

**Ein nichtlinearer Ansatz zur
Bestimmung der Größenverteilung von
Gasblasen in Zweiphasenmedien**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Andreas Diekmann

aus Hamburg

Hamburg

2001

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Klaus Glashoff
und Priv.-Doz. Dr. Ingenuin Gasser

Hamburg, den 2. Mai 2001

Prof. Dr. Ulrich Eckhardt
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Schallausbreitung in Zweiphasenmedien	11
2.1	Das van-Wijngaarden-Modell	11
2.2	Linearisierung und Skalierung	14
2.3	Die Dispersionsrelation	16
3	Schlecht gestellte Probleme	25
3.1	Lineare schlecht gestellte Probleme	25
3.2	Tikhonov-Regularisierung	29
3.3	Morozovsches Diskrepanzprinzip	31
3.4	Numerische Realisierung	35
3.5	Nichtlineare schlecht gestellte Probleme	39
3.6	Tikhonov-Regularisierung für nichtlineare Probleme	40
4	Bestimmung von Blasengrößenverteilungen	45
4.1	Herleitung der nichtlinearen Gleichung	45
4.2	Linearisierung	50
4.3	Lösung der nichtlinearen Gleichung	58
A	Operatoren in Hilberträumen	67
A.1	Kompakte Operatoren	67
A.2	Spektraltheorie	71
A.3	Verallgemeinerte Inverse	73
	Literaturverzeichnis	77

Abbildungsverzeichnis

1.1	Kavitation an einem Schiffspropeller	6
1.2	Bestimmung der Größe und Konzentration von Gasblasen in einem Zweiphasengemisch	7
2.1	Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit einer Blasengröße	18
2.2	Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit zwei Blasengrößen	20
2.3	Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit einer Gaußverteilung der Blasengrößen	22
4.1	Näherung der Phasengeschwindigkeit und der Dämpfung für einen frequenzunabhängigen Dämpfungsterm	46
4.2	Integrationsweg Γ	47
4.3	Vergleich des linearen und nichtlinearen Modells der Ausbreitung von Schallwellen für verschieden starke Gaskonzentrationen	53
4.4	Normalisierter Auslöschungsquerschnitt	54
4.5	Resonanznäherung für eine Gaußverteilung	55
4.6	Rekonstruktion einer Gaußverteilung im linearen Fall	57
4.7	Rekonstruktion einer Dreieckverteilung im linearen Fall	57
4.8	Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Gleichung	62
4.9	Rekonstruktion einer Gaußverteilung im nichtlinearen Fall	64
4.10	Rekonstruktion einer Dreieckverteilung im nichtlinearen Fall	65

Kapitel 1

Einleitung

Durch verschiedene dynamische und statische Vorgänge kann es in Flüssigkeiten – insbesondere in Wasser – zur Bildung von Volumengebieten kommen, die mit Gas oder Dampf oder einem Gemisch aus beidem gefüllt sind. Im Verhältnis zu der wesentlich dichteren Flüssigkeit erscheinen diese Gebiete als Hohlräume; man bezeichnet daher diese Erscheinung als *Kavitation* (lat. *cavitas* = Hohlraum). Hinsichtlich der Entstehungsursache unterscheidet man verschiedene Arten von Kavitation. In Lauterborn [24] wurde eine Einteilung in hydrodynamische, akustische, optische und durch Elementarteilchen – etwa Protonen – verursachte Kavitation vorgenommen. Eine Einführung in das Gebiet der Kavitation und eine Beschreibung der verschiedenen Kavitationsarten findet man in Young [50].

Hydrodynamische Kavitation entsteht bei der Umströmung von Strukturen, wie z. B. Unterwasserturbinen oder Schiffspropellern; die Abb. 1.1 zeigt einen kavitierenden Schiffspropeller im Modellversuch. Innerhalb der hydrodynamischen Kavitation kann wiederum zwischen sogenannter Dampf- und Pseudokavitation unterschieden werden [20]. Dampfkavitation tritt ein, wenn – verursacht durch die herrschenden Geschwindigkeitsschwankungen – der lokale Druck in der Strömung unter den Dampfdruck der Flüssigkeit sinkt. Dagegen ist die Pseudokavitation bedingt durch in der Flüssigkeit enthaltene Keime von ungelöster Luft oder anderen Gasen, die sich mit abnehmendem Druck aufweiten. Man bezeichnet daher in der Flüssigkeit enthaltene Gasblasen auch als Kavitationskeime.

Die Kavitationserscheinungen bleiben nicht ohne Auswirkungen auf die unmittelbare Umgebung. Werden die Kavitäten durch die Strömung oder die Rotation der Turbinen oder Propeller in Flüssigkeitsgebiete mit hohem lokalen Druck transportiert, so kollabieren sie dort heftig. Beim Zusammenfall der Hohlräume kommt es infolge der starken Druckstöße zu erheblicher Schallabstrahlung und zu Materialschäden an den Strömungskörpern. Insbesondere bei Kavitationserscheinungen an Schiffspropellern kommt es zur allmählichen Zerstörung des Propellers und der Außenhaut des Schiffes durch Erosion. Durch die starken Druckschwankungen können Teile des Schiffes zudem in Schwingung geraten. Nicht zuletzt führt Kavitation zu erheblichen Antriebsverlusten.

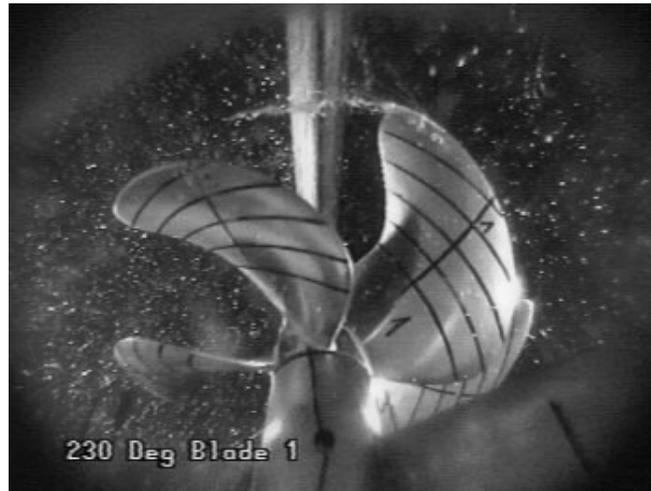


Abb. 1.1: Kavitation an einem Schiffspropeller (HSVA).

Bei der Entwicklung und dem Design von Schiffspropellern, Turbinen und anderen Strömungskörpern versucht man nun, die Effekte der Kavitation möglichst zu minimieren. Speziell zur Konstruktion geeigneter Schiffspropeller werden an der *Hamburgischen Schiffbau-Versuchsanstalt* (HSVA) zunächst Propeller im Modellmaßstab hergestellt und in sogenannten Kavitationstunneln auf ihr Kavitationsverhalten getestet [31]. Neben Maßstabeffekten müssen in diesen Modellversuchen insbesondere die natürlichen Gegebenheiten berücksichtigt werden. Typischerweise treten am Bug eines Schiffes Gemische von Wasser und Luftblasen auf, die – wie oben bereits erwähnt – erheblichen Einfluß auf Stärke und Einsatz der Kavitation nehmen. Zur reproduzierbaren Erzeugung der Kavitationsercheinungen ist es daher notwendig, Größe und Konzentration der Luftblasen im Kavitationstunnel kontrollieren zu können.

Zur Bestimmung der Größenverteilung der Blasen in einem Gemisch gibt es verschiedene Möglichkeiten: Optische Verfahren sind sehr weit entwickelt, haben aber den Nachteil, nicht zwischen festen und gasförmigen Partikeln unterscheiden zu können [40]. Dies macht es erforderlich, akustische Verfahren zu verwenden. Blasenhaltige Gemische weisen akustische Eigenschaften auf, die sich von denen der reinen Flüssigkeiten unterscheiden. Die Anwesenheit kleiner Gasblasen hat im wesentlichen zwei in Wechselwirkung stehende Auswirkungen: Zum einen wird die Kompressibilität der Flüssigkeit, und damit verbunden die Übertragung von Schall, verändert; zum anderen werden die Gasblasen durch das Eintreffen von Schallwellen in gedämpfte gegenphasige Schwingungen versetzt. Dadurch werden Teile der Schallenergie in Wärmeenergie umgewandelt, was zu einer Dämpfung der eintreffenden Schallwellen führt. Phasengeschwindigkeit und Dämpfung können als die wesentlichen akustischen Merkmale eines Flüssigkeits-Blasen-Gemisches angesehen werden [39].

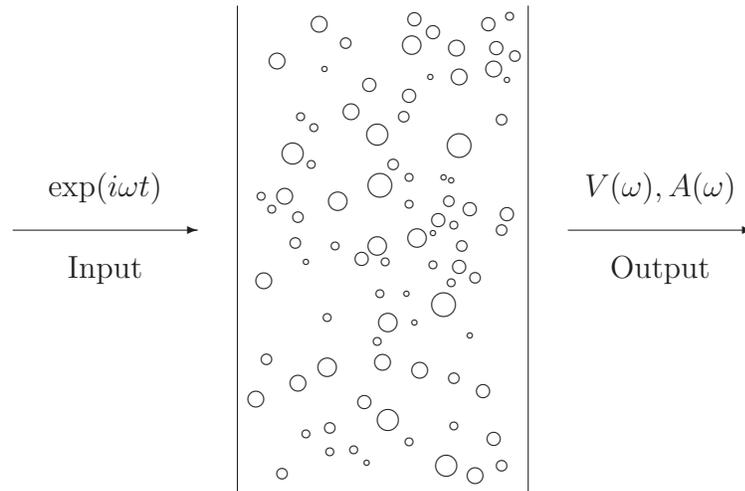


Abb. 1.2: Bestimmung der Größe und Konzentration von Gasblasen aus Messungen der Phasengeschwindigkeit V und der Dämpfung A von Schallwellen bei Ausbreitung durch ein Gemisch.

Die akustischen Charakteristika hängen nun ab von den physikalischen Eigenschaften des Gemisches, also von den Blasengrößen und dem Gasvolumenanteil. Sie hängen aber natürlich auch von der Erregerfrequenz ab; insbesondere fängt eine Gasblase dann an zu schwingen, wenn die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz der Blase übereinstimmt. Man wird erwarten, daß im Bereich der Eigenfrequenzen der im Gemisch anwesenden Blasen die Dämpfung maximal wird, während die Kompressibilität (und damit auch die Phasengeschwindigkeit) ihr Minimum erreicht.

Die blasenhaltige Flüssigkeit wird durch die Dichteverteilung f der Blasengrößen beschrieben. Um den Zusammenhang zu der Phasengeschwindigkeit V und der Dämpfung A herzustellen, benötigt man ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Ausbreitung von Schallwellen in Gemischen. Ist ein solches Modell gegeben, so können V und A für eine bekannte Verteilung f bestimmt werden. Man bezeichnet diese Aufgabe als das *direkte Problem*. Umgekehrt kann man nun versuchen, durch Messungen der akustischen Charakteristika V und A für verschiedene Frequenzen den Gemischparameter f zu bestimmen; diese sogenannte *Parameteridentifikation* ist das zugehörige *inverse Problem* (siehe Abb. 1.2). Während für das direkte Problem Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der Lösung angenommen werden können, ist keine dieser Eigenschaften für das zugehörige inverse Problem garantiert. Da Messungen aus einem Experiment stets Fehlern unterliegen, hat die Stabilität – also die stetige Abhängigkeit der Lösung von Störungen der Daten – eine ganz besondere Bedeutung.

Zu Beginn des 20sten Jahrhunderts führte Hadamard [17] für Probleme, welche die genannten Eigenschaften der Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität der

Lösung besitzen, den Begriff des *gut gestellten* Problems ein. Er war der Ansicht, daß mathematische Probleme, die aus der Modellierung eines physikalischen Prozesses resultieren, immer gut gestellt sein müssen. Heute weiß man, daß viele interessante inverse Probleme auf mathematische Aufgaben führen, die *schlecht gestellt* sind.

Das hier vorgestellte Problem der Bestimmung der Größenverteilung von Gasblasen in Zweiphasengemischen ist ein Beispiel für ein schlecht gestelltes inverses Problem. Die Modellierung der Ausbreitung von Schallwellen in blasenhaltigen Flüssigkeiten führt schließlich auf eine lineare Integralgleichung erster Art zur Bestimmung der gesuchten Verteilung f aus Messungen von V und A . Solche Integralgleichungen sind typische Vertreter linearer schlecht gestellter Probleme. Zur Bestimmung einer stabilen Approximation der Lösung gibt es zahlreiche Verfahren, die als *Regularisierung* bezeichnet werden; man löst dabei eine gut gestellte Gleichung, welche die schlecht gestellte Gleichung in einem gewissen Sinne approximiert. Eines der bekanntesten Regularisierungsverfahren geht auf Tikhonov [45] zurück.

Bei der Durchführung praktischer Versuche stellt sich nun allerdings heraus, daß die Phasengeschwindigkeit – im Gegensatz zur Dämpfung – nicht problemlos bestimmt werden kann. Insbesondere im Bereich der Eigenfrequenzen, also in einem Bereich, der charakteristisch für die gesuchte Verteilung ist, kann V nur mit einer ungenügenden Genauigkeit ermittelt werden. Es bedarf daher einer Gleichung, die es gestattet, die Verteilung f allein aus Messungen der Dämpfung zu bestimmen. Eine solche Gleichung läßt sich aus der oben erwähnten Integralgleichung herleiten, aber diese ist nicht mehr linear. Bisherige Methoden zur Bestimmung von f verwenden deshalb eine lineare Idealisierung des Modells, d. h. die nichtlinearen Effekte in dem Zusammenhang von f und A werden vernachlässigt, und man löst die entsprechende lineare Gleichung. Solche Linearisierungsmethoden liefern eine gute Approximation, sofern die Gaskonzentration im Gemisch hinreichend klein ist – sie werden immer dann eingesetzt, wenn erwartet wird, daß der Gasvolumenanteil im Bereich von $10^{-4}\%$ oder kleiner liegt. Für Gemische mit einer höheren Gaskonzentration ist es dagegen notwendig, die nichtlineare Gleichung in Betracht zu ziehen. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Methode zur numerischen Lösung dieser nichtlinearen und schlecht gestellten Gleichung zu entwickeln, so daß auch Verteilungen in einem dichteren Gemisch bestimmt werden können. Insbesondere muß dafür eine geeignete Regularisierung der nichtlinearen Gleichung gefunden werden.

Die Arbeit gliedert sich im einzelnen wie folgt:

In Kapitel 2 wird das sogenannte *van-Wijnngaarden-Modell* zur Beschreibung der Ausbreitung von Schallwellen in blasenhaltigen Flüssigkeiten vorgestellt [47, 48]. Unter der Annahme einer nahezu inkompressiblen Flüssigkeit werden die Grundgleichungen des Modells zunächst für Gemische mit nur einer Blasengröße hergeleitet und anschließend auf allgemeine Gemische erweitert. Man erhält eine

inhomogene Wellengleichung und eine nichtlineare Schwingungsgleichung zur Modellierung der Blasendynamik; dieses System von Gleichungen beschreibt den Zusammenhang des Gemischdrucks und der Blasenradien. Für die Ausbreitung von Druckwellen kleiner Amplitude werden diese Gleichungen linearisiert, und speziell für sinusförmige Druckwellen erhält man schließlich die sogenannte *Dispersionsrelation*; diese komplexe Gleichung ist eine lineare Integralgleichung erster Art für die Verteilung f und stellt den gesuchten Zusammenhang zu der Phasengeschwindigkeit V und der Dämpfung A her. Sie wird später in Kapitel 4 dazu verwendet, eine Gleichung für die Verteilung f und die Dämpfung A herzuleiten, in der die Phasengeschwindigkeit V nicht mehr vorkommt, welche also zur praktischen Bestimmung von f benutzt werden kann. Diese Gleichung gehört einer speziellen Klasse nichtlinearer und schlecht gestellter Probleme an, für die im anschließenden Kapitel Regularisierungsverfahren untersucht werden.

Zahlreiche inverse Probleme führen auf das Lösen einer schlecht gestellten Gleichung $T(f) = g$ mit einem linearen oder nichtlinearen Operator T und einer aus Messungen bekannten rechten Seite g . Da stets Meßfehler zu berücksichtigen sind, hat man für die praktische Berechnung von f nur eine Approximation g^δ der rechten Seite zur Verfügung. Für diesen Fall – insbesondere wenn T linear ist – existieren bereits viele Regularisierungsverfahren. Für das vorliegende Problem ist die Situation dagegen anders: Hier erhält man eine Gleichung der speziellen Form $Lf = g(f)$ mit einem linearen Operator L und einem nichtlinearen Operator g . Dabei geht die aus Messungen bekannte Dämpfung in den Operator g ein, und man hat infolgedessen nur eine Approximation g^δ des Operators zur Verfügung. Das Ziel im 3. Kapitel ist es nun, ein Regularisierungsverfahren für diesen Typ nichtlinearer Gleichungen zu konstruieren. Zunächst werden dazu basierend auf der Singulärwertzerlegung linearer kompakter Operatoren Regularisierungsverfahren für lineare schlecht gestellte Probleme eingeführt. Man erhält die bereits genannte Tikhonov-Regularisierung als einen Spezialfall dieser Verfahren [10, 12, 16, 23]. Für nichtlineare Probleme stehen diese spektraltheoretischen Methoden nicht mehr zur Verfügung, aber die Charakterisierung der Tikhonov-Regularisierung als Optimierungsaufgabe gestattet die direkte Übertragung auf den nichtlinearen Fall [12, 16]. Schließlich wird gezeigt, daß die Tikhonov-Regularisierung auf Gleichungen der Form $Lf = g(f)$ angewendet werden kann, sofern gewisse Voraussetzungen für die Operatoren L und g sowie für die Störungen von g erfüllt sind.

Das Kapitel 4 dient nun der Formulierung eines Verfahrens zur Bestimmung von Blasengrößenverteilungen aus Messungen der Dämpfung. Aus der in Kapitel 2 gewonnenen komplexen Dispersionsrelation wird die nichtlineare Gleichung für f und A hergeleitet, welche von der bereits oben beschriebenen Form $Lf = g(f)$ ist. Zunächst werden Methoden vorgestellt, welche die gesuchte Verteilung f aus einer linearen Approximation dieser Gleichung bestimmen; insbesondere wird eine strenge Herleitung der dazu verwendeten linearen Gleichung gezeigt. Zur numerischen Lösung dieser linearen schlecht gestellten Gleichung existieren bereits

zahlreiche Verfahren [4, 6, 9]. Ist der Gasanteil im Gemisch zu groß, so liefert die Linearisierung des Modells eine schlechte Approximation, und es muß die nichtlineare Gleichung gelöst werden. Zunächst wird gezeigt, daß die in Kapitel 3 vorausgesetzten Eigenschaften der Operatoren L und g zur Anwendung der Tikhonov-Regularisierung auf das nichtlineare Problem erfüllt sind. Es wird dann ein numerisches Verfahren zur Lösung formuliert und dieses zur Rekonstruktion von Beispielverteilungen angewendet. Das Verfahren kann im „schwach nichtlinearen“ Bereich – also für den Fall, daß die nichtlinearen Effekte zwar nicht vernachlässigt, aber dennoch als klein vorausgesetzt werden können – angewendet werden. Die Beispielrechnungen wurden für einen Gasvolumenanteil β von bis zu 0.01 % durchgeführt.

Im Anhang A sind einige Eigenschaften kompakter und vollstetiger Operatoren in Hilberträumen beigelegt, die im Verlaufe dieser Arbeit benötigt werden; insbesondere wird die Singulärwertzerlegung linearer kompakter Operatoren bereitgestellt. Zudem enthält der Anhang einen kurzen Abschnitt über die Theorie der verallgemeinerten Inversen linearer Operatoren, welche im Zusammenhang mit linearen schlecht gestellten Problemen von Bedeutung ist.

Ich möchte mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Klaus Glashoff für die Betreuung meiner Arbeit und bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Ingenuin Gasser für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie für die ständige Hilfsbereitschaft bei kleinen und großen Problemen bedanken. Ferner möchte ich meinen Dank an Herrn Dr. Ulrich Pollmann für die Bereitstellung zahlreicher Materialien ausdrücken. Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern Brigitte und Jürgen Diekmann sowie bei Inga Timmann für die Unterstützung während der gesamten Promotion.

Kapitel 2

Schallausbreitung in Zweiphasenmedien

2.1 Das van-Wijngaarden-Modell

Zur Beschreibung blasenhaltiger Flüssigkeiten existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle. Hier soll ein System nichtlinearer Gleichungen vorgestellt werden, das von van Wijngaarden [47, 48] aufgrund physikalischer Überlegungen vorgeschlagen wurde. Es beschreibt den makroskopischen Zustand eines Gemisches mit geringer Gaskonzentration durch gemittelte Größen. Man erhält entsprechend gemittelte Fluidgleichungen für das Gemisch; das System wird geschlossen durch eine Gleichung, welche die Bewegung der einzelnen Blase beschreibt. Erst Mitte der 80er Jahre wurde von Caffisch et al. [2] eine auf der sogenannten Homogenisierungstheorie aufbauende Herleitung dieses Systems aus Gleichungen gegeben, welche die mikroskopische Bewegung der Flüssigkeit und der Gasblasen modellieren. Im linearen Fall vereinfachen sich die Gleichungen von Caffisch et al. zu denen von Carstensen und Foldy [3], welche bereits 1947 veröffentlicht wurden.

Häufig werden blasenhaltige Flüssigkeiten durch kinetische Modelle beschrieben, welche auch die Modellierung von dichteren Gemischen ermöglichen; insbesondere können Wechselwirkungen der Gasblasen sowie Zusammenschlüsse und Teilungen berücksichtigt werden. Die kinetische Formulierung eignet sich zudem zur numerischen Simulation von Zweiphasenströmungen. Eine Einführung in die kinetische Theorie für Zweiphasenströmungen findet man in Russo und Smereka [35, 36] sowie Jabin und Perthame [21].

Es soll nun ein kurzer Überblick über die Gleichungen von van Wijngaarden gegeben werden. Der makroskopische Zustand des Gemisches wird durch die Dichte $\rho(\mathbf{x}, t)$, den Druck $p(\mathbf{x}, t)$ und das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben. Es gilt dann die übliche Gleichung zur Erhaltung der Masse

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{2.1}$$

und die Impulsgleichung

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.2)$$

Bezeichne nun $\beta(\mathbf{x}, t)$ den Anteil des Gases im Gemisch pro Volumeneinheit und $R(\mathbf{x}, t)$ den Blasenradius. Der Radius R ist eine kontinuierliche Variable, die den Durchschnittsradius der Blasen in einer Umgebung des Punktes \mathbf{x} zur Zeit $t > 0$ angibt. Betrachtet man zunächst nur Gemische, bei denen alle Blasen den gleichen Gleichgewichtsradius a haben, so gilt

$$\beta = \frac{4\pi}{3} R^3 n. \quad (2.3)$$

Dabei ist $n(\mathbf{x}, t)$ die Anzahl der Blasen pro Volumeneinheit. Sei nun ρ_f die Dichte der Flüssigkeit und ρ_g die Dichte des Gases. Das Verhältnis ρ_g/ρ_f ist vernachlässigbar klein für typische Werte von ρ_f und ρ_g ; dann ergibt sich die Dichte des Gemisches aus dem Produkt von ρ_f und dem Flüssigkeitsanteil im Gemisch, d. h. es gilt

$$\rho = \rho_f(1 - \beta). \quad (2.4)$$

Setzt man (2.4) in die Kontinuitätsgleichung (2.1) ein, so erhält man

$$\frac{1}{\rho_f} [(\rho_f)_t + (\mathbf{u}, \nabla)\rho_f] + \text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{1 - \beta} [\beta_t + (\mathbf{u}, \nabla)\beta].$$

Mit der konvektiven Ableitung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla)$$

kann diese Gleichung übersichtlicher geschrieben werden als

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dt} + \text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{1 - \beta} \frac{d\beta}{dt}. \quad (2.5)$$

Die Impulsgleichung wird mit (2.4) zu

$$\rho_f(1 - \beta) \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \text{grad } p = 0. \quad (2.6)$$

Eine mögliche Zustandsbeschreibung des Gases ist gegeben durch die Gleichung $\rho_g^{-\gamma} p_g = \text{const.}$ Der Polytropenexponent γ liegt im Bereich zwischen 1 (isothermes Verhalten) bis hin zum Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen (adiabates Verhalten). Bezeichnet m die Masse einer Gasblase, so sind Dichte und Gleichgewichtsdichte des Gases gegeben durch

$$\rho_g = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad \text{und} \quad \rho_0 = \frac{m}{\frac{4\pi}{3} a^3},$$

und die Zustandsgleichung kann mit dem Gleichgewichtsdruck p_0 geschrieben werden als

$$p_g = p_0 \left(\frac{a}{R} \right)^{3\gamma}. \quad (2.7)$$

Schließlich wird noch eine Gleichung benötigt, welche den Gemischdruck p und den Blasenradius R in Beziehung setzt. Im einfachsten Fall – d. h. für inkompressible Flüssigkeiten – dient dazu die *Rayleigh-Plesset-Gleichung*

$$RR_{tt} + \frac{3}{2}R_t^2 = \frac{1}{\rho_f}(p_b - p) \quad (2.8)$$

(Plesset und Prosperetti [30]). Hier ist p_b der Flüssigkeitsdruck an der Blasenwand; dieser steht mit dem Druck des Gases im Blaseninnern in der Beziehung

$$p_g = p_b + \frac{2\sigma}{R} + 4\mu_f \frac{R_t}{R}. \quad (2.9)$$

Dabei ist σ die Oberflächenspannung und μ_f die Viskosität der Flüssigkeit. Für kompressible Flüssigkeiten wird das Schwingungsverhalten der Gasblasen durch die *Keller-Gleichung*

$$\left(1 - \frac{R_t}{c}\right) RR_{tt} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{R_t}{3c}\right) R_t^2 = \frac{1}{\rho_f} \left(1 + \frac{R_t}{c} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt}\right) (p_b - p) \quad (2.10)$$

beschrieben (siehe Keller [22] und Prosperetti [33, 34]). Hier ist c die Schallgeschwindigkeit in der reinen Flüssigkeit. Die Ableitungen in der Zeit müssen zunächst als konvektive Ableitungen interpretiert werden. Für inkompressible Flüssigkeiten, also $c \rightarrow \infty$, geht die Keller-Gleichung in die Rayleigh-Plesset-Gleichung über. Eine ausführliche Beschreibung der blasendynamischen Vorgänge findet man z. B. in Isay [20, Kap. 11] und Leighton [25].

