

**Der Frobenius-Perron-Operator und
seine Diskretisierung für
Diffeomorphismen auf der Kreislinie**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Nicole Lehmkuhl
aus Hamburg

Hamburg
2001

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Bodo Werner
und Prof. Dr. Reiner Lauterbach

Hamburg, den 2. November 2001

Prof. Dr. Reiner Hass
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen	11
1.1. Kreisabbildungen	11
1.2. Ergodische Abbildungen und invariante Maße	16
1.3. Der Frobenius-Perron-Operator	18
1.4. Spektrum des Frobenius-Perron-Operators	21
1.4.1. Rotationen	23
1.4.2. Kreisabbildungen mit irrationaler Rotationszahl	24
1.4.3. Kreisabbildungen mit rationaler Rotationszahl	25
2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators	27
2.1. Ulams Methode	27
2.2. Theorie nicht-negativer Matrizen	30
2.3. Übergangsmatrizen homogener Markov-Ketten	32
3. Kreismatrizen	37
3.1. Diskrete Kreisabbildungen	39
3.2. Bandbreitenabbildungen	45
3.3. Spektrum von Kreismatrizen	49
3.3.1. Rotationen	49
3.3.2. Kreisabbildungen	51
3.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren	54

Inhaltsverzeichnis

4. Orbitübergangsmatrizen	57
4.1. Der MacKay-Algorithmus	57
4.2. Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen	61
4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen	63
4.3.1. Geometrie des Spektrums	66
4.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren	77
4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte	80
4.5.1. Numerische Experimente	84
A. Matlab-Implementierung	97
Literaturverzeichnis	101

Einleitung

Diskrete dynamische Systeme, die durch eine Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$ auf der Kreislinie definiert werden, treten unter anderem bei der Analyse kontinuierlicher dynamischer Systeme auf. So ist z.B. bei autonomen Hamiltonsystemen mit zwei Freiheitsgraden die Existenz invarianter Kurven im Poincaré-Schnitt ein typisches Phänomen. Diese invarianten Kurven der Poincaré-Abbildung entsprechen invarianten Tori des zugrunde liegenden dynamischen Systems. Bei zeitabhängigen T-periodischen Differentialgleichungen führt die Zeit-T-Abbildung zu einem diskreten dynamischen System, deren invariante Kurven wiederum invarianten Tori des kontinuierlichen Systems entsprechen. Oft lassen sich invariante Kurven so parametrisieren, dass der Fluss des Systems eingeschränkt auf diese Kurve als orientierungserhaltender Kreisdifféomorphismus aufgefasst werden kann.

Erste Untersuchungen über Kreisabbildungen stammen von POINCARÉ (1885) [45] und DENJOY (1932) [13]. Spätere weiterführende Untersuchungen finden sich unter anderem bei ARNOL'D [2] und HERMAN [22]. POINCARÉ zeigte, dass die Dynamik der durch Kreisdifféomorphismen definierten diskreten dynamischen Systeme entscheidend von den mittleren Winkeländerungen der Kreisabbildungen, ihrer sog. *Rotationszahlen*, abhängt. Ist die Rotationszahl rational, so besitzt das dynamische System einen periodischen Orbit. Ist die Rotationszahl hingegen irrational, so entspricht die Anordnung der Punkte eines Orbits derjenigen einer Rotation mit dem durch die Rotationszahl gegebenen Winkel. DENJOY erweiterte diese Aussage dahin, dass bei irrationalen Rotationszahlen und hinreichend glatten Kreisabbildungen jeder Orbit dicht in S^1 liegt. Trotzdem kann es Orte geben, in denen sich Orbits bevorzugt aufhalten. Die Frage nach den Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Orbits in Teilmengen von S^1 führt zu der Theorie des Frobenius-Perron-Operators.

Die Grundidee solch einer stochastischen Betrachtungsweise besteht darin, dass an Stelle der Analyse eines Einzelorbits ein ganzes Kontinuum von Startpunkten unter einer Abbildung f iteriert wird. Die Verteilung der Startpunkte sei durch eine Dichte $h \in L^1$ gegeben. Der Frobenius-Perron-Operator gibt an, wie die Verteilung der Startpunkte, dargestellt durch die Dichte h , unter Anwendung von f verändert wird. Die neue Verteilung kann, unter bestimmten

Einleitung

Voraussetzungen an f , wieder als Dichte $Ph \in L^1$ dargestellt werden. Gibt es eine eindeutige invariante Dichte h^* , also eine Dichte, für die $Ph^* = h^*$ gilt, so gibt diese Dichte die „Besuchshäufigkeit“ von Orbits in Teilmengen des Phasenraums an. Eine ausführliche Einführung und Darstellung dieser Ideen findet sich bei LASOTA und MACKEY [33].

Um invariante Dichten numerisch berechnen zu können, muss die Gleichung $Ph = h$ diskretisiert werden. Die Standardmethode zur Diskretisierung geht auf ULAM (1960) [48] zurück. Bei dieser Diskretisierung wird der Phasenraum in Boxen aufgeteilt. Der diskretisierte Frobenius-Perron-Operator gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ein beliebiger Punkt einer Box durch den Fluss in die anderen Boxen abgebildet wird. Die Iterationen dieses diskretisierten Operators definieren eine endliche, homogene Markov-Kette, die durch eine stochastische Matrix, die sog. *Übergangsmatrix* repräsentiert wird. Die gesuchte invariante Dichte des dynamischen Systems wird approximiert durch den stationären Wahrscheinlichkeitsvektor der Markov-Kette, also durch den stochastischen Eigenvektor zum Eigenwert 1. ULAM konnte die Konvergenz dieser Approximation nur vermuten. Erst LI [35] gelang 1976 für expandierende, stückweise C^2 -Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ der Nachweis einer Konvergenz. Sein Resultat wurde mittlerweile auf spezielle, stückweise konvexe eindimensionale Abbildungen, die nicht mehr überall expandierend sein müssen [40], und höherdimensionale expandierende Abbildungen [6, 17] verallgemeinert. Für Axiom-A Diffeomorphismen gelang DELNITZ und JUNGE [12] 1997 ein Konvergenzbeweis, der die Kompaktheit des Frobenius-Perron-Operators für stochastisch gestörte Systeme ausnutzt. KEANE et al. [28] haben das Ergebnis von LI auf expandierende Kreisabbildungen angewandt. Da Kreisdiffeomorphismen nicht überall expandierend sein können, ist die Arbeit auf unseren Fall nicht anwendbar, und ein Konvergenzbeweis steht für diese Abbildungen aus. Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit geht der Frage nach, ob für orientierungserhaltende Kreisdiffeomorphismen Konvergenz der Ulam-Methode gezeigt werden kann. NICOLAISEN und WERNER [42] haben eine Abschätzung für die Approximation des durch die invariante Dichte definierten Maßes geliefert, aus der aber im Allgemeinen noch keine Konvergenz geschlossen werden kann. Wählt man jedoch Orbitpunkte als Partitionsunkte, so ergibt sich als diskretisierter Operator eine sehr einfache Matrix, die wir *Orbitübergangsmatrix* (s. Kapitel 4) nennen. Der stationäre Wahrscheinlichkeitsvektor einer Orbitübergangsmatrix kann direkt ausgerechnet werden (Satz 4.4.1). Ist die Rotationszahl der Kreisabbildung irrational, so liegt jeder Orbit dicht, und die Partition kann somit durch Verlängerung des Orbits verfeinert werden. Für die Folge der durch die approximierten Dichten definierten Maße liefert die Abschätzung von NICOLAISEN und WERNER im

Falle dieser speziellen Partitionen Konvergenz (Korollar 4.5.1). Dieses Ergebnis wird genutzt, um einen Algorithmus zu entwickeln, der die invariante Dichte approximiert, ohne dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss (s. Abschnitt 4.5). Er stellt die Erweiterung eines von MACKAY [36] vorgeschlagenen Algorithmus zur Berechnung der Rotationszahl eines Kreisdiffomorphismus dar und hat damit den weiteren Vorteil, dass er ohne großen Rechenaufwand sowohl die Rotationszahl als auch die invariante Dichte liefert.

Ebenfalls von NICOLAISEN und WERNER stammen Untersuchungen des Spektrums des diskretisierten Frobenius-Perron-Operators. Numerische Versuche (s. a. HOTZEL et al. [24] und LEHMANN [34]) legen die Vermutung nahe, dass sich bei parameterabhängigen Kreisdiffomorphismen ein „nahes“ phase-locking, also das Vorliegen einer rationalen Rotationszahl, schon vorher im Spektrum des diskretisierten Operators ankündigt. Ein weiterer wesentlicher Teil dieser Arbeit soll die Frage klären, ob ein Zusammenhang zwischen dem Spektrum des kontinuierlichen Frobenius-Perron-Operators und dem seiner Diskretisierung nachgewiesen werden kann. Üblicherweise wird bei Spektraluntersuchungen des Frobenius-Perron-Operators der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation versehen mit einer speziellen Norm zugrunde gelegt. Dieser Raum wurde erstmals von KELLER [29] vorgeschlagen und hat den Vorteil, dass der Frobenius-Perron-Operator dort quasi-kompakt ist. Da sich die von Ulam vorgeschlagene Diskretisierung aber auf den Raum L^1 bezieht, wurde in dieser Arbeit die Spektralanalyse auf L^1 ausgeführt. Eine allgemeine Untersuchung des L^1 -Spektrums des Frobenius-Perron-Operators stammt von DING et al. [16]. In der vorliegenden Arbeit konnten für Diffomorphismen (Satz 1.4.2) und speziell für Kreisdiffomorphismen (Satz 1.4.4, Korollar 1.4.5) differenziertere Aussagen gewonnen werden.

Das Spektrum der Übergangsmatrix hängt stark von ihrer Struktur ab. Für Kreisdiffomorphismen hat die Matrix eine Bandstruktur, die mit Hilfe diskreter Kreisabbildungen, den sog. *Bandbreitenabbildungen* (s. Abschnitt 3.2), vollständig beschrieben werden kann (s. NICOLAISEN und WERNER [42]). In dieser Arbeit wird der Ansatz der Bandbreitenabbildungen theoretisch fundiert und ausgebaut. Mit Hilfe der Bandbreitenabbildungen können qualitative Aussagen über das Spektrum der Übergangsmatrizen zu Kreisdiffomorphismen gewonnen werden (Satz 3.3.2). Ein Zusammenhang mit dem Spektrum des Frobenius-Perron-Operators ist allgemein jedoch nicht erkennbar. Beschränkt man die Untersuchung des Spektrums aber wieder auf Orbitübergangsmatrizen, so kann für spezielle Fälle Konvergenz des Spektrums dieser Matrizen gegen das Spektrum des kontinuierlichen Operators bei Verlängerung des Partitionsorbits gezeigt werden. Aufgrund ihrer einfachen Struktur ist es möglich, das charakte-

Einleitung

ristische Polynom einer Orbitübergangsmatrix direkt zu berechnen (Satz 4.3.1). Diese charakteristischen Polynome gehören zu einer speziellen Klasse von Polynomen, den sog. *Trinomials*. FELL [18] hat die Geometrie der Nullstellen dieser Polynome untersucht. Ihre Ergebnisse ermöglichen zumindest für fast alle irrationalen Rotationszahlen den Nachweis einer Konvergenz (Satz 4.3.5).

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Im ersten Kapitel werden zunächst Grundlagen über Kreisabbildungen und den Frobenius-Perron-Operator rekapituliert. Abschnitt 1.4 widmet sich der Untersuchung des L^1 -Spektrums des Frobenius-Perron-Operators, und zwar zunächst für Diffeomorphismen im Allgemeinen. Darauf wird in Abschnitt 1.4.1 das Spektrum für den einfachen Fall von Rotationen untersucht und diese Ergebnisse schließlich auf Kreisabbildungen verallgemeinert.

Die Diskretisierung und die Eigenschaften der dabei zu betrachtenden stochastischen Matrizen sind Gegenstand des zweiten Kapitels. Die Ulam-Methode zur Diskretisierung sowie die wichtigsten Ergebnisse von LI [35] werden vorgestellt. Da die darstellenden Matrizen des diskretisierten Operators als Übergangsmatrizen homogener Markov-Ketten aufgefasst werden können, folgt eine Zusammenfassung der für die Untersuchung des Spektrums und der stationären Wahrscheinlichkeitsvektoren relevanten Eigenschaften homogener Markov-Ketten.

Die Inhalte der Kapitel 1 und 2 bilden die Grundlage für die Untersuchung der Konvergenz der Spektren einerseits und die der stationären Wahrscheinlichkeitsvektoren andererseits. Diese nebeneinander stehenden Untersuchungen werden in Kapitel 3 für Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen im Allgemeinen und in Kapitel 4 für Orbitübergangsmatrizen im Speziellen durchgeführt. Die Kapitel 3 und 4 sind so aufgebaut, dass in den jeweils ersten beiden Abschnitten Aussagen hergeleitet werden, die sowohl für die Spektraluntersuchung als auch für die stationären Wahrscheinlichkeitsvektoren von Bedeutung sind. Die Abschnitte über Spektren (Abschnitt 3.3 und Abschnitt 4.3) und die über stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren (Abschnitt 3.4 und Abschnitt 4.4) bauen nicht aufeinander auf, sondern sind als nebeneinander stehend zu betrachten, so dass auch eine spezialisierte Lektüre zu einem dieser beiden Themen möglich ist.

Das Verhalten der Kreisabbildungen spiegelt sich in der Bandbreitenstruktur ihrer Übergangsmatrizen wider. Um diese Struktur Gewinn bringend beschreiben zu können, wird in Abschnitt 3.1 eine kurze Theorie über diskrete Kreisabbildungen entworfen. Die darin eingeführten Begriffe und Eigenschaften liefern die

Grundlage für das Verständnis der Bandbreitenabbildungen, die spezielle diskrete Kreisabbildungen darstellen, und mit denen die Struktur der Übergangsmatrizen gut beschrieben werden kann. Nach diesen Vorbereitungen wird in Abschnitt 3.3 eine qualitative Beschreibung des Spektrums der Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen möglich sein. Dabei werden zunächst wieder Rotationen betrachtet und die Ergebnisse mit denen aus Abschnitt 1.4.1 verglichen. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels wiederholt einige Ergebnisse von NICOLAISEN und WERNER [42] über Abschätzungen der stationären Wahrscheinlichkeitsvektoren der Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen, die den Schlüssel zu der Konvergenz des erweiterten MacKay-Algorithmus liefern.

Im vierten Kapitel schließlich werden spezielle Partitionen vorgeschlagen, die zu Matrizen mit sehr einfacher Bandstruktur, den Orbitübergangsmatrizen, führen. Interessanterweise gibt es einen Zusammenhang der Bandbreitenabbildungen dieser Matrizen mit den Approximationen der Rotationszahl einer Kreisabbildung, die beim MacKay-Algorithmus auftreten. Dieser Zusammenhang wird im ersten Teil des Kapitels erläutert. In Abschnitt 4.3 wird zur Untersuchung des Spektrums der Orbitübergangsmatrizen ihr charakteristisches Polynom berechnet. Die Ergebnisse von FELL [18] über die Geometrie der Nullstellen solcher Polynome zeigen für „hinreichend irrationale“ Rotationszahlen, dass sich mit feiner werdenden Partitionen das Spektrum der Orbitübergangsmatrizen dem des kontinuierlichen Operators annähert. Im letzten Teil dieses Kapitels werden stationären Wahrscheinlichkeitsvektoren von Orbitübergangsmatrizen untersucht. Diese können explizit angegeben und zur Erweiterung des MacKay-Algorithmus genutzt werden, so dass eine simultane Berechnung der Rotationszahl und der invariante Dichte möglich wird. Dieser erweiterte MacKay-Algorithmus konvergiert und berechnet den stationären Wahrscheinlichkeitsvektor, ohne dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Er ist somit deutlich weniger aufwendig als die Ulam-Methode mit anderen, z. B. äquidistanten Partitionen. Numerische Vergleiche des erweiterten MacKay-Algorithmus mit anderen Verfahren zur Approximation der invarianten Dichte schließen diese Arbeit ab.

Ich danke Julia Fischer, Rabbijah Guder und Wernt Hotzel für viele anregende Diskussionen und Thomas Richert und Christine Schröder für das sorgfältige Korrekturlesen. Matias Töpfer danke ich für seine liebevolle Unterstützung. Besonders aber danke ich Prof. Dr. Bodo Werner für die sehr engagierte und motivierende Betreuung meiner Arbeit.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

1.1. Kreisabbildungen

Im Zentrum dieser Arbeit stehen spezielle diskrete dynamische Systeme

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

wobei $f: S^1 \rightarrow S^1$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf der Kreislinie $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist. Der Kürze halber werden solche Abbildungen im Folgenden als Kreisabbildungen bezeichnet.

S^1 kann als metrischer Raum aufgefasst werden. Es seien $x, y \in S^1$ und \tilde{x} bzw. \tilde{y} aus der Äquivalenzklasse von x bzw. y . Dann definiert

$$|x - y| := \inf_{p \in \mathbb{Z}} |\tilde{x} - \tilde{y} + p|$$

eine Metrik auf S^1 . Mit $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ wird die kanonische Projektion bezeichnet.

Der Raum (S^1, \mathcal{B}, m) mit der σ -Algebra \mathcal{B} der Borel-Mengen von S^1 versehen mit dem Lebesgue-Maß m ist ein Maß-Raum, der im Folgenden kurz als S^1 geschrieben wird.

Zunächst werden einige grundlegenden Eigenschaften von Kreisdiffeomorphismen zusammengetragen. Die Beweise der in diesem Abschnitt angegebenen Sätze finden sich, sofern nicht anders angegeben, in ARNOLD [3, Kap. 3, §11].

Definition 1.1.1. Ein Lift eines orientierungserhaltenden Homöomorphismus $f: S^1 \rightarrow S^1$ ist eine stetige Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Zwei verschiedene Lifts von f unterscheiden sich nur durch eine ganzzahlige additive Konstante.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

Ist f eine Kreisabbildung, so ist jeder Lift von f ebenfalls ein Diffeomorphismus. Ein Lift ist streng monoton wachsend und erfüllt die Gleichung

$$F(x+k) = F(x) + k \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Somit ist die Funktion $\phi(x) := F(x) - x$, die die Winkeländerung eines Punktes unter der Anwendung von f angibt, 1-periodisch. Eine entscheidende Größe bei der Analyse von Kreisabbildungen ist die mittlere Winkeländerung unter f . Diese Größe heißt Rotationszahl der Kreisabbildung.

Definition 1.1.2. Die *Rotationszahl* eines orientierungserhaltenden Homöomorphismus $f: S^1 \rightarrow S^1$ mit Lift F ist der Grenzwert

$$\rho(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(x) - x}{k} \pmod{1}.$$

Bemerkung 1.1.3. Der Grenzwert der rechten Seite existiert und ist unabhängig von der Wahl des Punktes x . Die Rotationszahl ist somit wohldefiniert und hängt stetig von der Kreisabbildung f ab. Es gilt außerdem $\rho(f) = 1 - \rho(f^{-1})$.

Sind zwei Kreisabbildungen topologisch konjugiert zueinander, gibt es also einen Homöomorphismus h mit $h \circ f = g \circ h$, so ist die Rotationszahl von f invariant unter dieser Konjugation. Es gilt sogar etwas allgemeiner folgender Satz:

Satz 1.1.4. *Gibt es zu zwei Kreisabbildungen f und g eine stetige Abbildung $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$, so dass $h \circ f = g \circ h$ mit $h = \text{id} + \varphi$, dann gilt $\rho(f) = \rho(g)$.*

Beweis. s. HERMAN [22, Kap. II, Prop. 2.10]. □

Das Vorliegen einer rationalen Rotationszahl $\rho(f) = p/q$ ist gleichbedeutend mit der Existenz eines periodischen Orbits. Rationale Rotationszahlen werden im Folgenden stets als gekürzter Bruch angegeben, p und q sind also stets inkommensurabel.

Bemerkung 1.1.5. Die Kreisabbildung f besitzt genau dann eine rationale Rotationszahl $\rho(f) = p/q$, wenn es ein $x_0 \in [0, 1)$ und einen Lift F von f gibt, so dass gilt

$$F^q(x_0) = x_0 + p.$$

Ist die Rotationszahl $\rho(f) = \omega$ irrational, so entspricht die Anordnung der Punkte eines Orbits von f mit Startwert x der Anordnung des Orbits einer Drehung um den Winkel $2\pi\omega$ mit Startwert x . Zusätzlich gilt der wichtige Satz von Denjoy:

1.1. Kreisabbildungen

Satz 1.1.6. *Ist die Rotationszahl $\rho(f) = \omega$ einer Kreisabbildung f irrational und ist überdies $\log f'$ von beschränkter Variation, dann ist f topologisch konjugiert zu einer Drehung r_ω um den Winkel $2\pi\omega$. Das heißt, es gibt einen Homöomorphismus $g: S^1 \rightarrow S^1$, so dass $f = g^{-1} \circ r_\omega \circ g$.*

Aus dem Satz von Denjoy kann man schließen, dass jeder Orbit einer solchen Kreisabbildung dicht in S^1 liegt.

Für die Untersuchungen von Kreisabbildungen wird die Glattheit der Konjugation von entscheidender Bedeutung sein. In einigen Fällen wird vorausgesetzt werden müssen, dass auch die Konjugation ein Diffeomorphismus ist. Folgende zwei Sätze garantieren die Existenz einer solchen Konjugation.

Satz 1.1.7. *Die Kreisabbildung f ist genau dann C^1 -konjugiert zu einer Drehung r_ω um den Winkel ω , wenn gilt*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|Df^n\|_\infty < +\infty.$$

Beweis. s. HERMAN [22, Kap. IV, Th. 6.1.1] □

Bemerkung 1.1.8. Man beachte, dass für rationale Rotationszahlen f genau dann C^1 -konjugiert zu einer Drehung um $2\pi p/q$ ist, wenn es einen Lift F gibt mit $F^q = \text{id} + p$.

Ein weiteres Kriterium, das auf der Approximierbarkeit der Rotationszahl durch rationale Zahlen basiert, stammt von HERMAN und YOCCOZ. Wir zitieren diesen Satz für den Spezialfall eines C^3 -Diffeomorphismus nach DE MELO und VAN STRIEN [38], wo dieser Spezialfall bewiesen wird. Für die allgemeinere Formulierung verweisen wir auf YOCCOZ [50] sowie KATZNELSON und ORNSTEIN [27].

Satz 1.1.9. *Es sei $f: S^1 \rightarrow S^1$ ein C^3 -Diffeomorphismus, dessen Rotationszahl $\rho(f) = \omega$ folgende diophantische Bedingung erfüllt: Es gibt positive Konstanten C und β , so dass*

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2+\beta}} \text{ für alle } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Ist $0 < \beta < 1$, dann gibt es einen C^1 -Diffeomorphismus g mit $f = g^{-1} \circ r_\omega \circ g$.

Die Approximierbarkeit irrationaler Zahlen durch rationale Brüche hängt eng mit der Kettenbruchentwicklung zusammen. Ein kleiner Ausflug in die Welt der Zahlentheorie soll die wichtigsten Zusammenhänge klären. Die Darstellung folgt im Wesentlichen HARDY und WRIGHT [21].

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

Es seien a_0, a_1, \dots, a_n positive ganze Zahlen. Mit $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ bezeichnen wir den einfachen Kettenbruch

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Unendliche Kettenbrüche werden entsprechend mit $[a_0, a_1, \dots]$ bezeichnet.

Jede positive rationale Zahl kann durch einen solchen endlichen Kettenbruch dargestellt werden. Irrationale positive Zahlen können nur durch unendliche Kettenbrüche dargestellt werden. Die Darstellung einer irrationalen Zahl als unendlicher Kettenbruch ist eindeutig.

Bei den späteren Betrachtungen wird der Begriff der *Konvergente* eine entscheidende Rolle spielen.

Definition 1.1.10. Es sei $x = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ ein unendlicher Kettenbruch. Die endlichen Kettenbrüche $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ heißen *Konvergenten* von x .

Sind a_0, a_1, \dots gegeben, so können die Konvergenten iterativ berechnet werden. Es gilt

$$p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad (1.1.1)$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \quad (1.1.2)$$

Für die Konvergenten eines unendlichen Kettenbruches gilt:

- Die geraden Konvergenten $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ wachsen mit n , die ungeraden Konvergenten $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$ nehmen mit wachsendem n ab.
- Jede ungerade Konvergente ist größer als jede gerade.
- Der Wert des Kettenbruchs ist größer als jeder gerade und kleiner als jeder ungerade Kettenbruch.

Die diophantische Bedingung des Satzes 1.1.9 wird von fast allen irrationalen Zahlen erfüllt, wie das folgende Lemma zeigt.

1.1. Kreisabbildungen

Lemma 1.1.11. *Es sei $\epsilon > 0$. Für fast alle $\omega \in [0, 1]$ existiert eine Konstante $K > 0$ mit*

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^{2+\epsilon}} \quad (1.1.3)$$

für alle $p, q \in \mathbb{N}$.

Beweis. s. ARNOL'D [3]

Die Konvergenten stellen besonders „gute“ Approximationen für irrationale Zahlen dar. Für eine Zahl ω und ihre Konvergenten gilt, s. [43],

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} \leq \left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}. \quad (1.1.4)$$

Betrachtet man Familien von Kreisabbildungen der Gestalt $f_\eta = r_\eta \circ f$, wobei f eine Kreisabbildung ist, so zeigt sich ein für die Rotationszahl typisches Verhalten. Die Abbildung $h(\eta) = \rho(f_\eta)$ ist dann nämlich typischerweise monoton und für jeden Wert η , für den $h(\eta)$ rational ist, lokal konstant. Dieses Phänomen nennt man *phase locking*. Die Funktion h nennt man aufgrund ihrer Eigenschaften auch „Teufelstreppe“, s. DE MELO und VAN STRIEN [38]. Genauer gilt:

Satz 1.1.12. *Es sei $h(\eta)$ wie oben definiert. Dann ist die Funktion h stetig, monoton wachsend und nimmt jeden irrationalen Wert genau einmal an. Gilt darüber hinaus für einen Lift F_η von f_η*

$$F_\eta^q \neq \text{id} + p, \quad \forall \eta \in [0, 1), \quad \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad (1.1.5)$$

dann ist $h^{-1}(\frac{p}{q})$ für jeden rationalen Wert $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Intervall mit nicht-leerem Inneren.

Beweis. s. HERMAN [22, Kap. III] □

Eine hinreichende Eigenschaft für die Existenz von phase-locking-Intervallen liefert

Satz 1.1.13. *Es sei $f = \text{id} + \phi$ eine komplexifizierbare Kreisabbildung. Die komplexe Fortsetzung von $\phi \in C^1$ sei eine ganze Funktion. Ist ϕ nicht konstant und $\rho(f) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dann ist $f^q \neq \text{id}$.*

Beweis. s. HERMAN [22, Kap. III, Prop. 3.2] □

Erfüllt nun eine Kreisabbildung f die Bedingungen des Satzes 1.1.13, so gilt dies auch für die Kreisabbildung $f_\eta = r_\eta \circ f$. Somit ist für solche Kreisabbildungen der Satz 1.1.12 anwendbar.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

Beispiel 1.1.14. Das Standardbeispiel für Familien von Kreisabbildungen des Typs $r_\eta \circ f$ ist die sog. Arnol'd Familie

$$f_{\epsilon,\eta}(x) = x + \eta + \epsilon \sin(2\pi x) \pmod{1}.$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 1.1.13 ist für diese Familie

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon \sin(2\pi x),$$

und es gilt offenbar der Satz 1.1.12 für alle $0 < |\epsilon| < \frac{1}{2\pi}$.

Ein weiteres Beispiel liefert die Familie

$$f_{\xi,\eta}(x) = \xi x^4 - 2\xi x^3 + \xi x^2 + x + \eta \pmod{1} \quad (1.1.6)$$

mit $0 < \xi < 3\sqrt{3}$. Man beachte, dass diese Kreisabbildungen im Gegensatz zu denen der Arnol'd Familie nur zweimal stetig differenzierbar sind und überdies lediglich C^1 -Diffeomorphismen darstellen. Es ist aber die Bedingung des Satzes 1.1.6 erfüllt.

1.2. Ergodische Abbildungen und invariante Maße

Um die Dynamik im gesamten Phasenraums zu untersuchen, ist es üblich, eine stochastische Betrachtungsweise mit der Analyse dynamischer Systeme zu verbinden. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Begriffe und Eigenschaften eines solchen Konzeptes zusammengetragen.

Im Folgenden sei X eine n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit versehen mit der Borel-Algebra \mathcal{B} und einem auf dieser σ -Algebra definierten Wahrscheinlichkeitsmaß μ . Das Lebesgue-Maß wird wie oben mit m bezeichnet. Die Sätze und Definitionen folgen im wesentlichen HERMAN [22].

Definition 1.2.1. Eine messbare Abbildung $f: X \rightarrow X$ heißt *maßerhaltend*, falls für alle messbaren Mengen A gilt $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Das Maß μ heißt in diesem Fall auch *invariant bzgl. f* .

Bemerkung 1.2.2. Man kann zeigen, dass jeder Homöomorphismus eines kompakten, metrischen Raumes ein invariantes Maß besitzt, s. WALTERS [49, Thm. 5.14].

Definition 1.2.3. Eine messbare Abbildung $f: X \rightarrow X$ heißt *ergodisch*, falls alle unter f invarianten, messbaren Mengen A trivial sind, d.h. für alle $A \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(A) = A$ gilt $m(A) \in \{0, 1\}$.

1.2. Ergodische Abbildungen und invariante Maße

Bemerkung 1.2.4. Man kann Ergodizität auch allgemeiner bzgl. eines beliebigen Maßes μ definieren, s. [33]. Da im Folgenden aber grundsätzlich das Lebesgue-Maß zugrunde gelegt wird, werden wir Ergodizität stets bzgl. dieses Maßes messen.

Die Dynamik ergodischer Abbildungen muss auf dem gesamten Phasenraum betrachtet werden. Bei nicht ergodischen Abbildungen hingegen kann die Dynamik auf den invarianten Unterräumen unabhängig voneinander studiert werden.

Definition 1.2.5. Ein Punkt $x \in X$ heißt *wandernd*, falls es eine Umgebung U von x gibt mit $U \cap f^n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller nicht wandernden Punkte wird definiert durch

$$\Omega(f) := \{x \in X : x \text{ ist nicht wandernd unter } f\}.$$

Bemerkung 1.2.6. Die Menge $\Omega(f)$ ist abgeschlossen, nicht-leer und invariant unter f . Außerdem sind die ω - und α -Limesmengen von f in $\Omega(f)$ enthalten.

Der Träger eines Maßes ist definiert durch

$$\text{supp}(\mu) := \{x \in X : \mu(U_\epsilon(x)) > 0 \text{ für alle } \epsilon > 0\},$$

wobei U_ϵ eine ϵ -Kugel um x bezeichnet. Die Menge $\text{supp}(\mu)$ ist abgeschlossen.

Lemma 1.2.7. Für jedes invariante Maß μ gilt $\text{supp}(\mu) \subset \Omega(f)$.

Beweis. Angenommen $x \in \text{supp}(\mu)$ ist ein wandernder Punkt, dann gibt es eine Umgebung U von x mit $f^n(U) \cap U = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Daraus folgt, dass alle Umgebungen $f^n(U)$ paarweise disjunkt sind. Es ist $M := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U) \subset X$ und somit $\mu(M) \leq 1$. Dies steht aber im Widerspruch zu

$$\mu(M) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(f^n(U)) = \infty.$$

□

Bemerkung 1.2.8. Besitzt der Träger des invarianten Maßes einen isolierten Punkt, so ist dieser ein periodischer Punkt von f . Ist nämlich $x \in \text{supp}(\mu)$ isoliert, so gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass das Maß der punktierten Umgebung $U_\epsilon(x) \setminus x$ Null ist. Da μ ein invariantes Maß ist, folgt aus $\mu(x) > 0$, dass auch $\mu(f^k(x)) > 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wäre x kein periodischer Punkt, so folgte damit $f^k(x) \notin U_\epsilon(x)$ für alle $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Das bedeutet aber, dass x wandernd ist, was im Widerspruch zu $x \in \Omega(f)$ steht.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

Beispiel 1.2.9. a) Es sei f eine Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl ω . Dann ist für jedes invariante Maß $\text{supp}(\mu) = \Omega(f)$. Für $\text{supp}(\mu) = S^1$ ist die Aussage trivial. Ist hingegen $\text{supp}(\mu) \neq S^1$, so sei I eine Zusammenhangskomponente von $T = S^1 \setminus \text{supp}(\mu) \neq \emptyset$. Dann sind $f^n(I)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ wieder Zusammenhangskomponenten von T . Die Intervalle $f^n(I)$ sind paarweise disjunkt, da f keine periodischen Punkte besitzt. Somit ist jeder Punkt $x \in T$ wandernd, s. a. HERMAN [22, Kap. II].

