

# Die verselle Deformation zyklischer Quotientensingularitäten: Gleichungen und torische Struktur

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Mathematik, Informatik  
und Naturwissenschaften  
der Universität Hamburg

vorgelegt  
im Department Mathematik  
von

**Martin Hamm**

aus Göttingen

Hamburg  
2008

Als Dissertation angenommen vom Department  
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Oswald Riemenschneider  
und Prof. Dr. Klaus Altmann

Hamburg, den 9. Juli 2008

Prof. Dr. Reinhard Diestel  
Leiter des Departments Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>1 Die verselle Deformation</b>	<b>8</b>
1.1 Nullketten und das Schema $\nabla_k$	8
1.2 Zyklische Quotientensingularitäten	10
1.3 Arndts Konstruktion der versellen Deformation	12
1.4 Eine explizite Konstruktion der versellen Deformation	14
1.5 Die Komponenten des reduzierten Basisraums	41
<b>2 Die Monodromieüberlagerung</b>	<b>42</b>
2.1 Die gesamte Deformation	42
2.2 Die Komponenten des reduzierten Basisraums	43
<b>3 Die Totalräume <math>\mathcal{Y}'_k</math> der Monodromieüberlagerung als algebraische Mengen</b>	<b>47</b>
3.1 Definitionen und Überblick	47
3.2 Torische Ideale	50
3.3 Einige Bezeichnungen	52
3.4 Die algebraischen Mengen $Z'_k$ und $Z_{sing}$	54
<b>4 Affine torische Varietäten</b>	<b>58</b>
4.1 Grundlagen	58
4.2 Kegel zu einem normalen torischen Ideal	64
4.3 Projektionen normaler torischer Ideale und einige Lemmata	66
<b>5 Das Kegelsystem <math>\Sigma_{(\chi, \sigma'_k)}</math></b>	<b>71</b>
5.1 Einige Lemmata für Abschnitt 5.3	72
5.2 Einführung des Kegelsystems $\Sigma_{(\chi, \sigma'_k)}$	77
5.3 Geometrische Konstruktion von $\Sigma_{(\chi, \sigma'_k)}$	79
<b>6 Die Kegel der Komponenten</b>	<b>82</b>
6.1 Qualitative Beschreibung der Kegel $\sigma'_k$	82
6.2 Beweis des Theorems von 6.1	86
6.3 Dualität bei der Artinkomponente	96
<b>Literatur</b>	<b>101</b>

# Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Deformationen von Quotienten von  $\mathbb{C}^2$  nach endlichen zyklischen Gruppen.

Wir schreiben eine zyklische Quotientensingularität in der Form  $X_{n,q}$ , wobei die Gruppe von  $X_{n,q}$  erzeugt wird von dem Automorphismus  $(u, v) \mapsto (\zeta_n u, \zeta_n^q v)$  mit teilerfremden  $n$  und  $q$  und einer primitiven  $n$ -ten Einheitswurzel  $\zeta_n$  und erhalten  $a = (a_2, \dots, a_{e-1})$  aus der Kettenbruchentwicklung von  $\frac{n}{n-q}$ . Die Zahl  $e$  ist hierbei gleich der Einbettungsdimension von  $X_{n,q}$ . Der duale Kettenbruch  $\frac{n}{q}$  mit Werten  $b_1, \dots, b_r$  liefert die Selbstschnittzahlen  $-b_1, \dots, -b_r$ .

Zweidimensionale zyklische Quotientensingularitäten sind genau die Singularitäten zweidimensionaler affiner torischer Varietäten im Fixpunkt. Der determinierende Kegel ist gegeben durch  $\langle (1, 0), (-q, n) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Eines der Ziele der komplex-analytischen Singularitätentheorie besteht im Verständnis der versellen Deformation einer gegebenen isolierten Singularität  $X$ . Dies ist eine Deformation, die alle anderen Deformationen von  $X$  durch einen Basiswechsel mit eindeutiger Tangentialabbildung induziert. Ein Existenzbeweis wurde 1972 in [G] gegeben, der jedoch keine geeignete explizite Konstruktion liefert.

Eine Konstruktion der versellen Deformation einer zweidimensionalen zyklischen Quotientensingularität  $X_{n,q}$  wurde 1988 von Arndt in seiner Hamburger Dissertation [A] hergeleitet. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus zur Berechnung der determinierenden Basis- und Totalraumgleichungen. Genauer: Es seien  $\mathbb{C}\{s\}$  und  $\mathbb{C}\{x, s\}$  Ringe konvergenter Potenzreihen, mit  $x$  als Abkürzung für  $e$  Variablen  $x_1, \dots, x_e$  und  $s$  als Abkürzung für  $\tau$  weitere Variablen, wobei  $\tau := \dim T_X^1$  die Dimension des Raums  $T_X^1$  der infinitesimalen Deformationen von  $X_{n,q}$  sei. Der Algorithmus liefert dann polynomiale Erzeuger von Idealen  $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}\{s\}$  und  $I \subseteq \mathbb{C}\{x, s\}$ , so dass die kanonische Abbildung  $\mathbb{C}\{s\}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}\{x, s\}/I$  wohldefiniert ist und dual eine Abbildung  $\mathcal{X} \rightarrow S$  komplexer Raumkeime definiert, die eine verselle Deformation mit  $X_{n,q}$  als Nullfaser ist (die durch  $s$  ausgedrückten Variablen sind also die Deformationsparameter).

Problematisch an Arndts Algorithmus war bislang jedoch, dass in einem gewissen Schritt nur ein Existenzbeweis angegeben wurde und dieser Algorithmus somit nicht explizit war. Ein Ergebnis der vorliegenden Arbeit ist die Erweiterung zu einer expliziten Konstruktion, basierend auf einer Vermutung in [B].

Zu einer Deformation  $\mathcal{X} \rightarrow S$  von  $X_{n,q}$  nach Arndt hat Christophersen in [C] mit Hilfe sogenannter Nullketten die Komponenten des reduzierten Basisraums  $S_{red}$  angegeben. Zu jeder Nullkette  $k = (k_2, \dots, k_{e-1})$  mit  $k_i \leq a_i$  für  $i = 2, \dots, e-1$  gibt es genau eine solche Komponente  $S_k$ . Die induzierte Deformation  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$  lässt sich mit dieser Nullkette berechnen. Hier bezeichne  $\mathcal{X}_k$  den Totalraum über  $S_k$ .

Als Glättung einer isolierten Singularität hat jede Deformation  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$  eine sogenannte *Monodromieüberlagerung*: Die Operation der Fundamentalgruppe  $\pi_1(S_k \setminus D_k)$  auf der Homologiegruppe  $H_2(F)$ , wobei  $D_k$  die Diskriminante von  $S_k$  bezeichne und  $F$  die Milnorfaser sei, induziert eine unverzweigte Überlagerung von  $S_k \setminus D_k$ , eine verzweigte Überlagerung von  $S_k$  und damit eine Deformation von  $X_{n,q}$ , welche als Monodromieüberlagerung bezeichnet wird.

Christophersen fand in [C] eine kanonische Galoische Überlagerung zu  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$  mit Gruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - k_i}$ , dem direkten Produkt der symmetrischen Gruppen  $\mathfrak{S}_{a_i - k_i}$ , die durch Permutationen gewisser Deformationsparameter operieren. Seine Vermutung, dass es sich hierbei um die Monodromieüberlagerung von  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$  handelt, bestätigte sich dann in [BC].

Diese Monodromieüberlagerung wird durch einen endlichen Basiswechsel von  $S_k$  induziert. Dabei werden gewisse Deformationsparameter von  $S_k$  als symmetrische Polynome in gewissen Deformationsparametern der Monodromieüberlagerung aufgefasst.

Dieser Wechsel lässt sich kanonisch zu einem Basiswechsel des gesamten versellen Basisraums  $S$  erweitern und liefert so eine Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  von  $X_{n,q}$ . Die Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  ist Gegenstand von [B] und [Rie2] und ist auch (von dem Ergebnis zur Konstruktion der versellen Deformation einmal abgesehen) der Ausgangspunkt in dieser Arbeit.

In [B] wird gezeigt, dass  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  die verselle Deformation  $\mathcal{X} \rightarrow S$  überlagert und über jeder Komponente des reduzierten Basisraums  $T_{red}$  von  $T$  die oben genannte Monodromieüberlagerung induziert. Ähnlich wie  $\mathcal{X} \rightarrow S$  in [A] (s.o.) wird in [B] auch die Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  in der Form  $\mathbb{C}\{t\}/\mathfrak{b} \rightarrow \mathbb{C}\{x, t\}/J$  beschrieben, mit Idealen  $\mathfrak{b} \subseteq \mathbb{C}\{t\}$  und  $J \subseteq \mathbb{C}\{x, t\}$  und den Ringen  $\mathbb{C}\{t\}$  und  $\mathbb{C}\{x, t\}$  konvergenter Potenzreihen, wobei  $x$  wieder als Abkürzung für die Variablen  $x_1, \dots, x_e$  steht und  $t$  für  $\tau$  weitere Variablen, welche die Deformationsparameter sind. Ähnlich wie die Gruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - k_i}$  auf der Monodromieüberlagerung von  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ , operiert nun auch die Gruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - 1}$  äquivariant durch Permutationen gewisser Deformationsparameter auf  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ . Aufgrund dieser Eigenschaften nennen wir  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  die Monodromieüberlagerung von  $\mathcal{X} \rightarrow S$  mit Monodromiegruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - 1}$ .

Über jeder Komponente  $S_k$  von  $S_{red}$  liegen (im Allgemeinen) mehrere Komponenten des reduzierten Basisraums  $T_{red}$ . Diese werden (nach [B]) mit  $T_k^\nu$  bezeichnet, also zusätzlich zu  $k$  mit  $\nu$  indiziert. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{KOMP}$  die Menge aller Indexpaare  $(k, \nu)$  der auftretenden Komponenten  $T_k^\nu$ . Fixieren wir ein  $T_k^\nu$ , so erhalten wir alle Komponenten von  $T_{red}$  über  $S_k$  als Translate  $gT_k^\nu$  mit  $g \in \prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - 1}$ .

Den Totalraum über einer Komponente  $T_k^\nu$  von  $T_{red}$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{Y}_k^\nu$ . Ist eine (nicht-leere) Indexmenge  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  gegeben, so bezeichnen wir den Totalraum über dem Durchschnitt  $\bigcap_{(k, \nu) \in A} T_k^\nu$  mit  $\mathcal{Y}_A$ . Für diesen gilt  $\mathcal{Y}_A = \bigcap_{(k, \nu) \in A} \mathcal{Y}_k^\nu$ . Insbesondere erhalten wir Inklusionen (komplexer Raumkeime)  $\mathcal{Y}_A \hookrightarrow \mathcal{Y}_B$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  und  $X_{n,q} \hookrightarrow \mathcal{Y}_A$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$ .

Diese Sachverhalte finden sich in [B] und [Rie2]. Die Totalräume  $\mathcal{Y}_k^\nu$  werden dort durch polynomiale Erzeuger ihrer Ideale mit Hilfe der jeweiligen Nullketten beschrieben. Da die Basisräume der Deformationen  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$  (im Gegensatz zum Basisraum der gesamten Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ ) glatt sind, reicht dies im Wesentlichen zur Beschreibung dieser Deformationen aus.

Diese Arbeit hat als Zielsetzung eine andere Beschreibung des Totalraums, nämlich durch Gitterkegel im Sinne der torischen Geometrie. Diese Zielsetzung basiert auf der Feststellung, dass - ebenso wie  $X_{n,q}$  - auch die Raumkeime  $\mathcal{Y}_k^\nu$  und allgemeiner die Raumkeime  $\mathcal{Y}_A$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  isomorph zu den Raumkeimen in den Fixpunkten gewisser affiner normaler torischer Varietäten sind. Auch werden die Inklusionen  $\mathcal{Y}_A \hookrightarrow \mathcal{Y}_B$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  und  $X_{n,q} \hookrightarrow \mathcal{Y}_A$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  durch Morphismen im Sinne der torischen Geometrie induziert.

Wir erinnern kurz an einige Sachverhalte aus der torischen Geometrie: Eine torische Varietät ist eine algebraische Varietät, auf der ein gleichdimensionaler (komplexer) algebraischer Torus mit einer dichten offenen Bahn operiert. Bekanntlich kann jede affine normale torische Varietät der Dimension  $n$  in gewisser Weise beschrieben werden durch einen Kegel  $\sigma$  in einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $L_{\mathbb{R}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , mit einem Gitter  $L$  vom Rang  $n$ . Der Kegel  $\sigma$  hat dabei die Eigenschaft, die Menge aller Linearkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten von endlich vielen, festen Elementen aus  $L$  zu sein und spitz zu sein. Wir bezeichnen

ihn als  $L$ -Kegel. Wir schreiben  $X_{L,\sigma}$  für die beschriebene Varietät und  $X_{L_\sigma,\sigma}$  für diejenige Varietät, die durch den Kegel  $\sigma$  beschrieben wird, wenn wir diesen als  $L_\sigma$ -Kegel auffassen, wobei  $L_\sigma := L \cap \text{lin } \sigma$ , mit  $\text{lin } \sigma$  als linearer Hülle von  $\sigma$  in  $L_{\mathbb{R}}$ . Die Varietät  $X_{L_\sigma,\sigma}$  hat genau einen Fixpunkt unter der Torusaktion; wir bezeichnen ihn mit  $f_\sigma$ . Mit  $(X_{L_\sigma,\sigma}, f_\sigma)$  bezeichnen wir den komplexen Raumkeim von  $X_{L_\sigma,\sigma}$  in  $f_\sigma$ . Ist  $L'$  ein weiteres Gitter und  $\sigma'$  ein  $L'$ -Kegel, so ist ein *Kegelmorphismus* von  $\sigma$  nach  $\sigma'$  gegeben durch einen Gitterhomomorphismus  $\phi : L \rightarrow L'$  mit  $\phi(\sigma \cap L) \subseteq \sigma' \cap L'$ . Dieser induziert in gewisser Weise einen *torischen Morphismus*  $X_{L,\sigma} \rightarrow X_{L',\sigma'}$ ; wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{T}(\phi)$ . Weiter definiert dann  $\mathcal{T}(\phi)$  einen Morphismus  $(X_{L_\sigma,\sigma}, f_\sigma) \rightarrow (X_{L'_{\sigma'},\sigma'}, f_{\sigma'})$  komplexer Raumkeime; wir bezeichnen ihn mit  $\mathcal{T}_f(\phi)$ .

Zur Beschreibung des Totalraums werden wir nun  $L$ -Kegel  $\chi$  und  $\sigma_k^\nu$  für alle  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  im gemeinsamen Raum  $L_{\mathbb{R}}$  mit einem ausreichend großen Gitter  $L$  so anordnen, dass für die Durchschnitte  $\sigma_A := \bigcap_{(k,\nu) \in A} \sigma_k^\nu$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  sowie für die durch die Inklusionen in  $L_{\mathbb{R}}$  gegebenen Kegelmorphismen  $\phi_{A,B} : (L_{(\sigma_A)}, \sigma_A) \hookrightarrow (L_{(\sigma_B)}, \sigma_B)$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  und  $\psi_A : (L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_{(\sigma_A)}, \sigma_A)$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  gilt:

- 1) Es gibt Isomorphismen (komplexer Raumkeime)

$$\iota : X_{n,q} \rightarrow (X_{L_\chi,\chi}, f_\chi) \quad \text{und} \quad \kappa_A : \mathcal{Y}_A \rightarrow (X_{L_{(\sigma_A)},\sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \text{ für } \emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}.$$

- 2) Die folgenden Diagramme kommutieren. Dabei sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im ersten Diagramm und  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im zweiten Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\kappa_A} & (X_{L_{(\sigma_A)},\sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow \mathcal{T}_f(\phi_{A,B}) \\ \mathcal{Y}_B & \xrightarrow{\kappa_B} & (X_{L_{(\sigma_B)},\sigma_B}, f_{(\sigma_B)}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{n,q} & \xrightarrow{\iota} & (X_{L_\chi,\chi}, f_\chi) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow \mathcal{T}_f(\psi_A) \\ \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\kappa_A} & (X_{L_{(\sigma_A)},\sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \end{array}$$

Wir bezeichnen das System der  $L$ -Kegel  $\chi$  und  $\sigma_k^\nu$  mit  $\Sigma_{(\chi,\sigma_k^\nu)}$ . Die Eigenschaften 1) und 2) überzeugen den Leser hoffentlich davon, dass dieses System tatsächlich sinnvoll zur (zumindest partiellen) Beschreibung des Totalraums  $\mathcal{Y}$  ist.<sup>1</sup>

Die Konstruktion des Kegels  $\chi$  von  $\Sigma_{(\chi,\sigma_k^\nu)}$  erfolgt mittels der Werte  $a_2, \dots, a_{e-1}$  der Kettenbruchentwicklung, während die Konstruktion der Kegel  $\sigma_k^\nu$  mittels der Nullketten erfolgen kann. Für die  $\sigma_k^\nu$  werden wir jedoch auch eine etwas geometrischere Konstruktion (ohne Verwendung von Nullketten) herleiten, in der nur von  $\chi$  und einem gewissen weiteren  $L$ -Kegel  $\rho$  ausgegangen wird, der sich – ebenso wie  $\chi$  – aus den Werten  $a_2, \dots, a_{e-1}$  konstruieren lässt.

Ein weiteres Ergebnis ist eine qualitative Beschreibung der Kegel  $\sigma_k^\nu$ . Bei dieser Beschreibung werden wieder die zugehörigen Nullketten benutzt. Die Beschreibung gibt dann auch Informationen über die Singularitäten von  $\mathcal{Y}_k^\nu$ , da bekanntlich die geometrische Struktur eines  $L$ -Kegels  $\sigma$  Informationen über die Bahnstruktur und die Singularitäten von  $X_{L,\sigma}$  liefert.

Wir skizzieren nun kurz den Aufbau dieser Arbeit:

Im ersten Kapitel geht es um die verselle Deformation nach Arndt. Zum Einen werden dort diesbezüglich einige Fakten aufgeführt, die im weiteren Teil der Arbeit benötigt werden. Zum

<sup>1</sup>Zur Frage, inwieweit die induzierte Deformation  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$  einer Komponente  $T_k^\nu$  von  $T_{red}$  bereits durch den Kegelmorphismus  $(L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_{(\sigma_k^\nu)}, \sigma_k^\nu)$  determiniert ist, sei auf [Alt1] verwiesen. Wir werden auf diese Frage in dieser Arbeit nicht weiter eingehen.

Anderen wird die oben erwähnte Erweiterung von Arnolds Konstruktion zu einer expliziten Konstruktion formuliert und bewiesen.

Im zweiten Kapitel geben wir die in [B] beschriebene überlagernde Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  an. Zunächst wird die gesamte Deformation angegeben; anschließend werden die Deformationen  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$  über den Komponenten des reduzierten Basisraums angegeben. Wichtig ist es hier, eine für die weiteren Untersuchungen geeignete Darstellung der die Ideale der Komponenten erzeugenden Polynome bereitzustellen.

Im dritten Kapitel wird angegeben, wie wir von nun an die Totalräume  $\mathcal{Y}_k^\nu$  der Monodromieüberlagerung und die Singularität  $X_{n,q}$  als algebraische Teilmengen eines gemeinsamen affinen Raums der Form  $\mathbb{C}^r$  auffassen. Die Räume  $\mathcal{Y}_k^\nu$  und  $X_{n,q}$  werden dabei algebraisiert und einem linearen Koordinatenwechsel unterzogen. Der Grund liegt darin, dass nun die determinierenden Ideale torisch sind und es sich daher bei den algebraischen Mengen um affine torische Varietäten handelt.

Im vierten Kapitel werden alle Definitionen und Sätze aus der Theorie der affinen torischen Varietäten bereitgestellt, die in den nachfolgenden Kapiteln 5 und 6 benötigt werden. Da in Kapitel 5 und 6 unser Ausgangspunkt die in Kapitel 3 eingeführten torischen Ideale sein werden, geht es in Kapitel 4 um die Frage, wie man zu einem gegebenen torischen Ideal einen Kegel konstruieren kann, der die durch die Nullstellenmenge dieses Ideals gegebene affine torische Varietät beschreibt und welche Aussagen man über die Struktur dieses Kegels mittels des Ideals machen kann.

Kapitel 5 und 6 beinhalten dann die oben genannten Ergebnisse. Im fünften Kapitel wird das Kegelsystem  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  eingeführt, die oben genannte Beschreibung des Totalraums begründet und eine (eher) geometrische Konstruktion von  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  hergeleitet. Im sechsten Kapitel wird eine qualitative Beschreibung der Kegel  $\sigma_k^\nu$  angegeben. Anschließend wird dort noch eine Dualitätseigenschaft der zur Artinkomponente gehörigen Kegel gezeigt.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Oswald Riemenschneider für die Anregung zu dieser Arbeit, das Übernehmen der Betreuung, die fachkundigen Hinweise und die geduldige Begleitung des Promotionsvorhabens.

# 1 Die verselle Deformation

In diesem Kapitel werden die Nullketten, das Schema  $\nabla_k$ , die zweidimensionalen zyklischen Quotientensingularitäten und Arndts Konstruktion der versellen Deformation dieser Singularitäten eingeführt. Anschließend wird die Erweiterung von Arndts Konstruktion zu einer expliziten Konstruktion formuliert und bewiesen. Wir gehen auch kurz auf die Komponenten des reduzierten Basisraums ein.

Zur genauen Definition verseller Deformationen sei auf [JP, Kapitel 10] verwiesen (dort wird sie als “semi-universell” bezeichnet, in der Literatur wird darüber hinaus auch der Begriff “miniversell” verwendet). Für uns geht es in diesem Kapitel in erster Linie um eine Beschreibung dieser Deformation mittels Erzeugendensysteme der Ideale des Basis- und des Totalraums.

Zweidimensionale Quotientensingularitäten bieten ein gutes Beispiel bei der Untersuchung verseller Deformationen: Obwohl dies milde und gut zu beschreibene Singularitäten sind, zeigt deren verselle Deformation schon wichtige Aspekte der Komplexität, die bei versellen Deformationen auftreten kann: Der Basisraum ist im Allgemeinen singular, reduzibel und nicht-reduziert.

Infolge der Nicht-Reduziertheit kann der Basisraum auch eingebettete Komponenten haben. Die Beschreibung dieser ist bislang ein offenes Problem.

Die nicht-eingebetteten Komponenten – also die Komponenten des reduzierten Basisraums – hat Christophersen in [C] beschrieben. Diese sind glatt (im Gegensatz zum gesamten Basisraum).

## 1.1 Nullketten und das Schema $\nabla_k$

Wir starten mit den sogenannten *Nullketten*.<sup>1</sup> Dieses technische Hilfsmittel wurde in [C] von Christophersen eingeführt, um die Komponenten des reduzierten Basisraums der versellen Deformation einer zweidimensionalen zyklischen Quotientensingularität und die zu diesen Komponenten gehörigen induzierten Deformationen der Singularität zu beschreiben.

Ein Element  $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in \mathbb{N}_0^{e-2}$  heißt Nullkette, wenn für die durch  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$  und  $\alpha_{i+1} = k_i \alpha_i - \alpha_{i-1}$  rekursiv definierte Folge gilt:  $\alpha_i > 0$  für  $2 \leq i \leq e-1$  und  $\alpha_e = 0$  (dies impliziert insbesondere  $\alpha_{e-1} = 1$ <sup>2</sup>). Diese beiden Bedingungen sind äquivalent dazu, dass der Kettenbruch

$$k_2 - \frac{1}{k_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{k_{e-1}}}}$$

wohldefiniert ist und den Wert Null hat. Mit  $K_{e-2}$  bezeichnen wir die Menge aller Nullketten der Länge  $e-2$ . Diese ist nichtleer, denn sie enthält immer die spezielle Nullkette  $k$  mit der Eigenschaft  $\alpha_i = 1 \forall i \in \{2, \dots, e-1\}$ .<sup>3</sup> Für  $k$  gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} k &= (0) && \text{falls } e = 3, \\ k &= (1, 1) && \text{falls } e = 4, \\ k &= (1, 2, 2, \dots, 2, 2, 1) && \text{falls } e \geq 5. \end{aligned}$$

Die Anzahl aller Elemente von  $K_{e-2}$  ist gleich der Catalan-Zahl  $c_{e-2} = \frac{1}{e-2} \binom{2(e-3)}{e-3}$ . Die folgende Tabelle enthält alle Nullketten für die Fälle  $e = 3, 4, 5, 6$ :

<sup>1</sup>In [C] “Chains representing zero” genannt, in [B] “Nullzulässige Ketten”.

<sup>2</sup>Denn aus  $\alpha_{i-1} = k_i \alpha_i - \alpha_{i+1} \forall i \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $\alpha_e = 0$  folgt, dass  $\alpha_{e-1}$  ein Teiler von  $\alpha_1 = 1$  ist.

<sup>3</sup>Die dieser speziellen Nullkette entsprechende Komponente des reduzierten Basisraums ist die sogenannte Artinkomponente.

$e$	$k = (k_2, \dots, k_{e-1})$	$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_e)$
3	(0)	(0, 1, 0)
4	(1, 1)	(0, 1, 1, 0)
5	(1, 2, 1)	(0, 1, 1, 1, 0)
	(2, 1, 2)	(0, 1, 2, 1, 0)
6	(1, 2, 2, 1)	(0, 1, 1, 1, 1, 0)
	(1, 3, 1, 2)	(0, 1, 1, 2, 1, 0)
	(2, 1, 3, 1)	(0, 1, 2, 1, 1, 0)
	(2, 2, 1, 3)	(0, 1, 2, 3, 1, 0)
	(3, 1, 2, 2)	(0, 1, 3, 2, 1, 0)

Zu einer Nullkette  $k = (k_2, \dots, k_{e-1})$  wird in [B] ein ‘‘Schema’’  $\nabla_k$  als Teilmenge

$$\nabla_k \subseteq \{(\delta, \epsilon) \in \mathbb{N}^2; 2 \leq \delta + 1 < \epsilon - 1 \leq e - 1\}$$

definiert. Dieses Schema dient zur Berechnung von Erzeugendensystemen (s. 1.2.1, 2.2.1, 3.4.1).

Zur genauen Definition von  $\nabla_k$  sei auf [B, 1.3] verwiesen. Hinsichtlich der Anwendungen sei erwähnt, dass  $(\delta, \epsilon) \in \nabla_k$  für alle  $(\delta, \epsilon) \in \mathbb{N}^2$  mit  $2 \leq \delta + 1 < \epsilon - 1 \leq e - 1$ ,  $\epsilon - \delta = 3$  gilt.

Beispiel:  $K_3$  besteht aus den beiden Elementen  $k = (1, 2, 1)$  und  $k = (2, 1, 2)$ . Die zugehörigen Schemata sind  $\nabla_{(1,2,1)} = \{(1, 4), (2, 5)\}$  und  $\nabla_{(2,1,2)} = \{(1, 4), (2, 5), (1, 5)\}$ .

Die beiden folgenden Lemmata benötigen wir für ein späteres Lemma (5.1.4). Im Beweis des ersten Lemmas wird das in [B, 1.2] eingeführte *Aufblasen von Nullketten* benötigt, womit folgender Sachverhalt gemeint ist:

Ist  $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in K_{e-2}$ , so liegen die Ketten

$$\begin{aligned} & (1, k_2 + 1, k_3, \dots, k_{e-1}), (k_2, \dots, k_{e-2}, k_{e-1} + 1, 1) \quad \text{und} \\ & (k_2, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, 1, k_{i+1} + 1, k_{i+2}, \dots, k_{e-1}) \quad \text{für } 2 \leq i \leq e - 2 \end{aligned}$$

in  $K_{e-1}$ , und jede Kette aus  $K_{e-1}$  kann auf diese Weise aus einer Kette aus  $K_{e-2}$  erhalten werden.

**Lemma 1.1.1.** *Es seien  $f_2, \dots, f_{r-1}$  und  $\beta_2, \dots, \beta_{r-1}$  für ein  $r \geq 4$  ganze positive Zahlen und es gelte*

$$\begin{aligned} & \beta_2 f_2 \geq \beta_3, \\ & \beta_i f_i \geq \beta_{i-1} + \beta_{i+1} \quad \text{für } 3 \leq i \leq r - 2, \\ & \beta_{r-1} f_{r-1} \geq \beta_{r-2}. \end{aligned}$$

*Dann gibt es eine Nullkette  $(k_2, \dots, k_{r-1})$  mit  $k_2 \leq f_2, \dots, k_{r-1} \leq f_{r-1}$ .*

*Beweis.* Per Induktion nach  $r$ . Gilt  $r = 4$ , so erfüllt die Nullkette  $k = (1, 1)$  die Bedingung.

Es gelte nun  $r \geq 5$ . Gilt  $f_i \geq 2$  für alle  $i \in \{3, \dots, r - 2\}$ , so erfüllt  $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$  die Bedingung. Anderenfalls gibt es ein  $j \in \{3, \dots, r - 2\}$  mit  $f_j = 1$ . Es folgt  $\beta_j \geq \beta_{j-1} + \beta_{j+1}$ , und so

$$\begin{aligned} & \beta_2 f_2 \geq \beta_3 \\ & \beta_3 f_3 \geq \beta_2 + \beta_4 \\ & \vdots \\ & \beta_{j-2} f_{j-2} \geq \beta_{j-3} + \beta_{j-1} \\ & \beta_{j-1} (f_{j-1} - 1) \geq \beta_{j-2} + \beta_{j+1} \\ & \beta_{j+1} (f_{j+1} - 1) \geq \beta_{j-1} + \beta_{j+2} \\ & \beta_{j+2} f_{j+2} \geq \beta_{j+1} + \beta_{j+3} \\ & \vdots \\ & \beta_{r-2} f_{r-2} \geq \beta_{r-3} + \beta_{r-1} \\ & \beta_{r-1} f_{r-1} \geq \beta_{r-2} \end{aligned}$$

(Im Spezialfall  $j = 3$  schreiben wir als erste Zeile:  $\beta_2(f_2 - 1) \geq \beta_4$ ; im Spezialfall  $j = r - 2$  schreiben wir als letzte Zeile:  $\beta_{r-1}(f_{r-1} - 1) \geq \beta_{r-3}$ .)

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Nullkette  $(\tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{j-1}, \tilde{k}_{j+1}, \dots, \tilde{k}_{r-1})$  mit

$$\tilde{k}_2 \leq f_2, \dots, \tilde{k}_{j-2} \leq f_{j-2}, \tilde{k}_{j-1} \leq (f_{j-1} - 1), \tilde{k}_{j+1} \leq (f_{j+1} - 1), \tilde{k}_{j+2} \leq f_{j+2}, \dots, \tilde{k}_{r-1} \leq f_{r-1}.$$

Durch Aufblasen erhalten wir die Nullkette  $k = (\tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{j-2}, \tilde{k}_{j-1} + 1, 1, \tilde{k}_{j+1} + 1, \tilde{k}_{j+2}, \dots, \tilde{k}_{r-1})$ . Für diese gilt  $k_i \leq f_i \forall i \in \{2, \dots, r-1\}$ .  $\square$

**Lemma 1.1.2.** *Sind  $(k_2^{(1)}, \dots, k_{r_1-1}^{(1)}), \dots, (k_2^{(l-1)}, \dots, k_{r_{l-1}-1}^{(l-1)})$  Nullketten mit Längen  $\geq 2$ , so ist auch*

$$(k_2^{(1)}, \dots, k_{r_1-2}^{(1)}, k_{r_1-1}^{(1)} + k_2^{(2)}, k_3^{(2)}, \dots, k_{r_{l-2}-2}^{(l-2)}, k_{r_{l-2}-1}^{(l-2)} + k_2^{(l-1)}, k_3^{(l-1)}, \dots, k_{r_{l-1}-1}^{(l-1)})$$

eine Nullkette.<sup>4</sup> Sind in dieser Nullkette  $d_2, \dots, d_{l-1}$  die "Verklebungsstellen", so gilt

$$\alpha_{d_{(q+1)}-1} = k_{r_q-1}^{(q)}, \alpha_{d_{(q+1)}} = 1, \alpha_{d_{(q+1)}+1} = k_2^{(q+1)} \quad \forall q \in \{1, \dots, l-2\}.$$

*Beweis.* Wir können uns auf den Fall  $l = 3$  beschränken. Zu zeigen ist also, dass

$$(k_2^{(1)}, \dots, k_{r_1-2}^{(1)}, k_{r_1-1}^{(1)} + k_2^{(2)}, k_3^{(2)}, \dots, k_{r_2-1}^{(2)})$$

eine Nullkette ist und dass (mit  $i$  als Verklebungsstelle) gilt:

$$\alpha_{i-1} = k_{r_1-1}^{(1)}, \alpha_i = 1, \alpha_{i+1} = k_2^{(2)}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\alpha_{r_1-1}^{(1)} = 1, \alpha_{r_1}^{(1)} = 0, \alpha_1^{(2)} = 0, \alpha_2^{(2)} = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_{i-1} &= \alpha_{r_1-2}^{(1)} = k_{r_1-1}^{(1)} \text{ (wegen } \alpha_{r_1}^{(1)} = k_{r_1-1}^{(1)}\alpha_{r_1-1}^{(1)} - \alpha_{r_1-2}^{(1)}), \\ \alpha_i &= \alpha_{r_1-1}^{(1)} = 1, \\ \alpha_{i+1} &= (k_{r_1-1}^{(1)} + k_2^{(2)})\alpha_i - \alpha_{i-1} = k_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Aus  $\alpha_{i+1} = k_2^{(2)} = \alpha_3^{(2)}$  folgt durch Vergleich der  $\alpha_j$  mit den entsprechenden  $\alpha_j^{(1)}$  bzw.  $\alpha_j^{(2)}$ , dass es sich um eine Nullkette handelt.  $\square$

## 1.2 Zyklische Quotientensingularitäten

Ausgangspunkt dieser Arbeit sind die zweidimensionalen zyklischen Quotientensingularitäten<sup>5</sup>, also Quotienten von  $\mathbb{C}^2$  nach kleinen, endlichen zyklischen Gruppen  $G \subseteq GL(2, \mathbb{C})$ . Nach [Brie] kann man bis auf Konjugation annehmen, dass  $G$  erzeugt wird von einem Automorphismus der Gestalt

$$[u, v] \mapsto \begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

<sup>4</sup>Gemeint ist also die Kette, die aus den Nullketten durch Hintereinanderreihung entsteht mit jeweils anschließender Addition des letzten Eintrags einer Kette mit dem ersten Eintrag der nachfolgenden Kette.

<sup>5</sup>Eine Einführung in diese Singularitäten findet sich z.B. in [L].

wobei  $\zeta_n$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel und  $q$  eine ganze zu  $n$  teilerfremde Zahl mit  $0 < q < n$  sei. Der Quotient  $\mathbb{C}^2/G$  hat eine Singularität im Ursprung, die wir mit  $X_{n,q}$  bezeichnen. Zwei Quotienten  $X_{n,q}$  und  $X_{n',q'}$  sind genau dann isomorph, wenn  $n = n'$  und  $q = q'$  oder  $qq' = 1 \pmod n$  gilt.

Zu  $X_{n,q}$  betrachten wir den Kettenbruch

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_r}}}$$

und den zu diesem Kettenbruch dualen Kettenbruch

$$\frac{n}{n-q} = a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{e-1}}}}$$

Die  $b_1, \dots, b_r$  liefern die Selbstschnittzahlen der minimalen Auflösung. Wir verwenden sie jedoch nur in Abschnitt 6.3.

Von wichtiger Bedeutung in dieser Arbeit sind jedoch stets die Zahlen  $a_2, \dots, a_{e-1}$ . Die Zahl  $e$  ist dabei die Einbettungsdimension von  $X_{n,q}$ . Aufgrund der Bedeutung der  $a_i$  und der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung werden wir meist  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  statt  $X_{n,q}$  schreiben.

Weiter definieren wir  $K(a_2, \dots, a_{e-1}) := \{k \in K_{e-2}; k_i \leq a_i \text{ für } i = 2, \dots, e-1\}$ .<sup>6</sup> Es gilt nach [B, Proposition 1.9]:

**Satz 1.2.1.** *Zu  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  erhalten wir für jedes  $k \in K(a_2, \dots, a_{e-1})$  ein minimales Erzeugendensystem des Ideals  $I_{sing} \subseteq \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e\}$  der Singularität durch die Binome  $g_{\delta,\epsilon}^k := x_\delta x_\epsilon - p_{\delta,\epsilon}$ ,  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ , wobei  $p_{\delta,\epsilon}$  durch die folgende Konstruktion definiert sei:*

*Wir setzen  $p_{i-1,i+1} = x_i^{a_i}$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und definieren induktiv alle weiteren Monome  $p_{\delta,\epsilon}$  durch den folgenden Schritt für  $n = 3, \dots, e-1$ :*

*Die Monome  $p_{\delta,\epsilon}$  für  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$  und  $\epsilon-\delta \leq n-1$  seien bereits definiert. Für  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$  und  $\epsilon-\delta = n$  setzen wir*

$$p_{\delta,\epsilon} = \begin{cases} \frac{p_{\delta,\epsilon-1p_{\delta+1,\epsilon}}}{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1}} & \text{falls } (\delta,\epsilon) \in \nabla_k \\ \frac{p_{\delta,\epsilon-1p_{\delta+1,\epsilon}}}{p_{\delta+1,\epsilon-1}} & \text{falls } (\delta,\epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases}$$

Wir betrachten das Beispiel  $X_{n,q}$  mit  $n = 8, q = 3$ , welches wir auch im Folgenden immer wieder aufgreifen werden. Die Kettenbruchentwicklung liefert die Werte  $a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 2, e = 5$ , also gilt  $X_{8,3} = X(2, 3, 2)$ . Es gilt  $K(a_2, \dots, a_{e-1}) = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2)\}$ , und mit den im Beispiel aus 1.1 angegebenen  $\nabla_k$  liefert der Satz die Erzeugendensysteme:

$k = (1, 2, 1)$		
$g_{1,3}^k = x_1x_3 - x_2^2$	$g_{2,4}^k = x_2x_4 - x_3^3$	$g_{3,5}^k = x_3x_5 - x_4^2$
$g_{1,4}^k = x_1x_4 - x_2x_3^2$	$g_{2,5}^k = x_2x_5 - x_3^2x_4$	
$g_{1,5}^k = x_1x_5 - x_2x_3x_4$		

$k = (2, 1, 2)$		
$g_{1,3}^k = x_1x_3 - x_2^2$	$g_{2,4}^k = x_2x_4 - x_3^3$	$g_{3,5}^k = x_3x_5 - x_4^2$
$g_{1,4}^k = x_1x_4 - x_2x_3^2$	$g_{2,5}^k = x_2x_5 - x_3^2x_4$	
$g_{1,5}^k = x_1x_5 - x_3^4$		

<sup>6</sup>In [C] und [B] wird die Bezeichnung  $K_{e-2}(X)$  statt  $K(a_2, \dots, a_{e-1})$  verwendet.

**Bemerkung 1.2.2.** Ein spezieller Fall ist die Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  mit  $a_i = 2$  für alle  $i = 2, \dots, e-1$ : Hier liegt der Kegel über der rationalen Normkurve vom Grad  $e-1$  vor. Wir bezeichnen diesen Fall daher fortan abkürzend als Kegelfall. Ein häufig benutztes Beispiel für die Untersuchung verseller Deformationen ist der (Kegel-) Fall  $X_{4,1} = X(2, 2, 2)$ . Unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$  ist jedoch besser geeignet zur Demonstration der Eigenschaften der in Kapitel 2 beschriebenen Deformation  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ .

### 1.3 Arndts Konstruktion der versellen Deformation

Zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  wird nach Arndt (s. [A, Kapitel 4]) durch die folgenden Schritte 0,I,II,III<sup>7</sup> eine verselle Deformation  $\mathcal{X} \rightarrow S$  von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  konstruiert (hier sind  $\mathcal{X}$  und  $S$  komplexe Raumkeime, wobei  $\mathcal{X}$  der Totalraum und  $S$  der Basisraum der Deformation ist). Die Konstruktion erfolgt zu  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  eingebettet in  $\mathbb{C}^{e+\tau}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{e+\tau} \\ \downarrow & & \downarrow \text{Projektion} \\ S & \hookrightarrow & \mathbb{C}^\tau \end{array}$$

Dabei ist  $\tau := \dim T_X^1$  die Dimension des Raums  $T_X^1$  der infinitesimalen Deformationen von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ ; für diese gilt  $\tau = (\sum_{i=2}^{e-1} a_i) - 2$  (s. [Rie1]).

0) Wir setzen

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{für } i = 1, 2, e-1, e \\ x_i + t_i & \text{für } i = 3, \dots, e-2 \end{cases}$$

und definieren die drei Ringe

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{C}[s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}], \\ B &:= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}], \\ \tilde{B} &:= \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, x_3^{-1}, \dots, x_{e-2}^{-1}, y_3^{-1}, \dots, y_{e-2}^{-1}, \\ &\quad s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}]. \end{aligned}$$

Zu einem Polynom  $P \in B$  definieren wir das Polynom  $H^{(x)}(P) \in A$  als den  $(x_1, \dots, x_e)$ -konstanten Teil von  $P$  und das Polynom  $H^{(y)}(P) \in A$  als den  $(y_1, \dots, y_e)$ -konstanten Teil von  $P$ , also

$$H^{(x)}(P) := P|_{x_1=\dots=x_e=0} \quad \text{und} \quad H^{(y)}(P) := P|_{y_1=\dots=y_e=0}.$$

Weiter setzen wir

$$Z_i = y_i(x_i^{a_i-1} + x_i^{a_i-2}s_i^{(1)} + \dots + s_i^{(a_i-1)}) \quad \text{für } i = 2, \dots, e-1$$

und definieren folgende Polynome von  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{P}_{\delta,\epsilon} := \begin{cases} Z_{\delta+1} & \text{für } 2 \leq \delta+1 = \epsilon-1 \leq e-1, \\ \frac{Z_{\delta+1}}{x_{\delta+1}} \frac{Z_{\delta+2}}{x_{\delta+2}y_{\delta+2}} \frac{Z_{\delta+3}}{x_{\delta+3}y_{\delta+3}} \dots \frac{Z_{\epsilon-2}}{x_{\epsilon-2}y_{\epsilon-2}} \frac{Z_{\epsilon-1}}{y_{\epsilon-1}} & \text{für } 2 \leq \delta+1 < \epsilon-1 \leq e-1. \end{cases}$$

<sup>7</sup>Der Schritt "0" ist bei Arndt nicht angegeben und enthält hier die für die weiteren Schritte I,II,III erforderlichen Bezeichnungen. Die Bezeichnungen  $s_i^{(j)}$  und  $t_i$  wurden aus [B, Abschnitt 1.5] übernommen und weichen etwas von den entsprechenden Bezeichnungen in [A] ab.

Außerdem definieren wir folgende Monome von  $B$ :

$$p_{\delta,\epsilon} := \begin{cases} x_{\delta+1}^{a_{\delta+1}} & \text{für } 2 \leq \delta + 1 = \epsilon - 1 \leq e - 1, \\ x_{\delta+1}^{a_{\delta+1}-1} x_{\delta+2}^{a_{\delta+2}-2} x_{\delta+3}^{a_{\delta+3}-2} \cdots x_{\epsilon-2}^{a_{\epsilon-2}-2} x_{\epsilon-1}^{a_{\epsilon-1}-1} & \text{für } 2 \leq \delta + 1 < \epsilon - 1 \leq e - 1. \end{cases}$$

I) In  $B$  definieren wir die Polynome <sup>8</sup>

$$P_{i-1,i+1} := \tilde{P}_{i-1,i+1} \quad \text{für } i = 2, \dots, e - 1$$

und definieren das Ideal  $\mathfrak{a}_0 \subseteq A$  durch

$$\mathfrak{a}_0 := (\{s_i^{(a_i-1)} t_i; i = 3, \dots, e - 2\}).$$

II) Startend mit den Daten aus I) definieren wir nun induktiv Polynome  $P_{\delta,\epsilon} \in B$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  durch den folgenden Schritt für  $n = 3, \dots, e - 1$ :

Die Polynome  $P_{\delta,\epsilon}$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta \leq n - 1$  seien bereits definiert. Für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta = n$  definieren wir die Ideale  $\mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} \subseteq A$  durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} := & (\{H^{(x)}(P_{\delta',\epsilon'}); \delta + 1 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 2\} \\ & \cup \{H^{(y)}(P_{\delta',\epsilon'}); \delta + 2 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 1\}) + \mathfrak{a}_0 \end{aligned}$$

sowie die Ideale  $I_{\delta,\epsilon} \subseteq B$  durch <sup>9</sup>

$$I_{\delta,\epsilon} := (\{x_{\delta'} y_{\epsilon'} - P_{\delta',\epsilon'}; \delta + 1 < \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 < \epsilon - 1\}) + \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} B.$$

Nun setzen wir  $\tilde{I}_{\delta,\epsilon} := I_{\delta,\epsilon} \tilde{B}$  und wählen ein (nach [A, 4.1.6(4)] existierendes) Polynom  $P_{\delta,\epsilon} \in B$  mit: <sup>10</sup>

$$\begin{aligned} P_{\delta,\epsilon} &= \tilde{P}_{\delta,\epsilon} \text{ mod } \tilde{I}_{\delta,\epsilon} \\ P_{\delta,\epsilon|s,t=0} &= p_{\delta,\epsilon} \end{aligned}$$

III) Schließlich definieren wir in  $A$  das Ideal

$$\mathfrak{a} := (\{H^{(x)}(P_{\delta,\epsilon}); 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 2\} \cup \{H^{(y)}(P_{\delta,\epsilon}); 3 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1\})$$

und in  $B$  das Ideal

$$I := (\{x_{\delta} y_{\epsilon} - P_{\delta,\epsilon}; 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1\}) + \mathfrak{a} B.$$

Fassen wir nun  $\mathfrak{a}$  als Ideal von  $\mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  auf und  $I$  als Ideal von  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$ , so wird durch die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / \mathfrak{a} \\ & \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / I \end{aligned}$$

eine verselle Deformation  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  induziert.

<sup>8</sup>Man beachte, dass sich die Polynome  $\tilde{P}_{i-1,i+1}$  für  $i = 2, \dots, e - 1$  auch als Elemente von  $B$  auffassen lassen.

<sup>9</sup>Im Fall  $\delta - \epsilon = 3$  ist die Menge  $\{x_{\delta'} y_{\epsilon'} - P_{\delta',\epsilon'}; \delta + 1 < \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 < \epsilon - 1\}$  leer und es gilt  $I_{\delta,\epsilon} = \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} B$ .

<sup>10</sup>Natürlich ist hier  $P_{\delta,\epsilon|s,t=0} := P_{\delta,\epsilon|s_2^{(1)}=\dots=s_2^{(a_2-1)}=\dots=s_{e-1}^{(1)}=\dots=s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}=t_3=\dots=t_{e-2}=0}$  eine Abkürzung.

**Bemerkung 1.3.1.** In  $[A]$  wird in Schritt III das Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$  als  $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_{1,e}$  definiert. Dieses Ideal stimmt jedoch mit unserem  $\mathfrak{a}$  in Schritt III überein, da  $H^{(x)}(P_{i-1,i+1}) = s_i^{(a_i-1)}t_i$  für  $i = 3, \dots, e-2$  und offenbar  $H^{(x)}(P_{1,3}) = 0$  sowie  $H^{(y)}(P_{i-1,i+1}) = 0$  für  $i = 3, \dots, e-1$  gilt und somit  $\mathfrak{a}_0 = (\{H^{(x)}(P_{\delta,\epsilon}); 2 \leq \delta+1 = \epsilon-1 \leq e-2\} \cup \{H^{(y)}(P_{\delta,\epsilon}); 3 \leq \delta+1 = \epsilon-1 \leq e-1\})$ . Die hier gewählte Definition erscheint mir etwas schöner, auch wenn einige Erzeuger trivial und somit überflüssig sind.

**Bemerkung 1.3.2.** Problematisch an Arndts Konstruktion ist die Bestimmung von  $P_{\delta,\epsilon}$  in Schritt II. Arndt hatte in  $[A, 4.1.6(4)]$  zunächst nur dessen Existenz bewiesen und Berechnungen bis zur Einbettungsdimension 6 sowie für den Kegelfall durchgeführt. Brohme hat später in  $[B, Kapitel 4]$  eine Vermutung für eine allgemeine Berechnung formuliert (die bis zur Einbettungsdimension 6 und für den Kegelfall auf dieselben Ergebnisse wie bei Arndt führt) und diese bis zur Einbettungsdimension 7 und für den Kegelfall explizit bewiesen. Wir geben im nächsten Abschnitt einen Beweis dieser Vermutung für beliebige Einbettungsdimension und eine neue Formulierung mit Hilfe gewisser Graphen an. Die explizite Konstruktion findet sich in 1.4.5.

## 1.4 Eine explizite Konstruktion der versellen Deformation

Zwei Vorbemerkungen zu diesem Abschnitt: Zum Einen sei dem nur an dem Ergebnis interessierten Leser gesagt, dass er nur die Definition 1.4.1 und dann von der Einführung der Wurzelbäume an (“Ein Wurzelbaum  $T$  ist...”) bis zu dem Hauptergebnis 1.4.5 zu lesen braucht (eventuell zuzüglich der nachfolgenden Beispiele). Zum Anderen sei darauf hingewiesen, dass *alle* in diesem Abschnitt eingeführten Bezeichnungen im weiteren Teil der Arbeit nicht mehr benutzt werden bzw. in völlig anderem Zusammenhang neu definiert werden (z.B. “ $\prec$ ”, “ $Z$ ”, “ $\sigma$ ”).

Im letzten Abschnitt 1.3 wurde Arndts Konstruktion der versellen Deformation einer zwei-dimensionalen zyklischen Quotientensingularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  angegeben. Wie in 1.3.2 bemerkt, besteht dort jedoch das Problem der Bestimmung des Polynoms  $P_{\delta,\epsilon} \in B$  in Schritt II. Wir werden hier nun  $P_{\delta,\epsilon}$  explizit als Polynom in gewissen Ausdrücken  $Z_\mu^{(i,j)}, \sigma_\mu^{(i,j)}$  darstellen, die wiederum selbst Elemente des Polynomrings  $B$  sind.

**Definition 1.4.1.** Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Wie in 1.3 definieren wir die Polynomringe

$$A := \mathbb{C}[s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}]$$

und

$$B := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}].$$

Wir setzen

$$y_\mu = \begin{cases} x_\mu & \text{für } \mu = 1, 2, e-1, e \\ x_\mu + t_\mu & \text{für } \mu = 3, \dots, e-2 \end{cases}$$

und

$$Z_\mu^{(0,0)} := y_\mu(x_\mu^{a_\mu-1} + x_\mu^{a_\mu-2}s_\mu^{(1)} + \dots + s_\mu^{(a_\mu-1)}) \quad \text{für } \mu = 2, \dots, e-1.$$

Ausgehend von diesen Polynomen  $Z_\mu^{(0,0)} \in B$  definieren wir nun die Polynome  $Z_\mu^{(i,j)} \in B$  für  $\mu \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  sowie die Polynome  $\sigma_\mu^{(i,j)} \in B$  für  $\mu \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \setminus \{(0,0)\}$  induktiv durch die folgenden Gleichungen:

$$Z_\mu^{(i,j)} = Z_\mu^{(i+1,j)}x_\mu + \sigma_\mu^{(i+1,j)} = Z_\mu^{(i,j+1)}y_\mu + \sigma_\mu^{(i,j+1)}.$$

Weiter definieren wir wie in 1.3 zu einem Polynom  $P \in B$  das Polynom  $H^{(x)}(P) \in A$  als den  $(x_1, \dots, x_e)$ -konstanten Teil von  $P$  und das Polynom  $H^{(y)}(P) \in A$  als den  $(y_1, \dots, y_e)$ -konstanten Teil von  $P$ , also

$$H^{(x)}(P) := P_{|x_1=\dots=x_e=0} \quad \text{und} \quad H^{(y)}(P) := P_{|y_1=\dots=y_e=0}.$$

Wir erhalten also jedes Polynom  $Z_\mu^{(i,j)}$  und  $\sigma_\mu^{(i,j)}$  durch endlich viele Polynomdivisionen mit Rest.

Man beachte, dass  $H^{(x)}(Z_\mu^{(i,j)}) = \sigma_\mu^{(i+1,j)}$  und  $H^{(y)}(Z_\mu^{(i,j)}) = \sigma_\mu^{(i,j+1)}$  sowie  $H^{(x)}(\sigma_\mu^{(i,j)}) = \sigma_\mu^{(i,j)}$  und  $H^{(y)}(\sigma_\mu^{(i,j)}) = \sigma_\mu^{(i,j)}$  gilt. Wenn wir im Folgenden das Polynom  $P_{\delta,\epsilon}$  als Polynom in den Polynomen  $Z_\mu^{(i,j)}, \sigma_\mu^{(i,j)}$  ausdrücken, so ergibt sich also  $H^{(x)}(P_{\delta,\epsilon})$  aus  $P_{\delta,\epsilon}$  durch den Ersatz jedes  $Z_\mu^{(i,j)}$  durch  $\sigma_\mu^{(i+1,j)}$  und  $H^{(y)}(P_{\delta,\epsilon})$  aus  $P_{\delta,\epsilon}$  durch den Ersatz jedes  $Z_\mu^{(i,j)}$  durch  $\sigma_\mu^{(i,j+1)}$ .

Startend mit  $P_{\mu-1,\mu+1} := Z_\mu^{(0,0)}$  für  $\mu = 2, \dots, e-1$  besagt Brohmes Vermutung nun, dass Kandidaten für die  $P_{\delta,\epsilon}$  in Schritt II von Arndts Konstruktion induktiv durch die folgenden Schritte 1), 2) für  $n = 3, \dots, e-1$  berechnet werden können:

- 1) Es seien alle  $P_{\delta,\epsilon}$  mit  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ ,  $\epsilon-\delta \leq n-1$  berechnet. Wir berechnen folgendermaßen alle Polynome  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  mit  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ ,  $\epsilon-\delta = n-1$ ,  $\delta < \nu < \epsilon$ :

Für die Berechnung von  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  aus  $P_{\delta,\epsilon}$  nehmen wir induktiv an, dass sich jedes Monom von  $P_{\delta,\epsilon}$  in der Form

$$\left( \prod_{\mu=\delta+2}^{\epsilon-2} \prod_{(i,j) \in M_\mu} \sigma_\mu^{(i,j)} \right) \left( \prod_{\mu=\delta+1}^{\epsilon-1} Z_\mu^{(i_\mu, j_\mu)} \right)$$

mit endlichen Teilmengen  $M_{\delta+2}, \dots, M_{\epsilon-2}$  von  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \setminus \{(0,0)\}$  und Paaren  $(i_\mu, j_\mu) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  für  $\mu = \delta+1, \dots, \epsilon-1$  schreiben lässt; wir ersetzen jedes solche Monom dann durch

$$\left( \prod_{\mu=\delta+2}^{\epsilon-2} \prod_{(i,j) \in M_\mu} \sigma_\mu^{(i,j)} \right) (\sigma_{\nu+1}^{(i_{\nu+1}+1, j_{\nu+1})} \dots \sigma_{\epsilon-1}^{(i_{\epsilon-1}+1, j_{\epsilon-1})}) \left( \prod_{\mu=\delta+1}^{\nu-1} Z_\mu^{(i_\mu, j_\mu)} \right) Z_\nu^{(i_\nu+1, j_\nu)}.$$

- 2) Es seien alle  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  mit  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ ,  $\epsilon-\delta \leq n-1$ ,  $\delta < \nu < \epsilon$  berechnet. Wir definieren folgendermaßen alle Polynome  $P_{\delta,\epsilon}$  mit  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ ,  $\epsilon-\delta = n$ :

$$P_{\delta,\epsilon} := \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon-2} \left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}$$

Zur Bedingung  $P_{\delta,\epsilon} = \tilde{P}_{\delta,\epsilon} \bmod \tilde{I}_{\delta,\epsilon}$  in Arndts Konstruktion zeigt Brohme zunächst die folgende Aussage.