Die Gleichungen (2.5) bis (2.7) sowie (2.9) und (2.10) stellen die Grundgleichungen des *van-Wijngaarden-Modells* dar. Sie können weiter vereinfacht werden, wenn der Gasvolumenanteil und die Geschwindigkeitsveränderungen als klein vorausgesetzt werden. Dann können die Konvektionsterme und die quadratischen Terme in β sowie $\beta \mathbf{u}$ in den Gleichungen (2.5), (2.6) und (2.10) vernachlässigt werden (siehe Commander und Prosperetti [8]), und man erhält für die Kontinuitäts- und die Impulsgleichung des Modells

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_f}(\rho_f)_t + \operatorname{div} \mathbf{u} &= \beta_t, \\ \rho_f \mathbf{u}_t + \operatorname{grad} p &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nimmt man nun zudem an, daß die Flüssigkeit nahezu inkompressibel ist, so kann mit der üblichen akustischen Näherung $\partial \rho_f / \partial t$ durch $c^{-2} p_t$ ersetzt und

anschließend ρ_f und die Schallgeschwindigkeit c der reinen Flüssigkeit als konstant betrachtet werden. Eliminiert man das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} aus dem System (2.11), so erhält man die inhomogene Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} p_{tt} - \Delta p = \rho_f \beta_{tt}. \quad (2.12)$$

Sind keine Gasblasen in der Flüssigkeit enthalten, stimmt diese mit der üblichen Wellengleichung überein. Die Gleichungen (2.7), (2.9) und (2.10) ergeben zusammen

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R_t}{c}\right) R R_{tt} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{R_t}{3c}\right) R_t^2 = \\ \frac{1}{\rho_f} \left(1 + \frac{R_t}{c} + \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[p_0 \left(\frac{a}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_f \frac{R_t}{R} - p \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die inhomogene Wellengleichung (2.12) und die nichtlineare Schwingungsgleichung (2.13) bilden nun ein System von Gleichungen für den Druck p und den Radius R ; in der Gleichung (2.12) ist R implizit in dem durch (2.3) definierten Gasanteil β enthalten.

Das oben beschriebene Modell kann leicht auf Gemische erweitert werden, die verschiedene Blasengrößen enthalten. Sei dazu $f(\mathbf{x}, t, a)$ die Dichteverteilung der Gasblasen mit einem Gleichgewichtsradius a . Die Anzahl $dn(\mathbf{x}, t)$ der Blasen pro Volumeneinheit mit einem Gleichgewichtsradius zwischen a und da ist dann gegeben durch

$$dn = f da,$$

und man erhält den Gasvolumenanteil β anstelle von (2.3) aus der Gleichung

$$\beta = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty R^3 f da. \quad (2.14)$$

Dabei ist $R(\mathbf{x}, t, a)$ der Radius einer Gasblase mit Gleichgewichtsradius a . Unter den oben beschriebenen Annahmen an das Gemisch kann f zeitlich als konstant angesehen werden (Commander und Prosperetti [8]). Die Gleichungen (2.12) und (2.13) bleiben für das so definierte β unverändert – man benötigt jedoch für jeden Gleichgewichtsradius a eine separate Schwingungsgleichung (2.13).

2.2 Linearisierung und Skalierung

Zur Linearisierung der Gleichungen (2.12) und (2.13) wird die Annahme gemacht, daß der Radius R einer Gasblase nur wenig vom Gleichgewichtsradius a abweicht; es sei also

$$R = a(1 + X)$$

mit $|X| \ll 1$. Zudem werden auch die Ableitungen von X als klein gegenüber 1 vorausgesetzt. Analog wird für den Druck p angenommen, daß dieser nur wenig vom Gleichgewichtsdruck der Flüssigkeit p_∞ abweicht. Nach Commander und Prosperetti [8] stehen der Gleichgewichtsdruck des Gases und der Flüssigkeit in der Relation

$$p_0 = p_\infty + 2\sigma/a.$$

Mit $|P/p_\infty| \ll 1$ gelte dann

$$p = P + p_\infty.$$

Im folgenden werden nun sämtliche Produkte von X mit sich und seinen Ableitungen sowie Produkte der Ableitungen selber vernachlässigt; ebenso werden Produkte von X und P/p_∞ vernachlässigt. Die Linearisierung um $R_0 = a$ ergibt dann für den Gasvolumenanteil

$$\beta = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty a^3 (1 + 3X) f da, \quad (2.15)$$

und mit dem Ansatz für p folgt aus der Wellengleichung (2.12)

$$\frac{1}{c^2} P_{tt} - \Delta P = 4\pi\rho_f \int_0^\infty a^3 X_{tt} f da. \quad (2.16)$$

Als linearisierte Keller-Gleichung erhält man mit den oben beschriebenen Vereinfachungen

$$a^2 X_{tt} = \frac{1}{\rho_f} \left[\left(-3\gamma p_0 + \frac{2\sigma}{a} \right) X + \left(-4\mu_f - \frac{3\gamma p_0 a}{c} + \frac{2\sigma}{c} \right) X_t - \frac{4\mu_f a}{c} X_{tt} - P - \frac{a}{c} P_t \right]. \quad (2.17)$$

Zur Skalierung der Gleichungen (2.16) und (2.17) werden dimensionslose Variablen eingeführt. Dazu werden zunächst mit

$$v^2 = p_0/\rho_f, \quad \ell = 2\sigma/p_0$$

eine Referenzgeschwindigkeit bzw. eine Referenzlänge und mit

$$\varepsilon = v/c, \quad \delta = v\mu_f/\sigma$$

zwei positive dimensionslose Parameter definiert. Die dimensionslosen Variablen seien dann durch

$$a^* = a/\ell, \quad \mathbf{x}^* = \varepsilon/\ell \mathbf{x}, \quad t^* = v/\ell t, \quad P^* = P/p_0$$

gegeben, und die skalierte Dichteverteilung der Gasblasen werde definiert durch

$$f^*(a^*) = f^*(a/\ell) = \ell^4/\varepsilon^2 f(a).$$

Im folgenden werden allein diese Variablen benutzt – die Asterisken werden daher fortan weggelassen. In den neuen Variablen hat die Wellengleichung (2.16) die Form

$$P_{tt} - \Delta P = 4\pi \int_0^\infty a^3 X_{tt} f da; \quad (2.18)$$

die skalierte Schwingungsgleichung ist mit der (dimensionslosen) Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{a} \sqrt{3\gamma - \frac{1}{a}}$$

gegeben durch

$$\left(1 + \frac{2\varepsilon\delta}{a}\right) X_{tt} + 2\left(\frac{\varepsilon\omega_0^2 a}{2} + \frac{\delta}{a^2}\right) X_t + \omega_0^2 X = -\frac{1}{a^2}(P + \varepsilon a P_t). \quad (2.19)$$

Nach Definition der dimensionslosen Parameter entspricht die für $\varepsilon = 0$ reduzierte Schwingungsgleichung wieder dem inkompressiblen Fall und (2.19) ist die linearisierte Rayleigh-Plesset-Gleichung in skaliert Form; die Annahme einer nahezu inkompressiblen Flüssigkeit entspricht der Skalierungsannahme $\varepsilon \ll 1$. Dagegen ist die Vernachlässigung der Viskosität der Flüssigkeit äquivalent zu $\delta = 0$.

2.3 Die Dispersionsrelation

Der durch die Gleichungen (2.18) und (2.19) beschriebene Zusammenhang von P und X ist im allgemeinen eine Faltung. Zum Beispiel ist für den einfachsten Fall $\varepsilon = 0$ und $\delta = 0$ mit homogenen Anfangsbedingungen für X die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (2.19) durch

$$X(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\omega_0 a^2} \int_0^t \sin[\omega_0(t - \tau)] P(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

gegeben. Aus (2.18) erhält man dann mit

$$m^2 = 4\pi \int_0^\infty a f(a) da$$

die Integro-Differentialgleichung

$$P_{tt} - \Delta P + m^2 P = m^2 \omega_0 \int_0^t \sin[\omega_0(t - \tau)] P(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (2.20)$$

zur Beschreibung der Ausbreitung von Druckstörungen P in einer blasenhaltigen Flüssigkeit. Inhomogenitäten in den Anfangsbedingungen für X würden zu einem inhomogenen Term in der Gleichung (2.20) führen. Eine entsprechende Gleichung erhält man, wenn man die volle Schwingungsgleichung (2.19) zugrunde legt, also Dämpfung berücksichtigt; insbesondere treten dann zusätzlich Terme in (2.20) auf, welche die Ableitung P_t enthalten. Die Anwesenheit des Faltungskerns in der Gleichung (2.20) bedeutet, daß blasenhaltige Flüssigkeiten Medien mit „memory“ sind (Gavrilyuk [14]).

Im Falle sinusförmiger Druckwellen

$$P(\mathbf{x}, t) = e^{i(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.21)$$

mit komplexer Wellenzahl $\boldsymbol{\kappa}$ und Erregerfrequenz ω vereinfacht sich der Zusammenhang von X und P . Man spricht dabei von *dispersiven Wellen*, falls die Gleichung (2.20) Lösungen der Form (2.21) besitzt. Damit nun (2.21) eine Lösung von (2.20) sein kann, müssen $\boldsymbol{\kappa}$ und ω in einer gewissen Beziehung

$$G(\omega, \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

zueinander stehen; man nennt diese Gleichung *Dispersionsrelation*. Man zeigt leicht, daß der Zusammenhang zwischen einer partiellen Differentialgleichung zur Beschreibung dispersiver Wellen und der zugehörigen Dispersionsrelation umkehrbar eindeutig ist (siehe Whitham [46]).

Es soll nun die Dispersionsrelation des vollen Problems gefunden werden. Dazu wird – wie oben auch – zunächst eine Lösung der Schwingungsgleichung (2.19) bestimmt. Für die spezielle Zwangserregung (2.21) macht man dazu den Ansatz

$$X(\mathbf{x}, t, a) = Y(a)P(\mathbf{x}, t).$$

Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung (2.19) ein, so erhält man für die gesuchte Größe Y die Gleichung

$$\left[\omega^2 + (1 - i\varepsilon\omega a) \left(\frac{2i\delta\omega}{a^2} - \omega_0^2 \right) \right] Y = \frac{1}{a^2} (1 - i\varepsilon\omega a).$$

Wegen der Skalierungsannahme $\varepsilon \ll 1$ ist es zweckmäßig, diese Gleichung mit $(1 + i\varepsilon\omega a)$ zu multiplizieren und anschließend alle Terme der Ordnung ε^2 zu vernachlässigen; es folgt

$$- \left[\omega_0^2 - \omega^2 - 2i \left(\frac{\varepsilon\omega^2 a}{2} + \frac{\delta}{a^2} \right) \omega \right] Y = \frac{1}{a^2}.$$

Mit der (dimensionslosen) Dämpfung

$$b = \frac{\varepsilon\omega^2 a}{2} + \frac{\delta}{a^2}$$

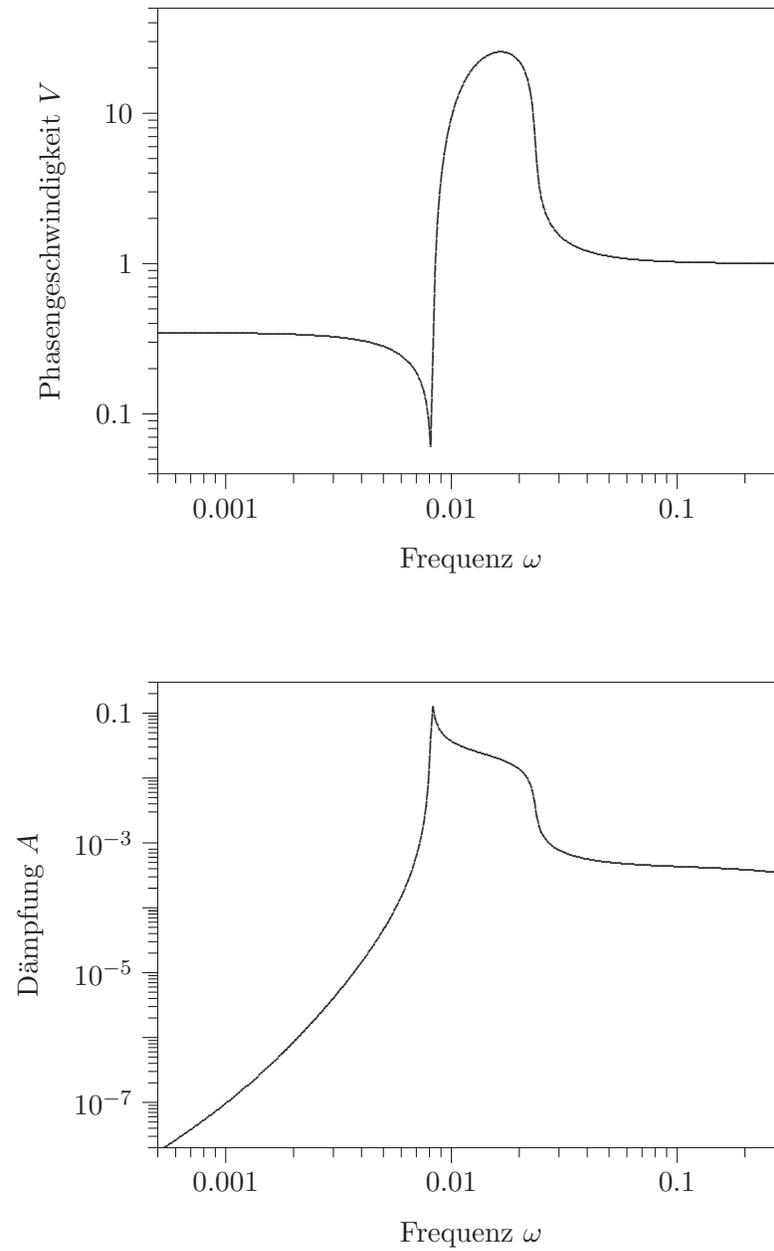


Abb. 2.1: Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit einer Blasengröße und einem Gasvolumenanteil von 0.05 %.

ist dann schließlich

$$Y = -\frac{1}{a^2(\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega)}.$$

Setzt man nun $X_{tt} = -\omega^2 Y P$ in die Gleichung (2.18) ein, so erhält man zunächst die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta P + \left(\omega^2 - 4\pi\omega^2 \int_0^\infty a^3 Y f da \right) P = 0,$$

und wegen $\Delta P = -\kappa^2 P$ ist dann die gesuchte Dispersionsrelation gegeben durch

$$\kappa^2 = \omega^2 \left(1 + 4\pi \int_0^\infty \frac{af da}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega} \right).$$

Im folgenden wird speziell die eindimensionale Ausbreitung von Druckwellen, etwa in x -Richtung, betrachtet. Die Linearität der Gleichungen (2.18) und (2.19) hat es bisher erlaubt, die bequeme komplexe Form von (2.21) zu benutzen. Die Dispersionsrelation bleibt erhalten, wenn man den Real- oder Imaginärteil von P betrachtet. Mit der komplexen Wellenzahl

$$\kappa = \frac{\omega}{V} + iA$$

gilt dann für den Realteil

$$P(\mathbf{x}, t) = e^{-Ax} \cos \left[\omega \left(\frac{x}{V} - t \right) \right].$$

Die Größe $\theta = \omega(x/V - t)$ bezeichnet man als Phase. Die Geschwindigkeit mit der sich die Phase $\theta = \text{const.}$ fortbewegt ist nun gerade V , und man nennt daher V *Phasengeschwindigkeit*. Durch A wird dagegen eine *Dämpfung* der Druckwelle beschrieben. Die Dispersionsrelation lautet nun für den Fall eindimensionaler Wellenausbreitung

$$\left(\frac{1}{V} + i\frac{A}{\omega} \right)^2 = 1 + 4\pi \int_0^\infty \frac{af da}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}. \quad (2.22)$$

Sie liefert den gesuchten Zusammenhang der Blasengrößenverteilung f mit den frequenzabhängigen Größen, der Phasengeschwindigkeit V und der Dämpfung A . Sind sowohl V als auch A für einen gewissen Frequenzbereich bekannt, so kann (2.22) dazu benutzt werden, die Verteilung f zu bestimmen. Die Dispersionsrelation (2.22) ist eine lineare Integralgleichung für f , insbesondere eine sogenannte *Fredholmsche Integralgleichung erster Art*. Für eine diskrete Blasengrößenverteilung mit den Radien a_1, \dots, a_N , also

$$f(a) = \sum_{j=1}^N n_j \delta(a - a_j),$$

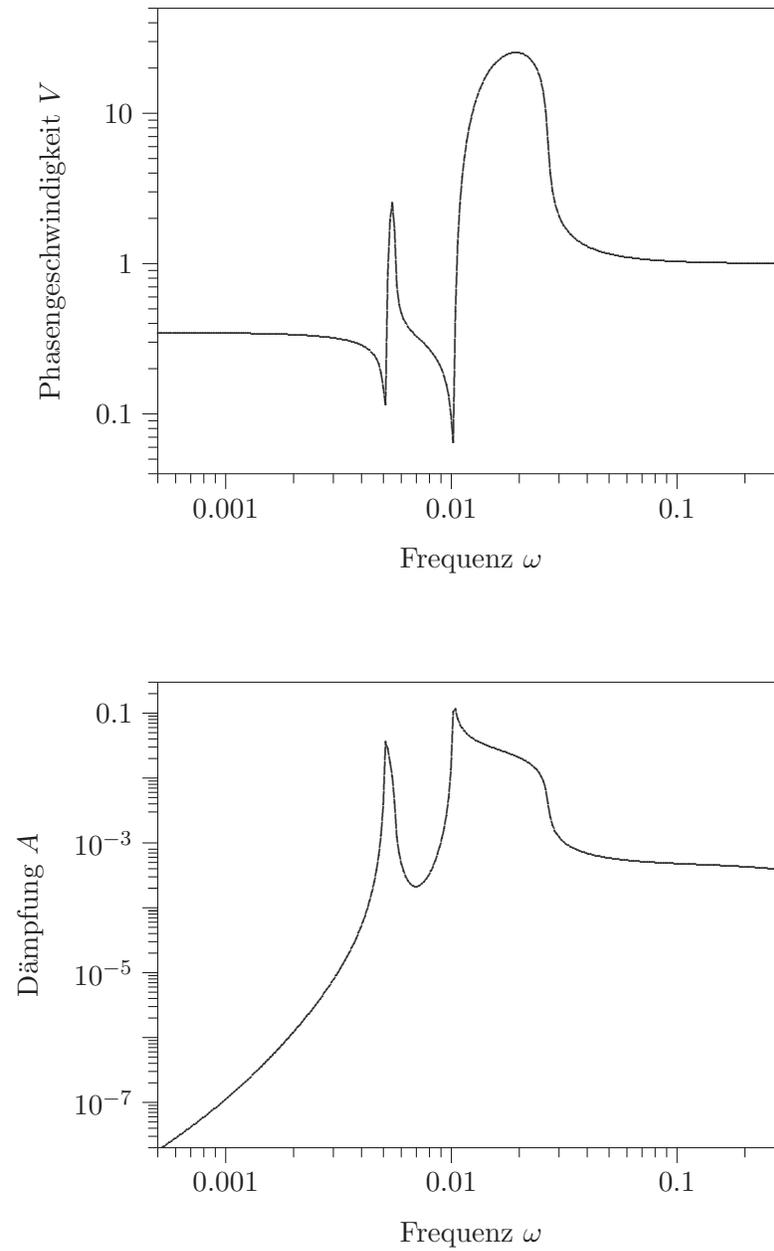


Abb. 2.2: Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit zwei Blasengrößen und einem Gasvolumenanteil von 0.05%.

wird die Gleichung (2.22) zu

$$\left(\frac{1}{V} + i\frac{A}{\omega}\right)^2 = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{4\pi n_j a_j}{\omega_0^2(a_j) - \omega^2 - 2ib(\omega, a_j)\omega}.$$

Sind keine Blasen im Gemisch vorhanden, so erhält man aus (2.22) sofort $A \equiv 0$ und $V \equiv 1$, d. h. es erfolgt keine Dämpfung der Schallwellen und deren Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht der Schallgeschwindigkeit in der reinen Flüssigkeit (in dem skalierten System ist diese wegen (2.18) gerade 1). Schon für einen sehr geringen Gasanteil im Gemisch ändern sich aber die akustischen Eigenschaften drastisch. Die Abbildungen 2.1 bis 2.3 zeigen die Phasengeschwindigkeit V und die Dämpfung A für Gemische mit verschiedenen Blasengrößenverteilungen, welche jeweils einen Gleichgewichtsvolumenanteil des Gases von 0.05 % haben. Die Gemischparameter sind dabei durch $\gamma = 1.4$, $\varepsilon = 0.007$ und $\delta = 0.1$ gegeben, die typische Werte für ein Wasser-Luftblasen-Gemisch darstellen. Die Abb. 2.1 zeigt V und A in Abhängigkeit von der Frequenz ω für ein *monodispersives* Gemisch, also ein Gemisch mit nur einer Blasengröße $a_1 = 250$. Die Eigenfrequenz dieser Gasblasen ist dem Modell nach gegeben durch $\omega_0(a_1) = 0.008$. Für den Fall, daß Erreger- und Eigenfrequenz übereinstimmen, nimmt die Phasengeschwindigkeit ihr Minimum und die Dämpfung ihr Maximum an; für Frequenzen, die nur gering größer sind als die Eigenfrequenz der Blasen wächst dagegen V stark an. Ferner entnimmt man der Abb. 2.1, daß die Anwesenheit der Blasen die Phasengeschwindigkeit von Schallwellen tiefer Frequenzen reduziert, aber nur wenig Dämpfung verursacht. Dagegen beobachtet man im Bereich hoher Frequenzen keine Änderung von V und ein mäßiges Abklingen von A . Für Abb. 2.2 wurde ein Gemisch mit zwei anwesenden Blasengrößen $a_1 = 200$ und $a_2 = 400$ gewählt; die entsprechenden Volumenanteile sind gegeben durch $\beta_1 = 0.0375\%$ bzw. durch $\beta_2 = 0.0125\%$. Für die zugehörigen Eigenfrequenzen gilt $\omega_0(a_1) = 0.01$ und $\omega_0(a_2) = 0.005$. In den jeweiligen Frequenzbereichen findet man die gleichen Effekte, die bereits oben beschrieben wurden – je nach Anzahl der entsprechenden Blasen im Gemisch mit unterschiedlicher Ausprägung. Schließlich sind V und A in Abb. 2.3 dargestellt für eine stetige Blasengrößenverteilung

$$f(a) = C \cdot \exp \left[- \left(\frac{a - a_{\max}}{a_{\min} + a_{\max}} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

mit einem minimalen Radius von $a_{\min} = 200$ und einem maximalen Radius von $a_{\max} = 300$; die Konstante C in der Gaußverteilung f wurde so gewählt, daß der Gasvolumenanteil 0.05 % beträgt. Der Bereich der Eigenfrequenzen ω_0 liegt hier zwischen 0.007 und 0.01. Die skalierten Blasengrößen a in den drei Beispielen entsprechen jeweils dimensionsbehafteten Variablen im μm -Bereich.

Ein Vergleich der theoretischen Voraussagen des van-Wijngaarden-Modells mit experimentellen Daten ist in der Arbeit von Commander et al. [8] enthalten.

