}+1)(b^1-3x)$

a) wird der erste Term des ersten Faktors mit den beiden Termen des zweiten Faktors multipliziert, entstehen die Summanden b4 und -3 b3x.

b) Die Multiplikation der 1 mit dem zweiten Faktor ergibt b – 3x.

Testaufgabe 13

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^m}$		Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation MALLE (1993, S. 166) Streichschemata MALLE(1993, S.184) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993,S.190f)

Die Lösungen stammen von zwei verschiedenen Studierenden, dessen Vereinfachung zum gleichen Ausdruck geführt hat, was nicht voraussetzt, dass sie denselben Gedankengang hatten. Auffallend ist, dass bei der ersten Vereinfachungsform, der Studierende seinen Prozess als richtig empfindet. Es soll hier auf zwei Möglichkeiten des Verlaufs der Schülergedanken eingegangen werden:

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

A) „Ich vereinfache in dem ich die Exponenten voneinander abziehe.

Dann habe ich $(x - 5)^2$; 2 mal $(x - 5) = 2x - 10$“

B) „(m + 2) wird mit (x – 5) multipliziert, in dem ich jeden Term der ersten Klammer, mit jedem Term der zweiten Klammer multipliziere.

m (x- 5) multipliziere ich auch, im Nenner.

Dann habe ich den Ausdruck: $\frac{xm-5m+2x-10}{xm-5m}$

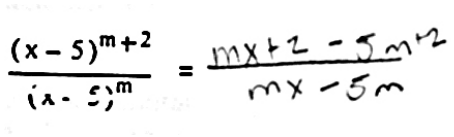
Gleiche Terme im Zähler und Nenner „kürze“ ich.“

Deutung:

A) Der Ansatz ist richtig vorgenommen worden. Im zweiten Schritt besteht eine wahrscheinliche Verwechslung der Potenzzahl mit einer Multiplikation, soweit der erste Teil richtig vereinfacht wurde.

B) Dieser Prozess besteht aus zwei verschiedenen Fehlstrategien, 1. die Verwechslung der Potenz mit einem Koeffizienten (wahrscheinlich in der

Informationsaufnahme), so dass dieser statt potenziert, multipliziert wird, sowohl im Zähler als auch im Nenner. Später dann eine weitere Fehlstrategie, die sich bei dem Kürzungsprozess verdeutlicht und auf das Streichschemata hinweisen (MALLE, 1993, S. 184). Möglicherweise besteht gleichzeitig eine Schwierigkeit in der Erkennung der Termstruktur (NOLTE, 1991, S. 45; MALLE, 1993, S. 190f)

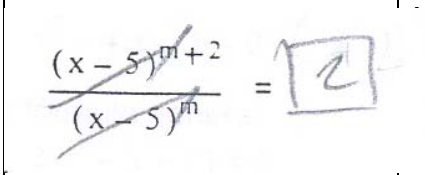
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation NOLTE (1991,S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„(m + 2) muss mit (x – 5) multipliziert werden, als auch m mit (x – 5); danach weiß ich nicht weiter“

Deutung:

Bei der Imformationsaufnahme fasst er eine Multiplikation statt einer Potenzierung auf, jedoch auch wenn die Multiplikation im Zähler nicht korrekt erfolgt, weiß der Studierende nach seinem ersten Prozessschritt nicht weiter.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		chterkennen der Termstruk- LTE (1991, S. 45) LLE(1993, S. 190f) Streichschemata MALLE (1993, S. 182) Weglassschemata MALLE(1993, S. 182) Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation MALLE (1993, S. 166) NOLTE (1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich kürze zuerst (x – 5) im Zähler mit der (x – 5) im Nenner.

2. Es bleibt m + 2 im Zähler und m im Nenner.

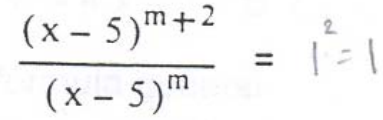
3. Dann kürze ich m im Zähler mit m im Nenner.

4. Übrigbleibt eine 2.“

Deutung:

Das Durchstreichen weist auf Kürzungsprozesse hin, die auf eine Interpretation eines Bruches hindeuten. Der Studierende hat zwei verschiedene Kürzungsprozesse vorgenommen. Es geht aus seinem Prozess nicht klar hervor, welchen Kürzungsprozess er zuerst vornimmt. Wahrscheinlich erkennt der Studierende die Struktur des Terms nicht, da er Kürzungsprozesse wie bei einfachen Brüchen vornimmt ohne Berücksichtigung der Exponenten. Man könnte die 2, die nun im Zähler steht, als Weglassschemata deuten, da keine Basis erhalten bleibt, und die Potenz zu einer Zahl im Zähler wird.

Vielleicht hat er aber eine fehlerhafte Aufnahme der Information, indem er statt eine Potenzierung eine Multiplikation interpretiert, damit er die Kürzungen vornehmen kann. Auf diese Deutung weist die 2 hin, die nach den Kürzungsprozessen ihre Kondition als Potenz verloren hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Kürzungsschemata MALLE(1993, S. 182) Nicht adäquate Auffassung des Terms NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

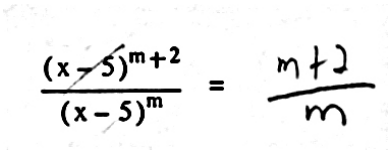
„1. Potenzen müssen subtrahiert werden.

2. (x – 5) / (x – 5) = 1

3. Also erhalte ich 1^2 was gleich 1 ist.“

Deutung:

Obwohl kein Lösungsweg auf die Denkweise des Studierenden hinweist, ist anzunehmen, dass dieser zwei verschiedene Aspekte der Brüche gleichzeitig angewandt hat. Möglicherweise hat er einen korrekten Ansatz, in dem er die Potenzen subtrahiert; (m + 2) – m = 2 oder eventuell auch eine Kürzung der (m+2)/m = 2, aber gleichzeitig (x – 5)/ (x – 5) teilt und eine 1 erhält. Dadurch entsteht eine $1^2 = 1$. Die Schwierigkeit besteht wahrscheinlich in einer nicht adäquaten Auffassung des Terms, da er bei einem und dem gleichen Term zwei verschiedene Auffassungen interpretiert, einen Exponenten und einen Bruch, den man kürzen kann.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Umgang mit der Struktur NOLTE (1991, S. 45) Falsche Informationsaufnahme SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 Streichschema und Weglassschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

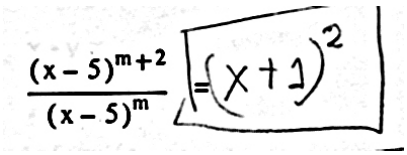
„1. (x – 5) / (x – 5) = 1, vielleicht auch gar nichts.

2. Es bleibt (m +2)/ m“

Deutung:

a. Die Termstruktur ist nicht erkannt worden, die Basiszahlen sind im Bruch gekürzt worden, was durch das Streichschema zu ersehen ist. Die Exponenten verlieren ihre Kondition als Exponenten und werden zu Zähler und Nenner, jeweils m + 2 und m. Dieses kann als eine Art von Weglassschemata interpretiert werden, da die Basiszahlen wegfallen und dann die Exponenten als Zahlen im Zähler und Nenner stehen.

b. Es besteht auch die Möglichkeit, dass der Studierende die Potenzierungen mit Multiplikationen verwechselt, und dadurch keine Hemmungen bei der Kürzung hat, so kann hier eine nicht adäquate Informationsaufnahme interpretiert werden. Es könnte auch ein Fehler sein, der durch visuelle Ähnlichkeiten hervorgerufen wurde.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Termstruktur nicht erkannt NOLTE (1991, S. 45)

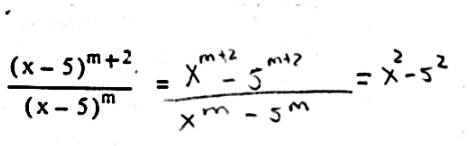
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Potenzen werden subtrahiert.

2. (- 5) / (- 5) = 1, und zwar + 1."

Deutung:

Wahrscheinlich kennt der Studierende die Exponentenregeln, jedoch hat er Schwierigkeiten mit der Termstruktur; er visualisiert die Binomen getrennt und interpretiert einerseits (- 5)/ (- 5) als eine plus 1, jedoch (x) / (x) als x. Aus dem Lösungsprozess geht nicht hervor, ob er es getrennt „gekürzt" hat und dann wieder vereinigt hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Unzulässige Linearisierung MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73 Streichschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

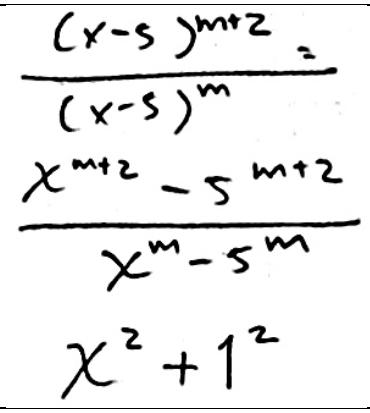
„1. Ich verteile die Potenzen auf die einzelnen Summanden des Binoms

$(x-5)^{m+2} = x^{m+2} – 5^{m+2}$; das gleiche führe ich auch im Nenner durch.

2. $x^{m+2} / x^{m} = x^{2}$, $5^{m+2} / 5^{m} = 5^{2}$, das Minuszeichen bleibt erhalten“

Deutung:

Informationsaufnahme fasst einen Exponenten auf, jedoch wird bei der Informationsverarbeitung ein Distributivgesetz angewandt (eventuell ein Linearisierungsprozess (MALLE, 1993, S 175; TIETZE, 2000, S. 73). Im nächsten Schritt wird nach MALLE(1993, S. 182) ein „Musterbeispiel“ in die Vereinfachung des Bruches hineinprojiziert und gekürzt. Später wird der Prozess der Linearisierung nicht rückgängig gemacht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Unzulässiger Linearisierungsprozess MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73 Streichschema MALLE(1993, S. 182)

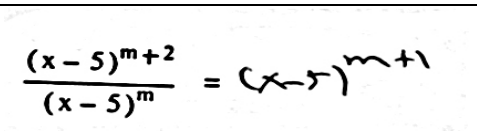
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Potenzen werden auf die einzelnen Summanden verteilt.

2. $x^{m+2} / x^{m} = x^{2}$, $-5^{m+2} / -5^{m} = 1^{2}$; dadurch, dass -5 / -5 = 1 ist.“

Deutung:

Vermutlich ein unzulässiger Linearisierungsprozess, oder auch ein „der Reihe nach abarbeiten“ (MALLE, 1993, S. 175; TIETZE, 2000, S. 73). Projektion eines Musterbeispiels, wie in der vorherigen Aufgabe; mit der Differenz, dass hier nicht nur die Potenzen subtrahiert werden, sondern auch die (-5)/(-5) dividiert wurde. Dieses weist wiederum auf ein Streichschema hin, in dem die Basiszahlen gekürzt werden, $-5^{m+2} / -5^{m}$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Assoziierung einer Division mit einer Verminderung. NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

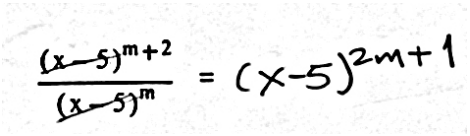
„1. Da es sich um eine Division handelt, muss subtrahiert werden.

2. Einmal $(x – 5)^{m}$ muss abgezogen werden,

3. also bleibt $(x – 5)^{m + 1}$“

Deutung:

Möglicherweise verwechselt der Studierende die Division mit einer Subtraktion. Er zieht wahrscheinlich einmal $(x – 5)^{m}$ von $(x – 5)^{m + 1}$ ab. Der Gedanke resultiert vermutlich durch die Annahme, dass die Division mit einer Verminderung assoziiert wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Assoziierung der Division mit einer Verminderung NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 166) Weglassschemata MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

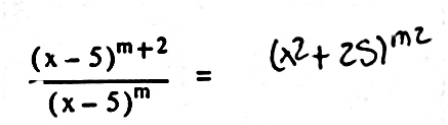
„1. Einmal nehme ich (x – 5) weg, im Exponenten ist 2 – 1 = 1

2. Ich habe aber 2 mal $(x – 5)^{m}$

3. Also: $(x – 5)^{2m + 1}$.“

Deutung:

Der Fehler resultiert voraussichtlich aus der Annahme, dass bei der Division eine Verminderung interpretiert wird. Durch das Streichschema ist zu ersehen, dass der Studierende einmal (x-5) von $(x-5)^{m+2}$ abgezogen hat, und erhält $(x-5)^{m+1}$. Es generiert sich hier ein Weglassschema, da der Studierende nun „m“ im Exponenten irgendwohin schreiben muss. Er addiert dieses „m“ zu dem resultierenden Exponenten, m + 1 + m = 2m + 1.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Zu offene Schemata NOLTE (1991, S. 61) MALLE (1993, S. 172, 173) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

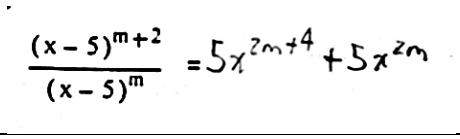
„1. (x – 5) muss ich quadrieren, (x^2 + 25)

2. Potenz ist dann m+m; m2“

Deutung:

Da der Prozess nicht in seinen einzelnen Schritten aufgeschrieben wurde, geht nicht klar hervor, wie der Gedankengang war. Anzunehmen ist wahrscheinlich, dass der Studierende zuerst $(x – 5)^2$ errechnet hat, wobei durch einen Fehler von zu offenen Schemata, Schemata ohne Einschränkungen, $(x – 5)^2$ gleich x^2 + 25 ist. Dieses Resultat erfolgt auch durch eine Übergeneralisierung des Schemas $\Delta(a \circ b) = (\Delta a) \circ (\Delta b)$.

Danach hat der Studierende ein Problem mit den beiden Exponenten m, die er dann zu m2 zusammenzählt.

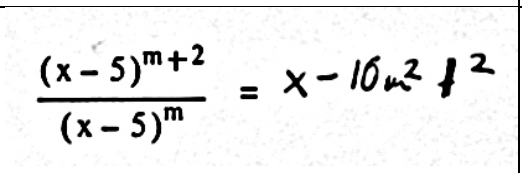
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??????????????????????????????????????

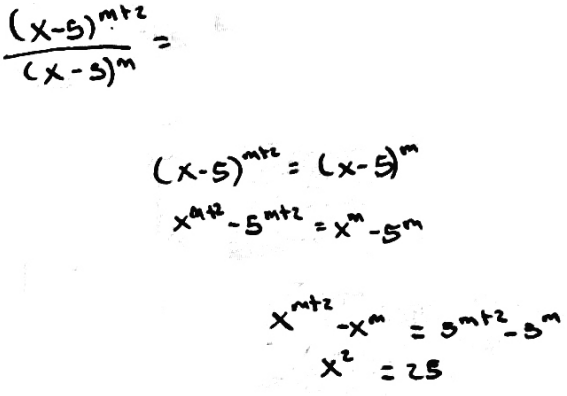
Deutung:

Konkatenationsprobleme scheinen hier eine entscheidende Rolle zu spielen, (x-5) wird zu 5x, 2 mal m+2 zu 2m + 4;

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:??

Deutung: ??

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)^{m+2}}{(x-5)^{m}}$		Verlust der Art der Tätigkeit MALLE (1993, S. 202) Unzulässiger Linearisierungsprozess MALLE, 1993, S 175 TIETZE, 2000, S. 73

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Den Term im Nenner bringe ich auf die andere Seite der Gleichung

2. Potenzen werden auf die Summanden verteilt.

3. Jetzt bringe ich die gleichen Basen auf die gleiche Seite der Gleichung

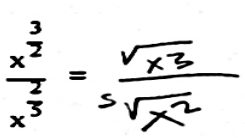
4. $x^{m+2} – x^{m} = x^{2}$; $5^{m+2} – 5^{m} = 5^{2} = 25$

5. Die Gleichung ist dann x 2 = 25.“

Deutung:

Der Studierende verlor die Übersicht über den Prozessablauf, da er die Art der Tätigkeit verwechselt. Er macht aus einem algebraischen Ausdruck eine Gleichung, indem er den Nenner auf „die andere Seite bringt“. Danach werden noch zwei weitere Fehlstrategien angewandt; nämlich ein Linearisierungsprozess bei der Verteilung der Exponenten auf die einzelnen Summanden, und später dann ein Fehler bei der Subtraktion von ähnlichen Termen, die als Division (wahrscheinlich auf die Originalaufgabe zurückkommend) aufgefasst werden.

Testaufgabe 14:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Vergessen des Ziels MALLE (1993, S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

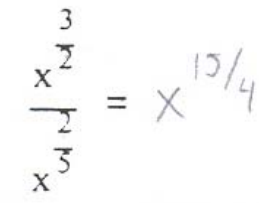
„1. x hoch 3/2 ist $\sqrt{x^3}$

2. x hoch 2/5 ist $\sqrt[5]{x^2}$.

3. Weiter weiß ich nicht“

Deutung:

Der Studierende kann eine Transformation zwischen Bruchhochzahlen und einer Wurzelnotation vornehmen. Diese Umänderung der Schreibweise der Bruchexponenten vereinfacht die Aufgabe nicht. Eine Vereinfachung mit den Exponentenregeln hat er nicht vorgenommen. Hier kann es sein, dass der Studierende entweder das Ziel aus den Augen verloren hat, den Prozessverlauf, durch den großen Aufwand bei der Transformation vergessen hat (MALLE, 1993, S. 202) oder dass er die Exponentenregeln nicht kennt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		rsache in früheren Lernphasen HEVAREV, aus MALLE, 1993, S. 169) truktur der Terme; OLTE (1991, S. 45) ALLE (1993, S. 190f) Fehlende Entwicklung der zugrundeliegenden Bedeutung der Exponenten TIETZE (2000, S. 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zwei „Brüche“ werden dividiert, also muss ich die beiden Brüche dividieren.

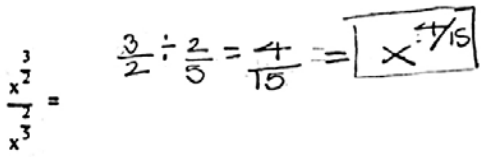
$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \times 5}{2 \times 2} = \frac{15}{4}$$

2. Dieses ist der neue Exponent von x.“

Deutung:

1. Der Fehler resultiert wahrscheinlich aus einem Kürzungsprozess, der seine Ursache in einer früheren Lernphase hat. So dass die Exponenten von Basiszahlen in einem Bruch, besonders, wenn diese keine Variablen sind, als Bruch und weniger als Exponenten angesehen werden. Dieses liegt vermutlich auch daran, dass die Termstruktur nicht genügend erkannt wird. Er behandelt die Brüche in den Exponenten, als seien es einfache Brüche und dividiert diese.

2. Die Fehlstrategie kann auch durch ein Vorherrschen algebraischer Vorstellungen hervorgerufen worden sein, da die zugrundeliegende Bedeutung des Bruches, mit den Exponenten der Basiszahlen, nicht entwickelt wurde. Der Studierende dividiert die Brüche der Exponenten, statt sie zu subtrahieren.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Keine Bedeutung des Gleichheitszeichens NOLTE (1991, S. 4) MALLE (1993, S.137) TIETZE (2000, S. 68 und 72) Fehlerhafte Informationsverarbeitung bei der Division von Brüchen.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es ist eine Division, Exponenten müssen dividiert werden

$\frac{3}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$, welches der neue Exponent ist."

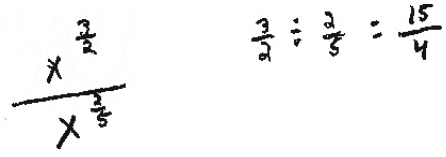
Deutung:

Der anfängliche Gedankengang ist dem vorherigen gleich, nur hat dieser Studierende auch Schwierigkeiten bei der Division zweier Brüche. Die Informationsverarbeitung erfolgt nicht in korrekter Weise. Der Algorithmus der Division zweier Brüche wird in Mexiko oft mit einer Zeichnung gelehrt; wie:

$$\frac{3}{2} \searrow \frac{2}{5} \nearrow = \frac{15}{4}$$

Der Zähler des ersten Bruches wird mit dem Nenner des zweiten Bruches multipliziert und es resultiert der Zähler der Division. Der Nenner des ersten Bruches wird mit dem Zähler des zweiten Bruches multipliziert und man erhält den Nenner der Division. Ist diese Vorstellung nur vage, dann kommt es leicht zu Verwechslungen. Hier wurde beispielsweise der Zähler des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruches multipliziert, jedoch als Nenner der Division aufgeschrieben.

Außerdem geht aus dem Prozess hervor, dass der Studierende das Gleichheitszeichen in inadäquater Form anwendet. Dieses manifestiert sich durch die Rechnungen, die isoliert absolviert werden und dann durch das Gleichheitszeichen verbunden werden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Isolierte Rechnungen als Reminiszenz der Arithmetik. NOLTE (1991)

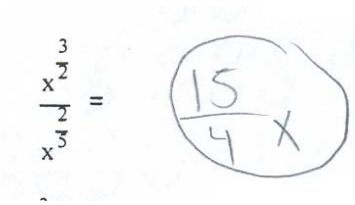
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es handelt sich um eine Division, also muss ich die Exponenten dividieren, $\frac{3}{2} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{4}$.“

Deutung:

Der erste Teil der Aufgabe wird, wie in den zwei vorhergehenden Lösungsprozessen genauso aufgefasst. Er wird hier nicht noch mal besprochen. Der Studierende führt isolierte Rechnungen durch, was durch den Lösungsprozess klar hervorgeht, und „vergisst“ wahrscheinlich durch den Aufwand bei der Division der beiden Brüche, dass das Resultat der Division die Hochzahl von x ist, es sei denn, dass er die x / x „gekürzt“ hat, was nicht sichtbar ist, dadurch, dass er kein Streichschema ausgeführt hat.

Würde der Studierende durchgehende Notation mit Gleichheitszeichen durchführen, würden höchstwahrscheinlich Fehler dieser Art oder „vergessen“ der Prozesssequenz nicht vorkommen. Vereinzelt Aufgabenteile zu lösen, führen zu dieser Art von Fehlern.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Fehlerhafte Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE, 1993, S. 167 Verwechslung der Exponenten mit einer Multiplikation MALLE (1993, S. 166)

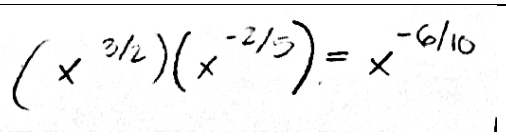
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Dividiere ich die Brüche erhalte ich 15/4;

2. Dann schreibe ich das „x“ dazu.“

Deutung:

Vermutlich wurden die Exponenten als Koeffizienten von x aufgenommen, also eine Verwechslung der Potenzen mit einer Multiplikation, dadurch wurden die „Koeffizienten“ dividiert. Hat er die Exponenten als Koeffizienten von x aufgefasst, so ist nicht klar, was er mit x im Zähler und im Nenner macht. Es besteht die Möglichkeit, dass er eine Kombination zwischen Koeffizienten von x und Exponenten versteht, da eine Basiszahl „x“ im Resultat verbleibt. Dass er die Exponenten als Koeffizienten interpretiert, spiegelt sich im Resultat wieder, da 15/4 Koeffizient von „x“ ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Fehlerhafte Assoziationen zwischen Aufgabenelementen und Handlungen NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x hoch 2/5 im Nenner (als Division) bringe ich in den Zähler als Multiplikation mit einem negativen Exponenten.

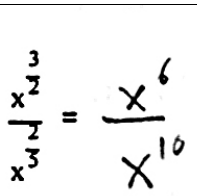
2. Es handelt sich um eine Multiplikation, also muss ich die Exponenten multiplizieren.

3. $\frac{3}{2} \times \frac{-2}{5} = \frac{-6}{10}$; welches der Exponent der „x“ ist.“

Deutung:

Der Studierende nimmt eine korrekte Transformation vor, indem er den Term, der im Nenner steht, mit einem negativen Exponenten als Multiplikation im Zähler niederschreibt. Möglicherweise hat der Studierende die Formel A^n x A^m nur in seinen generellen Merkmalen und nicht in den spezifischen Merkmalen erfasst ,

so dass er die Informationsverarbeitung nicht richtig durchführt. $A^n \times A^m = A^{nxm}$. Er multipliziert die Exponenten, statt sie zu addieren.

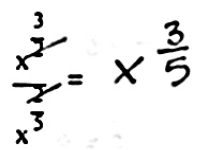
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$	 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden	Fehlerhafte Assoziationen zwischen Aufgabenelementen und Handlungen NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner sind die neuen Exponenten der „x“ im Zähler und im Nenner.“

Deutung:

Da kein Gedankengang nachzuvollziehen ist, ist zu vermuten, dass der Studierende annimmt, dass die Exponenten multipliziert werden müssen. Man kann vermuten, dass er später dann $x^{\frac{6}{10}} = \frac{x^6}{x^{10}}$ gleichsetzt, wobei man auf ein mangelhaftes Verständnis der Brüche als Exponenten schließen könnte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Streichschema mit Verwechslung der Division mit einer Multiplikation MALLE(1993, S. 182)

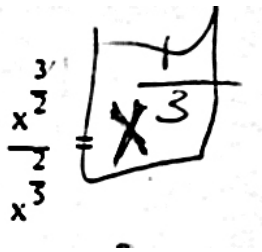
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Eine 2 in einem Nenner und eine 2 in einem Zähler lassen sich kürzen.

2. Exponent von „x“ ist nun 3/5.“

Deutung:

Aus dem Streichschema geht der Gedankengang des Studierenden hervor. Obwohl es sich nicht um eine Multiplikation, sondern eine „Division von Brüchen“ handelt, wird ein Kürzungsprozess vorgenommen. Die Informationsaufnahme scheint eine Division von Brüchen zu sein. In der Informationsverarbeitung werden die Brüche gekürzt, als wenn sie „multipliziert“ werden müssten, er „kürzt“ eine 2 im Nenner mit einer 2 im Zähler, dass diese Exponenten sind, oder dass diese im Zähler und Nenner eines Bruches stehen, hat für ihn keine Bedeutung.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Übergeneralisierung bei der Subtraktion der Brüche mit Richtungswechsel NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es liegt eine Division von zwei gleichen Basiszahlen mit ihren Exponenten vor.

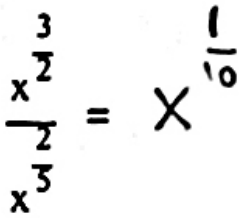
2. Die Exponenten müssen subtrahiert werden.

3. $\frac{3}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$, welches der Exponent der Basiszahl ist.“

Deutung:

Die Informationsaufnahme erfolgt in richtiger Form; es sind zwei gleiche Basiszahlen mit ihren Exponenten. Die Exponenten müssen subtrahiert werden, jedoch besteht eine Problematik bei der Subtraktion der Brüche. Diese erfolgt durch Zähler minus Zähler (3 – 2 = 1) und Nenner minus Nenner (2 – 5 = 3), wobei zu vermuten ist, dass die Vorzeichen der 2 und der 5 nicht beachtet werden. Diese Form der Subtraktion von Brüchen wird von RADATZ (1985) refe-

riert. Voraussichtlich könnte der Fehler als dem naheliegenden Gedanken resultieren, dass wenn man zwei Brüche multipliziert, die Zähler und auch die Nenner multipliziert werden: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, was auf die Subtraktion übertragen wird: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$, durch eine Übergeneralisierung des Schemas $(a \Delta b) \circ (c \Delta d) = (a \circ c) \Delta (b \circ d)$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$		Fehler in der Bruchrechnung

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zwei gleiche Basiszahlen werden dividiert.

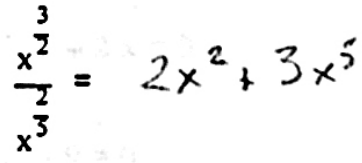
2. Ich muss die Exponenten subtrahieren.

3. Ich muss einen gemeinsamen Nenner suchen (2 x 5 = 10)

4. $\frac{3}{2} - \frac{2}{5} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}$, welches der Exponent von „x“ ist.“

Deutung:

Es zeigt sich eine korrekte Informationsaufnahme und eine Informationsverarbeitung der Exponentenregeln. Bei der Subtraktion der Brüche offenbart sich ein ungenügendes Verständnis der Prozedur, weil beim Erweitern der Brüche nur ein gemeinsamer Nenner gefunden wird, jedoch die Zähler nicht verändert werden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}}$	 Fehler in der Literatur noch nocht gefunden	Ungenügende Auffassung der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei einer Division von zwei Brüchen kommt der Nenner des Bruches im Nenner hoch in den Zähler.

2. Er wird zum Exponenten der 3x.

3. Der Nenner des Bruches in Zähler kommt in den Nenner, und wird zum Exponenten von 2x."

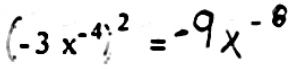
Deutung:

Es äußert sich bei diesem Prozess eine ungenügende Auffassung der Termstruktur. Erstens, weil aus einer Division eine Addition wird und zweitens, weil einige Exponenten zu Koeffizienten werden. Eventuell ist die Auffassung in der Form:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{5}}} = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{2}{5}x} \; ; \; 3x^5 + 2x^2$$

Die 5 im Nenner kommt hoch in den Zähler als Exponent von 3x, die 2 im Nenner des Zählers, wird Exponent von 2x im Nenner. Es verliert sich die Struktur des Hauptbruches.

Testaufgabe 15:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Unvollständige Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 167 Ungenügendes Erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

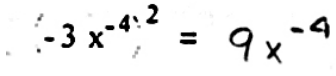
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $-3^2 = -9$

2. $(x^{-4})^2 = x^{-8}$."

Deutung:

Informationsaufnahme erfolgt nicht vollständig, da wahrscheinlich $\left(-3x^{-4}\right)^2 \; als \; -\left(3x^{-4}\right)^2$ aufgefasst wird. Interessant ist bei dieser Lösungsform, dass der Studierende die Klammer nachgezeichnet hat und später dann nicht oder nur partiell berücksichtigt hat. Die Ursache liegt wahrscheinlich in einer ungenügenden Auffassung der Termstruktur, nämlich in der Annahme, dass das Minuszeichen nicht mitquadriert wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Informationsaufnahme, als ungenügende Auffassung der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien MALLE (1993, S. 186)

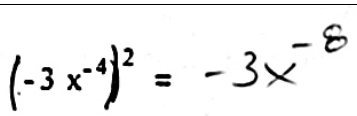
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. – 3 quadriere ich.

2. dann schriebe ich die x^{-4} dazu."

Deutung:

1. Die Potenz 2 wird nur auf die (-3) übertragen, was auf eine Fehlinterpretation der Termstruktur hinweist, und dadurch auf ein Fehler in den Exponentenregeln führt.
2. Der Studierende „vergaß" den ganzen Prozess durchzuführen, und hat nur die (-3) quadriert. Wo ein Verlust der Prozessschritte vermutet werden kann.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Umgang mit Klammern BOOTH aus NOLTE (1991, S. 45)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die Quadratzahl steht neben dem Exponenten -4, dieser wird mit 2 multipliziert.

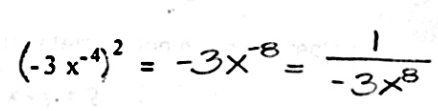
2. $(x^{-4})^2 = x^{-8}$

3. Die -3 ist der Koeffizient und bleibt unverändert."

Deutung:

Die Klammern werden von dem Studierenden nachgezogen, jedoch nicht bei dem Vereinfachungsprozess beachtet. Sichtbar wird ein unadäquates Konzept der Termstruktur, und somit eine fehlerhafte Verarbeitung der Exponentenregeln. Es wird nur der Exponent -4 zum Quadrat erhoben.

Eine weitere Interpretation könnte eine mangelnde Auffassung der Hierarchie sein, da diese von den Klammern aufgehoben wird, welche der Studierende nicht beachtet. Es scheint, als hätten die Klammern für den Studierenden keine besondere Bedeutung, es besteht kein Unterschied in einer Aufgabe mit oder ohne Klammern.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Umgang mit Klammern BOOTH aus NOLTE (1991, S. 45) Unadäquate Auffassung der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Übergeneralisierung NOLTE (1991, S. 61) MALLE (1993, S. 172, 173) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die Quadratzahl steht neben dem Exponenten -4, dieser wird mit 2 multipliziert.

2. $(x^{-4})^2 = x^{-8}$

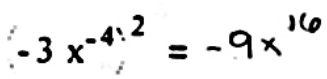
3. Die -3 ist der Koeffizient und bleibt unverändert.

4. Negative Exponenten kommen in den Nenner mit einem positiven Exponenten.

5. Also wird $-3x^{-8} = \frac{1}{-3x^8}$."

Deutung:

Anfänglich der gleiche Prozess, wie bei der vorhergehende Lösung. Zusätzlich zeigt sich ein typischer Fehler. Es wird nicht erkannt, dass -3 mit x^{-8} multipliziert wird, und dass der Exponent -8 nur Exponent von x ist. Wahrscheinlich hat der Studierende nicht adäquate Vorstellungen der Struktur dieses Terms. Es kommt zu einer Übergeneralisierung des Musterbeispiels: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, wo für a irgendetwas stehen kann, somit auch -3x.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Fehler in der Hierarchie der Operationen Unadäquate visuelle Aufnahme MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $-3^2 = -9$

2. $(-4)^2 = 16$

3. $-9x^{16}$ ist das Resultat."

Deutung:

Informationsaufnahme erfolgt wahrscheinlich richtig, es werden bei der Informationsverarbeitung zwei Fehlstrategien evident.

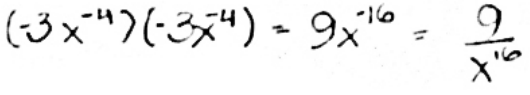
Wahrscheinlich interpretiert der Studierende den Term so, dass er die beiden Faktoren quadriert:

1. Fehler: $-3^2 \neq (-3)^2$

   Der Fehler resultiert in der Annahme, dass nur die 3 potenziert wird.

2. Fehler: $(x^{-4})^2 \neq x^{(-4)^2}$

Visuelle Aufnahme induziert zu einer Quadrierung des Exponenten.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Nicht Auffassung der spezifischen Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Quadrieren ist $(-3x^{-4})$ mit sich selbst multiplizieren.

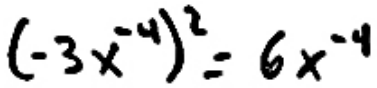
2. (-3)(-3) = 9

3. Da es eine Multiplikation ist, werden die Exponenten multipliziert: $x^{-4}\ x^{-4} = x^{-16}$

4. $(-3x^{-4})(-3x^{-4}) = 9x^{-16} = \frac{9}{x^{16}}$ "

Deutung:

Der Studierende nimmt die Information als Potenzierung auf, wie im ersten Schritt demonstriert wird. Er multipliziert (-3) (-3), begeht aber bei der Multiplikation von $(x^{-4})(x^{-4})$ einen Fehler in der Informationsverarbeitung, wahrscheinlich durch ein nicht erfassen der spezifischen Merkmale. $x^m \times x^m = x^{m^2}$, obwohl sich auch ein Vorzeichenfehler äussert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Verwechslung der Potenzierung mit einer Multiplikation MALLE(1993, S. 166) Visuelle Fehlaufnahme der Potenz NOLTE (1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zweimal ein Minuszeichen multiplizieren, ergibt ein positives Vorzeichen.

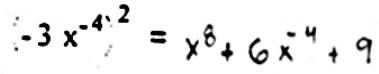
2. 2 mal 3 ist 6.

3. Es wird nur der Koeffizient multipliziert, x^{-4} multipliziert die 6"

Deutung:

Vermutlich hat der Studierende die Information nicht vollständig aufgenommen. Es zeigt sich, dass er eine Kombination von Regeln gebraucht. Das Minuszeichen multipliziert er zweimal (also eine Quadrierung), deswegen das positive Vorzeichen, verwechselt später die Potenzierung mit einer Multiplikation. Dies kann man herleiten aus der Auffassung, dass nur die 3 mit 2 multipliziert wird.

Es scheint eventuell, dass ein visuelles Missverständnis erfolgte, was auf eine Interpretation einer inadäquaten Informationsaufnahme hinweist. Es wurde die 2 im Exponenten als eine multiplikative 2 angesehen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\left(-3x^{-4}\right)^2$		Konkatenationsprobleme NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135) Visuelle Wahrnehmungsstörung

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $(x^{-4} - 3)^2$ ist die Aufgabe, die ich rechnen muss.

2. $(x^{-4})^2 = x^8$

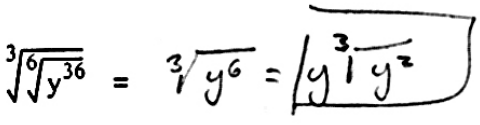
3. Das doppelte Produkt von 3 und x^{-4} ist $6x^{-4}$

4. $(-3)^2 = 9$“

Deutung:

Man könnte hier Konkatenationsprobleme vermuten, da der Studierende $-3x^{-4}$ als $x^{-4} - 3$ interpretiert. Der Studierende hat wahrscheinlich $-3x^{-4}$ innerlich additiv Verknüpft. Nach dieser Interpretation versucht der Studierende eine binomische Formel anzuwenden, welche bei dem Quadrat von x^{-4}, beim Vorzeichen des Exponenten und beim Vorzeichen des zweiten Summanden scheitert.

Testaufgabe 16:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Fehler bei der Informationsverarbeitung im zweiten Schritt. SHEVAREV 1946 aus NOLTE (1991, S. 60)

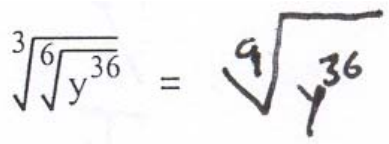
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich transformiere die doppelte Wurzel in eine einzige, in dem ich 36 / 6 = 6 dividiere. Ich erhalte: $\sqrt[3]{y^6}$

2. Jetzt dividiere ich 6 / 3 = 2, ein „y“ kommt raus, und „y^2“ bleibt unter der Wurzel.“

Deutung:

Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung im ersten Schritt sind klar erkannt und bearbeitet worden. Jedoch scheint der Studierende den gleichen Schritt wiederholt zu haben, wurde aber bei der Notation des Endresultates unsicher, das „y^2“ konnte, für ihn, nicht ohne Wurzelzeichen stehen. Der letzte Teil der Informationsverarbeitung im zweiten Schritt ist fehlerhaft.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Inadäquate Informationsaufnahme NOLTE (1991, S.67) SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

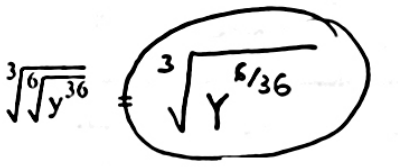
„1. Da man bei der Multiplikation von Basen die Exponenten addiert, addiere ich die beiden Indexe der Wurzeln. 3 + 6 = 9, so integriere ich beide Wurzeln in einer einzigen Wurzel mit dem Index 9.“

Deutung:

Da kein detaillierter Lösungsprozess vorliegt, kann man vermuten, dass die Informationsaufnahme sehr oberflächlich erfolgt oder, dass die Interpretation der Wurzeln nicht korrekt erfolgt. Ist die Informationsaufnahme oberflächlich, kann man die Indexe der Wurzeln nicht als Nenner in Brüchen ansehen, wie etwa:

$$\sqrt[c]{\sqrt[b]{y^a}} = \left((y^a)^{\frac{1}{b}} \right)^{\frac{1}{c}}$$

Da diese Interpretation wahrscheinlich nicht erfolgt, liegt es nahe, dass der Studierende die Indexe addiert. Er interpretiert den Index der Wurzel und die Potenz von y nicht als Bruchexponenten, was aus dem Resultat hervorgeht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Falsche Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

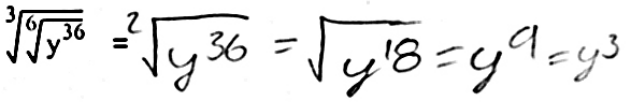
„1. Eine Wurzel hat etwas mit einem Bruchexponenten zu tun.

2. Der Exponent 36 ist der Nenner des Bruchexponenten, der Wurzelindex 6 ist der Zähler.

3. Weiter kann ich diese Form nicht verfolgen“

Deutung:

Der Studierende hat Wurzel und Exponenten aufgenommen, jedoch bei der Informationsverarbeitung den Zähler und Nenner des Bruchexponenten verwechselt. Diese Tatsache weist wahrscheinlich darauf hin, dass diese Art von Aufgaben in der Schule recht mechanisch erfolgten, da nach einer gewissen Zeit, Zähler und Nenner im Exponenten und ihr Zusammenhang mit der Wurzel verwechselt wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fehlerhafte Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Konzeptionen mit dem Wurzelzeichen sind nicht klar.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zwei Wurzeln kann man zu einer reduzieren, indem man einen Wurzelindex durch den anderen teilt. 6 / 3 = 2. Neue reduzierte Wurzel: $\sqrt[2]{y^{36}}$

2. Nun kann ich 36 / 2 teilen und dann habe ich nur noch die Wurzel von y ^{18}.

3. Ich teile nun 18 / 2 und erhalte y^{9}

4. Da ich die Wurzel ziehen sollte, ziehe ich die Wurzel von 9, und erhalte y^{3}.

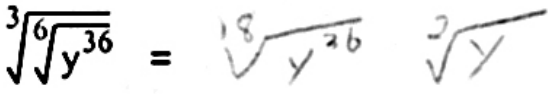
Deutung:

Der Studierende erkennt, dass er die zwei Wurzeln zu einer einzigen Wurzel reduzieren muss. Er weiß wahrscheinlich auch, dass der Index der Wurzel etwas mit einer Division oder einem Bruch zu tun hat, jedoch ist die Informationsverarbeitung fehlerhaft, da er anstatt den Exponenten 36 durch 6 zu teilen, die Indexe der Wurzeln teilt. Er versteht auch einiges über die Wurzelrechnung, da er den zweiten Schritt (nach dem ersten Fehler) korrekt ausführt.

Verwirrend scheint der Prozess, weil der Studierende wahrscheinlich nicht weiß, wann die Wurzel gezogen worden ist, dass der Wurzelindex 2, der Wurzel im nächsten Schritt gleich ist, und dass er nachdem er die Quadratwurzel im zweiten Schritt zieht, er immer weiter die Wurzel ziehen möchte, und danach auch fehlerhaft. Es ist in seinen Prozessen keine Konsistenz zu erkennen, mal dividiert er 18 / 2, um die Wurzel zu ziehen, mal zieht er dir Wurzel $\sqrt{9} = 3$.

Möglicherweise identifiziert der Studierende nicht, dass $\sqrt[2]{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$ ist. Deswegen zieht er zweimal die Wurzel.

Das Symptom, die Operationszeichen wie die Wurzel, nach dem Wurzelziehen nicht zu entfernen, kann man auch in der Integralrechnung immer wieder finden. Der Studierende weiß nicht, wann er integriert hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Anwendung von Algorithmen, im letzten Schritt eine Fehlinterpretation.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Wurzelindexe werden multipliziert, 3 x 6 =18, 18 ist der Index der reduzierten Wurzel.

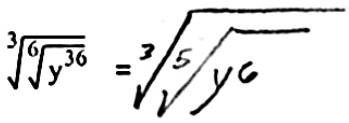
2. 36 / 18 = 2, 2 ist nun der neue Index der Wurzel."

Deutung:

Der Studierende basiert in seinen ersten Schritt auf einen Algorithmus. Steht eine Wurzel unter einer anderen, werden die Indexe multipliziert. Die Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung sind korrekt.

Er erkennt auch, dass er 36 / 18 teilen muss, aber weiß jedoch nicht, dass die 2, die er erhalten hat, der neue Exponent von y ist, und nicht ein Wurzelindex. Das heißt, dass der Studierende eventuell vergessen hat, dass Wurzelindexe und Exponenten einen Bruch darstellen, und dass wenn der Bruch eine ganze Zahl ist, $y^{\frac{2}{1}}$ nicht eine Wurzel von y ist, sondern y^2. Vielleicht konnte er auch nicht den Exponenten 2/1 interpretieren.

Interessant wäre es zu wissen, ob der Studierende, nach dem ersten Schritt die Wurzel als $y^{\frac{36}{18}}$ interpretiert, da er dann wahrscheinlich den Fehler im letzten Schritt nicht gemacht hätte. Leider geht es aus dem Prozess nicht hervor, wie er den Zwischenschritt interpretiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Unadäquate Form des Resultats der Division, dadurch Schwierigkeiten bei der Interpretation.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 36 / 6 = 5 Rest 6

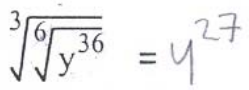
2. Wie soll ich das jetzt verarbeiten? 5 ist der neue Index dr Wurzel, 6 ist der neue Exponent von „y“

3. Weiter komme ich nicht“.

Deutung:

Bei dieser Lösung kann nur vermutet werden, was der Studierende gemacht hat. Möglicherweise hat er die 36 durch 6 geteilt (was auf einen richtigen Ansatz hinweist) und hat 5 Rest 6 erhalten (zwar nicht direkt ein Rechenfehler besteht, aber eine unpraktische Form der Division), und die 5 als den neuen Index interpretiert und die 6, der Rest, der geblieben ist, als Exponenten von „y“ gelassen.

Man könnte in Erwägung ziehen, ob der Studierende die Division der 36 / 6 nicht hat korrekt machen können und deswegen auf Schwierigkeiten gestoßen ist, obwohl die Interpretation der 5 kein Wurzelindex hätte sein dürfen. Wäre es anders gewesen, wenn er bei der Division eine ganze Zahl ohne Rest herausbekommen hätte? So hat er nicht gewusst, was er mit den Daten anfangen sollte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Verwechslung der Division mit der Subtraktion Malle (1993, S. 166) Fehlerhafte Verbindungen durch unvollständige Erfassung der Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

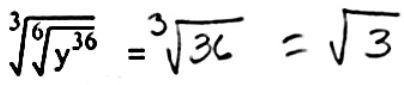
a) „1. 36 / 6 = 36 – 6 = 30

2. 30 / 3 = 30 – 3 = 27. Neuer Exponent von „y“.

b) „1. $\sqrt[m]{A^n}$ = A^{n-m}, also wurden 6 und 3 von 36 abgezogen $y^{36-6-3} = y^{27}$.“

Deutung:

Ob hier die Division mit einer Subtraktion verwechselt wurde, bei der nacheinander 6 und 3 abgezogen wurden; oder ob spezifische Merkmale nicht erkannt worden sind, geht aus dem Lösungsprozess leider nicht hervor.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt[3]{\sqrt[6]{y^{36}}}$		Falsche Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Verwendung unpassender Ersatzschemata, Reparatur erfolgt meistens im Sinne: lass den Störenden Term weg. MALLE (1993, S. 184) TIETZE (2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 6 – 3 = 3 neuer Wurzelindex.

y lasse ich weg (wie bewusst dieses ist, steht nicht fest)

Die dritte Wurzel von 36 ist 3 und etwas, da $3^3 = 27$ ist."

Deutung:

Bei diesem Lösungsprozess wird sichtbar, dass der Studierende eine Serie von Fehlern macht, die ich in einer Reihenfolge beschreiben werde, die wahrscheinlich nicht mit der des Studierenden übereinstimmt.

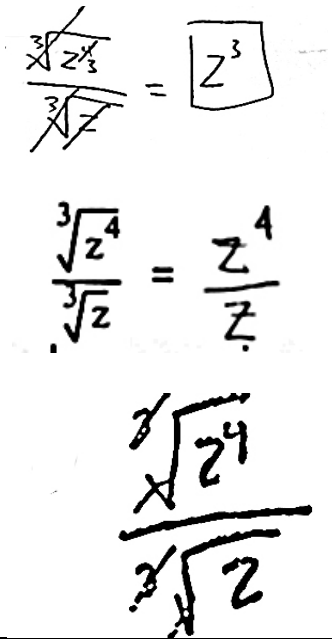
Die Wurzelindexe werden durch eine Fehlverbindung der Informationsverarbeitung subtrahiert, wenn eine Wurzel unter einer anderen steht.

Störende Faktoren werden oft aus dem Weg geräumt, es scheint, dass „y" einfach weggelassen wurde.

Der Exponent von y, wenn y nicht mehr besteht, wird zu einer Zahl, aus der man die dritte Wurzel zu ziehen hat.

Testaufgabe 17

Die nächsten drei Studierendenlösungen haben den gleichen Ansatz. Bei der zweiten ist das Streichschema nicht zu sehen, und die Aufgabe wurde auch nicht zu Ende geführt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$		Streichschemata, vorherrschen algebraischer Vorstellungen TIETZE (2000, S. 72) Nichterkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe einen Bruch, also kann ich kürzen. Als erstes „kürze“ ich die Wurzeln, sie haben den gleichen Index.

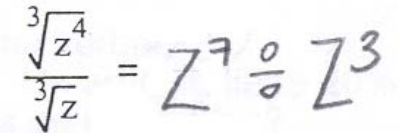
Es bleibt dann z^4 / z, das kann ich auch kürzen, zu z^3.“

Deutung:

Beide Vereinfachungen weisen auf das Streichschemata hin. Im ersten Fall ist dieses durch das Durchstreichen der Wurzeln im Zähler und Nenner klar. Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich durch ein Vorherrschen algebraischer Vorstellungen. Es fehlt möglicherweise die Entwicklung von den zugrundeliegenden Bedeutungen, in diesem Fall, dass das Wurzelzeichen im Zähler und Nenner, nicht „kürzbar“ ist.

Eine andere Deutung besteht in der Annahme, dass der Studierende die Termstruktur nicht erfasst hat, und dadurch ein Streichschema anwendet, da er auf frühere Erfahrungen mit Brüchen zurückgreift. Dieses manifestiert sich besonders im dritten Lösungsprozess, da zuerst die 3 der Indexe der Wurzeln durchgestrichen wurde, und dann das Wurzelzeichen, beide durch ein Streichschema. Es wird alles, was im Zähler und Nenner „gleich“ ist, „gekürzt“.

Der nächste Schritt ist dann das Kürzen von z^4 / z = z^3. Vom zweiten Studierenden wurde dieser letzte Schritt nicht durchgeführt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$		Falsche Informationsaufnahme NOLTE (1991, S.67) SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 167) Nicht erkennen der spezifischen Merkmale NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE (2000, S. 70) Implizite 1 im Exponenten von z

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

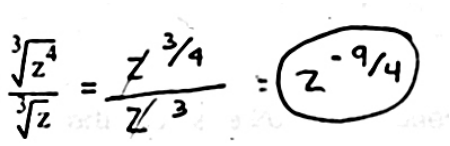
„1. Der Wurzelindex wird zum Exponenten dazugezählt, $z^{4+3} = z^7$;

der Exponent von z ist Null, so ist $z^{0+3} = z^3$."

Deutung:

Aus der Prozedur, die angewandt wurde, geht hervor, dass der Studierende die Information nicht richtig aufnimmt. Es kann sein, dass er den Wurzelindex mit einer Potenz verwechselt, eventuell, weil die 3 weiter oben steht. Falls er annimmt, dass z4 mit 3 potenziert werden muss, erfolgt auch dieses fehlerhaft. Spezifische Merkmale werden nicht aufgenommen, so dass ein falsches Schema aufgerufen wird. Er addiert den Exponenten mit der Potenz, jedoch interpretiert er eine Null im Exponenten von dem z im Nenner. Hier zeigt sich, dass eine implizite 1 als Exponenten von z nicht wahrgenommen wird, oder nicht identifiziert wird.

Die Aufgabe wird nicht zu Ende reduziert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{\sqrt[3]{z^4}}{\sqrt[3]{z}}$		Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Spezifische Merkmale wurden nicht erkannt NOLTE (1991, S. 60) MALLE (1993, S. 160) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Wurzeln können als Bruchexponenten dargestellt werden.

2. $\sqrt[3]{z^4} = z^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt[3]{z} = z^3$

3. z^3 im Nenner kommt als z^{-3} in den Zähler, es ist eine Multiplikation und die Exponenten müssen multipliziert werden.

4. $\frac{3}{4} \times (-3) = -\frac{9}{4}$; also $z^{\frac{-9}{4}}$."

Deutung:

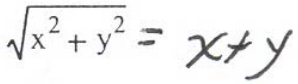
Die Informationsaufnahme erfolgt wahrscheinlich richtig, da er aufnimmt, dass es sich um eine Wurzel handelt. Die Informationsverarbeitung ist fehlerhaft, da die Regel

$\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{m}{n}}$, angewandt wird; Zähler und Nenner des Bruchexponenten werden verwechselt. Die Division verwandelt er in eine Multiplikation um, indem er z^3 in den Zähler mit einem negativen Exponenten holt.

Der zweite Fehler erfolgt durch ein nicht erkennen der spezifischen Merkmale, da $z^{\frac{3}{4}} \times z^{-3}$ durch die Multiplikation der Exponenten vereinfacht wird.

Testaufgabe 18

Dieses war die einzige Aufgabe, die nicht vereinfacht werden konnte. Sie ist eingesetzt worden, um zu erforschen, wie Studierende auf diese Aufgabe reagieren. Die meisten haben das Gleichheitszeichen als „Ergibt-Zeichen“ angesehen, und haben dadurch eine Vereinfachung versucht, auch wenn diese fehlerhaft erfolgte. Einige Studierende haben die Aufgabe nicht in Angriff genommen und es geht nicht klar hervor, ob der betreffende Studierende wusste, dass die Aufgabe nicht vereinfacht werden konnte, oder ob er einfach nicht gewusst hat, wie sie zu vereinfachen war, und dadurch keinen Schritt unternommen hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{x^2 + y^2} =$		Linearisierungsprozess: Schema ohne Metawissen MALLE(1993, S. 174) TIETZE(2000, S. 73) Eines nach dem anderen MALLE (1993, S. 181) Übergeneralisierung durch hineinprojizieren von Musterbeispielen MALLE (1993, S. 174) TIETZE (2000, S. 73)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

a)„1. Erst ziehe ich die Wurzel von x^2 und dann die von y^2."

b) „1. Die Wurzel verteile ich auf beide Summanden, so dass ich $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ habe.

2. Nun kann ich die Wurzel bei beiden Summanden ziehen."

c) In der Schule haben wir durchgenommen, dass $\sqrt{x^2}=x$ ist, hier ist auch $\sqrt{y^2}=y$, so dass die Vereinfachung, x + y ist.

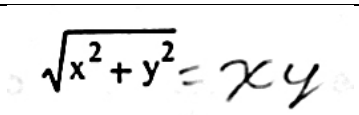
Deutung:

Die Fehlstrategie kann drei verschiede Gründe haben; sie geht nicht klar aus dem Prozess hervor.

a) Der Studierende hat die Aufgabe nach einer Lebensweisheit (eines nach dem anderen), (vgl. MALLE, 1993, S.181) bearbeitet,

b) oder hat er ein Linearisierungsprozess vorgenommen, in dem er ein Schema wie: o(aΔb) = oaΔob angewandt hat. Bei diesem Schema ist o die Operation Wurzelziehen und Δ das Pluszeichen. Man könnte meinen, dass das Wurzelzeichen einen distributiven Charakter hat, und dadurch auf x^2 und auf y^2 angewandt wird.

c) Musterbeispiele wie: $\sqrt{x^2}=x$; werden leicht in die Aufgabe hineinprojiziert, so dass der Studierende die Aufgabe wie folgt interpretiert: $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$, und die einzelnen Wurzeln zieht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{x^2+y^2}=$		Außerdem: NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE (2000, S. 68 u. 72) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)

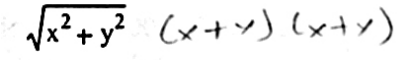
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Erst ziehe ich die Wurzel von x^2 und dann die von y^2.

2. x + y kann ich nicht als Resultat akzeptieren, also xy."

Deutung:

Den ersten Teil der Aufgabe könnten dieselben Hintergründe des vorhergehenden Prozesses haben. Weiterhin hat der Studierende das Resultat x + y nicht akzeptieren können, durch die Deutung des Gleichheitszeichens als Aufgabe-Ergebnis und seine Interpretation als Aktionszeichen. Es könnte auch ein Hinweis auf Konkatenationsschwierigkeiten sein, da xy für den Studierenden einen additiven Charakter hat. So ist für den Studierenden x + y das Gleiche wie xy.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{x^2 + y^2} =$		Inkorrekte Anwendung des Gleichheitszeichens NOLTE (1991, S. 4) Linearisierungsprozess MALLE (1993, S. 175) TIETZE(2000, S. 72) Prozedurlücken Bug-repair-theory MALLE(1993, S. 184) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Vielleicht kann ich eine Prozedur finden, wenn ich faktorisiere.

2. $x^2 + y^2$ Wurzel des ersten Summanden plus die Wurzel des zweiten Summanden, würde die Basis einer Faktorisation sein: (x+y)(x+y).

3. Das Wurzelzeichen beachte ich nicht mehr (bewusst oder unbewusst)"

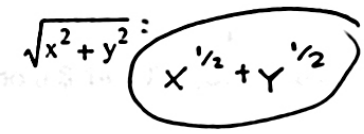
Deutung:

Der Studierende hat kein klares Verständnis des Gleichheitszeichens, da er keines setzt. Da in der Arithmetik Rechnungen isoliert durchgeführt werden können, meint der Studierende eventuell, dass das Gleichheitszeichen nicht notwendig ist.

Er führt einen Linearisierungsprozess in entgegengesetzter Richtung durch, nämlich, statt $(a + b)^2 = a^2 + b^2$; $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b)$.

Wahrscheinlich „vergisst" der Studierende beim Aufwand der Faktorisierung sein Ziel eine Wurzel zu ziehen, oder es folgt eine Reparatur, im Sinne, „lass den störenden Term weg"; was in diesem Falle das Wurzelzeichen wäre.

Außerdem sucht er wahrscheinlich eine Prozedur, die ihm weiterhelfen könnte, auch wenn er sie später nicht in seinen ganzen Konsequenzen durchzieht. Vielleicht war der Aufwand der Faktorisierung zu hoch und er vergaß, was eigentlich gefragt war.

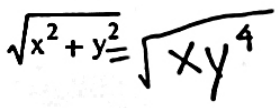
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{x^2 + y^2} =$		Partielle Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) MALLE (1993, S. 167) Schema ohne Metawissen MALLE(1993, S. 181) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss eine Wurzel ziehen, Wurzelziehen ist mit einem Exponenten von ½ gleich, also ziehe ich die Wurzel von x und dann die Wurzel von y."

Deutung:

Der Studierende hat zwar das Wurzelzeichen aufgenommen, aber eventuell nicht die Exponenten von x und y. Quadratische Wurzeln können als Exponenten umgeschrieben werden, dieses hat für den Studierenden einen distributiven Charakter, was auf ein Schema wie o(aΔb) = oaΔob zurückzuführen ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\sqrt{x^2 + y^2} =$		Konkatenationsprobleme NOLTE (1991, S. 41) Sammelschemata MALLE(1993, S. 179)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x+y = xy.

2. Die 2 im Exponenten von x und die im Exponenten von y addiere ich: 2+2 = 4

3. Das ist der neue Exponent von xy ist 4.

4. Das Wurzelzeichen bleibt bestehen“

Deutung:

Konkatenationsprobleme werden bei diesem Prozess evident. Exponenten werden addiert und die Variablen nebeneinander geschrieben (Sammelschemata).

Anhang 5: Verfahren mit Monomen und Polynomen

Testaufgaben 19 - 23

Erfragt wurden Umformungen bei Monomen und Polynomen. Erkennen Studierende ähnliche Terme? Können sie einfache Vereinfachungen vornehmen? Haben sie Schwierigkeiten mit dem Distributivgesetzt?

Testaufgabe 19

Bei der Auswertung dieser Aufgabe werde ich simultan auf einige gefundene Lösungsprozesse eingehen.

Wichtig sind die Strategien, die die Studierenden angewandt haben je nach Vorzeichen der Exponenten der verschiedenen Variablen im Zähler und im Nenner.

a) „x“ hat im Zähler einen negativen Exponenten und im Nenner einen positiven Exponenten. Wie wird das von den verschiedenen Studierenden verarbeitet?

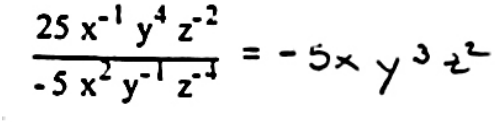
b) „y“ hat im Zähler einen positiven Exponenten und Nenner einen negativen Exponenten. Wie wird diese Information von den Studierenden wahrgenommen und verarbeitet?

c) „z“ hat im Zähler und Nenner jeweils einen negativen Exponenten. Wie bearbeiten die Studierenden diese Tatsache?

Bei den ersten vier Prozessen entdeckte ich eine Inkonsistenz in der Verarbeitung der Daten (Exponenten). Einmal wurden die Exponenten addiert, bei der nächsten Variablen subtrahiert. Manchmal wurde eine Kombination zwischen Multiplikation und Addition oder Subtraktion angewandt.

Auf eine Transformation in eine Multiplikation, um die Exponenten addieren zu können, ist von den nächsten Prozessen von Studierenden keiner gekommen. Die Fehlstrategie lag meistens in der Vorstellung, dass die Exponenten addiert werden mussten.

Zwei Fragen bleiben offen: a) hätten die Studierenden ihren Lösungsweg ausführlich aufgeschrieben, wären ihnen dann Fehler unterlaufen? b) Wieso haben die Studierenden bei einer oder gar zwei der Variablen die Exponentenregeln richtig angewandt und bei einer der Variablen nicht?

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$		Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. „25 / (-5) = - 5

2. Es ist eine Division, also werden die Exponenten subtrahiert.

3. Für „x“: 2 – 1= 1; für „y“: 4 – 1 = 3

4. Bei „z“ sind beide Exponenten negativ, ich kann sie nicht subtrahieren, aber ich kann sie dividieren oder kürzen.

5. (-4/-2) = 2.“

Deutung:

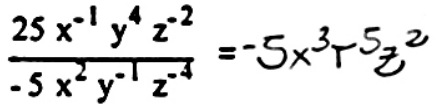
Addition der Hochzahlen von „x“ und „y“. Eventuell interpretiert der Studierende, dass durch das negative Vorzeichen der Exponenten, diese sowieso „subtrahiert“ werden.

Bei der Bestimmung des Exponenten von „z“, kann der Studierende zwei verschiedene Strategien angewandt haben; die erste wäre eine korrekte Bestimmung der Hochzahl, die zweite, wenn auch die Hochzahl richtig ist, mit einer fehlerhaften Strategie:

a) Bei der Subtraktion der Hochzahlen von „z“, subtrahiert er vermutlich -2 –(-4) = 2, was eine korrekte Bestimmung wäre; oder

b) Wahrscheinlich wurden bei der Variablen „z“ die Exponenten dividiert, bei der das Resultat zwar korrekt ist, jedoch eine fehlerhafte Strategie angewandt wurde (- 4/- 2= 2). Ursache dieses Fehlers ist möglicherweise die Vorstellungen über Kürzungsprozesse bei Brüchen in früheren Lernphasen, in der eine – 2 im Zähler mit einer – 4 im Nenner gekürzt werden konnte. Hier wird nicht darauf geachtet, welche Zahl durch welche geteilt werden müsste (-2/-4). Aus den Erfahrungen in der Primaria, wurde immer die größere Zahl durch die kleinere dividiert.

Vermutlich haben die Vorzeichen der Exponenten eine entscheidende Rolle bei der Entscheidung der Strategie gespielt und bei der Tatsache, dass – 4 durch – 2 geteilt werden konnte. Bei den Variablen mit dem Exponenten gleich – 1, ist kein „Kürzungsprozess“ vorgenommen worden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$		Fehlerhafte Vorstellungen über welche Hochzahl von welcher subtrahiert werden muss

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

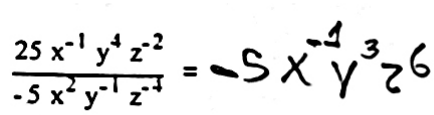
„1. „25 / (-5) = - 5

2. Es ist eine Division, also werden die Exponenten subtrahiert.

3.Für „x“: 2 – (-1) = 3; für „y“: 4 – (-1) = 5 und für „z“: -2 – (-4) = 2.“

Deutung:

Der Studierende interpretiert eine Division und weiß, dass er die Hochzahlen subtrahieren muss. Er subtrahiert immer die negative oder negativere Zahl von der anderen. Diese Strategie ist jedoch bei „x“ nicht adäquat (auch wenn sie bei den anderen Variablen zu einem richtigen Exponenten geführt hat), da x^3 dann im Nenner stehen müsste, was der Studierende nicht realisiert. Der Fehler resultiert dann durch eine nicht adäquate Vorstellung darüber, dass man immer die Hochzahl im Nenner von der Hochzahl im Zähler subtrahieren muss.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Informationsverarbeitungfehler SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Fehlinterpretation der größeren Zahl zwischen – 4 und – 2.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. „25 / (-5) = - 5

2. Es ist eine Division, also werden die Exponenten subtrahiert. Dadurch, dass einige Exponenten negativ sind, werden sie sowieso „subtrahiert“, also kann ich sie addieren.

3. Für „x“: 2 – 1 = 1, da ich eine „größere“ Hochzahl im Nenner hatte, ist es eine x^1 im Nenner, also eine x^{-1} im Zähler.

4. Für „y“: 4 – 1 = 3; y^3.

5. Für „z“: - 4 – 2 = - 6; da die größte Zahl in der Potenz im Nenner stand, habe ich ein z^{-6} im Nenner, also eine z^{6} im Zähler.“

Deutung:

Der Studierende hat konsequent alle jeweiligen Hochzahlen addiert, jedoch bei jeder Variablen darauf geachtet, ob die größere Hochzahl (im absoluten Wert) Exponent im Zähler oder im Nenner war. Dieses Kriterium war dann wahrscheinlich entscheidend für die Faktoren im Nenner und Zähler, und die spätere Umformung. Etwa:

$$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} = \frac{-5y^{3}}{x^{1}z^{-6}} = -5x^{-1}y^{3}z^{6}$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} = -5x^{-1}y^{3}z^{-6}$		Informationsverarbeitungsfehler SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

Denkschritte 1 – 4 sind den vorhergehenden Prozess gleich, es ändert sich der 5. Schritt.

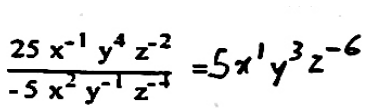
5. Für „z“: - 4 – 2 = - 6; da die größere Zahl (-2) Exponent von „z“ im Zähler war, habe ich ein z^{-6} im Zähler.“

Deutung:

Der Studierende hat konsequent alle jeweiligen Hochzahlen addiert, jedoch bei jeder Variablen darauf geachtet, ob die größere Hochzahl Exponent im Zähler oder im Nenner war. Dieses Kriterium war dann wahrscheinlich entscheidend für die Faktoren im Nenner und Zähler, und die spätere Umformung.

Etwa:

$$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} = \frac{-5y^{3}z^{-6}}{x^{1}} = -5x^{-1}y^{3}z^{-6}$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$		Beim Ausführen einer Unterprozedur die Kontrolle über den Gesamtablauf verlor MALLE(1993, S. 186) Verwechslung der Operationen Division und Multiplikation Fehler bei der Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe eine Multiplikation und Division, muss die Exponenten jeweils addieren.

2. 25 / 5 = 5“

Deutung:

Wahrscheinlich ist der Prozess für den Studierenden zu lang, sodass er das Vorzeichen von -25 / 5 vergisst.

Es besteht die Möglichkeit, dass der Studierende die Information nicht korrekt aufnimmt, indem er nicht merkt, dass es sich um eine Division handelt, und diese als Multiplikation aufnimmt, oder der Studierende nimmt die Information auf, verwechselt aber bei der Informationsverarbeitung die Regeln.

Der Studierende addiert konsequent die Exponenten. Diese Konsistenz ist bei den vorhergehenden Studierenden nicht zu finden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25\,x^{-1}\,y^{4}\,z^{-2}}{-5\,x^{2}\,y^{-1}\,z^{-4}} = -5x^{-1}y^{-3}z^{6}$		Informationsverarbeitungsfehler SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Kombination von Division der Vorzeichen und Addition der Hochzahlen.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. -25 / 5 = -5

2. Für „x“: Minus mal Plus ist Minus; 2 – 1 = 1, Minus 1; - 1

3. Für „y“: Plus mal Minus ist Minus; 4 – 1 = 3, Minus 3; - 3

4. Für „z“: Minus mal Minus ist Plus; - 2 – 4 = - 6, Plus 6; 6.“

Deutung:

Konsistent in der Fehlstrategie. Wahrscheinlich hat er eine Kombination zwischen Division der Exponenten (der Vorzeichen wegen) und eine Addition der Exponenten vorgenommen. Beispiele während der Mittelstufe über Minus durch Plus ist Minus, Plus durch Minus ist Minus und Minus durch Minus ist Plus; könnte das Vorzeichen aller Exponenten erklären.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25\,x^{-1}\,y^{4}\,z^{-2}}{-5\,x^{2}\,y^{-1}\,z^{-4}} = -5x^{-1}+4^{-3}+2^{-6}$		Unangebrachte Auffassung der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE (1993, S. 190f) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. -25 / 5 = -5

2. Für „x“: Minus mal Plus ist Minus; 2 – 1 = 1, Minus 1; - 1

3. Für „y“: Plus mal Minus ist Minus; 4 – 1 = 3, Minus 3; - 3

4. Für „z“: Minus mal Minus ist Plus; - 2 – 4 = - 6, Plus 6; jedoch als Exponent im Nenner, also -6 als Exponent im Zähler.“

Deutung:

Möglicherweise hat der Studierende eine vage Vorstellung, dass Variablen mit negativen Exponenten in den Zähler mit einem „positiven Vorzeichen“ kommen können. Obwohl die Regel für die Exponenten gilt, hat der Studierende diese mit einem additiven Charakter verwechselt, so dass er die einzelnen Variablen addiert. Diese Vorstellung zeugt von einer mangelhaften Termstrukturauffassung.

Es könnte auch sein, dass der Studierende ein Konkatenationsproblem hat, da er, durch die Präsentation seines Resultats, eventuell eine additive Verknüpfung aufweist.

$$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} = \frac{25+x^{-1}+y^{4}+z^{-2}}{-5+x^{2}+y^{-1}+z^{-4}} = -5x^{-1}+y^{-3}+z^{-6}$$

Wenn diese Verknüpfung den mittleren Term imaginär aufbaut, so besteht auch ein Fehler durch das hineinprojizieren von Musterbeispielen, mittels welche der Studierende die Exponenten der jeweiligen Variablen addiert.

Das Schema für die Addition der Exponenten ist aus dem Gedankengang zu erkennen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$	Queda igual → ya que no hay literales iguales $\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}} = \frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$	

Der Studierende schreibt: Es bleibt gleich, da es keine gleichen Variablen gibt.

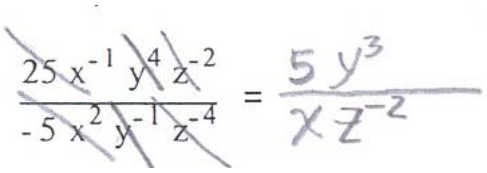
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es ist eine Division, ich muss subtrahieren.

Wenn ich subtrahieren muss, muss ich ähnliche Terme haben. x^{-1} und x^{2} sind keine ähnlichen Terme, also kann ich sie nicht subtrahieren.

Deutung:

Der Studierende verwechselt wahrscheinlich die Addition ähnlicher Terme, da er in der Informationsverarbeitung an eine Subtraktion denkt, jedoch nicht genau weiß, was er subtrahieren muss. Bei der Subtraktion denkt er, dass man nur ähnliche Terme subtrahieren kann, deshalb sein Kommentar, dass man die Aufgabe nicht vereinfachen kann, da er keine ähnlichen Terme findet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{25x^{-1}y^{4}z^{-2}}{-5x^{2}y^{-1}z^{-4}}$		Streichschema mit ignorieren der -1 als Exponenten.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

Deutung:

Bei den Variablen x und y wurden die Exponenten addiert, und x oder y dort hingeschrieben, wo der positive Exponent gestanden hat. Z.B.: x hatte einen positiven Exponenten im Nenner (2), und im Zähler einen negativen Exponenten. Die Exponenten sind addiert worden 2 – 1 = 1 und wurde als Exponent von x im Nenner geschrieben.

Oder, es scheint als habe der Studierende eine Art Streichschema bei den Variablen x und y angewandt, die negativen Exponenten aber ignoriert, dieses könnte durch die jeweiligen Exponenten -1 geschehen sein, eventuell nicht als negativ aufgenommen und dadurch eine „Kürzung“ vorgenommen.

Seine Strategie ändert sich, da z zwei negative Exponenten hat, und keines der Exponenten -1 ist.

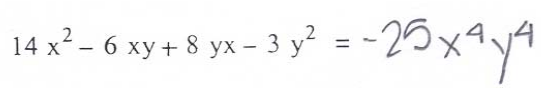
Bei der Variablen z wird im Nenner vom Exponent von z, der Exponent von z im Zähler subtrahiert; – 4 – (- 2) = - 2; und als Exponenten von z im Nenner niedergeschrieben. Hier wurden Exponentenregeln richtig appliziert.

Es könnte auch sein, dass der Studierende die Division interpretiert und die Exponenten subtrahieren möchte und meint, dass 4 – 1 = 3 ist. Jedoch geschieht dieses nicht bei der Variablen z.

Ein weiterer Fehler entsteht bei der Division von 25/-5 = 5.

Testaufgabe 20

Bei dieser Aufgabe sollte die Auffassung von ähnlichen Termen analysiert werden. Die einzige Schwierigkeit lag in der Inversion der Variablen xy zu yx im 2. und 3. Term. Entdeckt wurden einige Fehler, die Konkatenationsschwierigkeiten aufwiesen oder auch Aufgabe-Ergebnis-Deutung eines Gleichheitszeichens.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsschwierigkeiten, Sammelschemata NOLTE(1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Interpretation des Gleichheitszeichens als Aufgabe- Ergebnis. NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S. 68 u. 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die ersten drei Koeffizienten addiere ich, den letzten subtrahiere ich, das Vorzeichen ist negativ, da ich ein Minuszeichen im letzten Summanden habe.

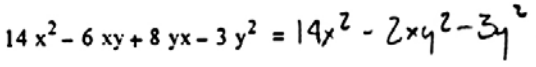
2. Die Exponenten von x und y addiere ich."

Deutung:

Der Studierende hat Konkatenationsschwierigkeiten, die sich wahrscheinlich von der Auffassung des Gleichheitszeichens und der Konkatenation generieren. Die Deutung des Gleichheitszeichens als Aufgabe-Ergebnis und ein nicht akzeptie-

ren als Endresultat eine Summe wie $14x^2 + 2xy – 3y^2$, fordern den Studierenden auf, das Ergebnis zu reduzieren.

Wenn der Studierende $14x^2$, und die anderen Terme in sich, nicht multiplikativ verknüpft hat, sondern additiv, liegt es nahe alle Terme zu addieren. x + x wird zu x^2, und so weiter.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Partielle Verwechslung der Addition mit der Multiplikation, partielle fehlerhafte Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) Klammersetzung BOOTH (1984, S. 31; aus NOLTE, 1991, S. 45) Mangelhaftes Buchstabenschema TIETZE (2000, S. 71) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $14x^2$ und $3y^2$ haben keine ähnlichen Terme, ähnliche Terme sind 6xy und 8yx.

2. Diese Terme muss ich subtrahieren 8 yx – 6 xy; 8 – 6 = - 2; ich habe ein positives und ein negatives Vorzeichen, also ist das Vorzeichen negativ.

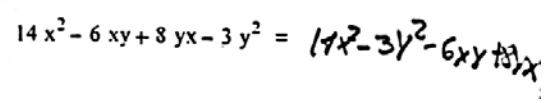
3. xy + xy = xy^2.“

Deutung:

Es wurde zwischen ähnlichen und nicht ähnlichen Termen differenziert. Nicht ähnliche Terme wie $14x^2$ und $3y^2$, wurden genauso in der Vereinfachung wiedergegeben.

Bei den ähnlichen Termen - 6xy + 8yx hat der Studierende Addition und Multiplikation vermischt. Erstens; Da er ein negatives Vorzeichen setzt, das auf die Vorstellung hinweist, dass er positiv und negativ zu einem negativen Resultat interpretiert (was in der Multiplikation der Fall wäre) und zweitens; da er xy und

yx wahrscheinlich multipliziert und zu xy^2 verarbeitet, wo er auch vermutlich, $(xy)^2$ meint und eine Klammer für überflüssig hält. Diese Interpretation kann an einem mangelhaften „Buchstabenschema“ liegen, in dem „x“ als ein Objekt angesehen wird, und x+x zu x^2 wird. Andere Autoren, wie NOLTE und MALLE, referieren diesen Fehler als Konkatenationsfehler.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$14x^2 - 6xy + 8yx - 3y^2 =$		Nicht Identifikation ähnlicher Terme Informationsverarbeitung SHEVAREV (aus NOLTE, 1991, S. 60)

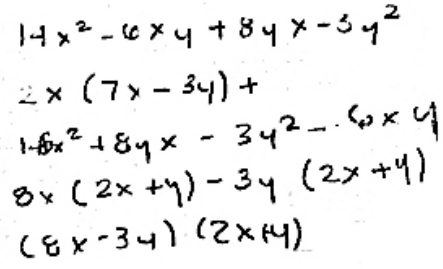
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es gibt keine ähnlichenTerme, die ich zusammenfassen kann.

2. Ich werde sie nach einem bestimmten Schema ordnen.“

Deutung:

Es manifestiert sich, dass der Studierende wahrscheinlich die Terme 6xy und 8yx nicht als ähnliche Terme identifiziert, so dass er sie nicht subtrahiert, und als Vereinfachung eine Umgruppierung vornimmt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$14x^2 - 6xy + 8yx - 3y^2 =$		Verändert die Aufgabe um faktorisieren zu können. Erkennt wahrscheinlich die ähnlichen Terme nicht.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die Aufgabe ist eine Vereinfachung, um vereinfachen zu können, muss ich faktorisieren.

2. Da ich mit dem ersten Ansatz nicht weiterkomme, modifiziere ich die Aufgabe zu:

3. $16x^2 – 6xy + 8yx – 3x^2$. Sicherlich ist das ein Druckfehler.

4. Nun kann ich faktorisieren: $16x^2 + 8yx = 8x (2x + y)$ und

$– 3y^2 – 6xy = - 3y (2x + y)$

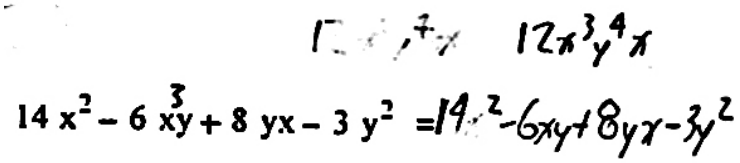
5. Nun kann ich (2x + y) noch einmal faktorisieren: 8x(2x+y)-3y(2x+y) =

(8x-3y)(2x+y)“

Deutung:

Im ersten Schritt, hat der Studierende einen Versuch gestartet, um den algebraischen Ausdruck zu faktorisieren (man erkennt es aus dem Ansatz). Da dieser Versuch scheiterte, hat er gemeint, $14x^2$ sei eventuell ein Druckfehler, und verändert es zu $16x^2$, womit er wahrscheinlich seinen gut überlegten Faktorisierungsschritt vervollständigen konnte (in der dritten Zeile seines Prozesses wird $14x^2$ zu $16x^2$ verbessert). Die Faktorisierung nach der Veränderung ist einwandfrei erfolgt.

Man kann vermuten, dass der Studierende die ähnlichen Terme 6xy und 8yx nicht als solche erkannt hat, oder dass die Faktorisierung so viel und lange in der Schulzeit geübt wurde, dass für ihn möglicherweise eine Vereinfachung mit einer Faktorisierung verwechselt wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993,S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE (2000,S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich addiere alle Koeffizienten, 14 – 6 + 8 – 3 = 12

2. Ich fasse alle Buchstaben zusammen, ich habe 4 mal ein y, y^4; ich habe dreimal ein x, x^3.

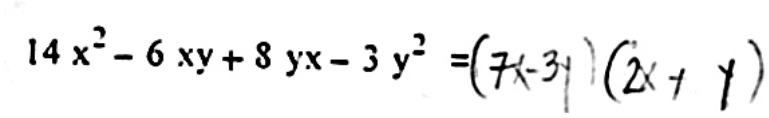
3. Ich habe noch ein x vergessen, das schreibe ich dazu.“

Deutung:

Die Verknüpfung der algebraischen Terme scheint für den Studierenden additiv zu erfolgen, deshalb addiert er alle Koeffizienten und auch die Buchstaben. Buchstaben werden nach TIETZE (2000, S. 71) als Objekte angesehen und zusammengefügt.

Es besteht auch ein Rechenfehler, da die Addition von den Koeffizienten nicht 12, sondern 13 ergibt.

Es ist nicht zu erkennen, welchem Gedankengang der Studierende vorher gefolgt ist, da er ausradiert hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fehlen einer Kontrollinstanz MALLE (1993, S. 164)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich versuche zu faktorisieren.

Für $14x^2$ suche ich zwei Zahlen, die multipliziert 14 ergeben, 7 und 2, so ist:

(7x)(2x), da 7x (2x) = $14x^2$ ist.

Jetzt brauche ich zwei Zahlen, die multipliziert 3 ergeben, 3 und 1, da ich ein negatives Vorzeichen bei $3y^2$ habe, muss eine Zahl negativ und die andere Zahl positiv sein. (7x – 3y)(2x + y), da (-3y)(y) = -3 y^2 ist.“

Deutung:

Der Studierende hat einen Ansatz zur Faktorisierung versucht, die auf der Analyse des ersten und des letzten Terms basiert. Es besteht keine Kontrollinstanz, da er seine Faktorisierung nicht konstatiert.

Testaufgabe 21

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$3\cdot(x-2)+4\cdot(3-x)-(x+5) = x-5$		

Da kein Prozess vorliegt, scheint die Deutung der Gedankengänge des Studierenden schwierig.

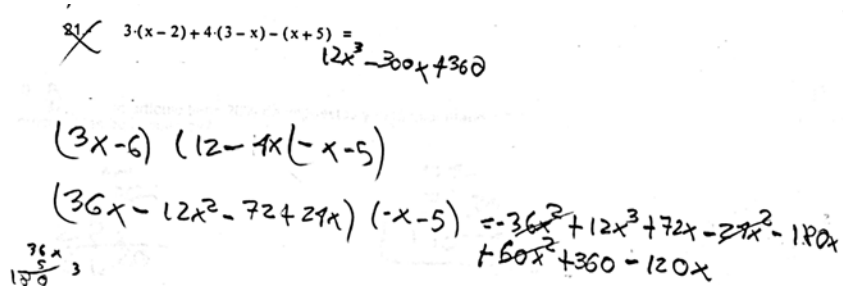
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

?????????

Deutung:

Die Deutung der Gedankengänge (weil es möglicherweise das Resultat legitimiert) ist wahrscheinlich durch Konkatenationsfehler bedingt.

Wenn der Studierende (x-2) als -2x, (3 – x) als 3x und - (x+5) als – 5x interpretiert, kann das „x“ legitimiert werden, und dann auf einen Rückgriff auf die letzte Klammer, die -5 begründet werden. - 6x + 12x – 5x – 5 = x – 5.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Visuelle, fehlerhafte Aufnahme der Information NOLTE(1991, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe drei Klammern, die ich multiplizieren muss.

2. Vor der Klammer (x + 5) steht ein Minuszeichen, das ich in die Klammer mit aufnehmen kann als (-x-5)

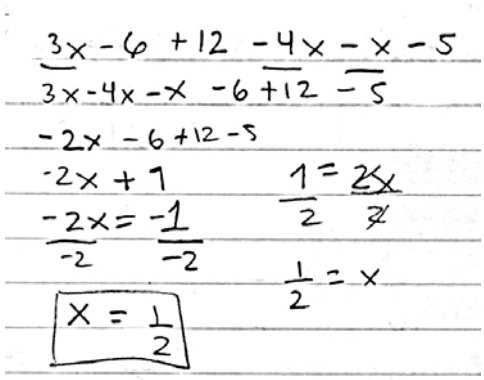
3. Ich multipliziere erst zwei Klammern aus, und dann multipliziere ich das Resultat mit der letzten Klammer.

4. Zuletzt muss ich ähnliche Terme addieren und subtrahieren.“

Deutung:

Informationsaufnahme erfolgt fehlerhaft, da der Studierende eine Multiplikation interpretiert, statt einer Addition und einer Subtraktion (eventuell resultiert dieses durch den Eindruck der Klammern). Wahrscheinlich hat er das Plus- und Minuszeichen als Vorzeichen der Klammern interpretiert und nicht als Operationszeichen aufgenommen, denn den letzten Faktor hat er von –(x+5) zu (-x-5) verarbeitet.

Die Multiplikation ist fast fehlerfrei, er hat nur 72x im letzen Schritt nicht mehr beachtet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verlust der Übersicht Umformung wird zu einer Gleichung MALLE(1993, S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse alle Klammern auf, passe auf das Minuszeichen vor der Klammer (x+5) auf.

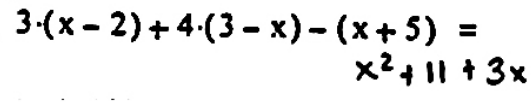
2. Ich vereinfache in dem ich ähnliche Terme zusammenfasse.

3. -2x+1 ist eine Gleichung, die ich für „x“ auflöse.

4. Der Wert für „x“ ist ½.“

Deutung:

Der Studierende hat einen korrekten Ansatz, er löst die Klammern auf und vereinfacht zu -2x+1. Dennoch verliert er die Übersicht, da er -2x+1 imaginär gleich Null setzt, denn man sieht keine Null, und die Gleichung -2x+1=0 löst. Er hat am Ende die Art der Tätigkeit nicht mehr eingehalten, und das Ziel verwechselt, da er für „x“ löst, da keine Gleichung besteht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fehlerhafte Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 17)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse de erste Klammer auf: 3 (x – 2) = 3x – 6

2. Ich multipliziere 4 (3) = 12

3. (-x) muss ich mit (-x) der letzten Klammer multiplizieren und dann noch 5 addieren.

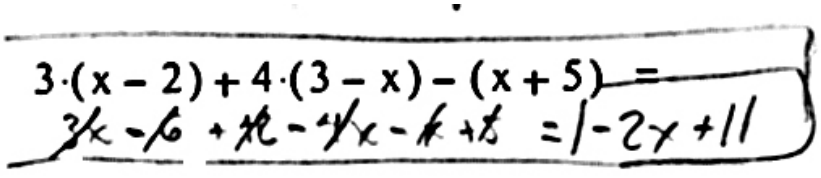
4. $3x – 6 + 12 + x^2 + 5 = x^2 + 11 + 3x$."

Deutung:

Wahrscheinlich hat der Studierende eine Mischung von Multiplikationen, Additionen und Subtraktionen aufgenommen, in der Form:

$3(x – 2)+ 4 (3) + (-x)(-x) + 5 = 3x – 6 + 12 + x^2 + 5 = x^2 + 11 + 3x$

Eventuell vergisst er nach der 4 (3), dass er noch das – x mit 4 multiplizieren muss und multipliziert es dann mit dem – x von der letzten Klammer.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verlust der Kontrolle einer Unterprozedur MALLE (1993, S. 186) Interferenz von Schemata MALLE (1993, S. 185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse die Klammern auf, bei der letzten Klammer wechsle ich das Vorzeichen von „x".

2. Danach fasse ich alle ähnlichen Terme zusammen."

Deutung:

Der häufigste Fehler dieser Aufgabe manifestiert sich durch einen Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes; – (x+5) wird zu –x + 5. Man kann vermuten, dass der Studierende durch den Aufwand bei der Aufgabe nur das erste Vorzeichen wechselt und das zweite vergisst, oder dass das Schema –(a+b) nicht korrekt gespeichert wurde, also als –a + b gespeichert wurde, oder eventuell mit dem Schema –(ab) = (-a)b verwechselt wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$3\cdot(x-2)+4\cdot(3-x)-(x+5)$	$3x-6+12-4x-x+5$ $-2x+11$ $2x-11$	Verlust der Kontrolle einer Unterprozedur MALLE (1993, S. 186) Interferenz von Schemata MALLE (1993, S. 185) Falsche Interpretation des Gleichheitszeichens NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S.68 u. 72) Wechseln der Vorzeichen bei einem algebraischen Ausdruck (wahrscheinlich durch eine Interpretation einer Gleichung)
Dieser Fehler wurde in der Literatur bisher noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse die Klammern auf, bei der letzten Klammer wechsle ich das Vorzeichen von „x".

2. Danach fasse ich alle ähnlichen Terme zusammen.

3. Ich ändere alle Vorzeichen, aus -2x+11 wird 2x - 11“

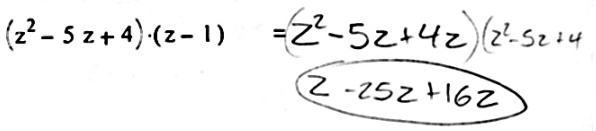
Deutung:

Bei dieser Vereinfachung kann man zwei Fehler aufspüren.

Der erste Fehler resultiert bei der Anwendung des Distributivgesetzes, siehe vorhergehende Analyse.

Der zweite Fehler ergibt sich aus der Vorstellung der Operationen, die bei der Lösung einer Gleichung angewandt werden können, die fälschlicherweise auf einen algebraischen Ausdruck übertragen wurden. Eventuell besteht bei dem Studierenden keine klare Vorstellung der Unterschiede zwischen einer Gleichung und eines algebraischen Ausdrucks. Die Interpretation des Gleichheitszeichens spielt wahrscheinlich eine entscheidende Rolle bei diesem Fehler.

Testaufgabe 22

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??????????????

Deutung:

Wahrscheinlich möchte der Studierende die Multiplikation mit einem Distributivgesetz realisieren. Er multipliziert die erste Klammer mit z, wobei er nur den letzten Term der ersten Klammer multipliziert.

$(z^2 – 5z + 4)\, z = z^2 – 5z + 4z$

Dann multipliziert er die erste Klammer mit der 1, nicht mit – 1 (das Vorzeichen wird ignoriert)

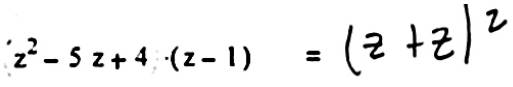
$(z^2 – 5z + 4)\, (1) = z^2 – 5z + 4$

Statt die beiden Resultate zu subtrahieren, werden sie vom Studierenden multipliziert.

$(z^2 – 5z + 4z) (z^2 – 5z + 4) = z – 25z + 16z$

Zu ersehen ist hier, dass nur die ersten, zweiten und dritten Terme der Klammern „multipliziert“ wurden, wobei nur die Multiplikation der 4z x 4 = 16 z „richtig“ ist.

Bei der Multiplikation der ersten und zweiten Terme, multipliziert der Studierende die Koeffizienten (ohne Vorzeichen) und setzt nur ein „z“ dazu.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsschwierigkeiten NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Fehlinterpretationen der Multiplikation mit einer Vermehrung NOLTE(1991, S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??????????????

Deutung:

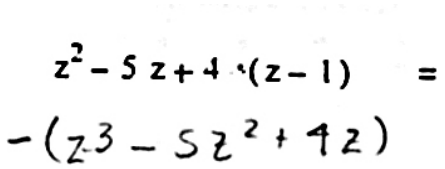
Die Deutung der Gedankengänge dieses Lösungsprozesses ist eine Annahme, da kein Prozess vorliegt.

Konkatenationsfehler könnten die Schwierigkeit bei diesem Lösungsprozess erklären:

$z^2 – 5z + 4 = z + z – 5 – z + 4 = z – 1 = - z$; $z – 1 = - z$

$(- z)(- z) = (z + z)^2$

Minus mal Minus ist Plus; z x z ist zweimal z; (z + z) (Fehlinterpretation einer Multiplikation mit einer Addition) und da ich zweimal z multipliziere habe ich ein Quadrat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Klammernvorstellungen MALLE(1993, S.192) Fehlinterpretation der Multiplikation Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere $(z^2 – 5z + 4)\ z = z^3 – 5z^2 + 4z$

2. Nun muss ich noch einmal mit -1 multiplizieren.

3. $-(z^3 – 5z^2 + 4z)$“

Deutung:

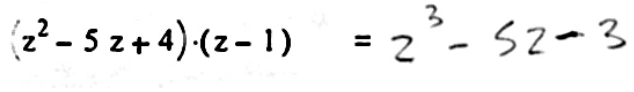
Auf den Aufgabenblättern sind die Klammern vor z2 und nach 4 gut zu erkennen. Hier sind wahrscheinlich beim einscannen die Klammern nicht deutlich.

Man kann ersehen, dass der Studierende diese Klammer aufnimmt, aber den zweiten Faktor fehlinterpretiert.

a) Es besteht die Möglichkeit, dass er sich zwei Klammern vorstellt, nämlich eine, die eine Multiplikation mit z und dann mit -1 durchblicken lässt. In etwa: $(z^2–5z+4)(z)(-1)$. Hingewiesen wird hier auf eine fehlerhafte Informationsaufnahme.

b) Voraussichtlich könnte der Studierende die Multiplikation eines Polynoms mit einem Binomen fehlinterpretiert haben, und nacheinander die Multiplikation vom Polynom mit den einzelnen Termen im Binomen vorgenommen haben. Nacheinander könnte eine Fehlinterpretation der Tatsache sein, dass erst ein Term multipliziert wird und dann der andere. Diese Interpretation wurde bis jetzt nicht in der Literatur gefunden.

c) Eine andere Vermutung liegt in der Interpretation des Binomens (z-1) als –z, wonach wohl ein Konkatenationsfehler vorliegt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		A) Fehlerhafte Informationsverarbeitung (SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)) bei der Multiplikation von Polynomen B) Unvollständige Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Da der Studierende keinen Lösungsprozess niedergeschrieben hat, und der Gedankengang nicht verfolgt werden kann, werden hier zwei Interpretationen erahnt.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

A) „1. Ich muss z^2–5z+4 mit z – 1 multiplizieren.

2. Die Multiplikation der Polynomen erfolgt durch die Multiplikation der „Randtermen". Ich multipliziere den ersten Term des ersten Faktors mit dem ersten Term des zweiten Faktors, und den zweiten Term des zweiten Faktors, mit dem letzten Term des ersten Faktors.

3. z^2 mal z ist z^3; +4 (- 1) = - 3, für -5z erfolgt keine Operation."

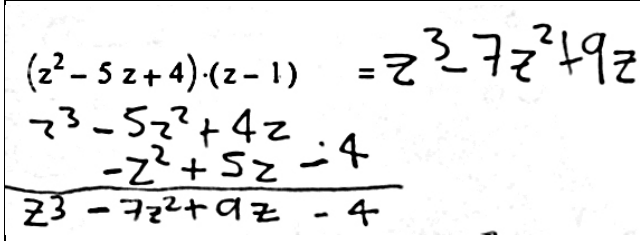
B) „1. Ich muss z^2–5z+4 und z – 1 addieren.

2. z^2 plus z ist z^3; zu -5z gibt es nichts zu addieren; +4 (- 1) = - 3."

Deutung:

A) Wahrscheinlich interpretiert der Studierende die Multiplikation von Polynomen als Multiplikation der „Randterme", eventuell durch die Faktorisationsformen (analysiere die Randterme, soweit diese geordnet sind). Ferner erfolgt ein Fehler bei der Multiplikation von (+4)(-3), da er zum Teil eine Multiplikation vornimmt (siehe Vorzeichen) und zum Teil eine Subtraktion abwickelt (siehe 3)

B) Vermutlich erfolgt eine unvollständige Informationsaufnahme, da die Multiplikation mit einer Addition verwechselt wird, in Kombination mit einem weiteren Fehler. Der weitere Fehler besteht wahrscheinlich in einer mangelhaften Vorstellung von Buchstabenschemata. z^2 plus z ist z^3, -5z wird nicht berührt, und +4 – 1 = - 3 (hier auch eine Mischung von Multiplikation, durch das Vorzeichen und Subtraktion, durch die 3).

