

# **Nichtlineare Spline-Kurven unter affin-linearen Restriktionen**

## **Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereichs Mathematik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von

**Sigrid Fredenhagen**

aus Bielefeld

Hamburg

2001

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich  
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. H. J. Oberle  
und Prof. Dr. G. Opfer

Hamburg, den 14. August 2001

Prof. Dr. R. Hass  
Dekan des Fachbereichs Mathematik

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>6</b>
1.1 Bezeichnungen aus der Differentialgeometrie . . . . .	6
1.2 Problemstellung . . . . .	9
1.3 Globale oder lokale Minima? . . . . .	13
1.4 Invarianzeigenschaften . . . . .	17
<b>2 Notwendige Bedingungen</b>	<b>21</b>
2.1 Notwendige Bedingungen für nichtlineare Splines . . . . .	21
2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems . . . . .	32
2.3 Anzahl der Wendepunkte . . . . .	41
2.4 Randstücke und Berührungspunkte . . . . .	46
<b>3 Die Numerik des unrestringierten nichtlinearen Splines</b>	<b>52</b>
3.1 Das lokale Problem . . . . .	52
3.2 Die Berechnung von globalen unrestringierten Splines . . . . .	62
<b>4 Der restringierte nichtlineare Spline</b>	<b>69</b>
4.1 Das lokale Problem mit einem Randstück . . . . .	69
4.2 Das lokale Problem mit einem Berührungspunkt . . . . .	78
4.3 Algorithmus zur Berechnung restringierter nichtlinearer Splines . . . . .	84
4.4 Beispiele mit affin-linearen Restriktionen . . . . .	86
4.5 Ideen zur Restriktion durch einen Kreis . . . . .	96

A Notwendige Bedingungen für ein allgemeines Steuerungsproblem	101
B Jacobische elliptische Funktionen	114
C Matlab-Programme	120
D Beispiele zu Kapitel 3 mit zwei Interpolationsknoten	125
E Beweis für die Existenz kritischer Punkte	133
Symbolverzeichnis	137
Literaturverzeichnis	138

# Einleitung

Eines der grundlegenden Probleme im CAD (Computer Aided Design) ist die Interpolation von Punkten durch eine optisch ansprechende Kurve. Dabei erscheinen dem menschlichen Auge Knicke, aber auch schon Bereiche verschieden hoher Krümmung als störend. Ein Ansatz, um hinreichend glatte Kurven ohne Bereiche extremer Krümmungsunterschiede zu erzeugen, ist die Simulation elastischer Materialien. Elastische Materialien nehmen eine Form an, bei der ihre Biegungsenergie minimiert wird. Für einen dünnen elastischen Stab ist die Biegungsenergie proportional zum Integral über das Quadrat seiner Krümmung  $\kappa$

$$J(\kappa, L) = \int_0^L \kappa^2(s) \, ds, \quad (1)$$

wobei mit  $L$  die Länge des Stabes bezeichnet wird. Ohne äußere Kräfte nimmt er also die Form einer Geraden an. Dasselbe gilt für eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\mathbf{z} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die das Funktional (1) minimiert. Fordert man zusätzlich die Interpolation gegebener Punkte

$$\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L, \quad (2)$$

so ist sie im allgemeinen gezwungen, eine andere Form anzunehmen. Im folgenden werden  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , als *Interpolationsknoten* bezeichnet. In dieser Arbeit ist die Länge  $L$  der interpolierenden Kurven frei und muß erst berechnet werden. Solche Kurven werden im CAD *nichtlineare Splines* oder *elastische Kurven* genannt. Kurven vorgegebener Länge, die das Funktional (1) unter der Nebenbedingung (2) minimieren, werden zum Beispiel von JOU & HAN (1992) betrachtet. Der Mittelweg, einer oberen Schranke für die Länge der gesuchten Kurve, wird unter anderem von FISHER & JEROME (1976) besprochen. Eine solche obere Schranke ist für theoretische Aussagen von Bedeutung, da die Existenz eines globalen Minimums nur bewiesen werden kann, wenn es eine obere Schranke für die Länge der zulässigen Kurven gibt, siehe dazu auch Abschnitt 1.3. Beschränkt man sich nicht auf ebene Kurven, so stellt sich die Frage, ob die Minimierung des Funktionals (1) der richtige Weg ist. Überlegungen zu Raumkurven findet man in den Arbeiten von MEHLUM (1995) und SCHULZE (1990).

Kurven, die das Funktional (1) unter der Nebenbedingung (2) minimieren, treten zum Beispiel bei der Kontur eines Schiffes auf. Anders als bei den Karosserieteilen eines Autos, werden die Bleche, die die Außenhaut eines Schiffes bilden, nicht in Form gepreßt,

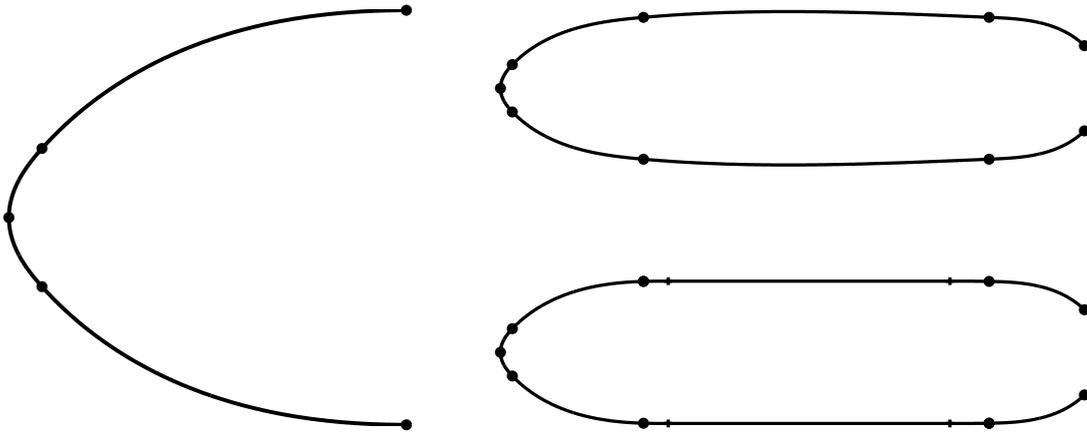


Abbildung 1: Im linken Teil sieht man den durch einen (unrestringierten) nichtlinearen Spline beschriebenen Bug eines Schiffes. Im rechten Teil sieht man oben einen (unrestringierten) nichtlinearen Spline und unten einen restringierten nichtlinearen Spline zu denselben Interpolationsdaten.

sondern erhalten ihre Form nur dadurch, daß sie an den Spanten verschweißt werden. Die Lage der Spanten hat also einen großen Einfluß auf die Form des Schiffes. Betrachtet man nur die Kontur entlang eines Querschnitts, so hat man eine Kurve, die das Funktional (1) unter der Nebenbedingung (2) minimiert, wobei beim fertigen Schiff die Länge der Kurve zwischen den Interpolationsknoten vorgegeben ist. In der Planungsphase wird man zunächst weniger Interpolationspunkte und keine Länge für die Kurve vorgeben. Ein Beispiel für die Kontur des Bugs eines Schiffes sieht man im linken Teil von Abbildung 1. Oben rechts in Abbildung 1 sieht man eine Kurve, die zusätzlich noch einen Teil des Hecks mitbeschreiben soll. Dabei wurden für den Bug dieselben Interpolationspunkte gewählt. Nun darf ein Schiff nicht beliebig breit werden und sollte zum leichteren Be- und Entladen im Mittelteil gut an der Kaimauer anliegen. Daher ergibt sich auf natürliche Art und Weise eine zusätzliche Restriktion für die gesuchte Kurve. Ein Beispiel für eine solche restringierte Kurve sieht man rechts unten in Abbildung 1. Sie besitzt auf jeder Seite zwei neue Knoten, zwischen denen jeweils ein Randstück liegt, auf dem Krümmung verschwindet. Dieses ist eine Motivation, neben der Interpolationsbedingung (2) noch eine weitere Bedingung an die interpolierende Kurve  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu stellen, und zwar eine Restriktion der Form

$$g(z) \leq 0, \quad z \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Hierbei handelt es sich im einfachsten Fall um die Beschränkung, daß die Spur der Kurve ganz in einer gegebenen Halbebene liegt. Solche Restriktionen wurden bisher für nichtlineare Splines nur von OPFER (1989,1990) behandelt. Für verwandte Probleme wie die kubische Spline-Interpolation unter Restriktionen gibt es vielfältige Arbeiten, hier werden neben der nichtnegativen Interpolation auch monotone oder konvexe kubische Splines

betrachtet. Hier sei exemplarisch auf die Arbeiten DONTCHEV (1993), FREDENHAGEN, OBERLE & OPFER (1999), OPFER & OBERLE (1988) und SCHMIDT & HESS (1995) verwiesen. Auch für das Problem des Knickstabs, wo eine Kurve mit zwei Interpolationsknoten gesucht wird, die bei einer festen Länge  $L$  unter bestimmten Nebenbedingungen die Biegeenergie minimiert, gibt es verschiedene Arbeiten, z.B. HILTMANN (1983), MAURER & MITTELMANN (1991), in denen affin-lineare Restriktionen betrachtet werden.

Bei OPFER (1989,1990) wird vorausgesetzt, daß die erste Komponente  $x$  der gesuchten Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  streng monoton wächst, so daß die Kurve mit einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Parametrisierung der Form  $\mathbf{z} = (x, f(x))^T$  besitzt. Unter dieser Voraussetzung kann man mit Hilfe der Variationsrechnung die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von Gleichung (1) unter den Nebenbedingungen (2) und  $f(x) \geq 0$ ,  $x_0 \leq x \leq x_N$ , herleiten. Aus diesen folgt, daß die Krümmung  $\kappa$  und der Tangentenwinkel  $\theta$  einer optimalen Kurve stetig sind und die natürliche Randbedingung  $\kappa(s_0) = \kappa(s_N) = 0$  erfüllen. Außerdem gilt intervallweise die Differentialgleichung

$$f^{(iv)} = \frac{5(f'')^3 + 20f'f''f'''}{2(1+(f')^2)} - \frac{35(f')^2(f'')^3}{2(1+(f')^2)^2}. \quad (4)$$

Während von OPFER (1989,1990) kein Algorithmus und kein Beispiel für einen restringierten Spline angegeben wird, findet man Algorithmen, die den unrestringierten nichtlinearen Spline unter den obigen Voraussetzungen berechnen, bei GLASS (1966) und WOODFORD (1969). Ein Vorteil der obigen Einschränkung ist die Vereinfachung des Problems, daß in diesem Fall das Gitter  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N$  nicht berechnet werden muß, da die ersten Komponenten der Interpolationspunkte  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$  diese Rolle übernehmen. Der Nachteil ist, daß die Voraussetzung der Monotonie von  $x$  für viele Probleme nicht erfüllt wird, bei denen sie für die Interpolationspunkte erfüllt ist und  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$  gilt. Ein Beispiel hierfür findet man im Abschnitt 1.2.

In dieser Arbeit werden notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum von (1) unter der Nebenbedingung (2) und einer allgemeinen Restriktion (3) bewiesen. Für eine affin-lineare Restriktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0$$

mit Steigungswinkel  $\beta \in \mathbb{R}$  durch den Punkt  $\mathbf{z}_G \in \mathbb{R}^2$  und die Restriktion durch einen Kreis

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \leq 0$$

mit Mittelpunkt  $\mathbf{z}_K \in \mathbb{R}^2$  und Radius  $R \in \mathbb{R}_+$  werden noch weitere spezielle Eigenschaften der Lösung gezeigt. Im letzten Kapitel wird mit Hilfe der notwendigen Bedingungen ein Algorithmus zur Berechnung unrestringierter nichtlinearer Splines so modifiziert, daß durch eine affin-lineare Restriktion beschränkte nichtlineare Splines berechnet werden

können. Am Schluß der Arbeit werden an Hand eines Beispiels Ansätze zur Berechnung eines nichtlinearen Splines unter einer Restriktion in Form eines Kreises vorgestellt.

Die ersten Untersuchungen zu Kurven, die das Funktional (1) unter bestimmten Nebenbedingungen minimieren, gehen auf Euler und die Gebrüder Bernoulli zurück, vgl. LOVE (1907). In diesen Arbeiten werden aber nur Probleme fester Länge betrachtet. Mit Hilfe der Variationsrechnung kann man notwendigen Bedingungen für Kurven, die das Funktional (1) unter der Nebenbedingung (2) minimieren, herleiten und erhält, daß für die Krümmung  $\kappa$  die Differentialgleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0 \tag{5}$$

gilt, vgl. LEE & FORSYTHE (1973). Neben den Interpolationsbedingungen erhält man aus den notwendigen Bedingungen weitere Randbedingungen sowie die Stetigkeit des Tangentenwinkels und der Krümmung, so daß sich eine vollständige Randwertaufgabe zur Berechnung des nichtlinearen Splines ergibt. Die Differentialgleichung (5) kann man mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen, vgl. Anhang B, lösen und erhält so ein nichtlineares Gleichungssystem mit  $4N$  Gleichungen, in dem neben den Jacobischen elliptischen Funktionen auch unvollständige elliptische Integrale auftreten, vgl. REINSCH (1981,1997). Im Fall von nur zwei Interpolationspunkten ( $N = 1$ ) mit zusätzlich vorgegebenen Tangentenwinkeln am Rand, welcher im folgenden *lokales Problem* genannt wird, kann man das nichtlineare Gleichungssystem soweit auflösen, daß man nur noch eine nichtlineare Gleichung lösen muß, vgl. BRUNETT & WENDT (1997). Dieses Verfahren wird in dieser Arbeit zur Berechnung eines nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationspunkten verwendet. In der Literatur findet man eine ganze Reihe weiterer numerischer Verfahren zur Berechnung nichtlinearer Splines. Exemplarisch sei auf MALCOLM (1977) und REINSCH (1981,1997) verwiesen.

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden grundlegende Begriffe aus der Differentialgeometrie eingeführt und die Problemstellung als Variationsaufgabe formuliert. Im Abschnitt 1.3 wird auf theoretische Eigenschaften von nichtlinearen Splines eingegangen, die man in den Arbeiten FISHER & JEROME (1976), GOLOMB & JEROME (1982), LEE & FORSYTHE (1973) und LINNÉR (1993,1996) findet. Am Schluß des Kapitels werden Invarianzeigenschaften lokaler Minima bewiesen.

Im zweiten Kapitel werden grundlegende Begriffe der Theorie optimaler Steuerungen eingeführt und die im ersten Kapitel eingeführte Problemstellung als Optimalsteuerungsproblem formuliert. Hierauf werden notwendige Bedingungen erster Ordnung für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem mit freien Zwischenknoten und freier Endzeit angewendet, die im Anhang A hergeleitet werden. Diese liefern wie im unrestringierten Fall ein vollständiges Randwertproblem. Analog zum unrestringierten Spline kann man mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen ein nichtlineares Gleichungssystem herleiten. Im Abschnitt 2.3 wird bewiesen, daß während kritische Punkte beliebig viele Wendepunkte

besitzen können, lokale Minima maximal einen Wendepunkt zwischen zwei Interpolationspunkten besitzen. Im Abschnitt 2.4 wird gezeigt, daß bei einem nichtlinearen Spline mit einer affin-linearen Restriktion maximal ein Randstück oder ein Berührungspunkt zwischen zwei Interpolationspunkten auftreten kann. Dabei wird als Berührungspunkt eine einzelne Stelle und als Randstück ein Intervall bezeichnet, in dem die Restriktion aktiv ist, d.h.  $g(\mathbf{z}) = 0$  gilt. Dieses kann in einer abgeschwächten Form auch für den Fall einer Restriktion durch einen Kreis bewiesen werden. An Hand eines Beispiels wird gezeigt, daß dieses aber nicht für beliebige Restriktionen der Fall ist.

Im dritten Kapitel wird ein Algorithmus zur Berechnung eines unrestringierten nichtlinearen Splines beschrieben. Dabei wird zunächst ein Verfahren zur Lösung des lokalen Problems vorgestellt. Dieser Algorithmus geht auf BRUNETT & WENDT (1997) zurück. Eine große Anzahl von Beispielen für Lösungen des lokalen Problems findet man im Anhang D. Dieses Verfahren zur Berechnung eines lokalen Splines wird bei dem Algorithmus zur Berechnung globaler nichtlinearer Splines, der sich in eine innere und eine äußere Iteration gliedert, verwendet. In der inneren Iteration wird das lokale Problem für gegebene Tangentenwinkel gelöst und damit die Krümmung an den Interpolationsknoten berechnet. In der äußeren Iteration werden Tangentenwinkel gesucht, für die die Krümmung an den inneren Interpolationsknoten stetig ist. Hierbei wird das Newton-Verfahren mit einer Schrittweitensteuerung verwendet. Startwerte werden mit Hilfe der kubischen Spline-Interpolation berechnet. Zum Abschluß des Kapitels werden zwei Beispiele für unrestringierte globale Splines präsentiert. Weitere Beispiele findet man im Abschnitt 4.4 des vierten Kapitels.

Im letzten Kapitel wird der nichtlineare Spline unter affin-linearen Restriktionen numerisch behandelt. Dabei wird zunächst der Spezialfall eines nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationspunkten und einem Randstück betrachtet. In diesem Fall kann man die Lösung mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen angeben, ohne eine komplizierte nichtlineare Gleichung lösen zu müssen. Zur Berechnung eines nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationspunkten und einem Berührungspunkt wird das im dritten Kapitel vorgestellte Verfahren modifiziert. Dabei werden Startwerte aus dem Verfahren zur Berechnung des lokalen Problems mit Randstück gewonnen. Zur Berechnung eines globalen restringierten Splines muß dieser Algorithmus weiter modifiziert werden. Die dabei auftretenden Besonderheiten werden an Hand einiger Beispiele erläutert. Für alle getesteten Beispiele konnte aus dem unrestringierten nichtlinearen Spline der gesuchte restringierte Spline berechnet werden. Am Ende des Kapitels werden noch Ansätze zur Berechnung eines nichtlinearen Splines unter einer Restriktion in Form eines Kreises beschrieben und an Hand eines Beispiels erläutert.

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. H. J. Oberle bedanken. Ihm verdanke ich das interessante Thema, zu dem er mir viele Anregungen gegeben hat. Die Erstellung dieser Arbeit wurde durch Diskussionen mit vielen Kollegen begleitet. Insbesondere sei Helge Baumann und Andreas Diekmann gedankt. Außerdem möchte ich meiner Familie für ihre tatkräftige Unterstützung ganz besonders danken.

# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Differentialgeometrie, soweit sie zum Verständnis der Problemstellung benötigt werden, zusammengefaßt. Diese findet man in einführenden Büchern über Differentialgeometrie, wie KLINGENBERG (1973) und DO CARMO (1983). Im zweiten Abschnitt wird die Problemstellung erläutert und in den Abschnitten 1.3 und 1.4 wichtige Eigenschaften von Lösungen beschrieben.

### 1.1 Bezeichnungen aus der Differentialgeometrie

In vielen Differentialgeometriebüchern werden zunächst  $C^\infty$ -Kurven betrachtet und für diese die grundlegenden Begriffe eingeführt. Da aber an die in dieser Arbeit betrachteten Kurven geringere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gestellt werden, wird die folgende Darstellung daran angepaßt und soweit möglich nur die stetige Differenzierbarkeit der Kurve vorausgesetzt.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine Abbildung  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *parametrisierte Kurve*, wenn ein offenes Intervall  $\tilde{I} \supset I$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\tilde{z} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  existieren, für die  $z = \tilde{z}|_I$  gilt. Die Bildmenge  $z(I)$  heißt *Spur* von  $z$ .

Zwei parametrisierte Kurven  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{z} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen äquivalent, wenn es eine bijektive, stetige Abbildung  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  gibt, für die  $\tilde{z} = z \circ \varphi$  gilt. Die Abbildung  $\varphi$  wird *Parametertransformation* genannt. Ist die Abbildung  $\varphi$  streng monoton wachsend, so heißt die Parametertransformation *orientierungstreu*. Ist  $\varphi$  dagegen eine streng monoton fallende Funktion, so heißt die Parametertransformation *orientierungsumkehrend*. Die hierdurch definierte Relation zwischen parametrisierten Kurven im  $\mathbb{R}^n$  ist offenbar eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse aller Kurven, die durch eine Parametertransformation auseinander hervorgehen, nennt man *unparametrisierte Kurve*.

Eine parametrisierte Kurve  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt an jeder Stelle  $t \in I$  eine eindeutig definierte Ableitung  $z'(t)$ . Diese wird *Tangentenvektor* der Kurve an der Stelle  $t$  genannt.

Verschwindet der Tangentialvektor an keiner Stelle  $t \in I$ , so heißt die Kurve *regulär*.

Die *Länge* einer parametrisierten Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird durch

$$L(\mathbf{z}) := \int_I \|\mathbf{z}'(t)\|_2 dt \quad (1.1.1)$$

definiert, sofern dieses Integral existiert. Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm. Eine reguläre Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, wenn  $\|\mathbf{z}'(s)\|_2 = 1$  für alle  $s \in I$  gilt.

**Satz 1.1.** *Jede reguläre Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  läßt sich nach der Bogenlänge parametrisieren, d.h.  $\mathbf{z}$  ist zu einer auf Bogenlänge parametrisierten Kurve äquivalent.*

*Beweis.* Für festes  $t_0 \in I$  wird durch

$$S(t) := \int_{t_0}^t \|\mathbf{z}'(t)\|_2 dt, \quad t \in I,$$

die sogenannte Bogenlängenfunktion definiert. Da die Abbildung  $S : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monoton wachsende  $C^1$ -Funktion ist, existiert ihre Umkehrfunktion. Mit  $\varphi(s) := S^{-1}(s)$ ,  $s \in S(I)$ , gilt

$$\left\| \frac{d(\mathbf{z} \circ \varphi)}{ds} \right\|_2 = \left\| \frac{d\mathbf{z}}{dt} \right\|_2 \left\| \frac{d\varphi}{ds} \right\|_2 = 1, \quad (1.1.2)$$

d.h.  $\tilde{\mathbf{z}} := \mathbf{z} \circ \varphi$  ist auf Bogenlänge parametrisiert. □

Nach Satz 1.1 enthält jede Äquivalenzklasse regulärer Kurven eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Im folgenden werden nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven kurz  *$C^1$ -Kurven* genannt.

Eine  $C^1$ -Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt  *$C^k$ -Kurve*, wenn es eine auf einem offenem Intervall  $\tilde{I} \supset I$  definierte  $k$ -mal stetig differenzierbare Abbildung  $\tilde{\mathbf{z}} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt, für die  $\tilde{\mathbf{z}}|_I = \mathbf{z}$  gilt.

Im folgenden betrachten wir das Krümmungsverhalten einer  $C^2$ -Kurve. Dazu beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall  $n = 2$ . Die *Krümmung* einer ebenen  $C^2$ -Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  läßt sich durch

$$\kappa := \det[\mathbf{z}', \mathbf{z}''] \quad \text{auf } I \quad (1.1.3)$$

definieren. Mit Hilfe der Krümmung kann man den Tangentenwinkel definieren. Seien  $s_0 \in I$  und  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  so gewählt, daß

$$\mathbf{z}'(s_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)^T \quad (1.1.4)$$

gilt. Dann wird die Funktion  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(\sigma) d\sigma + \theta_0 \quad (1.1.5)$$

*Tangentenwinkel* genannt. Diese Definition ist bis auf additive Vielfache von  $2\pi$  eindeutig. Daß für den so definierten Tangentenwinkel

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T$$

in  $I$  gilt, wird in Satz 1.3 bewiesen. Dazu wird der folgende Eindeigkeitssatz für Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigt:

**Satz 1.2.** *Gegeben sei ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und eine stetig differenzierbare Funktion  $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann besitzt für  $t_0 \in I$  die Anfangswertaufgabe*

$$\mathbf{x}' = f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1.6)$$

*höchstens eine Lösung auf dem Intervall  $I$ .*

*Beweis.* Siehe FORSTER (1984, Kapitel 10). □

**Satz 1.3.** *Gegeben seien die Krümmung  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$  und die Anfangswerte  $\mathbf{z}'(s_0) = \mathbf{z}'_0$  und  $\mathbf{z}(s_0) = \mathbf{z}_0$  für eine Stelle  $s_0 \in I$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte  $C^2$ -Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die die Krümmung  $\kappa$  besitzt und die gegebenen Anfangswerte interpoliert. Für sie gilt an jeder Stelle  $s \in I$*

$$\mathbf{z}'(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))^T \quad \text{und} \quad \mathbf{z}(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{z}'(\sigma) d\sigma + \mathbf{z}_0, \quad (1.1.7)$$

wobei  $\theta$  den Tangentenwinkel aus (1.1.5) bezeichnet.

*Beweis.* Für jede  $C^2$ -Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  mit der Krümmung  $\kappa$  gilt

$$\|\mathbf{z}'\|_2 = 1 \quad \text{und} \quad \kappa = \det[\mathbf{z}', \mathbf{z}''].$$

Durch Ableiten der ersten Gleichung ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{z}')^T \mathbf{z}'' = x'x'' + y'y'' \\ \kappa &= \det[\mathbf{z}', \mathbf{z}''] = x'y'' - x''y', \end{aligned}$$

welches man nach den zweiten Ableitungen auflösen kann. Damit erhält man das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'' &= -\kappa y' \\ y'' &= \kappa x', \end{aligned}$$

welches nach Satz 1.2 für einen gegebenen Anfangswert  $\mathbf{z}'(t_0) = \mathbf{z}'_0$  höchstens eine Lösung besitzt. Die durch (1.1.7) gegebene Kurve  $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Lösung, da für ihren Tangentialvektor nach Definition  $\|\mathbf{z}'\|_2 = 1$  gilt, sie die Krümmung

$$\det[\mathbf{z}', \mathbf{z}'] = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\theta' \sin \theta \\ \sin \theta & \theta' \cos \theta \end{vmatrix} = \theta' = \kappa$$

besitzt und aufgrund der Definition des Tangentenwinkels (1.1.4)-(1.1.5) die Anfangswerte interpoliert.  $\square$

Man kann die Krümmung und den Tangentenwinkel auch unter abgeschwächten Voraussetzungen definieren. Eine  $C^{k-1}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt stückweise  $k$ -mal stetig differenzierbar oder  $C^{k-1,k}$ -Kurve, wenn eine Unterteilung  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = b$  des Intervalls  $[a, b]$  und  $C^k$ -Kurven  $\tilde{\mathbf{z}}_i : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $i=1, \dots, N$ , existieren, für die

$$\tilde{\mathbf{z}}_i|_{[s_{i-1}, s_i]} = \mathbf{z}|_{[s_{i-1}, s_i]}$$

gilt.

Die Krümmung  $\kappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  einer  $C^{1,2}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist nur stückweise stetig, d.h. es gibt eine Unterteilung  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_N = b$  des Intervalls  $[a, b]$  und stetige Funktionen  $\tilde{\kappa}_i : [s_{i-1}, s_i] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, N$ , für die

$$\tilde{\kappa}_i|_{(s_{i-1}, s_i)} = \kappa|_{(s_{i-1}, s_i)}$$

gilt. Der Raum aller stückweise stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  wird mit  $C_{\text{stkw}}[a, b]$  bezeichnet. Der Tangentialvektor  $\mathbf{z}'$  und der Tangentenwinkel  $\theta$  sind stückweise stetig differenzierbare Funktionen. Der Raum aller stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen wird mit

$$C^{0,1}[a, b] := \{f \in C[a, b] \mid f' \in C_{\text{stkw}}[a, b]\}$$

bezeichnet. Analog definiert man den Raum der  $(k-1)$ -mal stetig differenzierbaren und  $k$ -mal stückweise stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^{k-1,k}[a, b] := \{f \in C^{k-1}[a, b] \mid f^{(k)} \in C_{\text{stkw}}[a, b]\}.$$

Diese Bezeichnungen werden im folgenden Abschnitt bei der Formulierung der Problemstellung benutzt.

## 1.2 Problemstellung

In dieser Arbeit wird das Problem betrachtet, eine Kurve minimaler Biegeenergie mit bestimmten Interpolationseigenschaften zu finden. Dieses führt zu der folgenden Problemstellung.

**Problem 1.1.** Zu gegebenen Punkten

$$\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{mit} \quad \mathbf{z}_i \neq \mathbf{z}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.1)$$

und Tangentenwinkeln  $\theta_0, \theta_N \in \mathbb{R}$  bestimme man ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$ , eine  $C^{1,2}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und eine  $C^{0,1}$ -Funktion  $\theta : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Funktional

$$I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} (\theta'(s))^2 ds \quad (1.2.2)$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad \text{auf} \quad [s_0, s_N], \quad (1.2.3)$$

$$\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (1.2.4)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta(s_N) = \theta_N. \quad (1.2.5)$$

Die Bedingung (1.2.1) heißt, daß keine zwei aufeinander folgenden Punkte gleich sind. Es ist jedoch erlaubt, daß zwei nicht aufeinander folgende Punkte gleich sind. Durch die Nebenbedingung (1.2.3) wird gewährleistet, daß die gesuchte Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist und  $\theta$  ihr Tangentenwinkel ist. Sind nur zwei Interpolationspunkte vorgegeben oder liegen alle Interpolationspunkte auf einer Geraden, so verhindert die Nebenbedingung (1.2.5), daß die Lösung die interpolierende Gerade ist. Läßt man diese Bedingung weg, so erhält man die natürliche Randbedingung, daß die Krümmung am Rand verschwindet. Auch dieser Fall wird später betrachtet werden.

In dieser Arbeit wird das Problem 1.1 nun mit einer zusätzlichen Restriktion betrachtet wird, wie sie in ähnlicher Form bisher nur von OPFER (1989,1990) untersucht wurde.

**Problem 1.2.** Zu gegebenen Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, \dots, N$ , mit (1.2.1) und  $\theta_0, \theta_N \in \mathbb{R}$  und einer gegebenen Funktion  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , für die

$$g(\mathbf{z}_i) < 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{und} \quad \nabla g(\mathbf{z}) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2.6)$$

gelte, bestimme man ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$ , eine  $C^{1,2}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und eine  $C^{0,1}$ -Funktion  $\theta : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Funktional (1.2.2) minimieren unter den Nebenbedingungen (1.2.3)-(1.2.5) und

$$g(\mathbf{z}) \leq 0. \quad (1.2.7)$$

Die Bedingung (1.2.6) wird später bei der Herleitung notwendiger Bedingungen benötigt. Im vierten Kapitel wird ein Algorithmus für affin-lineare Restriktionen

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0, \quad (1.2.8)$$

hergeleitet und Ansätze für die Restriktion durch einen Kreis

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \quad (1.2.9)$$

vorge stellt. Die Voraussetzungen an die Nebenbedingung (1.2.6) kann man abschwächen, so daß auch abschnittsweise definierte Restriktionen zulässig sind, die an den Interpolationspunkten nicht stetig sind. Dieses war beim einleitenden Beispiel der Fall.

In einigen Arbeiten, wie zum Beispiel in denen von GLASS (1966), WOODFORD (1969) und OPFER (1989,1990), wird nur ein Spezialfall der Problemstellung 1.1 bzw. 1.2 betrachtet und vorausgesetzt, daß für den Tangentenwinkel  $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$  gilt. Unter dieser Voraussetzung besitzt die erste Komponente der Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  eine positive Ableitung  $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$  und ist deshalb streng monoton wachsend. Daher läßt sich die Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  durch  $x$  parametrisieren. Mit der Parametertransformation  $\varphi(s) := x(s)$ ,  $s \in [s_0, s_N]$ , kann man die Funktion

$$\tilde{y}(x) := y(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in [x_0, x_N],$$

definieren. Für ihre Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= \frac{d}{dx} \tilde{y} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta, \quad \text{und} \\ \frac{dx}{ds} &= \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tilde{y}')^2}}. \end{aligned}$$

Mit  $\theta(\varphi^{-1}(x)) = \arctan(\tilde{y}'(x))$  ergibt sich für die Krümmung

$$\kappa(\varphi^{-1}(x)) = \frac{d\theta}{ds}(\varphi^{-1}(x)) = \frac{\tilde{y}''(x)}{1 + (\tilde{y}'(x))^2} \frac{dx}{ds} = \frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + (\tilde{y}'(x))^2)^{3/2}}. \quad (1.2.10)$$

Für das Zielfunktional folgt schließlich genauso

$$\int_{s_0}^{s_N} (\theta'(s))^2 ds = \int_{x_0}^{x_N} (\theta'(\varphi^{-1}(x)))^2 \frac{ds}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_N} \frac{(\tilde{y}''(x))^2}{(1 + (\tilde{y}'(x))^2)^{5/2}} dx.$$

Dieses kann man zu der folgenden Problemstellung zusammenfassen.

**Problem 1.3.** Zu einem gegebenen Interpolationsgitter  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ , Interpolationsdaten  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $y'_0, y'_N \in \mathbb{R}$  und einer Funktion  $h \in C^2[x_0, x_N]$  mit  $y_i < h(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , wird eine Funktion  $y \in C^{1,2}[x_0, x_N]$  gesucht, die das Energiefunktional

$$\tilde{I}(y) = \int_{x_0}^{x_N} \frac{(y''(x))^2}{(1 + y'(x)^2)^{5/2}} dx$$

minimiert unter den Nebenbedingungen

$$y(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (1.2.11)$$

$$y'(x_0) = y'_0, \quad y'(x_N) = y'_N, \quad (1.2.12)$$

$$y(x) \leq h(x), \quad x_0 \leq x \leq x_N. \quad (1.2.13)$$

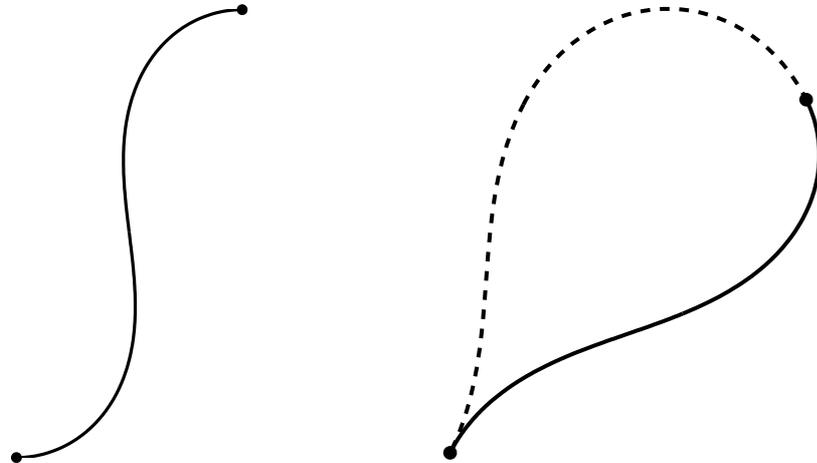


Abbildung 1.1: Die Spur der Kurve aus Beispiel 1.1.

Die Spuren der beiden Kurven aus Beispiel 1.2.

Die Formulierung von Problem 1.3 hat den für praktische Anwendungen mitunter einschränkenden Nachteil koordinatenabhängig zu sein. So muß für die Interpolationspunkte

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_N \quad (1.2.14)$$

vorausgesetzt werden. Betrachtet man nur den Fall von zwei Interpolationspunkten, so erfüllt, wie im zweiten Kapitel bewiesen wird, jede „Lösung“ von Problem 1.1 bzw. 1.2 nach einer geeigneten Rotation des Koordinatensystems die Voraussetzungen von Problem 1.3. Diese Eigenschaft hilft bei der Lösung eines konkreten Problems wenig, da man den Drehwinkel erst nach Berechnung der Lösung kennt. Diese Problematik verdeutlicht das folgende Beispiel.

**Beispiel 1.1.** Gegeben seien die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (1, 2)^T$  und die Tangentenwinkel  $\theta_0 = \theta_1 = 0$ . Für die Lösung von Problem 1.2, die mit dem Algorithmus aus dem dritten Kapitel berechnet werden kann, gilt nicht  $\cos \theta \geq 0$ . Daher ist sie keine Lösung von Problem 1.3, obwohl die Interpolationsdaten die Voraussetzungen von Problem 1.3 erfüllen. Die Spur dieser Kurve ist im linken Teil von Abbildung 1.1 zu sehen.

Daß man in Problem 1.1 bzw. 1.2 die Randbedingung (1.2.5) nicht durch Bedingung (1.2.12)

$$\tan \theta(0) = y'_0, \quad \tan \theta(s_N) = y'_N$$

ersetzen kann, zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 1.2.** Gegeben seien die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 1)^T$  und die Tangentensteigungen  $y'_0 = 2$  und  $y'_1 = -2$ . Sucht man eine Lösung von Problem 1.3, so erhält man als Lösung die Kurve, die in Abbildung 1.1 gestrichelt gezeichnet ist. Sie ist eine Lösung von Problem 1.1 zu den Tangentenwinkeln  $\theta_0 = -\theta_1 \approx 1.1071$ . Ihre Länge

ist  $L := s_1 \approx 1.4278$  und das Funktional hat den Wert  $\tilde{I}(y) \approx 8.0844$ . Sucht man dagegen eine Lösung der allgemeineren Problemstellung 1.1, erhält man für die Tangentenwinkel  $\theta_0 \approx 1.1071$  und  $\theta_1 \approx 2.0344$  eine Kurve, deren Funktional den Wert  $I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_1) \approx 7.1914$  hat und deren Länge  $L := s_1 \approx 1.1128$  ist. Die Spur dieser Kurve ist rechts in Abbildung 1.1 durchgezogen gezeichnet. In einem geeignet gedrehten Koordinatensystem, löst diese Kurve auch Problem 1.3.

In den folgenden Abschnitten werden nun Lösungen der Probleme 1.1 bzw 1.2, d.h. globale oder lokale Minima, betrachtet und einige wichtige Eigenschaften, die sie besitzen hergeleitet.

### 1.3 Globale oder lokale Minima?

Um die Existenz globaler Minima behandeln zu können, müssen zunächst einige grundlegende Begriffe definiert werden. Diese werden auch im Abschnitt 1.4 benötigt.

#### Definition 1.4.

- (a) Die Menge aller *zulässigen* Kurven von Problem 1.2 wird definiert durch

$$M := \{(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) : \Delta_N = \{0 < s_1 < \dots < s_N\}, \mathbf{z} \in C^{1,2}([0, s_N], \mathbb{R}^2), \\ \theta \in C^{0,1}[0, s_N] \text{ lösen (1.2.3)-(1.2.7)}\}.$$

- (b) Eine Menge  $U_\varepsilon \subset M$  wird  $\varepsilon$ -Umgebung von  $(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*) \in M$  genannt, wenn  $\varepsilon > 0$  und

$$U_\varepsilon := \{(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) \in M : |s_i^* - s_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, N, \text{ und} \\ \|\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}^*(s)\|_\infty < \varepsilon, |\theta(s) - \theta^*(s)| < \varepsilon \text{ für } 0 \leq s \leq \min\{s_N, s_N^*\}\}$$

gelten, wobei  $\|\cdot\|_\infty$  die Maximumnorm bezeichnet.

- (c) Eine zulässige Kurve  $(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*) \in M$  heißt ein *globales Minimum* von Problem 1.2, wenn  $I(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*) \leq I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$  für alle zulässigen Kurven  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) \in M$  gilt.
- (d) Eine zulässige Kurve  $(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*) \in M$  heißt ein *lokales Minimum* von Problem 1.2, wenn eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon \subset M$  von  $(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*)$  existiert, so daß

$$I(\mathbf{z}^*, \theta^*, \Delta_N^*) \leq I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$$

für alle  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) \in U_\varepsilon$  gilt.

Analog kann man diese Begriffe für Problem 1.1 definieren.

In der Literatur wurde Problem 1.1 in verschiedenen Arbeiten behandelt, zum Beispiel in REINSCH (1981,1997) und BRUNETT & WENDT (1997). Dabei wurde schon in BIRKHOFF & DE BOOR (1965) darauf hingewiesen, daß für dieses Problem im allgemeinen kein globales Minimum existiert. Eine Ausnahme ist der Fall, wenn eine Gerade eine zulässige Kurve ist. In SCHULZE (1990, S. 30f) wird der folgende Satz bewiesen.

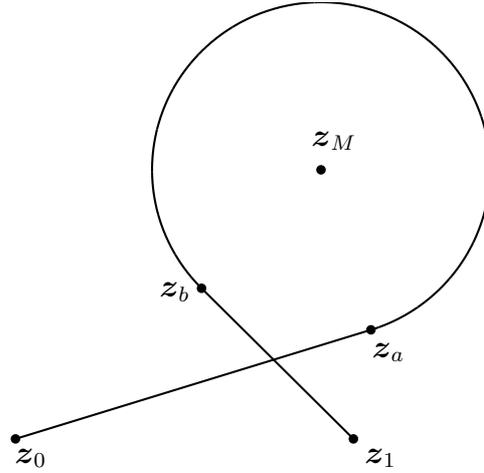


Abbildung 1.2: Eine zulässige Kurve bestehend aus Kreisbogen und Geradenstücken, deren Biegeenergie mit wachsendem Radius beliebig klein werden kann.

**Satz 1.5.** Für das Problem 1.1 mit den zwei Interpolationspunkten  $z_0, z_1$  und den Tangentenwinkeln  $\theta_0, \theta_1$  existiert kein globales Minimum, falls die Tangentialvektoren nicht parallel sind, d.h. es kein  $n \in \mathbb{N}$  gibt für das  $|\theta_0 - \theta_1| = n\pi$  gilt.

Anstelle eines allgemeinen Beweises soll hier nur an einem Beispiel gezeigt werden, wie man Kurven mit beliebig kleiner Biegeenergie konstruieren kann.

**Beispiel 1.3.** Betrachtet wird die Problemstellung 1.1 mit den Interpolationspunkten  $z_0 = (0, 0)^T$  und  $z_1 = (1, 0)^T$  und den Tangentenwinkeln  $\theta_0 \in (0, \frac{1}{2}\pi)$  und  $\theta_1 \in (-\frac{1}{2}\pi, 0)$ . Eine zulässige Kurve kann man mit Hilfe zweier Geradenstücke und eines Kreisbogens konstruieren, vgl. Abbildung 1.2. Dabei kann man für einen hinreichend großen Radius  $R > \bar{R}$  des Kreisbogens die Punkte  $z_a = (x_a, y_a)^T$ ,  $z_b = (x_b, y_b)^T$  und  $z_M = (x_M, y_M)^T$  mit den Abkürzungen  $a = \tan \theta_0$  und  $b = \tan \theta_1$  wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
 x_a &:= \frac{b}{b-a} + \frac{R(a-b)}{(1+ab)\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}(1+a^2)}, \\
 x_b &:= \frac{-b(1+c)}{a-b} - cx_a, \quad c := \sqrt{\frac{1+a^2}{1+b^2}}, \\
 y_M &:= \frac{(1+a^2)x_a + b^2(1-x_b) - x_b}{a-b}, \\
 x_M &:= -ay_M + (1+a^2)x_a, \\
 y_a &:= ax_a, \\
 y_b &:= b(x_b - 1).
 \end{aligned}$$

Für  $R = 0.5$ ,  $\theta_0 = 0.3$  und  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$  erhält man die Punkte  $z_a \approx (1.0518, 0.3254)^T$ ,

$\mathbf{z}_b \approx (0.5505, 0.4495)^\top$  und  $\mathbf{z}_M \approx (0.9041, 0.8030)^\top$ . Die Spur der Kurve

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} t\mathbf{z}_a, & 0 \leq t \leq t_a := 1 \\ \mathbf{z}_M + R(\sin \theta(t), -\cos \theta(t))^\top, & t_a \leq t \leq t_b := 2 \\ (t - t_b)(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_b) + \mathbf{z}_b, & t_b \leq t \leq t_1 := 3 \end{cases}$$

mit  $\theta(t) := (t - 1)(2\pi + \theta_1 - \theta_0) + \theta_0$  für  $1 \leq t \leq 2$  ist in Abbildung 1.2 zu sehen. Da diese Kurve regulär ist kann man sie nach Satz 1.1 nach der Bogenlänge parametrisieren und erhält damit eine zulässige Kurve  $\tilde{\mathbf{z}} \in C^{1,2}([0, s_1], \mathbb{R}^2)$  für Problem 1.1. Mit ihrer Krümmung

$$\kappa(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq s_a \\ R^{-1}, & s_a \leq s \leq s_b \\ 0, & s_b \leq s \leq s_1 \end{cases}$$

kann man ihre Biegungsenergie durch

$$I(\tilde{\mathbf{z}}, \theta, s_1) = \int_0^{s_1} \kappa^2(s) ds \leq \int_0^{2\pi R} R^{-2} ds = 2\pi R^{-1}$$

abschätzen. Diese Konstruktion kann für Kurven mit beliebig großem Radius  $R > \bar{R}$  durchgeführt werden. Deshalb kann man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2n\pi > \bar{R}$  eine zulässige Kurve  $\tilde{\mathbf{z}}_n$  mit Radius  $R_n = 2n\pi$  berechnen, für deren Energie

$$I(\tilde{\mathbf{z}}_n, \theta_n, s_1^{(n)}) \leq 2\pi R_n^{-1} = \frac{1}{n}$$

gilt. Betrachtet man den Grenzwert der Energie dieser Kurven, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\tilde{\mathbf{z}}_n, \theta_n, s_1^{(n)}) = 0,$$

d.h. die Folge  $(\tilde{\mathbf{z}}_n, \theta_n, s_1^{(n)})_{(n \in \mathbb{N})}$  ist eine Minimalfolge für das Minimierungsproblem. Die einzige Kurve, deren Krümmung und Energie verschwinden, ist jedoch eine Gerade, welche aufgrund der Voraussetzungen nicht zulässig ist. Also existiert in diesem Fall kein globales Minimum.

Das Problem mit beschränkter Länge, wie es bei JEROME (1975) und FISHER & JEROME (1976) betrachtet wird, besitzt dagegen ein globales Minimum. Dort wird das folgende Problem betrachtet:

**Problem 1.4.** Zu gegebenen Punkten  $\mathcal{P} = \{\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2\}$  und einer Zahl  $\bar{L} > 0$  werden eine Zahl  $L \in (0, \bar{L}]$ , eine  $C^{1,2}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und eine  $C^{0,1}$ -Funktion  $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gesucht, die das Funktional

$$I_f(\mathbf{z}, \theta, L) = \int_0^L (\theta'(s))^2 ds$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{auf } (0, L),$$

$$\mathcal{P} \subset \{\mathbf{z}(s) : 0 \leq s \leq L\}.$$

In dieser Problemformulierung wird also die Länge der Kurve restringiert. Ferner wird die Reihenfolge, in der die Punkte interpoliert werden, nicht festgelegt. Für dieses Problem gilt der folgende Satz, den man bei JEROME (1975) findet.

**Satz 1.6.** Sei  $(\mathbf{z}, \theta, L)$  zulässig für Problem 1.4, dann existiert ein globales Minimum von Problem 1.4.

In FISHER & JEROME (1976) wird die Funktion

$$\mathcal{I}(\bar{L}) := \inf\{I_f(\mathbf{z}, \theta, L) : (\mathbf{z}, \theta, L) \text{ zulässig für Problem 1.4}\}$$

genauer untersucht. Für sie gilt der folgende Satz:

**Satz 1.7.** Sei  $\bar{L}_0$  die kleinste Zahl, für die Problem 1.4 eine Lösung besitzt. Dann ist die Funktion  $\mathcal{I}$  auf dem Intervall  $[\bar{L}_0, \infty)$  stetig und monoton fallend.

*Beweis.* Siehe FISHER & JEROME (1976). □

Eine Zahl  $\bar{L}^* \geq \bar{L}_0$  heißt *stabil*, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, für das  $\mathcal{I}(\bar{L}^*) = \mathcal{I}(\bar{L})$  für alle  $\bar{L} \in [\bar{L}^*, \bar{L}^* + \varepsilon]$  gilt. Damit erhält man den folgenden Satz für lokale Minima von Problem 1.1:

**Satz 1.8.** Sei  $\bar{L}$  stabil und  $(\mathbf{z}, \theta, L)$  ein globales Minimum von Problem 1.4 mit maximaler Länge  $\bar{L}$ . Seien die Punkte  $\{\bar{\mathbf{z}}_i : i = 0, \dots, N\} := \mathcal{P}$  so numeriert, daß ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$  mit  $\mathbf{z}(s_i) = \bar{\mathbf{z}}_i$  existiert. Dann ist  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 1.1 mit den Interpolationspunkten  $\bar{\mathbf{z}}_i$  und ohne vorgegebene Tangentenwinkel am Rand (1.2.5).

*Beweis.* Siehe FISHER & JEROME (1976). □

Sätze über die Existenz von kritischen Punkten von Problem 1.1 mit beliebig vielen Wendepunkten für bestimmte Interpolationsdaten findet man bei GOLOMB & JEROME (1982) und LINNÉR (1993). Ein *kritischer Punkt* ist eine zulässige Kurve, die den notwendigen Bedingungen erster Ordnung genügt, die im folgenden Kapitel hergeleitet werden. Diese Kurven werden im folgenden als *nichtlineare Splines* bezeichnet.

**Satz 1.9.** Gegeben seien Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\cos \sigma, \sin \sigma)^T$ ,  $\theta_0$  und  $\theta_1$ . Dann kann man die folgenden Fälle unterscheiden:

1. Für  $|\theta_0 - \theta_1| > \pi$  gibt es keinen nichtlinearen Spline.
2. Für  $|\theta_0 - \theta_1| \leq \pi$  und  $|\theta_0 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi$  oder  $|\theta_1 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi$  gibt es eine obere Schranke abhängig von  $\sigma$ ,  $\theta_0$  und  $\theta_1$  für die Anzahl der Wendepunkte, die ein nichtlinearer Spline besitzen kann.

3. Für  $|\theta_0 - \theta_1| < \pi$ ,  $|\theta_0 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  und  $|\theta_1 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  gibt es nichtlineare Splines mit beliebig vielen Wendepunkten.

*Beweis.* In LINNÉR (1993) findet man einen sehr knappen Beweis. Zum Beweis dieses Satzes werden die notwendigen Bedingungen für lokale Minima von Problem 1.1, die im dritten Kapitel hergeleitet werden, benötigt. Interessierte Leser finden einen ausführlichen Beweis dieses Satzes im Anhang E.  $\square$

## 1.4 Invarianzeigenschaften

Für die Probleme 1.1 und 1.2 lassen sich Invarianzeigenschaften gegenüber der Wahl des Koordinatensystems zeigen. Diese Eigenschaften sind insbesondere für Anwendungen im CAD-Bereich wichtig und werden im dritten und vierten Kapitel bei der Formulierung der Algorithmen benötigt. Genauer beweisen wir im folgenden, daß die Problemstellung 1.1/1.2 invariant unter Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen des Koordinatensystem ist. D.h., wenn die Interpolationspunkte für Problem 1.1/1.2 gedreht, gespiegelt bzw. verschoben werden und entsprechend auch die Tangentenwinkel am Rand und die Restriktion, so erhält man die Lösung des neuen Problems aus der des Ausgangsproblems durch entsprechende Drehung, Spiegelung bzw. Verschiebung.

**Satz 1.10.** Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 1.2 zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\theta_0, \theta_N \in \mathbb{R}$  und der Restriktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . So ist die mit einer affin-linearen, bijektiven Transformation der Form

$$T(\mathbf{z}) := aA\mathbf{z} + b, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.4.1)$$

mit  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$  und einer orthogonalen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  transformierte Lösung ein lokales Minimum von Problem 1.2 zu den mit  $T$  transformierten Daten. Im einzelnen gilt:

- (a) Unter einer Bewegung  $T(\mathbf{z}) := A\mathbf{z} + b$  mit einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 2\pi),$$

ist die transformierte Lösung  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \Delta_N)$  mit  $\bar{\mathbf{z}} := T(\mathbf{z})$  und  $\bar{\theta} := \theta + \alpha$  ein lokales Minimum von Problem 1.2 mit den transformierten Daten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_i &:= T(\mathbf{z}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, & \bar{\theta}_k &:= \theta_k + \alpha, \quad k = 0, N, \\ \bar{g}(\bar{\mathbf{z}}) &:= g(T^{-1}(\bar{\mathbf{z}})), \quad \bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Die Krümmung und die Energie der Kurve sind invariant unter Bewegungen.

(b) Bei einer Spiegelung der Interpolationsdaten an der  $y$ -Achse

$$T(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{z}$$

ist die gespiegelte Lösung  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \Delta_N)$  mit  $\bar{\mathbf{z}} := T(\mathbf{z})$ , und  $\bar{\theta} := -\theta$  ein lokales Minimum von Problem 1.2 mit den transformierten Daten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_i &:= T(\mathbf{z}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, & \bar{\theta}_k &:= -\theta_k, \quad k = 0, N, \\ \bar{g}(\bar{\mathbf{z}}) &:= g(T^{-1}(\bar{\mathbf{z}})), \quad \bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Unter einer Spiegelung ist die Energie invariant, während für die Krümmung der transformierten Lösung  $\bar{\kappa} = -\kappa$  gilt.

(c) Bei einer Skalierung der Interpolationsdaten  $T(\mathbf{z}) := a\mathbf{z}$ ,  $a > 0$ , ist die skalierte Lösung  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N)$  mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}(as) &:= a\mathbf{z}(s), & \bar{\theta}(as) &:= \theta(s), & s &\in [0, s_N], \\ \bar{\Delta}_N &:= \{0 < \bar{s}_1 < \dots < \bar{s}_N\}, & \bar{s}_i &:= as_i \end{aligned}$$

ein lokales Minimum von Problem 1.2 mit den transformierten Daten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_i &:= a\mathbf{z}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, & \bar{\theta}_k &:= \theta_k, \quad k = 0, N, \\ \bar{g}(\bar{\mathbf{z}}) &:= g(T^{-1}(\bar{\mathbf{z}})), \quad \bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Für die Krümmung der skalierten Lösung gilt  $\bar{\kappa}(as) = \frac{1}{a}\kappa(s)$ ,  $s \in [0, s_N]$ .

*Beweis.* Jede orthogonale Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  läßt sich als

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \varepsilon \sin \alpha & \varepsilon \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \alpha \in [0, 2\pi), \quad \varepsilon \in \{\pm 1\},$$

schreiben. Setzt man dieses in die Transformation  $T$  aus (1.4.1) ein, so ist zu zeigen, daß die transformierte Lösung

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}(as) &:= T(\mathbf{z}(s)), & \bar{\theta}(as) &:= \varepsilon(\theta(s) + \alpha), & s &\in [0, s_N], \\ \bar{\Delta}_N &:= \{0 < \bar{s}_1 < \dots < \bar{s}_N\}, & \bar{s}_i &:= as_i, & i &= 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ein lokales Minimum von Problem 1.2 zu den transformierten Interpolationsdaten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_i &:= T(\mathbf{z}_i), & i = 0, 1, \dots, N, & & \bar{\theta}_k &:= \varepsilon(\theta_k + \alpha), & k = 0, N, \\ \bar{g}(\bar{\mathbf{z}}) &:= g(T^{-1}(\bar{\mathbf{z}})), & \bar{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2, & & & & \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

ist. Die Funktionen  $\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}$  erfüllen die Differentialgleichung (1.2.3)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}'(as) &= \frac{1}{a} \frac{d}{ds} \bar{\mathbf{z}}(as) = A\mathbf{z}'(s) = A(\cos \theta(s), \sin \theta(s))^T \\ &= (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha, \varepsilon(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha))^T \\ &= (\cos(\theta + \alpha), \varepsilon \sin(\theta + \alpha))^T = (\cos \bar{\theta}(as), \sin \bar{\theta}(as))^T, \end{aligned}$$

da die Funktionen  $\mathbf{z}, \theta$  die Gleichung (1.2.3) erfüllen. Das gleiche gilt offensichtlich auch für Gleichung (1.2.4)-(1.2.7) mit den transformierten Daten (1.4.2). Für die Krümmung  $\bar{\kappa} = \bar{\theta}'$  der transformierten Lösung gilt

$$\bar{\kappa}(as) = \bar{\theta}'(as) = \frac{1}{a} \frac{d}{ds} \bar{\theta}(as) = \frac{1}{a} \frac{d}{ds} (\varepsilon \theta(s) + \alpha) = \frac{\varepsilon}{a} \theta'(s) = \frac{\varepsilon}{a} \kappa(s), \quad s_0 \leq s \leq s_N.$$

Sie besitzt mit  $\bar{s} = as$  die Energie

$$I(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}) = \int_0^{\bar{s}_N} (\bar{\kappa}(\bar{s}))^2 d\bar{s} = \int_0^{s_N} a(\bar{\kappa}(as))^2 ds = \int_0^{s_N} \frac{1}{a} (\kappa(s))^2 ds = \frac{1}{a} I(\mathbf{z}, \theta, \Delta).$$

Nun bleibt nur noch zu zeigen, daß die transformierte Kurve ein lokales Minimum von Problem 1.2 mit den transformierten Interpolationsdaten ist. Angenommen, dieses ist nicht der Fall. Dann gibt es in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon$  um  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N)$  Funktionen  $\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\theta}$  und ein Gitter  $\tilde{\Delta}_N$ , die die Nebenbedingungen (1.2.3)-(1.2.7) des transformierten Problems erfüllen und für die das Energiefunktional einen kleineren Wert hat. Transformiert man  $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\theta}, \tilde{\Delta}_N)$  mit der Transformation

$$T^{-1} \mathbf{z} = \frac{1}{a} A^{-1} (\mathbf{z} - b) = \frac{1}{a} A^{-1} \mathbf{z} - \frac{1}{a} A^{-1} b,$$

so erhält man eine zulässige Kurve  $(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\theta}, \hat{\Delta}_N)$  für das ursprüngliche Problem. Da die Transformation stetig und  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$  ein lokales Minimum ist, kann man die Umgebung  $U_\varepsilon$  so klein wählen, daß für die Energie der Kurven

$$I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) \geq I(\hat{\mathbf{z}}, \hat{\theta}, \hat{\Delta}_N) = a I(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\theta}, \tilde{\Delta}_N) > a I(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N) = I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$$

gilt, was ein Widerspruch ist. □

Im dritten Kapitel bei der Beschreibung des Algorithmus wird benutzt, daß unter einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation sich das Vorzeichen der Krümmung ändert.