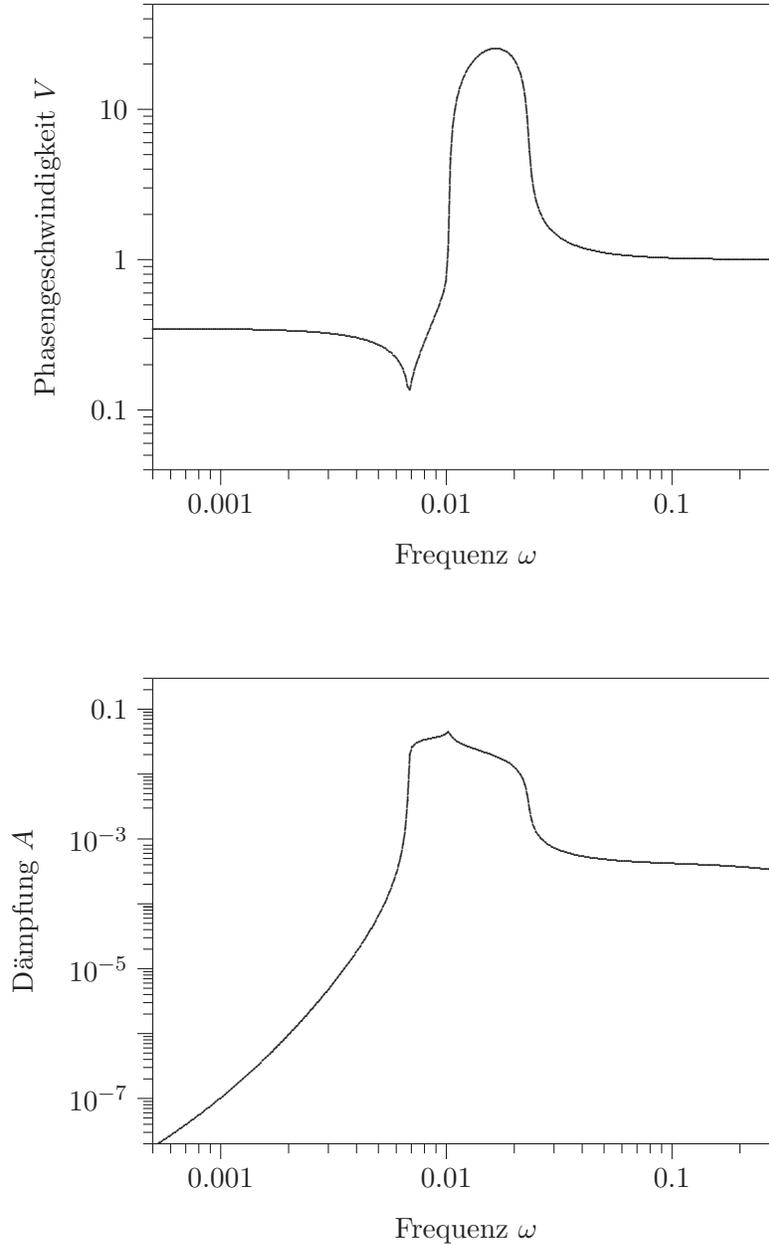


Abb. 2.3: Phasengeschwindigkeit und Dämpfung für ein Gemisch mit der Blasengrößenverteilung (2.23) und einem Gasvolumenanteil von 0.05 %.

Es wurde gezeigt, daß das Modell – zumindest für die Dämpfung A – eine gute Übereinstimmung für Gemische mit einem Gasvolumenanteil von bis zu 1 % liefert. Für die Phasengeschwindigkeit V konnten dagegen keine experimentellen Untersuchungen für die Ausbreitung von Schallwellen im Bereich der Eigenfrequenzen durchgeführt werden. Die untersuchten Gemische umfassen einen Radienbereich der Gasblasen von ca. $5 \mu\text{m}$ bis 3mm und einen Gasanteil β von 0.001 % bis 1 %.

Aus der komplexen Dispersionsrelation (2.22) wird im Kapitel 4 eine nichtlineare Gleichung für die gesuchte Verteilung f und die Dämpfung A hergeleitet, in der die Phasengeschwindigkeit V nicht mehr vorkommt. Diese Gleichung eignet sich dann zur praktischen Bestimmung von f . Insbesondere ist diese Gleichung schlecht gestellt, und zur numerischen Behandlung bedarf es daher geeigneter Methoden, die im folgenden Kapitel bereitgestellt werden.

Kapitel 3

Schlecht gestellte Probleme

Hadamard [17] stellte drei Forderungen an Probleme der Mathematischen Physik: ein Problem sollte lösbar sein, die Lösung sollte eindeutig sein und sie sollte stetig von den Daten abhängen. Die letzte Forderung wird dadurch motiviert, daß die Daten meist aus Messungen hervorgehen und dann Meßfehlern unterliegen. Man möchte also sicherstellen, daß kleine Fehler in den Daten nur kleine Fehler in der Lösung verursachen. Lange Zeit sind Probleme, die diesen Forderungen nicht genügen, vernachlässigt worden, weil diese zur Behandlung angewandter Probleme für nicht relevant erachtet wurden. Heute weiß man, daß zahlreiche Anwendungen auf Probleme führen, welche die oben gestellten Forderungen nicht oder nur zum Teil erfüllen.

In diesem Kapitel werden Methoden zur Berechnung einer stabilen Approximation für lineare und nichtlineare Probleme vorgestellt. Solche Methoden werden als Regularisierungsverfahren bezeichnet. Basierend auf der Singulärwertzerlegung für kompakte lineare Operatoren wird die Tikhonov-Regularisierung zunächst für lineare Gleichungen entwickelt und später auf spezielle nichtlineare Gleichungen übertragen. Diese Art nichtlinearer Gleichungen wird im nächsten Kapitel für das Problem auftreten, Blasengrößenverteilungen allein aus Messungen der Dämpfung zu bestimmen. Die Tikhonov-Regularisierung bildet dabei die Grundlage für das numerische Verfahren.

3.1 Lineare schlecht gestellte Probleme

Seien X und Y normierte Räume und $A: X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Für $g \in Y$ ist ein $f \in X$ gesucht, welches die Gleichung

$$Af = g \tag{3.1}$$

erfüllt. Nach Hadamard heißt diese Gleichung *gut gestellt*, falls A bijektiv und der inverse Operator $A^{-1}: Y \rightarrow X$ stetig ist; anderenfalls heißt (3.1) *schlecht gestellt*. Nach dieser Definition hat man drei Fälle von schlecht gestellten Gleichungen zu

unterscheiden: Ist A nicht surjektiv, so ist (3.1) nicht für alle $g \in Y$ lösbar. Ist A nicht injektiv, so ist (3.1) nicht für alle $g \in \mathcal{R}(A)$ eindeutig lösbar. Ist schließlich A bijektiv, aber A^{-1} nicht stetig, so hängt die Lösung f von (3.1) nicht stetig von der rechten Seite ab. Man beachte, daß die Eigenschaften von (3.1) nicht nur vom Operator A , sondern auch von den Räumen X und Y abhängen. Man kann nun versuchen, ein schlecht gestelltes Problem durch Ändern der Normen in ein gut gestelltes Problem zu überführen. Jedoch sind die Normen im Lösungs- und Datenraum meist durch die Anwendung festgelegt, so daß diese Möglichkeit ausscheidet. Es sei bemerkt, daß die angegebenen Eigenschaften im allgemeinen nicht unabhängig voneinander sind. Ist z. B. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Operator, der den Banachraum X bijektiv in den Banachraum Y abbildet, so gilt nach dem Satz der stetigen Inversen $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Das Konzept von Hadamard kann etwas abgeschwächt werden, wenn man unter einer Lösung des linearen Problems (3.1) eine best-approximierende Lösung versteht:

Definition 3.1. *Seien X und Y Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann heißt die lineare Gleichung (3.1) gut gestellt, wenn die verallgemeinerte Inverse A^\dagger beschränkt ist; anderenfalls heißt sie schlecht gestellt.*

Im folgenden seien X und Y Hilberträume. Der lineare Operator $A: X \rightarrow Y$ sei kompakt und der Bildraum $\mathcal{R}(A)$ unendlichdimensional. Dann ist $\mathcal{R}(A)$ nach Satz A.9 nicht abgeschlossen, und wegen Satz A.22 ist die verallgemeinerte Inverse A^\dagger unbeschränkt. Das Problem (3.1) ist also im Sinne der Definition 3.1 schlecht gestellt.

Sei nun $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, dann besitzt die ungestörte Gleichung eine best-approximierende Lösung. In den meisten Anwendungen ist aber anstelle von g nur eine Näherung $g^\delta \in Y$ bekannt, welche mit $\delta > 0$ die Fehlerabschätzung

$$\|g^\delta - g\| \leq \delta$$

erfüllt. Dann braucht für g^δ keine best-approximierende Lösung zu existieren, und selbst wenn diese existiert, muß sie nicht nahe bei $A^\dagger g$ liegen. Die Aufgabe besteht nun in der Approximation der dicht definierten und unbeschränkten verallgemeinerten Inversen $A^\dagger: \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow X$ durch einen beschränkten linearen Operator $R: Y \rightarrow X$.

Definition 3.2. *Ein Regularisierungsverfahren ist erklärt durch eine Familie von Operatoren $R_\alpha \in \mathcal{L}(Y, X)$, $\alpha > 0$, mit der Eigenschaft*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha g = A^\dagger g \quad \forall g \in \mathcal{D}(A^\dagger). \quad (3.2)$$

Der Parameter α heißt Regularisierungsparameter.

Für ein Regularisierungsverfahren konvergiert also die Folge der Operatoren $\{R_\alpha\}$ punktweise gegen die verallgemeinerte Inverse A^\dagger . Aber:

Satz 3.3. *Für ein Regularisierungsverfahren sind die linearen Operatoren R_α nicht gleichmäßig beschränkt, und die Folge $\{R_\alpha\}$ ist nicht normkonvergent.*

Beweis. Angenommen, es gibt eine Konstante C mit $\|R_\alpha\| \leq C$ für alle $\alpha > 0$. Dann folgt wegen $R_\alpha g \rightarrow A^\dagger g$ für alle $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, daß $\|A^\dagger g\| \leq C\|g\|$, d. h. A^\dagger ist beschränkt und damit $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen. Für den kompakten Operator A steht dies aber im Widerspruch zu $\dim \mathcal{R}(A) = \infty$.

Für die zweite Aussage nimmt man an, $\{R_\alpha\}$ sei normkonvergent gegen A^\dagger . Dann gibt es ein $\alpha > 0$ für das $\|R_\alpha - A^\dagger\| < 1$, und für alle $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ gilt

$$\|A^\dagger g\| \leq \|R_\alpha g - A^\dagger g\| + \|R_\alpha g\| \leq (1 + \|R_\alpha\|)\|g\|.$$

Dann ist A^\dagger beschränkt, und man erhält denselben Widerspruch wie oben. \square

Sei nun durch $\{R_\alpha\}$ ein Regularisierungsverfahren für die Gleichung $Af = g$ gegeben. Durch

$$f_\alpha^\delta := R_\alpha g^\delta$$

ist dann die Approximation der best-approximierenden Lösung $f = A^\dagger g$ bestimmt. Für den Fehler erhält man

$$\|f_\alpha^\delta - f\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha g - A^\dagger g\|. \quad (3.3)$$

Man sieht an dieser Zerlegung, daß der Fehler der Approximation aus zwei Teilen besteht: Der erste Summand beschreibt den Einfluß der fehlerhaften Daten. Der zweite Summand ist auf den Fehler der Approximation von A^\dagger durch R_α zurückzuführen. Nach Satz 3.3 ist der erste Term nicht gleichmäßig beschränkt, d. h. es gilt $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$ für $\alpha \rightarrow 0$. Andererseits gilt nach Definition eines Regularisierungsverfahrens $\|R_\alpha g - A^\dagger g\| \rightarrow 0$ für $\alpha \rightarrow 0$. Auf der einen Seite verlangt also die Stabilität des Verfahrens einen großen Parameter α , auf der anderen Seite erfordert die Genauigkeit der Approximation der verallgemeinerten Inversen einen kleinen Parameter α . Jedes Regularisierungsverfahren bedarf also einer Methode zur Bestimmung eines geeigneten Regularisierungsparameters. Eine optimale Wahl soll die rechte Seite in (3.3) minimieren.

Ist δ beliebig klein, so erwartet man von einer vernünftigen Parameterstrategie, daß die regularisierte Lösung beliebig nahe an der exakten Lösung liegt. Man definiert daher:

Definition 3.4. *Sei $\{R_\alpha\}$ ein Regularisierungsverfahren und $U \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$. Eine Strategie zur Wahl des Regularisierungsparameters $\alpha = \alpha(\delta)$ heißt regulär auf U , wenn für alle $g \in U$ und alle $g^\delta \in Y$ mit $\|g^\delta - g\| \leq \delta$ gilt*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{\alpha(\delta)} g^\delta = A^\dagger g.$$

Wie können nun Regularisierungsverfahren konstruiert werden? Um dieser Frage nachzugehen, wird die verallgemeinerte Inverse des kompakten linearen Operators A betrachtet. Bezeichnet $\{\sigma_n, f_n, g_n\}$ ein singuläres System von A , so hat die verallgemeinerte Inverse A^\dagger nach Satz A.23 die Darstellung

$$A^\dagger g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (g, g_n) f_n. \quad (3.4)$$

Löst man nun anstelle von $Af = g$ das gestörte Problem $Af^\delta = g^\delta$, so erhält man für $g^\delta := g + \delta g_n$ die gestörte Lösung $f^\delta = f + \delta f_n / \sigma_n$. Da die singulären Werte gegen Null gehen, kann der Quotient $\|f^\delta - f\| / \|g^\delta - g\| = 1/\sigma_n$ beliebig groß werden. Der Einfluß des Datenfehlers wird also offensichtlich durch die Konvergenzgeschwindigkeit der singulären Werte bestimmt. Es liegt nun nahe, eine schlecht gestellte Gleichung zu regularisieren, indem man den Einfluß des Faktors $1/\sigma_n$ in der Darstellung (3.4) dämpft oder filtert.

Satz 3.5. *Sei $q: (0, \infty) \times (0, \|A\|] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, derart, daß es für jedes $\alpha > 0$ eine positive Konstante $c(\alpha)$ gibt mit*

$$|q(\alpha, \sigma)| \leq c(\alpha)\sigma, \quad 0 < \sigma \leq \|A\|, \quad (3.5)$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} q(\alpha, \sigma) = 1, \quad 0 < \sigma \leq \|A\|. \quad (3.6)$$

Für jedes $\alpha > 0$ definiert man einen linearen Operator $R_\alpha: Y \rightarrow X$ durch

$$R_\alpha g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} q(\alpha, \sigma_n) (g, g_n) f_n, \quad g \in Y. \quad (3.7)$$

Dann ist durch $\{R_\alpha\}$ ein Regularisierungsverfahren erklärt, und es gilt

$$\|R_\alpha\| \leq c(\alpha). \quad (3.8)$$

Beweis (siehe auch Kress [23]). Zunächst gilt mit (3.5) und der Besselschen Ungleichung

$$\|R_\alpha g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} [q(\alpha, \sigma_n)]^2 |(g, g_n)|^2 \leq [c(\alpha)]^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(g, g_n)|^2 \leq [c(\alpha)]^2 \|g\|^2$$

für alle $g \in Y$, d. h. (3.8) ist erfüllt. Für $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ gilt

$$\|R_\alpha g - A^\dagger g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} [q(\alpha, \sigma_n) - 1]^2 |(g, g_n)|^2. \quad (3.9)$$

Sei nun $g \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Sei M eine Schranke von q , dann existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^2} |(g, g_n)|^2 < \frac{\varepsilon}{2(M+1)^2}.$$

Wegen der Konvergenzeigenschaft (3.6) existiert ein $\alpha_0(\varepsilon) > 0$ mit

$$\frac{1}{\sigma_n^2} [q(\alpha, \sigma_n) - 1]^2 < \frac{\varepsilon}{2\|g\|^2}$$

für alle $n = 1, \dots, N$ und $0 < \alpha < \alpha_0$. Spaltet man die Reihe (3.9) auf, so folgt mit der Besselschen Ungleichung

$$\|R_\alpha g - A^\dagger g\|^2 < \frac{\varepsilon}{2\|g\|^2} \sum_{n=1}^N |(g, g_n)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

für alle $0 < \alpha < \alpha_0$. Also gilt $R_\alpha g \rightarrow A^\dagger g$ für alle $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$. \square

Mit Satz 3.5 ist eine ganze Klasse von Regularisierungsverfahren erklärt. Durch geeignete Wahl der Funktion q erhält man z. B. die Landweber-Fridman-Iteration (siehe Groetsch [16], Engl et al. [11]), den sogenannten *spectral cut-off* (Abschneiden zu kleiner singulärer Werte, siehe Kress [23]) und schließlich auch die Tikhonov-Regularisierung, die im nächsten Abschnitt eingehend behandelt wird. Iterative Verfahren zeichnen sich insbesondere dadurch aus, daß in jedem Schritt nur vergleichsweise einfache Operationen ausgeführt werden müssen. Größter Nachteil der Landweber-Fridman-Iteration ist dagegen die langsame Konvergenz. Der spectral cut-off findet z. B. Anwendung in der Tomographie oder der Bildverarbeitung. Für viele praktische Probleme ist diese Methode allerdings ungeeignet, weil man explizit ein singuläres System berechnen können muß.

3.2 Tikhonov-Regularisierung

Nach Satz A.20 ist die best-approximierende Lösung der linearen Gleichung (3.1) das normkleinste Element $f \in X$, das die Normalgleichung $A^*Af = A^*g$ erfüllt; natürlich ist mit (3.1) auch die Normalgleichung schlecht gestellt. Bei der nach A. N. Tikhonov [45] benannten *Tikhonov-Regularisierung* löst man nun

$$A^*Af_\alpha + \alpha f_\alpha = A^*g \tag{3.10}$$

für $\alpha > 0$. Man kann (3.10) als regularisierte Normalgleichung auffassen. Mit Hilfe des Satzes 3.5 kann gezeigt werden, daß durch (3.10) tatsächlich ein Regularisierungsverfahren definiert wird:

Satz 3.6. Für jedes $\alpha > 0$ ist der Operator $A^*A + \alpha I: X \rightarrow X$ bijektiv und hat eine beschränkte Inverse. Durch

$$R_\alpha := (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$$

ist ein Regularisierungsverfahren erklärt, und es gilt

$$\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Beweis. Wegen $\alpha\|f\|^2 \leq (A^*Af + \alpha f, f)$ für alle $f \in X$ ist der Operator $A^*A + \alpha I$ injektiv. Bezeichne Q die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{N}(A)$. Durch

$$Tf := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + \sigma_n^2} (f, f_n) f_n + \frac{1}{\alpha} Qf$$

wird ein beschränkter linearer Operator $T: X \rightarrow X$ definiert, und mit (A.8) erhält man

$$(A^*A + \alpha I)Tf = T(A^*A + \alpha I)f = f \quad \forall f \in X,$$

d. h. es ist $T = (A^*A + \alpha I)^{-1}$. Die eindeutige Lösung von (3.10) ist dann gegeben durch

$$f_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\alpha + \sigma_n^2} (g, g_n) f_n. \quad (3.11)$$

Mit der *Dämpfungsfunktion*

$$q(\alpha, \sigma) := \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2}$$

kann R_α in die Form (3.7) gebracht werden. Die Funktion q ist offensichtlich beschränkt mit $0 < q(\alpha, \sigma) < 1$ und genügt der Bedingung (3.6). Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel erhält man

$$\sqrt{\alpha}\sigma \leq \frac{\alpha + \sigma^2}{2}.$$

Also erfüllt q auch die Bedingung (3.5) mit $c(\alpha) = 1/2\sqrt{\alpha}$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 3.5. \square

Aus Satz 3.6 und der Fehlerabschätzung (3.3) erhält man nun speziell für die Tikhonov-Regularisierung

$$\|f_\alpha^\delta - f\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \|R_\alpha g - A^\dagger g\|,$$

und man kann folgende notwendige Bedingung für Regularität formulieren:

Satz 3.7. *Eine Parameterstrategie $\alpha(\delta)$ für die Tikhonov-Regularisierung ist regulär auf $\mathcal{D}(A^\dagger)$, falls gilt $\alpha \rightarrow 0$ und $\delta^2/\alpha \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$.*

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung von A zeigt man

$$(A^*A + \alpha I)^{-1}A^* = A^*(AA^* + \alpha I)^{-1}.$$

Dann kann die eindeutige Lösung von (3.10) auch bestimmt werden durch

$$\begin{aligned} AA^*h_\alpha + \alpha h_\alpha &= g, \\ f_\alpha &= A^*h_\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Insbesondere gilt für die Tikhonov-regularisierte Lösung $f_\alpha \in \mathcal{R}(A^*)$.

Eine wichtige Charakterisierung der Tikhonov-Regularisierung liefert der folgende Satz:

Satz 3.8. *Für jedes $\alpha > 0$ und jedes $g \in Y$ hat das Minimierungsproblem*

$$J_\alpha(f) = \|Af - g\|^2 + \alpha\|f\|^2 \rightarrow \min, \quad f \in X, \tag{3.13}$$

genau eine Lösung f_α . Diese ist durch die Gleichung (3.10) bestimmt und hängt stetig von den Daten g ab. Man bezeichnet J_α als das Tikhonov-Funktional.

Beweis. Sei f_α Lösung von (3.10). Für jedes $f \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \|Af - g\|^2 + \alpha\|f\|^2 &= \|Af_\alpha - g\|^2 + \alpha\|f_\alpha\|^2 \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(f - f_\alpha, A^*(Af_\alpha - g) + \alpha f_\alpha) + \|A(f - f_\alpha)\|^2 + \alpha\|f - f_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Dann ist die Bedingung (3.10) wegen $A^*(Af_\alpha - g) + \alpha f_\alpha = 0$ notwendig und hinreichend zur Minimierung des Tikhonov-Funktional J_α . Die Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit der Lösung f_α von g folgt dann aus Satz 3.6. \square

3.3 Morozovsches Diskrepanzprinzip

Um die Tikhonov-Regularisierung auf ein schlecht gestelltes Problem anwenden zu können, benötigt man eine Strategie zur Bestimmung eines geeigneten Regularisierungsparameters α . In Satz 3.7 wurde bereits die Regularität einer ganzen Klasse von Parameterstrategien gezeigt; z. B. erfüllt die Wahl $\alpha(\delta) = C\delta$ mit einer Konstanten $C > 0$ die Bedingung aus Satz 3.7. Man bezeichnet solche Strategien als *a-priori* Strategien, weil in die Wahl des Regularisierungsparameters nur der Fehler δ eingeht. Werden dagegen auch die Daten g^δ berücksichtigt, so spricht man von einer *a-posteriori* Wahl. Eine häufig verwendete a-posteriori Parameterstrategie geht auf Morozov [26, 27] zurück; sie beruht auf folgender Grundidee:

Hat man für die Daten g^δ nur die Information $\|g^\delta - g\| \leq \delta$, so kann jedes Element der Menge

$$U_{\delta,\tau} = \{\varphi \in X : \|A\varphi - g^\delta\| \leq \tau\delta\}$$

für einen festen Parameter $\tau \geq 1$ als gleichberechtigte Näherungslösung der Gleichung (3.1) angesehen werden. Da man die best-approximierende Lösung sucht, ist es naheliegend, in $U_{\delta,\tau}$ das Element kleinster Norm zu suchen. Man beachte, daß $U_{\delta,\tau}$ abgeschlossen und konvex ist – es existiert also für $U_{\delta,\tau} \neq \emptyset$ genau ein Element f^δ kleinster Norm. Gilt $\|g^\delta\| \leq \tau\delta$, so folgt sofort $f^\delta = 0$. Ist dagegen $\|g^\delta\| > \tau\delta$, so muß f^δ am Rand von $U_{\delta,\tau}$ liegen; dann ist f^δ Lösung des gleichungsrestringierten Optimierungsproblems

$$\|f\| = \inf\{\|\varphi\| : \|A\varphi - g^\delta\| = \tau\delta\}. \quad (3.14)$$

Man kann die Folge unrestringierter Probleme (3.13) (mit g ersetzt durch g^δ) als Penalty-Methode zur Lösung von (3.14) auffassen. Der Parameter α ist dann so zu bestimmen, daß für die eindeutige Lösung von (3.13) gilt

$$\|Af_\alpha^\delta - g^\delta\| = \tau\delta. \quad (3.15)$$

Diese Strategie wird als *Morozowsches Diskrepanzprinzip* bezeichnet. Es gilt:

Satz 3.9. *Sei $g \in \mathcal{R}(A)$ und $\tau > 1$. Gilt $\|g^\delta - g\| \leq \delta < \|g^\delta\|/\tau$, dann existiert genau ein $\alpha > 0$, so daß (3.15) erfüllt ist.*

Beweis. Sei $P: Y \rightarrow \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$ die orthogonale Projektion. Mit (3.11) und der Singulärwertzerlegung von A^* erhält man

$$F(\alpha) := \|Af_\alpha^\delta - g^\delta\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \sigma_n^2} \right)^2 |(g^\delta, g_n)|^2 + \|Pg^\delta\|^2. \quad (3.16)$$

Dann ist die durch (3.16) definierte Funktion $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Ferner gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F(\alpha) = \|Pg^\delta\|^2 = \|Pg^\delta - Pg\|^2 \leq \|g^\delta - g\|^2 < (\tau\delta)^2$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha) = \|g^\delta\|^2 > (\tau\delta)^2.$$

Dann folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz. \square

Das Diskrepanzprinzip ist also durchführbar, wenn das ungestörte Problem lösbar und das Verhältnis von Daten und Fehler durch eine Konstante $\tau > 1$

nach unten beschränkt ist. Die zweite Forderung bedeutet keine wesentliche Einschränkung: Existiert eine solche Konstante nicht, erscheint es überhaupt wenig sinnvoll, nach einer anderen als der trivialen Lösung zu suchen.

Sei nun $\alpha > 0$ die eindeutige Lösung von (3.15), dann gilt mit (3.10)

$$\|g^\delta\| - \tau\delta = \|g^\delta\| - \|Af_\alpha^\delta - g^\delta\| \leq \|Af_\alpha^\delta\| = \frac{1}{\alpha} \|AA^*(g^\delta - Af_\alpha^\delta)\| \leq \frac{\tau\delta \|A\|^2}{\alpha},$$

also

$$\alpha \leq \frac{\tau\delta \|A\|^2}{\|g^\delta\| - \tau\delta}. \quad (3.17)$$

Diese obere Schranke für den Regularisierungsparameter wird im nächsten Abschnitt nützlich sein, wenn numerisch eine Lösung der Gleichung (3.15) bestimmt werden soll.

Um zeigen zu können, daß das Morozovsche Diskrepanzprinzip regulär ist, wird folgendes Lemma benötigt (einen Beweis findet man z. B. in Yosida [49]):

Lemma 3.10. *Eine Teilmenge U von X heißt schwach abgeschlossen, falls der Grenzwert jeder schwach konvergenten Folge aus U wieder in U liegt. Eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge ist auch schwach abgeschlossen.*

Satz 3.11. *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.9. Dann ist das Diskrepanzprinzip (3.15) regulär auf $\mathcal{R}(A)$.*

Beweis. Sei $g \in \mathcal{R}(A)$ und bezeichne f_α^δ die Lösung von (3.10) für die gestörten Daten g^δ . Dann ist zu zeigen

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f_{\alpha(\delta)}^\delta = A^\dagger g.$$

Sei nun $\{\delta_n\}$ eine beliebige Folge mit $\delta_n \rightarrow 0$. Dann genügt es zu zeigen, daß eine Teilfolge existiert – die hier zur Vereinfachung mit $\{\delta_k\}$ bezeichnet wird –, für die gilt $f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightarrow A^\dagger g$.

