

**Fraktale Dimensionen,
Informationsstrukturen und
Mikrorhythmik
der Einschwingvorgänge von
Musikinstrumenten**

**DISSERTATION
zur Erlangung der Würde des Doktors der
Philosophie
der Universität Hamburg**

vorgelegt von

Rolf Bader

aus Ludwigsburg bei Stuttgart

Hamburg 2002

1. Gutachter _____ Prof. Dr. Albrecht Schneider

2. Gutachter _____ Prof. Dr. Helmut Rösing

Tag des Vollzugs der Promotion: 18.2.2002

Inhalt

Vorwort

1	Übersicht bisheriger Arbeiten	1
	1.1 Untersuchungen zu Einschwingvorgängen	1
	1.1.1 Überblick	1
	1.1.2 Geige	1
	1.1.3 Bläser	3
	1.1.4 Orgeln	5
	1.1.5 gezupft, geschlagen	6
	1.2 Arbeiten zu Musik und Chaos	8
	1.3 Klangfarbe (MDS)	13
	1.3.1 Grey's Dimensionierung von Instrumenten	20
	1.3.2 Grey & Moorer	24
	1.3.3 Iverson & Krumhansl	26
	1.3.4 Krumhansl 1989	30
	1.3.5 Mc Adams, Winsberg, Donnadieu, De Soete, Krimphoff	32
	1.3.6 De Bruijn	34
	1.3.7 Wedin & Goude	37
	1.3.8 Miller & Carterette	40
	1.3.9 Markuse & Schneider	45
	1.3.10 Wessel	47
	1.3.11 Hourdin, Charbonneau, Moussa	50
	1.3.12 Feiten - Kohonen Karten	52
	1.3.13 Zusammenfassung	54
2	Physik der Perkussionsinstrumente	57
	2.1 Der Stab	57
	2.1.1 Herleitung der Differentialgleichung für den Stab	58
	2.1.2 Lösung der Differentialgleichung für den Stab	64
	2.1.3 Lösung für den Stab mit freien Enden	67
	2.1.4 Longitudinalschwingungen des Stabes	69
	2.1.5 Torsionale Schwingungen des Stabes	70
	2.1.6 Axiale Schwingungen	72
	2.1.7 Zusammenfassung der Schwingungsarten des Stabes	73
	2.1.8.1 große Höhe	74
	2.1.8.2 komplexes Flächenträgheitsmoment	75
	2.1.8.3 Veränderlicher Querschnitt entlang des Stabes	77
	2.1.8.4 Stabeigenwerte für veränderlichen Querschnitt	80
	2.1.8.5 Beispiel für einen Xylophonstab	85
	2.2 Platten	90
	2.2.1 Quadratische Platten	91
	2.2.2 Rechteckige Platten	93
	2.3 Schalen und Glocken	99
	2.3.1 Glocken	100
	2.3.2 Schalen	102

3	Nichtlinearitäten, Phasendiagramme	107	
	3.1 Nichtlinearer Zusammenhang von Auslenkung und Rückstellkraft	107	
	3.2 Mode Locking	117	
	3.3 Nichtlinearitäten in der Praxis	118	
4	Chaos	126	
	4.1 Fraktale Dimensionen	126	
	4.2 Bedeutung der fraktalen Dimension		130
	4.3 Kapazitäts- und Informationsdimension	135	
	4.4 Kolmogorov-Sinai Entropie / Informationsstruktur	139	
	4.5 Korrelationsdimension	140	
	4.6 Versuch einer Begriffsdefinition von Chaos	147	
5	Ergebnisse	150	
	5.1 Gitarre	150	
	5.1.1 Überblick	153	
	5.1.2 Vorschleifgeräusch	157	
	5.1.3 Einzelergebnisse	159	
	5.2 Bläser	180	
	5.2.1 Saxophon	180	
	5.2.2 Klarinette	185	
	5.2.2.1 Klarinette im Kontext	188	
	5.3 Geige	195	
	5.4 Perkussion	198	
	5.4.1 Gender	198	
	5.4.2 Gong Gede	207	
	5.5 Zusammenfassung	214	
6	Wendepunktanalyse	215	
	6.1 Algorithmus	216	
	6.2 Ergebnisse	225	
	Literatur	234	
	Anhang A Windows Programm <i>Xylophon.exe</i> auf beiliegender Diskette		
	Anhang B Waveletbilder der Geigentöne		
	Anhang C Waveletbilder der Schwingungsabnehmersignale Kapitel 5		
	Anhang D Programme		

Danksagung

Ich danke allen, die mir bei den Untersuchungen geholfen haben.

Meinen lieben Eltern für Ihre Liebe und Unterstützung.

Meinen Professoren.

Den Musikern, die mir Instrumententöne eingespielt haben, Satoshi Oba für die Gitarre, Petra Hahn für ihre Klarinette, Heiner Metzger ebenfalls für Klarinette und Saxophon, Birgit Maschke für die Geige, Bettina Brinker für ihr Cello, Orhan Schinshek für die Saz, Gitta Strehlow für das Gamelan. Es war eine Freude, so tolle Töne analysieren zu dürfen.

Dr. Maria Haase und Dipl. Ing. Gunter Faust vom Institut für Computeranwendung der Uni Stuttgart sage ich Dank für ihre Unterstützung und ihren Rat und die Waveletbilder von Frau Haase. Ebenfalls Markus Till und Stephan Rudolph aus demselben Institut und Dr. Kostek aus dem Sound & Vision Engineering Department der Universität Danzig für Ihre Analysen.

Allen, die mich unterstützt haben.

Danke.

Vorwort

In dieser Arbeit wird versucht, die Transienten in der Musik, die Einschwingvorgänge näher zu beleuchten. Von den ersten Versuche Backhaus', über die verschiedenen Formen und Zeiten des Einschwingens der einzelnen Partialtöne, Klänge zu charakterisieren bis zu heutigen Neuronalen Netzen zur automatischen Klassifikation, gibt es eine breite Forschung, die sich auch mit dem Wesen der Klangfarbe auseinandersetzt. Die mechanische Identifikation einzelner Instrumente, wie man sie zur automatischen Partiturerstellung benötigte wird dabei ebenso berücksichtigt, wie das Wesen des Klangs. Das Abschneiden des Einschwingvorgangs führt zu einer erheblich schlechteren Identifikation der Instrumente. Daher ist die Auseinandersetzung mit dem psychologischen Phänomen Klangfarbe (Kapitel 1) wichtig zur Einordnung der Ergebnisse des Kapitel 5. Die hier gefundenen physikalischen Parameter geben das subjektive Klangerlebnis wieder. Obwohl die Dimensionalität der Klangfarbe eine andere ist als die fraktale Dimensionalität des Einschwingvorgangs, kann die letztere aus Ausdifferenzierung der Inharmonizität am Klangbeginn betrachtet werden. Hier zeigt sich eine Hierarchie der Aufmerksamkeit der Hörer von der Tonhöhe über die Klangfarbe zu den Mechanismen des Einschwingvorgangs. Dies entspricht der Fortschreitung vom Allgemeinen zum Besonderen, von der Pitch-Class, die alle Instrumente produzieren können, zum Ausdruck des einzelnen Musikers im Kontext der Melodie. Hier unterscheidet sich auch laut von leise, hart von weich.

Neuere Methoden der Chaosforschung (Kapitel 3 und 4) haben sich zwar mit Musik, bisher aber noch nicht mit Transienten auseinandergesetzt. In dieser Arbeit wird aufgezeigt, wie chaotisch Einschwingvorgänge sind und welche Charakteristika dahinter stecken. Meist werden die Klänge durch den Verlauf der Frequenzen durch die Zeit charakterisiert (siehe Kapitel 1). Das Denken in Frequenzen ist zwar notwendig, doch macht die Kürze des Transienten die Frequenzunschärfe so stark, daß das Ohr vielleicht mit andere Mechanismen zu einer raschen Identifikation des Instruments oder des Ausdrucks gelangt. Daher werden in dieser Arbeit einige neue Algorithmen vorgestellt, die die Zeitreihe selbst analysieren, wie die Informationsstruktur, die den zeitlichen Verlauf des Informationsgewinns während

des Anklangs wiedergibt. Hier ist zu sehen, daß die einzelnen Instrumente und Ausdrucksformen verschiedene Muster des Informationsgewinns aufweisen.

Ein weitere Versuch, die Zeitreihe selbst auszuwerten ist die Wendepunktanalyse (Kapitel 6), die die Mikrorhythmik des Einschwingens beschreibt. Dringen die Druckimpulse ans Ohr, so verursacht jeder einzelne zumindest einem Nervenimpuls. Dieses Impulsmuster wird ausgewertet und gezeigt, daß es instrumentenspezifisch ist. Dazu wurden über 1000 Einschwingvorgänge statistische verrechnet. Einzelne Instrumentenfamilien ähneln sich untereinander, sind jedoch nicht gleich. In Gebieten, in denen auch der Hörer die Instrumente schwer unterscheiden kann (z.B. hohe Töne von Klarinette und Saxophon) verliert auch die Mikrorhythmik ihr Instrumentenspezifisches.

Desweiteren ist ein Transient nicht nur zur Identifikation von Instrumenten da, bei vielen Instrumenten liegt in ihm ein Großteil der Ausdruckskraft, weich oder hart, laut oder leise. All diese Komponenten wurden untersucht mit dem Ergebnis, daß Einschwingvorgänge manchmal unüberschaubar vielfältig und manchmal überraschend gleichförmig sind.

Da Instrumente zwar meist aus Schwingungssystemen bestehen, die ein harmonisches Obertonspektrum besitzen, was den Einschwingvorgang natürlich prägt, kommt aber eben das Charakteristische des Instruments meist durch den Resonanzkorpus oder ähnliches zustande. Denn ein harmonisches Teiltonspektrum haben nach dem Einschwingen alle Instrumente, natürlich wieder mit unterschiedlichen Charakteren. Aus diesem Grunde ist ein guter Teil der Arbeit der Physik gewidmet, und zwar der der Perkussionsinstrumente (Kapitel 2), also der BiegeWellen, der Stäbe und Platten, da fast alle Instrumente daraus bestehen und so die Resonanzen zustande kommen. Denn Ziel ist es ja, nach der Analyse durch die Signalverarbeitung die physikalischen Gründe für dieses Verhalten in Erfahrung zu bringen. Oft sind es die Eigenwerte des Resonanzkorpus am Klangbeginn, der das Instrument charakterisiert. Um bei der Gitarre den Anteil des Resonanzkörpers am Klang zu differenzieren, wurden auch Schwingungsabnehmer bei der Gitarre und dem balinesischen Gender eingesetzt. Doch blieben hier naturgemäß viele Fragen

offen, die wahrscheinlich nur durch eine Simulation des Instruments im Computer entschieden werden könnten, wozu eine ganz neue Arbeit erforderlich wäre.

Das Einschwingen von Perkussionsinstrumenten wird hier anhand von Xylophonen und Metallophonen (Gongs), Glocken und Schalen untersucht. Die Biegewellentheorie für veränderliche Querschnitte wurde aus diesem Grunde für einen Orff-Xylophonstab implementiert (siehe Kapitel 2) und in einer Diskette mitgeliefert. Hier sind die Obertöne so schnell verklungen, daß sie sinnvoll nur dem Einschwingvorgang zugeordnet werden können. Die genaue Lage dieser Obertöne, die durch das Aussägen des Xylophons entscheidend verändert wird, ist daher von entscheidender Bedeutung. Denn die westliche Musik, die im Gegensatz zur hier ebenfalls untersuchten indonesischen Musik, an ein harmonisches Obertonspektrum gewöhnt ist, fordert dies auch für den Einschwingvorgang, hier den des Xylophons. Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit gezeigt, daß das balinesische Gender gerade das Gegenteil versucht. Hier wird für den Xylophonstab eine Trapezform gewählt, was die inharmonischen Anteile des Klangs um viele weitere, neue Frequenzen bereichert. Diese sind gerade im Anklang, einige aber auch noch darüber hinaus zu hören. Aus diesem Grunde werden die einzelnen Schwingungsarten des Stabes (Kapitel 2) erläutert. In Kapitel 5.4 ist dann gezeigt, daß Longitudinal- oder Axialwellen nicht für das zusätzliche Auftreten dieser neuen Frequenzkomponenten verantwortlich sein können, sondern eben die Geometrie hier wohl extra so gewählt wurde.

1. Übersicht bisheriger Arbeiten

1.1 Untersuchungen zu Einschwingvorgängen

1.1.1 Überblick

Die Untersuchungen über Einschwingvorgänge von Musikinstrumenten beschreiben meist die Dauer des Einschwingvorgangs für jedes einzelne Musikinstrument. Die grundlegende Tendenz von tieffrequenten Instrumenten, langsamer einzuschwingen ist dabei zu beobachten. Die verschiedenen Arbeiten geben unterschiedliche Definitionen darüber, wann ein Einschwingvorgang (im folgenden EV) vorbei sei, immer bezogen auf das Erreichen der maximalen Amplitude. Es wurden 70%, 80%, 90% und 100% des Maximalwerts vorgeschlagen.¹ Als zweites werden besondere Phänomene im EV festgestellt und deren physikalische Ursache aufgezeigt.

1.1.2 Geige

Die Geige ist das wohl am besten beforschte Instrument. Die ersten Untersuchungen über ihr Einschwingverhalten stammen von Backhaus.² Er analysierte neben Vokalen und Konsonanten der Sprache auch Geigenklänge und beschrieb den zeitlichen Verlauf der Amplitudenentwicklung der verschiedenen Obertöne. Dabei folgerte er nach dem Vergleich mit anderen Instrumenten, daß „... jedes Instrument in der Tat nicht nur eine charakteristische Teiltonverteilung, sondern auch einen charakteristischen Anklang hat.“ (1932, S. 43).

¹ Eine hervorragende Arbeit dazu ist C. Reuter: Der Einschwingvorgang nichtperkussiver Musikinstrumente. Hier S. 25 ff

² Backhaus, 1932 & 1937

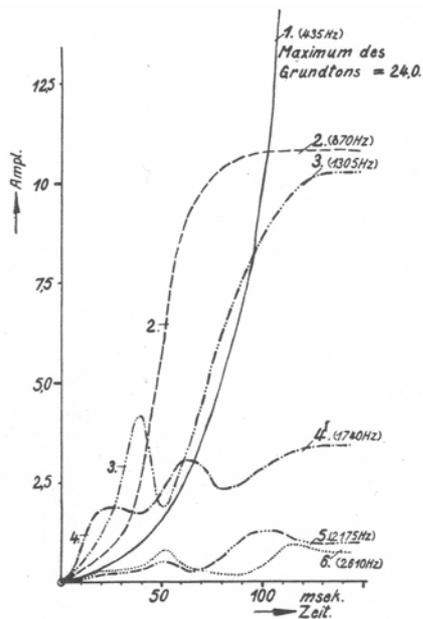


Abb. 1.1: Entwicklung der Teiltöne der Geige nach Backhaus 1932: der zweite Teilton erscheint vor dem ersten.

Die tiefen Teiltöne treten in den ersten 30 ms wenig in Erscheinung, die höheren schwingen schneller ein, der zweite erscheint vor dem ersten. Dieses experimentelle Resultat entspricht der Theorie von Raman,³ der den Bogendruck dafür verantwortlich macht. Wächst dieser beim Einschwingen an, so werden zuerst die Obertöne erregt und erst mit zunehmendem Druck erscheint der Grundton. Diese Idee wurde von Güth wieder aufgegriffen.⁴ Nach Güth steigt der Bogendruck während des EVs stetig an. Überschreitet er zu Beginn einen noch recht kleinen Grundwert, dann beginnt die Saite, am Bogen kleben zu bleiben. Um dies zu forcieren, wird der Bogen mit Kolophonium eingerieben, welches beim Abrutschen schmilzt und wieder hart wird und somit den Bogen an der Saite festklebt. Der Bogen lenkt die Saite nun etwas aus. Dadurch erhöht sich die Rückstellkraft, bis sie größer als die Haftreibungskraft des Bogens auf der Saite ist, und die Saite schnell zurück. Dadurch entsteht ein Initialimpuls, der die Saite entlang läuft, an den Enden reflektiert wird und schließlich zum Bogen zurückkehrt. Dort ist der Bogen eventuell wieder an der Saite kleben geblieben, und wenn der Bogendruck noch nicht stark genug ist, schafft es dieser zurückgekehrte Initialimpuls, den Bogen von der Saite wegzureißen. In diesem Fall kann sich noch kein Sägezahn ausbilden, es entsteht ein Rauschen. Wird nun der Bogendruck stetig erhöht, so schaffen es die Impulse

³ Raman 1918

⁴ Güth, 1980

nicht mehr, den Bogen loszureißen. Im Gegenteil, sie werden von ihm geschluckt. Der an der Saite klebende Bogen stoppt die von den Enden zurückkehrenden Impulse. Wird der Bogendruck weiter erhöht, dann klebt der Bogen länger an der Saite. Diese Zeit des Festklebens entspricht in der Zeitfunktion des Sägezahns dem langsamen Anstieg. Zerlegt man den Sägezahn in sein Fourierspektrum, so bemerkt man, daß eine kleine Verlängerung des Anstiegs im Spektrum die tieferen Teiltöne lauter werden läßt. Je größer also der Bogendruck, desto länger die Zeit, in der der Bogen auf der Saite klebt, desto grundtöniger der Klang. So bilden sich erst einmal die Obertöne aus und dann der zweite Partialton. Diese Schwingung ist stabil und würde auch so bleiben, wenn der Bogen absolut gleichmäßig gezogen würde. Da dies aber nicht machbar ist, entsteht durch diese Fluktuationen der Sägezahn der Grundschiwingung, der etwas Zeit braucht, um stabil zu werden. Die Ausbildung der tieferen Teiltöne ist daher immer schwieriger, da am Anfang die Initialimpulse noch rein zufällig sind, das System also chaotisch. Von diesem chaotischen Zustand aus ist die Ausbildung verschiedener Grenzyklen leicht möglich. Ist aber bereits der erste Oberton stabil, ist also ein Grenzyklus erreicht, so bedarf es der kleinen Fluktuationen im Anstreichen, also einer gewissen Chaotizität, um in einen anderen Zustand zu wechseln.

1.1.3 Bläser

Auch hierfür sind die ersten Ergebnisse von Backhaus. Für die b-Trompete findet er, daß die Entstehungsgeschwindigkeit der Teiltöne gleich ist, bei der Klarinette entsteht deutlich zuerst der Grundton. Das Saxophon wird von den tiefsten Teiltönen beherrscht und zeigt in tiefer Lage den typischen Einbruch nach wenigen Millisekunden. Bei der Flöte beschreibt er das Anblasgeräusch, beim Saxophon den Vorimpuls bei tiefen Tönen. Dabei handelt es sich um einen Amplitudeneinbruch kurz nach Beginn des Klangs, was für das Saxophon sehr charakteristisch ist.

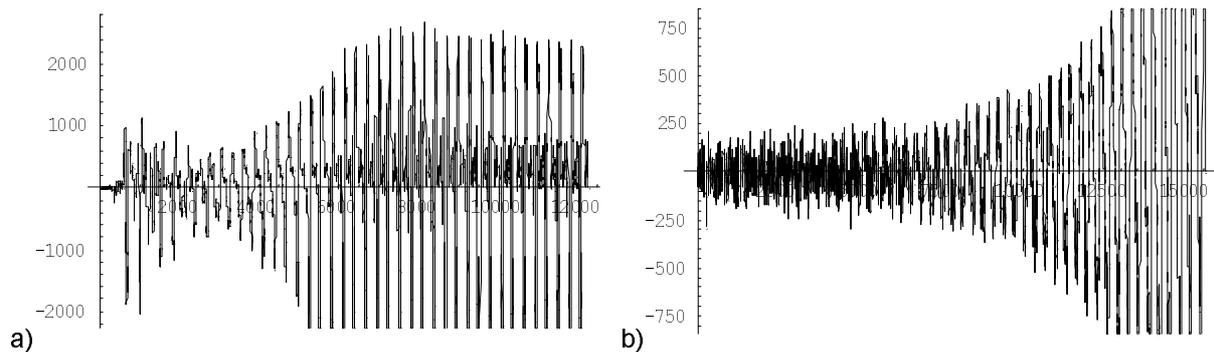


Abb. 1.2: Saxophon Es1 (klingend) (a) mit Vorimpuls und (b) mit Blasgeräusch vorneweg.

Da hier wie bei allen Instrumenten zwischen weichem und hartem Ansatz unterschieden wird, kommen andere Forscher zu unterschiedlichen Ergebnissen bezüglich des Einschwingens der einzelnen Teiltöne.⁵ Da die Klarinette von Backhaus mit einem starken Grundton einschwingend beschrieben wird, widerspricht das den Ergebnissen von Rösing⁶, der einen harten Einsatz beschreibt, bei dem die Teiltöne alle gleich einsetzen. Reinecke entdeckt ein Geräusch am Ansatz für den harten Einsatz. Der Klangeinsatz bei Doppelrohrblattinstrumenten vollzieht sich erheblich schneller, da die Kopplung von Blatt zu Luftsäule besser ist. Luce & Clark⁷ finden für alle Rohrblattinstrumente die längsten Einschwingzeiten für die Mittellage; tiefe und hohe Lage schwingen schneller ein.

Interessant ist die Frage eines Formantbereichs bei Blasinstrumenten. Es zeigt sich, daß das Rohrblatt eine konstante Schließzeit unabhängig von der Tonhöhe hat. Man stellt sich den Anregungsmechanismus als Impulsgeber vor. Eine Zeit lang schließt das Rohrblatt die Luftsäule fast völlig ab. Dann öffnet es sich, schwingt hoch und wieder herunter, um erneut zu schließen. Das Fourierspektrum dieses Impulses mitsamt der Schließzeit zeigt wegen der konstanten Schließzeit Formantgebiete, also Frequenzbereiche, die bei jeder Tonhöhe tendenziell lauter sind, als ihre Umgebung.⁸ Außerdem können Relationen der Gebiete mit Frequenzminima festgestellt werden. Diese sind:

⁵ nach Reuter 1995

⁶ Rösing, 1972

⁷ Luce & Clark 1965

⁸ Fricke 1975, Sirker 1975

Oboe	2100Hz : 4050Hz	1 : 2
Englisch Horn	800Hz : 1500Hz : 3050Hz	1 : 2 : 4
Fagott	850Hz : 1650Hz : 2550Hz	1 : 2 : 3
Trompete	1750Hz : 2500Hz	7 : 10
D-Trompete	2000Hz : 3000Hz	2 : 3
Posaune	800Hz : 1750 Hz	1 : 2
Tuba & Horn	1000Hz ⁹	

1.1.4 Orgeln

Bei der Orgel schwingen die Zungenpfeifen schneller ein als die Lippenpfeifen¹⁰. Grundsätzlich ist ein Vorläufergeräusch¹¹ festgestellt worden, das durch das Scheidengeräusch an der Lippe und durch das Einströmen der Luft in die Tonkanzelle entsteht. Es wird zwischen Ton- und Registerkanzelle unterschieden¹², also der Luftzufuhr für jede Pfeife einzeln oder für das ganze Register. Ersteres wirkt direkter, was den Klangcharakter positiv beeinflusst.

Das Geräusch ist bei Lippenpfeifen deutlicher als bei Zungenpfeifen. Trendelenburg et al. messen bei Lippenpfeifen Zeiten zwischen 5ms und 50 ms. Miklós & Angster geben Listen der Eigenschaften des Einschwingvorgangs und quasistationären Bereichs bei der Orgel an, denen sie physikalische Parameter zuordnen¹³. Das Anblasgeräusch der Orgel wurde von Rioux analysiert und mit dem Geräusch verglichen, daß ein Orgelbauer mit dem Mund erzeugte, als er versuchte, das Anblasgeräusch nachzuahmen. Beide Fourierspektren zeigten dieselben Komponenten.¹⁴

⁹ Reuter 1995, S. 101 & 137

¹⁰ Trendelenburg, Thienhaus & Franz 1936

¹¹ Trendelenburg, Thienhaus & Franz 1936 S. 64ff

¹² Lottermoser 1953

¹³ Miklós & Angster 2000, S. 612 & 619

¹⁴ Rioux 2000.

Auch ist bei Orgeln der Mitnahmeeffekt beschrieben worden (Lottermoser 1953), wobei eine Orgelpfeife schneller einschwingt, wenn im Raum bereits Musik erklingt.

1.1.5 gezupft, geschlagen

Idiophone und Membranophone schwingen ein, indem der Schlegel, der Hammer oder die Hand auf das Instrument schlägt und dadurch das System in Schwingung versetzt. So ist das Einschwingen eine Kombination aus dem System, das sich auf einen quasistationären Bereich zu bewegt und dem Eigengeräusch des Schlegels. Die Klaviersaite wird in diesem Sinne auch geschlagen¹⁵, auch wenn - mit Ausnahme der ganz tiefen Saiten - keine Biegewellen entstehen.¹⁶

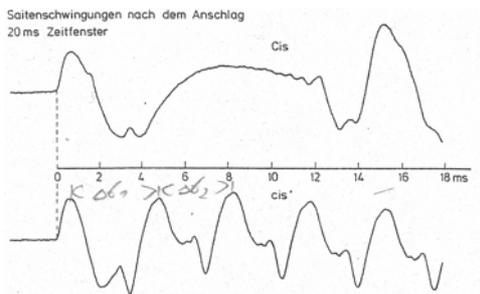


Abb. 1.3: Einschwingen eines Klaviers. Schwingungsform durch induktive Messung an der Saite vorgenommen, ohne Einfluß des Klangkörpers. Tonhöhen Cis1 und cis1. Der Hammer bleibt auf der Saite und der vom Steg reflektierte Impuls zeigt sich bei beiden Tonhöhen als durch den Hammer gedämpft. Aus: Fricke 1992.

Der von Fricke festgestellte abgedämpfte Impuls ist im Einschwingvorgang für eine inharmonische Frequenzkomponente verantwortlich, deren Verhältnis vom Ort des Hammer abhängt und hier 1 : 8,6 war. Der Hammer verbleibt einige Zeit auf der Saite. Dadurch wird die Saite verkürzt und es entsteht jede Komponente dadurch, daß sich kurzzeitig zwischen Hammer und Steg eine stehende Welle ausbildet.

Die Klaviersaite ist in ca. 2ms eingeschwungen, was natürlich nicht für den Klangkörper gilt. Die komplizierten Wechselwirkungen, die in den Klangkörpern wie Klavieren oder Gitarren wirken gehen den Weg von der Saite über den Steg auf den Klangerzeuger, der in seine Eigenmoden einschwingt. Die Umwandlung von longitudinalen in transversale Schwingungen u.ä. bewirkt Amplitudenschwankungen

¹⁵ Fletcher 1962

¹⁶ Fricke 1992

der abgestrahlten Teiltöne¹⁷, der Klang lebt. Trendelenburg findet auch Frequenzkomponenten weit unterhalb des Grundtons, die sowohl vom Tastgeräusch, als auch von der Inharmonizität des Anschlags herrühren.

Formanten treten bei Saiteninstrumenten auf, da am Anschlagsort keine Schwingungsbäuche auftreten und so gewisse Teiltöne verschwinden (siehe Kapitel über physikalische Grundlagen).

Auch das Zupfen, wie bei der Gitarre oder dem Cembalo, gehören in diese Kategorie, da das Gleiten des Fingers oder des Reißers über die Saite ein Eigengeräusch produziert, das dem Schlegel oder Hammer gleichzustellen wäre und dann das System sich selbst überlassen wird. Bisherige Untersuchungen über solche Einschwingvorgänge sind beim Klavier, beim Clavichord und beim Cembalo durchgeführt worden (s.o).

¹⁷ Trendelenburg, et al 1940, S. 311

1.2 Arbeiten zu Musik und Chaos

Die Arbeiten zu Musik und Chaos lassen sich in zwei Felder aufteilen. Hauptsächlich wurden bei Blasinstrumenten (bei extremem Blasdruck) und bei einem Becken (bei extremer Auslenkung) Bifurkationen festgestellt. Diese mündeten beim Becken bei noch weiterer Auslenkung in Chaos mündeten. Bei Röhren, wie bei der Klarinette oder dem Saxophon können Kombinationstöne auftreten, der Art, daß die gemessenen Frequenzen Linearkombinationen der Vielfachen von zwei oder drei Grundfrequenzen sind. Es gilt: $f = n_1 * f_1 + n_2 * f_2 + n_3 * f_3$. Dabei sind f_1 , f_2 und f_3 die Grundfrequenzen und n_1 , n_2 und n_3 ganze Zahlen. f ist die resultierende Frequenz.¹ Dies ist einerseits durch gewisse Klappenkombinationen erreichbar wie bei den Multiphonics, andererseits durch einen starken Anblasdruck. Die zweite Lösung dient Gibiat² dazu, durch Pseudophasenplots und Poincaréschnitte erst ein harmonisches Obertonspektrum, bei größerem Druck zwei Obertonspektren, dann drei und schließlich das Chaos bei sehr starkem Anblasdruck sichtbar zu machen. In einer zweiten Arbeit³ wird neben der Posaune, dem Krummhorn und dem Fagott die Periodenverdopplung auch bei der Singstimme festgestellt. Einmal bei einem tuvanischen Obertonsänger, dann auch bei der Xhosa Ethnie Südafrikas. Der tuvanische - und auch tibetische - Obertongesang kennt neben dem Stil des hohen Einzeltons (Sygyt) auch den des sehr tiefen Tons (Kargyraa oder Kangyraa). Dieser tiefe Stil findet sich auch bei einigen amerikanischen Bluesmusikern wie John Lee Hooker oder Howling Wolf. Paul Pena, ein Bluesgitarrist und Sänger, erlernte zehn Jahre lang den tuvanischen Kargyraa - Stil und gewann in Tuva einen Wettbewerb mit seinem Gesang. Wegen der Tiefe des Gesangs trägt Pena auch den Spitznamen „Earthquake“.⁴ Gibiat zeichnete im Labor mit einem Mikrophon an der Glottis, der sogenannten Elektrogloggographie, eine solche Periodenverdopplung auf.

¹ Backus, 1978.

² Gibiat 1988

³ Gibiat & Castellengo 2000

⁴ CD: Genghis Blues, Kongar-ol Ondar & Paul „Earthquake“ Pena. Genghis Blues Music, 2000.

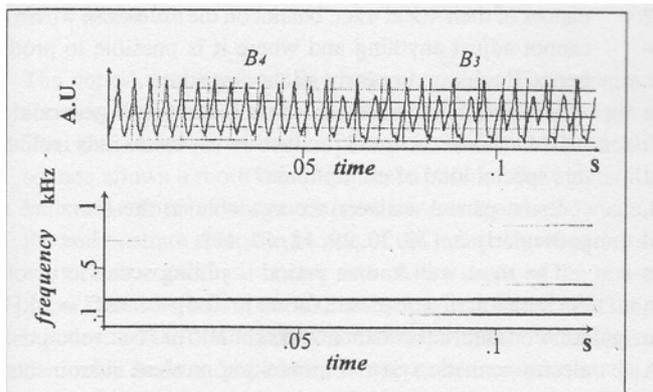


Abb. 1.4: Elektrolottographie eines gesungenen Tones im Stil des Kargyraa.⁵

Hier sind die Peaks zu Beginn regelmäßig, dann ist jeweils der zweite Peak etwas kleiner. Somit ergibt sich eine neue Gesamtperiode, in der sich die Schwingung wiederholt, jetzt aber mit halber Frequenz. Dies entspricht den im Theorieteil diskutierten Subharmonischen.

Keefe & Laden und Wilson & Keefe berechnen Korrelationsdimensionen und Lyapunov Exponenten für Multiphonics, wobei sie bei realen Instrumenten Klappenkombinationen zu deren Erzeugung benutzten. Sie finden beim Saxophon die fraktale Korrelationsdimension $D=2.5$ für mittleren Anblasdruck und $D=2.9$ für starken, bei der Klarinette $D=2.2$, was den theoretischen Erwartungen in etwa entspricht, da ja zwei harmonische Obertonspektren vorhanden waren.⁶ In der Arbeit von 1998 wird neben der Korrelationsdimension auch die Unstetigkeit des Tones gemessen, indem über einen Zeitraum die Periodenlängen bestimmt und deren Standardabweichung berechnet werden. Dies geschah zu verschiedenen Zeitpunkten über bis zu 9 Sekunden.⁷ Der erste Wert wurde zwei Sekunden nach Klangbeginn genommen. Auch hier ist die Korrelationsdimension bei dem einfachen Ton $D \cong 1$, bei dem Multiphonic $D \cong 2$. Die Unstetigkeit war am Beginn und gegen Ende am größten.

⁵ Gibiat & Castellengo 2000. S. 751

⁶ Keefe & Laden 1991.

⁷ Wilson & Keefe 1998

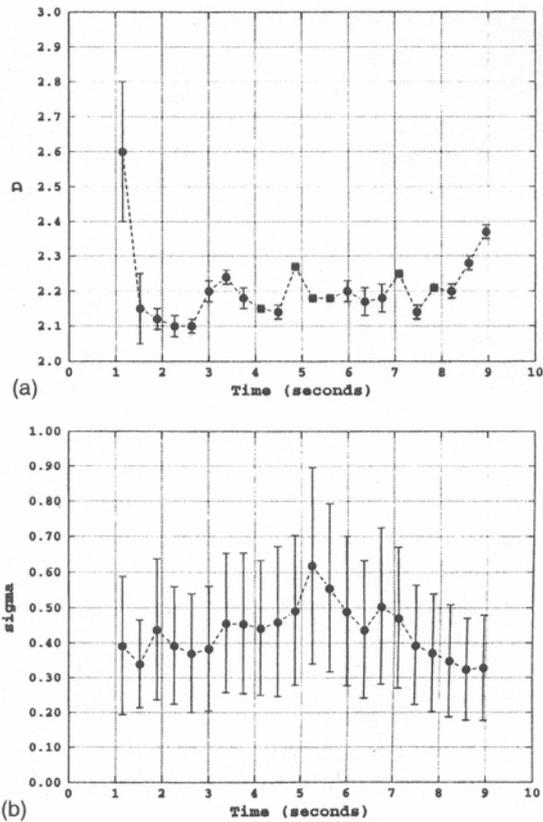
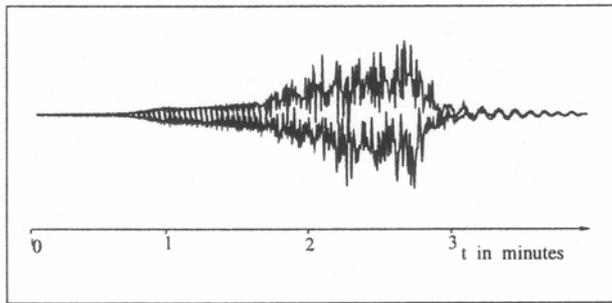


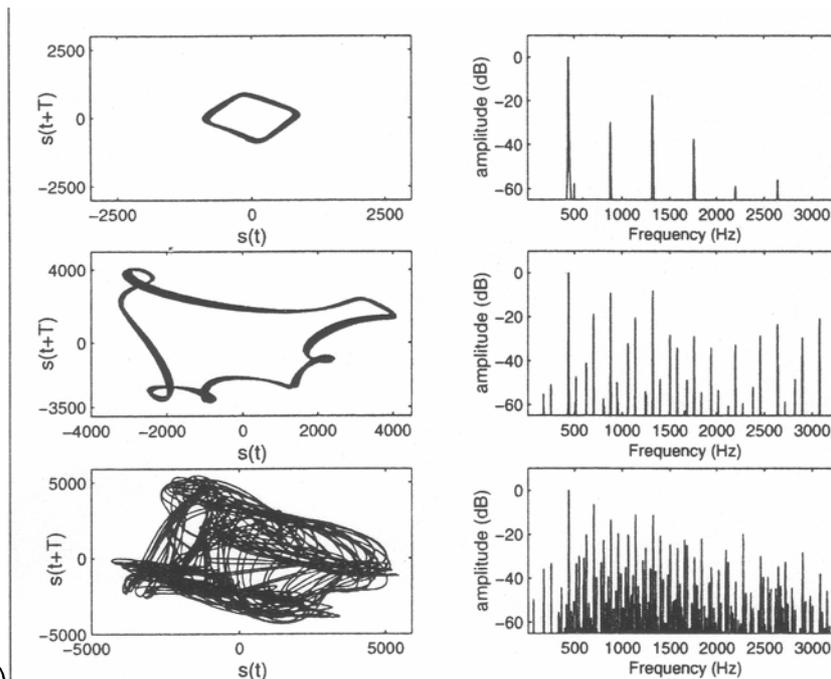
Abb. 1.5: Korrelationsdimension (siehe Kapitel 4) und Unstetigkeit eines Multiphonic Tones durch die Zeit.⁸

Touzé & Chaigne berechnen Lyapunovexponenten - ein Maß für Chaotizität - bei einem Becken, welches sie mit einer Sinusschwingung anregen und genügend lange schwingen lassen, bis ein stabiler Zustand erreicht ist. Je nach der Amplitude der Anregung ändert sich das Schwingungsverhalten des Beckens. Bei kleiner Anregung werden einige wenige Eigenmoden angeregt. Bei größerer Auslenkung ergeben sich auch hier Bifurkationen, die Frequenzen im Spektrum können nach der gleichen Formel berechnet werden, wie die für Multiphonics, wobei zwei Grundfrequenzen auftauchen.

⁸ Wilson & Keefe 1998, S. 559



a)



b)

Abb. 1.6.: a) Zeitfunktion des Beckens bei steigender Anregungsamplitude; b) Phasendiagramme dreier Bereiche aus dieser Anregungsfunktion: geringe Anregung, mittlere Anregung, kurz vor Chaos.⁹

Monro & Pressing¹⁰ beschäftigen sich mit dem Phasenplott als Kunstform und berechnen für einige Klänge Korrelationsdimensionen. Die Angaben sind aber zu unbestimmt, um genauere Schlüsse daraus ziehen zu können. So berechnen sie z.B. „J.S. Bach, Goldberg variations, opening: piano $D=2.30$ “ oder „Richard Wagner, Prelude to Tristan and Isolde, opening Tristan chord: orchestra $D=4.55$.“¹¹ Hier wäre eine genaue Beschreibung des Notentextes, Anfang, Ende, Orchestrierung usw. nötig, um die Bedeutung dieser Zahlen klarer erfassen zu können.

Der zweite Berührungspunkt ist der Versuch, aus fraktalen Geometrien und aus Iterationsverfahren Klänge oder Tonfolgen zu produzieren. Die Berechnung von

⁹ Touzé & Chaigne 2000, S.564 & 561

¹⁰ Monro & Pressing 1998

fraktalen Dimensionen bei Einschwingvorgängen ist bisher nicht unternommen worden. So entwickelte Degazio¹² für den Macintosh Computer ein Programm, das die nichtlineare Duffinggleichung simuliert. Alle Parameter wie Anregungsfrequenz, Dämpfung und Nichtlinearität sind einstellbar. Das Programm erzeugt so die Klänge. Da das Programm nicht vorliegt, muß hier von einer Beschreibung des Klangeindrucks abgesehen werden.

Monro¹³ schrieb ein Programm, das Spektren, die als fraktale Geometrie erzeugt wurden, in Klänge umwandelt. Dazu wird verfahren, wie bei dem Schneeflockenbeispiel, Durch eine Iterationsvorschrift wird eine Grundlinie immer weiter differenziert, und zwar immer nach nur einer solcher Vorschrift. Das Ergebnis ist ein Spektrum, das im Plot Frequenz/Amplitude wie eine Schneeflocke aussieht. Dazu wird eine Amplitudenmodulation durch die Zeit über den additiv synthetisierten Klang gelegt. Die Ergebnisse können aus dem Internet geholt und angehört werden. Die Klänge werden hier als durchweg synthetisch eingestuft.

Schließlich gibt es Versuche, aus chaotischem Verhalten Klänge zu erzeugen, was im Bereich der elektronischen Musik von Reiz ist¹⁴. Das Verfahren ist gewöhnlich eine Rückkopplungsschleife, über die die Anregung so stark gemacht wird, daß Bifurkationen entstehen.

¹¹ ebenda S. 30

¹² Degazio 1993

¹³ Monro 1995

¹⁴ Slater 1998, Lesbos 1999, Rodet & Vergez 1999

1.3 Klangfarbe

In der multidimensionalen Skalierung (MDS) wird versucht, die Ähnlichkeiten von Objekten darzustellen. Die psychologische Tatsache, daß Dinge als ähnlich oder unähnlich angesehen werden, wird in ein mathematisches, metrisches Modell gebracht. In der Musikwissenschaft wurden so oft Instrumentenklänge, Sounds, in Bezug auf ihre Ähnlichkeit in Cluster geordnet.¹ Die Ermittlung der Ähnlichkeit wird durch Befragung von Vps erreicht. Diesen werden die Klänge vorgespielt und sie werden nach einer Eingewöhnungsphase gebeten, jeweils einem Paar von Instrumenten eine Distanz, also eine Ähnlichkeit oder Unähnlichkeit, zuzuordnen. Dies erfolgt auf einer Skala von ´maximal unähnlich´ bis hin zu ´identisch´. Die Eingewöhnungsphase ist notwendig, damit die Vps erst einmal hören, welche Klänge überhaupt zu beurteilen sind. Es wird von ihnen also eigentlich verlangt, aus allen dargebotenen Klängen die Extreme auszusuchen und daraus für sich ein Maß der Ähnlichkeit in Zahlen auf der Skala zu finden.

Die psychologische Ähnlichkeit wird hier also als Kontinuum betrachtet. Es wird angenommen, daß eine von einer Vp genannte Ähnlichkeit von 2 auf der Skala von 0 bis 30 von z.B. Geige und Bratsche doppelt so ähnlich ist wie ein genannter Wert von 4 von z.B. Geige und Cello. Unstrittig ist, daß hier das Cello der Geige unähnlicher ist als die Bratsche der Geige. Die Skala ist also eigentlich ordinal, wird aber in der folgenden Berechnung der Cluster als kontinuierlich interpretiert.

Für die MDS ist es weiter wichtig, daß die Distanzen mathematisch Zahlen mit positivem Vorzeichen sind, die Matrix, die die Distanzen der jeweiligen Instrumente zueinander angibt, positiv semidefinit ist.² Dies hat nicht nur mit der Berechnung der Cluster zu tun, sondern hat auch einen inhaltlichen Sinn. Denn eine negative Distanz müßte sich von einer positiven unterscheiden. Nun ist aber eben z.B. eine Geige von einem Cello 4 Skalenwerte entfernt. Sie kann dies offenbar nur in einer Richtung sein. Erst bei mindestens drei Instrumenten kann es, vom mittleren Instrument aus gesehen positive und negative Distanzen geben, eben zwei

¹ Grey 1977

² Ahrens S. 81

Richtungen. Die Matrix der perzipierten Ähnlichkeiten jedoch besteht immer nur aus Vergleichspaaren.

Wenn wir nun also eine Matrix haben, in der die von den Vps genannten Distanzen zwischen jeweils zwei Instrumenten in positiven Zahlen angegeben sind, so können sich diese widersprechen. Ist die Geige von der Bratsche 2 Skalenwerte entfernt, die Geige vom Cello 4 Skalenwerte und wird im Paarvergleich Bratsche zu Cello deren Distanz aber mit 3 Skalenwerten perzipiert, dann ist dies inkonsistent. Wir würden erwarten, daß das Cello von der Bratsche die Differenz der Ähnlichkeiten zur Geige hat, also 2 Skalenwerte.

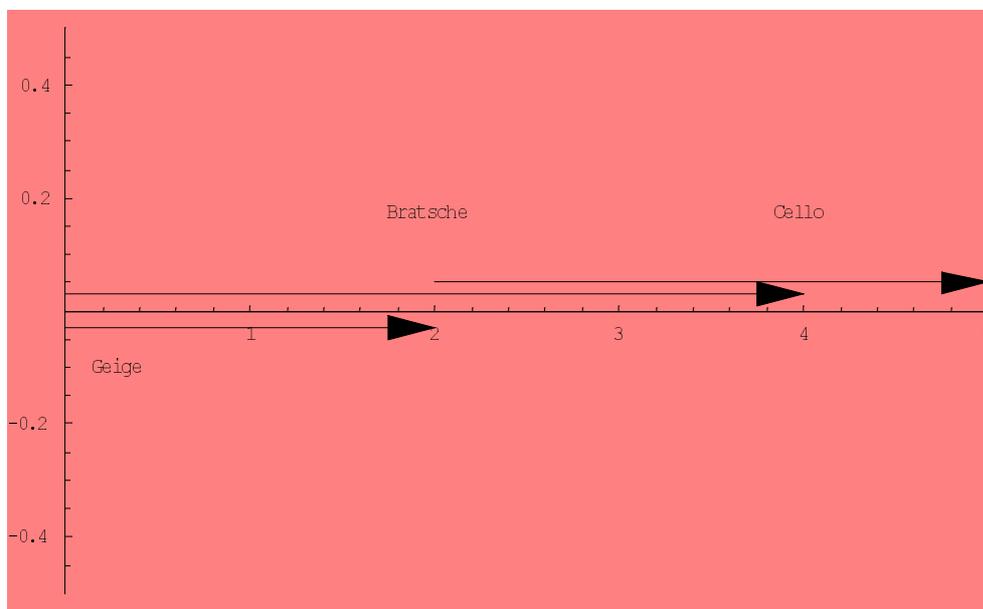


Abb. 1.7: Angenommene Abstände von Geige, Bratsche und Cello. Die Geige liegt bei $x=0$, die Bratsche bei $x=2$ und das Cello bei $x=4$.

Um dafür eine sinnvolle graphische Lösung anzugeben, müssen wir zweidimensional werden:

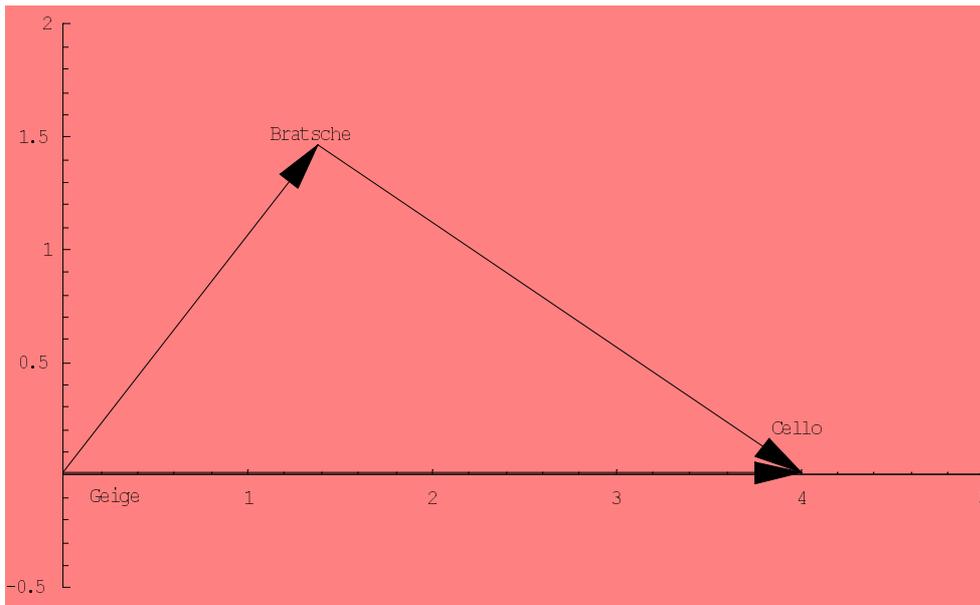


Abb. 1.8: Zweidimensionale Lösung der Abb. 1.7

Nun haben wir keine einfachen Distanzzahlen mehr, sondern Vektoren, deren *Länge* die Distanzen zwischen den Instrumenten angeben, während diese Instrumente auf den zwei Achsen unterschiedlich weit voneinander entfernt sind:

Geige = {0, 0}; Bratsche = {1.375, 1.452}; Cello = {2.625, -1.452}

Aus der ursprünglichen Distanzmatrix

	Geige	Bratsche	Cello
Geige	-	2	4
Bratsche	2	-	2
Cello	4	2	-

wird nun eine dreidimensionale Matrix, da wir zwei Abstandsdimensionen haben.

Diese sind der Übersichtlichkeit halber als zwei Matrizen für die x- und y- Koordinate dargestellt:

	Geige	Bratsche	Cello
Geige		1.375	2.625
Bratsche			1.25
Cello			

x - Koordinate

	Geige	Bratsche	Cello
Geige		1.452	-1.452
Bratsche			0
Cello			

y - Koordinate

Also sind bei 3 Instrumenten bereits zwei Dimensionen erforderlich, um die Verhältnisse korrekt wiederzugeben. Sind es 4 Instrumente, wird höchstwahrscheinlich die dritte Dimension von Nöten sein, denn es ist unwahrscheinlich, daß die Distanzen z.B. des neu hinzukommenden Kontrabasses zu Geige, Bratsche und Cello exakt so sind, daß er zweidimensional korrekt eingebettet werden könnte. Wird der Kontrabaß also z.B. vom Cello 2 Skalenwerte entfernt gesehen, von der Bratsche 3 und von der Geige 4, so müßte innerhalb des obigen zweidimensionalen Raums ein Punkt gefunden werden, der zum Cello einen Vektor mit Länge 2, zur Bratsche einen Vektor mit Länge 3 und zur Geige einen Vektor mit Länge 4 hat. Wenn wir also Kreise um die Instrumente ziehen (deren Radien jeweiligen den Abstand zum Kontrabaß haben), dann müßten wir einen Punkt finden, in dem sich alle drei Kreise treffen, um den Kontrabaß zweidimensional einbetten zu können:

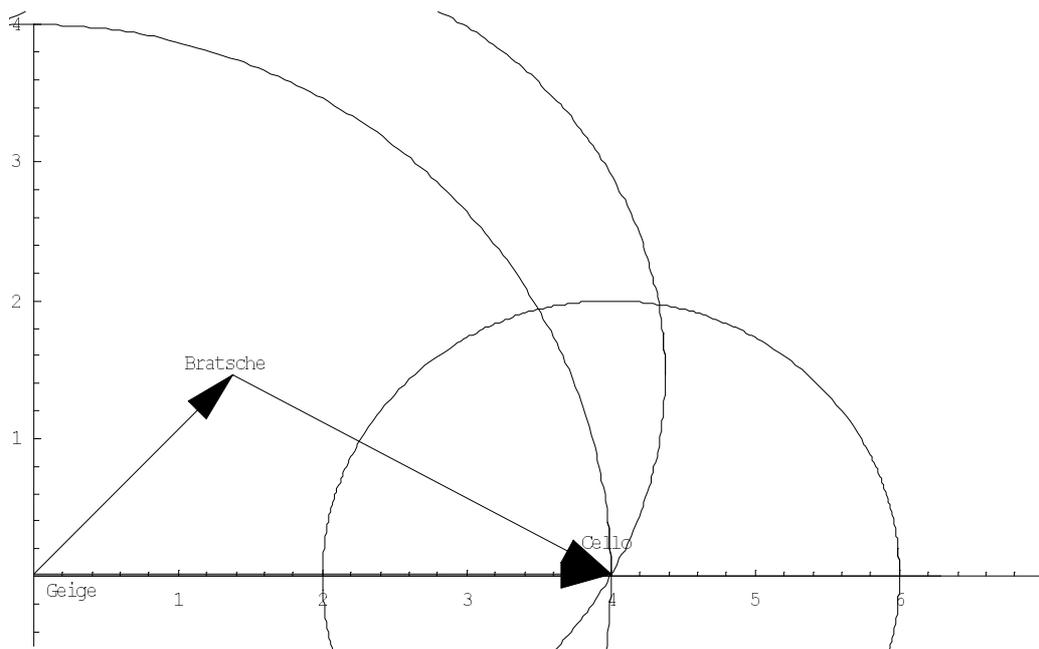


Abb. 1.9: Kreise um Geige, Bratsche und Cello mit den Abstandswerten dieser Instrumente zum Kontrabaß. Zur zweidimensionalen Einbettung müssen sich alle drei Kreise in einem Punkt schneiden.

Die Kreise um die Geige und die Bratsche treffen sich in der Tat zufällig im Punkt des Cellos. Aber der Kontrabaß hat ja auch vom Cello einen Abstand, nämlich 2. Es gibt also keinen Punkt im zweidimensionalen Raum, der den Kontrabaß einbetten könnte.

Wir müssen hier also schon dreidimensional werden, um die Bedingung zu erfüllen. Dann würden wir Kugeln um die Instrumente ziehen mit denselben Radien wie eben, und einen gemeinsamen Schnittpunkt suchen. Dieser muß aber nicht einmal existieren. Es könnte sein, daß die Abstände zu knapp bemessen sind. Wäre der Kontrabaß von der Geige 3, von der Bratsche 2 und vom Cello 1 weg, dann würde es in keiner Dimension dafür eine Lösung geben, weil die Abstände einfach zu gering sind.

Nun werden aber normalerweise mehrere Instrumente in die Skalierung einbezogen. Es wäre aber natürlich nicht sinnvoll, eine Lösung anzugeben, die genauso viele Dimensionen hat wie Instrumente vorhanden sind. Die Dimensionen selbst sind nämlich der Versuch, aus den Ähnlichkeitsurteilen einzelne Parameter der Sounds herauszufiltern, nach denen man in einem n-dimensionalen Raum alle Instrumente sinnvoll anordnen kann. Im Normalfall ist dies ein 3-dimensionaler Raum. Die MDS, die in ihrer mathematischen Ausführung eine Art Faktorenanalyse ist, berechnet für verschiedene Dimensionen jeweils einen Wert, der angibt, wieviel Information durch diese Dimension abgedeckt wird. Es wird also nicht angestrebt, die oben demonstrierte 100 %ige Einbettung zu erreichen, sondern die von den Vps perzipierten Distanzen werden etwas gequetscht oder gestreckt, um die bestmögliche Einbettung in den n-dimensionalen Raum zu erreichen. Zuerst wird also in den ein-dimensionalen Raum eingebettet. Diese Dimension 'erklärt' meist ca. 60 % der Ähnlichkeiten. Dieses Maß wird Stress genannt. Dann wird eine zweite Dimension hinzugenommen, worauf eine bessere Einbettung erreicht wird, vielleicht 15 % mehr. Jede weitere Dimension verbessert natürlich die Einbettung. Doch meist ab der dritten ist der zusätzlich aufgeklärte Teil nicht mehr groß genug, um eine neue Dimension zu rechtfertigen. Die Dimensionen müssen ja sinnvoll interpretiert werden, d.h. sie sollen psychologischen Realitäten entsprechen.

Nach dieser Einbettung finden wir also die Instrumente in einem meist 3-dimensionalen Raum graphisch angeordnet, wobei die räumliche Nähe den Grad der Ähnlichkeit wiedergibt. Die drei Koordinaten in diesem Raum, die jedes Instrument hat, sind die Quantifizierungen der Instrumente nach differenzierteren Ähnlichkeitskategorien. Dies ist das Ziel der MDS.

Die Einbettung

Um die Einbettung in die erste Dimension zu erreichen, wird aus der Matrix ein Instrument als Referenzinstrument herausgewählt, denn in dem von uns konstruierten Raum gibt es keinen bereits bestimmten Nullpunkt. Wir haben ja nur Ähnlichkeiten, also Abstände. Wird aber ein Instrument zur Referenz, wird ihm also ein Koordinatenpunkt zugewiesen, dann sind alle anderen Instrumente räumlich bestimmt.

Nun wird die von den Vps geschätzte Distanz zwischen zwei Instrumenten in den n-dimensionalen Raum übertragen, indem man das Skalarprodukt der dortigen Vektoren bildet. Das Skalarprodukt der Instrumentenvektoren z.B. einer Gitarre und eines Klaviers ist:

$$\text{Gitarre} * \text{Klavier} = \{Ag_1, Ag_2, \dots, Ag_{\max}\} * \{Ak_1, Ak_2, \dots, Ak_{\max}\} = Ag_1 * Ak_1 + Ag_2 * Ak_2 + \dots + Ag_{\max} * Ak_{\max}$$

wobei das dicke Sternchen das Zeichen für das Skalarprodukt ist, das kleine aber für die normale Multiplikation steht.³ Ag_1 ist der Wert für die erste Dimension der Gitarre, ihr Aufenthaltsort in dieser Dimension. Ag_2 entsprechend der Aufenthaltsort der Gitarre in der zweiten Dimension usw. Dasselbe gilt für Ak_1 , Ak_2 für das Klavier.

Das Skalarprodukt hat die hilfreiche Eigenschaft, daß es Null wird, wenn die Vektoren orthogonal, also im Winkel von 90 Grad zueinander stehen. Um dies zu zeigen, rechnen wir das Skalarprodukt zweier Vektoren mit nur zwei Dimensionen:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{1, 0\}; V_2 = \{0, 1\} \\ V_1 * V_2 &= 1 * 0 + 0 * 1 = 0 \end{aligned}$$

³ Griesel, H. & Postel, H.: Lineare Algebra, Analytische Geometrie. Hannover 1996.

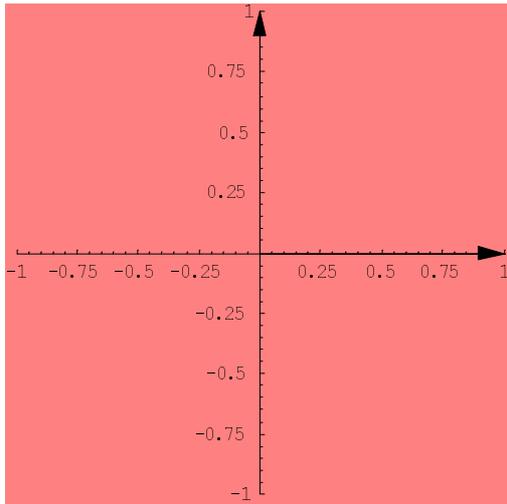


Abb. 1.11: Zwei orthogonal stehende Vektoren

Sind zwei Vektoren gleich, dann wird ihr Skalarprodukt maximal (wir haben beide Vektoren auf 1 normiert,

$$\text{Sound} = \frac{\text{Sound}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\text{imax}} \text{Sound}(i)^2}},$$

der größtmögliche Wert des Skalarprodukts ist damit 1):

$$\mathbf{V3} = \{.707, .707\}; \mathbf{V4} = \{.707, .707\}$$

$$\mathbf{V3} * \mathbf{V4} = .707 * .707 + .707 * .707 = 2(.707^2) = 2\left(\sqrt{.5}\right)^2 = 2 * .5 = 1$$

Dieses Skalarprodukt liefert also die Ähnlichkeit zweier Vektoren. Dasselbe tut aber ja auch die von den Vps genannten Ähnlichkeiten der Instrumente untereinander.

Also setzen wir die beiden gleich.

$$\mathbf{G} * \mathbf{K} = \mathbf{D}(\mathbf{G}, \mathbf{K}),$$

wobei G und K die Koordinaten der Gitarre und des Klaviers im Raum und $D(G,K)$ die von den Vps geschätzte Distanz der beiden ist.

Nun wird die erste Dimension eingebettet, so daß die Werte der Instrumente in der ersten Dimension möglichst gut sind. D.h. die oben beschriebene Unmöglichkeit, in einer Dimension alle Instrumentenähnlichkeiten richtig abzubilden wird in ein Bestmaß verwandelt, in die Minimierung der Abweichungsquadrate.

$$R = \sum_{i=1}^{imax} \sum_{k=1}^{kmax} (I_1(i) * I_2(k) - AI_1(i) * AI_2(k))^2$$

I steht hier allgemein für ein Instrument. Es werden also mit $I(i) * I(k)$ das Skalarprodukt jeweils eines Instrumentenpaars berechnet. Davon wird dann der Koordinatenwert A des Instruments $I(i)$ bzw. $I(k)$ in nur der ersten Dimension 1 abgezogen, also nur ein Teil des ganzen Skalarprodukts. Wenn dieser Teil gleich dem ganzen Skalarprodukt wäre, wäre nach Abziehen die Klammer Null. Geschehe dies für alle Instrumentenpaare, dann wäre R, der Rest, ebenfalls gleich Null. Eine Dimension hätte dann alles erklärt. Ist dem jedoch nicht so, dann ist $R > 0$ und in einer zweiten Rechnung würde mit der zweiten Dimension genauso verfahren. Auch diese würde dann wieder einen nicht erklärbaren Rest ergeben usw. Die oben genannte Formel soll also ein möglichst kleines R ergeben. Ihre Ableitung wird also Null gesetzt. Die Berechnung einer MDS ist im Prinzip das statistische Verfahren der Faktorenanalyse.⁴

1.3.1 Grey's Dimensionierung von Instrumenten⁵

Grey synthetisierte 16 Instrumente und ließ sie von Vps ihrer Ähnlichkeit entsprechend beurteilen. Er benutzte zur Analyse die Multidimensionale Skalierung in einer Version von Carroll und Chang mit Namen INDSCAL, die individuelle Unterschiede in den Ähnlichkeitsurteilen verschiedener Vps zu einem

⁴ Siehe Diehl S. 338 ff

⁵ Grey 1977.

Instrumentenpaar berücksichtigt. Normalerweise werden die Ähnlichkeitsurteile für die Stimuluspaare über die Vps gemittelt. Dies ignoriert die Möglichkeit, daß es verschiedene Gruppen von Vps gibt, die verschiedene Strategien der Wahrnehmungen haben. Des weiteren könnten für verschiedene Vps die verschiedenen Dimensionen, in welche die Ursprungsdistanz zerlegt wird, unterschiedlich wichtig sein. Carroll & Chang⁶ schlugen einen Algorithmus vor, der die Länge der Vektoren für jede Vp und jede Dimension gewichtet. Anstatt

$$D_{(I1, I2, VP)} = \sqrt{\sum_{dim=1}^{dimmax} (x_{I1(dim)} - x_{I2(dim)})^2}$$

der Distanz D (zwischen den Instrumenten I1 und I2, beurteilt von einem Vp), welche die Länge des Vektors, der dimmax Dimensionen mit den Einzelwerten x der Instrumente I1 und I2 hat, wird jetzt gewichtet:

$$D_{(I1, I2, VP)} = \sqrt{\sum_{dim=1}^{dimmax} W_{(VP, dim)} * (x_{I1(dim)} - x_{I2(dim)})^2}$$

Der Gewichtungsfaktor W ist abhängig vom Vp und der Dimension.

In zwei Versuchen, die untereinander mit K=0.98 korrelierten (K=1 wäre die perfekte Korrelation), präsentierte Grey seinen Vps zwei Oboen, zwei Klarinetten, drei Saxophone, ein Englischhorn, ein Horn, drei Streicher, eine Trompete, eine Posaune, eine Flöte und ein Fagott. Die Töne wurden synthetisiert, um sie zu standardisieren und um intervenierende Variablen zu vermeiden. Die Klänge hatten alle dieselbe Tonhöhe, 311 Hz, die gleiche Lautstärke und dieselbe Länge, 280ms - 400ms. Die akustischen Eigenschaften der Instrumente wurde durch eine Reihe von gesampelten und analysierten Originalklängen errechnet. Die Samplerate war damals 25 600 Sample pro Sekunde mit 12 bit Amplitudenauflösung. Durch additive Synthese wurden die Töne, die dann den Vps vorgespielt wurden, hergestellt. 20 Vps nahmen teil, welche auf einer Skala von 1 - 30 die Ähnlichkeit der Töne schätzen sollten. 1-10 war dabei sehr unähnlich, 11 - 20 hatten eine

⁶ Carroll & Chang S. 284

durchschnittliche Ähnlichkeit und 21 - 30 waren sehr ähnlich. Da die entstandene Matrix natürlich spiegelbildlich ist (die Ähnlichkeit von Oboe und Streicher ist dieselbe wie die von Streicher und Oboe) und die Instrumente nicht mit sich selbst verglichen werden, entstanden dadurch $16 \cdot 15 / 2 = 120$ Ähnlichkeitsurteile. Da 15 der 20 Vps den Versuch zweimal machten, waren also 35 Matrizen zu 120 Urteilen vorhanden. Deren Korrelation war nur 0.905, keine perfekte, aber noch sehr gute Korrelation. Die leichte Abweichung führt Grey auf die Reihenfolge der Präsentation zurückführt.

Grey fand 3 Dimensionen der Klangfarbe. Zwei Dimensionen klärten 0.68 Prozent auf, 3 Dimensionen schon 0.75 %, die vierte Dimension aber verbesserte den Stress nur noch um 0.03 %, nämlich auf 0.78 %. Er fand folgende graphische Lösung:

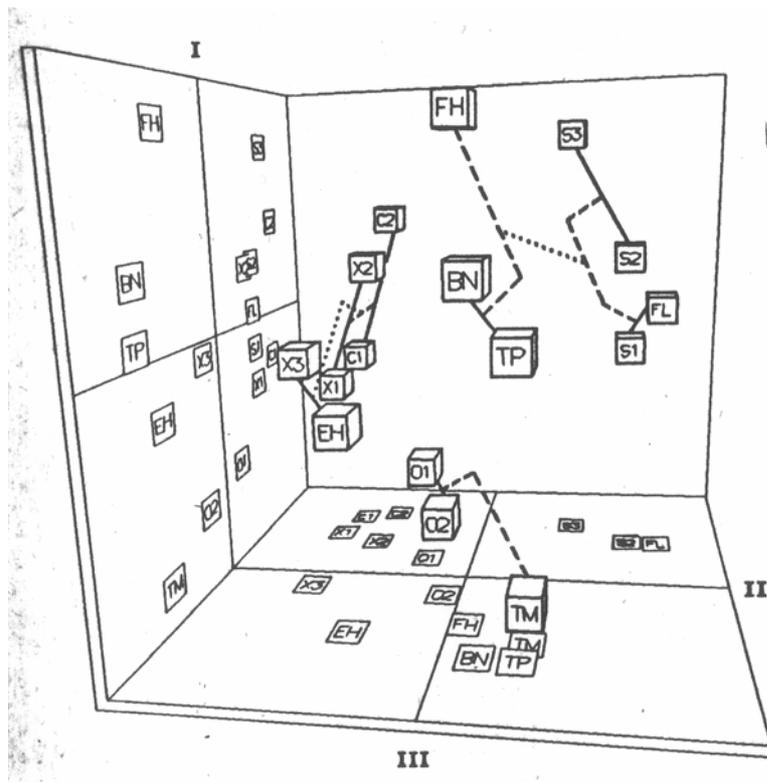


Abb. 1.12: Einbettungen der Instrumente in den dreidimensionalen Raum

Grey interpretiert die Achsen wie folgt:

Achse I, vertikal: Spektrale Energieverteilung

Die Achse hat zwei Extremwerte. Die Instrumente, die oben angesiedelt sind, wie das Horn oder Saxophon 3, haben ihre spektrale Energie im unteren Frequenzbereich, ihre Obertöne sind schwach. Die Posaune oder die Oboen dagegen haben starke hohe Obertöne. Ihre spektrale Energie ist über einen breiteren Raum verteilt.

Achse II, horizontal: Synchronizität

Dies bezieht sich auf die spektrale Fluktuation während des Klangs. Bleibt die relative Energie der einzelnen Obertöne zueinander während des Klangverlaufs gleich, wie es bei den Holzbläsern der Fall ist, dann liegen sie im Diagramm links. Finden plötzliche Spitzen oder Absenkungen in den Obertönen statt, ist die spektrale Fluktuation also groß, wie beim Horn oder beim Fagott, sind die Instrumente eher rechts angeordnet.

Diese beiden Achsen decken, wie oben gesagt, 0.68 %, also den Hauptteil der insgesamt 0.78 % Aufklärung ab.

Achse III, in die Tiefe: Inharmonizität

Geigen, Horn, Klarinetten, Saxophone und die Oboe tendieren zu Inharmonizität während des Einschwingvorgangs. Obertöne, die nicht in die Grundtonreihe $i \cdot \text{Grundton}$ (mit $i = 1, 2, 3, \dots$) passen, kommen vor. Diese sind im Diagramm eher hinten angesiedelt. Die Blechbläser Fagott und Horn dagegen haben keine nicht-ganzzahligen Harmonischen im Einschwingvorgang, klingen also weniger inharmonisch. Sie liegen im Schaubild eher vorne.

1.3.2 Grey und Moorer

beschäftigten sich auch mit der Vereinfachung von Klängen⁷. Sie nahmen 16 Instrumententöne (2 Oboen, Englischhorn, Fagott, Eb - Klarinette, Baßklarinette, Flöte, 2 Altsaxophone, Trompete, Horn, gedämpfte Posaune und 3 Celli) analog auf, digitalisierten sie mit 12 Bit Amplitudenauflösung und 12 500 Hz Samplefrequenz und analysierten diese, so daß sie für jeden Partialton eines Klanges eine Amplitudenkurve über die Zeit erhielten. Ihre Formel lautet

$$X(n) = \sum_{k=1}^K A_k(n) \sin(nT(k\omega + 2\pi f_k(n)))$$

wobei n die durchlaufende Nummer der Samples durch die diskretisierte Zeit und $X(n)$ die Amplitude des Originalsignals am diskreten Zeitpunkt n ist. k steht für den Partialton. $A_k(n)$ ist die Amplitude des Partialtons k zum Zeitpunkt n . Die Amplituden der Partialtöne liegen hier ja als Funktionen A_k über der Zeit vor. ω ist die Frequenz des Grundtons, die hier mit k , also dem Index des jeweiligen Partialtons multipliziert wird. $f_k(n)$ ist die Funktion der Frequenzabweichung, die hier als langsam angenommen wird. Wir haben hier also das Prinzip einer additiven Synthese, bei der die einzelnen Partialtöne mit einer Amplitudenfunktion über der Zeit und einer Frequenzabweichungsfunktion ebenfalls über die Zeit gewichtet werden.

Nachdem die Originalklänge in Bezug auf diese Parameter analysiert worden sind, wurden sie nach verschiedenen Vereinfachungsgraden wieder resynthetisiert:

- a) (COMPLEX) Ohne Vereinfachung
- b) (LINE SEG) Die Amplitudenfunktion der Partialtöne wird vereinfacht. Es werden 4 - 8 Liniensegmente über den gesamten Klang gelegt. Diese werden gewonnen, indem man Regressionsgeraden über die einzelnen Abschnitte legt.
- c) (CUT ATTACK) Die Charakteristik des Einschwingvorgangs werden eliminiert. Dieser wird durch das Vorkommen von inharmonischen Partialtönen beschrieben, die alle sehr leise sind. Der Einschwingvorgang variierte hierbei von

⁷ Grey & Moorer 1977.

25ms bis 60 ms und auch nur 9 der 16 Töne hatten eine solche Inharmonizität.

Die Vereinfachung b) wurde ebenfalls angewendet

- d) (CONST FRQ) Als letztes wurde die Synthese ohne Frequenzschwankungen ausgeführt. Die Partialtöne behielten also ihre Frequenz konstant durch die Dauer des Klangs. Die Vereinfachung b) wurde ebenfalls angewandt.

Die Töne wurden nun 16 VPs vorgespielt, welche die Ähnlichkeiten bestimmen sollten. Dabei kam nach Analyse mit MDS eine zweidimensionale Lösung heraus:

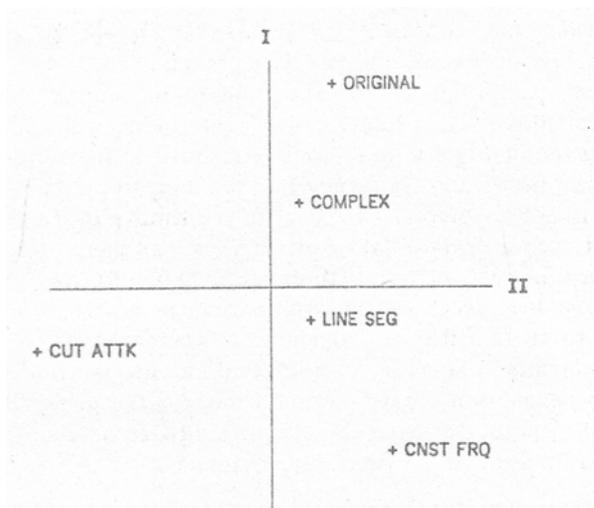


Abb. 1.13: Zweidimensionale Einbettung der Vereinfachungsmethoden S. 461, Fig. 10

Achse I: vertikal: Grad der Vereinfachung

Dem Originalklang am ähnlichsten war die exakte Reproduktion nach der Analyse. Die Vereinfachung b) folgte. Sie wird als sehr gute Näherung genannt. Die Vereinfachung d) der gleichbleibenden Frequenzen dagegen fällt stark ab und ist nicht für eine realistische Reproduktion zu gebrauchen.

Achse II: horizontal: Inharmonizität

Nur der Beschneidung des Einschwingvorgangs (der Vereinfachung c)), ist diese Achse zu verdanken. Alle übrigen wären mit der ersten Achse ausgekommen. Dies weist auf den hohen Stellenwert hin, den die Inharmonizitäten des Einschwingvorgangs haben, wenn es um Ähnlichkeiten geht.

Hier wird also deutlich, daß der Einschwingvorgang für die Charakteristik von Instrumenten sehr wichtig ist. Desweiteren ist die Mikrostruktur der Amplitudenfunktion der Partialtöne nicht sehr von Belang. Viel wichtiger ist das Schwanken der einzelnen Obertöne um ihre theoretisch exakte Frequenz.

1.3.3 Iverson und Krumhansl

Ebenfalls mit der Methode der MDS versuchten Paul Iverson und Carol L. Krumhansl⁸ die perzeptorischen Dimensionen der Klangfarbe zu erforschen. In drei Versuchen stellten sie aus 16 Orchesterklängen alle möglichen Kombinationen den Vps zur Ähnlichkeitsbeurteilung vor. Im ersten Versuch wurden die ganzen Klänge präsentiert, im zweiten nur die Einschwingphase von hier 80 ms und im dritten der restliche Klang ohne Einschwingen.

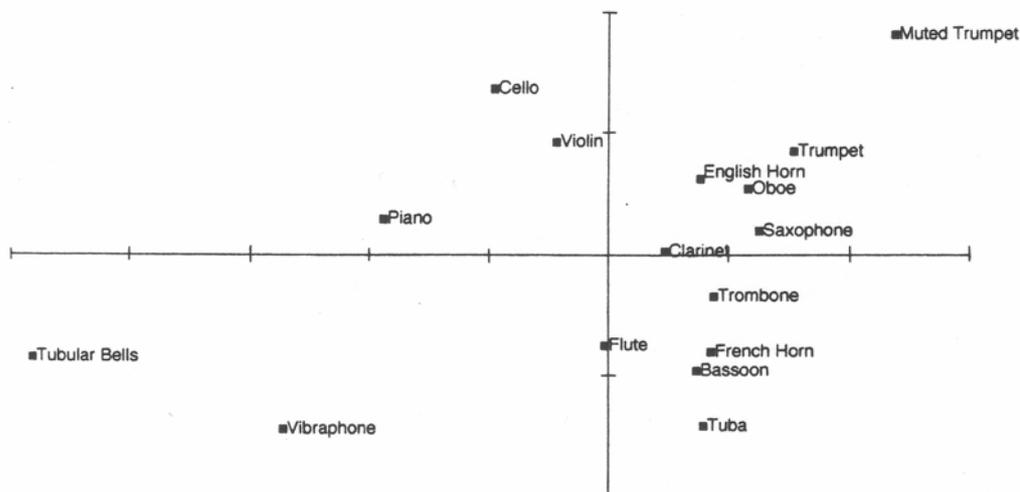
Es waren hier, anders als bei Grey auch perkussive Instrumente wie Vibraphon oder Röhrenglocken dabei. Die Samplefrequenz lag 1993 bei 44100 kHz mit 16 Bit Auflösung. An jedem Versuch nahmen 9 - 10 Personen teil.

Ziel war es, durch die Unterscheidung von Einschwingvorgang und quasistationärem Verlauf festzustellen, ob die Ähnlichkeit der Instrumente durch den einen oder den anderen festgelegt wird. Hier wurde aber kein nennenswerter Unterschied festgestellt. Die graphische Anordnung der Instrumente im zweidimensionalen Raum ergab keinen signifikanten Unterschied zwischen Nur-Einschwingen und Nur-quasistationärer Zustand. Dies widerspricht den Ergebnissen von Clark [Clark et al. 1963]. Dort wird festgestellt, daß der Einschwingvorgang erheblich mehr zur Instrumentenidentifikation beiträgt als der quasistationäre Zustand. Krumhansl schreibt, daß „the salient attributes for complete tones can not be isolated to either

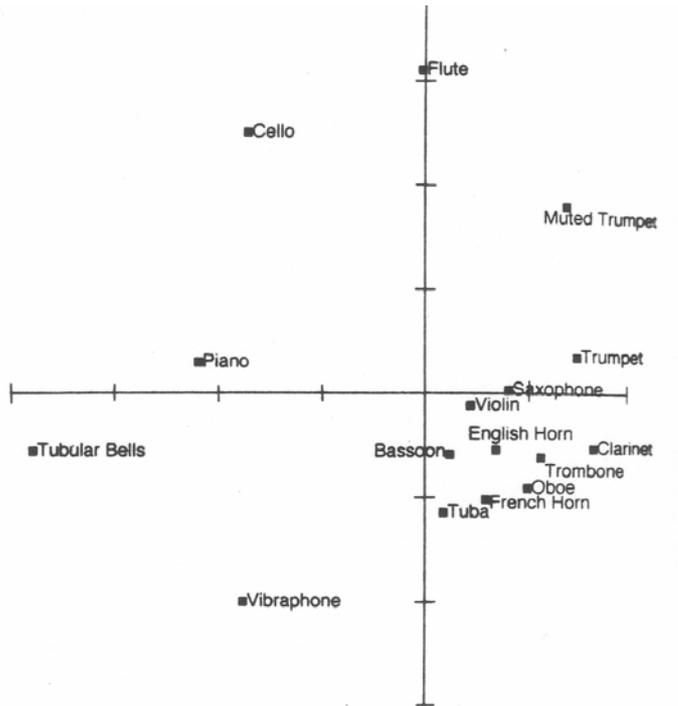
⁸ Iverson, P. & Krumhansl, C.L.: Isolating the dynamic attributes of musical timbre. JASA 94 (5), 1993.

onsets or remainders.“⁹ Hier wäre jedoch zu fragen, ob nicht die Instrumentenidentifikation etwas anderes ist als die Ähnlichkeit von Instrumenten. Leider wurde nicht festgestellt, ob die Vps die Instrumente *identifizieren* konnten, als der Einschwingvorgang fehlte. Die quasistationären Zustände von Klavier und Gitarre z.B. sind natürlich verschieden, können also als unähnlich beurteilt werden, keiner von beiden aber muß deshalb in eine der beiden Kategorien „Klavier“ und „Gitarre“ eingeordnet werden kann. Und in der Tat sind in den Schaubildern der drei Versuche bis auf die Geige und die Flöte alle Instrumente an ungefähr demselben Platz oder in gleicher Richtung, nur wenig verschoben. So geben die Korrelationen von Versuch 1 zu 3 von $r = 0.92$ und von Versuch 3 zu 2 von $r = 0.75$ (ebd. S. 2599), aufgrund derer Iverson & Krumhansl die Gleichverteilung der Klangfarbenattribute auf Einschwingvorgang und quasistationären Zustand verteilt haben, keinen genügenden Aufschluß über das Verhalten der Geige und der Flöte.

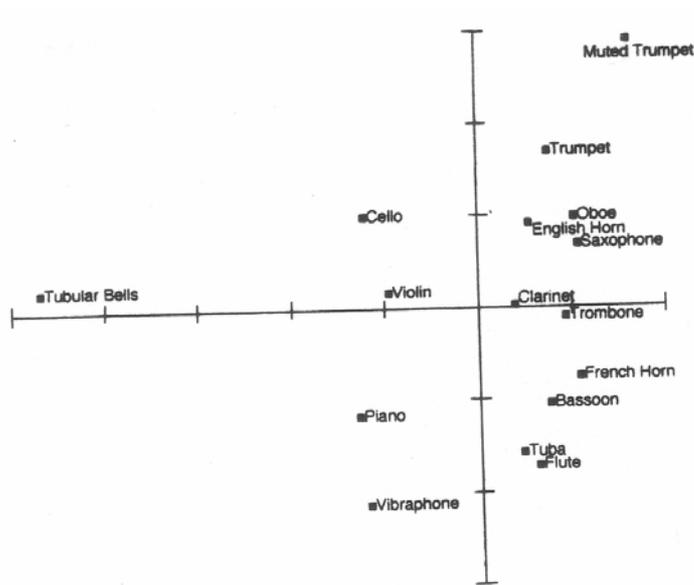
a)



⁹ Iverson 1983, S. 2599



b)



c)

Abb. 1.14: Zweidimensionale Einbettungen a) der Gesamtklänge, b) des Einschwingvorgangs und c) des Restklangs

Die Achsen der Schaubilder werden bei allen drei Versuchen wie folgt interpretiert:

Achse I, horizontal: Hüllkurve

Auf der linken Seite stehen die Perkussionsinstrumente mit starker Dynamikänderungen in der Hüllkurve, auf der rechten Seite die Bläser. Diese

Dimension bezieht sich auf die dynamischen Eigenschaften. 1.5 Sekunden der Hüllkurve eines jeden Tones wurden wieder paarweise in Bezug auf ihre Ähnlichkeit verrechnet. Dann wurden diese Ähnlichkeiten mit den von den Vps auf Achse I perzipierten Ähnlichkeiten verglichen. Sie stimmten mit $r = 0.76$ für die ganzen Töne und mit $r = 0.56$ für die quasistationären Zustände überein. Es wird aber wohl die Hüllkurve als Gestalt wahrgenommen. Denn Iverson & Krumhansl berichten, daß es ihnen nicht gelang, einzelne Eigenschaften der Hüllkurve für die Übereinstimmung verantwortlich zu machen. Einzig die Attack Zeit, die Zeit vom Beginn des Klangs bis zu seiner maximalen Amplitude, korrelierte mit $r = 0.79$ mit der psychologischen Dimensionierung durch die Vps. Allerdings stellten diese auch fest, daß Töne, die dieselbe Attack Zeit haben, in ihrem weiteren Hüllkurvenverlauf ebenfalls übereinstimmen. Es scheint also eine Mustererkennung der Hüllkurve von den VPs durchgeführt worden zu sein.

Achse II, vertikal: Lage des spektralen Zentroids

Oben liegen eher die helleren („bright“) Klänge (wie die gedämpften Trompete), unten die dumpferen („dull“), wie die der Tuba (ebda. S. 2598). Der spektrale Zentroid ist der Schwerpunkt der spektralen Energieverteilung. Sind die oberen Teiltöne stark vertreten, dann liegt er in Bezug zum Grundton höher als wenn die hohen Partialtöne schwächer ausfallen. Der Zentroid war im Einschwingen und im quasistationären Zustand derselbe.

Diese Achse II unterscheidet sich von der Greys darin, daß hier die Hüllkurve gemeint ist, dort jedoch, ob die Teiltonamplitudenverläufe gleichbleibend oder fluktuierend sind. Die dritte Dimension Greys, die der Inharmonizität gerade im Einschwingen, wurde hier nicht gefunden.

Einen zweiten Versuch stellt

1.3.4 Krumhansl 1989

vor¹⁰. In ihm wurden 21 Instrumententöne synthetisiert, darunter auch Zwitterinstrumente, wie die Trumpar (Trompete und Gitarre), die Oboleste (Oboe und Celeste), das Striano (Streicher und Piano), das Vibrone (Vibraphon und Posaune), das Obochord (Oboe und Cembalo) und die Guitarnet (Gitarre und Klainette). Die anderen Instrumente waren: Horn, Trompete, Posaune, Harfe, Vibraphon, Piano, Cembalo, Englischhorn, Oboe, Fagott, Klarinette, Gitarre, Streicher und Klavier.

Die MDS Methode wurde hier erweitert. Es wurde festgestellt, in wie weit jedes Instrument, in einer dreidimensionalen Einbettung, in Bezug auf seine Ähnlichkeit zu den anderen, erklärt ist. Da ja jede n-dimensionale Lösung einen Stress besitzt, gibt es immer einen unerklärten Rest. Dieser gibt Aufschluß über das Spezifische dieses Instruments. Ist der Rest klein, sind die Dimensionen zur vollständigen Beschreibung seiner Charakteristik ausreichend. Bleibt ein Rest, wird hier auf eine Spezifik geschlossen, die diesem Instrument eigen ist.

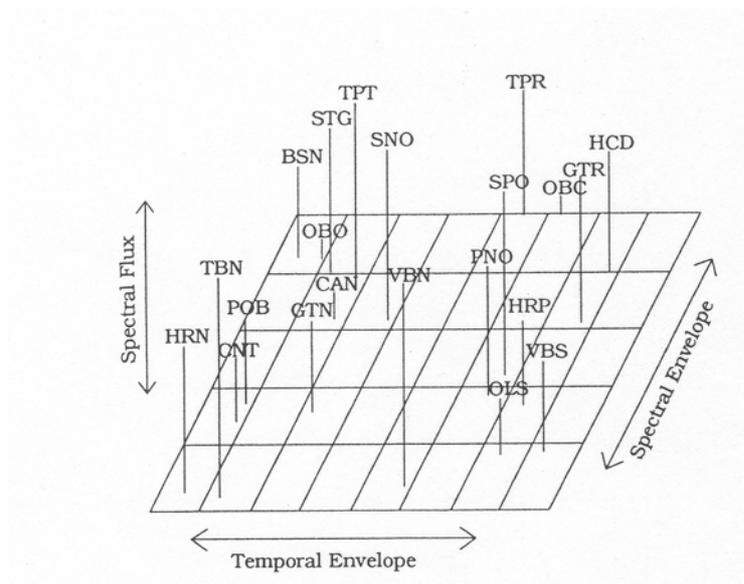


Abb. 1.15: Dreidimensionale Einbettung Krumhansl 1989

Achse I: hinten - vorne: Helligkeit

¹⁰ Krumhansl 1989.

Sie entspricht dem spektralen Zentroid.

Achse II: rechts - links: Attack

Das ist die Zeit, die die Amplitudenhüllkurve braucht, um ihr erstes und höchstes Maximum zu erreichen.

Achse III: oben - unten: zeitliche Entwicklung der spektralen Komponenten

Bei Bläsern z.B. schwingen die tiefen Teiltöne schneller ein als die hohen, da der zylindrische Kopf die tiefen Frequenzen schneller reflektiert. Also korrespondiert die gesamte Amplitudenhüllkurve nicht mit den einzelnen Hüllkurven der Partialtöne. Es herrscht eine spektrale Fluktuation in der Zeit. Die Bläser sind im Schaubild höher angesiedelt. Diese dritte Achse ist aber am schwersten zu interpretieren. Die hier perzipierten Ähnlichkeiten der VPs korrelieren nicht eindeutig mit physikalischen Parametern der Klänge.

Als ein schöner Hinweis auf die Kontinuität der Achsen ist zu sehen, daß die Zwitterinstrumente zwischen denen lagen, aus denen sie zusammengesetzt waren. Es fiel z.B. das Vibrone zwischen das Vibraphon und die Posaune.

Die Analyse von Spezifitäten erbrachte, daß Trompete, Posaune, Oboe, Fagott und Piano (also hauptsächlich Bläser) und die Zwitterinstrumente Trumpar, Oboleste und Obochord vollständig durch die Dimensionen erklärt waren. Am spezifischsten waren drei zusammengesetzte Instrumente: Vibrone, Gitarnet und Pianobow. Da hier die Klänge nicht vorliegen und Krumhansl sich nicht dazu äußert, muß dies hier so stehenbleiben. Sie erklärt aber die Spezifitäten zweier Instrumente, nämlich die des Cembali, dessen Tonende mit dem Klang des zurückgehenden Hammers sehr eigen ist und die der Klarinette, die ein unharmonisches Obertonspektrum hat. Ebenfalls sind mit deutlichen Spezifitäten zu nennen: das Klavier, die Harfe und das Vibraphon. Vielleicht stoßen wir hier auf den Unterschied zwischen kontinuierlichen Dimensionen der Klangfarbe und möglichen Kategorien für Individualitäten, was zur Instrumentenidentifikation wichtig sein könnte.