**Lemma 1.4.2.** *Mit  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{P}_{\delta,\epsilon}$ ,  $\tilde{I}_{\delta,\epsilon}$  wie in Arndts Konstruktion (s. 1.3) gilt für  $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ :*

$$\tilde{P}_{\delta,\epsilon} = (P_{\delta,\epsilon} + R_{\delta,\epsilon}) \bmod \tilde{I}_{\delta,\epsilon}$$

mit  $R_{\delta,\epsilon} := 0$  falls  $\epsilon-\delta \leq 3$ , und mit

$$R_{\delta,\epsilon} := \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} x_\nu \frac{R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}}{x_{\epsilon-2}} \in \tilde{B}, \quad \text{wobei } R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} := \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \nu} \left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) \sigma_{\epsilon-1}^{(0, l-1)} \in B \text{ für } \delta+1 \leq \nu \leq \epsilon-3$$

falls  $\epsilon-\delta \geq 4$  (mit  $P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})}$  wie in der obigen Konstruktion).

*Beweis.* Siehe [B, Bemerkung 4.1]. Dabei sei darauf hingewiesen, dass dort der Schritt 1) durch den folgenden äquivalenten Schritt 1') ersetzt wird:

- 1') Es seien alle  $P_{\delta,\epsilon}$  mit  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$ ,  $\epsilon - \delta \leq n - 1$  berechnet. Wir berechnen folgendermaßen alle Polynome  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  mit  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$ ,  $\epsilon - \delta = n - 1$ ,  $\delta < \nu < \epsilon$ :

Wir schreiben

$$P_{\delta,\epsilon} = \left( \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} x_\nu P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} \right) + H^{(x)}(P_{\delta,\epsilon})$$

mit  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} \in \mathbb{C}[x_{\delta+1}, \dots, x_\nu, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}]$ . (Diese  $P_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  sind eindeutig bestimmt.)

□

Die Bedingung “ $P_{\delta,\epsilon} = \tilde{P}_{\delta,\epsilon} \bmod \tilde{I}_{\delta,\epsilon}$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$ ” ist nach 1.4.2 äquivalent zur Bedingung “ $R_{\delta,\epsilon} \in \tilde{I}_{\delta,\epsilon}$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$ ”. Und mit  $\mathfrak{a}_{\delta,\epsilon}$  wie in Arndts Konstruktion folgt diese Bedingung aus der Bedingung

$$(\star) \quad R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} \in \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} B \quad \text{für } 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1, \delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3.$$

Brohme hat die Bedingung  $(\star)$  bis zur Einbettungsdimension  $e = 7$  durch explizite Rechnung bewiesen.

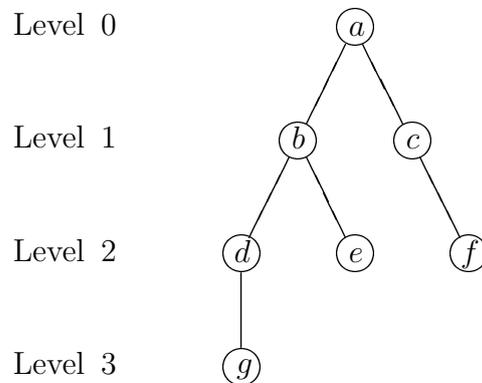
Wir führen nun Wurzelbäume ein, mit deren Hilfe wir die Vermutung neu formulieren und mittels der Bedingung  $(\star)$  auch für beliebige Einbettungsdimension beweisen werden. Genau genommen werden wir beim Beweis sogar die stärkere Bedingung

$$(\star\star) \quad R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} \in \mathfrak{b}_{\delta,\epsilon} B \quad \text{für } 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1, \delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3$$

mit  $\mathfrak{b}_{\delta,\epsilon} :=$

$(\{H^{(x)}(P_{\delta',\epsilon'}); \delta + 2 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 2\} \cup \{H^{(y)}(P_{\delta',\epsilon'}); \delta + 2 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 = \epsilon - 1\})$  zeigen. <sup>11</sup>

Ein Wurzelbaum  $T$  ist ein (endlicher) Baum mit einer ausgezeichneten Ecke, der Wurzel. Wir zeichnen einen Wurzelbaum mit der Wurzel an der Spitze und den anderen Ecken je auf einer Höhe, die der Weglänge zur Wurzel entspricht. Mit Weglänge ist dabei die Anzahl der Kanten des Weges gemeint. Die Menge der Ecken von  $T$  bezeichnen wir mit  $E(T)$ . Beispiel:



<sup>11</sup>Diese Bedingung ist stärker, da die Inklusion  $\mathfrak{b}_{\delta,\epsilon} \subset \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon}$  echt ist.

Wie in diesem Beispiel numerieren wir die Levels entsprechend der Weglänge zur Wurzel. Eine Ecke  $b \in E(T)$  heißt Kind-Ecke von der Ecke  $a \in E(T)$ , wenn  $a$  die nächste Ecke auf dem Weg von  $b$  zur Wurzel ist. In diesem Fall heißt  $a$  die Eltern-Ecke von  $b$ . Haben zwei Ecken dieselbe Eltern-Ecke, so heißen sie Geschwister-Ecken.

Wir betrachten auf einem Wurzelbaum  $T$  eine (partielle) Ordnung der Ecken: Es sei  $a \leq b$ , falls  $a$  und  $b$  Ecken desselben Levels sind und außerdem entweder  $a = b$  gilt oder  $b$  sich rechts von  $a$  befindet. Der Ausdruck  $a < b$  bedeute dann  $a \leq b, a \neq b$ . Weiter bedeute  $a \prec b$ , dass  $a < b$  gilt und dass es keine Ecke  $c$  gibt mit  $a < c < b$ . Mit  $\mathcal{M}(T) \subseteq E(T)$  bezeichnen wir die Menge der Ecken mit maximaler Ordnung von  $T$ , also die "ganz rechten" Ecken von  $T$ .

Jede Ecke  $a$  in einem Wurzelbaum  $T$  definiert einen neuen Wurzelbaum mit  $a$  als Wurzel. Wir bezeichnen diesen mit  $T(a)$ . Mit  $H(T)$  bzw.  $H(T(a))$  bezeichnen wir die Höhe des Wurzelbaums  $T$  bzw.  $T(a)$ . Mit der Höhe ist dabei die Weglänge der "untersten" Ecke(n) zur Wurzel gemeint. Mit  $L(a)$  bezeichnen wir den Level von  $a$ . Mit  $AKE(a)$  bezeichnen wir die Anzahl der Kind-Ecken von  $a$ .  $T$  heißt unverzweigt, falls  $AKE(a) \leq 1$  für alle  $a \in E(T)$  gilt.

Nennen wir einige Eigenschaften des obigen Beispiels: Die Ecke  $a$  ist dort die Wurzel. Die Ecken  $b, c$  sind Geschwister-Ecken (mit Eltern-Ecke  $a$ ), ebenso sind  $d, e$  Geschwister-Ecken (mit Eltern-Ecke  $b$ ). In Level 2 ist die Ordnung:  $d < e < f$ . Es gilt  $H(T(b)) = 2, H(T(c)) = 1$ . Und  $L(b) = 1, L(g) = 3$ .

Darüber hinaus handelt es sich um einen  $\alpha$ -Baum nach der folgenden Definition.

**Definition 1.4.3.** Als einen  $\alpha$ -Baum bezeichnen wir einen Wurzelbaum  $T$  mit der Eigenschaft, dass für je zwei Geschwister-Ecken  $a, b$  mit  $b > a$  gilt, dass  $H(T(a)) > H(T(b))$ . Zu  $i \in \mathbb{N}_0$  bezeichnen wir die Menge aller  $\alpha$ -Bäume der Höhe  $i$  mit  $\mathcal{A}(i)$ .

Im Anschluss an 1.4.5 sind alle Elemente von  $\mathcal{A}(i)$  für die Fälle  $i = 0, 1, 2, 3$  gezeichnet. Die dort angegebenen Polynome  $Z_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}$  an jeder Ecke sind die Werte der im Folgenden definierten Abbildung  $\phi : E(T) \longrightarrow \{Z_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}\}$ .

**Definition 1.4.4.** Gegeben sei ein  $\alpha$ -Baum  $T$ , zusammen mit einer natürlichen Zahl  $n$ . Für jede Ecke  $a \in E(T)$  setzen wir

$$\phi(T, a, n) := \begin{cases} Z_{\mu}^{(i, j)} & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T) \\ \sigma_{\mu}^{(i, j)} & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T). \end{cases}$$

Dabei sei  $\mu := n - L(a)$  und  $j := AKE(a)$ . Weiter sei  $i = 0$ , falls  $a$  die Wurzel von  $T$  ist. Ist  $a$  nicht die Wurzel von  $T$ , so sei mit  $b$  als Eltern-Ecke von  $a$ :

$$i := \begin{cases} \#\{c \in E(T); b \leq c\} & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T) \\ \#\{c \in E(T); b \leq c \leq d\} & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T), \end{cases}$$

wobei im zweiten Fall  $d$  die Eltern-Ecke derjenigen Ecke  $e$  sei, für die  $a \prec e$  gilt.

Weiter setzen wir dann

$$\Phi(T, n) := \prod_{a \in E(T)} \phi(T, a, n).$$

Wir formulieren nun eine Konstruktion in Arndts Form mittels  $\alpha$ -Bäumen.

**Satz 1.4.5.** *Es sei eine zweidimensionale zyklische Quotientensingularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Im Ring  $B$  definieren wir für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  die Polynome*

$$P_{\delta, \epsilon} := \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)} \Phi(T, \epsilon - 1).$$

Mit diesen Polynomen definieren wir in  $A$  das Ideal

$$\mathfrak{a} := (\{H^{(x)}(P_{\delta, \epsilon}); 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 2\} \cup \{H^{(y)}(P_{\delta, \epsilon}); 3 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1\})$$

und in  $B$  das Ideal

$$I := (\{x_\delta y_\epsilon - P_{\delta, \epsilon}; 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1\}) + \mathfrak{a}B.$$

Fassen wir nun  $\mathfrak{a}$  als Ideal von  $\mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  auf und  $I$  als Ideal von  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$ , so wird durch die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / \mathfrak{a} \\ & \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / I \end{aligned}$$

eine verselle Deformation  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  induziert.

*Beweis.* Dass Brohmes Kandidaten auf  $P_{\delta, \epsilon} = \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)} \Phi(T, \epsilon - 1)$  führen, werden wir in Lemma 1.4.10 beweisen. Des Weiteren sind die Bedingungen “ $P_{\delta, \epsilon} = \tilde{P}_{\delta, \epsilon} \bmod \tilde{I}_{\delta, \epsilon}$ ” und “ $P_{\delta, \epsilon|s, t=0} = p_{\delta, \epsilon}$ ” aus Arndts Konstruktion zu zeigen.

$P_{\delta, \epsilon|s, t=0} = p_{\delta, \epsilon}$  folgt daraus, dass der einzige unverzweigte  $\alpha$ -Baum aus  $\mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)$  durch  $\Phi$  auf  $Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(1,1)} \cdots Z_{\epsilon-2}^{(1,1)} Z_{\epsilon-1}^{(0,1)}$  (bzw.  $Z_{\delta+1}^{(0,0)}$ , falls  $\epsilon - \delta = 2$ ) abgebildet wird und alle anderen  $\alpha$ -Bäume aus  $\mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)$  auf ein Produkt, das ein  $\sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}$  als Faktor enthält, also auf ein Produkt mit einem Deformationsparameter als Faktor oder auf Null.

$P_{\delta, \epsilon} = \tilde{P}_{\delta, \epsilon} \bmod \tilde{I}_{\delta, \epsilon}$  werden wir beweisen, indem wir die oben genannte Bedingung  $(\star\star)$  zeigen. Also ist  $R_{\delta, \epsilon}^{(\nu)} \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  für  $\epsilon - \delta \geq 4$  und  $\delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3$  zu beweisen. Dies geschieht in Lemma 1.4.11 (und in denen diesem Lemma folgenden Lemmata, welche zeigen, dass die Voraussetzungen 1) und 2) in 1.4.11 erfüllt sind).  $\square$

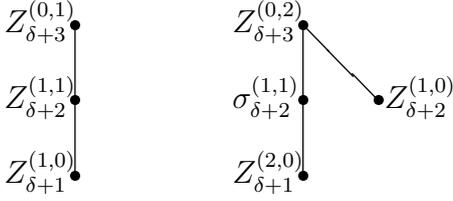
Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, sehen wir uns die “ersten” Polynome  $P_{\delta, \epsilon}$  an: Wir betrachten die Polynome  $P_{\delta, \delta+m} = \sum_{T \in \mathcal{A}(m-2)} \Phi(T, \delta + m - 1)$  für die Fälle  $m = 2, 3, 4, 5$  (falls  $\delta \geq 1$ ,  $\delta + m \leq e$ ).

$$Z_{\delta+1}^{(0,0)} \bullet$$

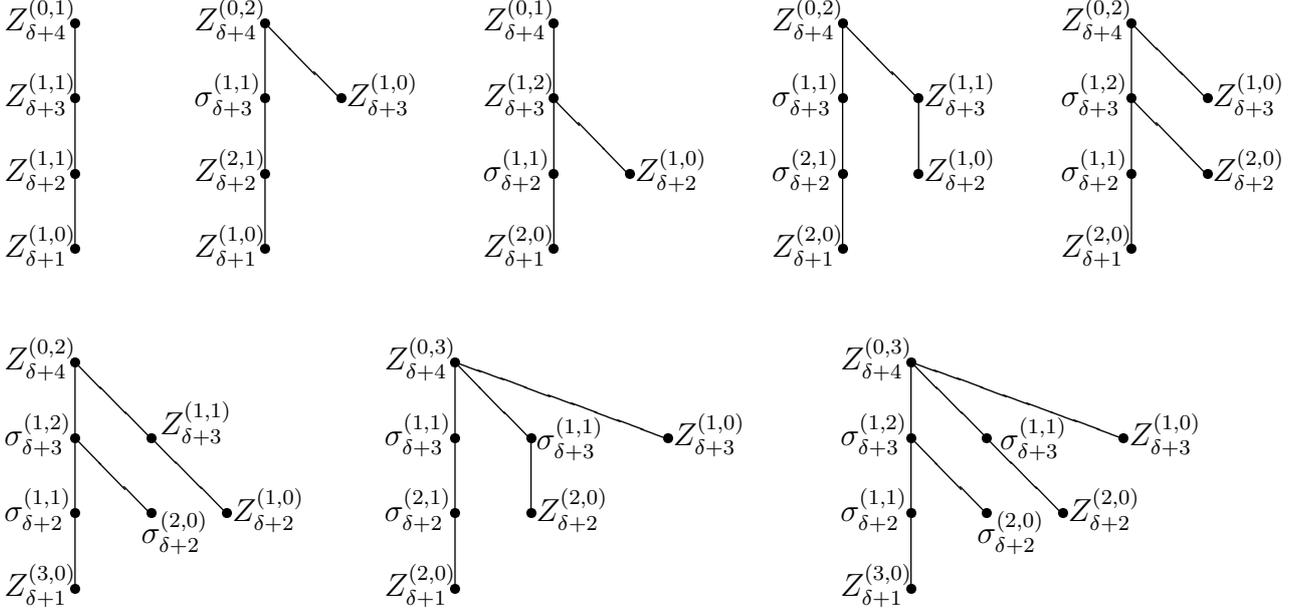
$$\text{Also } P_{\delta, \delta+2} = Z_{\delta+1}^{(0,0)}$$

$$\begin{array}{c} Z_{\delta+2}^{(0,1)} \bullet \\ \downarrow \\ Z_{\delta+1}^{(1,0)} \bullet \end{array}$$

Also  $P_{\delta,\delta+3} = Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(0,1)}$



Also  $P_{\delta,\delta+4} = Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+3}^{(0,1)} + \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(0,2)}$



Also

$$\begin{aligned}
P_{\delta,\delta+5} &= Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,1)} + \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(2,1)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} \\
&+ \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+4}^{(0,1)} + \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} \\
&+ \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} + \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+1}^{(3,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} \\
&+ \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} (\sigma_{\delta+3}^{(1,1)})^2 Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,3)} + \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(3,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,3)}
\end{aligned}$$

**Bemerkung 1.4.6.** Die Anzahl der Elemente aus  $\mathcal{A}(i)$  nimmt mit zunehmendem  $i$  stark zu. Wie man sich leicht überlegt, erhält man für die Anzahl  $\#\mathcal{A}(i)$  die rekursive Formel

$$\#\mathcal{A}(0) = 1, \quad \#\mathcal{A}(i) = \#\mathcal{A}(i-1) \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \#\mathcal{A}(j),$$

also  $\#\mathcal{A}(0) = 1, \#\mathcal{A}(1) = 1, \#\mathcal{A}(2) = 2, \#\mathcal{A}(3) = 8, \#\mathcal{A}(4) = 96, \#\mathcal{A}(5) = 10368, \dots$

Eine explizite Berechnung der Erzeuger erscheint in der Praxis daher nur bei kleiner Einbettungsdimension oder bei kleinen  $a_i$  (wodurch einige der  $Z_{\bullet}^{(\bullet,\bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet,\bullet)}$  zu Null werden) möglich.

Unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$  führt nach 1.4.5 auf die folgenden Erzeuger von  $\mathbf{a}$  bzw.  $I$ :

$H^{(x)}(P_{1,3})$	$= 0$
$H^{(x)}(P_{2,4})$	$= s_3^{(2)} t_3$
$H^{(x)}(P_{1,4})$	$= s_2^{(1)} s_3^{(2)}$
$H^{(y)}(P_{2,4})$	$= 0$
$H^{(y)}(P_{3,5})$	$= 0$
$H^{(y)}(P_{2,5})$	$= s_3^{(2)} s_4^{(1)}$
$x_1 y_3 - P_{1,3}$	$= x_1(x_3 + t_3) - x_2(x_2 + s_2^{(1)})$
$x_2 y_4 - P_{2,4}$	$= x_2 x_4 - (x_3 + t_3)(x_3^2 + s_3^{(1)} x_3 + s_3^{(2)})$
$x_3 y_5 - P_{3,5}$	$= x_3 x_5 - x_4(x_4 + s_4^{(1)})$
$x_1 y_4 - P_{1,4}$	$= x_1 x_4 - (x_2 + s_2^{(1)})(x_3^2 + s_3^{(1)} x_3 + s_3^{(2)})$
$x_2 y_5 - P_{2,5}$	$= x_2 x_5 - (x_3^2 + (t_3 + s_3^{(1)}) x_3 + t_3 s_3^{(1)} + s_3^{(2)})(x_4 + s_4^{(1)})$
$x_1 y_5 - P_{1,5}$	$= x_1 x_5$
	$-((x_2 + s_2^{(1)})(x_3 + s_3^{(1)})(x_4 + s_4^{(1)}) + s_3^{(2)}(x_3^2 + (t_3 + s_3^{(1)}) x_3 + t_3 s_3^{(1)} + s_3^{(2)}))$

Wir fahren nun mit dem Beweis von 1.4.5 fort.

Zunächst erweitern wir die Klasse der  $\alpha$ -Bäume zur Klasse der  $\beta$ -Bäume (schließen jedoch den Fall der Höhe 0 aus) und definieren die Funktion  $\bar{\phi} : E(T) \longrightarrow \{Z_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}\}$ , die im Fall eines  $\alpha$ -Baums  $T$  mit  $\phi$  übereinstimmt:

**Definition 1.4.7.** Als einen  $\beta$ -Baum bezeichnen wir einen Wurzelbaum  $T$  mit  $H(T) \geq 1$  und mit der Eigenschaft: Sind  $a$  und  $b$  Geschwister-Ecken mit  $a < b$ , so gilt  $H(T(a)) \geq 1$ .

Weiter definieren wir folgendermaßen zu einem  $\beta$ -Baum  $T$  mit einer natürlichen Zahl  $n$  die Funktion  $\bar{\phi} : E(T) \longrightarrow \{Z_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}\}$ : Für jede Ecke  $a \in E(T)$  setzen wir

$$\bar{\phi}(T, a, n) := \begin{cases} Z_{\mu}^{(i, j)} & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T) \\ \sigma_{\mu}^{(i, j)} & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T). \end{cases}$$

Dabei sei  $\mu := n - L(a)$  und  $j := AKE(a)$ . Weiter sei  $i = 0$ , falls  $a$  die Wurzel von  $T$  ist. Ist  $a$  nicht die Wurzel von  $T$ , so sei mit  $b$  als Eltern-Ecke von  $a$ :

$$i := \begin{cases} \#\{c \in E(T); b \leq c\} & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T) \\ \#\{c \in E(T); b \leq c \leq d\} & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T), \end{cases}$$

wobei im zweiten Fall  $d$  die Eltern-Ecke derjenigen Ecke  $e$  sei, für die  $a \prec e$  gilt.

**Definition 1.4.8.** Gegeben sei ein  $\beta$ -Baum  $T$ , zusammen mit einer natürlichen Zahl  $n$ . Für jede Ecke  $a \in E(T)$  setzen wir

$$\omega(T, a, n) := \begin{cases} \bar{\phi}(T, a, n) & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T) \\ \sigma_{\mu}^{(i+1, j)} \text{ mit } i, j, \mu \text{ aus } Z_{\mu}^{(i, j)} = \bar{\phi}(T, a, n) & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T) \end{cases}$$

sowie

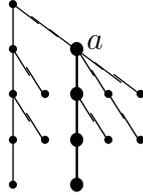
$$\omega'(T, a, n) := \begin{cases} \bar{\phi}(T, a, n) & \text{falls } a \notin \mathcal{M}(T) \\ \sigma_{\mu}^{(i, j+1)} \text{ mit } i, j, \mu \text{ aus } Z_{\mu}^{(i, j)} = \bar{\phi}(T, a, n) & \text{falls } a \in \mathcal{M}(T). \end{cases}$$

Weiter setzen wir dann

$$\Omega(T, n) := \prod_{a \in E(T)} \omega(T, a, n) \quad \text{sowie} \quad \Omega'(T, n) := \prod_{a \in E(T)} \omega'(T, a, n).$$

Vor der nächsten Definition zunächst noch eine weitere Bezeichnung für einen  $\beta$ -Baum  $T$ : Ist  $a \in E(T)$ , so sei  $W(a)$  derjenige Weg in  $T$  mit der Start-Ecke  $a$ , der sich durch jeweiliges Verbinden mit der Kind-Ecke der niedrigsten Ordnung ergibt (bis zu einer Ecke  $b \in E(T)$  mit  $AKE(b) = 0$ ).  $W(a)$  ist dann ein unverzweigter Wurzelbaum, mit  $a$  als Wurzel.

Beispiel:



$W(a)$  ist hier fett gezeichnet

**Definition 1.4.9.** Als einen  $\gamma$ -Baum bezeichnen wir einen  $\beta$ -Baum  $T$  mit  $H(T) \geq 2$  und mit den folgenden Eigenschaften:

- 1) Es gilt  $AKE(a) \geq 2$  für die Wurzel  $a$  von  $T$ .
- 2) Es gibt nur eine Ecke  $b \in E(T)$  mit  $L(b) = H(T)$ , und diese Ecke liegt in  $W(a)$ , wenn  $a$  die Wurzel von  $T$  ist.
- 3) Für jede Ecke  $b \in E(T)$  gilt  $AKE(b) \leq H(T) - L(b)$ .
- 4) Für die Ecke  $c \in E(T)$  mit  $L(c) = 1$  und  $c \in \mathcal{M}(T)$  gilt, dass  $T(c)$  unverzweigt ist.

Wir setzen  $\tilde{E}(T) := E(T) \setminus E(T(c))$ , mit  $T(c)$  wie unter 4).

Die Menge aller  $\gamma$ -Bäume mit der Höhe  $i$  und mit  $j$  als Höhe des unter 4) genannten Baums  $T(c)$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}(i, j)$ . Die Elemente dieser Menge, die zugleich  $\alpha$ -Bäume sind, bezeichnen wir mit  $\mathcal{R}(i, j)$ .

Einem  $\gamma$ -Baum  $T$  zusammen mit einer natürlichen Zahl  $n$  ordnen wir folgendermaßen eine Abbildung  $\psi : \tilde{E}(T) \rightarrow \{Z_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}, \sigma_{\bullet}^{(\bullet, \bullet)}\}$  zu:

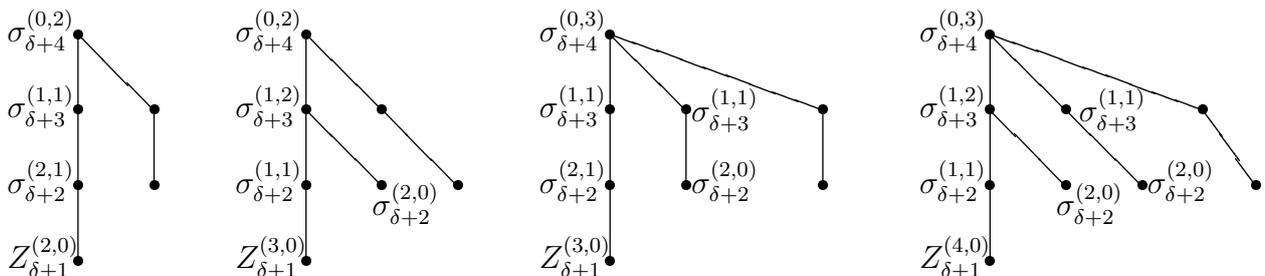
Ist  $a \in \tilde{E}(T)$  die Wurzel von  $T$ , so setzen wir  $\psi(T, a, n) := \sigma_{\mu}^{(i, j)}$  mit  $\mu = n, i = 0, j = AKE(a)$ .

Ist  $a \in \tilde{E}(T)$  nicht die Wurzel von  $T$ , so setzen wir  $\psi(T, a, n) := \bar{\phi}(T, a, n)$ .

Weiter setzen wir dann

$$\Psi(T, n) := \prod_{a \in \tilde{E}(T)} \psi(T, a, n).$$

Im Folgenden sind alle Elemente von  $\mathcal{S}(3, 1)$  aufgeführt, zusammen mit den Werten unter  $\psi(a, \delta + 4)$ . Die ersten beiden Bäume sind dabei die Elemente von  $\mathcal{R}(3, 1)$ .



Das folgende Lemma begründet die Einführung von Wurzelbäumen in diesem Abschnitt.

**Lemma 1.4.10.** *Brohmes – in den Schritten 1), 2) vor Lemma 1.4.2 definierten – Kandidaten  $P_{\delta,\epsilon}$  und die in Lemma 1.4.2 definierten  $R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)}$  führen auf*

$$\begin{aligned}
P_{\delta,\epsilon} &= \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon-\delta-2)} \Phi(T, \epsilon-1) && (\text{für } \epsilon - \delta \geq 2), \\
R_{\delta,\epsilon}^{(\nu)} &= \sum_{T \in \mathcal{R}(\epsilon-\delta-2, \epsilon-\nu-3)} \Psi(T, \epsilon-1) && (\text{für } \epsilon - \delta \geq 4, \delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3), \\
H^{(x)}(P_{\delta,\epsilon}) &= \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon-\delta-2)} \Omega(T, \epsilon-1) && (\text{für } \epsilon - \delta \geq 3), \\
H^{(y)}(P_{\delta,\epsilon}) &= \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon-\delta-2)} \Omega'(T, \epsilon-1) && (\text{für } \epsilon - \delta \geq 3).
\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die erste Gleichung per Induktion nach  $\epsilon - \delta =: n \geq 2$ . Der Induktionsanfang  $n = 2$  führt auf den nur aus der Wurzel bestehenden Baum mit  $P_{\delta,\delta+2} = Z_{\delta+1}^{(0,0)}$ . Sei nun die Aussage für alle  $P_{\delta',\epsilon'}$  mit  $\epsilon' - \delta' \leq n$  für ein  $n \geq 2$  bewiesen. Wir zeigen die Aussage nun für

$$P_{\delta,\epsilon} = \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon-2} \left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)},$$

wobei  $\epsilon - \delta = n + 1$ : Wir denken uns zunächst feste  $\nu_1, \dots, \nu_l$  mit  $\delta = \nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon - 2$  und betrachten  $\left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}$ . Für die Polynome  $P_{\nu_m, \epsilon-1}$ ,  $m = 1, \dots, l-1$  gilt nach Induktionsvoraussetzung jeweils  $P_{\nu_m, \epsilon-1} = \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon-\nu_m-3)} \Phi(T, \epsilon-2)$ . Wir wählen für  $m = 1, \dots, l-1$  je einen  $\alpha$ -Baum  $T_m \in \mathcal{A}(\epsilon-\nu_m-3)$ . Diese  $\alpha$ -Bäume ordnen wir nebeneinander an, und zwar mit den Wurzeln auf einer gleichen Höhe; dann verbinden wir jede Wurzel mit einer zusätzlichen Ecke darüber (die dann die Wurzel des so entstandenen großen neuen Baums wird); so wie in dem folgenden Bild, in dem wir exemplarisch den Fall betrachten, dass die  $T_m$  alle unverzweigt sind.



$\mu = \nu_m + 1, \dots, \epsilon - 2$ , und setzen wir dann  $N_m :=$

$$\left( \prod_{\mu=\nu_m+2}^{\epsilon-3} \prod_{(i,j) \in M_\mu^{(m)}} \sigma_\mu^{(i,j)} \right) (\sigma_{\nu_{m+1}+1}^{(i_{\nu_{m+1}+1}+1, j_{\nu_{m+1}+1}^{(m)})} \dots \sigma_{\epsilon-2}^{(i_{\epsilon-2}+1, j_{\epsilon-2}^{(m)})}) \left( \prod_{\mu=\nu_m+1}^{\nu_{m+1}-1} Z_\mu^{(i_\mu^{(m)}, j_\mu^{(m)})} \right) Z_{\nu_{m+1}}^{(i_{\nu_{m+1}+1}, j_{\nu_{m+1}+1}^{(m)})},$$

so gilt

$$\Phi(T, \epsilon - 1) = \left( \prod_{m=1}^{l-1} N_m \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}.$$

Dieser Wert stimmt mit einem Term von  $\left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}$  überein. Es ergeben sich alle Terme von  $\left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}$  in derselben Weise durch alle Kombinationen von  $T_1, \dots, T_{l-1}$  mit  $T_m \in \mathcal{A}(\epsilon - \nu_m - 3)$  für  $m = 1, \dots, l-1$ . Variiert man nun zusätzlich die  $\nu_m$ , d.h. betrachtet man alle Kombinationen von  $\nu_1, \dots, \nu_l$  mit  $\delta = \nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon - 2$ , so erhält man alle  $T \in \mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)$ . Darauf folgt  $\sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon-2} \left( \prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{(\nu_{i+1})} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)} = \sum_{T \in \mathcal{A}(\epsilon - \delta - 2)} \Phi(T, \epsilon - 1)$ .

Ähnlich erhält man die Formel für  $R_{\delta, \epsilon}^{(\nu)}$ .

Die Formel für  $H^{(x)}(P_{\delta, \epsilon})$  (bzw.  $H^{(y)}(P_{\delta, \epsilon})$ ) folgt aus der Formel für  $P_{\delta, \epsilon}$ , denn für einen  $\alpha$ -Baum stimmt die Funktion  $\bar{\phi}$  mit der Funktion  $\phi$  überein, und das Polynom  $H^{(x)}(P_{\delta, \epsilon})$  (bzw.  $H^{(y)}(P_{\delta, \epsilon})$ ) ergibt sich aus  $P_{\delta, \epsilon}$  durch den Ersatz jedes  $Z_\mu^{(i, j)}$  durch  $\sigma_\mu^{(i+1, j)}$  (bzw.  $\sigma_\mu^{(i, j+1)}$ ).  $\square$

**Lemma 1.4.11.** *Es sei  $\epsilon - \delta \geq 4$  und  $\delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3$ . Wir gehen von den folgenden beiden Voraussetzungen aus:*

- 1) *Auf  $\mathcal{T}_1 := \mathcal{S}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3)$  gibt es eine Äquivalenzrelation – die wir als (I)-Äquivalenzrelation bezeichnen – so dass für jedes  $T \in \mathcal{T}_1$  gilt:*

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_1, T' \sim_{(I)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

- 2) *Auf  $\mathcal{T}_2 := \mathcal{S}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3) \setminus \mathcal{R}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3)$  gibt es eine Äquivalenzrelation – die wir als (II)-Äquivalenzrelation bezeichnen – so dass für jedes  $T \in \mathcal{T}_2$  gilt:*

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

Dann gilt  $R_{\delta, \epsilon}^{(\nu)} \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$ .

*Beweis.* Es sei vorab erwähnt, dass die Menge  $\mathcal{T}_1$  wegen der Eigenschaft 3) in Definition 1.4.9 endlich ist und daher auch alle hier auftretenden Summen endlich sind. Wir setzen  $\mathcal{T}_3 := \mathcal{R}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3)$ . Nach 1.4.10 ist  $\sum_{T \in \mathcal{T}_3} \Psi(T, \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  zu zeigen. Wir bilden nun folgendermaßen Summen  $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(s)}$ , die in  $\mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  enthalten sind: Wir starten mit einem beliebigen  $T^{(1)} \in \mathcal{T}_3$  und bilden die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_1, T' \sim_{(I)} T^{(1)}} \Psi(T', \epsilon - 1)$ . In dieser Summe tritt der Term  $\Psi(T^{(1)}, \epsilon - 1)$  auf, aber im Allgemeinen auch Terme  $\Psi(T_1, \epsilon - 1), \dots, \Psi(T_p, \epsilon - 1)$  mit  $T_1, \dots, T_p \in \mathcal{T}_2$ . Darum ziehen wir nun von dieser Summe zunächst die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T_1} \Psi(T', \epsilon - 1)$  ab. Möglicherweise tritt in dieser Summe auch der Term  $\Psi(T_2, \epsilon - 1)$  auf und ist in der Gesamtsumme somit ausgelöscht. Falls nicht, ziehen wir weiter die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T_2} \Psi(T', \epsilon - 1)$  ab. Wurde nun in der neuen Gesamtsumme der Term  $\Psi(T_3, \epsilon - 1)$  nicht ausgelöscht, ziehen

wir weiter die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T_3} \Psi(T', \epsilon - 1)$  ab. Dieses Verfahren setzen wir bis zum Term  $\Psi(T_p, \epsilon - 1)$  fort. In der so entstandenen Gesamtsumme sind jetzt (eventuell) negative Terme  $-\Psi(U_1, \epsilon - 1), \dots, -\Psi(U_q, \epsilon - 1)$  mit  $U_1, \dots, U_q \in \mathcal{T}_2$  vorhanden. Darum addieren wir zur Gesamtsumme nun zunächst die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_1, T' \sim_{(I)} U_1} \Psi(T', \epsilon - 1)$ . Wurde dabei in der neuen Gesamtsumme der Term  $\Psi(U_2, \epsilon - 1)$  nicht ausgelöscht, addieren wir weiter die Summe  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} U_2} \Psi(T', \epsilon - 1)$ . Dieses Verfahren setzen wir bis zum Term  $\Psi(U_q, \epsilon - 1)$  fort. Falls in der nun entstandenen neuen Gesamtsumme noch Terme  $\Psi(V_1, \epsilon - 1), \dots, \Psi(V_r, \epsilon - 1)$  mit  $V_1, \dots, V_r \in \mathcal{T}_2$  enthalten sind, ziehen wir wiederum (wie zuvor bei  $T_1, \dots, T_p$ ) gewisse der durch deren  $(II)$ -Äquivalenzklassen gegebenen Summen ab. Dieses Verfahren setzen wir fort. Da in der jeweils entstandenen neuen Gesamtsumme jedes  $T' \in \mathcal{T}_1$  höchstens einmal mit positivem und höchstens einmal mit negativem Vorzeichen auftreten kann, bricht das Verfahren (wegen der Endlichkeit von  $\mathcal{T}_1$ ) nach endlich vielen Schritten ab, und wir erhalten eine Summe  $\Sigma^{(1)} := \sum_{T' \in D_1} \Psi(T', \epsilon - 1)$  für eine  $-T^{(1)}$  enthaltende  $-$  Teilmenge  $D_1 \subseteq \mathcal{T}_3$  mit  $\Sigma^{(1)} \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  (da jede einzelne Summe in  $\mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  liegt, aus denen sich  $\Sigma^{(1)}$  zusammensetzt). Falls es nun ein weiteres  $T^{(2)} \in \mathcal{T}_3$  gibt, das nicht in  $D_1$  enthalten ist, starten wir das gleiche Verfahren für  $T^{(2)}$  und erhalten eine Summe  $\Sigma^{(2)} := \sum_{T' \in D_2} \Psi(T', \epsilon - 1)$  für eine  $-T^{(2)}$  enthaltende und zu  $D_1$  disjunkte  $-$  Teilmenge  $D_2 \subseteq \mathcal{T}_3$  mit  $\Sigma^{(2)} \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$ . Auf diese Weise erhalten wir schließlich Summen  $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(s)} \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$  mit  $\sum_{T \in \mathcal{T}_3} \Psi(T, \epsilon - 1) = \Sigma^{(1)} + \dots + \Sigma^{(s)}$ , also gilt  $\sum_{T \in \mathcal{T}_3} \Psi(T, \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B$ .  $\square$

Der Rest des Beweises von 1.4.5 besteht also darin, eine (sogenannte)  $(I)$ -Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3)$  und eine (sogenannte)  $(II)$ -Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{T}_2 = \mathcal{S}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3) \setminus \mathcal{R}(\epsilon - \delta - 2, \epsilon - \nu - 3)$  einzuführen, deren Äquivalenzklassen die in 1) und 2) genannten Idealinklusionen erfüllen. Für den Rest dieses Abschnitts gehen wir daher von festen  $\delta, \epsilon, \nu$  mit  $\epsilon - \delta \geq 4$  und  $\delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 3$  aus und von  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  wie im Lemma.

Wir werden zuerst eine  $(II)$ -Äquivalenzrelation einführen.

**Definition 1.4.12.** *Zu einem  $\beta$ -Baum  $T$  definieren wir die (Ecken-) Teilmenge  $\mathcal{Q}(T) \subseteq E(T)$  durch die Bedingung, dass  $a \in \mathcal{Q}(T)$  genau dann gilt, wenn*

- 1)  $T(a)$  ist ein  $\alpha$ -Baum,
- 2)  $a$  hat mindestens eine Geschwister-Ecke  $c$  mit  $a < c$ , und für die Geschwister-Ecke  $b$  mit  $a \prec b$  gilt:  $H(T(a)) \leq H(W(b))$ .

Die Menge  $\mathcal{Q}(T)$  ist genau dann leer, wenn  $T$  ein  $\alpha$ -Baum ist. Weiter gilt für einen  $\gamma$ -Baum  $T$ , dass  $E(T(a)) \subseteq E(T)$ ,  $H(T(a)) \geq 1$ ,  $L(a) \geq 1$ ,  $L(a) + H(T(a)) \leq H(T) - 1$  für alle  $a \in \mathcal{Q}(T)$  gilt.

Das folgende Lemma ist wesentlich für die Konstruktion der  $(II)$ -Äquivalenz, die Argumentation wird aber auch in ähnlicher Form für die  $(I)$ -Äquivalenz benötigt.

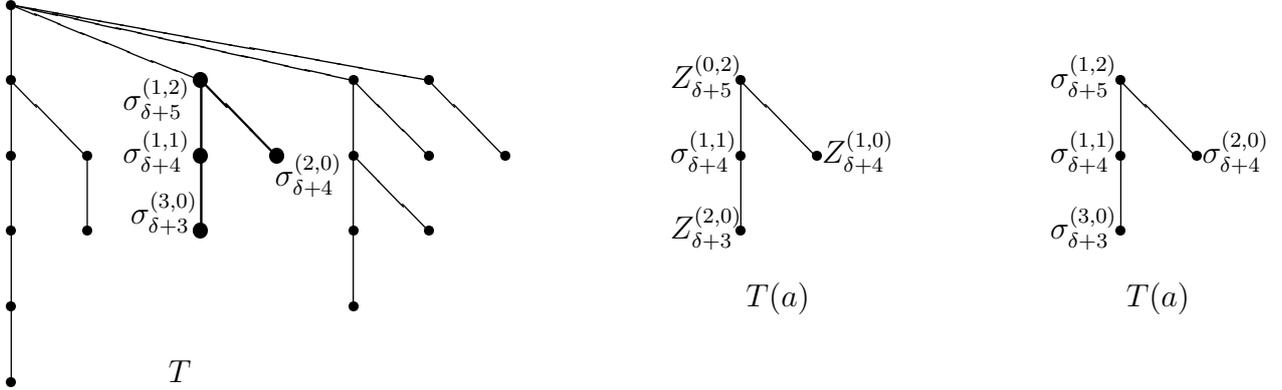
**Lemma 1.4.13.** *Ist  $T \in \mathcal{T}_2$  und  $a \in \mathcal{Q}(T)$ , so gilt*

$$\prod_{b \in E(T(a))} \psi(T, b, \epsilon - 1) = \Omega(T(a), \epsilon - 1 - L(a)).$$

*Beweis.* Wir demonstrieren die Aussage an einem kleinen Beispiel, anhand dessen der Leser (eventuell mittels weiterer eigener Beispiele) hoffentlich die allgemeine Gültigkeit erkennt. Dazu betrachten wir  $T$  im Bild unten. In diesem Fall gilt  $\epsilon = \delta + 7$  und  $\nu = \delta + 3$ . Es gibt nur

ein  $a \in \mathcal{Q}(T)$ ; dies ist die oberste fett gezeichnete Ecke.  $T(a)$  ist dort also der fett gezeichnete  $\alpha$ -Baum. Es gilt  $L(a) = 1$  und somit  $\epsilon - 1 - L(a) = \delta + 5$ .

Werte von  $\psi(T, b, \delta + 6)$ :      Werte von  $\bar{\phi}(T(a), b, \delta + 5)$ :      Werte von  $\omega(T(a), b, \delta + 5)$ :



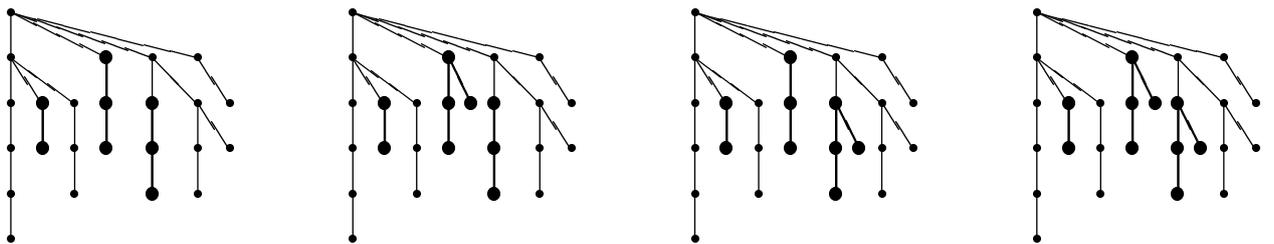
Die Werte von  $\bar{\phi}(T(a), b, \delta + 5)$  wurden angegeben, weil mittels dieser Werte die Werte von  $\omega(T(a), b, \delta + 5)$  definiert sind. Wie man sieht, gilt hier tatsächlich

$$\prod_{b \in E(T(a))} \psi(T, b, \epsilon - 1) = \sigma_{\delta+3}^{(3,0)} \sigma_{\delta+4}^{(1,1)} \sigma_{\delta+5}^{(1,2)} \sigma_{\delta+4}^{(2,0)} = \Omega(T(a), \epsilon - 1 - L(a)). \quad \square$$

**Definition 1.4.14.** Auf  $\mathcal{T}_2$  führen wir die folgende Äquivalenzrelation als (II)-Äquivalenzrelation ein: Ist  $T \in \mathcal{T}_2$  und sind  $a_1, \dots, a_p$  die Elemente aus  $\mathcal{Q}(T)$ , so definieren wir als (II)-äquivalent zu  $T$  jedes  $T' \in \mathcal{T}_2$  mit der Eigenschaft, dass  $T'$  aus  $T$  entsteht, indem wir für  $i = 1, \dots, p$  jedes  $T(a_i)$  (eventuell) durch einen geeigneten anderen  $\alpha$ -Baum mit gleicher Höhe ersetzen.

Man beachte, dass die (II)-Äquivalenzklasse von  $T \in \mathcal{T}_2$  aus *allen* Wurzelbäumen besteht, bei denen die  $\alpha$ -Bäume  $T(a_i)$  wie angegeben durch andere  $\alpha$ -Bäume mit gleicher Höhe ersetzt wurden; denn diese Änderung führt wieder zu einem Element aus  $\mathcal{T}_2$ , wie man leicht sieht.

Beispiel für eine (II)-Äquivalenzklasse (die  $T(a)$  für  $a \in \mathcal{Q}(T)$  sind fett dargestellt):



Wir sehen nun, dass die Idealinklusion gilt:

**Lemma 1.4.15.** Es sei  $T \in \mathcal{T}_2$  und  $M(T) := \bigcup_{a \in \mathcal{Q}(T)} E(T(a))$ . Dann gilt

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(T) \setminus M(T)} \psi(T, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} H^{(x)}(P_{\epsilon-2-L(a)-H(T(a)), \epsilon-L(a)}) \right)$$

und somit

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

*Beweis.* Es sei  $T' \in \mathcal{T}_2$  mit  $T' \sim_{(II)} T$ . Sei  $M(T')$  analog zu  $M(T)$  definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi(T', \epsilon - 1) &\stackrel{Def.}{=} \prod_{a' \in \tilde{E}(T')} \psi(T', a', \epsilon - 1) \\ &= \left( \prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus M(T')} \psi(T', a', \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a' \in \mathcal{Q}(T')} \prod_{b' \in E(T'(a'))} \psi(T', b', \epsilon - 1) \right) \\ &\stackrel{1.4.13}{=} \left( \prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus M(T')} \psi(T', a', \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a' \in \mathcal{Q}(T')} \Omega(T'(a'), \epsilon - 1 - L(a')) \right). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus M(T')} \psi(T', a', \epsilon - 1) = \prod_{a \in \tilde{E}(T) \setminus M(T)} \psi(T, a, \epsilon - 1),$$

denn für zwei “einander entsprechende” Ecken  $a \in \tilde{E}(T) \setminus M(T)$  und  $a' \in \tilde{E}(T') \setminus M(T')$  sieht man leicht, dass  $\psi(T, a, \epsilon - 1) = \psi(T', a', \epsilon - 1)$  gilt. (Man mache sich dieses gegebenenfalls an den dünn gezeichneten Ecken des obigen Beispiels klar). Nach Konstruktion der (II)-Äquivalenz folgt mit 1.4.10 außerdem

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T} \prod_{a' \in \mathcal{Q}(T')} \Omega(T'(a'), \epsilon - 1 - L(a')) = \prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} H^{(x)}(P_{\epsilon-2-L(a)-H(T(a)), \epsilon-L(a)}).$$

Die Summation  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_2, T' \sim_{(II)} T}$  über  $\Psi(T', \epsilon - 1) = \dots$  liefert daher die Aussage.  $\square$

Nun führen wir auf  $\mathcal{T}_1$  eine Äquivalenzrelation als (I)-Äquivalenzrelation ein. Diese soll gegeben sein durch je eine Äquivalenzrelation auf den (im Folgenden definierten) Mengen  $\mathcal{T}_{1,u}, \mathcal{T}_{1,u'}, \mathcal{T}_{1,v}, \mathcal{T}_{1,v'}$ , welche eine Partition

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{1,u} \cup \mathcal{T}_{1,u'} \cup \mathcal{T}_{1,v} \cup \mathcal{T}_{1,v'}$$

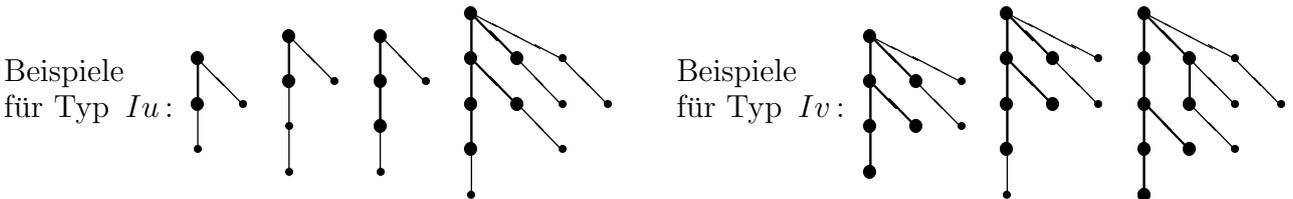
von  $\mathcal{T}_1$  bilden.

**Definition 1.4.16.** Zu einem  $\gamma$ -Baum  $T$  konstruieren wir einen Wurzel-Teilbaum  $G(T)$ , der durch die folgenden Eigenschaften bestimmt ist:

- i) Die Wurzel von  $G(T)$  ist die Wurzel von  $T$ .
- ii) Sind  $a_1 \prec \dots \prec a_p$  die Ecken eines Levels von  $G(T)$ , so stimmen die Kind-Ecken von  $a_1, \dots, a_{p-1}$  in  $G(T)$  mit den jeweiligen Kind-Ecken in  $T$  überein. Für  $a_p$  gilt jedoch: Sind  $b_1 \prec \dots \prec b_q$  die Kind-Ecken von  $a_p$  in  $T$ , so sind in  $G(T)$  nur  $b_1, \dots, b_{q-1}$  die Kind-Ecken von  $a_p$ .

Wir sagen, dass  $T$  vom Typ  $Iu$  ist, falls für jede Ecke  $b \in \mathcal{M}(G(T))$  gilt, dass  $AKE(b) \geq 1$  in  $T$  gilt. Anderenfalls sagen wir, dass  $T$  vom Typ  $Iv$  ist.

Bei den folgenden Beispielen ist  $G(T)$  jeweils fett gezeichnet. Dies werden wir für den Rest dieses Abschnitts auch bei allen weiteren bildlichen Darstellungen von Elementen aus  $\mathcal{T}_1$  so machen.



Man sieht leicht:

**Lemma 1.4.17.** Für  $T \in \mathcal{T}_1$  gilt:

- (i)  $G(T)$  ist ein  $\beta$ -Baum.
- (ii)  $E(G(T)) \subseteq \tilde{E}(T)$ .
- (iii)  $H(G(T)) \leq H(T) - 1$ , falls  $T$  vom Typ  $Iu$  ist.

**Definition 1.4.18.** Wir definieren folgende Teilmenge von  $\mathcal{T}_1$ :

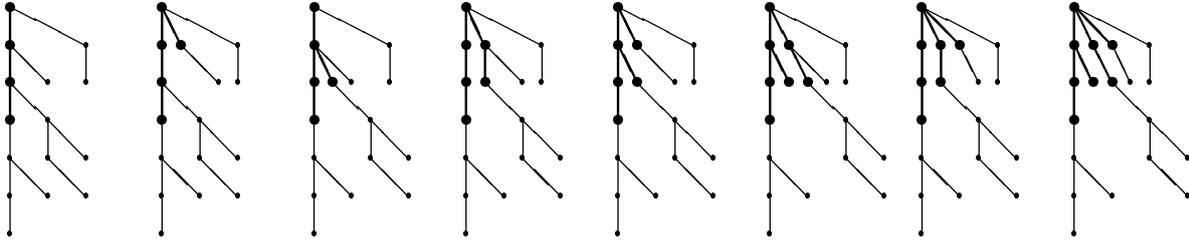
$$\mathcal{T}_{1,u} := \{T \in \mathcal{T}_1; T \text{ ist vom Typ } Iu \text{ und } G(T) \text{ ist ein } \alpha\text{-Baum}\}.$$

Als  $(I)$ -äquivalent zu  $T \in \mathcal{T}_{1,u}$  definieren wir jedes  $T' \in \mathcal{T}_{1,u}$  mit

- 1)  $H(G(T)) = H(G(T'))$ ,
- 2)  $T(a) = T'(a)$  für alle Paare  $(a, a') \in \mathcal{M}(G(T)) \times \mathcal{M}(G(T))$  mit  $L(a) = L(a')$ .

Anschaulich besteht die  $(I)$ -Äquivalenzklasse von  $T \in \mathcal{T}_{1,u}$  aus *allen*  $\alpha$ -Bäumen mit der Höhe von  $G(T)$ , bei denen jeweils an den "ganz rechten" Ecken die Bäume  $T(a)$  für  $a \in \mathcal{M}(G(T))$  "hängen".

Beispiel für eine  $(I)$ -Äquivalenzklasse aus  $\mathcal{T}_{1,u}$ :

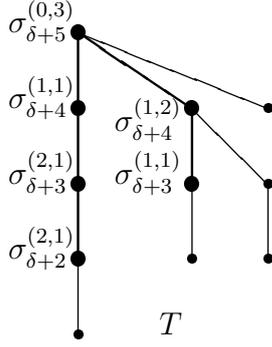


**Lemma 1.4.19.** Ist  $T \in \mathcal{T}_{1,u}$ , so gilt

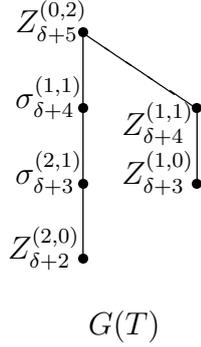
$$\prod_{a \in E(G(T))} \psi(T, a, \epsilon - 1) = \Omega'(G(T), \epsilon - 1).$$

*Beweis.* Ähnlich wie im Beweis von 1.4.13 demonstrieren wir die Aussage an einem kleinen Beispiel, anhand dessen der Leser (eventuell mittels weiterer eigener Beispiele) hoffentlich die allgemeine Gültigkeit erkennt. Dazu betrachten wir  $T$  im Bild unten. In diesem Fall gilt  $\epsilon = \delta + 6$  und  $\nu = \delta + 3$ .

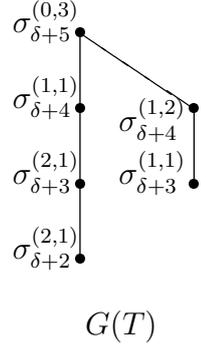
Werte von  $\psi(T, a, \delta + 5)$ :



Werte von  $\bar{\phi}(G(T), a, \delta + 5)$ :



Werte von  $\omega'(G(T), a, \delta + 5)$ :



Die Werte von  $\bar{\phi}(G(T), a, \delta + 5)$  wurden angegeben, weil mittels dieser Werte die Werte von  $\omega'(G(T), a, \delta + 5)$  definiert sind. Wie man sieht, gilt hier tatsächlich

$$\prod_{a \in E(G(T))} \psi(T, a, \epsilon - 1) = \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(2,1)} \sigma_{\delta+4}^{(1,1)} \sigma_{\delta+5}^{(0,3)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} \sigma_{\delta+4}^{(1,2)} = \Omega'(G(T), \epsilon - 1). \quad \square$$

**Lemma 1.4.20.** Für  $T \in \mathcal{T}_{1,u}$  gilt

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_{1,u}, T' \sim_{(I)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(T) \setminus E(G(T))} \psi(T, a, \epsilon - 1) \right) \cdot H^{(y)}(P_{\epsilon-2-H(G(T)), \epsilon})$$

und somit

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_{1,u}, T' \sim_{(I)} T} \Psi(T', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

*Beweis.* Es sei  $T' \in \mathcal{T}_{1,u}$  mit  $T' \sim_{(I)} T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi(T', \epsilon - 1) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \prod_{a' \in \tilde{E}(T')} \psi(T', a', \epsilon - 1) \\ &= \left( \prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus E(G(T'))} \psi(T', a', \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a' \in E(G(T'))} \psi(T', a', \epsilon - 1) \right) \\ &\stackrel{1.4.19}{=} \left( \prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus E(G(T'))} \psi(T', a', \epsilon - 1) \right) \cdot \Omega'(G(T'), \epsilon - 1). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\prod_{a' \in \tilde{E}(T') \setminus E(G(T'))} \psi(T', a', \epsilon - 1) = \prod_{a \in \tilde{E}(T) \setminus E(G(T))} \psi(T, a, \epsilon - 1),$$

denn für zwei “einander entsprechende” Ecken  $a \in \tilde{E}(T) \setminus E(G(T))$  und  $a' \in \tilde{E}(T') \setminus E(G(T'))$  sieht man leicht, dass  $\psi(T, a, \epsilon - 1) = \psi(T', a', \epsilon - 1)$  gilt. (Man mache sich dieses gegebenenfalls an den dünn gezeichneten Ecken des obigen Beispiels für eine Äquivalenzklasse klar). Nach Konstruktion der  $(I)$ -Äquivalenz folgt mit 1.4.10 außerdem

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_{1,u}, T' \sim_{(I)} T} \Omega'(G(T'), \epsilon - 1) = H^{(y)}(P_{\epsilon-2-H(G(T)), \epsilon}).$$

Die Summation  $\sum_{T' \in \mathcal{T}_{1,u}, T' \sim_{(I)} T}$  über  $\Psi(T', \epsilon - 1) = \dots$  liefert daher die Aussage.  $\square$

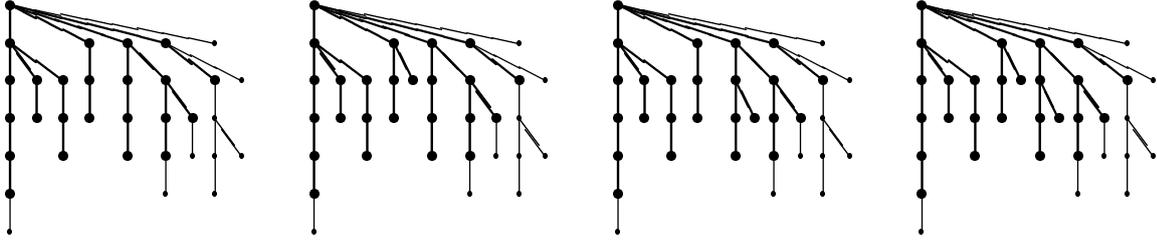
**Definition 1.4.21.** Wir definieren folgende Teilmenge von  $\mathcal{T}_1$  :

$$\mathcal{T}_{1,u'} := \{T \in \mathcal{T}_1; T \text{ ist vom Typ } Iu \text{ und } G(T) \text{ ist kein } \alpha\text{-Baum}\}$$

Als  $(I)$ -äquivalent zu  $T \in \mathcal{T}_{1,u'}$  mit  $\mathcal{Q}(G(T)) = \{a_1, \dots, a_p\}$  definieren wir jedes  $T' \in \mathcal{T}_{1,u'}$  mit der Eigenschaft, dass  $T'$  aus  $T$  entsteht, indem wir für  $i = 1, \dots, p$  jedes  $T(a_i)$  (eventuell) durch einen geeigneten anderen  $\alpha$ -Baum mit gleicher Höhe ersetzen.