**Satz 1.11.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 1.2 zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\theta_0, \theta_N \in \mathbb{R}$  und der Restriktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Unter der orientierungsumkehrenden Parametertransformation  $\varphi(s) := s_N - s$ ,  $0 \leq s \leq s_N$ , ist die transformierte Lösung  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N)$  mit*

$$\bar{\mathbf{z}} := \mathbf{z} \circ \varphi, \quad \bar{\theta} := \theta \circ \varphi + \pi, \quad \bar{s}_i := s_N - s_{N-i}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

und  $\bar{\Delta}_N := \{0 < \bar{s}_1 < \dots < \bar{s}_N\}$  ein lokales Minimum von Problem 1.2 mit den transformierten Daten

$$\bar{\mathbf{z}}_i := \mathbf{z}_{N-i}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \bar{\theta}_k := \theta_{N-k} + \pi, \quad k = 0, N, \quad \bar{g} := g.$$

Für die Krümmung der transformierten Kurve gilt  $\bar{\kappa} = -\kappa \circ \varphi$ .

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 1.10 zeigt man zunächst, daß  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N)$  die Differentialgleichung (1.2.3)

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{z}}' &= (\mathbf{z}' \circ \varphi)\varphi' = -(\cos(\theta \circ \varphi), \sin(\theta \circ \varphi))^T \\ &= (\cos(\pi + \theta \circ \varphi), \sin(\pi + \theta \circ \varphi))^T = (\cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta})^T\end{aligned}$$

und die Interpolationsbedingungen (1.2.4)-(1.2.5) für  $i = 0, \dots, N$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{z}}(\bar{s}_{N-i}) &= \bar{\mathbf{z}}(s_N - s_i) = \mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i = \bar{\mathbf{z}}_{N-i}, \\ \bar{\theta}(\bar{s}_{N-i}) &= \bar{\theta}(s_N - s_i) = \pi + \theta(s_i) = \pi + \theta_i = \bar{\theta}_{N-i}\end{aligned}$$

erfüllt. Die Restriktion (1.2.7) gilt offensichtlich. Daß  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\Delta}_N)$  ein lokales Minimum ist, beweist man analog zum Beweis von Satz 1.10.  $\square$

## Kapitel 2

# Notwendige Bedingungen

In diesem Kapitel werden notwendige Bedingungen für lokale Minima von Problem 1.2 hergeleitet. Dazu wird das Problem als Optimalsteuerungsproblem formuliert und notwendige Bedingungen aus der Theorie optimaler Steuerungen darauf angewendet, deren ausführliche Herleitung man im Anhang A findet. Dieses führt zu einer Randwertaufgabe, deren Lösungen die notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllen. In Abschnitt 2.2 werden die Differentialgleichungen mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen, siehe Anhang B, gelöst und ein nichtlineares Gleichungssystem aufgestellt welches zur Randwertaufgabe äquivalent ist. Dieses wird im dritten und vierten Kapitel zur Herleitung eines Algorithmus zur Berechnung von nichtlinearen Splines benutzt. Im letzten Abschnitt werden Besonderheiten der Struktur eines nichtlinearen Spline unter einer affin-linearen Restriktion oder eines Kreises als Restriktion bewiesen.

### 2.1 Notwendige Bedingungen für nichtlineare Splines

In diesem Abschnitt werden zunächst die benötigten Begriffe aus der Theorie optimaler Steuerungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem eingeführt und die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für lokale Minima dieses Problems aufgeführt. Anschließend wird das Problem 1.2 als Optimalsteuerungsproblem formuliert und die notwendigen Bedingungen darauf angewendet.

**Problem 2.1 (Allgemeines Optimalsteuerungsproblem).** *Gesucht werden ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < \dots < s_N\}$  und Funktionen  $u \in C_{\text{stkw}}[s_0, s_N]$  und  $\mathbf{x} \in C^{0,1}([s_0, s_N], \mathbb{R}^n)$ , so daß das Zielfunktional*

$$I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) \, ds \quad (2.1.1)$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, u) \quad \text{in } [s_0, s_N], \quad (2.1.2)$$

$$\Psi_i(\mathbf{x}(s_i)) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.1.3)$$

$$g(\mathbf{x}(s)) \leq 0, \quad s_0 \leq s \leq s_N. \quad (2.1.4)$$

Die Funktionen  $f_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  ( $k_i \leq n$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ) und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien hinreichend oft stetig differenzierbar. Für Problem 1.2 bzw. das äquivalente Optimalsteuerungsproblem 2.2 ist diese Voraussetzung erfüllt, da die Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar sind. Im folgenden werden die stückweise stetige Funktion  $u$  als *Steuerung* und die  $C^{0,1}$ -Funktion  $\mathbf{x}$  als *Zustandsvariable* bezeichnet.

Der Begriff eines lokalen Minimums von Problem 2.1 wird analog zu Definition 1.4 definiert.

**Definition 2.1.**

- (a) Die Menge aller *zulässigen Lösungen* von Problem 2.1 wird durch

$$M := \{(\mathbf{x}, u, \Delta_N) : \Delta_N = \{0 < s_1 < \dots < s_N\}, \mathbf{x} \in C^{0,1}([0, s_N], \mathbb{R}^n), \\ u \in C_{\text{stkw}}[0, s_N] \text{ erfüllen (2.1.2)-(2.1.4)}\}$$

definiert.

- (b) Eine Menge  $U_\varepsilon \subset M$  wird  $\varepsilon$ -*Umgebung* von  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) \in M$  genannt, wenn  $\varepsilon > 0$  und

$$U_\varepsilon := \{(\mathbf{x}, u, \Delta_N) \in M : |s_i^* - s_i| < \varepsilon, i = 1, \dots, N, \text{ und} \\ \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}^*(s)\|_\infty < \varepsilon \text{ für } 0 \leq s \leq \min\{s_N, s_N^*\}\}$$

gelten.

- (c) Eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) \in M$  heißt ein *globales Minimum* von Problem 2.1, wenn  $I_a(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) \leq I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N)$  für alle zulässigen Lösungen  $(\mathbf{x}, u, \Delta_N) \in M$  gilt.
- (d) Eine zulässige Lösung  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) \in M$  heißt ein *lokales Minimum* von Problem 2.1, wenn eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon \subset M$  von  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  existiert, so daß

$$I_a(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) \leq I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N)$$

für alle zulässigen Lösungen  $(\mathbf{x}, u, \Delta_N) \in U_\varepsilon$  gilt.

Zur Formulierung der notwendigen Bedingungen werden einige grundlegende Begriffe der Optimalsteuerungstheorie wie Berührungspunkte, Randstücke oder die Ordnung einer Zustandsbeschränkung benötigt, die im folgenden definiert werden.

**Definition 2.2.** Sei  $(\mathbf{x}, u, \Delta_N)$  eine zulässige Lösung von Problem 2.1.

- (a) Ein Intervall  $[\tau_1, \tau_2] \subset [0, s_N]$  mit  $\tau_1 < \tau_2$  heißt *Randstück*, wenn  $g(\mathbf{x}(s)) = 0$  für alle  $s \in [\tau_1, \tau_2]$  gilt. Der Punkt  $\tau_1$  bzw.  $\tau_2$  heißt *Aufsprungpunkt* bzw. *Absprungpunkt* des Randstückes  $[\tau_1, \tau_2]$ , wenn ein  $\delta > 0$  existiert, so daß  $g(\mathbf{x}(\tau_1 - \varepsilon)) < 0$  bzw.  $g(\mathbf{x}(\tau_2 + \varepsilon)) < 0$  für alle  $\varepsilon \in (0, \delta)$  gelten.
- (b) Ein Punkt  $\tau_0 \in [0, s_N]$  heißt *Berührungspunkt*, wenn  $g(\mathbf{x}(\tau_0)) = 0$  und  $g(\mathbf{x}(s)) < 0$  für alle  $s \neq \tau_0$  in einer Umgebung von  $\tau_0$  gelten. Aufsprung-, Absprung- und Berührungspunkte bezeichnet man auch als *Verknüpfungspunkte*.
- (c) Ein Intervall  $J \subset [0, s_N]$  heißt *freies Teilstück*, wenn die Zustandsbeschränkung in diesem Intervall weder einen Berührungspunkt noch ein Randstück besitzt und kein Knoten des Interpolationsgitters in diesem Intervall liegt, d.h. wenn  $g(\mathbf{x}(s)) < 0$ , für alle  $s \in J$  und  $J \cap \{s_i : i = 0, \dots, N\} = \emptyset$  gelten.

**Definition 2.3.** Die rechte Seite  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Differentialgleichungssystems  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$  sei eine  $C^l$ -Funktion mit  $l \geq p \geq 1$  und die Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine  $C^p$ -Funktion. Die Funktionen  $g^i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  werden rekursiv durch

$$g^0(\mathbf{x}, u) := g(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad g^i(\mathbf{x}, u) := g_{\mathbf{x}}^{i-1}(\mathbf{x}, u)f(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, \quad (2.1.5)$$

$i = 1, \dots, p$ , definiert. Dann nennt man die Zahl  $p$  die *Ordnung* der Zustandsbeschränkung  $g$  bzgl. der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u)$ , wenn  $p$  der kleinste Index ist, für den  $g^p$  die Steuerung  $u$  explizit enthält, d.h. wenn gilt

$$\frac{\partial g^i}{\partial u} \equiv 0, \quad i = 0, \dots, p-1, \quad \text{und} \quad \frac{\partial g^p}{\partial u} \neq 0. \quad (2.1.6)$$

Mit diesen Bezeichnungen kann man die notwendigen Bedingungen für Problem 2.1 formulieren. Eine ausführliche Herleitung der notwendigen Bedingungen findet man im Anhang in Abschnitt A.

**Satz 2.4 (Notwendige Bedingungen).** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem 2.1 mit den Verknüpfungspunkten  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , wobei für alle Randstücke  $[\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2]$  der Zustandsbeschränkung  $g$  mit der Ordnung  $p$  die Auflösbarkeitsbedingung

$$g_u^p(\mathbf{x}(s), u(s)) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in [\tau_1, \tau_2] \quad (2.1.7)$$

gelte. Dann existieren stückweise stetige Lagrange-Parameter  $\eta \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$  und  $\lambda \in C_{\text{stkw}}([0, s_N], \mathbb{R}^n)$ , die  $C^\infty$ -Funktionen auf allen freien Teilstücken und auf allen Randstücken  $(\tau_1, \tau_2)$  mit  $(\tau_1, \tau_2) \cap \{s_i \mid i = 0, \dots, N\} \neq \emptyset$  sind, und konstante Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $l_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, N$  und  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, d.h.

$$(\lambda_0, \lambda(t), \eta(t), l_0, \dots, l_N, a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_l) \neq 0 \quad (2.1.8)$$

und für die mit der erweiterten Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda, \eta) = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \lambda^T f(\mathbf{x}, u) + \eta g(\mathbf{x}) \quad (2.1.9)$$

die folgenden Bedingungen gelten:

1. adjungierte Differentialgleichungen (intervallweise):

$$\lambda' = -H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, u^*, \lambda, \eta) \quad (2.1.10)$$

2. Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \lambda^T(s_0) &= -l_0^T \Psi_{0,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_0)) - a_0 g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_0)), \\ \lambda^T(s_N) &= l_N^T \Psi_{N,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_N)) + a_N g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_N)) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

3. Transversalitätsbedingungen  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\lambda^T(s_i^+) = \lambda^T(s_i^-) - l_i^T \Psi_{i,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_i)) - a_i g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_i)) \quad (2.1.12)$$

4. Bedingungen an den Verknüpfungspunkten  $\tau_j \notin \{s_i \mid i = 0, \dots, N\}$ ,  $j = 1, \dots, l$ :

$$\lambda^T(\tau_j^+) = \lambda^T(\tau_j^-) - b_j g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\tau_j)) \quad (2.1.13)$$

5. Minimumprinzip für  $s \in [0, s_N]$  f.ü.:

$$u^*(s) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}} H(\mathbf{x}^*(s), u, \lambda(s), \eta(s)), \quad (2.1.14)$$

$$H(\mathbf{x}^*(s), u^*(s), \lambda(s), \eta(s)) = 0 \quad (2.1.15)$$

6. Vorzeichen- und Komplementaritätsbedingungen:

$$\eta(s) \geq 0, \quad \eta(s) g(\mathbf{x}(s)) = 0 \quad \text{für alle } s \in [s_0, s_N], \quad (2.1.16)$$

$$a_i \geq 0, \quad a_i g(\mathbf{x}(s_i)) = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.1.17)$$

$$b_j \geq 0, \quad b_j g(\mathbf{x}(\tau_j)) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (2.1.18)$$

Zulässige Lösungen von Problem 2.1, die diese notwendigen Bedingungen erster Ordnung erfüllen, nennt man auch *kritische Punkte*. Da es sich um keine hinreichenden Bedingungen handelt, gibt es auch kritische Punkte, die keine lokalen Minima sind. Für Problem 1.2 wird hierauf in Abschnitt 2.3 näher eingegangen.

**Bemerkung 2.5.** Im Fall  $\lambda_0 \neq 0$  kann man die Lagrange-Parameter in Satz 2.4 umskalieren, so daß  $\lambda_0 = 1$  gilt. Den Fall  $\lambda_0 = 0$  kann man für viele konkrete Beispiele, z.B. auch für das Problem 1.2, vgl. Satz 2.7, zum Widerspruch führen, da nach Satz 2.4 die Lagrange-Multiplikatoren nicht alle verschwinden.

Um diese notwendigen Bedingungen auf das Problem 1.2 anwenden zu können, wird es mit der Steuerung  $\kappa = \theta'$  in ein äquivalentes Optimalsteuerungsproblem überführt.

**Problem 2.2.** Zu gegebenen Interpolationsknoten  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, \dots, N$ , mit  $\mathbf{z}_i \neq \mathbf{z}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0, \theta_N$  und einer Funktion  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$  mit  $g(\mathbf{z}_i) < 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ , und  $\nabla g(\mathbf{z}) \neq 0$  für alle  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  werden ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$ , Zustandsvariablen  $\mathbf{z} \in C^{1,2}([s_0, s_N], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{0,1}[s_0, s_N]$  und eine Steuerung  $\kappa \in C_{\text{stkw}}[s_0, s_N]$  gesucht, die das Funktional

$$I_o(\mathbf{z}, \kappa, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} \kappa^2 ds \quad (2.1.19)$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T, \quad \text{in } [s_0, s_N], \quad (2.1.20)$$

$$\theta' = \kappa, \quad \text{in } [s_0, s_N], \quad (2.1.21)$$

$$0 = \mathbf{z}(s_i) - \mathbf{z}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.1.22)$$

$$0 = \theta(s_k) - \theta_k, \quad k = 0, N,$$

$$g(\mathbf{z}(s)) \leq 0, \quad s_0 \leq s \leq s_N. \quad (2.1.23)$$

Dieses Optimalsteuerungsproblem ist ein Spezialfall des allgemeinen Optimalsteuerungsproblems 2.1, bei dem die Funktionen

$$f_0(\mathbf{x}, u) = u^2,$$

$$f(\mathbf{x}, u) = (\cos x_3, \sin x_3, u)^T,$$

$$\Psi_k(\mathbf{x}(s_k)) = (\mathbf{x} - (\mathbf{z}_k^T, \theta_k)^T), \quad k = 0, N,$$

$$\Psi_i(\mathbf{x}(s_i)) = ((x_1, x_2)^T - \mathbf{z}_i), \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$g(\mathbf{x}) = g((x_1, x_2)^T)$$

mit  $\mathbf{x}^T = (\mathbf{z}^T, \theta)$  und  $u = \kappa$  beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Eine weitere Voraussetzung, die das Optimalsteuerungsproblem erfüllen muß, damit man die notwendigen Bedingungen aus Satz 2.4 anwenden kann, ist die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7). Diese wird von den beiden in dieser Arbeit betrachteten Restriktionen von Problem 2.2 erfüllt.

**Satz 2.6.** a) Eine affin-lineare Restriktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0$$

besitzt die Ordnung zwei bzgl. der Differentialgleichung (2.1.20) und erfüllt die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7). Auf einem Randstück gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 2.3

$$g^0(\mathbf{z}, \kappa) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G),$$

$$g^1(\mathbf{z}, \kappa) = \sin(\beta - \theta) \quad \text{und}$$

$$g^2(\mathbf{z}, \kappa) = \pm \kappa.$$

b) Auch die Restriktion durch einen Kreis

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \leq 0, \quad R > 0,$$

besitzt die Ordnung zwei bzgl. der Differentialgleichung (2.1.20) und erfüllt die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7). Auf einem Randstück gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 2.3

$$\begin{aligned} g^0(\mathbf{z}, \kappa) &= \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2, \\ g^1(\mathbf{z}, \kappa) &= 2(\cos \theta, \sin \theta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_K) \quad \text{und} \\ g^2(\mathbf{z}, \kappa) &= 2(1 \pm R\kappa). \end{aligned}$$

*Beweis.* Zu a) Für eine affin-lineare Restriktion erhält man durch Einsetzen in Definition 2.3

$$\begin{aligned} g^0(\mathbf{z}, \kappa) &= (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \quad \text{und} \\ g^1(\mathbf{z}, \kappa) &= (\sin \beta, -\cos \beta)\mathbf{z}' = \sin \beta \cos \theta - \cos \beta \sin \theta = \sin(\beta - \theta). \end{aligned}$$

Da auf einem Randstück  $g^1 = 0$  gilt, folgt hieraus  $\theta = n\pi + \beta$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Damit gilt für die Funktion  $g^2$  auf einem Randstück

$$g^2(\mathbf{z}, \kappa) = -\kappa \sin \beta \sin \theta - \kappa \cos \beta \cos \theta = \cos(\beta - \theta)\kappa = \pm \kappa$$

und die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7)  $g_u^p \neq 0$  ist erfüllt.

Zu b) Für die Restriktion durch einen Kreis erhält man durch Einsetzen in Definition 2.3

$$\begin{aligned} g^0(\mathbf{z}, \kappa) &= \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \quad \text{und} \\ g^1(\mathbf{z}, \kappa) &= 2(\mathbf{z} - \mathbf{z}_K)^T \mathbf{z}' = 2(\cos \theta, \sin \theta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_K). \end{aligned}$$

Da auf einem Randstück  $g^1(\mathbf{z}, \kappa) = 0$  gilt, stehen dort die Vektoren  $(\cos \theta, \sin \theta)^T$  und  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_K$  senkrecht aufeinander und es gilt  $(-\sin \theta, \cos \theta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_K) = \pm R$ . Damit gilt für die Funktion  $g^2$  auf einem Randstück

$$g^2(\mathbf{z}, \kappa) = 2(-\sin \theta, \cos \theta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_K)\theta' + 2(\cos \theta, \sin \theta)\mathbf{z}' = \pm 2R\kappa + 2$$

und die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7)  $g_u^p \neq 0$  ist erfüllt.  $\square$

Damit kann man die notwendigen Bedingungen aus Satz 2.4 auf Problem 2.2 anwenden. Sei  $(\mathbf{z}^*, \theta^*, \kappa^*, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 mit den Verknüpfungspunkten  $\tau_j, j = 1, \dots, l$ . Für alle Randstücke  $[\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2]$  der Zustandsbeschränkung  $g$  mit der Ordnung  $p$  gelte die Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7)

$$g_\kappa^p(\mathbf{x}(s), \kappa(s)) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in [\tau_1, \tau_2],$$

die nach Satz 2.6 für die in dieser Arbeit untersuchten Restriktionen erfüllt ist. Dann existieren nach Satz 2.4 stückweise stetige Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{\mathbf{z}} \in C_{\text{stkw}}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$ ,  $\lambda_{\theta}, \eta \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$ , die  $C^\infty$ -Funktionen auf allen freien Teilstücken und auf allen Randstücken  $(\tau_1, \tau_2)$  mit  $(\tau_1, \tau_2) \cap \{s_i \mid i = 0, \dots, N\} \neq \emptyset$  sind, und konstante Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $l_{i\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^2$ ,  $l_{i\theta} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $b_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, d.h.

$$(\lambda_0, \lambda_{\mathbf{z}}(t), \lambda_{\theta}(t), \eta(t), l_{0\mathbf{z}}, \dots, l_{N\mathbf{z}}, l_{0\theta}, \dots, l_{N\theta}, b_1, \dots, b_l) \neq 0, \quad (2.1.24)$$

und für die folgendes gilt: Nach (2.1.9) lautet die Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \lambda_{\mathbf{z}}, \lambda_{\theta}, \eta) := \lambda_0 \kappa^2 + (\cos \theta, \sin \theta) \lambda_{\mathbf{z}} + \lambda_{\theta} \kappa + \eta g(\mathbf{z}). \quad (2.1.25)$$

Nach (2.1.10) und (2.1.16) gelten intervallweise die adjungierten Differentialgleichungen

$$\lambda'_{\mathbf{z}} = -\eta g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}^*), \quad (2.1.26)$$

$$\lambda'_{\theta} = (\sin \theta^*, -\cos \theta^*) \lambda_{\mathbf{z}} \quad (2.1.27)$$

mit

$$\eta(s) \geq 0, \quad \text{und} \quad \eta(s)g(\mathbf{z}(s)) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq s_N. \quad (2.1.28)$$

Da nach Voraussetzung  $g(\mathbf{z}_i) < 0$  ist, verschwinden nach (2.1.17) die Parameter  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , und nach (2.1.11), (2.1.20)-(2.1.21) gelten die Randbedingungen

$$\lambda_{\mathbf{z}}(0) = -l_{0\mathbf{z}}, \quad \lambda_{\mathbf{z}}(s_N) = l_{N\mathbf{z}}, \quad (2.1.29)$$

$$\lambda_{\theta}(0) = -l_{0\theta}, \quad \lambda_{\theta}(s_N) = l_{N\theta}, \quad (2.1.30)$$

d.h. die Lagrange-Parameter sind am Rand frei. Sind die Tangentenwinkel am Rand (2.1.22) nicht vorgegeben, so erhält man die natürliche Randbedingung

$$\lambda_{\theta}(0) = \lambda_{\theta}(s_N) = 0. \quad (2.1.31)$$

An den inneren Knoten gelten nach (2.1.12) die Transversalitätsbedingungen

$$\lambda_{\mathbf{z}}(s_i^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(s_i^-) - l_{i\mathbf{z}}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (2.1.32)$$

$$\lambda_{\theta}(s_i^+) = \lambda_{\theta}(s_i^-), \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (2.1.33)$$

Nach (2.1.13) erhält man an den Verknüpfungspunkten

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau_j^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(\tau_j^-) - b_j g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}^*(\tau_j)), \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.1.34)$$

$$\lambda_{\theta}(\tau_j^+) = \lambda_{\theta}(\tau_j^-), \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.1.35)$$

mit  $b_j \geq 0$  und  $b_j g(\mathbf{z}^*(\tau_j)) = 0$  für  $j = 1, \dots, l$ . Daraus folgt, daß der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\theta}$  an den Interpolations- und Verknüpfungspunkten stetig ist, während der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\mathbf{z}}$  an den Interpolations- und Verknüpfungspunkten Sprünge haben kann.

Nach dem Minimumprinzip (2.1.14)-(2.1.15) verschwindet die Hamilton-Funktion für das lokale Minimum

$$H(\mathbf{z}^*, \theta^*, \kappa^*, \lambda_{\mathbf{z}}, \lambda_{\theta}, \eta) \equiv 0 \quad (2.1.36)$$

und für die optimale Steuerung  $\kappa^*$  gilt

$$\kappa^*(s) = \arg \min_{\kappa \in \mathbb{R}} H(\mathbf{z}^*(s), \theta^*(s), \kappa, \lambda_{\mathbf{z}}(s), \lambda_{\theta}(s), \eta(s)), \quad 0 \leq s \leq s_N, \quad (2.1.37)$$

und für  $\lambda_0 \neq 0$  mit  $H_{\kappa} = 0$

$$\kappa^* = \frac{-\lambda_{\theta}}{2\lambda_0}. \quad (2.1.38)$$

Den Fall  $\lambda_0 = 0$  kann man ausschließen. Im folgenden Satz 2.7 wird gezeigt, daß, wenn man  $\lambda_0 = 0$  voraussetzt, auch alle anderen Lagrange-Parameter verschwinden, welches nach (2.1.24) nicht erlaubt ist. Dabei werden zur besseren Lesbarkeit für ein lokales Minimum  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  die Abkürzungen

$$H[s] := H(\mathbf{z}(s), \theta(s), \kappa(s), \lambda_{\mathbf{z}}(s), \lambda_{\theta}, \eta(s)) \quad \text{und} \quad g[s] := g(\mathbf{z}(s))$$

verwendet.

**Satz 2.7.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2. Dann verschwindet der Lagrange-Parameter  $\lambda_0$  nicht und man kann  $\lambda_0 = 1$  setzen.*

*Beweis.* Im Fall  $\lambda_0 = 0$  hängt die Hamilton-Funktion nur noch linear von der Steuerung  $\kappa$  ab, d.h. sie besitzt die Form  $H = A + B\kappa$ . Da der Steuerbereich unbeschränkt ist, gilt aufgrund des Minimumprinzips (2.1.37)  $0 = B = \lambda_{\theta}$ . Daher verschwindet auch die Ableitung des Lagrange-Parameters  $\lambda_{\theta}$ . Mit der adjungierten Differentialgleichung (2.1.27) folgt daraus

$$0 \equiv \lambda'_{\theta} = (\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_{\mathbf{z}}. \quad (2.1.39)$$

Setzt man  $\lambda_0 = 0$  und  $\lambda_{\theta} = 0$  in die Hamilton-Funktion (2.1.25) ein, so erhält man mit (2.1.28) und (2.1.36)

$$0 = H[s] = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))\lambda_{\mathbf{z}}(s), \quad s_0 < s < s_N. \quad (2.1.40)$$

Das Gleichungssystem (2.1.39)-(2.1.40) ist regulär und besitzt die eindeutig bestimmte Lösung  $\lambda_{\mathbf{z}} \equiv 0$ . Daraus folgt  $\lambda'_{\mathbf{z}} \equiv 0$  und  $\eta \equiv 0$  nach (2.1.26). Ebenso verschwinden auch alle anderen Lagrange-Parameter: Es gilt  $l_{i\mathbf{z}} = 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ , und  $l_{i\theta} = 0$ ,  $i = 0, N$ , nach (2.1.29)-(2.1.32). Nach Gleichung (2.1.34) erhält man  $b_j = 0$  für alle Verknüpfungspunkte  $\tau_j$ . Damit ist gezeigt, daß alle Lagrange-Multiplikatoren im Widerspruch zu (2.1.24) verschwinden.  $\square$

Also kann man im folgenden  $\lambda_0 = 1$  setzen. Damit kann man aus den obigen notwendigen Bedingungen eine Mehrpunkttrandwertaufgabe zur Berechnung eines lokalen Minimums  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  des Steuerungsproblems 2.2 mit  $n$  Berührungspunkten  $\tau_{j0}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und  $m$  Randstücken  $[\tau_{j1}, \tau_{j2}]$ ,  $j = 1, \dots, m$ , und einer gegebenen Schaltstruktur aufstellen. Hierbei sei die Schaltstruktur durch Indexmengen

$$S_I = \{0, j_1, \dots, j_{N-1}, \tilde{N}\}, S_B = \{j_1, \dots, j_n\}, S_{R1} = \{j_1, \dots, j_m\}, S_{R2} = \{i + 1 | i \in S_{R1}\}$$

mit  $\tilde{N} = N + n + 2m$  und  $\{0, \dots, \tilde{N}\} = S_I \cup S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$  gegeben. Dadurch wird für jeden Knoten des erweiterten Gitters  $\tilde{\Delta}_{\tilde{N}}$  festgelegt, ob es ein Interpolationsknoten, ein Berührungspunkt oder ein Aufsprung- bzw. Absprungpunkt eines Randstücks ist. Es gilt  $(\tilde{s}_i)_{i \in S_I} = (s_i)_{i=0, \dots, N}$  für die Interpolationsknoten,  $(\tilde{s}_i)_{i \in S_B} = (\tau_{j0})_{j=1, \dots, n}$  für die Berührungspunkte und  $[\tilde{s}_{i_j}, \tilde{s}_{i_j+1}] = [\tau_{j1}, \tau_{j2}]$ ,  $i_j \in S_{R1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , für die Randstücke. Damit ist auch für jedes Teilintervall  $[\tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i]$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{N}$ , des erweitertes Gitters festgelegt, ob es sich um eines der  $m$  Randstücke handelt, d.h.  $i - 1 \in S_{R1}$  und  $i \in S_{R2}$  gilt, oder  $(\tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i)$  ein freies Teilstück mit  $i - 1 \in S_I \cup S_B \cup S_{R2}$  und  $i \in S_I \cup S_B \cup S_{R1}$  ist. Die genaue Lage der Knoten  $\tilde{s}_i$ ,  $i = 1, \dots, \tilde{N}$ , muß dann noch berechnet werden.

Setzt man die optimale Steuerung  $\kappa = -\frac{1}{2}\lambda_\theta$  in die adjungierten Differentialgleichungen ein, so erhält man auf jedem freien Teilstück die sechs Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (\cos \theta, \sin \theta)^T, \\ \theta' &= \kappa, \\ \kappa' &= -\frac{1}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_{\mathbf{z}}, \\ \lambda'_{\mathbf{z}} &= 0. \end{aligned}$$

Damit sind  $6(N + n + m)$  Differentialgleichungen zu lösen und es müssen  $N + n + 2m$  Knoten bestimmt werden. Dazu werden  $7N + 7n + 8m$  Gleichungen benötigt.

An jedem der  $N - 1$  inneren Interpolationsknoten sind  $\mathbf{z}$ ,  $\theta$  und  $\kappa$  stetig, und es gelten die  $2N + 2$  Interpolationsbedingungen  $\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Sind die Tangentenwinkel am Rand vorgegeben, so gilt  $\theta(s_i) = \theta_i$ ,  $i = 0, N$ . Anderenfalls gilt die natürliche Randbedingung  $\kappa(0) = \kappa(s_N) = 0$ . Da die Hamilton-Funktion nach (2.1.36) verschwindet, gilt

$$0 = \kappa^2 + (\cos \theta, \sin \theta)\lambda_{\mathbf{z}} + \lambda_\theta \kappa = -\kappa^2 + (\cos \theta, \sin \theta)\lambda_{\mathbf{z}} \quad (2.1.41)$$

mit der optimale Steuerung  $\kappa = -\frac{1}{2}\lambda_\theta$ . Daraus folgt

$$\kappa^2(s_i) = (\cos \theta(s_i), \sin \theta(s_i))\lambda_{\mathbf{z}}(s_i^-), \quad i = 1, \dots, N,$$

und man hat  $7N$  Gleichungen an den Interpolationsknoten.

Auch an den  $n$  Berührungspunkten sind  $\mathbf{z}$ ,  $\theta$  und  $\kappa$  stetig. Anstelle der Interpolationsbedingungen erhält man die Gleichungen

$$g(\mathbf{z}(\tau_{j0})) = 0 \quad \text{und} \quad (\cos \theta(\tau_{j0}), \sin \theta(\tau_{j0}))g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau_{j0})) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

da an einem Berührungspunkt die Funktion  $g(\mathbf{z}(\cdot)) : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maximum besitzt. Außerdem gelten nach (2.1.34) die Bedingungen

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{j0}^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{j0}^-) - b_{j0} g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau_{j0})), \quad b_{j0} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Damit hat man  $7n$  Gleichungen an den Berührungspunkten.

Auf einem Randstück gelten die Gleichungen

$$g(\mathbf{z}) = 0 \quad \text{und} \quad g^i(\mathbf{z}, \theta, \kappa) = 0, \quad i = 1, \dots, p,$$

aus denen man aufgrund der Auflösbarkeitsbedingung (2.1.7) die Krümmung  $\kappa$  berechnen kann. Kennt man auch ihre Ableitung  $\kappa'$ , so wird nach (2.1.26) und (2.1.41) der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\mathbf{z}}$  durch

$$\lambda_{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^2 \\ -2\kappa' \end{pmatrix}$$

gegeben. Für seine Ableitung gilt auf jedem Randstück

$$\lambda'_{\mathbf{z}} = -\eta g_{\mathbf{z}}^T,$$

wobei die Funktion  $\eta \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$  die Vorzeichenbedingung  $\eta \geq 0$  erfüllen muß. An dem Aufsprung- und Absprungpunkt eines Randstücks einer Zustandsbeschränkung mit Ordnung  $p = 2$  gelten die Bedingungen

$$g(\mathbf{z}(\tau_{jk})) = 0, \quad g^i(\mathbf{z}(\tau_{jk}), \theta(\tau_{jk}), \kappa(\tau_{jk})) = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Außerdem gelten wie an einem Berührungspunkt nach (2.1.34) die Bedingungen

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{jk}^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{jk}^-) - b_{jk} g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau_{jk})), \quad b_{jk} \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, m.$$

Durch diese acht Gleichungen für jedes der  $m$  Randstücke erhält man eine vollständige Mehrpunkttrandwertaufgabe. Werden für eine Lösung der Mehrpunkttrandwertaufgabe die Vorzeichenbedingungen für die Lagrange-Parameter  $b_{jk}$  und  $\eta$  nicht erfüllt, so handelt es sich um kein lokales Minimum von Problem 2.2.

Im Fall einer affin-linearen Restriktion vereinfachen sich die Gleichungen für ein Randstück. Nach Satz 2.6 gelten auf einem Randstück die Gleichungen

$$(\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G), \quad \theta = 2n\pi + \beta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad \kappa = 0.$$

Daraus folgt, daß auch der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\mathbf{z}}$  und die Funktion  $\eta$  auf einem Randstück verschwinden und die Bedingungen

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{j1}^-) = b_{j1} g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau_{j1})) \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathbf{z}}(\tau_{j2}^+) = -b_{j2} g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau_{j2})), \quad b_{jk} \geq 0,$$

$k = 1, 2, j = 1, \dots, m$ , gelten.

Diese Gleichungen werden zu der folgenden Mehrpunkttrandwertaufgabe zusammengefaßt:

**Problem 2.3.** Zu einer durch die Indexmengen

$$S_I = \{0, j_1, \dots, j_{N-1}, \tilde{N}\}, S_B = \{j_1, \dots, j_n\}, S_{R1} = \{j_1, \dots, j_m\}, S_{R2} = \{i + 1 | i \in S_{R1}\}$$

mit  $\tilde{N} = N + n + 2m$  und  $\{0, \dots, \tilde{N}\} = S_I \cup S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$  gegebenen Schaltstruktur, einer gegebenen Zustandsbeschränkung  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der Ordnung  $p = 2$ , gegebenen Interpolationspunkten  $\mathbf{z}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , und gegebenenfalls Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0$  und  $\theta_N$  werden ein Gitter  $\tilde{\Delta}_{\tilde{N}}$  und Funktionen  $\mathbf{z} \in C^{2,3}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{1,2}[0, s_N]$ ,  $\kappa \in C^{0,1}[0, s_N]$  und  $\lambda_{\mathbf{z}} \in C_{\text{stkw}}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$  gesucht, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Auf jedem freien Teilstück  $(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1})$ ,  $i \in S_I \cup S_B \cup S_{R2}$ ,  $i + 1 \in S_I \cup S_B \cup S_{R1}$ , gelten die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (\cos \theta, \sin \theta)^\top, \\ \theta' &= \kappa, \\ \kappa' &= -\frac{1}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_{\mathbf{z}}, \\ \lambda'_{\mathbf{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

2. Auf jedem Randstück  $(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1})$ ,  $i \in S_{R1}$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}) &= 0, \quad g^i(\mathbf{z}, \theta, \kappa) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{und} \\ \lambda_{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^2 \\ -2\kappa' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. An den Interpolationsknoten  $\tilde{s}_i$ ,  $i \in S_I$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+) &= \mathbf{z}(\tilde{s}_i^-), \quad \theta(\tilde{s}_i^+) = \theta(\tilde{s}_i^-), \quad \kappa(\tilde{s}_i^+) = \kappa(\tilde{s}_i^-), \quad i \in S_I / \{0, \tilde{N}\}, \\ \kappa^2(\tilde{s}_i) &= (\cos \theta(\tilde{s}_i), \sin \theta(\tilde{s}_i))\lambda_{\mathbf{z}}(\tilde{s}_i^-), \quad i \in S_I / \{0\}, \\ \mathbf{z}(\tilde{s}_{j_i}) &= \mathbf{z}_i, \quad j_i \in S_I, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{und} \\ \theta(0) &= \theta_0, \quad \theta(\tilde{s}_{\tilde{N}}) = \theta_N \quad \text{oder} \quad \kappa(0) = \kappa(\tilde{s}_{\tilde{N}}) = 0. \end{aligned}$$

4. An den Berührungspunkten  $\tilde{s}_i$ ,  $i \in S_B$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+) &= \mathbf{z}(\tilde{s}_i^-), \quad \theta(\tilde{s}_i^+) = \theta(\tilde{s}_i^-), \quad \kappa(\tilde{s}_i^+) = \kappa(\tilde{s}_i^-), \quad i \in S_B, \\ g(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)) &= 0, \quad (\cos \theta(\tilde{s}_i), \sin \theta(\tilde{s}_i))g_{\mathbf{z}}^\top(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)) = 0, \quad i \in S_B, \\ \lambda_{\mathbf{z}}(\tilde{s}_i^+) &= \lambda_{\mathbf{z}}(\tilde{s}_i^-) - b_i g_{\mathbf{z}}^\top(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)), \quad b_i \geq 0, \quad i \in S_B. \end{aligned}$$

5. An den Aufsprung- und Absprungpunkten der Randstücke  $[\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}]$ ,  $i \in S_{R1}$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}(\tilde{s}_{i+k})) &= 0, \quad g^j(\mathbf{z}(\tilde{s}_{i+k}), \theta(\tilde{s}_{i+k}), \kappa(\tilde{s}_{i+k})) = 0, \quad j = 1, 2, \\ \lambda_{\mathbf{z}}(\tilde{s}_{i+k}^+) &= \lambda_{\mathbf{z}}(\tilde{s}_{i+k}^-) - b_{i+k} g_{\mathbf{z}}^\top(\mathbf{z}(\tilde{s}_{i+k})), \quad b_{i+k} \geq 0, \quad i \in S_{R1}, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Aus der obigen Herleitung der Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3 folgt, daß zu jeder Lösung der Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3, die die Vorzeichenbedingungen für  $\eta$  und  $b_i$ ,  $i \in S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$ , erfüllt, ein kritischer Punkt von Problem 2.2 gehört und umgekehrt.

**Satz 2.8.** *Zu jedem kritischen Punkt  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  des Steuerungsproblems 2.2 existieren Indexmengen  $S_I$ ,  $S_B$ ,  $S_{R1}$  und  $S_{R2}$ , für die er die Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3 löst. Umgekehrt gelten für jede Lösung  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \lambda_{\mathbf{z}}, \tilde{\Delta}_{\tilde{N}})$  der Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3, die die Vorzeichenbedingungen für die Parameter  $b_i \geq 0$ ,  $i \in S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$  und die Vorzeichenbedingung  $\eta \geq 0$  für die Funktion  $\eta \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$  mit*

$$\lambda'_{\mathbf{z}} = -\eta g_{\mathbf{z}}^T$$

erfüllt, auch die notwendigen Bedingungen erster Ordnung eines lokalen Minimums von Problem 2.2. Es handelt sich also um einen kritischen Punkt von Problem 2.2.

Mit der Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3 kann man die kritischen Punkte von Problem 2.2 numerisch berechnen. In der Literatur findet man eine Vielzahl von Verfahren, die sie für den unrestringierten nichtlinearen Spline lösen. Dabei wird ein nichtlinearer Spline, wie folgt, definiert.

**Definition 2.9.** Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein kritischer Punkt von Problem 2.2, dann nennt man die Kurve  $\mathbf{z}$  auch *nichtlinearen Spline*.

Das Differentialgleichungssystem (2.1.42) kann aber auch analytisch gelöst werden. Hiermit beschäftigt sich der nächste Abschnitt, in dem ein nichtlineares Gleichungssystem zur Berechnung eines lokalen Minimums von Problem 2.2 hergeleitet wird.

## 2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems

In diesem Abschnitt werden zunächst nichtlineare Gleichungen für die Funktionen  $\mathbf{z}$ ,  $\theta$  und  $\kappa$  hergeleitet. Um diese zur Berechnung eines lokalen Minimums von Problem 2.2 nutzen zu können, benötigt man eine explizite Darstellung für die Krümmung. Dazu wird eine weitere Differentialgleichung für die Krümmung hergeleitet, die man mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen, vgl. Anhang Abschnitt B, lösen kann.

**Satz 2.10.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 und  $J \subset (s_{i-1}, s_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , ein freies Teilstück. Sei  $\bar{J}$  die abgeschlossene Hülle von  $J$  und  $\tilde{s}_0 \in \bar{J}$ . Dann erfüllen die Funktionen  $\mathbf{z}$ ,  $\theta$  und  $\kappa$  auf  $J$  mit geeigneten Konstanten  $\alpha$  und  $A$  die*

## 2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems 33

nichtlinearen Gleichungen:

$$\kappa^2(s) = A \cos(\theta(s) - \alpha), \quad (2.2.1)$$

$$\kappa'(s) = -\frac{1}{2}A \sin(\theta(s) - \alpha), \quad (2.2.2)$$

$$A^2 = (\kappa(s))^2 + 4(\kappa'(s))^2, \quad (2.2.3)$$

$$\kappa(s) - \kappa(\tilde{s}_0) = -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)), \quad (2.2.4)$$

$$\int_{\tilde{s}_0}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma = A(\cos \alpha, \sin \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)). \quad (2.2.5)$$

*Beweis.* Setzt man die optimale Steuerung (2.1.38)  $\kappa = -\frac{1}{2}\lambda_\theta$  in die Hamilton-Funktion (2.1.25) und in die adjungierte Differentialgleichung (2.1.27) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= H[s] = -\kappa^2(s) + (\cos \theta(s), \sin \theta(s))\lambda_{\mathbf{z}}(s) \quad \text{und} \\ \kappa' &= -\frac{1}{2}\lambda'_\theta = -\frac{1}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Da der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\mathbf{z}}$  auf einem freien Teilstück  $J$  konstant ist, kann man neue Variablen

$$A := \|\lambda_{\mathbf{z}}\|_2 \quad \text{und} \quad (2.2.6)$$

$$\alpha \in [0, 2\pi) \text{ mit } (\cos \alpha, \sin \alpha)^T := \frac{\lambda_{\mathbf{z}}}{A} \text{ f\"ur } A \neq 0, \quad (2.2.7)$$

bzw.  $\alpha$  beliebig f\"ur  $A = 0$  einf\"uhren und erh\"alt so die Differentialgleichungen (2.2.1)-(2.2.2).

Hieraus folgt die Gleichung (2.2.3)

$$\sqrt{\kappa^4 + 4(\kappa')^2} = \sqrt{A^2 \cos^2(\theta - \alpha) + A^2 \sin^2(\theta - \alpha)} = A.$$

Integriert man die Gleichungen (2.2.1)-(2.2.2) mit Hilfe der Differentialgleichungen (2.1.20), so erh\"alt man

$$\begin{aligned} \kappa(s) - \kappa(\tilde{s}_0) &= \int_{\tilde{s}_0}^s \kappa'(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{2}A \int_{\tilde{s}_0}^s \sin(\theta(\sigma) - \alpha) d\sigma \\ &= -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)) \end{aligned}$$

und

$$\int_{\tilde{s}_0}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma = A \int_{\tilde{s}_0}^s \cos(\theta(\sigma) - \alpha) d\sigma = A(\cos \alpha, \sin \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Aus Gleichung (2.2.4)-(2.2.5) erh\"alt man eine Darstellung f\"ur die Kurve  $\mathbf{z}$ , die nur von der Kr\"ummung  $\kappa$  und den Konstanten  $A$  und  $\alpha$  aus Satz 2.10 abh\"angt.

**Satz 2.11.** Sei  $(z, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2,  $J$  ein freies Teilstück und  $\tilde{s}_0 \in \bar{J}$ , wobei  $\bar{J}$  die abgeschlossene Hülle von  $J$  bezeichnet. Für  $A \neq 0$  besitzt die Kurve  $z$  die Darstellung

$$z(s) - z(\tilde{s}_0) = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{\tilde{s}_0}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma \\ 2(\kappa(s) - \kappa(\tilde{s}_0)) \end{pmatrix}. \quad (2.2.8)$$

*Beweis.* Die Gleichungen ergeben sich, wenn man das Gleichungssystem (2.2.4)-(2.2.5) nach  $z$  auflöst.  $\square$

Durch die Gleichungen (2.2.1)-(2.2.2) und (2.2.8) kann man die Differentialgleichungen (2.1.42) der Mehrpunkttrandwertaufgabe 2.3 ersetzen.

**Satz 2.12.** Auf einem Intervall  $[\tilde{s}_0, \tilde{s}_1] \subset \mathbb{R}$  seien Funktionen  $z \in C^4([\tilde{s}_0, \tilde{s}_1], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^3[\tilde{s}_0, \tilde{s}_1]$ ,  $\kappa \in C^2[\tilde{s}_0, \tilde{s}_1]$  gegeben, die die Gleichungen (2.2.1)-(2.2.2) und (2.2.8) für  $A \neq 0$  erfüllen und für die  $\kappa'(s) = 0$  nur an endlich vielen Stellen  $s \in J$  gilt. Mit  $\lambda_z := A(\cos \alpha, \sin \alpha)^T$  lösen diese Funktionen die Differentialgleichungen (2.1.42)

$$\begin{aligned} z' &= (\cos \theta, \sin \theta), \\ \theta' &= \kappa, \\ \kappa' &= -\frac{1}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_z, \\ \lambda'_z &= 0, \end{aligned}$$

und es gilt

$$\kappa^2 = (\cos \theta, \sin \theta)\lambda_z,$$

d.h. die Hamiltonfunktion (2.1.25) verschwindet für  $\lambda_\theta := -2\kappa$ , die optimale Steuerung (2.1.38).

*Beweis.* Leitet man Gleichung (2.2.8) ab und setzt (2.2.1)-(2.2.2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa^2(s) \\ 2\kappa'(s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \cos(\theta(s) - \alpha) \\ -A \sin(\theta(s) - \alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(s) \\ \sin \theta(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für  $\kappa' \neq 0$  folgt mit (2.2.2) aus der Ableitung von (2.2.1)

$$2\kappa\kappa' = -A\theta' \sin(\theta - \alpha) = 2\kappa'\theta'$$

die Differentialgleichung  $\theta' = \kappa$ . Damit sind die Funktionen  $\theta'$  und  $\kappa$  gleich, da sie stetig sind und  $\kappa'$  nach Voraussetzung nur an endlich vielen Stellen verschwindet.

Für  $\lambda_z = A(\cos \alpha, \sin \alpha)$  gilt  $\lambda'_z = 0$  und nach (2.2.1)

$$\kappa^2 = A \cos(\theta - \alpha) = (\cos \theta, \sin \theta)\lambda_z.$$

## 2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems 35

Damit verschwindet die Hamiltonfunktion auf dem Intervall und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

Um aus den nichtlinearen Gleichungen aus Satz 2.10 ein lokales Minimum von Problem 2.2 berechnen zu können, benötigt man eine explizite Darstellung für die Krümmung. Dafür wird im folgenden Satz eine weitere Differentialgleichung für die Krümmung hergeleitet, deren Lösung man mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen darstellen kann.

**Satz 2.13.** Sei  $(z, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 und  $J \subset (s_{i-1}, s_i)$ ,  $1 \leq i \leq N$  ein freies Teilstück.

a) Dann erfüllt der Tangentenwinkel  $\theta$  auf  $J$  die Differentialgleichung

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha) \quad (2.2.9)$$

mit geeigneten Konstanten  $A \geq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

b) Für die Krümmung  $\kappa$  gilt auf  $J$  die Differentialgleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0. \quad (2.2.10)$$

*Beweis.* Zu a) Die Differentialgleichung (2.2.9) folgt für  $\theta' = \kappa$  aus Gleichung (2.2.1).

Zu b) Auf einem freien Teilstück  $J$  gilt nach (2.2.1)-(2.2.2) für die Krümmung

$$\kappa'' = -\frac{1}{2}A \cos(\theta - \alpha)\theta' = -\frac{1}{2}\kappa^3.$$

Damit ist (2.2.10) gezeigt.  $\square$

Neben Definition 2.9 findet man in der Literatur auch andere Definitionen, in denen ein unrestringierter nichtlinearer Spline als Lösung einer der Differentialgleichungen (2.2.9) und (2.2.10) definiert wird. So wird in BRUNETT & WENDT (1997) eine  $C^{2,3}$ -Kurve  $z : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , deren Krümmung  $\kappa : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$  intervallweise die Differentialgleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0$$

erfüllt, als nichtlinearer Spline bezeichnet. Alternativ kann man einen nichtlinearen Spline als  $C^{2,3}$ -Kurve  $z : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definieren, zu der ein Gitter  $\Delta_N$  und Konstanten  $A_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$  existieren, so daß der Tangentenwinkel  $\theta : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Intervallen  $[s_{i-1}, s_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , die Differentialgleichung

$$(\theta')^2 = A_i \cos(\theta - \alpha_i)$$

erfüllt.

Die Differentialgleichung (2.2.10) ist mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen analytisch lösbar. Die dafür benötigten Definitionen und Rechenregeln für diese Funktionen findet man im Anhang Abschnitt B, wo auch der Beweis für den folgenden Satz steht, der eine Folgerung von Satz B.1 ist.

**Satz 2.14.** Zu gegebenen Anfangswerten  $\kappa_0, \kappa'_0 \in \mathbb{R}$  existiert eine eindeutig bestimmte und auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Anfangswertaufgabe

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 = 0, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \kappa'(0) = \kappa'_0. \quad (2.2.11)$$

Für  $\kappa_0 = \kappa'_0 = 0$  löst  $\kappa \equiv 0$  die Anfangswertaufgabe. Für  $|\kappa_0| + |\kappa'_0| > 0$  besitzt die Lösung der Anfangswertaufgabe für den Modul  $k = \sqrt{0.5}$  die Darstellung

$$\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(k|\kappa_m|(s - s_m), k) \quad \text{mit} \quad \kappa_m := \operatorname{sign}(\kappa_0) \sqrt[4]{\kappa_0^4 + 4(\kappa'_0)^2}. \quad (2.2.12)$$

Die Gleichung  $\kappa_0 = \kappa_m \operatorname{cn}(v_0, k)$  besitzt eine eindeutige Lösung  $v_0 \in [0, K(k)]$  und der Parameter  $s_m$  wird durch

$$|s_m| = |v_0 / (k\kappa_m^2)| \quad \text{und} \quad \operatorname{sign}(s_m) = -\operatorname{sign}(-\kappa'_0\kappa_0) \quad (2.2.13)$$

gegeben. Die Funktion  $\kappa$  ist eine periodische Funktion mit der Periode  $T = 4K / (k\kappa_m)$ . Ihre Nullstellen liegen an den Stellen  $s_m + (j \pm \frac{1}{4})T$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Die Funktion  $\kappa^2$  besitzt an der Stelle  $s_m$  ein globales Maximum mit dem Wert  $\kappa_m^2$ . Für die Konstante  $A = \sqrt{\kappa^4 + 4(\kappa')^2}$  aus Satz 2.13 gilt  $A = \kappa_m^2$ .

*Beweis.* Hier treten nur die Fälle (a) und (b) des Satzes B.1 auf. □

Eine Kurve, deren Krümmung eine Lösung der Anfangswertaufgabe (2.2.11) ist, löst auch das nichtlineare Gleichungssystem (2.2.1)-(2.2.5).

**Satz 2.15.** Sei  $\mathbf{z} : [0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Kurve, für deren Krümmung

$$\kappa(s) := \kappa_m \operatorname{cn}(k|\kappa_m|(s - s_m), k) \quad \text{für } s \in [0, s_1]$$

mit den Parametern  $s_m \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa_m \neq 0$  gelte, dann gilt für den Tangentenwinkel

$$\theta = \arcsin(2k \operatorname{sign}(\kappa_m) \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)) + \alpha \quad (2.2.14)$$

mit  $v(s) := k|\kappa_m|(s - s_m)$ ,  $s \in [0, s_1]$ , und einer geeigneten Integrationskonstanten  $\alpha$ . Außerdem gelten für  $A = \kappa_m$  die Gleichungen

$$\kappa'(s) = -\frac{1}{2}A \sin(\theta(s) - \alpha), \quad (2.2.15)$$

$$\kappa^2(s) = A \cos(\theta(s) - \alpha), \quad (2.2.16)$$

$$\kappa(s) - \kappa(\tilde{s}_0) = -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)), \quad (2.2.17)$$

$$\int_{\tilde{s}_0}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma = A(\cos \alpha, \sin \alpha)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_0)). \quad (2.2.18)$$

## 2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems 37

*Beweis.* Mit  $v(s) := k|\kappa_m|(s - s_m)$  für  $s \in [0, s_1]$  besitzt die Funktion

$$f := \arcsin(2k \operatorname{sign}(\kappa_m) \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)) + \alpha$$

nach (B.55)-(B.56) auf  $[0, s_1]$  die Ableitung

$$\begin{aligned} f' &= \frac{2k^2 \operatorname{sign}(\kappa_m) |\kappa_m|}{\sqrt{1 - 2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{dn}^2(v, k)}} (-k^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{cn}(v, k) + \operatorname{cn}(v, k) \operatorname{dn}^2(v, k)) \\ &= \frac{\kappa_m}{\sqrt{(1 - \operatorname{sn}^2(v, k))^2}} \operatorname{cn}^3(v, k) = \kappa_m \operatorname{cn}(v, k) = \kappa = \theta'. \end{aligned}$$

Also gilt mit einer geeigneten Integrationskonstanten (2.2.14). Daraus folgt (2.2.15), da die Krümmung nach (B.56) die Ableitung

$$\kappa'(s) = -k\kappa_m |\kappa_m| \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)$$

besitzt. Für die Krümmung gilt

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \kappa_m^2 \operatorname{cn}^2(v, k) = \kappa_m^2 \sqrt{1 - 2 \operatorname{sn}^2 \operatorname{dn}^2} = \sqrt{1 - 4(\kappa')^2} = \kappa_m^2 \sqrt{1 - \sin^2(\theta - \alpha)} \\ &= \kappa_m^2 \cos(\theta - \alpha), \end{aligned}$$

da  $\theta - \alpha \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  nach (2.2.14) gilt. Damit ist (2.2.16) gezeigt. Die letzten beiden Gleichungen (2.2.17)-(2.2.18) erhält man wie in Satz 2.10 durch Integration von (2.2.15) und (2.2.16).  $\square$

Setzt man für die Krümmung  $\kappa$  in Satz 2.10 die Lösung der Anfangswertaufgabe (2.2.11) aus Satz 2.14 ein, so erhält man nichtlineare Gleichungen, die auf einem freien Teilstück gelten. Diese sind zu den Differentialgleichungen (2.1.42) äquivalent. Deshalb können sie die Differentialgleichungen (2.1.42) in der Mehrpunktrandwertaufgabe 2.3 ersetzen und mit dem entstehenden nichtlinearen Gleichungssystem können lokale Minima des Problems 2.2 berechnet werden.