1.3.5 Mc Adams, Winsberg, Donnadieu, De Soete, Krimphoff¹¹

Wie Krumhansl am IRCAM beheimatet, benutzten Mc Adams et al. die oben erwähnten synthetisierten Instrumente (Krumhansl 1989) für eine nochmalige Überprüfung. Sie benutzten ebenfalls eine Erweiterung der MDS: CLASCAL¹². Dieses Verfahren errechnet sogenannte latente Klassen, d.h. berücksichtigt verschiedene Strategien der VPs bei der Ähnlichkeitsberechnung und formt aus VPs, die die gleiche Strategie anwenden, einzelne Klassen. Es wird versucht, diese dann mit biographischen Daten der VPs, also deren musikalischem Kenntnisstand, zu korrelieren. Auch berechnen sie, wie Krumhansl 1989, Spezifitäten für die Instrumente.

Es werden 18 der 21 Instrumente verwendet (Piano, Pianobow und Oboe wurden weggelassen), 89 Studenten nahmen teil, die Tonhöhe war immer 311 Hz und die Töne waren subjektiv gleich lang und gleich laut gemacht. Von den 89 Studenten wurden 24 als professionell eingestuft, 46 als Amateurmusiker und 28 als Nicht - Musiker.

Die 5 in der MDS analysierten Klassen korrespondierten nicht mit der Einteilung in Profi, Amateur- und Nicht - Musiker. Es konnte nur festgestellt werden, daß Musiker mehr kohärent und präzise urteilten als die anderen.

¹¹ Mc Adams, Winsberg, Donnadieu, De Soete & Krimphoff 1995.

¹² Winsberg & De Soete 1993.

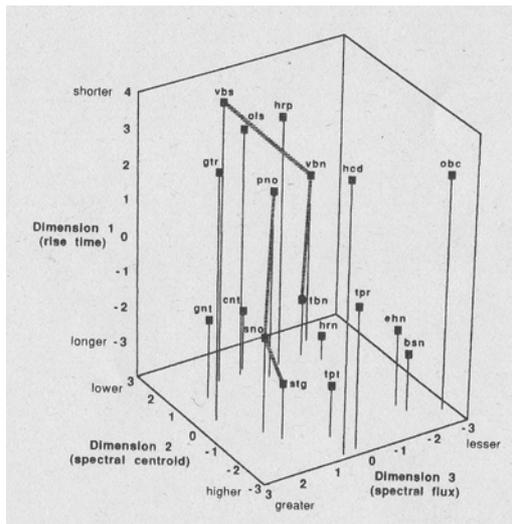


Abb. 1.16: Dreidimensionale Einbettung nach Mc Adams et al.

Achse I: Dimension 2: Spektraler Zentroid

Achse II: Dimension 1: Zeit bis zum ersten größten Amplitudenmaximum

Diese Zeit ist auf der Achse logarithmisch aufgetragen.

Achse III: Dimension 3: Spektraler Fluss

Diese Achse unterscheidet sich von der Krumhansels in der Definition dieses Flusses. Mc Adams et al. definieren sie als Durchschnittskorrelation der Amplitudenspektren aufeinanderfolgender Zeitfenster. Eine Veränderung des Spektrums in der Zeit würde eine kleine durchschnittliche Korrelation zur Folge haben. Der Unterschied zu Krumhansels Definition ist jedoch nicht ganz klar. Allerdings verschwindet die dritte Dimension in ihrer Interpretation als spektraler Fluß, wenn die Spezifitäten entfernt werden.

Allerdings variierten die Ladungen der Spezifitäten der Instrumente in Bezug auf Krumhansl. Mc Adams et al. geben subjektive Beschreibungen der Spezifitäten an, wie „metallischer Klang“ für das Vibraphon oder „hohl“ für die Klarinette. Sie sind der Ansicht, es gäbe kontinuierliche Dimensionen auch hier wie Inharmonizität, Schwankung der Tonhöhe, Hohlheit des Tons, Raspeln des Attack oder Körnigkeit,

und einmalige Eigenschaften, wie das Zurückgehen des Hammers des Cembalo, das nur in der Intensität variiert. Die ersteren wären weitere mögliche Dimensionen, über die Hörer, würde man es von ihnen verlangen, Ähnlichkeitsurteile abgeben würden. Dies könnte für die Unterscheidung innerhalb von Instrumentenfamilien dienen. Letzteres läuft auf Parameter hinaus, die von der Lautheit oder Spielart eines Instruments herrühren und so zur Ähnlichkeitsbestimmung der einzelnen Tönen eines Stücks benützt werden könnten. Alle genannten Charakteristiken sind wohl auch physikalisch nachweisbar.

1.3.6 De Bruijn¹³

A. de Bruijn untersucht 36 synthetisierte Klänge, die keine zeitliche Fluktuation besitzen. Sie haben keinen Einschwingvorgang und keine klangliche Veränderung während dem stationären Zustand. Sie unterscheiden sich nur in ihrem harmonischen Gehalt. Die Töne wurden durch Impulsfolgen hergestellt und in zwei Versuchen mit jeweils konstanter Tonhöhe - einmal 500 Hz, einmal 200 Hz - 7 Vps vorgespielt. Hier wurde der Triadenvergleich zur Grundlage der MDS benutzt, in dem drei Töne vorgespielt werden und die Vp angeben muß, welches Paar am ähnlichsten und welches am unähnlichsten ist. Das unähnlichste bekommt zwei Punkte, das ähnlichste keinen Punkt. Das nicht genannte Paar wird mit einem Punkt bewertet. Die Punktbewertung entspricht so der Distanz zwischen Klängen.

Die Graphen der MDS sind auch hier zweidimensional, da der Stress bereits gut war und eine weitere Dimension nicht nötig erscheinen ließ. Die MDS wurde nun nicht an Mittelwerten vollzogen, sondern für jede Vp einzeln. In den Graphen bezeichnen die Grenzen der Kreise und Ellipsen um die Zahlen, die sich auf die Klänge beziehen, die Extremwerte der einzelnen Vps. Die Kreise selber sind also die Gebiete, in die die Vps die Klänge einordneten. Die Nullpunkte sind die Klänge, die nur den Grundton enthalten (Klang 1, Klang 24).

¹³ De Bruijn 1978.

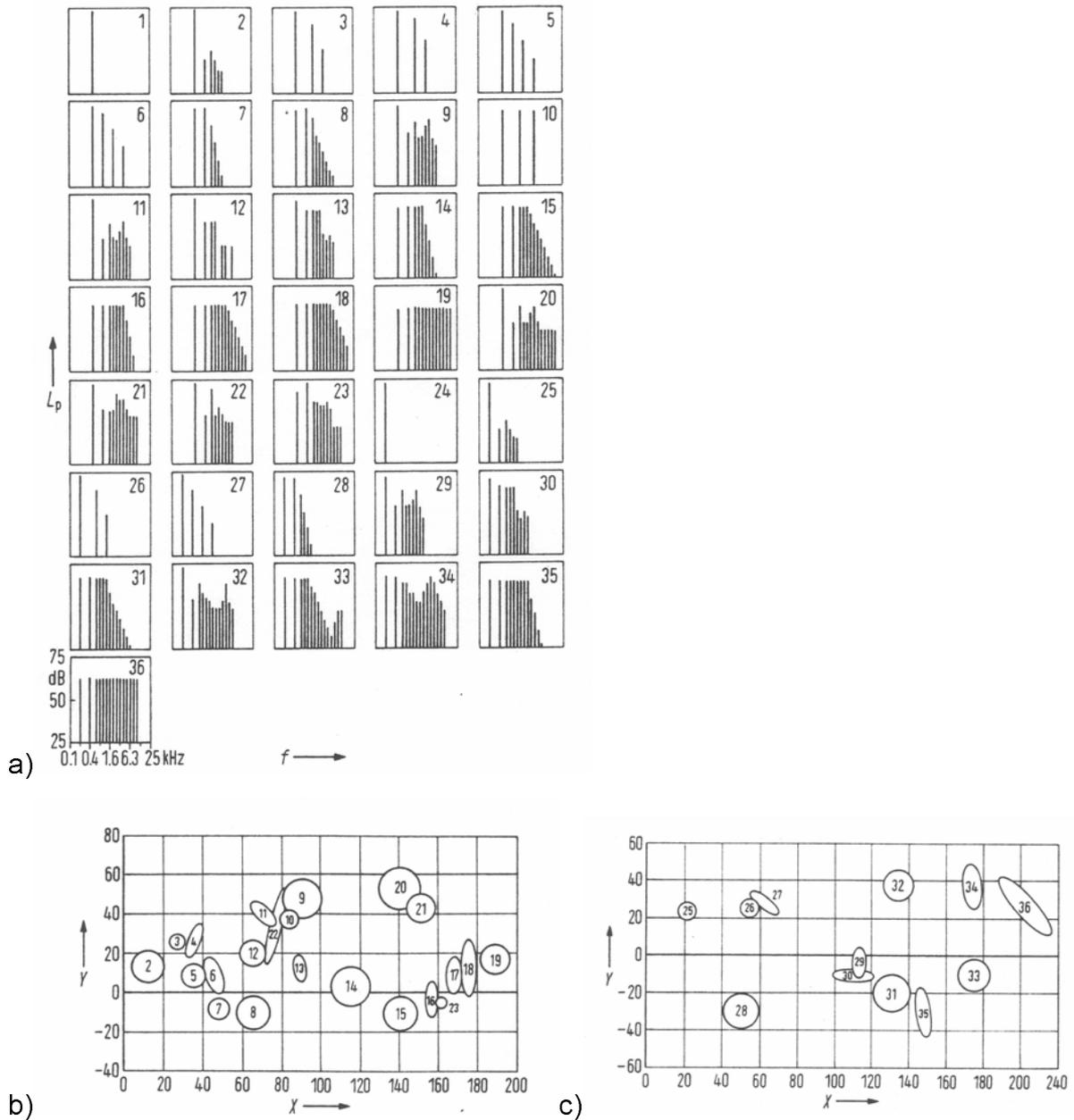


Abb. 1.17: a) Spektren und zweidimensionale Lösungen für b) Töne mit 500 Hz und v) Töne mit 200 Hz, S. 110f

Achse I, X: Harmonischer Gehalt

Da alle Klänge auf 74 dB SPL normiert waren, wurde für jeden Klang die Loudness berechnet. Dies führt bei der Methode von Stevens (Mark VI¹⁴) zu Loudnesswerten,

¹⁴ Stevens 1961

die in einer linearen Regression mit der X-Achse mit $r = 0.97$ für die 500 Hz - Töne und $r = 0.92$ für die 200 Hz Töne korreliert. In einer eigenen Berechnung wird jedem Klang entsprechend seines Obertongehalts ein harmonischer Index (HI) zugeordnet. Dieser entsteht durch eine stärkere Gewichtung der lauten Obertöne, die dann mit harmonischen Gewichtungsfaktoren, in Bezug auf den relativen Oberton und das objektive Frequenzband als Tabelle vorliegen und verrechnet werden. Dieser HI, logarithmisch aufgetragen, korreliert in linearer Regression mit den 500 Hz Tönen zu $r = 0.98$ und mit den 200 Hz Tönen zu $r = 0.97$. Es besteht offenbar ein Zusammenhang zwischen der X - Achse und dem Obertongehalt der Klänge.

Achse II, Y - Steigungen im Amplitudenmuster der Obertöne

Diese Dimension ist nur qualitativ feststellbar. Nehmen die Amplituden der Obertöne nach hohen Frequenzen hin zu, sind die Klänge auf der positiven Seite der Y-Achse. Nehmen die Amplituden dagegen ab, sind die Klänge auf der negativen Seite der Y-Achse zu finden. Da die Klänge, die aus vielen Obertönen bestehen, zwischen keinem, einem und zwei positiven Steigungen innerhalb einer gesamten negativen Steigung bestehen, werden so die ungefähren Orte auf der Y-Achse bestimmt.

Des weiteren formuliert De Bruijn ein Gesetz für das Auflösungsvermögen von Klangfarben, das aber nicht gerade noch wahrnehmbare Unterschiede meint, sondern die Kategoriengrenzen von Sounds. In welchen Grenzen hat ein Klang eindeutig eine eigene Charakteristik? Dies ist graphisch durch die Kreise dargestellt. Überlappen sie nicht, dann sind die Klänge charakteristisch.

Der Ansatz De Bruijns gibt keine Hinweise auf Instrumente, sondern auf Klangfarben. Einerseits ist gezeigt worden, daß der Einschwingvorgang, den er nicht untersucht, erheblich zur Identifikation von Instrumenten beiträgt. Andererseits ist auch der quasistationäre Zustand von Instrumenten stark variabel. Das Obertonspektrum einer Gitarre z.B. hängt vom Anzupfort ab. Da am Anzupfpunkt der Saite kein Knoten entsteht, wird der Oberton, der hier seinen Knoten hätte, nicht ausgebildet. Benachbarte Obertöne werden in ihrer Amplitude verkleinert, verglichen mit einem linearen Amplitudenverlauf der Obertöne. Eine Saite, die auf 1/5 ihrer

Länge angezupft wird, hat keinen fünften, zehnten, fünfzehnten Partialton im Spektrum.¹⁵ Somit soll die Y - Achsenlage des Klages vom Anzupfpunkt abhängen, da er die Anzahl der positiven Steigungen im Spektrum bestimmt.

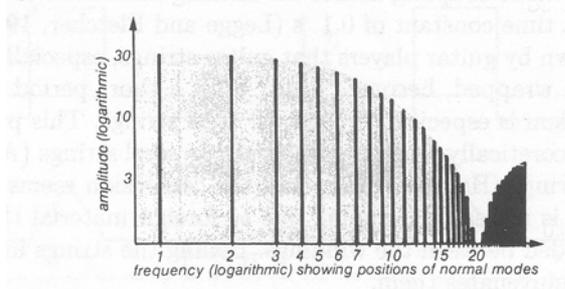


Abb. 1.18: Spektrum eines Gitarrentones, der an der Stelle $1/20$ tel der Gesamtsaitenlänge angeschlagen wurde.¹⁶

1.3.7 Wedin & Goude¹⁷

Wedin & Goude suchten nicht nach Dimensionen und deren Achsen, sondern fanden Cluster von Instrumenten. Sie untersuchten weiterhin die Rolle des Einschwingvorgangs, indem sie die Instrumente den VPs mit und ohne Einschwingvorgang zur Ähnlichkeitsbeurteilung vorspielten. Auch baten sie die VPs, ihre Ähnlichkeitsurteile von Instrumenten anzugeben, wenn nur der Name genannt war, also nichts vorgespielt wurde. Dies nannten sie kognitive Struktur, im Gegensatz zur perzeptuellen Struktur, die eben durch Hören gewonnen wurde.

Es wurden folgende Instrumente von ihnen aufgenommen: Flöte, Fagott, Violine, Oboe, Horn, Trompete, Posaune, Klarinette und Cello. Als Tonhöhe wurde für jedes Instrument $a_1 = 440$ Hz gewählt. Sie wurden in mezzoforte gespielt und insgesamt 70 Studenten vorgespielt, wobei jeder Einzelversuch mit 5 - 8 VPs durchgeführt wurde.

¹⁵ Siehe Fletcher & Rossing 1999

¹⁶ ebenda

¹⁷ Wedin & Goude 1972.

a) Cluster

Nach Überführung der Sounds in die Frequenzebene ergab sich eine Amplitudenkurve der Partialtöne. Deren Steigung wurde zur Interpretation der gewonnenen Faktoren benutzt:

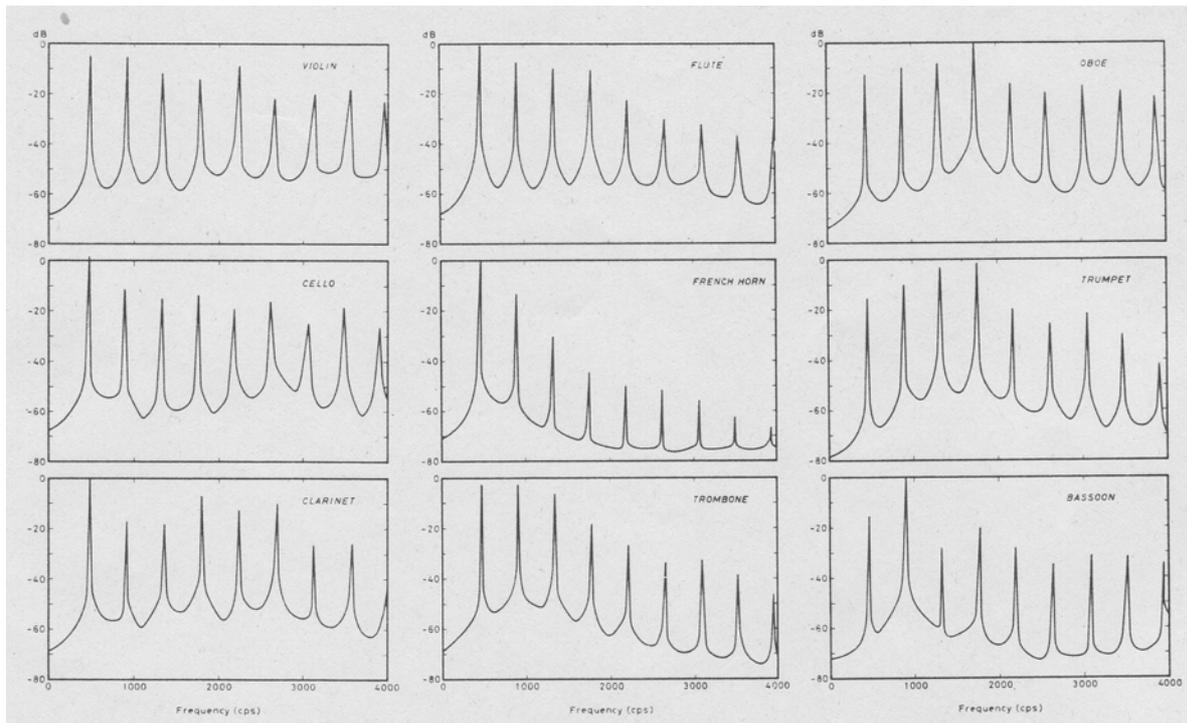


Abb. 1.19: Amplitudenhüllkurven für die drei Cluster, hier als die drei Kolumnen dargestellt, S. 236

Faktor I: höhere Partialtöne werden in der Amplitude kleiner

Das Cluster besteht aus Flöte, Horn und Posaune.

Faktor II: kleine Amplitude der Grundfrequenz, Maxima im dritten und sechsten Oberton

Das Cluster besteht aus Oboe, Trompete und Fagott

Faktor III: große Amplitude der Grundfrequenz und Maxima im mittleren Frequenzband

Das Cluster besteht aus Violine, Cello und Klarinette.

Hier wird sozusagen eine der sonst üblichen Achsen, nämlich die des spektralen Zentroids, differenziert, was bereits bei de Bruijn geschah. Ein hoher Zentroid sagt nichts über die genauen Amplitudenverhältnisse der Teiltöne. Es wird hier festgestellt, daß die Amplituden von Grundton, höchstem Partialton und dem mittleren Partialton für die Clusterzuordnung am wichtigsten sind. Die Ähnlichkeitsbestimmung nach der Lage des Zentroids wird aber auch durch diese Ergebnisse bestätigt. Wir haben hier also eine Differenzierung der Achse „spektraler Zentroid“ nach dem nächst wichtigsten Kriterium. Die Achse kann aber vorraussichtlich noch differenzierter wahrgenommen werden, bis hin zu einer reinen Musteranalyse der Amplitudenverhältnisse der einzelnen Partialtöne ohne generalisierende Kategorien. Hier könnte eine Hierarchie von differenziertem Hören angenommen werden, wobei auch alle hierarchischen Ebenen gleichzeitig erlebt werden könnten.

b) Einschwingvorgang

Der Einschwingvorgang spielte eine wichtige Rolle für die Identifizierung einiger Instrumente. Fagott, Horn, Trompete, Posaune und Klarinette wurden deutlich schwächer ohne Einschwingvorgang identifiziert als mit ihm. Flöte, Violine, Oboe und Cello dagegen zeigten keine signifikant anderen Erkennungsraten. Diese Instrumente wurden jedoch als einzige mit Vibrato gespielt, da die Autoren der Ansicht waren, daß das Vibrato als unverzichtbarer Bestandteil der Klangfarbe dieser Instrumente zu gelten hat. Dies würde bedeuten, daß im Vibrato etwas sehr Instrumentenspezifisches ist.

c) Kognitive Struktur

Diese nur an den Namen orientierte Ähnlichkeitszuweisung ergab als Cluster der gewohnten Instrumentenfamilien: Bläser - Fagott, Oboe, Klarinette und Flöte, Blech

- Horn, Trompete, Posaune und Streicher - Violine und Cello. Diese widersprechen allerdings den durch Hören gewonnenen Daten.

Einschränkend muß gesagt werden, worauf die Autoren ebenfalls hinweisen, daß die einheitliche Tonhöhe von 440 Hz für Fagott, Posaune und Cello ungewöhnlich war, so daß Cluster entstanden, die vielleicht dazu beitrugen, daß die Posaune mit den sonst viel höheren Instrumenten Horn und Flöte zusammenfiel, was auch für die Einordnung des Fagotts zu Trompete und Oboe gilt. Das grundlegende Problem ist hier das der intervenierenden Variable Tonhöhe, die eben außen vor bleiben soll. Dies ist in diesem Fall aber nicht weiter schlimm, denn die Instrumentenzuordnung steht hier hinter der Zuordnung von grundlegenden Partialtonmustern zu Ähnlichkeitsurteilen der VPs. Wird aber eine Instrumentenerkennung angestrebt, so darf die Tonhöhe nicht als intervenierende Variable angesehen werden, sondern als instrumentenspezifisch.

1.3.8 Miller & Carterette¹⁸

Ihre MDS kommt zu dem Schluß, daß es eine Abstufung der Wichtigkeit von Soundparametern gibt, nach denen VPs ihre Ähnlichkeitsurteile abgeben. Im ersten von zwei Experimenten wählten sie synthetisierte Stimuli aus, die drei verschiedene Tonhöhen hatten (200 Hz, 400 Hz, 800 Hz). Außerdem variierten die Stimuli durch drei verschiedene Hüllkurven (gezupfte Saite: angeschlagen und exponentiell abfallend, Horn: Attack, danach Abfall auf konstanten Amplitudenwert bis zum schließlichen Abfallen und Trapezoid: wie Horn, nur geht der Attack direkt auf den konstanten Amplitudenwert). Schließlich werden diese neun Kombinationen durch drei verschiedene Amplitudenhüllkurven der Partialtöne zu insgesamt 27 Stimuli kombiniert: Die stets sieben Partialtöne fallen a) linear ab, b) ebenso, nur ist der erste Partialton auf Höhe des dritten und c) wie a), nur sind erster und dritter Partialton gleich und am höchsten, und zweiter und vierter Partialton gleich und nächst niedriger, danach fällt die Amplitudenkurve wieder stetig ab.

¹⁸ Miller & Carterette 1975.

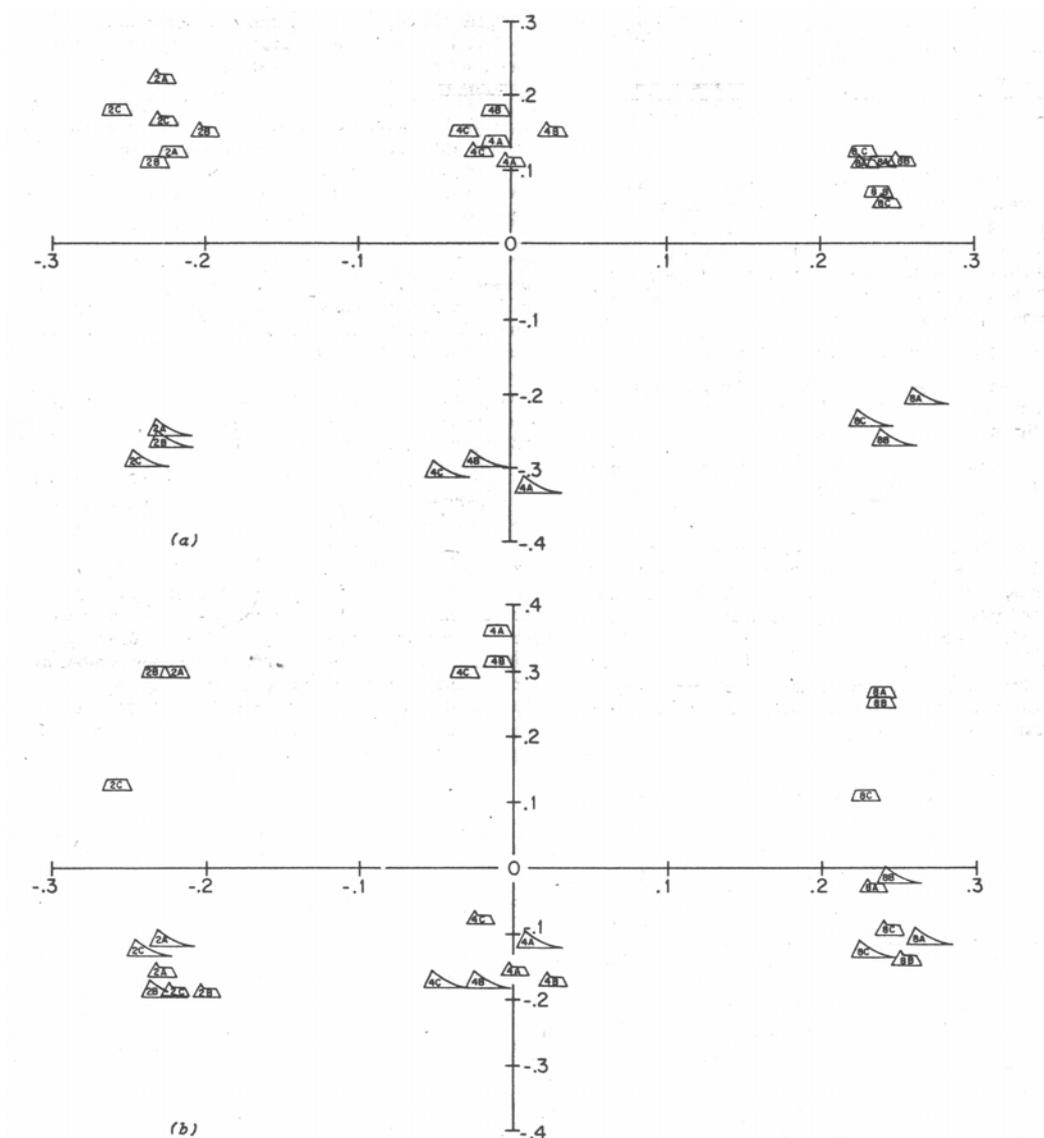


Abb. 1.20: Projektionen der 3 Achsen von Experiment 1. Oben: Dimension 1 gegen 2. Unten: Dimension 1 gegen 3. Die drei Formen stehen für die Hüllkurve, die erste Zahl in der Form für die Grundtonhöhe, der Buchstabe darauf für die Amplitudenverhältnisse der Obertöne. S. 715

Dimension I: oberes Schaubild: horizontal: Tonhöhe

Links liegen die 200 Hz Töne, in der Mitte die 400 Hz Töne, rechts die 800 Hz Töne. Diese Dimension war sehr stark vertreten und ließ die anderen Dimensionen als mögliche Ähnlichkeitsparameter für die VPs verblassen.

Dimension II: oberes Schaubild: vertikal: Hüllkurve: gezupfte Saite oder Horn, Trapezoid

Hier wird das Horn und das Trapezoid (oben) als gleich empfunden im Vergleich mit der gezupften Saite (unten).

Dimension III: unteres Schaubild: vertikal: Hüllkurve: Trapezoid oder gezupfte Saite / Horn

Hier wird die gezupfte Saite und das Horn (unten) als gleich empfunden im Vergleich mit dem Trapezoid (oben). Da diese Dimension als die dritte eine geringere Ladung hat als die zweite, wird von den VPs zuerst die exponentiell abfallende Hüllkurve von der konstanten geschieden. Dann erst wird differenziert zwischen einem Attack mit Zurückfallen auf konstanten Wert und einem Attack ohne dieses Zurückfallen.

Die verschiedenen Amplitudenhüllkurven der Partialtöne wurden nicht zur Ähnlichkeitsunterscheidung herangezogen.

Da die Tonhöhe überwältigend ausschlaggebend war, wurde sie in einem zweiten Versuch konstant gehalten. Diesmal wurden anstatt verschiedener Amplitudenhüllkurven drei Klänge mit unterschiedlichem Obertongehalt (3, 5 und 7 Partialtöne) gebildet. Außerdem wurde als dritte Kombination ein zeitlich versetztes Einsetzen der Partialtöne konstruiert: einmal linear, dann exponentiell und invers exponentiell zeitlich versetzt.

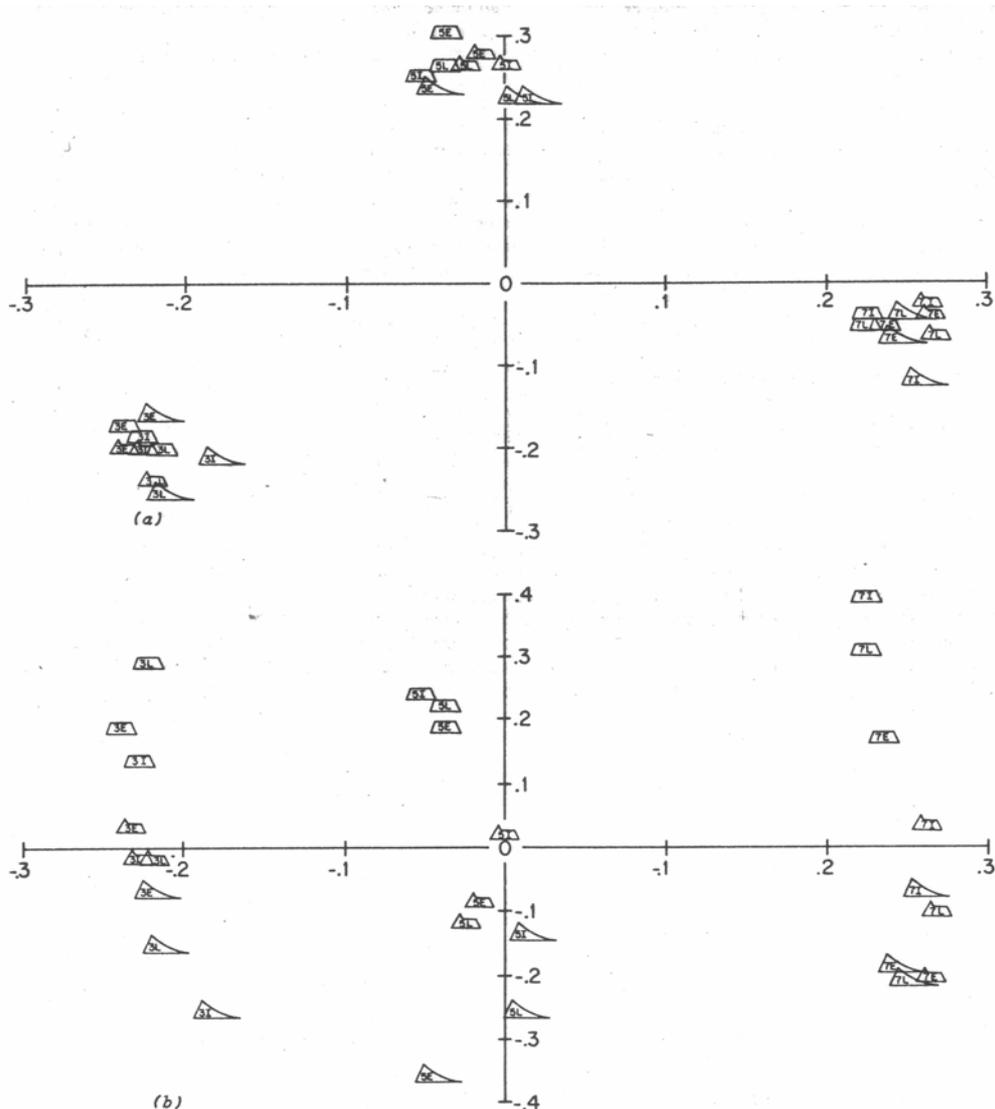


Abb. 1.21: Projektionen der 3 Achsen von Experiment 2. Oben: Dimension 1 gegen 2. Unten: Dimension 1 gegen 3. Die drei Formen stehen für die Hüllkurve, die erste Zahl in der Form für die Grundtonhöhe, der Buchstabe darauf für die Amplitudenverhältnisse der Obertöne. S.717

Dimension I: oberes Schaubild: horizontal: Obertonreichtum

Links sind die Klänge mit 3 Partialtönen, in der Mitte die mit 5, rechts die mit 7.

Dimension II: oberes Schaubild: vertikal: Obertonreichtum

Miller & Carterette geben für diese Dimension an: fünf Harmonische gegen 3 oder 7 Harmonische. Dies kann nicht recht nachvollzogen werden, da hier zwar die Klänge mit 7 Harmonischen zwischen denen von 3 und 5 Harmonischen liegen, jedoch eine klare vertikale Trennung zwischen 7 und 3 besteht. Um hier zu urteilen, müßten die Klänge gehört werden, um diese Dimension zu verstehen.

Dimension III: unteres Schaubild: vertikal: Hüllkurve

Diese Unterscheidung ist offensichtlich nicht so klar wie der Obertonreichtum, aber in der Tendenz eindeutig: oben die Trapezoiden, in der Mitte die Hörner, unten die gezupften Saiten.

Die zeitliche Versetzung der Obertöne wurde auch hier nicht als Ähnlichkeitskriterium festgestellt.

Offenbar gibt es eine Rangordnung der Differenzierung. Hier wäre die Tonhöhe am entscheidendsten, dann der Obertonreichtum und schließlich die Hüllkurve. Das zeitlich versetzte Einsetzen der Amplituden wird hier zwar nicht festgestellt, es zeigte sich aber bei Krumhansl [1989] und wäre hier vielleicht bei konstanten Hüllkurven oder gleichem Obertonreichtum festgestellt worden.

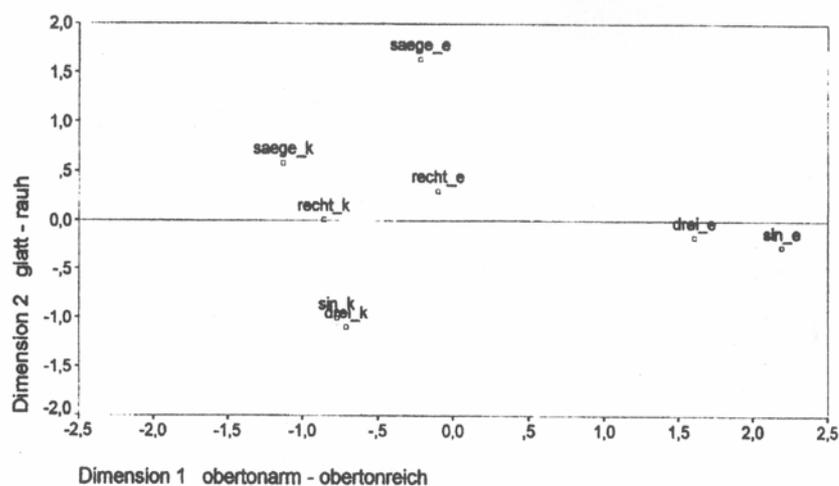
Weiterhin stellt die Untersuchung fest, daß die Hierarchie der Ähnlichkeitsberechnung sich auch in der Dauer zeigt, die eine VP benötigt, um ihr Urteil abzugeben. Waren zwei Klänge sehr ähnlich, dann wurde auch am längsten gezögert. Sie erklären dies durch die Strategien der VPs: erst würde das wichtigste Kriterium der Ähnlichkeit abgefragt. Ist es unterschiedlich, so erfolgt das Urteil sofort. Ist es gleich oder sehr ähnlich, wird ein zweites Kriterium für die Ähnlichkeit überprüft. Das braucht Zeit. Die Autoren sprechen hier von Kategorien, was zutrifft, wenn man Kategorie als Gleichheit auf einer kontinuierlichen Skala definiert. Wäre Kategorie ein reines Muster, so müßte man hier eher von Gleichheit der Stimuli sprechen.

Schließlich stellt die Untersuchung fest, daß im ersten Experiment Musiker und Nicht-Musiker die gleichen Urteile abgaben, während im zweiten eine Unterscheidung der beiden Gruppen möglich ist. Während der drei Durchgänge des Experiments 2 wurden die Musiker in ihren Urteilen immer schärfer und differenzierter, während die Nicht-Musiker immer schlechter wurden. Sie erklären dies dadurch, daß die Nicht-Musiker zu Beginn der Untersuchung Strategien folgten,

die sich später als unbrauchbar für die Ähnlichkeitsbeurteilung herausstellten und somit verwirrt wurden.

1.3.9 Markuse & Schneider¹⁹

In dieser Untersuchung werden zwei Experimente (einmal 1994: 30 VPs, dann 1995: 18 VPs) ausgewertet, die synthetisierte Klänge zur Ähnlichkeitsbeurteilung vorlegten. Die Stimuli bestehen aus Sinus-, Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnswingungen, die einfach und als komplexe Wellenform dargeboten werden. Die Klänge werden aber nicht als Einzeltöne präsentiert, sondern es wurde das Tristan -Vorspiel auf einem Sequencer programmiert und mit jedem einzelnen Klang abgespielt.



¹⁹ Markuse & Schneider 1996.

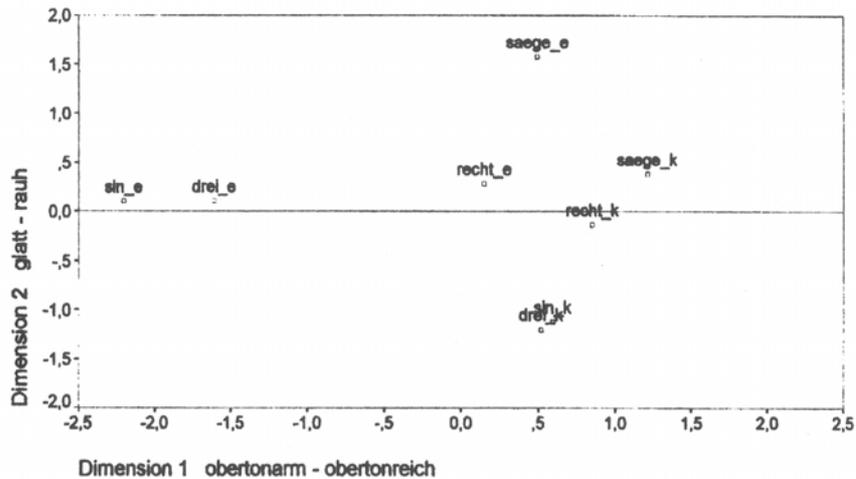


Abb. 22: Einbettungen der MDS

Achse I: D1: obertonarm - obertonreich

Weiter hinten sind die einfachen Klänge, die weniger Obertöne enthalten, in ebenfalls dieser Reihenfolge (erst Sinus, dann Dreieck, Rechteck und schließlich Sägezahn).

Achse II: D2: glatt - rauh

Weiter oben befinden sich die rauheren Klänge, z.B. die Sägezahnklänge, weiter unten die weicheren wie die komplexen Dreieck- und Sinusklänge. Diese Achse ist 1994 zu 1995 umgekehrt und in sich weit weniger konsistent als Achse I.

Achse III: D3: uninterpretiert

Diese Achse bleibt uninterpretiert, da sie keinem physikalischen oder klar hervortretenden perzeptorischen Kriterium zuordenbar ist.

Die Probleme der Interpretation führen die Autoren einerseits auf die Tatsache zurück, daß keine Einzeltöne, sondern ´dissonante´ Tristan - Klänge zu hören waren. Die Kombination verschiedener Tonhöhen könnten einen anderen Gesamteindruck hervorgerufen haben, als die Einzelklänge ihrer Einzelanalyse nach vermuten ließen.. Andererseits würde eine zweidimensionale MDS Lösung bereits

genügen, da zwei Ähnlichkeitskriterien für die VPs im Schnitt zur Einordnung in ein eindimensionales Raster von hier 20 Punkten schon ausreichen könnten.

Die Autoren weisen auch darauf hin, daß die erste Dimension auch mit hell - dunkel bezeichnet werden könnte, die zweite mit hart - weich. So wie die Tonhöhe mit zunehmendem Chroma unbedingt gekoppelt auch die Helligkeit steigen läßt, so ist mit dem physikalischen Parameter des Obertonreichtums eine Reihe von perzeptorischen Gegensatzpaaren abgedeckt.

1.3.10 Wessel²⁰

Wessel verwendet die von Grey²¹ synthetisierten 24 Klänge, von denen 8 sogenannte Zwitterklänge waren, die durch Vertauschung der spektralen Hüllkurven zwischen den ursprünglichen 16 Klängen entstanden.

²⁰ Wessel 1979.

²¹ Grey 1975, Grey & Gordon 1978

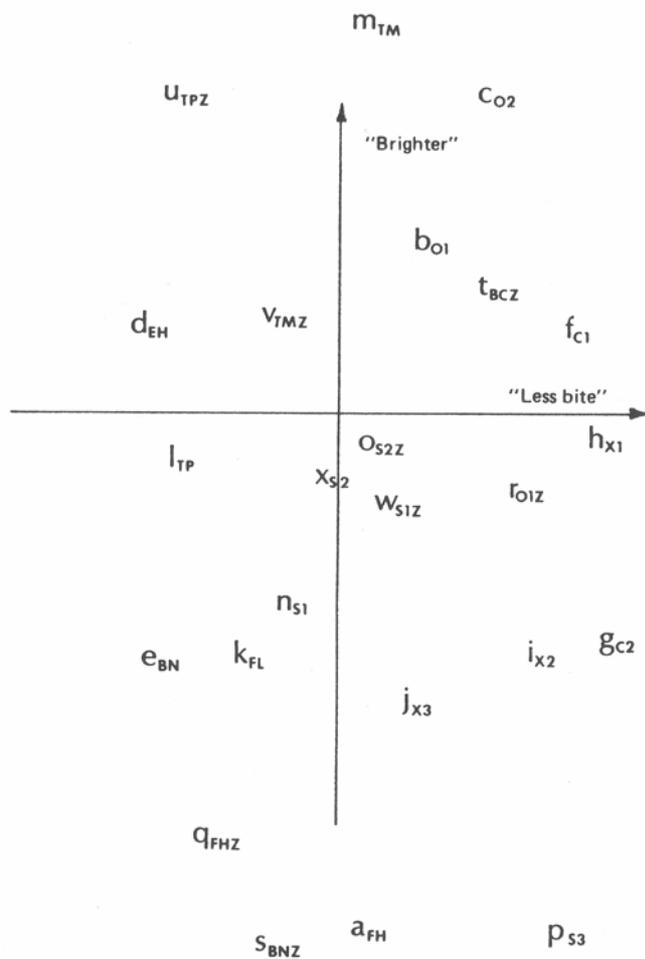


Abb. 1.23: Wessls Ergebnisse der Klänge von Grey. S. 649

Achse I: spektrale Energieverteilung

Der Zentroid wird von ihm nach einer Gewichtungsfunktion bestimmt, welche die kritischen Bandbreiten und die Maskierungsbreiten in Abhängigkeit von den Frequenzen²², also Eigenschaften des Gehörs, simuliert.

Achse II: Eigenschaften des Einschwingvorgangs

Der „Bite“ (S. 650) des Einschwingvorgangs. Er variiert einerseits mit der Geschwindigkeit des Einschwingens, andererseits mit der „Synchronizität zwischen den verschiedenen Komponenten“ (S. 655), womit wohl Unterschiede im Zeitverlauf der Amplituden der einzelnen Partialtöne gemeint sind.

Außerdem stellt Wessel die Idee der Transponierbarkeit von Klangfarben vor. Er geht aus von der Beobachtung, daß die Segmentierung durch Hörer einer sich mehrfach wiederholenden Melodie, die aus drei aufsteigenden Tönen gleichen zeitlichen Abstands besteht und von zwei verschiedenen Instrumenten gespielt wird, die sich Ton für Ton abwechseln, von der Ähnlichkeit der Klangfarben dieser Instrumente abhängt. Sind diese sich sehr ähnlich, dann wird die Segmentierung erst nach drei Tönen vorgenommen. Sind sie sehr unterschiedlich, dann hört man zwei verschiedene Linien, jedes Instrument als unabhängig. Die Klangfarbe dominiert die Segmentierungsaufgabe die Tonhöhe.

Wird bei der obigen Sequenz der Einschwingvorgang verändert, verändert sich auch der wahrgenommene Beginn des Klages, der nicht mit dem physikalischen Beginn übereinstimmt. Es entsteht also eine Ungleichheit der Zeitintervalle von Ton zu Ton. Da der Versuchsleiter die physikalischen Änderungen des einen Klages kennt und von den VPs die Information ihrer Onset - Wahrnehmung hat, wäre eine theoretische Bestimmung des perzipierten Klangbeginns nach Kenntnis der physikalischen Parameter möglich.

Um die Transponierbarkeit von Klangfarben zu überprüfen, führte er einen Versuch mit folgendem Ähnlichkeitsmodell durch:

²² Zwicker & Scharf 1965.

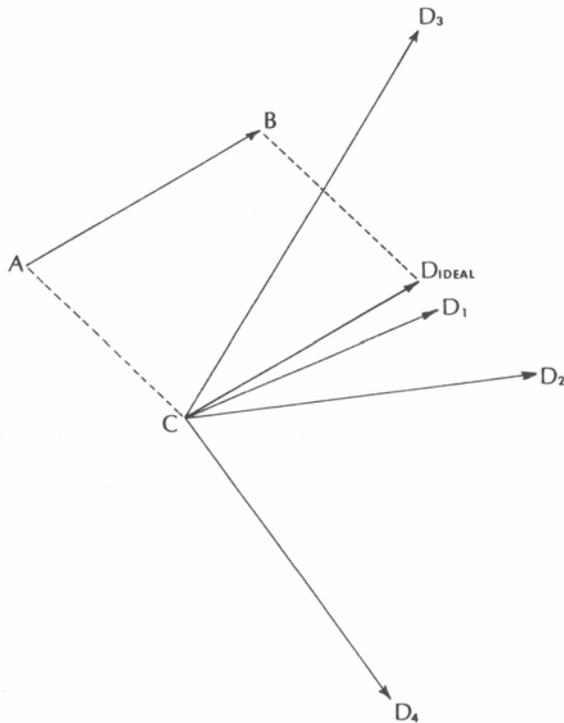


Abb. 1.24: Das Klangpaar A-B wird nach C-D umgewandelt. Dabei ist C-Dideal das ideale Klangpaar, den Hörern werden aber auch C-D1, C-D2, C-D3 und C-D4 vorgespielt.

Die Ähnlichkeit von Klang A zu Klang B auf dem zweidimensionalen Koordinatensystem des obigen Schaubilds entspräche der Ähnlichkeit von Klang C zu D(Ideal). Die beiden Achsen sind die oben genannten. Die Parallelität der Ähnlichkeiten müßte dann abnehmen, wenn dem Paar A-B nicht C-D(ideal), sondern C-D1 gegenübergestellt ist. Weiter müßte sie schrumpfen für C-D2, C-D3 und C-D4. Dies bestätigte er in einem Versuch, in dem Klangfarben synthetisiert wurden, die die obigen Ähnlichkeitsmerkmale hatten. Die VPs bestätigten tendenziell, was theoretisch vorhergesagt wurde, recht gut.

1.3.11 Hourdin, Charbonneau, Moussa²³

Diese multidimensionale Analyse unterscheidet sich von allen anderen dadurch, daß keine Ähnlichkeitsbestimmung durch Probanden vorgenommen wurde. Die Sounds selber wurden verrechnet. Dazu wurde ein Wasserfallplot erstellt, also die Amplituden der einzelnen Frequenzkomponenten durch die Zeit mit einem

²³ Hourdin et al 1997

Zeitfenster von 4ms dargestellt. Dies bildete das Ausgangsmaterial für die Ähnlichkeit. Sind so die Achsen bestimmt, ist es möglich, für ein Instrument zu jedem Zeitpunkt eine Koordinate im dreidimensionalen Raum zu bestimmen. So erhält man eine Trajektorie, die immer vom selben Punkt losgeht, der musikalische Stille ist und zu ihm am Ende des Tons wieder zurückkehrt. Es zeigt sich, daß ähnliche Instrumente ähnliche Wege gehen:

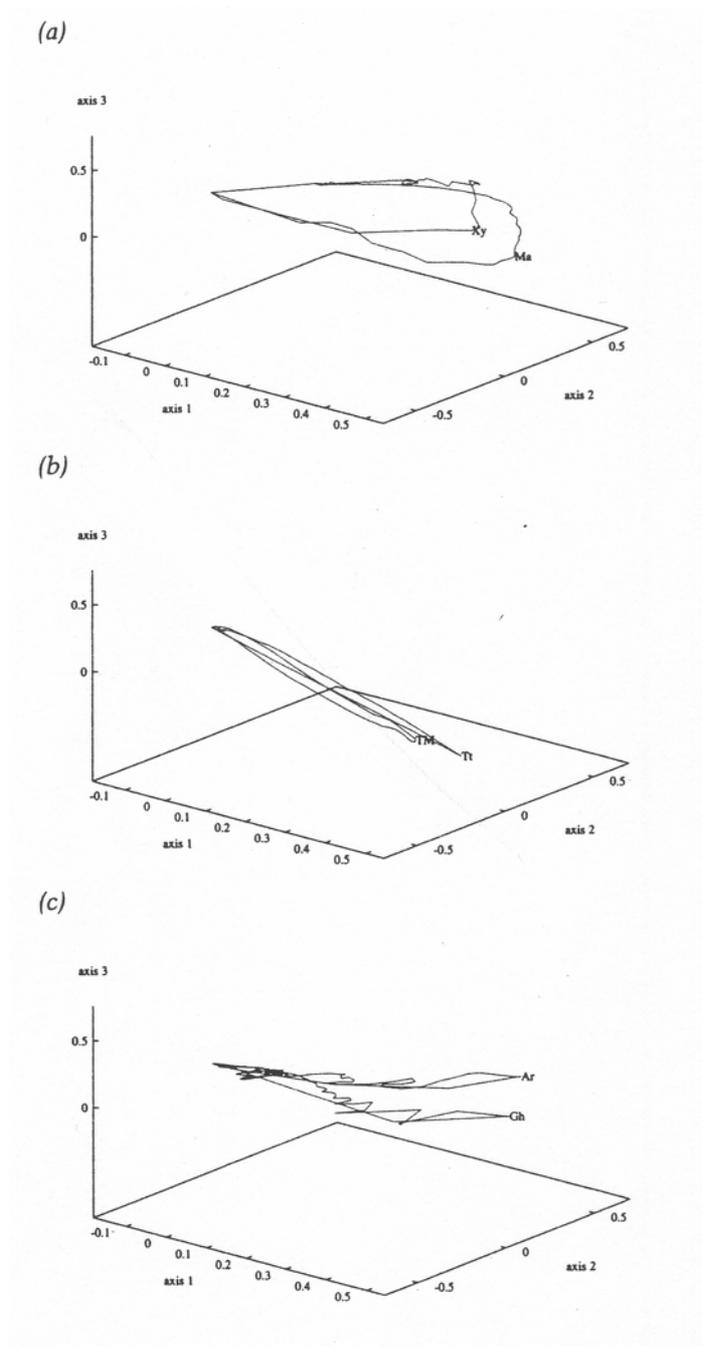


Abb. 1.25: Drei Trajektorienpaare ähnlicher Instrumente. (a) Xylophon Xy und Marimba Ma, (b) Posaune mit Dämpfer TM und Tenorposaune Tt, (c) Bogenlaute Ar und Flageoletton einer Gitarre (ebenda S. 46)

In der Abbildung ist deutlich zu sehen, daß die ähnlichen Klänge auch ähnliche Wege gehen, die charakteristisch sind. Hier wird also sowohl die räumliche als auch die zeitliche Entwicklung dargestellt, die beide zur Charakterisierung des Klangs wichtig sind. Es wurde festgestellt, daß unterschiedliche Tonhöhen eines Instruments auch leicht verschiedene Trajektorien haben, daß sich also mit der Tonhöhe auch der Obertongehalt ändert.

Die Achsen:

Achse I Spektraler Zentroid

Achse II Breite des Spektrums

Unabhängig von der Lage im Frequenzraum werden hier Klänge mit breitem Spektrum von solchen mit schmalen unterschieden.

Achse III Balance zwischen Grundton + Partialtöne größer als 4 < -- >

Partialtöne 2, 3 und 4

Dieser überraschende Befund findet keine rechte Interpretation.

Hourdin et al folgern, daß die Trajektorien der kognitiven Repräsentation beim Hörer entsprechen. Ihre Interpretation der Achsen betrachtet nur Frequenzen in der Zeit und kommt daher ohne Wissen physikalischer Ursachen aus.

1.3.12 Feiten - Kohonen Karten²⁴

Ein weiterer Weg zur Klassifizierung von Klängen wurde von Feiten ausprobiert. Er programmierte eine Kohonen Karte²⁵, der er Klänge lernte. Eine Kohonen Karte wird als neuronales Netz bezeichnet, hat aber nur verwandte Eigenschaften. Im zweidimensionalen Fall ist es ein Quadrat, das in viele gleichgroße Kästchen

²⁴ Feiten & Günzel 1994

eingeteilt ist. Jedes Kästchen wird als Neuron bezeichnet und hat einen Gewichtungsvektor. Dieser ist in Feitens Fall ein Klang, der in zeitliche Abschnitte von 6ms unterteilt und dann fourieranalysiert wurde. Am Anfang werden in alle Gewichtungsvektoren Zufallszahlen eingegeben. Die analysierten Klänge ´warten noch draußen´. Dann wird der erste Klang mit allen Gewichtungsvektoren der Karte korreliert und dasjenige Neuron gefunden, das ihm am ähnlichsten ist. Dieses eine Neuron wird nun in Richtung dieses Klanges verändert, so daß es ihm ein wenig ähnlicher wird. Aber nicht nur dieses Neuron, sondern auch alle Nachbarneuronen werden in diese Richtung gerechnet, allerdings nicht so stark wie das in der Mitte. Die gleiche Prozedur wird nun für alle übrigen Klänge vorgenommen und das ganze vielleicht 500000 mal wiederholt.

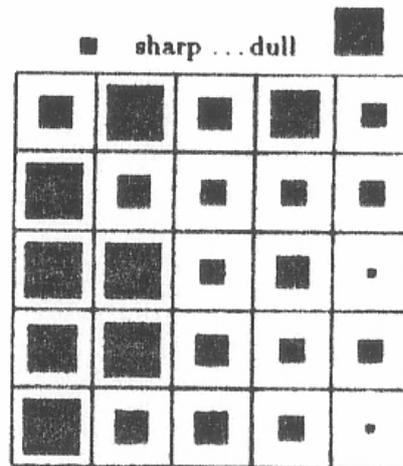
So entstehen mit der Zeit Bereiche, die in sich sehr ähnlich, untereinander aber maximal verschieden sind. Normalerweise entstehen zwei bis drei ´Hügel´. Man darf die Gewichtungsvektoren immer nur ein wenig in Richtung der Klänge rechnen, da sich sonst der erste sofort durchsetzen würde und keine gleichmäßige Verteilung zustande käme. Dann aber muß man die Lernschritte sehr häufig wiederholen.

Hier war das Ziel, eine Keyboard zu entwickeln, das zwei neue Eigenschaften haben sollte. Keyboarder haben meist nur wenige Knöpfe, mit denen sie viele verschiedene Funktionen des Keyboards bedienen müssen, sie ´steppen´ sich mühsam durch Menüs. Hier war die Idee, alle im Keyboard vorkommenden Sounds einmal in der Karte zu verrechnen, so daß die Instrumente dann geordnet wären und der Musiker, einen Überblick hätte, wo ähnliche und wo gänzlich andere Sounds gespeichert wären. Eine andere Idee ist die einer erweiterten FM Synthese. Hier könnte der Musiker durch Wandern durch die Karte seinen Klang immer ein wenig verändern, ohne wirklich von der technischen Seite verstehen zu müssen, was geschieht. Dies könnte auch in real time geschehen, was eine völlig neue Art des Live-Spielens mit Klangfarben wäre.

²⁵ Speckmann 1995

Marimba	Tabular Bells	* Organ I	E-Piano II	Organ II	E-Piano I	* Slap Bass	Muted Guitar	Pizzicato Strings	Timpani
* Xylophon	Vibraphon	* Fretless Bass	Santour	* Viola	Accordion	Strings	Slow Strings	* Synth Strings I	Chorus Aahs
Picked Bass	Clockenspiel	* Jazz Guitar	Fingered Bass	Piano I	Double-bass	* Harpichord	Tremolo Strings	Harp	* Synth. String I
* Bamboo	Synth. Vox	Orchestra Hit	Road Organ	* Clarinet	Cello	Synth. Brass I	Synth. Brass II	* Harmonic Guitar	Piccolo
Metal Pad	Music-box	* Bottle-Blow	Celesta	Okkasin	Square Wave	* Synth. Calliope	Chiffon Lead	Synth. Bass I	Charang
* Voice Oohs	Violin	5th Saw Wave	Ban-donion	* Bass Lead	Fantasy	Warm Pad	NylonStr. Guitar	* Space Voice	Booned Glass
Muted Trumpet	Saw Wave	* Recorder	Halo Pad	Pan Flute	Sweet Pad	* Ice Rain	Sound-track	Sound-track	Tenor Sax
* Church-organ	Chaku-hachi	Steel Guitar	Overdrive Guitar	* Distorted Guitar	Har-monica	Clarinet	Trom-bone	* Synth. Brass II	Tenor Sax
Organ III	Flute	* French Horn	Hoaky-took	Slap Bass II	Clean Guitar	* Oboe	Bariton Sax	Trumpet	Soprano Sax
* Poly Synth.	* Brass I	Piano III	Piano II	* Acc. Bass	Tuba	Solo Vox	English Horn	* Alto Sax	Whistle

* sounds judged for distribution of attributes



a)

b)

Abb.1.26: (a) Kohonen Karte mit Instrumenten gelernt. Man erkennt drei 'Hügel', die sich grundlegend unterscheiden. (b) Zuordnung der Sounds der Karte zum Gegensatzpaar sharp-dull, links dull, rechts sharp. Aus: Feiten 1994

In einer Überprüfung mit (immerhin) 3 Probanden ergaben sich bei adjektivischen Gegensatzpaaren teilweise gute Übereinstimmungen mit der Rechnung. Allerdings war die Karte immer nur zweidimensional. Eine dreidimensionale Einbettung ergäbe sicherlich noch befriedigendere Ergebnisse.

1.3.13 Zusammenfassung

Einigkeit besteht, daß der Obertongehalt der Klänge, die Lage des spektralen Zentroids, für die Ähnlichkeitsbestimmung von Klängen benutzt wird [Wedin & Goude 1972, Miller & Carterette 1975, Grey 1977, de Bruijn 1978, Wessel 1979, Krumhansl 1989, Iverson & Krumhansl 1993, Mc Adams 1995, Markuse & Schneider 1996]. Dieser Gehalt wird weiter differenziert. Wedin & Goude stellen Faktoren fest, die aus den (zeitlich invarianten) Mustern der Obertonamplituden bestehen. Auch de Bruijn stellt eine Theorie vor, nach der die Anzahl der Steigungen im Amplitudenbild der Obertöne als kontinuierliche Ähnlichkeitsachse gedeutet wird.

Schon nicht mehr so eindeutig, aber trotzdem evident, ist der spektrale Fluß, der unterschiedliche Amplitudenverlauf der einzelnen Partialtöne in der Zeit [Grey 1977, Krumhansl 1989, Mc Adams 1995]. Auch hierin unterscheiden sich Instrumentenfamilien. Wessel (1979) spricht auch vom zeitlich versetzten

Einschwingen während des Attacks, den er zusammen mit der Attack - Zeit als „Biß“ bezeichnet.

So wurde weiter der Einschwingvorgang zur Identifikations- und Ähnlichkeitsbewertung herangezogen [Grey 1977, Grey & Moorer 1977, Wessel 1979, Krumhansl 1989, Iverson & Krumhansl 1993, Mc Adams 1995], wobei nur Grey die Inharmonizität des Einschwingvorgangs betrachtet. Die übrigen stellen fest, daß dessen Geschwindigkeit, die Attack - Zeit zur Ähnlichkeitsbestimmung herangezogen wird.

Damit verwandt ist die Bezeichnung einer Ähnlichkeitsachse mit dem Parameter der Hüllkurve des gesamten Klangs [Miller & Carterette 1975, Iverson & Krumhansl 1993].

Markuse & Schneider (1996) finden als Ähnlichkeitsachse auch den Parameter glatt - rauh. Miller & Carterette (1975) beziehen als einzige auch verschiedene Tonhöhen ein und finden, daß dies alle übrigen Ähnlichkeitsunterscheidungsparameter unwichtig werden läßt.

Damit ist der Gedanke einer Hierarchie formuliert. Der Hörer wendet offenbar verschiedene Strategien an, um Ähnlichkeiten festzustellen. Sind die Klänge in der Tonhöhe verschieden, dann wird nicht nach der Klangfarbe gefragt, um die Ähnlichkeit zu bestimmen. Ist die Tonhöhe gleich, dann wird nach dem Obertongehalt geurteilt. Wenn dieser ebenfalls gleich ist, folgt eine Unterscheidung des spektralen Flusses oder der Inharmonizität im Einschwingen oder der Hüllkurve. Offenbar kommt es auf die Größe des Bewußtseinsfeldes an, in dem eben mehr oder weniger Parameter vorliegen, nach denen überhaupt geurteilt werden kann. Die Erweiterung dieses Feldes über die hier beschriebenen Parameter ist wohl auch der 'Normalfall' im Hören, da Klänge im musikalischen Kontext stehen, ein soziales Umfeld haben und mit Assoziationen verknüpft sind. Auch der Kontext der musikalischen Syntax, der dieselbe Tonhöhe mal als Grundton und mal als harmoniefremd bestimmt, spielt dann eine Rolle.

Auch Kategorien werden festgestellt. Grey (1977) findet Cluster der Instrumentenfamilien, Wedin & Goude (1972) finden Faktoren der Obertonmuster, die ebenfalls instrumentenfamilienabhängig sind. Allerdings widersprechen diese Kategorien denen, die sie durch die bloße verbale Befragung von Ähnlichkeiten nach Instrumentennamen erhielten. Iverson & Krumhansl fanden Korrelationen zwischen Hüllkurven und perzipierten Ähnlichkeiten, welche sie aber nur schwach mit der Attack - Zeit dieser Kurven assoziieren konnten. Die Hüllkurven wurden wohl eher kategorial als Muster erkannt und danach als ähnlich oder unähnlich wahrgenommen.

Es besteht wohl auch die Möglichkeit einer Transponierbarkeit von Klangfarben (Wessel 1979, Krumhansl 1989), bei deren Untersuchungen Zwitterklänge im MDS - Bild wirklich zwischen den Instrumenten lagen, aus denen sie zusammengesetzt waren. Die Achsen scheinen in der Tat kontinuierlich zu sein, was ja auch umgangssprachlich durch den Komperativ von Adjektiven wie heller, schräger, glatter, weiter usw. zu erwarten war.

So ist die Ähnlichkeit von Klängen wohl durch die Parameter Obertonreichtum, Einschwingverhalten, spektraler Fluß und Hüllkurve vollständig beschrieben. Werden allerdings Parameter wie Tonhöhe oder musikalischer Kontext hinzugenommen, können die Parameter der Klangfarbe in dem jetzt erweiterten Rahmen für eine Ähnlichkeitsbeurteilung unwichtig werden.

2 Physik der Perkussionsinstrumente

Perkussionsinstrumente haben keinen wirklichen Einschwingvorgang, da mit dem Einschwingen bereits das Ausschwingen beginnt. Gleiches müßte man aber auch von Piano oder Gitarre sagen. Die Perkussionsinstrumente sind dann aber nicht mehr wirklich von den anderen unterschieden, da hier das Augenmerk auf Biegewellen gelegt werden muß. Aber auch das Resonanzholz von Klavier, Geige oder Gitarre schwingt in Biegewellen. Um daher den Einschwingvorgang verstehen zu können, muß man sich mit der Elastizitätstheorie beschäftigen.

In dieser Arbeit sollen aber auch zwei reine Perkussionsinstrumente näher untersucht werden, das westliche und das balinesische Xylophon (Gender). Beides sind Stäbe (oder Platten). Um diese verstehen zu können, leiten wir die Gleichungen für den frei schwingenden Stab her und geben Ergebnisse für die frei schwingende Platte. Dies wird hier ausführlich dargestellt, da es sonst meist nur verkürzt erscheint und für die Argumentation wichtig ist, daß westliche Musik gerade auch im Einschwingvorgang ein möglichst harmonisches, balinesische Musik gerade ein möglichst inharmonisches Obertonspektrum herzustellen versucht.

Die beiliegende Diskette enthält ein Programm zur Berechnung der Eigenmoden eines Orff-Xylophons. Es wurde von Borg vorgeschlagen und hier zur Veranschaulichung der doch recht komplizierten Materie nachprogrammiert. In den Abschnitten 2.1.8.2 ff werden die Rechenschritte dafür erläutert.

2.1 Der Stab

Beim Stab ist die Rückstellkraft durch die Elastizitätseigenschaften gegeben und nicht wie bei der Luft durch den Druck oder der idealen Saite durch den Knick und die daraus resultierenden Rückstellkräfte. Unter einem Stab wird hier ein Gebilde verstanden, das möglichst flach und im Material völlig homogen ist und dessen Auslenkungen klein sind. Außerdem ist der Querschnitt des Stabes entlang seiner x -Hauptachse konstant und seine Länge gegenüber seiner Breite und Höhe groß. Wenn eine dieser Bedingungen nicht zutrifft, wird die Sache noch schwieriger als sie ohnehin schon ist. Lösungen für den Stab mit veränderlichem Querschnitt sind

weiter unten diskutiert. Dort werden auch Änderungen der Materialeigenschaften im Stab berechenbar. Wenn der Stab dick ist, ist nicht die Euler-Bernoulli-Methode, sondern die Timoshenko Methode¹ anzuwenden, was ebenfalls unten besprochen wird. Wird der Stab zur Platte, was ungefähr bei einem Verhältnis von Länge zu Breite von 1 zu 4 der Fall ist², dann gelten wieder andere Bedingungen (siehe Platten). Kleine Krümmungen des Stabes, wie sie bei Gamelanplatten oft vorkommen, fallen wohl nicht so sehr ins Gewicht. Ist die Auslenkung groß - was nur durch starke Anregung möglich ist, da Platten aus Bronze oder Stahl so stark gedämpft sind, so daß sie schnell in den Zustand der kleinen Auslenkungen zurückgehen - wird die Schwingungsgleichung nichtlinear. Dies ist eben bei Einschwingvorgängen oft der Fall.

Andere Gebilde, wie Schalen, Glocken oder Ringe sind wieder anders zu rechnen. Viele dieser Gebilde sind so kompliziert, daß sie nicht mehr mit einfachen Gleichungen berechnet werden können. In diesem Fall wird die Methode der Finiten Elemente angewendet. Jedem kleinen Volumenelement werden seine Verformungen, Bewegungszustände und wirkenden Kräfte zugeschrieben und diese in einer großen Matrix gespeichert. Nun wird im Computer die Wirkung eines jeden Volumenelements auf jedes seiner Nachbarelemente zu jedem folgenden Zeitpunkt berechnet und so das System beschrieben.

2.1.1 Herleitung der Differentialgleichung für den Stab³

Die Mittelachse des Stabes wird als neutrale Achse bezeichnet. Sie ist die X-Achse. Unabhängig davon wie sich der Stab in z-Richtung (nach oben oder unten) verbiegt, die Länge der neutralen Achse bleibt immer gleich. Jede weitere Faser im Stab, die nicht die neutrale Achse ist, wird jedoch mit der Verbiegung länger oder kürzer. Biegt sich der Stab nach unten, wird jede Faser darüber etwas länger - und zwar abhängig von dem Abstand dieser Faser von der neutralen Achse. Jede Faser darunter wird etwas gestaucht, also kürzer - wieder in Abhängigkeit von deren

¹ Die Timoshenko Formel findet sich in Orduña-Bustamante 1991 wieder, der aber eigentlich verschiedene Querschnittsformen des Marimbastabes berechnet. Dort weitere Literaturhinweise.

² Waller 1949 zitiert nach Fletcher & Rossing 1999, S. 82

³ Wagner 1947

Abstand zur neutralen Achse. Diesen Abstand bezeichnen wir hier allgemein als z . Da am Ende die Differentialgleichung die Bewegungsgleichung $F_R = F_T$, also die Rückstellkraft gleich der beschleunigenden Kraft ist, müssen wir zuerst die Rückstellkraft berechnen. Dazu brauchen wir zwei Formeln:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta F}{\Delta A} = E \frac{\Delta s}{s} . \quad (\text{Gl 2.1})$$

Die erste besagt, daß eine Krümmung, also eine zweite Ableitung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ der Auslenkung y nach dem Weg x gleich dem Kehrwert des Radius r ist, wenn man die Krümmung des Kreises mit dem Radius r betrachtet. Dies gilt ganz allgemein.

Die zweite Gleichung ist die Definition des Elastizitätsmoduls.⁴ Zieht man an einem Material mit der Kraft F an der Fläche A , so wird dieses mehr oder weniger länger. Diese Längenänderung Δs hängt aber von der Gesamtlänge s ab. Deren Quotient, die relative Längenänderung ist aber gleich dem Quotienten von F und A mal einer Konstanten E , dem Elastizitätsmodul. Diese Gleichung gilt allgemein, das Elastizitätsmodul aber ist für jedes Material anders. In unserem Fall wird der Stab eben etwas länger oder kürzer, wogegen sich das Material wehrt und versucht in seinen ursprünglichen Zustand zurückzukehren, was die Rückstellkraft verursacht.

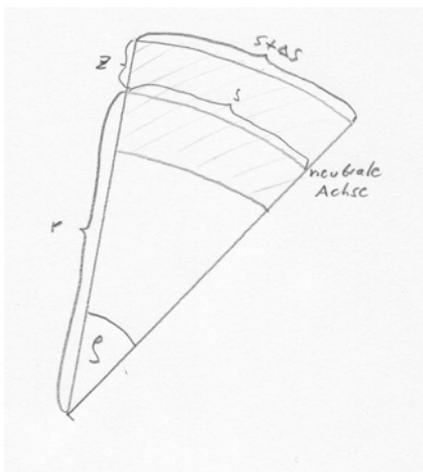


Abb. 2.1: Ausschnitt des Stabes entlang der X-Achse.

⁴ Walcher 1989 S. 64

In Abb 2.1 ist ein Ausschnitt des Stabes dargestellt mit neutraler Achse und den Krümmungen unten und oben. Der Winkel φ ist also abhängig von der Krümmung. Es gilt also:

$$s = \varphi r \text{ und } \Delta s = -\varphi r + \varphi (r+z) ,$$

denn sowohl s als auch Δs sind Kreisausschnitte. Also ist

$$\Delta F = \frac{-\varphi r + \varphi (r+z)}{\varphi r} \Delta A * E = \frac{z}{r} \Delta A * E, \text{ also } \Delta F = E * \Delta A * \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} * z$$

Die Kraft über die gesamte Fläche integriert ist Null, da sie unten gestaucht und oben gedehnt wird (oder umgekehrt beim umgekehrter Krümmung). Wir können aber ein Drehmoment berechnen, das durch diese Kraft entsteht. Allgemein ist ein Drehmoment $M=F*s$, Kraft mal Hebelarm, wird also jeweils größer, wenn die wirkende Kraft F oder der Hebelarm s zunimmt. Bei uns ist $s=z$ und

$$M = F * z = E * \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} * \iint z^2 dA, \quad (\text{Gl 2.2})$$

da der Hebelarm hier ja in z -Richtung ansetzt. Das Doppelintegral am Ende dieser Gleichung heißt Flächenträgheitsmoment, was sprachlich nicht ganz korrekt ist. Es enthält also den Anteil der Fläche ΔA in Abhängigkeit vom Abstand z zur neutralen Achse. Diese Fläche liegt in der Y/U -Ebene, wenn U im Abb. 2.1 die dritte Dimension aus der Zeichenfläche heraus ist. Hier ist es zweckmäßig einen Faktor K einzuführen, der definiert ist als

$$K^2 = \frac{1}{A} \iint z^2 dA \quad (\text{Gl 2.3})$$

Hier ist ΔA wieder das kleine Flächenelement. Dann gilt für das Drehmoment

$$M = F \cdot z = E \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot A \cdot K^2 \quad (Gl. 2.4)$$

Das bringt den Vorteil, daß man für verschiedene Formen, wie Rechteck oder Kreis fertige Formeln hat, die nur noch durch den jeweiligen Querschnitt dividiert werden müssen. Z.B. ist für das Rechteck der Höhe h $K = h / \sqrt{12}$ (die Breite spielt keine Rolle, es ist ja ein Stab). Für einen runden Stab mit Radius r gilt $K = r / 2$.

Nun haben wir das Drehmoment. Wir brauchen aber die Rückstellkraft. Dazu überlegen wir uns, wie das Drehmoment mit der Rückstellkraft zusammen hängt. Betrachten wir wieder einen Balkenausschnitt und die daran angreifenden Kräfte und Drehmomente.

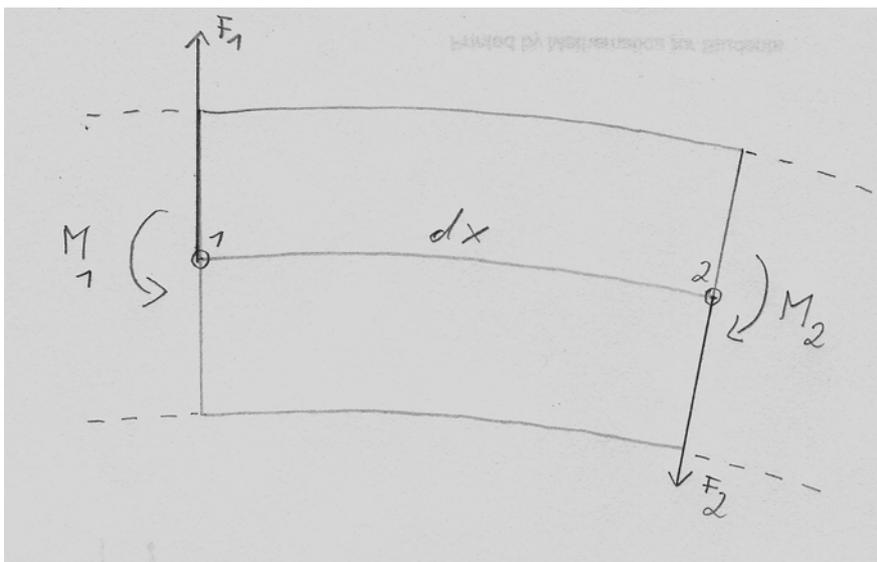


Abb. 2.2: Balkenausschnitt

Da links der Balken das Teilstück der Länge nach dx oben zieht und rechts der weitergehende Balken das Teilstück nach unten, sind F_1 und F_2 die zwei am Teilstück angreifenden Querkräfte. Diese wirken in y -Richtung, sind also nicht mit den Kräften zu verwechseln, die bisher auftraten. Bisher haben wir nur die Kräfte betrachtet, die auf eine Balkenschnittfläche wirken. Diese verschwinden, wenn man über die gesamte Schnittfläche integriert, sie verursachen aber ein Drehmoment M . Die in Abb. 2.2 eingezeichneten Drehmomente M_1 und M_2 sind die durch die

⁵ Fletcher & Rossing 1999 S. 58f

Balkenreststücke links und rechts verursachen Drehmomente. Betrachten wir Punkt 1 am linken Mittelrand des Teilstücks als Drehachse, dann kommt noch das Drehmoment dazu, das von der Kraft F_2 am Punkt 2 verursacht ist und die Strecke dx als Hebel hat. Da nun der Balken nur sehr kleine Auslenkungen hat, ist die resultierende Drehung des Teilstücks gleich Null, die Drehmomente müssen sich gegenseitig aufheben.

$$M_2 - M_1 + F_2 * dx = 0 \quad (\text{Gl. 2.5})$$

Jetzt interessieren uns die Drehmomente M_1 und M_2 als solche nicht, denn wir wissen, daß das Drehmoment M_2 sein muß gleich M_1 plus die Änderung des Drehmoments über das Teilstück dx oder in Formel:

$$M_2 = M_1 + \frac{\partial M}{\partial x} * dx, \text{ also } M_2 - M_1 = \frac{\partial M}{\partial x} * dx \quad (\text{Gl. 2.6})$$

Mit Gl. 2.5 in Gl. 2.6 gilt dann

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -F_2$$

Die Rückstellkraft ist also die Änderung des Drehmoments nach dem Weg. Also ist mit Gl. 2.4

$$F(x) = -\frac{\partial M}{\partial x} = E * \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} * A * K^2 \quad (\text{Gl. 2.7})$$

Die Kraft $F(x)$ hängt vom Ort ab.

Jetzt gilt es, die beschleunigende Kraft zu berechnen. Dazu betrachten wir die Kräfte F_1 und F_2 in Abb. 2.2. F_2 kann beschrieben werden, indem man zu F_1 die Kraftänderung entlang der Strecke dx dazurechnet.

$$F_2 = F_1 + \frac{\partial F}{\partial x} * dx$$

Wäre der Balken in Ruhe, dann wäre $F_1 = F_2$. Nur wenn er sich bewegt, besteht ein Unterschied $F_2 - F_1$, welches die beschleunigende Kraft ist. Diese ist

$$F_2 - F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} * dx$$

Allgemein gilt $F = m * a$, hier ist die Masse durch das Volumen $A * dx$ mal der Dichte ρ und die Beschleunigung a durch die zweite Ableitung nach der Zeit $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ gegeben.

$$\frac{\partial F}{\partial x} * dx = A * dx * \rho * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (\text{Gl 2.8})$$

Gl. 2.8 beschreibt die Rückstellkraft, die gleich der beschleunigenden Kraft sein muß, um die Bewegungsgleichung zu erfüllen. Setzen wir Gl. 2.7 in Gl. 2.8 ein, so erhalten wir

$$A * \rho * \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = -E * \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} * A * K^2$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{E * K^2}{\rho} * \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (\text{Gl 2.9})$$

Dies ist die Differentialgleichung des Stabes. Sie ist partiell, da sie nach der Zeit und dem Weg ableitet. Die vierte Ableitung nach dem Weg kann man sich vielleicht so vorstellen, daß die Krümmung der Krümmung zur Rückstellung führt. Die Herleitung ging von der Krümmung des Stabes aus, welche die zweite Ableitung nach dem Weg ist, und den Stab gequetscht oder auseinandergezogen hat. Dies verursachte ein Drehmoment. Aber erst die Änderung dieses Drehmoments entlang des Stabes verursachte die Rückstellkraft. Schließlich fordert dann noch die beschleunigende Kraft eine Änderung dieser Kraft entlang des Weges.

2.1.2 Lösung der Differentialgleichung für den Stab

Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung geht auf Rayleigh zurück. Der erste Teil, die Auflösung der zeitlichen Ableitung ist wie bei der Wellengleichung. Der zweite Teil ist eine Achtpolgleichung, ein Verfahren, in dem versucht wird, auf einfache Weise die Faktoren für die gefundene Lösungsgleichung zu bestimmen.

Es wird eine Lösungsfunktion angenommen. Diese ist:

$$Y(x, t) = Y(x) * e^{i\omega t} \quad (\text{Gl 2.10})$$

Wir haben also eine noch unbekannte Funktion $Y(x)$, die nur noch von x abhängt und eine Exponentialfunktion, die nur noch von t abhängt. Setzen wir diese oben ein, so erhalten wir:

$$\omega^2 Y(x) * e^{i\omega t} = \frac{EK^2}{\rho} \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} * e^{i\omega t} \quad \text{also} \quad \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = \frac{\omega^2 \rho}{EK^2} Y \quad (\text{Gl 2.11})$$

Zwar haben wir jetzt t eliminiert, uns ist aber ein ω^2 geblieben, also eine Abhängigkeit von der Frequenz. Im Stab gibt es also Dispersion, jede Frequenz hat ihre eigene Wellengeschwindigkeit. Analog zur Wellengeschwindigkeit $c(\text{Saite})$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{\text{saite}}^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

ist die Wellengeschwindigkeit beim Stab

$$c_{\text{stab}}^2 = \omega K \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Jetzt müssen wir noch die Ableitung nach dem Ort lösen. Dazu nehmen wir wieder eine Gleichung an, die abgeleitet sich selbst ergibt: $Y(x) = A e^{\tau x}$. Wir setzen ein:

$$\tau^4 A e^{\tau x} = A \frac{\omega^2 \rho}{E K^2} e^{\tau x} \text{ also } \tau^4 = \frac{\omega^2 \rho}{E K^2}$$

Ziehen wir hieraus die vierte Wurzel, so erhalten wir immer ein +- :

$$\tau = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{E K^2}}} \text{ oder kurz } \tau = \pm k \text{ und } \tau = \pm i k$$

Die oben angesetzte Bewegungsgleichung hat also in Bezug auf den Ort vier Lösungen, also vier Gleichungen, die summiert werden müssen:

$$y(x, t) = e^{i\omega t} (\alpha e^{kx} + \beta e^{-kx} + \gamma e^{i kx} + \delta e^{-i kx}) \quad (\text{Gl 2.12})$$

Alles in der Klammer ist die Funktion nach dem Weg, also die Auslenkung des Stabes. Die Exponentialfunktion außerhalb bezeichnet nur die zeitliche Abhängigkeit, die eine Sinusschwingung ist. Hat man also einmal die maximale Auslenkung bestimmt, dann schwingt jedes Ortselement mit derselben Frequenz auf und ab. Die Exponentialfunktionen in der Klammer mit imaginärem Anteil sind Sinusschwingungen. Die beiden vorderen Exponentialfunktionen sind Endkorrekturen, da die Biegung des Stabes kein Kreisabschnitt ist. Die Auslenkungsfunktion ist also eine Überlagerung von zwei Sinusschwingungen, die nach rechts und links laufen (genau wie bei der Saite) und den Endkorrekturen. Dies hat u.a. zur Folge, daß die Knotenlinien am Rande keinen durch λ teilbaren Abstand von den Enden haben, also wie bei der Luftsäule eine Endkorrektur angegeben werden muß. Diese kann nach den unten angegebenen theoretischen Werten errechnet werden. Für den frei schwingenden Stab, dessen letzte Knotenlinie vor dem Rand von diesem den Abstand a hat lautet: $\frac{\lambda}{4} - a \approx 0.052$.

Um nun die Werte für a , b , c und d zu bestimmen, wird eine Schleife von 4 Gleichungen erfunden, die abgeleitet immer die nächst folgende ergeben. ⁶

⁶ Wagner 1947, S. 372f

$$\begin{aligned}
C(kx) &= \frac{1}{2} (\text{Cosh}(kx) + \text{Cos}(kx)); \\
s(kx) &= \frac{1}{2} (\text{Sinh}(kx) - \text{Sin}(kx)); \\
c(kx) &= \frac{1}{2} (\text{Cosh}(kx) - \text{Cos}(kx)); \\
S(kx) &= \frac{1}{2} (\text{Sinh}(kx) + \text{Sin}(kx)); \quad (\text{Gl 2.13})
\end{aligned}$$

Cosh und Sinh sind der hyperbolische Cosinus und Sinus, der hier angewandt wird, weil $e^{\pm x} = \text{Cosh}(x) \pm \text{Sinh}(x)$ und $e^{\pm i x} = \text{Cos}(x) \pm i \text{Sin}(x)$.

Die Biegeschwingung hat eine Bewegungsgleichung, die die Auslenkung an jedem Ort zu jeder Zeit angibt, sie hat aber auch Gleichungen für die Geschwindigkeit der Teilchen, für das Biegemoment und die Kraft. Weil die Auslenkung aus den 4 Funktionen in Gl. 2.8 zusammengesetzt ist und die Gleichungen von Geschwindigkeit, Auslenkung, Biegemoment und Kraft des Stabes Ableitungen voneinander sind, kann man die 4 Gleichungen von 2.9 in Gl. 2.8 einsetzen und erhält viermal denselben Gleichungstyp nur mit Faktorenvertauschung:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \alpha C(kx) + \beta S(kx) + \gamma c(kx) + \delta s(kx); \\
v(x) &= k(\alpha s(kx) + \beta C(kx) + \gamma S(kx) + \delta c(kx)); \\
M(x) &= \frac{e j k^2}{i \omega} (\alpha c(kx) + \beta S(kx) + \gamma C(kx) + \delta s(kx)); \\
F(x) &= -\frac{e j k^3}{i \omega} (\alpha S(kx) + \beta c(kx) + \gamma s(kx) + \delta C(kx)); \quad (\text{Gl 2.14})
\end{aligned}$$

Diese sind nur von x abhängig. v ist die Geschwindigkeit, u die Auslenkung, q das Biegemoment und p die Kraft.⁷ Die vier zu bestimmenden Unbekannten α , β , γ und δ sind jetzt bestimmbar, da wir vier Gleichungen für vier Unbekannte haben. Die bestimmten Werte können dann in die vier Gleichungen für Geschwindigkeit, Auslenkung, Biegemoment und Kraft eingesetzt werden. Da jeder Stab einen Anfang und ein Ende (mit Länge l) hat kann man diese vier Gleichungen sowohl für $x=0$ als

⁷ Schaubilder dieser Funktionen in Borg 1983, S.21

auch für $x=l$ schreiben. Es ergeben sich also acht Gleichungen, die die Zustände am Anfang und am Ende des Balkens beschreiben.⁸

Hiermit ist die allgemeine Lösung beendet. Um nun genaue Werte zu erhalten, müssen die Randbedingungen auf diese Achtpolgleichungen angewandt werden, um zu numerischen Ergebnissen zu kommen.

2.1.3 Lösung für den Stab mit freien Enden

Die musikalisch wichtigste Lösung ist die mit freien Enden. Xylophonstäbe Gender- oder Saronstäbe sind zwar aufgelegt, aber nicht an den Enden, sondern auf den Knotenlinien der Grundschwingung. Interessant ist weiter der Fall eines freien und eines eingespannten Endes, wie Lamellophone oder die Eigenschwingungen von Holzblasplättchen.

An den Enden eines frei schwingenden Stabes ist sowohl das Biegemoment, als auch die Kraft zu jedem Zeitpunkt Null. Dies muß so sein, weil hinter dem Ende ja nichts mehr kommt, zu was sich der Stab verbiegen könnte, es kann also auch keine Rückstellkraft mehr geben. Aus der Achtpolgleichung kann man also zwei herausnehmen, nämlich die für das Biegemoment und die Kraft am Ende des Stabes und sie gleich Null setzen. Die Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} -c(kl) y_e + \frac{1}{k} s(kl) v_e &= 0; \\ -k s(kl) y_e + c(kl) v_e &= 0, \end{aligned}$$

wobei v_e die Geschwindigkeit und y_e die Auslenkung am Ende des Stabes ist. Das l ist die Stablänge. Wenn diese zwei Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein sollen, dann muß ihre Determinante Null sein.⁹ Es gilt:

⁸ Hier wird auf die Wiedergabe dieser Gleichungen verzichtet. Sie sind in Wagner 1947, S. 373

⁹ Rothe 19

$$(c(kl))^2 - s(kl) s(kl) = 0, \quad (\text{Gl 2.15})$$

eine Gleichung, die nur durch Gleichungen der obigen Vierergleichungen besteht. Nach diesen aufgelöst ergibt sich:

$$\text{Cosh}(kl) \text{Cos}(kl) = 1 \quad \text{oder nach Umformung} \quad \text{Tan}\left(k \frac{l}{2}\right) = \pm \text{Tanh}\left(k \frac{l}{2}\right)$$

Für alle k , die diese Funktion erfüllen, schwingt auch der Stab. Da diese Funktion nicht allgemein zu lösen ist, werden numerische Lösungen gesucht, indem der Graph dieser Funktionen geplottet und die Schnittpunkte der Funktionen gesucht werden.