Man beachte, dass die  $(I)$ -Äquivalenzklasse von  $T \in \mathcal{T}_{1,u'}$  aus allen Wurzelbäumen besteht, bei denen die  $\alpha$ -Bäume  $T(a_i)$  wie angegeben durch andere  $\alpha$ -Bäume mit gleicher Höhe ersetzt wurden; denn diese Änderung führt wieder zu einem Element aus  $\mathcal{T}_{1,u'}$ , wie man leicht sieht.

Beispiel für eine  $(I)$ -Äquivalenzklasse aus  $\mathcal{T}_{1,u'}$  :



Eine solche Äquivalenzklasse stimmt jedoch genau mit einer  $(II)$ -Äquivalenzklasse aus  $\mathcal{T}_2$  überein. Daraus folgt, dass die Elemente aus  $\mathcal{T}_{1,u'}$  in den Summen  $\Sigma^{(1)}, \dots, \Sigma^{(s)}$  des Beweises von 1.4.11 gar nicht vorkommen können (im Gegensatz zu den Elementen aus  $\mathcal{T}_{1,u}, \mathcal{T}_{1,v}, \mathcal{T}_{1,v'}$ ). Wir brauchen daher  $\mathcal{T}_{1,u'}$  nicht weiter zu betrachten.

Wir kommen nun zu dem (etwas komplizierteren) Fall, dass  $S \in \mathcal{T}_1$  vom Typ  $Iv$  ist. (Wir bezeichnen von nun an ein Element aus  $\mathcal{T}_1$  meist mit  $S$ ). Wir ordnen  $S$  einen  $\beta$ -Baum  $\Theta(S)$  zu. Anders als bei  $G(S)$  handelt es sich bei  $\Theta(S)$  jedoch nicht um einen Teilbaum von  $S$ .

**Definition und Lemma 1.4.22.** Es sei  $S \in \mathcal{T}_1$  vom Typ  $Iv$ . Ist  $a$  die Ecke des kleinsten Levels mit der Eigenschaft, dass  $a \in \mathcal{M}(G(S))$  und dass  $AKE(a) = 0$  in  $S$  gilt, so setzen wir  $u(S) := L(a)$  und  $d_{u(S)}(S) := a$ . Wir definieren dann die Kette

$$d_{u(S)}(S), d_{u(S)-1}(S), d_{u(S)-2}(S), \dots, d_{o(S)}(S)$$

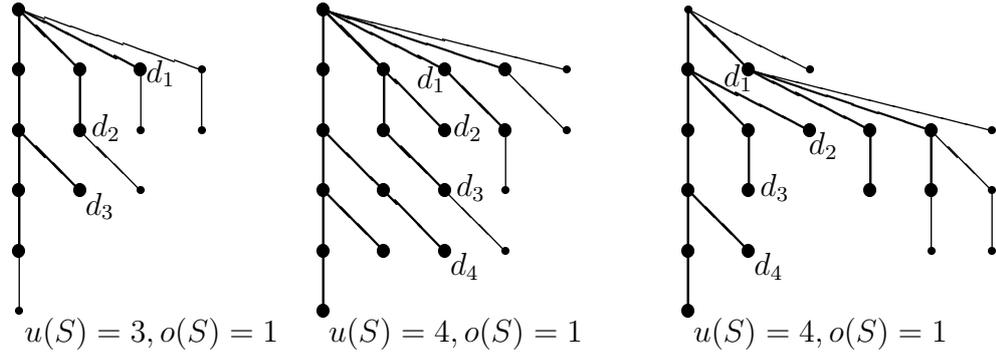
von Ecken rekursiv durch die folgende Aussage:

Hat  $d_i(S)$  keine Geschwister-Ecke  $b \in E(S)$  mit  $d_i(S) < b$ , so ist  $d_i(S)$  nicht die Wurzel von  $S$ , und ist dann  $c$  die Eltern-Ecke von  $d_i(S)$ , so gilt  $c \notin \mathcal{M}(S)$  und es sei dann  $d_{i-1}(S) \in E(S)$  die Ecke mit  $c \prec d_{i-1}(S)$ .

Ist nun  $e$  die erste Ecke dieser Kette, die eine Geschwister-Ecke  $b \in E(S)$  mit  $e < b$  besitzt, so setzen wir  $o(S) := L(e)$ .

*Beweis.* Man sieht mit der Definition von  $G(S)$  leicht, dass  $d_{u(S)}(S)$  nicht-minimal ist, dass es also ein  $f \in E(S)$  mit  $f < d_{u(S)}(S)$  gibt. Daraus folgt aufgrund der Konstruktion, dass dies auch für alle Ecken  $d_{u(S)}(S), d_{u(S)-1}(S), d_{u(S)-2}(S), \dots, d_{o(S)}(S)$  der Kette gilt. Insbesondere kann unter diesen Ecken nicht die Wurzel sein. Weiter sieht man leicht, dass alle Ecken der Kette Elemente von  $E(G(S))$  sind. Für  $g \in E(G(S))$  mit  $1 \leq L(g) \leq u(S)$  sieht man leicht (induktiv nach  $i = 1, \dots, L(g)$ ), dass  $g \notin \mathcal{M}(S)$  gilt, also gilt dies auch für alle Ecken der Kette.  $\square$

Beispiele:



Man sieht leicht (Teil (ii) wurde bereits im Beweis von 1.4.22 erwähnt):

**Lemma 1.4.23.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_1$  vom Typ Iv. Es gilt  $o(S) \geq 1$  und  $u(S) \leq H(S) - 1$ . Außerdem gilt für alle  $i \in \{o(S), o(S) + 1, \dots, u(S)\}$ :*

- (1)  $L(d_i(S)) = i$ .
- (2)  $d_i(S) \in E(G(T))$ .

**Definition und Lemma 1.4.24.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_1$  vom Typ Iv. Wir definieren eine Teilmenge  $\mathcal{E}(S) \subseteq E(G(S))$ , einen Wurzelbaum  $\Theta(S)$  sowie eine Bijektion  $\theta : \mathcal{E}(S) \rightarrow E(\Theta(S))$ :*

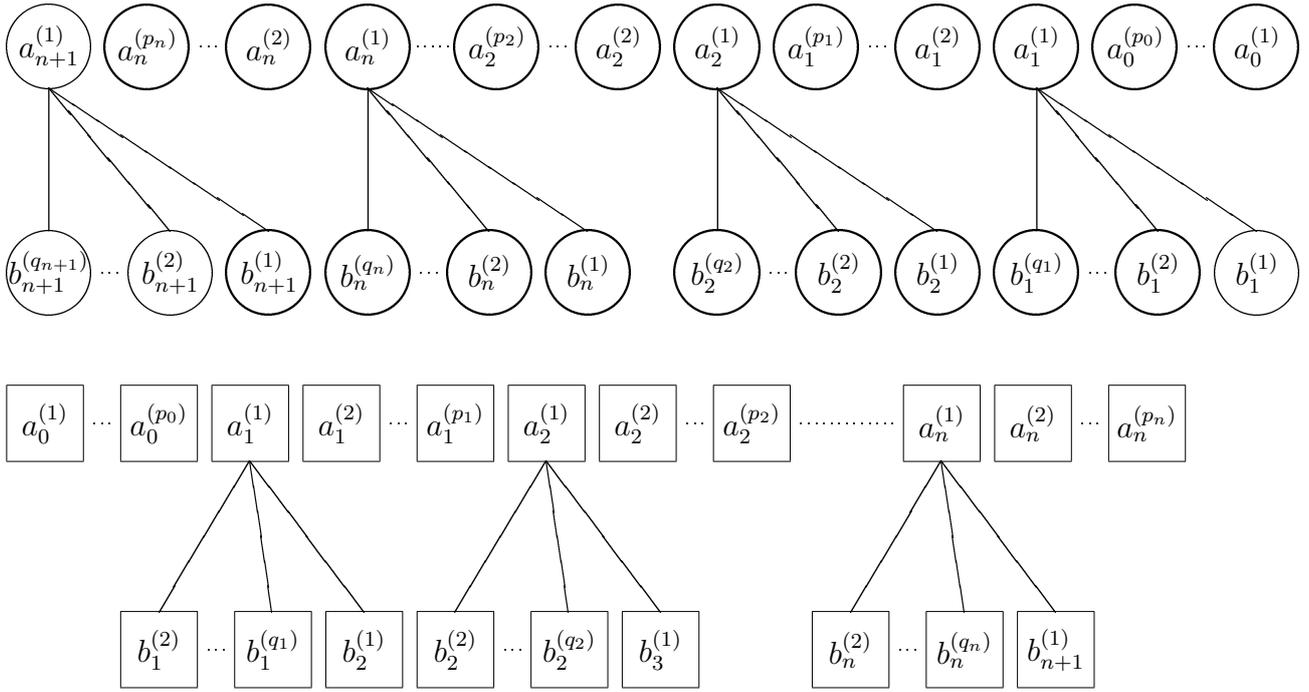
*Wir setzen  $N_{o(S)} := \{d_{o(S)}(S)\}$  und definieren rekursiv für die Level  $i = o(S) + 1, \dots, t(S)$  (mit einer durch die Konstruktion definierten Zahl  $t(S)$ ) jeweils eine Teilmenge  $N_i$  von  $\{a \in E(S); L(a) = i\}$ ; dann setzen wir  $\mathcal{E}(S) := \cup_{i=o(S)}^{t(S)} N_i$ . Parallel konstruieren wir einen Wurzelbaum der Höhe  $t(S) - o(S)$  mit  $\theta(d_{o(S)}(S))$  als Wurzel.*

*Dies soll wie in der folgenden Skizze geschehen. Dabei nehmen wir an, dass die Konstruktion für die Level  $o(S), o(S) + 1, \dots, j$  mit einem  $j \geq o(S)$  bereits durchgeführt wurde. Wir bezeichnen die Ecken aus  $\{a \in E(S); L(a) = j\}$  mit  $a^{(\bullet)}$  wie in der oberen Zeile der Skizze. Die fetten Kreise in der oberen Zeile sollen genau die Ecken aus  $N_j$  sein. Dagegen soll jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass es noch weitere Ecken aus  $\{a \in E(S); L(a) = j\} \setminus N_j$  als in der oberen Zeile gibt. Falls  $AKE(a) = 0$  für alle  $a \in N_j$  gilt, setzen wir  $t(S) := j$ . Anderenfalls definieren wir nun wie in der Skizze die Menge  $N_{j+1}$ , die durch die fett umrandeten  $b^{(\bullet)}$  gegeben sei. Um dies – wie abgebildet – durchführen zu können, behaupten wir: <sup>13</sup>*

- (i) *Die Ecken aus  $N_j$  liegen in  $S$  alle nebeneinander.*
- (ii) *Für die Ecke  $a$  aus  $N_j$  mit der minimalen Ordnung (hier mit  $a_n^{(p_n)}$  bezeichnet) gilt: Es gibt eine Ecke  $b \in E(S)$  mit  $b \prec a$  (hier mit  $a_{n+1}^{(1)}$  bezeichnet) und für diese gilt  $AKE(b) \geq 1$ .*
- (iii) *Es gilt  $N_j \subseteq E(G(S))$  und  $j \leq u(S)$ , und  $d_j(S)$  ist das minimale Element aus  $N_j$ .*

*Es gelte dann mit den Bezeichnungen in der Skizze  $AKE(a_0^{(l)}) = 0$  für  $l = 1, \dots, p_0$  ( $p_0 = 0$  ist möglich) sowie für  $i = 1, \dots, n$ :  $AKE(a_i^{(1)}) \geq 1$  und  $AKE(a_i^{(l)}) = 0$  für  $l = 2, \dots, p_i$  ( $p_i = 1$  ist möglich).*

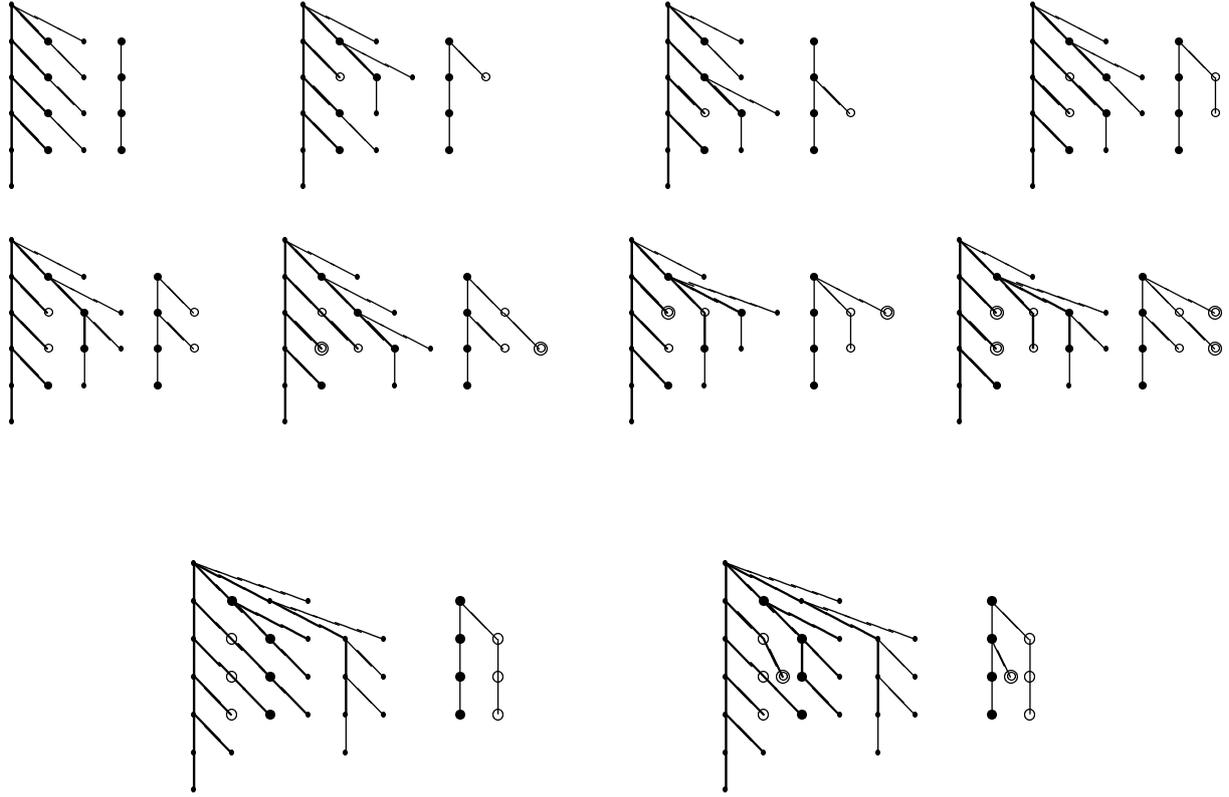
<sup>13</sup>Die Behauptungen unter (iii) dienen nicht der Konstruktion, sondern zeigen u.a.  $\mathcal{E}(S) \subseteq E(G(S))$ .



Parallel konstruieren wir  $\Theta(S)$ : Die Ecken von  $\Theta(S)$  sind hier quadratisch gezeichnet. In der Skizze ist angegeben, wie der Level  $j+1-o(S)$  aus dem Level  $j-o(S)$  entsteht (falls  $t(S) \neq j$ ) und wie die Ecken miteinander verbunden werden sollen. Dabei sieht man an der Beschriftung der Ecken, wie die Ecken von  $\mathcal{E}(S)$  auf die Ecken von  $\Theta(S)$  unter der Bijektion  $\theta$  abgebildet werden sollen. (Eigentlich müsste in den quadratischen Feldern jeweils  $\theta(a_{\bullet}^{(\bullet)})$  bzw.  $\theta(b_{\bullet}^{(\bullet)})$  statt  $a_{\bullet}^{(\bullet)}$  bzw.  $b_{\bullet}^{(\bullet)}$  stehen, was aus Platzgründen hier jedoch nicht gut möglich ist.)

*Beweis.* Zu (i): Dies folgt aus der angegebenen (rekursiven) Definition von  $N_{o(S)}, N_{o(S)+1}, \dots, N_j$ .  
 Zu (iii): Nach 1.4.23 gilt  $o(S) \in E(G(T))$ . Die Aussage  $N_j \in E(G(T))$  folgt leicht aus der (rekursiven) Definition. Weiter stellt man mit der Konstruktion in 1.4.22 rekursiv fest, dass  $d_j(S) = a_n^{(p_n)}$  gilt. Also ist  $d_j(S)$  das minimale Element aus  $N_j$ , und die Aussage in (ii) folgt dann aus der im Beweis von 1.4.22 erwähnten Nicht-Minimalität der  $d_i(S)$  (in  $S!$ ) und der rekursiven Konstruktion. Aus  $d_j(S) \leq a \forall a \in N_j$  und  $N_j \subseteq E(G(T))$  und  $d_{u(S)}(S) \in \mathcal{M}(G(S))$  und  $AKE(d_{u(S)}(S)) = 0$  folgt dann schließlich auch  $j \leq u(S)$ .  $\square$

In den folgenden Beispielen stehen jeweils  $S$  und  $\Theta(S)$  nebeneinander. Die einander entsprechenden Ecken eines jeden Levels sind bildlich gleich dargestellt (der Teilbaum  $G(S)$  ist durch die dicken Kanten zu erkennen; seine Ecken sind nicht mehr notwendig fett gezeichnet, da hier die Fettzeichnung von Ecken einem anderen Zweck zu dienen hat):



**Lemma 1.4.25.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_1$  vom Typ Iv und  $T := \Theta(S)$ . Dann gilt:*

- (i)  $T$  ist ein  $\beta$ -Baum.
- (ii) Es gilt  $\mathcal{E}(S) \subseteq E(G(S))$  und  $t(S) \leq u(S)$ .
- (iii) Für alle  $a \in \mathcal{E}(S)$  gilt

$$\psi(S, a, \epsilon - 1) = \omega(T, \theta(a), \epsilon - 1 - o(S)).$$

*Beweis.* Zu (i): Nach Definition 1.4.7 (man beachte dort  $H(T(a)) \geq 1 \Leftrightarrow AKE(a) \geq 1$ ) ist zu zeigen, dass in der Sizzle von 1.4.24  $AK E(b_i^{(2)}) \geq 1, \dots, AK E(b_i^{(q_i)}) \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$  in  $T$  gilt. Dies folgt aus der Betrachtung der entsprechenden Ecken von  $S$ , da  $S$  ein  $\beta$ -Baum ist. Weiter ist  $H(T) \geq 1$  zu zeigen; dies folgt aus  $t(S) \neq o(S)$ , was wiederum daraus folgt, dass  $d_{o(S)}(S)$  eine Geschwister-Ecke  $c$  mit  $d_{o(S)}(S) < c$  hat, und somit  $AK E(d_{o(S)}(S)) \geq 1$  folgt, da  $S$  ein  $\beta$ -Baum ist.

Zu (ii):  $\mathcal{E}(S) \subseteq E(G(S))$  folgt aus “ $N_j \subseteq E(G(S))$ ” in 1.4.24(iii).  $t(S) \leq u(S)$  folgt aus “ $j \leq u(S)$ ” in 1.4.24(iii).

Zu (iii): Man prüft dies leicht anhand der Skizze in 1.4.24. □

**Definition 1.4.26.** *Wir definieren folgende Teilmengen von  $\mathcal{T}_1$ :*

$$\mathcal{T}_{1,v} := \{S \in \mathcal{T}_1; S \text{ ist vom Typ Iv und } \Theta(S) \text{ ist ein } \alpha\text{-Baum}\},$$

$$\mathcal{T}_{1,v'} := \{S \in \mathcal{T}_1; S \text{ ist vom Typ Iv und } \Theta(S) \text{ ist kein } \alpha\text{-Baum}\}.$$

**Lemma 1.4.27.**

(i) Gilt  $S \in \mathcal{T}_{1,v}$ , so gilt für  $T := \Theta(S)$ :

$$\prod_{a \in \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) = \Omega(T, \epsilon - 1 - o(S)).$$

(ii) Gilt  $S \in \mathcal{T}_{1,v'}$ , so gilt für  $T := \Theta(S)$  und  $a \in \mathcal{Q}(T)$  und  $M := E(T(a))$ :

$$\prod_{b \in \theta^{-1}(M)} \psi(S, b, \epsilon - 1) = \Omega(T(a), \epsilon - 1 - o(S) - L(a)).$$

*Beweis.* (i) folgt aus  $\theta(\mathcal{E}(S)) = E(T)$  und 1.4.25(iii) und der Definition von  $\Omega(T, \epsilon - 1 - o(T))$  (s. 1.4.8).

(ii) folgt aus 1.4.25(iii) und ähnlicher Argumentation wie in 1.4.13. □

**Definition 1.4.28.**

- (i) Einen  $\alpha$ -Baum  $T$  bezeichnen wir als *minimal*, falls er unverzweigt ist. Wir bezeichnen ihn als *maximal*, falls er nicht ein echter Teilgraph eines  $\alpha$ -Baums mit gleicher Höhe ist.
- (ii) Einen  $\beta$ -Baum  $T$ , der nicht zugleich ein  $\alpha$ -Baum ist, bezeichnen wir als *minimal*, falls alle  $\alpha$ -Bäume  $T(a)$  für  $a \in \mathcal{Q}(T)$  minimal sind. Wir bezeichnen ihn als *maximal*, falls alle  $\alpha$ -Bäume  $T(a)$  für  $a \in \mathcal{Q}(T)$  maximal sind.

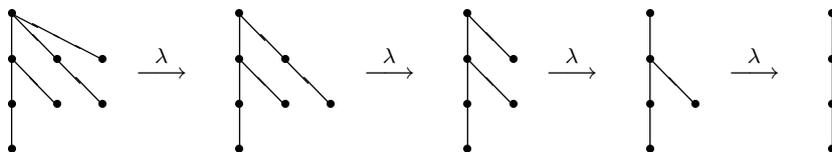
Offenbar gibt es zu gegebener Höhe genau einen maximalen  $\alpha$ -Baum.

**Definition 1.4.29.** Einem nicht-minimalen  $\alpha$ -Baum  $T$  ordnen wir einen  $\alpha$ -Baum  $\lambda(T)$  gleicher Höhe zu, indem wir die Ecke  $a$  des kleinsten Levels mit der Eigenschaft  $a \in \mathcal{M}(T)$  und  $AK E(a) = 0$  entfernen (und die zugehörige Verbindungskante zur Eltern-Ecke).

Einem nicht-minimalen  $\beta$ -Baum  $T$ , der nicht zugleich ein  $\alpha$ -Baum ist, ordnen wir folgendermaßen einen  $\beta$ -Baum  $\lambda(T)$  zu: Wir bezeichnen zunächst die Ecken aus  $\mathcal{Q}(T)$  mit  $a_1, \dots, a_n$ , wobei wir diese so indizieren, dass für  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  gilt:  $i < j \Leftrightarrow L(a_i) \leq L(a_j)$  und  $i < j, L(a_i) = L(a_j) \Rightarrow a_i < a_j$ . Nun wählen wir das kleinste  $i \in \{1, \dots, n\}$  aus, für das  $T(a_i)$  nicht-minimal ist und ersetzen den  $\alpha$ -Baum  $T(a_i)$  (wie oben) durch einen  $\alpha$ -Baum gleicher Höhe, indem wir die Ecke  $a$  des kleinsten Levels mit der Eigenschaft  $a \in \mathcal{M}(T(a_i))$  und  $AK E(a) = 0$  entfernen (und die zugehörige Verbindungskante zur Eltern-Ecke). Den so entstandenen  $\beta$ -Baum bezeichnen wir (auch hier) mit  $\lambda(T)$ .

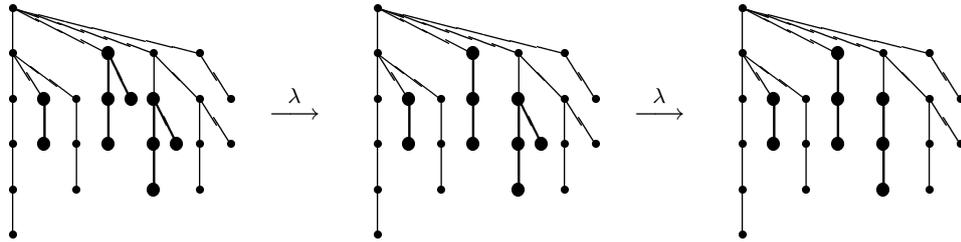
Wendet man die Funktion  $\lambda$  wiederholt auf einen  $\alpha$ -Baum  $T$  an, so erhält man schließlich denjenigen  $\alpha$ -Baum  $T'$ , der minimal mit der Eigenschaft  $H(T') = H(T)$  ist.

Beispiel:



Wendet man die Funktion  $\lambda$  wiederholt auf einen  $\beta$ -Baum  $T$  an, der kein  $\alpha$ -Baum ist, so erhält man schließlich den entsprechenden minimalen  $\beta$ -Baum.

Beispiel (die  $T(a)$  für  $a \in \mathcal{Q}(T)$  sind fett dargestellt):



**Definition 1.4.30.** Zu einem  $\beta$ -Baum  $T$ , der sich aus einem  $\beta$ -Baum  $T' \neq T$  durch eine Kette

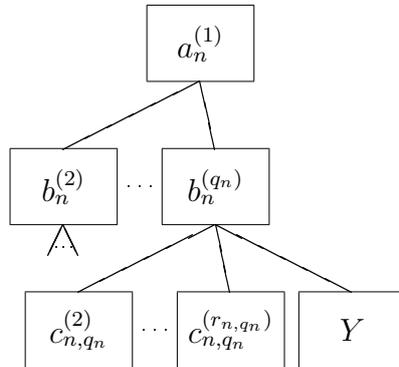
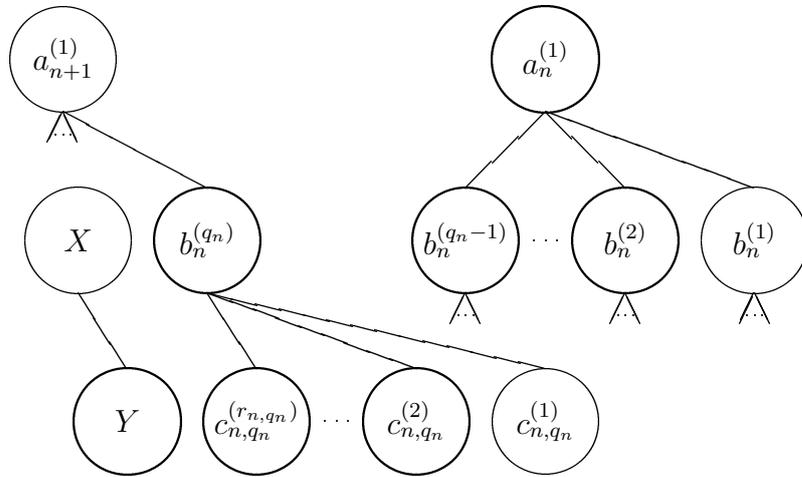
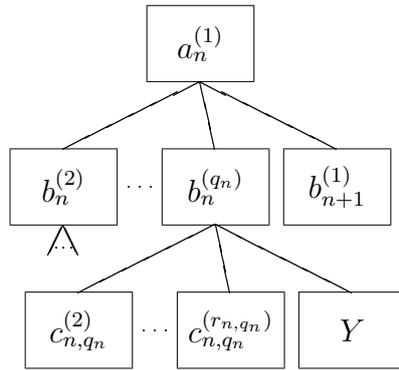
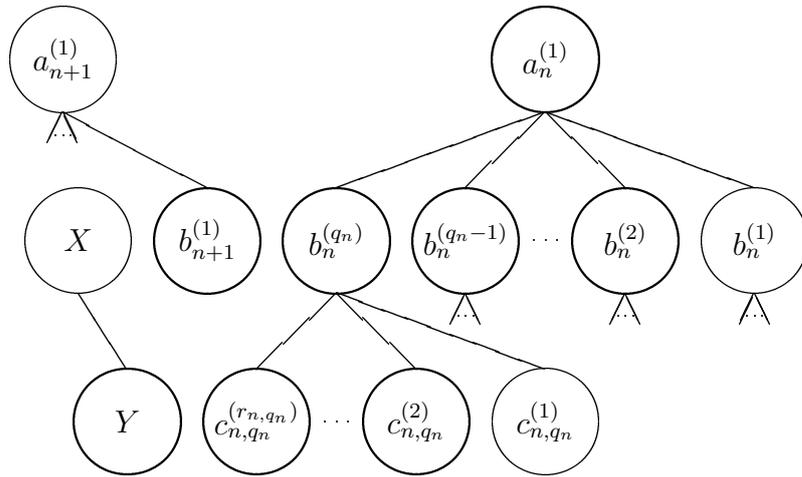
$$T_1 := \lambda(T'), T_2 := \lambda(T_1), T_3 := \lambda(T_2), \dots, T_{n-1} := \lambda(T_{n-2}), T_n := \lambda(T_{n-1}) = T$$

ergibt, definieren wir

$$\Lambda(T, T') := T_{n-1}.$$

**Definition 1.4.31.** Es sei  $S \in \mathcal{T}_{1,v}$  und  $T := \Theta(S)$ . Ist  $T$  nicht-minimal, so definieren wir einen Wurzelbaum  $\tilde{\lambda}(S)$ , indem wir eine Änderung an  $S$  durchführen, die sich in gewisser Weise aus der Änderung  $T \xrightarrow{\lambda} \lambda(T)$  ergibt. Ist hingegen  $T$  nicht-maximal und ergibt sich  $T$  aus  $T' \neq T$  durch eine Kette wie in 1.4.30, so definieren wir einen Wurzelbaum  $\tilde{\Lambda}(S, T')$ , indem wir eine Änderung an  $S$  durchführen, die sich in gewisser Weise aus der Änderung  $T \xrightarrow{\Lambda} \Lambda(T, T')$  ergibt.

Diese Änderungen sind in der folgenden Skizze dargestellt. Dort ist in der oberen Hälfte ein Teil von  $S$  und ein Teil von  $T$  sowie in der unteren Hälfte ein Teil von  $\tilde{\lambda}(S)$  und ein Teil von  $\lambda(T)$  dargestellt. (Hier sind Ecken von  $S$  (und  $\tilde{\lambda}(S)$ ) durch Kreise, und Ecken von  $T$  (und  $\lambda(T)$ ) durch Rechtecke dargestellt.) Es handelt sich dabei um den (einzigen) Teil, an dem eine Änderung stattfindet. Die Ecken von  $S$  bzw.  $\tilde{\lambda}(S)$ , die den Ecken des dargestellten Teils von  $T$  bzw.  $\lambda(T)$  entsprechen, sind fett dargestellt. Aus der Definition von  $\lambda(T)$  folgt, dass die "ganz rechten" Ecken des dargestellten Teils von  $T$  bzw.  $\lambda(T)$  auch "ganz rechte" (also maximale) Ecken vom gesamten  $T$  bzw.  $\lambda(T)$  sind. Die Bezeichnungen der Ecken  $a_{\bullet}^{(\bullet)}$  und  $b_{\bullet}^{(\bullet)}$  entsprechen den Bezeichnungen in 1.4.24.



Man prüft nun anhand der Skizze in 1.4.31:

**Lemma 1.4.32.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_{1,v}$  und  $T := \Theta(S)$ . Dann gilt:*

- (i) *Ist  $T$  nicht-minimal und  $S' := \tilde{\lambda}(S)$  und  $T' := \lambda(T)$ , so gilt  $S' \in \mathcal{T}_{1,v}$  und  $o(S') = o(S)$  und  $t(S') = t(S)$  und  $\Theta(S') = T'$ . Weiter gilt*

$$\frac{\prod_{a \in \tilde{E}(S')} \psi(S', a, \epsilon - 1)}{\prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1)} = \frac{\Omega(T', \epsilon - 1 - o(S'))}{\Omega(T, \epsilon - 1 - o(S))}.$$

- (ii) *Ist  $T$  nicht-maximal und ergibt sich  $T$  aus  $T' \neq T$  durch eine Kette wie in 1.4.30 und ist  $\tilde{S} := \tilde{\Lambda}(S, T')$  und  $\tilde{T} := \Lambda(T, T')$ , so gilt  $\tilde{S} \in \mathcal{T}_{1,v}$  und  $o(\tilde{S}) = o(S)$  und  $t(\tilde{S}) = t(S)$  und  $\Theta(\tilde{S}) = \tilde{T}$ . Weiter gilt*

$$\frac{\prod_{a \in \tilde{E}(\tilde{S})} \psi(\tilde{S}, a, \epsilon - 1)}{\prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1)} = \frac{\Omega(\tilde{T}, \epsilon - 1 - o(\tilde{S}))}{\Omega(T, \epsilon - 1 - o(S))}.$$

**Definition 1.4.33.** *Als ( $I$ )-äquivalent zu  $S \in \mathcal{T}_{1,v}$  definieren wir jedes  $S' \in \mathcal{T}_{1,v}$ , das wir aus  $S$  durch wiederholte Anwendungen der Funktionen  $\tilde{\lambda}$  oder  $\tilde{\Lambda}$  erhalten.*

Beispiel: Die ersten acht Beispiele nach 1.4.24 bilden eine Äquivalenzklasse aus  $\mathcal{T}_{1,v}$ .

Wir können nun zeigen:

**Lemma 1.4.34.** *Für  $S \in \mathcal{T}_{1,v}$  gilt*

$$\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v}, S' \sim_{(I)} S} \Psi(S', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \cdot H^{(x)}(P_{\epsilon-2-t(S), \epsilon-o(S)})$$

und somit

$$\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v}, S' \sim_{(I)} S} \Psi(S', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

*Beweis.* Es sei  $S' \in \mathcal{T}_{1,v}$  mit  $S' \sim_{(I)} S$ . Wir setzen  $T := \Theta(S)$  und  $T' := \Theta(S')$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi(S, \epsilon - 1) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \\ &= \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \\ &\stackrel{1.4.27(i)}{=} \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \cdot \Omega(T, \epsilon - 1 - o(S)). \end{aligned}$$

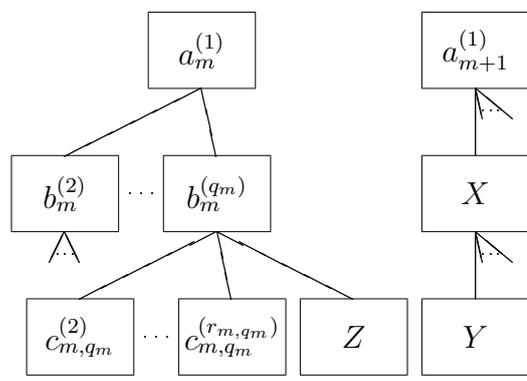
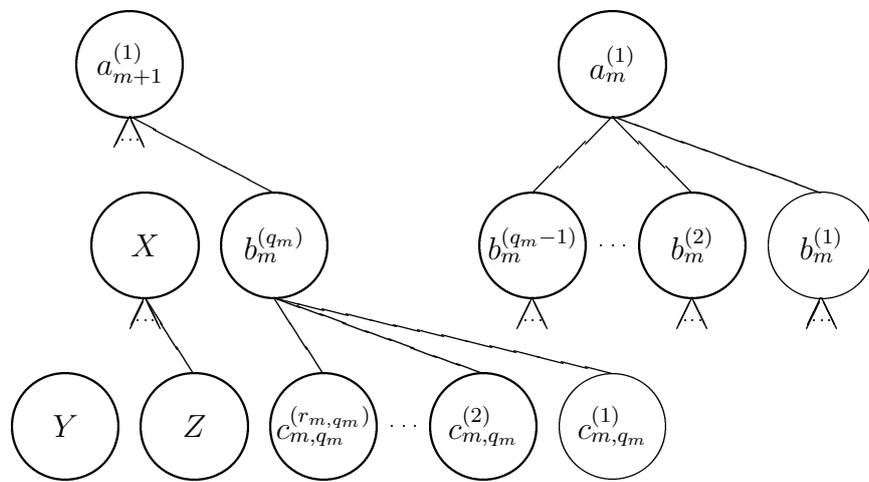
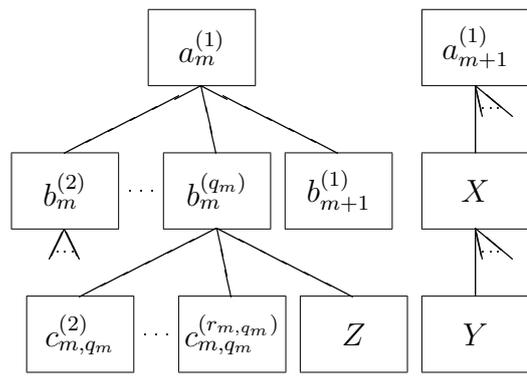
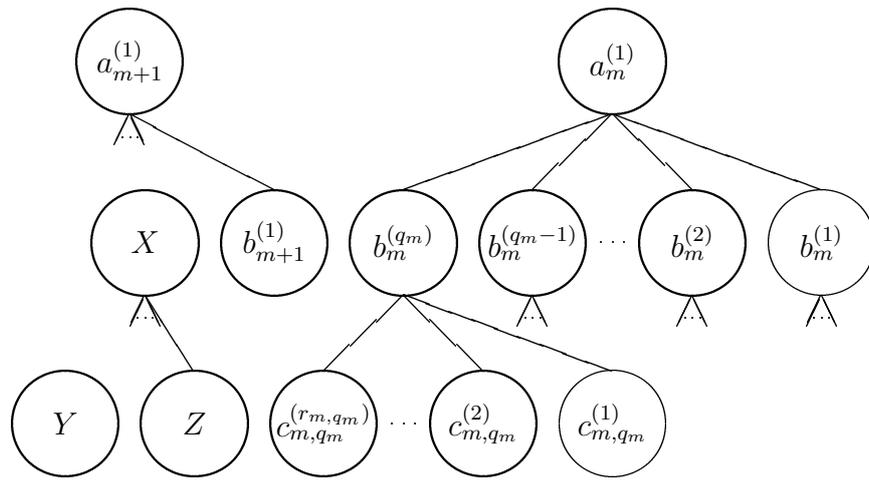
Damit folgt aus 1.4.32:

$$\Psi(S', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \mathcal{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \cdot \Omega(T', \epsilon - 1 - o(S)).$$

Die Summation  $\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v}, S' \sim_{(I)} S}$  über  $\Psi(S', \epsilon - 1) = \dots$  liefert die Aussage (s. 1.4.10).  $\square$

**Definition 1.4.35.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_{1,v'}$  und  $T := \Theta(S)$ . Ist  $T$  nicht-minimal, so definieren wir einen Wurzelbaum  $\tilde{\lambda}(S)$ , indem wir eine Änderung an  $S$  durchführen, die sich in gewisser Weise aus der Änderung  $T \xrightarrow{\lambda} \lambda(T)$  ergibt. Ist hingegen  $T$  nicht-maximal und ergibt sich  $T$  aus  $T' \neq T$  durch eine Kette wie in 1.4.30, so definieren wir einen Wurzelbaum  $\tilde{\Lambda}(S, T')$ , indem wir eine Änderung an  $S$  durchführen, die sich in gewisser Weise aus der Änderung  $T \xrightarrow{\Lambda} \Lambda(T, T')$  ergibt.*

*Diese Änderungen sind in der folgenden Skizze dargestellt. Dort ist in der oberen Hälfte ein Teil von  $S$  und ein Teil von  $T$  sowie in der unteren Hälfte ein Teil von  $\tilde{\lambda}(S)$  und ein Teil von  $\lambda(T)$  dargestellt. (Hier sind Ecken von  $S$  (und  $\tilde{\lambda}(S)$ ) durch Kreise, und Ecken von  $T$  (und  $\lambda(T)$ ) durch Rechtecke dargestellt.) Es handelt sich dabei um den (einzigsten) Teil, an dem eine Änderung stattfindet. Die Ecken von  $S$  bzw.  $\tilde{\lambda}(S)$ , die den Ecken des dargestellten Teils von  $T$  bzw.  $\lambda(T)$  entsprechen, sind fett dargestellt. Die Bezeichnungen der Ecken  $a_{\bullet}^{(\bullet)}$  und  $b_{\bullet}^{(\bullet)}$  entsprechen den Bezeichnungen in 1.4.24 (mit  $m < n$ ).*



Man prüft nun anhand der Skizze in 1.4.35:

**Lemma 1.4.36.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_{1,v'}$  und  $T := \Theta(S)$ . Dann gilt:*

(i) *Ist  $T$  nicht-minimal und  $S' := \tilde{\lambda}(S)$  und  $T' := \lambda(T)$ , so gilt  $S' \in \mathcal{T}_{1,v'}$  und  $o(S') = o(S)$  und  $t(S') = t(S)$  und  $\Theta(S') = T'$ . Weiter gilt*

$$\frac{\prod_{a \in \tilde{E}(S')} \psi(S', a, \epsilon - 1)}{\prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1)} = \frac{\prod_{a \in \mathcal{Q}(T')} \Omega(T'(a), \epsilon - 1 - o(S') - L(a))}{\prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} \Omega(T(a), \epsilon - 1 - o(S) - L(a))}.$$

(ii) *Ist  $T$  nicht-maximal und ergibt sich  $T$  aus  $T' \neq T$  durch eine Kette wie in 1.4.30 und ist  $\tilde{S} := \tilde{\Lambda}(S, T')$  und  $\tilde{T} := \Lambda(T, T')$ , so gilt  $\tilde{S} \in \mathcal{T}_{1,v'}$  und  $o(\tilde{S}) = o(S)$  und  $t(\tilde{S}) = t(S)$  und  $\Theta(\tilde{S}) = \tilde{T}$ . Weiter gilt*

$$\frac{\prod_{a \in \tilde{E}(\tilde{S})} \psi(\tilde{S}, a, \epsilon - 1)}{\prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1)} = \frac{\prod_{a \in \mathcal{Q}(\tilde{T})} \Omega(\tilde{T}(a), \epsilon - 1 - o(\tilde{S}) - L(a))}{\prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} \Omega(T(a), \epsilon - 1 - o(S) - L(a))}.$$

**Definition 1.4.37.** *Als (I)-äquivalent zu  $S \in \mathcal{T}_{1,v'}$  definieren wir jedes  $S' \in \mathcal{T}_{1,v'}$ , das wir aus  $S$  durch wiederholte Anwendungen der Funktionen  $\tilde{\lambda}$  oder  $\tilde{\Lambda}$  erhalten.*

Beispiel: Die letzten beiden Beispiele nach 1.4.24 bilden eine Äquivalenzklasse aus  $\mathcal{T}_{1,v'}$ .

Wir können nun zeigen:

**Lemma 1.4.38.** *Es sei  $S \in \mathcal{T}_{1,v'}$  und  $T := \Theta(S)$  und  $M(T) := \cup_{a \in \mathcal{Q}(T)} E(T(a))$ . Dann gilt*

$$\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v'}, S' \sim_{(I)} S} \Psi(S', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \theta^{-1}(M(T))} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} H^{(x)}(P_{\epsilon - 2 - o(S) - L(a) - H(T(a), \epsilon - o(S) - L(a))}) \right)$$

und somit

$$\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v'}, S' \sim_{(I)} S} \Psi(S', \epsilon - 1) \in \mathfrak{b}_{\delta, \epsilon} B.$$

*Beweis.* Es sei  $S' \in \mathcal{T}_{1,v'}$  mit  $S' \sim_{(I)} S$  und  $T' := \Theta(S')$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi(S, \epsilon - 1) &\stackrel{Def.}{=} \prod_{a \in \tilde{E}(S)} \psi(S, a, \epsilon - 1) \\ &= \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \theta^{-1}(M(T))} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} \prod_{b \in \theta^{-1}(E(T(a)))} \psi(S, b, \epsilon - 1) \right) \\ &\stackrel{1.4.27(ii)}{=} \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \theta^{-1}(M(T))} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{Q}(T)} \Omega(T(a), \epsilon - 1 - o(S) - L(a)) \right). \end{aligned}$$

Damit folgt aus 1.4.36:

$$\Psi(S', \epsilon - 1) = \left( \prod_{a \in \tilde{E}(S) \setminus \theta^{-1}(M(T))} \psi(S, a, \epsilon - 1) \right) \left( \prod_{a \in \mathcal{Q}(T')} \Omega(T'(a), \epsilon - 1 - o(S) - L(a)) \right).$$

Die Summation  $\sum_{S' \in \mathcal{T}_{1,v'}, S' \sim_{(I)} S}$  über  $\Psi(S', \epsilon - 1) = \dots$  liefert die Aussage (s. 1.4.10).  $\square$

## 1.5 Die Komponenten des reduzierten Basisraums

Christophersen stellte fest, dass die nicht-eingebetteten Komponenten des Basisraums  $S$  – also die Komponenten des reduzierten Basisraums  $S_{red}$  – der versellen Deformation einer Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  durch die Nullketten aus  $K(a_2, \dots, a_{e-1})$  parametrisiert werden können. Zu jedem  $k \in K(a_2, \dots, a_{e-1})$  gibt es also genau eine Komponente  $S_k$  von  $S_{red}$ .

Für die Details sei auf [C] verwiesen. Wir betrachten nur zwei (kleine) Beispiele, nämlich “unser” Beispiel  $X(2, 3, 2)$  und das Beispiel  $X(2, 2, 2, 2)$ :<sup>14</sup>

Im Fall  $X(2, 3, 2)$  ist das Ideal von  $S$  durch  $\mathfrak{a} = (s_3^{(2)}t_3, s_2^{(1)}s_3^{(2)}, s_3^{(2)}s_4^{(1)})$  gegeben. Hier gilt  $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$  für das Radikal  $\sqrt{\mathfrak{a}}$  von  $\mathfrak{a}$ . Es gilt also  $S = S_{red}$ , und folglich hat der Basisraum  $S$  keine eingebetteten Komponenten. Für die Primärzerlegung von  $\mathfrak{a}$  gilt

$$\mathfrak{a} = (s_3^{(2)}) \cap (s_2^{(1)}, t_3, s_4^{(1)}).$$

Die Primär Ideale  $\mathfrak{a}_1 := (s_3^{(2)})$  und  $\mathfrak{a}_2 := (s_2^{(1)}, t_3, s_4^{(1)})$  sind zugleich prim. Es gilt  $K(2, 3, 2) = \{(1, 2, 1), (2, 1, 2)\}$  und ein Vergleich mit [C] zeigt  $\mathfrak{a}_{k=(1,2,1)} = \mathfrak{a}_1$  und  $\mathfrak{a}_{k=(2,1,2)} = \mathfrak{a}_2$ .

Im Fall  $X(2, 2, 2, 2)$  ergeben sich nach 1.4.5 die folgenden Erzeuger für das Ideal  $\mathfrak{a}$  von  $S$ :

$$\begin{aligned} H^{(x)}(P_{1,3}) &= 0, \quad H^{(x)}(P_{2,4}) = s_3^{(1)}t_3, \quad H^{(x)}(P_{3,5}) = s_4^{(1)}t_4, \\ H^{(x)}(P_{1,4}) &= s_2^{(1)}s_3^{(1)}, \quad H^{(x)}(P_{2,5}) = (s_3^{(1)} + t_3)s_4^{(1)}, \quad H^{(x)}(P_{1,5}) = s_2^{(1)}s_4^{(1)} + s_3^{(1)}(s_3^{(1)} + t_3), \\ H^{(y)}(P_{2,4}) &= 0, \quad H^{(y)}(P_{3,5}) = 0, \quad H^{(y)}(P_{4,6}) = 0, \\ H^{(y)}(P_{2,5}) &= s_3^{(1)}(s_4^{(1)} - t_4), \quad H^{(y)}(P_{3,6}) = s_4^{(1)}s_5^{(1)}, \quad H^{(y)}(P_{2,6}) = s_3^{(1)}s_5^{(1)} + (s_4^{(1)})^2. \end{aligned}$$

Nun gilt  $\sqrt{\mathfrak{a}} = (s_3^{(1)}, s_4^{(1)}) \neq \mathfrak{a}$ , also  $S \neq S_{red}$ , und folglich hat der Basisraum  $S$  (mindestens) eine eingebettete Komponente. Für die Primärzerlegung von  $\mathfrak{a}$  gilt  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$  mit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= (s_3^{(1)}, s_4^{(1)}) \\ \sqrt{\mathfrak{a}_1} &= (s_3^{(1)}, s_4^{(1)}) \\ \mathfrak{a}_2 &= ((s_2^{(1)})^2, s_2^{(1)}s_3^{(1)}, (s_3^{(1)})^2 + s_2^{(1)}s_4^{(1)}, s_2^{(1)}s_5^{(1)}, s_2^{(1)}t_4, s_3^{(1)}s_4^{(1)} - s_3^{(1)}t_4, (s_4^{(1)})^2 + s_3^{(1)}s_5^{(1)}, \\ &\quad s_3^{(1)}t_3, s_4^{(1)}t_3 + s_3^{(1)}t_4, s_4^{(1)}s_5^{(1)}, s_4^{(1)}t_4, (s_5^{(1)})^2, (t_3)^2, t_3t_4, (t_4)^2) \\ \sqrt{\mathfrak{a}_2} &= (s_2^{(1)}, s_3^{(1)}, s_4^{(1)}, s_5^{(1)}, t_3, t_4) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathfrak{a}_1$  nicht-eingebettet und  $\mathfrak{a}_2$  eingebettet. Es gilt  $K(2, 2, 2, 2) = \{(1, 2, 2, 1)\}$  und man erhält  $\mathfrak{a}_{k=(1,2,2,1)} = \mathfrak{a}_1$ .

**Bemerkung 1.5.1.** Die Komponente mit  $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$ <sup>15</sup>, die für jedes  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  vorliegt (s. Abschnitt 1.1), ist die sogenannte Artinkomponente (s. [C]).

**Bemerkung 1.5.2.** In [Alt2] konstruiert Altmann für isolierte torische Gorensteinsche Singularitäten die verselle Deformation. Die Komponenten des reduzierten versellen Basisraums sind in diesem Fall glatt und entsprechen gewissen Zerlegungen des den Kegel der Singularität determinierenden Polyeders in Minkowski-Summen.

<sup>14</sup>Die im Folgenden auftretenden Radikale und Primärzerlegungen können mit dem Computeralgebra-Programm SINGULAR (s. [GPS]) berechnet werden.

<sup>15</sup>Bzw. mit  $k = (0)$  falls  $e = 3$  und mit  $k = (1, 1)$  falls  $e = 4$ .

## 2 Die Monodromieüberlagerung

Ausgehend von einer versellen Deformation einer gegebenen Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  in Arnolds Form hat Brohme in seiner Hamburger Dissertation [B] eine Deformation  $\mathcal{Y} \longrightarrow T$  von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  angegeben, die die verselle Deformation überlagert und über jeder Komponente des reduzierten Basisraums  $T_{red}$  die sogenannte Monodromieüberlagerung induziert. Zur Begriffsbildung verweisen wir neben [B] auch auf [Rie2] und [BC]. In diesem Kapitel geht es in erster Linie um eine – hinsichtlich der weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit – geeignete Darstellung von Erzeugern der Ideale  $\mathfrak{b}'_k$  der Komponenten  $T'_k$  von  $T_{red}$  und der Ideale  $J'_k$  der Totalräume  $\mathcal{Y}'_k$  über diesen.

Im ersten Abschnitt geben wir an, wie die Deformation  $\mathcal{Y} \longrightarrow T$  aus der Deformation  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  entsteht. Im zweiten Abschnitt geben wir Erzeuger der Ideale  $\mathfrak{b}'_k$  und  $J'_k$  an.

### 2.1 Die gesamte Deformation

Wir gehen von einer versellen Deformation  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  einer gegebenen Quotientensingularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  in Arnolds Form aus. Sie wird induziert durch die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / \mathfrak{a} \\ \longrightarrow & \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / I \end{aligned}$$

mit den in 1.3 bzw. 1.4 konstruierten Idealen  $\mathfrak{a}$  und  $I$ . Wir definieren nun einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \theta : & \mathbb{C}\{s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} \\ \longrightarrow & \mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} \end{aligned}$$

vermöge der Identität

$$(x_i^{a_i-1} + x_i^{a_i-2} s_i^{(1)} + \dots + x_i s_i^{(a_i-2)} + s_i^{(a_i-1)}) = (x_i + t_i^{(1)}) \cdots (x_i + t_i^{(a_i-1)}) \text{ für } i = 2, \dots, e-1$$

$$\text{sowie } \theta(t_i) := t_i \text{ für } i = 3, \dots, e-2.$$

Es bildet  $\theta$  also  $s_i^{(j)}$  auf das  $j$ -te symmetrische Polynom in den Variablen  $t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(a_i-1)}$  ab sowie  $t_i$  auf  $t_i$ . Weiter definieren wir einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \vartheta : & \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} \\ \longrightarrow & \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \vartheta(x_i) & := x_i & \text{für } i = 1, \dots, e, \\ \vartheta(s_i^{(j)}) & := \theta(s_i^{(j)}) & \text{für } i = 2, \dots, e-1 \text{ und } j = 1, \dots, a_i-1, \\ \vartheta(t_i) & := \theta(t_i) & \text{für } i = 3, \dots, e-2. \end{aligned}$$

Es sei nun  $\mathfrak{b}$  das von  $\theta(\mathfrak{a})$  in  $\mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  erzeugte Ideal und  $J$  das von  $\vartheta(I)$  in  $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  erzeugte Ideal. Für  $2 \leq i \leq e-1$  sei  $\mathfrak{S}_{a_i-1}$  die Gruppe der Permutationen auf der Menge  $\{t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(a_i-1)}\}$ .

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

**Satz und Definition 2.1.1.** *Die kanonische Abbildung*

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / \mathfrak{b} \\ & \longrightarrow \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\} / J \end{aligned}$$

induziert eine Deformation <sup>1</sup>

$$\mathcal{Y} \longrightarrow T$$

von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ , die durch einen endlichen Basiswechsel aus  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  hervorgeht. Auf  $\mathcal{Y} \longrightarrow T$  operiert die Gruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i-1}$  äquivariant.