**Satz 2.16.** Sei  $(z, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 und  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$  ein freies Teilstück. Dann erfüllen die Funktionen  $z, \theta, \kappa$  auf  $[\tilde{s}_0, \tilde{s}_1]$  mit geeigneten Konstanten  $\alpha$  und  $A = \kappa_m^2$  die folgenden nichtlinearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \kappa^2(\tilde{s}_0) &= A \cos(\theta(\tilde{s}_0) - \alpha), \\ \kappa'(\tilde{s}_0) &= -\frac{1}{2}A \sin(\theta(\tilde{s}_0) - \alpha), \\ \kappa^2(\tilde{s}_1) &= A \cos(\theta(\tilde{s}_1) - \alpha), \\ \kappa'(\tilde{s}_1) &= -\frac{1}{2}A \sin(\theta(\tilde{s}_1) - \alpha), \\ \kappa(\tilde{s}_1) - \kappa(\tilde{s}_0) &= -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(z(\tilde{s}_1) - z(\tilde{s}_0)), \\ \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_1} \kappa^2(\sigma) d\sigma &= A(\cos \alpha, \sin \alpha)(z(\tilde{s}_1) - z(\tilde{s}_0)). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Mit  $v_0 := -k|\kappa_m|s_m$ ,  $v(s) := k|\kappa_m|(s - \tilde{s}_0) + v_0$  für  $s \in [\tilde{s}_0, \tilde{s}_1]$  und den Bezeichnungen aus Satz 2.14 gilt

$$\kappa = \kappa_m \operatorname{cn}(v, k), \quad (2.2.20)$$

$$\kappa' = -k\kappa_m|\kappa_m| \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k), \quad (2.2.21)$$

$$\int_{\tilde{s}_0}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma = 2\sqrt{2}|\kappa_m| \left( \operatorname{E}(v(s), k) - \operatorname{E}(v_0, k) - \frac{1}{2}(v(s) - v_0) \right). \quad (2.2.22)$$

*Beweis.* Die Gleichungen (2.2.19) folgen aus Satz 2.10. Differenziert bzw. integriert man Gleichung (2.2.20) mit den Gleichungen (B.56) und (B.59) so erhält man die Gleichungen (2.2.21)-(2.2.22).  $\square$

Bei einem unrestringierten nichtlinearen Spline mit zwei Interpolationsknoten ( $N = 1$ ) gelten die Gleichungen (2.2.19) mit  $\tilde{s}_0 = 0$  und  $\tilde{s}_1 = s_1$ . Außerdem gelten die Interpolationsbedingungen

$$\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i \quad \text{und} \quad \theta(s_i) = \theta_i, \quad i = 0, 1.$$

Wählt man als Variablen  $s_1$ ,  $\kappa_m$ ,  $s_m$  und  $\alpha$ , so kann man mit (2.2.20)-(2.2.22) und den Interpolationsbedingungen alle anderen Unbekannten eliminieren und erhält mit  $v_0 := -k|\kappa_m|s_m$ ,  $v_1 := k|\kappa_m|s_1 + v_0$  und  $\varepsilon = \operatorname{sign} \kappa_m$  die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(v_1, k) - \operatorname{cn}(v_0, k) &= \frac{1}{2}\kappa_m(\sin \alpha, -\cos \alpha)(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0) \\ 2\sqrt{2}|\kappa_m|(\operatorname{E}(v_1, k) - \operatorname{E}(v_0, k) - \frac{1}{2}(v_1 - v_0)) &= \kappa_m^2(\cos \alpha, \sin \alpha)(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0), \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

und für  $i = 0, 1$  das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= 2k\varepsilon \operatorname{sn}(v_i) \operatorname{dn}(v_i) \cos \alpha + \operatorname{cn}^2(v_i) \sin \alpha, \\ \cos \theta_i &= \operatorname{cn}^2(v_i) \cos \alpha - 2k\varepsilon \operatorname{sn}(v_i) \operatorname{dn}(v_i) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Dabei sind die beiden Gleichungen des Gleichungspaares (2.2.24) nicht unabhängig voneinander. Man hat also genausoviele nichtlineare Gleichungen wie Unbekannte.

Im dritten Kapitel werden andere Variablen für das nichtlineare Gleichungssystem (2.2.19) gewählt. Mit den Variablen  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\kappa_i := \kappa(s_i)$  und  $\kappa'_i := \kappa'(s_i)$ ,  $i = 0, 1$ , hat man sechs Variablen für die sechs Gleichungen (2.2.19). Im Abschnitt 3.1 wird dieses Gleichungssystem mit einigen Zusatzüberlegungen zu einer einzigen nichtlinearen Gleichung vereinfacht.

Bei einem restringierten nichtlinearen Spline gelten auf Randstücken, an Interpolationsknoten und an Verbindungspunkten dieselben Gleichungen wie in der Mehrpunkttrandwertaufgabe 2.3. Dabei ist zu beachten, daß die Bedingung, daß die Hamiltonfunktion verschwindet, schon vom Gleichungssystem 2.2.19 erfüllt wird. Die Sprungbedingung an einem Verbindungspunkt  $\tau$

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-) - b\mathbf{g}_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau)), \quad b \geq 0$$

kann man durch eine Vorzeichenbedingung für die Ableitung der Krümmung ersetzen.

## 2.2 Nichtlineare Splines als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems 39

**Satz 2.17.** Seien Funktionen  $\mathbf{z} \in C^{2,3}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{1,2}[0, s_N]$ ,  $\kappa \in C^{0,1}[0, s_N]$  und  $\lambda_{\mathbf{z}} \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$  gegeben und sei  $\tau \in [0, s_N]$  eine Stelle, an der

$$\begin{aligned} 0 &= g^1(\mathbf{z}(\tau)) = (\cos \theta(\tau), \sin \theta(\tau)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau)), \\ \kappa^2(\tau) &= (\cos \theta(\tau), \sin \theta(\tau)) \lambda_{\mathbf{z}}(\tau), \\ \kappa'(\tau) &= -\frac{1}{2}(\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau)) \lambda_{\mathbf{z}}(\tau) \end{aligned}$$

und

$$\text{sign}(\kappa'(\tau^+) - \kappa'(\tau^-)) = \text{sign}((\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau))) \quad (2.2.25)$$

gelten. Dann gilt

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) = \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-) - b g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau)), \quad b \geq 0.$$

*Beweis.* Für  $\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-) = 0$  wird die Behauptung für  $b = 0$  erfüllt, also gelte im folgenden  $\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-) \neq 0$ . Nach Voraussetzung stehen die Vektoren  $(\cos \theta(\tau), \sin \theta(\tau))^T$  und  $g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau))$  senkrecht aufeinander. Außerdem gilt

$$0 = \kappa^2(\tau^+) - \kappa^2(\tau^-) = (\cos \theta(\tau), \sin \theta(\tau)) (\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-)).$$

Hieraus folgt, daß auch die Vektoren  $(\cos \theta(\tau), \sin \theta(\tau))^T$  und  $\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-)$  senkrecht aufeinander stehen. Also sind  $g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau))$  und  $\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-)$  parallel und es gibt eine Zahl  $b \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-) = -b g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau)),$$

für die die Vorzeichenbedingung  $b \geq 0$  gezeigt werden muß.

Nach der dritten Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \kappa'(\tau^+) - \kappa'(\tau^-) &= -\frac{1}{2}(\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau)) (\lambda_{\mathbf{z}}(\tau^+) - \lambda_{\mathbf{z}}(\tau^-)) \\ &= \frac{1}{2} b (\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tau)). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Im folgenden wird das nichtlineare Gleichungssystem analog zur Mehrpunkttrandwertaufgabe 2.3 noch einmal zusammengefaßt. Dabei wird auf die Wahl geeigneter Variablen für einen restringierten nichtlinearen Spline mit  $N+1$  Interpolationsknoten,  $n$  Berührungspunkten und  $m$  Randstücken nicht weiter eingegangen. Hierfür sei auf die obigen Erläuterungen für den Fall eines unrestringierten nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationsknoten und das dritte und vierte Kapitel verwiesen.

**Problem 2.4.** Zu einer durch die Indexmengen

$$S_I = \{0, j_1, \dots, j_{N-1}, \tilde{N}\}, S_B = \{j_1, \dots, j_n\}, S_{R1} = \{j_1, \dots, j_m\}, S_{R2} = \{i+1 | i \in S_{R1}\}$$

mit  $\tilde{N} = N + n + 2m$  und  $\{0, \dots, \tilde{N}\} = S_I \cup S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$  gegebenen Schaltstruktur, einer gegebenen Zustandsbeschränkung  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  der Ordnung  $p = 2$ , gegebenen Interpolationspunkten  $\mathbf{z}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , und gegebenenfalls Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0$  und  $\theta_N$  werden ein Gitter  $\tilde{\Delta}_{\tilde{N}}$  und Funktionen  $\mathbf{z} \in C^{2,3}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{1,2}[0, s_N]$ ,  $\kappa \in C^{0,1}[0, s_N]$  und  $\lambda_{\mathbf{z}} \in C_{\text{stkw}}([0, s_N], \mathbb{R}^2)$  gesucht, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Auf jedem freien Teilstück  $(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1})$ ,  $i \in S_I \cup S_B \cup S_{R2}$ ,  $i+1 \in S_I \cup S_B \cup S_{R1}$ , gelten mit den Bezeichnungen aus Satz 2.16 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \kappa^2(\tilde{s}_i^+) &= A_i \cos(\theta(\tilde{s}_i^+) - \alpha_i), \\ \kappa'(\tilde{s}_i^+) &= -\frac{1}{2}A_i \sin(\theta(\tilde{s}_i^+) - \alpha_i), \\ \kappa^2(\tilde{s}_{i+1}^-) &= A_i \cos(\theta(\tilde{s}_{i+1}^-) - \alpha_i), \\ \kappa'(\tilde{s}_{i+1}^-) &= -\frac{1}{2}A_i \sin(\theta(\tilde{s}_{i+1}^-) - \alpha_i), \\ \kappa(\tilde{s}_{i+1}^-) - \kappa(\tilde{s}_i^+) &= -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(\mathbf{z}(\tilde{s}_{i+1}^-) - \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+)), \\ \int_{\tilde{s}_0}^{\tilde{s}_{i+1}^-} \kappa(\sigma) d\sigma &= A(\cos \alpha, \sin \alpha)(\mathbf{z}(\tilde{s}_{i+1}^-) - \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+)). \end{aligned}$$

2. Auf jedem Randstück  $(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1})$ ,  $i \in S_{R1}$ , gelten die Gleichungen

$$g(\mathbf{z}) = 0, \quad g^i(\mathbf{z}, \theta, \kappa) = 0, \quad i = 1, 2.$$

3. An den Interpolationsknoten  $\tilde{s}_i$ ,  $i \in S_I$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+) &= \mathbf{z}(\tilde{s}_i^-), \quad \theta(\tilde{s}_i^+) = \theta(\tilde{s}_i^-), \quad \kappa(\tilde{s}_i^+) = \kappa(\tilde{s}_i^-), \quad i \in S_I / \{0, \tilde{N}\}, \\ \mathbf{z}(\tilde{s}_{j_i}) &= \mathbf{z}_i, \quad j_i \in S_I, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{und} \\ \theta(0) &= \theta_0, \quad \theta(\tilde{s}_{\tilde{N}}) = \theta_N \quad \text{oder} \quad \kappa(0) = \kappa(\tilde{s}_{\tilde{N}}) = 0. \end{aligned}$$

4. An den Berührungspunkten  $\tilde{s}_i$ ,  $i \in S_B$ , gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(\tilde{s}_i^+) &= \mathbf{z}(\tilde{s}_i^-), \quad \theta(\tilde{s}_i^+) = \theta(\tilde{s}_i^-), \quad \kappa(\tilde{s}_i^+) = \kappa(\tilde{s}_i^-), \quad i \in S_B, \\ g(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)) &= 0, \quad (\cos \theta(\tilde{s}_i), \sin \theta(\tilde{s}_i)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)) = 0, \quad i \in S_B, \\ \text{sign}(\kappa'(\tilde{s}_i^+) - \kappa'(\tilde{s}_i^-)) &= \text{sign}((\sin \theta(\tilde{s}_i), -\cos \theta(\tilde{s}_i)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tilde{s}_i))) \quad i \in S_B. \end{aligned}$$

5. An den Aufsprung- und Absprungpunkten der Randstücke  $[\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}]$ ,  $i \in S_{R1}$  gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\mathbf{z}(\tilde{s}_i)) &= 0, \quad g^j(\mathbf{z}(\tilde{s}_i), \theta(\tilde{s}_i), \kappa(\tilde{s}_{i+k})) = 0, \quad j = 1, 2, \quad i \in S_{R1} \cup S_{R2}, \\ \text{sign}(\kappa'(\tilde{s}_i^+) - \kappa'(\tilde{s}_i^-)) &= \text{sign}((\sin \theta(\tilde{s}_i), -\cos \theta(\tilde{s}_i)) g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(\tilde{s}_i))), \quad i \in S_{R1} \cup S_{R2}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Herleitung des obigen nichtlinearen Gleichungssystems gilt der folgende Satz.

**Satz 2.18.** Zu jedem lokalen Minimum  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  des Steuerungsproblems 2.2 existieren Indexmengen  $S_I, S_B, S_{R1}$  und  $S_{R2}$ , für die es das nichtlineare Gleichungssystem 2.4 löst. Umgekehrt gelten für jede Lösung  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \tilde{\Delta}_N)$  des nichtlinearen Gleichungssystems 2.4, die die Vorzeichenbedingung  $\eta \geq 0$  für die Funktion  $\eta \in C_{\text{stkw}}[0, s_N]$  mit

$$\kappa' = -\frac{1}{2}(\sin \theta, -\cos \theta)\lambda_z, \quad \lambda'_z = -\eta g_z^T$$

und die Vorzeichenbedingungen für die Ableitung der Krümmung an den Stellen  $\tilde{s}_i$ ,  $i \in S_B \cup S_{R1} \cup S_{R2}$ , erfüllt, auch die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Minimum von Problem 2.2. Es handelt sich also um einen kritischen Punkt von Problem 2.2.

## 2.3 Anzahl der Wendepunkte

Nach Satz 1.9 existieren nichtlineare Splines mit beliebig vielen Wendepunkten. Im folgenden Beispiel sind für gegebene Interpolationsdaten nichtlineare Splines mit verschiedenen vielen Wendepunkten zu sehen.

**Beispiel 2.1.** Für die Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\theta_1 = -\frac{1}{2}\pi$  lassen sich die interpolierenden nichtlinearen Splines einfach berechnen, da in diesem Fall die Jacobischen elliptischen Funktionen und das elliptische Integral zweiter Gattung nur an Vielfachen von  $K$  ausgewertet werden. Für die Krümmung  $\kappa$  des nichtlinearen Splines und ihre Ableitung gilt nach Satz 2.16

$$\kappa = \kappa_m \operatorname{cn}(v, k) \quad \text{und} \quad \kappa' = -k\kappa_m |\kappa_m| \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)$$

mit  $v(s) = k|\kappa_m|(s - s_m)$  für  $s \in [0, s_1]$  und geeignete Parametern  $\kappa_m$  und  $s_m$ . An den Stellen  $s = 0$  und  $s = s_1$  gilt für die Krümmung nach (2.2.1)

$$\begin{aligned} \kappa_m^2 \operatorname{cn}^2(v_0, k) &= \kappa^2(0) = A \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = A \sin(\alpha), \\ \kappa_m^2 \operatorname{cn}^2(v_1, k) &= \kappa^2(s_1) = A \cos\left(-\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) = -A \sin(\alpha) \end{aligned}$$

mit  $v_0 := v(0)$ ,  $v_1 := v(s_1)$  und  $A = \kappa_m^2$ . Daraus folgt  $\alpha = 0$ ,  $\kappa(0) = \kappa(s_1) = 0$  und  $v_0, v_1 \in \{(2n+1)K : n \in \mathbb{Z}\}$ , da für  $A = 0$  die Interpolationsbedingungen nicht erfüllt werden können. Für die Ableitung der Krümmung an den Interpolationsknoten gilt nach (2.2.2)

$$\begin{aligned} -k\kappa_m |\kappa_m| \operatorname{sn}(v_0, k) \operatorname{dn}(v_0, k) &= \kappa'(0) = -\frac{1}{2}A \sin(\theta_0 - \alpha) = -\frac{1}{2}A < 0 \\ -k\kappa_m |\kappa_m| \operatorname{sn}(v_1, k) \operatorname{dn}(v_1, k) &= \kappa'(s_1) = -\frac{1}{2}A \sin(\theta_1 - \alpha) = \frac{1}{2}A > 0. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung kann man  $\kappa_m > 0$  voraussetzen und  $v_0 = K$  und  $v_1 = (4n+3)K$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wählen. Für festes  $n \in \mathbb{N}$  kann man den Parameter  $\kappa_{m,n}$  mit Hilfe von Gleichung

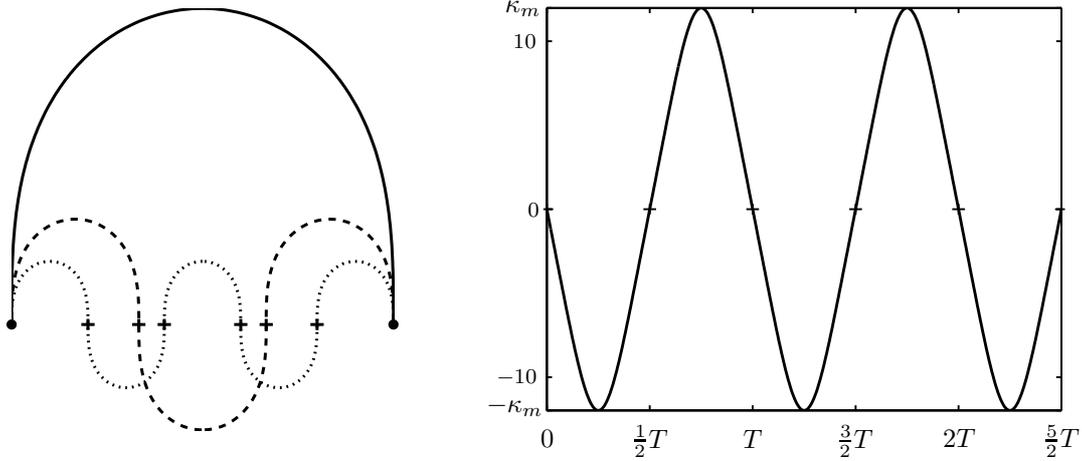


Abbildung 2.1: Im linken Teil sind die nichtlinearen Splines für  $n = 1$  (—),  $n = 2$  (---) und  $n = 3$  (····) aus Beispiel 2.1 zusehen. Im rechten Teil wurde die Krümmung des nichtlinearen Splines für  $n = 3$  und  $\kappa_{m,3} = 11.9814$  gezeichnet.

(2.2.5) und (B.61) berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= (\cos \alpha, \sin \alpha) \mathbf{z}_1 = \frac{1}{A_n} \int_0^{s_1} \kappa_n^2(s) ds = \int_0^{s_1} \operatorname{cn}^2(v_n(s), k) ds \\ &= \int_{v_0}^{v_1, n} \frac{1}{k|\kappa_{m,n}|} \operatorname{cn}^2(\nu, k) d\nu = \frac{n+1}{k\kappa_{m,n}} (4E(K, k) - 2K). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\kappa_{m,n} = \sqrt{2}(n+1)(4E(K, k) - 2K)$ . Für  $n = 1, 2, 3$  sind die nichtlinearen Splines in Abbildung 2.1 gezeichnet. Sie besitzen die Energie

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad & \int_0^{s_1} \kappa_1^2(s) ds = \kappa_{m,1}^2 \approx 5.7422, \\ n = 2 : \quad & \int_0^{s_1} \kappa_2^2(s) ds = \kappa_{m,2}^2 \approx 51.6794, \\ n = 3 : \quad & \int_0^{s_1} \kappa_3^2(s) ds = \kappa_{m,3}^2 \approx 143.5540. \end{aligned}$$

Ein so berechneter nichtlinearer Spline  $\mathbf{z}^n$  mit der Krümmung  $\kappa_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , besitzt  $2n$  Wendepunkte. In Abbildung 2.1 ist auch die Krümmung des nichtlinearen Splines für  $n = 3$  zu sehen.

Aber bei den in Beispiel 2.1 berechneten nichtlinearen Splines handelt es sich, um keine lokalen Minima von Problem 2.2. In Satz 2.20 wird gezeigt, daß ein lokales Minimum von Satz 2.2 auf einem freien Teilstück höchstens einen Wendepunkt besitzt. Für den Beweis wird das folgende einfache Lemma benötigt.

**Lemma 2.19.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2. Dann besitzt die Funktion  $\theta$  auf einem freien Teilstück  $J \subset [0, s_N]$  bzw. seiner abgeschlossenen Hülle  $\bar{J}$  die folgenden Eigenschaften:*

- a) Verschwindet die Krümmung  $\kappa = \theta'$  nicht identisch auf  $\bar{J}$ , so sind alle Nullstellen von  $\theta'$  einfach, d.h. es gilt für alle  $s \in \bar{J}$

$$\theta'(s) = 0 \implies \theta''(s) \neq 0.$$

- b) Der Steigungswinkel  $\theta$  wird auf  $\bar{J}$  durch die Ungleichung

$$|\theta(s) - \theta(\tilde{s})| \leq \pi \text{ für alle } s, \tilde{s} \in \bar{J} \quad (2.3.1)$$

beschränkt.

- c) In einem geeignet gedrehten Koordinatensystem verschwindet für  $A \neq 0$  der Parameter  $\alpha$  in der Differentialgleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha) \quad \text{auf } \bar{J}$$

und es gilt

$$\cos \theta(s) = 0 \iff \theta'(s) = 0. \quad (2.3.2)$$

- d) Auf  $[\sigma_1, \sigma_2] := \bar{J}$  gilt für den Steigungswinkel  $\gamma$  der Sekanten, die die Punkte  $\mathbf{z}(\sigma_1) \neq \mathbf{z}(\sigma_2)$  verbindet, die Ungleichung

$$|\theta(s) - \gamma| \leq \pi. \quad (2.3.3)$$

*Beweis.* Zu a) Nach Gleichung (2.2.9) gilt

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha) \quad \text{auf } \bar{J}.$$

Da nach Voraussetzung eine Stelle  $\tilde{s} \in \bar{J}$  mit  $0 \neq \theta'(\tilde{s})$  existiert, kann der Parameter  $A$  nicht verschwinden. Für die Ableitung  $\kappa' = \theta''$  gilt nach (2.2.2)

$$\theta'' = -\frac{1}{2}A \sin(\theta - \alpha),$$

woraus die Behauptung folgt.

Zu b) Gilt  $A = 0$  in der Differentialgleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha),$$

so ist  $\theta$  auf  $\bar{J}$  konstant. Anderenfalls muß auf dem freien Teilstück  $\cos(\theta - \alpha) \geq 0$  gelten, damit eine Lösung  $\theta$  der Differentialgleichung (2.2.9) existiert. Da  $\alpha$  nur bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  eindeutig bestimmt ist, kann  $\alpha$  so normiert werden, daß  $|\theta(\sigma) - \alpha| \leq \frac{\pi}{2}$  für eine Stelle  $\sigma \in \bar{J}$  gilt. Da  $\theta$  auf  $\bar{J}$  stetig ist, gilt  $|\theta(s) - \alpha| \leq \frac{\pi}{2}$  für alle  $s \in \bar{J}$ . Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt hieraus die obige Ungleichung (2.3.1).

Zu c) Nach Satz 1.10 sind Lösungen von Problem 2.2 rotationsinvariant. Bei einer Drehung des Koordinatensystems um  $-\alpha$  folgt für  $\theta_{\text{neu}} := \theta - \alpha$  die Behauptung.

Zu d) Für  $A = 0$  ist  $\theta$  auf  $\bar{J}$  konstant und es gilt  $\gamma = \theta$ . Anderenfalls sei ohne Einschränkung das Koordinatensystem so gewählt, daß  $\alpha = 0$  gilt. Damit erfüllt  $\theta$  die Ungleichung

$$|\theta(s)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } s \in \bar{J}$$

und für die Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  gilt  $x(\sigma_1) < x(\sigma_2)$  und

$$\gamma = \arctan \frac{y(\sigma_2) - y(\sigma_1)}{x(\sigma_2) - x(\sigma_1)} \quad \text{mit} \quad |\gamma| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. □

Damit kann man nun den folgenden Satz beweisen.

**Satz 2.20.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 und sei  $J$  ein freies Teilstück, auf dem die Krümmung nicht identisch verschwindet. Dann besitzt die Krümmung auf der abgeschlossenen Hülle  $\bar{J}$  höchstens eine Nullstelle und die Kurve  $\mathbf{z}$  höchstens einen Wendepunkt.*

*Beweis.* Angenommen, es existiert ein freies Teilstück  $J \subset (s_{i-1}, s_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , auf dem die Krümmung nicht identisch verschwindet, und es gibt zwei Stellen  $\sigma_1, \sigma_2 \in \bar{J}$ , für die  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  und  $\kappa(\sigma_i) = 0$ ,  $i = 1, 2$ , gilt. Nach Lemma 2.19 und Satz 1.10 kann man das Koordinatensystem so wählen, daß  $\theta$  auf  $\bar{J}$  die Differentialgleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha)$$

mit  $\alpha = 0$  und einem geeigneten Parameter  $A > 0$  erfüllt. Nach Satz 2.16 gilt für die Krümmung

$$\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(k|\kappa_m|(s - \tilde{s}), k) \quad \text{für } s \in \bar{J}$$

mit dem Modul  $k = \sqrt{0.5}$  und geeigneten Parametern  $\tilde{s}, \kappa_m \in \mathbb{R}$ , für die  $\kappa_m^2 = A$  gilt. Seien nun  $\tau_1 < \tau_2$  mit  $\tau_1, \tau_2 \in \bar{J}$  zwei aufeinander folgende Nullstellen der Krümmung. Dann gilt

$$k|\kappa_m|(\tau_i - \tilde{s}) = (-1)^i + 2nK, \quad n \in \mathbb{Z},$$

und die Ableitung der Krümmung

$$\kappa'(s) = -k \operatorname{sign}(\kappa_m) \kappa_m^2 \operatorname{sn}(k|\kappa_m|(s - \tilde{s}), k) \operatorname{dn}(k|\kappa_m|(s - \tilde{s}), k)$$

besitzt an diesen Stellen die Werte

$$\kappa'(\tau_i) = \operatorname{sign}(\kappa_m) (-1)^{i+n+1} \frac{1}{2} A.$$

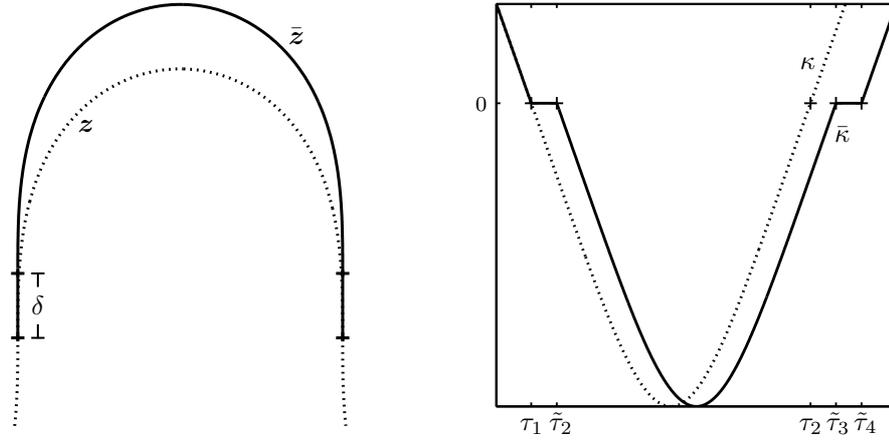


Abbildung 2.2: Im linken Teil kann man die Spur der Kurven  $z$  und  $\bar{z}$  aus Satz 2.20 sehen. Im linken Teil sind die dazugehörigen Krümmungen  $\kappa$  und  $\bar{\kappa}$  gezeichnet.

Für den Tangentenwinkel folgt daraus mit (2.2.2)

$$-\frac{1}{2}A \sin \theta(\tau_i) = \kappa'(\tau_i) = \text{sign}(\kappa_m)(-1)^{i+n+1} \frac{1}{2}A,$$

also  $\theta(\tau_i) = (-1)^{j+i} \frac{1}{2}\pi$  für ein geeignetes  $j \in \{0, 1\}$ . Ohne Einschränkung gelte im folgenden  $j = 1$ ,  $\theta(\tau_1) = \frac{1}{2}\pi$  und  $\theta(\tau_2) = -\frac{1}{2}\pi$ . Damit gilt für die Kurve  $z = (x, y)^T$  nach (2.2.4)-(2.2.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa(\tau_2) - \kappa(\tau_1) = -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)(z(\tau_2) - z(\tau_1)) = -\frac{1}{2}A(y(\tau_2) - y(\tau_1)) \\ 0 &< \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa^2(\sigma) d\sigma = A(\cos \alpha, \sin \alpha)(z(\tau_2) - z(\tau_1)) = A(x(\tau_2) - x(\tau_1)), \end{aligned}$$

also  $x(\tau_1) < x(\tau_2)$  und  $y(\tau_1) = y(\tau_2)$ . Daher kann man eine neue Kurve  $\bar{z}$ , die dieselbe Energie wie  $z$  besitzt, dadurch konstruieren, daß man an den beiden Wendepunkten, wie in Abbildung 2.2 skizziert, ein Geradenstück der Länge  $\delta$  einfügt. Mit  $e_2 = (0, 1)^T$  ist die Kurve

$$\bar{z}(s) := \begin{cases} z(s), & 0 \leq s < \tau_1, \\ z(\tau_1) + (s - \tau_1)e_2, & \tau_1 \leq s < \tilde{\tau}_2 := \tau_1 + \delta \\ z(s - \delta) + \delta e_2, & \tilde{\tau}_2 \leq s < \tilde{\tau}_3 := \tau_2 + \delta \\ z(\tau_2) + (\tau_2 + 2\delta - s)e_2, & \tilde{\tau}_3 \leq s < \tilde{\tau}_4 := \tau_2 + 2\delta \\ z(s - 2\delta), & \tilde{\tau}_4 \leq s < \tilde{s}_N := s_N + 2\delta \end{cases}$$

mit den Funktionen

$$\bar{\theta}(s) := \begin{cases} \theta(s), & 0 \leq s < \tau_1 \\ \frac{1}{2}\pi, & \tau_1 \leq s < \tilde{\tau}_2 \\ \theta(s - \delta), & \tilde{\tau}_2 \leq s < \tilde{\tau}_3 \\ -\frac{1}{2}\pi, & \tilde{\tau}_3 \leq s < \tilde{\tau}_4 \\ \theta(s - 2\delta), & \tilde{\tau}_4 \leq s < \tilde{s}_N \end{cases} \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}(s) := \begin{cases} \kappa(s), & 0 \leq s < \tau_1 \\ 0, & \tau_1 \leq s < \tilde{\tau}_2 \\ \kappa(s - \delta), & \tilde{\tau}_2 \leq s < \tilde{\tau}_3 \\ 0, & \tilde{\tau}_3 \leq s < \tilde{\tau}_4 \\ \kappa(s - 2\delta), & \tilde{\tau}_4 \leq s < \tilde{s}_N \end{cases}$$

und dem Gitter

$$\bar{\Delta}_N := \{0 < s_1 < \cdots < s_{i-1} < s_i + 2\delta < \cdots < s_N + 2\delta\}$$

eine zulässige Lösung von Problem 2.2. Sie besitzt nach Konstruktion dieselbe Energie wie  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$ . Aber  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\kappa}, \bar{\Delta}_N)$  ist kein kritischer Punkt, da auf dem freien Teilstück  $(\tau_1, \tau_2 + 2\delta)$  die Differentialgleichung (2.2.9) nicht für feste Parameter  $A$  und  $\alpha$  erfüllt wird und  $\kappa'$  in  $\tilde{\tau}_2 = \tau_1 + \delta$  und  $\tilde{\tau}_3 = \tau_2 + \delta$  Sprünge besitzt. Deshalb kann  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\kappa}, \bar{\Delta}_N)$  auch kein lokales Minimum sein, und in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung um  $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\theta}, \bar{\kappa}, \bar{\Delta}_N)$  muß es eine zulässige Lösung  $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\theta}, \tilde{\kappa}, \tilde{\Delta}_N)$  mit geringerer Energie geben. Für  $\varepsilon$  und  $\delta$  hinreichend klein, liegt diese in einer  $\tilde{\varepsilon}$ -Umgebung um den kritischen Punkt  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$ . Also ist dieser auch kein lokales Minimum. Dieses ist ein Widerspruch zur Behauptung, also war die Annahme falsch, und es kann höchstens einen Wendepunkt in  $\bar{J}$  geben.  $\square$

Dieser Satz wird auch im folgenden Abschnitt benötigt, wo die Anzahl möglicher Randstücke und Berührungspunkte untersucht wird.

## 2.4 Randstücke und Berührungspunkte

Bislang ist die Zustandsbeschränkung (2.1.23) nicht weiter spezifiziert worden. Im folgenden sollen aber zwei Fälle genauer untersucht werden. Und zwar eine affin-lineare Funktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0, \quad (2.4.1)$$

für in Satz 2.21 bewiesen wird, daß es höchstens ein Randstück oder einen Berührungspunkt zwischen zwei benachbarten Interpolationsknoten gibt, und ein Kreis

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \leq 0, \quad (2.4.2)$$

für den in Satz 2.22 nur eine schwächere Aussage gezeigt wird.

**Satz 2.21.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 mit einer affin-linearen Restriktion (2.4.1), das den Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 genügt. Dann gibt es in jedem Teilintervall  $(s_{j-1}, s_j)$ , des Gitters  $\Delta_N$  höchstens ein Randstück oder einen Berührungspunkt.*

*Beweis.* Seien  $\tau_1 < \tau_2$  zwei Verknüpfungspunkte, die in einem Teilintervall des Interpolationsgitters  $(s_j, s_{j+1})$  liegen, und im Intervall  $(\tau_1, \tau_2)$  verlaufe die Lösung nicht auf dem Rand, d.h. es gelte  $g(\mathbf{z}(s)) < 0$  für  $s \in (\tau_1, \tau_2)$ . Nach Lemma 2.19 kann man ohne Einschränkung annehmen, daß der nichtlineare Spline  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  auf dem freien Teilstück  $(\tau_1, \tau_2)$  die Differentialgleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha) \quad (2.4.3)$$

mit  $\alpha = 0$  und einem geeigneten Parameter  $A > 0$  erfüllt. Damit gilt

$$\cos(\theta(s)) \geq 0 \text{ für alle } s \in [\tau_1, \tau_2]. \quad (2.4.4)$$

Daher genügt es Zustandsbeschränkungen der Form  $y(s) \leq ax(s) + b$  zu betrachten. Damit gilt an den Verknüpfungspunkten

$$y(\tau_i) = ax(\tau_i) + b, \quad i = 1, 2 \quad \text{und} \quad (2.4.5)$$

$$y(s) < ax(s) + b \quad \text{für alle } s \in (\tau_1, \tau_2). \quad (2.4.6)$$

Da die Funktion  $h(s) = y(s) - ax(s) - b$  an der Stelle  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$  ein Maximum besitzt, gilt für ihre Ableitung mit (2.1.20)

$$0 = h'(\tau_i) = y'(\tau_i) - ax'(\tau_i) = \sin \theta(\tau_i) - a \cos \theta(\tau_i)$$

für  $i = 1, 2$ , d. h.

$$a = \tan \theta(\tau_i) \quad \text{und} \quad \cos \theta(\tau_i) > 0. \quad (2.4.7)$$

Da  $h'(s)$  stetig differenzierbar ist, folgt weiter für die zweite Ableitung

$$0 \geq h''(\tau_i) = (\cos \theta(\tau_i) + a \sin \theta(\tau_i))\theta'(\tau_i) = (1 + a^2)\theta'(\tau_i) \cos \theta(\tau_i)$$

mit  $i = 1, 2$ . Daraus folgt mit (2.4.7) und (2.4.3) wie in Lemma 2.19

$$\theta'(\tau_i) < 0. \quad (2.4.8)$$

Wendet man nun den Satz von Rolle auf die Funktion  $h(s) = y(s) - ax(s) - b$  an, so folgt, daß es eine Stelle  $\xi \in (\tau_1, \tau_2)$  gibt, für die mit den Differentialgleichungen (2.1.20)

$$\sin \theta(\xi) = y'(\xi) = ax'(\xi) = a \cos \theta(\xi)$$

und damit

$$a = \tan \theta(\xi) \quad (2.4.9)$$

gilt.

Angenommen es gibt in  $(\tau_1, \xi)$  keine Nullstelle der Krümmung  $\kappa$ , d.h. es gilt nach (2.4.3)

$$0 \neq \kappa^2(s) = (\theta'(s))^2 = A \cos^2 \theta(s) \quad \text{für } s \in (\tau_1, \xi). \quad (2.4.10)$$

Dann ist die Funktion  $\bar{h}(s) = \tan \theta(s) - a$  auf dem Intervall  $[\tau_1, \xi]$  wohldefiniert und es gilt

$$0 = \bar{h}(\tau_1) = \bar{h}(\xi).$$

Nach dem Satz von Rolle gibt es eine Stelle  $\xi_1 \in (\tau_1, \xi)$  mit

$$0 = \bar{h}'(\xi_1) = (\tan' \theta(s))\theta'(\xi_1) = (1 + \tan^2 \theta(\xi_1))\theta'(\xi_1).$$

Daraus folgt  $\theta'(\xi_1) = 0$ , welches ein Widerspruch zu (2.4.10) ist. Ebenso zeigt man, daß es eine Nullstelle  $\xi_2 \in (\xi, \tau_2)$  der Krümmung  $\kappa$  gibt. Also verschwindet die Krümmung an zwei Stellen  $\xi_1 < \xi_2$  in dem freien Teilstück  $\tau_2, \tau_2$ . Damit kann  $\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N$  nach Satz 2.20 kein lokales Minimum sein, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.  $\square$

Dieses Ergebnis entspricht den Aussagen, die man für die restringierte kubische Spline-Interpolation erhält. Bei der nichtnegativen oder monotonen kubischen Spline-Interpolation gibt es zwischen zwei Interpolationsknoten höchstens einen Berührungspunkt oder ein Randstück, vgl. OPFER & OBERLE (1988), FREDENHAGEN, OBERLE & OPFER (1999). Bei dem verwandten Problem des Knickstabs (vgl. HILTMANN (1983), MAURER & MITTELMANN (1991)) oder der nichtnegativen quintischen Spline-Interpolation (vgl. OBERLE & OPFER (1998)) können auch bei einer affin-linearen Restriktion zwei Berührungspunkte in einem Teilintervall auftreten.

Beim nichtlinearen Spline gilt für die Restriktion durch einen Kreis (2.4.2) der Satz 2.22, dessen Aussage schwächer als die von Satz 2.21 ist. Es wird gezeigt, daß zwischen zwei Verbindungspunkten, die in einem Teilintervall des Gitters  $\Delta_N$  liegen, der interpolierende Kreisbogen eine geringere Energie hat, als jeder zulässige interpolierende nichtlineare Spline. Damit wird nicht ausgeschlossen, daß es einen zulässigen nichtlinearen Spline geben könnte, der die Punkte und Tangentenwinkel an den Verbindungspunkten interpoliert, die Restriktion durch den Kreis nicht verletzt und ein lokales Minimum ist, obwohl er eine größere Biegeenergie besitzt.

**Satz 2.22.** *Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von Problem 2.2 mit der Restriktion (2.4.2), das den Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 genügt und sei  $(s_{j-1}, s_j)$  ein Teilintervall des Gitters  $\Delta_N$ , in dem zwei Verknüpfungspunkte  $\tau_1 < \tau_2$  liegen. Dann besitzt der Kreisbogen, der die Punkte  $\mathbf{z}(\tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ , mit den Tangentenwinkeln  $\theta(\tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ , interpoliert ein geringeres Energiefunktional, als jeder zulässige nichtlineare Spline, der diese Punkte und Tangentenwinkel interpoliert.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man den Einheitskreis

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}\|_2^2 - 1 \leq 0 \quad (2.4.11)$$

als Restriktion wählen. Sei  $(\tau_1, \tau_2)$  ein freies Teilstück und seien  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$ , zwei Verbindungspunkte. Nach Lemma 2.19 kann man ohne Einschränkung annehmen, daß der nichtlineare Spline auf dem Intervall  $[\tau_1, \tau_2]$  die Differentialgleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha)$$

für  $\alpha = 0$  und einen geeigneten Parameter  $A \geq 0$  erfüllt und  $\frac{1}{2}\pi \geq \theta(\tau_1) > \theta(\tau_2) \geq -\frac{1}{2}\pi$  gilt, also der Kreisbogen im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

An den beiden Verbindungspunkten  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2$ , gilt

$$0 = g(\mathbf{z}(\tau_i)) = \|\mathbf{z}(\tau_i)\|_2^2 - 1 \quad \text{und} \quad 0 = g^1(\mathbf{z}(\tau_i), \theta(\tau_i)) = 2(\cos \theta(\tau_i), \sin \theta(\tau_i))\mathbf{z}(\tau_i).$$

Daraus folgt mit  $\bar{\theta}_i := \theta(\tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ , an den Verbindungspunkten

$$\bar{\mathbf{z}}_i := \mathbf{z}(\tau_i) = (-\sin \bar{\theta}_i, \cos \bar{\theta}_i), \quad i = 1, 2.$$

Der Einheitskreis besitzt die konstante Krümmung  $\kappa_K = -1$ , wenn er im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Da nach Voraussetzung der nichtlineare Spline die Restriktion nicht verletzt, gilt  $-1 = \kappa_K \geq \kappa(\tau_i) = \theta'(\tau_i)$  und damit  $0 < (\theta'(\tau_i))^2 = A \cos \bar{\theta}_i > 0$ .

Unter diesen Voraussetzungen gelten nach Satz 2.10 die folgenden nichtlinearen Gleichungen für  $\kappa_i := \kappa(\tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ :

$$\kappa_i^2 = A \cos \bar{\theta}_i, \quad i = 1, 2, \quad (2.4.12)$$

$$\kappa_2 - \kappa_1 = -\frac{1}{2}A(\cos \bar{\theta}_2 - \cos \bar{\theta}_1), \quad (2.4.13)$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa^2(s) ds = -A(\sin \bar{\theta}_2 - \sin \bar{\theta}_1). \quad (2.4.14)$$

Für  $\bar{\theta}_2 \neq -\bar{\theta}_1$  kann man aus Gleichung (2.4.12)-(2.4.13) die Krümmung  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  berechnen und einen Widerspruch zu den Voraussetzungen herleiten. Nach Gleichung (2.4.12) gilt

$$A = \frac{\kappa_1^2}{\cos \bar{\theta}_1}, \quad \kappa_2^2 = \kappa_1^2 \frac{\cos \bar{\theta}_2}{\cos \bar{\theta}_1} = \kappa_1^2 d \quad \text{mit } d := \frac{\cos \bar{\theta}_2}{\cos \bar{\theta}_1} \neq 1.$$

Aus Gleichung (2.4.13) ergibt sich damit

$$\kappa_2 = -\frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2}{\cos \bar{\theta}_1} (\cos \bar{\theta}_2 - \cos \bar{\theta}_1) + \kappa_1 = \frac{1}{2} \kappa_1^2 (1 - d) + \kappa_1 \quad (2.4.15)$$

und

$$\kappa_1^2 d = \kappa_2^2 = \kappa_1^2 \left( \frac{1}{2} (1 - d) \kappa_1 + 1 \right)^2.$$

Da nach Voraussetzung  $\kappa_1 \neq 0$  und  $d \neq 1$  gelten, folgt hieraus

$$d = \frac{1}{4} (1 - d^2) \kappa_1^2 + (1 - d) \kappa_1 + 1, \quad (2.4.16)$$

$$0 = \frac{1}{2} (1 - d) \kappa_1^2 + 2\kappa_1 + 2, \quad \text{und} \quad (2.4.17)$$

$$\kappa_1 = \frac{2}{1 - d} \left( -1 \pm \sqrt{1 - (1 - d)} \right) = \frac{-2}{1 \pm \sqrt{d}}. \quad (2.4.18)$$

Aus den Gleichungen (2.4.15) und (2.4.17) folgt für die Krümmung an den Verbindungspunkten  $\kappa_2 + \kappa_1 = -2$ . Da nach Voraussetzung  $\kappa_i \leq -1$ ,  $i = 1, 2$ , ist, gilt

$$\kappa_1 = \kappa_2 = -1.$$

Daraus folgt mit (2.4.18)

$$-1 = \kappa_1 = \frac{-2}{1 \pm \sqrt{d}}, \quad \text{d.h. } \pm \sqrt{d} = 1.$$

Diese Gleichung wird nur für  $d = 1$  und  $\cos \bar{\theta}_1 = \cos \bar{\theta}_2$  erfüllt, welches ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

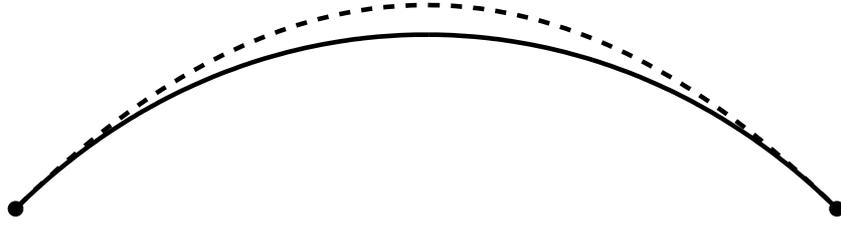


Abbildung 2.3: Der nichtlineare Spline (—) aus Beispiel 2.2 und die Parabel (---), die ihn in den Interpolationspunkten berührt.

Für  $\bar{\theta}_1 = -\bar{\theta}_2$  folgt aus (2.4.12)

$$A = \frac{\kappa_1^2}{\cos \bar{\theta}_1}.$$

Damit gilt für die Biegungsenergie nach (2.4.14)

$$B_S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa^2(s) ds = 2A \sin \bar{\theta}_1 = 2\kappa_1^2 \tan \bar{\theta}_1 > 2 \tan \bar{\theta}_1,$$

da nach Voraussetzung  $\kappa_1 \leq -1$  und  $\bar{\theta}_1 > 0$  gelten. Für die Biegungsenergie des Kreisbogens zwischen  $\bar{z}_1$  und  $\bar{z}_2$  mit den Tangentenwinkeln  $\bar{\theta}_1$  und  $\bar{\theta}_2$  gilt

$$B_K = \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 = 2\bar{\theta}_1.$$

Die Funktion  $h(\theta) = \tan \theta - \theta$  ist auf  $(0, \frac{\pi}{2})$  streng monoton wachsend und positiv, da  $h'(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 > 0$  für  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  und  $h(0) = 0$  gilt. Also gilt  $B_S > B_K$  für  $\bar{\theta}_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$  und damit die Behauptung.  $\square$

Entsprechende Aussagen gelten aber nicht für beliebige Restriktionen. Wählt man eine Parabel als Restriktion, so kann diese von einem nichtlinearen Spline an zwei Stellen berührt werden, und besitzt eine größere Biegungsenergie als dieser.

**Beispiel 2.2.** Es seien die Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (-1, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  und  $\theta_0 = -\theta_1 = \frac{1}{4}\pi$  gegeben. Den nichtlinearen Spline zu diesen Interpolationsdaten zeigt Abbildung 2.3. Für eine Parabel

$$y - (a_p x^2 + c_p) \leq 0, \tag{2.4.19}$$

die den nichtlinearen Spline in zwei Punkten  $\tilde{\mathbf{z}}_i := \mathbf{z}(\tilde{s}_i)$ ,  $i = 0, 1$ , mit  $\tilde{x}_1 = -\tilde{x}_0$  und  $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_0$  berührt und dort die Steigungen  $-\tilde{y}'_1 = \tilde{y}'_0 = \tan(\theta(\tilde{s}_0))$  hat, gilt  $a_p = \frac{1}{2}\tilde{y}'_0/\tilde{x}_0$  und  $c_p = \tilde{y}_0 - \frac{1}{2}\tilde{y}'_0\tilde{x}_0$ . Die Parabel besitzt nach (1.2.10) an den Stellen  $\tilde{s}_i$ ,  $i = 0, 1$ , die Krümmung

$$\kappa_p(\tilde{s}_i) = \frac{2a_p}{(1 + (\tilde{y}'_i)^2)^{3/2}}.$$

Für  $\tilde{s}_i = s_i$ ,  $i = 0, 1$ , erhält man die Krümmungen

$$\kappa_p(s_i) \approx -0.3536, \quad i = 0, 1,$$

bei der Parabel und für den nichtlinearen Spline

$$\kappa(s_i) \approx -0.6259, \quad i = 0, 1.$$

Es handelt sich also um Berührungspunkte. Wie man in Abbildung 2.3 sieht, berührt der nichtlineare Spline die Restriktion nur in den beiden Interpolationsknoten. Das Interpolationsintervall ist also ein freies Teilstück zwischen zwei Berührungspunkten. Also kann bei dieser Restriktion der Fall von zwei Berührungspunkten zwischen zwei Interpolationsknoten auftreten.

## Kapitel 3

# Die Numerik des unrestringierten nichtlinearen Splines

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur Berechnung eines unrestringierten nichtlinearen Splines vorgestellt, das im vierten Kapitel für den restringierten Spline modifiziert wird. Dabei wird zunächst das *lokale Problem* mit nur zwei Interpolationsknoten und vorgegebenen Tangentenwinkeln am Rand betrachtet. Der Algorithmus zur Lösung des lokalen Problems geht auf BRUNETT & WENDT (1997) zurück. In diesem Fall vereinfacht sich das in Abschnitt 2.2 aufgestellte nichtlineare Gleichungssystem zu einer nichtlinearen Gleichung mit einer Veränderlichen. Ein Verfahren zur Berechnung eines nichtlinearen Splines mit mehr als zwei Interpolationsknoten wird im Abschnitt 3.2 vorgestellt. Dieses Verfahren verwendet den Algorithmus zur Berechnung des lokalen Splines. Am Schluß des Kapitels werden Beispiele mit mehr als zwei Interpolationsknoten präsentiert.

### 3.1 Das lokale Problem

Zunächst soll ein auf dem Newton-Verfahren basierender Algorithmus für das Problem mit nur zwei Interpolationsknoten ( $N = 1$ ) und vorgegebenen Tangentenwinkeln am Rand entwickelt werden. Das in Abschnitt 2.2 aufgestellte nichtlineare Gleichungssystem kann man in diesem Fall vereinfachen. Durch die Beschränkung auf Kurven, deren Länge nicht die Periode ihrer Krümmung übersteigt, kann das Problem auf die Lösung einer nichtlinearen Gleichung reduziert werden. Durch diese Restriktion werden keine lokalen Minima von Problem 2.2 ausgeschlossen, da Kurven, deren Länge ihre Periodenlänge übersteigt, mindestens zwei Wendepunkte besitzen und damit nach Satz 2.20 keine lokalen Minima sein können.

Ein Algorithmus zur Berechnung solcher Kurven wird in BRUNETT & WENDT (1997) hergeleitet. Dieser Algorithmus soll im folgenden vorgestellt werden. Dazu wird ohne

Einschränkung angenommen, daß der erste Interpolationspunkt  $\mathbf{z}_0$  im Ursprung liegt und der Tangentenwinkel am linken Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  ist. Der zweite Interpolationspunkt  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T \neq \mathbf{z}_0$  und der Tangentenwinkel  $\theta_1$  können beliebig gewählt werden. Diese Bedingungen können durch Translation und Rotation der Interpolationsdaten immer erfüllt werden.

Zusammengefaßt erhält man die folgende Problemstellung:

**Problem 3.1.** Zu gegebenen Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T \neq \mathbf{z}_0$  und  $\theta_1$  werden die Länge  $L > 0$  und Funktionen  $\mathbf{z} \in C^{1,2}([0, L], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{0,1}[0, L]$  gesucht, die das Funktional

$$I(\mathbf{z}, \theta, \kappa, L) = \int_0^L \kappa^2(s) \, ds \quad (3.1.1)$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad \text{auf } [0, L], \quad (3.1.2)$$

$$\theta' = \kappa \quad \text{auf } [0, L], \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0, & \mathbf{z}(L) &= \mathbf{z}_1, \\ \theta(0) &= \theta_0 = \frac{\pi}{2}, & \theta(L) &= \theta_1. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Nach Satz 2.16 gelten für ein lokales Minimum  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, L)$  von Problem 3.1 mit  $\kappa_0 := \kappa(0)$ ,  $\kappa_1 := \kappa(L)$ ,  $\kappa'_0 := \kappa'(0)$  und  $\kappa'_1 := \kappa'(L)$  die folgenden nichtlinearen Gleichungen:

$$A^2 = \kappa^4(s) + 4(\kappa'(s))^2, \quad (3.1.5)$$

$$\kappa'_0 = -\frac{1}{2}A \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}A \cos(\alpha), \quad (3.1.6)$$

$$\kappa_0^2 = A \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = A \sin(\alpha), \quad (3.1.7)$$

$$\kappa'_1 = -\frac{1}{2}A \sin(\theta_1 - \alpha) = -\frac{1}{2}A(\sin \theta_1 \cos \alpha - \cos \theta_1 \sin \alpha), \quad (3.1.8)$$

$$\kappa_1^2 = A \cos(\theta_1 - \alpha) = A(\cos \theta_1 \cos \alpha + \sin \theta_1 \sin \alpha), \quad (3.1.9)$$

$$\kappa_1 - \kappa_0 = -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)\mathbf{z}_1, \quad (3.1.10)$$

$$\int_0^L \kappa^2(s) \, ds = A(\cos \alpha, \sin \alpha)\mathbf{z}_1. \quad (3.1.11)$$

Setzt man (3.1.6)-(3.1.7) in Gleichung (3.1.8)-(3.1.10) ein, so erhält man

$$\kappa'_1 = \kappa'_0 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}\kappa_0^2 \cos \theta_1, \quad (3.1.12)$$

$$\kappa_1^2 = -2\kappa'_0 \cos \theta_1 + \kappa_0^2 \sin \theta_1, \quad (3.1.13)$$

$$\kappa_1 = (\frac{1}{2}\kappa_0^2, \kappa'_0)\mathbf{z}_1 + \kappa_0. \quad (3.1.14)$$

Bei diesem nichtlinearen Gleichungssystem (3.1.12)-(3.1.14) ist es möglich, eine der Unbekannten  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa'_0$ ,  $\kappa'_1$  als Parameter zu wählen und die anderen durch diese auszudrücken. Günstige Ausdrücke ergeben sich, wenn man  $\kappa_0$  als Parameter wählt. Mit den Abkürzungen

$$a := \kappa_0^2 \sin \theta_1, \quad b := \frac{1}{2} \kappa_0^2 \cos \theta_1, \quad c := \frac{1}{2} \kappa_0^2 x_1 + \kappa_0, \quad d := (\cos \theta_1, \sin \theta_1) \mathbf{z}_1 \quad (3.1.15)$$

gilt der folgende Satz:

**Satz 3.1.** *Bei einem nichtlinearen Spline, der Problem 3.1 löst, genügen die Krümmungen an den beiden Interpolationsknoten  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  der quadratischen Gleichung*

$$y_1 \kappa_1^2 + 2\kappa_1 \cos \theta_1 - d\kappa_0^2 - 2\kappa_0 \cos \theta_1 = 0. \quad (3.1.16)$$

Abhängig von der Wahl des Interpolationspunktes  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$  und des Winkels  $\theta_1$  werden drei Fälle unterschieden:

*Fall 1: Für  $y_1 \neq 0$  erfüllt  $\kappa_0$  die Ungleichung*

$$dy_1 \kappa_0^2 + 2y_1 \cos \theta_1 \kappa_0 + \cos^2 \theta_1 \geq 0, \quad (3.1.17)$$

und es gilt

$$\kappa'_0 = \frac{\kappa_1 - c}{y_1}, \quad (3.1.18)$$

$$\kappa'_1 = \kappa'_0 \sin \theta_1 + b. \quad (3.1.19)$$

*Fall 2: Für  $y_1 = 0$  und  $\theta_1 \neq \pm \frac{\pi}{2}$  gilt*

$$\kappa_1 = c, \quad (3.1.20)$$

$$\kappa'_0 = \frac{a - c^2}{2 \cos \theta_1}, \quad (3.1.21)$$

$$\kappa'_1 = \kappa'_0 \sin \theta_1 + b. \quad (3.1.22)$$

*Fall 3: Für  $y_1 = 0$  und  $\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$  gilt*

$$\kappa_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (x_1 \kappa_0 + 2)^2 = 4 \sin \theta_1, \quad (3.1.23)$$

$$\kappa_1 = c, \quad (3.1.24)$$

$$\kappa'_1 = \kappa'_0 \sin \theta_1. \quad (3.1.25)$$

*Beweis.* Erweitert man die Gleichungen (3.1.13)-(3.1.14) mit  $y_1$  bzw.  $2 \cos \theta_1$  und eliminiert den Parameter  $\kappa'_0$ , so erhält man

$$y_1 \kappa_1^2 + 2\kappa_1 \cos \theta_1 = \kappa_0^2 (x_1 \cos \theta_1 + y_1 \sin \theta_1) + 2\kappa_0 \cos \theta_1,$$

also Gleichung (3.1.16).

*Zu Fall 1:* Multipliziert man Gleichung (3.1.16) mit  $y_1$ , so erhält man durch quadratische Ergänzung die Gleichung

$$(y_1 \kappa_1 + \cos \theta_1)^2 = y_1 (\kappa_0^2 d + 2\kappa_0 \cos \theta_1) - \cos^2 \theta_1 = dy_1 \kappa_0^2 + 2y_1 \kappa_0 \cos \theta_1 + \cos^2 \theta_1,$$

die nur, wenn  $\kappa_0$  Gleichung (3.1.17) erfüllt, lösbar ist. Die Gleichungen (3.1.18)-(3.1.19) erhält man, wenn man für  $y_1 \neq 0$  die Gleichung (3.1.14) bzw. (3.1.12) nach  $\kappa'_0$  bzw.  $\kappa'_1$  auflöst.