Sei nun $f = A^\dagger g$. Aus Satz 3.8 folgt zunächst für jedes $\delta > 0$

$$\begin{aligned} (\tau\delta)^2 + \alpha(\delta) \|f_{\alpha(\delta)}^\delta\|^2 &= J_{\alpha(\delta)}(f_{\alpha(\delta)}^\delta) \\ &\leq J_{\alpha(\delta)}(f) \\ &= \|g^\delta - g\|^2 + \alpha(\delta) \|f\|^2 \\ &\leq (\tau\delta)^2 + \alpha(\delta) \|f\|^2, \end{aligned}$$

d. h. es gilt $\|f_{\alpha(\delta)}^\delta\| \leq \|f\|$. Nach Satz A.12 existiert dann zu jeder Folge $\delta_n \rightarrow 0$ eine Teilfolge $\delta_k \rightarrow 0$ und ein $\tilde{f} \in X$ mit $f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightarrow \tilde{f}$.

Nach obigem Lemma ist $\mathcal{N}(A)^\perp$ schwach abgeschlossen, und mit (3.12) gilt $f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \in \mathcal{N}(A)^\perp$. Dann gilt auch $\tilde{f} \in \mathcal{N}(A)^\perp$. Für die Bildfolge $\{Af_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}\}$ folgt aus

$$\|Af_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} - g\| \leq \|Af_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} - g^{\delta_k}\| + \|g^{\delta_k} - g\| \leq (1 + \tau)\delta_k$$

einerseits $Af_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightarrow g$, wegen der Kompaktheit von A andererseits aber auch $Af_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightarrow A\tilde{f}$. Dann ist also $A\tilde{f} = g$, und aus der Eigenschaft (A.12) der verallgemeinerten Inversen A^\dagger folgt

$$\tilde{f} = A^\dagger A\tilde{f} = A^\dagger g = f.$$

Damit ist die schwache Konvergenz $f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightharpoonup f$ gezeigt, und es folgt mit Satz A.12

$$\|f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}\| \leq \|f\| \leq \liminf \|f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}\|.$$

Dann gilt aber zunächst $\|f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k}\| \rightarrow \|f\|$ und schließlich auch $f_{\alpha(\delta_k)}^{\delta_k} \rightarrow f$. \square

Es gilt nun folgende Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit:

Satz 3.12. *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.9 mit $g \in \mathcal{R}(AA^*)$. Dann gilt für das Morozovsche Diskrepanzprinzip*

$$\|f_{\alpha(\delta)}^\delta - A^\dagger g\| = O(\sqrt{\delta}), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $h \in Y$ mit $AA^*h = g$. Dann gilt mit Gleichung (A.12)

$$f = A^\dagger g = A^\dagger AA^*h = A^*h.$$

Im Beweis von Satz 3.11 wurde bereits gezeigt $\|f_{\alpha(\delta)}^\delta\| \leq \|f\|$ für alle $\delta > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f_{\alpha(\delta)}^\delta - f\|^2 &\leq 2\|f\|^2 - 2(f_{\alpha(\delta)}^\delta, f) \\ &= 2(f - f_{\alpha(\delta)}^\delta, A^*h) \\ &= 2(g^\delta - g, h) + 2(Af_{\alpha(\delta)}^\delta - g^\delta, h) \\ &\leq 2(1 + \tau)\|h\|\delta, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

3.4 Numerische Realisierung

Um ein schlecht gestelltes Problem numerisch lösen zu können, benötigt man neben Regularisierungs- auch Diskretisierungsverfahren. Hinsichtlich der Reihenfolge von Regularisierung und Diskretisierung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es sei hier bemerkt, daß oft die Diskretisierung selbst als Regularisierung interpretiert werden kann. Zur Regularisierung mit Projektionsverfahren siehe z. B. Natterer [28].

Für die Tikhonov-Regularisierung soll hier eine Kombination beider Verfahren vorgestellt werden: Nach Satz 3.8 ist die regularisierte Lösung f_α^δ der Gleichung (3.1) gegeben durch die eindeutige Lösung der Minimierungsaufgabe (3.13). Man erhält ein endlichdimensionales Problem, wenn man das Tikhonov-Funktional nur auf einem endlichdimensionalen Teilraum $X_n \subset X$ minimiert. Man löst also anstelle von (3.13) die Aufgabe

$$J_\alpha(f) \rightarrow \min, \quad f \in X_n. \quad (3.18)$$

Sei nun P_n die orthogonale Projektion von X auf X_n . Dann wird durch $A_n = AP_n$ ein kompakter Operator $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ definiert, und es gilt:

Satz 3.13. *Das Problem (3.18) besitzt die eindeutige Lösung*

$$f_{\alpha,n}^\delta = (A_n^* A_n + \alpha I)^{-1} A_n^* g^\delta.$$

Beweis. Sei $J_{\alpha,n}(f) = \|A_n f - g^\delta\|^2 + \alpha \|f\|^2$ das Tikhonov-Funktional für A_n . Nach Satz 3.8 ist $f_{\alpha,n}^\delta$ die eindeutige Lösung der Aufgabe

$$J_{\alpha,n}(f) \rightarrow \min, \quad f \in X.$$

Wegen (3.12) ist zudem $f_{\alpha,n}^\delta \in \mathcal{R}(A_n^*) \subset X_n$. Dann gilt

$$J_\alpha(f_{\alpha,n}^\delta) = J_{\alpha,n}(f_{\alpha,n}^\delta) < J_{\alpha,n}(f) = J_\alpha(f) \quad \forall f \in X_n,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Die gesuchte Lösung von (3.18) ist also die eindeutige Lösung von

$$(A_n^* A_n f_{\alpha,n}^\delta, f) + \alpha (f_{\alpha,n}^\delta, f) = (A_n^* g^\delta, f) \quad \forall f \in X_n.$$

Sei nun $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von X_n . Mit $f_{\alpha,n}^\delta = \xi_1 \varphi_1 + \dots + \xi_n \varphi_n$ erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \{(A\varphi_i, A\varphi_j) + \alpha(\varphi_i, \varphi_j)\} = (g^\delta, A\varphi_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\alpha &= (\xi_1, \dots, \xi_n)^T, & \mathbf{M} &= [(A\varphi_i, A\varphi_j)], \\ \mathbf{b} &= [(g^\delta, A\varphi_j)], & \mathbf{G} &= [(\varphi_i, \varphi_j)],\end{aligned}\tag{3.19}$$

so kann man dieses Gleichungssystem auch kurz schreiben als

$$(\mathbf{M} + \alpha\mathbf{G})\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{b}.\tag{3.20}$$

Die Gramsche Matrix \mathbf{G} ist symmetrisch und positiv definit; bei entsprechender Wahl der Basis von X_n ist \mathbf{G} zudem eine Bandmatrix. Sei etwa $X = L^2[0, 1]$ und $x_j = jh$, $j = 0, \dots, n$, die äquidistante Partition des Intervalls $[0, 1]$ mit Schrittweite $h = 1/n$. Dann hat die Gramsche Matrix für lineare B -Splines die tridiagonale Form

$$\mathbf{G} = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & 1 & 4 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.\tag{3.21}$$

Nun ist \mathbf{M} symmetrisch und positiv semidefinit, und für $\alpha > 0$ ist schließlich auch die Matrix $\mathbf{M} + \alpha\mathbf{G}$ symmetrisch und positiv definit. Dann kann das lineare Gleichungssystem (3.20) z. B. mit dem Cholesky-Verfahren gelöst werden.

Der Regularisierungsparameter soll auch im diskreten Fall nach dem Morozovschen Diskrepanzprinzip bestimmt werden, d. h. es soll die Gleichung

$$F_n(\alpha) = \|A_n f_{\alpha,n}^\delta - g^\delta\|^2 = (\tau\delta)^2\tag{3.22}$$

gelöst werden. Mit den Bezeichnungen von oben ist

$$\begin{aligned}F_n(\alpha) &= (g^\delta - A_n f_{\alpha,n}^\delta, g^\delta) - (A^*(g^\delta - A_n f_{\alpha,n}^\delta), f_{\alpha,n}^\delta) \\ &= \|g^\delta\|^2 - (g^\delta, A_n f_{\alpha,n}^\delta) - \alpha \|f_{\alpha,n}^\delta\|^2 \\ &= \|g^\delta\|^2 - \mathbf{b}^T \mathbf{x}_\alpha - \alpha \mathbf{x}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha.\end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{u}_\alpha = \frac{d\mathbf{x}_\alpha}{d\alpha}$, dann gilt für die Ableitung

$$F'_n(\alpha) = -\mathbf{b}^T \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{x}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha - 2\alpha \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha.$$

Differenziert man (3.20) nach α , so erhält man die Gleichung

$$(\mathbf{M} + \alpha\mathbf{G})\mathbf{u}_\alpha = -\mathbf{G}\mathbf{x}_\alpha,\tag{3.23}$$

aus der \mathbf{u}_α bestimmt werden kann. Wegen

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha^T (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{u}_\alpha = -\mathbf{x}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha$$

vereinfacht sich schließlich die Ableitung von F_n zu

$$F'_n(\alpha) = -2\alpha \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha. \quad (3.24)$$

Der Regularisierungsparameter kann dann wie folgt mit der aus dem Newton-Verfahren abgeleiteten Iteration bestimmt werden:

Satz 3.14. *Sei $g \in \mathcal{R}(A_n)$ und $\tau > 1$. Für $\|g^\delta - g\| \leq \delta < \|g^\delta\|/\tau$ gibt es dann genau ein $\alpha_* > 0$ mit $F_n(\alpha_*) = (\tau\delta)^2$. Für jeden Startwert $\alpha_0 \geq \alpha_*$ konvergiert die durch*

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k F'_n(\alpha_k)}{\alpha_k F'_n(\alpha_k) + F_n(\alpha_k) - (\tau\delta)^2} \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

definierte Folge monoton von oben gegen α_* . Die Konvergenz ist quadratisch.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit von $\alpha_* > 0$ folgt unmittelbar aus Satz 3.9 angewendet auf den diskreten Fall. Sei nun $\beta = \alpha^{-1}$ und

$$H_n(\beta) = F_n(\beta^{-1}).$$

Für die erste und zweite Ableitung von H_n gilt dann

$$\begin{aligned} H'_n(\beta) &= -\beta^{-2} F'_n(\beta^{-1}), \\ H''_n(\beta) &= \beta^{-4} [2\beta F'_n(\beta^{-1}) + F''_n(\beta^{-1})]. \end{aligned}$$

Mit (3.23) gilt nun

$$F'_n(\alpha) = 2\alpha \mathbf{u}_\alpha^T (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{u}_\alpha > 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

d.h. F_n ist streng monoton wachsend. Um die zweite Ableitung von H_n auszurechnen, benötigt man F''_n ; mit $\mathbf{v}_\alpha = \frac{d^2 \mathbf{x}_\alpha}{d\alpha^2}$ folgt aus (3.24)

$$F''_n(\alpha) = -2\mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha - 2\alpha (\mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{u}_\alpha).$$

Durch Differenzieren erhält man aus (3.23) die Gleichung

$$(\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{v}_\alpha = -2\mathbf{G} \mathbf{u}_\alpha,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} 2\alpha^{-1} F'_n(\alpha) + F''_n(\alpha) &= -6\mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha - 2\alpha (\mathbf{v}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{x}_\alpha + \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{u}_\alpha) \\ &= 6\mathbf{u}_\alpha^T (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{u}_\alpha + 2\alpha (\mathbf{v}_\alpha^T (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{u}_\alpha) \\ &= 6\mathbf{u}_\alpha^T (\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{u}_\alpha - 6\alpha \mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{G} \mathbf{u}_\alpha \\ &= 6\mathbf{u}_\alpha^T \mathbf{M} \mathbf{u}_\alpha. \end{aligned}$$

Dann ist $H_n''(\beta) \geq 0$ für alle $\beta > 0$. Die Newton-Iteration für die Gleichung $H_n(\beta) = (\tau\delta)^2$ lautet

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{(\tau\delta)^2 - H_n(\beta_k)}{H_n'(\beta_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Für die streng monoton fallende und konvexe Funktion H_n konvergiert dann die Folge $\{\beta_k\}$ für jeden Startwert $\beta_0 \leq \beta_*$ monoton von unten und quadratisch gegen β_* (siehe z. B. Stoer et al. [41]). Die Iterationsvorschrift (3.25) erhält man, wenn man (3.26) durch α_k und F_n ausdrückt. \square

Sei nun $M > 0$ eine Konstante mit $\|A\| \leq M$, dann ist wegen (3.17)

$$\alpha_0 = \frac{\tau\delta M^2}{\|g^\delta\| - \tau\delta}$$

ein geeigneter Startwert der Iteration (3.25), und man erhält folgenden Modellalgorithmus zur Bestimmung einer Lösung der schlecht gestellten Gleichung (3.1):

Algorithmus 3.15.

Wähle $\tau > 1$, $\varepsilon > 0$, $n > 1$

Berechne $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{M}, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gemäß (3.19)

if ($\|g^\delta\| \leq \tau\delta$) then $\mathbf{x}_\alpha := \mathbf{0}$

else begin

$\alpha := \alpha_0$

 repeat

 Bestimme Cholesky-Zerlegung $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{M} + \alpha\mathbf{G}$

 Löse das Gleichungssystem $\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{b}$

$\mathbf{d} := \mathbf{G}\mathbf{x}_\alpha$

 Löse das Gleichungssystem $\mathbf{L}\mathbf{L}^T\mathbf{u}_\alpha = -\mathbf{d}$

$F := \|g^\delta\|^2 - (\tau\delta)^2 - \mathbf{x}_\alpha^T(\mathbf{b} + \alpha\mathbf{d})$

$F' := -2\alpha\mathbf{u}_\alpha^T\mathbf{d}$

$\Delta\alpha := \frac{\alpha F'}{\alpha F' + F}$

$\alpha := \Delta\alpha \cdot \alpha$

 until $|(1 - \Delta\alpha)\alpha| < \varepsilon$

end

$f_{\alpha,n}^\delta := \xi_1\varphi_1 + \dots + \xi_n\varphi_n$

3.5 Nichtlineare schlecht gestellte Probleme

Bisher wurden Regularisierungsverfahren nur für lineare Probleme $Af = g$ mit einem kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit Hilfe der Spektraltheorie entwickelt. Für nichtlineare Operatoren stehen diese Mittel nicht mehr zur Verfügung, aber die Charakterisierung der Tikhonov-Regularisierung in Satz 3.8 gestattet eine direkte Übertragung auf den Fall eines nichtlinearen Operators $T: X \rightarrow Y$: Ist die Gleichung $T(f) = g$ schlecht gestellt, d. h. hängen die Lösungen nicht stetig von den Daten ab, und hat man nur gestörte Daten g^δ mit $\|g^\delta - g\| \leq \delta$ zur Verfügung, so löst man anstelle der besagten Gleichung das nichtlineare Minimierungsproblem

$$\|T(f) - g^\delta\|^2 + \alpha\|f\|^2 \rightarrow \min, \quad f \in X. \quad (3.27)$$

Dabei ist $\alpha > 0$ wieder der Regularisierungsparameter, der in Abhängigkeit vom Datenfehler δ bestimmt werden muß. In Engl et al. [11] konnte für den Fall eines stetigen und schwach abgeschlossenen Operators T die Existenz einer Lösung der Aufgabe (3.27) und – in einem gewissen Sinne – auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten nachgewiesen werden. Dabei heißt $T: X \rightarrow Y$ *schwach abgeschlossen*, falls der Graph

$$\mathcal{G}(T) = \{\{f, T(f)\} : f \in X\}$$

schwach abgeschlossen im Produktraum $X \times Y$ ist (vgl. Lemma 3.10); zum Beispiel ist jeder verstärkt stetige Operator schwach abgeschlossen (siehe Anhang A). Das Problem (3.27) ist also gut gestellt. Ferner kann auch die Konvergenzeigenschaft gezeigt werden: Ist $\{\alpha_n\}$ eine beliebige Folge mit $\alpha_n \rightarrow 0$ und $\{f_n\}$ eine zugehörige Lösungsfolge von (3.27) bei exakten Daten g , so gibt es eine Teilfolge $\{f_{n_j}\}$, die gegen eine Lösung kleinster Norm der Gleichung $T(f) = g$ konvergiert, sofern eine solche existiert. Die aufgezählten Resultate sind das Analogon zu Satz 3.8 und rechtfertigen erst die Bezeichnung Regularisierungsverfahren für (3.27). Sie können auch auf den allgemeineren Fall übertragen werden, daß die Gleichung $T(f) = g$ nur im least-squares Sinne lösbar ist [1]. Es sei ferner bemerkt, daß anstelle von $\alpha\|f\|^2$ auch der allgemeinere Penaltyterm $\alpha\|f - f_0\|^2$ mit einem $f_0 \in X$ in (3.27) verwendet werden kann. Anders als im linearen Fall hat $f_0 = 0$ hier keine spezielle Bedeutung, und man kann f_0 dazu verwenden, a-priori Informationen in die Lösung einfließen zu lassen.

Die Behandlung geeigneter Parameterstrategien – wie etwa des Analogons zum Morozovschen Diskrepanzprinzip für lineare Probleme – und deren Konvergenzraten sind z. B. in den Arbeiten von Engl et al. [12], Scherzer [37] und Scherzer et al. [38] enthalten. Es stellt sich heraus, daß man im wesentlichen für die Regularität von Parameterstrategien die gleichen Bedingungen wie im linearen Fall erhält (vgl. Satz 3.7).

Seien nun X und Y Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein kompakter Operator. Es sollen nun die Regularisierungseigenschaften der Tikhonov-Regularisierung für spezielle Gleichungen der Form

$$Af = g(f) \quad (3.28)$$

nachgewiesen werden. Hier ist $g: X \rightarrow Y$ ein stetiger und schwach abgeschlossener nichtlinearer Operator, für den nur eine Approximation $g^\delta: X \rightarrow Y$ (ebenfalls stetig und schwach abgeschlossen) zur Verfügung steht. Man kann die Gleichung (3.28) als eine Verallgemeinerung der linearen Gleichung (3.1) verstehen, bei der die rechte Seite g nicht konstant ist, sondern von f abhängt. Natürlich kann man (3.28) auch mit dem nichtlinearen Operator $T = A - g$ in die Form $T(f) = 0$ bringen; aber im Gegensatz zu den anfangs erläuterten nichtlinearen Gleichungen, hat man hier keine Störungen der Daten, sondern Störungen des Operators zu betrachten.

Gesucht ist nun eine *Minimum-Norm-Lösung* der Gleichung (3.28), also ein Element $f \in X$ mit

$$\|f\| = \min\{\|\varphi\| : A\varphi = g(\varphi)\}.$$

Die Gleichung (3.28) wird als *schlecht gestellt* bezeichnet, wenn die Lösungen nicht stetig von Störungen des Operators g abhängen.

3.6 Tikhonov-Regularisierung für nichtlineare Probleme

Im folgenden wird angenommen, daß die Gleichung (3.28) für den exakten Operator g eine Minimum-Norm-Lösung besitzt. Ist die Gleichung (3.28) schlecht gestellt, so muß diese regularisiert werden. Für $\alpha > 0$ kann man dann wieder im Hinblick auf Satz 3.8 versuchen, anstelle der Gleichung (3.28) das nichtlineare Minimierungsproblem

$$\|Af - g^\delta(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2 \rightarrow \min, \quad f \in X, \quad (3.29)$$

zu lösen. Unter den gegebenen Voraussetzungen für A und g^δ gilt:

Satz 3.16. *Für jedes $\alpha > 0$ hat die Minimierungsaufgabe (3.29) eine (nicht notwendig eindeutige) Lösung.*

Für den Beweis wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 3.17. *Sei H ein Hilbertraum und $S \subset H$ schwach abgeschlossen. Dann existiert für jedes $h \in H$ ein $s^* \in S$ mit*

$$\|s^* - h\| = \inf_{s \in S} \|s - h\|.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $h = 0$. Bezeichne $a = \inf\{\|s\| : s \in S\}$ und sei $\{s_n\}$ eine Folge aus S mit $\|s_n\| \rightarrow a$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{s_{n_j}\}$ und ein $s^* \in S$ mit $s_{n_j} \rightharpoonup s^*$, und es gilt $\|s^*\| \leq \liminf \|s_{n_j}\| = a$. Also ist $\|s^*\| = a$. \square

Beweis (Satz 3.16). Zunächst ist der kompakte Operator A wegen (A.3) schwach stetig, also auch schwach abgeschlossen. Dann ist nach Voraussetzung auch der nichtlineare Operator $T = A - g^\delta$ schwach abgeschlossen. Sei nun $H = X \times Y$ der Produkt-Hilbertraum versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\})_\alpha = \alpha(f_1, f_2) + (g_1, g_2).$$

Dann ist der Graph $\mathcal{G}(T) \subset H$ schwach abgeschlossen in H , und nach Lemma 3.17 existiert ein $\{f^*, g^*\} \in \mathcal{G}(T)$ mit

$$\|\{f^*, g^*\}\|_\alpha = \inf\{\|\{f, g\}\|_\alpha : \{f, g\} \in \mathcal{G}(T)\}.$$

Es gilt also

$$\|T(f^*)\|^2 + \alpha\|f^*\|^2 = \|\{f^*, T(f^*)\}\|_\alpha^2 \leq \|\{f, T(f)\}\|_\alpha^2 = \|T(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2$$

für alle $f \in X$, d. h. f^* ist eine Lösung von (3.29). \square

Für festes $\alpha > 0$ soll nun die Stabilität des Problems (3.29), also die stetige Abhängigkeit der Lösungen von Störungen in g untersucht werden. Sei dazu $\{g_n\}$ eine Folge stetiger und schwach abgeschlossener Operatoren $g_n: X \rightarrow Y$, die mit einer Folge $\delta_n \rightarrow 0$ und einer Abbildung $\phi: X \rightarrow (0, \infty)$ die Approximationseigenschaft

$$\|g_n(f) - g(f)\| \leq \delta_n \phi(f) \quad \forall f \in X \quad (3.30)$$

erfüllt. Ferner sei die Folge $\{g_n\}$ schwach d -abgeschlossen, d. h. es gelte

$$f_n \rightharpoonup f, \quad g_n(f_n) \rightharpoonup h \quad \implies \quad g(f) = h. \quad (3.31)$$

Bemerkung 3.18. Die Eigenschaften (3.30) und (3.31) sind Bedingungen an die Konvergenz von $\{g_n\}$ gegen g . Zunächst erhält man aus (3.30) die punktweise Konvergenz; gilt $\phi(f) = \|g(f)\|$, so beschreibt δ_n den relativen Fehler von g_n . Die schwache d -Abgeschlossenheit (3.31) ist eine Bedingung an die Gleichmäßigkeit der Konvergenzgeschwindigkeit. Ist z. B. g verstärkt stetig und ϕ auf jeder beschränkten Teilmenge von X beschränkt, so folgt (3.31) bereits aus (3.30): Denn sei $\{f_n\}$ eine Folge mit $f_n \rightharpoonup f$, so gilt $g(f_n) \rightarrow g(f)$ und es existiert ein $M > 0$ mit $\phi(f_n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Ungleichung

$$\|g_n(f_n) - g(f)\| \leq \delta_n \phi(f_n) + \|g(f_n) - g(f)\|$$

folgt schließlich $g_n(f_n) \rightarrow g(f)$, also auch (3.31). Die Beschränktheit von ϕ bedeutet gleichmäßige Konvergenz von $\{g_n\}$ auf jeder beschränkten Menge.

Satz 3.19. Sei $\alpha > 0$ fest und $\{g_n\}$ eine Operatorfolge, welche die Eigenschaften (3.30) und (3.31) erfüllt. Dann enthält jede Folge $\{f_n\}$ zugehöriger Lösungen von (3.29) eine Teilfolge, die gegen eine Lösung von (3.29) für exaktes g konvergiert.