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$(z^2-5z+4)\cdot(z-1) = z^3-7z^2+9z-4$		Rechenfehler in der Addition von ähnlichen Termen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss jeden Summanden des ersten Polynoms mit jedem Summanden des Binoms multiplizieren."

Deutung:

Ein ganz einfacher Rechenfehler, $-5z^2 - z^2 = -7z^2$

Der Prozess wird in einer ganz algorithmischen Form ausgeführt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$(z^2-5z+4)\cdot(z-1) = z^2-4z+3$		Umgangssprachliches Konzept der Multiplikation im Zusammenhang mit der Vermehrung NOLTE (1991, S. 65) Unvollständige Informationsaufnahme MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

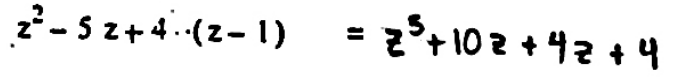
„1. Ich muss zu $(z^2 - 5z + 4)$ $(z - 1)$ addieren.

2. z^2 hat keinen ähnlichen Term den ich addieren oder subtrahieren kann:

3. $-5z + z = -4z$; $4 - 1 = 3$

Deutung:

Die Aufgabe wird als eine Addition aufgefasst, wahrscheinlich durch eine Assoziation der Multiplikation mit einer Vermehrung. Im Umgangssprachlichen wird das Konzept der Vermehrung oft mit einer Multiplikation gleichgestellt (siehe Lexikon). Der Studierende addiert von beiden Klammern die ähnlichen Terme.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nichtbeachtung der Prozedurhierarchien MALLE(1993, S. 186) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss die Multiplikation mit dem Distributivgesetz vornehmen.

2. z^2 x z = z^3

3. – 5 zweimal mal z multipliziert, oder – 5 mal zweimal z = - 10z.

4. 4x z = 4z.

5. Die 1 multipliziere ich mit der 4. 1 x 4 = 4.“

Deutung:

Wahrscheinlich ist der Aufwand der einzelnen Multiplikationen zu groß, so dass der Studierende die Prozedurhierarchien nach einigen Ausführungen nicht mehr beachtet.

Die Multiplikationen werden wahrscheinlich wie folgt errechnet:

a) z^2 x z = z^3;

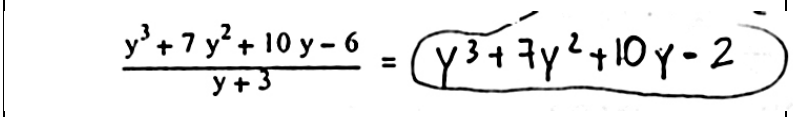
b) - 5z ist für den Studierenden vermutlich additiv verknüpft, - 5 + z muss mit z multipliziert werden, also – 5 mal zweimal z ist gleich – 10z.

c) 4 x z = 4z

So weit wurde das Distributivgesetz angewandt, bei der Multiplikation mit der

–1 wird diese nur mit dem unabhängigen Term 4 multipliziert, und das Vorzeichen wird nicht beachtet.

Testaufgabe 23

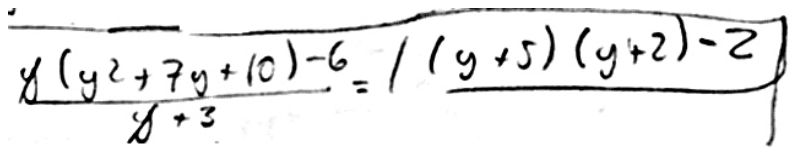
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Reparatur, lässt den Term „y“ einfach weg MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 70) Musterbeispiel hineinprojiziert MALLE(1993, S. 174) TIETZE(2000, S. 73)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich dividiere durch 3, nur die – 6 kann ich durch 3 teilen.“

Deutung:

Aus dem Resultat geht hervor, dass der Studierende eine Reparatur vornimmt, im Sinne, dass er den störenden Term „y“ im Nenner einfach weglässt. Auch bei der Division durch die übriggebliebene 3, macht er eine Art von Streichschema, da er nur die – 6 /3 teilt. Der Fehler resultiert wahrscheinlich durch das Hineinprojizieren von Musterbeispielen wie 6/3=2, oder aus der Annahme, dass etwas, was im Zähler steht, mit etwas im Nenner „gekürzt“ werden kann, ohne darauf zu achten, ob es ein Faktor ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Streichschema MALLE(1993, S. 182) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S.45) MALLE(1993, S. 190f)

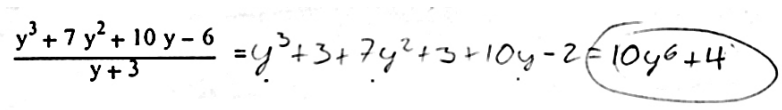
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die ersten drei Summanden faktorisiere ich im Zähler, dann habe ich einen neuen Bruch; $\frac{y(y^2+7y+10)-6}{y+3}$

2. Ich kann ein „y“ („Faktor im Zähler“) mit dem „y“ im Nenner kürzen, und die –6 /3 teilen.“

Deutung:

Der Studierende hat eine fehlerhafte Auffassung vom Begriff Faktor im Zähler. Er interpretiert, dass das faktorisierte „y“ im Zähler $\frac{y(y^2+7y+10)-6}{y+3}$ ein Faktor vom ganzen Zähler ist, so dass er es mit einem „y“ aus dem Nenner „kürzen“ kann. Dieser Fehler beruht wahrscheinlich in der Identifikation der Struktur des Terms. Könnte der Studierende die Struktur des Terms genetisch korrekt interpretieren, hätte er gewusst, dass die „Streichschemata“, die er vornimmt, nicht angebracht sind.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Reparatur, ignorieren von y im Nenner MALLE(1993, S.184) TIETZE(2000, S. 70) Verwechslung einer Division mit einer Addition (wenig häufig) MALLE (1993, S. 67) Konkatenationsfehler Oder mangelhaftes Buchstabenschema NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135) TIETZE(2000, S. 71)
Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??????????????????

Deutung:

Der Studierende macht eine Reparatur in einer Prozesslücke, in dem er „y“ ignoriert.

Nach y^3 und $7y^2$ addiert er jeweils eine 3, die wahrscheinlich aus dem Nenner kommt.

Bei 10y addiert er keine 3 mehr, sondern dividiert - 6/3 = -2

Er addiert dann die 3 + 3 – 2 = 4; die Koeffizienten von y^3 und $7y^2$ ignoriert er auch und setzt ein mangelhaftes Buchstabenschema ein, wobei er sich wahrscheinlich die Variablen als Objektnamen vorstellt, $y^3 + y^2 + y = y^6$, als Koeffizienten nimmt er den Koeffizienten von y.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}$	$= y^2 + \frac{7}{3} + y \; \frac{10}{3} \; y - 2$	Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)
Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ziffern werden durch 3 geteilt, Variablen, durch y.

2. 7 durch 3 ist 7/3; 10 durch 3 ist 10/3 und – 6 durch 3 ist – 2.

3. $y^3 / y = y^2$, $y^2 / y = y$; $y / y = y$.“

Deutung:

Bei diesem Lösungsprozess manifestieren sich verschiedene Probleme:

a) Die Verknüpfung der Terme ist additiv, was sich durch Konkatenationsfehler äußert. $7y^2$ wird additiv interpretiert und 7 durch 3 und y^2 durch y geteilt, es werden sogar Pluszeichen gesetzt, die aber bei 10/3 und y wiederum nicht mitgeschrieben werden, es wird y 10/3 y ohne Vorzeichen nebeneinandergeschrieben.

b) Der Studierende hat eine Division aufgenommen, und führt deshalb auch Divisionen aus. Jedoch wird vermutlich die Struktur des Termaufbaus nicht erkannt, da der Studierende den Nenner in zwei Divisionen teilt,

durch y und durch 3. Weitere Fehler werden in der Auffassung gemacht, dass die Zahlen durch 3 und die Variablen durch y geteilt werden.

c) Musterbeispiele wie: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; werden übergeneralisiert, und falsch appliziert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}$	$= y^3+7y^2+11y-3$	Unvollständige Informationsaufnahme MALLE (1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y und 3 addiere ich zu $y^3 + 7y^2 + 10y – 6$; in dem ich nur ähnliche Terme addiere."

Deutung:

Die Informationsaufnahme ist fehlerhaft, da der Studierende die Details nicht aufnimmt, und meint es handelt sich um eine Addition. Diese Interpretation ist nicht häufig, da nach MALLE (1993, S. 166) eine „höhere" Operation mit einer „niedrigeren" verwechselt wird, im Sinne, dass eine Division mit einer Subtraktion vertauscht wird. Bei dieser Verwechslung wird meistens die Division mit einer Verminderung assoziiert und demzufolge subtrahiert. Folglich ist die Verwechslung, mit der Addition nicht üblich. Er addiert demzufolge die ähnlichen Terme 10y +y = 11 y und - 6 + 3 = - 3.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}$	$= -11y^5/3y$	Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S.135) Mischung einer Addition und Multiplikation

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Im Zähler wie auch im Nenner werde ich alles zusammenfassen.

7 + 10 – 6 = – 11; ich habe zwei positive und ein negatives Vorzeichen, das gibt ein negatives Vorzeichen.

$y^3 + y^2 = y^5$

Der Nenner ist: y + 3 = 3y. "

Deutung:

Der Studierende fasst alle nicht ähnlichen Terme zusammen, indem er alle Koeffizienten addiert und subtrahiert, je nach Vorzeichen. Er erfasst den Koeffizienten des ersten Terms nicht, weil er wahrscheinlich alle impliziten „1“ nicht identifiziert. Dieses geschieht auch mit der impliziten „1“ als Exponenten von y, bei der Zusammenfassung von $y^3 + y^2$ zu y^5. Diese Problematik resultiert vermutlich aus einer Auffassung der Terme, die additiv, statt multiplikativ verknüpft sind, und auf Konkatenationsschwierigkeiten hinweist. Er appliziert den gleichen Fehler im Nenner.

Außerdem hat der Studierende eine Mischung von Addition und Multiplikation vorgenommen, da er ein negatives Vorzeichen im Zähler platziert, das sich wahrscheinlich aus der Annahme ergibt, dass beim Multiplizieren die Anzahl der negativen Vorzeichen, das Vorzeichen des Resultats ergibt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3} = y^3 + 7y^2 + 10 - 3$		Streichschema und Weglassschema MALLE(1993,S. 182) Unkritische Anwendung der neutralen Elemente MALLT(1993,S. 174) TIETZE(2000, S.73) Fehlerhafte Auffassung der Term-Struktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993,S. 190) Verwechslung der Division mit einer Addition MALLE (1993, S. 67)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 10 y / y = 10,

-6 + 3, die +3 ist übriggeblieben und muss addiert werden."

Deutung:

Der Studierende vereinfacht den Bruch mit einem Streichschema, es werden Musterbeispiele zu Kürzungsprozesse in die Aufgabe hineinprojiziert, und dadurch der Term 10y mit y aus dem Nenner „gekürzt". Eventuell ist es für den Studierenden maßgebend, dass 10y im Zähler und y im Nenner dem Musterbeispiel y/y gleicht.

Man kann auch ein Weglassschema erkennen, da der Studierende bei der Division keine 1 im Nenner erhält, sondern einfach „nichts" hinschreibt. Es kann auch sein, dass die Operation 10y /y unkritisch in Beziehung auf die neutralen Elemente erfolgte und dadurch statt einer 1, eine Null „übriggeblieben" ist.

Später wird –6 + 3 addiert (zu ersehen durch das Vorzeichen), wo der Studierende statt zu dividieren, die Division mit einer Addition verwechselt.

Aus dem Lösungsprozess, geht hervor, dass der Studierende den Termaufbau wahrscheinlich nicht identifiziert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3} = 3y^3+21y^2+11y+30y-18$ Fehler in der Literatur noch nicht gefunden		Verwechslung der Division mit der Multiplikation einerseits und mit der Addition beim Term y MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere erst mal alle Summanden des Zählers mal 3.

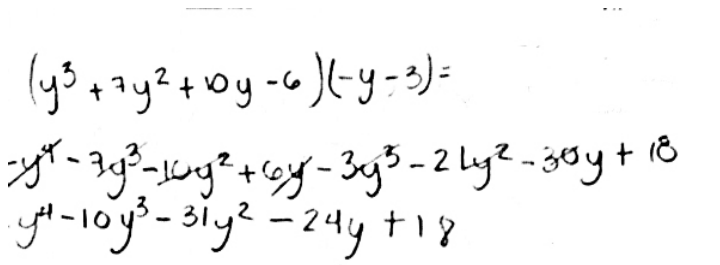
$(y^3+7y^2+10y-6)\cdot 3 = 3y^3+21y^2+30y-18$

„y" das im Nenner zurückgeblieben ist, muss ich im Zähler addieren, und zwar zu 10y; 10y + y = 11y."

Deutung:

Der Studierende verwechselt eine Division von Polynomen mit einer Multiplikation. Er verarbeitet die Multiplikation in dem er die 3 mit allen Summanden des Zählers multipliziert, außerdem addiert er zur 10y das y des Nenners.

$$(y^3+7y^2+10y-6)\cdot 3+10y+y=3y^3+21y^2+30y-18+11y$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y^3+7y^2+10y-6}{y+3}=$		Schema ohne Einschränkungen in bezug auf die Exponenten MALLE(1993,S. 181) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Was im Nenner steht, kann mit einem negativen Vorzeichen in den Zähler. Da ich eine Division hatte, muss ich nun multiplizieren."

Deutung:

Vermutlich in der Vorstellung, dass eine Menge, die im Nenner steht, mit einem entgegengesetzten Vorzeichen (nicht beachtend, dass diese Regel sich um Exponenten handelt) in den Zähler kommen kann, wird aus der Division eine Multiplikation mit entgegengesetzten Vorzeichen (siehe ersten Schrittes Prozesses).

Danach wird eine korrekte Multiplikation und Vereinfachung ausgeführt.

Anhang 6: Faktorisierungsprozesse

Testaufgaben: 24 - 28

Beim vierten Teil des Tests sollten die Faktorisierungsprozesse der Studierenden untersucht werden. Es sollte jeweils einer der fünf Hauptfaktorisierungen erfragt werden:

Testaufgabe 24: Zweite Binomische Formel

Testaufgabe 25: Erste Binomische Formel

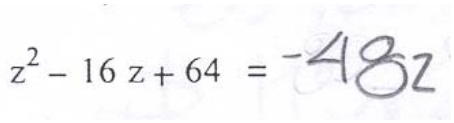
Testaufgabe 26: gemeinsamer Faktor

Testaufgabe 27: Satz von Vieta

Testaufgabe 28: Kombination von einem gemeinsamen Faktor mit einer dritten binomischen Formel

Gefunden wurden, bei vielen Studierenden, viel tiefliegendere Fehler und Fehlkonzeptionen als ein nicht Faktorisieren können.

Testaufgabe 24

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41); MALLE (1993, S. 135) *Eine implizite 1 als Koeffizient wird nicht beachtet*[5] Gleichheitszeichen als Aktionszeichen aufgefasst NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000. S. 68 und 72)

[5] Diese Art von Fehler wurde in der Literatur nicht referiert.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Von z^2 ziehe ich z ab, da es eine Subtraktion ist.

2. 64 -16 = 48, aber da 64 ein positives Vorzeichen hat und 16 ein negatives Vorzeichen hat, hat das Resultat ein negatives Vorzeichen.

3. z – 48 = – 48z“

Deutung:

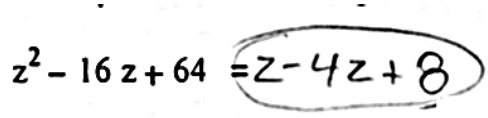
Von z^2 wurde z abgezogen, - 16 + 64 = - 48. Der Koeffizient von z^2 wurde nicht berrücksicht, weil wahrscheinlich ein impliziter Koeffizient 1 nicht aufgenommen wird. Diese Fehler resultieren von defizienten Auffassungen der Konkatenation in Algebra, der Studierende hat keine klare Vorstellung von der Zusammensetzung der Terme, und dass diese in der Algebra multiplikativ und nicht additiv sind.

z und z ist z Quadrat

16 und z ist 16z

So wird die Aufgabe als: z+z-16-z+64 aufgefasst. Auch wenn dann einige Vorzeichen nicht den wirklichen Vorzeichen korrespondieren. Resultat wäre:

z – 48 , was dann zu – 48 z verarbeitet wird, da z – 48 nicht als Resultat angesehen werden kann, wahrscheinlich durch die Deutung des Gleichheitszeichens als Aufgabe-Ergebnis und seine Interpretation als Aktionszeichen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Informationsverarbeitungsfehler SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zum Faktorisieren muss ich Wurzeln ziehen.

Wurzel von z^2 ist z

Wurzel von 16 z ist 4 z

Wurzel von 64 ist 8.“

Deutung:

Aus dem Prozess wird entnommen, dass der Studierende den Begriff Faktorisierung nicht identifiziert.

Der Studierende hat aus jedem der Summanden die Wurzel gezogen, diese erfolgte in richtiger Form beim ersten und letzten Summanden, jedoch stieß er auf Schwierigkeiten beim zweiten Summanden.

Wahrscheinlich hat der Studierende eine Erinnerung an einen Algorithmus, bei dem aus dem ersten und dritten Summanden die Wurzel gezogen wird, und dieses als Anhaltspunkt für die Faktorisierung gebraucht wird, was er dann nicht hat realisieren können.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 = (z-8)(z+8z)$		Informationsverarbeitungsfehler. „Bug-repair“ Theory TIETZE(2000, S. 71) MALLE(1993, S. 184)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zum Faktorisieren muss ich zwei Klammern haben. In jeder Klammer ist als erster Term z;

2. (z)(z)

3. Die Wurzel von 64 ist 8, und da es – 16 z ist, schreibe ich in die erste Klammer eine – 8.

4. (z – 8)(z)

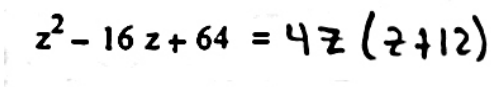
5. Nun brauche ich eine Menge in der zweiten Klammer, die mit – 8 addiert – 16z ergibt. Es bekommt ein negatives Vorzeichen, da Minus und Plus, Minus ergibt.

6. (z – 8)(z + 8z).“

Deutung:

Wahrscheinlich erfolgt der Ansatz durch eine Erinnerung an den Satz von Vieta. Die Schwierigkeit entsteht bei der Suche des zweiten Terms der zweiten Klammer. Wahrscheinlich sucht der Studierende eine Menge, die er zu – 8 addieren kann, damit sie – 16z ergibt. Das negative Vorzeichen resultiert wahrscheinlich von der Interpretation, dass Minus „und“ Plus, Minus ergibt. 8z resultiert in der Annahme, dass – 8 mit 8z „multipliziert“ wird, um -16z zu erhalten. Er trifft hier auf eine Prozedurlücke, und greift auf eine Reparatur zu. Dabei wird die Addition mit einer Multiplikation verwechselt. (TIETZE, 2000, S.71; MALLE, 1993, S. 184).

Entweder hat der Studierende keine adäquate Kontrollinstanz, oder er verarbeitet die Multiplikation der Faktoren nicht richtig, da seine Faktorisierung, von ihm, nicht angezweifelt wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst habe ich zwei Klammern.

2. (z)(z); nach dem Satz von Vieta, muss die Summe der beiden Zahlen gleich 16 sein. Dieses geschieht mit 4 und 12.

3. (z + 4)(z + 12)

4. z + 4 = 4z

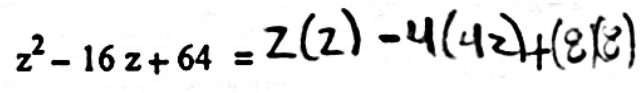
5. Also ist die Faktorisierung 4z (z + 12).“

Deutung:

Auch hier ist kein schrittweiser Lösungsprozess vorhanden, wahrscheinlich hat der Studierende seine Faktorisierung nur auf die ersten beiden Summanden bezogen und auf den Satz von Vieta.

(z + 4)(z + 12), das würde ein z^2 und 16z ergeben, da 4 + 12 = 16 ist, ohne Berücksichtigung der 64. Danach hat er vermutlich eine Umformung, im Sinne eines Konkatenationsfehlers, vorgenommen (z + 4) = 4z

Dieses steht nicht fest, da er die Umformung mit dem zweiten Faktor nicht vornimmt, jedoch kann man annehmen, dass er bei den verschiedenen Faktoren anders reagiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehler im Begriff der Faktorisierung noch nicht in der Literatur gefunden.	Fehlvorstellungen zum Begriff Faktorisierung

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss Faktoren bilden, jeder Summand kann als Multiplikation ausgedrückt werden.

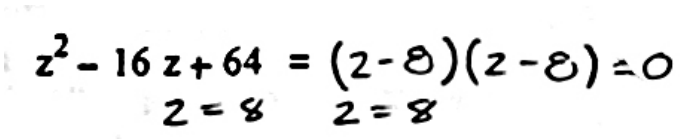
2. $z^2 = z\ (z)$

3. $-16z = -4\ (4z)$

4. Und $64 = (8)(8)$."

Deutung:

Es besteht möglicherweise keine klare Vorstellung des Begriffs Faktorisierung eines algebraischen Ausdrucks. Der Studierende hat eine Faktorisierung der einzelnen Summanden vorgenommen, indem er die einzelnen Terme in Faktoren zerlegt hat. Auffallend ist, dass der Studierende bei seiner Umformung keinen Fehler, in dem Sinne, begeht, jedoch ist die Transformation, die er vornimmt, keine Faktorisierung.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verlust der Übersicht, MALLE (1993, S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

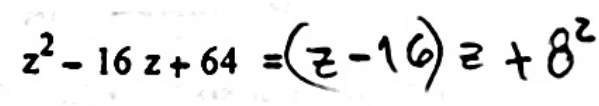
„1. Ich faktorisiere den algebraischen Ausdruck, $(z - 8)(z - 8)$.

2. Ich setze den Ausdruck gleich Null, denn es ist eine Gleichung, die ich lösen muss, $(z - 8)(z - 8)=0$

3. Also ist $z = 8$ und $z = 8$.

Deutung:

Möglicherweise unterscheidet der Studierende nicht zwischen einem algebraischen Ausdruck und einer Gleichung. Ein algebraischer Ausdruck kann nur umgeformt werden, eine Gleichung soll gelöst werden. Da dieser Unterschied dem Studierenden nicht klar ist, „erfindet" er eine 0 auf der „anderen" Seite, und löst die Gleichung. Die Faktorisierung war für ihn keine Schwierigkeit, jedoch interpretiert er die Aufgabe als eine Gleichung. Nach MALLE (1993, S. 202) verliert der Studierende die Übersicht über die Art der Tätigkeit. So werden oft Umformungen algebraischer Ausdrücke als Gleichungen angesehen und gelöst.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehler im Begriff der Faktorisierung noch nicht in der Literatur gefunden.	Kein Begriff von Faktorisierung eines Ausdrucks, dieser wird nur in den Teilen durchgeführt, die den gemeinsamen Faktor z enthalten.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei $z^2 – 16z$ habe ich einen gemeinsamen Faktor (z).

2. $z^2 – 16z = (z – 16) z$

3. $64 = 8^2$

4. So wäre alles als Faktoren ausgedrückt."

Deutung:

Es wird ein gemeinsamer Faktor „z" in den ersten zwei Summanden erkannt.

$64 = 8^2$, was auch zwei Faktoren sind. Es scheint, dass der Begriff „faktorisieren eines algebraischen Ausdrucks" nicht als ein Ausdruck, der nur Faktoren hat, verstanden wird. Zwischen Faktoren dürften keine Plus- oder Minuszeichen stehen, was möglicherweise vom Studierenden nicht erkannt wurde. Es werden gewisse Faktoren gebildet, $z^2 – 16z = (z – 16) z$ und 8^2.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 = (z + 64)(z - 16)$		Reparatur einer Lücke im Lösungsprozess TIETZE (2000, S. 71) MALLE (1993, S. 184) Fehlen einer Kontrollinstanz MALLE(1993, S.164)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zum Faktorisieren muss ich zwei Klammern haben.

2. Beide haben als erstes ein z. (z)(z)

3. Jetzt brauche ich eine 64 und eine – 16, das kommt in jede Klammer.

4. (z + 64)(z – 16).“

Deutung:

Obwohl der Lösungsprozess nicht vorhanden ist, könnte man interpretieren, dass der Studierende aus seinem Schulunterricht noch weiß, dass sich beim Faktorisieren, wenigstens, die die er in Erinnerung hat, zwei Klammern multiplizieren, und dass die meisten Beispiele immer als ersten Term, die Wurzel des ersten Terms des algebraischen Ausdrucks war. Danach hat er den Algorithmus wahrscheinlich vergessen. Es besteht eine Lücke im Lösungsprozess, bei der er eine Reparatur vornimmt. TIETZE (2000, S.71); MALLE (1993, S. 184).

MALLE(1993, S. 164) schreibt, dass bei vielen Studierenden eine Kontrollinstanz fehlt, durch welche sie feststellen könnten, ob die Faktorisierung korrekt erfolgte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 =$ $z = -64 - z^2$ -16		Verlust der Übersicht, MALLE (1993, S.202) Unbekannte durch sich selbst ausdrücken MALLE (1993, S. 203)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss für z eine Lösung finden.

2. Auf die „andere“ Seite kommt 64 und z^2 mit einem anderen Vorzeichen, dann dividiere ich durch – 16.“

Deutung:

Der Studierende nimmt die Aufgabe als eine Gleichung auf, obwohl es sich um einen algebraischen Ausdruck handelt. Dadurch interpretiert er eine Null (die im Lösungsprozess nicht geschrieben wird) hinter dem Gleichheitszeichen. Nach MALLE (1993, S. 202) hat der Studierende die „Übersicht“ verloren, dadurch, dass er die „Art der Tätigkeit“ verwechselt, wird das Ziel zu einer Isolierung der Unbekannten. MALLE (1993, S.203) gibt an, dass besonders bei quadratischen Gleichungen eine Unbekannte oft durch sich selbst ausgedrückt wird, was hier der Fall ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 =$		Informationsverarbeitungsfehler SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $z^2 – z = z$, es bleibt die – 16, die ich dazuschreibe.“

Deutung:

Da kein Lösungsprozess nachvollziehbar ist, kann man nur vermuten, was der Studierende möglicherweise gedacht hat.

$z^2 – z = z$; es bleibt ein – 16 , das dazugeschrieben wird. Die 64 kann eventuell in der Vorstellung erwachsen, dass (-8)(-8) = 64 ist, und - 8 – 8 = - 16.

Es besteht eventuell eine vage Vorstellung der Faktorisierung, da er als Faktorisierung nur einen Faktor hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 16z + 64 = (z-8)(z+8)$		Interferenz von Schemata MALLE (1993, S. 185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

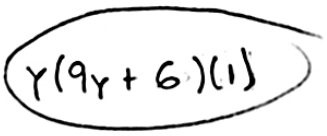
„1. $z^2 – 16z + 64 = (z – 8)^2$

2. $(z – 8)^2 = (z – 8)(z + 8)$“

Deutung:

Aus dem Prozess geht die Denkweise nicht klar hervor (da das Resultat direkt niedergeschrieben wurde), jedoch ist zu vermuten, dass der Fehler im letzten Schritt erfolgte, und wahrscheinlich ein korrekter Zwischenschritt bestand. $z^2 – 16z + 64 = (z – 8)^2$. Bei Fehlern wie $(z – 8)^2 = (z – 8)(z + 8)$ werden mehrere Schemata aufgerufen, die sich überlagern (MALLE, 1993, S.185), wobei dieses Schema eines ist: $(z – 8)^2 = z^2 – 8^2 = (z – 8)(z + 8)$

Testaufgabe 25

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9y^2 + 6y + 1 =$		Reparatur einer Prozedurlücke MALLE (1993, S. 184) TIETZE (2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $9y^2$ und 6y haben einen gemeinsamen Faktor, den ich faktorisieren kann.

2. y (9y + 6)

3. Die (1) muss ich noch dazuschreiben.“

Deutung:

Wahrscheinlich hat der Studierende einen Begriff der Faktorisierung als eine Serie von Faktoren, die multiplikativ verbunden sind, und muss, nachdem er y in den beiden ersten Termen faktorisiert hat, die 1, die übriggeblieben ist, nicht als Summand, sondern als Faktor niederschreiben, da er sonst nicht „faktorisiert“ hat. Man kann vermuten, dass er hier auf eine Lücke in der Prozedur gestoßen ist und eine Reparatur erfolgte, im Sinne, dass die 1 nicht addiert werden konnte, und einfach multipliziert wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9y^2+6y+1 = (9y+3)(9y+3)=0$		Ausdruck mit Gleichung verwechselt MALLE(1991, S. 202) Keine Kontrollinstanz MALLE (1993, S. 164)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 9 y^2 = 9y mal 9y; damit öffne ich zwei Klammern (9y)(9y)

2. Um 6y zu erhalten, muss ich 3 und 3 addieren, das kommt in jede Klammer dazu.

3. (9y + 3)(9y + 3)= 0."

Deutung:

Durch die Null am Ende des Prozesses wird klar, dass der Studierende die Aufgabe als eine Gleichung aufgefasst hat, sie aber letztendlich nicht löst.

Die Rechnung 9y (9y) = $9y^2$, entsteht wahrscheinlich durch die Konzeption über die Hierarchie der Operationen, da 9y zum Quadrat zu $9y^2$ verarbeitet wird.

Weitere Fehlauffassungen zu der Faktorisierung sind die zweiten Terme in den Klammern, diese müssen zusammen 6 ergeben (vermutlich durch eine Anwendung des Vietasatzes, ohne Rücksicht auf den ersten Term in den Klammern). $(x+m)(x+n) = x^2 + (m+n)x + mn$

Der Studierende kontrolliert sein Resultat nicht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9y^2+6y+1 = 16y^3$		Vorstellung der Buchstaben als Objektnamen (TIETZE, 2000, S. 71) Konkatenationsfehler (MALLE,1993, S. 135) (NOLTE,1991, S. 41)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss alles addieren.

2. Ich habe $9 + y^2 + 6 + y + 1$, was ich alles zusammenfügen muss.

3. Ich addiere die $9 + 6 + 1 = 16$

4. $y^2 + y = y^3$

5. $16 + y^3 = 16y^3$“

Deutung:

Ob sich der Studierende Buchstaben als Objektnamen fehlerhaft vorstellt, oder ob die Terme additiv verknüpft sind, kann nicht aus dem Prozess entnommen werden. Der Studierende addiert alle Koeffizienten und 1, und addiert $y^2 + y$ zu y^3, wo ein Konkatenationsfehler beobachtet wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	$9y^2 + 6y + 1 = (3x \div 3)(3x \cdot 3x)$	

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

??????????????

Deutung:

Bei diesem Prozess ist es sehr schwer zu erkennen, welchen Gedankengang der Studierende eingeschlagen hat. Es ist zu vermuten, dass er algorithmische Schritte mit der Repräsentation des Resultats verwechselt. Ein Gedankengang könnte sein, dass 3y mal 3y = $9y^2$ ist, und es schriftlich festhält. Eventuell denkt er an die 6y als das doppelte Produkt und schreibt dafür 3y nieder. Durch 3 muss er teilen, da er eine 1 gerechtfertigen muss.

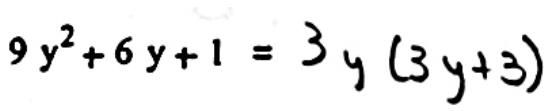
Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	$9y^2 + 6y + 1 =$ no se puede	Zu enge Eingangsmerkmale TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es geht nicht."

Deutung:

Einige Prozeduren können von Studierenden nicht aufgerufen werden, da sie auf gedanklichen Widerstand stoßen. Es scheint, als sei dieser Studierende auf gedanklichen Widerstand gestoßen, weil wahrscheinlich bei den meisten Übungen zur Faktorisierung in der Schulzeit der Ausdruck mit einem x^2 oder y^2 angefangen hat, und nicht $9y^2$. Im Schema $(a+b)^2$, müsste eine Substitution vorgenommen werden, nämlich $(3x + 1)^2$. Klassifiziert wird diese Tatsache als zu enge Eingangsmerkmale.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Reparatur MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 70)

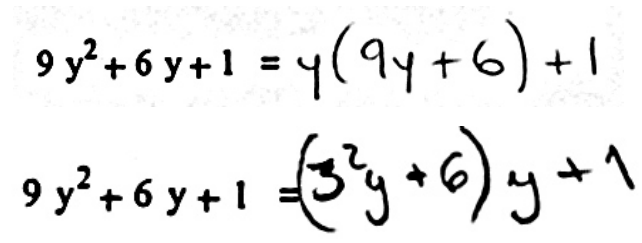
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $9y^2$ ist ein quadratischer Ausdruck, 3y (3y);

2. Ich muss zu 3y eine Menge addieren, die mit 3y multipliziert 6y ergibt; das wäre 3."

Deutung:

Der Studierende repariert seine Aufgabe, indem er die 1 einfach ignoriert, dann kann er faktorisieren, wenn auch mit einem neuen Fehler (3y mal 3 ist 9y und nicht 6y). Die Reparatur erfolgt im Sinne „lasse den störenden Term weg".

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Kein Begriff von Faktorisierung eines Ausdrucks, dieser wird nur in den Teilen durchgeführt, die den gemeinsamen Faktor y enthalten.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $9y^2$ und 6y haben einen gemeinsamen Faktor, den ich faktorisieren kann.

2. y (9y + 6)

3. Die (1) muss ich noch dazuschreiben."

Deutung:

Algebraisch wurde vom Studierenden kein Fehler gemacht, er hat den Ausdruck anders formuliert. Die Vorstellung eines faktorisierten Ausdrucks ist nicht präzise, so dass er nicht erkennen kann, dass die Umformulierung keine Faktorisierung des Ausdrucks ist. Meistens argumentieren Studierende, dass sie doch Faktoren haben; y und (9y + 6).

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9y^2+6y+1=(3y+1)(3y+1)=0$ $(3y+1)^2$ $y=-\frac{1}{3}$ $y=-\frac{1}{3}$		Verlust der Tätigkeitsübersicht MALLE(1993, S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 3y mal 3y ist $9y^2$.

2. So kommt in jede Klammer zu Anfang ein 3y. (3y) (3y).

3. 1 x 1 = 1, und 2 x 3y(1) = 6y

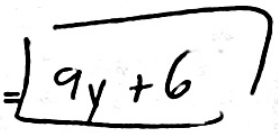
4. (3y+1)(3y+1) ist die Faktorisierung.

5. Da dieses gleich Null ist (auf der „anderen Seite der Gleichung steht „nichts", also eine Null) muss ich die Gleichung lösen.

6. So ist y = - 1/3 und y = -1/3:"

Deutung:

Es wurde eine fehlerfreie Faktorisation ausgeführt, jedoch verliert der Studierende die Übersicht über die Art der Tätigkeit der Aufgabe. Er verwandelt sie, durch ein hinschreiben einer Null nach dem Gleichheitszeichen in eine Gleichung, die er dann „korrekt" löst.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$9y^2+6y+1 =$		„Bug repair“, die 1 weglassen MALLE(1993, S. 184) TIETZE (2000, S. 71) Art der Tätigkeit ist eine Umformung eines Ausdrucks MALLE(1993, S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss eine Menge finden durch die ich den Ausdruck teilen kann.

2. $9y^2$ und 6y ist durch y teilbar.

3. $(9y^2 + 6y) /y = 9y + 6$.“

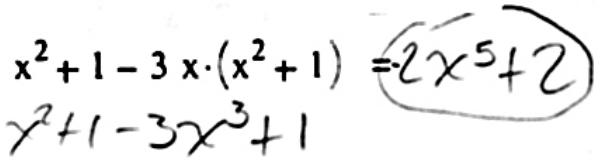
Deutung:

Faktorisierungen sind an das Konzept der Teilbarkeit gebunden. So könnte eine mögliche Deutung sein, dass der Studierende seinen Ausdruck durch y geteilt hat, dabei die 1 ignoriert hat, und nur $(9y^2 + 6y) /y = 9y + 6$ erhalten hat.

Die Vorstellung, dass durch y geteilt werden kann, ist an eine Gleichung gebunden, die der Studierende entweder hier interpretiert oder die Unterschiede zwischen einer Gleichung und einem algebraischen Ausdruck nicht kennt.

Testaufgabe 26

Von allen Faktorisierungsaufgaben, war diese die Schwierigste. Studierende konnten den gemeinsamen Faktor $(x^2 + 1)$ nur schwer finden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2+1-3x\cdot(x^2+1) =$		Verlieren der Kontrolle über den Gesamtablauf MALLE(1993, S. 186) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE (1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst muss ich ausmultiplizieren. – 3x wird mit x^2 multipliziert.

2. Ich muss alles zusammenfassen, 1 + 1 = 2

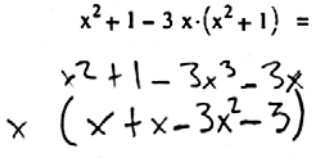
3. $x^2 – 3x^3 = -2x^5$."

Deutung:

Studierende haben, wenn sie eine Klammer sehen, wahrscheinlich den Drang diese aufzulösen. Oft ist eine Auflösung der Klammer für die Aufgabenstellung nicht angebracht, aber sie wird instinktiv durchgeführt.

Ein erster Fehler resultiert gerade bei der Auflösung der Klammer, da das Distributivgesetz nicht vollständig angewandt wurde. Eventuell verliert der Studierende bei der Ausführung der Multiplikation von 3x (x^2) die Kontrolle über den Gesamtablauf der Aufgabe.

Der zweite Fehler hängt mit Kontatenationsschwierigkeiten zusammen. Der Studierende subtrahiert $x^2 – 3x^3 = -2x^5$. Koeffizienten werden subtrahiert und x^2 und x^3 zu x^5 zusammengefasst und wahrscheinlich „addiert", weil die Koeffizienten schon subtrahiert wurden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		„bug-repair" einer Prozedurlücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst muss ich die Klammer auflösen und ausmultiplizieren.

2. $x^2 + 1 – 3x(x^2 + 1) = x^2 + 1 – 3x^3 – 3x$

3. Nun muss ich eine Faktorisierung vornehmen, x als Faktor habe ich in 3 Summanden.

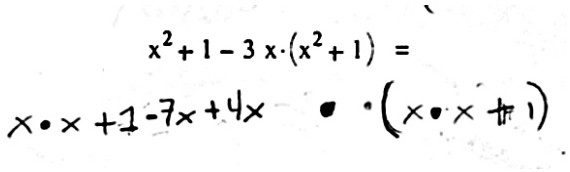
4. Was mache ich mit der 1?

5. x (x + x – $3x^2$ – 3)."

Deutung:

Durch ein voreiliges Ausmultiplizieren der Klammer, wird die Faktorisierung entschieden schwieriger. Einen Ausdruck mit 4 Summanden zu faktorisieren ist nicht einfach. Der Studierende weiß wahrscheinlich, dass eine Faktorisierung in Form von mindestens zwei Faktoren ausgedrückt werden muss. Nun sucht er

einen Faktor. Die meisten Summanden haben einen Faktor x, nur die 1 nicht. Die Prozedur trifft auf eine Lücke und muss „repariert“ werden, dieses erfolgt einfach darin, dass er die 1 mit x multipliziert, statt zu dividieren.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Zerlegung in Summanden Kein Unterschied sehen, wenn etwas mit Klammern oder ohne Klammern geschrieben ist BOOTH, (1984, S. 31 aus NOLTE (1991, S. 45)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

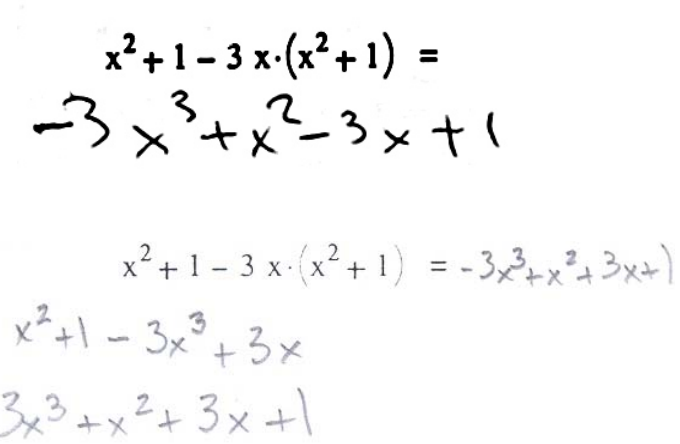
„1. Ich muss versuchen die Terme zu zerlegen, damit ich sehen kann, wie ich faktorisieren kann.

2. – 3 x = - 7x + 4x

Deutung:

Eines der Faktorisierungsprozesse, die in Mexiko gelehrt werden, basiert auf einer Zerlegung der Summanden um faktorisieren zu können. Der Studierende hat versucht eine Zerlegung zu vollziehen, ist aber nicht weitergekommen und hat den Prozess abgebrochen. Diese Zerlegung wird durch die – 7x + 4x belegt. Es ist zu ersehen, dass er einige Male ausradiert hat, und es ist anzunehmen, dass er den Versuch öfters gestartet hat. Ein Beispiel dieser Zerlegung, wie sie in Mexiko gelehrt wird, wäre: $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = x(x+2) + 4(x+2) = (x+4)(x+2)$

Bei dieser Zerlegung wird eine Klammer, die notwendig ist, um den Wert der Aufgabe nicht zu verändern, nicht gesetzt; (-7x+4x)= -3x. Der Studierende sieht keinen Unterschied in einer Aufgabe mit oder ohne Klammern.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden, Konzept der Faktorisierung.	Begriff der Faktorisierung ist nicht vorhanden Im zweiten Fall: Fehler beim Distributivgesetz, Verlust der Kontrolle über den Gesamtablauf MALLE(1993,S. 186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss die Klammer ausmultiplizieren, dieses erfolgt durch ein Distributivgesetz.

2. Danach gebe ich die Summanden in einer geordneten Form wieder."

Deutung:

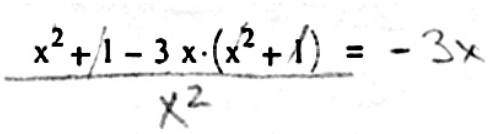
Beide Lösungsprozesse starten mit der Auffassung, dass man die Klammer auflösen muss.

Im ersten Fall ist diese korrekt aufgelöst, aber kein Faktorisierungsprozess durchgeführt worden.

Im zweiten Fall ist ein Fehler bei dem Distributivgesetz zu erkennen, da er das Vorzeichen von – 3x (1) nicht mitmultipliziert und dadurch +3x erhält.

Beide Studierende haben keine Vorstellung vom Begriff Faktorisierung und wie eine Faktorisierung im Endeffekt aussieht.

Es kann auch sein, dass die Studierenden dadurch, dass sie nicht faktorisieren konnten, einen Zwangszug gemacht haben, im Sinne eines „tue so viel wie möglich", vielleicht zählt es doch. Diese Idee erwächst wahrscheinlich, da in Mexiko viele Lehrer Teilpunkte vergeben für eine Teilleistung, auch wenn diese nicht unbedingt mit der Lösung der Aufgabenstellung zu tun hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verwechslung eines algebraischen Ausdrucks mit einer Gleichung MALLE(1993, S. 202) Struktur des Ausdrucks nicht erkannt NOLTE (1991,S. 45) Streichschemata mit Weglassschemata MALLE(1993, S. 182) Fehlinterpretation der neutralen Elemente NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172, 173) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Um zu vereinfachen, werde ich durch x^2 teilen.

2. x^2 steht zweimal im Nenner, die streiche ich durch.

3. Es stehen auch zwei 1 da, mit verschiedenen Vorzeichen, die subtrahiere ich.

4. Übrig bleibt – 3x."

Deutung:

Eventuell hat der Studierende Vorstellungen der Operationen, die in einer Gleichung durchgeführt werden können, unter ihnen „beide Seiten der Gleichung durch die gleiche Menge teilen", auf einen algebraischen Ausdruck übertragen.

Nach der Vorstellung durch x^2 teilen zu können, scheint der Studierende ein Streichschema anzuwenden. Er streicht x^2 im Nenner durch und das x^2 im Zähler in der Klammer. Die Struktur des Ausdrucks wird nicht hinreichend erkannt. Hier werden x^2 / x^2 als „nichts" interpretiert. Neutrale Elemente, die durch die Division entstehen, haben für den Studierenden keine Bedeutung.

Die 1 in der Klammer wird nur als -1 durch das Vorzeichen von 3x interpretiert und dann von der anderen 1 abgezogen. Das Distributivgesetz wird nicht beachtet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2+1-3x\cdot(x^2+1)=$ $x^2+1-3x-3x$ $=-6x+x^2+1$		Keine Vorstellung einer Faktorisierung Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere die Klammer aus, indem ich -3x(1) multipliziere.

2. x^2 mal – 3x,nehme ich ein x weg, x^2 mal – 3 x = - 3 x

3. Ich fasse ähnliche Terme zusammen.

Deutung:

Der Studierende löst als erstes die Klammer auf, betrachtet das Distributivgesetz, jedoch generiert sich ein Fehler bei der Multiplikation von – 3x (x^2), weil der Studierende wahrscheinlich die Terme additiv verknüpft hat, so dass -3x + x^2 ein „x“ „weggenommen“ wird.

Wenn man sich den Lösungsprozess genau ansieht, kann man erkennen, dass der Studierende zuerst bei der Multiplikation von – 3x mal x^2; - 3 x^3 hingeschrieben hat und dann unsicher geworden ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2+1-3x\cdot(x^2+1)=$ $x(x+1)-3x^2(x+1)$ $(x+1)x-3x^2$ $(x^2+1)-3x$		Klammern haben keine besondere Bedeutung BOOTH aus NOLTE (1991, S. 45) Neutrale Elemente MALLE(1993, S. 173-174) TIETZE(2000, S. 73)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. $x^2 + 1$ faktorisiere ich; $x(x+1)$

2. $(x+1)$ ist ein gemeinsamer Faktor. $(x+1)x - 3x^2$.

3. Jetzt faktorisiere ich einen gemeinsamen Faktor x; von $x - 3x^2$.

4. Ich erhalte $(x^2 + 1) - 3x$."

Deutung:

Der Begriff, Distributivgesetz, hat für den Studierenden nicht die angebrachte Bedeutung. Er faktorisiert $x^2 + 1$ zu; $x(x+1)$ wobei die Kontrollinstanz fehlt. Er beachtet wahrscheinlich nur den ersten Term.

Bei der weiteren Faktorisierung haben Klammern für ihn keinen besonderen Sinn, denn er schreibt sie nicht dazu.

Als er nochmals ein „x" faktorisieren möchte, begeht er erstens den Fehler des ersten Schrittes in entgegensetzter Richtung und zweitens verliert sich eine 1, vermutlich, weil er an eine Division denkt. Wenn er faktorisiert, muss er den zweiten Faktor durch „x" teilen und x/x ist Null.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2+1-3x\cdot(x^2+1) =$ $x2+1-3x$ $x^2-3x+1\ (x2+1)$ $x4+x2-3x3-3xx2+1$ $x^4-3x^3+2x^2-3x+1$ $x^2+1-3x\cdot(x^2+1) =$ $x^1+x^2-3x^3+x^2+1-3x$ $x^4+2x^2-3x^3-3x+1$ $x^4-3x^3+2x^2-3x+1 = x^3-9x+4x-3$	Fehlerhafte Informationsaufnahme NOLTE(1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 167) Unzureichende Auffassung des Termaufbaus NOLTE (1991, S.45) MALLE(1993, S. 190f)

Der Ansatz in beiden Fällen, ist der gleiche, die Informationsaufnahme einer Multiplikation von zwei Polynomen.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe eine Multiplikation von zwei Polynomen.

2. (x^2 + 1 – 3 x) muss mit (x^2 + 1) multipliziert werden.

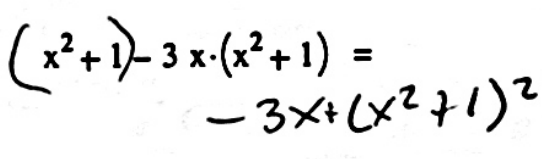
3. Ich multipliziere systematisch jeden Term der ersten Klammer mit jedem Term der zweiten Klammer.

4. Nun muss ich ähnliche Terme zusammenfassen."

Der zweite Studierende ist mit seinem Prozess noch nicht fertig, dadurch dass kein Prozess vorliegt, scheint es schwierig zu deuten, was der Studierende für ein Denkmuster angewandt hat.

Deutung:

Der Fehler resultiert in der Vorstellung, dass die Aufgabe eine Multiplikation von 2 Polynomen ist. Der Studierende setzt eine imaginäre Klammer, da er meint, dass der ganze Ausdruck (x^2+1–3x) mal (x^2+1) multipliziert werden muss, was auf eine fehlerhafte Informationsaufnahme hinweist, und eine ungenügende Auffassung des Termaufbaus.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Unzureichende Auffassung des Termaufbaus NOLTE (1991, S.45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die ersten beiden Terme sind der Klammer gleich, und können in eine Klammer gesetzt werden.

2. Ich habe 2 mal die Klammer (x^2 + 1), also $(x^2+1)^2$.

3. – 3x wird von der ersten Klammer abgezogen, so muss ich $(x^2+1)^2$ zu – 3x addieren."

Deutung:

Der Erkennungsschritt , dass die ersten Terme der Klammer gleich sind, ist ein Schritt, den wenig Studierende erkannt haben. Er interpretiert jedoch einerseits, dass es sich um eine Multiplikation handelt und andererseits nimmt er doch auf, dass es sich um eine Subtraktion handelt.

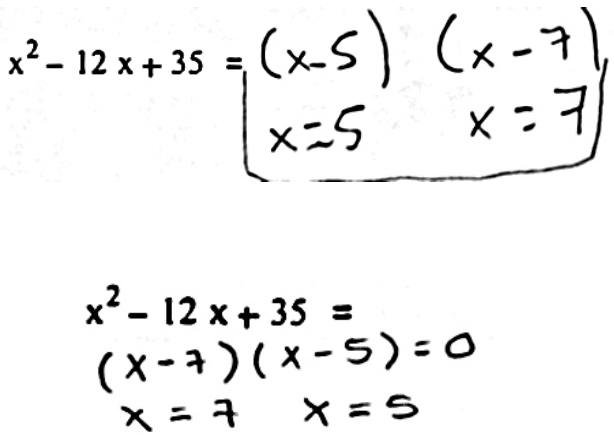
Eventuell ist die Multiplikation von ihm additiv verknüpft, $(x^2+1) – 3x + (x^2+1)$. Er identifiziert zwei gleiche Terme (x^2+1), die er zusammenfasst, $(x^2+1)^2$. Aus diesem wahrscheinlichen Gedankengang ergibt sich dann auch der letzte Schritt, in dem er $– 3x + (x^2+1)^2$ erhält.

Es könnte auch sein, dass der Studierende die Struktur des Terms nicht identifiziert. Nachdem er die Klammer setzt, ändert sich wahrscheinlich für ihn die Struktur des Terms. Vielleicht hat er den Term als multiplikativ aufgenommen

$(x^2+1)(-3x)(x^2+1)$; dadurch die Interpretation $(x^2+1)^2$.

Es ist aus seinem Prozess zu erkennen, dass er eventuell erst die -3x multiplikativ vorgesetzt hat, und dann später das Pluszeichen dazwischengesetzt hat, vermutlich in der Erinnerung, dass es anfänglich eine Addition oder Subtraktion war.

Testaufgabe 27

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verlust der Übersicht MALLE(1993, S.202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

Für beide Prozesse gilt:

„1. Ich suche zwei Zahlen, die multipliziert +35 und addiert – 12 ergeben.

2. Diese Zahlen sind – 5 und – 7. Die Faktorisierung ist (x – 5)(x – 7)

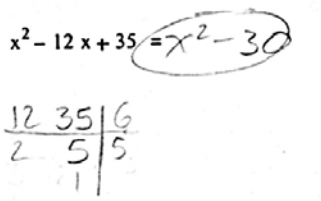
3. Nun muss ich noch die Gleichung lösen: (x – 5)(x – 7) = 0

4. Das sind zwei Werte für „x“: x = 5 und x = 7.“

Deutung:

Beide Prozesse haben die Faktorisierung nach dem Satz von Vieta richtig vorgenommen. Beim ersten Prozess geht nicht klar hervor, weswegen er x = 5 und x = 7 niederschreibt, auch wenn zu vermuten ist, dass der Studierende die Art der Aufgabe verwechselt hat, das heißt, eine Gleichung gelöst hat, statt nur eine Faktorisierung eines algebraischen Ausdrucks, der keine Gleichung ist.

Bei dem zweiten Prozess ist es evident, dass der Studierende den Ausdruck gleich Null setzt und dadurch die Unbekannte errechnen muss.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Bei der Suche nach den Zahlen für den Satz von Vieta, verfehlt der Studierende die Strategie.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss den kleinsten gemeinsamen Vielfachen finden.

2. Er ist die Multiplikation von 5 x 6 = 30

3. x^2 -30 wäre dann die Faktorisierung.“

Deutung:

Die Zahlen, die unten links stehen, stellen ein Algorithmus dar, um den kleinsten gemeinsamen Vielfachen zu finden, der in Mexiko sehr viel an den Schulen gelehrt wird. Es ist eine Art der Faktorisierung von verschiedenen Zahlen, bei denen die gemeinsamen Faktoren nicht mehrmals multipliziert werden. Der Studierende denkt wahrscheinlich an die Lösungsform nach einem Satz von Vieta, in dem die Multiplikation von zwei Zahlen gleich 35 sein muss und die Addition dieser Zahlen – 12 und verwechselt diese mit der Suche nach einem gemeinsamen Vielfachen. Dabei teilt er 35 /6 = 5. Der Prozess der Suche ist unvollkommen und fehlerhaft.

Er weiß auch später nicht, wie er diese beiden Zahlen 5 und 6 verwerten soll, also multipliziert er sie, und addiert sie zu x^2.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 12x + 35 = (x - 15)(x + 3x)$		Reparatur im Sinne, „was fehlt, damit ich 12x habe?“ MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die Wurzel von x^2 ist x,

2. x ist der erste Term von zwei Klammern verteilt (x)(x)

3. Damit ich -12 x mit der Summe der zweiten Terme erreiche, muss ich -15 und 3 rechnen.

4. Jedoch brauche ich ein -12x, ich muss bei der Addition von -15 +3 ein x dazuschreiben, damit es 12x ist.

5. (x – 15)(x + 3x).“

Deutung:

Die Faktorisierungsform hat vermutlich ihren Ursprung in einem Satz von Vieta. Die Summe der beiden zweiten Terme ist -12. Der Fehler entsteht dadurch, dass es mehrere Kombinationen von Zahlen gibt, die addiert -12 ergeben, aber deren Multiplikation nicht 35 ist. So hat der Studierende diesen Teil des Satzes von Vieta vergessen. Ein anderer Fehler resultiert in der Annahme, dass die Addition der zweiten Terme -12x ergeben müssen, so dass er eine Mischung von Addition und Multiplikation vornimmt. -15 + 3x = -12x. Der Term 35 wird nicht beachtet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 12x + 35 = x(x + 23)$		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x muss mit x malgenommen werden, um x^2 zu erhalten; x (x)

2. -12 + 35 = 23; nun addiere ich 23; x (x + 23).“

Deutung:

Wahrscheinlich ist für den Studierenden der Term -12x additiv verknüpft, so dass er -12 + x + 35 interpretiert. Dadurch erhält er +23+x = 23x.

Die Aufgabe verändert sich zu $x^2 + 23x = x (x + 23)$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 12x + 35 =$	$x(x-12)+35$	Fehlvorstellung mit dem Begriff Faktorisierung
Fehlvorstellungen mit dem Begriff Faktorisierung noch nicht in der Literatur gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x^2 und 12x haben einen gemeinsamen Faktor „x“.

2. x(x – 12) + 35.“

Deutung:

Der Studierende macht keinen algebraischen Fehler, er faktorisiert jedoch den algebraischen Ausdruck nicht, im Sinne, dass der Ausdruck nur noch durch Faktoren formuliert ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2$		Keine Kontrollmechanismen vorhanden MALLE(1993, S. 162, 164) Interferenz von Schemata MALLE(1993,S.185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es handelt sich um eine Faktorisierung, der erste Term ist x^2. $(x\ \ )^2$.

2. Der zweite Term ist -12x, er ist das doppelte des Produkts von x (-6), ich habe also eine zweite binomische Formel.

3. Meine Faktorisierung ist $(x - 6)^2$.

Deutung:

Der Studierende denkt wahrscheinlich an eine zweite binomische Formel, da der zweite Term das Doppelte des Produkts von -6 und x ist. Der Studierende kontrolliert seine Antwort nicht, sondern akzeptiert das erste was ihm eingefallen ist. Die 35 würde nicht in das Schema der zweiten binomischen Formel passen, aber es wird nicht überprüft. Das Schema der zweiten binomischen Formel hat sich ihm geradezu aufgedrängt, wahrscheinlich dadurch, dass die ersten zwei Terme „gepasst" haben.

Testaufgabe 28

Bei dieser Aufgabe wurde eine komplette Faktorisierung erfragt, diese ist in vielen Fällen nicht durchgeführt worden, sondern nur im ersten Schritt ausgeführt worden, wie sie diese erste Studierendenlösung zeigt:

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	$y^3 - 9y = y(y^2 - 9)$	Keine vollständige Faktorisierung

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y ist ein gemeinsamer Faktor, den ich faktorisieren kann: $y(y^2 - 9)$."

Deutung:

Dieser Prozess hat keinen eigentlichen Fehler, die Faktorisierung ist nicht zu Ende geführt worden. Ob der Studierende nicht erkannt hat, dass der zweite Faktor faktorisiert werden konnte, steht nicht fest.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y^3 - 9y = (y^2+3^2)^{-y}$		Verwechslung der Operation NOLTE (1991, S.67) MALLE(1993, S. 166) Reparatur bei der Prozesslücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y ist ein gemeinsamer Faktor, 9 ist 3^2, und $y^3/y = y^2$.

2. In eine Klammer setze ich $(y^2 + 3^2)$,

3. $(y^2 +3^2) – y$ geht nicht, also muss ich $(y^2 + 3^2)^{-y}$."

Deutung:

Die Deutung dieses Prozesses scheint schwierig zu sein, da nur das Resultat vorhanden ist. Es ist zu vermuten, dass der Studierende zwar eine Potenz (-y) schreibt, aber eine Multiplikation meint. 3^2 mal –y = -9y; und y^2 mal –y = y^3, wo er das Vorzeichen ignoriert. Es besteht wahrscheinlich eine Verwechslung der Operation, diese geschieht von der „höheren" Operation (Potenzierung) zur „niedrigeren", denn er interpretiert die Potenz als Faktor.

Eventuell hat er die Potenz geschrieben, weil er auf einen gedanklichen Widerstand gestoßen ist. $(y^2 + 3^2) – y$ wäre nicht das gewesen, was er gesucht hat. So hat er eine Reparatur gemacht, um den gedanklichen Widerstand zu umgehen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y^3 - 9y =$ $y^3 = 9y$ $y^3 - y = 9$ $y^2 = 9$ $y = \sqrt{9} = 3$		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Ursachen in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss -9y auf die andere Seite der Gleichung bringen.

2. Damit ich alles was Variablen sind auf einer Seite der Gleichung habe, muss ich auf beiden Seiten der Gleichung „y“ subtrahieren.

3. $y^3 – y = y^2$; dreimal „y“ minus 1 mal „y“ = zweimal y und ist y^2. $y^2 = 9$

4. y = 3.“

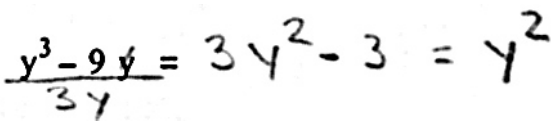
Deutung:

Der Studierende fasst diese Aufgabe als eine Gleichung auf, in der er für „y“ den Lösungswert errechnen soll. Er setzt eine imaginäre Null auf die rechte Gleichungsseite, und addiert auf beiden Seiten 9y.

Im nächsten Schritt scheint ein Fehler zu liegen. Der Term 9y ist wahrscheinlich additiv verknüpft, da das multiplikative „y“ auf der anderen Seite der Gleichung als – y erscheint. Danach begeht er einen weiteren Fehler, er „nimmt y von y^3 weg“, so dass y^2 übrigbleibt.

Nun hat er $y^2 = 9$ und zieht auf beiden Seiten die Wurzel. Er weiß aber nicht, dass die Lösungen y = 3 und y = -3 sind. Dieses könnte seine Ursache in früheren Lernphasen haben, als man die Wurzel von 9 (im 6. und 7. Schuljahr) als nur 3 errechnet hat und ihre Bedeutung in der Gleichung $y^2 = 9$ nicht erfasst hat.

Könnte es sein, dass eine Lehrerin oder ein Lehrer, wenn die Schülerin oder der Schüler sukzessive Fehler machen, die sich „gegenseitig aufheben“, nicht merkt, dass ein Fehler oder mehrere Fehler gemacht wurden. Eine Lehrerin oder ein Lehrer müssten beispielsweise eine Arbeit sehr gut nachsehen, um diese Art von Fehlern zu entdecken, da die Fehler sonst unbemerkt bleiben und eventuell gefestigt werden können.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Art der Tätigkeit verwechselt MALLE (1993, S. 202) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Reparatur in der Prozedurlücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Damit ich den Ausdruck vereinfache, werde ich durch 3y teilen

2. y^3 durch 3y ist $3\,y^2$; $-9y / 3y = -3$

3. $3y^2 - 3 = y^2$."

Deutung:

Die Art der Tätigkeit ist eine Umformung eines algebraischen Ausdrucks, wenn der Studierende durch 3y teilt, weist dieses wahrscheinlich darauf hin, dass er eine Aktion vornimmt, die er bei einer Gleichung machen darf, nämlich beide Seiten der Gleichung durch 3y teilen.

Der Studierende weiß, dass er y^3 und 9y nun durch 3y teilen möchte. Der zweite Fehler resultiert in der Division von $y^3 / 3y$, da y^3 „keinen Koeffizienten" hat, der durch 3 teilbar ist, macht er eine Reparatur, im Sinne, dass er die 3 nicht dividiert, sondern multipliziert. y^3 dividiert er aber durch y. Er erhält $3y^2 - 3$.

Der nächste Fehler erweist sich in der Annahme, dass $3y^2$ additiv verknüpft ist;

$3 + y^2 - 3 = y^2$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y^3 - 9y = 9y(y^2 - 1)$		Fehlen einer Kontrollinstanz MALLE(1993, S. 162, 164) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S.41) MALLE(1993, S. 135) Umgang mit der Struktur NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 9y mal -1 ist -9y

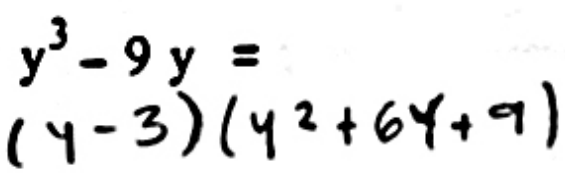
2. $9 + y\,(y^2 - 1) = ...+ y^3$."

Deutung:

Vermutlich hat der Studierende zuerst den Term -9y analysiert und gemeint, dieser entsteht durch die Multiplikation von 9y mal -1. Danach muss er den

Term y^3 generieren. Dieser entsteht durch die Multiplikation von y^2 mal y, was eventuell darauf hinweist, dass der Studierende Konkatenationsprobleme hat, indem er den ersten Term 9y additiv verknüpft hat. 9 + y (y^2 – 1). Bei dieser Deutung geht hervor, dass der Studierende möglicherweise zwei verschiedene Interpretationen für den Term 9y hat, einmal 9 mal y und ein anderes mal 9 plus y. Diese verschiedenen Interpretationen würden aber auch ein Problem mit der Struktur der Terme kund geben.

Es besteht bei dem Studierenden keine Kontrollinstanz, die bei der einfachen Multiplikation feststellen könnte, dass das Resultat nicht y^3 – 9y ist, was vielleicht auch bei der vorherigen Deutung der Interpretationen für den Studierenden schwierig sein würde.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Falsche Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVARE aus MALLE(1993, S. 167) Keine Kontrollinstanz MALLE(1993, S. 162, 164) Interferenz von Schemata MALLE(1991, S. 185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe eine Subtraktion von Kubikmengen,

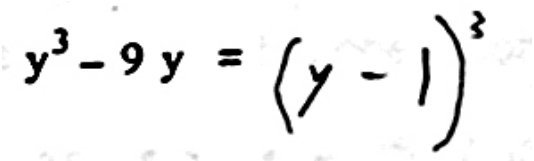
2. ich faktorisiere nach der Formel: $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 – b^3$

3. $(y – 3) (y^2 + 6y + 9)$."

Deutung:

Wahrscheinlich hat der Studierende eine Kubikmenge in y^3 aufgenommen und interpretiert, dass es sich um eine Faktorisierung einer Subtraktion von zwei Kubikmengen handelt, und das Schema $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 – b^3$ versucht anzuwenden. Statt $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ zu faktorisieren, unterläuft ihm ein Fehler da er 6y statt 3y schreibt. Vermutlich hat er eine Interferenz von Schemata, mit der ersten binomischen Formel, in der, der zweite Term das doppelte Produkt darstellt.

Auffallend ist, dass das Resultat nicht kontrolliert wird, durch eine Multiplikation von den beiden Faktoren.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unvollständige Informationsaufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 167) Störende Terme werden weggelassen MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y^3 entsteht als erster Term, wenn ich (y .....)^3 habe.

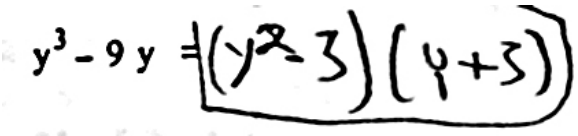
2. Eine andere Form kenne ich nicht, also nehme ich an, dass er andere Term auch hineinpasst."

Deutung:

Binomen zu einer höheren Zahl potenziert ergeben als ersten Term den ersten Term der Klammer zu der betreffenden Potenz erhoben.

Z. B. (y.....)^3 ergibt y^3 ..... wahrscheinlich nimmt der Studierende nur die Information von der y^3 auf, so dass er auf eine Regel sucht, die in irgendeiner Form ein y^3 generiert.

Störende Terme, wie -9y ignoriert er, sowie auch die anderen Terme der (y – 1)^3."

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fehlerhafte Informationsverarbeitung SHEVAREV aus NOLTE (1991, S. 60) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich öffne zwei Klammern, die erste hat als ersten Term y^2, die zweite, um y^3 zu erzielen, hat y als ersten Term. (y^2) (y).

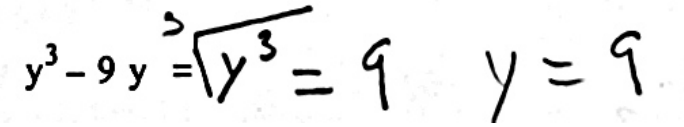
2. - 9 erhalte ich durch die Multiplikation von – 3 (3)

3. Aber ich brauche ein -9y = (-3) (3y).“

Deutung:

Die Faktorisierung erfolgt mit der Auffassung, dass die ersten Terme der Faktoren multipliziert werden. Dadurch entstehen die beiden Klammern mit y2 und y, jeweils als erste Terme der Klammern: (y2)(y).

Eventuell besteht ein Konkatenationsproblem mittels welchem er y + 3 zu 3y verarbeitet und dieses dann mit -3 multipliziert um – 9y zu erhalten.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Reparatur, in dem er bei -9y das y ignoriert MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71) Verlust der Übersicht über die Tätigkeit MALLE(1993, S. 202) Schwierigkeiten mit den Lösungsschritten einer Gleichung: „Auf beiden Seiten die dritte Wurzel ziehen“

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss eine Gleichung lösen. Ich habe zwei Seiten, die -9 bringe ich auf die andere Gleichungsseite mit einem positiven Vorzeichen.

2. Nun habe ich $y^3 = 9$; um diese Gleichung zu lösen, muss ich eine dritte Wurzel ziehen, das schreibe ich gleich dazu.

3. Dann ist y = 9.“

Deutung:

Der Studierende fasst die Faktorisierung als eine Aufforderung, eine Gleichung zu lösen, auf. Er bringt die -9 mit einem positiven Zeichen auf die andere Seite der „Gleichung“ , ignoriert, da es nicht gut passt das „y“, welches mit -9 multipliziert war.

Er erhält die Gleichung $y^3 = 9$.

Aus dem Prozess ist zu erkennen, dass er dann die dritte Wurzel zieht, jedoch nur auf einer Seite der Gleichung, eventuell, weil 9 keine dritte Wurzel hat. So ist $y = 9$.

Anhang 7: Kürzungsprozesse

Testaufgaben: 29 - 32

Testaufgabe 29

Es ging in dieser Aufgabe hauptsächlich um Kürzungsprozesse der Studierenden zu analysieren, die eine Voraussetzung für die Kürzungen und Fehlprozesse der nächsten Aufgaben darstellen. Wird diese Aufgabe nicht gekürzt, ist es wahrscheinlich, dass der Studierende keine Vorstellungen über Kürzungsprozesse in algebraischen Brüchen hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	$\frac{x^2-5x+3x-15}{(x-5)\cdot(x+3)} = \frac{x^2-2x-15}{x+3}$	Keine Vereinfachung vorgenommen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe im Zähler eine Multiplikation, die ich ausführen muss.

2. $(x-5)(x+3) = x^2 – 2x – 15$

3. Das ganze muss ich durch x + 3 dividieren“

Deutung:

Die Vereinfachung des algebraischen Terms wurde nicht vorgenommen, da der Studierende die Aufgabe als eine Aufforderung zur Realisierung einer Multiplikation aufgefasst hat. Die Aufgabe ist in diesem Sinne nicht fehlerhaft, sie ist nicht vereinfacht worden, obwohl die Form, in der sie gestellt wurde, suggestiv zur Simplifikation aufrief. Eventuell kann man mit dieser Aufgabe darauf schließen, dass der Studierende die Aufgabe nicht vollkommen aufnimmt, da er, bevor er kürzen könnte, die Multiplikation vornimmt, oder dass der Studierende immer, wenn er zwei Faktoren sieht, diese automatisch multipliziert. Der Studierende sieht sich die Aufgabe nicht näher an und eventuell liest er die Anweisungen nicht bewusst durch.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)\cdot(x+3)}{x+3} = \frac{(x^2+3x-5x-15)}{x+3} = \frac{x^2-2x-15}{x+3} = \frac{2x^3-15}{x+3}$		Konkatenationsprobleme NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Keine Vereinfachung vorgenommen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe eine Multiplikation, die ich vornehmen muss.

2. $(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$

3. Bei $x^2 - 2x - 15$ werde ich x^2 und x addieren, zu x^3 und den Koeffizienten von 2x davor setzen, also $2x^3$ und dann die 15 abziehen."

Deutung:

Aus diesem Lösungsprozess kann man entnehmen, dass der Studierende eine Multiplikation von Binomen richtig vornehmen kann. Jedoch weist er danach Konkatenationsschwierigkeiten auf. Er schreibt x^2 und $2x$ zusammen, in dem er x^2 und x „addiert" und den Koeffizienten davor setzt.

Man kann auch bei diesem Prozess darauf schließen, dass die Aufgabe in erster Linie nicht als ein Bruch aufgenommen wurde, sondern der Zähler als Multiplikation visualisiert wurde, so dass die Multiplikation, die Kürzung der Faktoren im Zähler und Nenner gehemmt hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)\cdot(x+3)}{x+3} = \frac{x^2+3x-5x-15}{x^2-2x-15}$ $x+3$ $x-1x-12 = 2x-12$		Verwechslung einer Division mit einer Subtraktion und Addition NOLTE (1991, S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss multiplizieren, $(x-5)(x+3) = x^2 – 2\,x – 15$

2. Die ausgeführte Multiplikation muss durch x + 3 geteilt werden, die Division werde ich in einzelnen Schritten ausführen und sie ist mit einer Verminderung (Subtraktion) verbunden.

3. $x^2 – x = x$

$-2x + x = - x$

$-15 + 3 = - 12$.“

Deutung:

Wie in den vorhergehenden Prozessen, hat dieser Studierende zuerst eine Multiplikation der Faktoren im Zähler vorgenommen. Diese Transformation ist korrekt erfolgt, jedoch hat er bei der Division von $x^2 – 2\,x – 15$ durch x + 3 Schwierigkeiten.

Er ist nicht konsequent bei der Durchführung der Division. Einerseits „zieht“ er von x^2, x ab, und erhält x (es besteht auch die Möglichkeit, dass hier eine Division vorgenommen wurde ($x^2 / x = x$, was jedoch auch auf eine Inkonsistenz der Verfahren, in den einzelnen Schritten, hinweisen könnte). Andererseits „addiert“ er $-2x + x = -x$ und „addiert“ auch $-15 + 3 = -12$. Daraus geht hervor, dass er anfangs die Division als eine „Subtraktion“ angesehen hat, diese jedoch in den nächsten Schritten, zu einer „Addition“ umgeändert hat.

Später hat er $x – 1x = 2x$ gerechnet. Diese Handlung könnte eine Reparatur sein, da sonst kein Term mit „x“ übriggeblieben wäre, was er vermutlich nicht akzeptieren könnte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(x-5)\cdot(x+3)}{x+3} = \frac{(x^2+3x-5x-15)}{x+3} = x^2-2x-5$		Störender Term „x“ im Nenner wird ignoriert MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 70) Linearisierungsprozess MALLE(1993, S. 175) TIETZE(2000, S. 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich habe eine Multiplikation, $(x-5)(x+3) = x^2 + 3\,x – 5\,x – 15$

2. $(x^2 + 3\,x – 5\,x – 15)$ muss ich durch x + 3 teilen.

3. $x^2 – 2 x$ bleibt bestehen, – 15 teile ich durch 3.

4. Das ergibt: $x^2 – 2 x – 5$

Deutung:

Es wird die Multiplikation des Zählers korrekt ausgeführt, auch die Auffassung, dass noch durch x + 3 dividiert werden muss, besteht. Jedoch werden bei der Division durch den Binomen x + 3, zwei verschiedene Kriterien angewandt:

a) x wird ignoriert, ein “natürlicher” Vereinfachungsprozess, Terme die störend sind werden “ignoriert”.

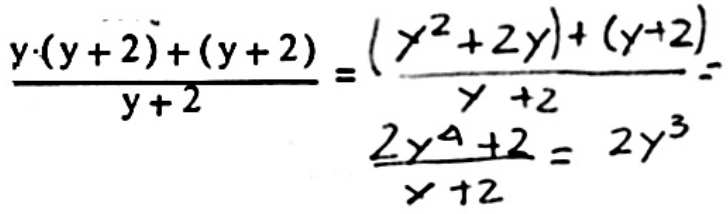
b) Es werden die Zahlen – 15 und 3 dividiert.

Hier könnte interpretiert werden, dass ein Linearisierungsprozess vorliegt, da aber das „x“ ignoriert wird, wird nur der Term -15 durch 3 geteilt.

Testaufgabe 30

Diese Aufgabe hatte zum Zweck, die Kürzungsprozesse und Kürzungsfehlstrategien bei Termen mit einer Summe im Zähler zu analysieren.

Der Zähler konnte faktorisiert werden, um dann ein Kürzungsprozess vornehmen zu können.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Musterbeispiel hineinprojiziert MALLE(1993, S.182) 2/2 „eliminiert“, fehlerhafter Umgang mit neutralen Elementen, NOLTE(1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172,173) TIETZE(2000, S. 70) dadurch ein Weglassschemata MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere y (y + 2) aus.

Danach muss ich $y^2 + 2\,y + y$ addieren, $2y^4$.

$(2y^4 + 2) / (y + 2) = 2y^4 / y + 2/2 = 2y^3$."

Deutung:

Im ersten Schritt wurde die Multiplikation von y (y + 2) im Zähler vorgenommen, diese wurde korrekt durchgeführt.

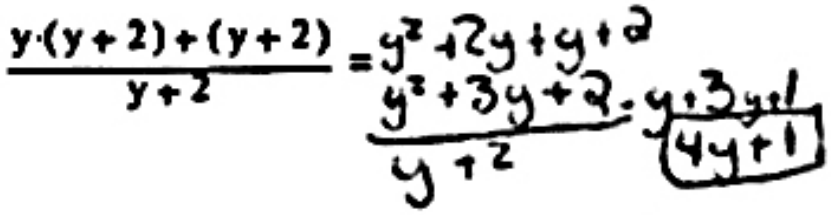
Danach sind drei Fehlstrategien angewandt worden:

a) Durch ein Konkatenationsproblem wurde $y^2 + 2\,y + y$ zu $2y^4$ „addiert", dass heißt, die Koeffizienten wurden nur dann in Betracht gezogen, wenn sie verschieden als 1 waren. Die Variablen y^2, y und y wurden „multipliziert".

   Er erhält $\frac{2y^4 + 2}{y + 2}$

b) Der Studierende hat wahrscheinlich ein Musterbeispiel in die Aufgabe hineinprojiziert, er hat die Aufgabe wahrscheinlich in einzelne Divisionen aufgeteilt, (eventuell auch einer Lebensweisheit nachgehend, Schritt für Schritt).

c) Bei diesem Schritt für Schritt Prozess (wenn es auch nicht klar hervorgeht) wurde ein weiterer Fehler evident, 2 / 2 ist möglicherweise „gekürzt" worden durch ein Streichschema, bei dem „eliminiert" wurde, so dass 2 / 2 „nichts" ergibt."

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y\cdot(y+2)+(y+2)}{y+2}$		Linearisierungsprozess oder Musterbeispiele hineinprojiziert MALLE(1993, S.182) Unangebrachte Auffassung der Termstruktur NOLTE(1993, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere y (y + 2) aus und addiere y + 2.

2. $\frac{y^2+3y+2}{y+2}$ ist eine Division, ich muss durch y und durch 2 teilen; ich tue das jeweils mit einem Term im Zähler.

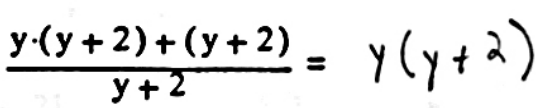
3. $y^2 / y = y$, $2 / 2 = 1$;

4. Ähnliche Terme addiere ich, y + 3y = 4y und die 1, der Division, ergeben 4y + 1."

Deutung:

Als erster Schritt wurde im Zähler ausmultipliziert und ähnliche Terme wurden addiert. Danach besteht die Auffassung, dass man durch y + 2 dividieren muss. Dieses geschieht fehlerhaft, da er linearisiert oder Musterbeispiele wie $y^2/y = y$ und 2/2, in die Aufgabe hineinprojiziert. Durch die Form, wie die Aufgabe niedergeschrieben ist, liegt es nahe, y^2 /y zu teilen. Der Studierende nimmt dann an, dass „y" im Nenner verarbeitet wurde. Der Term 3y wird weder durch y noch durch 2 geteilt und bleibt erhalten. Die 2 im Zähler wird durch die 2 im Nenner geteilt. Hier erhält der Studierende eine 1.

Diese Art der Linearisierungsprozesse hängt auch mit der Auffassung der Termstruktur zusammen, ist diese nicht erkannt worden, ist die Vereinfachung fehleranfällig.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Streichschema MALLE(1993, S. 182) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Weglassschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1.(y + 2) im Zähler ist (y + 2) im Nenner. Die kann ich kürzen.

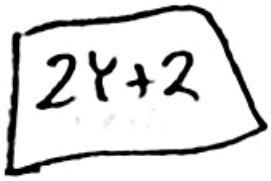
2. Es bleibt der erste Teil der Aufgabe y (y + 2)."

Deutung:

Auch hier werden Musterbeispiele vermutlich in die Aufgabe hineinprojiziert, Terme die gleich im Zähler und Nenner sind, werden in der Termstruktur als „kürzbar“ identifiziert.

Außerdem ist beim Prozess ein Weglassschema zu erkennen, da bei der Kürzung des (y + 2) im Zähler ein Pluszeichen ohne Menge, die addiert wird, übrigbleibt; wie $y(y+2)+$ ____.

Man kann auch ein „Eliminierungsprozess“ interpretieren, bei einer Kürzung bleibt nichts übrig, also eine Null, die nicht addiert werden muss.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y\cdot(y+2)+(y+2)}{y+2}$		Streichschema MALLE(1993, S. 182) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

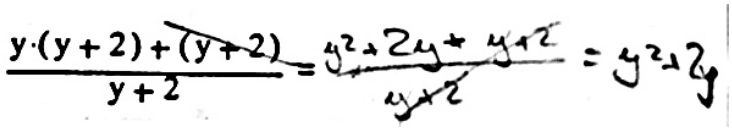
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y wird mit (y + 2) multipliziert, also ist es ein Faktor, der mit y + 2 im Nenner gekürzt werden kann.

2. y + (y + 2) = 2y + 2.“

Deutung:

Obwohl der Prozess nicht vom Studierenden ausführlich geschrieben wurde, ist anzunehmen, dass er wahrscheinlich einen Kürzungsprozess vorgenommen hat, in dem er (y + 2) vom Term y (y + 2) mit dem y + 2 aus dem Nenner gekürzt hat. Der Studierende meint vermutlich, dass es sich hier um einen Faktor handelt, und dass er deswegen kürzen kann. Ein nicht erkennen der Termstruktur, wie das hineinprojizieren eines Musterbeispiels sind vermutliche Ursachen für den Fehlprozess in dieser Aufgabe.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Streichschema MALLE(1993, S. 182) Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Weglassschema MALLE(1993, S. 182) Missverständnis der neutralen Elemente NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172, 173) TIETZE(2000, S. 70)

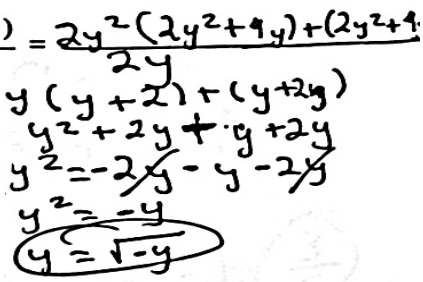
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst löse ich alle Klammern auf; y (y + 2) + (y+ 2) = y^2 + 2y + y + 2

2. y + 2 im Zähler kann mit y + 2 im Nenner gekürzt werden."

Deutung:

Der Studierende löst zuerst alle Klammern im Zähler auf, erhält dadurch eine Summe von Termen. Er identifiziert im Zähler y + 2, wie auch im Nenner und gebraucht dann wahrscheinlich ein Streichschema. Dieses Streichschema hängt mit der Auffassung des Studierenden, der Termstruktur, zusammen. Dabei weist er auch Schwierigkeiten mit einem Weglassschema auf, da er bei der Kürzung von y/y und 2/2, keine Einer identifiziert, sondern zwei Nullen. Es könnte auch sein, dass der Studierende direkt (y+2)/(y+2) identifiziert, in welchem Falle auch bei dieser Kürzung keine 1, für ihn, resultiert. Dieser letzte Prozess, kann auch mit einem Missverständnis der neutralen Elemente zusammenhängen, im Sinne a/a = 0.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{y\cdot(y+2)+(y+2)}{y+2}$		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Übergeneralisation NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172 und 173) TIETZE(2000, S. 70) Reparatur einer Prozesslücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71) Verwechslung der Art der Tätigkeit MALLE(1993, S. 202) Unbekannte durch sich selbst ausdrücken. MALLE(1993, S. 202, 203)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss den Zähler mit 2y multipliziere. Ich multipliziere jeden Faktor mit 2y.

2. Ich muss aber noch durch 2y dividiere.

3. Ich muss die Gleichung für „y“ lösen.

4. Dafür bringe ich alle y-Terme auf die andere Gleichungsseite mit einem negativen Vorzeichen.

5. $y^2 = -y$; und $y = \sqrt{-y}$.“

Deutung:

Vermutlich hat der Studierende Probleme mit der Konkatenation, da er y + 2 als 2y interpretiert. Anschließend kann man, durch den Lösungsprozess, erkennen, dass er den Zähler mit 2y multipliziert, (wahrscheinlich verwechselt er die Divisi-

on mit einer Multiplikation, obwohl er später wieder auf die Division zurückkommt). Dieses geschieht in fehlerhafter Weise, da er die ersten beiden Faktoren im Zähler, beide mit 2y multipliziert. Hier ist eine Übergeneralisation zu vermuten, nach dem Schema a(bxc)=axb x axc.

Im nächsten Schritt dividiert er durch 2y, wo der Fehler bei der Multiplikation wieder „aufgehoben" wird, da er nun beide Faktoren wieder durch 2y dividiert. Ein Fehler entsteht bei der Division von 4 / 2y, da er wahrscheinlich nicht weiß, was er mit einem „y" im Nenner machen soll, es erfolgt vermutlich eine Reparatur.

Jedoch begeht er im gleichen Schritt einen Fehler, da er die Art der Tätigkeit verwechselt und nun wahrscheinlich aufnimmt, dass er eine Gleichung lösen muss, in der er die Unbekannte „y" isolieren soll. Um eine Gleichung lösen zu können, muss er alle Terme, die nicht y^2 sind, auf die „andere" Gleichungsseite bringen, mit einem negativen Vorzeichen. Hier wiederum erfolgt ein Fehler, da er – 2y und – 2y durchstreicht, da er annimmt, dass sich – 2y und – 2y gegenseitig aufhebt.

Die Unbekannte „y" wird durch sich selbst ausgedrückt, MALLE referiert es, als einen typischen Fehler bei der Lösung von Gleichungen.

Testaufgabe 31

Bei dieser Aufgabe war ein Kürzungsprozess etwas schwieriger. Wollte ein Studierender kürzen, so musste der Bruch in zwei Teile getrennt werden,

$$\frac{(z+4)(z-1)+2}{z+4} = \frac{(z+4)(z-1)}{z+4} + \frac{2}{z+4} = z-1+\frac{2}{z+4}.$$

Die andere Möglichkeit war nur ein Ausmultiplizieren des Zählers:

$$\frac{(z+4)(z-1)+2}{z+4} = \frac{z^2+3z-4+2}{z+4} = \frac{z^2+3z-2}{z+4}$$

Diese Prozesse wurden von einigen Studierenden durchgeführt. Wahrscheinlich schien dieser Prozess einigen Studierenden als zu einfach oder zu unvollkommen, so dass sie nach anderen Alternativen, wenn auch fehlerhafte, gesucht haben.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{(z+4)\cdot(z-1)+2}{z+4} = z^2-1z+4z-4+2$ $\frac{z^2+3z-2}{z+4} : z+3z+2$ $4z+2$		Nicht Speicherung der bestimmenden Charakteristika MALLE(1993, S. 174) Unzulässiges Linearisieren MALLE(1993, S. 175) TIETZE(2000, S. 72) Reparatur einer Prozesslücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

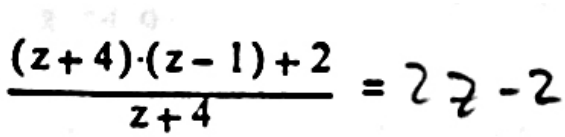
„1. Ich muss die Multiplikation im Zähler durchführen. $(z+4)(z-1)=z^2 + 3z – 2$

2. Nun muss ich durch z + 4 dividieren, von z^2 nehme ich z weg, -2 + 4 = 2."

Deutung:

Hätte der Studierende nach dem ersten Schritt nicht versucht die Aufgabe weiter zu vereinfachen, wäre ihm kein Fehler unterlaufen. Es könnte sein, dass der Studierende das Gleichheitszeichen als ein Aktionszeichen auffasst und meint, die Aufgabe sei noch nicht zu Ende vereinfacht worden.

Er dividiert, in dem er in Teile zerlegt, z^2 / z und wahrscheinlich -2 /4. 3z wird nicht dividiert. Dieses könnte als ein unzulässiges Linearisieren interpretiert werden oder eine nicht Speicherung der bestimmenden Charakteristika. Bei der Division -2/4, wird statt dividieren, - 2 + 4 gerechnet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Streichschema MALLE(1993, S. 182) Falsche Informations-aufnahme NOLTE(1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

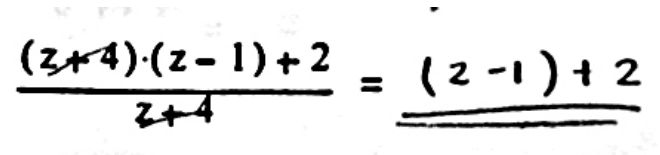
„1. Ich dividiere (z+4)/(z+4),

2. Nun muss ich noch (z-1)+ 2 errechnen, ich multipliziere zu 2z – 2."

Deutung:

Der Studierende appliziert, wenn es auch nicht klar aus dem Prozess zu ersehen ist, wahrscheinlich ein Streichschema, denn er interpretiert, dass (z+4) im Zähler mit (z-1) multipliziert ist und dadurch, mit (z+4) aus dem Nenner, „gekürzt" werden kann. Eventuell hat der Studierende die Struktur des Terms nicht korrekt aufgenommen oder nicht erkannt, dass (z+4) nicht Faktor des ganzen Zählers ist.

Als (z – 1) + 2 als vorläufiges Resultat entsteht, nimmt wahrscheinlich der Studierende die Information falsch auf, da er die Addition mit einer Multiplikation verwechselt, was eventuell durch die Klammer hervorgerufen sein könnte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Streichschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich kürze (z + 4) im Zähler mit (z + 4) im Nenner.

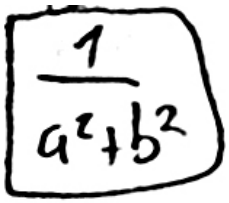
2. Das ist alles was ich machen kann."

Deutung:

Der Studierende generiert einen Fehler durch ein Streichschema, wahrscheinlich in der Annahme, dass es sich um Faktoren handelt, die er dividiert. Dieser Fehler könnte durch die visuelle Aufnahme der Faktoren und der Subsäquenten Interpretation resultieren.

Testaufgabe 32

Bei dieser Aufgabe sollte analysiert werden, welche Konzepte Studierende über die Subtraktion von zwei algebraischen Brüchen haben. Einige Studierende, die Fehler in den vorhergehenden Prozessen aufwiesen, konnten diese Aufgabe richtig vereinfachen, vielleicht auch deswegen, da diese Aufgabe keine Gelegenheit zu Streichschemata bietet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b}$		Übergeneralisierung NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172, 173) TIETZE(2000, S. 70) Keine Vorstellungen der erweiterten Brüche im Zusammenhang mit der Subtraktion von Brüchen Interferenz von Schemata MALLE(1993, S. 185)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. 3 – 2 = 1, das ist der neue Zähler.

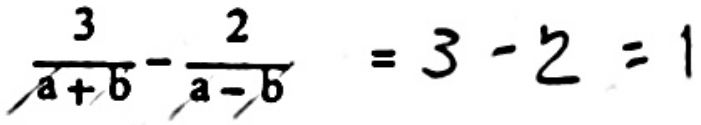
2. Der neue Nenner ist die Multiplikation der Nenner der Brüche.

3. $(a+b)(a-b) = a^2 + b^2$."

Deutung:

Entweder hat der Studierende eine Übergeneralisierung vorgenommen, in dem er a/b – c/d = (a – c) / bd interpretiert, oder der Studierende hat keine klaren Vorstellungen über Erweiterung der Brüche; da er zwar die Nenner der Brüche multipliziert, um einen gemeinsamen Nenner zu finden (wenn auch fehlerhaft), aber die Brüche nicht erweitert; dass heißt, den Zähler des ersten Bruches nicht mit dem Nenner des zweiten Bruches multipliziert und den Zähler des zweiten Bruches nicht mit dem Nenner des ersten Bruches multipliziert.

Der Fehler bei der Multiplikation der beiden Nenner resultiert wahrscheinlich durch eine Interferenz von Schemata, $(a+b)(a-b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Mangelnder Begriff von Bruch. Falsche Informations-aufnahme NOLTE (1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 167) Eine Null im Nenner hat keine Bedeutung Null ist nichts TIETZE(2000, S. 68 und 70) Nicht Beachtung der Prozedurhierarchien MALLE (1993, S. 186) Verwendung zu offe-ner Schemata MALLE(1993, S. 181) TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Im Nenner kann ich a – a und b – b vereinfachen.

2. Danach kann ich die Zähler subtrahieren.“

Deutung:

Wahrscheinlich besteht bei der Informationsaufnahme des Studierenden eine Fehlinterpretation. Der Studierende erkennt nicht, dass es sich um Brüche handelt, oder es besteht ein mangelnder Begriff von Bruch.

Wenn der Studierende nicht aufgenommen hat, dass es sich um Brüche handelt, sondern eventuell nur einen Bruch aufnimmt, könnte er alles im Zähler und alles im Nenner addieren und subtrahieren. Er erkennt auch nicht, dass bei seinem Prozess eine Null im Nenner stehen müsste und dass dann sein Bruch nicht definiert sein könnte.

Ist sein Begriff von Bruch mangelhaft, könnte er wahrscheinlich die Subtraktion als eine Subtraktion von Zählern und Nennern interpretieren, so dass er, $\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}=\frac{3-2}{a+b-a-b}=3-2=1$ rechnet. In seinem Prozess ist die Null im Nenner nicht registriert, was darauf hinweisen könnte, dass für ihn eine Interpretation der „Null als nichts“ , die kann man weglassen, wahrscheinlich der Fall ist.

Das Minuszeichen des zweiten Bruches wird sowohl auf den Zähler (-2) als auch auf den Nenner fehlerhaft verteilt. Eventuell eine Verwendung zu offener Schemata.

Bei - (a – b) = - a – b; wird außerdem ein Fehler bei der Distribution des Minuszeichens gemacht. Dieses könnte durch eine nicht Beachtung der Prozedurhierarchien auftreten.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{3}{a+b}-\frac{2}{a-b}$	$=\frac{3-2}{(a+b)-(a+b)}=\frac{1}{a+b}$	Übergeneralisierung NOLTE(1991, S. 61) MALLE(1993,S.172, 173) TIEZE(2000, S. 70) Verwendung zu offener Schemata MALLE(1993, S. 181) TIETZE(2000, S. 70) Reparatur MALLE(1993, S. 184) TIETZE(1991, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zähler und Nenner werden subtrahiert.

2. Da sich das Vorzeichen von –b im zweiten Nenner verändert durch das Minuszeichen, muss ich dieses Vorzeichen wechseln.

3. 3 – 2 = 1, (a+b) – (a+b) = a + b."

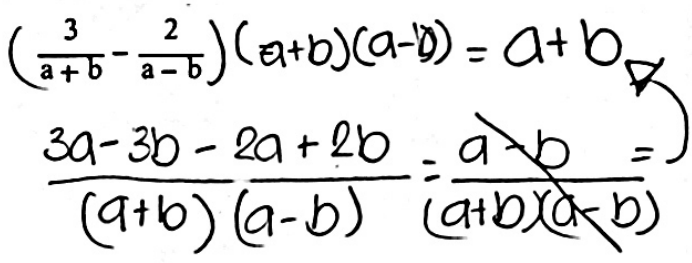
Deutung:

Es werden Zähler und Nenner jeweils subtrahiert. Da – b im zweiten Nenner sich durch das Minuszeichen verändert, schreibt der Studierende – (a+b), so wird er a subtrahieren und b, wie vorher (- b) auch subtrahieren. Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich in der Annahme, dass sich das Vorzeichen von b nicht verändern kann.

Es wird auch das Minuszeichen auf Zähler und Nenner verteilt, das durch eine Übergeneralisierung des Schemas $\Delta(a \Diamond b) = (\Delta a) \Diamond (\Delta b)$ passiert könnte, wenn keine Einschränkungen oder ein Mangel an Metawissen besteht. Das vorher genannte Schema kann nicht auf eine Division mit einem Vorzeichen angewandt werden; $-\frac{c}{d} \neq \frac{-c}{-d}$.

Danach folgt wahrscheinlich eine Reparatur bei einer Prozesslücke, da der Studierende zwar (a+b)-(a+b) schreibt, aber bei der Subtraktion von zwei gleichen Mengen, im Nenner „keine Null stehen lassen kann", und deswegen ein a+b hinschreibt.