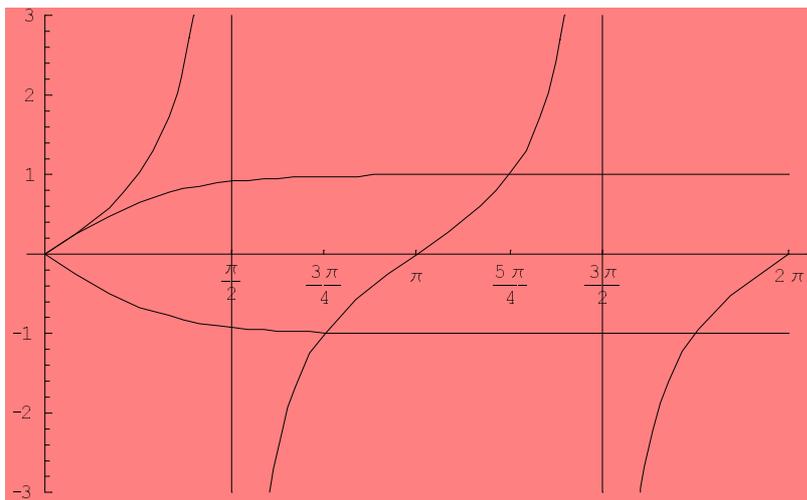


Abb. 2.10: Graph der Funktion $\text{Tan}\left(k \frac{l}{2}\right) = \pm \text{Tanh}\left(k \frac{l}{2}\right)$

Setzt man die Werte für k ein und nimmt man $\omega = 2\pi f$, so ergeben sich als Frequenzen für den an beiden Enden freien Stab die Werte

$$f_n = \frac{\pi K}{8 l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} * (3.011^2, 5^2, 7^2, \dots (2n+1)^2) \quad (\text{Gl 2.16})$$

Da die Frequenzen von der Dichte und dem Elastizitätsmodul abhängen und diese z.B. bei Bronze, für das es viele verschiedene Legierungen gibt, schwer festzustellen ist, gibt man meist nur die Relationen der Frequenzen an. Die

Grundschwingung wird als 1 genommen. Dann sind die Oberschwingungen eines Stabes:

$$\text{Grundton} \quad 3.5607 \frac{K}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

2. Partialton: 2.756 * Grundton

3. Partialton: 5.404 * Grundton

4. Partialton: 8.933 * Grundton

Tabb. 1: relative Frequenzen eines freien Stabes

Die Obertöne sind also inharmonisch.

2.1.4 Longitudinalschwingungen im Stab

Die Biegeschwingungen sind die wichtigsten des Stabes, da sie die einzigen sind, die eine nennenswerte Abstrahlfläche haben. Die Longitudinalschwingungen können nur an den kleinen Seitenflächen abstrahlen. Aus diesem Grund sind auch die Torsalschwingungen und die Lateralschwingungen selten im Spektrum zu finden,¹⁰ und wenn, dann höchstens in ihrer Grundschwingung oder den ersten beiden Oberschwingungen. Dies liegt natürlich auch daran, daß die Frequenzen dieser Schwingungsarten viel höher liegen als die Biegewellen.

Longitudinale Schwingungen laufen in der Ebene des Stabes von einem Ende zum anderen. Ihre Ursache ist die Kompression des Materials, analog zur Luftschwingung. Ihre Berechnung ist also dieselbe wie bei Luft oder bei Saiteschwingungen, ihre Obertöne sind also harmonisch. Nur ist die Rückstellkraft jetzt durch die Elastizität bestimmt. Die Differentialgleichung lautet hier:¹¹

¹⁰ Schneider 1997, S. 271: Von den ersten 10 Peaks eines javanischen saron demung Stabes interpretiert er f1, f2, f3, f6 und f7 als transversale, f6 als axiale Biegeschwingungen, f5 und f9 als torsale und nur f10 als longitudinale Frequenzen.

¹¹ Fletcher & Rossing 1999, S. 57

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (\text{Gl 2.17})$$

Da die Lösungsgleichung dieser Differentialgleichung wie bei der Luftschwingung auf der rechten Seite zweimal nach t abgeleitet werden muß, steht der Faktor, der im Funktionsglied der Lösungsgleichung vor t steht in der Lösung im Quadrat vor ihr. Daher das c_L^2 , welches ohne das Quadrat die Geschwindigkeit der longitudinalen Welle ist. Wenn der Stab an beide Enden frei ist, dann sind die Frequenzen des Stabes:

$$f_n = n \frac{c_L}{2l}, \quad n = 1, 2, 3 \dots, \quad (\text{Gl 2.18})$$

also harmonisch zur Grundfrequenz. Hier findet auch keine Frequenzdispersion statt wie bei der transversalen Welle, bei der jede Frequenz ihre eigene Geschwindigkeit hat.

2.1.5 Torsionale Schwingungen des Stabes

Wird ein Stab tordiert, also in sich gedreht, dann ist die Rückstellkraft nicht durch das Elastizitätsmodul, sondern durch das Scherungs- oder Torsionsmodul bestimmt. Wird ein kleines Flächenstück um den Winkel φ geschert, so daß seine untere Begrenzungsfläche in Bezug auf die obere um die Strecke Δs verschoben wird und ist die Höhe des Stückes y , dann gilt:¹²

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = G * \frac{\Delta s}{y},$$

wobei F die wirkende Kraft und A die Fläche ist. G ist hier der Torsionsmodul. Diese Definition ist analog zum Elastizitätsmodul. Bei den meisten Stoffen hängt es mit dem Elastizitätsmodul über die Poissonzahl zusammen:

¹² Walcher, 1985, S. 65

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{Gl 2.19})$$

Nehmen wir an, daß beim kreisrunden Stab mit Radius r an den zwei Enden jeweils eine Kraft angreift. Diese wirkt aber nicht in Längsrichtung des Stabes, sondern an den Rändern der Enden in Rotationsrichtung. Dann tordiert dieser Stab. Von der Scherung her wissen wir, daß die Auslenkung der Scherung

$$\Delta s = \frac{1}{G} \frac{F}{A} r$$

ist mit der Kraft F und der Fläche A . Die hier wirkende Kraft kommt vom Drehmoment M mit Hebelarm r an beiden Seiten:

$$F = 2 \frac{M}{r}$$

Die Torsion erfolgt über den ganzen Stab mit Länge l . Da der Winkel φ , um den gedreht wird, bei kleinen Auslenkungen ds/r ist ($\tan(\varphi) = \varphi$ für kleine Auslenkungen) ergibt sich:

$$\varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{2 l}{G \pi r^4} M \quad \text{oder} \quad M = -\frac{\pi r^4}{2 l} G \varphi = -K_T G \varphi$$

K_T ist also eine Eigenschaft der Form des Stabes, $K_T \cdot G$ die torsionale Steifheit. Die Bewegungsgleichung heißt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{K_T G}{I \cdot \rho} \varphi = 0$$

Hier herrscht also nicht das Gleichgewicht der Kräfte, sondern der Drehmomente. $I \cdot \rho$ ist das Trägheitsmoment der Kreisbewegung, die Drehbeschleunigung φ'' ist $M/I \cdot \rho$. Diese Differentialgleichung ist gebaut wie die der Luftschwingung. Ihre Lösung ist wie die der longitudinalen Schwingung, die Wellengeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz:

$$c_T = \sqrt{\frac{G K_T}{I * \rho}} \quad (\text{Gl 2.20})$$

Für den runden Stab ist $K_T \cong I$, so daß $c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Da einige Stäbe zwar viel länger als breit sind, deshalb also eher als Stab, denn als Platte behandelt werden müssen, ihre Breite aber gegenüber ihrer Höhe groß ist, brauchen wir für diesen Fall die Torsionswellengeschwindigkeit. Sie lautet für Breite > 6-fache Höhe:

$$c_T = \frac{2 * h}{b} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \text{ mit } h \text{ für Höhe und } b \text{ für Breite} \quad (\text{Gl 2.21})$$

2.1.6 Axiale Schwingungen

Schließlich kann ein Stab auch noch axiale Schwingungen ausführen, also Biegeschwingungen, die sich in der Plattenebene entlangschlängeln. Ist der Stab sehr dünn, ist deren Abstrahlfläche sehr gering. Bei höheren Platten aber kann er im Spektrum gefunden werden.¹³ Seine Berechnung muß über die Biegewellengleichung des freien Stabes erfolgen, wobei jetzt die Breite als Höhe genommen werden muß. Die axiale Schwingung ist nicht mit der lateralen Auslenkung zu verwechseln, die bei der Platte bei longitudinalen und transversalen Schwingungen auftritt, den Poissonfaktor in die Wellengeschwindigkeit einführt und bei der Saite bereits besprochen wurde. Die laterale Kontraktion drückt die Ober- und die Unterseite des Stabes gleichzeitig nach außen, wenn ein Impuls durch den Stab läuft, die axiale Schwingung schlängelt sich durch den Stab, ist die Oberseite also gerade ausgelenkt, geht die Bewegung der Unterseite in Richtung Stabmitte.

¹³ Schneider 1997, S. 289 findet in dem Spektrum eines Saron Barung die ersten beiden Schwingungen der axialen Biegungen

2.1.7 Zusammenfassung der Schwingungsarten des Stabes

Im Prinzip müssen bei der Analyse eines Stabes neun Schwingungsarten errechnet werden, von denen die meisten aber unberücksichtigt bleiben können. Es sind drei Biegeschwingungen, drei longitudinale und drei torsionale, jeweils in den drei Raumebenen denkbar. In der Praxis ist die Biegewelle in der Längsrichtung die wichtigste und oft auch die einzige, die wahrgenommen wird. Ist eine Biegewelle in Querrichtung vorhanden, handelt es sich um eine Platte, die unten behandelt wird. Ist der Stab sehr dick, kann die axiale Biegewelle gehört werden. Von den longitudinalen ist die in Längsrichtung die einzig auftretende. Longitudinalwellen liegen in der Frequenz grundsätzlich höher, so daß die theoretischen Werte für die Quer- und Höhenrichtung über dem Hörbereich liegen. Die Torsalwellen sind ebenfalls in der Quer- und Höhenrichtung außerhalb des Hörbereichs. Sie können längs des Stabes auftreten und verringern mit abnehmender Höhe ihre Frequenz, so daß sie in den Bereich zunehmend niedrigerer Dämpfung fallen und hörbar sein können. Wird der Stab eine quadratische Platte, so ist deren erste Mode sogar eine reine Torsionsmode und kann so leicht berechnet werden. Bei Xylophonstäben, die aus Holz, sind ist die Längsseite immer in Richtung der Holzfaserung. Die Elastizität ändert sich nämlich erheblich, mit oder gegen die Faserrichtung. Fichtenholz, das u.a. für Gitarren-, oder Geigendecken verwendet wird hat z.B. einen Elastizitätsmodul entlang der Faser von $E_x = 850 \text{ km/mm}^2$ und entgegen der Faser $E_y = 55 \text{ km/mm}^2$.¹⁴ Dies entspricht einem Verhältnis von 15.45. Fletcher & Rossing geben für Sitka-Fichte das Verhältnis 12.8 an.¹⁵ Jede Holzart hat aber eine große Variationsbreite in Bezug auf ihre Elastizität und Dämpfung.¹⁶ Für Biegeschwingungen quer und längs zur Holzrichtung bei einem Xylophonstab der Maße 27cm/4.8cm, ergibt sich ein Frequenzverhältnis der Grundtöne nach Jahnel für Fichtenholz von 1 : 8.01. Die Querwellen würden also ab der dritten Oktave der Längswelle beginnen.¹⁷ Dies ist sehr hoch. Dazu kommt noch, daß die Dämpfung frequenzabhängig ist. Die interne Dämpfung von Fichte ist zwar im Hörbereich

¹⁴ Jahnel 1986, S.62

¹⁵ Fletcher & Rossing, 1999, S. 88.

¹⁶ Schaubild der Variationsbreite von gemessene Dämpfungswerten für Fichte in Güth 1995, S. 41

¹⁷ Hier wird die ungestörte Superposition angenommen, weil es sich noch eher um einen Stab als um eine Platte handelt. Zur Modenkopplung siehe im Kapitel Platten

annähernd unabhängig von der Frequenz,¹⁸ aber die Abstrahlung nimmt bei allen Instrumenten mit zunehmender Frequenz stark zu, so daß die höheren Töne zuerst verklingen.¹⁹

Die ausführliche Darstellung der Schwingungsmöglichkeiten an dieser Stelle hängt mit dem Thema Einschwingen zusammen. Gerade höhere Moden, die schnell verklingen, könnten aber natürlich erheblich zum Klangeindruck des Einschwingens beitragen. Beispiele dafür sind unten angeführt.

2.1.8 Unregelmäßigkeiten im Stab

2.1.8.1 große Höhe

Ist der Stab nicht ideal dünn, dann darf nicht die Euler-Bernoulli-Gleichung benutzt werden, sondern die Timoshenko-Methode. Diese berücksichtigt, daß die transversale Stabauslenkung nicht genau in der Z-Achse liegt, sondern einem Kreisbogenausschnitt folgt, der allerdings eine sehr kleine Krümmung hat, so daß er normalerweise vernachlässigt wird. Es gibt also auch eine kleine Auslenkung in Richtung der x-Achse, die ebenfalls zur Rückstellkraft beiträgt, die Rotationsträgheit.

Außerdem wird der Querschnitt des Balkens bei der Auslenkung nicht nur auseinandergezogen und gequetscht, sondern er erfährt auch eine leichte Scherung um die neutrale Achse. Die Scherung entspricht der Torsion, wobei diese hier aber Teil der transversalen Auslenkung ist.

Beide Phänomene gehen in die Timoshenko - Gleichung ein, die zu der alten Rückstellkraft die beiden neuen Elemente hinzufügt. Die Rotationsträgheit nimmt mit der Masse zu, und die Frequenzen werden dadurch etwas erniedrigt (die höheren mehr als die niedrigeren, so daß auch die Frequenzverhältnisse verändert werden).

¹⁸ Fletcher & Rossing 1999, S. 722. Auch wurde gefunden, daß die Dämpfung von Fichtenholz nachläßt, wenn das Holz über 5 Stunden in Schwingung gehalten wird, etwas das Musiker als ein eingeschwungenes Instrument, das richtig warmgespielt ist bezeichnen würden.

¹⁹ Fletcher & Rossing 1999, S.53ff

Auch die Scherung erniedrigt die höheren Frequenzen. Orduña-Bustamante geben für drei Moden des Stabes die theoretischen Werte einmal für die Euler-Bernoulli und die Timoshenko-Methode und einmal die Messungen zweier Experimente wieder:

Mode:	1,1	1,2	1,3
Bernoulli-Euler	1.00	2.76	5.40
Timoshenko	1.00	2.71	5.15
Messung Rossing ²⁰	1.00	2.71	5.15
Messung Ord.-Butama.	1.00	2.70	5.16

Tab. 1: Vergleich der relativen Frequenzen für Stäbe mit und ohne (nur Bernoulli-Euler) Berücksichtigung der Dicke.

2.1.8.2 Kompliziertes Flächenträgheitsmoment

Für einfache Stabformen ist das Flächenträgheitsmoment einfach zu berechnen. Will man eine allgemeine Formel, so berechnet man den Trägheitsradius K , welcher das Flächenträgheitsmoment I pro Gesamtfläche A ist. In Gl. 2.9 wird angenommen, daß die neutrale Achse in der Mitte des Stabes liegt und man nur noch über die Fläche integrieren muß. Liegt aber ein komplizierterer Querschnitt vor, so muß der Trägheitsradius neu berechnet werden. Hier sei als Beispiel eine balinesische Gender dasa (also Gender mit 10 Platten)²¹ genommen. Ihre Form findet sich bei einigen Genders und Sarons des javanischen Gamelan.²² Sie ist trapezförmig:

²⁰ Rossing 1976.

²¹ Mc Phee, 1966, S.??

²² New Grove, 1980 Band 9, S. 176.

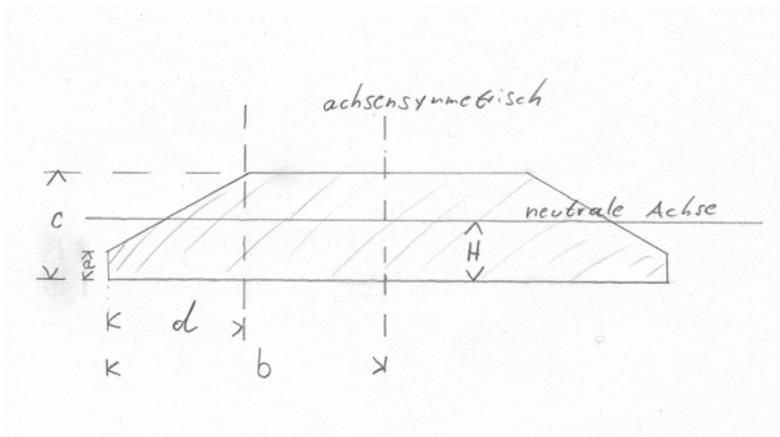


Abb.: 2.3: Seitenansicht der Genderplatte.

Da sie symmetrisch ist, wird erst nur der linke Teil berechnet. Die vier Maße sind a und c für die Höhe und d und b für die Breite. Die neutrale Achse ist hier aber nicht in der Mitte, sondern auf einer Höhe H, die noch nicht bestimmt ist. Um sie zu bestimmen, wird die allgemeine Gleichung für diese Höhe angegeben. Sie ist wie die Gleichung für das Flächenträgheitsmoment, nur steht anstatt z^2 die Formel $(z-H)^2$. Es wird also über und unter der noch nicht bekannten Höhenlinie H integriert, wobei die Achsen y und z die Längs- und die Höhenrichtung sind.

$$\text{Solve} \left[\int_0^d \int_0^{a + \left(\frac{c-a}{d}\right)y} (z-h) dz dy + \int_d^b \int_0^c (z-h) dz dy == 0, h \right] \quad (2.22)$$

$$\left\{ \left\{ h \rightarrow -\frac{-3bc^2 - a^2d - acd + 2c^2d}{3(2bc + ad - cd)} \right\} \right\}$$

Betrachten wir nur die linke Seite des achsensymmetrischen Querschnitts, so ist diese in zwei Teile geteilt: den ersten ansteigenden mit $z(y) = a + ((c - a) / d) y$ und den mit gleichbleibender Höhe c. So ist Gl. 2.1.28 die Addition zweier Doppelintegrale. Das jeweils erste Integral über die Breite, einmal von $y=0$ bis $y=d$ und das zweite von $y=d$ bis $y=b$. Entsprechend das jeweils zweite Integral über erst die veränderliche Höhe und dann über die gleichbleibende Höhe c. Das Ergebnis ist also die Höhe der neutralen Achse bei den jeweiligen Werten für a, b, c, d.

Setzen wir das H in die Formel für das Flächenträgheitsmoment ein, multiplizieren es mit zwei, da wir ja nur die erste Hälfte berechnet haben und teilen es durch die Fläche, dann erhalten wir den Trägheitsradius:

Simplify[

2

$$\left(\int_0^d \int_0^{a+\frac{c-a}{d}y} \left(z + \frac{-3bc^2 - a^2d - acd + 2c^2d}{3(2bc + ad - cd)} \right)^2 dz dy + \int_d^b \int_0^c \left(z + \frac{-3bc^2 - a^2d - acd + 2c^2d}{3(2bc + ad - cd)} \right)^2 dz dy \right) / \left((b-d)c + d*a + \frac{(c-a)d}{2} \right)$$

$$K^2 = \frac{6b^2c^4 + 6bc(a^3 - a^2c + ac^2 - c^3)d + (a-c)^4d^2}{18(2bc + (a-c)d)^2} \quad (2.23)$$

Diese allgemeine Formel für das Trapez verkleinert erwartungsgemäß das K. Für den unten analysierten Stab mit den Maßen $a = 0.002$; $c = 0.006$; $d = 0.016$; $b = 0.03$; ist

$K_{\text{Trapez}} = 0.00165$. Würde man ihn als Rechteck mit Höhe c annehmen wäre es

$K_{\text{Rechteck}} = 0.00173$.

2.1.8.3 Veränderlicher Querschnitt entlang des Stabes

Ändert sich der Querschnitt entlang des Stabes, so wird die Berechnung der Eigenwerte sehr schwierig. Dies deshalb, weil die Frequenz vom Flächenträgheitsmoment abhängt und nicht nur wie bei der longitudinalen Schwingung durch den Stab von dessen Länge, Dichte und Elastizitätsmodul. Einmal wird die Welle mit veränderlichem Querschnitt langsamer und schneller, zum anderen paßt die Wellenlänge nicht in die Länge des Stabes. Eine Berechnung der Frequenzen des Stabes kann nur über eine numerische Näherungslösung erfolgen. Orduña-Bustamante tut dies über das Richardson Verfahren für das Xylophon mit einer kreisrunden Aussägung auf der Unterseite.²³ Diese Aussägung ist das gängige Verfahren, um bei Orff-Xylophonen die Obertöne in harmonische Frequenzverhältnisse zu bringen. Diese münden dann meist in der Abstimmung der Grundfrequenz und der ersten beiden Obertöne, der erste zwei Oktaven über dem Grundton, der zweite wieder eine Oktave höher zwischen der großen und kleinen Terz. Diese Tonhöhen wurden von Hörern als interessant empfunden.²⁴ Einige amerikanische Xylophone werden auch so abgestimmt, daß die zweite Mode im

²³ Orduña-Bustamante 1991

²⁴ Meyer & Borg, 1982

Verhältnis 1:3 zum Grundton steht. Dann ist aber die Gefahr gegeben, daß bei einem Anschlag, der den Grundton nicht richtig schwingen läßt, das Ohr den zweiten Partialton, also die Quinte als Grundton empfindet. Dies kann bei einer Abstimmung von 1:4 nicht passieren. Die Idee ist ja gerade, daß die Fusion der Obertöne zu einem Klang mit einer Tonhöhe, die der westliche Hörer von Instrumenten gewohnt ist, erreicht wird. Daher muß exakt gearbeitet werden, weil eine kleine Abweichung der zweiten Oktave wieder zu einer Aufspaltung des Klanges führen würde.

Es zeigt sich nun, daß um die gewollten Verhältnisse zu erreichen, folgende Fräsungen an der Unterseite des Xylophonstabes vorgenommen werden müssen.²⁵ Eine Fräsung in der Mitte des Stabes erniedrigt den ersten und dritten Teilton. Bei einer seitlichen Fräsung wird der zweite erniedrigt, der erste und dritte aber nur geringfügig beeinflußt. Dies liegt daran, daß eine Fräsung an der Stelle, an der eine Mode einen großen Schwingungsbauch hat, sich stärker auswirkt, als dort, wo sie einen Knoten hat. Bei Xylophonen wird eine starke Fräsung bevorzugt, da die Fräsung die Tonhöhe um bis zu 400% reduziert. Tiefe Stäbe müssen daher nicht lang sein. Es ist aus diesem Grund wichtig, nach einer ersten Fräsung, die die Grundfrequenz absenkt, eine zweite anzubringen, um den 2. und 3. Partialton zu stimmen. Borg erstellte dazu Schaubilder, die an jedem Ort des Stabes den Einfluß einer Fräsung auf die ersten vier Partialtöne zeigen und zwar einmal ausgehend vom ganzen Stab, dann aber auch vom bereits vorgefrästen. Man muß sich bei diesen Schaubildern also vorstellen, daß der oben gezeigte Stab eine kreisrunde Ausfräsung hat, die von links nach rechts läuft und so andere Werte für die Oberschwingungen erzeugt.

²⁵ Borg, 1983, X. 48ff

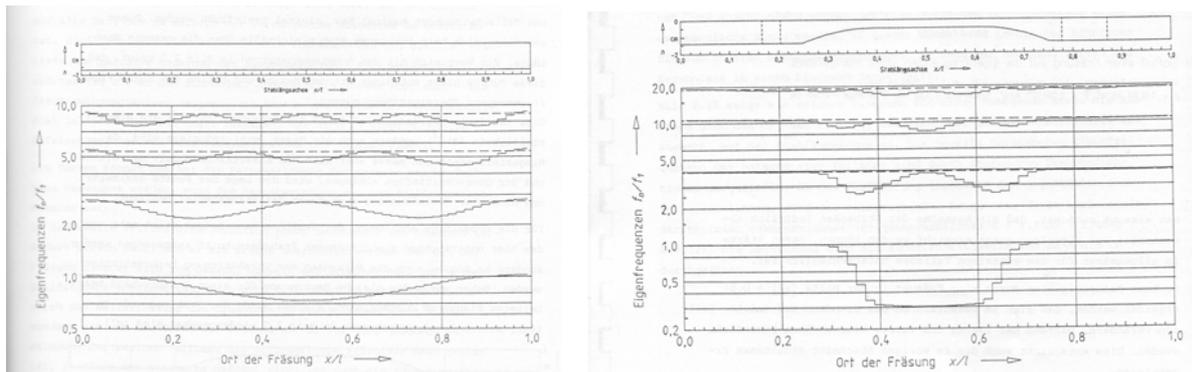


Abb. 2.4: Einfluß einer kreisrunden Fräsung auf die ersten vier Obertöne in Abhängigkeit vom Ort der Fräsung a) beim originalen b) beim bereits bearbeiteten Stab²⁶

In Abb. 2.4b zeigt sich, daß der zweite Teilton nicht verändert werden kann, ohne nicht auch den ersten mit zu beeinflussen. Jedoch kann der erste noch ein wenig abgesenkt werden, wenn man genau in der Mitte fräst. Es wird also der zweite Teilton exakt eingestimmt und dann durch eine leichte Fräsung in der Mitte der erste Teilton fein nachbearbeitet. Dieser Klangstab ist auch heute der meist gebräuchliche. Hier ist der dritte Teilton nicht abgestimmt.

Will man diesen ebenfalls abstimmen, so wird eine zweite Vorfräsung zu der in der Mitte vorgenommen: eine kleine am Rand zwischen Stabende und Auflagepunkt. Es zeigt sich, daß diese die Grundfrequenz eigentlich gar nicht und den zweiten Partialton nur leicht beeinflusst, daß aber, da an der Seite nur ein Amplitudenmaximum der dritten Oberschwingung vorhanden ist, diese bei einer späteren Erweiterung dieser Einkerbung sehr stark beeinflusst wird.

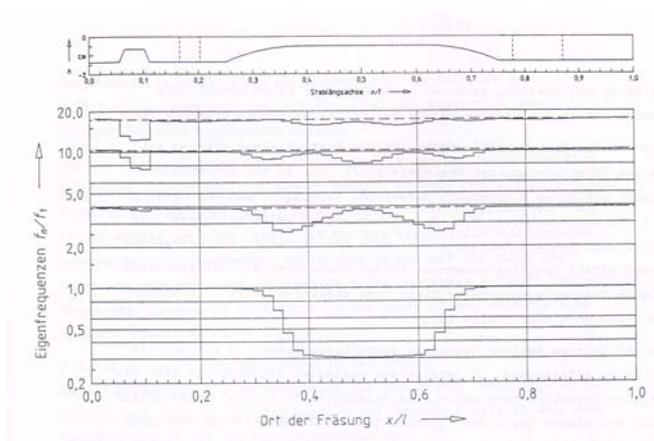


Abb. 2.5: Einfluß einer Einkerbung entlang des Stabes auf die ersten vier Partialtöne, wenn zwei Vorfräsungen vorhanden sind, eine in der Mitte und eine am linken Rand

²⁶ Borg 1985, S. 53f

Also wird nun von einem Stab ausgegangen, der in der Mitte und an der Seite vorgefräst ist. Dann wird der zweite Teilton eingestimmt, indem die Mitte entsprechend tief geschnitten wird. Er muß allerdings noch ein wenig zu hoch sein, damit die leichte Veränderung des dritten Teiltons ihn später nicht unter den Sollwert sinken läßt. Dann wird durch eine leichte Fräsung genau in der Mitte der Grundton auf den gewünschten Wert gebracht. Schließlich wird die kleine Vorfräsung an der Seite so lange vertieft, bis der dritte Teilton ebenfalls stimmt, in der Hoffnung, daß diese Bearbeitung den zweiten Teilton nicht zu sehr absinken läßt.

2.1.8.4 Stabeigenwerte für veränderlichen Querschnitt

Die Berechnung der Eigenwerte eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt kann durch das numerische Näherungsverfahren Runge-Kutta geschehen. Dabei wird willkürlich eine Frequenz angenommen und für diese ausprobiert, ob sie die gesuchte ist. Ausgehend von dieser willkürlich angenommenen Anfangsfrequenz in erst groben, dann feineren Frequenzschritten fortschreitend kann dann jede Eigenmode des Stabes gefunden werden.²⁷

Dazu wird der Balken in kleine Stücke zerlegt gedacht. Ausgehend von der Partialgleichung der transversalen Balkenschwingung für die Geschwindigkeit, das Biegemoment und die Kraft wird von Ort zu Ort die Änderung der Auslenkung berechnet. Und genau, wie man am Anfang eine Frequenz rät, nimmt man zu Beginn willkürlich eine Auslenkung und Geschwindigkeit am linken Rand des Balkens an und geht dann schrittweise durch den Balken bis man am anderen Ende herausgekommen ist.

Da die Frequenz nur geraten ist, sind die berechneten Biegelinien keine real existierenden. Kennt man aber die Auslenkung an den paar letzten Stellen des Balkens, dann kann man Biegemomente und Kräfte am Ende für diese zwei Fälle mit gemeinsamer, geratener Frequenz berechnen. Diese Biegemomente und Kräfte sind bei richtiger Frequenz Null, da am freien Ende eines Balkens kein rückstellendes

²⁷ Borg 1985, S. 16 und 116

Drehmoment und damit auch keine Kraft herrscht. Wird der Balken für jede Frequenz zweimal durchgerechnet und zwar zweckmäßigerweise mit den zwei Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1 \quad y_1'(0) = 0 \quad \text{und} \\ y_2(0) = 0 \quad y_2'(0) = 1 \end{aligned} \quad (\text{Gl 2.24})$$

wobei y die Auslenkung und y' die Steigung ist, dann gilt für das Stabende:

$$\begin{aligned} M(1) = C_1 * M_1 + C_2 * M_2 = C_1 * \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 * \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0 \\ F(1) = C_1 * F_1 + C_2 * F_2 = C_1 * \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2 * \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (\text{Gl 2.25})$$

mit $M(1)$ für das Biegemoment und $F(1)$ für die Querkraft beide am Stabende $x=1$. Diese sind die zweite bzw. dritte Ableitung der Auslenkung nach der Stablänge. Sind also die letzten Auslenkungen bekannt, dann können die Werte für M_1 , M_2 , F_1 und F_2 berechnet werden. C_1 und C_2 sind die Integrationskonstanten. Diese bleiben bei jeder Ableitung unberührt, so daß sie auch in der Superposition der Auslenkung stehen:

$$y = C_1 * y_1 + C_2 * y_2 \quad (\text{Gl 2.26})$$

Gl. 2.21 ist also nur dann erfüllt, wenn wir die richtige Frequenz gewählt haben. Ist dieses Gleichungssystem 2.21 erfüllt, ist dessen Determinante gleich Null. Wir beginnen also bei einer Grundfrequenz, rechnen für die zwei Anfangsbedingungen y_1 , y_1' und y_2 , y_2' den Stab durch, erhalten am Stabende $x=1$ die Biegemomente und Querkräfte M_1 , M_2 , F_1 und F_2 und berechnen die Determinante nach

$$\det = M_1 * F_2 - M_2 * F_1 = 0 \quad (\text{Gl 2.27})$$

Geht diese zwischen zwei Versuchen durch Null, so ist die dann angenommene Frequenz ein Eigenwert des Stabes.

Kennt man nun M_1 , M_2 , F_1 und F_2 für die richtige Frequenz, dann können C_1 und C_2 berechnet werden, da wir in Gl. 2.21 zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten haben. Diese Konstanten C_1 und C_2 werden nun in 2.22 eingesetzt um die Biegelinie auch graphisch sichtbar zu machen.

Die Näherungslösung durch das Runge-Kutta-Verfahren, mit dem für gegebene Anfangsbedingungen die Auslenkungen am Stabende berechnet werden, könnte also auch durch ein anderes ersetzt werden. Es ist hier nicht der entscheidende Rechenschritt. Doch da die dieser Arbeit beigelegte Diskette mit dem Programm für die Eigenwerte dieses Verfahren benutzt, sei es hier dargestellt. Runge-Kutta kann nur mit Partialgleichungen zweiter Ordnung umgehen, so wird die Ursprungsgleichung in zwei aufgeteilt. Gl. 2.8 (mit y anstatt Y)

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = \frac{\omega^2 \rho}{E K^2} Y$$

wird aufgeteilt einerseits in ein Biegemoment, daß ja durch die Krümmung, also

durch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ verursacht und die zweite Ableitung der Auslenkung nach dem Weg ist. Andererseits in die zweite Ableitung dieses Biegemoments:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{M}{E I} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\omega^2 \rho A Y \quad \text{mit} \quad K^2 = \frac{I}{A}$$

Hier ist K^2 wieder zu I/A geworden, damit mit veränderlichem Querschnitt gerechnet werden kann (I =Flächenträgheitsmoment, A =Querschnittsfläche). M ist das Biegemoment.

Das Runge-Kutta Verfahren wurde ursprünglich für Differentialgleichungen erster Ordnung erfunden. Nyström erweiterte es auf die zweiter und höherer Ordnung.²⁸ Das Prinzip bleibt aber dasselbe: Man unterteilt jeden kleinen Schritt dx in vier Teilschritte und berechnet deren Werte, die mit $k(I)$, $k(II)$, $K(III)$ und $k(IV)$ bezeichnet werden. Deren komplizierte Addition führt schließlich zu k , dem

²⁸ Zurmühl, 1961 S. 420 ff

Auslenkungszuwachs des Schrittes dx .²⁹ Da bei Borg nur die Gleichungen angegeben sind und nicht die zur wirklichen Rechnung nötige Reihenfolge, sei diese hier wiedergegeben.^{30 31}

Da die Differentialgleichung in zwei aufgespalten wird und diese verschränkt verrechnet werden, haben die k einmal die Indizes y für die Auslenkung und M für das Biegemoment. Außerdem braucht man zwei Größen u und v , die den Biegungs- und den Biegemomentenzuwachs für jedes dx angeben:

$$u = \frac{\partial y}{\partial x} * dx \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial M}{\partial x} * dx$$

Da die Größe $A * \rho * \omega^2$ häufig vorkommt, nennen wir sie b . Weiter sind die Indizes 0 und 1 die Bezeichnungen dafür, ob es der alte oder der neue Wert ist. Sie stehen nicht für genaue Ortswerte, denn der ganze Gleichungsapparat, der nun folgt, ist für jeden kleinen Schritt dx zweimal anzuwenden, da es zwei Anfangsbedingungen gibt. Daraufhin ist er so lange zu wiederholen, bis man am Balkenende angelangt ist. Dies sind bei dem unten untersuchten Xylophonstab von 31 cm für eine gute Präzision 3100 Schritte in Intervallen von .1 mm. Dazu benötigt der Computer ca. 0.5 Sekunden, so daß bei einer Suchschrittweite von 10 Hz eine erste grobe Näherung einer Eigenfrequenz des Stabes in weniger als einer Minute gefunden werden konnte. In der Praxis ist das zeitraubende des Verfahrens die Programmierung der Querschnittsveränderung.

²⁹ Zur Herleitung gibt Zurmühl an: Willers, F.A.: Methoden der praktischen Analysis, Berlin 1957 S. 362 und Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955, S. 59-74

³⁰ Für diesen Fall der Differentialgleichung vierter Ordnung siehe Zurmühl 1961 S. 430f

³¹ Die systematische Anordnung bei Borg 1985, S. 116

Hier nun die Gleichungen:

$$k_{m1} = -b * y_0 * \frac{dx^2}{2}$$

$$k_{y1} = -\frac{M_0}{E I} \frac{dx^2}{2}$$

$$k_{m2} = -b \left(y_0 + \frac{u_0}{2} + \frac{k_{y1}}{4} \right) * \frac{dx^2}{2}$$

$$k_{y2} = -\frac{\left(M + \frac{v_0}{2} + \frac{k_{m1}}{4} \right)}{E I} * \frac{dx^2}{2}$$

$$k_{m3} = -b * (y_0 + u_0 + k_{y2}) * \frac{dx^2}{2}$$

$$k_{y3} = -\frac{(M_0 + v_0 + k_{m2})}{E I} * \frac{dx^2}{2}$$

$$k_m = (k_{m1} + 2 * k_{m2}) / 3$$

$$k'_m = (k_{m1} + 4 * k_{m2} + k_{m3}) / 6$$

$$k_y = (k_{y1} + 2 * k_{y2}) / 3$$

$$k'_y = (k_{y1} + 4 * k_{y2} + k_{y3}) / 6$$

$$v_1 = v_0 + 2 * k'_m$$

$$u_1 = u_0 + 2 * k'_y$$

$$M_1 = M_0 + v_0 + k_m$$

$$y_1 = y_0 + u_0 + k_y$$

Am Anfang der Berechnung über den gesamten Balken wird M und v Null gesetzt, weil am Anfang ja ebenfalls ein freies Ende ist und damit Biegemoment und Querkraft gleich Null sind. Wichtig ist die Verschränkung der k - Werte für y und m, weil die aufgespaltene Differentialgleichung ja eben verkoppelt berechnet werden muß. Die neuen Werte v_1 , u_1 , m_1 und y_1 werden nun zu den alten Werten v_0 , u_0 , m_0 und y_0 und der nächste Schritt kann berechnet werden.

Kurz vor Ende speichert man nun die u-Werte, um aus ihnen das Biegemoment und die Kraft am Ende zu berechnen. (Man könnte auch die Auslenkung nehmen, doch muß man bei der Steigung u nur die erste und zweite Ableitung bilden, um zu M und F zu kommen, nicht die zweite und dritte, wie wenn man von der Auslenkung ausgehen würde. Es sind also rein praktische Gründe).

Nun müssen wir feststellen, ob die von uns probierte Frequenz richtig ist. Dazu setzen wir in Gl. 2.22 ein und berechnen die Determinante. Sie muß Null werden.

Dies wird beim ersten Versuch nicht der Fall sein. Wir bekommen also einen Wert, der größer oder kleiner als Null ist. Daraufhin erhöhen wir die Frequenz und rechnen den ganzen Balken noch einmal, in der Hoffnung, daß die Determinante gegen Null geht. Tut sie das, wird sie auch einmal den Nulldurchgang passieren. Da wir mit endlicher Schrittweite rechnen, wird sie Null nie erreichen, aber bei einem Schritt kleiner beim nächsten größer als Null sein (oder umgekehrt). Die Interpolation dieser zwei Frequenzen vor und nach dem Nulldurchgang ist dann eine der von uns gesuchten Eigenfrequenzen des Stabes.

Und wie oben besprochen kann nun auch die Biegelinie gezeichnet werden.

2.1.8.5 Beispiel für einen Xylophonstab

Ein Xylophonstab aus Palisander mit einem einzelnen Resonator wurde theoretisch berechnet und ausgemessen. Der Stab ist mit der Tonhöhe C1 bezeichnet und hat die Maße Länge= 0.31m, Breite= 0.036m, Höhe= 0.021m. Da der Stab oben und unten abgerundet ist und seine minimale Höhe .020m, seine maximale Höhe 0.022m beträgt, wurde die Mitte angenommen.

Er hat eine Fräsung in der Mitte, jedoch keine am Rande, so daß angenommen werden kann, daß der dritte Teilton nicht einzeln abgestimmt wurde. Die Fräsung zeigt aber in der Mitte des Stabes eine kleine Kuhle, die wohl zur Feinabstimmung des Grundtons diente.

Zur Berechnung der Fräsung wurde diese in 5 Teile unterteilt: die zwei ansteigenden Bögen von links und rechts, die zwei darauf folgenden gleichbleibend flachen Stücke und das Mittelstück, das wie gesagt noch etwas tiefer ist. Dieses ist zwar irgendwie rund, wurde hier aber als rechteckige Vertiefung programmiert, da ihre tiefste Stelle 1 mm tiefer als die Umgebung ist. Allerdings führen rechteckige Fräsungen dazu, daß keine reine BiegeWellen vorliegen.³² Die Kuhle ist aber so

³² Borg 1985, S. 36

klein, daß dies zu vernachlässigen ist. Des weiteren fand Borg für seine Messungen Abweichungen zu der Bernoulli-Euler-Gleichung der ersten Partialtöne von:

0 %, -7,95 %, -16,83%, -25,78%, -34,49 %³³

Dies führt er auf die vernachlässigte Rotationsträgheit und Scherungseigenschaften gerade bei dicken Stäben zurück. Außerdem fand er schwankende Werte des Elastizitätsmoduls von Stab zu Stab und auch innerhalb des Stabes Sprünge aufgrund von Astlöchern und dergleichen. Er schließt, daß daher eine genaue Berechnung der Eigenfrequenzen von Holzstäben nicht möglich ist.

Die Ausfräsung sieht also wie folgt aus:

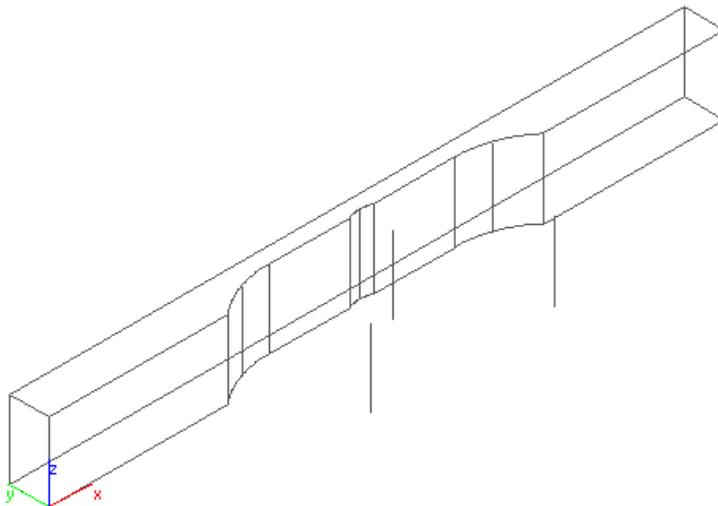


Abb. 2.6: Xylophonstabes mit Tonhöhe C1

Die beiden gekrümmten Aufgänge wurden mit Sinuskurven berechnet, die mit verschiedenen Potenzen gestaucht wurden, so daß der Krümmungsbeginn bei $\varphi = 0$ und das Krümmungsende bei $\varphi = \pi/2$ ist.

Der Stab wurde angeschlagen und mit 96 kHz gesampelt. Die FFT ergab die Werte für die Partialtöne, die Rechnung die Werte für die verschiedenen Krümmungen:

³³ Borg 1985, S. 23

Gemessen

f1	260,1 Hz	
f2	1055,0 Hz	24,1 cent + 1 Okt
f3	2658,1 Hz	423,9 cent + 3 Okt
f4	4954,6 Hz	302,0 cent + 4 Okt
f5	6496,8 Hz	771,1 cent + 4 Okt
f6	8198,1 Hz	-26,2 cent + 5 Okt
f7	10 324,3 Hz	373,0 cent + 5 Okt

Sin

f1	263,1 Hz	
f2	1050,4 Hz	-3,5 cent + 2 Okt
f3	2912,3 Hz	561,5 cent + 3 Okt
f4	5814,2 Hz	558,4 cent + 4 Okt
f5	8279,1 Hz	-29,7 cent + 5 Okt
f6	10 688,2 Hz	413,1 cent + 5 Okt

Sin^{^7}

f1	261,9 Hz	
f2	1030,9 Hz	-27,9 cent + 2 Okt
f3	2808,2 Hz	507,0 cent + 3 Okt
f4	5644,4 Hz	515,7 cent + 4 Okt
f5	8245,5 Hz	-28,2 cent + 5 Okt
f6	10 691,6 Hz	421,6 cent + 5 Okt

Sin^{^4}

f1	259,6 Hz	
f2	997,6 Hz	-69,3 cent + 2 Okt
f3	2648,0 Hz	420,0 cent + 3 Okt
f4	5368,9 Hz	444,3 cent + 4 Okt
f5	8143,1 Hz	-34,5 cent + 5 Okt
f6	10 712,2 Hz	440,2 cent + 5 Okt

Tab. 2: Einfluß der Krümmung an der Stabunterseite auf das Obertonspektrum. Der Stab wurde längs in 7 Abschnitte unterteilt: $l_1=8,2$ cm bis zur Krümmung, $l_2=3,0$ cm Krümmung, $l_3=3,7$ cm gleichbleibend dünn, $l_4=1,2$ cm zusätzliche Ausfräsung genau in der Mitte. Da der Stab symmetrisch ist folgt dann wieder l_3 , l_2 und l_1 . Die Krümmung wird als Sinuskurve von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$ beschrieben, die mit unterschiedlichen Potenzen ihre Krümmung verändert. Die Centzahlen beziehen sich alle auf den Grundton.

Die theoretische Tonhöhe für C_1 liegt bei 261,6 Herz, die der Stab nicht ganz erreicht. Der erste Oberton, der ja perfekt auf der zweiten Oktave liegen sollte, ist einen Viertelton zu hoch. Es wurde bei starkem Anschlag auch ein Pitch - Glide festgestellt³⁴: Die Tonhöhe sank von 281,7 auf 257,8 Herz ab.

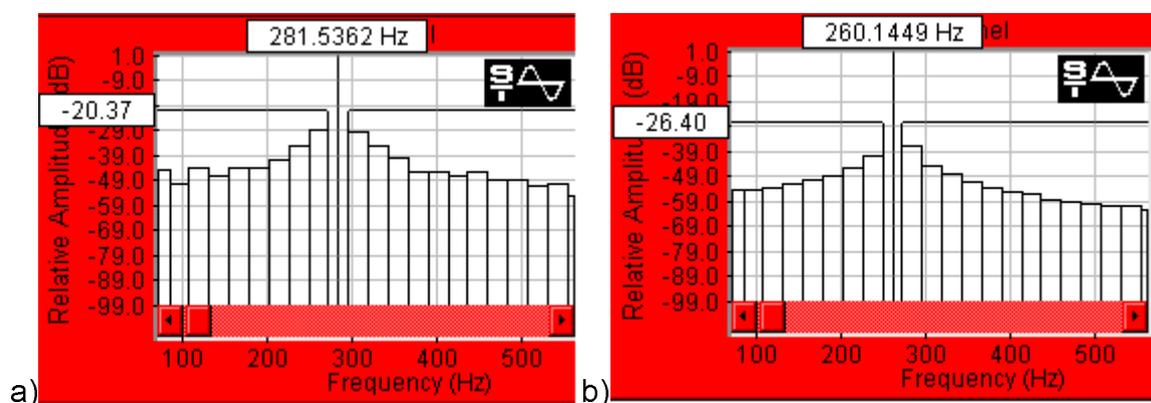


Abb. 2.7: Grundton des Xylophonstabes C1 a) 20ms und b) 100ms nach dem Anschlag. Die Grundtonhöhe fällt um 21,4 Herz, was auch deutlich zu hören ist.

³⁴ Fletcher 1985 beschreibt dasselbe Phänomen bei chinesischen Gongs, die für die Pekingoper eingesetzt und für den westlichen Hörer akustisch wohl am ehesten mit ihr identifiziert werden. Die Ursache ist die Nichtlinearität des Einschwingvorgangs, bei dem die Rückstellkraft nicht mehr linear zur Auslenkung ist.

In Tab. 2 ist zuerst auffällig, daß es einen gemessenen Oberton gibt, der keine Biegewelle ist. Das Spektrum weist insgesamt viele kleinere Peaks auf, die für den Einschwingvorgang etwas beitragen, aber sehr schnell verschwinden. f_1 und f_2 sind für alle Fälle ähnlich, f_6 und f_7 der gemessenen Werte entspricht f_5 und f_6 der Sinuswerte. Diese folgen einem interessanten Muster. Während bei den tieferen Frequenzen die Partialtöne niedriger werden, wenn die Hochzahl des Sinus abnimmt, werden die höheren Partialtöne mit kleiner werdendem Sinus relativ wieder größer.

Da f_3 , f_4 und f_5 der Messung f_3 und f_4 der Rechnungen schlecht zugeordnet werden kann, f_6 und f_7 der Messung aber wieder f_5 und f_6 der Rechnungen entspricht könnte es sich bei f_3 , f_4 und f_5 der Messung um Kombinationsmoden längs und quer des Stabes handeln. In diesem Fall müßte eine Querwelle existieren, die mindestens einen Schwingungsknoten hat.

Im weiteren sind f_3 , f_4 und f_6 der Rechnung fast Oktaven. Dies ist bei der reinen Sinuskrümmung am besten gegeben. Die Messung liefert wegen der Zusatzfrequenz im mittleren Bereich keine so schönen Oktavwerte. Die Frequenz F_5 der Rechnung liegt fast eine Quint über f_4 (611,9 cent bei der reinen Sinuskrümmung), f_3 bis f_1 sind also fast wie ein eigener Obertonaufbau mit f_3 als Grundton! Ein ähnliches Phänomen tritt bei Chimes auf, bei denen der Grundton gar nicht existiert und deren 4., 5. und 6. Partialtöne vom Ohr als 2:3:4 angesehen werden.³⁵ Beim Xylophonstab wäre der Grundton aber in der Tat vorhanden. Dieser stünde dann im Widerspruch zu dem eigentlichen Grundton, welcher als Pitch Class eine Quarte tiefer liegt. Einen ähnlichen Obertonaufbau finden wir später noch bei den nepalesischen Klangschalen. Die einzelnen Töne der Klangschale jedoch klingen länger nach und werden auch schlecht fusioniert, die Obertöne können dort einzeln gehört werden. Beim Xylophonstab klingen gerade die sehr hohen Obertöne schnell ab. Die Identifikation des gestimmten Xylophons als Perkussionsinstrument muß allein vom Einschwingvorgang herkommen. Der hier vorliegende Stab ist aber im dritten Oberton nicht gestimmt. Idealerweise sollte er zwischen kleiner und großer Terz

gestimmt sein, hier liegt er zwischen großer Terz und Quart. Der Stab weist auch keine seitliche zweite Fräsung auf.

³⁵ Fletcher & Rossing 1999, S. 641. Dies wegen der Moden des freien Stabes von $(2n+1)^2$. Hier $9^2:11^2:13^2 = 81:121:169 \cong 2:3:4$.

2.2 Platten

Platten treten in der Musik des christlichen Abendlandes als Schallerzeuger selten auf. Das Xylophon ist eher als Stab denn als Platte zu betrachten. Das Glockenspiel von Spielmannszügen wäre eine fast ideale Platte, deren Obertöne aber so schnell verklingen, daß eigentlich nur der Grundton gehört wird¹ (anders der Einschwingvorgang, in dem die höheren Partialtöne entscheidend sind). Schwingende Platten sind aber natürlich als Resonanzböden überall vertreten, die Geige, die Gitarre, das Klavier Sie alle haben schwingende Platten, die als Abstrahlflächen benötigt werden und eben keinen gleichförmigen Frequenzgang haben, also die Eigenschaften des Instruments, und damit auch seine Güte ausmachen.

In außereuropäischen Musikkulturen kommen Platten häufiger vor und da gerade im ostasiatischen Raum: indonesische Xylophone (Gender, Saron), chinesische Gongs u.ä. Die Entscheidung, ob es sich bei dem jeweiligen Instrument um einen Stab oder eine Platte, um eine Schale oder eine runde Platte handelt, hängt vom Einfluß der Änderung auf den Gesamtklang ab: ist die Abweichung von der einfach Lösung entscheidend oder vernachlässigbar? Denn Platten und Schalen (oder gar Glocken) sind viel schwieriger zu berechnen als Stäbe, wobei die frei schwingende Platte - der häufigste Fall - am schwierigsten ist.

Rayleigh zeigt, daß eine freie Platte nicht wie ein freier Stab behandelt werden darf. Die Poisson-Kopplung (s.u.) wirkt nämlich von der Längs- auf die Querrichtung und ebenfalls von der Quer- auf die Längsrichtung. Die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} ,$$

können nicht gleichzeitig erfüllt sein. Es kann keine Lösungsfunktion $z(x,y)$ geben, die gleichzeitig zweimal nach y abgeleitet $-\mu$ mal z (nach x abgeleitet) und umgekehrt z nach x abgeleitet $-\mu$ mal z (nach y abgeleitet) erfüllt, außer μ ist Null. Wird die Platte

¹ ebenda, S. 623

gebogen, dann wird die Fläche über der neutralen Achse gedehnt. Sie wird versuchen, dagegen anzugehen und sich seitlich etwas zusammenziehen. Die Fläche unter der neutralen Achse wird gestaucht und wird dadurch seitlich etwas herausgequetscht. Also fängt die Platte an, sich auch in der anderen Ebene zu verbiegen. Die beiden Biegungen sind also untrennbar miteinander gekoppelt, was die Berechnung so schwierig macht. Wir wollen daher nur die Ergebnisse angeben.

2.2.1 quadratische Platte

Für den Fall einer quadratischen Platte gilt für die Grundschwingung: sie besteht aus jeweils einer Knotenlinien in X- und Y-Richtung, die beide durch den Mittelpunkt gehen. Also haben wir vier wieder quadratische Flächen, die sich zu ihren seitlichen Nachbarn gegenphasig bewegen. Die Mode ist also eine Torsionsmode und daher über die Torsionsgleichung berechenbar:

$$f_{1,1} = \frac{c_T}{2l} = \frac{hc_L}{l^2} \sqrt{\frac{1-\mu}{2}} \quad 2$$

Hier ist l die Seitenlänge und h die Höhe der Platte. μ ist wieder die Poissonkonstante und c_L und c_G die longitudinale und torsionale Geschwindigkeit, die sich ja über den Poisson-Faktor ineinander umrechnen lassen (s.u.). Wegen des Prinzips der Symmetrie beschreibt Rayleigh die quadratische Platte als der runden ähnlich, weil diese ebenfalls eine Mode hat, bei der zwei senkrechte Linien durch den Mittelpunkt gehen.³ Auch die Ringmoden sind bei der quadratischen Platte zu finden, z.B. die (2,0)+(0,2) Mode. Schneider nimmt die theoretischen Werte für eine freie runde Platte, um das Spektrum einer rechteckigen javanischen Genderplatte zu beschreiben. Er findet die Frequenzrelationen für die runden Plattenmoden (0,1), (1,1), (3,0) und (4,0), also für 1, 3 und 4 Querlinien durch die Mitte und 0 oder 1 Kreise in Bezug auf die Frequenz der (2,0) Mode.⁴

² Fletcher & Rossing 1999, S. 84

³ Rayleigh 1945, Bd. 1, S. 380f

⁴ Schneider 1997, S. 265. Die Relationen in Tab. 3, S. 213 sind mit $\mu=0.25$ berechnet

Die erwähnte Kreismode ist aber eigentlich ein Phänomen, das nur bei der quadratischen Platte auftritt. Sie ist eine der zwei entarteten Moden $(2,0) - (0,2)$ und $(2,0) + (0,2)$. Da die Platte quadratisch ist, ist die Frequenz von $(2,0) = (0,2)$. Nun können aber zwei Fälle auftreten: wenn die Längsbiegewelle in der Plattenmitte nach *oben* geht, dann auch die Querbiegewelle in der Plattenmitte nach oben. Oder sie geht eben nach unten. Im ersten Fall biegt sich die Mitte doppelt so stark, und die insgesamt Schwingungsform ist ein Kreis. Im zweiten Fall löschen sich die Schwingungen in der Mitte aus und die insgesamt Bewegung wird ein Kreuz. Sie werden deshalb als Kreuz- oder Kreismoden bezeichnet. Auch haben sie dann verschiedene Frequenzen. Dies hängt wohl an der unterschiedlichen Flächengröße der zwei Moden. Eine Entartung tritt nämlich wieder bei den $(3,1) - (1,3)$ und $(3,1) + (1,3)$ Moden auf, nicht aber bei $(2,1)$ und $(1,2)$, die beide dieselbe Frequenz und für die gleich- und gegenphasige Bewegung dasselbe Gesamtmuster haben.

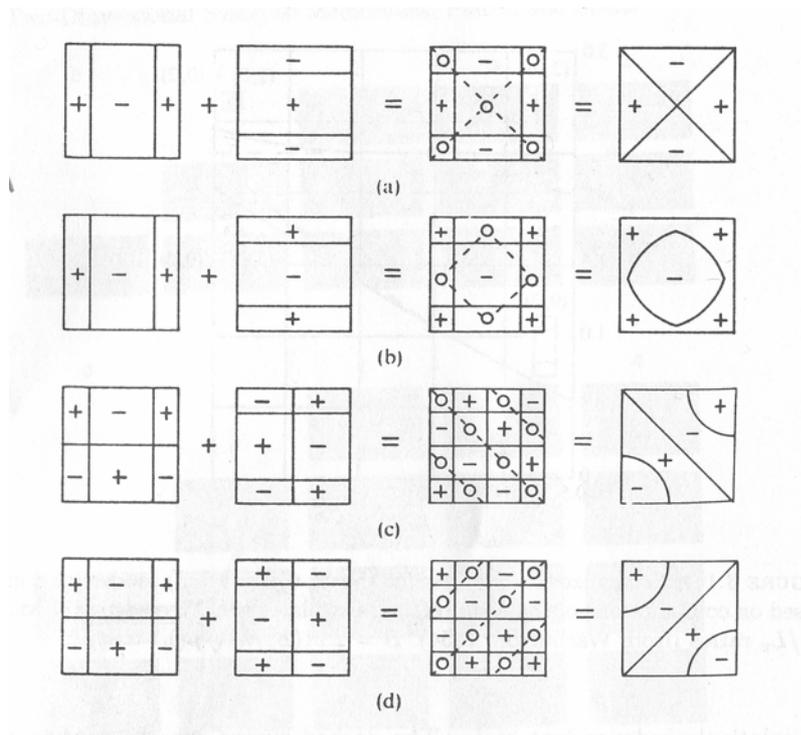


Abb. 2.8: Entartung der Moden $(2,0)$ und $(3,1)$ einer frei schwingenden quadratischen Platte

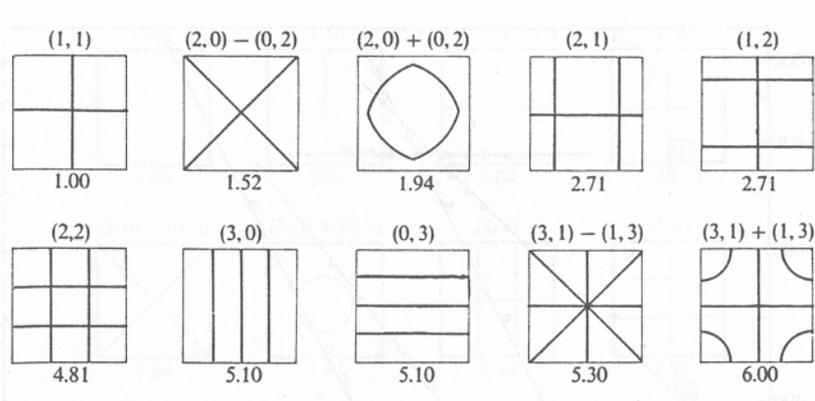


Abb. 2.9: Muster und Frequenzrelationen der ersten Moden der freien quadratischen Platte⁵

2.2.2 Rechteckige Platten

Die rechteckige Platte kennt keine Entartungen, da durch die unterschiedlichen Seitenlängen die Moden (2,0) und (0,2) unterschiedliche Muster geben. Eine strenge Berechnung der Eigenmoden für verschiedene Verhältnisse der Seitenlängen $r = L_x/L_y$ wurde von Pavlik für $r = 1, 1.07$ und 1.5 gerechnet.⁶ Für die höheren Moden der quadratischen Platte verwendete Ritz⁷ das Rayleigh Verfahren, das seitdem als Rayleigh-Ritz-Verfahren bekannt ist.⁸ Rayleigh berechnete die Moden aller Schwingungsformen durch die potentiellen und kinetischen Energie. Da für Systeme ohne Dissipation, also für solche ohne Energieverlust durch Reibung, die Gesamtenergie erhalten bleiben muß (Energieerhaltungssatz) gilt: $E_{kin} + E_{pot} = \text{konstant}$. Die potentielle Energie einer Platte bestimmt sich durch:

$$E_{pot} = \frac{8 E h^3}{3 (1 - \mu^2)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2 \mu}{r_1 r_2} \right) \quad 9$$

Hier ist μ wieder die Poissonzahl, E der Elastizitätsmodul, h die Plattendicke (bei Rayleigh $h/2$) und r_1, r_2 sind die beiden Radien der Biegung. Wie wir von der Herleitung der Biegeschwingung wissen, ist die Krümmung gleich dem Kehrwert des Radius eines gedachten Kreises, dessen kleiner Ausschnitt die gekrümmte Platte

⁵ Fletcher & Rossing 1999, S. 84f

⁶ zitiert nach: Waller 1949, S. 282

⁷ Ritz 1909

⁸ Zurmühl 1961 S. 486ff

⁹ Rayleigh 1945 Bd.1 S. 353

darstellt (natürlich nur an einem Punkt, da die Krümmung sich von Ort zu Ort ändert, was ja gerade die Rückstellkraft verursacht). Also ist:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r_1} \quad \text{und somit} \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \nabla^2 z$$

Durch komplizierte Umformungen erhält man einen Wert für die potentielle Energie.¹⁰ Die beschleunigende Kraft ist $F=m \cdot a$, woraus sich die kinetische Energie berechnen läßt. Addiert man beide Energieformen, so ist das Ergebnis notwendigerweise für alle Orte auf der Platte und alle Zeitpunkte konstant (nicht Null!):

$$\frac{8 E h^3}{3 (1 - \mu^2)} \nabla^4 z + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \text{konstant}$$

Hier ist ρ wieder die Dichte. Es wird also als Lösung wieder eine Funktion $z(x,y,t)$ gesucht, die für jeden eingesetzten Wert von x , y und t die obige Bedingung erfüllt. Da die Konstante nicht bekannt ist, können zwar die Eigenfrequenzen hieraus nicht berechnet werden, es gilt aber das Gesetz, daß die erste Eigenfunktion, die diese Gleichung erfüllt, den sogenannten Rayleigh Quotienten minimal werden läßt. Der Rayleigh - Quotient ist der Quotient von potentieller zu kinetischer Energie:

$$\frac{E_{\text{pot}}[u(x, y, t)]}{E_{\text{kin}}[u(x, y, t)]} = R(u)$$

Hier ist das $u(x,y,t)$ eine angenommene Lösung, also eine Idee, wie $z(x,y,t)$ aussehen könnte. Diese Idee wird aus allgemeinen Bedingungen, wie der Forderung nach Stetigkeit von Punkt zu Punkt gewonnen. Wichtiger sind aber die Randbedingungen. Durch geschicktes Ausprobieren wird $R(u)$ möglichst klein gemacht. Da man ja weiß, daß es keine weitere Nullstellen gibt, ist auf jeden Fall das u mit dem kleinsten $R(u)$ die beste Näherung von z .

¹⁰ ebenda, S. 355

Die Frequenzen der Moden der rechteckigen Platte sind aber meist empirisch festgestellt worden. Waller faßt verschiedene Ergebnisse zusammen. Sie zeigt Chladni Figuren für verschiedene Rechtecke. Der Übergang von einem Stab bis zur quadratischen Platte, also die Vergrößerung der Stabbreite bis auf den Wert der Stablänge, verändert die verschiedenen Moden der Stablänge mit null Knotenlinien in der Stabbreite wie folgt:

Lx/Ly	Mode: (2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)
Stab	1	2.76	5.40	8.93
12 : 1	1	2.76	5.37	8.9
6.32 : 1	1	2.74	5.40	
4 : 1	1	2.80	5.48	9.1
2.08 : 1	1	2.88	5.42	
1.5 : 1	1	2.7	5.2	9.2
1.6 : 1	1	2.97	6.1	

Tab. 3: Frequenzverhältnisse für verschiedene Rechteckformen Lx/Ly der Platte ¹¹

Man kann die zunehmende Spreizung der Frequenzverhältnisse vom Stab bis zur Platte gut erkennen. Ist (3,0) : (2,0) beim Stab noch 2.76, so ist es beim Rechteck 1.6:1 schon 2.97. Je quadratischer die Platte wird, desto mehr Moden sind aber zu erwarten. Bei einem Verhältnis von 38 : 1 gelang Waller noch eine Mode von (7,1) - leider in der Kopie zu schlecht, um hier gezeigt zu werden. Dieses Verhältnis ist für musikalische Platten schon viel zu hoch. Der oben analysierte Xylophonstab hat ein Verhältnis von 7.75 : 1 und ist aber aus Holz, so daß der Quer - Elastizitätsmodul um so viel kleiner ist, daß natürlich auch im Stab Moden entstehen müssen.

Um bei weiteren Messungen die Ergebnisse von Platten verschiedener Rechtecksformen mit empirischen Werten zu vergleichen, seien hier die weiteren Tabellen von Waller wiedergegeben:¹²

¹¹ Waller 1949

¹² Die Werte entsprechen gut den von Pavlik berechneten, was mit den empirischen Untersuchungen von Pavlik selbst nicht ganz übereinstimmt. Waller führt das darauf zurück, daß die Platten, die Pavlik verwendete zu dick waren und so die Verhältnisse verzerrten.

a) 1.09 : 1 - Rechteck

	0	1	2	3	4
0			1.53	4.55	9.3
1		1	2.67	5.16	10
2	2.23	2.78	5.1	8	13
3	5.35	6.4	8.8	11.5	16
4	10.8	11.8	14	17	21

b) 2 / 1 - Rechteck

	0	1	2	3	4
0			1	2.88	5.42
1		1.20	2.30	3.62	6.2
2	4.37	4.87	6.7	8.2	10.8

c) 3 : 2 - Rechteck

	0	1	2	3	4	5
0			1.08	2.93	5.53	9.96
1		1	2.49	4.47	7.09	11.0
2	2.62	3.42	5.0	7.60	10.5	14.9
3	7.5	7.9	9.6	12.3	15.5	20
4	13.6	14.4	16.5	19.3	22.7	27

Tabb. 4: Frequenzrelationen für Platten verschiedener Rechteckformen

Interessant ist zuerst, daß die tiefstfrequente Mode ab einem Plattenverhältnis von 2: 1 die tiefste Mode (2,0) ist. Die nächst höhere Frequenz wird durch die Mode (1,1) gegeben, das ist die oben beschriebene Torsalmode. Der Grund könnte darin liegen, daß je mehr die Platte zum Stab wird, die Frequenz der Torsalmoden ansteigt.¹³

Ein weiteres Phänomen ist das der Modenkopplung. Zwei Moden, die in der Frequenz sehr nah beieinander liegen, beeinflussen sich in ihren Schwingungsmustern. Die Knotenlinien krümmen sich und sind keine geraden Raster mehr. Das Rechteck 3 : 2 hat solche Kombinationen bei den Moden (2,2) und (4,0), deren Relationen 5.0 und 5.53 sind. Auch (4,1) und (0,3) mit den Relationen 7.09 und 7.5 beeinflussen sich gegenseitig.

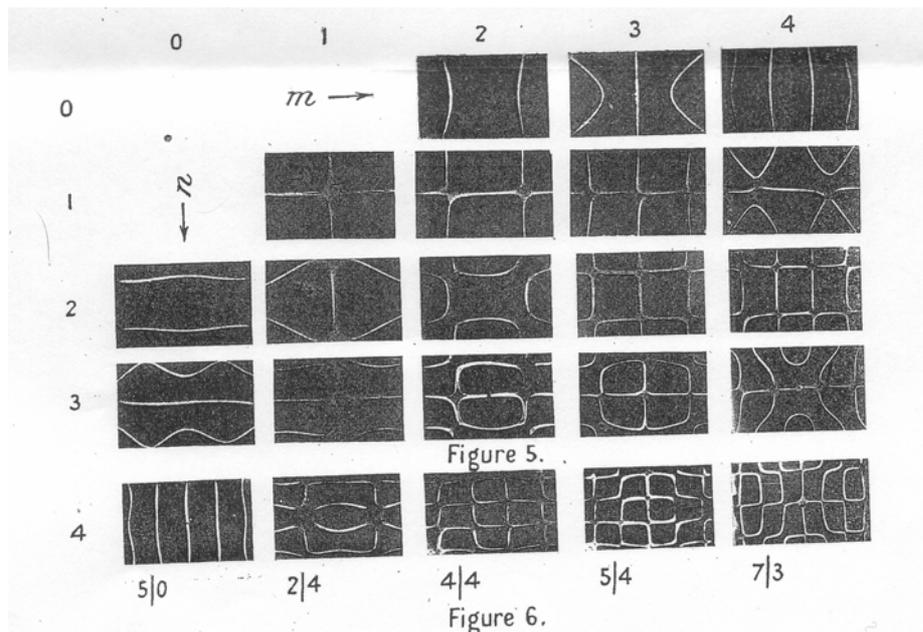


Abb. 2.10: Schwingungsmuster der Moden einer 3 : 2 Platte¹⁴

Waller klassifiziert die Moden durch ihr Muster im Plattenmittelpunkt. Sie findet vier Klassen: a) Kreis im Plattenmittelpunkt, b) Kreuz, c) waagerechte Linie und d) senkrechte Linie. Diese Muster treten logischerweise bei Moden auf mit gerader oder ungerade Anzahl von Knotenlinien. Bei a) ist diese Anzahl (gerade, gerade) bei

¹³ Fletcher & Rossing 1999, S. 67

¹⁴ Waller 1949

b) (ungerade, ungerade) bei c) (ger., unger) und bei d) (unger, ger). Nun zeigt sich, daß zwei Moden, die gegenseitig koppeln, der gleichen Klasse angehören. (2,2) und (4,0) sind beide a), (4,0) und (0,3) sind beide c).

2.3 Schalen und Glocken

Dieses Gebiet ist mathematisch so kompliziert, daß es hier nur qualitativ besprochen wird. Grundsätzlich unterscheidet man bei Schalen und Glocken extensionale und nicht-extensionale Schwingungsformen. Die extensionalen sind für die Musik von untergeordneter Bedeutung, da sie eine nur geringe Schallabstrahlung haben. Flügge berechnet sie in der Membrantheorie der Schalen.¹ Zur Berechnung wird wie bei der Platte ein kleines Element ausgeschnitten gedacht, an welchem die herrschenden Kräfte ansetzen.²

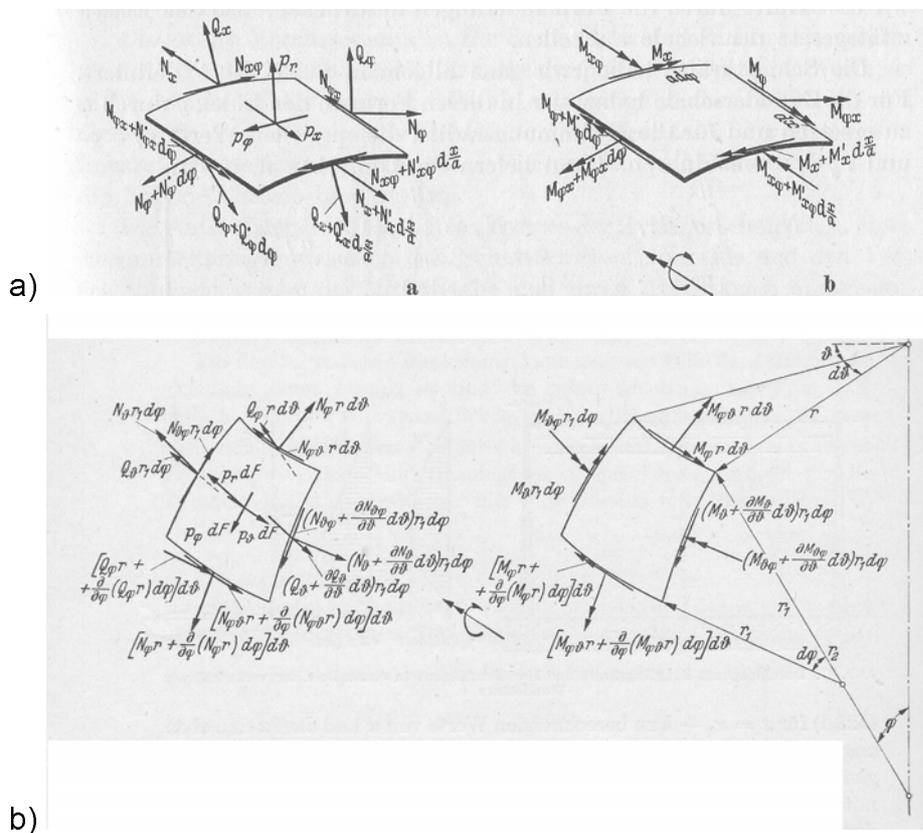


Abb. 2.11: An einem Schalenelement angreifende Kräfte a) für die Zylinderschale b) für die Drehschale³

¹ Flügge 1962

² Hinzu kommen, neben den vernachlässigten Rotations- und Scherungskräften noch die innere Grundspannung, die jeder Glocke eigen ist. Siehe Schneider 1997, S.220 gl. 33b, in der die zweite Ableitung der Spannungsfunktion nach Airy zur Bewegungsgleichung addiert wird.

³ Flügge 1962, S. 135, S. 166

Als erste Vereinfachung wird ein Zylinder angenommen, der verschiedene Randbedingungen hat (Enden frei oder geklemmt). Dann folgt der schwierigere Fall einer Drehschale, die ein Ausschnitt einer Kugel ist. Die Lösungen für diese Fälle sind Differentialgleichungen achter Ordnung, die Rückstellkraft ist also die achte Ableitung von der Auslenkung.⁴ Nimmt man als Beispiel einen beidseitig geschlossenen Hohlstab ist (Chime), dann kann man die theoretischen Werte für die Zylinderschale nach Flügge mit den theoretischen Werten des runden Hohlstabes nach Rayleigh miteinander vergleichen. Die Ergebnisse sind fast gleich, jedoch zeigt sich, daß für die Zylinderschale die Partialtöne etwas tiefer liegen und zu den höheren hin weiter abfallen.⁵

2.3.1 Glocken

Kirchenglocken sind Klein-Terz-Glocken. Ihr Spektrum setzt sich zusammen aus dem Grundton, dem sogenannten Summton, dessen Oktave, dem sogenannten Schlagton und einem darauf aufgebauten Molldreiklang (kl. Terz, Quint und wieder Oktave). Wird die Glocke angeschlagen, so entsteht zuerst ein chaotischer Zustand, in dem auch höhere Moden vorkommen.

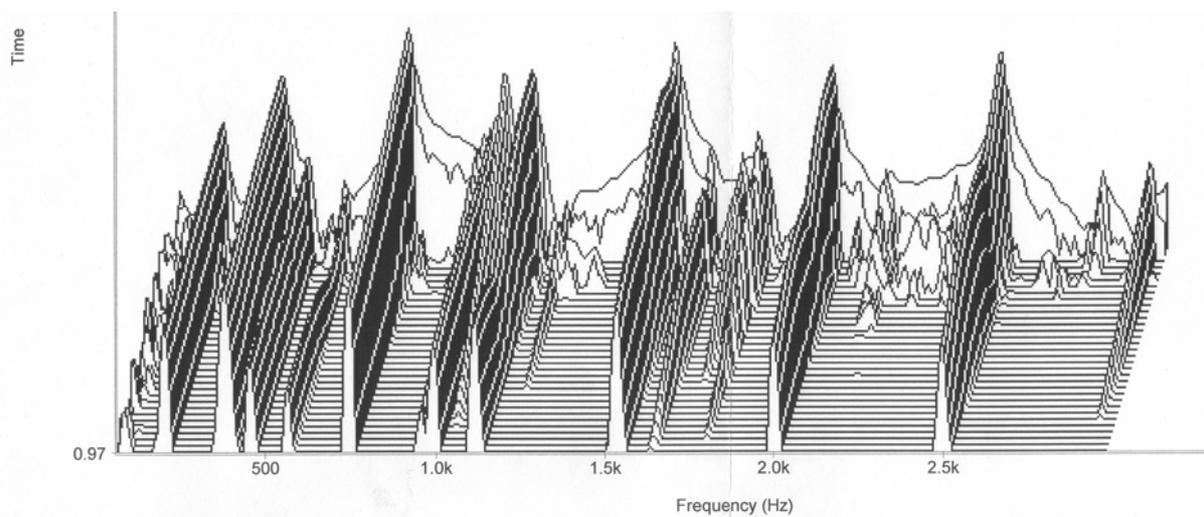


Abb.: 2.12: Erste Sekunde nach Anschlag der Glocke Nr. 2 des Glockenspiels der Hamburger St. Christianskirche. Die Modenfrequenzen sind am Klangbeginn (hier oben im Bild) sehr breit und werden erst in den späteren Zeitfenstern eng. Der Einschwingvorgang ist also durch Verschmälerung der Modenfrequenzen geprägt.

⁴ Flügge 1966, S. 145 G. 105

⁵ Rossing 1976, S. 553

Die helle Klangfarbe und wohl auch Molldreiklang führen dazu, daß man erst den Schlagton als Grundton hört. Das Ausklingen läßt aber wie immer die höheren Partialtöne zuerst verlöschen, so daß der eine Oktave tieferen Summton zu hören ist. Der Schlagton ist zwar bei den meisten Glocken vorhanden, er braucht es aber nicht. Das Ohr konstruiert ihn als Residualton der höheren Moden, hier nicht des folgenden Molldreiklangs, sondern der Oktave des Schlagtons, der darauf folgenden Quint und der Doppeloktave. Diese stehen ca. im Verhältnis 2 : 3 : 4, so daß das Ohr den Schlagton als die 1 annimmt.

Die Moden der Glocke bestehen aus Knotenringen um die Glockentaille und aus Knotenlinien von der Glockenspitze ausgehend, lotrecht die Glockenlaibungen hinunter. Die Anzahl der Ringe und Linien bestimmt die Mode.

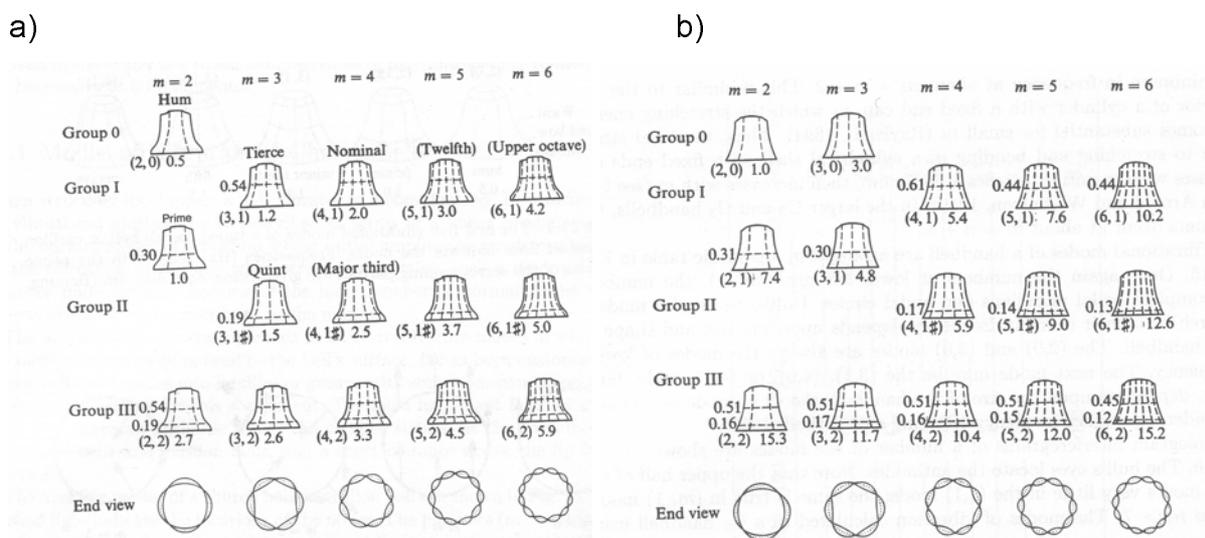


Abb. 2.13: Moden a) einer Kirchenglocke und b) einer Handglocke⁶

Die Spalten in Abb. 2.3.3 a) und b), mit m= 2, 3, 4, 5, 6 entsprechen der Anzahl der Knotenlinien der Glocke, die Gruppen (Group 0 - Group III) den Knotenkreisen um die Taille. Die Bilder am Ende jeder Spalte, die „End Views“ sind der Blick von unten auf den Glockenrand. Hier sind die Biegeschwingungen, ihre Bäuche und Knoten zu sehen. Die Knotenlinien, die über den Glockenkörper gehen, enden am unteren Rand. Alle diese Moden sind nicht-extensionale. Bei der Berechnung wird, wie beim

Stab von einer neutralen Achse ausgegangen, die sich zwar verbiegt, aber ihre Länge nicht ändert. Bemerkenswert ist, daß es für den Fall eines Ringes um die Glockentaille zwei mögliche Orte gibt, den der Gruppe I und den der Gruppe II, was sich auf die Frequenzen der Moden auswirkt. Dies könnte daran liegen, daß die Glocke oben als geschlossen, mit geklemmtem Rand anzusehen ist. Hält man eine Handglocke auf ihrem „Dach“ fest, so wird die Schwingung nicht bedämpft. Das bedeutet, daß dieser Teil fast nichts zur Schwingung beiträgt und nur die Ränder der Glocke schwingen. Je weiter entfernt nun ein Punkt vom Glockendach ist, desto größer kann seine Amplitude werden, die Rückstellkraft wird kleiner, das System ist nicht so steif, wie kurz vor dem Glockendach. So muß ein durch Knotenlinien abgetrennter Glockenteil, der am unteren Glockenrand endet, kleiner sein, um dieselbe Frequenz auszuführen, wie ein höher gelegener Teil. Ähnliches gilt für den einseitig eingespannten Stab und dessen Knotenverteilung entlang seiner Länge. In der Tat unterscheiden sich bei der Glocke die Höhen der Ringe in Bezug auf ihre Frequenz entsprechend: Die Kirchenglocke hat bei $m=3$ in Gruppe I (3,1) und Gruppe II (3,1#) nur einen Ring. Dieser ist bei einem Verhältnis von der jeweiligen Frequenz zur Grundfrequenz (einmal 1.2, dann 1.5) bei der höheren Frequenz auch gegen den freien Rand verschoben. Bei der Handglocke ist die Höhe des Knotenrings von Mode zu Mode leicht verschieden.

2.3.2 Schalen

Die oben beschriebene Tatsache, daß das Dach einer Glocke nicht schwingt, gilt auch für Schalen, wie chinesische oder nepalesische Klangschalen oder Weingläser.

⁶ Fletcher & Rossing 1999, S. 678 und S. 694

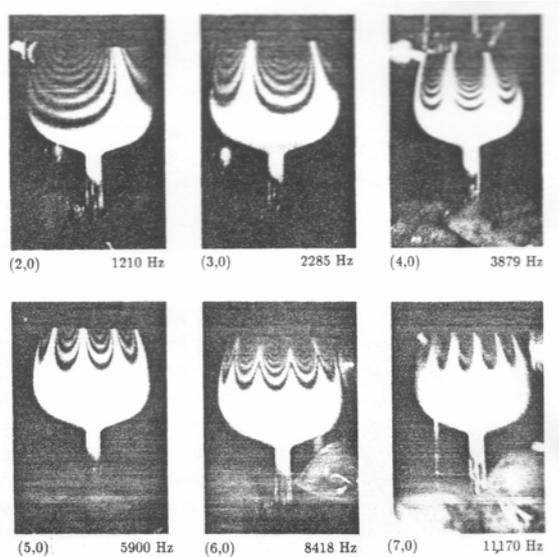


Abb.: 2.14: Hologramm eines Glases für verschiedene Eigenwerte. Die schwingenden Teile sind nur am Glasrand.⁷

Diese Vereinfachung kann versuchsweise benutzt werden, um die Eigenmoden dadurch zu berechnen, daß man die Werte eines Rings betrachtet, der unten eingespannt ist, also von einer Zylinderschale mit einseitig steifem Rand. Chladni gab deren Verhältnisse an als $3^2 : 5^2 : 7^2 : 9^2 \dots$, was den Eigenmoden eines Stabes entspricht. Rayleigh findet theoretisch 2.828, 5.423, 8.771, 12.87, was für den ersten Wert ein wenig mehr, für die anderen ein wenig geringer ist als beim Stab. In Centwerten ausgedrückt entspricht der Rayleigh'sche Befund: 1799.7, 1127.2, 832.4, 663.8. Dieselben Werte gibt Thies an, der Glorian & Beer zitiert.⁸ Thies findet bei seinen 10 untersuchten Schalen diese Tendenz bestätigt, allerdings mit einer Toleranzbreite von ca. minus 200 Cent.

Die hier untersuchten nepalesischen Klangschalen zeigten ein ähnliches Muster. Ihre Spektren sind:

⁷ Rossing 1993

⁸ Thies 2000, S. 210

	Schale 1	Schale 2	Schale 3
Partialton			
1 Reibeton	113	167	203
2 Qunit + Okt	331 (661)	469+477 (588)	595 + 605 (670)
3 Quart + 2 Okt	630 (575)	905+938+973 (526)	1135 + 1148 (586)
4 dritte Oktave	1010 + 1016 (197)	1355+1362+1374 +1374+1382 +1410+1431 (-4)	1791 + 1797 (137)
5 Quint + 3 Okt	1456 + 1460 (827)	2026+2051 (669)	2541 (739)
6 vierte Oktave	1952 + 1965 (137)	2718+2754	(-22) 3677 + 3688 (181)
7 Quart + 4 Okt	2502 + 2517 (565)	3503+3517 (409)	4333+ 4338 (464)
8 Sext + 4 Okt	3096 + 3102 (930)	4100 (678)	weitere Obertöne, die nur
9 Sept + 4 Okt	3414 + 3421 + 3425 (1101)	4744+4768+ 4805 (939)	noch als Klangaufhellung und als Schwebungen
10 Sek + 5 Okt	3932 + 3962 + 3977 (154)	5554 + 5567 (5)	empfunden werden: ca. 4540, 4726, 4830,
11 Terz + 5 Okt	4467 (361)		4930, 5478, 5850, 6124,
12 Quart + 5 Okt	5004 (558)		6226

Tab. 5: Frequenzen (1 - 12) von drei Klangschalen. Die Intervallbezeichnung soll nur zur Orientierung dienen. Die Zahlen in Klammern sind Centwerte, die vom Grundton der jeweiligen Oktavlage gerechnet sind. So ist der zweite Partialton der ersten Schale 661 Cent von der ersten Oktave entfernt.