Beweis. Zur Abkürzung sei $T_n = A - g_n$ und $T = A - g$. Nach Definition der f_n gilt

$$\|T_n(f_n)\|^2 + \alpha\|f_n\|^2 \leq \|T_n(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2 \quad \forall f \in X. \quad (3.32)$$

Wegen (3.30) konvergiert die Folge $\{T_n(f)\}$ für jedes $f \in X$. Aus (3.32) erhält man damit, daß die Folgen $\{f_n\}$ und $\{T_n(f_n)\}$ beschränkt sind, also konvergente Teilfolgen enthalten. Wegen der Eigenschaft (3.31) kann man dann eine Teilfolge $\{f_{n_j}\}$ auswählen mit

$$f_{n_j} \rightharpoonup f^*, \quad T_{n_j}(f_{n_j}) \rightharpoonup T(f^*).$$

Dann gilt

$$\|f^*\| \leq \liminf \|f_{n_j}\|, \quad (3.33)$$

$$\|T(f^*)\| \leq \liminf \|T_{n_j}(f_{n_j})\|, \quad (3.34)$$

und mit (3.32) erhält man

$$\begin{aligned} \|T(f^*)\|^2 + \alpha\|f^*\|^2 &\leq \liminf (\|T_{n_j}(f_{n_j})\|^2 + \alpha\|f_{n_j}\|^2) \\ &\leq \limsup (\|T_{n_j}(f_{n_j})\|^2 + \alpha\|f_{n_j}\|^2) \\ &\leq \limsup (\|T_{n_j}(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\|T_{n_j}(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2) \\ &= \|T(f)\|^2 + \alpha\|f\|^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

für alle $f \in X$, d. h. f^* ist eine Lösung des ungestörten Problems (3.29). Aus (3.35) folgt zudem

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\|T_{n_j}(f_{n_j})\|^2 + \alpha\|f_{n_j}\|^2) = \|T(f^*)\|^2 + \alpha\|f^*\|^2. \quad (3.36)$$

Angenommen, es gilt nun $\|f_{n_j}\| \not\rightarrow \|f^*\|$. Dann folgt

$$\|f^*\| \leq \liminf \|f_{n_j}\| < \limsup \|f_{n_j}\| =: c,$$

und es existiert eine Teilfolge von $\{f_{n_j}\}$, die hier mit $\{f_{n_k}\}$ bezeichnet werden soll, mit $\|f_{n_k}\| \rightarrow c$. Mit (3.36) und $\alpha > 0$ erhält man dann

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_{n_k}(f_{n_k})\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\|T_{n_k}(f_{n_k})\|^2 + \alpha\|f_{n_k}\|^2) - \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\|^2 \\ &= \|T(f^*)\|^2 + \alpha(\|f^*\|^2 - c^2) \\ &< \|T(f^*)\|^2. \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Ungleichung (3.34), und es muß starke Konvergenz $f_{n_j} \rightarrow f^*$ gelten. \square

Nachdem Existenz und Stabilität von Lösungen des Problems (3.29) für festes $\alpha > 0$ mit den Sätzen 3.16 und 3.19 geklärt wurden, soll nun die Konvergenz von (3.29), also das Verhalten der Lösungen für $\alpha \rightarrow 0$ untersucht werden:

Satz 3.20. *Sei f^* eine Minimum-Norm-Lösung der ungestörten Gleichung (3.28) und $\alpha(\delta)$ eine Parameterstrategie mit $\alpha \rightarrow 0$ und $\delta^2/\alpha \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$. Für die Folge der nichtlinearen Operatoren $\{g_n\}$ gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.19. Sei nun $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$ und bezeichne $\{f_n\}$ eine Lösungsfolge der Aufgaben*

$$\|Af - g_n(f)\|^2 + \alpha_n \|f\|^2 \rightarrow \min, \quad f \in X.$$

Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_j}\}$, und der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge ist eine Minimum-Norm-Lösung von (3.28).

Beweis. Zur Abkürzung sei $T_n = A - g_n$ und $T = A - g$. Nach Definition der f_n und mit der Eigenschaft (3.30) der Operatoren g_n gilt

$$\begin{aligned} \|T_n(f_n)\|^2 + \alpha_n \|f_n\|^2 &\leq \|T_n(f^*)\|^2 + \alpha_n \|f^*\|^2 \\ &= \|T_n(f^*) - T(f^*)\|^2 + \alpha_n \|f^*\|^2 \\ &= \|g_n(f^*) - g(f^*)\|^2 + \alpha_n \|f^*\|^2 \\ &\leq \delta_n^2 [\phi(f^*)]^2 + \alpha_n \|f^*\|^2. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha_n > 0$ folgt zunächst

$$\begin{aligned} \|T_n(f_n)\|^2 &\leq \delta_n^2 [\phi(f^*)]^2 + \alpha_n \|f^*\|^2, \\ \|f_n\|^2 &\leq \frac{\delta_n^2}{\alpha_n} [\phi(f^*)]^2 + \|f^*\|^2, \end{aligned}$$

und mit $\alpha_n \rightarrow 0$ und $\delta_n^2/\alpha_n \rightarrow 0$ erhält man weiter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f_n) = 0, \quad (3.37)$$

$$\limsup \|f_n\| \leq \|f^*\|. \quad (3.38)$$

Dann ist $\{f_n\}$ beschränkt und enthält eine Teilfolge, die gegen ein $\bar{f} \in X$ schwach konvergiert. Man kann dann wegen (3.31) eine Teilfolge $\{f_{n_j}\}$ derart auswählen, daß gilt

$$f_{n_j} \rightharpoonup \bar{f}, \quad T_{n_j}(f_{n_j}) \rightarrow T(\bar{f}).$$

Wegen (3.37) ist dann $T(\bar{f}) = 0$, d. h. \bar{f} ist eine Lösung der Gleichung (3.28). Ferner gilt mit (3.38)

$$\|\bar{f}\| \leq \liminf \|f_{n_j}\| \leq \limsup \|f_{n_j}\| \leq \|f^*\|.$$

Nun ist aber f^* Minimum-Norm-Lösung von (3.28), und daher ist auch \bar{f} eine Minimum-Norm-Lösung. Insbesondere gilt dann $\|\bar{f}\| = \|f^*\|$, und man erhält

$$\begin{aligned} \limsup \|f_{n_j} - \bar{f}\|^2 &\leq \limsup (\|f_{n_j}\|^2 + \|\bar{f}\|^2 - 2 \operatorname{Re}(f_{n_j}, \bar{f})) \\ &\leq \|f^*\|^2 + \|\bar{f}\|^2 - 2\|\bar{f}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $f_{n_j} \rightarrow \bar{f}$. □

Im Sinne der oben bewiesenen Sätze übertragen sich also die Eigenschaften der Tikhonov-Regularisierung aus Satz 3.8 auf den Fall einer nichtkonstanten rechten Seite g , sofern die Konvergenzeigenschaften (3.30) und (3.31) für die gestörten Operatoren g_n erfüllt sind. Zur Bestimmung einer stabilen Approximation einer Minimum-Norm-Lösung von (3.28) kann dann die Tikhonov-Regularisierung verwendet werden.

Kapitel 4

Bestimmung von Blasengrößenverteilungen

4.1 Herleitung der nichtlinearen Gleichung

Das Kapitel 2 diente der Herleitung der Dispersionsrelation (2.22) für eine blasenhaltige Flüssigkeit mit geringem Gasvolumenanteil. Sie beschreibt den Zusammenhang der Blasengrößenverteilung f mit der Phasengeschwindigkeit V und der Dämpfung A von ebenen harmonischen Schallwellen bei Ausbreitung durch das Gemisch; wegen der gemachten Linearisierungsannahmen beschränkt sich der Gültigkeitsbereich auf die Ausbreitung von Schallwellen kleiner Amplitude. Wie in Kapitel 2 bezeichne ω_0 die Eigenfrequenz und b die frequenzabhängige Dämpfung einer Gasblase mit Gleichgewichtsradius a . Mit dem stetigen und komplexwertigen Kern

$$k(\omega, a) = \frac{4\pi a}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib\omega}$$

und den kompakten reellen Intervallen $J = [a_{\min}, a_{\max}]$ und $\Omega = [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ kann die Gleichung (2.22) nun geschrieben werden als

$$1 + \int_J k(\omega, a) f(a) da = \left(\frac{1}{V} + i \frac{A}{\omega} \right)^2, \quad \omega \in \Omega. \quad (4.1)$$

Dabei bezeichne a_{\min} den kleinsten und a_{\max} den größten Blasenradius im Gemisch; das Intervall Ω enthalte alle Eigenfrequenzen ω_0 für $a \in J$.

Sind V und A durch Messung aus einem Experiment bekannt, so kann die gesuchte Verteilung f aus der linearen Integralgleichung (4.1) bestimmt werden. Nach Satz A.3 ist der zugehörige lineare Integraloperator von $L^2(J)$ nach $L^2(\Omega)$ kompakt und der Bildraum nach den Sätzen A.9 und A.10 nicht abgeschlossen. Dann ist die verallgemeinerte Inverse nach Satz A.22 unbeschränkt und schließlich die Fredholmsche Integralgleichung erster Art (4.1) ein lineares

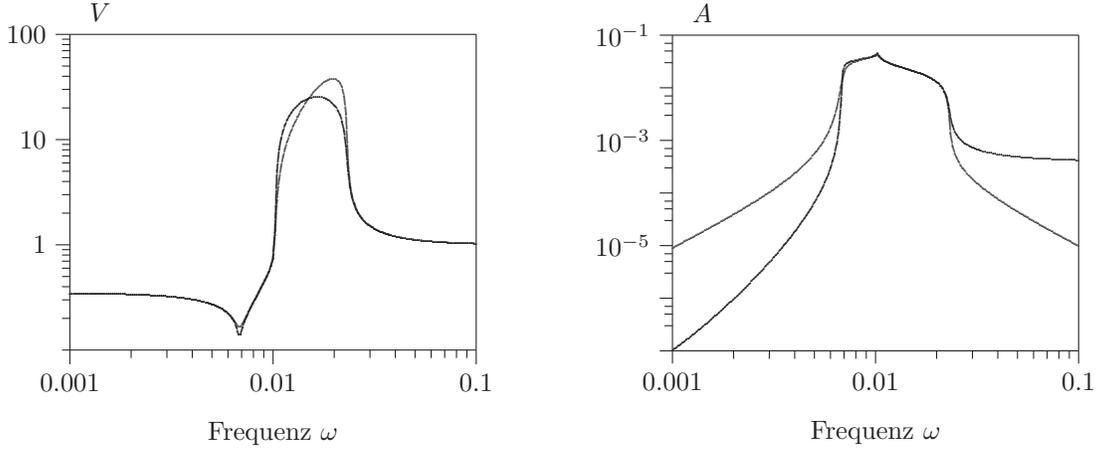


Abb. 4.1: Phasengeschwindigkeit und Dämpfung, wie sie durch Gleichung (4.1) definiert sind, und deren Näherungen (hell) bei Ersetzung von k durch k_0 .

schlecht gestelltes Problem. Zur Bestimmung einer numerischen Lösung der Gleichung (4.1) kann man die in Kapitel 3 entwickelten Methoden heranziehen, sofern eine Abschätzung des Meßfehlers bekannt ist.

Abgesehen von den Schwierigkeiten, auf die man ohnehin trifft, wenn man eine Lösung eines schlecht gestellten Problems bestimmen will, kommt hier noch ein weiteres Problem hinzu: Im Gegensatz zur Dämpfung A kann die Phasengeschwindigkeit V insbesondere im Bereich der Eigenfrequenzen der anwesenden Blasen nicht mit einer akzeptablen Genauigkeit gemessen werden; die Funktion V in der rechten Seite der Gleichung (4.1) ist also praktisch nicht bekannt.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu beheben, liefert die Überlegung, daß V und A nicht unabhängig voneinander sind und die Kenntnis von A bereits ausreicht, um V zu bestimmen. Um dieser Überlegung nachzugehen, soll vorübergehend der Kern k in (4.1) durch den Kern

$$k_0(\omega, a) = \frac{4\pi a}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2ib_0\omega}$$

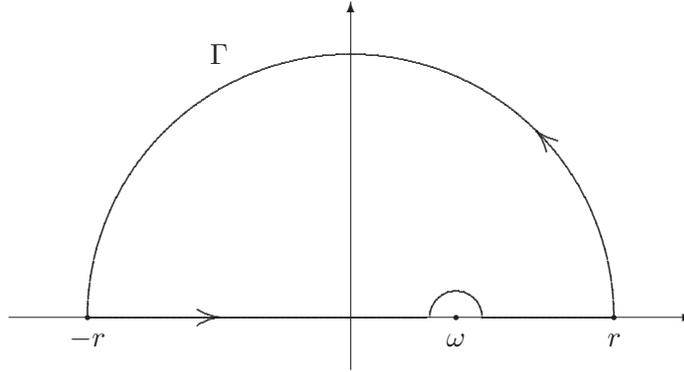
ersetzt werden, welcher sich nur durch den Dämpfungsterm b_0 von k unterscheidet. Dabei sei b_0 definiert durch

$$b_0(a) = \frac{\varepsilon\tilde{\omega}^2 a}{2} + \frac{\delta}{a^2} = b(\tilde{\omega}, a)$$

mit einem festen $\tilde{\omega} > 0$ aus dem Bereich der Eigenfrequenzen der Gasblasen. Die so definierten Näherungen für V und A liefern eine gute Approximation, falls ε hinreichend klein ist (vgl. Abb. 4.1).

Sei nun $a \in J$ fest. Im folgenden werden auch komplexe ω zugelassen, dann besitzt die rationale Funktion $k_0(\cdot, a)$ genau zwei isolierte Singularitäten

$$\pm\sqrt{\omega_0^2 - b_0^2} - ib_0,$$

Abb. 4.2: Integrationsweg Γ .

welche beide für hinreichend kleines b_0 in der unteren Halbebene der komplexen Ebene \mathbb{C} liegen. Also ist $k_0(\cdot, a)$ eine auf der ganzen oberen Halbebene und der reellen Achse analytische Funktion. Gleiches gilt auch für $k_0(\eta, a)/(\eta - \omega)$ mit Ausnahme des Punktes $\omega \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz von Cauchy [18] folgt dann für den in Abb. 4.2 dargestellten geschlossenen Integrationsweg Γ

$$\oint_{\Gamma} \frac{k_0(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta = 0. \quad (4.2)$$

Bezeichne nun $\kappa(r, 0)$ den großen Halbkreis um den Nullpunkt mit Radius r und $\kappa(\nu, \omega)$ den kleinen Halbkreis um ω mit Radius ν . Für $r \rightarrow \infty$ verschwindet der Anteil des Integrals entlang des Halbkreises $\kappa(r, 0)$, und aus (4.2) folgt

$$\int_{-\infty}^{\omega-\nu} \frac{k_0(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta + \int_{\omega+\nu}^{\infty} \frac{k_0(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta = - \oint_{\kappa(\nu, \omega)} \frac{k_0(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta.$$

Setzt man für $\kappa(\nu, \omega)$ eine Parametrisierung ein und läßt auf beiden Seiten $\nu \rightarrow 0$ gehen, so erhält man schließlich das Hauptwertintegral

$$\text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_0(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta = \pi i k_0(\omega, a). \quad (4.3)$$

Nun hat der Kern die Eigenschaft $k_0(-\omega, a) = \overline{k_0(\omega, a)}$ für alle $\omega > 0$, d. h. der Realteil ist eine gerade Funktion und der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenz. Man kann diese Eigenschaft dazu benutzen, die Gleichung (4.3) so umzuschreiben, daß nur über positive Frequenzen integriert wird, und man erhält

$$\text{Re } k_0(\omega, a) = \frac{2}{\pi} \text{P. V.} \int_0^{\infty} \frac{\eta \text{Im } k_0(\eta, a)}{\eta^2 - \omega^2} d\eta,$$

$$\text{Im } k_0(\omega, a) = -\frac{2\omega}{\pi} \text{P. V.} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re } k_0(\eta, a)}{\eta^2 - \omega^2} d\eta.$$

Ist also der Realteil von k_0 für alle Frequenzen $\omega > 0$ bekannt, so kann man aus ihm den Imaginärteil schon vollständig ermitteln (und umgekehrt). Berücksichtigt man, daß die Verteilung f reell ist, so ist die komplexe Dispersionsrelation (4.1) äquivalent zu dem System reeller Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 + \int_J \operatorname{Re} k(\omega, a) f(a) da &= \frac{1}{V^2} - \frac{A^2}{\omega^2}, \\ \int_J \operatorname{Im} k(\omega, a) f(a) da &= \frac{2A}{\omega V}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Setzt man nun die gefundenen Darstellungen für den Real- und Imaginärteil von k_0 in (4.4) ein, so erhält man ein System nichtlinearer Integralgleichungen für A und V

$$\begin{aligned} 1 + \frac{4}{\pi} \text{P. V.} \int_0^\infty \frac{A(\eta)}{(\eta^2 - \omega^2)V(\eta)} d\eta &= \frac{1}{V^2} - \frac{A^2}{\omega^2}, \\ -\frac{2\omega}{\pi} \text{P. V.} \int_0^\infty \frac{1/V(\eta)^2 - A(\eta)^2/\eta^2}{\eta^2 - \omega^2} d\eta &= \frac{2A}{\omega V}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet diese gekoppelten Gleichungen als *Kramers-Kronig-Relationen* (siehe Pippard [29]). Ist die Dämpfung A für alle Frequenzen $\omega > 0$ bekannt, so können die Kramers-Kronig-Relationen dazu verwendet werden, die unbekannte Phasengeschwindigkeit V zu bestimmen. Ein Näherungsverfahren wurde von Temkin [44] vorgeschlagen: Ist die bekannte Dämpfung sehr klein, so sind auch die Änderungen in der Phasengeschwindigkeit klein. Approximiert man $1/V$ unter dem Integral der ersten Gleichung durch 1, so kann V direkt durch Integration gewonnen werden.

Ist A bekannt und V durch die Kramers-Kronig-Relationen ermittelt, kann die gesuchte Verteilung f aus einer der Integralgleichungen des Systems (4.4) bestimmt werden. Dieses Vorgehen hat aber verschiedene Nachteile: Im allgemeinen muß man zur Bestimmung von V eine nichtlineare Integralgleichung lösen, welche die Kenntnis von A für *alle* positiven Frequenzen erfordert. Ferner können die für den Kern k_0 (mit dem frequenzunabhängigen Dämpfungsterm b_0) hergeleiteten Kramers-Kronig-Relationen nicht auf k übertragen werden. Grund dafür ist, daß beim Übergang zum frequenzabhängigen Dämpfungsterm b die Funktion $k(\cdot, a)$ nicht mehr analytisch auf der ganzen abgeschlossenen oberen Halbebene von \mathbb{C} ist. Die Singularitäten der rationalen Funktion $k(\cdot, a)$ sind gerade die Nullstellen des Nenners, also die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$-i\varepsilon a \omega^3 - \omega^2 - \frac{2i\delta\omega}{a^2} + \omega_0^2 = 0,$$

und man zeigt, daß diese Gleichung für jedes a im allgemeinen (d. h. für kleine Werte von ε und δ) genau eine Nullstelle der Form $i\xi$ mit $\xi > 0$ hat und daß die

restlichen Nullstellen in der unteren komplexen Halbebene liegen. Für hinreichend großen Radius r liegt dann $i\xi$ im Innern des Weges Γ , und (4.2) ist für den Kern k nicht erfüllt. Bezeichnet $h(\omega, a)$ das Residuum des Integranden $k(\eta, a)/(\eta - \omega)$ in der Singularität $i\xi$, so folgt stattdessen aus dem Residuensatz [13, 18]

$$\oint_{\Gamma} \frac{k(\eta, a)}{\eta - \omega} d\eta = 2\pi i h(\omega, a). \quad (4.5)$$

Führt man nun fort wie für den Kern k_0 , d. h. bestimmt man zunächst unter Berücksichtigung von $k(-\omega, a) = \overline{k(\omega, a)}$ die entsprechenden Darstellungen des Real- und Imaginärteils von k und setzt diese anschließend in (4.4) ein, so erhält man anstelle der Kramers-Kronig-Relationen das System

$$1 + \frac{4}{\pi} \text{P. V.} \int_0^{\infty} \frac{A(\eta)}{(\eta^2 - \omega^2)V(\eta)} d\eta = \frac{1}{V^2} - \frac{A^2}{\omega^2} + 2 \int_J \text{Re } h(\omega, a) f(a) da,$$

$$-\frac{2\omega}{\pi} \text{P. V.} \int_0^{\infty} \frac{1/V(\eta)^2 - A(\eta)^2/\eta^2}{\eta^2 - \omega^2} d\eta = \frac{2A}{\omega V} + 2 \int_J \text{Im } h(\omega, a) f(a) da.$$

Als Konsequenz aus (4.5) tritt hier die unbekannte Verteilung f auf, und es ist nicht mehr möglich, allein aus der Kenntnis der Dämpfung A die Phasengeschwindigkeit V zu bestimmen. Natürlich können die Kramers-Kronig-Relationen dennoch dazu benutzt werden, eine Näherung von V zu bestimmen – dies entspricht dann gerade der Vernachlässigung der entsprechenden Terme in f .

Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit, das anfangs beschriebene Problem zu lösen: Bei der Herleitung der Kramers-Kronig-Relationen wurde die komplexe Dispersionsrelation (4.1) in das äquivalente System (4.4) umgeformt. Dabei wurde ausgenutzt, daß die gesuchte Verteilung f reell ist. Bei bekannter Dämpfung A und bekannter Phasengeschwindigkeit V könnte f aus einer der beiden linearen Integralgleichungen bestimmt werden. Nun ist V nicht gegeben, aber man kann (4.4) als nichtlineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten f und V auffassen; die Nichtlinearität liegt dabei allein an V . Zur Abkürzung sei im folgenden

$$u(\omega) = 1/V(\omega), \quad v(\omega) = A(\omega)/\omega, \quad (4.6)$$

und es wird angenommen, daß u und v stetige Funktionen auf dem Intervall Ω sind. Seien nun $K: L^2(J) \rightarrow C(\Omega)$ und $L: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ zwei lineare Operatoren, die gemäß

$$(Kf)(\omega) = \int_J \text{Re } k(\omega, a) f(a) da$$

und

$$(Lf)(\omega) = \int_J \text{Im } k(\omega, a) f(a) da$$

definiert sind. K und L sind Integraloperatoren mit stetigem Kern, und nach Satz A.3 und der anschließenden Bemerkung A.4 sind beide Operatoren kompakt. Das System (4.4) kann nun kurz geschrieben werden als

$$\begin{aligned} 1 + Kf &= u^2 - v^2, \\ Lf &= 2uv. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Eliminiert man die nicht bekannte Funktion u aus diesem System, so erhält man schließlich die nichtlineare Gleichung

$$Lf = 2v\sqrt{1 + Kf + v^2}. \tag{4.8}$$

Durch (4.8) ist eine Gleichung gegeben, mit der man allein aus der Kenntnis der Dämpfung $A = \omega v$ die gesuchte Verteilung f bestimmen kann. Es sei hier vorab bemerkt, daß diese Gleichung von der Form der in Kapitel 3 untersuchten nichtlinearen Gleichung (3.28) ist; die genauen Eigenschaften des nichtlinearen Operators in (4.8) werden später untersucht. Zuvor soll der Ansatz der Linearisierung vorgestellt werden: Unter gewissen Umständen ist es zweckmäßig, den durch (4.8) beschriebenen nichtlinearen Zusammenhang von f und A durch eine lineare Gleichung zu ersetzen. Dabei wird die Vernachlässigung der nichtlinearen Effekte durch a-priori Informationen an die Größenordnung der Norm der gesuchten Verteilung gerechtfertigt; wegen $\beta \leq C\|f\|_2$ ist dies eine Voraussetzung an den Gasvolumenanteil im Gemisch.

4.2 Linearisierung

Die Blasengrößenverteilung f im Gemisch erfüllt die Dispersionsrelation (4.1). Zieht man auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel und betrachtet jeweils den Imaginärteil, so erfüllt f ebenfalls die Gleichung

$$\operatorname{Im} T(f) = \operatorname{Im} \left(1 + \int_J k(\omega, a) f(a) da \right)^{1/2} = v. \tag{4.9}$$

Zunächst soll der so definierte nichtlineare Operator $T: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ auf Fréchet-Differenzierbarkeit untersucht werden. Dazu sei die komplexe Funktion

$$F(z) = \sqrt{1 + z}$$

gegeben. Die Funktion $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist mit Ausnahme des Punktes $z = -1$ komplex differenzierbar, und es gilt

$$F'(z) = \frac{1}{2\sqrt{1 + z}}.$$

Die Differenzierbarkeit von F überträgt sich zunächst auf den durch

$$\psi(h) = F \circ h \quad (4.10)$$

definierten Operator $\psi: C(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.1. *Der durch (4.10) definierte Operator $\psi: C(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist auf der offenen Menge $U = \{h \in C(\Omega) : \|h\|_\infty < 1\}$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt*

$$\psi'(h) = F' \circ h \quad \forall h \in U.$$

Beweis. Sei $z_0 \neq -1$ beliebig, dann wird wegen der komplexen Differenzierbarkeit von F durch

$$r(z) = F(z_0 + z) - F(z_0) - F'(z_0)z$$

eine komplexe Funktion definiert mit der Eigenschaft

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{r(z)}{z} = 0.$$

Nun ist aber für $h_0 \in U$

$$\|\psi(h_0 + h) - \psi(h_0) - \psi'(h_0)h\|_2 = \|r \circ h\|_2,$$

und wegen der Eigenschaft von r folgt für $\|h\|_\infty \rightarrow 0$

$$\frac{\|r \circ h\|_2}{\|h\|_\infty} \leq |\Omega|^{1/2} \frac{\|r \circ h\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq |\Omega|^{1/2} \left\| \frac{r \circ h}{h} \right\|_\infty \rightarrow 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. \square

Bezeichnet nun $H: L^2(J) \rightarrow C(\Omega)$ den kompakten linearen Integraloperator

$$(Hf)(\omega) = \int_J k(\omega, a) f(a) da,$$

so kann der anfangs definierte nichtlineare Operator $T: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ geschrieben werden als

$$T(f) = \psi(Hf).$$

Nun ist H linear und beschränkt, also auch Fréchet-differenzierbar, und es gilt $H'(f) = H$ für alle $f \in L^2(J)$. Dann ist T nach Satz 4.1 insbesondere in $f_0 = 0$ Fréchet-differenzierbar, und nach der Kettenregel gilt

$$T'(0)f = \psi'(0)Hf = \frac{1}{2} Hf.$$

Wegen $T(0) = 1$ ist dann die lokale lineare Approximation des nichtlinearen Operators T um $f_0 = 0$ gegeben durch

$$\tilde{T}(f) = 1 + \frac{1}{2} \int_J k(\omega, a) f(a) da.$$

Setzt man diese Näherung in die Gleichung (4.9) ein, so erhält man schließlich mit dem im letzten Abschnitt definierten kompakten linearen Integraloperator $L: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ die Linearisierung

$$Lf = 2v. \quad (4.11)$$

Man kann die so hergeleitete Gleichung als Vernachlässigung von Kf und v^2 in der nichtlinearen Gleichung (4.8) interpretieren. An dem System (4.4) sieht man, daß die Linearisierung gerade der Approximation der Phasengeschwindigkeit V durch 1 und der Vernachlässigung der quadratischen Terme der Dämpfung A entspricht. Die Abb. 4.3 zeigt einen Vergleich der Dämpfung für Gemische mit unterschiedlich hohem Gasanteil, wenn man die Gleichung (4.8) bzw. deren lineare Approximation (4.11) in Vorwärtsrichtung löst. Dabei wurde in allen Fällen die Blasengrößenverteilung wie in (2.23) gewählt und die Konstante C dem jeweiligen Volumenanteil angepaßt. Schon für einen geringen Gasanteil β ist eine deutlich schlechte Übereinstimmung des linearen und des nichtlinearen Modells erkennbar, wobei – wie bereits am Ende des Kapitels 2 – bemerkt sei, daß das nichtlineare Modell von Commander et al. [8] durch experimentelle Daten für Gemische mit einem Gasanteil von bis zu 1 % verifiziert wurde.