Es könnte auch sein, dass der Studierende annimmt, er habe nun einen gemeinsamen Nenner (a+b), und der Nenner im Resultat ist a + b.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nicht Beachtung der Prozedurhierarchien MALLE(1993, S. 186) Weglassschemata, der Bruchstrich wird weggelassen MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss als gemeinsamen Nenner die Multiplikation der beiden Nenner nehmen (a+b)(a-b)

2. Dazu multipliziere ich den ganzen Bruch mit (a+b)(a-b)

3. Der neue gemeinsame Nenner ist (a+b)(a-b)

4. Um den ersten Bruch mit dem Nenner (a+b)(a-b) zu haben, muss ich den Zähler 3 mit (a-b) multiplizieren. Den Zähler des zweiten Bruches (2) muss ich mit (a+b) multiplizieren.

5. Vor dem zweiten Bruch steht ein Minuszeichen, also kommt vor 2(a+b) ein Minuszeichen, das ergibt -2a + 2b

6. Bei der Vereinfachung im Zähler erhalte ich, a – b.

7. Jetzt kann ich noch a – b im Zähler mit dem Faktor (a – b) im Nenner kürzen.

8. Das Resultat lautet a + b.“

Deutung:

Der Studierende erkennt, dass er einen gemeinsamen Nenner braucht, um die Brüche subtrahieren zu können. Er erkennt auch, dass dieser gemeinsame Nenner (a+b)(a-b) ist.

Wahrscheinlich ist das Niederschreiben von (a+b)(a-b) als Multiplikation eine Hilfsaktion, die nicht zur Aufgabe selbst gehört, mit der Absicht, zu wissen mit welchem Faktor er jeden Zähler multiplizieren muss.

Sieht man von dieser „Multiplikation“ ab, erfolgt im nächsten Schritt (siehe weiter unten) die Erweiterung der Brüche, um diese auf einen Bruch reduzieren zu können. Dabei erfolgt der erste Fehler, wahrscheinlich im Distributivgesetz des Vorzeichens des zweiten Bruches. Bei der Ausführung der Unterprozedur (multipliziere mit (a+b)), verliert der Studierende die Kontrolle über den Gesamtablauf, vermutlich „vergisst“ er, da er zwei Schritte zusammen abwickelt, die Multiplikation des zweiten Terms mit dem negativen Vorzeichen.

Durch diesen Fehler erhält er einen Bruch, den er „richtig“ kürzt, wie durch sein Durchstreichen zu erkennen ist. Nach der Kürzung erfolgt der zweite Fehler, vermutlich ein Weglassschema, bei dem:

$\frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{\quad}{a+b} = a+b$ ist. Es wird oft der Bruchstrich weggelassen.

Diese Aufgabe mit dem Lösungsprozess wurde für das Lehrerinnen- und Lehrerinterview übernommen. Erstens durch die Verwirrung in dem Lösungsprozess (als Lehrerin oder Lehrer muss man oft den Lösungsweg der Schülerinnen und Schüler erst erkennen) und zweitens, weil zwei Fehler im Prozess vorzuweisen sind.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a-b}$	$= \frac{6}{a^2 - b^2 - ab + ba}$	Interferenz von Schemata MALLE(1993, S. 185) Unangebrachte Informationsaufnahme SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 167)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich suche den gemeinsamen Nenner, in dem ich die Nenner miteinander multipliziere und die Multiplikation als neuen Nenner niederschreibe.

2. Nun muss ich auch die Zähler multiplizieren."

Deutung:

Durch eine unangebrachte Informationsaufnahme hat dieser Studierende eine Multiplikation aufgenommen. Das Minuszeichen wurde ignoriert, da 3 x 2 = 6 ist und im Nenner, die beiden Nenner multipliziert werden.

Es könnte auch sein, dass der Studierende an einen gemeinsamen Nenner der beiden Brüche denkt, jedoch interpretiert, dass, wenn er die Nenner multipliziert, auch die Zähler multipliziert werden müssen. Wahrscheinlich durch eine Interferenz von Schemata, die Multiplikation und die Suche nach einem gemeinsamen Nenner, der über eine Multiplikation der Nenner gefunden wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	$\frac{3(a-b) - 2(a+b)}{(a+b)(a-b)} =$	Unangebrachte Auffassung der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S.190f) Hineinprojizieren eines Musterbeispiels MALLE(1993, S. 174) TIETZE (2000, S. 73) Streichschema MALLE(1993, S. 182)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich suche einen gemeinsamen Nenner, die Multiplikation der beiden vorliegenden Nenner (a-b)(a+b).

2. Um die zwei Brüche als einen einzigen Bruch zu schreiben, muss ich „gekreuzt“ multiplizieren. Den Zähler des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruches und den Zähler des zweiten Bruches mit dem Nenner des ersten Bruches, nach dem Schema:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$$

3. Nun kann ich die Faktoren im Zähler und Nenner, die gleich sind „kürzen“, in dem ich sie durchstreiche.

4. Ich lasse die Aufgabe unspezifiziert.

Deutung:

Der Studierende erkennt, dass ein kleinster gemeinsamer Nenner gesucht werden muss (a+b)(a-b), und multipliziert dann „gekreuzt“ (so nennen es die Schülerinnen und Schüler in Mexiko). Der Zähler des ersten Bruches wird mit dem Nenner des zweiten Bruches multipliziert, und andersherum auch.

Durch hineinprojizieren eines Musterbeispiels, „kürzt“ er sowohl (a-b) als auch (a+b) im Zähler mit den Faktoren (a-b) und (a+b) im Nenner. Der Studierende erkennt, dass beispielsweise (a-b) im Zähler ein Faktor ist, jedoch erkennt er nicht, dass (a-b) nicht Faktor des ganzen Zählers ist, die zugrunde liegende Termstruktur wurde vom Studierenden nicht erkannt.

Der Studierende bricht seinen Prozess ab.

Anhang 5: Lineare und quadratische Gleichungen

Testaufgaben: 33 - 39

Testaufgabe 33

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x\cdot(3-x)-4\cdot(1+x)+x\cdot(x-3)=0$	$-4x-4$ $5x-x^2-4-4x+x^2-3x=0$	Verlust der Übersicht, Art der Tätigkeit vergessen MALLE(1993,S. 202)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst löse ich die Klammern auf und dann vereinfache ich, in dem ich ähnliche Terme zusammenfasse.

2. Ich erhalte – 4 x – 4."

Deutung:

Es wird eine korrekte Vereinfachung des algebraischen Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung vorgenommen. Der Fehler resultiert, weil die Art der Tätigkeit aus dem Blick verloren wurde. Das Ziel war eine Gleichung zu lösen, und ist wahrscheinlich durch den Aufwand der Vereinfachung vergessen worden. Obwohl der Studierende im vorletzten Schritt die Null als rechten Gleichungsterm noch mitschreibt, wird sie im nächsten Schritt nicht weitergeführt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x\cdot(3-x)-4\cdot(1+x)+x\cdot(x-3)=0$	$3x-x-4-4x+x^2-3x-4-4x=0$ $-4x=4$ $x=4:-4$ $x=-16$	Fehlvorstellungen mit den neutralen Elementen MALLE(1993, S. 181) TIETZE (2000, S. 73)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst löse ich die Klammern auf und dann vereinfache ich, in dem ich ähnliche Terme zusammenfasse.

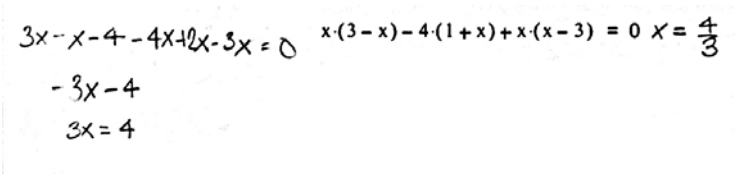
2. – 4 – 4 x = 0; - 4 x = 4

3. Ich bringe die – 4 auf die andere Gleichungsseite.

4. x = 4 mal – 4; x = - 16."

Deutung:

Es wird eine korrekte Vereinfachung des algebraischen Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung vorgenommen. Beim Isolieren der Unbekannten entsteht wahrscheinlich der Fehler, weil Regeln, wie beide Seiten der Gleichung durch – 4 teilen nicht angewandt werden. Der Studierende erkennt wahrscheinlich, dass bei – 4 x; x multiplikativ mit -4 verknüpft ist. Eventuell hat er keine Vorstellung von den Gegenoperationen oder möglicherweise löst er die Gleichung nicht über die neutralen Elemente.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x (3 – x) – 4(1 + x) + x (x – 3) = 0		Nichtbeachtung der Prozedurhierarchie MALLE (1993, S. 186) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Fehlvorstellungen zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71)
Fehler durch das nicht Mitführen des Gleichheitszeichens bis jetzt nicht in der Literatur gefunden.		Nichtmitführen des Gleichheitszeichens

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich löse als erstes die Klammern auf. Bei jeder Klammer muss ich ein Distributivgesetz anwenden.

2. x(3) = 3x und ich muss noch x abziehen; - 4 (1+x) = - 4 – 4x; x (x – 3)= zweimal x – 3x.

3. - 3x – 4 = 0; 3x = 4, beide Vorzeichen habe ich gewechselt.

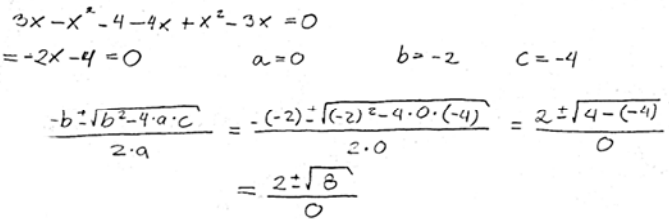
4. x = 4/3."

Deutung:

Die erste Klammer wird fehlerhaft aufgelöst, da nur der erste Term in der Klammer mit x multipliziert worden ist. Bei der zweiten Klammerauflösung besteht kein Fehler. Die dritte Klammer wird wiederum falsch aufgelöst, für den Studierenden ist x(x)= 2x und x (-3) = -3x.

Dadurch, dass die zweite Klammer richtig aufgelöst wurde, könnte man annehmen, dass der Studierende das Distributivgesetz kennt und auch richtig anwenden kann. Bei der ersten Klammerauflösung scheint es ein Problem der Nichtbeachtung der Prozedurhierarchien zu sein. Bei der dritten Klammer manifestiert sich ein Konkatenationsproblem oder eine mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata, da x (x)= 2x ist.

Ein weiterer Fehler entsteht von -3x – 4 zu 3x = 4, vermutlich, weil der Studierende eine Gleichung, die er zu lösen hat, in seinen Gedanken, mitführt. Der Fehler generiert sich durch die unvollständige Schreibweise, manchmal schreibt er das Gleichheitszeichen und die Null mit, manchmal nicht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x (3 – x) – 4(1 + x) + x (x – 3) = 0	 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.	Unangebrachte Informationsverarbeitung Fehlerhefte Informationsaufnahme seiner Schreibweise Perseverationsproblem RADATZ (1980) Null verändert nichts TIETZE(2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere zuerst die Klammern, dann vereinfache ich ähnliche Terme.

2. – 2x – 4 = 0; ich hatte x^2, also ist es eine quadratische Gleichung, die ich mit der Formel für quadratische Gleichungen lösen kann; a = 0, b = - 2 und c = - 4.

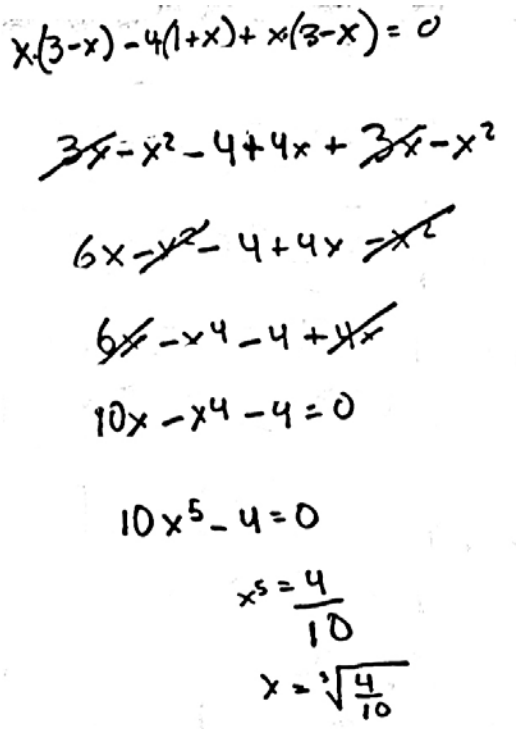
3. Ich setze die Daten in die Formel ein, ich kann beim letzten Schritt nicht weiterrechnen."

Deutung:

Es wird eine korrekte Multiplikation der Klammern vorgenommen, bei der Vereinfachung der ähnlichen Terme, erfolgt ein Fehler, wahrscheinlich addiert er 3x + 3x und subtrahiert dann 4x zu – 2x. Man könnte eine fehlerhafte Informationsverarbeitung interpretieren.

Der nächste Schritt muss vermutlich eine Nachfolge von der Idee sein, dass er während der Multiplikation von den Klammern, x^2 deutet, und so meint, dass er eine quadratische Gleichung zu lösen hat. Der Studierende konnte vermutlich nicht interpretieren, dass die quadratischen Terme sich gegenseitig aufgehoben haben. Die Interpretation der Werte für a, b und c, ist möglicherweise logisch, aber die Anwendung der Formel kann unter diesen Umständen nicht erfolgen. Der Studierende kommt in einen Konflikt, als er durch Null teilt und bricht seinen Lösungsweg ab.

Es erfolgt noch ein anderer Fehler, in der Diskriminante, als er 4 (0) (-4) multipliziert, da das Resultat - 4 ist. Obwohl die Multiplikation der Zahlen richtig aufgeschrieben wurde, und sogar die – 4 in Klammern steht, ist die Informationsaufnahme des Studierenden eine Multiplikation von 4 (0) und eine Subtraktion von 4. Es könnte auch sein, dass er ein Perseverationsproblem aufweist, 0 (- 4) = - 4 oder, dass die Vorstellung vorherrscht, dass die Null nichts verändert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nichtbeachtung der Prozedurhierarchien MALLE(1993, S. 186) Konkatenationsproblem NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S.71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere zuerst die Klammern, dann vereinfache ich ähnliche Terme.

2. $3x + 3x + 4x = 10x$; $-x^2 – x^2 = -x^4$

3. $10x – x^4 = 10x^5$.

Deutung:

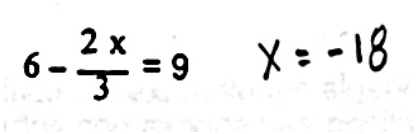
Bei der Multiplikation der Klammern erfolgt ein Fehler bei der zweiten Klammer, da das Minuszeichen nicht auf den zweiten Summanden in der Klammer verteilt wird. Eventuell wurde bei der Ausführung der Multiplikation, von – 4 (1), die Kontrolle über den Gesamtablauf der Prozedur verlor.

Die ähnlichen Terme mit einem lineare x, kann der Studierende fehlerfrei addieren, jedoch geschieht dieses nicht mit $– x^2 – x^2$; der Studierende weist ein Konkatenationsproblem auf, da er wahrscheinlich x als zwei Objekte ansieht, und noch mal zwei Objekte dazu addiert $–x^2 – x^2 = - x^4$, danach setzt er das Vorzeichen.

Er kommt zu einer Gleichung $10x – x^4 – 4 = 0$, in der er wieder x als Objekt und x^4 als vier Objekte interpretiert. Es ist auffallend, dass er das Minuszeichen nicht beachtet. Daraus entsteht die Gleichung: $10x^5 – 4 = 0$

In den folgenden Schritten isoliert der Studierende die Unbekannt.

Testaufgabe 34

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verwechslung der Gegenoperationen Weg zu neutralen Elementen nicht identifiziert MALLE(1993, S. 181) TIETZE (2000, S. 73)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst subtrahiere ich auf beiden Seiten der Gleichung

$$-\frac{2x}{3} = 9 - 6 = 3$$

2. Ich multipliziere die 3 im Nenner mit der 3 der anderen Seite der Gleichung.

$$-2x = 3 \cdot 3 = 9$$

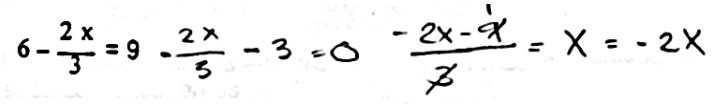
3. Da x mit (-2) multipliziert ist, muss ich auch 9 mit (-2) multiplizieren, um den Wert von “x” zu haben.”

Deutung:

Die Deutung ist eine Vermutung der Gedankengänge des Studierenden, da kein Prozess vorliegt, sondern nur der Wert für die Unbekannte.

Wahrscheinlich hat der Studierende einen korrekten Ansatz; macht aber im letzten Schritt einen Fehler, da er statt 9 durch -2 zu dividieren, eine Multiplikation vornimmt. Damit die Unbekannte isoliert werden kann, müsste -2x /-2 dividiert werden, jedoch verwendet der Studierende nicht die Gegenoperation um ein multiplikatives neutrales Element zu erhalten, sondern multipliziert auch die mal (-2), da das x mit (-2) multipliziert ist.

$$6-\frac{2x}{3}=9$$
$$-\frac{2x}{3}=9-6=3$$
$$-2x=3\cdot 3=9$$
$$x=9\cdot(-2)=-18$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unangebrachte Anwendung des Gleichheitszeichens NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S. 68-70) Nicht erkennen der Termstruktur Hineinprojizieren eines Musterbeispiels

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Auf beiden Seiten der Gleichung muss ich 9 subtrahieren.

2. Ich suche einen gemeinsamen Nenner, um beide Terme als einen einzigen Bruch darzustellen.

3. Ich dividiere durch 3, in dem ich die 9 im Zähler und die 3 im Nenner „kürze“.

4. Wenn ich 1 auf beiden Seiten addiere, habe ich auf der rechten Gleichungsseite ein x und auf der anderen Gleichungsseite – 2x.“

Deutung:

Unten wird der vermutliche Gedankengang des Studierenden illustriert.

Der Ansatz des Studierenden, zwar ungewöhnlich, aber korrekt.

Eine fehlerhafte Vereinfachung im Bruch entsteht wahrscheinlich durch ein nicht erkennen der Termstruktur, oder ein hineinprojizieren eines Musterbeispiels. Außerdem erfolgt ein Rechenfehler 9/3 = 1.

Im nächsten Schritt geht nicht klar hervor, wie der Studierende gehandelt hat. Es bestehen zwei Möglichkeiten der Deutung:

a) Es wurde die -1 „auf die andere Seite der Gleichung“ gebracht, und als 1x interpretiert und dann der -2x (Restbestand) gleichgesetzt.

b) Es könnte auch sein, dass der Studierende das Gleichheitszeichen nicht mitgeführt hat und nun nicht „weiß“ womit er die Gleichung gleichsetzen soll, und weil er die Unbekannte „x“ isolieren soll, das „x“ hinschreibt.

Es geht aus dem Prozess hervor, dass der Studierende keine klare Vorstellungen über die Bedeutung eines Gleichheitszeichens hat.

$$6-\frac{2x}{3}=9$$

$$6-9-\frac{2x}{3}=0 \ldots Gedankengang$$

$$-\frac{2x}{3}-3=0$$

$$\frac{-2x-9}{3} \ldots\ldots Nullverlust$$

$$-2x-1=x=-2x$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$6-\frac{(2x)}{3}=9$	$9-6=\frac{2x}{3} \Leftrightarrow 3=\frac{2x}{3}$ $3-3=2x=0 \Leftrightarrow x=0$	Verwechslung der Gleichungsseiten Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Durch Schreibweise die Operation verwechselt

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Damit -2x/3 ein positives Vorzeichen hat, bringe ich es auf die andere Gleichungsseite.

2. Ich muss von der 9, 6 subtrahieren.

3. Möchte ich die Unbekannte weiter isolieren, muss ich bei 3 = (2x)/3, die 3 im Nenner auf die andere Seite bringen, und zwar mit einem negativen Vorzeichen.

4. 3 – 3 = 2x = 0; x = 0.“

Deutung:

Im ersten Prozessschritt macht der Studierende ein Vorzeichenfehler, wahrscheinlich, weil er zwei Schritte mit einemmal erledigen möchte. -2x/3 wird auf beiden Seiten der Gleichung addiert (obwohl diese Ausdrucksweise kaum die eines Studierenden ist, der eher sagen würde: ich bringe es mit einem positiven Vorzeichen auf die andere Gleichungsseite). Obwohl die 6 nicht die Gleichungsseite wechselt, ändert sich das Vorzeichen; die 9, die die Gleichungsseite wechselt behält ihr Vorzeichen. Es hat den Anschein, als wenn der Studierende sich der Gleichungsseiten nicht bewusst ist. Er führt seine Operationen in einer Kette mit Gleichungszeichen weiter, unterbricht diese jedoch, im Moment, wo sich der Wert ändert.

Bei der weiteren Isolierung der Unbekannten, von 3 = 2x/3 zu 3 – 3 = 2x, manifestiert sich ein Fehler, da vermutlich der Studierende die 3 mit einem negativen Vorzeichen auf die andere Gleichungsseite „befördert“. Wahrscheinlich hat der Studierende die Termstruktur nicht voll erfasst (dass bei 2x/3 die 3 dividiert) und denkt nicht an die Gegenoperationen (also eine Multiplikation).

Es könnte auch sein, dass der Studierende, die Absicht hatte, die 3 auf der anderen Seite der Gleichung zu multiplizieren (mit dem Fehler, dass beim „rüberbringen“ das Vorzeichen wechselt), jedoch beim Niederschrieben der – 3 dann vergisst oder nicht identifiziert, dass es sich um eine Multiplikation handelte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$6-\frac{2x}{3}=9$	$x=\frac{9+6\cdot 3}{2}$ $\boxed{x=\frac{27}{2}}$	Nicht erkennen des Termaufbaus seines ersten Schrittes NOLTE (1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Kein Unterschied mit oder ohne Klammern BOOTH aus NOLTE (1991, S. 45)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich kann alles in einem Schritt erledigen, die 6 addiere ich, dann multipliziere ich mit 3, und zum Schluss dividiere ich durch 2."

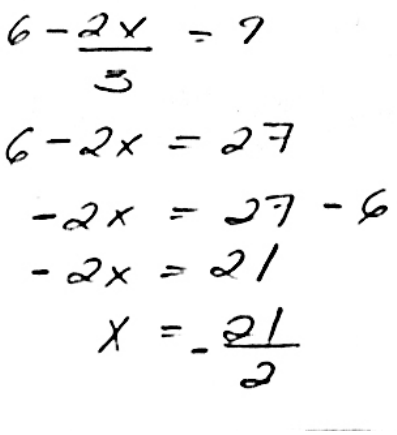
Deutung:

Der Studierende hat alle Schritte auf einmal machen wollen, was zu verschiedenen Fehlern geführt hat. Erkennen der Vorzeichen ist wahrscheinlich der erste Fehler, gehört das Minuszeichen zur 6 oder zu 2x/3. Der Studierende interpretiert vermutlich, dass die 6 subtrahiert wird, denn er addiert sie auf der anderen Seite der Gleichung, und das Minuszeichen ist damit verarbeitet worden.

$6-\frac{2x}{3}=9$, ist als $\frac{2x}{3}-6=9$ interpretiert werden und dadurch ist die 6, auf der rechten Gleichungsseite addiert worden.

$\frac{2x}{3}=9+6$, wird dann mit 3 multipliziert, jedoch achtet der Studierende nicht darauf, dass die ganze rechte Seite der Gleichung mit 3 multipliziert werden muss. Ursache ist wahrscheinlich, dass der Studierende zwischen Klammersetzung und keine Klammer keinen Unterschied sieht ($2x=9+6\cdot 3$). Der Studierende nimmt die Struktur des sich generierenden Terms im Lösungsprozess nicht auf.

Danach dividiert er durch 2, statt – 2, da er das Minuszeichen mit der 6 schon verarbeitet hatte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nichterkennen der Struktur der linken Seite der Gleichung NOLTE (1991, S.45) MALLE (1993,S. 190f) Nichtbeachtung der Regeln zur Isolierung von Unbekannten. Hineinprojizieren eines Musterbeispiels dessen Ursache auf früheren Lernphasen basiert SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere die 3, die auf der linken Seite der Gleichung dividiert, auf der rechten Seite der Gleichung.

2. Nun subtrahiere ich 6 auf beiden Seiten der Gleichung

3. Ich dividiere nun durch – 2 , und erhalte x = - 21 /2."

Deutung:

Die drei dividiert 2x, jedoch nicht die 6 auf der linken Seite der Gleichung. Der Studierende könnte zwei verschiedene Denkwege gegangen sein:

a) Das Musterbeispiel im Lösen von linearen Gleichungen in früheren Lernphasen: $\frac{ax}{b} = c \rightarrow ax = bc$; wurde vom Studierenden vermutlich ohne Beachtung des anderen Terms auf der linken Seite der Gleichung (6), appliziert. Dieses Musterbeispiel wurde in früheren Lernphasen isoliert angewandt.

b) Der Studierende hat die Struktur der Gleichung nicht erfasst, da er die 6 auf der linken Seite der Gleichung nicht beachtet, nicht identifiziert, dass bei Gleichungen die Operationen auf beiden Seiten (die ganze Seite) gleich angewandt werden müssen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$6-\frac{2x}{3}=9$	$6-2x=9(3)$ $\quad -2x=15$ $6-2x=21$ $\quad x=-\frac{15}{2}$	Hineinprojizieren eines Musterbeispiels MALLE(1993, S. 174) TIETZE(2000 S. 73) Nicht angebrachte Identifikation der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich multipliziere zuerst die 3 auf der anderen Gleichungsseite. 9 x 3 = 21

2. Ich bringe die 6 mit einem negativen Vorzeichen auf die andere Seite.

3. 21 – 6 = 15

4. Ich dividiere beide Seiten durch – 2, x = - 15/2.“

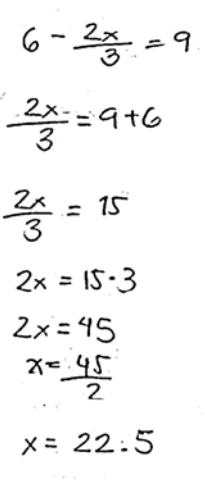
Deutung:

Dieser Fehler resultiert wahrscheinlich durch eine unangebrachte Auffassung des Termaufbaus, da der Studierende nicht identifiziert, dass die 3 nur Nenner von einem Summanden, auf der linken Seite der Gleichung, ist. Es ist auch ein Rechenfehler zu erkennen, da für den Studierenden 9 x 3 = 21 ist.

Der Studierende kann auch ein Musterbeispiel in die Aufgabe hineinprojiziert haben, und zwar erkannt haben dass 2x durch 3 dividiert wird, aber dann die 3 „hinübermultipliziert“, nach dem folgenden Musterbeispiel, in dem er den ersten Term einfach ignoriert, jedoch nicht vergisst.

$$\frac{ax}{b}=c$$

$$ax=cb$$

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Übergeneralisierung bei der Multiplikation der Gleichung mal (-1) Verlieren des Vorzeichens. Eventuell im Sinne „lasse was stört weg“

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Man kann die Vorzeichen in einer Gleichung ändern, also hat 2x/3 ein positives Vorzeichen und 6 ein negatives.

2. Ich addiere nun 6 auf der anderen Gleichungsseite.

3. Danach isoliere ich die Unbekannte.“

Deutung:

Es könnte sein, dass der Studierende interpretiert, dass man bei einer Gleichung die Vorzeichen wechseln kann (etwa mit -1 multiplizieren). Es wird also das Vorzeichen von 2x/3 positiv und das Vorzeichen von 6 negativ, deswegen addiert er die 6 auf der anderen Gleichungsseite. Der Studierende ist sich nicht bewusst, dass er den Wechsel des Vorzeichens Vorzeichenwechseln, auf beiden Seiten der Gleichung, vornehmen müsste. Dieses könnte eine Konsequenz von einer Übergeneralisierung sein, dass man auf der anderen Seite das Vorzeichen nicht wechselt, da es eine NULL ist.

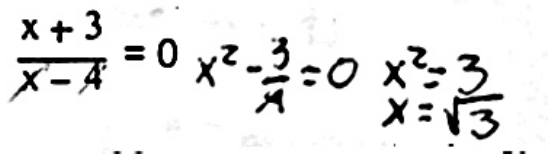
Etwa:

$$-6+\frac{2x}{3}=9$$

$$\frac{2x}{3}=9+6$$

Nach diesem Fehler werden die folgenden Schritte korrekt ausgeführt.

Testaufgabe 35

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unklare Vorstellungen zu den Regeln zur Isolierung einer Unbekannten Nicht erkennen der Termstruktur NOLTE(1991, S. 45) MALLE(1993, S. 190f) Hineinprojizieren eines Musterbeispiels MALLE(1993, S. 174) TIETZE(2000 S. 73) Ursachen in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169)
Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x und x ist x^2, 3 durch 4 mit dem Vorzeichen ist – ¾,

2. Bei der Gleichung $x^2 – ¾ = 0$, werde ich die störende 4 „hinübermultiplizieren“

3. Da ich 4 mit 0 multipliziere, bleibt die Gleichung: $x^2 = 3$

4. Der Wert für x = $\sqrt{3}$.“

Deutung:

Der Studierende identifiziert vermutlich die Termstruktur nicht in einer angebrachten Form. Es hat den Anschein, als zerlege er den Bruch in zwei Teile:

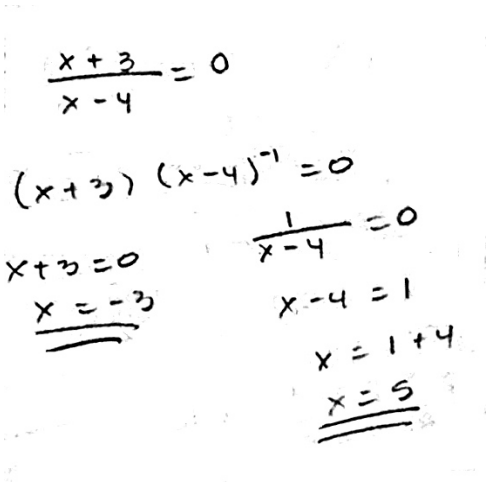
$\frac{x+3}{x-4} = \frac{x}{x} - \frac{3}{4} = x^2 - \frac{3}{4}$ wobei, es auffällt, dass er x/x zu x^2 verarbeitet, vielleicht durch die Idee, dass x nicht „verschwinden“ kann.

Beim nächsten Schritt resultiert der Fehler durch die Annahme, man könne die 4 auf der anderen Seite der Gleichung multiplizieren. Wahrscheinlich sind seine Vorstellungen zu den Regeln um eine Unbekannte zu isolieren, nicht klar. Gemeint ist, dass der Studierende nicht die gleiche Operation auf beiden Seiten der Gleichung vornimmt, in dem er jede Gleichungsseite als einen Term ansieht.

$$4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 4 \cdot 0$$

Er könnte auch, wie beim letzten Lösungsprozess das gleiche Musterbeispiel in die Aufgabe hineinprojiziert haben.

Die Hauptwurzel von 3 ist $\sqrt{3}$, jedoch generieren sich bei der Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ zwei Lösungen, nämlich $+\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$. Die Ursache dieses Fehlers könnte in früheren Lernphasen liegen, da der Studierende die Bedeutung der Gleichung mit ihren Lösungen nicht erfasst hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Null verändert nichts TIETZE (2000, S. 68 und 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst werde ich die Aufgabe in eine Multiplikation umformen. (x – 4) kann ich in den Zähler mit einem negativen Exponenten 1 bringen.

Bei einer Multiplikation von zwei Faktoren, die gleich Null ist, sind Lösungen die x-Werte, die diesen Faktoren den Wert Null verleihen.

$x + 3 = 0; x = -3$

$\frac{1}{x-4} = 0$

x – 4 muss auf beiden Seiten der Gleichung multipliziert werden. 0 (x – 4) = x – 4

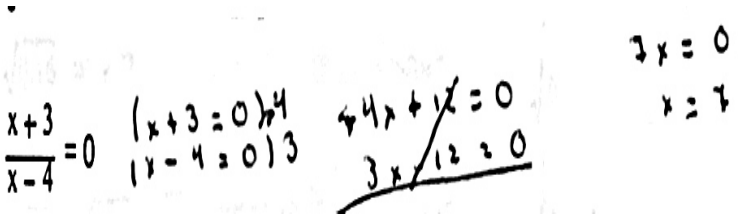
x – 4 = 1; x = 5.“

Deutung:

Der Studierende interpretiert den ersten Teil der Aufgabe korrekt, er macht eine Umformung bei der er den Nenner (x – 4) als $(x – 4)^{-1}$ im Zähler multipliziert. Auch seine Vorstellung über die Art, wie er die Aufgabe lösen kann ist angebracht.

Es unterläuft ihm ein Fehler bei der Isolierung der Unbekannten in der Teilaufgabe:

1 /(x – 4) = 0; da er 0 (x – 4) zu (x – 4) verarbeitet. Dieser Fehler könnte resultieren durch eine unangebrachte Auffassung der Null, im Sinne, „Null verändert nichts“.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Übergeneralisierung NOLTE (1991, S. 61) MALLE(1993, S. 172, 173) TIETZE(2000, S. 70) Fehlvorstellungen mit der Null (7/0 = 7) TIETZE(2000, S. 68 und 70) Konkatenationsfehler NOLTE(1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Perseverationsfehler RADATZ (1980, S. 19) Fehlinterpretation der Lösungsmenge

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Wie bei der Multiplikation von zwei Faktoren, wird hier jeder Term, der vom Zähler und der vom Nenner gleich Null gesetzt.

2. Ich habe zwei simultane Gleichungen, die ich durch das „Eliminationssystem" lösen werde. So kann ich sie nicht subtrahieren, da die Unbekannte eliminiert werden würde, also muss ich die unabhängigen Terme so multiplizieren, dass sie sich bei einer Addition (ich habe einen unabhängigen Term mit einem positiven und den anderen unabhängigen Term mit einem negativen Vorzeichen) eliminieren. Die erste Gleichung muss ich mit 4 multiplizieren die zweite mit 3.

3. Wenn ich 4x + 12 = 0 und 3x – 12 = 0 addiere, erhalte ich 7x = 0

4. Jetzt muss ich nur noch durch 7 dividieren. 0 / 7 = 7."

Deutung:

Der Studierende hat vermutlich eine Übergeneralisierung des Schemas:

(x + a)(x + b) = 0; x + a = 0 und c + b = 0; auf die Division der beiden Terme angewandt:

$$\frac{x+3}{x-4} = 0; x+3=0 \ldots\ldots x-4=0$$

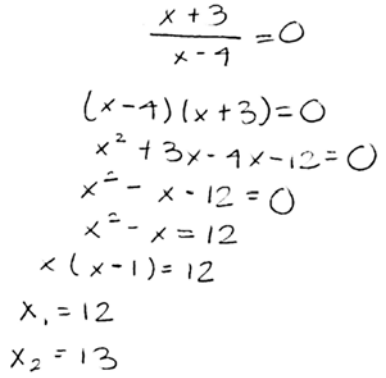
Da der Studierende zwei Gleichungen untereinander schreibt, interpretiert er wahrscheinlich, dass diese simultan gelöst werden müssen. Dieses ist eine Fehlinterpretation der Lösungsmenge, da diese nicht beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen müssen.

Bei der Form, wie der Studierende die simultanen Gleichungen lösen möchte, ist zu erkennen, dass er es vermeidet, die Unbekannte zu eliminieren, also muss er die unabhängigen Terme beseitigen, wozu er die erste Gleichung mit 4 und die zweite Gleichung mit 3 multipliziert, damit er dann beide Gleichungen addieren kann. (Siehe Lösungsprozess)

Er erhält 7x = 0, es kann hier leider nicht aus dem Prozess geschlossen werden, welchen Fehler er im nächsten Prozessschritt vornimmt; vermutlich könnten es zwei verschiedene Vorstellungen sein:

a) Fehlvorstellungen mit der Null ist x = 0/7 = 7, oder eventuell ein Perseverationsfehler.

b) Es könnte auch sein, dass der Studierende ein Konkatenationsfehler macht und 7x additiv verknüpft hat, und dadurch keine Division, sondern eine Addition vornimmt, wenn auch nicht klar hervorgeht, warum er nicht subtrahiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Fremdstrategie TIETZE(2000, S.70) Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169) Übergeneralisation MALLE(1993, S. 174) TIETZE(2000, S. 73) Deeper level rules MATZ aus MALLE (1993, S. 179) Bedarfsschema MALLE(1993, S. 180)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich bringe $x – 4$ in den Zähler. Es resultiert eine Multiplikation von zwei Faktoren. $(x – 4)(x + 3) = 0$

2. Ich multipliziere beide Klammern und vereinfache den Ausdruck:

$x^2 – x – 12 = 0$

3. Ich lasse die Terme mit einer Variablen auf der linken Seite der Gleichung und faktorisiere sie. Den unabhängigen Term bringe ich mit einem positiven Vorzeichen auf die rechte Gleichungsseite.

4. $x (x – 1) = 12$; daraus folgt: $x = 12$ und $x – 1 = 12$; also $x = 13$.“

Deutung:

Fremdstrategien zielen es auf Vereinfachung ab, wahrscheinlich hat der Studierende den störenden Term im Nenner in den Zähler gebracht.

Statt das Schema $(x+a)(x+b) = 0$ und $x = -a$ und $x = -b$ anzuwenden, multipliziert er beide Faktoren und vereinfacht (verblüffend ist, dass er dieses Schema dann später fehlerhaft anwendet). Er erhält $x^2 – x – 12 = 0$.

Durch ein Verfallen in frühere Lernphasen (vermutlich Lösen von linearen Gleichungen), möchte der Studierende die Unbekannte isolieren, in dem er alle Terme, die die Unbekannte enthalten, auf die linke Seite der Gleichung bringt.

So muss er die 12 auf der rechten Seite der Gleichung niederschreiben, mit einem positiven Vorzeichen. Er faktorisiert den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung x (x – 1) = 12.

Durch ein Übergeneralisieren des Schemas (x+a)(x+b) = 0 und x = -a und x = -b; wird das Schema fehlerhaft auf x (x – 1) = 12 angewandt.

Es kann auch sein, dass der Fehler einem Schema mit tieferem Hintergrund unterliegt. Bei dem Schema (x+a)(x+b) = 0 und x = -a und x = -b; „kommt es auf die konkreten Zahlen nicht an". MALLE bezeichnet es als Bedarfsschema.

Testaufgabe 36

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 4x + 3 = 0$	$(x-3)(x-1)$	Verlust der Übersicht über die Art der Tätigkeit MALLE(1993, S. 202) Kontrolle über Gesamtablauf verloren MALLE(1993, S. 186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

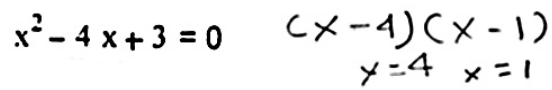
„1. Um die quadratische Gleichung zu lösen, muss ich faktorisieren."

Deutung:

Der Studierende interpretiert, dass eine der Möglichkeiten die Gleichung zu lösen, eine Faktorisation ist, die er korrekt realisiert.

Wahrscheinlich verliert er die Übersicht über die Art der Tätigkeit in der Aufgabe, da er im ersten Schritt, das Gleicheitszeichen und die Null auf der anderen Gleichungsseite nicht mitführt, und für ihn die Aufgabe fertig gelöst ist.

Eventuell wurde auch durch die Ausführung einer Unterprozedur (das Faktorisieren) die Kontrolle über den Gesamtablauf verloren.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 4x + 3 = 0$		Kontrollmechanismen nicht vorhanden MALLE(1993, S. 164) Bei dem Satz von Vieta, keine klare Vorstellungen, über welcher Term additiv und welcher multiplikativ erfolgt.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich faktorisiere den algebraischen Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung.

2. Ich habe einen Satz von Vieta.

3. Die Multiplikation der zwei unabhängigen Terme ist – 4; die Addition ist + 3.

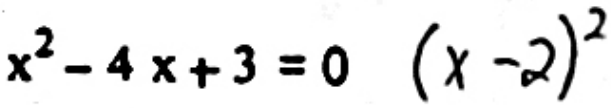
4. $x^2 – 4x + 3 = 0$; $(x – 4)(x – 1) = 0$; $x = 4$ und $x = 1$.“

Deutung:

Der Studierende verwechselt wahrscheinlich beim Satz von Vieta, dass der Koeffizient des zweiten Terms durch eine Addition generiert wird (m + n) und der dritte Term eine Multiplikation (mn) ist. Er macht außerdem noch Vorzeichenfehler.

$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$

Auffallend ist, dass keine Kontrollmechanismen aktiviert werden, so dass die Faktorisation überprüft wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$x^2 - 4x + 3 = 0$		Keine Kontrollinstanz MALLE(1993, S. 164) Fehlt Analyse der vorhandenen Terme

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

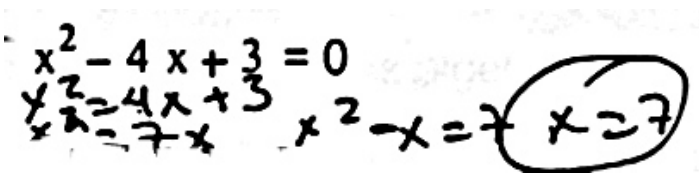
„1. Der zweite Term hat einen geraden Koeffizienten, es ist das doppelte Produkt von 2, da es ein negatives Vorzeichen hat, kann ich mit der zweiten binomischen Formel faktorisieren.

2. $(x – 2)^2$.“

Deutung:

Vermutlich analysiert der Studierende, um zu faktorisieren nur den ersten und zweiten Term und interpretiert eine zweite binomische Formel, da das Vorzeichen von 4x negativ ist. Der dritte Term wird nicht analysiert und auch nicht nach der Faktorisation kontrolliert. Möglicherweise hat der Studierende die Struktur der wichtigsten Multiplikationen von Binomen nicht verstanden, denn auf diese Strukturen muss man aufbauen, um zu fakorisieren. Dass die zweite binomische Formel zwei quadratische Terme enthält, ist sich der Studierende nicht bewusst.

Es kann auch sein, dass der Studierende den zweiten Term des nicht faktorisierten Ausdrucks als einen quadratischen Term (durch die 4), angesehen hat und dadurch die Faktorisation als die Wurzel von x^2 und die Wurzel von 4, und das Vorzeichen interpretiert hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt MALLE (1993, 202-203) Eventuell eine imaginäre Klammer MALLE(1993, S. 192) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Um x zu isolieren, muss ich die Terme, die nicht x^2 sind auf die andere Gleichungsseite bringen. – 4x addiere ich, 3 addiere ich auch.

2. $4x + 3 = 7x$; $x^2 = 7x$

3. $x^2 – x = 7$; $x = 7$.“

Deutung:

Beim Gleichungslösen, besonders bei quadratischen Gleichungen, kommt es vor, dass die Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt wird. Der Studierende versucht die Unbekannte zu isolieren, in dem er die Terme – 4x und 3 auf die andere Seite der Gleichung bringt.

- 4x wird mit einem positiven Vorzeichen auf die andere Seite gebracht, jedoch bei der 3 wird das Vorzeichen nicht gewechselt. Man könnte zwei verschiede Ursachen vermuten:

a) Der Studierende hat bei – 4x + 3 eine Klammer interpretiert, so dass beide Terme negativ sind, - (4x + 3), oder

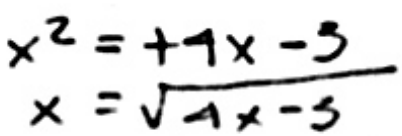
b) er vergaß, nachdem er das Vorzeichen von – 4x wechselte, dass er auch das Vorzeichen von 3 zu wechseln hatte.

Nach der „Isolierung“ $x^2 = 4x + 3$, kann man erkennen, dass der Studierende den Term 4x additiv verknüpft hat, denn er addiert 4 + 3 = 7 und setzt dann das x dazu.

Im nächsten Schritt intensiviert sich diese Annahme, da er $x^2 = 7x$, so zu lösen versucht, in dem er ein – x auf die andere Seite der Gleichung bringt.

So wird $x^2 – x = 7$ zu $x = 7$.

Möglicherweise hat der Studierende eine mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata, da el wahrscheinlich x^2 als zwei Objekte sieht und x subtrahiert, in dem „ein x weggeht“.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt MALLE (1993, 202-203)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

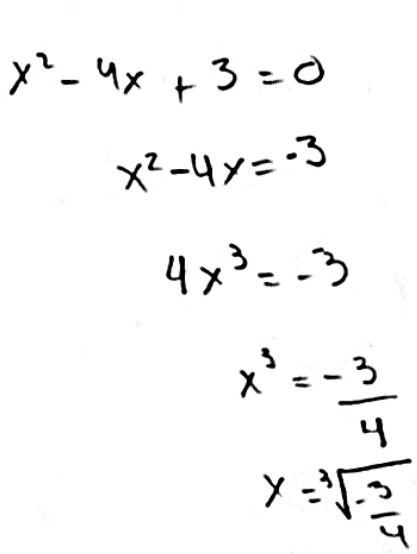
„1. Um x zu isolieren, muss ich die Terme, die nicht x^2 sind auf die andere Gleichungsseite bringen. – 4x addiere ich, 3 addiere ich auch.

2. Nun muss ich eine Wurzel ziehen, um x zu erhalten.“

Deutung:

Wie beim vorhergehenden Prozess, wird hier die Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt. Das Verfahren wurde hier algebraisch korrekt durchgeführt.

$x^2 = 4x - 3$; die Gegenoperation für eine Potenz ist Wurzelziehen, da ich x^2 habe, ziehe ich die quadratische Wurzel.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt MALLE (1993, 202-203) Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE(2000, S. 71) Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169) Reparatur einer Prozesslücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S, 71) Reparatur in der Prozesslücke MALLE(1993, S. 184) TIETZE (2000, S. 70)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Alle x-Terme lasse ich auf der linken Seite der Gleichung, die 3 subtrahiere ich auf der rechten Seite der Gleichung.

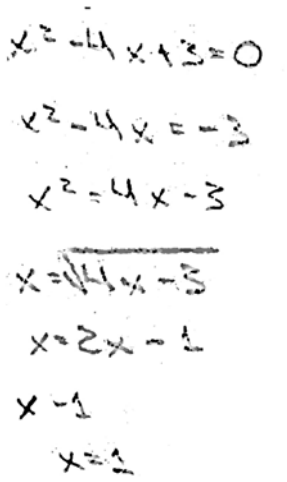
2. $x^2 - 4x = 4x^3$

Nun muss ich x isolieren.“

Deutung:

Durch einen Prozess in einer anderen Lernphase (lineare Gleichungen lösen), lässt wahrscheinlich der Studierende die x-Terme auf der linken Seite, und den unabhängigen Term (3) bringt er, mit einem negativen Vorzeichen, auf die rechte Seite der Gleichung.

Bei der Zusammenfassung von $x^2 - 4x$ zu $4x^3$, kann man ein Konkatenationsproblem vermuten, da der Studierende wahrscheinlich x^2 als zwei Objekte interpretiert und ein x dazuzählt. Das Minuszeichen wird ignoriert, wahrscheinlich erfolgt eine Reparatur, da ein Minuszeichen nicht in das Schema passt, das er aufgerufen hat, so erfolgt die Reparatur im Sinne „das Vorzeichen spielt keine Rolle".

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Unbekannte durch sich selbst ausgedrückt MALLE (1993, 202-203) Ursache in früheren Lernphasen SHEVAREV aus MALLE (1993, S. 169) Unzulässiges Linearisieren MALLE(1993, S. 175) TIETZE(2000, S. 72) Fehlkonzeptionen des Wurzelziehens

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Alle x-Terme lasse ich auf der linken Seite der Gleichung, die 3 subtrahiere ich auf der rechten Seite der Gleichung.

2. Ich muss jetzt die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung ziehen, um x = $\sqrt{4x-3}$

Die Wurzel von 4x ist 2x und die Wurzel von 3 ist 1. x = 2x – 1;

Ich erhalte x -1; daraus folgt x = 1."

Deutung:

Durch einen Prozess in einer anderen Lernphase (lineare Gleichungen lösen), meint vermutlich der Studierende, dass er alle x-Terme auf einer Seite der Gleichung haben muss, und alle unabhängigen Terme auf der anderen Seite der Gleichung.

Beim Wurzelziehen erfolgt eine unzulässige Linearisierung oder Zerlegung in Teile, da der Studierende vermutlich $\sqrt{4x}-\sqrt{3}$ errechnen möchte; wobei der nächste Fehler entsteht, bei der Vorstellung, dass die Wurzel von 4x nur aus der 4 gezogen wird. Später errechnet der Studierende die Wurzel von 3 als 1, vermutlich mit der Idee, dass es nicht 2 sein kann.

Testaufgabe 37

Diese Gleichung sollte durch faktorisieren gelöst werden. Es sind als korrekte Lösungen alle anerkannt worden, auch wenn sie durch andere Methoden, als faktorisieren, gelöst wurden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2+2x=0$	$x(2x+2)=0$ $x = -\frac{2}{2}$ $x=-1$	Faktor „x“ nicht als Faktor aufgefasst Zu enge Eingangsmerkmale TIETZE(2000, S. 70)

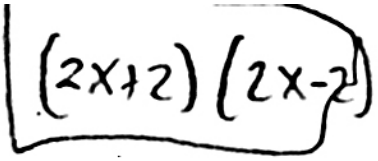
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich faktorisiere den Ausdruck, x (2x + 2)

Ich setze den Faktor (2x + 2) = 0 und isoliere die Unbekannte x = -1.“

Deutung:

Der Ansatz zur Lösung der Gleichung erfolgt mit einer korrekten Faktorisation. Der Studierende interpretiert jedoch nur einen Faktor (2x + 2), um einen Lösungswert für „x“ zu finden. Der Faktor x wird ignoriert, oder nicht als Faktor aufgefasst. Zu enge Eingangsmerkmale könnte die Ursache dieses Fehlers sein, da der Faktor „x“ als Faktor nicht im Musterbeispiel (x + a) (x + b) = 0 mit den Lösungen x = - a und x = - b ; integriert werden kann.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2+2x=0$		Verlust der Übersicht, Art der Tätigkeit MALLE(1993, S. 202) Fehlerhafte Faktorisation

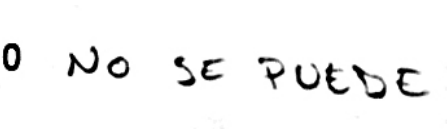
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich faktorisiere den Ausdruck; (2x+2)(2x-2).“

Deutung:

Es wurde kein gemeinsamer Faktor auf der linken Gleichungsseite aufgefasst, weder die 2, noch ein „x“. Der Studierende hat wahrscheinlich die Termstruktur nicht aufgefasst, oder kann sie nicht mit der Termstruktur einer dritten binomischen Formel vergleichen.

Durch den Aufwand der Faktorisation, hat der Studierende die Art der Tätigkeit vergessen, er setzt seine Faktorisation nicht gleich Null, und löst auch die Gleichung nicht.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2+2x=0$		

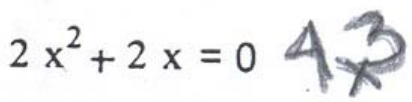
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Es geht nicht.“

Deutung:

Aus dem Kommentar des Studierenden, dass es nicht geht, geht nicht klar hervor, ob er die Faktorisation meint, oder das Isolieren der Unbekannten.

Der Studierende hat wahrscheinlich keine Vorstellungen von dem Begriff Gleichung, denn es scheint als könne der Studierende nicht Zahlen einsetzen und sehen, ob er eine findet, die als Lösung gelten könnte. Null wäre eine dieser Zahlen, an die man zuerst denken würde.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2 + 2x = 0$		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71) Verlust der Art der Tätigkeit MALLE(1993, S. 202)

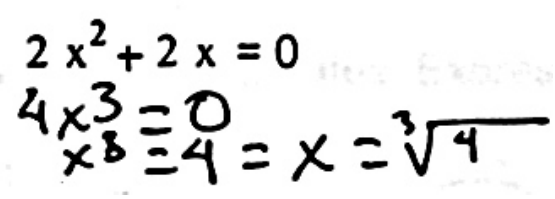
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich vereinfache $2+x^2+2+x= 4x^3$."

Deutung:

Der Studierende hat $2x^2$ und auch 2x additiv statt multiplikativ verknüpft, dadurch addiert er 2 + 2 und bei der Variable interpretiert er x^2 als zwei Objekte und addiert dann x, ein Objekt dazu, und erhält $4x^3$.

Der Studierende verliert die Übersicht der Art der Tätigkeit, er vergisst, dass es sich um eine Gleichung handelte und dass es um das Isolieren der Unbekannten ging.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71) Perseverationsfehler RADATZ(1980, S. 19) Mangelhafte Vorstellungen zum Begriff Gleichheitszeichen NOLTE(1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S. 68 und 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich vereinfache $2+x^2+2+x= 4x^3$.

2. $4x^3 = 0$, ich dividiere durch 4, um $x^3 = 4$ zu erhalten.

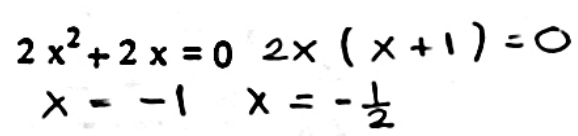
3. Da x eine Hochzahl 3 hat, muss ich die dritte Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung ziehen, also ist $x = \sqrt[3]{4}$.“

Deutung:

Wie beim vorhergehenden Prozess, bestehen Konkatenationsschwierigkeiten und mangelhafte Vorstellung zu Buchstabenschemata (siehe oben).

Im Gegensatz zum vorhergehenden Prozess, führt der Studierende hier seinen Prozess weiter aus, in dem er erkennt, dass es sich um eine Gleichung handelt und er die Unbekannte isolieren muss. Begeht aber im nächsten Schritt einen Fehler, der wahrscheinlich seinen Ursprung im Umgang mit der Null hat, da der Studierende 0/4 als 4 interpretiert. Es könnte sich auch um einen Perseverationsfehler handeln.

Aus dem Prozess geht auch hervor, dass der Studierende keine klaren Vorstellungen zum korrekten Gebrauch des Gleichheitszeichens hat, da er am Ende eine Kette mit Gleichheitszeichen bildet, in der $4 = \sqrt[3]{4}$ ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Keine Kontrollinstanz MALLE(1993, S. 164) Mangelhafte Vorstellungen mit der Null TIETZE(2000, S. 70) Reparatur im Lösungsprozess MALLE(1993, S. 184) TIETZE(2000, S. 71) Unterschied der Isolierungsformen einer Unbekannten nicht erkannt

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Zuerst werde ich faktorisieren, danach werde ich die einzelnen Faktoren gleich Null setzen.

2. (x + 1) = 0; führt zu x = -1

3. 2x = 0, für x aufgelöst ist x = - 1/2

Deutung:

Der Studierende hätte seine Werte für „x“ leicht überprüfen können, in dem er sie in die Gleichung eingesetzt hätte. Die Erfüllung der Gleichung beim Einsetzen der erhaltenen x-Werte ist ein Konzept, das wahrscheinlich dem Studierenden nicht geläufig ist. Die Kontrollinstanz, durch diesen Begriff, ist nicht vorhanden.

Es wird ein Fehler bei der Isolierung von der Unbekannten „x“ in der Gleichung 2x=0 gemacht. Wahrscheinlich hat der Studierende mangelhafte Vorstellungen mit der Null, und meint er könne 0 nicht durch 2 dividieren, es erfolgt dann eine Reparatur, in dem er nun 1 durch 2 dividiert. Außerdem verwechselt er wahrscheinlich, dass das Vorzeichen einer Menge sich nur dann ändert, wenn man eine Menge durch Addition oder Subtraktion auf die „andere Seite der Gleichung“ bringt, und nicht, wenn die Menge multiplikativ verknüpft war.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2+2x=0 \quad = (x)(2x^2+2x) =$ $2x^3+2x^2 = x^3+x^2$		Verlust der Art der Tätigkeit MALLE(1993, S. 202) Fehlvorstellungen zu den Operationen in einem algebraischen Ausdruck

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

?

Deutung:

Seine Prozesse in einer Gleichungskette weiter zu schreiben, bringt es mit sich, dass der Studierende die Übersicht über die Art der Tätigkeit verliert. Die Null auf der rechten Gleichungsseite wird nicht weitergeführt und auch nicht beachtet.

Die Anweisung war, die Gleichung durch eine Faktorisation zu lösen. Wahrscheinlich hat der Studierende entdeckt, dass x ein gemeinsamer Faktor der beiden Summanden ist, und hat eventuell ein „x“ ausklammern wollen. Jedoch hat er nur den Faktor hingeschrieben und nicht mehr die einzelnen Summanden durch „x“ dividiert, um den zweiten Faktor zu erhalten.

Mit der Form, in der der Studierende die Aufgabe versucht zu faktorisieren, wird eine Multiplikation interpretiert, $x\ (\ 2x^2 + 2x) = 2x^3 + 2x^2$; danach nimmt er vermutlich innerlich die Idee wieder auf, dass es sich um eine Gleichung handelt, da er den linken Teil in der zweiten Reihe duch 2 teilt, in dem er jeden Summanden durch 2 teilt. Es könnte aber auch sein, dass der Studierende keine genaue Vorstellung über die „erlaubten“ Operationen in einem algebraischen Ausdruck hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x = -2x^2$ $x = -x^2$		Unbekannte durch sich selbst ausdrücken MALLE(1993, S. 202 und 203) Umformungen, die nicht zum Ziel führen MALLE(1993, S. 202 und 203)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss 2x2 auf die andere Seite der Gleichung bringen, mit einem negativen Vorzeichen.

2. Nun kann ich durch 2 dividieren

3. Ich weiß nicht weiter."

Deutung:

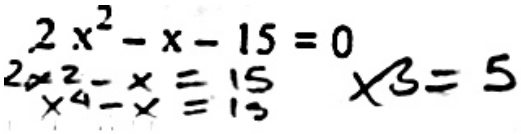
Beim Gleichungslösen und besonders beim Lösen von quadratischen Gleichungen kommt es oft vor, dass Studierende die Unbekannte durch sich selbst ausdrücken.

Seine Umformung und die Division durch 2, führen aber nicht zum Ziel, und der Studierende bricht seinen Prozess ab.

Testaufgabe 38

Formel der quadratischen Gleichungen sollte in dieser und der nächsten Aufgabe abgewandt werden. Alle Lösungsprozesse, wurden anerkannt, auch wenn sie nicht über die Formel der quadratischen Gleichungen gelöst wurden.

De Studierenden ist die Formel zur Lösung von quadratischen Gleichungen nicht geliefert worden. Bei den meisten Fehllösungen wurde auch keine Kontrolle über die Lösungswerte eingesetzt, so dass ein Studierender eventuell hätte vermuten können, dass seine Formel nicht korrekt gespeichert wurde. Einige Studierende hatten keine Erinnerung an die Formel.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$2x^2 - x - 15 = 0$		Mangelhafte Vorstellungen zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71) Verwechslung der Potenzen mit einer Multiplikation NOLTE (1991, S. 67) MALLE(1993, S. 166)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. -15 addiere ich auf der anderen Seite der Gleichung

2. $2x^2 = x^{2\,(2)} = x^4$

3. $x^4 - x = x^3$

4. $x^3 = 5$, denn ich habe 15/3 geteilt."

Deutung:

Der erste Schritt im Lösungsprozess ist die – 15 auf der anderen Gleichungsseite zu addieren.

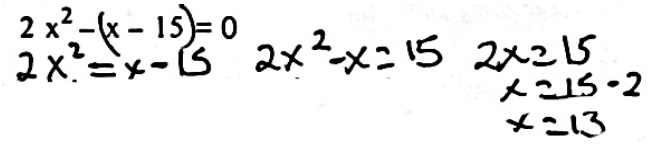
In den nächsten Schritten kann man erkennen, dass der Studierende vermutlich die Potenzen nicht als Potenzen interpretiert, sondern als Multiplikationen.

$2x^2 = x^4$, wenn er auch die 4 als Potenz weiterführt.

$x^4 – x = x^3$, wird die x^4 als 4x aufgefasst, ist $x^4 – x$ für den Studierenden 4x – x = 3x und $3x = x^3$.

Interpretiert er x^3 als 3x, so ist er konsequent, wenn er 15 durch 3 teilt, statt die dritte Wurzel zu ziehen.

Beim letzten Schritt vergisst er, dass er x^3 oder 3x eigentlich schon durch 3 geteilt hat, um 15/3 0 5 zu erhalten.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Klammersetzung wo der Studierende sie sehen will MALLE(1993, S. 192) Applikation der Regeln für lineare Gleichungen auf quadratische Gleichungen Subtraktion als „wegnehmen" interpretiert. NOLTE (1991, S. 66) Mangelhafte Vorstellungen zu Buchstabenschemata TIETZE (2000, S. 71)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich setze eine Klammer, die nichts ändert, aber mir hilft, um (x -15) auf der anderen Gleichungsseite zu addieren.

2. Ich werde jetzt „x" auf beiden Seiten subtrahieren.

3. Von x^2 „nehme ich ein x weg", es bleibt 2x = 15

4. Da 2x = 2 + x ist, muss ich nur noch 15 – 2 rechnen, um x = 13 zu erhalten."

Deutung:

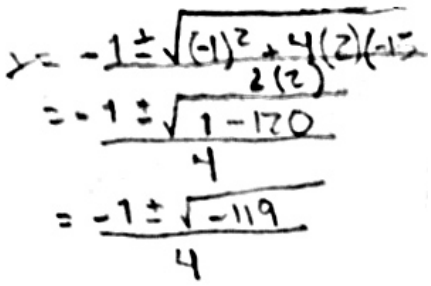
Der Studierende setzt eine Klammer, die die Gleichung und ihre Lösungswerte verändert. Klammern werden oft dort gesetzt, wo der Studierende sie sehen will.

Durch diese Klammersetzung kann er nun (x – 15) auf der anderen Gleichungsseite addieren.

Als nächsten Schritt wird dann x auf beiden Gleichungsseiten subtrahiert. Wahrscheinlich basiert der Studierende diese Methode, auf die Formen in der man eine lineare Gleichung löst (alle Terme mit der Unbekannten auf die linke Seite der Gleichung, alle unabhängigen Terme auf die rechte Seite).

Die Subtraktion wird vermutlich durch die Interpretation aus dem enaktiven Bereich als „Wegnehmen" aufgefasst, so ist bei $2x^2 – x$ ein x „weggenommen worden, und zu 2x verarbeitet worden. Eine andere Möglichkeit wäre, dass der Studierende x^2 als zwei Objekte auffasst und dadurch ein Objekt subtrahieren kann.

Die Deutung auf Konkatenationsfehler ist wieder evident, bei der Isolierung von „x" bei 2x = 15, wo 2 von 15 subtrahiert wird; also hat der Studierende die Aufgabe als 2+x= 15 interpretiert und dadurch zur Lösung x = 15 – 2 = 13 gerechnet.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Wahrscheinlich eine falsch gespeicherte Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich setze die Daten für a, b und c in die Formel ein und vereinfache sie:

2. $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-120}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-119}}{4}$

3. Hier kann ich nicht weiterrechnen, da die Zahl unter der Wurzel negativ ist."

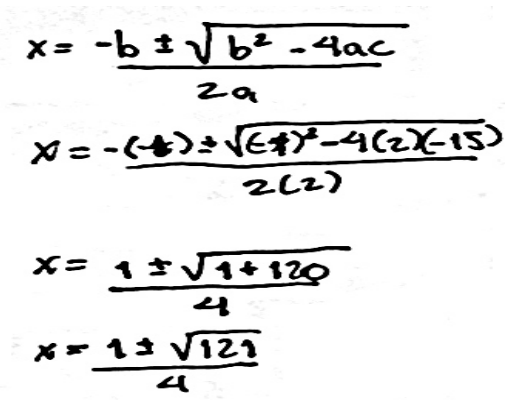
Deutung:

Der Studierende macht zwei Fehler mit den Vorzeichen.

Es ist nicht klar zu erkennen, aber es ist zu vermuten, dass der Studierende seine Formel zur Lösung von quadratischen Gleichungen als:

$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ gespeichert hat. Das Pluszeichen bei 4ac ist positiv, und dadurch wird 120 subtrahiert und gibt eine negative Menge als Diskriminante. Das Vorzeichen von b ist wahrscheinlich auch in der Formel positiv, so dass der Studierende -1 einsetzt.

Der Studierende bricht den Lösungsprozess ab, ohne ein Kommentar darüber, dass seines Erachtens die Gleichung keine reellen Lösungswerte hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Abhängigkeit des Taschenrechners

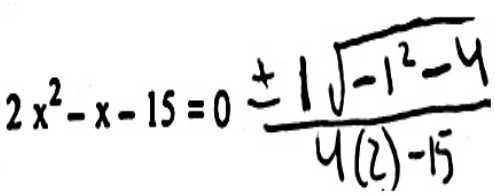
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich wende die Formel der quadratischen Gleichungen an.

2. Ich weiß die Wurzel von 121 nicht. Hätte ich einen Taschenrechner könnte ich die Wurzel ziehen, aber da ich keinen gebrauchen darf, spezifiziere ich die Lösungswerte für „x“ nicht.“

Deutung:

Auffallend ist bei diesem Lösungsprozess nur, dass der Studierende die Wurzel von 121 nicht ohne Taschenrechner ziehen kann. Es zeugt davon, wie sehr der Studierende vom Taschenrechner abhängig ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Keine Erinnerung an die Formel für quadratische Gleichungen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich setze die Daten, a = 2, b= - 1 und c= - 15 in die Formel ein.

2. Die Diskriminante wird negativ sein, also kann ich diese Wurzel nicht ziehen."

Deutung:

Der Studierende hat keine klare Vorstellungen über den Aufbau der Formel zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Dieses geht aus dem Prozess hervor, in dem er wahrscheinlich die Daten von a, b y und c in die Formel einsetzt.

Seine Formel, so wie er sie gespeichert hat ist wahrscheinlich:

$$\frac{\pm b \cdot \sqrt{b^2 - 4}}{4 \cdot a + c}$$

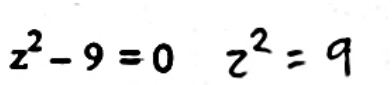
Diese Deutung der Formel kann auch durch die Termstruktur des Studierenden fehlinterpretiert sein, da man nicht weiß, ob der Studierende beispielsweise im Nenner c addiert hat, oder eine Multiplikation beabsichtigt hat und durch das Vorzeichen von c, welches negativ ist, eine Subtraktion entstanden ist, weil er keine Klammer setzt.

Testaufgabe 39

Bei der Gleichung $z^2 - 9 = 0$, sollte geprüft werden, ob Studierende den Wert von b als Null interpretieren und wie sie mit diesem Wert in der Formel umgehen.

Eine Großzahl von Studierenden haben ihren Ansatz zur Lösung anders vorgenommen. Es wurden als richtige Antworten, alle Lösungsprozesse angesehen, welche korrekt waren, auch wenn sie nicht über die Formel der quadratischen Gleichungen gelöst wurden.

Sowohl in der Anwendung der Formel als auch bei anderen Lösungsprozessen wurde eine Vielfalt von Fehllösungen gefunden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Nicht Identifikation, dass quadrieren und quadratische Wurzel ziehen, Gegenoperationen sind.

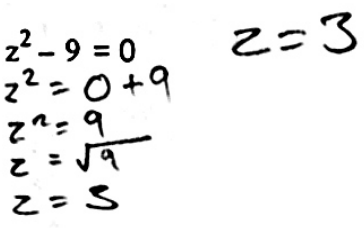
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Die 9 kann ich auf beiden Seiten der Gleichung addieren, so erhalte ich $z^2 = 9$.

2. Ich weiß nicht weiter."

Deutung:

Der Studierende hat den ersten Schritt korrekt ausgeführt, weiß aber wahrscheinlich nicht, wie er nun die Unbekannte „z" isolieren kann. Es könnte sein, dass die Hochzahl zwar identifiziert (er schreibt sie klar mit), jedoch nicht darauf kommt, dass er eine quadratische Wurzel auf beiden Gleichungsseiten ziehen kann.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehlinterpretation in der Lösungsmenge in der Literatur noch nicht gefunden.	Ursachen in früheren Lernphasen (Arithmetik) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 169)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

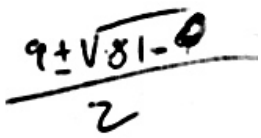
„1. 9 addiere ich auf beiden Seiten der Gleichung.

2. Die Wurzel von 9 ist 3."

Deutung:

Der Studierende hat den Lösungsprozess, im Gegensatz zum vorhergehenden Prozess, weitergeführt. Er zieht auf beiden Seiten der Gleichung die quadratische Wurzel, erhält. Identifiziert aber bei der Lösungsmenge nur die positive Wurzel von 9, nämlich + 3.

Die Hauptwurzel von 9 ist 3, jedoch generieren sich bei der Lösung der Gleichung $z^2 = 9$ zwei Lösungen, nämlich + 3 und –3. Die Ursache dieses Fehlers könnte in früheren Lernphasen liegen (in der Arithmetik), da der Studierende die Bedeutung der Gleichung mit ihren Lösungen nicht erfasst hat.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$z^2 - 9 = 0$		Fehlerhafte Informationsaufnahme NOLTE(1991, S. 67) SHEVAREV aus MALLE(1993, S. 167) b und c verwechselt

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. a = 1 und b = - 9.

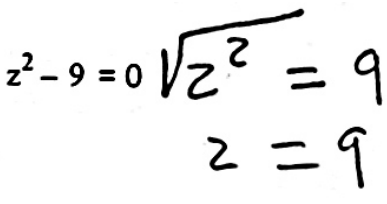
2. Die Formel ist: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3. $\frac{9 \pm \sqrt{81 - 0}}{2}$; ich weiß nicht weiter."

Deutung:

Der Studierende identifiziert den Wert – 9, statt als c-Wert als b-Wert. Der Wert von c muss nun als c = 0 gedeutet werden.

Der Studierende setzt „seine Daten" ein, setzt den Lösungsprozess aber nicht fort, obwohl er in der Wurzel eine 81 zu stehen hat, die eine Quadratzahl ist.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verlust der Prozesshierarchien MALLE(1993, S. 186)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich addiere auf beiden Seiten der Gleichung 9, erhalte $z^2 = 9$

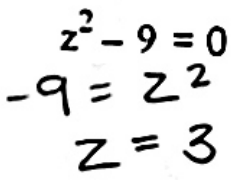
2. Um die Unbekannte zu isolieren, muss ich die Wurzel von z^2 ziehen.

3. z = 9."

Deutung:

Obwohl der Studierende nach dem ersten Schritt eine andere Umformung vornimmt, ist zu ersehen, dass er als ersten Schritt $z^2 = 9$ erhält.

Wahrscheinlich vergisst der Studierende, dass man die Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung ziehen muss. Er realisiert es erst auf der linken Seite der Gleichung vergisst dann wahrscheinlich es auch auf der rechten Seite der Gleichung. Vermutlich hat das Darrüberschreiben des Wurzelzeichens einen Einfluss auf den Fehlprozess, da er erst an die Wurzel für z^2 denkt, aber dann die 9 schon zu stehen hatte.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Wurzelziehen einer negativen Zahl im reellen Bereich der Zahlen noch nicht gefunden.	Unangemessene Bedeutung der Gleichheitsseiten. Wurzel von – 9 im reellen Bereich der Zahlen gezogen

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich bringe z^2 auf die andere Gleichungsseite, indem ich es auf der anderen Seite addiere.

2. Ich ziehe auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel: Wurzel von z^2 ist z und die Wurzel von – 9 ist 3."

Deutung:

Es ist zu vermuten, dass der Studierende die Gleichungsseiten verwechselt oder den Seiten der Gleichung nicht die angemessene Bedeutung gibt. Man kann erkennen, dass seine Unbekannte von einer Seite der Gleichung auf die andere hin und her „geschoben" wird. z^2 auf einer Seite der Gleichung ist dasselbe als auf der anderen Seite der Gleichung.

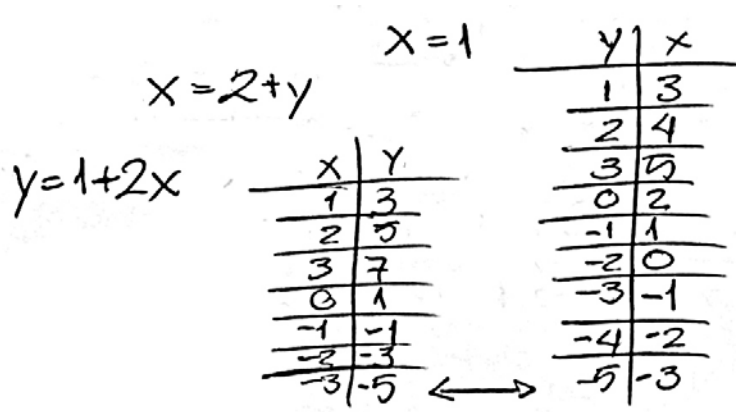
Beim nächsten Schritt ist sich der Studierende nicht bewusst, dass im Bereich der reellen Zahlen, die Wurzel von 9 nicht existiert.

Anhang 9: Ermittlung eines Schnittpunkts von zwei Geraden, Graph einer Geraden und Aufgabe mit Realitätsbezug

Testaufgaben: 40 – 42

Testaufgabe 40

Bei dieser Aufgabe, wie bei der nächsten sollten außer den typischen Fehlern auch Strategien untersucht werden. Bei jeder Aufgabe (40 und 41) ist ein Lösungsprozess nicht falsch, sondern fällt durch die Lösungsstrategie auf und die limitierten Vorstellungen der Geraden auf.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Kein Fehler, nur eine aufwendige Form den Schnittpunkt zu finden.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich stelle zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade.

2. Da ich in der ersten Gleichung x isoliert habe, werde ich y-Werte einsetzen und x errechnen (siehe rechte Tabelle)

3. Bei der zweiten Gleichung werde ich x-Werte einsetzen und y errechnen.

4. An der Stelle, wo bei beiden Tabellen x- und y-Werte gleich sind, habe ich den Schnittpunkt; dieses geschieht bei x = -3 und y = - 5.

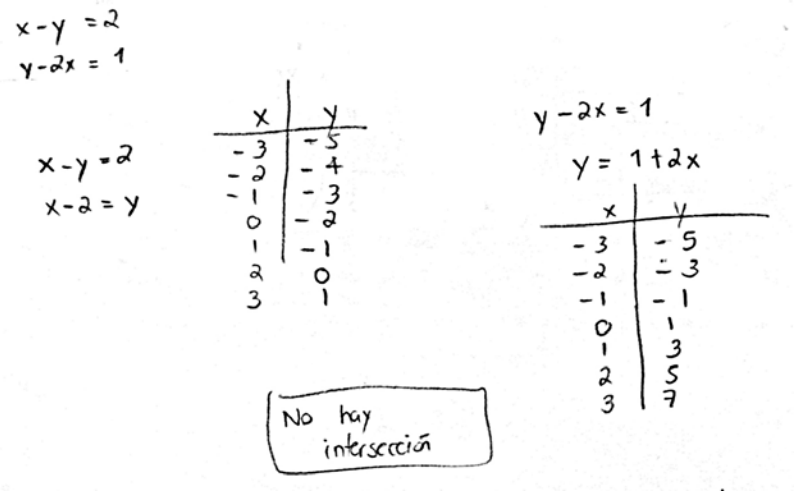
Deutung:

Der Studierende stellt zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade, in der er die x- und y-Werte errechnet, für die jeweiligen Gleichungen.

Er interpretiert den Schnittpunkt der beiden Geraden an der Stelle, wo die x- und y-Werte, der beiden Geraden, in der Tabelle gleich sind.

Dieses Verfahren zeugt von einer adäquaten Interpretation des Studierenden, jedoch sehr aufwendig, und wahrscheinlich wenig praktisch, wenn der Schnittpunkt nicht zwischen den x-Werten von – 3 zu 3 liegt.

Es besteht, durch die Lehrformen in Mexiko, eine sehr starke Tendenz, alle Graphen durch aufstellen einer Tabelle von x = -3 bis x = 3 zu zeichnen (es wird in verschienen Prozessen evident werden).

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
 Fehlvorstellung in der Literatur noch nicht gefunden.		Keine Vorstellung über die Charakteristika der Schnittpunkte von zwei Geraden, als gemeinsamen Punkt (mit den gleichen x- und y-Werten)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

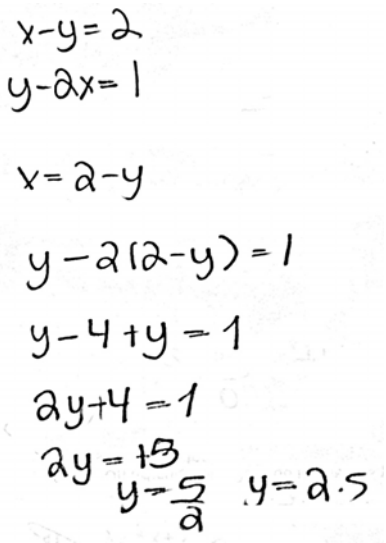
„1. Ich stelle zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade, für beide setze ich x-Werte von -3 zu 3 ein, und errechne die jeweiligen y-Werte.

2. Es gibt keinen Schnittpunkt."

Deutung:

Obwohl, der erste Punkt (-3, -5) für beide Geraden der gleiche ist, und somit der Schnittpunkt der Geraden ist, wird dieses durch den Studierenden nicht erkannt. Es besteht die Möglichkeit, dass er eine Graphik der Geraden aufstellen wollte, jedoch der Aufwand zu groß war und den Prozess abgebrochen hat. Es ist auch

möglich, dass er keine adäquate Vorstellung darüber hat, dass jedes Wert-Paar einen Punkt auf der jeweiligen Geraden ist, und dass, wenn die Geraden einen gemeinsamen Punkt haben, es den Schnittpunkt darstellt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.	Unangebrachte Vor-Stellungen zum Schnittpunkt von zwei Geraden, fehlen der Berechnung vom x-Wert.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich werde diese Aufgabe algebraisch lösen.

2. Das Substitutionsverfahren zur Lösung von simultanen linearen Gleichungen ist mir bekannt.

3. Bei der ersten Gleichung isoliere ich x, um es dann in die zweite Gleichung einzusetzen. x – y = 2 daraus folgt: x = 2 – y

4. Nun setze ich diesen Wert für „x“ in die zweite Gleichung ein.

y – 2 x = 1; y – 2 (2 – y) = 1; y + 4 + y = 1; 2y + 4 = 1

5. Die – 4 kommt auf die andere Gleichungsseite, ach nein, sie muss auf der anderen Gleichungsseite addiert werden.

6. Ich isoliere y; y = 2,5.“

Deutung:

Der Studierende macht ein Substitutionsverfahren, um den Schnittpunkt der beiden Geraden algebraisch zu errechnen.

Es ist zu erkennen, dass der Studierende etwas unsicher bei den Umformungen oder Isolierungen ist, besonders, wenn diese auf der Addition oder Subtraktion basieren. In der sechsten Prozesszeile ist zu erkennen, dass er die – 4 mit ei-

nem leichten Strich in eine + 4 verwandelt, wahrscheinlich um zu wissen, dass er sie auf der anderen Seite der Gleichung addieren muss. Dieses hat er anfangs nicht getan, denn man kann eine – 3 unter der + 5 im nächsten Schritt erkennen.

Gerade dieser Fehler, bei der Isolierung von x, um die Substitution vornehmen zu können, ist dem Studierenden unterlaufen. Von x – y = 2 wird x = 2 – y.

Alle anderen Schritte sind korrekt ausgeführt, jedoch wird nicht der Schnittpunkt spezifiziert, da nur der y-Wert angegeben wird.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x - y = 2 x = 2y y - 2x = 1 y = 3x		Keine Vorstellungen zur Aufgabenstellung Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Gleichheitszeichen als Aufgabe -Ergebnis-Deutung, Interpretation als Aktionszeichen NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S. 68 und 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x – y = 2 ist x = 2 + y = 2y

2. y – 2x = 1 ist y = 2x + 1 = 2 + x + 1 = 3 + x = 3x."

Deutung:

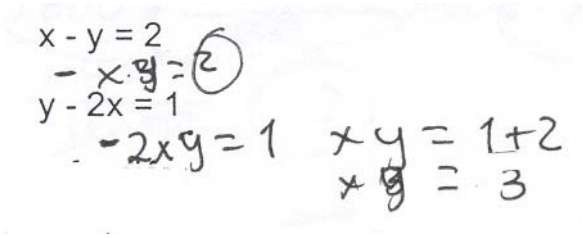
Es scheint, als habe dieser Studierende die Aufgabenstellung nicht aufgenommen, da er keinen Schnittpunkt sucht.

Auf der anderen Seite isoliert er bei jeder Gleichung die Variable, die als erste dasteht. Bei dieser Isolierung wird wahrscheinlich ein Konkatenationsproblem evident, da er:

x – y = 2 ist x = 2 + y = 2y

y – 2x = 1 ist y = 2x + 1 = 2 + x + 1 = 3 + x = 3x rechnet.

Eventuell besteht auch eine Fehldeutung des Gleichheitszeichens, als ein Aktionszeichen. 2 + y kann nicht als solches bestehen, es wird zu 2y umgeformt, 2x + 1 muss zu 3x umgeformt werden.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Konkatenationsfehler NOLTE (1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135) Gleichheitszeichen als Aufgabe -Ergebnis-Deutung, Interpretation als Aktionsweichen NOLTE (1991, S. 48) MALLE(1993, S. 137) TIETZE(2000, S. 68 und 72)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x – y ist gleich – xy, also –xy = 2

2. y – 2x ist das selbe wie; - 2xy; also ist - 2xy = 1.

3. Ich muss die Gleichungen simultan lösen, und kann ein Additions- oder Subtraktionsverfahren anwenden.

4. Ich addiere die 1 und die 2 der beiden Gleichungen und subtrahiere

– xy – (-2xy) = + xy

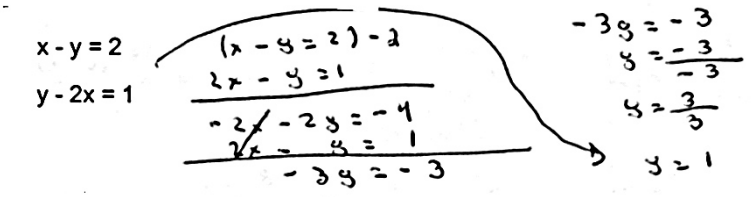
5. Ich erhalte xy = 3, dann weiß ich nicht weiter."

Deutung:

Für den Studierenden ist xy additiv verknüpft, dadurch addiert er x – y zu – xy, und y – 2x ist für ihn; y – 2 ± x = - 2 xy.

Als nächsten Prozessschritt versucht der Studierende die simultanen Gleichungen mit einem Additions- und Subtraktionsverfahren zu lösen. Er „eliminiert" aber dabei keine von den Variablen, er addiert die rechten Seiten der Gleichungen und subtrahiert die linken Seiten der Gleichungen; (2 + 1 = 3; - xy – (-2xy) = xy). Wahrscheinlich hat der Studierende eine vage Ahnung der Lösungsformen von simultanen Gleichungen, da er ein Additions- und Subtraktionsverfahren versucht, jedoch nicht eine der Variablen dabei „eliminiert". Dieses ist durch seine Form der Notation oder Konkatenationsfehler auch nicht mehr möglich.

Er gibt keine Angaben über den Lösungswert von x und y. Es scheint als habe der Studierende keine Vorstellung zum Begriff Schnittpunkt zweier Geraden, als einen Punkt mit einem x- und einem y-Wert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
x - y = 2 y - 2x = 1		Nichtbeachtung von Prozedurhierarchien MALLE (1993, S. 186) Nicht Berechnung des x-Wertes.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich werde den Schnittpunkt der Geraden algebraischen lösen, in dem ich ein Additions- und Subtraktionsverfahren anwende.

2. Ich muss eine der Variablen durch Addition oder Subtraktion „eliminieren“, in diesem Falle „x“.

3. Um „x“ zu „Eliminieren“ muss x in der ersten Gleichung den selben Koeffizienten haben wie in der zweiten Gleichung, aber mit entgegengesetzen Vorzeichen (ich werde die Gleichungen addieren). Ich multipliziere die erste Gleichung mit (-2), und bei der zweiten Gleichung brauche ich 2x mit einem positiven Vorzeichen, um die Gleichungen addieren zu können.

4. (x – y = 2) mal -2 ist: 2x – 2y = -4

5. y – 2x = 1, forme ich zu 2x – y = 1 um, in dem ich die linke Seite der Gleichung mit (-1) multipliziere (die Vorzeichen ändere).

6. Die resultierenden Gleichungen addiere ich: -2x – 2y = - 4 und 2x – y = 1 ist:

-3 y = -3.

7. Ich isoliere y = -3/-3 = 1.

8. Das Resultat ist y = 1.“

Deutung:

Die simultanen Gleichungen werden durch das Additions- und Subtraktionsverfahren gelöst. Dazu multipliziert der Studierende die erste Gleichung mal (- 2), in der Absicht die Variable „x“ zu „eliminieren“. Dabei begeht er einen Fehler mit dem Distributivgesetz des Minuszeichens, da er –y (-2) als -2y niederschreibt. Er multipliziert beide positiven Terme mit – 2 und erhält negative Terme, jedoch ist das nicht der Fall bei – y (- 2). Gehen wir davon aus, dass nur ganz selten Fehler zufälliger Art sind, muss man annehmen, dass der Studierende bei der

Ausführung der Unterprozedur die Kontrolle über den Gesamtablauf verloren hat.

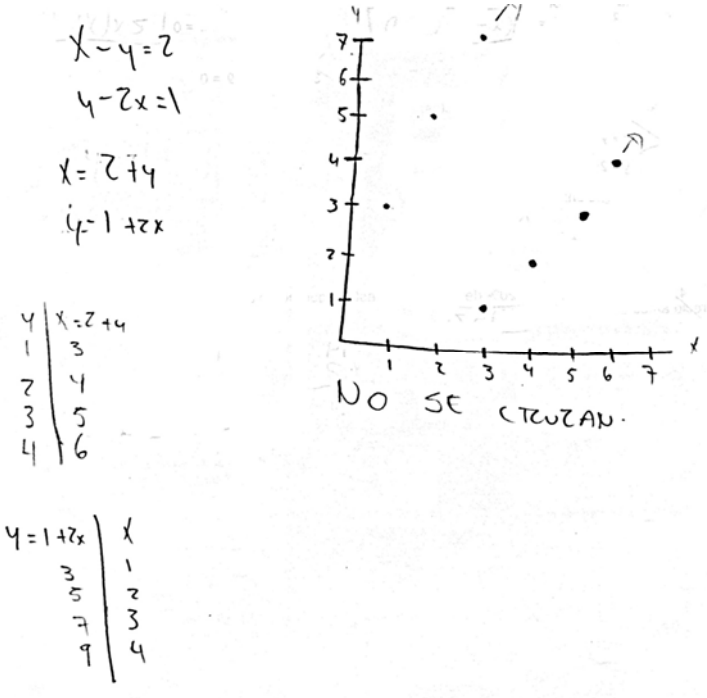
Bei der Umformung der zweiten Gleichung resultiert ein Fehler, als er y – 2x = 1 zu 2x – y = 1 verändert. Er ändert nur die Vorzeichen der Terme auf der linken Seite der Gleichung, welches vermutlich zwei Ursachen haben könnte:

a) Er hatte die Absicht die Gleichung mit (-1) zu multiplizieren, verlor aber bei der Unterprozedur die Kontrolle und vergaß den Term auf der rechten Seite der Gleichung mit (-1) zu multiplizieren.

b) Da Studierende oft die Art der Tätigkeit verwechseln, könnte es auch sein, dass der Studierende eine „Umformung“ auf der linken Seite der Gleichung macht. Oder, vermutlich hat er keine adäquate Vorstellung über Umformungen und Gleichungen, und verwechselt diese Tätigkeiten.

Ein anderer Fehler resultiert wahrscheinlich durch eine nicht adäquate Vorstellung des Begriffs, Schnittpunkt, da der Studierende nur den y-Wert errechnet, und nicht den x-Wert.

Studierende haben oft limitierte Vorstellungen über die Formen der „Elimination“ von Variablen, da sie meistens ein Additionsverfahren verwenden, und auch meistens, wie in diesem Fall zu erkennen ist, die Variable „x“ eliminieren wollen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
	 Diesen Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.	Unangebrachte Vorstellung zum Begriff lineare Funktion, als eine kontinuierliche Linie (Gerade). Vorstellung des Koordinaten-Systems, wahrscheinlich nur zum ersten Quadranten. Verlängerung der Geraden in andere Quadranten nicht erfolgt, dadurch auch ein nicht erkennen des Schnittpunkts.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Bei der ersten Gleichung isoliere ich x, so muss ich y-Werte einsetzen, was ich in einer Tabelle wiedergeben kann.

2. Bei der zweiten Gleichung isoliere ich y und setze x-Werte ein.

3. Für jede Tabelle (Gleichung) trage ich die x- und y-Werte (als Punkte) in ein Koordinaten-System ein.

4. Die Punkte werden wahrscheinlich (wenn ich weitere positive Zahlen einsetze) sich nach oben hin fortführen.

5. Es ist kein Schnittpunkt zu erkennen. (No se cruzan, sie kreuzen sich nicht).“

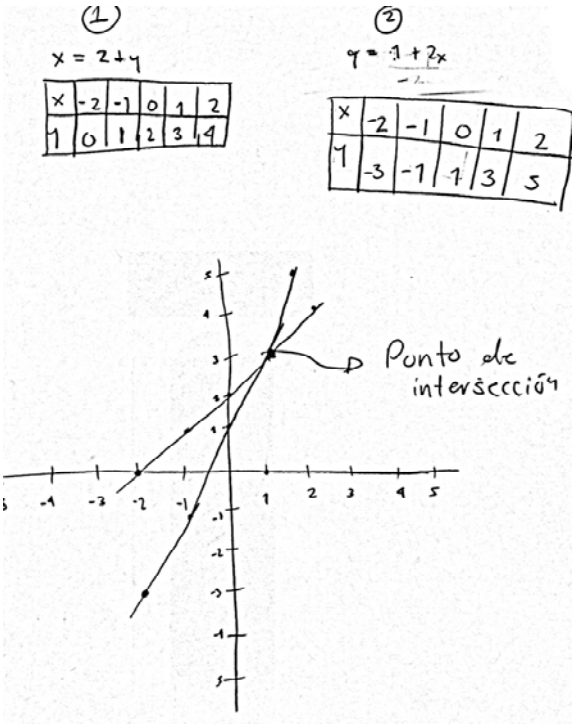
Deutung:

Der Studierende stellt zwei Tabellen auf, eine für jede Gerade. Bei der ersten Gleichung isoliert er $x = 2 + y$, in der Tabelle gibt er y die Werte von 1 bis 4 und errechnet den x-Wert.

Bei der zweiten Gleichung isoliert er $y = 1 + 2x$, und gibt für x die Werte von 1 bis 4.

Dann trägt er diese Punkte für beide Geraden in ein Koordinaten-System ein. Er verbindet, für jede Gerade, die Punkte nicht, und verlängert auch nicht die Geraden, um einen Schnittpunkt zu finden. Eine mögliche Deutung wäre, dass der Studierende mechanisch die „Punkte“ für jede Gerade errechnet, diese in das Koordinaten-System einträgt, jedoch keine angebrachte Vorstellung zum Begriff Funktion hat. So wäre es fraglich, ob der Studierende die Punkte, die er in der Tabelle errechnet, als spezifische Punkte auf einer Geraden interpretiert, und weiß, dass sie durch eine gerade Linie verbunden werden können und diese Linie verlängert werden kann. Außerdem scheint die Vorstellung einer Geraden, die unendlich, nach beiden Seiten fortgeführt werden kann, nicht vorhanden zu sein, obwohl er nach oben hin (siehe Lösungsprozess) zwei Pfeile eingezeichnet hat.

Vermutlich hat der Studierende auch limitierte Vorstellungen über die einzusetzenden Werte von „y“ oder „x“, da er nur positive Werte einsetzt.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Verwechslung der Variablen „x“ und „y“.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. x – y = 2, modifiziere ich zu: x = 2 + y

2. y – 2x = 1 ist; y = 1 + 2x

3. Für jede Gerade setze ich eine Tabelle auf, in der ich für x, die Werte von -2, -1, 0, 1 und 2 einsetze.

4. Die Graphik von jeder Geraden ist die Verbindung der betreffenden, einzelnen Punkte.

5. Den Schnittpunkt habe ich dort, wo sich beide Geraden schneiden, den Punkt spezifiziere ich mit einem Pfeil.“

Deutung:

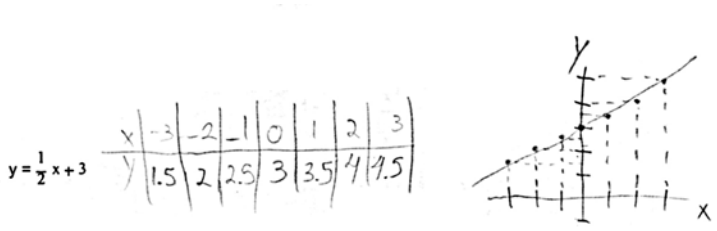
Für jede Gerade wird eine Tabelle angelegt, in der die x- und y-Werte errechnet werden. Der Fehler resultiert vermutlich durch ein nicht erkennen der Variablen in der ersten modifizierten Gleichung: x – y = 2 wird zu x = 2 + y modifiziert, und nicht erkannt, dass die x-Werte als y-Werte eingesetzt werden. Es scheint als habe der Studierende eine rein mechanische Form zum Lösungsprozess

eingesetzt und nicht darüber reflektiert, dass er die Variable x, als abhängige Variable, isoliert hat. So dass die Graphik der Geraden: y = 2 + x entseht.

Durch diesen Fehler, ist auch der Schnittpunkt nicht korrekt. Es werden zwar die Koordinaten des Schnittpunktes nicht angegeben, jedoch ist aus dem Lösungsprozess zu erkennen, dass der Studierende eine adäquate Vorstellung zum Begriff Schnittpunkt hat, da dieser als gemeinsamer Punkt beider Geraden interpretiert wird.

Das Einsetzen der x-Werte von -2 bis 2 oder von -3 bis 3, ist charakteristisch (wie schon vorher erwähnt) für das Lehren von Graphiken von Funktionen, in Mexiko.

Testaufgabe 41

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		Kein Fehler als solcher, eventuell eine limitierte Vorstellung zum Begriff Gerade oder ein nicht erkennen der Struktur einer Funktion, die eine Gerade repräsentiert.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich lege eine Tabelle an, und errechne die y-Werte für die x-Werte von -3 bis 3.

2. Diese Punkte, muss ich in ein Koordinaten-System eintragen.

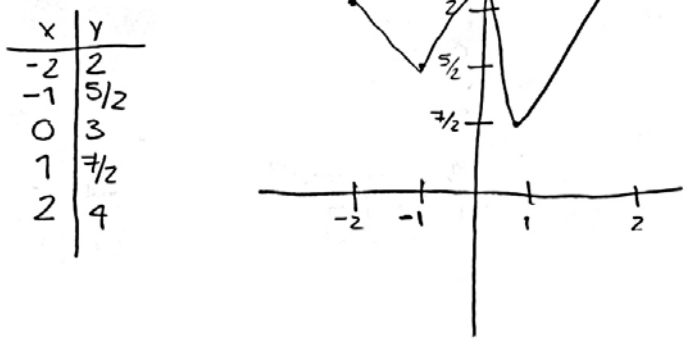
3. Um die Funktion zu erhalten, muss ich die Punkte verbinden."

Deutung:

Dieser Lösungsprozess, wenn auch ohne Fehler, weist darauf hin, dass der Studierende wahrscheinlich keine adäquate Vorstellung zum Begriff Gerade hat, oder, dass er die Struktur einer Funktion, die eine Gerade repräsentiert, nicht erkennt. Diese könnte durch zwei Punkte gezeichnet werden kann. Er hat wahr-

scheinlich das Konzept einer Funktion als eine Serie von Punkten, die verbunden werden müssen.