*Beweis.* [B, Satz 2.1]. □

**Bemerkung 2.1.2.** *Wie bei  $\mathcal{X} \longrightarrow S$  liegt auch bei unserer Darstellung von  $\mathcal{Y} \longrightarrow T$  eine Einbettung des Totalraums in  $\mathbb{C}^{e+\tau}$  vor (mit  $\tau = \dim T_X^1 = (\sum_{i=2}^{e-1} a_i) - 2$ ).*

Beispiel: Die Deformation  $\mathcal{Y} \longrightarrow T$  zu unserem Beispiel  $X(2, 3, 2)$  (s. 1.4) erhalten wir durch den folgenden Basiswechsel:

$\begin{aligned} x_2 + s_2^{(1)} &= x_2 + t_2^{(1)} &\implies \theta(s_2^{(1)}) &= t_2^{(1)} \\ x_3^2 + x_3 s_3^{(1)} + s_3^{(2)} &= (x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)}) &\implies \theta(s_3^{(1)}) &= t_3^{(1)} + t_3^{(2)}, \theta(s_3^{(2)}) = t_3^{(1)} t_3^{(2)} \\ x_4 + s_4^{(1)} &= x_4 + t_4^{(1)} &\implies \theta(s_4^{(1)}) &= t_4^{(1)} \\ & & & \theta(t_3) = t_3 \end{aligned}$
--

Dies führt auf die folgenden Erzeuger von  $\mathfrak{b}$  bzw.  $J$ :

$\begin{aligned} \vartheta(H^{(x)}(P_{2,4})) &= (t_3^{(1)} t_3^{(2)}) t_3 \\ \vartheta(H^{(x)}(P_{1,4})) &= t_2^{(1)} (t_3^{(1)} t_3^{(2)}) \\ \vartheta(H^{(y)}(P_{2,5})) &= (t_3^{(1)} t_3^{(2)}) t_4^{(1)} \end{aligned}$
$\begin{aligned} \vartheta(x_1 y_3 - P_{1,3}) &= x_1(x_3 + t_3) - x_2(x_2 + t_2^{(1)}) \\ \vartheta(x_2 y_4 - P_{2,4}) &= x_2 x_4 - (x_3 + t_3)(x_3^2 + (t_3^{(1)} + t_3^{(2)})x_3 + (t_3^{(1)} t_3^{(2)})) \\ \vartheta(x_3 y_5 - P_{3,5}) &= x_3 x_5 - x_4(x_4 + t_4^{(1)}) \\ \vartheta(x_1 y_4 - P_{1,4}) &= x_1 x_4 - (x_2 + t_2^{(1)})(x_3^2 + (t_3^{(1)} + t_3^{(2)})x_3 + (t_3^{(1)} t_3^{(2)})) \\ \vartheta(x_2 y_5 - P_{2,5}) &= x_2 x_5 - (x_3^2 + (t_3 + (t_3^{(1)} + t_3^{(2)}))x_3 + t_3(t_3^{(1)} + t_3^{(2)})) + (t_3^{(1)} t_3^{(2)})(x_4 + t_4^{(1)}) \\ \vartheta(x_1 y_5 - P_{1,5}) &= x_1 x_5 - ((x_2 + t_2^{(1)})(x_3 + (t_3^{(1)} + t_3^{(2)}))(x_4 + t_4^{(1)}) \\ & \quad + (t_3^{(1)} t_3^{(2)})(x_3^2 + (t_3 + (t_3^{(1)} + t_3^{(2)}))x_3 + t_3(t_3^{(1)} + t_3^{(2)})) + (t_3^{(1)} t_3^{(2)})) \end{aligned}$

## 2.2 Die Komponenten des reduzierten Basisraums

Wir kommen nun zu den Komponenten des reduzierten Basisraums  $T_{red}$ .

Betrachten wir zunächst unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$ : So wie  $S$  ist auch  $T$  in diesem Fall reduziert, es gilt also  $T = T_{red}$ , wobei  $T_{red}$  den reduzierten Basisraum bezeichne. Für die Primärzerlegung von  $\mathfrak{b}$  gilt in diesem Fall

$$\mathfrak{b} = ((t_3^{(1)} t_3^{(2)}) t_3, t_2^{(1)} (t_3^{(1)} t_3^{(2)}), (t_3^{(1)} t_3^{(2)}) t_4^{(1)}) = (t_3^{(1)}) \cap (t_3^{(2)}) \cap (t_2^{(1)}, t_3, t_4^{(1)}).$$

<sup>1</sup>Der komplexe Raumkeim  $\mathcal{Y}$  ist der Totalraum, der komplexe Raumkeim  $T$  ist der Basisraum.

Ein Vergleich mit der Primärzerlegung von  $\mathfrak{a}$  aus 1.5 zeigt, dass über der Komponente  $S_{k=(2,1,2)}$  mit  $s_2^{(1)} = t_3 = s_4^{(1)} = 0$  die Komponente mit  $t_2^{(1)} = t_3 = t_4^{(1)} = 0$  von  $T_{red}$  liegt, aber über der Komponente  $S_{k=(1,2,1)}$  mit  $s_3^{(2)} = 0$  liegen nun zwei Komponenten mit  $t_3^{(1)} = 0$  bzw.  $t_3^{(2)} = 0$  von  $T_{red}$ .

Wegen der Möglichkeit mehrerer Komponenten über einem  $S_k$  bezeichnen wir die Komponenten von  $T_{red}$  mit  $T_k^\nu$ , indizieren also die verschiedenen Komponenten von  $T_{red}$  über einer Komponente  $S_k$  zusätzlich zu  $k$  mit  $\nu$ . Wie in [B] verzichten auch wir darauf, den Index  $\nu$  genauer zu präzisieren, da dies für unsere Untersuchungen nicht nötig ist. Die Menge aller auftretenden Indexpaare  $(k, \nu)$  der Komponenten  $T_k^\nu$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{KOMP}$ .

Zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{b}_k^\nu \subseteq \mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$$

das Ideal von  $T_k^\nu$ , und mit

$$J_k^\nu \subseteq \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$$

das Ideal des Totalraums  $\mathcal{Y}_k^\nu$  über  $T_k^\nu$  (also des Urbildes von  $T_k^\nu$  bezüglich  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ ).

Im folgenden Satz formulieren wir eine Konstruktion für Erzeuger der Ideale  $\mathfrak{b}_k^\nu$  und  $J_k^\nu$ .

**Satz 2.2.1.** *Es sei  $k \in K(a_2, \dots, a_{e-1})$  fest. Für  $i = 2, \dots, e-1$  betrachten wir die folgenden Mengen  $\mathcal{M}_i$  von Idealen in  $\mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$ :*

a) Für  $i \in \{2, e-1\}$ :

Falls  $e = 3$ :

$$\mathcal{M}_i := \{(0)\}$$

Falls  $e \geq 4$ :

$$\mathcal{M}_i := \{(t_i^{(j_1)}, \dots, t_i^{(j_r)}); \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } k_i - 1 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\}\}$$

b) Für  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $\alpha_i = 1$ :

$$\mathcal{M}_i := \{(t_i^{(j_1)}, \dots, t_i^{(j_r)}, t_i^{(l_1)} - t_i, \dots, t_i^{(l_s)} - t_i); \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } \alpha_{i+1} \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\} \text{ und} \\ l_1, \dots, l_s \text{ sind genau } \alpha_{i-1} - 1 \text{ weitere}^2 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\}\}$$

c) Für  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $\alpha_i > 1$ :

$$\mathcal{M}_i := \{(t_i^{(j_1)}, \dots, t_i^{(j_r)}, t_i); \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } k_i - 1 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\}\}$$

---

<sup>2</sup> "weitere" im Sinne von "andere", also  $\{j_1, \dots, j_r\} \cap \{l_1, \dots, l_s\} = \emptyset$ .

Die Ideale  $\mathfrak{b}_k^\nu$  sind nun alle Ideale der Form  $B_2 + \dots + B_{e-1}$  mit  $B_2 \in \mathcal{M}_2, \dots, B_{e-1} \in \mathcal{M}_{e-1}$ .

Weiter wird zu einem solchen Ideal  $\mathfrak{b}_k^\nu$  das entsprechende Ideal  $J_k^\nu$  erzeugt von den Elementen aus  $\mathfrak{b}_k^\nu$  zuzüglich der im Folgenden konstruierten Polynome  $G_{\delta,\epsilon}^{k,\nu}$  für  $2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1$ .

Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned} X_i^{(o)} &:= x_i && \text{für } 1 \leq i \leq e, \\ X_i^{(t)} &:= x_i + t_i && \text{für } 3 \leq i \leq e - 2, \\ X_i^{(j)} &:= x_i + t_i^{(j)} && \text{für } 2 \leq i \leq e - 1 \text{ und } 1 \leq j \leq a_i - 1. \end{aligned}$$

Dann setzen wir

$$X_i^L := X_i^{(o)} \quad \text{für } i = 1, \dots, e$$

und

$$X_i^R := \begin{cases} X_i^{(o)} & \text{für } i = 1, 2, e - 1, e \\ X_i^{(t)} & \text{für } i = 3, \dots, e - 2. \end{cases}$$

Nun ist es möglich, für einige der  $X_i^R$  eine Änderung der Form

$$X_i^R := X_i^L, \quad \text{falls } X_i^R - X_i^L \in \mathfrak{b}_k^\nu$$

sowie für einige der  $X_i^{(j)}$  eine Änderung der Form

$$\begin{aligned} &X_i^{(j)} := X_i^L, \quad \text{falls } X_i^{(j)} - X_i^L \in \mathfrak{b}_k^\nu \\ \text{oder} &X_i^{(j)} := X_i^R, \quad \text{falls } X_i^{(j)} - X_i^R \in \mathfrak{b}_k^\nu \end{aligned}$$

so vorzunehmen, dass die Ausdrücke

$$G_{\delta,\epsilon}^{k,\nu} := X_\delta^L X_\epsilon^R - P_{\delta,\epsilon} \quad \text{für } 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1$$

Binome in den Ausdrücken  $X_i^{(o)}, X_i^{(t)}, X_i^{(j)}$  sind, wobei  $P_{\delta,\epsilon}$  durch die folgende Konstruktion definiert sei:

Wir setzen  $P_{i-1,i+1} = X_i^R X_i^{(1)} \dots X_i^{(a_i-1)}$  für  $i = 2, \dots, e - 1$  und definieren induktiv alle weiteren Polynome  $P_{\delta,\epsilon}$  durch den folgenden Schritt für  $n = 3, \dots, e - 1$ :

Die Polynome  $P_{\delta,\epsilon}$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta \leq n - 1$  seien bereits definiert. Für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta = n$  setzen wir

$$P_{\delta,\epsilon} = \begin{cases} \frac{P_{\delta,\epsilon-1} P_{\delta+1,\epsilon}}{X_{\delta+1}^L X_{\epsilon-1}^R} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \in \nabla_k \\ \frac{P_{\delta,\epsilon-1} P_{\delta+1,\epsilon}}{P_{\delta+1,\epsilon-1}} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases}$$

*Beweis.* Dies ist eine etwas andere Formulierung der Ergebnisse in [B, p.23]. Dort wird zunächst das Ideal  $\mathfrak{a}^k$  definiert als  $\mathfrak{a}^k = \mathfrak{a}_2^k + \dots + \mathfrak{a}_{e-1}^k$ , wobei für  $i = 2, \dots, e - 1$ :

$$\mathfrak{a}_i^k := \begin{cases} (0) & \text{falls } e = 3 \\ (t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(k_i-1)}) & \text{falls } e \geq 4 \text{ und } (i = 2 \text{ oder } i = e - 1) \\ (t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(\alpha_i+1)}, t_i^{(\alpha_i+1+1)} - t_i, \dots, t_i^{(k_i-1)} - t_i) & \text{falls } 3 \leq i \leq e - 2 \text{ und } \alpha_i = 1 \\ (t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(k_i-1)}, t_i) & \text{falls } 3 \leq i \leq e - 2 \text{ und } \alpha_i > 1. \end{cases}$$

(Hier war eine kleine Korrektur erforderlich.) Die Ideale der dort genannten Komponenten  $gT_k$  von  $T_{red}$  stimmen dann mit den Idealen  $\mathfrak{b}_k^\nu$  bei uns überein.

Zur Konstruktion der  $G_{\delta,\epsilon}^{k,\nu}$  sei auf [B, Satz 2.1 iii)] verwiesen. □

**Bemerkung 2.2.2.** Falls  $e \geq 4$  vorliegt, so handelt es sich bei jeder (durch Einschränkung von  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ ) induzierten Abbildung  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$  um eine Deformation der Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  mit (einigen) Deformationsparametern der Form  $t_3, \dots, t_{e-2}$  und jeweils  $a_i - k_i$  Deformationsparametern der Form  $t_i^{(j)}$  für  $2 \leq i \leq e-1$ . Bezeichnet für  $2 \leq i \leq e-1$  jeweils  $\mathfrak{S}_{a_i - k_i}$  die Gruppe der Permutationen auf der Menge der Deformationsparameter der Form  $t_i^{(j)}$ , so operiert die Gruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - k_i}$  äquivariant auf  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ , und die Deformation  $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$  ist eine Monodromieüberlagerung der Deformation  $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$  mit Monodromiegruppe  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i - k_i}$ . (Siehe [B, 2.1 ii]).

Der Basisraum unseres Beispiels hat die beiden Komponenten  $t_3^{(1)} = 0$  und  $t_3^{(2)} = 0$  (zu  $k = (1, 2, 1)$ ) sowie die Komponente  $t_2^{(1)} = t_3 = t_4^{(1)} = 0$  (zu  $k = (2, 1, 2)$ ).

Die Totalräume über diesen sind gegeben durch die folgenden Erzeugendensysteme der  $J_k^\nu$ :

$k = (1, 2, 1), \mathfrak{b}_k^\nu = (t_3^{(1)})$	
	$t_3^{(1)}$
$G_{1,3}^{k,\nu}$	$= x_1(x_3 + t_3) - x_2(x_2 + t_2^{(1)})$
$G_{2,4}^{k,\nu}$	$= x_2x_4 - x_3(x_3 + t_3)(x_3 + t_3^{(2)})$
$G_{3,5}^{k,\nu}$	$= x_3x_5 - x_4(x_4 + t_4^{(1)})$
$G_{1,4}^{k,\nu}$	$= x_1x_4 - (x_2 + t_2^{(1)})x_3(x_3 + t_3^{(2)})$
$G_{2,5}^{k,\nu}$	$= x_2x_5 - (x_3 + t_3)(x_3 + t_3^{(2)})(x_4 + t_4^{(1)})$
$G_{1,5}^{k,\nu}$	$= x_1x_5 - (x_2 + t_2^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)})(x_4 + t_4^{(1)})$

$k = (1, 2, 1), \mathfrak{b}_k^\nu = (t_3^{(2)})$	
	$t_3^{(2)}$
$G_{1,3}^{k,\nu}$	$= x_1(x_3 + t_3) - x_2(x_2 + t_2^{(1)})$
$G_{2,4}^{k,\nu}$	$= x_2x_4 - x_3(x_3 + t_3)(x_3 + t_3^{(1)})$
$G_{3,5}^{k,\nu}$	$= x_3x_5 - x_4(x_4 + t_4^{(1)})$
$G_{1,4}^{k,\nu}$	$= x_1x_4 - (x_2 + t_2^{(1)})x_3(x_3 + t_3^{(1)})$
$G_{2,5}^{k,\nu}$	$= x_2x_5 - (x_3 + t_3)(x_3 + t_3^{(1)})(x_4 + t_4^{(1)})$
$G_{1,5}^{k,\nu}$	$= x_1x_5 - (x_2 + t_2^{(1)})(x_3 + t_3^{(1)})(x_4 + t_4^{(1)})$

$k = (2, 1, 2), \mathfrak{b}_k^\nu = (t_2^{(1)}, t_3, t_4^{(1)})$	
	$t_2^{(1)}$
	$t_3$
	$t_4^{(1)}$
$G_{1,3}^{k,\nu}$	$= x_1x_3 - x_2x_2$
$G_{2,4}^{k,\nu}$	$= x_2x_4 - x_3(x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)})$
$G_{3,5}^{k,\nu}$	$= x_3x_5 - x_4x_4$
$G_{1,4}^{k,\nu}$	$= x_1x_4 - x_2(x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)})$
$G_{2,5}^{k,\nu}$	$= x_2x_5 - (x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)})x_4$
$G_{1,5}^{k,\nu}$	$= x_1x_5 - (x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(1)})(x_3 + t_3^{(2)})(x_3 + t_3^{(2)})$

**Definition 2.2.3.** Zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  definieren wir:

Als  $J_{sing} \subseteq \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  das Ideal der Nullfaser von  $\mathcal{Y} \rightarrow T$ , also das Ideal von  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  eingebettet in den Totalraum.

Als  $\mathcal{Y}_A$  für jede Indexmenge  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  den Totalraum von  $\mathcal{Y} \rightarrow T$  über dem Durchschnitt  $\cap_{(k,\nu) \in A} T_k^\nu$ .

**Bemerkung 2.2.4.** Sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Dann gilt:

(i) Ist  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ , so gilt für die Erzeuger  $g_{\delta, \epsilon}^k$  aus 1.2.1 und die Erzeuger  $G_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  aus 2.2.1:

$$G_{\delta, \epsilon}^{k, \nu} |_{t_2^{(1)} = \dots = t_2^{(a_2-1)} = \dots = t_{e-1}^{(1)} = \dots = t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)} = t_3, \dots = t_{e-2} = 0} = g_{\delta, \epsilon}^k \text{ für } 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1.$$

Daraus folgt für jedes  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ , dass das Ideal  $J_{sing}$  von den Polynomen  $G_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  und den Deformationsparametern erzeugt wird, also

$$J_{sing} = (\{G_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}; 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\} \cup \{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}).$$

(ii) Es gilt  $\mathcal{Y}_A = \cap_{(k,\nu) \in A} \mathcal{Y}_k^\nu$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$ . Insbesondere erhalten wir Inklusionen (komplexer Raumkeime)  $\mathcal{Y}_A \hookrightarrow \mathcal{Y}_B$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  und  $X_{n,q} \hookrightarrow \mathcal{Y}_A$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$ .

### 3 Die Totalräume $\mathcal{Y}_k^\nu$ der Monodromieüberlagerung als algebraische Mengen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird zunächst angegeben, wie die Totalräume  $\mathcal{Y}_k^\nu$  der Monodromieüberlagerung und die Singularität  $X_{n,q}$  als algebraische Teilmengen eines gemeinsamen affinen Raums der Form  $\mathbb{C}^r$  aufgefasst werden. Im weiteren Teil des ersten Abschnitts wird dann ein Überblick über dieses Kapitel gegeben.

#### 3.1 Definitionen und Überblick

Gegeben sei eine Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ .

Wir definieren den Polynomring

$$\mathbb{A} := \mathbb{C}[X_1^{(o)}, \dots, X_e^{(o)}, X_2^{(1)}, \dots, X_2^{(a_2-1)}, \dots, X_{e-1}^{(1)}, \dots, X_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, X_3^{(t)}, \dots, X_{e-2}^{(t)}].$$

Die Menge der auftretenden Variablen bezeichnen wir mit  $\mathcal{VAR}$ , also

$$\mathcal{VAR} := \{X_1^{(o)}, \dots, X_e^{(o)}, X_2^{(1)}, \dots, X_2^{(a_2-1)}, \dots, X_{e-1}^{(1)}, \dots, X_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, X_3^{(t)}, \dots, X_{e-2}^{(t)}\}.$$

Die Menge  $\mathcal{VAR}$  hat  $e + \tau$  Elemente (mit  $\tau = \dim T_X^1 = (\sum_{i=2}^{e-1} a_i) - 2$  wie in 1.3 und 2.1).

Den affinen Raum mit diesen Koordinatenfunktionen bezeichnen wir mit  $\mathbb{V}$ , also  $\mathbb{V} = \mathbb{C}^{e+\tau}$ .

Wir fassen nun die Ideale  $J_k^\nu, J_{sing}, \mathfrak{b}_k^\nu$  aus dem letzten Kapitel vermöge ihrer polynomialen Erzeuger als Ideale des Polynomrings

$$\mathbb{B} := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}]$$

auf und definieren einen Isomorphismus

$$\Upsilon : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$$

durch den folgenden linearen Koordinatenwechsel:

$$\begin{aligned} X_i^{(o)} &:= x_i && \text{für } 1 \leq i \leq e, \\ X_i^{(t)} &:= x_i + t_i && \text{für } 3 \leq i \leq e-2, \\ X_i^{(j)} &:= x_i + t_i^{(j)} && \text{für } 2 \leq i \leq e-1, 1 \leq j \leq a_i-1. \end{aligned}$$

**Definition 3.1.1.** Sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben.<sup>1</sup>

Zu jedem  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  definieren wir die Ideale  $K_k^\nu := \Upsilon(J_k^\nu) \subseteq \mathbb{A}$ <sup>2</sup> und  $\mathfrak{c}_k^\nu := \Upsilon(\mathfrak{b}_k^\nu) \subseteq \mathbb{A}$ <sup>3</sup>. Weiter setzen wir  $Z_k^\nu := \mathcal{V}(K_k^\nu) \subseteq \mathbb{V}$ .

Für jede Indexmenge  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  bezeichnen wir den Durchschnitt der entsprechenden Komponenten  $Z_k^\nu$  mit  $Z_A := \bigcap_{(k, \nu) \in A} Z_k^\nu \subseteq \mathbb{V}$ . Für zwei Indexmengen  $A, B$  mit  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  bezeichnen wir die Abbildung  $Z_A \hookrightarrow Z_B$ , die durch die Inklusion  $Z_A \subseteq Z_B$  in  $\mathbb{V}$  gegeben ist, mit  $\Phi_{A,B}$ .

Wir definieren das Ideal  $K_{sing} := \Upsilon(J_{sing}) \subseteq \mathbb{A}$  und setzen  $Z_{sing} := \mathcal{V}(K_{sing}) \subseteq \mathbb{V}$ .

Für jede Indexmenge  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  bezeichnen wir die Abbildung  $Z_{sing} \hookrightarrow Z_A$ , die durch die Inklusion  $Z_{sing} \subseteq Z_A$  in  $\mathbb{V}$  gegeben ist, mit  $\Psi_A$ .

Nun ist offensichtlich:

**Satz 3.1.2.**

- (i) Fassen wir den Ursprung von  $Z_{sing}$  als komplexen Raumkeim  $(Z_{sing}, 0)$  auf und den Ursprung von  $Z_A$  für jede Indexmenge  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  als komplexen Raumkeim  $(Z_A, 0)$ , so induziert  $\Upsilon$  Isomorphismen (komplexer Raumkeime)

$$\tilde{\iota} : X_{n,q} \longrightarrow (Z_{sing}, 0) \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}_A : \mathcal{Y}_A \longrightarrow (Z_A, 0) \quad \text{für } \emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}.$$

- (ii) Die folgenden Diagramme kommutieren. Die Abbildungen  $(\Phi_{A,B})_0$  und  $(\Psi_A)_0$  seien dabei die durch  $\Phi_{A,B}$  und  $\Psi_A$  induzierten Abbildungen komplexer Raumkeime. Weiter sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im ersten Diagramm und  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im zweiten Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_A} & (Z_A, 0) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow (\Phi_{A,B})_0 \\ \mathcal{Y}_B & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_B} & (Z_B, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{n,q} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & (Z_{sing}, 0) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow (\Psi_A)_0 \\ \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_A} & (Z_A, 0) \end{array}$$

<sup>1</sup>Wie üblich bezeichne in dieser Arbeit der Ausdruck  $\mathcal{V}(I)$  zu einem Ideal  $I$  eines Polynomrings die Nullstellenmenge dieses Ideals.

<sup>2</sup>Hoffentlich wird der Leser sich nicht daran stören, dass hier  $K$  den unteren Index  $k$  hat, auch wenn dies eventuell als etwas unschön empfunden wird.  $K$  wurde hier als alphabetische Fortsetzung der zuvor aufgetretenen Ideale  $I$  und  $J$  gewählt.

<sup>3</sup>Man beachte, dass unter den Erzeugern des Ideal  $\mathfrak{c}_k^\nu$  auch Polynome mit Variablen  $X_1^{(o)}, \dots, X_e^{(o)}$  sind, während unter den in 2.2.1 genannten Erzeugern von  $\mathfrak{b}_k^\nu$  keine Polynome mit Variablen  $x_1, \dots, x_e$  sind.

Wie in der Einleitung gesagt, wollen wir  $L$ -Kegel  $\chi$  und  $\sigma_k^\nu$  für alle  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  mit einem ausreichend großen Gitter  $L$  so anordnen, dass für die Durchschnitte  $\sigma_A := \bigcap_{(k, \nu) \in A} \sigma_k^\nu$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  sowie für die durch die Inklusionen in  $L_{\mathbb{R}}$  gegebenen Kegelmorphismen  $\phi_{A,B} : (L_{(\sigma_A)}, \sigma_A) \hookrightarrow (L_{(\sigma_B)}, \sigma_B)$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  und  $\psi_A : (L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_{(\sigma_A)}, \sigma_A)$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  gilt:

1) Es gibt Isomorphismen (komplexer Raumkeime)

$$\iota : X_{n,q} \longrightarrow (X_{L_\chi, \chi}, f_\chi) \quad \text{und} \quad \kappa_A : \mathcal{Y}_A \longrightarrow (X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \quad \text{für} \quad \emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP},$$

wobei  $f_\chi$  den Fixpunkt von  $X_{L_\chi, \chi}$  und  $f_{(\sigma_A)}$  den Fixpunkt von  $X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}$  bezeichne.

2) Die folgenden Diagramme kommutieren. Dabei sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im ersten Diagramm und  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im zweiten Diagramm. (Zur Bezeichnung  $\mathcal{T}_f(\phi)$  s. Einleitung.)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\kappa_A} & (X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow \mathcal{T}_f(\phi_{A,B}) \\ \mathcal{Y}_B & \xrightarrow{\kappa_B} & (X_{L_{(\sigma_B)}, \sigma_B}, f_{(\sigma_B)}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{n,q} & \xrightarrow{\iota} & (X_{L_\chi, \chi}, f_\chi) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow \mathcal{T}_f(\psi_A) \\ \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\kappa_A} & (X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \end{array}$$

Wir werden sehen, dass  $Z_{sing}$  und die  $Z_A$  affine normale torische Varietäten sind und dass die Abbildungen  $\Phi_{A,B} : Z_A \hookrightarrow Z_B$  und  $\Psi_A : Z_{sing} \hookrightarrow Z_A$  torische Morphismen sind. In 5.2.1 werden wir dann  $L$ -Kegel  $\chi$  und  $\sigma_k^\nu$  definieren. Gehen wir in 5.2.3 zu den Keimen im Ursprung bzw. im Fixpunkt über, so ergeben sich zusammen mit 3.1.2 die folgenden kommutativen Diagramme, deren horizontale Kompositionen Isomorphismen (komplexer Raumkeime) sind:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_A} & (Z_A, 0) \xrightarrow{(\zeta_A)_0} & (X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow (\Phi_{A,B})_0 & \downarrow \mathcal{T}_f(\phi_{A,B}) \\ \mathcal{Y}_B & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_B} & (Z_B, 0) \xrightarrow{(\zeta_B)_0} & (X_{L_{(\sigma_B)}, \sigma_B}, f_{(\sigma_B)}) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_{n,q} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & (Z_{sing}, 0) \xrightarrow{\xi_0} & (X_{L_\chi, \chi}, f_\chi) \\ \downarrow \text{Inklusion} & & \downarrow (\Psi_A)_0 & \downarrow \mathcal{T}_f(\psi_A) \\ \mathcal{Y}_A & \xrightarrow{\tilde{\kappa}_A} & (Z_A, 0) \xrightarrow{(\zeta_A)_0} & (X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}, f_{(\sigma_A)}) \end{array}$$

Dies macht hoffentlich klar, warum wir von nun an nur noch die in 3.1.1 definierten Ideale von  $\mathbb{A}$  bzw. algebraischen Teilmengen von  $\mathbb{V}$  als Ausgangspunkt unserer weiteren Untersuchungen betrachten werden (anstelle der Ideale  $J_k^\nu, J_{sing}, \mathfrak{b}_k^\nu$  und der Raumkeime  $X_{n,q}, \mathcal{Y}_k^\nu$ ). Dabei wird der im nächsten Abschnitt 3.2 eingeführte Begriff des *torischen Ideals* eine wichtige Rolle spielen, denn affine torische Varietäten sind genau die Nullstellenmengen torischer Ideale. Wir werden dann in Abschnitt 3.3 eine gewisse Klasse torischer Ideale von  $\mathbb{A}$  einführen, die wir mit  $\mathbb{K}(R)$  bezeichnen werden. Diese Ideale  $\mathbb{K}(R)$  benötigen wir später zur Konstruktion des Kegelsystems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$ . In Abschnitt 3.4 werden wir sehen, dass die Ideale  $K_k^\nu$  und allgemeiner die Ideale  $\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu}$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  in der Klasse der  $\mathbb{K}(R)$  enthalten sind (und somit insbesondere  $Z_k^\nu$  und allgemeiner die Durchschnitte  $Z_A$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  torische Varietäten sind). Ebenso werden wir dort sehen, dass auch  $K_{sing}$  in der Klasse der  $\mathbb{K}(R)$  enthalten ist.

**Bemerkung 3.1.3.** *Der gesamte Totalraum  $\mathcal{Y}$  oder dessen Reduktion  $\mathcal{Y}_{red}$  lässt sich hingegen im Allgemeinen nicht als Raumkeim im Fixpunkt einer torischen Varietät auffassen, da er im Allgemeinen mehrere Komponenten hat. Daher habe ich mich mit der Frage beschäftigt, ob man*

$\mathcal{Y}$  oder  $\mathcal{Y}_{\text{red}}$  zumindest als universelles Objekt aus dem durch  $\Sigma_{(X, \sigma_k^\vee)}$  beschriebenen System der  $(X_{L(\sigma_A), \sigma_A}, f_{(\sigma_A)})$  und der Morphismen  $\mathcal{T}_f(\phi_{A,B})$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \text{KOMP}$  erhält. Als sinnvoll erschien mir die Frage, ob man  $\mathcal{Y}$  oder  $\mathcal{Y}_{\text{red}}$  als Colimes dieses Systems in der Kategorie der (eventuell: reduzierten) komplexen Raumkeime erhält.

Es sei an die Definition des Colimes erinnert (s. [W, A.5]):

Es seien  $\mathcal{I}$  und  $\mathcal{K}$  Kategorien. Der Colimes eines Funktors  $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{K}$  (falls er existiert) ist ein Objekt  $C$  von  $\mathcal{K}$ , zusammen mit Morphismen  $\lambda_I : F(I) \longrightarrow C$  in  $\mathcal{K}$ , die “verträglich” in dem Sinne sind, dass für jeden Morphismus  $\alpha : I \longrightarrow J$  in  $\mathcal{I}$  der Morphismus  $\lambda_I$  als  $\lambda_J F(\alpha) : F(I) \longrightarrow F(J) \longrightarrow C$  faktorisiert und die folgende universelle Eigenschaft hat: für jedes  $K \in \mathcal{K}$  und jedes System “verträglicher” Morphismen  $f_I : F(I) \longrightarrow K$  gibt es genau einen Morphismus  $\gamma : C \longrightarrow K$ , so dass  $f_I = \gamma \lambda_I$ .

Um gemäß dieser Definition von einem Colimes des Systems der  $\mathcal{T}_f(\phi_{A,B})$  sprechen zu können, definieren wir

- $\mathcal{I}$  als die Kategorie mit den nichtleeren Teilmengen  $\emptyset \neq A \subseteq \text{KOMP}$  als Objekte, in der dann  $\alpha : A \longrightarrow B$  genau dann ein Morphismus ist, wenn  $B \subseteq A$ ,
- $\mathcal{K}$  als die Kategorie der (eventuell: reduzierten) komplexen Raumkeime,
- $F$  als den Funktor mit  $F(A) = (X_{L(\sigma_A), \sigma_A}, f_{(\sigma_A)})$ ,  $F(\alpha : A \longrightarrow B) = \mathcal{T}_f(\phi_{A,B})$ .

Leider fand sich keine Antwort auf diese Frage. Ich vermute jedoch, dass die Antwort im Allgemeinen negativ ausfallen muss, da es meistens nicht möglich ist, durch einen Koordinatenwechsel zu erreichen, dass alle Erzeuger der Ideale der Komponenten des reduzierten Basisraums als Monome gewählt werden können. Man betrachte etwa den Fall  $X(3, 3, 3, 3)$ , für den in der folgenden Tabelle alle Ideale  $\mathfrak{b}_k^\vee$  durch die in 2.2.1 angegebenen Erzeuger dargestellt werden.

Zu $k = (1, 2, 2, 1)$ :	$(t_3^{(1)}, t_4^{(1)}), (t_3^{(1)}, t_4^{(2)}), (t_3^{(2)}, t_4^{(1)}), (t_3^{(2)}, t_4^{(2)})$
Zu $k = (1, 3, 1, 2)$ :	$(t_3^{(1)}, t_3^{(2)}, t_4, t_5^{(1)}), (t_3^{(1)}, t_3^{(2)}, t_4, t_5^{(2)})$
Zu $k = (2, 1, 3, 1)$ :	$(t_2^{(1)}, t_3, t_4^{(1)}, t_4^{(2)} - t_4), (t_2^{(1)}, t_3, t_4^{(2)}, t_4^{(1)} - t_4),$ $(t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(1)}, t_4^{(2)} - t_4), (t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(2)}, t_4^{(1)} - t_4)$
Zu $k = (2, 2, 1, 3)$ :	$(t_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_3, t_4, t_5^{(1)}, t_5^{(2)}), (t_2^{(1)}, t_3^{(2)}, t_3, t_4, t_5^{(1)}, t_5^{(2)})$ $(t_2^{(2)}, t_3^{(1)}, t_3, t_4, t_5^{(1)}, t_5^{(2)}), (t_2^{(2)}, t_3^{(2)}, t_3, t_4, t_5^{(1)}, t_5^{(2)})$
Zu $k = (3, 1, 2, 2)$ :	$(t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(1)}, t_4, t_5^{(1)}), (t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(1)}, t_4, t_5^{(2)})$ $(t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(2)}, t_4, t_5^{(1)}), (t_2^{(1)}, t_2^{(2)}, t_3, t_4^{(2)}, t_4, t_5^{(2)})$

### 3.2 Torische Ideale

Wir führen nun torische Ideale ein. In diesem Abschnitt gehen wir (der Einfachheit halber) vom Polynomring  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  anstelle von  $\mathbb{A}$  aus. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels legen wir dann wieder  $\mathbb{A}$  zugrunde.

Zur Vereinfachung treffen wir in der folgenden Definition die Vereinbarung, dass unter Binomen in dieser Arbeit immer Binome der Form “Monom minus Monom” zu verstehen sind.

**Definition 3.2.1.** Ist ein Polynomring  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  gegeben, so bezeichnen wir als Binome die Elemente der Form

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} - X_1^{\beta_1} \cdots X_r^{\beta_r} \quad \text{mit } \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}_0.$$

Wird ein Ideal in  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  von Binomen erzeugt, so nennen wir dieses ein binomiales Ideal.

Da  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  noethersch ist, wird ein binomiales Ideal von endlich vielen Binomen erzeugt. Wir definieren nun *torische Ideale* wie in [S, Kapitel 4].

**Definition 3.2.2.** Es sei  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{Z}^n$ . Wir betrachten den Halbgruppen-Homomorphismus

$$\pi : \mathbb{N}_0^r \longrightarrow \mathbb{Z}^n, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \mapsto u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_r \mathbf{a}_r$$

und definieren das binomiale Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  als

$$I := (\{X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} - X_1^{\beta_1} \cdots X_r^{\beta_r}; (\alpha_1, \dots, \alpha_r), (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{N}_0^r \text{ mit } \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \pi(\beta_1, \dots, \beta_r)\}).$$

Ein solches Ideal  $I$  heißt *torisches Ideal*.

Ist darüber hinaus der Ring  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]/I$  ganz abgeschlossen (in seinem Quotientenkörper), so nennen wir  $I$  ein *normales torisches Ideal*.

Diese Definition eines torischen Ideals ist in der Tat zu der Definition in [S, p.31] äquivalent, wie man mittels des dort angegebenen Lemmas 4.1 sieht. Jedes torische Ideal ist ein Primideal. Der Begriff “normal” ergibt sich daraus, dass die Nullstellenmenge  $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^r$  eines Primideals  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  als Varietät genau dann normal ist, wenn der Ring  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]/I$  ganz abgeschlossen (in seinem Quotientenkörper) ist.

Die obige Definition geht von einer Teilmenge  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r\}$  von  $\mathbb{Z}^n$  aus. Im nächsten Satz geben wir ein Kriterium für die Eigenschaft “torisch zu sein” an für ein binomiales Ideal, für das eine solche Teilmenge zunächst nicht explizit vorausgesetzt wird.

**Definition 3.2.3.** Wird das binomiale Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  von den  $s$  Binomen

$$X_1^{\alpha_1^{(1)}} \cdots X_r^{\alpha_r^{(1)}} - X_1^{\beta_1^{(1)}} \cdots X_r^{\beta_r^{(1)}}, \dots, X_1^{\alpha_1^{(s)}} \cdots X_r^{\alpha_r^{(s)}} - X_1^{\beta_1^{(s)}} \cdots X_r^{\beta_r^{(s)}}$$

erzeugt, und ist  $V \subseteq \mathbb{Q}^r$  der Teilraum, der von den (Zeilen-) Vektoren

$$(\alpha_1^{(1)} - \beta_1^{(1)}, \dots, \alpha_r^{(1)} - \beta_r^{(1)}), \dots, (\alpha_1^{(s)} - \beta_1^{(s)}, \dots, \alpha_r^{(s)} - \beta_r^{(s)})$$

erzeugt wird, so definieren wir das Untergitter  $\mathcal{Z}(I) := V \cap \mathbb{Z}^r$  von  $\mathbb{Z}^r$ . Für ein einzelnes Binom  $b = X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} - X_1^{\beta_1} \cdots X_r^{\beta_r}$  setzen wir auch  $\mathcal{Z}(b) := (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_r - \beta_r)$ .

Ist umgekehrt ein Untergitter  $Z \subseteq \mathbb{Z}^r$  gegeben, so ordnen wir diesem das binomiale Ideal

$$\mathcal{B}(Z) := (\{X_1^{\alpha_1} \cdots X_r^{\alpha_r} - X_1^{\beta_1} \cdots X_r^{\beta_r}; (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_r - \beta_r) \in Z\}) \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$$

zu.

Weiter definieren wir für ein binomiales Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  das Ideal

$$\bar{I} := \mathcal{B}(\mathcal{Z}(I)).$$

**Satz 3.2.4.** Für ein binomiales Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  gilt:

(i) Das Untergitter  $\mathcal{Z}(I)$  (und somit auch  $\bar{I}$ ) ist wohldefiniert, es hängt also nicht von der Wahl der erzeugenden Binome von  $I$  ab.

(ii) Es gilt  $I \subseteq \bar{I}$  und  $\bar{\bar{I}} = \bar{I}$ .

(iii) Es ist  $I$  genau dann ein torisches Ideal, wenn  $I = \bar{I}$ .

*Beweis.* (i) Sind sowohl  $b_1, \dots, b_s$  als auch  $c_1, \dots, c_t$  binomiale Erzeuger von  $I$ , so gilt  $V_1 = V_2$  für  $V_1 := \sum_{i=1}^s \mathbb{C} \cdot \mathcal{Z}(b_i)$ ,  $V_2 := \sum_{j=1}^t \mathbb{C} \cdot \mathcal{Z}(c_j)$ . Denn ist  $j \in \{1, \dots, t\}$  und gilt  $c_j = \sum_{i=1}^s p_i \cdot b_i$  mit Polynomen  $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ , so lässt sich dies auch (aus-) schreiben als  $c_j = \sum_{i=1}^q a_i d_i$  mit Koeffizienten  $a_i \in \mathbb{C}$  und Binomen  $d_1, \dots, d_q$ , für die  $\mathcal{Z}(d_1), \dots, \mathcal{Z}(d_q) \in V_1$  gilt. Dies zeigt  $V_2 \subseteq V_1$ , und analog folgt  $V_1 \subseteq V_2$ . Da also  $V_1 = V_2$ , folgt die Aussage aus  $V_1 \cap \mathbb{Z}^r = (\sum_{i=1}^s \mathbb{Q} \cdot \mathcal{Z}(b_i)) \cap \mathbb{Z}^r$ ,  $V_2 \cap \mathbb{Z}^r = (\sum_{j=1}^t \mathbb{Q} \cdot \mathcal{Z}(c_j)) \cap \mathbb{Z}^r$ .

(ii) Folgt sofort.

(iii) Ist  $I$  ein torisches Ideal, so gilt offenbar  $\mathcal{Z}(I) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^r; u_1 \mathbf{a}_1 + \dots + u_r \mathbf{a}_r = 0\}$  mit den  $\mathbf{a}_i$  aus Def. 3.2.2. Dann folgt für  $b = X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} - X_1^{\beta_1} \dots X_r^{\beta_r}$  mit  $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_r - \beta_r) \in \mathcal{Z}(I)$  offenbar  $b \in I$ , was  $\bar{I} \subseteq I$  (und somit  $I = \bar{I}$  wegen (ii)) zeigt. Gilt umgekehrt  $I = \bar{I}$  und bilden die Vektoren  $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n \in \mathbb{Z}^r$  eine Gitterbasis von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r u_i b_i = 0 \forall \mathbf{u} \in \mathcal{Z}(I)\}$ , so kann man offenbar als  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$  in Def. 3.2.2 die Spaltenvektoren der  $(n \times r)$ -Matrix mit den  $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$  als Zeilenvektoren wählen.  $\square$

**Bemerkung 3.2.5.**

(i) Wenn wir im weiteren Teil der Arbeit für ein binomiales Ideal  $I$  die Bezeichnung  $\bar{I}$  verwenden, so sei dies immer nach 3.2.3 definiert.

(ii) Das Ideal  $\bar{I}$  ist die Saturierung von  $I$  bezüglich des Produktes aller Variablen, d.h. es gilt

$$\bar{I} = \{y \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]; (X_1 \cdots X_r)^m y \in I \text{ für ein } m > 0\}.$$

(Dies folgt aus [MS, Lemma 7.6].)

Aus [S, 4.2] folgt:

**Lemma 3.2.6.** Ist  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein torisches Ideal, so ist die Höhe von  $I$  gleich dem Rang von  $\mathcal{Z}(I)$ .

### 3.3 Einige Bezeichnungen

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein, aufbauend auf den bereits in Abschnitt 3.1 eingeführten Bezeichnungen. Diese beziehen sich wieder alle auf eine gegebene Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ .

Im Text schreiben wir:

- $X_i^{(j)}$  (mit *normalem* oberem Index), falls  $X_i^{(j)} \in \{X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(a_i-1)}\}$ ,
- $X_i^{(\mathbf{j})}$  (mit *fettem* oberem Index), falls  $X_i^{(\mathbf{j})} \in \{X_i^{(o)}, X_i^{(t)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(a_i-1)}\}$ .<sup>4</sup>

<sup>4</sup>Der normal dargestellte obere Index  $j$  soll also nur die Werte  $1, \dots, a_i - 1$  annehmen können, während der fett dargestellte obere Index  $\mathbf{j}$  die Ausdrücke bzw. Werte  $o, t, 1, \dots, a_i - 1$  annehmen kann.

Weiter definieren wir folgende Binome  $H_{i-1,i+1}$  aus  $\mathbb{A}$ : Zunächst sei

$$X_i^L := X_i^{(o)} \text{ für } i = 1, \dots, e$$

und

$$X_i^R := \begin{cases} X_i^{(o)} & \text{für } i = 1, 2, e-1, e \\ X_i^{(t)} & \text{für } i = 3, \dots, e-2. \end{cases}$$

Nun definieren wir für  $i = 2, \dots, e-1$ :

$$H_{i-1,i+1} := X_{i-1}^L X_{i+1}^R - X_i^R X_i^{(1)} \dots X_i^{(a_i-1)}.$$

Weiter sei  $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{A}$  das von allen Binomen der Form  $X_i^{(j)} - X_i^{(o)}$  erzeugte Ideal.

Als ein technisches Hilfsmittel führen wir nun Äquivalenzrelationen auf der Menge  $\mathcal{VAR}$  ein. Der Grund liegt darin, dass wir die Erzeuger von  $\mathfrak{c}_k'$  in der Form  $X_i^{(j)} - X_i^{(j')}$  wählen können und sich ein solches Erzeugendensystem durch eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{VAR}$  beschreiben lässt (s. 3.4.1).

Es sei  $\mathcal{R}$  die Menge aller Äquivalenzrelationen auf der Menge  $\mathcal{VAR}$ . Auf  $\mathcal{R}$  definieren wir eine Halbordnung für  $R, R' \in \mathcal{R}$  durch

$$R \leq R' \iff (\forall (x, y) \in \mathcal{VAR} \times \mathcal{VAR} : x \sim_R y \implies x \sim_{R'} y).$$

Es sei  $R_{min}$  das minimale Element von  $\mathcal{R}$ . Dieses ist durch  $X_i^{(j)} \sim X_{i'}^{(j')} \iff i = i', \mathbf{j} = \mathbf{j}'$  gegeben.

Eine Äquivalenzrelation  $R \in \mathcal{R}$  geben wir meist durch die Erzeuger an und schreiben das Erzeugendensystem in spitzen Klammern  $\langle \rangle$ . Z.B. definiert  $\langle X_{i_1}^{(j_1)} \sim X_{i_2}^{(j_2)}, X_{i_2}^{(j_2)} \sim X_{i_3}^{(j_3)} \rangle$  die Äquivalenzrelation mit  $X_{i_1}^{(j_1)} \sim X_{i_2}^{(j_2)}, X_{i_2}^{(j_2)} \sim X_{i_1}^{(j_1)}, X_{i_2}^{(j_2)} \sim X_{i_3}^{(j_3)}, X_{i_3}^{(j_3)} \sim X_{i_2}^{(j_2)}, X_{i_1}^{(j_1)} \sim X_{i_3}^{(j_3)}, X_{i_3}^{(j_3)} \sim X_{i_1}^{(j_1)}$  und  $X_i^{(j)} \sim X_i^{(j)}$  für alle  $X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}$ , aber  $X_i^{(j)} \not\sim X_{i'}^{(j')}$  für alle übrigen Paare.

Für beliebige  $R, R' \in \mathcal{R}$  definieren wir als ‘‘Summe’’  $R + R'$  die von  $R$  und  $R'$  erzeugte Äquivalenzrelation, also

$$R + R' := \langle \{x \sim_R y, x \sim_{R'} y\} \rangle.$$

Weiter sei  $\tilde{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{R}$  die Menge aller Äquivalenzrelationen auf  $\mathcal{VAR}$  mit der Eigenschaft, dass je zwei äquivalente Elemente aus  $\mathcal{VAR}$  denselben unteren Index haben; für  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$  gilt also  $X_i^{(j)} \sim_R X_{i'}^{(j')} \implies i = i'$ . Auf  $\tilde{\mathcal{R}}$  definieren wir dann die durch  $\mathcal{R}$  induzierte Halbordnung.

Es sei  $\tilde{R}_{max}$  das maximale Element von  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Dieses ist durch  $X_i^{(j)} \sim X_{i'}^{(j')} \iff i = i'$  gegeben.

Für den Rest dieses Abschnitts sei nun ein  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$  fixiert.

Es bezeichne  $X_i^{(\mathbf{j})}$  die Restklasse von  $X_i^{(\mathbf{j})}$  bezüglich  $R$ .

Es sei  $\mathcal{VAR}(R)$  die Menge der Restklassen von  $\mathcal{VAR}$  bezüglich  $R$ , also

$$\mathcal{VAR}(R) := \{X_1^{([o])}, \dots, X_e^{([o])}, X_2^{([1])}, \dots, X_2^{([a_2-1])}, \dots, X_{e-1}^{([1])}, \dots, X_{e-1}^{([a_{e-1}-1])}, X_3^{([t])}, \dots, X_{e-2}^{([t])}\}.$$

Weiter sei dann  $\mathbb{A}(R)$  der Polynomring über  $\mathbb{C}$  in den Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R)$  und  $\mathbb{V}(R)$  der affine Raum mit den Elementen aus  $\mathcal{VAR}(R)$  als Koordinatenfunktionen.

Für  $i = 2, \dots, e-1$  seien  $H_{i-1,i+1}(R)$  die Binome aus  $\mathbb{A}(R)$ , die aus den  $H_{i-1,i+1}$  durch Restklassenbildung entstehen. Genauer: <sup>5</sup>

<sup>5</sup>Natürlich hat das ‘‘ $R$ ’’ im folgenden Ausdruck  $X_i^R$  nichts mit dem Element  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$  zu tun.

Setzen wir

$$X_i^L := X_i^{([o])} \text{ für } i = 1, \dots, e$$

und

$$X_i^R := \begin{cases} X_i^{([o])} & \text{für } i = 1, 2, e-1, e \\ X_i^{([t])} & \text{für } i = 3, \dots, e-2, \end{cases}$$

so definieren wir für  $i = 2, \dots, e-1$ :

$$H_{i-1, i+1}(R) := X_{i-1}^L X_{i+1}^R - X_i^R X_i^{([1])} \dots X_i^{([a_i-1])}.$$

Weiter definieren wir

- das torische Ideal  $\mathbb{H}(R) \subseteq \mathbb{A}(R)$  als die Saturierung (bezüglich des Produktes aller Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R)$ ) des von den  $H_{i-1, i+1}(R)$  in  $\mathbb{A}(R)$  erzeugten Ideals, also

$$\mathbb{H}(R) := \overline{(H_{1,3}(R), \dots, H_{e-2,e}(R))},$$

- das torische Ideal  $\mathbb{K}(R) \subseteq \mathbb{A}$  als die Saturierung (bezüglich des Produktes aller Variablen aus  $\mathcal{VAR}$ ) des von den  $H_{i-1, i+1}$  und allen Binomen der Form  $X_i^{(j_1)} \sim_R X_i^{(j_2)}$  in  $\mathbb{A}$  erzeugten Ideals, also

$$\mathbb{K}(R) := \overline{(H_{1,3}, \dots, H_{e-2,e}) + (\{X_i^{(j_1)} - X_i^{(j_2)}; X_i^{(j_1)}, X_i^{(j_2)} \in \mathbb{A}, X_i^{(j_1)} \sim_R X_i^{(j_2)}\})}.$$

### 3.4 Die algebraischen Mengen $Z_k^\nu$ und $Z_{sing}$

Der folgende Satz gibt Erzeuger der Ideale  $K_k^\nu$  und  $\mathfrak{c}_k^\nu$  an. Diese Angabe geschieht mittels geeignet definierter Äquivalenzrelationen  $R_k^\nu \in \tilde{\mathcal{R}}$ .

**Satz und Definition 3.4.1.** *Es sei  $k \in K(a_2, \dots, a_{e-1})$  fest. Für  $i = 2, \dots, e-1$  betrachten wir die folgenden Teilmengen  $\mathcal{R}_i$  von  $\tilde{\mathcal{R}}$ :*

a) Für  $i \in \{2, e-1\}$ :

Falls  $e = 3$ :

$$\mathcal{R}_i := \{R_{min}\}$$

Falls  $e \geq 4$ :

$$\mathcal{R}_i := \{ \langle X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)} \rangle; \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } k_i - 1 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\} \}$$

b) Für  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $\alpha_i = 1$ :

$$\mathcal{R}_i := \{ \langle X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)}, X_i^{(l_1)} \sim X_i^{(t)}, \dots, X_i^{(l_s)} \sim X_i^{(t)} \rangle; \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } \alpha_{i+1} \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\} \text{ und} \\ l_1, \dots, l_s \text{ sind genau } \alpha_{i-1} - 1 \text{ weitere}^6 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\} \}$$

<sup>6</sup> "weitere" im Sinne von "andere", also  $\{j_1, \dots, j_r\} \cap \{l_1, \dots, l_s\} = \emptyset$ .

c) Für  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $\alpha_i > 1$ :

$$\mathcal{R}_i := \{ \langle X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)}, X_i^{(t)} \sim X_i^{(o)} \rangle; \\ j_1, \dots, j_r \text{ sind genau } k_i - 1 \text{ Elemente aus } \{1, \dots, a_i - 1\} \}$$

Wir definieren als die  $R_k^\nu$  alle Äquivalenzklassen der Form  $R_2 + \dots + R_{e-1}$  mit  $R_2 \in \mathcal{R}_2, \dots, R_{e-1} \in \mathcal{R}_{e-1}$ . Es gilt nun (bei geeigneter Wahl der  $\nu$ )

$$\mathfrak{c}_k^\nu = (\{X_i^{(j_1)} - X_i^{(j_2)}; X_i^{(j_1)}, X_i^{(j_2)} \in \mathbb{A}, X_i^{(j_1)} \sim_{R_k^\nu} X_i^{(j_2)}\}).$$

Weiter wird zu einem solchen Ideal  $\mathfrak{c}_k^\nu$  das entsprechende Ideal  $K_k^\nu$  erzeugt von den Elementen aus  $\mathfrak{c}_k^\nu$  zuzüglich der im Folgenden konstruierten Binome  $H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  für  $2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1$ .

Wir definieren zunächst in  $\mathbb{A}(R_k^\nu)$  Binome  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  für  $2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1$  (wobei diese für  $\epsilon - \delta = 2$  mit den in 3.3 definierten Binomen  $H_{i-1, i+1}(R_k^\nu)$  übereinstimmen):

Dazu setzen wir

$$X_i^L := X_i^{([o])} \text{ für } i = 1, \dots, e$$

und

$$X_i^R = \begin{cases} X_i^{([o])} & \text{für } i = 1, 2, e-1, e \\ X_i^{([t])} & \text{für } i = 3, \dots, e-2. \end{cases}$$

Man beachte, dass dann alle Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R_k^\nu)$  von der Form  $X_i^L$  oder  $X_i^R$  oder  $X_i^{([j])}$  (mit  $j \in \{1, \dots, a_i - 1\}$ ) sind. Nun setzen wir

$$H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu) := X_\delta^L X_\epsilon^R - P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu),$$

wobei  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  durch die folgende Konstruktion definiert sei:

Wir setzen  $P_{i-1, i+1}(R_k^\nu) := X_i^R X_i^{([1])} \dots X_i^{([a_i-1])}$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und definieren induktiv alle weiteren Monome  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  durch den folgenden Schritt für  $n = 3, \dots, e-1$ :

Die Monome  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta \leq n - 1$  seien bereits definiert. Für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta = n$  setzen wir

$$P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu) = \begin{cases} \frac{P_{\delta, \epsilon-1}(R_k^\nu) P_{\delta+1, \epsilon}(R_k^\nu)}{X_{\delta+1}^L X_{\epsilon-1}^R} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \in \nabla_k \\ \frac{P_{\delta, \epsilon-1}(R_k^\nu) P_{\delta+1, \epsilon}(R_k^\nu)}{P_{\delta+1, \epsilon-1}(R_k^\nu)} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases}$$

Die Binome  $H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  ergeben sich nun aus den  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$ , indem man jede in einem solchen  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  auftretende Variable (welche ja ein Element aus  $\mathcal{VAR}(R_k^\nu)$  ist) durch einen (beliebigen) Repräsentanten aus  $\mathcal{VAR}$  ersetzt.

*Beweis.* Die angegebenen Binome ergeben sich infolge des Koordinatenwechsels  $\Upsilon$  (s. 3.1) unmittelbar aus den in 2.2.1 angegebenen Polynomen.  $\square$

Wir erhalten für unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$  die folgenden Erzeugendensysteme für die Ideale  $K_k^\nu$  der drei auftretenden Komponenten. Wir geben dabei die Polynome  $H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  in der "Restklassenform"  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  aus 3.4.1 an, wobei wir die Restklassenvariablen durch alle oberen Indizes der jeweiligen Äquivalenzklasse darstellen.