Für ein Gemisch mit sehr geringem Gasanteil β wird der Zusammenhang der Blasengrößenverteilung f und der Dämpfung A durch die lineare Gleichung (4.11) beschrieben. Mit dem Kern

$$\sigma_e(\omega, a) = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} k(\omega, a)$$

kann diese in die äquivalente Form

$$\int_J \sigma_e(\omega, a) f(a) da = A(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (4.12)$$

gebracht werden. Der Kern σ_e dieser Fredholmschen Integralgleichung erster Art wird als *Auslöschungsquerschnitt* (engl. *extinction cross section*) bezeichnet; er beschreibt für feste Frequenz ω den Einfluß von Gasblasen unterschiedlicher Gleichgewichtsradien a auf die Dämpfung A . Aus der Definition von k erhält man

$$\sigma_e(\omega, a) = \frac{4\pi ab\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2}, \quad (4.13)$$

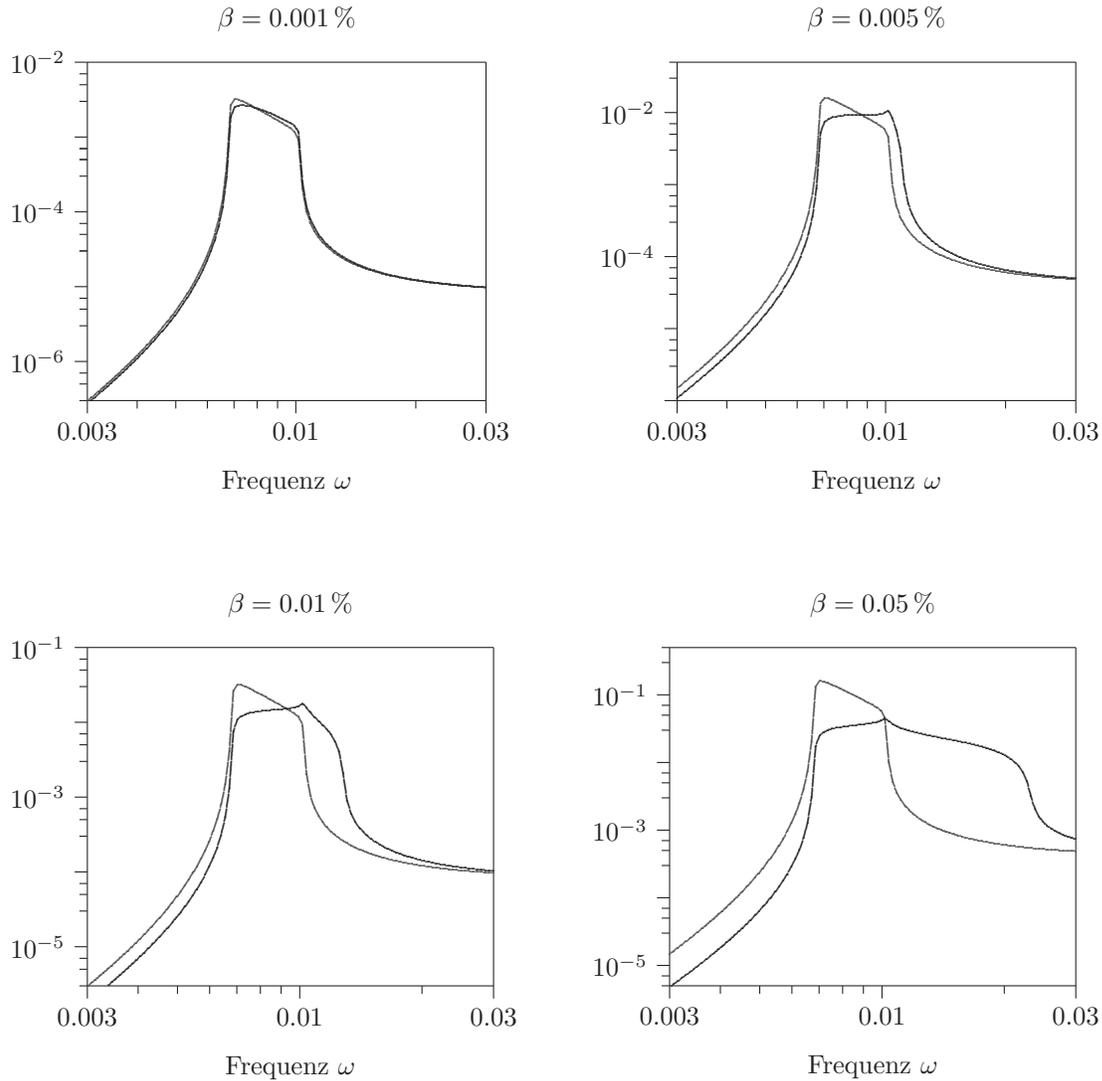


Abb. 4.3: Vergleich der Dämpfung A für das lineare Modell (4.11) (hell) und das nichtlineare Modell (4.8) für Gemische mit unterschiedlich hohem Gasvolumenanteil β . Die Blasengrößenverteilung f wurde dabei jeweils wie in (2.23) gewählt und dem jeweiligen Gasanteil durch Wahl des Faktors C angepaßt.

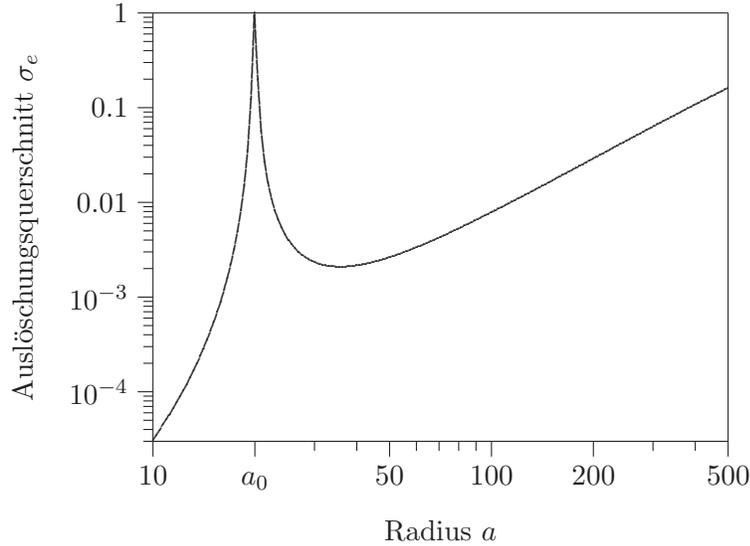


Abb. 4.4: Normalisierter Auslöschungsquerschnitt σ_e für eine feste Frequenz von $\omega = 0.1$. Für den Radius a_0 einer Gasblase mit Eigenfrequenz $\omega_0 = \omega$ besitzt σ_e ein stark ausgeprägtes lokales Maximum.

und man zeigt für das Verhalten an den Rändern

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sigma_e(\omega, a) = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \sigma_e(\omega, a) = \frac{2\pi}{\varepsilon\omega^2}.$$

Der Einfluß sehr kleiner Gasblasen mit einer Eigenfrequenz ω_0 , die sehr viel höher ist als die Erregerfrequenz ω , ist demnach sehr gering, wohingegen für sehr große Blasen mit $\omega_0 \ll \omega$ der Einfluß sich wegen

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sigma_e(\omega, a)}{a} = 0$$

asymptotisch dem Wert $2\pi/\varepsilon\omega^2$ nähert – insbesondere wächst der Einfluß sehr großer Blasen quadratisch mit der Abnahme der Frequenz. Bisher unberücksichtigt in den obigen Überlegungen wurde der Bereich von Blasen, in dem Resonanzeffekte eine Rolle spielen, also $\omega_0 \approx \omega$ gilt. An der Darstellung (4.13) des Auslöschungsquerschnitts kann man erkennen, daß – wenn man einmal von der Abhängigkeit des Dämpfungsterms b von a absieht – σ_e für festes ω in dem Radius a_0 ein lokales Maximum hat, für den die Eigenfrequenz gerade mit der Erregerfrequenz übereinstimmt. Das Maximum ist umso stärker ausgeprägt, je kleiner der Dämpfungsterm b ist; insbesondere gilt

$$\sigma_e(\omega, a_0) = \frac{\pi a_0}{b}. \quad (4.14)$$

Die Abb. 4.4 zeigt einen solchen Auslöschungsquerschnitt für eine feste Frequenz.

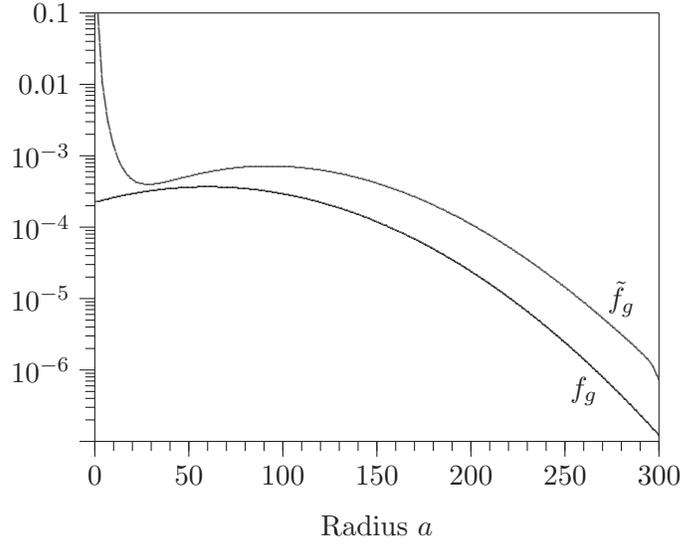


Abb. 4.5: Rekonstruktion der Gaußverteilung (4.16) mit der durch (4.15) definierten Resonanznäherung.

Um zu vermeiden, die lineare Integralgleichung (4.12) mit dem für numerische Zwecke schwierigen Kern σ_e lösen zu müssen, werden oft – neben β sehr klein – weitere vereinfachende Annahmen an das Gemisch gemacht. Ein Beispiel dafür ist die sogenannte *Resonanznäherung*, bei der angenommen wird, daß die Dämpfung ausschließlich durch Resonanzeffekte beeinflusst wird. Dies ist z. B. für ein nahezu monodispersives Gemisch – also ein Gemisch, in dem vornehmlich Blasen von nur einer Größenordnung enthalten sind – erfüllt. Sei nun ω eine feste Frequenz und a_0 der zugehörige Radius, deren Eigenfrequenz gerade mit ω übereinstimmt, d. h. es gelte $\omega_0(a_0) = \omega$. Wegen des „peaks“ von σ_e an der Stelle a_0 kann das Integral in der Gleichung (4.12) durch den Wert des Integranden in a_0 approximiert werden; mit (4.14) erhält man schließlich die Resonanznäherung

$$\tilde{f}(a_0) = \frac{Ab}{\pi a_0} \quad (4.15)$$

der gesuchten Blasengrößenverteilung. Für das Beispiel einer Gaußverteilung

$$f_g(a) = C_g \cdot e^{-(a-\bar{a})^2/2\sigma^2} \quad (4.16)$$

mit mittlerem Radius $\bar{a} = 60$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 60$ ist die Resonanznäherung in Abb. 4.5 dargestellt. Die Konstante C_g wurde dabei einem Gasvolumenanteil von $\beta = 10^{-5} \%$ angepaßt. Typischerweise wird die gesuchte Verteilung durch die Resonanznäherung (4.15) überschätzt, weil der Anteil der Dämpfung, den alle Gasblasen mit einer Eigenfrequenz im Bereich der Erregerfrequenz verursachen, allein den Gasblasen mit Radius a_0 zugeschrieben wird. Für

weitere Beispiele und eine eingehende Diskussion der Resonanznäherung (4.15) siehe Commander et al. [7].

Im allgemeinen liefert die Resonanznäherung nur eine grobe Approximation der gesuchten Verteilung, und zur exakten Bestimmung muß die lineare Integralgleichung (4.12) gelöst werden. Äquivalent dazu wurde hier die lineare schlecht gestellte Gleichung (4.11) gelöst. Als Beispiele für die Blasengrößenverteilung wurden die Gaußverteilung f_g aus (4.16) und die dreieckförmige Verteilung

$$f_d(a) = C_d \cdot \begin{cases} (a_{\text{mid}} - a_{\text{min}})(a - a_{\text{min}}), & \text{falls } a \leq a_{\text{mid}} \\ (a_{\text{max}} - a_{\text{mid}})(a_{\text{max}} - a), & \text{falls } a > a_{\text{mid}} \end{cases} \quad (4.17)$$

mit $a_{\text{mid}} = a_{\text{min}} + (a_{\text{max}} - a_{\text{min}})/2$ gewählt. Für beide Beispiele enthielt das Intervall J Radien im Bereich von $a_{\text{min}} = 1$ bis $a_{\text{max}} = 300$; der Frequenzbereich Ω umfaßt alle Eigenfrequenzen der anwesenden Gasblasen. Die Konstanten in den Verteilungen wurden so bestimmt, daß der Gasvolumenanteil β jeweils $10^{-5} \%$ beträgt. Für jedes Beispiel wurde zunächst die rechte Seite v aus der nichtlinearen Gleichung (4.8) bestimmt und anschließend

$$v^\delta = v + \Delta v$$

mit einer Störung Δv gesetzt, für die der relative Fehler $|\Delta v/v|$ maximal 2 % für alle $\omega \in \Omega$ beträgt. Die zur numerischen Lösung benötigte Fehlerschranke δ wurde dann gemäß

$$\|v^\delta - v\|_2 \leq 0.02 \cdot \|v\|_2 = \delta$$

bestimmt. Zur Rekonstruktion der Verteilungen wurde schließlich die gestörte lineare Gleichung $Lf = 2v^\delta$ mit dem Algorithmus 3.15 für einen Diskretisierungsparameter $n = 50$ und linearen B -Splines als Basisfunktionen gelöst. Zur Diskretisierung müssen die Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, wie in (3.19) definiert, berechnet werden; die Skalarprodukte im $L^2(\Omega)$ für die Einträge von \mathbf{M} und \mathbf{b} wurden mit der Romberg-Integration ausgewertet. Die numerischen Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt. Es hat sich gezeigt, daß – verursacht durch die spezielle Gestalt des Kerns Im k – Fehler in den Daten v sich für kleine Radien deutlich stärker auswirken als im Bereich großer Radien.¹ Es wurden ebenso Versuche für stärker gestörte Daten mit einem relativen Fehler von bis zu 10 % gemacht; die durch Algorithmus 3.15 bestimmte Approximation der Verteilung f wurde dann im Bereich kleiner Radien stark „überregularisiert“, d. h. der Regularisierungsparameter α wurde im Vergleich zum optimalen Parameter zu groß gewählt.

Für die Anwendung der Tikhonov-Regularisierung auf das lineare Problem (4.11) in Verbindung mit anderen Diskretisierungsverfahren siehe z. B. Commander et al. [6] und Diekmann [9]. In der neueren Arbeit von Caruthers et al. [4]

¹Vergleiche dazu obige Diskussion der Eigenschaften des Auslöschungsquerschnitts σ_e und der Resonanznäherung (4.15).

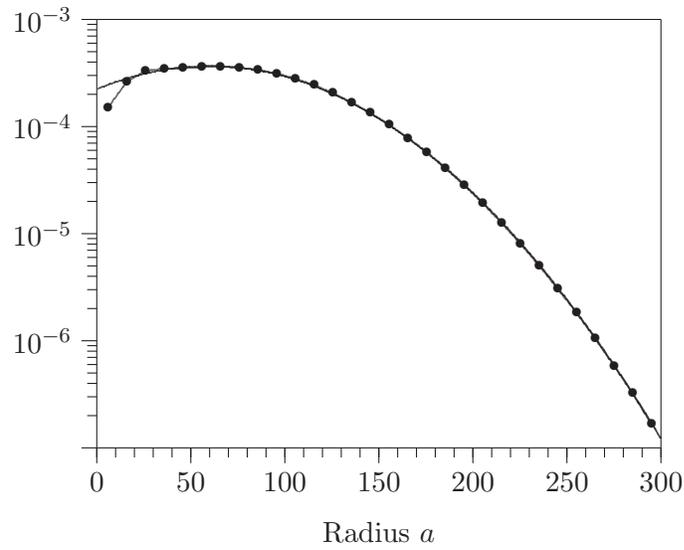


Abb. 4.6: Rekonstruktion der Gaußverteilung (4.16) durch Lösen der linearen Integralgleichung (4.11).

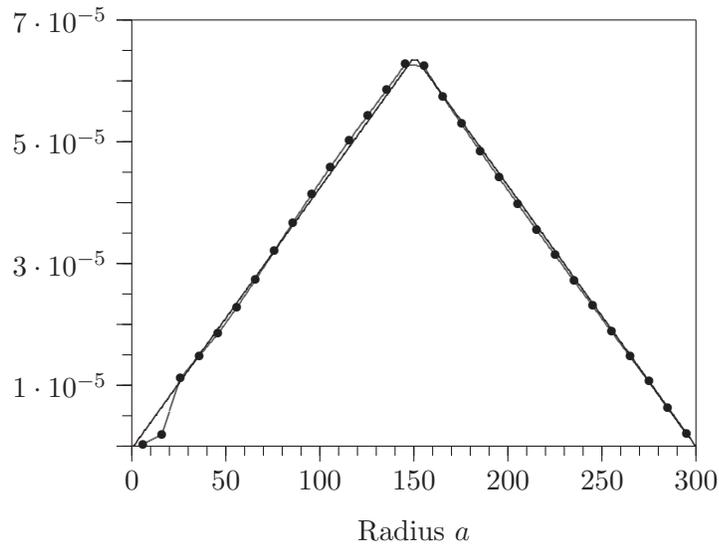


Abb. 4.7: Rekonstruktion der Dreieckverteilung (4.17) durch Lösen der linearen Integralgleichung (4.11).

wird ein iteratives Verfahren zur Lösung dieser Gleichung vorgestellt, welches eine Kombination der Resonanznäherung (4.15) und der Tikhonov-Regularisierung darstellt.

4.3 Lösung der nichtlinearen Gleichung

Für den Fall, daß keine der im letzten Abschnitt getroffenen Voraussetzungen für das Gemisch zutrifft (oder keine Informationen über den Gasanteil im Gemisch zur Verfügung stehen), muß die gesuchte Blasengrößenverteilung f aus der nichtlinearen Gleichung (4.8) bestimmt werden. Für $v \in C(\Omega)$ wird durch

$$g_v(f) = 2v\sqrt{|1 + Kf + v^2|} \quad (4.18)$$

ein nichtlinearer Operator $g_v: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ definiert. Ist f die Blasengrößenverteilung in einem Gemisch und sind u und v die durch V und A mittels (4.6) definierten stetigen Funktionen, so folgt aus dem System (4.7) die Ungleichung

$$1 + Kf + v^2 = u^2 \geq 0;$$

dann ist jede Lösung von (4.8) auch eine Lösung der Gleichung

$$Lf = g_v(f). \quad (4.19)$$

Im folgenden soll die für numerische Zwecke besser geeignete Gleichung (4.19) betrachtet werden. Dabei wird angenommen, daß (4.19) eine Minimum-Norm-Lösung f^* besitzt. Natürlich ist f^* dann auch eine Lösung der linearen schlecht gestellten Gleichung

$$Lf = g_v(f^*).$$

Im allgemeinen wird man annehmen müssen, daß dann auch die nichtlineare Gleichung (4.19) schlecht gestellt ist in dem Sinne, daß die Lösungen nicht stetig von Störungen in g_v abhängen. Dann ist es aber erforderlich, diese Gleichung zur numerischen Behandlung zu regularisieren.

Bei der Tikhonov-Regularisierung löst man nun anstelle der Gleichung (4.19) das nichtlineare Minimierungsproblem

$$\|Lf - g_v(f)\|_2^2 + \alpha\|f\|_2^2 \rightarrow \min, \quad f \in L^2(J). \quad (4.20)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß durch (4.20) ein Regularisierungsverfahren für die Gleichung (4.19) gegeben ist, also die Voraussetzungen der Sätze 3.16, 3.19 und 3.20 erfüllt sind. Dazu werden die Eigenschaften des nichtlinearen Operators g_v untersucht. Offensichtlich ist g_v stetig; dies ist eine unmittelbare Folgerung der Stetigkeit des Operators $h \mapsto \sqrt{|h|}$ für $h \in C(\Omega)$ und der Kompaktheit des linearen Integraloperators $K: L^2(J) \rightarrow C(\Omega)$. Nun ist K nach Satz A.13 sogar verstärkt stetig, und da g_v nur von Kf abhängt, überträgt sich diese Eigenschaft auf g_v :

Satz 4.2. *Der nichtlineare Operator $g_v: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist verstärkt stetig.*

Insbesondere ist g_v also schwach abgeschlossen, und nach Satz 3.16 hat das Minimierungsproblem (4.20) eine Lösung.

Störungen des Operators g_v werden hier durch Meßfehler der Dämpfung A , also durch Störungen in v verursacht. Sei also $\{v_n\}$ eine Folge von Funktionen aus $C(\Omega)$, die gleichmäßig gegen v konvergiert. Es gibt dann eine Folge positiver reeller Zahlen $\{\mu_n\}$ mit $\mu_n \rightarrow 0$ und

$$\|v_n - v\|_\infty \leq \mu_n. \quad (4.21)$$

Durch die Folge $\{v_n\}$ wird eine Operatorfolge

$$g_{v_n}(f) = 2v_n \sqrt{|1 + Kf + v_n^2|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

definiert. Offensichtlich konvergiert die Folge verstärkt stetiger Operatoren g_{v_n} punktweise gegen g_v . Überdies gilt:

Satz 4.3. *Es existiert eine Folge $\{\delta_n\}$ mit $\delta_n \rightarrow 0$ und eine auf jeder beschränkten Teilmenge von $L^2(J)$ beschränkte Abbildung $\phi: L^2(J) \rightarrow (0, \infty)$ mit*

$$\|g_{v_n}(f) - g_v(f)\|_2 \leq \delta_n \phi(f) \quad \forall f \in L^2(J).$$

Beweis. Mit (4.21) und positiven Konstanten C_1 und C_2 gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|g_{v_n}(f) - g_v(f)\|_2 &= 2 \left\| v_n \sqrt{|1 + Kf + v_n^2|} - v \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\leq 2 \left\| v_n \sqrt{|1 + Kf + v_n^2|} - v_n \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\quad + 2 \left\| (v_n - v) \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\leq 2 \left\| v_n \sqrt{|v_n^2 - v^2|} \right\|_2 + 2\mu_n \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\leq 2 \|v_n\|_\infty \sqrt{\|v_n^2 - v^2\|_1} + 2\mu_n \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\leq 2 \|v_n\|_\infty \sqrt{\mu_n} \sqrt{\|v_n + v\|_1} + 2\mu_n \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \\ &\leq 2\sqrt{\mu_n} \left[\|v_n\|_\infty \sqrt{\|v_n + v\|_1} + \frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n}} \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \right] \\ &\leq 2\sqrt{\mu_n} \left[C_1 + C_2 \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2 \right] \end{aligned}$$

für alle $f \in L^2(J)$. Mit $\delta_n = 2\sqrt{\mu_n}$ und

$$\phi(f) = C_1 + C_2 \left\| \sqrt{|1 + Kf + v^2|} \right\|_2$$

ist dann die gefragte Abschätzung mit $\delta_n \rightarrow 0$ erfüllt. Aus der Stetigkeit des linearen Operators $K: L^2(J) \rightarrow C(\Omega)$ folgt schließlich die Behauptung für ϕ . \square

Die Folge $\{g_{v_n}\}$ erfüllt also zunächst die Approximationseigenschaft (3.30). Wegen der verstärkten Stetigkeit von g_v und der Beschränktheitseigenschaft von ϕ aus Satz 4.3 ist $\{g_{v_n}\}$ nach Bemerkung 3.18 zudem schwach d-abgeschlossen, d. h. es gilt (3.31). Die Voraussetzungen der Sätze 3.19 und 3.20 sind dann erfüllt, und es folgen Stabilität und Konvergenz der Tikhonov-Regularisierung (4.20).