Das nicht Erkennen dieser Struktur kann, zu Fehlern führen, da der Studierende eventuell nicht weiß, dass es sich um eine Gerade handelt. Man kann dieses im nächsten Lösungsprozess erkennen.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		Keine adäquate Vorstellung einer Funktion, die eine Gerade darstellt. Fehler bei der Interpretation der Punkte, die die y-Werte der Geraden repräsentieren, wenn diese eine Fraktion darstellen.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich setze eine Tabelle auf, in der ich x die Werte von -2 bis 2 gebe, um dann die y-Werte zu errechnen.

2. Jedes Paar von x- und y-Werte trage ich in das Koordinaten-System ein.

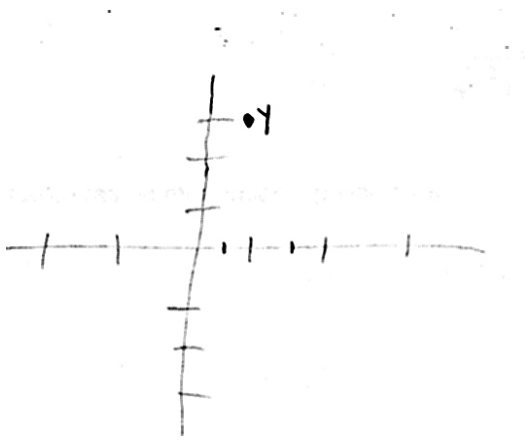
3. Dann verbinde ich die fünf Punkte."

Deutung:

Der Studierende hat wahrscheinlich keine Vorstellungen zu den Funktionen, die eine Gerade repräsentieren. Dieser Fehler resultiert vermutlich durch eine Fehlinterpretation der gebrochenen Werte für y, wie in der Tabelle zu ersehen ist, die y-Werte werden korrekt errechnet, aber auf dem Koordinaten-System falsch eingetragen. Anscheinend interpretiert der Studierende die Brüche, 5/2 und 7/2 als 2/5 und 2/7, da der Wert 5/2 „größer" ist als der Wert 7/2. Dieses weist darauf hin, dass der Studierende zwar mit Brüchen rechnen kann, jedoch deren Wert nicht interpretieren kann.

Es scheint auch, als habe der Studierende wenig Beziehung zu differenzierbaren Funktionen, da er die lineare Funktion mit Punkten einzeichnet, die nicht differenzierbar sind, wie z.B. x = -1, x =0 und x = 1.

x	-2	-1	0	1	2
y	½ (-2)+3=2 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet	½(-1)+3=5/2 Korrekt errechnet, falsch eingezeichnet	½(0)+3= 3 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet	½(1)+3 = 7/2 Korrekt errechnet, falsch eingezeichnet	½(2)+3=4 Korrekt errechnet, korrekt eingezeichnet

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y = \frac{1}{2}x + 3$	 Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.	Keine adäquate Vorstellung einer Funktion, die eine Gerade darstellt.

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Ich muss eine Graphik der Funktion y = ½ x + 3 aufstellen, dazu brauche ich Anhaltspunkte.

2. Der y-Wert ist 3 und der x-Wert ½. Der Punkt (1/2, 3) ist die Graphik."

Deutung:

Der Studierende identifiziert bei der Gleichung zwei Werte, ½ und 3. Statt diese als die Steigung der Geraden und den Schnittpunkt mit der y-Achse zu interpretieren, setzt er sie mit den Koordinaten eines Punktes gleich. Der Fehler resul-

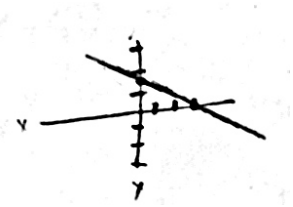
tiert wahrscheinlich durch eine mechanische Identifikation von zwei Werten (m und b) einer linearen Gleichung (y = mx + b).

Da eine lineare Funktion im Koordinaten-System durch Punkte aufgezeichnet werden kann, besteht vermutlich die vorher genannte Interpretation. Es könnte sein, dass der Studierende diesen Punkt:

a) mit der Zeichnung des Schnittpunktes der y-Achse und die darauffolgende Interpretation der Zeichnung der Steigung verwechselt, „eine Einheit nach oben und zwei Einheiten nach rechts“, also ½.

b) dass er die Schnittpunkte mit den Achsen verwechselt. Ist x = 0, so ist y = 3 der andere Wert ist ½, daraus entsteht der Punkt (½ , 3).

Die Darstellung einer linearen Funktion und dessen Struktur als Gleichung ist dem Studierenden vermutlich nicht geläufig.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
$y = \frac{1}{2}x + 3$  Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		Vereinfachung durch eine Fremdstrategie TIETZE (2000, S. 70) Konkatenationsfehler NOLTE(1991, S. 41) MALLE(1993, S. 135)

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y = ½ x + 3; ist x = 0 so ist y = 3

2. Ist y = 0, so ist 0 = ½ x + 3; x = 3/2.

3. Die Punkte (0,3) und (3/2, 0) werden in das Koordinaten-System eingesetzt.

4. Ich verbinde beide Punkte zu einer Geraden.“

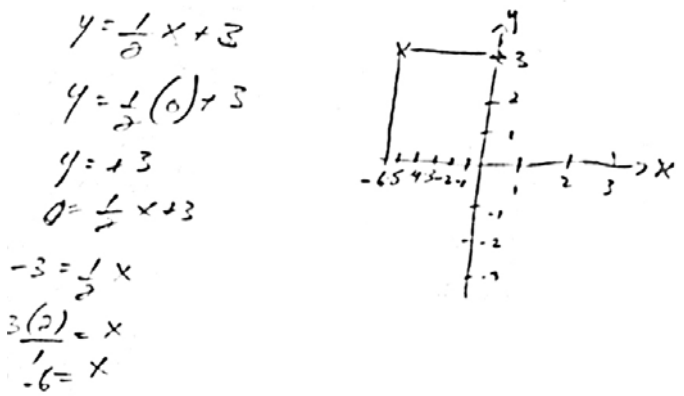
Deutung:

Der Studierende hat die Vorstellung, dass die Gleichung durch eine Gerade repräsentiert werden kann, und dieses durch die jeweiligen Schnittpunkte mit den Achsen erfolgen kann.

Die Fehler resultieren bei der Interpretation und Errechnung dieser Schnittpunkte. Die Kalkulation des Schnittpunktes mit der y-Achse erfolgt korrekt, jedoch wird der Punkt durch eine vermutliche Verwechslung der x- und y-Achse falsch eingetragen, nämlich als Schnittpunkt mit der x-Achse. Der Studierende hat die x- und y-Achse benannt, so dass kein Zweifel bei den Achsen besteht.

Bei der Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse entsteht möglicherweise ein Fehler bei der Isolation der Variablen „x". Eventuell weist der Studierende Konkatenationsprobleme auf, da er ½ x + 3 als 3/2 x und x = 3/2 interpretiert. Es könnte auch durch den Studierenden eine Fremdstrategie zur Vereinfachung der Aufgabe angewandt worden sein, im Sinne: 0 = ½ x + 3; 0 = 3/2 x ; daraus folgt: x = 3/2. Dieser Wert für x ist in der Graphik, als Schnittpunkt mit der y-Achse, zu erkennen, da kein Lösungsprozess vorliegt. Der Punkt (3/2 , 0) wird auch als Punkt (0, 3/2) eingesetzt.

Vermutlich hat der Studierende keine adäquate Vorstellung zum Begriff, Schnittpunkte mit den Achsen und wahrscheinlich auch Schwierigkeiten mit der Lokalisierung der Punkte (x- und y-Werte) im Koordinaten-System.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
		„Null ist nichts, die kann man weglassen" TIETZE (2000, S. 68 und 70) Die x- und y-Werte, die die Gleichung erfüllen werden nicht als Punkte auf der Geraden interpretiert.
Fehler in der Literatur noch nicht gefunden.		

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. y = ½ x + 3; ist x = 0 so ist y = 3

2. Ist y = 0, 0 = ½ x + 3; ist x = - 6.

3. Diesen Punkt (- 6, 3) muss ich im Koordinaten-System eintragen."

Deutung:

Der Studierende kalkuliert die Schnittpunkte mit den Achsen, x = 0 und y = 3 und y= 0 und x = - 6, jedoch interpretiert er diese nicht als Punkt (0, 3) (Schnittpunkt mit der y-Achse), und Punkt (- 6, 0) (Schnittpunkt mit der x-Achse).

Vermutlich hat der Studierende keine klare Vorstellung darüber, dass beim Einsetzen des Wertes einer der Variablen, und Berechnung der anderen Variablen, die Gleichung erfüllt wird, und diese beiden Werte einen Punkt auf der Graphik der Funktion darstellen. Der Studierende hat zwei Punkte errechnet, diese aber nicht als solche identifiziert. Es besteht auch die Möglichkeit, dass der Studierende die Werte x = 0 und y = 0 als „Null ist nichts, die kann man weglassen" interpretiert.

Der Studierende lokalisiert auf dem Koordinaten-System den Punkt (- 6, 3). Dadurch, dass er keine Kurve oder Gerade erhält, scheint er auch keine Vorstellungen zum Begriff Funktion zu haben.

Testaufgabe 42

Diese letzte Aufgabe ist eine Textaufgabe mit Realitätsbezug. In Mexiko werden die meisten Waren mit einer Mehrwertsteuer versehen. Der Preis der Ware bezieht die Steuern mit ein, so dass, besonders für Studierende der Betriebswirtschaft, die Errechnung des Preises einer Ware, ohne Mehrwertsteuer, wichtig ist.

Eventuell geht man in der Schule wenig mit solchen Aufgaben um, und eher mit direkten Prozentberechnungen, wie: Berechne 20% von 400, usw.

Aus den Lösungsversuchen der Studierenden geht hervor, dass nur selten eine Gleichung aufgestellt wird, wie $x + 0{,}2x = 144$; oder eine Dreisatzformel wie: $144/x = 120/100$.

Beide Formen setzen voraus, dass der Anfangsstudierende sich darüber bewusst ist, dass der vorherige Preis, vor der Versteuerung, nicht bekannt ist, und dass auf diesen Preis die Steuern errechnet werden.

Im einzelnen kann hier nicht auf die konkret-anschauliche Wissensstruktur der Anfangsstudierenden eingegangen werden, da diese nicht direkt erfragt wurde, sondern man kann nur aus ihren Lösungsprozessen und Vorgehensweisen entnehmen, dass keine Gleichungen aufgestellt wurden und dass wahrscheinlich allen fehlerhaften Lösungsprozessen, vorwiegend dem gleichen Fehler unterliegen.

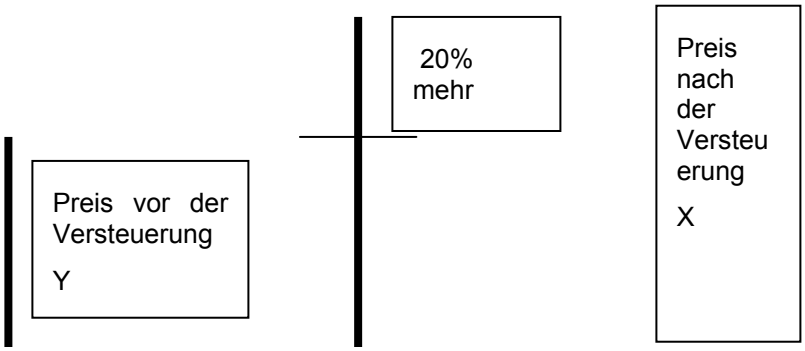
Dieses ist wahrscheinlich ein Beweis dafür, dass Anfangsstudierende nur selten sich bewusst sind, dass eine algebraische Formel von Nutzen sein kann.

Die meisten fehlerhaften Lösungsprozesse haben 20% von 144 errechnet und dann das Resultat von 144 abgezogen, oder 80% von 144 kalkuliert, was auf der gleichen fehlerhaften Wissensstruktur beruht. 144 Pesos entsprechen 120% des ursprünglichen Preises und nicht 100%.

Bei einem Lösungsprozess besteht bei der Subtraktion von 144 – 28,80 ein Übertragsfehler.

Die konkret-anschauliche Wissensstruktur könnte so interpretiert werden; Modell entnommen aus: MALLE, (1993, S.102) (Additive Umkehrfehler):

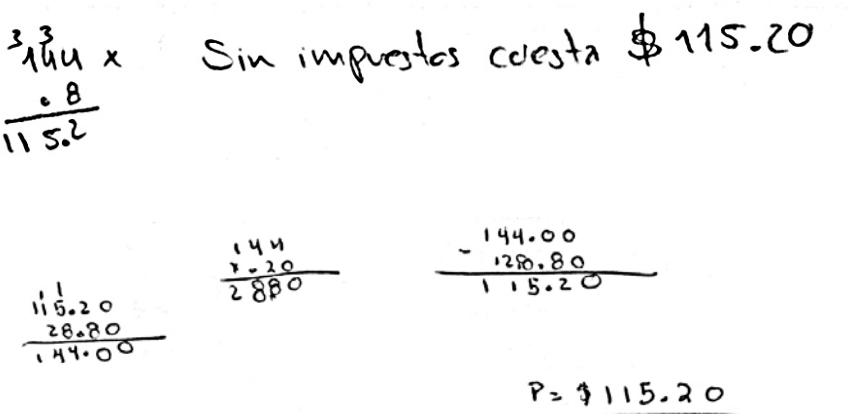
Der Preis nach der Versteuerung ist um 20% höher als der Preis vor der Versteuerung.



Der Preis nach der Versteuerung wird mit X benannt, der Preis vor der Versteuerung mit Y. So ensteht: x = y + 20% von y

Diese Struktur scheint wenig Hilfreich, um die Aufgabe zu lösen, denn wenn man 20% von dem Preis nach der Verteuerung abzieht (von X abzieht), erhält man den Preis vor der Versteuerung (Y) nicht.

MALLE (1993, S. 125) äußert zu den schlechten Leistungen vieler Personen im Prozentrechnung, dass die “wesentliche Ursache darin zu liegen scheint, dass dieses Gebiet im Unterricht einseitig behandelt wird,...unter zu starker Betonung des Operierens (Rechnens) gegenüber dem Darstellen”.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
Das Preisschild einer Ware ist: $ 144.00; in diesem Preis sind 20% Mehrwertsteuer mit einbegriffen. Welchen Preis hatte die Ware, bevor sie versteuert wurde? 		Additiver Umkehrfehler MALLE(1993, S. 102) Nicht adäquate konkret-anschauliche Wissensstruktur MALLE(1993, S. 98-100)

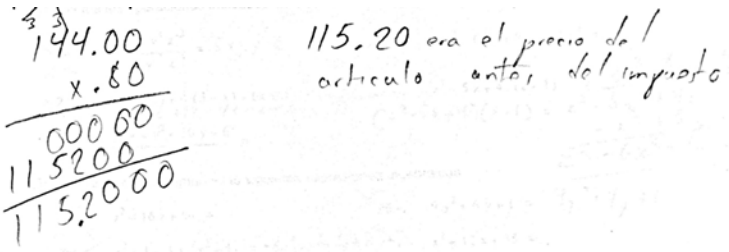
Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

A) „1. 144,00 Pesos sind 100%, wenn ich mit 0,8 multipliziere erhalte ich den Preis der Ware vor der Versteuerung, das heißt, 80% von 144,00 Pesos ist 144,00 – 20% von 144,00 Pesos."

B) „1. Wenn ich von 144,00 Pesos 20% von 144 abziehe erhalte ich den Preis vor der Versteuerung, da dieser um 205 erhöht wurde."

Deutung:

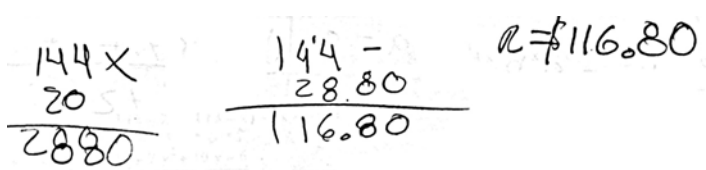
Die Studierenden erkennen nicht, dass die 20% auf den ursprünglichen Preis (ohne Steuern) errechnet wurden, und somit nicht von 144 Pesos. 144 Pesos sind nicht 100%, sondern 120%, vom ursprünglichen Preis. Die Interpretation des Bildes erfolgt in nicht adäquater Form.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
Das Preisschild einer Ware ist: $ 144.00; in diesem Preis sind 20% Mehrwertsteuer mit einbegriffen. Welchen Preis hatte die Ware, bevor sie versteuert wurde? 		Wichtig erscheint hier die aufwendige Form mit der 80% von 144,00 Pesos errechnet wird. Vorstellungen zur Ziffer Null nach dem Komma, scheinen nicht vorhanden zu sein.

Deutung:

Der Fehler dieses Lösungsprozesses ist denen, der vorhergehenden Lösungsprozessen gleich.

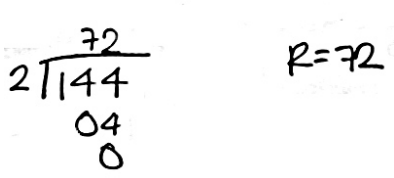
Der Studierende scheint keine klaren Vorstellungen von der Ziffer Null, nach dem Komma zu haben, da er diese einerseits mitschreibt, andererseits auch mitmultipliziert. Es scheint eher, dass der Prozess der Multiplikation in strikter, algorithmischer Form durchgeführt wird (siehe die Zeile mit

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
Das Preisschild einer Ware ist: $ 144.00; in diesem Preis sind 20% Mehrwertsteuer mit einbegriffen. Welchen Preis hatte die Ware, bevor sie versteuert wurde? 		Rechenrichtungsfehler GERSTER(1982, aus PADBERG (1996, S. 196) Spaltenweise Unterschiedsbildung PADBERG (1996, S. 196) Absolute Differenz der Ziffern RADATZ (2004,S. 114)

Deutung:

Der konzeptuelle Fehler dieses Lösungsprozesses ist den den vorher gehenden Lösungsprozessen gleich.

Außerdem wird bei der Subtraktion von 144 – 28,80 ein Rechenrichtungsfehler gemacht, der sich als eine absolute Differenz der Ziffern, oder spaltenleise Unterschiedsbildung manifestiert.

Vorgegebene Aufgabe	Studierendenlösung	Wie/wo wird dieser Fehler in der Literatur beschrieben?
Das Preisschild einer Ware ist: $ 144.00; in diesem Preis sind 20% Mehrwertsteuer mit einbegriffen. Welchen Preis hatte die Ware, bevor sie versteuert wurde?		Fehlvorstellungen zum Begriff „Prozent“

Möglicher Verlauf der Gedanken des Studierenden:

„1. Der Preis war vor der Versteuerung niedriger, um einen bestimmten Prozentsatz (20%).

2. 20% ist das Gleiche, wie durch 2 zu teilen.

3. 144 / 2 = 72.“

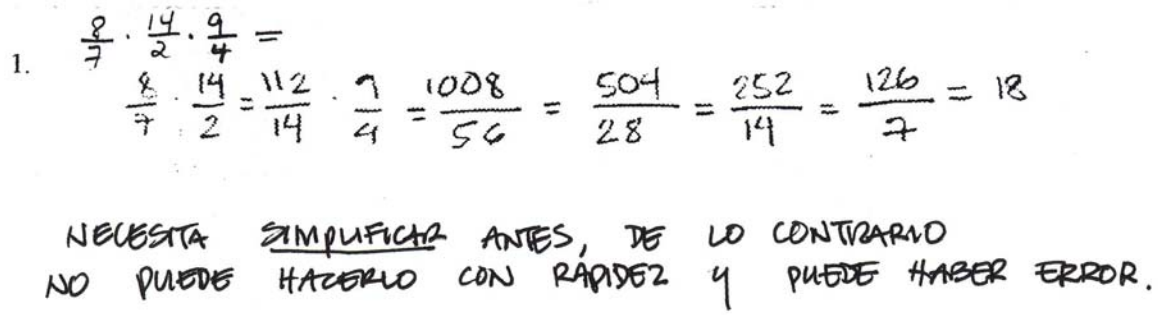
Deutung:

Wurde die Ware versteuert, hatte sie vorher einen niedrigeren Preis, dadurch entsteht wahrscheinlich beim Studierenden die Verbindung einer Reduzierung oder Verminderung. Durch diese Vorstellung entsteht vermutlich die Assoziierung mit einer Division. 20% könnte eventuell als 20 /100 interpretiert worden sein, dann aber zu einer fehlerhaften Assoziation mit einer Division durch 2 leiten.

Anhang 16: Schriftliche Befragung von Lehrenden über Studierendenlögungen

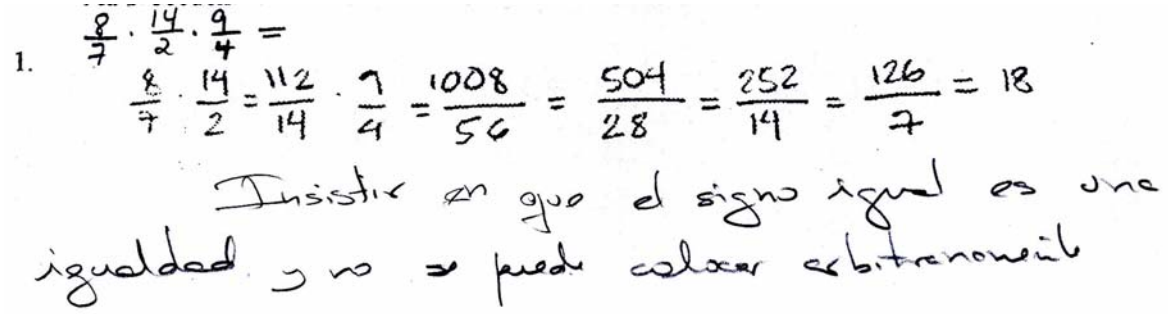
Aufgabe 1:

Sergio



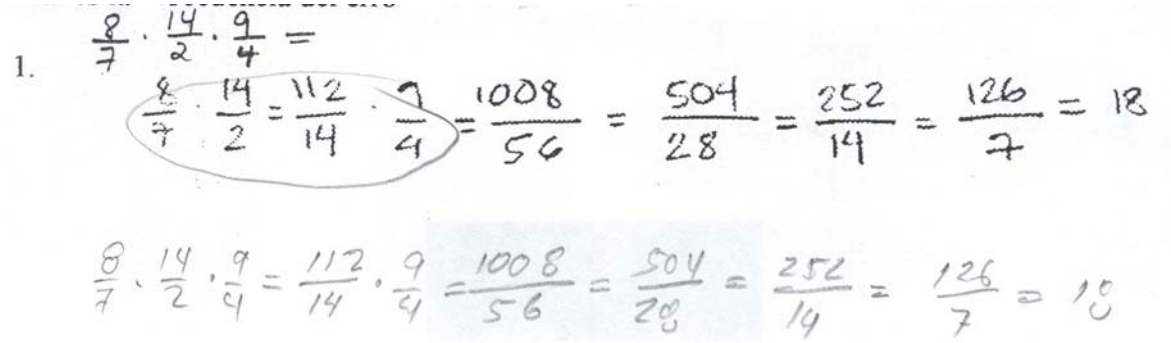
Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Es muss vorher gekürzt werden, sonst kann man die Aufgabe nicht schnell lösen und man kann auch Fehler machen	*Sergio weist auf die algorithmische Form der Lösung hin, da er auf eine Kürzung hinweist.* *Er erkennt nicht den Missbrauches des Gleichheitszeichens* ***Identifikation des Fehlers (nein) A1b*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Miriam



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Insistieren, dass das Gleichheitszeichen eine Gleichheit ist und nicht willkürlich gesetzt werden kann.	*Miriam erkennt den Missbrauch des Gleichheitszeichens, geht aber nicht weiter auf die algorithmische Form der Lösung ein, und dass die Aufgabe hätte einfacher gelöst werden können, wenn von Anfang an gekürzt worden wäre.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Begriffsbildung: C3***

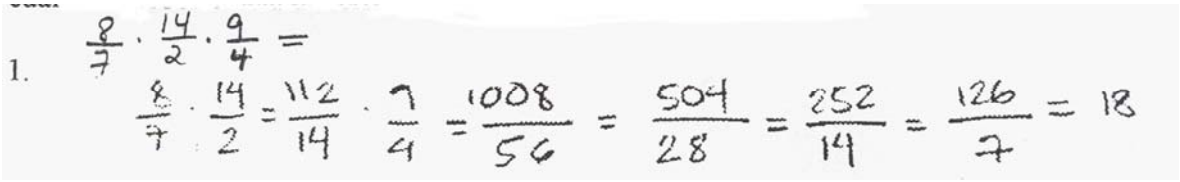
Pedro



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Es wird kein Kommentar dazugeschrieben.	*Es ist zu vermuten, dass Pedro den Fehler mit dem Gleichheitszeichen erkannt hat, da er den Teil der Rechnung, mit dem Missbrauch des Gleichheitszeichens, einkreist, und darunter, einen korrekten Gebrauch des Gleichheitszeichens, wiedergibt.* *Es scheint als sei seine Form, Schülerinnen und Schülern zu helfen allein dadurch gegeben, dass er die Aufgabe korrekt wiedergibt.*

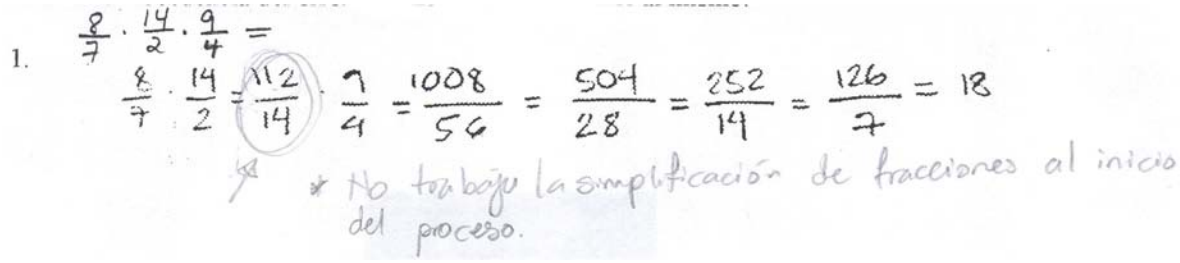
	Identifikation des Fehlers (richtig wahrscheinlich): A1a ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

José Antonio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar zu dieser Lösung	*Wahrscheinlich hat José Antonio in dieser Aufgabe keinen Fehler entdeckt und auch nicht eine schnellere und sicherere Form der Lösung.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

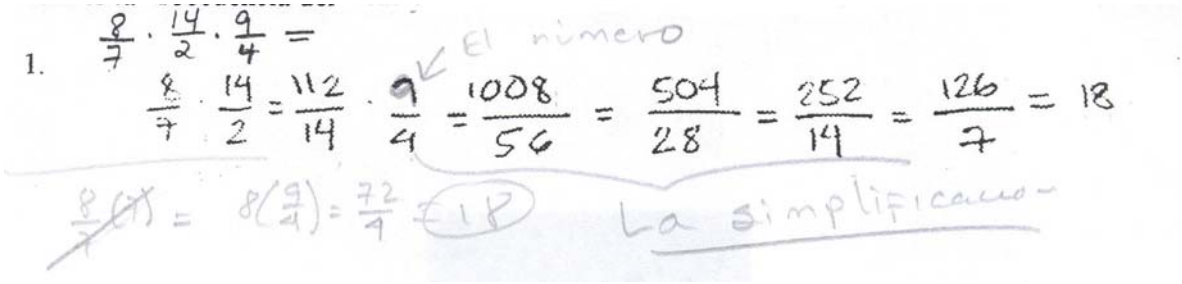
Dreieck



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Es wurde die Vereinfachung der Brüche am Anfang des Prozesses nicht bearbeitet	*Dreieck ist der Ansicht, dass der Bruch 112/14 hätte gekürzt werden können. Es geht nicht klar hervor, ob er eine Kürzung von Anfang an meint, oder nur des Bruches der Multiplikation der*

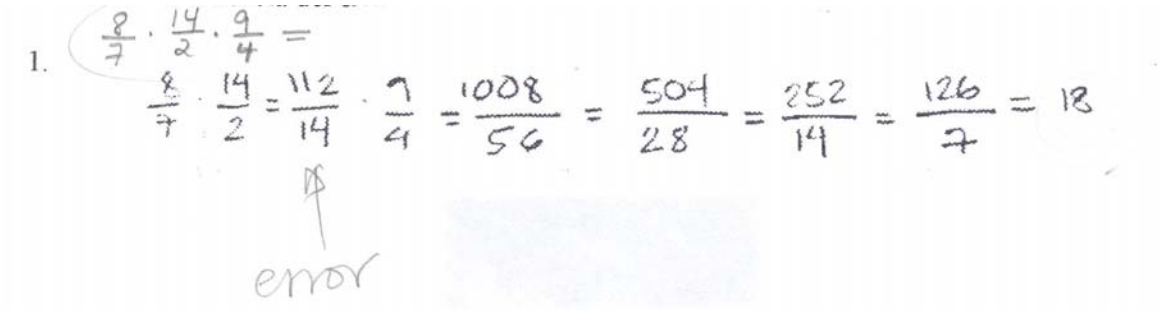
	ersten zwei Brüche (die eingekreist sind). *Er erkennt den Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***So wird es gemacht: B1*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Das Kürzen	*Er meint einen Fehler in der Ziffer 7 zu erkennen, aus der Multiplikation geht aber hervor, dass die 9 nur nicht klar geschrieben wurde.* *Er beschreibt die Form, wie die Aufgabe mittels Kürzungen in den Zwischenresultaten hätte gelöst werden können.* *Er kürzt z.B. 8(9/4) nicht.* *Den Missbrauch des Gleichheitszeichens entdeckt Navega nicht, wahrscheinlich weil sein eigener Umgang mit dem Gleichheitszeichen nicht korrekt ist.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Macht selber Fehler: A8*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Vidrio



ÜbersetzterKommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Fehler	*Es geht aus der Indikation des Fehlers (siehe Pfeil) nicht klar hervor, ob Vidrio die Multiplikation meint, oder dass in diesem Lösungsschritt ein Fehler besteht.* *Meint er den Lösungsschritt, so könnte er den Missbrauch des Gleichheitszeichens meinen, er gibt diesen aber nicht spezifisch an.* ***Fehler ankreiden: B2*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Zusammenfassende Betrachtungen der Aufgabe 1:

Lehrerin oder Lehrer	**Algorithmische Lösungsform**	**Missbrauch des Gleichheitszeichens**
Sergio	Verweist auf eine einfachere Lösungsform, wenn vorher gekürzt worden wäre	Erkennt Missbrauch nicht
Miriam	Miriam geht nicht auf eine einfachere Lösungsform durch Kürzungen ein.	Geht näher auf den Missbrauch ein, in dem sie auf eine numerische Gleichheit hinweist. „Dieselbe Zahl wird auf verschiedenen Weisen ausgedrückt“ (MALLE, 1993, S. 137) Mit dem Ausdruck, das Gleichheitszeichen wird willkürlich gesetzt meint Miriam wahrscheinlich dass die numerische Gleichheit verletzt wird.
Pedro	Verweist nicht auf eine einfachere Form.	Nur die Vermutung, dass er den Missbrauch erkannt hat.
José Antonio	Findet keine einfachere Form	Erkennt den Missbrauch nicht.
Dreieck	Meint, man könne in den Zwischenschritten kürzen	Missbrauch nicht erkannt
Navega	Meint man könne in den Zwischenschritten kürzen	Missbrauch nicht erkannt. Eigener Umgang mit dem Gleichheitszeichen fehlerhaft.
Vidrio	Kein Hinweis auf Kürzungsmethoden	Eventuelles Erkennen des Missbrauchs, auch wenn es nicht klar hervorgeht.

In Bezug auf die algorithmische Lösungsform:

Wahrscheinlich würde die Mehrzahl der Lehrenden die Aufgabe in der gleichen algorithmischen Form des Studierenden lösen, da sie nicht auf eine einfachere Lösungsform durch eine Kürzung eingehen.

Nur zwei der befragten Lehrenden legen eine Kürzung in den Zwischenschritten nahe.

Sergio kommentiert, dass man von Anfang an hätte kürzen können

In Bezug auf den Missbrauch des Gleichheitszeichens:

Vier der befragten Lehrenden erkennen den Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht. Bei zwei weiteren geht nicht klar hervor, ob sie den Missbrauch des Gleichheitszeichens erkennen, aber es ist zu vermuten.

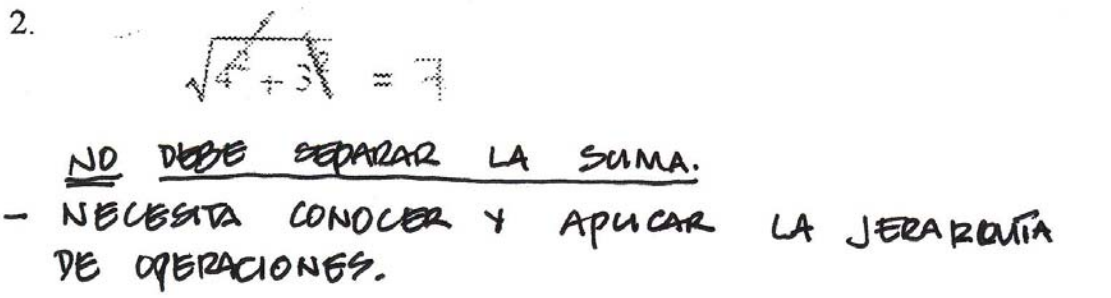
Navega gebraucht bei seiner Lösung der Aufgabe das Gleichheitszeichen falsch.

Nur eine Lehrerin geht näher auf den Missbrauch ein.

Bei einem Lehrer (Pedro) ist zu vermuten, dass seine Hilfe lediglich aus einer korrekten Lösungsform, die von ihm niedergeschrieben wurde, besteht. Er gibt keine weiteren Erläuterungen und Ursachen zum Fehler an.

Aufgabe 2:

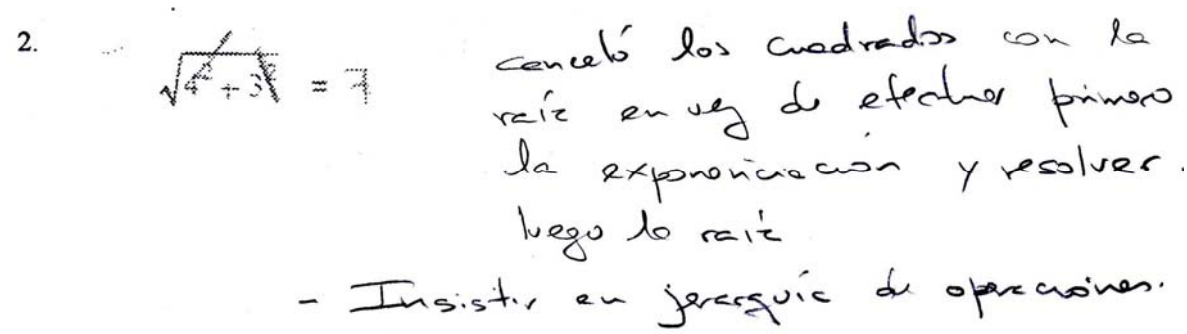
Sergio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er darf nicht die Summe trennen. Er muss die Hierarchie der Operationen besser kennen und anwenden	*Sergio erkennt den Fehler, würde der Schülerin oder dem Schüler emphatisch anweisen, die Summe nicht zu trennen.* *Er weiss, was die Schülerin oder der Schüler nicht tun darf, geht aber auf die Ursache des Fehlers nicht ein.* *Wahrscheinlich ist Sergio der Ansicht, dass dieser Fehler aus einer Unkenntnis der Hierarchie der Operationen resultiert. Er weist nicht näher darauf hin, in welcher Hinsicht er es meint.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Hinweis auf Regeln: C6a u. C6b*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

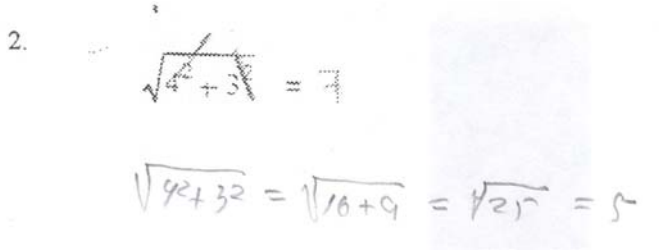
Miriam



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Hat die Quadrate mit der Wurzel annuliert statt erst zu potenzieren und dann die Wurzel zu ziehen. Auf die Hierarchie der Operationen bestehen.	*Erkennt den Fehler und beschreibt die korrekte Form der Lösung.* *Die Ursache wird von ihr als eine Verletzung der Hierarchie der Operationen angegeben.* *Würde der Hinweis auf die Hierarchie der Operationen hier von den Lernenden verstanden werden? Liegt das Problem nicht viel mehr in einer impliziten Klammer?* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Interpretation der Vorgehensweisen des Schülers: A2*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

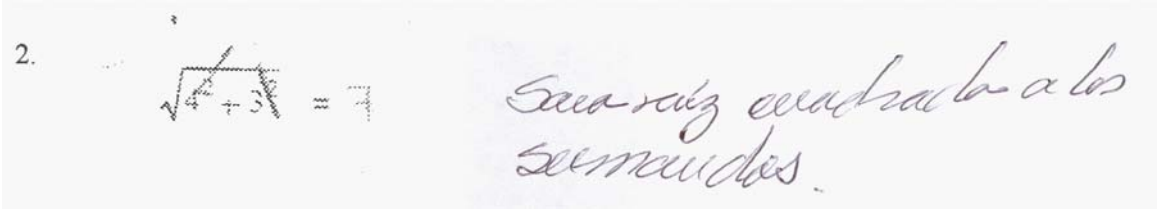
Cristina Eccius Wellmann

Pedro



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar	*Wieder wird nur eine korrekte Lösungsform vom Lehrer unter die Aufgabe geschrieben.* *Ich zeige, wie die Aufgabe korrekt ausgeführt wird!!* *Wäre diese seine Form, einer Schülerin oder einem Schüler zu helfen?* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

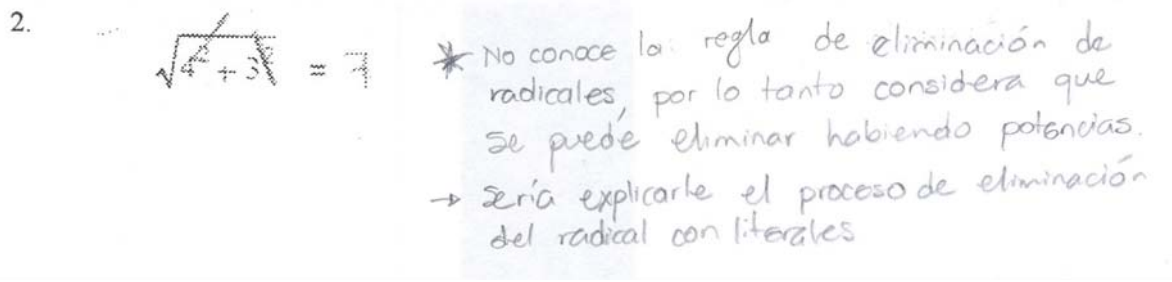
José Antonio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Zieht die Quadratwurzeln der Summanden	*José Antonio beschreibt den fehlerhaften Lösungsprozess.* *Er gibt keine Ursache für den betreffenden Fehler an.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Interpretation der Vorgehensweisen des Schülers: A2*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

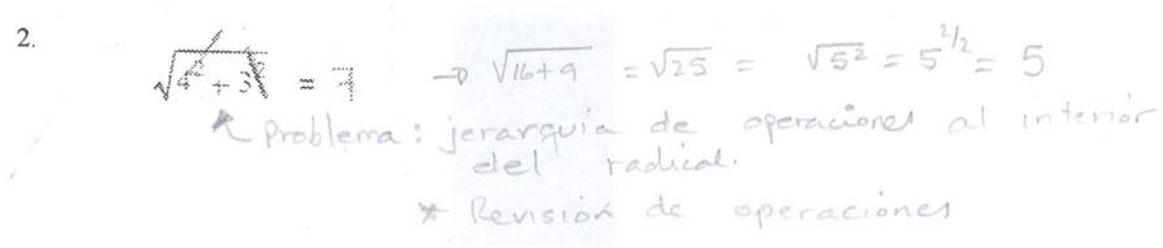
Dreieck



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kennt die Regeln der Elimination der Wurzeln nicht, deswegen glaubt er, er könnte die Potenzen eliminieren. Man müsste ihm erklären, wie der Prozess der Elimination der Wurzeln bei Variablen ist. (Literales sind Buchstaben)	*Dreieck benennt die Regeln bei der Wurzelrechnung als Eliminationsregeln, er weist darauf hin, dass in diesem Prozess das Wurzelzeichen mit den Potenzen „eliminiert“ (sprich: durchgestrichen) wird.* *Er geht nicht näher auf die Ursachen ein, obwohl wahrscheinlich bei der „Elimination“ eine Art Streichschema interpretiert werden könnte..* *Die Hilfe, die er der Schülerin oder dem Schüler anbietet, ist eine nochmalige Erklärung des Eliminationsprozesses bei der Wurzelrechnung mit Buchstaben (es geht nicht klar hervor, ob er den Term „literales“ (Buchstaben) meint, oder ihn verwechselt.* *Kann man bei Wurzelrechnungen über Eliminationsprozesse sprechen?* ***Identifikation des Fehlers(richtig): A1a*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Hinweis auf Regeln: C6a u. C6b*** ***Erklärungen: C13*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

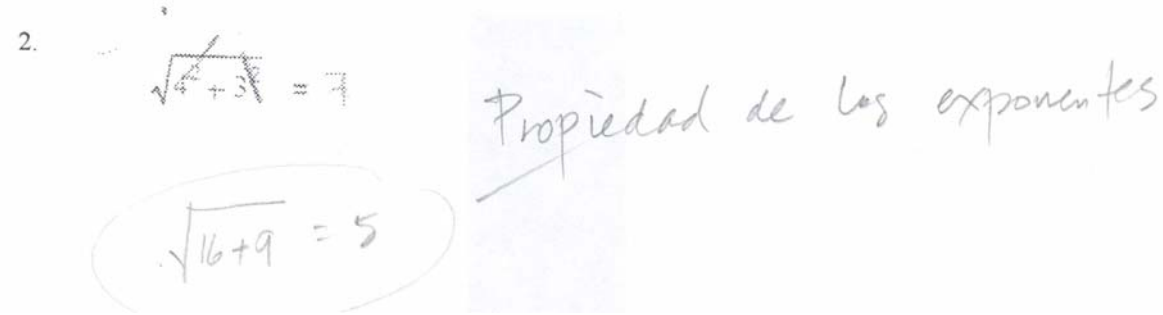
Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Problem: Hierarchie der Operationen im Innern des Wurzelzeichens. Hilfe: Nachsehen der Operationen	*Navega weist mit einem Pfeil auf das Pluszeichen hin, das wahrscheinlich für ihn als das Problem erkannt wird. Es scheint als sehe er in dem Pluszeichen die Ursache, weist aber nicht auf die Regeln hin.* *Er schreibt die korrekte Lösungsform daneben.* *Auch er gibt als Ursache die Hierarchie der Operationen, jedoch unter dem Wurzelzeichen, an.* *Als Hilfe bietet er eine Revision der Operationen an.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Falscher Hinweis auf Ursache: A6*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

Vidrio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Regeln der Exponenten	*Vidrio löst die Aufgabe unter der Fehllösung korrekt.* *Ob er mit den Regeln der Exponenten den Fehler beschreibt, oder auf die Ursache eingeht, geht nicht klar hervor. Exponentenregeln können die Ursache des Fehlers nicht beschrieben.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Falscher Hinweis auf Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Zusammenfassende Betrachtung der Aufgabe 2:

Lehrerin oder Lehrer	Kommentar über das Pluszeichen	Ursache /methodisches Vorgehen	Beschreibung
Sergio	Weist darauf hin, dass die Summe nicht getrennt werden darf	Hierarchie der Operationen	Keine
Miriam	Kein	Hierarchie der Operationen	Beschreibt den Fehler
Pedro	Kein	Keine Ursachenangabe	Beschreibt eine korrekte Lösungsform
José Antonio	Kein	Keine Ursachenangabe	Beschreibt den Fehler
Dreieck	Kein	Vermutlich eine Art Streichschema	Beschreibt den Fehler
Navega	Sieht im Pluszeichen das Problem	Hierarchie der Operationen	Beschriebt eine korrekte Lösungsform
Vidrio	Kein	Exponentenregeln	Beschreibt eine korrekte Lösungsform

In Bezug auf das Pluszeichen, als auslösendes Element des Fehlers:

Zwei Lehrende weisen auf das Pluszeichen als Ursache des Fehlers hin. Man kann vermuten, dass sie auf den Unterschied zwischen einer Aufgabe mit einem Pluszeichen und einer Multiplikation hinweisen, also auf eine Oberflächenstruktur.

In Bezug auf die Ursache:

Drei Lehrende sehen die Ursache des Fehlers im Verständnis der Schülerinnen und Schüler von der Hierarchie der Operationen. Wie könnten sie diesen Fehler mit einem Hinweis auf die Hierarchie der Operationen erklären?

In dieser Aufgabe ist gerade die Hierarchie der Operationen durch eine implizite Klammer oder der Länge des Wurzelzeichens aufgehoben.

$\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{(4^2+3^2)}$. Es kommt die Frage auf: hätten Studierende die Aufgabe $\sqrt{(4^2+3^2)}$ richtig gelöst?

Ein Lehrer gibt an, dass die Ursache im Verständnis der Exponentenregeln liegt. Er gibt nicht weiter an, in welcher Hinsicht, es ist zu vermuten, dass er den Unterschied zwischen einem Pluszeichen und einem Malzeichen meint.

Ein Lehrender weist auf eine Art Streichschema hin, da er über Eliminationsprozesse schreibt. „Der Studierende kennt die Eliminationsprozesse bei der Wurzelrechnung nicht“, hiermit könnte er eventuell die Musterbeispiele in der Wurzelrechnung meinen; $\sqrt{a^2} = a$; die eventuell in die Aufgabe hineinprojiziert werden, wenn dieses auch nicht klar hervorgeht.

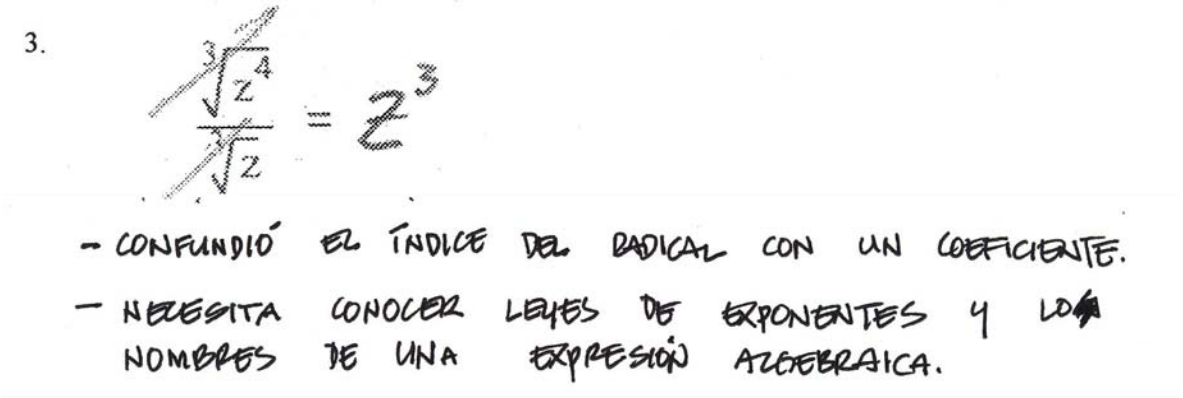
In Bezug auf die Beschreibung:

Es ist eine starke Tendenz zu der Beschreibung der Fehler zu erkennen, die wahrscheinlich der Schülerin oder dem Schüler nicht weiterhilft.

Auch kann man bei den getesteten Lehrenden erkennen, dass sie als Hilfe überwiegend eine richtig gelöste Aufgabe bieten.

Aufgabe 3:

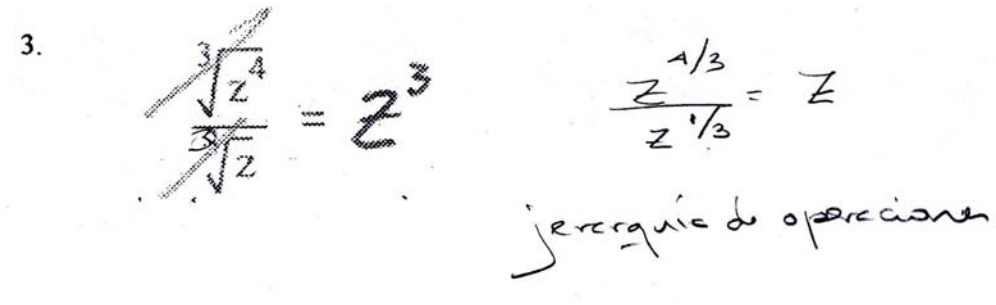
Sergio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Verwechselt den Wurzelindex mit einem Koeffizienten Muss die Exponentenregeln besser kennen und die Namen in einem algebraischen Ausdruck	*Wahrscheinlich interpretiert Sergio, ein Streichschema, wobei der Studierende die Dreier der Wurzelindexe „kürzt".* *Es bleibt fraglich, was mit dem Wurzelzeichen geschieht.* *Er weist darauf hin, dass die Exponentenregeln und auch die Namen in einem algebraischen Ausdruck besser gekannt werden müssen.* *Es besteht die Möglichkeit, dass Sergio meint, dass die Termstruktur vom Studierenden nicht erkannt wurde, auch wenn diese nicht unbedingt mit den Namen der verschiedenen algebraischen Ausdrücke zusammenhängt.* *„Der Studierende verwechselt die Wurzelindexe mit Koeffizienten".* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Erfassen der Ursache (ja): F1*** ***(Ansatz: Verwechselt den Wurzelindex mit einem Koeffizienten)***

Cristina Eccius Wellmann

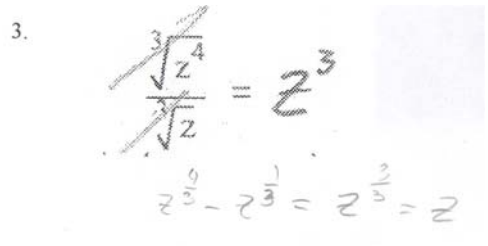
Miriam



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Hierarchie der Operationen	*Lösungsform wäre eine Interpretation über fraktionäre (gebrochenrationale) Exponenten.* *Wie könnte eine Schülerin oder ein Schüler anhand des vorgegeben Lösungsprozesses von Miriam seinen Fehler bei der Hierarchie der Operationen erkennen?* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Falscher Hinweis auf Ursache: A6*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

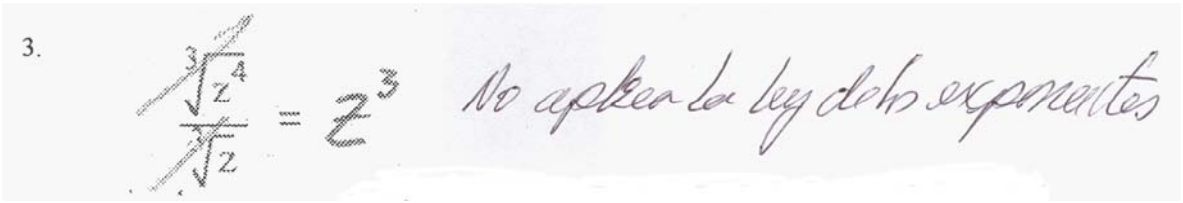
Pedro



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar	*Pedro schreibt seinen Lösungsprozess darunter. Es fällt auf, dass er* $z^{\frac{4}{3}} - z^{\frac{1}{3}} = z^{\frac{3}{3}} = z$ *Schreibt, und ein Minuszeichen dazwischen schreibt. Eventuell wegen der Idee, dass er die Exponenten (da es eine Division war) subtrahieren muss.* *Pedro hat keine einwandfreie Notation angewandt.* *Seine Hilfestellung ist wieder ein „korrekter" Lösungsprozess unter der Aufgabe, auch wenn dieser, in diesem Fall, einen „anderen" Fehler aufweist.* ***Identifikation des Fehlers (richtig) A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Macht selber Fehler: A8*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

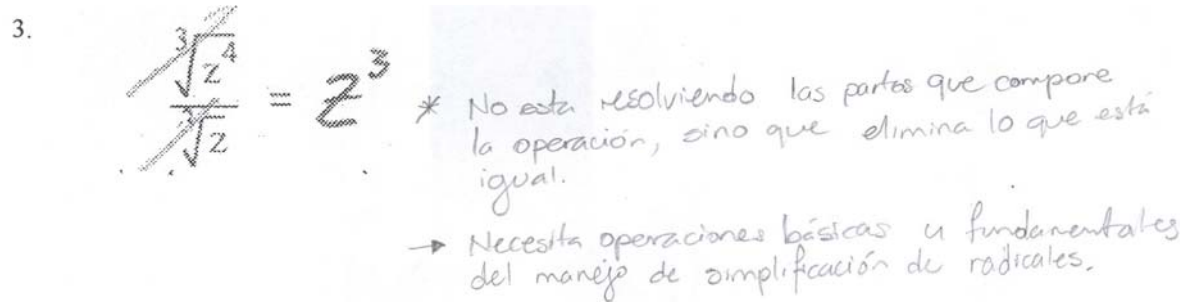
José Antonio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er wendet die Exponentenregeln nicht an	*José Antonio stützt seine Erklärung zu dem Fehler auf die Exponentenregeln, die verletzt wurden.* *Hieße das, dass die Exponentenregeln erneut durchgenommen werden müssen, damit die Schülerin oder der Schüler versteht?* *Er geht nicht auf die Ursache des Fehlers ein.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

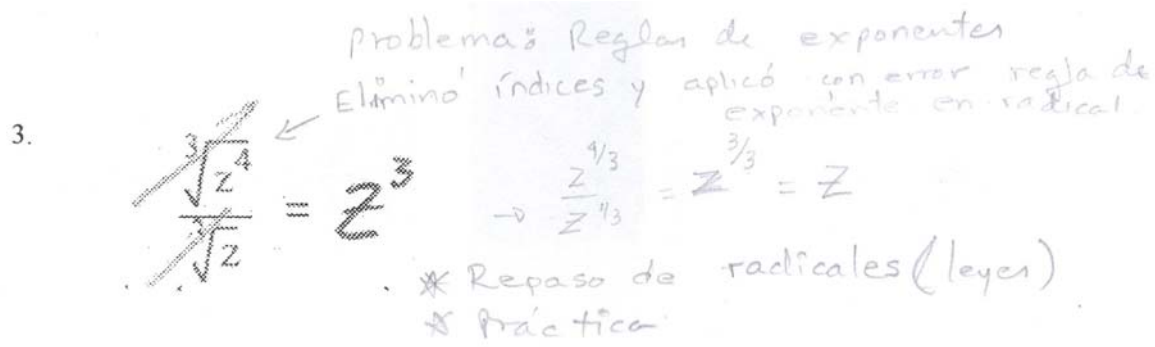
Dreieck



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er löst nicht die Teile, die die Operation zusammensetzen, sondern eliminiert das was gleich ist. Braucht die grundlegenden und fundamentalen Operationen des Hantierens mit Wurzeln.	*Immer wieder findet man bei Lehrenden den Ausdruck „eliminiert", hier interpretiert Dreieck, dass das was gleich ist „eliminiert" wird. Wahrscheinlich besteht eine Interpretation eines Streichschemas, da etwas was im Zähler und Nenner gleich ist, „gekürzt oder eliminiert" wird.* *Als Hilfe legt er eine Revision des Hantierens mit Wurzelrechnungen nahe.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Interpretation des Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Widerholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

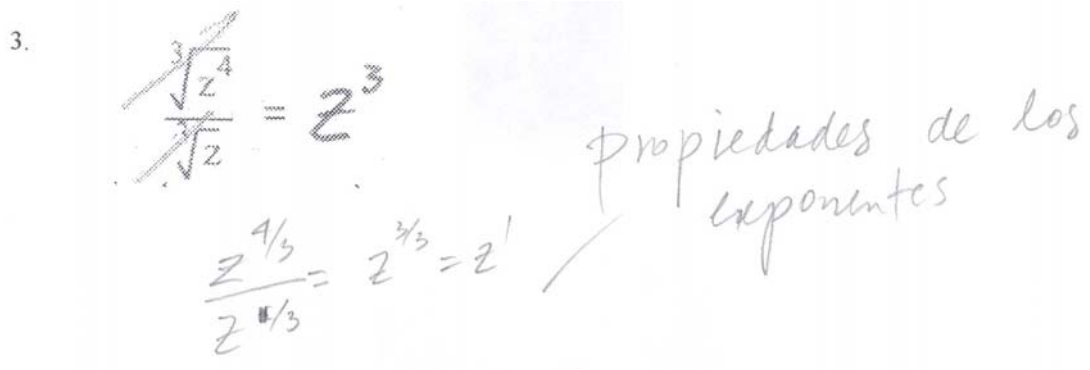
Cristina Eccius Wellmann

Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Problem: Regeln der Exponenten Eliminiert die Indexe und wendet die Exponentenregeln bei Wurzelrechnung falsch an. Wieder Auffrischung der Regeln für Wurzelrechnung Übung	*Das Problem wird von Navega als eine Verletzung der Exponentenregeln aufgefasst.* *Er beschreibt die fehlerhafte Vorgehensweise des Studierenden, in dem er einen Eliminierungsprozess interpretiert. Für Navega werden die Indexe, aber nicht die Wurzelzeichen „eliminiert". Möglicherweise ist es ein leichter Hinweis auf die Ursache, da er der Lösungsform, eine Art Streichschema entnimmt.* *Sein Hilfeangebot ist eine Auffrischung der Wurzelrechnungsregeln und üben.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Vidrio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Exponentenregeln	*Vidrio schreibt einen korrekten Lösungsweg unter den des Studierenden.* *Es ist nicht klar zu erkennen, ob Exponentenregeln die Ursache des Fehlers sind, oder ob er eine Verletzung der Exponentenregeln meint.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen) C4*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Zusammenfassende Betrachtungen der Aufgabe 3

Lehrerin oder Lehrer	**Ursache / methodisches Vorgehen**	**Beschreibung**
Sergio	Verwechslung der Wurzelindexe mit Koeffizienten Exponentenregeln	Keine
Miriam	Hierarchie der Operationen	Löst über fraktionäre Exponenten
Pedro	Kein Kommentar	Löst die Aufgabe mit einem Fehler in der Notation
José Antonio	Exponentenregeln	Keine
Dreieck	Elimination des Gleichen, eventueller Hinweis auf ein Streichschema Hilfeangebot: Wurzelrechnungsregeln	Keine
Navega	Exponentenregeln Elimination der Indexe Hilfe: Erneutes durchnehmen de Regeln für die Wurzelrechnung	Löst über fraktionäre Exponenten
Vidrio	Exponentenregeln	Löst über fraktionäre Exponenten und Exponentenregeln

Fast alle befragten Lehrenden geben einen Hinweis zur Ursache des Fehlers als eine Unkenntnis der Exponentenregeln oder Wurzelrechnungsregeln an.

Eine wichtige Frage wäre: Resultierte der Fehler durch eine Unkenntnis der Exponentenregeln?

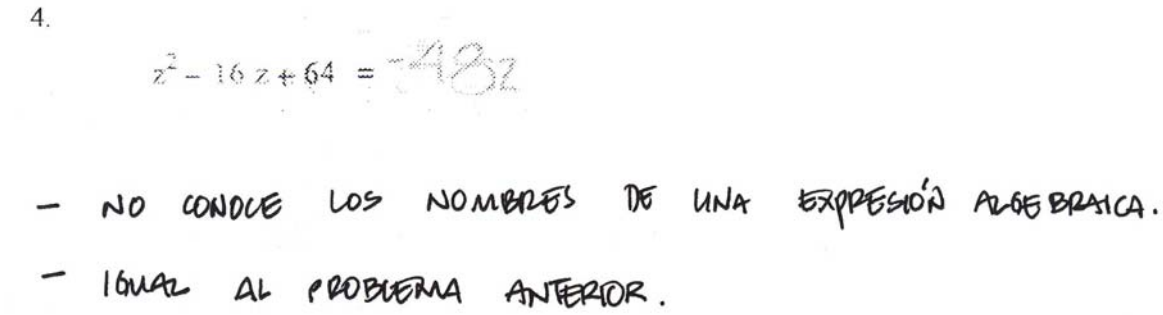
Drei Lehrer weisen auf „Kürzungsprozesse“ hin. „Elimination vom Gleichen“, „Eliminationsprozesse der Indexe“ und Verwechslung der Indexe mit Koeffizienten“. Diese Hinweise könnten als Ansätze für eine Identifikation der Fehlerursache angesehen werden.

Die Lehrenden, die die Aufgabe lösen, lösen sie über fraktionäre Exponenten. Kann man den Fehler durch die Exponentenregeln der fraktionären Exponenten erklären? Würde diese Erklärung eine Hilfe für die Schülerin oder dem Schüler sein? Man könnte wahrscheinlich den Fehler nicht befriedigend erklären.

Aufgabe 4:

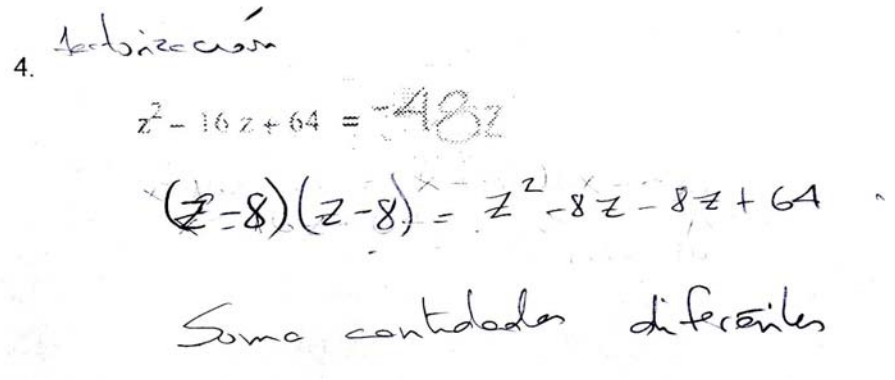
Bei dieser Aufgabe wurde angegeben, dass eine Faktorisation hätte vorgenommen werden sollen.

Sergio



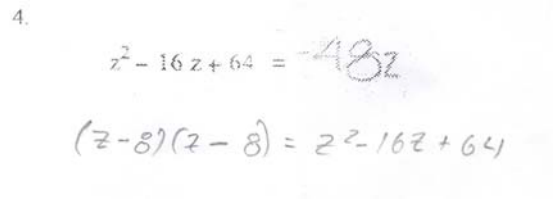
Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kennt die Namen eines algebraischen Ausdrucks nicht. Genau wie bei der vorhergehenden Aufgabe	*Es geht nicht klar hervor, in welcher Hinsicht die Namen des algebraischen Ausdrucks nicht gekannt wurden.* *Er vergleicht dieses Problem mit dem der 3. Aufgabe.* *Sergio beschreibt weder den fehlerhaften Prozess, noch gibt er die Ursache des Fehlers an.* ***Erkennen des Fehlers (nein): A1b*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Miriam



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Addiert ungleiche Mengen	*Miriam meint wahrscheinlich nicht ähnliche Terme, (Términos no semejantes).* *Sie weist nicht auf ein Konkatenationsproblem hin, womit die wahrscheinliche Ursache des Fehlers bestimmt wäre und eine mögliche Hilfe.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Interpretation des Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (ja): G1*** ***Erfassen der Ursache (nein) F2***

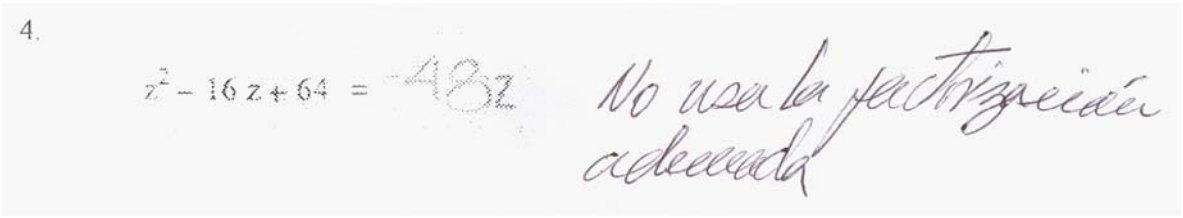
Pedro



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar	*Pedro faktorisiert die Aufgabe in korrekter Form, und vergleicht die Multiplikation seiner Faktorisation mit den Summanden in der Fragestellung der Aufgabe. Ob Pedro den Fehler identifiziert bleibt fraglich, er verfolgt lediglich die Anordnung der Aufgabe: Faktorisiere.* *Bis jetzt hat Pedro immer nur den korrekten Lösungsprozess angegeben. Weist dieses daraufhin, dass er seine Hilfe auf einer wieder und wieder richtigen Lösungsform basiert?* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

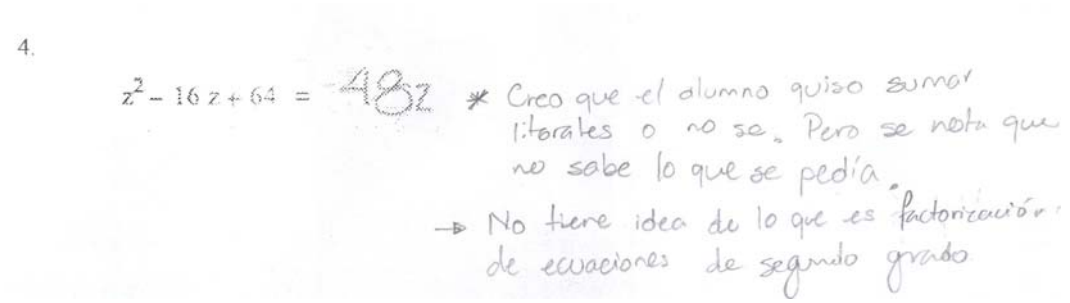
José Antonio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er gebraucht nicht die adäquate Faktorisationsform	*José Antonio weist darauf hin, dass nicht die geeignete Faktorisationsform angewandt wurde. Woraus zu entnehmen ist, dass er den eigentlichen Konkatenationsfehler nicht entdeckt.* *Was hat der Studierende gemacht?* *Er kann auch nicht eine mögliche Ursache des Fehlers angeben.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

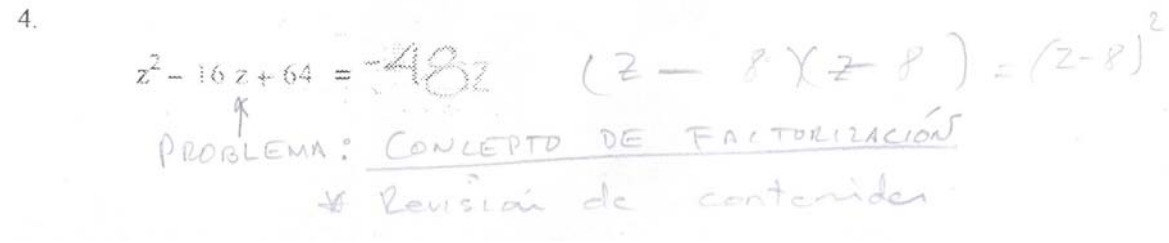
Dreieck



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Ich glaube der Schüler wollte Buchstaben addieren oder ich weiß nicht. Man merkt, dass er nicht wusste, was von ihm verlangt wurde. Er hat keine Idee was eine Faktorisation von Gleichungen zweiten Grades ist.	*Dreieck scheint annähernd zu erkennen, was der Studierende gemacht hat, führt aber keine nähere Analyse durch, „oder ich weiß nicht".* *Der Lehrer verwechselt einen algebraischen Ausdruck mit einer Gleichung.* *Er geht davon aus, dass der Schüler Inhalte (Faktorisationsprozesse) nicht kennt.* *Er gibt keine mögliche Ursache für den Fehler an.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

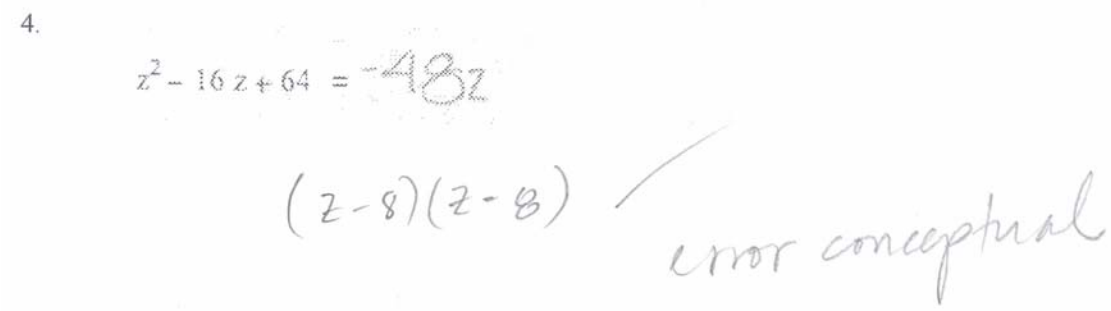
Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Problem: Konzept der Faktorisation Revision der Inhalte	*Navega interpretiert den Fehler als einen konzeptuellen Fehler der Faktorisation.* *Er merkt nicht, dass der Fehler wahrscheinlich nicht mit der Indikation einer Faktorisation zusammenhängt. Insofern kann man annehmen, dass er den Fehler nicht identifiziert.* *Er beantwortet die Aufgabe in korrekter Weise und sieht dieses vermutlich als eine Hilfe für seine Schülerinnen und Schüler an, sowohl als auch ein Wiederaufnehmen der Inhalte.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

Vidrio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Konzeptueller Fehler	*Er zeigt, wie es gemacht werden sollte.* *Es geht nicht klar aus seinen Aufzeichnungen hervor, welchen konzeptuellen Fehler er meint.* *Es ist wahrscheinlich, dass er die Ursache und den Fehler selbst nicht erkannt hat und nur darauf hinweist, dass die Faktorisation nicht richtig ausgeführt wurde.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b***

Zusammenfassende Betrachtungen der Aufgabe 4:

Lehrender	**Ursache/ methodisches Vorgehen**	**Beschreibung und Erkennung des Fehlers**
Sergio	Kennt die Namen des Ausdrucks nicht	Erkennt wahrscheinlich den Fehler nicht
Miriam	Addiert ungleiche Mengen, wahrscheinlich ein Hinweis auf die Addition nicht ähnlicher Terme, was einer Beschreibung des Fehlers nahe kommt.	Faktorisiert die Aufgabe, bei der Überprüfung lässt sie zwei ähnliche Terme unaddiert
Pedro	Kein Kommentar	Faktorisiert die Aufgabe korrekt, überprüft seine Faktorisation Erkennt wahrscheinlich den Fehler nicht
José Antonio	Nicht adäquate Faktorisationsform	Erkennt wahrscheinlich den Fehler nicht
Dreieck	Studierender addiert die Buchstaben, womit er möglicherweise den Fehler beschreibt, jedoch noch keinen Hinweis auf die Ursache gibt.	Verwechselt selber einen algebraischen Ausdruck mit einer Gleichung
Navega	Konzeptueller Fehler in der Faktorisation	Faktorisiert die Aufgabe korrekt, wahrscheinlich entdeckt er den Fehler nicht
Vidrio	Konzeptueller Fehler	Faktorisiert die Aufgabe korrekt, wahrscheinlich entdeckt er den Fehler nicht

Der algebraische Ausdruck sollte faktorisiert werden, was aber für die Entdeckung der Fehler nicht entscheidend ist. Ob der Studierende ein Konzept der Faktorisation hat oder nicht, kann nicht festgestellt werden, denn der Fehler resultiert vor irgendeinem Versuch der Faktorisation. Drei Lehrende sahen den Fehler in einer nicht adäquaten Vorstellung der Faktorisationsverfahren. Bei die-

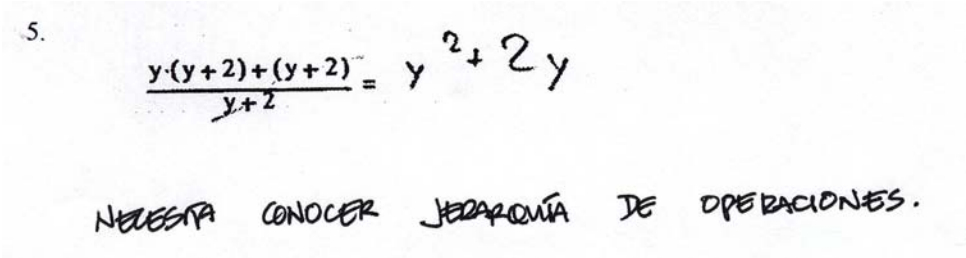
sen Lehrenden ist zu vermuten, dass sie den Fehler nicht entdecken, sondern meinen, der Studierende könne nicht faktorisieren.

Zwei Lehrende, Miriam und Dreieck, erkennen den Effekt jedoch wahrscheinlich nicht die Ursache des Fehlers. Sie beschreiben, wie der Studierende vorgegangen ist.

Fast alle Lehrenden schreiben die richtige Faktorisation unter die Aufgabe. Sollte dieses heißen, dass man einer Schülerin oder einem Schüler mit einer nochmaligen, korrekten Lösungsform helfen kann?

Aufgabe 5:

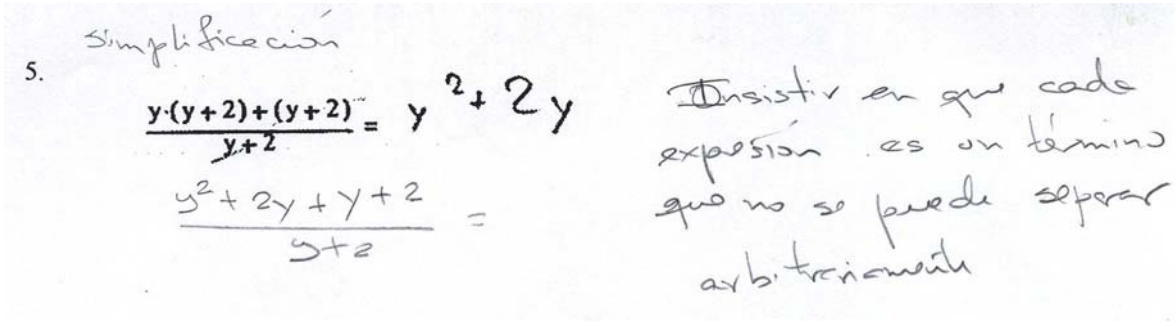
Sergio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Muss die Hierarchie der Operationen kennen	*Sergio gibt als Ursache des Fehlers eine Unkenntnis der Hierarchie der Operationen an.* *Er weist nicht auf ein Streichschema hin, und auch nicht auf ein nicht erkennen der Struktur des Terms.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

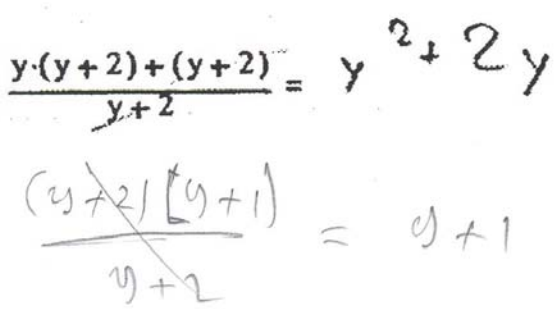
Miriam



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Insistieren, dass jeder Ausdruck ein Term ist, der nicht willkürlich getrennt werden kann.	*Miriam meint, man könne den Fehler beheben in dem man insistiert, dass jeder Ausdruck (sie meint wahrscheinlich Zähler und Nenner, durch den Lösungsprozess, den sie vornimmt) ein Term ist und nicht eigenmächtig getrennt werden kann. Sie löst die Aufgabe nicht zu Ende.* *Miriam geht nicht auf die Struktur des Terms ein. Die Ursache des Fehlers erkennt sie nicht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Pedro

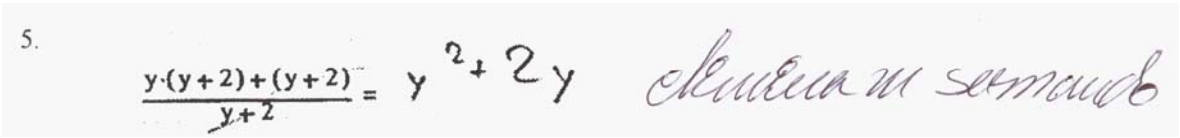
5.



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar	*Er schreibt die richtige Vereinfachungsform auf. Es scheint, als sei diese, die Form von Pedro, seinen Schülerinnen und Schülern zu helfen. Er zeigt wie es richtig gemacht wird.* *Richtige Vereinfachungswege helfen Schülerinnen und Schülern wenig.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

José Antonio



Übersetztes Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er eliminiert einen Summanden	*Mit dem Wort „eliminieren“ gibt José Antonio einen vagen Hinweis auf ein Streichschema. Er geht jedoch nicht näher darauf ein und gibt auch nicht die Ursache dieses „Eliminierens“ an.* *Er beschreibt die Konsequenzen des „Eliminierens“ nicht, so dass die 1 nicht erwähnt wird, und auch nicht das übrig gebliebene Pluszeichen.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

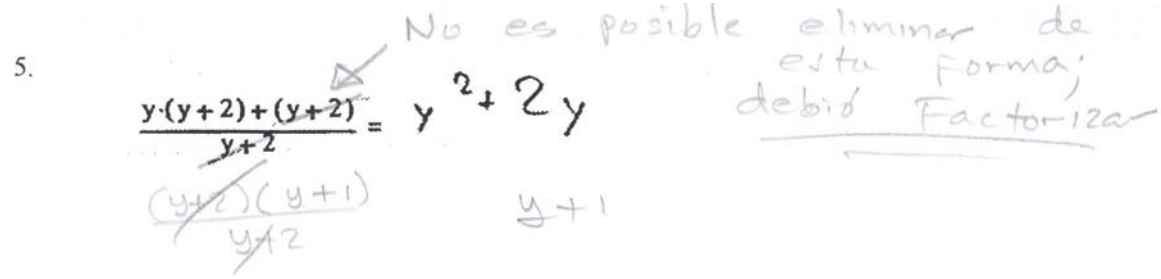
Cristina Eccius Wellmann

Dreieck

Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Hat keine Idee von einer Vereinfachung, auch nicht von einer Multiplikation mit Buchstaben (Variablen).	*In den Augen des Studierenden vereinfacht er die Aufgabe. In welcher Hinsicht diese Vereinfachung fehlerhaft erfolgt, scheint Dreieck nicht aufzufallen. Er erkennt das Streichschema des Studierenden nicht.* *Er meint, dass der Studierende auch von der Multiplikation mit Variablen keine Idee hat. Bei diesem Prozess ist diese Interpretation m. E. nicht möglich.* ***Identifikation des Fehlers(richtig): A1a*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

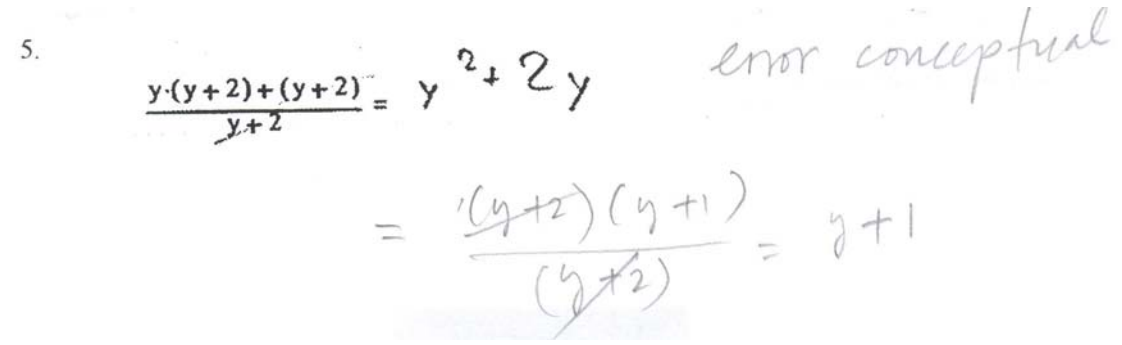
Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Es ist nicht möglich in dieser Form zu Eliminieren, er hätte faktorisieren müssen.	*Navega erkennt wo der Fehler ist, er zeigt ihn mit einem Pfeil an.* *Er erkennt eine Art von Streichschema und gibt an, dass so nicht eliminiert werden kann. Er weist nicht auf den Grund dieses Fehlers hin und beschreibt auch nicht, was aus der 1 in der Division und aus dem Pluszeichen geworden ist.* *In seinem eigenen Lösungsprozess gebraucht er kein Gleichheitszeichen.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***So wird es gemacht: B1*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Macht selber Fehler: A8*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

Vidrio



Übersetztes Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Konzeptueller Fehler	*Vidrio weiß, wie die Aufgabe korrekt gelöst wird, er schreibt den Lösungsprozess unter die fehlerhafte Lösungsform.* *In welcher Hinsicht der konzeptuelle Fehler begangen wird, wird von Vidrio nicht näher erläutert.* *Nach einigen Kommentaren von Vidrio, dass ein konzeptueller Fehler besteht, könnte man annehmen, dass er dieses nur hinschreibt, weil er vermutlich die Ursache der Fehler nicht erkennt.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Falscher Hinweis auf Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Zusammenfassende Betrachtungen der Aufgabe 5:

Lehrender	**Ursache /methodisches Vorgehen**	**Beschreibung**
Sergio	Hierarchie der Operationen	
Miriam	Terme können nicht nach belieben getrennt werden	Hinweis auf eine Ausklammerung im Zähler, die von Miriam nicht zu Ende geführt wurde. Es wird auch nicht darauf hingewiesen, dass später zur Vereinfachung des Ausdrucks, der Zähler faktorisiert werden muss.
Pedro	Kein Kommentar	Vereinfachung duch Faktorisation des Zählers vorgeführt
José Antonio	Eliminiert einen Summanden	
Dreieck	Keine Vorstellung zu Kürzungsverfahren	
Navega	Eliminationsprozess	Vereinfachung durch Faktorisation des Zählers vorgeführt
Virdio	Konzeptueller Fehler	Vereinfachung durch Faktorisation des Zählers vorgeführt

Drei Lehrende zeigen den Schülerinnen und Schülern wahrscheinlich, wie der algebraische Ausdruck vereinfacht werden kann.

Zwei Lehrer gehen auf Eliminationsprozesse ein (eventuell mit „Kürzungsprozesse“ zu vergleichen). Keiner dieser Lehrer geht auf die 1 und auf das übrig gebliebene Pluszeichen ein.

Eine Lehrerin geht auf die Termstruktur ein, jedoch geht aus ihrer Aussage nicht klar hervor, wo oder wie, der Term getrennt wurde. Der Ausdruck hätte in zwei Brüche getrennt werden können, $\frac{y(y+2)}{y+2}+\frac{y+2}{y+2}$; womit auch die richtige Vereinfachung hätte erreicht werden können.

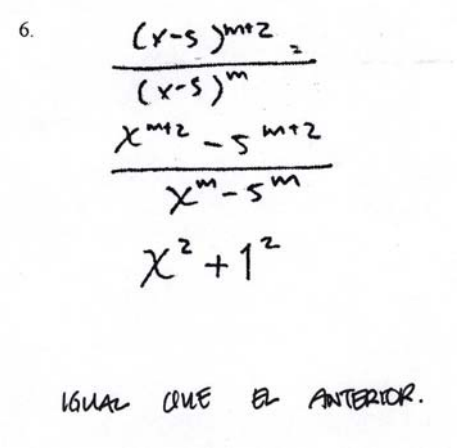
Somit ist die Vereinfachung durch eine Faktorisation im Zähler nicht die einzige Form in der der Ausdruck hätte vereinfacht werden können.

Pedro gab wieder keinen Kommentar, nur eine richtige Vereinfachung wieder.

Vidrio erkennt wahrscheinlich die Ursache des Fehlers nicht, da sein Ausdruck, "konzeptueller" Fehler zu vage ist.

Aufgabe 6:

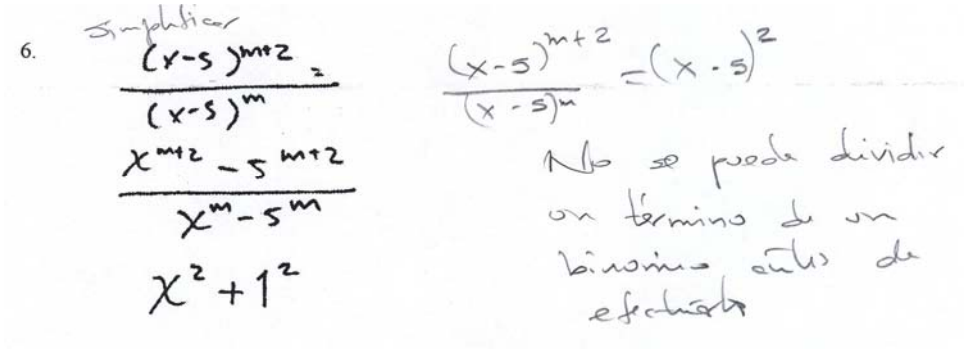
Sergio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Genau wie die Vorhergehende. (Muss die Hierarchie der Operationen kennen)	*Sergio geht nicht näher auf die Vereinfachungsform oder auf den Fehler ein. Er beschränkt seinen Kommentar auf ein nicht korrektes Anwenden der Hierarchie der Operationen.* *Er beschreibt auch nicht den Fehler und kennt wahrscheinlich auch nicht die Ursache desselben.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

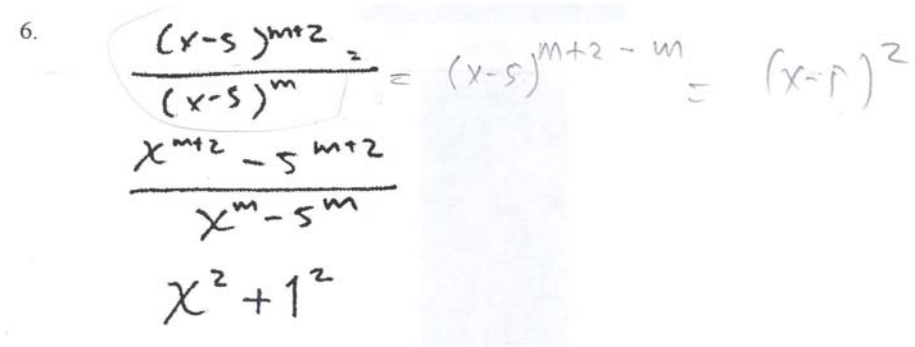
Cristina Eccius Wellmann

Miriam



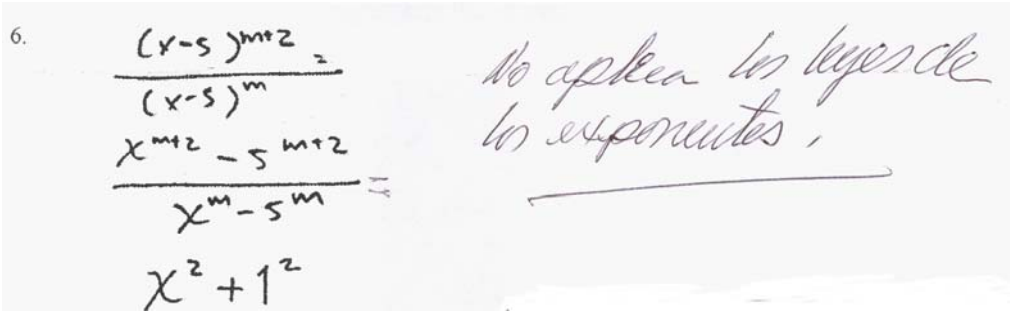
Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Man kann einen binomischen Term nicht vor dem Operieren trennen.	*Miriam beschreibt den Fehler als eine fehlerhafte Zerlegung.* *Die wahrscheinliche Ursache, eine Übergeneralisierung von und Hineinprojizieren von Musterbeispielen wird von Miriam nicht erkannt.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Pedro



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Kein Kommentar	*Wieder wird von Pedro kein Kommentar zur Vereinfachungsform des Studierenden gegeben.* *Er vereinfacht wie bei allen anderen Aufgaben in dem er die Exponentenregeln gebraucht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Hinweis auf Regeln: C6b***

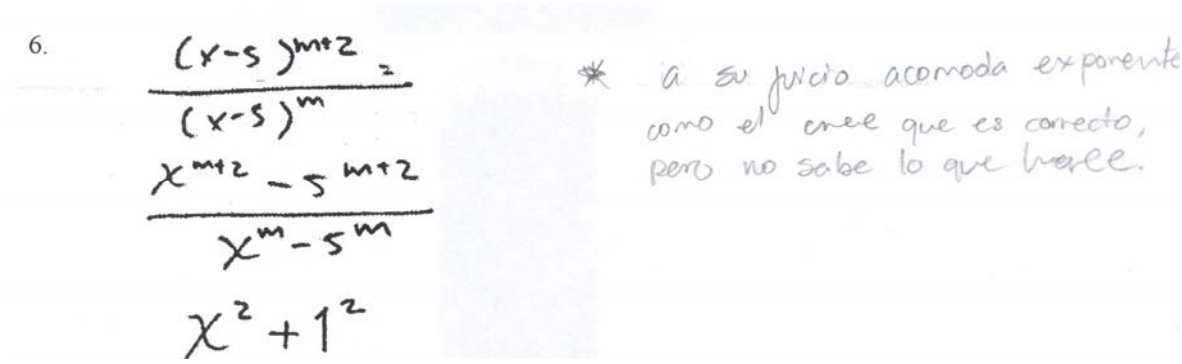
José Antonio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Er wendet die Regeln der Exponenten nicht an.	*José Antonio sieht den Fehler als eine Verletzung der Exponentenregeln, erkennt aber die Ursache nicht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Falscher Hinweis auf Ursache: A5*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

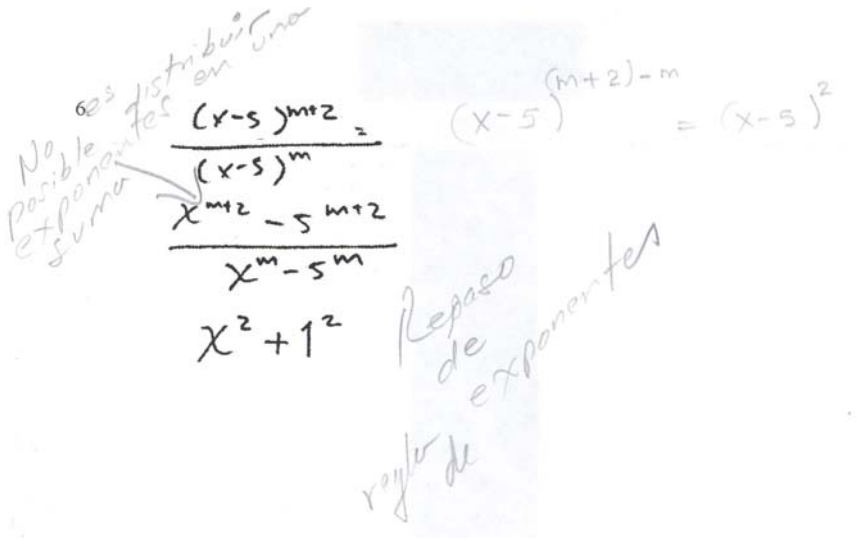
Dreieck



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Seiner Auffassung nach passt er die Exponenten, so wie er es für richtig hält, an; aber er weiss nicht was er tut.	*Diese Äußerung könnte ein Hinweis auf die Notwendigkeit der Entwicklung eines angemessenen Verständnisses sein. Damit würde sie sich von den eher prozedural ausgerichteten Hinweisen unterscheiden.* *Es scheint als interpretiere Dreieck den Fehler des Studierenden als ein Mangel an Wissen und nicht als ein Wissen, das bei bestimmten Schwierigkeitsmerkmalen fehleranfällig ist.* *Die Ursache und somit die mögliche Hilfe erkennt Dreieck nicht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

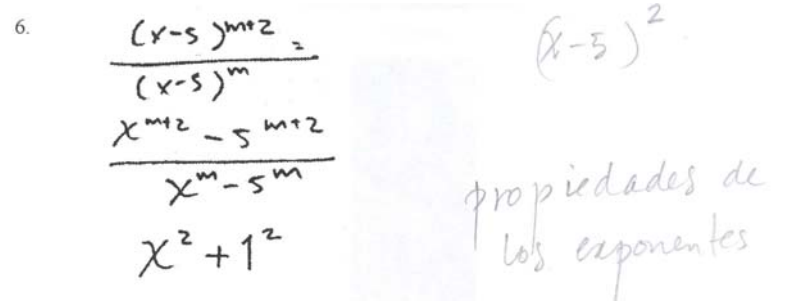
Navega



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Eine Distribution der Exponenten auf die Summanden ist nicht möglich. Hilfe: Wieder durchnehmen der Exponentenregeln.	*Navega erkennt den Fehler und auch, wie er zustande kommt: durch die Distribution der Exponenten auf die Summanden. Er erklärt aber nicht, warum dieser Fehler entsteht, oder welchen Vorstellungen er zugrunde liegt.* *Navega vereinfacht die Aufgabe, in dem er genau den Lösungsweg beschreibt, die Exponenten werden subtrahiert,* *(m+2) – m= 2* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Cristina Eccius Wellmann

Vidrio



Übersetzter Kommentar des Lehrenden	Interpretation und Analyse
Regeln der Exponenten	*Vidrio gibt eine Verletzung der Exponentenregeln als Fehlerbeschreibung an.* *Er weist auf das richtige Resultat hin, aber geht nicht auf die Ursachen der Fehler in diesem Prozess ein.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Zusammenfassende Betrachtung der Aufgabe 6:

Lehrender	**Ursache / methodisches Vorgehen**	**Beschreibung**
Sergio	Weist wieder auf Regeln hin, die gelernt werden müssen, Hierarchie der Operationen	
Miriam	„Man kann einen binomischen Term nicht vor dem Operieren trennen“ könnte ein möglicher Hinweis auf ein Linearisierungsprozess sein.	Vereinfacht, in dem sie das richtige Resultat niederschreibt, ohne Zwischenschritte.
Pedro	Kein Kommentar	Verwendet Exponentenregeln, um die Aufgabe zu vereinfachen.
José Antonio	Verletzung der Exponentenregeln	
Dreieck	Studierender weiß nicht was er tut. Er vereinfacht die Aufgabe unter seinen eigenen Parametern	
Navega	Gibt einen Hinweis auf das Distributivgesetz was in unadäquater Form angewendet wurde. Er weist hier auf eine mögliche Ursache hin, da die Distribution als ein Linearisierungsprozess angesehen werden könnte.	Vereinfacht die Aufgabe, mit Angabe des Weges, die Exponentenregeln.
Vidrio	Sieht die Ursache in der Verletzung der Exponentenregeln.	Gibt das richtige Resultat ohne Prozess an.

Die meisten Lehrenden geben die Verletzung der Exponentenregeln als Ursache des Fehlers an. Es ist klar, dass die Exponentenregeln nicht adäquat angewandt wurden, aber ist nicht die Ursache des oder der Fehler.

Sollten Exponentenregeln die Problematik sein, so wären zu enge Eingansmerkmale die Ursache des Fehlers.

Es sollten in dieser Aufgabe eine Serie von Fehlern entdeckt werden, jedoch geht keiner der Lehrenden näher auf die Problematik ein.

Folgerungen für diese Studie:

Induktives Vorgehen, nominale Kategorisierung (Mayring) Bei Forschungsbeschreibung (hinter Kategorisierungen)

In der nächsten Tabelle wird eine Zusammenfassung der Fähigkeiten der Lehrenden, deren Reaktion auf Fehler, ihr methodisches Vorgehen, ihre Auffassung der Ursachen der Fehler und ihr Verständnis vom Lernprozess wiedergegeben. Die Befunde der einzelnen Lehrenden findet man im Anhang 5 wieder.

Anhang 17: Interview mit Enrique

Enrique unterrichtet gegenwärtig vom 9.-12. Schuljahr an einer privaten Schule. Insgesamt arbeitet er seit 14 Jahren als Mathematiklehrer.