$k = (1, 2, 1), R_k^\nu = \langle X_3^{(1)} \sim X_3^{(o)} \rangle$	
	$X_3^{(1)} - X_3^{(o)}$
$H_{1,3}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_3^{(t)} - X_2^{(o)} X_2^{(1)}$
$H_{2,4}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o)} X_4^{(o)} - X_3^{(t)} X_3^{(o,1)} X_3^{(2)}$
$H_{3,5}(R_k^\nu)$	$= X_3^{(o,1)} X_5^{(o)} - X_4^{(o)} X_4^{(1)}$
$H_{1,4}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_4^{(o)} - X_2^{(1)} X_3^{(o,1)} X_3^{(2)}$
$H_{2,5}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o)} X_5^{(o)} - X_3^{(t)} X_3^{(2)} X_4^{(1)}$
$H_{1,5}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_5^{(o)} - X_2^{(1)} X_3^{(2)} X_4^{(1)}$

$k = (1, 2, 1), R_k^\nu = \langle X_3^{(2)} \sim X_3^{(o)} \rangle$	
	$X_3^{(2)} - X_3^{(o)}$
$H_{1,3}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_3^{(t)} - X_2^{(o)} X_2^{(1)}$
$H_{2,4}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o)} X_4^{(o)} - X_3^{(t)} X_3^{(1)} X_3^{(o,2)}$
$H_{3,5}(R_k^\nu)$	$= X_3^{(o,2)} X_5^{(o)} - X_4^{(o)} X_4^{(1)}$
$H_{1,4}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_4^{(o)} - X_2^{(1)} X_3^{(1)} X_3^{(o,2)}$
$H_{2,5}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o)} X_5^{(o)} - X_3^{(t)} X_3^{(1)} X_4^{(1)}$
$H_{1,5}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_5^{(o)} - X_2^{(1)} X_3^{(1)} X_4^{(1)}$

$k = (2, 1, 2), R_k^\nu = \langle X_2^{(1)} \sim X_2^{(o)}, X_3^{(t)} \sim X_3^{(o)}, X_4^{(1)} \sim X_4^{(o)} \rangle$	
	$X_2^{(1)} - X_2^{(o)}$
	$X_3^{(t)} - X_3^{(o)}$
	$X_4^{(1)} - X_4^{(o)}$
$H_{1,3}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_3^{(o,t)} - X_2^{(o,1)} X_2^{(o,1)}$
$H_{2,4}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o,1)} X_4^{(o,1)} - X_3^{(o,t)} X_3^{(1)} X_3^{(2)}$
$H_{3,5}(R_k^\nu)$	$= X_3^{(o,t)} X_5^{(o)} - X_4^{(o,1)} X_4^{(o,1)}$
$H_{1,4}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_4^{(o,1)} - X_2^{(o,1)} X_3^{(1)} X_3^{(2)}$
$H_{2,5}(R_k^\nu)$	$= X_2^{(o,1)} X_5^{(o)} - X_3^{(1)} X_3^{(2)} X_4^{(o,1)}$
$H_{1,5}(R_k^\nu)$	$= X_1^{(o)} X_5^{(o)} - X_3^{(1)} X_3^{(1)} X_3^{(2)} X_3^{(2)}$

Die folgende Aussage benötigen wir im Beweis von 6.2.2.

**Lemma 3.4.2.** *Falls  $e \geq 4$  gilt, so besteht das Monom  $P_{1,e}(R_k^\nu)$  in 3.4.1 nur aus Variablen der Form  $X_i^{(j)}$  (enthält also keine Variable der Form  $X_i^L$  oder  $X_i^R$ ), und jede Variable dieser Form kommt im Monom auch tatsächlich vor.*

*Beweis.* Aus [B, Proposition 2.2] folgt

$$P_{1,e}(R_k^\nu) = \frac{(P_{1,3}(R_k^\nu))^{\alpha_2}}{(X_2^L)^{\alpha_3}(X_2^R)^{\alpha_1}} \frac{(P_{2,4}(R_k^\nu))^{\alpha_3}}{(X_3^L)^{\alpha_4}(X_3^R)^{\alpha_2}} \cdots \frac{(P_{e-3,e-1}(R_k^\nu))^{\alpha_{e-2}}}{(X_{e-2}^L)^{\alpha_{e-1}}(X_{e-2}^R)^{\alpha_{e-3}}} \frac{(P_{e-2,e}(R_k^\nu))^{\alpha_{e-1}}}{(X_{e-1}^L)^{\alpha_e}(X_{e-1}^R)^{\alpha_{e-2}}}.$$

Wie man anhand von 3.4.1 leicht sieht, gibt es im Monom  $P_{i-1,i+1}(R_k^\nu)$  für  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  genau  $k_i$  Variablen der Form  $X_i^L$  oder  $X_i^R$  (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt). Wegen  $k_i \alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}$  kürzen sich diese alle in  $\frac{(P_{i-1,i+1}(R_k^\nu))^{\alpha_i}}{(X_i^L)^{\alpha_{i+1}}(X_i^R)^{\alpha_{i-1}}}$  heraus. Da in  $P_{i-1,i+1}(R_k^\nu)$  alle Variablen der Form  $X_i^{(j)}$  auftreten, gilt dies wegen  $\alpha_i \geq 1$  auch für den Ausdruck  $\frac{(P_{i-1,i+1}(R_k^\nu))^{\alpha_i}}{(X_i^L)^{\alpha_{i+1}}(X_i^R)^{\alpha_{i-1}}}$ .  $\square$

Der folgende Satz liefert Erzeugendensysteme von  $K_{sing}$  mittels der Erzeugendensysteme der Ideale  $K_k^\nu$  der Komponenten.

**Satz 3.4.3.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Für jedes  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  gilt*

$$K_{sing} = K_k^\nu + \mathbb{G}.$$

*Beweis.* Aus 2.2.4(i) folgt  $K_{sing} = (\{H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}; 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\}) + \mathbb{G}$  für die Polynome  $H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}$  aus 3.4.1. Da weiter  $K_k^\nu \stackrel{3.4.1}{=} (\{H_{\delta, \epsilon}^{k, \nu}; 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\}) + \mathfrak{c}_k^\nu$  und  $\mathfrak{c}_k^\nu \subseteq \mathbb{G}$  gilt, folgt die Aussage.  $\square$

**Satz 3.4.4.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Dann gilt  $K_{sing} = \mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$ .*

*Beweis.* Wir betrachten das Ideal  $\tilde{I}_{sing} := (\{g_{\delta, \epsilon}^k; 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\}) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e]$  mit den Polynomen  $g_{\delta, \epsilon}^k$  aus 1.2.1 für ein  $k \in K(a_2, \dots, a_{e-1})$ . Es ist bekannt, dass dieses Ideal torisch ist und dass  $\tilde{I}_{sing} = \overline{(g_{1,3}^k, \dots, g_{e-2,e}^k)}$  gilt. Daraus folgt leicht  $K_{sing} \stackrel{3.4.3}{=} K_k^\nu + \mathbb{G} = \overline{(H_{1,3}, \dots, H_{e-2,e})} + \mathbb{G}$ . Das letzte Ideal stimmt nach Konstruktion mit  $\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  überein.  $\square$

**Lemma 3.4.5.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ . Dann gilt*

$$(\{H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu); 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\}) \subseteq \mathbb{H}(R_k^\nu) \text{ und } K_k^\nu \subseteq \mathbb{K}(R_k^\nu),$$

mit den  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  aus 3.4.1.

*Beweis.* Die erste Aussage ergibt sich aus der Konstruktion der  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  mit dem Schema  $\nabla_k$ . Die zweite Aussage folgt aus der Ersten.  $\square$

**Lemma 3.4.6.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Gibt es dann ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  mit  $R_k^\nu \leq R$ , so gilt  $K_{sing} = \mathbb{K}(R) + \mathbb{G}$ .*

*Beweis.* Aus der Voraussetzung  $R_k^\nu \leq R$  folgt  $\mathbb{K}(R_k^\nu) \subseteq \mathbb{K}(R)$  und mit 3.4.5 dann  $K_k^\nu \subseteq \mathbb{K}(R)$ . Mit 3.4.3 folgt daher  $K_{sing} \subseteq \mathbb{K}(R) + \mathbb{G}$ . Wegen  $\mathbb{K}(R) \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  und  $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  folgt weiter  $\mathbb{K}(R) + \mathbb{G} \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max}) \stackrel{3.4.4}{=} K_{sing}$ .  $\square$

**Satz 3.4.7.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Für alle Teilmengen  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  gilt <sup>7</sup>*

$$\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu} = \mathbb{K}\left(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu\right).$$

*Beweis.* Aus 3.4.5 folgt  $\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu \subseteq \sum_{(k, \nu) \in A} \mathbb{K}(R_k^\nu)$ . Aus der Definition von  $\mathbb{K}(R)$  folgt offenbar  $\sum_{(k, \nu) \in A} \mathbb{K}(R_k^\nu) \subseteq \mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu)$  und somit  $\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu} \subseteq \sqrt{\mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu)} = \mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu)$ , da  $\mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu)$  als torisches Ideal prim ist. Da auch  $\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu}$  prim<sup>8</sup> ist, reicht es nun zu zeigen, dass  $\text{ht}(\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu}) \geq \text{ht}(\mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu))$  für die Höhen dieser Ideale gilt. Nach 3.4.6 können wir Binome  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{G}$  der Form  $X_i^{(j_1)} - X_i^{(j_2)}$  mit  $\mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu) + (b_1, \dots, b_m) = K_{sing}$  wählen, wobei dieses System  $b_1, \dots, b_m$  minimal

<sup>7</sup>Die auftretende Wurzel bezeichnet das Radikal.

<sup>8</sup>Dieses Ideal ist prim, weil es das Ideal der Varietät  $Z_A$  ist, welche dem (irreduziblen) Keim  $\mathcal{Y}_A$  (s.2.2.3) entspricht.

mit dieser Eigenschaft sei. Mit 3.2.6 folgt dann  $\text{ht}(K_{\text{sing}}) - \text{ht}(\mathbb{K}(\sum_{(k,\nu) \in A} R_k^\nu)) = m$  für die Höhen dieser torischen Ideale. Mit 3.4.3 folgt  $K_{\text{sing}} = \sqrt{\sum_{(k,\nu) \in A} K_k^\nu + (b_1, \dots, b_m)}$ . Also folgt  $\text{ht}(K_{\text{sing}}) - \text{ht}(\sqrt{\sum_{(k,\nu) \in A} K_k^\nu}) \leq m$  aus Krulls Höhensatz und somit  $\text{ht}(\sqrt{\sum_{(k,\nu) \in A} K_k^\nu}) \geq \text{ht}(\mathbb{K}(\sum_{(k,\nu) \in A} R_k^\nu))$ .  $\square$

**Lemma 3.4.8.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ . Dann gilt*

$$\mathbb{H}(R_k^\nu) = (\{H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu); 2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1\}),$$

mit den  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  aus 3.4.1.

*Beweis.* Dies folgt aus 3.4.7 mit  $A = (k, \nu)$ .  $\square$

**Satz 3.4.9.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Falls  $R_k^\nu \leq R$  für ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ , so ist das torische Ideal  $\mathbb{K}(R)$  normal.*

*Beweis.* Wir betrachten das folgende Ideal von  $\mathbb{A}$ :

$$\mathfrak{c} := (\{X_i^{(\mathbf{j}_1)} - X_i^{(\mathbf{j}_2)}; X_i^{(\mathbf{j}_1)}, X_i^{(\mathbf{j}_2)} \in \mathbb{A}, X_i^{(\mathbf{j}_1)} \sim_R X_i^{(\mathbf{j}_2)}\}).$$

Fassen wir die Ideale  $\mathfrak{J} := \Upsilon^{-1}(\mathfrak{c})$  bzw.  $\mathfrak{J} := \Upsilon^{-1}(\mathbb{K}(R))$  (mit  $\Upsilon$  aus Abschnitt 3.1) als Ideale von  $\mathfrak{A} := \mathbb{C}\{t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  bzw. von  $\mathfrak{B} := \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e, t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(a_2-1)}, \dots, t_{e-1}^{(1)}, \dots, t_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}, t_3, \dots, t_{e-2}\}$  auf, so ist durch  $\mathfrak{A}/\mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{B}/\mathfrak{J}$  eine Deformation gegeben, deren Basisraum sich aus  $T_k^\nu$  durch den Durchschnitt mit einem linearen Teilraum ergibt. Die Aussage folgt daher aus [Gro, Proposition 11.3.13(ii)].  $\square$

## 4 Affine torische Varietäten

Ziel dieses Kapitels ist eine Aufführung aller Definitionen und Sätze aus der Theorie der affinen torischen Varietäten, die wir in den nachfolgenden Kapiteln 5 und 6 benötigen werden. Eine leitende Frage dabei ist, wie man zu einem gegebenen normalen torischen Ideal einen Kegel konstruieren kann, der die durch die Nullstellenmenge dieses Ideals gegebene affine torische Varietät im Sinne der torischen Geometrie beschreibt und wie man Aussagen über die Struktur dieses Kegels mittels des Ideals machen kann.

Wie in Abschnitt 3.2 gehen wir hier vom Polynomring  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  anstelle von  $\mathbb{A}$  aus, während wir in den weiteren Kapiteln wieder  $\mathbb{A}$  zugrunde legen werden. Die Definitionen und Sätze für  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  sollen dann auf  $\mathbb{A}$  übertragen werden.

### 4.1 Grundlagen

Wir führen zunächst einige grundlegende Eigenschaften affiner torischer Varietäten auf, die im Folgenden benötigt werden. Was wir benötigen, findet sich überwiegend in [BFK], [Kaup] und [S]. Ein wichtiger Unterschied zwischen diesen Referenzen besteht jedoch darin, dass in [BFK] und [Kaup] bei torischen Varietäten die Normalität vorausgesetzt wird, während dies für die Nullstellenmengen der in [S] definierten torischen Ideale nicht vorausgesetzt wird.

Das Besondere an *normalen* affinen torischen Varietäten ist, dass sie mit Hilfe gewisser Kegel beschrieben werden können: Es gibt eine Äquivalenz der entsprechenden Kategorien, und die geometrischen Eigenschaften der Kegel geben Informationen über die geometrischen Eigenschaften der zugehörigen affinen torischen Varietäten.

Ein (komplexer) Torus  $\mathbb{T}$  ist eine algebraische Gruppe, die isomorph zu einem  $(\mathbb{C}^*)^n$  ist. Wir fixieren im Folgenden immer einen solchen Isomorphismus  $i_{\mathbb{T}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{T}$ . Zu gegebenem Torus  $\mathbb{T}$  definieren wir die Charaktere  $M$  und die Einparameter-Untergruppen  $N$  durch die folgenden Homomorphismen algebraischer Gruppen:

$$M := \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*), \quad N := \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}).$$

Dabei handelt es sich um Gitter, denn die beiden Abbildungen

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{C}^*), \quad \mathbf{a} \mapsto ((t_1, \dots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^n t_i^{a_i})$$

und

$$\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n), \quad \mathbf{b} \mapsto (s \mapsto (s^{b_1}, \dots, s^{b_n}))$$

sind Isomorphismen abelscher Gruppen und liefern so die beiden Isomorphismen

$$i_M : \mathbb{Z}^n \rightarrow M, \quad \mathbf{a} \mapsto \chi^{\mathbf{a}} := ((t_1, \dots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^n t_i^{a_i}) \circ i_{\mathbb{T}}^{-1}$$

und

$$i_N : \mathbb{Z}^n \rightarrow N, \quad \mathbf{b} \mapsto \lambda_{\mathbf{b}} := i_{\mathbb{T}} \circ (s \mapsto (s^{b_1}, \dots, s^{b_n})).$$

Jedes Element aus  $\text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$  ist gegeben durch  $s \mapsto s^z$  für ein  $z \in \mathbb{Z}$ . Wir definieren damit die Abbildung:

$$\langle -, - \rangle_{\mathbb{T}} : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\chi^{\mathbf{a}}, \lambda_{\mathbf{b}}) \mapsto z, \quad \text{mit } z \text{ als Exponenten in } \chi^{\mathbf{a}} \circ \lambda_{\mathbf{b}} = (s \mapsto s^z).$$

Diese Abbildung korrespondiert zum gewöhnlichen Skalarprodukt, da  $\langle \chi^{\mathbf{a}}, \lambda_{\mathbf{b}} \rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ .

**Definition 4.1.1.** *Eine torische Varietät ist eine (zusammenhängende) algebraische Varietät  $X$ , auf der ein gleichdimensionaler algebraischer Torus  $\mathbb{T}$  mit einer dichten offenen Bahn operiert.*

*Ein torischer Morphismus  $\Phi : X \rightarrow X'$  zwischen zwei torischen Varietäten  $X, X'$  ist ein äquivarianter Morphismus, der auf den dichten offenen Bahnen einen Morphismus  $\Phi_{|\mathbb{T}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$  algebraischer Gruppen induziert.*

Gibt es einen torischen Isomorphismus zwischen  $X$  und  $X'$ , so schreiben wir dafür auch  $X \cong_T X'$ .

Es sei nun  $L \cong \mathbb{Z}^n$  ein beliebiges Gitter vom Rang  $n$  mit dualem Gitter  $L^* := \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ . Zu diesen beiden Gittern betrachten wir die  $n$ -dimensionalen Vektorräume  $L_{\mathbb{R}} := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  und  $(L^*)_{\mathbb{R}} := (L^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Die von  $L \times L^* \rightarrow \mathbb{Z}$  auf  $L_{\mathbb{R}} \times (L^*)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear fortgesetzte Auswertungsabbildung bezeichnen wir mit

$$\langle -, - \rangle : L_{\mathbb{R}} \times (L^*)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v, u) \mapsto u(v).$$

Unter einem  $L$ -rationalen (polyedrischen) Kegel verstehen wir einen Kegel  $\sigma$  in  $L_{\mathbb{R}}$ , so dass es Elemente  $v_1, \dots, v_r \in L$  mit  $\sigma = \text{pos}\{v_1, \dots, v_r\}$  gibt. Ist  $\sigma$  zudem spitz, so bezeichnen wir ihn als  $L$ -Kegel. Zu einem  $L$ -Kegel  $\sigma$  definieren wir den dualen Kegel

$$\sigma^\vee := \{u \in (L^*)_{\mathbb{R}}; \langle v, u \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma\}.$$

Der Kegel  $\sigma$  ist genau dann  $L$ -rational, wenn  $\sigma^\vee$   $L^*$ -rational ist. Und  $\sigma$  ist genau dann ein  $L$ -Kegel, der den Vektorraum  $L_{\mathbb{R}}$  aufspannt, wenn  $\sigma^\vee$  ein  $L^*$ -Kegel ist, der  $(L^*)_{\mathbb{R}}$  aufspannt.

Eine Teilmenge  $\tau$  von  $\sigma$  heißt Seite, in Zeichen  $\tau \preceq \sigma$ , wenn es ein  $u \in (L^*)_{\mathbb{R}}$  gibt, so dass  $\langle v, u \rangle \geq 0 \forall v \in \sigma$  und  $\tau = \sigma \cap \{v \in L_{\mathbb{R}}; \langle v, u \rangle = 0\}$  gilt. Ist  $\sigma$  dabei ein  $L$ -Kegel, so ist auch  $\tau$  ein  $L$ -Kegel. Die Dimension von  $\sigma$  bzw.  $\tau$  ist definiert als die Dimension des aufgespannten Teilraums von  $L_{\mathbb{R}}$ . Ist  $\tau$  einkodimensional in  $\sigma$ , so heißt  $\tau$  Facette. Eindimensionale Seiten heißen Kanten. Stimmt die Anzahl der Kanten von  $\sigma$  mit der Dimension überein, so heißt  $\sigma$  simplizial. Weiter heißt dann  $\sigma$  glatt, falls sich die primitiven Erzeuger der Kanten zu einer Gitterbasis von  $L$  ergänzen lassen. Unter dem primitiven Erzeuger einer Kante ist derjenige Gitterpunkt der Kante zu verstehen, der nicht ganzzahliges Vielfaches eines anderen Gitterpunktes der Kante ist. Die Menge der Seiten eines  $L$ -Kegels  $\sigma$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}(\sigma)$ , die Menge der Seiten von  $\sigma^\vee$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}(\sigma^\vee)$ . Auf beiden betrachten wir die durch  $\preceq$  definierte partielle Ordnung. Dadurch werden  $\mathfrak{S}(\sigma)$  und  $\mathfrak{S}(\sigma^\vee)$  zu Verbänden, zwischen denen die Abbildung  $\mathfrak{S}(\sigma) \rightarrow \mathfrak{S}(\sigma^\vee)$ ,  $\tau \mapsto \sigma^\vee \cap \{u \in (L^*)_{\mathbb{R}}; \langle v, u \rangle = 0 \forall v \in \tau\}$  einen ordnungsumkehrenden Isomorphismus definiert (s. [Kaup, 1.19 und 1.24]).

Ein Kegelmorphismus zwischen einem  $L$ -Kegel  $\sigma$  und einem  $L'$ -Kegel  $\sigma'$  ist gegeben durch einen Gitterhomomorphismus  $\phi : L \rightarrow L'$  mit  $\phi(\sigma \cap L) \subseteq \sigma' \cap L'$ . Wir schreiben dafür

$$\phi : (L, \sigma) \rightarrow (L', \sigma').$$

Nun wird einem  $L$ -Kegel  $\sigma$  in der folgenden Weise eine *normale affine* torische Varietät  $X_{L,\sigma}$  zugeordnet. Und zwar setzen wir

$$X_{L,\sigma} := \text{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*]),$$

wobei  $\text{Sp}$  das Spektrum der maximalen Ideale bezeichne und wir zu der Halbgruppe  $\sigma^\vee \cap L^*$  die  $\mathbb{C}$ -Algebra

$$\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*] := \sum_{u \in \sigma^\vee \cap L^*} \mathbb{C} \cdot \chi^u$$

durch formale Elemente  $\chi^u$  definieren, mit  $\chi^{u_1} \chi^{u_2} := \chi^{u_1+u_2}$ . Es handelt sich in der Tat um eine affine Varietät, da die Halbgruppe  $\sigma^\vee \cap L^*$  endlich erzeugt ist.<sup>1</sup> Die (Krull-) Dimension von  $X_{L,\sigma}$  stimmt mit der (Vektorraum-) Dimension von  $L_{\mathbb{R}}$  bzw. dem Rang von  $L$  überein. Der Torus ist gegeben durch  $\text{Sp}(\mathbb{C}[L^*])$ , und die Torusaktion  $\text{Sp}(\mathbb{C}[L^*]) \times \text{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*]) \rightarrow \text{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*])$  ist durch den  $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*] \rightarrow \mathbb{C}[L^*] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap L^*]$ ,  $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes_{\mathbb{C}} \chi^u$  gegeben (s. [Fu, p.19]). Für die Varietät schreiben wir explizit  $X_{L,\sigma}$  statt der sonst üblichen Schreibweise  $X_\sigma$ , da wir häufig - wie etwa im nächsten Satz - gleiche Kegel in unterschiedlichen Räumen betrachten werden.

Weiter wird einem Kegelmorphismus  $\phi : (L, \sigma) \rightarrow (L', \sigma')$  in der folgenden Weise ein torischer Morphismus  $\mathcal{T}(\phi) : X_{L,\sigma} \rightarrow X_{L',\sigma'}$  zugeordnet: unter der dualen Abbildung  $\phi^* : L'^* \rightarrow L^*$  wird  $\sigma'^\vee \cap L'^*$  in  $\sigma^\vee \cap L^*$  abgebildet und definiert so einen  $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus

<sup>1</sup>Dies folgt aus Gordon's Lemma. Es gibt sogar genau ein minimales Erzeugendensystem dieser Halbgruppe, welches Hilbertbasis genannt wird.

$\mathbb{C}[\sigma'^{\vee} \cap L'^*] \longrightarrow \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap L^*]$ ; dies definiert einen torischen Morphismus  $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap L^*]) \longrightarrow \mathrm{Sp}(\mathbb{C}[\sigma'^{\vee} \cap L'^*])$ .

Ein Kegelmorphismus  $\phi : (L, \sigma) \longrightarrow (L', \sigma')$  ist genau dann ein *Kegel-Isomorphismus* (d.h.  $\phi : L \longrightarrow L'$  ist bijektiv und es gilt  $\phi(\sigma \cap L) = \sigma' \cap L'$ ), wenn der torische Morphismus  $\mathcal{T}(\phi) : X_{L, \sigma} \longrightarrow X_{L', \sigma'}$  ein Isomorphismus ist.

Der folgende Satz zeigt, dass es zur Untersuchung der Struktur normaler affiner torischer Varietäten im Wesentlichen ausreicht, volldimensionale  $L$ -Kegel zu betrachten.

Zu einem  $L$ -Kegel  $\sigma$  definieren wir das Teilgitter

$$L_{\sigma} := L \cap \mathrm{lin} \sigma, \quad \text{mit } \mathrm{lin} \sigma \text{ als linearer Hülle von } \sigma \text{ im Vektorraum } L_{\mathbb{R}}.$$

Es gilt also  $L_{\sigma} = L$  genau dann, wenn  $\sigma$  volldimensional in  $L_{\mathbb{R}}$  ist. Für den allgemeinen Fall gilt (s. [BFK, 2.2.15]):

**Satz 4.1.2.** *Ist  $\sigma$  ein  $L$ -Kegel und gilt  $n = \dim L_{\mathbb{R}}$  sowie  $d = \dim \sigma$ , und ist  $\mathbb{T}$  der Torus von  $X_{L, \sigma}$  sowie  $\mathbb{T}'$  der Torus von  $X_{L_{\sigma}, \sigma}$ , so gilt die Zerlegung*

$$\mathbb{T} \cong_{\mathbb{T}} \mathbb{T}' \times (\mathbb{C}^*)^{n-d} \quad \text{und} \quad X_{L, \sigma} \cong_{\mathbb{T}} X_{L_{\sigma}, \sigma} \times (\mathbb{C}^*)^{n-d}$$

mit produktweiser Torusaktion.

Weiter gilt (s. [BFK, 2.3.7]):

**Satz 4.1.3.** *In der Produktzerlegung 4.1.2 hat die Varietät  $X_{L_{\sigma}, \sigma}$  genau einen Fixpunkt. Insbesondere hat daher  $X_{L, \sigma}$  genau dann einen (einzigsten) Fixpunkt, wenn  $\sigma$  volldimensional ist.*

Oben wurde beschrieben, wie Kegeln (und ihren Morphismen) affine torische Varietäten (und Morphismen zwischen ihnen) zugeordnet werden. Für uns ist jedoch die Umkehrung von größerer Bedeutung, zu der wir jetzt kommen.

**Definition 4.1.4.** *Zu gegebenem Torus  $\mathbb{T}$  betrachten wir die Gitter  $N$  und  $M$  von oben. Die oben definierte Abbildung  $\langle -, - \rangle_{\mathbb{T}} : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  setzen wir bilinear fort zur Abbildung*

$$\langle -, - \rangle_{\mathbb{T}} : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zu einem  $N$ -Kegel  $\sigma$  definieren wir den Kegel

$$\sigma^{\vee \mathbb{T}} := \{u \in M_{\mathbb{R}}; \langle v, u \rangle_{\mathbb{T}} \geq 0 \forall v \in \sigma\}.$$

Wir definieren nun Zuordnungen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ :

*Ist  $X$  eine normale affine torische Varietät mit Torus  $\mathbb{T}$ , so definieren wir den  $N$ -Kegel  $\mathcal{F}(X) := \sigma$  durch*

$$\sigma \cap N = \{\lambda \in N; \lim_{s \rightarrow 0} \lambda(s) \in X\}$$

*bzw. (im Dualen) durch*

$$\sigma^{\vee \mathbb{T}} \cap M = \{\chi \in M; \text{Es existiert eine reguläre Funktion } \psi : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \psi|_{\mathbb{T}} = \chi\}.$$

Ist ein torischer Morphismus  $\Phi : X \longrightarrow X'$  zwischen den normalen affinen torischen Varietäten  $X$  und  $X'$  mit induziertem Morphismus  $i := \Phi|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}'$  der zugehörigen Tori gegeben und ist  $\sigma := \mathcal{F}(X), \sigma' := \mathcal{F}(X')$  der oben definierte  $N$ -Kegel bzw.  $N'$ -Kegel, so definieren wir einen Kegelmorphismus  $\mathcal{G}(\Phi) : (N, \sigma) \longrightarrow (N', \sigma')$  durch

$$N \longrightarrow N', \lambda \mapsto i \circ \lambda$$

bzw. (im Dualen) durch

$$M' \longrightarrow M, \chi \mapsto \chi \circ i.$$

**Bemerkung 4.1.5.** Wir betrachten hier zwei duale Paarungen<sup>2</sup>, nämlich  $\langle -, - \rangle : N \times N^* \rightarrow \mathbb{Z}$  und  $\langle -, - \rangle_{\mathbb{T}} : N \times M \rightarrow \mathbb{Z}$ . Da beide Paarungen nicht-ausgeartet sind, erhalten wir kanonisch einen Gitter-Isomorphismus  $N^* \longrightarrow M$ . Ist  $\sigma$  ein  $N$ -Kegel, so bildet dieser  $\sigma^{\vee}$  auf  $\sigma^{\vee T}$  ab und definiert so kanonisch einen  $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus  $\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap N^*] \longrightarrow \mathbb{C}[\sigma^{\vee T} \cap M]$ .

**Satz 4.1.6.**

(i) Ist  $X$  eine normale affine torische Varietät mit Torus  $\mathbb{T}$ , so erhalten wir kanonisch einen torischen Isomorphismus

$$\varsigma_X : X \longrightarrow X_{N, \sigma} \text{ für } \sigma := \mathcal{F}(X),$$

gegeben durch den  $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus  $\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap N^*] \longrightarrow \mathbb{C}[\sigma^{\vee T} \cap M]$  aus 4.1.5.

(ii) Ist  $\Phi : X \longrightarrow X'$  ein torischer Morphismus zwischen normalen affinen torischen Varietäten  $X, X'$  und sind  $\varsigma_X : X \longrightarrow X_{N, \sigma}$  für  $\sigma := \mathcal{F}(X)$  sowie  $\varsigma_{X'} : X' \longrightarrow X_{N', \sigma'}$  für  $\sigma' := \mathcal{F}(X')$  die torischen Isomorphismen nach (i), und ist  $\phi : (N, \sigma) \longrightarrow (N', \sigma')$  der Kegelmorphismus  $\mathcal{G}(\Phi)$ , so kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varsigma_X} & X_{N, \sigma} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \mathcal{T}(\phi) \\ X' & \xrightarrow{\varsigma_{X'}} & X_{N', \sigma'} \end{array}$$

*Beweis.* Zu (i): Der angegebene  $\mathbb{C}$ -Algebrenisomorphismus induziert in der Tat einen torischen Isomorphismus  $X \longrightarrow X_{N, \sigma}$ , da  $X$  mit  $\text{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee T} \cap M])$  identifiziert werden kann und  $X_{N, \sigma} \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{Sp}(\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap N^*])$ .

Zu (ii): Dies folgt (durch Anwendung von  $\text{Sp}$ ) aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\sigma^{\vee T} \cap M] & \longleftarrow & \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap N^*] \\ \uparrow \Phi^* & & \uparrow \mathbb{C}[\phi^*] \\ \mathbb{C}[\sigma'^{\vee T} \cap M'] & \longleftarrow & \mathbb{C}[\sigma'^{\vee} \cap N'^*] \end{array}$$

Dabei entsprechen die horizontalen Abbildungen jeweils dem  $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus aus 4.1.5.  $\Phi^*$  ist die induzierte Abbildung zwischen den regulären Funktionen auf  $X$  bzw.  $X'$ , und  $\mathbb{C}[\phi^*]$  ist der durch  $\phi^* : (N'^*, \sigma'^{\vee}) \longrightarrow (N^*, \sigma^{\vee})$  gegebene  $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus.  $\square$

Wir kommen nun zu den Singularitäten von  $X_{L, \sigma}$ . Diesbezüglich - wie auch bei der Bahnzerlegung - spielen die im Folgenden definierten Punkte  $x_{\tau}$  eine wichtige Rolle.

<sup>2</sup>Im nächsten Abschnitt führen wir sogar noch eine weitere Paarung ein (nämlich  $\langle -, - \rangle_I : N^{(I)} \times M^{(I)} \rightarrow \mathbb{Z}$ ).

**Definition 4.1.7.** Es sei  $\sigma$  ein  $L$ -Kegel und  $\tau$  eine Seite von  $\sigma$ . Wir definieren folgendermaßen den Punkt  $x_\tau \in X_{L,\sigma}$ : Wir wählen einen beliebigen Gitterpunkt  $l \in L$  im relativen Inneren von  $\tau$ . Vermöge des kanonischen Isomorphismus  $L \cong \text{Hom}(L^*, \mathbb{Z})$  erhalten wir eine Einparameter-Untergruppe  $\lambda_l \in \text{Hom}(\mathbb{C}^*, \text{Sp}(\mathbb{C}[L^*]))$ , mittels derer wir  $x_\tau := \lim_{s \rightarrow 0} \lambda_l(s)$  definieren.

**Satz 4.1.8.** Ist  $\sigma$  ein  $L$ -Kegel und  $\mathbb{T}$  der Torus von  $X_{L,\sigma}$ , so gibt jeder Punkt aus  $\{x_\tau; \tau \preceq \sigma\}$  genau eine Bahn  $\mathbb{T} \cdot x_\tau$  von  $X_{L,\sigma}$ , d.h. die Bahnzerlegung ist gegeben durch

$$X_{L,\sigma} = \bigcup_{\tau \preceq \sigma} \mathbb{T} \cdot x_\tau$$

Besitzt  $X_{L,\sigma}$  einen Fixpunkt  $x_F$ , so hat jede Umgebung von  $x_F$  mit jeder Bahn  $\mathbb{T} \cdot x_\tau$  einen nichtleeren Durchschnitt.

*Beweis.* Zur ersten Aussage sei auf [BFK, 2.3.5] verwiesen. Dort wird auch der topologische Abschluss von  $\mathbb{T} \cdot x_\tau$  durch  $\bigcup_{\tau \preceq \tau' \preceq \sigma} \mathbb{T} \cdot x_{\tau'}$  ausgedrückt, was wegen  $x_\sigma = x_F$  (im Fall der Existenz des Fixpunktes) die zweite Aussage zeigt.  $\square$

**Satz 4.1.9.** Ist  $\tau$  eine  $d$ -dimensionale Seite eines volldimensionalen  $L$ -Kegels  $\sigma$  der Dimension  $n$  (d.h.  $n = \dim \sigma = \dim L_{\mathbb{R}}$ ), so gilt

$$X_{L,\tau} \cong_T X_{L,\tau,\tau} \times (\mathbb{C}^*)^{n-d}.$$

Bezeichnet  $x_F$  den (einzigsten, s. 4.1.3) Fixpunkt von  $X_{L,\tau,\tau}$  und ist  $p$  ein beliebiger Punkt von  $(\mathbb{C}^*)^{n-d}$ , so ist der Raumkeim im Punkt  $(x_F, p)$  isomorph zum Raumkeim im Punkt  $x_\tau$ .

*Beweis.* Der erste Teil folgt aus 4.1.2. Zum zweiten Teil sei noch einmal auf [BFK, 2.3.7] verwiesen.  $\square$

**Definition 4.1.10.** Ist  $\sigma$  ein  $n$ -dimensionaler simplizialer  $L$ -Kegel und sind  $v_1, \dots, v_n \in L$  die primitiven Erzeuger der Kanten, so definieren wir als Multiplizität von  $\sigma$  den Index

$$\text{mult}(\sigma) := |L_\sigma / \Gamma_\sigma|,$$

wobei  $\Gamma_\sigma \subseteq L_\sigma$  das Teilgitter  $\Gamma_\sigma := \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$  sei.

**Satz 4.1.11.** Ist  $\sigma$  ein volldimensionaler  $L$ -Kegel, so sind äquivalent (s. [BFK, 3.1.1]):

- (a)  $X_{L,\sigma}$  ist glatt.
- (b) Der (einzige) Fixpunkt von  $X_{L,\sigma}$  ist regulär.
- (c)  $\sigma$  ist simplizial und es gilt  $\text{mult}(\sigma) = 1$ .

**Satz 4.1.12.** Ist  $\sigma$  ein volldimensionaler simplizialer  $L$ -Kegel der Dimension  $n$ , so gilt (s. [BFK, 3.1.7])

$$X_{L,\sigma} \cong \mathbb{C}^n / G$$

für eine Gruppe  $G$  der Ordnung  $\text{mult}(\sigma)$ .

**Bemerkung 4.1.13.** Die Singularitätenstruktur nicht-simplizialer Seiten ist wesentlich komplizierter, siehe [BFK, 3.1.11].

## 4.2 Kegel zu einem normalen torischen Ideal

In diesem Abschnitt gehen wir von einem normalen torischen Ideal  $I$  aus und zeigen, wie man einen  $L$ -Kegel  $\sigma$  mit  $X_{L,\sigma} \cong_T \mathcal{V}(I)$  berechnen kann. Mit den im Folgenden eingeführten Bezeichnungen lässt sich  $L = N^{(I)}$  und  $\sigma = \sigma^{(I)}$  wählen. Bei dem Gitter  $N^{(I)}$  handelt es sich dabei um eine natürliche Identifizierung mit dem Gitter der Einparameter-Untergruppen (s.4.3.3(i)).

Affine torische Varietäten sind genau diejenigen Varietäten, die sich als Nullstellenmengen  $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{C}^r$  torischer Ideale  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  realisieren lassen (vergl. [S, p.129]). Dann ist  $\mathcal{V}(I)$  genau dann normal, wenn  $I$  normal ist (s. Definition 3.2.2).

Ist  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein torisches Ideal, so ist der Torus  $\mathbb{T}$  von  $X := \mathcal{V}(I)$  durch  $\mathbb{T} = X \cap (\mathbb{C}^*)^r$  gegeben. Die Torusaktion  $\mathbb{T} \times X \rightarrow X$  ist durch die koordinatenweise Multiplikation in  $\mathbb{C}^r$  gegeben. Ist  $n$  die Dimension von  $X$ , so ist jeder Isomorphismus  $i_{\mathbb{T}} : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{T}$  von der Form

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1^{u_{1,1}} \cdots t_n^{u_{n,1}}, \dots, t_1^{u_{1,r}} \cdots t_n^{u_{n,r}})$$

mit gewissen  $u_{i,j} \in \mathbb{Z}$ . Wir sprechen diesbezüglich von einer *Parametrisierung* des Torus  $\mathbb{T}$ . Wir fassen die  $u_{i,j}$  als Einträge einer  $(n \times r)$ -Matrix  $U$  auf, deren Zeilenvektoren wir mit  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  und deren Spaltenvektoren wir mit  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  bezeichnen.

**Satz 4.2.1.** *Die Einträge einer Matrix  $U \in \mathbb{Z}^{(n \times r)}$  liefern genau dann eine Parametrisierung von  $\mathbb{T}$ , wenn  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  eine Gitterbasis von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\}$  bilden.*<sup>3</sup>

*Beweis.* Die Einträge der Matrix  $U \in \mathbb{Z}^{(n \times r)}$  liefern offenbar genau dann eine Parametrisierung von  $\mathbb{T}$ , wenn  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n \in \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\}$  und  $\mathbb{Z}\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbb{Z}\mathbf{u}_r = \mathbb{Z}^n$  gilt. Mit der Elementarteilertheorie (vergl. 4.2.8) folgt, dass die zweite Bedingung äquivalent dazu ist, dass  $\mathbb{Q}\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbb{Q}\mathbf{u}_r = \mathbb{Q}^n$  gilt und der größte gemeinsame Teiler der Determinanten der  $(n \times n)$ -Untermatrizen von  $U$  gleich 1 ist. Die Aussage folgt daher aus 4.2.7.  $\square$

**Definition 4.2.2.** *Gegeben sei ein binomiales Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ . Wir definieren die Gitter*

$$N^{(I)} := \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\} \quad \text{und} \quad M^{(I)} := \mathbb{Z}^r / \mathcal{Z}(I)$$

sowie eine (bilineare) Abbildung

$$\langle -, - \rangle_{(I)} : M_{\mathbb{R}}^{(I)} \times N_{\mathbb{R}}^{(I)} \rightarrow \mathbb{R},$$

gegeben durch das gewöhnliche Skalarprodukt  $\sum_{i=1}^r a_i b_i$  für  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r$  (wir ersetzen für das Skalarprodukt ein Element  $\bar{\mathbf{a}} \in M^{(I)} = \mathbb{Z}^r / \mathcal{Z}(I)$  durch einen Repräsentanten  $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r$ ; der Wert  $\langle \mathbf{a}, \bar{\mathbf{b}} \rangle_{(I)}$  ist unabhängig von dieser Wahl.)

Weiter definieren wir den  $N^{(I)}$ -Kegel  $\sigma^{(I)} \subseteq N_{\mathbb{R}}^{(I)}$  durch die Bedingung  $\sigma^{(I)} \cap N^{(I)} = \mathbb{N}_0^r \cap N^{(I)}$  und definieren  $S^{(I)} \subseteq M^{(I)}$  als das Bild von  $\mathbb{N}_0^r$  unter der Projektion  $\mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}^r / \mathcal{Z}(I) = M^{(I)}$ . Weiter setzen wir

$$m^{(I)}(X_1^{a_1} \cdots X_r^{a_r}) := a_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + a_r \bar{\mathbf{e}}_r \in M^{(I)},$$

wobei  $\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_r \in M^{(I)} = \mathbb{Z}^r / \mathcal{Z}(I)$  die Restklassen der kanonischen Basisvektoren  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \in \mathbb{Z}^r$  seien.

<sup>3</sup>Zur Definition von  $\mathcal{Z}(I)$  s. 3.2.3.

Zu einem  $N^{(I)}$ -Kegel  $\sigma$  definieren wir den  $M^{(I)}$ -Kegel

$$\sigma^{\vee(I)} := \{u \in M_{\mathbb{R}}^{(I)} ; \langle v, u \rangle_{(I)} \geq 0 \forall v \in \sigma\}.$$

Ist dann  $\tau$  eine Seite von  $\sigma$  (bzw.  $\sigma^{\vee(I)}$ ), so bezeichnen wir mit  $\tau^{\perp(I)}$  die – bezüglich der im letzten Abschnitt angegebenen Bijektion  $\mathfrak{S}(\sigma) \longrightarrow \mathfrak{S}(\sigma^{\vee(I)})$  – entsprechende Seite von  $\sigma^{\vee(I)}$  (bzw.  $\sigma$ ).

Leicht prüft man:

**Satz 4.2.3.** Gegeben sei ein binomiales Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ . Dann gilt:

- (i) Bei  $N^{(I)}$  und  $M^{(I)}$  handelt es sich um Gitter vom gleichen Rang  $r - \text{rg}(\mathcal{Z}(I))$ . Die Abbildung  $\langle -, - \rangle_{(I)}$  ist ein nichtausgeartetes Skalarprodukt.
- (ii) Es sei  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  eine Gitterbasis von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r ; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\}$  (mit  $n$  als Rang von  $N^{(I)}$  bzw.  $M^{(I)}$ ). Wir fassen die  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  wieder als Zeilenvektoren einer  $(n \times r)$ -Matrix  $U$  auf und bezeichnen deren Spaltenvektoren wieder mit  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ . Dann wird durch  $\mathbb{Z}^r \ni \mathbf{z} \mapsto U \cdot \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^n$  ein Gitterisomorphismus  $\phi : M^{(I)} \longrightarrow \mathbb{Z}^n$  definiert, der die Elemente  $\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_r$  auf die Elemente  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  abbildet.

**Bemerkung 4.2.4.** (i) Aus 4.2.3(i) folgt, dass wir kanonisch einen Kegel-Isomorphismus  $(M^{(I)}, (\sigma^{(I)})^{\vee(I)}) \longrightarrow ((N^{(I)})^*, (\sigma^{(I)})^{\vee})$  erhalten.

- (ii) Für ein normales torisches Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  werden wir im nächsten Abschnitt beweisen, dass  $X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}} \cong_T \mathcal{V}(I)$  gilt. Für  $n := \dim(\mathcal{V}(I))$  liefert 4.2.3(ii) daher auch eine Methode, einen  $\mathbb{Z}^n$ -Kegel  $\sigma$  mit  $X_{\mathbb{Z}^n, \sigma} \cong_T \mathcal{V}(I)$  zu konstruieren: Setzen wir  $\tilde{N} := \tilde{M} := \mathbb{Z}^n$  und ist  $\tilde{S} \subseteq \tilde{M}$  die von den Spaltenvektoren  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  einer  $(n \times r)$ -Matrix  $U$ , deren Zeilenvektoren eine Gitterbasis von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r ; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\}$  bilden, erzeugte Halbgruppe, so gilt  $\tilde{S} = \sigma^{\vee} \cap \tilde{M}$ , wobei hier  $\sigma^{\vee}$  den dualen Kegel eines  $N$ -Kegels  $\sigma$  bezüglich der durch das gewöhnliche Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  gegebenen dualen Paarung bezeichne.

Zur Berechnung der auftretenden Gitterbasis gibt es explizite Verfahren (z.B. den LLL-Algorithmus, s. [Coh]), ebenso zur Berechnung von  $\sigma = (\sigma^{\vee})^{\vee}$  aus  $\sigma^{\vee}$  (z.B. die Fourier-Motzkin-Elimination, s. [Zie]). Bei der (eher ungeduldigen) Suche nach einer Gitterbasis kann auch das in 4.2.7 formulierte Kriterium nützlich sein.

**Satz 4.2.5.** Gegeben sei ein binomiales Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ . Dann gilt:<sup>4</sup>

- (i) Die Halbgruppe  $S^{(I)}$  von  $M^{(I)}$  ist als Gruppe erzeugend, d.h. es gilt  $M^{(I)} = S^{(I)} - S^{(I)}$ . Es sind äquivalent:
  - (a) Das torische Ideal  $\bar{I}$  ist normal.
  - (b) Die Halbgruppe  $S^{(I)}$  von  $M^{(I)}$  ist saturiert, d.h. aus  $m \in M^{(I)}, p \in \mathbb{N}_0$  und  $pm \in S^{(I)}$  folgt stets  $m \in S^{(I)}$ .
- (ii) Ist das torische Ideal  $\bar{I}$  normal, so gilt  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)} \cap M^{(I)} = S^{(I)}$ .

---

<sup>4</sup>Man beachte, dass  $\bar{I}$  nach 3.2.4 ein torisches Ideal ist.

*Beweis.* (i) Die Aussage  $M^{(I)} = S^{(I)} - S^{(I)}$  ist wegen  $\mathbb{Z}^r = \mathbb{N}_0^r - \mathbb{N}_0^r$  klar. Die Äquivalenzaussage folgt aus der Äquivalenz der Aussagen (1) und (4) in [S, 13.5]: Es seien  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  die Spaltenvektoren einer Matrix  $U$ , deren Zeilenvektoren  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  eine Gitterbasis von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I)\}$  bilden. Wir setzen  $\mathcal{A} := \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ . Aus 4.2.1 folgt, dass die Nullstellenmenge  $\mathcal{V}(\bar{I})$  der Varietät  $X_{\mathcal{A}}$  in (1) entspricht. Und wegen 4.2.3(ii) und  $M^{(I)} = S^{(I)} - S^{(I)}$  ist die Bedingung (b) äquivalent zur Bedingung  $\mathbf{N}\mathcal{A} = \mathbf{Z}\mathcal{A} \cap \text{pos}(\mathcal{A})$  in (4). (ii) Folgt aus (i).  $\square$

**Satz 4.2.6.** *Gegeben sei ein torisches Ideal  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ , das von einer Menge  $\mathcal{J}$  von Binomen erzeugt wird. Wir nehmen an, dass kein nichttriviales Binom der Form  $1 - X_{j_1}^{\alpha_1} \dots X_{j_q}^{\alpha_q}$  in  $\mathcal{J}$  enthalten ist. Dann erzeugt  $m^{(I)}(X_{i_0})$  genau dann eine Kante von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$ , wenn es in  $\mathcal{J}$  kein nichttriviales Binom der Form*

$$X_{i_0}^l - X_{i_1}^{\gamma_1} \dots X_{i_s}^{\gamma_s} \text{ mit } l \geq 1$$

*gibt.*

*Beweis.* Falls  $m^{(I)}(X_{i_0})$  keine Kante von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  erzeugt, so gibt es eine nichttriviale Gleichung  $lm^{(I)}(X_{i_0}) = \delta_1 m^{(I)}(X_{j_1}) + \dots + \delta_t m^{(I)}(X_{j_t})$  mit  $l \geq 1$  und  $\delta_1 \geq 0, \dots, \delta_t \geq 0$  (wobei man die  $m^{(I)}(X_{j_1}), \dots, m^{(I)}(X_{j_t})$  als primitive Erzeuger der Kanten von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  wählen kann). Dann folgt  $X_{i_0}^l - X_{j_1}^{\delta_1} \dots X_{j_t}^{\delta_t} \in I$ , da  $I$  torisch ist. Offenbar muss dann auch ein Binom dieser Form in  $\mathcal{J}$  enthalten sein.

Gibt es umgekehrt in  $\mathcal{J}$  ein nichttriviales Binom der angegebenen Form, so gibt es die nichttriviale Gleichung  $lm^{(I)}(X_{i_0}) = \gamma_1 m^{(I)}(X_{i_1}) + \dots + \gamma_s m^{(I)}(X_{i_s})$  mit  $l \geq 1$ , wobei wir annehmen können, dass  $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_s > 0$  gilt. Daher kann  $m^{(I)}(X_{i_0})$  keine Kante von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  sein.  $\square$

**Lemma 4.2.7.** *Ist*

$$a_{1,1}Z_1 + \dots + a_{1,r}Z_r = 0, \dots, a_{s,1}Z_1 + \dots + a_{s,r}Z_r = 0$$

*ein lineares Gleichungssystem mit rationalen Koeffizienten  $a_{i,j}$  und sind  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  Vektoren mit ganzzahligen Koeffizienten, die eine  $\mathbb{Q}$ -Basis des Lösungsraums bilden, so handelt es sich dabei genau dann um eine Gitterbasis der ganzzahligen Lösungen, wenn der größte gemeinsame Teiler der Determinanten der  $(n \times n)$ -Untermatrizen der  $(n \times r)$ -Matrix mit den  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  als Zeilenvektoren gleich 1 ist.*

Diese Aussage folgt aus dem folgenden Lemma.

**Lemma 4.2.8.** *Sind  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n \in \mathbb{Z}^r$  Vektoren, die linear unabhängig über  $\mathbb{Q}$  sind, so gilt für die Gitter  $L := \mathbb{Z}^r \cap (\mathbb{Q}\mathbf{u}^1 + \dots + \mathbb{Q}\mathbf{u}^n)$  und  $\Gamma := \mathbb{Z}\mathbf{u}^1 + \dots + \mathbb{Z}\mathbf{u}^n \subseteq L$ , dass der Index  $|L/\Gamma|$  gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Determinanten der  $(n \times n)$ -Untermatrizen der  $(n \times r)$ -Matrix mit den  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  als Zeilenvektoren ist.*

*Beweis.* Elementarteilertheorie (s. etwa [Bo, Abschnitt 2.9, Satz 4 und Satz 6]).  $\square$

### 4.3 Projektionen normaler torischer Ideale und einige Lemmata

In diesem Abschnitt liefern wir mit Satz 4.3.4 die Grundlage für Satz 5.2.3, welcher die Funktion des Kegelsystems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^v)}$  beschreibt. Anschließend werden weitere Lemmata für die Kapitel 5 und 6 bereitgestellt.

**Definition 4.3.1.** Sind  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  torische Ideale, so heißt  $J$  Projektion von  $I$  falls  $I \subseteq J$  gilt.

Dieser Begriff ist [K] entnommen. Er bezieht sich auf die induzierte Abbildung  $S^{(I)} \longrightarrow S^{(J)}$ , die eine Projektion ist.

**Definition 4.3.2.** Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal mit Torus  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^r \cap \mathcal{V}(I)$  von  $\mathcal{V}(I)$ . Dann bezeichnen wir mit  $N_{(I)} := \text{Hom}_{\text{alg}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$  das zugehörige Gitter der Einparameter-Untergruppen. Da jedes Element aus  $N_{(I)}$  von der Form  $s \mapsto (s^{z_1}, \dots, s^{z_r})$  mit einem  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{Z}^r$  ist, schreiben wir  $\lambda_{\mathbf{z}}$  für dieses. Weiter setzen wir  $\sigma_{(I)} := \mathcal{F}(\mathcal{V}(I))$  (s. 4.1.4).

**Lemma 4.3.3.**

(i) Ist  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal, so erhalten wir einen Kegel-Isomorphismus

$$\pi_I : (N_{(I)}, \sigma_{(I)}) \longrightarrow (N^{(I)}, \sigma^{(I)}),$$

gegeben durch den Gitterisomorphismus  $N_{(I)} \longrightarrow N^{(I)}, \lambda_{\mathbf{z}} \mapsto \mathbf{z}$ .

(ii) Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  normale torische Ideale mit Tori  $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^r \cap \mathcal{V}(I)$  von  $\mathcal{V}(I)$  und  $\mathbb{T}' := (\mathbb{C}^*)^r \cap \mathcal{V}(J)$  von  $\mathcal{V}(J)$ , und es sei  $J$  eine Projektion von  $I$ . Ist dann

$$\Phi_{(I,J)} : (N_{(J)}, \sigma_{(J)}) \longrightarrow (N_{(I)}, \sigma_{(I)})$$

der durch  $N_{(J)} \hookrightarrow N_{(I)}, \lambda_{\mathbf{z}} \mapsto \lambda_{\mathbf{z}}$  gegebene injektive Kegelmorphismus, und

$$\phi_{(I,J)} : (N^{(J)}, \sigma^{(J)}) \longrightarrow (N^{(I)}, \sigma^{(I)})$$

der durch  $N^{(J)} \hookrightarrow N^{(I)}, \mathbf{z} \mapsto \mathbf{z}$  gegebene injektive Kegelmorphismus, und sind weiter  $\pi_I : (N_{(I)}, \sigma_{(I)}) \longrightarrow (N^{(I)}, \sigma^{(I)})$  bzw.  $\pi_J : (N_{(J)}, \sigma_{(J)}) \longrightarrow (N^{(J)}, \sigma^{(J)})$  die Kegel-Isomorphismen nach (i), so kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (N_{(J)}, \sigma_{(J)}) & \xrightarrow{\pi_J} & (N^{(J)}, \sigma^{(J)}) \\ \downarrow \Phi_{(I,J)} & & \downarrow \phi_{(I,J)} \\ (N_{(I)}, \sigma_{(I)}) & \xrightarrow{\pi_I} & (N^{(I)}, \sigma^{(I)}) \end{array}$$

*Beweis.* (i) Man sieht leicht, dass  $\lambda_{\mathbf{z}} \in N_{(I)} \Leftrightarrow \mathbf{z} \in N^{(I)}$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^r$  gilt. Weiter folgt aus der Definition von  $\sigma_{(I)}$ , dass  $\lambda_{\mathbf{z}} \in N_{(I)}$  genau dann ein Element von  $\sigma_{(I)}$  ist, wenn jede Koordinate von  $\mathbf{z}$  nichtnegativ ist, wenn also  $\mathbf{z} \in N^{(I)} \cap \mathbb{N}_0^r = N^{(I)} \cap \sigma^{(I)}$  gilt.

(ii) ist klar. □

**Satz 4.3.4.**

(i) Ist  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal, so erhalten wir einen torischen Isomorphismus

$$\varphi_I : \mathcal{V}(I) \longrightarrow X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}},$$

gegeben durch  $\varphi_I := \mathcal{T}(\pi_I) \circ \varsigma_{\mathcal{V}(I)}$  mit  $\varsigma_{\mathcal{V}(I)} : \mathcal{V}(I) \longrightarrow X_{N_{(I)}, \sigma_{(I)}}$  aus 4.1.6(i) und mit dem Kegel-Isomorphismus  $\pi_I : (N_{(I)}, \sigma_{(I)}) \longrightarrow (N^{(I)}, \sigma^{(I)})$  aus 4.3.3(i).