Zur Bestimmung einer stabilen Approximation der Blasengrößenverteilung f aus Messungen der Dämpfung $A = \omega v$ kann also die nichtlineare Gleichung (4.8) durch die Tikhonovsche Methode regularisiert werden. Stehen dann nur gestörte Daten v^δ mit $\|v^\delta - v\|_\infty \leq \delta$ zur Verfügung und ist der Parameter $\alpha > 0$ fest gewählt, so benötigt man ein Verfahren, mit dem das regularisierte gestörte Minimierungsproblem

$$\|Lf - g_{v^\delta}(f)\|_2^2 + \alpha\|f\|_2^2 \rightarrow \min, \quad f \in L^2(J), \quad (4.22)$$

gelöst werden kann. Zum Beispiel kann man versuchen, das Problem (4.22) durch *Linearisierung zwischen den Normstrichen* zu lösen: Ausgehend von einer Näherung $f_k \in L^2(J)$ wird dann f_{k+1} als Lösung der Aufgabe

$$\|Lf - g_{v^\delta}(f_k) - g'_{v^\delta}(f_k)(f - f_k)\|_2^2 + \alpha\|f\|_2^2 \rightarrow \min, \quad f \in L^2(J), \quad (4.23)$$

definiert; insbesondere muß dazu g_{v^δ} im aktuellen Iterationspunkt f_k Fréchet-differenzierbar sein. Ist dies der Fall, so sei

$$F_k = L - g'_{v^\delta}(f_k) \quad \text{und} \quad y_k = g_{v^\delta}(f_k) - g'_{v^\delta}(f_k)f_k.$$

Nach Satz A.7 ist die Fréchet-Ableitung des verstärkt stetigen (und daher auch vollstetigen) Operators g_{v^δ} in f_k kompakt. Dann ist auch der lineare Operator $F_k: L^2(J) \rightarrow L^2(\Omega)$ kompakt, und das Minimierungsproblem (4.23) hat nach Satz 3.8 die eindeutige Lösung

$$f_{k+1} = (F_k^*F_k + \alpha I)^{-1}F_k^*y_k. \quad (4.24)$$

Man bezeichnet das so definierte Verfahren als *Gauß-Newton-Methode* [42]. Konvergiert die durch (4.24) definierte Folge $\{f_k\}$ für $k \rightarrow \infty$, so ist der Grenzwert f_α eine Lösung der Euler-Gleichung

$$[L - g'_{v^\delta}(f)]^*(Lf - g_{v^\delta}(f)) + \alpha f = 0, \quad (4.25)$$

und f_α ist ein kritischer Punkt für die unrestringierte Optimierungsaufgabe (4.22) (siehe Zeidler [51]).

Mit Hilfe des Satzes 4.1 kann man jedoch die Fréchet-Differenzierbarkeit für den Operator g_{v^δ} nur in einer hinreichend kleinen Umgebung von $f_0 = 0$ zeigen, und die Gauß-Newton-Methode ist dann nicht notwendig durchführbar. Eine erste übliche Vereinfachung des Gauß-Newton-Verfahrens könnte darin bestehen, die Fréchet-Ableitung von g_{v^δ} im Punkt f_k durch $g'_{v^\delta}(0)$ zu ersetzen, falls diese

nicht existiert. Betrachtet man die spezielle Gestalt des durch (4.18) definierten Operators g_{v^δ} , so könnte man noch einfacher die Fréchet-Ableitung in jedem Iterationspunkt durch die Nullabbildung ersetzen; dies entspricht der Annahme, daß g_{v^δ} in einer Umgebung der exakten Lösung f der Aufgabe (4.8) sich nahezu konstant verhält. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn der Term Kf im Radikanten von (4.18) zwar nicht notwendig als vernachlässigbar, aber zumindest als nicht dominant gegen 1 angenommen werden kann. Die Iterationsvorschrift (4.24) vereinfacht sich dann zu

$$f_{k+1} = (L^*L + \alpha I)^{-1} L^* g_{v^\delta}(f_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.26)$$

Die im letzten Abschnitt vorgestellte Linearisierungsmethode kann dann für den Startpunkt $f_0 = 0$ als Durchführung der ersten Iteration von (4.26) und anschließendem Abbruch interpretiert werden; dort wurden zudem die quadratischen Terme von v^δ in

$$g_{v^\delta}(0) = 2v^\delta \sqrt{1 + [v^\delta]^2}$$

vernachlässigt.

Für das durch (4.26) definierte Verfahren löst man also in jedem Schritt mit dem aktuellen Iterationspunkt f_k das Minimierungsproblem

$$\|Lf - g_{v^\delta}(f_k)\|_2^2 + \alpha \|f\|_2^2 \rightarrow \min, \quad f \in L^2(J).$$

Zur praktischen Durchführung der Iteration kann dann die in Abschnitt 3.4 beschriebene Diskretisierung verwendet werden, d. h. das Tikhonov-Funktional wird in jedem Schritt auf einem zuvor fest gewählten endlichdimensionalen Teilraum von $L^2(J)$ minimiert. Seien also $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängige Funktionen aus $L^2(J)$, etwa lineare B -Splines. Dann sei analog zu den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.4

$$f_k = \xi_1^k \varphi_1 + \dots + \xi_n^k \varphi_n$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)^T, & \mathbf{M} &= [(L\varphi_i, L\varphi_j)], \\ \mathbf{b}_k &= [(g_{v^\delta}(f_k), L\varphi_j)], & \mathbf{G} &= [(\varphi_i, \varphi_j)], \end{aligned}$$

und man hat zur Berechnung der durch (4.26) definierten Elemente $f_k \in L^2(J)$ die Folge der linearen Gleichungssysteme

$$(\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}) \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{b}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.27)$$

mit symmetrischer und positiv definiten Matrix $\mathbf{M} + \alpha \mathbf{G}$ zu lösen. Es sei bemerkt, daß zur Durchführung der Tikhonov-Regularisierung auf das nichtlineare

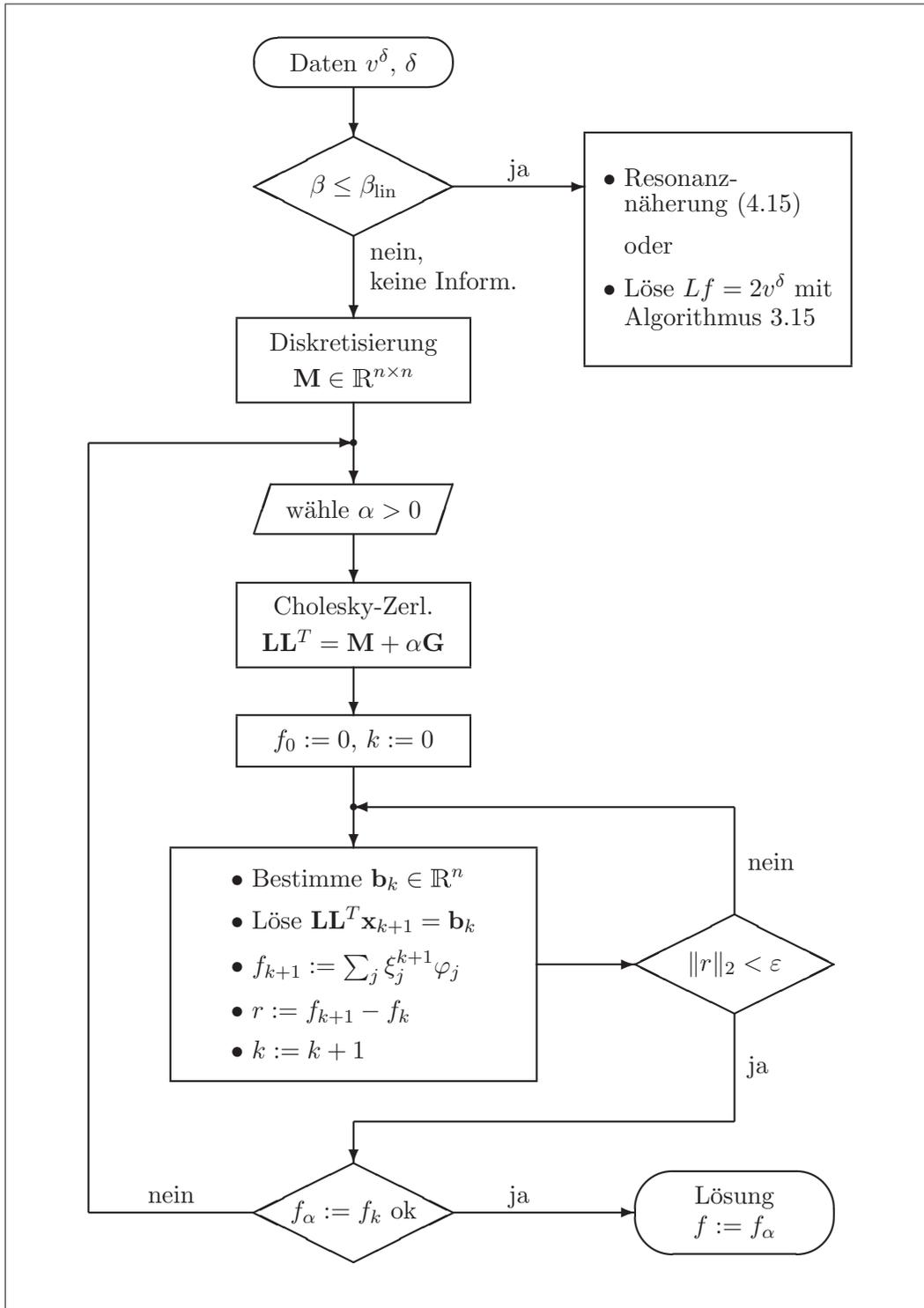


Abb. 4.8: Schematische Darstellung des durch (4.26) definierten Verfahrens zur Lösung der nichtlinearen schlecht gestellten Gleichung (4.19).

Problem (4.19) für verschiedene Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ nur einmal die Diskretisierungsmatrix \mathbf{M} berechnet werden muß. Ferner muß zur Durchführung der Iteration (4.27) nur einmal die Cholesky-Zerlegung der Matrix $\mathbf{M} + \alpha\mathbf{G}$ bestimmt werden. Die Abb. 4.8 zeigt eine schematische Darstellung des oben beschriebenen Verfahrens zur Bestimmung einer Approximation der gesuchten Lösung des nichtlinearen schlecht gestellten Problems (4.19). Der dort auftretende Parameter β_{lin} bezeichnet dabei den kritischen Wert des Gasvolumenanteils, bis zu dem die Gültigkeit des linearen Modells angenommen wird; für typische Blasengrößenverteilungen liegt dieser im Bereich von $10^{-4}\%$.

Das Verfahren wurde für verschiedene Beispielverteilungen getestet; die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen die numerischen Ergebnisse für die Gaußverteilung (4.16) bei einem Gasanteil von 0.01% bzw. für die Dreieckverteilung (4.17) bei einem Gasanteil von 0.007% . In den Abbildungen ist jeweils für einen festen Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ der Verlauf der Iteration (4.26) dargestellt. Wie im letzten Abschnitt für die Beispielrechnungen zur linearisierten Gleichung, wurde der Fehler δ in Daten v für einen relativen Fehler von 2% bestimmt. Aus dem Beweis von Satz 4.3 ergibt sich dann mit $\delta_g = 2\sqrt{\delta}$ für den gestörten Operator $g_{v\delta}$ die Abschätzung

$$\|g_{v\delta}(f) - g_v(f)\|_2 \leq \delta_g \phi(f) \quad \forall f \in L^2(J).$$

Es ist nicht klar, wie der Regularisierungsparameter α in Abhängigkeit von δ_g zu wählen ist. Zwar liefert der Satz 3.20 die Regularität der Parameterstrategie $\alpha = C\delta_g$ mit einer Konstanten $C > 0$, aber für praktische Berechnungen ist noch nicht geklärt, wie dann die Konstante C zu bestimmen ist. In den Beispielrechnungen wurde der Regularisierungsparameter durch „trial and error“ bestimmt. Der Diskretisierungsparameter war gegeben durch $n = 50$ und als Basisfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ wurden auch hier lineare B -Splines verwendet.

Das getestete Verfahren lieferte gute Ergebnisse bis zu einem Gasvolumenanteil β von 0.005 – 0.01% , je nach Art der Verteilung. Es kann also als Erweiterung bisheriger Verfahren zur Bestimmung der Blasengrößenverteilung in dichteren Flüssigkeits-Blasen-Gemischen betrachtet werden. Für einen höheren Gasanteil als 0.01% versagt die Methode. Natürlich kann auch hier die Tikhonov-Regularisierung für die nichtlineare Gleichung (4.19) verwendet werden, aber zur Lösung der regularisierten Aufgaben bedarf es dann komplexerer Optimierungsverfahren.

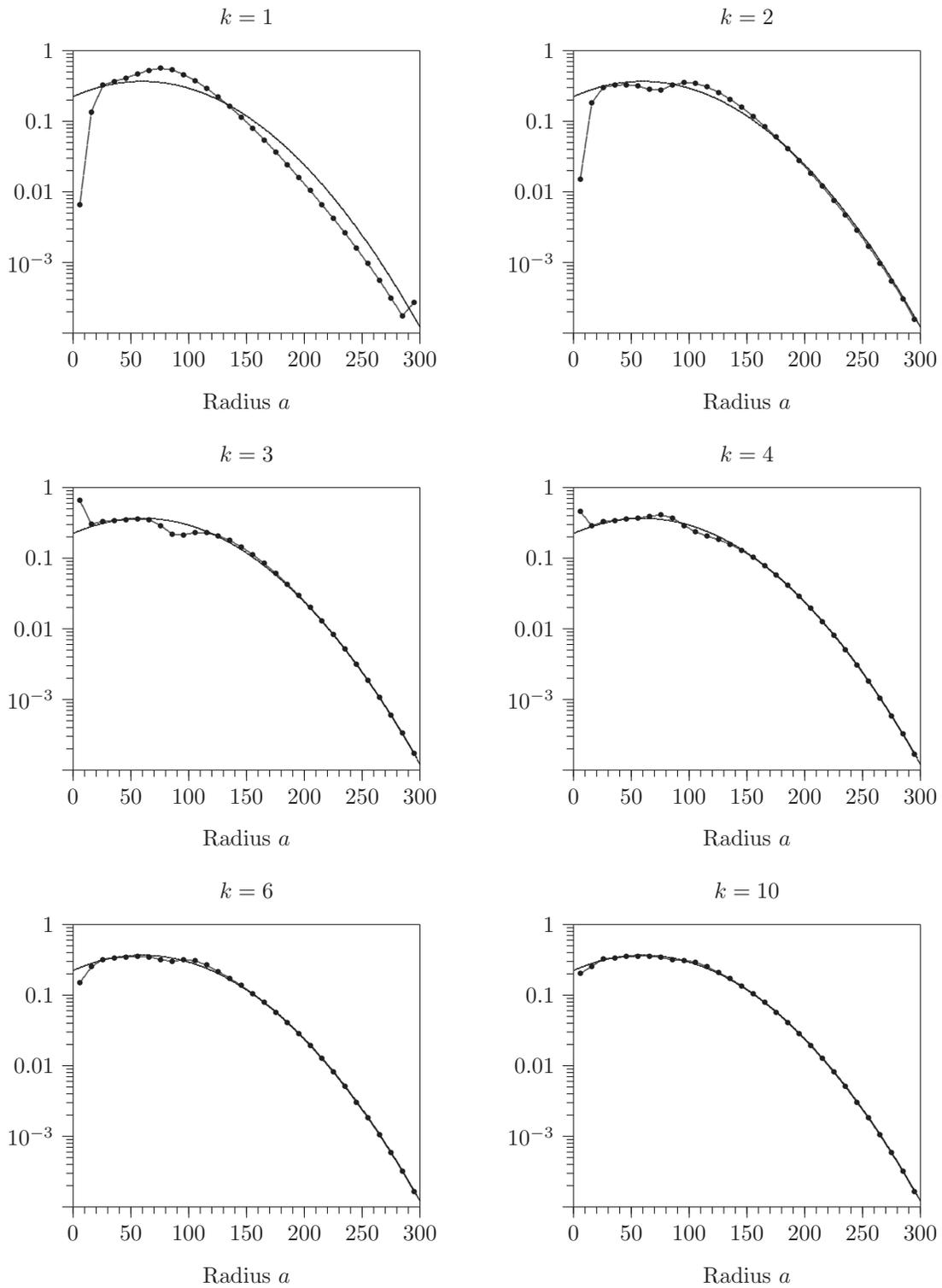


Abb. 4.9: Rekonstruktion der Gaußverteilung (4.16) durch Lösen der nichtlinearen Gleichung (4.19).

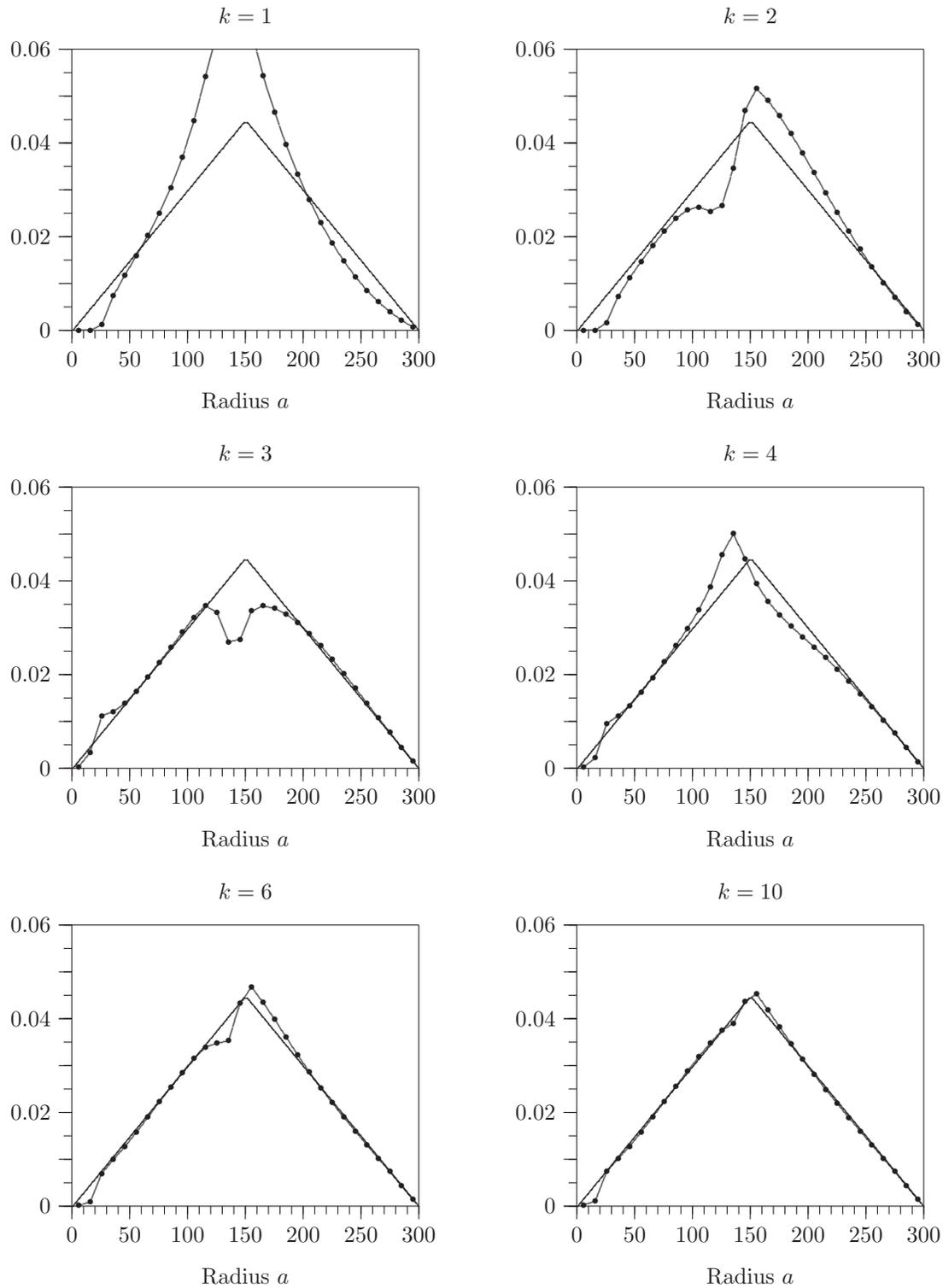


Abb. 4.10: Rekonstruktion der Dreieckverteilung (4.17) durch Lösen der nichtlinearen Gleichung (4.19).

Anhang A

Operatoren in Hilberträumen

Hier werden einige grundlegende Begriffe und Sätze der Funktionalanalysis sowie der Theorie der verallgemeinerten Inversen linearer Operatoren bereitgestellt. Beweise werden nur zum Teil geführt; bei fehlendem Beweis wird auf entsprechende Literatur verwiesen.

Im folgenden seien X und Y Hilberträume und $U \subset X$. Für einen Operator $A: U \rightarrow Y$ sei $\mathcal{R}(A) = \{Af : f \in U\}$ das Bild und $\mathcal{N}(A) = \{f \in U : Af = 0\}$ die Nullmenge. Der Raum der beschränkten linearen Operatoren von X nach Y wird mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnet. Schließlich sei $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

A.1 Kompakte Operatoren

Definition A.1. *Ein Operator $A: X \rightarrow Y$ heißt kompakt, wenn das Bild $A(U)$ jeder beschränkten Teilmenge U von X relativ kompakt in Y ist. Der Operator A heißt vollstetig, falls er kompakt und stetig ist.*

Für lineare Operatoren sind Kompaktheit und Vollstetigkeit identisch, weil relativ kompakte Mengen insbesondere beschränkt sind. Ferner ist eine Teilmenge V eines normierten Raumes Y genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge aus V eine in Y konvergente Teilfolge enthält. Damit folgt:

Satz A.2. *Ein Operator $A: X \rightarrow Y$ ist genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $\{f_n\}$ aus X die Bildfolge $\{Af_n\}$ eine in Y konvergente Teilfolge enthält.*

Ein typisches Beispiel für kompakte lineare Operatoren sind die sogenannten Integraloperatoren: Seien $[a, b]$ und $[s, t]$ kompakte Intervalle und k eine auf der Menge $Q := [s, t] \times [a, b]$ stetige Funktion. Dann nennt man den durch

$$(Kf)(x) := \int_a^b k(x, y)f(y) dy, \quad s \leq x \leq t, \quad (\text{A.1})$$

definierten linearen Operator K einen *Integraloperator* mit stetigem *Kern* k . Für jedes $f \in L^2[a, b]$ existiert Kf auf $[s, t]$ und ist dort stetig. Denn für $x_1, x_2 \in [s, t]$ gilt

$$|(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| \leq \left[\int_a^b |k(x_1, y) - k(x_2, y)|^2 dy \right]^{1/2} \|f\|,$$

und die Stetigkeit von Kf folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von k auf der kompakten Menge Q . Es gilt nun:

Satz A.3. *Der durch (A.1) definierte lineare Operator $K: L^2[a, b] \rightarrow L^2[s, t]$ ist kompakt.*

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine beschränkte Folge aus $L^2[a, b]$. Ohne Einschränkung sei $\|f_n\| \leq 1$. Nach Satz A.2 ist zu zeigen, daß die durch $g_n = Kf_n$ definierte Folge eine konvergente Teilfolge enthält.

Zunächst gibt es eine Konstante $M > 0$ mit $|k(x, y)| \leq M$ für alle $(x, y) \in Q$. Dann gilt

$$|g_n(x)| \leq M\sqrt{b-a}\|f_n\| \leq M\sqrt{b-a},$$

d. h. die Folge stetiger Funktionen $\{g_n\}$ ist gleichmäßig beschränkt. Ferner gilt für $x_1, x_2 \in [0, 1]$

$$|g_n(x_1) - g_n(x_2)| \leq \left[\int_a^b |k(x_1, y) - k(x_2, y)|^2 dy \right]^{1/2},$$

und aus der gleichmäßigen Stetigkeit von k erhält man, daß $\{g_n\}$ auch gleichstetig ist. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli [43] gibt es dann eine Teilfolge $\{g_{n_j}\}$, die gleichmäßig – und damit auch im Sinne der L^2 -Norm – gegen eine stetige Funktion g konvergiert. \square

Bemerkung A.4. Da das Bild Kf für jedes $f \in L^2[a, b]$ stetig ist, kann man K auch auffassen als Operator des Hilbertraumes $(L^2[a, b], \|\cdot\|_2)$ in die Banachalgebra $(C[s, t], \|\cdot\|_\infty)$. Dem Beweis des Satzes A.3 entnimmt man (die stärkere Aussage), daß auch $K: L^2[a, b] \rightarrow C[s, t]$ kompakt ist.

In Hilberträumen gibt es zu jedem Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ genau einen Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ mit $(Af, g) = (f, A^*g)$ für alle $f \in X$ und $g \in Y$. Man nennt A^* den zu A *adjungierten* Operator, und es gilt $\|A\| = \|A^*\|$. Der zum Integraloperator K adjungierte Operator $K^*: L^2[s, t] \rightarrow L^2[a, b]$ ist gegeben durch

$$(K^*g)(y) = \int_s^t \overline{k(x, y)}g(x) dx, \quad a \leq y \leq b. \quad (\text{A.2})$$

Insbesondere ist K^* selbst ein Integraloperator und nach Satz A.3 ebenfalls kompakt. Allgemein gilt:

Satz A.5. *Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt. Dann ist auch $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$ kompakt.*

Beweis. Siehe Kress [23]. □

Einen beschränkten linearen Operator $A: X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $A = A^*$ nennt man *selbstadjungiert*. Mit (A.2) sieht man nun: Der Integraloperator K ist genau dann selbstadjungiert, wenn der Kern k hermitesch ist.