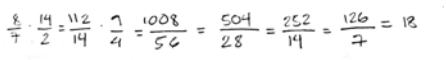
Er studierte Ingenieur für Elektronik und Kommunikation.

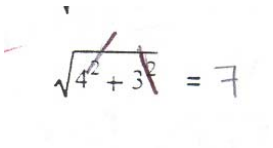
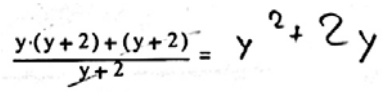
Dieses Interview wurde als Erstes durchgeführt. Einige Fragen wurden in den weiteren Interviews verändert, jedoch soll dieses Interview trotzdem mit aufgenommen werden, weil typische Reaktionen, die sich auch in den anderen Interviews zeigten, deutlich werden.

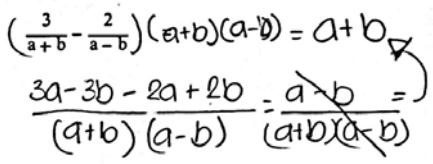
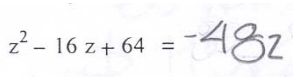
Zum Verlauf des Interviews

Enrique wurde das Blatt mit den verschiedenen eingescannten Anfangsstudierendenlösungen vorgelegt, und er sollte sich dazu äußern.

Erster Teil des Interviews

I: Auf diesem Blatt habe ich Lösungen verschiedener Studienanfänger eingescannt. Ich habe hier einen Bleistift, falls du schreiben möchtest.	
	(Es entsteht eine lange Pause, in der Enrique die Studierendenlösungen analisiert) *Ca. 90 Sec.*
E: Aufgabe 1  Bei der Multiplikation gibt es einen Fehler, von Anfang an sind wir falsch, nicht wahr, mit der Multiplikation.	*Aufgabe 1: Enrique erkennt nicht die fehlerhafte Anwendung des Gleichheitszeichens in der Lösung. Er weist auf einen Fehler in der Multiplikation hin, der nicht besteht. Vermutlich hat er sich verrechnet.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

Aufgabe 2:  Die Form in der er die Wurzel löst, eine fehlerhafte Form, wenn ich eine Summe habe. Es ist die inkorrekte Form des Durchstreichens.	*Er weist auf die fehlerhafte Lösung hin, die durch ein Kürzen des Wurzelzeichens und des Exponenten vom Studenten vorgenommen wurde. Sie haben falsch "durchgestrichen". Damit wird die Technik der Bearbeitung (Prozedur) beschrieben.* *Er geht auf die Struktur des Terms nur oberflächlich ein, da er sich nur auf die Summe bezieht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** **Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2** **Weist auf Regelverstoß hin: B3** **Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5** **Erfassen der Ursache (nein): F2**
Aufgabe 3:  Dasselbe, beim Vereinfachen in einem algebraischen Bruch. Immer sage ich meinen Schülern, um eine Beseitigung (Eliminación, Eliminieren) vornehmen zu können, muss die Form eines Produktes bestehen, wenn ich eine Summe habe, darf ich nie annulieren.	*Aufgabe 3: Enrique erkennt den Fehler. Er weist seine Schüler häufig darauf hin, dass sie in Summen nicht kürzen bzw. "beseitigen" dürfen.* Er geht auf die Prozedur ein, die in diesem Zusammenhang falsch ist. Er weist auf die Struktur des Terms hin, darauf dass ein Fehler in der Informationsverarbeitung vorliegen könnte oder ein Fehler im Abruf der falschen Prozedur. **Identifikation des Fehlers (richtig) A1a** **Interpretation der Vorgehensweise des Schülers A2** **Hinweis auf Regel C6a u. C6b** **Verwechslung von Prozeduren: D1c** **Erfassen der Ursache (nein): F2**

Aufgabe 4: Das negative Zeichen, das negative Zeichen betrifft immer, betrifft den ganzen Bruch. Tatsache, die hier nicht beachtet wird. 	*Aufgabe 4: Enrique erkennt einen der Fehler in dieser Aufgabe, jedoch entdeckt er nicht das fehlerhafte Erweitern und Kürzen. Er entdeckt einen Fehler in der Anwendung des Distributivgesetzes (Umgang mit dem Minuszeichen).* **Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c** **Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2** **Erfassen der Ursache (nein): F2**
	(Lange Pause)ca. 90 sec.
Aufgabe 5:  Hier werden verschiedene Variablen addiert. Tatsache, die fehlerhaft ist.	*Aufgabe 5: Enrique meint, dass der Student nicht weiß, welche Variablen addiert werden können.* **Identifiziert Fehler unvollständig: A1a** **Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2** **Erfassen de Ursache (nein): F2**

Deutung

In der ersten Aufgabe erkennt Enrique den Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht, jedoch erkennt er, dass die Aufgabe hätte einfacher gelöst werden können, wenn der Studierende vorher gekürzt hätte. Während er bei der zweiten Aufgabe allein auf den Fehler eingeht, nimmt er bei der dritten Bezug darauf, dass er seine Schüler immer auf diese Problematik hinweist. Er verwendet dabei das Wort "beseitigen" als ein anderes Wort für "Kürzen". "Beseitigen" (eliminar) wird von mexikanischen Schülerinnen und Schülern häufig verwendet. Es bezieht sich darauf, dass zwei gleichwertige Terme „gekürzt“ 1 oder nichts ergeben. Die ursprünglichen Terme fallen quasi weg. Mit dieser Bezeichnung ist jedoch auch ein Fehler verbunden, der sich aus der umgangssprachlichen Verwendung des Wortes ergibt: sowohl die Terme, als auch die 1 wird weggelassen, sie werden „eliminiert“.

In der vierten und fünften Aufgabe wird allein Bezug auf die Fehler genommen. Die Beobachtungen beziehen sich auf die Vorgehensweise, die zu dem Fehler führt: Er vermutet, dass falsch gerechnet wurde, dass Regeln nicht beachtet werden. Es ist zu fragen, wie weit die Form der Fragestellung dies beeinflusst hat.

Seine Ausführungen zur dritten Aufgabe erwecken den Anschein, als würde Enrique die Schüler auf die richtige Prozedur hinweisen. Er würde ihnen die Fehler zeigen und sagen, was sie falsch gemacht haben. Da er insgesamt sich überwiegend auf Prozeduren bezogen hat, wird nicht deutlich wie weit er bei seinen Erläuterungen versucht ein Verständnis bei den Schülern zu erzeugen.

Zweiter Teil des Interviews

Fragen danach, was er den Schülern bei jeder Aufgabe sagen würde, sollen deutlicher werden lassen, welche Vorgehensweise er bei den entsprechenden Fehlern wählen würde. Außerdem soll nach den Ursachen der Fehler gefragt werden.

I: Was würdest du den Schülern bei jeder Aufgabe sagen?	
E: Ich würde ihm die korrekte Lösungsform zeigen, ihm empfehlen, das Thema zu lernen. Wahrscheinlich würde ich ihm eine Serie von Übungsaufgaben zum selben Thema geben, damit er sein Wissen verstärkt.	*Enrique zeigt die richtige Lösungsform und erteilt Übungsaufgaben. Das Thema lernen weist auf fehlende Vorkenntnisse des Schülers hin.* ***Zeigen (vormachen): C4*** *(prozedurales Vorgehen).* ***Mehr vom Gleichen: B1*** ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (nein): G2*** ***Erfassen der Ursachen (nein): F2***
I: In der ersten Aufgabe hast du gesagt, dass die Multiplikation falsch wäre, in welchem Sinn?	
E: 8 x 14, 8 x 14 = 92; und der Schüler schreibt 112.	**Identifikation des Fehlers (falsch): A1e** Lehrer verrechnet sich **Macht selber Fehler: A8**
I: Bei der zweiten Aufgabe, in welchem Sinn ist die Aufgabe nicht korrekt gelöst?	

E: Die Gesetze der Wurzelrechnung sind nicht richtig angewandt, ich habe 4 zum Quadrat plus 3 zum Quadrat, und was er macht ist eine Annullierung (Durchstreichen), den quadratischen Exponenten mit der Wurzel. Dieses ist Total außerhalb des Korrekten.	*Die Beschreibung der Vorgehensweise des Schülers verweist jedoch auf eine Verwechslung der umgangssprachlichen Bezeichnung "durchstreichen" mit der mathematischen Verwendung im Kontext der Bruchrechnung hin (kürzen) und dem Radizieren (Wurzelziehen).* *Der Schüler hat die Potenzzahlen weggelassen, annulliert im umgangssprachlichen Sinne. Dies passt am ehesten zu dem MALLE (1993) beschriebenen Streichschemata.* *Enrique geht nicht auf die Ursachen ein, sondern nur darauf, dass die Gesetze nicht richtig angewandt wurden und geht ebenfalls nicht auf mögliche methodische Maßnahmen ein.* **Identifikation des Fehlers (richtig) A1a** ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Hinweis auf Verstoß der Regeln: B3*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Tatsachen, die wir oft finden?	
E: Ziemlich oft, trotz der vielen Übungsaufgaben, die in der Unterrichtsstunde durchgenommen werden. Wenn dann eine Klassenarbeit geschrieben oder wenn sie die Hausaufgaben machen, ist es ein Fehler, den sie machen.	*Hinweis auf Übungsaufgaben verstärkt die Vermutung, dass er einfach mehr vom Gleichen gibt* ***Mehr vom Gleichen: B1*** ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** ***Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6*** *Trotz des vielen Übens, werden die Fehler immer wieder gemacht.*
I: Und woran, glaubst du, dass es liegt?	

E: Manchmal liegt es daran, dass die Schüler nicht aufpassen, an Ablenkungen die vorkommen. Gelegentlich liegt es daran, dass sie, bei einer Ungewissheit nicht nachfragen, weil sie glauben, dass es so gemacht wird, aber sie fragen nicht nach, und bestätigen es nicht beim Lehrer. Oder sie schlagen nicht in ihrem Buch nach und merken nicht, was sie machen oder wie die Aufgabe gemacht wird.	*Nicht aufpassen kann sich auf den Lernprozess beziehen: a) Schüler haben sich nicht gemerkt wann eine bestimmte Prozedur angewendet werden soll oder b) auf den Prozess der Informationsaufnahme, sie haben die vorgegebene Aufgabe nicht genau genug angesehen.* *Nicht aufpassen, nicht nachfragen, nicht nachschlagen: Lehrerzentrierte Vorstellung vom Lernen, erwarten Bestätigung durch den Lehrer.* *Außerdem Orientierung an der Prozedur: wie wird etwas gemacht, keine Hinweise auf begriffliche Erläuterungen.* ***Fehlerhafte Informationsaufnahme: D1a*** ***Lehrerzentriert: E9*** ***Verwechslung von Prozeduren: D1c*** ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (nein): G2***
I: Z.B. in der Aufgabe 3, welches wäre die Schwierigkeit?	*Wenn das Ihre Vermutung ist, wie würde sich das bei der Aufgabe 3 zeigen?*
E: Es ist etwas was ständig passiert. Wieder, ich glaube es fehlt die Konzentration, es fehlt die Aufmerksamkeit, ich sagte es schon, ich sage meinen Schülen immer, schreibt es mit großen roten Buchstaben, dass man sie sieht, die einzige Form, um in einem Bruch zu kürzen, ist, wenn wir Produkte haben, wenn ich eine Addition oder eine Subtraktion habe, erläutere ich immer; Addition und Subtraktion, kann ich nicht kürzen.	*Hier geht es um das Kürzen eines Bruches. Er bezieht sich auf die Notation des Bruches und will damit darauf hinweisen, dass ein Produkt vorliegen muss. Erneut Hinweis auf Aufmerksamkeit im Sinne von Nachahmung dessen, was der Lehrer vorgibt. Hinweis des Lehrers ist Verweis auf die Regel: Man kann nur Produkte, nicht Differenzen und Summen kürzen. Aber: es ist das Ende eines Lernprozesses! Der Lehrer geht davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler sich vertun, weil sie nicht genug aufpassen, nicht, weil sie den Sinn des Ganzen nicht verstehen.*

Außerdem mache ich sie darauf aufmerksam, dass ich nicht beseitige, ich mache eine Division, nicht wahr? Und als Resultat habe ich eine 1, so glaube ich, dass hier die Aufmerksamkeit fehlt, weil dieser Fehler sehr häufig gemacht wird, weil er sehr häufig gemacht wird.	**Fehlerhafte Informationsaufnahme: D1a** **Aufmerksamkeitslenkung: C9** Vorschlag „große, rote Buchstaben“ **Hinweis auf Regel C6a u. C6b** **Begriffsbildung: B3** was bedeutet das „Beseitigen“, was bedeutet diese Prozedur **Fehlerhafte Informationsaufnahmen: D1a** Bestätigung der unzureichenden Informationsaufnahme oder eine Verwechslung des umgangssprachlichen Beseitigens mit der fachlichen Prozedur „kürzen“. *"Ich beseitige nicht" ist gut: weil er damit auf die Division verweist. Beseitigen bezieht sich darauf, dass beim Kürzen eines Bruches die jeweiligen Zahlen oder Terme durchgestrichen werden**.** "Beseitigen" ist nicht mit Kürzen gleichzusetzen. Das Wort sollte deshalb von den Lehrern nicht verwendet werden, wird aber von vielen Studierenden und Schülern gebraucht Problem: Umgangssprachliche Assoziation "eliminar" ist eliminieren: etwas wird beseitigt. Vermutlich führt diese fehlerhafte Assoziation dazu, dass die 1, die beim Kürzen von zwei gleichen Termen entsteht, ebenfalls weggelassen wird.* *Enrique selbst verwendet oft das Wort „beseitigen“.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Bezeichnung des Fehlers als Muster: A3*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

I: Wenn der Fehler so häufig gemacht wird, glaubst du, dass es eine Unachtsamkeit ist?	*Frage verstärkt die Aussagen zur mangelnden Aufmerksamkeit.*
E: Manchmal fehlt auch mehr Übung, weil wir sie ein und noch einmal üben, damit sie sie verstehen können. Manchmal sind sie nicht aufmerksam, aber es fehlt auch mehr Übung.	*Er gibt zu, dass es nicht immer an der mangelnden Aufmerksamkeit liegt, sondern auch an der fehlenden Übung. Er geht davon aus, dass eine wiederholte Durchführung der Aufgaben zum Verständnis führt, bestätigt Position, dass Üben allein ausreicht bei Fehlern. Damit ist ein verstärktes Aneignen von bestimmten Vorgehensweisen angesprochen, das heißt erneut eine Prozedur, bei der bestimmte Regeln einzuhalten sind.* **Mangelndes Üben: D1d** **Erkenntnis durch Anleitung: E1**
I: Und bei der vierten Aufgabe?	
E: Na ja, ich glaube es ist das Gleiche, die Zeichen, die Zeichen können manchmal fatal sein, und ich weise darauf hin, dieses ist ein Zeichen (gemeint ist ein Minuszeichen) und ich weiß, dass ich ein falsches Resultat haben werde. Ich glaube auch, dass man nicht genug Nachdruck darauf legt, dass das negative Vorzeichen den ganzen Bruch verändert. Schüler beachten oft den ersten Term des Bruches, aber dann nicht mehr. Die Frage der Schüler ist warum? Ich habe doch keine Klammern, wenn ich das negative Zeichen habe und eine Klammer, dann begreifen sie es schon eher, dass das Zeichen mich angeht.	*Lehrer geht davon aus, dass die vielen Informationen, z.B. die Vorzeichen von den Schülerinnen und Schülern übersehen werden. Dass die Auswirkung des negativen Vorzeichens nur zum Teil auf die Terme angewendet wird.* *Er kann nicht nachdrücklich genug darauf hinweisen, diese zu beachten: wieder Lehrerzentriert.* *Er erkennt, dass Schülerinnen und Schüler eventuell das negative Vorzeichen bei einer Klammer richtig anwenden würden, jedoch, dass sie einen Bruch nicht als einen Term auffassen, der „eine implizite Klammer" hat.* **Nicht genug Nachdruck: D2c** **Fehlerhafte Informationsaufnahme: D1a** **Fehlende Vorkenntnisse D1e** Fehlendes Wissen: Bruchstriche fun-

	gieren wie Klammer (implizite Klammer bei Bruchschreibweise) **Lehrerzentriert: E9** **Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (Ja): G1**
I: Wäre es die Form in der sie es im Unterricht durchgenommen haben?	
E: Ja, so ist es, und es ist etwas was von den unteren Schuljahren kommt, von dem 7. – 9. Schuljahr. Wenn ich ein negatives Zeichen habe, wenn die Subtraktion von Polynomen durchgenommen wird, also, wenn ich ein negatives Zeichen habe, verändert sich das ganze Polynom, ich wechsle alle Vorzeichen, habe später, wenn ich einen algebraischen Bruch habe, die nicht in Klammern steht, warum sollte es sich verändern? Es ist etwas, was sie nicht können, es kommt die Abstraktion dazu, der Teil, der ihnen so schwierig wird. Verstehen, dass das Vorzeichen verändert. Aber dann kommen die Fragen, warum verändert sich das Vorzeichen des Nenners nicht, aber doch nur das Vorzeichen des Zählers. Dieses ist die Fragen, und dann kommt die ganze Erklärung der Zeichen bei einem algebraischen Bruch, usw.	**Vorausgegangener Unterricht: D2a** **Mangelnde Fähigkeit zur Abstraktion: D1f** (meint er mangelnde Transferfähigkeit) *Hier geht er auf das Verständnis ein.* *Eventuell meint er, dass Schülerinnen und Schüler zu enge Eingangsmerkmale aufweisen, Schülerinnen und Schüler wenden die Vorzeichenregeln bei Polynomen korrekt an, können sie aber bei algebraischen Brüchen nicht korrekt anwenden.* **Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge: G1** **Löst sich vom konkreten Beispiel: H** **Beschreibung anderer Fehlermuster: A2d** *Schüler fragen im Detail warum: Lehrer erklärt die Funktion der Zeichen.* *Er ist der Ansicht, dass er nach den Fragen dem „Warum“ eine klare und deutliche Erklärung liefern muss, wieder Lehrerzentriert.* ***Lehrerzentriert: E9***
I: Und bei der fünften Aufgabe?	

E: Bei der fünften Aufgabe, ja, ein Fehler der…Ja, eine Sache der ähnlichen Terme. Die Tatsache, dass oft nicht genug Nachdruck gemacht wird, oder auch, dass, so sehe ich es, ich mache die Summe, ohne die ähnlichen Terme zu beachten.	*Geht auf die Problematik ein, dass ungleiche Variablen zusammengefasst werden. Dies ist ein bekanntes Problem. Er geht wieder auf "Nachdruck" ein, d.h. er sieht es in seiner Verantwortung das zu beseitigen.* **Fehlerhafte Prozedur: D1b** **Fehlerhafte Informationsaufnahme: D1a** **(nicht beachten gleicher Variablen)** **Nicht genug Nachdruck: D2c** **Erfassen der Ursache (nein): F2**
	Weiteres Erkennen der Fehler während des Interviews (nein): A9b

Deutung

Enrique würde bei jeder Aufgabe, die fehlerhaft gelöst wird, zuerst dem Schüler die richtige Lösungsform zeigen.

Durch Training, das heißt, durch Übungsaufgaben, könnten nach Enrique Fehler behoben werden. Er geht nicht auf die Ursachen der Fehler ein.

Er ist der Meinung, dass die Schüler nicht genug aufpassen und sich leicht ablenken lassen, und dass bei einigen Inhalten mehr Nachdruck gemacht werden müsste, womit er durchblicken lässt, dass sein Unterricht eher lehrerzentriert erfolgt.

I: OK. Um zu Konkretisieren, du würdest einem Schüler zuerst zeigen, wie es richtig gemacht wird, und an zweiter Stelle würdest du ihm eine Erklärung geben, wie du sie mir eben gegeben hast.	*Keine weitere Äußerung des Lehrers* *Hinweis darauf, dass Enrique auch Bezug auf die Häufigkeit der Studierendenlösungen bzw. Fehler gibt.*

Dritter Teil des Interviews

In diesem dritten Teil soll die Fehlerfreundlichkeit des Lehrers zu den Schülerfehlern examiniert werden. Dafür fragte ich Enrique, wie er handelt, wenn ein Schüler eine Aufgabe fehlerhaft an der Wandtafel löst.

I: Was machst du, wenn z.B. einer deiner Schüler eine dieser Lösungen an die Wandtafel schreibt?	
E: Falsch? (sehr erstaunt)	
I: Ja, stell dir vor, du bittest einen Schüler die Aufgabe 3 an der Wandtafel zu lösen, und du siehst, wie er fehlerhaft kürzt. Was würdest du in diesem Moment machen?	
E: Ich mache ihn darauf aufmerksam, dass er sieht, was er gerade macht, ob es korrekt oder falsch ist. Ich bitte die Mitschüler um ihre Meinung, und dann kommt es…nämlich, dass er selber merkt, mal sehen, wo er sich geirrt hat, und ich erinnere ihn daran, was haben wir geschrieben? Also, „muss ich erst Faktorisieren und dann kürzen“. Dann, versuche ich, dass die Korrektur nicht von meiner Seite aus kommt, sondern, dass er selber merkt, wo er den Fehler begeht, selbstverständlich mit meiner Unterstützung, ich sage ihm, wie er es an der Tafel schreiben soll. (Dieser Satz scheint ein Widerspruch zu sein, die Interpretation ist, dass Enrique dem Schüler beim Lösungsprozess hilft, was erst im nächsten Absatz geklärt wird.)	**Umgang mit Fehlern: C21** **a. Lehrer hinterfragt Lösung auf Fehler** **b. Er bezieht Mitschüler mit ein** **c. Schüler erkennt Fehler** **d. Lehrer erinnert an die Regel** *Der Hinweis darauf, was der Schüler gerade macht, ist ein häufiger Hinweis auf fehlerhaftes Vorgehen. Eine Intervention wie: siehst du, was du da machst? Wird häufig als Hinweis auf Fehler gedeutet. Die Mitschüler übernehmen die Rolle des Lehrers, wenn sie dazu aufgefordert werden die Fehler zu korrigieren. Dies soll in der Frage münden: „muss ich erst faktorisieren und dann kürzen?“ Ist ein deutlicher Hinweis auf eine ganz bestimmte Prozedur.* *Hier ist die Aufmerksamkeit bereits sehr stark eingeengt, auf zwei verschiedene Möglichkeiten. Unter diesen kann der Schüler auswählen. Damit findet er zwar seinen Fehler: „er löst es selber“, aber mit Unterstützung des Lehrers.* ***Erkenntnisse des Schülers mit Unterstützung des Lehrers: E3*** ***Identifikation des Fehlers hilft Fehler vermeiden: E4***

	Zeigen (vormachen): C4
I: Und glaubst du, dass er es lösen kann? Wie ist die plötzliche Wandlung, wenn er soeben einen Fehler gemacht hat und jetzt mit einem Mal weiß, dass er es falsch gemacht hat?	
E: Ach nein, nein, ich sage, es ist ein Prozess, vielleicht an der Wandtafel mit Unterstützung der Mitschüler, auch beim Lösungsprozess von mir unterstützt. Manchmal sagen die Mitschüler ihm, was er schreiben soll, “schreib es so!” Und nachher kommt die Frage, aber warum? Und ich gebe dann die Erklärung. Und wieder Übungsaufgaben, ich sage den Schülern, dass man bei der Mathematik viel üben muss. Viel üben, damit der Schüler mechanisiert. Und später dann, wenn er den ganzen Prozess mechanisch weiß, in irgendeiner Form kommt der andere Teil, der Prozess des Bewusstwerdens, was, wofür und warum ich es so mache.	Lehrer erklärt sein Verständnis von Einsicht **Erkenntnis durch Anleitung: E1** *Hier ist erneut ein Widerspruch: Der Schüler soll ein Verfahren lernen "schreib es so" vielleicht mit Unterstützung der Mitschüler, die Typischerweise einen Vorschlag zur Notation machen. Worin die Unterstützung im Lösungsprozess besteht von Seiten des Lehrers geht hier nicht hervor. Der Lehrer gibt eine Erklärung, wenn der Schüler nach dem "Warum" fragt. Aber legt Wert auf viel Übung. Wobei deutlich wird, dass das Üben ein einüben von Fertigkeiten ist. "Er weiß den Prozess mechanisch". Daraus erwächst nach der Vorstellung des Lehrers das Verständnis: "In irgendeiner Form“.* ***Üben: C2*** ***Erklären: C13*** ***Üben = Mechanisieren: E2***
I: Glaubst du, dass während der Mechanisation die Fehler zementiert werden könnte?	
E: Dass die Fehler die sie machen…	
I: Interiorisiert werden..	
E: und die Fehler weiter machen…	
I: Und dass es später sehr schwierig ist…	

E: Ich glaube ja, gelegentlich ist es so, wenn nicht die Festigung vorgenommen wird, wenn die Schüler den Fehler begehen, lasst es uns so machen und nicht so. Gelegentlich kämpfe ich, da sie Fehler schon von früher mitbringen, aus den niedrigeren Schuljahren, aus dem 1. – 9. Schuljahr. Eine bestimmte Aufgabe wird so gelöst, und sie wissen nicht warum, z. B., wenn wir von Brüchen sprechen, von Anfang an, sind Brüche Tabu, man redet von sonderbaren Dingen, und einem selbst ist es gegangen, als man zum ersten Mal Brüche durchgenommen hat. Brüche sind der Kinderschreck, z. B., wenn wir Brüche manipulieren möchten, nur arithmetische Brüche, mal sehen, wie multiplizieren wir zwei Brüche. Sie verwechseln es oft mit der Division, in dem sie die gekreuzte Form gebrauchen. Diese Konfusion stammt von früheren Schuljahren. Als wäre es den Schülern nicht klar genug erläutert worden und sie multiplizieren zwei Brüche in dem sie den Zähler des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten Bruches multiplizieren und als ihren Zähler niederschreiben. All diese Art von Konfusionen handhaben die Schüler, und es wurde ihnen nie der Irrtum geklärt und viele Lehrer merken kaum die Fehler, die ein Schüler begeht. Der Schüler macht die Fehler weiter und meint er löst die Aufgaben korrekt.	*Der Lehrer weist darauf hin, dass sich Fehler verfestigen können und bejaht damit die im Interview gestellte Frage.* ***Festigung falscher Verfahren: D1g*** *Er greift auf die Erfahrung zurück, dass Inhalte aus vorausgegangenen Schuljahren nicht richtig zur Verfügung stehen, weil sie bereits damals nicht richtig gelernt wurden.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a*** *Hier wird ein Zusammenhang nach der begrifflichen Klärung vorgenommen "sie wissen nicht warum".* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (Ja): G1*** *Außerdem wird ein emotionaler Faktor benannt: Brüche werden als "Kinderschreck" bezeichnet.* ***Affektive Komponente im Lernprozess: I*** *Er benennt einen ganz bestimmten Fehler, die Verwechslung der Multiplikation der Brüche mit der Division. "Als wäre es den Schülern nicht klar genug erläutert worden" verweist dabei deutlich auf eine lehrerzentrierte Vorstellung vom Lernprozess: der Lehrer erläutert, der Schüler soll das aufgreifen und lernen.* ***Lehrerzentriert: E9*** *Fehler resultieren daraus, dass Irrtümer nicht aufgeklärt werden. Dies führt E. auch darauf zurück, dass Lehrer die Fehler ihrer Schüler nicht bemerken.* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** *Nicht Erkennen der Schülerfehler* **Verwechslung von Prozeduren: D1c** **Besonders Anspruchsvoll: D3a**

I: Also, haben Schüler die Idee, dass bestimmte falsche Lösungswege korrekt sind?	
E: Ja, so ist es. Deswegen ist es auch in späteren Schuljahren schwierig die Fehlerstrategien zu beseitigen. Dem Schüler begreiflich zu machen, dass er im Irrtum ist und dass er es korrigieren muss.	*Das würde ich so verstehen, dass der Hinweis auf einen Fehler in der Prozedur gegeben wird*
I: Und wie kann ein Schüler begreifen und den Fehler korrigieren?	*Ich versuchte auf die begriffliche Ebene abzuheben.* *(Hier war ich darauf aus, dass der Lehrer die Fehlerursachen zusammen mit dem Schüler sucht)*
E: Also, erst Erläuterungen machen, sehen. Vergleiche vornehmen, vielleicht in einer berührbaren Form, in der Algebra ist es etwas komplexer, es könnte auch Problemlösen helfen. Wenn wir dieses vornehmen, dann gelingt es uns nicht, z.B., wenn wir ein Problem lösen in dem von Menschen die Rede ist, und vielleicht das Resultat eine Bruchzahl ist, kann ich schlecht einen Bruchteil von einer Person haben, das wäre eine Form wie wir uns nähern könnten.	*Neue Ebene wird durch Frage ausgelöst* *Sehr allgemein gehaltene Darstellungen* *Der Lehrer versucht eine Form zu finden, die dem Schüler ein Verständnis ermöglicht. Er sucht nach Beispielen, die dem Schüler bedeutsam erscheinen, auch aus seinem Erfahrungsbereich, weil die Algebra abstrakt ist.* *Unter Problemlösen ist hier die Bearbeitung einer Sachsituation zu verstehen, die Situation soll zur Erläuterung des mathematischen Inhalts verwendet werden im Sinne der 1.Funktion des Sachrechnens nach WINTER. (In Mexiko werden "Aufgabe" und "Problem" synonym verwendet.)* **Veranschaulichungen: C7, C12**
I: Für dich, ganz spezifisch, welche Bedeutung hat ein Fehler in einem mathematischen Problem in deiner Unterrichtsstunde?	

E: Mmm, ich, manchmal, während des Ablaufs einer Aufgabe, mache ich absichtlich einen Fehler, das nützt mir, weil ich sehe, wie gut die Schüler aufpassen, es hilft mir, um zu sehen, ob die Schüler das Thema verstanden haben, dieses mache ich viel in meiner Unterrichtsstunde. Meine Wirkung ist, alle sind ruhig, sie schreiben die Aufgabe ab, dann frage ich "ist das richtig?" Dann fangen die Schüler an, "aber Sie hatten doch gesagt", und ich frage dann: "Wo ist der Fehler?" Ich spiele sehr viel mit den Fehlern, manchmal irre ich mich auch ohne es zu wollen, dann, dann…	*Methodischer Hinweis* **Systematisch Fehler einbauen: C8** **Aufmerksamkeitslenkung: C9** *Fehler im konstruktivistischen Sinn* *Kein fehlervermeidender Unterricht: er gesteht sich selber Fehler zu und macht systematisch Fehler* *Fehler zur Kontrolle der Aufmerksamkeit der Schüler "wie gut die Schüler aufpassen", aber auch um das Verständnis zu überprüfen. Der Lehrer ermuntert damit die Schüler zum kritischen Umgang mit seinen Vorgaben. Das ist ganz im Sinne von KILPATRICK (1995) der vorschlägt, Fehler dazu zu verwenden, die Schüler zu provozieren.*
I: Ich glaube, dass wir uns alle einmal irren…	
E: Einmal habe ich etwas mit einem Fehler erklärt, aber ein Schüler ist an mich herangetreten und hat mich darauf aufmerksam gemacht, so musste ich der Klasse sagen, dass ich einen Fehler begann und dass sie alles durchstreichen sollten, und habe ihnen die richtige Form erklärt. Auch dieses ist wichtig, manchmal irrt sich der Lehrer, aber er sagt es uns und ändert es.	***Zeigen (Vormachen) C4*** *Sehr schöner Umgang mit dem eigenen Fehler.*
I: Das ist sehr wichtig, dass man akzeptieren kann, dass einem auch Fehler unterlaufen.	

Deutung

Enrique lässt Schülerfehler durch Mitschüler korrigieren. Enrique meint, dass eine Schülerin oder ein Schüler seinen Fehler entdeckt, in dem er die nicht angewandte Prozedur weiterverfolgt („muss ich zuerst faktorisieren oder kürzen" (wahrscheinlich hat die Schülerin oder der Schüler den Fehler beim kürzen schon gemacht). Man kann wahrscheinlich nicht behaupten, dass die Schülerin oder der Schüler den Fehler eingesehen hat.

Die Auffassung von „Verstehen“ geht aus seinen Bemerkungen nicht klar hervor, er meint, dass das Verständnis aus der wiederholten Übung erwächst, oder aus der Mechanisation, z.B. bei der Multiplikation. Wahrscheinlich ist für Enrique das „Verstehen“ mit Fertigkeiten verbunden.

Enrique ist der Meinung, dass Inhalte von Lehrenden anderer Schuljahre nicht klar genug erläutert wurden, und insistiert auf eigene klare Erläuterungen, wenn die Schülerin oder der Schüler nach dem „Warum“ fragt. Man könnte einen eher lehrerzentrierten Unterrichtsstil von Enrique vermuten.

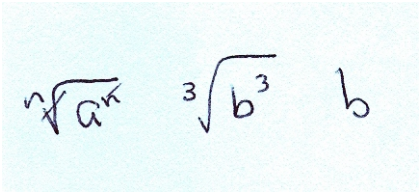
Vierter Teil des Interviews

In diesem Teil des Interviews sollte sich Enrique über den Stellenwert des Fehlers in einem konstruktivistischen Mathematikunterricht äußern.

I: Kennst du etwas über den Konstruktivismus?	
E: Wenig.	*Enrique meint, er kennt wenig über den Konstruktivismus*
I: Was verstehst du unter Konstruktivismus?	
E: Eine Konstruktion von Wissen, mittels Erfahrungen, mittels den Erfahrungen die man hat.	*Eine generelle Definition vom Konstruktivismus*
I: Wie reagierst du auf einen Schülerfehler?	
E: Was ich mache ist, ich verteile Extrapunkte, Extrapunkte für die Schüler die sich am Unterricht beteiligen. Ein Fehler gibt manchmal einen Extrapunkt, weil der Schüler einen Fehler entdeckt. Ich denke, so suchen sie auch bei sich selbst Fehler.	*Enrique verteilt Extrapunkte für die Schülerinnen und Schüler die seine gewollten oder ungewollten Fehler entdecken.* ***Identifikation von Fehlern hilft Fehler vermeiden: E4*** *Er ist der Ansicht, dass Schülerinnen und Schüler dann auch eigene Fehler suchen werden.* *Was für Fehler entdecken Schülerinnen und Schüler an der Wandtafel? Entdecken alle Schülerinnen oder Schüler seine Fehler? Wären es die gleichen Fehler, die auch die Schülerinnen und Schüler machen würden?*

I: Ich meinte eher einen Schülerfehler. Wie reagierst du auf einen Schülerfehler? Ich verstehe, dass deine Reaktion auf einen Fehler, den du gemacht hast, ist, ihn zu korrigieren, ihnen zu sagen, wo du dich geirrt hast, und suchst eine Form, ihnen zu erklären, wo und warum du dich geirrt hast. Habe ich das richtig verstanden? Aber bei einem Fehler eines Schülers, wie reagierst du?	*Ich versuche, seine Reaktion auf Schülerfehler zu erforschen, nicht auf seine eigenen Fehler im Unterricht.*
E: Also, erst muss er einsehen, dass ein Fehler vorhanden ist. Der Schüler sagt bestimmt, dass es nicht wahr ist. Aber da ist ein Fehler, da setzen wir an und führen Schritt für Schritt die Aufgabe aus, bis er merkt, wo sein Fehler war. Ich versuche, dass ihm klar wird, bei welchem Schritt er den Fehler macht und warum.	***Typischer Umgang mit Fehlern: B10*** ***a. Lehrer weist auf Fehler hin*** ***b. Schüler leugnet Fehler*** ***c. Lehrer beharrt auf seiner Position*** ***d. Gemeinsames schrittweises Ausführen der Aufgabe*** ***e. Identifikation einer bestimmten Position des Fehlers*** ***f. Die Frage nach dem Warum*** *Der Schüler muss einsehen, dass er einen Fehler begangen hat, den er wahrscheinlich nicht akzeptiert.* *Vom Fehler an, wird die Aufgabe Schritt für Schritt durchgearbeitet, bis er merkt wo sein Fehler war.* *Er versucht, dass dem Schüler klar wird, bei welchem Schritt der Fehler entsteht und warum.* *Es geht nicht klar hervor, wie er diese Schülereinsicht erreichen möchte, eventuell durch ein Schrittweises vorgehen. Es geht auch nicht klar hervor, ob das Warum eine Suche nach der Ursache des Fehlers ist. Wahrscheinlich werden bei dem schrittweisen Prozess nur die Regeln und Gesetze, die verletzt wurden erwähnt und erläu-*

	tert. ***Lehrerzentriert: E9*** *Es weist eher auf eine Wiederholung der korrekten Prozedur hin.* ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5***
	Ich möchte noch einmal auf das Erlangen der Einsicht der Schüler über ihren Fehler eingehen, damit es eventuell näher erläutert wird.
E: Manchmal ja, manchmal nein. Der Fehler des Minuszeichens, z.B., wenn ich den Zähler wechsle, dann muss ich auch im Nenner wechseln. Dann kommt hier wieder die Erklärung. Warum kann ich, z.B. nicht diese Beseitigung des Wurzelzeichens und des Exponenten vornehmen. Lasst uns sehen, was sagen die Gesetze? Wie muss dieser Prozess vorgenommen werden? Man versucht es ihnen zu erklären.	*Einsicht des Schülers wird auf prozeduraler Ebene durch Verfügen über Verfahrensweisen und Abruf von Regeln erwartet* ***Verfügen über Verfahrensweisen: E11a*** ***Abruf von Regeln: E11b*** *E. gibt zu, dass die Schülerinnen und Schüler nicht immer den Fehler einsehen.* *Er verweist oder stützt sich auf die Gesetze und die darauf folgende Prozedur. Er versucht eine nochmalige Erklärung. Wieder Lehrerzentriert* ***Lehrerzentriert: E9***
I: Welche Gesetze wären es in der 2. Aufgabe? Wenn du etwas schreiben möchtest, kannst du es gerne tun.	
E: Z.B. ich habe eine Summe, die korrekte Vorgehensweise wäre hier, 4 zum Quadrat zu rechnen, 16 plus 9 ist 25 y dann ziehe ich die Quadratwurzel, 5. Dieses kann ich nur machen, wenn ich eine Zahl habe, die den gleichen Exponenten hat wie der Wurzelindex, dann kann ich das Durchstreichen vornehmen.	*Enrique beschreibt die korrekte Vorgehensweise.* ***So wird es gemacht: B1*** *Er gibt keine mögliche Ursache an.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2*** *Er verbalisiert unter welchen Bedingungen ein „Durchstreichen“ hätte vorgenommen werden können.*

Die Quadratwurzel von 4 zum Quadrat ist 4.	*M.E. ist diese Verbalisation nicht akkurat genug, so dass die Schülerinnen und Schüler das Durchstreichen in der Aufgabe trotzdem vornehmen könnten, denn ich kann den „Exponenten und die Wurzel und Wurzelindex“ durchstreichen, wenn Wurzelindex und Exponent gleich sind.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5***
I: Und du streichst es durch? Ich sehe gerade, dass du es durchstreichst.	*Es fällt mir auf, dass Enrique beim Aufzeichnen ein Streichschema anwendet. (Siehe die eingescannten Aufzeichnungen von Enrique).*
	*Er erkennt nicht, dass gerade dieses Durchstreichen in eine Aufgabe hineinprojiziert werden kann und dadurch Fehler resultieren.*
E: Ja, so ist es, eine Form, die die Schüler mit sich bringen, ist, dass sie es durchstreichen. Dann kommt wieder die Erklärung, nicht dass es sich wirklich durchstreichen ließe, es ist eine Division, bei der dieses durch dieses (er meint, Exponent und Wurzelindex, wie es von ihm aufgezeichnet worden ist, siehe oben) als Resultat 1 ergibt. Es ist nicht wirklich ein Durchstreichen. Weil beim Durchstreichen auch die Idee auftaucht, dass es Null ist. Ich streiche etwas durch und es ergibt Null, und dann habe ich nichts im Zähler, es ist Null, es wird nicht durchgestrichen, ich führe eine Division durch, y + 2 durch y + 2 ist eins, nicht wahr? (Hier weist Enrique auf die 3. Aufgabe hin)	*Vermischung von Vorgehensweise (Durchstreichen) mit Erläuterung, was das bedeutet (Division)* ***Begriffsbildung: C3*** *Erkennt die Problematik der Null beim Durchstreichen für die Entwicklung von Vorstellungen bei den Schülern* ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4a*** *Bei einer näheren Erklärung geht er darauf ein, dass es in Wirklichkeit, kein Durchstreichen wäre, da es eine Division ist. Das Durchstreichen ergibt für viele Schülerinnen und Schüler eine Null, oder nichts, aber bei einer Division hätte man eine 1.* *Erst bei der nächsten Erklärung wird klar, dass er das Durchstreichen beim Bruchexponenten meint.*

I: Wie wäre es bei der 2. Aufgabe?	
E: Hier sage ich, wenn ich die dritte Wurzel von b hoch 3, um die Wurzel zu ziehen, was geschieht mit den Exponenten, was kann ich tun? Es ist eine Division, und dann kommt immer das mit den Umkehroperationen. Wenn ich eine Zahl potenziere, was mache ich da? Wenn ich eine Wurzel ziehe, was passiert mit den Exponenten? Sie dividieren sich, 3 durch 3, ist 1. Also b, b hoch 1. Dieses sagen mir die Exponentenregeln und die der Wurzelrechnung.	*Potenzieren und Wurzelziehen, sind Umkehrfunktionen. Es resultiert eine Bruchzahl im Exponenten.* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge(Ja): G1*** *Er weist auf die Regeln der Exponenten und Radikale hin.* ***Hinweis auf Regeln: C6b*** *Enrique basiert seine Erklärungen auf die anzuwendenden Regeln, sucht die Ursache der Fehler nicht.* ***Erfassen der Ursache nicht: F2*** *Seine Form, auf Schülerfehler einzugehen, ist eine erneute Erläuterung der Regeln und Gesetze.* ***Lehrerzentriert: E9*** ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H***
I: Möchtest du noch etwas erwähnen?	
E: Nein.	
I: Hast du schon einmal eine Lehrerfortbildung in Mathematikdidaktik gehabt?	*Mir schien diese Frage wichtig, da ich wissen wollte, ob Enrique schon an einer Lehrerfortbildung in Mathematikdidaktik teilgenommen hatte.*
E: Nein.	***Fortbildungskurs in Mathematikdidaktik (nein): K2***
I: Würdest du es gerne?	
E: Ja, sicher.	
I: Und wie stellst du sie dir vor? In welchen Aspekten?	

E: Vielleicht in Methodologie, wie ich es den Schülern besser verständlich machen kann. Manchmal glaubt man, man hat es gut erklärt, und später sagen die Schüler, dass sie nicht verstanden haben oder dass es ihnen schwerfällt. Vielleicht auch, wie man Mathematik denen Schülern erklären kann, die im Rückstand sind, oder auch, wie man bei ihnen das Niveau steigern kann. Manchmal sagen sie, Mathematik, mmm, ich verstehe nicht, ich verstehe nicht, ich verstehe nicht, und sie werden auch nicht verstehen. Was kann ich bei einer solchen Situation machen, und wie kann ich Schülern mit Schwierigkeiten helfen?	*Er möchte gerne mehr darüber wissen, wie er den Schülern die Inhalte verständlich machen kann. Er ist sich darüber klar, dass er nicht immer das Verständnis der Schülerinnen und Schüler erreicht.* *Er ist besorgt, um die Schülerinnen und Schüler, die im Rückstand sind. Er geht auf den emotionalen Aspekt ein, wo Schülerinnen und Schüler eine Aversion gegen Mathematik haben.* ***Affektive Komponente im Lernprozess: L***
I: In deiner Klasse, wie viele Schüler denkst du sind im Rückstand?	
E: Ich würde meinen, 20%.	
I: Also meinst du, dass 20% deiner Schüler im Rückstand sind, einen großen oder mäßigen Rückstand?	
E: Einen großen.	*Enrique ist der Ansicht, dass etwa 20% seiner Schülerinnen und Schüler einen großen Rückstand im Fach Mathematik aufweisen.* ***Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind: J***
I: Woher glaubst du, kommt dieser Rückstand?	*E: Lacht*
I: Eine schwere Frage, was?	
E: Ich merke es schon bei der Multiplikation, ich habe bemerkt, nicht hier, nicht hier, sondern in all den Jahren…	*Er meint, dass die Schwierigkeiten schon beim Einmaleins auftreten, dass seine Schülerinnen und Schüler des 9. – 12. Schuljahres, das Einmaleins*

	nicht beherrschen.
I: Sicher, ich meinte auch nicht unbedingt diese Schule, ich glaube, dass du mit deiner Erfahrung von 14 Jahren, nicht nur die letzten Jahre, vielleicht kann man dadurch ein wenig generalisieren.	
E: In den verschiedenen Schulen ist mir ein gemeinsamer Nenner aufgefallen, dass die Schüler nicht das kleine Einmaleins können.	*In allen seinen Jahren als Lehrer hat er dieses festgestellt.*
I: Also, hast du Schüler, die nicht multiplizieren können oder nicht das kleine Einmaleins wissen.	
E: So ist es, einen Rückstand des 2. oder 3. Schuljahres, wo man auswendig lernen muss. Ich war auf einer Schule, an der man sagte, auswendig lernen, nicht. Aber warum nicht? Das kleine Einmaleins muss auswendig gelernt werden, es wird einem erklärt, warum 7 x 2 = 14 ist, aber man muss es auswendig lernen. Unsereiner hat es ja auch gelernt. Ich meinerseits, habe Seiten von 2 x 1 = 2 schreiben müssen. Und ich kann es, war es schlecht, sie auswendig gelernt zu haben? Nein, ich sage, nein, ich kann sie. Später kam dann die Interiorisierung der Kenntnisse. Ich glaube es ist etwas, was falsch ist, angefangen bei den Multiplikationen.	*Enrique meint, dass es bestimmte Kenntnisse in Mathematik gibt, die auswendig gelernt werden müssen. Auffallend ist, dass erst auswendig gelernt werden soll und dann die Verinnerlichung/ Interiorisierung der Kenntnisse kommt. Unter Interriorisierung meint er wahrscheinlich das Verständnis über die multiplikativen Verfahren.*

Deutung:

Enrique ist der Ansicht, dass Schülerinnen und Schüler ihre Fehler einsehen könnten, wenn man mit ihnen Schrittweise den Lösungsprozess durchführt. Er begründet seine Erläuterungen und Erklärungen mit den Regeln und Gesetzen, die verletzt wurden.

Im Sinne von KILPATRICK macht Enrique an der Tafel Fehler, um Schülerinnen und Schüler zu provozieren und ihre Aufmerksamkeit aufrechtzuerhalten, in dem er Extrapunkte verteilt. Es geht nicht klar hervor, ob Enrique die „gleichen“ Feh-

ler, wie die Schülerinnen und Schüler machen würden, an die Wandtafel schreibt. Er hofft, dass durch diese Technik, Schülerinnen und Schüler mit ihren eigenen Prozessen auch kritischer umzugehen lernen.

Enrique meint, dass ungefähr 20% seine Schülerinnen und Schüler einen großen Rückstand aufweisen, sie können nicht multiplizieren, also Inhalte vom 2. und 3. Schuljahr.

Deutung und Auswertung des Interviews mit Enrique:

Das Interview hat den Anschein gegeben, dass Enrique einen eher lehrerzentrierten Unterricht erteilt, auch wenn er Schülerfehler von Mitschülern korrigieren lässt. Er stellt Schülerinnen und Schüler vor die Alternative: „muss ich zuerst faktorisieren oder kürzen“, womit er eigentlich den korrekten Lösungsprozess angibt, und es fraglich erscheint, ob die Schülerin oder der Schüler wirklich seinen eigenen Fehler entdeckt und einsieht.

Enrique, obwohl er sich bewusst ist, dass er nicht immer die Einsicht in die Schülerfehler erreicht, meint, er könne durch Übungsaufgaben (mehr vom Gleichen), und eine schrittweise Erklärung des Lösungsprozesses das Verständnis der Schülerinnen und Schüler über ihre Fehler gewinnen.

Enriques Antworten waren teilweise sehr allgemein, er geht nicht spezifisch auf die einzelnen Prozesse, Fehler und Ursachen ein.

Anhang 17a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Enrique und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien:

Transcripción de la entrevista con:

Fecha: 7-03-06

Hora: 8:00 AM

I: Lo que te muestro son soluciones de diferentes alumnos, tengo aquí una pluma por si quieres hacer una operación o que quieras analizar algo.

(Pausa larga, en la que Enrique analiza las soluciones de los alumnos)

E:

Problema 1: En la multiplicación hay un error, para empezar, estamos equivocados, verdad, con la multiplicación.

Problema 2: La forma de resolver el radical, una forma incorrecta cuando tengo la suma, es la forma de cancelar incorrecta.

Problema 3: Lo mismo al hacer las cancelaciones en una fracción algebraica, siempre a mis alumnos les digo, para poder hacer una cancelación o eliminación, deben estar siempre en forma de producto, cuando tengo sumas, si, jamás debo hacer esas cancelaciones.

Problema 4: El signo negativo, el signo negativo siempre afecta, afecta a toda la fracción, cosa que no la toma en cuenta aquí.

(Pausa larga)

Problema 5: Aquí se están sumando términos que no son semejantes, cosa que es incorrecta.

I: ¿Qué le dirías a los alumnos, tal vez en cada uno de los problemas?

E: Le mostraríamos la forma correcta de hacerlo, recomendarle el estudio del tema, quizás ponerle una serie de ejercicios del mismo tema para reforzar el conocimiento.

I: En el primero comentaste que estaba mal la multiplicación, ¿en qué sentido?

E: 8 x 14, 8 x 14 = 9; y está poniendo 112.

I: Y en el segundo problema ¿en qué sentido es incorrecto?

E: Están mal aplicadas lo que son las leyes de radicales, tengo 4 al cuadrado más 3 al cuadrado, y lo que está haciendo ahí es cancelar, vaya, el cuadrado con la raíz, es totalmente fuera de lo correcto.

I: ¿Cosas que encontramos mucho?

E: Bastante, bastante, a pesar de que se ve en clase y se hacen ejercicios, cuando viene un examen o cuando viene simplemente la tarea es un error que cometen.

I: ¿Y a qué crees que se deba?

E: A veces poca atención que tiene el alumno, distracciones que se tienen, otras ocasiones es el no estar preguntando la duda, porque a veces creo que así se hace, pero no pregunto o no confirmo con el profesor. O no voy a mi libro de texto y me doy cuenta de lo que estoy haciendo y de cómo se hace el ejercicio.

I: Por ejemplo en el tercer problema ¿cuál crees que sea la dificultad?

E: Es algo que sucede, uno lo ve constantemente. Nuevamente, yo creo que es la falta de concentración, la falta de poner atención, te comentaba, yo a mis alumnos siempre les digo, pongan con letras rojas grandes, que se vean, la única forma de poder hacer una cancelación es que se, es tenerlos, en producto, si tengo una suma, si tengo resta, se los especifico; suma, resta, no puedo hacer una cancelación, y les aclaro, no estoy eliminando, estoy haciendo una división, verdad, que como resultado me da uno, como resultado me da uno, entonces yo creo que ahí es la distracción, porque se comete mucho ese error, se comete mucho ese error.

I: Si se comete tanto ese error, ¿tú crees que sea distracción?

E: A veces también es la falta de práctica, falta de práctica, porque los pone uno y otra vez, no, o sea, otra vez los hacemos, los ejercicios, para que los vayan entendiendo, no, a veces sí falta de atención, pero sí también la falta de práctica.

I: ¿Y en el cuarto problema?

E: Pues, yo creo que voy a lo mismo, a los signos, los signos que a veces son tan fatales, no, que y se les hace la aclaración, ese es un signo, ya voy a tener, con algo que me equivoqué, ya voy a tener un resultado equivocado. Este, siempre también, a veces parte, yo creo también a veces, de que no se les hace mucho hincapié, de que un signo negativo me afecta toda esta fracción, si, porque si tomo en cuenta el primer término de mi fracción, pero a lo demás ya no lo tomo en cuenta. Entonces, si ocurre y son de las preguntas, eh, de los muchachos, no, o sea, pero por qué, no está entre paréntesis, si está el negativo y lo tengo entre paréntesis, bueno, como que concibo más, que ese signo me está afectando.

I: Sería la forma en la que ellos lo han visto.

E: Así es, y es algo que viene desde los niveles ya de más abajo, de la secundaria, si tengo el signo negativo, que es cuando empiezo a ver la resta de polinomios, si tengo el signo negativo, me afecta todo este polinomio, cambio signos; pero ya cuando tengo una fracción que no está entre paréntesis, por qué me va afectar; es lo que a veces ellos no pueden, o sea, ya viene aquí todo lo de la abstracción, toda esa parte, que a veces les cuesta trabajo, entender, que ese signo negativo me está afectando, pero entonces por qué al denominador no, por qué nada más al numerador, eso trae las cuestiones, porque nada más me está afectando, y viene toda la explicación de los signos de una fracción, etc., etc.

I: ¿En el quinto problema?

E: En el quinto problema, bueno, ahí, pues una falta de, ah, en cuestión a los términos semejantes, el que ah, el que a veces no se hace mucho hincapié, quizás, o a veces también, veo ahí, y nada más hago la suma, no sin, sin tomar en cuenta lo de los términos semejantes.

I: OK. Entonces, en la forma en que le dirías al alumnos es mostrándole primero la forma en que se hace correctamente y en segundo lugar, ya le explicarías algunos de los detalles, no, como me los has estado explicando a mí.

¿Qué haces cuando un alumno, por ejemplo, en el pizarrón pone un problema de ese tipo?

E: ¿Equivocado?

I: Sí, haz de cuenta, tú pones el problema tres y él en el pizarrón, cancela como tú me dijiste, lo cancela erróneamente, y ¿tú que harías en ese momento?

E: Yo le hago ver, este, que vea, este, lo que está haciendo, no, si está correcto o no está correcto. Pido la opinión de los compañeros, y es cuando, y es cuando viene, no. O sea, que él mismo vaya viendo, a ver, en qué; y le recuerdo mucho, a ver, qué escribimos, qué escribimos que debe estar en forma de pregunta, ah, entonces, debo primero, debo factorizar primero y luego ya vienen las cancelaciones.

Entonces lo que hacemos es, lo que trato de hacer es que no venga la corrección de mi parte, sino que él mismo vaya viendo en dónde está cometiendo el error, claro yo apoyándolo, yo diciéndole lo que él mismo vaya resolviendo.

I: ¿Y tú crees que él pueda resolver eso? ¿Cómo es el cambio repentino de haber hecho algo erróneamente y de repente, decir, es que estoy mal?

E: A no, no, digo, lleva el proceso, a lo mejor en el pizarrón apoyado de compañeros, apoyado de mí lo va haciendo, a veces, los mismo compañeros, es que, ponle así, ponle así. Y luego viene la pregunta, pero por qué, o sea, por qué, y hacemos la explicación. Y nuevamente, ejercicios, y yo les digo a los muchachos en matemáticas es estar haciendo ejercicios. Este, para practicar y que te vayas primero mecanizando y luego ya que me sé, de alguna manera, mecánicamente todo el proceso, ya viene otra parte, pues ya el proceso de

hacer conciencia, de qué es lo que estoy haciendo y para qué lo estoy haciendo y por qué.

I: ¿Y tú piensas que, por ejemplo, que durante la mecanización se afiancen errores?

E: Que los errores que ellos están cometiendo los tomen….

I: Los interioricen

E: y los sigan cometiendo

I: Y que después ya nos cueste mucho trabajo…

E: Yo creo que sí, en algunas ocasiones de da eso, si no viene el reforzamiento, o sea, el, de que se está cometiendo, vamos a quitar aquí y vamos a hacerlo; yo sí en algunas ocasiones he batallado, porque a veces, cosas que ya traen desde niveles más abajo, desde primaria y secundaria, es que esto así se hace, yo no sé por qué, por ejemplo, cuando hablamos de fracciones, para empezar, hablar de fracciones ya es meterles u, es un tabú, es hablar de cosas extrañas, y a uno le pasó, también cuando empezó fracciones. Es el coco, a veces, por ejemplo, cuando manejamos fracciones, este, aritméticas. A ver, cómo hacemos la multiplicación, traen siempre, de que, ah, en forma cruzada, no, es la división, la que hacemos de esa forma, y es algo que, viene esa confusión desde los niveles de abajo, de que, como que no se les aclara y siempre vienen con que la multiplicación la hago numerador por denominador, y es mi numerador. Todo ese tipo de confusiones con que a veces si es cierto, se van, las voy manejando, las voy manejando y nunca se me aclaró la duda o nunca me fijé yo como profesor en que se está cometiendo ese error y el muchacho sigue, en que eso es lo correcto.

I: O sea, se quedan con la idea de que es correcto.

E: Si, así es. Es donde a veces, también viene, ya en niveles más altos el quitar ese error, que a veces sí cuesta trabajo, el hacerle captar al muchacho, que está equivocado y que hay que corregir.

I: ¿Y cómo puede captar el muchacho, para corregir ese error?

E: Pues, ah, haciendo, viendo explicaciones primero, este, haciendo comparaciones, ya a lo mejor en forma un poco más, este, tangibles, en álgebra ya es un poco más complejo, pero sí verlo, o sea, en cuestiones de, a veces, también nos sirve la resolución de problemas. En que si hacemos esto, no nos da, no, vamos, si estamos hablando de personas en algún problema, si lo haces de esta forma, a lo mejor te da un número de fracción, y si estamos hablando de personas, no puedo tener una fracción de personas, no, entonces esta sería una de las formas en que podríamos ir llegando.

I: Para ti, específicamente, ¿qué papel juega hacer un error en un problema matemático, en tu clase?

E: Mmm, yo a veces, en el desarrollo de un ejercicio, procuro a veces cometer errores a propósito, me sirve, porque veo la atención que me está poniendo el alumno, me sirve, este, para ver que hayan captado el tema, y que hayan visto, por ejemplo, esto lo hago mucho en clase. Mi resultado es este, todos callados, lo estamos copiando, ¿pero sí estoy bien? Y es cuando, no, pero Ud. nos dijo, a ver, entonces dónde está mi error. Juego mucho esa parte del error, de que a veces, sin fijarme cometo un error, luego, luego,

I: Bueno, es humano, todos nos equivocamos…

E: Pero, sí, la otra parte, en alguna ocasión, me puse a explicar, con un error, vino un alumno y me dijo, oiga, es cierto, retomar eso, a ver, a ver, aquí expliqué de esta forma, un error mío, y lo correcto, por favor, todo eso táchenlo, no sé, y esta es la forma correcta de hacerlo. También eso es importante, a veces, el profesor se equivocó, pero me está haciendo la aclaración.

I: Eso es muy importante. Que uno acepte, que también comete uno errores, claro.

¿Conoces algo del constructivismo?

E: Poco...

I: ¿Qué es lo que entiendes bajo el constructivismo?

E: El ir construyendo los conocimientos, este, mediante experiencias, el ir construyendo el conocimiento, mediante lo que voy midiendo, si mediante las experiencias que voy teniendo.

I: ¿Y cómo reaccionas ante un error, de los alumnos?

E: Lo que hago es, a veces, eh, manejo a través de participación, quién me participa le doy firma, esas firmas con cierta cantidad manejamos puntos. Un error, a veces, va su firma, bien, porque me está haciendo ver un error, no, entonces con que ellos mismos están viendo a ver si no están cometiendo errores.

I: Me refería yo más a un error del alumno. ¿Cómo reaccionas a un error del alumno? Porque según entiendo, tu reacción al error es corregirlo, es hacerles ver que tú te equivocaste, es buscar la manera de explicarles, en qué fue lo que te equivocaste y por qué te equivocaste, ¿no?

Pero, ante un error de un alumno, ¿cómo reaccionas?

E: Pues, primero hacerle ver, a ver, hay un error, pero es que no es cierto, todo va bien, hay un error y ahí vamos viendo y vamos desarrollando paso por paso, hasta que se vea, dónde está ese error. Que procure irse dando cuenta, en qué parte lo está cometiendo y por qué lo está cometiendo.

I: ¿Y se da cuenta, por qué lo está cometiendo?

E: A veces sí, a veces, no. El error de los signos, por ejemplo, si le cambio en el numerador, también se lo tengo que cambiar en el denominador. Entonces, aquí viene otra vez, la explicación. Pero, a ver, por qué no puedo hacer esta

cancelación, del radical con el exponente. Vamos a ver, las leyes qué nos dicen, a ver, cómo es que hago este proceso. Se procura dar la explicación.

I: ¿Qué leyes entrarían en juego en el problema 2? (Si quieres escribir algo, lo puedes hacer, lo que tú harías)

E: Por ejemplo, tengo una suma, aquí lo correcto sería, desarrollar 4 al cuadrado, 16 más 9 que es 25 y después ya saco mi raíz cuadrada, 5. Ahora, esto lo hago únicamente si tengo un número que está elevado a la misma potencia, la potencia es la misma que el índice del radical, entonces sí puedo decir, hago esa cancelación, raíz cuadrada de 4 al cuadrado es 4.

I: ¿Y tú lo cancelas, tal cual, porque veo que lo estás cancelando?

E: Así es, a veces es, una forma que a ellos se les hace, que ya traen, es que cancelo. Entonces también viene la explicación, no es que se cancele en sí, es una división, en la que esto entre esto (se refiere al exponente entre el índice del radical) y me da uno. No es en sí una cancelación, porque la parte de la cancelación, viene también que da cero. Se cancela, me está dando cero, y no me quedó nada en el numerador, es cero, no es que se cancele, es que estoy haciendo la división, y+2 entre y+2 me da 1, ¿verdad?

I: ¿En el problema 2 cómo quedaría?

E: Aquí lo que les digo, es que si estoy sacando la raíz cúbica de b al cubo, para sacar una raíz, ¿qué pasa con los exponentes, qué voy a hacer? Hay una división, y siempre viene lo de las operaciones inversas, cuando elevo a una potencia, ¿qué hago?, cuando voy a extraer una raíz, ¿qué pasa con los exponentes?, se dividen, tres entre tres, me da 1, entonces b, sería b elevado a la potencia 1. Que es lo que me dice la ley de los exponentes, de los radicales.

I: ¿Quieres agregar algo, algo que se te haya ocurrido y que no tuviste oportunidad de mencionar?

E: No

I: La primera pregunta: ¿Haz tenido alguna capacitación específica en didáctica de las matemáticas?

E: No

I: ¿Te gustaría tenerla?

E: Sí, claro.

I: ¿Y cómo te la imaginas, en qué aspectos?

E: Quizá metodología, el cómo hacerlo más entendible a veces, es que uno cree que si lo está explicando, hacia los muchachos, pero luego viene el no entiendo, me cuesta trabajo.

Tal vez también, cómo explicar las matemáticas a aquellos que traen rezagos, o cómo poder subir el nivel de los que ya traen rezagos, y es que a veces, se ponen, matemáticas, mmmm, no entiendo, no entiendo, no entiendo, y no van

a entender. ¿Qué hago, ante esas situaciones y ante los muchachos que ya traen rezago?

I: ¿Qué porcentaje de alumnos en tu salón, crees tú que tengan rezagos?

E: Puedo hablar de un 20 %.

I: Entonces consideras que un 20% de tus alumnos tiene un rezago, ¿fuerte o regular?

E: Un rezago fuerte.

I: ¿Y de dónde crees que viene ese rezago?

E: Risa,

I: Pregunta difícil

E: Yo me doy cuenta desde las multiplicaciones, que sé en qué momento viene, y me he dado cuenta, no aquí, no aquí, sino a través de los años que he tenido…

I: Claro, yo no me refiero específicamente a la escuela, o sea, yo creo que tu experiencia de 14 años, no es la que has tenido estos tres últimos años, y puede uno generalizar un poco.

E: En los distintos colegios me he dado cuenta de un común denominador, el que no se saben las tablas de multiplicar.

I: O sea, ¿hay alumnos tuyos que no saben multiplicar, o que no se saben las tablas de multiplicar?

E: Así es; rezago de 2° de Primaria, 3° de Primaria, donde viene la memorización, y me tocó estar en un colegio (a mí) que, decía que la memorización, NO. Nosotros ya en la parte de secundaria, desde primaria no. ¿Cómo que, no? Las tablas de multiplicar es aprendértelas de memoria, o sea, sí viene la explicación del por qué, 7 x 2 = 14, pero si viene de alguna manera, que se tienen que aprender. Uno sí las aprendió. Yo, por lo menos, planas de 2 x 1 = 2, etc. Vamos, por mí, ahí está, y fue malo de memoria, pues no, yo digo que no, ahí lo tengo, ahí está. Este, y se el por qué tal por cual es tal, porque vino ya después la interiorización de ese conocimiento. Y creo, que es algo que se ha estado fallando, para empezar desde las multiplicaciones.

(En una plática informal, comentó, que hacía de vez en cuando exámenes de opción múltiple, en los cuales las respuestas posibles incluían algún resultado producto de un error típico)

ENRIQUE

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10a	A10b
4	1	1		1	5	1	1		1	3			1			1

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
3		4			1				1

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21
	1	1	3		1	3		1	2				1									1

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
5	1	3	1	2	1	1					2	1	2		1			

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
4	1	1	2	1				7	

Erfassen der Ursache

F1	F2
	11

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1	G2
4	2

Verschiedenes

H	I	J	K1	K2	L
2	1	1			1

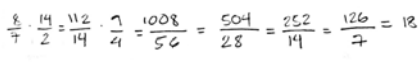
Anhang 18: Interview mit Pilar

Kurzbeschreibung von Pilar

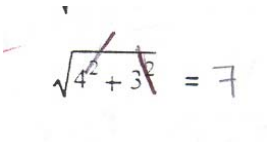
Pilar unterrichtet z.Z. an einer privaten Mädchenschule in den Klassen vom 7. – 9. Schuljahr. Sie hat die Normal Superior absolviert und ist seit 19 Jahren als Mathematiklehrerin tätig. Sie hat, als ihre Kinder geboren wurden, einige Zeit ausgesetzt, jedoch weiterhin Nachhilfeunterricht erteilt.

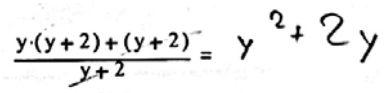
Erster Teil des Interviews

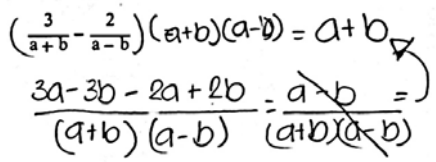
Die erste Frage wurde modifiziert. Die Verbindung von der ersten und der zweiten Frage soll mehr Offenheit bezüglich des Erkennens von Fehlern als auch für methodisch-didaktische Interventionen ergeben. Damit soll deutlicher werden, wie die Interviewten mit bestimmten Fehlern umgehen und wie sie die Situation in Reaktion auf diesen Fehler gestalten. Es soll vermieden werden, dass die Reaktionen der Interviewten sich allein auf die prozedurale Behebung von Fehlern beziehen, wie das im Interview mit E der Fall war.

I: Stell dir vor, dass ein Schüler (die Prozesse sind von verschiedenen Anfangsstudierenden) diese Lösungen an die Wandtafel geschrieben hat. Was würdest du dem Schüler sagen? Was fällt dir auf?	
P: Aufgabe 1  Ich sehe ein sehr normales Muster, für die Schüler ist es selbstverständlich erst zwei multiplizieren (sie deutet auf die ersten zwei Brüche), und dann beim Resultat noch einen Bruch dazuschreiben. Für sie hat dieses keine Sequenz, alle Gleichheitszeichen sind wie Ketten.	*Erkennt ungünstige Vorgehensweise* *Beschreibt Fehlvorstellung des Gleichheitszeichens als Ergibt-Zeichen.* ***Identifikation des Fehlers (vollständig): A1d*** *Zunächst beschreibt P, was die Schüler machen. Dies erscheint ihr so geläufig, dass sie es als Muster bezeichnet. Sie beschreibt damit eine bestimmte Technik, die bei dieser Aufgabe häufig zu beobachten ist.* ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3***

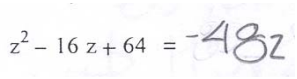
Auch wenn es Fehler sind, auch wenn man es ihnen sagt, macht es keinen Sinn für sie oder sie achten nicht auf was du sagtst. Später beeindruckt es mich, dass dieser Schüler, z. B. etwas sehr Übliches macht, er multipliziert erst alles, und dann kürzt er alles, wo er doch erst hätte kürzen können, was man ihnen normalesweise sagt, dass es besser und einfacher für sie ist, jedoch machen sie es nicht. Sie mögen es lieber, erst alles zu multiplizieren und dann zurück zu gehen. Diese Form der Lösung ist sehr verbreitet.	***Interpretation der Vorgehensweisedes Schülers: A2*** *Ihre Schüler setzen Gleichheitszeichen ohne irgendeine Bedeutung des Gleichheitszeichens abzurufen. Für sie sind es "Ketten", die sie nebeneinander schreiben. Sie weist darauf hin, dass die Schüler auf der prozeduralen Ebene verbleiben.* *Wenn dabei Fehler auftreten, und die Lehrerin interveniert, indem sie die Schüler darauf aufmerksam macht, achten die Schüler nicht darauf. Sie fragen nicht nach Begründungen oder Bedeutungen.* *Es wird nicht deutlich, auf welcher Ebene die Argumentation der Lehrerin erfolgt, ob sie sich ebenfalls auf die Prozedur bezieht und diese als falsch kenntzeichnet, oder ob sie Erläuterungen dazu einfügt.* ***Lehrer kann sich nicht verständlich machen: D2d*** ***Schüler hören nicht auf ihn: D1h*** *Problematisierung der Kommunikation zwischen Schüler und Lehrer* ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** *In dieser Aufgabe gibt es mehrere Brüche. Es ist häufig zu beobachten, dass die Sch. zunächst alle Terme des Nenners multiplizieren und des Zählers. Das ist ein häufig zu beobachtendes Phänomen, das jedoch für die Bearbeitung des Bruches nicht sehr effektiv ist. Sie nimmt damit erneut Bezug zu einer Vorgehensweise des Schülers. Sie weist darauf hin, dass die Schüler ein ganz bestimmtes schematisches Vorgehen bevorzugen und wenig variabel damit umgehen, selbst wenn*

	es sich als günstiger erweisen könnte. *Pilar ist sich wahrscheinlich bewusst, dass dieser Studierende die Aufgabe, abgesehen vom Gleichheitszeichen, in einer algorithmischen Form löst, in dem er erst alle Zähler multipliziert und dann alle Nenner multipliziert, und später dann vereinfacht.* ***Wenig Flexibilität: D1l*** ***Erfassen der Ursache (Ja): F1***
P: Aufgabe 2  Und dann. Was ist dieses?	
I: Es ist ein Wurzelzeichen.	
P: Ah, klar, er hat die Quadrate durchgestrichen mit den… Dieses Problem habe ich gerade im 9. Schuljahr gehabt, ich habe gerade mit ihnen algebraische Brüche durchgenommen, und um zu kürzen, sagte ich ihnen, denkt an das magische Wort MAL (Multiplikation). Für sie ist das Pluszeichen unsichtbar**.** Hier z.B. annulieren sich das Wurzelzeichen mit den quadratischen Potenzen, ohne daran zu denken, dass zuerst die Addition vorgenommen werden muss, die unter dem Wurzelzeichen steht. Der Fehler ist sehr allgemein (verbreitet).	*Pilar erkennt die Problematik, in dem sie darauf hinweist, dass der Studierende das Wurzelzeichen und die quadratischen Potenzen durchstreicht.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** *Sie gibt eine Andeutung auf das Pluszeichen und ein Malzeichen (das magische Wort MAL, womit sie die Multiplikation meint), wenn auch in einem anderen Kontext (algebraische Brüche).* ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H*** ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** *Sie erläutert, dass zuerst die Operation unter dem Wurzelzeichen hätte gelöst werden sollen.* ***Hinweis auf Regeln: warum nicht C6a; wann der Gebrauch richtig***

	wäre C6b *Die Aussage (MAL) wird im Verlauf des Interviews besser verständlich. Das magische Wort "MAL" bezieht sich auf die Oberflächenstruktur der Terme. Es ist notwendig diese zu analysieren, um die richtige Prozedur zu wählen.* ***Fehlerhafte Prozedur: D1b*** *Erneut wird die Analyse auf der Ebene der Vorgehensweise gewählt.* ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
P: Aufgabe 3  Hier streichen sie das “y” und dann… Wie haben sie das gemacht? Lass mich mal sehen, klar, es ist das “y + 2” mit dem “y + 2”, klar.	***Identifikation des Fehlers (richtig aber unvollständig) A1a u. A1c*** *Sie versucht zu erfassen, wie die Fehllösung zustande kommt und beschreibt die beiden Terme "y+2" als Auslöser für die Vorgehensweise. Diese Bezeichnet sie als "streichen", d.h. auch sie verwendet ein Wort, das mit einem Wegfallen assoziiert werden kann.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise der Lehreres: A5*** *Es ist klar, dass sie einen Teil der Problematik der Aufgabe erkennt. Sie äussert sich nicht weiter über die Lösungsform. Hier wäre zu erwähnen, dass Pilar nicht näher auf die Problematik der “verlorenen” Eins beim Kürzen eingeht.*
I: Man sieht es nicht ganz klar auf der Kopie.	
P: Doch, doch, man kann es erkennen, nur habe ich nicht gesehen, klar, wie ich schon sagte, das magische Wort MAL, für die Schülerinnen, und für die Schüler auch, hat dieses Wort, für sie,	***Hinweis auf Regel: C6b*** *wann der Gebrauch richtig wäre.* *Sie stützt sich auf das magische Wort MAL der vorhergehenden Aufgabe, die sie auch in dem Kontext der*

oft keinen Sinn.	*algebraischen Brüche erläutert hatte.* *Sie verweist darauf, dass dieses für die Sch. oft keinen Sinn ergibt und bringt damit implizit zum Ausdruck, dass Lehrende und Lernende unterschiedliche Perspektiven auf die Aufgabenstellung haben. Sie weist damit darauf hin, dass die von ihr gewählte Hilfestellung nicht zwangsläufig für die Sch. eine Hilfestellung sein muss.* ***Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6*** ***Für Schüler machen Erklärungen keinen Sinn: D1i*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
P: Aufgabe 4  Hier, ah, geht es nach hier zuerst (sie zeigt auf die Reihenfolge des Lösungsprozesses), ich sehe ja nicht mehr so gut, ach so, das Zeichen MINUS, es ist nicht auf die Subtraktion geachtet worden, auch dieser Fehler ist geläufig. Ich weiss nicht, ich frage mich das oft, ich unterrichte 8. Schuljahr und ich habe die Schülerinnen dann wieder im 9. Schuljahr. Im 8. Schuljahr unterrichtete ich Multiplikation von Polynomen, sogar recht komplizierte, jetzt nicht mehr, toll nicht?, so grosse Multiplikationen zu machen auf einer	***Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c*** *Pilar erkennt als Erstes die Reihenfolge des Lösungsprozesses, was, gerade bei dieser Aufgabe eine der zu entdeckenden Schwierigkeiten ist.* *Sie deutet auf das Minuszeichen und auf die fehlerhafte Subtraktion hin, durch ein nicht Anwenden des Distributivgesetzes. Sie erkennt jedoch nicht ein weiteres Problem: Bei der Kürzung steht plötzlich der Nenner im Zähler.* *Später weicht sie von der vorgegebenen Aufgabenlösung ab, und weist auf Fehler bei der Multiplikation von Polynomen hin, wie auch auf die Fehler bei der Anwendung der binomischen Formeln.* ***Löst sich vom konkreten Beispiel H*** *Sie versucht dem Problem zu*

horizontalen Seite. Jetzt, in diesem Jahr habe ich das geändert, ich gebe ihnen Multiplikationen, wie (a + b) mal (a - b) und (a + b) mal (2a – b) um…	*begegnen, indem sie die Inhalte bewusst vereinfacht.*
	Inhalte vereinfachen: C10
Sie machen einen häufigen, Fehler , sie multiplizieren nur den ersten mit dem ersten Term und den zweiten mit dem zweiten Term, sie vergessen den Rest der Operation.	*Dabei ist einer der häufig zu beobachtenden Fehler, dass die Schülerinnen und Schüler nur einen der Prozedur durchführen: "sie vergessen den Rest der Operation".*
	Fehlerhafte Prozedur: D1b
Dieses bedrückt mich, wenn ich sehe, dass im 9. Schuljahr, während wir die binomischen Formeln durchnehemen, (a + 3)(a + 2) gleich a^2 + 6 ist. Alles andere geht verloren.	*Diese Beobachtung belastet sie. Sie geht auf ein allgemein von ihr beobachtetes Phänomen ein, dass die Schülerinnen und Schüler anscheinend für ein bestimmtes Ziel, z.B. eine Klassenarbeit, lernen, in der sie Aufgaben lösen können, aber sich dies nicht merken.*
	Schüler lernen nur für eine Klassenarbeit und vergessen es dann: D1j
Ich möchte gerne wissen, wie man es schaffen könnte, dass die Schülerinnen es wirklich verstehen und später es auch richtig lösen können, nicht nur für den Tag der Prüfung. In einer Klassenarbeit beantworten sie die Multiplikationen sehr schön, aber nach drei Monaten, wenn ich selber nachfrage, können sie die Multiplikationen nicht mehr machen.	*Die Beobachtung löst Fragen nach dem Sinn ihrer Vorgehensweise aus. Sie sucht nach einer Veränderung in ihrem eigenen Verhalten.*
	Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6
Mich bedrückt, dass wir etwas falsch machen, weil sie es nicht lernen und Vereinfachungen dieser Art, auch…	
Später, nach den algebraischen Brüchen, versuche ich immer, z.B. bei den quadratischen Gleichungen, ihnen Gleichungen vorzugeben, die Brüche enthalten, wenn auch einfache, damit sie… oder damit sie eine Subtraktion mit Vorzeichenwechsel machen müssen, oder damit sie eine Vereinfachung durchführen müssen, aber, auch wenn wir die Themen gerade durchgenommen haben,	*Um dem zu begegnen gibt sie auch in anderen Zusammenhängen immer wieder Aufgaben mit bestimmten Schwierigkeitsmerkmalen vor.*
	Themen kombinieren: C11

können sie sie nicht mehr realisieren. Dann, vielleicht, ist es so, dass sie es nie gelernt haben, oder dass ich es ihnen nicht gut gezeigt habe. Wenn du das Geheimnis entdeckst, verrate es mir…denn ich habe es noch nicht entdeckt. Und hier…	*Aber das scheint trotzdem nicht auszureichen. Die Schülerinnen und Schüler lernen es nicht. Ein Grund wird darin gesehen, dass sie "es ihnen nicht gut gezeigt" hat.* ***Eigene mangelnde Kompetenz: D2b*** ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k*** **Erfassen der Ursache (nein): F2** *Sie wendet sich an die Interviewerin, um nach dem "Geheimnis" eines Unterrichts zu fragen, mit dem sie besser auf die Probleme der Schülerinnen und Schüler eingehen könnte.*
P: Aufgabe 5  Ah, alles wird addiert, es gibt keine ähnlichen Terme, oder ja? Nein, nicht wahr? Sie existieren nicht. Ich sage ihnen, und sie lachen über mich, aber, an dem Tag, an dem sie das Resultat für x + x und x mal x wissen, dann können sie Algebra. Sie lachen mich aus, aber es ist wahr, mal sehen, x + x ist gleich x^2 oder $2x^2$, oder jede Menge fremder Resultate.	***Identifikation des Fehlers: A1a*** *Pilar ist der Ansicht, dass für die Lernenden ähnliche Terme nicht existieren. So addieren sie alle Terme.* *Dies ist für sie ein entscheidender Inhalt der Algebra. Die Erkenntnis, welche Terme als Gleiche betrachtet werden können oder nicht, ist für sie ein Moment, der Einsicht in das Wesen der Algebra anzeigt. Sie verweist damit darauf, dass Studierende Variablen nicht allein in einer Weise verknüpfen, die den Regeln widerspricht, sondern dass dies auch Ausdruck dafür ist, dass sie nicht verstanden haben, warum diese Regeln angewendet werden.* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (Ja): G1***

Ich habe eine Freundin, die an der Universität ITESO unterrichtet, und dann kommen wir hierher, wie könnte ich es hier machen, Tere? Wo haben sie sich geirrt? Und wir überlegen, wie wir es machen könnten, aber es sind klassische Fehler, häufige Fehler.	*Sie ist sich bewusst, dass ihre Schülerinnen oft nicht x + x von x mal x unterscheiden können, oder dass sie für x + x jede Menge fremdartige Resultate aufweisen. Sie geht nicht auf den Unterschied der Konkatenation in der Arithmetik und der Algebra ein.* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (nein): G2*** *Sie kommentiert, dass sie diese Schwierigkeiten ihrer Schülerinnen mit einer Professorin einer anderen Universität, mit der sie befreundet ist, bespricht.* **Bezeichnet Fehler als Muster: A3** **Erfassen der Ursache (nein): F2**
I: Es sind Fehler die Studierende in der Universität machen, die von irgendeiner Schule kommen.	
P: Klar, aber ich könnte auch sagen, dass sie von meinen Schülerinnen sind. Und das deprimiert mich mehr, weil ich denke, ich arbeite soviel daran, wie können sie immer dieselben Fehler machen?	*Sie betrachtet die vorgelegten Fehllösungen als beispielhaft für Fehler, die von Lernenden gemacht werden. Sie könnten von ihren eigenen Schülerinnen und Schülern sein. Dies deprimiert sie, weil sie sehr viel Arbeit investiert, die nicht erfolgreich zu sein scheint.* *Sie stellt damit ihre Vorgehensweise und ihr Bemühungen in Frage.* ***Zweifel an eigener Vorgehensweise: B6***

Deutung

Pilar erkennt sehr viele Fehler. Sie erkennt sie als typische. Sie geht auf die Häufigkeit ein, mit der sie auftreten. Sie versucht dem zu begegnen, indem sie bestimmte Schwierigkeitsmerkmale immer wieder aufgreift, damit die Schüler damit vertrauter werden. Außerdem weist sie sie darauf hin, dass es Oberflächenmerkmale der Terme gibt, die eine ganz bestimmte Prozedur erfordern. Die methodischen Maßnahmen, die sie ergreift, beziehen sich auf veränderte Vorgaben.

Aber sie merkt, dass das nicht genug ist. Sie bespricht sich mit z.B. einer Freundin, ohne zu einer Lösung zu kommen. Sie bemerkt auf Seiten der Schülerinnen und Schüler bestimmte Regelverletzungen und versucht ihnen zu begegnen, indem sie Aufgabenstellungen anpasst. Aber sie versucht nicht zu ergründen, welche Vorstellungen der Lernenden dafür verantwortlich sein könnten, dass diese Fehler gemacht werden. Deshalb verbleibt auch sie letztlich auf der Ebene der Verfahrensweisen und will damit eine Einsicht in die Strukturen und Gesetzmäßigkeiten der Lernenden vermitteln.

Zweiter Teil des Interviews

I: Was würde man hier genau machen?	
P: Als Erstes, dass sie unterscheiden lernen, welche Operation verlangt wird, und welche Charakteristika diese Operation mit sich bringt. Sie muss Summanden von Faktoren unterscheiden, und dann, was noch? Wenn sie dieses kann, könnte sie es fast richtig lösen. Wenn sie einen Summanden von einem Faktor unterscheiden könnte, weil sie hier den Fehler macht, dass sie Summanden wie Faktoren löst (sie weist auf die 3. Aufgabe). In der 4. Aufgabe hat sie nicht erkannt, dass es eine Subtraktion war. In der 1. Aufgabe hat für sie das Gleichheitszeichen keinen besonderen Sinn.	*Sie würde die Lernenden darin unterstützen, die Struktur des gefragten Terms zu erfassen.* **Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge: G1** **Aufmerksamkeitslenkung B10** *Dies ist die wesentliche Voraussetzung um den algebraischen Term zu bearbeiten.* *Sie geht hier zurück auf die im Interview vorgegebenen Aufgaben, bei denen Summanden und Faktoren verwechselt wurden.* *Sowie das Gleichheitszeichen nicht angemessen gedeutet wurde. "Hat keinen besonderen Sinn" verweist auf Bedeutungszuweisungen. Es ist nicht klar, ob sie hier die Einsicht in begriffliche Zusammenhänge anspricht.* ***Bedeutungszuweisung: C22***
I: Diese Feststellung haben sehr wenig Lehrer bis jetzt gemacht, und es ist so.	

P: Ich sage es mit Nachdruck, vielleicht liegt es daran, dass ich einen Lehrer hatte, der es uns falsch angekreidet hat, und basta.	*Sie vermutet, dass die eigenen Erfahrungen im Unterricht ihre eigenen Vorgehensweisen entscheidend beeinflussen.* ***Imitiert eigenen Lehrer: L*** ***Fehler ankreiden: B2*** *Ihr Lehrer hat auf Fehler im Umgang mit dem Gleichheitszeichen allein dadurch reagiert, dass er sie markiert hat. Damit wird von ihr ein Phänomen angesprochen, auf das KRAUTHAUSEN verweist: Wesentliche Veränderungen im Unterricht werden durch eine Veränderung der eigenen Erfahrung wie eigene Lernprozesse ablaufen erleichtert. Eigene Erfahrungen prägen die Verhaltensweisen im Unterricht entscheidend.*
I: Ich bin der gleichen Meinung, es ist wichtig, für die spätere algebraische Entwicklung. Wenn ich bei den arithmetischen Aufgaben Fehler mit der Anwendung des Gleichheitszeichens mache, kann ich es später nicht korrekt bei der Algebra anwenden.	*Die Interviewerin geht darauf ein, dass die Bedeutung des Gleichheitszeichens bereits bei arithmetischen Inhalten erfasst werden soll.*

Deutung

Für Pilar ist eines der Hauptprobleme, das Erkennen der Operation die durchzuführen ist, und dessen Charakteristika, womit sie wahrscheinlich die jeweiligen Gesetzte meint. Das Unterscheiden der Summanden von den Faktoren ist für sie entscheidend.

Dritter Teil des Interviews

I: Nun, wie würdest du auf einen Schülerfehler reagieren? Wenn eine deiner Schülerinnen es an die Wandtafel schreibt, es in ihrem Heft zu stehen hat, oder wenn du es in einer	

Klassenarbeit siehst, was würdest du machen?	
P: Guck, ich sehe dieses jeden Tag, und ich sage, „nein, nein, nein“, radiere es aus und schreibe es nochmal drunter, erinnere dich, dass wir solche Ketten nicht schreiben können. Dieses ist nicht wahr, sehe mal hier, auch nicht dieses mal dieses ergibt 18 (sie zeigt mit dem Finger auf zwei Teile, die in der ersten Aufgabe nicht gleich sind). Hier bin ich streng, entweder sie schreiben es nocheinmal, oder sie machen die ganze Aufgabe nocheinmal, aber das man merkt, dass das, was hier stand, falsch war. (Sie zeigt auf die 2. und 3. Aufgabe) Und hier, dieses Schuljahr, ich denke ich bin etwas verrückt, ich erfinde plötzlich etwas, wie das magische Wort MAL. Wo ist das magische Wort? Ach, hier steht ein Pluszeichen, nicht ein Malzeichen. Es ist sehr unterschiedlich, ich improvisiere viel, wenn ich vor der Klasse stehe. Ich improvisiere, wie ich die Fehler bei ihnen korregieren könnte. Da ich in der 8. und 9. Klasse unterrichte, muss ich manchmal etwas verrücktes sagen, damit sie wieder aufpassen, ich sage vielleicht etwas Absurdes, damit sie lachen und wieder zuhören, und dann…es ist nicht sehr…	*Ihre Reaktion auf einen Fehler ist es darauf hinzuweisen: "nein, nein, nein". Sie gibt keine Erläuterungen, sie bezeichnet die Vorgehensweise als Regelverletzungen.* ***Fehler ankreiden: B2*** ***Weist auf Regelverstoss hin: B3*** *Sie verlangt eine Wiederholung der Aufgabenlösung, die richtig ist, und das man „merkt, dass das was vorher stand, falsch war“.* ***So wird es nicht gemacht: B1*** ***Verlangt eine korrekte Wiederholung: B5*** *Pilar geht wieder auf ihr magisches Wort MAL ein, erläutert dass in der Aufgabe ein Pluszeichen steht und nicht ein Malzeichen.* *Sie sucht immer nach neuen Methoden, wie sie die Fehler korregieren könnte. Sie versucht durch „verrückte Aussagen“ die Aufmerk-samkeit der Schülerinnen wieder-zugewinnen.* ***Neue Veranschaulichungen versuchen: C12*** ***Aufmerksamkeit durch Entspannung erzeugen: C18***
I: Ich denke es kommt darauf an, welchen Effekt es hat…	

P: So sage ich dir, ich z.B. jetzt, habe sehr emphatisch bei der Kürzung von algebraischen Brüchen gesagt, dass wir das magische Wort MAL brauchen, wenn es nicht da ist, können wir nichts streichen.	*Sie ist sehr emphatisch oder nachdrücklich bei dem Gebrauch des magischen Wortes MAL, es kann sonst nichts gestrichen werden (man verstehe darunter ein Kürzungsverfahren)* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5***
I: Ja, und was würdest du sagen, wenn sie bei der 3. Aufgabe (y + 2) der linken Seite des Zählers mit (y + 2) des Nenners kürzen?	*Ich versuchte sie darauf aufmerksam zu machen, dass das MALzeichen besondere Charakteristika haben musste.*
P: Ja, ich sage…	
I: Denn dort ist doch ein Malzeichen?	
P: Ah, aber sie müssen mir sagen wo das Malzeichen ist, dann hätten sie nicht nur ein (y + 2) gekürzt, sondern zwei, und als Resultat y + 1 erhalten.	
I: Ich meinte, wenn sie (y + 2) im Zähler (der Faktor von y ist) mit dem (y + 2) im Nenner durchgestrichen hätten.	
P: Es wäre dann trotzdem falsch	
I: Klar	
P: Aber es war falsch	
I: Als Rechtfertigung hat ein Studierender angegeben, dass es ja ein Faktor ist.	
P: Ach, klar, aber auch wenn es multipliziert ist, haben wir noch ein störendes Pluszeichen dazwischen. Ich sage ihnen, die Pluszeichen, die drinnen sind…, die in einer Klammer sind, die stören nicht, weil sie als Inkognito da sind, aber die dazwischen sind, das sind die, die wir sehen	*Pilar gibt im Kontext der Kürzungen in einem algebraischen Bruch ein Pluszeichen als störend an, Pluszeichen, die nicht in einer Klammer stehen (die als „Inkognito“ identifiziert werden sollten), im Gegenteil zu einem Pluszeichen zwischen zwei Termen. Sie weist zwar*

müssen. An Stelle des Pluszeichens (sie zeigt auf das Pluszeichen in der 3. Aufgabe) müsste ein MAL (ein Malzeichen) stehen. Ich versuche, so an sie heranzukommen, verstehst du?	*darauf hin, dass die Pluszeichen „verschieden" sind, jedoch nicht in welcher Weise.* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge: G1***
I: Sicher	
P: Sie können ein (y + 2) erhalten, aber sie müssten dann faktorisieren.	
I: Gut. Nun, meine Frage war, wie reagierst du auf einen Schülerfehler.	
P: Guck, normalerweise versuche ich geduldig zu sein, ich erkläre es ihnen und dann üben wir ähnliche Aufgaben, dann lasse ich eine Zeit vergehen, und dann nehme ich das Thema wieder auf, übe mit ihnen nochmal von den gleichen Aufgaben.	*Sie ist geduldig, gibt wieder eine Erklärung und übt ähnliche Aufgaben ein, sie lässt Zeit vergehen, um das Thema wieder aufzunehmen und mit wieder ähnilchen Aufgaben zu üben.* ***Geduld: B8*** ***Erklärung und Übung C13 u. C2*** *Es scheint, als gebrauche sie im Sinne von MALLE (1993) saubere und klare Erklärungen und viele Übungsaufgaben, was ein Hinweis auf einen eher Lehrerzentrierten Unterricht ist.* ***Lehrerzentriert: E9*** *Auf die Fehlerursache selbst geht sie nicht ein.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Um zu sehen ob…	
P: Um zu sehen ob wir es inzwischen dominieren. Im 9. Schuljahr sind es nicht so viel Themen, wir nehmen die binomischen Formeln, Faktorization, lineare und quadratische Gleichungen durch, und zum Schluss Geometrie und Trigonometrie. Man kann ein wenig die Themen kombinieren, bei den quadratischen Gleichungen kann	*Pilar weist darauf hin, dass die Themen kombiniert. Wenn beispielsweise quadratische Gleichungen der Inhalt einer Unterrichtsstunde ist, kombiniert sie diese mit den binomischen Formeln, es ist ihr aber egal, ob die Schülerinnen die Multiplikationen durch Inspektion der binomischen*

ich nochmal die binomischen Formeln durchnehmen, auch wenn sie es lieber mit der Multiplikation der Binome lösen, macht nichts, Hauptsache ist, dass sie es richtig machen. Bei $(x - 3)^2$ würdest du annehmen, dass es $x^2 - 6x + 9$ ist, aber da irrst du dich, weil du Resultate wie $x^2 - 6$, $x^2 + 9$, $x^2 - 9$, und viele andere erhälst.	*Formeln oder durch mechanische Multiplikation der Faktoren lösen.* ***Themen kombinieren: C11*** ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H*** ***Beschreibt andere Fehlermuster: A4c*** *Sie ergänzt, mit der Aufzählung verschiedener möglicher Resultate der Schülerinnen von $(x-3)^2$. Hieraus könnte man schliessen, dass Pilar die verschiedenen Resultate oder Fehllösungen der Schülerinnen gut kennt und sie als gewöhnlich ansieht.* *Es scheint als habe sie sich noch keine Gedanken über die möglichen Ursachen jeder der einzelnen, von ihr beschriebenen, Lösungen gemacht.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Das ist eine Realität	
P: Beharren, beharren, beharren, es ihnen in verschiedenen Kleidern vorführen.	*Für die Lehrerin erfordert das Unterrichten Beharrlichkeit und die Notwendigkeit, bestimmte Probleme in anderer Form vorzugeben. "Vorführen" ist eine sehr starke Formulierung für die lehrerzentrierte Vorgehensweise.* ***Neue Veranschaulichungen versuchen: C7***

Deutung

Eine wichtige Aussage in diesem Teil, ist, dass Pilar sich bewusst ist, dass sie jeden Tag mit solchen Fehlern konfrontiert wird. Jedoch hat es den Anschein, dass Pilar Fehler eher korregiert, im dem sie eine richtige Lösung im Heft verlangt, als auf die Problematik im Sinne der Ursache einzugehen.

Sie geht besonders auf die Characteristika der Kürzungsformen ein, indem sie sehr emphatisch auf das Malzeichen hinweist.

Nachdem sie die richtige Lösungsform mit den Schülerinnen ein und nochmal durchgegangen ist, übt sie ähnliche Augaben. Mehr vom Gleichen ist wenig hilfreich.

Eine andere Feststellung ist, dass Pilar versucht die Themen miteinender zu kombinieren, um z.B. bei den quadratischen Gleichungen auch binomische Formeln wieder aufzunehmen.

Weiterhin ist die Betroffenheit wichtig, mit der sie auf die Schülerfehler verweist. Es lässt ihre eigene Arbeit als Sysiphosprozess erscheinen, die von ihr Durchhaltevermögen erfordert.