Gilt dann  $0 \in \mathcal{V}(I)$ , so hat  $X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}}$  (genau) einen Fixpunkt  $f_{\sigma^{(I)}}$  und es gilt  $\varphi_I(0) = f_{\sigma^{(I)}}$ .

(ii) Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  normale torische Ideale und  $J$  eine Projektion von  $I$ . Ist

$$\Phi : \mathcal{V}(J) \hookrightarrow \mathcal{V}(I)$$

der durch  $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I)$  gegebene Inklusionsmorphismus torischer Varietäten und

$$\phi : (N^{(J)}, \sigma^{(J)}) \hookrightarrow (N^{(I)}, \sigma^{(I)})$$

der durch  $N^{(J)} \subseteq N^{(I)}$  und  $\sigma^{(J)} \subseteq \sigma^{(I)}$  gegebene Kegel-Inklusionsmorphismus und sind  $\varphi_I : \mathcal{V}(I) \rightarrow X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}}$  bzw.  $\varphi_J : \mathcal{V}(J) \rightarrow X_{N^{(J)}, \sigma^{(J)}}$  die torischen Isomorphismen nach (i), so kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(J) & \xrightarrow{\varphi_J} & X_{N^{(J)}, \sigma^{(J)}} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \mathcal{T}(\phi) \\ \mathcal{V}(I) & \xrightarrow{\varphi_I} & X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}} \end{array}$$

*Beweis.* (i) Die erste Aussage ist klar. Gilt weiter  $0 \in \mathcal{V}(I)$ , so ist  $0$  offenbar ein Fixpunkt von  $\mathcal{V}(I)$  unter der Torusaktion, und es folgt aus der Äquivarianz und (torischen) Isomorphie von  $\varphi_I$ , dass der Punkt  $f_{\sigma^{(I)}} := \varphi_I(0)$  ein Fixpunkt von  $X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}}$  sein muss.

(ii) Aus 4.1.6(ii) folgt die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(J) & \xrightarrow{\mathfrak{s}_{\mathcal{V}(J)}} & X_{N^{(J)}, \sigma^{(J)}} \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \mathcal{T}(\mathcal{G}(\Phi)) \\ \mathcal{V}(I) & \xrightarrow{\mathfrak{s}_{\mathcal{V}(I)}} & X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}} \end{array}$$

Weiter folgt aus 4.3.3(ii) die Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} X_{N^{(J)}, \sigma^{(J)}} & \xrightarrow{\mathcal{T}(\pi_J)} & X_{N^{(J)}, \sigma^{(J)}} \\ \downarrow \mathcal{T}(\Phi_{(I, J)}) & & \downarrow \mathcal{T}(\phi_{(I, J)}) \\ X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}} & \xrightarrow{\mathcal{T}(\pi_I)} & X_{N^{(I)}, \sigma^{(I)}} \end{array}$$

Es gilt offenbar  $\mathcal{G}(\Phi) = \Phi_{(I, J)}$  und  $\phi = \phi_{(I, J)}$ , daher folgt die Aussage aus der Komposition der Diagramme.  $\square$

**Lemma 4.3.5.** *Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  normale torische Ideale. Dabei sei  $J$  eine Projektion von  $I$ , es gelte  $0 \in \mathcal{V}(J)$ , und  $b_1 = X^{\alpha^{(1)}} - X^{\beta^{(1)}}, \dots, b_s = X^{\alpha^{(s)}} - X^{\beta^{(s)}}$  seien Binome aus  $J$  mit  $J = I + (b_1, \dots, b_s)$ , so dass  $s = \text{rg}(\mathcal{Z}(J)) - \text{rg}(\mathcal{Z}(I))$ <sup>5</sup>. Ist dann  $\tau \prec \sigma^{(I)}$  eine echte Seite, für die  $m^{(I)}(X^{\alpha^{(i)}}) \notin \tau^{\perp(I)}, m^{(I)}(X^{\beta^{(i)}}) \notin \tau^{\perp(I)} \forall i \in \{1, \dots, s\}$  gilt, so ist  $\tau$  glatt.*

*Beweis.* Folgt aus [Alt1, Theorem 2.4]  $\square$

Interessiert man sich für die kombinatorische Struktur von  $\sigma^{(I)}$  (also für  $\mathfrak{S}(\sigma^{(I)})$ ), so dürfte die folgende Aussage nützlich sein.

<sup>5</sup>Dies setzt voraus, dass  $\mathcal{V}(J)$  ein relativ vollständiger Durchschnitt in  $\mathcal{V}(I)$  ist.

**Lemma 4.3.6.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal. Dann gilt für die Menge der Fußpunkte  $\{x_\tau; \tau \preceq \sigma^{(I)}\} \subseteq \mathcal{V}(I)$  aus 4.1.8:*

$$\{x_\tau; \tau \preceq \sigma^{(I)}\} = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{V}(I); x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, r\}\}$$

*Beweis.* Aus der Definition der  $x_\tau$  (s. 4.1.7) und der Form  $\lambda_{\mathbf{z}} = (s \mapsto (s^{z_1}, \dots, s^{z_r}))$  der Einparameter-Untergruppen zum vorliegenden Torus  $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^r \cap \mathcal{V}(I)$  folgt sofort die Inklusion “ $\subseteq$ ”. Dass diese Inklusion nicht echt sein kann, folgt dann daraus, dass zwei verschiedene Elemente aus  $\{(x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{V}(I); x_i \in \{0, 1\} \forall i \in \{1, \dots, r\}\}$  offenbar nicht auf derselben Bahn liegen können.  $\square$

**Definition 4.3.7.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal.*

*Wir definieren die folgende Menge von Teilmengen von  $\{X_1, \dots, X_r\}$ :*

$$\mathcal{S}^{(I)} := \{\{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\} \subseteq \{X_1, \dots, X_r\}; \text{ es gilt } (x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{V}(I) \text{ für den Punkt } (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{C}^r \text{ mit } x_j = 0 \text{ für } j \in \{i_1, \dots, i_s\} \text{ und } x_j = 1 \text{ für } j \notin \{i_1, \dots, i_s\}\}.$$

*Die Elemente aus  $\mathcal{S}^{(I)}$  “entsprechen” nach 4.3.6 genau den Fußpunkten  $x_\tau$  aus 4.1.8. Wir bezeichnen das zu der Seite  $\tau$  korrespondierende Element aus  $\mathcal{S}^{(I)}$  mit  $y_\tau$ ; es soll also für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  gelten:  $X_i \in y_\tau \Leftrightarrow x_i = 0$  (mit  $x_i$  aus  $x_\tau = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_r)$ ).*

**Lemma 4.3.8.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal. Dann gilt:*

- (i) *Ist  $\tau$  eine Seite von  $\sigma^{(I)}$ , so gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$ :  $m^{(I)}(X_i) \in \tau^{\perp(I)} \Leftrightarrow X_i \notin y_\tau$ .*
- (ii) *Für zwei Seiten  $\tau, \tau'$  von  $\sigma^{(I)}$  gilt  $\tau \preceq \tau' \Leftrightarrow y_\tau \subseteq y_{\tau'}$ . Dies definiert also eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen  $\mathfrak{S}(\sigma^{(I)})$  und  $\mathcal{S}^{(I)}$  (mit  $\subseteq$  als Ordnung von  $\mathcal{S}^{(I)}$ ). Unter dieser Bijektion entsprechen die Kanten von  $\sigma^{(I)}$  den minimalen Elementen von  $\mathcal{S}^{(I)} \setminus \emptyset$ .*

*Beweis.* (i) Es gilt  $m^{(I)}(X_i) \in \tau^{\perp(I)} \Leftrightarrow \langle a, m^{(I)}(X_i) \rangle_{(I)} = 0 \forall a \in \tau$ . Die letzte Bedingung ist äquivalent dazu, dass bei jedem  $a \in \tau$  die  $i$ -te Koordinate den Wert Null hat (dies ist klar falls  $m^{(I)}(X_i) \neq 0$ , und falls  $\bar{e}_i = m^{(I)}(X_i) = 0$ , so hat ohnehin bei jedem  $a \in N^{(I)}$  die  $i$ -te Koordinate den Wert Null). Dies ist äquivalent dazu, dass  $x_\tau$  an der  $i$ -ten Koordinate den Wert 1 hat, was wiederum äquivalent zu  $X_i \notin y_\tau$  ist.

(ii) Folgt aus (i), da

$$\tau \preceq \tau' \Leftrightarrow \tau'^{\perp(I)} \preceq \tau^{\perp(I)} \Leftrightarrow (m^{(I)}(X_i) \in \tau'^{\perp(I)} \Rightarrow m^{(I)}(X_i) \in \tau^{\perp(I)}) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} (X_i \in y_{\tau'} \Rightarrow X_i \in y_\tau). \quad \square$$

**Lemma 4.3.9.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal, das von den Binomen  $b_1 = e_1 - f_1, \dots, b_s = e_s - f_s$  erzeugt wird (die  $e_i, f_i$  sind hier Monome). Für alle  $i \in \{1, \dots, s\}$  seien  $\mathcal{M}(e_i) \subseteq \{X_1, \dots, X_r\}$  bzw.  $\mathcal{M}(f_i) \subseteq \{X_1, \dots, X_r\}$  die Mengen der im Monom  $e_i$  bzw.  $f_i$  auftretenden Variablen. Es sei  $S \subseteq \{X_1, \dots, X_r\}$ .*

*Dann gilt  $S \in \mathcal{S}^{(I)}$  genau dann, wenn für alle  $i \in \{1, \dots, s\}$  gilt:*

$$\mathcal{M}(e_i) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M}(f_i) \cap S \neq \emptyset$$

Diese Aussage dürfte klar sein. Weiter folgt aus diesem Lemma:

**Lemma 4.3.10.** *Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  normale torische Ideale und  $J$  eine Projektion von  $I$ . Gilt dann  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$ , so folgt  $S \in \mathcal{S}^{(I)}$ .*

**Lemma 4.3.11.** *Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  normale torische Ideale und  $J$  eine Projektion von  $I$ . Ist dann  $\tau$  eine Seite von  $\sigma^{(J)}$  und  $\tau'$  eine Seite von  $\sigma^{(I)}$ , so gilt  $y_\tau \subseteq y_{\tau'}$  genau dann, wenn  $i(\tau)$  in  $\tau'$  enthalten ist, wobei hier  $i(\tau)$  das Bild von  $\tau$  unter der durch die Inklusion  $N^{(J)} \subseteq N^{(I)}$  gegebenen Abbildung  $i : N_{\mathbb{R}}^{(J)} \hookrightarrow N_{\mathbb{R}}^{(I)}$  bezeichne.*

*Beweis.*  $i(\tau)$  ist genau dann in  $\tau'$  enthalten, wenn  $p(\tau'^{\perp(I)})$  in  $\tau^{\perp(J)}$  enthalten ist, wobei hier  $p(\tau'^{\perp(I)})$  das Bild von  $\tau'^{\perp(I)}$  unter der durch die kanonische Projektion  $M^{(I)} \rightarrow M^{(J)}$  gegebenen Abbildung  $p : M_{\mathbb{R}}^{(I)} \rightarrow M_{\mathbb{R}}^{(J)}$  bezeichne. Die letzte Bedingung ist äquivalent zu der Bedingung  $m^{(I)}(X_i) \in \tau'^{\perp(I)} \implies m^{(J)}(X_i) \in \tau^{\perp(J)} \ (\forall i \in \{1, \dots, r\})$ . Und diese Bedingung ist nach 4.3.8(i) äquivalent zu der Bedingung  $X_i \in y_\tau \implies X_i \in y_{\tau'} \ (\forall i \in \{1, \dots, r\})$ .  $\square$

**Definition 4.3.12.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal und  $\tau$  eine Seite von  $\sigma^{(I)}$ . Es seien  $i_1, \dots, i_s \subseteq \{1, \dots, r\}$  die Indizes mit  $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\} = y_\tau$  und  $j_1, \dots, j_t \subseteq \{1, \dots, r\}$  die Indizes mit  $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_t}\} = \{X_1, \dots, X_r\} \setminus y_\tau$ . Wir definieren das Ideal*

$$I_{(\tau)} := I + (X_{j_1} - 1, \dots, X_{j_t} - 1)$$

von  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ . Weiter definieren wir für ein Polynom  $b \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  das Polynom  $\tilde{b} \in \mathbb{C}[X_{i_1}, \dots, X_{i_s}]$  durch Ersetzen der Variablen  $X_{j_1}, \dots, X_{j_t}$  mit 1. In dem Polynomring  $\mathbb{C}[X_{i_1}, \dots, X_{i_s}]$  definieren wir dann das Ideal

$$\tilde{I}_{(\tau)} := \{\tilde{b}; b \in I_{(\tau)}\}.$$

**Lemma 4.3.13.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal und  $\tau$  eine Seite von  $\sigma^{(I)}$ . Es seien  $i_1, \dots, i_s \subseteq \{1, \dots, r\}$  die Indizes mit  $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\} = y_\tau$  und  $j_1, \dots, j_t \subseteq \{1, \dots, r\}$  die Indizes mit  $\{X_{j_1}, \dots, X_{j_t}\} = \{X_1, \dots, X_r\} \setminus y_\tau$ . Dann gilt:*

- (i)  $I_{(\tau)}$  ist ein normales torisches Ideal und es gilt  $X_{(N^{(I)})_{\tau, \tau}} \cong_T \mathcal{V}(I_{(\tau)})$ .
- (ii)  $\tilde{I}_{(\tau)}$  ist ein normales torisches Ideal und es gilt  $\mathcal{V}(\tilde{I}_{(\tau)}) \cong_T \mathcal{V}(I_{(\tau)})$ .
- (iii) Die Elemente aus  $\mathcal{S}^{\tilde{I}_{(\tau)}}$  entsprechen in kanonischer Weise den Elementen aus  $\mathcal{S}^{I_{(\tau)}}$ , denn es gilt  $S \cap \{X_{j_1}, \dots, X_{j_t}\} = \emptyset$  für alle  $S \in \mathcal{S}^{I_{(\tau)}}$  und  $S \in \mathcal{S}^{\tilde{I}_{(\tau)}} \iff S \in \mathcal{S}^{I_{(\tau)}}$  für alle Teilmengen  $S \subseteq \{X_{i_1}, \dots, X_{i_s}\}$ .
- (iv) Ist  $\tau_0$  eine Kante von  $\sigma^{(I)}$ , so ist der primitive Erzeuger dieser Kante gegeben durch den (einzigsten) Gitterbasisvektor von  $\{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \ \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I_{(\tau_0)})\}$  mit nichtnegativen Einträgen. Führen wir für diesen Vektor die Bezeichnung  $\mathbf{z}(\tau_0)$  ein und für dessen  $i$ -te Koordinate die Bezeichnung  $z_i(\tau_0)$ , so gilt  $z_i(\tau_0) = 0 \ \forall i$  mit  $X_i \in \{X_1, \dots, X_r\} \setminus y_{\tau_0}$ . Weiter gilt: Ist  $\tau$  eine  $n$ -dimensionale, simpliziale Seite von  $\sigma^{(I)}$  mit Kanten  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , so ist die Multiplizität von  $\tau$  gleich dem größten gemeinsamen Teiler der Determinanten der  $n \times n$ -Untermatrizen der  $(n \times r)$ -Matrix mit den  $\mathbf{z}(\tau_1), \dots, \mathbf{z}(\tau_n)$  als Zeilenvektoren.

*Beweis.* (i) Man sieht mit Hilfe von 3.2.4(iii), dass  $I_{(\tau)}$  wieder ein torisches Ideal ist. Mit  $V_{(\tau)} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^r; z_{j_1} = 0, \dots, z_{j_t} = 0\}$  gilt offenbar  $N^{(I)} \cap V_{(\tau)} = N^{(I_{(\tau)})}$ , und aus 4.3.8(i) folgt  $N^{(I)} \cap \text{lin } \tau = N^{(I)} \cap V_{(\tau)}$ . Daher erhalten wir einen Kegel-Isomorphismus  $(N^{(I)} \cap \text{lin } \tau, \tau) \rightarrow (N^{(I_{(\tau)})}, \sigma^{(I_{(\tau)})})$ . Mit 4.3.4(i) folgt daraus  $X_{(N^{(I)})_{\tau, \tau}} \cong_T X_{N^{(I_{(\tau)})}, \sigma^{(I_{(\tau)})}} \cong_T \mathcal{V}(I_{(\tau)})$  und somit auch die Normalität von  $I_{(\tau)}$ .

(ii) Man sieht mit Hilfe von 3.2.4(iii), dass  $\tilde{I}_{(\tau)}$  wieder ein torisches Ideal ist. Weiter folgt  $\mathcal{V}(\tilde{I}_{(\tau)}) \cong_T \mathcal{V}(I_{(\tau)})$  (und damit wegen (i) auch die Normalität von  $\tilde{I}_{(\tau)}$ ) aus dem kanonischen

Kegel-Isomorphismus  $(N^{\tilde{I}(\tau)}, \sigma^{\tilde{I}(\tau)}) \longrightarrow (N^{I(\tau)}, \sigma^{I(\tau)})$ .

(iii) ist klar.

(iv) Aus  $X_{(N^{(I)})_{\tau_0}, \tau_0} \stackrel{(i)}{\cong_T} \mathcal{V}(I_{(\tau_0)}) \stackrel{4.3.4(i)}{\cong_T} X_{N^{(I_{\tau_0})}, \sigma^{(I_{\tau_0})}}$  folgt, dass  $N^{(I_{\tau_0})} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{a} \in \mathcal{Z}(I_{(\tau_0)})\}$  vom Rang 1 ist. Die Aussage “ $z_i(\tau_0) = 0 \forall i$  mit  $X_i \in \{X_1, \dots, X_r\} \setminus \{y_{\tau_0}\}$ ” folgt aus  $N^{(I)} \cap V_{(\tau_0)} = N^{(I_{\tau_0})}$  mit  $V_{(\tau_0)}$  wie im Beweis von (i). Die Aussage über die Multiplizität folgt aus der Definition (s. 4.1.10) und 4.2.8.  $\square$

Das folgende Lemma ist wesentlich für die Bestimmung von  $\mathfrak{S}(\sigma)$  im Beweis von 6.1.1.

**Lemma 4.3.14.** *Es sei  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal. Es seien  $y_{\tau_1}, \dots, y_{\tau_s}$  die bezüglich der Mengeninklusionen minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(I)} \setminus \emptyset$ , d.h.  $\tau_1, \dots, \tau_s$  sind die Kanten von  $\sigma^{(I)}$  (s. 4.3.8(ii)). Weiter sei  $F := \{\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t}\}$  eine Teilmenge von  $\{\tau_1, \dots, \tau_s\}$ , und es sei  $S := y_{\tau_{i_1}} \cup \dots \cup y_{\tau_{i_t}}$ . Dann spannen die Kanten  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t}$  genau dann eine Seite von  $\sigma^{(I)}$  auf, wenn für alle  $i = 1, \dots, s$  gilt:  $y_{\tau_i} \subseteq S \implies \tau_i \in F$ .*

*Beweis.* Es gilt  $S \in \mathcal{S}^{(I)}$ , wie man etwa mit 4.3.9 leicht sieht. Daher gibt es eine Seite  $\tau$  von  $\sigma^{(I)}$  mit  $y_\tau = S$ .

Falls nun die Kanten  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t}$  eine Seite von  $\sigma^{(I)}$  aufspannen, so muss es sich dabei um  $\tau$  handeln, denn aus  $\tau_{i_1} \preceq \tau', \dots, \tau_{i_t} \preceq \tau' \stackrel{4.3.8(ii)}{\iff} y_{\tau_{i_1}} \subseteq y_{\tau'}, \dots, y_{\tau_{i_t}} \subseteq y_{\tau'} \forall \tau' \preceq \sigma^{(I)}$  folgt, dass  $\tau$  die kleinste Seite von  $\sigma^{(I)}$  ist, die die Kanten  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t}$  als Seiten besitzt. Die Seite  $\tau$  wird von allen Kanten  $\tau_i$  mit  $\tau_i \preceq \tau$  aufgespannt, also nach 4.3.8(ii) von allen Kanten  $\tau_i$  mit  $y_{\tau_i} \subseteq y_\tau$ . Dies impliziert “ $\forall i \in \{1, \dots, r\} : y_{\tau_i} \subseteq S \implies \tau_i \in F$ ”.

Gilt umgekehrt “ $\forall i \in \{1, \dots, r\} : y_{\tau_i} \subseteq S \implies \tau_i \in F$ ”, so folgt mit 4.3.8(ii) die Bedingung “ $\forall i \in \{1, \dots, r\} : \tau_i \preceq \tau \iff \tau_i \in F$ ”, welche gerade bedeutet, dass die Kanten  $\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_t}$  die Seite  $\tau$  aufspannen.  $\square$

**Lemma 4.3.15.** *Ist  $I \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$  ein normales torisches Ideal und gilt  $0 \in \mathcal{V}(I)$ , so ist  $\sigma^{(I)}$  volldimensional (also  $\dim \sigma^{(I)} = \dim N_{\mathbb{R}}^{(I)}$ ).*

*Beweis.* Da 0 ein Fixpunkt unter der Torusaktion ist, folgt die Aussage aus 4.1.3.  $\square$

## 5 Das Kegelsystem $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$

In diesem Kapitel wird das Kegelsystem  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  eingeführt, das – wie in der Einleitung beschrieben – die Totalräume  $\mathcal{Y}_k^\nu$  der Monodromieüberlagerung über den Komponenten des reduzierten Basisraums (und deren Durchschnitte  $\mathcal{Y}_A$ ) sowie die Einbettung der Singularität  $X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1})$  in den Totalraum beschreibt. Die Einführung von  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  und der – zusammen mit den Argumenten aus Abschnitt 3.1 – zur Beschreibung entscheidene Satz ist Gegenstand von Abschnitt 5.2. Bei der Definition von  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  in 5.2.1 werden die Nullketten benutzt (die dort verwendeten  $R_k^\nu$  sind mittels Nullketten definiert, s. 3.4.1). In Abschnitt 5.3 wird dann in 5.3.2 eine geometrischere Konstruktion angegeben, die keine Nullketten verwendet (wenngleich diese im Beweis benutzt werden). Für Abschnitt 5.3 stellen wir zunächst in Abschnitt 5.1 einige Lemmata bereit.

## 5.1 Einige Lemmata für Abschnitt 5.3

In diesem Abschnitt verwenden wir zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$  die Matrix mit den Zeilen <sup>1</sup>  $\mathcal{Z}(H_{i-1, i+1}(R))$  für  $i = 2, \dots, e-1$ . Wir bezeichnen diese mit  $\mathbb{M}(R)$ . Es sei  $d_1 < d_2 < \dots < d_{s-1} < d_l$  so gewählt, dass  $d_1 = 2, d_l = e-1$  und  $d_2, \dots, d_{l-1}$  genau die Indizes  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $X_i^{(o)} \not\sim_R X_i^{(t)}$  (also  $X_i^{(o)} \neq X_i^{(t)}$ ) sind. Dann sieht  $\mathbb{M}(R)$  folgendermaßen aus:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} A & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B & & C \end{array} \right)$$

Dabei hat  $A$  die Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & X_1^{([o])} & X_{d_1}^{([o])} & X_{d_1+1}^{([o])} & X_{d_1+2}^{([o])} & \dots & X_{d_2-1}^{([o])} & X_{d_2}^{([t])} & X_{d_2}^{([o])} & X_{d_2+1}^{([o])} & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1-1, d_1+1}(R)) & 1 & -f_2^{(1)} & 1 & & & & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1, d_1+2}(R)) & & 1 & -f_3^{(1)} & 1 & & & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1+1, d_1+3}(R)) & & & 1 & -f_4^{(1)} & & & & & & & \\ & \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_2-2, d_2}(R)) & & & & & & -f_{r_1-2}^{(1)} & 1 & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_2-1, d_2+1}(R)) & & & & & & 1 & -f_{r_1-1}^{(1)} & -f_2^{(2)} & 1 & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_2, d_2+2}(R)) & & & & & & & & 1 & -f_3^{(2)} & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_2+1, d_2+3}(R)) & & & & & & & & & 1 & & \end{array}$$

$B$  hat die Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & X_{d_1-1}^{([o])} & X_{d_1}^{([t])} & X_{d_1}^{([o])} & X_{d_1+1}^{([o])} & \dots & X_{d_l-1}^{([o])} & X_{d_l}^{([o])} & X_e^{([o])} & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1-1-3, d_1-1}(R)) & 1 & & & & & & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1-1-2, d_1}(R)) & -f_{r_1-2-2}^{(l-2)} & 1 & & & & & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1-1-1, d_1+1}(R)) & 1 & -f_{r_1-2-1}^{(l-2)} & -f_2^{(l-1)} & 1 & & & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_1-1, d_1+2}(R)) & & & 1 & -f_3^{(l-1)} & & & & & & & \\ & \vdots & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_l-2, d_l}(R)) & & & & & & -f_{r_1-1-2}^{(l-1)} & 1 & & & & \\ \mathcal{Z}(H_{d_l-1, d_l+1}(R)) & & & & & & 1 & -f_{r_1-1-1}^{(l-1)} & 1 & & & \end{array}$$

Und  $C$  hat die Gestalt:

$$\begin{array}{cccccccc} & X_2^{([1])} & \dots & X_2^{([b_2])} & \dots & X_{e-1}^{([1])} & \dots & X_{e-1}^{([b_{e-1}])} \\ \mathcal{Z}(H_{1,3}(R)) & -c_2^{(1)} & & -c_2^{(b_2)} & & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & & \\ \mathcal{Z}(H_{e-2,e}(R)) & & & & & -c_{e-1}^{(1)} & & -c_{e-1}^{(b_{e-1})} \end{array}$$

Dabei seien  $X_2^{([1])}, \dots, X_2^{([b_2])}, \dots, X_{e-1}^{([1])}, \dots, X_{e-1}^{([b_{e-1}])}$  die Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R)$ , die nicht von der Form  $X_i^{([o])}$  oder  $X_i^{([t])}$  sind. Die auftretenden Werte  $f_{\bullet}^{(\bullet)}$  und  $c_{\bullet}^{(\bullet)}$  sind alle nichtnegativ.

<sup>1</sup>Zur Definition von  $\mathcal{Z}$  s. 3.2.3.

**Lemma 5.1.1.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Dann ist das torische Ideal  $\mathbb{K}(R_{min})$  normal.*

*Beweis.* Wir setzen  $I := \mathbb{K}(R_{min})$ . Nach 4.2.5(i) ist die Aussage äquivalent dazu, dass die Halbgruppe  $S^{(I)}$  von  $M^{(I)}$  saturiert ist. Seien also  $p \in \mathbb{N}_0$  und  $m \in M^{(I)}$  mit  $pm \in S^{(I)}$  gegeben. Zu zeigen ist  $m \in S^{(I)}$ , also dass es ganze nichtnegative Zahlen  $\lambda_1^{(o)}, \dots, \lambda_e^{(o)}, \lambda_3^{(t)}, \dots, \lambda_{e-2}^{(t)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_2^{(a_2-1)}, \dots, \lambda_{e-1}^{(1)}, \dots, \lambda_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}$  gibt mit

$$\begin{aligned} m &= \lambda_1^{(o)} \cdot m^{(I)}(X_1^{(o)}) + \dots + \lambda_e^{(o)} \cdot m^{(I)}(X_e^{(o)}) + \lambda_3^{(t)} \cdot m^{(I)}(X_3^{(t)}) + \dots + \lambda_{e-2}^{(t)} \cdot m^{(I)}(X_{e-2}^{(t)}) \\ &+ \lambda_2^{(1)} \cdot m^{(I)}(X_2^{(1)}) + \dots + \lambda_2^{(a_2-1)} \cdot m^{(I)}(X_2^{(a_2-1)}) \\ &\vdots \\ &+ \lambda_{e-1}^{(1)} \cdot m^{(I)}(X_{e-1}^{(1)}) + \dots + \lambda_{e-1}^{(a_{e-1}-1)} \cdot m^{(I)}(X_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}). \end{aligned}$$

Wir schreiben für einen solchen Ausdruck abkürzend  $m = \sum_{(i,j)} \lambda_i^{(j)} m^{(I)}(X_i^{(j)})$ .

Nach 4.2.5(i) gibt es eine ganzzahlige Linearkombination  $m = \sum_{(i,j)} \tilde{\lambda}_i^{(j)} m^{(I)}(X_i^{(j)})$ .

Aus den Gleichungen  $H_{i-1, i+1}$  folgen die folgenden (erzeugenden) Relationen:

$$\begin{aligned} m^{(I)}(X_1^{(o)}) + m^{(I)}(X_3^{(t)}) &= m^{(I)}(X_2^{(o)}) + m^{(I)}(X_2^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_2^{(a_2-1)}) \\ m^{(I)}(X_2^{(o)}) + m^{(I)}(X_4^{(t)}) &= m^{(I)}(X_3^{(t)}) + m^{(I)}(X_3^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_3^{(a_3-1)}) \\ m^{(I)}(X_3^{(o)}) + m^{(I)}(X_5^{(t)}) &= m^{(I)}(X_4^{(t)}) + m^{(I)}(X_4^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_4^{(a_4-1)}) \\ &\vdots \\ m^{(I)}(X_{e-4}^{(o)}) + m^{(I)}(X_{e-2}^{(t)}) &= m^{(I)}(X_{e-3}^{(t)}) + m^{(I)}(X_{e-3}^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_{e-3}^{(a_{e-3}-1)}) \\ m^{(I)}(X_{e-3}^{(o)}) + m^{(I)}(X_{e-1}^{(o)}) &= m^{(I)}(X_{e-2}^{(t)}) + m^{(I)}(X_{e-2}^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_{e-2}^{(a_{e-2}-1)}) \\ m^{(I)}(X_{e-2}^{(o)}) + m^{(I)}(X_e^{(o)}) &= m^{(I)}(X_{e-1}^{(o)}) + m^{(I)}(X_{e-1}^{(1)}) + \dots + m^{(I)}(X_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}) \end{aligned}$$

Entsprechend dieser Relationen definieren wir für  $s = 2, \dots, e-1$  die folgenden Koordinatenvektoren mit Koordinaten  $\lambda_i^{(j)}(s)$  zu  $m^{(I)}(X_i^{(j)})$ :

$$\lambda_{s-1}^{(o)}(s) := -1, \lambda_{s+1}^{(t)}(s) := -1 \text{ falls } s \leq e-3; \lambda_{s+1}^{(o)}(s) := -1 \text{ falls } s \geq e-2.$$

$$\lambda_s^{(t)}(s) := 1 \text{ falls } 3 \leq s \leq e-2; \lambda_s^{(o)}(s) := 1 \text{ falls } s = 2, e-1.$$

$$\lambda_s^{(1)} := 1, \dots, \lambda_s^{(a_s-1)} := 1. \text{ Ansonsten } \lambda_i^{(j)}(s) := 0.$$

Aus der Voraussetzung  $pm \in S^{(I)}$  folgt, dass es rationale Zahlen  $q_2, \dots, q_{e-1}$  gibt, so dass  $m = \sum_{(i,j)} (\tilde{\lambda}_i^{(j)} + \sum_{s=2}^{e-1} q_s \cdot \lambda_i^{(j)}(s)) m^{(I)}(X_i^{(j)})$  eine Darstellung von  $m$  mit nichtnegativen rationalen Koeffizienten ist. Ist  $t_s$  für  $s = 2, \dots, e-1$  jeweils die größte ganze Zahl mit  $t_s \leq q_s$ , so ist  $m = \sum_{(i,j)} (\tilde{\lambda}_i^{(j)} + \sum_{s=2}^{e-1} t_s \cdot \lambda_i^{(j)}(s)) m^{(I)}(X_i^{(j)})$  eine Darstellung von  $m$  mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten.  $\square$

**Lemma 5.1.2.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Wir setzen  $I := \mathbb{K}(R)$  und  $J := \mathbb{H}(R)$ . Dann gibt es einen Gitterisomorphismus  $\tilde{\phi} : M^{(I)} \rightarrow M^{(J)}$  mit  $\tilde{\phi}(S^{(I)}) = S^{(J)}$  und  $\tilde{\phi}(m^{(I)}(X_1^{(o)})) = m^{(J)}(X_1^{([o])})$  und  $\tilde{\phi}(m^{(I)}(X_e^{(o)})) = m^{(J)}(X_e^{([o]})$ .*

*Beweis.* Man sieht leicht, dass  $\#\mathcal{VAR} - \#\mathcal{VAR}(R) = \text{rg}(\mathcal{Z}(I)) - \text{rg}(\mathcal{Z}(J))$  gilt. Daraus folgt, dass  $M^{(I)}$  und  $M^{(J)}$  denselben Rang haben. Es sei  $n$  dieser Rang und  $r := \#\mathcal{VAR}$ ,  $r' := \#\mathcal{VAR}(R)$ . Wir wählen eine Gitterbasis  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  von  $\{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^r; \sum_{i=1}^r a_i b_i = 0 \forall \mathbf{b} \in \mathcal{Z}(I)\}$  und fassen  $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n$  als Zeilenvektoren einer  $(n \times r)$ -Matrix  $U$  auf. Wir bezeichnen die zur

Variable  $X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}$  gehörige Spalte von  $U$  mit  $\mathbf{u}(X_i^{(j)})$ . Aus der Konstruktion von  $\mathcal{Z}(I)$  folgt  $\mathbf{u}(X_{i_1}^{(j_1)}) = \mathbf{u}(X_{i_2}^{(j_2)})$  für alle Paare  $X_{i_1}^{(j_1)}, X_{i_2}^{(j_2)} \in \mathcal{VAR}$  mit  $X_{i_1}^{(j_1)} \sim_R X_{i_2}^{(j_2)}$ . Aus  $U$  konstruieren wir nun eine  $(n \times r')$ -Matrix  $V$ , deren Spalten wir mit  $\mathbf{v}(X_i^{(j)})$  für alle  $X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R)$  bezeichnen, indem wir  $\mathbf{v}(X_i^{(j)}) := \mathbf{u}(X_i^{(j)})$  für alle  $X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R)$  setzen. Man sieht leicht, dass (bei geeigneter Anordnung der Spalten  $\mathbf{v}(X_i^{(j)})$ ) die Zeilenvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  von  $V$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $\{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{r'}; \sum_{i=1}^{r'} a_i b_i = 0 \forall \mathbf{b} \in \mathcal{Z}(J)\}$  bilden. Da die Menge der Spaltenvektoren von  $V$  mit der Menge der Spaltenvektoren von  $U$  übereinstimmt, folgt mit 4.2.7, dass die Zeilenvektoren von  $V$  eine Gitterbasis bilden. Bezeichnen wir die von den  $\mathbf{u}(X_i^{(j)})$  in  $\mathbb{Z}^n$  erzeugte Halbgruppe mit  $S_I$  und die von den  $\mathbf{v}(X_i^{(j)})$  in  $\mathbb{Z}^n$  erzeugte Halbgruppe mit  $S_J$ , so erhalten wir durch die identische Abbildung  $id: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  einen Gitterisomorphismus mit  $id(S_I) = S_J$ , für den  $id(\mathbf{u}(X_1^{(0)})) = \mathbf{v}(X_1^{(0)})$  und  $id(\mathbf{u}(X_e^{(0)})) = \mathbf{v}(X_e^{(0)})$  gilt. Daher folgt die Aussage nun mit 4.2.3(ii).  $\square$

**Lemma 5.1.3.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Wir setzen  $I := \mathbb{K}(R), J := \mathbb{H}(R)$ . Dann gilt:*

- (i) *Falls  $R_k^\nu \leq R$  für ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ , so ist das torische Ideal  $J$  normal.*
- (ii) *Es gibt die Seiten  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)}$  und  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)}$  von  $\sigma^{(I)}$ . Ebenso gibt es die Seiten  $pos\{m^{(J)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(J)}$  und  $pos\{m^{(J)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$ . Dabei handelt es sich um Facetten.*
- (iii) *Es gibt einen Kegel-Isomorphismus  $\phi: (N^{(I)}, \sigma^{(I)}) \rightarrow (N^{(J)}, \sigma^{(J)})$ , unter dem die Seite  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)}$  auf die Seite  $pos\{m^{(J)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(J)}$  und die Seite  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)}$  auf die Seite  $pos\{m^{(J)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(J)}$  abgebildet wird.*

*Beweis.* (i): Aus 4.2.5(i) und 5.1.2 folgt, dass die Normalität von  $J$  äquivalent zur Normalität von  $I$  ist. Letztere wurde in 3.4.9 für den Fall  $R_k^\nu \leq R$  gezeigt.

(ii),(iii): Mit 3.4.3 erhalten wir eine Menge  $\mathcal{J}$  von Binomen, die  $K_{sing}$  erzeugen, welche kein nichtriviales Element der Form  $1 - X_{i_1}^{(j_1)} \dots X_{i_r}^{(j_r)}$  und kein nichtriviales Element der Form  $(X_1^{(o)})^l - X_{i_1}^{(j_1)} \dots X_{i_r}^{(j_r)}$  mit  $l \geq 0$  enthält. Wegen  $I \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max}) \stackrel{3.4.4}{=} K_{sing}$  folgt aus 4.2.6 daher, dass  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}$  eine Kante von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  ist. Gleiches folgt für  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}$ . Daher sind  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)}$  und  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)}$  Facetten von  $\sigma^{(I)}$ . Die übrigen Aussagen folgen nun aus 5.1.2.  $\square$

**Lemma 5.1.4.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Wir setzen  $J := \mathbb{H}(R)$ . Ist dann die Seite  $pos\{m^{(J)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$  glatt, so gibt es ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  mit  $R_k^\nu \leq R$ .*

*Beweis.* Wir können  $e \geq 4$  voraussetzen, da die Aussage für  $e = 3$  trivial ist (s. 3.4.1). Wir setzen  $\tau := pos\{m^{(J)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(J)}$ . Offenbar ist  $\tilde{I} := J + (1 - X_e^{(o)}) \subseteq \mathbb{A}(R)$  wieder ein torisches Ideal, für das offenbar  $\tau = \sigma^{(\tilde{I})}$  gilt. Weiter sei  $\mathbb{A}(R)_{(-X_e^{(o)})}$  der Polynomring in den Variablen  $\mathcal{VAR}(R) \setminus \{X_e^{(o)}\}$  über  $\mathbb{C}$  und  $I \subseteq \mathbb{A}(R)_{(-X_e^{(o)})}$  das Ideal, das aus  $\mathbb{H}(R)$  entsteht, wenn wir für jedes Element aus  $J$  die Variable  $X_e^{(o)}$  durch 1 ersetzen. Offenbar wird  $\mathcal{Z}(I)$  von den Zeilen derjenigen Matrix erzeugt, die aus der Matrix  $\mathbb{M}(R)$  durch Streichen der zu  $X_e^{(o)}$  gehörigen Spalte entsteht. Wir bezeichnen diese Matrix mit  $\mathbb{M}_{(-X_e^{(o)})}(R)$ . Der Rang von  $\mathbb{M}_{(-X_e^{(o)})}(R)$  ist wieder  $e-2$ . Da  $\tau = \sigma^{(\tilde{I})}$  nach Voraussetzung glatt ist, ist  $\tilde{I}$  normal und daher die Halbgruppe  $S^{(\tilde{I})}$  von  $M^{(\tilde{I})}$  nach 4.2.5(i) saturiert; außerdem folgt, dass  $(\sigma^{(\tilde{I})})^{\vee(\tilde{I})}$  glatt ist.

Ähnlich wie im Beweis von 5.1.2 sieht man, dass es einen Gitterisomorphismus  $M^{(\tilde{I})} \longrightarrow M^{(I)}$  gibt, der  $S^{(\tilde{I})}$  auf  $S^{(I)}$  abbildet. Folglich muss auch  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  glatt sein. Aus dem Rang von  $\mathbb{M}_{(-X_e^{([o]})})(R)$  folgt daher, dass es  $p := e - 2$  Variablen  $X_{i_1}^{([\mathbf{j}_1])}, \dots, X_{i_p}^{([\mathbf{j}_p])} \in \mathcal{VAR}(R) \setminus \{X_e^{([o])}\}$  geben muss, so dass es für jedes  $q \in \{1, \dots, p\}$  eine Gleichung der Form gibt:

$$m^{(I)}(X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])}) = \sum_{X_i^{([\mathbf{j}]}) \in \mathcal{VAR}(R) \setminus \{X_{i_1}^{([\mathbf{j}_1])}, \dots, X_{i_p}^{([\mathbf{j}_p])}, X_e^{([o])}\}} l_i^{(\mathbf{j})} m^{(I)}(X_i^{([\mathbf{j}]}) \quad \text{mit Koeffizienten } l_i^{(\mathbf{j})} \in \mathbb{N}_0.$$

Dabei gilt  $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, e - 2\}$ . Denn sonst müsste es in  $I$  ein (nichttriviales) Binom der Form  $X_{e-1}^{([\mathbf{j}])} - X_{n_1}^{([\mathbf{j}_1])} \dots X_{n_q}^{([\mathbf{j}_q])}$  geben und somit in  $J$  auch ein (nichttriviales) Binom der Form  $X_{e-1}^{([\mathbf{j}])} (X_e^{([o]})^l - X_{n_1}^{([\mathbf{j}_1])} \dots X_{n_q}^{([\mathbf{j}_q])})$  für ein  $l \geq 0$ . Dieses gibt es aber offenbar nicht.

Wir zeigen nun, dass  $1 \in \{i_1, \dots, i_p\}$  gilt. Wegen  $p = e - 2$  reicht es zu zeigen, dass es nicht zwei verschiedene  $q, q' \in \{1, \dots, p\}$  mit  $i_q = i_{q'}$  und  $X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} \not\sim_R X_{i_{q'}}^{([\mathbf{j}_{q'}])}$  geben kann.

Nehmen wir an, dies sei doch der Fall. Wir nehmen (ohne Einschränkung) an, dass dabei  $X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} \not\sim_R X_{i_q}^{([o])}$  gilt. Wir wählen nun  $\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{R}}$  so, dass

$$\mathcal{VAR}(\tilde{R}) \setminus \{X_e^{([o])}\} = \{X_1^{([o])}, X_2^{([o])}, \dots, X_{i_q-1}^{([o])}, X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])}, X_{i_q}^{([o])}, X_{i_q+1}^{([o])}, \dots, X_{e-1}^{([o])}\}$$

und  $X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} \sim_R X_i^{([\mathbf{j}])} \iff X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} \sim_{\tilde{R}} X_i^{([\mathbf{j}])}$  ( $\forall X_i^{([\mathbf{j}])} \in \mathcal{VAR} \setminus \{X_e^{([o])}\}$ ) gilt (dies impliziert  $R \leq \tilde{R}$ ) und definieren das Ideal  $L \subseteq \mathbb{A}(\tilde{R})_{(-X_e^{([o]})}$  analog zur Definition von  $I \subseteq \mathbb{A}(R)_{(-X_e^{([o]})}$  und die Matrix  $\mathbb{M}_{(-X_e^{([o]})}(\tilde{R})$  analog zur Definition von  $\mathbb{M}_{(-X_e^{([o]})}(R)$ . Aus der entsprechenden Gleichung für  $m^{(I)}(X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])})$  (s.o.) folgt, dass es eine Gleichung der Form

$$m^{(L)}(X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])}) = \sum_{X_i^{([\mathbf{j}])} \in \mathcal{VAR}(\tilde{R}) \setminus \{X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])}, X_e^{([o])}\}} l_i^{(\mathbf{j})} m^{(L)}(X_i^{([\mathbf{j}])}) \quad \text{mit Koeffizienten } l_i^{(\mathbf{j})} \in \mathbb{N}_0$$

gibt. Wir machen nun die folgende Fallunterscheidung:

- (1)  $X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} = X_{i_q}^{([t])}$ .
- (2)  $X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} \neq X_{i_q}^{([t])}$  ( $\implies X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} = X_{i_q}^{([j])}$  für ein  $j \in \{1, \dots, a_{i_q} - 1\}$ ).

Im Fall (1) hat die Matrix  $\mathbb{M}_{(-X_e^{([o]})}(\tilde{R})$  die Form

$$\begin{array}{cccccccccccc} X_1^{([o])} & X_2^{([o])} & X_3^{([o])} & \dots & X_{i_q-1}^{([o])} & X_{i_q}^{([\mathbf{j}_q])} & X_{i_q}^{([o])} & X_{i_q+1}^{([o])} & \dots & X_{e-3}^{([o])} & X_{e-2}^{([o])} & X_{e-1}^{([o])} \\ 1 & -f_2 & 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & -f_3 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & -f_{i_q-1} & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & -g_{i_q} & -f_{i_q} & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & -f_{i_q+1} & & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & -f_{e-3} & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & -f_{e-2} & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 & -f_{e-1} & \end{array}$$



Aus 1.1.1 folgt, dass es für  $q = 1, \dots, l-1$  je eine Nullkette  $(k_2^{(q)}, \dots, k_{r_q-1}^{(q)})$  gibt mit  $k_2^{(q)} \leq f_2^{(q)}, \dots, k_{r_q-1}^{(q)} \leq f_{r_q-1}^{(q)}$ . Aus 1.1.2 folgt weiter, dass auch

$$k := (k_2^{(1)}, \dots, k_{r_1-2}^{(1)}, k_{r_1-1}^{(1)} + k_2^{(2)}, k_3^{(2)}, \dots, k_{r_{l-2}-2}^{(l-2)}, k_{r_{l-2}-1}^{(l-2)} + k_2^{(l-1)}, k_3^{(l-1)}, \dots, k_{r_{l-1}-1}^{(l-1)})$$

eine Nullkette ist, und zwar mit

$$\alpha_{d_{(q+1)-1}} = k_{r_q-1}^{(q)}, \alpha_{d_{(q+1)}} = 1, \alpha_{d_{(q+1)+1}} = k_2^{(q+1)} \quad \forall q \in \{1, \dots, l-2\}.$$

Aufgrund von  $k_2^{(q)} \leq f_2^{(q)}, \dots, k_{r_q-1}^{(q)} \leq f_{r_q-1}^{(q)}$  für  $q = 1, \dots, l-1$  (und des Zusammenhangs zwischen den  $f_i^{(j)}$  und der Äquivalenzrelation  $R$ ) folgt, dass für die Äquivalenzrelation  $R$  gilt:

a) Für  $i = 2$  und  $i = e-1$ :

Es gilt  $X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)}$  für mindestens  $k_i - 1$  Elemente  $j_1, \dots, j_r$  aus  $\{1, \dots, a_i - 1\}$ .

b) Für  $i \in \{d_2, \dots, d_{l-1}\}$ :

Es gilt  $X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)}, X_i^{(l_1)} \sim X_i^{(t)}, \dots, X_i^{(l_s)} \sim X_i^{(t)}$  für mindestens  $\alpha_{i+1}$  Elemente  $j_1, \dots, j_r$  aus  $\{1, \dots, a_i - 1\}$  und mindestens  $\alpha_{i-1} - 1$  weitere<sup>2</sup> Elemente  $l_1, \dots, l_s$  aus  $\{1, \dots, a_i - 1\}$ .

c) Für  $3 \leq i \leq e-2$  mit  $i \notin \{d_2, \dots, d_{l-1}\}$ :

Es gilt  $X_i^{(j_1)} \sim X_i^{(o)}, \dots, X_i^{(j_r)} \sim X_i^{(o)}, X_i^{(t)} \sim X_i^{(o)}$  für mindestens  $k_i - 1$  Elemente  $j_1, \dots, j_r$  aus  $\{1, \dots, a_i - 1\}$ .

Ein Vergleich mit 3.4.1 zeigt nun die Aussage (wobei auch zu beachten ist, dass aus  $\alpha_i = 1$  folgt, dass  $\alpha_{i+1} + (\alpha_{i-1} - 1) = k_i \alpha_i - 1 = k_i - 1$  gilt).  $\square$

## 5.2 Einführung des Kegelsystems $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$

Wir setzen für den Rest dieses Kapitels  $L := N^{\mathbb{K}(R_{min})}$ .

**Definition 5.2.1.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Wir setzen*

$$\chi := \sigma^{\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})} \quad \text{und} \quad \sigma_k^\nu := \sigma^{\mathbb{K}(R_k^\nu)} \quad \forall (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}.$$

*Dabei handelt es sich definitionsgemäß um einen  $N^{\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})}$ -Kegel bzw. um  $N^{\mathbb{K}(R_k^\nu)}$ -Kegel. Wir fassen diese Kegel jedoch nun als  $L$ -Kegel auf: Die Gitter  $N^{\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})}$  und  $N^{\mathbb{K}(R_k^\nu)}$  sind nach Konstruktion Teilgitter von  $N^{\mathbb{K}(R_{min})} = L$ , was Inklusionen  $N_{\mathbb{R}}^{\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})} \hookrightarrow L_{\mathbb{R}}$  bzw.  $N_{\mathbb{R}}^{\mathbb{K}(R_k^\nu)} \hookrightarrow L_{\mathbb{R}}$  induziert; wir fassen die Kegel als die Bilder unter diesen Inklusionen auf.*

*Mit  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  bezeichnen wir das System, welches aus den  $L$ -Kegeln  $\chi$  und  $\sigma_k^\nu$  (für alle  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ ) besteht.*

*Weiter bezeichnen wir zu diesem System mit  $\sigma_A := \bigcap_{(k, \nu) \in A} \sigma_k^\nu$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  die Durchschnitte der Kegel  $\sigma_k^\nu$ . Die durch die Inklusionen in  $L$  gegebenen Kegelmorphismen  $(L_{(\sigma_A)}, \sigma_A) \hookrightarrow (L_{(\sigma_B)}, \sigma_B)$  für  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  bzw.  $(L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_{(\sigma_A)}, \sigma_A)$  für  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  bezeichnen wir mit  $\phi_{A,B}$  bzw.  $\psi_A$ . Den Fixpunkt von  $X_{L_\chi, \chi}$  bezeichnen wir mit  $f_\chi$  und den Fixpunkt von  $X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A}$  bezeichnen wir mit  $f_{(\sigma_A)}$ .<sup>3</sup>*

<sup>2</sup> "weitere" im Sinne von "andere", also  $\{j_1, \dots, j_r\} \cap \{l_1, \dots, l_s\} = \emptyset$ .

<sup>3</sup>Die Existenz dieser Fixpunkte wird sogleich in 5.2.3 gezeigt.

*Beispiel:* Betrachten wir unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$ . Entsprechend den auftretenden Variablen  $\mathcal{VAR} = \{X_1^{(o)}, X_2^{(o)}, X_2^{(1)}, X_3^{(o)}, X_3^{(t)}, X_3^{(1)}, X_3^{(2)}, X_4^{(o)}, X_4^{(1)}, X_5^{(o)}\}$  bezeichnen wir die Koordinaten von  $\mathbb{Z}^{10}$  mit  $z_1^{(o)}, z_2^{(o)}, z_2^{(1)}, z_3^{(o)}, z_3^{(t)}, z_3^{(1)}, z_3^{(2)}, z_4^{(o)}, z_4^{(1)}, z_5^{(o)}$ . Aus den Binomen

$$H_{1,3} = X_1^{(o)} X_3^{(t)} - X_2^{(o)} X_2^{(1)}, \quad H_{2,4} = X_2^{(o)} X_4^{(o)} - X_3^{(t)} X_3^{(1)} X_3^{(2)}, \quad H_{3,5} = X_3^{(o)} X_5^{(o)} - X_4^{(o)} X_4^{(1)}$$

folgt

$$L = \{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{10}; z_1^{(o)} + z_3^{(t)} = z_2^{(o)} + z_2^{(1)}, z_2^{(o)} + z_4^{(o)} = z_3^{(t)} + z_3^{(1)} + z_3^{(2)}, z_3^{(o)} + z_5^{(o)} = z_4^{(o)} + z_4^{(1)}\}.$$

Der  $L$ -Kegel  $\chi$  ist dann gegeben durch

$$\chi \cap L = \{\mathbf{z} \in L; z_2^{(1)} = z_2^{(o)}, z_3^{(1)} = z_3^{(2)} = z_3^{(t)} = z_3^{(o)}, z_4^{(1)} = z_4^{(o)}\} \cap \mathbb{N}_0^{10}.$$

Die drei Kegel  $\sigma_k^\nu$  sind gegeben durch (s. Abschnitt 3.4)

$$\sigma_k^\nu \cap L = \{\mathbf{z} \in L; z_3^{(1)} = z_3^{(o)}\} \cap \mathbb{N}_0^{10}$$

bzw.

$$\sigma_k^\nu \cap L = \{\mathbf{z} \in L; z_3^{(2)} = z_3^{(o)}\} \cap \mathbb{N}_0^{10}$$

bzw.

$$\sigma_k^\nu \cap L = \{\mathbf{z} \in L; z_2^{(1)} = z_2^{(o)}, z_3^{(t)} = z_3^{(o)}, z_4^{(1)} = z_4^{(o)}\} \cap \mathbb{N}_0^{10}.$$

**Bemerkung 5.2.2.** Bezeichnet  $\mathfrak{H}_{a_i-1}$  die Gruppe aller Automorphismen  $h \in \text{Aut}(L_{\mathbb{R}})$  mit

$$h(z_i^{(o)}) = z_i^{(o)}, \quad h(z_i^{(t)}) = z_i^{(t)} \text{ (falls } i \in \{3, \dots, e-2\}), \quad h(\{z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(a_i-1)}\}) = \{z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(a_i-1)}\},$$

so ist das direkte Produkt  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{H}_{a_i-1}$  isomorph zum direkten Produkt  $\prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i-1}$  der Permutationsgruppen  $\mathfrak{S}_{a_i-1}$  (vergl. Abschnitt 2.1). Die Gruppenaktion

$$\left( \prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{H}_{a_i-1} \right) \times \{\sigma_k^\nu; (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}\} \longrightarrow \{\sigma_k^\nu; (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}\}, \quad (h, \sigma_k^\nu) \mapsto h(\sigma_k^\nu)$$

entspricht in kanonischer Weise der Gruppenaktion

$$\left( \prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_i-1} \right) \times \{T_k^\nu; (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}\} \longrightarrow \{T_k^\nu; (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}\}, \quad (g, T_k^\nu) \mapsto gT_k^\nu.$$

Es gilt  $h(\chi) = \chi$  für alle  $h \in \prod_{i=2}^{e-1} \mathfrak{H}_{a_i-1}$ . Fixiert man ein  $\sigma_{k'}^\nu$ , so erhält man als Translate unter der obigen Gruppenaktion genau die Elemente aus  $\{\sigma_k^\nu; (k, \nu) \in \mathcal{KOMP}, k = k'\}$ .

**Satz 5.2.3.** Für das Kegelsystem  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  gilt:

(i) Es gibt torische Isomorphismen

$$\xi : Z_{\text{sing}} \longrightarrow X_{L_\chi, \chi} \quad \text{und} \quad \zeta_A : Z_A \longrightarrow X_{L_{(\sigma_A)}, \sigma_A} \quad \text{für } \emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$$

mit  $\xi(0) = f_\chi$  bzw.  $\zeta_A(0) = f_{(\sigma_A)}$ , gegeben durch die Abbildungen  $\varphi_G$  für  $G := \mathbb{K}(\tilde{R}_{\max})$  bzw.  $\varphi_I$  für  $I := \mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in A} R_k^\nu)$  nach 4.3.4(i).