Man kann zusätzlich zeigen, dass das invariante Maß μ eindeutig ist, s. HERMAN [22, Kap. II, 8.5]. Die stetige monoton steigende Funktion $g(x) = \mu([0, x])$ erfüllt $g \circ f = r_\omega \circ g$. Die Abbildung g ist genau dann ein Homöomorphismus, wenn $\text{supp}(\mu) = S^1$ gilt. Dann ist die Kreisabbildung f konjugiert zu der Drehung r_ω und somit ergodisch. Jeder Orbit von f liegt dicht in S^1 .

b) Die Kreisabbildung f habe eine rationale Rotationszahl und besitze genau einen (notwendigerweise nicht-hyperbolischen) Orbit $x_0, x_1 = f(x_0), \dots, x_{q-1} = f^{q-1}(x_0)$. Dann ist $\Omega(f) = \{x_i \mid i = 0, \dots, q-1\}$, und das einzige invariante Maß von f ist $\mu = 1/q \sum_{i=0}^{q-1} \delta_{x_i}$, wobei δ_x das Dirac-Maß bezeichne, s. [22]. Man kann leicht sehen, dass f ergodisch ist. Die einzigen invarianten Mengen sind nämlich $\bigcup_{i=1}^{q-1} (x_{i-1}, x_i)$ und $\Omega(f)$. Diese haben aber das Lebesgue-Maß 1 bzw. 0.

c) Besitzt die Kreisabbildung f mehr als einen periodischen Orbit, so ist f nicht ergodisch. Es seien nämlich x_i und $y_i, i = 0, \dots, q-1$ mit $x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < \dots < x_{q-1} < y_{q-1}$ die zyklisch angeordneten Punkte zweier periodischer Orbits von f . Dann ist $I = \bigcup_{i=0}^{q-1} [x_i, y_i]$ eine unter f invariante Menge mit $0 < m(I) < 1$. Es gibt kein eindeutiges invariantes Maß, denn wie unter b) kann zu jedem periodischen Orbit ein invariantes Maß konstruiert werden.

1.3. Der Frobenius-Perron-Operator

Im vorhergehenden Abschnitt wurde ein Zusammenhang zwischen der Existenz eines invarianten Maßes und der Dynamik von Kreisabbildungen hergestellt. Dieser Zusammenhang wird mittels der Einführung des Frobenius-Perron-Operators noch deutlicher. Die Definitionen und Sätze dieses Abschnittes folgen LASOTA und MACKAY [33]. Die Menge der endlichen Maße bezüglich \mathcal{B} werde mit \mathcal{M} bezeichnet. Für jedes $\mu \in \mathcal{M}$ ist auch $\nu(A) = \mu(f^{-1}(A))$ ein endliches Maß.

Definition 1.3.1. Es sei $f: X \rightarrow X$ eine Borel-messbare Transformation. Der durch

$$\mathcal{P}_f \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ für alle } A \in \mathcal{B}$$

1.3. Der Frobenius-Perron-Operator

definierte Operator $\mathcal{P}_f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ heißt *Frobenius-Perron-Operator* von f auf dem Raum der endlichen Maße.

Der Frobenius-Perron-Operator ist ein Markov-Operator, das heißt, er ist linear¹ und es gilt $\mathcal{P}_f\mu(X) = \mu(X)$. Die letzte Bedingung läßt sich auch schreiben als $\|\mathcal{P}_f\mu\| = \|\mu\|$, wobei $\|\mu\| := \mu(X)$. Der Frobenius-Perron-Operator bildet also Wahrscheinlichkeitsmaße auf Wahrscheinlichkeitsmaße ab. Es ist klar, dass ein Maß genau dann unter f invariant ist, wenn es ein Fixpunkt des Frobenius-Perron-Operators ist. Wendet man den Frobenius-Perron-Operator mehrfach auf ein Dirac-Maß δ_x an, so erhält man

$$\mathcal{P}_f^n \delta_x = \delta_{f^n(x)}.$$

Es kann also mittels \mathcal{P}_f auch ein Orbit von f erzeugt werden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird vor allem die Existenz absolut stetiger, invarianter Maße von Interesse sein. Hierbei handelt es sich um Maße $\mu \in \mathcal{M}$, für die ein $h \in L^1$ existiert, so dass $\mu(A) = \int_A h(x) dx$. Ein solches Maß μ ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn $h \in D$ mit

$$D := \{h \in L^1 : h \geq 0 \text{ und } \|h\| = 1\}.$$

Die Elemente aus D heißen *Dichten*. Um den Frobenius-Perron-Operator auf L^1 definieren zu können, muss die Transformation f nicht-singulär sein.

Definition 1.3.2. Eine messbare Transformation $f: X \rightarrow X$ heißt *nicht-singulär* bzgl. $\mu \in \mathcal{M}$, falls die Urbilder von Nullmengen wieder Nullmengen sind, falls also stets gilt

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(f^{-1}(A)) = 0.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass jede maßerhaltende Abbildung nicht-singulär ist.

Es sei nun μ ein absolut stetiges Maß mit Dichte h und f eine nicht-singuläre Transformation (bzgl. des Lebesgue-Maßes). Dann ist mit dem Satz von Radon-Nikodym

$$\mathcal{P}_f\mu(A) := \mu(f^{-1}(A)) = \int_{f^{-1}(A)} h(x) dx$$

¹ Die skalare Multiplikation ist nur für nicht-negative Skalare erklärt.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

wieder ein absolut stetiges Maß mit der Dichte $g =: P_f h$. Wir können also schreiben

$$\mathcal{P}_f \mu(A) = \int_A P_f h(x) dx$$

und haben damit einen Operator $P_f: L^1 \rightarrow L^1$ definiert, der Dichten auf Dichten abbildet.

Definition 1.3.3. Der durch

$$\int_A P_f h(x) dx = \int_{f^{-1}(A)} h(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

implizit definierte Operator $P_f: L^1 \rightarrow L^1$ heißt *Frobenius-Perron-Operator* von f .

Der Zusammenhang mit invarianten, absolut stetigen Maßen kann nun auch von dieser Seite betrachtet werden. Ein absolut stetiges Maß μ mit Dichte h ist genau dann invariant, wenn h invariant unter P_f ist, wenn also $P_f h = h$ gilt. Für ergodische Abbildungen gilt überdies

Satz 1.3.4. *Ist f ergodisch, so besitzt der Frobenius-Perron-Operator P_f höchstens eine invariante Dichte. Besitzt umgekehrt P_f genau eine invariante Dichte h_* mit $h_* > 0$ f.ü., so ist f ergodisch.*

Der Frobenius-Perron-Operator besitzt folgende Eigenschaften:

- 1.) Der Frobenius-Perron-Operator ist ein linearer Operator.
- 2.) $P_f h \geq 0 \quad \forall h \geq 0$.
- 3.) $\|P_f h\| = \|h\| \quad \forall h \geq 0$.
- 4.) $\|P_f\| = 1$.
- 5.) Für zwei Kreisabbildungen f und g ist $P_f \circ P_g = P_{f \circ g}$. Daraus folgt, dass P_f^n der Frobenius-Perron-Operator zu f^n ist.

In dem speziellen Fall, wo f eine Kreisabbildung ist, läßt sich der Frobenius-Perron-Operator explizit schreiben. Es ist nämlich

$$\int_{[a,x]} P_f h(s) ds = \int_{f^{-1}([a,x])} h(s) ds,$$

1.4. Spektrum des Frobenius-Perron-Operators

und mit Differentiation der Gleichung folgt

$$P_f h(x) = \frac{d}{dx} \int_{f^{-1}([a,x])} h(s) ds = \frac{h(f^{-1}(x))}{|f'(f^{-1}(x))|}.$$

Aus der expliziten Darstellung folgt unmittelbar, dass $|P_f h(x)| = P_f |h(x)|$. Es gilt also im Falle von Kreisabbildungen als Erweiterung der Eigenschaft 3.) $\|P_f h\| = \|h\|$ für alle $h \in L^1$. Dieses läßt sich sogar allgemein für Diffeomorphismen zeigen, s. [24].

1.4. Spektrum des Frobenius-Perron-Operators

Es soll nun das Spektrum des Frobenius-Perron-Operator betrachtet werden. Im Verlaufe der Arbeit wird untersucht werden, ob und in wiefern das Spektrum der Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators gegen das Spektrum des kontinuierlichen Operators konvergiert. Die Ergebnisse dieses Abschnitts finden sich zum Teil in HOTZEL, LEHMKUHL und WERNER [24].

Im Folgenden bezeichne $\sigma(P)$ das Spektrum eines Operators P und $\mathbb{C}_1^* := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1.

Wir betrachten zunächst ganz allgemein Diffeomorphismen auf n -dimensionalen C^1 -Mannigfaltigkeiten. In Abschnitt 1.3 wurde gezeigt, dass für den Frobenius-Perron-Operator eines Diffeomorphismus $\|P_f h\| = \|h\|$ gilt. Daraus folgt sofort, dass der Spektralradius $r(P_f) = 1$ ist. Darüber hinaus gilt:

Lemma 1.4.1. *Für den Frobenius-Perron-Operator eines Diffeomorphismus ist $\sigma(P_f) \subset \mathbb{C}_1^*$.*

Beweis. Wähle $l = |1 - |\lambda|| > 0$, dann ist

$$l \|h\| = \|\|h\| - |\lambda| \|h\|\| \leq \|P_f h - \lambda h\|,$$

und für $|\lambda| \neq 1$ besitzt $P_f - \lambda I$ stets eine stetige Inverse. □

Gibt es für einen Diffeomorphismus einen wandernden Punkt, so kann für das Spektrum von P_f gezeigt werden:

Satz 1.4.2. *Es sei $f: X \rightarrow X$ ein Diffeomorphismus. Ist $\Omega(f) \neq X$, so gilt $\sigma(P_f) = \mathbb{C}_1^*$.*

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

Beweis. Da das Spektrum kompakt ist, genügt es zu zeigen, dass jedes λ mit $\lambda^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ im Spektrum liegt. Es muss also ein $w \in L^1$ gefunden werden, so dass es kein $h \in L^1$ gibt, das die Gleichung

$$P_f h - \lambda h = w \quad (1.4.1)$$

löst. Da $\Omega(f) \neq X$ ist, existiert eine Menge I mit positivem Lebesgue-Maß, so dass $I \cap f^k(I) = \emptyset$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Es wird sich zeigen, dass für die charakteristische Funktion $w(x) = 1_I(x)$ von I die Gleichung (1.4.1) tatsächlich nicht lösbar ist.

Angenommen es gebe ein $h \in L^1$, das die Gleichung (1.4.1) mit $w = 1_I$ löst, dann ist für jede messbare Menge J aufgrund der Definition des Frobenius-Perron-Operators

$$\int_J P_f h(x) dx = \int_{f^{-1}(J)} h(x) dx = \lambda \int_J h(x) dx + m(I \cap J). \quad (1.4.2)$$

Setzt man $J = f^k(I)$, so ergibt sich für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\int_{f^{k-1}(I)} h(x) dx = \lambda \int_{f^k(I)} h(x) dx.$$

Mittels Induktion kann nun gefolgert werden, dass

$$\begin{aligned} \int_I h(x) dx &= \lambda^k \int_{f^k(I)} h(x) dx \\ \int_{f^{-1}(I)} h(x) dx &= \lambda^{-k} \int_{f^{-(k+1)}(I)} h(x) dx. \end{aligned}$$

Für alle $k = mn$ mit $m \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda^k = \lambda^{-k} = 1$. Wir setzen

$$B_+ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{mn}(I) \quad \text{und} \quad B_- = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-(mn+1)}(I).$$

Integration über B_+ liefert

$$\int_{B_+} h(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{f^{mn}(I)} h(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_I h(x) dx,$$

woraus $\int_I h(x) dx = 0$ folgt. Integriert man nun über B_- , so führt die gleiche Überlegung zu $\int_{f^{-1}(I)} h(x) dx = 0$. Diese Ergebnisse, mit $J = I$ in Gleichung (1.4.2) eingesetzt, widersprechen der Voraussetzung, dass $m(I) \neq 0$. \square

Das folgende Korollar gibt eine hinreichende Bedingung für $\Omega(f) \neq X$ an.

1.4. Spektrum des Frobenius-Perron-Operators

Lemma 1.4.3. *Besitzt ein Diffeomorphismus f einen asymptotisch stabilen, hyperbolischen q -periodischen Orbit, dann ist $\Omega(f) \neq X$.*

Beweis. Es genügt eine offene Menge I zu finden, für die $f^k(I) \cap I = \emptyset$ für alle ganzzahligen $k \geq 1$. Es sei z_0, \dots, z_{q-1} der periodische Orbit von f . Aufgrund der Stabilität des Orbits können paarweise disjunkte Umgebungen U_i von z_i , $i = 0, \dots, q-1$, gefunden werden, so dass $f(U_i) \subset U_{i+1}$ und $f(U_{q-1}) \subset U_0$ gilt. Für $I \subset U_0$ genügt es deshalb zu zeigen, dass $f^{kq}(I) \cap I = \emptyset$ für alle $k \geq 1$ gilt. Es wird eine Karte von X gewählt, so dass $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ und f^q eine C^1 -Abbildung von U_0 nach U_0 ist. Da der periodische Orbit attraktiv und hyperbolisch ist, gibt es eine Umgebung $U \subset U_0$ von z_0 und eine Norm, so dass

$$\|f^q(x) - f^q(y)\| \leq L \|x - y\| \text{ für alle } x, y \in U$$

mit $L < 1$ ist. Es sei x_0 ein Element aus U mit $x_0 \neq z_0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|f^k(x_0) - x_0\| > 2\delta \text{ für alle } k \geq 1.$$

Wir setzen $I := \{x : \|x - x_0\| < \delta\}$. Dann gilt für alle $\xi \in I$ und alle $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 2\delta &< \|f^{kq}(x_0) - x_0\| \leq \|f^{kq}(x_0) - f^{kq}(\xi)\| + \|f^{kq}(\xi) - x_0\| \\ &\leq L^k \delta + \|f^{kq}(\xi) - x_0\|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich aber, dass

$$\|f^{kq}(\xi) - x_0\| > \delta,$$

womit $f^{kq}(I) \cap I = \emptyset$ für alle $k \geq 1$ folgt. □

1.4.1. Rotationen

Es wird zunächst ein einfaches Beispiel untersucht. Es sei r_ω die Rotation um den Winkel ω ,

$$r_\omega(x) := x + \omega.$$

Der Frobenius-Perron-Operator zu r_ω lautet $P_{r_\omega} h(x) = h(x - \omega)$. Durch Einsetzen in die Eigenwertgleichung $P_{r_\omega} h = \lambda h$ zeigt man leicht, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Werte

$$\lambda_k = e^{2\pi i k \omega}$$

Eigenwerte des Frobenius-Perron-Operators mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$h_k(x) = e^{-2\pi i k x}$$

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

sind. Weitere Eigenwerte gibt es nicht. Für einen Eigenwert $\lambda = e^{2\pi i\phi}$ gilt nämlich

$$\arg(h(x - \omega)) = \arg(h(x)) + \phi.$$

Die Funktion $g \in L^1(S^1)$ sei durch $g := \arg(h)$ definiert. Zu dieser Abbildung kann ein Lift $G \in L^1(\mathbb{R})$ mittels $g \circ \pi = \pi \circ G$ definiert werden. Allerdings gilt nun, da $g \in L^1$, dass $G(1+x) = k + G(x)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Integriert man die obige Gleichung über S^1 , so erhalten wir

$$\int_0^1 G(x - \omega) dx = \int_0^1 G(x) dx + k\omega = \int_0^1 G(x) dx + \phi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Also ist $\phi \in \omega\mathbb{Z}$, s. PETERSEN [44].

Ist ω irrational, liegen die Eigenwerte dicht auf \mathbb{C}_1^* . Da das Spektrum kompakt ist, muss es in diesem Falle mit \mathbb{C}_1^* identisch sein.

Ist $\omega = p/q$ hingegen rational, so gibt es nur q verschiedene Eigenwerte, nämlich gerade die q -ten Einheitswurzeln. Da aber $P_f^q = P_{f^q}$ und $r_\omega^q = \text{id}$, folgt aus $\sigma(P_f) \subset (\sigma(P_f^q))^{1/q}$, dass diese Eigenwerte schon das gesamte Spektrum von P_{r_ω} bilden.

1.4.2. Kreisabbildungen mit irrationaler Rotationszahl

Ist eine Kreisabbildung C^1 -konjugiert zu einer Drehung, so lassen sich die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes übertragen. Aufgrund der Bemerkung 1.1.8 ist dieser Fall bei rationalen Rotationszahlen weniger interessant, da dann $f^q = \text{id}$ gilt. Im Fall irrationaler Rotationszahlen aber, wo der Satz von Denjoy die Existenz einer Konjugation garantiert, ähnelt das Spektrum des Frobenius-Perron-Operators der Kreisabbildung dem des Frobenius-Perron-Operators einer Drehung sogar dann, wenn die Konjugation nicht stetig differenzierbar ist. Der erste Teil des folgenden Satzes geht zurück auf CHENCINER und IOOSS [8], der Beweis folgt NICOLAISEN [41].

Satz 1.4.4. *Ist die Rotationszahl ω der Kreisabbildung f irrational und genügt f den Voraussetzungen des Satzes von Denjoy, so besteht das Spektrum des Frobenius-Perron-Operators aus dem ganzen Rand des Einheitskreises, es ist also $\sigma(P_f) = \mathbb{C}_1^*$. Ist die Konjugation g darüber hinaus stetig differenzierbar, so sind die Eigenwerte von P_f gegeben durch $\lambda_k = e^{2\pi i k \omega}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten $h_k(x) = e^{-2\pi i k g(x)} g'(x)$.*

1.4. Spektrum des Frobenius-Perron-Operators

Beweis. Der Satz von Denjoy garantiert, dass f konjugiert zu einer Rotation um den Winkel ω ist, also

$$f = g^{-1} \circ r_\omega \circ g.$$

Ist λ ein Spektralwert, so besitzt $P_f - \lambda I$ keine stetige Inverse. Dies gilt immer noch, wenn $P_f - \lambda I$ mit $e^{2\pi i k g(x)}$ multipliziert wird. Beachtet man, dass

$$e^{2\pi i k g(f(x))} = e^{2\pi i k r_\omega(g(x))} = e^{2\pi i k \omega} e^{2\pi i k g(x)},$$

so ist

$$\begin{aligned} e^{2\pi i k g(x)}(P_f h(x) - \lambda h(x)) &= \frac{1}{|f'(f^{-1}(x))|} e^{2\pi i k g(x)} h(f^{-1}(x)) \\ &\quad - e^{-2\pi i k \omega} \lambda e^{2\pi i k g(f(x))} h(x) \\ &= \frac{1}{|f'(f^{-1}(x))|} \tilde{h}(f^{-1}(x)) - e^{-2\pi i k \omega} \lambda \tilde{h}(x) \\ &= P_f \tilde{h}(x) - e^{-2\pi i k \omega} \lambda \tilde{h}(x) \\ \text{mit } \tilde{h}(x) &= e^{2\pi i k g(f(x))} h(x). \end{aligned}$$

Mit λ ist also stets auch $e^{-2\pi i k \omega} \lambda$, $k \in \mathbb{Z}$, ein Spektralwert. Nach Lemma 1.4.1 ist $\sigma(P_f) \subset \mathbb{C}_1^*$. Da das Spektrum nicht leer und ω irrational ist, liegt das Spektrum dicht auf \mathbb{C}_1^* . Außerdem ist das Spektrum kompakt, woraus $\sigma(P_f) = \mathbb{C}_1^*$ folgt.

Aus der stetigen Differenzierbarkeit von g ergibt sich mit $g' > 0$ sofort, dass g ein Diffeomorphismus sein muss. Es gilt $P_f = P_g^{-1} \circ P_{r_\omega} \circ P_g$. Somit ist das Spektrum von P_f mit dem von P_{r_ω} identisch. Die Eigenwerte lauten $\lambda_k = e^{2\pi i k \omega}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind $P_{g^{-1}} \tilde{h}_k$, wobei $\tilde{h}_k(x) = e^{-2\pi i k x}$ die Eigenfunktionen zum Eigenwert λ_k von P_{r_ω} sind. Folglich ist

$$h_k(x) = P_{g^{-1}} \tilde{h}_k(x) = h_k(g(x))g'(x) = e^{-2\pi i k g(x)}g'(x).$$

□

1.4.3. Kreisabbildungen mit rationaler Rotationszahl

Es wird zunächst der einfache Fall betrachtet, dass die Kreisabbildung konjugiert zu einer Drehung um einen rationalen Winkel ist. Sie lässt sich dann darstellen als $f = g^{-1} \circ r_\omega \circ g$ mit $\omega = p/q$, und es ist $f^q = \text{id}$. Setzt man $g = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i \frac{p}{q})$, dann ist die Konjugation g ein Diffeomorphismus, s.

1. Der Frobenius-Perron-Operator für Kreisabbildungen

HERMAN [22, Kap. II]. Es folgt aus $P_f = P_{g^{-1}} \circ P_{r_{p/q}} \circ P_g$, dass — wie bei einer Rotation — das Spektrum nur aus den Eigenwerten $\lambda_k = e^{2\pi i k \frac{p}{q}}$ mit $k = 0, \dots, q-1$ besteht. Die zugehörigen Eigenfunktionen lauten entsprechend $h_k = e^{-2\pi i k g(x)} g'(x)$. Da alle Orbits q -periodisch sind, ist $\Omega(f) = S^1$.

Ist f nicht konjugiert zu einer Drehung, so gilt $\Omega(f) \neq S^1$ und Satz 1.4.2 liefert $\sigma(P_f) = \mathbb{C}_1^*$. Für den Fall, dass $\Omega(f)$ nur isolierte Punkte enthält, kann dieses Ergebnis präzisiert werden.

Korollar 1.4.5. *Es sei f eine Kreisabbildung mit rationaler Rotationszahl und $\Omega(f)$ bestehe nur aus isolierten Punkten. Dann ist $\sigma(P_f) = \mathbb{C}_1^*$ und P_f besitzt keine Eigenwerte.*

Beweis. Angenommen es gebe einen Eigenwert λ von P_f . Dann ist auch 1 ein Eigenwert, das heißt es existiert eine invariante Dichte h und damit auch ein absolut stetiges invariantes Maß μ . Dies steht im Widerspruch zu $\text{supp}(\mu) \subset \Omega(f)$. \square

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

2.1. Ulams Methode

Zur numerischen Berechnung der invarianten Dichte ist es notwendig, die Gleichung $P_f h_0 = h_0$ in $L^1(S^1)$ zu diskretisieren. Die folgende Methode geht auf ULAM [48] zurück und gehört heute zu den Standardmethoden. Ein erster Beweis für die von ihm vermutete Konvergenz der approximierten Dichten gegen die invariante Dichte des Systems gelang LI [35] 1994 für stückweise monotone, expandierende Funktionen. Für Kreisabbildungen steht der Beweis bis heute aus. In diesem Abschnitt wird Ulams Methode zur Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators vorgestellt.

Der Phasenraum S^1 sei in N Intervalle I_0, I_1, \dots, I_{N-1} mit $I_i = [\varphi_i, \varphi_{i+1})$, $\varphi_N = \varphi_0$ unterteilt. Die Intervallenden $\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{N-1}$ seien auf dem Kreis zyklisch angeordnet. Bezüglich dieser Partition kann ein N -dimensionaler Unterraum Δ_N von L^1 definiert werden, der durch die Treppenfunktionen $\{b^i(x) := 1_{I_i}(x)/m(I_i)\}_{i=0, \dots, N-1}$ aufgespannt wird. Wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass mit wachsendem N die Partitionen feiner werden. Das bedeutet, dass für Partitionen $Z_N := \{\varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{N-1}\}$ die Länge $l_N := \max_{i=0, \dots, N-1} \{|I_i|\}$ des größten Intervalls kleiner wird, also aus $N_1 < N_2$ folgt $l_{N_1} < l_{N_2}$. Für $N \rightarrow \infty$ gelte $l_N \rightarrow 0$. Der folgende Operator Q_N liefert eine Projektion von L^1 auf Δ_N .

Definition 2.1.1. Für $h \in L^1$ und $N \in \mathbb{N}$ definieren wir $Q_N : L^1 \rightarrow \Delta_N$ durch

$$Q_N h = \sum_{i=0}^{N-1} c_i 1_{I_i}, \text{ wobei } c_i = \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} h(s) ds.$$

Wendet man den Projektor Q_N auf den Frobenius-Perron-Operator an, so ergibt

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

sich für ein Basiselement b^j

$$\begin{aligned} Q_N P_f b^j &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} P_f b^j(s) ds 1_{I_i} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{m(I_i)} \int_{f^{-1}(I_i)} b^j(s) ds 1_{I_i} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m(f^{-1}(I_i) \cap I_j)}{m(I_j)} \frac{1}{m(I_i)} 1_{I_i}. \end{aligned}$$

Den diskretisierten Frobenius-Perron-Operator $P_{f,N}: \Delta_N \rightarrow \Delta_N$ erhält man als Hintereinanderausführung von Q_N und P_f . Die Einträge der darstellenden Matrix P_N bzgl. der oben angegebenen Basis lauten dann

$$P_{ij} = \frac{m(f^{-1}(I_i) \cap I_j)}{m(I_j)}. \quad (2.1.1)$$

Damit läßt sich $P_{f,N}$ auch schreiben als

$$P_N b^j := \sum_{i=0}^{N-1} P_{ij} b^i.$$

Bemerkung 2.1.2. Gleichung (2.1.1) kann auch unabhängig von der Herleitung über den Frobenius-Perron-Operator als Übergangswahrscheinlichkeit des Intervalls I_j in das Intervall I_i unter der Abbildung f aufgefasst werden, s. a. KREUZER [32]. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 2.3 näher erläutert werden.

LI [35] hat gezeigt, dass der diskretisierte Operator P_N zumindest punktweise gegen den Frobenius-Perron-Operator P_f konvergiert.

Lemma 2.1.3. *Für alle $h \in L^1$ gilt $P_N Q_N h \rightarrow P_f h$ für $N \rightarrow \infty$.*

Beweis. Da $C(S^1)$ dicht in $L^1(S^1)$ liegt, finden wir zu jedem $h \in L^1$ und zu jedem $\epsilon > 0$ eine stetige Funktion g , so dass $\|g - h\| < \epsilon/3$. Die Funktion g ist auf S^1 sogar gleichmäßig stetig. Deshalb gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N > N_0$

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \epsilon/3 \text{ für alle } x_1, x_2 \in I_i, i = 0, \dots, N-1.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{I_i} |(Q_N g)(s) - g(s)| ds &= \int_{I_i} \left| \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} g(s') ds' - g(s) \right| ds \\ &\leq \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} \int_{I_i} |g(s') - g(s)| ds' ds \\ &< m(I_i) \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\|Q_N g - g\| = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{I_i} |Q_N g(s) - g(s)| ds < \frac{\epsilon}{3}.$$

Für $h \geq 0$ gilt

$$\int_0^1 Q_N h(s) ds = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{m(I_i)} \int_{I_i} \int_0^1 1_{I_i}(s') ds' h(s) ds = \int_0^1 h(s) ds,$$

woraus $\|Q_N\| = 1$ folgt. Es ist also

$$\|Q_N h - h\| \leq \|Q_N h - Q_N g\| + \|Q_N g - g\| + \|g - h\| < \epsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $Q_N h \rightarrow h$ für $N \rightarrow \infty$. Mit $P_N Q_N h = Q_N P_f Q_N h$ folgt wegen

$$\|P_N Q_N h - P_f h\| \leq \|P_N\| \|Q_N h - h\| + \|Q_N P_f h - P_f h\|$$

und $\|P_N\| = 1$ die Behauptung. □

Um das invariante Maß numerisch zu approximieren, wird für eine hinreichend feine Partition ein Eigenvektor von P_N zum Eigenwert 1 bestimmt¹. Bisher gibt es keinen allgemeinen Beweis, der die Konvergenz einer Folge von solchen Eigenvektoren gegen das invariante Maß von P_f zeigt. DELLNITZ und JUNGE [12] gelang es, Konvergenz für Axiom-A-Systeme zu zeigen. Leider sind die notwendigen Voraussetzungen für Kreisabbildungen verletzt, so dass die Frage nach der Konvergenz für diese Abbildungen noch unbeantwortet ist. Für sehr spezielle Partitionen werden wir jedoch in Kapitel 4 eine schwache Form der Konvergenz zeigen können.

¹ Es werden hierfür Wahrscheinlichkeitsvektoren gewählt. In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, unter welchen Bedingungen ein solcher Eigenvektor eindeutig ist.

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

2.2. Theorie nicht-negativer Matrizen

Im vorhergehenden Abschnitt wurde erläutert, dass der diskretisierte Frobenius-Perron-Operator als Matrix mit nicht-negativen Einträgen aufgefasst werden kann. Dieser Abschnitt ist deshalb der Theorie nicht-negativer Matrizen gewidmet, die bei der Untersuchung des Spektrums und der invarianten Dichte des diskretisierten Frobenius-Perron-Operator hilfreich sein wird. Die Darstellung folgt dem Standardwerk von BERMAN und PLEMMONS [4, Kap. 2]. Dort finden sich auch die Beweise der in diesem Abschnitt vorgestellten Sätze. Im Folgenden wird stets von quadratischen Matrizen ausgegangen. Mit $a_{ij}^{(m)}$ wird das (ij) -te Element der m -ten Potenz A^m einer Matrix A bezeichnet.

Satz 2.2.1. *Der Spektralradius $r(A)$ einer nicht-negativen Matrix A ist ein Eigenwert von A . Es gibt einen zugehörigen Eigenvektor, der nicht-negativ ist. Entsprechendes gilt für A^T .*

Die Unterscheidung nicht-negativer Matrizen in reduzible und irreduzible Matrizen wird entscheidend für die weiteren Betrachtungen sein.

Definition 2.2.2. Eine $n \times n$ -Matrix A heißt *reduzibel*, falls es eine Permutationsmatrix P gibt, so dass

$$PAP^T = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

wobei B und D quadratisch sind, bzw. im Falle $n = 1$, falls $A = 0$. Eine nicht reduzible Matrix heißt *irreduzibel*.

Satz 2.2.3. *Eine nicht-negative Matrix A ist genau dann irreduzibel, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- a) *Jeder nicht-negative Eigenvektor ist positiv in jeder Komponente.*
- b) *A hat genau einen (bis auf skalare Multiplikation) nicht-negativen Eigenvektor und dieser ist in jeder Komponente positiv.*
- c) *A^T ist irreduzibel.*
- d) *Für alle (i, j) existiert eine natürliche Zahl $q > 0$, so dass $a_{i,j}^{(q)} > 0$.*

Der folgende grundlegende Satz stammt von Perron (1907) und Frobenius (1912). Perron bewies den Satz zunächst für positive Matrizen. 1912 erweiterte Frobenius ihn für nicht-negative Matrizen.

2.2. Theorie nicht-negativer Matrizen

Satz 2.2.4 (Perron-Frobenius). *Es sei A eine nicht-negative irreduzible Matrix.*

a) *Dann ist der Spektralradius $r = r(A)$ ein algebraisch einfacher Eigenwert. Jeder Eigenwert vom Betrag $r(A)$ ist ebenfalls einfach.*

b) *Es seien*

$$\lambda_0 = re^{i\theta_0}, \lambda_1 = re^{i\theta_1}, \dots, \lambda_{q-1} = re^{i\theta_{q-1}},$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{q-1} < 2\pi,$$

die Eigenwerte von A vom Betrag r . Dann sind diese Eigenwerte die q -ten Wurzeln der Gleichung $\lambda^q - r^q = 0$. Darüber hinaus ist das gesamte Spektrum rotationssymmetrisch bzgl. des Winkels $\frac{2\pi}{q}$.