Vierter Teil des Interviews

I: Kennst du etwas vom Konstruktivismus?	
P: Ich mache gerade einen Kurs in konstruktivistischer Pädagogie, hier an der Schule. Den Kurs erteilt die Universität ITESO. Ausserdem haben wir Kurse über die Theorie des Konstruktivismus gehabt, hier an der Schule, bei den Fortbildungskursen.	*Pilar beteiligt sich an Fortbildungskurse an der Schule in der sie unterrichtet. Die Kurse sind über Konstruktivismus, Theorie und Pädagogie.*
I: Konstruktivismus generell, aber nicht für den Mathematikunterricht?	
P: Nein, ich habe sogar, wenn wir die Fortbildungskurse haben, versucht nach einem Thema in Mathematik zu fragen, etwas zu meinen Unterrichtsfach, aber die Person, die den Kurs erteilt, macht grosse Augen, denn sie versteht nicht wovon ich rede. Nicht wahr?	*Sie ist sich bewusst, dass diese Kurse nicht auf den Mathematikunterricht bezogen werden, da vom Kurserteiler „grosse Augen" gemacht werden, wenn Pilar versucht eine Antwort auf den Konstruktivismus im Mathematik-unterricht zu erhalten* ***Fortbildungskurs in Mathematikdidaktik (nein): K2***
I: Was verstehst du unter Konstruktivismus?	
P: Voraussetzung ist, so verstehe ich es, dass es darum geht, dass der Schüler sein eigenes Wissen sich konstruiert, dass er es erarbeitet, dass er…, z.B. hier geht es darum, dass ein Modell kreiert wird, dass ein Modell gebildet wird, dass er an diesem Modell arbeitet, dass er es interiorisiert, sich zu eigen macht.	*Pilar versteht einiges vom Konstruktivismus, jedoch, obwohl sie angeblich ihren Unterricht konstruktivistisch gestalten möchte, gleitet sie oft auf einen fragenenwickelden oder Lehrerzentrierten Unterricht ab.*

Nicht wahr?, anstatt dass du ihm sagst, es ist so, lass uns darüber nachdenken, mit dem was du schon weisst. Ich mache viel Analogien zwischen einem numerischen Bruch, mal sehen, es ist eine Summe. Wie würdest du den gemeinsamen Nenner finden? Welche Schritte würdest du nachvollziehen? Damit meine Schülerinnen selbst suchen, auch wenn ich mit Fragen den Prozess steuere, damit sie es schaffen. Weil es nicht…	***Fragendentwickelnden Unterricht: E7*** ***Lehrerzentriert: E9*** *Schülerinnen sollen ein Modell schöpfen, das sie sich zu eigen machen. Dass die Schülerin an diesem Modell arbeiten soll, besagt noch nicht, dass es richtig sein muss.*
I: Aber, beim Konstruktivismus, wäre es, sie mit Fragen leiten?	*Diese Frage sollte nochmal nachfragen, ob sie einen fragenentwickelnden Unterricht als konstruktivistisch ansieht*.
P: Nein, nein, es wäre wie, anstatt es ihnen alles vorgearbeitet zu geben. Sie suchen lassen, wie, anstatt ihnen einen vorgeschriebenen Weg zu bieten, ihnen zu zeigen einen Plan zu machen.	*Sie verneint, ist sich also bewusst, dass sie es oft nicht schafft.* *Man sollte den Schülerinnen den Weg nicht vorschreiben, sondern ihnen zeigen einen Plan zu machen, ob sie damit das Lösen einer Problemstellung meint, geht nicht klar hervor.* *Einen Plan zu machen hört sich nach einem der Schritte die POLYA vorschlägt, um ein Problem zu lösen.*
I: Im Konstruktivismus, welchen Stellenwert hat ein Fehler wie dieser, oder irgend ein anderer?	
P: Was kann es sein? Dass sie das Modell falsch gemacht haben, oder dass sie nicht genügend geübt haben, oder dass…ach nein, frage mich das nicht, ich bin Spezialistin in diesem hier (sie zeigt auf die Seite mit den fehlerhaften Lösungen), aber nicht für Konstruktivismus.	*Der Ansatz von Pilar zur Erklärung eines Fehlers ist eine falsches Modell. Ein falsch kreiertes Modell wäre ein Ansatz, um Ursachen der Fehler zu suchen, sie könnte sich fragen wo das Modell fehlerhaft interiorisiert wurde, jedoch macht sie eine ungenügende Übung für Fehler verantwortlich.* ***Mangelndes Üben: D1d*** *Sie meint, sie ist nicht Spezialistin im*

	Konstruktivismus, sondern Spezialistin in fehlerhaften Lösungsprozessen ihrer Schülerinnen. ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3*** *Pilar erkennt den Stellenwert des Fehlers im Konstruktivismus oder im Unterricht selbst wahrscheinlich nicht.* ***Erkennt den Stellenwert des Fehlers im Unterricht (nein): A10b***
I: Gut…	
P: Nein, es ist nicht gut, aber wo könnten wir ihn einordnen (sie meint damit den Fehler).	*Pilar zeigt sich besorgt um die Fehler.*
I: Es ist eine Frage, wie ich den Fehler in meiner Unterrichtsstunde sehe, wie ich den mathematischen Fehler, den die Schülerinnen begehen, in meiner Unterrichtsstunde angehe?	
P: Es ist nicht nur der Fehler, leider, wir unterrichten einen recht ödes Teil. Im Konstruktivismus wird die Tendenz klar, die Fächer mit dem wirklichen Leben zu verbinden, aber ich schwöre dir, ich denke darüber nach, dieses mit dem wirklichen Leben in Verbindung zu brigen, wo? Es gibt einige Bücher, aber an den Haaren gezogen, so dass ein 15 jähriges Mädchen es dir nicht “abkauft”, sie “kaufen” es dir nicht ab, weil… ich habe einige Schülerinnen, die so verrückt sind wie ich, die fasziniert sind, denen es Spass macht, die mich um mehr Übungsaufgaben bitten und sie auch lösen, und die dabei glücklich sind. Aber die anderen, die wollen nicht, ich sage ihnen, denk, dass du für deine zukünftige Ordnung investierst, dass sich dein Gehirn ordnen wird. Wenn du irgendetwas studieren möchtest, auch wenn es pragmatisch klingt, brauchst du ein	***Veranschaulichungen: C7*** *Sie versucht in ihrem Unterricht die „öde“ Mathematik mit dem wirklichen Leben in Verbindung zu bringen, und meint, dass sie es nicht schafft, alle Schülerinnen mitzureissen. Sie ist sich bewusst, dass die Schülerinnen sie mögen, aber im allgemeinen das Fach Mathematik nicht.* *Sie „motiviert“ ihre Schülerinnen mit zwei Bemerkungen:a) „durch die Mathematik ordnet sich dein Gehirn“, b) „was immer Du auch studieren möchtest, Du brauchst das „Papierchen“, in anderen Worten, das Abgangszeugnis. Zu erwähnen wäre, dass in Mexiko im Abitur und in allen Schuljahren, alle Fächer mit mindestens 6 bestanden werden müssen (10 ist die beste Note, 5 ist mangelhaft).* *Die erste „Motivation“ wird*

"Papierchen" (sie meint damit das Abitur) und wenn du dieses Fach nicht bestehst, bekommst du nicht dein "Papierchen". Aber das tägliche Leben, das Leben, nein, wenn ich ihnen eine Faktorisation aufgebe, mit den Interessen, die ein 15 jähriges Mädchen hat, wirklich, ich suche, und normalerweise gefällt ihnen meine Stunde, und trotzdem, sie mögen mich, aber mich, nicht das Fach, das Fach überleben sie. Ich habe Schülerinnen, die es sehr gut machen, diese animieren dich. Letzte Woche waren einige Schülerinnen soger beim "Ciencias" (damit meint sie ein Wettbewerb, den eine Schule organisiert) Wettbewerb eingeschrieben, und wir… die Lehrerin der 7. Schulklasse und ich hatten es vergessen, und sie haben uns angerufen, um zu fragen, ob wir dieses Jahr keine Schülerinnen schicken wollten. Der Wettbewerb war an einem Freitag und am Donnerstag haben wir die Schülerinnen benachrichtigt, du, du und du. Und wir hatten auch keine Zeit... und doch sind einige Schülerinnen zum Wettbewerb gegangen. (Resultate waren noch nicht bekannt)	*wahrscheinlich von Secundariaschülerinnen nicht verstanden, die zweite „Motivation" ist, wie sie selber sagt, pragmatisch, und als Motivation äusserlich????.* *Versucht sowohl eine intrinsische, als auch eine extrinsische* ***Motivation: A14a u. A14b*** *Sie weist darauf hin, dass sie als Lehrerin auch animiert wird, wenn Schülerinnen mehr Übungsaufgaben verlangen und bearbeiten oder wenn Schülerinnen an einem Wettbewerb teilnehmen.*
I: Möchtest Du noch etwas hinzufügen?	
P: Nein	

Deutung

Es fällt auf, dass Pilar etwas über den Konstruktivismus weiss, jedoch nie die Gelegenheit gehabt hat, ihn auf ihren Mathematikunterricht zu beziehen.

Pilar kann, wahrscheinlich, die Fehler, und ihren Stellenwert im Konstruktivismus oder im Mathematikunterricht nicht deuten.

Sie korregiert die Fehler, indem sie von den Schülerinnen eine richtige Lösungsform im Heft verlangt. Sie hat, so scheint es, keine Vorstellung darüber, dass die Fehler eine Gelegenheit, zum Lernen, bieten. Sie geht auch nicht auf die Ursache der Fehler ein.

Beobachtungen und Deutung des Interviews mit Pilar

Pilar erkennt viele Fehler. Sie beschreibt die Vorgehensweisen der Schüler im Zusammenhang mit dem Hinweis auf warum eine Regel nicht angewandt werden durfte und unter welchen Bedingungen sie angewandt werden darf. Das „magische Wort MAL“ bezieht sich auf das Erkennen der Termstruktur, die auf Erläuterungen von begrifflichen Zusammenhängen hinweist. Die eigentliche Fehlerursachen erkennt Pilar nicht.

Sie kreidet Fehler an, ist sehr emphatisch „nein, nein, nein“, wenn sie einen Fehler entdeckt, und meint, dass ein korrektes Wiederholen der Aufgabe, Schüler zur Einsicht der Fehler, hilft. „Für Schülerinnen machen Erklärungen, die sie gibt, oft keinen Sinn“, „Schüler hören nicht auf Lehrer“ und „Lehrer können sich nicht verständlich machen“, weisen darauf hin, dass ihr Unterricht zwar noch lehrerzentriert erfolgt, sie aber merkt, dass sie mit Erklärungen wenig Erfolg hat.

Da sie Fehler immer und immer wieder die gleichen Fehler bei ihren Schülerinnen sieht, zweifelt sie an der eigenen Vorgehensweise.

Ursache der Fehler sind für sie fehlerhafte Prozeduren, also Fehler in der Informationsverarbeitung und ein Mangel an Übung.

Man merkt, dass Pilar Fehler beobachtet, die vorgegebenen Fehler als Musterfehler bezeichnet (das sehe ich oft, diesen Fehler hätte auch eine meiner Schülerinnen machen können) und noch andere Musterfehler im Interview angibt. Sie ist sehr besorgt um ihre Schülerinnen und gibt investiert sehr viel Zeit in der Vorbereitung ihrer Unterrichtsstunden.

Anhang 18a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Pilar und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien:

Fecha: 9/ 03/06

Normal Superior

Experiencia Laboral, 4 años, antes de casarme, 2, 19 años, y aparte regularización en casa mucho tiempo.

I: Imagínate, que un alumno (los procedimientos son de diferentes alumnos) puso esto en el pizarrón. Si quisieras platicarme de lo que te puse en la hoja. ¿Qué le comentarías al alumno? ¿Qué notas, qué ves?

P:

Ejercicio 1: Veo un patrón muy normal, porque para ellos es de lo más normal multiplicar dos, y el resultado aumentarle otro, para ellos no tiene ilación, todos los iguales son como cadenitas. Aunque sean errores, por más que se los digas, no les hace mucho sentido o no te hacen mucho caso. Luego, me impresiona, que este muchacho, por ejemplo, también hace algo muy común, primero todo lo multiplica y luego todo lo simplifican, cuando podían haber simplificado antes, que es lo que normalmente les dices que es más conveniente y hasta que va a ser más fácil para ellos, sin embargo, no lo hacen, les gusta más como sacarlo todo y luego irse para atrás. Es como muy común esa forma de hacer la operación.

Ejercicio 2: Luego, ¿ésta qué es?

I: Es un radical

P: Ah, claro, tacharon los cuadrados por los… Yo este problema lo acabo de tener porque en tercero de secundaria les acabo de dar fracciones algebraicas, y para simplificar, yo les decía, acuérdense que la palabra mágica es POR, entonces, para ellas el + es invisible. Aquí por ejemplo, ¿la raíz cuadrada y el cuadrado no se anulan? Te los anulan, sin pensar que, hay que hacer la operación primero, la que está bajo el radical. Es un error muy común ese, y

Ejercicio 3: aquí en esta tachan la “y” y luego, ¿cómo le hicieron?, a ver, espérame; ah, claro, es el y + 2 con el y + 2, claro,

I: No se distingue;

P: Sí, si se distingue, nada más, que no veía, claro, como te decía la palabra mágica POR, para ellas, o para ellos también, no tiene a veces mucho sentido.

Ejercicio 4: Esta, ah, es para acá primero, (ya quisieras, que estoy medio ciega) ah, el signo MENOS, no se fijaron en la resta, también éste es un error muy normal, yo no sé, yo eso me lo he estado cuestionando mucho, porque, doy 2º

de secundaria y luego las vuelvo a tener en 3º de secundaria, y yo en 2º de secundaria les daba que multiplicaran polinomios, por ejemplo, una multiplicación de polinomios elaboradísima, ya no, qué padre, saber multiplicar, en una hoja atravesada, y ahora, en este año en lugar de darles en este año polinomios grandes, lo que hice fue productos continuados, multiplicaciones de (a + b) por (a - b) y (a + b) por (2a - b) para que…, porque tienen un error muy común, que es multiplicar nada más el primero por el primero y el segundo por el segundo, y se les olvida el resto de la operación. Entonces, a mi eso me preocupa, porque si veo, que en 3º de secundaria a la hora de los productos notables, les pones (a + 3)(a + 2) para sacar la regla, pues a ^{2} + 6. Ya, todo lo demás se pierde. Yo lo que quiero es ver, cómo logras que aprendan esto, que realmente lo entiendan y que realmente sean capaces de hacerlo después, no nada más el día del examen. El examen te contestan las multiplicaciones preciosas, y yo misma las vuelvo a tomar a los tres meses, y ya no lo saben hacer. Entonces, a mi, sí me preocupa que algo estamos haciendo mal, porque no lo están aprendiendo y simplificaciones de este estilo, también …., les pongo, después de que vemos ya las fracciones algebraicas, a la hora de las ecuaciones cuadráticas, les pongo ecuaciones que me lleven, aunque sea a una fracción sencilla, para que …, o para que cambien, para que hagan la resta cambiando signos, o para que hagan una simplificación, pero a pesar de que lo acabamos de ver, ya no lo saben hacer. Entonces, a lo mejor, es que nunca lo aprendieron, o que no se los enseñé bien. Si descubres el secreto, pues platícame…, que yo no lo he descubierto. Y esta…

Ejercicio 5: ah, todo lo suman, al cabo no hay términos semejantes, ¿o sí? No, ¿verdad? No existen. Yo les digo, y se ríen mucho de mí, que el día que, x + x y x por x, sepan el resultado, ya saben álgebra. Se ríen de mi, pero es que es cierto, a ver, x +x igual a x^2, $2x^2$, cualquier cantidad de resultados extraños. Tengo una amiga que da clases en el ITESO de matemáticas, y nos venimos, ¿cómo le haré aquí, Tere? ¿Dónde se equivocan? Y entonces, cómo le haremos, y le pensamos, pero, es clásico, son errores clásicos.

I: Son errores que cometen alumnos de la Universidad que vienen de cualquier escuela.

P: Claro, pero además se podría decir que son de mis alumnas. Y me deprime más, porque digo, tanto que le trabajo, ¿cómo pueden llegar a volver a hacer lo mismo?

I: ¿Qué le dirías a la alumna, específicamente?

P: Pues primero, que aprendiera a distinguir, qué operación es la que está haciendo, qué características tiene la operación que está haciendo. Que aprendiera a distinguir sumandos y factores, y luego, ¿qué más? Con eso, ya casi lo resolvería bien.

Si distingue un sumando de un factor, por que aquí en qué se equivocó, en que revolvió sumandos con factores (se refiere al ejercicio 3), aquí en qué se equivocó, en que no supo de qué se trataba la resta (se refiere al ejercicio 2),

prácticamente, aquí, que no le hace sentido realmente, lo que es el signo igual (se refiere al ejercicio 1).

I: Esto pocos profesores me lo han dicho, y es cierto.

P: Yo les insisto mucho en esto, será que cuando me enseñaron matemáticas, tenía un profesor que era así, y este, esta la tenían mal, y punto.

I: Estoy de acuerdo en eso, inclusive importa mucho en el desarrollo algebraico después. Si en las operaciones aritméticas cometo errores con el signo de igualdad, no lo voy a poder aplicar correctamente en el álgebra.

Ahora, ¿cómo reaccionarías ante un error? Cuando un alumno lo pone en el pizarrón, o lo ves en el cuaderno, o lo ves en un examen, ¿qué harías?

P: Mira, lo veo todos los días, ese, y yo le digo, no, no, no, bórrale y vuélvelo a escribir abajo, acuérdate que no podemos escribir eslabones así. Eso no es cierto, a ver, aquí, tampoco esto por esto, te da 18. (Señala dos partes, que no son iguales). Aquí si les llamo la atención mucho, o que lo reescriban, o que lo hagan todo completo de una vez, pero que se distinga que esto de aquí, está mal. Y aquí, este año, creo que soy medio loca, porque agarro, como modas, de repente se me prende, y les invento algo, este año empecé, a ver, la palabra mágica POR, ¿dónde está la palabra mágica? A, dice MÁS, no dice POR, por ahí, pero depende de lo que estoy haciendo, yo improviso mucho, a la hora que estoy en la clase. Como que, improviso, cómo les voy a corregir el error, como trabajo con secundaria, tienes que decir una loquera, a veces, para que las vuelvas a traer, entonces, yo de repente, hago, digo un absurdo, para que se rían y vuelvan a hacerme caso, entonces, igual, no es muy….

I: bueno, yo creo que depende…es el efecto que logras…

P: Pues te digo, yo por ejemplo, ahora, les insistí mucho en que cuando íbamos a simplificar fracciones necesitábamos la palabra mágica POR, que si no estaba la palabra mágica POR, no podíamos anular nada.

I: Y ¿cómo les dirías, si te dicen que en este ejercicio (3), simplifican el (y+2) del lado izquierdo con el (y+2) del denominador?

P: Les digo, bueno,

I: Y te dicen, es que hay un POR;

P: Ah, pero ya me lo tienen que decir, dónde está. Entonces no me hubieran tachado nada más uno, hubieran tachado y hubieran dejado y + 1;

I: Yo me refiero a que hubieran tachado este (y+2) del numerador (que está como factor de la y) con el (y+2) del denominador.

P: De todas maneras estaba mal;

I: Claro,

P: Pero estaba mal,

I: Inclusive hay uno, que pone es que se está multiplicando…

P: Ah, claro, pero básicamente, aunque se está multiplicando, todavía tenemos un MÁS ahí entrometido. Yo les digo, los MÁS que están adentro…., los que están adentro de un paréntesis, no nos estorban, porque ésos están de incógnitos, pero os que están en medio, esos son los que tenemos que ver, en lugar de éste, tiene que haber un POR. Por ahí les llego, ¿me entiendes?

I: Claro

P: Pueden lograr el (y+2) con el POR, pero tienen que hacer una agrupación.

I: Perfecto. Ahora, mi pregunta era, ¿cómo reaccionas cuando hacen un error?

P: Pues mira, normalmente trato de tener paciencia y les digo, y luego les pongo ejercicios similares, luego, los dejo de hacer, y luego retomo lo mismo en otro tema, pongo de los mismos.

I: Como para ver si ya …

P: Para ver si ya los dominamos. No es tanto lo que vemos en 3º de secundaria, ves, bueno, nosotros vemos, productos notables, factorización, ecuaciones lineales y cuadráticas y al final geometría y trigonometría. Esos serían los temas que se ven. Puedes mezclar un poco, volver a retomar en el siguiente, en una cuadrática vuelvo a poner un producto notable, que ya si no lo quieren resolver como producto notable, no importa, con tal de que hagan la multiplicación bien. $(x-3)^2$ pues tu pensarás que es $x^2 - 6x + 9$, pues estás muy equivocada, puede ser desde $x^2- 6$, $x^2 + 9$, $x^2 – 9$, un sin fin de resultados.

I: Esa es la realidad.

P: Insistir, insistir, insistir, presentárselos en diferente vestido.

I: ¿Conoces algo del constructivismo?

P: Estoy tomando un diplomado en pedagogía constructivista, ahí en el Veracruz no lo están dando, del ITESO. Y aparte, nos estuvieron dando, todo lo que es la teoría del constructivismo, en las capacitaciones que tenemos en el colegio.

I: Un constructivismo, como general, no para matemáticas.

P: No, Incluso yo, cuando estamos en las sesiones del diplomado, de repente yo le digo, por ejemplo, este tema, trato de preguntar algo de mi materia, y claro, que se les salen los ojos y se les ponen de todos tamaños, porque no entienden nada de lo que yo les hablo, ¿verdad?

I: ¿Qué es lo que entiendes bajo constructivismo?

P: Se supone, yo he entendido, que se trata de que el alumno vaya construyendo su propio conocimiento, que lo vaya trabajando, que lo vaya…, por ejemplo, aquí se trata de que vaya creando un modelo, formara un modelo, trabajara sobre ese modelo, lo acabara de interiorizar y de hacer suyo. ¿Verdad?, en lugar de que tú le digas, se hace así, vamos pensando, con lo

que tú sabes, yo les hago mucha analogía entre la fracción numérica, a ver esta es una suma de fracciones, cómo buscaríamos aquí el común denominado, qué pasos seguirías, para ellas vayan como buscándole, aunque, claro, yo voy guiando las preguntas, que nos lleve, para que lleguen. Porque no está…

I: Pero el constructivismo en sí, sería darles las preguntas…

P: No, no, sería como, en vez de darles todo hecho, dejarlas a que ellas vayan buscando cómo, en lugar de darles el pan, enseñarlas a hacer el pan, pues.

I: Dentro del constructivismo, ¿qué papel jugaría un error de este tipo, o de cualquiera de estos tipos?

P: ¿Qué sería?, que el modelo lo hicieron mal, o que no lo practicaron suficiente, o que, ay no, no me preguntes, yo soy especialista en esto (señala la hoja de errores) de lo otro no.

I: Bueno…

P: No, está bien, pero dónde lo podríamos.

I: Es una pregunta sobre cómo veo el error dentro de mi clase, cómo veo el error matemático que cometen las niñas, dentro de mi clase.

P: Es que no es nada más el error, desgraciadamente, a nosotros nos toca, una parte muy árida, ya ves que en el constructivismo, la tendencia es mucha a que relaciones materias con la vida real, yo te lo juro, que me pongo a pensar, digo, esto con la vida real, ¿dónde? Pero sí hay algunos libros, pero muy jalados de los pelos, así que realmente una niña de 15 años, realmente, te la compre; no te la compran, no te la compran, porque… hay algunas locas como a mí, que me fascina, y ahí tengo alumnas que si les gusta y hasta que me piden más ejercicios y los hacen, y son felices. Pero hay otras, que de plano, yo les digo, mira tú piensa que estás invirtiendo para el orden futuro, tu cabeza se te va acomodar, si tú quieres estudiar cualquier cosa, necesitas un papelito, aunque sea pragmático, necesitas el papelito y si no pasaste esto, no te dan el papelito. Pero la vida real, la vida real, no, les pongo una factorización, con los intereses que ellas tienen a los 15 años, de veras, que sí le busco, y normalmente les gusta mi clase, a pesar de todo, no, pues, y me quieren, pero a mi, a la materia, la van sobreviviendo, hay algunas, que lo hacen muy bien, y esas te animan, la semana pasada, que fueron al concurso del Ciencias, y nosotros… la maestra de 1º secundaria y yo, se nos había ido la onda y no las inscribimos, hablaron del Instituto, que qué pasaba, que nosotros siempre íbamos, que nuestras niñas, bueno pues, el concurso era el viernes, el jueves les avisamos, tú, tú, tú. Y de perdida.

PILAR

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10a	A10b	A11	A12	A13	A14a	A14b
3		2	1		4	2			2	2				1		1				1	1

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
1	2	1		1	3		1		1

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22
	1				1	2	2			1	2	1	1						1				1

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D1l	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
	3		1				1	1	1	1	1				1				

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
						1		2	

Erfassen der Ursache

F1	F2
1	6

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1	G2
3	1

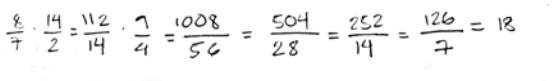
Verschiedenes

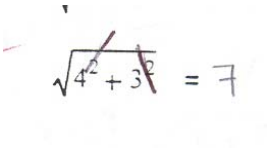
H	I	J	K1	K2	L
3				1	1

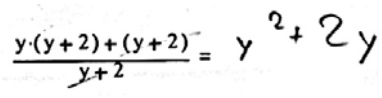
Anhang 19: Interview mit Jorge

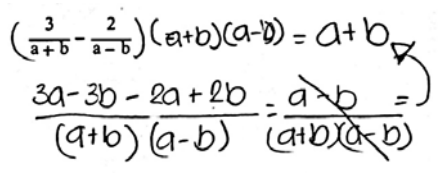
Transkription und Deutung des Interviews:

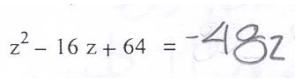
Erster Teil des Interviews

I: Stell Dir vor, dass eine Schülerin an der Wandtafel die nächsten Aufgaben löst. Was würdest du ihr über ihren Lösungsweg sagen? Du kannst dir die Zeit nehmen, die du brauchst, die Aufgabenlösungen zu analysieren, hier ist Papier und Bleistift, wenn du selber etwas lösen möchtest, sage mir dann, was du der Schülerin sagen würdest.	
	Es entsteht eine Pause (etwa 60 Sek)
I: Diese Lösungsprozesse sind von Schülern, ich habe sie eingeskennt.	
J: Aufgabe 1  Ich sehe, dass diese Schülerin oder Schüler Schwierigkeiten mit der mentalen Agilität hat.	*Jorge meint, dass die geskennten Fehllösungen alle von einem Studierenden sind, was noch klarer zum Ausdruck kommt.*
I: Die Lösungen sind von verschiedenen Schülern, nicht von einem einzigen.	*Interviewer macht die Klarstellung der Interpretation des Interviewten*
J: Ah, jede Aufgabenlösung kann von verschiedenen Schülern sein?	
I: Ja	
J: Z.B: bei der Aufgabe 1 fehlt die mentale Agilität. Anstatt die Aufgabe noch mal abzuschreiben, lieber die Zahlen von oben mit den Zahlen von	*Jorge geht darauf ein, dass die Aufgabe hätte einfacher gelöst werden können, durch einen Kürzungs-prozess. Wahrscheinlich meint er, dass die Lö-*

unten kürzen und die Aufgabe schneller lösen, ohne so viele Zahlen multiplizieren zu müssen. Wenn vorher gekürzt wird, ist die Multiplikation viel schneller. Das würde ich ihr sagen.	*sung durch eine algorithmische Form erfolgte.* ***Identifiziert Fehler (unvollständig): A1c*** *Seine Ausdrucksweise „die Zahlen von oben mit den Zahlen von unten kürzen“ weist eventuell darauf hin, dass er keine Fachausdrücke gebraucht, wie die Faktoren im Zähler und die Faktoren im Nenner.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** *Jorge erkennt die unpraktische Lösungsform, multiplizieren der Zähler und Nenner (algorithmische Form), jedoch erkennt er den Missbrauch des Gleichheitszeichens nicht. Er verwendet eine nicht mathematische Sprache, durch die wahrscheinlich spätere Fehler hervorgerufen werden könnten.* *Er geht auf die Vorgehensweise der Lösung ein.* ***So wird es gemacht: B1*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
J: Aufgabe 2  Dieser Schüler scheitert an der Tatsache, dass man die Potenzen nicht mit dem Wurzelzeichen kürzen kann, da ein Zeichen in der Mitte steht. Hier müsste er erst die Quadrate der Zahlen errechnen, dann die Summe vornehmen, um dann die Wurzel zu ziehen. Es gibt keine andere Form, und man müsste ihm die Anweisung erteilen, dass dieses nur möglich ist, wenn die Terme multipliziert wären, aber	*Jorge beschreibt die Vorgehensweise der Lösung und der Hinweis auf das Zeichen (Pluszeichen) zwischen den Termen.* ***Identifiziert den Fehler (richtig): A1a*** ***Interpretiert Vorgehensweise: A2*** *Er weist darauf hin, wie die Aufgabe hätte gelöst werden müssen und durch seine zu „erteilende Anweisung“ gibt er eine Erklärung über wann diese Vorgehensweise angewandt werden kann (nur wenn die Terme multipliziert wären).* ***So wird es gemacht: B1*** ***Hinweis auf Regeln (wann ja): C6b***

nicht addiert.	*Jorge weist auf ein Regelverstoss hin. Ob er auf die Struktur der Terme eingeht, ist nicht zu entnehmen.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
J: Aufgabe 3  Dem Schüler fehlt das Wissen über das Faktorisieren. Wo es dem Schüler einfacher wäre, den Ausdruck von oben mit dem gemeinsamen Faktor zu faktorisieren, um dann doch die Klammern zu eliminieren. Eine Klammer von oben mit dem Term y + 2 von unten, jetzt ja, die Rechnung geht schneller. Hier fehlt dem Jugendlichen gerade die Kenntnis der Faktorisation.	*Jorge erklärt den korrekten Lösungsprozess, den der Schüler hätte gehen müssen.* ***Zeigen (vormachen): C4*** *Er sieht die Ursache des Fehlers in einer mangelnden Kenntnis der Faktorisationsverfahren.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** *Er gebraucht den Ausdruck eliminieren statt kürzen, und weist nicht auf die verbliebene 1 und dem Pluszeichen hin.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers (eliminieren): A5*** *Jorge erkennt den Fehler und weist nur darauf hin, was der Schüler hätte machen müssen, nämlich den Zähler faktorisieren, um dann kürzen zu können. Er meint, dem Schüler fehlt die Kenntnis der Faktorisationsverfah-ren. Dieses weist vermutlich darauf hin, dass Jorge auf der Verfahrens-ebene bleibt.* *Wenn Jorge den Fehler auch prinzipiell erkennt, geht er auf andere Fehlkonzeptionen, wie die Folgen der Elimination nicht ein. Er benennt das Kürzen selber als eine „Elimination“.* ***Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

J: Aufgabe 4  Am Anfang ist es nicht leserlich,	
I: dieses ist a – b	
J: Ah, ja;	*Jorge hat Schwierigkeiten den Lösungsprozess nachzuvollziehen und zu entziffern.* *Es entsteht eine Pause (ca. 30 Sek.) in der Jorge den Lösungsprozess analisiert.*
Hier hat der Jugendliche ein Zeichenfehler, er scheitert an der Multiplikation, in dem Moment, wo der gemeinsame Faktor bleibt, der gemeinsame Nenner und in dem Moment in dem die gekreuzte Multiplikation vorgenommen wird, bei den Klammern verfehlt er das Zeichen. Genau wie oben (womit er die anderen Aufgaben meint) mit dem Zeichenfehler eliminiert er Terme, die man nicht eliminieren darf, nein, dieses ist ein Zeichenfehler, dort ist er im Irrtum.	*Jorge beschreibt den Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes bei der Multiplikation der -2 mit der (a+b), im Sinne einer Verfehlung, Fehlers. Jorge erkennt einen Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes, weitere Fehler erkennt er nicht.* ***Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c*** *Durch diesen Fehler erfolgt eine „Eliminierung“ von Termen, die nach Aussagen von Jorge nicht hätten „eliminiert“ werden dürfen. Es geht nicht klar hervor, ob er seine Äusserung zurücknimmt, und nur auf den Zeichenfehler eingeht.* ***Weist auf Regelverstoss hin: B3*** ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***

J: Aufgabe 5  Dieser Schüler hat keine Idee, was ähnliche Terme sind, es fehlt ihm die Identifikation, ja, welches ähnliche Terme sind, um den Ausdruck vereinfachen zu können. Er hat hier vereinfacht und falsch vereinfacht, weil es bei dieser Aufgabe keine ähnlichen Terme gibt.	*Jorge verweist auf ein nicht Erkennen von ähnlichen Termen „hat keine Idee (man interpretiere es als keine Ahnung)“.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** *Die Vereinfachung erfolgte falsch, da ähnliche Terme nicht identifiziert wurden.* ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Weist auf Regelverstoss hin: B3*** *Jorge geht nicht auf den Unterschied der Konkatenation in der Arithmetik und der Algebra ein, da er die Ursache des Fehlers in der Identifikation von ähnlichen Termen vermutet* ***Erfassen der Ursachen (nein:) F2***

Deutung

Jorge beschränkt sich auf Vorgehensweisen in allen Aufgabenstellungen. Er kommentiert bei den Lösungsprozessen, wie sie hätten korrekt gelöst werden können.

Er erkennt viele der Fehler nicht:

Aufgabe 1: Missbrauch des Gleichheitszeichen

Aufgabe 3: Weglassen der 1 bei der Kürzung

Aufgabe 4: Weglassschemata der 1 im Zähler und einer Verlegung des Nenners in den Zähler; Missbrauch des Gleichheitszeichens und Form in der die Aufgabe mit (a+b) und (a – b) multipliziert wird.

Wichtig scheint mir der Kommentar über die Form, wie er sich über den Zähler und den Nenner einer Bruches äussert, indem er es “Zahlen von oben und Zahlen von unten” nennt.

Jorge meint, dass gewisse Kenntnisse über Faktorisation fehlen. Er weist darauf hin, dass der Zähler hätte faktorisiert werden sollen, um dann einen Faktor des Zählers mit y + 2 aus dem Nenner zu eliminieren (so wörtlich).

Zweiter Teil des Interviews

I: Wie würdest du deinem Schüler helfen, oder jedem einzelnen dieser Schüler helfen?	
J: Ich würde ihnen mit Extrastunden helfen. Ich würde diese Missverständnisse oder Details aufnehmen, um sie zum Stand anderer zu nivellieren. Ich würde dort anfangen, wo sie die Fehler machen, eine Diagnostik vornehmen und ihnen dann mitteilen, wo sie die Fehler machen. Sie in Extrastunden vorbereiten, oder mit Nachhilfeunterricht.	*Jorge würde seinen Schülerinnen Extrastunden geben.* ***Extrastunden: C15*** *Diese Stunden würden bei den Fehlern ansetzen, wozu er eine Diagnostik machen würde.* ***Identifiziert Defizite durch Fehler: A7*** ***Identifikation einer bestimmten Position des Fehlers:A1a*** ***Diagnostik: C16***
I: Und was würdest du in diesen Stunden machen?	*Da nicht hervorgeht, wie er diese Extrastunden gestalten würde, fand ich es wichtig nachzufragen.*
J: Ich würde sie motivieren, ihnen sagen, dass ihre mathematischen Fehler nichts aussergewöhnliches sind, dass sie jedem widerfahren können, aber ihnen auch sagen, dass man sich bessern kann. Sie kann mehr mentale Agilität haben, um die mathematischen Aufgaben besser zu lösen.	*Es geht klar hervor, dass Jorge sehr darauf bedacht ist, Fehler als etwas Selbsverständliches im Lernprozess anzusehen, und auch, dass sie nicht „aussergewähnlich" sind. Er bietet seinen Schülerinnen eine Möglichkeit, in Mathematik besser zu werden. M.E. ist für ihn diese Bemerkung für Schülerinnen motivierend.* ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3*** ***Motivation: C14a*** *Wenn mehr Agilität vorhanden ist, könnten Aufgaben besser gelöst werden. Agilität könnte eventuell mit einer guten Kenntniss von Beziehungen in der Arithmetik und Algebra verstanden werden.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e***

Inklusive würde ich ihnen einige Beispiele aus dem täglichen Leben vorlegen, die eine mathematische Basis haben, um sie so mehr zu motivieren, damit sie mehr lernen. An einem angenehmen Platz, mit gutem Licht. Ihr das Vertrauen geben, dass sie alles fragen kann, auch das Minimalste (womit er elementale Fragen meint) in Mathematik. Sogar ein Detail aus den Gesetzen der Addition, oder der Multiplikation, usw., bis man zu der Faktorisation und der ähnlichen Terme anlangt.	*Er würde Beispiele des täglichen Lebens bieten, was sich bei den Schülerinnen motivierend auswirkt.* ***Veranschaulichen: C7*** *Er geht hier auf einige „gelernte" Aussagen ein, über die Gewohnheiten beim Lernen ein. Es geht nicht mehr klar hervor, ob dieses im Nachhilfeunterricht sein soll, oder als eine Indikation für Schülerinnen, wenn sie lernen.* *Er basiert seinen Unterricht wahrscheinlich auf das Vertrauen der Schülerinnen zu ihm, sie dürfen alles fragen, sogar Details aus den Gesetzen der Addition...* ***Vertrauen geben: C17*** *Es geht noch nicht klar hervor, wie er den Schülerinnen helfen würde. Ob sie spontan fragen, oder ob er zuerst erklärt und dann Fragen beantwortet.*
I: Woran glaubst du, liegt es, dass der Schüler bei der ersten Aufgabe nicht in der Multiplikation der Brüche kürzen kann?	
J: Es kann an vorherigen Lehrern liegen, dass sie ihnen nicht erklärt haben, dass wenn Brüche multipliziert werden, Zähler und Nenner gekürzt werden können. So könnte die Multiplikation schneller sein, nicht so langwierig bei der Kürzung des Resultats.	*Lehrerinnen und Lehrer vorheriger Schuljahre haben seines Erachtens nicht erklärt, wie man eine Multiplikation von Brüchen vereinfachen kann.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a***
I: Und bei der 2. Aufgabe?	
J: Die Gesetze der Addition und Subtraktion, nämlich, die Hierarchie der Operationen, was erst ist, die quadratischen Potenzen und dann die Multipli-	*Wie und wann betrachte ich das Wurzelzeichen? Die Hierarchie der Operationen erklärt nicht den Fehler in dieser Aufgabe.*

kation oder Division, und zum Schluss die Addition und Subtraktion. Da läge der kleine Fehler.	***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** *Die Einstellung von Jorge, „da läge der kleine Fehler“ ist gut, er nimmt sie wahrscheinlich nicht so tragisch. Schon vorher den Eindruck erweckt „Fehler sind nichts aussergewöhnliches“.*
I: Und bei der 3. Aufgabe?	
J: Es ist eine Schwierigkeit bei der Faktorisation, der Schüler hat die Faktorisation noch nicht begriffen und auch nicht, dass er hier die Faktorisation gebrauchen müsste.	*Auch hier würde eine Erklärung der Faktorisation wahrscheinlich der Schülerin nicht weiterhelfen. Das Problem liegt eher in den Vorstellungen zur Vereinfachung von algebraischen Brüchen und zu Striechschemata.* ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6***
I: Und bei der 4. Aufgabe?	
J: Ich sehe auch, einen Fehler bei den Gesetzen der Zeichen, Multiplikation mit gleichen Vorzeichen, ergibt positiv; Multiplikation mit verschiedenen Vorzeichen, ergibt negativ. Der Jugendliche kann faktorisieren, er versteht es ähnliche Terme zu reduzieren, aber durch einen Zeichenfehler ist der Ausdruck nicht korrekt. Ich würde hier auf die Gesteze der Vorzeichen fokkusieren.	Den entdeckten Fehler bei dem Distributivgesetz würde er mit einer Fokkusierung auf die Gesetze der Vorzeichen versuchen zu beheben. Ob der Studierende diese Regel kennt, bleibt fraglich. ***Weist auf Regelverstoss hin: B3*** Nach MALLE könnte der Studierende eher den zweiten Teil, durch den Aufwand der Aufgabe, vergessen haben.
I: Und bei der 5. Aufgabe?	
J: Definitiv geht es um die algebraischen Ausdrücke, da es ein algebraischer Ausdruck ist. Die Identifikation der ähnlichen Terme y wie man sie reduzieren kann, hat er bei dieser Aufgabe noch nicht entdeckt.	Identifizieren ähnlicher Terme wäre die Form, wie die Aufgabe richtig gelöst werden könnte. **Fehlende Vorkenntnisse: D1e** Er geht aber nicht auf die Ursache dieser Schwierigkeit ein. **Erfassen der Usrache (nein): F2**

Deutung

Jorge geht davon aus, dass eine Nachhilfe von Nutzen ist. Er würde die Fehler und Schwierigkeiten der Schüler diagnostizieren und dann in den Extrastunden dort anfangen, wo er die Fehler diagnostiziert hat.

Bei allen Hilfeangeboten, geht er davon aus, dass die einzelnen Gesetze nicht erkannt oder nicht bekannt sind. Er würde die Hilfe wahrscheinlich, durch das nochmalige Erklären der jeweiligen Gesetze leiten.

Man erkennt bei Jorge eine starke Tendenz zur Wiederholung der Gesetze gegen die verstossen wurde. Jedoch scheint bei einigen Aufgaben das Gesetz, das er als Ansatz zur Behebung des Fehlers angibt, nicht weiterzuhelfen, da der Fehler durch diesen Verstoss nicht erklärt werden könnte.

Dritter Teil des Interviews

I: Könntest du mir kurz beschreiben, wie eine Mathematikunterrichtsstunde bei dir aussieht?	
J: Ich begrüße die Schülerinnen und wünsche ihnen einen angenehmen Tag und, um sie zu motivieren, sage ich ihnen, dass sie daran denken sollen, dass die Mathematik sehr wichtig ist, dass man sie im täglichen Leben anwendet und außerdem, dass sie hilft das Denken zu agilieren. Wir haben im Hirn zwei Hälften, die rechte und die linke. Die linke Hirnhälfte ist die der Gedankengänge, der Kreativität.	*Jorge geht, wie vorhin, davon aus, dass die Motivation im Mathematikunterricht wichtig ist.* ***Motivation: C14a***
Klar, ich fange mit einer Rückfrage der vorherigen Unterrichtsstunde an, ich mache gezielte Frage, über was wir in der letzten Stunde durchgenommen haben und leite sie zum Denken an. Danach kommen wir auf das Thema zurück, oder fangen ein neues Thema an, wobei das vorherige Thema und die Ziele klar sind.	*So wie Jorge seine Unterrichtsstunde beschreibt, kommt er auf die vorhergehende Stunde zurück, in dem er gezielte Fragen stellt.* *Er geht erst zum neuen Thema über wenn das Thema und die Ziele klar sind.*
Ich kommentiere den Schülerinnen, dass sie bei jeder Ungewissheit fragen können, indem sie die Hand heben, damit ich ihren Fragen nachgehen kann. Sie sollen sich nicht schämen zu fragen, auch das Minimalste, da oft	*Er geht wieder darauf ein, dass er den Schülerinnen sagt, sie können alles fragen, da er der Ansicht ist, dass aus einer „Ungewissheit“, die nicht geklärt wurde; später Fehler resultieren.*

dieses Detail später sich sehr gravierend auswirken kann. Man kann es vorbeigehen lassen und vorbeigehen lassen, bis man später, weil man diese Ungewissheit nicht geklärt hat, in der Klassenarbeit Fehler begeht. Ich gebe ihnen das Vertrauen, zu fragen, und auch während der Stunde teilzunehmen mit Aufgaben, die an der Wandtafel gelöst werden. Oft arbeiten sie auch während der Stunde zu zweit, wo die eine der anderen helfen kann, aber immer mit meiner Aufsicht. Ich motiviere sie auch mit Extraarbeiten, wo sie Extrapunkte für ihre Note sammeln.	***Vertrauen geben: C17*** *Das Teilnehmen am Unterrichtsverfahren ist beschränkt auf das Vereinfachen oder Lösen gewisser Aufgaben an der Wandtafel.* ***Erkenntnisse des Schülers mit Unterstützung des Lehrers: E3*** *Manchmal lässt er mit „seiner Aufsicht“, zwei Schülerinnen zusammen Aufgaben bearbeiten, was als kollaboratives Lernen im Sinne von Vygotsky interpretiert werden könnte.* ***Kollaboratives Lernen: E6*** *Er motiviert seine Schülerinnen mit Extraarbeiten für Extrapunkte. Eine extrinsische Motivation.* ***Motivation: C14b***
I: Wie reagierst du auf einen Fehler, den eine Schülerin an der Wandtafel begeht oder wenn sie dir etwas kommentieren?	
J: Nicht überrascht, auch nicht in dem ich sie beschäme, in anderen Worten, ich tadele sie nicht des Fehlers wegen, genau andersherum, in sachter Weise, sehr vorsichtig und einer angebrachten Weise lasse ich sie wissen, weißt du, du hast einen Fehler begangen. Nicht nur ihr, sondern der ganzen Gruppe, vorsichtig, dieser Fehler wurde gemacht, damit ihr ihn nicht auch macht. Was hat sie gemacht?	*Einerseits möchte er „in sachter und angebrachter Weise“ der Schülerin sagen, dass sie einen Fehler begangen hat, andererseits weist er die Klasse darauf hin: „Vorsicht, dieser Fehler wurde gamacht, damit ihr ihn nicht auch macht“.* ***Vorsichtig- möchte Gefühle nicht verletzen: B9*** ***Weist die Klasse auf den Fehler hin: B7***

Dieses kann nicht gemacht werden, mach dieses und dieses. Wir irren uns alle mal, und ohne ihr Selbstgefühl zu schädigen, weise ich auf ihren Fehler hin damit sie ihn nicht noch einmal macht. Aber in einer angebrachten und sanften Weise, damit sich die Schülerinnen motiviert fühlen und nicht ihr Selbstvertrauen verlieren. Ich sage ihnen, dass man aus den Fehlern lernen kann.	*Sollte „das nicht überrascht sein“, ein Hinweis darauf sein, dass er diese Fehler oft sieht?* ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3*** *Er würde der Schülerin beschrieben, was sie nicht machen darf (er sagt nicht warum sie es nicht machen darf)* ***Zeigen (vormachen): C4*** *und dann beschreibt er mach „dieses und dieses“. Hier ein Hinweis auf einen lehrerzentrierten Unterricht.* ***Hinweis auf Regeln: C6a u. C6b*** ***Lehrerzentriert: E9*** *Das Hinweisen auf den Fehler würde ausreichen, damit er „nicht noch einmal gemacht wird“.* ***Indenitfikation des Fehlers hilft Fehler vermeiden: E4*** *Er ist sehr darauf bedacht das Selbstvertrauen der Schülerinnen nicht zu schädigen.* ***Vorsichtig- möchte Gefühle nicht verletzen: B9*** *Aus Fehlern kann man lernen! Eine alte Weisheit. Wie er es im Mathematik-unterricht anwenden würde, geht nicht klar hervor.*

Deutung

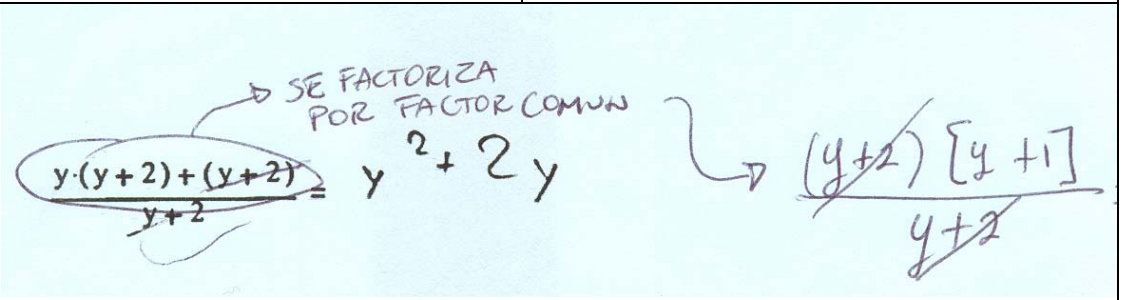
Jorge ist sehr darauf bedacht, das Selbstgefühl der Schülerinnen nicht zu zerstören. Jedoch hat es den Anschein, dass er sehr einschneidend auf die Fehler hinweist. Er sagt dann, wie die Aufgabe gelöst werden sollte („mach dieses und dieses“). Ob dadurch das Verständnis der Schülerinnen erreicht wird, bliebt fraglich.

Vierter Teil des Interviews

I: Hast du schon mal einen Kurs in Mathematikdidaktik belegt, oder nur in genereller Didaktik?	
J: Nein, nein, ich habe noch nie Erfahrung mit einem Mathematikdidaktikkurs gehabt. Gehabt haben wir Fortbildungskurse in Didaktik, wo Lernstrategien, Verhalten der Jugendlichen, all ihre psychologische Umwelt, wie die emotionelle Seite der Jugendlichen und das Ambiente in dem sie sich entwickeln die Themen waren. Man hat uns auch gelehrt, wie man eine Unterrichtsstunde gestaltet, abgesehen davon, welches Fach man unterrichtet, wie man sich während der Stunde bewegen sollte, nicht an einer einzigen Stelle stehenbleiben, den Ton der Stimme heben und senken, Stifte in verschiedenen Farben gebrauchen, wenn man mit Kreide schreibt, auch Kreide in verschiedenen Farben gebrauchen oder das Resultat ein-schliessen, damit es besser ersichtlich ist. Schüler zur Teilnahme im Unterricht veranlassen und sie motivieren, usw. Dieses wären die Strategien.	*Aus diesem Kommentar wird klar, dass Jorge an verschiedenen Fortbildungskursen teilgenommen hat.* *Er beschreibt die einzelnen Inhalte, die er während dieser, „gelehrt" bekommen hat.*
I: Kennst du etwas über den Konstruktivismus?	
J: Ich bin gerade dabei, was ich bis jetzt, über den Konstruktivismus weiss, es ist neu für mich, es ist zu Denken lehren, dass aus meinen Schülerinnen selbst die Motivation kommt, zu lernen, zu forschen, auszukundschaften. Von ihren Kenntnissen zu wissen, wie man sie anwenden kann.	*Jorge beschreibt generell den Konstrutivismus.*

I: Wie würdest du einen Fehler im Konstruktivismus katalogieren?	
J: Ihnen alles in die Hand geben, in anderen Worten, ihnen alles fertig vorlegen, ohne dass sie etwas lösen, analysieren oder nachforschen, ohne selbst kreativ zu sein, ihnen alle eigenen Wege versperren.	*Die Frage wurde von Jorge in der Hinsicht verstanden, dass man während des Unterrichts eventuell nicht kontruktivistisch vorgehen könnte.*
I: Ich glaube die Interpretation, die du meiner Frage gegeben hast, ist nicht genau was ich gefragt habe, vielleicht habe ich mich nicht richtig ausgedrückt, ich meinte wie du einen Schülerfehler im Konstruktivismus katalogisierst. Deine Antwort zielte mehr auf ein Fehler im Konstruktivismus…	
J: Oh, ich glaube es wäre durch Unkenntnis der Schülerinnen über was der Konstruktivismus ist, durch Mangel an Interesse, durch Mangel an…durch ihre eigenen Situationen in familiärer Hinsicht oder ihre sozioökonomischen Schwierigkeiten. Sie werden durch diese Situationen eingehüllt, und können sich nicht öffnen. Ein Fehler der Schülerinnen.	*Auch hier wird die Frage von Jorge anders interpretiert oder aufgenommen. Kennen Schülerinnen und Schüler nicht den Konstruktivismus könnte ein Mangel an Interesse entstehen, oder sie könnten von ihren eigenen Situationen (im Alltag) am Lernen gestört werden.*
I: Ich werde versuchen mich besser auszudrücken; welchen Stellenwert hat ein Fehler in einer konstruktivistischen Unterrichtsstunde?	
J: Ja, es hätte einen grossen Einfluss in den Denkprozessen der Schülerinnen, so ein Fehler, es hätte einen Einfluss im Verhalten. Die Tür wäre, innerlich und geistig von Seiten der Schülerin, offen, um es so zu sagen, im Falle der Mathematik. Ein Fehler würde, den Gedankengang behindern, die Kreativität behindern, welche gerade vom Konstruktivismus gefordert werden. Es könnte uns vom	Er geht weiterhin auf einem Fehler ein in einer konstruktivistischen Unterrichtsstunde, und sagt, dass es ein Fehler wäre die Kreativität und das Denken der Schülerinnen zu hemmen, denn das könnte hervorrufen, dass die Schülerinnen sich vom Lernen abwenden. Da ich nach der dritten Frage, nicht erreichte, dass der Jorge meine Frage verstand, nehme ich an, dass er diesen

Lernen abwenden.	Stellenwert eines von Schülerinnen gemachten Fehlers im Mathematikunterricht nicht kennt. **Erkennt den Stellenwert des Fehlers im Unterricht (nein): A10b**
I: Hättest du Interesse an einer Fortbildung in Mathematikdidaktik?	
J: Ja, sehr. Ich würde eine Autokritik üben, um zu sehen wo ich stehe, um zu sehen wie gut ich den Konstruktivismus anwende, um mich den Richtlinien der Schule anzupassen, der Aufgabe und der Philisophie. Ausserdem würde ich mich als Lehrer analysieren, welche Strategien ich anwende, ob sie angemessen sind, ob sie geeignet sind, aber eine Autokritik, eine gute.	*Jorge würde gerne Fortbildungen in Mathematikdidaktik besuchen. Er würde autokritisch sein. Er würde immer sein eigenes Verhalten analysieren.* ***Fortbildungskurs in Mathematikdidaktik (nein): K2***
I: In anderen Worten, dein Vorsatz wäre dich in deiner Didaktik zu verbessern.	
J: Genau, das wäre meine Absicht, mich verbessern, mich verbessern. Z.B. zu wissen, wie angebracht es ist, audiovisuelle Medien zu gebrauchen, was ich fast nicht mache, Folien auflegen, oder einen Computer einzusetzen. Ist es gut, ist es nicht gut, gewöhnen sich die Schülerinnen daran, dass alles audiovisuell vorgetragen wird, verlieren sie die Agilität Aufgaben selber an der Wandtafel oder im Heft zu lösen, und alles auf dem Rechner zu haben. Als Beispiel, nicht wahr?	*Es gibt den Anschein, als wäre sich Jorge über die Vor- und Nachteile der Unterrichtsmedien nicht im klaren. Wann, wie, wie oft sollte er Computer einsetzen? Sollen nun keine Aufgaben an der Wandtafel gelöst werden?* ***Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6*** *Würde das Einsetzen eines Rechners, einen Schaden der „Agilität" seiner Schülerinnen anrichten?*
I: Die Technologie in deiner Unterrichtsstunde einzuführen?	
J: Die Vor- und Nachteile zu erfahren über was ich mache, über meine Form zu lehren.	*Er würde gerne Vor- und Nachteile über seine eigene Unterrichtsform erfahren.*

In den Klassenarbeiten detektiere ich, wo die Fehler sind, ich kreide sie an und schreibe den richtigen Lösungsprozess dazu.	*Er kreidet Fehler an, und schriebt den richtigen Lösungsprozess darunter, was wahrscheinlich seinen Schülerinnen wenig helfen würde, da er nicht auf die Ursache des Fehlers eingeht.* ***Fehler ankreiden: B2*** ***So wird es gemacht: B1*** ***Lehrerzentriert: E9***
I: Z.B. was würdest du bei der 3. Aufgabe hinschreiben?	
(Er kreist bei der 3. Aufgabe den Zähler ein und schreibt dazu, man faktorisiert mit einem gemeinsamen Faktor, mit einem Pfeil zeigt er, wie es richtig gelöst wird.)	*Als Muster wurde die 3. Aufgabe gewählt.* *„Es wird der gemeinsame Faktor faktorisiert“, siehe, so wird es gemacht. Mit einem Pfeil.*
	
I: Glaubst du, wenn du den Fehler ankreidest und dazuschreibst, wie die Vereinfachung vorgenommen werden muss,dass wir es dann schaffen, dass sie diese Art von Aufgaben richtig vereinfachen?	
J: Es kann sein, dass in manchen Fällen ja, in anderen nicht, weil die letzteren sehr viele Schwierigkeiten mitbringen von vorher. Man müsste beim Schüler nachforschen, ob ihm dieses geholfen hat. Den Schüler fragen; “hast du verstanden, was ich in deine	*Jorge ist der Ansicht, dass viele Schülerinnen Fehler von anderen Schuljahren „mitbringen“.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a*** *Man sollte, seiner Ansicht nach, bei der Schülerin nachfragen, ob ihr geholfen*

Klassenarbeit geschrieben habe?", "Ja, Lehrer, nein Lehrer" und je nachdem, unter meiner Aufsicht auch während der Unterrichtsstunden, sehen, ob es funktioniert hat oder nicht.	*wurde. Die direkte Frage nach dem Verstehen soll die Schülerin beantworten.* ***Erkenntnisse des Schülers mit Unterstützung des Lehrers: E3*** *Er würde kontrollieren, ob die Schülerin auch wirklich verstanden hat (wahrscheinlich mit anderen oder ähnlichen Aufgaben).* ***Üben: C2***
I: Und können wir so selektiv sein, diese Schülerin hat diesen Fehler gemacht, ich habe es in ihrer Klassenarbeit korrigiert und jetzt werde ich aufpassen ob sie es verstanden hat?	
J: Ja, man kann, aber in manchen Fällen ist es schwierig, es haben viele Aspekte einen Einfluss; die Anzahl der Schülerinnen, die Zeit, auch, aber es ginge. Aus eigener Erfahrung in manchen Fällen geht es, in manchen nicht. Manchmal kommt man nicht gegen an. Ich habe einen Fall gehabt, in dem es gegangen ist, die Schülerin hat mir gesagt, dass sie Schwierigkeiten von weit zurückliegenden Themen hat, dass ihr nichts gezeigt worden ist. Ich habe mit ihr erzählt und sie nach den Grundoperationen gefragt, danach habe ich ihr die Prinzipien der Algebra gelehrt, und dann habe ich entdeckt, welche Defizite sie hatte. Bis wohin ich zurückgreifen musste in der Algebra, und habe sie dann aufs gleiche Niveau der Mitschülerinnen gebracht.	*Jorge ist sich bewusst, dass bei einer grossen Anzahl von Schülerinnen eine individuelle Betreuung schwierig ist, aber es geht.* *Er weiss, wahrscheinlich aus Erfahrung, dass seine Hilfen manchmal nicht den gewünschten Effekt haben, man kann gegen Fehler manchmal nicht ankommen.* ***Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6*** *Er fragt sich vermutlich nicht woran das liegen könnte, oder ob seine Methoden für die Schülerinnen gut sind.* *Er beschreibt, wie weit er in der Algebra hat zurückgehen müssen, um einer Schülerin zu helfen.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a***
I: möchtest du noch etwas zu dem Interview sagen?	
J: Für mich war das Interview sehr interessant, definitiv verlieren Schüler das Interesse an der Mathematik, sie	*Als letztes geht Jorge auf die emotionale Seite der Mathematik ein, und wie Schülerinnen vor Mathematik Angst*

haben eine panische Angst, eine Angst der Mathematik gegenüber. Es wäre schön, wenn man ihnen diese Angst nehmen könnte, diese Panik, diesen Terror, in dem man sie motiviert und ein wenig Kreativität anwendet. Wo man von einem Thema zum anderen kommt, und ein vorhergehendes Thema eingreift, bis man zur Limesrechnung gelangt, bis die Schülerinnen sehen, dass Mathematik viele Anwendungen hat, und dieses auf einem „Concetual Map“ niederschreiben können. Das würde helfen, die mentale Agilität, so ist es.	*haben.* ***Affektive Komponente im Lernprozess: I*** *Da diese Seite in dieser Arbeit, auch wenn sie wichtig ist, nicht aufgenommen werden soll, wird sie nicht weiter untersucht*.

Deutung

Jorge kennt nicht viel vom Konstruktivismus, wie er selbst zugibt. Er kennt auch nicht den Stellenwert eines Schülerfehlers im Konstruktivismus. Es besteht die Möglichkeit, dass er die Frage nicht verstanden hat, da er immer wieder auf einen Fehler von jemanden der den Konstruktivismus anwenden möchte, zurückkam, oder er wahrscheinlich nicht weiss, dass Fehler eine Gelegenheit zum Lernen sind.

Seine Art Fehler in Klassenarbeiten zu korregieren wurde durch seine Aufzeichnung klar, und die Interpretation eines eher lehrerzentrienten Unterrichts, da er Teilweise vorsagt, wie eine Aufgabe errechnet werden sollte. Das Vorschreiben, wie eine Aufgabe gelöst hätte werden müssen, soll Fehler beheben, jedoch ist er sich gleichzeitig bewusst, dass er es manchmal nicht schafft.

Ob eine Schülerin, geich nach seiner Erklärung weiss, ob sie verstanden hat, bleibt fraglich, auch wenn sie unter seiner Aufsicht ähnliche Aufgaben löst, da ein Effekt des Nachahmens nachhängt.

Auswertung und Deutung des Interviews mit Jorge:

Jorge gebraucht, vermutlich, während seiner Unterrichtsstunde den Ausdruck „eliminieren“ bei einer Kürzung, was für die Schüler eine falsche Vorstellung der Kürzung mit sich bringen könnte. Bei einer “Elimination” bleibt der Gedanken, dass nichts übrig bleibt.

Er korrigiert Fehler in dem es sie ankreidet und den korrekten Lösungsprozess dazuschreibt, geht aber nicht auf die Ursachen der Fehler ein, sondern sieht sie wahrscheinlich als ein nicht Erlernt haben, von vorherigen Themen, womit er Lehrende anderer Schuljahre verantwortlich macht. Andererseits ist er sich bewusst, das seine Hilfen zur Korrektion von Fehlern nicht immer den erwünschten Effekt der Behebung haben.

Anhang 19a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Jorge und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien:

Fecha: 10/03/06

Trascripción:

Preparatoria: Experiencia en docencia de las Matemáticas: 9 años

Carrera que estudió: tecnólogo en construcción, CETI

Materias que imparte: Toda la Preparatoria

Experiencia laboral en otros colegios o escuelas: en otras escuelas privadas

I: Tú te vas a imaginar que una alumna o alumno tuyo resuelve en el pizarrón los siguientes ejercicios. ¿Qué le comentarías a la alumna o al alumno sobre la forma de resolución?

Puedes tomarte el tiempo para analizar, hay pluma y papel por si quieres resolver algo, y tú nada más dime lo que harías o lo que dirías, etc.

Pausa

Estos procedimientos son de alumnos, son todos diferentes porque los escaneé.

J: Estoy viendo que este alumno o alumna tiene problemas de agilidad mental.

I: Las soluciones son de varios alumnos, no de uno solo.

J: Ah, ¿entonces cada inciso puede ser de diferente alumno?

I: Si

J: Por ejemplo la # 1 tiene falta de agilidad mental, en vez de volver a pasar otra vez la operación, cuajar las operaciones simplificar los # de arriba y los # de abajo y hacer más rápido la operación, la multiplicación, sin necesidad de multiplicar tantos #. Ya simplificando se puede hacer la multiplicación más rápido, darle esa observación.

La # 2, a este alumno, le falla el hecho de que no podemos eliminar los cuadrados con la raíz ya que hay un signo de más de por medio, sino que aquí es elevar los cuadrados hacer la suma y sacar a raíz, no hay otra manera y hacerle la indicación de que sí se puede únicamente si los dos términos están multiplicándose, no sumándose.

En la # 3 el muchacho tiene falta de conocimientos de la factorización, donde será más fácil para este alumno factorizar la expresión de arriba por factor común para ahora sí poder eliminar los paréntesis (un paréntesis de arriba) con

el término de y+2 de abajo y ahora sí, la operación sale más rápida. Aquí al muchacho le falta precisamente el conocimiento de factorización.

La # 4, con letra no legible al principio,

I: éste es a – b

J: Ah, sí;

Pausa

Aquí el muchacho tiene errores de signo, le falla la multiplicación, al momento se queda el factor común, el común denominador y en el momento de hacer la multiplicación cruzada, de los paréntesis se equivoca de signo. Igual también arriba las expresiones con ese error de signo está eliminando términos que no se deben eliminar, no, entonces por un error de signo ahí está equivocado.

En la # 5 este alumno no tiene ni idea de lo que son los términos semejantes, le falta identificar, eso, cuáles son los términos semejantes para saber si una expresión se puede reducir, aquí la redujo y está mal reducida, porque no hay términos semejantes en esta expresión.

I: ¿Cómo le ayudarías a tu alumno, o a cada uno de esos alumnos?

J: Yo les ayudaría dándoles clases, donde fallen ellos, o sea, en esos detallitos, para nivelarlos o saber cuál es la falla y empezar de ahí con ellos, o sea, hacerse un diagnóstico y comentarles cuál es su falla y prepararlos con clases, clases extras, o sea, clases particulares.

I: ¿Y qué harías en esas clases?

J: Primero motivarlo, decirle que las fallas que tiene matemáticas, o sea, no son fuera de lo normal, que a cualquiera le puede suceder y pero decirle que si podemos mejorar en esto el definitivamente puede tener más agilidad mental para poder resolver más rápido las matemáticas y así inclusive ponerle ejemplos que sean de la vida cotidiana, que están hechos a base de matemáticas y con eso motivarlo más para que aprenda. En un lugar agradable, ambiente agradable, con buena luz. Y dándole toda la confianza de que puede preguntar lo que sea, hasta lo más mínimo de matemáticas. Hasta un detalle de alguna de las propiedades de la suma, o de la multiplicación, etc. Hasta que se llegue a la factorización y términos semejantes y todo esto.

I: ¿A qué crees que se deba, por ejemplo, en el primer problema de que no pueda simplificar dentro de la multiplicación de las fracciones?

J: Puede ser por maestros anteriores, que no les hayan explicado que cuando se multiplican fracciones se pueden simplificar los numeradores y denominadores y así podrá ser más rápida la multiplicación y no tardarse tanto en estar simplificando el resultado.

I: ¿Y en el segundo problema?

J: Las propiedades de las sumas y de las restas, o sea, de la jerarquía de las operaciones, qué es primero, los cuadrados y después las multiplicaciones y divisiones y hasta el final las sumas y restas. Por ahí, estaría una pequeña falla.

I: ¿Y en el tercer problema?

J: Es un problema de factorización, ahí el muchacho no ha captado muy bien, todavía, no ha comprendido la factorización y que la factorización es la que se debe utilizar.

I: ¿Y en el cuarto problema?

J: Le veo también, le falla la ley de los signos, multiplicación de signos iguales da positivo, multiplicación de signos diferentes da negativo, por el error, sabe factorizar el muchacho y sabe eliminar términos semejantes, pero por error de un signo, no está correcta la expresión, entonces ahí, yo me enfocaría mucho a las leyes de los signos.

I: ¿Y en el quinto problema?

J: En el quinto problema, definitivamente es lo que es las expresiones algebraicas, ya que es una expresión algebraica, y dentro de eso identificar cuáles son los términos semejantes y cómo reducirlos, no lo ha identificado todavía en este problema.

I: ¿Me podrías explicar brevemente cómo es el desarrollo de una clase de matemáticas tuya?

J: Comienzo a saludar a las alumnas y decirles que tengan un buen día y motivarlas y que recuerden que las matemáticas son muy importantes, que se aplica en la vida y aparte de eso, que las matemáticas les agiliza el pensamiento, la razón, que tenemos dos partes en el cerebro, hemisferios, parte derecha e izquierdo, donde en la parte izquierda se maneja todo esto del razonamiento y la creatividad. Claro, empiezo con una retroalimentación de lo que se vio n la clase anterior, y arrancar haciéndole preguntas a las muchachas, qué es lo que vimos en la clase anterior y hacerlas pensar. Después de la retroalimentación volvemos al tema, a comenzar con el tema, dejando claro el tema anterior y todos sus objetivos. Comentándoles a las muchachas que pueden preguntar cualquier duda, con orden levantando la mano, para poderlas atender, por mínima que sea, que no tengan pena, porque ese mínimo detalle puede ser muy grave después porque se puede ir dejando pasar, pasar, pasar hasta cometer un error en el examen por no preguntar, esa duda. Yo les doy la confianza de que las muchachas pregunten y también hacerlas participar durante la clase con ejercicios haciéndolas pasar al pizarrón o dejándoles ejercicios en clase en equipos de dos, donde se puedan ayudar unas con otras, claro está bajo mi supervisión, y motivarlas también con trabajos y décimas para su calificación.

I: ¿Cómo reaccionas ante un error que cometan las alumnas ya sea en el pizarrón o cuando te comentan algo?

J: No sorprendido, ni tampoco haciéndolas sentir menos, o sea, no reprocharles el error, sino al contrario, en una forma suave, cautelosa y en forma prudente hacerle ver, sabes qué, cometiste este error, no nada más a ella, sino a todo el grupo, cuidado este error se cometió, para que no lo cometan, qué fue lo que hizo ella, esto no se debe hacer, haz esto, esto y esto. Todos nos equivocamos y sin bajar la autoestima, entonces hacerle ver a la muchacha el error y que no lo vuelva a cometer, y haciéndoles ver a los demás también ese error, para que ya no lo cometan. Pero de una forma muy prudente, muy suave, para que las muchachas se sientan motivadas y no haya baja autoestima. Decirles que con los errores se aprende.

I: ¿Tú has tenido alguna clase de didáctica de las matemáticas? ¿Te han ayudado alguna vez en la parte didáctica de las matemáticas, o sólo has tenido clases de didáctica general, ya que entreveo algunos detalles didácticos?

J: No, no he tenido experiencia con alguna clase de didáctica de matemáticas. Con diplomados de didáctica general, donde enseñan estrategias de aprendizaje, donde se ven también toma de liderazgo, la personalidad madura, las actitudes de la juventud, todo lo que es el entorno psicológico, como emocional de los jóvenes, el ambiente en el que nos estamos desenvolviendo. Una manera también que nos han enseñado, es cómo impartir una clase independientemente de la materia que sea, cómo caminar durante la clase, no estar en un solo lugar, subir y bajar el tono de voz, si, utilizar plumones de diferente color, para que llame la atención en el caso de usar pintarrón, en el caso de gis, también utilizar gises de diferente color, o poner la respuesta encerrada de manera que sea más llamativa. Hacer participar a los alumnos y motivarlos, etc. Estas serían las estrategias.

I: ¿Conoces algo del constructivismo?

J: Estoy en esto, lo que se hasta ahorita del constructivismo, que es algo nuevo para mi, pues es enseñarlas a pensar, que ellas mismas nazca la motivación para aprender, por investigar, por indagar. De sus conocimientos conocer más, dónde se aplican.

I: ¿Cómo catalogarías un error dentro del constructivismo?

J: Ponerles todo a la mano a las muchachas, en pocas palabras, darles todo sin que ellas resuelvan, analicen, investiguen sean creativas, sino, restringirles todos esos caminos que pueden seguir.

I: Creo que la interpretación que tú le acabas de dar se fue por otro lado, o sea, yo pensamos en cómo catalogabas el error de las alumnas dentro del constructivismo, siendo tú el profesor. Tú comentas, que un error del constructivismo sería, eso.

J: O, creo que sería por falta de conocimiento de las muchachas de lo que es el constructivismo, o sea, sin necesidad de decirles lo que es el constructivismo, sino, por falta de ellas, por falta de interés, por falta de, vamos, de situaciones

tanto socioeconómicas o familiares, etc., que las envuelven a ellas, a ellas mismas no les permiten abrirse más. Un error, de la alumna.

I: Creo que volvemos, ¿qué papel juega el error dentro de una clase constructivista? Creo, que así me expresé un poco mejor.

J: Si, influiría mucho en el proceso de pensamiento de la muchacha, ese error, o sea, influiría mucho en la actitud de la alumna, en este caso. Ya no sería, estaría abierta la puerta, por decirlo así, mentalmente de la muchacha, en el caso de matemáticas, un error de esos sería, poner obstáculos en su razonamiento, poner obstáculos en su creatividad, que es una de las cosas que se pretenden en el constructivismo, sería un error, por decirlo así, este, un error que pueda evitar que siga atendiendo la muchacha. Y que pueda evitar el aprendizaje.

I: ¿Tú tendrías interés en alguna clase o diplomado en didáctica matemática?

J: Si, mucho interés. Sería para hacerme una autocrítica, para ver cómo voy, para ver qué tan bien aplico lo que es el constructivismo, el acoplarme a las políticas de la escuela, o misión o filosofía, y aparte de eso, yo analizarme como maestro, qué estrategia estoy utilizando, si son adecuadas, si pueden ser adecuadas, pero es una autocrítica, buena.

I: O sea, con la intención de mejorar.

J: Exactamente, eso es el objetivo principal, mejorar, mejorar. Como por ejemplo saber, qué tan bueno es el utilizar material audiovisual, que casi no lo manejo, poner acetatos, o utilizar cañón, o no. Es bueno, no es bueno, se acostumbra a las alumnas a que todo lo quieran ver ya en material audiovisual, pierden la agilidad de hacer ejercicios en el pizarrón, o hacer los ejercicios en su cuaderno, y tener todo en la computadora. Como un ejemplo, ¿no?

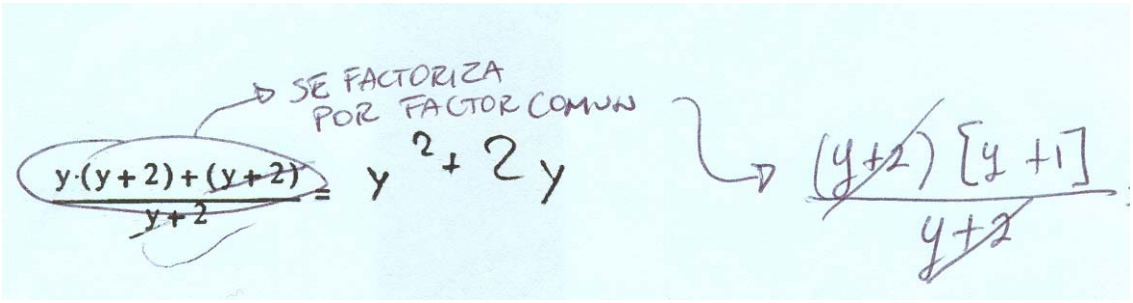
I: O sea, meter tecnología en tus clases.

J: Ver los pros y contras de lo que yo estoy haciendo, de mi forma de enseñar.

En los exámenes yo detecto dónde están los errores, los marco y les pongo cuál es el procedimiento correcto.

I: Por ejemplo, aquí en el # 3, qué pondrías:

“Señala físicamente en la hoja, lo que pondría”



I: ¿Tú crees, que señalando el error y diciéndoles cómo sería la solución correcta, podemos llegar a que ellos lo hagan bien?

J: Puede ser que en algunos casos sí, y en otros casos no, por que ellos ya traen problemas de más atrás. Sería una cosa de indagar en el alumno para averiguar si esto le ayudó y preguntarle al alumno, “oye, comprendiste lo que te puse en el examen”, “si, maestro, no maestro” y dependiendo de eso, y bajo mi observación también en el transcurso de las clases, darme cuenta, si le funcionó al alumno o no.

I: ¿Y podemos hacer algo así, tan, tan selectivo, esta alumna hizo este error, se lo pude en el examen que lo tuvo mal y ahora la voy a ir controlando?

J: Se puede, pero en algunos casos es difícil, por varios aspectos que incluyen, la cantidad de alumnas, el tiempo, también, pero, sí se podría. Por experiencia, en algunos casos he podido, en otros no. A veces no se puede remediar. Tuve un caso en que sí se pudo, la alumna se abrió, llegó y me comentó que tiene problemas desde muy atrás, no me enseñaron nada, platiqué con ella y le pregunté de operaciones básicas, y luego le empecé a enseñar los principios del álgebra, entonces me di cuenta, cuál era su deficiencia, en donde me tuve que regresar desde el álgebra, la empecé a nivelar hasta llegar hasta donde estamos.

I: ¿Quieres agregar algo, algo que quieras comentar?

J: Se me hizo muy interesante esta entrevista, creo que, definitivamente los alumnos están perdiendo el interés por las matemáticas, le tienen un pavor, un miedo a las matemáticas, y sería interesante quitarles ese miedo, ese pavor, el terror a las matemáticas, utilizando la creatividad, motivándolos en donde se pueda ver, que las matemáticas, en donde una factorización interviene, y se pueda ver otro tema, donde ese tema interviene para que se pueda ver otro, y más adelante se pueda llegar a límites, etc., que se utilizan para calcular la presión de agua en una presa, en donde las muchachas puedan ver, en un mapa conceptual, general puedan ver que las matemáticas se aplican. Y que les sirve mucho, la agilidad mental, así es.

JORGE

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10a	A10b
2		3			2	2				3	2	1		1		1

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
3	1	3			2	1		2	

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20
	1		2		1	2	1							2	1	1	1	2			

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
				4							3							

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11
		2	1		1			2		

Erfassen der Ursache

F1	F2
	6

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1	G2

Verschiedenes

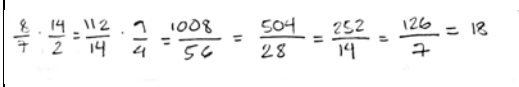
H	I	J	K1	K2
	1			1

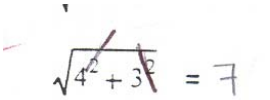
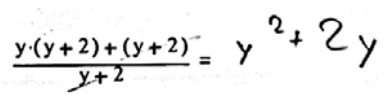
Anhang 20: Interview mit Miguel Ángel

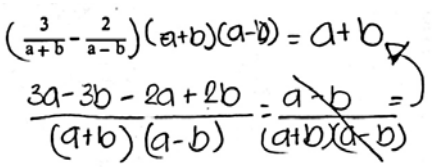
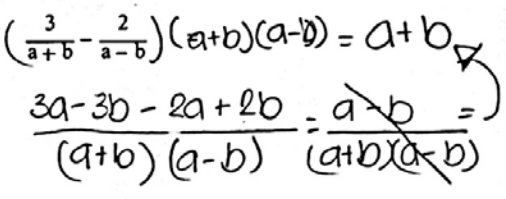
Kurzbeschreibung von Miguel Ángel:

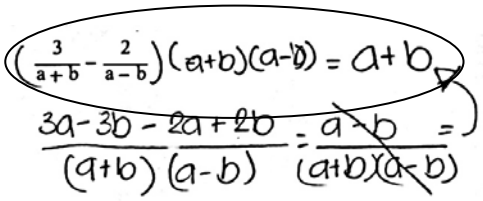
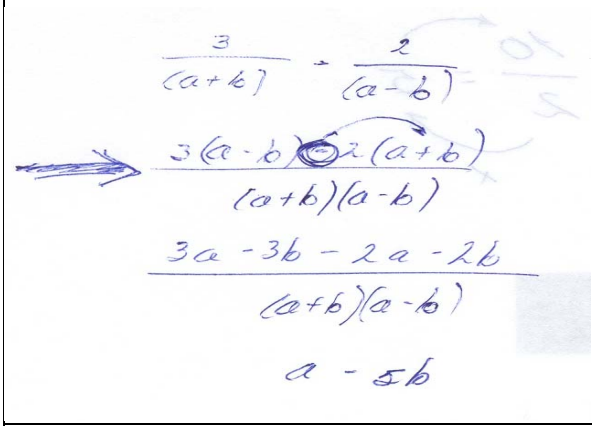
Miguel Angel lehrt Mathematik an einer privaten Jungenschule seit 13-14 Jahren. Nach seinem Abbruch in Betriebswirtschaft, studierte er Informatik. Er hat auch einen Lehrauftrag an der Universität Panamericana, in Finanzmathematik.

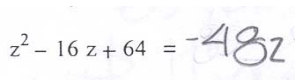
Erstes Teil des Interviews:

I: Ich habe hier Papier und Bleistift, falls du etwas aufschreiben möchtest.	
M: Aufgabe 1  OK, die erste Aufgabe ist eine Multiplikation von Brüchen, 8/7 x 14/2 x 9/4, was er macht ist... Ist dieses eine 1 oder eine 8?	*Er verbalisiert die Aufgabenstellung, wahrscheinlich um sich die Zeit zu geben, sie zu analysieren.*
I: Es ist eine 8	
M: 8/7, die multipliziert werden, OK, er multipliziert noch einmal y dann fängt er an zu vereinfachen. Gut, ich würde ihm kommentieren, dass es einfacher wäre, wenn wir von Anfang an, den Nenner mit dem Zähler vereinfachen. Durch 7 teilen. Es fehlt ihm die Kenntnis der Proportionen und Verhältnisse, um vorher zu vereinfachen und nicht bis hierher gelangen, und hauptsächlich, wenn sie keinen Taschenrechner gebrauchen, den sie sicherlich hier nicht hatten.	*Miguel Ángel erkennt, dass die Aufgabe, durch eine Vereinfachung von Anfang an, einfacher gelöst werden könnte.* ***Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c***
I: Dieser Diagnostiktest wird ohne Taschenrechner vorgenommen	
M: Hier müsste man nur noch feststellen, dass die Operation oder Operationen korrekt ausgeführt wurden. Er hätte sich viel	*Er rechnet die Multiplikation der Brüche nicht aus, sondern nimmt wahrscheinlich an, dass ich dann gesagt*

Arbeit sparen können. Das wäre mein Kommentar.	*hätte, sie wäre falsch.* *Den Missbrauch des Gleichheitszeichens erkennt Miguel Ángel nicht.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
M: Aufgabe 2  Bei der Zweiten; ach, typischer Fehler. 4 zum Quadrat plus 3 zum Quadrat und die Wurzel, er beherrscht hier die Gesetze der Radikale nicht. Er kann nicht trennen. Was er macht ist eine Vereinfachung der Wurzel mit dem Quadrat, aber das kann er nicht machen, weil es Summanden sind, nur mit Produkten, man muss die Regeln der Wurzeln noch mal durchnehmen.	*Miguel Ángel benennt diesen Fehler als einen typischen.* ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3*** *Er beschreibt, was und warum es nicht so gemacht werden darf: „nicht trennen, weil es Summanden sind". Geht darauf ein, dass die Trennung nur möglich wäre wenn es Produkte wären (womit er Faktoren meint).* ***Hinweis auf Regeln: C6a u. C6b*** *Er geht also auf den Verstoß der Gesetze ein, und wann das Gesetz hätte angewandt werden dürfen. Auf die Frage, warum der Fehler resultiert, geht er nicht ein.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2*** *Als Hilfe bietet er ein nochmaliges Nachsehen der Regeln, was wahrscheinlich wenig effektiv ist.* ***Hinweis auf Regeln: C6b***
M: Aufgabe 3  Ach Gott, hier genauso, nein, nicht genauso, bevor er vereinfachen kann, müssten es Faktoren sein. Man muss die Operation im Zähler vornehmen und dann faktorisieren, um vereinfachen zu können. Genauso, die Regeln der... es ist eine Konsequenz von diesem (er zeigt auf die Aufgabe selbst)	*Er beschreibt, wie die Aufgabe hätte vereinfacht werden müssen, „erst Faktoren bilden", nachdem der Zähler ausmultipliziert wird.* ***So wird es gemacht: B1*** *Auffallen tut die Tatsache, dass Miguel Ángel erst die Operationen im Zähler vornehmen möchte, statt den Zähler gleich zu faktorisieren, es geht nicht klar hervor, ob Miguel Ángel die Faktorisierungsmöglichkeit nicht erkennt, oder ob er sie nicht gut genug analysiert hat, da er sich auf den Fehler fokussierte.* *Wieder verweist er auf die Regeln als*

Und die letzte...	*Hilfeangebot.* ***Hinweis auf Regeln: C6b*** *Auf die Fehlerursache geht er nicht ein.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Wenn du möchtest, erst die Vierte...	
M: Aufgabe 4  Ach, ja, die Vierte. Diese ist eine Subtraktion und ein Produkt, nicht wahr?	
I: Die Aufgabe an sich , ist nur der erste Teil, er hat sie verändert, siehe hier ist ein Gleichheitszeichen, er hat die Multiplikation von (a+b)(a-b) dazugeschrieben.	
M: Hier möchte ich annehmen, mmm, mal sehen, ich versuche zu entziffern, was er gemacht hat, weil er von hier, schreibt er diese, dann kommt er nach hier, und dann, OK. Er multipliziert mit dem gemeinsamen Nenner, dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen, mmm, wo er fehlschlägt ist, bei der Subtraktion von algebraischen Brüchen, er bekommt den richtigen gemeinsamen Nenner heraus, aber beim Algorithmus, ja so, der gemeinsame Nenner, durch dieses (er zeigt auf den früheren Nenner) mit dem was oben ist, er macht beide Operationen, vereinfacht, und erhält dieses. Dieser Teil ist der mich verwirrt, ich weiß nicht, was er mit diesem Teil machen wollte, und dann nach hier überspringen.	*Miguel Ángel denkt laut bei der Entzifferung des Lösungsprozesses.* *Es geht klar hervor, dass Miguel Ángel Schwierigkeiten bei der Entzifferung des Lösungsprozesses hat. Er sucht lange den Fehler.* *Ich führe noch mal den Studierendenfehlprozess vor, damit man sich ein Bild über die Art, wie Miguel Ángel nach dem Fehler sucht, macht.* 
I: Und was glaubst du, hat er machen wollen?	

M: das möchte ich ja gerade herausfinden, er multipliziert, OK, mmm, a + b und a – b ist der gemeinsame Nenner, das macht er. Den Rat den ich ihm geben würde, auch wenn das Resultat korrekt ist, ein wenig mehr Ordnung in seinen Operationen, das Konzept ist für ihn klar, aber die Anordnung verfehlt er. Als Lehrer sagt mir viel die Tatsache, dass dieses gleich diesem ist, dass es gleich...(er zeigt dabei auf den Eingekreisten Prozess)	*Er ist sich immer noch nicht im Klaren, was der Studierende in Wirklichkeit gemacht hat. Er rätselt daran herum.* 
M: Es ist nichts einzuwenden, doch, nur hier, diese Minuszeichen, y werde die Aufgabe selbst machen... (Miguel Ángel geht den Prozess durch eigenes Lösen durch)	*Er findet den Distributivgesetzfehler und entscheidet sich, die Aufgabe selbst zu bearbeiten. (Sein Prozess ist eingescannt worden)* **Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c**
	
M: Es gibt einfachere Formen, es zu vereinfachen, aber ich simuliere was er gemacht hat, ja, 3a-3b-2a-2b, ah, aber nun, dieses Vorzeichen, eh, dieses Vorzeichen ist falsch, und mir ist es auch entgangen beim Überdenken des Prozesses, hier ist es... Vorschlag: diesen Schritt nicht zu überspringen (er wurde mit einem Pfeil gekennzeichnet). Mit diesen Änderungen der	*Miguel Ángel entdeckt den Fehler und möchte dem Gedankengang des Studierenden folgen, indem er den gleichen Weg gehen möchte. Dabei beteuert er noch mal den Fehler bei der Anwendung des Distributivgesetzes, was er durch das Einkreisen des Minuszeichens und dem Pfeil zum Faktor (a+b) nachdrücklich betont.* *Er weist darauf hin, dass ein – 5b hätte stehen müssen. Wo er dieses – 5b*

Vorzeichen, hätte man hier – 5b. Nur algebraisches Üben.	*erwartet hätte, geht aus seinem eigenen Prozess hervor, obwohl ihm der Nenner entfällt.* ***Macht selber Fehler: A8*** *Seiner Ansicht nach fehlt dem Studierenden mehr Übung. Ob er der Meinung ist, dass dieser Fehler durch üben beseitigt werden kann, geht nicht klar hervor, aber es ist anzunehmen.* ***Üben: C2*** *Bei dieser Aufgabe erkennt Miguel Ángel nicht das Weglassschema und somit nicht die 1, die nach dem ersten Fehler im Zähler hätte stehen müssen.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
M: Aufgabe 5  Jetzt doch die Letzte; ich habe: $z^2 – 16z + 64 = - 48z$; ist es -48z?	
I: Ja, das steht dort.	
M: Nein, dieser Schüler, nein, hier sollte faktorisiert werden, nicht wahr?	*Man sieht, dass er bei diesem Prozess recht erstaunt ist.*
I: Ja, es sollte faktorisiert werden.	
M: Der Zwerg (so nennt er seine Schüler als eine Art Kosenamen) kann nicht faktorisieren. Das Konzept, dieser Schüler ist „verloren“ (womit man jemanden bezeichnet, der sich nicht mehr zurechtfindet, es ist ein idiomatischer Ausdruck). Dieser und auch dieser, beide sind verloren (er zeigt auf die Prozesse 5 und 2)	*Miguel Ángel meint, der Schüler könne nicht faktorisieren. Er bezeichnet seinen Prozess als einen, von einem Schüler, der sich in der Algebra nicht mehr zurecht findet.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** *Ich glaube nicht, dass er damit meint, der Schüler habe am Anfang des Algebraunterrichts den Anschluss nicht gefunden, also die Konkatenationsveränderungen, zwischen der Arithmetik*

	und der Algebra, nicht verstanden. *Er geht nicht weiter auf den Prozess ein, so dass er es als eine Schwierigkeit beim Faktorisieren belässt. Insofern, erkennt er die Ursache des Fehlers nicht.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2*** *Er kommentiert hier und auch später, dass diese Lösungsprozesse von Schülern wären, die „verloren" sind, so als hätten sich die Schüler in der Algebra verirrt.*
I: Wer, die Studierenden mit dem Prozess 5 und 2?	
M: Nein, auch der mit dem Prozess 3, wenn wir die Themenbereiche und Niveaus orten, wann sie in der Schule durchgenommen wurden: Die Inhalte zur 2. und 5. Aufgabe werden in der 2. und 3. Secundaria durchgenommen, die Inhalte zu der 3. und 4. Aufgabe in der 1. Preparatoria. Und diese Prozesse sind von Anfangsstudierenden?	*Er untersucht in welchen Schuljahren die Inhalte durchgenommen worden sind und möchte vielleicht damit die Jahre des Rückstandes des Schülers angeben.* ***Beobachtet einige Schüler im Rückstand: J*** ***Vorausgegangener Unterricht: D2a*** *Später fragt er sich, wie diese Studierenden bis in die Uni gekommen sind.*

Deutung:

Miguel Ángel erkennt nicht alle Fehler, bei der ersten Aufgabe geht er nicht auf den Missbrauch des Gleichheitszeichens ein.

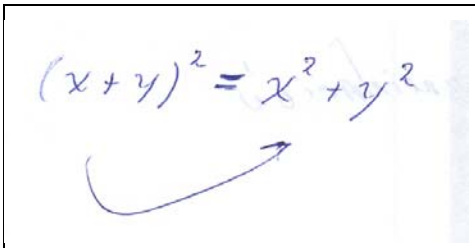
Das Streichschema der zweiten Aufgabe wird nicht von Miguel Ángel erwähnt, er geht primordiell auf den Regelverstoß ein. Das Problem der „Kürzung" ohne eine 1 zu erhalten, fällt ihm nicht auf.

Die Entzifferung des Studierendendenkprozesses, der vierten Aufgabe, fällt ihm schwer. Er erkennt einige Züge, jedoch braucht er lange, um die Denksequenz zu entdecken. Eines der Absichten bei diesem Prozess war gerade dieses Erkennen des Denkprozesses, da man als Lehrender oft vor diesem Problem steht. Wenn man einer Schülerin oder einem Schüler helfen möchte, so muss man deren Denkprozess verfolgen können.

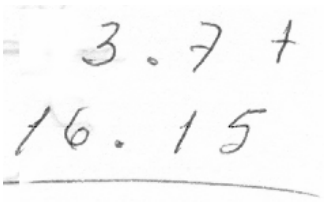
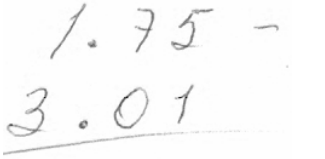
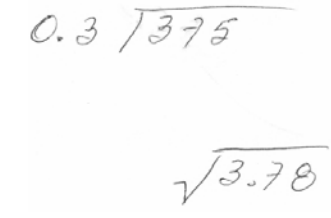
Er geht auch nur auf einen der Fehler ein. Das Weglassschema, nach der Kürzung wird nicht erwähnt. Bei seinem eigenen Prozess entfällt ihm der Nenner des Bruches.

Zweiter Teil des Interviews:

I: Ich glaube es wäre wichtiger zu spezifizieren, was du einem Schüler sagen würdest, vielleicht vor der ganzen Klasse, oder in einer Klassenarbeit. Was würdest du machen?	*Da ich nicht auf diesen Punkt eingehen wollte (wie Studierende bis an die Universität kamen), stellte ich diese Frage.*
M: Mit diesem könnte ich klar identifizieren, bei welchen Aspekten er versagt, um sie wieder durchzunehmen, mehr Übung, als in anderen Sachen. Die Fehler sind gewöhnlich, es gibt andere, die ich noch dazuschreiben würde, es gibt Anlass...	*Er könnte Fehler identifizieren und dann Inhalte im Unterricht danach richten* ***Identifikation von Fehler hilft Fehler vermeiden: E4*** ***Identifiziert Defizite durch Fehler: A7*** *Sein Hilfeangebot ist eine nochmalige Erklärung und ein wiederholtes Üben.* ***Erklärung: C13*** ***Üben: C2*** ***Bezeichnet Fehler als Muster: A3*** ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** *Er geht nicht darauf ein, dass die Fehler wahrscheinlich einer anderen Ursache zu Grunde liegen. Dass durch wiederholtes Üben eventuell (nach MALLE, 1993) Fehler zementiert werden könnten, wenn nicht vorher die Ursache geklärt wird, weiß wahrscheinlich Miguel Ángel nicht.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Könntest du die anderen aufschreiben?	
M: Ich werde dir einige zeigen, nein, einen Fehler mit dem du dein Leben lang kämpfst.	*Es geht hervor, dass Miguel Ángel sich über die typische Fehler seiner Schüler, Gedanken macht, wenn auch nur in ihrer Erkennung und Beschreibung.* ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H***

	
M: Aber in den meisten Fällen ist dieses alltäglich. Und dann beim Hantieren der Regeln der Exponenten und Radikale, ein verknüpftes Thema, passieren sehr viele Fehler.	*Diese Fehler sieht er als Vorgänger anderer Fehlprozesse an.*
M: Ein anderer Bereich sind die Brüche, sprechen wir nicht über die algebraischen Brüche, nur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, normale, von gemeinen Brüchen. Sie werden jeden Bruch als dezimale Zahl ausdrücken, um die Operationen der Brüche realisieren zu können (wahrscheinlich meint er mit dem Taschenrechner) Dieses liegt hauptsächlich, eine eigene Hypothese, an sehr schlechten, sehr schlechten Fundamenten der Primaria (1. bis 6. Schuljahr). Jede Ausbildungsstufe macht die vorhergehende verantwortlich, aber ich habe sie hier geortet (er meint in der Primaria) und ich sage dir auch warum: habe die verwurzelte Idee, die ich nachweisen kann, bei meinen Zwergen in der Preparatoria und als ich die Gelegenheit hatte in der Secundaria zu unterrichten, dass die Fundamente, die ihnen die Lehrer mitgegeben haben, schlecht sind. Die die fürs Lehramt studiert haben, im besten Falle, Pädagogik oder die Normal Superior…	*Nummerische Brüche werden, basiert auf seine Erfahrungen, in Dezimalzahlen verwandelt und dann erst wird mit ihnen operiert. Dabei geht hervor, dass diese Schüler wahrscheinlich nicht mehr mit Brüchen als solche umgehen können und dadurch auch bei algebraischen Brüchen Schwierigkeiten aufweisen.* ***Beschreibt andere Fehlermuster: A2c*** *Miguel Ángel hat seine eigene Hypothese aufgestellt und macht die Mathematikbildung der Schülerinnen und Schüler in der Primparia dafür verantwortlich.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a***

I: Meinst du die Normal oder die Normal Superior? Die Lehrenden der Primaria?	
M: Die Normal; die Lehrenden der Primaria haben die Normal absolviert und haben wenigsten eine pädagogische Ausbildung, nicht wahr? Es soll keine Kritik sein, es ist aber eine Konstante, im allgemeinen, die dort sind, aus Berufung, gut, aber andere studieren dort, weil sie Schwierigkeiten im Bereich der Zahlen haben, dem abstrakteren Bereich. Da es ein einziger Lehrer für die Fächer: Spanisch, Mathematik, Naturwissenschaften, u.sw. Die Lehrenden legen wenig Wert auf Fächer die ihnen selber schwierig erscheinen. Sie lehren diese recht schnell, 3 + 2 = 5, und fertig. Wenn es verstanden wurde, gut, wenn nicht, eben nicht. Ein besonders wichtiges Thema in der Mathematikausbildung in Primaria ist die Bruchrechnung und die Operationen mit den Dezimalzahlen. Den Algorithmus der Division, oder der Quadratwurzel von Dezimalzahlen, Operationen, die etwas abstrakter sind, werden meistens sehr schnell durchgenommen. Gar nicht erst von Anwendungsaufgaben zu sprechen, es ist ja genug, wenn sie addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividiren können. So kennen die Schülerinnen und Schüler das Konzept der Brüche und deren Operationen, aber höchst defizient. Nicht wahr?	*Er möchte Lehrende der Primaria nicht kritisieren, jedoch entdeckt er eine Konstante, denn die meisten Lehrenden überfliegen beim Unterrichten der Mathematik Themen, die sie selber angeblich nicht beherrschen.* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** *Defizite seiner Schüler führt er auf diese Feststellung zurück.*
I: Du denkst also, dass inklusive die Algorithmen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Lehrenden der Primaria nicht gut wissen? Oder meinst nur die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Brüchen?	