Die Maße der Schalen sind:

Schale	1	2	3
Höhe	10cm - 11.2cm	5cm	7.8cm -9.8cm
Durchmesser der Öffnung	24.2cm	18.1cm	21.8cm
Wanddicke	0.1cm - 0.2cm	0.3cm	0.3cm - 0.5cm

Tab. 6: Maße der Klangschalen mit den Eigenwerten aus Tab. 1

An den Maßen sieht man bereits, daß die Schalen unterschiedlich gearbeitet sind. Im Gegensatz zu chinesischen Klangschalen, die gleichmäßig gedreht sind und auch keine Schwebungen haben, wird der Klang von tibetischen und nepalesischen Schalen durch veränderte Dicke und durch Hämmerung erreicht. Die

unterschiedlichen Wanddicken sind von der Höhe der Schale abhängig. Schale 3 hat einen viel dickeren oberen Rand (0.5cm) als der gesamte untere Teil (0.3cm). Da auch der Boden nicht eben ist, erreichen die Schalen unterschiedliche Höhen. Die variierenden Höhenangaben sind also nicht durch unsymmetrische Drehung, sondern durch einen gewellten Boden erklärt. Da dieser nicht mitschwingt, ist diese Unregelmäßigkeit für den Klang irrelevant.

Es unterscheiden sich die Klangcharaktere von Schale 1 und 3 hauptsächlich durch ihre Wanddicke. Schale 1 ist in Durchmesser und Höhe etwas größer, ihr Grundton aber erheblich niedriger als der der Schale 3. Die größere Wanddicke von Schale 3 erhöht den Grundton erheblich. Auch reduziert diese Wanddicke die Schwebungen ein wenig, da das Verbiegen der Schale bei dieser Wanddicke viel schwieriger ist als bei 0.1 cm Wanddicke. Außerdem reduziert sich der Obertongehalt, und durch den höheren Grundton sind weniger Partialtöne bis ca. 5000 Hz möglich, bis zu dem Bereich also, bei dem das Ohr auch eine zeitliche Analyse vornimmt. Da alle drei Klänge zur Analyse mit Filtern für jeden einzelnen Partialton versehen wurden, um die einzelnen Komponenten auch einzeln hören zu können, konnte festgestellt werden, daß über 5000 Hz auch kein klarere Tonhöhereindruck mehr zu gewinnen war. So hat Schale 3 bis zu dieser Frequenzgrenze 7 unterscheidbare Partialtöne, Schale 1 hat dagegen 12. Schale 3 wirkt daher sehr klar im Ton, Schale 1 dagegen differenzierter. Schale 2, eine kleine Schale, ist dagegen von der Form viel leichter verbiegbar und besitzt dementsprechend mehr Schwebungen. Ihr Grundton ist aber immer noch niedriger als der von Schale 3.

Bis zum siebenten Oberton finden sich näherungsweise drei Oktavtöne (Grundton, 3. Oktave, 4. Oktave), zwei Quinten (+1 Oktave, +3 Oktaven) und zwei Quartan (+2 Oktaven, +4 Oktaven). Diese sind aber, da sie doch erheblich von den theoretischen Werten abweichen, einzeln heraushörbar, der Klang fusioniert nicht. Außerdem schwebt das Gebilde erheblich. Wenn Klangschalen am Rand kontinuierlich gerieben werden, ist nur der Grundton zu hören, es fehlen also die Schwebungen. Die Geschwindigkeit der Schwebung hängt von der Frequenzdifferenz der an der Schwebung beteiligten Frequenzen ab. Da durch die Art des Anschlags verschiedene Frequenzgebiete betont werden können, hängt also auch die Art der

Schwebung vom Anschlag ab. Oft tritt ein Gewirr von mehreren Schwebungen auf.
(Für die Messung wurde ein Anschlag gewählt, der alle Eigenwerte anregt.)

3 Nichtlinearitäten, Phasendiagramme

Nur im Grenzfall haben Musikinstrumente ein Verhalten, bei dem eine physikalische Größe, wie z.B. die Auslenkung, linear mit einer anderen Größe, wie der Rückstellkraft zusammenhängt. Normalerweise sind diese Beziehungen in einer anderen Größenordnung, z.B. kubisch. D.h., nimmt die Auslenkung um den Faktor 2 zu, nimmt die Rückstellkraft um den Faktor $2^3 = 8$ zu. Dies gilt für eine Feder, die große Auslenkungen erfährt, oder eine Saite, die bis zur Nichtlinearität ausgelenkt wird. Im Falle der Saite wird das Verhalten des Systems noch schwieriger zu beschreiben, wenn, wie ja im Normalfall, mehrere Partialtöne an der Schwingung beteiligt sind. Wegen der Superposition braucht es nicht zu sein, daß eine Mode, die in der ihrer vorigen Periode stark ausgelenkt wurde und daher nichtlinear zurückgetrieben wird, dies in der nächsten Periode wieder so erfahren muß, weil andere Schwingungen, die überlagert sind, die Auslenkung der zweiten Periode hemmen können. So gilt ganz allgemein im Falle der Nichtlinearität die Superposition nicht mehr.

3.1 Nichtlinearer Zusammenhang von Auslenkung und Rückstellkraft

Eine Saite und eine Platte werden angeschlagen, ein Blasinstrument wird mit einem stetigen Luftstrom angeregt. Das muß bei der Wellengleichung berücksichtigt werden, indem eine anregende Kraft $F(t)$ hinzukommt

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{dy}{dt} + D y = F(t) \quad (\text{Gl 3.1})$$

Die linke Seite von Gl 3.1 ist das System selber. Hier beschränken wir uns auf nur eine Mode des Systems, also z.B. die Grundschwingung, da der Multimoden - Zustand, in dem sich Musikinstrumente befinden viel schwerer zu beschreiben ist. Die rechte Seite ist die Anregungsfunktion. Bei Blasinstrumenten liefert sie der Luftstrom, der aber nicht gleichmäßig fließt. Bei Holzblasinstrumenten ist es eigentlich das schwingende Blättchen (rechte Seite), das die Luftsäule (linke Seite) zu

Eigenmoden anregt. Der Luftstrom dient hier zur Erregung des Blättchens, müßte also in $F(t)$ eingerechnet werden, da alle drei Komponenten - Luftstrom, Blättchen, Luftsäule - miteinander wechselwirken. In Wahrheit ist das System aber noch komplizierter, da die Abstrahlung des Instruments und die äußere Schalleinwirkung durch andere Instrumente beschrieben werden müssen. So ist anzunehmen, daß Bands auch deshalb ihre Musikstücke im Studio gleichzeitig aufnehmen, statt jeden Musiker hintereinander einspielen zu lassen, weil natürlich die mechanische Kopplung von z.B. der Bass Drum des Schlagzeugers mit dem E-Baß ein schnelleres Einschwingen und eine ständige weitere Beeinflussung während des Tones haben muß. Die Kopplung von Außeneinflüssen ist bei der Orgel erforscht.¹

Bei der Geige beschreibt die rechte Seite der obigen Gleichung eine ebenfalls un stetige Anregung, da der Geigenbogen nicht regelmäßig geführt werden kann und die Saitenschwingung wieder auf die Anregung zurückwirkt. Bei einem geschlagenen Perkussionsinstrument ist die Anregungsfunktion ein Impuls, der einen kleinen, aber durchaus entscheidenden Einfluß auf den Klang hat. Dies deshalb, weil bei Perkussionsinstrumenten, die schnell verklängen, der Einschwingvorgang bereits der ganze Klang ist. So hat jedes Perkussionsinstrument einen eigenen Klangerzeuger (Schlegel, Hammer usw.), mit dem es gespielt werden muß. Weiterhin kommt es auf die genaue Art des Anschlags an, die einen Laien von einem Profi unterscheidet. Der dabei entscheidende Parameter müßte die Verweildauer des Schlegels auf dem Instrument sein, da die Stärke ja die Dynamik bestimmt.² Auch das Klavier wird in diesem Sinne als Schlaginstrument verstanden (so wie das Didgeridoo als Blechblasinstrument angesehen werden muß). Angezupfte oder angerissene Saiten wie bei der Gitarre oder dem Cembalo müßten in Bezug auf ihre Anregung ebenfalls als Schlaginstrumente angesehen werden (Schlaggitarre), da die rechte Seite von Gl. 3.1 ebenfalls eine Impulsfunktion sein muß. Die Art des Anschlags entscheidet auch bei ihnen über den Gesamtklang, der z.B. beim Cembalo, ähnlich einem Perkussionsinstrument, schnell verklungen ist.

¹ Trendlenburg, Thienhaus & Franz, 1938. Das schnellere Einschwingen von Orgelpfeifen, deren Eigenfrequenz bereits im Raum vorhanden ist wird als Mitnahmeeffekt bezeichnet. (S. 12). Auch wird angesprochen, daß bei einer Tonwiederholung der zweite Ton schneller einschwingt, da er bereits im Raum ist. Bei Kirchenorgeln ist das wegen des langen Nachhalls sicher eher gegeben, als in einem Proberaum.

² Borg, 1985, S. 168 Der Impulsverlauf eines Schlegels ist fast sinusförmig, kippt ein wenig nach links.

Der Klang einer Gitarre hält zwar viel länger aus, dies tut ein balinesisches Gender oder ein chinesischer Gong jedoch auch.

Grundsätzlich ist also zu unterscheiden, ob die rechte Gleichungsseite der Wellengleichung eine quasi-stetige Funktion oder ein Impuls ist. Eine stetige Anregung wäre nur bei der Orgelpfeife, dem Krummhorn, der Sackpfeife o.ä. theoretisch möglich.

Werden nun zwei Schwinger gekoppelt, so entsteht am Anfang ein Zustand, in dem beide Schwingungen vorkommen, dann gewinnt aber der Schwinger, der geringer bedämpft ist. Das gesamte System schwingt mit nur einer Frequenz, nämlich der des weniger bedämpften Zustands, nicht mit einem Kompromiss zwischen beiden.³ Das Holzblatt z.B. der Klarinette ist weit mehr bedämpft als die schwingende Luftsäule. Diese wird nur durch die Klangabstrahlung und durch interne Reibungsverluste bedämpft, das Holzblatt aber liegt an den Lippen an und der Mundhohlraum, der für die Klanggestaltung wichtig ist, ist weich, so daß auch hier starke Verluste auftreten. Die Eigenfrequenz eines Rohrblatts liegt bei ca. 3000 Hz, wobei verschiedene Teile davon wieder mit anderen Frequenzen schwingen. Das Blatt schwingt im eingeschwungenen Zustand ja aber mit der Frequenz des Rohrs. Trotzdem behält der ganz leichte vordere Teil des Blattes seine Eigenfrequenz bei. Diese wird vor allem seitlich des Rohres abgestrahlt und muß als eine Art Formantregion des Instruments angesehen werden, da diese Region ja unabhängig von der gespielten Tonhöhe ist.⁴

Ein Beispiel für die Gl. 3.1 wurde mit einem Näherungsverfahren errechnet, das für jeden Schritt die Einflüsse von Rückstellkraft, beschleunigender Kraft, Reibung und der zweiten, hier sinusförmigen Anregungsfunktion mit Dämpfung auf die neue Auslenkung in Bezug auf die vorherige berechnet.

³ Meyer Guicking 1974 S. 344ff. Auf S. 345 sind vier Fälle für verschiedene Eigenfrequenzverhältnisse angegeben.

⁴ Aschhoff, 1936

```

For [x[[2]] = 1.5; v[[1]] = 0; v[[2]] = 0; t = 3, t < 1000, t++,
  x[[t]] = x[[t-1]] - .2 x[[t-1]] + e-t/1000 Sin[t/30] + a[[t-1]];
  v[[t]] = x[[t]] - .009 x[[t-1]]; a[[t]] = v[[t]] - v[[t-1]];

```

Dabei ergibt sich folgendes Bild:

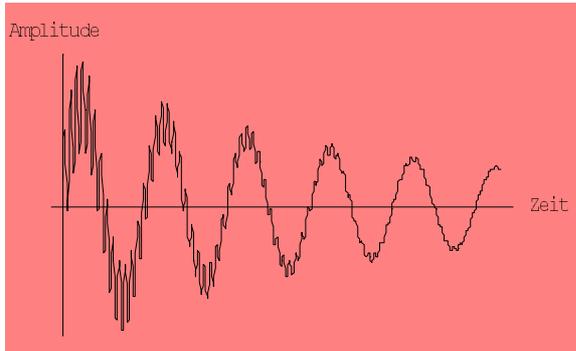


Abb. 3.1: Die höher gedämpfte Schwingung höherer Amplitude wird mit fortlaufender Zeit kleiner.

Dies ist ein Bild, das wir z.B. bei der Schwingung eines Xylophons haben. Die Grundschwingung bleibt lange erhalten, während die Obertöne, die die Grundschwingung anfangs überlagern, langsam verschwinden:

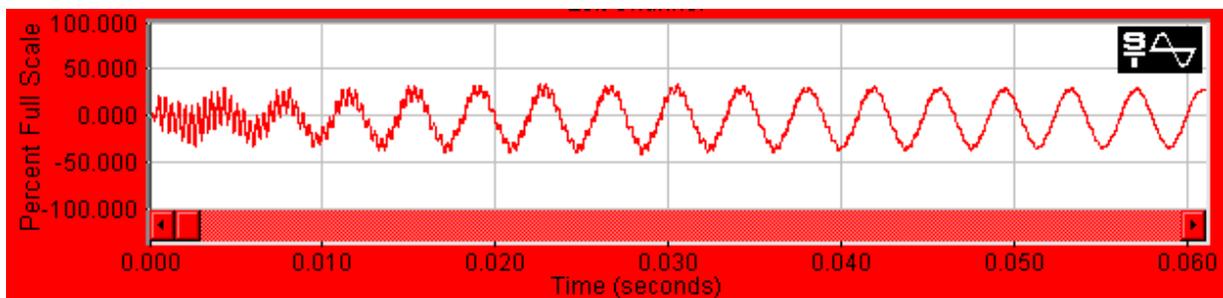


Abb.: 3.2: Die ersten 60 ms eines mittelschwer angeschlagenen Holzxylophonstabes c1.

Allerdings kommen bei der theoretischen Berechnung die Obertöne vom Anreger, was bei der Messung nicht der Fall ist. Hier sind es höhere Moden, die sofort verklingen. Das Prinzip ist aber gleich: die Grundschwingung wird von Obertönen überlagert.

Hier ist die Nichtlinearität höchstens in der Anregungsfunktion gegeben. Ist die Eigenschwingung selbst nichtlinear, so kommt ein kubischer Term zur Gl. 3.1 dazu:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + R \frac{dy}{dt} + D y + Y^3 = 0 \quad (\text{Gl 3.2})$$

Hier wird also die Rückstellkraft nicht mehr linear mit der Auslenkung größer, sondern nimmt mit der dritten Potenz zu. Dieser Faktor hat sich als gute Näherung eingebürgert. Im Realfall kann es auch die vierte oder fünfte Potenz, allgemein eine Taylorreihe sein. Dies hängt vom Material und dessen Eigenschaften bei Belastung ab. Als erster Fall sei keine Kopplung mit einer anderen Schwingung oder Anregung gegeben. Das System ist ausgelenkt und schwingt aus. Eine Darstellung dieser Gleichung, wieder mit dem obigen Verfahren, ergibt folgendes Bild:

Pendelschwingung mit nichtlinearer Rückstellkraft (ohne äußere Kraft): Pitch Glide

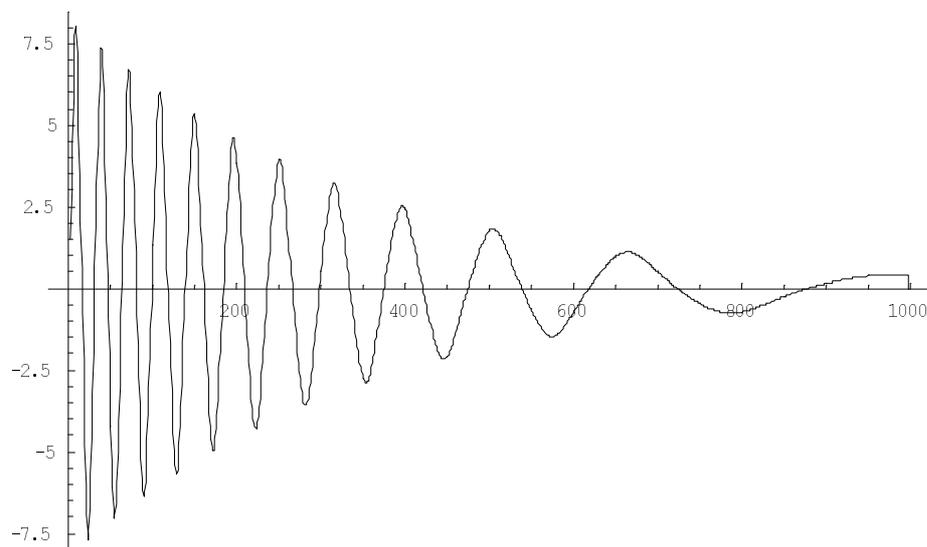


Abb. 3.3: Zeitverhalten eines bedämpften Schwingers mit nichtlinearer Rückstellkraft ohne äußere Krafteinwirkung: Pitch Glide

Es ist deutlich zu sehen, daß nicht nur die Amplitude abnimmt - natürlich wegen der Dämpfung - sondern auch die Frequenz mit zunehmender Zeit zunimmt, die Kurve wird auseinandergezogen. Dies muß geschehen, da bei höherer Auslenkung viel mehr Kraft die Rückstellung bewirkt, die Schwingung also jede Periode schneller durchläuft als im linearen Fall, die Frequenz also höher ist.

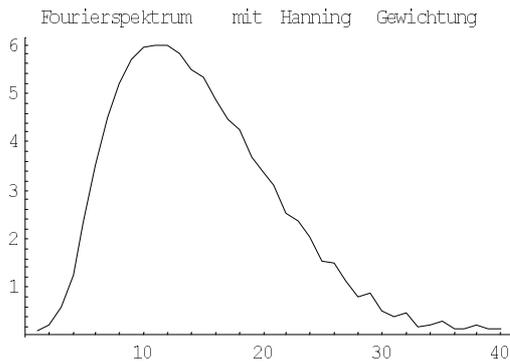


Abb. 3.4: Fourierspektrum der Zeitfunktion Abb. 2.4.3 (Hanning Gewichtung). Der breite Gipfel zeigt die große Bandbreite der vorkommenden Frequenzen.

Dieser Effekt ist von Fletcher bei chinesischen Gongs der Pekingoper gemessen und berechnet worden.⁵ Die Gongs sind dünn und nur ganz leicht gewölbt, so daß angenommen wird, daß die Auslenkungskraft die mittlere Scheibe durchdrücken kann, worauf diese zurückschwingt. Das System wird als Schale angesehen, welche am Rand fest eingespannt ist, da der Gongrand nicht mitschwingt. Die Tonhöhe des Gongs nimmt um bis zu drei Halbtönen nach dem Anschlag ab, während die Tonhöhen der kleinen Gongs um zwei Halbtöne steigen. Die Lösung einer Gleichung mit kubischer Rückstellkraft wird als Sinusfunktion gesehen, deren Amplitude und Phase sich allerdings mit der Zeit leicht ändern:

$$a(t) * \sin(\omega + \varphi(t))$$

Auch bei dem Xylophon, das oben analysiert worden ist, wurde ein Pitch Glide gefunden. Dies allerdings nur bei einer unsachgemäßen Anregung: mit der Kante eines Holzes. Dabei war wohl die Anregungsfläche punktförmig und die Auslenkung an dieser Stelle daher so groß, daß das Xylophon eine nichtlineare Rückstellkraft hatte. Bei Anschlag mit einem normalen Schlegel konnte auch bei noch so starkem Schlag kein solches Phänomen beobachtet werden.

Kommt nun zu Gl 3.2 eine äußere Kraft dazu,

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + D y = F(t), \quad (\text{Gl 3.3})$$

⁵ Fletcher 1985.

dann sieht die Zeitfunktion so aus:

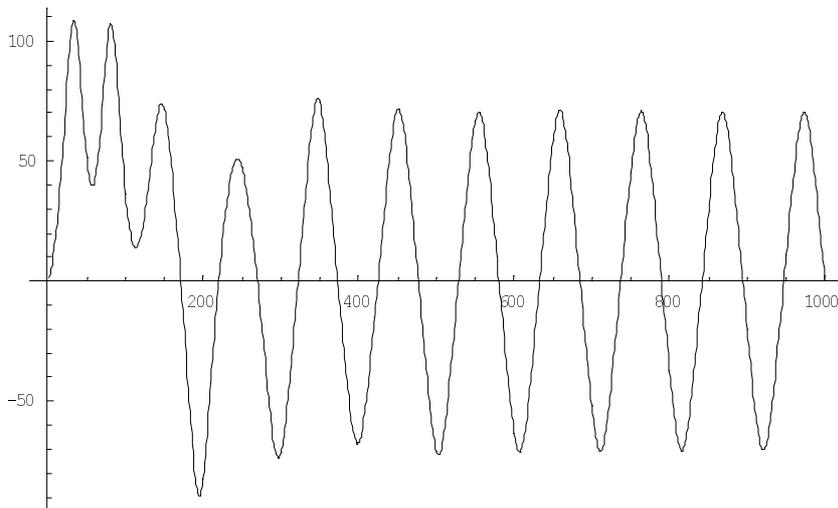


Abb. 3.5: Zeitfunktion eines ungedämpften, nichtlinearen Schwingers mit der Anregung von Abb. 3.6

Die Anregungsfunktion liefert hier angenähert ein Hammer:

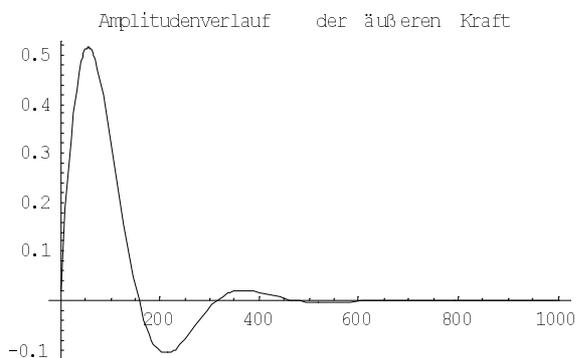


Abb. 3.6: Anregungsfunktion von Abb. 3.5. der Funktion $e^{-t/100} * \sin(t/50)$, ein stark bedämpfter Sinus.

Das Spektrum dieser Funktion besteht natürlich hauptsächlich aus der Frequenz des Schwingers. Es ist viel steilgipfeliger ist, da der Schwinger seine Frequenz nicht ändert. Die kleinen Nebengipfel sind aber der Anregung zuzuordnen.

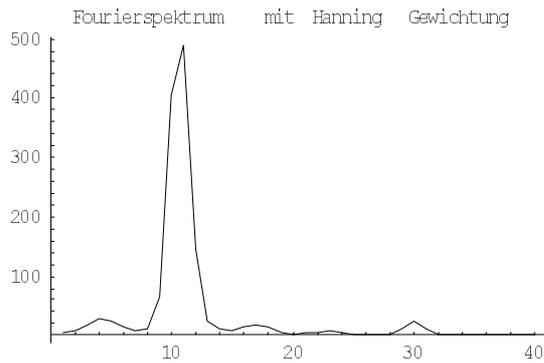


Abb. 3.7: Spektrum von Abb. 3.5. Der Hauptgipfel ist der Schwinger, die kleinen Nebengipfel sind durch die Anregungsfunktion verursacht.

Dieses Spektrum ist für die Analyse des Einschwingvorgangs, das in Abb. 3.5 als chaotisch zu betrachten ist, nicht geeignet. Das liegt daran, daß die Nebengipfel Störgeräusche, aber auch über die Zeit gemittelte Frequenzänderungen der Gesamtschwingung sein könnten. Das Zeitfenster ist nicht unendlich klein wählbar. Die Fourieranalyse ist nicht mehr unbedingt die beste Methode zur Analyse solcher kurzzeitiger Vorgänge. Eine angemessenere Analysemethode von chaotischen Zeitfunktionen ist das Phasen- oder Pseudophasendiagramm.⁶ Beim Phasendiagramm wird auf der X-Achse die Auslenkung und auf der Y-Achse die Steigung der Zeitfunktion aufgetragen, beim Pseudophasendiagramm ist es die Auslenkung zum Zeitpunkt t auf der Rechtsachse und die Auslenkung zum Zeitpunkt $x+\tau$ auf der Hochachse. Oder anders gesagt, Auslenkung gegen Geschwindigkeit und Auslenkungen mit zeitlichem Abstand τ . Für eine reine Sinusschwingung ergibt sich ein Kreis, da deren Ableitung, also ihre Steigung, der Cosinus ist. Somit entsteht dasselbe Kreisbild wie bei der Definition der komplexen Sinusschwingung, den zwei rotierenden Zeigern. Wird diese Sinusschwingung von anderen harmonischen Oberschwingungen überlagert, dann bleibt der Kreis erhalten, da die insgesamt Periodenlänge erhalten bleibt. Der Kreis wird aber ein wenig anders aussehen, entsprechend den Obertönen. Als Beispiel hier das Phasendiagramm eines Saxophontones und seine Zeitfunktion:

⁶ Moon, 1992, S. 53ff

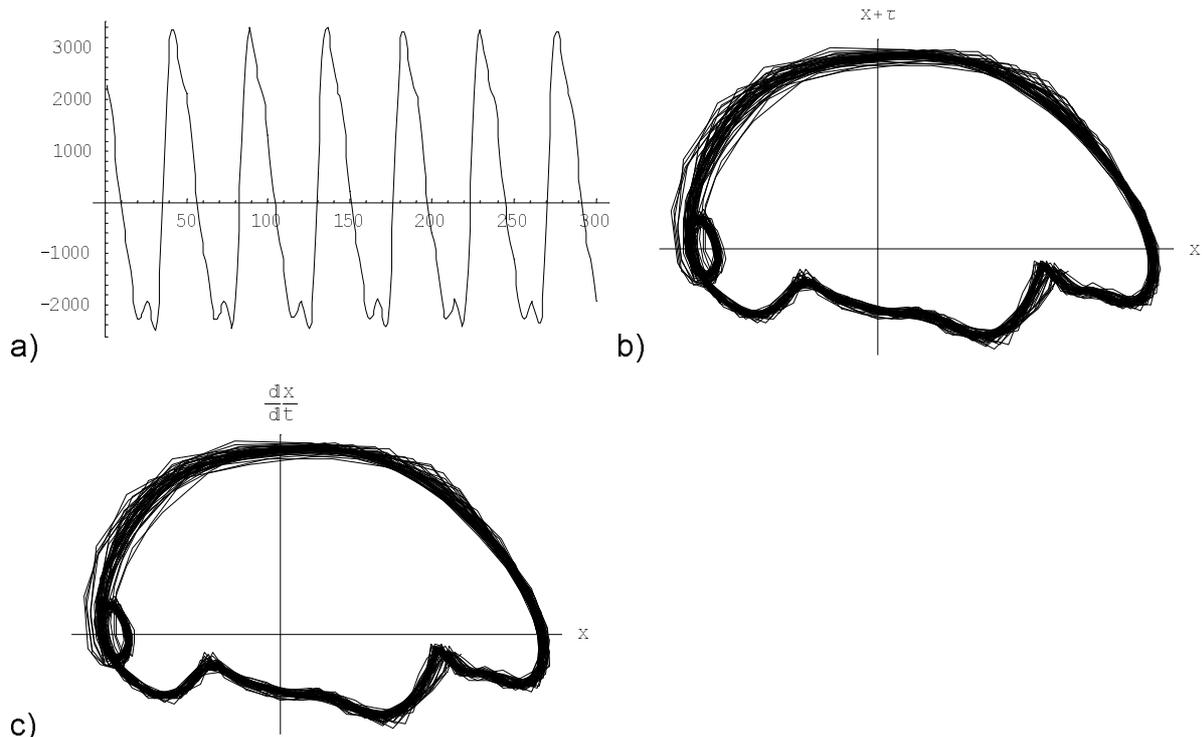


Abb. 3.8: a) Zeitfunktion (Ausschnitt), b) Phasendiagramm und c) Pseudophasendiagramm eines Saxophontons

In Abb. 3.8a ist in der Zeitfunktion eine eindeutige Periode erkennbar. Entsprechend ist der Kreis im Phasendiagramm geschlossen. Die Zeitfunktion ist aber nicht sinusförmig. Entsprechend ist der Kreis kein reiner Kreis, sondern windet sich bei den kleinen Abweichungen der Zeitfunktion. Aber die Periodizität ist eben nicht perfekt, und so hat im Phasenraum die Kreislinie eine gewisse Dicke, eine Variationsbreite an Möglichkeiten.

Eine Linie im Phasenraum heißt Trajektorie. Der entstandene Kreis heißt Attraktor, da das System sich auf diesem Kreis eingeschungen hat. Dieser Schwingungszustand ist für dieses System eben attraktiv. Im chaotischen Fall heißt er seltsamer Attraktor, da zwar eine Tendenz des Systems besteht, in diesen Zustand zu fallen, dieser aber unstetig ist und immer wieder unterbrochen werden kann. Nichtsdestotrotz ist er ein Attraktor.

Chaotisch meint hier immer noch deterministisch, d.h. von den Anfangsbedingungen vorherbestimmt.⁷ Es gibt hier keinen wirklichen Zufall, so wie beim Zeitpunkt des Zerfalls eines einzigen radioaktiven Atoms. Uns gelingt es aber bei chaotischen

Systemen nur schwer, Gesetzmäßigkeiten zu bestimmen. Um aus dem Chaos doch noch eine Tendenz festzustellen, sind die Phasendiagramme geeignet. Auch die Fourieranalyse oder die Autokorrelation werden zu diesem Zweck angewendet. Die Nervenbahnen z.B. leiten neben den informationstragenden Spikes auch Zufallsimpulse, so daß die Zeitfunktion mit dem bloßen Auge betrachtet keine Periodizität zu haben scheint und erst entrauscht werden muß.⁸ Auch hier werden aus einem scheinbar chaotischen Verhalten Gesetzmäßigkeiten extrahiert.

Das Phasendiagramm von Abb. 3.5 sieht so aus:

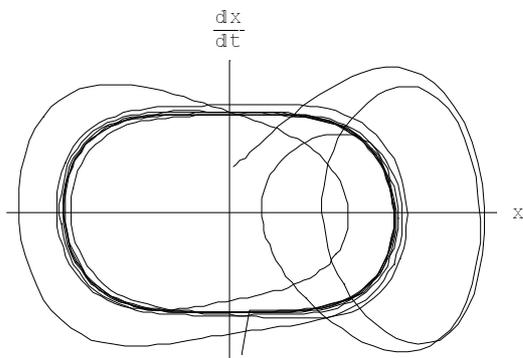


Abb.3.9: Phasendiagramm der Zeitfunktion 3.5; der Attraktor hat zwei Unterzyklen.

Hier erst finden wir unsere zwei Anregungsfunktionen wieder: den großen Unterzyklus in der Mitte, der dem ungedämpften Schwinger entspricht. Dazu kommt der kleinere rechts, der unsere Anregungsfunktion ist. Dies könnte das Schaubild einer Klaviersaite sein, die angeschlagen wird und dann lange nachklingt. Der auf den ersten Blick chaotische Einschwingvorgang wird durch das Phasendiagramm erklärlich.

Für ein Perkussionsinstrument mit schnell verklingendem Schwinger ändert sich nur die Stärke des mittleren Unterzyklus.

⁷ Moon, 1992, S. 2

⁸ Keidel, 1975 S. 112

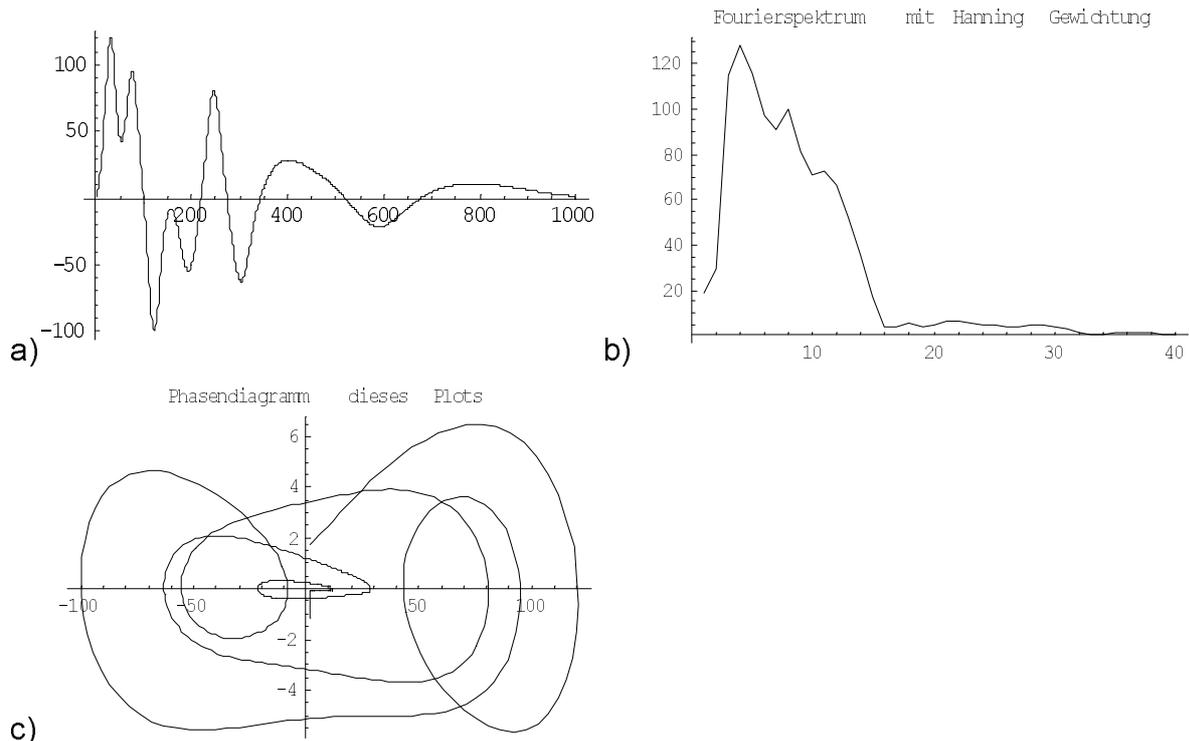


Abb.3.10: a) Zeitfunktion, b) Spektrum und c) Phasendiagramm eines bedämpften Schwingers, der mit der Zeitfunktion aus Abb. 3.6 angeregt wurde.

Die Zeitfunktion scheint nun völlig chaotisch, das Fourierspektrum liefert einen breiten Gipfel mit zwei kleinen Nebengipfeln. Aus dem Phasendiagramm kann man zwei Unterzyklen erkennen, einen rechts und einen in der Mitte, der allerdings schnell auf den Ursprung des bedämpften Schwingers zuläuft.

3.2 Mode Locking

Nichtlinearitäten gibt es aber auch in der nichtlinearen Anregungsfunktion.

Blasinstrumente z.B. können durch den Spieler nie ganz gleichmäßig angeregt werden. Dies ist in diesem Fall jedoch erwünscht, da nur diese Nichtlinearität die Partialtöne in harmonische Verhältnisse bringt, was bei einer linearen Anregung nicht geschähe.⁹

Dieses Phänomen kann nur dann auftreten, wenn die Obertöne sich in fast - harmonischen Verhältnissen befinden, wenn sie eine gewisse Lautstärke haben und die Anregungsfunktion sehr nichtlinear ist. Die Lippen eines Blechbläusers, das

Rohrblatt, die Luftwirbel bei der Flöte oder der Bogen beim Geiger sind alle sehr nichtlineare Anreger. Die Effekte, die dabei überdeckt werden, sind die Terme der Wellengleichungen, die normalerweise vernachlässigt werden, wie die Steifheit der Saite, welche Biegewellen mit Dispersion verursacht oder die Endkorrektur bei Luftsäulen mit nicht unendlich kleinem Rohrdurchmesser.

Es wäre möglich, daß die Multiphonics, die man auf Saxophonen produzieren kann, dadurch entstehen, daß es der Spieler schafft, die Anregungsfunktion so linear zu halten, daß die Obertöne nicht mehr ineinander locken.

Werden die oben beschriebenen Klangschalen mit einem Geigenbogen am Rand angestrichen, dann hören die Schwebungen auf. Dies kann nicht daran liegen, daß der Anregungspunkt den dortigen Schwingungsbauch unterdrückt und so den Punkt des ja leicht ovalen Rings, an dem der Wellenbauch einer der Schwebungsfrequenzen liegt, unterdrückt, weil durch die Anregung ja gerade hier ein Bauch produziert wird. Hier locken sich die Obertöne zwar nicht zu harmonischen Verhältnissen, aber die Verhältnisse nahe 1, also 1: 1.01 der Schwebungen locken sich zu 1:1 ineinander. Der Grund dafür könnte in dem Phänomen des Modenlockings zu suchen sein.

3.3 Nichtlinearitäten in der Praxis

Nichtlinearitäten verursachen sogenannte Subharmonische und Ultraharmonische. Diese sind in ganzzahligen Verhältnissen über und unter der Grundfrequenz.¹⁰ Die mathematische Lösung der Duffing Gleichung, in der nur Terme berücksichtigt werden, die sich im Vergleich zur Grundfrequenz langsam ändern lautet:

$$a(t) * \sin(\omega + \varphi(t)),$$

⁹ Fletcher 1978, Fletcher & Rossing 1999, S. 143

¹⁰ Schneider 1997, S. 239 & 253, Moon 1992, S. 13, Legge & Fletcher 1989

Hier ändert sich die Amplitude und die Phase mit der Zeit. Zur Darstellung dieser Kurve lassen wir $a(t)$ gleich und nehmen an, daß sich die Phase $\varphi(t)$ sinusförmig mit der Zeit ändert, und zwar mit der Frequenz ω . Dies deshalb, weil die Frequenz steigt, wenn die Auslenkung groß ist, da die Rückstellkraft ja überproportional, eben nichtlinear zunimmt. Ist die Gleichgewichtslage wieder erreicht, dann kommt keine Frequenzerhöhung dazu, und $\varphi(t)$ muß Null sein. Die Stärke der Nichtlinearität kann entweder durch einen Faktor bestimmt werden, der mit der Phase multipliziert wird oder man kann die angenommene Sinusschwingung mit etwa 3 potenzieren. Ersteres wird hier versucht. Die Kurve sieht so aus:

```
Plot[Sin[2 Pi t ω + Sin[ 2 Pi ω t ] ], {t, 0, .03}, AxesLabel -> {"Zeit", "Amplitude"},
  Ticks -> {None, None}]
```

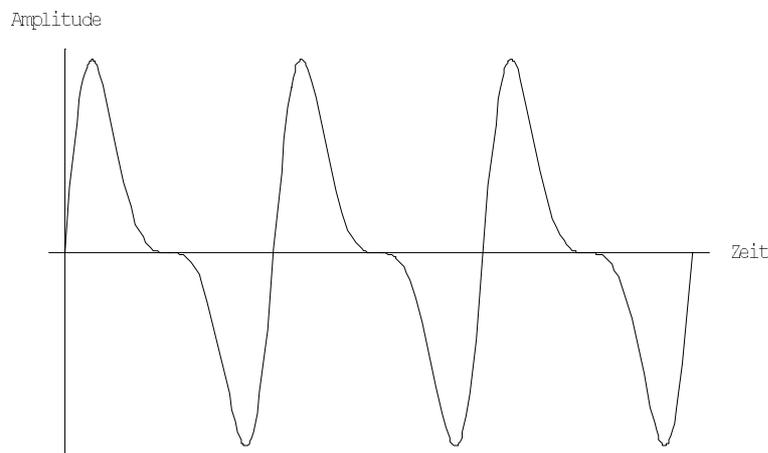


Abb. 311: Zeitfunktion einer Schwingung mit nichtlinearer Rückstellkraft.

Die Periode bleibt erhalten, nur die Schwingungsform wird komplizierter. Die Fourieranalyse ergibt folgendes Bild:

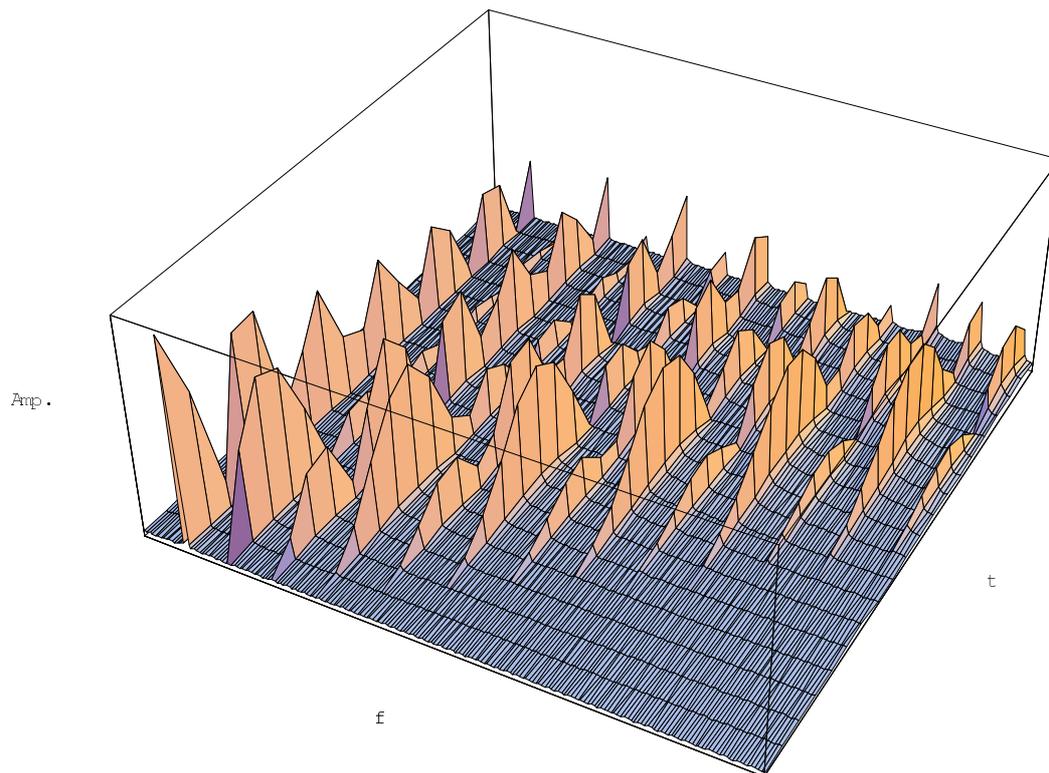


Abb. 3.12: Einfluß des Grades der Nichtlinearität (k) auf das Obertonspektrum (f) einer Mode (Grundfrequenz, kleiner Wert für f). Mit zunehmender Auslenkung kommen mehr Harmonische dazu, deren Amplituden (Amp.) schwanken.

Hier ist der Fourierplot nicht als in der Zeit fortlaufend zu denken, sondern die k -Achse gibt den Grad der Nichtlinearität an. Je größer k ist, desto größer die Auslenkung, desto mehr Obertöne (Ultraharmonische) kommen hinzu, die alle in exakt ganzzahligen Verhältnissen zur Grundfrequenz der Mode stehen.

Erstaunlicherweise schwanken die Amplituden dieser Frequenzen aber erheblich, wobei geradzahlige und ungeradzahlige Partialtöne 'auf Lücke stehen', d.h. die ganzzahligen sind stark, wenn die ungeraden schwach sind und umgekehrt. Auch beginnen die geradzahligen stark und werden immer schwächer, während die ungeradzahligen immer wieder auf den gleichen Wert ansteigen.

Im musikalischen Fall, wenn ein Hammer eine Platte oder Schale anschlägt, ist die Auslenkung am Anfang groß und wird dann immer kleiner. So gesehen stellt die k -Achse doch einen Zeitverlauf dar, dann allerdings von hinten nach vorne gesehen, da die Auslenkung ja kleiner wird. Damit müssen sich aber auch die Amplitudenverhältnisse ändern, da ja auch die insgesamt Auslenkung mit der Zeit

kleiner wird. Folgendes Schaubild ist das gleiche wie in Abb. 3.12, nur daß die Auslenkung als Gesamtamplitude mitberücksichtigt wurde:

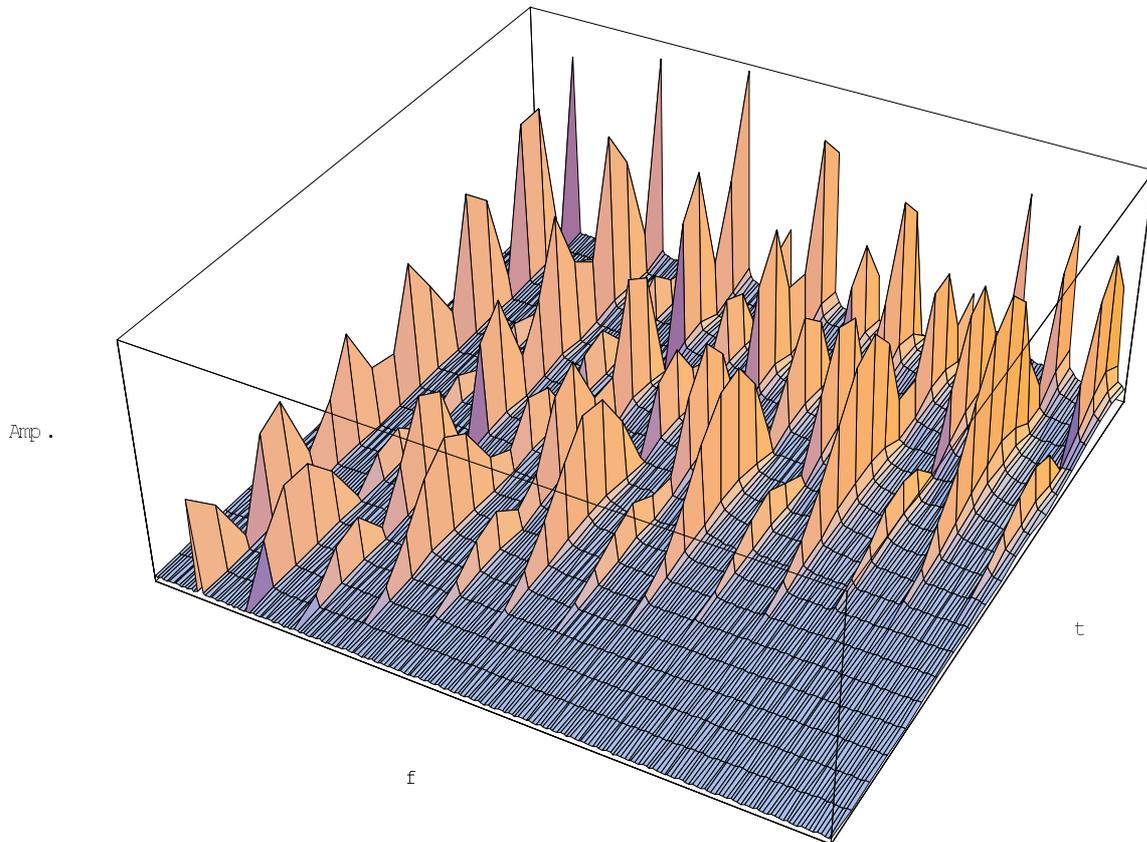


Abb. 3.13: Spektrale Fluktuation der Ultraharmonischen einer Mode mit abnehmender Amplitude in der Zeit, die hier als t-Achse von hinten nach vorne zu lesen ist.

Es herrscht eine permanente Amplitudenmodulation. Die Zeitfunktion einer solchen Schwingung ist wohl schwerlich als die einer einzigen Mode mit angenommenem Sinusverlauf bei Nichtlinearität zu erkennen.

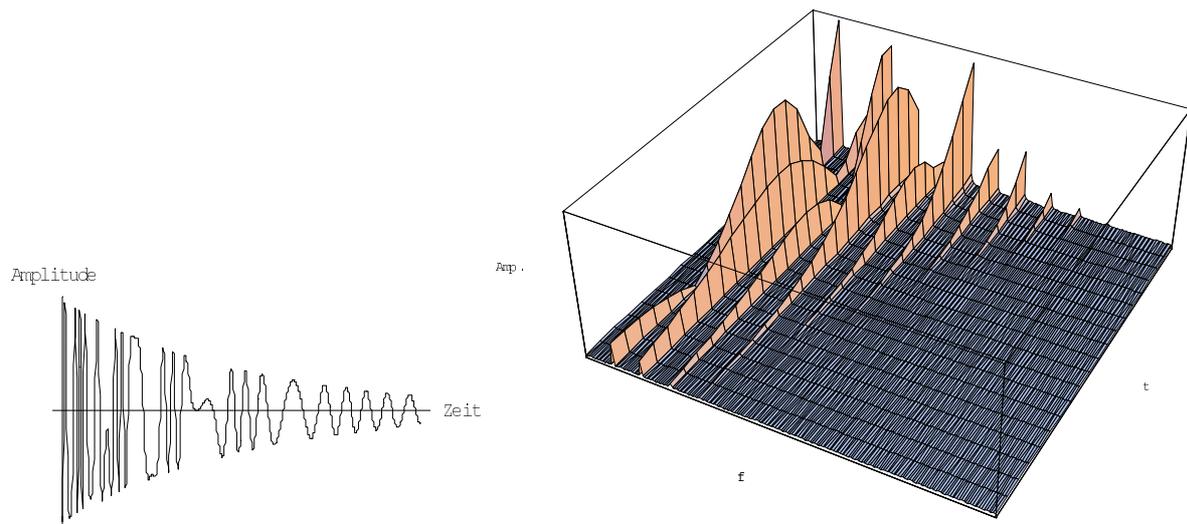


Abb. 3.14: Zeitfunktion und Spektrum einer Mode mit exponentiellem Ausklingen und damit abnehmender Nichtlinearität. Im Spektrum rechts ist die Zeit wieder von hinten nach vorne zu lesen, da es sich eigentlich um das Spektrum bei zunehmender Nichtlinearität k handelt.

Neben den Ultraharmonischen können auch Subharmonische auftreten. Dies geschieht, wenn die Grundperiode erhalten bleibt, es aber Bewegungen gibt, die sich nur jede zweite, dritte, vierte usw. Periode wiederholen. Das Ohr, wie die Spektralanalyse finden hier also Periodizitäten, die länger sind als die Grundfrequenz, also $f/2$, $f/3$, $f/4$ usw.

Eine große Auslenkung hat also einmal zur Folge, daß das Obertonspektrum aufgehellt wird, zum anderen, daß es lebendig wirkt, da ständige Amplitudenschwankungen der Obertöne stattfinden.

Ein weiteres Phänomen, das durch Modenkopplung entsteht, die im Abschnitt über die Platten behandelt ist, besteht im Energietransfers von tiefen zu höheren Moden.¹¹ Fletcher diskutiert das anhand eines chinesischen Tam-Tam, ein Bronzegong, der nur einen kleinen Buckel von ca. 80 - 100 cm Durchmesser hat. Dieser hat die Eigenheit, daß er kurz nach dem Anschlag fast nur in der Grundmode schwingt, die sehr tief ist, und kurz darauf in höhere Moden übergeht, ein Effekt, der lautmalerisch als „Gong - Schschschsch“ beschrieben werden könnte.

¹¹ Legge & Fletcher 1989, Fletcher & Rossing 199, S. 658.

Die Moden eines Beckens, das dem Gong nahekommt, bestehen aus Axial- und Radialmoden, also aus Moden, deren Knotenlinien Durchmesser oder Kreise des Beckens sind. Die allgemeine Formel dafür lautet:

$$f = c (m + 2n)^p$$

wobei c die Grundfrequenz und m und n die radialen und axialen Moden darstellen. Diese sind aber nicht in harmonischen Verhältnissen, sondern durch den Exponenten p , der gewöhnlich > 1 ist, auseinandergezogen. Dieser Exponent ändert sich aber ein wenig, wenn wir die fünfte oder sechste Mode überschritten haben. Die ersten 5-6 Moden sind nämlich reine Axialmoden. Danach kommen erst die Kombinationsmoden. Beim Tam-Tam nun gilt, wenn wir nur die Kreismoden betrachten: $f = c * m^p$, $c = 29$ Hz und $p=1.17$.¹² Diese stehen also fast harmonisch zueinander, so daß die Verzögerungszeit, mit der die höheren Moden von der Grundmode erregt werden, durch die Duffing-Gleichung berechnet werden können.

Das Phänomen ist aber physikalisch etwas anderes als die oben beschriebenen Ultra- und Subharmonischen. Diese entstehen durch Verzerrung einer einzigen Mode. Beim Gong aber geht es um die Anregung von höheren Frequenzen durch niedrigere. Dies kommt durch den Energietransfer zwischen den Moden. Das Blech eines Tam-Tam ist dünn und groß. Die Auslenkungen sind also groß. Nun wird das Blech über der neutralen Achse gedehnt, das darunter gestaucht. Dehnt man einen Körper, so zieht er sich etwas zusammen, quetscht man ihn, so drückt er an den Seiten nach außen. Folglich geht Energie dieser einen Mode verloren.¹³ Diese Energie oder diese Kraft hat aber selbst wieder die Form einer Schwingung, die sich ausbreitet. Energie kann an Knickstellen auch von longitudinalen in transversale Schwingungen umgewandelt werden.¹⁴

Da bei der Platte die Superposition nicht mehr gilt, kann von dem Klang, der beim Ohr ankommt oder mit einem Mikrofon aufgenommen wird, nicht mehr

¹² Fletcher & Rossing 1999, S.657f

¹³ Szwerc 2000. Hier wird an einem T-Träger theoretisch und experimentell gezeigt, daß an der Unstetigkeit, an der die zwei Stäbe zusammenlaufen, die Biegewelle in eine Longitudinalwelle umgewandelt und am Ende der Unstetigkeit wieder in eine Biegewelle zurückverwandelt wird.

¹⁴ Szwerc 2000.

zurückgeschlossen werden, welche Mode welche Nichtlinearität hat. Dies aus zwei Gründen. Einmal produziert eine Nichtlinearität Ultraharmonische, die harmonisch auf der Grundfrequenz liegen. Diese haben bei einem harmonischen Schwinger aber natürlich die gleiche Frequenz wie die Obertöne des Schwingers, sind von diesen also nicht zu trennen. Des weiteren tritt das Phänomen auf, daß bei einer Platte eine Mode gleichzeitig nichtlinear verzerrt ist und linear schwingt. Schwingt eine Grundmode z.B. in der Mitte der Platte stark durch, so ist die Platte hier bereits stark ausgelenkt, an den Rändern aber nicht, wenn es sich um z.B. die Decke einer Gitarre handelt. Ein höherer Oberton, der die Grundschiwingung überlagert und selbst eine so kleine Auslenkung hat, daß er nicht von selbst nichtlinear verzerrt, wird in der Plattenmitte nichtlinear, am Plattenrand aber nicht. In Wahrheit ist ein System, das nichtlinear arbeitet, nicht mehr als ein Schwinger mit n Freiheitsgraden beschreibbar, eben da die fehlende Superposition die Moden prinzipiell untrennbar koppelt. Es kann daher ein nichtlineares System als eine Überlagerung von n nichtlinearen Duffing-Gleichungen nur vereinfacht dargestellt werden.

Gerade bei Stellen im Material, die unstet und unregelmäßig sind, tritt diese Modenkopplung auf. Nun ist das Tam-Tam und es sind auch viele Becken von Rockschlagzeugern stark gehämmert, wahrscheinlich um genau diesen Effekt zu erzielen. Schneider macht diese Materialinhomogenitäten im javanischen bonang, einem Buckelgong, sowie ähnlichen Instrumenten, für das Auftreten von Pitch-Glides, Amplitudenschwankungen einzelner Moden und Schwebungen verantwortlich.¹⁵ Beim bonang findet er in den ersten 100ms instabile Abschnitte in der Zeitfunktion mit anschließenden Amplitudenschwankungen. Das bonang besteht aus einer flachen Runden Scheibe mit Knopf, die an einen konkaven oder konvexen Körper angrenzt. Es sind hier also extrem viele Übergangsstellen vorhanden. Frequenzänderungen findet er auch bei einer Steel Drum, deren dritter Teilton mit der Zeit um ca. 9 Herz absinkt, deren Grundfrequenz und erster Oberton aber stabil bleiben.

Außerdem treten bei solchen Instrumenten oft Doppelresonanzen auf, also zwei oder mehr Peaks, die eng beieinander liegen und so Schwebungen erzeugen. Die

¹⁵ Schneider 1997, S. 236ff

Ursachen davon sind vielfältig. Es kann bei Schalen von einer etwas elliptischen anstatt der kreisrunden Form kommen. Xylophone haben einen sich veränderndes Elastizitätsmodul quer zum Stab, da Holz eben nicht perfekt homogen ist. So könnte es hier zu zwei Biegewellen kommen, bei der die eine etwas schneller ist als die andere. Ein weiteres Beispiel sind chordophone, wie die tukmenische Rubob, eine dreisaitige Laute, deren zwei höhere Saiten Doppelsaiten sind. Da diese nie ganz auf den gleichen Ton gestimmt werden können, hört man einen Choruseffekt, eine Schwebung. Die zwölfsaitige Westerngitarre oder das Klavier in mittlerer und höherer Lage wären ähnliche Beispiele.

Eine allgemeine Formel für die Berechnung des Tonhöhenhubs bei Platten für die niedrigste Mode lautet:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + 0.16 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right)^{16}$$

wobei h die Dicke der Platte und a die Auslenkung ist. Bei der Genderplatte von ca, 3mm Dicke und einer angenommenen maximalen Auslenkung von .5mm beträgt bei der Grundfrequenz von 260 Hz der Hub 1.16 Hz.

¹⁶ Fletcher & Rossing 1999 S. 148

4 Chaos

4.1 Fraktale Dimensionen

Eine Methode, um den Grad der Chaotizität qualitativ und quantitativ zu bestimmen ist es, die fraktale Dimension des Einschwingvorgangs zu berechnen. Das Verfahren geht davon aus, daß es in einer willkürlich aussehenden Zeitfolge doch eine Art von Regelmäßigkeit gibt. Diese Regelmäßigkeit kann bildlich im Phasendiagramm gesucht werden, in dem im zweidimensionalen Fall auf der X-Achse die Auslenkung und auf der Y-Achse die Geschwindigkeit, also die erste Ableitung der Auslenkung aufgezeichnet ist. Jeder Zeitpunkt ist dann im zweidimensionalen Raum ein Punkt. Ist die Auslenkung zu diesem Zeitpunkt positiv, dann liegt der Punkt auf der rechten Seite des Plots, ist die Auslenkung negativ, liegt er links. Ist zu diesem Zeitpunkt die Steigung positiv, bewegt er sich also nach oben, dann ist der Punkt auf der oberen Seite des Plots, bewegt er sich nach unten, ist er auf der unteren Seite. Je größer die Auslenkung und je größer die Geschwindigkeit, desto weiter ist der Punkt vom Ursprung entfernt. Betrachtet man nun einen Zeitraum, so zeichnet die Amplitudenkurve der Schwingung eine Linie im Phasenraum, eine sogenannte Trajektorie. Ist die Schwingung eine reine Sinuswelle, dann entsteht im Phasenraum ein Kreis.¹⁷ Sind mehrere Partialtöne vorhanden, dann entstehen symmetrische Figuren.

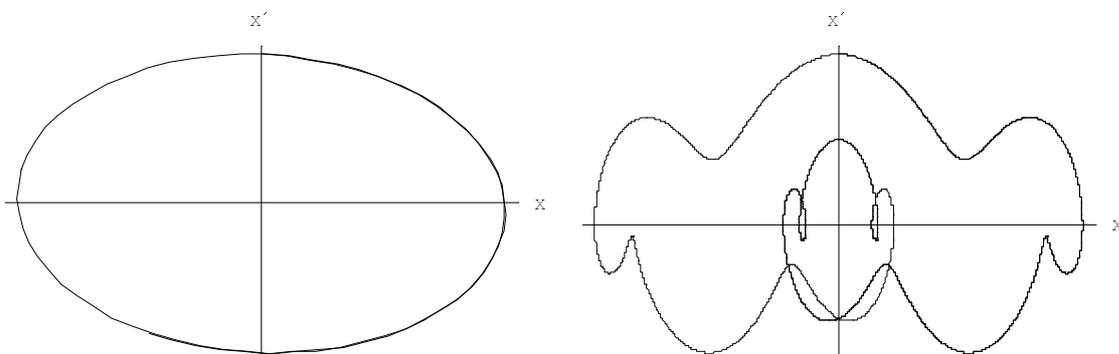


Abb. 4.1: Phasendiagramm von a) $\sin[x]$ und b) $\sin[x]+\sin[2x]+.1\sin[10x]$

¹⁷ weil $\sin(t)' = \cos(t)$. Bei Frequenzen $\ll 1$ wird daraus eine Ellipse, da $\sin(\omega t)' = \omega \cos(\omega t)$ ist. Im musikalischen Fall ist ω aber so groß, daß bei achsengenaue Zeichnung nur noch ein Strich übrig bleiben würde. Also wird wieder zum Kreis oder aus ästhetischen Gründen wieder zur Ellipse gegangen, die dann entsprechend skaliert ist.

In diesen Diagrammen ist eine klare Determiniertheit zu erkennen. Eine Zufallsfolge jedoch sieht folgendermaßen aus:

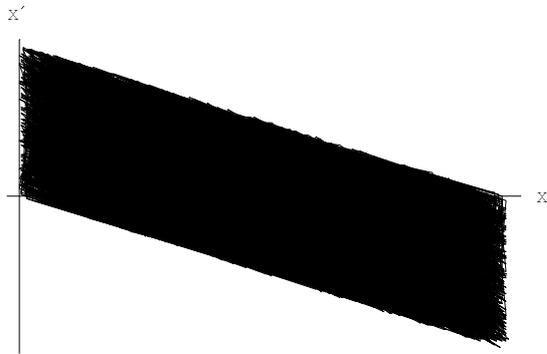


Abb. 4.2: Phasendiagramm einer Zufallsfolge. Das Parallelogramm kommt dadurch zustande, daß bei maximaler Auslenkung x die Steigung nur noch negativ sein kann.

Den Kreis in Abb. 4.1, also die sich wiederholende Perioden, nennt man Attraktor. Attraktoren sind Gebiete oder Bewegungen, zu denen das System immer wieder zurückkehrt. Im Falle einer chaotischen Bewegung werden sie seltsame Attraktoren genannt, da sie eben nicht genau reproduziert werden:

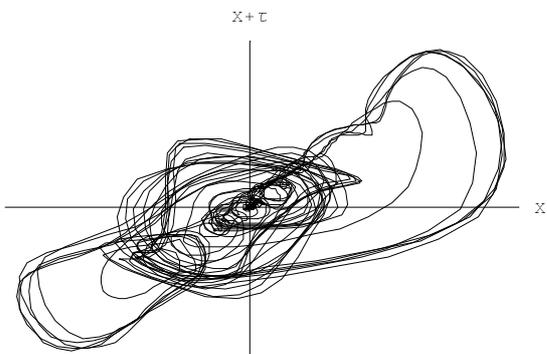


Abb. 4.3: Seltsamer Attraktor eines Klarinettentons. Die Schwingungskurve wiederholt sich nach dem Einschwingen eben nur fast genau, hier ist also das 'quasi' des quasistationären Zustandes durch die Breite der Linie sichtbar gemacht.

Der Ausdruck fraktal kommt allerdings nicht von den Phasendiagrammen, sondern von Iterationsverfahren, die fraktale geometrische Figuren produzieren, wie die Koch-Kurve oder die Kantor-Menge, mit denen man Gebilde wie Schneeflocken produzieren kann. Ihnen allen ist gemein, daß diese Gebilde sehr kompliziert

aussehen, aber aus sehr wenigen Informationen zusammengesetzt sind.¹⁸ Eine endliche Linie wird z.B. bei der Koch-Kurve in drei gleiche Abschnitte geteilt, die alle die Länge l haben. Nun wird der Teil in der Mitte herausgenommen und an seiner Stelle ein Dreieck eingesetzt, das keine Grundfläche hat und dessen zwei aufragende Linien wieder die Länge l haben. Im zweiten Schritt wird jedes der jetzt vier Längenelemente der selben Prozedur unterzogen. So wird die Struktur immer komplizierter, das Strickmuster ist aber immer dasselbe und sehr einfach: aus 3 mach 4. Hatte nun die Linie die Dimension 1 und hat ein Quadrat die Dimension 2 (Länge mal Höhe), dann ist die Dimension des hier entstandenen Gebildes zwischen eins und zwei, denn es ist keine Linie mehr aber noch keine Fläche. Allgemein zeigt sich, daß wenn N die Anzahl der Linien ist und ε die Länge einer dieser Linien in Bezug auf die Gesamtlänge, dann gilt:

$$N = \frac{1}{\varepsilon^D},$$

wobei D die fraktale Dimension ist.¹⁹ Für den Fall einer endlichen Geraden sähe die Rechnung so aus: Teilt man die Gerade in z.B. $N=5$ Abschnitte, dann ist jeder Abschnitt $\varepsilon=1/5$ lang. Also gilt:

$$5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^D} = 5, \text{ also } D = 1$$

Die fraktale Dimension ist $D=1$, da es sich ja um eine Gerade handelt.

Löst man diese Gleichung nach D auf, so gilt:

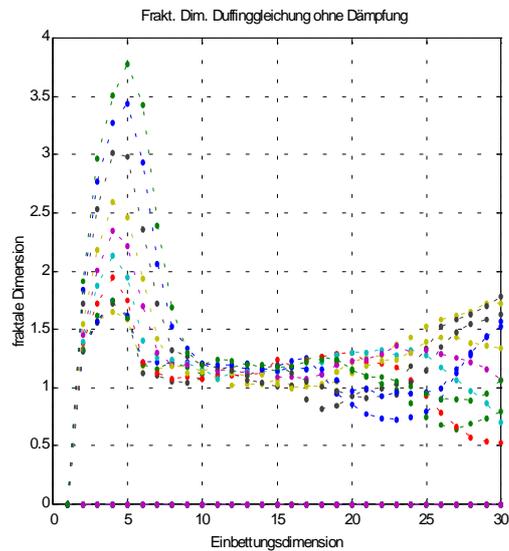
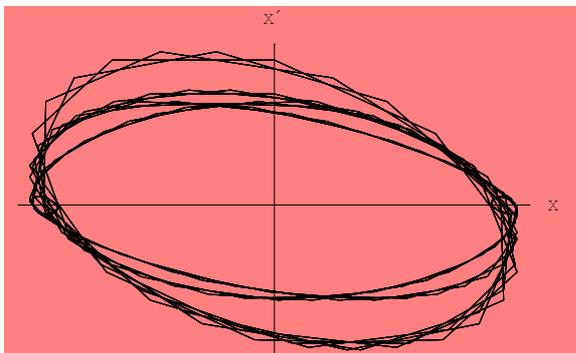
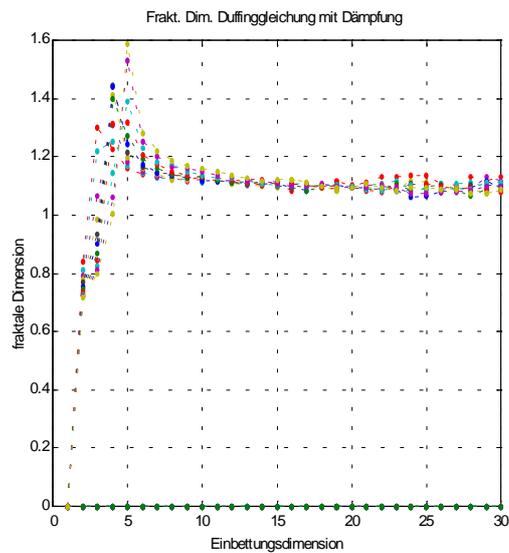
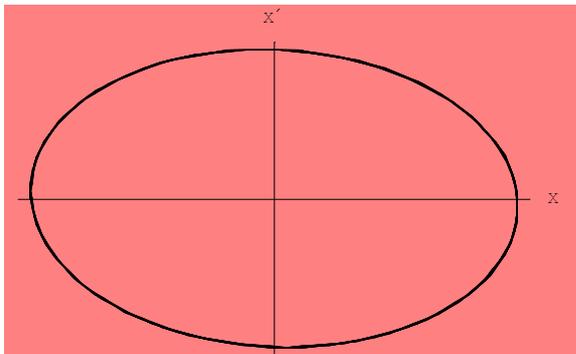
$$D = \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

¹⁸ Falconer 1993, S.xiv

¹⁹ Moon 1992, S. 330

In unserem obigen Fall der Schneeflocke ist $N = 4$ Teile, die alle die Länge ε gleich $1/3$ haben. Die fraktale Dimension ist $D = 1.26185$, also zwischen der Linie und dem Quadrat.

Das Phasendiagramm eines schwingenden Massepunktes ohne Dämpfung und Nichtlinearität hat die Dimension 1. Kommt nun aber eine Unregelmäßigkeit hinzu, 'wackelt' die Kurve. Ist sie ein wenig ausgefranst, dann ist die Dimension fraktal, etwas größer als 1.



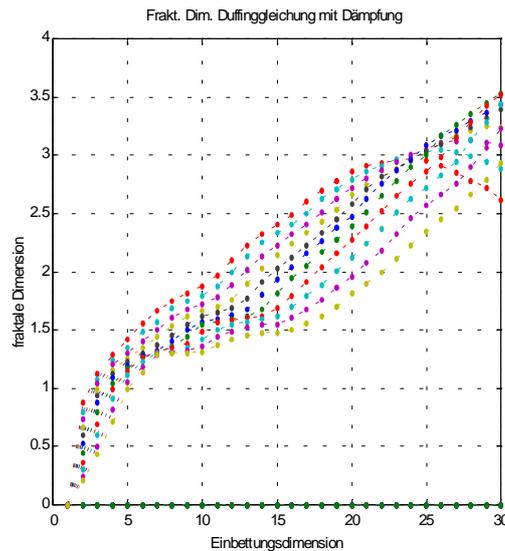
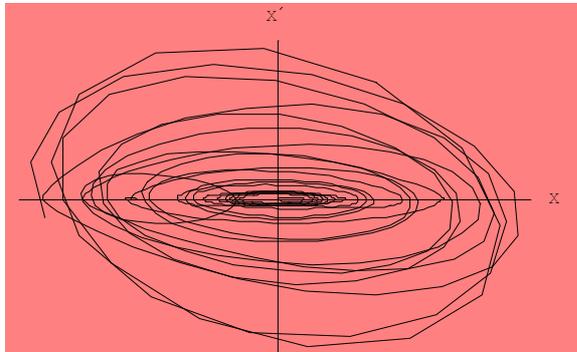


Abb. 4.4: Phasendiagramme und deren Korrelationsdimensionen. Oben: die reine Sinuskurve ist ca. 1. Mitte: Duffinggleichung ohne Dämpfung sättigt sich zwar noch, aber unstetiger > 1 . Unten: Duffinggleichung mit Dämpfung hat keine fraktale Dimension mehr, ist chaotisch. Das Fortran- und das Matlab-Programm zur Berechnung und Darstellung der Korrelationsdimension befindet sich in Anhang D.

Für die reine Sinusschwingung liefert die Rechnung der Abb. 4.4 $D=1.1$. Dies liegt am beschränkten Datenmaterial. Hier wurden bewußt Rechnungen mit der Länge von Einschwingvorgängen dargestellt, die 2200 Punkte haben. Für den Fall von 10000 Punkten liefert die Rechnung exakt $D=1$. Diese Arbeit behandelt aber nicht die Bedingungen, unter denen die Methoden optimal arbeiten, sondern geht vom Datenmaterial aus und muß daher die Grenzen der verwendeten Methoden, die Fehlerquote berücksichtigen. Es zeigt sich, daß die Methode der fraktalen Korrelationsdimension sehr stabil ist, die Kürze der analysierten Zeitfunktionen durch hohe Einbettungsdimensionen ausgeglichen werden können, die inhaltliche Interpretation der fraktalen Dimensionszahlen aber nur auf eine Kommastelle genau Sinn ergibt.

4.2 Bedeutung der fraktalen Dimension

Die Zuordnung der fraktalen Dimension zu Freiheitsgraden ist nicht ohne weiteres möglich. Darauf weist schon der Erfinder der Korrelationsdimension Grassberger hin.²⁰ Im musikalischen Fall haben wir eine Vielzahl von Freiheitsgraden. Diese

²⁰ Grasberger & Procaccia 1983 S. 200

werden unterschiedlich gezählt. In der Akustik wird gemeinhin jede mögliche Eigenfrequenz, in der ein Schwinger schwingen kann, als ein Freiheitsgrad bezeichnet. Eine Drehleier mit 80 Obertönen hätte also 80 Freiheitsgrade. Die nichtlineare Dynamik dagegen wird meist an der Duffing Gleichung dargestellt. Diese hat streng genommen fünf Freiheitsgrade: die Frequenz, die Dämpfung, die Anregungsfrequenz und deren Amplitude und die Größe der Nichtlinearität. Dies alles für eine Eigenfrequenz. Wenn man die Anregungsfrequenz und deren Amplitude für alle Eigenfrequenzen gleich setzt, so ist doch die Dämpfung und die Nichtlinearität frequenzabhängig, es bleiben pro Eigenwert drei Freiheitsgrade. Unsere Drehleier hätte schon 240 Freiheitsgrade.

In der Literatur finden sich Beschreibungen, wie aus einem Phasendiagramm herauszulesen ist, ob das System chaotisch ist oder nicht.²¹ Dazu wird von einem Freiheitsgrad ausgegangen. Im Falle eines harmonischen Schwingers mit Dämpfung ergibt sich im Phasenportrait eine Spirale, die zur Mitte strebt. Hier ist es undenkbar, daß die Trajektorien, die Linie der Spirale, sich schneiden. Auch können zwei benachbarte Trajektorien nur voneinander wegstreben. Betrachte ich z.B. den Durchgang der Trajektorien durch die positive x-Achse, so ist die Krümmung der späteren immer größer als die früheren, da die Spirale ja kleiner wird. Dieser Krümmungsunterschied wird mit dem Lyapunov - Exponenten gemessen. In diesem Fall wäre er negativ. Im Falle von fehlender Dämpfung wäre er Null. Nur bei chaotischem Verhalten kann es vorkommen, daß die spätere Trajektorie sich auf die frühere zurückbiegt, ihr entgegenkommt. Dies ist durch eine Differentialgleichung für ein einfaches Pendel nicht mehr zu erreichen. Man benötigt dazu eine äußere Krafteinwirkung, auch gekoppelt mit einer nichtlinearen Rückstellkraft. Somit ist dies ein eindeutiges Zeichen für Chaos. Eine noch krassere Form wäre die Überschneidung zweier Trajektorien.

Dies alles gilt aber nur für höchstens eine Duffinggleichung. Im musikalischen Fall habe ich aber viele Eigenfrequenzen. Oben haben wir gesehen, wie sich schon für zwei harmonische Frequenzen die schönsten Figuren ergeben, mit sich überschneidenden Trajektorien. Das Auge erkennt aber sofort das Muster und würde

²¹ Meyer - Guicking 1974 S. 378, Moon 1992 S. 55f

hier nicht von Chaos sprechen. Oder eine Grundfrequenz wird überlagert von einem hohen Oberton.

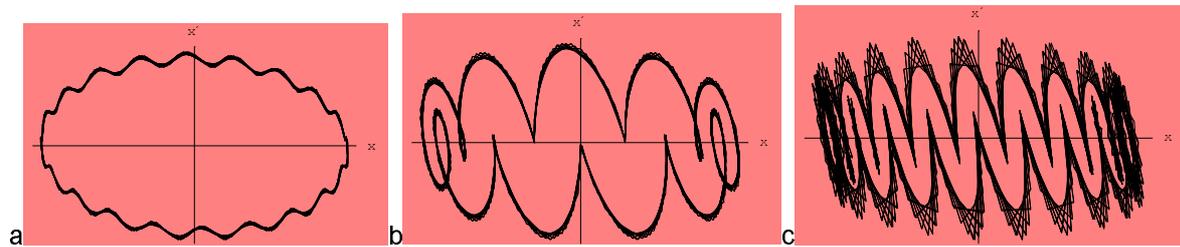


Abb. 4.5: Grundton mit a) 20. Partialton -5.3dB b) 10. Partialton -4.6dB c) 20. Partialton -2.3dB

Die Ellipse in a) ist nur leicht gewellt, die in b) und c) stark verändert. In einem quasistationären Zustand werden also die hohen Obertöne die Kommastrahlungsdimension leicht beeinflussen. (Das Hintergrundrauschen tut dies, in den in dieser Arbeit verwendeten Klängen nachweislich nicht, dazu ist es zu schwach). Viele Obertöne aber müssen nicht zu hohen Dimensionszahlen vor dem Komma führen. Harmonische Obertonspektren haben immer die Dimension $D=1$, auch wenn noch so viele Obertöne beteiligt sind. Wie Grassberger über das Problem der vielen Freiheitsgrade in Experimenten schreibt, bei denen „... the number of degrees of freedom often is very high if not infinite. Such systems nevertheless can have low-dimensional attractors.“²² Ganz einfach, weil nur die wirklich starken und zueinander inharmonischen Eigenwerte eine eigene Dimension bilden.

Um visuell beschreiben zu können, wie chaotisch das System ist, müßte man Pseudo-Phasenräume erstellen, wie sie in der Korrelationsdimension (s.u.) berechnet werden. Diese können beliebig viele Dimensionen haben. Die Hoffnung ist, jeden Freiheitsgrad in einer dieser Einbettungsdimensionen abarbeiten zu können. So schwingt jeder Oberton in seiner eigenen Dimension, die Trajektorie schneidet sich nie. Ab einer bestimmten Einbettung muß dann eine Sättigung erfolgen. Man könnte versuchen, die einzelnen Dimensionen gegeneinander zu plotten. Da aber meist 30 Dimensionen benötigt werden, um das Größte abzuarbeiten würde eine unübersichtliche Bilderflut entstehen. Zudem ist das bloße Auge schon beim zweidimensionalen Plot durch Mustererkennung in der Lage, die Tendenz zu erfassen. Das Chaos ist hier wirklich handgreiflich.

²² Grassberger & Procaccia 1983, S. 200

Zur Bestimmung der Chaotizität wird als weitere Möglichkeit die Autokorrelation vorgeschlagen. Hier wird der Klang, mit sich selbst korreliert und zwar mit verschiedenen Verzögerungszeiten. Paßt er nach einer gewissen Zeit wieder gut zusammen, so ist hier die Korrelation wieder hoch. Eine Sinuswelle, die mit sich selbst nach einer Verschiebung von 2π korreliert wird, paßt perfekt aufeinander und hat hier wieder den höchsten Korrelationswert. Gibt man die Verschiebung als Frequenz an mit $f=1/\text{Verschiebungszeit}$, dann ist sie eine Art Fourieranalyse. Sie wird, wie fast alles in der Signalverarbeitung auch so berechnet:

Sound= [1, 5, 9, 4, 2, -3]

Sound(Delay 1) = [5, 9, 4, 2, -3, 0]

Bei der Fourieranalyse wäre die obere Liste von Amplitudenwerten der Klang - hier ebenfalls - und die untere eine Sinuskurve, von der ich wissen will, ob sie im Klang enthalten ist - hier wieder der Klang, nur um eins verschoben. Da beim verzögerten Klang hinten ein Wert fehlt wird einfach eine Null eingesetzt (Zero Padding). Das ist zwar nicht exakt, aber unter allen Möglichkeiten die exakteste, denn es bewirkt, daß die Korrelationskurve mit zunehmendem Delay immer kleiner wird, da ja weniger Werte miteinander verrechnet werden, aber trotzdem keine falschen Werte liefert. Da aber am Ende nur noch wenige Werte miteinander verrechnet werden ist bei hohen Delaywerten die Aussagekraft nicht mehr so hoch.

Für eine Delayzeit werden nun alle untereinanderstehenden Werte miteinander multipliziert und die Ergebnisse addiert, die Zahlenreihen werden korreliert, so daß für jede Delayzeit eine Zahl herauskommt, der Autokorrelationsgrad für dieses Delay. In unserem Beispiel sähe das so aus:

$$1*5 + 5*9 + 9*4 + 4*2 + 2*-3 + -3*0 = 88 \rightarrow \text{für Delay 1}$$

Da für Delay = 0 der höchste Wert erzielt wird, teilt man alle Delayweltergebnisse durch den für Delay(0), um den Plot auf 1 zu standardisieren.

Im Falle der Chaotizität wird der Klang nur bei Delay(0) einen hohen Korrelationswert ergeben:

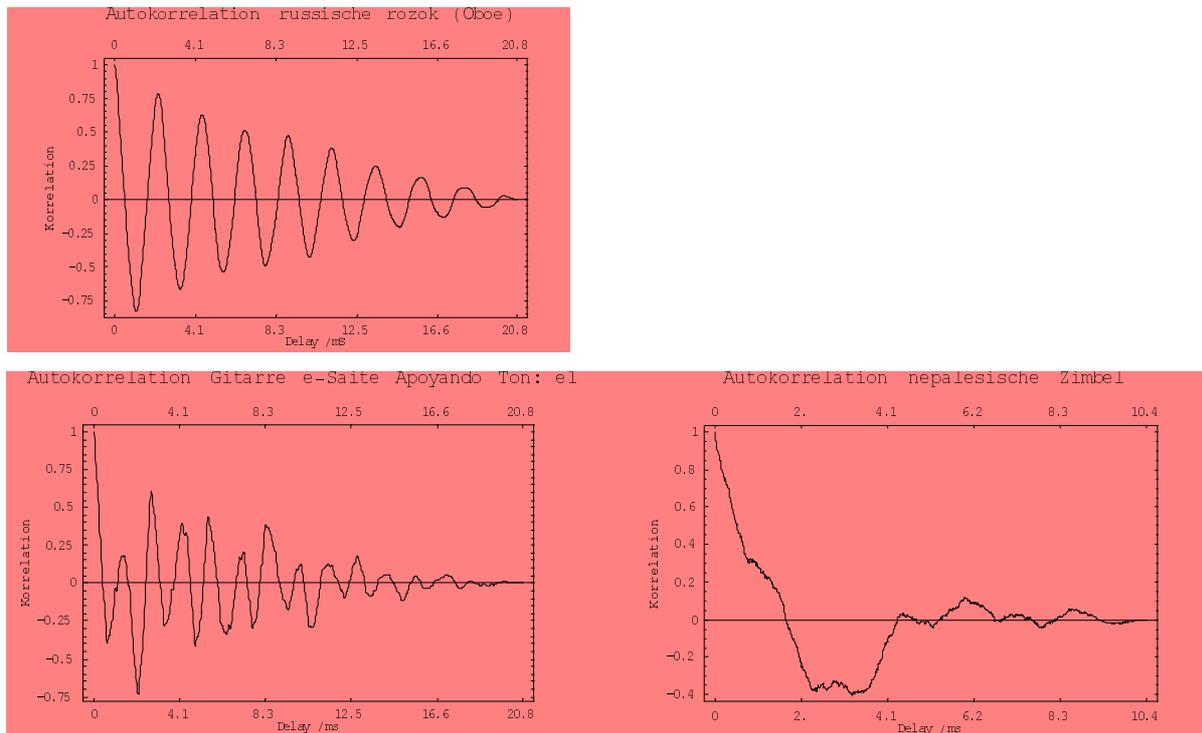


Abb. 4.6: Autokorrelationen der EVs einer Flöte, einer Gitarre und einer Zimbel

Ist die Autokorrelation gleichmäßig, so liegt nur ein Unterzyklus vor, die Dimension sollte 1 sein. Ist das Spektrum inharmonisch oder sind viele Freiheitsgrade beteiligt, die auch große Amplituden haben, so sollte die Autokorrelation wechselnde höhere und niedrigere Gipfel haben. Ist sie chaotisch, dann fällt sie ab und zackt unregelmäßig.²³

Oben drei Beispiele. Die Oboe²⁴ ist sehr harmonisch, auch während dem Einschwingens. Die Gitarre hat wechselnde Gipfel, ist also mehrdimensional und ein wenig 'angefressen' (die Korrelationsdimension gibt eine fraktale Dimension von 3.2) und die Zimbel schließlich zeigt keinerlei Periodizität mehr. Sie hat ein inharmonisches Obertonspektrum und ein chaotisches Einschwingverhalten.

²³ Argyris 1995 S. 262. Zu Autokorrelationen allg.: Hartmann 2000

²⁴ siehe: Schneider 19xx

4.3 Kapazitäts- und Informationsdimension²⁵

Diese Dimension ist im Falle des Phasendiagramms einer diskreten Zeitfolge, also aus Punkten bestehend, folgendermaßen anzuwenden: Die Anzahl der Linien würde hier kleinen Quadraten entsprechen, die man über alle Stellen legt, an denen Punkte vorkommen. Die Anzahl dieser Quadrate wäre N und ϵ wäre die Länge der Seite eines Quadrats. Nun kann man immer exakter werden, indem man die Quadrate immer kleiner macht. Dabei bekommt man immer mehr Quadrate. Hier wird dann die beste fraktale Dimension D desto bestimmt, je kleiner die Seitenflächen sind:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(N)}{\text{Log}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

Wir müssen also über das Phasendiagramm kleine Quadrate legen, deren Seitenlänge ϵ wir immer kleiner machen. Zählen wir für ein ϵ alle Kästchen, die Punkte enthalten zusammen, dann ist die Kapazitätsdimension definiert als:

$$D_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(W(\epsilon))}{\ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}, \quad 26$$

wobei $W(\epsilon)$ die Anzahl der Kästchen mit Punkten ist. Dies ist aber ein wenig ungenau, da nicht berücksichtigt wird, wie viele Punkte jeweils in jedem Kästchen sind. Um genauer zu werden, berücksichtigt man diese Verteilung, in dem anstatt der Anzahl der Kästchen mit Punkten die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit bestimmt wird. Ausgegangen wird hier vom digitalen ja-nein Bit, das eine Information darstellt. $I=2$ Bit können vier unterschiedliche Werte ($R=4$) darstellen. Es gilt allgemein:

$$I = \text{Log}_2(R)$$

²⁵Moon 1992, S. 338

²⁶Argyris 1995 S. 207

Die Information ist aber auf die Kästchen unterschiedlich verteilt, so daß wir eine durchschnittliche Information berechnen müssen, in der die Wahrscheinlichkeiten, mit der die Punkte in jedem Kästen sind, berücksichtigt werden, unabhängig von der Gesamtzahl der Punkte. Diese Information wird als Entropie bezeichnet.²⁷ Die Informationsdimension ist dann wie die Kapazitätsdimension, nur wird das $W(\epsilon)$ durch die durchschnittliche Information $I(\epsilon)$ ersetzt.

$$I(\epsilon) = -K \sum_{m=1}^{W(\epsilon)} p_m \cdot \ln(p_m) \quad \text{Gl 4.1 und}$$

$$D_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I(\epsilon)}{\log_2\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \quad \text{Gl 4.2.}$$

Hier ist p_m der Prozentsatz aller Punkte, die im Kästchen m sind. K hängt von der Definition der Information ab. In unserem binären Fall ist $K = \log_2(e)$.

Die Gleichung 4.1 ist so aufzufassen:²⁸ nehmen wir einen Würfel, dann ist das Erscheinen jeder Zahl 1,2,3,4,5 und 6 gleich wahrscheinlich. Das Ergebnis ist also maximal unbestimmt oder anders gesagt: Die Entropie als Maß der Unbestimmtheit oder Unordnung ist maximal. Ist dieser Würfel aber gezinkt, so daß er mit viel höherer Wahrscheinlichkeit die 6 würfelt, dann ist das Ergebnis viel bestimmter, seine Entropie ist kleiner als die des normalen Würfels.