In diesem Fall gibt es eine Permutationsmatrix P , so dass

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{1q} \\ A_{21} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{q,q-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2.1)$$

wobei die Nullblöcke auf der Diagonalen quadratisch sind.

Definition 2.2.5. Eine Matrix A , die dem Satz von Perron-Frobenius mit $q > 1$ genügt, heißt *q -zyklisch* oder einfach *zyklisch*. Eine irreduzible Matrix, die nicht zyklisch ist, heißt *primitiv*.

Primitive Matrizen sind durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet.

Satz 2.2.6. *Für eine nicht-negative Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) *A ist primitiv.*
- b) *A ist irreduzibel und der Spektralradius $r(A)$ ist der einzige betragsmäßig größte Eigenwert.*
- c) *Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass A^m positiv ist.*

Die Struktur nicht-negativer Matrizen lässt sich mit Hilfe graphentheoretischer Begriffe sehr anschaulich darstellen.

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

Definition 2.2.7. Der einer nicht-negativen $(n \times n)$ -Matrix A zugeordnete gerichtete Graph $G(A)$ besteht aus n Knoten K_1, \dots, K_n . Genau dann führt eine Kante von K_i nach K_j , wenn $a_{ij} > 0$. Ein gerichteter Graph heißt *stark zusammenhängend*, wenn zu jedem geordneten Knotenpaar (K_i, K_j) eine Folge von Kanten existiert, die von K_i nach K_j führt. Die Folge von Kanten $W = \{K_{i_0}K_{i_1}, K_{i_1}K_{i_2}, \dots, K_{i_{l-1}}K_{i_l}\}$ heißt *Pfad*. Die Anzahl l der Kanten ist die *Länge* des Pfades. Der Pfad heißt *einfacher Pfad*, wenn die Knoten K_{i_1}, \dots, K_{i_l} paarweise verschieden sind, und *Zyklus*, wenn $K_{i_0} = K_{i_l}$.

Irreduzibilität lässt sich damit auch graphentheoretisch beschreiben.

Satz 2.2.8. *Genau dann ist die Matrix A irreduzibel, wenn $G(A)$ stark zusammenhängend ist.*

Auch für Zyklizität und Primitivität einer Matrix gibt es eine graphentheoretische Interpretation.

Satz 2.2.9. *Es sei A eine nicht-negative, irreduzible $(n \times n)$ -Matrix und S_i die Menge der Längen l_k aller Zyklen von $G(A)$, die durch K_i führen. Mit q_i wird der größte gemeinsame Teiler von S_i bezeichnet. Dann ist $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$. Ist $q = 1$, so ist A primitiv. Andernfalls ist die Matrix q -zyklisch.*

Bemerkenswert und für die folgenden Untersuchungen hilfreich ist, dass bei einer graphentheoretischen Betrachtung die Größe der Einträge einer Matrix ohne Bedeutung ist. Irreduzibilität, Zyklizität, Primitivität und Reduzibilität hängen allein von der Struktur ab, die sich aus dem Ort der positiven Einträge ergibt, nicht aber von deren Größe.

2.3. Übergangsmatrizen homogener Markov-Ketten

Neben der graphentheoretischen Betrachtung nicht-negativer Matrizen kann die Matrix P_N auch, wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, als Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette gesehen werden. Die folgenden Konzepte aus der Theorie homogener Markov-Ketten haben für die späteren Untersuchungen zentrale Bedeutung.

Für die darstellende Matrix P_N des diskretisierten Frobenius-Perron-Operators $P_{f,N}$ aus Abschnitt 2.1 gilt

$$\sum_{i=0}^{N-1} P_{ij} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m(f^{-1}(I_i) \cap I_j)}{m(I_j)} = 1.$$

2.3. Übergangsmatrizen homogener Markov-Ketten

Nicht-negative Matrizen mit dieser Eigenschaft heißen *spaltenstochastisch*. Sie können als sogenannte *Übergangsmatrizen* einer homogenen (endlichen) Markov-Kette aufgefasst werden, die im Folgenden einfach Markov-Kette genannt wird. Ein Eintrag P_{ij} der Matrix P_N gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der f einen zufällig gewählten Punkt aus dem Intervall I_j in das Intervall I_i abbildet. Die Begriffe aus der Theorie der homogenen Markov-Ketten sind hilfreich, um die Struktur der Matrix P_N zu beschreiben. Die Darstellung folgt wieder BERMAN und PLEMMONS [4, Kap. 8].

Zerlegt man den Zustandsraum S^1 wie in Kapitel 2.1 in N Teilintervalle I_i , $i = 0, \dots, N - 1$, so befindet sich ein zufällig gewählter Punkt x aus S^1 genau in einem der N Teilintervalle. Man sagt, der Punkt x hat den *Zustand* i , wenn $x \in I_i$. Die *Übergangswahrscheinlichkeit* eines Punktes mit Zustand j unter Anwendung von f in den Zustand i zu gelangen, ist somit P_{ij} . Ein nicht-negativer Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ heißt *Wahrscheinlichkeitsvektor*, kurz W-Vektor, wenn gilt $\sum_{i=0}^{N-1} v_i = 1$. Es ist klar, dass Übergangsmatrizen W-Vektoren durch Rechtsmultiplikation auf W-Vektoren abbilden. Werden durch einen W-Vektor v^0 die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in den Zuständen als Startwert vorgegeben, so sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach n -facher Anwendung von f gegeben durch den W-Vektor $v^n = P^n v^0$. Für einen stochastischen Eigenvektor v^* zum Eigenwert 1 gilt dann $P^n v^* = v^*$. Er wird deshalb auch ein stationärer W-Vektor der Markov-Kette genannt.

Definition 2.3.1. Ein Zustand i führt zu einem Zustand j , wenn es ein $m \geq 0$ gibt, so dass $p_{ij}^{(m)} > 0$. In diesem Fall schreibt man $i \rightarrow j$. Gilt $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$, so sagt man i und j *kommunizieren*. Man schreibt dafür $i \leftrightarrow j$. Ein Zustand heißt *rekurrent*, wenn er mit jedem Zustand, zu dem er führt, kommuniziert, andernfalls heißt er *transient*. Ein transienter Zustand, der nur mit sich selbst kommuniziert, heißt *singulär*.

Der Zusammenhang mit den oben ausgeführten graphentheoretischen Begriffen liegt auf der Hand. Der Zustand i führt genau dann zu j , wenn es einen Pfad in $G(A)$ gibt, der von K_i nach K_j führt. Pfade der Länge 0 sind dabei zugelassen. Kommunizierende Zustände fallen mit stark zusammenhängenden Knoten zusammen.

Die Relation $i \leftrightarrow j$ ist eine Äquivalenzrelation. Sie teilt die Menge der Zustände (und damit auch die Menge der Knoten von $G(A)$) in Klassen. Die Eigenschaften *rekurrent* und *transient* sind Klasseneigenschaften, d.h. ist ein Zustand einer Klasse rekurrent (transient), so gilt dies für alle Zustände seiner Äquivalenzklasse. Wir werden deshalb im Folgenden auch von rekurrenten bzw. transienten

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

Klassen sprechen. Transiente Klassen, die nur aus einem singulären Zustand bestehen, nennen wir ebenfalls *singulär*.

Definition 2.3.2. Eine Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn sie aus genau einer rekurrenten Klasse besteht. Sie heißt *regulär*, wenn es ein $m > 0$ gibt, so dass $p_{ij}^{(m)} > 0$ für alle i, j gilt, und *periodisch*, wenn sie ergodisch, aber nicht regulär ist.

Diese Eigenschaften der Klassen einer Markov-Kette hängen eng mit der Struktur ihrer Übergangsmatrix zusammen. Mit den im vorhergehenden Kapitel vorgestellten Sätzen ergibt sich leicht

Satz 2.3.3. *Es sei A die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Die Markov-Kette ist*

- a) *ergodisch, genau dann, wenn A irreduzibel ist.*
- b) *regulär, genau dann, wenn A primitiv ist.*
- c) *periodisch, genau dann, wenn A zyklisch ist.*

Der Satz von Perron-Frobenius liefert für zyklische Matrizen die Normalform (2.2.1). Mit den nun zur Verfügung stehenden Begriffen lässt sich eine allgemeine Normalform für Übergangsmatrizen beschreiben. Es seien S_1, \dots, S_k die rekurrenten und R_1, \dots, R_l die transienten Klassen einer Markov-Kette mit n Zuständen. Die Klassen S_i bestehen aus n_i Zuständen. Die Übergangsmatrix kann so permutiert werden, dass sie folgende Form hat:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & B & \\ 0 & \cdots & 0 & D_k & & & \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & C_1 & & & \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & \cdots & 0 & C_l \end{bmatrix}. \quad (2.3.1)$$

Die Matrizen D_i sind irreduzible $(n_i \times n_i)$ -Übergangsmatrizen, bestehend aus den Zuständen der Klasse S_i , $i = 1, \dots, k$. Für alle D_i sind die Spektralradien $r(D_i) = 1$. Ist eine Klasse S_i zyklisch, so hat sie Normalform (2.2.1). Die Matrizen C_i , $i = 1, \dots, l$ sind ebenfalls irreduzibel und haben einen Spektralradius

2.3. *Übergangsmatrizen homogener Markov-Ketten*

$r(C_i) < 1$. Oberhalb der Diagonalblöcke C_i befinden sich positive Einträge, die den Übergang in andere Klassen charakterisieren.

Auch die in diesem Abschnitt vorgestellten Begriffe sind zunächst unabhängig von der Größe der positiven Einträge. Erst wenn die Frage nach den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten für Übergänge von Interesse ist, muss der Wert der positiven Einträge berücksichtigt werden.

2. Diskretisierung des Frobenius-Perron-Operators

3. Kreismatrizen

Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen sind typischerweise *Bandmatrizen*. Mit Hilfe diskreter Kreisabbildungen, den *Bandbreitenabbildungen*, kann die Bandstruktur dieser „Kreismatrizen“ charakterisiert werden. Die Bandbreitenabbildungen liefern Eigenschaften des Spektrums und des stationären W-Vektors der Kreismatrix. Ein erster Ansatz zur Untersuchung von Kreismatrizen stammt von NICOLAISEN und WERNER [42]. Einige der folgenden Ergebnisse finden sich auch in HOTZEL, LEHMKUHL und WERNER [24].

Die Übergangsmatrix P_N ist typischerweise eine schwach besetzte Matrix. Nur solche Einträge a_{ij} sind positiv, für die $m(f^{-1}(I_i) \cap I_j) \neq 0$. Betrachtet man die j -te Spalte, so befinden sich die positiven Einträge genau in den Zeilen, für die $m(f(I_j) \cap I_i) \neq 0$ gilt. Wird die Indexmenge $\underline{N} = \{0, \dots, N-1\}$ mit der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_N := \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ identifiziert, so kann von Indexintervallen $[i, j]$ gesprochen werden, die auch für $i > j$ sinnvoll sind. Die positiven Einträge einer Spalte befinden sich also in aufeinanderfolgenden Zeilen, deren Indizes im Intervall $[\mathfrak{o}(j), \mathfrak{u}(j)]$ liegen¹. Die Ränder des Intervalls sind gegeben durch

$$f(\varphi_j) \in I_{\mathfrak{o}(j)}, \quad f(\varphi_{j+1}) \in (\varphi_{\mathfrak{u}(j)}, \varphi_{\mathfrak{u}(j)+1}].$$

Die Abbildungen $\mathfrak{o}, \mathfrak{u}: \underline{N} \rightarrow \underline{N}$ sind diskrete, monotone Kreisabbildungen². Wir nennen sie *Bandbreitenabbildungen* zu A . Es ist wichtig zu beachten, dass wir die Numerierung der Zeilen und der Spalten der Übergangsmatrizen stets mit 0 beginnen, um die Modulo-Rechnung zu vereinfachen.

Um die in den folgenden Abschnitten behandelte Fragestellung zu motivieren und zu illustrieren, wird folgendes einfaches Beispiel betrachtet.

Beispiel 3.0.4. Der Phasenraum S^1 sei in die sechs gleich großen Intervalle $I_i = [\phi_i, \phi_{i+1})$ mit Partitionsunkten $\phi_i = \frac{i}{6}$, $i = 0, \dots, 5$ aufgeteilt. Eine Kreisabbildung f bilde die Partitionspunkte wie in Abbildung 3.1 dargestellt ab.

¹ Die Bezeichnungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} wurden gewählt, weil es sich hierbei um den *obersten* bzw. den *untersten* Eintrag der Spalte handelt. Entsprechend werden später für den linken und den rechten Eintrag einer Zeile die Bezeichnungen \mathfrak{l} und \mathfrak{r} verwendet.

² Was dies genau bedeutet, wird in Abschnitt 3.1 definiert werden.

3. Kreismatrizen

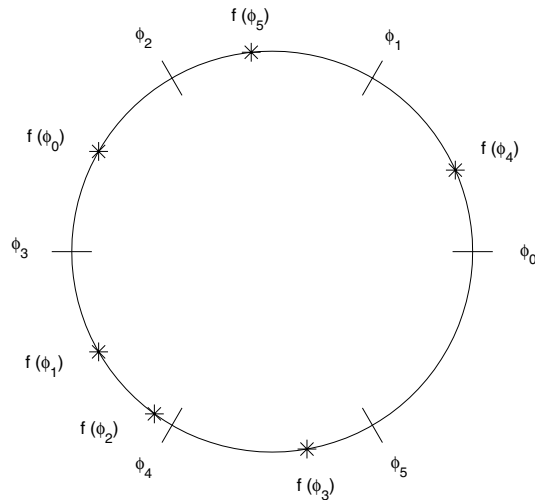


Abbildung 3.1.: Beispiel 3.0.4, Abbildung der Partionspunkte ϕ_i unter f

Die Übergangsmatrix hat dann folgende Struktur:

$$\begin{bmatrix} & & & * & * & \\ & & & & * & * \\ * & & & & & * \\ * & * & * & & & \\ & & * & * & & \\ & & & * & & \end{bmatrix},$$

wobei $*$ für einen positiven Eintrag der Matrix steht. Die Einträge in den Spalten lassen sich durch die Bandbreitenabbildungen σ und \mathbf{u} beschreiben, die in Abbildung 3.2 veranschaulicht werden. Es gilt $a_{ij} > 0$ genau dann, wenn $i \in [\sigma(j), \mathbf{u}(j)]$.

Die Bandbreitenabbildung σ besitzt den Zyklus $\{0\ 2\ 3\ 4\}$ der Länge 4. Ihr kann deshalb die Rotationszahl³ $\rho(\sigma) = \frac{1}{4}$ zugeordnet werden. Die Abbildung \mathbf{u} hingegen besitzt den Zyklus $\{0\ 3\}$ der Länge 2 und hat damit die Rotationszahl $\rho(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}$. Betrachtet man statt der Spalten die Zeilen der Übergangsmatrix, so können die positiven Einträge ebenso über Bandbreitenabbildungen \mathbf{l} und \mathbf{r} charakterisiert werden. Es ist jetzt $a_{ij} > 0$ genau dann, wenn $j \in [\mathbf{l}(i), \mathbf{r}(i)]$. Abbildung 3.3 illustriert die Bandbreitenabbildungen \mathbf{l} und \mathbf{r} .

Die Rotationszahlen von \mathbf{l} und \mathbf{r} sind $\rho(\mathbf{l}) = \frac{1}{2}$ und $\rho(\mathbf{r}) = \frac{3}{4}$. Es besteht offensichtlich der Zusammenhang $\rho(\mathbf{l}) = 1 - \rho(\mathbf{u})$ bzw. $\rho(\mathbf{r}) = 1 - \rho(\sigma)$. Hauptziel

³ Die Definition der Rotationszahl diskreter Kreisabbildungen erfolgt in Abschnitt 3.1.

3.1. Diskrete Kreisabbildungen

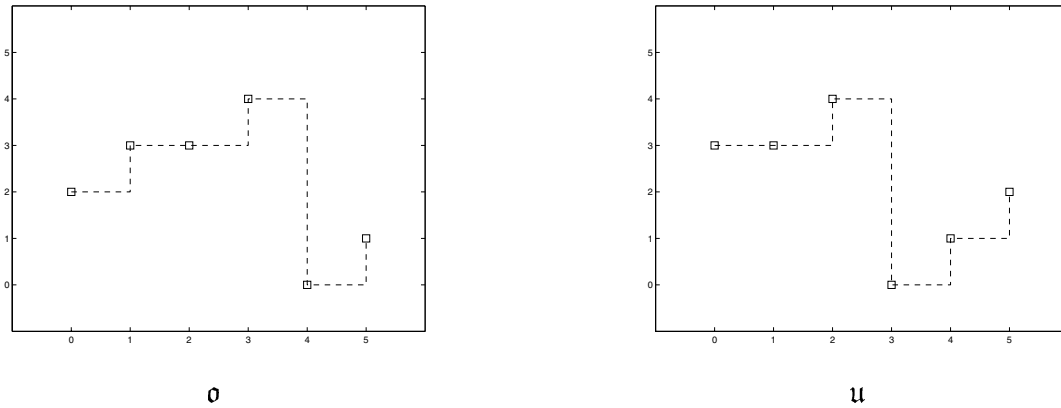


Abbildung 3.2.: Beispiel 3.0.4, Die Bandbreitenabbildungen σ und u .

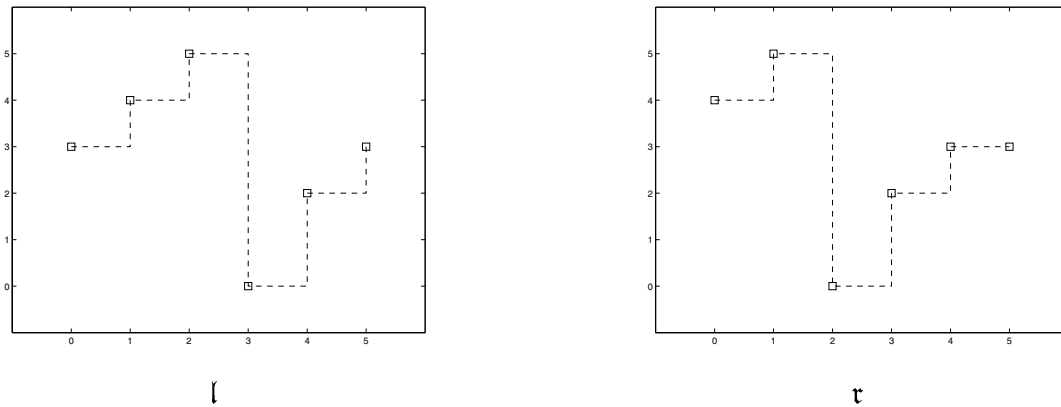


Abbildung 3.3.: Beispiel 3.0.4, Die Bandbreitenabbildungen l und τ .

des folgenden Abschnitts ist es, diesen Zusammenhang zu beweisen.

3.1. Diskrete Kreisabbildungen

In diesem Abschnitt werden Konzepte zur Beschreibung diskreter Kreisabbildungen entwickelt. Sie bilden die Grundlage der Untersuchung der Bandbreitenabbildungen von Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen.

Wir identifizieren im Folgenden die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/(N\mathbb{Z})$ stets mit der Menge ihrer Hauptrepräsentanten $\underline{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Ein Intervall von

3. Kreismatrizen

\mathbb{Z}_N wird definiert als

$$y \in [x, z] \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt Repräsentanten } \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{Z} \text{ von } x, y \text{ und } z \\ \text{mit } \tilde{z} - \tilde{x} < N \text{ und } \tilde{x} \leq \tilde{y} \leq \tilde{z}.$$

Die Länge eines solchen Intervalls sei

$$m([x, y]) := \begin{cases} y - x & \text{falls } x \leq y, \\ y - x + N & \text{falls } x > y. \end{cases}$$

Die kanonische Projektion von \mathbb{Z} auf \mathbb{Z}_N wird wie üblich mit π bezeichnet.

Definition 3.1.1. Eine diskrete Kreisabbildung ist eine Abbildung $d: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$, für die

$$\sum_{i=0}^{N-2} m([d(i), d(i+1)]) \leq N \quad (3.1.1)$$

gilt.

Bemerkung 3.1.2. Die Eigenschaft (3.1.1) kann als eine Art Monotonie aufgefasst werden. Sie sichert, dass für die diskrete Kreisabbildung höchstens an einer Stelle i_0 gilt $d(i_0) > d(i_0 + 1)$, ansonsten aber stets $d(i) \leq d(i + 1)$ ist. Zusätzlich wird gewährleistet, dass $d(i) \leq d(i + N - 1)$ gilt. Abbildung 3.4 zeigt eine diskrete Abbildung, die die Bedingung (3.1.1) verletzt und somit keine diskrete Kreisabbildung ist. Aus Eigenschaft (3.1.1) kann für einen Lift Monotonie und die Lifteigenschaft $D(i + N) = D(i) + N$ geschlossen werden. Dies ist Inhalt der folgenden Definition.

Satz und Definition 3.1.3. Es sei $d: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_n$ eine diskrete Kreisabbildung. Dann gibt es eine monoton steigende Abbildung $D: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$D \circ \pi = \pi \circ d \quad \text{und} \quad (3.1.2)$$

$$D(i + N) = D(i) + N \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.3)$$

Eine solche Abbildung D heißt *Lift* der diskreten Kreisabbildung d . Zu jeder monoton steigenden Abbildung $D: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ mit der Eigenschaft (3.1.3) gehört genau eine diskrete Kreisabbildung, deren Lift sie ist. Zwei Lifts einer diskreten Kreisabbildung unterscheiden sich nur um eine Konstante kN mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Ist d nicht konstant, so erfüllt die Abbildung

$$D(0) := d(0), \\ D(i) := D(i - 1) + m([d \circ \pi(i - 1), d \circ \pi(i)])$$

3.1. Diskrete Kreisabbildungen

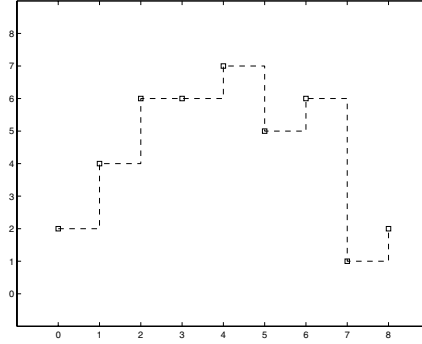


Abbildung 3.4.:

Beispiel einer diskreten Abbildung, die Bedingung (3.1.1) verletzt.

(3.1.2) und (3.1.3). Andernfalls definieren wir $D(i + kN) := d(0) + kN$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $i \in \mathbb{Z}_n$.

Ist D umgekehrt eine monoton steigende Abbildung, die (3.1.3) erfüllt, so definiert $d(i) := D(i) \bmod N$ für $i = 0, \dots, N - 1$ eine diskrete Kreisabbildung.

Es seien nun D_1 und D_2 verschiedene Lifts der diskreten Kreisabbildung d . Aus der Lifteigenschaft (3.1.2) folgt $D_1 \circ \pi = D_2 \circ \pi$ und somit $D_1 \bmod N = D_2 \bmod N$. Aufgrund der Eigenschaft (3.1.3) unterscheiden sich zwei Lifts somit nur um eine Konstante kN . \square

Jeder Orbit einer diskreten Kreisabbildung endet stets in einem periodischen Orbit. Ordnet man die Punkte dieses Orbits $i_0 < i_1 < \dots < i_{q-1}$ zyklisch an, so gibt es teilerfremde Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p < q$ und $d(i_j) = i_{j+p \bmod q}$. Für den Lift mit $D(i_0) = i_1$ gilt dann $D^q(i_j) = i_j + pN$. Man kann zeigen, dass aufgrund der Monotonie und (3.1.3) die Zahlen p und q unabhängig vom periodischen Orbit sind. Wir können somit die *Rotationszahl* einer diskreten Kreisabbildung durch $\rho(d) := p/q$ definieren. Es ist wie im kontinuierlichen Fall

$$\rho(d) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D^k(i)}{kN}, \quad (3.1.4)$$

wenn der spezielle Lift mit $D(0) = d(0)$ gewählt wird.

Es sei D ein Lift einer diskreten Kreisabbildung. Wir definieren dazu Abbildungen \overline{D} und \tilde{D} durch

$$\overline{D}(i) := \min\{j \in \mathbb{Z} : D(j) \geq i\} \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{D}(i) := \max\{j \in \mathbb{Z} : D(j) \leq i\}. \quad (3.1.6)$$

3. Kreismatrizen

Die Abbildung \overline{D} ist monoton steigend, was unmittelbar aus der Definition folgt. Außerdem erfüllt \overline{D}

$$\begin{aligned}\overline{D}(i + N) &= \min\{j \in \mathbb{Z} : D(j) \geq i + N\} \\ &= \min\{j \in \mathbb{Z} : D(j - N) \geq i\} \\ &= \min\{j \in \mathbb{Z} : D(j) \geq i\} + N\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

und ist somit ein Lift einer diskreten Kreisabbildung. Entsprechendes gilt für \tilde{D} . Die durch \overline{D} und \tilde{D} definierten diskreten Kreisabbildungen bezeichnen wir mit \bar{d} resp. \tilde{d} .

Bemerkung 3.1.4. Aus (3.1.7) kann gefolgert werden, dass für die Abbildungen \overline{D} und \tilde{D} für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\overline{D + kN} = \overline{D} - kN \text{ und } \widetilde{D + kN} = \tilde{D} - kN.\tag{3.1.8}$$

Lemma 3.1.5. *Es sei D ein Lift einer diskreten Kreisabbildung. Dann gilt für die Abbildungen \overline{D} und \tilde{D}*

$$\overline{D} \circ D \leq \text{id} \leq D \circ \overline{D}\tag{3.1.9}$$

$$D \circ \tilde{D} \leq \text{id} \leq \tilde{D} \circ D.\tag{3.1.10}$$

Es seien umgekehrt $D_1: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ und $D_2: \mathbb{Z}_N \rightarrow \mathbb{Z}_N$ monoton steigende, diskrete Abbildungen mit der Eigenschaft (3.1.3). Gilt zusätzlich

$$D_1 \circ D \leq \text{id} \leq D \circ D_1,$$

so ist $D_1 = \overline{D}$. Gilt entsprechend für D_2

$$D \circ D_2 \leq \text{id} \leq D_2 \circ D,$$

so ist $D_2 = \tilde{D}$.

Beweis. Die Eigenschaften (3.1.9) und (3.1.10) folgen direkt aus den Definitionen (3.1.5) und (3.1.6).

Es sei $i \in \mathbb{Z}$ und $\overline{D}(i) = j$. Für die Abbildung D_1 gilt $D(D_1(i)) \geq i$. Da aber j minimal ist, folgt daraus $j \leq D_1(i)$. Andererseits ist $D_1(D(j)) \leq j$ und $D(j) \geq i$. Mit der Monotonie von D_1 kann daraus $j \geq D_1(i)$ geschlossen werden, womit $D_1(i) = j = \overline{D}$ gezeigt ist. Der Beweis für \tilde{D} wird entsprechend geführt. \square

3.1. Diskrete Kreisabbildungen

Bemerkung 3.1.6. Durch die Gleichungen (3.1.9) und (3.1.10) sind die Abbildungen \overline{D} und \widetilde{D} offensichtlich eindeutig charakterisiert. Lifte diskreter Kreisabbildungen sind im Allgemeinen nicht invertierbar. Man kann aber \overline{D} als Linkssubinverse und Rechtssuperinverse der Abbildung D auffassen. Die Abbildung \widetilde{D} stellt dementsprechend eine Linkssuperinverse und eine Rechtssubinverse dar.

Korollar 3.1.7. *Für jede Kreisabbildung d mit Lift D gilt $\widetilde{\overline{D}} = \overline{\widetilde{D}} = D$. Außerdem ist $\overline{D^k} = (\overline{D})^k$ und $\widetilde{D^k} = (\widetilde{D})^k$.*

Beweis. Nach Lemma 3.1.5 gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\overline{D} \circ \widetilde{D} &\leq \text{id} \leq \widetilde{D} \circ \overline{D} \\ \overline{D} \circ \widetilde{D} &\leq \text{id} \leq \widetilde{D} \circ \overline{D}.\end{aligned}$$

Da die Eigenschaften (3.1.9) und (3.1.10) \overline{D} und \widetilde{D} eindeutig beschreiben, folgt sofort, dass $\widetilde{\overline{D}} = D = \overline{\widetilde{D}}$. Für die zweite Aussage wird $\overline{D^2} = (\overline{D})^2$ gezeigt. Die Behauptung folgt dann mittels vollständiger Induktion. Es genügt zu zeigen, dass

$$(\overline{D})^2 \circ D^2 \leq \text{id} \leq D^2 \circ (\overline{D})^2$$

gilt. Aus $\overline{D} \circ D \leq \text{id}$ folgt $\overline{D} \circ D^2 \leq D$. Die Monotonie von \overline{D} liefert damit

$$(\overline{D})^2 \circ D^2 \leq \overline{D} \circ D \leq \text{id}.$$

Die zweite Ungleichung erhält man aus $D \circ \overline{D} \geq \text{id}$ und somit $D \circ (\overline{D})^2 \geq \overline{D}$. Es folgt aus der Monotonie von D

$$D^2 \circ (\overline{D})^2 \geq D \circ \overline{D} \geq \text{id}.$$

Die Aussage wird für \widetilde{D} entsprechend bewiesen. □

Es soll nun untersucht werden, wie die Rotationszahlen konjugierter, diskreter Kreisabbildungen zusammenhängen. Der folgende Fixpunktsatz wird dabei von entscheidender Bedeutung sein.

Satz 3.1.8 (Fixpunktsatz). *Es sei d eine diskrete Kreisabbildung. Genau dann besitzt d einen Fixpunkt i_0 , wenn es $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ und einen Lift D gibt mit $D(i_1) \leq i_1$ und $D(i_2) \geq i_2$. Es gilt dann $D(i_0) = i_0$.*

3. Kreismatrizen

Beweis. Es gelte $D(i_1) \leq i_1$ und $D(i_2) \geq i_2$ für einen Lift von d . Angenommen d habe keinen Fixpunkt. Dann folgt aus $D(i) \neq i$, für alle $i \in \mathbb{Z}$, aufgrund der Monotonie des Lifts $D(i_2 + j) > i_2 + j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Folglich ist $D(i_1 + N) > i_1 + N$ im Widerspruch zu $D(i_1 + N) = D(i_1) + N < i_1 + N$. Es muss also ein i_0 mit $D(i_0) = i_0$ geben.

Gibt es ein i_0 mit $d(i_0) = i_0$ und sei D ein Lift von d , so gilt $D(i_0) = i_0 + kN$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $\widehat{D} = D - kN$ und $i_1 = i_2 = i_0$. Dann ist \widehat{D} ebenfalls ein Lift von D mit $D(i_0) = i_0$. \square

Korollar 3.1.9. *Für eine diskrete Kreisabbildung d mit Lift D sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a) *Die Abbildung D besitzt einen Fixpunkt.*
- b) *Die Abbildung \overline{D} besitzt einen Fixpunkt.*
- c) *Die Abbildung \widetilde{D} besitzt einen Fixpunkt*

Beweis. Zunächst besitze D einen Fixpunkt i_0 . Mit Lemma 3.1.5 gilt dann $\overline{D}(D(i_0)) = \overline{D}(i_0) \leq i_0$. Aus der Definition von \overline{D} erhält man $\overline{D}(i_0 + 1) \geq i_0 + 1$. Der Fixpunktsatz 3.1.8 garantiert somit die Existenz eines Fixpunktes von \overline{D} . Unter der Bedingung, dass D einen Fixpunkt besitzt, kann genauso gezeigt werden, dass auch \widetilde{d} einen Fixpunkt besitzt. Nutzt man den ersten Teil von Korollar 3.1.7, so ist klar, dass mit \widetilde{D} auch $D = \widetilde{\widetilde{D}}$ einen Fixpunkt besitzt. Ebenso kann man schließen, dass, wenn \widetilde{D} einen Fixpunkt besitzt, dies auch für $D = \widetilde{\widetilde{D}}$ gelten muss. \square

Aus diesem Korollar kann nun der Zusammenhang der Rotationszahlen von d , \overline{d} und \widetilde{d} gefolgert werden.