M: Nein, ich meine nur die Operationen mit Brüchen und Dezimalzahlen, die Operationen mit ganzen Zahlen ist ihnen klar. Bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Dezimalzahlen bestehen auch keine großen Schwierigkeiten, aber bei den 4 Grundoperationen der Brüche und der Division und Wurzelziehen der Dezimalzahlen, da fangen wir an Schwierigkeiten zu haben. (Miguel Ángel schreibt einige Grundoperationen auf das Papier, die hier wiedergegeben werden, bei denen er sie für Lehrende als schwierig und nicht schwierig klassifiziert)	
 Einige Probleme	*Wahrscheinlich problematisch durch die Komplikation der Ziffern nach dem Komma.* ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A2c*** ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H***
 Ohne Probleme	*Gleiche Anzahl von Stellen nach dem Komma, sind im allgemeinen nicht fehleranfällig.*
 Mit Problem	*Divisionen und Quadratwurzelziehen von Dezimalzahlen scheint ein Thema zu sein, welches seinen Schülern Schwierigkeiten bereitet. Er sucht die Ursache dieser Defizite bei der Lehre in Primaria.*
M: Viele Themen in denen sie später Defizite aufweisen, werden in der Primaria sehr oberflächlich gelehrt, z.B. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Raumvorstellungen (dann	*Er ist sich auch bewusst, dass Lehrende der Secundaria und Preparatoria keine pädagogische Vorbildung haben. Lehrende haben eine Fachausbildung jedoch fehlt ihnen die didaktische Ausbildung, um zu*

haben sie später Schwierigkeiten bei der Geometrie und Analytischen Geometrie). Sie geben nur das wieder, was in den Büchern steht. Viel liegt auch daran, was dem anderen Teil fehlt, die die wir die Normal nicht absolviert haben. Wir haben nicht studiert, um Lehrer zu werden, wir sind Lehrer vielleicht aus der Berufung her oder durch einen Schicksalsschlag, wir haben einen teil des Fachwissens und es fehlt uns die pädagogische Seite, zu wissen wie man lehrt, wie man zu den Schülern einen besseren Kontakt hat. Dieses ist eine eigene Hypothese, eine eigene.	*wissen, wie man lehrt.* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** ***Vorausgegangener Unterricht: D2a***
I: Eine eigene Hypothese mit der ich übereinstimme.	

Deutung:

Miguel Ángel würde durch diese Art von Aufgaben die Schwierigkeiten identifizieren. Er würde dann die betreffenden Themen nocheinmal durchnehmen und üben. Sein Hilfeangebot ist eher lehrerzentriert, ich wiederhole die Erklärung und du übst dann.

Er scheint sich typische Fehler seiner Schüler näher angesehen zu haben, beschreibt sie, geht aber auf die Fehlerursache nicht ein, bleibt lediglich bei der Beschreibung der Vorgehensweisen. Auch wenn die Beschreibung wichtig ist, reicht sie nicht aus, um die adäquate Hilfestellung zu finden. Nochmaliges Üben ist wenig hilfreich.

Er befasst sich mit zwei Fehlern, a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ und b) der Bruchrechnung. Bei diesen Feststellungen schweift er vom eigentlichen Thema ab und stellt eigene Hypothesen auf, in der Hinsicht, dass Lehrende der Primaria wahrscheinlich zu wenig Fachwissen aufweisen und Lehrende der Secundaria und Preparatoria vermutlich wenig pädagogisches Wissen haben.

Dritter Teil des Interviews:

I: Der nächste Teil wäre: Wie würdest du einen Fehler in deinem Klassenraum handhaben, einen Fehler den deine Schüler begehen?	
M: In diesem Fall, bei meiner persönlichen Arbeitsform, die sich in den 13 Jahren Lehre immer wieder verändert hat. Ich habe als erstes in der 2. Secundaria unterrichtet (8. Schuljahr), als ich gerade mit der Preparatoria fertig war, ich bin durch einen Schicksalsschlag dort hingekommen.	
I: Ins Liceo del Valle?	
M: Ja, auch, aber ich habe auch in Teresiano (Enrique de Ossó, eine Mädchenschule) unterrichtet. Ich gelangte in die 2. Secundaria, und ich glaube es ist ein Beruf, den man, wenn man keine Berufung hat, in 2 oder 3 Jahren aufgibt, weil man verrückt wird. Aber wenn du Berufung hast, kannst du den Beruf nicht mehr loslassen, das ist mir passiert. Ich arbeite in meinem Beruf, als Informatiker, aber ich kann das unterrichten nicht loslassen. Nicht wahr? In dieser ganzen Zeit habe ich meine Unterrichtsformen verändert, am Anfang war sie sehr traditionell. Ich glaube, die Lehrenden, die nicht Lehrerausbildung haben, imitieren eine Lehrer der uns selber unterrichtet hat, der uns gefallen hat. Ich hatte sehr traditionalistische Lehrer, „ich erkläre an der Wandtafel. Habt ihr verstanden? Fast keiner hob die Hand, ich gab Hausaufgaben auf, Aufgaben zum durchgenommenen Thema, wahrscheinlich machte ich eine Klassenar-	*Miguel Ángel hat sehr jung (etwa mit 19 Jahren) angefangen zu unterrichten. Er fühlt, dass er zum Lehrerberuf berufen ist.* *Er verändert ständig seine Unterrichtsformen, und hat anfangs seine „guten“ Lehrer imitiert.* ***Neue Methoden versuchen: C19*** *Er bezeichnet den Unterrichtsstil seiner eigenen Lehrer als traditionell, womit er einen eher lehrerzentrierten Unterricht meint. Fand aber bei den Klassenarbeiten viele Fehler, der Art, wie sie im Interview vorgelegt wurden.*

beit, und fand viele Fehler diesen Typs. Ich führte es prinzipiell darauf zurück, dass die Zwerge mehr Übung brauchen, man musste mehr üben, aber die Hausaufgaben wurden im besten Falle abgeschrieben oder nicht gemacht. Ich musste in irgendeiner Form garantieren, dass geübt wurde. Ich konzepierte Unterstützungsaufgaben. Ich erklärte das Thema, z.B. Gleichungen ersten Grades, „Verstanden?“ OK. Hier sind 5 Gleichungen ersten Grades die ihr lösen könnt. Es ist etwas besser geworden...	*Er führt dieses auf zu wenig Übung zurück, da Hausaufgaben entweder nicht gemacht wurden oder abgeschrieben wurden.* ***Mangelndes üben: D1d*** *Er hat sich Gedanken gemacht, wie er seine Schüler zum Üben bringen konnte.* *Die erste Veränderung war eine Seite mit Aufgaben, die während der Unterrichtsstunde, nach seinen Erklärungen durchgearbeitet werden sollten.* ***Erklären: B14*** ***Üben: B2*** ***Lehrerzentriert: E9*** *Er hat sich ein Fortschritt, durch diese Unterrichtsform, erwiesen, „es ist etwas besser geworden...“; womit er eine geringere Fehlerhäufigkeit meint.*
I: Während der Unterrichtsstunde?	
M: In der Unterrichtsstunde. Nein, wenn ich sie als Hausaufgabe aufgegeben hätte, wäre es wieder das Gleiche. Dabei konnte ich sondieren wie weit sie es konnten. Der Fortschritt ist sehr viel langsamer, sehr viel langsamer, besser, aber du findest das gleiche Problem mit den Fehlern. Die Zwerge lösten die Aufgaben nicht, oder falsch und die 5 oder 6 Schüler mit Schwierigkeiten haben die Stunde langsamer gemacht. Aber ich machte es so. Es ist sehr mühsam, man fängt an, Zwerge nachzuziehen, es ist beschwerlich, und man kommt doch nicht	*Er hatte die Arbeitsphasen unter Kontrolle, weil er in die Schülerprozesse einsehen konnte, jedoch schien ihm, dass er langsam vorwärts kam, da einige Schüler das Fortschreiten hämmten.* *Er ist sich bewusst, dass einige Schüler trotz seiner Veränderung nicht nachkommen.*

an. Dann habe ich mir gesagt, ich muss mehr darüber forschen, was ich danach erfunden habe, war eine Art von Standarisierungsstunden (gemeint sind Nachhilfestunden). Nach Schulschluss, blieb ich in der Schule mit den Zwergen, die Fehler machten. Ich erklärte noch mal das Thema, ich gab ihnen Aufgaben und sie machten sich, sie machten sich. So habe ich die letzten 5 Jahre gearbeitet, aber es war kompliziert, da jede Generation eine schlechtere Vorbildung hat. Ich denke an der Universität ist es das gleiche, ich weiß es ja, ich bin ja auch dort.	*Er suchte andere Unterrichtsmethoden, er wollte gerne schwache Schüler auf ein höheres Niveau bringen. Er erklärte einigen Schülern das Thema noch einmal nach Schulschluss, und löste mit ihnen Aufgaben.* ***Extrastunden: C15*** ***Erklärung: C13*** ***Üben: C2*** *Er merkte, dass auch hier ein Fortschritt zu erkennen war: „sie machten sich“.* *5 Jahre arbeitete er nach Schulschluss mit den schwachen Schülern, er meint, dass jedes Jahr die mathematische Vorbildung seiner Schüler geringer war.*
M: Man muss von unten anfangen, es ist beschwerlicher. In den Nachhilfestunden waren es erst 3, dann 5 und jetzt sind es 15 Schüler...	*Im 5. Jahr musste er 15 Schüler nach Schulschluss betreuen, von einer Klassengrosse von 30 Schülern.*
I: Bei einer Klassengröße von wie vielen Schülern?	
M: Ungefähr von 30 Schülern. Es ist, als wenn man gegen den Strom schwimmt. Ich sagte mir, es kann nicht so sein, ich habe darüber gelesen, über Mathematikdidaktik, ich alleine, so zu sagen, autodidaktisch, ich glaube viele Mathematiker sind Autodidaktiker, und ich habe etwas über die Theorie von Vygotsky gelesen, die Theorie des Konstruktivismus. Es wurde über die Zone der nächsten Entwicklung gesprochen. Ich habe dann, nach der Lektüre vieler Bücher, gefunden, dass der Fortschritt bei einer guten gegenseitigen Beziehung Schüler-Lehrer, viel	*In seiner Suche nach Lösungen, las er über Vygotsky und die Theorie des Konstruktivismus, er las über die Zone der nächsten Entwicklung.*

schneller ist und dass die Konzepte besser behalten werden. Etwas anderes, was mir auffiel, war die Tatsache, dass wenn du von einem Schüler etwas verlangst, was er schon weiß, dann ist es keine lernen, es ist Übung. Wenn er etwas lösen muss, was er nicht lösen kann, ist es noch weniger lernen, der Zwerg wird dort stehen bleiben. Man muss diese Aufgaben dann mit ihm zusammen löse, es spielt eine Rolle die persönliche Interrelationen und die Sprache, die korrekte mathematische Sprache, dass er erklärt, was er macht. Es ist ganz anders, wenn er dir erklärt, was er macht; „hier habe ich dieses gemacht...“, dann hörst du ihn, aber ich dachte: Ich habe 35 Schüler, auch wenn ich nur 10 hätte. Ich würde eine lange Zeit brauchen. Dann habe ich dieses Schuljahr, 7 Schüler ausgesucht, die ich glaubte, eine bessere Begabung und vor allen Dingen die Bereitschaft und das Interesse hatten, und habe ihnen meine Idee vorgeschlagen. Jeder von euch nimmt sich 3 Schüler, und hilft ihnen bei der Bearbeitung der Aufgaben. Und glaube mir, der Fortschritt in Hinsicht auf Durchschnittsnoten war beträchtlich. Aber ich mache dieses erst ein Semester lang.	*Er las, dass bei zu leichten Aufgaben, Schüler nichts neues lernen, aber wenn er etwas lösen soll, was er nicht lösen kann, ist es noch weniger Lernen.* *Im Sinne des Problemlösens müsste der Schüler nur die Vorkenntnisse haben, um ein Problem zu lösen.* *Man müsste dann zusammen mit ihm die Aufgaben lösen (später wird klar, dass er meint, dass der Schüler die Aufgabe bei lautem Denken unter Aufsicht lösen soll), dabei sollte man eine korrekte mathematische Sprache gebrauchen. Er fand das diese Art zu unterrichten bei einer Schulklasse von 35 Schülern zu aufwändig ist.* ***Erkenntnisse des Schülers mit Unterstützung des Lehrers: E3*** *Er fand dieses Schuljahr eine neue Unterrichtsform, nämlich die Bearbeitung der Aufgaben in kollaborativer Arbeit. Er beauftragte 7 „gute“ Schüler, den anderen bei den Aufgaben zu helfen.* ***Neue Methode versucht: C19*** ***Kollaboratives Lernen: C20***
M: Ich fange gerade mit dem Experiment an. Aber es hat recht gut funktioniert, es ist zwar neu, aber meine Idee war üben. Die Tatsache, dass ein Mitschüler, mit der eigenen Sprache und in der Form, wie sie es tun, reizte sie mehr an, und	*Kollaboratives Lernen, hatte für Miguel Ángel einen besonderen Zweck, seine Schüler übten mehr.* ***Üben: C2*** *Er merkte auch, dass Schüler unter sich eine besondere Sprache ge-*

ich freute mich. Dann gibt es also neue Formen dieses Problem zu attackieren, es war Übung aber mit seinesgleichen.	*brauchten und sich auch verstanden. Wieder geht er auf die Idee ein, dass geübt wurde.* ***Üben: C2***
I: Mit seinesgleichen	
M: Es hat aber funktioniert. Ich habe meine Schüler gebeten, mir die Pros und Contras dieser Arbeitweise zu referieren, welches sind die Vorteile, welches die Nachteile, um es zu verbessern. Die meisten stimmten überein, dass sie jetzt besser verstanden und dass sie die Aufgaben jetzt machen mussten, es blieb ihnen nichts anders übrig. Auch haben die Gruppenleiter besser abgeschnitten. Ich habe immer gedacht, willst du mehr über ein Fach wissen, unterrichte. Wollte ich beispielsweise mehr über Mathematikdidaktik wissen, muss ich Mathematikdidaktik unterrichten, man sieht sich forciert zu lesen, und die Zweifel die dir nicht einfallen, fallen dann den Schülern ein, und es wäre dir nie eingefallen.	*Nach dem ersten Semester bat er seine Schüler um Rückmeldung über seine Unterrichtsform, die im Grossen und Ganzen recht positiv ausfiel. Schüler meinten, sie verstünden besser, und die Aufgaben mussten!!!! gemacht werden, „es blieb ihnen nichts anders übrig“.* ***Üben: C2*** *Auch seine Gruppenleiter haben Fortschritte gemacht.*
M: Und das ist den 7 Gruppenleitern passiert, jetzt sind es schon 9, ich beantworte dann Fragen „ein Mitschüler hat dieses oder jenes gesagt und geschrieben, und ich musste darüber nachdenken“, und dann antwortete ich beispielsweise, „denke an die Regeln der Radikale“, „ach ja, nun weiß ich, wie ich meinem Mitschüler antworten kann.	*Bei der Bearbeitung der Aufgaben traten immer besondere Fragen der Mitschüler auf, die auch mit Miguel Ángel besprochen wurden.* *Es fällt aber auf, dass Miguel Ángel als Argument immer wieder auf die Regelverstöße eingeht, und nicht die Ursache der Fehler sucht. „Denke an die Regeln“.* ***Hinweis auf Regeln: C6b***
M: Ich komme dadurch viel schneller voran, ich kann bei den Themen mehr vertiefen. Dann glaube ich, dass man schneller voran kommt, und das Ni-	

veau der 8 oder 9 Schüler ist wirklich besser.	
I: Sicherlich, sie analysieren ja die Mitstudierendenlösungen.	
M: Sie analysieren und dann stellen sie dir die Probleme auf ihre Weise vor, die übrigens anders ist, als deine eigene als Lehrer.	*Er ist sich bewusst, dass Lehren verschieden ist aus der Sicht des Lehrers und der Sicht der Mitschüler. Schüler untereinander sprechen eine andere „Sprache".*
M: Für mich war diese Erfahrung sehr reich, ich sage dir, wie ich diese Probleme atakkiere.	*Er ist zufrieden mit den Ergebnissen seiner neuen Unterrichtsform.*

Deutung:

Miguel Ángel verändert ständig seine Unterrichtsformen, da er sein Schüler zum Üben von Aufgaben „zwingen" will. Zu wenig üben, ist für ihn die Ursache der vielen Fehler.

Sicherlich sind Aufgaben, die zu leicht sind für Schüler kein Lernen, aber seine Interpretation einer zu schwierigen Aufgabe scheint nicht im Sinne von Vygotsky und der Phase der nächsten Entwicklungsstufe zu sein. Eine schwierige Aufgabe kann von Schülern immer dann bewältigt werden, wenn die Vorkenntnisse dazu bereit sind.

Eine Aufgabe mit dem Lehrer zusammen zu lösen, durch lautes Denken, kann einen Lehrer auf die Schwierigkeiten des Schülers aufmerksam machen, jedoch meinte Miguel Ángel, dass diese Art der Arbeit im Unterricht zu langwierig ist.

Kollaboratives Lernen wird für Miguel Ángel mit dem Zweck verwendet, dass Schüler die Aufgaben „bearbeiten müssen", also zwangsläufig wird mehr geübt, wovon seine Überlegungen ausgingen. Übung ist das, was fehlt.

Schüler, die anderen helfen, haben auch viel gelernt, sie haben ihre Kenntnisse vertieft, in dem sie die Fragen und Probleme der Mitschüler beantworten mussten.

Er ist mit dem Effekt seiner neuen Unterrichtsform zufrieden.

Vierter Teil des Interviews:

I: Du erzählst mir vom Konstruktivismus, von Vygotsky, von der Zone der nächsten Entwicklungsstufe, u.s.w., ich würde gerne wissen, für dich, was für eine Rolle der algebraische oder arithmetische Fehler, im Konstruktivismus spielt.	
M: Es ist eine Gelegenheit zu wachsen, in Hinsicht auf das Konzept, eine große Gelegenheit, man muss sie ausnutzen. Als Lehrer kann man genau wissen, wo die Fehler behaftet sind, um ihn daran zu erinnern, dem Zwerg, welche Inhalte er verstärken muss, ihnen weitere Übungsaufgaben aufzugeben. Du hast die Gelegenheit jedem einzelnen Schüler zu helfen, bei diesen Fehlern und du holst sie schnell raus (er meint die Fehlvorstellung).	*Obwohl er die Fehler als eine Gelegenheit zu wachsen sieht, weist er wieder auf nicht gelernte Inhalte während des Unterrichts hin, also auf nicht Erlernen bestimmter Regeln. Er wiederholt die Wichtigkeit der Übungsaufgaben.* ***Üben: C2*** ***Hinweis auf Regeln: C6b*** *Mit wo der Fehler „behaftet" ist, meint er wahrscheinlich nicht die Ursache selbst, sondern die Regel, gegen die verstoßen wurde.* ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** *Er ist der Ansicht, dass eine Wiederholung der Inhalte die Fehler beseitigt werden können.* ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5***
M: Dadurch dass ich etwas freier bin, kann ich mich mit drei oder einem Schüler befassen und dann kannst du die Fehler schneller beheben. Du bist dann nachdrücklicher.	*Durch seine Unterrichtsform, die kollaborative Arbeitsform, ist er freier und kann sich bestimmten Schülern widmen. Es geht nicht hervor, wie er den Schülern hilft, eventuell durch nochmalige Erklärung der Regeln der Lösungen vornimmt.*
I: Nehmen wir mal an, du erklärst einem Schüler, der dieses gemacht hat (ich zeige auf die dritte Aufgabe)	*Deswegen schien es mir wichtig näher nachzufragen.*
M: Als erstes, in den Bruchregeln, kann ich, einen Teil, der ein Summand ist,	*Er beschreibt den Regelverstoß, da Summanden vorhanden sind. Er sagt,*

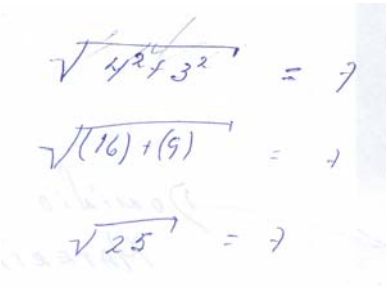
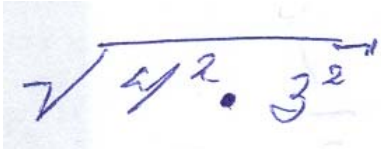
nicht mit dem Nenner vereinfachen. Es müssen Faktoren sein, du gehst weiter zurück. Was ist ein Faktor? Er fängt an, dir seine Konzepte zu sagen und du fängst an, kleine Probleme zu entdecken, was ist dort in seinem Kopf. Lass uns sehen: „Sind dieses Faktoren? Klar es ist eine Multiplikation, und was geschieht mit diesem Pluszeichen(hier meint er das Pluszeichen im Zähler der Aufgabe 3)? Lass uns sehen, was ein Polynom ist, und wir schreiben auch hin, was ein Polynom ist. Du wirst Terme haben, identifiziere ihn als ein Polynom. Ist es ein einziger Term? Nein, es sind zwei, dann sind es nicht Faktoren, du gehst eben weiter zurück, und im allgemeinen hapert es an ganz grundlegenden Konzepten der Algebra.	*was man zu einer Kürzung der Aufgabe hätte finden müssen.* ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** *Er fragt nach Definitionen vorhergehender Konzepte: „Was ist ein Faktor?“* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a*** *Hier leitet er, durch gezielte Fragen auf Bedeutungen ein, da er auf die Termstruktur eingeht. Der Schüler soll die Subterme erkennen lernen, damit er weiß, dass man aus einem Polynomen in einem Bruch nicht herauskürzen kann.* ***Begriffsbildung: C3*** *Er identifiziert Schwierigkeiten bei ganz grundlegenden Konzepten der Algebra, wenn er tiefer eindringt mit seinen Fragen.*
I: Ja, oft merkt man die Fehler bei ganz einfachen Sachen, du brauchst gar keine schwierige mehr zu erfragen.	
M: Nein, außerdem wollen die meisten Schüler keine Erklärung haben, „sag mir, dass hier eine 1 hinkommt und Schluss. Nein, schnell, sag es mir schnell. Es hängt an der Kultur, ich lerne Englisch schnell, leicht und ohne mich anzustrengen. Ich nehme schnell, leicht und ohne mich anzustrengen ab. Wenigstens in Mathematik wird es so nicht gehen, weil es ein langsamer Prozess ist, du musst dich anstrengen, definitiv vergiss, dass es etwas ist, womit du in 2 Tagen fertig bist.	*Andererseits ist Miguel Ángel konsterniert, dass Schüler nur wissen wollen, wie, aber nicht warum, und außerdem schnell, eine Aufgabe bearbeitet werden kann. Er weist auf unsere Umwelt hin in der alles schnell und einfach gelernt werden kann, z.B. Englisch.* *Er weist seine Schüler darauf hin, dass es in der Mathematik nicht so geht.*
I: Ich verstehe, dass du sagst, dass sie erst faktorisieren müssten, dass es zwei Terme sind, weil ein Pluszeichen im Zähler steht, oder weil ich in der Summe einer Fraktion nicht vereinfachen kann, u.s.w. Aber kannst du wis-	*Eigentlich wollte ich mit dieser Frage nur erreichen, dass er sich bewusst ist, dass er in der Termstruktur Bedeutungen zu diesem Fehler fand, die eventuell auf die Ursache hinweisen*

sen, woher es kommt, dass sie diese Vereinfachungen vornehmen?	*könnten.*
M: Gut, ich habe entdeckt, leider, und ich gebe es zu, dass ich manchmal andere Lehrer sehe, die genau diesen Fehler machten. Also haben Schüler es so von den Lehrern gelernt, nicht in der Mehrheit, aber viele.	*Er hat andere Lehrer, den selben Fehler, machen sehen. So können die Schüler eventuell falsch gelernt haben, auch wenn er zugibt, dass dieses nicht immer der Fall ist.* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** ***Festigung von falschen Verfahren: D1g*** *Er ist sich mit dieser Aussage bewusst, dass Lehrende manchmal auch Fehler machen.*
I: Also, du meinst es kommt von einem Lehrer?	
M: Sie haben es so durchgenommen, später habe ich es selber konstatiert.	*Lehrer haben den Fehler gelehrt.* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** *Die Aussage könnte in der Hinsicht verstanden werden, dass einige Lehrer nicht genügend Fachwissen besitzen.*
I: Hast du den Lehrer gesehen, der das macht?	
M: Ja, den Lehrer, so bekommst du die Schüler mit einigen erlernten Fehler. In manchen Fällen habe ich es so gesehen, und es ist besorgniserregend. Und besonders besorgniserregend, weil es in der Secundaria passiert, und dann weißt du, dass der Lehrer Ingenieurwissenschaften studiert hat. Das wäre als Erstes; und zweitens, es hat damit zu tun, wie der Schüler die mathematischen Kenntnisse aufnimmt. Im Prinzip, mit konkreten Sachen es hat damit zu tun, das was sie tasten. Dann fangen sie an Sachen die sie tasten können zu addieren. Dann kommt ein zweites Element dazu, viel-	*Er geht näher auf Einzelheiten des Lehrers ein, der den Fehler gemacht hat, ein Ingenieurwissenschaftler.* *Er bezeichnet dieses als besorgniserregend, was zu verstehen wäre, denn wenn Inhalte falsch gelehrt werden, werden Fehler „gelernt".* *Eine andere Ursache läge in der Aufnahme der Kenntnisse der Schüler.* ***Fehlerhafte Informationsaufnahme: D1a*** *Er beschreibt den Weg der Akquisition von Konzepten, erst konkretes Ma-*

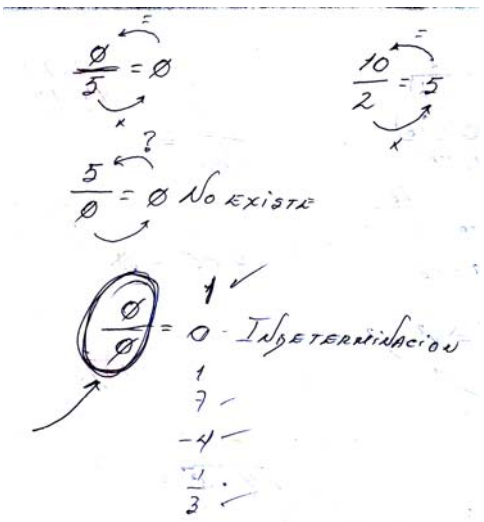
leicht mit Zeichnungen oder Graphiken, sie müssen es sehen können. Vielleicht auch nicht mehr tasten, und dann später auf einem dritten Niveau, einem abstrakteren, wenn es Zahlen sind, und dann innerlich. Dieser Prozess wiederholt sich auch für fortgeschritteneren Konzepte, wahrscheinlich kann er einen perfekt quadratischen Trinomen, eine Differenz von Quadraten, nicht tasten, aber man kann sie ein wenig antastbarer gestalten.	*terial, das getastet werden kann, dann Zeichnungen und Graphiken und als drittes Niveau kommen die Abstraktionen. (Man könnte eine Vorbildung, von Miguel Ángel, in Piaget's Entwicklungsphasen erkennen).* *Dieser Prozess vom Tastbaren bis hin zur Abstraktion wiederholt sich auch bei schwierigeren Konzepten und man kann Schülern helfen, wenn es anschaulich dargestellt wird.* *Er ist vermutlich der Ansicht, dass man im Unterricht, soviel wie möglich anschaulich gestalten sollte, da das Verständnis großer wäre.* ***Neue Veranschaulichungen versuchen: C12***
I: Und kannst du Material dafür haben?	
M: Sicherlich, schon mit einer Graphik, und noch mehr mit den Computerprogrammen, kannst du alles graphischer gestalten, sie können es nicht antasten, aber sie können es sehen. Eine Gleichung zweiten Grades zu lösen und dabei graphisch beobachten zu können was geschieht, und die Schnittpunkte lokalisieren, hilft viel.	*Er weist darauf hin, dass man viele Themen interkonnektieren kann, was den Lernprozess vereinfacht.* ***Themen kombinieren: C11*** *Eine Vernetzung der Inhalte in der Mathematik kann nach AUSUBEL ein signifikantes Lernen bedeuten. Je mehr das Wissen in sich verknüpft ist, um so einfacher ist auch, es bei Bedarf, aufzurufen (vgl. NOLTE; HELMKE).*
M: Was hier geschieht, ist dass wir Lehrer glauben, und ich ziehe mich dabei mit ein, dass sich die Kenntnisse in aszendenter Form generieren, in Hinsicht auf die Niveaus. Der Zwerg beherrscht erst das konkrete-, dann das graphische- und letztendlich das abstrakte Niveau. Du siehst, dass er schon auf der abstrakten Ebene ist, dieser Zwerg, bei einem Konzept das er schon beherrschte, in abstrakter	*Er beschreibt in groben Zügen, wie die Schüler nacheinander die konkrete, die bildliche und die abstrakte Phase durchschreiten (eventuell über PIAGET Entwicklungsphasen gelesen). Er meint dann sei der Lernprozess erfolgt, jedoch ist er sichtlich bestürzt, dass offensichtlich einige Schüler wieder die gleichen Fehler machen, oder gar das Thema nach einiger Zeit vergessen haben. Er muss dann wieder*

Form, und dann müssen wir zurück auf etwas mehr graphisches. Du glaubst, sie haben das Konzept erworben, dass sie es beherrschten, aber nein, sie haben es vergessen. Ich benenne es, ich glaube ich habe es gelesen, ich weiß nicht mehr wo, dass es eine Phase der Festigung des Gelernten gibt. Er weiß es, er hat schon einige Male gemacht, inklusive letztes Schuljahr, und ist auf den gleichen Fehler verfallen. Man muss dann auf ein niedrigeres Niveau zurück, in Hinsicht auf die Kenntnisse. Dieses ganz konkret auf diese Fehler bezogen. Man hat es durchgenommen ein oder zweimal, aber der Schüler hat eine Konnektion verpasst, und so muss man Inhalte wieder aufnehmen.	*auf ein niedrigeres Niveau, seine Erläuterungen bringen.*
I: Gut, dann hast du alles, was du mir jetzt erzählst in Bücher der Mathematikdidaktik gelesen?	
M: Die Lektüre ist in letzter Zeit erfolgt, vielleicht 1 – 1 ½ Jahre her. Ich werde viel arbeiten und doch nichts erreichen, ich sehe das an der Universität, sie sind immer schlechter vorbereitet, und jetzt sage ich dich: als Professor der Universität, schiebe ich die Schuld auf die mathematische Erziehung in der Preparatoria. Es sind meine eigenen Schülerinnen und Schüler, ich weiß, dass sie es durchgenommen haben, ich weiß auch, dass einige es schon konnten, und sie verfallen wieder auf das Gleiche. Also, vielleicht ist es die Betrübnis, was geschieht, ich habe angefangen zu lesen, und auch von der Schule aus, die Fortbildungskurse...	*Er ist bestürzt, dass angeblich seine Bemühungen keine Früchte tragen, er sieht es an seinen eigenen Schülern, die er dann in der Universität als Studierende hat.* ***Zweifel an eigenen Vorgehensweisen: B6***

Ein großer Teil ist empirisch (damit meint er, dass es bei seinen Schülern ausprobiert hat)	***Neue Methoden versuchen: C19***
I: Du hast also ausprobiert, was funktioniert, und was nicht?	
M: Ich habe an meinen Schülern probiert, sie geben dir viele Indizien, wo es langgeht, ungefähr eine Lösung.	*Er führt etwas neues ein, und lässt sich von seinen Schülern Indizien geben, ob Erfolg erzielt wurde oder nicht. Er modifiziert gegebenenfalls seine Unterrichtsform.* ***Neue Methoden versuchen: C19*** *(Investigación-acción)*
I: Ich fühle, wir sind noch nicht der Frage, über den Stellenwert des Fehlers im Konstruktivismus, nachgegangen. Du kommentiertes, der Fehler ist wichtig, aber ich weiß nicht genau, warum er für dich wichtig erscheint, und wie du den Fehler im Unterricht handhabst.	
M: Gut, mit meiner neuen Form zu arbeiten, gelangen Fehler zu mir in sehr verdünnter Weise, aus dritter Hand. Das hat seinen Vorteil, es besteht schon eine Interpretation des Fehlers, vom Mitschüler. Es wäre nicht mehr eine direkte Form ihn zu behandeln. Die Wichtigkeit des Fehlers, wie ich schon sagte, ich kann ihn identifizieren, ganz klar, er gibt mir ein Bild, wo die Defizite der Zwerge liegen. Ich weiß, da ich über den Konstruktivismus gelernt habe, dass auf diese Fehler neue Kenntnisse aufgebaut werden, und vor allem, sie mit dem Fehler zu konfrontieren, das ist wichtig im Konstruktivismus.	*Er geht davon aus, dass durch seine Unterrichtsform, die Fehler vorwiegend von den Mitschülern entdeckt und behoben werden, er hat keinen direkten Umgang mehr mit Schülerfehlern.* ***Zeigen (durch Mitschüler): C5*** *Als wichtig erscheint ihm eine der Funktionen der Fehler: „ich identifiziere Defizite“* ***Identifiziert Defizite durch Fehler: A7*** *Er scheint sich bewusst zu sein; einerseits, dass die Konstruktion neues Wissens eventuell auf die bestehenden Fehler aufgebaut wird, und andererseits, dass man im Konstruktivismus die Schüler mit dem Fehler konfrontiert. (Dieses wäre im Sinne von*

Du konfrontierst ihn mit einer Situation, die ein Paradigma wechselt, seine vorhergehende Vorstellung ändert, du lässt ihn darüber nachdenken und reflektieren. Mehr als ihnen zu erklären; ja, guck mal, du hast dich geirrt, du kannst dieses oder jenes nicht machen, leitest du ihn, den Zwerg, in einer Form...Ach ja, natürlich..., z.B. ich erinnere mich gerade, dieses finde ich auch bei meinen Schülern. Ich sage ihnen: lasst uns diese Rechnung vornehmen.  Du sagst, dass es gleich 7 ist: (Er schreibt die erste Zeile). Hier, dieses und dieses (er streicht die Quadrate und das Wurzelzeichen durch), perfekt. Jetzt lass uns die Operation verfolgen: 4 zum Quadrat ist 16, 3 zum Quadrat ist 9. Es muss aber weiterhin gleich sein, oder nicht? Er verfolgt den korrekten Lösungsprozess weiter und hat zum Schluss 5 = 7. „Ah!“ Und nun, was dann, also ich kann dann nicht... So jetzt schreiben wir statt der Addition eine Multiplikation.  Jetzt kannst du deine Regeln anwenden, aber nur mit einer Multiplikation. Und	*KILPATRICK).* ***Kognitiver Konflikt: E8*** *Miguel Ángel versucht dann, durch einen „kognitiven Konflikt“, in dem plötzlich 5 = 7 ist (siehe weiter unten), die Schüler, zu den gewünschten Erkenntnissen bringen.* „Ach, dann mit einer Addition nicht, aber mit einer Multiplikation doch?“ **Erkenntnisse des Schülers durch Unterstützung des Lehrers: E3** Damit geht er auf die Oberflächenstruktur der betreffenden Regeln ein. **Hinweis auf Regeln: C6b**

du führst ihn, „ach, dann mit einer Addition nicht, aber mit einer Multiplikation doch?“ Dieses wäre die Form in der ich es machen würde, wenn sich die Gelegenheit bietet. Auch wenn es bei 35 Schülern schwierig ist, und die 8 oder 9 „guten“ Schüler sich langweilen würden.	
M: (Er zeigt auf die 3. Aufgabe) Es „eliminiert“ sich, nein, es eliminiert sich nicht. Warum? Gut, lasst uns daran arbeiten. Was ist eine Elimination? Verzeihung, wenn du an eine Elimination denkst, bleibt 0 übrig. Was werden wir unter Elimination verstehen? Hier wird nicht eliminiert, sondern gekürzt. Wenn man kürzt bleibt was übrig, und in der Annahme, dass eine 0 übrigbleibt, wie kannst du dann sagen, dass 0 nichts ist, 0 ist eine Zahl...	*Er diskutiert mit seinen Schülern über den Ausdruck „eliminieren“. Er sagt, dass man bei einer Elimination die Assoziation macht, dass nichts übrigbleibt. Null ist aber eine Zahl und nicht „nichts“.* ***Beschreibung anderer Fehlermuster: Umgang mit der Null: A4a*** *Die Verbindung könnte auf die Konzeptionen der Null, die mit konkreten Anschauungsmethoden zurückzuführen sein. Eine Null ist wenn ich „nichts“ in einer Schachtel habe.*
I: Mit der Null haben sie auch Probleme.	
M: Wenn ich an die Null denke (er schreibt auf das Blatt, 0/5 und 5/0:	*Er kommentiert einige beobachteten Schwierigkeiten mit der Null, besonders 5/0 und 0/0.* *Die Fehler versucht er seinen Schülern über die Umkehroperation zu erklären, was bei 5/0 gelingt.* ***Begriffsbildung: C3*** *Bei 5/0 wird wieder ein „kognitiver“ Konflikt ausgelöst, in dem er eine Zahl sucht, die mit 0 multipliziert 5 ergibt, da man diese nicht finden kann, existiert kein Resultat für diese Aufgabe, es ist nicht definiert.* *Bei der Division von 0/0 sucht er eine Zahl, die mit 0 multipliziert 0 ergibt. Es „könnte“ Null sein, aber warum auch*

 Wie schwer fallen sie ihnen. 5/0 = 0 0/5 = 0 Lasst uns reflektieren, und hier findest du die Schwierigkeiten. Lasst uns zuerst 10/2 rechnen, um zuerst zu verstehen, dass ein Bruch eine Division ist, hast du das verstanden, gut, es ist gleich 5. Wie könntest du das beweisen? Hier antworten viele: multipliziere die 5 x 2 und du erhältst 10. Wenn du mir sagst, dass 0/5 = 0 ist, (er zeigt auf seine Aufzeichnung und schreibt weiter) dann heißt das, dass Null mal 5 Null ist. (Er geht auf die nächste Operation ein, 5/0). Wenn das hier 0 ist, was passiert dann, Null mal wie viel ist dann 5. „Nein, irgendeine Zahl mal 0, ergibt 0. OK, das hast du gut in der Primaria gelernt. Dann existiert keine Zahl, die multipliziert mit 0 eine 5 ergibt. (Nun zeigt Miguel Ángel auf 0/0), wie schwierig, „es ist Null“, kann sein, aber warum nicht 1, oder 7, oder -4, oder	*nicht 1? Er beschreibt diesen Prozess als nicht determiniert, und weist darauf hin, dass man dieses erst richtig in einem Kurs von Differentialrechnung verstehen könnte.* *Seine Form auf dieses Problem einzugehen, über die Umkehroperationen ist gut. In der Form wie darauf eingeht, lässt er einen fragendentwickelnden Unterrichtsstil durchblicken.* ***Fragendentwickelnder Unterricht: E7***

1/3? In Mathematik können es nicht zwei oder mehr Resultate sein, man kann es nicht bestimmen. Es besteht eine Unbestimmung. Dieses wird ihnen erst in einem Kurs über Differential-rechnung klar.	
M: Dieses kommt aber von Lehrervorstellungen. Ich habe es oft beobachtet, es ist für viele Lehrende gleich 1 (er meint die Division 0/0). Und sie sagen dir, wenn ich das Gleiche durch das Gleiche teile, ist es 1.	*0/0 ist für einige Lehrenden 1 (das hat er selber beobachtet).* ***Mangelnde Kompetenz: D2b*** *Diese Behauptung erwächst aus der Vorstellung, dass wenn, ich das „Gleiche durch das Gleiche teile", das Resultat gleich 1 ist.* *Als Beispiel gibt er x/x an.*
I: Habt ihr im Liceo del Valle, Fortbildungskurse in Mathematikdidaktik?	
M: Nein, nicht spezifisch, wir haben dort viel Fortbildung, ich glaube ich habe es nicht erwähnt…	
I: Du warst gerade dabei, und wir sind vom Thema abgekommen.	
M: Wir haben wirklich viel Fortbildung, man lernt sehr viel, aber nicht auf einem spezifischen Gebiet.	*Er ist sich bewusst, dass die Schule, in der er arbeitet, viel Fortbildungskurse bietet, diese sind aber nicht spezifisch auf sein Fachgebiet gerichtet, sondern eher generell gehalten.* ***Fortbildungskurs in Mathematikdidaktik (nein): K2***
I: Glaubst du, dass lernen über generelle Didaktik, dir in deiner Mathematikdidaktik hilft?	
M: Es öffnet dir das Panorama, aber du musst das starke Interesse der Forschung haben. Dieses Interesse, wo du dann sagst, "ach, so, dann…". Das Interesse es anzuwenden und es	*Er scheint bei jedem Kurs zu reflektieren „ach, so, dann...". Er hat Interesse es anzuwenden und dann zu modifizieren.*

dann modifizieren. Ich glaube es fehlt uns ein wenig Bescheidenheit, ein anderer wird sehen, dass ich etwas nicht weiss. Wenn du es nicht weisst, macht nichts, lerne es. Lasst uns die Situation verändern, die Schüler besser vorbereiten. Wenn wir Mathematikkurse vorgeschlagen bekommen, nicht mehr Didaktik, sondern Mathematik, das was du unterrichtest, gibt es viele Lehrende die sagen: "was kann mir über Mathematik noch gesagt werden?"	*Er meint auch, dass viele Lehrenden „angst" haben, Blöße zu zeigen, und vielleicht deswegen nicht aktiv in einem Kurs mitarbeiten.* *Er möchte gerne seine Schüler besser vorbereiten, dazu ist er bereit an den Kursen teilzunehmen und auch neues dazuzulernen.* *Er meint auch, dass viele Lehrenden meinen sie wüssten genug oder alles über die Inhalte, die sie unterrichten.*
I: Wenn ich dich richtig verstanden habe, würdest du folgern, dass wir mehr Fortbildung machen müssen, nicht nur in Mathematikdidaktik, sondern auch in Mathematik.	***Mangelnde Kompetenz: D2b*** ***Schlägt Fortbildung für Lehrende vor.***
M: Ich denke, dass die Erziehung wie ein Tisch oder ein Stuhl ist, der drei Beine hat. Du musst die Inhalte beherrschen, und ich gleube, da sind wir ein wenig schlecht dran. Du bruachst Kenntnisse über die Didaktik, OK, du weisst, aber man muss erklären können, dass das Kind dich verstehen kann. Gut, und es ist unumgänglich, die Kontrolle über die Gruppe zu haben…	*Er beschreibt das Professionswissen eines Lehrenden:* *a) Fachkenntnisse* *b) Didaktische Kenntnisse, wo er es nicht unterteilt in generelle didaktische Kenntnisse und fachspezifische Fachkenntnisse* *c) Kontrolle über die Gruppe* *Er geht hier auf einige Lehrerkompetenzen ein.*
I: Was meinst du, wenn du sagst, du brauchst die Kontrolle der Gruppe zu haben?	
M: Die Kontrolle der Disziplin. Man findet sehr viel Lehrende, die viel wissen, die eigenen Schüler sagen es. Aber sie verstehen ihn nicht, auch nicht, wenn sie alle ruhig sind und	*Bei Kontrolle der Gruppe meint er eine gewisse Disziplin im Klassenraum. Durch seine Ausdrucksweise kann man einen eher Lehrerzentrierten Unterrichtsstil vermuten. Die Kompetenz bei einem eher schülerzentriertem Un-*

aufpassen. Man müsste hier untersuchen, ob das Niveau stimmt. Andere Schüler kommentieren, er weiss, er kann auch gut erklären aber wir verstehen nur, wenn wir und vorne hinsetzen. Die Schüler in den hinteren Reihen passen nicht auf und erzählen. Jeder Lehrende muss alle drei Phasen beherrschen. In der Mathematik ist das Fachwissen sehr wichtig, man muss, als Lehrer, einfach mal Inhalte wiederholen. Ein Professor von ITESO (einer anderen privaten Universität in Guadalajara), dass man ganz bewusst unterrichten muss, sonst wirst du es nicht weitergeben können, du machst es automatisch.	*terricht wäre eine Klassenführungskompetenz.* *Auch bei seinen Kommentaren über was passieren würde, wenn eine „seiner Kompetenzen" einem Lehrenden fehlt, weisen auf einen eher Lehrerzentrierten Unterricht hin („er erklärt" gut).* ***Lehrerzentriert: E9*** *Bei einer Fortbildung im ITESO ist ihm nahegelegt worden, dass man ganz bewusst unterrichten muss, weil man sonst die Inhalte „automatisch" wiedergibt.* *Damit meint er wahrscheinlich, dass man seinen eigenen Unterricht beobachten sollte, in Hinsicht auf wie man unterrichtet und auf die Reaktionen der Schülerinnen und Schüler.*
I: Ich denke, dass auch dieses Problem eines der Primaria ist. Es wird automatisch wiedergegeben, ein Algorithmus, von dem du gesprochen hast. Sie kennen ihre Algorithmen aber wissen oft nicht warum es so geht.	
M: Jetzt gerade komme ich darauf, wenn man bei der Subtraktion eine 0 hat, und ein Übertrag ist, wo holt er es her?. Du (bewegst ihnen den Teppich, was sinngemäss sein würde), du ziehst ihnen den Teppich unter den Füssen weg, da ihr Algorithmus sehr mechanisch ist. Bei einer Division, wenn der Dezimalpunkt draussen ist, wenn er drinnen ist können sie es machen, "aber was mache ich, wenn er drinnen ist?". Wenn er draussen ist, dann zittern sie, reden wir schon gar nicht vom Wurzelziehen,	*Er geht wahrscheinlich durch meine Frage auf die Inhalte der Primaria ein. Bei Subtraktionsaufgaben mit einer Zwischennull, werden seine Schüler unsicher, auch bei einer Division, wenn der Divisor einen Dezimalpunkt hat, und einer Wurzelrechnung.* *Er geht hier auf Schülerschwierigkeiten in der Arithmetik ein (vgl. RADATZ), und macht dafür einen mechanisierten Unterricht in der Primaria* *verantwortlich.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a***

Quadratwurzel von 3,78, einen traditionellen Algorithmus.	*Man könnte hier auch einen Rückstand seiner Schüler von etwa 4-5 Jahren vermuten.*
I: Und führst du ihn noch durch?	
M: Ich habe ihn erst richtig gelernt, als ich Unterricht erteilte. Nun, dass ich glaube, dass es unumgänglich ist, um die Mathematik zu beherrschen, nein, nein, aber es ist ein Anzeichen für die Konzepte, die wirklich wichtig sind. In der 3. Secundaria sollte man 4 verschiedene Methoden lehren.	*Er sagt, dass er das Wurzelziehen durch einen Algorithmus erst gelernt hat, als er ihn unterrichten musste.*
I: Möchtest du noch etwas hinzufügen?	
M: Nein, ich glaube, das war genug.	

Deutung:

Fehler sind für Miguel Ángel eine Gelegenheit zu wachsen, ob dieser Ausdruck durch eine Lebensweisheit „aus Fehlern kann man lernen“ erwächst, geht nicht hervor. Er geht nicht weiter darauf ein, wie er diese Gelegenheit nutzt.

Regeln wieder durchzugehen und vieles Üben ist vorläufig die Hilfe, die er seinen Schülern anbietet, obwohl er später auf eine Art fragendentwickelnden Unterrichtsstil mit hervorrufen eines kognitiven Konflikts hinweist (vgl. KILPATRICK). Er konfrontiert seine Schüler mit Widersprüchen, 5 = 7 und 0 mal wie viel ist 5?

Er hat in seiner Unterrichtszeit viele typische Fehler bei seinen Schülern entdeckt.

Vermutlich beschreibt er die Phasen beim Mathematiklernen (konkret, graphisch oder ikonisch und abstrakt) in Hinsicht auf PIAGET’s Entwicklungsphasen. Er bemüht sich einen signifikativen Unterricht zu erteilen (vgl. AUSUBEL), in dem er die verschiedenen Themen vernetzt.

Er beschreibt, dass er bei seinem Unterricht oft ausprobiert und Elemente modifiziert, um seinen „Erfolg“ (besseres Lernen seiner Schüler) zu verbessern. „Lasst uns die Situation ändern, und die Schüler besser vorbereiten“. Es ist zu erkennen, dass Miguel Ángel sich sehr bemüht seinen Unterricht zu verbessern.

Beobachtungen und Auswertung des Interviews mit Miguel Ángel:

Obwohl Miguel Ángel viele Fehler als typisch ansieht, geht aus dem Interview hervor, dass er nicht alle Schülerfehler, in den gescannten Lösungsprozessen, erkennt. Er dokumentiert während des Interviews noch andere typische Fehler, die er, durch die Jahre hinweg, entdeckt hat. Er möchte gerne in seinem Unter-

richt diese Fehler beseitigen, deshalb ändert er ständig seine Unterrichtsformen, bis er das kollaborative bearbeiten der Aufgaben, als ein bewährtes Modell empfunden hat.

Er geht nur einmal tiefer in die Ursache eines Fehlers ein, der dritten Aufgabe, wo er die Termstruktur und die Subterme analysiert, in dem er auf den wahrscheinlichen Gedankengang des Schülers eingeht. Er stellt alternative Fragen wie: Du hast hier ein Pluszeichen, hast du dann ein oder zwei Terme? Man könnte eventuell auch hier noch einen eher lehrerzentrierten Unterricht vermuten.

Bei einem Beitrag über den Umgang mit der Null, beschreibt er die Unkehroperationen als Argumentation für das Verständnis der 5/0. Mir schien diese Form besonders auffallend, da in Mexiko wenig über die Umkehroperationen gearbeit wird.

Er sucht die Verantwortung der Schülerfehler hautsächlich in der Tatsache, dass

a) zu wenig geübt wird

b) Inhalte falsch gelehrt wurden, also auch typische Fehler bei Lehrern.

Seine Hilfeangebote sind nochmaliges Durcharbeiten der Inhalte, Rückverweis auf Regeln, gegen die verstoßen wurde, und viel üben, was wiederum ein Hinweis auf lehrerzentrierte Unterrichtsformen ist.

Da er meint, seine Schüler üben nicht genug, hat er fortlaufend Formen gesucht, um die Schüler zum Üben zu bringen, fand diese Form in der kollaborativen Bearbeitung der Aufgaben.

In seiner Suche nach Antworten auf die Fragen der Unterrichtsgestaltung hat Miguel Ángel sich Wissen angeeignet, dass er nun in seinen Unterrichtsstunden ausprobiert, analysiert und eventuell modifiziert, je nach Resultaten. Jedoch ist er in seinen Aussagen oft der Meinung: Man tut viel und doch erzielt man kein besonderes Ergebnis. Er selbst hat gewisse Themen mit seinen Schülern bearbeitet und nach einiger Zeit, obwohl sie es vorher „gekonnt“ hatten, haben sie alles vergessen und machen die gleichen Fehler. Man kann sich da fragen, ob die Fehlerbehebung nicht effektiv war, weil er eigentlich nicht auf die Ursache des Fehlers eingehen konnte.

Er kommentiert etwas über die „Elimination“ in Brüchen, geht aber dann nicht mit dieser Erkenntnis auf die 3. Aufgabe ein, um eine weitere mögliche Ursache zu erforschen.

Er beschreibt das Professionswissen eines Lehrenden:

a) Fachkenntnisse
b) Didaktische Kenntnisse, wo er es nicht unterteilt in generelle didaktische Kenntnisse und fachspezifische Fachkenntnisse
c) Kontrolle über die Gruppe
d) Er geht hier auf einige Lehrerkompetenzen ein.

Anhang 20a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Miguel Ángel und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien:

Fecha: 14/03/06

Tengo 13 – 14 años de dar clase de matemáticas

Licenciatura en Informática Administrativa, ITESO

Anteriormente 2 años de Administración, ITESO

Me salí a los 2 años y empecé la de informática

I: Te voy a presentar unas soluciones de alumnos distintos, que escaneé de los exámenes de ubicación, de los que hacemos en la Universidad Panamericana, entonces, quiero que te imagines, que un alumno lo resuelve en el pizarrón, y qué le comentarías al alumno. Hay papel, pluma, por si necesitas escribir algo.

M: OK. La primera, es una multiplicación de fracciones, 8/7 x 14 /2 x 9 /4, lo que hace es, ¿este es uno, o es 8?

I: Es 8

M: 8/7 , que multiplica, OK, vuelve a multiplicar y después empieza a simplificar. Bueno, aquí le comentaría que sería más sencillo, si comenzamos a simplificar tanto el numerador como el denominador, sacándole séptima al numerador y séptima al denominador. Lo que aquí le haría falta es un dominio de lo que es una razón o una proporción, para poder simplificar antes y no llegar hasta acá, y sobre todo si no traen calculadora, que seguramente no traían.

I: Estos exámenes se hacen sin calculadora.

M: Y aquí ya nada más sería corroborar, que la operación o las operaciones estuvieran correctas. Pero, se evitaría mucho trabajo. Ése sería mi primer comentario.

La segunda tiene: ay, típico error. 4 al cuadrado más 3 al cuadrado y raíz cuadrada, aquí no domina todavía las propiedades de los radicales, no puede separar, lo que hace es simplificar la raíz con el cuadrado, pero no lo puede hacer, porque son sumandos, y solamente con productos, hay que repasa las propiedades de las raíces.

Híjole, aquí, igual, no igual, antes de poder simplificar aquí, tendrían que ser factores, hay que resolver la operación y después factorizar para poder simplificar, igual propiedades de las … consecuencia de esto.

Y la última…

I: Si quieres primero la cuarta.

M: Ah, sí, la cuarta. Este es una resta y un producto, ¿verdad?

I: El ejercicio en sí, es nada más la primera parte, él cambió, acá hay un signo de igualdad, y puso una multiplicación (a+b)(a-b).

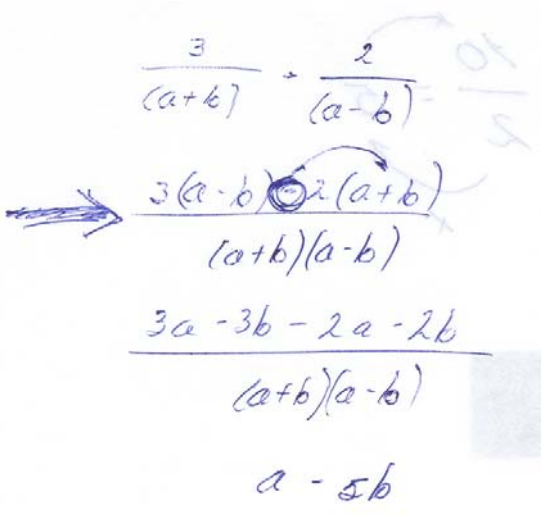
M: Aquí, quiero suponer, mmmmmm, a ver, intento descifrar lo que hizo, porque de aquí, pone esto, se viene para acá, entonces, OK. Multiplica por el denominador común, el mínimo común múltiplo, mmm, lo que le falla es , es saber hacer la resta de fracciones algebraicas, saca bien el denominador común, pero a la hora del algoritmo, tal cual, el denominador común, entre este, por lo de arriba, hace las dos operaciones, simplifica, y llega a esto, es que esta parte es la que me confunde, no sé qué quiso hacer con esta parte, para después pasar acá. (Ver la hoja de solución que se les presentó a los profesores).

I: ¿Y tú que piensas que quiso hacer?

M: Es lo que voy a tratar de averiguar, multiplica, OK., mmm, en realidad está, sí es a+b, a-b, saca el denominador común, sí lo hace, nada más esta parte, sobre todo cuando me pone, este igual y después esta parte, ahí, me suena raro. También la recomendación que yo le haría, aunque el resultado sí es correcto, un poco más de orden en las operaciones, tiene claro el concepto, pero el orden es lo que le está fallando. Me dice mucho a mí como maestro el hecho de esta parte, que es igual con esto, que es igual, …

I: Yo supongo que ahí, ese signo de igualdad lo sobrepuso.

M: Probablemente, no me causa nada de ruido, si hubiera eliminado esta parte, y hubiera hecho esto, esto y después poner el resultado, porque si no, no hay ningún inconveniente. Si. Aquí nada más, este menos, lo voy a hacer… (pausa en la que escribe)



Hay maneras más simples de resolverlo, pero simulando un poco lo que ella hizo, si, 3a - 3b-2a-2b, ah, pero aquí ya, menos este signo, eh, ese signo es lo que le falló, y a mí también a la hora de estar repasando el procedimiento, es donde está…

Sugerencia, no brincarse este paso, importantísimo. El poder, hasta que no dominemos estos signos nos brincamos este paso, con esos cambios de signo. Aquí me quedaría – 5b. Práctica algebraica, nada más,

Y ahora sí, en la última, tengo, $z^2 – 16z + 64 = - 48z$; ¿es -48z?

I: Sí, es lo que dice

M: No este alumno, no; aquí la instrucción era factorizarla, ¿verdad?

I: Era una factorización.

M: El enano no sabe factorizar. El concepto, este está más perdido todavía. Entre éste y éste se la van llevando. (Señala el ejercicio 5 y el 2)

I: ¿Entre la 5 y la 2?

M: También la 3, si empezamos a ubicar esto en niveles de cuándo se ve en primaria, secundaria y preparatoria, esto es más o menos de 2° y 3° de secundaria, (señala los problemas 2 y 5) esto es más o menos de 1° de Prepa junto con esto (señala el problema 3 y 4). ¿Y éstos ya llegaron a la Universidad?

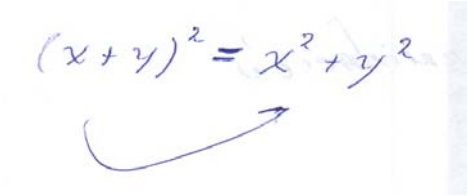
I: Yo creo que sería importante especificar, ¿qué es lo que le dirías al alumno?, tal vez en frente de todo el salón, o en un examen, ¿qué harías?

M: Con esto podrías identificar claramente cuáles son los aspectos que le están fallando, y volver a repasarlos, más en la práctica, que en otra cosa, son errores muy comunes y hay otros que aquí pondría, también son muy comunes, te da pie para…

I: ¿Puedes poner los otros muy comunes en la hoja?

M: Te voy a dar unos cuantos, te voy a dar uno, con el que batallas toda la vida;

$(x+y)^2 = x^2 + y^2$ (se inserta la anotación que hizo el profesor)



pero en la mayoría de los casos esto es común. Y tenemos, de ese tipo en el manejo de propiedades de los radicales y los exponentes, que es un tema ligado, muchísimos errores.

Lo que son también el manejo de fracciones, ya no hablemos de fracciones algebraicas, sólo sumas, restas y multiplicaciones o divisiones, normales, de números, todo te lo van a pasar a decimales antes de poder hacer operaciones con las fracciones. Principalmente se debe, hipótesis muy particular, unas muy, muy malas bases en primaria, lo que va a decir el de la universidad, prepara, prepa de la secundaria, secundaria de la primaria. Peor yo más o menos lo he

ubicado en esa parte y te explico, por qué: Una idea que tengo más o menos arraigada y que la he podido comprobar, con mis enanos en preparatoria y cuando tuve la oportunidad de dar clase en secundaria, es que vienen con unas bases que les dieron maestros que realmente estudiaron para maestros, o sea, son hicieron su licenciatura en el mejor de los casos, en pedagogía o estudiaron la normal superior;

I: ¿La normal superior o la normal?

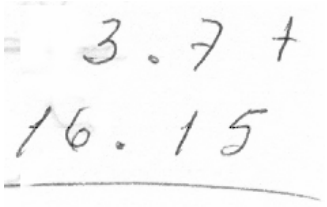
M: La normal…

I: ¿Los de primaria?

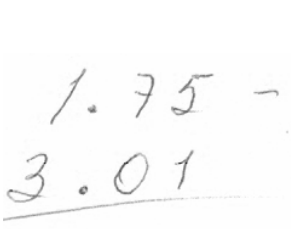
M: Los de primaria son normalistas o por lo menos tienen estudios que estén relacionados con la pedagogía o la enseñanza, ¿no? No es una crítica, es una constante, por lo general, los que se metieron ahí, por vocación, muy bueno, pero algunos se metieron, por tener dificultades en el área de los números, del área más abstracta, y se van por esa línea. Como es un solo maestro que les da español, matemáticas, naturales, etc., y todas las demás áreas, excepto deportes e inglés, entonces suelen darle muy poca…, a las materias que a ellos en particular les cuestan trabajo, las suelen pasar rápido, este 3 + 2 = 5 , se acabó, si le entendieron muy bien, si no, no. Una parte álgida en las matemáticas de la primaria es precisamente las fracciones y las operaciones con decimales. En el algoritmo de la división, o de la raíz cuadrado con decimales, operaciones ya más abstractas las suelen ver muy rápido. No se diga de problemas de aplicación, ya con que sepan sumar, restar, multiplicar y dividir, entonces, el concepto de lo que es una fracción, los algoritmos para realizar las operaciones, las traen, pero sumamente deficientes, ¿no?

I: O sea, tú piensas, que inclusive los algoritmos para suma y resta, multiplicación y división, no se los saben bien los profesores de primaria, ¿o sólo te refieres a la suma, resta, multiplicación y división de fracciones?

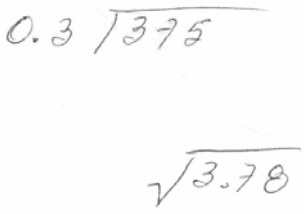
M: No, me refiero a las de fracciones y decimales, la de enteros suelen tenerla clara, muy, muy clara. La suma, la resta, la multiplicación y la división de enteros, no hay problema. Con la suma, resta y multiplicación con decimales, tampoco hay mucho problema. Pero cuando pasamos a la suma, resta, multiplicación y división de fracciones, y división y raíces con decimales, ahí empezamos a tener problemas, hablando de operaciones básicas.



Sin problemas



Sin problemas



Con problemática

Por que si nos metemos a otros temas, que se ven en la primaria, como probabilidad y estadística, que llevan bastantito en los programas, sobre todo en los actuales, lo que es ubicación en el espacio, este, que van a tener broncas en geometría y en geometría analítica, ya no hablemos, y en cálculo, no se ubican los enanos. Pero ese tipo de cuestiones las ven muy someramente. Y repiten nada más lo que viene en los libros. Creo que, mucho se debe a lo que nos hace falta a la otra parte, los cuales no estudiamos normal, no estudiamos para maestros y somos maestros quizá por vocación o quizá por el destino, pero nosotros tenemos la parte del conocimiento duro de la materia y nos falta la parte de pedagogía, de saber cómo enseñar, de cómo tener mejor contacto, pero esto es una hipótesis muy particular, muy particular.

I: Es una hipótesis particular, con la que coincido bastante.

La siguiente parte sería, ¿cómo manejas los errores en tu salón, los errores que cometen tus alumnos en el salón?

M: Bueno, en este caso, también, en mi manera de trabajar en particular, ha ido modificándose con el transcurso de los años, o sea, 13 años dando clases, empecé en el nivel de 2° de secundaria, cuando apenas acababa yo de salir de la preparatoria, ahí, caí por el destino…

I: ¿En el Liceo del Valle?

M: Sí, también en el Liceo, y también di clase en el Teresiano, en el Enrique de Ossó. Caí en 2° de secundaria y creo que es una profesión, que si no es tu vocación, a los dos años o tres años de estar ahí, la dejas, por que te vuelves loco. Pero si es tu vocación, ya no lo puedes dejar, que es lo que me ha pasado. Yo trabajo por mi cuenta, pero no puedo dejar de dar clase, ¿no? Entonces, en el transcurso de ese tiempo he ido modificando la manera de dar clase, al principio muy tradicional, creo que los que no estudiamos para maestros, lo que hacemos es copiar mucho lo que nos llamaba la atención de alguno de los que daba clases, pues entonces, a mí me tocaron maestros que eran muy tradicionalistas, en donde yo explico en el pizarrón, ¿me entendieron?, casi nadie te dice que no, claro, de repente uno que otro y lo dejas. Después yo les dejaba tarea, les dejaba la tarea referente a los temas que había explicado, posiblemente aplicaba el examen, y me encontraba con muchos errores de este tipo. Lo primero a lo que yo le atribuí, los enanos necesitan práctica, hay que practicar y la tarea que les dejo, en el mejor de los casos la copiaban y en el peor no la hacen. Entonces tenía que garantizar, que por lo menos practicaran algo, me ideé lo que eran guías de trabajo, les explico un tema, ecuaciones de primer grado, ¿me entendieron? OK. Ahí les van 5 ecuaciones de primer grado para que las resuelvan. Mejoraron un poco…

I: ¿En la clase?

M: En la clase. No, porque si lo dejo de tarea, es lo mismo, en la clase. Y más o menos voy sondeando cómo van. El avance es mucho más lento, mucho más

lento, es mejor, pero te encuentras con el mismo problema de los errores. Los enanos, no los resuelven, o los resuelven con los mismos problemas y agarrarte a los 5 o 6 que tienen problemas, se genera…, se vuelve más lento, pero lo hacía así. Es muy pesado, es empezar a arrastrar a los enanos, y es muy desgastante y no llegas. Entonces dije, vamos a investigar más, lo que ideé después de eso, era una especie de clases de regularización, después del horario escolar normal, en donde me quedaba con los enanos que cometían esos errores y volvía a explicarles los temas, les volvía a dar la guía y ahí iban, ahí iban. Así fue como trabajé los últimos 5 añitos, pero es complicado, porque generación tras generación vienen con peores bases, me imagino que en la Universidad, y yo que ya estoy también aquí, me doy cuenta, es que estos enanos vienen cada vez peor. Tienes que empezar desde más abajo, y resulta más desgastarte. Y en las clases de regularización, eran primero 3, después 5, y ahorita ya vamos en 15…

I: ¿En un salón como de cuántos?

M: En un salón como de 30, más o menos. Esto es como nadar contra corriente. Dije: es que no puede ser así, me puse a leer al respecto, sobre didáctica de las matemáticas, yo solito, autodidacta, creo que los matemáticos muchos somos autodidactas, y me encontré sobre la… sobre la teoría de Vigotsky y la teoría del constructivismo, y hablaba de una zona de desarrollo próxima y lo que encontré después de haber leído algunos libros es que el avance cuando tienes la interrelación personal, alumno-profesor, es muchísimo más rápida y se les queda más grabado el concepto. También, algo que me llamó mucho la atención, fue el hecho de que mencionaba, de que si tú a un alumno lo pones a hacer algo que ya sabe hacer, no es aprendizaje, es práctica, y si tú lo pones a resolver algo que no puede resolver, mucho menos hay aprendizaje, el enano, se va a quedar ahí. Si no, tienes que resolver junto con él, mucho tiene que ver la interrelación personal y el lenguaje, el lenguaje correcto de las matemáticas, el que te explique lo que está haciendo. Es muy diferente, el que el enano te explique lo que está haciendo; “es que aquí, mire aquí hice esto”.., entonces tú lo estás escuchando, y dije, ¿pero esto con 35, incluso con 10 alumnos? Me tardo un mundo de tiempo. Entonces este año, este segundo semestre en particular, lo que hice fue tomar los 7 alumnos que yo consideraba que tenían mejor capacidad y sobre todo disposición e interés, y con ellos les propuse la idea, de que ellos a su vez tomaran tres alumnos, y les ayudaran a contestar la guía. Las guías que dejaba. Y, créeme, que el avance en cuanto a números y en cuanto a promedios fue muy,muy notable, pero apenas tengo un período haciendo esto.

Apenas estoy empezando con el experimento. Pero funcionó muy buen, es nuevo, pero en sí, en cuanto a la respuesta concreta en cuanto hacer con esto, para mí, la respuesta era práctica, pero si se lo comentas a un niño de secundaria, te dice “mmmm, sí practico, como no, si pero siéntate, lo podrás forzar, la hora clase, o una hora después de la escuela, por los días que lo tengas ahí, pero en su casa no la va a hacer. En cambio, el hecho de que un compañero, con lenguaje similar, con la manera de explicar como ellos lo

hacen, les hicieron caso, mucho más que a mí, y eso, en lo particular a mí, me dio mucho gusto. Entonces hay una manera nueva de atacar esto, que es precisamente práctica, pero con un igual.

I: Con uno de su misma calaña.

M: Uno de su misma calaña, y funcionó, los mismos alumnos después de este primer período, les pedí que me pusieran de esta manera de trabajar, me escribieran todos los pros y los contras, qué ventajas le ven, qué desventajas, para irlo mejorando. Y la mayoría coincidió, en que le entendían más, en que ahora sí se estaban poniendo a hacer las cosas, porque no había de otra, …nunca debió haber de otra, pero bueno… También el hecho de que a los responsables les dieras cierta importancia y jerarquía los hizo a ellos, de que por sí pasaban los exámenes, pasarlos mucho mejor. Yo siempre había dicho, que si quieres aprender de una materia, da clases sobre la materia. Si yo quiero aprender un tema en particular, no sé, didáctica de las matemáticas, tendría que dar clases de didáctica de las matemáticas, porque te forza a leer, y otra, porque las dudas que no se te ocurren a ti, se le ocurren a alguien a quien le estás dando la clase, y piensas, esto nunca se me hubiera ocurrido a mí. Y esto es lo que le pasó a mis enanos, porque los 7 encargados, que en este período se fueron a 9, que se apuntaron dos más, para ayudarles un poquito en la labor, esa clase especial que daba, la doy, pero ahora sólo con ellos, le salen todas las dudas, “es que a mí uno me puso esto, y me puso a pensar”, “es que mira, es que recuerda que las propiedades de los radicales es…, ah, sí es cierto, entonces ya sé, cómo le voy a responder. El hecho de que sean los mejores, me hace avanzar más, mucho más, y sobre todo darle mayor profundidad a los temas, temas que antes veía muy leves, ahora los puedo ver más profundamente. Entonces, creo que se avanza más rápido y la profundidad con la cual llegan, quizá no con la totalidad de los 35 alumnos, pero sí, con los 8, 9 ya es una profundidad en la que dices “ay, esta es más del nivel…”

I: Claro, porque llegas a analizar lo que hacen los otros alumnos, y lo analizan ellos.

M: Lo analizan ellos, y te lo plantean a la manera de cómo ellos lo van entendiendo, que muchas veces no es la misma, que vives tú, como los maestros.

I: No, porque uno tiene formas diferentes.

M: Es muy rico, como maestro la experiencia a mí, ha sido riquísima, riquísima. Entonces, te comparto esta nueva manera de atacar estos problemas.

I: Me estás hablando del constructivismo, me estás hablando de Vigotsky, me estás hablando de la zona de desarrollo próximo, etc., me gustaría saber, para ti, qué papel juega un error algebraico o aritmético, dentro del constructivismo mismo.

M: Es una oportunidad de crecimiento en cuanto al concepto, grandísima, hay que saber aprovecharlas, porque esto ya como maestro, ya tomando el papel

de tener uno a uno en el pizarrón, y descubrir esto en un alumno es la oportunidad de saber exactamente de qué pie cojea, poder recomendarle, al enano, qué temas hay que reforzar, poder darles ejercicios que puedan resolver esto, para mí, el poder tener el tiempo de trabajar uno a uno, este tipo de errores, los sacas rapidísimo. Así, como lo vi con los alumnos, que trabajaron, él con sus tres, cómo avanzaron, yo como maestro con tres o con uno, con estos errores los potencializas en grado máximo, porque….

Bueno, porque enfatizas.

I: Supongamos, que vas a explicarle a un alumno, que te hizo esto (le señalo el ejercicio 3)

M: Lo primero es, que dentro de las propiedades de las fracciones, yo no puedo simplificar una parte que es sumando, con el denominador, tienen que ser factores, para poder simplificar. Vámonos, que son factores, y te vas para atrás, ¿qué es un factor? Y empieza él a darte sus conceptos que tiene y vas identificando pequeños problemas, que hay allá atrás. Vamos a ver: "¿estos son factores?, claro, está multiplicando, y qué sucede con este +, ay este + es el signo de…. Vamos viendo, vamos a ver lo que es un polinomio, y vamos a escribir lo que es un polinomio. Va a tener términos, identifícalo como un polinomio. ¿Es un solo término?, no, son dos. Entonces, no son factores, y te lo vas llevando más atrás, y por lo general son conceptos muy, muy básicos en el álgebra, en este en particular.

I: Sí, en general te das cuenta de los errores que tienen con cosas muy sencillas. Ni siquiera tiene uno que preguntar las grandes…

M: No,

I: los errores salen en lo más elemental.

M: Y con secuencia es una idea que tienen muy marcada los alumnos, que te dicen; a mi no me expliques por qué, dime que aquí es más 1 y ya. No, rápido, a mi dímelo rápido. Mucho la cultura, aprendo inglés rápido, fácil y sin esfuerzo. Baja de peso, rápido, fácil y sin esfuerzo. Por lo menos en las matemáticas no lo vas a poder hacer así. Porque es un proceso lento, vas a tener que esforzarte, definitivamente y olvídate que va a ser algo que en dos días lo terminemos.

I: Yo entiendo, tú me dices, que le dirías que tendría que factorizar, por que son dos términos, porque hay un signo + en medio, o porque no puedo simplificar en la suma de una fracción, etc., ¿Tú puedes saber, a qué se debe que haga eso, que haga esa simplificación?

M: Bueno, lo que he descubierto en muchas ocasiones, tristemente y lo reconozco, de repente sí tienes algunos compañeros de matemáticas en donde ves exactamente esto, esto se lo enseñaron en un principio en muchos de los casos, no digo en la mayoría, pero en muchos, lo vieron.

I.: O sea, que tú crees que viene de un profesor, que lo vieron.

M: Lo vieron, en principio. Después, yo me lo he encontrado.

I: ¿Te encontraste al profesor que lo hace?

M: Sí, al profesor que lo hace, entonces los vas recibiendo y ves que de repente tienen algunos errores.

(Dado que se acabó un lado del cassette, se interrumpió la plática, para buscar la ilación, se preguntó)

I: Entonces, tú lo recibes así, por un profesor….

M: En algunas ocasiones…y me consta…

I: Te consta, en la escuela, donde estás.

M: Me consta, en la escuela donde estoy.

I: ¿Y sigue allí el profesor?

M: No, ya no, (Risa) No, eso es en algunos de los casos, que sí lo he visto y es preocupante. Y sobre todo preocupante, porque estamos hablando de un nivel secundaria, y que te pones a imaginar, que el profesor es ingeniero, o por lo menos no es, normalista, ¿cómo andará allá abajo? Yo nunca me he metido a estudiar cómo están en primaria. Pero, eso es una; y dos: Tiene que ver también con el proceso de cómo adquiere un alumno el conocimiento matemático, en principio, tiene que se con cosas muy concretas, que toquen, vamos a sumar cosas que puedan palpar, entonces empiezan a sumar, después de ese concepto, viene un segundo elemento, que es quizá con dibujos o gráficas, tienen que poder ver, quizá no tocar, y luego en un tercer nivel, ya más abstracto, cunado son números y mentalmente. Ese proceso se repite también para conceptos mucho más avanzados, quizá no pueda tocar un trinomio cuadrado perfecto, una diferencia de cuadrados, pero sí lo puedes hacer un poquito más tangible.

I: Y, puedes tener material para hacerlo.

M: Sí, por supuesto, y lo que es la cuestión gráfica, y más con los paquetes de cómputo, lo puedes hacer muy gráfico, no lo tocan, pero lo ven tranquilamente. Y el estar resolviendo una ecuación de segundo grado y ver, gráficamente lo que está sucediendo, y poder localizar raíces, les ayuda muchísimo. Pero aquí lo que sucede es que, a veces creemos los profesores, me incluyo, que el conocimiento o el aprendizaje se da de manera ascendente en cuanto a sus niveles, si el enano ya dominó el nivel concreto, y después el gráfico y después el abstracto, tú ya ves que está en abstracto, este enano, tranquilamente con un concepto que ya dominaba, de manera abstracta, nos tenemos que regresar a algo más gráfico. Y es lo que les sucede, quizá adquirieron el concepto, lo dominaron, pero no, lo perdieron. Yo lo denomino, me imagino que lo debo haber leído, no recuerdo, en dónde, lo que es el aprendizaje de reforzamiento. Él lo sabe, ya lo hizo un par de veces, incluso lo hizo el año pasado, y volvió a caer en un mismo error, y hay que regresarse a un nivel anterior en cuanto al

conocimiento. Esto, dicho concretamente, en cuanto a estos errores. Uno, o lo vio, o dos, se perdió en alguna conexión de éstas, y hay que volver a retomar.

I: Bien, entonces, todo lo que tú me estás platicando, lo sacas de lo que has leído sobre didáctica matemática.

M: Mira, la lectura, es reciente. Digamos, año, año y medio, que ya, me voy a desgastar y no voy a poder hacer nada, bueno, yo lo percibo en la universidad, que los recibo cada vez peor, y los de prepa, ahora sí, como profesor de universidad, los de prepa. Son mis alumnos, me consta que lo vieron, me consta que algunos de ellos lo hacían, y volvemos a caer en lo mismo. Entonces esa, como angustia, de qué es lo que está sucediendo, fue lo que me puso a leer recientemente, aunque también, ahí sí le doy todo el crédito a la institución, en el Liceo del Valle, tenemos muy pocas vacaciones, quizá dos semanas en todo el año…

I: ¿Tú trabajas de tiempo completo?

M: Sí, de tiempo completo.

I: ¿Y cuando das clase aquí en la Universidad Panamericana, das clase de 7 de la mañana?

M: Aquí, si, a las 7 de la mañana. Y ya por la tarde a labores cotidianas, bueno, trabajo por mi cuenta, pero, te digo, lo de la lectura es reciente, la mayor parte de esto que te estoy platicando, es empírico..

I: O sea, que estuviste experimentando…

M: con los enanos…

I: Como una investigación-acción.

M: Así es.

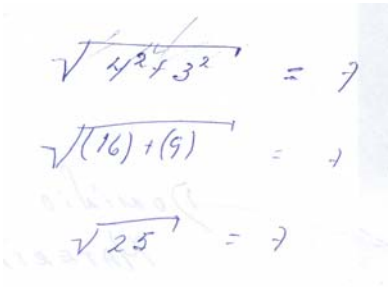
I: O sea, ver, hacer, ver qué me funciona, qué no me funciona…

M: Y mucho ya luego con los mismos alumnos. Ellos te van dando muchas luces, muchísimas luces, de por dónde va, más o menos la solución.

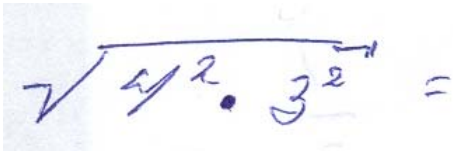
I: Nada más siento, que todavía no hemos llegado a la importancia, pues, del error, que ya me comentaste, que es muy importante, dentro del constructivismo, como que no hemos especificado exactamente a qué importancia te refieres, y cómo lo manejas dentro de tu salón.

M: Bueno, con esta nueva manera de trabajar, los errores de los enanos me llegan como ya muy diluidos, o como de tercera mano, tiene realmente la ventaja, de que ya viene una segunda interpretación del error, son otras palabras, y como el cómo lo está entendiendo este segundo alumno, ya no es una manera directa de trabajarlo. En cuanto a la importancia del error, como te digo, yo creo que hasta ahí ha llegado, nada más en poder identificar, claramente, a mí me da muchas luces, de por dónde van las deficiencias del enano, más allá, de lo que me ha tocado estudiar en cuanto al constructivismo y lo que me ha tocado leer al respecto. Yo sé, que sobre esos mismos errores, se

van construyendo nuevos conocimientos, y sobre todo, confrontándolos es muy importante dentro del constructivismo.



Los enfrentas ante esa situación, que les rompe el paradigma, rompe la idea que tenías, y los haces reflexionar, y dicen, ay, si es cierto, esto es porque, los hace reflexionar, más que tú explicarles, si, mira, te equivocaste, no se puede hacer esto, sino que lo vas llevando de una manera, que el enano, ay, por supuesto…, por ejemplo, ahorita me acordé, porque esto también me lo encuentro, les digo, bueno, vamos haciendo esta operación, y así es como los llevo a graficar. Te pone la raíz cuadrada de 4 al cuadrado más 3 al cuadrado. Tú me dices, que es igual a siete.(ver ejemplo escrito).



Esto y esto, (tacha los cuadrados) porque así te lo explicaron, perfecto, vamos a hacer la operación, 4 al cuadrado 16, más 3 al cuadrado 9, y tiene que ser igual. Sigue siendo igual a 7. OK. (Sigue haciendo igualaciones y se topa con que 7 = 5 , ah, ¿y ahora, entonces? NO, no, me dicen, espera, espera, vamos a regresarnos. Sí, vamos a regresarnos, "ay, entonces, no puedo…" ahora vamos a hacer esto, enano, vamos poniendo 4 al cuadrado, y en lugar de suma, multiplicación, y ahora sí te dejo aplicar las reglas que tú dices, pero con la multiplicación. Y lo llevas, ay, entonces en la suma, no y en la multiplicación, sí. Ándale, ese tipo de manejo es como, cuando tengo oportunidad, lo vas llevando. Que esto en un salón de clases con 35, y sobre todo con estos 7 o 9 enanos que ya dominan esto, aburres a todos los enanos y te mandan…., ya rápido, oigan, nada más, se suma, nada más se resta, nada más se multiplica, etc. Pero más o menos es el manejo concreto en este caso.

Es que se elimina (señala el ejercicio 3), no se elimina, "¿qué?" bueno, vamos buscándole, vamos viendo, qué es eliminarse, si yo tengo…, si te estás refiriendo a eliminarse, perdón, es que queda un cero, vamos a ver que vamos a entender por eliminación, aquí, no se eliminan, se simplifican, si se simplifican, queda algo, y en supuesto hecho de que quedara cero, como dices, el cero no es nada, es un número…

I: Ellos, en general también tienen problemáticas con el cero.

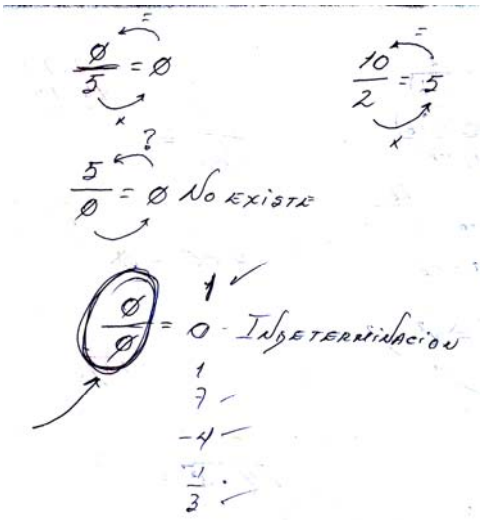
M: Ahorita, retomando esto, esto o esto:

(pone 0/5 y 5/0 en la hoja anexa)

I: Estas dos expresiones…

M: ¿Qué trabajo les cuestan?

I: Y 5/0…



M: 0/5 = 0 y 5/0 = 0 ; a ver, vamos reflexionando, y aquí es en donde encuentras los problemas, vamos haciendo esto, 10/2, primero entender que una fracción es una división, ya lo entendiste, muy bien, es igual a 5. ¿Cómo lo puedo comprobar? Ahí, realmente muchos te dicen, multiplicas el 5 por el 2 y te da el 10, ahí sí te concedo todo el derecho. Entonces, si aquí me dices (señala la operación 0/5) que es cero, quiere decir, que este por este (señala el 5 por el cero, me tiene que dar el cero), bueno.

(Señala la operación 5/0 = 0) Si aquí es cero, qué pasó, 0 por qué me va a dar 5, no, cualquier número por 0 es 0, muy bien, te enseñaron bien en la primaria, entonces, aquí, no existe, no existe ningún número que multiplicado por 0 te de 5. Y qué difícil, ahora sí profesor, ahora sí, (señala 0/0) es cero, seguro, sí, y ¿por qué no? 1, o 7, o -4, o 1/3. Pues sí, en matemáticas no pueden ser dos, el resultado es uno, aquí no puedo determinar, Hay una indeterminación. Vamos evitar estas, estas, pero eso lo vas explicando cuando están en cálculo.

I: Los errores vienen, de cómo tú dices, eliminó y ya no le quedó nada. Queda un signo de suma con un cero, mismo que deja de poner.

M: Y esto tiene, ahora sí lo menciono, esto si lo he visto muchísimo, en idea de los profesores, es igual a uno. Porque te dicen, lo mismo entre lo mismo, es uno. Es lo mismo entre lo mismo, ¿demuéstramelo? Pero les muestro, 0/0 es 1, 7, -4, 1/3, etc.

I: ¿Ustedes en el Liceo del Valle, han tenido capacitación desde el punto de vista didáctica matemática?

M: No, no es específicamente. En serio que en el Liceo del Valle, capacitación hemos tenido muchísima, creo que no lo mencioné…

I: Lo trataste de mencionar y me parece que nos fuimos por otro lado.

M: Realmente tenemos muchísima capacitación, lo reconozco, muchísima. Aprendes muchísimo, peor no sobre el área específica.

I: ¿Y tú crees, que aprender sobre didáctica general, te ayuda sobre tu didáctica matemática?

M: Te abre muchos panoramas, pero tienes que tener la inquietud de la investigación. Es una inquietud, que entonces te dice, ay, entonces… y esa inquietud de irlo aplicando, o modificando un poco. Creo que nos falta, ahorita que hablaste del miedo, del miedo ante lo desconocida, también un poquito, un poquito de esa humildad, de dejarnos de esos respeto humanos de chin, van a ver que no me lo sé. No te lo sabes, no importa, lo aprendes. No sigamos mandando generaciones como van. Eh, ¿cómo le tienen miedo, y aquí ya me excluyo, a tomar cursos de matemáticas, ya no de didáctica de tu misma área, "a mi de matemáticas, ¿qué me vas a enseñar?

I: Hemos llegado entonces a la conclusión, de que lo hay que hacer, es capacitación, y como dices tú, no sólo en didáctica matemática, sino también en matemáticas.

M: Mira, esto es puro empirismo, para mi, la educación sería como una mesa o una silla de tres patas, en donde, tienes que dominar muy bien la materia, saberte muy bien la materia, y creo que por ahí en el área de matemáticas estamos fallos. Después es la didáctica, OK, ya sabes, hay que saber explicar, que el niño no te entiende. Muy bien, y éste indispensable en los niveles que estoy hablando, dominio del grupo…

I: ¿A qué te refieres con dominio de grupo?

M: Al control de la disciplina. Control de grupo. Te encuentras muchísimos maestros, que saben mucho, los mismos alumnos lo dicen. Pero no le entiendo nada y todos estamos calladitos, nadie habla ni lo interrumpe, pero no le entendemos. Clara que aquí hay que investigar, si el nivel, etc. están acordes. Otros dicen, es que sabe, y le entendemos, pero cuando nos sentamos hasta adelante, todos los demás están en la chorcha. Tienen que ser a fuerza las tres, a fuerzas. Y en matemáticas, en particular, este casi no se da (señala el conocimiento del profesor), para este es el miedo y volver a repasar lo que yo digo, aprendizaje de mantenimiento.

Diría un profesor en el ITESO, la cosa es que muchas veces, si no eres conciente, no vas a poder transmitir, lo haces automático.

I: Yo supongo que este problema también se da en la primaria, lo hacen automático, un algoritmo, y ese algoritmo del que tú hablabas, es que dominan sus algoritmos, pero no saben ni por qué, o…

M: De repente, ahorita me acordé, en la resta cuando lleva un cero, y tiene que llevar, ¿de dónde lo jala? Les mueves el tapete a los enanos, ya que tienen el algoritmo muy mecánico. En una división, cuando, el punto decimal está fuera, está adentro y lo saben hacer muy bien, pero cuando está afuera, "¿qué hago?". Cuando está fuera, los pones a temblar, ya no se diga, una raíz cuadrada de 3.78, con el algoritmo tradicional.

I: ¿Tú todavía la haces?

M: Yo en realidad la aprendí a hacer, cuando di clases. Ahora, todavía que crea que esto es indispensable, para que puedan dominar las matemáticas, no, no, pero creo que es una muestra de lo estás haciendo con conceptos que realmente si son muy, muy importantes. Para sacar una raíz cuadrada, incluso en tercero de secundaria, te ponen cuatro métodos diferentes, pero este tipo de cuestiones son muy importantes.

I: ¿Quieres agregar algo?

M: No, creo que fue suficiente.

MIGUEL ÁNGEL

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10
		2			1	2	1		2			2	1		

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13	B14
1	1	2			1								1

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20
	7	2		1	1	6					1	1	2			1				3	1

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
1			1	2		1					4	5						

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
		2	1	1		1	1	2

Erfassen der Ursache

F1	F2
	6

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1	G2

Verschiedenes

H	I	J	K1	K2
2		1		1

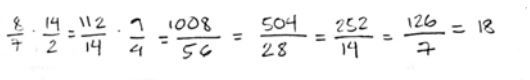
Anhang 21: Interview mit Raúl

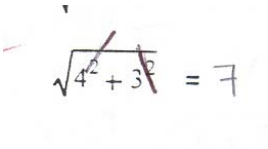
Kurzbeschreibung von Raul

Raúl ist 46 Jahre alt, hat Chemieingenieur an der Universidad de Guadalajara (die staatliche Universität in Guadalajara) studiert. Er unterrichtet an einer privaten Jungenschule in der Secundaria (vom 7. – 9. Schuljahr).

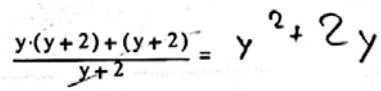
Da Raúl oft Sätze nicht zu Ende führt, und plötzlich andere Gedanken verbindet, wurde dieses Interview z. T. dem Sinn und dem Kontext nach übersetzt. Eine wörtliche Übersetzung wäre wahrscheinlich wenig verständlich. Ich konnte in diesem Interview nur selten etwas einwenden (nur zum Schluss hin) oder eine Frage stellen, da Raúl mit seinem Redeschwall mich übertönt hat, so habe ich mich auf das Wesentliche beschränkt. Raúl sollte ja auch die Gelegenheit haben seine Meinungen und Erkenntnisse zu schildern. Aus dem Interview sind Teile, die nicht mit der Mathematik und nicht direkt mit dem Interviewthema zu tun hatten, gestrichen oder verkürzt wiedergegeben worden.

Die etwaige Einteilung in den anderen Interviews (1. – 4. Teil) konnte bei Raúl nicht durchgeführt werden, da er oft sprunghaft von einer Idee zur anderen wechselte. So habe ich versucht immer wieder das Interview auf meine Fragen zu richten, was an einigen Stellen auch ziemlich schwer war. Nur ein erster Teil des Interviews konnte man klar hervorheben, nämlich die Analyse der einzelnen Aufgaben, auch wenn einige andere Gedanken in seinen Bemerkungen zur Geltung kommen.