Gl. 4.1 wird Null, wenn der Würfel immer auf die 6 fallen würde, denn der Logarithmus von 1 ist Null und alle anderen Fälle ausgeschlossen. Im völlig bestimmten Fall ist völlig klar, welche Zahl kommt und damit die Entropie Null. Sind zwei Fälle möglich, so ist das System ein wenig unbestimmter. Sind beide Fälle gleich wahrscheinlich, so gilt $I = -K \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -K \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Die Wahrscheinlichkeiten des normalen Würfels sind $\{1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6\}$, also $I = -K \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -K \cdot \ln\left(\frac{1}{6}\right)$. Sind alle Möglichkeiten gleich wahrscheinlich, dann hat das System mit den geringsten Möglichkeiten die kleinste Entropie. Der gezinkten Würfel hat nun vielleicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{1/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/10, 1/2\}$, die 6 kommt in der Hälfte aller Fälle, die anderen sind

²⁷ Zur Herleitung siehe Argyris 1995 S. 208 ff

über die Restfälle gleich verteilt. Hier wird klar, warum der Logarithmus noch mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert wird, also $p_m \cdot \ln(p_m)$ gilt. Somit werden nämlich die 1/10 - Wahrscheinlichkeiten, die eine größere Entropie als die 1/2 - Wahrscheinlichkeit ergäben durch ihren kleineren Zahlenwert geringer bewertet als die der Augenzahl 6 des Würfels. In diesem Fall also sinkt die Entropie wieder.

In dieser Arbeit werden die Phasendiagramme, die in Kästchen eingeteilt sind, entweder als Density- oder als Kontourplot dargestellt, wobei die Helligkeit, die Höhe oder die verschiedenen Farben p_m darstellen.

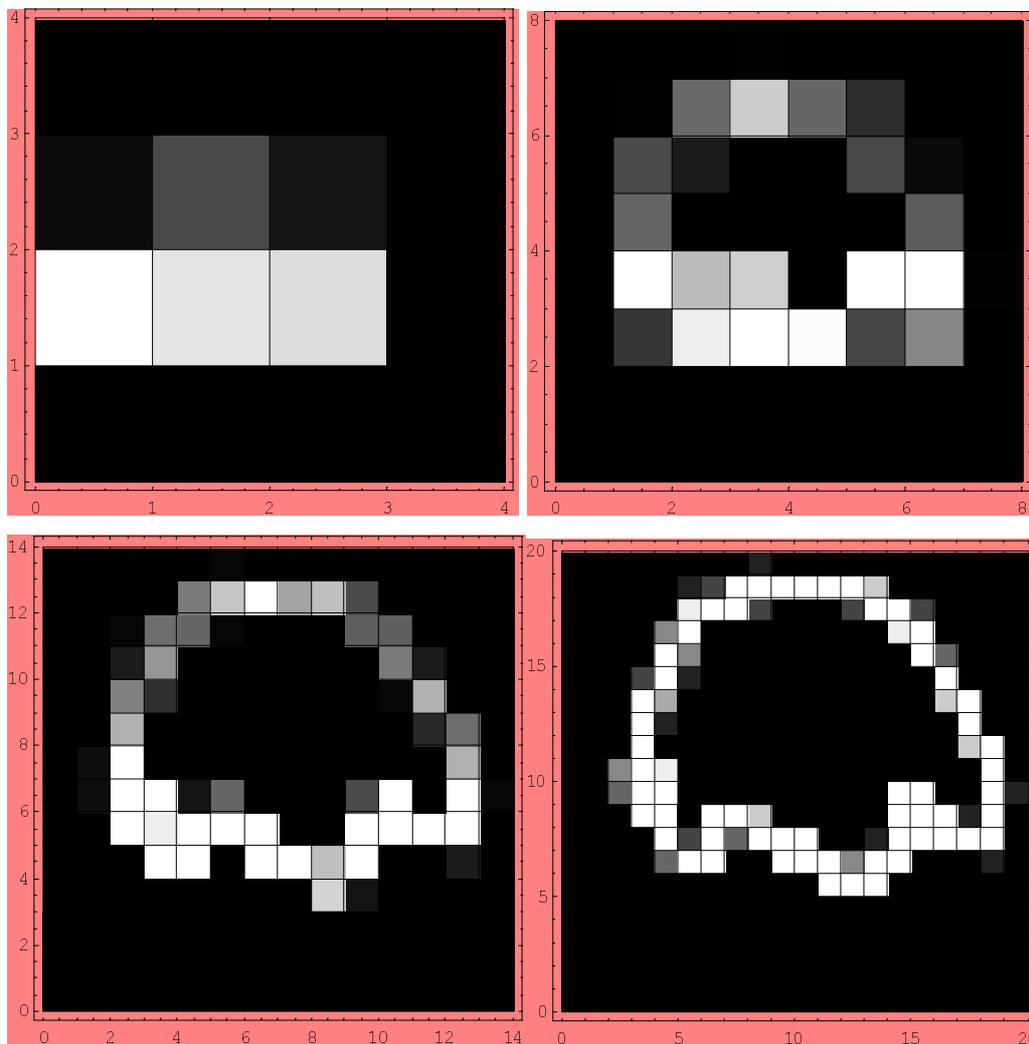


Abb. 4.7: Densityplot der Häufigkeiten p_m des Saxophontons für vier verschiedene ϵ . Das Fortran-Programm zur Berechnung ist in Anhang D gegeben.

Die Dimensionsbestimmung einer Sinuskurve, also eines Kreises im Phasenraum, ergibt aber nach dieser Methode leider ca. $D=1.3$ und nicht $D=1$, da der Wert 1 der

²⁸ Chintschin, A.J. in Grell, H. 1957, S. 9

der Linie und ein Kreis bereits zwischen Linie und Fläche ist. Da das Datenmaterial für Einschwingvorgänge beschränkt ist, und aus 2205 Punkten im Falle einer Samplefrequenz von 44,1 kHz und einer Zeitdauer von 50ms besteht, ist eine mehrdimensionale Einbettung leider nicht mehr sinnvoll. Diese müßte auch deshalb erfolgen, weil die zweidimensionale Einbettung nur Dimensionswerte zwischen 0 und 2 (zwischen einem Punkt und einer Fläche) ergeben kann. Für den Fall, in dem der Maximalwert eine Fläche ist benutzt man die multifraktale Dimension²⁹. Hier wird der Phasenplott in quadratische Bereiche geteilt und für jeden dieser Bereiche einzeln die Informationsdimension bestimmt. Sind die Bereiche klein genug gewählt, so würde eine Sinusschwingung, also ein Kreis, so klein unterteilt werden, daß jeder einzelne Bereich quasi eine Linie beinhaltet, da die Krümmung der Kurve hier nicht mehr ins Gewicht fällt. Diejenigen Quadrate, durch die der Kreis geht, haben dann die Dimension 1, was der Korrelationsdimension entspricht.

Man erhält so eine Liste von Dimensionswerten, die als Histogramm der Dimensionen, ihrer Häufigkeit nach geordnet, dargestellt werden. So ergibt sich ein Plot 'Dimension gegen Häufigkeit', der einen Maximalwert hat, der die grundlegende Dimension des gesamten Phasenplots darstellt. Dies wurde in dieser Arbeit der Informationsdimension vorgezogen, wobei sich auch hier die Schwierigkeit ergab, daß zu wenig Punkte vorhanden waren. Die Ergebnisse hängen stark davon ab, in wie viele Bereiche man den Phasenplot einbettet. Was aber erhalten bleibt, ist die grundlegende Struktur. Und da wegen der zweidimensionalen Einbettung das Ergebnis als Zahlenwert mit dem der Korrelationsdimension sowieso nicht vergleichbar ist, gibt allein die graphische Darstellung, insbesondere im Vergleich mit denen anderer Klänge, interessante Aufschlüsse.

Die Berechnung der Korrelationsdimension allein ist aber so stabil, daß es einer weiteren Methode nicht bedürfte. In einer Erweiterung der multifraktalen Dimension aber ergibt sich eine neue Analyseverfahren, die hier als intuitive Interpretation der Kolmogorov-Sinai Entropie verstanden wird.

²⁹ Argyris 1995 S. 539

4.4 Kolmogorov-Sinai Entropie³⁰ / Informationsstruktur

Die eigentliche Idee hier ist, mehrere Messungen durchzuführen und weil, daß Messung etwas anders ausfällt, von der einen auf die vorherige zu schließen. Da nicht jede Messung dasselbe Ergebnis liefert, ergibt sich eine gewisse Unbestimmtheit, eine Entropie. In unserem Fall ist die Änderung der fraktalen Dimension im Laufe der Zeit interessant. Nehmen wir an, ein Instrument erreicht den quasistationären Zustand, dann läuft die Trajektorie immer denselben Weg. Betrachten wir also den Phasenplott zu verschiedenen Zeitpunkten, dann ist er völlig gleich, die Dimensionszahl ebenfalls. Ändert der Spieler aber den Ton, oder ist der stationäre Zustand eben nur quasi-stationär, dann geht die Trajektorie jedesmal einen etwas anderen Weg und die Dimensionszahl ändert sich. Wir berechnen also für fortlaufende Zeitpunkte die multifraktale Dimension für den Phasenplot und zwar immer von selben Anfang an bis zu diesem Zeitpunkt. So bekommen wir für jeden Zeitpunkt ein Histogramm der Dimensionswerte. Da uns aber nicht interessiert, welche Zahl die Dimension im Moment hat, sondern nur ob eine neue Information dazukommt, berechnen wir die zweite Ableitung nach der Zeit, also die Änderung der Änderung. Wir nehmen die Beschleunigung und nicht die Geschwindigkeit, weil im Falle eines Einschwingvorgangs natürlich von jedem Zeitpunkt zum nächsten eine neue Information dazukommt, denn man startet ja bei Null. Interessant ist also nur, mit welcher Beschleunigung das geschieht. So ergeben sich für verschiedene Instrumentengruppen verschiedene Informationsstrukturen, was den Informationsgewinn in der Zeit angeht.

³⁰ Argyris 1995 S. 245ff

Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
 Git Ap el laut

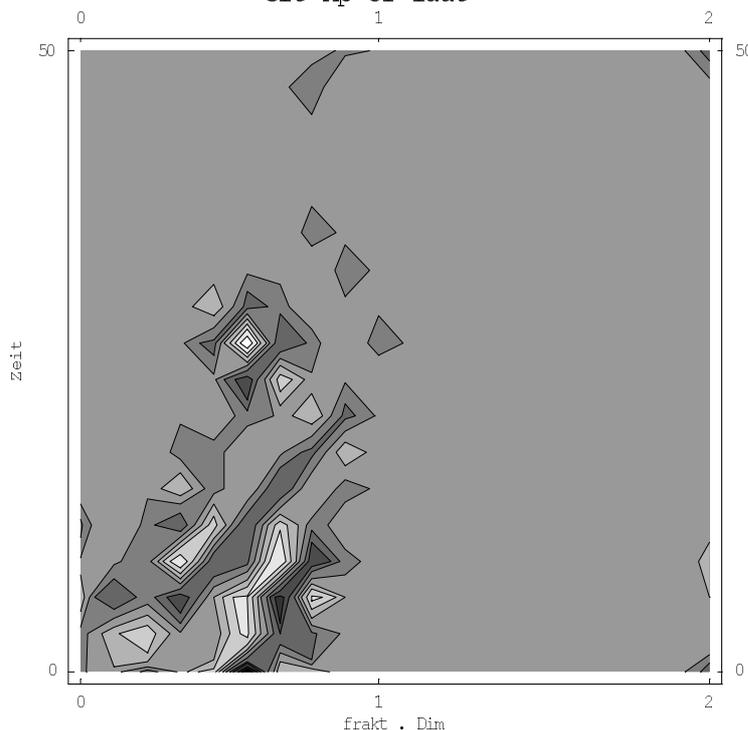


Abb. 4.8: Gitarre e-Saite Apoyando laut e1, 50 ms. Nach der Einschwingzeit von ca. 40 ms findet kein nennenswerter Informationsgewinn mehr statt, was mit der Zeitreihe des Tons übereinstimmt. Zum Fortran-Programm dieses Plots siehe Angang D.

4.5 Korrelationsdimension

Die Korrelationsdimension geht nicht vom Phasenraum aus, sondern vom Pseudo-Phasenraum. Dieser entsteht, wenn man Vektoren definiert, die als x -, y -, z - ... Koordinate Amplitudenwerte der Zeitfunktion haben, die jeweils um einen Festwert δ Sampelpunkte voneinander entfernt sind. Dieser Festwert sollte zwischen 2 und 7 Sampelpunkten liegen.³¹ Theoretisch ist es der Wert, für den die Korrelation der entstehenden Vektoren minimal wird. Dann nämlich ist gewährleistet, daß nicht ein bestehender Attraktor auf mehrere Dimensionen verteilt wird. Um den besten Wert für δ zu erhalten, kann z.B. eine Autokorrelation durchgeführt werden. Der Verschiebungswert des ersten Minimums wäre dann der Beste.

³¹ nach Keefe&Laden 1991 ist der Wert, für den die maximale Unähnlichkeit zwischen den Dimensionen erreicht wird der beste, da man sich dann sicher ist, alle Attraktoren erfaßt zu haben. Seine detaillierte Untersuchung ergab, daß ab dem Wert 4 keine Verbesserung mehr erzielt wird, was in dieser Arbeit so übernommen wird.

Die gewonnenen Vektoren können so viele Dimensionen haben wie man will. Man berechnet nun den Abstand eines jeden Vektors mit jedem anderen. Dann stellt man sich in diesem n-dimensionalen Raum einen Ursprung vor, um den eine Kugel mit Radius r sei und berechnet, wieviel Prozent aller Vektorenabstände (Cr) in diesem Radius vorkommen. Hier ist Cr dasselbe wie bei der Kapazitätsdimension das N, die Anzahl der Quadrate, und der Radius r ist die Seitenlänge, nur eben in Prozent aller Punkte. Dieser Wert stimmt nicht ganz, wird aber als gute Näherung betrachtet. Die Korrelationsdimension für einen Radiuswert r in einer Dimension ist also

$$D = \frac{\text{Log} (Cr)}{\text{Log} (r)} , \text{ da } Cr = r^D$$

Dies ist dieselbe Formel wie für die fraktale Linie, die zur Schneeflocke wurde. Dieser Wert wird nun für verschiedene Radien berechnet, denn es stellt sich heraus, das er vom Radius abhängt. Das liegt daran, daß ein zu kleiner Radius keinen repräsentativen Ausschnitt aus der Gesamtpunktzahl darstellt und ein zu großer Radius einfach zur Sättigung führt. Man stellt also die Werte für r und Cr als Plot dar und sucht einen Bereich gleichförmiger Steigung. (Die Steigung einer Kurve ganz allgemein berechnet sich ja aus dem Wertequotient vertikal durch horizontal, hier also Log Cr und Log r.)

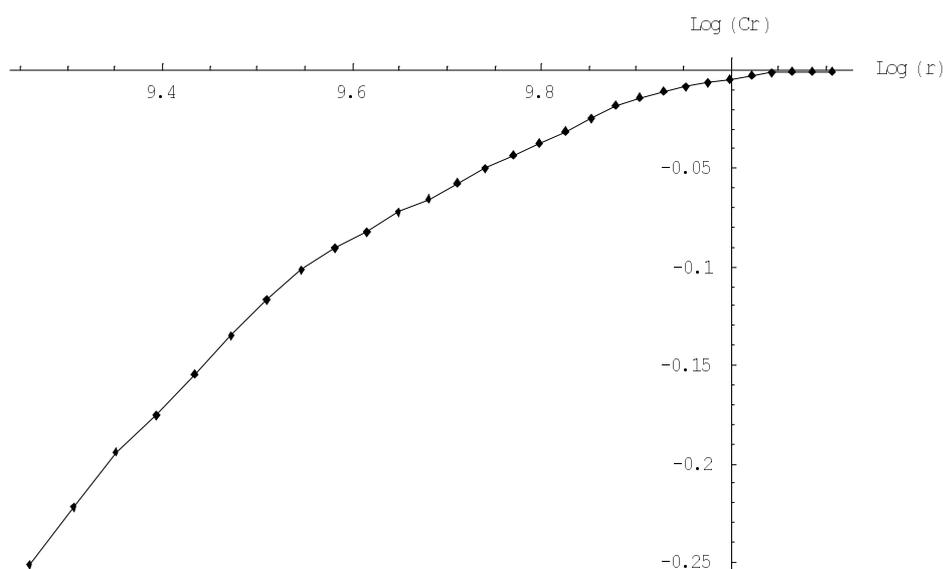


Abb. 4.9: Cr gegen r eines Tom-Toms in der Dimension 2. Ein linearer Bereich ist erkennbar.

Wird diese Berechnung in mehreren Dimensionen ausgeführt, dann ändert sich die Steigung der Kurve von Dimension zu Dimension, erreicht aber im Fall, daß die Schwingung doch irgendeine Periodizität hat, einen Wert, dem sich der Plot der Steigung gegen die Dimension asymptotisch annähert.³²

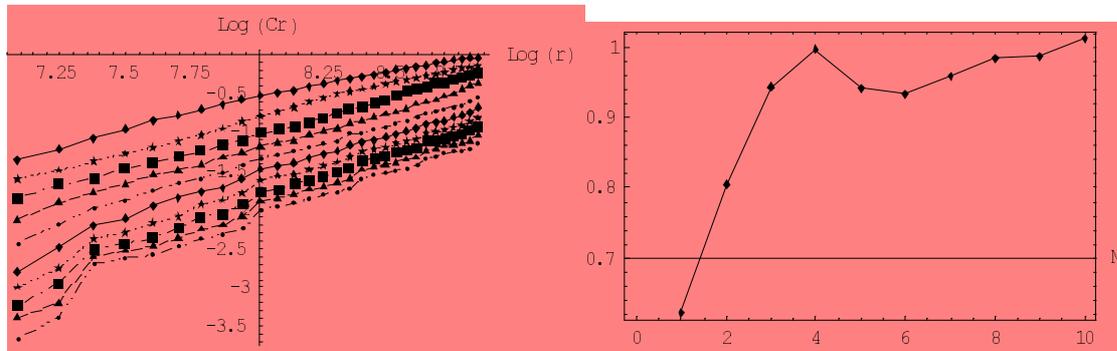


Abb. 4.10: Sättigung $\text{Log}(Cr)$ gegen Radius $\text{Log}(r)$ für 10 Dimensionen und die Steigungen dieser Dimensionen, also die fraktale Dimension des Saxophontons. Die Steigung erreicht bei 4 Dimensionen einen Wert, der sich nicht mehr grundlegend ändert, gesättigt ist, sich asymptotisch verhält. Die fraktale Dimension ist hier ca. 1. Das Wackeln des Plots Cr gegen r ist durch die geringe Datenmenge verursacht. Mit konstruierten Daten zeigte sich, daß ab ca. 4000 Punkten das Wackeln fast völlig verschwunden war und bei 2000 Punkten eine höhere Einbettungsdimension (bis zu 80) exakt denselben Wert erreichte wie für 4000 Daten. Insgesamt war die Stabilität der Korrelationsrechnung verblüffend.

Die Sättigung bei 4 Dimensionen ist normal für einen eigentlich nicht chaotischen Klang, den wir hier als Beispiel berechnet haben. Allerdings ist die Sättigung nach der vierten Dimension erreicht. Allgemein gilt, daß die Anzahl der Einbettungsdimensionen $M > 2D + 1$ ist, wobei D die gesuchte fraktale Dimension ist. Bei unserem Saxophonton ist $D = 1$, also sollte $M > 3$ sein, hier ist es in der Tat 4.

Der Algorithmus wurde mit den 50.000 z-Daten des Lorenz-Attraktors überprüft, worauf sich folgendes Bild ergab:

³² Siehe auch: Nordmeier & Schlichting 1996

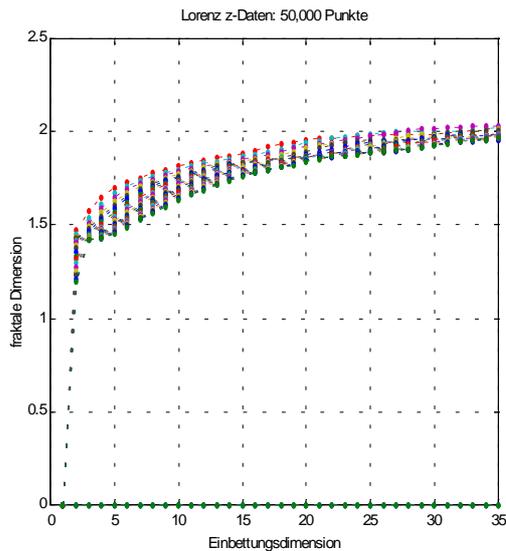


Abb. 4.11: Korrelationsdimension für 50.000 Daten der Z-Komponente des Lorenz.-Attraktors. Argyris mißt $D=2.08$ (S. 232). Die Einbettung erforderte mehr Punkte als bei den Instrumenten, da ein Umlauf durch beide Unterzyklen weit mehr Punkte hatte als im musikalischen Fall, für eine Periode 2π .

Die Plots der fraktalen Dimension gegen die Einbettungsdimension werden in dieser Arbeit durch mehrere Kurven dargestellt. Sie bezeichnen verschiedene Bereiche des Plots C_r gegen r , um die Stabilität des linearen Bereichs zu zeigen.

Man kann sich die Methode auch so vorstellen: Bei einer Sinuskurve würden die Abstände aller Punkte zu allen anderen berechnet. Für jeden einzelnen Punkt ist der minimale Abstand zu einem anderen der zu seinem Nachbarn, der maximale der zu seinem Gegenüber durch den Kreismittelpunkt. Auf seiner rechten Seite ist also jeder Abstandswert verschieden, rechte und linke Seite sind gleich. Dies gilt aber für jeden anderen Punkt auf dem Kreis genauso. Bei diesem Beispiel können wir also alle weiteren Überlegungen von nur einem Punkt aus fortführen. Beginnen wir mit dem Abstandswert des direkten Nachbarn dieses Punktes und gehen dann immer einen weiter, so ist jeder weitere Abstand zwar größer als der vorherige, aber nicht linear, sondern logarithmisch. Denn am Anfang sind die Punkte fast auf einer geraden Linie, also der Abstand jedes neuen zum Anfangspunkt im Vergleich zum vorherigen fast groß. Nähern wir uns aber dem Punkt gegenüber, dann wird der Abstand zum Ursprungspunkt nur noch geringfügig größer. Im Falle eines Kreises (oder einer Ellipse) haben wir also in der Mitte einen Bereich, in dem die Abstände fast gleich sind.

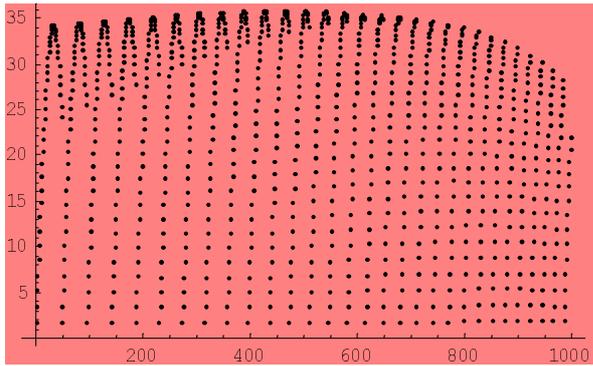


Abb. 4.12: Abstand (y-Achsen) für $\sin(t)$ im 5-dimensionalen Pseudophasenraum.

Hier ist in eine klare Linearität der Abstände für mittlere Abstandswerte festzustellen. Habe ich nicht nur einen Kreis, sondern zwei wie beim Lorenz-Attraktor, dann kommen im mittleren Bereich für eine Abstandsdifferenz mehr Punkte dazu wie für den Sinus, die Steigung ist größer als 1.

Zwar liegt auch komplizierten Obertonverhältnissen manchmal ein einfaches Gesetz zu Grunde, wie z.B. bei den Stabmoden. Doch kann weder das Ohr, noch die Rechnung diese Gesetzmäßigkeit erkennen. Ein inharmonisches Obertonspektrum oder ein solches, in dem zwei Teiltonreihen (Töne mit Obertönen) vorkommen, die inharmonisch zueinander stehen, werden aber von der Rechnung nur dann als zwei Gesetze interpretiert, wenn die Grundtonabstände genügend groß sind.

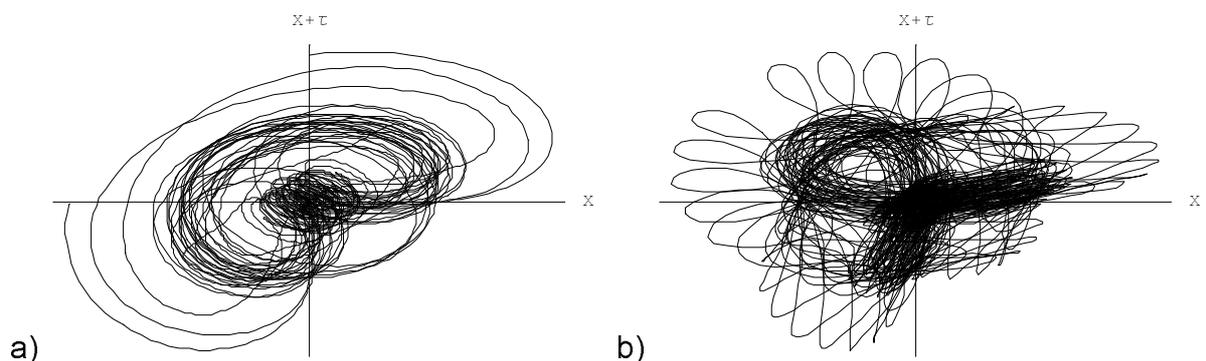


Abb. 4.13: a) Zwei Teiltonreihen im Verhältnis 1.18 (2 : 2.36) mit jeweils 5 gleich lauten Harmonischen. Fraktale Dimension: 1.1; b) Zwei Teiltonreihen im Verhältnis 1.18 (2 : 5.9) mit jeweils 5 gleich lauten Harmonischen. Fraktale Dimension: 2.1

Die von Keefe & Laden gemessenen Werte für Multiphonics werden also nur dann erreicht, wenn die Grundtöne entsprechend weit entfernt sind.

Die Korrelationsdimension ist unabhängig von Frequenz und Amplitude. Die Frequenz spielt deshalb keine Rolle, weil ein Kreis ein Kreis ist, egal welche Frequenz er hat. Die Amplitude spielt keine Rolle, da bei der Berechnung nur gefragt wird, wie dicht die Punkte im Bereich liegen. Dazu nimmt man zwei Abstandswerte und die dazugehörigen kumulierten Abstandshäufigkeiten prozentual zu allen Abstandswerten und rechnet z.B.:

$$\frac{\text{Log}[.3] - \text{Log}[.2]}{\text{Log}[300] - \text{Log}[200]} = \frac{\text{Log}[.4] - \text{Log}[.3]}{\text{Log}[400] - \text{Log}[300]} = \frac{\text{Log}[.3] - \text{Log}[.2]}{\text{Log}[3000] - \text{Log}[2000]} = 1$$

Ob also zwischen den Abständen 200 und 300 zwischen 20% und 30% aller Abstandswerte liegen oder zwischen den Abständen 300 und 400 nun eben zwischen 30% und 40%, das ändert an der Dimension nichts. Und so trägt die Amplitude nichts zur Korrelationszahl bei, da bei Multiplikation der Amplitude mit 10 auch die Dimension 1 herauskommt. Ein Nachteil jedoch ist die Linearität der Amplituden. Der Phasenplot ist in Bezug auf die Amplitude nicht logarithmisch, so wie das Ohr hört und wie Fourieranalysen dargestellt werden. Existieren also zwei inharmonische Obertöne, wobei einer erheblich leiser als der zweite ist, so ignoriert die Rechnung den zweiten, obwohl er vom Hörer - wenn auch nicht laut - wahrgenommen wird. Andererseits kann man aber sicher sein, daß weder Hintergrundrauschen noch sonstige Störgeräusche das Ergebnis verfälschen, wenn sie nicht extrem laut sind.

In der konkreten Handhabung der Rechnung ist dieser lineare Bereich im Plot $\ln cr / \ln r$ erst zu suchen. Oft sättigt sich die fraktale Dimension in z.B. der 12ten Einbettungsdimension auf den Wert 3.2, fällt dann aber wieder ein wenig ab. Dies wird durch die geringe Punktzahl des Datensatzes verursacht, wird aber durch hohe Einbettungsdimensionen ausgeglichen. Findet auch bei noch so hoher Einbettungsdimension keine Sättigung statt, dann ist auch keinerlei Periodizität festzustellen, der Klang ist weißes Rauschen. Ist dagegen eine deutliche Sättigung zu erkennen, dann ist der Fall klar. Es gibt aber auch den Fall, daß die Punktemenge zu klein ist, um eine klare Aussage treffen zu können. In diesem Fall wird keine Zahl genannt, doch ist klar, daß auch in diesen Datenmengen Gesetze

stecken, daß sie also nicht ganz chaotisch sind. Der zweite aufgetretene Fall ist der, daß zwei völlig verschiedene Schwingungszustände existieren, entweder verschieden im Klang oder der Lautstärke. Gitarrentöne z.B. haben ein leises Vorschleifgeräusch, Bläser manchmal ein Rauschen des Luftstroms vor dem Ton. In diesen Fällen zeigt der Plot C_r gegen r zwei verschiedene lineare Bereiche an, die meist durch einen scharfen Knick voneinander getrennt sind. Allerdings sind dann die Datenmengen für jeden einzelnen Bereich meist so klein, daß keine Aussage mehr über die genauen Werte mehr gemacht werden können.

4.6 Versuch einer Begriffsdefinition von Chaos

Der Begriff Chaos wird in der Wissenschaft unterschiedlich definiert. Für die theoretische Mathematik ist deterministisches Chaos eine Zeitreihe, die sich nie wiederholt, d.h. auch nach vielen Milliarden Iterationen der deterministischen Gleichung keine Regelmäßigkeit zeigt. Erst nach sehr langer Zeit ist somit klar, daß für die gewählten Koeffizienten die Gleichung chaotisch ist. Wichtig hier ist aber nicht die zeitliche Unendlichkeit selbst. Sie ist nur der Nachweis dafür, daß diese eine Gleichung chaotisch ist.

Dagegen haben die Praktiker und Ingenieure ein anderes Verständnis von Chaos. Für sie ist bereits ein kleiner Zeitausschnitt, der ein kontinuierliches Spektrum hat, also weißes Rauschen ist, ein totales Chaos, ein farbiges Rauschen - Rauschen nur in bestimmten Frequenzbändern - bereits eindeutig Chaos. Eine weitere Einschränkung kommt hinzu, wenn von nur einer Duffing-Gleichung die Rede ist. Dort ist für den linearen Fall kein Chaos zu erwarten, das Phasenportrait ist ein Kreis oder eine Spirale, wenn die Dämpfung dazu kommt. Geschieht es aber, daß dieser Kreis mit stetig abnehmendem Radius auch nur für einen kleinen Augenblick wieder eine Radiuserweiterung erfährt, der Lyapunovexponent also kurz positiv wird, dann bricht für einen Betrachter, der nur lineare Terme berücksichtigt, die Welt zusammen: es herrscht Chaos, die Spirale ist verrauscht, hier aber nicht durch Zufallsrauschen aus der Umgebung, sondern wegen der Systemparameter selbst.

Weißes Rauschen kann also als Chaos bezeichnet werden, da die Komplexität des Vorgangs zu groß wird, so daß Gesetze nicht mehr erkannt werden.

Wir können für den Klang drei Ebenen unterscheiden:

- 1) die Art der Information
- 2) die Anzahl der Informationen in einem Klang
- 3) die Anzahl der Gesetze, die alle Informationen erklären.

Im Spektrum entspricht der Art der Information jeder Sinuskomponente ihre Frequenz und ihre Amplitude, also z.B. 100 Hz mit -30dB. In jedem Klang stecken nun viele Frequenzen, bei 20 Partialtönen sind es 20 Informationen. Die Anzahl der Informationen erhöht also die Komplexität, egal welche Frequenzen und Amplituden es genau sind. Die Anzahl der Gesetze, die nötig sind, um diese Informationen zu erklären, unterscheiden schließlich die Spektren voneinander: ein harmonisches Spektrum mit 20 Partialtönen braucht nur ein Gesetz zur Erklärung, das des harmonischen Obertonspektrums. Sind nicht alle Amplituden gleich laut, so kommen deren Gesetze hinzu. Im Falle eines inharmonischen Spektrums jedoch ist die Anzahl der Gesetze so groß wie die Anzahl der Partialtöne, denn es gibt kein allgemeines Gesetz, um sie zu erklären. Allerdings kann das inharmonische Spektrum eines Stabes durch eine Formel beschrieben werden, also auch nur einem Gesetz gehorchen. In den Fällen, die umgangssprachlich als chaotisch eingestuft werden, kommen aber dann noch Veränderungen dazu, wie Nichthomogenitäten des Materials, Inharmonizitäten des Einschwingens usw., die Anzahl der Gesetze nimmt zu. Außerdem weiß das Ohr nichts von der Differentialgleichung des Stabes. Die Klänge werden höchstens als Muster gespeichert und somit wird ein Gesetz geschaffen.

Die Unterteilung in die drei Arten ist deshalb hilfreich, weil sie zeigt, daß sich Stille und weißes Rauschen auf der zweiten Ebene unterscheiden, auf der dritten aber wieder gleich sind. Um Stille vollständig zu beschreiben, muß ich nur sagen: kein Ton. Um weißes Rauschen vollständig zu beschreiben, genügt es zu sagen: alle Töne. Man kann auf der dritten Ebene sagen, daß beide in ihrer Einfachheit gleich sind, während die Zwischenschattierungen, auch wenn nur wenige oder sehr viele Töne erklingen, mehr Gesetze haben, als die beiden Extreme. Theodor Lipps formuliert dazu, daß die Einheit in der Mannigfaltigkeit als angenehm empfunden wird. Sowohl weißes Rauschen als auch Stille sind also zu einfach, haben sehr hohe Komplexität, aus der wir keine Gesetze herausfinden können, sie sind zu kompliziert, um angenehm zu wirken. Finden sich aber viele Partialtöne - eine Mannigfaltigkeit also - die aber dem Gesetz des harmonischen Obertonspektrums gehorchen - einer Einheit - so wirkt der Klang angenehm.

Auf unsere Einschwingvorgänge bezogen heißt das Folgendes. Im quasistationären Bereich sind sich die Instrumente sehr ähnlich. Schneidet man den Einschwingvorgang ab, so sind die Instrumente nur noch schwer voneinander zu unterscheiden. Der quasistationäre Bereich besteht in der westlichen Musik aus Klängen, die zueinander in Intervallen stehen, bestehend aus harmonischen Obertonreihen. Hier fehlt also das Charakteristische, nur noch das Allgemeine ist da. Im Falle der außereuropäischen Musik, in denen inharmonische Obertonreihen bestehen, treibt das die Information in die Höhe. Der Einschwingvorgang jedoch ist auch hier weitaus komplexer als jeder stationäre Zustand. Im Einschwingen ist also viel mehr Information vorhanden als während des quasistationären Zustands - wir sind näher am weißen Rauschen als an der Stille. Da aber die Qualität der Information jedes Einschwingvorgangs von Instrument zu Instrument verschieden ist, können sie so voneinander unterschieden werden. Ein Einschwingvorgang, der nicht komplexer ist, kann das Instrument nicht bezeichnen.

Die nicht Ein-Eindeutigkeit von fraktaler Dimension zum schwingenden Instrument ist also nicht weiter tragisch. Es kommt offenbar nicht darauf ankommt, wieviel gesagt wird, sondern nur, wieviel mehr in Bezug auf die Umgebung gesagt wird. Die fraktale Dimension eines Instruments hat nur Aussagekraft in Bezug auf die der anderen. Es scheint hier so zu sein, wie bei den Tonhöhen: nicht der absolute Wert ist von Interesse, sondern nur der relative. In welchem Verhältnis stehen die Komplexitäten von Einschwingvorgang zu stationärem Bereich, wie ist der zeitliche Verlauf der Information.

Es gibt ja aber auch quasistationäre Töne, die noch ungefähr der einen oder anderen Instrumentengattung zugeordnet werden können. Hier hat Ellis gezeigt, daß bereits die Lage des spektralen Zentroids genügt, um eine Gattungszuordnung am Computer rechnen zu können, die der Trefferquote der Hörer entspricht. Auch hier wird eine Relation angenommen: höher-tiefer, die mit der Zahl der fraktalen Dimension und deren zeitlichen Entwicklung nichts zu tun hat und nur auf die Helligkeit abzielt.

5 Ergebnisse

5.1 Gitarre

		Tsuij						
e-Saite		Ap			Ti			
		laut	mittellaut	leise	laut	mittellaut	leise	
e1		3.2 30ms	3.1 35ms	3.5 35ms	4.0 40ms	3.6 30ms	3.0 30ms	
g1		4.4 45 ms	3.9 40ms	3.7 40ms	2.8 30ms	3.5 30ms	2.7 25ms	
h1		3.8 40ms	2.7 30ms	2.7 35ms	2.7 30ms	2.8 30ms	2.5 30ms	
e2		3.8 40ms	2.4 30ms	1.6 20ms	3.0 30ms	1.5 20ms	2.0 25ms	
h-Saite		Ap			Ti			
		laut	mittellaut	leise	laut	mittellaut	leise	
h		3.5 30ms	2.5 25ms	2.5 30ms	3.5 40ms	1.6 15ms	2.1 20ms	
d1		3.3 30ms	2.6 25ms	2.5 30ms	3.8 35ms	1.6 15ms	2.2 25ms	
f#1		3.2 30ms	3.8 35ms	3.4 35ms	3.5 35ms	1.6 20ms	3.1 35ms	
h1		3.5 30ms	1.6 20ms	2.5 30ms	3.5 35ms	1.5 15ms	3.2 35ms	
g-Saite		Ap			Ti			
		laut	mittellaut	leise	laut	mittellaut	leise	
g		2.5 25ms	1.7 20ms	1.8 15ms	2.7 25ms	2.0 20ms	1.1 10ms	
b		3.1 30ms	2.5 25ms	1.6 20ms	2.2 20ms	1.5 15ms	1.3 15ms	
d1		3.2 35ms	2.5 30ms	1.7 20ms	2.9 35ms	1.3 15ms	1.3 15ms	
g1		2.5 30ms	3.5 40ms	3.5 30ms	3.2 35ms	2.5 25ms	2.8 30ms	
d-Saite		Ap			Ti			
		laut	mittellaut	leise	laut	mittellaut	leise	
d		(1.6)2.7	2.5	1.8	(1.1)2.7	(-)2.5	(-)3.2	
f		(-)1.8	(1.7)2.5	1.6	(-)3.0	(-)2.5	(-)2.5	
a		(-)2.4	(1.8)1.8	(-)1.2	(-)(-)	(1.4)(-)	(-)1.6	
d1		(-)1.8		2.8				

Tab. 5.1: Gitarre: fraktale Dimensionen und ungefähre Längen (auf 5ms gerundet) der Einschwingvorgänge. Zahlen in Klammern sind das Vorschleifgeräusch. Zum Algorithmus siehe Anhang D.

Zander

e-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
e1		5.5	2.5	2.2		6.0	5.0	3.0
g1		3.2	2.0	1.6		6.1	4.2	1.8
h1		3.2	2.5	1.7		>6.0	2.7	2.0
e2		6.0	2.0	2.5		3.3	3.3	4.0
h-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
h		4.0	2.7	2.0		3.2	2.0	1.8
d1		1.9	1.7	1.9		3.4	1.8	1.8
f#1		3.6	1.6	1.5		2.3	1.8	2.4
h1		2.9	2.9	2.4		>6.0	2.2	1.5
g-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
g		2.0	1.9	1.7		3.6	1.7	2.0
b		2.7	2.3	2.2		1.8	1.7	1.7
d1		2.4	1.8	1.8		3.3	1.7	2.9
g1		3.0	2.0	2.6		2.2	1.4	2.5
d-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
d		(3.0)3.5	(5.1)2.3	(3.0)2.5		(3.0)2.9	(-)2.8	(-)2.0
f		(-)3.9	(-)1.7	(-)1.5		(-)1.5	(-)1.6	(-)2.0
a		(4.5)2.0	(-)2.3	(-)2.0		(-)2.2	(-)2.0	(-)1.7
d1		(3.5)2.2	(-)2.1	(-)2.6		(-)2.1	(-)2.0	(-)2.1

Tab. 5.2: Zander Gitarre, fraktale Dimensionen. Die Zahlen in Klammern sind die Werte des Vorschleifgeräuschs. Siehe Anhang D.

Lauenhardt & Kobs

e-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
e1		2.0	2.0	3.0		3.4	1.8	2.9
g1		2.4	1.8	2.4		3.4	2.0	3.5
h1		2.1	1.8	2.5		2.4	2.0	2.5
e2		2.5	1.5	2.4		2.3	1.7	2.1
h-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
h		3.4	2.2	2.2		3.7	3.2	2.0
d1		3.0	1.7	1.6		3.7	2.2	2.0
f#1		3.6	1.8	1.6		2.2	1.7	2.7
h1		2.3	2.7	2.0		2.5	2.2	1.5
g-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
g		1.8	1.8	1.6		2.2	1.7	1.7
b		2.5	2.1	1.5		1.8	1.8	1.5
d1		2.0	1.5	1.6		2.0	1.6	2.5
g1		2.3	2.4	1.7		1.9	1.4	2.3
d-Saite	Ap	laut	mittellaut	leise	Ti	laut	mittellaut	leise
d		2.5	2.5	2.2		3.6	2.9	2.4
f		1.7	1.6	1.7		2.5	3.2	2.0
a		2.0	2.0	1.5		2.2	1.4	1.4
d1		1.3	1.4	1.6		1.8	2.0	2.2

Tab. 5.3: Gitarre Lauenhardt & Kobs, fraktale Dimensionen. Siehe Anhang D.

5.1.1 Überblick

Tabelle 5.1, 5.2 und 5.3 listen die fraktalen Dimensionen von drei klassischen Gitarren auf, einer Tsuij (im folgenden T), Zederndecke, Palisanderkorpus, Torres-Deckenbeibalkung, 7 Balken, keine Schallochverstärkung, Baujahr ca. 1997, Preisklasse um die DM 4000.-, Saiten Hannabach hard tension, silber special, einer Zander Gitarre (Kiel) (im folgenden Z), Fichtendecke, Zargen und Boden Rio-Palisander, Torres Beibalkung, PK ca. DM 6000.-, John Hope Saiten und einer Lauenhardt & Kobs Gitarre (im folgenden LK), Fichtendecke, Palisanderboden und -zargen, Torresbeibalkung, PK ca. DM 2000.-, Hannabach Gold Saiten. Die Samplefrequenz lag bei 44,1 kHz, es wurden wie immer 50ms als EV genommen. Die Vorschleifgeräusche, wenn der Finger über die Saite zieht, sind bei den Baßsaiten, die ebenfalls mit dem Zeigefinger (i-Finger) angeschlagen wurden in Klammern gesetzt.

Die Aufnahmen wurden mit einem AKG SE 300 B Mirkophon und dem Röhrenmikrophonvorverstärker Gold Mice (SPL) auf einen Sony Dat-Walkman TCD-D100 aufgezeichnet und digital in den Computer überspielt. In Einzelfällen, wie bei der Samplefrequenz 96 kHz wurde direkt in den Computer aufgenommen, hier mit einer TerraTec EWS 64 Soundkarte und einer Delta 44 Karte von M-Audio.

Die Durchschnittswerte für die Saiten e, h und g und deren Standardabweichungen sind:

	Tsuij				Ti		
Ap	laut	mittellaut	leise		laut	mittellaut	leise
Mittelwert	3.3	2.7	2.6		3.2	2.1	2.3
Stad.abw.	.53	.73	.80		.52	.82	.74

Die Saiten alleine:

	e-Saite	h-Saite	g-Saite
Mittelwert	3.0	2.8	2.3
Stad.abw.	.74	.78	.74

Die Gesamtwerte für Apoyando und Tirandu sind $Ap = 2.9 / .75$, $Ti = 2.5 / .83$.

Zander

	Ap	laut	mittellaut	leise		Ti	laut	mittellaut	leise
Mittelwert		3.1	2.1	2.0			3.5	2.4	2.2
Stad.abw.		1.44	.38	.39			1.62	1.01	.64

Die Saiten alleine:

	e-Saite	h-Saite	g-Saite	d-Saite
Mittelwert	3.5	2.5	2.2	2.2
Stad.abw.	1.54	1.02	.57	.58

Die Gesamtwerte für Apoyando und Tirandu sind $Ap = 2.5 / .93$ $Ti = 2.6 / 1.30$

Lauenhardt & Kobs

	Ap	laut	mittellaut	leise		Ti	laut	mittellaut	leise
Mittelwert		2.2	1.9	1.9			2.6	2.1	2.2
Stad.abw.		.78	.38	.45			.70	.60	.56

Die Saiten alleine:

	e-Saite	h-Saite	g-Saite	d-
Saite				
Mittelwert	2.4	2.4	1.9	2.1
Stad.abw.	.55	.70	.34	.59

Die Gesamtwerte für Apoyando und Tirandu sind $A_p = 2.0 / .56$; $T_i = 2.3 / .65$

Es sind leichte Tendenzen zu erkennen: e-Saite > h-Sait > g-Saite, Apoyando >

Tirandu, laut > mittellaut > leise. Die Standardabweichungen sind aber doch sehr

hoch, die Werte schwanken also erheblich. Nun geben die Zahlen vor dem Komma

an, wie viele Unterzyklen im Attraktor vorhanden sind. Hier unterscheiden sich die e-

Saite und die lauten Töne von den anderen. Doch nur bei den lauten Apoyando-

Werten wäre dies zu beobachten, betrachtet man die Einzelwerte in Tab. 5.1.

In Tab. 5.1 geben die Zeitangaben unter den Werten der fraktalen Dimensionen die

ungefähre Länge des ´chaotischen´ Bereichs an, die mit dem Auge auf 5ms genau

geschätzt wurde. Die Zeitlängen stimmen sehr gut mit den fraktalen Dimensionen

überein, wobei größere Dimensionen auch längere Zeitangaben haben. Dies hängt

aber nur mittelbar miteinander zusammen, denn auch ein Attraktor, der nur 10 ms

dauerte, aber 3 Unterzyklen hätte, hätte die fraktale Dimension 3. Offenbar aber

beruhigt sich das System desto langsamer, je mehr prinzipiell unterschiedliche

physikalische Parameter zusammen wirken.

Um die gleichbleibende Stabilität der Ergebnisse im Vergleich Apoyando - Tirandu

und laut - mittellaut - leise zu demonstrieren, werden hier die Plots

Einbettungsdimension gegen fraktale Dimension der Korrelationsdimension

wiedergegeben.

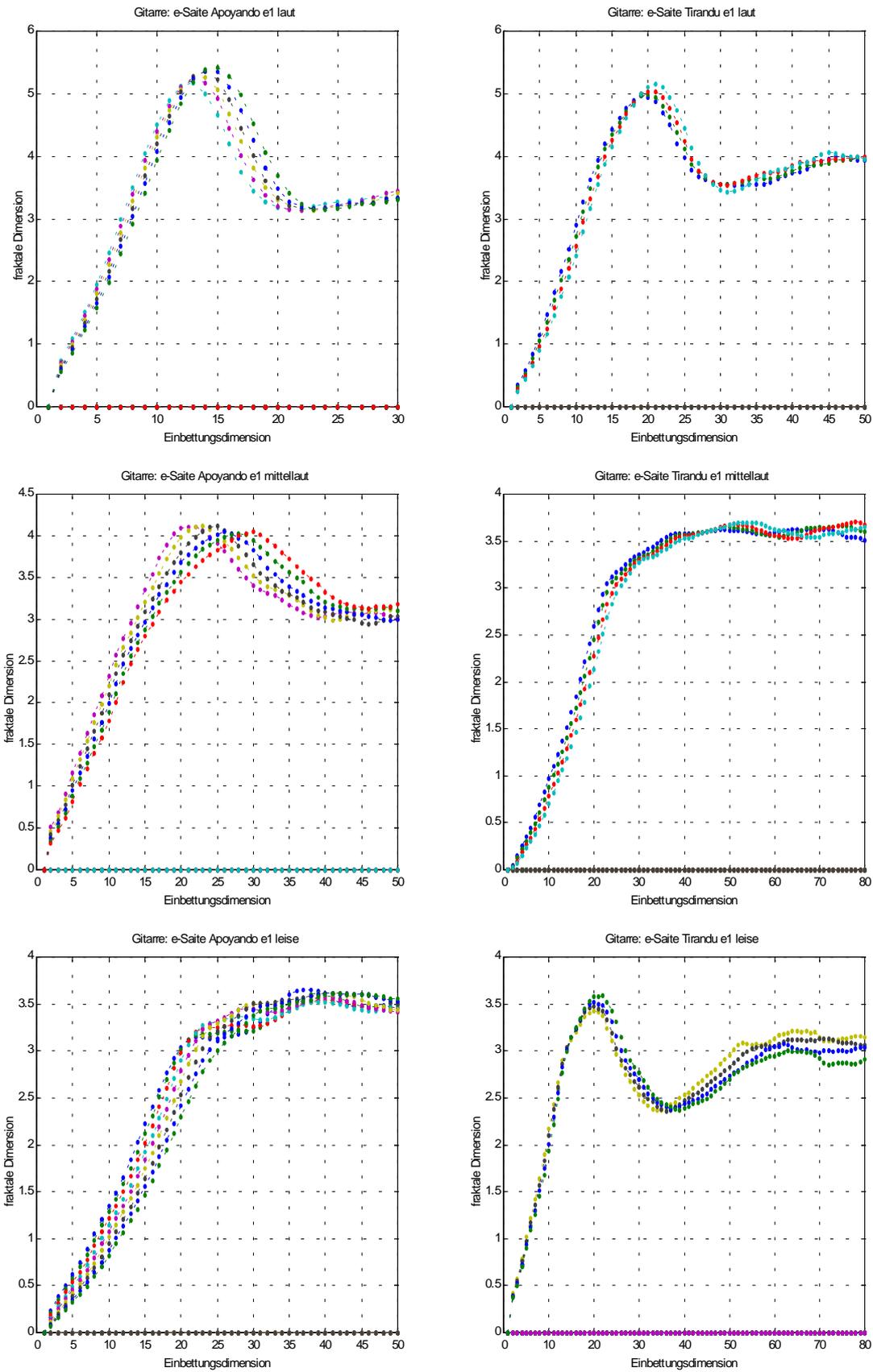


Abb 5.1: Plots Einbettungsdimension gegen fraktale Dimension für den Ton e1, Apoyando - Tirandu, laut - mittellaut - leise. Zur Berechnung und Darstellung siehe Anhang D.

Hier werden mehrere mögliche Steigungen dargestellt, um die Stabilität des Plots C_r gegen r (siehe Kapitel 4.5) zu demonstrieren. Der Hubbel am Anfang glättet sich, wenn viel mehr Punkte zur Verfügung stehen. Es zeigte sich auch, daß sowohl sehr kleine als auch sehr große Lautstärken sauber eingebettet werden konnten, selbst wenn ihre Zeitreihen das erst nicht vermuten ließen.

Abgesehen von der e-Saite gilt für alle anderen Saiten, daß die Werte von T über Z nach LK abfallen. Dies gilt auch für die gemittelten Werte der Gitarren (im Apoyando von 2.9 über 2.5 zu 2.0).

5.1.2 Vorschleifgeräusch

Dieses Geräusch trat natürlich auch bei den Diskantsaiten auf, war aber erheblich leiser, weswegen die 50 ms Einschwingvorgang ab dem Loslassen der Saite gerechnet wurden, bei den Baßsaiten allerdings ab Beginn des Geräuschs. Da die Samplefrequenz von 44,1 kHz für 50ms 2205 Punkte für die Rechnung liefert und die Berechnung von Korrelationsdimensionen mit weniger als 2000 Punkten sehr schwer wird, war es in den meisten Fällen nicht möglich, einen Zahlenwert dafür zu ermitteln. Das Vorschleifgeräusch an sich enthält jedoch bereits alle spektralen Komponenten. Erfahrungsgemäß ist der erste Oberton etwas lauter als der Grundton. Es wäre also denkbar, von diesem Vorschleifgeräusch auf die kommende Tonhöhe zu schließen. Will man die Tonhöhe rechnerisch-numerisch feststellen, um sie z.B. als Midi-Note eines Gitarrensynthesizers einen völlig anderen, vorher gesampelten Sound spielen zu lassen, dann könnte man wohl die besten Ergebnisse erzielen, wenn man den höchsten Peak als Oktave betrachtet und den Ton eine Oktave tiefer als Midi-Note ausgibt.

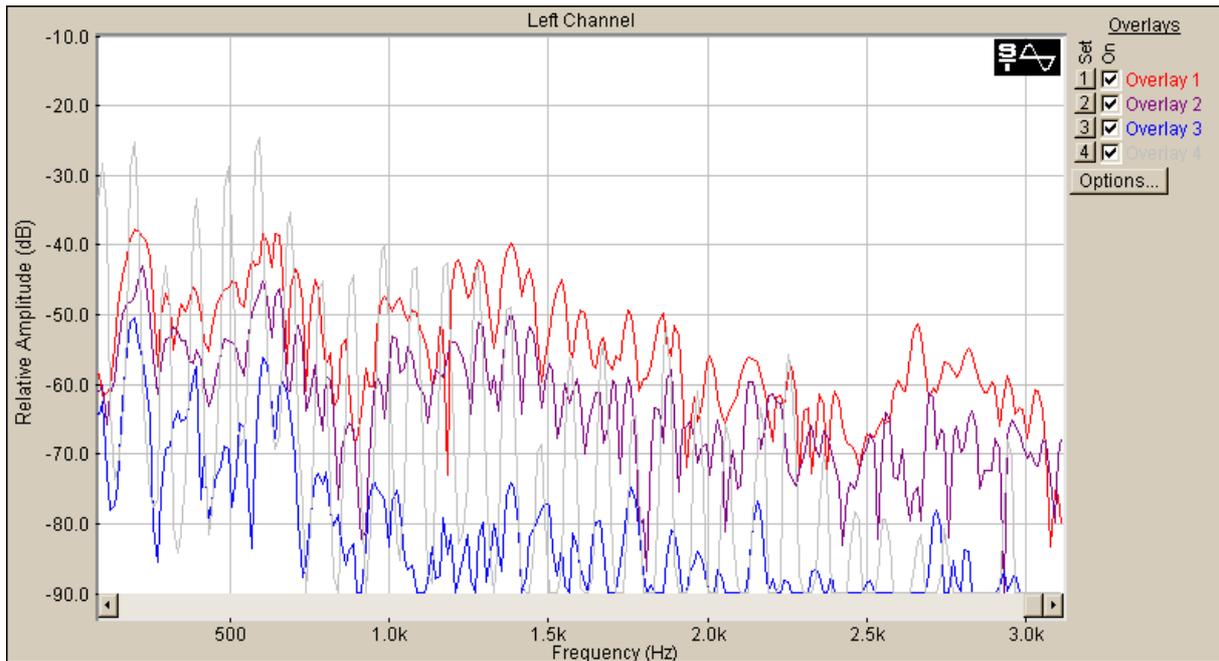


Abb. 5.2: Spektren der drei Vorschleifgeräusche des Gitarrentons G der tiefen E-Saite Apoyando (laut=rot, mittellaut= lila, leise=blau) und zum Vergleich des späteren stationären Zustands (grau). Der Grundton ist derselbe. Viele weitere Obertöne stimmen auch überein.

In Abb 5.2 ist das Vorschleifgeräusch des Gitarrentons G der tiefen E-Saite dargestellt. Das graue Spektrum im Hintergrund ist der spätere quasistationäre Bereich. Die meisten Obertöne sind hier bereits vorhanden. Die Zeitfunktionen sehen so aus:

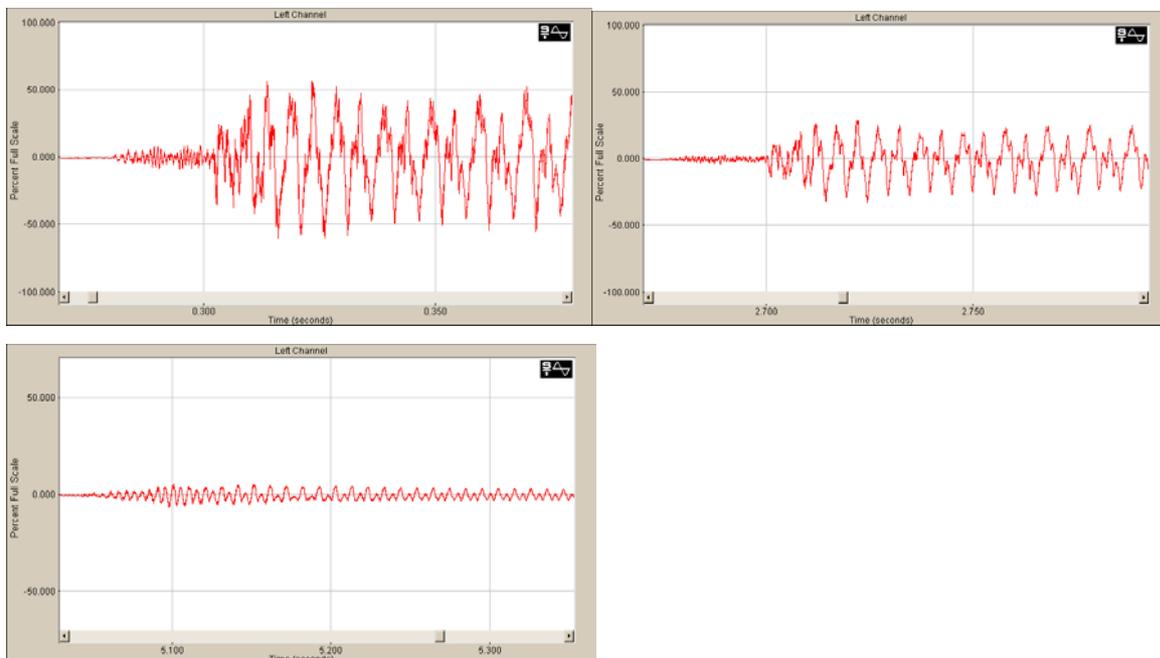


Abb. 5.3: Zeitfunktionen des Gitarrentons G der tiefen E-Saite Apoyando, laut, mittellaut, leise.

Das Vorschleifgeräusch ist beim leisen Ton fast nicht mehr vom gezupften Ton zu unterscheiden. Das liegt daran, daß wir ja nicht die Saitenschwingung sehen,

sondern eine Überlagerung der Schwingungen, die von den einzelnen Teilen der Gitarrendecke stammen, welche ja auch erst eingeschwingen sein muß. Im leisen Fall dämpft also das System das Anzupfen an sich und glättet die Amplitudenkurve.

Die fraktalen Dimensionen überraschen hier. Im lauten Fall sind sie für Vorschleifgeräusch, EV und quasist. Bereich (4.0, 1.6, 1.6), im mittellauten (2.0, 1.5, 1.6). Beim leisen Ton konnte keine Zahl für das Vorschleifgeräusch ermittelt werden. EV und quasist. Bereich liegen bei (2.1, 2.2). Die etwas höheren Werte für Z liegen am vermehrten Auftreten von Korpuseigenmoden. Der Einschwingvorgang ist also nicht chaotischer als der quasist. Bereich. Das liegt wohl an der Trägheit umspinnener Saiten, die nicht mehr so viele verschiedene Schwingungsarten ausführen können. Auch ist der EV insgesamt kürzer als bei den Diskantsaiten, was für die meisten Baßsaiten gilt. Die Baßsaiten kommen wegen ihrer Trägheit schneller in einen Grenzyklus. Auch sind hier wohl keine Eigenresonanzen der Gitarre mit betroffen, zwischen denen die Grundtöne der Saite wechselseitig Energie austauschen. Durchweg war die fraktale Dimension der Vorschleifgeräusche nicht sehr hoch. Es scheint sich wohl die Eigenschwingung der Saite so stark durchzusetzen, daß das Geräuschhafte nicht so stark zum Tragen kommt. Hier herrscht also bereits eine hohe Organisiertheit, was vom Ohr wegen der Kürze nicht aufgelöst wird, aber im Spontaneindruck sicher stark zur Identifizierung eines Saiteninstruments beiträgt. Zur Überprüfung wäre es nötig, an Stelle des Vorschleifgeräusches irgendein Rauschen vor den Klang zu schneiden. Der Ton wäre sicher sehr entstellt.

5.1.3 Einzelergebnisse

Betrachten wir den Ton e1 von T, die leeren hohe e-Saite Apoyando angeschlagen. Die Zeitreihen und Spektren der drei Lautstärken sehen so aus:

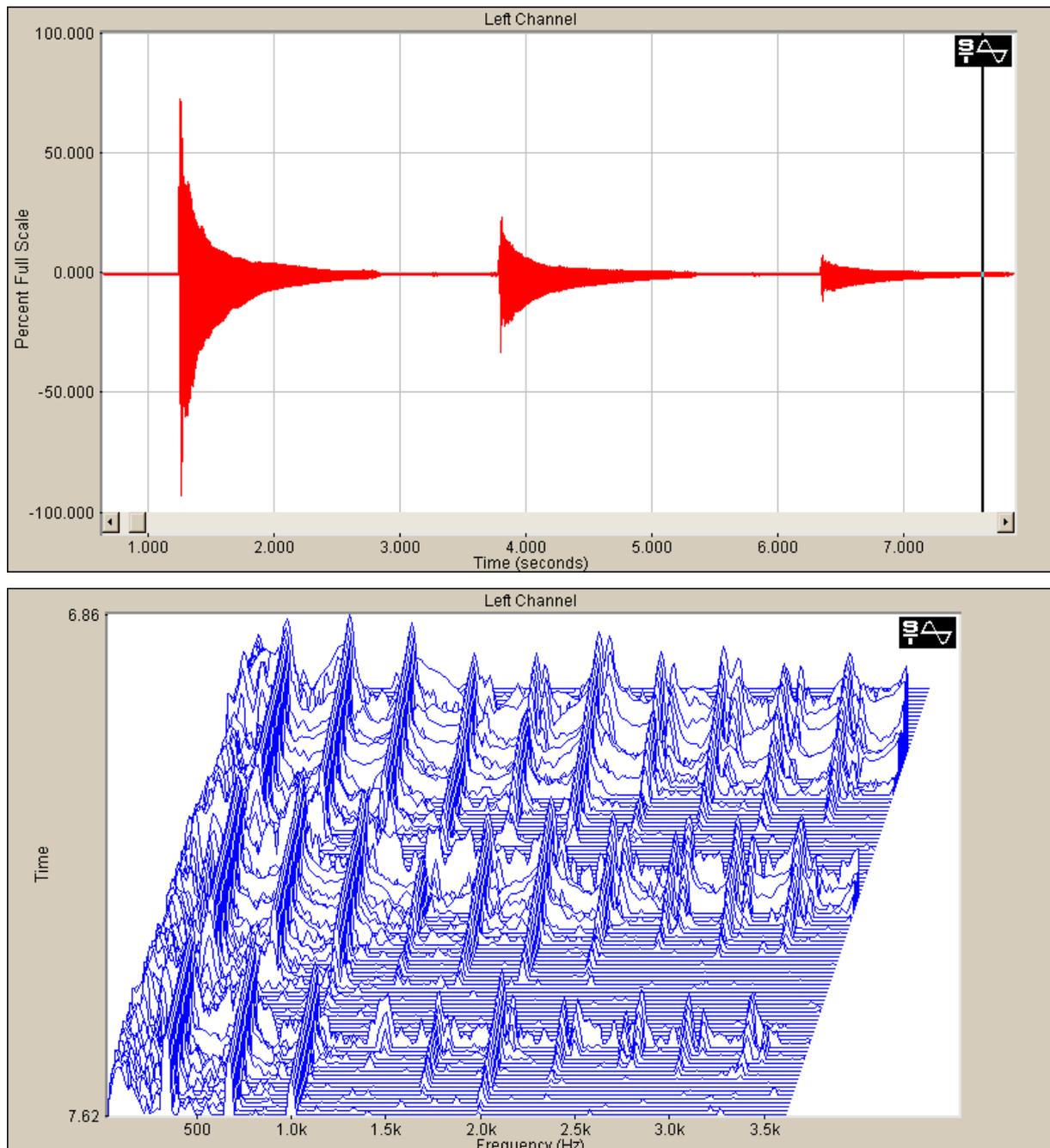


Abb. 5.4: Zeitreihen und Spektren Gitarre e-Saite Apoyando, laut-mittellaut-leise, e1

Zuerst erstaunt, daß auch bei kleiner Lautstärke die hohen Obertöne nicht verschwinden, sondern alle noch vorhanden sind. Der Grundton und der erste Oberton dagegen sind für alle Lautstärken fast gleich laut. Die Obertöne des leisesten Tons sind noch bis 20 kHz zu verfolgen. Dies entspricht der Präsenz des Musikers, auch bei leisen Tönen noch bis in die letzte Stuhlreihe des Konzertsaals hörbar zu sein. Die Gesamtamplitude ist zwar bei den Lautstärken sehr verschieden, doch bekommt der Ton durch gleich laute Grundtöne seine Substanz und durch alle Obertöne weiterhin seine Klarheit.

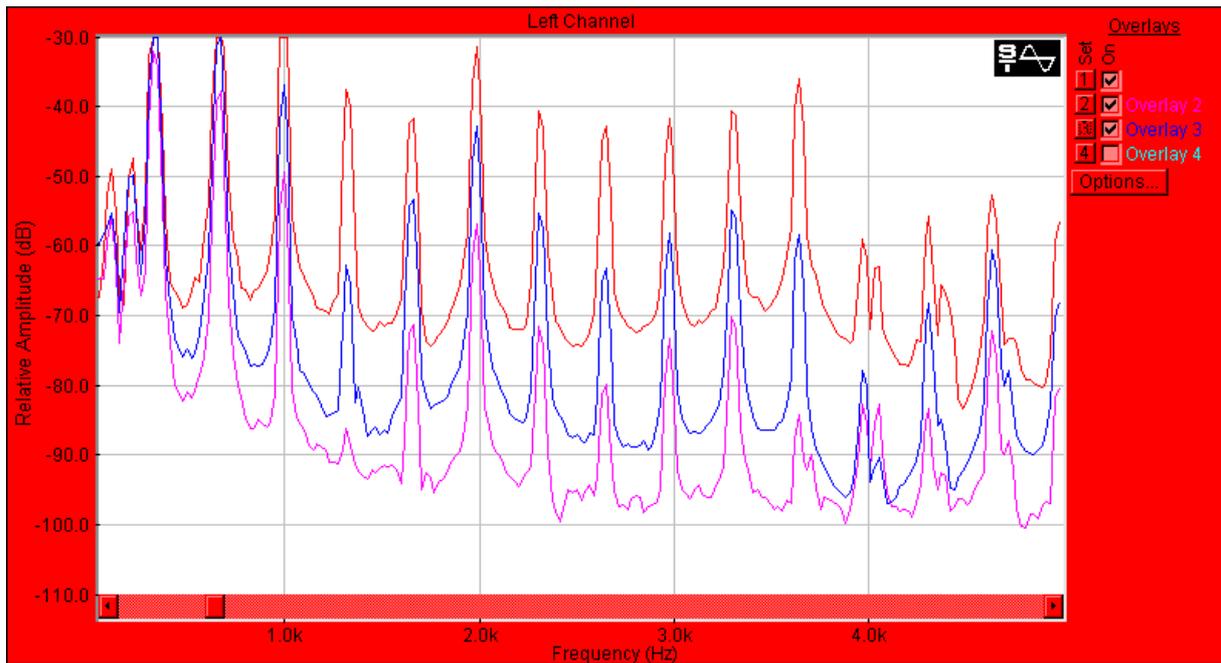


Abb. 5.5: Gitarre e-Saite Apoyando e1 laut, mittellaut, leise quasistat. Bereich. Der Grundton ist immer gleich laut!, während die anderen Obertöne abfallen.

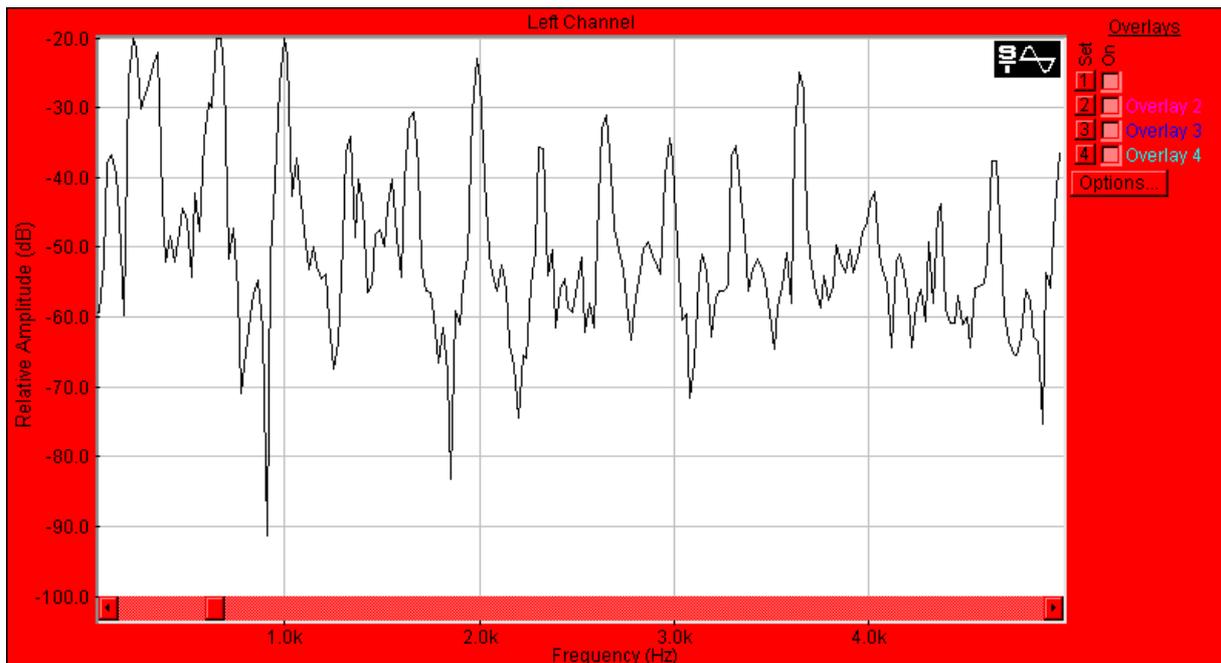


Abb. 5.6: Gitarre e-Saite Apoyando e1 laut Einschwingvorgang

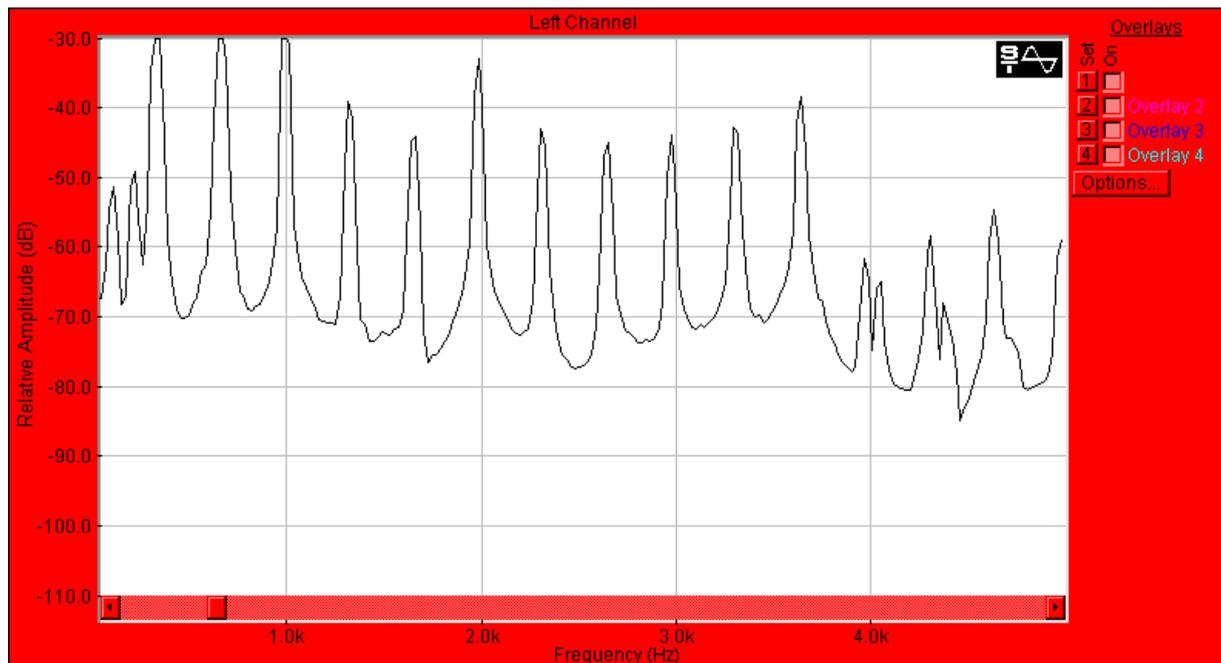
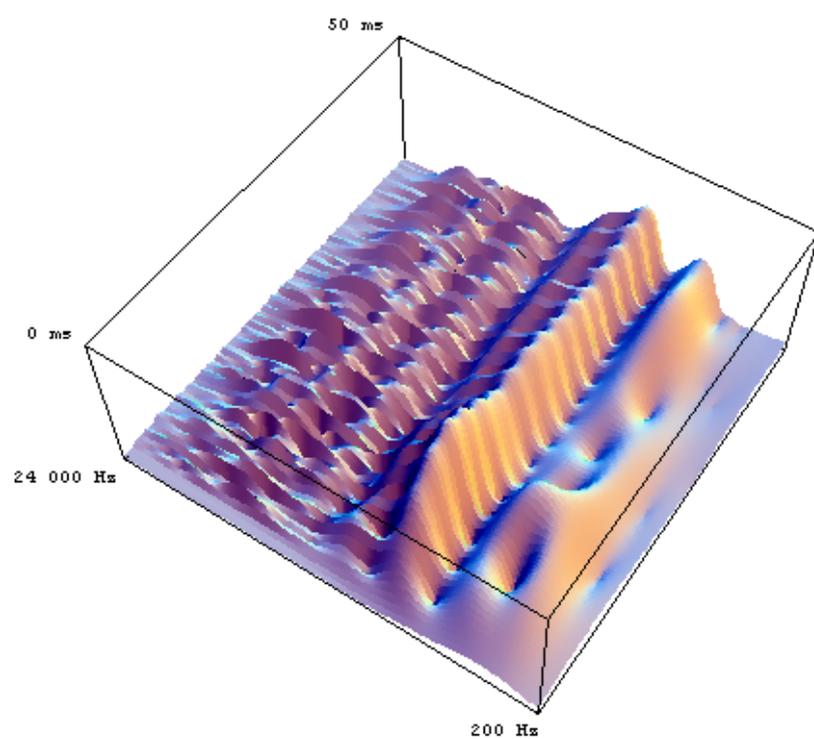


Abb. 5.7: Gitarre e-Saite Apoyando e1 laut: quasistat. Bereich

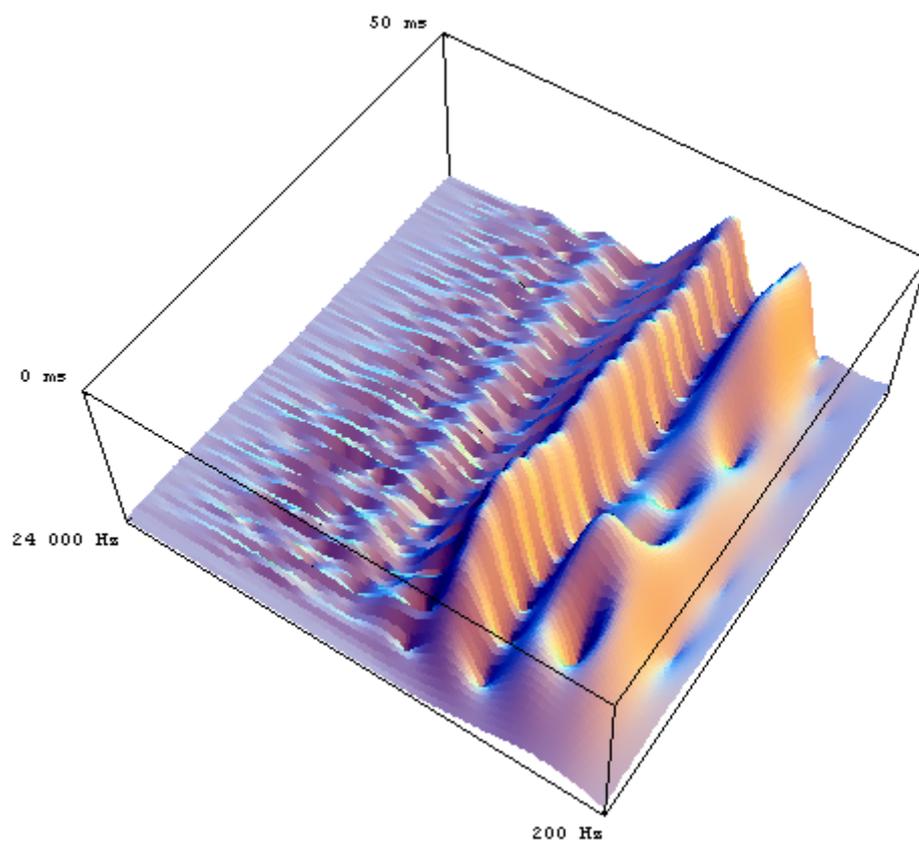
Abb. 5.6 und 5.7 zeigen die Spektren des lauten Tons e1 beim Einschwingen und im quasistat. Bereich. Die Obertöne stimmen zwar überein, es findet sich aber ein Doppelpeak bei 215 Hz und 334 Hz (329.6 Hz ist der theoretische Grundton e1). Dies wird durch eine Wavelet-Analyse aufgeklärt¹:

¹ **Haase, Widjajakusuma & Bader 2002.** Für die Wavelettransformationen, wie für viel Unterstützung im Bereich Chaos danke ich ganz herzlich Frau Dr. Maria Haase und Herrn Dipl.-Ing. Gunter Faust vom Institut für Computeranwendung der Uni Stuttgart, von denen ich nicht nur aus ihrem detaillierten Buch (Argyris 1995), sondern auch in langen Arbeitstagen viel Wissen, Anregung bekommen habe..

Gitarre Ap e1 laut Wavelet-Transformiert



Gitarre Ap e1 mittellaut Wavelet-Transformiert



Gitarre Ap e1 leise Wavelet-Transformiert

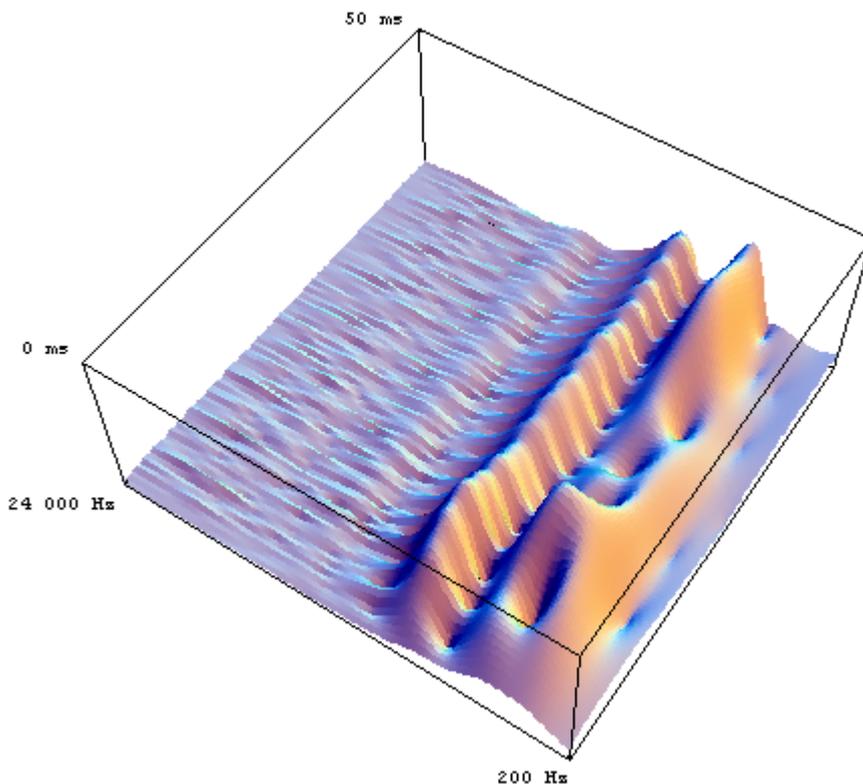


Abb. 5.8: Wavelettransformationen der Einschwingvorgänge der drei Gitarrentöne. Berechnung durch komplexes Morlet-Wavelet der ersten Ableitung.

Erstaunlich ist, daß die Bilder sich bis auf den Obertongehalt in den höheren Teiltönen bis aufs Haar gleichen. Offenbar spielt die Konstruktion des Gitarrenkorpus eine wichtigere Rolle als die Saitenschwingung.

Hier zeigen sich mehrere Phänomene. Zum ersten ist der Doppelpeak hier differenziert dargestellt. Es handelt sich wohl um eine Eigenresonanz der Gitarre. Die meisten Gitarren sind sogenannte a-Gitarre, da sie um die Töne A, a und a1 (110 Hz, 220 Hz, 440 Hz) Resonanzen haben. Fiele die Resonanz genau auf einen gespielten Ton, dann wäre dieser viel lauter als alle anderen, beim Cello entsteht bei Kopplung von Saitengrundton und Eigenresonanz der Saite der Wolfston. Er schwankt in der Amplitude sehr stark, da die Eigenmode erst viel Energie zieht, worauf der Grundton zusammen bricht. Die Eigenmode bekommt keine Energie mehr, fällt ebenfalls in sich zusammen, so daß der Geigenbogen wieder den Grundton der Saite anregen kann. Die Folge ist eine Amplitudenmodulation, die an das Heulen eines Wolfs erinnert.

Hier bei der Gitarre entzieht die Eigenresonanz der doch noch weit unter dem Saitengrundton liegenden Gitarrenmode dieser Grundschiwingung so viel Energie, daß sie ca. 40ms braucht, um sich auszubilden. Danach bleibt sie stabil. Die Kopplung von Moden ist in der Musik vom Tam-Tam bekannt, einem chinesischen Gong von ca. 80cm Durchmesser, der stark gehämmert ist, also viele Sprünge und Knicks hat. An solchen Unregelmäßigkeiten fließt die Energie von den niederen in die höheren Moden, was onomatopoetisch als „Gong schschsssss“ dargestellt werden kann. Der Gong beginnt mit einem tiefen Ton und nach ca. 2 Sekunden ´brüllt´ er auf, es kommen hohe Obertöne.² Bei einem T-Träger wird die Biegeschwiwingung an der Knickstelle in eine longitudinale Schwiwingung umgewandelt, die den Knick entlangläuft, um an dessen Ende wieder in eine Biegeschwiwingung umgewandelt zu werden.³ So koppeln auch in der Gitarre die einzelnen Moden. Man nehme nur einmal eine Gitarre, lege die Hand auf deren Boden und schlage einen hohen Ton an. Bei guten Gitarren wird man erst nach ca. 1 Sekunde bemerken, daß der Boden leicht zu vibrieren beginnt, was durch die Hand natürlich ein wenig bedämpft wird. Merkt man sich dieses Zeitintervall und schlägt dann denselben Ton unbedämpft an, dann kann man im Klang hören, daß zu diesem Zeitpunkt neue Frequenzen hinzukommen. Die hier aufgenommenen Töne sind ja die Superposition aller Punkte auf der Gitarre, die - zeitversetzt - am Mikrophon ankommen und sich überlagern. Die Abstrahlpunkte am Gitarrenkorpus aber müssen auch erst durch den Steg, der durch die Saite erregt wurde, angeregt werden. Auch dieses System - Saite, Steg - hat Wechselwirkungen. Es ist also theoretisch zu komplex, vorraussagen zu wollen, was zeitlich im Klang genau geschieht. Dies könnte nur durch eine exakte raum-zeitliche Analyse oder Synthese der Gitarre erfolgen. Wir können hier also über die Ursachen der beobachteten Kopplung nur mutmaßen.

Die zweite Beobachtung an den Waveletbildern ist, daß der erste Oberton in seine spätere Frequenz hineingleitet. Dies tut er aber nicht von höheren Frequenzwerten aus, wie es bei einem Pitch-Glide infolge von Nichtlinearität der Fall wäre, sondern von unten. Die Ursache ist unbekannt.

² Fletcher & Rossing 2000, S. 656f

³ Szwerc 2000

Drittens ist die Amplitude des ersten Obertons leicht moduliert und zwar mit 2 Perioden seines Grundtons. Hier sind zwei Ursachen möglich. Einmal könnte es eine Modenkopplung sein, wie bei der Grundfrequenz. Die Mode müßte dann allerdings mit einer anderen harmonischen Mode und nicht mit einer beliebigen Eigenresonanz der Gitarre koppeln, da nur eine harmonische Kopplung auch eine harmonische Amplitudenmodulation hervorrufen kann. Die inharmonische Kopplung des Grundtons mit der Eigenresonanz der Gitarre zeigt gerade, wie eine inharmonische Kopplung aussieht. Die größere Periode von 4π läßt eine Kopplung mit der Grundfrequenz wahrscheinlich erscheinen.

Die zweite Erklärung ist die von Inharmonizitäten. Wie im physikalischen Teil dieser Arbeit dargestellt, verursacht eine Oszillation mit nichtlinearer Rückstellkraft, die aber in der Amplitude langsam leiser wird, wie hier eben der Gitarrenton langsam abklingt, ein harmonisches Obertonspektrum mit stetiger Amplitudenmodulation. Es könnte also die Nichtlinearität des ersten Obertons selber oder die des Grundtons sein, die den ersten Oberton überlagert.

Weitere Obertöne sind hier nicht zu erkennen. Das liegt daran, daß die Amplitudenskala hier nicht logarithmisch, wie in den Fourierplots, sondern linear gewählt wurde. Das hat den Grund, daß die Pseudophasenplots auch linear sind, somit die Anzahl der wirkenden Grundgesetze die durch die Korrelationsdimension errechnet werden nur so mit dem Fourierplot verglichen werden können.