Satz 3.1.10. *Es gilt*

$$\rho(d) = 1 - \rho(\overline{d}) = 1 - \rho(\widetilde{d}).$$

Beweis. Es sei $\rho(d) = \frac{p}{q}$. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{Z}_N$ und einen Lift D von d mit $D^q(i_0) - pN = i_0$. Nach Korollar 3.1.9 besitzt auch $\overline{D^q - pN}$ einen Fixpunkt. Es gibt also ein i_1 mit

$$\overline{(D^q - pN)}(i_1) = \overline{D^q}(i_1) + pN = i_1.$$

Daraus folgt $\rho(\overline{d}) = 1 - \rho(d)$. Und mit Korollar 3.1.7 folgt $\rho(d) = \rho(\widetilde{d}) = 1 - \rho(\overline{d})$. \square

3.2. Bandbreitenabbildungen

In diesem Abschnitt werden die schon in Beispiel 3.0.4 verwendeten Begriffe „Kreismatrix“ und „Bandbreitenabbildung“ definiert. Diese Hilfsmittel liefern schließlich wertvolle Aussagen über das Spektrum von Kreismatrizen.

Definition 3.2.1. Es sei A eine nicht-negative $(N \times N)$ -Matrix. Es gebe diskrete Kreisabbildungen $\mathfrak{o}, \mathfrak{u}$ mit Lifts $\mathfrak{D}, \mathfrak{U}$, so dass der Eintrag a_{ij} genau dann positiv ist, wenn $i \in [\mathfrak{o}(j), \mathfrak{u}(j)]$, und dass

$$\mathfrak{D}(j) \leq \mathfrak{U}(j) \tag{3.2.1}$$

$$\mathfrak{D}(j+1) \leq \mathfrak{U}(j) + 1 \tag{3.2.2}$$

für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt. Dann heißt A eine *Kreismatrix*. Die Abbildungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} heißen *Bandbreitenabbildungen bzgl. der Spalten* von A .

Die Bandbreitenabbildungen sind genau dann eindeutig, wenn es in jeder Spalte mindestens einen Nulleintrag gibt. Die Bedingung (3.2.2) garantiert, dass in jeder Zeile mindestens ein positiver Eintrag vorhanden ist. Potenzen von Kreismatrizen sind ebenfalls Kreismatrizen. \mathfrak{o}^k und \mathfrak{u}^k sind Bandbreitenabbildungen von A^k . Das folgende Lemma zeigt, dass mit A auch A^T eine Kreismatrix ist.

Lemma 3.2.2. *Es sei A eine Kreismatrix mit Bandbreitenabbildungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} . Dann ist auch A^T eine Kreismatrix mit Bandbreitenabbildungen $\mathfrak{o}_t = \bar{\mathfrak{u}}$ und $\mathfrak{u}_t = \tilde{\mathfrak{o}}$.*

Beweis. Nach der Definition der Bandbreitenabbildungen gilt

$$a_{\pi(i)\pi(j)} > 0 \Leftrightarrow \mathfrak{D}(j) \leq i \leq \mathfrak{U}(j).$$

Aus den Definitionen (3.1.5) und (3.1.6) folgt mit $\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{U} = \tilde{\mathfrak{D}}$

$$\mathfrak{D}(j) \leq i \leq \mathfrak{U}(j) \Leftrightarrow \bar{\mathfrak{U}}(i) \leq j \leq \tilde{\mathfrak{D}}(i).$$

Es muss nun noch $\bar{\mathfrak{U}}(j+1) \leq \tilde{\mathfrak{D}}(j) + 1$ gezeigt werden. Wegen Lemma 3.1.5 und da $\tilde{\mathfrak{D}}$ maximal ist, gilt

$$\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}(i)) \leq i < \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1).$$

Eigenschaft (3.2.1) liefert $\mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1) \leq \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1)$, und somit gilt

$$\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1) > i \Rightarrow i + 1 \leq \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1).$$

Mit der Monotonie von $\bar{\mathfrak{U}}$ und (3.1.9) erhält man schließlich

$$\bar{\mathfrak{U}}(i+1) \leq \bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1)) \leq \tilde{\mathfrak{D}}(i) + 1.$$

3. Kreismatrizen

Definition 3.2.3. Es sei A eine Kreismatrix mit Bandbreitenabbildungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} bzgl. der Spalten. Die diskreten Kreisabbildungen $\mathfrak{l} = \bar{\mathfrak{u}}$ und $\mathfrak{r} = \tilde{\mathfrak{o}}$ heißen *Bandbreitenabbildungen bzgl. der Zeilen* von A .

Wir kommen nun zurück zu Übergangsmatrizen von Kreisabbildungen. Diese stellen spezielle Kreismatrizen dar.

Satz 3.2.4. *Es sei A eine Übergangsmatrix zu einem Kreisdifféomorphismus f . Dann sind die über*

$$f(\varphi_j) \in [\varphi_{\mathfrak{o}(j)}, \varphi_{\mathfrak{o}(j)+1}), \quad f(\varphi_{j+1}) \in (\varphi_{\mathfrak{u}(j)}, \varphi_{\mathfrak{u}(j)+1}] \quad (3.2.3)$$

definierten Abbildungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} Bandbreitenabbildungen bzgl. der Spalten von A . Für die Lifts \mathfrak{D} und \mathfrak{U} , die durch

$$\mathfrak{D}(0) = \mathfrak{o}(0) \text{ und } \mathfrak{D}(0) \leq \mathfrak{U}(0) < \mathfrak{D}(N) \quad (3.2.4)$$

definiert sind, gilt zusätzlich

$$\mathfrak{U}(j) \leq \mathfrak{D}(j+1).$$

Für die Bandbreitenabbildungen $\mathfrak{l} = \bar{\mathfrak{u}}$ und $\mathfrak{r} = \tilde{\mathfrak{o}}$ bzgl. der Zeilen von A gilt entsprechend

$$f^{-1}(\varphi_i) \in [\varphi_{\mathfrak{l}(i)}, \varphi_{\mathfrak{l}(i)+1}), \quad f^{-1}(\varphi_{i+1}) \in (\varphi_{\mathfrak{r}(i)}, \varphi_{\mathfrak{r}(i)+1}] \quad (3.2.5)$$

und

$$\mathfrak{R}(i) \leq \mathfrak{L}(i+1),$$

wobei \mathfrak{L} und \mathfrak{R} entsprechend (3.2.4) definiert sind. Für die Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen gilt

$$\rho(\mathfrak{l}) = 1 - \rho(\mathfrak{u}) \text{ und } \rho(\mathfrak{r}) = 1 - \rho(\mathfrak{o}).$$

Beweis. Aus den Eigenschaften der Kreisabbildung f ergibt sich sofort, dass \mathfrak{o} und \mathfrak{u} diskrete Kreisabbildungen sind. Da

$$f(\varphi_{j+1}) \in (\varphi_{\mathfrak{u}(j)}, \varphi_{\mathfrak{u}(j)+1}] \text{ und } f(\varphi_{j+1}) \in [\varphi_{\mathfrak{o}(j+1)}, \varphi_{\mathfrak{o}(j+1)+1}),$$

erhält man

$$\mathfrak{U}(j) \leq \mathfrak{D}(j+1) \leq \mathfrak{U}(j) + 1.$$

Es bleibt (3.2.5) zu zeigen. Die Aussage wird exemplarisch für \mathfrak{l} gezeigt. Es sei $\mathfrak{l}(i) = \bar{\mathfrak{u}}(i) = j$. Dann gilt nach der Definition von $\tilde{\mathfrak{U}}$

$$\mathfrak{U}(j-1) + 1 \leq i \leq \mathfrak{U}(j)$$

3.2. Bandbreitenabbildungen

und somit

$$\varphi_i \in [\varphi_{u(j-1)+1}, \varphi_{u(j)}] \subset [f(\varphi_j), f(\varphi_{j+1}))].$$

Wendet man darauf f^{-1} an, so erhält man

$$f^{-1}(\varphi_i) \in [\varphi_j, \varphi_{j+1}) = [\varphi_{l(i)}, \varphi_{l(i)+1}).$$

Die Aussage über die Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen folgt sofort aus Satz 3.1.10. \square

Der Satz 3.2.4 ist von besonderer Bedeutung, da ein Eintrag p_{ij} der Übergangsmatrix zu $P_{n,f^{-1}}$ genau dann positiv ist, wenn der Eintrag a_{ji} der Übergangsmatrix zu $P_{n,f}$ ebenfalls positiv ist. Für die Betrachtung der Bandbreitenstruktur ist es also unerheblich, ob die Übergangsmatrix zu f oder zu f^{-1} berechnet wird. Korollar 3.1.10 liefert darüber hinaus, dass $\rho(\mathfrak{o}) = 1 - \rho(\mathfrak{r})$ und $\rho(\mathfrak{u}) = 1 - \rho(\mathfrak{l})$ ist. Dieses Ergebnis steht in schönem Einklang mit der Tatsache, dass auch für Kreisabbildungen $\rho(f) = 1 - \rho(f^{-1})$ gilt. Außerdem gilt, dass μ genau dann ein invariantes Maß von f ist, wenn es ein invariantes Maß von f^{-1} ist. Im Gegensatz zur Übergangsmatrix von f erfordert die Berechnung der Übergangsmatrix von f^{-1} einen geringeren Aufwand, da die Umkehrfunktion nicht berechnet werden muss. Aus diesem Grund werden viele der folgenden Aussagen über f mit Hilfe der Übergangsmatrix zu f^{-1} formuliert werden. NICOLAISEN und WERNER [42] haben mit der folgenden Bandbreiteninklusion gezeigt, dass die Bandbreitenabbildungen eine einfache Möglichkeit zur Abschätzung der Rotationszahl einer Kreisabbildung liefern.

Satz 3.2.5 (Bandbreiteninklusion). *Es sei P eine Übergangsmatrix einer Kreisabbildung f . Dann gilt*

$$\rho(\mathfrak{o}) \leq \rho(f) \leq \rho(\mathfrak{u}).$$

Bemerkung 3.2.6. Es ist klar, dass für die Übergangsmatrix zu f^{-1} gilt

$$\rho(\mathfrak{l}) \leq \rho(f) \leq \rho(\mathfrak{r}).$$

Im Folgenden werden entsprechend einfache Übertragungen auf die Übergangsmatrix der Umkehrfunktion nicht mehr erwähnt, um den Leser nicht zu ermüden. Es sei aber an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, dass alle folgenden Aussagen auf die Übergangsmatrix der Umkehrfunktion übertragen werden können.

Aus der Bandbreiteninklusion folgt sofort, dass mit $\rho(\mathfrak{o}) = \rho(\mathfrak{u}) = p/q$ für die Rotationszahl von f gilt $\rho(f) = p/q$. In diesem Fall können Aussagen über die Klassen der zugeordneten Markov-Kette getroffen werden. Der erste Teil des folgenden Satzes stammt von NICOLAISEN und WERNER [42].

3. Kreismatrizen

Satz 3.2.7. *Es sei P eine Übergangsmatrix zu einer Kreisabbildung f mit Bandbreitenabbildungen \mathfrak{o} und \mathfrak{u} . Ist P reduzibel, so ist $\rho(\mathfrak{o}) = p/q = \rho(\mathfrak{u})$ mit $q < N$. Umgekehrt folgt aus $\rho(\mathfrak{o}) = \rho(\mathfrak{u}) = p/q$, dass A nicht primitiv ist. Darüber hinaus sind in diesem Fall alle rekurrenten Klassen q -periodisch. Alle nicht singulären, transienten Klassen sind ebenfalls q -periodisch.*

Beweis. Um die Bandstruktur der Matrix P zu beschreiben, wird eine Abbildung β eingeführt, die Teilmengen von \mathbb{Z}_N auf Teilmengen von \mathbb{Z}_N abbildet. Für ein $D \subset \mathbb{Z}_N$ sei β definiert durch

$$\beta(D) := \{i \in \mathbb{Z}_N \mid \exists j \in D: a_{ij} > 0\} = \bigcup_{j \in D} [\mathfrak{o}(j), \mathfrak{u}(j)].$$

Die Klassen der Markov-Kette werden als Teilmengen von \mathbb{Z}_N aufgefasst. Jede nicht singuläre Klasse D ist dann dadurch gekennzeichnet, dass D eine minimale Teilmenge mit der Eigenschaft $D \subset \beta(D)$ ist. Eine Klasse D ist genau dann rekurrent, wenn $D = \beta(D)$ gilt, ansonsten ist sie transient. Die Matrix P ist genau dann reduzibel, wenn es eine rekurrente Klasse D mit $D \neq \mathbb{Z}_N$ gibt.

Die Übergangsmatrix P sei also reduzibel. Dann gibt es ein $D \neq \mathbb{Z}_N$ mit $\beta(D) = D$. Mit D_0, D_1, \dots, D_{q-1} bezeichnen wir die zyklisch angeordneten Zusammenhangskomponenten von D . Es existiert ein $p \in \mathbb{N}$ mit $p < q < N$ und

$$\beta(D_k) = \beta([i_k, j_k]) = [\mathfrak{o}(i_k), \mathfrak{u}(j_k)] = D_{(k+p \bmod q)} = [i_{(k+p \bmod q)}, j_{(k+p \bmod q)}]$$

für alle $k = 0, 1, \dots, q-1$. Damit bilden i_0, i_1, \dots, i_{q-1} bzw. j_0, j_1, \dots, j_{q-1} q -periodische Orbits von \mathfrak{o} bzw. \mathfrak{u} , und es gilt $\rho(\mathfrak{o}) = \rho(\mathfrak{u}) = p/q$.

Ist umgekehrt $\rho(\mathfrak{o}) = \rho(\mathfrak{u}) = p/q$ mit $q < N$, dann gibt es einen q -periodischen Orbit i_0, i_1, \dots, i_{q-1} von \mathfrak{o} und einen q -periodischen Orbit j_0, j_1, \dots, j_{q-1} von \mathfrak{u} mit

$$\mathfrak{o}(i_k) = i_{(k+p \bmod q)} \text{ und } \mathfrak{u}(j_k) = j_{(k+p \bmod q)}$$

für alle $k = 0, 1, \dots, q-1$. Somit bildet β die Intervalle $[i_k, j_k]$ zyklisch aufeinander ab, und P kann nicht primitiv sein.

Es bleibt noch zu zeigen, dass jeder Zyklus des Graphen $G(P)$ die Länge q hat. Jeder Pfad der Länge N des gerichteten Graphen $G(P)$ kann als Orbit einer diskreten Kreisabbildung d aufgefasst werden. Die Lifts von \mathfrak{o} , \mathfrak{u} und d können so gewählt werden, dass

$$\mathfrak{D}(j) \leq D(j) \leq \mathfrak{U}(j) \text{ und } \mathfrak{D}(0) \leq \mathfrak{U}(0) < \mathfrak{D}(0) + N$$

3.3. Spektrum von Kreismatrizen

gelten. Mit (3.1.4) folgt dann $\rho(\mathfrak{o}) \leq \rho(d) \leq \rho(\mathfrak{u})$ und folglich $\rho(d) = p/q$. \square

In der Praxis ist der Fall einer q -zyklischen Übergangsmatrix sehr unwahrscheinlich. Er tritt nur dann auf, wenn alle Punkte eines periodischen Orbits zu den Partitionsunkten gehören und alle weiteren Partitionsunkte keine periodischen Punkte der Kreisabbildung sind.

3.3. Spektrum von Kreismatrizen

3.3.1. Rotationen

Es werden zunächst wieder die einfachsten Vertreter der Kreisabbildungen, die Rotationen, betrachtet. Es sei eine äquidistante Partition von S^1 mit den Partitionsunkten $\varphi_j = \frac{j}{N}$, $j = 0, 1, \dots$ gegeben. Wir betrachten eine Rotation r_ω um den Winkel ω und setzen

$$\omega = \frac{L + \nu}{N}, \quad L \in \underline{N}, \quad \nu \in [0, 1).$$

Durch diese Beziehung sind die Zahlen L und ν eindeutig definiert. Genau dann ist $\nu = 0$, wenn $\omega = p/q$ rational und N ein ganzzahliges Vielfaches von q ist. Die Übergangsmatrix $P_{\omega, N}$ von f besitzt in jeder Spalte die Einträge $1 - \nu$ und ν mit $\mathfrak{o}(j) = \pi(\lfloor L + j - \nu \rfloor)$ und $\mathfrak{u}(j) = \pi(\lfloor L + j - \nu + 1 \rfloor)$. Für die Eigenwerte und Eigenvektoren von P_N gilt

Satz 3.3.1. *Die Eigenwerte der Übergangsmatrix $P_{\omega, N}$ einer Rotation r_ω sind gegeben durch*

$$\lambda_{k, N} = (1 - \nu)e^{-2\pi i k \frac{L}{N}} + \nu e^{-2\pi i k \frac{L+1}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

mit zugehörigen Eigenvektoren $u^k \in \mathbb{R}^N$

$$u_j^k = e^{2\pi i k \frac{j-1}{N}}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3.1)$$

Beweis. Die Übergangsmatrix $P_{\omega, N}$ kann als Linearkombination zweier Permutationsmatrizen $P_{\frac{L}{N}, N}$ und $P_{\frac{L+1}{N}}$ aufgefasst werden. Die Eigenwerte von $P_{\frac{L}{N}, N}$ sind

$$\lambda_{k, L} = e^{-2\pi i k \frac{L}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

die von $P_{\frac{L+1}{N}}$

$$\lambda_{k, L+1} = e^{-2\pi i k \frac{L+1}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

3. Kreismatrizen

Die zugehörigen Eigenvektoren sind in beiden Fällen die u^k aus (3.3.1). Es ist

$$P_{\omega,N} = (1 - \nu)P_{\frac{L}{N},N} + \nu P_{\frac{L+1}{N}},$$

und somit

$$P_{\omega,N}u^k = \left((1 - \nu)P_{\frac{L}{N},N} + \nu P_{\frac{L+1}{N}} \right) u^k = ((1 - \nu)\lambda_{k,L} + \nu\lambda_{k,L+1})u^k.$$

□

In Abschnitt 1.4.1 wurde gezeigt, dass die Eigenwerte des Frobenius-Perron-Operators für Rotationen

$$\lambda_k = e^{-2\pi ik\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

lauten. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind

$$h_k(x) = e^{2\pi ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Komponenten der Eigenvektoren u^k der Übergangsmatrix bestehen offensichtlich aus den Funktionswerten der Eigenfunktionen h_k an den Partitions-
punkten φ_{j-1} , d.h. $u_j^k = h_k(\varphi_{j-1})$ für $j = 1, 2, \dots, N$ und $k = 0, 1, \dots, N - 1$.
Vergleicht man das Spektrum von $P_{\omega,N}$ mit diesen Ergebnissen, so können zwei
Fälle unterschieden werden.

$\nu = 0$: In diesem Fall ist $\omega = p/q$ rational, und $N = rq$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Die
Bandbreiteninklusion liefert

$$\rho(\mathfrak{o}) = \frac{L}{N} = \omega = \rho(\mathfrak{u}).$$

Die Übergangsmatrix $P_{\omega,N}$ ist somit eine reduzible Permutationsmatrix,
die in r irreduzible, q -zyklische Matrizen zerfällt, falls $r > 1$ gilt. Es gibt
keine singulären Zustände. Für $r = 1$ liegt eine irreduzible, q -zyklische
Matrix vor. In beiden Fällen ist jeder Wert $\lambda_{k,N} = e^{-2\pi ik\frac{L}{q}}$ ein geometrisch
und algebraisch r -facher Eigenwert von $P_{\omega,N}$. Die Spektren von $P_{\omega,N}$ und
 $P_{r\omega}$ sind identisch.

$\nu > 0$: In diesem Fall ist $P_{\omega,N}$ primitiv. Die Bandbreiteninklusion ergibt

$$\rho(\mathfrak{o}) = \frac{L}{N} < \omega < \rho(\mathfrak{u}) = \frac{L+1}{N}.$$

3.3. Spektrum von Kreismatrizen

Für die Eigenwerte $\lambda_k = e^{-2\pi i k \frac{L}{N}} e^{-2\pi i k \frac{\nu}{N}}$ und $\lambda_{k,N}$ gilt

$$|\lambda_k - \lambda_{k,N}| \leq O\left(\frac{k}{N}\right)$$

für festes k . In Abbildung 3.5 ist dieser Fall für Rotationen mit $\omega = \frac{7}{15}$ bei 214 Partitionen, $\omega = \frac{101}{211}$ bei 207 Partitionen und für $\omega = \sqrt{2} - 1$ bei 1001 Partitionen dargestellt. Die scheinbare Rotationsymmetrie um $\frac{2\pi}{23}$ in Abbildung (b) hat ihre Ursache darin, dass $\omega = \frac{101}{211}$ „gut“ durch den Bruch $\frac{11}{23}$ approximiert wird, s. LEHMANN [34].

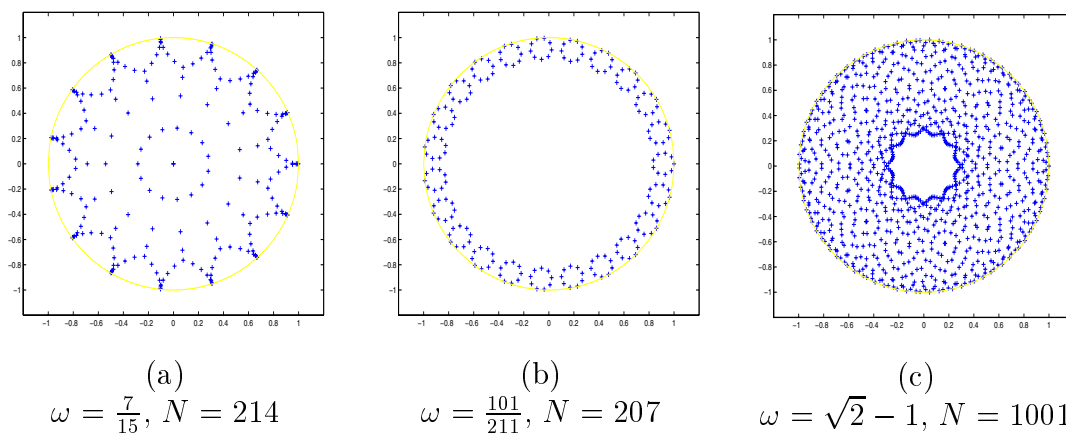


Abbildung 3.5.: Spektren für Rotationen, s. [34]

3.3.2. Kreisabbildungen

Das Spektrum der Übergangsmatrizen zu Kreisabbildungen hängt stark von der Rotationszahl der Kreisabbildung ab. Ist die Rotationszahl rational, so existiert ein periodischer Orbit. Wählt man die Punkte dieses Orbits als Partitionspunkte, so ist klar, dass die zugehörige Übergangsmatrix zyklisch ist. Werden weitere Partitionspunkte hinzugenommen, so ist die Übergangsmatrix reduzibel. Diese Vorinformation steht aber normalerweise nicht zur Verfügung. Für Kreisabbildungen mit rationaler Rotationszahl und einem attraktiven q -periodischen Orbit haben NICOLAISEN und WERNER [42] gezeigt, dass für hinreichend feine Partitionen die Übergangsmatrizen stets reduzibel sind.⁴

⁴ Offensichtlich ist das Ziel in NICOLAISEN und WERNER [42] eine konkrete Partition anzugeben, für die die Übergangsmatrix reduzibel ist. Sie beziehen ihren Satz 3.4 deshalb auf äquidistante Partitionen. Der Beweis gilt aber allgemeiner und bedarf dieser Einschränkung nicht.

3. Kreismatrizen

Satz 3.3.2. *Die Übergangsmatrix P der Kreisabbildung f sei reduzibel. Dann ist die Rotationszahl von f rational und $\rho(\mathbf{o}) = \rho(\mathbf{u}) = \rho(f) = p/q$. Die q -ten Einheitswurzeln sind die einzigen Eigenwerte vom Betrag 1 (sie können aber mehrfach sein). Das gesamte Spektrum ist rotationssymmetrisch bzgl. des Winkels $2\pi/q$.*

Beweis. Die Übergangsmatrix P kann, wie in Abschnitt 2.3 erläutert, auf die Normalform (2.3.1)

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & D_k & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_1 & & \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & C_l \end{bmatrix}$$

transformiert werden. Das Spektrum von P wird aus den Spektren der Diagonalblöcke gebildet. Die quadratischen Blöcke D_i sind nach Satz 3.2.7 q -zyklische Matrizen. Der Satz von Frobenius-Perron besagt, dass diese jeweils die q -ten Einheitswurzeln als einfache Eigenwerte besitzen und ihr Spektrum rotationssymmetrisch ist. Die Matrizen C_i , die zu den transienten Klassen gehören, sind nach Satz 3.2.7 entweder ebenfalls q -zyklische Matrizen mit Spektralradien $r_i < 1$ oder Nulleinträge im Fall singulärer Zustände. Die zyklischen Blöcke besitzen einfache Eigenwerte $\lambda_{k,i} = r_i e^{2\pi i k/q}$, $k = 0, 1, \dots, q-1$. Die Nulleinträge liefern Eigenwerte $\lambda_k = 0$. \square

Aus dem Beweis geht hervor, dass im reduziblen Fall Eigenwerte auf den Geraden vom Nullpunkt zu den q -ten Einheitswurzeln zu erwarten sind. Abbildung 3.6 (a) zeigt das Spektrum einer reduziblen Übergangsmatrix für die Abbildung (1.1.6) mit den Parametern $\xi = 2.9$ und $\eta = 0.244$. Die Rotationszahl für diese Parameter ist $1/3$, es wurden 248 äquidistante Partitionspunkte gewählt. Deutlich erkennbar sind die prognostizierten Eigenwerte auf den Geraden sowie die Rotationssymmetrie des Spektrums.

Satz 3.3.2 macht darüber hinaus deutlich, dass sich bei rationaler Rotationszahl und der Existenz isolierter, attraktiver, periodischer Orbits die Spektren des Frobenius-Perron-Operators und seiner Diskretisierung auch bei sehr feiner Partition unterscheiden. Während das Spektrum des Frobenius-Perron-Operators ganz \mathbb{C}_1^* ist, sind die einzigen Eigenwerte der Übergangsmatrix, die in \mathbb{C}_1^* liegen, die q -ten Einheitswurzeln. Numerische Versuche von LEHMANN [34] legen

3.3. Spektrum von Kreismatrizen

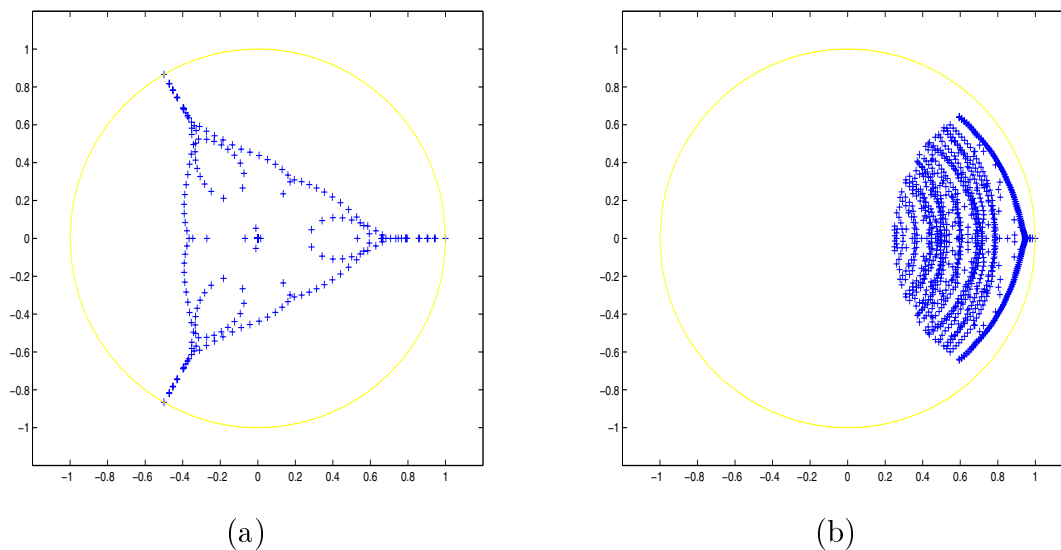


Abbildung 3.6.: Spektren reduzierbarer Übergangsmatrizen, s. [34]

aber die Vermutung nahe, dass trotzdem eine schwache Form von Konvergenz erwartet werden kann, dass nämlich zumindest in einigen Fällen

$$\max_{\lambda \in \mathbb{C}_1^*} \{\text{dist}(\lambda, \sigma(P_N))\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (3.3.2)$$

gilt. Dies konnte bisher aber nicht gezeigt werden. Abbildung 3.6 (b) zeigt das Beispiel einer reduzierbaren Übergangsmatrix zu der Kreisabbildung (1.1.6) mit den Parametern $\xi = 0.7$ und $\eta = 0.476$. Die Rotationszahl ist in diesem Fall $\rho = \frac{1}{2}$. Da das Spektrum symmetrisch zur imaginären Achse ist, wurden aus rechentechnischen Gründen nur die Eigenwerte nahe der 1 berechnet.

Ist die Rotationszahl einer Kreisabbildung irrational, so wissen wir nur wenig über das Spektrum. Es gilt

Satz 3.3.3. *Es sei f eine Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl. Dann ist die Übergangsmatrix P stets primitiv, d.h. der Eigenwert $\lambda = 1$ ist einfach und alle anderen Eigenwerte sind betragsmäßig kleiner als λ .*

Bei irrationaler Rotationszahl besitzen die Übergangsmatrizen also nie Eigenwerte in \mathbb{C}_1^* . Aber auch in diesem Fall legen die numerischen Experimente von LEHMANN nahe, dass Konvergenz im Sinne von (3.3.2) erwartet werden kann. Die Geschwindigkeit der Annäherung der Eigenwerte an den Rand des Einheitskreises scheint hier sogar deutlich höher zu sein als im Falle rationaler

3. Kreismatrizen

Rotationszahlen. Abbildung 3.7 zeigt Ausschnitte aus zwei typischen Spektren der Abbildung (1.1.6) für die Parameter $\xi = 4$ und $\eta = 0.123$ bei 992 und 3968 äquidistanten Partitionen.

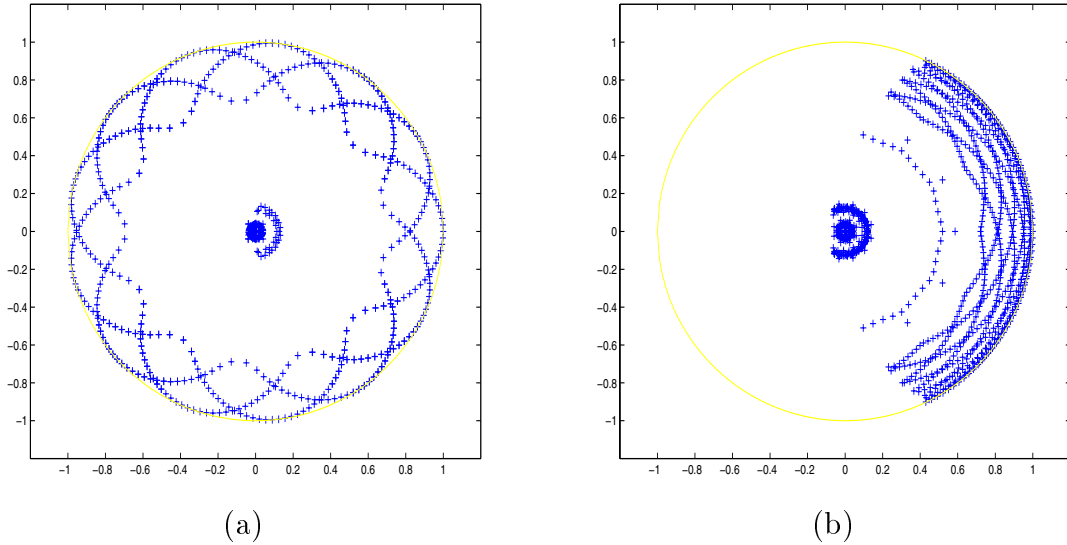


Abbildung 3.7.: Spektren irreduzibler Übergangsmatrizen, s. [34]

3.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren

Ist die Rotationszahl einer Kreisabbildung irrational, so ist ihre Übergangsmatrix stets primitiv. In diesem Fall gibt es also einen eindeutigen positiven stationären W -Vektor h_N . Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass die Kreisabbildung eine eindeutige invariante Dichte h besitzt. Dann ist h_N ein Kandidat für die Approximation von h . Obwohl die Beobachtung dies nahelegt, ist es leider bisher nicht gelungen, die Konvergenz der stationären W -Vektoren h_N gegen die invariante Dichte h zu zeigen. NICOLAISEN und WERNER [42] haben aber eine a posteriori Abschätzung angegeben. Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Konzepte des folgenden Kapitels wird ihr Ergebnis an dieser Stelle etwas ausführlicher und an die Darstellung dieser Arbeit angepasst wiedergeben. Da die Übergangsmatrizen, die im folgenden Kapitel betrachtet werden, sich auf die Abbildung f^{-1} beziehen werden, beziehen sich die folgenden Aussagen ebenfalls auf die Übergangsmatrix zu f^{-1} .