R: Vor einigen Jahren wurde geplant, das Lehrpersonal fortzubilden, aber es ist noch nichts gemacht worden.	
I: Ich gebe dir eine Seite, falls du etwas aufschreiben möchtest.	
R: Aufgabe 1  Der Schüler hätte sich diesen langen Prozess sparen können, wenn er von Anfang an gekürzt hätte. Ohne auf Details des Resultates einzugehen, fängt man mit einer Vereinfachung gleich an, um nicht ein Resultat zu erhalten, das falsch sein könnte, durch die großen Zahlen.	*Raúl erkennt die algorithmische Lösungsform des Studierenden, und weist darauf hin, dass wenn der Studierende vorher gekürzt hätte, eventuell weniger Fehler entstehen würden, durch die großen Zahlenwerte. (Bei diesen Fehlern meint er Rechenfehler bei der Multiplikation und bei der Vereinfachung des Bruches).* *Den Missbrauch des Gleichheitszeichens erkennt Raúl nicht.* ***Identifikation des Fehlers (nein):***

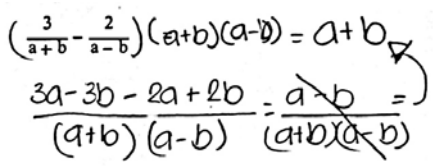
Soll ich jedes einzelne analysieren?	***A1b*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Ja, bitte.	
R: Aufgabe 2  In der Situation # 2, sollte man ihn daran erinnern, wenn der Inhalt schon durchgenommen worden war, dass es nicht zulässig ist, zuerst die Wurzel zu ziehen, wie man es sehen kann, nicht wahr? Man muss auf die Potenzen hinweisen, die angebrachten Operationen (womit er wahrscheinlich Verfahren meint). Ich mache mit ihnen im Unterricht viel, eh, die Methode, einen Weg. Wenn sie diesen in mentaler Form machen, könnten sie es richtig lösen, aber ich möchte lieber, dass sie es systematisieren. Ich möchte, dass sie es so machen, wie ich es ihnen gezeigt habe, die Potenzen errechnen, dann addieren und zuletzt die Wurzel ziehen.	*Er geht davon aus, dass diese Aufgabe von jemandem gelöst wurde, der die Inhalte vorher durchgenommen hat. Er weist auf den Regelverstoß hin, dass die Vorgehensweise invalide ist.* ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a*** ***Weist auf Regelverstoß hin: B3*** *Raúl geht stark auf die Methode, auf die systematisierte Verfahrensweise ein.* ***Interpretation der Vorgehensweise: A2*** *Außerdem möchte er, dass "sie es so machen, wie er es ihnen gezeigt hat".* ***Zeigen (vormachen): C4*** *Hiermit kann man annehmen, dass sein Unterricht lehrerzentriert erfolgt, aber auch, dass er wenig Flexibilität für andere Lösungsprozesse hat. (Nur so wie ich es ihnen gezeigt habe).* ***Lehrerzentriert: E9*** *Er gibt somit den korrekten Weg an.* *Auf die Ursache des Fehlers geht er nicht ein.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
R: Hier würde ich, der Gruppe oder den Personen, oder dem Jugendlichen, der den Fehler gemacht hat, nahe legen, dass mehr als das Resultat, dass er die Aufgabe vor mir, bearbeiten soll, von Anfang an. Ohne auf Details des Resultats einzu-	*Die Schüler sollen die Aufgabe vor ihm bearbeiten, was er dann bei einem Fehler macht, geht nicht hervor, obwohl anzunehmen ist, dass er sie auf die richtige systematische Bearbeitung der Aufgabe aufmerksam macht.*

gehen, ich würde jetzt nicht das Resultat visualisieren, ist es falsch oder richtig, es gibt eine durchzuführende Systematisation, mehr bei solchen Jugendlichen.	***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** *Auch wenn für ihn im Moment "richtig-falsch" nicht überaus wichtig scheint, ist er sehr auf die Systematisierung bedacht.*
I: Du würdest dir also den Prozess ansehen?	
R: Klar. Siehe, du in der Universität, vielleicht ist die Situation anders, aber ich in der Secundaria...man müsste an das Niveau denken in dem man unterrichtet. Damit du dir eine Vorstellung machen kannst, z. B. hatte ich mit einem Lehrenden der Preparatoria, letzte Woche eine Meinungsverschiedenheit. Er brachte vor, er beanstandete, dass ich Punkte erteile, für den Prozess und beanstandete, dass ich das Resultat nicht sonderlich beachte. Aber wo ist der Prozess, bei einem Schüler in höheren Schuljahren, ist es ja gut, aber wo der Lernprozess noch nicht beendet ist. Für mich ist es wichtig ihnen zu sagen wo es lang geht.	*Raúl sieht einen Unterschied in der Bewertung der Leistung zwischen der Secundaria, Preparatoria und Universität. Für ihn sind besonders die Vorgehensweisen wichtig.* ***Zeigen (vormachen): C4*** *Dieses scheint ein guter Ansatz, jedoch möchte er den Schülern immer zeigen, wo es lang geht. Also, wieder lehrerzentriert und wenig flexible.* ***Lehrerzentriert**: **E9*** *Resultate der Aufgaben sollen erst dann mitbewertet werden, wenn (wahrscheinlich) der Lernprozess abgeschlossen ist. Hiermit unterscheidet er sich von den anderen interviewten Lehrenden und weist darauf hin, dass Fehler erst dann bewertet werden sollten, wenn der Lernprozess abgeschlossen ist.*
R: Ich evaluiere, ich sehe mir den ersten Teil an, dann den zweiten und dritten Teil, je nach Aufgabe, und wenn er sich am Ende in einem Vorzeichen geirrt hat, werde ich nicht die ganze Aufgabe als falsch bewerten. Oder wenn er sich bei einem Quotienten, oder in der letzten Operation irrt, in einer kleinen Multiplikation, dann ist doch nicht alles falsch, das ist eine ganz persönliche Meinung.	*Raúl sieht sich den Lösungsprozess genau an, und entscheidet, in welcher Phase des Lösungsprozesses der Fehler entstand.* ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** *Er ist der Ansicht, dass dann nicht die ganze Aufgabe falsch ist, wenn eventuell "eine kleine Multiplikation" falsch berechnet wurde oder ein Vorzeichen falsch ist.*

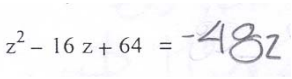
	Er bezieht sich wahrscheinlich darauf, dass die Fehler zufälliger Art sind. (vgl. RADATZ)
I: Ja, gerade deine persönliche Meinung interessiert mich.	
R: Aufgabe 3  Hier ist der Vereinfachungsprozess verfehlt. Man müsste die Schüler daran erinnern, es wurde ja schon gemacht, ich nehme ja an, dass der Inhalt schon bearbeitet wurde, oder?	*Er geht immer wieder darauf zurück, ob die Inhalte schon bearbeitet wurden. Er braucht die Bestätigung, da er sonst wahrscheinlich einer anderen Meinung wäre.* *In welcher Hinsicht die Vereinfachung falsch ist, geht aus diesem Kommentar nicht hervor.* *Für Raúl besteht ein Unterschied ob die Inhalte schon bearbeitet wurden, oder nicht.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Sicher, denke daran, dass die Prozesse von Anfangsstudierenden stammen.	
R: Dieses sind Fehler, die Terme müssen in Form von Produkten dastehen, um vereinfachen zu können, nicht wahr? Das Resultat, zu dem der Studierende gelangt, ist im vorhinein, da ein Prozessfehler besteht, falsch. Sieh mal, hier kannst du ein wichtiges Detail sehen, Cristina, für mich, ist das Resultat eine Konsequenz von... nicht wahr? Eine Konsequenz, dass, wenn ich den	*Es wurde gegen eine Regel verstoßen, diese kann nur bei Produkten (damit meint er wahrscheinlich Faktoren) angewandt werden. Er geht nicht sehr präzise auf den Regelverstoß ein.* ***Hinweis auf Regeln (wann ja): C6b*** *Er erkennt weitere Fehler bei dem "Kürzungsprozess", wie die verbliebene 1 und das Pluszeichen, nicht.* ***Identifikation des Fehlers (unvollständig): A1c*** *Da Resultat ist eine Konsequenz eines angewandten Prozesses oder einer Vorgehensweise. Offensichtlich ist das Resultat falsch, wenn ein fehlerhafter Prozess besteht. Ich denke er wollte noch einmal darauf einge-*

Prozess sehe, das Resultat offenbar falsch ist. Deswegen gehe ich mit ihnen auf alle Details ein, ich markiere Vorzeichen, inklusive schreibe Fragezeichen hin, ich schreibe ein Kommentar dazu...	*hen, wie wichtig der Prozess ist.* ***Fehlerhafte Prozeduren: D1b*** ***Zeigen (vormachen): C4*** *Bei durchsehen von Aufgabe würde er die Fehler markieren, ein Fragezeichen dahinter schreiben oder einen Kommentar dazuschreiben.* ***Fehler ankreiden: B2*** *Es fragt sich, ob bei dieser Methode ein Schüler die gebrauchte Hilfe erhält.*
R: Erinnere dich, oder erinnert euch, wenn es während des Unterrichts ist, dass man eine Vereinfachung, nur machen kann, wenn man Faktoren hat, und selbstverständlich dieses im Thema Faktorisieren, das wir dann gerade bearbeiten. Wenn wir Faktorisieren durchnehmen, bin ich noch expliziter, ich könnte die ganze Wandtafel mit Ratschlägen voll schreiben, aber da wir gerade Faktorisierung (er meint Vereinfachung von algebraischen Brüchen) bearbeiten, erinnere ich sie daran, und das mache ich oft, weißt du, Cristina? An die Verbindung von Konzepten. In meinen Klassenarbeiten, wenn sie schon mechanisieren, haben sie einen ersten Zugang zu den Konzepten, nicht als Definition, sondern in Form von Relationen von Konzepten; z.B. Simultane, Gleichungen und Unbekannte, wie kannst du (Schüler) diese drei Wörter verbinden? Sie verbinden dann ein Konzept mit dem anderen. Außerdem machen sie Ideenassoziation, er verknüpft Unbekannte, mit simultanen Gleichungen, oder zwei Unbekannte	*Er erinnert die Schüler daran, dass man für eine Vereinfachung Faktoren braucht.* ***Falscher Hinweis auf die Ursache: A6*** *Er springt abrupt auf das Thema Faktorisation über und beschreibt seine Unterrichtsstunde, "ich würde die ganze Wandtafel mit Ratschlägen voll schreiben".* *In der Zwischenzeit verwechselt er ein wenig die Termini Vereinfachung und Faktorisation.* ***Unangebrachte Ausdrucksweise des Lehrers: A5*** *Er verbindet anscheinend während seines Unterrichts verschiedene relationierte Inhalte.* ***Themen kombinieren: C11*** *Es ist nicht klar zu entnehmen, wie er die Konzepte in einer Klasssenarbeit erfragt. Dieses soll nach einer Mechanisation erfolgen, wo sie "einen ersten Zugang zu Konzepten haben". Er geht offensichtlich davon aus, dass die Mechanisierung zuerst kommt und sich dann Konzepte bilden. War das nicht schon mal bei jemandem der Fall? Dass er Gleichung, Unbekannte*

mit zwei Gleichungen. Ich merke dann, dass der Jugendliche konzeptualisiert, nicht wahr?	*und Simultane (was ist das) verbindet, könnte auf Begriffsbildungsprozesse verweisen: Assoziationen zu den Bezeichnungen* ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** *Es scheint, als würde Raúl das Wort Konzept aus dem umgangssprachlichen Gebrauch nehmen.* *Oder meint er eher, dass er die Schüler nach ihrem Wissen über Gleichungen, simultane Gleichungen und Unbekannte fragt? M. E. ist das Konzept der Unbekannten für Schüler reichlich schwer.* *Die drei Variablenaspekte (vgl. NOLTE, MALLE):* *Gegenstandsaspekt* *Einsetzungsaspekt* *Kalkülaspekt* *Werden in Mexiko nicht so differenziert unterrichtet.* *Es scheint eher eine Art „Conceptual Map“ zu sein, wo der Schüler die Beziehungen der einzelnen Inhalte herstellt. Etwa im Sinne; welche Beziehung haben Gleichungen und simultane Gleichungen* *Damit hebt er sich von den anderen interviewten Personen positiv ab.*
R: Hier könnte ich Faktorisierung mit Vereinfachung in Beziehung bringen, oder auch die Vereinfachung von Brüchen, und... fragen: Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer Vereinfachung von Brüchen und dem Faktorisieren? Die Terme müssten in Form von Produkten zu finden sein, um dann im Quotienten eine Vereinfachung der Terme zu erhalten. Gut...	*Seine Frage nach dem Zusammenhang scheint eher auf die Regeln und ihre Bedingungen und Eigenschaften eingehen zu wollen. “Terme müssten in Form von einem Produkt vorhanden sein”.* ***Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge (Ja): G1*** ***Hinweis auf Regeln: C6b***

	Erfassen der Ursache (nein): F2
R: Aufgabe 4  Ich weiß, das machen meine Schüler auch. In einem Bruch vereinfachen, multiplizieren, nein, ich gucke gerade, es ist eine Subtraktion, nicht wahr?	*Raúl denkt laut, womit er sich Zeit gibt, den Fehler zu suchen.*
I: Ja	
R: Er ermittelt den gemeinsamen Nenner, dividiert ihn, und hat dann hier gleich die Multiplikation ermittelt, siehe hier, noch einmal, gut. So wie ich es mache, man müsste erst die Multiplikation niederschreiben, bevor ich multipliziere, dieses kann zu Fehlern führen.	*Das Überspringen von Schritten kann zu Fehlern führen.* ***Zeigen (vormachen): C4***
Es scheint als sei hier kein Fehler, aber hier, nein, hier ist auch kein Fehler (er zeigt auf die Vereinfachung des Zählers). Sie sind gut zusammengezählt, er hat die Umformung perfekt vorgenommen.	*Er scheint einige Schwierigkeiten zu haben, den oder die Fehler zu entdecken.*
Ich schreibe: 3 (a- b), vor, an die Wandtafel, damit der Jugendliche weiß, was nachher kommt, und die Vorgehensweise macht, dass der Jugendliche keinen Fehler macht.	*Er schreibt die Vorgehensweise an die Wandtafel, der Jugendliche "soll wissen, was nachher kommt und keinen Fehler machen"* ***Lehrerzentriert: E9*** ***Zeigen (vormachen): C4***
Die Situation ihnen zu zeigen woher das nächste kommt, gibt dem Schüler eine Begründung, die ihm Sicherheit verleiht, einerseits, und andererseits eine höhere Kapazität zum Erfolg, in	*Schrittweises Vorgehen verleiht Sicherheit. Gute saubere Erklärungen! Das ist keine Begründung! Das ist*

der Bearbeitung von Aufgaben. Dadurch erhöht sich der Anteil des Richtiglösens sehr.	*Zeigen der Prozedur!* ***Lehrerzentriert: E9*** *Er ist der Ansicht, dass durch diese Handlungsweise die Jugendlichen die Aufgabe besser lösen können und weniger Fehler entstehen.*
I: Ich verstehe, dass du von ihnen den Lösungsprozess verlangst.	
R: Prozesse. Der Jugendliche konstruiert seinen Prozess, der Jugendliche eignet es sich an, es ist dann sein Prozess. Dann haben wir viel in diesen Jahren gewonnen, weil er konstruiert, wie können wir es sagen, sein Haus, sein Gebäude der Kenntnisse. Das behält er länger, als ein Thema, als dieses oder jenes. Wenn ein Schüler konstruiert, meine Stunden sind mit Beteiligung der Schüler. Ich sage, hier haben wir dieses, mal sehen du, so ja, ungefähr, gib mir eine Idee, was hältst du davon, und jetzt geht der Ball.. ich mache vieles in Zusammenhang mit Fußball, wir geben den Ball weiter nach hinten, der betreffende Schüler ist gerade etwas zerstreut und wir nehmen ihn mit in das Spiel auf. So ist es, guck hier, sehr gut, man sagt	*Kann ein vorgeschriebener Lösungsweg oder Vorgehensweise vom Jugendlichen konstruiert werden? Sich einen Prozess aneignen geht, auch sagen, dass ein bestimmter Prozess, mein ist,* *Werden hier nicht eher Verfahrensweisen eingeübt?* *Nach Raúl behält ein Jugendlicher Kenntnisse länger, wenn ihm der Prozess in allen Details vorgemacht wurde.* *Er steuert mit Hinweis auf Fußball, das soll wohl motivierend sein, die Aufmerksamkeit in Richtung des richtigen Verfahrens* *Wie macht er das?* *Er entwickelt seinen Unterricht durch gesteuerte Fragen an die Schüler: Wir haben dieses, „gib mir eine Idee“ wie ich beispielsweise eine Vereinfachung vornehmen kann.* ***Lehrerzentriert: E9*** *Da es eine Jungenschule ist, erreicht er etwas, wie später klar wird, wenn er mit ihnen “Fussball” spielt.* ***Aufmerksamkeitslenkung: C9***

ihnen nicht, dass es falsch ist, man sagt bloß, was ein anderer davon hält, einer seiner Mitschüler, ach dieses ist wegen diesem, siehst du es, wie es ist, warum hat er recht, und so sehen wir weiter.	*Es geht aus diesem Beitrag hervor, dass er vorsichtig mit den Fehlern der Schüler umgeht. Er fragt die Mitschüler, was sie vom vorgeschlagenen Prozess halten. Danach wird von den Mitschülern der richtige Weg angegeben, der Schüler mit dem Fehler soll sich das von seinen Mitschülern abgucken.* ***Zeigen (durch Mitschüler): C5***
R: Diese Situation, hinzuschreiben 3 mal...sagen was kommt, und viele Jugendliche sagen mir, weil (a+b) mit (a+b) annulliert (im Sinne eines Streichschemas, ein Durchstreichen) wurde, und was bleibt, 3 (a –b). Und sagen sie mir so, einfach und perfekt. Dann hier bei der Minus 2 mal (a+b). Es ist ein negatives Zeichen, bei meinen Schülern der Secundaria, ich „mache“ sie verstehen, dass es ein Zeichenwechsel ist, der jetzt in der Multiplikation vorkommen wird. Sicher, sie können direkt die Operation ausführen und dann das Vorzeichen wechseln, was etwas länger ist. Oder sie könnten die 2 gleich mit dem Vorzeichen multiplizieren.	*Bei dem fragendentwickelnden Unterricht, das von den Schülern zu fordern, was als nächstes an die Wandtafel geschrieben werden sollte, ist schwer zu erkennen, ob auch wirklich alle Schüler es wissen.* ***Fragendentwickelnden Unterricht: E7*** *Raúl geht auf das Minuszeichen ein, auch darauf, dass ein Zeichenwechsel bevorsteht, jedoch erkennt er den Fehler mit dem Vorzeichen nicht.* ***Identifikation des Fehlers (nein): A1b*** ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
R: Aufgabe 5:  Hier haben wir, es hätte faktorisiert werden müssen, es steht keine Anweisung dabei.	
I: Nein, aber im Examen, von dem ich es gescannt habe, ist es eine Aufgabe zwischen vielen, die faktorisiert werden	*Raúl hat recht mit seinem Kommentar, ich vergaß ihn vorher darauf aufmerksam zu machen, er erkannte auch die*

sollte.	*was hätte gemacht werden sollen. Mir scheint, dass es zwar wichtig ist die Anweisung dazuzuschreiben, aber bei der Identifikation der Fehler kaum eine entscheidende Rolle spielt.*
R: Ich habe die Idee; definiere, manchmal in den Anweisungen	*Er geht wieder auf das Fehlen der Anweisung an.*
I: Ich bin mir bewusst, dass die Anweisung hier fehlt, aber im diagnostischen Test stand es ganz klar da.	
R: Ich wollte nur dieses anreichern	
I: Danke, nehme also an, es steht dort, dass faktorisiert werden soll.	
R: Wir haben beispielsweise eine Anweisung; klassifiziere, ich handhabe dieses viel in meinen Arbeiten; wie auch identifiziere. Visuelle Situationen, und dann vervollständige, gelegentlich gebe ich ihnen die gelösten Aufgaben. In gewissen Teilen der Sequenz, entscheidende, lasse ich eine leere Stelle, die sie ausfüllen müssen, auch das wird ihnen manchmal schwierig. Die Logik spielt eine entscheidende Rolle hier, und das gefällt mir. Auf der anderen Seite haben wir eine Sektion der Anwendungen, siehe als letztes versuche ich die Anwendungen vorzunehmen, ich versuche Probleme zu lösen (hier wahrscheinlich Probleme im Sinne von Anwendungsaufgaben). Ich erfinde Probleme, vielleicht triviale Sachen, oder aus dem Fußball, ich werde nicht schlecht über America sprechen (America ist ein sehr beliebter Fußballverband in Mexiko). Der Fußball hat einen Radius von so und so viel, ich zeichne das Emblem von America ein, du solltest sehen, dass meine Unterrichtsstunden sehr dynamisch sind, du	***Löst sich vom konkreten Beispiel: H*** *Es gibt den Anschein, als hielte er sich an die Taxonomie von BLOOM.* *Jedoch nur bis zu den Anwendungen, Analyse, Synthese und Evaluation sind nicht gefragt.* *Er erfindet Anwendungsaufgaben, mit Umweltbezug, besonders mit einem Fussball, da es eine Jungenschule ist.* ***Veranschaulichungen: C7*** ***Offensichtlich liebt er Fußball*** *Er beschreibt, wie er die Jugendlichen mit einbezieht, in dem er das Emblem der Fußballmannschaft einzeichnet. Seine Unterrichtsstunden bezeichnet er als dynamisch, den Hinweis auf Fußball bedeutet Einbezug von Umweltbezügen, aber es ist die Frage,*

trägst sie so, dass sie das Konzept als etwas alltägliches handhaben. Mathematik ist dürr, und dann... Wenn es eine Faktorisierung ist, dass ist sie von vornherein falsch.	*wie er es verwendet. Was macht er mit den Beispielen aus dem Fußball? Stellt der dazu Sachaufgaben? Konzepte werden wahrscheinlich auf einer alltäglichen Basis gehalten.* *Er bezeichnet das Fach Mathematik als ein dürres Fach.* *Er kehrt zu der vorgegebenen Aufgabe zurück, und sagt, dass sie falsch gelöst wurde.* ***Erfassen der Ursache (nein): F2***
I: Weißt du, was der Studierende gemacht hat?	*Da er sehr oberflächlich sagt, die Aufgabe ist falsch, soll noch einmal nachgefragt werden, ob er weiß, was der Studierende gemacht hat.*
R: Er hat einfach, lass mich sehen, beispielsweise, addiert, er har algebraisch addiert, meine ich, nicht wahr? Er setzt auch ein verkehrtes Vorzeichen, wenn er addiert, hätte er + 48 von 64 – 16, schreiben müssen.	*Hier erfolgt eine Beschreibung der Verfahrensweise* ***Interpretation der Vorgehensweise des Schülers: A2*** ***Identifikation des Fehlers (richtig): A1a***
I: Und warum glaubst hat er das gemacht?	
R: Er hat nicht gedacht, dass es eine Faktorisierung war, sondern eine Reduktion ähnlicher Terme, ohne ähnlich zu sein.	***Erfassen der Ursache (nein): F2*** *Er geht auf eine Unkenntnis der ähnlichen Terme ein.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e***
I: Und wie kommt er zu dem z?	
R: Einfach hingeschrieben, weil es ein Buchstabe ist, nicht wahr?	*„z“ wurde einfach dazugeschrieben, weil es die Variable ist.*

I: Und das z^2 am Anfang?	
R: Die hat er ignoriert. Hier, z. B., wenn ich solche Situationen sehe, die ich mit der Zeit verfolgt habe (er meint die fehlerhaften Prozesse), auch mit Jugendlichen mit Lernschwierigkeiten. Jugendliche mit evidenten Lernschwierigkeiten, kommen nicht soweit und dazu. Sie bearbeiten es, als wenn sie eine Wurzel ziehen müssen, und hier kommen viele nicht weiter, siehe, sie versuchen zu beweisen dass es eine Faktorisierung nach der ersten binomischen Formel ist. Sie ziehen die Wurzel und die Wurzel (er zeigt auf den ersten Term und auf den letzten (oder dritten)Term, und oft wissen sie dann nicht, wie sie die Aufgabe zu Ende bearbeiten sollen. Sie können sich an den Anfang erinnern, weil ich viele Pfeile einzeichne, sehr nette Pfeile, und ich sage, seht, stellt euch vor, dass dieses ein Globus ist, der Globus ist mit der Wurzel verbunden. Und was passiert jetzt? Ich schreibe es jetzt als Herzchen, was ist jetzt passiert? Es ist eine Jungenschule. (Raúl lacht), so können sie sich besser an die Situation erinnern, nicht wahr?	*z^2 wurde ignoriert.* *Hier könnte ein Hinweis auf: „was schwierig ist, lasse ich weg“ vgl. MALLE.* ***Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind: J*** *Er geht auf Schüler ein, die Lernschwierigkeiten haben.* *Er kommt auf die vorgegebene Aufgabe zurück, und beschreibt einen Prozess, der eine Umkehrung der zweiten binomischen Formel wäre, erster und dritter Term sind Quadrate jeweils des ersten und dritten Terms.* *Er geht auf eine Prozedur ein, die von ihm ganz ausführlich und mit Pfeilen gekennzeichnet wurde.* *Die Darstellungen verbindet er mit hübschen Bildern, z. B. Herzchen, damit die Schüler sie leichter erinnern. Die Bilder beziehen sich nicht auf den mathematischen Kontext* ***Zeigen (vormachen): C4*** *Er versucht ihnen eine angenehme Situation (einen Scherz) zu bieten, um die Erinnerung leichter zu machen.* ***Aufmerksamkeit durch Entspannung erzeugen: C18***
I: Glaubst du, dass wir Schüler mit großen Schwierigkeiten eventuell nicht erkennen?	
R: Klar, und auch Schüler mit großen Schwierigkeiten, die man der Schuldi-	***Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind: J***

rektion nahe legt, die dann von der Direktion selbst in die Hand genommen werden. Ich glaube, diesen Schülern werden Privatstunden erteilt, einzeln, so werden sie auf das Klassenniveau gebracht.	*Die Schüler mit Rückstand werden der Schuldirektion anvertraut, die sich nach Aussage von Raúl um Privatnachhilfestunden kümmert.*
I: Glaubst du dann, dass deine ganze Klasse das gleiche Niveau hat?	
R: Nein, so ist es nicht.	
I: Wenn du ein Prozentanteil deiner Klasse angeben solltest, etwa von 30 – 35 Schülern, wie viel sind im Rückstand?	
R: Pro Klasse, ja. (er meint die Schüleranzahl)	
I: Wenn du einen Prozentanteil angeben würdest, wie viel glaubst du, die in Algebra gut sind? Sagen wir 3. Secundaria, weil in der 2. Secundaria fangen sie ja gerade mit Algebra an?	
R: Die, die Inhalte beherrschen, die gerade unterrichtet werden, etwa 20%. Und das wäre schon viel.	*Er meint, dass 20% seiner Schüler der 3. Secundaria die vorgegebenen Inhalte beherrschen.* *Raúl schätzt, dass nur 20% ,"und das wäre schon viel", die Inhalte der Algebra bis zur 3. Secundaria beherrschen. Zählt man unter „Inhalte beherrschen" Studierende mit, die etwa 80% des Tests richtig beantworten, so stimmt diese Vermutung von Raúl nicht mit den Resultaten des Tests überein, da nur etwa 10% der Studierenden mehr als 80% des Test richtig lösten.*
I: Welcher Prozentanteil hat große Schwierigkeiten?	
R: Genauso, ich denke so 20%, das sagen mir die Statistiken. Ich spreche	*Er ist auch der Meinung, dass 20% seiner Schüler (nach seinen Statisti-*

von der Kurve, den größten Prozentanteil haben wir bei einer Note von 6-7-8. Dann haben wir die Vereinzelten die 9 oder 10 als Note haben. Bei mir sind die Prozentanteile der durchgefallenen Schüler nicht so groß, wie bei anderen Lehrenden, wo plötzlich die ganze Gruppe durchfällt.	*ken) im Rückstand sind.* ***Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind: J*** *Er geht darauf ein, dass bei ihm weniger Schüler durchfallen als bei anderen Lehrern.*
R: In unserer Schule werden die Leistungen so evaluiert. 50% die Klassenarbeit, 50% eine eigene Bewertung. Schüler können 50% der Note nur durch ihre Schulaufgaben erreichen, sagen wir sie haben nicht alle gemacht, dann haben sie 40% der Note, wie viel brauchen sie dann in der Klassenarbeit, um mindestens 60% zu haben? Was glaubst du, was sie in der Arbeit schreiben? Sie messen es genau aus... Ich schlage schon lange eine andere Form vor; die Klassenarbeit muss bestanden werden, um die Hausaufgaben mit einzubeziehen. Da hätte der Schüler mehr Motivation für die Klassenarbeit. Du kannst ja darüber nachdenken (womit er mich meint).	*Löst sich vom konkreten Beispiel: H* *Raúl geht auf die Evaluationsform in seiner Schule ein, mit der er nicht einverstanden ist, da Schüler mit einer sehr niedrigen Note in einer Klassenarbeit trotzdem eine 6 erhalten können.* ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k*** *Er schlägt eine andere Evaluationsform vor, die aber bei der Schuldirektion keinen Anklang gefunden hat.* *Mit dieser neuen Evaluationsform, müsste der Schüler sich für eine Klassenarbeit mehr vorbereiten, was er widerum für motivierend hält.* ***Motivation (extrinsische): C14b***
I: Du weißt, ich habe keinen Einfluss in der Schule.	
R: OK, dann für deine Untersuchung, weil wirklich viele Schüler berechnend sind, der einfachste Weg, der unkomplizierteste Weg. Die mindeste Bemühung.	*Er geht darauf ein, dass Schüler im Allgemeinen den einfachsten Weg gehen.* ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k***
I: Ich glaube das ist in vielen Sachen so.	

R: Hier könnte ich noch dazu sagen; diese Art von Schülern	*Raúl spielt sicherlich, mit seiner Bemerkung, auf die Tatsache hin, dass Schüler der privaten Schule, in der er unterrichtet von gut situierten Familien kommen. Er weist mit seinem Kommentar darauf hin, dass zwischen Eltern und Schule wenig Einigkeit in der Erziehung besteht, und dass viele dieser Ehen geschieden sind, oder sich wenig um die Kinder kümmern.*
R: Ich sage dieses, weil ich noch woanders unterrichte, Jugendliche die sich bemühen, die Courage haben, die versuchen bessere Noten zu schreiben. Sie haben das Bedürfnis.	*In privaten Schulen, wo die Eltern sich sehr bemühen ihre Kinder hinschicken zu können, ist ein großer Verhaltensunterschied. Ich denke Raúl wollte auf diese Tatsache eingehen.*
I: Wo gibst du auch noch Unterricht?	
R: Im Lateinamerikanischen Institut.	
I: Ist diese Schule staatlich?	
R: Nein, sie ist privat.	
I: Wie lange unterrichtest du schon?	
R: Ich habe diese Schule mitgegründet, er erzählt daüber wie die Schule gegründet wurde. Seit 25 Jahren unterrichte ich. Ich habe schon meine Kommilitonen in der Universität unterrichtet. Er erzählt über die Universität, die Chemieingenieurwissenschaften und dem Direktor der Universität, als er dort studiert hat. Angefangen habe ich zu unterrichten in Preparatoria (Preparatotia 2, ist eine staatliche Schule). Außerdem habe ich auch Erwachsene unterrichtet, die Schwierigkeiten mit all diesem haben. Auch Schüler mit Lernschwierigkeiten, bei ihnen haben wir die Evaluation an	*Raúl beschreibt wie lange, und wo er in 25 Jahren seiner Lehrertätigkeit unterrichtet hat.* *Seine Erfahrung hat er auch bei Erwachsenen gesammelt.* *Schüler mit Lernschwierigkeiten, war das Thema seiner Fortbildungshausaufgabe, in Didaktik der Wissen-*

ihren Fähigkeiten gemessen. Wir haben viel von ihm gelernt (er spricht von einem bestimmten Schüler), besonders ich, ich habe meine Fortbildungshausaufgabe über ihn geschrieben, als ich Didaktik der Wissenschaften erlernte.	*schaften.*
I: Und wo hast du das gemacht?	
R: An der Universidad Anáhuac (eine private Universität in der Stadt Mexiko, von der auch die Schule, in der Raúl unterrichtet abhängig ist) Er erzählt über die Person, die diesen Master ausgearbeitet hat und kommentiert, dass sie dazu andauernd nach Mexiko gefahren sind.	
I: War es ein Master?	
R: Nein, ein diplomado (zu interpretieren als einen Fortbildungskurs). Er erzählt von Dingen, die er mit den anderen Lehrenden besprochen hat. Er setzt das gelernte jetzt in die Praxis um, auf alltäglichen Situationen. Das Thema, über das ich geschrieben habe, waren Schüler der 3. Secundaria, ich habe einen diagnostischen Test gemacht, Klassenarbeiten mit Laborübungen, damals unterrichtete ich Chemie.	
	Da die Kassette umgedreht werden musste, um weiter aufzunehmen, habe ich die Gelegenheit genutzt, wieder auf meine eigentlichen Fragen einzugehen.
I: Ich wollte dich fragen, ob du etwas von Konstruktivismus weißt. Wie würdest du einen eher konstruktivistischen Unterricht charakterisieren?	

R: In der Methodologie oder in seinen fundamentalen Bestandteilen?	
I: Wie du möchtest, oder; betrachtest du deine Unterrichtsstunde als eine Konstruktivistische?	
R: In gewissen Punkten, in gewissen Teilen. Manchmal verfalle ich in den Fehler der Exposition.	*Er erkennt die Unterrichtsform der Exposition als einen Fehler, wenn man eine eher konstruktivistische Unterrichtsstunde erteilen möchte.*
Danach sage ich, genug, ich werde den Ball an jemand anderes weitergeben, dann lasse ich, dass sich die Schüler an dem Unterricht beteiligen, in dem ich einige Stellen des Prozesses indiziere, die ich möchte, dass sie klar sind.	*Man erkennt an einigen Stellen einen Widerspruch, einerseits gibt er „den Ball" weiter, andererseits kreidet er bestimmte Stellen im Prozess an, von denen er möchte, dass sie ganz klar verstanden werden.* ***Erkenntnisse durch Anleitung: E1***
Andererseits kontrastiere ich Meinungen der Schüler, über Resultate. Ich führe eine Debatte durch, was meint ihr? Ist es richtig, ist es falsch, sie autokorregieren sich.	*Andererseits lenkt er die Aufmerksamkeit auf die Fehler, „ist das richtig, ist das falsch".* ***Aufmerksamkeitslenkung: C9***
Ich sage ihnen, insofern ihr meine Vision als Lehrer habt, dass heißt, in dem Moment, in dem der Lehrer unnötig ist, insofern habe ich meine Pflicht getan. Ich bin nur ein Überträger der Kenntnisse, ein Ermöglicher der Kenntnisse.	*Seine beiden Aussagen, „Überträger und Ermöglicher" der Kenntnisse, stehen im Gegensatz, einmal lehrerzentriert und auf der anderen Seite, schülerzentriert.* ***Lehrerzentriert: E9*** ***Schülerzentriert: E10***
Insofern ihr mir beweisen könnt, dass ich mich geirrt habe, nicht weil ich mich wirklich geirrt habe in der Aufgabe, sondern weil ihr dann gelernt habt, die Fehler der anderen zu sehen... Und dieses auf einer philosophischen	

Ebene, auf der Ebene des Konstruierens des Schülers. Weil ich dann meine Pflicht erfüllt habe. Es geht nicht darum, dass alle Schüler eine 10 haben, oder dass alle Schüler alles wissen, sondern ob sie sich wirklich das Wissen angeeignet haben, dass es signifikant für sie war. Das ist das, was ich in meinen Stunden suche.	
I: In deiner Unterrichtsstunde, welchen Stellenwert haben Schülerfehler, oder als solches, der Fehler, welche Rolle spielt er in deiner Unterrichtsstunde?	
R: Der Fehler ist eine Gelegenheit, damit der Schüler lernt. Ich, wenn solche Fehler passieren, dann sage ich ihnen: du kannst , pass gut auf, diese Anmerkungen mache ich auch im Heft oder in der Klassenarbeit. Wenn ein leerer Platz in der Klassenarbeit ist, dann schreibe ich: „es ist klar, dass du nicht gelernt hast, dass du dich für die Arbeit nicht vorbereitet hast“; „dieses Mal hast du deine Aufzeichnungen gar nicht durchgesehen“. Die Jugendlichen wissen, dass ich hinter ihnen stehe, der Fehler für mich ist also eine Gelegenheit, in wenigen Worten.	*„Du kannst, pass gut auf“ ist wieder lehrerzentriert. Der Schüler soll gut aufpassen, er nimmt also an, dass der Schüler nicht genügend aufgepasst hat.* ***Zeigen (vormachen): C4*** ***Lehrerzentriert: E9*** *Seine Form mit Fehlern umzugehen ist eher lehrerzentriert, der Schüler hat nicht genug gelernt.* ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k*** ***Fehler ankreiden: B2*** *Er ist der Meinung, dass seine Form, Fehler anzukreiden und zu kommentieren von den Schülern als Hilfe angenommen wird, „sie wissen, dass ich hinter ihnen stehe“.* ***Erkennt den Stellenwert des Fehlers im Unterricht (nein): A10b***
R: Nicht der Unruhe, auch nicht des Leids. Bei dem Schüler ist die Vision vermutlich anders, er denkt wahrscheinlich, ich lasse es hier beruhen (er	*In Mexiko werden oft Teilpunkte für gewisse Ansätze erteilt, so dass Schüler denken, dass sie auch ohne besondere Anstrengung den Kurs be-*

meint einen Teil der Aufgabe), da er weiß, dass er schon einen Teil der Punktzahl erreicht hat. Der ist erreicht, der hilft mir um nicht durchzufallen, nicht wahr? Ihn interessiert nicht das was extra ist. Hier ist es ein Fehler, den der Schüler wissentlich macht, es ist nicht wirklich, dass es ein Fehler im Prozess war.	*stehen.* ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k*** *Er unterscheidet zwischen einem „Fehler" und ein „nicht- weiter- eingehen" in die Aufgabe.*
I: Wie würdest du auf einen Fehler reagieren?	
R: Nimm mal an, du bist mein Schüler. „Erinnerst du dich, dass wir diesen Teil schon durchgenommen hatten? Und der Schüler dann: „ach, ja", „was hätte hier stehen müssen?" In einer Situation, wo er die Aufgabe vielleicht noch nicht verstanden hat. Er verknüpft und erinnert sich; „ja, so war es", „ach, ganz einfach". „Und warum hast du es nicht getan?" Sch: "Ich habe es vergessen, aber ich entsinne mich, du ermöglichst, dass ich mich erinnere". In diesem Moment können viele Sachen passieren, er ist blockiert, er ist nervös, in konzeptuellen Situationen, die er nicht verbunden hat.	*Er beschreibt, die Form in der er auf einen Fehler eingehen würde:* *Die Inhalte hatten wir schon durchgenommen* *Angeblich erinnert sich der Schüler* *Er fragt, was sollte hier dann stehen?* ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** *Schüler hatte es vergessen.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e*** *Er meint, dass die Fehler aus Nervosität passieren, womit er wahrscheinlich meint, dass die Fehler zufälliger Art sind, was nach RADATZ (1980) nur selten vorkommt.* ***Affektive Komponente im Lernprozess: I***
I: Und wie kannst du zwischen einem konzeptuellen Fehler und Nervosität unterscheiden? Kannst du es in einer Aufgabe unterscheiden?	
R: Ausgerechnet hat sich in meiner Klasse so eine Situation ergeben. Der Jugendliche, F.M., er möchte, aber	*Er beschreibt die Situation zweier seiner Schüler, der eine hat wahrscheinlich Lernschwierigkeiten, „möchte,*

kann nicht. Es wird in seinen Hausaufgaben evident, in seiner Beteiligung im Unterricht, nicht nur in einer Hinsicht, nicht nur bei einer Aufgabe. Und ein anderer Jugendliche, eine totale Zerstreuung, aber er ist fähig. Er hat es bewiesen, sehr oft, aber er erhält eine Null, eine runde Null, weil, wenn er nicht will, dann macht er es nicht, er will nicht, weil er nicht weiß, weil er nicht aufgepasst hat. Da sage ich dem ersten Jugendlichen: „du möchtest und kannst nicht, der andere kann und möchte nicht." Das Paradox habe ich ihnen gesagt, und alle haben verstanden, dass es ein großer Unterschied ist, zwischen dem was man unterrichtet und dem was hängen bleibt, ja? Und sie wollen es nicht genießen, sie wollen selber nichts erbringen, nichts leisten. Im Falle des anderen Schülers, V.G., er ist ein Phänomen. Er ist hyperaktiv. Ich kann ihn nicht bewegen sitzen zu bleiben, er steht in einem gewissen Moment auf, stell dir das vor? Verzeih, ich sehe dich wie die Mütter meiner Schüler. Ich sage der Mutter von V.; V. kann, für mich ist eine Situation des Willens, dass er sich setzt, und er hat sich gesetzt und er hat mir bewiesen, dass er weiß (er meint jetzt die Mathematikinhalte). Das Wichtige ist hier, dass er ein wertvoller und guter Jugendliche ist.	*aber kann nicht" der andere „könnte, aber will nicht".* *Diese Beschreibungen beantworten die Frage des Interviewers nicht.* *Man sieht, dass ihn die Frage der Schüler, die nicht gut abschneiden, aus welchem Grund auch immer, beschäftigt.* ***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k*** *Er geht auf die Situation eines anderen Schülers ein, der hyperaktiv ist.* *Er sagt, stillsitzen ist eine Sache des Wollens, und nach einem Gespräch mit der Mutter des Jugendlichen, hat dieser stillsitzen können.*
I: Letztlich, wie unterscheidest du zwischen einem Schüler, der Fehler aus Nervosität oder konzeptuelle Fehler macht?	
R: Fehler, im Unterricht sind evident, den ersten Schultag fängst du an deine Schüler zu kennen, wenn du die erste	*Raúl kennt seine Schüler nach der ersten Schulwoche „Radiografie".*

Prüfung schreibst, habe ich schon eine Radiografie von jedem meiner Schüler, von der ersten Woche an.	
R: Im Falle, dass wir einen diagnostischen Test vornehmen würden, ohne zu wissen, wie jeder Schüler ist, könnte ich es nicht unterscheiden, da könnte ich kein Urteil aussprechen. Beispielsweise, wenn ich morgen an der Universidad Panamericana einen diagnostischen Test veranlassen würde, könnte ich es nicht definieren...	*Raúl ist der Ansicht, dass bei einem diagnostischen Test ohne zu „wissen wie jeder Schüler" ist, kein Urteil darüber gefällt werden kann, ob der Fehler aus Nervosität gemacht wurde.*
I: Z.B. in der 3. Aufgabe, glaubst du, dass durch Nervosität diese Kürzung vorgenommen wurde, diese Vereinfachung?	
R: Nein, hier ist es konzeptuell.	*Raúl erkennt, dass der Fehler der dritten Aufgabe nicht aus Nervosität gemacht wurde. Was versteht er unter konzeptuell?*
I: Das ist das Detail, in der 2. Aufgabe, kann es durch Nervosität passieren?	
R: Nein, auch nicht.	*Auch den Fehler der zweiten Aufgabe identifiziert er als, einen nicht durch Nervosität hervorgerufen wurde.*
I: Welches wären dann Fehler die durch die Nervosität hervorgerufen werden?	
R: Schau, eh...	
I: Warum schreibst du mir hier, hinten auf der Seite nicht einen Nervositätsfehler hin? Einen, den du so einstufen würdest, von M., eventuell einen, den du bei einer Klassenarbeit entdeckt hast.	
R: Ich müsste die Arbeiten, die Aufgaben holen; aber so aus dem Gedächt-	*Es scheint, als könne sich Raúl auf keinen Fehler, der durch Nervosität*

nis wiedergeben...	*hervorgerufen wurde, erinnern.*
I: Gut, etwas an was du dich erinnerst, das durch Nervosität hervorgerufen wurde	
R: Oder wenn der Schüler bloquiert ist?	*Raúl meint auch, dass ein Schüler einfach vor einer Aufgabe bloquiert sein kann.*
I: Z.B., wenn sie die Aufgabe: 4x = 8 lösen.	
R: Schau, ich habe in einer Klassenarbeit in der 1. Secundaria, die Schüler auf die 2. Secundaria vorzuarbeiten, x + 2x, sie schreiben 2 + 1, x 3 und sie schreiben es dann x^3. Sie haben es so verstanden, vielleicht die Verbindung der Konzepte, sie haben es potenziert. Im Falle von F., ist die Situation anders, während der Klassenarbeit bewegt er sich viel und dann...	*Raúl geht auf die vorgegebene Aufgabe nicht ein.* ***Löst sich vom konkreten Beispiel: H*** ***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** *Er beschreibt die Vorgehensweise der Schüler bei einem Konkatenationsfehler, den er als eine Verbindung der Konzepte interpretiert „sie haben potenziert“.*
I: Was würde er hingeschrieben haben?	
R: Er hätte vielleicht x hingeschrieben, eine andere Sache, die es aber nicht ist, von deinem Standpunkt aus, kann es sein, dass das Konzept nicht klar war.	*Er verweist auf die Antwort, die wahrscheinlich F. gegeben hätte, und erklärt diese Antwort als einen Konzeptfehler, nach der Ansicht der Interviewerin.*
I: Siehe, wenn ich x + 3 schriebe, was würden die Schüler schreiben?	
R: 3x	***Beschreibung anderer Fehlermuster: A4c*** *Er erkennt sehr wohl, die verschiedenen Schwierigkeiten seiner Schüler, in*

	dem er auf einen typischen Fehler, wie diesen, hinweist.
I: OK, geschieht diese durch Nervosität?	
R: Wenn du es in einer Prüfung siehst, so, glaube ich nicht. Wie kannst du das evaluieren, mit der Situation der Person, die du nicht siehst?	*Einerseits, ordnet er den vorhergehenden Fehler nicht der Nervosität zu, andererseits, sagt er, man müsse die Situation des Schülers miteinbeziehen.*
I: Ich rede davon, in wie fern...	
R: Ich rede von Grundkenntnissen	*Hier geht Raúl auf die Grundkenntnisse ein, wahrscheinlich weist er auf fehlende Vorkenntnisse, als Ursache des Fehlers, hin.* ***Fehlende Vorkenntnisse: D1e***
I: Ich rede von Schülern mit einer normalen Fähigkeit, wenn sie nur Schwierigkeiten in Mathematik haben. Und wissen woher diese Probleme kommen. Was muss ich machen, wenn ich einen Schüler habe, der dieses macht (x+3 = 3x)	
R: Wenn man nur die Klassenarbeit und die Hausaufgaben hat, muss man noch andere Parameter in betracht ziehen.	*Er geht davon aus, dass man nicht nur eine Klassenarbeit als Parameter einsetzen sollte.*
I: Und welche Parameter nimmst du, um zu entscheiden ob dieser Schüler das Mathematikfach besteht oder nicht?	
R: Sieh mal, bei den Parametern, die hier angewandt werden (er meint die Schule), die Klassenarbeit, die Hausaufgaben, die Ordnung im Heft, kommt es auf die Nervosität gar nicht mehr an, wo man doch alles zusam-	*Raúl meint, dass es auf Nervositätsfehler nicht ankommt (in der Klassenarbeit), da auch Hausaufgaben und die Ordnung im Schulheft mitbewertet werden.*

menzählt zur Endnote. Nicht wahr? Gelegentlich mussten wir einigen Schülern sagen, sie sollten ihre Hefte wiederholen, es wird dir helfen zu lernen, du wirst einen Überblick gewinnen, und dadurch erhält er Extrapunkte, nicht wahr? Die Rolle eines Evaluators ist, die Fähigkeiten des Schülers mit allen seinen persönlichen Charakteristika, in Betracht ziehen. Es ist nicht nur ein 3x, oder...	*Damit die Schüler nicht in Mathematik eine ungenügende Note erhielten, wurde ihnen angeraten „die Hefte zu wiederholen“.* *Das hilft lernen.* ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** *Er geht davon aus, dass Schüler unterschiedlich bewertet werden müssen.* *Da auf den Schulen auch Schüler sind mit Lernschwierigkeiten, ist dieses eine Grundlegende Einstellung. In wie weit Raúl den Unterschied zwischen einem Schüler mit Lernschwierigkeiten und einen Schüler mit Mathematikschwierigkeiten unterscheidet, geht aus seinen Aussagen nicht hervor.*
I: Ich habe einen Lernprozess, wie du sagtest, und während diesem Lernprozess können Fehler auftreten, aber am Ende des Lernprozesses, wenn wir annehmen, dass er abgeschlossen ist, möchte ich, dass die Schüler die Aufgaben richtig bearbeiten. Wenn sie Fehler machen, was ist passiert? Warum machen sie immer wieder die gleichen Fehler?	
R: Mit viel Wiederholung, aber ich sage dir noch mal, mit den Schwierigkeiten der eigenen Schüler, wird er diese Folgeerscheinung haben und die Situation wird sich immer wiederholen. Das habe ich mit Schülern gemacht, die ein Jahr weiter waren. Sie wiederholen die gleichen Fehler. Ich sehe es auch in der Preparatoria,	***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** *(eventuell meint er auch Üben)* ***Üben = Mechanisieren: E2*** *Er ist sich jedoch bewusst, dass die Fehler sich wiederholen.*

sie sind weiter fortgeschritten, sie haben Lernschwierigkeiten...	
I: Welche Lernschwierigkeiten meinst du?	
R: Schwierigkeiten des Behaltens und der Wiederholung der Aufgabe (wahrscheinlich im Sinne einer Analogie der Aufgaben), das hängt nicht mehr vom Lehrer und nicht mehr von akademischen Situationen ab. Das habe ich viel gesehen.	*Für Raúl ist wahrscheinlich die richtige Lösung einer Aufgabe von dem Gedächtnis (Erinnerung an die Prozessschritte)sowie der Wiederholung (genügend Übung) abhängig.* *Raúl schiebt die Schuld nicht vorangegangenen Schuljahre zu.*
I: Es müsste doch einen Moment geben, wo wir nachdenken müssten, was wir mit diesen Schülern machen könnten. Wenn wir nichts unternehmen, werden sie mit diesen Fehlern bis in die Universität kommen.	
R: (zusammengefasst) E. hat eine Spur hinterlassen, wie nachsichtig waren wir Lehrer mit ihm? Eigentlich hat er nichts behalten, aber er hat uns später bewiesen, dass er einen Platz in der Gesellschaft hat. Er hat das Studium nach einem Jahr abgebrochen, hat geheiratet und ist zufrieden. Der Lehrer von diesem Standpunkt aus, es als Resultat sehen, ist sehr kalt, ist von unserer Realität sehr fern...	***Löst sich von der konkreten Aufgabe (Frage): H*** *Wieder geht Raúl auf Lernschwache Schüler ein. Auch diese haben später (ohne Mathematikkenntnisse, „er hat nichts behalten“) ihren Weg gefunden.* *Resultate in Mathematikaufgaben sind für Raúl „kalt“.*
I: Ich bin mit dir einverstanden	
R: Ich komme zu ihm, klopfe auf seine Schulter, kommt noch eine Aufgabe, noch eine, das Schlimmste, sage ich meinen Schülern, ist liegen bleiben und nichts machen. Stehe auf, mach noch eine Aufgabe und noch eine, und es geht plötzlich, vielleicht sind wir schon bei einem anderen Thema, aber wir nehmen ähnliche Aufgaben durch, man verstärkt das was vorher durchgenom-	*Er beschreibt, wie er seinen Schüler (durch einen auf die Schulterklopfen) Mut macht.* ***Themen kombinieren: C11*** ***Affektive Komponente im Lernprozess: I*** ***Beobachtet, dass einige Schüler im Rückstand sind: J***

men wurde, Brüche z.B., nicht wahr? Man nimmt Themen sequentiell durch, auf einem anderen Niveau, angepasst an die vorhergehende Situation. Oft sogar mit den gleichen Wörtern, erinnert euch, dieses ist so, dieses, weil dieses, ich zeichne Pfeile ein, und dann sagst du, ich habe mein Bestes getan.	*Sequentielles durchnehmen auf verschiedenen Niveaus spricht von einer Lernauffassung durch ein Spiralcurricula.* *„Raúl hat sein Bestes getan" scheint ein Ausdruck zu sein, um nicht zugeben zu wollen, dass er Zweifel an der eigenen Vorgehensweise hat. Hat er sein Bestes getan oder haben die Schüler ihr Bestes getan?* ***Zweifel an eigenen Vorgehensweise: B6***
R: Wenn wir die Resultate sehen, sagen wir uns, dass wir einen Menschen vor uns haben, eine Person, und mehr bei uns in der Schule (er unterrichtet an einer katholische Schule). (Verkürzt) Meine Ansicht ist, dass die Jugendlichen einen Platz in dieser Welt haben, genau, das hat E. bewiesen, er hat einen Platz, wo wir gedacht haben: was soll aus ihm werden? Ich möchte dieses Mexiko verändern, die Mathematik ist nur ein Vorwand. Für mich bin ich ein Schmied, jemand der Menschen prägt, vom Moment an, in dem ich in diese Schule kam, habe ich diese Aufgabe auf mich genommen.	***Affektive Komponente im Lernprozess: I*** *Raúls Einstellung zur Lehre ist idealistisch: er möchte „Mexiko verändern, Mathematik ist nur ein Vorwand".*
I: Auch hier bin ich einverstanden, jeder Schüler ist anders. Ich habe sehr verschiede Studierende.	
R: Ich weiß sogar, wer kaputte Schuhe anhat.	*Die Schüler sind ihm so wichtig, dass er auch auf solche Details achtet, auf Probleme außerhalb des Unterrichts.*
I: So ist es, es gibt bestimmt Schüler	*Die Interviewerin möchte noch mal auf*

die Probleme haben, die Tatsache, dass man die Probleme analysiert, ist darauf ausgerichtet, dass man ihnen helfen will.	*die Tatsache zurückkehren, dass einem Schüler nur geholfen werden kann, in dem man analysiert welche Ursache die Fehler haben.*
R: Dann kannst du mich in der Pause sehen, in außerschulischen Stunden, den Schülern zu helfen, ihnen ihre Ungewissheiten auf zu lösen. Und so, gibt es noch einige, die mit Ungewissheiten zum Examen kommen.	*Er erteilt Nachhilfe, in der Pause, nach Schulschluss. Er meint, dass auch so noch viele „Ungewissheiten" nicht geklärt werden.* ***Extrastunden: C15***
I: Klar	
R: Die Sitzungen sind sehr nutzbringend... (hier meint er Zusammentreffen mit anderen Lehrenden) Einige Schüler lernen um zu bestehen (den Kurs), sie lernen nicht um etwas zu gewinnen, wie viel bleibt ihnen? Bei dem Bewusstsein der Problematik, und des Konstruktivismus, denn ich leite meine Unterrichtsstunde so; wie viel bleibt ihnen? Ich sehe die Prüfungen, wenn ich eine Aufgabenlösung wie diese sehe, die bis zur Ermüdung durchgenommen wurde, wo man sagt, es ist nicht möglich dass noch...nicht wahr? Du fängst dann an zu analysieren, zu analysieren, ob es wirklich ist, dass er nicht weiß, denn er weiß es.	***Schüler lernt nur für die Klassenarbeit und vergisst dann: D1j*** *Die Aufgaben wurden bis zur „Ermüdung" durchgenommen, womit er wahrscheinlich wiederholtes Üben meint.* ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** *Heißt typische Fehler machen, dass man das Thema nicht kennt? „Wissen" mit Anleitung (eine Aufgabe zusammen mit Raúl zu bearbeiten) ist nicht „Wissen", um etwas in einer Klassenarbeit alleine zu bearbeiten.* *Der Schüler „weiß" wahrscheinlich unter seiner Anleitung.* ***Erkenntnis durch Anleitung: E1***

Wenn er es doch weiß, er hatte schon eine Note, dass ist der wichtige Faktor, dann schreiben sie in der Endarbeit eine 1 oder 2, Cristina. Dann sage ich immer wieder es soll kein Durchschnitt errechnet werden, wenn diese Endprüfung nicht ausreichend ist, sie haben alles genau errechnet.	***Keine Anstrengungsbereitschaft: D1k***
I: Wenn du sagtest, dass sie bei x+3 = 3x schreiben, welche Problematik weist der Schüler auf?	
R: Nun, vielleicht ein totales nicht konnektiert sein (im Sinne von nicht aufpassen), oder manchmal lassen sie es so, um irgendetwas zu schreiben. Es gibt Gelegenheiten, z.B., bei diesen Situationen, wo sie sagen, der Lehrer gibt mir bestimmt einen Punkt und lassen es unvollendet. Ich denke, wenn wirklich ein intelligenter Teil besteht, warum nicht, es ist falsch. Von vornherein, bist nicht zum Resultat gekommen, ist es falsch. Ich stimme mit den Lehrenden der Preparatoria überein, aber wenn er einen Prozess hat, kann man doch den Prozentanteil des Prozesses bewerten, oder nicht? Normalerweise erteile ich nicht mehr als einen halben Punkt.	***Erfassen der Ursache (nein): F2*** *Durch die Ausdrucksweise in Mexiko, meint Raúl wahrscheinlich, dass der Schüler während der Unterrichtsstunde eher abwesend ist und nicht aufpasst, als eine mangelnde Vernetzung. Er geht darauf ein, dass die Schüler mit „halben" Punkten rechnen, wenn sie irgendetwas hinschreiben.* *Umschwung seiner Meinung, jetzt ist er sich mit den Lehrenden der Preparatoria einig, in Hinsicht auf: gelangt man nicht zum Resultat, ist die Aufgabe falsch. Und er zweifelt ob er nicht doch einen halben Punkt erteilen kann.* *Es fragt sich natürlich, ob in diesem Prozess, wo er Teilpunkte erteilt auch ein „wertvoller" Prozess ist, also ein zum Teil korrekter Prozess.*
I: Möchtest du noch etwas zum Interview sagen?	
R: Nichts, nur dir sagen, dass diese Art von Fehlern, von der Situation und den Charakteristika der Schüler aus gehen.	*Er geht wieder auf die Situation der einzelnen Schüler ein.* ***Affektive Komponente im Lernprozess: I***
I: Wie würdest du dann begründen,	

dass viele Schüler die gleichen Fehler machen?	
R: Die Schüler dieser Schule sind so. Bei den Fehlern ist eine Situation des Konzeptes, es ist eine Situation, die schon fehlerhaft in der Durchführung ist, ein Fehler wenn man eine Multiplikation oder Division macht. Dieses braucht einen Prozess, für die Schüler der 1. Secundaria, ich wiederhole mit ihnen Arithmetik. Wie siehst du einen Fehler, bei dem der Dezimalpunkt (er bezieht sich auf die Division, die es vorher genannt hat), falsch ist. Ist es dann ein konzeptueller Fehler? Situation, in der bei einer Erklärung des Dezimalpunktes in der Unterrichtsstunde die Stellen nicht gut definiert wurde. Ich möchte dich aus diesem herausholen, ich sehe in dir einen gewissen Widerstand zum Fehler, der vielleicht ein blokiert sein war, vielleicht wenn er gerade im Examen war, der Jugendliche weiß es gut, aber er manifestiert es nicht. Hier möchte ich hin, dass du dich zu ihm setzt. Er macht es richtig, macht er es im Examen, und was passiert?	*Raúl ist sich nicht bewusst, dass diese Fehler von vielen Schülern gemacht werden.* *Mit „ braucht einen Prozess“, meint er wahrscheinlich, dass Fehler nicht von heute auf morgen behoben werden können. Es muss eine Wiederholung von Arithmetik gemacht werden.* ***Wiederholung der Inhalte hilft Fehler vermeiden: E5*** *Er geht auf einen bestimmten Fehler in der Division von Dezimalzahlen ein.* ***Vorausgegangener Unterricht: D2a*** *Er ist mit der Interviewerin nicht einer Meinung.* *„Setz dich zu dem Schüler“, er löst die Aufgabe richtig, in einer Klassenarbeit blokiert er dann.* ***Erkenntnis durch Anleitung: E1*** *Raúl interpretiert ein „Wissen“ vom Schüler, wenn er eine Aufgabe unter seiner Anleitung korrekt löst, ist sich aber wahrscheinlich nicht bewusst, dass er dabei „mithilft“, wie er es am Anfang erwähnt hat. „Erinnere dich an...“*
I: Könnte es nicht sein, dass, wenn du dich dazusetzt er sich von dir unterstützt fühlt? Vielleicht sagst du ihm auch wo es lang geht...	

R: Nein, ich orientiere ihn nur...	*Er ist davon überzeugt, dass er im konstruktivistischen Sinne unterrichtet. Aber er leitet die Schüler an und denkt, dass sei allein eine Orientierung. Er macht es so, um Sicherheit zu vermitteln.*
I: Beim Orientieren, vermeidest du, erinnere dich hier dran und dort dran, und dann kann er die Aufgabe lösen.	
R: Aber dann fühlt er sich sicherer...	
I: Weil du ihn führst, ohne Führung ist es viel schwerer...	
R: Warte, aber du behandelst auch affektive und emotionale Situationen, und ich glaube nicht, dass du diese Aspekte in Betracht ziehst.	***Affektive Komponente in Lernprozess: I***
I: Die Untersuchung zieht diese Aspekte nicht in Betracht, ich bin einverstanden, und bin mir dessen bewusst. Die Tatsache der Aversion gegen Mathematik, ist eine affektive Sache, die wahrscheinlich mit früheren Misserfolgen zu tun hat. (Verkürzt) Wenn ein Schüler der 1. oder 2. Secundaria einen Fehler macht, und ich genau feststellen könnte, wo die Ursache liegt, könnte ich ihm dann nicht besser helfen? Wenn ich ihm sage, bei der 3. Aufgabe, „du hättest faktorisieren müssen“, was würde es ihm nutzen, wenn er eigentlich nicht mal auf die Idee gekommen ist dass er faktorisieren muss, sondern ein Streichschema angewandt hat? Die Idee ist eher, ich analysiere was der Schüler gemacht hat, ich analysiere seinen Prozess...(Unterbrechung)	*Die Interviewerin ist sich bewusst, dass die affektive Komponente in dieser Untersuchung nicht in betracht gezogen wird,* *Interviewerin wollte noch hinzufügen: entdecke die Ursache des Fehlers, gehe mit dem Schüler auf die Ursache ein, er könnte seinen Fehler verstehen und er würde eventuell weniger Fehler machen und die Misserfolge wären weniger, so dass die Aversion gegen Mathematik geringer wäre. Dazu ließ*

	mich der Interviewte nicht kommen.
R: Und was steckt dahinter? Ich würde hinterfragen...	*Er fragt, was hinter diesen Fehlern steht, da er wahrscheinlich nicht die Ursache der Fehler erkennt.*
I: Aber es geht, es gibt Bücher von Untersuchungen, die in dieser Hinsicht geführt wurden, in denen die Ursachen der Fehler analysiert werden.	
Raúl wurde von seiner Schulleitung gerufen, und ich fragte nur noch ob er noch etwas hinzufügen wollte, worauf hin er „nein“ sagte.	

Auswertung und Deutung des Interviews mit Raúl:

Raúl erkennt nicht alle Fehler, z.B. sieht er in der 4. Aufgabe keinen Fehler, nicht den Vorzeichenfehler und auch nicht das Weglassschema.

Bei Aufgaben mit erkannten Fehlern, beschreibt er die Vorgehensweise des Schülers, meistens mit einem Hinweis auf bestimmende Charakteristika der Regeln.

Seine Form, Schüler auf Fehler hinzuweisen, ist, sie anzukreiden, auch oft mit Kommentaren wie: „man sieht, dass du nicht gelernt hast, ich weiß, dass du es kannst, versuche es noch einmal“.

Raúl geht sehr auf die Prozesse ein, er ist der Ansicht, dass ein Schüler die Prozesse im kleinsten Detail lernen muss, damit er keine Fehler macht. So geht er wahrscheinlich mit ihnen immer wieder die Prozesse durch, „zeigen (vormachen). Wann kann eine Regel angewandt werden, wann nicht. Dass Ursache der Fehler oft nicht in dem Verstoß einer Regel liegt, ist Raúl nicht bewusst. Ein Wiederholen der Inhalte (Regeln noch einmal erarbeiten) hilft seiner Ansicht nach, Fehler zu vermeiden. Sein Verständnis vom Lernprozess ist wahrscheinlich, dass die Erkenntnis durch Anleitung erfolgt: Aufzeigen des Lösungsweges, üben und dann zwangsläufig die Erkenntnis.

Verantwortlich macht er fehlende Vorkenntnisse, dass Schüler nur für die Klassenarbeit lernen und dann alles vergessen, und dass sie nicht bereit sind, sich anzustrengen. Er meint sogar, wenn er oftmals den Aufgabentyp vorgeführt hat, liegt es nicht mehr an ihm.

Für Raúl sind viele Fehler durch Nervosität bedingt. Jedoch ist während des Interviews, auch wenn vom Interviewer nachgefragt wurde, nicht klar geworden, welche Fehler er für zufällig hält. Bei der Rückfrage von zwei der konkreten Aufgabenstellungen, hat er gemeint, diese Fehler unterliegen einem Konzeptfehler.

Besonders hat Raúl sich, während des Interviews, den Schülern mit Lernschwierigkeiten gewidmet, wahrscheinlich auch denen, die Hyperaktiv sind. So ist er oft auf affektive Komponente des Lernprozesses eingegangen. Der Interviewer ist sich dieser Tatsachen bewusst, jedoch war dieses nicht das Ziel der Untersuchung.

Während des Interviews wollte Raúl den Interviewer davon überzeugen, dass eine affektive Komponente im Lernprozess besteht, jedoch ist er wahrscheinlich nicht in der Lage, zu verstehen, dass eine Aversion der Mathematik gegenüber, oft durch Misserfolge (viele Fehler) entstand. So lange man Schülern nicht helfen kann, die Fehler einzusehen, und in ihren Prozessen weiterhin sich Fehler häufen, werden sie auch keinen Gefallen an der Mathematik finden. Fehler ankreiden, Prozeduren noch einmal bearbeiten, die Regeln noch einmal durchnehmen, wird wenig zur Fehlerbehebung helfen. Auch er erkennt, dass viele Schüler im Rückstand sind.

Anhang 21a: Original auf Spanisch geführtes Interview mit Raúl und Tabelle der in der Deutung gefundenen Kategorien:

Fecha: 14/03/06

Estudió Ing. Química en la Universidad de Guadalajara

Edad: 46 años

Clases en Secundaria varonil.

R: Años pasados se proyectó una idea de capacitar ala personal docente, dándole la posibilidad también, pero no se ha hecho.

I: Te doy una hoja, por si necesitas escribir algo.

R:

Ejercicio 1: El estudiante podría evitar procedimientos más largos, siendo que podría simplificar desde el principio. Sin entrar en mucho detalle del resultado entraríamos en una simplificación inmediata para no llegar a un resultado, que podría ser erróneo al manejar cantidades muy grandes.

¿Te analizo cada uno de ellos?

I: Por favor.

Ejercicio 2:

R: En la situación # 2, habría que hacerle recordar, porque si la clase ya se dio anteriormente, recordar que es inválido sacar primeramente la raíz, ahí, como está mostrado, ¿no?, pero hay que señalar las potencias, las operaciones indicadas. Yo lo que hago mucho en clase es, eh, el método, un camino, que si ellos lo tratan de hacer de forma mental, pues, puedes acertar en muchos de esos resultados, pero yo quiero que sistematicen, quiero que lo hagan de manera como yo les enseñé en clase, elevando las potencias, después sumando y finalmente sacando la raíz.

Aquí encomendaría al grupo o a las personas, o al chico que lo hizo, a que, más que el resultado, que me desarrollara el ejercicio, el ejercicio de raíz.

Pues sin entrar mucho en detalle del resultado, yo ahorita no visualizaría el resultado, está bien o está mal, sino que hay una sistematización anterior, más en chicos, aquí habría, ¿al procedimiento, te refieres?

I: A que tú vieras el procedimiento que siguieron

R: Sí claro, y más, ahí te va, a lo mejor, tú, ya en tu caso en la Universidad, sea distinta la situación, porque yo en Secundaria, se tendría que pensar en el nivel con el cual se está trabajando. Por ejemplo: para mí cuenta mucho el procedimiento y recientemente para que te des una idea...

I: ¿Das clase en secundaria, verdad?

R: Y para que tengas tú, por ejemplo, con un comparativo con un compañero de la preparatoria, tuvimos la semana pasada una diferencia. Él me alegaba, es que, los puntos, él me reclama, los chicos que entran a la preparatoria y me reclama mucho, que no tomo muy en cuenta el resultado, pero: el procedimiento en qué parte está, para un chico que llega a un proceso más elevado de conocimiento, pues está bien ya le exiges el resultado; pero mientras estás en el proceso de enseñanza, de decirles por dónde va, el ejercicio, para mí es muy importante. El ejercicio, yo evalúo, voy viendo la primera parte, la segunda parte, tercera, según el ejercicio, y si se equivocó en el signo final, no se la voy a poner todo mal. O si se equivocó en el cociente, o en la operación última, en una multiplicacioncita, es especialmente para un chico de enseñanza media superior, es que está mal el ejercicio, porque no puedo llegar al resultado final, pero si todo el proceso está bien, y quizás ahorita me estoy yendo por una apreciación muy personal.

I: Claro, claro, es lo que me interesa, tu opinión personal.

Ejercicio 3:

R: No, pues ahí está equivocado el proceso de simplificación, ya que, habría que recordarles, todo esto ya se hizo, bajo el supuesto que ya se les dio la clase.

I: Claro

R: Son errores ya de, que deben estar los términos en forma de producto, para poder hacer la simplificación, ¿no? El resultado al que está llegando, pues no, de antemano al haber un error en el proceso, va a estar mal. Fíjate que, ahí te estás dando cuenta de un detalle importante, Cristina, para mí, el resultado es una consecuencia de, ¿si?, una consecuencia de, si yo veo el proceso, evidentemente el resultado está mal, entonces es por eso, que yo me meto de lleno a ver los detalles, les marco signos, les marco, inclusive pongo signos de interrogación, y pongo un comentario.

Recuerda, o recuerden, si es a nivel del grupo, que la simplificación, aquí te lo estoy poniendo largo, yo agarro y manejo abreviaciones, ...(er schreibt etwas auf) existen factores, y obviamente esto en el tema de factorización que estamos viendo. Ya si estoy viendo factorizaciones soy más explícito y podría llenar el pizarrón con recomendaciones, pero como se está hablando del tema, estamos viendo factorización, les recuerdo, y yo manejo mucho, sabes qué, Cristina, la relación de conceptos. Inclusive mis exámenes, cuando ya ellos llegan a la parte mecánica, de mecanización de los ejercicios y ya tienen una primera entrada donde los conceptos, no a manera de definición, sino a manera de relación de conceptos, ejemplo: ecuación simultánea con incógnita, con este, método, de qué manera me relacionas tres palabritas y ellos unen un concepto con otro concepto y además de unirlos, hacen una asociación de ideas, conecta incógnita con ecuación simultánea, o dos incógnitas para dos ecuaciones. Eso ya me habla de que el chico conceptualiza, ¿no?

Por ejemplo aquí yo podría relacionar, factorización con simplificación, simplificación de fracciones, este, qué hay de relación entre la simplificación de fracciones con la factorización. Es que los términos deben estar en forma de producto en forma de factores, para que así en el cociente podamos obtener una simplificación de los términos. Bueno.

Ejercicio 4:

R: En la 4, ya sé, esto es algo que hacen mis alumnos también. Simplificar lo que es la fracción, multiplican, nada más que estoy viendo aquí, es una resta de fracciones, ¿no?

I: Sí

R: Sacan el común denominador, lo dividen, y están sacando aquí, ya directamente el producto, fíjate que aquí, otra vez, bueno, yo en lo que yo manejo, aquí habría que indicar el producto primero, antes de haber desarrollado el producto, esto puede llevar a errores. De hecho aquí aparentemente no hay ningún error, pero aquí, tampoco hay error. Están bien sumadas, ya lo convirtió, perfecto. Está bien terminado. Mira, yo hago esto, 3(a-b), lo indico, primeramente en el pizarrón, para que el chico sepa, qué es lo que va a continuar y el mismo procedimiento hace que el chico no falle. Esa situación, de mostrarle de dónde viene lo que sigue, le da a él un razonamiento, que le da seguridad, por un lado, por el otro le da mayor capacidad de éxito, en la resolución de ejercicios. Ahí el porcentaje en la asertividad es mayor en el chico...

I: Entonces yo entiendo, que tú haces que pongan sus procedimientos.

R: Procedimientos. Además de procedimiento el chico construye ese procedimiento, cuando el chico lo hace propio, este es mi procedimiento. Estamos ganándole mucho, en todos estos años de clase, estamos ganándole mucho, porque él está construyendo su, cómo le podemos decir, su casita, su edificio de conocimientos. Entonces eso se le queda más, que un tema, que esto y aquello. Cuando un alumno construye, inclusive mis clases son participativas, digo, a ver, tenemos esto aquí, Fulanito, eso, más o menos, dame una idea, tú qué opinas, ahora va la pe..., va en relación al fútbol, pasamos la pelota al que está allá atrás, a ese que está medio distraído y como que ya se mete en la jugada. Pues es así, mira a ver, muy bien, no le dice uno que está mal, como que le dice uno, qué opina entonces el otro, su compañero, a esto, por esto, te fijas, como está, por qué razón, y así vamos viendo.

Esta situación, de plantear el 3 por ... viene, y me lo dicen los muchachos, que porque se está cancelando el (a+b) con el (a+b) en el producto, y que nos queda en el producto indicado solamente el producto del 3 por (a - b). Y eso me lo dicen. Así, con la mano en la cintura, perfecto. Y entonces aquí habría que añadir, inclusive el menos del 2 por (a+b). Ahora, es un signo negativo, que para mí, en el caso de los chicos de secundaria, yo les hago entender que es un cambio de signo, que está por ocurrir en el producto, claro, que ellos pueden proceder a hacer la operación directa, y después cambiar el signo, les lleva un

poco más, de estar gastando un poco más de tiempo, pero que este dos, por el otro dos, lo pueden hacer ya directo, en la multiplicación de signos.

Ejercicio 5:

R: En el último, tenemos, pues aquí tenían que haber factorizado, no hay ninguna indicación.

I: No, pero en el examen, del que lo saqué estaba en una serie de factorizaciones, sólo a la hora de sacarlo, no le puse la indicación.

R: Yo tengo mucho la idea de: define. Y a veces en las instrucciones...

I: Yo estoy conciente de que no dice, pero en el examen de ubicación de los alumnos sí decía, y te estoy comentando que se trata de una factorización.

R: Simplemente estoy enriqueciendo más esto.

I: Gracias, considera que dice que hay que factorizar.

R: Tenemos por ejemplo la instrucción: clasifica; yo lo manejo mucho en mis exámenes o reactivos. Manejamos también: identifica. Situaciones visuales, y luego completa, hay ocasiones en que los ejercicios se los doy ya hechos. Ellos en ciertas partes de la secuencia, claves, les pongo un espacio vacío, como cuadrito, ellos rellenan el cuadrito, y eso a veces también les cuesta trabajo.

Aquí la lógica influye bastante, juega un papel importante, y me gusta mucho eso.

Por otro lado tenemos la sección de aplica; fíjate en un último lugar trato de hacer aplicaciones y trato de hacer problemas, los saco de boca en boca, invento problemas, cosas triviales, o de fútbol, no le voy a echar al América, el balón este, tiene el radio de tanto, y le pongo el emblema del América, y simplemente la proyección de la imagen del balón del América, vieras que las clases están muy dinámicas, los cargas a que el concepto lo manejen como algo cotidiano.

Las matemáticas son áridas, y entonces....

Si es una factorización, entonces esto ya de antemano está mal.

I: ¿Sabes lo que hizo el alumno?

R: Pues, simplemente, vamos a ver, por ejemplo, sumó, inclusive sumó algebraicamente, me refiero, ¿no? y le está equivocando el signo, le está equivocando el signo, si debe sumar, debe haber puesto + 48, 64 - 16.

I: ¿Entonces qué crees que hizo?

R: El no pensó que fuera de factorización, sino que sería una reducción de términos, dizque semejantes, sin ser semejantes.

I: ¿Cómo es que llega a la z?

R: Simplemente por ponerla, porque es una letra, ¿no?

I: ¿Y la z cuadrada al principio?

R: La ignoró. Ahí, por ejemplo, cuando veo yo este tipo de situaciones, que yo le he seguido la pista, hasta con los chicos con problema de aprendizaje, bastante evidentes, simplemente o lo dejan vacío, o no llegan a este tipo de cosas. Lo manejan desde el punto de vista, de que le sacan una raíz, y aquí se me atoran varios, mira, ellos tratan de demostrar que es el teorema del cuadrado perfecto, le sacan raíz y le sacan raíz, (señala el primer término y el tercer término) y a veces no saben cómo terminar el ejercicio. Lo recuerdan porque es una de flechitas que yo pongo, muy bonitas, muy monas, y a ellos les digo, miren hagan de cuenta, que es el globito, el globito se conecta con esta raíz. Y ahora qué pasó, lo pongo como corazoncitos, y ahora qué pasó, bueno, es escuela de hombres (Raúl se ríe).

Y se les queda la situación así grabada, ¿no?

I: ¿Tú crees, que nos pasan desapercibidos problemas fuertes de un alumno?

R: Si claro, y también, problemas fuertes de los alumnos los hay, los que se manifiestan, se reportan a la coordinación, que ellos atienden de forma directa. Creo que otro profesor prepara a sus alumnos ya de forma separada, aislada y los va poniendo a nivel. (Florentino es profesor de años anteriores a los que les da clase Raúl)

I: ¿Entonces tú crees, que todo tu salón tenga el mismo nivel?

R: No. No es así. No es tan determinante.

I: Si tú hablaras en porcentajes, ¿cuántos alumnos tienes? 30-35

R: ¿Por salón? Sí.

I: Si hablaras en porcentajes, ¿cuántos alumnos crees tú, buenos para las partes algebraicas? Digamos 3º de Secundaria, porque 2º de Secundaria apenas empiezan con el álgebra.

R: Que dominen la temática que se está dando, un 20%. Y ese porcentaje ya sería mucho.

I: ¿Cuántos crees tú, que tengan serios problemas?

R: Pues también, al revés, tendríamos que pensar, un 10 o un 20%, que es lo que nos dice la estadística. Te hablo de los números así está la curva. El mayor porcentaje lo tenemos en la curvo en 6-7-8. Luego están los aislados que sacan 9 y 10. Mis índices reprobatorios no están como en los otros grupos, donde de repente todo el grupo está reprobado.

Y, aquí te va, no sé si sepas cómo se evalúa aquí en el colegio; 50% del examen y 50% la evaluación. La evaluación de una manera, bien guiada, bien motivada y dándole un seguimiento constante, como lo hago yo, es una evaluación que si pesa, ¿no? 50% en un examen, donde los chicos de forma ordinaria, va abajo o reprueba, ya tienen ellos ganados por cosa del sistema, que se está manejando, 50 puntos, siempre y cuando hicieron todas sus tareas. Ponle, que no hagan todas, son 40 puntos. ¿Qué te gusta que saquen en el

examen? Y lo miden, es el problema que tengo con los coordinadores, miden esa situación.

Yo he estado proponiendo, desde hace mucho, que se promedie bajo la condición que el examen se pase, lo cual haría que el alumno se motivara para el examen. Te lo dejo de tarea...

I: Recuerda que yo no tengo ingerencia en el colegio.

R: Bueno, para tu investigación. Porque hay chicos, que nada más están midiendo, el mínimo esfuerzo.

I: Yo creo que en todos lados.

R: Aquí agregamos, este tipo de chicos.

I: En la UP es la misma cosa.

R: Te digo esto, porque también doy clases en otro lado, chicos que tienen el esfuerzo, el coraje, ni el honor de ponerlo todo en un examen saca mejores calificaciones. Tienen la necesidad.

I: ¿Das clases en dónde?

R: En el Instituto Latinoamericano

I: ¿Es de Gobierno?

R: No, ese particular.

I: ¿Cuánto tiempo llevas dando clase?

R: Soy fundador de este colegio. El primero fue el Centro Educativo Bugambilias, después se creó el Centro Educativo San Javier...Sigue platicando de la fundación y crecimiento de la escuela.

Tengo más o menos dando clases de matemáticas, unos 30 años. 25 años, para no exagerar. También les di clase a mis compañeros de la facultad... Habla de la facultad de Ingeniería química y del director Toño Oropeza. Empecé dando clases en la Preparatoria # 2, para foguearnos. He dado clases inclusive en el INEA, a adultos que tienen problema con todo esto... Platica sobre su experiencia con alumnos ya mayores, que tienen el interés por sacar la preparatoria... Inclusive alumnos con problemas de aprendizaje, recuerdo con mucho cariño, a este chico le explicábamos algo, pum, se le iba, lo hacía, pero tenía un corazón, sacó la preparatoria aquí a base de... se le evaluaba a base de su capacidad, fue una de experiencias que sacamos con ese chico, yo en lo personal, que hice mi tesis, de postgrado, en didáctica de ciencias.

I: ¿En dónde la hiciste?

R: Con los Legionarios, en la Universidad Anáhuac... Platica de la persona responsable del sistema de postgrados en la Universidad Anáhuac y comenta cómo estuvieron viajando dos años a México.

I: ¿Era maestría?

R: Era un diplomado, con valor a currícula...Platica de las experiencias que compartió. De ese diplomado estoy poniendo en práctica, de situaciones cotidianas del estudiante, y mi tesis versó sobre esto, alumnos de tercero de secundaria, que hice todo un diagnóstico, con exámenes con prácticas de laboratorio, en aquel entonces estaba dando química.

Pausa larga, para darle vuelta al cassette, lo cual permitió, retomar la entrevista.

I: Yo te quería preguntar si conoces algo del constructivismo. ¿Cómo caracterizarías una clase constructivista?

R: ¿En la metodología o en los principio básicos?

I: Como tú quieras, tal vez ¿tu clase la consideras constructivista?

R: En ciertos puntos, en ciertas partes. A veces caigo en el error de la exposición, ¿no? En la exposición literal, pero después cuando digo ya, hay que soltar el balón, hago que el alumno sea partícipe de la clase, señalando algunos puntos del proceso, que quiero que queden claros. Por otro lado también en la opinión, en el debate que da contrastar una opinión de uno de los estudiantes con el otro, en los resultados. ¿Qué piensan, a ver? Los que son de buen promedio, estoy bien, o estoy mal, y ellos ya se auto corrigen.

Les digo yo, en la medida que ustedes adopten la visión que yo tengo como maestro, esto es, que el maestro sea innecesario para ustedes, será la medida en que yo vengo cumpliendo con ustedes. Yo soy mero transmisor del conocimiento, facilitador del conocimiento. Ustedes en la medida que me demuestren, que me he equivocado, no es porque yo me haya equivocado realmente en el ejercicio, sino, que tu ya aprendiste a ver los errores de los demás...

I: Ahora...

R: Y ya esto en el plano filosófico, en el plano real del construir del alumno. Porque ya en esos niveles, yo ya, estoy cumpliendo mi misión. Que no es tanto que el alumno saque 10, o que todos los alumnos pasen, sino que verdaderamente el alumno se haya apoderado del conocimiento, que sea significativo para él. Es lo que busco mucho en clase.

I: Ahora, dentro de una clase, ¿qué papel juega, el que un alumno haga un error? ¿O en sí, qué papel juega el error mismo?

R: Error, es un área de oportunidad, para que el alumno aprenda. Yo cuando ocurren esos errores, inclusive, este tipo de recomendaciones: tú puedes, fíjate bien, estas son las observaciones que les pongo en sus tareas. Inclusive cuando hay espacios en blanco, que no contestaron, " es evidente tu falta de estudio, de preparación para el examen", "ahora sí, que no tocaste los apuntes". Todo eso ya como que lo perciben de antemano, los chicos saben, que yo estoy atrás de él, el error para mí, es una situación de oportunidad, en pocas palabras.

No de desasosiego, ni tampoco de pesar. En el alumno quizás sea poco menos distinto la visión que tiene del error que yo la veo, el dice, bueno, lo dejé así, porque ya veía que tenía un punto, ya ganado, y ese punto, me sirvió para pasar, ¿no? no le interesaba el extra. Y ahí no es un error buscado, o sea, que haya equivocado el proceso, sino premeditado y medido.

I: ¿Y cómo reaccionarías ante un error?

R: Mira, haz de cuenta que tú eras el alumno: "recuerdas, que habíamos visto esta parte" y solito el alumno, "ah, sí". "¿Qué es lo que aquí debería de haber sido?" En situaciones no complementarias, en donde el ejercicio tal vez no lo entendió, sino que va hilado él y va recordando, "Sí, así era", "huy, bien fácil". "¿Y entonces por qué no lo hiciste?" "Se me olvidó, o ahorita que lo estoy recordando contigo, me estás facilitando que yo lo recuerde. En ese momento pueden suceder varias cosas, bloqueos, nerviosismo, o situaciones conceptuales, que él no ligó o no hiló en ese momento.

I: ¿Y cómo puedes distinguir entre nerviosismo y problemas de concepto? ¿Lo podrías distinguir en un problema?

R: Precisamente, en el salón se dio una situación así. El chico, Fernando Meza, la verdad, el quiere y no puede. Se ha hecho evidente en tareas, en su participación en clase, no sólo en un parámetro, no sólo en un ejercicio específico. Y hay otro chico con una dispersión total, pero tiene capacidad. Lo ha demostrado, muchas veces, pero saca cero, cero redondeo, porque no queriendo, no, no lo hace, es más, no quiere porque el no sabe, porque no puso su atención. Y entonces ahí le digo al muchacho, y tú que quieres no puedes. Acá tu compañero, que puede, no quiere. Esa paradoja se las hice en el salón, y todos quedaron así, diciendo, hay un abismo muy grande entre el conocimiento que se da, ¿si? y que se queda, y que no quieren disfrutarlo, no quieren dar de sí mismos, en el caso del otro chico, era Víctor Gámez, que es todo un fenómeno. Es hiperactivo, no puedo mantenerlo sentado, se levanta en cierto momento de la clase, 1º de secundaria. Imagínese. Te estoy viendo como mamá de mis alumnos... Por ejemplo la mamá de Víctor. Le digo, Víctor puede, tan puede, que para mi es una situación de voluntad, de que se siente y se ha sentado y me ha demostrado que sabe. Se ha sentado con otros profesores también, lo importante aquí es que el chico es valioso y es un chico bueno.

El concepto, en un momento dado, ahí va a quedar, tenemos que reforzar ese concepto, de una o de otra forma, pero le va a quedar.

I: A final de cuentas, ¿cómo distingues entre un alumno, que se equivocó por nerviosismo, o porque tiene problemas conceptuales?

R: Errores, en clase es evidente, empiezas desde el primer día de clases, los empiezas a conocer, ya cuando llegas al examen, tengo yo una radiografía de cada uno de los chicos, desde la primera semana.

En caso de que hiciéramos un examen de diagnóstico sin saber, como es cada muchacho, no sabría yo distinguir, y ahí, no podría yo darte un veredicto. Por

ejemplo, si yo llegara mañana a la UP a aplicar un examen de diagnóstico, no podría yo definir

I: Por eso te pregunto, por ejemplo en este problema 3, ¿piensas que por nerviosismo pueden hacer esa cancelación, esa simplificación?

R: No, aquí sería de concepto. No, de concepto.

I: Ése es el detalle. En el 2, ¿podría ser por nerviosismo?

R: No tampoco.

I: ¿Entonces cuáles serían los errores que harían por nerviosismo?

R: Pues mira, eh...

I: ¿Por qué no me pones aquí en la parte de atrás un error por nerviosismo? De algo que tú considerarías, con Meza, como un problema de nerviosismo, de que tú detectes en un examen, que fue por nerviosismo.

R: Habría que traer un examen, un ejercicio, reproducirlo, así de memoria...

I: Bueno, algo que tú te acuerdes, que tú pienses que sea por nerviosismo.

R: O de bloqueo.

I: Por ejemplo, si resuelven una ecuación: 4x = 8

R: Mira, ahí te va: Puse en el examen x; estoy adelantando en 1º de Secundaria, lo que van a ver en 2º, como aplanar el terreno, ¿no?

x + 2x, ponen 2 y 1, x 3, (lo escribe en un papel, como x^3). Ellos entendieron, que a lo mejor a la relación de conceptos que hubo en clase, ellos sabían que elevarlo a la potencia. En el caso de Fernando, hay una situación distinta, una situación inclusive evidente a la hora de estar haciendo el examen, de estar así, de estarse moviendo, y vamos...

I: ¿Y qué te pondría?

R: Hubiera puesto; x quizás, otra cosa distinta, pero que no es; desde el punto de vista, como lo estás viendo tú, sea que el concepto no haya quedado claro, sino que:

I: Es que mira, cuando yo pongo x + 3, ¿qué crees que ponen los alumnos?

R: 3x

I: OK, ¿y eso es por nerviosismo?

R: Pues, cuando lo ves en un examen así, no creo, cuando lo ves de una forma muy clara en el examen, no. ¿Tú cómo vas a evaluar, con la situación de la persona, que no ves?

I: Yo te estoy hablando, hasta dónde....

R: Hablando con conocimiento de causa.

I: Yo te estoy hablando de alumnos con capacidad normal. Yo no sé hasta dónde, y creo que esta parte es muy importante, si sólo tengo dificultades en matemáticas. Y saber desde dónde vienen esos problemas.

¿Y qué es lo que yo tengo que hacer con un alumno que me haga algo así?

R: Cuando tienes un sólo recurso, que es el examen, una evaluación, se deben tomar en cuenta todos los parámetros.

I: ¿Y qué parámetros tomas para decir a este alumno lo voy a aprobar o reprobar? En un mes, en un examen, en un año escolar.

R: Mira, los criterios aquí: de tal manera que se aplican lo que es la evaluación en cuanto a apuntes, los trabajos, entrega, esfuerzo, ese nerviosismo pasa ya a un segundo plano, y donde se suman todas las aportaciones, todos los aspectos, ¿no? Ha habido ocasiones, en que con simplemente decirles a ciertos alumnos, como él, repíteme los apuntes, te va ayudar para estudiar, te va dar una idea más concreta de lo que va a venir en tu examen, y eso le da una bonificación extra, ¿no? El papel de evaluar a un alumno de acuerdo a su capacidad, con todas sus características personales.

No nada más por un 3x, o por...

I: Lo que pasa es que, a final de cuentas: mira; yo tengo un proceso de aprendizaje y como sea en un proceso de aprendizaje puede haber error; pero al final del proceso de aprendizaje, ya cuando considero que concluimos el proceso de aprendizaje, evidentemente yo quiero, que el alumno haga las cosas bien. Si no las hace bien; ¿qué es lo que pasó? ¿Por qué me sigue haciendo este tipo de cosas?

R: A base de mucha repetición, porque también, te vuelvo a decir, con los problemas que ya son propios del estudiante, va a tener esa secuela, o esa situación que va a volver a repetirse. Y eso lo hice con grados siguientes, cuando los chicos han pasado un grado, y el siguiente grado, van con esa situación vuelven a repetir el error que de por sí ya manifiestan. Lo veo en preparatoria también en chicos, que han avanzado, tienen problemas de aprendizaje y... bueno, esto...

I: Te refieres a problemas de aprendizaje, desde el punto de vista...

R: De retención, de repetición del ejercicio, que no son por parte del profesor, no son situaciones académicas. De esto he visto mucho.

I: Pero llegaría un momento en que nosotros tendríamos que pensar qué hacer con estos niños. Si no hacemos algo, llegan a la universidad con ese tipo de errores.

R: Ha habido sesiones con escuelas y hay profesores muy radicales, por ejemplo Esteban; ha sido ejemplo de entrega, cariño, de corazón hacia el estudio, y a todos los profesores nos dejó huella ese muchacho. Llegó a la universidad, estuvo un año, y al segundo año se salió de la universidad, se casó, y al cobijo de la familia, ha hecho su vida y ha tenido cabida en nuestra

sociedad. ¿Qué tanto, como dices tú, un profesor habrá sido permisible en el sentido de su evaluación? Porque si hubiéramos ido a rajatabla, nada se le quedó, pero dejamos un ejemplo; bueno, yo recuerdo que le seguí mucho la pista a ese muchacho, le dejé un ejemplo de vida y un ejemplo de enseñanza. Momentos inolvidables, que para él, los recuerda de enseñanza en el sentido del proceso, del proceso de enseñar, de estar cerca, ¿no? El maestro desde el punto de vista de esta cosa, de verlo como un resultado, es frío, está alejado de una realidad...

I: Yo estoy perfectamente de acuerdo contigo.

R: Yo llego con él, una palmada en la espalda, vamos tienes que dar otro, vamos el siguiente, lo peor, les digo a mis alumnos, es quedarse tirado y no hacer nada. Levántate, haz este otro ejercicio y otro, y sale, y quizás ya pasamos de tema, no nos quedamos con el mismo tema. Pero se vuelven a ver ejercicios similares, donde refuerzas la cuestión anterior, fracciones, ¿no? Se van viendo temas subsecuentes, en otros niveles, de acuerdo a la situación anterior. Inclusive hasta con las mismas palabras, recuerden que esto se hace así, este por este, le pongo las flechas, dices, no queda de mi, no queda de mi parte, el hecho de estar remachando y reforzando.

Cuando vemos los resultados, decimos que tenemos un ser humano, una persona, y más que en nuestro colegio así lo ven. En el colegio buscan gente de bien, que si ya le ganas por el lado del corazón, perfecto... (Se pasa al lado religioso y comenta que si de esto se saca una vocación, están bien pagados. Todavía más que las matemáticas, etc.) Mi creencia es que los muchachos tienen lugar en este mundo. Precisamente me lo demostró Esteban, que tuvo un lugar cuando pensamos, ¿qué va a ser? Quiero cambiar este México, las matemáticas son un pretexto. Para mí, soy un forjador, un formador, desde el momento en que entran a la escuela, me dieron la misión de formar hombres. Y el pretexto son las matemáticas. He dado Biología, Biología bienvenida, he dado Español, Química, Física, en todas ellas marco el mismo sistema. No hace la materia el conocimiento, la hace el maestro.

I: Estoy de acuerdo, también estoy de acuerdo en que debe haber diferencia entre cada uno de los alumnos. Tengo alumnos muy diferentes.

R: Sé hasta, inclusive, el que tiene roto el zapato.

I: Así es, lo que pasa es que habrá alumnos que definitivamente tienen problemáticas, y en realidad el hecho de estudiar las problemáticas, tiene que ir en el sentido de ayudarles.

R: Y ahí me ves en recreos, me ves en tiempos extraordinarios de clases, ayudándoles a los muchachos, para resolverles sus dudas. Y aún así, hay quienes todavía van con dudas al examen.

I: Claro

R: Las juntas suelen ser muy fructíferas en ese sentido, unos estudian para pasar, no estudian para perder, entonces de lo que les queda, ¿cuánto es lo

que les queda? Y aún así, concientes de esa problemática, concientes del constructivismo, que yo manejo, en mi clase, ¿cuánto de eso aún se les queda? Veo los exámenes, cuando veo un ejercicio de este tipo, que se remachó hasta el cansancio, y en donde dices tú, no es posible, que todavía, ¿no?...

Empiezas a analizar, empiezas a analizar, si verdaderamente fue cuando te sientas con él, porque no lo sepa, si lo sabe. Entonces cuando si lo sabe, entonces qué. Ya tenía yo una calificación, una, es el factor más importante con el que me topo, o exámenes finales, donde sacan 10 o 20, 10 o 20, Cristina. Y entonces dices, que no se les promedie, si no sacan una calificación aprobatoria, porque ya lo tienen medido.

I: Tú consideras, por ejemplo, este es un problema de concepto, me dijiste, x + 3 = 3x, ¿por qué crees tú, que lo hacen? ¿Cuál es el problema de concepto, que tienen ahí?

R: Pues, un aventón o realmente una desconexión total del ejercicio real o a veces lo dejan así, como te digo, por decir algo. Hay ocasiones, por ejemplo, en este tipo de situación, donde por acá dicen, el profesor me va a dar un punto y lo dejan inconcluso. Yo, opino, si verdaderamente hay una parte inteligente, porque no, esto está mal. De antemano, si no llegaste al resultado, estás mal. Estoy de acuerdo con los profesores de preparatoria, pero si el proceso lo dio, se califica ese porcentaje, ¿no? En general no doy más allá del medio punto.

I: ¿Quieres agregar alguna cosa?

R: Nada, decirte que mucho de estos tipos de errores, van por la misma situación y características del alumno.

I: Entonces ¿cómo justificarías que muchos hacen el mismo error?

R: El alumno Cumbres así es. En los errores es una situación de concepto, es una situación ya errónea en la ejecución del ejercicio una equivocación al hacer una multiplicación o división. Esto requiere de un proceso, vamos, con los chicos de primero, y yo les doy principios de aritmética; tú cómo ves un error, donde el punto decimal, o el recorrimiento, lo presenta completamente mal y el error está ahí. Es una situación conceptual.

Situación, en que a la hora que se explicó el punto decimal en clase, no quedó bien definida en cuanto a sus espacios. Quiero sacarte de ahí, veo en ti cierta reticencia (resistente o oposición a algo) del error que de vista, quizás el bloqueo, quizás en el momento que están haciendo un examen, el chico lo sabe bien, pero no lo manifiesta. Es a lo que voy yo, que tú te sientas con él, lo hace bien, lo hace en el examen, ¿y qué pasa?

I: No será que cuando tú te sientas con él, lo vas apoyando, probablemente le vas diciendo por dónde...

R: No, sólo lo oriento...

I: Al orientar, estás evitando, recuerda esto, recuerda aquello, y lo puede resolver.

R: Pero siente la seguridad...

I: Pero lo vas guiando, sin guía es mucho más difícil...

R: Espérame, estamos manejando situaciones también afectivas y emocionales, que no creo que estés aterrizando en ese aspecto.

I: La investigación no aterriza en la parte afectiva, estoy de acuerdo, pero yo estoy conciente de ello. Porque el hecho simplemente de la aversión hacia las matemáticas, tiene que ver con cuestiones afectivas. Tiene que ver con fracasos anteriores, yo estoy de acuerdo.

Lo que pasa es que yo digo, si un alumno, en 1º de secundaria o en 2º, al aprender el álgebra o que está aprendiendo los números, está aprendiendo multiplicación con decimales, comete errores y yo lograra, en un momento dado, descubrir exactamente qué es lo que está pensando, para cometer ese error, y decirle, oye, estás pensando esto, esto se debe a esto otro, aguas, hay que buscar la manera de no hacer esto, porque no es por ahí, ¿no? Te estás equivocando, no me sirve de nada, si yo al alumno, oye, es que en la simplificación, tienes que factorizar primero, si el alumno ni siquiera, llegó a pensar si tiene que factorizar o no. Por eso tengo que analizar los errores. Mi idea es más, hacia yo analizo, qué es lo que hizo, mira, analizo el procedimiento...

R: ¿Y qué es lo que hay detrás? Yo te cuestionaría...

I: Pero sí se puede, hay libros, que te lo hacen, libros de gente que se ha dedicado a hacer entrevistas, en las que se dan cuenta, cuáles son las problemáticas de los alumnos.

RAÚL

Fähigkeiten des Lehrers

A1a	A1b	A1c	A1d	A1e	A2	A3	A4a	A4b	A4c	A5	A6	A7	A8	A9	A10a	A10b
2	2	1			3				2	1	1			1		1

Reaktion auf Fehler

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10
	3				1				

Methodisches Vorgehen

C1	C2	C3	C4	C5	C6a	C6b	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13	C14a	C14b	C15	C16	C17	C18	C19	C20
			7	1		2	1		2		2				1	1			1		

Ursachen

D1a	D1b	D1c	D1d	D1e	D1f	D1g	D1h	D1i	D1j	D1k	D2a	D2b	D2c	D2d	D3a	D3b	D3c	D3d
	1			3					1	6	1							

Verständnis vom Lernprozess

E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
7	1			6		1		7	1

Erfassen der Ursache

F1	F2
	8

Hinweis auf begriffliche Zusammenhänge

G1 G2

1

Verschiedenes

H I J K1 K2

3 5 4