Die Phasendiagramme dieser drei Lautstärken des Tons e_1 und deren spätere quasistationären Teile sehen so aus:

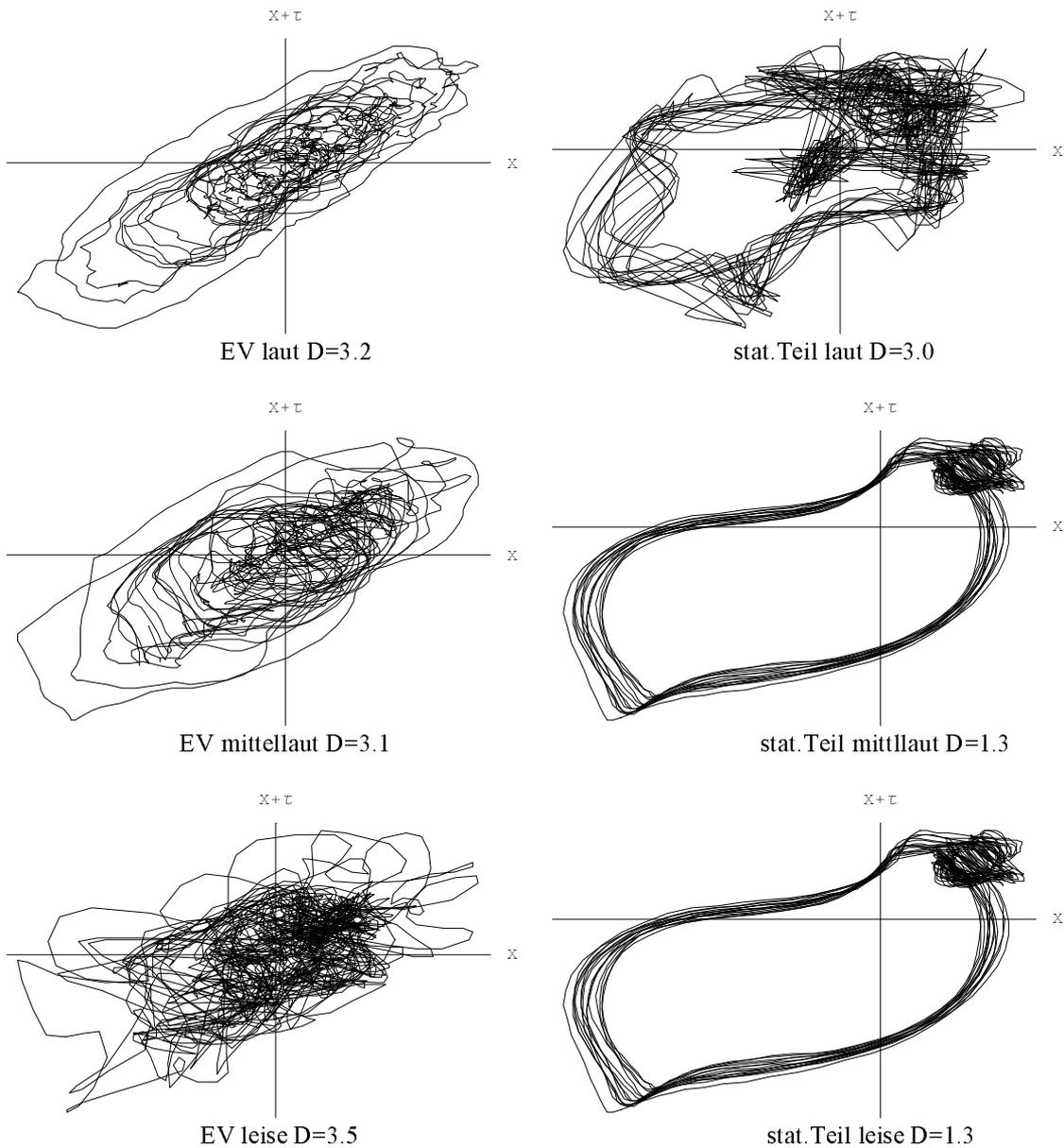


Abb. 5.9: Pseudophasendiagramme Gitarre e-Saite: Ton e1 Apoyando Evs und stationäre Teile. Die Bilder korrespondieren mit den fraktalen Dimensionen.

Hier sind links die Einschwingvorgänge und rechts die quasistationären Teile der drei Lautstärken dargestellt. Der Plot rechts unten, des quasist. Teils des leisen Tons mit der fraktalen Dimension 1.3, zeigt einen geschlossenen Kreis mit einem Knubbel oben rechts. Der Kreis ergibt in der Rechnung $D=1$, der Knubbel zusammen mit der Tatsache, daß die Kreislinie nicht jedesmal genau denselben Weg nimmt und der Kreis kein perfekter Kreis ist, ergibt die restlichen $D=0.3$. Es herrscht also nur ein Grundgesetz, nämlich das des harmonischen Obertonspektrums mit kleinen Fluktuationen. Betrachten wir den Plot rechts oben, dann sehen wir, daß die

Fluktuationen erheblich zugenommen haben. Neben dem Knubbel rechts oben zeigt sich jetzt noch eine Ballung in der Mitte. Die fraktale Dimension ist nun $D=3.0$. Die Zahl zeigt drei Gesetze an. Das erste ist der Kreis an sich, das zweite ist der Knubbel rechts oben, der sich hier verbreitert hat und nicht mehr als Nebensache betrachtet werden darf, und das dritte ist die Ballung in der Mitte. Diese Struktur kommt im quasistat. Bereich des lautesten Tones heraus, im Gegensatz zu denen des mittellauten und leisen Tones, was daran liegt, daß die quasist. Teile kurz hinter dem EV genommen wurden. Während die mittellauten und leisen Töne bereits ihren Endzustand erreicht haben, ist der laute Ton noch auf dem Weg dahin. Hier gibt er aber einen schönen Übergang zu den EVs, denn betrachten wir den Plot links unten, dann erkennen wir neben der kreisförmigen Gesamtstruktur einmal einen jetzt aufgelösten Knubbel rechts oben - im Gegensatz zum Bereich links unten des Attraktors, der viel leerer ist - und wir sehen die Mitte des Kreises gefüllt. Dies gilt auch für die beiden oberen Plots. Diese Strukturen wären so einfach nicht aufgefallen, wenn man sich nur die EVs angesehen hätte. Wir sehen aber, daß im EV bereits alle Komponenten des späteren Klangs vorhanden sind. Es ist sozusagen die Blüte, denn von diesen dreien verwelkt der Bereich rechts oben zu einem Knubbel, der von der Rechnung nicht mehr als eigenständiges Gesetz erkannt wird, und die Füllung in der Mitte verschwindet ganz. Auch ist die Rechnung der Korrelationsdimension so stabil, daß sie diesen grundsätzlichen Charakter auch noch aus dem für uns auf den ersten Blick völlig chaotischen Plot links oben erkennt. Das sogenannte Chaos ist hier also nichts anderes, als die 'Umspielung' von drei Gesetzen. Diese können durch die Waveletanalyse beschrieben werden, als

- 1) harmonisches Obertonspektrum (grundsätzliche Kreisstruktur)
- 2) mitangeregte Eigenresonanz der Gitarre bei 215 Hz (Füllung der Mitte des Plots)
- 3) Unregelmäßigkeiten der Obertöne, wie das Hineingleiten und die Amplitudenmodulation (Knubbel oben rechts, der später zu regelmäßigen Obertonstrukturen führt, dann zwar noch da ist, aber kein eigenes Gesetz mehr darstellt, weil er Teil des harmonischen Obertongehalts ist und die Amplituden dieser Obertöne klein sind).

Ein ungewöhnlich hoher Wert der fraktalen Dimension hat die e-Saite von Z, die Werte um die 6.0 erreicht, was sonst höchstens für Geigen oder Perkussionsinstrumente erreicht wird. Betrachten wie das Waveletbild von Ap-L-e1, dann wird der Grund hierfür deutlich:

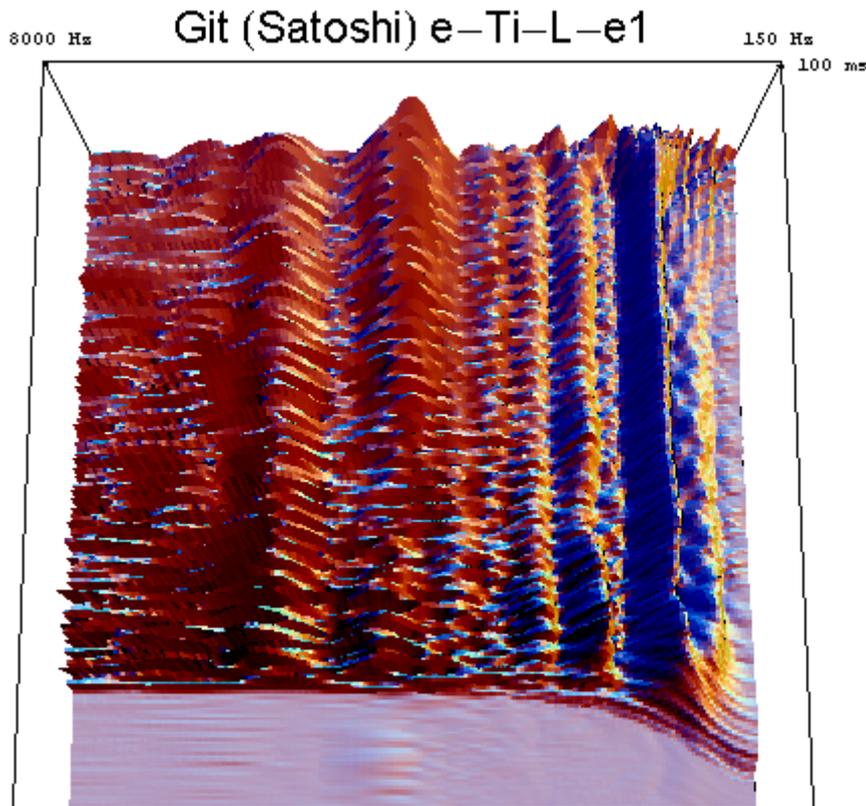


Abb. 5.10: Waveletbild von Z Ap-L-e1 $D=6.0$. Komplexes Morlet-Wavelet in Grundversion (im Anhang D dargestellt).

Das Waveletbild für e-Ti-L-e1 zeigt wackelnde Obertöne und zu Beginn angeregte Eigenwerte des Gitarrenkorpus. Hier ist $D_c=6.0$. Der Eigenwert unter dem Grundton, der langsam verebbt hat die Frequenz 203 Hz und ist damit eine typische Gitarrenkorpusresonanz. Die zwei lautereren Obertöne, die in der linken Bildhälfte zu sehen sind, sind die Obertöne 6 (1977 Hz) und 7 (2320 Hz). So schwanken die zwischen Grundton und sechstem Oberton liegenden 4 Partialtöne nicht, was aus dem Waveletbild ersichtlich ist. Der sechste Oberton muß sich aber erst herauschälen, und der siebente wackelt stark in der Frequenz. Die zwei Frequenzen, aus denen der sechste Oberton sich ergibt, sind keine Partialtöne der Saite. Der tiefere behindert zu Beginn auch den 5. Oberton. Der dritte Oberton

schließlich wackelt erheblich in der Amplitude. So kann die fraktale Dimension von $D_c=6.0$ interpretiert werden als

1. harmonisches Obertonspektrum
2. Eigenwert der Gitarrenkorpus bei 203 Hz
- 3./4. zwei Eigenwerte des Gitarrenkorpus, die vor dem 6. Oberton erscheinen
5. Frequenzschwankungen des siebenten Obertons
6. Amplitudenschwankungen des zweiten Obertons.

Auch über dem siebenten Oberton sind die Partialtöne nicht stabil, aber so schwach, daß sie vom Algorithmus nicht erfaßt werden.

Hier sind also erheblich viel mehr Gitarrenkorpusresonanzen vorhanden als bei den anderen Tönen. Zur Veranschaulichung wurde ein weiterer Ton von Z analysiert und zwar Ti-L-e2 mit $D=3.3$. Für diesen Ton wurde ein Korrelogramm (siehe Anhang D) errechnet, das harmonische Obertonstrukturen anzeigt:

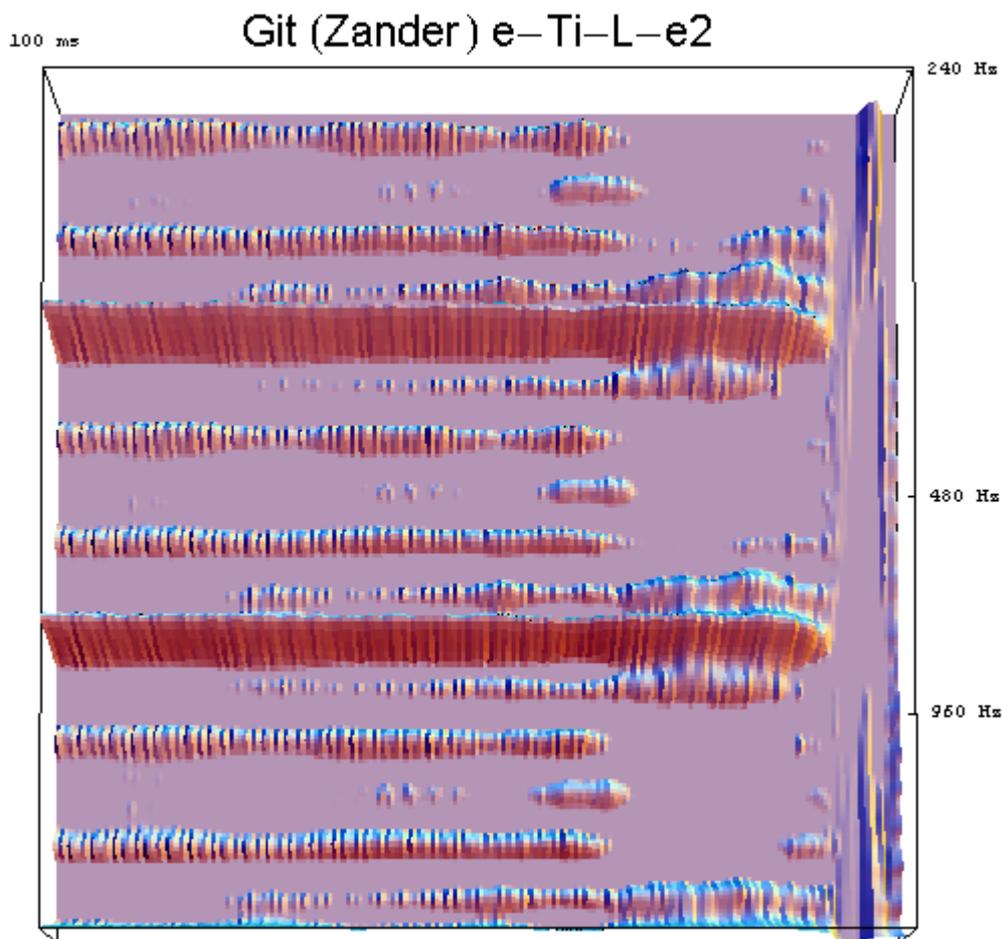


Abb. 5.11: Korrelogramm von Z Ti-L-e2. Es sind neben den harmonischen Obertönen der Saitenschwingung noch weitere Harmonische vorhanden. Algorithmus für Korrelogramm siehe Anhang D.

Die theoretische Tonhöhe e2 von 586,6 Hz ergibt im Bild bei dieser und bei der halben Frequenz eine Periodizität (große Hügel). Dazwischen aber sind mehrere kleinere Periodizitäten zu finden, die auf weitere Spektralkomponenten hindeuten, die über das harmonische Obertonspektrum hinausgehen und selbst eine Harmonizität untereinander besitzen. Die nicht in der Saitenschwingung enthaltenen Frequenzen für den Ton e1 (fe1) und e2 (fe2) sind:

$$fe1 = \{164, 205, 328, 421, 474, 498, 585, 626\};$$

$$fe2 = \{164, 205, 328, 416, 498, 591, 625\};$$

Hier sind zwei Reihen erkennbar: 164 Hz, 328 Hz, 626 Hz und 205 Hz, 421 Hz. Die letzteren zwei wären die zweite und dritte Gitarrenresonanz. Die ersten drei sind

eher untypische kleine Resonanzen des Korpus. Jedoch ist 328 Hz : 164 Hz exakt 2.0, 626 Hz steht zu 328 Hz fast in diesem Verhältnis. Dies ist vom Gitarrenbauer offenbar absichtlich so gewählt worden. Meyer (1980, S.132) zitiert Letowski & Bartz⁴, die die Harmonizität der Korpuseigenresonanzen als Qualitätsmerkmal für Gitarren ansehen. Er selbst findet dies bei seinen Untersuchungen nicht unbedingt, bemerkt aber, daß eine von den Experten als sehr gute Gitarre aufgefaßt wurde, dieses Merkmal besaß (Meyer S. 130). Diese vielen Eigenresonanzen machen den Klang subjektiv lauter, da 'mehr los ist' bei gleichem SPL (Sound Pressure Level). Diese Eigenschaft ist bei Konzertinstrumenten wichtig, die ja möglichst laut sein sollen.

Die Tabellen der fraktalen Dimensionen geben den Klangcharakter sehr gut wieder. Die Z Gitarre hat zwar eine Fichtendecke, wirkt für solch ein Instrument außergewöhnlich hell und laut, was auf obige Korpusresonanzen zurückzuführen ist. Die LK Gitarre ist sehr weich im Klang und völlig ausgeglichen. Hier unterscheiden sich die fraktalen Dimensionen zwischen den Saiten am wenigsten und sind insgesamt am niedrigsten von allen drei Instrumenten. Die T Gitarre mit ihrer Zederndecke wirkt am lautesten und hat über alle Saiten gerechnet auch die größte fraktale Dimension. Hier tritt ein Charakteristikum der Instrumente im Einschwingvorgang deutlich hervor. Gerade die Korpuseigenresonanzen sind ja etwas, das nur in den ersten ca. 30 ms angeregt wird.

Eine weitere Untersuchung in Bezug auf den Einschwingvorgang wurde mit Hilfe eines Schwingungsabnehmers durchgeführt. Es handelt sich um einen piezoelektrischen Abnehmer (Kistler TYP 8614A) von 0.7 Gramm Gewicht, einer Empfindlichkeit von 4 mV/g und der Eigenresonanz von 125 kHz. Er wurde mittels Wachs auf der Gitarre befestigt, um einen möglichst störungsfreien Betrieb zu garantieren. Der Messverstärker (Kistler TYP 5011B) wurde bei Decke und Boden auf x10 und bei Zarge und Kopfplatte auf x50 eingestellt, um das beste Verhältnis von Signal zu Rauschpegel zu erreichen. Der Abnehmer wurde einmal auf die Decke 2 cm hinter dem Steg in die Mitte, einmal auf der oberen Zarge, dann auf den Boden in der Mitte gegenüber dem Steg und schließlich an der Kopfplatte angebracht. Die Gitarre (hier die LK) wurde nicht wie üblich mit einem Anreger kontinuierlich erregt,

⁴ Letowski, T. & Bartz, J.: Obiektywne Kryteria Jokosci Pudel Gitarowych, Arch. Akust. 6,1, S. 37, 1971.

sondern normal angezupft, durch alle Tonlagen. Der Klang wurde gleichzeitig mit einem Mikrofon 1 m vor der Gitarre aufgezeichnet und auf DAT zweikanalig aufgenommen, so daß die beiden Signale des Abnehmers und des Mikrophons synchron untersucht werden konnten. Ziel war es festzustellen, welcher Teil der Gitarre welchen Anteil an EV hat.

Fletcher und Rossing (2000, S. 251ff) sprechen bei den tiefsten drei Grundresonanzen des Korpus von gekoppelten Resonanzen, die alle aus der (0,0) Mode entstehen.

- a) Boden und Decke schwingen gegenphasig, die Luft strömt beim Auseinandergehen in die Gitarre hinein (102 Hz).
- b) Boden und Decke schwingen gleichphasig (193 Hz).
- c) Boden und Decke schwingen gegenphasig, die Luft strömt beim Auseinandergehen aus der Gitarre heraus (204 Hz).

Die Mode (1,0) ergibt bei klassischen Gitarren eine Resonanz bei 300 Hz, bei Western Gitarren bei ca. 400 Hz. Auch (0,1) kann zu Resonanzen um die 400 Hz führen. Alle höheren Resonanzen sind keine Kopplungsresonanzen mehr.

Meyer (1980) beschreibt den Einfluß der Kopplungen. Nach ihm ist die Grundresonanz f_0 um die ca. 140 Hz die Helmholtzresonanz, die zweite Resonanz f_1 bei ca. 380 Hz die der Decke. Schwingt die Decke frei, so kann sie dies ungehindert tun, ist der Luftraum unter ihr aber geschlossen, dann erfährt sie beim Hineinschwingen einen größeren Widerstand, beim Hinausschwingen eine größere Rückstellung, durch welche die Luft im Hohlraum komprimiert wird. Also erhöht sich ihre Frequenz. Entsprechendes gilt für den Hohlraum. Meyer findet folgende Ergebnisse für die Kopplung:

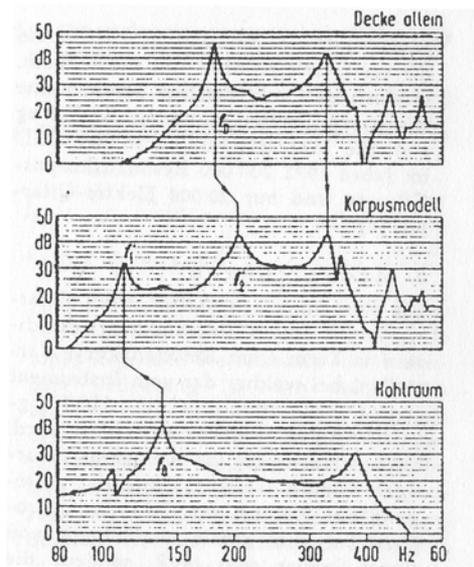


Abb. 5.12: Kopplung von Decke und Boden einer Gitarre (nach Meyer 1980, S. 134)

Auch den Einfluß des Bodens beschreibt er wie folgt:

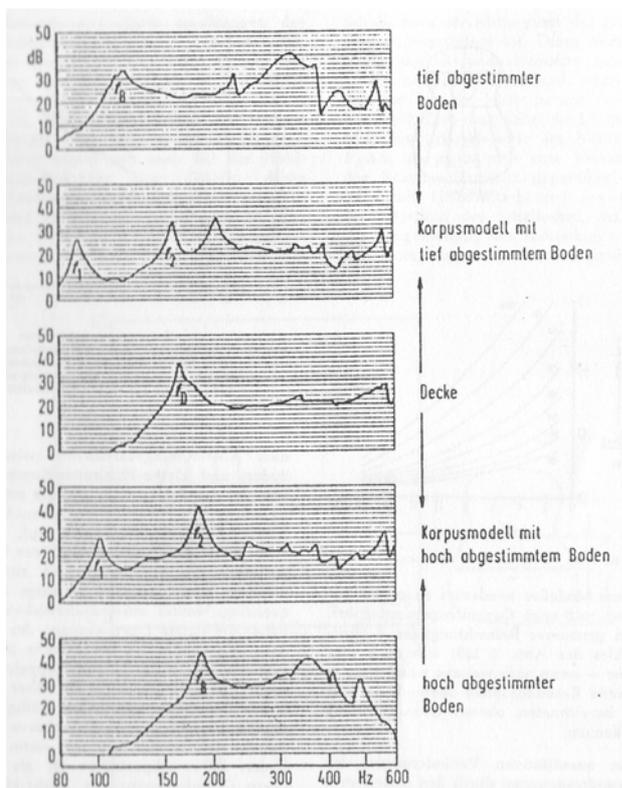


Abb. 5.13: Kopplung Decke und Boden (nach Meyer 1980, S. 135)

Es ist also anzunehmen, daß die ganze Gitarre schwingt und verschiedene Teile für verschiedene Frequenzgebiete zuständig sind.

Aus technischen Gründen sind die Auswertungsbilder der hier durchgeführten Messung im Anhang C zu finden. Abb. W1 ist eine Wavelettransformation eines

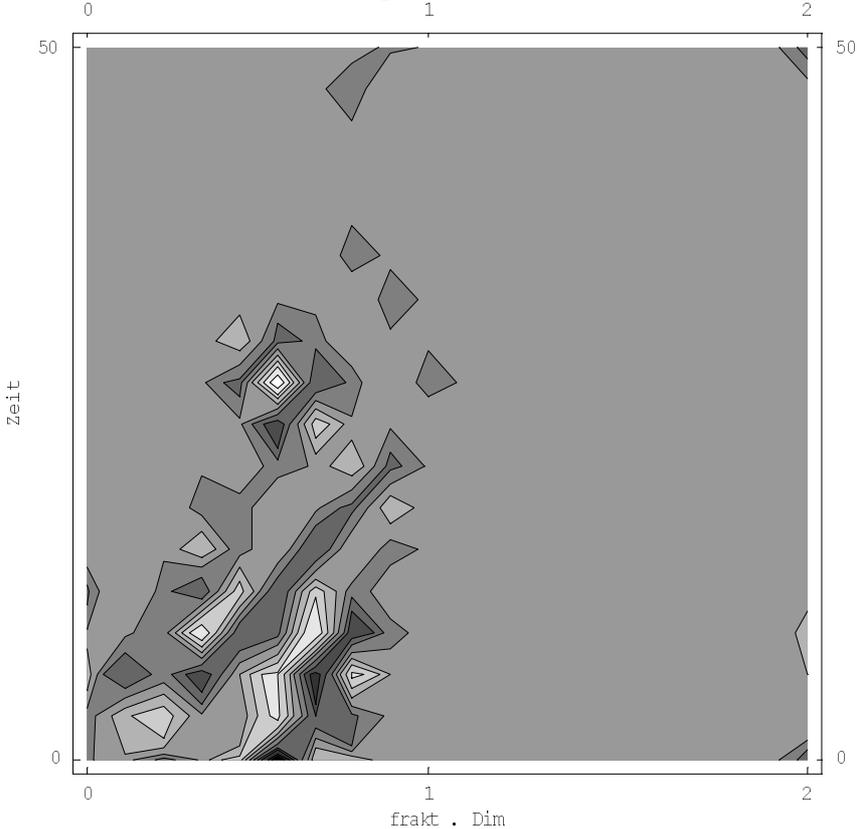
Mikrophontons L-e1 (hier immer Apoyando), während der Schwingungsabnehmer auf der Decke war. Da sich dieses Bild nicht von anderen Bildern selber Lautstärke und Tonhöhe unterscheidet, die Töne also bei gleichem Anschlag konsistent bleiben, genügt diese eine Darstellung. W2-W5 sind Waveletbilder für die verschiedenen Abnahmestellen, W6-W9 die Korrelationen dieser Spektren mit denen der Mikrophonespektren. Hier erscheint also nur, was sowohl mit dem Mikrofon, als auch mit dem Schwingungsabnehmer aufgezeichnet wurde. Man erkennt also, ob der Teilbereich der Gitarre mit zu den Frequenzen in diesen Gebieten beiträgt.

Zuerst sehen wir, daß die Grundfrequenz überall sehr schwach ist, also auch bei der Decke. Dies rührt daher, daß für sie noch die Hohlraumresonanz mit verantwortlich ist, welche bei keiner der Schwingungsabnehmerpositionen aufgezeichnet wurde. Andererseits ist der erste Oberton nicht nur bei Decke und Boden, sondern auch bei den Zargen und der Kopfplatte zu sehen. Dort verebbt er viel schneller. Die Zarge hat bei f_1 ca. 1600 Hz und f_2 ca. 3300 Hz starke Anteile. Der Boden teilt den höheren Frequenzanteil, die Decke jedoch nicht. Sie scheint mehr für die tieferen Frequenzen zuständig zu sein. In der Korrelation W10 zwischen den Korrelationen Decke / Mikro und Zarge / Mikro sind f_1 und f_2 nur unvollständig zu sehen, ihre höheren Bereiche fehlen. Das weist darauf hin, daß die Zarge ein eigenes Frequenzgebiet hat - nämlich die Mitten - die nur hier resonieren. Die Kopfplatte schließlich hat noch Komponenten über 10 000 Hz. Bei Gitarren geht man davon aus, daß über ca. 8000 Hz nichts mehr passiert. Doch gerade im EV können höhere Komponenten noch entstehen, was für die Instrumentenidentifikation von Vorteil sein könnte. Außerdem ist zu bemerken, daß der räumliche Eindruck während des EV in Bezug auf die Grundfrequenz größer sein muß, sitzt man nicht allzu weit vom Instrument weg, da das ganze Instrumente (auch der Hals) in dieser Zeitspanne kurz schwingt. Der EV wirkt dadurch nicht nur lauter, sondern auch räumlich weiter als der stationäre Zustand.

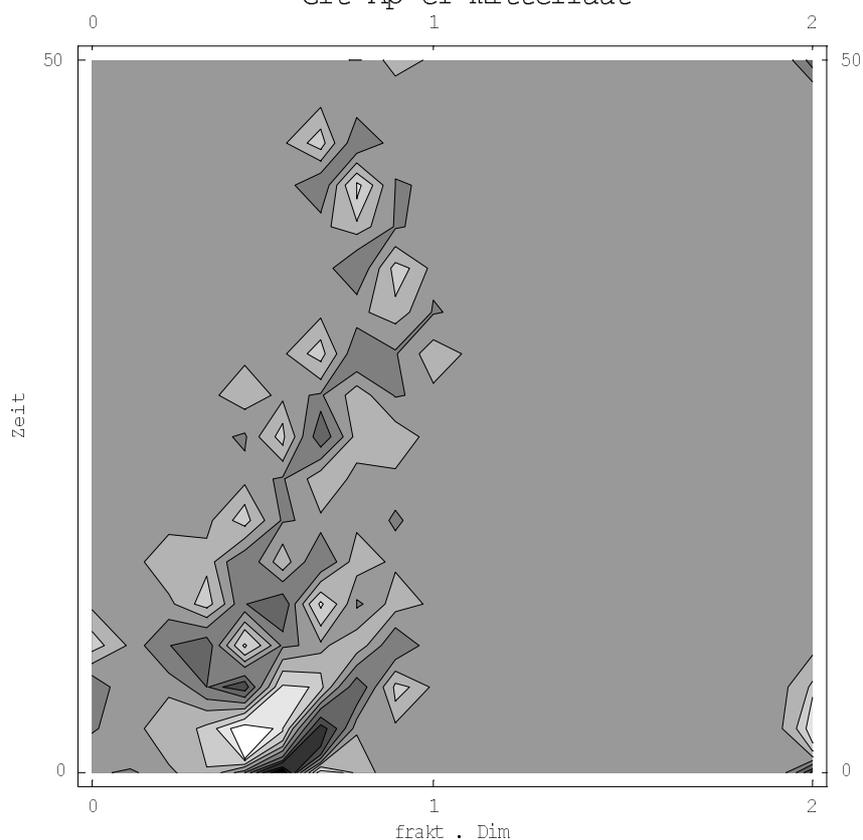
Insgesamt sind Decke und Boden für die tiefen, die Zargen für die mittleren und höheren und der Hals mit Kopfplatte für die ganz hohen Frequenzen im EV verantwortlich zu machen.

Schließlich sei noch die Analyse der Informationsstruktur für die e1 Töne von T angefügt.

Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Git Ap el laut



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Git Ap e1 mittellaut



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Git Ap e1 leise

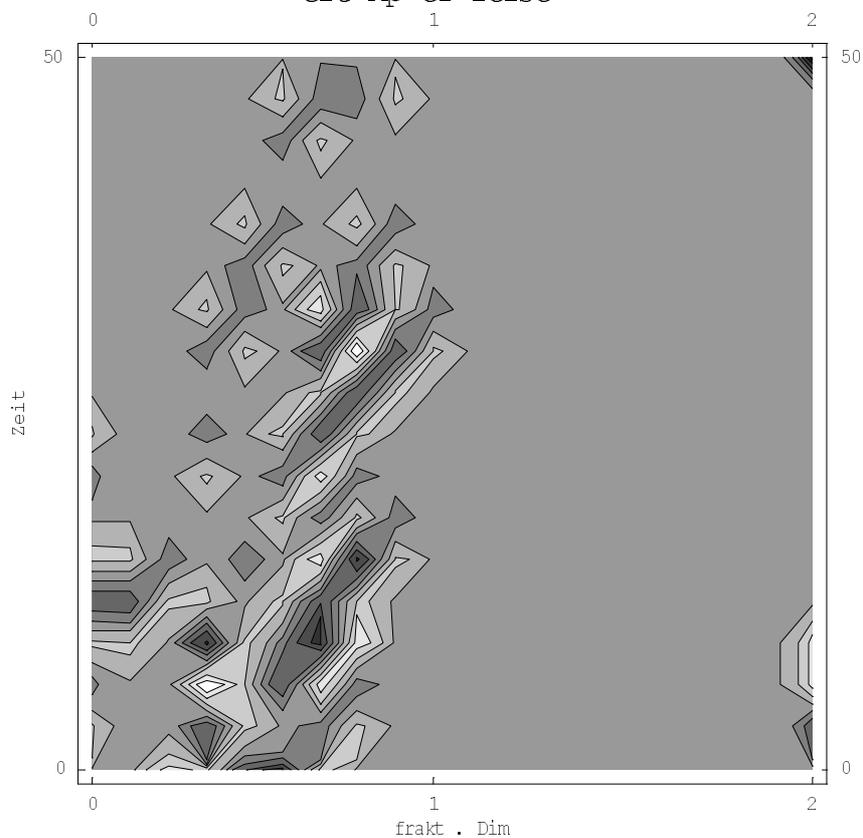


Abb. 5.14: Informationsstruktur der EVs der Gitarre, e-Saite, Apoyando, e1, laut, mittellaut, leise. Zur Fortran-Algorithmus der Informationsstruktur siehe Anhang D.

Die in Tabelle 5.1 angegebenen Zeiträume bis zur Stabilisierung des Klangs sind hier schön dargestellt. Beim lauten Ton ist der Informationsgewinn nach ca. 30ms abgeschlossen. Bei den anderen dauert er noch ein wenig an, hat aber seinen Höhepunkt am Anfang. Es kommt also in diesen Zeiträumen ständig etwas Neues hinzu, wobei der Informationsgehalt zu Beginn am Größten ist.

Dies entspricht dem Verlauf einer angezupften Saite. Nach dem Anzupfen wird nicht mehr eingegriffen - im Gegensatz zu Streichern und Bläsern - der Schwinger pendelt sich also in einen periodischen Zustand ein und schwingt dann aus.

Onomatopoetisch (lautnachahmend) wäre die Gitarre mit einem ´d´ - Laut (oder auch ´k´ oder ´g´) zu charakterisieren. Es gibt kein Blasgeräusch, wie bei den Orgellippenpfeifen, das mit ´f´ beschrieben wäre oder ein ´p´, das eher den Bläsern, wie Klarinette oder Saxophon zuzuordnen wäre. Auch ein ´t´ wäre zu stark und erinnert eher an ein Schlaginstrument, das mit einem Hammer angeschlagen wird. Möglich wäre auch ein aus der Sprache bekannter Anlaut, ein Vokal am Wortanfang, der ohne Glottischlag zu sprechen ist, der es also erfordert, vor dem Worteinsatz unhörbar ein wenig Luft vorneweg zu schicken, eine Technik, die auch im Gesang angewendet wird. Dies ist ja gerade der Versuch, so weich wie möglich anzufangen, also ohne Konsonant, oder anders gesagt, ohne Transient. Bei den hier vorgestellten Gitarrentönen wäre dies am ehesten in der Baßlage gegeben, wenn man vom Vorschleifgeräusch absieht, denn nur dort zeigen sich für den EV Werte unter 2 und auch der Zeitraum bis zur stabilen Periodizität ist hier tendenziell kleiner, als bei den hohen Tönen.

5.2 Bläser

In diese Arbeit wurde Saxophon und Klarinette untersucht. Obwohl auch hier 144 Töne pro Instrument vorlagen, konnten aus Zeitgründen nur die hier vorgestellten Ergebnisse berechnet werden. Aber auch bei der Gitarre wäre ein Vergleich mit anderen Gitarren wünschenswert.

5.2.1 Saxophon¹

50 ms = 2200 Punkte, Samplefrequenz = 44,1 kHz

	hart	laut	mittellaut	leise	weich	laut	mittellaut	leise
cis		(1.5) 5	3.5	3.5		1.5	1.4	1.2
c1		3.5	1.8	1.3		1.0	1.4	2.0
c2		(1.5) 2.5	(0.8) 1.5	(1.5) 2.5		1.5	2.5	2.1
c3		1.2	(0.4) 2.2	(0.9) 2.4		(0.8) 1.2	1.0	1.6

Tab. 5.4: fraktale Dimensionen für vier Saxophontöne. Zur Berechnung siehe Anhang D.

	Cis	c1	c2	c3	hart	weich	laut	mittellaut	leise
Durchschnitt	2.7	1.8	2.1	1.6	2.6	1.5	2.2	1.9	2.1
Stand.abw.	1.55	.89	.49	.58	1.12	.45	1.42	.80	.75

Tab. 5.5: Statistik der Tab. 5.2

Oft ist am Anfang ein kleines Stück des Blasgeräusches zu hören, was wie bei den tiefen Gitarrentönen eine eigene fraktale Dimension hat. Um diese zu berechnen bräuchte man allerdings mehr Punkte, also eine Samplefrequenz von 192 kHz. In Klammern ist allerdings, wenn möglich, eine ungefähre Annäherung gegeben, die allerdings jedoch mit Vorsicht zu genießen ist. Das Geräusch trat bei allen harten und bei fast keinem der weichen Töne auf.

¹ Ich danke Heiner Metzger, (Free?)-Jazzler und Mitbegründer des Hamburger TonArt Ensembles ganz herzlich für seine Saxophon- und Klarinettenklänge, für seine Geduld und seine Informationen über Spielweisen und Klänge.

Die Statistik Tab. 5.3 gibt den Höreindruck wieder. Die hohen Töne setzen fast ohne EV ein, sind also gleich stabil und haben damit keine große fraktale Dimension. Hier gilt wieder das Gesetz, daß hohe Töne schneller einschwingen. Bei tieferen Tönen jedoch ist ein klarer Unterschied zwischen hartem und weichem Einsatz festzustellen. Der harte ist viel chaotischer, als der weiche. Besonders der ganz tiefe Ton des Saxophons mit dem charakteristischen Amplitudeneinbruch gleich nach dem Einsatz ist hier wiedergegeben. Den Unterschied zwischen hartem und weichem Einsatz zeigen auch zwei Phasenplots sehr deutlich:

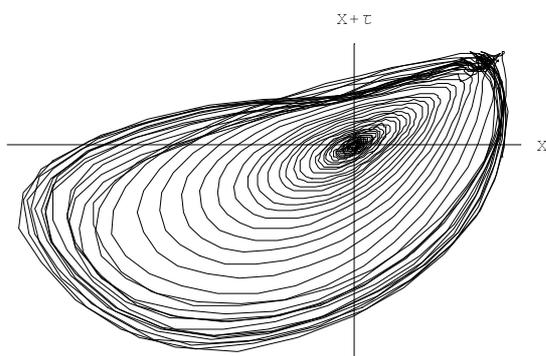
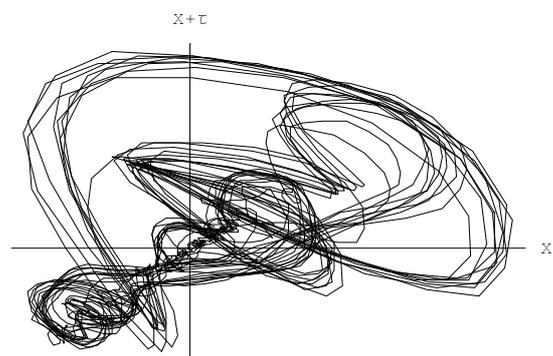


Abb. 5.15: typischer weicher Ansatz:
Sax weich laut c3; KorrDim = 1.2



typischer harter Einsatz:
Sax hart laut c1; KorrDim = 3.5

Korrelogramm Saxophon c2 weich leise

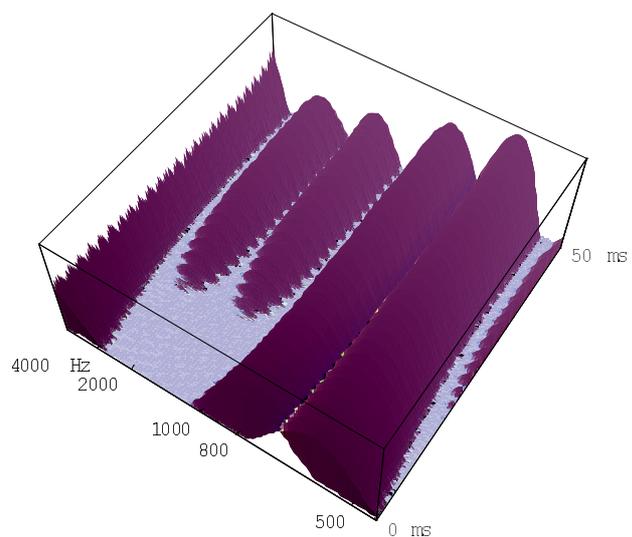
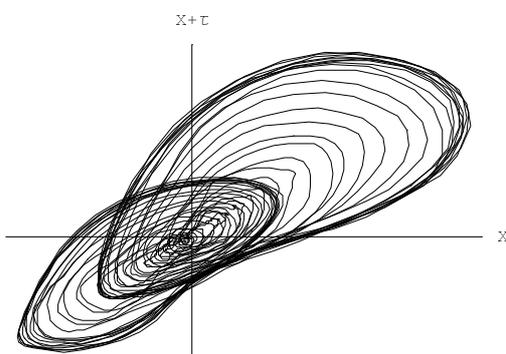


Abb. 5.16: Saxophon c2 weich leise $D = 2.1$. Pseudophasenplot und Korrelogramm²

² Grandqvist & Hammarberg 1998

Beim weichen Ansatz gibt es nur zwei Ergebnisse, die über $D=2$ liegen. Eines davon, Tonhöhe c2 - weich -leise ist in Abb. 5.11 dargestellt. Hier sind zwei Unterzyklen zu erkennen, der Plot erinnert an eine Lorenz - Attraktor - Komponente und hat auch die Dimension $D = 2.1$. Zur möglichen Erklärung ist rechts daneben das Korrelogramm (siehe Anhang D) des Tons dargestellt, das überprüft, ob das Spektrum harmonische Komponenten hat. Hier ist zu sehen, daß nach ca. 20ms zwei neue Korrelationen sich ausbilden, die den kleineren der zwei Unterzyklen erklären könnten.

Zur Veranschaulichung der Chaotizität des Tons Cis hart laut mit der ungewöhnlich hohen fraktalen Dimension $D=5$ ist hier das Korrelogramm gezeigt.

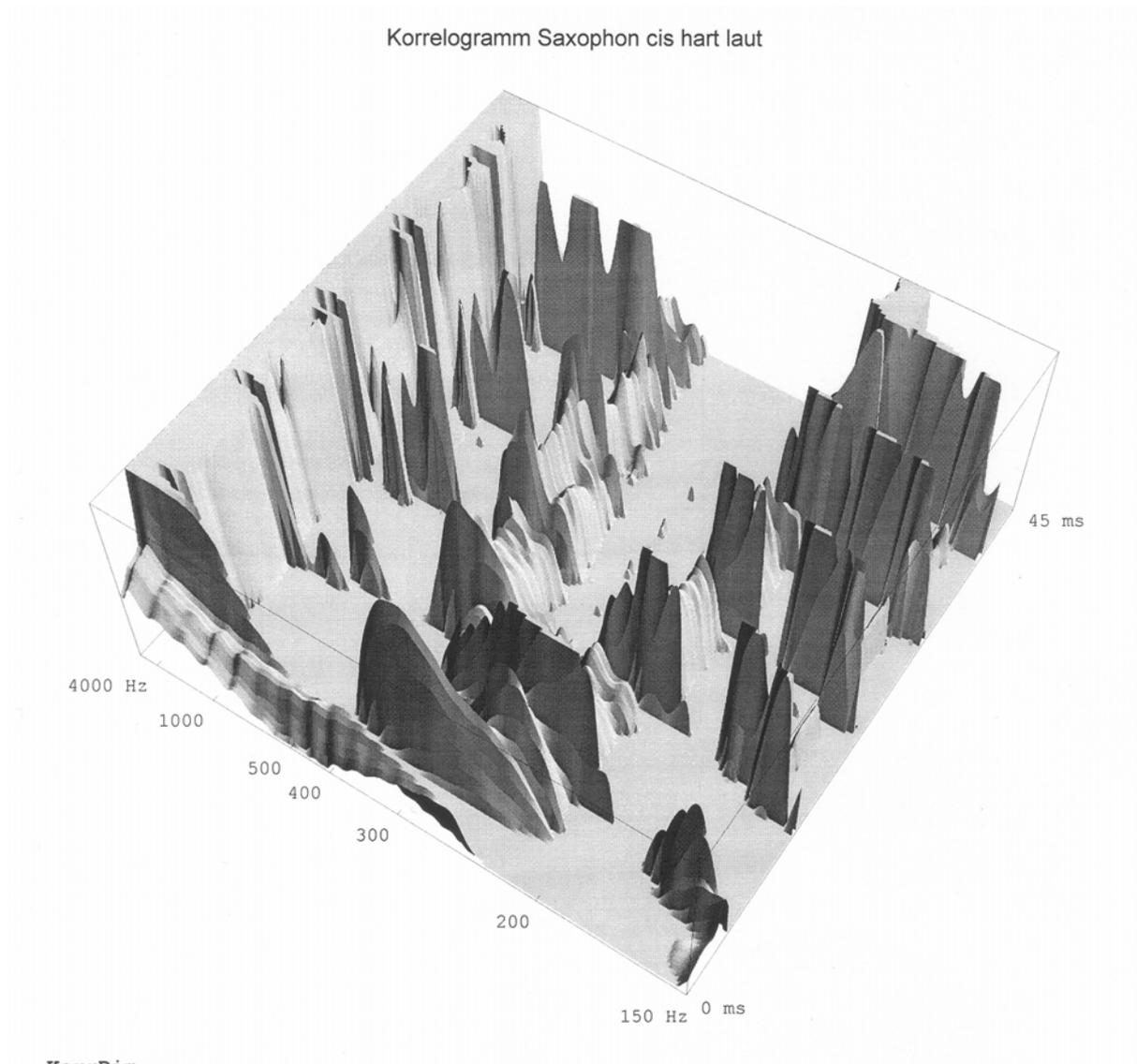
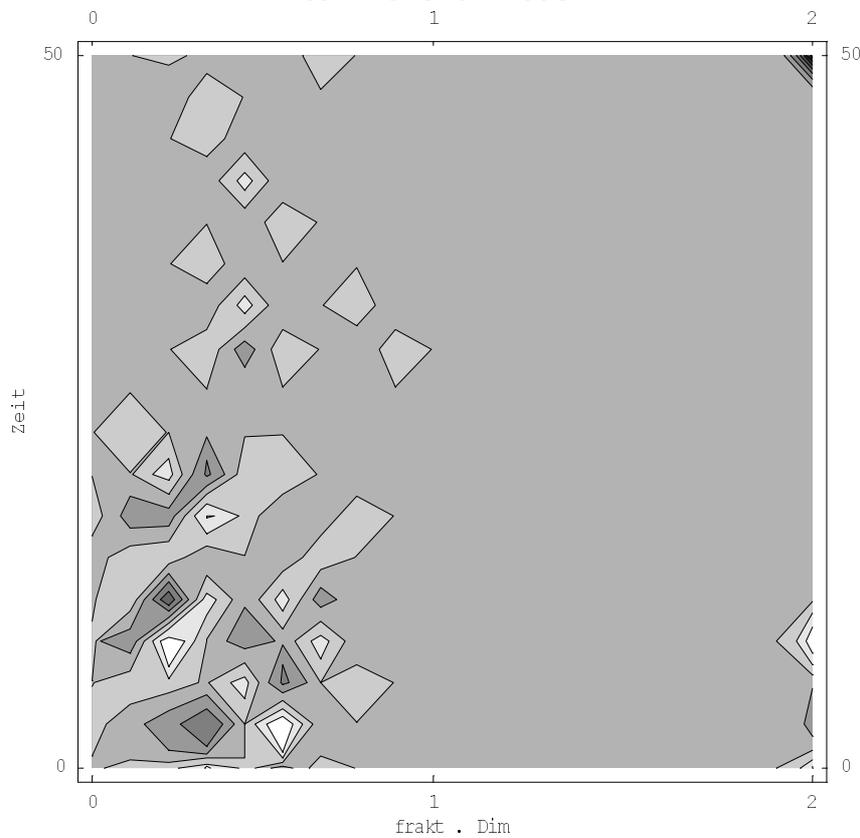


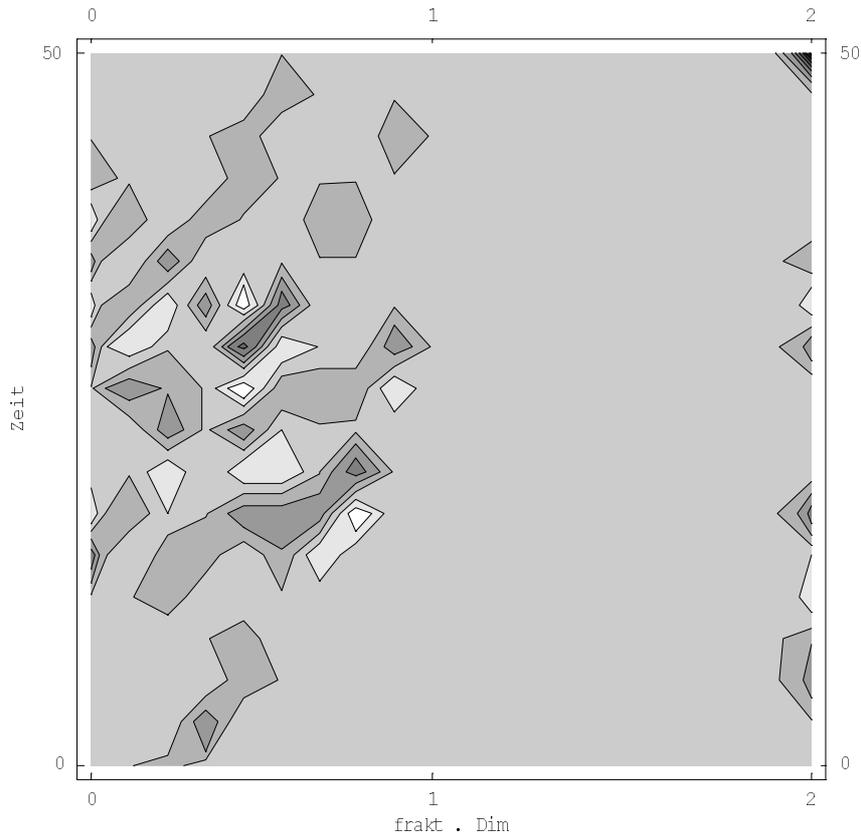
Abb. 5.17: Saxophon Cis hart laut, $Dim=5.0$, Korrelogramm, siehe Anhang D.

Hier ist deutlich zu sehen, daß sich nur Tendenzen an harmonischen Obertonverhältnissen ausbilden, es gibt zwei Stränge, der eine um 400 Hz, der andere um 200 Hz, mit starken Amplitudenschwankungen, die auch ihre Korrelationshöhe (in Hz) verändern. [Ganz zu Beginn ist ein breites Band zu sehen, was ein schönes Beispiel dafür ist, daß in einem kontinuierlichen Spektrum alles mit allem korreliert.]

Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Sax hart d1 laut



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Sax hart dl mittellaut



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Sax hart dl leise

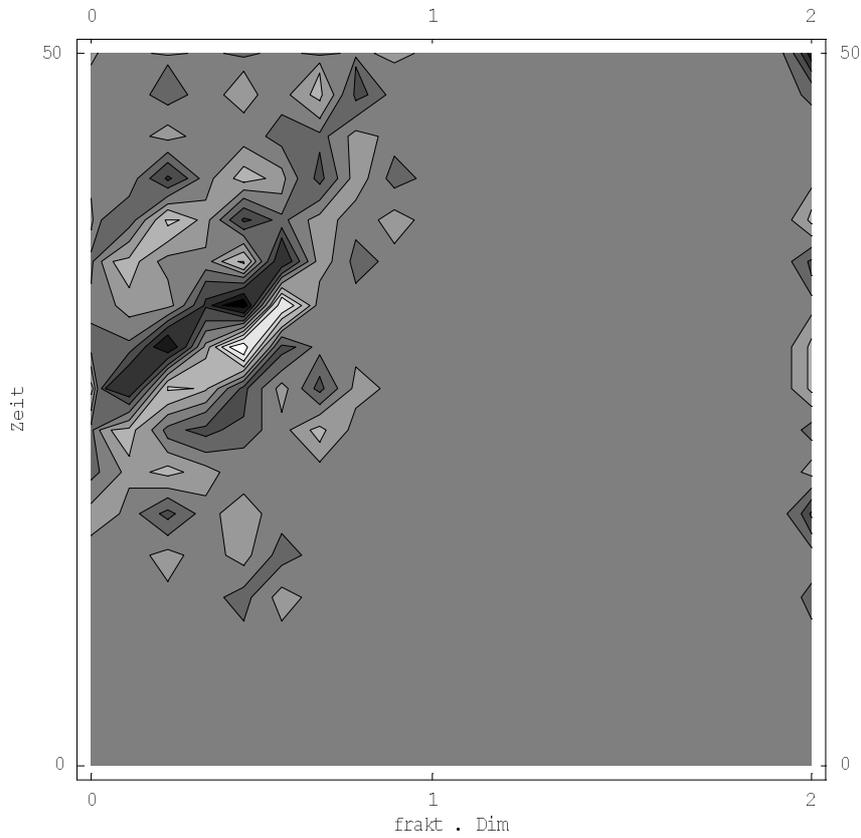


Abb. 5.18: Informationsstruktur Saxophon Ton dl, hart, laut, mittellaut, leise. Siehe Anhang D.

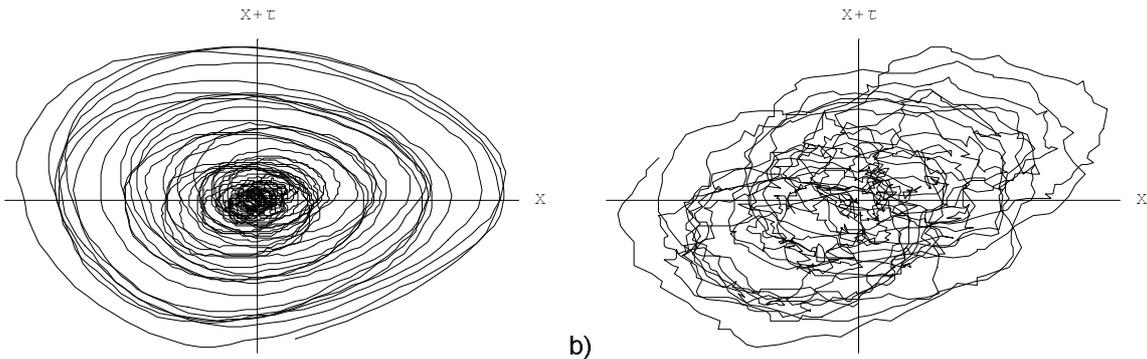
Zur Veranschaulichung des ´p´ Charakters des Saxophons sind hier die Informationsstrukturen des Tons d1 in drei Lautstärken gegeben. Ganz zu Anfang ist ein Luftblasgeräusch zu hören (bis aus den lauten Ton), dann setzt der eigentliche Ton ein. Hier ist zu sehen, daß die Hauptinformation nicht ganz am Anfang liegt, sondern etwas zeitverzögert kommt. Es steigert sich also der Ton in einem recht kleinen Zeitintervall zu seinem Höhepunkt - nicht nur in der Amplituden, sonder, wie hier zu sehen, auch in der Information. Onomatopoetisch wären die Töne also mit dem Luftstromgeräusch davor als ´fffp´ beschrieben, worauf der Vokal als periodischer Zustand folgen würde.

5.2.2 Klarinette³

Hier liegen noch keine systematischen Ergebnisse der fraktalen Dimensionen vor. Doch wurde die Klarinette mit lautem und leisem Ansatz und im musikalischen Kontext eines Transienten untersucht.

Hierzu wurde das Klarinettensolo aus Schuberts unvollendeter Symphonie (Nr. 8) (Klarinette solo) und der Beginn des ersten Satzes der Beethoven Sonate für Klarinette und Klavier (Klarinette solo) aufgenommen. Der erste Ton des Schubertsolos diente als Beispiel eines weichen Ansatzes, der erste Ton der Beethovensonate als harter und der erste Tonwechsel des Schubert-Beispiels als weicher Transient. Beim Transienten war die Frage, wie die fraktale Dimension sich ändert, wenn versucht wird, möglichst geräuschlos einen nur kleinen Tonschritt (hier Ganzton) zu gehen.

³ Hier danke ich für die in diesem Teil verwendeten klassischen Klänge herzlich Petra Hahn, die mir in mehreren Aufnahmesessions auch in Bezug auf die Frage verschiedener Blättchen, sehr geholfen hat und von der ich viel über die Klarinette gelernt habe. Auch wenn sie meine Soundkarte verhext hat!



a) Abb. 5.19: Schubert erster Ton, weicher Ansatz. a) 100 ms KooDim = 1.0 b) nur die ersten 42 ms davon: KooDim = 3.5

Wie die Zeitfunktion zeigt, wird der Ton erst langsam lauter:

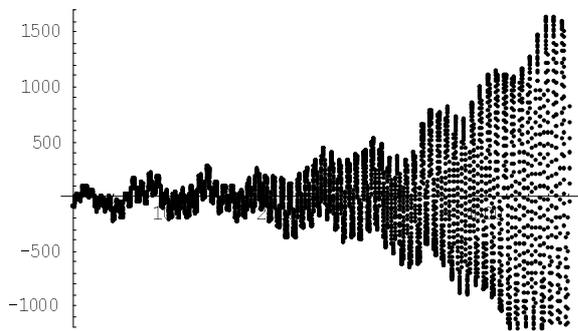


Abb. 5.20: Zeitfunktion Schubert erster Ton.

In den ersten 42 ms des Klangs ist die fraktale Dimension 3.5, in den ersten 100 ms - also zusammen mit den ersten 42 ms - ist sie 1.0. Das Chaos des Beginns ist so viel leiser, daß es fast nicht hörbar ist. Wird dann in der Rechnung die lauteste Tonhöhe als Referenz genommen, fällt der leise Einschwingvorgang nicht mehr ins Gewicht. Es scheint die Klarinetistin hier zu wissen, daß sie chaotisch einschwingen muß, tut das aber sehr leise, so daß der Ansatz sehr weich wird.

Dasselbe finden wir beim harten Ansatz:

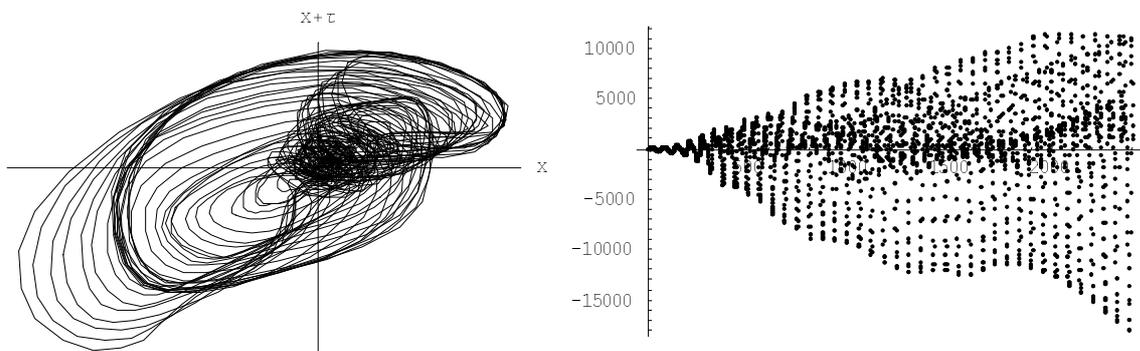


Abb. 5.21: Klarinette Beethoven erster EV Ton g2, 50ms

Auch hier wird vom Klang her ein weicher Ansatz produziert, der aber dadurch, daß die Amplitude nach Erreichen des periodischen Zustands am Ende des chaotischen Einschwingens sehr viel schneller lauter wird, als beim weichen Ansatz. Dies ist die von dieser Klarinettenistin benutzte Technik, um die Ansätze zu unterscheiden, ohne im harten Fall krachig zu klingen. Als Hypothese wäre es möglich, daß dies das klassische Ideom ist, welches sich vom Jazzklang möglicherweise unterscheidet.

5.2.2.1 Klarinette im Kontext

Um einen Transienten zu untersuchen, wurde vom Schubert Beispiel der erste Tonhöhenwechsel untersucht. Es handelt sich um einen Ganztonschritt.

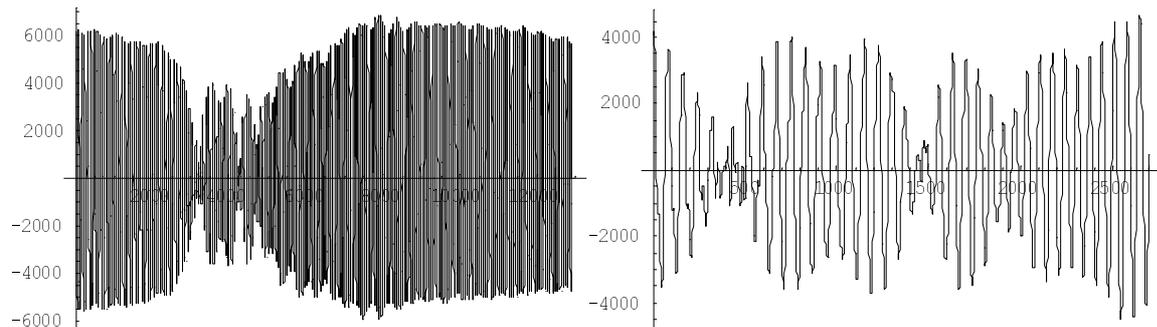


Abb. 5.22: links: Zeitfunktion des Wechsels. Links grob; rechts: nur der Transient

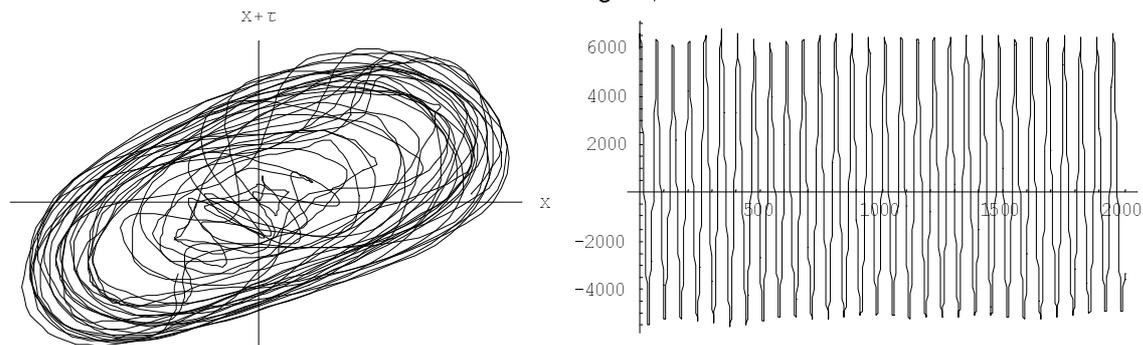


Abb 5.23: links: Pseudophasenplott nur des Transienten $D = 3.4$; rechts: Zeitfunktion nach dem Transienten

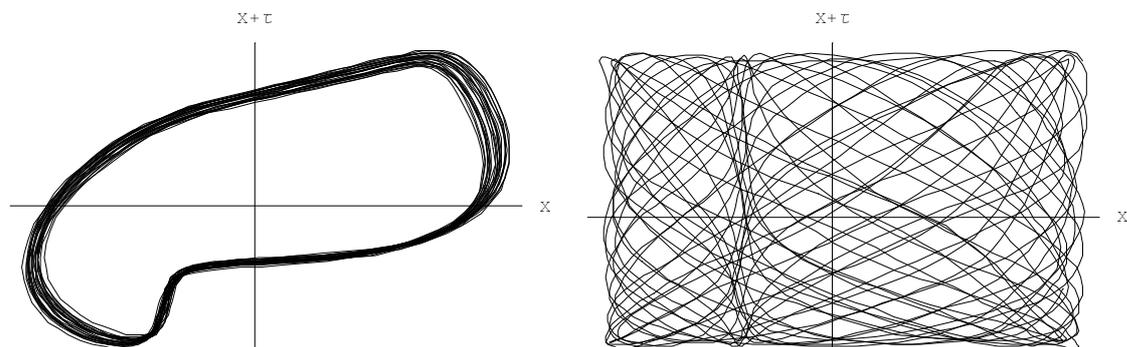


Abb. 5.24: links: Pseudophasenplots vor dem Transienten $D = 1.0$ und rechts: danach $D = 1.0$. Der Nachhall des ersten Tones läßt diese Struktur entstehen, was aus der Zeitfunktion oben nicht sofort sichtbar ist. Dieser Nachhall wirkt sich aber nicht auf die fraktale Dimension aus, da die beiden Töne nahe beieinanderliegen und der Nachhall viel leiser ist (siehe Ergebnisse für zwei verschiedene unharmonische, gleichzeitige Töne). Zur Berechnung der Korrelationsdimension siehe Anhang D.

Der Tonhöhenwechsel wurde so unauffällig wie möglich versucht. Die fraktale Dimension des Transienten würde man also als höchstens $D=2$ erwarten, ein

harmonisches Spektrum der ersten Tons, eines des zweiten. Dies ist aber nicht der Fall, die Dimension ist $D=3.4$. Es müssen also noch andere Klangkomponenten vorliegen, um dieses Ergebnis zu erzielen. Aus dem Phasenplott des Transienten gehen diese leider nicht eindeutig hervor. Da ist einmal der Kreis, und dann eine Struktur in der Mitte. Der Kreis spiegelt das harmonische Obertonspektrum wieder, das wegen der kontinuierlichen Kreisform recht grundtönig sein muß - was dem musikalischen Sinn eines gedämpften Klanges entspricht. Nehmen wir den großen Ganzton $9/8$ an, so ergibt sich für den Simultanklang folgendes Bild:

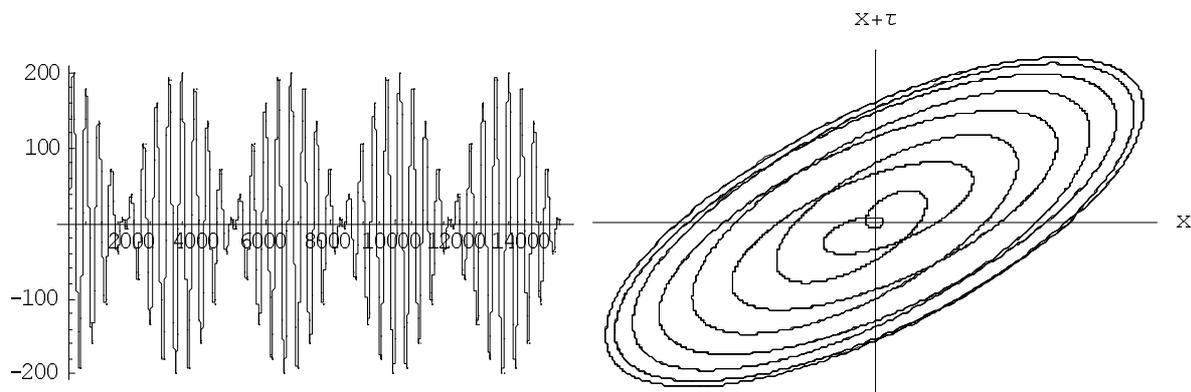


Abb. 5.25: links: Zeitfunktion und rechts: Pseudophasenplott des Zweiklangs einer großen Sekunde $9/8$ (nur Grundtöne).

Der Grundcharakter des Transienten ist hier deutlich zu sehen: in der Zeitfunktion haben wir eine Schwebung, was dem Amplitudenverlauf des Transienten entspricht. Im Pseudophasenplott haben wir den Kreis, der sich bis zu seinem Mittelpunkt schlängelt, um dann wieder auseinanderzulaufen. Hier wäre die fraktale Dimension $D=2$. Es kommt im wirklichen Transienten aber noch eine unregelmäßige Bewegung hinzu, die vor allem den rechten oberen Teil kreuzt. Von diesem Muster kann vermutet werden, daß es als eigenständige Dimension gewertet wird. Deren Spektralkomponenten - wenn es solche sind - wären noch zu bestimmen, um die physikalische Ursache zu ergründen. Schließlich ergibt das Quasistationäre des Klanges offenbar die Kommastelle zu $.4$ der fraktalen Dimension.

Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
 und Zeitfunktion
 Schubert erster Transient

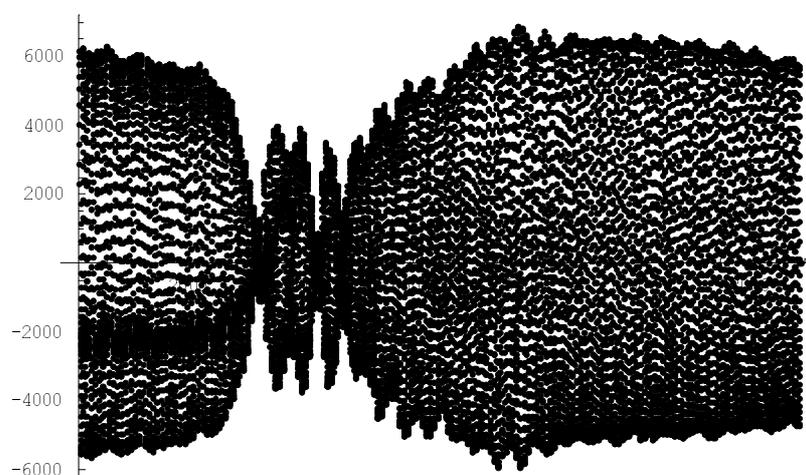
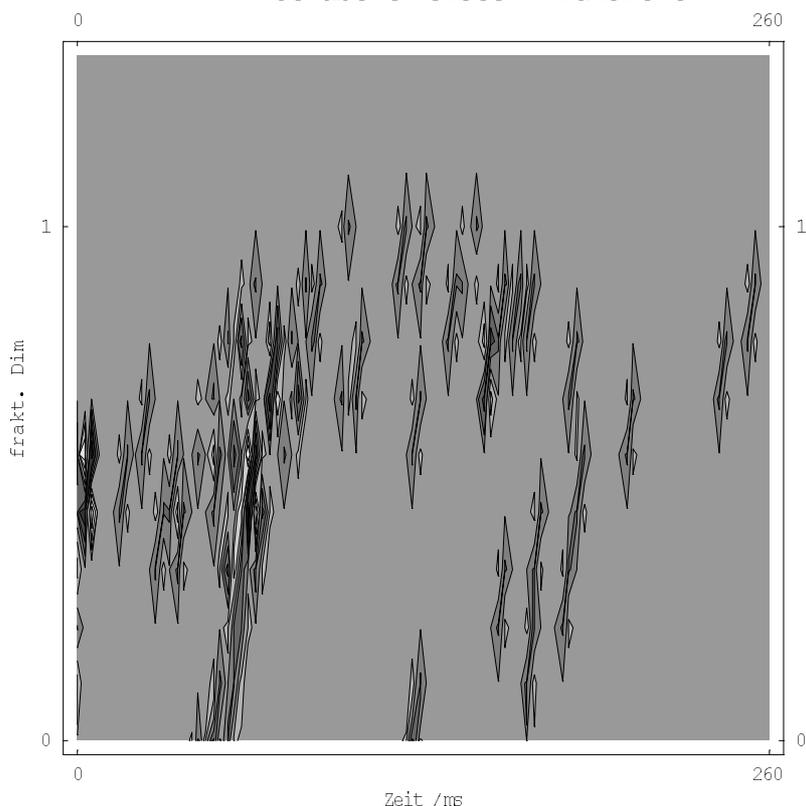


Abb. 5.26: Informationsstruktur des Schubert Beispiels. Darunter noch einmal zum direkten Vergleich die Zeitfunktion. Fortran-Programm zur Informationsstruktur befindet sich im Anhang D.

Die Informationsstruktur des Wechsels zeigt den größten Informationsgewinn schon vor dem Amplitudeneinbruch. Ist dieser zu ca. $\frac{3}{4}$ vorbei, wird kein größerer Informationsgewinn erzielt. Das Korrelogramm zeigt aber vor dem ersten Amplitudeneinbruch eine konstante Harmonizität an. Es müssen also vor dem Einbruch bereits neue Frequenzkomponenten hinzutreten, die die bisherige

Wellenform erst einmal nicht stören, ja das Korrelogramm zeigt vor dem Einbruch sogar noch einmal einen kleinen Anstieg der Korrelation vor dem Zusammenbruch.

Es ist also offenbar in einem Transienten, der so weich und unauffällig wie möglich gespielt wird, nicht möglich, im Transienten eben keine zusätzliche Information über die zwei Tonhöhen hinaus zu produzieren. Da kein Klappengeräusch vernehmbar ist, handelt es sich offenbar um einen neuen Ansatz, da die Wellenform des ersten Tones ja erst zusammenbrechen muß, bevor der zweite erscheint. Ziehen wir von der Dimension $D=3.4$ eine Dimension ab, tun wir also so, als würde der zweite Ton aus der Stille angesetzt, dann erhalten wir die für einen weichen Ansatz immer noch hohe Dimension $D=2.4$. Auch wenn hierzu noch weitere Beispiele untersucht werden müssen, um sichere Aussagen treffen zu können, ist dies ein Beispiel dafür, daß eine eingeschwungene Klarinette beim Tonhöhenwechsel dieselbe Chaotizität hat, wie im reinen Anklang, also für das Erkennen des Instruments genauso geeignet ist. So würden in Orchesterstellen, in denen die Klarinetten unhörbar -weil sehr leise - einschwingen, um dann lauter zu werden, beim ersten Tonhöhenwechsel ein deutlicher neuer klangfarblicher Akzent gesetzt. Dasselbe kennt man von der E-Gitarre, die mit Volumenpedal gespielt wird, wobei der Ton bei geschlossenem Pedal angeschlagen wird, um dann mit dem Pedal die Lautstärke zu erhöhen. Man hört also nur den stationären Klang, das Ergebnis ist sehr weich. Dieser Effekt wird auch hauptsächlich in Balladen und leisen Stellen eingesetzt.

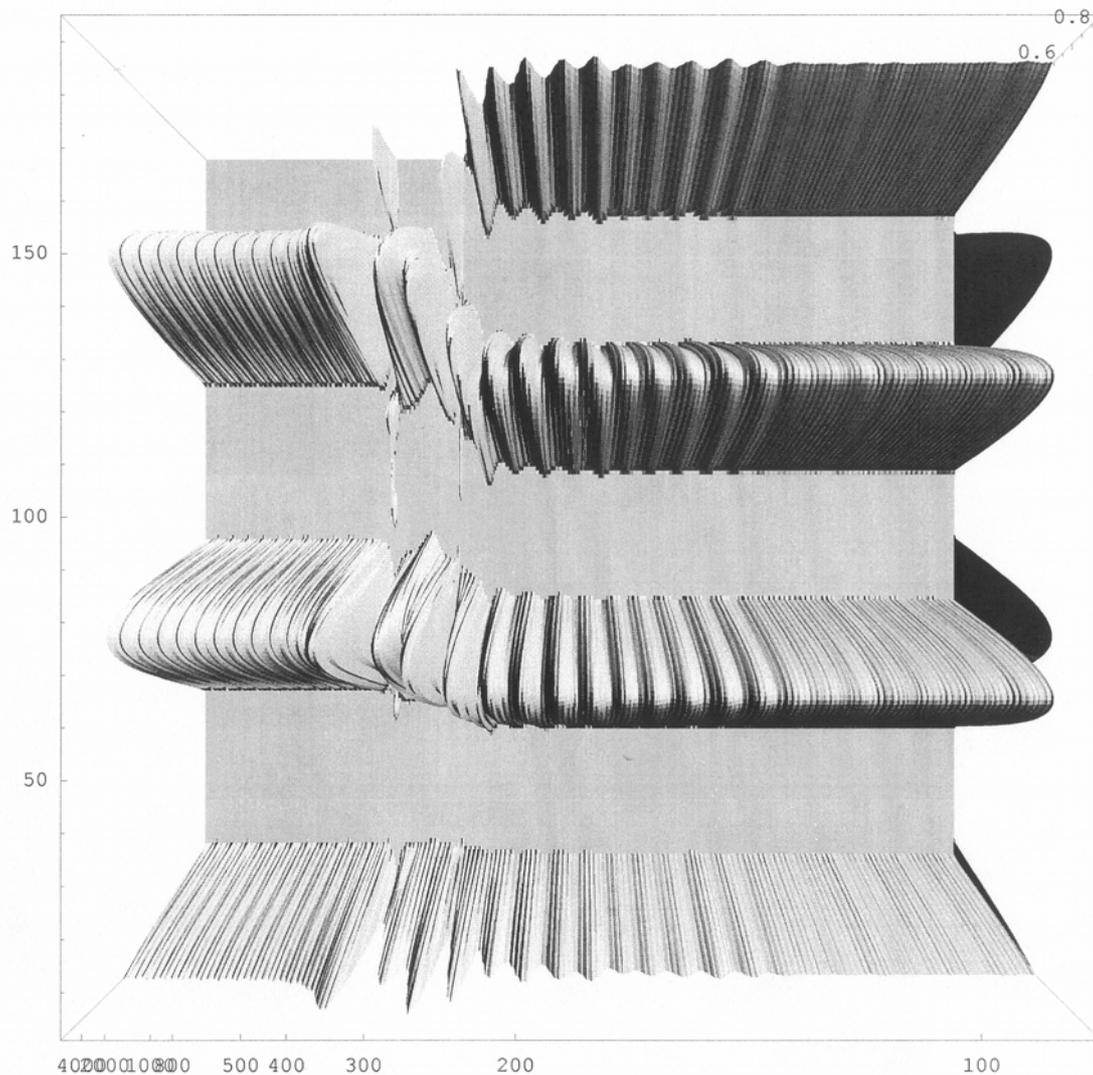


Abb. 5.27: Korrelogramm des Schubert Beispiels. Siehe Anhang D.

Im Korrelogramm machen wir die erstaunliche Feststellung, daß im Transienten die Korrelationsfrequenz von einer Tonhöhe in die andere wandert, mit den Amplitudenschwankungen, die natürlich auch im Korrelogramm zu sehen sind. Es wird also als Obertonspektrum des ersten Tones in das des zweiten hineingezogen, es entsteht ein Pitch-Glide nicht nur des Grundtons, sondern des ganzen Spektrums. Würde nur der Grundton gleiten, würde er mit keiner anderen Frequenz korrelieren und es wäre im Korrelogramm nichts zu sehen.

Bei der Amplitudenmodulation nach dem Tonwechsel handelt es sich wohl um den Nachhall. Das aus dem Schaubild entnommene Frequenzintervall ist 82 Hz, die Tonhöhen der Grundtöne sind 608 Hz und 718 Hz. Das ist dieselbe Größenordnung.

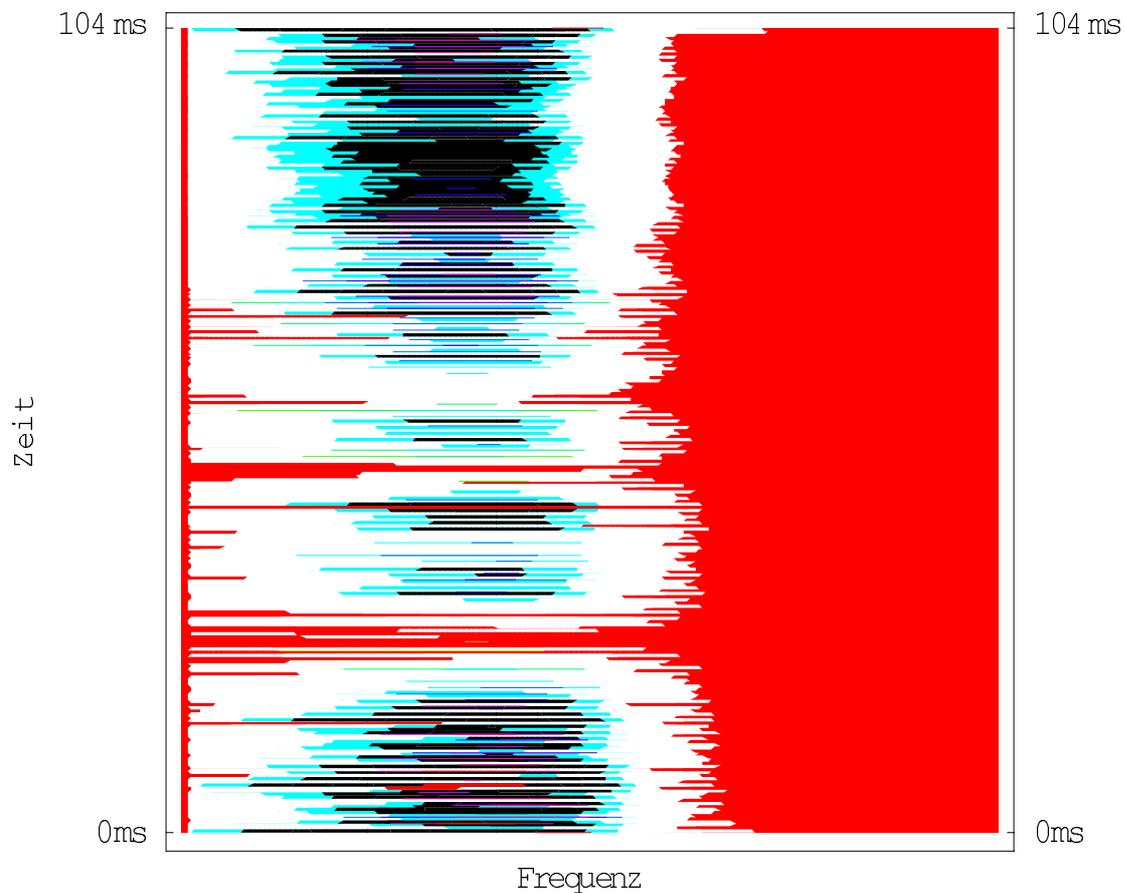


Abb. 5.28: Wavelettransformation der Grundtöne des Schubert Beispiels, nur der Transient. Komplexes Morlet-Wavelet in erster Ableitung.

Die Wavelettransformation bestätigt den Befund der Informationsstruktur, daß bereits vor dem Amplitudenabfall eine neue Information zum Klang kommt. Es erscheinen vor dem Einbruch zwei Ausbrüche zu höheren Frequenzen hin. Es scheint so zu sein, daß der neue Ton hier schon beginnt und die transiente Strecke benötigt, um sich durchzusetzen.

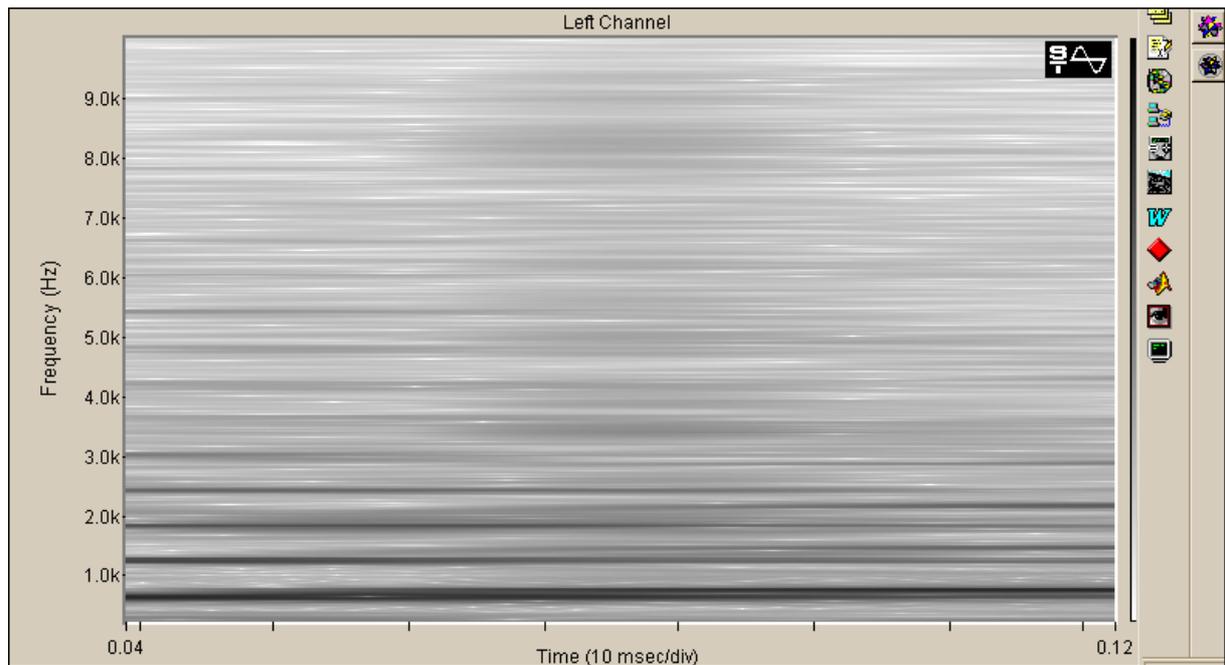


Abb. 5.29: Spektrogramm Schubert; nur der Transient.

Im Spektrogramm schließlich ist der Nachhall deutlich zu sehen. Es zeigt sich aber auch in den höheren Spektrallagen während des Transienten mehr Energie.

5.3 Geige¹

Einschwingvorgang a-Saite 50 ms = 2200 Punkte:

	hart laut	mittellaut	leise	weich laut	mittellaut	leise
a1	6.0*	2.1	9.5	3.2	4.1	3.1
h1	4.5*	4.5	**	3.5	4.2	5.1
f#2	7.2*	2.8	5.5	3.4	2.8*	2.3*
a2	5.5*	4.0	3.1	3.8	5.0	4.2*

Tab. 5.5: fraktale Dimensionen des EV der Geige, a-Saite, 50ms = 2200 Punkte.

*bei diesen Klängen war nur bei sehr hohen Einbettungsdimensionen (>80 in einem kleinen Teilbereich eine lineare Strecke im Plot Cr gegen r erkennbar. Der Klang ist aber nicht vollständig chaotisch, da er sich für jedes r immer sättigt. Zur Berechnung siehe Anhang D.

** hier sättigt sich zwar jedes r ebenfalls, es gibt aber überhaupt keinen linearen Bereich mehr auch für Einbettungsdimensionen > 80

quasistationärer Bereich a-Saite 50ms = 2200 Punkte jeweils 1 Sekunde nach Tonbeginn

	hart laut	mittellaut	leise	weich laut	mittellaut	leise
a1	1.2	1.3	1.8	1.2	1.2	1.3
h1	1.2	1.2	1.3	1.3	1.1	1.5
f#2	1.2	1.1	1.4	1.1	1.1	2.1
a2	1.3	1.1	1.2	1.2	1.3	1.8

Tab. 5.6: fraktale Dimensionen quasistat. Bereich der Geige, a-Saite

EV	a1	h1	f#1	a2	hart	weich laut	mittellaut	leise
Durchschnitt	4.7	4.4	4.0	4.3	5.0	3.7	4.6	4.7
Stand.abw.	2.70	.58	1.93	.68	2.12	.84	1.45	2.41
quasist.	a1	h1	f#1	a2	hart	weich laut	mittellaut	leise
Durchschnitt	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3	1.4	1.2	1.6
Stand.abw.	.23	1.14	.39	.25	.19	.31	.09	.31

Tab. 5.7: Statistik der fraktalen Dimensionen für EV und stat. Bereich.

¹ Ich danke Birgit Maschke, klassische Geigerin ganz herzlich für Ihre Töne.

Die Einschwingvorgänge der harten Töne sind eher unberechenbar. Mit einer Standardabweichung von 2.12 liegen sie weit über dem Durchschnitt. Dies liegt daran, daß diese Töne durchweg kratzig gespielt wurden, um sie eben hart zu machen. Die weichen Klänge sind viel konsistenter und liegen mit $D=3.7$ auch unter den harten mit $D=5.0$, wenn auch fast vier Unterzyklen für einen musikalischen Einschwingvorgang noch viel ist. Bemerkenswert ist auch, daß die leisen Töne dieselbe Chaotizität haben wie die lauten, wogegen die mittellauten abfallen. Dies ist auch im stationären Bereich bemerkenswert, in dem die leisen Klänge als einzige sich signifikant im Durchschnitt von den anderen mit $D=1.6$ abheben. Es scheint wegen des geringeren Bogendrucks und der kleineren Bogengeschwindigkeit auch weniger Gleichmäßigkeit sowohl im EV, als auch während des Streichens zu geben. Die verschiedenen Tonhöhen ergeben kein klares Bild über die Verteilung, da hier nur eine Saite genommen wurde und man schon über die ganzen Tonhöhen rechnen muß, um sichere Ergebnisse zu bekommen, was wieder aus Zeitgründen nicht möglich war.