Man zeigt leicht, daß Linearkombinationen kompakter Operatoren wieder kompakt sind. Im folgenden werden weitere Eigenschaften kompakter und vollstetiger Operatoren festgehalten:

Satz A.6. *Seien $A: X \rightarrow Y$ und $B: Y \rightarrow Z$ beschränkte lineare Operatoren. Dann ist das Produkt $BA: X \rightarrow Z$ kompakt, falls A oder B kompakt ist.*

Beweis. Sei $\{f_n\}$ eine beschränkte Folge aus X . Ist A kompakt, so existiert eine Teilfolge $\{Af_{n_j}\}$ mit $Af_{n_j} \rightarrow g$. Da nun B stetig ist, folgt $BAf_{n_j} \rightarrow Bg$, d. h. BA ist kompakt. Ist dagegen B kompakt, so folgt zunächst aus der Beschränktheit von A , daß auch die Bildfolge $\{Af_n\}$ beschränkt ist. Also enthält auch in diesem Falle $\{BAf_n\}$ eine konvergente Teilfolge. □

Satz A.7. *Sei $A: X \rightarrow Y$ vollstetig und in $f \in X$ Fréchet-differenzierbar. Dann ist $A'(f) \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt.*

Beweis. Siehe Colton und Kress [5] □

Lemma A.8. *Der Einheitsoperator $I: X \rightarrow X$ ist genau dann kompakt, wenn X endlichdimensional ist.*

Beweis. Angenommen I ist kompakt und es gilt $\dim X = \infty$. Es wird induktiv eine Folge $\{f_n\}$ in X und eine Folge abgeschlossener Unterräume $\{X_n\}$ definiert: Für ein $f_1 \in X$ mit $\|f_1\| = 1$ setze man $X_1 = \text{span}\{f_1\}$. Sei nun $X_n = \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ gegeben. Nach dem Riesz'schen Lemma [19] existiert dann ein f_{n+1} mit $\|f_{n+1}\| = 1$ und $\|f_{n+1} - f_m\| \geq 1/2$ für alle $m \leq n$, und man setzt $X_{n+1} = \text{span}\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}\}$. Nach Konstruktion enthält die beschränkte Folge $\{f_n\}$ keine konvergente Teilfolge. Wegen Satz A.2 kann dann I nicht kompakt sein, und man erhält einen Widerspruch zur Annahme.

Die Umkehrung folgt sofort aus der Tatsache, daß jede beschränkte Teilmenge U eines endlichdimensionalen normierten Raumes X relativ kompakt ist. □

Satz A.9. *Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt. Dann ist der Bildraum $\mathcal{R}(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn $\mathcal{R}(A)$ endlichdimensional ist.*

Beweis. Durch $\tilde{A} = A|_{\mathcal{N}(A)^\perp}: \mathcal{N}(A)^\perp \rightarrow \mathcal{R}(A)$ wird ein kompakter und bijektiver Operator definiert. Sei nun $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen, so ist nach dem Satz von der stetigen Inversen \tilde{A}^{-1} beschränkt [19]. Also ist $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = I|_{\mathcal{R}(A)}$ nach Satz A.6 kompakt. Nach dem eben bewiesenen Lemma gilt dann $\dim \mathcal{R}(A) < \infty$.

Da jeder endlichdimensionale Unterraum von X auch abgeschlossen ist, gilt auch die Umkehrung. □

Für einen Integraloperator $K: L^2[a, b] \rightarrow L^2[s, t]$ hängt die Dimension des Bildraums $\mathcal{R}(K)$ von den Eigenschaften des Kerns ab. Man bezeichnet einen Kern k als *ausgeartet*, wenn es endlich viele Funktionen v_1, \dots, v_n aus $L^2[s, t]$ und w_1, \dots, w_n aus $L^2[a, b]$ gibt mit

$$k(x, y) = \sum_{j=1}^n v_j(x)w_j(y).$$

Es gilt:

Satz A.10. *Sei $K: L^2[a, b] \rightarrow L^2[s, t]$ der durch (A.1) definierte lineare Integraloperator. Dann ist der Bildraum $\mathcal{R}(K)$ genau dann endlichdimensional, wenn der Kern k ausgeartet ist.*

Beweis. Der Kern k sei ausgeartet. Dann gilt für $f \in L^2[a, b]$

$$(Kf)(x) = \sum_{j=1}^n \left[\int_a^b w_j(y)f(y) dy \right] v_j(x),$$

und es ist $Kf \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Also ist $\mathcal{R}(K)$ höchstens n -dimensional. Für einen Beweis der Umkehrung siehe Engl [10]. \square

Definition A.11. *Eine Folge $\{f_n\}$ aus X heißt schwach konvergent gegen ein Element $f \in X$, falls gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in X.$$

Für eine schwach konvergente Folge schreibt man $f_n \rightharpoonup f$. Eine Folge kann höchstens gegen ein Element schwach konvergieren. Wegen

$$|(f_n, \varphi) - (f, \varphi)| = |(f_n - f, \varphi)| \leq \|f_n - f\| \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in X$$

ist jede konvergente Folge auch schwach konvergent, wohingegen die Umkehrung falsch ist.

Satz A.12. *Sei $\{f_n\}$ eine schwach konvergente Folge mit $f_n \rightharpoonup f$. Dann ist $\{f_n\}$ beschränkt, und es gilt $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$. Umgekehrt enthält jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis. Siehe Yosida [49]. \square

Man bezeichnet nun einen Operator $A: X \rightarrow Y$ als *schwach stetig*, falls für jede schwach konvergente Folge $\{f_n\}$ aus X mit $f_n \rightharpoonup f$ für die Bildfolge gilt $Af_n \rightharpoonup Af$. Jeder beschränkte lineare Operator ist schwach stetig, denn es gilt

$$(Af_n, \varphi) = (f_n, A^*\varphi) \rightarrow (f, A^*\varphi) = (Af, \varphi) \quad \forall \varphi \in X. \quad (\text{A.3})$$

Der Operator $A: X \rightarrow Y$ heißt *verstärkt stetig*, wenn aus $f_n \rightharpoonup f$ sogar $Af_n \rightarrow Af$ folgt. Jeder verstärkt stetige Operator ist vollstetig. Für lineare Operatoren gilt auch die Umkehrung:

Satz A.13. *Jeder kompakte Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist verstärkt stetig.*

Beweis. Sei also $\{f_n\}$ eine schwach konvergente Folge aus X mit $f_n \rightharpoonup f$. Da A insbesondere schwach stetig ist, gilt $Af_n \rightharpoonup Af$. Angenommen $Af_n \not\rightarrow Af$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{Af_{n_j}\}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|Af_{n_j} - Af\| > \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.4})$$

Nach Satz A.12 ist die Folge $\{f_n\}$ beschränkt. Dann ist auch die Teilfolge $\{f_{n_j}\}$ beschränkt, und wegen der Kompaktheit von A enthält die Bildfolge $\{Af_{n_j}\}$ eine konvergente Teilfolge, die mit $\{Af_{n_k}\}$ bezeichnet werden soll. Gilt nun $Af_{n_k} \rightarrow g$, so folgt aus $Af_n \rightharpoonup Af$ schließlich $Af = g$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Gleichung (A.4). \square

A.2 Spektraltheorie

Definition A.14. *Sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A , falls es ein $f \neq 0$ aus X gibt mit*

$$Af = \lambda f.$$

In diesem Fall nennt man f ein Eigenelement und $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ . Die Dimension des Eigenraumes heißt Vielfachheit des Eigenwertes.

Ist λ kein Eigenwert von A , so kann der Umkehroperator $(A - \lambda I)^{-1}$ auf $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ definiert werden. Dieser Operator ist linear, aber nicht notwendig beschränkt. Man definiert:

Definition A.15. *Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt regulärer Wert von A , falls $(A - \lambda I)^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Die Menge aller regulären Werte von A bezeichnet man als Resolventenmenge $\rho(A)$. Das Komplement von $\rho(A)$ heißt das Spektrum $\sigma(A)$ und*

$$|\sigma(A)| := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

der Spektralradius von A .

Jeder Eigenwert von $A \in \mathcal{L}(X)$ ist also im Spektrum $\sigma(A)$ enthalten, und man zeigt $|\sigma(A)| \leq \|A\|$ (Taylor [43]). Es gilt:

Satz A.16 (Spektralsatz). *Sei $A \in \mathcal{L}(X)$ ($A \neq 0$) ein selbstadjungierter kompakter Operator. Dann sind alle Eigenwerte reell. Das Spektrum $\sigma(A)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nur im Nullpunkt häufen*

können. Alle von Null verschiedenen Eigenwerte haben eine endliche Vielfachheit, und Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Schließlich ist $\|A\|$ der betragsgrößte Eigenwert, und es gilt $|\sigma(A)| = \|A\|$.

Sei $\{\lambda_n\}$ die Folge der von Null verschiedenen Eigenwerte, wobei gelte

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Jeder Eigenwert sei dabei entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt. Ferner sei $\{f_n\}$ eine Folge zugehöriger orthonormaler Eigenelemente. Bezeichnet Q die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{N}(A)$, so gilt für jedes $f \in X$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) f_n + Qf \quad (\text{A.5})$$

und

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, f_n) f_n. \quad (\text{A.6})$$

Man nennt (A.6) Spektralzerlegung von A . Hat A nur endlich viele Eigenwerte, so werden die Reihen (A.5) und (A.6) zu endlichen Summen.

Beweis. Siehe Kress [23]. □

Es sollen nun Verallgemeinerungen der Darstellungen (A.5) und (A.6) für beliebige kompakte lineare Operatoren gefunden werden. Zunächst wird folgende Bezeichnung eingeführt:

Definition A.17. Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, dann heißen die Quadratwurzeln der nicht-negativen Eigenwerte von A^*A singuläre Werte von A . Unter der Vielfachheit eines singulären Wertes versteht man die Vielfachheit des entsprechenden Eigenwertes von A^*A .

Satz A.18. Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($A \neq 0$) ein kompakter Operator. Sei ferner $\{\sigma_n\}$ die Folge der von Null verschiedenen singulären Werte, wobei gelte

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots$$

Jeder singuläre Wert sei dabei entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt. Dann existieren orthonormale Folgen $\{f_n\}$ aus X und $\{g_n\}$ aus Y mit

$$Af_n = \sigma_n g_n, \quad A^*g_n = \sigma_n f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.7})$$

Bezeichnet Q die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{N}(A)$, so gilt für jedes $f \in X$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) f_n + Qf \quad (\text{A.8})$$

und

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(f, f_n)g_n. \quad (\text{A.9})$$

Man nennt (A.9) Singulärwertzerlegung von A . Jedes System $\{\sigma_n, f_n, g_n\}$, welches die Bedingung (A.7) erfüllt, heißt singuläres System von A . Hat A nur endlich viele singuläre Werte, so werden die Reihen (A.8) und (A.9) zu endlichen Summen.

Beweis. Nach Satz A.6 ist der selbstadjungierte Operator A^*A kompakt. Sei nun $\{f_n\}$ eine orthonormale Folge von Elementen von A^*A , d. h.

$$A^*Af_n = \sigma_n^2 f_n.$$

Man definiert durch

$$g_n := \frac{1}{\sigma_n} Af_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine orthonormale Folge aus Y . Dann erfüllt das System $\{\sigma_n, f_n, g_n\}$ die Bedingung (A.7). Für A^*A gilt nach dem Spektralsatz

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)f_n + Qf,$$

wobei hier Q die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{N}(A^*A)$ ist. Ist $f \in \mathcal{N}(A^*A)$, so gilt wegen $\|Af\|^2 = (f, A^*Af) = 0$ auch $f \in \mathcal{N}(A)$. Die Umkehrung ist trivial, d. h. es ist $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*A)$, und damit ist (A.8) gezeigt. (A.9) folgt durch Anwendung von A auf (A.8). \square

A.3 Verallgemeinerte Inverse

Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Für festes $g \in Y$ sei die lineare Gleichung

$$Af = g \quad (\text{A.10})$$

gegeben. Gilt $g \notin \mathcal{R}(A)$, so ist (A.10) nicht im klassischen Sinn lösbar. Es wird nun ein allgemeinerer Lösungsbegriff für die Gleichung (A.10) eingeführt:

Definition A.19. Ein Element $f \in X$ heißt least-squares Lösung der Gleichung (A.10), wenn gilt

$$\|Af - g\| = \inf_{\varphi \in X} \|A\varphi - g\|.$$

Man nennt f best-approximierende Lösung der Gleichung (A.10), falls f least-squares Lösung kleinster Norm ist.

Satz A.20. Sei Q die orthogonale Projektion von Y auf $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $f \in X$ ist least-squares Lösung von (A.10),
- b) $Af = Qg$,
- c) $A^*Af = A^*g$.

Beweis. b) \Rightarrow a): Wegen $Qg - g \in \mathcal{R}(A)^\perp$ gilt für jedes $\varphi \in X$

$$\begin{aligned} \|A\varphi - g\|^2 &= \|A\varphi - Qg\|^2 + \|Qg - g\|^2 \\ &= \|A\varphi - Qg\|^2 + \|Af - g\|^2 \\ &\geq \|Af - g\|^2. \end{aligned}$$

a) \Rightarrow c): Wegen $Qg \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ existiert eine Folge $\{\varphi_n\}$ aus X mit $A\varphi_n \rightarrow Qg$. Dann ist

$$\|Qg - g\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\varphi_n - g\|^2 \geq \|Af - g\|^2,$$

und es folgt wegen $Qg - g \in \mathcal{R}(A)^\perp$

$$\begin{aligned} \|Af - g\|^2 &= \|Af - Qg\|^2 + \|Qg - g\|^2 \\ &\geq \|Af - Qg\|^2 + \|Af - g\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt

$$Af - g = Qg - g \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*).$$

c) \Rightarrow b): Es ist also $Af - g \in \mathcal{R}(A)^\perp$, und es gilt

$$0 = Q(Af - g) = Af - Qg.$$

□

Nach Satz A.20 b) gibt es nun genau dann keine least-squares Lösung der Gleichung (A.10), falls $Qg \notin \mathcal{R}(A)$. Insbesondere existiert also für jedes g aus dem dichten Teilraum

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$$

eine least-squares Lösung. Ferner ist wegen Satz A.20 c) die Menge aller least-squares Lösungen abgeschlossen und konvex, enthält also ein eindeutig bestimmtes Element kleinster Norm. Man definiert nun:

Definition A.21. *Es sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Der Operator A^\dagger ordne jedem Element $g \in \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ die eindeutig bestimmte best-approximierende Lösung der Gleichung $Af = g$ zu. Dann heißt $A^\dagger: \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow X$ die verallgemeinerte Inverse von A .*

Man kann zeigen, daß die verallgemeinerte Inverse eines linearen und beschränkten Operators A selbst linear ist (siehe Groetsch [15]). Ferner gelten für Bild- und Nullraum die Beziehungen

$$\mathcal{N}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A)^\perp, \quad \mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{N}(A)^\perp. \quad (\text{A.11})$$

Bezeichne nun $P: X \rightarrow \mathcal{N}(A)$ die orthogonale Projektion. Für $f \in X$ ist dann $h = A^\dagger Af = A^\dagger A(I - P)f$ die normkleinste Lösung der Gleichung

$$Ah = QA(I - P)f = A(I - P)f.$$

Also gilt $h = (I - P)f$, und es folgt

$$A^\dagger A = I - P. \quad (\text{A.12})$$

Für die Beschränktheit von $A^\dagger: \mathcal{D}(A^\dagger) \rightarrow X$ gilt folgende Aussage:

Satz A.22. *Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist A^\dagger genau dann beschränkt, wenn $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Siehe Groetsch [15]. □

Für einen kompakten Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ läßt sich mit Hilfe der Singulärwertzerlegung eine Darstellung der verallgemeinerten Inversen angeben. Sei also $\{\sigma_n, f_n, g_n\}$ ein singuläres System von A und $g \in \mathcal{D}(A^\dagger)$. Mit (A.11) gilt zunächst $A^\dagger g \in \mathcal{N}(A)^\perp$. Aus (A.8) folgt dann weiter

$$A^\dagger g = \sum_{n=1}^{\infty} (A^\dagger g, f_n) f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (AA^\dagger g, g_n) f_n.$$

Nun ist aber nach Satz A.20 b) $AA^\dagger g = Qg$, und wegen $g_n \in \mathcal{R}(A)$ gilt dann schließlich:

Satz A.23. *Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompakt und $\{\sigma_n, f_n, g_n\}$ ein singuläres System von A . Dann hat die verallgemeinerte Inverse die Darstellung*

$$A^\dagger g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} (g, g_n) f_n.$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. Binder, H. W. Engl, C. W. Groetsch, A. Neubauer, and O. Scherzer. Weakly closed nonlinear operators and parameter identification in parabolic equations by Tikhonov regularization. *Appl. Anal.*, 55:215–234, 1994.
- [2] R. E. Caffisch, M. J. Miksis, G. C. Papanicolaou, and L. Ting. Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech.*, 153:259–273, 1985.
- [3] E. L. Carstensen and L. L. Foldy. Propagation of sound through a liquid containing bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 19:481–501, 1947.
- [4] J. W. Caruthers, P. A. Elmore, J. C. Novarini, and R. R. Goodman. An iterative approach for approximating bubble distributions from attenuation measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 106(1):185–189, 1999.
- [5] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Kapitel 4. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [6] K. W. Commander and R. J. McDonald. Finite-element solution of the inverse problem in bubble swarm acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89(2):592–597, 1991.
- [7] K. W. Commander and E. Moritz. Off-resonance contributions to acoustical bubble spectra. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(6):2665–2669, 1989.
- [8] K. W. Commander and A. Prosperetti. Linear pressure waves in bubbly liquids: comparison between theory and experiments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(2):732–746, 1989.
- [9] A. Diekmann. Numerische Behandlung Fredholmscher Integralgleichungen erster Art – Bestimmung von Blasengrößenverteilungen in Wasser-Blasen-Gemischen. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1997.
- [10] H. W. Engl. *Integralgleichungen*. Springer-Verlag, Wien, 1997.
- [11] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dodrecht, 1996.

- [12] H. W. Engl, K. Kunisch, and A. Neubauer. Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 5:523–540, 1989.
- [13] W. Fischer und I. Lieb. *Funktionentheorie*. Vieweg, Braunschweig, 1985.
- [14] S. L. Gavriljuk. Linear wave propagation in bubbly liquids with a continuous bubble size distribution. *Bubble Dynamics and Interface Phenomena*, Seiten 141–149, 1994.
- [15] C. W. Groetsch. *Generalized Inverses of Linear Operators*. Marcel Dekker, New York, 1977.
- [16] C. W. Groetsch. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [17] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [18] P. Henrici. *Applied and Computational Complex Analysis*, volume 1. Wiley, New York, 1974.
- [19] H. Heuser. *Funktionalanalysis*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 2. Auflage, 1986.
- [20] W. H. Isay. *Kavitation*. Schiffahrts-Verlag „Hansa“, Hamburg, 1989.
- [21] P.-E. Jabin and B. Perthame. Notes on mathematical problems on the dynamics of dispersed particles interacting through a fluid. In N. Bellomo and M. Pulvirenti, editors, *Modeling in Applied Sciences*, Kapitel 4, Seiten 111–147. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [22] J. B. Keller and M. Miksis. Bubble oscillation of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68:628–633, 1980.
- [23] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [24] W. Lauterborn, editor. *Cavitation and Inhomogeneities in Underwater Acoustics*, Berlin, 1980. Springer-Verlag.
- [25] T. G. Leighton. *The Acoustic Bubble*. Academic Press, San Diego, 1997.
- [26] V. A. Morozov. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet Math. Doklady*, 7:414–417, 1966.
- [27] V. A. Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. Springer-Verlag, New York, 1984.

- [28] F. Natterer. Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. *Numer. Math.*, 28:329–341, 1977.
- [29] A. B. Pippard. *The Physics of Vibration*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [30] M. S. Plesset and A. Prosperetti. Bubble dynamics and cavitation. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 9:145–185, 1977.
- [31] E. Praefke. Verbesserung des Kavitationsverhaltens von Schiffspropellern durch weiterentwickelte Flügelprofile. Technischer Bericht, Hamburgische Schiffbau-Versuchsanstalt GmbH, 1996.
- [32] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1992.
- [33] A. Prosperetti. Bubble phenomena in sound fields. *Ultrasonic*, 23:69–77, 115–124, 1984.
- [34] A. Prosperetti and A. Lezzi. Bubble dynamics in compressible liquid. Part 1. *J. Fluid. Mech.*, 168:457–478, 1986.
- [35] G. Russo and P. Smereka. Kinetic theory for bubbly flow I: Collisionless case. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(2):327–357, 1996.
- [36] G. Russo and P. Smereka. Kinetic theory for bubbly flow II: Fluid dynamic limit. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(2):358–371, 1996.
- [37] O. Scherzer. The use of Morozov’s discrepancy principle for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems. *Computing*, 51:45–60, 1993.
- [38] O. Scherzer, H. W. Engl, and K. Kunisch. Optimal a-posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(6):1796–1838, 1993.
- [39] E. Silberman. Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(8):925–933, 1957.
- [40] J. H. M. Stoehr. Lineare und nichtlineare akustische Meßverfahren zur Bestimmung der Blasengrößenverteilung und des freien Gasgehaltes in Flüssigkeits-Blasengemischen im Hinblick auf Anwendungen in Kavitationstunneln. Diplomarbeit, Universität Kiel, 1995.
- [41] J. Stoer and R. Burlisch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1983.

- [42] U. Tautenhahn. On a general regularization scheme for nonlinear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 13:1427–1437, 1997.
- [43] A. E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. Wiley, New York, 1958.
- [44] S. Temkin. Attenuation and dispersion of sound in bubbly fluids via the Kramers-Kronig relations. *J. Fluid Mech.*, 211:61–72, 1990.
- [45] A. N. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math. Dokl.*, 4:1035–1038, 1963.
- [46] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley, New York, 1974.
- [47] L. van Wijngaarden. On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, 33(3):465–474, 1968.
- [48] L. van Wijngaarden. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 4:369–396, 1972.
- [49] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 5th edition, 1978.
- [50] F. R. Young. *Cavitation*. McGraw-Hill, London, 1989.
- [51] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part III: Variational Methods and Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1985.

Zusammenfassung

Bei der Umströmung von Schiffspropellern kann hydrodynamische Kavitation entstehen. Darunter versteht man die Bildung kleiner Hohlräume im Wasser, welche durch Druckschwankungen in der Strömung verursacht wird. Das Auftreten von Kavitation wird dabei durch Verunreinigungen des Wassers in Form kleiner Gasblasen begünstigt.

Die Kavitationserscheinungen führen zu Materialschäden und zu erheblicher Schallabstrahlung – bei der Entwicklung neuer Schiffspropeller versucht man deshalb, diese Effekte zu minimieren. Zur kontrollierten Durchführung von Modellversuchen, welche der Abschätzung des Kavitationsverhaltens dienen, wird ein Verfahren benötigt, um Größe und Konzentration der Gasblasen in den Versuchsanlagen messen zu können.

Die akustischen Eigenschaften blasenhaltiger Flüssigkeiten unterscheiden sich wesentlich von denen der reinen Flüssigkeit; die Anwesenheit von Gasblasen bewirkt insbesondere eine Dämpfung der Schallwellen. Man kann nun versuchen, durch Messung der Dämpfung für Schallwellen unterschiedlicher Frequenzen die Größenverteilung der Gasblasen zu bestimmen. Dieses inverse Problem ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Zunächst wird ein Modell zur Beschreibung blasenhaltiger Flüssigkeiten vorgestellt, welches auf van Wijngaarden [47, 48] zurückgeht. Für die Ausbreitung ebener Schallwellen erhält man aus diesem Modell eine nichtlineare Gleichung der speziellen Form $L(f) = g(f)$, aus der die gesuchte Verteilung f bestimmt werden kann. Hier ist L ein linearer und g ein nichtlinearer Integraloperator. Die aus Messungen bekannte Dämpfung geht dabei in den Operator g ein, und man hat infolgedessen nur eine Approximation g^δ zur Verfügung. Es stellt sich nun heraus, daß Lösungen der oben aufgeführten Gleichung nicht stetig von Störungen des Operators g abhängen; in diesem Sinne ist diese Gleichung schlecht gestellt.

Ist der Gasanteil im Gemisch sehr gering, so kann die gesuchte Verteilung aus einer linearen Approximation der oberen Gleichung bestimmt werden. Solche Methoden findet man z. B. in Commander et al. [6] und Diekmann [9]. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, eine Methode für Gemische mit einem höheren Gasanteil zu entwickeln. Dazu bedarf es insbesondere der Formulierung eines geeigneten Regularisierungsverfahrens für die nichtlineare Gleichung. Es wird gezeigt, daß unter Voraussetzungen, die von den Operatoren L und g sowie den Störungen von g erfüllt werden, die bekannte Tikhonov-Regularisierung auf diesen Fall übertragen werden kann. Schließlich wird ein numerisches Verfahren zur Lösung der regularisierten Gleichung vorgestellt und dieses an Beispielen getestet.

Lebenslauf

Andreas Diekmann

geboren am 18.5.1971 in Hamburg, ledig

Ausbildung

- | | |
|-------------|--|
| 1998 – 2001 | Promotionsstudium im Fach Mathematik an der Universität Hamburg (Stipendium 04/98 bis 03/00) |
| 1992 – 1997 | Studium der Mathematik an der Universität Hamburg, Abschluß Diplom |
| 1981 – 1990 | Gymnasium Lerchenfeld in Hamburg, Abschluß Abitur |
| 1977 – 1981 | Grundschule Wielandstraße in Hamburg |

Berufstätigkeit

- | | |
|---------------|--|
| 04/00 – 03/01 | wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg |
| 04/99 – 03/01 | Tutor für ausländische Studierende im Fachbereich Mathematik |
| 1994 – 1997 | diverse Tätigkeiten als studentischer Übungsleiter im Mathematischen Seminar und im Institut für Angewandte Mathematik |
| 1993 – 1995 | Tätigkeit bei der Import Export Gesellschaft Derek Goslar mbH. & Co. |

Zivildienst

- | | |
|---------------|---|
| 10/90 – 03/92 | Zivildienst und anschließende dreimonatige pflegerische Tätigkeit im Richard-Remé-Haus für geriatrische Rehabilitation in Hamburg-Volksdorf |
|---------------|---|