(ii) Die folgenden Diagramme kommutieren. Dabei sei  $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im ersten Diagramm und  $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{KOMP}$  im zweiten Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} Z_A & \xrightarrow{\zeta_A} & X_{L(\sigma_A), \sigma_A} \\ \downarrow \Phi_{A,B} & & \downarrow T(\phi_{A,B}) \\ Z_B & \xrightarrow{\zeta_B} & X_{L(\sigma_B), \sigma_B} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z_{sing} & \xrightarrow{\xi} & X_{L_{\chi, \chi}} \\ \downarrow \Psi_A & & \downarrow T(\psi_A) \\ Z_A & \xrightarrow{\zeta_A} & X_{L(\sigma_A), \sigma_A} \end{array}$$

*Beweis.* (i) Nach 4.3.4(i) gibt es torische Isomorphismen

$$\varphi_G : \mathcal{V}(G) \longrightarrow X_{N(G), \sigma(G)}, \quad \varphi_I : \mathcal{V}(I) \longrightarrow X_{N(I), \sigma(I)}.$$

Es gilt  $\mathcal{V}(G) \stackrel{3.4.4}{=} \mathcal{V}(K_{sing}) \stackrel{Def.3.1.1}{=} Z_{sing}$  und  $\mathcal{V}(I) \stackrel{3.4.7}{=} \mathcal{V}(\sqrt{\sum_{(k, \nu) \in A} K_k^\nu}) \stackrel{Def.3.1.1}{=} Z_A$ . Wie man an den Erzeugern von  $G \stackrel{3.4.4}{=} K_{sing}$  und von  $K_k^\nu$  (für  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$ ) sieht, gilt  $0 \in \mathcal{V}(G)$  und  $0 \in \mathcal{V}(I)$ . Aus 4.3.15 folgt daher  $N^{(G)} = (N^{(G)})_{\sigma(G)}$  und  $N^{(I)} = (N^{(I)})_{\sigma(I)}$ . Da  $N^{(G)}$  und  $N^{(I)}$  Teilgitter von  $L$  sind, folgt weiter  $(N^{(G)})_{\sigma(G)} = L_{\sigma(G)}$  und  $(N^{(I)})_{\sigma(I)} = L_{\sigma(I)}$ . Da  $\chi = \sigma^{(G)}$  nach Definition und offenbar  $\sigma_A \stackrel{Def.}{=} \bigcap_{(k, \nu) \in A} \sigma^{(\mathbb{K}(R_k^\nu))} = \sigma^{(I)}$  gilt, folgt die Behauptung aus 4.3.4(i).

(ii) Es sei  $J := \mathbb{K}(\sum_{(k, \nu) \in B} R_k^\nu)$ . Dann ist  $I$  eine Projektion von  $J$ . Ebenso ist  $G$  eine Projektion von  $I$ . Die Diagramme folgen daher aus 4.3.4(ii) und den Argumenten aus (i).  $\square$

### 5.3 Geometrische Konstruktion von $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$

Wir geben in diesem Abschnitt eine geometrische Methode an, mit der sich alle  $L$ -Kegel  $\sigma_k^\nu$  (mit  $L$  wie im letzten Abschnitt) des Systems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  aus nur zwei  $L$ -Kegeln berechnen lassen, nämlich aus dem bereits eingeführten  $L$ -Kegel  $\chi$  und einem gewissen weiteren  $L$ -Kegel  $\rho$ . Wir definieren diese beiden Kegel zunächst als ein System, welches wir als  $\Sigma_{(\chi, \rho)}$  bezeichnen:

**Definition 5.3.1.** *Es sei  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben. Wir definieren den  $L$ -Kegel  $\rho := \sigma^{(\mathbb{K}(R_{min}))}$  und bezeichnen mit  $\Sigma_{(\chi, \rho)}$  das System, welches aus den beiden  $L$ -Kegeln  $\chi$  und  $\rho$  besteht.*

*Beispiel:* Betrachten wir wieder unser Beispiel  $X(2, 3, 2)$ . Mit den Bezeichnungen und dem Gitter  $L$  aus dem Beispiel im letzten Abschnitt sind die  $L$ -Kegel  $\rho$  und  $\chi$  gegeben durch

$$\rho \cap L = L \cap \mathbb{N}_0^{10} \quad \text{sowie} \quad \chi \cap L = \{\mathbf{z} \in L; z_2^{(1)} = z_2^{(o)}, z_3^{(1)} = z_3^{(2)} = z_3^{(t)} = z_3^{(o)}, z_4^{(1)} = z_4^{(o)}\} \cap \mathbb{N}_0^{10}.$$

Wir geben nun - wie angekündigt - eine Konstruktionsmethode von  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  aus  $\Sigma_{(\chi, \rho)}$  an:

**Satz 5.3.2.** *Wir gehen aus von dem System  $\Sigma_{(\chi, \rho)}$ . Es seien  $m_1, \dots, m_t \in L^*$  die primitiven Erzeuger der Kanten von  $\rho^\vee \subseteq (L^*)_{\mathbb{R}}$ . Es sei  $\mathcal{U}$  die Menge aller Teilräume von  $L_{\mathbb{R}}$  der Form*

$$U(R) := \{v \in L_{\mathbb{R}}; \langle v, m - m' \rangle = 0 \text{ für alle Paare } m, m' \in \{m_1, \dots, m_t\} \text{ mit } m \sim_R m'\}$$

*mit einer Äquivalenzrelation  $R$  auf  $\{m_1, \dots, m_t\}$ .*

*Die beiden Kanten von  $\chi$  liegen jeweils in genau einer Facette von  $\rho$  und wir bezeichnen diese (verschiedenen) Facetten mit  $f_1, f_2$ . Wir betrachten die folgende Teilmenge  $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ :*

$$\tilde{\mathcal{U}} := \{U \in \mathcal{U}; \text{Es gilt } \chi \subseteq U \text{ und } U \cap f_1, U \cap f_2 \text{ sind glatt}\}$$

*Dann sind die (bezüglich Inklusion in  $L_{\mathbb{R}}$ ) maximalen Elemente aus  $\tilde{\mathcal{U}}$  genau diejenigen Teilräume von  $L_{\mathbb{R}}$ , deren Durchschnitte mit  $\rho$  die Kegel  $\sigma_k^\nu$  von  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  ergeben.*

*Beweis.* Die Aussage folgt aus den folgenden vier Lemmata 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5 und 5.3.6 mit  $I := \mathbb{K}(R_{min})$  und mit dem kanonischen Gitterisomorphismus  $\varepsilon : L^* \longrightarrow M^{(I)}$ : Nach 5.3.3 gilt  $\varepsilon(\{m_1, \dots, m_t\}) = \{m^{(I)}(X_i^{(j)}); X_i^{(j)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}\}$ . Mit der Bezeichnung  $\tilde{U}(R)$  aus 5.3.4 gilt offenbar  $\tilde{U}(\tilde{R}_{max}) = \text{lin } \chi$ . Daher folgt aus 5.3.4 für jedes  $U(R) \in \mathcal{U}$ :  $R \in \tilde{\mathcal{R}} \iff \chi \subseteq U(R)$ . Schließlich folgt die Glattheits- und Maximalitätsaussage aus 5.3.5 und 5.3.6.  $\square$

Der Rest dieses Abschnitts besteht nun darin, die im Beweis von 5.3.2 verwendeten Lemmata zu beweisen. Wie im Beweis gesagt, setzen wir  $I := \mathbb{K}(R_{min})$  und bezeichnen mit  $\varepsilon : L^* \longrightarrow M^{(I)}$  den kanonischen Gitterisomorphismus (s. 4.2.4(i)).

**Lemma 5.3.3.** *Es gilt  $\varepsilon(\{m_1, \dots, m_t\}) = \{m^{(I)}(X_i^{(j)}); X_i^{(j)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}\}$ .*

*Beweis.* Es sei  $E := \varepsilon(\{m_1, \dots, m_t\})$ . Diese Menge besteht genau aus den primitiven Erzeugern der Kanten von  $\rho^{V(I)}$ . Die Inklusion  $E \subseteq \{m^{(I)}(X_i^{(j)}); X_i^{(j)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}\}$  folgt daraus, dass die  $m^{(I)}(X_i^{(j)})$  definitionsgemäß die Halbgruppe  $S^{(I)} \stackrel{5.1}{=} \rho^{V(I)} \cap M^{(I)}$  erzeugen. Wäre diese Inklusion echt, gäbe es also ein  $X_{i_0}^{(j_0)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}$  mit  $m^{(I)}(X_{i_0}^{(j_0)}) \in \{m^{(I)}(X_i^{(j)}); X_i^{(j)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}\} \setminus E$ , so gäbe es eine Gleichung der Form  $lm^{(I)}(X_{i_0}^{(j_0)}) = \sum_{X_i^{(j)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_{i_0}^{(j_0)}\}} l_i^{(j)} m^{(I)}(X_i^{(j)})$  für ein ganzzahliges  $l \geq 1$  und gewisse nichtnegative ganzzahlige  $l_i^{(j)}$ . Dann gäbe es einen Vektor in  $\mathcal{Z}(\mathbb{K}(R_{min}))$  mit genau einem positiven Eintrag. Man sieht jedoch leicht, dass es einen solchen nicht gibt.  $\square$

**Lemma 5.3.4.** *Für jedes  $R \in \mathcal{R}$  sei der Teilraum  $\tilde{U}(R) \subseteq L_{\mathbb{R}}$  definiert durch*

$$\begin{aligned} \tilde{U}(R) := \{ & v \in L_{\mathbb{R}}; \langle v, m^{(I)}(X_{i_1}^{(j_1)}) - m^{(I)}(X_{i_2}^{(j_2)}) \rangle_{(I)} = 0 \\ & \text{für alle Paare } X_{i_1}^{(j_1)}, X_{i_2}^{(j_2)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \text{ mit } X_{i_1}^{(j_1)} \sim_R X_{i_2}^{(j_2)} \}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$R \in \tilde{\mathcal{R}} \iff \tilde{U}(\tilde{R}_{max}) \subseteq \tilde{U}(R).$$

*Beweis.* Mit

$$\tilde{V}(R) := \sum_{X_{i_1}^{(j_1)} \sim_R X_{i_2}^{(j_2)}} \mathbb{Z} \cdot (m^{(I)}(X_{i_1}^{(j_1)}) - m^{(I)}(X_{i_2}^{(j_2)})) \subseteq M^{(I)}$$

ist die Aussage äquivalent zur Aussage

$$R \in \tilde{\mathcal{R}} \iff \tilde{V}(\tilde{R}_{max}) \supseteq \tilde{V}(R).$$

Also zeigen wir nun diese. Die Implikation “ $\implies$ ” ist klar, da  $R \leq \tilde{R}_{max}$  für  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$ . Gilt umgekehrt  $R \notin \tilde{\mathcal{R}}$ , so gibt es  $X_{i_1}^{(j_1)}, X_{i_2}^{(j_2)} \in \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}$  mit  $X_{i_1}^{(j_1)} \sim_R X_{i_2}^{(j_2)}$  und  $i_1 \neq i_2$ . Dies liefert das Element  $m^{(I)}(X_{i_1}^{(j_1)}) - m^{(I)}(X_{i_2}^{(j_2)}) \in \tilde{V}(R)$ , das aber nicht in  $\tilde{V}(\tilde{R}_{max})$  enthalten sein kann: Denn sonst würde  $m^{(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))}(X_{i_1}^{(j_1)}) = m^{(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))}(X_{i_2}^{(j_2)})$  folgen und wegen  $m^{(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))}(X_i^{(j)}) = m^{(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))}(X_{i'}^{(j')})$  für alle  $X_i^{(j)}, X_{i'}^{(j')}$  mit  $i = i'$  würde weiter folgen, dass  $S^{(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))}$  von weniger als  $e$  Elementen erzeugt wird.  $\square$

**Lemma 5.3.5.** *Die beiden Kanten von  $\chi$  liegen jeweils in genau einer echten Seite von  $\rho$ . Bei diesen Seiten handelt es sich um die Facetten  $\text{pos}\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)}$  und  $\text{pos}\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)}$ .*

*Beweis.* Man sieht leicht mit 4.3.9, dass  $\mathcal{S}^{\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})}$  aus den vier Elementen  $\emptyset, \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_1^{(o)}\}, \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_e^{(o)}\}, \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R}$  besteht. Aufgrund von 4.3.8(ii) ist dann klar, dass für die beiden Kanten  $\tau_1, \tau_2$  von  $\chi$  entweder  $y_{\tau_1} = \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_1^{(o)}\}$  und  $y_{\tau_2} = \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_e^{(o)}\}$  oder  $y_{\tau_1} = \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_e^{(o)}\}$  und  $y_{\tau_2} = \mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_1^{(o)}\}$  gelten muss. Offenbar sind  $\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_1^{(o)}\}$  und  $\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{R} \setminus \{X_e^{(o)}\}$  zugleich Elemente von  $\mathcal{S}^{(I)}$ . Die Aussage folgt dann aus 4.3.11, indem man die Projektion  $\mathbb{K}(R_{min}) \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  betrachtet.  $\square$

**Lemma 5.3.6.** *Mit  $\tilde{U}(R)$  wie in 5.3.4 sind für  $R \in \tilde{\mathcal{R}}$  äquivalent:*

(a) *Es gibt ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  mit  $R_k^\nu \leq R$ .*

(b) *Die Seiten  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)} \cap \tilde{U}(R)$  und  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)} \cap \tilde{U}(R)$  sind glatt.*

*Beweis.* Zunächst setzen wir  $G := \mathbb{K}(R)$ . Aus der Konstruktion von  $\tilde{U}(R)$  folgt dann  $pos\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)} \cap \tilde{U}(R) = pos\{m^{(G)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(G)}$  und  $pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)} \cap \tilde{U}(R) = pos\{m^{(G)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(G)}$ .

(a)  $\implies$  (b) Nach 3.4.9 sind  $G$  und  $\mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  normale torische Ideale. Weiter folgt aus 3.4.6, dass es Binome der Form

$$b_1 = X_{i_1}^{(j_1)} - X_{i_1}^{(j'_1)}, \dots, b_s = X_{i_s}^{(j_s)} - X_{i_s}^{(j'_s)}, \quad i_1, \dots, i_s \in \{2, \dots, e-1\}$$

mit  $\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}) \stackrel{3.4.4}{=} K_{sing} = G + (b_1, \dots, b_s)$  gibt. Nehmen wir an, dass dieses System minimal ist, so gilt offenbar  $s = rg(\mathcal{Z}(\mathbb{K}(\tilde{R}_{max}))) - rg(\mathcal{Z}(G))$ . Weiter gilt

$$m^{(G)}(X_{i_t}^{(j_t)}) \notin pos\{m^{(G)}(X_1^{(o)})\} \text{ und } m^{(G)}(X_{i_t}^{(j'_t)}) \notin pos\{m^{(G)}(X_1^{(o)})\} \text{ für alle } t \in \{1, \dots, s\}$$

sowie

$$m^{(G)}(X_{i_t}^{(j_t)}) \notin pos\{m^{(G)}(X_e^{(o)})\} \text{ und } m^{(G)}(X_{i_t}^{(j'_t)}) \notin pos\{m^{(G)}(X_e^{(o)})\} \text{ für alle } t \in \{1, \dots, s\}.$$

Daher folgt die Aussage aus 4.3.5, indem man die Projektion  $G \subseteq \mathbb{K}(\tilde{R}_{max})$  betrachtet.

(b)  $\implies$  (a): Nach Voraussetzung ist  $pos\{m^{(G)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(G)} = pos\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)} \cap \tilde{U}(R)$  glatt. Mit  $J := \mathbb{H}(R)$  folgt dann aus 5.1.3(iii), dass  $pos\{m^{(J)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(J)}$  glatt ist. Nun folgt (a) aus 5.1.4.  $\square$

## 6 Die Kegel der Komponenten

In diesem Kapitel beschreiben wir die Kegel  $\sigma_k^\nu$  des Systems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  genauer. In Abschnitt 6.1 wird eine qualitative Beschreibung angegeben. Das Haupttheorem 6.1.1 wird in Abschnitt 6.2 bewiesen. In Abschnitt 6.3 schließen wir mit einem kleinen Dualitäts-Ergebnis.

### 6.1 Qualitative Beschreibung der Kegel $\sigma_k^\nu$

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass wir in diesem Abschnitt (gelegentlich) die Bezeichnung  $\langle \tau_1, \dots, \tau_s \rangle$  für eine Seite  $\tau$  verwenden, falls  $\tau_1, \dots, \tau_s$  die Kanten von  $\tau$  sind.

Wir formulieren nun eine Beschreibung für einen Kegel  $\sigma_k^\nu$  mittels der entsprechenden Nullkette  $k = (k_2, \dots, k_{e-1})$  und zugehörigen Folge  $(\alpha_1, \dots, \alpha_e)$ .

**Satz 6.1.1.** *Zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  fixieren wir einen Kegel  $\sigma := \sigma_k^\nu$  des Kegelsystems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$ . Dann sind für die Kanten von  $\sigma$  die im Folgenden angegebenen Bezeichnungen  $A_\bullet^\bullet, B_\bullet^\bullet, C_{\bullet, \bullet}$  möglich, so dass die anschließend gemachte Aussage über den Seitenverband von  $\sigma$ , die Dimensionen der Seiten, die Multiplizitäten der simplizialen Seiten sowie über die Inklusion  $(L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_\sigma, \sigma)$  des Kegelsystems gilt.*

Die Kanten von  $\sigma$  sind:

$$A_2^1, \dots, A_2^{a_2 - k_2}, \dots, A_{e-1}^1, \dots, A_{e-1}^{a_{e-1} - k_{e-1}},$$

$$B_2^1, \dots, B_2^{a_2 - k_2}, \dots, B_{e-1}^1, \dots, B_{e-1}^{a_{e-1} - k_{e-1}},$$

$C_{d_1, d_2}, C_{d_2, d_3}, \dots, C_{d_{l-1}, d_l}$ , wobei  $2 = d_1 < d_2 < \dots < d_l = e - 1$  und es sich hierbei um genau die Indizes  $i$  von  $\alpha$  mit  $\alpha_i = 1$  handelt.<sup>1</sup>

Es sei  $F$  eine Teilmenge der Menge dieser Kanten. Dann spannen die Elemente aus  $F$  genau dann eine Seite von  $\sigma$  auf, wenn die folgenden Bedingungen 1), 2), 3) gelten.

- 1) Sei  $i \in \{2, \dots, e - 1\}$ . Gilt dann  $A_i^{j_1}, B_i^{j_2} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$  und ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$ , so folgt  $A_i^j \in F \Leftrightarrow B_i^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_i - k_i$ .
- 2) Seien  $i_1, i_2 \in \{2, \dots, e - 1\}$ . Gilt dann  $A_{i_1}^{j_1} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}\}$  und  $B_{i_2}^{j_2} \in F$  für ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}\}$  und gibt es weiter  $r, s \in \{1, \dots, l\}$  mit  $d_r \leq \min\{i_1, i_2\}, \max\{i_1, i_2\} \leq d_s$ , so dass  $C_{d_r, d_{r+1}}, C_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, C_{d_{s-2}, d_{s-1}}, C_{d_{s-1}, d_s} \in F$ , so folgt  $A_{i_1}^j \in F \Leftrightarrow B_{i_1}^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}$  und  $A_{i_2}^j \in F \Leftrightarrow B_{i_2}^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}$ .
- 3) Seien  $i_1, i_2 \in \{2, \dots, e - 1\}$ . Gilt dann  $A_{i_1}^{j_1} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}\}$  und  $B_{i_2}^{j_2} \in F$  für ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}\}$  und gibt es nicht  $r, s \in \{1, \dots, l\}$  mit  $d_r \leq \min\{i_1, i_2\}, \max\{i_1, i_2\} \leq d_s$ , so dass  $C_{d_r, d_{r+1}}, C_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, C_{d_{s-2}, d_{s-1}}, C_{d_{s-1}, d_s} \in F$ , so folgt  $i_1 \leq i_2$ .

<sup>1</sup>Im Fall  $e = 3$  gibt es keine Kante der Form  $C_{\bullet, \bullet}$ .

Die Dimension einer Seite  $\tau$  von  $\sigma$  berechnet sich folgendermaßen:

Es seien  $i_1, \dots, i_r \in \{2, \dots, e-1\}$  so gewählt, dass  $i_1 < i_2 < \dots < i_{r-1} < i_r$  und für alle  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  gilt:  $i \in \{i_1, \dots, i_r\} \Leftrightarrow \exists j_1, j_2 \in \{1, \dots, a_i - k_i\} : A_i^{j_1} \preceq \tau, B_i^{j_2} \preceq \tau$ .

Zu jedem  $s \in \{1, \dots, r\}$  sei dann  $i'_s$  die Anzahl der  $A_{i_s}^j \preceq \tau$  bzw.  $B_{i_s}^j \preceq \tau$  (welche nach 1) gleich ist). Weiter sei  $t$  die Anzahl der weiteren Kanten von  $\tau$ .<sup>2</sup> Dann gilt für die Dimension von  $\tau$ :

$$\dim(\tau) = \left( \sum_{s=1}^r i'_s \right) + t + 1, \text{ falls } r \geq 1; \quad \dim(\tau) = t, \text{ falls } r = 0.$$

Die Multiplizität einer simplizialen Seite  $\tau$  von  $\sigma$  ergibt sich folgendermaßen:

Aus der soeben gemachten Dimensions-Aussage folgt, dass  $\tau$  (im simplizialen Fall) höchstens eine Seite der Form  $\langle A_i^j, B_i^j, C_{d_r, d_{r+1}} \rangle$  mit einem  $i \in \{2, \dots, e-1\}$ , einem  $j \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$  und einem  $r \in \{1, \dots, l-1\}$  mit  $d_r \leq i \leq d_{r+1}$  besitzt.<sup>3</sup> Liegt eine solche Seite von  $\tau$  tatsächlich vor, so gilt  $\text{mult}(\tau) = \alpha_i$ ; anderenfalls gilt  $\text{mult}(\tau) = 1$ .

Für die Inklusion  $(L_\chi, \chi) \hookrightarrow (L_\sigma, \sigma)$  des Kegelsystems gilt:

Die beiden Kanten von  $\chi$  liegen jeweils in genau einer echten Seite von  $\sigma$ . Dabei handelt es sich zum Einen um die Facette, die von allen Kanten der Form  $A_\bullet^j$  und  $C_{\bullet, \bullet}$  aufgespannt wird und zum Anderen um die Facette, die von allen Kanten der Form  $B_\bullet^j$  und  $C_{\bullet, \bullet}$  aufgespannt wird.

Als unmittelbare Folgerungen ergeben sich:

### Satz 6.1.2.

- (i) Für die Dimension von  $\sigma_k^\nu$  gilt  $\dim(\sigma_k^\nu) = \sum_{i=2}^{e-1} (a_i - k_i) + \#\{i \in \{2, \dots, e-1\}; \alpha_i = 1\}$ .
- (ii) Die Anzahl der Kanten von  $\sigma_k^\nu$  beträgt  $2 \cdot \sum_{i=2}^{e-1} (a_i - k_i) + \#\{i \in \{2, \dots, e-1\}; \alpha_i = 1\} - 1$ .

*Beweis.* (i) Wegen  $a_2 \geq 2, \dots, a_{e-1} \geq 2$  und  $k_i = 1$  für mindestens ein  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  liegt der Fall “ $r \geq 1$ ” in der in 6.1.1 angegebenen Dimensionsberechnung vor. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen gilt  $\sum_{s=1}^r i'_s = \sum_{i=2}^{e-1} (a_i - k_i)$  und  $t = \#\{i \in \{2, \dots, e-1\}; \alpha_i = 1\} - 1$ , da in diesem Fall die “weiteren Kanten” genau die Kanten  $C_{d_1, d_2}, C_{d_2, d_3}, \dots, C_{d_{l-1}, d_l}$  sind.

(ii) ist klar. □

Als Beispiel betrachten wir nun die Seiten der Kegel  $\sigma_k^\nu$  des Systems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  zu unserem Beispiel  $X(2, 3, 2)$  und erschließen einige Aussagen über die Singularitäten der Räume  $\mathcal{Y}_k^\nu$ .

<sup>2</sup>Die “weiteren Kanten von  $\tau$ ” sind die Kanten der Form  $C_{\bullet, \bullet}$ , jede Kante der Form  $A_i^j$  falls  $B_i^j \not\preceq \tau$ , sowie jede Kante der Form  $B_i^j$  falls  $A_i^j \not\preceq \tau$ .

<sup>3</sup>Man sieht nämlich leicht, dass in der angegebenen Dimensionsberechnung  $\sum_{s=1}^r i'_s \leq 1$  gelten muss.

Ein Kegel  $\sigma_k^\nu$  unseres Beispiels zu einer der beiden Komponenten mit  $k = (1, 2, 1)$  hat nach 6.1.2(i) die Dimension 6 und besitzt nach 6.1.1 folgende Seiten:

Die eindimensionalen Seiten (also die Kanten) sind:

$$A_2^1, A_3^1, A_4^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4}.$$

Die zweidimensionalen Seiten sind:

$$\begin{aligned} &\langle A_2^1, A_3^1 \rangle, \langle A_2^1, A_4^1 \rangle, \langle A_3^1, A_4^1 \rangle, \langle B_2^1, B_3^1 \rangle, \langle B_2^1, B_4^1 \rangle, \langle B_3^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1 \rangle, \langle A_3^1, B_3^1 \rangle, \langle A_4^1, B_4^1 \rangle, \langle A_2^1, B_3^1 \rangle, \langle A_2^1, B_4^1 \rangle, \langle A_3^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle B_2^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_2^1, C_{3,4} \rangle, \langle B_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle C_{2,3}, C_{3,4} \rangle. \end{aligned}$$

Die dreidimensionalen Seiten sind:

$$\begin{aligned} &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1 \rangle, \langle B_2^1, B_3^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, B_3^1 \rangle, \langle A_2^1, A_3^1, B_4^1 \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, B_4^1 \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1, B_3^1 \rangle, \langle A_2^1, B_2^1, B_4^1 \rangle, \langle A_2^1, B_3^1, B_4^1 \rangle, \langle A_3^1, B_3^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle B_2^1, B_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_2^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle B_2^1, B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle B_2^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_3^1, B_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_4^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_4^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle A_2^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle B_2^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle B_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle. \end{aligned}$$

Die vierdimensionalen Seiten sind:

$$\begin{aligned} &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, B_4^1 \rangle, \langle A_2^1, A_3^1, B_3^1, B_4^1 \rangle, \langle A_2^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1 \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, A_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_3^1, A_4^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1, B_3^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, B_2^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, B_2^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_3^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle B_2^1, B_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle B_2^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle B_3^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, B_2^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, B_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_4^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, B_2^1, B_3^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle. \end{aligned}$$

Die fünfdimensionalen Seiten sind:

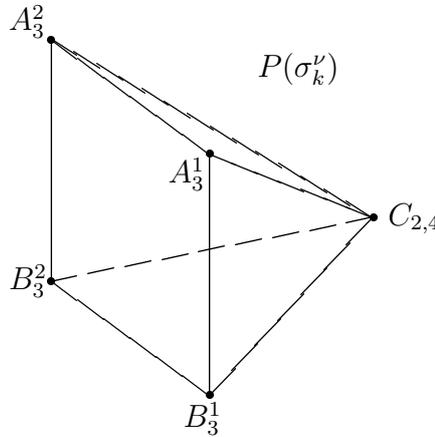
$$\begin{aligned} &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle, \langle A_2^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, B_2^1, B_3^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, A_4^1, B_2^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \langle A_3^1, A_4^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3}, C_{3,4} \rangle, \\ &\langle A_2^1, A_3^1, A_4^1, B_3^1, B_4^1, C_{3,4} \rangle, \langle A_2^1, A_3^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1, C_{2,3} \rangle. \end{aligned}$$

Wegen  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$  haben nach 6.1.1 alle simplizialen Seiten von  $\sigma_k^\nu$  die Multiplizität 1. Daher korrespondieren nach 4.1.9 und 4.1.11 nur die nicht-simplizialen Seiten von  $\sigma_k^\nu$  zu einer Bahn mit nicht-regulären Punkten. Wegen 4.1.9 und  $\dim(\sigma_k^\nu) = 6$  gibt es zwei zweidimensionale Bahnen (korrespondierend zu den beiden vierdimensionalen nicht-simplizialen Seiten) und fünf eindimensionale Bahnen (korrespondierend zu den fünf fünfdimensionalen nicht-simplizialen Seiten) sowie den Fixpunkt (als null-dimensionale Bahn, korrespondierend zur nicht-simplizialen "Seite"  $\sigma_k^\nu$ ), die aus nicht-regulären Punkten bestehen. Nach 4.1.8 finden sich solche Singularitätenmengen (wegen  $\mathcal{Y}_k^\nu \cong (X_{L_{\sigma_k^\nu, \sigma_k^\nu}}, f_{\sigma_k^\nu})$ ) auch in  $\mathcal{Y}_k^\nu$ .

Der Kegel  $\sigma_k^\nu$  unseres Beispiels zur Komponente mit  $k = (2, 1, 2)$  hat nach 6.1.2(i) die Dimension 4 und besitzt nach 6.1.1 folgende Seiten (die wir hier der Dimension nach von links nach rechts ordnen):

$$\begin{array}{r}
\langle A_3^1, A_3^2 \rangle \\
A_3^1 \quad \langle A_3^1, B_3^1 \rangle \quad \langle A_3^1, A_3^2, B_3^1, B_3^2 \rangle \\
A_3^2 \quad \langle A_3^2, B_3^2 \rangle \quad \langle A_3^1, A_3^2, C_{2,4} \rangle \\
B_3^1 \quad \langle B_3^1, B_3^2 \rangle \quad \langle A_3^1, B_3^1, C_{2,4} \rangle \quad \langle A_3^1, A_3^2, B_3^1, B_3^2, C_{2,4} \rangle \\
B_3^2 \quad \langle A_3^1, C_{2,4} \rangle \quad \langle A_3^2, B_3^2, C_{2,4} \rangle \\
C_{2,4} \quad \langle A_3^2, C_{2,4} \rangle \quad \langle B_3^1, B_3^2, C_{2,4} \rangle \\
\quad \langle B_3^1, C_{2,4} \rangle \\
\quad \langle B_3^2, C_{2,4} \rangle
\end{array}$$

Um die kombinatorische Struktur besser zu erkennen, betrachten wir das Polytop  $P(\sigma_k^\nu)$ , das sich aus  $\sigma_k^\nu$  durch den Durchschnitt mit einer Hyperebene ergibt:



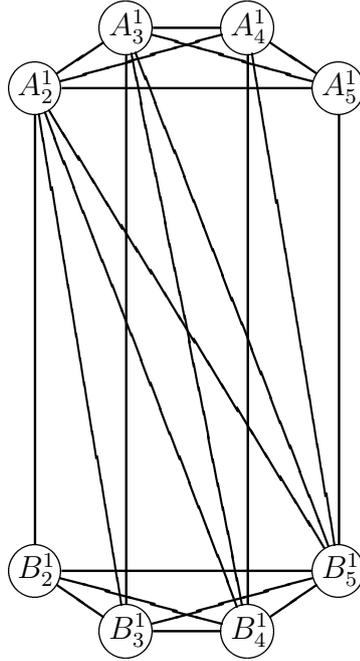
Wegen  $\alpha_2 = \alpha_4 = 1$ ,  $\alpha_3 = 2$  korrespondieren nach 6.1.1 und 4.1.9, 4.1.11 zu einer Bahn mit nicht-regulären Punkten zum Einen die nicht-simplizialen Seiten und zum Anderen diejenigen simplizialen Seiten, die eine Seite der Form  $\langle A_3^j, B_3^j, C_{2,4} \rangle$  besitzen. Dies ist zum Einen die Seite  $\langle A_3^1, A_3^2, B_3^1, B_3^2 \rangle$  (korrespondierend zu einer eindimensionalen Bahn) und die Seite  $\langle A_3^1, A_3^2, B_3^1, B_3^2, C_{2,4} \rangle$  (korrespondierend zum Fixpunkt), und zum Anderen sind es die beiden Seiten  $\langle A_3^1, B_3^1, C_{2,4} \rangle$  und  $\langle A_3^2, B_3^2, C_{2,4} \rangle$  (jeweils korrespondierend zu einer eindimensionalen Bahn). Die zu den letzten beiden Seiten korrespondierenden Bahnen bestehen nach 4.1.9 und 4.1.12 aus dreidimensionalen Quotientensingularitäten.

Wir geben nun noch einige weitere Eigenschaften für das Polytop  $P(\sigma_k^\nu)$  an, das sich aus einem Kegel  $\sigma_k^\nu$  des Kegelsystems  $\Sigma_{(\chi, \sigma_k^\nu)}$  (zu gegebener Singularität  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ ) durch den Durchschnitt mit einer Hyperebene ergibt:

Für die Komponente mit  $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$  beim Kegelfall gilt  $a_2 - k_2 = a_{e-1} - k_{e-1} = 1$ , sonst  $a_i - k_i = 0$  und außerdem  $\alpha_2 = \dots = \alpha_{e-1} = 1$ . Daher folgt aus 6.1.1, dass  $P(\sigma_k^\nu)$  in diesem Fall die Doppelpyramide über dem  $(e - 2)$ -dimensionalen Simplex ist (mit  $A_{e-1}^1$  und  $B_{e-1}^2$  als Spitzen).

Falls  $q = n - 1$  (hier gilt  $e = 3$  und es gibt nur eine Komponente, mit  $k = (0)$ ), so gibt es keine Kante der Form  $C_{d_r, d_{r+1}}$ , und  $P(\sigma_k^\nu)$  ist ein Prisma über dem  $(n - 1)$ -dimensionalen Simplex.

Betrachten wir den Graphen von  $P(\sigma_k^\nu)$ , also nur die Ecken und Kanten von  $P(\sigma_k^\nu)$ . Wir stellen zunächst fest, dass die  $C_{d_r, d_{r+1}}$  mit jeder Ecke benachbart sind. Darum ignorieren wir diese jetzt bei der weiteren Konstruktion. Betrachten wir zunächst den Fall  $a_2 - k_2 = \dots = a_{e-1} - k_{e-1} = 1$ . Dann ergibt sich der (Rest-) Graph so: Es gibt zwei Eckenmengen (bestehend aus allen  $A_i^\bullet$  bzw. allen  $B_i^\bullet$ ) mit je  $e - 2$  Ecken, wobei alle Ecken aus einer Eckenmenge miteinander benachbart sind. Weiter gilt: Genau eine Ecke der ersten Eckenmenge ist mit genau *einer* Ecke der zweiten Eckenmenge benachbart, genau eine Ecke der ersten Eckenmenge ist mit genau *zwei* Ecken der zweiten Eckenmenge benachbart usw. Für die zweite Eckenmenge gilt dasselbe umgekehrt. Man stellt fest, dass ein Graph durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Betrachten wir das durch  $e = 6, a_2 - k_2 = \dots = a_5 - k_5 = 1$  gegebene Beispiel:



Gilt nun  $a_i - k_i = 0$  (für ein  $i$ ), so sind die Ecken  $A_i^1$  und  $B_i^1$  (und alle mit diesen Ecken inzidenten Kanten) zu streichen. Gilt  $a_i - k_i > 1$ , so ist  $A_i^1$  durch die Ecken  $A_i^1, \dots, A_i^{a_i - k_i}$  und  $B_i^1$  durch die Ecken  $B_i^1, \dots, B_i^{a_i - k_i}$  zu ersetzen.

Für  $j \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$  ist die Ecke  $A_i^j$  dann mit allen Ecken  $A_i^\bullet$  zu verbinden, ebenso wieder mit den Ecken  $B_{i+1}^\bullet, \dots, B_{e-1}^\bullet$ . Und mit der Ecke  $B_i^j$ . Die Ecke  $B_i^j$  ist (außer mit  $A_i^j$ ) mit allen Ecken  $B_i^\bullet$  zu verbinden, ebenso wieder mit den Ecken  $A_2^\bullet, \dots, A_{i-1}^\bullet$ .

## 6.2 Beweis des Theorems von 6.1

Wir beweisen nun 6.1.1. Dazu sei in diesem Abschnitt  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  fest und ein  $(k, \nu) \in \mathcal{KOMP}$  fixiert. Wir setzen  $J := \mathbb{H}(R_k^\nu)$ . Da  $\sigma_k^\nu = \sigma^{\mathbb{K}(R_k^\nu)}$  nach Definition, reicht es nach 5.1.3(iii), die Aussage für den Kegel  $\sigma^{(J)}$  zu beweisen.

Zunächst erinnern wir an die Erzeuger von  $J$  und führen einige Bezeichnungen für diesen Abschnitt ein. Dabei werden die Eigenschaften der Äquivalenzrelation  $R_k^\nu$  benutzt (s. 3.4.1).

Das Ideal  $J$  wird nach 3.4.8 von den folgenden Binomen  $H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu) \in \mathbb{A}(R_k^\nu)$  für  $2 \leq \delta - 1 \leq \epsilon + 1 \leq e - 1$  erzeugt:

Wir setzen

$$X_i^L := X_i^{([o])} \text{ für } i = 1, \dots, e$$

und

$$X_i^R := \begin{cases} X_i^{([0])} & \text{für } i = 1, 2, e-1, e \\ X_i^{([t])} & \text{für } i = 3, \dots, e-2. \end{cases}$$

Man beachte, dass dann alle Variablen von der Form  $X_i^L$  oder  $X_i^R$  oder  $X_i^{([j])}$  (mit  $j \in \{1, \dots, a_i - 1\}$ ) sind. Nun setzen wir

$$H_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu) := X_\delta^L X_\epsilon^R - P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu),$$

wobei  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  durch die folgende Konstruktion definiert sei:

Wir setzen  $P_{i-1, i+1}(R_k^\nu) := X_i^R X_i^{([1])} \dots X_i^{([a_i-1])}$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und definieren induktiv alle weiteren Monome  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  durch den folgenden Schritt für  $n = 3, \dots, e-1$ :

Die Monome  $P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu)$  für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta \leq n - 1$  seien bereits definiert. Für  $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$  und  $\epsilon - \delta = n$  setzen wir

$$P_{\delta, \epsilon}(R_k^\nu) = \begin{cases} \frac{P_{\delta, \epsilon-1}(R_k^\nu) P_{\delta+1, \epsilon}(R_k^\nu)}{X_{\delta+1}^L X_{\epsilon-1}^R} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \in \nabla_k \\ \frac{P_{\delta, \epsilon-1}(R_k^\nu) P_{\delta+1, \epsilon}(R_k^\nu)}{P_{\delta+1, \epsilon-1}(R_k^\nu)} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases}$$

**Änderung im Spezialfall  $e = 3$ :** Falls  $e = 3$ , so liegt wegen  $K(a_2) = \{(0)\}$  (s. 1.1, 1.2) die Nullkette  $k = (0)$  vor, und  $J$  wird von dem einzelnen Polynom  $X_1^L X_3^R - X_2^R X_2^{([1])} \dots X_2^{([a_2-1])}$  erzeugt. Damit auch in diesem Fall der Wert  $a_2 - k_2 = a_2$  mit der Anzahl der Variablen der Form  $X_2^{([j])}$  übereinstimmt, sei im Folgenden für diesen Fall die Variable  $X_2^R$  stets durch die Variable  $X_2^{([a_2])}$  ersetzt (entsprechend auch im Ring  $\mathbb{A}(R_k^\nu)$ ).

Soweit die Konstruktion. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass die Variablen  $X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R_k^\nu)$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und  $j = 1, \dots, a_i - k_i$  nur zu sich selbst äquivalent (bezüglich  $R_k^\nu$ ) sind, dass also für  $i_0 \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $j_0 \in \{1, \dots, a_{i_0} - k_{i_0}\}$  gilt:  $X_{i_0}^{([j_0])} \neq X_i^{([j])}$  für  $X_i^{([j])} \in \mathcal{VAR}(R_k^\nu) \setminus \{X_{i_0}^{([j_0])}\}$ . Dies impliziert für  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $j \in \{a_i - k_i + 1, \dots, a_i - 1\}$ , dass  $X_i^{([j])} = X_i^L$  oder  $X_i^{([j])} = X_i^R$  gilt.

Wie im Satz seien  $2 = d_1 < d_2 < \dots < d_l = e - 1$  genau die Indizes  $i$  von  $\alpha$  mit  $\alpha_i = 1$ .

Diese  $d_1, \dots, d_l$  haben dann die Eigenschaft, dass  $d_1 = 2, d_l = e - 1$  gilt und  $d_2, \dots, d_{l-1}$  genau die Indizes  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $X_i^L \neq X_i^R$  sind.

Überdies bezeichnen wir eine Variable  $X_i^L$  bzw.  $X_i^R$ , für die  $X_i^L = X_i^R$  gilt, *gelegentlich* mit  $X_i^{L,R}$ .

Für das nächste Lemma sei daran erinnert, dass es nach 5.1.3(ii) die Seiten  $\text{pos}\{m^{(J)}(X_1^R)\}^{\perp(J)} = \text{pos}\{m^{(J)}(X_1^{([0]})}\}^{\perp(J)}$  und  $\text{pos}\{m^{(J)}(X_e^L)\}^{\perp(J)} = \text{pos}\{m^{(J)}(X_e^{([0]})}\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$  gibt. Weiter ergibt sich die Definition von  $\mathcal{S}^{(J(\tau))}$  aus 4.3.7 und 4.3.12.

**Lemma 6.2.1.**

(i) Zur Seite  $\tau := \text{pos}\{m^{(J)}(X_e^R)\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$  sind die minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(J(\tau))} \setminus \emptyset$  die im Folgenden definierten Ausdrücke  $\tilde{\mathcal{A}}_i^j$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und  $j = 1, \dots, a_i - k_i$  sowie  $\tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^A$  für  $i = 2, \dots, l$ :

$$\tilde{\mathcal{A}}_i^j = \{X_{i_1}^L, \dots, X_{i_r}^L, X_i^{([j])}\} \text{ mit jeweils gewissen } i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, e-2\},$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^A = \{X_{i_1}^L, \dots, X_{i_r}^L, X_{d_i}^R\} \text{ mit jeweils gewissen } i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, e-2\}.$$

(ii) Zur Seite  $\tau := \text{pos}\{m^{(J)}(X_1^L)\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$  sind die minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(J(\tau))} \setminus \emptyset$  die im Folgenden definierten Ausdrücke  $\tilde{\mathcal{B}}_i^{(j)}$  für  $i = 2, \dots, e-1$  und  $j = 1, \dots, a_i - k_i$  sowie  $\tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^B$  für  $i = 1, \dots, l-1$ :

$$\tilde{\mathcal{B}}_i^j = \{X_i^{(j)}, X_{i_1}^R, \dots, X_{i_r}^R\} \text{ mit jeweils gewissen } i_1, \dots, i_r \in \{3, \dots, e\},$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^B = \{X_{d_i}^L, X_{i_1}^R, \dots, X_{i_r}^R\} \text{ mit jeweils gewissen } i_1, \dots, i_r \in \{3, \dots, e\}.$$

*Beweis.* (i): Wir definieren  $\tilde{J}_{(\tau)}$  gemäß 4.3.12 und setzen  $I := \tilde{J}_{(\tau)}$ . Nach 4.3.13(ii) ist  $I$  ein normales torisches Ideal und wird gemäß Definition 4.3.12 von den Binomen  $\widetilde{H_{\delta,\epsilon}(R_k^\nu)} = \widetilde{X_\delta^L X_\epsilon^R - P_{\delta,\epsilon}(R_k^\nu)}$  erzeugt. Für  $\epsilon = e$  und  $\delta \in \{1, \dots, e-2\}$  sind diese von der Form  $\widetilde{X_\delta^L - P_{\delta,\epsilon}(R_k^\nu)}$ . Dies impliziert, dass die  $m^{(I)}(X_i^{(j)})$  mit  $X_i^{(j)} \notin \{X_1^L, \dots, X_{e-2}^L\}$  bereits die Halbgruppe  $S^{(I)}$  erzeugen. Bei den Variablen handelt es sich um die Elemente aus der Menge  $A := \{X_2^{(1)}, \dots, X_2^{(a_2-k_2)}, \dots, X_{e-1}^{(1)}, \dots, X_{e-1}^{(a_{e-1}-k_{e-1})}, X_{d_2}^R, \dots, X_{d_l}^R\}$ . Man sieht leicht  $\#A = \text{rg } M^{(I)}$  (wegen  $\text{rg}(\mathbb{M}_{(-X_e^{(o)})}(R_k^\nu)) = e-2$  wie im Beweis von 5.1.4). Dies impliziert, dass  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  glatt ist und die Elemente aus  $\{m^{(I)}(X_i^{(j)}); X_i^{(j)} \in A\}$  die primitiven Erzeuger der Kanten von  $(\sigma^{(I)})^{\vee(I)}$  sind. Es folgt nun aus 4.3.8, dass jedes zu einer Kante  $\tau_0$  von  $\sigma^{(I)}$  korrespondierende Element  $y_{\tau_0}$  aus  $\mathcal{S}^{(I)}$  genau ein Element aus  $A$  enthält und dass es umgekehrt zu jedem Element  $X_i^{(j)} \in A$  genau ein zu einer Kante  $\tau_0$  von  $\sigma^{(I)}$  korrespondierendes Element  $y_{\tau_0}$  aus  $\mathcal{S}^{(I)}$  gibt mit  $X_i^{(j)} \in y_{\tau_0}$ . Dies impliziert, dass die minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(I)} \setminus \emptyset$  von der angegebenen Form sind. Dass diese Elemente auch die minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(J(\tau))} \setminus \emptyset$  sind, folgt aus 4.3.13(iii).

(ii) Folgt analog. □

**Lemma 6.2.2.** *Die minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  sind die folgenden Mengen:*

$$\mathcal{A}_i^j := \{X_1^L, X_2^L, \dots, X_{i-1}^L, X_i^{(j)}\}, \quad i = 2, \dots, e-1, \text{ für jedes } i : j = 1, \dots, a_i - k_i$$

$$\mathcal{B}_i^j := \{X_i^{(j)}, X_{i+1}^R, \dots, X_{e-1}^R, X_e^R\}, \quad i = 2, \dots, e-1, \text{ für jedes } i : j = 1, \dots, a_i - k_i$$

$$\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} := \{X_{d_r}^L, X_{d_{r+1}}^{L,R}, \dots, X_{d_{r+1}-1}^{L,R}, X_{d_{r+1}}^R\}, \quad r = 1, \dots, l-1.$$

*Beweis.* Die Aussage folgt aus den folgenden drei Behauptungen (j),(jj),(jjj):

(j) Die in 6.2.1 angegebenen Elemente  $\tilde{\mathcal{A}}_i^j, \tilde{\mathcal{B}}_i^j, \tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^A, \tilde{\mathcal{C}}_{d_i}^B$  sind zugleich Elemente von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$ .

(jj) Für jedes  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$  und  $i \in \{1, \dots, e-2\}$  gilt:

$$X_i^L \in S \implies X_{i+1}^L \in S \text{ oder } X_{i+1}^R \in S \text{ oder } X_{i+1}^{(j)} \in S \text{ (für ein } j \in \{1, \dots, a_{i+1} - k_{i+1}\}).$$

Für jedes  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$  und  $i \in \{3, \dots, e\}$  gilt:

$$X_i^R \in S \implies X_{i-1}^L \in S \text{ oder } X_{i-1}^R \in S \text{ oder } X_{i-1}^{(j)} \in S \text{ (für ein } j \in \{1, \dots, a_{i-1} - k_{i-1}\}).$$

Für jedes  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$  und  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  gilt:

$$\begin{aligned} X_i^L \in S \text{ oder } X_i^R \in S \text{ oder } X_i^{(j)} \in S \text{ (für ein } j \in \{1, \dots, a_i - k_i\}) \\ \implies X_{i-1}^L \in S \text{ oder } X_{i+1}^R \in S. \end{aligned}$$

Und für jedes  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$  gilt:

$$X_i^{(j)} \in S \text{ (für ein } i \in \{2, \dots, e-1\} \text{ und ein } j \in \{1, \dots, a_i - k_i\}) \iff X_1^L \in S \text{ oder } X_e^R \in S.$$

(jjj) Jedes Element  $S$  von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  umfasst eine der angegebenen Mengen  $\mathcal{A}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{B}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$ .

In der Tat folgt aus (j) und (jj) leicht, dass die  $\mathcal{A}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{B}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  minimale Elemente von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  sind (man beachte dabei, dass  $d_2, \dots, d_{l-1}$  genau die Indizes  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $X_i^L \neq X_i^R$  sind). Aus (jjj) folgt dann weiter, dass dies bereits alle minimalen Elemente von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  sind.

Es bleibt die Gültigkeit von (j),(jj),(jjj) zu zeigen:

Zu (j): Dies folgt aus 4.3.10, da das in 6.2.1(i) bzw. 6.2.1(ii) verwendete Ideal  $J_{(\tau)}$  eine Projektion von  $J$  ist.

Zu (jj): Für  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  sei  $\mathcal{M}(P_{i-1, i+1}(R_k^\nu))$  die Menge der im Monom  $P_{i-1, i+1}(R_k^\nu)$  auftretenden Variablen. Ist  $S \in \mathcal{S}^{(J)}$ , so folgt aus 4.3.9 anhand der Binome  $X_{i-1}^L X_{i+1}^R - P_{i-1, i+1}(R_k^\nu)$ , dass für  $i = 2, \dots, e-1$  gilt:  $\{X_{i-1}^L, X_{i+1}^R\} \cap S \neq \emptyset \iff \mathcal{M}(P_{i-1, i+1}(R_k^\nu)) \cap S \neq \emptyset$ . Da  $\mathcal{M}(P_{i-1, i+1}(R_k^\nu))$  mit der Menge aller Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R_k^\nu)$  mit unterem Index  $i$  übereinstimmt, folgen die ersten drei Aussagen. Die letzte Aussage folgt ähnlich aus 3.4.2, indem man das Binom  $X_1^L X_e^R - P_{1, e}(R_k^\nu)$  betrachtet.

Zu (jjj): Wir können voraussetzen, dass die angegebenen  $\mathcal{A}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{B}_i^{(j)}$ ,  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  (minimale) Elemente von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  sind, da dies bereits aus (j) und (jj) folgt (s.o.). Ist  $S$  ein Element von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$ , das nicht zugleich ein Element aus  $\mathcal{S}^{(J(\tau))} \setminus \emptyset$  mit  $J_{(\tau)}$  wie in 6.2.1(i) ist, so folgt  $X_e^R \in S$ . Man sieht dann aber leicht mit (jj), dass dann ein  $\mathcal{B}_i^{(j)}$  oder ein  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  in  $S$  enthalten sein muss (dabei beachte man  $X_{e-1}^L = X_{e-1}^R$  und auch wieder, dass  $d_2, \dots, d_{l-1}$  genau die Indizes  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $X_i^L \neq X_i^R$  sind). Der "andere" Fall folgt ähnlich: Ist  $S$  ein Element von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$ , das nicht zugleich ein Element aus  $\mathcal{S}^{(J(\tau))} \setminus \emptyset$  mit  $J_{(\tau)}$  wie in 6.2.1(ii) ist, so folgt  $X_1^L \in S$ . Man sieht dann aber leicht mit (jj), dass dann ein  $\mathcal{A}_i^{(j)}$  oder ein  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  in  $S$  enthalten sein muss (dabei beachte man  $X_2^L = X_2^R$  und auch wieder, dass  $d_2, \dots, d_{l-1}$  genau die Indizes  $i \in \{3, \dots, e-2\}$  mit  $X_i^L \neq X_i^R$  sind).  $\square$

*Beweis von 6.1.1.* Nach 4.3.8(ii) entsprechen die in 6.2.2 angegebenen minimalen Elemente  $\mathcal{A}_i^j, \mathcal{B}_i^j, \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  von  $\mathcal{S}^{(J)} \setminus \emptyset$  den Kanten von  $\sigma^{(J)}$ . Wir wählen die folgenden (naheliegenden) Bezeichnungen für die Kanten:

$$\mathcal{A}_i^j = \tau \text{ falls } y_\tau = \mathcal{A}_i^j, \mathcal{B}_i^j = \tau \text{ falls } y_\tau = \mathcal{B}_i^j, \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} = \tau \text{ falls } y_\tau = \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}.$$

Es sei nun  $F = \{\tau_1, \dots, \tau_t\}$  eine Teilmenge der angegebenen Kanten. Wie in 4.3.14 betrachten wir  $S := y_{\tau_1} \cup \dots \cup y_{\tau_t} \subseteq \mathcal{VAR}(R_k^\nu)$ . Nach 4.3.14 spannen die Kanten aus  $F$  genau dann eine Seite von  $\sigma^{(J)}$  auf, wenn für jede Kante  $\tau$  von  $\sigma^{(J)}$  gilt:

$$y_\tau \subseteq S \implies \tau \in F.$$

Wir bezeichnen diese Bedingung mit  $(\star)$  und zeigen, dass sie äquivalent zur Bedingung 1), 2), 3) ist.

$(\star) \implies 1), 2), 3)$ :

$\implies 1)$  Sei  $i \in \{2, \dots, e-1\}$ . Gilt dann  $\mathcal{A}_i^{j_1}, \mathcal{B}_i^{j_2} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$  und ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$ , so gilt insbesondere  $\{X_1^L, \dots, X_{i-1}^L\} \subseteq S$  und  $\{X_{i+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$ . Daraus folgt  $\{X_1^L, \dots, X_{i-1}^L, X_i^{([j])}\} \subseteq S \iff \{X_i^{([j])}, X_{i+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_i - k_i$  und daraus aufgrund der Form der  $\mathcal{A}_i^j, \mathcal{B}_i^j$  auch  $\mathcal{A}_i^j \subseteq S \iff \mathcal{B}_i^j \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_i - k_i$ . Aufgrund der Voraussetzung  $(\star)$  folgt dann schließlich  $\mathcal{A}_i^j \in F \iff \mathcal{B}_i^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_i - k_i$ .

⇒ 2) Seien  $i_1, i_2 \in \{2, \dots, e-1\}$ .

Gilt  $A_{i_1}^{j_1} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}\}$ , so folgt insbesondere  $\{X_1^L, \dots, X_{i_1-1}^L\} \subseteq S$ .

Gilt  $B_{i_2}^{j_2} \in F$  für ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}\}$ , so folgt insbesondere  $\{X_{i_2+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$ .

Gibt es  $r, s \in \{1, \dots, l\}$  mit  $d_r \leq \min\{i_1, i_2\}, \max\{i_1, i_2\} \leq d_s$ , so dass

$C_{d_r, d_{r+1}}, C_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, C_{d_{s-2}, d_{s-1}}, C_{d_{s-1}, d_s} \in F$ , so folgt insbesondere

$\{X_{\min\{i_1, i_2\}}^L, X_{\min\{i_1, i_2\}+1}^L, X_{\min\{i_1, i_2\}+1}^R, \dots, X_{\max\{i_1, i_2\}-1}^L, X_{\max\{i_1, i_2\}-1}^R, X_{\max\{i_1, i_2\}}^R\} \subseteq S$ .

(Für dieses Argument beachte man  $X_i^L = X_i^R = X_i^{L,R}$

für  $i \in \{2, \dots, e-1\} \setminus \{d_1, \dots, d_l\}$ .)

Gelten diese drei Voraussetzungen, so folgt insbesondere

$\{X_1^L, \dots, X_{\max\{i_1, i_2\}-1}^L\} \subseteq S$  und  $\{X_{\min\{i_1, i_2\}+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$ . Daraus folgt

$\{X_1^L, \dots, X_{i_1-1}^L, X_{i_1}^{([j])}\} \subseteq S \Leftrightarrow \{X_{i_1}^{([j])}, X_{i_1+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}$  sowie

$\{X_1^L, \dots, X_{i_2-1}^L, X_{i_2}^{([j])}\} \subseteq S \Leftrightarrow \{X_{i_2}^{([j])}, X_{i_2+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}$

und daraus aufgrund der Form der  $\mathcal{A}_\bullet^\bullet, \mathcal{B}_\bullet^\bullet$  auch

$\mathcal{A}_{i_1}^j \subseteq S \Leftrightarrow \mathcal{B}_{i_1}^j \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}$  sowie

$\mathcal{A}_{i_2}^j \subseteq S \Leftrightarrow \mathcal{B}_{i_2}^j \subseteq S$  für  $j = 1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}$ .

Aufgrund der Voraussetzung  $(\star)$  folgt dann schließlich

$A_{i_1}^j \in F \Leftrightarrow B_{i_1}^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}$

sowie  $A_{i_2}^j \in F \Leftrightarrow B_{i_2}^j \in F$  für  $j = 1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}$ .

⇒ 3) Seien  $i_1, i_2 \in \{2, \dots, e-1\}$ .

Gilt  $A_{i_1}^{j_1} \in F$  für ein  $j_1 \in \{1, \dots, a_{i_1} - k_{i_1}\}$ , so folgt insbesondere  $\{X_1^L, \dots, X_{i_1-1}^L\} \subseteq S$ .

Gilt  $B_{i_2}^{j_2} \in F$  für ein  $j_2 \in \{1, \dots, a_{i_2} - k_{i_2}\}$ , so folgt insbesondere  $\{X_{i_2+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$ .