Insgesamt hat aber die Geige die höchsten fraktalen Dimensionen von allen bisher untersuchten Instrumenten. Nur Perkussionsinstrumente mit inharmonischen und lauten Obertonspektren erreichen höhere Werte. Dies liegt wohl an dem komplizierten Anregungsmechanismus des Streichens, bei dem viele Initialimpulse über die Saite laufen, die zu Beginn völlig inharmonisch sind und deren Periodizität nur vom Bogendruck, nicht aber von der Saitenlänge abhängen.

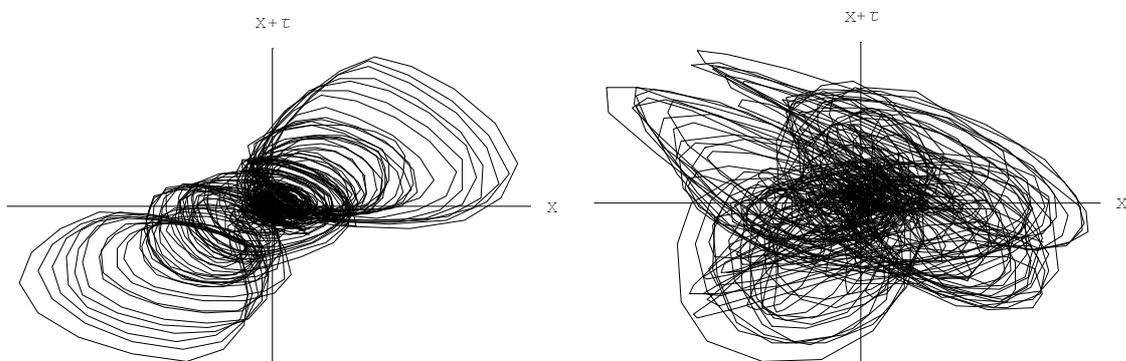
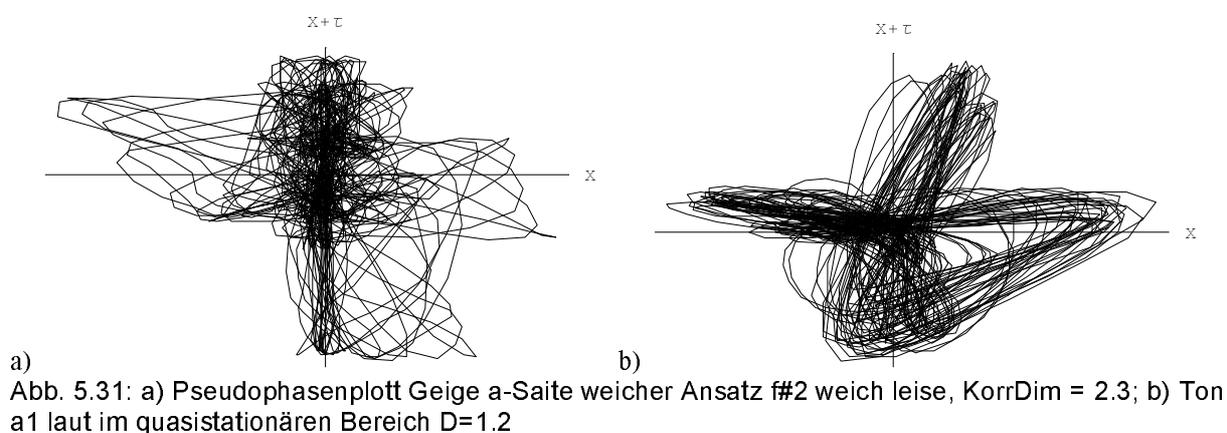


Abb. 5.30: a) Pseudophasenplot Geige a1 hart mittellaut. Erinnt stark an den Lorenz-Attraktor und hat ebenfalls eine fraktale Dimension von 2.1 b) Geige h1 hart mittellaut. Dimension: 4.5. Hier sind auch eindeutig vier Attraktoren zu erkennen

Die quasistationären Teile zeigten im Plot C_r gegen r (siehe Kapitel 4.6) meist zwei Bereiche, die linear verliefen: einen unteren mit der Steigung 1.2 und einen oberen, der ca. die Steigung 7-8 hatte. Der Übergang von einer zur anderen ist ein plötzlicher Knick. Da der erste Bereich viel länger ist und der zweite nicht wirklich linear, wurde der erste angenommen. Der Knick spiegelt wahrscheinlich den Obertonreichtum wieder, was sich auch im Phasenplott erkennen läßt. Dieser ist zwar ein Attraktor, aber ein sehr seltsamer. Hier muß noch genauer untersucht werden.



In den Wavelettransformationen² der drei Geigentöne a1, f#2 und a2, alle hart und laut, ist deutlich zu sehen, daß die Periodizität erst langsam entwickelt wird und die Frequenz dabei stark schwankt. So ist die hohe fraktale Dimension zu erklären. Es existiert die Tendenz zu einer Periodizität; diese ist aber noch sehr unscharf. Hier haben wir den grundlegenden Charakter des EV eines Streichers. Sein EV könnte onomatopoetisch als ´kr´ beschrieben werden, jenes Kratzen, das beim weichen Ansatz so leise wie möglich ist. Beim harten Ansatz gibt es einerseits die Variante des Kratzens, andererseits wie bei der Klarinette beschrieben, des leisen Einschwingens. Ist der Ton eingeschwungen, wird plötzlich die Lautstärke erhöht und der Ton scheint impulsiv, hart eingesetzt, jedoch ohne Chaos. Im letzteren Fall wird wieder versucht, dem Anlaut der Sprache nahezukommen, also ´ohne Einschwingen einzuschwingen´. Dies ist technisch die schwierigere Variante und wird eher mit einem schönen Ton identifiziert als mit einem krächzenden.

² Siehe Anhang B

5.4 Perkussion

Perkussionsinstrumente haben meist ein inharmonisches Obertonspektrum, vor allem, wenn es Idiophone und keine Membranophone sind. Man muß allerdings zwischen solchen unterscheiden, die nur kurz klingen (wie z.B. Trommeln) und solchen, die den Klang lange Zeit halten, wie z.B. Gongs oder Platten. Ein Xylophonstab ist zwar ein Idiophon, aber schnell verklungen. Bei diesen schnell verklingenden Instrumenten gibt es keinen Einschwingvorgang, das Einschwingen ist das Ausschwingen. Grundsätzlich aber kann auch hier ein kleiner Bereich am Anfang festgestellt werden, bei dem kurz viele, gerade auch höhere Eigenmoden angeregt werden (siehe Kapitel 2), die sofort wieder verklungen. Die Grundmode klingt dann ein wenig länger, was als Tonhöhe des ansonsten inharmonischen Stabes betrachtet wird. Die Klanglänge von Schlagzeugtrommeln hängt entscheidend von der Aufhängung ab. Hängt die Trommel weit vom Ständer weg, dann hat die Halterung einen großen Hebelarm, worüber die Energie schnell in den Ständer abgeleitet wird.¹

5.4.1 Gender

Das hier untersuchte indonesische Gender wurde vom Author 1999 in Bali direkt von der Gamelanbauwerkstatt in Sawan als Einzelexemplar erworben und ist somit ein Übungsinstrument, das nicht mit einem existierenden Gamelanorchester abgeglichen ist. Es ist ein Gender Gasa, hat also 10 Platten, die über Bambusresonatoren in den Schwingungsknoten der Grundmode aufgehängt und damit der Fall einer (quasi) frei schwingenden Platte darstellen. Hier die fraktalen Dimensionen von EV und stationären Bereich:

¹ Borg 1985, S. 129f

Gender 50 ms = 4800 Punkte

Platte EV quastionärer Bereich (nach 1 Sekunde)

1	6.8	2.5
2	4.4	2.5
3	5.5	2.0
4	3.6	1.5
5	6.5	1.2
6	5.0	1.3
7	6.5	2.5
8	3.5	3.0
9	6.5	3.0
10	6.2	3.5

Tab. 5.8: fraktale Dimensionen des Gender Dasa im EV und quasistat. Zustand.

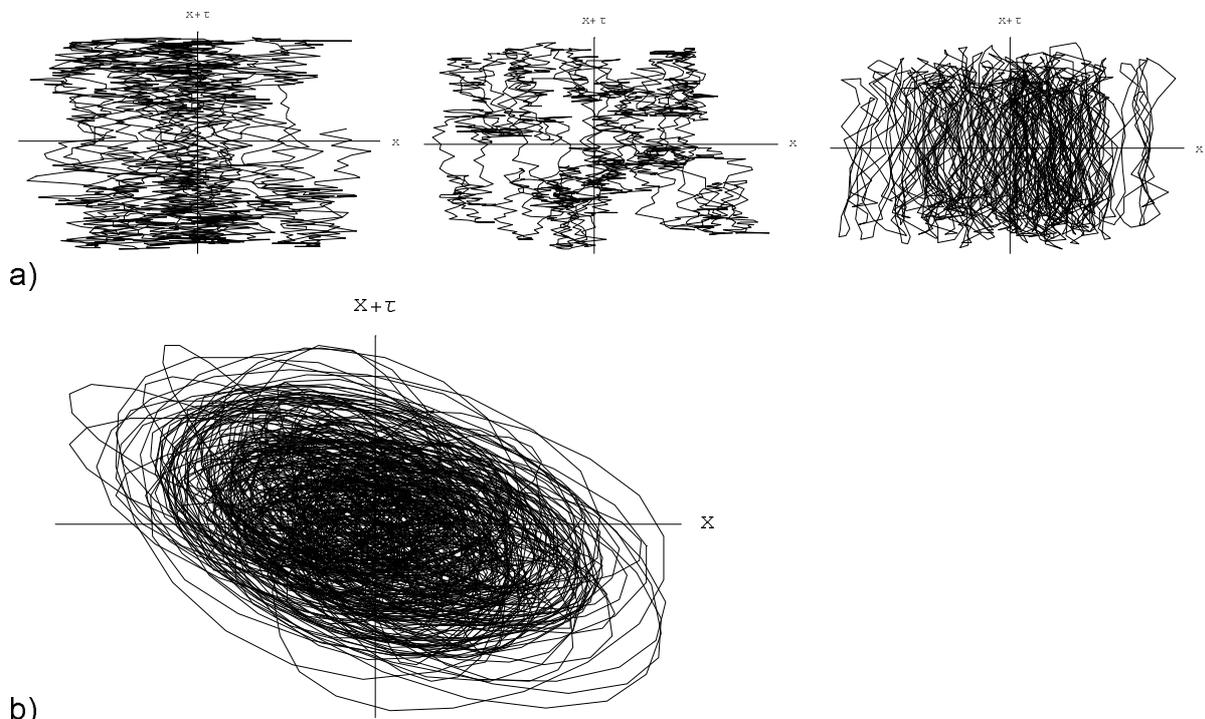


Abb. 5.32: a) quasist. Bereich Platte 5, 2, 10; b) Platte 10: typischer Phasenplott der ersten 50 ms

Wie an den Phasenplots zu sehen kann mit dem Auge hier nicht mehr viel erkannt werden. Da das balinesische Gamelan im Gegensatz zum javanischen laut und hell ist, werden hier viele Obertöne produziert. Beim EV ist ein Kreis zu erkennen. Dies daher, da hier die hohen Obertöne noch stark sind, sie ergeben daher eine Kreisform. Beim stat. Teil ist zwar in der Zeitfunktion eine Sinuslinie zu erkennen, die aber jedesmal im Detail anders gewellt ist - durch die Obertöne. Diese in jeder Periode unterschiedliche Mikrowellung wird eben dadurch verursacht, daß das Obertonspektrum inharmonisch ist, das also nicht in eine Periode der

Grundschiwingung eine ganzzahlige Anzahl von Perioden der Obertöne liegen. Da die Mikrowellung die Amplitude aber nur leicht verändert, wird im stat. Teil der Kreis des Pseudophasenplots bei jedem Durchlauf anders variiert. Die Folge ist, daß der Phasenplot quadratisch ausgefüllt wird. Dasselbe fanden wir beim Nachhall der Klarinette beim Tonhöhenwechsel des Schubert Beispiels. Im EV aber sind die Obertöne noch so stark, daß sie eigenständige Kreisbewegungen machen.

Nichtsdestotrotz ist hier eben durch die Inharmonizität eine starke Chaotizität zu erkennen, was sich auch in der fraktalen Dimension äußert. Die Werte für den EV sind allerdings mit Vorsicht zu genießen, da das Auffinden der Anzahl der Gesetze oder Freiheitsgrade des Systems hier an einen Amplituden - Threshold gebunden ist. Zum besseren Verständnis seien aber hier für die tiefste Platte die einzelnen Frequenzen für den EV dargestellt mit dem Versuch, sie einzelnen Schwingungsarten zuzuordnen.

273 Hz##	BL1 288	4116	BQ1 4469
(350?)		4860	nur stark bei Längsanschl. T1 4440 oder BQ1
751	BL2 802	5232	
980	Hammerschlagklick	5407##	BL6 5421
1230		5694	
1341##		6077	
1486##	BL3 1571	6188	
1756		6491	
		6539	L1 7159?
2218		6731	
2450##	BL4 2598	7604	BL7 7218
2750		8086	
		8756	T2 8880
2824		9633	BL8 9271
3113		10002	BL9 11581
3606##	BL5 3881	11043	nur stark bei Längsanschl
		12601	BQ2 12415
		14624	BL10 14147 oder L2 14319
		16901	BL11 16970

Tab. 5.9: Frequenzen beim EV (erste 50ms) der tiefsten Genderplatte. BL (1-11) = Biegewelle längs, BQ (1,2): Biegewelle quer, L (1,2) = longitudinale Welle, T (1,2) = torsale Welle. Fettgedruckte Frequenzen sind die lauten Amplituden, ## bedeutet, daß diese Frequenzen die einzigen sind, die nach 1 s noch vorhanden sind bei einem Threshold von -90dB.

Die Bezeichnungen hinter den Frequenzen beziehen sich auf die Schwingungsart. Da die Genderplatte 24 x 6 cm groß ist, also ein Verhältnis 4:1 in Bezug Länge: Breite aufweist, wurden hier aufgrund der empirischen Werte von Waller keine Kombinationsmodenwerte herangezogen. Diese wären erst ab einem Verhältnis 2:1 von wirklichem Nutzen. Auch ist die Platte in Längsrichtung ein wenig gekrümmt. Dies dürfte die Eigenwerte aber nicht signifikant ändern, da die Herleitung der Differentialgleichung der Platte von einem Auslenkungsradius ausgeht, der im Vergleich zu den Auslenkungen dieser Bronzeplatte im Falle des Anschlags mit einem Holzhammer nicht in dessen Größenordnung ist. Die theoretischen Werte für das Flächenträgheitsmoment, das im Kapitel des Stabes für die Querschnittsfläche errechnet wurde, sind:

$$h = 0.005; k = \frac{h}{\sqrt{12}}; l = 0.24; e = 105 \cdot 10^9; p = 8890; n = 1;$$

längs :

$$\text{Table}[f = \frac{\pi k^2}{8 l^2} \sqrt{\frac{e}{p}} * (2 n + 1)^2, \{n, 1, 12\}]$$

{288.73, 802.027, 1571.97, 2598.57, 3881.81,
5421.7, 7218.24, 9271.43, 11581.3, 14147.8, 16970.9, 20050.7}

quer :

$$l_q = .061;$$

$$\text{Table}[f = \frac{\pi k^2}{8 l_q^2} \sqrt{\frac{e}{p}} * (2 n + 1)^2, \{n, 1, 2\}]$$

{4469.45, 12415.1}

longitudinal :

$$\text{Table}[f = \frac{\sqrt{\frac{e}{p}}}{2 l} * n, \{n, 1, 3\}]$$

{7159.83, 14319.7, 21479.5}

Transversal :

Torsal :

$$\text{Table}[f = \frac{\sqrt{\frac{e}{2(1+.3)p}}}{2 l} * n, \{n, 1, 4\}]$$

{4440.34, 8880.67, 13321., 17761.3}

Die Querbiege- und die Torsalwellen beginnen erst bei 4400 Hz, die Longitudinalwellen in Längsrichtung bei gut 7000 Hz, in Querrichtung sind sie außerhalb des Hörbereichs und deshalb hier nicht aufgeführt. Es sind also im großen und ganzen die Biege- und die Torsalwellen in Längsrichtung, die das Obertonspektrum ausmachen. In der Tat sind die lautesten Peaks dieser Wellenform zuzuordnen. Die Grundschiwingung wird mit 288 Hz nur 15 Hz zu hoch gerechnet. Die zweite BL (Biege- und die Torsalwellen) hat ihre Bäuche genau in der Aufhängung der Platte und ist somit relativ leise. Die dritte und vierte BL sind von drei und vier kleineren Peaks begleitet. BL 5 bis BL 11, hier besonders BL 6 und BL 11, stimmen mit der theoretischen Rechnung gut überein. Ein Peak, der nur bei Anschlag auf die Plattenkante besonders hervorkommt bei 4860 Hz kann aber noch keine longitudinale Welle sein, könnte aber die erste torsale Welle zum Schwingen gebracht haben. Da longitudinale Wellen sowieso fast keine Abstrahlfläche haben wäre ihr Vorkommen hier auch sehr verwunderlich.

Je höher man kommt, desto schlechter wird die Zurordnung gerade kleinerer Peaks.

Genauer untersucht wurden der Vierer- und Dreierpack von Peaks um BL3 und BL4. Dazu wurde der EV geloopt (immer in einer Schleife wiederholt) und mit einem FFT Filter nur jeweils ein Bereich von 10Hz herausgefiltert, so daß durch wiederholtes Hören des EV festgestellt wurde, ob diese kleinen Nebenpeaks wirklich existieren oder nur Artefakte sind. Tatsächlich war jede dieser kleinen Peaks als diskrete Tonhöhe herausfilterbar und hörbar. Sie erklangen alle nur kurz - vielleicht 100ms beim Anschlag. Berechnet man die Centwerte, dann ergibt sich für BL3:

1230 Hz	1341Hz	1486Hz	1756Hz
150Cent	178Cent	289Cent	

und für BL4:

2218 Hz	2450 Hz	2750 Hz
172Cent	200Cent	

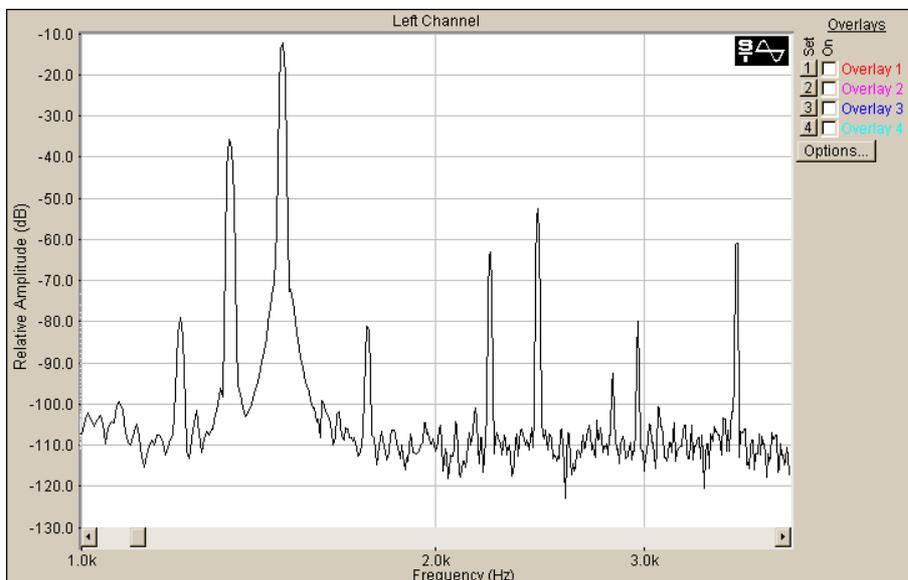
1486 Hz sind hervorgehoben, weil sie viel lauter sind als die anderen. BL4 hat keinen Peak, der viel lauter ist, als die anderen. Wenn hier auch nur grob angenähert, so ergibt sich für die ersten beiden Peaks ein Abstand von 1 1/2 Tönen bis einem Ganzton. Die Tonhöhen waren im Experiment so deutlich, daß sie nachgesungen werden konnten und mit der kleinen Terz zwischen 1486Hz und 1756Hz als Tonleiter empfunden wurden.

Diese Zwischenpeaks könnten durch die Trapezform der Genderplatte verursacht sein. Da die Eigenwerte der Platte mit zunehmendem Querschnitt zunehmen, könnte es theoretisch vier mögliche Frequenzen für eine Mode geben:

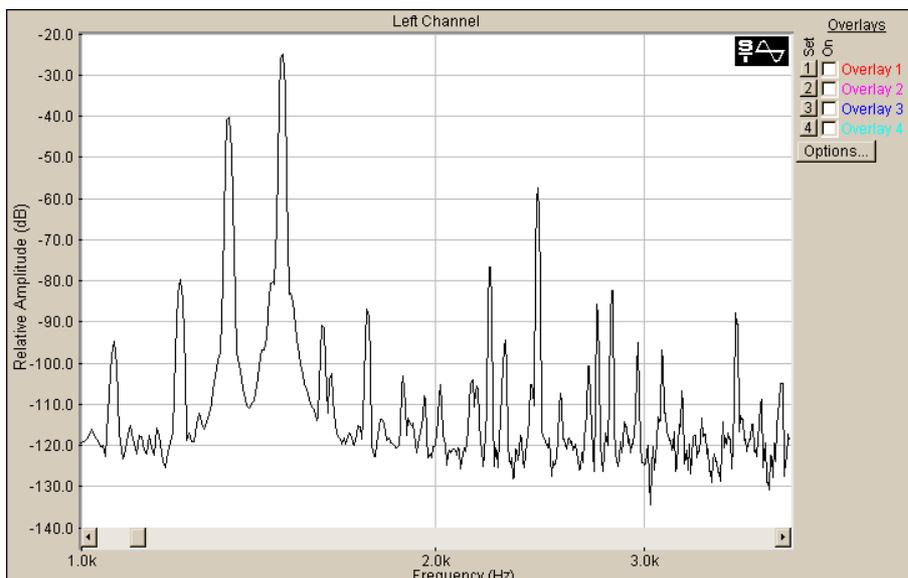
- 1) über den gesamten Querschnitt
- 2) über den Mittelteil mit konstantem Querschnitt
- 3) über dem rechten Seitenteil mit abfallendem Querschnitt
- 4) über dem linken Seitenteil mit abfallendem Querschnitt

Da das in der Praxis natürlich nicht so theoretisch sauber ist, steht außer Frage. Doch wäre es möglich, daß die balinesische Form dieser Platten, die sich in Java, das viel ruhigere Gamelanmusik hat, nicht zeigt, dazu da ist, um im EV einen viel komplexeren Klang dadurch zu erzielen, daß entlang der Platte die Querschnittsfläche sich abrupt ändert. Diese Schwingungsmoden sind natürlich sehr leise und damit schnell verklungen, also nur im EV klingend.

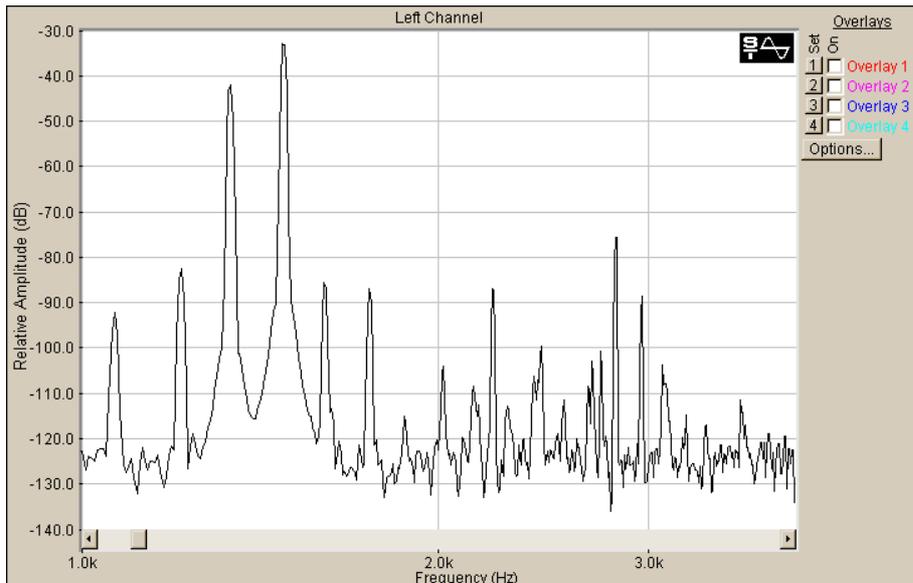
Zur Überprüfung dieser These wurde mit einem Schwingungsabnehmer bei gleichem Anschlag die Spektren der Mitte, der rechten und der linken Seite einzeln abgenommen. Die einzelnen Spektren sehen so aus:



Spektrum Mitte Gender tiefste Platte



Spektrum Rechts Gender tiefste Platte



Spektrum Links Gender tiefste Platte

Abb. 5.34: Spektren der tiefsten Gender Platte mit Schwingungsabnehmer rechts, links und in der Mitte angebracht.

Auffällig ist zuerst, daß in der Mitte viel weniger Spektralkomponenten sind als an den Seiten. Schon dies weist in die oben genannte Richtung. Versucht man eine Zuordnung der einzelnen Peaks zu den Bereichen rechts und links, dann ist dies in machen Fällen einfach, in anderen nicht so deutlich. Theoretisch müßte sich die Frequenz erhöhen, wenn das durchschnittliche Flächenträgheitsmoment größer wird - wie die Mitte für sich genommen. Es müßte erniedrigt werden, wenn es kleiner wird - wie jede Seite für sich genommen. Also sollte es dort, wo für den ganzen Stab eine Biegewelle ist, deren nun vier sein, wobei eine über und zwei unter der des Gesamtstabes sein sollte. Dies ist in der Realität nicht ganz einfach festzustellen, da der Wert für den Gesamtstab ja nur theoretisch rechnerisch vorliegt. Außerdem sind die meisten Peaks auf der linken Seite auch auf der rechten zu erkennen und umgekehrt., wenn auch mit verschiedenen Lautstärken. Es müßte also angenommen werden, daß das ungefähr gleiche Flächenträgheitsmoment die andere Seite zur Resonanz bei einer benachbarten Frequenz bringt, während das Mittelstück, von beiden weit verschieden, dort nicht resoniert. Trotz dieser Schwierigkeiten wurde eine Zuordnung der Peaks zu rechts, links und Mitte versucht, die weit unterhalb der Peaks für Longitudinal-, Torsal- oder Axialschwingungen liegen.

1065 Hz	links
1230	gleich
1341	gleich
1486	gleich
1597	links
1629	rechts
1756	links
1865	rechts, links
1951	rechts
2014	links
2146	links
2162	rechts
2218	gleich
2287	rechts
2407	links
2450	Mitte, rechts
2552	rechts, links
2693	rechts
2750	Mitte, rechts
2824	rechts
2962	links
3113	rechts, links
3606	Mitte

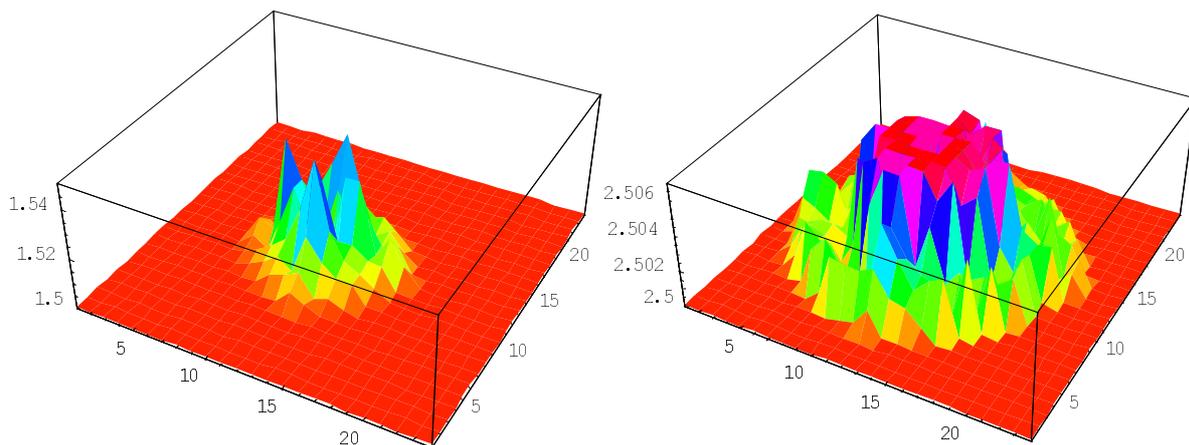
Tab. 5.10: Zuordnung der gemessenen Peaks zu den Abtastorten.

Dies sind alle Peaks bis 3606 Hz samt der Angabe, ob sie links, rechts, in der Mitte oder überall gleich laut sind. Es sind 10 Peaks links, 10 rechts, 3 in der Mitte und 4 kommen in allen drei Bereichen vor. Diese letzten 4 Peaks sind meist tiefe Hauptmoden und schwingen somit überall. Die Peaks in der Mitte, weiter oben sind weitere Hauptmoden und sind wahrscheinlich deshalb dort, weil der Stab dort die größte Schwingungsenergie hat.

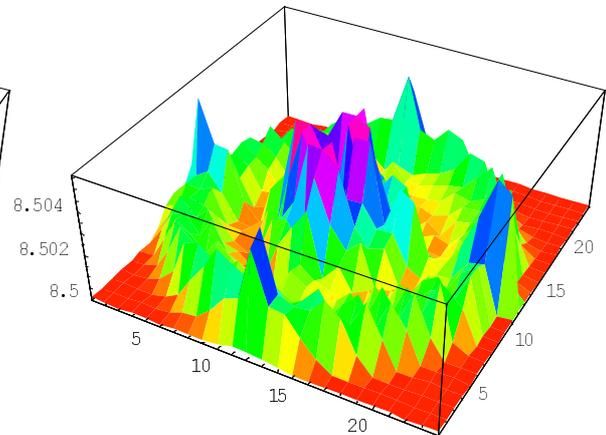
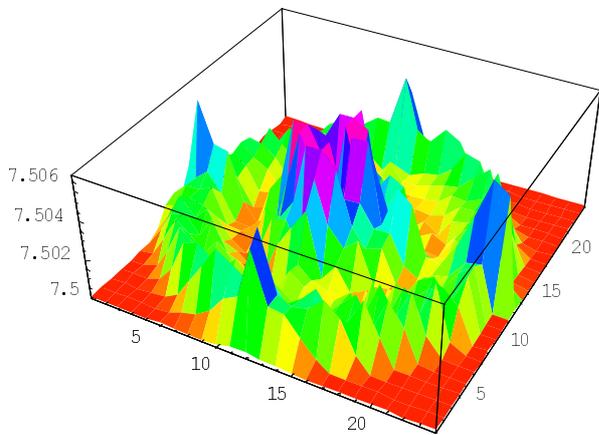
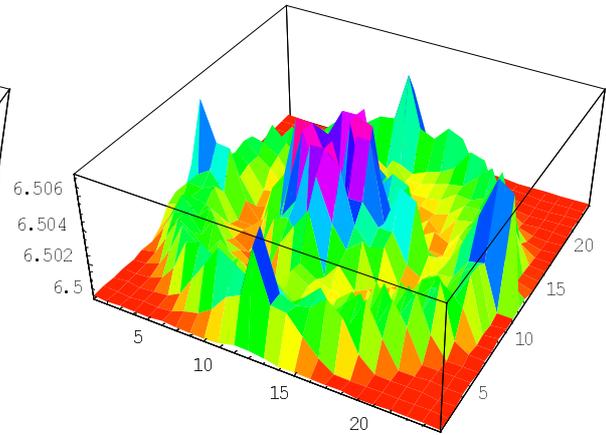
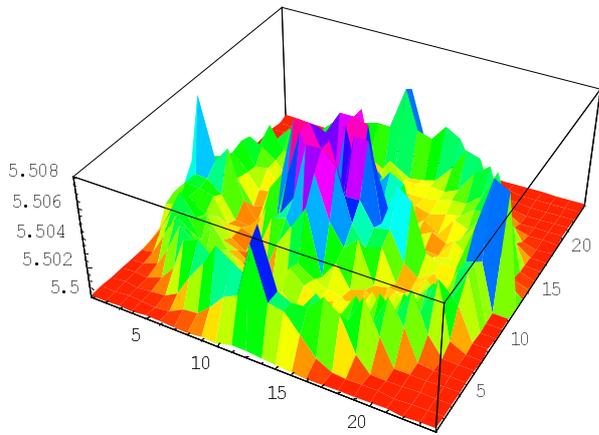
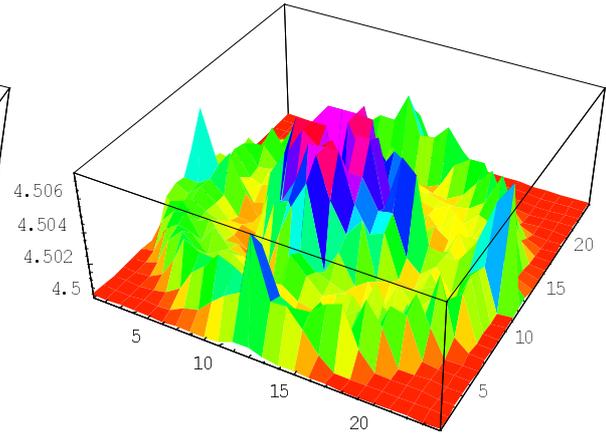
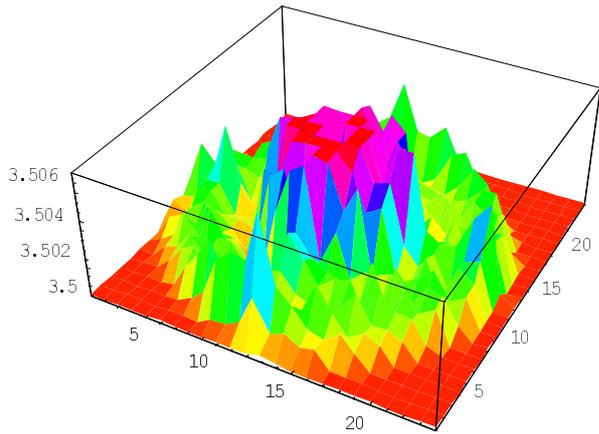
Selbst wenn die Aufteilung des Stabes in drei Bereiche richtig ist, kann man sich diese sicher nicht klar aufgeteilt denken, sondern muß Überschneidungen annehmen. Die eindeutigen Unterschiede aber zwischen rechts, links und Mitte lassen die These als sehr wahrscheinlich gelten, daß in Bali die Trapezform des Genders nicht allein der Ästhetik wegen vor der javanischen Rundform bevorzugt wird, sondern wegen der größeren Zahl an Partialtönen, die im EV vorhanden sind und damit dem Klang mehr Fülle und Reichtum, auch mehr subjektive Lautheit und Helligkeit geben. Denn diese Partialtöne sind meist höher, als die Grundmode, so daß der Klang einen höheren spektralen Zentroid besitzt.

5.4.2 Gong Gede

Der javanesische Gong Gede, der hier untersucht wurde, steht im indonesischen Konsulat Hamburgs.² Er ist ca. 80 cm im Durchmesser und aus Bronze. Da er mit einem sehr weichen Schlegel angeschlagen wird, ist sein Klang fast völlig grundtönig, was beabsichtigt ist. Hier wurde einmal die zeitliche Entwicklung des Phasenplots untersucht.



² Ich danke dem indonesischen Konsulat für die freundliche Unterstützung, ganz besonders aber Gitta Strehlow, die die Hamburger Gamelangruppe leitet für ihren Einsatz und ihre Geduld.



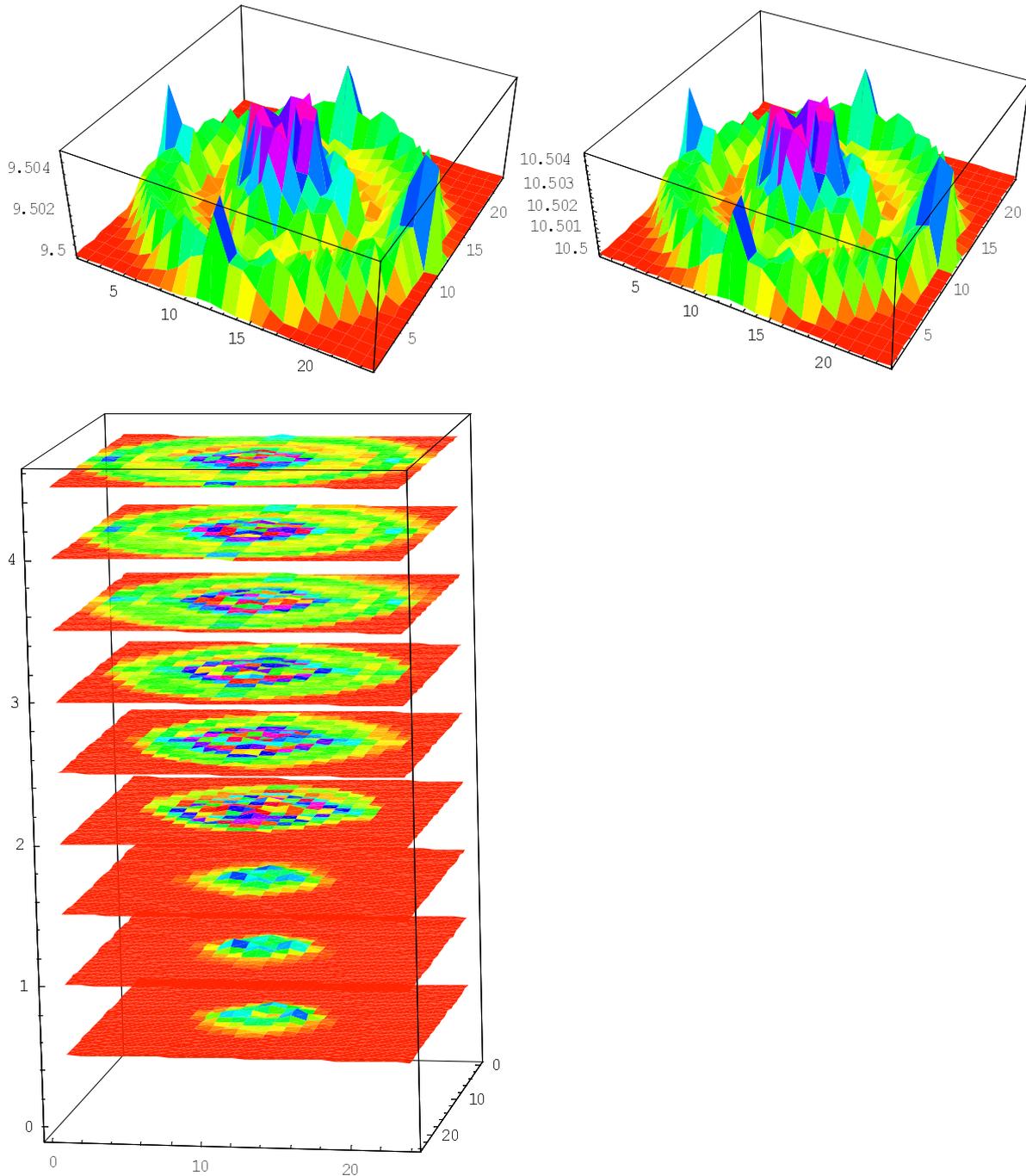


Abb. 5.35: Zeitliche Entwicklung des Pseudophasenplots des javanischen Gong Gede: immer rechts, links von oben nach unten im Zeitschritt 42ms, also von $t=0$ bis $t=420$ ms. Unten ein kleinerer Ausschnitt: beginnend mit $t=42$ ms und Schrittweite 21ms also bis $t=210$ ms. Der Grundton des Gongs ist 51,3 Hz, eine Periode der Grundschnwingung dauert also 19,5ms.

Hier ist zu erkennen, daß der Gong nach 210ms eingeschwingen ist, die Bilder unterscheiden sich nicht mehr. Hier wurde wie für die Informationsdimension der Phasenplott - hier ausnahmsweise nicht der Pseudophasenplott - gerastert und dabei als Gebirge dargestellt. Dadurch werden große Strukturveränderungen

sichtbar. Die fraktale Dimension des EV ist hier $D=1.3$, es schwingt im Prinzip einfach ein Sinuston ein, was auch die Zeitfunktion und die Autokorrelation zeigt.

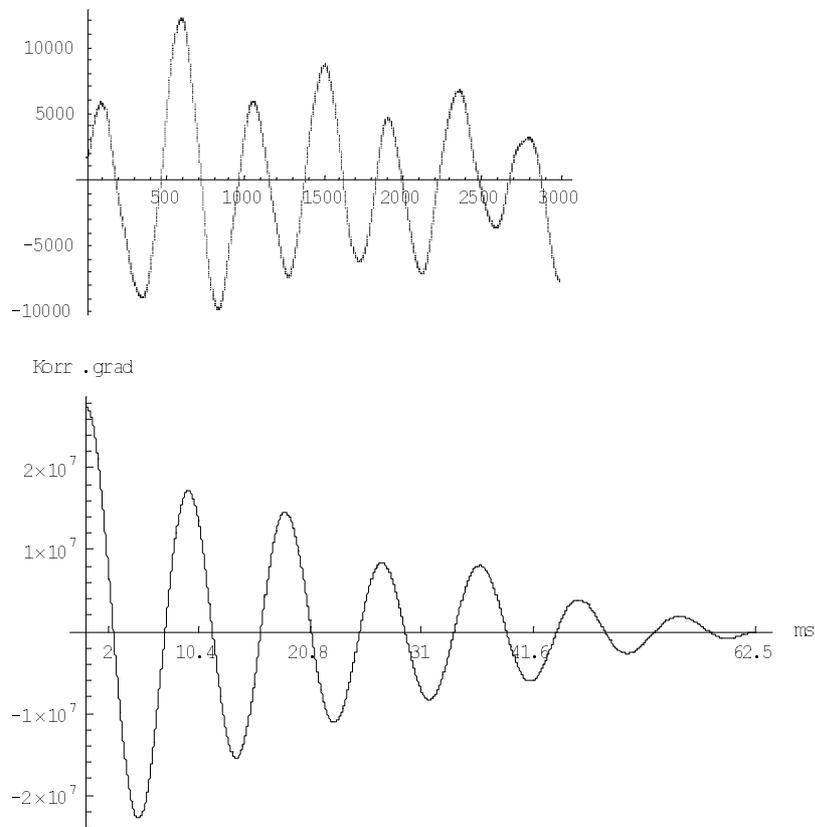
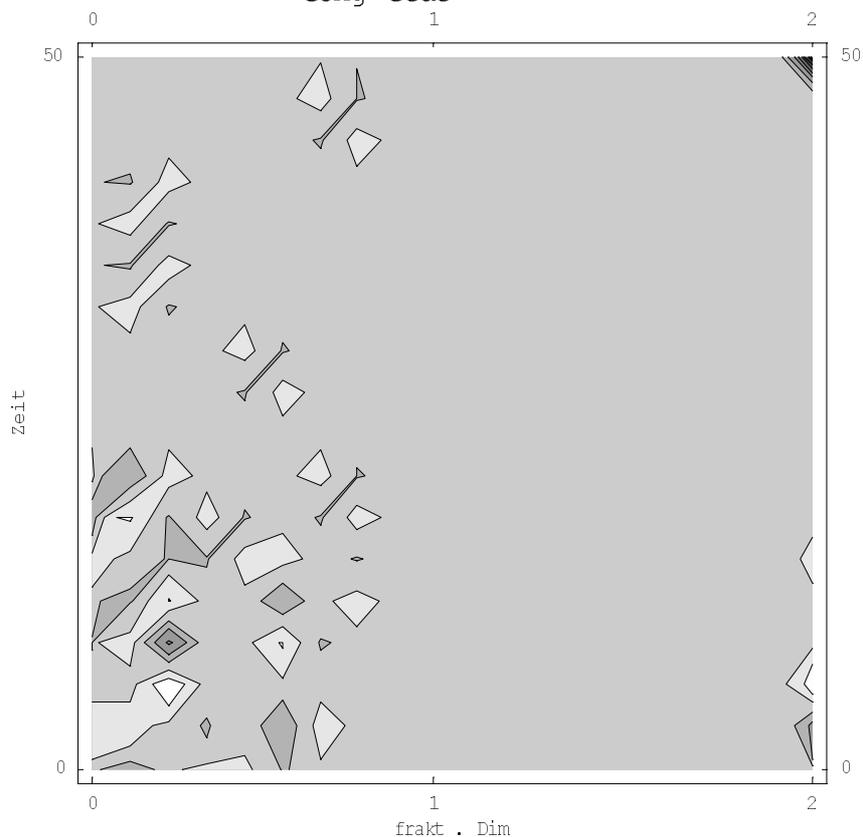


Abb. 5.36: Zeitfunktion und Autokorrelation des Gong Gede

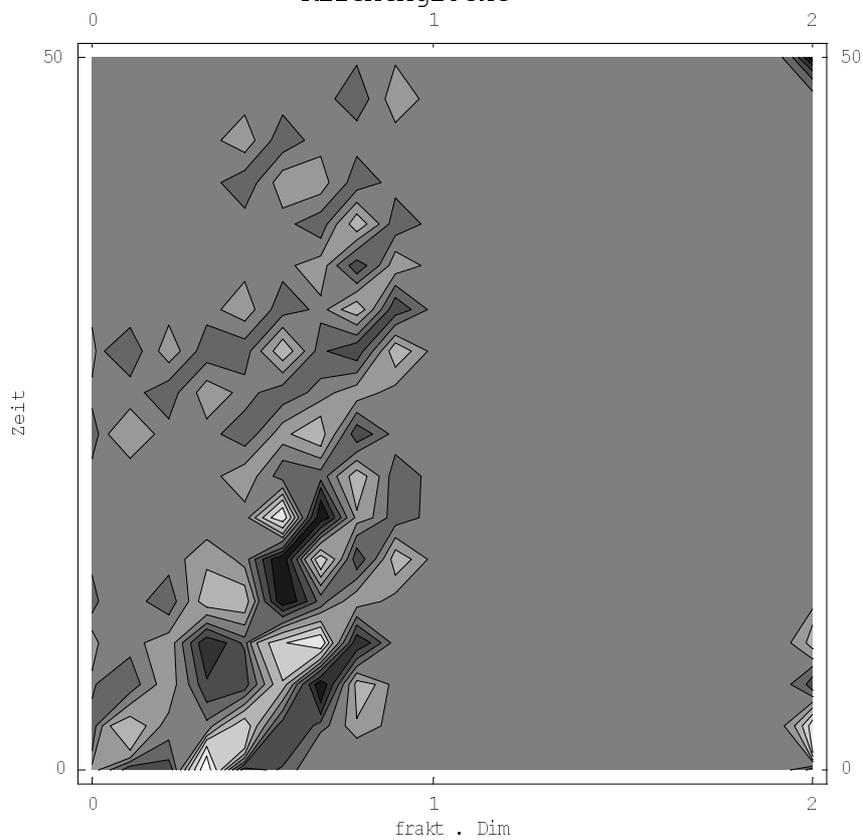
Dieser Gong hat aber wie jeder Gong Gede eine leicht ovale Form, so daß die Grundmode in zwei Peaks aufgespalten wird, die leicht nebeneinander liegen. So entsteht eine Schwebung, der ombak. Um diese Information aus der Rechnung zu erhalten, müßte man sehr große Zeitschritte rechnen, was hier nicht sinnvoll erscheint, da er mit dem EV nichts zu tun hat.

Perkussionsinstrumente können onomatopoetisch als 't'- Laute angesehen werden, da dies dem Schlag entspricht. Der Informationsgewinn ist am Anfang am größten und läßt langsam nach, wie aus den Informationsstrukturen zu sehen ist:

Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Gong Gede



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Kirchenglocke



Zweite Ableitung der multidim. Frak. durch die Zeit
Tom Tom

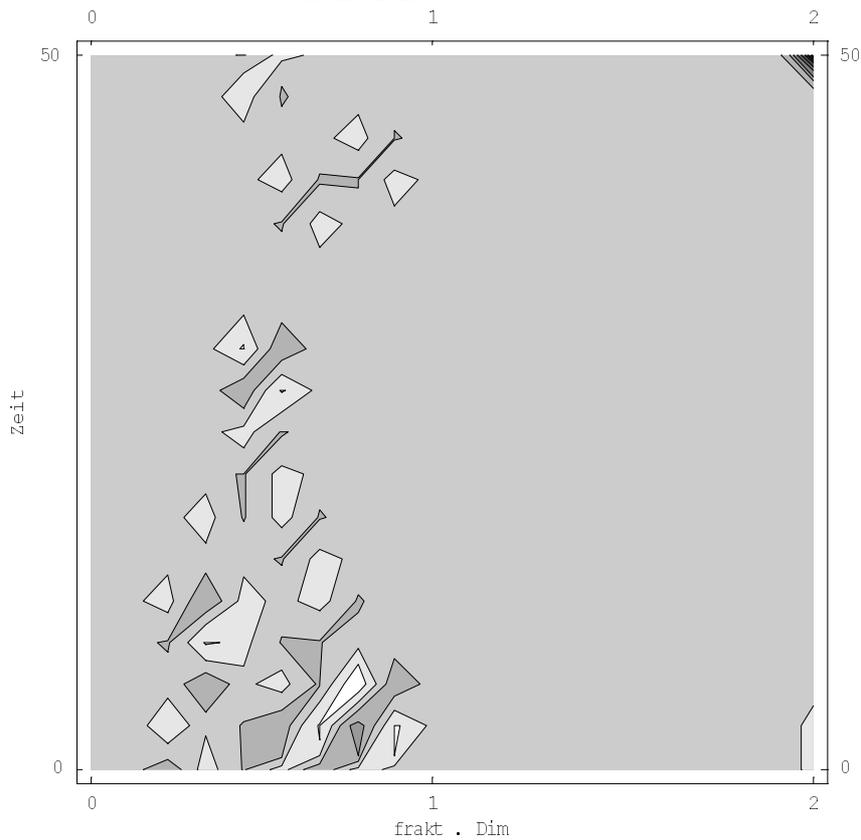


Abb. 5.37: Informationsstrukturen der Gong Gede, einer Kirchenglocke ($D=3.9$) und eines TomTom ($D=3.0$). Algorithmus der Informationsstruktur siehe Anhang D.

Da bei Perkussioninstrumenten im Prinzip der Einschwingvorgang auch gleich dem Ausschwingvorgang ist, werden hier für einige Instrumente die Kästchendimensionsplots gezeigt, so wie sie sind, nachdem dort die meiste Information vorhanden ist, als Zusammenfassung dieser Information.

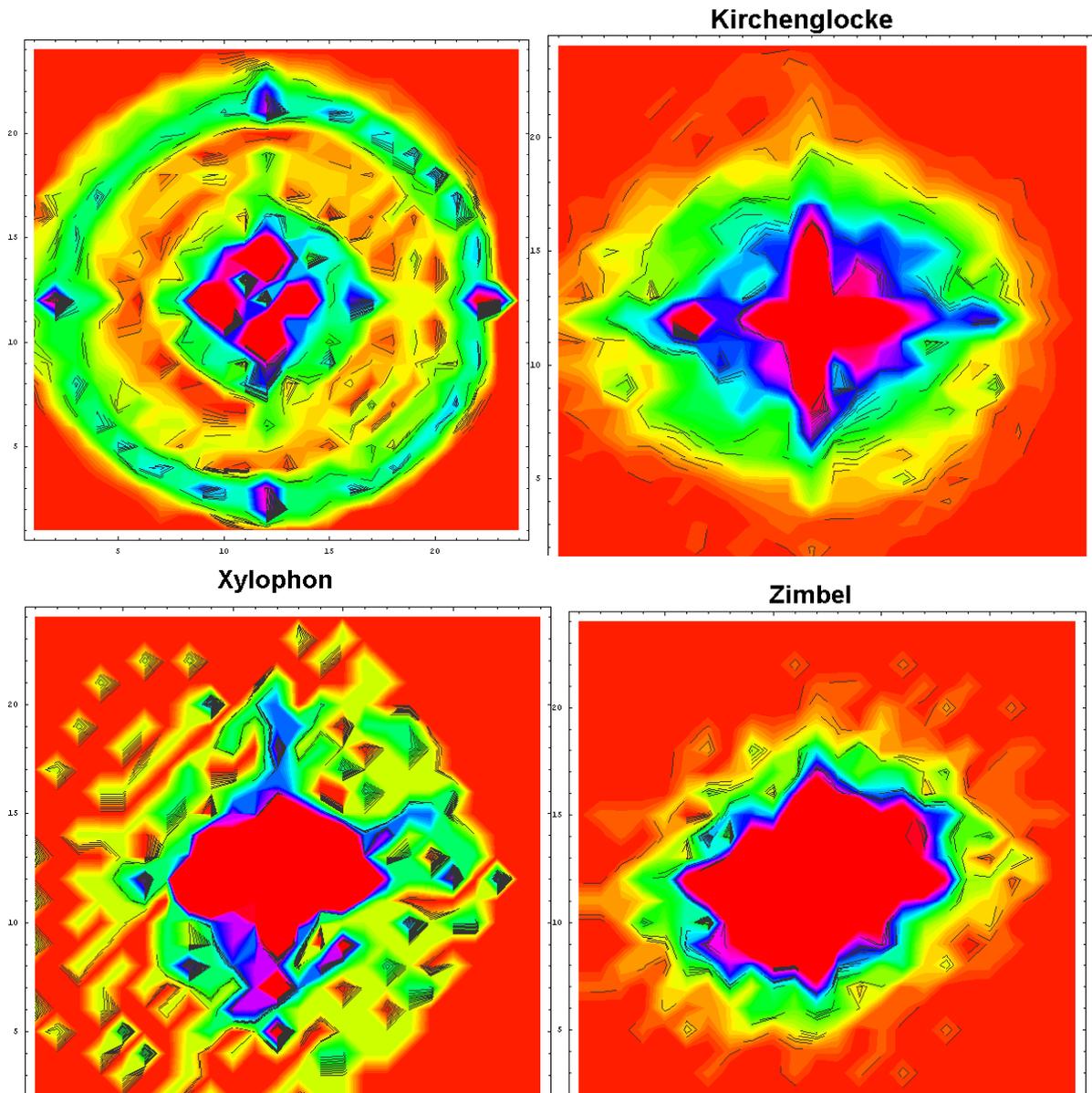


Abb. 5.38: Zusammenfassung der Information für Gong Gede (links oben), Kirchenglocke (rechts oben), Xylophon (links unten) und Zimbel (rechts unten) in Form eines Kästchenplots.

Hier werden die Unterschiede deutlich. Der Gong Gede, der eigentlich nur ein Sinuston ist, schwingt als fast perfekter Kreis. Als Gegenbild kann die Zimbel angesehen werden, die viele inharmonische Obertöne hat und so eine gezackte Form annimmt. Dazwischen liegen Kirchenglocke und Xylophon, die beide durch Formgebung zu einem harmonischen Obertonspektrum gebracht wurden und daher nicht `statistisch gleichverteilte` Zacken, sondern differenziertere Formen haben, bei der Kirchenglocke das Kreuz, beim Xylophon die Zacken oben und unten und den dritten nach rechts oben.

5.5 Zusammenfassung

Onomatopoetisch können die Instrumente wie folgt charakterisiert werden:

gezapft	k, g oder d
gestrichen	kr
geblasen	p
geschlagen	t (auch d bei weichen Schlegeln)

Bei den Streichern und Bläsern kann der Ton erst leise eingeschwungen werden, um dann plötzlich die Amplitude zu erhöhen. Dies ergibt einen harten Ansatz, der nicht krachig ist. Ein Einsatz, der aber an sich nicht komplexer ist als der folgende quasistationäre Zustand, ist nicht möglich. Dies gilt auch für Transienten.

Je lauter und je inharmonischer ein Instrument ist, desto chaotischer ist sein Einschwingvorgang. Ausnahme ist die Geige, die sehr hohe fraktale Dimensionen hat. So kann eine Rangfolge der Instrumententypen nicht erstellt werden, da die Instrumente in sich sehr unterschiedlich sind. Die Gitarre schwingt bei tieferen Tönen harmonischer ein als bei hohen, bei Bläsern ist das umgekehrte der Fall. Der harte Ansatz bei Bläsern und Streichern erhöht die Chaotizität erheblich, bei gezupften Instrumenten jedoch nur wenig oder gar nicht. Idiophone müssen von sich aus ein inharmonisches Spektrum haben, das nicht sofort verklingt, um chaotisch zu sein.

Neben den eigentlichen Einschwingvorgängen haben die gestrichenen, gezupften und geblasenen Instrumente noch die Möglichkeit von Geräuschen vor dem eigentlichen Einschwingen selbst. Die Bläser einen f - Laut, die Zupfer das Vorschleifgeräusch und die Streicher das Rauschen bei sehr niedrigem Bogendruck.

6 Wendepunktrelationen

Ich hatte das Glück, daß ein Teil meiner Instrumententöne von zwei Forschern mit ihren Identifikationsalgorithmen analysiert wurden¹. Frau Kostek untersuchte einige 50ms lange Einschwingvorgänge von Geigen und Klarinetten, die in dieser Arbeit verwendet wurden. Ihr neuronales Netz, das mit Features arbeitet, die sich nach Ihrer Untersuchung als besonders instrumententypisch herausgestellt haben,² identifizierte die Geigen mit 95%, wobei von 48 Sounds 46 richtig eingeordnet wurden. Die Saxophone wurden mit 76% erkannt, was 12 aus 16 richtigen bedeutet. Die Saxophone wurden meist mit Klarinetten vertauscht, was in hoher Lage auch bei Hörern geschieht. Mündlich teilte sie mir mit, daß sie die Lage des spektralen Zentroids ebenfalls für die wichtigste Unterscheidungsmöglichkeit hält. Leider war in ihrem Netzwerk keine Gitarren implementiert.

Till & Rudolph³ berechnen über eine Wigner-Ville Transformation verschiedene Momente, um das beste Verhältnis zwischen Zeit- und Frequenzunschärfe zu wählen, das den Datensatz am wirkungsvollsten in Cluster zerlegt. Da sie im Bereich Sound-Design tätig sind, beschäftigen sie sich mit Autogeräuschen aber ebenso mit Kuhmuhen, wobei ihr Algorithmus hervorragend funktioniert. Bei den EV allerdings konnten keine Ergebnisse erzielt werden. Im Gespräch meinten die Autoren, man müsse wohl das Problem genau kennen, um einen Algorithmus zu konstruieren, der weiß, nach welchen physikalischen Eigenschaften zu suchen ist. Jedes Problem brauche seinen eigenen Klassifikationsmechanismus.

Hier wird nun versucht, aus einer anderen Perspektive als der der Frequenz-Analyse das Problem anzugehen. Dazu wird der Klang als Mikrorhythmus aufgefaßt, der das Ohr erreicht. Jedes Amplitudenmaximum produziert eine Druckwelle in die Cochlea, welcher von mindestens einem Nervenimpuls gefolgt wird. Gerade wenn die Frequenzunschärfe noch groß ist, könnte ein Mechanismus, der diese Grundrhythmen als Muster erkennt, sehr schnell ein Instrument identifizieren.

¹ Hiermit danke ich Markus Till aus München und Dr. Kostek von der technischen Universität Gdansk.

² Kostek 2001

³ Till, M. & Rudolph, S.: Optimized time-frequency distributions for acoustic signal classification. [www:http://isd.uni-stuttgart.de/](http://isd.uni-stuttgart.de/)

6.1 Algorithmus

Die drei Integrationszeiten des Gehörs werden mit 10ms, 50ms und 250ms angegeben.⁴ Es braucht zunächst 10ms, bis die Frequenzgruppenbreiten aufgebaut und Tonhöhen erkannt werden. Nach 50ms ist die Verwischungsschwelle erreicht, unterhalb derer Einzelereignisse wie Modulationen oder Impulse zusammengefaßt erlebt werden. Und nach 250ms ist der Klang vollständig erfaßt. Dies und die Unschärferelation bei der Fourieranalyse lassen es sinnvoll erscheinen, die Eigenschaften des Einschwingvorgangs weniger auf der Frequenz-, als auf der Zeitebene zu analysieren. Eine Zeitreihenanalyse hat folgende Vorteile:

- a) In einem Bereich, der eben nicht stationär ist, werden die exakten Ereignisse zur Berechnungsgrundlage gemacht, nicht ´unscharfe´ Frequenzen, also keine Frequenzbereiche, deren Bereichsbreite sich auch noch während des Analysezeitraums verkleinern.

- b) Was beim Ohr ankommt, sind Druckschwankungen. Diese haben Wendepunkte bei maximaler Auslenkung des ovalen Fensters in Richtung Innenohr und aus diesem hinaus. Diese Impulse laufen also die Basilarmembran entlang. Ihr zeitliches Auftreten ist zu Beginn des Klangs die einzige Information, die das Ohr besitzt. Die Idee hier ist, die zeitlichen Relationen dieser Impulse, quasi einen Mikrorhythmus, auf die Frage hin zu untersuchen, ob die Einschwingvorgänge der verschiedenen Instrumente unterschiedliche zeitliche Relationen dieser Impulse aufweisen.

Zur Identifikation von Instrumentenklingen ist nach diesen Überlegungen ein Algorithmus hilfreich, der sowohl von der jeweiligen Tonhöhe des Beispieltones abstrahiert, als auch von dessen Lautheit. Dann bleibt weitgehend nur noch das Instrumentenspezifische übrig. Der hier vorgestellte Algorithmus erfüllt diese Bedingungen. Er abstrahiert allerdings nicht über die Ansatzhärte, Vokalfärbung

⁴ Reuter 1995, S. 31ff

oder sonstige Parameter, die beim selben Instrument, bei gleicher Tonhöhe und Lautstärke, verschiedene Klangfarben erzeugen.

Analysiert werden dazu die ersten 50 ms eines Klanges nach Einsatz. Diese Standardisierung auf 50 ms ist zwar beschränkend, eine variable Zeit wäre sinnvoller, um nicht in manchen Fällen einen Teil des Einschwingvorgangs abzuschneiden, in anderen einen Teil des quasistationären Teils mit zu analysieren. Aus programmiertechnischen Gründen war diese Beschränkung aber notwendig, um die Rechnung überschaubar zu halten. Außerdem müßte dann das bloße Auge darüber entscheiden, wo der Einschwingvorgang aufhört. Die aufgenommenen Klänge sind deshalb von Hand auf 50 ms gekürzt, wobei beim Beginn des Klangs begonnen wurde. Auch die Wahl des Beginns gestaltete sich manchmal als schwierig, da gerade weich und leise einsetzende Töne der Geige aus dem Rauschen heraus in ein 'Kratzen' des Bogens übergehen oder Klarinettenöne, ebenfalls weich und leise gespielt, als Sinuswelle aus dem Rauschhintergrund langsam heraustreten.

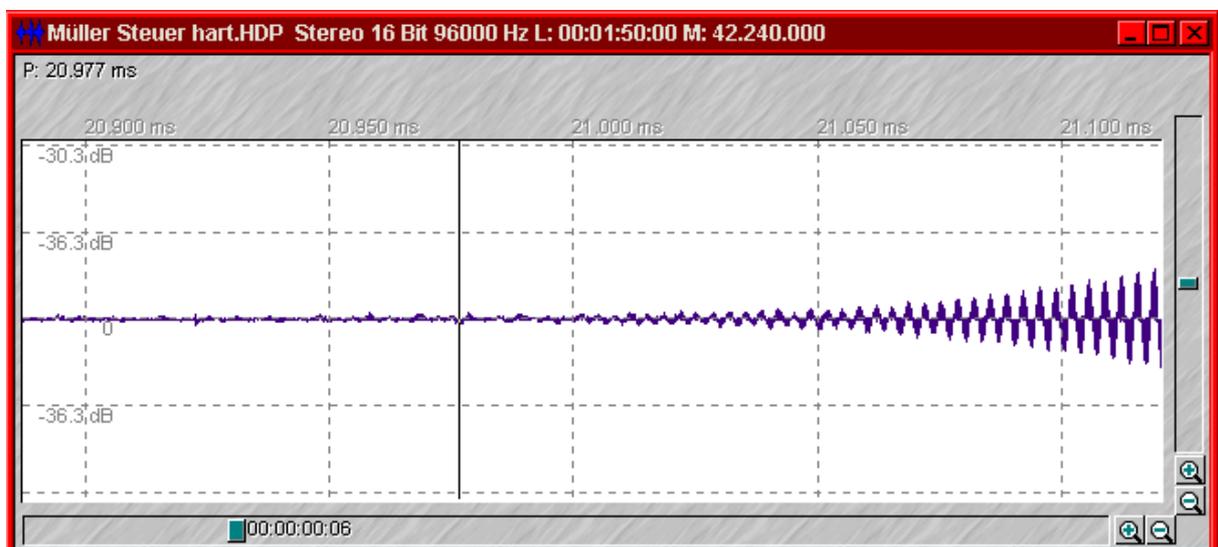


Abb. 6.1: 230 ms des Einschwingvorgangs einer Klarinette, weich angesetzt. Die fast sinusförmige Schwingung tritt stetig aus dem Rauschen heraus.

In solchen Fällen wurde versucht, soviel vom EV zu nehmen wie möglich, nur wenig Rauschen und wenig quasistationäre Anteile.

Der Algorithmus stellt Häufigkeiten von Relationen der zeitlichen Abstände zweier benachbarter Amplitudenmaxima und -minima (resp. Amplitudenminima und -maxima) her. Es sei t_1 der Zeitpunkt eines Maxima, t_2 der des folgenden Minima und t_3 wiederum das folgende Maxima. Dann ergeben sich die Zeitintervalle $\Delta t_{3,2} = t_3 - t_2$ und $\Delta t_{2,1} = t_2 - t_1$. Der Quotient $\Delta t_{2,1} / \Delta t_{3,2}$ ist eine rhythmische Relation, deren es so viele gibt wie Hoch- und Tiefpunkte. Diese werden dann in den Bereich $0 \leq R \leq 1$ gebracht. Aus praktischen Gründen ist dieses Intervall in zwanzig diskrete Intervalle geteilt. Jede auftretende Relation liegt in einem dieser Intervalle. So werden alle Relationen im Bereich R kumuliert. Jedes Intervall in R hat dann eine Häufigkeit.

Nachdem die Amplitudenmaxima und Minima festgestellt wurden, werden ihre Amplitudenwerte gleich 1 gesetzt. Es entsteht also eine Folge von Nullen (Zeitpunkte ohne Maxima oder Minima) und Einsen (Zeitpunkte mit Maxima oder Minima). Dadurch wird die Größe der Amplitude des Tones ignoriert, nur ihre Existenz betrachtet. Damit wird natürlich auch ignoriert, ob es sich um eine große Gesamtamplitudenspitze handelt oder ob es ein kleiner Zwischengipfel ist. Dies ist daher nicht weiter von Belang, da es in den chaotischen Einschwingzuständen zwar große und kleine Gipfel gibt, die Abstände der großen zueinander aber nicht als Periodendauer oder deren Unterteilung angesehen werden können. Aber natürlich wäre es interessant, die gleichen hier analysierten Töne auch mit einem Algorithmus zu analysieren, der einen Threshold (Schwellwert) hat, entweder dergestalt, daß nur Amplitudenmaxima und -minima berücksichtigt werden, die über einem bestimmten Pegel liegen, oder es wird die Pegeldifferenz zweier benachbarter Maxima/Minima betrachtet.

Letzteres ist hier nicht geschehen und deshalb liegt die Anzahl der Samplepunkt zwischen zwei Maxima/Minima normalerweise im Bereich kleiner als zehn. Hier lag erst der Verdacht nahe, daß die Ergebnisse dadurch verfälscht werden könnte. Die hier analysierten Klänge sind meist mit 48 kHz Samplefrequenz aufgenommen. Zur Überprüfung des hier genannten Problems wurden ebenfalls Referenzöne mit 96 kHz aufgenommen, analysiert, dann auf 44,1 kHz heruntergerechnet und wieder analysiert. Die Ergebnisse wichen nicht gravierend voneinander ab. Der genannte

Verdacht lag anfangs bei der Gitarre nahe, die nur in einfachen Wendepunktrelationen einschwingt. Deshalb ist in Abb. 6.2 ein kleiner Wellenteil des Einschwingvorgangs einer Gitarre gezeigt, um die wirklich bestehenden einfachen Verhältnisse zu zeigen.

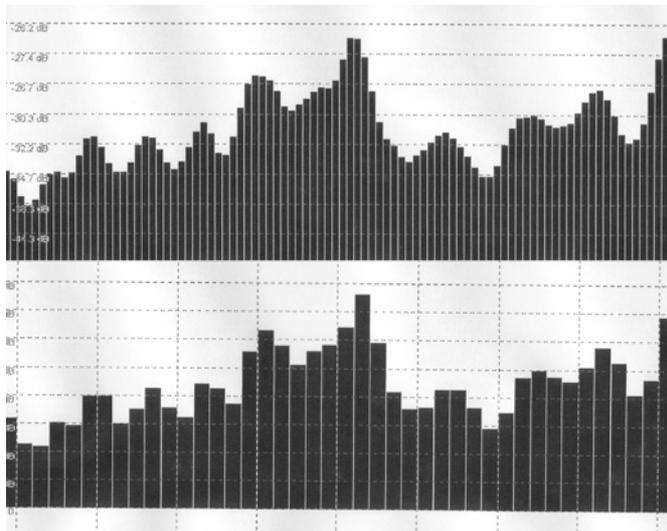


Abb. 6.2: 1 ms des Einschwingvorgangs eines Gitarrentons. Oben: 96 kHz (Original), Unten: 44,1 kHz (heruntergesampelt). Die Amplitudenmaxima und -minima sind fast immer gleich weit entfernt.

Die Folge von Nullen und Einsen wird nun folgendermaßen verrechnet: Es wird der Abstand je zweier Einsen berechnet. Die Folge 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 würde als Ergebnis 5, 6, 3 haben, da die erste Eins 5 Nullen von der nächsten entfernt ist. Diese ist wiederum 6 Nullen von der wieder nächsten Eins entfernt usw.

Im letzten Schritt werden immer zwei benachbarte Abstände ins Verhältnis gesetzt: 5, 6, 3 ergäbe die zwei Relationen $5/6$ und $6/3$. Dieser Schritt rechnet die Tonhöhe heraus, denn wäre der Klang gleich, würde aber eine andere Tonhöhe besitzen, die z.B. eine Oktave höher wäre, dann wären die berechneten Abstände zwar doppelt so groß: nämlich 10, 12, 6 anstatt 5, 6, 3. Die im letzten Schritt berechneten Relationen aber bleiben dieselben: $10/12 = 5/6$, $12/6 = 6/3$.

Dies sind die inhaltlichen Schritte, die gerechnet werden. Um die Ergebnisse handlich zu gestalten, wird noch ein weiterer Schritt unternommen. Die gewonnenen Verhältnisse können an sich größer oder kleiner als Eins sein. Dies könnte sich ungünstig darstellen. Zudem könnte man fragen, ob es von Relevanz sei, ob das

Ergebnis $3/1$ oder $1/3$ ist. Deshalb sind alle Relationen auf < 1 gebracht, die Brüche, die größer als Eins sind also umgekehrt.

In der statistischen Auswertung wird zu guter Letzt noch die Gesamtsumme der in einem Schaubild vorhandenen Relationshäufigkeiten auf 1 normiert, um die Schaubilder miteinander vergleichen zu können. Es wird also lediglich die Skala linear verzerrt, um graphisch sofort einen Überblick zu bekommen. Dies läßt nur außen vor, wie viele Amplitudenmaxima und -minima in einem 50 ms EV vorhanden sind.

Da von den meisten hier untersuchten Instrumenten jeweils 144 Töne in verschiedenen Tonhöhen, Lautstärken und Ansatzhärten analysiert wurden (im Ganzen 1028 Töne), wurden Gruppen von 24 Tönen in einem Histogramm zusammengefaßt. Da meine Untersuchung mit der Gitarre begann, war dies eine einfache Lösung, zumal sich für jede Saite ein Histogramm ergibt. Erst durch die Verrechnung mehrere Töne in einem Histogramm können sich statistische Plots (s.u.) ergeben. In diesen sind die statistische Durchschnittshäufigkeiten der Relationen über alle 24 Töne als Punkte, und deren Standardabweichung als vertikale Striche durch diese Punkte aufgetragen. Als Beispiel sei hier die hohe e-Saite der Gitarre gezeigt:

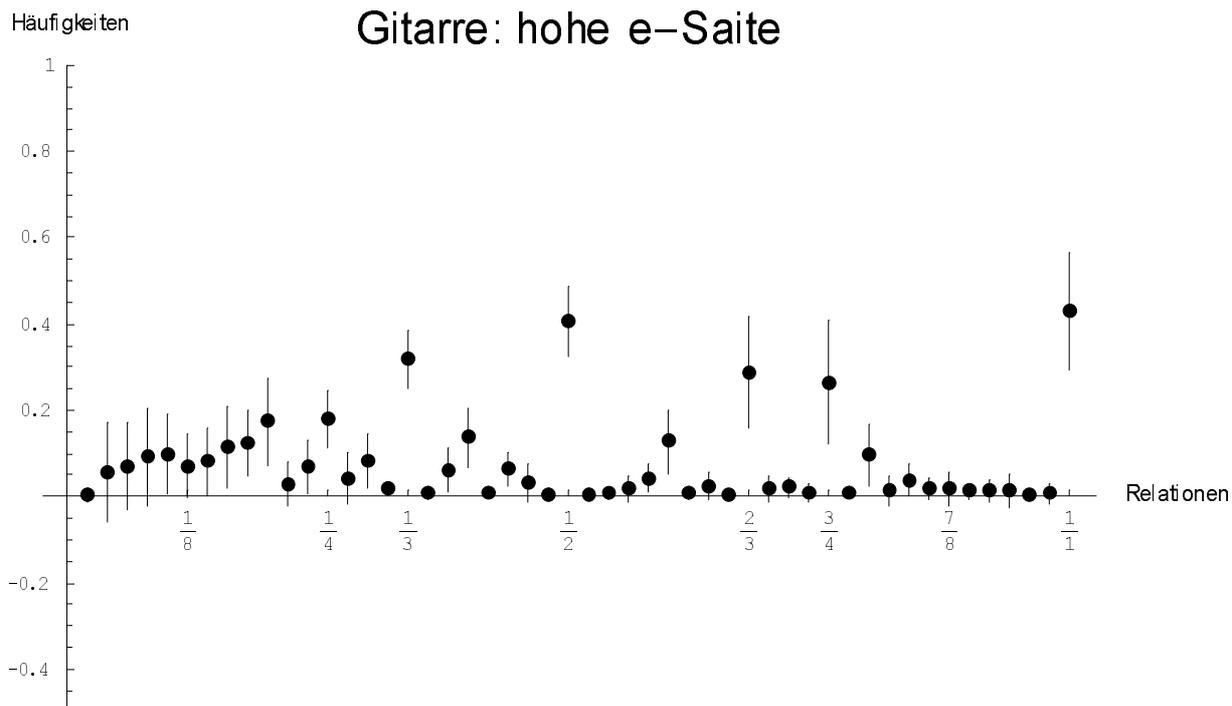


Abb. 6.3: Histogramm von 24 Gitarrentönen auf der hohen e-Saite (Töne e1, g1, h1, e2 in jeweils drei Lautstärken und den zwei Ansätzen Apoyando und Tirandu) als Fehlerplot ihrer Standardabweichungen. Die Mittelwerte sind auf 1 normiert.

Die Umrechnung dieser Ergebnisse in spektrale Komponenten ist im allgemeinen Fall nicht möglich. Dazu müsste eine allgemeine Lösung existieren für die abgeleitete Fourierreihe. Diese wird gleich Null gesetzt zur Berechnung der Nullstellen, wenn man nur die Amplitudenwerte, die Phasen und die Grundfrequenz kennt.

$$D\left[\sum_{n=1}^m a_n \sin[2\pi n\omega t + \varphi], t\right] = \sum_{n=1}^m \partial_t (a_n \sin[2\pi n\omega t + \varphi]) \quad (\text{Gl 6.1})$$

Hier wurde die Fourierreihe abgeleitet. Dies ergibt aber nur die Ableitung der Sinusfunktion, die noch die Variable n des Partialtons enthält, nicht aber die konkreten Werte der Nullstellen.

Eine Lösung für eine Sinuskomponente ist leicht zu finden. Da deren Ableitung natürlich unendlich viele Nullstellen hat werden von Mathematica hier nur zwei um den Nullpunkt ausgegeben.

$$D[a_n \sin[2\pi n \omega t + \varphi], t] \\ 2\pi \omega \cos[\varphi + 2\pi t \omega] a_1 \quad (\text{Gl 6.2})$$

$$\text{Solve}[a_n 2\pi n \omega \cos[\varphi + 2\pi t \omega] = 0, t, \text{InverseFunctions} \rightarrow \text{True}] \\ \left\{ \left\{ t \rightarrow \frac{-\frac{\pi}{2} - \varphi}{2\pi \omega} \right\}, \left\{ t \rightarrow \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi}{2\pi \omega} \right\} \right\} \quad (\text{Gl 6.3})$$

Hat man nur zwei Komponenten also

$$a_1 2\pi n \omega \cos[\varphi + 2\pi t \omega] + a_2 2\pi n \omega \cos[\varphi + 2\pi t 2 * \omega] = 0, \quad (\text{Gl 6.4})$$

dann ist durch trigonometrische Umdeutung eine Lösung möglich. Dazu vereinfachen wir die Formel auf

$$\cos[\alpha] + 2 \cos[2\alpha] = 0, \text{ mit } \alpha = 2 * 2\pi n t \omega, \quad (\text{Gl 6.5})$$

wobei wir die Phase unberücksichtigt lassen. Das Problem hier ist, daß die zwei Cosinusfunktionen nicht dasselbe Argument haben. Es gilt aber

$$\cos[2\alpha] = \cos^2[\alpha] - \sin^2[\alpha] \quad \text{und} \quad \sin^2[\alpha] = 1 - \cos^2[\alpha] \quad (\text{Gl 6.6})$$

Wenn wir das in Gl 6.5 einsetzen, erhalten wir

$$\cos[\alpha] + 2 (\cos^2[\alpha] - (1 - \cos^2[\alpha])) = 0 \quad (\text{Gl 6.7}).$$

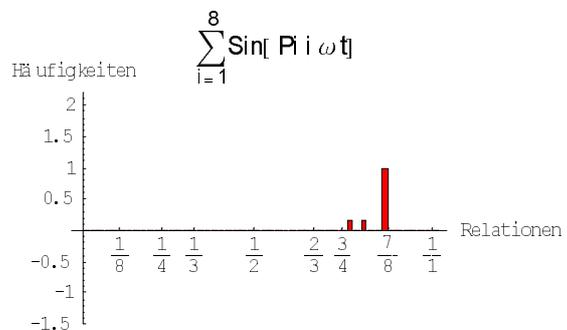
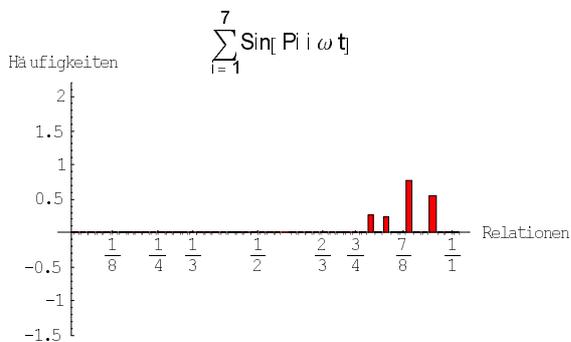
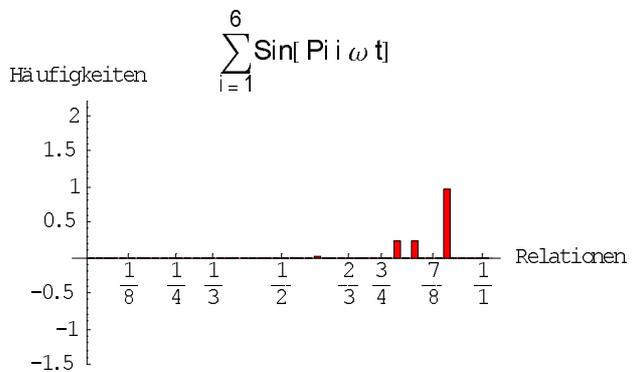
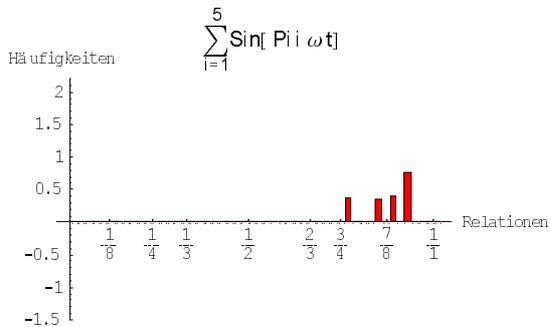
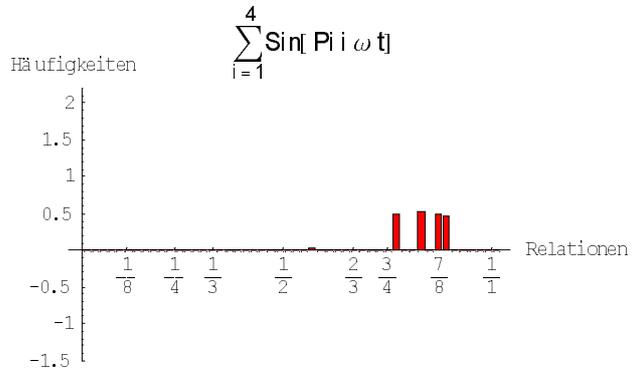
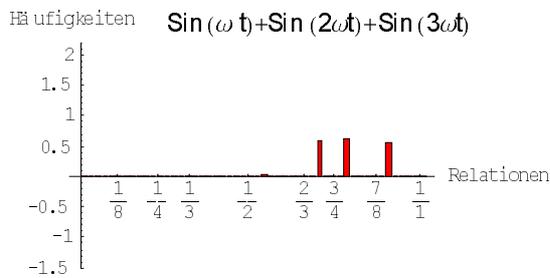
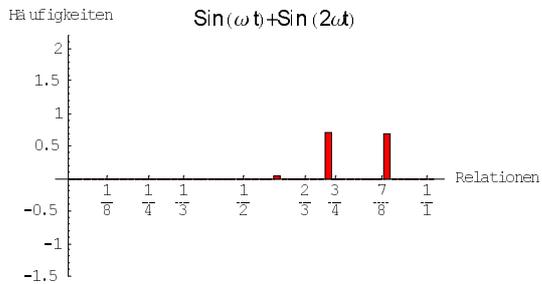
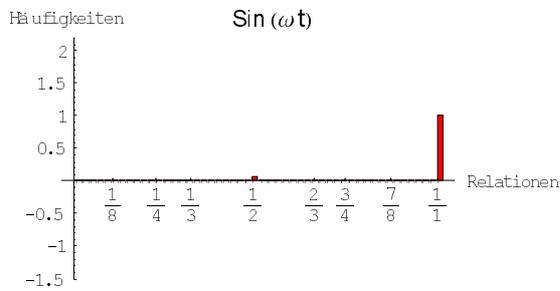
Umgeformt ergibt sich

$$4 \cos^2[\alpha] + \cos[\alpha] - 2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\cos[\alpha]_1 = 0.59307, \quad \cos[\alpha]_2 = -0.84307 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 0.935, \quad \alpha_2 = 2.573.$$

Man erhält die genauen Werte zweier Amplitudenmaxima und -minima also durch trigonometrische Umformung dieser zwei Partialtöne. Jede höhere Anzahl von Sinuskomponenten würde eine eigene Herleitung benötigen. Eine allgemeine Lösung ist daher nicht möglich.