Satz 3.4.1. *Es seien P eine irreduzible Übergangsmatrix einer Kreisabbildung f^{-1} bzgl. einer Partition \mathcal{B} und h_N ihr stationärer W -Vektor. Dann gibt es einen*

3.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren

eindeutigen, stückweise linearen, orientierungserhaltenden Homöomorphismus f_N , so dass die Übergangsmatrix von f_N^{-1} bzgl. \mathcal{B} ebenfalls P ist und dessen invariante Dichte mit

$$H_N(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h_N^i}{\mu(I_i)} 1_{I_i}(x)$$

übereinstimmt. Die Unterbrecherpunkte von f_N sind die Partitionspunkte φ_i sowie zusätzliche Punkte ξ_j mit $f_N(\xi_j) = \varphi_j$ und $\mathbf{u}(j-1) = \mathbf{o}(j)$.

Beweis. Sollen die Übergangsmatrizen von f^{-1} und f_N^{-1} übereinstimmen, so muss gelten

$$f(\varphi_i) = f_i = f_N(\varphi_i), \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Die Treppenfunktion H_N ist genau dann invariante Dichte von f_N , wenn gilt

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi} H_N(x) dx = \int_{f_i}^{f_N(\varphi)} H_N(x) dx. \quad (3.4.1)$$

Man kann also f_N als zusammengesetzte Funktion von stückweise linearen, monotonen Funktionen $f_{N,i}: [\varphi_i, \varphi_{i+1}] \rightarrow [f_i, f_{i+1}]$ konstruieren. Die linke Seite der Gleichung (3.4.1) ist eine lineare Funktion von φ für $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, während die rechte Seite stückweise linear ist mit Unterbrecherpunkten in den Partitionspunkten $\varphi_j \in (f_i, f_{i+1})$, also für alle j mit $\mathbf{o}(j) = i$. Daraus folgt, dass genau diese Punkte Unterbrecherpunkte von $f_{N,i}^{-1}$ sein müssen. Es sind also die Werte $\xi_j \in B_i$ mit $f_{N,i}(\xi_j) = \varphi_j$ zu bestimmen. Es können drei Fälle unterschieden werden:

- 1.) Es gibt kein j mit $\mathbf{o}(j) = i$. Dann gibt es in $[f_i, f_{i+1}]$ keinen Partitionspunkt, und $f_{N,i}$ ist die lineare Interpolation von f auf $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ mit $f_{N,i}(\varphi_i) = f_i$ und $f_{N,i}(\varphi_{i+1}) = f_{i+1}$.
- 2.) Es gibt ein j mit $\mathbf{o}(j) = i$ und $\mathbf{u}(j-1) \neq i$. Dann ist $\mathbf{u}(j-1) = \pi(i-1)$ und somit $f(\varphi_i) = \varphi_j$. Das bedeutet aber, dass $f_i = \varphi_j$ ein Partitionspunkt ist. Also kann $f_{N,i}$ wie unter 1.) gewählt werden.
- 3.) Es existiert ein j mit $\mathbf{u}(j-1) = \mathbf{o}(j)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbf{l}(i) < \mathbf{r}(i)$ und $j \in [\mathbf{l}(i)+1, \mathbf{r}(i)]$. Wir beginnen mit $j = \mathbf{l}(i)+1$. Gleichung (3.4.1) liefert

$$\int_{f_i}^{\varphi_j} H_N(x) dx = \int_{\varphi_i}^{\xi_j} H_N(x) dx,$$

3. Kreismatrizen

was gleichbedeutend mit

$$\frac{\varphi_{\mathfrak{l}(i)+1} - f_i}{\varphi_{\mathfrak{l}(i)+1} - \varphi_{\mathfrak{l}(i)}} h_N^{\mathfrak{l}(i)} = \frac{\xi_j - \varphi_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} h_N^i$$

ist. Mittels dieser Gleichung ist ξ_j eindeutig bestimmt. Zur Berechnung der weiteren ξ_j mit $j = \mathfrak{l}(i) + 2, \dots, \mathfrak{r}(i)$ wird ähnlich verfahren: Es sei ξ_j bereits bestimmt, dann kann ξ_{j+1} durch die Gleichung

$$\int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} H_N(x) dx = \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} H_N(x) dx$$

berechnet werden. □

Besitzt die Kreisabbildung f eine invariante Dichte h , so definiert

$$g(x) = \int_0^x h(\varphi) d\varphi$$

den Wert des invarianten Maßes für das Intervall $[0, x) \subset S^1$ und gleichzeitig die Konjugation von f zur Rotation um den Winkel $\rho(f)$. Entsprechend gilt für f_N

$$g_N(x) = \int_0^x H_N(\varphi) d\varphi.$$

Der folgende Satz von NICOLAISEN und WERNER liefert eine a posteriori Abschätzung für $\|g - g_N\|_\infty$.

Satz 3.4.2. *Es sei f eine C^2 -Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl ρ und Konjugation g . Ihr diskretisierter Frobenius-Perron-Operator habe die invariante Dichte H_N . f_N sei die stückweise lineare Abbildung aus Satz 3.4.1 und $\rho_N := \rho(f_N)$ die Rotationszahl von f_N . Mit q_k , $k = 1, 2, \dots$, seien die Nenner der Konvergenzen der Kettenbruchentwicklung von ρ bezeichnet. Dann gilt*

$$\|g - g_N\|_\infty \leq \frac{1}{q_k} + q_k |\rho - \rho_N| + \|H_N\|_\infty \max_{j \leq q_k} |f^j(0) - f_N^j(0)| \quad (3.4.2)$$

für $k = 1, 2, \dots$

Im Allgemeinen kann aus dieser Abschätzung keine Konvergenz geschlossen werden, da der Ausdruck

$$e_N = \|H_N\|_\infty \max_{j \leq q_k} |f^j(0) - f_N^j(0)|$$

nur schlecht abzuschätzen ist. Im Falle der im nächsten Kapitel betrachteten *Orbitübergangsmatrizen* wird diese Abschätzung aber entscheidend für die Konvergenzaussage sein, da in dem Fall $e_N = 0$ gilt.

4. Orbitübergangsmatrizen

Das vorhergehende Kapitel hat gezeigt, dass bei rationaler Rotationszahl die Aussagen über das Spektrum und die Approximation der invarianten Dichte von der gewählten Partition abhängt. In diesem Kapitel werden spezielle Partitionen betrachtet, die auf sehr einfache Übergangsmatrizen führen.

Gegeben sei ein nicht periodischer Punkt x_0 . Die zyklisch angeordneten Punkte des Orbits $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{N-1}$ bilden nun die Randpunkte $x_0 = \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ der Partition. Die Übergangsmatrix zu f^{-1} bzgl. dieser Partition heißt *Orbitübergangsmatrix*. Bis auf einen Partitionspunkt $\varphi_{k+1} = x_{N-1}$ werden alle Partitionspunkte durch f wieder auf Partitionspunkte abgebildet. Das Intervall, in dem das Bild von x_{N-1} unter f liegt, wird mit I_s , das Intervall, in dem das Urbild von x_0 liegt, mit I_z bezeichnet. Damit lässt sich eine Orbitübergangsmatrix wie folgt beschreiben: In der Spalte s befinden sich genau zwei Einträge, und zwar in den Zeilen k und $k + 1$. Alle anderen Spalten enthalten als einzigen Eintrag eine 1. Auch die Zeile z enthält genau zwei Einträge, und zwar in den Spalten $N - 1$ und 0 . Abbildung 4.1 verdeutlicht die Konstruktion einer Orbitübergangsmatrix für $N = 7$. Das linke Bild zeigt den Orbit einer Kreisabbildung und die Numerierung der resultierenden Partitionsintervalle, das rechte Bild die daraus gewonnene Orbitübergangsmatrix. Es sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, dass wir entgegen der Konvention die Numerierung der Zeilen und Spalten einer Matrix mit 0 beginnen.

Die Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen der Orbitübergangsmatrix hängen eng mit dem MacKay-Algorithmus zur Berechnung der Rotationszahl einer Kreisabbildung zusammen. Wir werden deshalb im folgenden Abschnitt diesen Algorithmus beschreiben.

4.1. Der MacKay-Algorithmus

Der folgende Algorithmus zur Berechnung der Rotationszahl einer Kreisabbildung stammt von MACKAY [36]. Es seien $x_0 \in S^1$ ein beliebiger Startpunkt und f eine Kreisabbildung mit Lift F , so dass $F(x_0) = f(x_0)$. Die Genauigkeit, mit der die Rotationszahl approximiert werden soll, sei durch ein $\epsilon > 0$ gegeben.

4. Orbitübergangsmatrizen

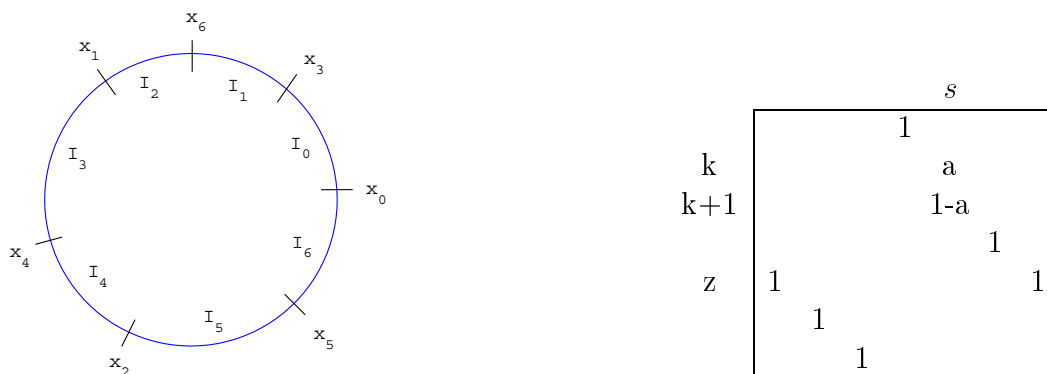


Abbildung 4.1.: Konstruktion einer Orbitübergangsmatrix

Mackay-Algorithmus

Setze $x_1 = F(x_0)$, $p_- = 0$, $p_+ = 1$ und $q_- = q_+ = 1$. Solange $q_- \cdot q_+ < 1/\epsilon$, führe folgende Schritte aus:

- $Q = q_- + q_+$ und $P = p_- + p_+$
- $z = F^Q(x_0) - x_0 - P$
- falls $z = 0$: $\rho(f) = P/Q$, Programmabbruch
- falls $z > 0$: $p_- = P$, $q_- = Q$
- falls $z < 0$: $p_+ = P$, $q_+ = Q$

In jedem Iterationsschritt¹ gilt

$$\rho(f) \in \left[\frac{p_-}{q_-}, \frac{p_+}{q_+} \right].$$

Die Wirkungsweise des Mackay-Algorithmus soll an einem Beispiel veranschaulicht werden.

Beispiel 4.1.1. Bei der Initialisierung des Algorithmus liegen der Startpunkt x_0 und sein Bild $x_1 = f(x_0)$ vor. Diese Punkte teilen S^1 in zwei Intervalle $B_+ := [x_{q_+}, x_0) = [x_1, x_0)$ und $B_- := [x_0, x_{q_-}) = [x_0, x_1)$. Im ersten Schritt ist $P = p_+ + p_- = 1$ und $Q = q_+ + q_- = 2$. Es wird also $x_2 = f(x_1)$ berechnet. Der

¹ Mit „Iterationsschritt“ oder auch „(Mackay-)Schritt“ wird im Folgenden stets der Zeitpunkt nach dem Aufdatieren gemeint sein.

4.1. Der MacKay-Algorithmus

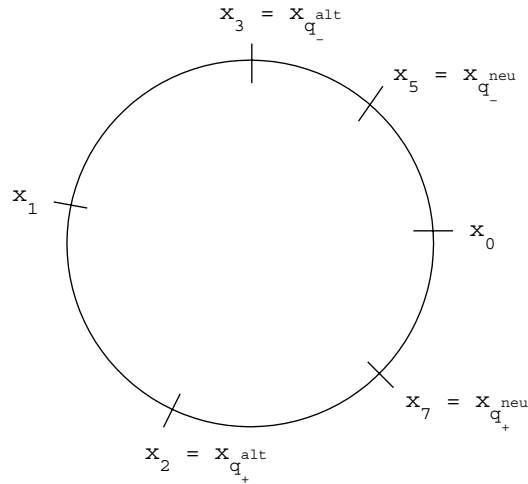


Abbildung 4.2.: Beispiel 4.1.1 zum MacKay-Algorithmus

Fall $z = F(x_1) - x_0 - P < 0$ ist gleichbedeutend mit $x_2 \in B_+$, der Fall $z > 0$ entsprechend mit $x_2 \in B_-$. In diesem Beispiel gehen wir davon aus, dass der erste Fall $x_2 \in B_+$ vorliegt (s. Abbildung 4.2). Dann gilt für die neuen Schranken der Rotationszahl $q_+ = Q = 2$ und $p_+ = P = 1$. Die Zahlen $q_- = 1$ und $p_- = 0$ bleiben unverändert. Für den nächsten Schritt verändert sich das Intervall B_+ zu $B_+ := [x_{q_+}, x_0) = [x_2, x_0)$, während das Intervall B_- unverändert bleibt. Nun wird $x_3 = f(x_2)$ berechnet und es gelte $x_3 \in B_-$. Dann wird die untere Schranke $\frac{p_-}{q_-}$ verbessert, und es gilt

$$\begin{aligned} q_-^{\text{neu}} &= q_+ + q_-^{\text{alt}} = 3, \\ p_-^{\text{neu}} &= p_+ + p_-^{\text{alt}} = 1. \end{aligned}$$

Das Intervall B_- lautet nun $B_- = [x_0, x_{q_-}) = [x_0, x_3)$, während das Intervall B_+ unverändert bleibt. Der nächste Punkt des Orbits, der in $B_+ \cup B_-$ liegt, ist $f^{q_+}(x_{q_-}) = f^2(x_3) = x_5$. In unserem Beispiel liegt dieser Punkt x_5 im Intervall B_- , so dass nochmals die untere Schranke verbessert wird. Erst der nächste Punkt $f^2(x_5) = x_7$ liegt wieder in B_+ , so dass diesmal wieder die obere Schranke verbessert wird. Solch ein Fall, in dem auf die Verbesserung einer Schranke im nächsten Schritt die Verbesserung der jeweils anderen Schranke folgt, ist von besonderer Bedeutung. Wir nennen so einen MacKay-Schritt, in dem erstmals wieder $z > 0$ bzw. $z < 0$ gilt, *Wechselschritt*.

Auf die beschriebene Weise wird nun fortgefahren. Es wird der zuletzt berechnete Punkt entsprechend der Größe des Nenners der Schranke, die nicht verbessert

4. Orbitübergangsmatrizen

wurde, unter f iteriert. Der sich dabei ergebende neue Orbitpunkt liegt wieder in $B_+ \cup B_-$. Ist er vom Kreismittelpunkt aus gesehen ein linker Nachbar von x_0 , liegt er also in B_- , so wird die untere Schranke verbessert. Ist er ein rechter Nachbar, liegt er also in B_+ , wird die obere Schranke verbessert. Der Wert P zählt, wie oft der Orbit den Kreis umrundet hat. Im Fall eines rechten Nachbarn wird so gezählt, als habe bereits eine weitere Umrundung stattgefunden. Der Algorithmus endet, wenn der Abstand der oberen und der unteren Schranke kleiner als die vorgegebene Genauigkeit ϵ ist, d.h. wenn gilt

$$\frac{p_+}{q_+} - \frac{p_-}{q_-} = \frac{1}{q_+ q_-} < \epsilon.$$

Die exakte Rotationszahl liefert der Algorithmus nur, wenn x_0 ein periodischer Punkt von f ist.

Die Wechselschritte des MacKay-Algorithmus erhalten ihre Bedeutung dadurch, dass in diesem Fall die Schranke, die im vorhergehenden Schritt verbessert wurde, eine Konvergente der Rotationszahl von f ist. Dies wird mittels vollständiger Induktion gezeigt. Bei Initialisierung des Algorithmus ist $p_- = p_0 = 0$, $q_- = q_0 = 1$ und $q_+^0 = p_+^0 = 1$. Wir setzen $a_0 := 0$. Der erste Wechselschritt ($z < 0$) trete nach a_1 Schritten auf. Dann gilt im Schritt davor, also nach $a_1 - 1$ Schritten

$$\begin{aligned} p_+ &= (a_1 - 1)p_0 + p_+^0 = 1 =: p_1, \\ q_+ &= (a_1 - 1)q_0 + q_+^0 = a_1 := q_1. \end{aligned}$$

Die Zahlen p_- und q_- blieben bis dahin unverändert, es gilt also $p_- = p_0$ und $q_- = q_0$. Nach weiteren a_2 Schritten, also nach insgesamt $a_1 + a_2$ Schritten, finde der nächste Wechselschritt ($z > 0$) statt. Im Schritt vor diesem Wechselschritt (also im $(a_1 - 1 + a_2)$. Schritt) ist

$$\begin{aligned} p_- &= a_2 p_1 + p_0 =: p_2, \\ q_- &= a_2 q_1 + q_0 =: q_2. \end{aligned}$$

Angenommen wir befinden uns nun im Schritt vor dem m -ten Wechselschritt, für den $z < 0$ gelte. Dann ist $p_+ = p_{m-1}$, $q_+ = q_{m-1}$, $p_- = p_m$ und $q_- = q_m$. Dann ist nach a_{m+1} Schritten vor dem $(m + 1)$ -ten Wechselschritt ($z > 0$)

$$\begin{aligned} p_+ &= a_{m+1} p_m + p_{m-1} =: p_{m+1}, \\ q_+ &= a_{m+1} q_m + q_{m-1} =: q_{m+1}. \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Rekursionformel für die Konvergenten des Kettenbruchs $[a_0, a_1, a_2, \dots]$. Da die Kettenbruchentwicklung für irrationale Zahlen eindeutig

4.2. Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen

ist und der MacKay-Algorithmus gegen die Rotationszahl von f konvergiert, ist die oben konstruierte Folge $\frac{p_m}{q_m}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, im Fall einer irrationalen Rotationszahl gerade die Folge ihrer Konvergenten.

Zwischen zwei Wechselschritten bleibt die Schranke, die im vorhergehenden Wechselschritt verbessert wurde, stets unverändert. Die Schranke mit dem kleineren Nenner (und damit auch dem kleineren Zähler) ist also immer eine Konvergente. Im Schritt direkt vor einem Wechselschritt sind sogar beide Schranken Konvergenten der Rotationszahl. Wir haben somit gezeigt:

Lemma 4.1.2. *Es sei f eine Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl. Dann ist in jedem Schritt des MacKay-Algorithmus $\frac{\min\{p_-, p_+\}}{\min\{q_-, q_+\}}$ eine Konvergente der Rotationszahl von f .*

4.2. Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen

Die Bandbreitenabbildungen von Orbitübergangsmatrizen liefern weitere Aussagen über das Spektrum und den stationären W-Vektor. Es sei N wieder die Anzahl der Intervalle der zugrunde gelegten Partition. Der Punkt x_0 sei Startpunkt sowohl für den MacKay-Algorithmus als auch für die Partition der Orbitübergangsmatrix. Die Partitionspunkte liegen für Orbitübergangsmatrizen in zwei verschiedenen Indizierungen vor. Zunächst können sie als Punkte x_0, x_1, \dots, x_{N-1} des Orbits von f aufgefasst werden. Ordnet man diese Punkte jedoch zyklisch an, so erhält man die Partitionspunkte $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$, wobei $\varphi_0 = x_0$ gelte. Der Orbitpunkt, der vom Kreismittelpunkt aus gesehen direkt links von x_0 liegt, sei mit x_l bezeichnet, der rechte Punkt mit x_r . Es gilt also

$$\varphi_{N-1} = x_r \text{ und } \varphi_1 = x_l.$$

Für die Bandbreitenabbildung \mathfrak{l} einer Orbitübergangsmatrix² gilt nach Satz 3.2.4

$$f(\varphi_i) \in [\varphi_{\mathfrak{l}(i)}, \varphi_{\mathfrak{l}(i)+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ein Orbit von \mathfrak{l} kann mit einem Orbit von Partitionspunkten $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$ identifiziert werden. Liegt das Bild $f(\varphi_i)$ eines Partitionspunktes im Intervall I_j , so ist der nächste Orbitpunkt φ_j . Jetzt wird $f(\varphi_j)$ berechnet, und der folgende Orbitpunkt ist wieder der linke Rand des Intervalls, in das φ_j abgebildet wurde. Um die Länge des zyklischen Orbits einer Bandbreitenabbildung zu berechnen, ist es unerheblich, ob die Indizierung der Orbitpunkte oder die der

² Man beachte, dass diese Matrix eine Übergangsmatrix zu f^{-1} ist.

4. Orbitübergangsmatrizen

Partitionspunkte zugrunde gelegt wird. Wir gehen zunächst davon aus, dass $f(x_{N-1}) = x_N \notin I_{N-1} \cup I_0 = [\varphi_{N-1}, \varphi_1)$ und beginnen den Orbit von \mathfrak{l} mit $\varphi_{N-1} = x_r$. Der Orbit der Partitionspunkte lautet nach $N - r - 1$ Iterationen $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{N-1}$, wobei alle Partitionspunkte direkt durch f aufeinander abgebildet werden. Dies gilt nicht für die nächste Iteration. Es ist $f(x_{N-1}) \in I_s$, der nächste Orbitpunkt lautet somit φ_s . Um weiterhin mit der Indizierung der Punkte x_i rechnen zu können, muss ermittelt werden, für welches $i \in \underline{N}$ $x_i = \varphi_s$ gilt. Nach der Definition von x_r und x_l gilt

$$\varphi_{N-1} = x_r < x_0 = \varphi_0 < x_l = \varphi_1.$$

Damit ist

$$f^{N-l}(x_0) = x_{N-l} < f^{N-l}(x_l) = x_N = f^{N-r}(x_r) < f^{N-r}(x_0) = x_{N-r},$$

also $x_N \in (x_{N-l}, x_{N-r})$. Da $x_0 = \varphi_0$ der einzige Partitionspunkt im Intervall (x_r, x_l) ist, enthält das Intervall (x_{N-l}, x_{N-r}) keinen Partitionspunkt, und es gilt $I_s = [\varphi_s, \varphi_{s+1}) = [x_{N-l}, x_{N-r})$. Um den Orbit von \mathfrak{l} weiter zu verfolgen, muss als nächstes $f(x_{N-l})$ berechnet werden. Da x_N nicht in (x_r, x_l) liegt, gilt $l + r > N$. Somit gilt $f^{r+l-N}(x_{N-l}) = x_r$ und wir haben einen Zyklus der Abbildung \mathfrak{l} gefunden, der durch die Punkte $x_r, x_{r+1}, \dots, x_{N-l}, x_{N-l+1}, \dots, x_r$ repräsentiert wird. Die Länge dieses Zyklus ist offensichtlich $q_{\mathfrak{l}} = N - r + l + r - N = l$ und damit ist $q_{\mathfrak{l}} = l$ der Nenner der Rotationszahl von \mathfrak{l} . Der Zähler der Rotationszahl ergibt sich aus der Anzahl der Umrundungen, die der Zyklus x_r, x_{r+1}, \dots, x_r zurücklegt.

Im Fall $x_N \in I_{N-1}$ ist $N = l + r$, und für die Grenzen des Intervalls I_s gilt $\varphi_s = x_{N-l} = x_r$ und $\varphi_{s+1} = x_0$. Der Zyklus von \mathfrak{l} ist also nach $N - r = l$ Schritten beendet. Auch in diesem Fall gilt somit $q_{\mathfrak{l}} = l$.

Ist $x_N \in I_0$, gilt ebenfalls $N = l + r$. Die Grenzen des Intervalls I_s lauten jetzt $\varphi_s = x_0$ und $\varphi_{s+1} = x_{N-r} = x_l$. Der Orbit muss also mit x_0 fortgeführt werden. Es ist $f^r(x_0) = x_r$ und damit $q_{\mathfrak{l}} = N - r + r = N = l + r$.

Um die drei Fälle $x_N \notin I_{N-1} \cup I_0$, $x_N \in I_{N-1}$ und $x_N \in I_0$ im Folgenden nicht gesondert behandeln zu müssen, werden die Zahlen L und R eingeführt. Wir setzen

$$L = \begin{cases} N, & \text{falls } x_N \in I_0, \\ l, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} N, & \text{falls } x_N \in I_{N-1}, \\ r, & \text{sonst.} \end{cases}$$

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

Mit diesen Bezeichnungen gilt für die Grenzen des Intervalls I_s

$$\varphi_s = x_{N-L} \text{ und } \varphi_{s+1} = x_{N-R}.$$

Der Nenner der Rotationszahl von \mathfrak{l} ist damit stets $q_{\mathfrak{l}} = L$.

Für die Bandbreitenabbildung \mathfrak{r} kann ebenso verfahren werden, allerdings muss ein Orbit hier stets mit der rechten Intervallgrenze des Bildintervalls fortgeführt werden. Wir beginnen den Orbit von \mathfrak{r} mit $\varphi_1 = x_l$. Dann gilt

$$f^{N-l}(x_l) \in I_s = [x_{N-L}, x_{N-R}) \text{ und } f^{l+R-N}(x_{N-R}) = x_l.$$

Der Nenner der Rotationszahl von \mathfrak{r} ist somit $q_{\mathfrak{r}} = N - l + l + R - N = R$.

Wendet man auf $\varphi_0 = x_0$ den MacKay-Algorithmus solange an, bis (nach dem Aufdatieren) $q_- + q_+ > N$ gilt, so sind $q_- = L = q_{\mathfrak{l}}$ und $q_+ = R = q_{\mathfrak{r}}$. Die Zähler der Rotationszahlen von \mathfrak{l} und \mathfrak{r} ergeben sich durch die Anzahl der Unrundungen ihrer Zyklen. Diese Anzahl entspricht aber gerade den Zählern der Schranken des MacKay-Algorithmus, also p_- für \mathfrak{l} und p_+ für \mathfrak{r} . Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt:

Satz 4.2.1. *Es sei $N > 1$ eine natürliche Zahl und $x_0 \in S^1$ sowohl Startpunkt der $(N \times N)$ -Orbitübergangsmatrix einer Kreisabbildung f als auch Startpunkt des MacKay-Algorithmus zu f . Für die Bandbreitenabbildungen der Orbitübergangsmatrix gilt*

$$\rho(\mathfrak{l}) = \frac{p_-}{q_-} \quad \text{und} \quad \rho(\mathfrak{r}) = \frac{p_+}{q_+},$$

wobei p_-/q_- und p_+/q_+ die Schranken desjenigen MacKay-Schrittes bezeichnen, für den das erste Mal $q_- + q_+ > N$ gilt.

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

Für Orbitübergangsmatrizen kann das charakteristische Polynom direkt ausgerechnet werden. Die Rotationszahlen der Bandbreitenabbildungen der Orbitübergangsmatrix sind nach Korollar 3.1.10 und Satz 4.2.1 gegeben durch

$$\rho(\mathfrak{o}) = \frac{q_+ - p_+}{q_+} \quad \text{und} \quad \rho(\mathfrak{u}) = \frac{q_- - p_-}{q_-}.$$

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$q_1 = \min\{q_-, q_+\} \quad \text{und} \quad q_2 = \max\{q_-, q_+\}.$$

Für den Fall $q_1 = q_-$ sei $\alpha := a$, sonst definieren wir $\alpha := 1 - a$. Dann gilt

4. Orbitübergangsmatrizen

Satz 4.3.1. *Das charakteristische Polynom einer Orbitübergangsmatrix $A = A(\alpha)$ lautet*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (-1)^N \lambda^{N-q_2} ((\lambda^{q_2} - 1) - (1 - \alpha)(\lambda^{q_2-q_1} - 1)) \\ &= (-1)^N \lambda^{N-q_2} (\alpha(\lambda^{q_2} - 1) + (1 - \alpha)\lambda^{q_2-q_1}(\lambda^{q_1} - 1)). \end{aligned}$$

Beweis. Es sei o. B. d. A. $q_1 = q_-$. Da x_0 kein periodischer Punkt von f ist, haben die Bandbreitenabbildungen σ und u verschiedene Rotationszahlen und besitzen jeweils genau einen Zyklus $Z_\sigma = \{i_0 = s, i_1, \dots, i_{q_2-1}\}$ und $Z_u = \{j_0 = s, j_1, \dots, j_{q_1-1}\}$. Es ist nämlich klar, dass s sowohl zum Zyklus von σ als auch zum Zyklus von u gehören muss, da für alle anderen $j \in \underline{N} \setminus s$ gilt $\sigma(j) = u(j)$. Damit wäre ein Zyklus von σ , der s nicht enthält, auch ein Zyklus von u , und die Orbitübergangsmatrix wäre reduzibel oder zyklisch. Das kann aber nur auftreten, wenn x_0 ein periodischer Punkt von f ist. Aus dieser Überlegung ergibt sich außerdem, dass σ und u nur jeweils genau einen Zyklus besitzen können.

Mit $E_{kl} = (e_{ij})$ sei die nicht-negative $(N \times N)$ -Matrix bezeichnet, deren einziger positiver Eintrag $e_{kl} = 1$ ist. Es werden zwei neue Matrizen

$$A_u := A - \alpha E_{k,s} \text{ und } A_\sigma := A - (1 - \alpha) E_{k+1,s}$$

konstruiert. Die Matrix A_u entsteht also aus der Matrix A durch Streichen des Eintrages $a_{k,s} = \alpha$, die Matrix A_σ durch Streichen des Eintrages $a_{k+1,s} = 1 - \alpha$. Die Zustände $j \in Z_u$ sind gerade die rekurrenten Zustände der Matrix A_u ³. Alle anderen Zustände sind singulär. Die Matrix A_u ist somit reduzibel und kann mittels einer Permutationsmatrix P_u auf die Normalform

$$P_u A_u P_u^T = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1-\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} q_1 \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{Transienten} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

³ A_u ist keine Übergangsmatrix. Da aber für die Begriffe *rekurrent* und *transient* der Wert der Einträge nicht entscheidend ist, kann auch hier von *rekurrenten Zuständen* gesprochen werden.