Gelten diese beiden Voraussetzungen, so folgt  $\{X_1^L, \dots, X_{i_1-1}^L, X_{i_2+1}^R, \dots, X_e^R\} \subseteq S$ .

Würde nun  $i_1 > i_2$  gelten, so sieht man leicht (man beachte wieder, dass  $X_i^L = X_i^R$  für  $i \in \{2, \dots, e-1\} \setminus \{d_1, \dots, d_l\}$  gilt und darüber hinaus, dass aus  $X_i^L \neq X_i^R$  folgt, dass  $\alpha_i = 1$  gilt), dass es aufgrund der Voraussetzung  $(\star)$  die genannten  $C_{\bullet, \bullet}$  doch gäbe.

$(\star) \Leftarrow 1), 2), 3)$ :

Wir beweisen diese Implikation durch Widerspruch, d.h. wir setzen voraus, dass  $\tau$  eine Kante von  $\sigma^{(J)}$  mit " $y_\tau \subseteq S$ , aber  $\tau \notin F$ " ist und zeigen, dass dann (mindestens) eine der Bedingungen 1), 2), 3) verletzt ist.

Nehmen wir zunächst an, dass  $\tau = A_i^j$  für ein  $i \in \{2, \dots, e-1\}$  und  $j \in \{1, \dots, a_i - k_i\}$  gilt. Nach Definition von  $S$  und der Form der  $\mathcal{A}_\bullet^\bullet, \mathcal{B}_\bullet^\bullet, C_{\bullet, \bullet}$  folgt offenbar aus  $X_i^{(j)} \in S$ , dass  $A_i^j \in F$  oder  $B_i^j \in F$  gilt. Aufgrund von  $X_i^{(j)} \in \mathcal{A}_i^j$  und der Annahme " $\mathcal{A}_i^j \subseteq S$ , aber  $A_i^j \notin F$ " folgt also  $B_i^j \in F$ . Weiter sieht man wegen  $X_1^L \in \mathcal{A}_i^j \subseteq S$  und der Form der  $\mathcal{A}_\bullet^\bullet, \mathcal{B}_\bullet^\bullet, C_{\bullet, \bullet}$ , dass es ein  $A_{i'}^{j'} \in F$  geben muss. Wir nehmen an, dass  $i'$  maximal mit dieser Eigenschaft ist und machen nun eine Fallunterscheidung nach  $i < i'$  bzw.  $i = i'$  bzw.  $i > i'$ .

Nehmen wir zunächst  $i < i'$  an. Wegen  $B_i^j \in F$  und  $A_{i'}^{j'} \in F$  folgt aus 3), dass

$C_{d_r, d_{r+1}}, C_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, C_{d_{s-2}, d_{s-1}}, C_{d_{s-1}, d_s} \in F$  für ein  $d_r \leq i$  und ein  $d_s \geq i'$  gelten muss. Aus 2) folgt dann jedoch weiter  $A_i^j \in F$ , im Widerspruch zur Annahme.

Nehmen wir nun  $i' = i$  an. Wegen  $B_i^j \in F$  und  $A_{i'}^{j'} \in F$  folgt dann  $A_i^j \in F$  aus 1), im Widerspruch zur Annahme.

Schließlich nehmen wir  $i' < i$  an. Es sei nun  $i''$  das minimale Element mit der Eigenschaft, dass es ein  $B_{i''}^{j''} \in F$  gibt. Falls  $i' \leq i''$ , so sind die Elemente  $X_{i'}^L, \dots, X_{\min\{i'', i-1\}}^L \in \mathcal{A}_i^j \subseteq S$  weder

in einem  $\mathcal{A}_i^\bullet$  noch in einem  $\mathcal{B}_i^\bullet$  enthalten, das zu einer Kante  $A_i^\bullet \in F$  oder  $B_i^\bullet \in F$  gehört; da außerdem die Elemente  $X_{i''}^L, \dots, X_{i-1}^L \in \mathcal{A}_i^j \subseteq S$  in keinem  $\mathcal{A}_i^\bullet$  enthalten sind, das zu einer Kante  $A_i^\bullet \in F$  gehört, folgt für  $\iota = i'', \dots, i-1$ :  $X_\iota^L = X_\iota^R$  oder  $X_\iota^L \in \mathcal{C}_{d_\iota, d_{\iota+1}}$  für ein  $\mathcal{C}_{d_\iota, d_{\iota+1}} \in F$ ; daraus folgt  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}, \mathcal{C}_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, \mathcal{C}_{d_{s-2}, d_{s-1}}, \mathcal{C}_{d_{s-1}, d_s} \in F$  für ein  $d_r \leq i'$  und ein  $d_s \geq i$ , was wegen 2) und  $B_i^j \in F$  dann jedoch  $A_i^j \in F$  zur Folge hat, im Widerspruch zur Annahme. Falls  $i'' < i'$ , so muss es wegen 3) eine Kette  $\mathcal{C}_{d_{r'}, d_{r'+1}}, \mathcal{C}_{d_{r'+1}, d_{r'+2}}, \dots, \mathcal{C}_{d_{s'-2}, d_{s'-1}}, \mathcal{C}_{d_{s'-1}, d_{s'}} \in F$  für ein  $d_{r'} \leq i''$  und ein  $d_{s'} \geq i'$  geben; da außerdem die Elemente  $X_{i'}^L, \dots, X_{i-1}^L \in \mathcal{A}_i^j \subseteq S$  in keinem  $\mathcal{A}_i^\bullet$  enthalten sind, das zu einer Kante  $A_i^\bullet \in F$  gehört, folgt für  $\iota = i', \dots, i-1$ :  $X_\iota^L = X_\iota^R$  oder  $X_\iota^L \in \mathcal{C}_{d_\iota, d_{\iota+1}}$  für ein  $\mathcal{C}_{d_\iota, d_{\iota+1}} \in F$ ; daraus folgt wieder  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}, \mathcal{C}_{d_{r+1}, d_{r+2}}, \dots, \mathcal{C}_{d_{s-2}, d_{s-1}}, \mathcal{C}_{d_{s-1}, d_s} \in F$  für ein  $d_r \leq i'$  und ein  $d_s \geq i$ , was wegen 2) und  $B_i^j \in F$  dann jedoch  $A_i^j \in F$  zur Folge hat, im Widerspruch zur Annahme.

Der Fall  $\tau = B_i^j$  folgt aufgrund der Symmetrie der  $\mathcal{A}_i^\bullet, \mathcal{B}_i^\bullet, \mathcal{C}_{i, \bullet}$  völlig analog.

Nehmen wir nun an, dass  $\tau = \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}}$  für ein  $r \in \{1, \dots, l-1\}$  gilt. Aus der Annahme " $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \subseteq S$ , aber  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \notin F$ " und der Form der  $\mathcal{A}_i^\bullet, \mathcal{B}_i^\bullet, \mathcal{C}_{i, \bullet}$  und  $X_{d_r}^L \neq X_{d_r}^R$  (falls  $d_r \geq 3$ ) folgt aus  $X_{d_r}^L \in \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \subseteq S$ , dass es ein  $A_{i_1}^{j_1} \in F$  mit  $d_r < i_1$  geben muss. Ähnlich folgt mit  $X_{d_{r+1}}^L \neq X_{d_{r+1}}^R$  (falls  $d_{r+1} \leq e-2$ ) aus  $X_{d_{r+1}}^R \in \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \subseteq S$ , dass es ein  $B_{i_2}^{j_2} \in F$  mit  $i_2 < d_{r+1}$  geben muss. Gilt  $d_{r+1} - d_r = 1$ , so folgt  $i_1 > i_2$  und wir erhalten einen Widerspruch zu 3). Ansonsten gilt  $\emptyset \neq \{X_{d_r+1}^{L,R}, \dots, X_{d_{r+1}-1}^{L,R}\} \subseteq \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \subseteq S$ , und es folgt wegen  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \notin F$ , dass mindestens einer der folgenden drei Fälle zutrifft:

- ♡ Es gibt ein  $A_{i_1'}^{j_1'}$  mit  $i_1' \geq d_{r+1}$ .
- ♠ Es gibt ein  $B_{i_2'}^{j_2'}$  mit  $i_2' \leq d_r$ .
- ♣ Es gibt ein  $A_{i_1'}^{j_1'}$  und ein  $B_{i_2'}^{j_2'}$  mit  $d_r \leq i_2' < i_1' \leq d_{r+1}$ .

In allen drei Fällen erhalten wir wegen  $\mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \notin F$  zu 3) einen Widerspruch (bei ♡ wegen  $A_{i_1'}^{j_1'}, B_{i_2'}^{j_2'} \in F$  und  $i_1' > i_2'$  und bei ♠ wegen  $A_{i_1}^{j_1}, B_{i_2'}^{j_2'} \in F$  und  $i_1 > i_2'$ ).

Nun zur Dimension einer Seite  $\tau$ :

Wir müssen zeigen, dass es eine unverfeinerbare, *echt* absteigende Kette

$$\tau = \tau_d \succ \tau_{d-1} \succ \tau_{d-2} \succ \dots \succ \tau_1 \succ 0$$

von Seiten  $\tau_d \preceq \sigma^{(J)}, \tau_{d-1} \preceq \sigma^{(J)}, \dots, \tau_1 \preceq \sigma^{(J)}$  gibt mit:

$$d = \left( \sum_{s=1}^r i_s' \right) + t + 1, \text{ falls } r \geq 1; \quad d = t, \text{ falls } r = 0.$$

Falls  $r = 0$ , so sieht man leicht, dass das schrittweise Entfernen zunächst aller Seiten des Typs  $A_i^{(\bullet)}$ , dann aller Seiten des Typs  $B_i^{(\bullet)}$  und schließlich aller Seiten des Typs  $\mathcal{C}_{i, \bullet}$  in jedem Schritt zu einer Seite von  $\sigma^{(J)}$  führt (da jeweils die Bedingungen 1),2),3) erfüllt bleiben). Dies zeigt die Aussage für diesen Fall.

Nun sei  $r \geq 1$ . Wir betrachten zunächst alle paarweise auftretenden Kanten  $A_{i_s}^\bullet, B_{i_s}^\bullet$  von  $\sigma^{(J)}$ :

$$A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}}, \dots, A_{i_1}^{j_1^{(i_1')}}, B_{i_1}^{j_1^{(i_1')}}, \dots, A_{i_r}^{j_r^{(1)}}, B_{i_r}^{j_r^{(1)}}, \dots, A_{i_r}^{j_r^{(i_r')}}, B_{i_r}^{j_r^{(i_r')}}.$$

Nun entfernen wir schrittweise jeweils ein Paar  $A_{i_s}^{j_s^{(q)}}, B_{i_s}^{j_s^{(q)}}$  für alle  $s \in \{1, \dots, r\}, q \in \{2, \dots, i'_s\}$ . Es folgt aus 1), dass dies  $g := \sum_{s=1}^r (i'_s - 1)$  Seiten  $\tau_d, \dots, \tau_{d-g}$  einer unverfeinerbaren Kette  $\tau = \tau_d \succ \tau_{d-1} \succ \tau_{d-2} \succ \dots \succ \tau_{d-g}$  liefert. Daher bleibt zu zeigen, dass es zu der von den Kanten

$$A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}}, \dots, A_{i_r}^{j_r^{(1)}}, B_{i_r}^{j_r^{(1)}}$$

und den übrigen – nicht-paarweise auftretenden Kanten – aufgespannte Seite  $\tau' := \tau_{d-g}$  eine unverfeinerbare, echt absteigende Kette

$$\tau' = \tau_f \succ \tau_{f-1} \succ \tau_{f-2} \succ \dots \succ \tau_1 \succ 0$$

von Seiten  $\tau_f \preceq \sigma^{(J)}, \tau_{f-1} \preceq \sigma^{(J)}, \dots, \tau_1 \preceq \sigma^{(J)}$  gibt mit  $f = r + t + 1$ .

Betrachten wir also  $\tau'$ . Wir entfernen nun schrittweise jedes  $A_i^{(j)}$  mit  $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ , dann jedes  $B_i^{(j)}$  mit  $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ , anschließend jedes  $C_{d_i, d_{i+1}}$  mit  $d_{i+1} \leq i_1$  und schließlich jedes  $C_{d_i, d_{i+1}}$  mit  $d_i \geq i_r$ . Jeder Schritt liefert dabei eine Seite einer Kette  $\tau' \succ \dots$

Gilt  $r = 1$ , so verbleibt die Seite  $\langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}}, C_{d_p, d_{p+1}} \rangle$  (mit  $d_p < i_1 < d_{p+1}$ ) oder die Seite  $\langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}} \rangle$ , und mit dem ‘‘Kettenende’’

$\langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}}, C_{d_p, d_{p+1}} \rangle \succ \langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}} \rangle \succ \langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}} \rangle \succ 0$  bzw.  $\langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}} \rangle \succ \langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}} \rangle \succ 0$  sieht man dann leicht, dass  $f = r + t + 1$  gilt.

Gilt  $r > 1$ , so verbleibt die Seite

$\langle A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, B_{i_1}^{j_1^{(1)}}, \dots, A_{i_r}^{j_r^{(1)}}, B_{i_r}^{j_r^{(1)}}, C_{d_p, d_{p+1}}, C_{d_{p+1}, d_{p+2}}, \dots, C_{d_q, d_{q+1}} \rangle$  mit  $d_p \leq i_1 < d_{p+1}$  und  $d_q < i_r \leq d_{q+1}$  (wegen 3)). Für  $u = p, p + 1, \dots, q - 1$  entfernen wir nun in jedem Schritt die Kante  $C_{d_u, d_{u+1}}$  und die Kanten  $B_{i_v}^{j_v^{(1)}}$  mit  $v \in \{1, \dots, r\}, d_u \leq i_v < d_{u+1}$ . In jedem Schritt erhalten wir eine Seite, und aus 2) und 3) folgt, dass dies einen unverfeinerbaren Teil einer Kette liefert. Im nächsten Schritt entfernen wir die Kante  $C_{d_q, d_{q+1}}$  und die Kanten  $B_{i_v}^{j_v^{(1)}}$  mit  $v \in \{1, \dots, r - 1\}, d_q \leq i_v \leq d_{q+1}$  und erhalten eine Seite. Dann entfernen wir die Kante  $B_{i_r}^{j_r^{(1)}}$  und erhalten eine Seite. Schließlich entfernen wir schrittweise die verbliebenen  $A_{i_1}^{j_1^{(1)}}, \dots, A_{i_r}^{j_r^{(1)}}$  und erhalten in jedem Schritt eine Seite. Man sieht leicht, dass  $f = r + t + 1$  gilt.

Nun zur Multiplizität einer simplizialen Seite  $\tau$ :

Wir benutzen 4.3.13(iv) und die dort verwendete Bezeichnung  $\mathbf{z}(\tau_0)$  für eine Kante  $\tau_0$  von  $\tau$ . Wir bezeichnen die Koordinate von  $\mathbf{z}(\tau_0)$  an der Stelle  $X_i^{(j)}$  mit  $z_i^{(j)}(\tau_0)$ . Aus 4.3.13(iv) folgt, dass für jede Kante der Form  $C_{d_r, d_{r+1}}$  ( $r \in \{1, \dots, l - 1\}$ ) bzw.  $A_{i_0}^{j_0}$  ( $i_0 \in \{2, \dots, e - 1\}, j_0 \in \{1, \dots, a_{i_0} - k_{i_0}\}$ ) bzw.  $B_{i_0}^{j_0}$  ( $i_0 \in \{2, \dots, e - 1\}, j_0 \in \{1, \dots, a_{i_0} - k_{i_0}\}$ ) gilt:

$$X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R_k^\nu), X_i^{(j)} \notin \mathcal{C}_{d_r, d_{r+1}} \implies z_i^{(j)}(C_{d_r, d_{r+1}}) = 0,$$

$$X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R_k^\nu), X_i^{(j)} \notin \mathcal{A}_{i_0}^{j_0} \implies z_i^{(j)}(A_{i_0}^{j_0}) = 0,$$

$$X_i^{(j)} \in \mathcal{VAR}(R_k^\nu), X_i^{(j)} \notin \mathcal{B}_{i_0}^{j_0} \implies z_i^{(j)}(B_{i_0}^{j_0}) = 0.$$

Nun betrachten wir zunächst eine Kante der Form  $C_{d_r, d_{r+1}}$  genauer. Dazu betrachten wir den

folgenden Teil der Matrix  $\mathbb{M}(R_k^\nu)$  aus Abschnitt 5.1:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
X_{d_r-1}^L & X_{d_r}^L & X_{d_r+1}^{L,R} & \dots & X_{i_0-1}^{L,R} & X_{i_0}^{L,R} & X_{i_0}^{([j_0])} & X_{i_0+1}^{L,R} & \dots & X_{d_{r+1}-1}^{L,R} & X_{d_{r+1}}^R & X_{d_{r+1}+1}^R \\
-f_{d_r-1} & & & & & & & & & & & & \\
1 & -f_{d_r} & 1 & & & & & & & & & & \\
& 1 & -f_{d_r+1} & & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & \dots & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & & & \\
& & & & -f_{i_0-1} & 1 & & & & & & & \\
& & & & 1 & -f_{i_0} & -1 & 1 & & & & & \\
& & & & & 1 & & -f_{i_0+1} & & & & & \\
& & & & & & & 1 & & & & & \\
& & & & & & & & \dots & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & & -f_{d_{r+1}-1} & 1 & & \\
& & & & & & & & & 1 & -f_{d_{r+1}} & & 1 \\
& & & & & & & & & & & & -f_{d_{r+1}+1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
a_{d_r-1} & a_{d_r} & a_{d_r+1} & & a_{i_0-1} & a_{i_0} & & & & & & \\
& & & & & b_{i_0} & b_{i_0+1} & b_{d_{r+1}-1} & b_{d_{r+1}} & b_{d_{r+1}+1} & & \\
& c_{d_r} & c_{d_r+1} & & c_{i_0-1} & c_{i_0} & c_{i_0+1} & c_{d_{r+1}-1} & c_{d_{r+1}} & & & 
\end{array}$$

Im unteren Teil (der nicht zur Matrix  $\mathbb{M}(R_k^\nu)$  gehört) sind in der dritten Zeile alle Werte  $z_i^{([j])}(C_{d_r, d_{r+1}})$  aufgeführt, die eventuell von Null verschieden sind (in Form von  $c_{d_r}, \dots, c_{d_{r+1}}$ ). Nach 3.4.1 gilt  $f_{d_r} = \alpha_{d_r+1}$  und  $f_{d_r+1} = k_{d_r+1}, \dots, f_{d_{r+1}-1} = k_{d_{r+1}-1}$  und  $f_{d_{r+1}} = \alpha_{d_{r+1}-1}$ . Setzen wir  $c_{d_r} = 1$ , so sieht man anhand der Matrix, dass  $c_{d_r+1} = f_{d_r} = \alpha_{d_r+1}$  und für  $i \in \{d_r+2, \dots, d_{r+1}-1\}$  die rekursive Formel  $c_i = c_{i-1}f_{i-1} - c_{i-2} = c_{i-1}k_{i-1} - c_{i-2}$  gilt. Da zudem  $c_{d_r} = 1 = \alpha_{d_r}$  gilt, zeigt der Vergleich mit der Nullkette:  $c_{d_r+1} = \alpha_{d_r+1}, \dots, c_{d_{r+1}-1} = \alpha_{d_{r+1}-1}$ . Aus dem letzten Wert folgt dann wegen  $f_{d_{r+1}} = \alpha_{d_{r+1}-1}$  schließlich  $c_{d_{r+1}} = 1$ . Also folgt insgesamt

$$c_{d_r} = \alpha_{d_r}, c_{d_r+1} = \alpha_{d_r+1}, \dots, c_{d_{r+1}} = \alpha_{d_{r+1}},$$

und mit 4.2.7 folgt, dass diese Werte die von Null verschiedenen Koordinaten von  $\mathbf{z}(C_{d_r, d_{r+1}})$  sind.

Nun betrachten wir eine Kante der Form  $A_{i_0}^{j_0}$ . Einige der (eventuell) von Null verschiedenen Werte  $z_i^{([j])}(A_{i_0}^{j_0})$  sind in der ersten Zeile im unteren Teil aufgeführt (in Form von  $a_{d_r-1}, \dots, a_{i_0}$ ). Setzen wir  $a_{i_0} = 1$ , so sieht man anhand der Matrix, dass  $a_{i_0-1} = 1, a_{i_0-2} = a_{i_0-1}f_{i_0-1}$  und für  $i \in \{d_r-1, \dots, i_0-3\}$  die rekursive Formel  $a_i = a_{i+1}f_{i+1} - a_{i+2}$  gilt. Diese Werte gehören (wegen 4.2.7) zu den Koordinaten von  $\mathbf{z}(A_{i_0}^{j_0})$ .

Nun betrachten wir eine Kante der Form  $B_{i_0}^{j_0}$ . Einige der (eventuell) von Null verschiedenen Werte  $z_i^{([j])}(B_{i_0}^{j_0})$  sind in der zweiten Zeile im unteren Teil aufgeführt (in Form von  $b_{i_0}, \dots, b_{d_{r+1}+1}$ ). Setzen wir  $b_{i_0} = 1$ , so sieht man anhand der Matrix, dass  $b_{i_0+1} = 1, b_{i_0+2} = b_{i_0+1}f_{i_0+1}$  und für  $i \in \{i_0+3, \dots, b_{d_{r+1}+1}\}$  die rekursive Formel  $b_i = b_{i-1}f_{i-1} - b_{i-2}$  gilt. Diese Werte gehören (wegen 4.2.7) zu den Koordinaten von  $\mathbf{z}(B_{i_0}^{j_0})$ .

Betrachten wir nun den Fall, dass  $\tau = \langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0}, C_{d_r, d_{r+1}} \rangle$  für ein  $i_0 \in \{2, \dots, e-1\}$ , ein  $j_0 \in \{1, \dots, a_{i_0} - k_{i_0}\}$  und ein  $r \in \{1, \dots, l-1\}$  mit  $d_r \leq i_0 \leq d_{r+1}$  gilt. Um zu zeigen, dass die

Multiplizität von  $\tau$  gleich  $\alpha_{i_0}$  ist, ist nach 4.3.13(iv) zu zeigen, dass der größte gemeinsame Teiler der Determinanten der  $(3 \times 3)$ -Untermatrizen der aus den Zeilen  $\mathbf{z}(A_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(B_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(C_{d_r, d_{r+1}})$  bestehenden Matrix den Wert  $\alpha_{i_0}$  hat. Dazu stellt man zunächst fest, dass die Determinante

der Untermatrix  $\begin{pmatrix} a_{i_0-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{i_0+1} \\ c_{i_0-1} & c_{i_0} & c_{i_0+1} \end{pmatrix}$  wegen  $a_{i_0-1} = b_{i_0+1} = 1, c_{i_0} = \alpha_{i_0}$  den Betrag  $\alpha_{i_0}$  hat. Weiter sehen wir, dass der Betrag der Determinante jeder  $(2 \times 2)$ -Untermatrix der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{d_r-1} & a_{d_r} & a_{d_r+1} & \dots & a_{i_0-1} & 0 & b_{i_0+1} & \dots & b_{d_{r+1}-1} & b_{d_{r+1}} & b_{d_{r+1}+1} \\ 0 & c_{d_r} & c_{d_r+1} & \dots & c_{i_0-1} & c_{i_0} & c_{i_0+1} & \dots & c_{d_{r+1}-1} & c_{d_{r+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

ein Vielfaches von  $\alpha_{i_0}$  ist: Denn wegen  $a_{i_0-1} = 1, c_{i_0} = \alpha_{i_0}$  folgt  $\det \begin{pmatrix} a_{i_0-1} & 0 \\ c_{i_0-1} & c_{i_0} \end{pmatrix} = \alpha_{i_0}$ , und wegen

$$\det \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i \\ c_{i-1} & c_i \end{pmatrix} = a_{i-1}c_i - c_{i-1}a_i = (f_i a_i - a_{i+1})c_i - (f_i c_i - c_{i+1})a_i = \det \begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} \\ c_i & c_{i+1} \end{pmatrix}$$

folgt  $\det \begin{pmatrix} a_{i-1} & a_i \\ c_{i-1} & c_i \end{pmatrix} = \alpha_{i_0}$  für alle  $i \in \{d_r, \dots, i_0\}$ . Ähnlich sieht man, dass  $\det \begin{pmatrix} b_i & b_{i+1} \\ c_i & c_{i+1} \end{pmatrix} = -\alpha_{i_0}$  für alle  $i \in \{i_0, \dots, d_{r+1}\}$  gilt. Da außerdem für alle Paare  $i, j$  mit  $j \in \{d_r, \dots, i_0\}, i \in \{j+1, \dots, d_{r+1}+1\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{j-1} & a_i \\ c_{j-1} & c_i \end{pmatrix} &= a_{j-1}c_i - c_{j-1}a_i = (f_j a_j - a_{j+1})c_i - (f_j c_j - c_{j+1})a_i \\ &= f_j \cdot \det \begin{pmatrix} a_j & a_i \\ c_j & c_i \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{j+1} & a_i \\ c_{j+1} & c_i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für alle Paare  $i, j$  mit  $j \in \{i_0, \dots, d_{r+1}\}$  und  $i \in \{d_r - 1, \dots, j - 1\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b_i & b_{j+1} \\ c_i & c_{j+1} \end{pmatrix} &= b_i c_{j+1} - c_i b_{j+1} = b_i (f_j c_j - c_{j-1}) - c_i (f_j b_j - b_{j-1}) \\ &= f_j \cdot \det \begin{pmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_i & b_{j-1} \\ c_i & c_{j-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

folgt tatsächlich, dass der Betrag der Determinante jeder  $(2 \times 2)$ -Untermatrix der obigen Matrix ein Vielfaches von  $\alpha_{i_0}$  ist.

Da  $a_{d_r-1} = \alpha_{i_0}$  wegen  $c_{d_r} = 1$  und  $\det \begin{pmatrix} a_{d_r-1} & a_{d_r} \\ 0 & c_{d_r} \end{pmatrix} = \alpha_{i_0}$  gilt, folgt auch anhand der Matrix  $\mathbb{M}(R_k^\nu)$ , dass jedes  $z_q^L(A_{i_0}^{j_0})$  für  $q \leq d_r - 1$  ein Vielfaches von  $\alpha_{i_0}$  ist. Und da  $b_{d_{r+1}+1} = \alpha_{i_0}$  wegen  $c_{d_{r+1}} = 1$  und  $\det \begin{pmatrix} b_{d_r} & b_{d_{r+1}} \\ c_{d_{r+1}} & 0 \end{pmatrix} = -\alpha_{i_0}$  gilt, folgt auch anhand der Matrix  $\mathbb{M}(R_k^\nu)$ , dass jedes  $z_q^R(B_{i_0}^{j_0})$  für  $q \geq d_{r+1} + 1$  ein Vielfaches von  $\alpha_{i_0}$  ist. Aus diesen Daten folgt nun, dass in der Tat der größte gemeinsame Teiler der Determinanten der  $3 \times 3$ -Untermatrizen der aus den Zeilen  $\mathbf{z}(A_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(B_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(C_{d_r, d_{r+1}})$  bestehenden Matrix den Wert  $\alpha_{i_0}$  hat.

Es sei nun  $\tau$  eine simpliciale Seite, die eine Seite der Form  $\langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0}, C_{d_{r_0}, d_{r_0+1}} \rangle$  mit  $d_{r_0} \leq i_0 \leq d_{r_0+1}$  besitzt, also nach 6.1.1 von der Form

$$\langle A_{i_1}^{j_1}, \dots, A_{i_a}^{j_a}, B_{i'_1}^{j'_1}, \dots, B_{i'_b}^{j'_b}, C_{d_{r_1}, d_{r_1+1}}, \dots, C_{d_{r_c}, d_{r_c+1}}, A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0}, C_{d_{r_0}, d_{r_0+1}} \rangle$$

mit  $i_1 < \dots < i_a < i_0 < i'_1 < \dots < i'_b$  sein muss. Wir nehmen (ohne Einschränkung) an, dass  $d_{r_1+1}, \dots, d_{r_g+1} \leq d_{r_0}$  und  $d_{r_0+1} \leq d_{r_{g+1}}, \dots, d_{r_c}$  für ein  $g \in \{1, \dots, c\}$  gilt. Sei  $D$  die Matrix mit den Zeilen

$$\mathbf{z}(A_{i_1}^{j_1}), \dots, \mathbf{z}(A_{i_a}^{j_a}), \mathbf{z}(B_{i'_1}^{j'_1}), \dots, \mathbf{z}(B_{i'_b}^{j'_b}), \mathbf{z}(C_{d_{r_1}, d_{r_1+1}}), \dots, \mathbf{z}(C_{d_{r_c}, d_{r_c+1}}), \mathbf{z}(A_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(B_{i_0}^{j_0}), \mathbf{z}(C_{d_{r_0}, d_{r_0+1}})$$

und  $n$  der Rang von  $D$  bzw. die Anzahl der Zeilen. Nach zuvor für  $\langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0}, C_{d_{r_0}, d_{r_0+1}} \rangle$  Bewiesenem ist klar, dass der größte gemeinsame Teiler der  $(n \times n)$ -Untermatrizen von  $D$  ein Vielfaches von  $\alpha_{i_0}$  sein muss. Dass dieser Wert genau  $\alpha_{i_0}$  ist, sieht man daher daran, dass die  $(n \times n)$ -Untermatrix mit den Spalten an den Stellen

$X_{i_1}^{([j_1])}, \dots, X_{i_a}^{([j_a])}, X_{d_{r_1+1}}^R, \dots, X_{d_{r_g+1}}^R, X_{i_0-1}^L, X_{i_0}^{L,R}, X_{i_0+1}^R, X_{d_{r_g+1}}^L, \dots, X_{d_{r_c}}^L, X_{i'_1}^{([j'_1])}, \dots, X_{i'_b}^{([j'_b])}$  den Determinantenwert  $\pm \alpha_{i_0}$  hat; denn diese Untermatrix hat (nach eventueller Vertauschung der

Zeilen) die Form  $\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array} \right)$ , wobei hier  $\mathbf{E}$  jeweils für eine Einheitsmatrix stehe,  $\mathbf{0}$  für

die aus lauter Nullen bestehende Matrix und  $\mathbf{U}$  als  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a_{i_0-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{i_0+1} \\ c_{i_0-1} & c_{i_0} & c_{i_0+1} \end{pmatrix}$  wie oben definiert sei.

Ist  $\tau$  hingegen eine simpliziale Seite, die keine Seite der Form  $\langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0}, C_{d_r, d_{r+1}} \rangle$  mit  $d_r \leq i_0 \leq d_{r+1}$  besitzt, so unterscheiden wir zwei Fälle:

(i)  $\tau$  besitzt eine Seite der Form  $\langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0} \rangle$ .

Dann ergibt sich die entsprechende Matrix aus der obigen Matrix  $D$  ohne die Zeile  $\mathbf{z}(C_{d_{r_0}, d_{r_0+1}})$ , und die Untermatrix ohne die Spalte zu  $X_{i_0}^{L,R}$  hat die Determinante  $\pm 1$ .

(ii)  $\tau$  besitzt keine Seite der Form  $\langle A_{i_0}^{j_0}, B_{i_0}^{j_0} \rangle$ .

Dann muss  $\tau$  nach 6.1.1 von der Form

$$\langle A_{i_1}^{j_1}, \dots, A_{i_a}^{j_a}, B_{i'_1}^{j'_1}, \dots, B_{i'_b}^{j'_b}, C_{d_{r_1}, d_{r_1+1}}, \dots, C_{d_{r_c}, d_{r_c+1}} \rangle$$

mit  $i_1 < \dots < i_a < i'_1 < \dots < i'_b$  sein. Ist  $D$  die Matrix mit den Zeilen

$$\mathbf{z}(A_{i_1}^{j_1}), \dots, \mathbf{z}(A_{i_a}^{j_a}), \mathbf{z}(B_{i'_1}^{j'_1}), \dots, \mathbf{z}(B_{i'_b}^{j'_b}), \mathbf{z}(C_{d_{r_1}, d_{r_1+1}}), \dots, \mathbf{z}(C_{d_{r_c}, d_{r_c+1}})$$

und  $n$  der Rang von  $D$  (bzw. die Anzahl der Zeilen von  $D$ ), so ist die  $(n \times n)$ -Untermatrix mit den Spalten an den Stellen  $X_{i_1}^{([j_1])}, \dots, X_{i_a}^{([j_a])}, X_{i'_1}^{([j'_1])}, \dots, X_{i'_b}^{([j'_b])}, X_{d_{r_1+1}}^R, \dots, X_{d_{r_c+1}}^R$  eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen auf der Diagonalen, hat also die Determinante  $\pm 1$ .

Nun noch zur Aussage über die Inklusion  $(L_\chi, \chi) \leftrightarrow (L_\sigma, \sigma)$ :

Es sei  $I := \mathbb{K}(R_k^\nu)$ . Ähnlich wie in 5.3.5 sieht man, dass die beiden Kanten von  $\chi$  jeweils in genau einer echten Seite von  $\sigma^{(I)}$  liegen und es sich bei diesen Seiten um die Facetten  $\text{pos}\{m^{(I)}(X_1^{(o)})\}^{\perp(I)}$  und  $\text{pos}\{m^{(I)}(X_e^{(o)})\}^{\perp(I)}$  handelt. Unter dem Kegel-Isomorphismus  $\phi$  in 5.1.3(iii) werden diese Facetten auf die Facetten  $\tau_1 := \text{pos}\{m^{(J)}(X_1^{([o]})\}^{\perp(J)}$  und  $\tau_2 := \text{pos}\{m^{(J)}(X_e^{([o]})\}^{\perp(J)}$  von  $\sigma^{(J)}$  abgebildet, und aus 4.3.8(i) folgt  $y_{\tau_1} = \mathcal{VAR}(R_k^\nu) \setminus X_1^{([o]}$  und  $y_{\tau_2} = \mathcal{VAR}(R_k^\nu) \setminus X_e^{([o]}$ . Daher folgt die Aussage aus 4.3.8(ii) und der Form der  $\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet$ .  $\square$

### 6.3 Dualität bei der Artinkomponente

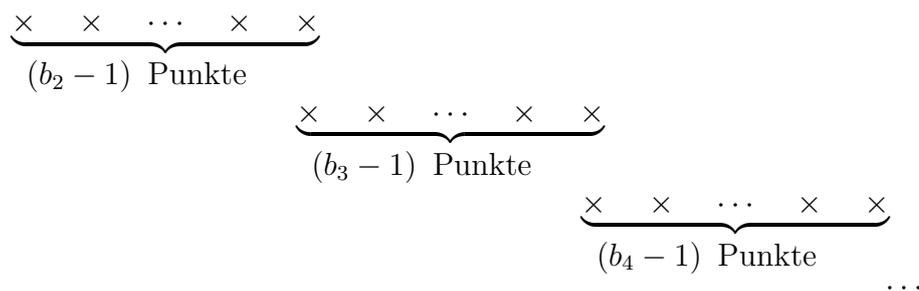
Es sei eine Singularität  $X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1})$  gegeben und  $\sigma = \sigma'_k$  ein Kegel mit  $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$  des Kegelsystems  $\Sigma_{(X, \sigma'_k)}$  zu  $X_{n,q}$  (also zur Artinkomponente der versellen Deformation von  $X_{n,q}$  gehörig). Weiter betrachten wir die Singularität  $X_{n,n-q} = X(b_2, \dots, b_{f-1})$ , mit den Zahlen<sup>3</sup>  $b_2, \dots, b_{f-1}$  aus dem Kettenbruch

$$\frac{n}{q} = b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_{f-1}}}}$$

Es sei  $\sigma' = \sigma'_{k'}$  ein Kegel mit  $k' = (1, 2, \dots, 2, 1)$  des Kegelsystems zu  $X_{n,n-q}$  (also zur Artinkomponente der versellen Deformation von  $X_{n,n-q}$  gehörig). Wir betrachten  $\sigma \subseteq L_{\mathbb{R}}$  und  $\sigma' \subseteq L'_{\mathbb{R}}$  als volldimensionale Kegel, mit Gittern  $L$  bzw.  $L'$ .<sup>4</sup> Dann gilt:

**Satz 6.3.1.** *Es gibt einen Kegel-Isomorphismus  $(L^*, \sigma^\vee) \longrightarrow (L', \sigma')$ .*

Im Beweis verwenden wir das Punkt-Diagramm aus [Rie1, §3]. Dieses beschreibt den Zusammenhang zwischen den Zahlen  $b_2, \dots, b_{f-1}$  und den Zahlen  $a_2, \dots, a_{e-1}$ : Sind  $b_2, \dots, b_{f-1}$  gegeben, so betrachte man das folgende System von Punkten:



Jedem System von senkrecht übereinander stehenden Punkten entspricht dann ein  $a_i$ , und zwar ist  $a_i - 1$  gleich der Anzahl dieser Punkte.

*Beispiel:*  $(b_2, \dots, b_6) = (5, 2, 2, 3, 2)$  liefert das Diagramm



und also  $(a_2, \dots, a_6) = (2, 2, 2, 5, 3)$ .

*Beweis von 6.3.1.* Gemäß Abschnitt 3.3 sei zu  $X(a_2, \dots, a_{e-1})$  der Ring  $\mathbb{A}(R'_k)$  in den Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R'_k)$  über  $\mathbb{C}$  und das Ideal  $\mathbb{H}(R'_k) \subseteq \mathbb{A}(R'_k)$  definiert. Analog sei nun zu  $X(b_2, \dots, b_{f-1})$  der Ring  $\mathbb{A}(R'_{k'})$  in den entsprechenden Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R'_{k'})$  über  $\mathbb{C}$  und

<sup>3</sup>Statt  $1, \dots, r$  wie in Abschnitt 1.2 verwenden wir hier für die  $b_i$  eine ähnliche Indizierung wie für die  $a_i$ .

<sup>4</sup>Das hier verwendete Gitter  $L$  stimmt im Allgemeinen nicht mit dem Gitter  $L$  in Abschnitt 5.2 überein.

das Ideal  $\mathbb{H}(R_k^{\nu'}) \subseteq \mathbb{A}(R_k^{\nu'})$  definiert (wobei  $R_k^{\nu'}$  die dem Kegel  $\sigma' = \sigma_k^{\nu'}$  entsprechende Äquivalenzrelation bezeichne). Wir können annehmen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{VAR}(R_k^{\nu}) &= \{X_1^L, \dots, X_{e-2}^L, X_3^R, \dots, X_e^R, \\ &\quad X_2^{([1])}, \dots, X_2^{([a_2-1])}, X_3^{([1])}, \dots, X_3^{([a_3-2])}, \dots, \\ &\quad X_{e-2}^{([1])}, \dots, X_{e-2}^{([a_{e-2}-2])}, X_{e-1}^{([1])}, \dots, X_{e-1}^{([a_{e-1}-1])}\}, \\ \mathcal{VAR}(R_k^{\nu'}) &= \{X_1^L, \dots, X_{f-2}^L, X_3^R, \dots, X_f^R, \\ &\quad X_2^{([1])}, \dots, X_2^{([b_2-1])}, X_3^{([1])}, \dots, X_3^{([b_3-2])}, \dots, \\ &\quad X_{f-2}^{([1])}, \dots, X_{f-2}^{([b_{f-2}-2])}, X_{f-1}^{([1])}, \dots, X_{f-1}^{([b_{f-1}-1])}\} \end{aligned}$$

gilt (vergl. Abschnitt 6.2), wobei die für die Mengen angegebenen Elemente paarweise verschieden sind. Wir setzen  $I := \mathbb{H}(R_k^{\nu})$  und  $J := \mathbb{H}(R_k^{\nu'})$  sowie  $r := \#\mathcal{VAR}(R_k^{\nu})$  und  $r' := \#\mathcal{VAR}(R_k^{\nu'})$ . Nach Definition gilt  $\sigma = \sigma^{\mathbb{K}(R_k^{\nu})}$  und  $\sigma' = \sigma^{\mathbb{K}(R_k^{\nu'})}$ , aber nach 5.1.3(iii) können wir  $\sigma = \sigma^{(I)}$  und  $\sigma' = \sigma^{(J)}$  annehmen. Da weiter  $\dim \sigma^{(I)} = \dim N_{\mathbb{R}}^{(I)}$ ,  $\dim \sigma^{(J)} = \dim N_{\mathbb{R}}^{(J)}$  wegen  $0 \in \mathcal{V}(I)$ ,  $0 \in \mathcal{V}(J)$  aus 4.3.15 folgt, gilt  $L = N^{(I)}$  und  $L' = N^{(J)}$ . Daher gibt es nach 4.2.4(i) einen Kegel-Isomorphismus  $(L^*, \sigma^{\vee}) \longrightarrow (M^{(I)}, (\sigma^{(I)})^{\vee(I)})$ . Da zudem  $S^{(I)} = (\sigma^{(I)})^{\vee(I)} \cap M^{(I)}$  wegen der Normalität von  $I$  (s. 5.1.3(i)) und 4.2.5(ii) gilt, sowie  $\sigma^{(J)} \cap N^{(J)} = \mathbb{N}_0^{r'} \cap N^{(J)}$  nach Definition, ist die Existenz eines Gitterisomorphismus

$$\phi : M^{(I)} \longrightarrow N^{(J)} \quad \text{mit } \phi(S^{(I)}) = \mathbb{N}_0^{r'} \cap N^{(J)}$$

zu zeigen. Nach Definition gilt  $M^{(I)} = \mathbb{Z}^r / \mathcal{Z}(I)$ , wobei  $\mathcal{Z}(I)$  in diesem Fall erzeugt wird von

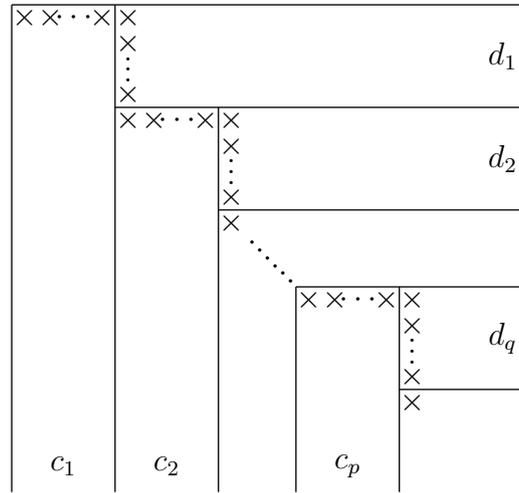
$$\begin{aligned} z_1^L + z_3^R &= z_2^L + z_2^{([1])} + \dots + z_2^{([a_2-1])}, & z_2^L + z_4^R &= z_3^L + z_3^R + z_3^{([1])} + \dots + z_3^{([a_3-2])}, \dots, \\ z_{e-3}^L + z_{e-1}^R &= z_{e-2}^L + z_{e-2}^R + z_{e-2}^{([1])} + \dots + z_{e-2}^{([a_{e-2}-2])}, & z_{e-2}^L + z_e^R &= z_{e-1}^R + z_{e-1}^{([1])} + \dots + z_{e-1}^{([a_{e-1}-1])}; \end{aligned}$$

und nach Definition gilt  $N^{(J)} = \mathcal{Z}(J)$ , wobei  $\mathcal{Z}(J)$  in diesem Fall erzeugt wird von

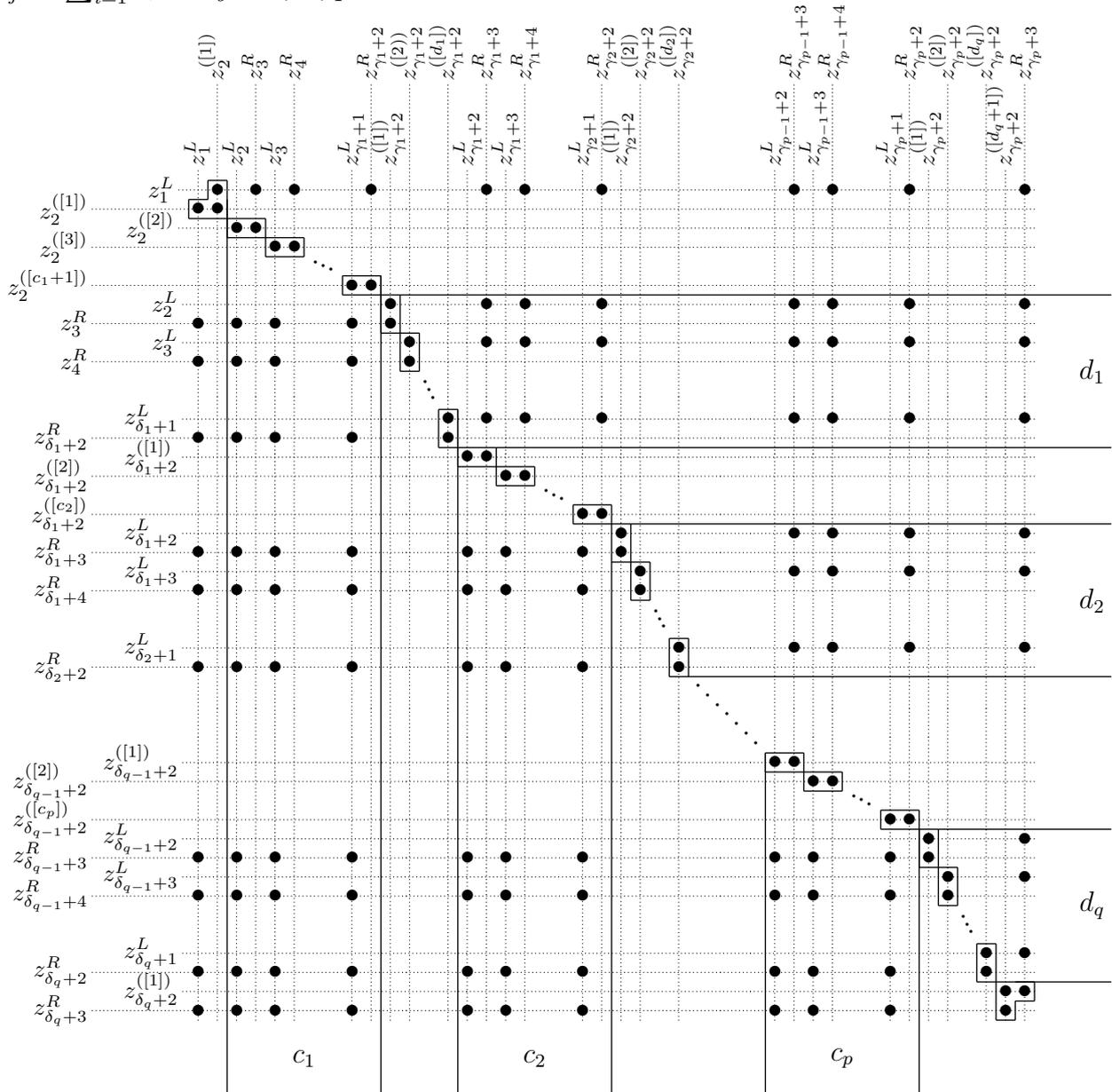
$$\begin{aligned} z_1^L + z_3^R &= z_2^L + z_2^{([1])} + \dots + z_2^{([b_2-1])}, & z_2^L + z_4^R &= z_3^L + z_3^R + z_3^{([1])} + \dots + z_3^{([b_3-2])}, \dots, \\ z_{f-3}^L + z_{f-1}^R &= z_{f-2}^L + z_{f-2}^R + z_{f-2}^{([1])} + \dots + z_{f-2}^{([b_{f-2}-2])}, & z_{f-2}^L + z_f^R &= z_{f-1}^R + z_{f-1}^{([1])} + \dots + z_{f-1}^{([b_{f-1}-1])}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Koordinaten von  $\mathbb{Z}^r$  bzw.  $\mathbb{Z}^{r'}$  entsprechend den Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R_k^{\nu})$  bzw.  $\mathcal{VAR}(R_k^{\nu'})$  indiziert (ähnlich wie bei den Beispielen in den Abschnitten 5.2 und 5.3).

Aus dem Punkt-Diagramm konstruieren wir folgendermaßen eine  $(r' \times r)$ -Matrix  $A$  mit Einträgen aus  $\{0, 1\}$ , welche die Abbildung  $\phi$  induzieren soll.



Dabei stehen die Zahlen  $c_i$  und  $d_i$  für die Anzahl der Punkte im jeweiligen Intervall. Mittels dieser Zahlen konstruieren wir nun die Matrix  $A$ , wobei  $\gamma_j := \sum_{i=1}^j c_i$  für  $j = 1, \dots, p$  und  $\delta_j := \sum_{i=1}^j d_i$  für  $j = 1, \dots, q$ :



Dabei stehen die  $\bullet$  genau für die Einsen. Die Zahlen  $c_i$  und  $d_i$  stehen für die Anzahl der abgebildeten Kästchen im jeweiligen Intervall. (Unten, im Anschluss an diesen Beweis, ist ein Beispiel angegeben.) Man sieht, dass mit dem verwendeten Schema zur Bezeichnung der Zeilen bzw. Spalten die Zeilen genau den Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R_k^{\nu'})$  und die Spalten genau den Variablen aus  $\mathcal{VAR}(R_k^{\nu})$  entsprechen. Weiter sieht man, dass jeder Zeilenvektor ein Element von  $\mathcal{Z}(I)$  und jeder Spaltenvektor ein Element von  $\mathcal{Z}(J)$  ist. Daher induziert  $\mathbb{Z}^r \ni \mathbf{z} \mapsto A \cdot \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^{r'}$  einen Gitterhomomorphismus  $\phi : M^{(I)} \longrightarrow N^{(J)}$ . Man betrachte nun die Untermatrix, die durch Streichen der zu  $z_1^L, z_2^L, \dots, z_{\delta_q+1}^L$  gehörigen Zeilen sowie jeweiliges Streichen einer der beiden Spalten zu einem in horizontaler Lage befindlichen Kästchen entsteht. Diese ist eine quadratische Matrix mit Determinante 1 und – da die Anzahl der gestrichenen Zeilen offenbar mit dem Rang von  $\mathcal{Z}(J)$  übereinstimmt – vom gleichen Rang wie  $N^{(J)}$ . Daher folgt aus 4.2.7 die Surjektivität von  $\mathbb{Z}^r \longrightarrow N^{(J)}, \mathbf{z} \mapsto A \cdot \mathbf{z}$ . Da die in [Rie1, Lemma 4] angegebene Formel  $\sum_{i=2}^{f-1} (b_i - 1) = \sum_{j=2}^{e-1} (a_j - 1)$  die Gleichheit des Rangs von  $N^{(J)}$  mit dem Rang von  $N^{(I)}$  bzw.  $M^{(I)}$  impliziert, folgt dann die Bijektivität von  $\phi$ . Die Gleichung  $\phi(S^{(I)}) = \mathbb{N}_0^{r'} \cap N^{(J)}$  schließlich ist gleichbedeutend dazu, dass für alle  $z \in \mathbb{Z}^r$  gilt:  $A \cdot z \in \mathbb{N}_0^{r'} \Leftrightarrow \exists y \in N^{(I)} : z + y \in \mathbb{N}_0^r$ . Und dass diese Bedingung erfüllt ist, ist leicht anhand der Matrix  $A$  zu sehen.  $\square$

Die Matrix  $A$  aus diesem Beweis zu dem obigen Beispiel  $(b_2, \dots, b_6) = (5, 2, 2, 3, 2)$  sieht so aus:

	$z_1^L$	$z_2^{([1])}$	$z_2^L$	$z_3^R$	$z_3^L$	$z_4^R$	$z_4^L$	$z_5^R$	$z_5^{([1])}$	$z_5^{([2])}$	$z_5^{([3])}$	$z_5^L$	$z_6^R$	$z_6^{([1])}$	$z_6^{([2])}$	$z_7^R$
$z_1^L$		1		1		1		1					1			1
$z_2^{([1])}$	1	1														
$z_2^{([2])}$			1	1												
$z_2^{([3])}$					1	1										
$z_2^{([4])}$							1	1								
$z_2^L$									1				1			1
$z_3^R$	1		1		1		1		1							
$z_3^L$										1			1			1
$z_4^R$	1		1		1		1			1						
$z_4^L$											1		1			1
$z_5^R$	1		1		1		1				1					
$z_5^{([1])}$												1	1			
$z_5^L$														1		1
$z_6^R$	1		1		1		1					1		1		
$z_6^{([1])}$															1	1
$z_7^R$	1		1		1		1					1			1	



## Literatur

- [A] Arndt, J. *Verselle Deformationen zyklischer Quotientensingularitäten*, Diss. Hamburg 1988
- [Alt1] Altmann, K. *Deformations of affine torus varieties*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 34 (1993), No.1, 119-150
- [Alt2] Altmann, K. *The versal deformation of an isolated toric Gorenstein singularity*, Invent. math. 128 (1997), 443-479
- [B] Brohme, S. *Monodromieüberlagerung der versellen Deformation zyklischer Quotientensingularitäten*, Diss. Hamburg 2002
- [BC] Behnke, K., Christophersen, J. *M-Resolutions and deformations of quotient singularities*, Am. J. Math. 116 (1994), 881-903
- [BFK] Barthel, G., Fieseler, K.-H., Kaup, L. *Introduction to basic toric geometry*, Singularities in geometry and topology (2007), 3-56
- [Brie] Brieskorn, E. *Rationale Singularitäten komplexer Flächen*, Invent. math. 4 (1968), 336-358
- [Bo] Bosch, S. *Algebra*, Springer-Verlag (2006)
- [C] Christophersen, J. *On the components and discriminant of the versal base space of cyclic quotient singularities*, in: Singularity Theory and its Applications, SLN 1262, Springer: New York, 1991
- [Coh] Cohen, H. *A course in computational algebraic number theory*, GTM 138, Springer-Verlag (1993)
- [Fu] Fulton, W. *Introduction to toric varieties*, Annals of Mathematics Studies 131. Princeton, New Jersey 1993
- [G] Grauert, H. *Über Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen*, Inventiones Mathematicae 15 (1972), 171-198
- [Gro] Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algébrique IV*, Publ. Math. IHES 28 (1966)
- [GPS] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 3.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005). <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [JP] De Jong, T., Pfister, G. *Local analytic geometry*, Vieweg-Verlag (2000)
- [K] Katsabekis, A. *Projections of cones and the arithmetical rank of toric varieties*, Journal of Pure and Applied Algebra 199 (2005), 133-147
- [Kaup] Kaup, L. *Vorlesungen über Torische Varietäten*, Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik (2000)
- [L] Lamotke, K. *Regular solids and isolated singularities*, Vieweg-Verlag (1986)

- [MS] Miller, E., Sturmfels, B. *Combinatorial commutative algebra*, GTM 227, Springer-Verlag (2005)
- [Rie1] Riemenschneider, O. *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*, Math. Ann. 209 (1974), 211-248
- [Rie2] Riemenschneider, O. *The monodromy covering of the versal deformation of cyclic quotient surface singularities*, Mathematical Society of Japan. Advanced Studies in Pure Mathematics 42 (2004), 275-282
- [S] Sturmfels, B. *Gröbner bases and convex polytopes*, AMS University Lecture Series Vol. 8 (1996)
- [W] Weibel, C. A. *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 38 (1994)
- [Zie] Ziegler, G. *Lectures on polytopes*, GTM 152, Springer-Verlag (1995)

# Zusammenfassung

Im Zentrum der vorliegenden Arbeit steht die Deformationstheorie zweidimensionaler zyklischer Quotientensingularitäten. Das Hauptergebnis des ersten Teils der Arbeit ist eine explizite Konstruktion der versellen Deformation mittels gewisser Wurzelbäume. Dies läuft auf den Beweis einer Vermutung von Brohme hinaus. Der zweite Teil behandelt die Monodromieüberlagerung der versellen Deformation. Wie die Ausgangssingularität selbst sind auch die Totalräume über den Komponenten des reduzierten Basisraums dieser Deformation – und allgemeiner die Totalräume über deren Durchschnitten – affine torische Varietäten und können somit jeweils durch einen polyedrischen Gitterkegel beschrieben werden. Es wird eine Konstruktion eines Systems solcher Kegel hergeleitet, welches auch die Durchschnitte einbezieht. Anschließend wird die kombinatorische Struktur der Kegel dieses Systems beschrieben. Zuletzt wird eine gewisse Dualität im Zusammenhang mit der Artinkomponente gezeigt.