Es zeigt sich aber auch, daß harmonische Teiltonspektren in dieser Analyse nicht zu einfachen Zahlenrelationen führen. Durch Anwendung des Algorithmus auf konstruierte Klänge ergibt sich folgendes Bild:



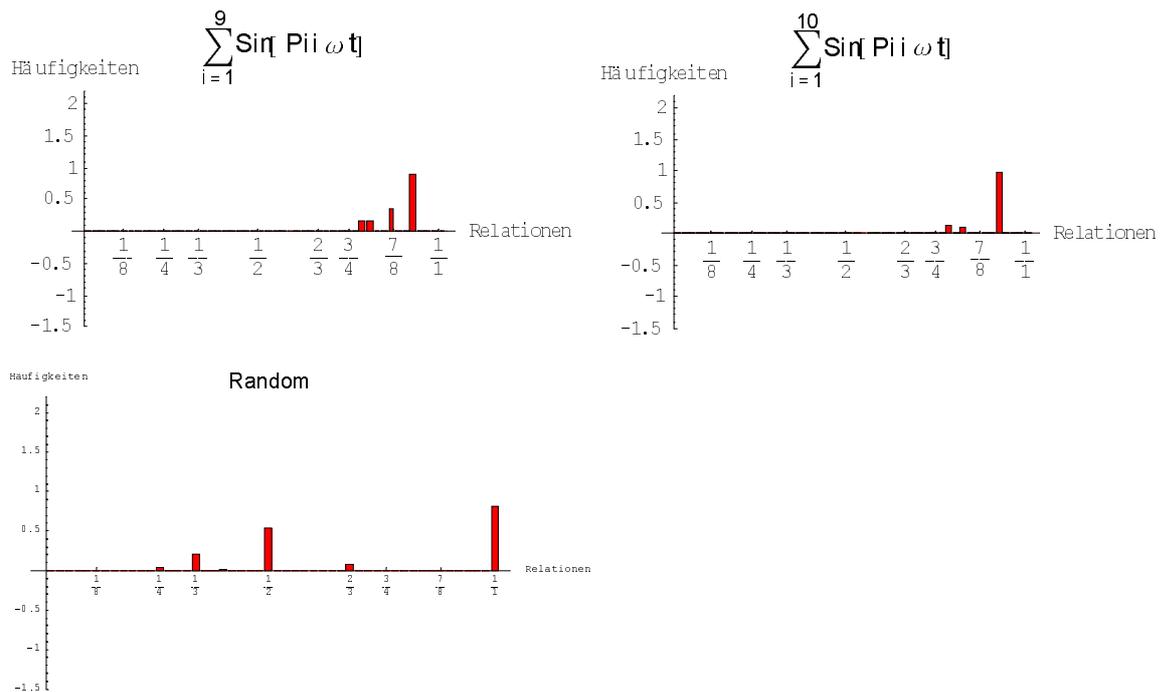
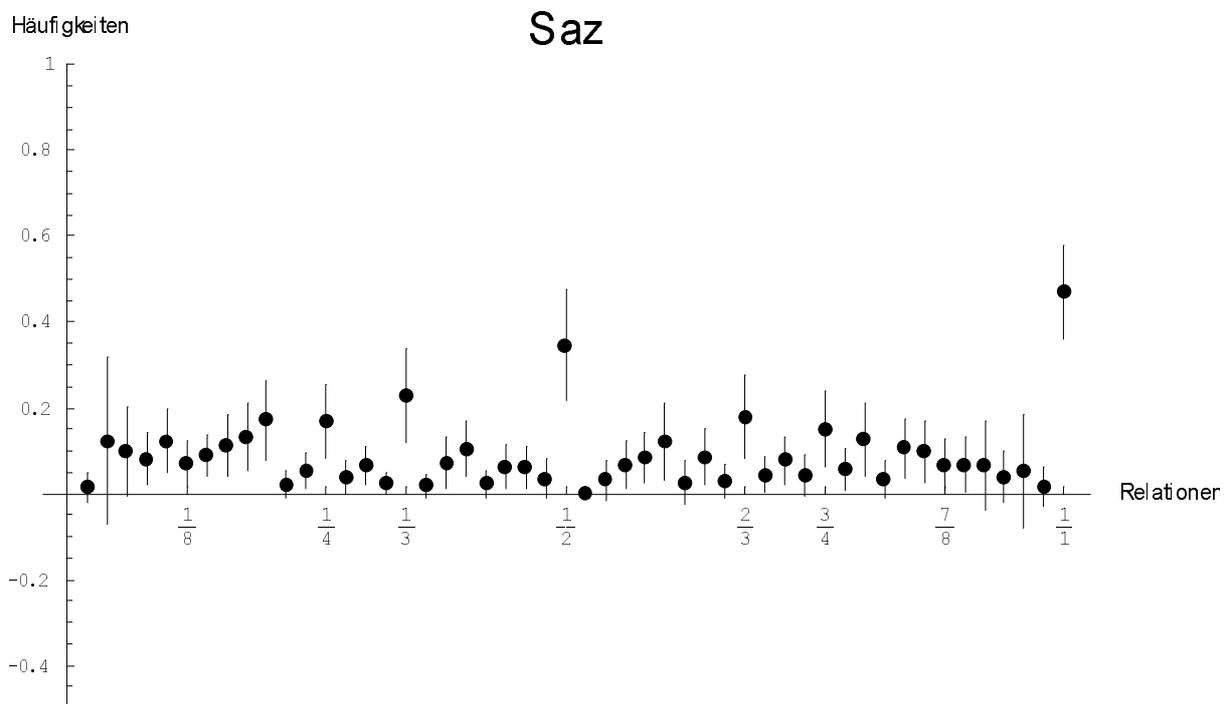
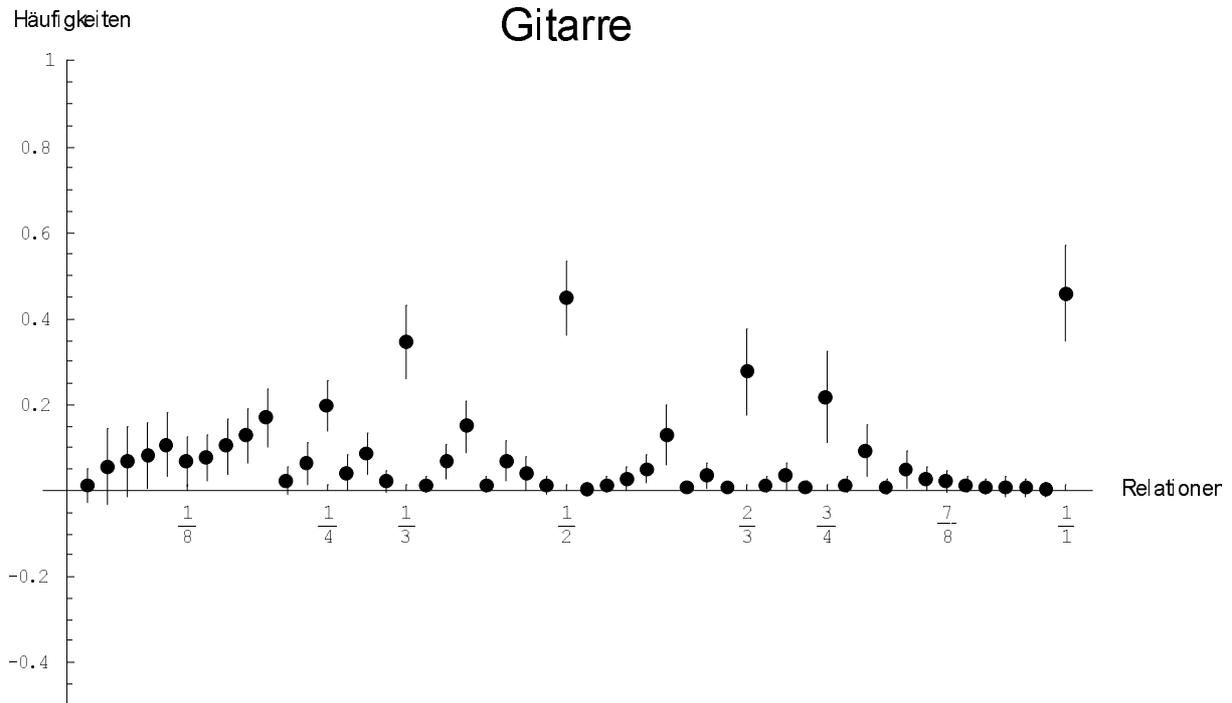


Abb. 6.4: Relationshistogramme von konstruierten harmonischen Sinuskomponenten gleicher Phase und Amplitude.

Nur der Zufallsprozess und die reine Sinusschwingung zeigen harmonische Verhältnisse ihrer Amplitudenmaxima und -minima. Wird ein Signal verrauscht, tauchen diese Komponenten sofort in Erscheinung.

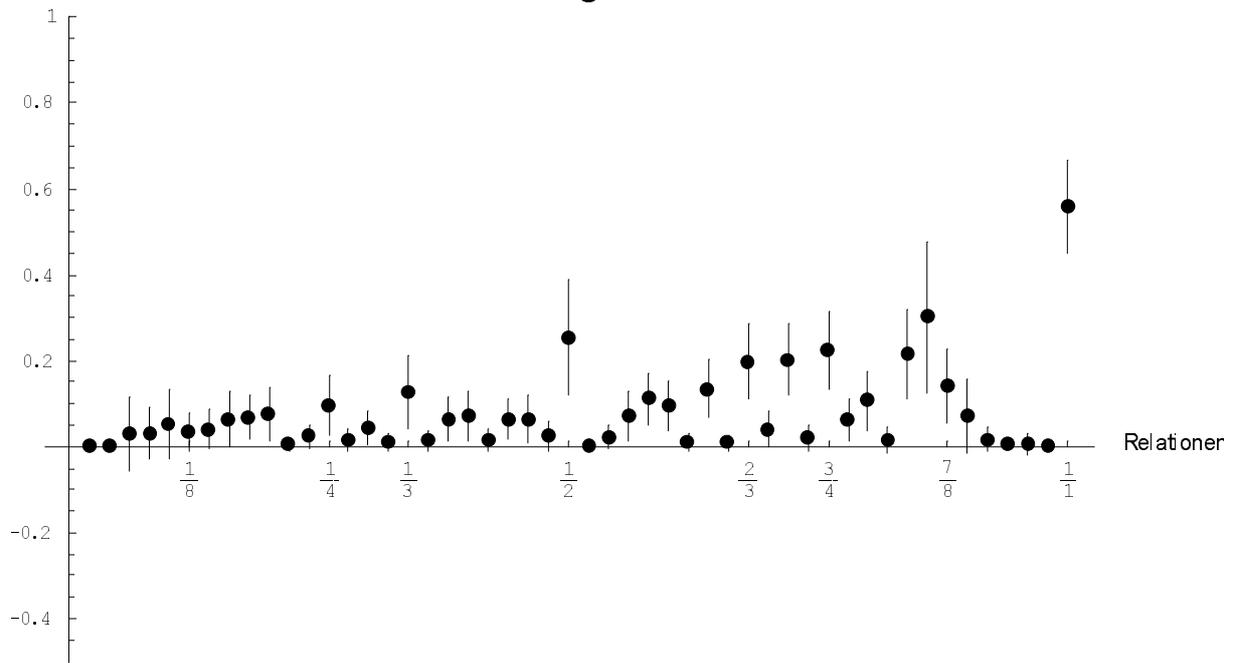
Dies könnte zu der Annahme führen, daß der Algorithmus eine Rauscherkennung ist. Dem ist in den Fällen auch so, in denen die Samplefrequenz zu niedrig gewählt wurde und die vom Instrument erzeugte Schwingung nur als „Zick-Zack“ abgebildet ist, also zwischen den Amplitudenextremwerten nur einer der zwei Samplepunkte liegen. Beim Einschwingen von Instrumenten ist dem aber nicht so. (Siehe Abb. 6.2)

6.2 Ergebnisse



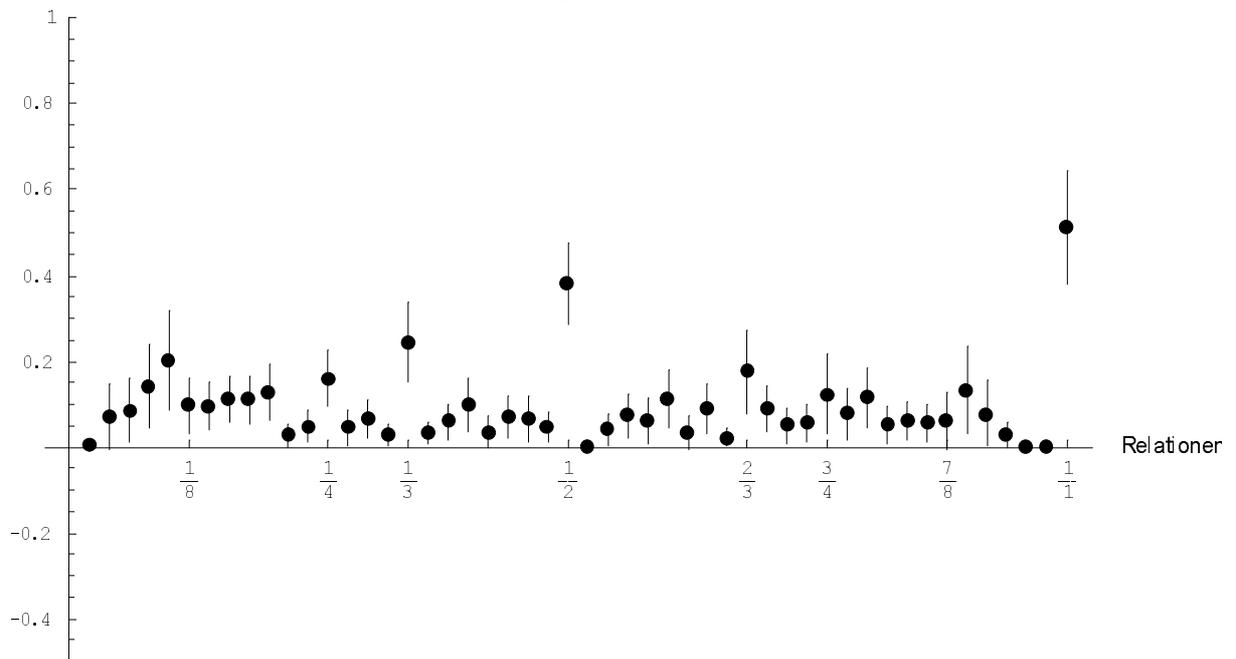
Häufigkeiten

Geige



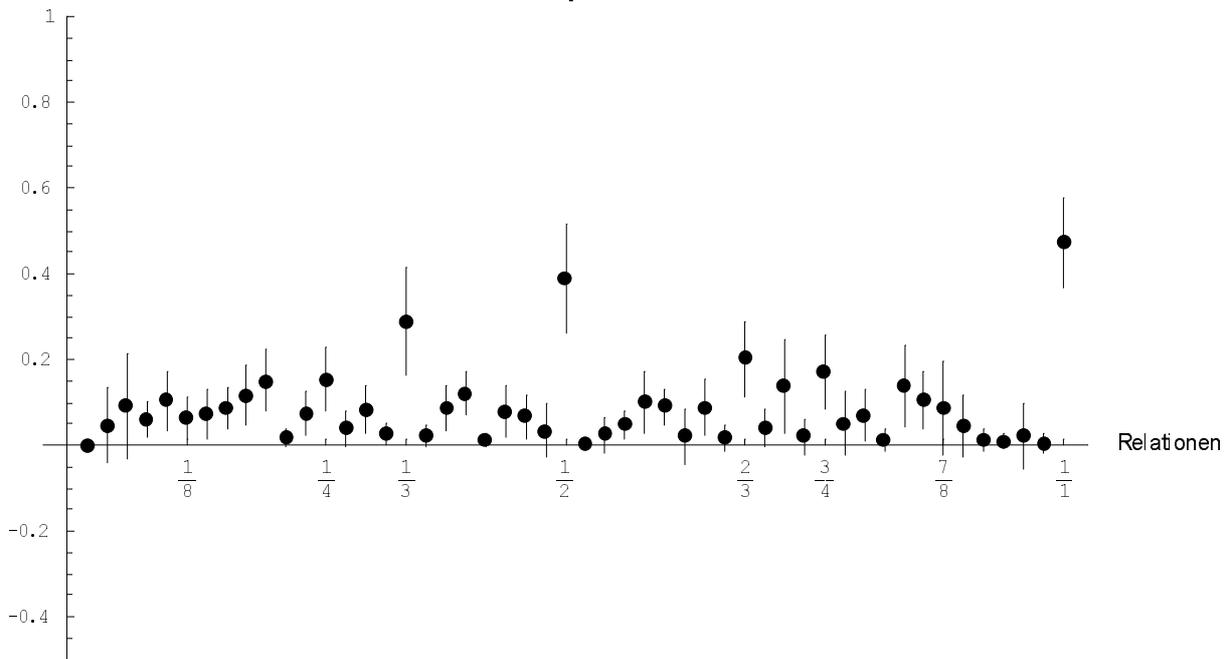
Häufigkeiten

Cello



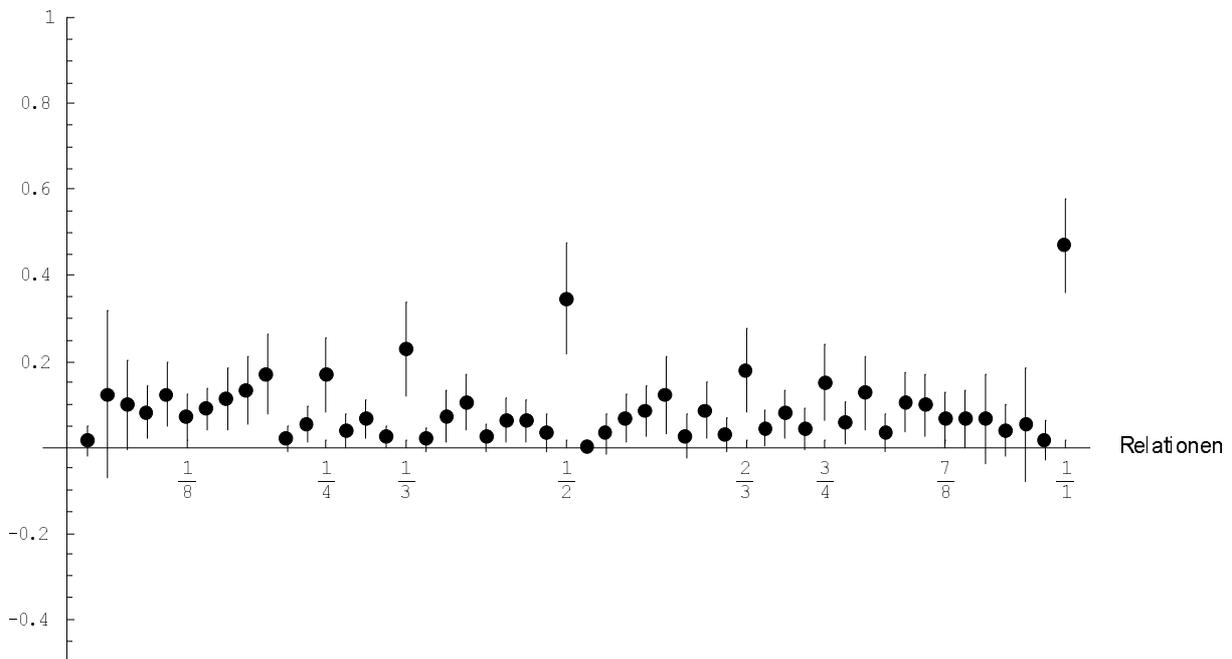
Häufigkeiten

Saxophon



Häufigkeiten

Klarinette



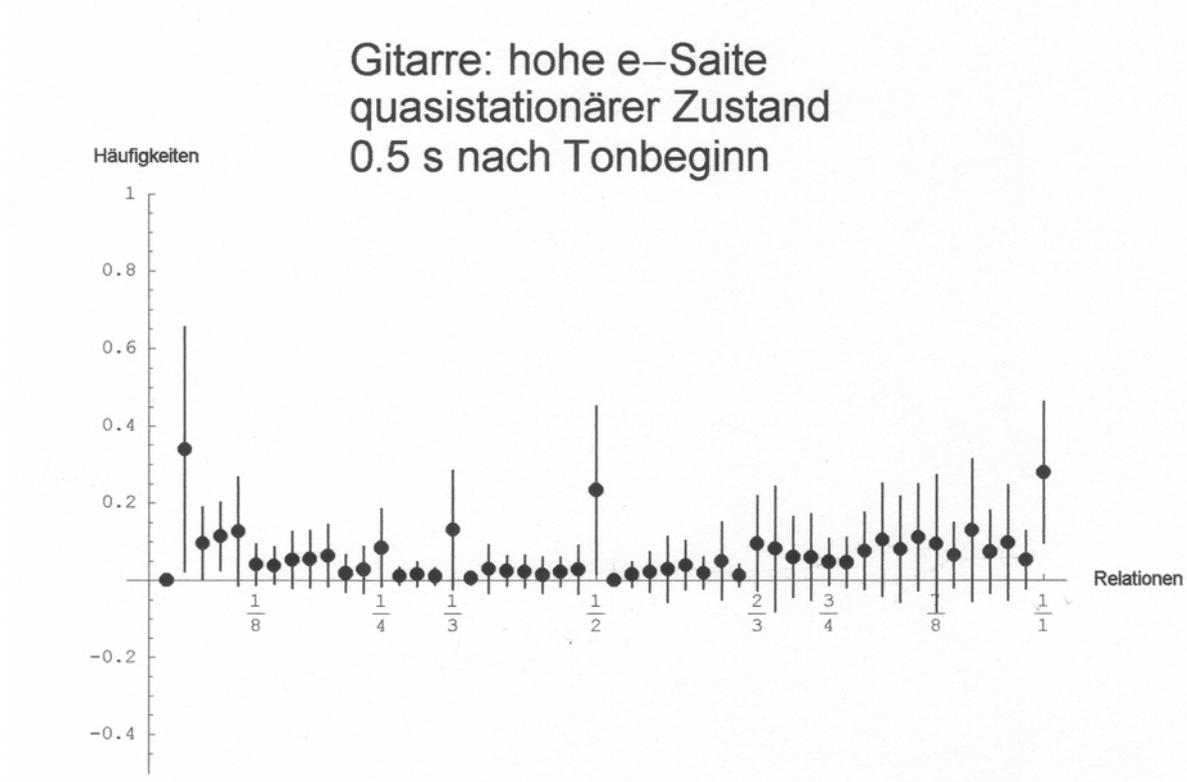
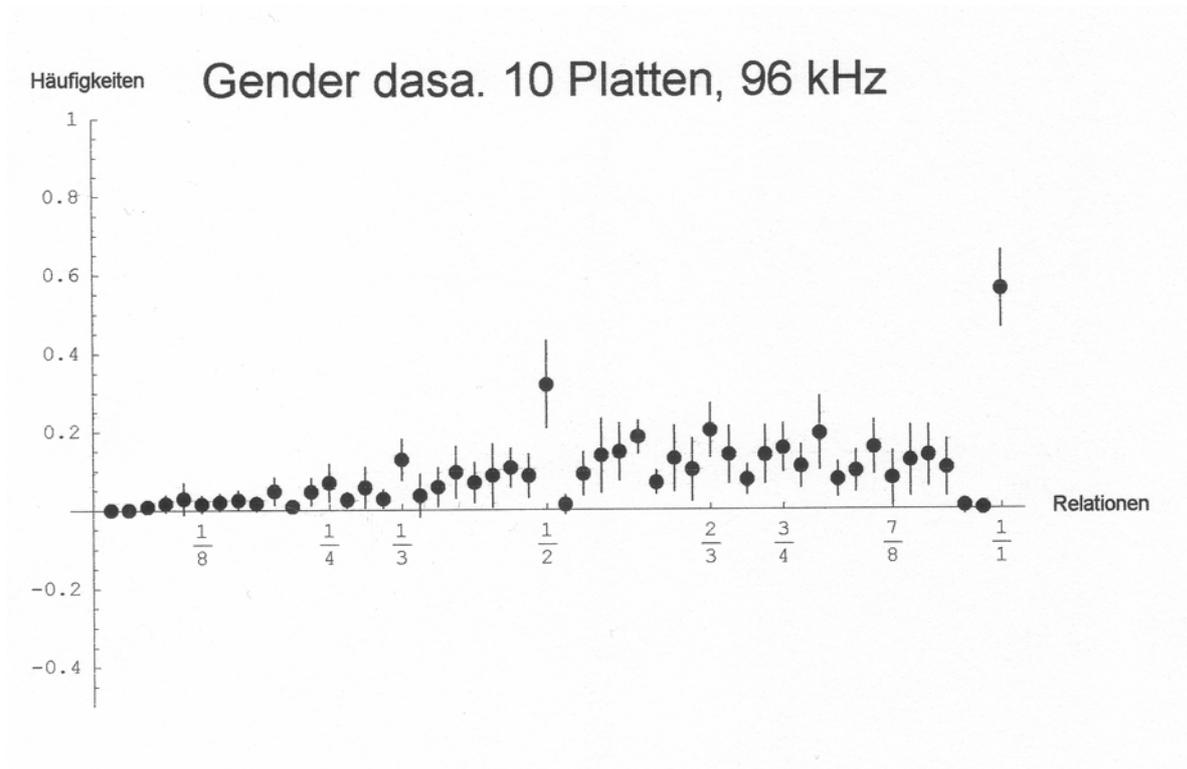


Abb. 6.5: Relationshistogramme der verschiedenen Instrumente

Die einzelnen Instrumentengruppen bilden sich klar heraus. Die Zupfinstrumente (Saz mit Plektrum gezupft) haben eine fast spiegelbildliche Struktur.⁵ Es entsteht im Plot eine gleichförmige Glockenkurve, bei der Saz noch mehr als bei der Gitarre. Die Häufigkeiten der möglichst einfachen Brüche bilden diese Kurve, also $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, zusammen mit dem nächsten (.8) und dem übernächsten Punkt (.84). Die kleinen Relationen sind immer etwas stärker vertreten als die nahe 1, da die Relationen, die größer als 1 sind, durch Umkehrung in das Intervall zwischen 0 und 1 gebracht wurden. Aber auch hier ist die Saz eindeutiger als die Gitarre. Um die Relation $\frac{1}{2}$ entsteht bei Gitarre und Saz noch eine zweite ebenfalls spiegelbildliche Struktur, die sich von $\frac{1}{2}$ ausgehend auf .44 und .4 nach links und auf .6 nach rechts hin zubewegt (langsam die Häufigkeiten steigend). So entsteht eine Wellenform, links wieder stärker als rechts. Diese ist einfach erklärt. Es werden auch hier fast ausnahmslos die einfachen Verhältnisrelationen bevorzugt, und zwar in der genauen Rangfolge ihrer Einfachheit.

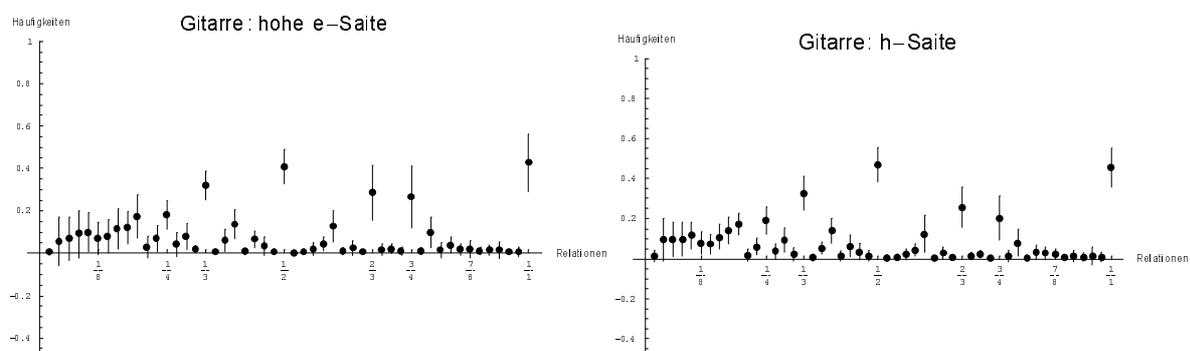
Die Geige und das Cello unterscheiden sich von dieser Struktur, wobei sie nicht so einheitlich sind wie Gitarre/Saz und Klarinette/Saxophon (s.u.). Die Geige tendiert zu Relationen nahe 1. Die höchste Relation ist .86, neben .84 und $\frac{7}{8}$. Auch hier werden zwar $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, und $\frac{3}{4}$ bevorzugt, nicht aber so sehr $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$. Ebenfalls hoch ist das Verhältnis zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$, nämlich .72 und unter $\frac{2}{3}$ das Verhältnis .64. Dies korrespondiert mit den Ergebnissen der fraktalen Dimension, die für die Geige sehr hoch war. Das Cello hingegen zeigt ein Vorkommen fast aller Verhältnisse. Nur die zwei Relationen, die direkt unter $\frac{1}{1}$ und direkt unter .52 sind, sind Null. Auch hier werden zwar einfache Verhältnisse vorgezogen, der Plot ist aber uneindeutig. Der Höreindruck der EVs des Cello ist der von reinem Kratzen ohne einen Tonhöreneindruck, nur von Ton zu Ton in der Helligkeit verschieden. Die Zeitspanne von 50ms scheint für dieses Instrument zu klein zu sein, um den ganzen EV abzudecken. Daher sind die Werte des Cello noch mit Vorsicht zu genießen. Dies könnte auch der Grund sein, warum das Cello hier nicht mit der Geige übereinstimmt.

⁵ Die höchsten Werte wurden immer für die Relation $\frac{1}{1}$ gefunden. Sie wird somit aus der Betrachtung genommen.

Klarinette und Saxophon zeigen ein ähnliches Bild und ähneln dem Cello, nicht aber der Geige. Auch hier kommen viele Relationen vor, wobei wie immer einfache bevorzugt werden. Bei beiden - wie auch beim Cello - ist das Verhältnis $1/3$ sehr hoch im Vergleich zu seiner Umgebung. Auch kann hier die grundsätzliche Wellenform erkannt werden, die sich aber viel differenzierter zeigt als bei der Gitarre/Sax. Die Klarinette läßt eine leichte Tendenz zu kleinen Relationen erkennen, das Saxophon auch, jedoch nur wegen der $1/3$ Relation.

Das Gender dagegen zeigt ein völlig chaotisches Bild. Die kleinen Verhältnisse kommen gar nicht vor, die Häufigkeiten steigern sich auf die Relation $1:1$ hin zu. Zwar sind auch hier $1/2$, $2/3$ und $3/4$ stark, heben sich aber von ihrer Umgebung nicht ab. Die Wellenform ist nur schwach ausgeprägt, das ganze sehr stark uneinheitlich, chaotisch.

Zum Vergleich ist oben noch der Plot von 24 Gitarrentönen im quasistationären Zustand dargestellt. Zwar stechen $1/2$ und $1/3$ stark hervor, doch haben sie eine sehr hohe Standardabweichung. Diese hohe Standardabweichung gilt in diesem Plot für fast alle Relationen - in Abhängigkeit ihrer Häufigkeit. Hierzu im Vergleich ist die Standardabweichung für die Plots der Einschwingvorgänge gering. Aus dem Plot sticht .04 mehr heraus als $1/1$, was darauf zurückzuführen sein dürfte, daß in der Zeitfunktion sehr große Abstände vorkommen, die sehr kleinen Abständen folgen oder umgekehrt. Dies ist beim EV nicht so, die Amplitudenkurve hat dort viel mehr Richtungswechsel. Dieses Bild entspricht den theoretischen Werten für harmonische Spektren, welche auch keine einfachen Relationen haben.



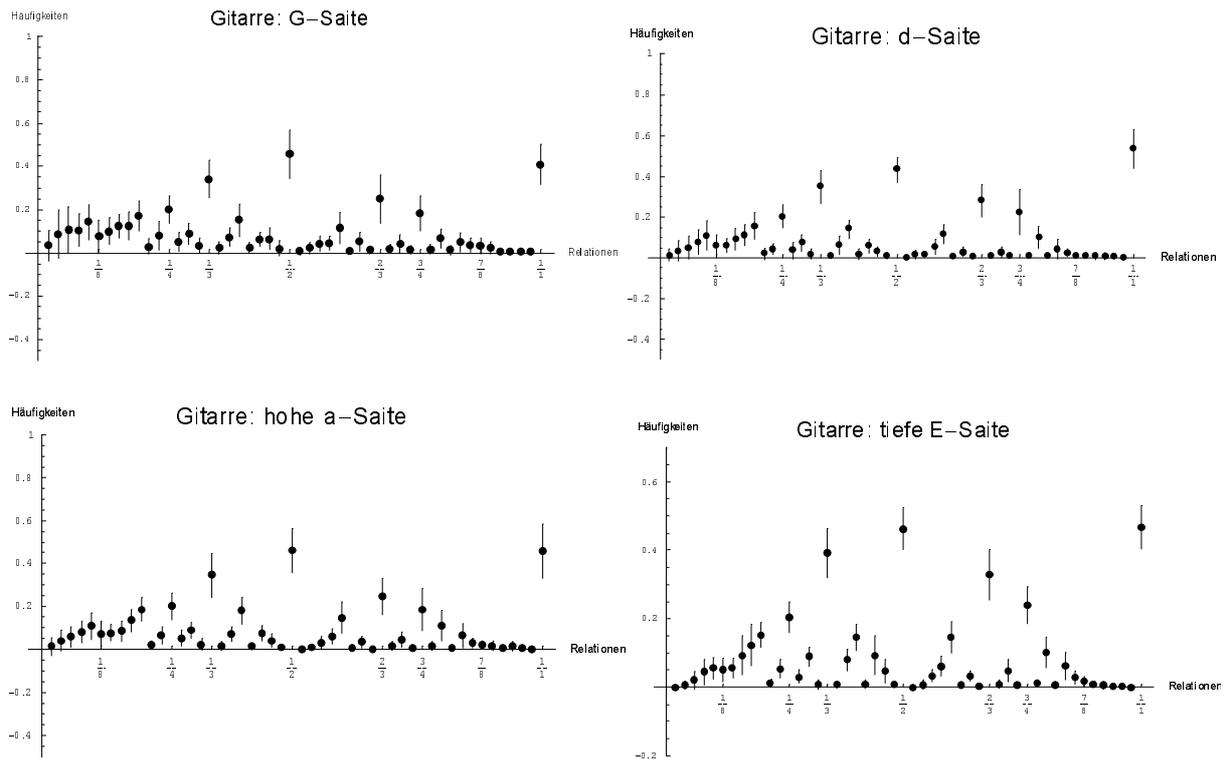


Abb. 6.6: Relationshäufigkeiten der einzelnen Gitarrensaiten, jeweils 24 Töne. Das Muster ist immer dasselbe.

Zur Veranschaulichung der Konsistenz der Glockenkurve bei der Gitarre über die einzelnen Saiten, sind hier die Häufigkeitsrelationen für jede einzelne Saite - jeweils 24 Töne - dargestellt. Diese Ergebnisse lassen für den EV der Gitarre keinen signifikanten Unterschied der Chaotizität von Saite zu Saite erwarten, was von den Ergebnissen der Korrelationsdimension gestützt wird. Dort wurde nur eine leichte Abnahme der Chaotizität zu den tiefen Saiten festgestellt, die aber das grundlegende Bild nicht ändert.

Diese Konsistenz wurde für die anderen Instrumente auch festgestellt, bis auf die Bläser in hohen Lagen.

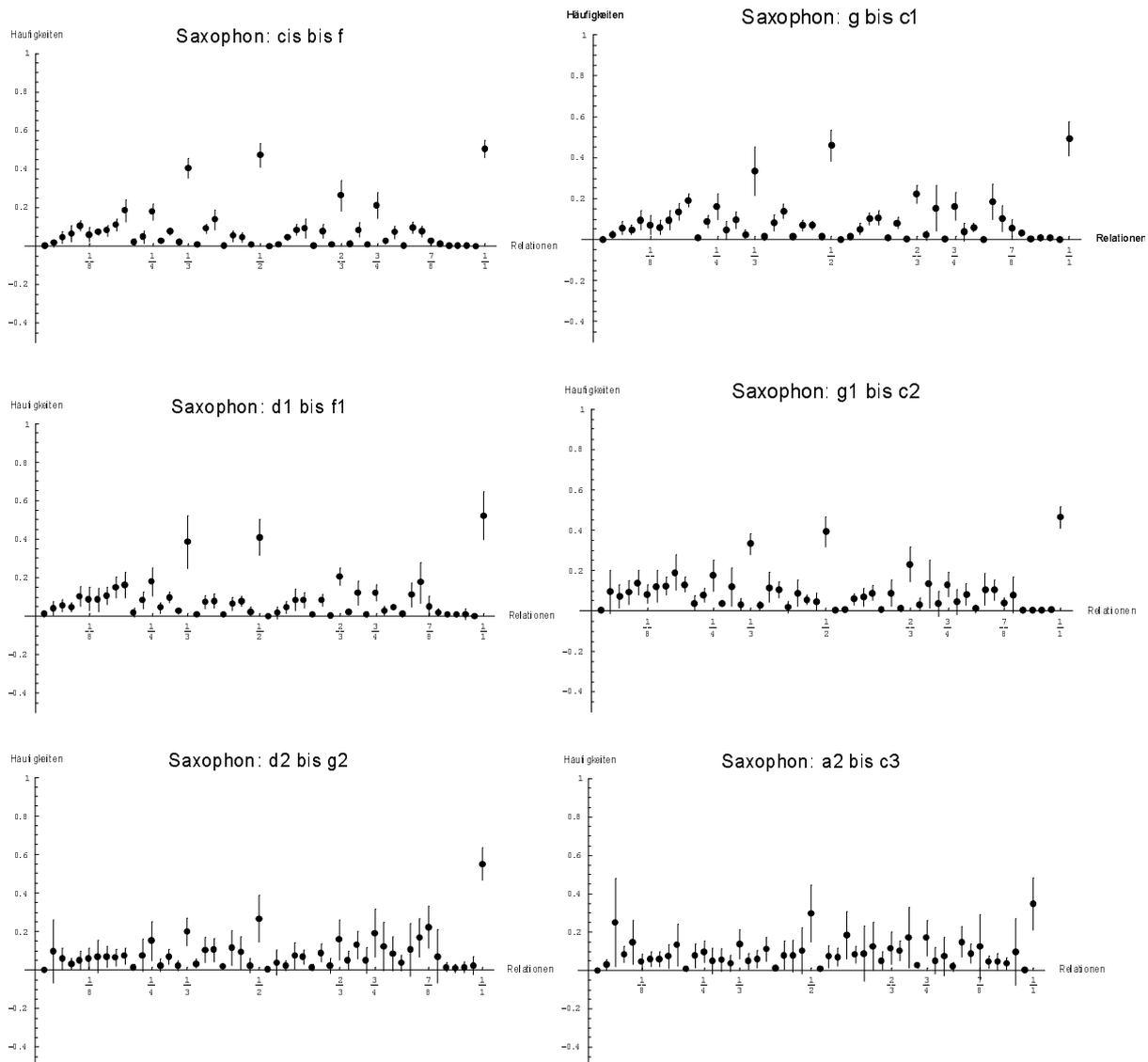


Abb. 6.7: Saxophon, Relationshäufigkeiten für verschiedene Tonlagen, jeweils 24 Töne.

Beim Saxophon ist in den ersten vier Plots, also bis zum Ton d2, eine Art Glockenkurve wie bei der Gitarre zu erkennen. Die hohen Lagen bis c3 jedoch zeigen ein verrauschtes Bild. Dies kann damit zusammenhängen, daß der EV dort nur sehr kurz ist, die hauptsächliche statistische Information also aus dem quasistationären Bereich geholt wird, für den ein solches Bild typisch ist.

Insgesamt ist zu sehen, daß der sogenannte chaotische Einschwingvorgang bei Gitarre, Saz und bei Bläsern in tiefer Lage einen harmonischen Mikrorhythmus hat. Darunter wird verstanden, daß die Basilmembran in diesem Rhythmus ausgelenkt wird, da ja jeder Richtungswechsel der Amplitude den Umkehrpunkt des Trommelfells nach innen und außen bezeichnet. Dies ist gerade deshalb von

Interesse, da das Ohr ja eine gewisse Einschwingzeit benötigt, um eine Tonhöheninformation zu extrahieren. In dieser Zeit aber ist dieser Mikrorhythmus ständig vorhanden. Aus ihm kann das Nervensystem bereits Informationen über das Instrument erhalten.

Literatur

- Ahrens, H.J.:** Multidimensionale Skalierung. Weinheim und Basel, 1974.
- Argyris, J., Faust, G. & Haase, M.:** Die Erforschung des Chaos. Wiesbaden 1995.
- Aschhoff, V.:** Experimentelle Untersuchungen an einer Klarinette. In: Akustische Zeitschrift 1, S. 77-93, 1936.
- Backhaus, H.:** Über Geigenklänge. In: Zeitschrift für technische Physik, 11, 1927, S. 509-515.
- Backhaus, H.:** Über die Bedeutung der Ausgleichsvorgänge in der Akustik. In: Zeitschrift für technische Physik 13, 1932., S. 31-46.
- Backhaus, H.:** Über Ausgleichsvorgänge an Streichinstrumenten. In: Zeitschrift für technische Physik, 18, 1937, S. 98-103.
- Backhaus, H.:** Über neuere Ergebnisse der Geigenforschung. In: Akustische Zeitschrift, 1939. S. 302-312.
- Backus, J.:** Multiphonic tones in the woodwind instruments. In: JASA, 63, 1978, S. 591-599.
- Borg, I.:** Entwicklung von akustischen Optimierungsverfahren für Stabspiele und Membraninstrumente. PTB Report, Projekt 5267, Braunschweig 1983.
- Butz, T.:** Fouriertransformation für Fußgänger. Leipzig 1998.
- Carroll, J.D. & Chang, J.J.:** Analysis of Individual Differences in Multidimensional Scaling via an N-Way Generalization of „Eckart-Young“ Decomposition. In: Psychometrika 35/3, S. 283 - 319, 1970.
- Clark, M., Luce, D., Abrams, R., Schlossberg, H. & Rome, J.:** Preliminary experiments on the aural significance of parts of tones of orchestral instruments and choral tones“. In: J. Audio. Eng. Soc. 11 (1), S. 45-54.
- De Bruijn, A.:** Timbre-Classification of Complex Tones. In: Acustica, 40, S. 108 - 114, 1978.
- Degazio, B.:** Towards a chaotic musical instrument. In: ICMC Proceedings 1993, S. 393-395.
- Diehl, J. M. & Kohr, H.U.:** Deskriptive Statistik. Eschborn bei Frankfurt a.M, 1991.
- Falconer, K.J.:** Fraktale Geometrie. Heidelberg, Berlin, Oxford, 1993.

- Feiten, B. & Günzel, S.:** Automatic Indexing of a Sound Database Using Self-organizing Neural Nets. In: *Computer Music Journal*, 18,3, 1994, S. 53-65.
- Fletcher, N.H.:** Mode locking in nonlinearly excited inharmonic musical oscillators. In: *JASA* 64(6), 1978.
- Fletcher, N. H. & Rossing, T. D.:** The physics of musical instruments. New York 1999.
- Fletcher, N.H.:** Nonlinear frequency shifts in quasispherical-cap shells: Pitch glide in Chinese gongs. In: *JASA* 79, 2069-2073, 1985.
- Fletcher, N.H.:** Quality of piano tones, In: *JASA* 6,2 1962, S. 749-761.
- Flügge, W.:** Statik und Dynamik der Schalen. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962.
- Fricke, J.:** Formantgebende Impulsfolgen bei Blasinstrumenten. In: *Fortschritte der Akustik*, 4. DAGA 1975, S. 407-411.
- Fricke, J.:** Die durch induktive Messung festgestellten Besonderheiten an Klavier und Kontrabaßsaitenschwingungen. In: *Instrumentenbau-Zeitschrift* 46, 2-3, 1992, S. 133-141.
- Gibiat, V.:** Phase space representations of acoustical musical signals. In: *Journal of Sound and Vibration*, 123/3, 1988, S. 529-536.
- Gibiat, V. & Castellengo, M.:** Period Doubling Occurrences in Wind Instruments Musical Performance. In: *Acustica* 86, 2000, S. 746-754.
- Goldstein, J.L.:** An optimum processor theory for the central formation of the pitch of complex tones. In: *Journal of the Acou. Soc. of America* Vol. 54 (6) 1973.
- Goldstein, J.L, Buchsbaum, G. & Furst, M.:** Compatibility between psychophysical and physiological measurements of aural combination tones. In: *JASA* 63/2, S. 474-485, 1978.
- Granqvist, S. & Hammarbert, B.:** The Correlogram: a visual display of periodicity. In: *TMH-QPSR* 4, 1998, S. 13-22.
- Grasberger, P & Procaccia, I.:** Measuring the strangeness of strange attractors. In: *Physica D* 9, S. 189-208. 1983.
- Grell, H.:** Arbeiten zur Informationstheorie. Berlin 1957.
- Grey, J.M.:** Timbre discrimination in musical patterns. In: *JASA*, 64,2, 1978, S. 467-472.
- Grey, J.M.:** Multidimensional perceptual scaling of musical timbres. In: *JASA*, 61/ 5, 1977, S. 1270-1277.

- Grey, J.M. & Moorer, J.A.:** Perceptual evaluations of synthesized musical instrument tones. In: JASA, Vol. 62, 2, 1977. S. 454-462.
- Güth, W.:** „Ansprache“ von Streichinstrumenten. In: Asustica, 46, 1980, S. 259-267.
- Güth, W.:** Einführung in die Akustik der Streichinstrumente. Stuttgart 1995.
- Haase, M., Widjajakusuma, J. & Bader, R.:** Scaling laws and frequency decomposition from Wavelet Transform maxima lines and ridges. In: Novak, M. M. (ed.): Emergent Nature. World Scientific 2002. (in print)
- Hartmann, W.M.:** Signal, Sound, Sensation. N.Y, Berlin, Heidelberg, 2000.
- Heins, E.:** Indonesia. In: New Grove Dictionary of Music, NY 1980. Bd. 9, S. 173ff §2.
- Helmholtz, H. von:** Die Lehre von den Tonempfindungen. 1862. Hier in der 7. Auflage von 1968.
- Hesse, Horst-Peter:** Die Wahrnehmung von Tonhöhe und Klangfarbe als Problem der Hörtheorie. Veröffentlichungen des Staatlichen Instituts für Musikforschung Preußischer Kulturbesitz. Berlin. 1972.
- Hourdin, C., Charbonneau, G. & Moussa, T.:** A multidimensional Scaling Analysis of Musical Instruments' Time-Varying Spectra. In: Computer Music Journal 21,2, 1997, S. 40-55.
- Iverson, Paul & Krumhansl, C.L.:** Isolating the dynamic attributes of musical timbre. In: JASA 94 (5), 1993, S. 2595-2603.
- Jahnel, F.:** Die Gitarre und ihr Bau. Frankfurt a.M. 1986.
- Jahnke-Ende:** Tafeln höherer Funktionen. Leipzig 1948.
- Keefe, D.H. & Laden, B.:** Correlation dimension of woodwind multiphonic tones. In: JASA 90/4, S. 1754-1765, 1991.
- Keidel, W. D.:** Physiologie des Gehörs. Stuttgart 1975.
- Kostek, B.:** Representing Musical Instrument Sounds for Thier Automatic Classification. In: J. of the Audio Engineering Society, 2001.
- Krumhansl, C.L.:** Why is Musical Timbre so hard to understand? In: Structure and Perception of Electroacoustic Sound and Music. Nielzén, S & Olsson, O. (ed.). Amsterdam 1989, S. 43-53.
- Legge, K.A. & Fletcher, N.H.:** Nonlinearity, chaos and the sound of shallow gongs. In: JASA 86/6, 1989 S. 2439-2443.

- Lesbos, V.:** Phonograms, Elastic Couplings, and Trajectories. In: Computer Music Journal, 23,2, 1999, S. 70-79.
- Lottermoser, W.:** Vergleichende Untersuchungen an Orgeln. In: Acustica 3, 1953, S. 129 - 138.
- Luce, D. & Clark, M.:** Durations of attack transients of nonpercussive orchestral instruments. In: Jour. of the Audio Engineering Society 13, S. 194-199, 1965.
- Markuse, B & Schneider, A.:** Ähnlichkeit, Nähe, Distanz: zur Anwendung multidimensionaler Skalierung in musikwissenschaftlichen Untersuchungen. In: Systematische Musikwissenschaft, IV, 1-2, 1996, S. 53-89.
- Marple, L.S.Jr.:** Digital Spectral Analysis. San Diego 1987.
- Mc Adams, S., Winsberg, S., Donnadieu, S., De Soete, G. & Krimphoff, J.:** Perceptual scaling of synthesized musical timbres: Common dimensions, specificities, and latent subject classes. In: Psychological Review, 58, S. 177 - 192, 1995.
- McPhee, C:** Music in Bali. London 1966.
- Meinel, Eberhard:** Zum Problem des Abstimmens von Geigen. In: Instrumentenbauzeitschrift 7-8, 2000. S. 14-20.
- Meyer, E. & Guicking, D:** Schwingungslehre. Braunschweig 1974.
- Meyer, J.:** Verbesserung der Klangqualität von Gitarren aufgrund systematischer Untersuchungen ihres Schwingungsverhaltens. Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig, Forschungsvorhaben Nr. 4490, 1980.
- Meyer, J. & Borg, I.:** Zur klanglichen Bewertung von Xylophonen. In: Das Musikinstrument 31. 1982.
- Miklós, A. & Angster, J.:** Properties of the Sound of Flue Organ Pipes. In: Acustica 86/4, 2000. S. 611-622.
- Miller, J.R. & Carterette, E.C.:** Perceptual space for musical structures. In: JASA 58/3, 1975, S. 711-720.
- Monro, G.:** Fractal Interpolation Waveforms. In: Computer Music Journal, 19,2, 1995, S. 88-98.
- Monroe, G. & Pressing, J.:** Sound Visualization Using Embedding: The Art and Science of Auditory Autocorrelation. In: Computer Music Journal, 22,2, 1998, S. 20-34.

- Moon, F.C.:** Chaotic and Fractal dynamics. NY 1992.
- Nordmeier, V, Schlichting, H.J.:** Auf der Suche nach Strukturen komplexer Phänomene. PdN-Ph. 1/45, 1996, S. 22-28.
- Orduña-Bustamante, F.:** Nonuniform beams with harmonically related overtones for use in percussion instruments. JASA 29, 1991, S. 596-602.
- Orear, Jay:** Physik. München/Wien 1979.
- Raman, C.V.:** On the mechanical theory of the vibrations of bowed strings and of musical instruments of the violin family, with experimental verification of the results. In: Bulletin 15 of the Indian Association for the Cultivation of Science. 1918, S.15 ff.
- Rayleigh, J.W.S.:** The Theory of Sound. NY 1945 (1877).
- Reuter, Christoph:** Der Einschwingvorgang nichtperkussiver Musikinstrumente. Frankfurt a.M. 1995.
- Rioux, V:** Methods for an Objective and Subjective Description of Starting Transients of Some Flue Organ Pipes - Integrating the View of an Organ-Builder. In: Acustica 86/4, 2000, S. 634-641.
- Rodet, X.& Vergez, C.:** Nonlinear Dynamics in Physical Models: Simple Feedback-Loop Systems and Properties. In: Computer Music Journal, 23,3, 1999, S. 18-35.
- Rossing, T.D.:** Acoustics of percussion instruments-Part I. In: Phys. Teach. 14, S. 546-556, 1976.
- Rossing, T.D.:** Acoustics of the glass harmonica. In. JASA 95/2 1994, S. 1106 - 1111.
- Rösing, H.:** Die Bedeutung der Klangfarbe in traditioneller und elektronischer Musik. Eine sonographische Untersuchung. Schriften zur Musik 12, München 1972.
- Schneider, A.:** Tonhöhe, Skala, Klang. Bonn 1997.
- Schneider, A.:** Klanganalysen bei Aerophonen der Volksmusik. In: Ethnologische, Historische und Systematische Musikwissenschaft. F. Födermayer, L. Burlas (Hrsg). Bratislava 1998, S. 51-80.
- Sirker, U.:** Die Bedeutung der Formantgebiete von Oboen für eine klangqualitative Beurteilung des musikalischen Kontextes. In: Fortschritte der Akustik 4. DAGA 1975, S. 411 - 415

- Slater, D.:** Chaotic Sound Synthesis. In: Computer Music Journal 22,2, 1998, S. 12-19.
- Speckmann, H:** Analyse mit fraktalen Dimensionen und Parallelisierung von Kohonen's selbstorganisierender Karte. Diss. Tübingen 1995.
- Stevens, S.S.:** Procedure for calculating loudness: Mark VI, JASA, 33, 1961, S. 1577.
- Stumpf, Carl:** Die Struktur der Vokale. In: Sitzungsbericht der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften. Berlin, 1918. S. 333-358.
- Szwerc, R.P.:** Power flow in coupled bending and longitudinal waves in beams. In: JASA 107,6 2000. S. 3186 - 3195.
- Tarnóczy, T.:** Einführung in die musikalische Akustik, 1991.
- Thies, W.:** Teiltonstrukturen tibetischer Klangschalen. In: Musikwissenschaft - Musikpraxis. Festschrift f. H.P. Hesse zum 65. Geburtstag. Bachmann, K & Thies, W. (ed.), Anif/Salzburg 2000, S. 208 - 218.
- Till, M. & Rudolph, S.:** Optimized time-frequency distributions for acoustic signal classification. [www:http://isd.uni-stuttgart.de/](http://isd.uni-stuttgart.de/)
- Touzé, C. & Chaigne, A.:** Lyapunov Exponents from Experimental Time Series: Application to Cymbal Vibrations. In: Acustica, 86, 2000, S. 557-567.
- Trendelenburg, F. & Franz, E.:** Untersuchungen an schnellveränderlichen Schallvorgängen. In: Zeitschrift für technische Physik, 12, 1935, S. 513 - 516.
- Trendelenburg, F., Theinhaus, E. & Franz, E.:** Klangeinsätze an der Orgel. In: Akustische Zeitschrift, 1, 1936, S. 59 - 76.
- Trendelenburg, F., Theinhaus, E. & Franz, E.:** Klangübergänge bei der Orgel. In: Akustische Zeitschrift (3), 1938. S. 7-20.
- Trendelenburg, F., Theinhaus, E. & Franz, E.:** Zur Klangwirkung von Klavichord, Cembalo und Flügel. In: Akustische Zeitschrift, 6, 1940, S. 309-323.
- Wagner, K.W.:** Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. Wiesbaden, 1947.
- Walcher, W:** Praktikum der Physik. Stuttgart 1989.
- Waller, M.D.:** Vibrations of free elliptical plates. In: Proceedings of the Physical Society London, B 63, S. 451-455, 1950.
- Wedin, L. & Goude, G.:** Dimension Analysis of the Perception of Instrumental Timbre. In: Scand. J. Psychol., 13, 1972, S.228 - 240.

- Wessel, D.L.:** Timbre Space as a Musical Control Structure. In: Computer Music Journal 3(2), 45-52, 1979.
- Wilson, T. & Keefe, D.:** Characterizing the clarinet tone: Measurements of Lyapunov exponents, correlation dimension and unsteadiness. In: JASA, 104,1, 1998, S. 550-561.
- Winsberg, S. & De Soete, G.:** A latent class approach to fitting the weighted Euclidean model, CLASCAL. Psychometrika, 58, S. 315 - 330, 1993.
- Zurmühl, R.:** Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker.
Berlin/Göttingen/Heidelberg 1961.
- Zwicker, E. & Scharf, B.:** A model of Loudness Summation. In: Psychological Review 72(1), S. 3-26, 1965.

Anhang A Windows Programm *Xylophon.exe* auf beiliegender Diskette

Programm zur Berechnung der Eigenwerte eines Xylophonstabs mit veränderlichem Querschnitt von Seite 87 - 101.

Das Programm berechnet die Eigenwerte mit Hilfe des in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus. Es sollte auf die Festplatte kopiert werden. Gestartet wird es durch einen Doppelklick auf das Symbol „Xylophon.exe“. Es läuft nur unter Windows oder Dos.

Die Geometrie des Stabes ist vorgegeben. Im roten Kasten stehen die theoretischen Eigenwerte für den Fall eines nicht ausgefrästen Stabes gleicher Länge, Höhe und Breite. Drei Werte müssen nun vorgegeben werden:

- 1) Die Startfrequenz. Für sie wird die erste Determinante errechnet. Daraufhin wird die Frequenz stetig erhöht, bis die Determinante durch Null geht. Dann hält das Programm an und der Stab schwingt mit dem Eigenwert.
- 2) Der Frequenzschritt, mit dem die Startfrequenz langsam erhöht werden soll. Zu Beginn einer Suche nach einem Eigenwert sollte dieser Wert groß sein, um grob festzustellen, wo der Eigenwert liegt. Dann kann in einer zweiten Rechnung die Startfrequenz knapp unterhalb dieses Wertes gewählt und der Frequenzschritt dann um so kleiner eingestellt werden. So kann schrittweise eine immer exaktere Lösung gefunden werden.
- 3) Schritte in x-Richtung. Anzahl der Näherungsschritte durch den Stab. Eine sehr gute Näherung ist durch den vorgegebenen Wert erreicht, man kann aber durch Variation der Schrittzahl ausprobieren, wann die Näherung übermäßig schlecht wird.

Werden diese drei Abfragen nur mit RETURN beantwortet, dann wird der Wert angenommen, der in der Mitte ausgedruckt ist. Dies ist zu Anfang empfohlen.

Mit <halt> hält das Programm kurz an, mit RETURN setzt es die Rechnung fort. Mit <Neustart> kehrt man zur Abfrage des Startfrequenz zurück. Mit <ende> schließt

das Programm und man kehrt zur Windows-Oberfläche zurück. <ende> kann nur während des Laufs eingegeben werden.

Bei Problemen mit dem Programm oder dem Start kann vielleicht der Autor helfen:

RolfBader@t-online.de

Anhang B Waveletbilder der Geigentöne

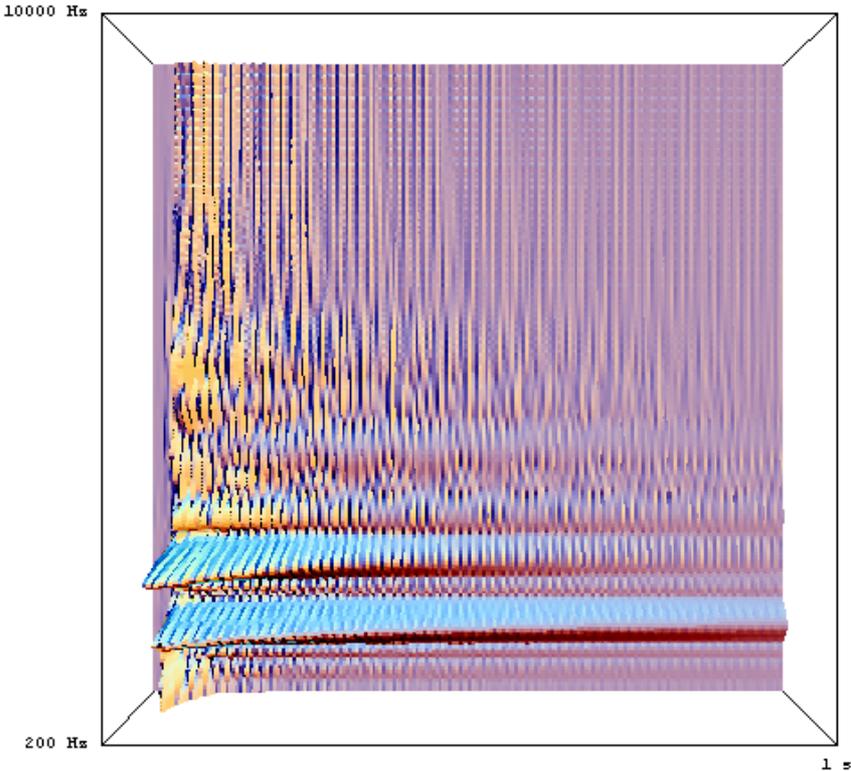
Die Ergebnisse in Bezug auf die Geige auf Seite 195 beziehen sich auf die hier aufgeführten Waveletbilder. Sie sind leider nicht in der Frequenz skaliert, die Zeitachse ist aber immer 50ms und ist immer die Skala von 0-500, entsprechend ist die Skala 0-300 die Frequenzachse. Die Zeit $t=0$ ist beim Skalenwert 0 (entsprechend $t=50\text{ms}$ beim Wert 500), die tieferen Frequenzen sind beim Skalenwert 300, die höheren beim Wert 0. Hier soll ein Eindruck entstehen, wie unregelmäßig die Eigenwerte der Geige einschwingen.

Es sind drei Töne analysiert, alle von der a-Saite, hart und laut gespielt. Von den Tönen a1 und f#2 sind vom selben Bild zwei verschiedene Ansichten, vom Ton a2 eine Ansicht dargestellt.

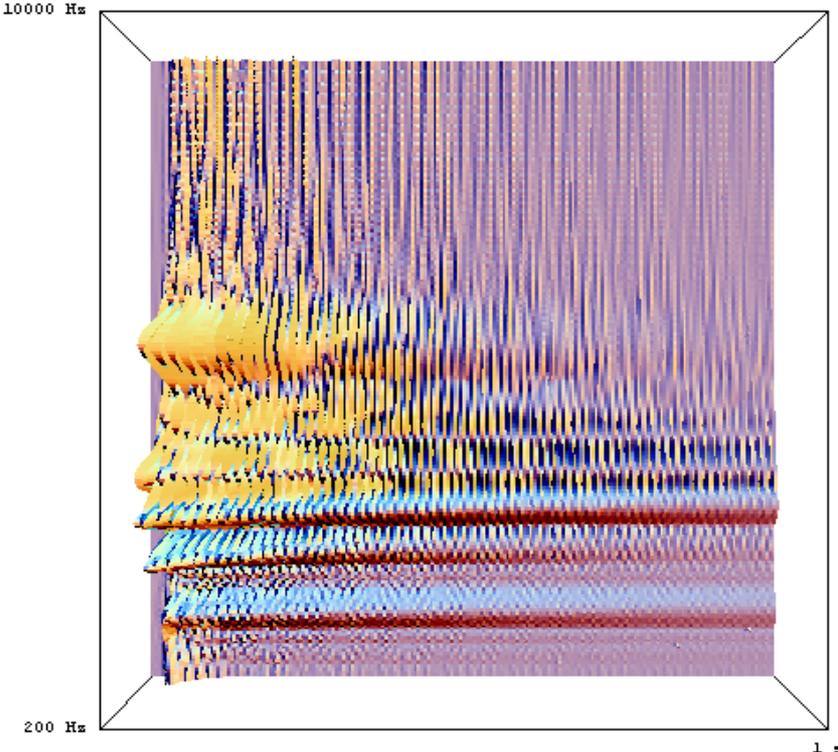
Die Bilder wurden alle im Institut für Computeranwendung der Uni Stuttgart mit dem Waveletanalyseprogramm von Frau Haase berechnet.

Die Bilder sind anforderbar unter R_Bader@t-online.de

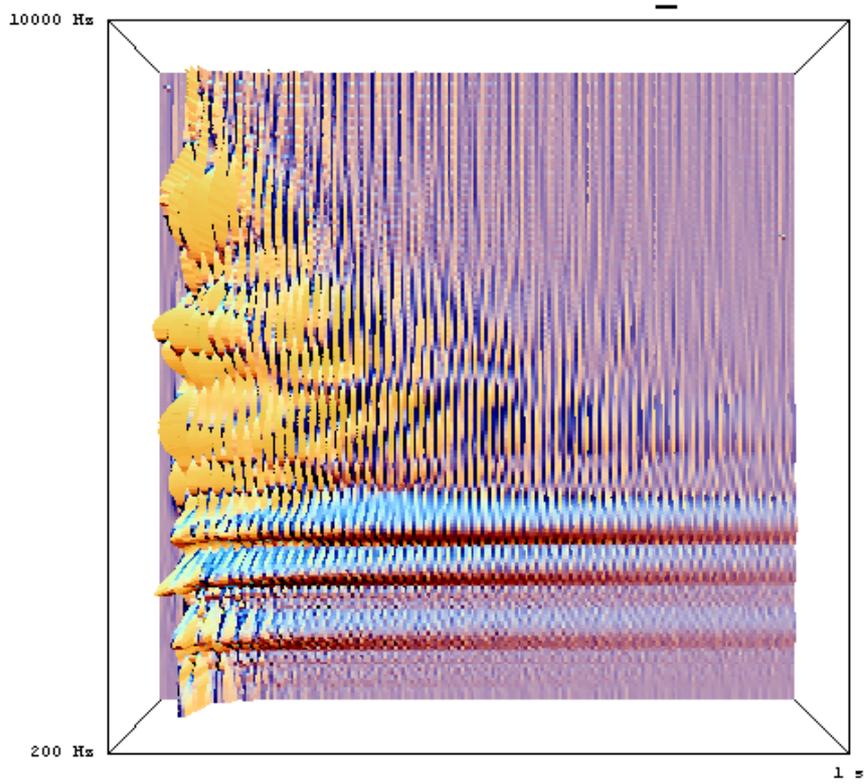
Anhang C Waveletbilder der Schwingungsabnehmersignale Kapitel 5



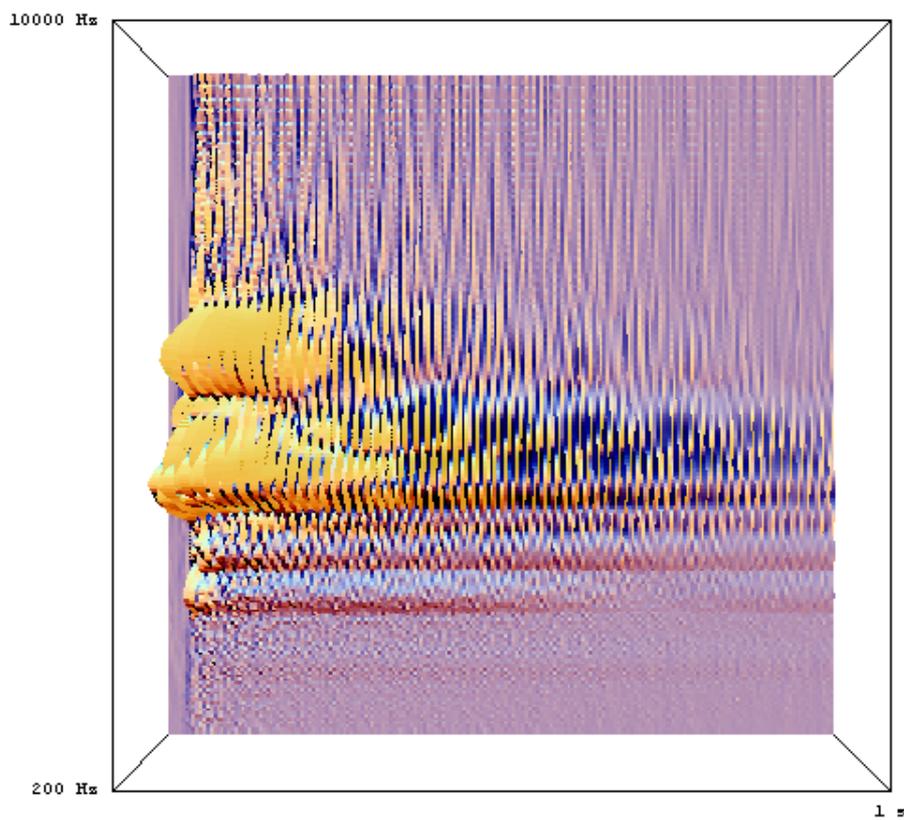
W1: Mikrophon Decke



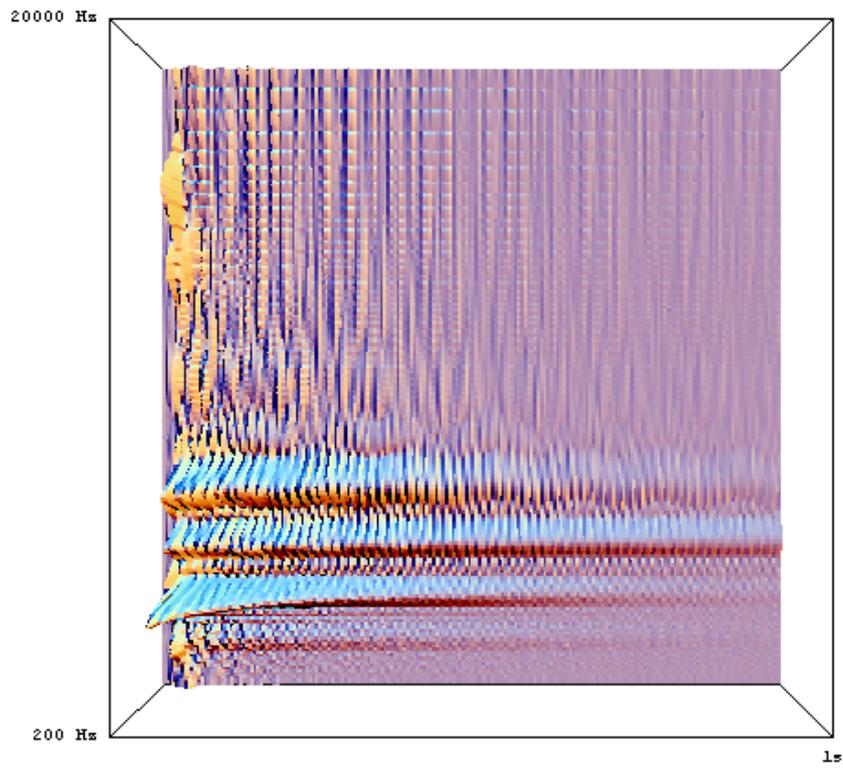
W2: Abnehmer Decke



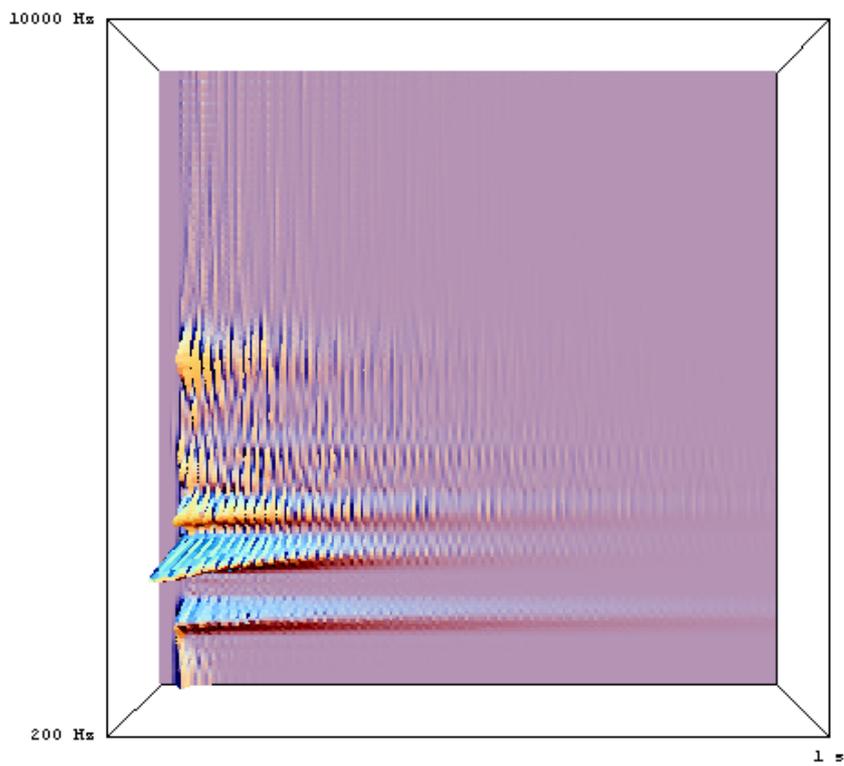
W3: Abnehmer Boden



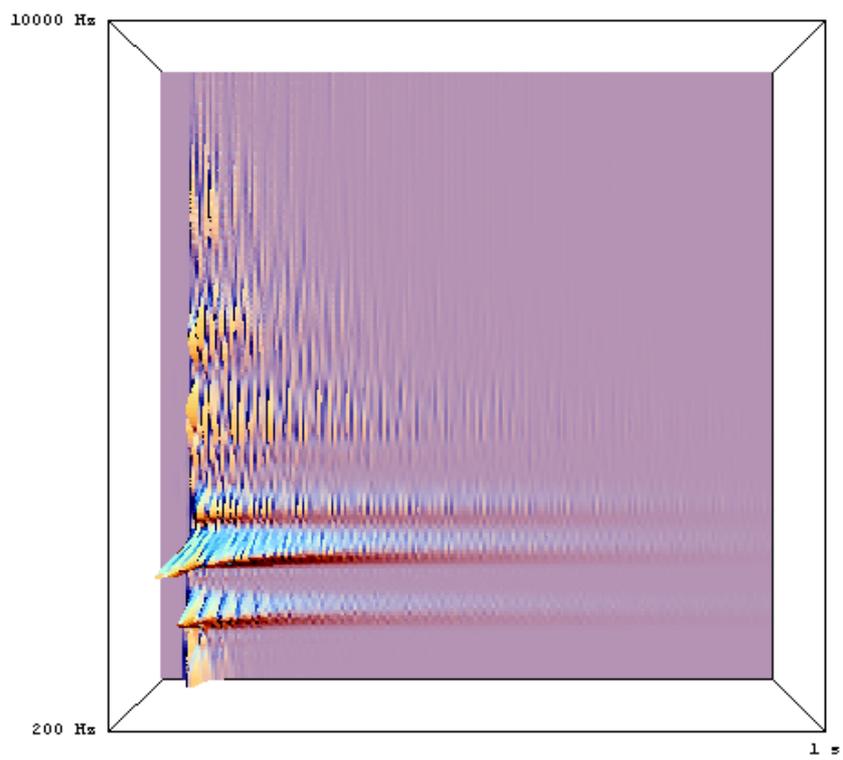
W4: Abnehmer Zarge



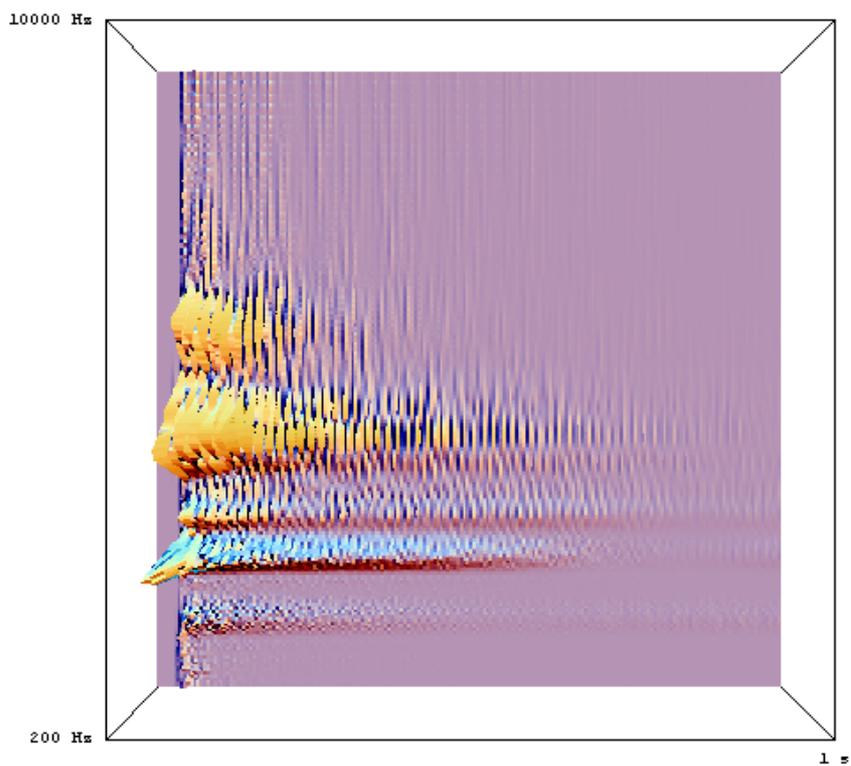
W5: Abnehmer Kopfplatte



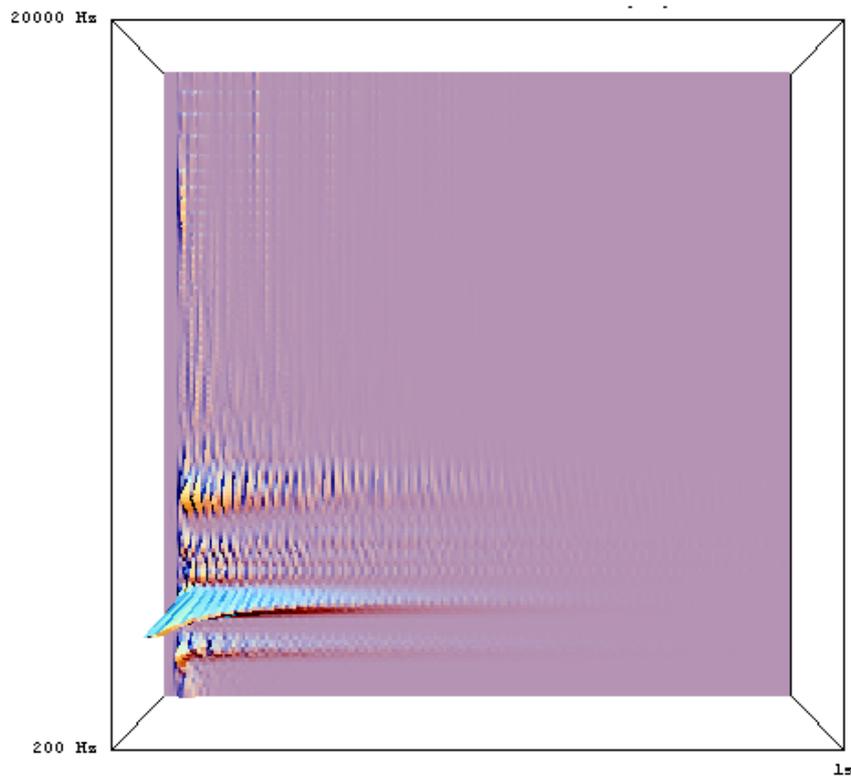
W6: Korrelation Decke - Mikrophon



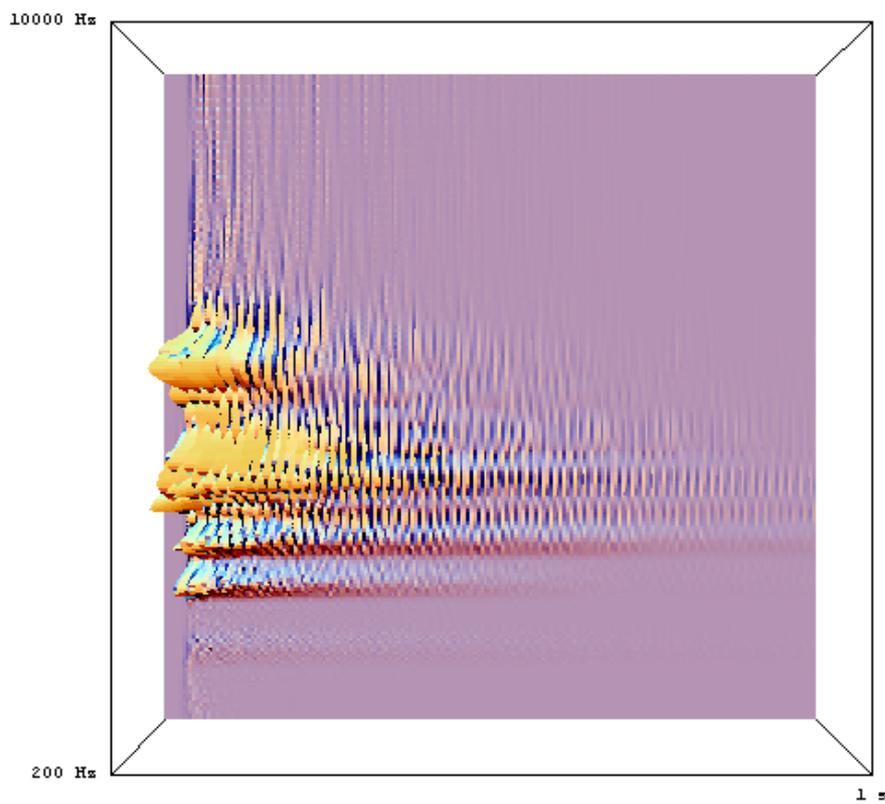
W7: Korrelation Boden - Mikrofon



W8: Korrelation Zarge - Mikrofon



W9: Korrelation Kopfplatte - Mikrofon



W10: Korrelation (Korrelation Decke - Mikro) - (Korrelation Zarge - Mikro)

Anhang D Programme

Speziell für diese Arbeit entwickelte der Autor eine Reihe von Programmen und berechnete mit den dort angeführten Algorithmen die Einschwingvorgänge. Die Benutzung externer Programme ist gesondert vermerkt.

Alle Programme wurden in Fortran geschrieben. Die Korrelationsdimension wurde erst im Mathematica und in Matlab implementiert, was jedoch zu Rechenzeiten von vielen Stunden führte. Deshalb ist Fortran benutzt, was gegenüber C++ etwas genauer ist.

Die Wavelet Plots sind zum Teil mit dem Programm von Frau Dr. Haase durchgeführt. Es berechnet die erste Ableitung eines komplexen Morlet - Wavelet. Dessen Algorithmus wird in der Literatur gegeben¹

Hier sind Versionen für solche Wavelets vorgelegt, die schnell rechnen und bei gleichen Daten gleiche Werte wie die Morlet-Wavelets erster Ableitung liefern.

Auch hierbei handelt es sich um ein komplexes Morlet - Wavelet, das jedoch wie Fourier - Transformationen gerechnet werden.

Das Prinzip des komplexen Wavelets liegt im Gewichten von Sinus- und Cosinusfunktion, die mit einer Gaußglockenkurve. Soweit unterscheiden sich die Konzepte nicht von üblichen Fouriertechniken. Doch benutzt die Waveletanalyse unter der Gaußglocke immer die gleiche Anzahl von Perioden, unabhängig von der Frequenz. Somit bekommen tiefe Frequenzen ein großes Zeitfenster, hohe Frequenzen ein kleines. Dies gewährleistet gleich gute Auflösung für alle Frequenzen, was für musikalische Interpretationen der Daten vorteilhaft ist. In dieser Arbeit wurde festgestellt, daß 5 Perioden unter der Gaußglocke einen sehr guten Kompromiss zwischen Frequenz- und Zeitunschärfe liefern. Sie werden durch für alle Rechnungen benutzt. . Auch ist es möglich in den Klang hineinzuzoomen. Wird nur ein kleiner Frequenz- oder Zeitausschnitt benötigt, kann dieser gezielt und detailliert dargestellt werden.

¹ siehe: Haase, Widjajakusuma, &Bader 2002

Wavlet - Programm (Ausschnitt) Anwendungsbeispiel siehe Abb. 5.10 S. 163

Dieser Algorithmus rechnet die Gaußglockenkurve mit Sinus- und Kosinuswellen. Das Wavelet (wavlet) ist 5. Die Variable samfreq bedeutet Samplefrequenz. Die Variable zae ist nur ein Zähler

```
do i=0,wavlet*samfreq/f
  k=(i-wavlet*samfreq/(f*2))/(wavlet*samfreq/(f*2))
  wsin(zae)=Sin(2*Pi*f*i/samfreq)*e**(-k*k)
  wcos(zae)=Cos(2*Pi*f*i/samfreq)*e**(-k*k)

end do
```

In einem weiteren Schritt wird nun der Klang (sound) mit den Werten des komplexen Morlet-Wavelet verrechnet und der Amplitudenwert (amp) für diese eine Frequenz zu diesem einen Zeitpunkt berechnet.

```
do i=1,zae
  if (i+t .lt. tmax .and. i+t-zae/2 .gt. 0) then
    sumsin=sumsin+sound(int(t+i-zae/2))*wsin(int(i))
    sumcos=sumcos+sound(int(t+i-zae/2))*wcos(int(i))
    raender=raender+1
  end if
end do
30   amp=sqrt(sumsin*sumsin+sumcos*sumcos)/raender
```

Korrelationsdimension - Programm (Ausschnitt) Anwendungsbeispiel Abb. 5.1 S. 149 f

Der Algorithmus zur Berechnung der Korrelationsdimension wird in Kapitel 4.6 erklärt. Hier das Fortran Beispiel. Zuerst werden die Abstandswerte berechnet.

```
do 40 i=1,z
  if ( dimm(i) .le. anf ) then
    ein(1)=ein(1)+1
  else
    indeks=int( (dimm(i)-anf)/(schr))+2
```

```

c    print*, index
      if (indeks .le. 29) ein(indeks)=ein(indeks)+1
      endif
40  continue

```

Dann werden diese in die Werte für Cr und r umgerechnet.

```

do 60 i=1,29
  if ( ein2(i) .gt. 0) then
    r(i)=log( 1.D0*(i-1)*(schr)+anf)
    cr(i)=log(1.D0*ein2(i)/z)
  else
    r(i)=log( 1.D0*(i-1)*(schr)+anf)
    cr(i)=0.0
  endif
60  continue

```

Die Darstellung der Korrelationsdimension wurde in Matlab programmiert:

```

load daten -ascii;
plot(daten(:,1),daten(:,2),'.:')
title('Dizi Flötenton 10 000 Punkte,44.1 kHz, Einbettungdim 50 bis 55');
xlabel('r');ylabel('C(r)');
anf=10;schr=3;dim=4;clear d;
for anf=23:25
  for l=2:dim
    d(l,anf)=(daten((l-2)*29+anf,2)-daten((l-2)*29+anf+schr,2))/(daten((l-2)*29+anf,1)-
daten((l-2)*29+anf+schr,1));
  end
end
figure;
plot (d(1:dim,:),'.:');axis([2 dim 0 4]);axis auto;
title('Gitarre quasist.Teil: e-Saite Apoyando g1 mittellaut');
xlabel('Einbettungsdimension');ylabel('fraktale Dimension');grid on;

```

Informationsstruktur - Programm (Ausschnitt) Anwendungsbeispiel Abb. 5.14 S. 169 f

Die Informationsstruktur wurde als neuer Analysealgorithmus der Signalverarbeitung für diese Arbeit entwickelt und ist die zweite Ableitung einer multifraktalen

Informationsdimension nach der Zeit. Die genauen Schritte sind in Kapitel 4.4 beschrieben.

```
do 50 haupt=1,dts
  teil=int((tmax-d)/dts)
  !-----Einordnen-----
  do i=1,haupt*teil
    hilf1=int(sound(i)*l+l);hilf2=int(sound(i+d)*l+l)
    feld(hilf1,hilf2)=feld(hilf1,hilf2)+1
  end do

  zae=1
  !-----Untereinheiten-----
  do 100 x=1,xmax
    do 200 y=1,ymax
      summe=0;punkte=0
      !----Wieviele Punkte im Unterfeld---
      do i=int((2*l)*(x-1)/xmax)+1,int((2*l)*x/xmax)
        do k=int((2*l)*(y-1)/ymax)+1,int((2*l)*y/ymax)
          punkte=punkte+feld(i,k)
        end do
      end do
      !----fraktale Dim berechnen-----
      do i=int((2*l)*(x-1)/xmax)+1,int((2*l)*x/xmax)
        do k=int((2*l)*(y-1)/ymax)+1,int((2*l)*y/ymax)
          if (feld(i,k) .ne. 0) then
            z=feld(i,k)/punkte
            summe=summe+z*log(z)

            end if
          end do
        end do
      end do

      summe=-summe*par
      summ(zae)=summe;zae=zae+1

200 end do
100 end do
  ! -----Kummulieren

  do i=1,zae
    k=int(summ(i)*10)
    kum(k,haupt)=kum(k,haupt)+1
  end do

  print*, 'kum='
  print*, kum(:,haupt)
```

```

    print*, 'zae'
    print*, zae
50  end do

```

Wendepunktanalyse - Programm (Ausschnitt) Anwendungsbeispiel Abb. 6.5

S. 216 ff

Die Wendepunktanalyse (Kapitel 6) wurde sowohl in Mathematica als auch in Fortran programmiert. Hier die Fortran-Version.

```

zae=1;drueber=0
  z1=sound(1);z2=sound(2)
  if (z1 .lt. z2) then
    st=1
  else
    st=-1
  end if

  do i=3,2204
    if (st .eq. 1) then
      if(sound(i) .lt. sound(i-1)) then
        ex_pu(zae)=i
        zae=zae+1
        st=-1
      end if
    end if
    if (st .eq. -1) then
      if (sound(i) .gt. sound(i-1)) then
        ex_pu(zae)=i
        zae=zae+1
        st=1
      end if
    end if
  end do

  do i=1,20
    hist(i)=0
  end do

  do i=1,zae-2
    quot=(ex_pu(i+1)-ex_pu(i))/(ex_pu(i+2)-ex_pu(i+1))
    if (quot .gt. 1) then
      quot=1/quot
      drueber=drueber+1
    end if
  end do

```

```

end if
if (int((quot+1/40)*20) .gt. 20) then
  quot=1
  print*, 'Ausnahme'
end if
hist(int((quot+1/40)*20))=hist(int((quot+1/40)*20))+1
end do

```

Korrelogramm - Programm (Ausschnitt) Anwendungsbeispiel Abb. 5.11 S. 164

Hier wird das Korrelogramm berechnet. Für Einzelheiten siehe Granqvist & Hammarbert (1998).

```

do 10 m=1,tmax,del
  quad=0
  do i=1,dmax*2
    quad=quad+sound(i+m)*sound(i+m)
  end do
  do 20 n=1,dmax
    auto=0
    do i=1,dmax
      auto=auto+sound(m+i)*sound(m+i+n)
    end do
    dquad=0
    do i=1,dmax
      dquad=dquad+sound(m+i+n)*sound(m+i+n)
    end do
    erg=auto/(sqrt(quad*dquad))
    if (erg .gt. 0) then
      dat(int(m/del)+1,n)=erg
    else
      dat(int(m/del)+1,n)=0
    end if
  end do
20  end do
10  end do

```

Fast alle Graphiken wurden in Mathematica programmiert und werden hier nicht gesondert aufgeführt.

Lebenslauf

Rolf Bader
Lindenallee 43
20259 Hamburg
040 / 430 45 81

* 27.04.1969 in Stuttgart

1988 Abitur am Friedrich-Schiller-Gymnasium in Ludwigsburg

1989 Zwanzigmonatiger Zivildienst bei Diakonie und DRK Ludwigsburg

1991 Aufnahme des Studiums der Systematischen Musikwissenschaft in Hamburg

2001 Erwerbung des Grades des Magister der systematischen Musikwissenschaft
der Universität Hamburg

Hamburg, den 9.1.2002

(Rolf Bader)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, Rolf Bader, daß ich zu keiner anderen Zeit und an keinem anderen Ort eine Dorktorprüfung beantragt habe.

Die vorliegende Arbeit ist selbständig angefertigt. Es wurden keine anderen Quellen und / oder Hilfsmittel benutzt als die in der Arbeit angegebenen. Wörtlich oder inhaltlich aus anderen Werken übernommene Inhalte und / oder Zitate wurden als solche ausgewiesen und kenntlich gemacht.

Hamburg, den 9.1.2002

(Rolf Bader)