*Zu Fall 2:* Für  $y_1 = 0$  vereinfacht sich Gleichung (3.1.14) und es gilt Gleichung (3.1.20)

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \kappa_0^2 x_1 + \kappa_0 = c.$$

Für  $\cos(\theta_1) \neq 0$  kann man den Parameter  $\kappa'_0$  aus Gleichung (3.1.13) berechnen, und erhält Gleichung (3.1.21). Gleichung (3.1.22) folgt aus Gleichung (3.1.12).

*Zu Fall 3:* Die Gleichungen (3.1.24) und (3.1.25) erhält man analog zu Fall 2. Setzt man Gleichung (3.1.24) in Gleichung (3.1.13) ein, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2} \kappa_0^2 x_1 + \kappa_0\right)^2 - \kappa_0^2 \sin \theta_1 = \frac{1}{4} \kappa_0^4 x_1^2 + \kappa_0^2 x_1 \kappa_0 + \kappa_0^2 - \kappa_0^2 \sin \theta_1 \\ &= \frac{1}{4} \kappa_0^2 (\kappa_0^2 x_1^2 + 4\kappa_0 x_1 + 4 - 4 \sin \theta_1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt Gleichung (3.1.23). □

Das Ergebnis dieses Satzes kann man folgendermaßen zusammenfassen: Kennt man die Anfangskrümmung  $\kappa_0$  (oder ihre Ableitung  $\kappa'_0$  im Fall 3), so kennt man die Krümmung am Ende  $\kappa_1$  und ihre Ableitung an den Endpunkten  $\kappa'_0$  und  $\kappa'_1$ . Damit ist auch die Krümmung  $\kappa$  des nichtlinearen Splines eindeutig bestimmt. Genauer, es existiert zu gegebenen Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_1$  und  $\theta_1$  und Parametern  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa'_0$  und  $\kappa'_1$ , die die Gleichungen (3.1.12)-(3.1.14) erfüllen, eine Funktion  $\kappa$ , die die Differentialgleichung (2.2.10) mit den Randbedingungen

$$\kappa(0) = \kappa_0, \quad \kappa'(0) = \kappa'_0, \quad \kappa(L) = \kappa_1 \quad \text{und} \quad \kappa'(L) = \kappa'_1$$

löst.

**Satz 3.2.** Seien  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa'_0, \kappa'_1 \in \mathbb{R}$  mit  $\kappa_0^2 + (\kappa'_0)^2 > 0$  gegeben, die zu gegebenen Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$ ,  $\theta_1$  das nichtlineare Gleichungssystem (3.1.12)-(3.1.14) lösen und sei  $\kappa$  eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\kappa'' + \frac{1}{2} \kappa^3 = 0, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \kappa'(0) = \kappa'_0 \tag{3.1.26}$$

mit der Periode  $T$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Länge  $L \in (0, T]$  mit

$$\kappa(L) = \kappa_1 \quad \text{und} \quad \kappa'(L) = \kappa'_1. \tag{3.1.27}$$

Für eine  $C^3$ -Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  mit der Krümmung  $\kappa$ , die die Interpolationsbedingungen am linken Rand  $\mathbf{z}(0) = (0, 0)^T$  und  $\theta(0) = \frac{1}{2}\pi$  erfüllt, gilt am rechten Rand  $\theta(L) = \theta_1$ . Außerdem gilt für  $\kappa'_0 \kappa_0 \neq 0$  die Bedingung

$$x(L) = x_1 \quad \iff \quad y(L) = y_1. \quad (3.1.28)$$

Für  $\kappa = 0$  gilt  $y_1 = y(L)$  und für  $\kappa'_0$  ist  $x_1 = x(L)$ .

*Beweis.* Nach Satz 2.14 existiert eine eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe (3.1.26)  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(k|\kappa_m|(s - s_m), k)$  mit  $\operatorname{sign}(\kappa_m) = \operatorname{sign}(\kappa_0)$ ,  $\kappa_m^4 = \kappa_0^4 + 4(\kappa'_0)^2$  und dem Modul  $k = \sqrt{0.5}$ . Wenn man die Gleichungen (3.1.12)-(3.1.13) quadriert und addiert, erhält man

$$4(\kappa'_1)^2 + \kappa_1^4 = 4(\kappa'_0)^2 + \kappa_0^4 = \kappa_m^4. \quad (3.1.29)$$

Daraus folgt  $\kappa_m^2 \geq \kappa_1^2$ . Für jedes  $\kappa_1$  mit  $\kappa_1^2 < \kappa_m^2$  gibt es zwei Stellen  $L_1, L_2 \in [0, T)$  mit  $\kappa(L_1) = \kappa(L_2) = \kappa_1$  und  $\kappa'(L_1) = -\kappa'(L_2)$ , da die Funktion  $\operatorname{cn}$  eine gerade periodische Funktion ist, die auf dem Intervall  $[0, \frac{1}{2}T]$  monoton fällt und auf  $[\frac{1}{2}T, T]$  monoton wächst. Nach Gleichung (3.1.5) und (3.1.29) gilt für die Ableitung an der Stelle  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$4(\kappa'(L_i))^2 = \kappa_m^4 - \kappa^4(L_i) = \kappa_m^4 - \kappa_1^4 = 4(\kappa'_1)^2.$$

Daraus folgt, daß für genau eine Länge  $L \in [0, T)$  die Randbedingungen (3.1.27) erfüllt werden. Im Fall  $\kappa_1^2 = \kappa_m^2$  existiert genau ein  $L \in [0, T)$  mit  $\kappa(L) = \kappa_1$ , für das nach Gleichung (3.1.5) und (3.1.29)  $\kappa'(L) = \kappa'_1 = 0$  gilt. Für dieses  $L$  werden die Randbedingungen (3.1.27) erfüllt.

Nach Satz 2.15 erfüllt die Krümmung das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \kappa'_0 &= -\frac{1}{2}A \sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}A \cos(\alpha), \\ \kappa_0^2 &= A \cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha) = A \sin(\alpha), \\ \kappa'_1 &= -\frac{1}{2}A \sin(\theta_1 - \alpha) = \frac{1}{2}A(\sin \theta_1 \cos \alpha - \cos \theta_1 \sin \alpha), \\ \kappa_1^2 &= A \cos(\theta_1 - \alpha) = A(\cos \theta_1 \cos \alpha + \sin \theta_1 \sin \alpha), \\ \kappa_1 - \kappa_0 &= -\frac{1}{2}A(-\sin \alpha, \cos \alpha)\mathbf{z}_1, \end{aligned}$$

für geeignete Parameter  $A$  und  $\alpha$ . Daraus erhält man analog zu (3.1.12)-(3.1.14) die Gleichungen

$$\kappa'_1 = \kappa'_0 \sin \theta(L) + \frac{1}{2}\kappa_0^2 \cos \theta(L) \quad (3.1.30)$$

$$\kappa_1^2 = -2\kappa'_0 \cos \theta(L) + \kappa_0^2 \sin \theta(L), \quad (3.1.31)$$

$$\kappa_1 = \kappa'_0 y(L) + \frac{1}{2}\kappa_0^2 x(L) + \kappa_0. \quad (3.1.32)$$

Die Determinante  $\frac{1}{2}\kappa_0^4 + 2(\kappa'_0)^2 = \frac{1}{2}\kappa_m^4$  des Gleichungssystems (3.1.30)-(3.1.31) ist nach Voraussetzung von Null verschieden. Deshalb existiert nach (3.1.12)-(3.1.13) eine eindeutig bestimmte Lösung  $\cos \theta(L) := \cos \theta_1$  und  $\sin \theta(L) := \sin \theta_1$ . Ebenso ist Gleichung (3.1.32) nach Voraussetzung für  $x(L) = x_1$  oder  $y(L) = y_1$  eindeutig lösbar und es gilt nach (3.1.14) Gleichung (3.1.28) für  $\kappa'_0 \kappa_0 \neq 0$ ,  $x(L) = x_1$  für  $\kappa'_0 = 0$  bzw.  $y(L) = y_1$  für  $\kappa_0 = 0$ .  $\square$

Die im vorhergehenden Satz erwähnte Länge  $L$  kann man in Abhängigkeit von  $\kappa_0$  berechnen. Dabei wird ohne Einschränkung  $\kappa_0 \leq 0$  vorausgesetzt. Dieses kann man immer erreichen, indem man die Interpolationsdaten an der  $y$ -Achse spiegelt. Um die Länge  $L$  zu berechnen, werden zunächst die Abstände  $\Delta s_0 := |s_m|$  und  $\Delta s_1 := |L - s_m^1|$  bestimmt, wobei mit  $s_m$  die größte Stelle  $s < 0$  mit  $\kappa(s) = \kappa_m$  und mit  $s_m^1$  die  $L$  am nächstgelegene Stelle mit  $\kappa(s_m^1) = \text{sign}(\kappa_1)|\kappa_m|$  bezeichnet wird. Für  $|\kappa_m| = |\kappa_i|$  erhält man  $\Delta s_i = 0$ . Anderenfalls gilt mit  $s_0 = 0$ ,  $s_m^0 := s_m$  und  $s_1 = L$  für den Abstand

$$\Delta s_i = \left| \int_{s_i}^{s_m^i} ds \right| = \int_{|\kappa_i|}^{|\kappa_m|} \frac{d\kappa}{\sqrt{\frac{1}{4}(\kappa_m^2 - \kappa^2)(\kappa^2 + \kappa_m^2)}}, \quad i = 0, 1,$$

da  $|\kappa_i| \leq |\kappa_m|$  ist und aus (3.1.5) mit  $A = \kappa_m^2$  die Gleichung

$$(\kappa')^2 = \frac{1}{4}(\kappa_m^4 - \kappa^4) = \frac{1}{4}(\kappa_m^2 - \kappa^2)(\kappa^2 + \kappa_m^2)$$

folgt. In der Arbeit von BULIRSCH (1965) wird ein Algorithmus zur Berechnung eines allgemeinen unvollständigen elliptischen Integrals

$$\text{el2}(z, k, a, b) = \int_0^z \frac{a + b\xi^2}{(1 + \xi^2)\sqrt{(1 + \xi^2)(1 + k^2\xi^2)}} d\xi$$

vorgestellt. In dieser Notation gilt

$$\Delta s_i = \frac{\text{el2}(z_i, 0.5, 1, 1)}{k|\kappa_m|} \quad \text{mit} \quad z_i = \sqrt{\frac{\kappa_m^2 - \kappa_i^2}{\kappa_i^2}} \quad (3.1.33)$$

für  $\kappa_i \neq 0$ , bzw.  $\Delta s_i = T/4$  für  $\kappa_i = 0$ .

Aus den beiden Abständen  $\Delta s_i$ ,  $i = 0, 1$ , kann man die gesuchte Länge  $L$  berechnen. Für die Stelle  $s_m$  gilt

$$s_m = -\text{sign}(\kappa'_0)\Delta s_0. \quad (3.1.34)$$

Die gesuchte Länge  $L$  erhält man durch

$$L = \begin{cases} s_m + \text{sign}(\kappa'_1)\Delta s_1, & \kappa_1 < 0, \quad \kappa'_1 > \kappa'_0 \\ s_m + \frac{1}{2}T - \text{sign}(\kappa'_1)\Delta s_1, & \kappa_1 > 0 \\ s_m + T + \text{sign}(\kappa'_1)\Delta s_1, & \kappa_1 < 0, \quad \kappa'_1 \leq \kappa'_0, \end{cases} \quad (3.1.35)$$

siehe auch Abbildung 3.1. Für die Periodenlänge gilt

$$T = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa_m^2}} K, \quad (3.1.36)$$

wobei  $K \approx 1.8541$  das vollständige elliptische Integral zum Modul  $k = \sqrt{0.5}$  bezeichnet. Hieraus kann man eine Abschätzung für  $\kappa_0$  gewinnen. Mit  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  gilt für den

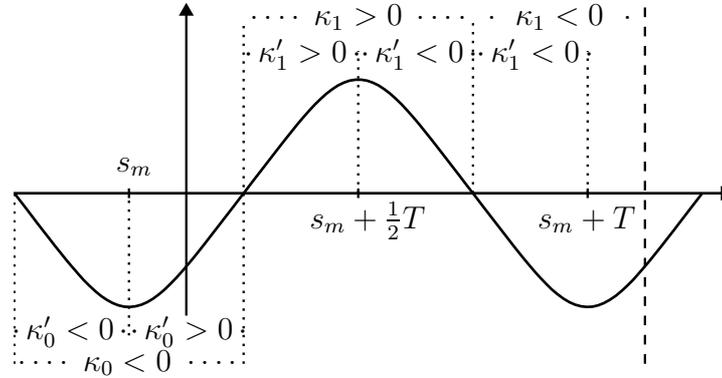


Abbildung 3.1: Die Lage von  $s_m$  und  $L$  in Abhängigkeit der Parameter  $\kappa_0$ ,  $\kappa'_0$ ,  $\kappa_1$  und  $\kappa'_1$ .

Abstand der beiden Interpolationspunkte  $\|\mathbf{z}_1\|_2 = \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0\|_2 \leq L \leq T$ . Mit (3.1.36) folgt hieraus

$$|\kappa_0| \leq |\kappa_m| \leq 4\sqrt{2}K \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1} \approx 10.4882 \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1}. \quad (3.1.37)$$

Mit Gleichung (3.1.5) erhält man für  $\kappa'_0$  die Abschätzung

$$|\kappa'_0| \leq 0.5\kappa_m^2 \leq 16K^2 \|\mathbf{z}_1\|_2^{-2} \approx 55.0015 \|\mathbf{z}_1\|_2^{-2}. \quad (3.1.38)$$

Mit Hilfe der Länge der Kurve kann man ihre Biegeenergie

$$B(L) := \int_0^L \kappa^2(s) ds = 2\sqrt{2}|\kappa_m|(E(v_1) - E(v_0) - \frac{1}{2}(v_1 - v_0)) \quad (3.1.39)$$

mit  $v_0 = -k|\kappa_m|s_m$  und  $v_1 = k|\kappa_m|(L - s_m)$  berechnen. An Hand von Gleichung (3.1.11)

$$B(L) = \int_0^L \kappa^2(s) ds = A(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)$$

bzw. mit (3.1.6)-(3.1.7)

$$0 = B(L) + 2x_1\kappa'_0 - y_1\kappa_0^2 \quad (3.1.40)$$

läßt sich überprüfen, ob die Kurve auch die Interpolationsdaten am rechten Rand interpoliert. Nach Satz 3.1 kann man alle auftretenden Parameter aus einer gegebenen Anfangskrümmung  $\kappa_0$  im Fall 2 und 3 bzw. Ableitung  $\kappa'_0$  im Fall 3 berechnen, wobei es im Fall 1 und 3 jeweils zwei Parametersätze gibt. Damit sucht man eine Nullstelle  $\kappa_0$  bzw.  $\kappa'_0$  der Funktionen

$$f_i(\kappa_0) := B(L) + 2x_1\kappa'_0 - y_1\kappa_0^2 \quad (3.1.41)$$

mit  $i = 1, 2$  im Fall 1 und  $i = 0$  im Fall 2 bzw.

$$\bar{f}_i(\kappa'_0) := B(L) + 2x_1\kappa'_0, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.42)$$

im Fall 3. Diese Nullstelle ist i.a. nicht eindeutig, auch wenn man sich auf  $L \in (0, T]$  beschränkt. Ebenso gibt es Interpolationsdaten, zu denen keine Lösung des Problems existiert. Außerdem besitzen die Funktionen an der Stelle  $\kappa_0 = 0$  bzw.  $\kappa'_0 = 0$  eine Definitionslücke. Bei der Auswertung der Funktionen  $f_i$  aus (3.1.41) bzw.  $\bar{f}_i$  aus (3.1.42) werden wieder die drei Fälle von Satz 3.1 unterschieden.

*Fall 1:* In diesem Fall muß  $\kappa_0$  die quadratische Ungleichung (3.1.17) erfüllen, damit  $\kappa_1$  berechnet werden kann. Ob diese Ungleichung immer erfüllt ist oder auf einem Bereich der reellen Achse nicht, hängt von den Parametern

$$\tilde{a} = y_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1)\mathbf{z}_1 \quad \text{und} \quad \delta = y_1^2 - \tilde{a} \quad (3.1.43)$$

ab. Abhängig von diesen Parametern werden wieder drei Fälle unterschieden:

*Fall 1a:* Für  $0 < \tilde{a}$  und  $0 > \delta$  besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) keine reellen Nullstellen und ist für alle  $\kappa_0 \in J_0 := \mathbb{R}$  erfüllt. Gleichung (3.1.16) besitzt damit für jede Wahl von  $\kappa_0 \neq 0$  zwei reelle Nullstellen und es gibt zwei Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.41), die mit Gleichung (3.1.16)-(3.1.19) und (3.1.39) berechnet werden können.

*Fall 1b:* Für  $\tilde{a} < 0$  besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) zwei reelle Nullstellen  $\kappa_{0u} \leq \kappa_{0o}$  und wird nur für  $\kappa_0 \in J_0 := [\kappa_{0u}, \kappa_{0o}]$  erfüllt. Deshalb sind die Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.41), die wie im Fall 1a berechnet werden, auch nur auf  $[\kappa_{0u}, \kappa_{0o}]/\{0\}$  definiert.

*Fall 1c:* Für  $0 < \tilde{a}$  und  $0 < \delta$  besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) zwei reelle Nullstellen  $\kappa_{0u} \leq \kappa_{0o}$ , zwischen denen sie nicht erfüllt ist. Daher sind die Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.41) nur für  $\kappa_0 \in J_0/\{0\}$  mit  $J_0 := \mathbb{R}/(\kappa_{0u}, \kappa_{0o})$  definiert.

*Fall 2:* Hier werden die Variablen  $\kappa_1$ ,  $\kappa'_0$ ,  $\kappa'_1$  nach Gleichung (3.1.20)-(3.1.22) bestimmt. Damit sucht man nach (3.1.41) die Nullstellen der Funktion

$$f_0(\kappa_0) = B(L) + 2\kappa'_0 x_1,$$

wobei die Energie  $B(L)$  wieder nach Gleichung (3.1.39) berechnet wird.

*Fall 3:* Hier werden die Variablen  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa'_1$  nach (3.1.23)-(3.1.25) berechnet. In Abhängigkeit von  $\theta_1$  gibt es ein oder zwei mögliche Werte für  $\kappa_0$  und damit eine Funktion  $\bar{f}_1$  oder zwei Funktionen  $\bar{f}_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.42). Mit Gleichung (3.1.39) wird die Biegeenergie bestimmt.

Zu jeder Nullstelle der in (3.1.41) und (3.1.42) eingeführten Funktionen existiert eine Kurve, die die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von Problem 3.1 erfüllt, d.h. ein nichtlinearer Spline. Um alle lokalen Minima von Problem 3.1 zu bestimmen, muß man nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  bzw. ganz  $J_0$  nach Nullstellen absuchen, da alle Nullstellen  $\kappa_0$  bzw.  $\kappa'_0$  die Ungleichung (3.1.37) bzw. (3.1.38) erfüllen. Damit ergibt sich nach der Wahl eines Verfahrens zur Nullstellensuche der folgende Algorithmus zur Bestimmung nichtlinearer Splines mit zwei Interpolationsknoten und den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_0$  und  $\theta_1$ .

### Algorithmus 3.1.

1. *Bestimme Bereich zu Nullstellensuche  $J \subset \mathbb{R}$  mit Fallunterscheidung aus Satz 3.1:*  
 Falls  $y_1 \neq 0$  (*Fall 1*): Bestimme Bereich  $J_0 \subset \mathbb{R}$ , auf dem (3.1.17) erfüllt ist;  
 $J := J_0 \cap [-4\sqrt{2}K \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1}, 4\sqrt{2}K \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1}] / \{0\}$ ;  
 Falls  $y_1 = 0$  und  $\theta_1 \neq \pm 0.5\pi$  (*Fall 2*):  $J := [-4\sqrt{2}K \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1}, 4\sqrt{2}K \|\mathbf{z}_1\|_2^{-1}] / \{0\}$  ;  
 Falls  $y_1 = 0$  und  $\theta_1 = \pm 0.5\pi$  (*Fall 3*):  $J_3 := [-16K^2 \|\mathbf{z}_1\|_2^{-2}, 16K^2 \|\mathbf{z}_1\|_2^{-2}] / \{0\}$  ;
2. *Wähle Startwert:*  
 Falls Fall 1: Wähle  $\kappa_0 \in J$ ;  
 Wähle festes Vorzeichen für Berechnung von  $\kappa_1$ , d.h.  $i \in \{1, 2\}$  fest;  
 Falls Fall 2: Wähle  $\kappa_0 \in J$ ;  $i := 0$ ;  
 Falls Fall 3: Wähle  $\kappa'_0 \in J_3$ ;  
 Wähle festes Vorzeichen für Berechnung von  $\kappa_0$ , d.h.  $i \in \{1, 2\}$  fest;
3. Berechne  $f_i(\kappa_0)$  bzw.  $\bar{f}_i(\kappa'_0)$ , wobei die Parameter mit Hilfe der Gleichungen (3.1.16)-(3.1.25), (3.1.34), (3.1.35) und (3.1.39) berechnet werden;
4. Falls  $f_i(\kappa_0)$  bzw.  $\bar{f}_i(\kappa'_0)$  hinreichend klein:  
 „Es wurde eine Nullstelle und damit ein nichtlinearer Spline gefunden.“  
 Falls „alle“ Nullstellen bestimmt werden sollen: „Wähle neuen Startwert.“  
 Gehe zu 2.  
 STOP.
5. Falls maximale Zahl von Iterationen erreicht:  
 „Es wurde keine Nullstelle und damit kein nichtlinearer Spline gefunden.“  
 Falls „alle“ Nullstellen bestimmt werden sollen: „Wähle neuen Startwert.“  
 Gehe zu 2.  
 STOP.
6. Bestimme  $\kappa_{0,\text{neu}}$  bzw.  $\kappa'_{0,\text{neu}}$  mit einem Verfahren zur Nullstellensuche;  
 Gehe zu 3.

Da bei der Herleitung eines Teils der verwendeten Gleichungen  $\kappa_0 < 0$  vorausgesetzt wurde, muß man die Kurve an der  $y$ -Achse spiegeln, um diese für  $\kappa_0 > 0$  verwenden

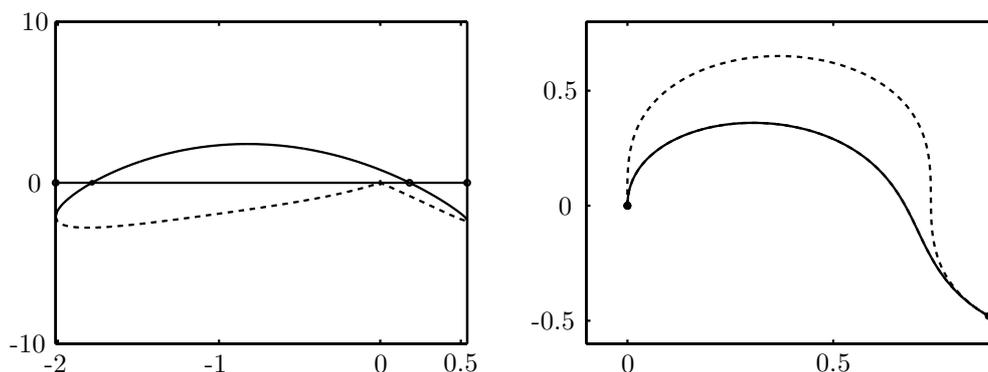


Abbildung 3.2: Im linken Teil sieht man die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) zu den Interpolationsdaten aus Beispiel 3.1. Im rechten Teil sind die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines eingezeichnet, wobei die gestrichelte Kurve kein lokales Minimum ist.

zu können. Um den Fall  $\kappa_0 = 0$  betrachten zu können, muß man wie in Satz 1.11 eine orientierungsumkehrende Parametertransformation auf die Interpolationsdaten anwenden und  $\tilde{\kappa}_0 := \kappa_1$  als Variable wählen. Benutzt man für die Nullstellensuche das Newton-Verfahren, so benötigt man die Ableitungen der Funktionen  $f_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ , aus (3.1.41) nach  $\kappa_0$  bzw.  $\bar{f}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , aus (3.1.42) nach  $\kappa'_0$  im Fall 3. Ein Matlab-Programm, das die Funktionen auswertet und ihre Ableitung berechnet, findet man im Anhang C.

Mit diesem Algorithmus kann man nun zu gegebenen Interpolationsdaten mit zwei Interpolationsknoten einen nichtlinearen Spline berechnen, dessen Länge nicht seine Periodenlänge übersteigt. Wie man im folgenden Beispiel sieht, gibt es Nullstellen der Funktionen  $f_i$  aus (3.1.41), zu denen Kurven gehören, die keine lokalen Minima von Problem 3.1 sind.

**Beispiel 3.1.** Gegeben seien die Interpolationsdaten  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.5, -\sin 0.5)^T$ . Damit gilt  $\tilde{a} \approx -0.4600 < 0$  und das Beispiel fällt unter den Fall 1b. Die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) besitzt die beiden Nullstellen  $\kappa_{0u} \approx -2.0136$  und  $\kappa_{0o} \approx 0.5398$ . Deshalb sind die Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.41) nicht außerhalb des Intervalls  $[-2.0136, 0.5398]$  definiert. Die eine der Funktionen verläuft unterhalb der  $x$ -Achse und berührt sie nur im Nullpunkt, wo die Funktionen nicht definiert sind. Die andere Funktion schneidet die  $x$ -Achse in diesem Intervall zweimal und zwar in den Nullstellen  $\kappa_0 \approx -1.7873$  und  $\kappa_0 \approx 0.1819$ . Die dazugehörigen Kurven haben die folgenden Parameter:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-1.7873	2.5015	-6.0219	5.3876	1.6097	9.0380
0.1819	2.7290	-5.2825	3.7470	2.1977	9.2559

Wie man an den Parametern sieht, besitzt die zweite Kurve, die im rechten Teil von Abbildung 3.2 gestrichelt gezeichnet ist, zwei Wendepunkte, obwohl ihre Länge kürzer ist als

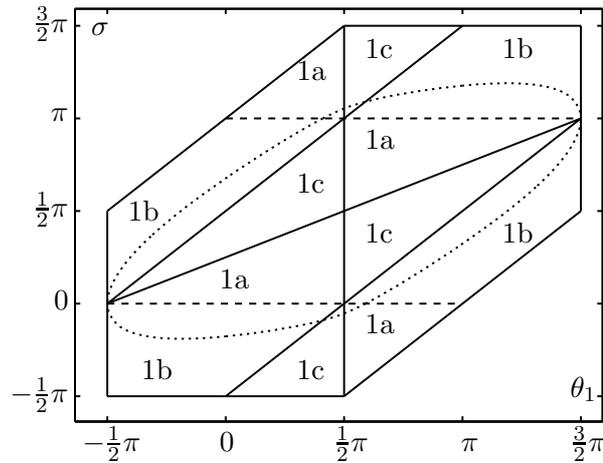


Abbildung 3.3: In der  $\theta_1\sigma$ -Ebene wurden die Bereiche der verschiedenen Möglichkeiten bei Fall 1 ebenso wie Fall 2 und 3 (---) und der Rand des Bereiches (·····), für den nichtlineare Splines zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\cos \sigma, \sin \sigma)^T$  und  $\theta_1$  mit dem Algorithmus 3.1 berechnet werden konnten, eingezeichnet.

ihre Periodenlänge. Sie ist also nach Satz 2.20 kein lokales Minimum. Die beiden Funktionen und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines sind in Abbildung 3.2 gezeichnet.

Eine ausführliche Diskussion verschiedener Beispiele findet man im Anhang D. Dabei treten im Fall 2 und 3 maximal zwei Nullstellen der Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) bzw. der Funktionen  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.42) auf. Im Fall 1 besitzen die Funktionen  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , aus (3.1.41) bei den betrachteten Beispielen maximal drei Nullstellen. Es existiert aber nicht für alle nach Lemma 2.19 möglichen Kombinationen von Interpolationspunkten und Tangentenwinkeln ein nichtlinearer Spline. Beschränkt man sich auf Beispiele mit den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\cos \sigma, \sin \sigma)^T$  und  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ , so kann man den Bereich, in dem nichtlineare Splines mit höchstens einem Wendepunkt existieren, numerisch bestimmen und auf der  $\theta_1\sigma$ -Ebene einzeichnen, siehe Abb. 3.3. Die Anfangskrümmung  $\kappa_0$  des nichtlinearen Splines mit der geringsten Biegungsenergie ist in Abbildung 3.4 über der  $\theta_1\sigma$ -Ebene aufgetragen. Um den obigen Algorithmus zu beschleunigen, kann man diese Anfangskrümmungen auf einem Gitter berechnen und als Startwerte für das Verfahren in einer Datei ablegen.

## 3.2 Die Berechnung von globalen unrestringierten Splines

In Abschnitt 3.1 wurde ein Verfahren zur Lösung des lokalen Problems, d.h. für einen unrestringierten nichtlinearen Spline mit zwei Interpolationsknoten und gegebenen Tan-

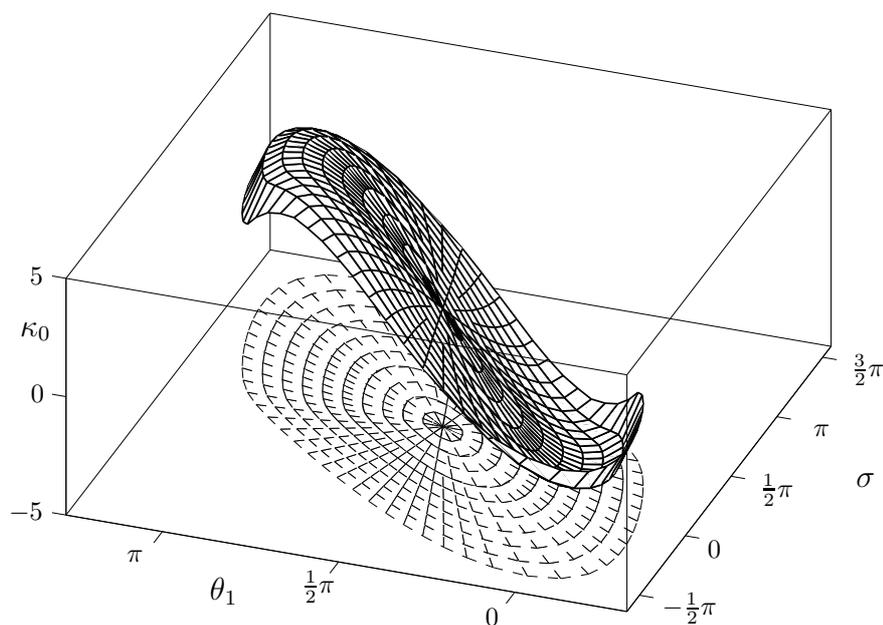


Abbildung 3.4: Die Anfangskrümmung  $\kappa_0$  des nichtlinearen Splines mit der kleinsten Biegsenergie zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\cos \sigma, \sin \sigma)^T$  und  $\theta_1$  über der  $\theta_1\sigma$ -Ebene. Der Bereich, in dem nichtlineare Splines mit Algorithmus 3.1 berechnet werden konnten, ist in der  $\theta_1\sigma$ -Ebene gestrichelt dargestellt.

gentenwinkeln am Rand, erläutert. Dieses Verfahren wird auch bei der Berechnung des nichtlinearen Splines mit mehr als zwei Interpolationsknoten eine Rolle spielen. Wären die Tangentenwinkel  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , an allen Interpolationsknoten bekannt, so könnte man jeweils eine Lösung des lokalen Problems für zwei benachbarte Interpolationsknoten berechnen und würde auf diese Weise eine Lösung für den globalen nichtlinearen Splines erhalten.

Diesen Ansatz kann man auch verwenden, wenn wie bei der vorliegenden Problemformulierung die Tangentenwinkel an den inneren Knoten unbekannt sind. Dazu benötigt man zunächst eine Anfangsschätzung für die Tangentenwinkel an den Interpolationsknoten. Diese kann man mit Hilfe einer interpolierenden kubischen Spline-Kurve berechnen. Nun kann man jeweils für zwei benachbarte Knoten das lokale Problem lösen und erhält eine Kurve, die intervallweise die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von Problem 2.2 erfüllt und bei der nach Konstruktion der Tangentenwinkel an den inneren Interpolationsknoten stetig ist. Im allgemeinen ist aber die Krümmung an den inneren Knoten noch unstetig und die natürliche Randbedingung, daß die Krümmung am Rand verschwindet, wird bei nicht vorgegebenen Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0$  und  $\theta_N$  verletzt. Damit hat man zwar eine zulässige Kurve berechnet, diese ist aber noch nicht optimal. Also wird man versuchen, die Tangentenwinkel an den Interpolationsknoten so zu bestimmen, daß die Krümmung an den inneren Knoten stetig ist und gegebenenfalls die

natürliche Randbedingung erfüllt wird. Aus dem lokalen Problem kann man für gegebene Tangentenwinkel  $\theta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , die links- und rechtsseitigen Grenzwerte für die Krümmung an den Interpolationsknoten berechnen. Der linksseitige Grenzwert am Knoten  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , wird durch die Lösung des lokalen Problems auf dem Intervall  $[s_{i-1}, s_i]$  bestimmt. Es gilt für die Krümmung

$$\kappa(s_i^-) := \kappa(s_i; \theta_{i-1}, \theta_i) := \kappa_1(\theta_{i-1}, \theta_i).$$

Der rechtsseitige Grenzwert am Knoten  $s_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ , hängt wiederum nur von den Tangentenwinkeln  $\theta_i$  und  $\theta_{i+1}$  und der Lösung des lokalen Problems auf dem Intervall  $[s_i, s_{i+1}]$  ab. Für ihn gilt

$$\kappa(s_i^+) := \kappa(s_i; \theta_i, \theta_{i+1}) := \kappa_0(\theta_i, \theta_{i+1}).$$

Damit wird der Fehler, der bei der Berechnung der Krümmung an den inneren Knoten gemacht wird, durch die Funktion

$$F(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}) = \begin{pmatrix} \kappa_0(\theta_1, \theta_2) - \kappa_1(\theta_1) \\ \kappa_0(\theta_2, \theta_3) - \kappa_1(\theta_1, \theta_2) \\ \dots \\ \kappa_0(\theta_{N-2}, \theta_{N-1}) - \kappa_1(\theta_{N-3}, \theta_{N-2}) \\ \kappa_0(\theta_{N-1}) - \kappa_1(\theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

beschrieben, wenn die Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0$  und  $\theta_N$  vorgegeben sind. Sind sie frei, so hat man die zusätzliche Bedingung, daß die Krümmung am Rand verschwindet. In diesem Fall sucht man eine Nullstelle der Funktion

$$F(\theta_0, \dots, \theta_N) = \begin{pmatrix} \kappa_0(\theta_0, \theta_1) \\ \kappa_0(\theta_1, \theta_2) - \kappa_1(\theta_0, \theta_1) \\ \dots \\ \kappa_0(\theta_{N-1}, \theta_N) - \kappa_1(\theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \\ -\kappa_1(\theta_{N-1}, \theta_N) \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Um eine Nullstelle der Funktion  $F$  aus Gleichung (3.2.1) bzw. (3.2.2) zu berechnen, kann man das Newton-Verfahren benutzen. Ihre Jacobi-Matrix ist eine Tridiagonalmatrix, die mittels numerischer Differentiation approximiert werden kann. Dabei wird  $(2N - 2)$ - bzw.  $2N$ -mal ein lokales Problem mit Algorithmus 3.1 gelöst.

Um auf diese Weise einen nichtlinearen Spline zu berechnen, benötigt man gute Schätzungen für die Tangentenwinkel an den inneren Punkten und für einen natürlichen nichtlinearen Spline außerdem Schätzungen für die Tangentenwinkel an den Randpunkten. Eine Möglichkeit ist, diese mit Hilfe von kubischen Spline-Kurven zu berechnen. Dabei werden die beiden Komponenten der Kurve  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  als kubische Splines dargestellt, indem auf einem streng monotonen Gitter  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$  die Punkte  $(t_i, x_i)$  bzw.  $(t_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , durch einen kubischen Spline interpoliert werden. Je nach Wahl der

Randbedingungen werden dabei natürliche kubische Splines verwendet oder die ersten Ableitungen am Rand sind vorgegeben. Optimal wäre es bei der Wahl des Gitters, für den Abstand  $d_i = t_{i+1} - t_i$  die Bogenlänge zwischen den beiden Punkten zu wählen. Da diese unbekannt ist, müssen stattdessen Approximationen verwendet werden. Dabei bietet es sich an, den Abstand zwischen den beiden Punkten in einer Norm zu messen. Da die Problemstellung rotationsinvariant ist, kann man diesen Aspekt auch bei der Wahl der Norm beachten und für den Abstand die euklidische Norm

$$d_i = \|\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i\|_2$$

verwenden.

Natürlich kann man Startschätzungen für die Winkel auch direkt aus den Interpolationsdaten gewinnen. In BRUNETT & WENDT (1998) wird für  $\mathbf{z}_i = (x_i, y_i)^T$

$$\tan(\theta_i) = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}}$$

als Bedingung für die Tangentenwinkel vorgeschlagen. Eine andere Möglichkeit ist, daß man den Mittelwert der Winkel

$$\tan(\gamma_{i+1}) = \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} \quad \text{und} \quad \tan(\gamma_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

als Schätzung für die Tangentenwinkel wählt. Hierbei umgeht man es, die kubische Splinekurve zu berechnen, aber man benötigt im allgemeinen mehr Iterationen zur Berechnung des nichtlinearen Splines. Besonders, wenn mehrere aufeinanderfolgende Interpolationsknoten auf einer Geraden liegen, bekommt man keine guten Startschätzungen für die Tangentenwinkel an den Interpolationsknoten.

Das oben beschriebene Verfahren kann man in dem folgenden Algorithmus zusammenfassen. Dabei wird der Vektor der gesuchten Tangentenwinkel an den Interpolationsknoten mit  $\tilde{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1})$  bei vorgegebenen Tangentenwinkeln am Rand bzw.  $\tilde{\theta} = (\theta_0, \dots, \theta_N)$  für freie Tangentenwinkel am Rand bezeichnet.

### Algorithmus 3.2.

1. *Wahl des Startwertes:*

Berechne eine kubische Spline-Kurve zu den Interpolationsdaten;  
Berechne die Tangentenwinkel  $\tilde{\theta}$  aus der kubischen Spline-Kurve;

2. *Intervallweise Berechnung des lokalen Problems:*

Für  $i = 1, \dots, N$ :

Transformiere die Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_{i-1}$ ,  $\mathbf{z}_i$ ,  $\theta_{i-1}$ , und  $\theta_i$  auf Problem 3.1;  
Berechne lokalen Spline zu den transf. Interpolationsdaten mit Algorithmus 3.1;  
Bestimme die Krümmungen  $\kappa(s_{i-1}^+) = \kappa_0(\theta_{i-1}, \theta_i)$  und  $\kappa(s_i^-) = \kappa_1(\theta_{i-1}, \theta_i)$ ;

3. Berechne den Funktionswert  $F(\tilde{\theta})$  nach (3.2.1) bzw. (3.2.2);
4. Falls  $F(\tilde{\theta})$  hinreichend klein: „*Ein nichtlinearer Spline wurde berechnet.*“  
STOP.
5. *Newton-Schritt:*  
Berechne die Jacobi-Matrix  $F'(\tilde{\theta})$  mittels numerischer Differentiation;  
Wähle  $\lambda \in (0, 1]$ ;  
Berechne  $\tilde{\theta}_{\text{neu}} := \tilde{\theta} - \lambda F'(\tilde{\theta})^{-1} F(\tilde{\theta})$ ;  
Gehe zu 2.

In diesem Algorithmus ist es sinnvoll, den Newton-Schritt durch eine primitive Schrittweitensteuerung zu ergänzen, da sich die Struktur der im lokalen Problem benutzten Funktion in Abhängigkeit von den Tangentenwinkeln ändert. Dabei kann man, ohne den neuen nichtlinearen Spline zu berechnen, überprüfen, ob für die neuen Interpolationsdaten der nichtlineare Spline demselben Fall (1a, 1b, 1c, 2 oder 3) wie für die alten Interpolationsdaten angehört. Ist dieses der Fall oder ist  $\|\tilde{\theta}_{\text{neu}} - \tilde{\theta}\|$  sehr klein, so ist wahrscheinlich  $\kappa_0(\theta_i, \theta_{i+1})$  eine gute Startschätzung für  $\kappa_0^{\text{neu}}$  bei der Berechnung einer Lösung des lokalen Problems.

Die folgenden Beispiele für unrestringierte nichtlineare Splines mit mehr als zwei Interpolationsknoten werden mit dem Algorithmus 3.2 berechnet. Im Abschnitt 4.4 werden sie neben weiteren Beispielen mit verschiedenen Restriktionen betrachtet. Bei beiden Beispielen ist zum Vergleich auch die kubische Spline-Kurve, aus der die Startschätzung berechnet wurde, eingezeichnet. Dabei sieht man, daß diese abhängig von den Interpolationsdaten eine gute oder weniger gute Approximation ist.

**Beispiel 3.2.** Gegeben seien die Interpolationspunkte

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} x_i & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

In Abbildung 3.5 sieht man den nichtlinearen Spline mit natürlicher Randbedingung zu diesen Interpolationspunkten. Die kubische Spline-Kurve liefert in diesem Fall eine gute Startschätzung, so daß man nur drei Iterationen zur Berechnung des nichtlinearen Splines benötigt. Seine Energie ist  $B(L) \approx 6.6270$ .

Auch wenn die kubische Spline-Kurve wie im folgenden Beispiel als Approximation weniger gut ist, eignet sie sich als Startschätzung.

**Beispiel 3.3.** Gesucht wird der nichtlineare Spline zu den Interpolationspunkten

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 6 & 7 & 10 \\ \hline y_i & 6 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{array}$$

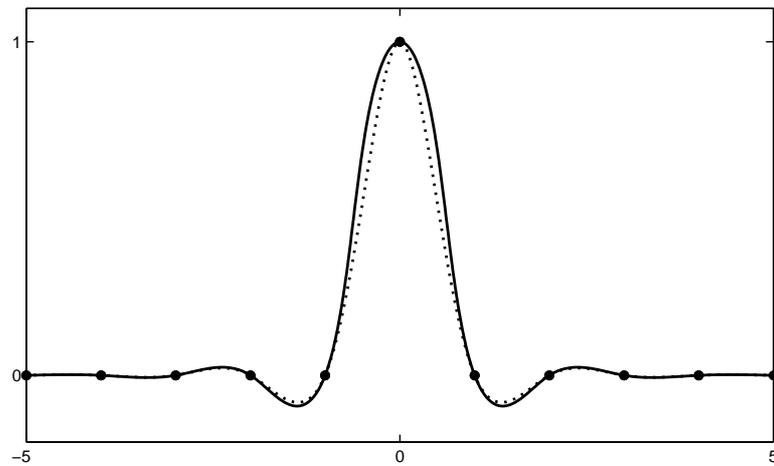


Abbildung 3.5: Der nichtlineare Spline (—) aus Beispiel 3.2 und die kubische Splinekurve ( $\cdots$ ), die als Startschätzung verwendet wird.

mit natürlicher Randbedingung. Er ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Es werden sieben Iterationsschritte benötigt, um ihn zu berechnen. Dazu werden die Startwerte für die Tangentenwinkel aus der kubischen Splinekurve entnommen, siehe Abb. 3.6. Das Energiefunktional hat den Wert  $B(L) \approx 2.2852$ .

Zur Beschleunigung des Algorithmus könnte man Ideen aus der Arbeit von BRUNETT & WENDT (1998) verwenden. Dort wird ein anderes Verfahren zur Berechnung von nichtlinearen Splines mit mehr als zwei Interpolationsknoten vorgestellt, das den Algorithmus für das lokale Problem aus BRUNETT & WENDT (1997) verwendet. Bei diesem Verfahren wird in jedem Iterationsschritt nur ein Tangentenwinkel neu berechnet. Während

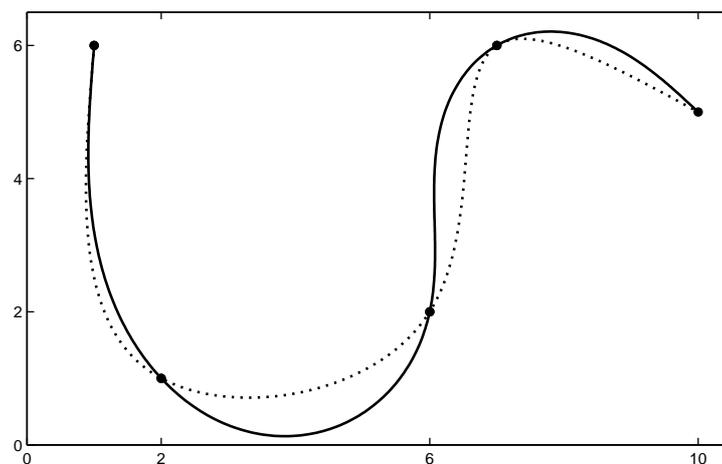


Abbildung 3.6: Der nichtlineare Spline (—) aus Beispiel 3.3 und die kubische Splinekurve ( $\cdots$ ), die als Startschätzung verwendet wird.

der ersten Iterationsschritte wird das lokale Problem mit verringerter Genauigkeit gelöst, wobei die Startwerte für das lokale Problem aus einer zuvor berechneten Tabelle für die Anfangskrümmungen entnommen werden. Erst wenn der Fehler hinreichend klein ist, wird das lokale Problem genauer gelöst. Dieses Verfahren benötigt mehr Iterationsschritte, andererseits ist der Rechenaufwand pro Iterationsschritt geringer.

## Kapitel 4

# Der restringierte nichtlineare Spline

Im folgenden wird wie im Abschnitt 2.4 das Problem 1.2 mit einer affin-linearen Funktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0$$

als Restriktion betrachtet. Hier kann nach Satz 2.21 zwischen zwei Interpolationsknoten höchstens ein Randstück oder ein Berührungspunkt liegen. Beim lokalen Problem ( $N = 1$ ) mit einem Randstück kann man wie im Fall des unrestringierten Splines ein einfaches Verfahren zur Berechnung des nichtlinearen Splines herleiten, siehe Abschnitt 4.1. Für den Fall eines Berührungspunkts dagegen ist dieses nicht möglich, aber man kann einen Berührungspunkt im globalen Algorithmus wie einen Interpolationsknoten behandeln. Im Unterschied zu einem Interpolationspunkt ist aber die genaue Lage des Punktes auf der Restriktion unbekannt, während man den Tangentenwinkel kennt, siehe Abschnitt 4.2. Im Abschnitt 4.3 wird der modifizierte globale Algorithmus vorgestellt und im Abschnitt 4.4 an einigen Beispielen erläutert. Im letzten Abschnitt 4.5 werden dann einige Ideen zur Berechnung eines durch eine Restriktion der Form

$$g(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_K\|_2^2 - R^2 \leq 0$$

restringierten nichtlinearen Splines vorgestellt und ein Beispiel berechnet. Da in diesem Kapitel nur Jacobische elliptische Funktionen und elliptische Integrale zum Modul  $k = \sqrt{0.5}$  auftreten, wird dieser im folgenden der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

### 4.1 Das lokale Problem mit einem Randstück

In diesem Abschnitt wird ein lokales Minimum von Problem 2.2 mit zwei Interpolationsknoten und einem Randstück betrachtet. In diesem Fall vereinfacht sich das nichtlineare Gleichungssystem und man kann seine Lösung berechnen, ohne eine nichtlineare Gleichung zu lösen, wenn neben den trigonometrischen und Jacobischen elliptischen Funktionen auch ihre Umkehrfunktionen wie  $\arcsin$  und  $\operatorname{cn}^{-1}$  zur Verfügung stehen.

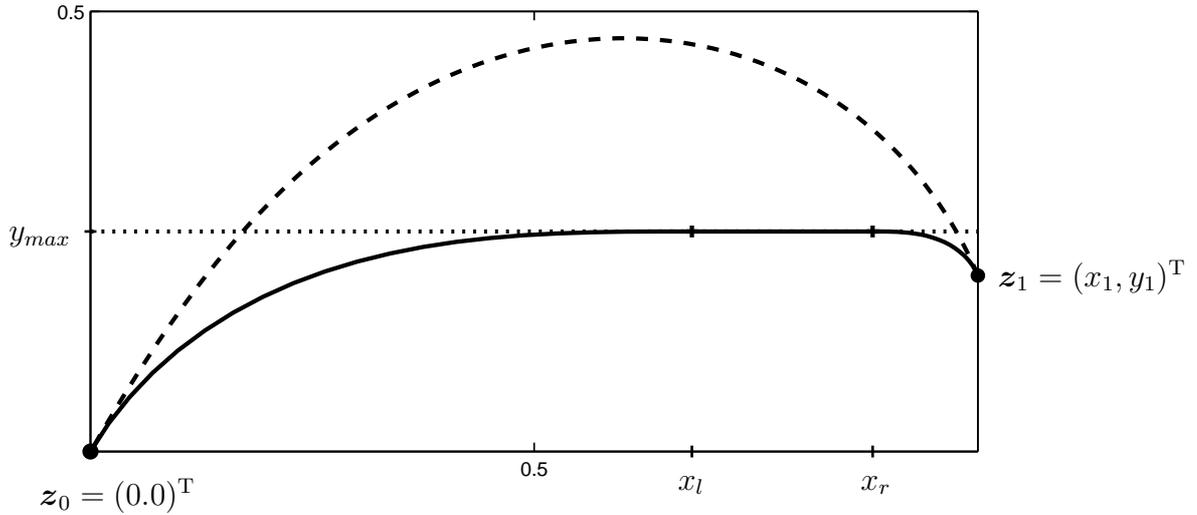


Abbildung 4.1: Der unrestringierte (---) und der durch  $y \leq y_{max} = 0.25$  restringierte (—) nichtlineare Spline aus Beispiel 4.3.

Aufgrund der Invarianzeigenschaften der Lösungen von Problem 2.2 genügt es, obere Schranken der Form  $y(s) \leq y_{max}$  zu betrachten. Außerdem kann man annehmen, daß für das gesuchte Randstück  $[s_l, s_r]$ , die Bedingung  $x_l \leq x_r$  gilt und der erste Interpolationspunkt  $\mathbf{z}_0$  im Ursprung liegt. Diese Bedingungen kann man durch Translation, Spiegelung und Drehung des Koordinatensystems immer erfüllen. Im folgenden wird gezeigt werden, daß unter diesen Voraussetzungen der zweite Interpolationspunkt  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$  in der rechten Halbebene  $x_1 > 0$  liegt und für die Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 \in (0, \pi)$  und  $\theta_1 \in (-\pi, 0)$  gilt.

Zusammengefaßt erhält man die folgende Problemstellung:

**Problem 4.1.** Zu gegebenen Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  und einer oberen Schranke  $y_{max} > \max(0, y_1)$  werden die Bogenlänge  $s_1 > 0$  und Funktionen  $\mathbf{z} \in C^{1,2}([0, s_1], \mathbb{R}^2)$ ,  $\theta \in C^{1,2}[0, s_1]$  gesucht, die das Funktional

$$I(\mathbf{z}, \theta, \kappa, s_1) = \int_0^{s_1} \kappa^2(s) ds \quad (4.1.1)$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (\cos \theta, \sin \theta)^T && \text{auf } [0, s_1], \\ \theta' &= \kappa && \text{auf } [0, s_1], \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(0) &= \mathbf{z}_0 = (0, 0)^T, & \mathbf{z}(s_1) &= \mathbf{z}_1, \\ \theta(0) &= \theta_0, & \theta(s_1) &= \theta_1, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$y(s) \leq y_{max}, \quad 0 \leq s \leq s_1. \quad (4.1.4)$$

Sei  $(\mathbf{z}, \theta, \kappa, s_1)$  ein lokales Minimum von Problem 4.1 mit einem Randstück  $[s_l, s_r]$ . Auf

dem Randstück gilt

$$y(s) = y_{max}, \quad \theta(s) = 0 \quad \text{und} \quad \kappa(s) = 0 \quad \text{für } s \in [s_l, s_r].$$

Nach Satz 2.10 gilt auf den beiden freien Teilstücken  $J_0 := (s_0, s_l)$  und  $J_1 := (s_r, s_1)$  mit geeigneten Parametern  $A_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1$ , und  $\tilde{s}_i \in \bar{J}_i$

$$\begin{aligned} \kappa^2(s) &= A_i \cos(\theta(s) - \alpha_i), \\ \kappa'(s) &= -\frac{1}{2} A_i \sin(\theta(s) - \alpha_i), \\ \kappa(s) - \kappa(\tilde{s}_i) &= -\frac{1}{2} A_i (-\sin \alpha_i, \cos \alpha_i)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_i)), \\ \int_{\tilde{s}_i}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma &= A_i (\cos \alpha_i, \sin \alpha_i)(\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(\tilde{s}_i)) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

für  $s \in \bar{J}_i$ . Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.16 gilt für die Krümmung

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \begin{cases} \kappa_{m,0} \operatorname{cn}(k |\kappa_{m,0}| (s - s_{m,0})), & s \in \bar{J}_0 \\ 0, & s \in (s_l, s_r) \\ \kappa_{m,1} \operatorname{cn}(k |\kappa_{m,1}| (s - s_r - s_{m,1})), & s \in \bar{J}_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{A_0} \operatorname{cn}(k \sqrt{A_0} s + v_0), & s \in \bar{J}_0 \\ 0, & s \in (s_l, s_r) \\ \sqrt{A_1} \operatorname{cn}(k \sqrt{A_1} (s - s_r) + v_1), & s \in \bar{J}_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

mit  $A_i = \kappa_{m,i}^2$  und

$$v_i = \begin{cases} -k |\kappa_{m,i}| s_{m,i}, & \kappa_{m,i} > 0 \\ -k |\kappa_{m,i}| s_{m,i} + 2K, & \kappa_{m,i} < 0. \end{cases}$$

Für ihre Ableitung gilt

$$\kappa'(s) = \begin{cases} -k A_0 \operatorname{sn}(k \sqrt{A_0} s + v_0) \operatorname{dn}(k \sqrt{A_0} s + v_0), & s \in \bar{J}_0 \\ 0, & s \in (s_l, s_r) \\ -k A_1 \operatorname{sn}(k \sqrt{A_1} (s - s_r) + v_1) \operatorname{dn}(k \sqrt{A_1} (s - s_r) + v_1), & s \in \bar{J}_1, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

und die Biegungsenergie kann man mit  $\tilde{s}_0 := 0$  und  $\tilde{s}_1 := s_r$  für  $s \in \bar{J}_i$ ,  $i = 0, 1$ , durch

$$\int_{\tilde{s}_i}^s \kappa^2(\sigma) d\sigma = 2\sqrt{2A_i} \left( E(k\sqrt{A_i}(s - \tilde{s}_i) + v_i) - E(v_i) - \frac{1}{2}(k\sqrt{A_i}(s - \tilde{s}_i)) \right)$$

berechnen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0 &:= k\sqrt{A_0} s_l + v_0, & \tilde{v}_1 &:= k\sqrt{A_1} (s_1 - s_r) + v_1, \\ \Delta x_0 &:= x_l - x_0 = x_l, & \Delta x_1 &:= x_1 - x_r, & x_l &:= x(s_l), & x_r &:= x(s_r) \\ \Delta y_0 &:= y_{max} - y_0 = y_{max}, & \Delta y_1 &:= y_1 - y_{max} \end{aligned}$$

lautet das nichtlineare Gleichungssystem aus Satz 2.16, in diesem Fall für  $i = 0, 1$

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 - \alpha_0) &= \sqrt{2} \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0), & \cos(\theta_0 - \alpha_0) &= \operatorname{cn}^2(v_0), \\ \sin(\theta(s_l) - \alpha_0) &= \sqrt{2} \operatorname{sn}(\tilde{v}_0) \operatorname{dn}(\tilde{v}_0), & \cos(\theta(s_l) - \alpha_0) &= \operatorname{cn}^2(\tilde{v}_0), \\ \sin(\theta(s_r) - \alpha_1) &= \sqrt{2} \operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1), & \cos(\theta(s_r) - \alpha_1) &= \operatorname{cn}^2(v_1), \\ \sin(\theta_1 - \alpha_1) &= \sqrt{2} \operatorname{sn}(\tilde{v}_1) \operatorname{dn}(\tilde{v}_1), & \cos(\theta_1 - \alpha_1) &= \operatorname{cn}^2(\tilde{v}_1), \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

$$2(\operatorname{cn}(\tilde{v}_i) - \operatorname{cn}(v_i)) = \sqrt{A_i}(-\Delta y_i \cos \alpha_i + \Delta x_i \sin \alpha_i), \quad (4.1.9)$$

$$2\sqrt{2}(\operatorname{E}(\tilde{v}_i) - \operatorname{E}(v_i) - \frac{1}{2}(\tilde{v}_i - v_i)) = \sqrt{A_i}(\Delta x_i \cos \alpha_i + \Delta y_i \sin \alpha_i). \quad (4.1.10)$$

Mit (4.1.6), (4.1.8) gilt an dem Aufsprung- und Absprungknoten des Randstücks

$$\begin{aligned} A_0 \cos(\alpha_0) &= A_0 \cos(\theta(s_l) - \alpha_0) = A_0 \operatorname{cn}(\tilde{v}_0)^2 = \kappa(s_l)^2 = 0, \\ A_1 \cos(\alpha_1) &= A_1 \cos(\theta(s_r) - \alpha_1) = A_1 \operatorname{cn}(v_1)^2 = \kappa(s_r)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Daraus folgt  $\alpha_0, \alpha_1 \in \{\pm \frac{\pi}{2}\}$  und  $\tilde{v}_0, v_1 \in \{(4n \pm 1)K, n \in \mathbb{N}\}$ , wobei  $4K$  die Periodenlänge der Jacobischen elliptischen Funktionen  $\operatorname{cn}$  und  $\operatorname{sn}$  ist. Da für den Tangentenwinkel

$$|\theta(s) - \alpha_i| \leq \frac{1}{2}\pi, \quad s \in \bar{J}_i,$$

gilt und nach Voraussetzung

$$0 < y_{max} = \int_0^{s_l} \sin \theta(s) ds, \quad 0 > y_1 - y_{max} = \int_{s_r}^{s_1} \sin \theta(s) ds$$

ist, gilt

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi, \quad \theta_0 \in [0, \pi], \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \theta_1 \in [-\pi, 0]. \quad (4.1.12)$$

Die Parameter  $\tilde{v}_0$  und  $v_1$  können bis auf die Periode  $4K$  aus den Gleichungen (4.1.8)

$$\begin{aligned} -1 &= -\sin(\alpha_0) = \sin(\theta(s_l) - \alpha_0) = \sqrt{2} \operatorname{sn}(\tilde{v}_0) \operatorname{dn}(\tilde{v}_0) \quad \text{und} \\ 1 &= -\sin(\alpha_1) = \sin(\theta(s_r) - \alpha_1) = \sqrt{2} \operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

bestimmt werden und somit gilt

$$\tilde{v}_0 = (4n_0 - 1)K, \quad v_1 = (4n_1 + 1)K, \quad n_0, n_1 \in \mathbb{Z}.$$

Ohne Einschränkung kann man  $\tilde{v}_0 = 3K$  und  $v_1 = K$  wählen. Durch (4.1.13) wird auch die Vorzeichenbedingung für  $\kappa'$  aus dem nichtlinearen Gleichungssystem 2.4 erfüllt, da auf dem Randstück  $\theta = 0$  gilt, und damit für  $s = s_l$  und  $s = s_r$  nach (4.1.5), (4.1.7)

$$\operatorname{sign}(\kappa'(s^+) - \kappa'(s^-)) = -1 = \operatorname{sign}((\sin \theta(s), -\cos \theta(s))g_{\mathbf{z}}^T(\mathbf{z}(s)))$$

mit  $g(\mathbf{z}) = y - y_{max} \leq 0$  gilt.