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

gebracht werden. Die Matrix A_o wird entsprechend durch eine Permutationsmatrix P_o in die Form

$$P_o A_o P_o^T = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \\ \hline 0 & \dots\dots\dots & & & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \dots\dots\dots & & & & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} q_2$$

Transienten

transformiert. Die Determinante ist in jeder Spalte linear. Nutzt man diese Linearität in der s -ten Spalte, so berechnet sich das charakteristische Polynom von A zu

$$\det(A - \lambda E) = \det(A_o - \lambda E) + \det(A_u - \lambda E + \lambda E_{ss}).$$

Für den ersten Summanden gilt

$$\det(A_o - \lambda E) = \det(P_o A_o P_o^T - \lambda E) = (-1)^N \lambda^{N-q_2} (\lambda^{q_2} - \alpha).$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir

$$\det(A_u - \lambda E + \lambda E_{ss}) = \det(P_u A_u P_u^T - \lambda E + \lambda E_{00})$$

$$= \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ 1-\alpha & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\lambda & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda & \\ 0 & \dots\dots\dots & & & 0 & -\lambda \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \dots\dots\dots & & & & 0 & -\lambda \end{array} \right|.$$

Transienten

Entwickelt man diese Matrix nach der ersten Zeile, so ergibt sich

$$\det(P_u A_u P_u^T - \lambda E - \lambda E_{00}) = (-1)^{N-1} \lambda^{N-q_1} (1 - \alpha).$$

Insgesamt hat man also

4. Orbitübergangsmatrizen

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= (-1)^N \lambda^{N-q_2} (\lambda^{q_2} - \alpha) + (-1)^{N-1} \lambda^{N-q_1} (1 - \alpha) \\ &= (-1)^N \lambda^{N-q_2} (\lambda^{q_2} - \alpha - \lambda^{q_2-q_1} (1 - \alpha)).\end{aligned}$$

□

Aus Satz 4.3.1 folgt sofort, dass 0 ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $N - q_2$ ist. Die anderen Eigenwerte sind die Nullstellen des *Trinomials*⁴

$$T(\lambda) = \lambda^{q_2} - (1 - \alpha)\lambda^{q_2-q_1} - \alpha.$$

Da A primitiv ist, ist klar, dass 1 eine einfache Nullstelle des Trinomials ist und dass alle weiteren Nullstellen betragsmäßig kleiner als 1 sind. Die Geometrie dieser Nullstellen wird im folgenden Abschnitt näher beleuchtet.

4.3.1. Geometrie des Spektrums

Polynome der Gestalt

$$T(z) = a_0 + a_1 z^p + a_n z^n$$

mit $p, n \in \mathbb{N}$ heißen *Trinomiale*. Neben der 0 sind die Eigenwerte einer Orbitübergangsmatrix Nullstellen des speziellen Trinomials

$$T_\alpha(z) = z^{r+s} - (1 - \alpha)z^s - \alpha$$

mit $\alpha \in (0, 1)$ und $r = q_1$, $s = q_2 - q_1$. FELL [18] hat die Geometrie der Nullstellen der Trinomiale

$$-z^{r+s} T_\alpha\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha z^{r+s} + (1 - \alpha)z^r - 1$$

für $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ untersucht, deren Nullstellen gerade die Kehrwerte der Nullstellen von T sind. Ihre Ergebnisse werden im Folgenden anhand des Trinomials T_α erläutert.

Ziel dieses Abschnitts ist es zu untersuchen, inwiefern das Spektrum der Orbitübergangsmatrix gegen das Spektrum des kontinuierlichen Operators konvergiert. Für irrationale Rotationszahlen besteht das Spektrum des kontinuierlichen Frobenius-Perron-Operators bei hinreichender Glattheit der Kreisabbildung aus ganz \mathbb{C}_1^* . Ist die Rotationszahl der zugrunde liegenden Kreisabbildung f rational und f nicht konjugiert zu einer Drehung, so bildet ebenfalls ganz \mathbb{C}_1^*

⁴ s. Abschnitt 4.3.1.

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

das Spektrum. Unter Konvergenz soll Folgendes verstanden werden: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\text{dist}(x, \sigma(P_N)) < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{C}_1^*, \quad \forall N > N_0.$$

Es wird sich zeigen, dass diese Aussage für Orbitübergangsmatrizen zu Kreisabbildungen mit fast allen irrationalen Rotationszahlen gilt.

Zur Untersuchung der Konvergenz werden zunächst $r + s$ von α unabhängige Sektoren S_j , das sind Mengen

$$S_j := \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, a_j \leq \theta \leq b_j\}, \quad j = 0, 1, \dots, r + s - 1,$$

konstruiert, die für alle $\alpha \in [0, 1]$ eine Nullstelle von T_α enthalten. Im zweiten Schritt wird der Radius r dieser Nullstellen nach unten abgeschätzt. Es wäre wünschenswert, wenn die Radien aller Nullstellen von T_α für $r + s \rightarrow \infty$ unabhängig von α gegen 1 strebten. Da sich jedoch für den Grenzfall $\alpha = 0$ im Ursprung eine s -fache Nullstelle befindet, ist dies nicht für alle Nullstellen zu erwarten. Für bestimmte Sektoren wird diese Abschätzung aber möglich sein.

Die Nullstellen des Trinomials T_α hängen stetig von α ab. Für $\alpha = 0$ hat T_0 die r -ten Einheitswurzeln als einfache und 0 als s -fache Nullstellen. Diese entwickeln sich mit $\alpha \rightarrow 1$ zu den $(r + s)$ -ten Einheitswurzeln und sind betragsmäßig stets ≤ 1 . Die 1 ist natürlich für alle α eine Nullstelle. Es soll zunächst untersucht werden, wie die Pfade der Nullstellen mit sich veränderndem α aussehen. Im Folgenden werden die bereits erwähnten $r + s$ Sektoren der Einheitskreis in \mathbb{C} konstruiert, in denen sich für alle $\alpha \in [0, 1]$ jeweils eine Nullstelle befindet.

Es sei $z = \rho e^{i\theta}$. Betrachtet man nur den Imaginärteil der Gleichung

$$z^{r+s} - (1 - \alpha)z^s - \alpha = 0, \quad (4.3.1)$$

so erhält man

$$\rho^{r+s} \sin((r + s)\theta) - (1 - \alpha)\rho^s \sin(s\theta) = 0 \quad (4.3.2)$$

oder umgeformt

$$\rho^r = \frac{(1 - \alpha) \sin(s\theta)}{\sin((r + s)\theta)}. \quad (4.3.3)$$

Auf gleiche Weise kann man mit der Gleichung $\frac{T_\alpha(z)}{z^{r+s}} = 0$ verfahren und bekommt

$$\rho^s = -\frac{\alpha \sin((r + s)\theta)}{(1 - \alpha) \sin(r\theta)}. \quad (4.3.4)$$

4. Orbitübergangsmatrizen

Da $\rho > 0$, folgt aus (4.3.3) und (4.3.4) für die Vorzeichen der Sinus-Ausdrücke

$$-\operatorname{sgn}(\sin(r\theta)) = \operatorname{sgn}(\sin((r+s)\theta)) = \operatorname{sgn}(\sin(s\theta)). \quad (4.3.5)$$

Die gesuchten Sektoren S_j , $j = 0, 1, \dots, r+s-1$, ergeben sich aus der Bedingung (4.3.5), indem Zahlen $a_j, b_j \in [0, 1)$ gesucht werden, so dass (4.3.5) für alle $\theta \in [2\pi a_j, 2\pi b_j]$ erfüllt ist. Abbildung 4.3 zeigt die Kurven von $\sin(r\theta)$, $\sin(s\theta)$ und $\sin((r+s)\theta)$ im Bereich $[0, \pi]$ am Beispiel $r = 4$ und $s = 3$. Die Intervalle, für die Bedingung (4.3.5) erfüllt ist, sind mit einem schwarzen Balken markiert. Die Sektoren für dieses Beispiel sind

$$\begin{aligned} S_0 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \theta = 0\}, \\ S_1 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{1}{7} \leq \theta \leq \frac{1}{6}\}, \\ S_2 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{1}{4} \leq \theta \leq \frac{2}{7}\}, \\ S_3 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{3}{7} \leq \theta \leq \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

und aufgrund der Symmetrie zur reellen Achse

$$\begin{aligned} S_4 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{4}{7}\}, \\ S_5 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{5}{7} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\}, \\ S_6 &= \{re^{2\pi i\theta} : 0 \leq r \leq 1, \frac{5}{6} \leq \theta \leq \frac{6}{7}\}. \end{aligned}$$

Der Sektor S_0 gehört zur Nullstelle 1 und ist immer $S_0 = \{r : 0 \leq r \leq 1\}$. Um die anderen Sektoren allgemein bestimmen zu können, muss die Anordnung der Zahlen

$$\begin{aligned} A_r &:= \left\{ \frac{j}{r} : 1 \leq j \leq r \right\}, \\ B_{2s} &:= \left\{ \frac{2j+1}{2s} : 0 \leq j \leq 2s-1 \right\} \end{aligned}$$

und

$$A_{r+s} := \left\{ \frac{j}{r+s} : 1 \leq j \leq r+s \right\}$$

in $[0, 1]$ bekannt sein. Die Mengen A_r und A_{r+s} repräsentieren dabei die Argumente der r -ten bzw. $(r+s)$ -ten Einheitswurzeln, während B_{2s} mit der Menge der Argumente der s -ten Wurzeln von -1 identifiziert werden kann.

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

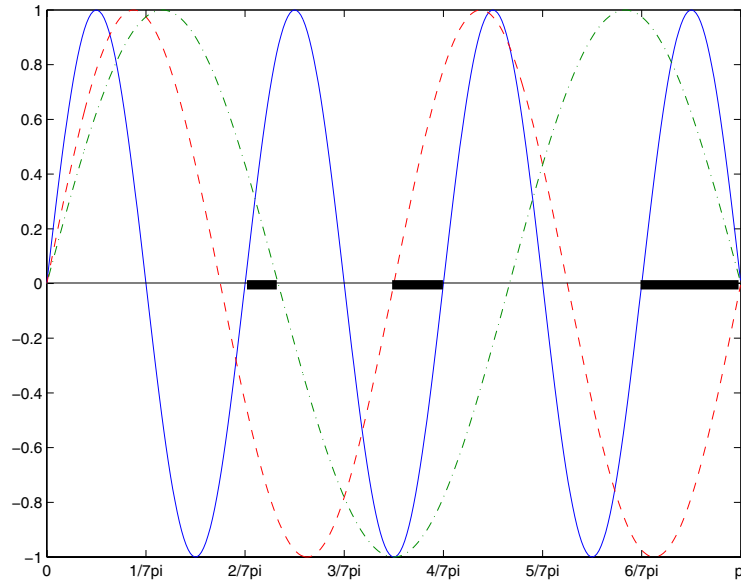


Abbildung 4.3.:

$\sin(4\theta)$ (- - -), $\sin(3\theta)$ (· - ·) und $\sin(7\theta)$ (—) im Bereich $[0, \pi]$.

FELL hat in ihrem Artikel [18] diese Anordnung untersucht. Der zweite Teil des folgenden Lemmas enthält im Original einen Fehler⁵. Wir geben hier eine erweiterte und korrigierte Fassung. Da der Beweis von FELL aber trotzdem gültig bleibt, wird an dieser Stelle auf eine Wiedergabe verzichtet.

Lemma 4.3.2. *Es seien $m \geq 2$ eine ganze Zahl und A_m und B_m die Mengen*

$$A_m := \left\{ \frac{j}{m} : 1 \leq j \leq m \right\}$$

$$B_m := \left\{ \frac{2j+1}{m} : 1 \leq 2j+1 \leq m \right\}.$$

Dann gilt für alle ganzen Zahlen $r, s \geq 2$:

a) *Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ enthält das Intervall $\left[\frac{2j-1}{2(r+s)}, \frac{2j+1}{2(r+s)} \right] \pmod 1$ jeweils genau ein Element aus den zwei Mengen*

- i) $A_r \cup B_{2s}$
- ii) $A_s \cup B_{2r}$.

⁵ Bei FELL bezieht sich die Aussage b) des Lemmas 4.3.2 fälschlicherweise ebenfalls auf das Intervall $\left[\frac{2j-1}{2(r+s)}, \frac{2j+1}{2(r+s)} \right]$.

4. Orbitübergangsmatrizen

b) Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ enthält das Intervall $[\frac{j}{r+s}, \frac{j+1}{r+s}] \pmod{1}$ jeweils genau ein Element aus den zwei Mengen

- i) $A_r \cup A_s$
- ii) $B_{2r} \cup B_{2s}$.

c) Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ befindet sich in jedem Intervall $[\frac{j}{2(r+s)}, \frac{j+1}{2(r+s)}] \pmod{1}$ genau ein Element der Menge

$$A_{2r} \cup A_{2s} = A_r \cup A_s \cup B_{2r} \cup B_{2s}.$$

Beweis. Für die Aussagen a) und b) s. FELL [18]. Die Aussage c) ergibt sich unmittelbar aus a) und b). Es seien nämlich x_1 und x_2 zwei verschiedene Elemente der Menge $A_{2r} \cup A_{2s}$. Die Elemente der Menge A_{2r} haben den Abstand $\frac{1}{2r}$, die der Menge A_{2s} den Abstand $\frac{1}{2s}$. Das Intervall $[\frac{j}{2(r+s)}, \frac{j+1}{2(r+s)}]$ hat aber nur die Länge $\frac{1}{2(r+s)}$. Somit muss entweder $x_1 \in A_{2r}$ und $x_2 \in A_{2s}$ oder $x_2 \in A_{2r}$ und $x_1 \in A_{2s}$ gelten. Dies steht aber im Widerspruch zu den Aussagen a) und b) des Satzes. \square

Bemerkung 4.3.3. Aussage c) des Lemmas 4.3.2 besagt, dass zwischen zwei Vorzeichenwechseln von $\sin((r+s)\theta)$ stets ein Vorzeichenwechsel von $\sin(r\theta)$ oder $\sin(s\theta)$ stattfindet.

Aus Aussage b) kann geschlossen werden, dass sich zwischen den Argumenten einer r -ten und ihrer benachbarten s -ten Einheitswurzel, sofern diese nicht identisch sind, stets das Argument einer $(r+s)$ -ten Wurzel von -1 befindet. Entsprechend liegt zwischen den Argumenten benachbarter r -ter und s -ter Wurzeln von -1 ebenfalls stets das Argument einer $(r+s)$ -ten Wurzel von -1 .

Aussage a) ist die wichtigste der drei Aussagen. Aus ihr kann geschlossen werden, dass es zu jeder $(r+s)$ -ten Wurzel eine r -te Einheitswurzel oder eine s -te Wurzel von -1 gibt, so dass der Abstand des Argumentes dieser Wurzel vom Argument der $(r+s)$ -ten Wurzel kleiner als $\frac{2\pi}{2(r+s)}$ ist. Diese Wurzel ist eindeutig und entspricht dem Element aus der Vereinigung der Menge der r -ten Wurzeln und der Menge der s -ten Wurzeln von -1 , die der $(r+s)$ -ten Wurzel am nächsten liegt.

Aus Lemma 4.3.2 ergibt sich, dass es genau drei Fälle gibt, in denen die Bedingung (4.3.5) erfüllt ist. Wir betrachten eine $(r+s)$ -te Einheitswurzel mit Argument $\frac{2\pi j}{r+s}$.

a) Dann gibt es entweder eine (eindeutige) r -te Wurzel mit Argument $\frac{2\pi k}{r}$, die keine s -te Wurzel von -1 ist und für die gilt $|\frac{k}{r} - \frac{j}{r+s}| < \frac{1}{2(r+s)}$. Es sei

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

zunächst $\frac{k}{r}$ kleiner als $\frac{j}{r+s}$. Aussage a) und b) des Lemmas 4.3.2 besagen nun, dass das Intervall $[\frac{k}{r}, \frac{j}{r+s}]$ im Inneren eines Intervalls $(\frac{2l-1}{2s}, \frac{l}{s})$ liegt. Für die Vorzeichen von $\sin(r\theta)$, $\sin(s\theta)$ und $\sin((r+s)\theta)$ gilt damit im Intervall $(\frac{2\pi k}{r}, \frac{2\pi j}{r+s})$

$$\operatorname{sgn}(\sin(r\theta)) = 1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sin(s\theta)) = -1 = \operatorname{sgn}(\sin((r+s)\theta)).$$

Im Fall $\frac{k}{r} > \frac{j}{r+s}$ liefert die gleiche Überlegung für das Intervall $(\frac{2\pi j}{r+s}, \frac{2\pi k}{r})$

$$\operatorname{sgn}(\sin(r\theta)) = -1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sin(s\theta)) = 1 = \operatorname{sgn}(\sin((r+s)\theta)).$$

b) Oder es gibt eine s -te Wurzel von -1 mit Argument $\frac{2\pi(2l-1)}{2s}$, die keine r -te Einheitswurzel ist und für die $|\frac{2l-1}{2s} - \frac{j}{r+s}| < \frac{1}{2(r+s)}$ gilt. O. B. d. A. sei $\frac{2l-1}{2s} < \frac{j}{r+s}$. Dann besagt Lemma 4.3.2, dass es ein Intervall $(\frac{k}{r}, \frac{2k+1}{2r})$ gibt, in dem das Intervall $[\frac{2l-1}{2s}, \frac{j}{r+s}]$ enthalten ist. Für die Vorzeichen der Sinus-Abbildungen haben wir im Intervall $(\frac{2\pi(2l-1)}{2s}, \frac{2\pi j}{r+s})$

$$\operatorname{sgn}(\sin(r\theta)) = 1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sin(s\theta)) = -1 = \operatorname{sgn}(\sin((r+s)\theta)).$$

c) Oder es gibt eine r -te Einheitswurzel $e^{2\pi ik/r}$, die mit einer s -ten Wurzel von -1 identisch ist und für die $|\frac{k}{r} - \frac{j}{r+s}| < \frac{1}{2(r+s)}$ gilt. Es gelte wieder $\frac{k}{r} < \frac{j}{r+s}$. Im Intervall $(\frac{2\pi k}{r}, \frac{2\pi j}{r+s})$ gilt dann

$$\operatorname{sgn}(\sin(r\theta)) = 1 \text{ und } \operatorname{sgn}(\sin(s\theta)) = -1 = \operatorname{sgn}(\sin((r+s)\theta)).$$

Auf ähnliche Weise findet man, dass für Intervalle, die nicht einem der obigen drei Typen entsprechen, die Bedingung (4.3.5) nicht erfüllt ist.

Die Konstruktion der Sektoren, für die Bedingung (4.3.5) gilt, geht damit wie folgt vonstatten. Man sucht sich in jedem Intervall $[\frac{2j-1}{2(r+s)}, \frac{2j+1}{2(r+s)}]$, das nach Lemma 4.3.2 eindeutig definierte Element β_j aus $A_r \cup B_{2s}$. Es sei $\gamma_j := \frac{j}{r+s}$. Die Bedingung (4.3.5) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\theta \in M := \bigcup_{j=0}^{r+s-1} [a_j, b_j]$$

mit $a_j = 2\pi \min\{\beta_j, \gamma_j\}$ und $b_j = 2\pi \max\{\beta_j, \gamma_j\}$. Es gilt stets $a_0 = b_0 = 0$, was der Nullstelle 1 entspricht. Dies ist das einzige Intervall der Länge 0, alle anderen Intervalle $[a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, r+s-1$, haben positives Lebesgue-Maß. Es gibt somit drei verschiedene Typen von Sektoren:

4. Orbitübergangsmatrizen

- a) Sektoren, für die β_j eine r -te Einheitswurzel, aber keine s -te Wurzel von -1 repräsentiert. Solche Sektoren heißen *Sektoren vom Typ A*.
- b) Sektoren, für die β_j eine s -te Wurzel von -1 , aber keine r -te Einheitswurzel repräsentiert. Solche Sektoren heißen *Sektoren vom Typ B*.
- c) Sektoren, für die β_j sowohl eine r -te Einheitswurzel als auch eine s -te Wurzel von -1 repräsentiert. Solche Sektoren heißen *Sektoren vom Typ C*.

Bei unseren Betrachtungen, in denen das Trinomial T_α das charakteristische Polynom einer Orbitübergangsmatrix ist, können Sektoren vom Typ C nur in bestimmten Fällen auftreten. Damit ein Sektor vom Typ C vorliegt, muss es ganze Zahlen $k \in \underline{r}$ und $l \in \underline{2s}$ geben, so dass

$$\frac{k}{r} = \frac{2l + 1}{2s},$$

was gleichbedeutend mit

$$2ks = (2l + 1)r \tag{4.3.6}$$

ist. Im Falle von Orbitübergangsmatrizen sind die Zahlen r und s inkommensurabel. Damit ist klar, dass Gleichung (4.3.6) nur erfüllt sein kann, wenn s ungerade und r gerade ist. Die Gleichung $ks = (2l + 1)\frac{r}{2}$ führt dann aufgrund der Inkommensurabilität von r und s zu $s = 2l + 1$ und $k = \frac{r}{2}$. Damit ist $\frac{k}{r} = \frac{1}{2} = \frac{2l+1}{2s}$. Es gibt also in dem Fall, dass s ungerade und r gerade ist, genau zwei Sektoren vom Typ C, nämlich $S_{\frac{r+s-1}{2}}$ und $S_{\frac{r+s+1}{2}}$. Diese Sektoren liegen symmetrisch zur negativen reellen Achse liegen und besitzen die gemeinsame Grenze $\{re^{\pi i} : 0 \leq r \leq 1\}$. In allen anderen Fällen gibt es keine Sektoren vom Typ C.

Abbildung 4.4 zeigt die verschiedenen Typen von Sektoren beispielhaft für $r = 4$ und $s = 3$. Die Sektoren S_0, S_2 und S_5 sind vom Typ A, die Sektoren S_1 und S_6 vom Typ B und die Sektoren S_3 und S_4 vom Typ C.

Wir haben nun $r + s$ Sektoren $S_j, j = 0, \dots, r + s - 1$, konstruiert, in denen die Nullstellen des Trinomials liegen können. Es ist als Nächstes zu zeigen, dass tatsächlich jeder der durch $\theta \in [a_j, b_j]$ gegebenen Sektoren eine Nullstelle des Trinomials enthält. Um dies zu zeigen, lassen wir α fest, aber beliebig. Der Realteil der Gleichung (4.3.1) wird umgeformt zu

$$\rho^{r+s} \cos((r + s)\theta) - (1 - \alpha)\rho^s \cos(s\theta) - \alpha = 0. \tag{4.3.7}$$

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

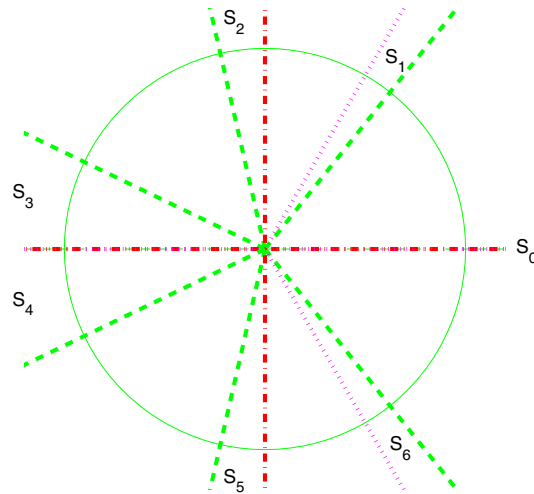


Abbildung 4.4.:

Sektoren für $r = 4$ und $s = 3$. Die gestrichelten Linien stehen für die Menge A_{r+s} , die gestrichpunkteten für A_r und die gepunkteten für B_{2s} .

Löst man sowohl diese Gleichung als auch (4.3.2) nach α auf und setzt diese gleich, so erhält man für die Nullstellen des Trinomials die von α unabhängige Gleichung

$$\rho^{r+s} \sin(r\theta) - \rho^r \sin((r+s)\theta) + \sin(s\theta) = 0. \quad (4.3.8)$$

Mit der Descartschen Vorzeichenregel folgt aus Bedingung (4.3.5), dass die Gleichung (4.3.8) für alle $\theta \in M$ eine reelle, positive Lösung $\rho(\theta)$ besitzt. Anders ausgedrückt, zu jedem $\theta_j \in S_j$ gibt es ein ρ_j und ein $\alpha \in [0, 1]$, so dass $\rho_j e^{i\theta_j}$ eine Nullstelle von T_α ist. Außerdem befindet sich für alle α eine Nullstelle in jedem der $r+s$ Sektoren. Damit ist klar, dass die Nullstellen in den Sektoren vom Typ A und B stets einfach sind. Lediglich auf der negativen reellen Achse kann eine zweifache Nullstelle auftreten, wenn es Sektoren vom Typ C gibt.

In jedem der Sektoren S_j kann für die dort befindliche Nullstelle der Winkel θ_j als Funktion von α ausgedrückt werden. FELL hat gezeigt, dass diese Funktionen $\theta_j(\alpha)$ monoton sind. Zum Beweis dieses Ergebnisses sei auf [18] verwiesen.

Die Entwicklung der Nullstellen von T_α in Abhängigkeit von α kann nun so beschrieben werden: Für den Grenzfall $\alpha = 1$ besitzt T_1 die $(r+s)$ -ten Einheitswurzeln als Nullstellen. In den Sektoren vom Typ A laufen die $(r+s)$ -ten Einheitswurzeln mit $\alpha \rightarrow 0$ zu ihren benachbarten r -ten Einheitswurzeln. In den

4. Orbitübergangsmatrizen

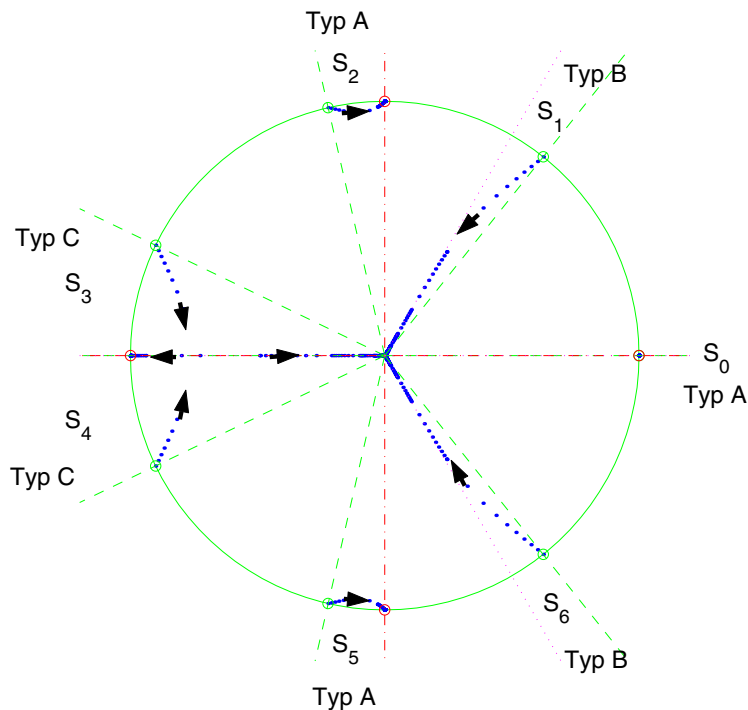


Abbildung 4.5.:

Nullstellenentwicklung für das Trinomial $T(z) = z^7 - (1 - \alpha)z^3 - \alpha$

Sektoren vom Typ B laufen die $(r + s)$ -ten Einheitswurzeln mit $\alpha \rightarrow 0$ zum Ursprung. Treten zwei Sektoren vom Typ C auf, so laufen die Nullstellen von den symmetrisch zur reellen Achse liegenden $(r + s)$ -ten Einheitswurzeln zunächst symmetrisch zur reellen Achse aufeinander zu, bis es für ein $\alpha \in (0, 1)$ eine zweifache Nullstelle auf der negativen reellen Achse gibt. Danach läuft mit $\alpha \rightarrow 0$ eine der Nullstellen auf der reellen Achse zu -1, die andere ebenfalls auf der reellen Achse zum Ursprung. Abbildung 4.5 zeigt eine solche Entwicklung der Nullstellen in den verschiedenen Sektoren am Beispiel $T_\alpha(z) = z^7 - (1 - \alpha)z^3 - \alpha$.

Um die angestrebte Konvergenz zeigen zu können, muss im nächsten Schritt der Radius ρ_j nach unten abgeschätzt werden. Wünschenswert ist dabei, dass mit wachsendem $r + s$ der Radius möglichst vieler Nullstellen gegen 1 geht. FELL [18] liefert für die Sektoren vom Typ A und C folgende Abschätzung:

Satz 4.3.4. *In den Sektoren vom Typ A und vom Typ C gilt für den Radius ρ*

4.3. Spektrum der Orbitübergangsmatrizen

zumindest einer der in diesem Sektor befindlichen Nullstellen⁶ von T_α

$$\rho > \left(\frac{\pi}{4(r+s)} \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (4.3.9)$$

Die Anzahl der Sektoren vom Typ A und C beträgt zusammen r . Es seien S_{j_1} und S_{j_2} zwei benachbarte Sektoren, die entweder jeweils vom Typ A, vom Typ C oder vom Typ A und Typ C sind. Die Länge der Intervalle $[a_j, b_j]$ ist stets kleiner als $\frac{1}{2(r+s)}$. Das Intervall $[b_{j_1}, a_{j_2}]$ wird ungünstigstenfalls von zwei benachbarten Elementen aus A_r gebildet und hat somit eine Länge, die kleiner als $\frac{1}{r}$ ist. Damit gilt für den Abstand der Argumente zweier beliebiger Elemente $z_1 = e^{i\theta_1} \in S_{j_1}$ und $z_2 = e^{i\theta_2} \in S_{j_2}$

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \frac{2\pi}{r} + \frac{2\pi}{r+s}.$$

Es seien $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}_1^*$ und

$$S_A := \{x \in S_j, j = 0, \dots, r+s-1 : S_j \text{ ist vom Typ A oder vom Typ C}\}$$

die Menge aller Elemente aus den Sektoren vom Typ A oder C. Für eine Menge $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ definieren wir

$$\arg(\mathcal{A}) := \{\theta \in [0, 2\pi) : re^{i\theta} \in \mathcal{A} \text{ für ein } r \in \mathbb{R}_+\}.$$

Ist die Rotationszahl der Kreisabbildung irrational, so wird mit wachsendem N sowohl r als auch $r+s$, also die Nenner der Bandbreitenabbildungen von P_N , beliebig groß. Somit kann zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N_0 = r+s$ gefunden werden, so dass

$$\text{dist}(\theta, \arg(\sigma(P_N) \cap S_A)) \leq \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{r+s} \leq \epsilon$$

für alle $N > N_0$.

Wir betrachten nun den Radius der Nullstellen in den Sektoren vom Typ A und C. Es sei ρ_A der Radius einer Nullstelle aus S_A . Im Fall $r > s$ liefert Abschätzung (4.3.9) bereits das gewünschte Ergebnis, da dann mit $r \rightarrow \infty$ der rechte Ausdruck gegen 1 geht. Es sei also $r < s$. Berücksichtigt man, dass das Trinomial für unsere Betrachtungen das charakteristische Polynom einer Orbitübergangsmatrix ist, so haben wir $r = q_1$ und $r+s = q_2$. Der Exponent

⁶ In den Sektoren vom Typ A gibt es genau eine Nullstelle. In den Sektoren vom Typ C hingegen können zwei reelle (negative) Nullstellen auftreten. Die Abschätzung bezieht sich dann auf die betragsmäßig größere Nullstelle.

4. Orbitübergangsmatrizen

r entspricht also dem Nenner der MacKay-Schranke, die unverändert geblieben ist, und ist somit stets Nenner q_k einer Konvergente der Rotationszahl $\rho(f) = \omega$. Die Zahl $r + s$ hingegen entspricht dem Nenner der verbesserten Schranke. Im ungünstigsten Fall ist also $r + s = q_{k+1}$. Maßgeblich für die Abschätzung von ρ_A durch Ungleichung (4.3.9) ist das Verhalten von $(r + s)^{-\frac{1}{r}}$ für $r + s \rightarrow \infty$. Mit $r = q_k$ und $r + s = q_{k+1}$ muss also das Verhalten von $(q_{k+1})^{-\frac{1}{q_k}}$ für $k \rightarrow \infty$ untersucht werden. Es gilt

$$\left| \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_{k+1}q_k},$$

und mit Ungleichung (1.1.4) erhalten wir

$$\frac{1}{q_{k+1}q_k} \geq \left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Lemma 1.1.11 besagt, dass es für festes $\epsilon > 0$ für fast alle $\omega \in [0, 1]$ eine Konstante K gibt, so dass

$$\left| \omega - \frac{p_k}{q_k} \right| \geq \frac{K}{q_k^{2+\epsilon}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

gilt. Damit ist für diese ω der Ausdruck $\frac{1}{q_{k+1}}$ größer oder gleich $\frac{K}{q_k^{1+\epsilon}}$. Die Menge aller ω , für die Ungleichung (1.1.3) aus Lemma 1.1.11 erfüllt ist, werde mit R_ϵ bezeichnet. Insgesamt haben wir

$$\left(\frac{1}{q_{k+1}} \right)^{\frac{1}{q_k}} \geq \left(\frac{K}{q_k^{1+\epsilon}} \right)^{\frac{1}{q_k}}$$

und somit $(q_{k+1})^{-\frac{1}{q_k}} \rightarrow 1$ mit $k \rightarrow \infty$ für alle $\omega \in R_\epsilon$. Der folgende Satz fasst die Ergebnisse zusammen.

Satz 4.3.5. *Es sei f eine Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl ω und P_f ihr (kontinuierlicher) Frobenius-Perron-Operator. Ist $\omega \in R_\epsilon$, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\text{dist}(\sigma(P_f), \sigma(P_N)) < \delta$$

für alle $N > N_0$, wobei P_N eine $N \times N$ -Orbitübergangsmatrix zu f bezeichne.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Bedingung $\omega \in R_\epsilon$ keine besondere Einschränkung darstellt, da das Komplement von R_ϵ eine Nullmenge ist. Die Aussage gilt also stets für fast alle Rotationszahlen.

4.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren

In diesem Abschnitt wird der stationäre W-Vektor einer Orbitübergangsmatrix allgemein berechnet. Zur Erläuterung des Vorgehens betrachten wir noch einmal die Matrix aus Abbildung 4.1. Die Eigenwertgleichung $v = P_N v$ für diese Matrix lautet

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}.$$

Betrachtet man diese Gleichung zeilenweise, so erhält man

$$v_0 = v_3 = v_5 = v_1 = av_4, \quad (4.4.1)$$

$$v_6 = v_2 = (1-a)v_4, \quad (4.4.2)$$

$$v_4 = v_0 + v_6. \quad (4.4.3)$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 werden also aufgespannt durch den Vektor v mit den Komponenten

$$v_0 = v_3 = v_5 = v_1 = a,$$

$$v_6 = v_2 = (1-a),$$

$$v_4 = 1.$$

Die Aufstellung der Gleichungen für die Komponenten eines Eigenvektors hängt mit den Zyklen der Bandbreitenabbildungen \mathfrak{l} und \mathfrak{r} zusammen. Für die Zyklen der Matrix dieses Beispiels gilt

$$Z_{\mathfrak{l}} = \{6, 2, 4\} \quad \text{und} \quad Z_{\mathfrak{r}} = \{0, 3, 5, 1, 4\}.$$

Die Gleichungskette (4.4.1) entspricht den Indizes der Menge $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}$, also den Elementen, die nicht zum Zyklus von \mathfrak{l} gehören. Die Gleichungskette (4.4.2) hingegen umfasst die Indizes der Menge $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}$, die der Gleichung (4.4.3) die Indizes der Menge $Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}$.

Im Folgenden wird erläutert, dass diese Eigenschaft allgemein für Orbitübergangsmatrizen gültig ist. Dazu müssen zunächst die Mengen $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}$, $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}$ und $Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}$ analysiert werden.

4. Orbitübergangsmatrizen

In Abschnitt 4.2 hatten wir gesehen, dass die Zyklen von \mathfrak{l} und \mathfrak{r} mit bestimmten Orbitpunkten x_{i_k} identifiziert werden können. Es zeigte sich, dass die Zyklen von \mathfrak{l} und \mathfrak{r} repräsentiert werden durch die Orbitpunkte

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} &: x_r, x_{r+1}, \dots, x_{N-1}, x_{N-L}, \dots, x_{R-1}, \\ \mathfrak{r} &: x_l, x_{l+1}, \dots, x_{N-1}, x_{N-R}, \dots, x_{L-1}.\end{aligned}$$

Aus den Ausführungen ging außerdem hervor, mit welchen Partitionsunkten diese Orbitpunkte identisch sind. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}x_r &= \varphi_{N-1}, & x_l &= \varphi_0, & x_{N-1} &= \varphi_{k+1}, \\ x_{N-L} &= \varphi_s, & x_{N-R} &= \varphi_{s+1}, \\ x_{R-1} &= \varphi_z, & x_{L-1} &= \varphi_{z+1},\end{aligned}$$

so dass die Zyklen von \mathfrak{l} und \mathfrak{r} ausgedrückt durch die Partitionsunkte lauten

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} &: \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_{k+1}, \varphi_s, \dots, \varphi_z, \\ \mathfrak{r} &: \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1}, \dots, \varphi_{z+1}.\end{aligned}$$

Für die Elemente der Mengen $Z_{\mathfrak{l}}$ und $Z_{\mathfrak{r}}$ kann daraus

$$\begin{aligned}Z_{\mathfrak{l}} &= \{N-1, \dots, k+1, s, \dots, z\} \quad \text{und} \\ Z_{\mathfrak{r}} &= \{0, \dots, k, s, \dots, z\}\end{aligned}$$

geschlossen werden. Im Fall $L = N$ gilt $s = 0$ und $z + 1 = k + 1$, woraus $z = k$ folgt. Ist hingegen $R = N$, so haben wir $z = k + 1$ sowie $s + 1 = 0$ und somit $s = N - 1$. Damit lassen sich die gesuchten Mengen $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}$, $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}$ und $Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}$ explizit angeben. Es gilt

$$Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}} = \{s, \mathfrak{l}(s) = \mathfrak{r}(s), \dots, \mathfrak{l}^m(s) = \mathfrak{r}^m(s) = z\} \quad \text{mit} \quad m = L + R - N - 1,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}} &= \emptyset, \quad \text{falls} \quad L = N \quad \text{und} \\ \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}} &= \{0, \mathfrak{l}(0) = \mathfrak{r}(0), \dots, \mathfrak{l}^{N-l-1}(0) = \mathfrak{r}^{N-l-1}(0) = k\}, \quad \text{falls} \quad L \neq N,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}} &= \emptyset, \quad \text{falls} \quad R = N \quad \text{und} \\ \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}} &= \{N-1, \mathfrak{l}(N-1) = \mathfrak{r}(N-1), \dots, \\ &\quad \mathfrak{l}^{N-r-1}(N-1) = \mathfrak{r}^{N-r-1}(N-1) = k+1\}, \quad \text{falls} \quad R \neq N.\end{aligned}$$

4.4. Stationäre Wahrscheinlichkeitsvektoren

Alle Punkte, die nicht zum periodischen Orbit von \mathfrak{l} gehören, sind periodische Punkte von \mathfrak{r} und umgekehrt. Ein Punkt $i \in \mathbb{Z}_N$ kann also dadurch klassifiziert werden, dass er in genau einer der Mengen $Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}$, $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}$ oder $\mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}$ enthalten ist.

Wir betrachten nun die Eigenwertgleichung $v = P_N v$ zeilenweise. Es sei zunächst $q_- < q_+$ und damit $\alpha := a$. Für die Zeilen mit Index $i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}$ gilt

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{\mathfrak{l}(0)}, \\ v_{\mathfrak{l}(0)} &= v_{\mathfrak{l}^2(0)}, \\ &\vdots \\ v_{\mathfrak{l}^{N-l-2}(0)} &= v_k, \\ v_k &= \alpha v_s. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die Zeilen $i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}$ und für die Zeilen $i \in Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}$, falls $R \neq N$,

$$\begin{aligned} v_{N-1} &= v_{\mathfrak{l}(N-1)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{N-r-2}(N-1)} = v_{k+1} = (1 - \alpha)v_s, \\ v_s &= v_{\mathfrak{l}(s)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{m-1}(s)} = v_z = v_0 + v_{N-1}. \end{aligned}$$

Ist hingegen $R = N$, so ist wegen $z = k + 1$ und $s = N - 1$

$$v_s = v_{\mathfrak{l}(s)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{m-1}(s)} = v_z = v_0 + (1 - \alpha)v_s.$$

Wählt man $v_s = 1$, so ergibt sich in beiden Fällen für einen Eigenvektor v

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i \in Z_{\mathfrak{l}} \cap Z_{\mathfrak{r}}, \\ \alpha & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{l}}, \\ 1 - \alpha & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_{\mathfrak{r}}. \end{cases}$$

Die Summe der Komponenten von v ist $\nu := \sum_{i=0}^{N-1} v_i = L + \alpha(R - L)$, so dass v/ν der stationäre W-Vektor der Orbitübergangsmatrix ist.

Ist hingegen $q_+ < q_-$, so definieren wir $\alpha := 1 - a$. Dieselben Überlegungen wie zuvor ergeben nun

$$v_{N-1} = v_{\mathfrak{l}(N-1)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{N-r-2}(N-1)} = v_{k+1} = \alpha v_s,$$

und, falls $L \neq N$,

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{\mathfrak{l}(0)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{N-l-2}(0)} = v_k = (1 - \alpha)v_s, \\ v_s &= v_{\mathfrak{l}(s)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{m-1}(s)} = v_z = v_0 + v_{N-1}, \end{aligned}$$

sonst, wegen $z = k$ und $s = 0$,

$$v_s = v_{\mathfrak{l}(s)} = \dots = v_{\mathfrak{l}^{m-1}(s)} = v_z = (1 - \alpha)v_s + v_{N-1}.$$

4. Orbitübergangsmatrizen

Für den stationären W-Vektor v gilt jetzt

$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{für } i \in Z_l \cap Z_r, \\ \frac{\alpha}{\nu} & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_r, \\ \frac{1-\alpha}{\nu} & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_l \end{cases}$$

mit $\nu = R + \alpha(L - R)$.

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\begin{array}{llll} Z_1 & := & Z_l, & Z_2 & := & Z_r, & \alpha & := & a, & \text{falls } q_- < q_+, \\ Z_1 & := & Z_r, & Z_2 & := & Z_l, & \alpha & := & 1 - a, & \text{falls } q_- > q_+ \end{array}$$

und

$$q_1 := \min\{q_-, q_+\}, \quad q_2 := \max\{q_-, q_+\}.$$

Der folgende Satz fasst die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen.

Satz 4.4.1. *Für die Komponenten des stationären W-Vektors v einer Orbitübergangsmatrix gilt*

$$v_i = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & \text{für } i \in Z_1 \cap Z_2, \\ \frac{\alpha}{\nu} & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_1, \\ \frac{1-\alpha}{\nu} & \text{für } i \in \mathbb{Z}_N \setminus Z_2 \end{cases}$$

mit $\nu = q_1 + \alpha(q_2 - q_1)$.

Hat man v berechnet, so ist, falls f eine invariante Dichte besitzt,

$$h_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{v_i}{m(I_i)} 1_{I_i}(x)$$

ein Kandidat für die Approximation der invarianten Dichte von f . Im folgenden Abschnitt wird ein Algorithmus beschrieben, der eine solche Approximation simultan zum MacKay-Algorithmus berechnet.

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

Sind die zyklische Anordnung der Punkte eines Orbits einer Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl und die Größe α bekannt, so kann mit Satz 4.4.1 der

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

stationäre W-Vektor der Orbitübergangsmatrix berechnet werden, ohne dass die Matrix und ihre Bandbreitenabbildungen explizit angegeben werden müssen. Diese Berechnung lässt sich gut mit dem MacKay-Algorithmus verbinden. Als Startpunkt wähle man $x_0 = 0$. In jedem Iterationsschritt ist $Q = q_- + q_+$. Dann ist durch die Punkte $x_0 = 0, \dots, x_{Q-1}$ die Partition zu einer Orbitübergangsmatrix gegeben. Ist $z > 0$ so ist $L = Q$ und $R = q_+$. Für $z < 0$ gilt $L = q_-$ und $R = Q$. Anders als im MacKay-Algorithmus werden die Orbitpunkte des Lifts abgespeichert, um den stationären W-Vektor und die approximierte Dichte berechnen zu können. Außerdem müssen zur Berechnung von α die Punkte φ_{N-1} und φ_1 bekannt sein. In jedem Schritt werden deshalb zusätzlich die Variablen z_l und z_r verändert. Bei der Initialisierung setzt man $z_l = x_1 - p_-$ und $z_r = x_1 - p_+$. Danach wird im Fall $z > 0$ der Wert z_l zu $z_l = z$ verändert, während z_r unverändert bleibt. Der Wert z_l speichert also stets den Wert x_N des letzten MacKay-Schrittes, bei dem die linke Grenze verbessert wurde. Im nächsten Schritt entspricht z_l dem Partitionspunkt φ_1 . Im Fall $z < 0$ wird $z_r = z$ gesetzt. z_r speichert somit $x_N - 1$ der letzten Verbesserung der rechten Schranke. Im nächsten MacKay-Schritt entspricht z_r also dem Wert $\varphi_{N-1} - 1$. Liegt ein MacKay-Schritt mit $z > 0$ vor, so ist $\alpha = \varphi_1 - x_N/\varphi_1$ und damit wegen $z = x_N$

$$\alpha = \frac{\varphi_1 - z}{\varphi_1} = 1 - \frac{z}{\varphi_1} = 1 - \frac{z}{z_l}.$$

Ist hingegen $z < 0$, so gilt für α

$$\alpha = \frac{x_N - \varphi_{N-1}}{1 - \varphi_{N-1}} = \frac{1 - \varphi_{N-1} + z}{1 - \varphi_{N-1}} = 1 - \frac{z}{z_r}.$$

Damit kann die Normierung $\nu = q_+ + \alpha q_-$ im Fall $z > 0$ bzw. $\nu = q_- + \alpha q_+$ im Fall $z < 0$ berechnet werden.

Zur Berechnung des stationären W-Vektors müssen als Nächstes die Partitionspunkte φ_i , $i = 0, \dots, N - 1$ bestimmt werden. Dazu werden die Orbitpunkte des Lifts auf S^1 projiziert, also modulo 1 gerechnet und umsortiert. Ein Sortieralgorithmus ist hierfür nicht notwendig, da für die Partitionspunkte $\varphi_i = x_j$ mit $j = i \cdot q_- \bmod Q$ gilt. Der stationäre W-Vektor kann nun nach Satz 4.4.1 berechnet werden. Die Mengen Z_l und Z_r können nach den Ausführungen in Abschnitt 4.4 als

$$\begin{aligned} Z_r &= \{i \in \mathbb{Z}_N : \varphi_i = x_k \text{ und } k < q_+\}, \\ Z_l &= \{i - 1 \in \mathbb{Z}_N : \varphi_i = x_k \text{ und } k < q_-\} \end{aligned}$$

4. Orbitübergangsmatrizen

geschrieben werden.

Der Algorithmus zur Berechnung des stationären W-Vektors wird im Folgenden schematisch dargestellt. Es sei F derjenige Lift der Kreisabbildung f , für den $F(0) = f(0)$. Mit $\epsilon > 0$ werde wieder die Genauigkeit der Approximation der Rotationszahl von f angegeben.

Erweiterter MacKay-Algorithmus

Setze $x_0 := 0$, $x_1 := F(0)$, $p_- = 0$, $p_+ = 1$, $Q = q_- = q_+ = 1$, $z_r = x_1 - p_+$, $z_l = x_1 - p_-$. Solange $q_- \cdot q_+ < \frac{1}{\epsilon}$, führe folgende Schritte aus:

- $x_i := F(x_{i-1})$, $i = Q + 1, \dots, q_+ + q_-$
- $Q = q_- + q_+$, $P = p_- + p_+$
- $z = x_Q - P$
- falls $z = 0$: $\rho(f) = P/Q$, Programmabbruch
- falls $z > 0$:
 - im letzten Schritt, also falls $Q \cdot q_+ > \frac{1}{\epsilon}$:
 - * $\alpha = 1 - \frac{z}{z_l}$
 - * $\nu = q_+ + \alpha q_-$
 - * $\varphi_i = x_j \pmod{1}$, $j = i \cdot q_- \pmod{Q}$
 - * $v_i = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & i \in Z_r, \\ v_i = \frac{\alpha}{\nu} & \text{sonst} \end{cases}$
 - $q_- = Q$, $p_- = P$, $z_l = z$
- falls $z < 0$:
 - im letzten Schritt, also falls $Q \cdot q_- > \frac{1}{\epsilon}$:
 - * $\alpha = 1 - \frac{z}{z_r}$
 - * $\nu = q_- + \alpha q_+$
 - * $\varphi_i = x_j \pmod{1}$, $j = i \cdot q_- \pmod{Q}$
 - * $v_i = \begin{cases} \frac{1}{\nu} & i \in Z_l, \\ v_i = \frac{\alpha}{\nu} & \text{sonst} \end{cases}$
 - $q_+ = Q$, $p_+ = P$, $z_r = z$

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

Der Algorithmus liefert die untere und obere Grenze für die Rotationszahl sowie den stationären W-Vektor und die Partitionspunkte. Die approximierete invariante Dichte kann daraus berechnet werden mittels

$$h_N(x) := \sum_{i=0}^{Q-1} \frac{v_i}{\varphi_{i+1} - \varphi_i} 1_{I_i}(x).$$

Die approximierete Konjugation g_N ist durch

$$g_N(x) := \int_0^x h_N(\varphi) d\varphi$$

gegeben.

Satz 3.4.2 liefert eine Konvergenzaussage für das durch h_N induzierte invariante Maß. Für die stückweise lineare, approximierende Abbildung f_N aus Satz 3.4.1 gilt nach Konstruktion $f^j(x_0) = f_N^j(x_0)$ für alle $j = 0, \dots, N$. Aus Satz 3.4.2 folgt damit

Korollar 4.5.1. *Es sei f eine C^2 -Kreisabbildung mit irrationaler Rotationszahl. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 3.4.2 für die approximierete Dichte des erweiterten MacKay-Algorithmus*

$$\|g - g_N\|_\infty \leq \frac{1}{q_-} + \frac{1}{q_+}. \quad (4.5.1)$$

Beweis. Satz 3.4.2 liefert

$$\|g - g_N\| \leq \frac{1}{q_k} + q_k |\rho - \rho_N| \quad \text{wobei } q_k < Q \leq q_{k+1}.$$

Aus der Konvergenz des MacKay-Algorithmus folgt aber, dass

$$\rho, \rho_N \in \left[\frac{p_-}{q_-}, \frac{p_+}{q_+} \right]$$

und somit

$$|\rho - \rho_N| \leq \frac{1}{q_- q_+}.$$

Da eine der beiden Grenzen eine Konvergente ist, d.h. entweder $q_- = q_k$ oder $q_+ = q_k$, folgt die Behauptung. \square

Für die zu approximierende invariante Dichte h erhält man für ein Intervall $[a, b] \in S^1$ mit Korollar 4.5.1 die folgende Abschätzung, s. a. NICOLAISEN und WERNER [42],

$$\left| \int_a^b h(x) - h_N(x) dx \right| \leq |g(b) - g_N(b) - (g(a) - g_N(a))| \leq 2 \|g - g_N\|_\infty.$$

4. Orbitübergangsmatrizen

Soll der erweiterte MacKay-Algorithmus in erster Linie die invariante Dichte berechnen, so bietet es sich an, als Abbruchkriterium die Abschätzung (4.5.1) zu verwenden. Die numerischen Versuche des nächsten Abschnitts zeigen, dass eine Fehlertoleranz von $\|g - g_N\|_\infty \leq 10^{-3}$ gute Ergebnisse liefert.

4.5.1. Numerische Experimente

In diesem Abschnitt wird der im vorhergehenden Abschnitt hergeleitete erweiterte MacKay-Algorithmus an einigen Beispielen getestet und mit anderen Verfahren zur Berechnung der invarianten Dichte verglichen. Im Vordergrund wird der Vergleich mit der Ulam-Methode bei äquidistanten Partitionen stehen. Es ist dabei zu beachten, dass der Rechenaufwand für die Ulam-Methode um ein Vielfaches höher ist, da nicht nur die Funktionswerte der Partitionspunkte berechnet werden, sondern zusätzlich noch ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Ein anderes Verfahren, das wie der erweiterte MacKay-Algorithmus ohne das Lösen eines linearen Gleichungssystems auskommt, ist die Counting-Methode. Hierbei wird der Phasenraum in N gleich große Intervalle I_i aufgeteilt, ein beliebiger Startpunkt unter f iteriert und gezählt, wie oft der Orbit ein Intervall I_i trifft. Die invariante Dichte wird dann approximiert durch

$$h_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N}{n} h_i 1_{I_i}(x),$$

wobei h_i die Anzahl der Besuche des Orbits im Intervall I_i und n die Länge des Orbits bezeichnen.

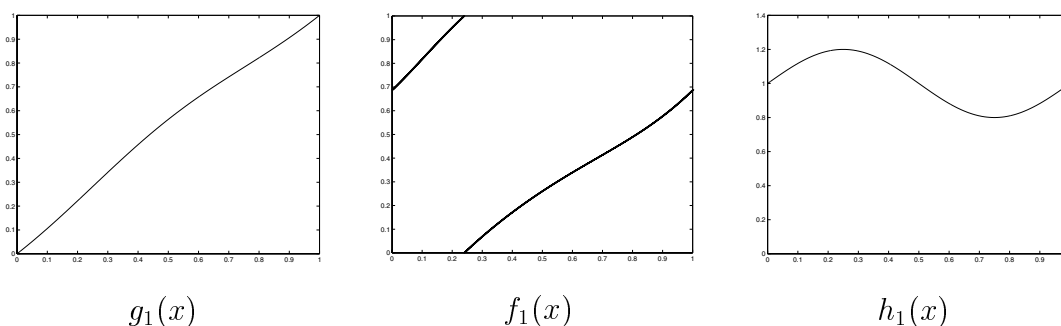


Abbildung 4.6.: Konjugation g_1 , Kreisabbildung f_1 und Dichte h_1 für $\eta = 0.2$

Um die Verfahren vergleichen zu können, werden zwei Kreisabbildungen durch Konjugation einer Rotation konstruiert, so dass die invarianten Dichten bekannt

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

sind. Die erste Testfunktion erhält man durch die Konjugation

$$g_1(x) = \frac{\eta}{2\pi} (1 - \cos(2\pi x)) + x$$

mit $\eta \in (0, 1)$. Die invariante Dichte lautet somit

$$h_1(x) = \eta \sin(2\pi x) + 1.$$

Als Rotationswinkel wählen wir $\omega = 2\pi(\sqrt{3} - 1)$. Abbildung 4.6 zeigt die Konjugation g_1 , die Kreisabbildung $f_1 = g_1^{-1} \circ r_\omega \circ g_1$ sowie die invariante Dichte h_1 für $\eta = 0.2$.

N	$e(g - g_N)$	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$\max I_i $	$\min I_i $
41	9.11 E-2	3.21 E-2	2.51 E-2	4.15 E-2	1.60 E-2
209	1.13 E-2	5.11 E-3	3.49 E-3	6.44 E-3	3.14 E-3
362	7.55 E-3	3.75 E-3	2.72 E-3	4.72 E-3	1.15 E-3
780	3.03 E-3	1.38 E-3	9.33 E-4	1.73 E-3	8.43 E-4
2131	1.75 E-3	6.35 E-4	4.93 E-4	8.01 E-4	3.08 E-4
2911	8.13 E-4	3.69 E-4	2.50 E-4	4.63 E-4	2.26 E-4
7953	4.69 E-4	1.71 E-4	1.32 E-4	2.15 E-4	8.26 E-5
18817	1.45 E-4	7.23 E-5	5.31 E-5	9.07 E-5	2.21 E-5

Tabelle 4.1.:

Ergebnisse des erweiterten MacKay-Algorithmus für die Testfunktion f_1 mit $\eta = 0.2$

N	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$ I_i $
41	2.81 E-2	1.66 E-2	2.44 E-2
209	5.69 E-3	3.55 E-3	4.78 E-3
362	3.29 E-3	2.06 E-3	2.76 E-3
780	1.51 E-3	1.07 E-3	1.28 E-3
2131	5.61 E-4	3.81 E-4	4.69 E-4
2911	4.10 E-4	3.09 E-4	3.44 E-4
7953	1.49 E-4	1.22 E-4	1.26 E-4
18817	6.34 E-5	1.17 E-4	5.32 E-5

Tabelle 4.2.:

Übergangsmatrizen mit äquidistanten Partitionen für die Testfunktion f_1 mit $\eta = 0.2$

4. Orbitübergangsmatrizen

Die Ergebnisse des erweiterten MacKay-Algorithmus für die Kreisabbildung f_1 mit $\eta = 0.2$ bei verschiedenen Orbitlängen sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. In der ersten Spalte ist die Länge N des Orbits angegeben. Die zweite Spalte zeigt den Fehler der Konjugation nach Abschätzung (4.5.1), die dritte den tatsächlichen Fehler. In der vierten Spalte ist der Fehler zur invarianten Dichte angegeben. Die beiden letzten Spalten zeigen den größten und kleinsten Durchmesser der Partitionsintervalle.

Offensichtlich stimmt die Abschätzung (4.5.1) größenordnungsmäßig mit dem tatsächlichen Fehler $\|g - g_N\|_\infty$ überein. Der Fehler, der bei der Approximation der invarianten Dichte gemacht wird, ist allerdings etwas größer. Im Vergleich zu den Übergangsmatrizen mit äquidistanten Partitionen, s. Tabelle 4.2, schneidet der erweiterte MacKay-Algorithmus bei der Approximation der invarianten Dichte etwas weniger gut ab. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass der rechnerische Aufwand zur Bestimmung des stationären W-Vektors der Übergangsmatrizen zu äquidistanten Partitionen deutlich höher ist als bei Orbitübergangsmatrizen. Um zum Beispiel eine Genauigkeit von $1.22 \cdot 10^{-4}$ zu erreichen, muss nach der Berechnung der Funktionswerte ein lineares Gleichungssystem der Größe 7953 gelöst werden. Der erweiterte MacKay-Algorithmus hingegen benötigt ausschließlich die Funktionswerte. Die Rechenschritte zur Bestimmung des stationären W-Vektors beschränken sich im Wesentlichen auf die Modulorechnung ganzer Zahlen. Die Counting-Methode, s. Tabelle 4.3, liefert hingegen auch bei sehr vielen Iterationen deutlich schlechtere Ergebnisse als die beiden anderen Verfahren.

N	Iterationen	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$ I_i $
10	100	1.10 E-1	2.00 E-1	1.00 E-1
100	1000	1.15 E-2	1.96 E-1	1.00 E-2
100	2000	1.15 E-2	9.64 E-2	1.00 E-2
100	2911	1.06 E-2	3.90 E-2	1.00 E-2
100	5000	1.09 E-2	3.64 E-2	1.00 E-2
200	7953	4.83 E-3	3.62 E-2	5.00 E-3
200	19000	4.77 E-3	2.24 E-2	5.00 E-3

Tabelle 4.3.: Counting-Methode für die Testfunktion f_1 mit $\eta = 0.2$

Abbildung 4.7 zeigt die approximierten invariante Dichte für den erweiterten MacKay-Algorithmus, die Übergangsmatrix mit äquidistanter Partition und die Counting-Methode. Obwohl für die Counting-Methode eine deutliche höhere Anzahl von Iterationen gewählt wurde, ist die Approximation sichtlich schlechter. Aus Abbildung 4.8 wird deutlich, dass sich die Fehlerfunktionen $\|h - h_N\|$

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

im erweiterten MacKay-Algorithmus und bei der Kreismatrix ähneln. Die Fehlerfunktion der Counting-Methode bewegt sich nicht nur in einer anderen Größenordnung, sondern zeigt auch ein qualitativ anderes Verhalten.

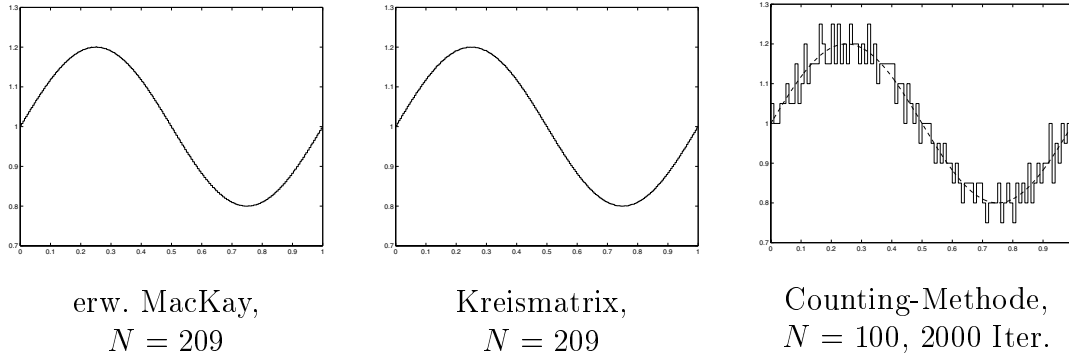


Abbildung 4.7.:

Approximierte Dichten für Testfunktion f_1 mit $\eta = 0.2$: erw. MacKay, Kreismatrizen und Counting-Methode

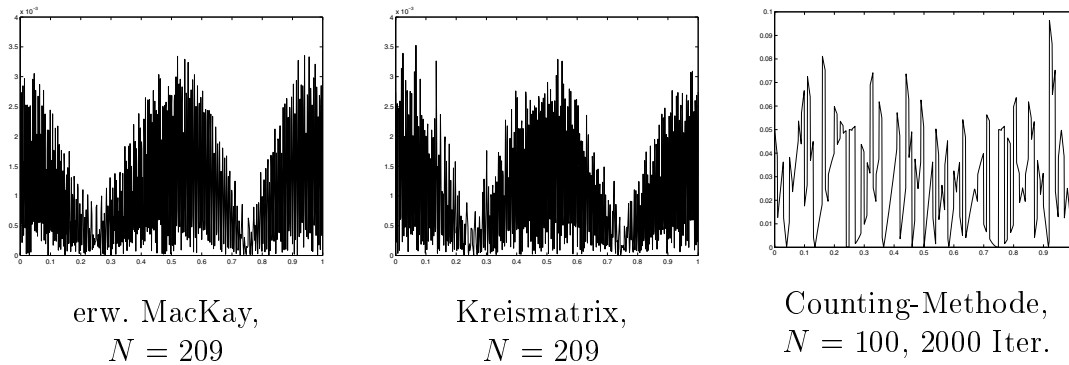


Abbildung 4.8.:

Fehler $|h - h_N|$ der approximierten Dichten für die Testfunktion f_1 mit $\eta = 0.2$: erw. MacKay, Kreismatrix und Counting-Methode

Die zweite Testfunktion lautet $f_2 = g_2^{-1} \circ r_\omega \circ g_2$ mit der Konjugation

$$g_2(x) = \eta(x^4 - 2x^3 + x^2) + x$$

mit $\eta \in (0, 3\sqrt{3})$. Die zugehörige invariante Dichte ist

$$h_2(x) = \eta(4x^3 - 6x^2 + 2x) + 1.$$

4. Orbitübergangsmatrizen

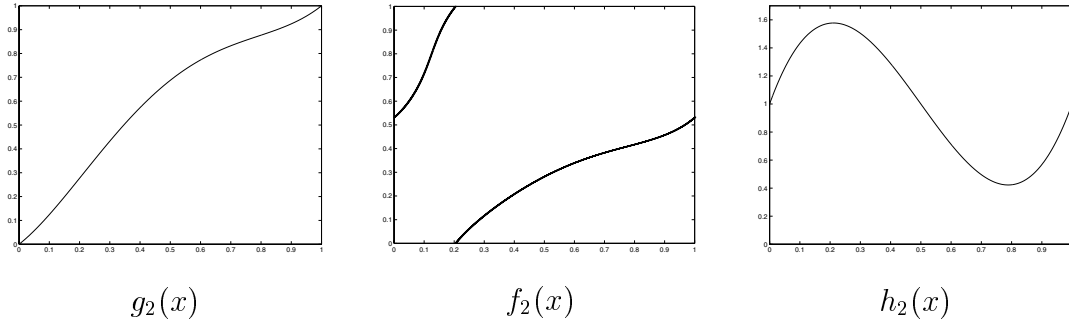


Abbildung 4.9.: Konjugation g_2 , Kreisabbildung f_2 und Dichte h_2 für $\eta = 3$

Als Rotationswinkel wählen wir $\omega = 2\pi(e - 2)$. Abbildung 4.9 zeigt für $\eta = 3$ die Konjugation g_2 , die Kreisabbildung f_2 sowie die invariante Dichte h_2 .