Nach (4.1.12) gilt  $\theta_0 \in [0, \pi]$  und  $\theta_1 \in [-\pi, 0]$ . Diesen Bereich kann man noch einschränken. Wenn die Krümmung  $\kappa$  auf einem der beiden Intervalle  $\bar{J}_0$  oder  $\bar{J}_1$  eine zweite Nullstelle besitzt, so ist nach Satz 2.20 die Kurve kein lokales Minimum von Problem 2.2. Also muß  $0 < \tilde{v}_i - v_i < 2K$  bzw.  $v_0, \tilde{v}_1 \in (K, 3K)$  gelten. Damit sind die Parameter  $v_0$  und  $\tilde{v}_1$  durch die Gleichungen (4.1.8) eindeutig bestimmt. Daraus folgt  $\theta_0 \in (0, \pi)$ ,  $\theta_1 \in (-\pi, 0)$  und  $0 < x_l \leq x_r < x_1$ .

Aus den verbleibenden vier Gleichungen (4.1.9)-(4.1.10) kann man nun die Parameter  $A_0, A_1, x_l$  und  $x_r$  berechnen. Beachtet man, daß  $\cos(\alpha_i) = 0$  gilt, so erhält man mit  $\varepsilon_i = \sin \alpha_i = (-1)^i$  für  $i = 0, 1$

$$0 = \varepsilon_i \underbrace{2(\operatorname{cn}(\tilde{v}_i) - \operatorname{cn}(v_i))}_{=:C_i \neq 0} - \sqrt{A_i} \Delta x_i \quad \text{und} \quad (4.1.14)$$

$$0 = \varepsilon_i \underbrace{2\sqrt{2} (E(\tilde{v}_i) - E(v_i) - \frac{1}{2}(\tilde{v}_i - v_i))}_{=:D_i > 0} - \sqrt{A_i} \Delta y_i. \quad (4.1.15)$$

Es folgt

$$\sqrt{A_i} = \varepsilon_i \frac{D_i}{\Delta y_i} > 0 \quad \text{und} \quad \Delta x_i = \varepsilon_i \frac{C_i}{\sqrt{A_i}} = \frac{C_i}{D_i} \Delta y_i. \quad (4.1.16)$$

Für die Bogenlänge gilt mit  $s_0 = 0$

$$s_l = \frac{\tilde{v}_0 - v_0}{k\sqrt{A_0}}, \quad s_r = s_l + x_r - x_l, \quad \text{und} \quad s_1 = s_r + \frac{\tilde{v}_1 - v_1}{k\sqrt{A_1}}. \quad (4.1.17)$$

Nur wenn die berechneten Parameter zulässig sind, kann es ein Randstück geben. Die Knoten  $x_l$  und  $x_r$  müssen die Ungleichung  $x_0 < x_l \leq x_r < x_1$  erfüllen. Da  $v_0, \tilde{v}_1 \in (K, 3K)$  sind, gilt

$$C_0 = -\operatorname{cn}(v_0) > 0 \quad \text{und} \quad C_1 = \operatorname{cn}(\tilde{v}_1) < 0. \quad (4.1.18)$$

Damit sind die Abstände  $\Delta x_0 = x_l - x_0$  und  $\Delta x_1 = x_1 - x_r$  positiv. Mit  $B_i := \frac{C_i}{D_i}$ ,  $i = 0, 1$ , gilt für den Abstand  $x_r - x_l$

$$\begin{aligned} x_r - x_l &= x_1 - \Delta x_1 - \Delta x_0 - x_0 \\ &= x_1 - x_0 - B_1(y_1 - y_{max}) - B_0(y_{max}). \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Löst man die Ungleichung  $x_r - x_l \geq 0$  nach  $y_{max}$  auf, so erhält man mit  $\Delta x := x_1 - x_0$

$$y_{maximal} := \frac{\Delta x - B_1 y_1}{B_0 - B_1} \geq y_{max} \quad (4.1.20)$$

als größte obere Schranke, bei der es noch ein Randstück gibt. Falls  $y_{maximal} < \max(0, y_1)$  ist, so gibt es für keine Parallele zur oberen Schranke  $y \leq y_{max}$  eine Lösung mit Randstück. Die Bedingung  $y_{maximal} > \max(0, y_1)$  ist mit  $\Delta y = y_1$  äquivalent zu den Ungleichungen

$$\Delta x > B_0 \Delta y \quad \text{und} \quad \Delta x > -B_1 \Delta y \quad (4.1.21)$$

für die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0$  und  $\mathbf{z}_1$ , da nach (4.1.15) und (4.1.18) die Ungleichungen  $B_1 = \frac{C_1}{D_1} < 0$  und  $B_0 = \frac{C_0}{D_0} > 0$  gelten. Ist eine der beiden Ungleichungen (4.1.21) nicht erfüllt, so gibt es keine Parallele zur Restriktion eine Lösung mit einem Randstück dafür aber gegebenenfalls Lösungen mit einem Berührungspunkt, siehe Beispiel 4.5. Für die Krümmung und ihre Ableitung am Rand gilt nach (4.1.6), (4.1.7)

$$\kappa(0) = \sqrt{A_0} \operatorname{cn}(v_0), \quad \kappa(L) = \sqrt{A_1} \operatorname{cn}(\tilde{v}_1) \quad (4.1.22)$$

$$\kappa'(0) = -kA_0 \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0), \quad \kappa'(L) = -kA_1 \operatorname{sn}(\tilde{v}_1) \operatorname{dn}(\tilde{v}_1). \quad (4.1.23)$$

Die Biegungsenergie des nichtlinearen Spline beträgt

$$I(\mathbf{z}, \theta, \kappa, s_1) = \sqrt{A_0} D_0 + \sqrt{A_1} D_1. \quad (4.1.24)$$

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Gleichungen kann man im folgenden Algorithmus zur Berechnung eines durch eine obere Schranke  $y \leq y_{max}$  restringierten nichtlinearen Splines zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$  mit  $x_1 > 0$ ,  $\theta_0 \in (0, \pi)$  und  $\theta_1 \in (-\pi, 0)$ , bei dem ein Randstück auftritt, zusammenfassen. Außerdem ist es damit möglich, zu überprüfen, ob es bei den gegebenen Interpolationsdaten eine obere Schranke gibt, für die der restringierte Spline ein Randstück besitzt.

#### Algorithmus 4.1.

1. Setze und berechne die Parameter:

$$\begin{aligned} k &:= \sqrt{0.5}; \\ \alpha_0 &:= 0.5\pi; \quad \alpha_1 := -0.5\pi; \\ w_i &:= \operatorname{cn}^{-1} \sqrt{\cos(\theta_i - \alpha_i)}, \quad i = 0, 1; \quad (\text{mit } w_i \in [0, K], i = 0, 1) \\ v_0 &:= 2K + \operatorname{sign}(\sin(\alpha_0 - \theta_0))w_0; \quad \tilde{v}_0 := 3K; \\ v_1 &:= K; \quad \tilde{v}_1 := 2K + \operatorname{sign}(\sin(\alpha_1 - \theta_1))w_1; \\ C_i &:= 2(\operatorname{cn}(\tilde{v}_i) - \operatorname{cn}(v_i)), \quad i = 0, 1; \\ D_i &:= 2\sqrt{2} (E(\tilde{v}_i) - E(v_i) - \frac{1}{2}(\tilde{v}_i - v_i)), \quad i = 0, 1; \\ B_i &:= C_i/D_i, \quad i = 0, 1; \\ A_i &:= D_i^2/(\Delta y_i)^2, \quad i = 0, 1; \\ y_{maximal} &:= (\Delta x - B_1 y_1)/(B_0 - B_1); \end{aligned}$$

2. Falls  $\max(0, y_1) > y_{maximal}$ :

„Es gibt keine obere Schranke der Form  $y \leq \tilde{y}_{max}$ , für die es ein Randstück gibt.“  
STOP.

3. Falls  $y_{max} > y_{maximal}$ :

„Der restringierte nichtlineare Spline besitzt einen Berührungspunkt oder verletzt die obere Schranke nicht.“  
STOP.

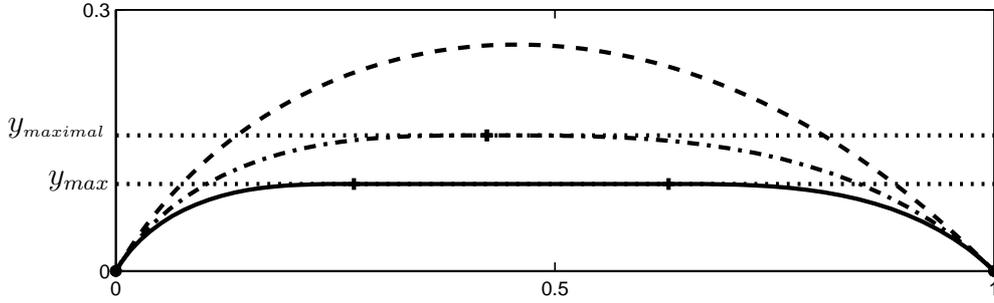


Abbildung 4.2: Der unrestringierte (---), der durch  $y \leq y_{max} = 0.1$  restringierte (—) und der durch  $y \leq y_{maximal} \approx 0.1558$  restringierte nichtlineare Spline (-·-·) aus Beispiel 4.1

4. „Es gibt einen nichtlinearen Spline mit Randstück  $[x_l, x_r]$ .“

Berechne die Parameter:

$$\begin{aligned}
 x_l &:= B_0 y_{max}; & s_l &:= \sqrt{2}(\tilde{v}_0 - v_0)/\sqrt{A_0}; \\
 x_r &:= x_1 + B_1(y_{max} - y_1); & s_r &:= s_l + x_r - x_l; \\
 s_1 &:= s_r + \sqrt{2}(\tilde{v}_1 - v_1)/\sqrt{A_1}; \\
 \kappa(0) &:= \sqrt{A_0} \operatorname{cn}(v_0); & \kappa'(0) &:= -kA_0 \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0); \\
 \kappa(L) &:= \sqrt{A_1} \operatorname{cn}(\tilde{v}_1); & \kappa'(L) &:= -kA_1 \operatorname{sn}(\tilde{v}_1) \operatorname{dn}(\tilde{v}_1); \\
 I(\mathbf{z}, \theta, \kappa, s_1) &:= \sqrt{A_0} D_0 + \sqrt{A_1} D_1;
 \end{aligned}$$

STOP.

Mit diesem Algorithmus kann man überprüfen, ob es bei der vorgegebenen oberen Schranke ein Randstück gibt und dieses berechnen. An Hand des folgenden Beispiels soll dieses einmal vorgerechnet werden.

**Beispiel 4.1.** Gegeben seien die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  und die Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  und  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ . Der unrestringierte nichtlineare Spline zu diesen Interpolationsdaten ist in Abbildung 4.2 gestrichelt gezeichnet. Er verletzt die obere Schranke  $y \leq y_{max} = 0.1$ . Daher wird ein restringierter nichtlinearer Spline gesucht, der die Interpolationsbedingungen und die Restriktion erfüllt. Ob es zu dieser Restriktion einen nichtlinearen Spline mit Randstück gibt, wird mit Algorithmus 3.1 nachgeprüft. Es gilt

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\pi, \quad \tilde{v}_0 = 3K \approx 5.5622, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}\pi, \quad v_1 = K \approx 1.8541.$$

Für die Parameter  $v_0$  und  $\tilde{v}_1$  gilt nach Gleichung (4.1.8)

$$\operatorname{cn}^2(v_0) = \cos(\theta_0 - \alpha_0) \approx 0.8660, \quad \operatorname{cn}^2(\tilde{v}_1) = \cos(\theta_1 - \alpha_1) \approx 0.7071. \quad (4.1.25)$$

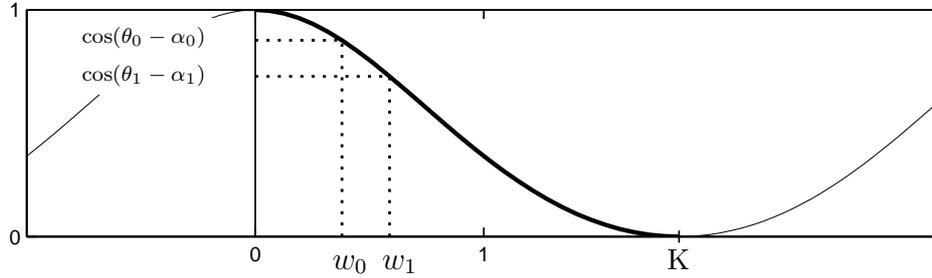


Abbildung 4.3: Die Funktion  $\text{cn}^2(v, \sqrt{0.5})$  für  $v \in [-1, 3]$  mit den Lösungen  $w_0, w_1 \in [0, K]$  der Gleichung (4.1.25) aus Beispiel 4.1

Da die Funktion  $\text{cn}^2$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse und  $2K$ -periodisch ist, genügt es, eine Lösung der Gleichung im Intervall  $[0, K]$  zu bestimmen,  $w_0 \approx 0.3791$  und  $w_1 \approx 0.5875$ , vgl. Abb. 4.3. Die gesuchten Parameter

$$v_0 \approx 4.0873 \quad \text{und} \quad \tilde{v}_1 \approx 3.1206$$

werden durch  $v_0, \tilde{v}_1 \in (K, 3K)$  bestimmt. Mit  $\Delta y_0 = 0.1$  und  $\Delta y_1 = -0.1$  erhält man aus Gleichung (4.1.14), (4.1.15) und (4.1.20)

$$D_0 = 2\sqrt{2} (E(\tilde{v}_0) - E(v_0) - \frac{1}{2}(\tilde{v}_0 - v_0)) \approx 0.6866,$$

$$D_1 = 2\sqrt{2} (E(\tilde{v}_1) - E(v_1) - \frac{1}{2}(\tilde{v}_1 - v_1)) \approx 0.4538,$$

$$C_0 = 2(\text{cn}(\tilde{v}_0) - \text{cn}(v_0)) \approx 1.8612,$$

$$C_1 = 2(\text{cn}(\tilde{v}_1) - \text{cn}(v_1)) \approx -1.6818,$$

und als größte obere Schranke, bei der es noch ein Randstück gibt,

$$y_{\text{maximal}} := \frac{-\Delta x + B_1 y_1}{B_1 - B_0} \approx 0.1558.$$

Der zu der Restriktion  $y \leq y_{\text{maximal}}$  gehörende Spline ist in Abbildung 4.2 gestrichpunktet gezeichnet. Er besitzt bei  $x_l = x_r \approx 0.4225$  ein Randstück der Länge 0, bzw. einen Berührungspunkt, an dem die Krümmung verschwindet.

Da die gegebene obere Schranke  $y \leq y_{\text{max}} = 0.1$  kleiner als  $y_{\text{maximal}}$  ist, kann man für sie einen Spline mit Randstück berechnen. Nach Gleichung (4.1.16) gilt für das Randstück

$$x_l = B_0 \Delta y_0 \approx 0.2711 \quad \text{und} \quad x_r = x_1 - B_1 \Delta y_1 \approx 0.6294.$$

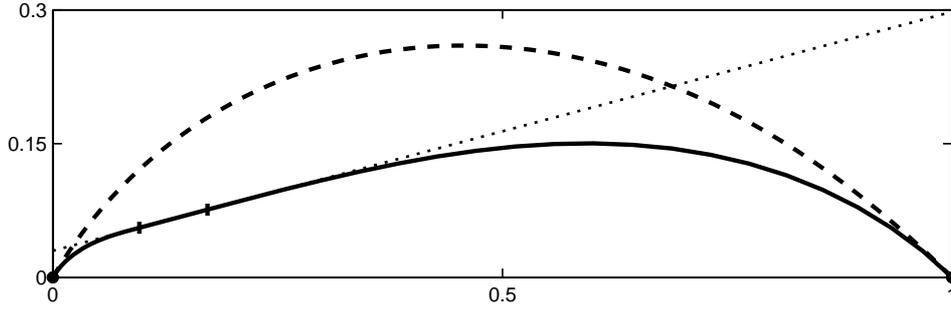


Abbildung 4.4: Der unrestringierte (---) und der restringierte (—) nichtlineare Spline aus Beispiel 4.2.

Mit den Parametern

$$\begin{aligned} \sqrt{A_0} &= \frac{D_0}{\Delta y_0} \approx 6.8659, & \sqrt{A_1} &= \frac{D_1}{\Delta y_1} \approx 4.5384, \\ s_l &= \sqrt{\frac{2}{A_0}} (\tilde{v}_0 - v_0) \approx 0.3038, & s_r &= s_l + x_r - x_l \approx 0.6622, \\ s_1 &= s_r + \sqrt{\frac{2}{A_1}} (\tilde{v}_1 - v_1) \approx 1.0568 \end{aligned}$$

aus den Gleichungen (4.1.16), (4.1.17) kann man den restringierten nichtlinearen Spline zeichnen. Es ist die durchgezogene Kurve in Abbildung 4.2.

Betrachtet man ein Beispiel, bei dem die Restriktion nicht parallel zur  $x$ -Achse ist, so kann man Algorithmus 4.1 erst nach einer geeigneten Drehung des Koordinatensystems anwenden. Dieses ist bei dem folgenden Beispiel der Fall.

**Beispiel 4.2.** Zu den Interpolationsdaten aus Beispiel 4.1 wird ein nichtlinearer Spline gesucht, der die Restriktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0$$

mit  $\beta = \frac{\pi}{12}$ ,  $\mathbf{z}_G = (0, 0.03)^T$  erfüllt. Um den Algorithmus 4.1 zur Berechnung des restringierten nichtlinearen Splines verwenden zu können, müssen die Interpolationsdaten erst einmal um den Winkel  $-\beta$  gedreht werden. Zu den gedrehten Interpolationsdaten

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = (0, 0)^T, \quad \bar{\mathbf{z}}_1 \approx (0.9659, -0.2588)^T, \quad \bar{\theta}_0 \approx 0.7854, \quad \bar{\theta}_1 \approx -1.047.$$

kann man nun wie im vorigen Beispiel den restringierten Spline berechnen. Den in das Ausgangskordinatensystem zurückgedrehten restringierten Spline sieht man in Abbildung 4.4. Er besitzt ein Randstück zwischen den Punkten  $\mathbf{z}_l \approx (0.0962, 0.0558)^T$  und  $\mathbf{z}_r \approx (0.1719, 0.0761)^T$ . Der unrestringierte Spline ist gestrichelt gezeichnet.

Der in Abbildung 4.1 gezeichnete nichtlineare Spline gehört zu dem folgenden Beispiel.

**Beispiel 4.3.** Gegeben seien die Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (0, 0.2)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  und  $\theta_1 = -\frac{3}{8}\pi$ . Der durch die obere Schranke  $y \leq y_{max} = 0.25$  restringierte nichtlineare Spline besitzt ein Randstück mit  $x_l = 0.6777$  und  $x_r = 0.8814$ . In Abbildung 4.1 sieht man den restringierten und den unrestringierten nichtlinearen Spline.

## 4.2 Das lokale Problem mit einem Berührungspunkt

Im Fall eines Berührungspunktes läßt sich das nichtlineare Gleichungssystem nicht so vereinfachen wie im Fall eines Randstücks oder beim unrestringierten Spline. Zwar kann man auch hier die Zahl der nichtlinearen Gleichungen noch reduzieren, aber insbesondere dann, wenn das Intervall zu einem Problem mit mehr als zwei Interpolationsknoten gehört, bietet es sich an, den Berührungspunkt wie einen Interpolationsknoten zu behandeln.

Hierfür wird der Algorithmus für den unrestringierten Spline entsprechend modifiziert. Dieses soll zunächst an einem Beispiel mit nur zwei Interpolationspunkten, von denen der erste im Nullpunkt liegt, geschehen. Da hier im Gegensatz zum Interpolationsknoten nicht der Tangentenwinkel, sondern die genaue Lage des Punktes  $\mathbf{z}_b$  auf der Restriktion unbekannt ist, stellt sich die Frage, nach einer geeigneten Variablen, um ihn zu repräsentieren. Die beiden offensichtlichen Möglichkeiten der  $x$ - und  $y$ -Koordinate scheiden aus, da es sich auch um eine Restriktion parallel zu einer der Koordinatenachsen handeln kann. Analog zum unrestringierten Fall kann man ihn durch einen Winkel als  $\mathbf{z}_b = d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b)^T$  darstellen. Dabei wird der Skalierungsfaktor  $d$  durch die gegebene affin-lineare Restriktion

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0 \quad (4.2.1)$$

und die Gleichung  $g(\mathbf{z}_b) = 0$  bestimmt. Der Algorithmus 3.2 ändert sich in soweit, daß nun die Variable  $\sigma_b$  den Tangentenwinkel  $\theta_b$  bei der Berechnung des lokalen Problems ersetzt. Im folgenden wird eine Methode vorgestellt, um zu prüfen, ob der unrestringierte Spline die Restriktion verletzt. Außerdem wird ein Verfahren zur Berechnung eines geeigneten Startwertes für den Berührungspunkt vorgestellt.

Ob der unrestringierte nichtlineare Spline eine gegebene affin-lineare Restriktion (4.2.1) verletzt, kann man genauso untersuchen, wie man bei einer Funktion untersucht, ob sie eine obere Schranke verletzt. Zunächst bestimmt man alle lokalen „Extrema“, und untersucht, ob sie die Restriktion verletzen. Im Fall des nichtlinearen Splines sucht man alle Punkte  $\mathbf{z}(s_e)$ , deren Tangentenwinkel  $\theta(s_e)$  gleich dem Tangentenwinkel  $\beta$  der Restriktion ist. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß es sich um ein Intervall mit den Interpolationspunkten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  und  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$  und den Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $\theta_1$  handelt. Der nichtlineare Spline besitzt dann nach Satz 2.14 die Krümmung  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(k|\kappa_m|(s - s_m))$ . Nach Gleichung (3.1.6)–(3.1.7)

$$\begin{aligned} \kappa'_0 &:= \kappa'(0) = \frac{1}{2}A \sin(\theta_0 - \alpha) = -\frac{1}{2}A \cos \alpha, \\ \kappa^2_0 &:= \kappa^2(0) = A \cos(\theta_0 - \alpha) = A \sin \alpha, \end{aligned}$$

gilt

$$\alpha = \arccos(-2\kappa'_0 A^{-1}) \quad (4.2.2)$$

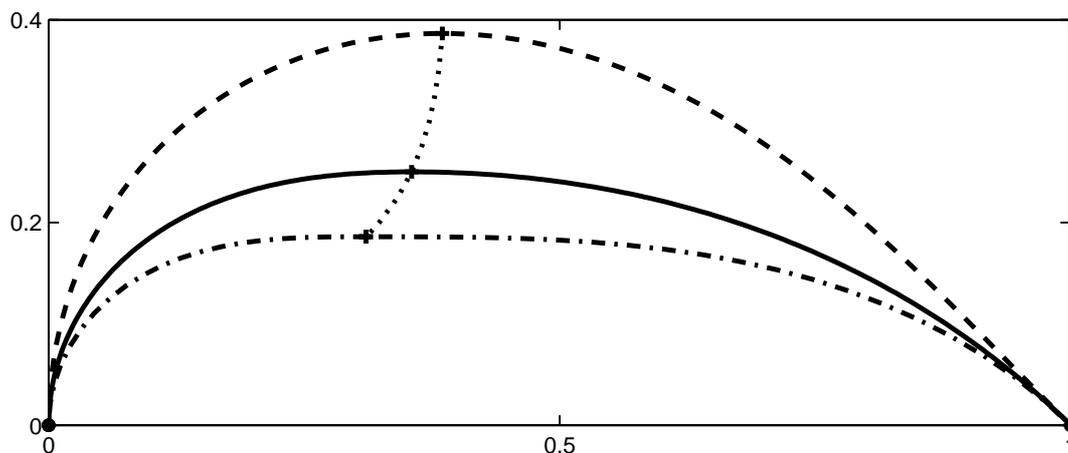


Abbildung 4.5: Der unrestringierte (---), der durch  $y \leq 0.25$  restringierte (—) und der durch  $y \leq y_{\text{maximal}} \approx 0.1860$  restringierte (-·-·-) nichtlineare Spline aus Beispiel 4.4. Die Berührungspunkte sind durch ( $\cdot + \cdot$ ) gekennzeichnet.

mit  $A = \kappa_m^2$ , da  $\sin \alpha = \frac{\kappa_0^2}{A} \geq 0$  ist. Aus Gleichung (2.2.1)  $\kappa^2 = A \cos(\theta - \alpha)$  folgt

$$\cos(\beta) = \cos(\theta(s_e)) = \text{cn}^2(v_e) \quad \text{mit} \quad v_e = \sqrt{\frac{A}{2}}(s_e - s_m). \quad (4.2.3)$$

Damit kann man den Punkt  $\mathbf{z}(s_e)$  nach Satz 2.11 und 2.16 berechnen, und überprüfen, ob er die Restriktion verletzt. Auf diese Weise erhält man den Punkt, an dem die Restriktion maximal verletzt wird.

Den so berechneten Punkt  $\mathbf{z}_e$ , an dem die Restriktion am stärksten verletzt wird, kann man zur Berechnung eines Startwertes für den Berührungspunkt verwenden. Zwei Möglichkeiten zur Berechnung des Startwertes sollen am folgenden Beispiel verdeutlicht werden.

**Beispiel 4.4.** Gegeben seien die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  und die Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ . Der unrestringierte nichtlineare Spline zu diesen Interpolationsdaten ist in Abbildung 4.5 gestrichelt gezeichnet. Er verletzt die obere Schranke  $y \leq 0.38$ . Die Restriktion wird am stärksten im Punkt  $\mathbf{z}_e \approx (0.3852, 0.3866)^T$  verletzt. Als Startschätzung für den Berührungspunkt des gesuchten restringierten Splines könnte man den ihm am nächsten gelegenen Punkt auf der Restriktion  $\mathbf{z}_R \approx (0.3852, 0.3800)^T$  wählen. Dieser ist eine gute Startschätzung für den Berührungspunkt  $\mathbf{z}_b \approx (0.3847, 0.3800)^T$  des restringierten Splines. Restringiert man den Spline aber stärker, so ist diese Startschätzung weniger geeignet. Bei der Restriktion  $y \leq 0.25$  liegt der Berührungspunkt des restringierten Splines bei  $(0.3552, 0.2500)$ . Für die Restriktion  $y \leq 0.19$  liegt er bei  $(0.3144, 0.1900)$ . Wählt man eine Restriktion  $y \leq y_{\text{max}} \leq 0.1860$ , so besitzt der restringierte nichtlineare Spline ein Randstück. Mit Algorithmus 4.1 kann man die Restriktion, bei der der Übergang zwischen Berührungspunkt und Randstück ist, ebenso wie die Lage des Randstücks berechnen. Für die Restriktion  $y \leq y_{\text{maximal}} \approx 0.1860$  erhält

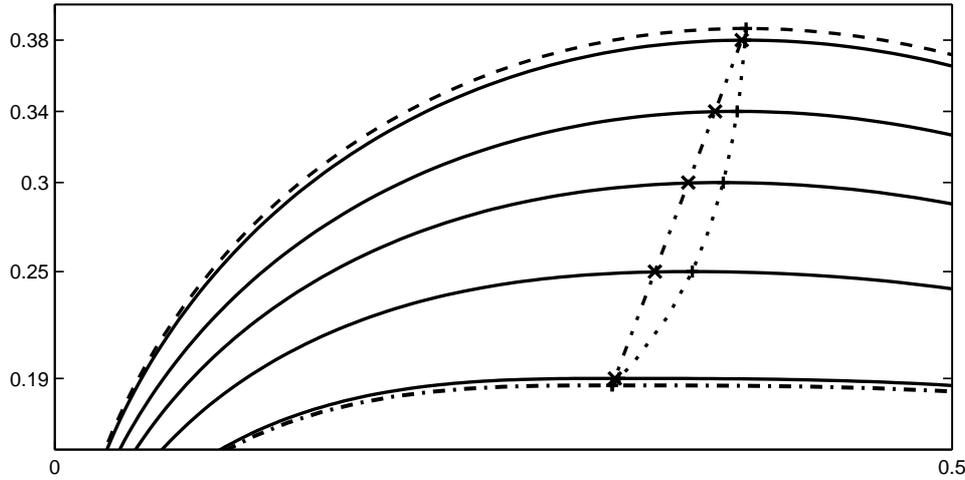


Abbildung 4.6: Der unrestringierte (---), der durch  $y \leq y_{\text{maximal}} \approx 0.1860$  restringierte (-·-·) und weitere restringierte (—) nichtlineare Splines aus Beispiel 4.4. Die Berührungspunkte sind durch ( $\cdot+\cdot$ ) und die Startschätzungen für die Berührungspunkte mit ( $\cdot-\cdot$ ) gekennzeichnet.

man das Randstück der Länge Null bzw. den Berührungspunkt  $\mathbf{z}_r \approx (0.3106, 0.1860)^\top$ . Dieses liefert eine gute Startschätzung für den Berührungspunkt zur Restriktion  $y \leq 0.19$ . Um eine für alle Restriktionen geeignete Startschätzung zu finden, wird eine Linearkombination aus den beiden Punkten  $\mathbf{z}_e$  und  $\mathbf{z}_r$  gewählt, die auf der Geraden  $y = y_{\text{max}}$  liegt. Für eine beliebige Gerade (4.2.1)

$$g(\mathbf{z}) = (\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_G) \leq 0$$

als Restriktion erhält man als Startschätzung

$$\mathbf{z}_s = \lambda \mathbf{z}_r + (1 - \lambda) \mathbf{z}_e, \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{(\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z}_e - \mathbf{z}_G)}{(\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z}_e - \mathbf{z}_r)} \quad (4.2.4)$$

Die Startschätzung  $\mathbf{z}_s$  und der Berührungspunkt  $\mathbf{z}_b$  des restringierten nichtlinearen Splines sind in Abbildung 4.6 für verschiedene Restriktionen gezeichnet. Die Werte von  $\lambda$ ,  $x_b$  und  $x_s$  sind für verschiedene Restriktionen in Tabelle 4.1 angegeben.

Zur Berechnung des nichtlinearen Splines muß man nun auf jedem der beiden Teilintervalle das lokale Problem mit der Näherung des Berührungspunktes  $\mathbf{z}_s$  lösen. Hierfür kann man eine Näherung für die Krümmung am Berührungspunkt verwenden. Beim Übergang zwischen Berührungspunkt und Randstück verschwindet die Krümmung am Berührungspunkt. Am „Berührungspunkt“ des unrestringierten Splines  $\mathbf{z}_e$  beträgt sie  $\kappa_e = \kappa(s_e) \approx -2.3092$ . Als Näherung für die Krümmung an einem Berührungspunkt wird die Linearkombination

$$\kappa_s = (1 - \lambda) \kappa_e \quad (4.2.5)$$

$y_{max}$	$\lambda$	$x_s$	$x_b$	$\kappa_s$	$\tilde{\kappa}_b^-$	$\tilde{\kappa}_b^+$	$\kappa_b$
unrestr.	0	0.3852	0.3852	-2.3092	-2.3092	-2.3092	-2.3092
0.38	0.0327	0.3828	0.3847	-2.2337	-2.2884	-2.2441	-2.2597
0.34	0.2322	0.3679	0.3803	-1.7730	-2.1157	-1.8250	-1.9176
0.3	0.4317	0.3530	0.3725	-1.3123	-1.8405	-1.3740	-1.5038
0.25	0.6811	0.3344	0.3552	-0.7365	-1.2806	-0.7792	-0.8889
0.19	0.9803	0.3120	0.3144	-0.0455	-0.1034	-0.0480	-0.0554
$y_{maximal}$	1	0.3106	0.3106	0	0	0	0

Tabelle 4.1: Vergleich zwischen Näherung und berechnetem Wert für Berührungspunkt und Krümmung am Berührungspunkt

mit  $\lambda$  aus Gleichung (4.2.4) verwendet. Diese ist eine gute Näherung solange die Krümmung am Berührungspunkt betragsmäßig nicht zu klein wird, d.h. der Spline nicht zu stark restringiert wird, da das Verfahren zur Lösung des unrestringierten lokalen Problems 3.1 bei Null eine Definitionslücke besitzt. Ist der Betrag der vermuteten Krümmung am Berührungspunkt so klein, daß numerische Probleme auftreten, so kann man stattdessen die Krümmungen an den Interpolationsknoten zur Lösung des lokalen Problems verwenden. Für diese erhält man eine gute Approximation, indem man die entsprechenden Linearkombinationen mit den Krümmungen an den Interpolationsknoten verwendet. Diese sind für schwache Restriktionen ungeeignet, da sie das Vorzeichen wechseln können. In diesem Beispiel beträgt die Krümmung am zweiten Interpolationsknoten für den unrestringierten Spline  $\kappa_1^{unrestr.} \approx 0.3170$ , für den durch  $y \leq y_{maximal}$  restringierten Spline gilt  $\kappa_1^{y_{maximal}} \approx -2.0513$ . Die Krümmung am Berührungspunkt  $\kappa_b$ , die erste Näherung  $\kappa_s$  und die aus dem lokalen Problem zu den Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_s, \theta_0, \theta_b$ , bzw.  $\mathbf{z}_s, \mathbf{z}_1, \theta_b, \theta_1$  berechneten Näherungen für die Krümmung am Berührungspunkt  $\tilde{\kappa}_b^-$ , bzw.  $\tilde{\kappa}_b^+$  sind in Tabelle 4.1 für verschiedene Restriktionen angegeben.

$y_{max}$	$\kappa'(\tau_b^-)$	$\kappa'(\tau_b^+)$	$\kappa_b$
unrestr.	2.5952	2.5952	-2.3092
0.38	2.8080	2.5077	-2.2597
0.34	4.4187	1.8194	-1.9176
0.3	6.7052	0.8478	-1.5038
0.25	10.9524	-0.7363	-0.8889
0.19	19.8803	-2.8473	-0.0554
$y_{maximal}$	20.7366	-2.9752	0

Tabelle 4.2: Die Krümmung  $\kappa$  und ihre Ableitung  $\kappa'$  an den berechneten Berührungspunkten.

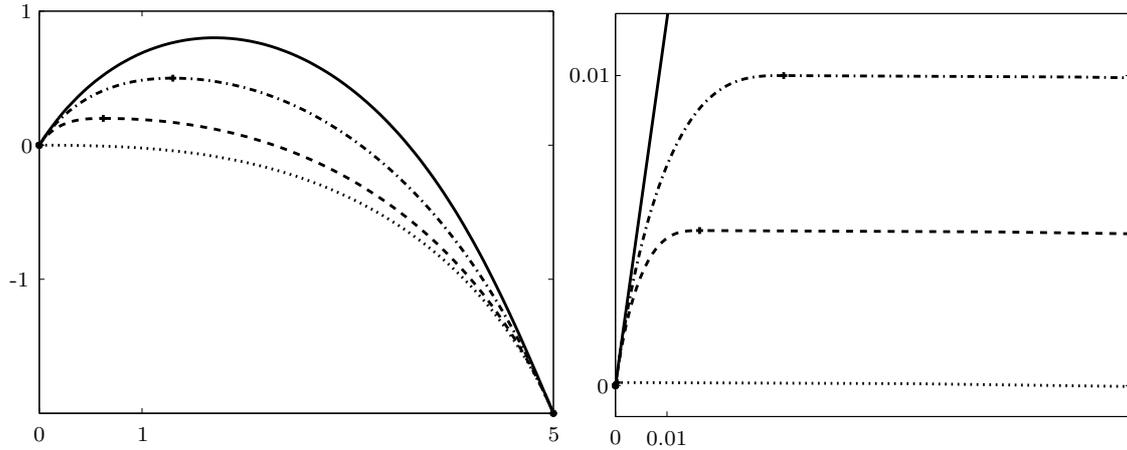


Abbildung 4.7: In der linken Zeichnung sind der unrestringierte (—), der durch  $y \leq 0.5$  (- - -), der durch  $y \leq 0.2$  (- - -) und der durch  $y \leq 0.0001$  (· · · ·) restringierte nichtlineare Spline aus Beispiel 4.5 zu sehen. Die rechte Abbildung zeigt in einem Ausschnitt den unrestringierten (—), den durch  $y \leq 0.01$  (- - -), den durch  $y \leq 0.005$  (- - -) und den durch  $y \leq 0.0001$  (· · · ·) restringierten nichtlinearen Spline.

Für die berechneten Berührungspunkte  $\tau_b$  muß noch die Vorzeichenbedingung

$$\text{sign}(\kappa'(\tau_b^+) - \kappa'(\tau_b^-)) = \text{sign}((\sin \theta(\tau_b), -\cos \theta(\tau_b))g_z^T(\mathbf{z}(\tau_b))) \quad (4.2.6)$$

aus dem nichtlinearen Gleichungssystem 2.4 überprüft werden, wobei in diesem Beispiel

$$\text{sign}((\sin \theta(\tau_b), -\cos \theta(\tau_b))g_z^T(\mathbf{z}(\tau_b))) = -1$$

gilt. Diese Bedingung ist für alle berechneten Berührungspunkte erfüllt, da  $\kappa'(\tau_b^-) \geq \kappa'(\tau_b^+)$  gilt, vgl. Tabelle 4.2. Für den unrestringierten Spline ist  $\kappa'$  an der Stelle  $\tau_b$  stetig und für den nichtlinearen Spline mit Randstück der Länge Null gilt  $\kappa'(\tau_b^-) > 0 > \kappa'(\tau_b^+)$ , siehe Abschnitt 4.1.

Das an Hand des vorigen Beispiels erläuterte Verfahren, eine Startschätzung für den Berührungspunkt mit Hilfe des lokalen Problems mit einem Randstück zu berechnen, kann nicht bei allen Beispielen so angewandt werden. Im folgenden Beispiel existiert auch für beliebige Parallelverschiebung der Restriktion keine Lösung mit Randstück. Das zuerst vorgeschlagene Verfahren, den Punkt  $\mathbf{z}_R$  auf der Restriktion zu verwenden, der am dichtesten am Extremum liegt, liefert auch in diesem Fall keine guten Startwerte. Deshalb soll an diesem Beispiel ein weiteres Verfahren zur Approximation des Berührungspunktes vorgestellt werden.

**Beispiel 4.5.** Gegeben seien die Interpolationspunkte  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$  und  $\mathbf{z}_1 = (5, -2)^T$  und die Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 = 0.8835$  und  $\theta_1 = -1.0638$ . Der unrestringierte nichtlineare Spline zu diesen Interpolationsdaten ist in Abbildung 4.7 mit einer durchgezogenen Linie gezeichnet.

Mit Algorithmus 4.1 erhält man, daß  $y_{\maximal} \approx -0.0102 < 0$ . Diese Schranke wird am linken Interpolationspunkt verletzt. Auch der Berührungspunkt liegt, je stärker die Restriktion ist, um so dichter am linken Interpolationspunkt, siehe Abbildung 4.7. Daher bietet es sich an, anstelle des Punktes  $\mathbf{z}_r$ , den man hier nicht berechnen kann, den Punkt  $\mathbf{z}_0$  für die Linearkombination

$$\mathbf{z}_s = \lambda \mathbf{z}_0 + (1 - \lambda) \mathbf{z}_e, \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{(\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z}_e - \mathbf{z}_G)}{(\sin \beta, -\cos \beta)(\mathbf{z}_e - \mathbf{z}_0)} \quad (4.2.7)$$

zu verwenden.

Bei Beispiel 4.12 tritt beim lokalen Problem auch der Fall auf, daß die obere Schranke  $y \leq y_{\maximal}$  am rechten Interpolationsknoten verletzt wird. Hier muß man also in Formel (4.2.4) den Interpolationsknoten  $\mathbf{z}_1$  für  $\mathbf{z}_r$  einsetzen.

Die in diesem Abschnitt erläuterten Ideen zur Berechnung eines restringierten nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationspunkten und einem Berührungspunkt sind im folgenden Algorithmus zusammengefaßt.

#### Algorithmus 4.2.

1. *Prüfe, ob Restriktion verletzt:*

Transformiere die Interpolationsdaten auf Problem 3.1;

Berechne den unrestringierten nichtlinearen Spline mit Algorithmus 3.1;

Berechne alle Punkte  $\mathbf{z}_e$  mit Tangente parallel zur Restriktion nach (4.2.2)-(4.2.3);

Falls  $g(\mathbf{z}_e) \leq 0$  für alle  $\mathbf{z}_e$ : „Die Restriktion wird nicht verletzt.“ STOP.

2. *Wahl des Startwertes  $\mathbf{z}_s$  für den Berührungspunkt  $\mathbf{z}_b$ :*

Transformiere die Interpolationsdaten mit  $T$  auf Problem 4.1, *genauer:*

$$\bar{\mathbf{z}}_0 = (0, 0)^T, \quad \bar{\mathbf{z}}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)^T, \quad \bar{x}_1 > 0, \quad \bar{\theta}_0 \in (0, \pi), \quad \bar{\theta}_1 \in (-\pi, 0), \quad \bar{g}(\mathbf{z}) = y - \bar{y}_{\max} \leq 0;$$

Falls kein solches  $T$  existiert:

„Es gibt keine Parallele zur Restriktion, für die es ein Randstück gibt.“;

Wähle  $\mathbf{z}_r$  mit  $g(\mathbf{z}_R) = 0$  und  $\|\mathbf{z}_R - \mathbf{z}_e\|$  minimal als  $\mathbf{z}_s = d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b)$ ;

Gehe zu 3.

Berechne  $y_{\maximal}$  mit Algorithmus 4.1;

Falls  $y_{\max} < y_{\maximal}$ : „Es gibt ein Randstück.“ STOP.

Falls  $y_{\maximal} < 0$ :  $\bar{\mathbf{z}}_r := \bar{\mathbf{z}}_0$ ;

Falls  $y_{\maximal} < \bar{y}_1$ :  $\bar{\mathbf{z}}_r := \bar{\mathbf{z}}_1$ ;

Falls  $y_{\maximal} > \max(0, \bar{y}_1)$ :

Berechne Randstück  $\bar{\mathbf{z}}_r$  zu  $y \leq y_{\maximal}$  mit Algorithmus 4.1;

$$\mathbf{z}_r := T^{-1} \bar{\mathbf{z}}_r;$$

Berechne  $\mathbf{z}_s = d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b)$  und  $\kappa_s$  nach (4.2.4)-(4.2.5);

3. *Intervallweise Berechnung des lokalen Problems:*

Transformiere  $\mathbf{z}_0, \theta_0, \mathbf{z}_b := d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b), \theta_b := \beta$  auf Problem 3.1;

Berechne lokalen Spline zu den transf. Interpolationsdaten mit Algorithmus 3.1;  
Bestimme die Krümmung  $\kappa(s_b^-)$ ;

Transformiere  $\mathbf{z}_b := d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b)$ ,  $\theta_b := \beta$ ,  $\mathbf{z}_1, \theta_1$  auf Problem 3.1;

Berechne lokalen Spline zu den transf. Interpolationsdaten mit Algorithmus 3.1;  
Bestimme die Krümmung  $\kappa(s_b^+)$ ;

4. Berechne Funktionwert  $F(\sigma_b) := \kappa(s_b^+) - \kappa(s_b^-)$ ;

5. Falls  $F(\sigma_b)$  hinreichend klein:

Falls die Vorzeichenbedingung (4.2.6) erfüllt:

„Ein restringierter nichtlinearer Spline wurde berechnet.“

Falls die Vorzeichenbedingung (4.2.6) verletzt:

„Die berechnete Kurve verletzt die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum.“

STOP.

6. *Newton-Schritt:*

Berechne die Ableitung  $F'(\sigma_b)$  mittels numerischer Differentiation;

Wähle  $\lambda \in (0, 1]$ ;

$\sigma_b^{\text{neu}} := \sigma_b - \lambda F'(\sigma_b)^{-1} F(\sigma_b)$ ;

Gehe zu 3.

### 4.3 Algorithmus zur Berechnung restringierter nichtlinearer Splines

Im vorigen Abschnitt wurden die für die Behandlung von Berührungspunkten nötigen Modifikationen des Algorithmus 3.2 zur Berechnung des unrestringierten globalen Splines ausführlich vorgestellt. Im Fall eines Randstückes ändert sich nur das lokale Problem. Zur Vereinfachung wird im folgenden Algorithmus nur von einem Berührungspunkt oder Randstück und natürlichen Randbedingungen ausgegangen.

#### Algorithmus 4.3.

1. Berechne den unrestringierten Spline und die Tangentenwinkel  $\tilde{\theta}$ ;

2. Bestimme das Intervall  $[s_j, s_{j+1}]$ , in dem die Restriktion verletzt wird;

3. Teste mit Algorithmus 4.1, ob in  $[s_j, s_{j+1}]$  Randstück möglich, vgl. Algorithmus 4.2;

Falls Randstück möglich:

$\bar{\theta} := \tilde{\theta}$ ;  $\bar{N} := N$ ;  $\hat{j} = j$ ;

Gehe zu 4.

Sonst: „Füge Berührungspunkt ein.“

Berechne wie in Algorithmus 4.2 eine Startschätzung  $\mathbf{z}_s = \mathbf{z}_j + d(\cos \sigma_b, \sin \sigma_b)$ ;  
 $\bar{\theta} := (\theta_0, \dots, \theta_j, \sigma_b, \theta_{j+1}, \dots, \theta_N)$ ;  $\bar{N} := N + 1$ ;  $\hat{j} = j + 1$ ;

4. *Intervallweise Berechnung des lokalen Problems:*

Für  $i = 1, \dots, \bar{N}$ :

Falls  $i < j$  oder  $i > \hat{j}$ :

Berechne unrestringiertes lokales Problem wie in Algorithmus 3.2;

Falls  $i = j$  und  $\bar{N} = N$ :

Transformiere  $\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_{j+1}, \theta_j, \theta_{j+1}, g$  auf Problem 4.1;

Berechne lokales Problem mit Randstück mit Algorithmus 4.1;

Falls  $\bar{N} > N$  und  $i \in \{j, j + 1\}$  :

Berechne lokales Problem wie in Algorithmus 4.2;

5. Berechne den Funktionswert  $F(\bar{\theta})$  wie in Algorithmus 3.2 und 4.2;

6. Falls  $F(\bar{\theta})$  hinreichend klein:

Falls Restriktion verletzt: „Füge weitere Randstücke oder Berührungspunkte ein.“

Gehe zu 2.

Falls die Vorzeichenbedingung (4.2.6) verletzt:

„Die berechnete Kurve verletzt die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum.“

Falls nur ein Berührungspunkt und kein Randstück: STOP.

Sortiere den Berührungspunkt aus, an dem die Vorzeichenbedingung verletzt ist;

Gehe zu 3.

Sonst: „Ein restringierter nichtlinearer Spline wurde berechnet.“ STOP.

7. Berechne  $\bar{\theta}_{\text{neu}}$  wie in Algorithmus 3.2 und 4.2;

Falls  $N = \bar{N}$ : Gehe zu 3.

Sonst: Gehe zu 4.

Auch in diesem Fall ist eine einfache Schrittweitensteuerung im Newton-Schritt sinnvoll. Vor allem bietet es sich an, Randstücke erst dann zu ersetzen, wenn sie hinreichend klein sind. Wenn in mehreren Intervallen die Restriktion verletzt ist, sollte man zunächst nur die Berührungspunkte bzw. Randstücke in den Intervallen einsortieren, in denen die Restriktion am stärksten verletzt ist. In Beispiel 4.9 hat der restringierte Spline für alle betrachteten Restriktionen nur zwei Berührungspunkte, während der unrestringierte Spline strenge Restriktionen in vier Intervallen verletzt.

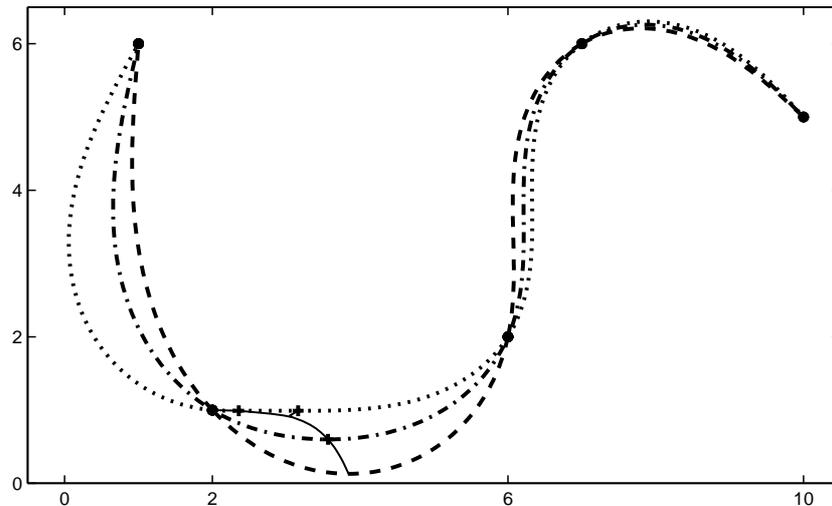


Abbildung 4.8: Der unrestringierte (---) und je ein restringierter nichtlineare Spline mit einem Berührungspunkt (-·-·) und einem Randstück (····) aus Beispiel 4.6. Die Berührungspunkte, bzw. die Aufsprung- und Absprungpunkte der Randstücke sind mit (+) gekennzeichnet.

## 4.4 Beispiele mit affin-linearen Restriktionen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Beispiele mit dem oben beschriebenen Algorithmus für restringierte nichtlineare Splines behandelt. Dabei wird die aufgrund der Lösung des lokalen Problems vermutete Struktur mit der Struktur des globalen Splines verglichen. Bei den ersten beiden Beispielen 4.6 und 4.7 werden dieselben Interpolationsdaten mit unterschiedlichen Restriktionen betrachtet. Man sieht, daß abhängig von der Steigung der Restriktion der Übergang zwischen Berührungspunkt und Randstück bei moderaten oder strengen Restriktionen erfolgt. Bei Beispiel 4.8 wird die Restriktion in zwei Intervallen verletzt und es treten nur Berührungspunkte auf. Dann folgen zwei Beispiele, bei denen der unrestringierte nichtlineare Spline die Restriktion in verschiedenen Intervallen unterschiedlich stark verletzt. Im ersten Fall (Beispiel 4.9) besitzt der restringierte Spline nur zwei Berührungspunkte, während der unrestringierte Spline die Restriktion in vier Intervallen verletzt. In Beispiel 4.10 treten für strenge Restriktionen zwei weitere Berührungspunkte auf. In den letzten beiden Beispielen wird der nichtlineare Spline durch zwei verschiedene Restriktionen gleichzeitig restringiert.

**Beispiel 4.6.** Wie in Beispiel 3.3 wird der nichtlineare Spline zu den Interpolationspunkten

$x_i$	1	2	6	7	10
$y_i$	6	1	2	6	5

mit natürlichen Randbedingungen gesucht. Hier werden aber außerdem Restriktionen der Form  $y \geq y_{min}$  betrachtet, vgl. Abb. 4.8.

Dabei tritt zunächst ein Berührungspunkt im zweiten Intervall auf. Die Iterationen, die benötigt werden, um aus dem unrestringierten Spline den restringierten Spline zu berechnen, werden in der folgenden Tabelle angegeben. Außerdem enthält sie den berechneten Berührungspunkt und den Wert des Energiefunktional  $B(L)$ .

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
unrestr.	2.2852	(3.8416,0.1303)	4
0.2	2.2865	(3.8111,0.2000)	+6
0.4	2.3090	(3.7081,0.4000)	+5
0.63757	2.3904	(3.5300,0.6376)	+5

Für untere Schranken mit  $y_{min} \geq 0.63758$  besitzt das lokale Problem eine Lösung mit Randstück. Der globale Spline hat für  $y_{min} \leq 0.9158$  nur einen Berührungspunkt. Deshalb werden einige Iterationen benötigt, um das fälschlich vermutete Randstück durch einen Berührungspunkt zu ersetzen. In der folgenden Tabelle werden diese Iterationen und die, durch die anschließend die richtige Lage des Berührungspunktes bestimmt wird, angegeben.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
0.63758	2.3904	(3.5300,0.6376)	+3+8
0.75	2.4600	(3.3995,0.7500)	+8+5
0.9158	2.6213	(3.0314,0.9158)	+12+1

Für untere Schranken  $y_{min} \geq 0.91581$  besitzt nun auch der globale Spline ein Randstück. Für einige Restriktionen sind die Randstücke in der folgende Tabelle angegeben.

$y_{min}$	$B(L)$	Randstück $z_l, z_r$	Iterationen
0.91581	2.6213	(3.0314,0.9158),(3.0314,0.9158)	+6
0.95	2.6701	(2.7946,0.9500),(3.0901,0.9500)	+7
0.99	2.7520	(2.3576,0.9900),(3.1592,0.9900)	+8
0.9999	2.8027	(2.0362,0.9999),(3.1765,0.9999)	+16

Für strenge Restriktionen, wird die Bestimmung des Randstücks schwierig, da der Abstand zwischen dem Aufsprungpunkt des Randstücks und dem zweiten Interpolationspunkt sehr klein wird.

**Beispiel 4.7.** Es werden nichtlineare Splines zu denselben Interpolationsdaten wie im vorhergehenden Beispiels 4.6 betrachtet. Diesmal ist die Restriktion, die auch im zweiten Interpolationsintervall aktiv wird, eine Parallele zu der Geraden durch den zweiten und dritten Interpolationspunkt

$$(\sin \beta, -\cos \beta) z_G \leq 0 \quad \text{mit} \quad z_G := (2, y_G)^T \quad \text{und} \quad \beta \approx 3.3866. \quad (4.4.1)$$

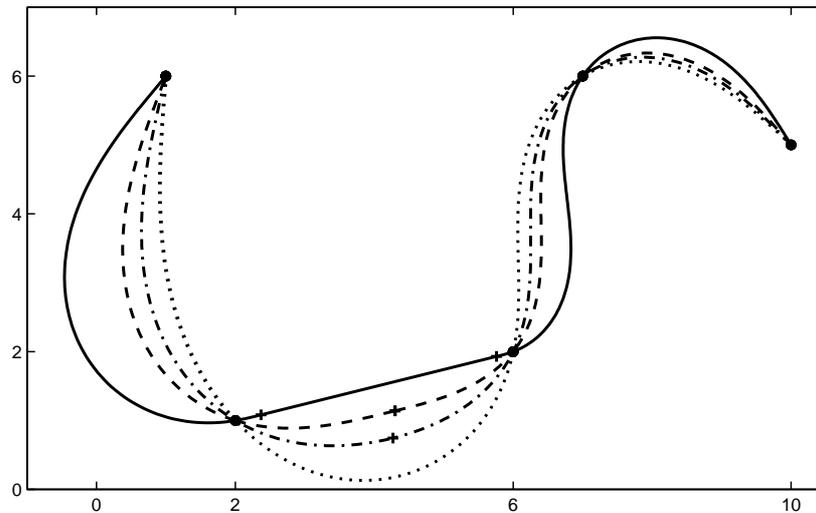


Abbildung 4.9: Der unrestringierte ( $\cdots$ ) und die restringierten nichtlinearen Splines mit  $y_G = 0.17823$  ( $-\cdot-\cdot-$ ),  $y_G = 0.56508$  ( $---$ ) und  $y_G = 0.99$  ( $\text{---}$ ) aus Beispiel 4.7.