N	$e(g - g_N)$	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$\max I_i $	$\min I_i $
39	5.69 E-2	2.73 E-2	8.31 E-2	6.37 E-2	9.50 E-3
536	4.02 E-3	1.98 E-3	6.19 E-3	4.71 E-3	6.66 E-4
1537	1.65 E-3	9.38 E-4	3.71 E-3	2.22 E-3	6.99 E-5
9545	2.22 E-4	1.10 E-4	3.40 E-4	2.61 E-4	3.65 E-5
18089	1.60 E-4	5.74 E-5	1.80 E-4	1.36 E-4	3.34 E-5

Tabelle 4.4.:

Ergebnisse des erweiterten MacKay-Algorithmus für die Testfunktion f_2 mit $\eta = 3$

Die Tabellen 4.4, 4.5 und 4.6 zeigen die Ergebnisse des erweiterten MacKay-Algorithmus, der Übergangsmatrizen mit äquidistanter Partition und der Counting-Methode für die Kreisabbildung f_2 mit $\eta = 3$. Bei diesem Beispiel sind die Ergebnisse für die Partitionen ab $N = 9545$ im erweiterten MacKay-Algorithmus sogar besser als bei Kreismatrizen. Die Ursache hierfür liegt möglicherweise in dem Fehler, der sich bei der Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt. Die Counting-Methode ist auch in diesem Beispiel deutlich unterlegen.

In den Abbildungen 4.10 und 4.11 sind die approximierten Dichten und die zugehörigen Fehlerfunktionen für eine noch recht grobe Partition abgebildet. Man sieht gut, dass der erweiterte MacKay-Algorithmus hier schon recht früh ein qualitativ richtiges Bild liefert.

Als weiteres Beispiel wird die Arnol'd Familie

$$f_{\epsilon,\eta}(x) = x + \eta + \epsilon \sin(2\pi x) \pmod{1}$$

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

N	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$ I_i $
39	3.87 E-2	7.64 E-2	2.56 E-2
536	2.91 E-3	5.99 E-3	1.87 E-3
1537	1.02 E-3	2.04 E-3	6.51 E-4
9545	1.64 E-4	3.92 E-4	1.05 E-4
18089	8.69 E-5	2.43 E-4	5.53 E-5

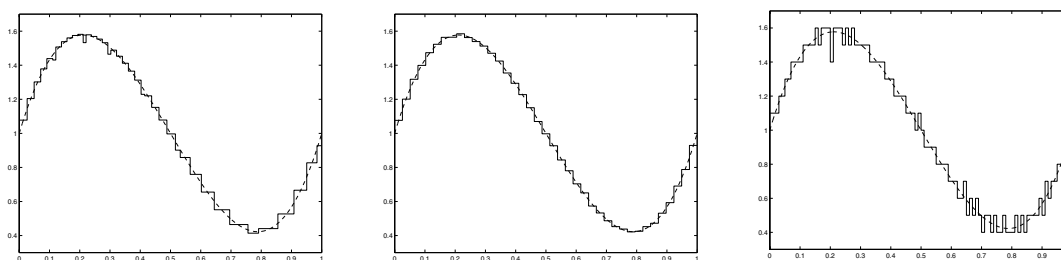
Tabelle 4.5.:

Übergangsmatrizen mit äquidistanten Partitionen für die Testfunktion f_2 mit $\eta = 3$

N	Iterationen	$\ g - g_N\ _\infty$	$\ h - h_N\ _\infty$	$ I_i $
10	100	1.37 E-1	3.00 E-1	1.00 E-1
100	1000	1.46 E-2	1.77 E-1	1.00 E-2
100	2000	1.41 E-2	1.03 E-1	1.00 E-2
100	5000	1.40 E-2	6.71 E-2	1.00 E-2
200	9545	6.31 E-3	3.40 E-2	5.00 E-3
200	18089	6.26 E-3	2.08 E-2	5.00 E-3

Tabelle 4.6.: Counting-Methode für die Testfunktion f_2 mit $\eta = 3$

mit $0 < |\epsilon| < \frac{1}{2\pi}$ und $\eta \in (0, 1)$ untersucht. Hier stellt sich das Problem, dass die invariante Dichte nicht bekannt ist. Es können deshalb nur die Abschätzungen



erw. MacKay,
 $N = 39$

Kreismatrix,
 $N = 39$

Counting-Methode,
 $N = 100, 1000$ Iter.

Abbildung 4.10.:

Approximierte Dichten für Testfunktion f_2 mit $\eta = 3$: erw. MacKay, Kreismatrizen und Counting-Methode

4. Orbitübergangsmatrizen

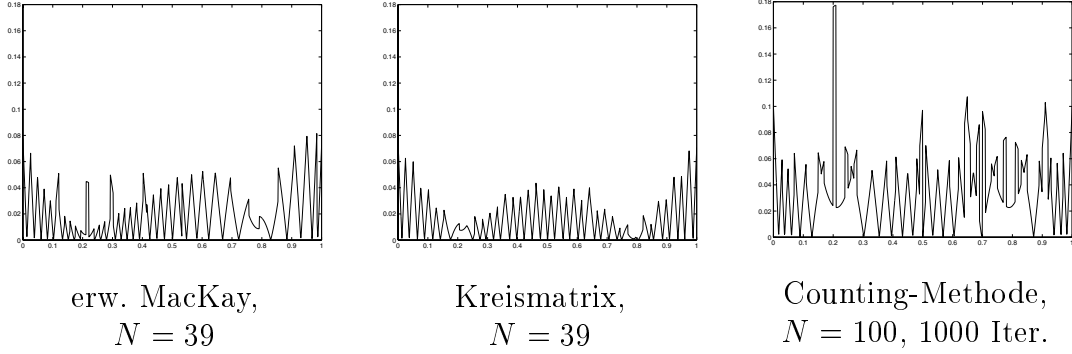


Abbildung 4.11.:

Fehler der approximierten Dichten für Testfunktion f_2 mit $\eta = 3$:
erw. MacKay, Kreismatrix und Counting-Methode

(4.5.1) und (3.4.2) miteinander verglichen werden. Die Ergebnisse in Tabelle 4.8 stammen aus NICOLAISEN und WERNER [42]. Zum Teil werden die Ergebnisse bei Übergangsmatrizen besser, wenn mit f^q statt mit f iteriert wird. In der vierten Spalte der Tabelle wurde deshalb angegeben, mit welchem q die Übergangsmatrizen berechnet wurden. Tabelle 4.7 wurde erstellt, indem der erweiterte MacKay-Algorithmus abgebrochen wurde, sobald die Fehlerabschätzung nach (4.5.1) einen kleineren Wert als $\epsilon(g - g_N)$ nach Tabelle 4.8 lieferte. Alle für die Arnol'd Familie gewählten Parameter liegen in der Nähe von phase-locking-Intervallen. Die zugehörigen Intervalle sind nach NICOLAISEN und WERNER [42]

$$\begin{aligned} \rho(f) &= \frac{1}{3} && \text{für } \epsilon = 0.05 & \text{ und } \eta \in J := [0.335018, 0.336091], \\ \rho(f) &= \frac{1}{5} && \text{für } \epsilon = 0.05 & \text{ und } \eta \in J := [0.2053020, 0.2053485], \\ \rho(f) &= \frac{6}{23} && \text{für } \epsilon = 0.08 & \text{ und } \eta \in J := [0.269956067467, 0.269956067579]. \end{aligned}$$

Je mehr sich die Parameter dem phase-locking-Intervall nähern, um so mehr Iterationen sind im erweiterten MacKay-Algorithmus notwendig, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Dies ist folgerichtig, da die Rotationszahl in der Nähe eines phase-locking-Intervalls „gut“ durch die zum phase-locking gehörende rationale Rotationszahl approximiert wird. Im Fall $\epsilon = 0.05$ und $\eta = 0.20530$ lautet die erste Konvergente $\frac{1}{5}$. Der Nenner der darauf folgenden Konvergente $\frac{3908}{19541}$ ist sehr groß. Soll ein Fehler $\epsilon(g - g_N)$ kleiner als 0.2 erreicht werden, müssen also 19541 Iterationen ausgeführt werden. Das Problem der

4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte

N	ϵ	η	$e(g - g_N)$	$\max I_i $	$\min I_i $
226	0.05	0.33400	8.91 E-3	7.26 E-3	1.86 E-3
3595	0.05	0.33400	9.14 E-4	9.36 E-4	3.01 E-5
619	0.05	0.33480	3.24 E-3	4.47 E-3	5.95 E-4
4330	0.05	0.33480	5.00 E-4	6.99 E-4	3.66 E-5
4976	0.05	0.20528	4.02 E-4	4.44 E-4	5.84 E-5
14918	0.05	0.20528	1.68 E-4	1.74 E-4	1.89 E-5
19546	0.05	0.20530	1.02 E-4	3.15 E-4	8.01 E-6
939	0.08	0.27000	2.16 E-3	1.62 E-3	4.41 E-4
4649	0.08	0.27000	5.73 E-4	3.72 E-4	1.12 E-4
12092	0.08	0.27000	2.98 E-4	1.32 E-4	5.32 E-5

Tabelle 4.7.:

Dichteapproximation durch den MacKay-Algorithmus für die Arnol'd Familie

sinkenden Genauigkeit bei Rotationszahlen, die gut durch rationale Zahlen mit kleinem Nenner approximierbar sind, ergibt sich aber auch bei Verwendung von äquidistanten Partitionen.

Um einen Eindruck von der Entwicklung der Approximation der invarianten Dichte im erweiterten MacKay-Algorithmus zu vermitteln, zeigen die Abbildungen 4.12 und 4.13 die invarianten Dichten in den verschiedenen Phasen des Algorithmus. Die zugrunde gelegte Kreisabbildung ist in beiden Fällen die Abbildung

$$f_{\xi,\eta}(x) = \xi x^4 - 2\xi x^3 + \xi x^2 + x + \eta \pmod{1}$$

mit $0 < \xi < 3\sqrt{3}$ und $\eta \in (0, 1)$. Abbildung 4.12 zeigt die Entwicklung für die Parameterwerte $\xi = 4$ und $\eta = 0.123$. Die Rotationszahl zu diesen Werten ist nur schlecht durch rationale Zahlen mit kleinem Nenner approximierbar. Der Algorithmus konvergiert deshalb relativ schnell.

Die Parameterwerte für die Entwicklung in Abbildung 4.13 lauten $\xi = 2.9$ und $\eta = 0.2405$. Die zugehörige Rotationszahl wird durch $\frac{1}{3}$ gut approximiert. Die nächste Konvergente lautet $\frac{83}{250}$. Der Algorithmus konvergiert deshalb langsamer. Gut zu sehen ist, wie erst die nächste Konvergente erreicht werden muss, damit die Partitionsintervalle gleichmässig verkleinert werden.

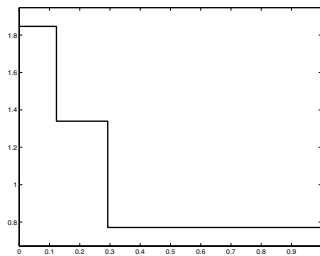
4. Orbitübergangsmatrizen

N	ϵ	η	q	$e(g - g_N)$	$ I_i $
100	0.05	0.33400	1	1.1 E-2	1.0 E-2
500	0.05	0.33400	1	9.7 E-4	2.0 E-3
500	0.05	0.33480	1	5.0 E-3	2.0 E-3
1000	0.05	0.33480	1	1.2 E-3	1.0 E-3
1000	0.05	0.33480	3	5.3 E-4	1.0 E-3
1000	0.05	0.20528	1	4.5 E-3	1.0 E-3
5000	0.05	0.20528	1	2.1 E-4	2.0 E-4
500	0.05	0.20528	5	3.2 E-3	2.0 E-3
1000	0.05	0.20528	5	1.4 E-3	1.0 E-3
1000	0.05	0.20530	5	2.0 E-1	1.0 E-3
2000	0.05	0.20530	5	2.0 E-1	5.0 E-4
5000	0.05	0.20530	5	1.5 E-2	2.0 E-4
100	0.08	0.27000	1	6.1 E-3	1.0 E-2
500	0.08	0.27000	1	6.0 E-4	2.0 E-3
1000	0.08	0.27000	1	3.0 E-4	1.0 E-3

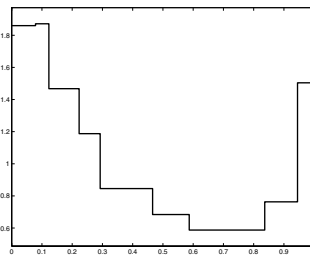
Tabelle 4.8.:

Dichteapproximation für die Arnol'd Familie durch Übergangsmatrizen mit äquidistanten Partitionen

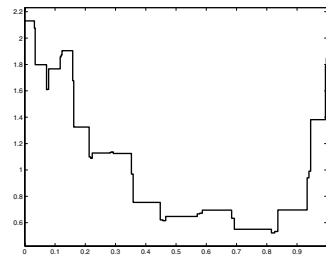
4.5. Algorithmus zur Berechnung der invarianten Dichte



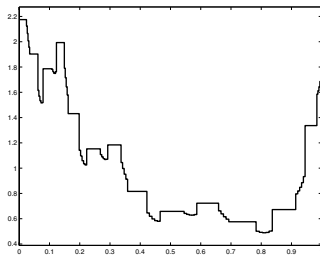
2. MacKay-Schritt:
 $N = 3$



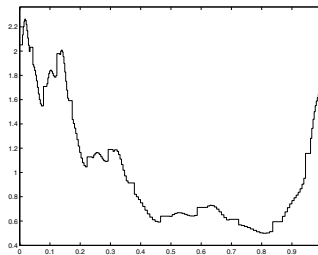
5. MacKay-Schritt:
 $N = 9$



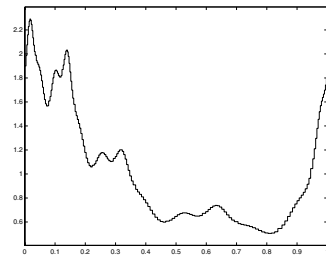
8. MacKay-Schritt:
 $N = 35$



11. MacKay-Schritt:
 $N = 74$



17. MacKay-Schritt:
 $N = 152$

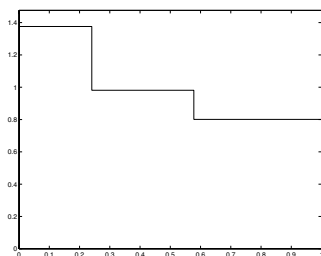


19. MacKay-Schritt:
 $N = 178$

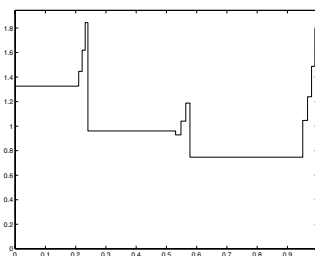
Abbildung 4.12.:

Entwicklung im erweiterten MacKay-Algorithmus für $f_{\xi,\eta}(x) = \xi x^4 - 2\xi x^3 + \xi x^2 + x + \eta \pmod{1}$ mit $\eta = 0.123$ und $\xi = 4$

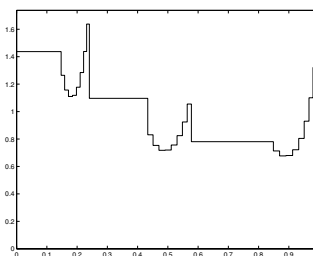
4. Orbitübergangsmatrizen



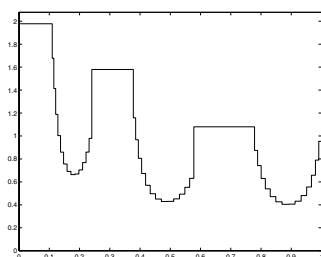
2. MacKay-Schritt:
 $N = 3$



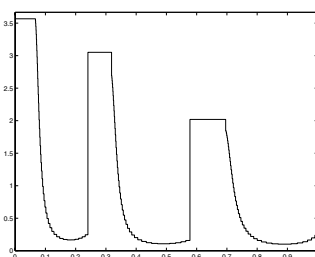
6. MacKay-Schritt:
 $N = 13$



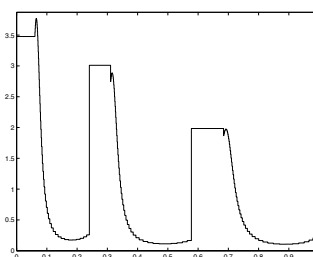
11. MacKay-Schritt:
 $N = 28$



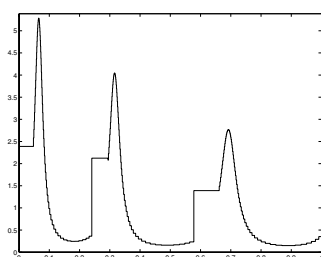
16. MacKay-Schritt:
 $N = 43$



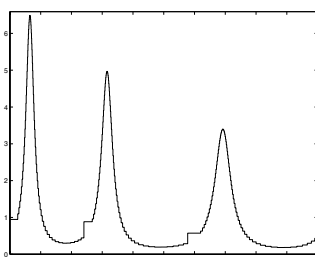
46. MacKay-Schritt:
 $N = 133$



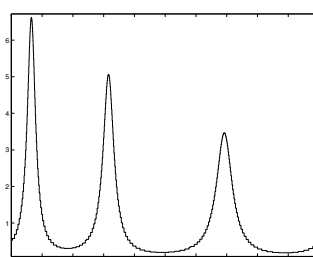
56. MacKay-Schritt:
 $N = 163$



71. MacKay-Schritt:
 $N = 208$



81. MacKay-Schritt:
 $N = 238$



85. MacKay-Schritt:
 $N = 250$

Abbildung 4.13.:

Entwicklung im erweiterten MacKay-Algorithmus nahe einem phase-locking-Intervall für $f_{\xi,\eta}(x) = \xi x^4 - 2\xi x^3 + \xi x^2 + x + \eta \pmod{1}$ mit $\eta = 0.2405$ und $\xi = 2.9$

Anhang

A. Matlab-Implementierung

Um den erweiterten MacKay-Algorithmus in Matlab zu implementieren, muss zunächst der Lift der Kreisabbildung als „m-file“ vorliegen. Zu Eingabewerten des Liftes gehört neben der Stelle, an der ausgewertet werden soll, ein Vektor mit Parameterwerten. Es darf nur ein Wert, und zwar der Funktionswert, zurückgegeben werden. Der Lift der Arnol'd Familie würde beispielsweise so aussehen:

Dateiname: „arnold.m“

```
function y = arnold(p)
x = p(1);
eps = p(2);
eta = p(3);
y = x + eta + eps*sin(2*pi*x);
```

Der erweiterte MacKay-Algorithmus kann dann wie folgt als Matlab-Programm geschrieben werden:

Eingabe:

`lift` ist ein String, der den Namen des „m-files“ enthält, in dem der Lift der Kreisabbildung definiert wurde, z.B. 'arnold'.

`para` ist ein Vektor mit den Parameterwerten für den Lift.

`eps` gibt die Genauigkeit für die Approximation der Konjugation an.

Ausgabe:

`pm`, `qm` sind Nenner und Zähler der linken Schranke des MacKay-Algorithmus.

`pp`, `qp` sind Nenner und Zähler der rechten Schranke des MacKay-Algorithmus.

`v` ist der stationäre W-Vektor.

A. Matlab-Implementierung

`phi` ist der Vektor der Partitionsunkte der Orbitübergangsmatrix.

```
function [pm, qm, pp, qp, v, phi] = emac(lift, para, eps)

    if nargin < 3 //falls keine Genauigkeit angegeben wurde
        eps = 1E-6;
    end
    x(1) = 0;
    y = feval(lift, [0 para] );
    x(2) = y;
    iter = 1;
    zaehler = 0;
    pm = 0;
    pp = 1;
    qm = 1;
    qp = 1;
    zr = y-pp;
    zl = y;
    abbruch = 0;
    while abbruch == 0
        Q = qm + qp;
        P = pm + pp;
        for j = iter+1:Q
            y = feval(lift, [y para]);
            x(j+1) = y-floor(y); // in x werden die Orbitpunkte schon
                               als mod 1 gespeichert
            iter = iter+1;
        end
        z = y - P;
        if abs(z) < 1E-16 // falls 0 ein periodischer Punkt ist
            qm = Q;
            qp = Q;
            pm = P;    pp = P;
            return
        elseif z > 0
            if Q*qp/(Q+qp) > 1/eps
                alpha = 1-z/zl;
                nu = qp + alpha*qm;
                w1 = 1/nu;
                w2 = alpha/nu;
            end
        end
    end
```

```

        for j=0:Q-1
            k=mod(j*qm,Q); // sortieren
            phi(j+1)=x(k+1);
            if k<qp
                v(j+1)=w1; // falls  $j \in Z_t$ 
            else
                v(j+1)=w2; // sonst
            end
        end
        clear x;
        abbruch = 1;
    end
    pm = P;
    qm = Q;
    z1 = z;
else
    if Q*qm/(Q+qm) > 1/eps
        alpha = 1-z/zr;
        nu = qm + qp*alpha;
        w1 = 1/nu;
        w2 = alpha/nu;
        for j=1:Q-1
            k=mod(j*qm,Q); // sortieren
            phi(j+1)=x(k+1);
            if k<qm
                v(j)=w1; // falls  $j \in Z_t$ 
            else
                v(j)=w2; // sonst
            end
        end
        phi(1)=0;
        v(Q)=w1;
        clear x;
        abbruch = 1;
    end
    pp = P;
    qp = Q;
    zr = z;
end
if abbruch==1

```

A. Matlab-Implementierung

```
        h=v./([phi(2:Q),1]-phi); // Berechnung der invarianten Dichte
        stairs([phi,1],[h,h(Q)]); // plotten
        axis([0 1 0 max(h)+0.1]);
    end
    if qm > 1E8 | qp > 1E8
        fprintf(1, 'Nenner zu gross!\n');
        break
    end
end
```

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. ALT: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [2] V. I. ARNOL'D: *Small denominators I: Mappings of the circumference onto itself*. Am. Math. Soc., Transl., II(46):213–284, 1965.
- [3] V. I. ARNOL'D: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, Berlin, 1983.
- [4] A. BERMAN und R. J. PLEMMONS: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Academic Press, London, 1979.
- [5] M. BLANK und G. KELLER: *Random perturbations of chaotic dynamical systems: stability of the spectrum*. Nonlinearity, 11:1351–1364, 1998.
- [6] A. BOYARSKY und Y. S. LOU: *Approximating measures invariant under higher-dimensional chaotic transformations*. J. Appr. Theory, 65(2):231–244, 1991.
- [7] F. CHATELIN: *Spectral approximation of linear operators*, Band XIX der Reihe *Computer Science and Applied Mathematics*. Academic Press, New York, London, 1983.
- [8] A. CHENCINER und G. IOOSS: *Bifurcations de tores invariants*. Arch. Mech. Anal., 69:109–198, 1979.
- [9] K. L. CHUNG: *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer, Berlin, 2. Auflage, 1967.
- [10] M. DELLNITZ, A. HOHMANN, O. JUNGE und M. RUMPF: *Exploring invariant sets and invariant measures*. CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 7(2):221–228, 1997.
- [11] M. DELLNITZ und O. JUNGE: *An adaptive subdivision techniques for the approximation of attractors and invariant measures*. Computing and Visualization in Science, 1(2):63–68, 1997.

Literaturverzeichnis

- [12] M. DELLNITZ und O. JUNGE: *On the approximation of complicated dynamical behavior*. SIAM J. Numer. Anal., 36(2):491–515, 1999.
- [13] A. DENJOY: *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Math. Pures et Appl., 9(11):333–375, 1932.
- [14] R. L. DEVANEY: *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Redwood City, 1987.
- [15] J. DING, Q. DU und T. Y. LI: *High order approximation of the Frobenius–Perron operator*. Appl. Math. and Comp., 53:151–171, 1993.
- [16] J. DING, Q. DU und T. Y. LI: *The spectral analysis of Frobenius–Perron operators*. J. Math. Anal. Appl., 184(2):285–301, 1994.
- [17] J. DING und A. ZHOU: *Finite approximations of Frobenius–Perron operators. A solution to Ulam’s conjecture to multi-dimensional transformations*. Physica D, 1–2:61–68, 1996.
- [18] H. FELL: *The geometry of zeros of trinomial equations*. Rend. Circ. Mat. Palermo, II(29):303–336, 1980.
- [19] J. GUCKENHEIMER und P. HOLMES: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.
- [20] R. GUDER, M. DELLNITZ und E. KREUZER: *An adaptive method for the approximation of the generalized cell mappings*. Chaos, Solitons and Fractals, 8(4):525–534, 1997.
- [21] G. H. HARDY und E. M. WRIGHT: *Einführung in die Zahlentheorie*. R. Oldenbourg, München, 1958.
- [22] M. R. HERMAN: *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*. Publ. Math. IHES, 49:5–233, 1979.
- [23] F. HOFBAUER und G. KELLER: *Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations*. Math. Z., 180:119–140, 1982.
- [24] W. HOTZEL, N. LEHMKUHL und B. WERNER: *The spectrum of the Frobenius–Perron operator and its discretization for circle diffeomorphisms*. Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Preprint. Reihe A(160), 2001.

- [25] O. JUNGE: *Mengenorientierte Methoden zur numerischen Analyse dynamischer Systeme*. Dissertation, Universität Paderborn, 1999.
- [26] T. KATO: *Perturbation Theory for Linear Operators*, Band 132 der Reihe *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1966.
- [27] Y. KATZNELSON und D. ORNSTEIN: *The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle*. Ergodic Theory Dyn. Syst., 9(4):643–680, 1989.
- [28] M. KEANE, R. MURRAY und L.-S. YOUNG: *Computing invariant measures for expanding circle maps*. Nonlinearity, 11:27–46, 1998.
- [29] G. KELLER: *On the rate of convergence to equilibrium in one-dimensional systems*. Commun. Math. Phys., 96:181–193, 1984.
- [30] G. KELLER und C. LIVERANI: *Stability of the spectrum for transfer operators*. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, IV. Ser. 28(1):141–152, 1999.
- [31] Y. KIFER: *General random perturbations of hyperbolic and expanding transformations*. J. Anal. Math., 47:111–150, 1986.
- [32] E. KREUZER: *Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme*. Springer, New York, Berlin, 1987.
- [33] A. LASOTA und C. MACKEY: *Chaos, Fractals and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. Springer, New York, Berlin, 2. verb. Auflage, 1994.
- [34] J. LEHMANN: *Frobenius-Perron-Diskretisierung dynamischer Systeme am Beispiel von Kreisdiffomorphismen*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2000.
- [35] T. Y. LI: *Finite approximation of the Frobenius–Perron operator. A solution to Ulam’s conjecture*. J. Approx. Theory, 17:177–186, 1976.
- [36] R. S. MACKAY: *Rotation interval from a time series*. J. Phys. A, 20:587–592, 1987.
- [37] M. MARDEN: *Geometry of Polynomials*. Nummer 3 in *Mathematical Surveys*. AMS, Providence, Rhode Island, 2. Auflage, 1966.
- [38] W. DE MELO und S. VAN STRIEN: *One-Dimensional Dynamics*, 3. Folge, Band 25 der Reihe *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993.

Literaturverzeichnis

- [39] M. MIGNOTTE und D. STEFANESCU: *Polynomials. An Algorithmic Approach*. Springer, Singapur, 1999.
- [40] W. M. MILLER: *Stability and approximation of invariant measures for a class of nonexpanding transformations*. *Nonlinear Analysis*, 23(8):1013–1025, 1994.
- [41] N. NICOLAISEN: *Numerische Berechnung invarianter Kurven von Abbildungen*. Dissertation, Universität Hamburg, 1998.
- [42] N. NICOLAISEN und B. WERNER: *Discretization of Circle Maps*. *Z. Angew. Math. Phys.*, 49(6):869–895, 1998.
- [43] O. PERRON: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2 Bände. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1954.
- [44] K. PETERSEN: *The spectrum and commutant of a certain weighted translation operator*. *Math. Scand.*, 37:297–306, 1975.
- [45] H. POINCARÉ: *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. XV. In: *Œuvres de Henri Poincaré*, Seiten 137–166. Gauthier-Villars, Paris, 1928.
- [46] YA. G. SINAI: *Topics in Ergodic Theory*. Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [47] G. W. STEWART und J.-G. SUN: *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, London, 1990.
- [48] S. M. ULAM: *A Collection of Mathematical Problems*, Band 8 der Reihe *Interscience Tracts in Pure and Applied Math.* Interscience, New York, 1960.
- [49] P. WALTERS: *Ergodic Theory — Introductory Lectures*, Band 458 der Reihe *Lecture Notes in Math.* Springer, New York, 1975.
- [50] J.-C. YOCOZ: *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. *Ann. Sci. Ec. Norm. Super.*, IV(17):333–359, 1984.

Zusammenfassung

Gegenstand der Arbeit ist der Frobenius-Perron-Operator und seine Diskretisierung im Raum L^1 für orientierungserhaltende Diffeomorphismen der Kreislinie S^1 . Einerseits wird das Spektrum des Operators mit dem seiner Übergangsmatrix verglichen. Andererseits werden die invariante Dichte und ihre Approximation betrachtet. Ziel ist der Nachweis der Konvergenz sowohl des Spektrums als auch der approximierten invarianten Dichten für feiner werdende Partitionen des Zustandsraumes.

Das Spektrum des Frobenius-Perron-Operators wird zunächst allgemein für Diffeomorphismen beschrieben. Spektralwerte sind in diesem Fall stets vom Betrag 1. Besitzt das System einen wandernden Punkt, so sind alle Zahlen auf dem Rand des Einheitskreises Spektralwerte. Dies ist insbesondere der Fall, wenn es einen asymptotisch stabilen, hyperbolischen periodischen Orbit gibt. Für Kreisdiffeomorphismen gilt dies immer dann, wenn nicht alle Punkte periodisch sind. Die Spektren für rationale Rotationszahlen einerseits und irrationale andererseits unterscheiden sich dann höchstens durch die Art der Spektralwerte.

Übergangsmatrizen zu Kreisdiffeomorphismen sind nicht-negative, spaltenstochastische Matrizen mit einer speziellen Bandstruktur. Diese kann mittels diskreter Kreisabbildungen, den sog. Bandbreitenabbildungen, beschrieben werden. Es werden einige grundlegende Eigenschaften diskreter Kreisabbildungen hergeleitet. Mit Hilfe der Bandbreitenabbildungen kann das Spektrum der Übergangsmatrizen qualitativ beschrieben werden.

Zur numerischen Berechnung der invarianten Dichte wird eine spezielle Partition bestehend aus Orbitpunkten vorgeschlagen. Sowohl das Spektrum als auch der Eigenvektor zum Eigenwert 1 der zugehörigen Orbitübergangsmatrix hängen eng mit den Schranken zusammen, die der MacKay-Algorithmus zur Berechnung der Rotationszahl liefert. Es wird nachgewiesen, dass das Spektrum der Orbitübergangsmatrizen für fast alle irrationalen Rotationszahlen konvergiert. Auch für die invariante Dichte kann eine schwache Form von Konvergenz gezeigt werden. Die approximierte invariante Dichte kann berechnet werden, ohne dass ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Das führt zu einer Erweiterung des MacKay-Algorithmus, so dass die Rotationszahl und die invariante Dichte simultan berechnet werden. Der erweiterte MacKay-Algorithmus wird an einigen Beispielen getestet und mit anderen Verfahren verglichen.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Nicole Lehmkuhl
Geburtsdatum: 18. November 1969
Geburtsort: Hamburg
Familienstand: ledig

Schulbildung

1976 bis 1977 Volksschule Bornheide, Hamburg
1977 bis 1980 Grundschule Moorwegschule, Wedel(Holstein)
1980 bis 1989 Johann-Rist-Gymnasium, Wedel(Holstein)
24. Mai 1989 Abitur

Studium

Oktober 1989 bis April 1990 Studium der evang. Theologie an der Universität Hamburg
Oktober 1990 bis Februar 1997 Studium der Mathematik mit Anwendungsfach Astronomie an der Universität Hamburg
28. Februar 1997 Diplom im Fach Mathematik, Thema der Diplomarbeit: *Die Lagrangepunkte des eingeschränkten Dreikörperproblems*
April 1997 bis Oktober 2001 Promotionsstudium am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg

Berufliche Tätigkeiten

April 1997 bis September 2001 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
seit November 2001 Anwendungsentwicklerin für Simulation bei LOGAS, Gesellschaft für logistische Anwendungssysteme mbH, Hamburg.