Wie im vorigen Beispiel tritt zunächst ein Berührungspunkt auf, vgl. Abb. 4.9. Für Restriktionen mit  $y_G \leq 0.17822$  besitzt das lokale Problem eine Lösung mit Berührungspunkt. Für strengere Restriktionen hat das lokale Problem eine Lösung mit Randstück. In der folgenden Tabelle sind für verschiedene Restriktionen der Berührungspunkt, die Biegungsenergie  $B(L)$  und die Zahl der Iterationen angegeben.

$y_G$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
unrestr.	2.2852	(4.3574,0.1935)	4
-0.39586	2.2852	(4.3574,0.1935)	+1
0	2.3325	(4.2895,0.5724)	+4
0.17822	2.3989	(4.2687,0.7454)	+4
0.17823	2.3990	(4.2687,0.7454)	+2+3
0.4	2.5396	(4.2645,0.9661)	+11+3
0.56508	2.6952	(4.2987,1.1397)	+6+1

Bei noch strengeren Restriktionen mit  $y_G \geq 0.56509$  besitzt auch der globale Spline ein Randstück im zweiten Interpolationsintervall.

$y_G$	$B(L)$	Randstück $z_l, z_r$	Iterationen
0.56509	2.6953	(4.2986,1.1398),(4.2987,1.1398)	+4
0.8	3.0238	(3.5492,1.1873),(4.8868,1.5217)	+9
0.9	3.2472	(3.1068,1.1767),(5.2255,1.7064)	+10
0.99	3.6376	(2.3693,1.0823),(5.7583,1.9296)	+14

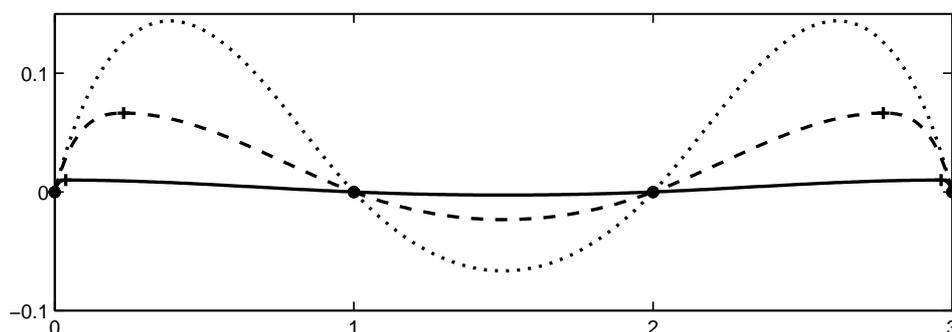


Abbildung 4.10: Die Zeichnung zeigt den unrestringierten ( $\cdots$ ), den durch  $y_{min} = -0.066467$  ( $---$ ) und den durch  $y_{min} = -0.01$  ( $---$ ) restringierten nichtlinearen Spline aus Beispiel 4.8.

Bei sehr strengen Restriktionen wird die Berechnung des Randstücks schwierig, da Aufsprung- und Absprungknoten des Randstücks sehr dicht an den beiden Interpolationsknoten liegen, und das Randstück fast das ganze Intervall ausfüllt.

**Beispiel 4.8.** Zu den Interpolationspunkten

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und den Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  und  $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$  wird der interpolierende nichtlineare Spline gesucht. Der unrestringierte nichtlineare Spline ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Bei diesem Beispiel gibt es bei allen betrachteten Restriktionen der Form  $y \leq y_{max}$  einen Berührungspunkt im ersten und dritten Intervall. Die Lösungen der lokalen Probleme haben für moderate Restriktionen mit  $y_{max} \geq 0.066467$  einen Berührungspunkt. Für strengere Restriktionen besitzen sie ein Randstück. Diese Randstücke müssen im Verlauf der Iteration durch Berührungspunkte ersetzt werden. Im Fall der Restriktion  $y_{max} = 0.01$  werden die beiden Randstücke aufgrund von Rundungsfehlern nicht in demselben Schritt ersetzt. Je stärker die Restriktion ist, um so dichter liegen die beiden Berührungspunkte an dem ersten und vierten Interpolationspunkt.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
unrestr.	3.8494	(0.3848,0.1442),(2.6152,0.1442)	2
0.125	3.9506	(0.3589,0.1250),(2.6411,0.1250)	+5
0.1	4.4600	(0.3143,0.1000),(2.6857,0.1000)	+5
0.066467	6.3051	(0.2302,0.066467),(2.7698,0.066467)	+7
0.066466	6.3052	(0.2302,0.066467),(2.7698,0.066467)	+1+6
0.04	10.3276	(0.1451,0.0400),(2.8549,0.0400)	+10+5
0.01	41.195	(0.0370,0.0100),(2.9630,0.0100)	+15+3+3

**Beispiel 4.9.** In diesem Beispiel wird der nichtlineare Spline mit natürlicher Randbedingung zu den Interpolationspunkten aus Beispiel 3.2

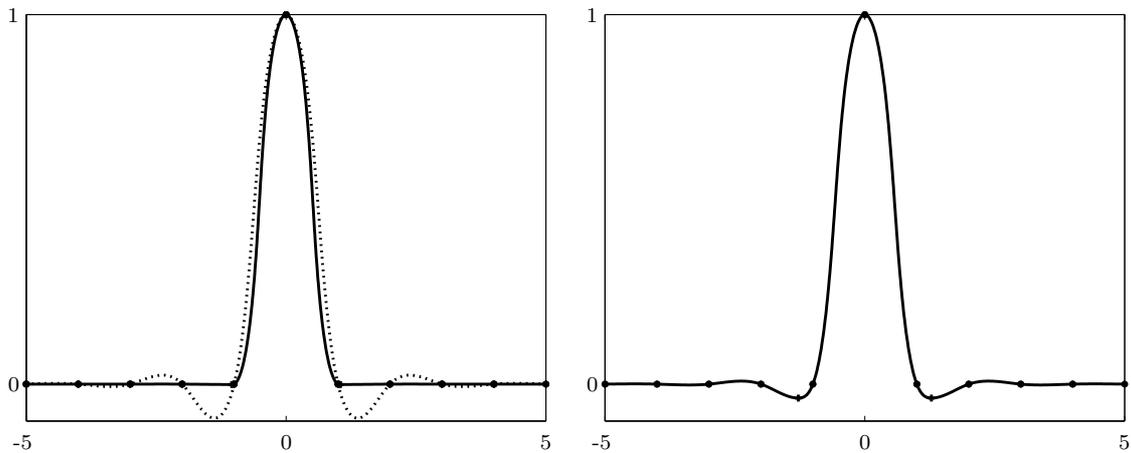


Abbildung 4.11: Die linke Zeichnung zeigt den unrestringierten ( $\cdots$ ) und den durch  $y_{min} = -0.001$  restringierten nichtlinearen Spline aus Beispiel 4.9. In der rechten Abbildung ist der restringierte nichtlineare Spline zur unteren Schranke  $y_{min} = -0.037656$  zu sehen.

$x_i$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y_i$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

behandelt. Führt man eine Restriktion der Form  $y \geq y_{min}$  ein, so wird diese untere Schranke für  $y_{min} \geq -0.0922$  zunächst im vierten und siebten Intervall und für  $y_{min} \geq -0.0066$  auch im zweiten und neunten Intervall verletzt. Aufgrund der Tangentenwinkel des unrestringierten Splines wird zunächst im vierten und siebten Intervall ein Berührungspunkt eingefügt.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
unrestr.	6.6270	$(\pm 1.3766, -0.0922)$	3
-0.06	6.8139	$(\pm 1.3344, -0.0600)$	6
-0.037657	7.2082	$(\pm 1.2815, -0.0377)$	8

Für Restriktionen mit  $y_{min} \geq -0.037656$  besitzt die Lösung des lokalen Problems in diesen beiden Intervallen ein Randstück, während es sich bei der Lösung des globalen Splines noch um Berührungspunkte handelt. Durch bei der Iteration entstehende Rundungsfehler werden die beiden Randstücke nicht in demselben Schritt durch einen Berührungspunkt ersetzt. Für die Restriktion  $y_{min} = -0.006595$  werden zum Beispiel sieben Iterationen benötigt, um das rechte Randstück durch einen Berührungspunkt zu ersetzen. Nach weiteren drei Iterationen wird auch das zweite Randstück ersetzt. Es werden dann noch weitere acht Iterationen benötigt, um die Berührungspunkte hinreichend genau zu berechnen.

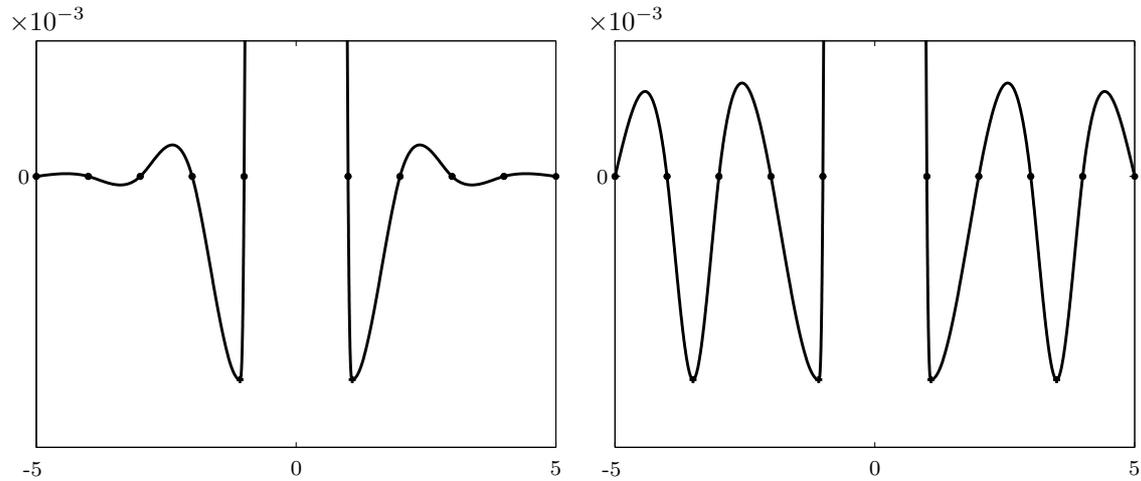


Abbildung 4.12: Die linke Zeichnung zeigt den restringierten nichtlinearen Spline zur unteren Schranke  $y_{min} = -0.0030$  aus Beispiel 4.9. In der rechten Abbildung ist eine zulässige Kurve zu sehen, die vier Berührungspunkte besitzt, aber nicht die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung erfüllt.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
-0.037656	7.2082	$(\pm 1.2815, -0.0377)$	+2+7
-0.02	7.7617	$(\pm 1.2118, -0.0200)$	+11+1+8
-0.006595	8.5196	$(\pm 1.1218, -0.0066)$	+8+3+7
-0.003	8.8869	$(\pm 1.0815, -0.0030)$	+12+3+8
-0.001	9.92245	$(\pm 1.0466, -0.0010)$	+16+7+11

Zusätzliche Probleme bei der Berechnung des restringierten nichtlinearen Splines entstehen für Restriktionen mit  $y_{min} \geq -0.006594$ , da nun auch ein Berührungspunkt im zweiten und neunten Intervall vermutet wird. Diese Berührungspunkte sollten zunächst nicht beachtet werden. So könnte man zum Beispiel nur die Berührungspunkte in den Intervallen einsortieren, in denen die Restriktion am stärksten verletzt wird. Berechnet man den restringierten nichtlinearen Spline für die untere Schranke  $y_{min} = -0.003$ , so erhält man, wenn man in allen vier Intervallen, in denen die Restriktion verletzt wird, einen Berührungspunkt bzw. ein Randstück annimmt, eine zulässige Kurve mit den vier Berührungspunkten

$$(\pm 3.4983, -0.0030), \quad (\pm 1.0816, -0.0030),$$

siehe Abbildung 4.12. Ihre Energie beträgt  $B(L) \approx 8.8884$ . Diese Kurve erfüllt nicht die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung, da sie die Vorzeichenbedingung (4.2.6)

$$\text{sign}(\kappa'(\tau_b^+) - \kappa'(\tau_b^-)) = \text{sign}((\sin \theta(\tau_b), -\cos \theta(\tau_b))g_z^T(z(\tau_b))) = 1$$

an den Berührungspunkten im zweiten und vierten Intervall verletzt. Dort gilt

$$\kappa(\tau_{b2}^-) \approx 0.1297, \quad \kappa(\tau_{b2}^+) \approx -0.1286, \quad \kappa(\tau_{b9}^-) \approx 0.1286 \quad \text{und} \quad \kappa(\tau_{b9}^+) \approx -0.1297.$$

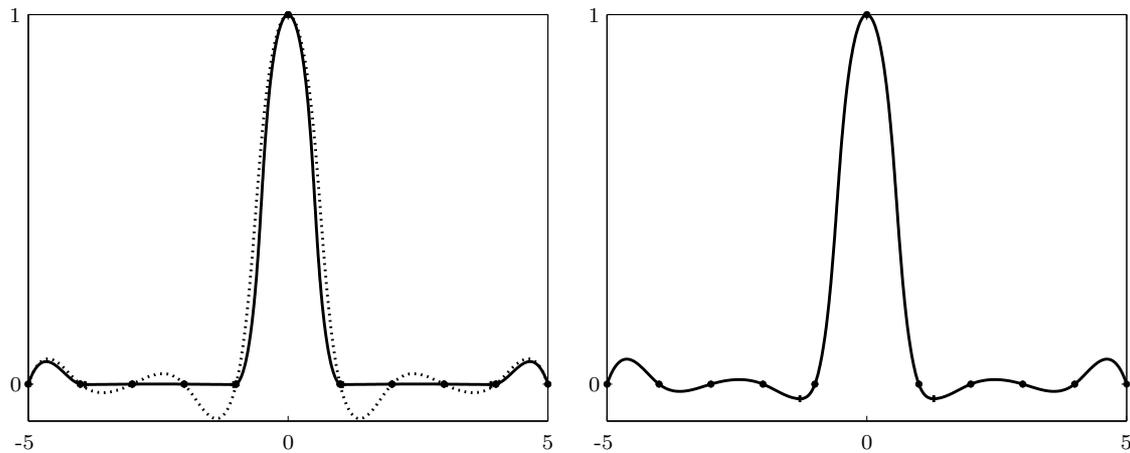


Abbildung 4.13: Die linke Zeichnung zeigt den unrestringierten ( $\cdots$ ) und den durch  $y_{min} = -0.001$  restringierten nichtlinearen Spline aus Beispiel 4.10. In der rechten Abbildung ist der restringierte nichtlineare Spline zur unteren Schranke  $-0.039296$  zu sehen.

Da die Tangentenwinkel am Rand nicht vorgegeben sind, kann der restringierte nichtlineare Spline in den äußeren Interpolationsintervallen mit zunehmender Restriktion immer flacher werden. Die Restriktion wird deshalb nur im vierten und siebten Intervall verletzt, während im zweiten und neunten Intervall der restringierte nichtlineare Spline immer deutlich über der unteren Schranke liegt.

**Beispiel 4.10.** Werden dieselben Interpolationsdaten wie in Beispiel 4.9 mit vorgegebenen Tangentenwinkel am Rand  $\theta_0 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\theta_N = -\frac{\pi}{8}$  betrachtet, so zeigt sich bei strengeren Restriktionen ein deutlich unterschiedliches Verhalten. Zunächst wird wieder im zweiten und vierten Intervall ein Berührungspunkt vermutet. Für Restriktionen  $y_{min} \geq -0.039296$  besitzt die Lösung des lokalen Problems ein Randstück, das im Verlauf der Iteration durch einen Berührungspunkt ersetzt werden muß.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
unrestr.	7.6491	$(\pm 1.3790, -0.0933)$	3
-0.06	7.8481	$(\pm 1.3359, -0.0600)$	+6
-0.039297	8.2111	$(\pm 1.2879, -0.0393)$	+9
-0.039296	8.2112	$(\pm 1.2879, -0.0393)$	+2+8
-0.02	8.8089	$(\pm 1.2130, -0.0200)$	+9+1+8
-0.018552	8.8703	$(\pm 1.2055, -0.0186)$	+10+2+7

Wie im vorigen Beispiel wird der restringierte nichtlineare Spline im zweiten und neunten Intervall immer flacher, je strenger die Restriktion ist. Dieser Prozeß wird aber durch die vorgegebenen Tangentenwinkel am Rand gebremst, so daß für Restriktionen mit  $y_{min} \geq -0.018551$  ein dritter und vierter Berührungspunkt auftreten.

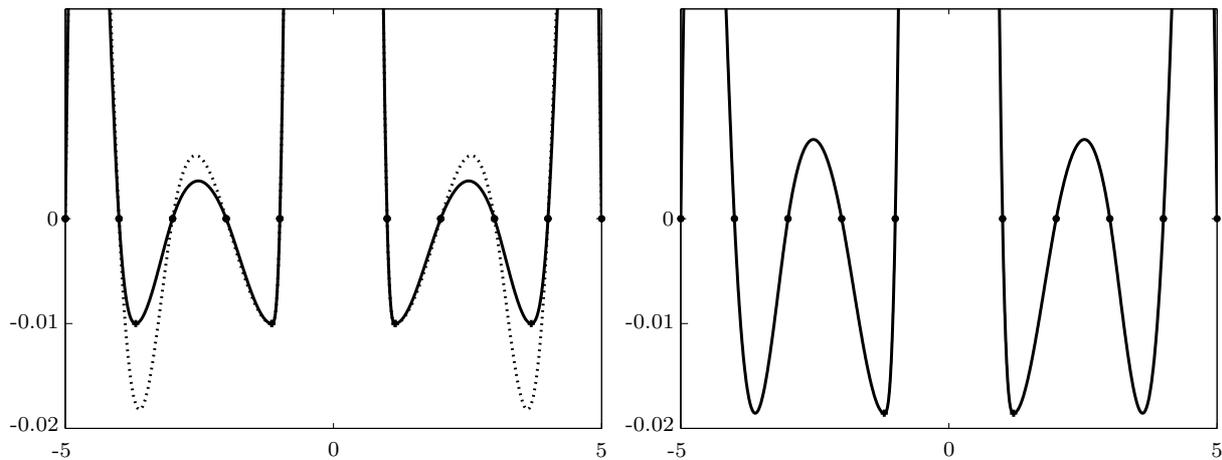


Abbildung 4.14: Die linke Zeichnung zeigt den restringierten (—) nichtlinearen Spline zur unteren Schranke  $y_{min} = -0.01$  und die Kurve, die berechnet wird, wenn man bei dieser Restriktion nur einen Berührungspunkt im vierten und siebten Intervall annimmt. In der rechten Abbildung ist der restringierte nichtlineare Spline zur unteren Schranke  $y_{min} = -0.018552$  aus Beispiel 4.10 zu sehen.

$y_{min}$	$B(L)$	Berührungspunkt $z_b$	Iterationen
-0.018551	8.8703	$(\pm 1.2055, -0.0186), (\pm 3.6115, -0.0186)$	+10+2+7+1
-0.01	9.3362	$(\pm 1.1508, -0.0100), (\pm 3.6875, -0.0100)$	+10+2+7+5
-0.001	10.3775	$(\pm 1.0466, -0.0001), (\pm 3.9050, -0.0001)$	+9+9+3+10+7+9

Bei der Restriktion  $y_{min} = -0.001$  wird im Verlauf der Iteration, zunächst einmal ein Randstück im vierten und siebten Intervall angenommen, da in diesen beiden Intervallen die Restriktion am stärksten verletzt ist. Hiermit wird eine Kurve berechnet, die im vierten und siebten Intervall ein Randstück hat und die Restriktion nur im zweiten und neunten Intervall verletzt. Aufgrund der Lösung des lokalen Problems wird in diesen beiden Intervallen auch ein Randstück eingefügt. Im weiteren Verlauf der Iteration werden alle vier Randstücke durch Berührungspunkte ersetzt.

Mit diesem Verfahren, kann man auch einen Spline gleichzeitig aus zwei verschiedenen Richtungen restringieren, solange die Restriktionen nicht in demselben Intervall aktiv sind. In den folgenden Beispielen werden jeweils zwei verschiedene Restriktionen verwendet.

**Beispiel 4.11.** In diesem Beispiel wird der nichtlineare Spline mit den Interpolationspunkten

$x_i$	-0.1	0	5	10	10.1
$y_i$	0	7	3.5	0	7

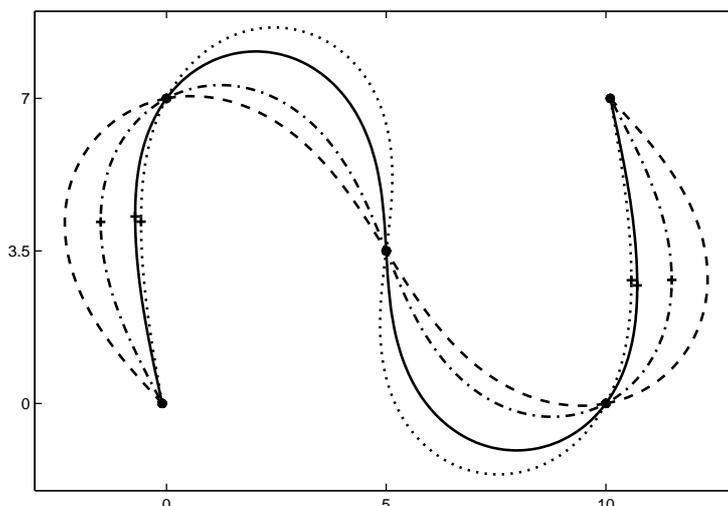


Abbildung 4.15: Die Zeichnung zeigt den unrestringierten (---), den durch  $x_l = -1.5$ ,  $x_r = 11.5$  (-·-·-), den durch  $x_l = -0.7142$ ,  $x_r = 10.7142$  (—) und den durch  $x_l = -0.58$ ,  $x_r = 10.58$  (·····) restringierten nichtlinearen Spline aus Beispiel 4.11.

und natürlichen Randbedingungen mit einer Restriktion der Form  $x_l \leq x \leq x_r$  betrachtet. Die Restriktion wird im ersten und vierten Intervall verletzt. Aufgrund der natürlichen Randbedingungen kann es in diesen beiden Intervallen kein Randstück geben, da nach Satz 2.20 auf einem freien Teilstück die Krümmung maximal eine Nullstelle besitzt. Für die Restriktionen mit  $x_l \leq -1.2538$  und  $x_r \geq 11.2538$  besitzt auch die Lösung des lokalen Problems einen Berührungspunkt. Für stärkere Restriktionen existiert nur eine Lösung des lokalen Problems mit Randstück. Darum muß man zunächst ein oder zwei Iterationen mit zwei Randstücken durchführen, bevor diese durch Berührungspunkte ersetzt werden können.

$x_l, x_r$	$B(L)$	Berührungspunkte $z_b$	Iterationen
unrestr.	1.8374	(-2.3170, 4.1272), (12.3170, 2.8728)	5
-2, 12	1.8418	(-2.000, 4.1325), (12.000, 2.8675)	+4
-1.5, 11.5	1.8774	(-1.500, 4.1670), (11.500, 2.8330)	+9
-1.2538, 11.2538	1.9139	(-1.2538, 4.1997), (11.2538, 2.8003)	+9
-1.2537, 11.2537	1.9139	(-1.2537, 4.1997), (11.2537, 2.8003)	+1+4
-1, 11	1.9671	(-1.000, 4.2456), (11.000, 2.7544)	+1+4
-0.8, 10.8	2.0185	(-0.800, 4.2834), (10.8, 2.7166)	+1+6
-0.7142, 10.7142	2.417	(-0.7142, 4.2910), (10.7142, 2.7090)	+1+8
-0.6, 10.6	2.0702	(-0.6000, 4.2415), (10.6000, 2.7585)	+2+11
-0.58, 10.58	2.0741	(-0.5800, 4.1729), (10.5800, 2.8271)	+2+13

Für Restriktionen mit  $x_l \leq -0.7142$  und  $x_r \geq 10.7142$  verschiebt sich die Lage des Berührungspunktes im ersten Intervall in  $y$ -Richtung bzw. im vierten Intervall gegen die  $y$ -Richtung. Für stärkere Restriktionen kehrt sich dieses Verhalten um, siehe Abb. 4.16.

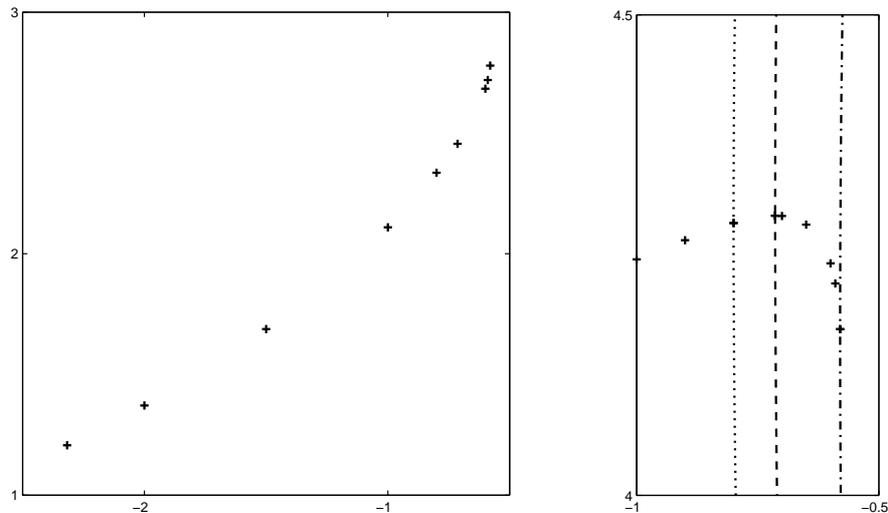


Abbildung 4.16: Die linke Zeichnung zeigt die Differenz zwischen dem Tangentenwinkel am zweiten und am dritten Interpolationspunkt für verschiedene Restriktionen bei Beispiel 4.11. In der rechten Abbildung sind die Berührungspunkte für verschiedene Restriktionen zu sehen.

Es konnten nur restringierte nichtlineare Splines zu Restriktionen mit  $x_l \leq -0.58$  und  $x_r \geq 10.58$  berechnet werden. Ein Grund hierfür könnte in der Differenz der Tangentenwinkel des zweiten bzw. dritten Intervalls liegen. Diese steigt immer stärker an und kann nach Folgerung 2.19 nicht größer als  $\pi$  werden.

**Beispiel 4.12.** Hier wird der nichtlineare Spline zu den Interpolationsdaten

$x_i$	-0.1	0	5	10	10.1
$y_i$	0	4	3.5	0	4

mit natürlichen Randbedingungen gesucht und durch eine obere und eine untere Schranke der Form  $y_{min} \leq y \leq y_{max}$  restringiert. Diese Restriktion wird im zweiten und dritten Intervall verletzt, siehe Abbildung 4.17. Wählt man in diesem Beispiel die Tangentenwinkel am Rand aus dem unrestringierten nichtlinearen Spline, so existiert im zweiten bzw. im dritten Intervall für keine noch so starke obere bzw. untere Schranke eine Lösung des lokalen Problems mit einem Randstück, vgl. Beispiel 4.5. Auch beim globalen Spline gibt es für keine Restriktion eine Lösung mit Randstück. Die beiden Berührungspunkte wandern gegen den zweiten bzw. vierten Interpolationspunkt. In der folgenden Tabelle sind die Berührungspunkte, die Biegungsenergie und die Zahl der Iterationen für einige Restriktionen angegeben.

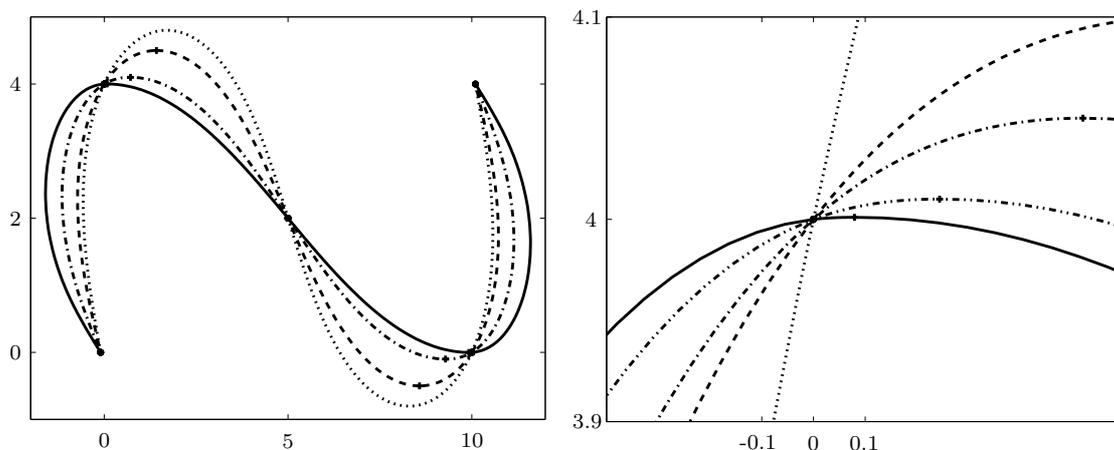


Abbildung 4.17: Die Zeichnung zeigt den unrestringierten ( $\cdots$ ), den durch  $y_{\min} = -0.5$ ,  $y_{\max} = 4.5$  ( $---$ ), den durch  $y_{\min} = -0.1$ ,  $y_{\max} = 4.1$  ( $- \cdot - \cdot$ ) und den durch  $y_{\min} = -0.001$ ,  $y_{\max} = 4.001$  ( $---$ ) restringierten nichtlinearen Spline aus Beispiel 4.12. In der rechten Abbildung ist ein Ausschnitt um den zweiten Interpolationspunkt zu sehen.

$y_{\min}, y_{\max}$	$B(L)$	Berührungspunkte $z_b$	Iterationen
unrestr.	2.0740	(1.7050,4.8016),(8.2950,-0.8016)	4
-0.5,4.5	2.1095	(1.4222,4.5000),(8.5778,-0.5000)	+6
-0.1,4.1	2.4118	(0.7146,4.1000),(9.2852,-0.1000)	+14
-0.05,4.05	2.5127	(0.5209,4.0500),(9.4791,-0.0500)	+14
-0.01,4.01	2.6488	(0.2438,4.0100),(9.7562,-0.0100)	+15
-0.001,4.001	2.7205	(0.0794,4.0010),(9.9206,-0.0010)	+19

## 4.5 Ideen zur Restriktion durch einen Kreis

In diesem Abschnitt wird ein mögliches Verfahren zur Berechnung eines durch eine Restriktion der Form (2.4.2) restringierten nichtlinearen Splines an Hand eines Beispiels vorgestellt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird in diesem Abschnitt vorausgesetzt, daß es sich bei der Restriktion um einen Kreis mit Radius eins

$$g(z) = \|z - z_K\|_2^2 - 1 \leq 0 \quad (4.5.1)$$

handelt. Bei der Entwicklung eines Verfahrens zur Berechnung eines restringierten nichtlinearen Splines müssen die folgenden Punkte geklärt werden.

1. Wie überprüft man, ob ein nichtlinearer Spline die Restriktion verletzt?
2. Wie berechnet man einen restringierten Spline mit Randstück?
3. Wie berechnet man einen restringierten Spline mit Berührungspunkt?

4. Wie entscheidet man, ob es einen Berührungspunkt oder ein Randstück gibt?

Da auch in diesem Fall die Lösung des lokalen Problems mit einem Randstück einfacher zu berechnen ist als die mit einem Berührungspunkt, werden die Punkte in der obigen Reihenfolge behandelt. Dabei wird der Einfachheit halber nur ein lokales Problem betrachtet, das heißt Problem 1.2 für  $N = 1$  mit gegebenen Interpolationspunkten  $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1$  und Tangentenwinkeln am Rand  $\theta_0, \theta_1$ .

Zu 1.) Während bei einer affin-linearen Restriktion die Stelle, an der ein nichtlinearer Spline die Restriktion am stärksten verletzt, analytisch bestimmt werden kann, muß für die vorliegende Restriktion (4.5.1) numerisch überprüft werden, ob die Restriktion verletzt wird. Wird das Koordinatensystem so gedreht, daß der unrestringierte nichtlineare Spline  $\mathbf{z} = (x, y)^T : [0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  Gleichung (2.2.9)

$$(\theta')^2 = A \cos(\theta - \alpha)$$

für  $\alpha = 0$  erfüllt, so ist nach Lemma 2.19 seine erste Komponente monoton wachsend, und damit gilt  $x_0 \leq x(s) \leq x_1$ . Verletzt der unrestringierte nichtlineare Spline die Restriktion, so existiert eine Stelle  $\tilde{s} \in [0, s_1]$  an der

$$g(\mathbf{z}(\tilde{s})) = \|\mathbf{z}(\tilde{s}) - \mathbf{z}_K\|_2^2 - 1 > 0$$

gilt. Um eine solche Stelle zu finden, sucht man z.B. mit dem Bisektionsverfahren Maxima  $s_{e,i}$  der Funktionen

$$f_i(s) = (-1)^i (y(s) - y_K) - \sqrt{1 - (x(s) - x_K)^2}, \quad i = 0, 1,$$

und überprüft, ob für diese  $f_i(s_{e,i}) > 0$ ,  $i = 0, 1$ , gilt.

Zu 2.) Wie im Fall einer affin-linearen Restriktion ist es auch hier einfacher, eine Lösung des lokalen Problems mit einem Randstück zu berechnen, als eine Lösung eines lokalen Problems mit einem Berührungspunkt. Ein Kreis  $\tilde{\mathbf{z}} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , der mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird, besitzt einen monoton fallenden Tangentenwinkel  $\tilde{\theta}$ , für den

$$\tilde{\mathbf{z}} = (-\sin \tilde{\theta}, \cos \tilde{\theta})^T + \mathbf{z}_K$$

gilt, und die konstante Krümmung  $\tilde{\kappa} = -1$ . Aufgrund der Invarianzeigenschaften von Problem 1.2 kann man ohne Einschränkung voraussetzen, daß auf dem Randstück  $[s_l, s_r]$  des restringierten nichtlinearen Splines  $\mathbf{z} = (x, y)^T$  die Gleichungen  $y(s) = y_K$  und  $x(s_l) \leq x(s_r)$  gelten. Damit erhält man aus dem nichtlinearen Gleichungssystem 2.4 die Bedingungen  $\kappa(s_l) = \kappa(s_r) = -1$ ,  $\mathbf{z}_l := \mathbf{z}(s_l) = (-\sin \theta_l, \cos \theta_l)^T + \mathbf{z}_K$  und  $\mathbf{z}_r := \mathbf{z}(s_r) = (-\sin \theta_r, \cos \theta_r)^T + \mathbf{z}_K$  mit  $\theta_l := \theta(s_l) > \theta_r := \theta(s_r)$ . Um diesen Spline zu berechnen, kann man den Algorithmus 3.1 zur Berechnung eines unrestringierten nichtlinearen Splines modifizieren. Der Unterschied ist, daß man hier an den Verknüpfungspunkten die Krümmung kennt und aus dieser die Tangentensteigung und die genaue

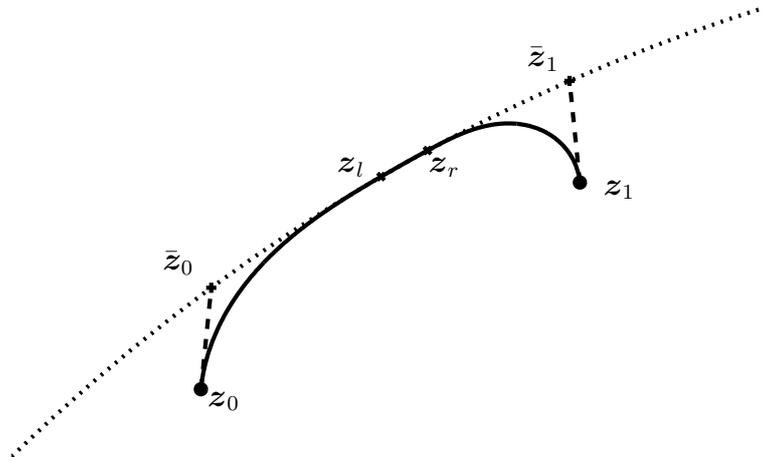


Abbildung 4.18: Der restringierte nichtlineare Spline aus Beispiel 4.13 und die Punkte  $\bar{z}_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Lage des Punktes auf der Restriktion berechnen muß. Für die Tangentenwinkel  $\theta_l$  und  $\theta_r$  kann man aufgrund der Interpolationsdaten und der Restriktion das Intervall eingrenzen, in dem diese liegen. So gilt unter den obigen Voraussetzungen für die Kurve an den Verknüpfungspunkten  $s_l$  und  $s_r$  die Ungleichung  $\bar{x}_0 \leq x_l \leq x_r \leq \bar{x}_1$ , wobei mit  $\bar{z}_i$ ,  $i = 0, 1$ , der Schnittpunkt des Kreises und der Geraden mit der Steigung  $\tan(\theta_i)$  durch  $z_i$ , für den  $\bar{y}_i > y_K$  gilt, bezeichnet wird, siehe Abbildung 4.18. Für diese Punkte gilt  $\bar{\theta}_i = \arcsin(-(x_i - x_K) - \lambda_i \cos \theta_i)$  mit

$$\lambda_i = -(\cos \theta_i, \sin \theta_i)(z_i - z_K) + \sqrt{1 - ((-\sin \theta_i, \cos \theta_i)(z_i - z_K))^2}, \quad i = 0, 1.$$

Also werden Winkel  $\theta_l$  und  $\theta_r$  mit  $\bar{\theta}_0 \geq \theta_l \geq \theta_r \geq \bar{\theta}_1$  gesucht, für die ein nichtlinearer Spline  $z : [0, s_l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu den Interpolationsdaten  $z_0, z_l, \theta_0, \theta_l$  mit der Krümmung  $\kappa(s_l) = -1$  und ein nichtlinearer Spline  $z : [s_r, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu den Interpolationsdaten  $z_r, z_1, \theta_r, \theta_1$  mit der Krümmung  $\kappa(s_r) = -1$  existieren. Auf diese Weise werden in den folgenden Beispielen die Randstücke berechnet.

**Beispiel 4.13.** Zu den Interpolationsdaten  $z_0 = (-0.6, 0.79)^T$ ,  $z_1 = (-0.4, 0.9)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi - 0.1$  und  $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi + 0.1$  wird der durch eine Restriktion der Form

$$g(z) = \|z - z_K\|_2^2 - 1 \leq 0 \quad \text{mit} \quad z_K = (0, y_K)^T$$

restringierte nichtlineare Spline gesucht. Für  $y_K = 0.04$  gilt  $\bar{z}_0 \approx (-0.5946, 0.8440)^T$ ,  $z_l \approx (-0.5049, 0.9032)^T$ ,  $z_r \approx (-0.4804, 0.9032)^T$  und  $\bar{z}_1 \approx (-0.4054, 0.9141)^T$ . Der restringierte nichtlineare Spline ist in Abbildung 4.18 zu sehen.

Zu 3.) Im Fall eines Berührungspunktes ist wie bei einer affin-linearen Restriktion die Berechnung des restringierten Splines komplizierter. Hier wird eine Lösung des nichtlinearen

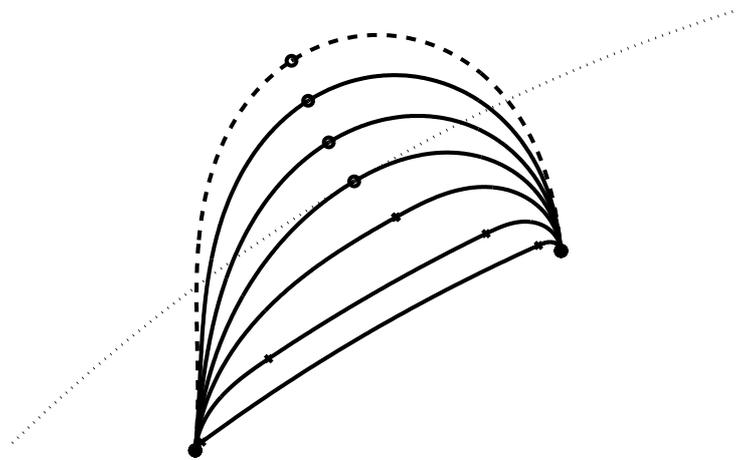


Abbildung 4.19: Der unrestringierte nichtlineare Spline (---), die Restriktion mit  $y_K = 0.08$  ( $\cdots\cdots$ ) und verschiedene restringierte nichtlineare Splines aus Beispiel 4.14.

Gleichungssystems 2.4 mit einem Berührungspunkt  $s_b$ , für den  $z_b = (-\sin \theta_b, \cos \theta_b)^T + z_K$  gilt, gesucht. Wie im Fall einer affin-linearen Restriktion kann man den Algorithmus 4.2 geeignet modifizieren, um das nichtlineare Gleichungssystem zu lösen. In diesem Fall wird der Tangentenwinkel  $\theta_b$  gesucht, für den die Krümmung am Berührungspunkt stetig ist, also eine Nullstelle der Funktion

$$F(\theta_b) = \kappa(s_b^+) - \kappa(s_b^-).$$

Wie im Fall eines Randstücks gilt für den gesuchten Winkel  $\bar{\theta}_0 \geq \theta_b \geq \bar{\theta}_1$ . Im folgenden Beispiel besitzt die Funktion  $F$  an den Stellen  $\bar{\theta}_i$ ,  $i = 0, 1$ , ein unterschiedliches Vorzeichen. Deshalb werden dort die Berührungspunkte der Einfachheit halber mit dem Bisektionsverfahren berechnet.

**Beispiel 4.14.** In diesem Beispiel wird ein für verschiedene Restriktionen ein restringierter nichtlinearer Spline zu denselben Interpolationsdaten wie in Beispiel 4.13 gesucht, diese sind in Abbildung 4.19 zu sehen. In der folgenden Tabelle sind für die gezeichneten nichtlinearen Splines die Punkte  $z_b$  bzw.  $z_l, z_r$ , so wie die Krümmung angegeben.

$y_K$	$z_b$ bzw. $z_l, z_r$	$\kappa(s_b)$ bzw. $\kappa(s_l) = \kappa(s_r)$
unrestr.	(-0.5474, 1.0048)	-10.9723
0.14	(-0.5382, 0.9828)	-10.4827
0.11	(-0.5270, 0.9599)	-9.0629
0.08	(-0.5131, 0.9383)	-6.1906
0.047	(-0.4905, 0.9185), (-0.4901, 0.9185)	-1
0.012	(-0.5599, 0.8406), (-0.4410, 0.8406)	-1
-0.008	(-0.5965, 0.7946), (-0.4123, 0.7946)	-1

Für die berechneten Verbindungspunkte  $\tau$  ist die Vorzeichenbedingung für  $\kappa'$  aus dem nichtlinearen Gleichungssystem 2.4

$$\text{sign}(\kappa'(\tau^+) - \kappa'(\tau^-)) = \text{sign}((\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau))g_z^T(\mathbf{z}(\tau)))$$

erfüllt. Für die vorliegende Restriktion gilt

$$\begin{aligned} \text{sign}((\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau))g_z^T(\mathbf{z}(\tau))) &= \text{sign}(2(\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau))(\mathbf{z}(\tau) - \mathbf{z}_K)) \\ &= \text{sign}(2(\sin \theta(\tau), -\cos \theta(\tau))(-\sin \theta(\tau), \cos \theta(\tau))^T) = -1 \end{aligned}$$

und  $\kappa'(s) = 0$  auf einem Randstück  $(\tau_1, \tau_2)$ . In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Ableitung der Krümmung an den Verbindungspunkten für die betrachteten Restriktionen angegeben.

$y_K$	$\kappa'(s_b^-), \kappa'(s_l^-)$	$\kappa'(s_b^+), \kappa'(s_r^+)$
unrestr.	-37.4488	-37.4488
0.14	-38.8461	-48.1257
0.11	-31.5460	-76.5676
0.08	-4.9651	-146.091
0.047	52.6426	-351.931
0.012	373.037	-1697.62
-0.008	46631.1	-18759.2

Zu 4.) Da auch für diese Restriktion die Berechnung des Randstücks wesentlich weniger aufwendig ist, bietet es sich an, erst zu versuchen, ein Randstück zu berechnen. Wenn dieses kein sinnvolles Ergebnis liefert und  $\theta_l < \theta_r$  gilt, so liegt wahrscheinlich ein Berührungspunkt vor. Mit dieser Strategie wurden die Kurven des obigen Beispiels 4.14 berechnet.

Um einen Algorithmus zur Berechnung eines restringierten nichtlinearen Splines mit mehr als zwei Interpolationspunkten entwickeln zu können, müßten die obigen Überlegungen vertieft werden. Insbesondere benötigt man geeignete Startwerte für einen Berührungspunkt, um diesen mit einem schnelleren Verfahren wie z.B. dem Newton-Verfahren berechnen zu können.

## Anhang A

# Notwendige Bedingungen für ein allgemeines Steuerungsproblem

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der notwendigen Bedingungen für das allgemeine Optimalsteuerungsproblem 2.1. Dazu wird Problem 2.1 in eine Form transformiert, für die in der Literatur notwendige Bedingungen bewiesen wurden. Wir lassen uns leiten von den notwendigen Bedingungen, wie man sie bei MAURER (1976,1979) und IOFFE & TICHOMIROV (1979) findet. Wie in der Literatur üblich werden hier geringere Differenzierbarkeitsforderungen an die Steuerung und die Zustandsvariable als in Abschnitt 2.1 gestellt. So werden anstelle der Funktionenräume  $C_{\text{stkw}}$  und  $C^{0,1}$  die folgenden Räume für ein kompaktes Intervall  $I$  verwendet:

$$\begin{aligned} BV(I, \mathbb{R}^n) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f_i \text{ von beschränkter Variation, } i = 1, 2, \dots, n\}, \\ L_\infty(I, \mathbb{R}^n) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f_i \text{ Lebesgue-messbar und wesentlich beschränkt,} \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n\}, \\ W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^n) &:= \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f_i \text{ absolut stetig, } i = 1, 2, \dots, n, f' \in L_\infty(I, \mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

Dabei sei an die bekannten Definitionen erinnert:

Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt von beschränkter Variation, wenn eine Konstante  $M > 0$  existiert, so daß für jede endliche Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  des Intervalls  $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^N |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq M$$

gilt. Eine Lebesgue-messbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *wesentlich beschränkt*, wenn eine Konstante  $M > 0$  existiert, für die

$$|f(t)| < \infty \quad \text{f.ü. in } [a, b]$$

gilt. Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *absolut stetig*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$

existiert, so daß für jedes  $N \in \mathbb{N}$  und für  $N$  beliebige, paarweise disjunkte Teilintervalle

$(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ,  $k = 1, \dots, N$ , mit  $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$  auch die Bedingung

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Dieses ist äquivalent dazu, daß sie eine Lebesgue-integrierbare Ableitung besitzt.

Damit kann man Problem 2.1 für absolut stetige Zustände und wesentlich beschränkte Steuerungen formulieren.

**Problem A.1.** *Gesucht werden eine skalare Steuerung  $u \in L_\infty[s_0, s_N]$ , eine Zustandvariable  $\mathbf{x} \in W^{1,\infty}([s_0, s_N], \mathbb{R}^n)$  und ein Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$ , so daß das Zielfunktional*

$$I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) ds \quad (\text{A.2})$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, u) \quad \text{f.ü. in } [0, T], \quad (\text{A.3})$$

$$\Psi_i(\mathbf{x}(s_i)) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{A.4})$$

$$g(\mathbf{x}(s)) \leq 0, \quad s_0 \leq s \leq s_N. \quad (\text{A.5})$$

Die Funktionen  $f_0 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$  ( $k_i \leq n$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ) und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien hinreichend oft stetig differenzierbar.

Hier ist anders als in der Literatur üblich das Gitter  $\Delta_N$ , auf dem die Randbedingungen (A.4) gefordert werden, frei. In der Literatur werden feste Interpolationsgitter, die oft aus einem Intervall ohne Zwischenknoten bestehen, behandelt. Dafür sind bei dem folgenden Problem A.2 auch vektorwertige Steuerungen und Zustandsbeschränkungen zulässig, wobei auch der Steuerbereich beschränkt sein kann. Diese Eigenschaften werden bei der Transformation der notwendigen Bedingungen für Problem A.1 wichtig sein.

**Problem A.2.** *Gesucht werden eine Steuerung  $u \in L_\infty(I, \mathbb{R}^r)$  und eine Zustandvariable  $\mathbf{x} \in W^{1,\infty}(I, \mathbb{R}^n)$  mit  $I = [0, T]$ , welche das Funktional*

$$I_T(\mathbf{x}, u) = \int_0^T f_0(\mathbf{x}(t), u(t)) dt \quad (\text{A.6})$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u), \quad \text{f.ü. in } [0, T], \quad (\text{A.7})$$

$$\Psi_0(\mathbf{x}(0)) = 0, \quad \Psi_1(\mathbf{x}(T)) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad \text{f.a. } t \in [0, T], \quad (\text{A.9})$$

$$g_i(\mathbf{x}(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.10})$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen  $f_0 : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^{n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $k_i \leq n$ ,  $i = 0, 1$  und  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \leq r$ , stetig differenzierbar sind und die Endzeit  $T > 0$  fest gewählt ist. Der Steuerbereich  $U$  in (A.9) sei eine konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^r$  mit nichtleerem Inneren.

Lokale und globale Minima von Problem A.1 und A.2 werden analog zur Definition 2.1 definiert, wobei für die Menge der zulässigen Lösungen für Problem A.1

$$M_a := \{(\mathbf{x}, u, \Delta_N) : \Delta_N = \{0 < s_1 < \dots < s_N\}, \mathbf{x} \in W^{1,\infty}([s_0, s_N], \mathbb{R}^n), \\ u \in L_\infty[s_0, s_N] \text{ erfüllen (A.3)-(A.5)}\}$$

und für Problem A.2

$$M_T := \{(\mathbf{x}, u) : \mathbf{x} \in W^{1,\infty}([s_0, s_N], \mathbb{R}^n), u \in L_\infty([s_0, s_N], \mathbb{R}^r) \\ \text{erfüllen (A.7)-(A.10)}\}$$

gilt.

Durch eine geeignete Variablentransformation kann man Steuerungsproblem A.1 auf die Form von Problem A.2 transformieren. Hierzu wird das freie Gitter  $\Delta_N$  aus Problem A.1 auf ein festes Intervall  $[0, T]$ , wie es Problem A.2 besitzt, transformiert. Eine Transformation für ein Intervall mit freier Endzeit aber ohne Zwischenknoten findet man bei IOFFE & TICHOMIROV (1979, 5. Kapitel). Diese wird im folgenden auf das Problem A.1 angewendet.

Wir transformieren jedes Teilintervall  $[s_{i-1}, s_i]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , des Gitters  $\Delta_N$  aus Problem A.1 mit einer bijektiven, monoton wachsenden Zeittransformation

$$z_i : [0, 1] \rightarrow [s_{i-1}, s_i]$$

auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ . Dabei wird

$$v_i := \frac{dz_i}{dt}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, \dots, N$$

als neue Steuervariable mit  $v_i > 0$  betrachtet. Man definiert nun auf dem Intervall  $[0, 1]$  die Funktionen

$$\mathbf{y}_i := \mathbf{x} \circ z_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad w_i := u \circ z_i : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Damit ergibt sich für das Zielfunktional

$$I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) ds = \sum_{i=1}^N \int_{s_{i-1}}^{s_i} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) ds \\ = \sum_{i=1}^N \int_0^1 v_i(t) f_0(\mathbf{y}_i(t), w_i(t)) dt = \int_0^1 \tilde{L}(\mathbf{y}(t), w(t), v(t)) dt =: I_h(\mathbf{y}, z, v, w),$$

mit

$$\tilde{L}(\mathbf{y}, w, v) := \sum_{i=1}^N v_i f_0(\mathbf{y}_i, w_i)$$

und die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}' \circ z_i) \dot{z}_i = f(\mathbf{y}_i, w_i) v_i.$$

Insgesamt erhält man durch die obige Transformation die folgende (äquivalente) Problemstellung:

**Problem A.3.** Gesucht werden Steuerungen  $v, w \in L_\infty([0, 1], \mathbb{R}^N)$  und Zustandsvariablen  $z \in W^{1,\infty}([0, 1], \mathbb{R}^N)$  und  $\mathbf{y}_i \in W^{1,\infty}([0, 1], \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , so daß das Zielfunktional

$$I_h(\mathbf{y}, z, w, v) = \int_0^1 \tilde{L}(\mathbf{y}(t), w(t), v(t)) dt \quad (\text{A.11})$$

minimiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{y}}_i = v_i f(\mathbf{y}_i, w_i), \quad \dot{z}_i = v_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.12})$$

$$\Psi_0(\mathbf{y}_1(0)) = 0, \quad \Psi_i(\mathbf{y}_i(1)) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{y}_{i-1}(1), \quad i = 2, \dots, N, \quad (\text{A.14})$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_{i-1}(1) = z_i(0), \quad i = 2, \dots, N, \quad (\text{A.15})$$

$$g(\mathbf{y}_i(t)) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.16})$$

$$v_i(t) > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.17})$$

Zur Herleitung der notwendigen Bedingungen von Problem A.1 benötigen wir, daß jedes lokale oder globale Minimum von Problem A.1 einem solchen des transformierten Problems A.3 entspricht. Dieses wird in dem folgenden Satz gezeigt.

**Satz A.1.** Zu jedem lokalen Minimum  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  von Problem A.1 erhält man durch die spezielle Zeittransformation

$$\varphi_i^*(t) := s_{i-1}^* + (s_i^* - s_{i-1}^*)t, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.18})$$

ein lokales Minimum  $(\mathbf{y}^*, z^*, w^*, v^*)$  von Problem A.3 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i^*(t) &:= \mathbf{x}^*(\varphi_i^*(t)), & z_i^*(t) &:= \varphi_i^*(t), \\ v_i^*(t) &:= u^*(\varphi_i^*(t)), & v_i^*(t) &:= s_i^* - s_{i-1}^* \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

für alle  $t \in [0, 1]$  und  $i = 1, \dots, N$ . Ebenso kann man zu jedem lokalen Minimum  $(\mathbf{y}^*, z^*, w^*, v^*)$  von Problem A.3 ein lokales Minimum  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  von Problem A.1 konstruieren.

*Beweis.* Daß  $(\mathbf{y}^*, z^*, w^*, v^*)$  eine zulässige Lösung von Problem A.3 ist, sieht man durch Einsetzen von  $\varphi_i^*$  aus (A.18). Also genügt es die Optimalität zu überprüfen. Angenommen  $(\mathbf{y}^*, z^*, w^*, v^*)$  ist nicht optimal, dann gibt es in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung um  $(\mathbf{y}^*, z^*)$

$$\|\mathbf{y}^*(t) - \bar{\mathbf{y}}(t)\|_\infty < \varepsilon, \quad \|z^*(t) - \bar{z}(t)\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad (\text{A.20})$$

zulässige Lösungen  $(\mathbf{y}, z, w, v)$ , für die das Funktional (A.11) einen kleineren Wert besitzt. Nach (A.17) ist die Steuerung  $v$  in jeder Komponente positiv und die Funktion  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$\varphi_i(t) := z_i(t) \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}_i(t) = v_i(t) \quad \text{für } t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, N,$$

in jeder Komponente stetig und streng monoton wachsend. Auch ihre Umkehrfunktion  $\varphi^{-1}$  ist in jeder Komponente stetig und streng monoton wachsend. Nach (A.15) bilden die Komponenten der Transformation  $\varphi$  das Intervall  $[0, 1]$  auf die Teilintervalle eines Gitters  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N\}$  mit

$$s_0 := \varphi_1(0) = 0, \quad s_i := \varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad s_N := \varphi_N(1)$$

ab. Die Zustandsvariable  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , die intervallweise durch  $\mathbf{x}(s) := \mathbf{y}_i(\varphi_i^{-1}(s))$  mit  $s_{i-1} \leq s \leq s_i$  definiert wird, ist nach (A.14) stetig und erfüllt mit der intervallweise definierten Steuerung  $u(s) := w_i(\varphi_i^{-1}(s))$  für  $s_{i-1} \leq s < s_i$  die Differentialgleichung (A.3) und die Zustandsbeschränkung (A.5). Damit ist  $(\mathbf{x}, u, \Delta_N)$  eine zulässige Lösung von Problem A.1.

Für die Gitterpunkte gilt nach (A.20)  $|s_i - s_i^*| < \varepsilon$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Daraus folgt für den Abstand der Zustandsvariablen an einer Stelle  $\varphi_i(t) \in [s_0^*, s_N^*]$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x}^*(\varphi_i(t)) - \mathbf{x}(\varphi_i(t))\|_\infty \\ & \leq \|\mathbf{x}^*(\varphi_i(t)) - \mathbf{x}^*(\varphi_i^*(t))\|_\infty + \|\mathbf{x}^*(\varphi_i^*(t)) - \mathbf{x}(\varphi_i(t))\|_\infty \\ & = \left\| \int_{\varphi_i^*(t)}^{\varphi_i(t)} f(\mathbf{x}^*(s), u^*(s)) ds \right\|_\infty + \|\mathbf{y}_i^*(t) - \mathbf{y}_i(t)\|_\infty \\ & \leq K|\varphi_i(t) - \varphi_i^*(t)| + \|\mathbf{y}_i^*(t) - \mathbf{y}_i(t)\|_\infty < K\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

mit  $K := \max\{\|f(\mathbf{x}^*(s), u^*(s))\|_\infty \mid s_0 \leq s \leq s_N\}$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} I_a(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*) &= \int_{s_0^*}^{s_N^*} f_0(\mathbf{x}^*(s), u^*(s)) ds = \int_0^1 \tilde{L}(\mathbf{y}^*(t), w^*(t), v^*(t)) dt \\ &> \int_0^1 \tilde{L}(\mathbf{y}(t), w(t), v(t)) dt = \int_{s_0}^{s_N} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) ds = I_a(\mathbf{x}, u, \Delta_N). \end{aligned}$$

Dieses ist für ein hinreichend kleines  $\varepsilon$  ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem A.1 ist.  $\square$

Problem A.3 unterscheidet sich von der Form des Problems A.2 nur noch dadurch, daß es gekoppelte Randbedingungen besitzt. Diese können mit einer Standardtransformation, die im Beweis von Satz A.3 durchgeführt wird, entkoppelt werden und man kann die folgenden notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von Problem A.2 auf Problem A.1 bzw. A.3 anwenden.

Für ein lokales Minimum von Problem A.2 gelten mit der *Hamilton-Funktion*

$$H^0(\mathbf{x}, u, \lambda, \lambda_0) = \lambda^T f(\mathbf{x}, u) + \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, u) \quad (\text{A.21})$$

die folgenden notwendigen Bedingungen:

**Satz A.2 (Minimumprinzip).** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*)$  ein lokales Minimum von A.2. Dann existieren eine Funktion  $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eine Funktion  $\mu : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  von beschränkter Variation, eine Zahl  $\lambda_0 \geq 0$  und Vektoren  $l_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $i = 0, 1$ , die nicht gleichzeitig verschwinden, d.h.

$$(\lambda_0, \lambda(t), \mu(t), l_0, l_1, \alpha_0, \alpha_1) \neq 0, \quad (\text{A.22})$$

und für die gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^T(0) &= -l_0^T \Psi_{0,\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(0)) - \alpha_0^T \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(0)), \\ \lambda^T(T) &= l_1^T \Psi_{1,\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(T)) + \alpha_1^T \mathbf{g}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(T)), \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \lambda(t_1) - \lambda(t_0) &= \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -(H_{\mathbf{x}}^0)^T(\mathbf{x}^*(\tau), u^*(\tau), \lambda(\tau), \lambda_0) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}^*(\tau)) d\mu(\tau). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Weiterhin gilt fast überall in  $[0, T]$

$$H^0(\mathbf{x}^*(t), u^*(t), \lambda(t), \lambda_0) = \min_{u \in U} H^0(\mathbf{x}^*(t), u, \lambda(t), \lambda_0). \quad (\text{A.25})$$

Die  $i$ -te Komponente  $\mu_i$  von  $\mu$  ist monoton wachsend auf  $[0, T]$  und konstant auf Intervallen  $J \subset [0, T]$  mit  $\mathbf{g}_i(\mathbf{x}(t)) < 0$  für  $t \in J$ . Die Funktionen  $\mu$  und  $\lambda$  sind rechtsseitig stetig in  $(0, T)$  und  $\mu$  kann durch  $\mu(T) = 0$  normiert werden. Die Komponenten der Vektoren  $\alpha_i$ ,  $i = 0, 1$ , sind nicht negativ und es gilt  $\alpha_0^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(0)) = 0$  und  $\alpha_1^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*(T)) = 0$ .

*Beweis.* Siehe MAURER (1976,1979), IOFFE & TICHOMIROV (1979), CHUDEJ (1994).  $\square$

Diesen Satz kann man auf Problem A.3 anwenden, wenn man die gekoppelten Randbedingungen durch eine Standardtransformation entkoppelt. Nach einer Rücktransformation erhält man die folgende Satz für ein lokales Minimum von Problem A.1.

**Satz A.3.** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N)$  ein lokales Minimum von A.1. Dann existieren eine Funktion  $\lambda : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , eine Funktion  $\mu : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$  von beschränkter Variation, Zahlen  $\lambda_0 \geq 0$

und  $\alpha_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , und Vektoren  $l_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , die nicht gleichzeitig verschwinden

$$(\lambda_0, \lambda(t), \mu(t), l_0, \dots, l_N, \alpha_0, \dots, \alpha_N) \neq 0, \quad (\text{A.26})$$

und für die gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^\top(s_0) &= -l_0^\top \Psi_{0,\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_0)) - \alpha_0 g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_0)), \\ \lambda^\top(s_N) &= l_1^\top \Psi_{N,\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_N)) + \alpha_1 g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_N)), \\ \lambda^\top(s_i^+) &= \lambda^\top(s_i^-) - l_i^\top \Psi_{i,\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_i)) - \alpha_i g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(s_i)), \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Auf jedem Teilintervall gilt mit der Hamilton-Funktion

$$H^0(\mathbf{x}, u, \lambda, \lambda_0) = \lambda^\top f(\mathbf{x}, u) + \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, u) \quad (\text{A.28})$$

für  $\tilde{s}$ ,  $s \in [s_{i-1}, s_i]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , die adjungierte Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{s}) - \lambda(s) &= \\ &= \int_s^{\tilde{s}} -(H_{\mathbf{x}}^0)^\top(\mathbf{x}^*(\sigma), u^*(\sigma), \lambda(\sigma), \lambda_0) d\sigma + \int_s^{\tilde{s}} g_{\mathbf{x}}^\top(\mathbf{x}^*(\sigma)) d\mu(\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Weiterhin gilt für fast alle  $s \in [0, s_N]$

$$H^0(\mathbf{x}^*(s), u^*(s), \lambda(s), \lambda_0) = \min_{u \in \mathbb{R}} H^0(\mathbf{x}^*(s), u, \lambda(s), \lambda_0) = 0. \quad (\text{A.30})$$

Die Funktion  $\mu$  ist monoton wachsend auf  $[0, s_N]$  und konstant auf Intervallen  $J \subset [0, s_N]$  mit  $g(\mathbf{x}(t)) < 0$  für  $t \in J$ . Die Funktionen  $\mu$  und  $\lambda$  sind rechtsseitig stetig in  $(0, s_N)$  und  $\mu$  kann durch  $\mu(s_N) = 0$  normiert werden. Außerdem gilt  $\alpha_i^\top g(\mathbf{x}^*(s_i)) = 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

*Beweis.* Beim Beweis dieses Satzes werden zunächst die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum  $(\mathbf{y}, z, w, v)$  von Problem A.3 hergeleitet und auf Problem A.1 übertragen. Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem A.1 und  $(\mathbf{y}, z, w, v)$  das mit  $\varphi^*$  aus (A.18) transformierte, äquivalente lokale Minimum von Problem A.3. Um Satz A.2 auf Problem A.3 anwenden zu können, müssen die gekoppelten Randbedingungen entkoppelt werden. Dies geschieht durch die Einführung neuer Zustandsvariablen  $\xi_i$ ,  $\zeta_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , die einer trivialen Differentialgleichung und den folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= 0, & \xi_i(1) &= \mathbf{y}_i(1), & \xi_i(0) &= \mathbf{y}_{i+1}(0) \\ \dot{\zeta}_i &= 0, & \zeta_i(1) &= z_i(1), & \zeta_i(0) &= z_{i+1}(0) \end{aligned}$$

genügen. Da die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} \tilde{H}^0(\mathbf{y}, w, v, \lambda_{\mathbf{y}}, \lambda_z, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^N (\tilde{\lambda}_{\mathbf{y}_i}^\top v_i f(\mathbf{y}_i, w_i) + \lambda_{z_i} v_i) + \lambda_0 \tilde{L}(\mathbf{y}, w, v) \\ &= \sum_{i=1}^N v_i (H^0(\mathbf{y}_i, w_i, \lambda_{\mathbf{y}_i}, \lambda_0) + \lambda_{z_i}) \end{aligned}$$

mit  $H^0$  aus (A.28) nicht von den neuen Variablen  $z, \xi, \zeta$  abhängt, sind die dazugehörigen Lagrange-Parameter konstant. Für den Lagrange-Parameter  $\lambda_{\mathbf{y}_i}$  gilt nach (A.24) für  $i = 1, \dots, N$  und  $t, \tilde{t} \in [0, 1]$

$$\lambda_{\mathbf{y}_i}(\tilde{t}) - \lambda_{\mathbf{y}_i}(t) = \int_t^{\tilde{t}} -v_i H_{\mathbf{x}}^0(\mathbf{y}_i(\tau), w_i(\tau), \lambda_{\mathbf{y}_i}(\tau), \lambda_0) d\tau + \int_t^{\tilde{t}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_i(\tau)) d\tilde{\mu}_i(\tau).$$

Die adjungierte Gleichung (A.29) erhält man mit

$$\mu(s) := \frac{\tilde{\mu}_i(\varphi_i^{-1}(s))}{v_i} + \sum_{j=i+1}^N \frac{\tilde{\mu}_j(0)}{v_j} \quad \text{für } s_{i-1} \leq s \leq s_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Die dazugehörigen Randbedingungen (A.27) folgen aus den Randbedingungen für  $\lambda_{\mathbf{y}}$  und  $\lambda_{\xi}$ . Aus der freien Endzeit  $s_N = z_N(1)$  folgt, daß  $\lambda_{z_N}(1) = 0$  ist. Setzt man dieses in die anderen Randbedingungen für  $\lambda_z$  und  $\lambda_{\zeta}$  ein, so sieht man, daß die Lagrange-Parameter  $\lambda_z$  und  $\lambda_{\zeta}$  verschwinden. Mit  $\mathbb{R}_+^N = \{v \in \mathbb{R}^N : v_i > 0, i = 1, \dots, N\}$  folgt aus dem Minimumprinzip

$$\begin{aligned} & \tilde{H}^0(\mathbf{y}(t), w(t), v(t), \lambda_{\mathbf{y}}(t), \lambda_z(t), \tilde{\lambda}_0) \\ &= \min_{w \in \mathbb{R}^N, v \in \mathbb{R}_+^N} \tilde{H}^0(\mathbf{y}(t), w, v, \lambda_{\mathbf{y}}(t), \lambda_z(t), \tilde{\lambda}_0) \\ &= \min_{w \in \mathbb{R}^N, v \in \mathbb{R}_+^N} \sum_{i=1}^N v_i (H^0(\mathbf{y}_i(t), w_i, \lambda_{\mathbf{y}_i}(t), \tilde{\lambda}_0) + \lambda_{z_i}(t)). \end{aligned}$$

Da  $v_i > 0, i = 1, \dots, N$ , ist und jede Steuerung nur in einem Summanden auftritt, gilt für  $i = 1, \dots, N$

$$H^0(\mathbf{y}_i(t), w_i(t), \lambda_{\mathbf{y}_i}(t), \tilde{\lambda}_0) = \min_{w_i \in \mathbb{R}} H^0(\mathbf{y}_i(t), w_i, \lambda_{\mathbf{y}_i}(t), \tilde{\lambda}_0).$$

Da  $v_i$  linear in die Hamilton-Funktion eingeht und  $\infty > v_i > 0$  ist, verschwinden die Summanden und es gilt

$$H^0(\mathbf{y}_i(t), w_i(t), \lambda_{\mathbf{y}_i}(t), \tilde{\lambda}_0) = -\lambda_{z_i} = 0.$$

Daraus folgt die Gleichung (A.30). □

Aus der bei diesen notwendigen Bedingungen auftretenden adjungierten Gleichung (A.29) bzw. (A.24) kann man unter bestimmten Voraussetzungen die üblichen adjungierten Differentialgleichungen herleiten.

Auf einem *freien Teilstück*  $J$  ist  $\mu$  konstant. Deshalb ist  $\lambda$  stetig und der zweite Summand in (A.29) verschwindet. Damit ist  $\lambda$  auch differenzierbar und es gelten die üblichen *adjungierten Differentialgleichungen*

$$\dot{\lambda} = -f_{\mathbf{x}}^T \lambda. \tag{A.31}$$

Auf *Randstücken* und in *Berührungspunkten* hingegen bleibt der zweite Summand in (A.29) erhalten und es gilt die *Sprungbedingung*

$$\lambda(\tau^+) = \lambda(\tau^-) - \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}(\tau))(\mu(\tau^+) - \mu(\tau^-)), \quad \mu(\tau^+) - \mu(\tau^-) \geq 0. \quad (\text{A.32})$$

Für den Fall, daß  $\mu$  eine stückweise stetige Ableitung  $\eta = \dot{\mu}$  besitzt, kann man das Integral differenzieren und erhält die *adjungierten Differentialgleichungen*

$$\dot{\lambda} = -f_{\mathbf{x}}^T \lambda - \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^T \eta. \quad (\text{A.33})$$

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man zeigen, daß  $\mu$  auf einem Randstück stückweise stetig differenzierbar ist.

**Satz A.4.** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*)$  ein lokales Minimum von A.2 mit  $m = r = 1$  und beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $\mathbf{g}$ . Sei  $[\tau_1, \tau_2]$  ein Randstück der Zustandsbeschränkung  $\mathbf{g}$  mit der Ordnung  $p$ , für welches die Auflösbarkeitsbedingungen

$$\mathbf{g}_u^p(\mathbf{x}(t), u(t)) \neq 0, \quad t \in [\tau_1, \tau_2], \quad u(t) \in \overset{\circ}{U}, \quad t \in (\tau_1, \tau_2)$$

erfüllt sind. Dann sind die Funktionen  $\lambda, \mu$  aus Satz A.2 beliebig oft stetig differenzierbar auf  $(\tau_1, \tau_2)$ . Insbesondere hat  $\mu$  keine Sprünge im offenen Intervall  $(\tau_1, \tau_2)$  und der Lagrange-Parameter  $\lambda$  genügt der adjungierten Differentialgleichung

$$\dot{\lambda} = -f_{\mathbf{x}}^T \lambda - \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^T \eta,$$

mit  $\eta = \dot{\mu} \geq 0$ .

*Beweis.* Dieser Satz ist bei MAURER (1976,1979) für ein Optimalsteuerungsproblem mit Zielfunktional in Mayer-Form  $I_M(\mathbf{x}, u) = \Phi(\mathbf{x}(T))$  bewiesen. Indem man eine neue Zustandsvariable  $\tilde{\mathbf{x}}(t) := \int_0^t f_0(\mathbf{x}(\tau), u(\tau)) d\tau$  einführt, kann man das vorliegende Problem A.2 in Mayer-Form transformieren.  $\square$

Um diesen Satz auf Problem A.1 anzuwenden, wird das folgende Hilfsproblem verwendet.

**Problem A.4.** Gesucht werden eine skalare Steuerung  $u \in L_\infty[\bar{s}_1, \bar{s}_2]$  und eine Zustandsvariable  $\mathbf{x} \in W^{1,\infty}([\bar{s}_1, \bar{s}_2], \mathbb{R}^n)$ , die das Zielfunktional

$$I_H(\mathbf{x}, u) = \int_{\bar{s}_1}^{\bar{s}_2} f_0(\mathbf{x}(s), u(s)) ds$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= f(\mathbf{x}, u) && f. \text{ ü. in } [\bar{s}_1, \bar{s}_2], \\ \mathbf{x}(\bar{s}_i) &= \bar{\mathbf{x}}_i, && i = 1, 2, \\ g(\mathbf{x}(s)) &\leq 0, && \bar{s}_1 \leq s \leq \bar{s}_2. \end{aligned}$$

**Folgerung A.5.** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem A.1. Sei  $[\tau_1, \tau_2]$  ein Randstück der Zustandsbeschränkung  $g$  mit der Ordnung  $p$ , das keinen Interpolationsknoten enthält und für das

$$g_u^p(\mathbf{x}(s), u(s)) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in [\tau_1, \tau_2]$$

gilt. Dann sind die Funktionen  $\lambda, \mu$  aus Satz A.3 beliebig oft stetig differenzierbar auf  $(\tau_1, \tau_2)$ . Insbesondere hat  $\mu$  keine Sprünge im offenen Intervall  $(\tau_1, \tau_2)$  und der Lagrange-Parameter  $\lambda$  genügt der adjungierten Differentialgleichung

$$\dot{\lambda} = -f_x^T \lambda - g_x^T \eta,$$

mit  $\eta = \dot{\mu} \geq 0$ .

*Beweis.* Sei  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  ein Intervall, das keinen Interpolationsknoten enthält und das Randstück umschließt, d.h.

$$(\tau_1, \tau_2) \subset (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \cap \{s_i, i = 0, \dots, N\} = \emptyset.$$

Dann existiert ein lokales Minimum  $(\mathbf{x}, u)$  von Problem A.4 zu den Randbedingungen  $\bar{\mathbf{x}}_i := \mathbf{x}^*(\bar{s}_i)$ ,  $i = 1, 2$ , für das

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}^*(s), \quad u(s) = u^*(s) \quad \text{für alle } s \in [\bar{s}_1, \bar{s}_2]$$

gilt. Damit kann man Satz A.4 anwenden, und erhält, daß  $\lambda$  und  $\mu$  beliebig oft stetig differenzierbar sind.  $\square$

Unter der Voraussetzung, daß das lokale Minimum  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta^*)$  von Problem A.1 nur endlich viele Verknüpfungspunkte  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $0 \leq l < \infty$ , besitzt, kann man die notwendigen Bedingungen für ein lokales Minimum von Problem A.1 in dem folgenden Satz zusammenfassen.

**Satz A.6 (Notwendige Bedingungen).** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem A.1 mit den Verknüpfungspunkten  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , wobei für alle Randstücke  $[\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2]$  der Zustandsbeschränkung  $g$  mit der Ordnung  $p$  die Auflösbarkeitsbedingung

$$g_u^p(\mathbf{x}(s), u(s)) \neq 0 \quad \text{für alle } s \in [\tau_1, \tau_2]$$

gelte. Dann gibt es stückweise stetige Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\eta : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf allen freien Teilstücken und auf allen Randstücken  $\tau_1, \tau_2$  mit  $(\tau_1, \tau_2) \cap \{s_i : i = 0, \dots, N\} = \emptyset$   $C^\infty$ -Funktionen sind und konstante Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $l_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, d.h.

$$(\lambda_0, \lambda(t), \eta(t), l_0, \dots, l_N, \alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_l) \neq 0, \quad (\text{A.34})$$

und für die erweiterte Hamilton-Funktion

$$H = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \lambda^\top f(\mathbf{x}, u) + \eta g(\mathbf{x}) \quad (\text{A.35})$$

die folgenden Bedingungen gelten:

1. adjungierte Differentialgleichungen (intervallweise):

$$\lambda' = -H_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, u^*, \lambda, \eta), \quad (\text{A.36})$$

2. Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \lambda^\top(s_0) &= -l_0^\top \Psi_{0,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_0)) - \alpha_0 g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_0)), \\ \lambda^\top(s_N) &= l_N^\top \Psi_{N,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_N)) + \alpha_N g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_N)), \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

3. Transversalitätsbedingungen  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ :

$$\lambda^\top(s_i^+) = \lambda^\top(s_i^-) - l_i^\top \Psi_{i,\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_i)) - \alpha_i g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(s_i)), \quad (\text{A.38})$$

4. Bedingungen an den Verknüpfungspunkten  $\tau_j \notin \{s_0, \dots, s_N\}$ ,  $j = 1, \dots, l$ :

$$\lambda^\top(\tau_j^+) = \lambda^\top(\tau_j^-) - \beta_j g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\tau_j)), \quad (\text{A.39})$$

5. Minimumprinzip für  $s \in [0, s_N]$  f.ü.:

$$u^*(s) = \arg \min_{u \in \mathbb{R}} H(\mathbf{x}^*(s), u, \lambda(s), \eta(s)), \quad (\text{A.40})$$

$$H(\mathbf{x}^*(s), u^*(s), \lambda(s), \eta(s)) = 0, \quad (\text{A.41})$$

6. Vorzeichen- und Komplementaritätsbedingungen:

$$\eta(s) \geq 0, \quad \eta(s)g(\mathbf{x}(s)) = 0, \quad \text{für alle } s \in [s_0, s_N], \quad (\text{A.42})$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad \alpha_i g(\mathbf{x}(s_i)) = 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad (\text{A.43})$$

$$\beta_j \geq 0, \quad \beta_j g(\mathbf{x}(\tau_j)) = 0, \quad j = 1, \dots, l. \quad (\text{A.44})$$

**Bemerkung A.7.** Im Fall  $\lambda_0 \neq 0$  kann man die Lagrange-Parameter in Satz A.6 umskalieren, so daß  $\lambda_0 = 1$  gilt. Den Fall  $\lambda_0 = 0$  kann man für viele konkrete Beispiele, z.B. auch für das Problem 2.2, vgl. Satz 2.7, zum Widerspruch führen, da nach Satz A.6 die Lagrange-Multiplikatoren nicht alle verschwinden.

**Bemerkung A.8.** Mit der gleichen Herleitung können auch notwendige Bedingungen für auf einem Gitter abschnittsweise definierte Funktionen  $f$  und  $g$  aus Problem A.1 herleitet werden. Für den Fall, daß nur die Zustandsbeschränkung  $g$  abschnittsweise auf einem Gitter definiert ist und an den Gitterpunkten nicht aktiv ist, gelten die obigen notwendigen Bedingungen. Der Fall einer abschnittsweise definierten Funktion  $f$  wird bei CHUDEJ (1994) behandelt. Es werden dort für den Fall, daß Gitterpunkte in einem Randstück liegen, zusätzliche notwendige Bedingungen hergeleitet.

Für Problem A.1 mit fester Endzeit  $s_N$  (Problem A.1\*) oder mit festen Interpolationsknoten  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , (Problem A.1\*\*) erhält man mit derselben Herleitung die folgenden notwendigen Bedingungen.

**Folgerung A.9.** Sei  $(\mathbf{x}^*, u^*, \Delta_N^*)$  ein lokales Minimum von Problem A.1\* mit vorgegebener Endzeit  $s_N^*$  oder von Problem A.1\*\* zu einem fest vorgegebenen Gitter  $\Delta_N^*$  mit den Verknüpfungspunkten  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Dann gibt es stückweise stetige Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\eta : [0, s_N] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf allen freien Teilstücken und auf allen Randstücken  $\tau_1, \tau_2$  mit  $(\tau_1, \tau_2) \cap \{s_i : i = 0, \dots, N\} = \emptyset$   $C^\infty$ -Funktionen sind und konstante Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $l_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\beta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ ,  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , die nicht alle gleichzeitig verschwinden, d.h.

$$(\lambda_0, \lambda(t), \eta(t), l_0, \dots, l_N, \alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_l, \rho_1, \dots, \rho_N) \neq 0 \quad (\text{A.45})$$

und für die mit der erweiterten Hamilton-Funktion

$$H = \lambda_0 f_0(\mathbf{x}, u) + \lambda^T f(\mathbf{x}, u) + \eta g(\mathbf{x}) \quad (\text{A.46})$$

die Gleichungen (2.1.10)-(2.1.14) und (2.1.16)-(2.1.18) gelten. Für die erweiterte Hamilton-Funktion gilt auf dem Intervall  $(s_{i-1}, s_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,

$$H(\mathbf{x}^*(s), u^*(s), \lambda(s), \eta(s)) + \rho_i = 0. \quad (\text{A.47})$$

Ist nur die Endzeit  $s_N^*$  vorgegeben und sind die Zwischenknoten  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , frei, so gilt  $\rho := \rho_1 = \dots = \rho_N$ .

*Beweis.* Die Herleitung erfolgt analog zur Herleitung von Satz A.6. Wie in Satz A.1 beweist man, daß Problem A.1\* bzw. A.1\*\* zu Problem A.3 mit der zusätzlichen Nebenbedingung  $z_N(1) = s_N^*$  bzw.  $z_i(1) = s_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$ , äquivalent ist. Wendet man auf das Problem A.1\* bzw. A.1\*\* wie in Satz A.3 den Satz A.2 an, so verschwindet der Lagrange-Parameter  $\lambda_{z_N}$  im allgemeinen nicht, da die Endzeit  $s_N^*$  vorgegeben ist. Hieraus folgt für  $\rho_i := -\lambda_{z_i}$  Gleichung (A.47). Bei Problem A.1\* gilt außerdem  $\lambda_{z_1} = \dots = \lambda_{z_N}$ , da die Zwischenknoten frei sind.  $\square$

Diese notwendigen Bedingungen können auf das mit Problem 1.2 verwandte Problem des nichtlinearen Splines fester Länge angewendet werden.

**Problem A.5.** Zu gegebenen Punkten  $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^2$ ,  $i = 0, \dots, N$ , mit  $\mathbf{z}_i \neq \mathbf{z}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , und Tangentenwinkeln  $\theta_0, \theta_N \in \mathbb{R}$ , einer festen Länge  $L > 0$ , bzw. einem festen Gitter  $\Delta_N = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = L\}$  und einer gegebenen Funktion  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ , für die

$$g(\mathbf{z}_i) < 0, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{und} \quad \nabla g(\mathbf{z}) \neq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$$

gelte, bestimme man eine  $C^{1,2}$ -Kurve  $\mathbf{z} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , eine  $C^{0,1}$ -Funktion  $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  und gegebenenfalls ein Gitter  $\Delta_N$ , die das Funktional

$$I(\mathbf{z}, \theta, \Delta_N) = \int_{s_0}^{s_N} (\theta')^2 ds \quad (\text{A.48})$$

minimieren unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T \quad \text{auf } [0, s_N], \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{z}(s_i) = \mathbf{z}_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (\text{A.50})$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta(s_N) = \theta_N, \quad (\text{A.51})$$

$$g(\mathbf{z}(s)) \leq 0, \quad s \in [0, s_N]. \quad (\text{A.52})$$

Für dieses Problem kann man ähnliche notwendige Bedingungen, wie für Problem 1.2 herleiten und unter weiteren Voraussetzungen an die Funktion  $g$  zeigen, daß auch der Lagrange-Parameter  $\lambda_0$  nicht verschwinden kann. Diese nichtlinearen Splines fester Länge erfüllen intervallweise wie die nichtlinearen Splines unter Spannung, die bei BRUNETT & WENDT (1997) behandelt werden, die Differentialgleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{2}\rho\kappa = 0,$$

die auch mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen analytisch lösbar ist, siehe Satz B.1. Bei der numerischen Behandlung des Problems hat man andere Probleme zu bewältigen, da man an Stelle der bei Problem 1.2 unbekanntes Länge  $L$  bzw. des unbekanntes Gitters  $\Delta_N$  den Parameter  $\rho$  bzw. die Parameter  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , nicht kennt.

## Anhang B

# Jacobische elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Eigenschaften der Jacobischen elliptischen Funktionen zusammengefaßt, die zum Verständnis dieser Arbeit benötigt werden. Diese Zusammenfassung basiert auf den Darstellungen von BULIRSCH und ABRAMOWITZ & STEGUN (1972). Für weitere Details, insbesondere das Verhalten im Komplexen, sei auf weiterführende Bücher wie z.B. BURKHARDT (1920), KÖNIG & KRAFT (1928) und WHITTAKER & WATSON (1980) verwiesen. Ziel dieses Abschnitts ist ein Satz, in dem die Lösung der in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Differentialgleichung (2.2.10) durch Jacobische elliptische Funktionen bewiesen wird.

Das *elliptische Integral erster Gattung* wird durch

$$F(\varphi, k) := \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (\text{B.53})$$

für eine *Amplitude*  $\varphi \in [0, \frac{1}{2}\pi]$  und einen *Modul*  $k \in [0, 1)$  definiert. Das Integral  $K(k) := F(\frac{\pi}{2}, k)$  wird als *vollständiges* elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Für einen festen Modul  $k \in [0, 1)$  ist die Funktion  $u_k := F(\cdot, k)$  ein Diffeomorphismus und es existiert ihre Umkehrabbildung  $u_k^{-1}$ . Die Abbildung  $\text{am} : \mathbb{R} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{am}(\varphi) := u_k^{-1}(\varphi)$  für  $(\varphi, k) \in \mathbb{R} \times [0, 1)$  wird als *Amplitudenfunktion* bezeichnet. Damit können die *Jacobischen elliptischen Funktionen* wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \text{sinus amplitudinis:} & \quad \text{sn}(u, k) := \sin(\text{am}(u, k)), \\ \text{cosinus amplitudinis:} & \quad \text{cn}(u, k) := \cos(\text{am}(u, k)), \\ \text{delta amplitudinis:} & \quad \text{dn}(u, k) := \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(u, k)}. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Die Funktion  $\text{sn}(\cdot, k)$  ist wie der Sinus eine ungerade periodische Funktion mit der Periode  $4K(k)$ . Die Funktion  $\text{cn}(\cdot, k)$  ist wie der Cosinus eine gerade periodische Funktion mit der Periode  $4K(k)$ . Die Funktion  $\text{dn}(\cdot, k)$  ist eine gerade periodische Funktion mit der Periode

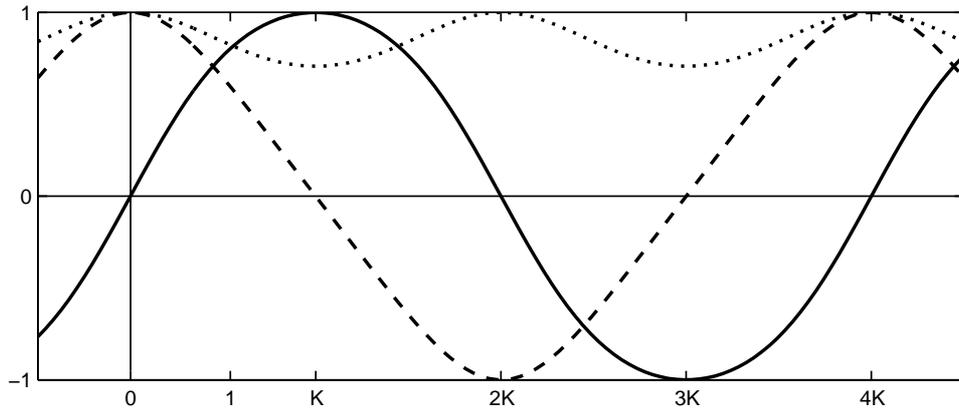


Abbildung B.1: Die Funktionen  $\operatorname{sn}(\cdot, k)$  (—),  $\operatorname{cn}(\cdot, k)$  (---) und  $\operatorname{dn}(\cdot, k)$  (·····) zum Modul  $k = \sqrt{0.5}$  auf dem Intervall  $[-0.5 K(k), 4.5 K(k)]$ .

$2K(k)$ . Einige ausgewählte Funktionswerte sind in der folgenden Tabelle zu sehen:

$v$	0	$K(k)$	$2K(k)$	$3K(k)$
$\operatorname{sn}(v, k)$	0	1	0	-1
$\operatorname{cn}(v, k)$	1	0	-1	0
$\operatorname{dn}(v, k)$	1	$\sqrt{1 - k^2}$	1	$\sqrt{1 - k^2}$ .

Für  $k = \sqrt{0.5}$  und  $K(k) \approx 1.3506$  sind die Jacobischen elliptischen Funktionen in Abbildung B.1 gezeichnet. Mit dem komplementären Modul  $k' = \sqrt{1 - k^2}$  gelten für die Funktionen die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{cn}^2(u, k) &= 1, \\
 k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \operatorname{dn}^2(u, k) &= 1, \\
 k^2 \operatorname{cn}^2 + (k')^2 &= \operatorname{dn}^2, \\
 \operatorname{cn}^2 + (k')^2 \operatorname{sn}^2 &= \operatorname{dn}^2.
 \end{aligned}
 \tag{B.55}$$

Die Jacobischen elliptischen Funktionen sind bezüglich  $u$   $C^\infty$ -Funktionen auf  $\mathbb{R}$  und ihre Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u, k) &= \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\
 \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u, k) &= -\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\
 \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u, k) &= -k^2 \operatorname{sn}(u, k) \operatorname{cn}(u, k).
 \end{aligned}
 \tag{B.56}$$

Das elliptische Integral zweiter Gattung kann man durch

$$E(v, k) := \int_0^v \operatorname{dn}^2(\nu, k) d\nu
 \tag{B.57}$$

definieren. Der Wert  $E(k) := E(K(k), k)$  wird als vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung bezeichnet. Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\bar{K} := K(k)$  gilt

$$\begin{aligned} E(v+2n\bar{K}, k) &= \int_0^{v+2n\bar{K}} \operatorname{dn}^2(\nu, k) \, d\nu \\ &= \int_0^{2n\bar{K}} \operatorname{dn}^2(\nu, k) \, d\nu + \int_{2n\bar{K}}^{v+2n\bar{K}} \operatorname{dn}^2(\nu, k) \, d\nu = 2n E(\bar{K}, k) + E(v, k), \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

da  $\operatorname{dn}$  eine  $2K$ -periodische Funktion ist. In dieser Arbeit wird auch das Integral

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_1} \operatorname{cn}^2(v, k) \, dv &= \frac{1}{k^2} \int_{v_0}^{v_1} \operatorname{dn}^2(v, k) - (k')^2 \, dv \\ &= \frac{1}{k^2} (E(v_1, k) - E(v_0, k) - (k')^2 (v_1 - v_0)) \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

benötigt. Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $2nK(k) \leq v_1 - v_0$  gilt die Abschätzung

$$\int_{v_0}^{v_1} \operatorname{cn}^2(v, k) \, dv \geq \int_{v_0}^{v_0+2nK(k)} \operatorname{cn}^2(v, k) \, dv = \frac{2n}{k^2} (E(K(k), k) - (k')^2 K(k)). \quad (\text{B.60})$$

Für  $k = \sqrt{0.5}$  gilt  $K(k) \approx 1.3506$ ,  $E(K(k), k) \approx 1.8541$  und

$$\int_0^{2K} \operatorname{cn}^2(v, k) \, dv = 4E(K(k), k) - 2K(k) \approx 4.7150. \quad (\text{B.61})$$

Mit diesen Kenntnissen über die Jacobischen elliptischen Funktionen kann man die Lösungen von Gleichung (2.2.10) bzw. der allgemeineren Differentialgleichung

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{2}\rho\kappa = 0$$

angeben.

**Satz B.1.** *Zu gegebenen Konstanten  $\rho, \kappa_0, \kappa'_0 \in \mathbb{R}$  existiert eine eindeutig bestimmte und auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Anfangswertaufgabe*

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{2}\rho\kappa = 0, \quad \kappa(0) = \kappa_0, \quad \kappa'(0) = \kappa'_0 \quad (\text{B.62})$$

Die Lösung  $\kappa$  besitzt eine der folgenden Darstellungen:

a) Für  $\kappa_0 = \kappa'_0 = 0$  gilt  $\kappa \equiv 0$ .

b) Für  $\kappa_0^2 + (\kappa'_0)^2 > 0$  und  $\sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa'_0)^2} > \rho$  wird die Lösung der Anfangswertaufgabe durch

$$\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(a(s - s_m), k) \quad (\text{B.63})$$

gegeben, wobei für die Parameter  $\kappa_m, a \in \mathbb{R}$  und den Modul  $k \in [0, 1)$  die Gleichungen

$$\kappa_m^2 = \rho + \sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa_0')^2}, \quad \text{sign}(\kappa_m) = \text{sign}(\kappa_0), \quad (\text{B.64})$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(\kappa_m^2 - \rho)} > 0 \quad \text{und} \quad 2k^2(\kappa_m^2 - \rho) = \kappa_m^2 \quad (\text{B.65})$$

gelten. Die Gleichung  $\kappa_0 = \kappa_m \text{cn}(\bar{v}, k)$  besitzt eine eindeutige Lösung  $\bar{v} \in [0, K(k)]$  und für den Parameter  $s_m$  gilt

$$|s_m| = |\bar{v}/a| \quad \text{mit} \quad \text{sign}(s_m) = \text{sign}(\kappa_0') \text{sign}(\kappa_0). \quad (\text{B.66})$$

c) Für  $\kappa_0^2 + (\kappa_0')^2 > 0$  und  $\sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa_0')^2} \leq \rho$  wird die Lösung der Anfangswertaufgabe durch

$$\kappa(s) = \kappa_m \text{dn}(a(s - s_m), k) \quad (\text{B.67})$$

gegeben, wobei für die Parameter  $\kappa_m, a \in \mathbb{R}$  und den Modul  $k \in [0, 1)$  die Gleichungen

$$\kappa_m^2 = \rho + \sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa_0')^2}, \quad \text{sign}(\kappa_m) = \text{sign}(\kappa_0), \quad (\text{B.68})$$

$$a = \frac{1}{2}\kappa_m \quad \text{und} \quad 2(\kappa_m^2 - \rho) = k^2\kappa_m^2 \quad (\text{B.69})$$

gelten. Die Gleichung  $\kappa_0 = \kappa_m \text{dn}(\bar{v}, k)$  besitzt eine eindeutige Lösung  $\bar{v} \in [0, K(k)]$  und für den Parameter  $s_m$  gilt

$$|s_m| = |\bar{v}/a| \quad \text{mit} \quad \text{sign}(s_m) = \text{sign}(\kappa_0') \text{sign}(\kappa_0). \quad (\text{B.70})$$

Außerdem erfüllt die Funktion  $\kappa$  die Ungleichung

$$2\rho - \kappa_m^2 \leq \kappa^2 \leq \kappa_m^2$$

mit  $\kappa_m^2 \leq 2\rho$ .

Die Funktion  $\kappa^2$  besitzt ein globales Maximum  $\kappa_m^2$ , das an der Stelle  $s_m$  liegt und für  $s \in \mathbb{R}$  gilt die Gleichung

$$(\kappa_m^2 - \rho)^2 = (\kappa^2(s) - \rho)^2 + 4(\kappa'(s))^2. \quad (\text{B.71})$$

*Beweis.* Schreibt man die Differentialgleichung (B.62) als Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2 \\ 0.5(\rho\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^3) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_0' \end{pmatrix},$$

so ist die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig differenzierbar und die Anfangswertaufgabe besitzt nach Satz 1.2 höchstens eine Lösung.

Zu b) Sei  $\kappa_0^2 + (\kappa'_0)^2 > 0$  und  $\sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa'_0)^2} > \rho$ . Zunächst wird gezeigt, daß die Wahl Parameter nach (B.64)-(B.65) möglich ist. Nach Voraussetzung gilt  $\kappa_m^2 > 2\rho$  und  $\kappa_m^2 > \rho$ . Daraus folgt

$$0 < k^2 = \frac{\kappa_m^2}{2(\kappa_m^2 - \rho)} < 1.$$

Also ist die Funktion  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(a(s - s_m), k)$  für beliebiges  $s_m \in \mathbb{R}$  definiert. Für ihre Ableitung gilt nach (B.56) und (B.55) mit  $v(s) = a(s - s_m)$  für  $s \in \mathbb{R}$  und  $v' = a$

$$\kappa' = -\kappa_m a \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k)$$

und für ihre zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \kappa'' &= -\kappa_m a^2 (\operatorname{cn}(v, k) \operatorname{dn}^2(v, k) - k^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{cn}(v, k)) \\ &= -\frac{1}{2} \kappa_m (\kappa_m^2 - \rho) \operatorname{cn}(v, k) (1 - 2k^2(1 - \operatorname{cn}^2)) \\ &= -\frac{1}{2} \kappa_m \operatorname{cn}(v, k) (\kappa_m^2 \operatorname{cn}(v, k) - \rho) = -\frac{1}{2} (\kappa^3 - \rho \kappa). \end{aligned}$$

Also ist sie eine Lösung der Differentialgleichung. Nun muß noch gezeigt werden, daß auch die Anfangswerte

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \kappa(0) = \kappa_m \operatorname{cn}(-as_m, k) \quad \text{und} \\ \kappa'_0 &= \kappa'(0) = -\kappa_m a \operatorname{sn}(-as_m, k) \operatorname{dn}(-as_m, k) \end{aligned} \tag{B.72}$$

erfüllt werden. Mit (B.55) und dem Modul  $k$  aus (B.65) gilt

$$\begin{aligned} (\kappa')^2 &= \kappa_m^2 a^2 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{dn}^2(v, k) \\ &= \frac{1}{2} \kappa_m^2 (\kappa_m^2 - \rho) (1 - \operatorname{cn}^2(v, k)) (k^2 \operatorname{cn}^2(v, k) + (1 - k^2)) \\ &= \frac{1}{2} \kappa_m^2 (\kappa_m^2 - \rho) (1 - \operatorname{cn}^2(v, k)) (1 - k^2(1 - \operatorname{cn}^2(v, k))) \\ &= \frac{1}{4} (2(\kappa_m^2 - \rho) \kappa_m^2 (1 - \operatorname{cn}^2(v, k)) - \kappa_m^4 (1 - \operatorname{cn}^2(v, k))^2) \\ &= \frac{1}{4} (2\rho \kappa^2 - \kappa^4 + (\kappa_m^2 - 2\rho) \kappa_m^2). \end{aligned}$$

Damit gilt an der Stelle  $s = 0$

$$4(\kappa'(0))^2 = (\kappa_m^2 - \rho)^2 - (\kappa^2(0) - \rho)^2 = (\kappa_0^2 - \rho)^2 + 4(\kappa'_0)^2 - (\kappa^2(0) - \rho)^2$$

und damit

$$\kappa^2(0) = \kappa_0^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\kappa'(0))^2 = (\kappa'_0)^2.$$

Außerdem gilt  $\kappa_0^2 \leq \kappa_m^2$ , da die Ungleichung  $\kappa_0^2 - \rho \leq \sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa'_0)^2}$  trivialerweise erfüllt ist. Zusammen mit der Vorzeichenbedingung für  $\kappa_m$  erhält man die Ungleichung  $0 \leq \kappa_0/\kappa_m \leq 1$  und deshalb ist die Gleichung  $\kappa_0 = \kappa_m \operatorname{cn}(\bar{v}, k)$  auf dem Intervall  $[0, K(k)]$

bzw. dem Intervall  $[-K(k), 0]$  eindeutig lösbar. Durch (B.66) wird das Vorzeichen so gewählt, daß

$$\kappa'_0 = -\kappa_m a \operatorname{sn}(\bar{v}, k) \operatorname{dn}(\bar{v}, k)$$

gilt. Damit ist gezeigt, daß die Funktion  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(a(s - s_m), k)$  mit den Parametern aus (B.64)-(B.66) die Anfangswertaufgabe löst.

Zu c) Sei  $\kappa_0^2 + (\kappa'_0)^2 > 0$  und  $\sqrt{(\rho - \kappa_0^2)^2 + 4(\kappa'_0)^2} \leq \rho$ . Wie oben zeigt man, daß die Wahl der Parameter nach (B.68)-(B.69) möglich ist. Damit kann man für beliebiges  $s_m \in \mathbb{R}$  die Funktion  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{dn}(a(s - s_m), k)$  definieren. Für ihre Ableitung gilt nach (B.56) und (B.55) mit  $v(s) = a(s - s_m)$  für  $s \in \mathbb{R}$  und  $v' = a = 0.5\kappa_m$

$$\kappa' = -\frac{1}{2}\kappa_m^2 k^2 \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{cn}(v, k)$$

und für ihre zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \kappa'' &= -\frac{1}{4}\kappa_m^3 k^2 \operatorname{dn}(v, k) (\operatorname{cn}^2(v, k) - \operatorname{sn}^2(v, k)) \\ &= -\frac{1}{4}\kappa_m^3 \operatorname{dn}(v, k) (2 \operatorname{dn}^2(v, k) - 2 + k^2) \\ &= -\frac{1}{2}\kappa_m \operatorname{dn}(v, k) (\kappa_m^2 \operatorname{dn}^2(v, k) - \rho) = -\frac{1}{2}(\kappa^3 - \rho\kappa). \end{aligned}$$

Also ist sie eine Lösung der Differentialgleichung. Nun muß noch gezeigt werden, daß die Anfangswerte

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \kappa(0) = \kappa_m \operatorname{dn}(-as_m, k) \quad \text{und} \\ \kappa'_0 &= \kappa'(0) = -\frac{1}{2}\kappa_m^2 k^2 \operatorname{sn}(-as_m, k) \operatorname{cn}(-as_m, k) \end{aligned} \tag{B.73}$$

erfüllt werden. Es gilt mit dem Modul  $k$  aus (B.69)

$$\begin{aligned} (\kappa')^2 &= \frac{1}{4}\kappa_m^4 k^4 \operatorname{sn}^2(v, k) \operatorname{cn}^2(v, k) \\ &= \frac{1}{4}\kappa_m^4 (1 - \operatorname{dn}^2(v, k)) (\operatorname{dn}^2(v, k) - (1 - k^2)) \\ &= \frac{1}{4}\kappa_m^4 ((2 - k^2) \operatorname{dn}^2(v, k) - \operatorname{dn}^4(v, k) + k^2 - 1) \\ &= \frac{1}{4}(2\rho\kappa^2 - \kappa^4 + (\kappa_m^2 - 2\rho)\kappa_m^2). \end{aligned}$$

Damit gilt an der Stelle  $s = 0$

$$4(\kappa'(0))^2 = (\kappa_m^2 - \rho)^2 - (\kappa^2(0) - \rho)^2 = (\kappa_0^2 - \rho)^2 + 4(\kappa'_0)^2 - (\kappa^2(0) - \rho)^2$$

und damit

$$\kappa^2(0) = \kappa_0^2 \iff (\kappa'(0))^2 = (\kappa'_0)^2.$$

Damit die Gleichung  $\kappa_0 = \kappa_m \operatorname{dn}(\bar{v}, k)$  eine eindeutige Lösung auf  $[0, K(k)]$  bzw.  $[-K(k), 0]$  besitzt, muß  $\sqrt{1 - k^2} \leq \kappa_0/\kappa_m \leq 1$  gelten. Aufgrund der Wahl des Vorzeichens von  $\kappa_m$  gilt  $\kappa_0/\kappa_m \geq 0$ . Also muß man nur noch die Ungleichung  $\kappa_0^2 \geq (1 - k^2)\kappa_m^2 = 2\rho - \kappa_m^2$  zeigen, die nach Voraussetzung erfüllt ist. Wählt man nun  $sm$  wie in (B.70) so gilt

$$\kappa'_0 = \kappa'(0) = -\frac{1}{2}\kappa_m^2 k^2 \operatorname{sn}(\bar{v}, k) \operatorname{cn}(\bar{v}, k).$$

Damit ist gezeigt, daß die Funktion  $\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{dn}(a(s - s_m), k)$  mit den Parametern aus (B.68)-(B.70) die Anfangswertaufgabe löst.  $\square$

# Anhang C

## Matlab-Programme

In Abschnitt 3.1 ist ein Algorithmus zur Berechnung eines unrestringierten nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationsknoten vorgestellt worden. Die Ableitung der dabei verwendeten Funktion  $f_i(\kappa_0)$  aus (3.1.41) bzw.  $\bar{f}_i(\kappa'_0)$  aus (3.1.42) nach der Variablen  $\kappa_0$  bzw.  $\kappa'_0$  kann man analytisch berechnen. Zwei Matlab-Programme, die die Funktionen und ihre Ableitungen berechnen, werden im folgenden präsentiert. Sie benutzen neben den Matlab-Routinen `ellipj` (*Jacobische elliptische Funktionen*) und `ellipke` (*vollständige elliptische Integrale*) auch eine selbstgeschriebene Routine zur Berechnung des unvollständigen elliptischen Integrals `el2` nach BULIRSCH (1965). Zur besseren Lesbarkeit des Programms wird  $E(v, k)$  mit der Routine `ele(v, k)` berechnet, die `el2` benutzt. Die Interpolationsdaten des gesuchten nichtlinearen Splines seien in der Form  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)^T$  und  $\theta_1$  mit  $w_1 = \cos \theta_1$ ,  $w_2 = \sin \theta_1$  gegeben. Für  $y_1 \neq 0$  oder  $w_1 \neq 0$  liegt Fall 1 oder 2 nach Satz 3.1 vor, und man kann die Funktionen  $f_i(\kappa_0)$  aus (3.1.41) und ihre Ableitungen mit dem folgenden Programm berechnen. Das zweite Programm berechnet die Funktionen  $\bar{f}_i(\kappa'_0)$  aus (3.1.42) und ihre Ableitungen, die für  $y_1 = w_1 = 0$  (*Fall 3*) benötigt werden. Beide Programme verwenden die Variablen

<code>k0</code>	$\kappa(0) < 0$
<code>k1</code>	$\kappa(L)$
<code>k0s</code>	$\kappa'(0)$
<code>k1s</code>	$\kappa'(L)$
<code>BL</code>	$B(L) = \int_0^L \kappa^2(s) ds$
<code>erg</code>	$f_i(\kappa_0)$ bzw. $\bar{f}_i(\kappa'_0)$
<code>vorz</code>	$\pm 1$ für die Fallunterscheidung in (3.1.17) bzw. (3.1.23)
<code>int0</code>	$\Delta s_0$
<code>int1</code>	$\Delta s_1$
<code>km, km2</code>	$\kappa_m, \kappa_m^2$
<code>v0, v1</code>	$v_0 := v(0), v_1 := v(L)$

Ein angehängtes „S“ steht für die Ableitung nach  $\kappa_0$  bzw.  $\kappa'_0$ .

### Programm zur Berechnung von $f(\kappa_0)$ und $f'(\kappa_0)$ aus (3.1.41)

```

function [erg,ergS,k1,BL,L,k0,k0s]...
    = fk0sk0(k0,vorz,x1,y1,w1,w2,wechsel);
%
%   Berechnet f(k0) und f'(k0) fuer y1~=0 oder w1~=0
%
%   weitere Variablen:
%       wechsel= 1 fuer "k0 < 0"
%       wechsel=-1 fuer gespiegelte Daten bei "k0 > 0"
%
k    = sqrt(0.5); %   Modul k mit k^2=0.5
[K,E]= ellipke(k^2);%   vollstaendige elliptische Integrale

erg=100; ergS=0; k1=0; BL=0; L=0; k0s=0;

aa = y1*(x1*w1+y1*w2);    bb = y1*w1;          cc = w1^2;
pt = aa*k0^2+2*bb*k0+cc;  ptS = 2*aa*k0+2*bb;

a = k0^2*w2;              aS = 2*k0*w2;
b = 0.5*k0^2*w1;         bS = k0*w1;
c = 0.5*k0^2*x1+k0;      cS = k0*x1+1;

if abs(y1)<=10^(-8)
    k1 = c;                k1S = cS;
    k0s = (a-c^2)/2/w1;    k0sS = (aS-2*c*cS)/2/w1;
    k1s = k0s*w2+b;       k1sS = k0sS*w2+bS;
else
    k1 = -w1/y1+vorz*wechsel*sqrt(pt)/y1;
    k1S= 0.5*vorz*wechsel/sqrt(pt)/y1*ptS;
    if abs(y1)<abs(w1)
        k0s = (k0^2*w2-k1^2)/2/w1;
        k0sS= (k0*w2-k1*k1S)/w1;
    else
        k0s = (k1-c)/y1;    k0sS = (k1S-cS)/y1;
    end;
    k1s = k0s*w2+b;        k1sS = k0sS*w2+bS;
end;

km2 = sqrt(4*k0s^2+k0^4); km2S = (4*k0s*k0sS+2*k0^3)/km2;
km   = -sqrt(km2);        kmS   = 0.5*km2S/km;
teil = sqrt(0.5*km2);     teils= 0.25*km2S/sqrt(0.5*km2);

```

```

T    = 4/teil*K;          TS    = -4*teils/teil^2*K;

if k1==0
    int1 = T/4;          int1S = TS/4;
else
    z1 = sqrt((km2-k1^2)/k1^2);
    int1= 1/teil*el2(z1,k,1,1);
    if z1<10^(-8),      % Ableitung numerisch berechnen!
        error('Fehler bei int1S: z1=0');
    end;
    z1S = 0.5*((km2S*k1-2*km2*k1S)/k1^3)/z1;
    int1S= -teils/teil*int1+...
            1/teil*1/sqrt((1+z1^2)*(1+k^2*z1^2))*z1S;
end;

if k0==0
    int0 = T/4;          int0S = TS/4;
else
    z0 = sqrt((km2-k0^2)/k0^2);
    int0= 1/teil*el2(z0,k,1,1);
    if z0<10^(-8),      % Ableitung numerisch berechnen!
        error('Fehler bei int0S: z0=0');
    end;
    z0S = 0.5*((km2S*k0-2*km2)/k0^3)/z0;
    int0S= -teils/teil*int0+...
            1/teil*1/sqrt((1+z0^2)*(1+k^2*z0^2))*z0S;
end;

sm = -sign(k0s)*int0;    smS= -sign(k0s)*int0S;
if k1>=0,
    L = sm+0.5*T-sign(k1s)*int1;    LS= smS+0.5*TS-sign(k1s)*int1S;
elseif k1s>k0s,
    L = sm+sign(k1s)*int1;          LS= smS+sign(k1s)*int1S;
else,
    L = sm+T+sign(k1s)*int1;        LS= smS+TS+sign(k1s)*int1S;
end;

v1 = teil*(L-sm);        v1S= teils*(L-sm)+teil*(LS-smS);
[sn,cn,dn] = ellipj(v1,k^2);
E1 = ele(v1,k);          E1S= dn^2*v1S;
v0 = -teil*sm;           v0S = -(teils*sm+teil*smS);

```

```

[sn,cn,dn] = ellipj(v0,k^2);
E0 = ele(v0,k);
dE = E1-E0;          dES = E1S-dn^2*v0S;
BL = -2*km2*k^2*L+2*sqrt(2)*abs(km)*dE;
BLS= -2*km2S*k^2*L-2*km2*k^2*LS+...
      sqrt(2)*km2S/sqrt(km2)*dE+2*sqrt(2)*abs(km)*dES;
erg = -(BL+(2*k0s*x1-k0^2*y1));
ergS= -(BLS+(2*k0sS*x1-2*k0*y1));

```

### Programm zur Berechnung von $\bar{f}(\kappa'_0)$ und $\bar{f}'(\kappa'_0)$ aus (3.1.42)

```

function [erg,ergS,k1,BL,L,k0,k0s]...
    = fk0sk0s(k0s,vorz,x1,y1,w1,w2,wechsel);
%
%   Berechnet f(k0s) und f'(k0s) fuer y1=w1=0
%
k   = sqrt(0.5);   %   Modul k mit k^2=0.5
[K,E]= ellipke(k^2);%   vollstaendige elliptische Integrale

erg=100; ergS=0; k1=0; BL=0; L=0; k0=0;

if w2>=0
    k0 = (vorz*2*sqrt(w2)-2)/x1%   k0S = 0;
else
    k0 = 0;                       %   k0S = 0;
end;

k1 = 0.5*k0^2*x1+k0;              %   k1S = 0;
k1s= k0s*w2;                      %   k1sS= w2;
km2= sqrt(4*k0s^2+k0^4);          km2S=4*k0s/km2;
km  = -sqrt(km2);                 kmS  = 0.5*km2S/km;
teil=sqrt(0.5*km2);               teilS=0.25*km2S/sqrt(0.5*km2);
T=4/teil*K;                       TS=-4*teilS/teil^2*K;

if k1==0
    int1 = T/4;                    int1S = TS/4;
else
    z1  = sqrt((km2-k1^2)/k1^2);
    int1= 1/teil*el2(z1,k,1,1);
    if z1<10^(-8), %   Ableitung numerisch berechnen!
        error('Fehler bei int1S: z1=0');
    end
end

```

```

end;
z1S = 0.5*(km2S/k1^2)/z1;
int1S= -teilS/teil*int1+...
        1/teil*1/sqrt((1+z1^2)*(1+k^2*z1^2))*z1S;
end;

if k0==0
    int0 = T/4;          int0S = TS/4;
else
    z0 = sqrt((km2-k0^2)/k0^2);
    int0= 1/teil*el2(z0,k,1,1);
    if z0<10^(-8),      % Ableitung numerisch berechnen!
        error('Fehler bei int0S: z0=0');
    end;
    z0S = 0.5*(km2S/k0^2)/z0;
    int0S= -teilS/teil*int0+...
            1/teil*1/sqrt((1+z0^2)*(1+k^2*z0^2))*z0S;
end;

sm = -sign(k0s)*int0;   smS= -sign(k0s)*int0S;
if k1>=0,
    L = sm+0.5*T-sign(k1s)*int1;   LS = smS+0.5*TS-sign(k1s)*int1S;
elseif k1s>k0s,
    L = sm+sign(k1s)*int1;         LS = smS+sign(k1s)*int1S;
else
    L = sm+T+sign(k1s)*int1;       LS = smS+TS+sign(k1s)*int1S;
end;

v1 = teil*(L-sm);          v1S = teilS*(L-sm)+teil*(LS-smS);
[sn,cn,dn] = ellipj(v1,k^2);
E1 = ele(v1,k);           E1S = dn^2*v1S;
v0 = -teil*sm;            v0S = -(teilS*sm+teil*smS);
[sn,cn,dn] = ellipj(v0,k^2);
E0 = ele(v0,k);
dE = E1-E0;                dES = E1S-dn^2*v0S;
BL = -2*km2*k^2*L+2*sqrt(2)*abs(km)*dE;
BLS= -2*km2S*k^2*L-2*km2*k^2*LS+...
        sqrt(2)*km2S/sqrt(km2)*dE+2*sqrt(2)*abs(km)*dES;
erg = -(BL+(2*k0s*x1));
ergS= -(BLS+(2*x1));

```

## Anhang D

### Beispiele zu Kapitel 3 mit zwei Interpolationsknoten

Im dritten Kapitel wurde ein Algorithmus zur Berechnung von unrestringierten nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationsknoten beschrieben. In diesem Abschnitt werden für verschiedene Beispiele die Nullstellen der Funktion  $f_i$  aus (3.1.41) und  $\bar{f}_i$  aus (3.1.42) berechnet und die dazugehörigen nichtlinearen Splines gezeichnet werden. Dabei werden Beispiele aus allen drei Fällen von Satz 3.1 betrachtet. Es gilt wie in Abschnitt 3.1 für die Interpolationsdaten  $z_0 = (0, 0)^T$  und  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . Zuerst soll der Fall 3 behandelt werden, da es hier nur zwei Möglichkeiten gibt, die Interpolationsdaten zu wählen, wenn man von Spiegelung und Skalierung des Problems absieht.

*Fall 3:* Das Beispiel 2.1 mit den Interpolationsdaten  $z_0 = (0, 0)^T$ ,  $z_1 = (1, 0)^T$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  und  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  ist eine der beiden Möglichkeiten bei Fall 3. Nach (3.1.23)-(3.1.25) gilt  $\kappa_0 = 0$ ,  $\kappa_1 = 0$  und  $\kappa'_1 = -\kappa'_0$ . In diesem Fall besitzt die Funktion  $\bar{f}_1$  aus (3.1.42) eine Nullstelle  $\kappa'_0 \approx -2.8711$ , vgl. Zeichnung D.1. Die dazugehörige Kurve hat die Biegungs-

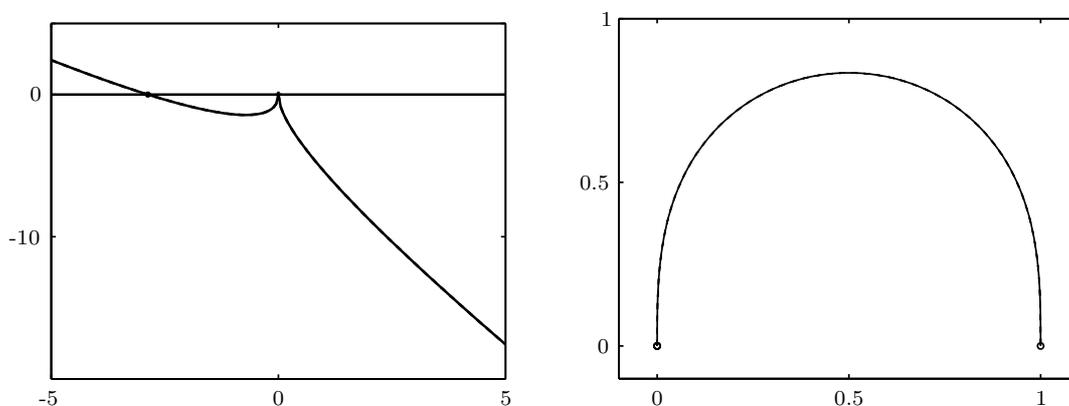


Abbildung D.1: *Fall 3:* Für  $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$  und  $z_1 = (1, 0)^T$  die Funktion  $\bar{f}_1$  aus (3.1.42) und der zu der Nullstelle gehörende nichtlineare Spline.

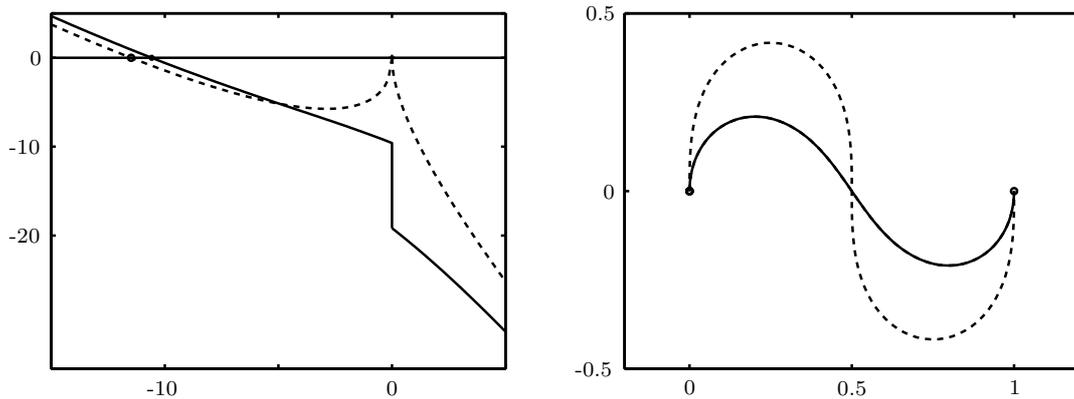


Abbildung D.2: *Fall 3:* Für  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  die Funktionen  $\bar{f}_{1/2}$  aus (3.1.42) mit  $\kappa_0 = -4$  (—) und  $\kappa_0 = 0$  (---) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

energie  $B(L) \approx 5.7422$  und die Bogenlänge  $L \approx 2.1884$ . Hierbei handelt es sich nach Satz 2.20 um kein lokales Minimum, da die Krümmung an zwei Stellen verschwindet. An diesem Beispiel wurden von HORN (1983) verschiedene Approximationsmöglichkeiten des nichtlinearen Splines diskutiert.

Für die Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  und  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  gilt nach (3.1.23)-(3.1.25)  $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$  oder  $-\kappa_0 = \kappa_1 = 4$  und  $\kappa'_0 = \kappa'_1$ . Hier gibt es zwei verschiedene Funktionen  $\bar{f}_{1/2}$  aus (3.1.42), die jeweils eine Nullstelle besitzen, vgl. Zeichnung D.2. Die Kurve mit der geringeren Biegungsenergie  $B(L) \approx 21.1607$  erhält man für  $\kappa_0 = -\kappa_1 = -4$  mit  $\kappa'_0 = \kappa'_1 \approx -10.5803$ . Sie besitzt die Bogenlänge  $L \approx 1.4070$ . Für  $\kappa_0 = \kappa_1 = 0$  liegt die Nullstelle bei  $\kappa'_0 = \kappa'_1 \approx -11.4843$ . Der dazugehörige nichtlineare Spline hat die Länge  $L \approx 2.1884$  und die Biegungsenergie  $B(L) \approx 22.9686$  und ist nach Satz 2.20 kein lokales Minimum, da die Krümmung an drei Stellen verschwindet.

*Fall 2:* Auch für diese Beispiele wird als zweiter Interpolationspunkt  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  gewählt. Für den Tangentenwinkel am rechten Rand gilt  $\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) ist auf der ganzen reellen Achse mit Ausnahme des Nullpunktes definiert. Aufgrund der Abschätzung (3.1.37) ist nur der Bereich  $[-4\sqrt{2}K, 4\sqrt{2}K]$  interessant. Bei den untersuchten Beispielen wurden maximal zwei Nullstellen beobachtet. Eine weitere „Nullstelle“ liegt im Nullpunkt, an dem die Funktion nicht definiert ist. Dies kann bei der Nullstellensuche zu numerischen Schwierigkeiten führen. Im folgenden werden für die drei Beispiele ( $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + 0.1$  und  $\theta_1 = 1.8532185$ ) die Nullstellen der Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) und die dazugehörigen nichtlinearen Splines berechnet. Sie sind in Abbildung D.4-D.6 zu sehen. Dabei ist die Kurve mit der kleinsten Biegungsenergie mit einer durchgezogenen Linie gezeichnet. Die anderen Kurven besitzen in vielen Fällen mehr als einen Wendepunkt und sind dann nach Satz 2.20 keine lokalen Minima. Für  $\theta_1 > 1.8532$  wurden keine Nullstellen beobachtet, vgl. Zeichnung D.3.

Für  $\theta_1 = 0$  erhält man die beiden Nullstellen  $\kappa_0 \approx -3.5576$  und  $\kappa_0 \approx 1.8224$ . Die Kurve

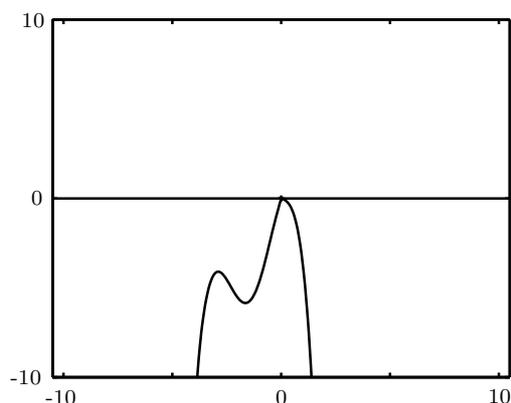


Abbildung D.3: *Fall 2*: Die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) für  $\theta_1 = 2$  und  $z_1 = (1, 0)^T$ .

mit der kleineren Biegungsenergie gehört zu der Nullstelle  $\kappa_0 \approx -3.5576$ . Sie ist in Zeichnung D.4 durchgezogen gezeichnet. Die andere Kurve besitzt zwei Wendepunkte und ist deshalb kein lokales Minimum. Die interessanten Parameter für die beiden Kurven sind in der folgende Tabelle angegeben:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-3.5576	2.7707	-3.8384	6.3283	1.2127	7.6767
1.8224	3.4830	-6.0657	1.6606	2.4341	12.1314

Für  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + 0.1$  liegen beide Nullstellen links von dem Nullpunkt, vgl. Zeichnung D.5, wobei die Kurve zu der Nullstelle  $\kappa_0 \approx -1.5544$  zwei Wendepunkte besitzt. Die Tabelle

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-3.8403	3.5335	-10.9583	-11.6397	1.4652	21.9165
-1.5544	-0.3463	-11.4400	-11.5035	2.0814	22.8801

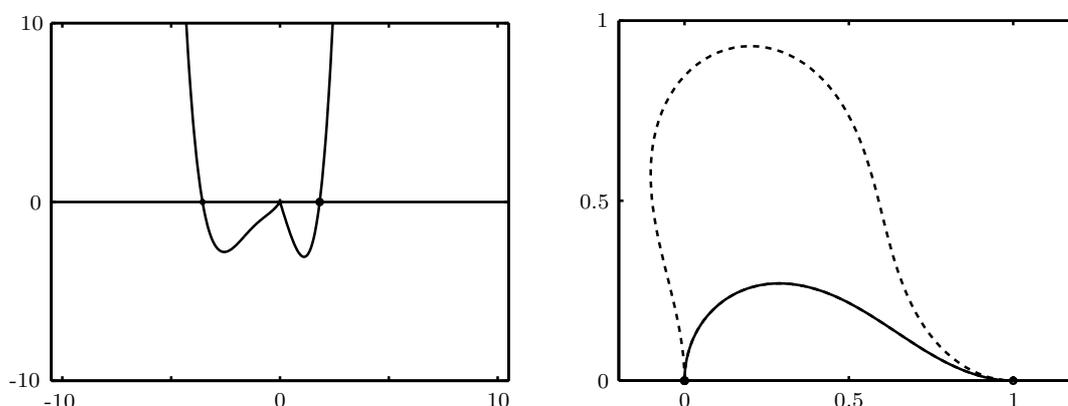


Abbildung D.4: *Fall 2*: Für  $\theta_1 = 0$  und  $z_1 = (1, 0)^T$  die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

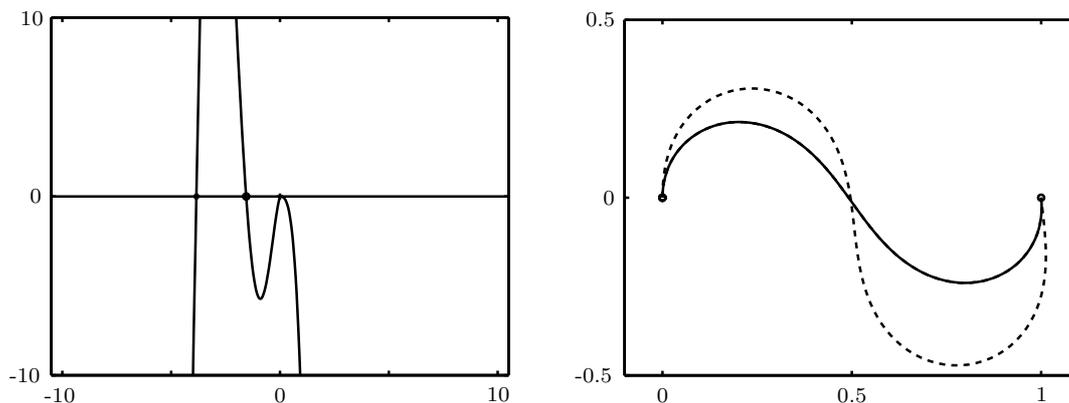


Abbildung D.5: *Fall 2:* Für  $\theta_1 = \frac{\pi}{2} + 0.1$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

enthält die relevanten Parameter für die zu den Nullstellen gehörenden Kurven.

Für  $\theta_1 = 1.8532185$  fallen die beiden Nullstellen fast zusammen, wie man in der folgenden Tabelle sieht:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-2.9741	1.4485	-11.4765	-12.2543	1.7517	22.95296990266
-2.9726	1.4456	-11.4765	-12.2531	1.7522	22.95296990302

In Abbildung D.6 sind für diesen Fall die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines zu sehen, die sich, wie auch ihre Parameter zeigen, kaum unterscheiden.

*Fall 1:* In diesem Fall gibt es zwei Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41), die neben dem Nullpunkt weitere Definitionslücken besitzen können, da die Variable  $\kappa_0$  die quadratische Unglei-

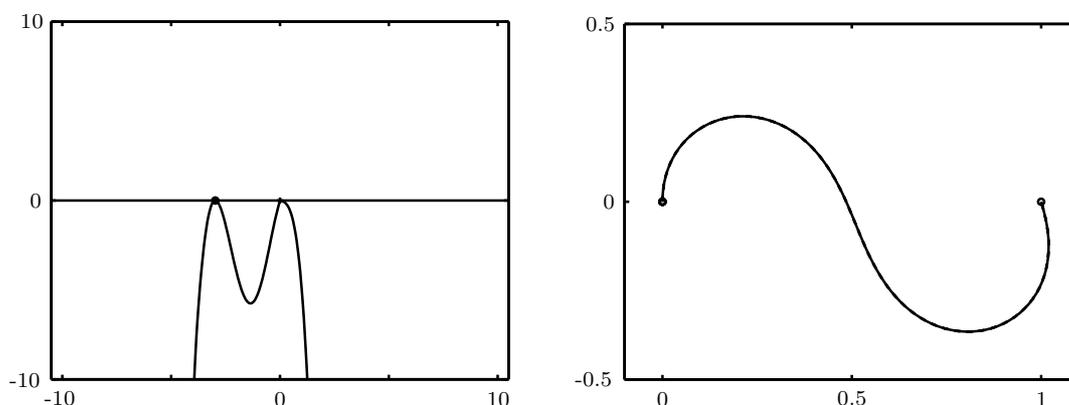


Abbildung D.6: *Fall 2:* Für  $\theta_1 = 1.8532185$  und  $\mathbf{z}_1 = (1, 0)^T$  die Funktion  $f_0$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines, deren Spuren auf der Zeichnung zusammenfallen.

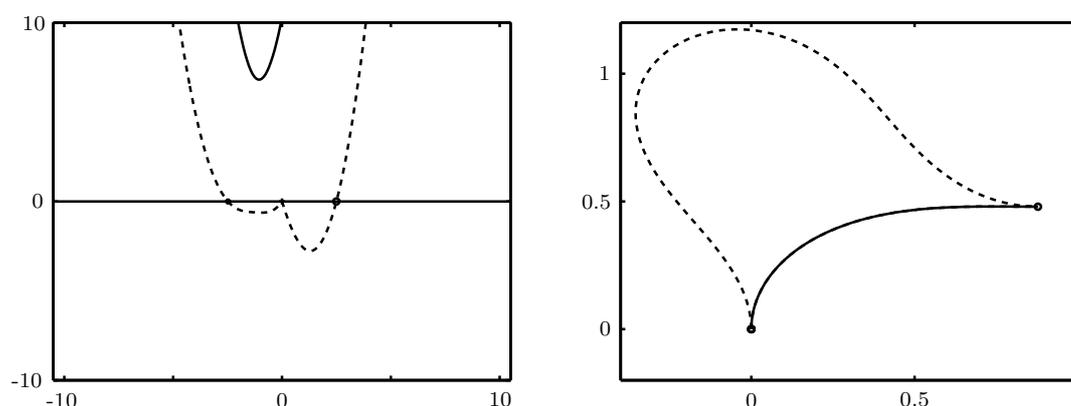


Abbildung D.7: *Fall 1a*: Für  $\theta_1 = 0$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.5, \sin 0.5)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

chung (3.1.17) erfüllen muß. In Abhängigkeit von den Interpolationsdaten werden wie in Abschnitt 3.1 drei Fälle unterschieden.

*Fall 1a*: Für  $\tilde{a} > 0$  und  $\delta < 0$  aus (3.1.43) besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) keine reellen Nullstellen und ist für alle  $\kappa_0$  erfüllt. Damit sind die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) auf der ganzen reellen Achse mit Ausnahme des Nullpunktes definiert. Dieses ist bei den beiden folgenden Beispielen der Fall.

Für  $\theta_1 = 0$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.5, \sin 0.5)^T$  schneidet nur eine der beiden Funktionen die  $x$ -Achse, vgl. Abbildung D.7. Es gibt zwei Nullstellen  $\kappa_0 \approx -2.4823$  und  $\kappa_0 \approx 2.4988$ . Für die dazugehörigen Kurven sind die Parameter in der folgenden Tabelle angegeben:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-2.4823	0.2108	-0.0222	3.0809	1.1276	2.9931
2.4988	3.0332	-4.6001	3.1220	2.6405	11.0673

Die Kurve zur Nullstelle  $\kappa_0 \approx 2.4988$  besitzt zwei Wendepunkte. Auch für die Interpolationsdaten  $\theta_1 = 1.4$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.05, \sin 0.05)^T$  schneidet nur eine der Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) die  $x$ -Achse, siehe Abbildung D.8. Sie besitzt zwei Nullstellen  $\kappa_0 \approx -4.3519$  und  $\kappa_0 \approx 1.6919$ , wobei die Kurve zur Nullstelle  $\kappa_0 \approx 1.6919$  zwei Wendepunkte besitzt. Die weiteren Parameter der zu den Nullstellen gehörenden Kurven stehen in der folgenden Tabelle:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-4.3519	4.6587	-8.9431	-7.2035	1.3020	18.8103
1.6919	2.5673	-11.0896	-10.6850	2.1378	22.2946

Für die Interpolationsdaten  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 1.4, \sin 1.4)^T$  verschwindet der Parameter  $\delta$  aus (3.1.43). Hier schneiden beide Funktionen die  $x$ -Achse und besitzen zusammen

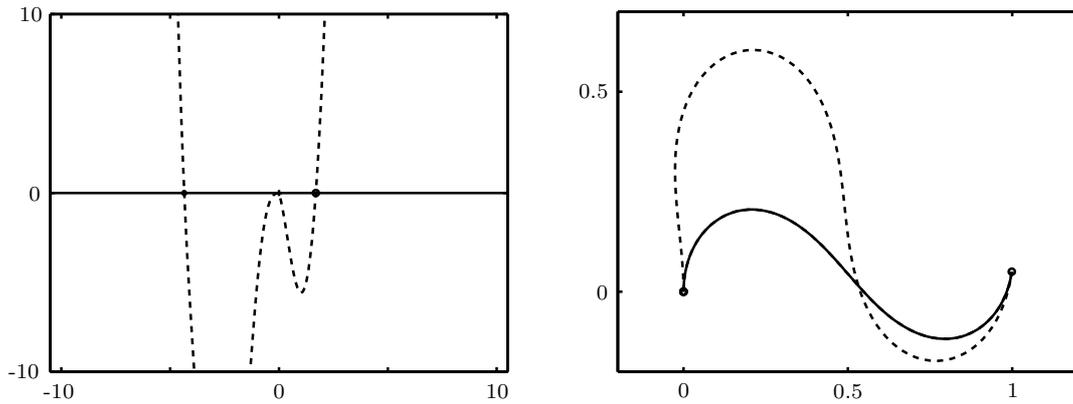


Abbildung D.8: *Fall 1a*: Für  $\theta_1 = 1.4$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.05, \sin 0.05)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

drei Nullstellen, von denen zwei  $\kappa_0 \approx -4.7576$  und  $\kappa_0 \approx 4.7576$  symmetrisch zum Nullpunkt liegen. Die dazugehörigen Kurven sind ebenso symmetrisch zueinander, vgl. Abbildung D.9, und besitzen jede zwei Wendepunkte. Zu der dritten Nullstelle  $\kappa_0 \approx -1.0177$  gehört die Kurve mit der kleinsten Biegungsenergie. Die Parameter für alle drei Kurven findet man in der folgenden Tabelle:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-4.7576	-4.7576	-1.9520	-1.9520	2.1884	22.9686
-1.0177	1.0177	1.9761	1.9761	1.0029	0.3488
4.7576	4.7576	-1.9520	-1.9520	2.1884	22.9686

*Fall 1b*: Für  $\tilde{a} < 0$  aus (3.1.43) besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) zwei reelle Nullstellen  $\kappa_{0u} \leq \kappa_{0o}$  und wird nur für  $\kappa_0 \in [\kappa_{0u}, \kappa_{0o}]$  erfüllt. Deshalb sind die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) auch nur auf  $[\kappa_{0u}, \kappa_{0o}]/\{0\}$  definiert.

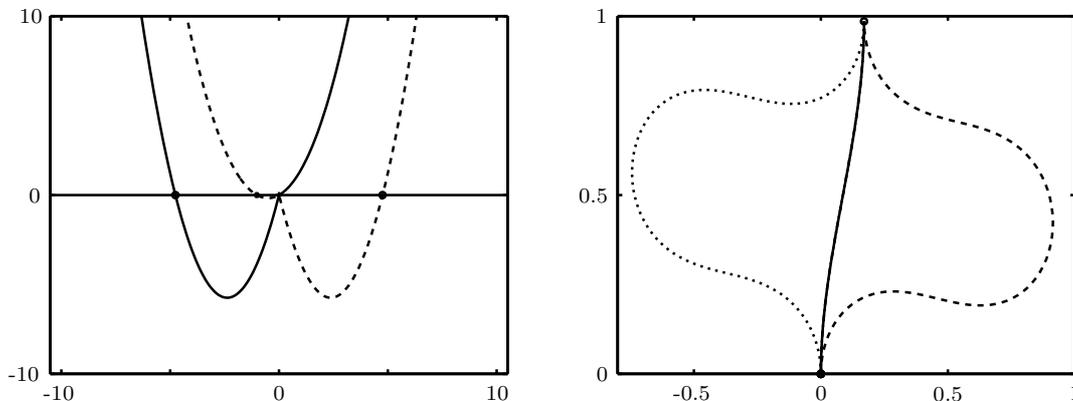


Abbildung D.9: *Fall 1*,  $\delta = 0$ : Für  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 1.4, \sin 1.4)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

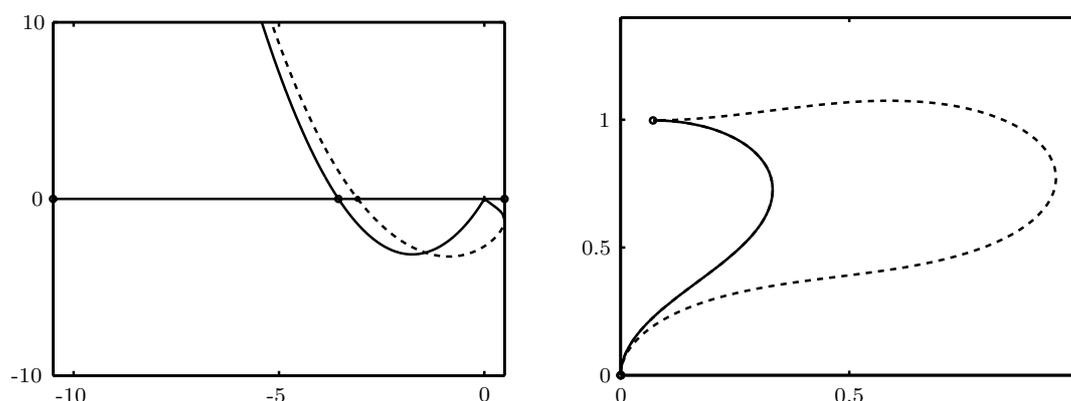


Abbildung D.10: *Fall 1b*: Für  $\theta_1 = \pi$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 1.5, \sin 1.5)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

Für die Interpolationsdaten  $\theta_1 = \pi$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 1.5, \sin 1.5)^T$  besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) zwei Nullstellen und ist nur im Intervall  $(-28.7663, 0.4927)$  positiv. Hier besitzen die beiden Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) je eine Nullstelle. Die dazugehörigen Kurven mit den Parametern

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-3.5516	-1.6866	1.4224	-6.3068	2.3878	12.3808
-3.0844	3.5549	6.3186	-4.7566	1.2344	8.5955

findet man in Abbildung D.10. Die Kurve zur Nullstelle  $\kappa_0 \approx -3.5516$  besitzt zwei Wendepunkte und ist deshalb kein lokales Minimum.

Bei Beispiel 3.1 aus Abschnitt 3.1 wurde die  $x$ -Achse nur von einer der beiden Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) geschnitten. Die beiden Nullstellen liegen rechts und links vom Nullpunkt.

*Fall 1c*: Für  $\tilde{a} > 0$  und  $\delta > 0$  aus (3.1.43) besitzt die linke Seite der Ungleichung (3.1.17) zwei reelle Nullstellen  $\kappa_{0u} \leq \kappa_{0o}$ , zwischen denen sie nicht erfüllt ist. Daher sind die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) nur für  $\kappa_0 \notin (\kappa_{0u}, \kappa_{0o}) \cup \{0\}$  definiert.

Dieser Fall tritt zum Beispiel für die Interpolationsdaten  $\theta_1 = 1.6$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.1, \sin 0.1)^T$  auf. Für diese Interpolationsdaten ist die quadratische Ungleichung (3.1.17) auf dem Intervall  $(0.1899, 0.6356)$  nicht erfüllt. Beide Funktionen schneiden die  $x$ -Achse links von der Definitionslücke je einmal, vgl. Abbildung D.11. Die Parameter der dazugehörigen Kurven findet man in der folgenden Tabelle:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-1.6474	-1.4316	-11.3626	-11.3974	2.1734	22.8826
-4.4001	4.3394	-8.9411	-9.2200	1.3337	19.7258

Dazu besitzt die Kurve zur Nullstelle  $\kappa_0 \approx -1.6474$  ebenso wie die Kurve zur Nullstelle  $\kappa_0 \approx 0.7253$  aus dem folgenden Beispiel zwei Wendepunkte und es handelt sich deshalb um keine lokalen Minima.

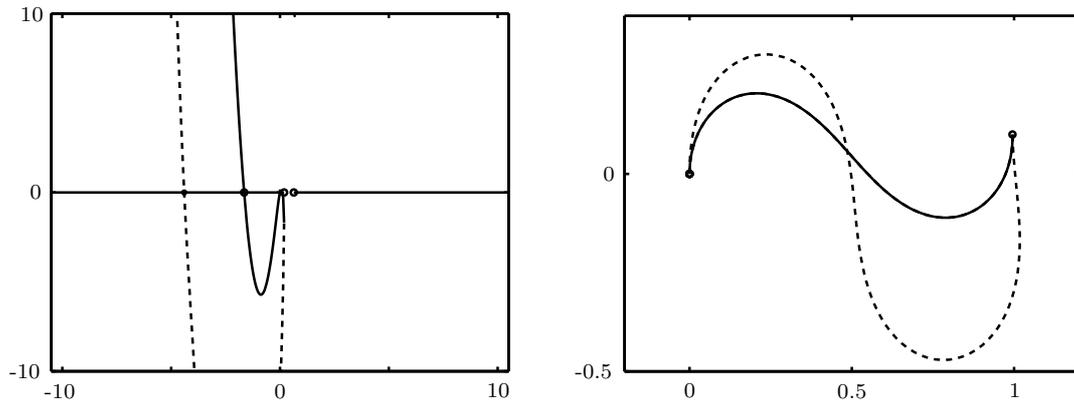


Abbildung D.11: *Fall 1c*: Für  $\theta_1 = 1.6$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.1, \sin 0.1)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

Auch für die Interpolationsdaten  $\theta_1 = -1.4$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.1, \sin 0.1)^T$  ist die quadratische Ungleichung (3.1.17) nur außerhalb eines Intervalls erfüllt. Darum sind die beiden Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) für  $\kappa_0 \in (-3.7000, -1.1056)$  nicht definiert. Es schneidet nur eine der beiden Funktionen die  $x$ -Achse. Ihre Nullstellen liegen beide rechts der Definitivlücke, vgl. Abbildung D.12. Die dazugehörigen Kurven haben die folgenden Parameter:

$\kappa_0$	$\kappa_1$	$\kappa'_0$	$\kappa'_1$	$L$	$B(L)$
-0.6584	-0.7207	-2.7846	2.7810	1.7247	5.5847
0.7253	0.6935	-2.9400	2.9419	2.6394	5.9032

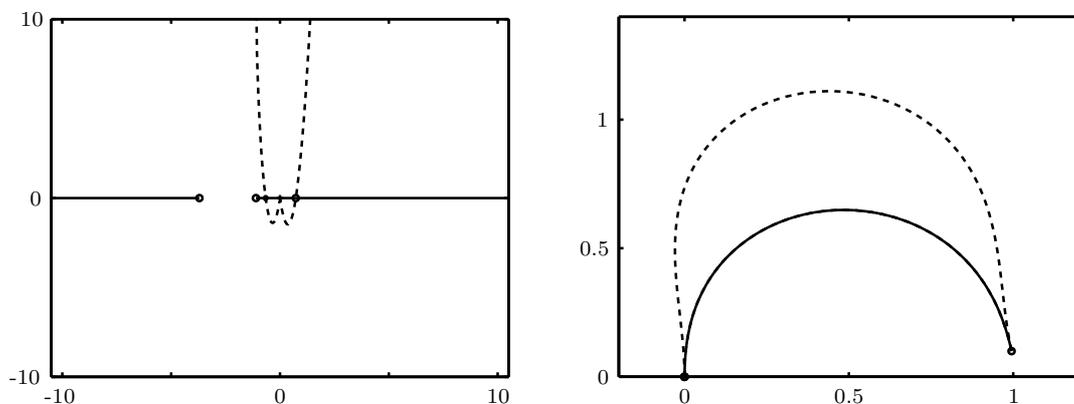


Abbildung D.12: *Fall 1c*: Für  $\theta_1 = -1.4$  und  $\mathbf{z}_1 = (\cos 0.1, \sin 0.1)^T$  die Funktionen  $f_{1/2}$  aus (3.1.41) und die zu den Nullstellen gehörenden nichtlinearen Splines.

## Anhang E

# Beweis für die Existenz kritischer Punkte

Einen Satz über die Existenz von Lösungen mit beliebig vielen Wendepunkten findet man bei LINNÉR (1993):

**Satz E.1.** *Seien Interpolationsdaten  $\mathbf{z}_0 = (0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z}_1 = (\cos \sigma, \sin \sigma)^T$ ,  $\theta_0$  und  $\theta_1$  gegeben. Dann kann man die folgenden Fälle unterscheiden:*

1. *Für  $|\theta_0 - \theta_1| > \pi$  gibt es keine nichtlinearen Splines.*
2. *Für  $|\theta_0 - \theta_1| \leq \pi$  und  $|\theta_0 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi$  oder  $|\theta_1 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi$  gibt es eine obere Schranke abhängig von  $\sigma$ ,  $\theta_0$  und  $\theta_1$  für die Anzahl der Wendepunkte, die ein nichtlinearer Spline besitzen kann.*
3. *Für  $|\theta_0 - \theta_1| < \pi$ ,  $|\theta_0 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  und  $|\theta_1 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  gibt es nichtlineare Splines mit beliebig vielen Wendepunkten.*

*Beweis.* Da in diesem Beweis nur elliptische Funktionen zum Modul  $k = \sqrt{0.5}$  benutzt werden, wird im folgenden der Parameter  $k$  weggelassen und  $\text{sn}(v)$ ,  $K$  und  $E(v)$  anstelle von  $\text{sn}(v, k)$ ,  $K(k)$  und  $E(v, k)$  geschrieben. Nach Satz 2.10 gelten mit den Abkürzungen  $v_0 := -k|\kappa_m|s_m$ ,  $v_1 := k|\kappa_m|L + v_0$  und  $v(s) := k|\kappa_m|(s - s_m)$  für  $s \in [0, L]$  die folgenden Gleichungen:

$$\text{cn}^2(v) = \cos(\theta - \alpha) \tag{E.74}$$

$$2k \text{sign}(\kappa_m) \text{sn}(v) \text{dn}(v) = \sin(\theta - \alpha) \tag{E.75}$$

$$\begin{aligned} \text{cn}(v_1) - \text{cn}(v_0) &= \frac{1}{2}\kappa_m(\sin \alpha \cos \sigma - \cos \alpha \sin \sigma) \\ &= \frac{1}{2}\kappa_m \sin(\alpha - \sigma), \end{aligned} \tag{E.76}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa^2(s) \, ds &= \int_0^L \kappa_m^2 \text{cn}^2(v(s)) \, ds = \kappa_m^2(\cos \alpha \cos \sigma + \sin \alpha \sin \sigma) \\ &= \kappa_m^2 \cos(\alpha - \sigma). \end{aligned} \tag{E.77}$$

Da die Biegungsenergie  $\int_0^L \kappa^2(s) ds$  größer Null ist, kann man Gleichung (E.76) durch (E.77) teilen und erhält

$$\tan(\alpha - \sigma) = \frac{2(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_0))}{\kappa_m \int_0^L \operatorname{cn}^2(v(s)) ds}. \quad (\text{E.78})$$

Aus Gleichung (E.74) folgt  $|\theta(s) - \alpha| \leq \frac{1}{2}\pi$  für  $s \in [0, L]$  und wie in Lemma 2.19 gilt  $|\sigma - \alpha| \leq \frac{1}{2}\pi$ . Deshalb kann man den Arcustangens bzw. den Arcussinus auf die Gleichungen (E.78) und (E.75) anwenden und erhält

$$\alpha - \sigma = \arctan \left( \frac{2(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_0))}{\kappa_m \int_0^L \operatorname{cn}^2(v(s)) ds} \right) \quad \text{und}$$

$$\theta - \alpha = \operatorname{sign}(\kappa_m) \arcsin (2k \operatorname{sn}(v) \operatorname{dn}(v)),$$

woraus für  $s = 0$

$$\theta_0 - \sigma = \arctan \left( \frac{2(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_0))}{\kappa_m \int_0^L \operatorname{cn}^2(v(s)) ds} \right) + \operatorname{sign}(\kappa_m) \arcsin (2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0))$$

und für  $s = 0$  und  $s = L$

$$\theta_1 - \theta_0 = \operatorname{sign}(\kappa_m) (\arcsin (2k \operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1)) - \arcsin (2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0)))$$

folgt. Mit  $p := k|\kappa_m|L/(2K)$  gilt

$$\begin{aligned} \theta_0 - \sigma = \operatorname{sign}(\kappa_m) \left( \arctan \left( \frac{k(\operatorname{cn}(2pK + v_0) - \operatorname{cn}(v_0))}{pK \int_0^1 \operatorname{cn}^2(2pK \tilde{s} + v_0) d\tilde{s}} \right) \right. \\ \left. + \arcsin (2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0)) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.79})$$

und

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_0 = \operatorname{sign}(\kappa_m) \left( \arcsin (2k \operatorname{sn}(2pK + v_0) \operatorname{dn}(2pK + v_0)) \right. \\ \left. - \arcsin (2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0)) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.80})$$

Die Zahl der Wendepunkte hängt von der Zahl der Nullstellen der Krümmung der Kurve

$$\kappa(s) = \kappa_m \operatorname{cn}(v(s)) = \operatorname{sign}(\kappa_m) \frac{2pK}{kL} \operatorname{cn} \left( v_0 + 2pK \frac{s}{L} \right)$$

auf dem Intervall  $(0, L)$ , bzw. der Funktion

$$\tilde{\kappa}(\tilde{s}) := \kappa(L\tilde{s}) = \operatorname{sign}(\kappa_m) \frac{2pK}{kL} \operatorname{cn}(v_0 + 2pK \tilde{s})$$

auf dem Intervall  $(0, 1)$  ab. Wenn man  $p$  um eins erhöht, besitzt die Funktion  $\tilde{\kappa}$  eine weitere Nullstelle im Intervall  $(0, 1)$ , und die dazugehörige Kurve einen weiteren Wendepunkt.

Betrachtet man den Grenzwert für  $p \rightarrow \infty$  von Gleichung (E.79), so verschwindet der erste Summand der rechten Seite, da  $|\operatorname{cn}(2pK + v_0)| \leq 1$  ist und für das Integral gilt nach (B.58) und (B.61) für  $p \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} pK \int_0^1 \operatorname{cn}^2(2pK \tilde{s} + v_0) d\tilde{s} &= \frac{1}{2} \int_{v_0}^{2pK+v_0} \operatorname{cn}^2(v) dv \\ &= E(2pK + v_0) - E(v_0) - pK = 2pE(k) - pK > 2p. \end{aligned}$$

Da der Wertebereich von  $\arcsin$  das Intervall  $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$  ist, gibt es für

$$|\theta_0 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi \quad \text{bzw. analog} \quad |\theta_1 - \sigma| > \frac{1}{2}\pi$$

keine Lösung mit beliebig vielen Wendepunkten.

Sei nun  $|\theta_0 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  und  $|\theta_1 - \sigma| < \frac{1}{2}\pi$  und  $\bar{p}$  hinreichend groß. Um zu zeigen, daß es Lösungen mit beliebig vielen Wendepunkten gibt, muß man zeigen, daß es für jedes  $\bar{p} > 0$  ein  $p > \bar{p}$  und ein  $v_0 \in (-K, K)$  gibt, für die die Gleichungen (E.79)-(E.80) erfüllt sind. Nach Voraussetzung besitzen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin(\theta_0 - \sigma) &= 2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0) \quad \text{und} \\ \sin(\theta_1 - \sigma) &= 2k \operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1) \end{aligned}$$

eindeutig bestimmte Lösungen  $\bar{v}_0, \bar{v}_1 \in (-K, K)$ . Für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_0 = \bar{v}_0$  und  $p = p_1 \geq \bar{p}$  bzw.  $p = p_2 \geq \bar{p}$  mit  $p_1 = 2n$  und  $p_2 = p_1 - \bar{v}_0/K$  verschwindet der erste Summand der rechten Seite von Gleichung (E.79) und die Gleichung wird für  $\operatorname{sign}(\kappa_m) = 1$  erfüllt, d.h.  $(\bar{v}_0, p_1)$  und  $(\bar{v}_0, p_2)$  sind Nullstellen der Funktion

$$g(v_0, p) = \arctan\left(\frac{k(\operatorname{cn}(2pK + v_0) - \operatorname{cn}(v_0))}{pK \int_0^1 \operatorname{cn}^2(2pK \tilde{s} + v_0) d\tilde{s}}\right) + \arcsin(2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0)) - (\theta_0 - \sigma).$$

Die Funktion  $g$  ist stetig differenzierbar für  $p \neq 0$  und ihre partielle Ableitung nach  $v_0$  lautet

$$\begin{aligned} g_{v_0}(v_0, p) &= -2k\eta \frac{\operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1) - \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0) + \eta(\operatorname{cn}^2(v_1) - \operatorname{cn}^2(v_0))(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_0))}{1 + \eta^2 2(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_0))^2} \\ &\quad + 2k \operatorname{cn}(v_0) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen  $v_1 = 2pK + v_0$  und  $\eta = (\int_{v_0}^{v_1} \operatorname{cn}^2(v) dv)^{-1}$ . Auf dem Intervall

$$(-K + \delta(p), K + \delta(p)) \quad \text{mit} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \delta(p) = 0$$

ist die partielle Ableitung  $g_{v_0}$  positiv, da  $\eta$  für  $p \rightarrow \infty$  verschwindet. Für festes  $p$  besitzt die Funktion auf diesem Intervall genau eine Nullstelle  $v_0(p)$ , da

$$\begin{aligned} g(-K + \delta(p), p) &\leq \arctan \eta - \frac{1}{2}\pi + O(\delta(p)) - (\theta_0 - \sigma) \leq 0 \\ g(K - \delta(p), p) &\geq -\arctan \eta + \frac{1}{2}\pi - O(\delta(p)) - (\theta_0 - \sigma) \geq 0 \end{aligned}$$

gilt. Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine stetige Abbildung  $p \mapsto v_0(p)$  mit  $g(v_0(p), p) = 0$ ,  $v_0(p_1) = \bar{v}_0$  und  $v_0(p_2) = \bar{v}_0$ .

Eine analoge Aussage für  $\bar{v}_1$  erhält man, wenn man Gleichung (E.80) in Gleichung (E.79) einsetzt. Der erste Summand der rechten Seite von

$$\begin{aligned} \theta_0 - \sigma &= \arctan \left( \frac{k(\operatorname{cn}(v_1) - \operatorname{cn}(v_1 - 2pK))}{pK \int_0^1 \operatorname{cn}^2(2pK \tilde{s} + v_1 - 2pK) d\tilde{s}} \right) \\ &\quad + \arcsin(2k \operatorname{sn}(v_1) \operatorname{dn}(v_1)) \end{aligned} \quad (\text{E.81})$$

verschwindet für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_1 = \bar{v}_1$  und  $p = \tilde{p}_1 \geq \bar{p}$  bzw.  $p = \tilde{p}_2 \geq \bar{p}$  mit  $\tilde{p}_1 = 2\tilde{n}$  und  $\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 - \bar{v}_1/K$ . Wie oben zeigt man, daß eine stetige Abbildung  $p \mapsto \tilde{v}_0(p)$  mit  $\tilde{v}_0(p) = v_1(p) - 2pK$ ,  $v_1(\tilde{p}_1) = \bar{v}_1$  und  $v_1(\tilde{p}_2) = \bar{v}_1$  existiert, wobei  $(v_1(p), p)$  eine Lösung von Gleichung (E.81) ist.

Eine Lösung  $(v_0, p)$  von Gleichung (E.80) ist eine Nullstelle der Funktion

$$\begin{aligned} f(v_0, p) &= (\theta_1 - \theta_0) - \arcsin(2k \operatorname{sn}(2pK + v_0) \operatorname{dn}(2pK + v_0)) \\ &\quad + \arcsin(2k \operatorname{sn}(v_0) \operatorname{dn}(v_0)). \end{aligned}$$

An den Stellen  $(\bar{v}_0, p_1)$  und  $(\bar{v}_1 - 2\tilde{p}_1 K, \tilde{p}_1)$  sind der zweite und dritte Summand gleich und es gilt

$$f(\bar{v}_0, p_1) = f(\bar{v}_1 - 2\tilde{p}_1 K, \tilde{p}_1) = \theta_1 - \theta_0.$$

An der Stelle  $(\bar{v}_0, p_2)$ , bzw.  $(\bar{v}_1 - 2\tilde{p}_2 K, \tilde{p}_2)$  gilt

$$f(\bar{v}_0, p_2) = (\theta_1 - \theta_0) + 2(\theta_0 - \sigma) = \theta_1 + \theta_0 - 2\sigma, \quad \text{bzw.}$$

$$f(\bar{v}_1 - 2\tilde{p}_2 K, \tilde{p}_2) = (\theta_1 - \theta_0) - 2(\theta_1 - \sigma) = 2\sigma - \theta_0 - \theta_1.$$

Für  $2\sigma = \theta_0 + \theta_1$  hat man schon eine Nullstelle der Funktion  $f$  gefunden. Anderenfalls ist eine der beiden Gleichungen positiv und die andere negativ. Je nachdem, ob  $\theta_1 > \theta_0$  ist oder nicht, wählt man die eine oder die andere aus und hat so auf der Kurve  $(v_0(p), p)$  bzw.  $(\tilde{v}_0(p), p)$  mit Lösungen von Gleichung (E.79) bzw. (E.81) eine Stelle, an der die Funktion  $f$  positiv ist, und eine, an der sie negativ ist. Da die Funktionen  $f(v_0(p), p)$  und  $f(\tilde{v}_0(p), p)$  stetig sind, existiert zwischen diesen beiden Stellen eine Nullstelle. Damit hat man einen nichtlinearen Spline mit mehr als  $\bar{p}$  Wendepunkten gefunden.  $\square$

# Symbolverzeichnis

## Mengen und Räume

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (mit Null)
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$C_{\text{stkw}}$	die stückweise stetigen Funktionen
$C^{k-1,k}$	die $(k-1)$ -mal stetigen und $k$ -mal stückweise stetig differenzierbaren Funktionen
$L_\infty$	die Lebesgue-meßbaren und wesentlich beschränkten Funktionen
$W^{1,\infty}$	die absolut stetigen Funktionen $f$ mit Ableitung $f' \in L_\infty$
$BV$	die Funktionen von beschränkter Variation

## Bezeichnungen für ebene Kurven und nichtlineare Splines

$C^1$ -Kurve	stetig differenzierbare nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $\mathbf{z} = (x, y)^T : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$
$L$	Länge der Kurve
$\theta$	Tangentenwinkel der Kurve $\mathbf{z}' = (\cos \theta, \sin \theta)^T$
$\kappa$	Krümmung der Kurve $\theta' = \kappa$
$B(L)$	Biegungsenergie $\int_0^L \kappa^2(s) ds$
$\Delta_n$	ein Gitter $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = L$
$k = \sqrt{0.5}$	Modul der elliptischen Funktionen $\text{sn}(u, k)$ , $\text{cn}(u, k)$ , $\text{dn}(u, k)$
$K, E$	vollständige elliptische Integrale für $k = \sqrt{0.5}$ $K \approx 1.3506$ , $E \approx 1.8541$
$(s_m, \kappa_m)$	Extremum der Krümmung des nichtlinearen Splines $\kappa(s) = \kappa_m \text{cn}(k \kappa_m (s - s_m), k) = \text{sign}(\kappa_m) \sqrt{A} \text{cn}(v(s), k)$ mit $A = \kappa_m^2$ und $v(s) = k \kappa_m (s - s_m)$

# Literaturverzeichnis

- M. ABRAMOWITZ & I. A. STEGUN (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York.
- G. BIRKHOFF & C. DE BOOR (1965), *Piecewise polynomial interpolation and approximation*, in: H. L. GARABEDIAN (ed.): *Approximation of Functions*, Proc. Sympos. Warren, Michigan, Elsevier, New York, 164–190.
- G. BRUNETT (1992), *A new characterization of plane elastica*, in: T. LYCHE & L. L. SCHUMAKER (eds.): *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, Academic Press, 43–56.
- G. BRUNETT (1992), *Properties of minimal-energy splines*, in: H. HAGEN (ed.): *Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, 3–22.
- G. BRUNETT & J. KIEFER (1994), *Interpolation with minimal-energy splines*, *Comput. Aided Des.* **26**, 137–144.
- G. BRUNETT & J. WENDT (1997), *A univariate method for plane elastic curves*, *Comput. Aided Geom. Design* **14**, 273–292.
- G. BRUNETT & J. WENDT (1998), *Elastic splines with tension control*, in: M. DÆHLEN, T. LYCHE & L. L. SCHUMAKER (eds.): *Mathematical Methods for Curves and Surfaces II*, Nashville, TN, Vanderbilt University Press, 33–40.
- R. BULIRSCH, *Vorlesung über Numerische Mathematik*, mit Kapiteln über *nichtlineare Splines* und *Jakobische elliptische Funktionen*, TU München, unveröffentlicht.
- R. BULIRSCH (1965), *Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions*, *Numer. Math.* **7**, 78–90.
- H. BURKHARDT (1920) *Elliptische Funktionen*, de Gruyter, Berlin.
- K. CHUDEJ (1994), *Optimale Steuerung des Aufstiegs eines zweistufigen Hyperschallraumtransporters*, Dissertation, TU München.
- M. P. DO CARMO (1983), *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Braunschweig.
- A. L. DONTCHEV (1993), *Best interpolation in a strip*, *J. Approx. Theory* **73**, 334–342.

- J. A. EDWARDS (1992), *Exact equations of the nonlinear spline*, ACM Trans. Math. Software **18**, 174–192.
- S. D. FISHER & J. W. JEROME (1976), *Stable and unstable elastica equilibrium and the problem of minimum curvature*, J. Math. Anal. Appl. **53**, 367–376.
- O. FORSTER (1983), *Analysis 1*, Vieweg, Braunschweig.
- O. FORSTER (1984), *Analysis 2*, Vieweg, Braunschweig.
- S. FREDENHAGEN, H. J. OBERLE & G. OPFER (1999), *On the construction of optimal monotone cubic spline interpolations*, J. Approx. Theory **96**, 182–201.
- J. M. GLASS (1966), *Smooth-curve interpolation: A generalized spline fit procedure*, BIT **6**, 277–293.
- M. GOLOMB & J. JEROME (1982), *Equilibria of the curvature functional and manifolds of nonlinear interpolating spline curves*, SIAM J. Math. Anal. **13**, 421–458.
- P. HILTMANN (1983), *Numerische Behandlung optimaler Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen mittels der Mehrzielmethode*, Diplomarbeit, Univ. München.
- B. K. P. HORN (1983), *The curve of least energy*, ACM Trans. Math. Soft. **9**, 441–460.
- A. D. IOFFE & V. M. TICHOMIROV (1979), *Theorie der Extremalaufgaben*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- J. JEROME (1975), *Smooth interpolating curves of prescribed length and minimum curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **51**, 62–66.
- E. JOU & W. HAN (1992), *Minimal-energy splines with various end constraints*, in: H. HAGEN (ed.): *Curve and Surface Design*, SIAM, Philadelphia, 23–40.
- W. KLINGENBERG (1973), *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Springer, Berlin.
- R. KÖNIG & M. KRAFT (1928), *Elliptische Funktionen*, de Gruyter, Berlin.
- F. M. LARKIN (1966), *An interpolation procedure based on fitting elasticas to given data points*, Culham Operating System—Note 5/66, Theory Division, Culham Laboratory, Abingdon, England.
- E. H. LEE & G. E. FORSYTHE (1973), *Variational study of nonlinear spline curves*, SIAM Rev. **15**, 120–133.
- A. LINNÉR (1993), *Existence of free nonclosed Euler-Bernoulli elastica*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **21**, 575–593.
- A. LINNÉR (1996), *Unified representation of nonlinear splines*, J. Approx. Theory **84**, 315–350.
- A. E. H. LOVE (1907), *Lehrbuch der Elastizität*, B. G. Teubner, Leipzig.
- M. A. MALCOLM (1977), *On the computation of nonlinear spline functions*, SIAM J. Numer. Anal. **14**, 254–282.

- H. MAURER (1976), *Optimale Steuerprozesse mit Zustandsbeschränkungen*, Habilitationsschrift, Univ. Würzburg.
- H. MAURER (1979), *On the minimum principle for optimal control problems with state constraints*, Bericht der Univ. Münster **41**, ISSN 0344-0842.
- H. MAURER & H. D. MITTELMANN (1991), *The non-linear beam via optimal control with bounded state variables*, Optimal Control Applications & Methods **12**, 19–31.
- E. MEHLUM (1969), *Curve and Surface Fitting Based on Variational Criteria for Smoothness*, PhD thesis, Univ. of Oslo, Norway.
- E. MEHLUM (1995), *Appell and the apple (nonlinear splines in space)*, in: M. DÆHLEN, T. LYCHE & L. L. SCHUMAKER (eds.): Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Nashville, TN, Vanderbilt University Press, 365–384.
- H. J. OBERLE & G. OPFER (1998), *Nonnegative splines, in particular of degree five*, Numer. Math. **79**, 427–450.
- G. OPFER (1989), *Necessary optimality conditions for splines under constraints*, in: C. CHUI, L. L. SCHUMAKER & J. WARD (eds.): Approximation Theory VI, vol. 2, New York, Academic Press, 511–514.
- G. OPFER (1990), *An algorithm for nonlinear splines with non-negativity constraints*, in: M. G. COX & J. C. MANSON (eds.): Algorithms for Approximation II, Chapman and Hall, 46–53.
- G. OPFER & H. J. OBERLE (1988), *The derivation of cubic splines with obstacles by methods of optimization and optimal control*, Numer. Math. **52**, 17–31.
- K.-D. REINSCH (1981), *Numerische Berechnung von Biegelinien in der Ebene*, Dissertation, TU München.
- K.-D. REINSCH (1997), *Interpolation by pieces of Euler's elastica*, in: A. L. MEHAUTE, C. RABUT & L. L. SCHUMAKER (eds.): Curves and Surfaces with Applications in CAGD, Nashville, TN., Vanderbilt University Press, 379–386.
- F. SCHLAPKOHL (1991), *Nichtlineare Splines*, Diplomarbeit, Univ. Hamburg.
- J. W. SCHMIDT & W. HESS (1995), *An always successful method in univariate nonconvex  $C^2$  interpolation*, Numer. Math. **71**, 237–252.
- G. SCHULZE (1990), *Elastische Wege und nichtlineare Splines im CAGD*, Dissertation, Univ. Kaiserslautern.
- E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON (1980), *A course of modern analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- C. H. WOODFORD (1969), *Smooth curve interpolation*, BIT **9**, 69–77.

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden nichtlineare Spline-Kurven unter affin-linearen Restriktionen behandelt. Nichtlineare Splines sind Kurven, die gegebene Punkte in der Ebene interpolieren und dabei die Biegungsenergie minimieren. Die Biegungsenergie ist proportional zum Integral über das Quadrat der Krümmung. Die Länge der gesuchten Kurve ist frei. Während unrestringierte nichtlineare Splines vielfältig theoretisch und numerisch in der Literatur behandelt werden, findet man in der Literatur fast keine Aussagen über restringierte nichtlineare Splines.

Dieses Problem wird als Optimalsteuerungsproblem formuliert, wobei neben der affin-linearen Restriktion auch allgemeinere Zustandsbeschränkungen betrachtet werden. Es handelt sich dabei um ein Problem mit freier Endzeit und Interpolationsbedingungen an freien Zwischenknoten. Notwendige Bedingungen werden zunächst für den allgemeinen Fall hergeleitet und dann auf die spezielle Aufgabe angewendet. Diese führen auf eine Randwertaufgabe. Mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen kann man die Differentialgleichung dieser Randwertaufgabe lösen und erhält so ein nichtlineares Gleichungssystem.

Für den Fall einer affin-linearen Restriktion wird gezeigt, daß zwischen zwei Interpolationsknoten maximal ein Randstück oder ein Berührungspunkt existiert. Es wird ein expliziter Algorithmus zur Berechnung des nichtlinearen Splines mit zwei Interpolationspunkten und einem Randstück entwickelt. Hiermit kann man auch überprüfen, ob ein restringierter nichtlinearer Spline mit zwei Interpolationsknoten für eine gegebene aktive affin-lineare Restriktion ein Randstück oder einen Berührungspunkt besitzt. Zur Berechnung eines restringierten Splines mit mehr als zwei Interpolationsknoten wird ein auf dem Newton-Verfahren basierender Algorithmus zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems vorgestellt und die auftretenden Besonderheiten an Hand von Beispielen erläutert. Außerdem werden noch einige Ergebnisse zur Restriktion durch einen Kreis diskutiert.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Sigrid Gabriele Fredenhagen  
Geburtsdatum: 1. September 1971  
Geburtsort: Bielefeld  
Familienstand: verheiratet, ein Kind

## Schulbildung

1977 bis 1981 Grundschohle II in Burgdorf  
1981 bis 1983 Orientierungsstufe I in Burgdorf  
1983 bis 1990 Gymnasium Burgdorf  
Mai 1990 Abitur

## Studium

Okt. 1990 bis Apr. 1996 Studium der Mathematik an der Universität Hamburg und an der University of Bristol, GB (WS 1992 - SS 1993)  
3. April 1996 Diplomprüfung in Mathematik

## Berufliche Tätigkeit

SS 1996 Lehrauftrag am Fachbereich Mathematik  
Okt. 1996 bis Nov. 1999 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik