Spektrale Generizität bei äquivarianten Differentialoperatoren: G-Einfachheit und Hyperbolizität

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Roland Weber
aus Gießen

Hamburg
2002

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Reiner Lauterbach
und Prof. Dr. Bodo Werner

Hamburg, den 25. Februar 2002

Prof. Dr. Reiner Hass
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Eines der ältesten Eigenwertprobleme ist das Problem der „Eulerschen Knicklast“, das von Leonard Euler 1744 behandelt wurde: Ein beidseitig eingespannter Stab wird längs seiner Achse belastet. Bei Überschreiten einer kritischen Last knickt der Stab. Diese kritische Last entspricht gerade dem ersten Eigenwert eines (gewöhnlichen) Randwertproblems.

Ein klassisches Beispiel eines Eigenwertproblems für partielle Differentialoperatoren ist die schwingende Membran, die längs einer geschlossenen Kurve C fest eingespannt ist. Die Auslenkung $u = u(x, y, t)$ der Membran genügt der Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(Helmholtz-Gleichung), wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ den Laplace-Operator bezeichnet. Ein Separationsansatz $u(x, y, t) = v(x, y)w(t)$ führt auf das Randwertproblem

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad v|_C = 0$$

mit einem Parameter λ. Nichttriviale „Eigenlösungen“ dieses Problems treten nur bei gewissen diskreten Werten des Parameters λ, den „Eigenwerten“, auf. Henri Poincaré wies 1894 nach, dass dieses Problem – im Gegensatz zu endlichdimensionalen Eigenwertproblemen – *unendlich viele* Eigenwerte hat.

Da in den Anwendungen häufig Eigenwertprobleme für partielle Differentialoperatoren auftreten, ist es natürlich, generelle Eigenschaften des Spektrums von partiellen Differentialoperatoren zu untersuchen. Ende der zwanziger Jahre des 20. Jahrhunderts wurde von John von Neumann gezeigt, dass das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren nur aus reellen, diskreten Eigenwerten besteht.

Doch nun ist die Frage, ob man darüber hinaus für „typische“ Differentialoperatoren weitere Aussagen über diese Eigenwerte machen kann. Welche Eigenschaften kann man von den „meisten“ Differentialoperatoren (einer gewissen Klasse) erwarten?

In dieser Arbeit werden speziell elliptische, lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung betrachtet:

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Ist L ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung (zum Beispiel der Laplace-Operator) auf Ω, so betrachten wir das Eigenwertproblem zu L auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(L + \lambda)u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Das Spektrum von L besteht aus abzählbar unendlich vielen Eigenwerten, die sich nicht im Endlichen häufen und die endliche Vielfachheiten haben.

In Uhlenbeck [37] wird gezeigt, dass diese Vielfachheit der Eigenwerte für typische elliptische Differentialoperatoren eins ist: In gewissen Klassen von elliptischen Differentialoperatoren (von denen eine im Folgenden noch genauer betrachtet wird) bilden diejenigen Operatoren, die nur einfache Eigenwerte haben, eine residuale Menge. Das heißt, diese Menge ist der abzählbare Durchschnitt von Mengen, die sowohl offen als auch dicht sind. Nach dem Satz von Baire ist eine residuale Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes dicht.

Wir sagen, eine Eigenschaft ist generisch innerhalb einer Familie von Operatoren, falls die Menge der Operatoren, die diese Eigenschaft haben, residual ist. In den sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurde (unter anderem von Mauricio Peixoto, Stephen Smale, Jack Hale) eine „generische Theorie" für autonome gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelt, in der qualitative Eigenschaften untersucht wurden, die die „meisten" dieser Gleichungen haben, das heißt, die für eine residuale Menge in einer Familie von Differentialgleichungen erfüllt sind (siehe zum Beispiel [1, Chapter 7]).

Generisch haben also elliptische Differentialoperatoren (innerhalb von gewissen Klassen) nur einfache Eigenwerte. Zu jedem Ausnahmeoperator, der einen mehrfachen Eigenwert hat, gibt es in der Nähe von diesem in der Familie einen anderen Operator, der nur einfache Eigenwerte hat. Mehrfache Eigenwerte sind also instabil unter Störungen des Operators innerhalb der betrachteten Familie.

Eine dieser Klassen sind Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung eines gegebenen elliptischen Differentialoperators: Ist L ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf einem beschränkten Gebiet Ω im $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$, so ist die Menge

$$\{b \in C^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L + b \text{ sind einfach}\}$$

residual in $C^k(\overline{\Omega})$. Dabei ist $C^k(\overline{\Omega})$ für $k \in \mathbb{N}$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$, deren Ableitungen stetige Fortsetzungen auf den Rand von Ω haben. Generisch haben also die Operatoren $L+b$ mit $b \in C^k(\overline{\Omega})$ nur einfache Eigenwerte.

In den Anwendungen treten jedoch oft durch die Problemstellung Einschränkungen an die Klasse der zu betrachtenden Operatoren auf: Hat das Gebiet zum Beispiel Symmetrien, so schränkt man die Familie von Differentialoperatoren auf solche ein, die mit diesen Symmetrien verträglich sind.

Dabei werden die Symmetrien eines (beschränkten) Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ beschrieben durch kompakte Lie-Gruppen, das sind abgeschlossene Untergruppen der orthogonalen Gruppe $\mathbf{O}(N) = \{A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N : A \text{ linear, orthogonal}\}$.

Die Aktion einer kompakten Lie-Gruppe auf einem Gebiet Ω induziert auf Funktionenräumen über Ω eine Gruppenaktion, die durch eine Darstellung beschrieben wird. Dabei ist eine Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe auf einem Banach- oder Hilbert-Raum ein stetiger Gruppenhomomorphismus von der Gruppe in die Menge der beschränkten Isomorphismen dieses Raumes. Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe, so dass Ω invariant unter G ist. Ist X ein Raum von Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$, so wird durch $\rho(g)u(x) = u(g^{-1}x)$ für $g \in G$, $u \in X$ und $x \in \Omega$ eine Darstellung ρ von G auf X erklärt. Ein Operator T auf X heißt äquivariant, falls er mit $\rho(g)$ für alle $g \in G$ vertauscht, das heißt, falls $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$ für alle $g \in G$ gilt. Zum Beispiel ist der Laplace-Operator äquivariant bezüglich allen kompakten Lie-Gruppen.

Schränkt man die Klassen von elliptischen Differentialoperatoren ein auf äquivariante Operatoren, so sind einfache Eigenwerte nicht mehr eine generische Eigenschaft in dieser Familie: Ist λ ein Eigenwert eines äquivarianten Operators, so ist der dazugehörige Eigenraum E_λ invariant unter der Gruppenaktion und lässt sich in eine direkte Summe von irreduziblen Unterräumen zerlegen. Dabei heißt ein Raum irreduzibel, wenn er keine unter der Gruppe invarianten echten Unterräume (also außer dem Nullraum und sich selber) enthält. Betrachtet man nun eine kleine äquivariante Störung des Operators, so hat dieser Operator Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ in der Nähe von λ mit Eigenräumen $E_{\mu_1}, \ldots, E_{\mu_s}$, so dass $\dim E_\lambda = \sum_{j=1}^{s} \dim E_{\mu_j}$ gilt und $\bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}$ sich in eine äquivalente Summe von irreduziblen Unterräumen zerlegen lässt wie E_λ. Ist also einer der irreduziblen Unterräume von E_λ mehrdimensional, so hat auch $\bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}$ einen irreduziblen Unterraum dieser Dimension. Auf diese Weise bleiben höhere Vielfachheiten von Eigenwerten bei äquivarianten Störungen erhalten. Einfache Eigenwerte können also nicht mehr generisch innerhalb einer Familie von äquivarianten Differentialoperatoren sein. Die minimale Dimension der Eigenräume ist bestimmt durch die Dimensionen der irreduziblen Unterräume.

Ist ein Eigenraum eines äquivarianten Operators irreduzibel, so sagen wir, dass der dazugehörige Eigenwert G-einfach ist.

Ist L ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung, der einen Eigenwert hat, dessen Eigenraum einen mehrdimensionalen irreduziblen Unterraum enthält, so gibt es aufgrund der obigen Betrachtungen keinen äquivarianten Operator in der Nähe von L, der nur einfache Eigenwerte hat. Man kann sich jedoch recht leicht überlegen, dass es einen äquivarianten Operator nahe bei L gibt, so dass alle Eigenwerte dieses Operators G-einfach sind. Allerdings werden diese Störungen mit Hilfe von Projektionen konstruiert; der daraus resultierende Operator ist also nicht notwendigerweise ein Differentialoperator.

Die Frage ist nun, ob innerhalb der Familie äquivarianter Differentialoperatoren die Eigenschaft, dass alle Eigenwerte G-einfach sind, generisch ist.

In dieser Arbeit wird nachgewiesen, dass bei invarianten Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung eines äquivarianten, elliptischen, linearen Differentialoperators generisch alle Eigenräume irreduzibel sind: Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe, so dass Ω invariant unter G ist. Ist L ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω, so ist auch $L + b$ für $b \in C^k_G(\overline{\Omega})$ äquivariant, wobei $C^k_G(\overline{\Omega})$ die Menge der unter G invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$ ist. Es wird gezeigt, dass dann die Menge

$$\{b \in C^k_G(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega})$ ist, falls die Gruppe (und die Koeffizienten von L) gewisse Voraussetzungen erfüllen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn G die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ oder die Dieder-Gruppe $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist und die Koeffizienten von L aus $C^\infty(\overline{\Omega})$ sind.

Der Beweis dieser Generizitätsaussage verallgemeinert den Ansatz von Uhlenbeck [37]. Dort wird der Fall ohne Symmetrie, also mit der Symmetrie-Gruppe $G = \{id\}$, betrachtet. Im Beweis wird das Problem so umformuliert, dass ein Transversalitätssatz angewandt werden kann: Genau dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $(L+b)$ für $b \in C^k(\overline{\Omega})$ mit Eigenvektor $u \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \setminus \{0\}$, falls $\Phi(u,\lambda,b) := (L+b+\lambda)u = 0$ ist. Setzen wir $\Phi_b(u,\lambda) := \Phi(u,\lambda,b)$, so ist für $(u,\lambda,b) \in \Phi^{-1}(0)$

$$\begin{aligned} \operatorname{range} D\Phi_b(u,\lambda) &= \operatorname{range}(L+b+\lambda) \oplus \langle u \rangle \\ &\subseteq \operatorname{range}(L+b+\lambda) \oplus \ker(L+b+\lambda) = L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Somit ist λ genau dann ein einfacher Eigenwert von $L+b$, wenn $D\Phi_b(u,\lambda)$ surjektiv ist. Der Operator $L+b$ hat also genau dann nur einfache Eigenwerte, wenn für alle $(u,\lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ die Linearisierung $D\Phi_b(u,\lambda)$ surjektiv ist, das bedeutet, wenn 0 regulärer Wert von Φ_b ist. Ein Transversalitätssatz (eine unendlichdimensionale Verallgemeinerung des Transversalitätssatzes von Thom [1, Theorem 19.1]) liefert, dass, falls 0 regulärer Wert von $\Phi : (u,\lambda,b) \mapsto (L+b+\lambda)u$ ist, also wenn für alle $(u,\lambda,b) \in \Phi^{-1}(0)$ die Linearisierung $D\Phi(u,\lambda,b)$ surjektiv ist, die Menge

$$\begin{aligned} & \{b \in C^k(\overline{\Omega}) : 0 \text{ regulärer Wert von } \Phi_b\} \\ = \; & \{b \in C^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L+b \text{ sind einfach}\} \end{aligned}$$

residual in $C^k(\overline{\Omega})$ ist.

Diese Methode soll nun auf den äquivarianten Fall übertragen werden. Die Idee dieser Verallgemeinerung ist, irreduzible Unterräume von Eigenräumen von $L+b$ als „Punkte“ aufzufassen und die oben angedeutete Methode auf diese Unterräume anstelle der Eigenfunktionen anzuwenden. Dabei werden die irreduziblen Unterräume dargestellt durch Tupel, deren Elemente eine Basis des Unterraums bilden, wobei aber nur solche Basen zugelassen werden, die ein vorbestimmtes Transformationsverhalten unter der Gruppenaktion haben. Auf diese Weise kann man die Auswahl einer Basis eines irreduziblen Unterraums eindeutig machen. Auf der Menge dieser Tupel kann man nun komponentenweise Operatoren definieren, die dann sozusagen irreduzible Unterräume auf irreduzible Räume abbilden. Ersetzt man im oben skizzierten Vorgehen die Eigenfunktion u durch ein solches Tupel, das eine Basis eines irreduziblen Unterraums des Eigenraums repräsentiert, so erhält man, dass die Menge der $b \in C^k(\overline{\Omega})$, für die alle Eigenräume von $L+b$ irreduzibel sind, residual in $C^k(\overline{\Omega})$ ist.

In einer Arbeit von Albert [2] wird ein alternativer Beweis der Aussage gegeben, dass (im Fall ohne Symmetrien) die Operatoren $L+b$ mit $b \in C^\infty(\overline{\Omega})$ generisch nur einfache Eigenwerte haben. Der Ansatz basiert auf einem Störungssatz von Rellich, der besagt, dass bei analytischen Störungsreihen $T(\varepsilon)$ auch die Eigenwerte und die Eigenfunktionen in Potenzreihen $\lambda(\varepsilon)$ und $\phi(\varepsilon)$ entwickelt werden können. Mit Hilfe dieser Entwicklungen werden Störungen angegeben, für die ein mehrfacher Eigenwert aufspaltet in mehrere Eigenwerte mit niedrigerer Vielfachheit.

Auch diese Beweismethode kann auf den äquivarianten Fall übertragen werden.

Bei zeitabhängigen Systemen wie zum Beispiel Reaktions-Diffusions-Gleichungen

$$u_t = \Delta u + f$$

ist man an der Dynamik, der zeitlichen Entwicklung der Lösungen interessiert. Ein erster Schritt zum Verständnis dieser Dynamik ist, stationäre Lösungen zu untersuchen, also Lösungen mit $u_t = 0$. Diese Gleichgewichte genügen wieder einer elliptischen Differentialgleichung. Über das Spektrum dieses Differentialoperators kann man nun wichtige Rückschlüsse über das Verhalten von Lösungen in der Umgebung des Gleichgewichts erhalten.

Für die Untersuchung der Dynamik in der Nähe eines stationären Punktes spielt zum Beispiel die Hyperbolizität des Gleichgewichts eine wichtige Rolle:

Ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so betrachten wir die Reaktions-Diffusions-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$u_t = \Delta u + f(\cdot, u) \quad \text{auf } \Omega,\ t > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{für } t > 0, \tag{1}$$

wobei Δ der Laplace-Operator und $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ sei. Dabei ist $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ der Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ist $p > N$, so wird durch (1) ein lokaler Halbfluss auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ erzeugt ([15]). Gleichgewichte dieses Halbflusses erfüllen das elliptische, nichtlineare Randwertproblem

$$L_f(u) := \Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ein Gleichgewicht u heißt hyperbolisch, falls die Linearisierung $DL_f(u)$ von L_f in u keine Eigenwerte auf der imaginären Achse hat. Dies ist gleichbedeutend damit, dass 0 nicht Eigenwert von $DL_f(u)$ ist, da $DL_f(u)$ ein selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator ist und somit alle Eigenwerte von $DL_f(u)$ reell sind.

Ähnlich wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind in der Nähe eines hyperbolischen stationären Punktes die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit homöomorph zum linearen stabilen beziehungsweise zum linearen instabilen Raum ([15, Section 5.2]).

In Brunovský, Poláčik [8] wird gezeigt, dass für eine residuale Menge von Nichtlinearitäten $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alle Gleichgewichte von (1) hyperbolisch sind. Der Beweis dieser Aussage basiert auf dem Transversalitätssatz, der oben schon erwähnt wurde.

Hat das Gebiet jedoch wieder Symmetrien, die durch eine kompakte Lie-Gruppe G beschrieben werden, und schränkt man die Klasse der Nichtlinearitäten ein auf solche, die invariant unter G in der Raum-Variablen sind, so ist Hyperbolizität von Gleichgewichten keine generische Eigenschaft mehr: Es sei $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ die Menge der in der Raum-Variablen invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Dann ist L_f für $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ein äquivarianter Operator. Ist nun u ein Gleichgewicht von (1) mit kontinuierlichem Gruppenorbit, so besteht wegen der Äquivarianz von L_f der ganze Orbit aus Gleichgewichten und der Tangentialraum an diesen Orbit ist im Kern von $DL_f(u)$ enthalten (vgl. Brunovský, Poláčik [7]). Das bedeutet, dass das Gleichgewicht u nicht hyperbolisch ist.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass für generische Nichtlinearitäten $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ aber zumindest alle unter G invarianten Gleichgewichte hyperbolisch sind, falls die Gruppe einer Voraussetzung genügt, die zum Beispiel für $\mathbf{O}(2)$ oder $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Im Beweis dieser Aussage wird der Ansatz des nicht-äquivarianten Falls wieder auf die Situation mit Symmetrie übertragen. Die Methodik dabei ist ähnlich zu den Überlegungen beim Nachweis der generischen G-Einfachheit von Eigenwerten, es spielen auch wieder die Basen von irreduziblen Unterräumen eine entscheidende Rolle.

Ist u ein invariantes, hyperbolisches Gleichgewicht von (1) für ein $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, so betrachten wir das Eigenwertproblem

$$(DL_f(u) + \lambda)v = \Delta v + (D_2 f(\cdot, u) + \lambda)v = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Aufgrund der obigen Überlegungen sind alle Eigenwerte von $DL_f(u)$ G-einfach, falls $D_2 f(\cdot, u)$ nicht in einer mageren Ausnahmemenge, dem Komplement einer residualen Menge, in $C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Ähnlich zum Beweis der generischen G-Einfachheit der Eigenwerte elliptischer Operatoren bei invarianten Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung kann man zeigen, dass für eine residuale Menge von Nichtlinearitäten $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alle Eigenwerte von $DL_f(u)$ G-einfach sind, falls die Gruppe wieder einer Annahme genügt.

Die bei den verschiedenen Generizitätssätzen gemachten Voraussetzungen betreffen die Basen von irreduziblen Unterräumen der Eigenräume: Wie oben skizziert, wählt man aus irreduziblen Unterräumen Basen aus, so dass die Basiselemente ein vorgeschriebenes Transformationsverhalten unter der Gruppenaktion haben. Die in der Arbeit gemachten Annahmen sind nun eine Forderung an das Verhalten von solchen Basen verschiedener irreduzibler Unterräume zueinander. Für die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ konnte nachgewiesen werden, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind.

Abschließend soll noch ein Überblick über die Gliederung der Arbeit gegeben werden:

Im ersten Kapitel werden einige grundlegende Eigenschaften von Lie-Gruppen und ihren Darstellungen wiederholt, und es wird der Transversalitätssatz angegeben, auf dem die meisten Beweise der Generizitätsaussagen basieren. Außerdem wird das Verhalten von Eigenwerten äquivarianter Operatoren unter Störungen untersucht. Danach werden elliptische Differentialoperatoren und Reaktions-Diffusions-Gleichungen betrachtet.

Das nächste Kapitel behandelt die Auswahl geeigneter Basen von irreduziblen Unterräumen, die ein vorbestimmtes Transformationsverhalten unter der Aktion einer kompakten Lie-Gruppe haben. Diese Basen spielen eine entscheidende Rolle bei der Übertragung der Beweise der bekannten Generizitätsaussagen auf den äquivarianten Fall.

In den Kapiteln 3 und 4 wird bewiesen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an die Gruppe generisch bei invarianten Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung eines äquivarianten, elliptischen Differentialoperators die Eigenwerte G-einfach sind. Dabei wird in Kapitel 3 ein störungstheoretischer Ansatz gewählt, während der Beweis in Kapitel 4 wie oben skizziert auf einem Transversalitätssatz aufbaut.

Das Ziel des fünften Kapitels ist es zu zeigen, dass für generische Nichtlinearitäten bei äquivarianten Reaktions-Diffusions-Gleichungen alle invarianten Gleichgewichte hyperbolisch sind, falls die Gruppe einer Annahme genügt.

Im abschließenden Kapitel 6 werden die bei den Generizitätssätzen der vorherigen Kapitel gemachten Voraussetzungen untersucht. Es wird gezeigt, dass sie zum Beispiel für die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und die Dieder-Gruppen $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind.

Herrn Prof. Dr. Reiner Lauterbach danke ich herzlich für die sehr gute Betreuung der Arbeit. Außerdem bedanke ich mich bei den Herren Wernt Hotzel und Jochen Merker für ihre Unterstützung und nützlichen Anregungen sowie bei Herrn Dr. Marcus Martin für das Korrekturlesen der Arbeit und seine Verbesserungsvorschläge.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden später auftretende Begriffe eingeführt und einige ihrer Eigenschaften wiederholt. Insbesondere werden kompakte Lie-Gruppen und ihre Darstellungen betrachtet und äquivariante Operatoren eingeführt. Weiterhin wird ein Transversalitätssatz zitiert. Im dritten Abschnitt wird das Verhalten von Eigenwerten und ihren Eigenräumen äquivarianter Operatoren unter Störungen untersucht. Anschließend werden Eigenwertprobleme von elliptischen, linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung betrachtet. Der fünfte Abschnitt beschäftigt sich mit Gleichgewichten von Reaktions-Diffusions-Gleichungen.

1.1 Lie-Gruppen und ihre Darstellungen

Im Folgenden werden einige grundlegende Eigenschaften von Lie-Gruppen und ihren Darstellungen wiederholt, auf die in dieser Arbeit zurückgegriffen wird. Die Beweise der meisten Aussagen findet man zum Beispiel in [9], [14] oder [38].

Ist Ω eine offene und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, also ein *Gebiet*, so werden die Symmetrien von Ω beschrieben durch *Lie-Gruppen.*

Definition 1.1.1

1. *Eine* kompakte Lie-Gruppe *ist eine abgeschlossene Untergruppe von*

$$\mathbf{O}(n) := \{A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : A \textit{ ist linear, orthogonal }\}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$.

2. *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und X ein reeller oder komplexer Banach-Raum.*

   Eine (reelle *beziehungsweise* komplexe) Darstellung *von G auf X ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus* $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$, *wobei* $\mathbf{GL}(X)$ *die Menge der beschränkten Isomorphismen von X in sich sei.*

Normalerweise werden wir reelle Darstellungen betrachten, da der Darstellungsraum der $\mathbb{R}^N$ oder aber ein Raum reellwertiger Funktionen sein wird. Es gibt jedoch Fälle, wo es sinnvoll sein wird, den ursprünglich reellen Raum zu komplexifizieren und dort komplexe Darstellungen zu studieren.

Definition 1.1.2 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und X_1 und X_2 Banach-Räume. Zwei Darstellungen $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ heißen* äquivalent, *falls es einen Isomorphismus $A : X_1 \to X_2$ gibt mit*

$$A \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ A \quad \textit{für alle } g \in G.$$

Ein Unterraum V eines Banach-Raums X ist *invariant* unter einer kompakten Lie-Gruppe G beziehungsweise unter einer Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ von G auf X, falls $\rho(g)v \in V$ für alle $v \in V$ und alle $g \in G$ gilt. Ist V ein invarianter Unterraum von X, so ist $\rho|_V : G \ni g \mapsto \rho(g)|_V \in \mathbf{GL}(V)$ eine Darstellung von G auf V. Dabei bezeichnet $\rho(g)|_V$ für $g \in G$ die Einschränkung der Abbildung $\rho(g) : X \to X$ auf den invarianten Unterraum V.

Definition 1.1.3 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine (reelle beziehungsweise komplexe) Darstellung von G auf X.*

1. *Die Darstellung ρ heißt* irreduzibel, *falls $\{0\}$ und X die einzigen unter G invarianten Unterräume von X sind.*

2. *Die Darstellung ρ heißt* absolut irreduzibel, *falls es für jeden Isomorphismus $A \in \mathbf{GL}(X)$ mit*
$$A \circ \rho(g) = \rho(g) \circ A \quad \textit{für alle } g \in G$$
ein $\alpha \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\alpha \in \mathbb{C}$ im Fall einer komplexen Darstellung) gibt mit $A = \alpha\,\mathrm{id}$, wobei $\mathrm{id} \in \mathbf{GL}(X)$ die identische Abbildung sei.

3. *Ein unter G invarianter Unterraum V von X heißt* irreduzibel, *falls die Darstellung $\rho|_V : G \ni g \mapsto \rho(g)|_V \in \mathbf{GL}(V)$ irreduzibel ist.*

4. *Ein unter G invarianter Unterraum V von X heißt* absolut irreduzibel, *falls die Darstellung $\rho|_V$ absolut irreduzibel ist.*

Beispiel 1.1.4 (siehe zum Beispiel [34])

1. Es sei G die Gruppe $\mathbb{Z}_4$, die aus den Drehungen der Ebene besteht, die ein Quadrat auf sich überführen. Diese Gruppe besteht aus vier Elementen, ist zyklisch und wird erzeugt von der Drehung φ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$.

   Die Gruppe $\mathbb{Z}_4$ hat auf $X = \mathbb{C}$ nur eindimensionale irreduzible Darstellungen, welche durch
$$\rho(\varphi)z = \exp\Big(i\frac{k\pi}{2}\Big)z \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$
   für ein festes $k \in \{0, \ldots, 3\}$ gegeben sind. Dies liefert vier nicht-äquivalente eindimensionale, irreduzible, komplexe Darstellungen.

   Betrachten wir jedoch reelle Darstellungen, so hat $\mathbb{Z}_4$ zwei nicht-äquivalente eindimensionale, irreduzible Darstellungen, die durch $\rho(\varphi^j)x = x$ beziehungsweise $\rho(\varphi^j)x = (-1)^j x$ für $x \in \mathbb{R}$ und $j \in \{0, \ldots, 3\}$ gegeben sind. Weiterhin gibt es noch eine zweidimensionale, irreduzible, aber nicht absolut irreduzible Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$, die gegeben ist durch
$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Es sei G die Dieder-Gruppe $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese besteht aus den Drehungen und Spiegelungen der Ebene, die ein regelmäßiges n-Eck auf sich abbilden. Sie hat $2n$ Elemente und wird zum Beispiel erzeugt von der Drehung φ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und der Spiegelung κ an einer der Symmetrieachsen.

   Ist n gerade, so hat $\mathbb{D}_n$ vier nicht-äquivalente eindimensionale und $\frac{n}{2} - 1$ nicht-äquivalente zweidimensionale, absolut irreduzible, reelle Darstellungen.

   Die triviale Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R})$ ist gegeben durch $\rho(\varphi^j) = 1$ und $\rho(\kappa\varphi^j) = 1$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. Weitere eindimensionale Darstellungen $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R})$ werden definiert durch

   (a) $\rho(\varphi^j) = 1$ und $\rho(\kappa\varphi^j) = -1$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,
   (b) $\rho(\varphi^j) = (-1)^j$ und $\rho(\kappa\varphi^j) = (-1)^j$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,
   (c) $\rho(\varphi^j) = (-1)^j$ und $\rho(\kappa\varphi^j) = (-1)^{j+1}$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

   Die zweidimensionalen Darstellungen $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$ sind gegeben durch

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(k\varphi) & -\sin(k\varphi) \\ \sin(k\varphi) & \cos(k\varphi) \end{pmatrix}, \quad \rho(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

   für ein $k \in \{1, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$.

   Ist n ungerade, so hat $\mathbb{D}_n$ zwei nicht-äquivalente eindimensionale, irreduzible Darstellungen $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R})$, die gegeben sind durch

   (a) $\rho(\varphi^j) = 1$ und $\rho(\kappa\varphi^j) = 1$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,
   (b) $\rho(\varphi^j) = 1$, $\rho(\kappa\varphi^j) = -1$ für $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,

   und $\frac{n-1}{2}$ zweidimensionale, nicht-äquivalente, absolut irreduzible Darstellungen $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$, die für $k \in \{0, \ldots, \frac{n-1}{2}\}$ wie in (1.2) gebildet werden.

3. Die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ besteht aus den Drehungen $\varphi(\alpha)$ um den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und den Spiegelungen $\kappa\varphi(\alpha)$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei κ eine feste Spiegelung sei.

   Diese Gruppe hat folgende nicht-äquivalente, absolut irreduzible, reelle Darstellungen:

   (a) Die triviale Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R})$ mit $\rho(g) = 1$ für alle $g \in \mathbf{O}(2)$.
   (b) Eine eindimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R})$, die durch $\rho(\alpha) = 1$ für $\alpha \in [0, 2\pi)$ und $\rho(\kappa) = -1$ gegeben ist.
   (c) Zweidimensionale Darstellungen $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$, die durch

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in [0, 2\pi) \text{ und } \rho(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   für ein $k \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

□

Beispiel 1.1.5 Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist, das heißt, es gilt $\rho(g)\Omega = \Omega$ für alle $g \in G$.

Dann induziert ρ eine Darstellung auf dem Raum der über Ω quadrat-integrierbaren Funktionen $L^2(\Omega)$ durch

$$G \ni g \mapsto [L^2(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^2(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^2(\Omega)).$$

Wir bezeichnen diese Darstellung (und auch ihre Einschränkungen auf Unterräume von $L^2(\Omega)$) wieder mit ρ.

Zu jeder irreduziblen Darstellung $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen n-dimensionalen Unterraum U von $L^2(\Omega)$, so dass die auf U eingeschränkte Darstellung $\rho|_U : G \ni g \mapsto \rho(g)|_U \in \mathbf{GL}(U)$ äquivalent zu ρ' ist ([25, Theorem 3.2]). □

Satz 1.1.6 [9, Theorem 4.4.6] *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X.*

Ist die Darstellung ρ absolut irreduzibel, so ist sie auch irreduzibel.

Ist X ein endlichdimensionaler komplexer Banach-Raum und ist ρ irreduzibel, so ist ρ auch absolut irreduzibel.

Im reellen Fall sind irreduzible Darstellungen nicht notwendigerweise absolut irreduzibel (vgl. Beispiel 1.1.4).

Bemerkung 1.1.7 Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und X ein endlichdimensionaler, reeller Banach-Raum. Weiterhin sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine irreduzible reelle Darstellung von G auf X.

Dann ist die Menge der Isomorphismen $A \in \mathbf{GL}(X)$ mit

$$A \circ \rho(g) = \rho(g) \circ A \quad \text{für alle } g \in G$$

isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H}$ die vierdimensionale Algebra der Quaternionen ist ([18, Theorem 8.2.2]). Man sagt dann, die Darstellung ρ ist vom *reellen*, *komplexen* beziehungsweise *quaternionischen Typ*. Dabei sind die Darstellungen vom reellen Typ gerade die absolut irreduziblen Darstellungen. □

In dieser Arbeit werden wir hauptsächlich absolut irreduzible Darstellungen betrachten. Den Fall der Darstellungen vom quaternionischen Typ dagegen wollen wir generell ausschließen. Die meisten der in den Anwendungen auftretenden Darstellungen sind vom reellen oder komplexen Typ (vgl. jedoch [23]).

Bemerkung 1.1.8 [9, Theorem 4.4.7] Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^n)$ eine irreduzible reelle Darstellung vom komplexen Typ von G auf $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist die Menge der mit $\rho(g)$ für alle $g \in G$ kommutierenden Matrizen zweidimensional, und bei geeigneter Wahl der Koordinaten haben diese Matrizen die Form

$$\begin{pmatrix} \alpha \operatorname{Id}_p & -\beta \operatorname{Id}_p \\ \beta \operatorname{Id}_p & \alpha \operatorname{Id}_p \end{pmatrix}$$

mit α und β aus $\mathbb{R}$, wobei $n = 2p$ sei und $\operatorname{Id}_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. □

Ist eine reelle, irreduzible Darstellung gegeben, die nicht absolut irreduzibel ist, so ist es oft sinnvoll, diese in zwei komplexe, irreduzible (und damit auch absolut irreduzible) Darstellungen zu zerlegen.

Bemerkung 1.1.9

1. Jede reelle Darstellung definiert eine komplexe Darstellung gleicher Dimension:

   Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein reeller, endlichdimensionaler Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine reelle Darstellung von G auf X. Dann ist die Komplexifizierung von X gegeben durch $X_{\mathbb{C}} := X \oplus iX$. Auf $X_{\mathbb{C}}$ wird durch die reelle Darstellung ρ eine komplexe Darstellung induziert durch

   $$\rho_{\mathbb{C}}(g) : X \oplus iX \ni x + iy \mapsto \rho(g)x + i\rho(g)y \in X \oplus iX \quad \text{für } g \in G.$$

   Ist nun die reelle Darstellung ρ irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel, so ist die Dimension von X gerade und $\rho_{\mathbb{C}}$ ist nicht irreduzibel. Ist W ein irreduzibler (und damit auch absolut irreduzibler) Unterraum von $X_{\mathbb{C}}$, so gilt $X_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$. Dabei ist die Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}}$ auf $\overline{W}$ äquivalent zu $\overline{\rho}_{\mathbb{C}}|_W$.

2. Andererseits definiert jede komplexe Darstellung eine reelle Darstellung der doppelten Dimension:

   Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, $X_{\mathbb{C}}$ ein komplexer Banach-Raum der (komplexen) Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $\rho_{\mathbb{C}} : G \to \mathbf{GL}(X_{\mathbb{C}})$ eine komplexe Darstellung auf $X_{\mathbb{C}}$. Ist $X := \operatorname{Re} X_{\mathbb{C}}$, so ist X ein reeller Banach-Raum der (reellen) Dimension n, und es gilt $X_{\mathbb{C}} = X \oplus iX$. Auf X^2 induziert $\rho_{\mathbb{C}}$ durch

   $$\rho_{\mathbb{R}}(g) : X^2 \ni (x, y) \mapsto (\operatorname{Re} \rho_{\mathbb{C}}(g)(x + iy), \operatorname{Im} \rho_{\mathbb{C}}(g)(x + iy)) \in X^2 \quad \text{für } g \in G$$

   eine reelle Darstellung.

   Es seien nun speziell $X_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ und $\rho_{\mathbb{C}} : G \ni g \mapsto A_{\mathbb{C}}(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{C}^n)$. Die reelle Darstellung $\rho_{\mathbb{R}} : G \ni g \mapsto A_{\mathbb{R}}(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{2n})$ ist dann gegeben durch

   $$A_{\mathbb{R}}(g) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g) & -\operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g) \\ \operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g) & \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g) \end{pmatrix} \quad \text{für } g \in G.$$

□

Beispiel 1.1.10 Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}_4$ und die zweidimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$, die durch

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist (vgl. Beispiel 1.1.4). Diese ist irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel.

1. Es ist
$$W := \left\{\alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) : \alpha \in \mathbb{C}\right\}$$
ein unter der komplexifizierten Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}$ invarianter Unterraum von $\mathbb{C}^2$, denn es gilt
$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C}}(\varphi)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= \rho(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\rho(\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\\ &= i\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \exp(i\frac{\pi}{2})\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$
Also ist die Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}|_W$ äquivalent zu der Darstellung $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ mit $\rho(\varphi)z = \exp(i\frac{\pi}{2})z$ für $z \in \mathbb{C}$.
Auch
$$\overline{W} = \left\{\alpha\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) : \alpha \in \mathbb{C}\right\}$$
ist invariant unter $\rho_{\mathbb{C}}$ und es gilt
$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C}}(\varphi)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) &= \rho(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\rho(\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\\ &= -i\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \exp(-i\frac{\pi}{2})\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \exp(i\frac{3\pi}{2})\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$
Somit ist $\rho_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}}$ äquivalent zu $\bar{\rho}'$ und zur Darstellung $\rho'' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$, die durch $\rho''(\varphi)z = \exp(i\frac{3\pi}{2})z$ für $z \in \mathbb{C}$ definiert wird.

2. Die Darstellung ρ ist die Reellifizierung der Darstellung $\rho_{\mathbb{C}} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$, die durch $\rho_{\mathbb{C}}(\varphi)z = \exp(i\frac{\pi}{2})z$ für $z \in \mathbb{C}$ gegeben ist.

□

Sind G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Hilbert-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X, so gibt es ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf X, das invariant unter der Gruppenaktion ist, das heißt, es gilt $\langle\rho(g)x, \rho(g)y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle x, y aus X und alle $g \in G$ ([9, Theorem 4.4.2]).

Andererseits ist ρ äquivalent zu einer orthogonalen (beziehungsweise im komplexen Fall zu einer unitären) Darstellung ([9, Theorem 4.4.3]).

Es ist daher keine Einschränkung, nur orthogonale beziehungsweise unitäre Darstellungen zu betrachten.

Satz 1.1.11 [9, Corollary 4.4.9] *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Hilbert-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X.*

Dann lässt sich X als direkte Summe von irreduziblen Unterräumen schreiben.

Definition 1.1.12 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Hilbert-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei V ein irreduzibler Unterraum von X.*

Dann heißt

$$M := \bigcup \{W \subseteq X : \rho|_W \text{ ist äquivalent zu } \rho|_V\}$$

isotypische Komponente *von X.*

Sind G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X, so lässt sich X (auf eindeutige Weise) als direkte Summe seiner isotypischen Komponenten schreiben.

Definition 1.1.13 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X_1 und X_2 Banach-Räume und $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ Darstellungen von G auf X_1 beziehungsweise X_2.*

Eine Abbildung $T : X_1 \to X_2$ heißt äquivariant *bezüglich ρ_1 und ρ_2, falls für alle $g \in G$ gilt*

$$T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T.$$

Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X_1, X_2 Banach-Räume und $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ Darstellungen von G auf X_1 beziehungsweise X_2. Ist $T : X_1 \to X_2$ äquivariant bezüglich dieser Darstellungen und ist V ein irreduzibler Unterraum von X, so ist $T(V)$ invariant unter G, und entweder ist $T(V) = \{0\}$ oder $\rho_1|_V$ und $\rho_2|_{T(V)}$ sind äquivalent.

Lemma 1.1.14 [38, Corollary 2.6.8] *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Weiterhin seien X_1 und X_2 endlichdimensionale Banach-Räume und $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ irreduzible Darstellungen von G auf X_1 beziehungsweise X_2.*

Ist $T : X_1 \to X_2$ eine äquivariante lineare Abbildung von X_1 nach X_2, so ist entweder $T = 0$ oder es ist $\dim X_1 = \dim X_2$ und T ist ein Isomorphismus und ρ_1 und ρ_2 sind äquivalent.

1.2 Reguläre Werte und ein Transversalitätssatz

In diesem Abschnitt wird ein Transversalitätssatz vorgestellt, der ein zentrales Hilfsmittel in dieser Arbeit ist.

Sind X und Y Banach-Räume, so wird mit $\mathcal{L}(X,Y)$ der Raum der beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y (versehen mit der Operatornorm) bezeichnet. Ist $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, so sei $\ker(L) := \{x \in X : Lx = 0\}$ der *Kern* des Operators L und $\operatorname{range}(L) := L(X) = \{y \in Y : y = Lx \text{ für ein } x \in X\}$ das Bild von L.

Ist $U \subseteq X$ offen, so sei $C(U,Y)$ der Raum der stetigen Abbildungen von U nach Y (versehen mit der Supremumsnorm). Für $r \in \mathbb{N}$ sei $C^r(U,Y)$ der Raum der r-mal stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach Y.

Definition 1.2.1 *Es seien X und Y Banach-Räume und $U \subseteq X$ offen und zusammenhängend.*

1. *Ein linearer Operator $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt* Fredholm-Operator*, falls* $\operatorname{range}(L)$ *abgeschlossen ist und* $\ker(L)$ *und* $Y/\operatorname{range}(L)$ *endlichdimensional sind. Die Zahl*
$$\operatorname{ind}(L) := \dim\ker(L) - \dim(Y/\operatorname{range}(L)) = \dim\ker(L) - \operatorname{codim}\operatorname{range}(L)$$
heißt Index *von L.*

2. *Eine Abbildung $\Phi \in C^1(U,Y)$ heißt* Fredholm-Abbildung*, falls $D\Phi(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ für jedes $x \in U$ ein Fredholm-Operator ist.*

Ist $\Phi \in C^1(U,Y)$ eine Fredholm-Abbildung, so ist $D\Phi$ stetig. Daher ist die Abbildung $U \ni x \mapsto \operatorname{ind}(D\Phi(x)) \in \mathbb{Z}$ stetig und somit konstant. Also ist der *Index* von Φ
$$\operatorname{ind}(\Phi) = \operatorname{ind}(\Phi(x)) := \operatorname{ind}(D\Phi(x))$$
unabhängig von $x \in U$ (vgl. [4, (2.6.2)]).

Definition 1.2.2 *Es seien X und Y Banach-Räume, und $U \subset X$ sei offen und zusammenhängend.*

Für eine Abbildung $\Phi \in C^1(U,Y)$ ist $x \in U$ ein regulärer Punkt *von Φ, falls das Differential $D\Phi(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$ surjektiv ist, sonst heißt x* kritischer Punkt *von Φ.*

Ein $y \in Y$ ist ein regulärer Wert *von Φ, falls alle $x \in \Phi^{-1}(y)$ reguläre Punkte von Φ sind. Gibt es ein $x \in \Phi^{-1}(y)$, das ein kritischer Punkt von Φ ist, so heißt y* kritischer Wert *von Φ.*

Zu beachten ist, dass $y \in Y$ insbesondere dann ein regulärer Wert von $\Phi \in C^1(U,Y)$ ist, falls $\Phi^{-1}(y)$ leer ist.

Ist $y \in Y$ ein regulärer Wert von $\Phi \in C^1(U,Y)$, so sagt man auch, dass Φ *transversal* zur Menge $\{y\}$ ist.

Definition 1.2.3 *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum.*

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt residual *(oder* von zweiter Kategorie*) in X, falls U abzählbarer Durchschnitt von offenen und dichten Teilmengen von X ist. Das Komplement einer residualen Menge heißt* mager.

Nach dem Satz von Baire (siehe zum Beispiel [39, Satz IV.1.1]) ist eine residuale Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums X selber wieder dicht in X.

Der folgende Transversalitätssatz ist eine unendlichdimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Thom [1, Theorem 19.1].

Satz 1.2.4 [28], [32], [8] *Es seien X, Y und Z Banach-Räume, wobei X und Y separabel seien. Weiterhin sei $A \subseteq X \times Y$ offen und $\Phi \in C^r(A,Z)$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Wir setzen $A_Y := \{y \in Y : (x,y) \in A \text{ für ein } x \in X\}$.*

Außerdem sei $\zeta \in Z$ gegeben, und es seien folgende Bedingungen erfüllt:

1. *Für jedes $(x,y) \in \Phi^{-1}(\zeta)$ sei $D_1\Phi(x,y) \in \mathcal{L}(X,Z)$ ein Fredholm-Operator mit Index $\operatorname{ind}(D_1\Phi(x,y)) < r$. (Dabei bezeichne $D_1\Phi$ die Ableitung von Φ nach der ersten Komponente.)*

2. *Der Wert ζ sei regulärer Wert von Φ.*

Dann ist die Menge
$$\{y \in A_Y : \zeta \text{ ist regulärer Wert von } \Phi(\cdot,y)\}$$
residual in Y.

1.3 Eigenräume äquivarianter Operatoren

Im Folgenden wird zusammengestellt, wie sich Eigenwerte äquivarianter, abgeschlossener, linearer Operatoren verhalten, wenn man kleine Störungen des Operators betrachtet.

Es seien X_1 und X_2 (reelle) Banach-Räume, wobei X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet sei. Die Einbettungsabbildung sei $\mathrm{id} : X_1 \ni x \mapsto x \in X_2$.

Mit $\mathcal{C}(X_2)$ werde die Menge der abgeschlossenen Operatoren von X_2 bezeichnet.

Ist für einen abgeschlossenen, linearen Operator T mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = X_1$ die Resolventenabbildung $R(\lambda_0, T) := (T + \lambda_0 \,\mathrm{id})^{-1}$ kompakt für ein λ_0 aus der Resolventenmenge $P(T)$, so ist $R(\lambda, T)$ kompakt für alle $\lambda \in P(T)$ ([17, Theorem III.6.29]). Wir sagen dann, T ist ein *Operator mit kompakter Resolvente.* Das Spektrum $\sigma(T)$ eines Operators T mit kompakter Resolvente ist abzählbar, besteht nur aus Eigenwerten mit endlichen Vielfachheiten und hat keinen endlichen Häufungspunkt ([17, Theorem III.6.29]).

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Eigenwert* eines abgeschlossenen, linearen Operators $T \in \mathcal{C}(X_2)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = X_1$, falls es ein $x \in X_1 \setminus \{0\}$ gibt mit

$$(T + \lambda \,\mathrm{id})x = 0. \tag{1.3}$$

Dabei ist zu bemerken, dass wir bei der Formulierung der Eigenwertgleichung (1.3) von der „üblichen“ Definition aus der Funktionalanalysis abweichen und sozusagen das negative Spektrum betrachten. Der Grund hierfür ist die spezielle Struktur des Spektrums von selbstadjungierten, strikt elliptischen, linearen Differentialoperatoren (siehe Satz 1.4.1).

Ein $x \in X_1 \setminus \{0\}$, das für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ die Eigenwertgleichung (1.3) erfüllt, heißt *Eigenvektor* zum Eigenwert λ, und $E_\lambda := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(T + \lambda \,\mathrm{id})^n$ ist der *(verallgemeinerte) Eigenraum* von T. Die Dimension $\dim(E_\lambda)$ von E_λ ist die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ, die Dimension von $\ker(T + \lambda \,\mathrm{id})$ heißt *geometrische Vielfachheit* von λ.

Sind X_1 und X_2 Hilbert-Räume, wobei X_1 wieder kompakt und dicht in X_2 eingebettet sei, und ist $T \in \mathcal{C}(X_2)$ ein abgeschlossener, selbstadjungierter, linearer Operator mit kompakter Resolvente, so sind alle Eigenwerte von T reell und die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte ist gleich ihrer geometrischen Vielfachheit. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von T, so gilt $X_2 = \mathrm{range}(T + \lambda \,\mathrm{id}) \oplus \ker(T + \lambda \,\mathrm{id})$, wobei $\mathrm{range}(T + \lambda \,\mathrm{id})$ und $\ker(T + \lambda \,\mathrm{id})$ auch orthogonal aufeinander stehen.

Im Folgenden soll die Frage behandelt werden, wie sich die Eigenwerte eines linearen Operators mit kompakter Resolvente verhalten, wenn man kleine Störungen des Operators betrachtet.

Satz 1.3.1 [17] *Es seien X_1 und X_2 Banach-Räume, wobei X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet sei. Der lineare Operator $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ habe kompakte Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$). Weiterhin sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein m-facher Eigenwert von T und $\mathcal{V}$ sei eine Umgebung von λ in $\mathbb{C}$, so dass keine weiteren Eigenwerte von T in $\mathcal{V}$ enthalten sind.*

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle linearen Operatoren $T' \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \leq \delta$ das Spektrum von T' in $\mathcal{V}$ genau aus m Eigenwerten $\mu_1, \dots, \mu_m$ besteht, wobei jeder dieser Eigenwerte entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt wird.

Genauere Aussagen über das Verhalten der Eigenwerte kann man treffen, wenn man analytische Störungsreihen in Hilbert-Räumen betrachtet.

Satz 1.3.2 (Störungssatz von Rellich) [29, Theorem II.5.3] *Es seien X_1 und X_2 Hilbert-Räume, so dass X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet ist. Weiterhin sei*

$$T(\varepsilon) = T + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots$$

analytisch in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$, wobei $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ selbstadjungiert sei und kompakte Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$) habe und $T^{(k)} \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ für $k \in \mathbb{N}$ symmetrisch seien.

Es sei λ ein Eigenwert der Vielfachheit m von $T(0) = T$ und es sei $I \ni \lambda$ ein offenes Intervall, das außer λ keine weiteren Eigenwerte von T enthält.

Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und Potenzreihen

$$\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_m(\varepsilon)$$

in $\mathbb{R}$ und

$$\phi_1(\varepsilon), \dots, \phi_m(\varepsilon),$$

in X_1, die für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ konvergieren und folgende Bedingungen erfüllen:

1. *Es gilt $\lambda_j(0) = \lambda$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$.*

2. *Für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ besteht das Spektrum von $T(\varepsilon)$ in I genau aus den Eigenwerten $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_m(\varepsilon)$, wobei jeder dieser Eigenwerte entsprechend seiner Vielfachheit aufgeführt wird.*

3. *Die $\phi_1(\varepsilon), \dots, \phi_m(\varepsilon)$ sind Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_m(\varepsilon)$ von $T(\varepsilon)$ und sind orthonormal, das heißt, es gilt*

   $$(T(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon)\,\mathrm{id})\phi_j(\varepsilon) = 0 \quad \textit{für alle } j \in \{1, \dots, m\}$$

   und

   $$\langle \phi_j(\varepsilon), \phi_k(\varepsilon) \rangle = \delta_{jk} \quad \textit{für alle } j, k \in \{1, \dots, m\}$$

   für $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf X_2 bezeichne und δ_{jk} das Kronecker-Symbol sei.

Als nächstes betrachten wir speziell äquivariante Operatoren.

Gegeben seien Banach-Räume X_1 und X_2, so dass X_1 in X_2 kompakt und dicht eingebettet ist. Weiterhin seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ seien Darstellungen von G auf X_1 beziehungsweise auf X_2 mit $\rho_1 = \rho_2|_{X_1}$ (das heißt, für jedes $g \in G$ ist die Abbildung $\rho_1(g) \in \mathbf{GL}(X_1)$ die Einschränkung der Abbildung $\rho_2(g) \in \mathbf{GL}(X_2)$ auf den Unterraum X_1). Mit $\mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ bezeichnen wir die Menge der äquivarianten, beschränkten, linearen Abbildungen von X_1 nach X_2.

Ist $T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T, so sind $\ker(T + \lambda\,\mathrm{id})$ und der Eigenraum E_λ invariant unter G. Hat T zusätzlich kompakte Resolvente (aufgefasst als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$), so sind die von ρ_1 auf E_λ und $\ker(T + \lambda\,\mathrm{id})$ induzierten Darstellungen endlichdimensional (vgl. [9, Lemma 4.8.2]).

Der Eigenraum E_λ lässt sich daher als direkte Summe von irreduziblen Räumen darstellen (vgl. Satz 1.1.11). Betrachtet man einen weiteren äquivarianten, linearen Operator in der Nähe von T, so kann man den entsprechenden Eigenraum ebenfalls in eine direkte Summe irreduzibler Unterräume zerlegen. Der nächste Satz klärt, wie sich die Darstellungen auf diesen irreduziblen Unterräumen zueinander verhalten.

Satz 1.3.3 [9, Theorem 4.8.4] *Es seien X_1 und X_2 Banach-Räume, so dass X_1 in X_2 kompakt und dicht eingebettet ist. Weiterhin seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(X_1)$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(X_2)$ Darstellungen mit $\rho_1 = \rho_2|_{X_1}$. Der Operator $T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ habe kompakte Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$) und λ sei Eigenwert von T. Es sei $\mathcal{V}$ eine Umgebung von λ in $\mathbb{C}$, die keine weiteren Eigenwerte von T enthält.*

Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $s \in \mathbb{N}$, so dass alle Operatoren $T' \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} < \delta$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_s$ in $\mathcal{V}$ haben mit

$$\dim(E_\lambda) = \sum_{j=1}^{s} \dim(E_{\mu_j}).$$

Alle irreduziblen Darstellungen, die in E_λ vorkommen, treten in $\bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}$ mit der gleichen Vielfachheit auf.

Es seien nun X_1 und X_2 Hilbert-Räume, so dass X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet ist. Weiter sei $T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ ein äquivarianter, selbstadjungierter, linearer Operator mit kompakter Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$) und λ sei ein Eigenwert von T. Dann gibt es irreduzible Unterräume $V_1, \dots, V_m$ mit $E_\lambda = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$. Ist $T' \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ in der Nähe von T, so impliziert Satz 1.3.3, dass T' Eigenwerte $\mu_1, \dots, \mu_s$ in der Nähe von λ hat und dass es irreduzible Unterräume $W_1, \dots, W_m$ von $\bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j}$ gibt mit $\bigoplus_{j=1}^{s} E_{\mu_j} = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$, so dass $\rho_1|_{V_j}$ äquivalent zu $\rho_1|_{W_j}$ ist für $j \in \{1, \dots, m\}$.

Der nächste Satz besagt, dass es in der Nähe von T sogar einen äquivarianten linearen Operator gibt, so dass die Eigenräume E_{μ_j} für $j \in \{1, \dots, s\}$ mit den irreduziblen Räumen W_j übereinstimmen.

Das bedeutet, selbstadjungierte, äquivariante, abgeschlossene, lineare Operatoren mit kompakter Resolvente haben „typischerweise“ irreduzible Eigenräume.

Definition 1.3.4 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und X_1 und X_2 Hilbert-Räume, so dass X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet ist. Weiterhin seien $\rho_j : G \to \mathbf{GL}(X_j)$ für $j \in \{1, 2\}$ Darstellungen von G auf X_j, wobei $\rho_1 = \rho_2|_{X_1}$ sei. Außerdem sei $T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2)$ ein selbstadjungierter, linearer Operator mit kompakter Resolvente (als Operator in $\mathcal{C}(X_2)$).*

*Ein Eigenwert von T heißt G-*einfach*, falls der zugehörige Eigenraum irreduzibel ist.*

Satz 1.3.5 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und X_1 und X_2 Hilbert-Räume, so dass X_1 kompakt und dicht in X_2 eingebettet ist. Weiterhin seien $\rho_j : G \to \mathbf{GL}(X_j)$ für $j \in \{1, 2\}$ Darstellungen von G auf X_j, wobei $\rho_1 = \rho_2|_{X_1}$ sei.*

Die Menge

$$\{T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) : \ T \textit{ selbstadjungiert, abgeschlossen, hat kompakte Resolvente,}$$
$$\textit{alle Eigenwerte von } T \textit{ sind } G\textit{-einfach}\}$$

ist residual in

$$\{T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) : T \textit{ selbstadjungiert, abgeschlossen, hat kompakte Resolvente}\}.$$

Wir sagen, eine Eigenschaft ist *generisch* innerhalb einer Familie von Operatoren, falls die Menge der Operatoren mit dieser Eigenschaft residual innerhalb der betrachteten Familie ist. Satz 1.3.5 besagt somit, dass generisch die Eigenräume äquivarianter, selbstadjungierter, abgeschlossener, linearer Operatoren mit kompakter Resolvente irreduzibel sind.

Beweis: (vgl. auch Beweis von [14, Proposition XIII.3.2])
Es seien

$$B := \{T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) : T \text{ selbstadjungiert, abgeschlossen, hat kompakte Resolvente}\}$$

und

$$\begin{aligned} B' := \{T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) :\ & T \text{ selbstadjungiert, abgeschlossen, hat kompakte Resolvente,} \\ & \text{alle Eigenwerte von } T \text{ sind } G\text{-einfach}\}. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass B' abzählbarer Durchschnitt von offenen und dichten Teilmengen von B ist. Dazu setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} B_n := \{T \in \mathcal{L}_G(X_1, X_2) :\ & T \text{ selbstadjungiert, abgeschlossen, hat kompakte Resolvente,} \\ & \text{alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } T \text{ mit } |\lambda| \le n \text{ sind } G\text{-einfach}\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$B' \subseteq \ldots \subseteq B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq \ldots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B$$

und

$$B' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Wir werden zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Menge B_n offen ist und dass B_{n+1} dicht in B_n ist.

1. *Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist B_n offen.*

   Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $T \in B_n$. Dann sind die Eigenräume zu Eigenwerten λ von T mit $|\lambda| \le n$ irreduzibel. Da der Operator T kompakte Resolvente hat, gibt es endlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von T mit $|\lambda_j| \le n$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$. Weiterhin seien $\lambda_{k+1} := \min\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda > n\}$ und $\lambda_{k+2} := \max\{\lambda \in \sigma(T) : \lambda < -n\}$. Dann gibt es paarweise disjunkte, offene Intervalle I_j mit $\lambda_j \in I_j$ für $j \in \{1, \ldots, k+2\}$, die keine weiteren Eigenwerte von T enthalten, wobei noch $I_{k+1} \subset (n, \infty)$ und $I_{k+2} \subset (-\infty, -n)$ gelten soll.

   Da $T \in B_n$ ist, sind die Eigenräume zu den Eigenwerten λ_j für $j \in \{1, \ldots, k\}$ irreduzibel. Aus Satz 1.3.3 folgt, dass es zu jedem $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein $\delta_j > 0$ gibt, so dass alle $T' \in B$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \delta_j$ in I_j (genau) einen Eigenwert μ_j mit irreduziblem Eigenraum E_{μ_j} haben. Ebenso gibt es zu $j \in \{k+1, k+2\}$ ein $\delta_j > 0$, so dass die durch Störungen $T' \in B$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \delta_j$ aus λ_j entstehenden Eigenwerte in I_j enthalten sind.

   Ist nun $\delta := \min\{\delta_j : j \in \{1, \ldots, k+2\}\}$ und ist $T' \in B$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)} < \delta$, so hat T' paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_j \in I_j$ mit irreduziblen Eigenräumen E_{μ_j} $(j \in \{1, \ldots, k\})$ und alle anderen Eigenwerte von T' sind betraglich größer als n. Also ist $T' \in B_n$.

   Hieraus folgt, dass B_n offen ist.

2. Es sei λ ein Eigenwert von $T \in B$ und $E_\lambda = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ eine Zerlegung des zugehörigen Eigenraums in irreduzible Unterräume $V_1, \ldots, V_s$. Außerdem sei $I \ni \lambda$ ein Intervall, das außer λ keinen weiteren Eigenwert von T enthält.

   Behauptung: Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $T_0 \in B$ mit $\|T - T_0\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} < \varepsilon$, so dass T_0 in I paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ hat und dass für $j \in \{1, \ldots, s\}$ die Darstellung $\rho|_{E_{\mu_j}}$ äquivalent zu $\rho|_{V_j}$ ist.

   Es sei $\varepsilon > 0$.

   Nach Satz 1.3.3 gibt es ein $\delta_1 > 0$, so dass alle $T' \in B$ mit $\|T - T'\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} < \delta_1$ Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_k$ in I haben und alle irreduziblen Darstellungen aus E_λ auch in $\bigoplus_{j=1}^k E_{\mu_j}$ vorkommen.

   Es ist $X_1 = E_\lambda \oplus W$, wobei W zum Beispiel die direkte Summe der Eigenräume zu den anderen Eigenwerten von T ist. Wir definieren nun einen Operator $S : X_1 \to X_2$ durch $S|_W = 0$, $S|_{V_1} = 0$ und $S|_{V_j} = \mathrm{id}$ für $j \in \{2, \ldots, s\}$. Es sei nun $\varepsilon_1 > 0$ so, dass $\lambda - \varepsilon_1 \in I$ ist und für $T_1 := T + \varepsilon_1 S$ gilt $\|T - T_1\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \leq \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_1\}$. Dann hat T_1 in I einen Eigenwert $\mu_1 = \lambda$ mit Eigenraum $E_{\mu_1} = V_1$ und einen Eigenwert $\mu_2 = \lambda - \varepsilon_1$ mit Eigenraum $E_{\mu_2} = V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$.

   Nach Satz 1.3.3 gibt es nun ein $\delta_2 > 0$, so dass alle $T' \in B$ mit $\|T_1 - T'\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \leq \delta_2$ Eigenwerte $\mu_1' \in I \cap (\lambda - \frac{\varepsilon_1}{3}, \lambda + \frac{\varepsilon_1}{3})$ und $\mu_2', \ldots, \mu_l'$ in $I \cap (\lambda - \frac{4\varepsilon_1}{3}, \lambda - \frac{2\varepsilon_1}{3})$ haben und $\rho|_{E_{\mu_1'}}$ äquivalent zu $\rho|_{V_1}$ ist und alle irreduziblen Darstellungen aus $\bigoplus_{j=2}^k E_{\mu_j}$ auch in $\bigoplus_{j=2}^k E_{\mu_j'}$ vorkommen. Man kann nun analog zur Konstruktion von T_1 eine Störung von T_1 finden, so dass der Eigenwert μ_2 von T_1 aufspaltet in zwei Eigenwerte, wobei einer der Eigenräume irreduzibel ist.

   Verfährt man auf analoge Weise weiter, so erhält man nach s Schritten induktiv den gesuchten Operator T_0.

3. Es sei nun $T \in B_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es endlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ von T mit $n < |\lambda_j| \leq n + 1$, $j \in \{1, \ldots, s\}$. Mit den Überlegungen aus Beweisschritt 2 können wir sukzessive Störungen konstruieren, so dass die entsprechenden Eigenräume irreduzibel werden.

   Hieraus folgt, dass B_{n+1} dicht in B_n ist.

□

1.4 Elliptische Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt betrachten wir Eigenwertprobleme von elliptischen linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Zunächst führen wir einige Funktionenräume ein:
Mit $C(\Omega)$ wird die Menge aller auf Ω stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnet. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $C^k(\Omega)$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω.

Mit $C^k(\overline{\Omega})$ werde die Menge der Funktionen aus $C^k(\Omega)$ bezeichnet, deren Ableitungen eine stetige Fortsetzung auf den Rand $\partial\Omega$ von Ω haben. Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|u\|_{C^k} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \max\{|D^\alpha u(x)| : \alpha \in \mathbb{N}_0^N \text{ mit } |\alpha| \le k\}$$

ein Banach-Raum, wobei $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}$ für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}_0^N$ mit $D_j^k = \frac{\partial^k}{\partial x_j^k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ sei.

Weiterhin sei $C^\infty(\Omega)$ die Menge der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen von Ω nach $\mathbb{R}$ und $C^\infty(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$, deren Ableitungen stetige Fortsetzungen auf $\partial\Omega$ haben. Mit der von den Normen $\|\cdot\|_{C^k}$ induzierten Metrik wird $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\overline{\Omega})$ ein vollständiger metrischer Raum.

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $C_0^k(\Omega)$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger im Inneren von Ω.

Es sei $p \in (1, \infty)$. Dann ist $L^p(\Omega)$ der Raum der messbaren, über Ω p-integrierbaren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Durch

$$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \ni u \mapsto \Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_0^+$$

wird auf $L^p(\Omega)$ eine Norm erklärt (wenn man Funktionen, die fast-überall gleich sind, zu Äquivalenzklassen zusammenfasst). Der Raum $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \ni (u, v) \mapsto \int_\Omega uv \in \mathbb{R}$.

Mit $L^\infty(\Omega)$ wird die Menge der messbaren Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\|u\|_\infty := \inf\{k \in \mathbb{R} : \{x \in \Omega : |u(x)| > k\} \text{ ist Nullmenge}\} < \infty$$

bezeichnet.

Die Sobolev-Räume der Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$, deren distributionellen Ableitungen bis zur Ordnung $k \in \mathbb{N}$ existieren und p-integrierbar sind für ein $p \in (1, \infty)$, werden mit $W^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet. Auf $W^{k,p}(\Omega)$ wird durch

$$\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} : W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm erklärt. Weiterhin sei $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$. Ist speziell $p = 2$, so schreiben wir auch $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$.

Der Sobolevsche Einbettungssatz ([13, Corollary 7.11, Theorem 7.22]) liefert, dass $W_0^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$ kompakt in $C^m(\overline{\Omega})$ für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le m < k - \frac{N}{p}$ eingebettet ist. Falls der Rand von Ω hinreichend glatt ist (Lipschitz-Rand), ist auch $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in (1, \infty)$ kompakt in $C^m(\overline{\Omega})$ für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \le m < k - \frac{N}{p}$ eingebettet ([13, Theorem 7.26]).

Gegeben sei nun ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung

$$L : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

für ein $p \in (1,\infty)$ der Form

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_{jk}D_k u + b_j u) + \sum_{j=1}^{N} c_j D_j u + du$$

für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, wobei die Koeffizienten a_{jk} für $j,k \in \{1,\ldots,N\}$, b_j, c_j für $j \in \{1,\ldots,N\}$ und d beschränkt seien.

Der Operator L heißt *elliptisch*, falls es zu jedem $x \in \Omega$ Zahlen $\theta(x) > 0$ und $\Theta(x) > 0$ mit

$$0 < \theta(x)|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \leq \Theta(x)|\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

gibt. Existiert zusätzlich eine Konstante $\theta_0 > 0$ mit $\theta_0 \leq \theta(x)$ für alle $x \in \Omega$, so ist L *strikt elliptisch.*

Es sei $p \in (1,\infty)$. Es sei $L : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ein strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^k(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und es sei der Rand von Ω hinreichend glatt (Lipschitz-Rand). Ist $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ eine Lösung von $Lu = f$ mit einem $f \in W^{k,q}(\Omega)$ für ein $q \in (1,\infty)$, so gilt $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$ ([13, Theorem 9.19]). Ist $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{N}{q} < 2$, so folgt aus $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$ und den obigen Einbettungssätzen, dass $u \in C^k(\overline{\Omega})$ gilt. Für $q > N$ ergibt sich sogar $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$.

Ist speziell $f = 0$, so folgt hieraus, dass $\ker L \subset W^{k+2,q}(\Omega)$ für jedes $q \in (1,\infty)$ ist (vgl. auch [33, Theorem 10.10]). Der Kern von L ist also unabhängig von p. Die Einbettungssätze liefern daher $\ker L \subset C^{k+1}(\overline{\Omega})$.

Ist

$$L : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto \sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_{jk}D_k u + b_j u) + \sum_{j=1}^{N} c_j D_j u + du \in L^p(\Omega)$$

ein strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung für ein $p \in (1,\infty)$, so ist der *formal-adjungierte Operator* zu L definiert durch

$$L^* : W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \ni u \mapsto \sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_{kj}D_k u - c_j u) - \sum_{j=1}^{N} b_j D_j u + du \in L^q(\Omega)$$

mit $q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (Man erhält L^* durch Adjungieren im Sinne der Distributionstheorie oder als Adjungierten des abgeschlossenen Operators L in $L^p(\Omega)$; vgl. [13], [33] oder [40].)

Ist

$$L^* u = \sum_{j,k=1}^{N} D_j(a_{jk}D_k u + b_j u) + \sum_{j=1}^{N} c_j D_j u + du$$

für $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$, so ist L *formal-selbstadjungiert* und im Fall $p = 2$ selbstadjungiert. Da $\ker L$ unabhängig von p ist, gilt dann $\ker L = \ker L^*$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{range} L &= \{v \in L^p(\Omega) : \langle u, v\rangle = \int_\Omega uv = 0 \text{ für alle } u \in \ker L^*\} \\ &= \{v \in L^p(\Omega) : \langle u, v\rangle = \int_\Omega uv = 0 \text{ für alle } u \in \ker L\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

([33, Theorem 10.10]). Der Operator L ist in diesem Fall ein Fredholm-Operator mit Index $\operatorname{ind} L = 0$.

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem für einen strikt elliptischen, linearen Differentialoperator zweiter Ordnung L auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(L + \lambda)u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.5}$$

Im Folgenden werden einige Ergebnisse über Eigenwerte und Eigenräume elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung zusammengestellt.

Satz 1.4.1 [13, Theorem 8.37] *Es sei $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung.*

Dann hat L abzählbar unendlich viele Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ mit $\lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$ mit endlichen Vielfachheiten, deren Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ bilden.

Ist $L : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ für ein $p \in (1, \infty)$ ein formal-selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung, so ist nach obigen Überlegungen $\ker(L + \lambda\,\mathrm{id})$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ unabhängig von p. Daher besteht das Spektrum von L auch in diesem Fall aus abzählbar unendlich vielen, reellen Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ mit $\lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$ mit endlichen Vielfachheiten. Sind die Koeffizienten von L aus $C^k(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist $\ker(L + \lambda\,\mathrm{id}) \subset C^{k+1}(\overline{\Omega})$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Insbesondere sind die Eigenfunktionen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, falls die Koeffizienten von L dies ebenfalls sind.

In Uhlenbeck [37] wird gezeigt, dass in gewissen Klassen von elliptischen Differentialoperatoren die Operatoren, die nur einfache Eigenwerte haben, generisch sind. Das bedeutet, dass die Menge der Operatoren aus der Klasse, die nur einfache Eigenwerte haben, residual in der betrachteten Familie von Operatoren ist. „Typischerweise“ haben also diese Operatoren nur einfache Eigenwerte, und zu jedem Operator mit mehrfachen Eigenwerten gibt es in der Nähe einen, der nur einfache Eigenwerte hat. Mehrfache Eigenwerte sind also instabil unter Störungen innerhalb der betrachteten Familie.

Eine dieser Klassen von Operatoren sind Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung eines gegebenen Operators. Es wird gezeigt, dass für einen selbstadjungierten, strikt elliptischen, linearen Differentialoperator zweiter Ordnung L mit glatten Koeffizienten die Menge

$$\{b \in C^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L + b \text{ sind einfach}\}$$

residual in $C^k(\overline{\Omega})$ ist für $k > N + 2$. Das bedeutet, generisch haben die Operatoren $L + b$ mit $b \in C^k(\overline{\Omega})$ nur einfache Eigenwerte. Der Beweis dieser Aussage beruht auf dem Transversalitätssatz 1.2.4.

In Albert [2] wird die gleiche Aussage für $k = \infty$ gezeigt, wobei hier der Beweis aus dem Störungssatz von Rellich (Satz 1.3.2) abgeleitet wird.

Eine weitere Klasse von Differentialoperatoren erhält man, wenn man den Laplace-Operator auf einem gegebenem Gebiet betrachtet und das Gebiet stört, wobei diese

Störungen durch Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^N$ beschrieben werden, die sich nicht sehr von der Identität unterscheiden. In UHLENBECK [37] wird nun gezeigt, dass die Menge der Diffeomorphismen, so dass der Laplace-Operator auf dem gestörten Gebiet nur einfache Eigenwerte hat, residual in der Menge aller möglichen Diffeomorphismen ist. Ähnliche Ergebnisse findet man in FUJIWARA, TANIKAWA, YUKITA [12] und MICHELETTI [21]. In LUPO, MICHELETTI [19], [20] wird gezeigt, dass die Störungen des Gebiets, die bei einem zweifachen Eigenwert die Vielfachheit erhalten, eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 2 innerhalb der Menge der Störungen bilden.

Ähnliche Generizitätsaussagen erhält man auch bei Störungen der Randbedingung (OZAWA [24]) und Störungen der Metrik der Mannigfaltigkeit, auf der der Differentialoperator gegeben ist (UHLENBECK [37], TANIKAWA [35], BLEECKER, WILSON [5]).

Hat das Gebiet jedoch Symmetrien und schränkt man die Klasse der betrachteten Operatoren auf äquivariante Differentialoperatoren ein, so gibt es notwendigerweise mehrfache Eigenwerte.

Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist. Das heißt, es gilt $\rho(g)\Omega = \Omega$ für alle $g \in G$.

Durch $G \ni g \mapsto [L^2(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g)^{-1} \in L^2(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^2(\Omega))$ wird von ρ eine Darstellung von G auf $L^2(\Omega)$ induziert, welche wir wieder mit ρ bezeichnen (vgl. Beispiel 1.1.5).

Ist nun L ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung, so sind die Eigenräume von L invariant. Da die Eigenfunktionen von L eine Orthogonalbasis von $L^2(\Omega)$ bilden und in $L^2(\Omega)$ alle Darstellungen von G vorkommen, hat L notwendigerweise mehrfache Eigenwerte: Denn ist ρ' eine mehrdimensionale irreduzible Darstellung von G, so muss es einen Eigenwert von L geben, so dass die Darstellung auf einem irreduziblen Unterraum des Eigenraums äquivalent zu ρ' ist (vgl. Beispiel 1.1.5 beziehungsweise [25, Theorem 3.2]). Nach Satz 1.3.3 bleibt diese irreduzible Darstellung unter äquivarianten Störungen von L erhalten. Somit haben auch alle äquivarianten Operatoren in der Nähe von L einen mehrfachen Eigenwert. Einfache Eigenwerte können also nicht mehr generisch sein, denn die Symmetrie erzwingt mehrfache Eigenwerte.

Nach Satz 1.3.5 gibt es beliebig nahe an L einen selbstadjungierten, abgeschlossenen, linearen Operator mit kompakter Resolvente, dessen Eigenräume alle irreduzibel sind. Die im Beweis von Satz 1.3.5 konstruierten Störungen sind jedoch nicht notwendigerweise Differentialoperatoren. Es stellt sich daher die Frage, ob innerhalb der betrachteten Klasse von äquivarianten elliptischen Differentialoperatoren generisch die Eigenräume alle irreduzibel sind.

In PEREIRA [25] wird gezeigt, dass für generische Gebiete, die invariant unter kommutativen Gruppen oder unter endlichen Untergruppen von $\mathbf{O}(2)$ sind, alle Eigenräume des Laplace-Operators irreduzibel sind. Dabei wird der Beweisansatz von UHLENBECK [37] auf den Fall äquivarianter Operatoren verallgemeinert. Ähnliche Ergebnisse findet man auch in TANIKAWA [36] und DRISCOLL [10] für Gebiete, die invariant unter $\mathbb{Z}_3$ beziehungsweise unter diskreten Drehungen sind, wobei hier der störungstheoretische Ansatz von ALBERT [2] und MICHELETTI [21] verfolgt wird.

Ziel von Kapitel 3 und Kapitel 4 ist es, für Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung eines äquivarianten, selbstadjungierten, strikt elliptischen, linearen Differentialoperators zweiter Ordnung zu zeigen, dass für generische Störungen die Eigenwerte G-einfach sind, das heißt, dass die Eigenräume der Operatoren irreduzibel sind.

Dabei werden wir in Kapitel 3 den Beweisansatz von Albert [2], der auf dem Störungssatz von Rellich (Satz 1.3.2) aufbaut, für den Fall äquivarianter Operatoren verallgemeinern. In Kapitel 4 wird der Ansatz von Uhlenbeck [37] und Pereira [25] verfolgt, der auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 beruht.

1.5 Gleichgewichte von Reaktions-Diffusions-Gleichungen

Als nächstes sollen Gleichgewichte von Reaktions-Diffusions-Gleichungen untersucht werden.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ der Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Wir betrachten das Dirichlet-Problem für die Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$u_t = \Delta u + f(\cdot, u) \quad \text{auf } \Omega, t > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{für } t > 0 \tag{1.6}$$

mit $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, wobei mit $\Delta := \sum_{j=1}^N D_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ der Laplace-Operator bezeichnet wird.

Ist $p > N$, so ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ eingebettet in $C(\overline{\Omega})$. Dann wird durch (1.6) ein lokaler Halbfluss auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ induziert (siehe zum Beispiel [15]).

Im Folgenden sollen Gleichgewichte dieses Halbflusses untersucht werden. Diese erfüllen das elliptische, nichtlineare Randwertproblem

$$\Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.7}$$

Für $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $p > N$ definieren wir den elliptischen Differentialoperator

$$L_f : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto \Delta u + f(\cdot, u) \in L^p(\Omega).$$

Ist $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $L_f(u) = 0$, so folgt aus $p > N$ und den Einbettungssätzen (vgl. Abschnitt 1.4), dass $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist. Dann ist u auch Lösung der *linearen* Gleichung $\Delta u = g$ mit $g : \overline{\Omega} \ni x \mapsto -f(x, u(x)) \in \mathbb{R}$. Wegen $f \in C^k(\overline{\Omega})$ und $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt $g \in C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\overline{\Omega})$. Aus der Regularitätstheorie für lineare, elliptische Differentialoperatoren (vgl. Seite 22) ergibt sich hieraus $u \in W^{3,p}(\Omega)$. Aus den Einbettungssätzen folgt nun $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dies impliziert $g \in C^2(\overline{\Omega}) \subset W^{2,p}(\Omega)$ (falls $k \geq 2$ ist). Eine Iteration dieses Arguments liefert $u \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$. Daher ist $\ker L_f \subset C^{k+1}(\overline{\Omega})$.

Definition 1.5.1 *Es seien $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $p > N$.*

Ein Gleichgewicht $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ von (1.6) heißt hyperbolisch, *falls die Linearisierung*

$$DL_f(u) : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \ni v \mapsto \Delta v + D_2 f(\cdot, u)v \in L^p(\Omega) \tag{1.8}$$

von L_f in u keine Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ hat mit $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Da $DL_f(u)$ ein strikt elliptischer, formal-selbstadjungierter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^k(\overline{\Omega})$ ist, folgt, dass $\ker DL_f(u) \subset C^k(\overline{\Omega})$ unabhängig von p ist und das Spektrum $\sigma(DL_f(u))$ von $DL_f(u)$ nur aus reellen Eigenwerten besteht.

Hieraus ergibt sich, dass die Hyperbolizität eines Gleichgewichts von (1.6) unabhängig von $p > N$ ist. Außerdem ist ein Gleichgewicht u genau dann hyperbolisch, wenn 0 nicht Eigenwert von $DL_f(u)$ ist.

In Brunovský, Poláčik [8] wird gezeigt, dass für generische $f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alle Gleichgewichte von (1.6) hyperbolisch sind und die Eigenwerte der Linearisierung von (1.6) an diesen Gleichgewichten nur einfache Eigenwerte hat. Der Beweis dieser Aussage basiert wieder auf dem Transversalitätssatz 1.2.4.

Ähnliche Ergebnisse für eindimensionale Reaktions-Diffusions-Gleichungen und Nichtlinearitäten, die von $x \in \Omega$ unabhängig sind, findet man auch in Brunovský, Chow [6], Poláčik [27], Pereira [26] und Rocha [30].

In Rynne [31] werden Parameter-abhängige Reaktions-Diffusions-Gleichungen (in beliebiger Raumdimension) betrachtet, und es wird gezeigt, dass für generische Nichtlinearitäten die Menge der Gleichgewichte aus einer endlichen oder abzählbaren Menge von glatten, eindimensionalen Kurven besteht und jedes dieser Gleichgewichte entweder hyperbolisch ist oder ein Sattel-Knoten-Verzweigungspunkt der Kurve ist.

Man kann auch anstatt der Nichtlinearität das Gebiet variieren. In Henry [16] wird bewiesen, dass für generische C^2-Gebiete Ω im $\mathbb{R}^N$ alle Gleichgewichte von (1.6) hyperbolisch sind.

Nun betrachten wir wieder den Fall, dass Symmetrien vorliegen:

Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G (bezüglich der Darstellung ρ) ist. Dazu betrachten wir wieder die durch

$$G \ni g \mapsto [L^p(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^p(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^p(\Omega))$$

induzierte Darstellung von G auf $L^p(\Omega)$, die auch mit ρ bezeichnet wird (vgl. Beispiel 1.1.5). Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei

$$C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) := \{f \in C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : f(\rho(g)x, \cdot) = f(x, \cdot) \text{ für alle } g \in G, x \in \overline{\Omega}\}$$

die Menge aller in der Raum-Variablen invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Ist $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist der Operator

$$L_f : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto \Delta u + f(\cdot, u) \in L^p(\Omega)$$

äquivariant. Denn aus der Äquivarianz von Δ und Invarianz von f in der Raum-Variablen folgt

$$\begin{aligned}\rho(g)\big(\Delta u + f(\cdot,u)\big)(x) &= \big(\Delta u + f(\cdot,u)\big)(\rho(g^{-1})x)\\ &= \Delta u(\rho(g^{-1})x) + f(\rho(g^{-1})x, u(\rho(g^{-1})x))\\ &= \Delta\rho(g)u(x) + f(x,\rho(g)u(x))\\ &= \big(\Delta\rho(g)u + f(\cdot,\rho(g)u)\big)(x)\end{aligned}$$

für alle $g \in G$, $x \in \Omega$ und $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Dies impliziert $\rho(g) \circ L_f = L_f \circ \rho(g)$ für alle $g \in G$.

Schränkt man die Variation der Nichtlinearitäten ein auf $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, so ist die Hyperbolizität der Gleichgewichte von (1.6) nicht mehr eine generische Eigenschaft innerhalb von $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$:

Es sei $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ist nun $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ ein Gleichgewicht von (1.6), das heißt, ist $L_f(u) = 0$ auf Ω, so ist aufgrund der Äquivarianz von L_f auch $\rho(g)u$ für jedes $g \in G$ ein Gleichgewicht. Ist der Orbit $\mathcal{O}(u) = \{\rho(g)u : g \in G\}$ nicht diskret, so ist $\mathcal{O}(u)$ eine Untermannigfaltigkeit von $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ mit positiver Dimension. Dann ist jeder Tangentialvektor (ungleich 0) an $\mathcal{O}(u)$ im Punkt u eine Lösung von

$$\Delta v + D_2 f(\cdot,u)v = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Somit kann u nicht hyperbolisch sein.

In Brunovský, Poláčik [7] wird gezeigt, dass es, falls Ω eine offene Kugel im $\mathbb{R}^N$ ist und die Nichtlinearitäten nicht von der Raum-Variablen abhängen, eine offene Menge im Parameterraum gibt, so dass für alle f aus dieser Menge (1.6) ein nicht-invariantes und somit nicht hyperbolisches Gleichgewicht hat. Daher kann Hyperbolizität von Gleichgewichten im Fall symmetrischer Gebiete nicht generisch sein.

Außerdem wird in Brunovský, Poláčik [7] bewiesen, dass die unter G invarianten Gleichgewichte generisch hyperbolisch sind. Der Beweis hiervon wendet die oben erwähnten Ergebnisse über eindimensionale Reaktions-Diffusions-Gleichungen an auf die radiale Gleichung.

In Kapitel 5 dieser Arbeit wird gezeigt, dass auch für generische Nichtlinearitäten aus $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alle unter G invarianten Gleichgewichte hyperbolisch sind. Im Beweis dieser Aussage wird der Ansatz aus Brunovský, Poláčik [8] auf äquivariante Operatoren verallgemeinert.

Kapitel 2

Basen irreduzibler Räume

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie für endlichdimensionale Unterräume eines Banach-Raums „geeignete“ Basen ausgewählt werden können. Dies wird das wesentliche Hilfsmittel sein, Beweise der Generizitätsaussagen ohne Symmetrie auf den äquivarianten Fall zu verallgemeinern.

Die (grobe) Idee dieser Verallgemeinerungen ist es, irreduzible Räume als „Punkte“ aufzufassen und die Beweismethoden der Aussagen ohne Symmetrie auf Operatoren auf der Menge der irreduziblen Unterräume anzuwenden. Dabei werden diese irreduziblen Räume repräsentiert durch Tupel, deren Elemente eine Basis des Unterraums bilden. Es werden aber nur solche Basen ausgewählt, die ein bestimmtes Transformationsverhalten unter der Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe haben. Dieses Transformationsverhalten macht die Auswahl der Basen der irreduziblen Unterräume in einem gewissen Sinn eindeutig, und außerdem handelt es sich dabei um Orthogonalbasen. Fasst man die Elemente solcher Basen zu Tupeln zusammen, so kann man Operatoren auf der Menge dieser Tupel definieren, die sozusagen irreduzible Unterräume auf irreduzible Unterräume abbilden.

2.1 Transformationsbasen

Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei $M \subset X$ eine isotypische Komponente von X.

An sich interessieren wir uns nur für reelle Darstellungen und Darstellungsräume. In diesem Kapitel werden wir allerdings einen etwas allgemeineren Ansatz wählen, als es für die folgenden Kapitel notwendig ist, und auch komplexe Darstellungen betrachten. Dies ist im Fall der Darstellungen vom komplexen Typ hilfreich. Es sei also $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Die Fragestellung ist nun, zu jedem irreduziblem Unterraum von M eine Basis auszuwählen, so dass das Transformationsverhalten der Basiselemente unter ρ vorbestimmt und für alle Unterräume gleich ist (vgl. auch [34, Abschnitt 2.3]).

Dazu sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ eine orthogonale (beziehungsweise unitäre), irreduzible Darstellung von G auf $\mathbb{K}^d$, die zu den Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent ist.

Ist $U \subset M$ ein irreduzibler Unterraum von M, so sind also $\rho^{(d)}$ und die auf U eingeschränkte Darstellung $\rho|_U : G \ni g \mapsto \rho(g)|_U \in \mathbf{GL}(U)$ äquivalent. Für jedes $g \in G$ ist

$\rho|_U(g)$ eine lineare Abbildung von U in sich. Wir wählen nun die Basis $u_1, \dots, u_d$ von U so aus, dass die Abbildungsmatrix von $\rho|_U(g)$ bezüglich dieser Basis gerade durch $A(g)$ gegeben ist, das heißt, es soll

$$\rho(g)u_j = \sum_{k=1}^{d} a_{kj}(g)u_k \tag{2.1}$$

für $j \in \{1, \dots, d\}$ gelten.

Definition 2.1.1 (vgl. Pereira [25, Section 7]) *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiter sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ eine irreduzible Darstellung von G auf $\mathbb{K}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$.*

1. *Es sei U ein d-dimensionaler Unterraum von X, so dass die Darstellung $\rho|_U$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ ist. Wir nennen $u_1, \dots, u_d \in U$ eine* Transformationsbasis *von U bezüglich $\rho^{(d)}$, falls für alle $g \in G$ gilt*

$$\begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

   wobei mit $A(g)^t$ die Transponierte von $A(g)$ bezeichnet werde.

2. *Ist M eine isotypische Komponente von X, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent zu $\rho^{(d)}$ sind, so setzen wir*

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in X^d : \begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}. \tag{2.3}$$

Dabei ist in (2.2) und (2.3) die Multiplikation der Matrix $A(g)^t$ für $g \in G$ mit $(u_1, \dots, u_d)^t \in X^d$ als

$$A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d a_{k1}(g)u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d a_{kd}(g)u_k \end{pmatrix} \in X^d$$

zu verstehen. Insbesondere wird im Fall $X = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ der Raum X^d nicht mit $\mathbb{R}^{nd}$ identifiziert (vgl. Beispiel 2.1.3).

Die Bedingung (2.2) besagt, dass die Abbildungsmatrix von $\rho|_U(g)$ für $g \in G$ bezüglich der Basis $u_1, \dots, u_d$ gerade durch $A(g)$ gegeben ist, vgl. (2.1). Die Basiselemente $u_1, \dots, u_d$ transformieren sich unter G also genau wie die Standardbasis des $\mathbb{K}^d$, wobei diese Aktion durch $A(g)$ für $g \in G$ festgelegt ist. In $\mathcal{M}$ sind dann alle solchen Basen zusammengefasst. Am Ende des Abschnitts werden noch einige Beispiele für Transformationsbasen angegeben. Zunächst weisen wir jedoch die Existenz solcher Basen nach und diskutieren einige elementare Eigenschaften.

Lemma 2.1.2 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ eine irreduzible Darstellung von G auf $\mathbb{K}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$.*

1. *Es sei V ein d-dimensionaler Unterraum von X, so dass $\rho|_V$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ ist. Dann gibt es eine Transformationsbasis von V bezüglich $\rho^{(d)}$.*

2. *Ist V ein d-dimensionaler Unterraum von X, so dass $\rho|_V$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ ist, so ist jede Transformationsbasis von V bezüglich $\rho^{(d)}$ auch eine Basis von V.*

3. *Es sei M die isotypische Komponente von X, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent zu $\rho^{(d)}$ sind.*
   Ist $(v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, so ist $V := \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ ein d-dimensionaler Unterraum von M und die Darstellung $\rho|_V$ ist äquivalent zu $\rho^{(d)}$.

Aus Lemma 2.1.2 folgt, dass jeder irreduzible Unterraum von M eine Transformationsbasis bezüglich $\rho^{(d)}$ hat, die in $\mathcal{M}$ liegt, und dass jedes Element in $\mathcal{M}$ einen irreduziblen Unterraum von M erzeugt. Die Eindeutigkeit von Transformationsbasen irreduzibler Unterräume wird im nächsten Abschnitt untersucht.

Beweis:

1. Da $\rho|_V$ und $\rho^{(d)}$ äquivalent sind, gibt es einen bezüglich $\rho^{(d)}$ und $\rho|_V$ äquivarianten Isomorphismus $B : \mathbb{K}^d \to V$, das heißt, es gilt $\rho|_V(g) \circ B = B \circ \rho^{(d)}(g)$ für alle $g \in G$.

   Es seien $e_1, \ldots, e_d$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^d$. Die Idee ist nun, die Bilder dieser Einheitsvektoren unter dem äquivarianten Isomorphismus B als Basis für V zu verwenden. Wir setzen also $v_j := Be_j$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$. Da B ein Isomorphismus ist, bilden $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von V. Aus der Äquivarianz von B folgt

$$\begin{aligned}\rho(g)v_k &= \rho|_V(g) \circ Be_k = B \circ \rho^{(d)}(g)e_k = B \circ A(g)e_k \\ &= B\Big(\sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)e_j\Big) = \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)Be_j = \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)v_j\end{aligned}$$

   für alle $g \in G$, $k \in \{1, \ldots, d\}$. Daher bilden $v_1, \ldots, v_d$ eine Transformationsbasis von V.

2. Es sei $v_1, \ldots, v_d$ eine Transformationsbasis von V bezüglich $\rho^{(d)}$. Dann ist das Erzeugnis $\langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ der Vektoren $v_1, \ldots, v_d$ ein unter G invarianter Unterraum von V. Wegen der Irreduzibilität von V muss dann $V = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ gelten. Da V ein d-dimensionaler Unterraum ist, bilden somit $v_1, \ldots, v_d$ eine Basis von V.

3. Angenommen, die Darstellung $\rho|_V$ von G auf V ist äquivalent zu einer irreduziblen Darstellung $\rho' : G \ni g \mapsto B(g) = (b_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^{d'})$ für ein $d' \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Transformationsbasis $u_1, \ldots, u_{d'}$ von V bezüglich ρ' und eine Matrix $C = (c_{jk}) \in \mathbb{K}^{d \times d'}$ mit $v_j = \sum_{k=1}^{d'} c_{jk} u_k$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$. Wegen $(v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{M}$ gilt

$$\rho(g)v_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ij}(g)v_i = \sum_{k=1}^{d'} \sum_{i=1}^{d} a_{ij}(g)c_{ik}u_k \tag{2.4}$$

für alle $g \in G$ und alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Da $u_1, \ldots, u_{d'}$ eine Transformationsbasis von V bezüglich ρ' bilden, gilt andererseits

$$\rho(g)v_j = \sum_{l=1}^{d'} c_{jl}\rho(g)u_l = \sum_{k=1}^{d'}\sum_{l=1}^{d'} c_{jl}b_{kl}(g)u_k \tag{2.5}$$

für alle $g \in G$ und $j \in \{1, \ldots, d\}$. Aus (2.4) und (2.5) ergibt sich $C^tA(g) = B(g)C^t$ für alle $g \in G$. Mit Lemma 1.1.14 folgt hieraus, dass $d = d'$ gilt, C regulär ist und somit $\rho^{(d)}$ und ρ' äquivalent sind.

□

Beispiel 2.1.3

1. Es sei G die Gruppe $\mathbb{Z}_4$, die aus den Drehungen der Ebenen besteht, die ein Quadrat auf sich abbilden. Sie wird erzeugt von der Drehung φ um $\frac{\pi}{2}$. Eine eindimensionale, irreduzible, komplexe Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ ist zum Beispiel gegeben durch $\rho(\varphi^k)z = \exp(i\frac{k\pi}{2})z$ für $z \in \mathbb{C}$ und $k \in \{0, \ldots, 3\}$ (vgl. Beispiel 1.1.4).

   Dann ist jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Transformationsbasis von $\mathbb{C}$ bezüglich ρ.

2. Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und

$$\rho : G \ni g \mapsto A(g) = \begin{pmatrix} a_{11}(g) & a_{12}(g) \\ a_{21}(g) & a_{22}(g) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$$

   eine absolut irreduzible Darstellung von G auf $\mathbb{R}^2$.

   Die Idee der Transformationsbasen ist, dass sie sich unter G genauso transformieren wie die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Daher bilden $(1,0)^t, (0,1)^t$ eine Transformationsbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich ρ, denn für $g \in G$ gilt

$$\begin{pmatrix} \rho(g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \rho(g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ A(g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}a_{11}(g)\\a_{21}(g)\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}a_{12}(g)\\a_{22}(g)\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_{21}(g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ a_{12}(g)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + a_{12}(g)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

   Ist u_1, u_2 ebenfalls eine Transformationsbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich ρ, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $u_1 = (\alpha, 0)^t$ und $u_2 = (0, \alpha)^t$, denn aufgrund des Transformationsverhaltens ist die Basistransformation eine äquivariante Abbildung (vgl. auch Beweis von Lemma 2.1.2) und wegen der absoluten Irreduzibilität von ρ somit ein Vielfaches der Identität.

   Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass generell bei absolut irreduziblen Darstellungen die Transformationsbasen bis auf Vielfache eindeutig sind.

□

Beispiel 2.1.4 Es sei G die Dieder-Gruppe $\mathbb{D}_4$ (vgl. Beispiel 1.1.4). Diese besteht aus den Drehungen und Spiegelungen des $\mathbb{R}^2$, die ein Quadrat auf sich abbilden. Sie hat acht Elemente und wird erzeugt zum Beispiel von der Drehung φ um $\frac{\pi}{2}$ und der Spiegelung κ an einer Symmetrieachse.

Durch

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine Darstellung $\rho : \mathbb{D}_4 \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$ gegeben (vgl. Beispiel 1.1.4). Dann ist das Gebiet $\Omega := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2 \subset \mathbb{R}^2$ invariant unter G (bezüglich dieser Darstellung). Wie in Beispiel 1.1.5 betrachten wir die Darstellung

$$\mathbb{D}_4 \ni g \mapsto [L^2(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^2(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^2(\Omega))$$

von $\mathbb{D}_4$ auf $L^2(\Omega)$, die wir auch wieder mit ρ bezeichnen. Dann gibt es zu jeder irreduziblen Darstellung von $\mathbb{D}_4$ einen Unterraum von $L^2(\Omega)$, so dass die Darstellung auf diesem Unterraum zu der irreduziblen Darstellung äquivalent ist.

1. Die triviale Darstellung von $\mathbb{D}_4$ auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch $\rho' : G \ni g \mapsto 1 \in \mathbf{GL}(\mathbb{R})$. Es sei $M \subseteq L^2(\Omega)$ die zu ρ' gehörende isotypische Komponente von $L^2(\Omega)$. Die gemäß (2.3) dazu gebildete Menge $\mathcal{M}$ von Transformationsbasen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{u \in L^2(\Omega) : \rho(g)u = 1 \cdot u \text{ für alle } g \in \mathbb{D}_4\} \\ &= \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ invariant unter } \mathbb{D}_4\}. \end{aligned}$$

   Zum Beispiel ist $u(x, y) = \cos(x)\cos(y)$ in $\mathcal{M}$.

2. Eine weitere eindimensionale, irreduzible Darstellung von $\mathbb{D}_4$ ist gegeben durch $\rho'(\varphi^j) = (-1)^j$ und $\rho'(\kappa\varphi^j) = (-1)^{j+1}$ für $j \in \{0, \dots, 3\}$. Die Menge der Transformationsbasen bezüglich dieser Darstellung ist

$$\mathcal{M} = \{u \in L^2(\Omega) : \rho(\varphi^j)u = (-1)^j u, \rho(\kappa\varphi^j)u = (-1)^{j+1}u \text{ für } j \in \{0, \dots, 3\}\}.$$

   Die Funktion $u(x, y) = \sin(2x)\sin(2y)$ ist beispielsweise in $\mathcal{M}$.

3. Durch

$$\rho'(\varphi) = A(\varphi) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho'(\kappa) = A(\kappa) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   ist eine absolut irreduzible Darstellung von $\mathbb{D}_4$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben. Es seien M die dazugehörende isotypische Komponente von $L^2(\Omega)$ und $\mathcal{M} \subset (L^2(\Omega))^2$ die Menge der Transformationsbasen von Unterräumen von M bezüglich ρ' gemäß (2.3).

   Es seien $u_1(x, y) = \sin(2x)\cos(y)$ und $u_2(x, y) = \cos(x)\sin(2y)$. Setzen wir nun $U := \langle u_1, u_2 \rangle \subset L^2(\Omega)$, so bilden u_1, u_2 eine Transformationsbasis von U bezüglich ρ', denn für x, y aus Ω gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho(\varphi)u_1(x,y) \\ \rho(\varphi)u_2(x,y) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1(y,-x) \\ u_2(y,-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(x,y) \\ -u_1(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix} = A(\varphi)^t \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} \rho(\kappa)u_1(x,y) \\ \rho(\kappa)u_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x,-y) \\ u_2(x,-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ -u_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix} = A(\kappa)^t \begin{pmatrix} u_1(x,y) \\ u_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

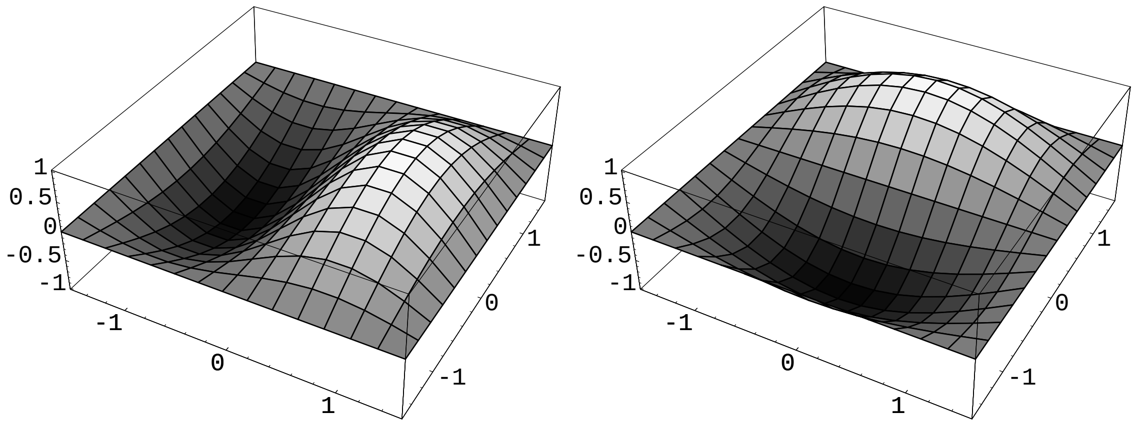
Also ist $(u_1, u_2) \in \mathcal{M}$.

□

Bemerkung 2.1.5 Die Basiselemente einer Transformationsbasis eines irreduziblen Unterraums sind nicht ganz unabhängig voneinander:

Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Dann wird jeder irreduzible Unterraum von einem Gruppenorbit erzeugt: Ist $U \subseteq X$ ein irreduzibler Unterraum von X und $u \in U \setminus \{0\}$, so ist die lineare Hülle des Gruppenorbits $\mathcal{O}(u) := \{\rho(g)u : g \in G\}$ von u ein invarianter Unterraum von X, der mit U einen nichtleeren Schnitt hat. Wegen der Irreduzibilität von U ist dieser Schnitt – und somit auch die gesamte lineare Hülle von $\mathcal{O}(u)$ – gleich U. Also gibt es $d := \dim U$ Gruppenelemente $g_1, \ldots, g_d$ in G mit $U = \langle \rho(g_1)u, \ldots, \rho(g_d)u \rangle$. Ist nun $u_1, \ldots, u_d$ eine Transformationsbasis von U bezüglich einer Darstellung $\rho^{(d)} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$, so sind die Elemente $u_1, \ldots, u_d$ Linearkombinationen von $\rho(g_1)u, \ldots, \rho(g_d)u$. □

Beispiel 2.1.6 In Beispiel 2.1.4(3) ist $u_2 = \rho(\kappa\varphi^3)u_1$.



Figur 1: $u_1(x,y) = \sin(2x)\cos(y)$ und $u_2(x,y) = \cos(x)\sin(2y)$.

□

2.2 Eindeutigkeit von Transformationsbasen

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob und in welchem Sinn Transformationsbasen von irreduziblen Unterräumen eindeutig bestimmt sind.

Transformationsbasen von absolut irreduziblen Räumen sind bis auf Vielfache eindeutig bestimmt.

Lemma 2.2.1 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein (reeller oder komplexer) Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ eine absolut irreduzible Darstellung von G auf $\mathbb{K}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, und es sei V ein d-dimensionaler Unterraum von X, so dass $\rho|_V$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ ist.*

Sind $u_1, \dots, u_d$ und $v_1, \dots, v_d$ Transformationsbasen von V bezüglich $\rho^{(d)}$, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $u_j = \alpha v_j$ für $j \in \{1, \dots, d\}$.

BEWEIS: Es seien $u_1, \dots, u_d$ und $v_1, \dots, v_d$ Transformationsbasen von V. Dann transformieren sich sowohl $(u_1, \dots, u_d)^t$ als auch $(v_1, \dots, v_d)^t$ gemäß (2.2) unter ρ.

Es seien $e_1, \dots, e_d$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{K}^d$. Wir definieren nun Isomorphismen $B_u : \mathbb{K}^d \to V$ und $B_v : \mathbb{K}^d \to V$ durch $B_u e_j = u_j$ und $B_v e_j = v_j$ für $j \in \{1, \dots, d\}$. Dann gilt für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ und alle $g \in G$

$$B_u \circ \rho^{(d)}(g)e_k = B_u \circ A(g)e_k = B_u\Big(\sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)e_j\Big) = \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)B_u e_j = \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)u_j$$

und wegen (2.2) auch

$$\rho(g) \circ B_u e_k = \rho(g)u_k = \sum_{j=1}^{d} a_{jk}(g)u_j.$$

Also ist $B_u \circ \rho^{(d)}(g) = \rho(g) \circ B_u$ für alle $g \in G$. Das bedeutet, B_u ist äquivariant bezüglich $\rho^{(d)}$ und $\rho|_V$. Analog folgt, dass B_v äquivariant bezüglich $\rho^{(d)}$ und $\rho|_V$ ist. Somit ist $B_u \circ B_v^{-1}$ ein äquivarianter Endomorphismus von V. Da $\rho|_V$ absolut irreduzibel ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $B_u \circ B_v^{-1} = \alpha\,\mathrm{id}$. Also ist $u_j = B_u \circ B_v^{-1} v_j = \alpha v_j$ für $j \in \{1, \dots, d\}$. □

Transformationsbasen von irreduziblen Unterräumen, die nicht absolut irreduzibel sind, sind nicht eindeutig bestimmt.

Bemerkung 2.2.2 Gegeben seien eine kompakte Lie-Gruppe G, ein reeller Banach-Raum X und eine reelle Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ von G auf X. Außerdem sei M eine isotypische Komponente von X, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent zu einer irreduziblen Darstellung vom komplexen Typ $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d = 2p \in \mathbb{N}$ sind.

1. Es seien nun V ein irreduzibler Unterraum von M und $u_1, \dots, u_d$ und $v_1, \dots, v_d$ Transformationsbasen von V. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 2.2.1 kann man analog wie in diesem Beweis sehen, dass $B_u \circ B_v^{-1}$ ein äquivarianter Endomorphismus von V ist. Nach Bemerkung 1.1.8 gibt es daher $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $u_j = \alpha v_j - \beta v_{p+j}$ und $u_{p+j} = \beta v_j + \alpha v_{p+j}$ für $j \in \{1, \dots, p\}$.

   Somit ist die Menge der Transformationsbasen von V zweidimensional.

2. Es sei $v_1, \dots, v_d$ eine Transformationsbasis von V und $v = (v_1, \dots, v_{2d})^t$. Kommutiert $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mit $A(g)$ für alle $g \in G$ und ist $u = (u_1, \dots, u_d)^t := Bv$, so bilden auch $u_1, \dots, u_d$ eine Transformationsbasis von V, denn für $g \in G$ gilt

$$\begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_d \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \rho(g)v_1 \\ \vdots \\ \rho(g)v_d \end{pmatrix} = BA(g)^t\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = A(g)^t B\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = A(g)^t\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}.$$

□

In der folgenden Bemerkung wird beschrieben, wie man für einen irreduziblen Unterraum, auf dem die Darstellung vom komplexen Typ ist, aus einer Transformationsbasis der Komplexifizierung eine reelle Transformationsbasis erhält.

Bemerkung 2.2.3 Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein reeller Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Es sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ eine irreduzible Darstellung vom komplexen Typ von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d = 2p \in \mathbb{N}$, und es sei M eine isotypische Komponente von X, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent zu $\rho^{(d)}$ sind.

Es sei $V \subset M$ ein irreduzibler, d-dimensionaler Unterraum von M. Ist W ein irreduzibler (und damit absolut irreduzibler) d-dimensionaler Unterraum von der Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$, so gilt $V_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$ (vgl. Bemerkung 1.1.9). Die Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}|_W : G \to \mathbf{GL}(W)$ sei äquivalent zu einer absolut irreduziblen Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}^{(p)} : G \ni g \mapsto A_{\mathbb{C}}(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{C}^p)$. Die Darstellung auf $\rho_{\mathbb{C}}|_{\overline{W}}$ ist dann äquivalent zu $\bar{\rho}_{\mathbb{C}}^{(p)} : G \ni g \mapsto \overline{A_{\mathbb{C}}(g)} \in \mathbf{GL}(\mathbb{C}^p)$. Außerdem ist durch

$$G \ni g \mapsto A_{\mathbb{R}}(g) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g) & -\operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g) \\ \operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g) & \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g) \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$$

eine zu $\rho^{(d)}$ äquivalente Darstellung auf dem $\mathbb{R}^d$ gegeben (vgl. Bemerkung 1.1.9). Wir können also ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $A_{\mathbb{R}}(g) = A(g)$ für alle $g \in G$ gilt.

1. Es seien $w_1, \ldots, w_p$ eine Transformationsbasis von W bezüglich $\rho_{\mathbb{C}}^{(p)}$.

   Behauptung: Dann ist $\operatorname{Re} w_1, \ldots, \operatorname{Re} w_p, -\operatorname{Im} w_1, \ldots, -\operatorname{Im} w_p$ *eine Transformationsbasis von* V *bezüglich* $\rho^{(d)}$.

   Da $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p$ eine Transformationsbasis von $\overline{W}$ bezüglich $\bar{\rho}_{\mathbb{C}}^{(p)}$ bilden, gilt für $g \in G$

$$\begin{pmatrix} \rho(g)\operatorname{Re} w_1 \\ \vdots \\ \rho(g)\operatorname{Re} w_p \\ -\rho(g)\operatorname{Im} w_1 \\ \vdots \\ -\rho(g)\operatorname{Im} w_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(g)\operatorname{Re} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \rho(g)\operatorname{Re} \overline{w}_p \\ \rho(g)\operatorname{Im} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \rho(g)\operatorname{Im} \overline{w}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \rho_{\mathbb{C}}(g)\overline{w}_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} \rho_{\mathbb{C}}(g)\overline{w}_p \\ \operatorname{Im} \rho_{\mathbb{C}}(g)\overline{w}_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} \rho_{\mathbb{C}}(g)\overline{w}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_p \end{pmatrix}) \\ \operatorname{Im}(\overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_p \end{pmatrix}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t & -\operatorname{Im} \overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t \\ \operatorname{Im} \overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t & \operatorname{Re} \overline{A_{\mathbb{C}}(g)}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} \overline{w}_p \\ \operatorname{Im} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} \overline{w}_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t & \operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t \\ -\operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t & \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} w_p \\ -\operatorname{Im} w_1 \\ \vdots \\ -\operatorname{Im} w_p \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} w_p \\ -\operatorname{Im} w_1 \\ \vdots \\ -\operatorname{Im} w_p \end{pmatrix}.$$

Weitere Transformationsbasen von V erhält man, wenn man eine andere Transformationsbasis von W auswählt. Die dann entstehenden Transformationsbasen von V entstehen durch Multiplikation von $(\operatorname{Re} w_1, \ldots, \operatorname{Re} w_p, -\operatorname{Im} w_1, \ldots, -\operatorname{Im} w_p)^t$ mit äquivarianten Matrizen (vgl. Bemerkung 2.2.2).

2. *Behauptung: Ist $v_1, \ldots, v_d$ eine Transformationsbasis von V bezüglich $\rho^{(d)}$, so bilden $w_k := v_k - iv_{p+k}$ für $k \in \{1, \ldots, p\}$ eine Transformationsbasis eines irreduziblen Unterraums von $V_{\mathbb{C}}$ bezüglich der komplexen Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}^{(p)}$.*

   Da $v_1, \ldots, v_d$ eine Transformationsbasis von V ist, gilt

$$\begin{pmatrix} \rho(g)v_1 \\ \vdots \\ \rho(g)v_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t & \operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t \\ -\operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t & \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

   für $g \in G$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{\mathbb{C}}(g)w_1 \\ \vdots \\ \rho_{\mathbb{C}}(g)w_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \rho(g)v_1 \\ \vdots \\ \rho(g)v_p \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \rho(g)v_{p+1} \\ \vdots \\ \rho(g)v_{2p} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} + \operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_{p+1} \\ \vdots \\ v_{2p} \end{pmatrix} \\ &\quad -i\Big(-\operatorname{Im} A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} + \operatorname{Re} A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_{p+1} \\ \vdots \\ v_{2p} \end{pmatrix} \Big) \\ &= A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix} - iA_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} v_{p+1} \\ \vdots \\ v_{2p} \end{pmatrix} = A_{\mathbb{C}}(g)^t \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   für $g \in G$.

□

Beispiel 2.2.4 Es sei G die Gruppe $\mathbb{Z}_4$, die aus den Drehungen der Ebene besteht, die ein Quadrat auf sich abbilden (vgl. Beispiele 1.1.4 und 1.1.10). Sie hat vier Elemente und wird erzeugt von der Drehung φ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$. Wir betrachten die Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\rho(\varphi) = A(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung ist irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel.

Nach Beispiel 2.1.3 bilden $(1,0)^t, (0,1)^t$ eine Transformationsbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich ρ.

Es ist

$$W := \left\{ \alpha\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

ein unter der komplexifizierten Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}$ invarianter Unterraum von $\mathbb{C}^2$ (vgl. Beispiel 1.1.10), und die Darstellung $\rho_{\mathbb{C}}|_W$ ist äquivalent zu der Darstellung $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{C})$ mit $\rho(\varphi)z = \exp(i\frac{\pi}{2})z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{C}}(\varphi)\Big(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big) &= \rho(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\rho(\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\\ &= i\Big(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big) = \exp(i\frac{\pi}{2})\Big(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Big).\end{aligned}$$

Also ist $w := (1, -i)^t$ eine Transformationsbasis von W bezüglich ρ'.

Nach Bemerkung 2.2.3 erhält man hieraus $v_1 := \operatorname{Re} w = (1,0)^t$, $v_2 := -\operatorname{Im} w = (0,1)^t$ als Transformationsbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich ρ.

Andererseits ist aber auch $w' := (2i, 2)^t$ eine Transformationsbasis von W, denn es ist $w' = (2i,2)^t = 2i(1,-i)^t = 2iw$, und nach Lemma 2.2.1 sind Transformationsbasen von W nur bis auf Vielfache eindeutig bestimmt. Wiederum bilden $v_1' := \operatorname{Re} w' = (0,2)^t$, $v_2' := -\operatorname{Im} w' = (-2,0)^t$ eine Transformationsbasis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich ρ, es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix}\rho(\varphi)v_1'\\ \rho(\varphi)v_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = A(\varphi)^t\begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix}v_1'\\ v_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix},$$

wobei B äquivariant ist. □

Bemerkung 2.2.5 Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein Banach-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei M eine isotypische Komponente von X, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalent zu einer absolut irreduziblen Darstellung $\rho^{(d)} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ von G auf $\mathbb{K}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sind. Zu $\rho^{(d)}$ bilden wir die Menge $\mathcal{M}$ wie in (2.3).

1. Es sei $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s \subseteq M$ direkte Summe von irreduziblen Unterräumen von M. Zu jedem $j \in \{1,\ldots,s\}$ gibt es eine Transformationsbasis $u_1^{(j)},\ldots,u_d^{(j)}$ von U_j bezüglich $\rho^{(d)}$.

   Dann sind $u_j := (u_1^{(j)},\ldots,u_d^{(j)})^t$ für $j \in \{1,\ldots,s\}$ linear unabhängig in $\mathcal{M}$.

   Denn ist $\sum_{j=1}^s \beta_j u_j = 0$ für $\beta_1,\ldots,\beta_s$ aus $\mathbb{K}$, so gilt $\sum_{j=1}^s \beta_j u_k^{(j)} = 0$ für alle $k \in \{1,\ldots,d\}$. Da $U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ eine direkte Summe bilden, folgt hieraus $\beta_j u_k^{(j)} = 0$ für $j \in \{1,\ldots,s\}$ und $k \in \{1,\ldots,d\}$. Dies impliziert $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, da $u_1^{(j)},\ldots,u_d^{(j)}$ für $j \in \{1,\ldots,s\}$ Basisvektoren sind.

   (Diese Aussage ist auch richtig, wenn $\rho^{(d)}$ nicht absolut irreduzibel ist.)

2. *Sind andererseits* $u_j = (u_1^{(j)}, \ldots, u_d^{(j)})^t \in \mathcal{M}$ *für* $j \in \{1, \ldots, s\}$ *linear unabhängig, so bilden die Räume* $U_j := \langle u_1^{(j)}, \ldots, u_d^{(j)} \rangle$ *eine direkte Summe.*

   Es sei $J \subseteq \{1, \ldots, s\}$ mit $|J| =: m$. Wir weisen mittels Induktion nach m nach, dass die Räume U_j mit $j \in J$ eine direkte Summe bilden.

   Dazu sei zunächst $J = \{j, k\} \subseteq \{1, \ldots, s\}$. Angenommen, es ist $U_j \cap U_k \neq \{0\}$. Wegen der Irreduzibilität der beiden Räume gilt dann $U_j = U_k$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Transformationsbasen von absolut irreduziblen Räumen (Lemma 2.2.1) gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $u_l^{(j)} = \alpha u_l^{(k)}$ für $l \in \{1, \ldots, d\}$. Das bedeutet aber, es ist $u_j = \alpha u_k$, was der linearen Unabhängigkeit von u_j und u_k widerspricht.

   Jetzt nehmen wir an, dass für alle $J \subseteq \{1, \ldots, s\}$ mit $|J| = m$ für ein $m \in \{2, \ldots, s-1\}$ die Räume U_j mit $j \in J$ eine direkte Summe bilden.
   Es sei $J' \subseteq \{1, \ldots, s\}$ mit $|J'| = m + 1$. Angenommen, es gibt ein $i \in J'$ mit $U_i \cap \bigoplus_{j \in J' \setminus \{i\}} U_j \neq \{0\}$, wobei die Summe der U_j für $j \in J' \setminus \{i\}$ aufgrund der Induktionsannahme sogar eine direkte Summe ist. Wegen der Irreduzibilität von U_i gilt dann $U_i \subseteq \bigoplus_{j \in J' \setminus \{i\}} U_j$. Daher gibt es zu jedem $k \in \{1, \ldots, d\}$ Zahlen $\alpha_{kl}^{(j)} \in \mathbb{K}$ für $l \in \{1, \ldots, d\}$ und $j \in J' \setminus \{i\}$ mit

$$u_k^{(i)} = \sum_{j \in J' \setminus \{i\}} \sum_{l=1}^{d} \alpha_{kl}^{(j)} u_l^{(j)}. \tag{2.6}$$

   Da $u_1^{(j)}, \ldots, u_d^{(j)}$ für $j \in J'$ Transformationsbasen bezüglich $\rho^{(d)}$ sind, gilt für alle $g \in G$ und $k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\rho(g) u_k^{(i)} = \sum_{l=1}^{d} a_{lk}(g) u_l^{(i)} = \sum_{l=1}^{d} a_{lk}(g) \sum_{j \in J' \setminus \{i\}} \sum_{m=1}^{d} \alpha_{lm}^{(j)} \rho(g) u_m^{(j)}$$

   und

$$\rho(g) u_k^{(i)} = \sum_{j \in J' \setminus \{i\}} \sum_{l=1}^{d} \alpha_{kl}^{(j)} \rho(g) u_l^{(j)} = \sum_{j \in J' \setminus \{i\}} \sum_{l=1}^{d} \alpha_{kl}^{(j)} \sum_{m=1}^{d} a_{ml}(g) u_m^{(j)}.$$

   Fasst man diese beiden Gleichungen zusammen, so ergibt sich

$$\sum_{j \in J' \setminus \{i\}} \underbrace{\sum_{m=1}^{d} \Big(\sum_{l=1}^{d} (a_{lk}(g) \alpha_{lm}^{(j)} - \alpha_{kl}^{(j)} a_{ml}(g)) \Big) u_m^{(j)}}_{\in U_j} = 0$$

   für $k \in \{1, \ldots, d\}$. Da U_j für $j \in J' \setminus \{i\}$ eine direkte Summe bilden, folgt hieraus

$$\sum_{m=1}^{d} \Big(\sum_{l=1}^{d} (a_{lk}(g) \alpha_{lm}^{(j)} - \alpha_{kl}^{(j)} a_{ml}(g)) \Big) u_m^{(j)} = 0$$

   für $j \in J' \setminus \{i\}$ und $k \in \{1, \ldots, d\}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $u_m^{(j)}$ für $m \in \{1, \ldots, d\}$ liefert dies wiederum

$$\sum_{l=1}^{d} (a_{lk}(g) \alpha_{lm}^{(j)} - \alpha_{kl}^{(j)} a_{ml}(g)) = 0 \tag{2.7}$$

für alle $m, k \in \{1, \dots, d\}$, $j \in J' \setminus \{i\}$ und $g \in G$. Setzen wir $B_j := (\alpha_{kl}^{(j)}) \in \mathbb{K}^{d\times d}$ für $j \in J' \setminus \{i\}$, so folgt aus (2.7)

$$A(g)^t B_j = B_j A(g)^t$$

für alle $g \in G$ und $j \in J' \setminus \{i\}$, was bedeutet, dass B_j äquivariant ist. Aufgrund der absoluten Irreduzibilität von $\rho^{(d)}$ gibt es daher zu jedem $j \in J' \setminus \{i\}$ ein $\beta_j \in \mathbb{K}$ mit $B_j = \beta_j \operatorname{Id}_d$. Aus (2.6) folgt daher

$$u_k^{(i)} = \sum_{j\in J'\setminus\{i\}} \beta_j u_k^{(j)}$$

für alle $k \in \{1, \dots, d\}$. Dies impliziert

$$u_i = \sum_{j\in J'\setminus\{i\}} \beta_j u_j,$$

was aber der linearen Unabhängigkeit der u_j für $j \in J'$ widerspricht. Somit ist gezeigt, dass es kein $i \in J'$ geben kann mit $U_i \cap \bigoplus_{j\in J'\setminus\{i\}} U_j \neq \{0\}$. Also bilden die Räume U_j für $j \in J'$ eine direkte Summe.

□

2.3 Orthogonalität von Transformationsbasen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass Transformationsbasen Orthogonalbasen sind.

Dabei ist zu beachten, dass im komplexen Fall die Skalarprodukte immer in der ersten Komponente semilinear sein sollen. Ist also X ein komplexer Hilbert-Raum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf X, so soll $\langle\lambda x, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$ und $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für x, y aus X und $\lambda \in \mathbb{C}$ sein.

Lemma 2.3.1 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein reeller (komplexer) Hilbert-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine bezüglich des Skalarprodukts auf X orthogonale (unitäre) Darstellung von G auf X. Weiterhin seien $\rho_1 : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^{d_1})$ und $\rho_2 : G \ni g \mapsto B(g) = (b_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^{d_2})$ orthogonale (unitäre) irreduzible Darstellungen von G auf $\mathbb{K}^{d_1}$ beziehungsweise auf $\mathbb{K}^{d_2}$ für d_1, d_2 aus $\mathbb{N}$.*

1. *Es sei $U \subset X$ ein Unterraum von X, so dass $\rho|_U$ äquivalent zu ρ_1 ist, und es sei $u_1, \dots, u_{d_1}$ eine Transformationsbasis von U bezüglich ρ_1. Dann gibt ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $(\langle u_j, u_k\rangle) = \alpha \operatorname{Id}_{d_1} \in \mathbb{K}^{d_1\times d_1}$.*

2. *Es seien U und V Unterräume von X, so dass $\rho|_U$ äquivalent zu ρ_1 und $\rho|_V$ äquivalent zu ρ_2 ist. Weiterhin seien $u_1, \dots, u_{d_1}$ eine Transformationsbasis von U bezüglich ρ_1 und $v_1, \dots, v_{d_2}$ eine Transformationsbasis von V bezüglich ρ_2.*

   2.1. *Sind ρ_1 und ρ_2 nicht äquivalent, so gilt $\langle u_j, v_k\rangle = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, d_1\}$ und $k \in \{1, \dots, d_2\}$.*

   2.2. *Sind ρ_1 und ρ_2 äquivalent und absolut irreduzibel, so ist $d_1 = d_2 =: d$ und es gibt ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $(\langle u_j, v_k\rangle) = \alpha \operatorname{Id}_d \in \mathbb{K}^{d\times d}$.*

2.3. *Ist* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und sind* ρ_1 *und* ρ_2 *äquivalent und vom komplexen Typ, so ist* $d_1 = d_2 =: d = 2p$ *und es gibt* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *mit*

$$(\langle u_j, v_k \rangle) = \begin{pmatrix} \alpha \operatorname{Id}_p & -\beta \operatorname{Id}_p \\ \beta \operatorname{Id}_p & \alpha \operatorname{Id}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Beweis: Es seien U und V Unterräume von X, so dass $\rho|_U$ äquivalent zu ρ_1 und $\rho|_V$ äquivalent zu ρ_2 ist. Weiter seien $u_1, \ldots, u_{d_1}$ eine Transformationsbasis von U bezüglich $\rho^{(d_1)}$ und $v_1, \ldots, v_{d_2}$ eine Transformationsbasis von V bezüglich ρ_2.

Wir setzen $C = (c_{jk}) := (\langle u_j, v_k \rangle) \in \mathbb{K}^{d_1 \times d_2}$. Aufgrund der Invarianz des Skalarprodukts auf X und des Transformationsverhaltens der Basen $u_1, \ldots, u_{d_1}$ und $v_1, \ldots, v_{d_2}$ ergibt sich für alle $g \in G$ und $j \in \{1, \ldots, d_1\}$, $k \in \{1, \ldots, d_2\}$

$$c_{jk} = \langle u_j, v_k \rangle = \langle \rho(g) u_j, \rho(g) v_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{d_1} a_{ij}(g) u_i, \sum_{l=1}^{d_2} b_{lk}(g) v_l \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \overline{a_{ij}(g)} \langle u_i, v_l \rangle b_{lk}(g) = \sum_{i=1}^{d_1} \sum_{l=1}^{d_2} \overline{a_{ij}(g)} c_{il} b_{lk}(g).$$

(Hier geht ein, dass wir bei Skalarprodukten Skalare in der *ersten* Komponente komplex konjugiert herausziehen; andernfalls müsste man im Folgenden noch einmal konjugieren.) Daraus folgt $C = \overline{A(g)}^t C B(g)$. Aus der Orthogonalität beziehungsweise Unitarität von ρ_1 folgt dann $A(g) C = C B(g)$ für alle $g \in G$. Somit ist C äquivariant bezüglich ρ_1 und ρ_2.

Sind ρ_1 und ρ_2 nicht äquivalent, so folgt aus Lemma 1.1.14, dass $C = 0$ ist. Hieraus folgt Aussage 2.1.

Sind ρ_1 und ρ_2 äquivalent, so gilt $d_1 = d_2 =: d$ und C ist ein Isomorphismus (vgl. Lemma 1.1.14). Sind ρ_1 und ρ_2 absolut irreduzibel, gibt es daher ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $C = \alpha \operatorname{Id}$. Dies beweist Teil 2.2.

Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und ρ_1 und ρ_2 äquivalent und vom komplexen Typ sind, folgt aus Bemerkung 1.1.8, dass es α, β in $\mathbb{R}$ gibt mit

$$C = \begin{pmatrix} \alpha \operatorname{Id}_p & -\beta \operatorname{Id}_p \\ \beta \operatorname{Id}_p & \alpha \operatorname{Id}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

wobei wir ohne Einschränkung davon ausgehen können, dass die Basis des $\mathbb{R}^d$ entsprechend gewählt ist. Damit ist Aussage 2.3 gezeigt.

Sind in diesem Fall jedoch $u_j = v_j$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$, so ist die Matrix C symmetrisch, woraus folgt, dass $\beta = 0$ sein muss. Zusammen mit Teil 2.2 ergibt sich hieraus die erste Aussage. □

Bemerkung 2.3.2 Gegeben seien eine kompakte Lie-Gruppe G, ein Hilbert-Raum X und eine bezüglich des Skalarprodukts auf X orthogonale (beziehungsweise unitäre) Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ von G auf X.

Es sei $U \subset X$ ein irreduzibler Unterraum von X, und $u_1, \ldots, u_d$ sei eine Transformationsbasis von U bezüglich einer irreduziblen Darstellung $\rho^{(d)} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Aus Lemma 2.3.1 folgt, dass $u_1, \ldots, u_d$ paarweise orthogonal zueinander sind. Außerdem haben sie alle die gleiche Norm, so dass sie auch normiert eine Transformationsbasis von U bilden.

Wir nennen $u_1, \ldots, u_d$ dann *normierte Transformationsbasis* von U. □

Korollar 2.3.3 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe, X ein reeller Hilbert-Raum und $\rho : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine reelle, orthogonale Darstellung von G auf X. Die Gruppe G habe nur Darstellungen vom reellen oder komplexen Typ. Weiterhin sei W ein endlichdimensionaler Unterraum von X.*

Dann gibt es irreduzible Unterräume $U_1, \ldots, U_s$ von W und Transformationsbasen $u_1^{(j)}, \ldots, u_{d_j}^{(j)}$ von U_j bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen $\rho_j : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_j})$ für $j \in \{1, \ldots, s\}$, so dass $W = \bigoplus_{j=1}^s U_j$ gilt und $u_1^{(1)}, \ldots, u_{d_1}^{(1)}, \ldots, u_1^{(s)}, \ldots, u_{d_s}^{(s)}$ eine Orthonormalbasis von W bilden.

Eine solche Basis nennen wir *normierte zusammengesetzte Transformationsbasis* von W.

Beweis: Zunächst sei W ein Unterraum von X, der sich als direkte Summe zweier irreduzibler Unterräume U und V schreiben lässt.

Sind $\rho|_U$ und $\rho|_V$ nicht äquivalent und sind $u_1, \ldots, u_{d_1}$ und $v_1, \ldots, v_{d_2}$ normierte Transformationsbasen von U beziehungsweise V bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen $\rho_1 : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_1})$ und $\rho_2 : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_2})$, so liefert Lemma 2.3.1, dass $u_1, \ldots, u_{d_1}, v_1, \ldots, v_{d_2}$ eine Orthonormalbasis von W ist.

Es seien nun $\rho|_U$ und $\rho|_V$ äquivalent und $\rho^{(d)} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ eine zu beiden äquivalente irreduzible Darstellung auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $u_1, \ldots, u_d$ und $v_1, \ldots, v_d$ normierte Transformationsbasen von U beziehungsweise V bezüglich $\rho^{(d)}$. Nach Lemma 2.3.1 gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (mit $\beta = 0$, falls $\rho^{(d)}$ absolut irreduzibel ist) mit

$$(\langle u_j, v_k \rangle) = \begin{pmatrix} \alpha \operatorname{Id}_p & -\beta \operatorname{Id}_p \\ \beta \operatorname{Id}_p & \alpha \operatorname{Id}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

mit $p = \frac{d}{2}$. Sind $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$, so setzen wir

$$v_k' := v_k - \alpha u_k - \beta u_{k+p} \quad \text{und} \quad v_{k+p}' = v_{k+p} + \beta u_k - \alpha u_{k+p} \tag{2.8}$$

für $k \in \{1, \ldots, p\}$ (Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens zur Orthonormalisierung, [39, Satz V.4.2]). Dann gilt $\langle u_j, v_k' \rangle = 0$ und $\langle v_j', v_k' \rangle = (1 - \alpha^2 - \beta^2)\delta_{jk}$ für alle $j, k \in \{1, \ldots, d\}$, wobei δ_{jk} das Kronecker-Symbol ist. Ist $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$, so setzen wir $\tilde{v}_j = \frac{1}{1-\alpha^2-\beta^2} v_j'$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$. Nun bilden $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_d$ eine normierte Transformationsbasis von $\tilde{V} := \langle \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_d \rangle$, es gilt $W = U \oplus \tilde{V}$, und $u_1, \ldots, u_d, \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_d$ bilden eine Orthonormalbasis von W.
Im Fall $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ folgt aus $\langle v_j', v_j' \rangle = 1 - \alpha^2 - \beta^2 = 0$, dass $v_j' = 0$ für $j \in \{1, \ldots, d\}$ gilt. Aus (2.8) ergibt sich dann, dass $v_1, \ldots, v_d$ linear abhängig von $u_1, \ldots, u_d$ sind, was nicht sein kann, wenn $U \cap V = \{0\}$ ist.

Analog findet man induktiv die gesuchte Zerlegung, falls W direkte Summe von mehr als zwei irreduziblen Räumen ist. □

2.4 Die Menge der Transformationsbasen

Nun soll die Struktur der in (2.3) definierten Menge untersucht werden.

Dazu seien wieder X ein Banach-Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$, G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho_X : G \to \mathbf{GL}(X)$ eine Darstellung von G auf X. Weiterhin sei M eine isotypische Komponente von X und $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}) \in \mathbf{GL}(\mathbb{K}^d)$ sei eine zu den

Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M äquivalente, absolut irreduzible, orthogonale beziehungsweise unitäre Darstellung auf $\mathbb{K}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$.

Wie in (2.3) bilden wir

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in X^d : \begin{pmatrix} \rho_X(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho_X(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}.$$

Jedes Element $(u_1, \dots, u_d)^t \in \mathcal{M}$ erzeugt einen irreduziblen Unterraum $U := \langle u_1, \dots, u_d \rangle$ von X, so dass die Darstellung $\rho|_U : G \to \mathbf{GL}(U)$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ ist. Andererseits besitzt jeder irreduzible Unterraum $U \subset M$ eine Basis $u_1, \dots, u_d$ mit $(u_1, \dots, u_d)^t \in \mathcal{M}$ (vgl. Lemma 2.1.2).

Lemma 2.4.1 *Die Menge $\mathcal{M}$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von X^d.*

Beweis: Es sei $\left((u_1^{(n)}, \dots, u_d^{(n)})^t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{M}$, die in X^d gegen $(u_1, \dots, u_d)^t$ konvergiert. Ist $g \in G$, so folgt aus der Stetigkeit von $\rho_X(g)$ und $\rho^{(d)}(g)$

$$\begin{pmatrix} \rho_X(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho_X(g)u_d \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \rho_X(g)u_1^{(n)} \\ \vdots \\ \rho_X(g)u_d^{(n)} \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} A(g)^t \begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_d^{(n)} \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}.$$

Also ist $(u_1, \dots, u_d)^t \in \mathcal{M}$. □

Es sei

$$\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{d} \|u_k\|_X \in \mathbb{R}_0^+$$

die durch die Norm auf X^d induzierte Norm auf $\mathcal{M}$.
Ist X ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$, so ist durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \ni \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right) \mapsto \sum_{k=1}^{d} \langle u_k, v_k \rangle_X \in \mathbb{R}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{M}$ gegeben.

Nun sei Y ein weiterer Banach-Raum, und $\rho_Y : G \to \mathbf{GL}(Y)$ sei eine Darstellung von G auf Y. Weiterhin sei N eine isotypische Komponente von Y, so dass die irreduziblen Darstellungen in N äquivalent zu $\rho^{(d)}$ sind. Analog zu $\mathcal{M}$ bilden wir

$$\mathcal{N} := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in Y^d : \begin{pmatrix} \rho_Y(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho_Y(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}.$$

Wir betrachten jetzt die Menge der äquivarianten linearen Operatoren

$$\mathcal{L}_G(X,Y) := \{L \in \mathcal{L}(X,Y) : L \circ \rho_X(g) = \rho_Y(g) \circ L \text{ für alle } g \in G\}$$

von X nach Y. Für einen Operator $L \in \mathcal{L}_G(X,Y)$ wird durch

$$\mathcal{L} : \mathcal{M} \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Lu_1 \\ \vdots \\ Lu_d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$$

ein linearer Operator von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ definiert. Aufgrund der Äquivarianz von L gilt tatsächlich $\mathcal{L}u \in \mathcal{N}$ für $u \in \mathcal{M}$, denn ist $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, so folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \rho_Y(g)Lu_1 \\ \vdots \\ \rho_Y(g)Lu_d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L\rho_X(g)u_1 \\ \vdots \\ L\rho_X(g)u_d \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \rho_X(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho_X(g)u_d \end{pmatrix} = \mathcal{L}A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} L(\sum_{k=1}^d a_{k1}(g)u_k) \\ \vdots \\ L(\sum_{k=1}^d a_{kd}(g)u_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^d a_{k1}(g)Lu_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^d a_{kd}(g)Lu_k \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} Lu_1 \\ \vdots \\ Lu_d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $g \in G$, wobei $A(g) = (a_{kl}(g))$ sei. Somit ist $\mathcal{L}u \in \mathcal{N}$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L|_M} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{N} \end{array}$$

Ist U ein irreduzibler Unterraum von M mit Transformationsbasis $u_1, \ldots, u_d$ und ist $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, so ist entweder $\mathcal{L}u = 0$ oder es ist $\mathcal{L}u = v = (v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ und $V := \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ ist ein irreduzibler Unterraum von N. In diesem Sinn bildet $\mathcal{L}$ irreduzible Unterräume von M auf irreduzible Unterräume von N ab.

Lemma 2.4.2 *Es seien X und Y Banach-Räume, so dass X kompakt und dicht in Y eingebettet ist.*

Ist $L \in \mathcal{L}_G(X,Y)$ ein selbstadjungierter Operator (und somit ein Fredholm-Operator mit Index 0), so ist auch $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Beweis: Die Abgeschlossenheit von $\operatorname{range}\mathcal{L}$ und die endliche Dimension von $\ker\mathcal{L}$ und $\mathcal{N}/\operatorname{range}\mathcal{L}$ ergibt sich aus den entsprechenden Eigenschaften von L.

Aufgrund der Voraussetzungen gilt $Y = \operatorname{range} L \oplus \ker L$. Schränkt man L auf die isotypische Komponente M ein, so gilt ebenfalls $N = \operatorname{range} L|_M \oplus \ker L|_M$. Hieraus folgt sofort auch $\mathcal{N} = \operatorname{range}\mathcal{L} \oplus \ker\mathcal{L}$. Damit ist $\operatorname{ind}\mathcal{L} = 0$. □

Kapitel 3

Generische Irreduzibilität von Eigenräumen äquivarianter elliptischer Differentialoperatoren mit Hilfe des Störungssatzes

In diesem Kapitel wird ausgehend vom störungstheoretischen Ansatz von Albert [2], der auf dem Satz von Rellich (Satz 1.3.2) basiert, gezeigt, dass bei invarianten Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung von einem äquivarianten, selbstadjungierten, strikt elliptischen, linearen Differentialoperator zweiter Ordnung generisch die Eigenräume irreduzibel sind.

3.1 Der Generizitätssatz

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G (bezüglich dieser Darstellung) ist. Dabei wollen wir voraussetzen, dass G keine Darstellungen vom quaternionischen Typ hat. Die meisten der in den Anwendungen auftretenden Gruppen erfüllen diese Voraussetzung (vgl. jedoch [23]).

Durch ρ wird durch

$$\rho : G \ni g \mapsto [L^2(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^2(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^2(\Omega))$$

eine Darstellung auf $L^2(\Omega)$ induziert (vgl. Beispiel 1.1.5).

Gegeben sei ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, der äquivariant bezüglich G ist.

Es sei

$$B := C_G^\infty(\overline{\Omega}) := \{f \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \rho(g)f = f \ \forall g \in G\}$$

die Menge der invarianten Funktionen in $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Ist $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$, so ist $L_b : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto Lu + bu \in L^2(\Omega)$ ebenfalls ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter

Ordnung. Die Äquivarianz von L_b ergibt sich aus der Äquivarianz von L und der Invarianz von b durch

$$\begin{aligned}\rho(g)\circ L_b u &= \rho(g)\circ Lu + \rho(g)(bu) = L\circ\rho(g)u + (\rho(g)b)(\rho(g)u)\\ &= L\circ\rho(g)u + b\rho(g)u = L_b(\rho(g)u)\end{aligned}$$

für $g \in G$.

Für $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ betrachten wir nun das Eigenwertproblem für L_b auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(L_b + \lambda)u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass innerhalb der Familie $\{L_b : b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})\}$ generisch die Operatoren nur irreduzible Eigenräume haben, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Annahme (A1):

Es sei λ Eigenwert von $L_b = L + b$ mit $b \in B$ und $E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu$ eine Zerlegung des zugehörigen Eigenraums in irreduzible Unterräume U_ν mit Transformationsbasen $u_1^{(\nu)}, \ldots, u_{d_\nu}^{(\nu)}$ bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, so dass $u_1^{(1)}, \ldots, u_{d_1}^{(1)}, \ldots, u_1^{(s)}, \ldots, u_{d_s}^{(s)}$ eine normierte zusammengesetzte Transformationsbasis von E_λ bilden (vgl. Korollar 2.3.3).

Falls für ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$ die Darstellungen $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ nicht äquivalent sind, gelte

$$\frac{1}{d_\nu}\sum_{k=1}^{d_\nu}(u_k^{(\nu)})^2 \neq \frac{1}{d_\mu}\sum_{k=1}^{d_\mu}(u_k^{(\mu)})^2. \tag{3.1}$$

Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so sei $\rho_\nu = \rho_\mu$ und es gelte entweder (3.1) *oder*

$$\sum_{k=1}^{d_\nu} u_k^{(\nu)} u_k^{(\mu)} \neq 0. \tag{3.2}$$

Da $u_k^{(\nu)}$ für $k \in \{1, \ldots, d_\nu\}$ und $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ Eigenfunktionen von L_b mit $b \in B = C_G^\infty(\overline{\Omega})$ sind, gilt $u_k^{(\nu)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Die Ungleichungen (3.1) und (3.2) sind daher als Ungleichungen im Raum $C^\infty(\overline{\Omega})$ zu verstehen, das heißt, die Funktionen auf der linken und rechten Seite sollen nicht identisch gleich sein. Es ist also erlaubt, dass es Punkte in Ω gibt, für die Gleichheit besteht, solange es mindestens einen Punkt gibt, für den die Gleichheit nicht erfüllt ist.

Im Fall, dass die Darstellungen auf den Unterräumen äquivalent sind, sollen die Transformationsbasen dieser Unterräume bezüglich der gleichen Darstellung gebildet werden.

In Kapitel 6 wird nachgewiesen, dass diese Bedingung für spezielle Gruppen, zum Beispiel für $\mathbf{O}(2)$ und für $\mathbb{D}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), erfüllt ist.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1.1 *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$, und es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω unter G invariant ist.*

Weiterhin sei L ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, der äquivariant bezüglich G ist.

Ist Annahme (A1) *erfüllt, so ist die Menge*

$$B' := \{b \in C_G^\infty(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenräume von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

residual in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$.

Dies bedeutet, dass die Operatoren L_b mit $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ generisch nur irreduzible Eigenräume haben.

Der Beweis dieses Satzes wird im dritten Abschnitt des Kapitels geführt und im nächsten Abschnitt vorbereitet. Dazu werden wir den Ansatz von Albert [2], der auf dem Störungssatz von Rellich (Satz 1.3.2) basiert, der Situation mit Symmetrie anpassen.

Im nächsten Kapitel wird noch ein alternativer Beweis präsentiert, der auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 aufbaut und den Beweisideen von Uhlenbeck [37] und Pereira [25] folgt.

3.2 Störung eines Eigenwerts

In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, dass es eine Störung L_{b_0} mit $b_0 \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ des Operators $L_b = L + b$ für $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ gibt, so dass ein mehrfacher Eigenwert von L_b mit reduziblem Eigenraum aufspaltet in mehrere Eigenwerte.

Es seien Ω, G und L wie im letzten Abschnitt.

Es sei $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und $\mathcal{V}$ eine Umgebung von b in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$. Weiterhin sei λ ein m-facher Eigenwert ($m > 1$) von $L_b = L + b$ und I ein offenes Intervall mit $\lambda \in I$, so dass keine weiteren Eigenwerte von L_b in I enthalten sind.

Proposition 3.2.1 *Es gebe ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und eine Orthonormalbasis $h_1, \ldots, h_m$ des Eigenraums E_λ, so dass die Matrix*

$$(\langle \sigma h_j, h_k \rangle_{L^2(\Omega)}) = \left(\int_\Omega \sigma h_j h_k \right)$$

kein Vielfaches der Einheitsmatrix $\mathrm{Id}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist.

Dann gibt es ein $b_0 \in \mathcal{V}$, so dass L_{b_0} paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_l$ in I hat, wobei $l > 1$ ist.

Das bedeutet, man kann den Operator L_b so stören, dass der mehrfache Eigenwert λ aufspaltet in mehrere Eigenwerte niedrigerer Vielfachheit.

Beweis:(Vgl. Albert [2])

1. Wir betrachten für kleine ε Störungen von L_b der Form

$$L(\varepsilon) := L_b + \varepsilon\sigma = L + b + \varepsilon\sigma,$$

wobei σ durch die Voraussetzung gegeben ist.

Nach Satz 1.3.2 gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ konvergente Potenzreihen

$$\lambda_j(\varepsilon) = \lambda + \varepsilon\lambda_j^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_j^{(2)} + \dots \quad (j \in \{1, \dots, m\})$$

in $\mathbb{R}$ und

$$\phi_j(\varepsilon) = \phi_j + \varepsilon\phi_j^{(1)} + \varepsilon^2\phi_j^{(2)} + \dots \quad (j \in \{1, \dots, m\})$$

in $C^\infty(\Omega)$ existieren mit

$$(L(\varepsilon) + \lambda_j(\varepsilon)\,\mathrm{id})\phi_j(\varepsilon) = 0$$

und so dass $\lambda_j(\varepsilon) \in I$ und $\lambda_j(0) = \lambda$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ ist und $\phi_1(\varepsilon), \dots, \phi_m(\varepsilon)$ orthonormal in $L^2(\Omega)$ sind. (Satz 1.3.2 liefert zunächst nur, dass die Potenzreihen ϕ_j für $j \in \{1, \dots, m\}$ in $L^2(\Omega)$ konvergieren. Man kann jedoch zeigen, dass dies auch in $C^\infty(\overline{\Omega})$ der Fall ist, vgl. [2].) Dabei hängen natürlich $\lambda_j^{(k)}$ und $\phi_j^{(k)}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ von σ ab.

Es sei $j \in \{1, \dots, m\}$. Differenziert man

$$\Big(L_b + \varepsilon\sigma + \lambda_j(\varepsilon)\Big)\phi_j(\varepsilon) = 0$$

nach ε und setzt $\varepsilon = 0$, so ergibt sich

$$(L_b + \lambda)\phi_j^{(1)} + (\sigma + \lambda_j^{(1)})\phi_j = 0. \tag{3.3}$$

Bilden wir nun in (3.3) das Skalarprodukt (in $L^2(\Omega)$) mit ϕ_k, $k \in \{1, \dots, m\}$, so ergibt sich mit der Selbstadjungiertheit von $L_b + \lambda$

$$\begin{aligned}
\langle (L_b + \lambda)\phi_j^{(1)}, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)} &+ \langle (\sigma + \lambda_j^{(1)})\phi_j, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \langle \phi_j^{(1)}, \underbrace{(L_b + \lambda)\phi_k}_{=0}\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \sigma\phi_j, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)} + \lambda_j^{(1)}\langle \phi_j, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit der Orthonormalität der Eigenfunktionen folgt nun

$$\langle \sigma\phi_j, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)} = -\lambda_j^{(1)}\delta_{jk}, \tag{3.4}$$

wobei δ_{jk} das Kronecker-Symbol ist.

2. Durch

$$B : E_\lambda \times E_\lambda \ni (u, v) \mapsto \langle \sigma u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sigma uv \in \mathbb{R}$$

ist eine Bilinearform auf E_λ gegeben. Ist $f_1, \dots, f_m$ eine Orthonormalbasis von E_λ, so ist die Darstellungsmatrix von B bezüglich dieser Basis gegeben durch

$$B(f_1, \dots, f_m) := (\langle \sigma f_j, f_k\rangle_{L^2(\Omega)}).$$

Nach (3.4) gilt

$$B(\phi_1, \dots, \phi_m) = (\langle \sigma\phi_j, \phi_k\rangle_{L^2(\Omega)}) = (-\lambda_j^{(1)}\delta_{jk}).$$

Ist die Darstellungsmatrix von B bezüglich einer Basis ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so ist sie dies bezüglich jeder Basis. Da nach Voraussetzung $B(h_1, \dots, h_m)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, kann auch $B(\phi_1, \dots, \phi_m)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix sein. Es gibt also j_1, j_2 in $\{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_{j_1}^{(1)} \neq \lambda_{j_2}^{(1)}$. Daher gibt es ein $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ mit $\lambda_{j_1}(\varepsilon) \neq \lambda_{j_2}(\varepsilon)$ für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$.

Es sei nun $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ und $b_0 = b + \varepsilon\sigma$. Dann hat $L_{b_0} = L + b + \varepsilon\sigma$ mindestens zwei verschiedene Eigenwerte in I, nämlich $\lambda_{j_1}(\varepsilon)$ und $\lambda_{j_2}(\varepsilon)$.

□

Nun muss noch die Voraussetzung von Proposition 3.2.1 näher untersucht werden. Wir brauchen also ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und eine Orthonormalbasis $h_1, \dots, h_m$ von E_λ, so dass $(\langle \sigma h_j, h_k \rangle_{L^2(\Omega)})$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix $\mathrm{Id}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist.

Es sei

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu$$

eine Zerlegung des Eigenraums E_λ in irreduzible Unterräume U_ν, $\nu \in \{1, \dots, s\}$. Zu jedem $\nu \in \{1, \dots, s\}$ sei eine normierte Transformationsbasis $w_1^{(\nu)}, \dots, w_{d_\nu}^{(\nu)}$ von U_ν bezüglich einer geeigneten irreduziblen Darstellung $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ gegeben, so dass $w_1^{(1)}, \dots, w_{d_s}^{(s)}$ eine normierte zusammengesetzte Transformationsbasis von E_λ ist (vgl. Korollar 2.3.3).

Für $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und $\nu, \mu \in \{1, \dots, s\}$ definieren wir die Matrix

$$C_{\nu,\mu}(\sigma) := \left(\langle \sigma w_j^{(\nu)}, w_k^{(\mu)} \rangle_{L^2(\Omega)}\right) = \left(\int_\Omega \sigma w_j^{(\nu)} w_k^{(\mu)}\right) \in \mathbb{R}^{d_\nu \times d_\mu}.$$

Lemma 3.2.2 *Es seien $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und ν, μ aus $\{1, \dots, s\}$.*

1. *Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ nicht äquivalent, so ist $C_{\nu,\mu}(\sigma) = 0 \in \mathbb{R}^{d_\nu \times d_\mu}$.*

2. *Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent und absolut irreduzibel, so ist $d_\nu = d_\mu =: d$ und es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*
$$C_{\nu,\mu}(\sigma) = \alpha\,\mathrm{Id}_d \quad \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$
Insbesondere ist $C_{\nu,\nu}(\sigma)$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{d \times d}$.

3. *Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel, so ist $d_\nu = d_\mu =: d = 2p$ und es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit*
$$C_{\nu,\mu}(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha\,\mathrm{Id}_p & -\beta\,\mathrm{Id}_p \\ \beta\,\mathrm{Id}_p & \alpha\,\mathrm{Id}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$
Außerdem gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $C_{\nu,\nu}(\sigma) = \alpha\,\mathrm{Id}_d$.

Bei der dritten Teilaussage ist zu beachten, dass wir generell Darstellungen vom quaternionischen Typ ausgeschlossen haben. Darstellungen, die irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel sind, sind also vom komplexen Typ.

Beweis: Es seien $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und $\nu, \mu \in \{1, \dots, s\}$. Für $j \in \{1, \dots, d_\nu\}$ und $k \in \{1, \dots, d_\mu\}$ setzen wir $c_{jk} := \langle \sigma w_j^{(\nu)}, w_k^{(\mu)} \rangle_{L^2(\Omega)}$. Dann ist $C_{\nu,\mu}(\sigma) = (c_{jk})$.

Für $l \in \{\nu, \mu\}$ gibt es eine zu $\rho|_{U_l}$ äquivalente, irreduzible, orthogonale Darstellung $\rho_l : G \ni g \mapsto A_l(g) = (a_{jk}^{(l)}) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_l})$. Es sei $w_1^{(l)}, \ldots, w_{d_l}^{(l)}$ Transformationsbasis von U_l bezüglich dieser Darstellung ρ_l, das heißt, es gilt für $g \in G$

$$\begin{pmatrix} \rho(g)w_1^{(l)} \\ \vdots \\ \rho(g)w_{d_l}^{(l)} \end{pmatrix} = A_l(g)^t \begin{pmatrix} w_1^{(l)} \\ \vdots \\ w_{d_l}^{(l)} \end{pmatrix}.$$

Aus der Invarianz von Ω und σ unter G und dem Transformationsverhalten der Transformationsbasen folgt für alle $g \in G$, $j \in \{1, \ldots, d_\nu\}$ und $k \in \{1, \ldots, d_\mu\}$

$$\begin{aligned} c_{jk} &= \int_\Omega \sigma w_j^{(\nu)} w_k^{(\mu)} = \int_\Omega \sigma \rho(g) w_j^{(\nu)} \rho(g) w_k^{(\mu)} = \int_\Omega \sigma \sum_{i=1}^{d_\nu} a_{ij}^{(\nu)}(g) w_i^{(\nu)} \sum_{l=1}^{d_\mu} a_{lk}^{(\mu)}(g) w_l^{(\mu)} \\ &= \sum_{i=1}^{d_\nu} \sum_{l=1}^{d_\mu} a_{ij}^{(\nu)}(g) \Big(\int_\Omega \sigma w_i^{(\nu)} w_l^{(\mu)} \Big) a_{lk}^{(\mu)}(g) = \sum_{i=1}^{d_\nu} \sum_{l=1}^{d_\mu} a_{ij}^{(\nu)}(g) c_{il} a_{lk}^{(\mu)}(g). \end{aligned}$$

Also gilt $C_{\nu,\mu}(\sigma) = A_\nu^t(g) C_{\nu,\mu}(\sigma) A_\mu(g)$ beziehungsweise $A_\nu(g) C_{\nu,\mu}(\sigma) = C_{\nu,\mu}(\sigma) A_\mu(g)$ für alle $g \in G$. Das bedeutet, die Matrix $C_{\nu,\mu}(\sigma)$ ist äquivariant bezüglich ρ_ν und ρ_μ.

Falls $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ nicht äquivalent sind, so liefert Lemma 1.1.14 $C_{\nu,\mu}(\sigma) = 0$.

Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent und absolut irreduzibel, so ist $d_\nu = d_\mu =: d$ und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\rho_\nu = \rho_\mu$ gilt. Aus der absoluten Irreduzibilität folgt nun, dass es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $C_{\nu,\mu}(\sigma) = \alpha \, \mathrm{Id}_d$ gibt.

Es seien nun $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel. Wir nehmen wieder ohne Einschränkung an, dass $\rho_\nu = \rho_\mu$ ist. Weiterhin gilt $d_1 = d_2 =: d = 2p$ für ein $p \in \mathbb{N}$, und aus Bemerkung 1.1.8 ergibt sich, dass es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$C_{\nu,\mu}(\sigma) = \begin{pmatrix} \alpha \, \mathrm{Id}_p & -\beta \, \mathrm{Id}_p \\ \beta \, \mathrm{Id}_p & \alpha \, \mathrm{Id}_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

wobei wir ohne Einschränkung davon ausgehen können, dass die Koordinaten des $\mathbb{R}^d$ entsprechend Bemerkung 1.1.8 gewählt sind. Da $C_{\nu,\nu}(\sigma)$ symmetrisch ist, gilt in diesem Fall $\beta = 0$ und somit ist $C_{\nu,\nu}(\sigma) = \alpha \, \mathrm{Id}_d$. □

Bemerkung 3.2.3 Aus Lemma 3.2.2 ergibt sich, dass Proposition 3.2.1 nicht angewandt werden kann, um einen Eigenwert, dessen Eigenraum irreduzibel ist, in mehrere Eigenwerte aufzuspalten (was nach Satz 1.3.3 auch nicht möglich ist):

Wenn $E_\lambda = U_1$ selber schon irreduzibel ist, ist für alle $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ die Matrix $C_{1,1}(\sigma) = (\langle \sigma w_j^{(1)}, w_k^{(1)} \rangle_{L^2(\Omega)})$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Daher ist die Matrix $(\langle \sigma \phi_j, \phi_k \rangle_{L^2(\Omega)})$ für jede Orthonormalbasis $\phi_1, \ldots, \phi_{d_1}$ und alle $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Somit ist die Voraussetzung von Proposition 3.2.1 nicht erfüllt. □

Betrachtet man eine Basis $h_1, \ldots, h_m$ von E_λ, die sich aus Transformationsbasen irreduzibler Unterräume von E_λ zusammensetzt, so setzt sich für $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ die Matrix $(\langle \sigma h_j, h_k \rangle_{L^2(\Omega)})$ aus Blöcken der Form $C_{\nu,\mu}(\sigma)$ zusammen. Erfüllen die Transformationsbasen die algebraischen Bedingungen aus der Annahme (A1) (siehe Seite 45), so kann man ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ finden, so dass $(\langle \sigma h_j, h_k \rangle)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist und somit die Voraussetzung von Proposition 3.2.1 erfüllt ist.

Zur Vorbereitung des Beweises dieser Aussage brauchen wir noch zwei Hilfsmittel.

Lemma 3.2.4 *Es seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho^{(d)} : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ eine irreduzible, orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$.*

Sind U und V irreduzible, d-dimensionale Unterräume von $L^2(\Omega)$, so dass $\rho|_U$ und $\rho|_V$ äquivalent zu $\rho^{(d)}$ sind, und sind $u_1, \ldots, u_d$ und $v_1, \ldots, v_d$ Transformationsbasen von U beziehungsweise V bezüglich $\rho^{(d)}$, so ist die Funktion

$$f := \sum_{j=1}^{d} u_j v_j \in L^1(\Omega)$$

invariant unter G.

Beweis: Es sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$. Da $u_1, \ldots, u_d$ und $v_1, \ldots, v_d$ Transformationsbasen bezüglich $\rho^{(d)}$ sind, gilt

$$\begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \rho(g)v_1 \\ \vdots \\ \rho(g)v_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$$

für $g \in G$. Aus diesem Transformationsverhalten und der Orthogonalität von $\rho^{(d)}$ folgt für $g \in G$

$$\begin{aligned} \rho(g)f &= \rho(g)\Big(\sum_{j=1}^{d} u_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{d} \rho(g)u_j \rho(g)v_j \\ &= \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{k=1}^{d} a_{kj}(g)u_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{d} a_{lj}(g)v_l\Big) = \sum_{k,l=1}^{d} u_k v_l \underbrace{\sum_{j=1}^{d} a_{kj}(g)a_{lj}(g)}_{=\delta_{kl}} \\ &= \sum_{k=1}^{d} u_k v_k = f. \end{aligned}$$

Also ist f invariant unter G. □

Lemma 3.2.5 *Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe. Wir setzen*

$$L_G^1(\Omega) := \{f \in L^1(\Omega) : f \text{ invariant unter } G\}.$$

Die Menge $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $L_G^1(\Omega)$.

Beweis: Es sei $f \in L_G^1(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ ist, gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_n \to f$ für $n \to \infty$ in $L^1(\Omega)$. Wir setzen $\psi_n := \int_G \varphi_n(\rho(g) \cdot\,)dg$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\psi_n \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Unter Verwendung der Invarianz von f unter G ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\|f-\psi_n\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f(x) - \int_G \varphi_n(\rho(g)x)dg|dx = \int_\Omega \Big| \int_G \Big(f(\rho(g)x) - \varphi_n(\rho(g)x)\Big)dg\Big|dx \\ &\le \int_\Omega \int_G |f(\rho(g)x) - \varphi_n(\rho(g)x)|dg\,dx = \int_G \underbrace{\int_\Omega |f(\rho(g)x) - \varphi_n(\rho(g)x)|dx}_{=\|(f-\varphi_n)\circ\rho(g)\|_{L^1(\Omega)}}dg \\ &= \|f-\varphi_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Dichtheit von $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ in $L_G^1(\Omega)$. □

Proposition 3.2.6 *Es sei Annahme* (A1) *erfüllt.*

Dann gibt es ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und eine Orthonormalbasis $h_1, \dots, h_m$ von E_λ, so dass die Matrix $(\langle \sigma h_j, h_k\rangle)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Beweis:

1. Wir betrachten eine Zerlegung

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$$

von E_λ mit irreduziblen Unterräumen $U_1, \dots, U_s$. Zu jedem $\nu \in \{1, \dots, s\}$ sei eine normierte Transformationsbasis $w_1^{(\nu)}, \dots, w_{d_\nu}^{(\nu)}$ von U_ν bezüglich einer geeigneten irreduziblen, orthogonalen Darstellung $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ gegeben, so dass $w_1^{(1)}, \dots, w_{d_s}^{(s)}$ eine Orthonormalbasis von E_λ ist (vgl. Korollar 2.3.3).

Es seien $h_j := w_j^{(1)}$ für $j \in \{1, \dots, d_1\}$ und $h_{d_1+\dots+d_{\nu-1}+j} := w_j^{(\nu)}$ für $\nu \in \{2, \dots, s\}$ und $j \in \{1, \dots, d_\nu\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ existiert, so dass es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$H(\sigma) := (\langle \sigma h_j, h_k\rangle_{L^2(\Omega)}) = \alpha \,\mathrm{Id}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Zu gegebenem $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ betrachten wir eine Teilmatrix von $H(\sigma)$, nämlich $H'(\sigma) := (\langle \sigma h_j, h_k\rangle_{L^2(\Omega)})$, wobei j und k hier nur in $\{1, \dots, d_1 + d_2\}$ seien. Zur Vereinfachung setzen wir $u_j := h_j = w_j^{(1)}$ für $j \in \{1, \dots, d_1\}$ und $v_j := h_{d_1+j} = w_j^{(2)}$ für $j \in \{1, \dots, d_2\}$. Dann bilden $u_1, \dots, u_{d_1}$ eine Transformationsbasis von U_1 und $v_1, \dots, v_{d_2}$ eine Transformationsbasis von U_2. Die Matrix $H'(\sigma)$ lässt sich nun als Blockmatrix schreiben,

$$H'(\sigma) = \begin{pmatrix} (\langle \sigma u_j, u_k\rangle_{L^2(\Omega)}) & (\langle \sigma u_j, v_k\rangle_{L^2(\Omega)}) \\ (\langle \sigma v_j, u_k\rangle_{L^2(\Omega)}) & (\langle \sigma v_j, v_k\rangle_{L^2(\Omega)}) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $H_1 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$, $H_2 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_2}$, $H_3 \in \mathbb{R}^{d_2\times d_1}$ und $H_4 \in \mathbb{R}^{d_2\times d_2}$. Außerdem ist $H_2 = H_3^t$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass es ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ gibt, so dass schon $H'(\sigma)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix $\mathrm{Id}_{d_1+d_2} \in \mathbb{R}^{(d_1+d_2)\times(d_1+d_2)}$ ist. Dann kann natürlich auch $H(\sigma)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix $\mathrm{Id}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sein.

2. *Angenommen, zu jedem $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ gibt es ein $\alpha(\sigma) \in \mathbb{R}$ mit*
$$H'(\sigma) = \alpha(\sigma)\,\mathrm{Id}_{d_1+d_2} \in \mathbb{R}^{(d_1+d_2)\times(d_1+d_2)}.$$

   Es sei $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$. Aufgrund obiger Annahme gilt $H_1 = \alpha(\sigma)\,\mathrm{Id}_{d_1} \in \mathbb{R}^{d_1\times d_1}$, $H_2 = H_3^t = 0 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_2}$ und $H_4 = \alpha(\sigma)\,\mathrm{Id}_{d_2} \in \mathbb{R}^{d_2\times d_2}$. Die Summation über die Hauptdiagonalen von H_1 und H_4 liefert
$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}\langle\sigma u_j, u_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}\langle\sigma v_j, v_j\rangle_{L^2(\Omega)}.$$
   Hieraus folgt
$$\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}\langle\sigma u_j, u_j\rangle_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}\langle\sigma v_j, v_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sigma\Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}u_j^2 - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}v_j^2\Big) = 0. \quad (3.5)$$
   Sind $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ nicht zueinander äquivalent, so folgt aus Lemma 3.2.2, dass $H_2 = H_3^t = 0 \in \mathbb{R}^{d_1\times d_2}$ gilt. Sind jedoch $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ äquivalent, so ist dies nicht notwendigerweise der Fall. Dann ist $d_1 = d_2 =: d$ und da aufgrund obiger Annahme $H_2 = 0$ gelten muss, liefert die Summation über die Hauptdiagonale von H_2 zusätzlich
$$\sum_{j=1}^{d}\langle\sigma u_j, v_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sigma u_j v_j = 0. \quad (3.6)$$

3. Wir setzen $f_1 := \sum_{j=1}^{d_1} u_j^2 \in L^1(\Omega)$ und $f_2 := \sum_{j=1}^{d_2} v_j^2 \in L^1(\Omega)$. Nach Lemma 3.2.4 sind f_1 und f_2 invariant unter G.

   Aufgrund der Annahme in Beweisteil 2 und (3.5) gilt
$$\int_\Omega \sigma\Big(\frac{1}{d_1}f_1 - \frac{1}{d_2}f_2\Big) = 0 \quad \text{für alle } \sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega}).$$
   Aus der Invarianz von f_1 und f_2 unter G und der Dichtheit von $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ in $L_G^1(\Omega)$ folgt
$$\frac{1}{d_1}f_1 - \frac{1}{d_2}f_2 = \frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1}u_j^2 - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2}v_j^2 = 0. \quad (3.7)$$
   (Man beachte: Zunächst gilt diese Gleichheit nur fast überall in Ω; da $u_1,\dots,u_{d_1}$ und $v_1,\dots,v_{d_2}$ Eigenfunktionen von L_b sind, handelt es sich um Funktionen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, und somit gilt die Gleichheit auf ganz Ω.)

   Sind $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ nicht äquivalent, so widerspricht dies aber Annahme (A1).

4. Nun seien $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ äquivalent und $d_1 = d_2 = d$. Es sei $f_3 := \sum_{j=1}^{d} u_j v_j \in L^1(\Omega)$. Nach Lemma 3.2.4 ist f_3 invariant unter G.

   Auch in diesem Fall gilt (3.7). Da aufgrund der Annahme im Beweisschritt 2 auch Gleichung (3.6) für alle $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ erfüllt ist, folgt zusätzlich aus der Invarianz von f_3
$$f_3 = \sum_{j=1}^{d} u_j v_j = 0. \quad (3.8)$$
   Nach Annahme (A1) können aber (3.7) und (3.8) nicht gleichzeitig erfüllt sein.

5. Aus den Beweisschritten 3 und 4 ergibt sich nun, dass die Annahme im Beweisteil 2 nicht gelten kann und somit H' – und damit auch H – kein Vielfaches der Einheitsmatrix sein kann.

$\square$

Bemerkung 3.2.7 Man kann in Proposition 3.2.6 auch konkret ein $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ angeben, so dass $(\langle \sigma h_j, h_k\rangle_{L^2(\Omega)})$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist, wobei sich die Basis $h_1, \ldots, h_m$ von E_λ wie im Beweis von Proposition 3.2.6 aus Transformationsbasen irreduzibler Unterräume von E_λ zusammensetzt.

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen aus dem Beweis von Proposition 3.2.6.

1. Sind $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ nicht äquivalent, so setzen wir

$$\sigma := \frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2 - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2. \tag{3.9}$$

Nach Lemma 3.2.4 ist σ invariant und da u_j und v_j Eigenfunktionen sind, gilt $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$. Annahme (A1) garantiert, dass dies nicht die Null-Funktion ist.

Nach Lemma 3.2.2 ist $H_1 = (\langle \sigma u_j, u_k\rangle_{L^2(\Omega)})$ eine Diagonalmatrix mit Diagonalelement $\alpha_1 \in \mathbb{R}$. Die Summation über die Hauptdiagonale von H_1 liefert

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{d_1}\sum_{k=1}^{d_1}\langle \sigma u_k, u_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{d_1}\sum_{k=1}^{d_1}\int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2 - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big)u_k^2 \\ &= \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2\Big)^2 - \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2\Big)\Big(\frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big).\end{aligned}$$

Analoge Überlegungen für $H_4 = (\langle \sigma v_j, v_k\rangle_{L^2(\Omega)})$ ergeben, dass H_4 eine Diagonalmatrix mit Diagonalelement

$$\alpha_4 = \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2\Big)\Big(\frac{1}{d_2}\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2\Big) - \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big)^2$$

ist. Wegen

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_4 &= \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2\Big)^2 - 2\int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2\Big)\Big(\frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big) + \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big)^2 \\ &= \int_\Omega \Big(\frac{1}{d_1}\sum_{j=1}^{d_1} u_j^2 - \frac{1}{d_2}\sum_{j=1}^{d_2} v_j^2\Big)^2 = \int_\Omega \sigma^2 > 0\end{aligned}$$

kann $H'(\sigma)$ (und somit auch $H(\sigma)$) kein Vielfaches der Einheitsmatrix sein.

2. Es seien nun $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ äquivalent. Annahme (A1) lässt in diesem Fall zu, dass die Funktion σ aus (3.9) die Null-Funktion ist. Sollte dies der Fall sein, so muss aber

$$\sigma' := \sum_{j=1}^{d} u_j v_j \neq 0$$

sein (vgl. Seite 45). Wegen Lemma 3.2.4 ist $\sigma' \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$.

Nach Lemma 3.2.2 ist auch $H_2 = (\langle \sigma' u_j, v_k \rangle_{L^2(\Omega)}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine Diagonalmatrix mit gleichen Diagonalelementen. Das Diagonalelement α_2 kann man durch Summation über die Hauptdiagonale berechnen:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \langle \sigma' u_k, v_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^{d} u_j v_j \Big) u_k v_k \\ &= \frac{1}{d} \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^{d} u_j v_j \Big)^2 = \frac{1}{d} \int_\Omega \sigma'^2 > 0.\end{aligned}$$

Somit ist $H_2 \neq 0$. Also ist nun $H'(\sigma')$ – und damit auch $H(\sigma')$ – kein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Zusammen mit dem Ansatz im Beweis von Proposition 3.2.6 ergibt sich, dass Annahme (A1) in einem gewissen Sinn „bestmöglich“ ist:

In dieser Bemerkung wird eine Störung σ angegeben, für die die Matrix $H'(\sigma)$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix ist und somit Proposition 3.2.1 mit diesem σ angewendet werden kann. Dabei liefert Annahme (A1) (siehe Seite 45), dass dieses σ nicht die Nullfunktion ist.

Im Beweis von Proposition 3.2.6 wird gezeigt, dass Annahme (A1) verletzt sein muss, falls $H'(\sigma)$ für alle $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. □

Aus den Propositionen 3.2.6 und 3.2.1 ergibt sich nun folgender Störungssatz:

Proposition 3.2.8 *Es seien $b \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und $\mathcal{V}$ eine Umgebung von b in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$. Weiter sei λ ein m-facher Eigenwert ($m > 1$) von $L_b = L + b$ und I ein offenes Intervall mit $\lambda \in I$, so dass keine weiteren Eigenwerte von L_b in I enthalten sind. Der Eigenraum E_λ habe eine Zerlegung*

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu$$

in irreduzible Unterräume U_ν, $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, $s > 1$. Außerdem sei Annahme (A1) *erfüllt.*

Dann gibt es ein $b' \in \mathcal{V}$, so dass $L_{b'}$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ in I hat, deren Eigenräume irreduzibel sind.

Beweis: Die Propositionen 3.2.6 und 3.2.1 liefern, dass es ein $b_0 \in \mathcal{V}$ gibt, so dass L_{b_0} paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_l$ in I hat, wobei $1 < l \leq s$ ist. Dabei kann $b_0 = b + \varepsilon\sigma$ gewählt werden (vgl. Beweis von Proposition 3.2.1), wobei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein sein muss und $\sigma \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ wie in Bemerkung 3.2.7 konstruiert wird.

Nach Satz 1.3.3 kommen alle irreduziblen Darstellungen, die in $E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu$ vorkommen, auch in $\bigoplus_{\nu=1}^{l} E_{\mu_\nu}$ vor, und zwar mit den gleichen Vielfachheiten. Ist also $l < s$, so ist einer der Eigenräume von L_{b_0} reduzibel. Erneute Anwendung der Propositionen 3.2.6 und 3.2.1 liefert ein $b_1 \in \mathcal{V}$, so dass auch dieser Eigenraum aufspaltet.

Auf diese Weise erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein $b' \in \mathcal{V}$, so dass alle Eigenräume von Eigenwerten von $L_{b'}$ in I irreduzibel sind. □

Ein Eigenwert von L_b, dessen Eigenraum reduzibel ist, spaltet also bei geeigneter Störung des Operators innerhalb der Familie $\{L_{b'} : b' \in C_G^\infty(\overline{\Omega})\}$ auf in mehrere Eigenwerte, deren Eigenräume irreduzibel sind. Dabei kann diese Störung sogar explizit angegeben werden (siehe Bemerkung 3.2.7).

3.3 Beweis von Satz 3.1.1

In diesem Abschnitt wird Satz 3.1.1 bewiesen. Dazu seien Ω, G und L wie in Abschnitt 3.1 gegeben.

Wir wollen nachweisen, dass

$$\begin{aligned} B' &:= \{b \in B : \text{ alle Eigenwerte von } L_b \text{ sind } G\text{-einfach}\} \\ &= \{b \in B : \text{ alle Eigenräume zu Eigenwerten von } L_b \text{ sind irreduzibel}\} \end{aligned}$$

residual in $B = C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ist, das heißt, dass B' der abzählbare Durchschnitt von offenen und dichten Teilmengen von B ist. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}$

$$B_n := \{b \in C_G^\infty(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\}.$$

Dann gilt

$$B' \subseteq \ldots \subseteq B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq \ldots \subseteq B_2 \subseteq B_1 \subseteq B = C_G^\infty(\overline{\Omega})$$

und

$$B' = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen B_n offen und dicht in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ sind.

Proposition 3.3.1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist B_n offen.*

Beweis: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $b \in B_n$. Dann sind die Eigenräume zu Eigenwerten λ von L_b mit $|\lambda| \leq n$ irreduzibel. Wegen der Elliptizität von L_b gibt es nur endlich viele Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit $|\lambda_j| \leq n$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$ (vgl. Satz 1.4.1). Weiterhin seien $\lambda_{k+1} := \min\{\lambda \in \sigma(L_b) : \lambda > n\}$ und $\lambda_{k+2} := \max\{\lambda \in \sigma(L_b) : \lambda < -n\}$, falls es Eigenwerte gibt, die kleiner als $-n$ sind. Für $j \in \{1, \ldots, k+2\}$ seien $I_j \ni \lambda_j$ paarweise disjunkte, offene Intervalle, die keine weiteren Eigenwerte von L_b enthalten, wobei noch $I_{k+1} \subset (n, \infty)$ und $I_{k+2} \subset (-\infty, -n)$ gelten soll.

Aus den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 und der Irreduzibilität der Eigenräume E_{λ_j} für $j \in \{1, \ldots, k\}$ folgt, dass es nun zu jedem $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein $\delta_j > 0$ gibt, so dass alle $T \in \mathcal{L}_G(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ mit $\|L_b - T\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} < \delta_j$ einen Eigenwert $\mu_j \in I_j$ haben mit irreduziblem Eigenraum E_{μ_j}. Ebenso gibt es zu $j \in \{k+1, k+2\}$ ein $\delta_j > 0$, so dass die durch äquivariante Störungen $T \in \mathcal{L}_G(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ mit $\|L_b - T\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} < \delta_j$ aus λ_j entstehenden Eigenwerte in I_j enthalten sind.

Es sei nun $\delta = \min\{\delta_j : j \in \{1, \ldots, k+2\}\}$ und $T \in \mathcal{L}_G(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ mit $\|L_b - T\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))} < \delta$. Dann hat T Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_k$ mit $\mu_j \in I_j$ ($j \in \{1, \ldots, k\}$) mit irreduziblen Eigenräumen und alle weiteren Eigenwerte von T sind betraglich größer als n.

Wir betrachten für $b' \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ den Operator $T_{b'} : H^2(\omega) \cap H_0^1(\Omega) \ni u \mapsto b'u \in L^2(\Omega)$.

Dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{V}$ von b in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$, so dass für alle $b' \in \mathcal{V}$ gilt

$$\|L_b - L_{b'}\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))} = \|T_b - T_{b'}\|_{\mathcal{L}(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),L^2(\Omega))} \leq \|b - b'\|_{L^2(\Omega)} < \delta.$$

Also ist $L_{b'} \in B_n$ für alle $b' \in \mathcal{V}$.

Somit gibt es eine Umgebung $\mathcal{V}$ von b in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ mit $\mathcal{V} \subset B_n$. Das bedeutet, B_n ist offen. □

Proposition 3.3.2 *Es sei Annahme* (A1) *erfüllt.*

Dann ist B_{n+1} dicht in B_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es seien $n \in \mathbb{N}$, $b \in B_n$ und eine Umgebung $\mathcal{U}$ von b in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ gegeben. Es ist nun zu zeigen, dass $\mathcal{U} \cap B_{n+1} \neq \emptyset$ ist.

Wegen $b \in B_n$ sind alle Eigenräume von $L_b = L + b$ zu Eigenwerten λ mit $|\lambda| \leq n$ irreduzibel. Aufgrund der Offenheit von B_n (vgl. Proposition 3.3.1) gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ von b mit $\mathcal{U}' \subset B_n$. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{U}'$ so gewählt, dass die Eigenwerte von $L_{b'}$ mit $b' \in \mathcal{U}'$, die gemäß Satz 1.3.3 aus Eigenwerten λ von L_b mit $|\lambda| > n+1$ entstehen, betraglich größer als $n+1$ sind.

Es gibt endlich viele, paarweise verschiedene (möglicherweise mehrfache) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von L_b mit $n < |\lambda_j| \leq n+1$. Es seien I_j paarweise disjunkte, offene Intervalle mit $\lambda_j \in I_j$ für $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Ist der Eigenraum E_{λ_1} irreduzibel, so gibt es nach Satz 1.3.3 eine Umgebung $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}'$ von b, so dass für alle $b' \in \mathcal{U}''$ der Operator $L_{b'}$ (genau) einen Eigenwert λ_1' in I_1 hat, dessen Eigenraum ebenfalls irreduzibel ist.

Es sei nun E_{λ_1} reduzibel und $E_{\lambda_1} = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ eine Zerlegung von E_λ in irreduzible Räume. Nach Proposition 3.2.8 gibt es ein $b_1 \in \mathcal{U}'$, so dass L_{b_1} paarweise verschiedene Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ in I_1 hat, deren Eigenräume irreduzibel sind. Wir betrachten nun den Operator L_{b_1}. Wie oben gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}'' \subset \mathcal{U}'$ von b_1, so dass für alle $b' \in \mathcal{U}''$ die Eigenräume der Eigenwerte in I_1 von $L_{b'}$ irreduzibel bleiben.

Für die verbleibenden Eigenwerte von L_{b_1} in den Intervallen $I_2, \ldots, I_k$ verfahren wir entsprechend.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir somit ein $\tilde{b} \in \mathcal{U}$, so dass alle Eigenräume zu Eigenwerten λ von $L_{\tilde{b}}$ mit $|\lambda| \leq n+1$ irreduzibel sind. Es ist also $\tilde{b} \in \mathcal{U} \cap B_{n+1}$. □

Aus der Offenheit und Dichtheit der B_n für $n \in \mathbb{N}$ folgt, dass

$$B' = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

residual in $B = C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ist. Dies beweist Satz 3.1.1.

Kapitel 4

Generische Irreduzibilität von Eigenräumen äquivarianter elliptischer Differentialoperatoren mit Hilfe des Transversalitätssatzes

In diesem Kapitel wird erneut gezeigt, dass bei Störungen nullter Differenzierbarkeitsordnung von einem äquivarianten, selbstadjungierten, strikt elliptischen, linearen Differentialoperator zweiter Ordnung generisch die Eigenräume irreduzibel sind. Diesmal basiert der Beweis auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 und folgt den Ideen von UHLENBECK [37] und PEREIRA [25].

4.1 Der Generizitätssatz

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe. In diesem Kapitel schränken wir uns ein auf Lie-Gruppen, die nur absolut irreduzible Darstellungen haben. Es sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist. Dazu betrachten wir die dadurch induzierte Darstellung

$$\rho : G \ni g \mapsto [L^2(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^2(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^2(\Omega))$$

auf $L^2(\Omega)$ (vgl. Beispiel 1.1.5). Weiterhin sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit

$$B := C^k_G(\overline{\Omega}) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}) : \rho(g)f = f \ \forall g \in G\}$$

werde die Menge der unter G invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$ bezeichnet.

Gegeben sei noch ein selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung L auf Ω mit Koeffizienten in $C^k(\overline{\Omega})$, der äquivariant bezüglich G ist. Ist $b \in B$, so ist $L_b : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \ni u \mapsto Lu + bu \in L^2(\Omega)$ ebenfalls ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung.

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem zu L_b mit $b \in B$ auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(L_b + \lambda)u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass innerhalb der Familie $\{L_b : b \in B\}$ die Operatoren generisch nur irreduzible Eigenräume haben, falls die folgende Bedingung erfüllt ist, wobei die Unterschiede zu Annahme (A1) (siehe Seite 45) im Anschluss erläutert werden:

Annahme (A2):

Es sei λ Eigenwert von $L_b = L+b$ mit $b \in B$. Für jede Zerlegung des zugehörigen Eigenraums $E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$ in irreduzible Unterräume U_ν mit normierten Transformationsbasen $u_1^{(\nu)}, \dots, u_{d_\nu}^{(\nu)}$ bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ für $\nu \in \{1, \dots, s\}$ gilt:

Falls $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ für ν, μ aus $\{1, \dots, s\}$ nicht äquivalent sind, ist

$$\frac{1}{d_\nu} \sum_{k=1}^{d_\nu} (u_k^{(\nu)})^2 \neq \frac{1}{d_\mu} \sum_{k=1}^{d_\mu} (u_k^{(\mu)})^2. \tag{4.1}$$

Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so gilt

$$\sum_{k=1}^{d_\nu} u_k^{(\nu)} u_k^{(\mu)} \neq 0, \tag{4.2}$$

wobei wir in diesem Fall annehmen, dass $\rho_\nu = \rho_\mu$ ist.

Die Ungleichungen (4.1) und (4.2) sind hier wieder als Ungleichheiten von Funktionen zu verstehen (vgl. Annahme (A1), Seite 45).

Hierbei ist zu beachten, dass sich Annahme (A2) etwas von Annahme (A1) aus dem dritten Kapitel unterscheidet:
In Annahme (A1) wird gefordert, dass *eine* zusammengesetzte Transformationsbasis des Eigenraums E_λ einer Bedingung genügt. Annahme (A2) dagegen verlangt, dass die entsprechende Voraussetzung für *alle* Zerlegungen von E_λ und deren Transformationsbasen, die nicht notwendigerweise eine zusammengesetzte Transformationsbasis von E_λ bilden müssen, erfüllt ist.
Außerdem wird bei äquivalenten Darstellungen in Annahme (A1) gefordert, dass entweder (4.1) oder (4.2) gilt, während Annahme (A2) auf jeden Fall (4.2) verlangt.

In Kapitel 6 wird nachgewiesen, dass Annahme (A2) zum Beispiel für $B = C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllt ist.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, folgenden Generizitätssatz zu beweisen:

Satz 4.1.1 *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen alle absolut irreduzibel sind, und es sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist. Außerdem sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gegeben. Es sei $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten in $C^k(\overline{\Omega})$.*

Ist Annahme (A2) *erfüllt, so ist die Menge*

$$B_k' := \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

residual in $C_G^k(\overline{\Omega})$.

Im Gegensatz zu Satz 3.1.1 ist hier die Aussage beschränkt auf Gruppen, deren irreduzible Darstellungen sogar absolut irreduzibel sind.

Es muss nachgewiesen werden, dass für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Menge B'_k der abzählbare Durchschnitt von offenen und dichten Teilmengen von $B = C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}$

$$B_{n,k} := \{b \in B : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\}.$$

Dann gilt

$$B'_k \subseteq \ldots \subseteq B_{n+1,k} \subseteq B_{n,k} \subseteq \ldots \subseteq B_{2,k} \subseteq B_{1,k} \subseteq B$$

und

$$B'_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Die Offenheit der Mengen $B_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$ zeigt man wie in Proposition 3.3.1. Es bleibt noch die Dichtheit nachzuweisen. Dies wird in den nächsten beiden Abschnitten vorbereitet. Dabei werden wir die Grundideen von Uhlenbeck [37] und Pereira [25] verwenden, die auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 beruhen. Im vierten Abschnitt erfolgt dann der Beweis von Satz 4.1.1.

4.2 Störung innerhalb der gleichen isotypischen Komponente

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Operatoren L_b mit $b \in B$ auf eine isotypische Komponente einschränken und zeigen, dass sie innerhalb dieser isotypischen Komponente generisch nur irreduzible Eigenräume haben.

Es seien Ω, G und L wie im vorigen Abschnitt, und es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Außerdem seien $k \in \mathbb{N}$ ($k = \infty$ ist im Folgenden nicht zugelassen) und $B = C^k_G(\overline{\Omega})$.

Weiterhin sei N eine isotypische Komponente von $L^2(\Omega)$ und M die entsprechende isotypische Komponente von $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, so dass die Darstellungen der irreduziblen Unterräume von M zu denen von N äquivalent sind. Diese sind sogar absolut irreduzibel, da wir voraussetzen, dass alle irreduziblen Darstellungen von G sogar absolut irreduzibel sind.

Wir betrachten nun die auf die isotypische Komponente M eingeschränkten Operatoren $L_b|_M : M \to N$ mit $b \in B$. Es wird gezeigt, dass die Menge

$$C_n(M) := \{b \in B : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b|_M \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

dicht in $B = C^k_G(\overline{\Omega})$ ist.

Dazu sei $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) = (a_{jk}(g)) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ eine absolut irreduzible orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, die äquivalent zu den Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M ist. Wie in Kapitel 2 betrachten wir die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))^d : \begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}$$

(vgl. Definition 2.1.1). Auf gleiche Weise bilden wir noch $\mathcal{N} \subset (L^2(\Omega))^d$. Zu jedem irreduziblen Unterraum U von M gibt es dann ein $(u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathcal{M}$ mit $U = \langle u_1, \ldots, u_d \rangle$, und für jedes $(u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathcal{M}$ ist $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle$ ein irreduzibler Unterraum von M (vgl. Lemma 2.1.2).

Für $b \in B$ definieren wir auf $\mathcal{M}$ durch

$$\mathcal{L}_b : \mathcal{M} \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} L_b u_1 \\ \vdots \\ L_b u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lu_1 + bu_1 \\ \vdots \\ Lu_d + bu_d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$$

einen zu $L_b|_M$ korrespondierenden Operator auf $\mathcal{M}$. Sind $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ und $U := \langle u_1, \ldots, u_d \rangle$, so ist entweder $L_b(U) = \{0\}$ oder es gilt $\mathcal{L}_b u = (v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$ und $V := \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ ist ein nichttrivialer irreduzibler Unterraum von N. Der Operator $\mathcal{L}_b$ bildet in diesem Sinn also irreduzible Unterräume von M ab auf irreduzible Unterräume von N.

Lemma 4.2.1 *Es sei $b \in B$.*

Genau dann sind alle Eigenräume von $L_b|_M$ irreduzibel, wenn alle Eigenwerte von $\mathcal{L}_b$ einfach sind.

Beweis: Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $L_b|_M$ und $E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$ eine Zerlegung des zugehörigen Eigenraums E_λ in irreduzible Unterräume U_ν für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$. Zu jedem $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ wählen wir eine Transformationsbasis $u_1^{(\nu)}, \ldots, u_d^{(\nu)}$ von U_ν und setzen $u_\nu := (u_1^{(\nu)}, \ldots, u_d^{(\nu)}) \in \mathcal{M}$. Dann sind $u_1, \ldots, u_s$ linear unabhängig (siehe Bemerkung 2.2.5), und es handelt sich um Eigenvektoren von $\mathcal{L}_b$ zum Eigenwert λ.

Nun sei umgekehrt $\lambda \in \mathbb{R}$ ein s-facher Eigenwert von $\mathcal{L}_b$ mit linear unabhängigen Eigenvektoren $u_1 = (u_1^{(1)}, \ldots, u_d^{(1)})^t, \ldots, u_s = (u_1^{(s)}, \ldots, u_d^{(s)})^t$ in $\mathcal{M} \setminus \{0\}$. Für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ setzen wir $U_\nu := \langle u_1^{(\nu)}, \ldots, u_d^{(\nu)} \rangle$. Dann ist λ auch Eigenwert von $L_b|_M$ und die Räume U_ν für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ sind im zugehörigen Eigenraum E_λ enthalten. Nach Lemma 2.1.2 sind die Räume U_ν für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ irreduzibel, und nach Bemerkung 2.2.5 bilden sie eine direkte Summe. (Hier geht ein, dass die Darstellungen auf U_ν absolut irreduzibel sind.) Also gilt

$$\bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu \subseteq E_\lambda. \tag{4.3}$$

Gäbe es nun ein $u \in E_\lambda \setminus \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$, so wäre die lineare Hülle U des Gruppenorbits $\mathcal{O}(u) = \{\rho(g)u : g \in G\}$ ein irreduzibler Unterraum von E_λ mit $U \cap \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu = \{0\}$. Nach obigen Überlegungen würde eine Transformationsbasis von U zu einem zu $u_1, \ldots, u_s$ linear unabhängigen Eigenvektor von $\mathcal{L}_b$ führen. Da aber λ ein s-facher Eigenwert ist, kann es kein solches u geben. Somit gilt in (4.3) sogar die Gleichheit.

Für $s = 1$ folgt hieraus die Behauptung. □

Bemerkung 4.2.2 Lemma 4.2.1 wird falsch, wenn die irreduziblen Unterräume von M nicht absolut irreduzibel sind, denn dann ist die Menge der Transformationsbasen eines irreduziblen Unterraums zweidimensional (vgl. Bemerkung 2.2.2). Ist $d = 2p$ und ist $u = (u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_d)^t$ ein Eigenvektor von $\mathcal{L}_b$ zum Eigenwert λ, so ist $u' = (-u_{p+1}, \ldots, -u_d, u_1, \ldots, u_p)^t$ ein davon linear unabhängiger Eigenvektor von $\mathcal{L}_b$ zum gleichen Eigenwert, wobei u und u' aber den gleichen irreduziblen Unterraum des Eigenraums E_λ erzeugen.

In diesem Fall sind also die Eigenräume von $L_b|_M$ genau dann irreduzibel, wenn alle Eigenwerte von $\mathcal{L}_b$ zweifach sind.

Es wäre nun naheliegend, das Problem zu komplexifizieren und dort absolut irreduzible Darstellungen zu betrachten (vgl. Bemerkung 1.1.9). Dabei tritt jedoch das Problem auf, dass der Parameterraum $B = C^k_G(\overline{\Omega})$ nicht komplexifiziert werden kann, ohne dass $L_b = L + b$ die Selbstadjungiertheit verliert. Fasst man $H^2(\Omega, \mathbb{C})$ auf als $H^2(\Omega, \mathbb{R}) \oplus iH^2(\Omega, \mathbb{R})$, so kann man in der komplexifizierten Situation zwar „reell" arbeiten, aber das Problem, dass L_b genau dann nur irreduzible Eigenräume hat, wenn $\mathcal{L}_b$ nur reell-zweidimensionale Eigenwerte hat, bleibt bestehen. (In der komplexifizierten Situation bedeutet dies, dass mit u auch zum Beispiel iu Eigenfunktion ist.) □

Die Idee ist jetzt, mit der Beweismethode von Uhlenbeck [37] zu zeigen, dass die Menge der $b \in B$, für die alle Eigenwerte von $\mathcal{L}_b$ einfach sind, residual in B ist (vgl. Pereira [25, Chapter 7]). Dazu wird das Problem so umformuliert, dass der Transversalitätssatz 1.2.4 angewandt werden kann. Hierzu definieren wir ausgehend von der Eigenwertgleichung $(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})u = 0$ die Abbildung

$$\Phi : \mathcal{M} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times B \ni (u, \lambda, b) \mapsto (\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})u \in \mathcal{N}. \tag{4.4}$$

Für $b \in B$ sei noch

$$\Phi_b : \mathcal{M} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \ni (u, \lambda) \mapsto \Phi(u, \lambda, b) \in \mathcal{N}. \tag{4.5}$$

Lemma 4.2.3 *Es sei $b \in B$.*

Der Operator $\mathcal{L}_b$ hat genau dann nur einfache Eigenwerte, wenn 0 regulärer Wert von Φ_b ist.

Beweis: Es sei $b \in B$.

Nach Definition ist $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann Eigenwert von $\mathcal{L}_b$, wenn es ein $u \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ gibt mit $(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})u = 0$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $(u, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$.

Für $(u, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ betrachten wir

$$D\Phi_b(u, \lambda) : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \ni (\bar{u}, \bar{\lambda}) \mapsto (\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})\bar{u} + \bar{\lambda} u \in \mathcal{N}.$$

Es gilt

$$\mathrm{range}\, D\Phi_b(u, \lambda) = \mathrm{range}(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \langle u \rangle.$$

Ist $\mathcal{E}_\lambda$ der Eigenraum zum Eigenwert λ von $\mathcal{L}_b$, so gilt $\mathcal{M} = \mathrm{range}(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \mathcal{E}_\lambda$. Daher ist $D\Phi_b(u, \lambda)$ genau dann surjektiv, wenn $\mathcal{E}_\lambda = \langle u \rangle$ gilt, also wenn λ ein einfacher Eigenwert von $\mathcal{L}_b$ ist. □

Mit Hilfe des Transversalitätssatzes 1.2.4 soll nun gezeigt werden, dass die Menge der $b \in B$, für die 0 regulärer Wert von Φ_b ist, residual in B ist. Dazu weisen wir in den nächsten beiden Lemmata nach, dass die Voraussetzungen von Satz 1.2.4 erfüllt sind.

Lemma 4.2.4 *Für alle $(u, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ ist $D\Phi_b(u, \lambda)$ ein Fredholm-Operator mit Index* $\mathrm{ind}(D\Phi_b(u, \lambda)) = 1$.

Beweis: Es sei $(u, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$. Dann ist

$$D\Phi_b(u,\lambda) : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \ni (\bar{u}, \bar{\lambda}) \mapsto (\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})\bar{u} + \bar{\lambda} u \in \mathcal{N}.$$

Da der Operator $(L_b + \lambda\,\mathrm{id}) : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \ni \bar{u} \mapsto L\bar{u} + b\bar{u} + \lambda\bar{u} \in L^2(\Omega)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist (vgl. Abschnitt 1.4), ist nach Lemma 2.4.2 auch der Operator $\mathcal{M} \ni \bar{u} \mapsto \mathcal{L}_b\bar{u} + \lambda\bar{u} \in \mathcal{N}$ ein Fredholm-Operator mit Index 0. Daher ist der Operator $D\Phi_b(u,\lambda) : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ ein Fredholm-Operator mit Index 1. □

Lemma 4.2.5 *Ist Annahme* (A2) *erfüllt, so ist* $0 \in \mathcal{N}$ *regulärer Wert von* Φ.

Beweis: Es sei $(u, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$. Wir wollen zeigen, dass

$$D\Phi(u,\lambda,b) : \mathcal{M} \times \mathbb{R} \times B \ni (\bar{u}, \bar{\lambda}, \bar{b}) \mapsto (\mathcal{L}_b + \lambda)\bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b})u \in \mathcal{N}$$

surjektiv ist.

Für $w = (w_1, \dots, w_d)^t \in \mathcal{N}$ gilt genau dann $w \in \operatorname{range} D\Phi(u,\lambda,b)$, wenn es $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} \in B$ gibt mit

$$w - (\bar{\lambda} + \bar{b})u \in \operatorname{range}(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id}) = \ker(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})^{\perp},$$

wobei $\ker(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\ker(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})$ bezeichnet. Ist $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_d^{(1)})^t, \dots, u^{(s)} = (u_1^{(s)}, \dots, u_d^{(s)})^t$ eine Basis von $\ker(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})$, so soll also $w - (\bar{\lambda} + \bar{b})u$ orthogonal zu $u^{(1)}, \dots, u^{(s)}$ sein. Gesucht sind somit $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} \in B$ mit

$$\langle w - (\bar{b} + \bar{\lambda})u, u^{(j)} \rangle_{\mathcal{N}} = 0$$

beziehungsweise

$$\langle (\bar{\lambda} + \bar{b})u, u^{(j)} \rangle_{\mathcal{N}} = \sum_{k=1}^{d} \langle (\bar{\lambda} + \bar{b})u_k, u_k^{(j)} \rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{d} \langle w_k, u_k^{(j)} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle w, u^{(j)} \rangle_{\mathcal{N}} \tag{4.6}$$

für $j \in \{1, \dots, s\}$.

Wir wählen $\bar{\lambda} = 0$ und

$$\bar{b} = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l \sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(l)} \tag{4.7}$$

mit $\alpha_l \in \mathbb{R}$ für $l \in \{1, \dots, s\}$. Nach Lemma 3.2.4 ist $\bar{b}$ invariant unter G. Da u_k und $u_k^{(l)}$ für $k \in \{1, \dots, d\}$ und $l \in \{1, \dots, s\}$ Eigenfunktionen von L_b sind, folgt aus der Regularitätstheorie (vgl. Seite 22) $\bar{b} \in C^k(\overline{\Omega})$. Also ist $\bar{b} \in B = C_G^k(\overline{\Omega})$. Mit dieser Wahl führt Gleichung (4.6) auf ein lineares Gleichungssystem für $\alpha_1, \dots, \alpha_s$

$$\sum_{l=1}^{s} \int_{\Omega} \Big(\sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(l)} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(j)} \Big)\, \alpha_l = \sum_{k=1}^{d} \int_{\Omega} w_k u_k^{(j)} \quad \text{für } j \in \{1, \dots, s\}. \tag{4.8}$$

Wenn die Funktionen $\sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, s\}$ linear unabhängig sind, ist die Matrix

$$H = (h_{lj}) := \left(\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(l)} \sum_{k=1}^{d} u_k u_k^{(j)} \right)$$

regulär und somit das Gleichungssystem (4.8) eindeutig lösbar. Mit dieser Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ bilden wir $\bar{b}$ gemäß (4.7). Dann ist $w - \bar{b}u \in \operatorname{range}(\mathcal{L}_b + \lambda)$, woraus die Surjektivität von $D\Phi(u, \lambda, b)$ folgt.

Es bleibt also noch die lineare Unabhängigkeit von $\sum_{k=1}^d u_k u_k^{(j)}$ für $j \in \{1, \ldots, s\}$ zu zeigen. Dazu seien $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^s \beta_j \sum_{k=1}^d u_k u_k^{(j)} = 0.$$

Elementare Umformungen ergeben

$$\sum_{k=1}^d u_k \Big(\sum_{j=1}^s \beta_j u_k^{(j)} \Big) = 0. \tag{4.9}$$

Da $u^{(1)}, \ldots, u^{(s)}$ in $\ker(\mathcal{L}_b + \lambda\,\mathrm{id})$ sind, gilt auch $\sum_{j=1}^s \beta_j u^{(j)} \in \ker(\mathcal{L}_b + \lambda)$. Wäre jedoch $\sum_{j=1}^s \beta_j u_1^{(j)}, \ldots, \sum_{j=1}^s \beta_j u_d^{(j)}$ eine Transformationsbasis eines irreduziblen (nichttrivialen) Unterraums von $\ker(L_b + \lambda\,\mathrm{id})$, so würde Gleichung (4.9) Annahme (A2) (siehe Seite 58) widersprechen. Also ist $\sum_{j=1}^s \beta_j u^{(j)} = 0$. Da aber $u^{(1)}, \ldots, u^{(s)}$ linear unabhängig sind, folgt hieraus $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$. Dies bedeutet, dass $\sum_{k=1}^d u_k u_k^{(j)}$ für $j \in \{1, \ldots, s\}$ linear unabhängig sind. □

Nun kann Satz 1.2.4 angewandt werden.

Proposition 4.2.6 *Es seien n und k aus $\mathbb{N}$. Weiterhin sei M eine isotypische Komponente von $H_2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, und es sei Annahme* (A2) *erfüllt.*

Dann ist die Menge

$$C_n(M) := \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : \textit{ alle Eigenwerten } \lambda \textit{ von } L_b|_M \textit{ mit } |\lambda| \leq n \textit{ sind } G\textit{-einfach}\}$$

residual und somit dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$.

Beweis: Aus den Lemmata 4.2.1 und 4.2.3 folgt, dass

$$\begin{aligned} C_n(M) &= \{b \in B : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b|_M \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\} \\ &= \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : 0 \text{ regulärer Wert von } \Phi_b\} \end{aligned}$$

gilt, wobei Φ_b für $b \in B$ in (4.5) gegeben ist. Aufgrund der Lemmata 4.2.4 und 4.2.5 sind die Voraussetzungen des Transversalitätssatzes 1.2.4 für $\Phi : A \to Z$ aus (4.4) mit $A = \mathcal{M} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times B \subset X \times Y$, $X = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$, $Y = B$ und $Z = \mathcal{N}$ erfüllt. Satz 1.2.4 liefert somit, dass $C_n(M)$ residual in $C_G^k(\overline{\Omega})$ ist. □

Der Transversalitätssatz 1.2.4 kann im Fall $k = \infty$ nicht angewandt werden, da dann der Parameterraum $Y = C_G^\infty(\overline{\Omega})$ kein Banach-Raum ist.

Korollar 4.2.7 *Es sei die Annahme* (A2) *erfüllt. Weiterhin seien n und k aus $\mathbb{N}$.*

Dann ist die Menge

$$C_n := \bigcap \{C_n(M) : M \textit{ isotypische Komponente von } H_2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\}$$

residual in $C_G^k(\overline{\Omega})$.

Beweis: Es sei M eine isotypische Komponente von $H_2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nach Proposition 4.2.6 ist $C_n(M)$ dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$. Die Offenheit von $C_n(M)$ ergibt sich wie in Proposition 3.3.1. Hieraus folgt nun die Behauptung. □

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $b \in C_n$. Ist nun $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $L_b = L + b$, so lässt sich der zugehörige Eigenraum

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu \tag{4.10}$$

in irreduzible Unterräume zerlegen, wobei die Darstellungen $\rho|_{U_\nu}$ für $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ paarweise nicht äquivalent sind. Im nächsten Abschnitt wird noch gezeigt, dass in (4.10) generisch $s = 1$ gilt, das heißt, dass generisch E_λ selber schon irreduzibel ist.

4.3 Störung zwischen verschiedenen isotypischen Komponenten

Es seien Ω, G und L wie im vorigen Abschnitt, und es seien n und k aus $\mathbb{N}$ (der Fall $k = \infty$ ist wieder ausgeschlossen).

Weiterhin seien N_1 und N_2 voneinander verschiedene isotypische Komponenten von $L^2(\Omega)$ und M_1 und M_2 die entsprechenden isotypischen Komponenten von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, so dass die Darstellungen der irreduziblen Unterräume von M_j zu denen von N_j für $j \in \{1, 2\}$ äquivalent sind.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die auf $M_1 \oplus M_2$ eingeschränkten Operatoren $L_b|_{M_1 \oplus M_2} : M_1 \oplus M_2 \to N_1 \oplus N_2$ mit $b \in B$, wobei $B = C_G^k(\overline{\Omega})$ ist. Es wird gezeigt, dass die Menge

$$D_n(M_1, M_2) := \{b \in C_n : \text{ alle Eigenwerten } \lambda \text{ von } L_b|_{M_1 \oplus M_2} \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

dicht in $B = C_G^k(\overline{\Omega})$ ist.

Ist $b \in C_n$, so sind die Eigenräume von $L_b|_{M_1}$ und $L_b|_{M_2}$ schon irreduzibel. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass die Eigenräume von $L_b = L + b$ sich generisch nicht als direkte Summe von irreduziblen Unterräumen aus M_1 und M_2 schreiben lassen. Anders ausgedrückt, für alle b aus einer dichten Teilmenge von C_n sollen die Operatoren $L_b|_{M_1}$ und $L_b|_{M_2}$ keine gemeinsamen Eigenwerte haben.

Die Idee für den Beweis dieser Behauptung ist, ähnlich wie im letzten Abschnitt, den Transversalitätssatz 1.2.4 zu verwenden.

Für $j \in \{1, 2\}$ sei dazu $\rho_j : G \ni g \mapsto A_j(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_j})$ eine irreduzible, orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^{d_j}$ für $d_j \in \mathbb{N}$, die äquivalent zu den Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M_j ist. Da alle irreduziblen Darstellungen von G absolut irreduzibel sind, sind auch ρ_1 und ρ_2 absolut irreduzibel.

Wie in Kapitel 2 betrachten wir für $j \in \{1, 2\}$ die Mengen

$$\mathcal{M}_j := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_j} \end{pmatrix} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^{d_j} : \begin{pmatrix} \rho(g)u_1 \\ \vdots \\ \rho(g)u_{d_j} \end{pmatrix} = A_j(g)^t \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_j} \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}$$

(vgl. Definition 2.1.1) und entsprechend die Mengen $\mathcal{N}_j \subset (L^2(\Omega))^{d_j}$. Für $b \in B$ und $j \in \{1,2\}$ definieren wir auf $\mathcal{M}_j$ durch

$$\mathcal{L}_b^j : \mathcal{M}_j \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_j} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} L_b u_1 \\ \vdots \\ L_b u_{d_j} \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_j$$

zu $L_b|_{M_j}$ korrespondierende Operatoren.

Wir setzen

$$\Phi : (\mathcal{M}_1 \backslash \{0\}) \times (\mathcal{M}_2 \backslash \{0\}) \times \mathbb{R} \times C_n \ni (u, v, \lambda, b) \mapsto \Big((\mathcal{L}_b^1 + \lambda \operatorname{id}) u, (\mathcal{L}_b^2 + \lambda \operatorname{id}) v \Big) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2.$$

Für $b \in C_n$ sei

$$\Phi_b : (\mathcal{M}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathcal{M}_2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (u, v, \lambda) \mapsto \Phi(u, v, \lambda, b) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2. \tag{4.11}$$

Lemma 4.3.1 *Es sei $b \in C_n$.*

Genau dann haben $L_b|_{M_1}$ und $L_b|_{M_2}$ keine gemeinsamen Eigenwerte, wenn 0 nicht im Bild von Φ_b ist.

Beweis: Es sei λ Eigenwert von $L_b|_{M_1}$ mit Eigenraum E_λ^1 und Eigenwert von $L_b|_{M_2}$ mit Eigenraum E_λ^2. Weiterhin seien U und V irreduzible Unterräume von E_λ^1 beziehungsweise E_λ^2 mit Transformationsbasen $u_1, \dots, u_{d_1}$ beziehungsweise $v_1, \dots, v_{d_2}$. Sind dann $u = (u_1, \dots, u_{d_1})^t$ und $v = (v_1, \dots, v_{d_2})^t$, so ist $\Phi_b(u, v, \lambda) = 0$.

Ist andererseits $(u, v, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ und gilt $u = (u_1, \dots, u_{d_1})^t$ und $v = (v_1, \dots, v_{d_2})^t$, so ist λ Eigenwert von $L_b|_{M_1}$ mit Eigenvektoren $u_1, \dots, u_{d_1}$ und von $L_b|_{M_2}$ mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{d_2}$. □

Mit Hilfe des Transversalitätssatzes 1.2.4 soll nun gezeigt werden, dass die Menge

$$\begin{aligned} D_n(M_1, M_2) &= \{ b \in C_n : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b|_{M_1 \oplus M_2} \text{ mit } |\lambda| \le n \text{ sind } G\text{-einfach} \} \\ &= \{ b \in C_n : 0 \notin \operatorname{range} \Phi_b \} \end{aligned}$$

residual in B ist. Dazu überprüfen wir zunächst die Voraussetzungen von Satz 1.2.4.

Lemma 4.3.2 *Für $(u, v, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ ist $D\Phi_b(u, v, \lambda)$ ein Fredholm-Operator mit Index* $\operatorname{ind}(D\Phi_b(u, v, \lambda)) = 1$.

Beweis: Es sei $(u, v, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$. Dann ist

$$D\Phi_b(u, v, \lambda) : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{u}, \bar{v}, \bar{\lambda}) \mapsto ((\mathcal{L}_b^1 + \lambda \operatorname{id}) \bar{u} + \bar{\lambda} u, (\mathcal{L}_b^2 + \lambda \operatorname{id}) \bar{v} + \bar{\lambda} v) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2.$$

Da die Operatoren

$$\mathcal{M}_1 \times \mathbb{R} \ni (\bar{u}, \bar{\lambda}) \mapsto (\mathcal{L}_b^1 + \lambda \operatorname{id}) \bar{u} + \bar{\lambda} u \in \mathcal{N}_1$$

und

$$\mathcal{M}_2 \times \mathbb{R} \ni (\bar{v}, \bar{\lambda}) \mapsto (\mathcal{L}_b^2 + \lambda \operatorname{id}) \bar{v} + \bar{\lambda} v \in \mathcal{N}_2$$

Fredholm-Operatoren mit Index 1 sind (vgl. Lemma 4.2.4), ist $D\Phi_b(u, v, \lambda)$ ebenfalls ein Fredholm-Operator mit Index 1. □

Lemma 4.3.3 *Ist Annahme* (A2) *erfüllt, so ist* $0 \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ *regulärer Wert von* Φ.

BEWEIS: Zu zeigen ist, dass für alle $(u, v, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$

$$D\Phi(u,v,\lambda,b): \ \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \mathbb{R} \times C_n \to \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$$
$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{b}) \mapsto \Big((\mathcal{L}_b^1 + \lambda\,\mathrm{id})\bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b})u, (\mathcal{L}_b^2 + \lambda\,\mathrm{id})\bar{v} + (\bar{\lambda} + \bar{b})v\Big)$$

surjektiv ist.

Es sei $(u, v, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$. Dabei seien $u = (u_1, \ldots, u_{d_1})^t$ und $v = (v_1, \ldots, v_{d_2})^t$.

Weiterhin sei $(s,t) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ mit $s = (s_1, \ldots, s_{d_1})^t$ und $t = (t_1, \ldots, t_{d_2})^t$. Genau dann ist $(s,t) \in \operatorname{range} D\Phi(u,v,\lambda,b)$, wenn es $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} \in C_n$ gibt mit

$$s - (\bar{\lambda} + \bar{b})u \in \operatorname{range}(\mathcal{L}_b^1 + \lambda\,\mathrm{id}) \tag{4.12}$$

und

$$t - (\bar{\lambda} + \bar{b})v \in \operatorname{range}(\mathcal{L}_b^2 + \lambda\,\mathrm{id}). \tag{4.13}$$

Es ist $s_1 - (\bar{\lambda} + \bar{b})u_1, \ldots, s_{d_1} - (\bar{\lambda} + \bar{b})u_{d_1}$ eine Transformationsbasis eines irreduziblen Unterraums von $\operatorname{range}(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id}) = \ker(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id})^\perp$. Aus $\Phi(u,v,\lambda,b) = 0$ ergibt sich $u \in \ker(\mathcal{L}_b^1 + \lambda\,\mathrm{id}) \setminus \{0\}$, und somit ist $\langle u_1, \ldots, u_{d_1}\rangle$ ein irreduzibler Unterraum von $\ker(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id})$. Wegen $b \in C_n$ ist aber $\ker(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id})$ selber schon irreduzibel. Also ist $\langle u_1, \ldots, u_{d_1}\rangle = \ker(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id})$. Ist

$$s_j - (\bar{\lambda} + \bar{b})u_j \in \operatorname{range}(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id}) = \ker(L_b|_{M_1} + \lambda\,\mathrm{id})^\perp$$

für $j \in \{1, \ldots, d_1\}$, so muss daher $s_j - (\bar{\lambda} + \bar{b})u_j$ orthogonal zu $u_1, \ldots, u_d$ sein. Gesucht sind somit $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} \in C_n$ mit

$$(\langle s_j - (\bar{\lambda} + \bar{b})u_j, u_k\rangle) = 0 \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_1}$$

beziehungsweise

$$(\langle(\bar{\lambda} + \bar{b})u_j, u_k\rangle) = (\langle s_j, u_k\rangle). \tag{4.14}$$

Wie in Lemma 3.2.2 sieht man, dass $(\langle(\bar{\lambda} + \bar{b})u_j, u_k\rangle)$ und $(\langle s_j, u_k\rangle)$ Vielfache der Einheitsmatrix sind. Summiert man über die Hauptdiagonalen dieser Matrizen, so liefert Gleichung (4.14)

$$\sum_{k=1}^{d_1} \langle(\bar{\lambda} + \bar{b})u_k, u_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{d_1} \langle s_k, u_k\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{4.15}$$

Analog folgt aus (4.13), dass $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} \in C_n$ so gewählt sein müssen, dass zusätzlich noch

$$\sum_{k=1}^{d_2} \langle(\bar{\lambda} + \bar{b})v_k, v_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{d_2} \langle t_k, v_k\rangle_{L^2(\Omega)} \tag{4.16}$$

erfüllt ist.

Wir wählen nun $\bar{\lambda} = 0$ und

$$\bar{b} = \alpha \sum_{l=1}^{d_1} u_l^2 + \beta \sum_{l=1}^{d_2} v_l^2 \tag{4.17}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aus Lemma 3.2.4 und der Regularitätstheorie (vgl. Seite 22) folgt $\bar{b} \in B$.

Eingesetzt in (4.15) und (4.16) ergeben sich

$$\alpha \int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^{d_1} u_l^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d_1} u_k^2\Big) + \beta \int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^{d_2} v_l^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d_1} u_k^2\Big) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{d_1} s_k u_k$$

und

$$\alpha \int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^{d_1} u_l^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2\Big) + \beta \int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^{d_2} v_l^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2\Big) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{d_2} t_k v_k.$$

Dieses Gleichungssystem für α und β ist eindeutig lösbar, falls die Koeffizientenmatrix regulär ist, was der Fall ist, wenn die Funktionen $\sum_{k=1}^{d_1} u_k^2$ und $\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2$ linear unabhängig voneinander sind. Mit der Lösung α, β dieses Gleichungssystems bilden wir dann $\bar{b}$ gemäß (4.17). Mit dieser Wahl gelten (4.12) und (4.13), woraus sich die Surjektivität von $D\Phi(u, v, \lambda, b)$ ergibt.

Es bleibt also noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\sum_{k=1}^{d_1} u_k^2$ und $\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2$ nachzuweisen. Da $u_1, \ldots, u_{d_1}$ alle die gleiche Norm $\gamma_1 > 0$ haben (vgl. Lemma 2.3.2), bilden $\tilde{u}_j := \frac{1}{\gamma_j} u_j$ für $j \in \{1, \ldots, d_1\}$ eine normierte Transformationsbasis eines irreduziblen Unterraums von $\ker(L_b + \lambda\,\mathrm{id})$ und es gilt

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{d_1} \tilde{u}_k^2 = d_1.$$

Ebenso gibt es ein $\gamma_2 > 0$, so dass $\tilde{v}_j := \frac{1}{\gamma_2} v_j$ für $j \in \{1, \ldots, d_2\}$ eine normierte Transformationsbasis eines irreduziblen Unterraums von $\ker(L_b + \lambda\,\mathrm{id})$ bilden, und es ist

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^{d_2} \tilde{v}_k^2 = d_2.$$

Dann sind $\frac{1}{d_1} \sum_{k=1}^{d_1} \tilde{u}_k^2$ und $\frac{1}{d_2} \sum_{k=1}^{d_2} \tilde{v}_k^2$ zwei Funktionen mit gleicher L^1-Norm, für die aufgrund der Annahme (A2) gilt

$$\frac{1}{d_1} \sum_{k=1}^{d_1} \tilde{u}_k^2 \neq \frac{1}{d_2} \sum_{k=1}^{d_2} \tilde{v}_k^2.$$

Somit können die Funktionen $\sum_{k=1}^{d_1} u_k^2$ und $\sum_{k=1}^{d_2} v_k^2$ nicht linear abhängig sein. $\square$

Nun kann man den Transversalitätssatz 1.2.4 anwenden.

Proposition 4.3.4 *Es seien M_1 und M_2 voneinander verschiedene isotypische Komponenten von $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Weiterhin seien $n, k \in \mathbb{N}$.*

Ist Annahme (A2) *erfüllt, so ist die Menge*

$$D_n(M_1, M_2) = \{b \in C_n : \textit{ alle Eigenwerte } \lambda \textit{ von } L_b|_{M_1 \oplus M_2} \textit{ mit } |\lambda| \le n \textit{ sind } G\textit{-einfach}\}$$

residual und somit dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$.

Beweis: Der Transversalitätssatz 1.2.4 liefert zusammen mit den Lemmata 4.3.2 und 4.3.3, dass die Menge

$$D_n'(M_1, M_2) := \{b \in B : 0 \text{ regulärer Wert von } \Phi_b\}$$

residual in $B = C^k_G(\overline{\Omega})$ ist, wobei Φ_b in (4.11) gegeben ist.

Es sei $b \in D'_n(M_1, M_2)$. Dann ist 0 regulärer Wert von Φ_b. Ist daher $(u, v, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$, so ist $D\Phi_b(u, v, \lambda)$ surjektiv, das heißt, zu jedem $(s, t) \in \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ gibt es $\bar{u} \in \mathcal{M}_1$, $\bar{v} \in \mathcal{M}_2$ und $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ mit

$$(\mathcal{L}^1_b + \lambda\,\mathrm{id})\bar{u} + \bar{\lambda}u = s \tag{4.18}$$

und

$$(\mathcal{L}^2_b + \lambda\,\mathrm{id})\bar{v} + \bar{\lambda}v = t. \tag{4.19}$$

Wegen $b \in D'_n(M_1, M_2) \subset C_n$ gilt

$$\mathcal{N}_1 = \mathrm{range}(\mathcal{L}^1_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \ker(\mathcal{L}^1_b + \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{range}(\mathcal{L}^1_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \langle u \rangle$$

und

$$\mathcal{N}_2 = \mathrm{range}(\mathcal{L}^2_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \ker(\mathcal{L}^2_b + \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{range}(\mathcal{L}^2_b + \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \langle v \rangle.$$

Daher sind zu gegebenem $s \in \mathcal{N}_1$ durch (4.18) $\bar{u}$ und $\bar{\lambda}$ eindeutig bestimmt. Dann ist aber (4.19) nicht mehr für alle $t \in \mathcal{N}_2$ lösbar: Ist zum Beispiel $t \in \langle v \rangle \setminus \{-\bar{\lambda}v\}$, so gibt es kein $\bar{v}$, das (4.19) löst. Somit kann $D\Phi_b(u, v, \lambda)$ nicht surjektiv sein. Da aber 0 regulärer Wert von Φ_b ist, muss daher $\Phi_b^{-1}(0) = \emptyset$ gelten.

Zusammen mit Lemma 4.3.1 ergibt sich

$$D'_n(M_1, M_2) \subseteq \{b \in C_n : 0 \notin \mathrm{range}\,\Phi_b\} = D_n(M_1, M_2).$$

Somit ist auch $D_n(M_1, M_2)$ residual und damit dicht in B. □

Korollar 4.3.5 *Es seien n und k aus $\mathbb{N}$.*

Dann ist die Menge

$$D_n := \bigcap \{D_n(M_1, M_2) : M_1, M_2 \textit{ isotypische Komponenten von } H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega})$.

Beweis: Es seien M_1 und M_2 voneinander verschiedene isotypische Komponenten von $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Nach Proposition 4.3.4 ist $D_n(M_1, M_2)$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega})$. Die Offenheit von $D_n(M_1, M_2)$ ergibt sich wie in Proposition 3.3.1. Hieraus folgt die Behauptung. □

4.4 Beweis von Satz 4.1.1

In diesem Abschnitt wird Satz 4.1.1 bewiesen.

Es sei also Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien G eine kompakte Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen absolut irreduzibel sind, und es sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist. Es sei noch $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Außerdem sei $L : H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten in $C^k(\overline{\Omega})$, und es sei Annahme (A2) erfüllt.

Wir wollen zeigen, dass

$$B'_k = \{b \in C^k_G(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

residual in $B = C_G^k(\overline{\Omega})$ ist, also dass B_k' der abzählbare Durchschnitt von offenen und dichten Teilmengen von B ist. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}$

$$B_{n,k} := \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b \text{ mit } |\lambda| \leq n \text{ sind } G\text{-einfach}\}.$$

Dann gilt

$$B_k' \subseteq \ldots \subseteq B_{n+1,k} \subseteq B_{n,k} \subseteq \ldots \subseteq B_{2,k} \subseteq B_{1,k} \subseteq C_G^k(\overline{\Omega})$$

und

$$B_k' = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Die Offenheit der Mengen $B_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ zeigt man wie in Proposition 3.3.1. Es bleibt noch die Dichtheit nachzuweisen.

Proposition 4.4.1 *Es seien n und k aus $\mathbb{N}$.*
Dann ist $B_{n,k}$ dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$.

Beweis: Dies folgt aus Korollar 4.3.5. □

Für den Fall $k = \infty$ können wir die Theorie aus den Abschnitten 4.2 und 4.3 nicht direkt anwenden, da im Transversalitätssatz 1.2.4 der Parameterraum ein Banach-Raum sein muss, der Raum $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ aber keiner ist.

Proposition 4.4.2 *Es sei $n \in \mathbb{N}$.*
Dann ist $B_{n,\infty}$ dicht in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$.

Beweis:

1. Aus Proposition 4.4.1 wissen wir, dass für n und k aus $\mathbb{N}$ die Mengen

$$B_{n,k} := \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$ sind. Wir zeigen nun noch, dass für $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k} = B_{n,\infty}$$

dicht in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ist.

Es seien $f \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ und $\varepsilon > 0$. Es ist zu zeigen, dass es ein $h \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_{n,k}$ gibt mit $d(h, f) < \varepsilon$, wobei

$$d : C_G^\infty(\overline{\Omega}) \times C_G^\infty(\overline{\Omega}) \ni (f, h) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f - h\|_{C^k}}{1 + \|f - h\|_{C^k}} \in \mathbb{R}_0^+$$

die Metrik auf $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ bezeichnet.

2. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Da $f \in C_G^\infty(\overline{\Omega}) \subset C_G^k(\overline{\Omega})$ ist und $B_{n,k}$ dicht in $C_G^k(\overline{\Omega})$ ist, gibt es eine Folge $(f_m^k)_{m \in \mathbb{N}}$ in $B_{n,k}$ mit $f_m^k \to f$ für $m \to \infty$ in $C_G^k(\overline{\Omega})$. Es sei nun

$$\phi : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} c \exp(\frac{1}{\|x\|-1}) & \text{für } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq 1 \end{array} \right\},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt sei, dass $\int_{\mathbb{R}^N} \phi = 1$ ist. Dann ist $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ und ϕ ist invariant unter G.

Wir bilden für $\delta > 0$ und $m \in \mathbb{N}$

$$f_m^{k,\delta} : \mathbb{R}^N \ni x \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f_m^k(y)dy \in \mathbb{R},$$

(Friedrichs mollifier) wobei f_m^k durch 0 auf $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ fortgesetzt sei. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt dann $f_m^{k,\delta} \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$, und es gilt $f_m^{k,\delta} \to f_m^k$ für $\delta \to 0$ in $C_G^k(\overline{\Omega})$ (vgl. [13, Lemma 7.3]).

Wegen $f_m^k \to f$ für $n \to \infty$ in $C_G^k(\overline{\Omega})$ gibt es ein $m_k \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{m_k}^k - f\|_{C^k} < \frac{1}{k}$. Aufgrund von $f_m^{k,\delta} \to f_m^k$ für $\delta \to 0$ in $C_G^k(\overline{\Omega})$ und der Offenheit von $B_{n,k}$ gibt es ein $\delta_k > 0$ mit $\delta_k < \delta_{k-1}$, $f_{m_k}^{k,\delta_k} \in B_{n,k}$ und $\|f_{m_k}^{k,\delta_k} - f_{m_k}^k\|_{C^k} < \frac{1}{k}$.

3. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $h_k := f_{m_k}^{k,\delta_k}$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $d(h_k, f) < \varepsilon$ für $k > K$.

   Denn ist $K \in \mathbb{N}$ mit $(\frac{1}{2})^K < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{2}{K} < \frac{\varepsilon}{4}$ und ist $k > K$, so ergibt sich für $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\|h_k - f\|_{C^j} \leq \|h_k - f\|_{C^k} = \|f_{m_k}^{k,\delta_k} - f\|_{C^k} \leq \underbrace{\|f_{m_k}^{k,\delta_k} - f_{m_k}^k\|_{C^k}}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{\|f_{m_k}^k - f\|_{C^k}}_{<\frac{1}{k}} < \frac{2}{k} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

   Hiermit folgt

$$\begin{aligned} d(h_k, f) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|h_k - f\|_{C^j}}{1 + \|h_k - f\|_{C^j}} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{\|h_k - f\|_{C^j}}{1 + \|h_k - f\|_{C^j}}}_{<\|h_k - f\|_{C^j} < \frac{\varepsilon}{4}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{\|h_k - f\|_{C^j}}{1 + \|h_k - f\|_{C^j}}}_{\leq 1} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{=2} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{<(\frac{1}{2})^k < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

   Ist also $h := h_k \in C_G^\infty(\overline{\Omega})$ für ein $k > K$, so gilt $d(h, f) < \varepsilon$.

   Hieraus folgt, dass $B_{n,\infty}$ dicht in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$ ist.

□

Kapitel 5

Generische Hyperbolizität von Gleichgewichten äquivarianter Reaktions-Diffusions-Gleichungen

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass invariante Gleichgewichte äquivarianter Reaktions-Diffusions-Gleichungen für generische Nichtlinearitäten hyperbolisch sind. Dabei werden wir – ähnlich zu Kapitel 4 – die Beweismethode von BRUNOVSKÝ, POLÁČIK [8], die auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 aufbaut, auf den äquivarianten Fall übertragen.

5.1 Generizitätssätze

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen alle absolut irreduzibel sind, und es sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G (bezüglich ρ) ist. Durch ρ wird durch

$$G \ni g \mapsto [L^p(\Omega) \ni u \mapsto u \circ \rho(g^{-1}) \in L^p(\Omega)] \in \mathbf{GL}(L^p(\Omega))$$

eine Darstellung auf $L^p(\Omega)$ für $p \in (1, \infty)$ induziert, die wir auch wieder mit ρ bezeichnen (vgl. Beispiel 1.1.5).

Wir betrachten das Dirichlet-Problem für die äquivariante Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$u_t = \Delta u + f(\cdot, u) \quad \text{auf } \Omega, t > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{für } t > 0 \tag{5.1}$$

mit $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dabei ist $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Menge aller k-mal stetig differenzierbaren, in der Raum-Variablen invarianten Funktionen von $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Ein Gleichgewicht u von (5.1) erfüllt das elliptische Randwertproblem

$$L_f(u) = \Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Dabei ist

$$L_f : W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \ni u \mapsto \Delta u + f(\cdot, u) \in L^p(\Omega)$$

für $p > N$ ein äquivarianter, nichtlinearer, elliptischer Differentialoperator.

Ist $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so bezeichnen wir die Menge der Gleichgewichte von (5.1) mit $GG(f)$. Ein Gleichgewicht $u \in GG(f)$ ist hyperbolisch, falls 0 nicht Eigenwert der Linearisierung $DL_f(u) \in \mathcal{L}(W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), L^p(\Omega))$ von $L_f = \Delta + f$ an u ist. Dabei ist

$$DL_f(u) : W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \ni \bar{u} \mapsto \Delta\bar{u} + D_2 f(\cdot, u)\bar{u} \in L^p(\Omega)$$

ein strikt elliptischer, formal-selbstadjungierter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^{k-1}(\overline{\Omega})$, der äquivariant bezüglich der Gruppe

$$\mathrm{Stab}(u) = \{g \in G : \rho(g)u = u\}$$

ist. Aufgrund der Überlegungen aus Abschnitt 1.4 ist $\ker DL_f(u)$ enthalten in $C^k(\overline{\Omega})$.

Es sei $M^p_{inv} \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ die Menge der invarianten Funktionen aus $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass für generische Nichtlinearitäten f aus $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ alle unter G (bezüglich ρ) invarianten Gleichgewichte $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ von (5.1) hyperbolisch sind, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Annahme (A3):

Es sei $L : W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \ni u \mapsto \Delta u + bu \in L^p(\Omega)$ *mit einem* $b \in C^k_G(\overline{\Omega})$ *für* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. Für jede Zerlegung von* $\ker L = \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$ *in irreduzible Unterräume* U_ν *mit normierten Transformationsbasen* $u^{(\nu)}_1, \ldots, u^{(\nu)}_{d_\nu}$ *bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen* $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ *für* $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ *gilt:*

Sind $\rho|_{U_\nu}$ *und* $\rho|_{U_\mu}$ *für* ν, μ *aus* $\{1, \ldots, s\}$ *äquivalent, so nehmen wir an, dass* $\rho_\nu = \rho_\mu$ *ist, und es gelte*

$$\sum_{j=1}^{d_\nu} u^{(\nu)}_j u^{(\mu)}_j \neq 0. \tag{5.3}$$

Dabei bedeutet (5.3) wieder, dass die Funktion nicht identisch verschwinden soll (vgl. auch Annahme (A1), Seite 45, und Annahme (A2), Seite 58).

Annahme (A3) unterscheidet sich von den Annahmen (A1) und (A2) vor allem dadurch, dass nur eine Bedingung an die Transformationsbasen von irreduziblen Unterräumen gestellt wird, auf denen die Darstellungen äquivalent sind. Außerdem wird nur der Eigenraum zum Eigenwert 0 betrachtet.

In Kapitel 6 wird gezeigt, dass diese Annahme zum Beispiel für $k = \infty$ und die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

In Abschnitt 5.2 wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 5.1.1 *Es sei* Ω *ein beschränktes Gebiet im* $\mathbb{R}^N$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit glattem Rand. Weiterhin sei* G *eine kompakte Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen absolut irreduzibel sind, und es sei* $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ *eine Darstellung von* G *auf* $\mathbb{R}^N$*, so dass* Ω *invariant unter* G *ist. Außerdem sei* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *gegeben.*

Ist Annahme (A3) *erfüllt, so ist*

$$F^{inv} := \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Ist $f \in F^{inv}$, so sind alle invarianten Gleichgewichte von (5.1) hyperbolisch. Satz 5.1.1 besagt, dass es für jedes $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ein $\tilde{f} \in F^{inv}$ gibt, das beliebig nahe an f ist.

Der Beweis von Satz 5.1.1 beruht auf dem Transversalitätssatz 1.2.4 und verwendet den Ansatz von Brunovský, Poláčik [8, Theorem 3.a.1], wo die entsprechende Aussage im Fall, dass keine Symmetrien vorliegen, gezeigt wird. Dabei werden wieder Operatoren auf der Menge von Transformationsbasen betrachtet, um den Beweisansatz auf den äquivarianten Fall zu übertragen.

Bemerkung 5.1.2 Wie schon in Abschnitt 1.5 gezeigt wurde, können nicht-invariante Gleichgewichte von (5.1), die auf einem kontinuierlichen Gruppenorbit liegen, nicht hyperbolisch sein, da für $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $u \in GG(f)$ der Tangentialraum an den Gruppenorbit $\mathcal{O}(u)$ in $\ker DL_f(u)$ ist.

Die Vermutung ist nun, dass diese Gleichgewichte für generische Nichtlinearitäten *normalhyperbolisch* sind, das bedeutet in der vorliegenden Situation, dass die Dimension von $\ker DL_f(u)$ generisch gleich der Dimension des Tangentialraums an den Gruppenorbit ist. Für generische $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist also 0 nicht Eigenwert der Einschränkung von $DL_f(u)$ für ein Gleichgewicht $u \in GG(f)$ auf den Normalenraum an den Gruppenorbit $\mathcal{O}(u)$. Im Fall eines diskreten Gruppenorbits von Gleichgewichten entspricht dies der Hyperbolizität der Gleichgewichte auf dem Orbit. (Für den endlichdimensionalen Fall vgl. Field [11].)

Allerdings kann diese Vermutung mit den in dieser Arbeit verwendeten Methoden nicht bewiesen werden. □

Ist $f \in F^{inv}$, und ist $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ ein invariantes Gleichgewicht von (5.1), so folgt aus Satz 4.1.1, dass alle Eigenwerte von $DL_f(u)$ G-einfach sind, also die Eigenräume irreduzibel sind, falls $D_2 f(\cdot, u)$ nicht in einer mageren Ausnahmemenge von $C^k_G(\overline{\Omega})$ liegt. In Abschnitt 5.3 wird gezeigt, dass dies für generische Nichtlinearitäten f der Fall ist, falls folgende Annahme erfüllt ist:

Annahme (A4):

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert des Operators

$$W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \ni u \mapsto \Delta u + bu \in L^p(\Omega)$$

mit $b \in C^k_G(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Für jede Zerlegung des zugehörigen Eigenraums $E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^s U_\nu$ in irreduzible Unterräume U_ν mit normierten Transformationsbasen $u_1^{(\nu)}, \dots, u_{d_\nu}^{(\nu)}$ bezüglich geeigneter irreduzibler Darstellungen $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ für $\nu \in \{1, \dots, s\}$ gilt:

Falls $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ für ν, μ aus $\{1, \dots, s\}$ nicht äquivalent sind, ist

$$\frac{1}{d_\nu} \sum_{k=1}^{d_\nu} (u_k^{(\nu)})^2 \neq \frac{1}{d_\mu} \sum_{k=1}^{d_\mu} (u_k^{(\mu)})^2. \tag{5.4}$$

Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so gilt

$$\sum_{k=1}^{d_\nu} u_k^{(\nu)} u_k^{(\mu)} \neq 0, \tag{5.5}$$

wobei wir annehmen, dass $\rho_\nu = \rho_\mu$ ist.

Auch hier sind die Ungleichungen (5.4) und (5.5) als Ungleichheiten zwischen Funktionen aufzufassen.

Annahme (A4) entspricht Annahme (A2) (siehe Seite 58) für den Operator $L = \Delta$. Ist Annahme (A4) erfüllt, so folgt sofort, dass auch Annahme (A3) gilt.

In Kapitel 6 wird bewiesen, dass auch Annahme (A4) zum Beispiel für $k = \infty$ und die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Ist $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, so betrachten wir für $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ das Eigenwertproblem

$$(DL_f(u) + \lambda\,\mathrm{id})v = \Delta v + (D_2 f(\cdot, u) + \lambda\,\mathrm{id})v = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Satz 5.1.3 *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand. Weiterhin sei G eine kompakte Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen alle absolut irreduzibel sind, und es sei $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G ist. Außerdem sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ gegeben.*

Ist Annahme (A4) *erfüllt, so ist*

$$H^{inv} := \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \textit{ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv}, \textit{ so sind alle Eigenwerte von } DL_f(u) \textit{ } G\textit{-einfach}\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Der Beweis von Satz 5.1.3 erfolgt in Abschnitt 5.3. Die Beweismethode ist die gleiche wie in Kapitel 4, mit Hilfe von Operatoren auf der Menge von Transformationsbasen wird der Beweis der entsprechenden Aussage ohne Symmetrie (siehe Brunovský, Poláčik [8, Theorem 3.b.1]) auf den äquivarianten Fall übertragen. Auch hier ist das zentrale Hilfsmittel der Transversalitätssatz 1.2.4.

5.2 Hyperbolizität von invarianten Gleichgewichten

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass invariante Gleichgewichte für generische Nichtlinearitäten immer hyperbolisch sind.

Es seien Ω und G wie im vorigen Abschnitt, und es seien $p > N$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Ziel ist es nachzuweisen, dass

$$F^{inv} = \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ für } u \in GG(f) \cap M_{inv} \text{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist, wobei $\sigma(DL_f(u))$ das Spektrum von $DL_f(u) = \Delta + D_2 f(\cdot, u)$ bezeichnet. Dazu setzen wir für $n \in \mathbb{N}$

$$F_n := \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \le n \text{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\}.$$

Dann gilt

$$F^{inv} \subset \ldots \subset F_{n+1} \subset F_n \subset \ldots \subset F_2 \subset F_1 \subset C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$$

und

$$F^{inv} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Es bleibt also nachzuweisen, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen F_n offen und dicht in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ sind.

Proposition 5.2.1 *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge F_n offen.*

Beweis: (Vgl. Beweis von [8, Theorem 3.a.1])

1. Es sei $n \in \mathbb{N}$, und es sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \backslash F_n$, die gegen ein $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ konvergiert. Wenn wir zeigen, dass dann $f \notin F_n$ gilt, folgt die Offenheit von F_n.

   Da $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ gegen f konvergiert, konvergieren $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(D_2 f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ auf $\overline{\Omega} \times [-n,n]$ gleichmäßig gegen f beziehungsweise $D_2 f$.

   Wegen $f_l \notin F_n$ für $l \in \mathbb{N}$ gibt es Folgen $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u_l\|_\infty \leq n$, $\|v_l\|_{L^p(\Omega)} = 1$ und
$$L_{f_l}(u_l) = \Delta u_l + f_l(\cdot, u_l) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u_l|_{\partial\Omega} = 0$$
   und
$$DL_{f_l}(u_l)v_l = \Delta v_l + D_2 f_l(\cdot, u_l)v_l = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad v_l|_{\partial\Omega} = 0$$
   für $l \in \mathbb{N}$.

2. Es sei $l \in \mathbb{N}$. Wegen $L_{f_l}(u_l) = 0$ löst u_l auch die lineare Gleichung $\Delta u_l = g_l$ mit $g : \overline{\Omega} \ni x \mapsto -f_l(x, u_l(x)) \in \mathbb{R}$. Eine a-priori-Abschätzung ([13, Theorem 9.14]) liefert dann
$$\|u_l\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\Big(\|f_l(\cdot, u_l(\cdot))\|_{L^p(\Omega)} + \|u_l\|_{L^p(\Omega)}\Big)$$
   mit einem $C > 0$.

   Aus $\|u_l\|_\infty \leq n$ für $l \in \mathbb{N}$ und der Konvergenz von $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ folgt hieraus, dass $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ auch in $W^{2,p}(\Omega)$ beschränkt ist. Da $p > N$ ist, ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ kompakt in $C(\overline{\Omega})$ eingebettet ([13, Theorem 7.22]). Daher folgt aus der Beschränktheit von $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$, dass diese Folge eine konvergente Teilfolge hat. Ohne Einschränkung können wir daher davon ausgehen, dass $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ selbst schon gegen ein $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $\|u\|_\infty \leq n$ konvergiert, andernfalls gehen wir zu dieser Teilfolge über. Da u_l für $l \in \mathbb{N}$ invariant ist, ist auch u invariant.

   Behauptung: Die Funktion u löst das Randwertproblem
$$L_f(u) = \Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \textit{auf}\ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

   Es sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von Δ und von f und der Konvergenz von $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gegen u und der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ auf $\overline{\Omega} \times [-n,n]$ gegen f gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$, so dass für alle $l > l_0$ gilt
$$\|\Delta u - \Delta u_l\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$|f_l(x,y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{1/p}} \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}, y \in [-n,n],$$
$$|f(x,y) - f(x,z)| < \frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{1/p}} \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}, y \text{ und } z \text{ aus } [-n,n] \text{ mit } |y-z| < \delta,$$
$$\|u_l - u\|_\infty < \delta.$$

Ist nun $l > l_0$, so gilt

$$\begin{aligned}\|\Delta u + f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} &\leq \underbrace{\|\Delta u - \Delta u_l\|_{L^p(\Omega)}}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \|\underbrace{\Delta u_l + f_l(\cdot,u_l)}_{=0}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \|f_l(\cdot,u_l) - f(\cdot,u_l)\|_{L^p(\Omega)} + \|f(\cdot,u_l) - f(\cdot,u)\|_{L^p(\Omega)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \Big(\int_\Omega \underbrace{|f_l(x,u_l(x)) - f(x,u_l(x))|^p}_{<(\frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{1/p}})^p} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \Big(\int_\Omega \underbrace{|f(x,u_l(x)) - f(x,u(x))|^p}_{<(\frac{\varepsilon}{3|\Omega|^{1/p}})^p} dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $L_f(u) = 0$.

3. Analog sieht man, dass – falls man zu einer weiteren Teilfolge übergeht – die Folge $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gegen ein $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert mit $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ und

$$DL_f(u)v = \Delta v + D_2 f(\cdot,u)v = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Somit ist $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ ein Gleichgewicht von (5.1) für die Nichtlinearität f, so dass 0 Eigenwert von $DL_f(u)$ mit Eigenvektor v ist. Also ist u nicht hyperbolisch, und damit ist $f \notin F_n$.

□

Es bleibt noch die Dichtheit von F_n für $n \in \mathbb{N}$ nachzuweisen. Dazu werden wir zunächst nachweisen, dass die Menge der $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, für die die Linearisierung $DL_f(u)$ für Gleichgewichte $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ mit $\|u\|_\infty \leq n$ keine *invarianten* Eigenvektoren zum Eigenwert 0 hat, dicht ist. In einem zweiten Schritt untersuchen wir, ob es generisch nicht-invariante Eigenvektoren zum Eigenwert 0 gibt.

Einschränkung auf die isotypische Komponente der invarianten Funktionen

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $k \in \mathbb{N}$, den Fall $k = \infty$ schließen wir zunächst aus.

Im Folgenden schränken wir für $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ den Operator L_f zunächst auf M^p_{inv} ein und zeigen, dass die Menge

$$\begin{aligned}S_n^{inv} := \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad &\text{ist } u \in M^p_{inv} \text{ mit } L_f|_{M^p_{inv}}(u) = 0, \|u\|_\infty \leq n, \\ &\text{so ist } 0 \notin \sigma(DL_f|_{M^p_{inv}}(u))\}\end{aligned}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Dieser Beweis wird von Brunovský, Poláčik [8, Theorem 3.a.1] übernommen. Dort wird das gleiche Problem ohne Symmetrie, also mit der Symmetrie-Gruppe $G = \{id\}$, betrachtet. In diesem Fall ist $M^p_{inv} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Es sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{h \in C^\infty(\mathbb{R}) : h \text{ hat kompakten Träger}\}$ mit $\eta(x) = 1$ für $x \in [-n-1, n+1]$. Für ein gegebenes $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ sei

$$B'(f) := \{b \in C_G^k(\overline{\Omega}) : f + b\eta \in S_n^{inv}\}.$$

Wir werden nun zeigen, dass die Menge $B'(f)$ dicht in $B := C_G^k(\overline{\Omega})$ ist. Aus dieser Dichtheit folgt, dass es beliebig nahe an f eine Funktion aus S_n^{inv} gibt. Dies wir dann liefern, dass S_n^{inv} dicht in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Die Idee ist wieder, den Transversalitätssatz 1.2.4 zu verwenden. Dazu muss das Problem noch etwas umgeschrieben werden. Es sei

$$M_{n+1} := \{u \in M_{inv}^p : \|u\|_\infty < n+1\}.$$

Dann ist M_{n+1} offen und enthält natürlich auch alle $u \in M_{inv}^p$ mit $\|u\|_\infty \leq n$. Wir setzen

$$\Phi : M_{n+1} \times C_G^k(\overline{\Omega}) \ni (u, b) \mapsto L_{f+b\eta}(u) = \Delta u + f(\cdot, u) + b\eta(u) \in N_{inv}^p. \tag{5.6}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\eta(u(x)) = 1$ für $u \in M_{n+1}$ und alle $x \in \Omega$ gilt.

Für $b \in B = C_G^k(\overline{\Omega})$ sei noch

$$\Phi_b : M_{n+1} \ni u \mapsto \Phi(u, b) \in N_{inv}^p.$$

Ist $u \in \Phi_b^{-1}(0)$ für ein $b \in B$, so ist $u \in GG(f + b\eta) \cap M_{n+1}$ ein invariantes Gleichgewicht von (5.1) für die Nichtlinearität $f + b\eta$.

Lemma 5.2.2 *Es sei $b \in C_G^k(\overline{\Omega})$.*

Wenn $0 \in N_{inv}^p$ regulärer Wert von Φ_b ist, so ist $f + b\eta \in S_n^{inv}$.

BEWEIS: Es sei $b \in C_G^k(\overline{\Omega})$.

Ist $u \in M_{n+1}$, so gilt

$$D\Phi_b(u) : M_{inv}^p \ni \bar{u} \mapsto DL_{f+b\eta}(u)\bar{u} = \Delta\bar{u} + D_2 f(\cdot, u)\bar{u} \in N_{inv}^p.$$

Es sei $u \in \Phi_b^{-1}(0)$. Da $D\Phi_b(u) = DL_{f+b\eta}|_{M_{inv}^p}(u)$ ein formal-selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung und damit Fredholm-Operator mit Index 0 ist, folgt aus der Surjektivität von $D\Phi_b(u)$, dass $\ker D\Phi_b(u) = \{0\}$ gilt (vgl. Abschnitt 1.4). Das bedeutet, 0 ist nicht Eigenwert von $D\Phi_b(u) = DL_{f+b\eta}|_{M_{inv}^p}(u)$. Also ist $f + b\eta \in S_n^{inv}$.

(Dabei ist zu beachten, dass die Surjektivität von $D\Phi_b(u)$ für $u \in \Phi_b^{-1}$ eine stärkere Aussage ist als $f + b\eta \in S_n^{inv}$, denn dafür werden nur Gleichgewichte u mit $\|u\|_\infty \leq n$ betrachtet, während $M_{n+1} = \{u \in M_{inv}^p : \|u\|_\infty < n+1\}$ ist.) □

Mit Hilfe des Transversalitätssatzes 1.2.4 soll jetzt gezeigt werden, dass die Menge der $b \in B = C_G^k(\overline{\Omega})$, für die 0 regulärer Wert von Φ_b ist, dicht in B ist. Zur Vorbereitung werden noch die beiden folgenden Lemmata benötigt.

Lemma 5.2.3 *Es seien $b \in B$ und $u \in \Phi_b^{-1}(0)$.*

Dann ist $D\Phi_b(u)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0.

Beweis: Sind $b \in B$ und $u \in \Phi_b^{-1}(0)$, so ist $D\Phi_b(u)$ ein strikt elliptischer, formal-selbstadjungierter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung (vgl. Beweis von Lemma 5.2.2) und somit ein Fredholm-Operator mit Index 0 (vgl. Abschnitt 1.4). □

Lemma 5.2.4 *Es ist* $0 \in N^p_{inv}$ *regulärer Wert von* Φ.

Beweis: Es sei $(u, b) \in \Phi^{-1}(0)$. Zu zeigen ist, dass

$$D\Phi(u,b) : M^p_{inv} \times B \ni (\bar{u}, \bar{b}) \mapsto DL_{f+b\eta}(u)\bar{u} + \bar{b} = \Delta\bar{u} + D_2 f(\cdot, u)\bar{u} + \bar{b} \in N^p_{inv}$$

surjektiv ist.

Es sei $w \in N^p_{inv}$. Genau dann ist $w \in \operatorname{range} D\Phi(u,b)$, wenn es ein $\bar{b} \in B$ gibt mit $w - \bar{b} \in \operatorname{range} DL_{f+b\eta}|_{M^p_{inv}}(u)$. Aus Gleichung (1.4) aus Abschnitt 1.4 folgt

$$\operatorname{range} DL_{f+b\eta}|_{M^p_{inv}}(u) = \{v \in N^p_{inv} : \langle v, t\rangle = \int_\Omega vt = 0 \text{ für alle } t \in \ker DL_{f+b\eta}|_{M^p_{inv}}(u)\}.$$

Es sei $u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von $\ker DL_{f+b\eta}|_{M^p_{inv}}(u)$. Gesucht ist nun ein $\bar{b} \in B$ mit

$$\langle w - \bar{b}, u_j\rangle = \int_\Omega (w - \bar{b})u_j = 0$$

beziehungsweise

$$\langle \bar{b}, u_j\rangle = \int_\Omega \bar{b}u_j = \int_\Omega wu_j = \langle w, u_j\rangle \tag{5.7}$$

für alle $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Wir wählen

$$\bar{b} = \sum_{l=1}^{s} \alpha_l u_l \tag{5.8}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ aus $\mathbb{R}$. Da u_l für $l \in \{1, \ldots, s\}$ Lösung eines homogenen, strikt elliptischen, linearen Randwertproblems mit Koeffizienten aus $C^{k-1}(\overline{\Omega})$ ist, liefert die Regularitätstheorie (siehe Abschnitt 1.4), dass $u_l \in C^k(\overline{\Omega})$ ist. Aus der Invarianz von u_l für $l \in \{1, \ldots, s\}$ folgt, dass auch $\bar{b}$ invariant unter G ist. Somit ist $\bar{b} \in B = C^k_G(\overline{\Omega})$. Mit dieser Wahl von $\bar{b}$ führt (5.7) auf ein lineares Gleichungssystem für $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$

$$\sum_{l=1}^{s} \alpha_l \int_\Omega u_l u_j = \int_\Omega wu_j \quad \text{für } j \in \{1, \ldots, s\}. \tag{5.9}$$

Da $u_1, \ldots, u_s$ linear unabhängig sind, ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. Mit der Lösung $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ bilden wir $\bar{b}$ wie in (5.8). Nach den obigen Überlegungen ist dann $w - \bar{b} \in \operatorname{range} DL_{f+b\eta}|_{M^p_{inv}}(u)$, und somit ist $w \in \operatorname{range} D\Phi(u,b)$. Hieraus folgt die Surjektivität von $D\Phi(u,b)$. □

Jetzt kann mit Hilfe von Satz 1.2.4 gezeigt werden, dass S^{inv}_n dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Proposition 5.2.5 *Es ist* S^{inv}_n *dicht in* $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Beweis: Es seien $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$.

Aufgrund der Lemmata 5.2.3 und 5.2.4 sind die Voraussetzungen von Satz 1.2.4 für die Abbildung Φ aus (5.6) erfüllt. Die Anwendung dieses Satzes liefert zusammen mit Lemma 5.2.2, dass

$$\{b \in B : 0 \text{ regulärer Wert von } \Phi_b\} \subseteq B'(f) = \{b \in B : f + b\eta \in S^{inv}_n\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Daher ist auch $B'(f)$ residual in $C^k_G(\overline{\Omega})$. Also gibt es ein $b \in B$ mit $f + b\eta \in S^{inv}_n$ und

$$\|f - (f + b\eta)\|_{C^k} = \|b\eta\|_{C^k} < \varepsilon.$$

Dies impliziert die Dichtheit von S^{inv}_n in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. □

Korollar 5.2.6 *Es ist*

$$S^{inv} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S^{inv}_n$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Beweis: Aus Proposition 5.2.5 folgt, dass S^{inv}_n für $n \in \mathbb{N}$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Die Offenheit zeigt man wie in Proposition 5.2.1. Dies impliziert, dass S^{inv} residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. □

Ist nun $f \in S^{inv}$, und ist $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ ein invariantes Gleichgewicht von (5.1), so ist 0 nicht Eigenwert von $DL_f|_{M^p_{inv}}(u)$. Das heißt, $DL_f(u) \in \mathcal{L}(W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), L^p(\Omega))$ hat keinen invarianten Eigenvektor zum Eigenwert 0.

Es muss noch gezeigt werden, dass 0 für generische $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ gar nicht Eigenwert von $DL_f(u)$ ist, wenn $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ ein Gleichgewicht von (5.1) ist. Es darf für generische f also auch in den anderen isotypischen Komponenten von $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ keine Funktionen v geben mit $DL_f(u)v = 0$.

Ist 0 jedoch für ein $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und ein Gleichgewicht $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ Eigenwert von $DL_f(u)$, so ist der dazugehörige Eigenraum invariant unter G und lässt sich daher in eine direkte Summe von irreduziblen Unterräumen zerlegen. Wir können daher analog zu den Überlegungen aus Kapitel 4 mit Hilfe der Theorie der Transformationsbasen zeigen, dass dies für generische f nicht der Fall ist.

Beliebige isotypische Komponenten

Es sei M^p eine isotypische Komponente von $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M^p äquivalent zu einer absolut irreduziblen Darstellung $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sind, wobei $\rho^{(d)}$ nicht die triviale Darstellung auf $\mathbb{R}$ sei. Weiterhin sei N^p die entsprechende isotypische Komponente von $L^p(\Omega)$.

Es seien n und k aus $\mathbb{N}$. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass 0 für generische $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für jedes invariante Gleichgewicht $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$ mit $\|u\|_\infty \leq n$ nicht Eigenwert von $DL_f(u)|_{M^p}$ ist, also dass die Menge

$$S_n(M^p) := \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \text{für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n \\ \text{ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u)|_{M^p})\}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Während wir im letzten Teilabschnitt L_f auf M^p_{inv} eingeschränkt haben, wird jetzt die Einschränkung von $DL_f(u)$ für $u \in M^p_{inv}$ auf eine isotypische Komponente M^p betrachtet.

Im Beweis werden ähnliche Methoden wie in Kapitel 4 verwendet: Ist 0 Eigenwert von $DL_f(u)|_{M^p}$, so ist der Eigenraum direkte Summe von irreduziblen Räumen, die mit Hilfe von Transformationsbasen dargestellt werden können. Wir setzen daher

$$\mathcal{M}^p := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in (W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))^d : \begin{pmatrix} \rho(g)v_1 \\ \vdots \\ \rho(g)v_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}$$

(vgl. Definition 2.1.1). Entsprechend wird $\mathcal{N}^p \subset (L^p(\Omega))^d$ definiert.

Lemma 5.2.7 *Es sei $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, und es sei $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$.*

Genau dann ist 0 nicht Eigenwert von $DL_f(u)|_{M^p}$, wenn 0 nicht Eigenwert des Operators

$$\mathcal{DL}_f(u) : \mathcal{M}^p \ni \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} DL_f(u)v_1 \\ \vdots \\ DL_f(u)v_d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}^p \tag{5.10}$$

ist.

Beweis: Ist V ein nichttrivialer irreduzibler Unterraum von $\ker DL_f(u)|_{M^p}$ und ist $v_1, \ldots, v_d$ eine Transformationsbasis von V, so ist $(v_1, \ldots, v_d)^t \in \ker \mathcal{DL}_f(u)$.

Ist andererseits $(v_1, \ldots, v_d)^t \in \ker \mathcal{DL}_f(u)$, so ist $\langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ ein d-dimensionaler Unterraum von $\ker DL_f(u)|_{M^p}$. □

Es sei nun $f \in S^{inv}_{n+1}$ gegeben. Wir wollen nachweisen, dass es in jeder Umgebung von f eine Funktion aus $S_n(M^p)$ gibt. Dazu seien η_1 und η_2 aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta_1(x) = 1$ und $\eta_2(x) = x$ für alle $x \in [-n-1, n+1]$. Wir setzen

$$B(f) := \{(b_1, b_2) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega}) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S^{inv}_{n+1}\}$$

und

$$B'(f) := \{(b_1, b_2) \in B(f) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S_n(M^p)\}.$$

Lemma 5.2.8 *Es ist $B(f)$ offen und dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$.*

Beweis: Im Beweis von Proposition 5.2.5 wurde gezeigt, dass

$$\{b_1 \in C^k_G(\overline{\Omega}) : f + b_1\eta_1 \in S^{inv}_{n+1}\}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Hieraus folgt die Dichtheit von $B(f)$.

Wie in Proposition 5.2.1 kann man sehen, dass S^{inv}_{n+1} offen ist, woraus sich auch die Offenheit von $B(f)$ ergibt. □

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass $B'(f)$ dicht in $B(f)$ und damit auch in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Hieraus wird dann die Dichtheit von $S_n(M^p)$ in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ folgen.

Die Idee hierfür ist natürlich wieder, den Transversalitätssatz 1.2.4 anzuwenden und dabei die von Lemma 5.2.7 implizierte Charakterisierung von $S_n(M^p)$ zu verwenden. Dazu sei

$$M_{n+1} := \{u \in M^p_{inv} : \|u\|_\infty < n+1\}.$$

Dann ist M_{n+1} offen, und wir definieren

$$\Phi : M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p \setminus \{0\}) \times B(f) \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$

durch

$$\begin{aligned}
\Phi(u, v, (b_1, b_2)) &:= \Big(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\, v\Big) \\
&= \left(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), \begin{pmatrix} DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)v_1 \\ \vdots \\ DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)v_d \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\Delta u + f(\cdot, u) + b_1\eta_1(u) + b_2\eta_2(u), \begin{pmatrix} \Delta v_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2)v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_d + (D_2 f(\cdot, u) + b_2)v_d \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

für $u \in M^p_{inv}$, $v = (v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{M}^p \setminus \{0\}$ und $b = (b_1, b_2) \in B(f)$. Hierbei ist zu beachten, dass $\eta_1(u) = 1$ und $\eta_2(u) = u$ für $u \in M_{n+1}$ gilt. Daher ist die Linearisierung von

$$M_{n+1} \ni u \mapsto b_1\eta_1(u) + b_2\eta_2(u) = b_1 + b_2 u \in N^p_{inv}$$

an $u \in M_{n+1}$ gegeben durch

$$M^p_{inv} \ni \bar{u} \mapsto b_2\bar{u} \in N^p_{inv}.$$

Für $b \in B(f)$ sei noch

$$\Phi_b : M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p \setminus \{0\}) \ni (u, v) \mapsto \Phi(u, v, b) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$

gesetzt.

Ist $(u, v) \in \Phi_b^{-1}(0)$ für ein $b \in B(f)$, so ist $u \in GG(f+b_1\eta_1+b_2\eta_2) \cap M_{n+1}$ ein invariantes Gleichgewicht von (5.1) für die Nichtlinearität $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2$, und $v = (v_1, \ldots, v_d)^t$ ist ein Eigenvektor von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ zum Eigenwert 0. Dann ist $V := \langle v_1, \ldots, v_d\rangle$ ein irreduzibler Unterraum von $\ker DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$.

Lemma 5.2.9 *Es sei $b \in B(f)$.*
Ist 0 nicht im Bild von Φ_b, so ist $b \in B'(f)$.

Beweis: Es seien $b = (b_1, b_2) \in B(f)$ und $u \in GG(f+b_1\eta_1+b_2\eta_2) \cap M^p_{inv}$ mit $\|u\|_\infty \leq n$. Ist 0 Eigenwert von $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p}$, so folgt aus Lemma 5.2.7, dass 0 ebenfalls Eigenwert von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ ist. Daher gibt es ein $v \in \mathcal{M}^p \setminus \{0\}$ mit $\Phi_b(u, v) = \Phi(u, v, b) = 0$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Um nachzuweisen, dass $B'(f)$ dicht in $B(f)$ ist, kann jetzt wieder Satz 1.2.4 verwendet werden (vgl. auch Abschnitt 4.3). Dazu prüfen wir zunächst, ob die Voraussetzungen dafür erfüllt sind.

Lemma 5.2.10 *Es sei* $(u, v, b) \in \Phi^{-1}(0)$.
Dann ist $D\Phi_b(u, v)$ *ein Fredholm-Operator mit Index* 0.

Beweis: Es sei $(u, v, b) \in \Phi^{-1}(0)$ mit $v = (v_1, \ldots, v_d)^t$ und $b = (b_1, b_2)$. Dann ist

$$D\Phi_b(u, v) : M_{n+1} \times \mathcal{M}^p \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} D\Phi_b(u,v)(\bar{u},\bar{v}) &= \left(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar{u}, \begin{pmatrix} DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar{v}_1 + D_2^2 f(\cdot,u)v_1\bar{u} \\ \vdots \\ DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar{v}_d + D_2^2 f(\cdot,u)v_d\bar{u} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\Delta\bar{u} + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar{u}, \begin{pmatrix} \Delta\bar{v}_1 + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar{v}_1 + D_2^2 f(\cdot,u)v_1\bar{u} \\ \vdots \\ \Delta\bar{v}_d + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar{v}_d + D_2^2 f(\cdot,u)v_d\bar{u} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

für $\bar{u} \in M^p_{inv}$ und $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d)^t \in \mathcal{M}^p$.

1. Es sei $(\bar{u}, \bar{v}) \in \ker D\Phi_b$. Wegen $b \in B(f)$ ist $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S^{inv}_{n+1}$. Da $u \in M_{n+1}$ ist, gilt $\|u\|_\infty < n + 1$, und daher folgt aus $\Delta\bar{u} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2)\bar{u} = 0$, dass $\bar{u} = 0$ sein muss. Somit ist $\bar{v} \in \ker \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$.

2. Da $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ ein formal-selbstadjungierter, linearer, strikt elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung ist und somit ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist, ist auch $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0 (vgl. Lemma 2.4.2). Daher ist $\ker \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ endlichdimensional und range $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ ist abgeschlossen und hat die Kodimension $\dim\ker \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$.

3. Es seien

$$Z_1 := N^p_{inv} \times \{0\} \subset N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p \quad \text{und} \quad Z_2 := \{0\} \times \mathcal{N}^p \subset N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p.$$

   Dann ist $N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p = Z_1 \oplus Z_2$.

   Wegen $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S^{inv}_{n+1}$ ist $Z_1 \cap \operatorname{range} D\Phi_b(u, v) = N^p_{inv} \times \{0\}$.

   Genau dann ist $(0, w) \in Z_2 \cap \operatorname{range} D\Phi_b(u, v)$, wenn es ein $\bar{v} \in \mathcal{M}^p$ mit

$$\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\,\bar{v} = w$$

   gibt. Es ist also

$$Z_2 \cap \operatorname{range} D\Phi_b(u, v) = \{0\} \times \operatorname{range} \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\,.$$

   Daher ist range $D\Phi_b(u, v)$ abgeschlossen und hat die Kodimension ist gegeben durch $\dim\ker \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$.

4. Zusammen ergibt sich, dass $D\Phi_b(u, v)$ ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist.

$\square$

Lemma 5.2.11 *Es sei Annahme* (A3) *erfüllt.*
Dann ist $0 \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$ *regulärer Wert von* Φ.

BEWEIS:

1. Es sei $(u, v, b) \in \Phi^{-1}(0)$ mit $v = (v_1, \dots, v_d)^t$ und $b = (b_1, b_2)$. Wir müssen zeigen, dass
$$D\Phi(u, v, b) : M^p_{inv} \times \mathcal{M}^p \times (C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})) \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$
mit
$$\begin{aligned} D\Phi(u,v,b)(\bar u, \bar v, \bar b) &= \Big(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar u + \bar b_1 + \bar b_2 u, \\ &\qquad \begin{pmatrix} DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar v_1 + D_2^2 f(\cdot,u)v_1\bar u + \bar b_2 v_1 \\ \vdots \\ DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar v_d + D_2^2 f(\cdot,u)v_d\bar u + \bar b_2 v_d \end{pmatrix}\Big) \\ &= \Big(\Delta \bar u + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar u + \bar b_1 + \bar b_2 u, \\ &\qquad \begin{pmatrix} \Delta \bar v_1 + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar v_1 + D_2^2 f(\cdot,u)v_1\bar u + \bar b_2 v_1 \\ \vdots \\ \Delta \bar v_d + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar v_d + D_2^2 f(\cdot,u)v_d\bar u + \bar b_2 v_d \end{pmatrix}\Big) \end{aligned}$$
für $\bar u \in M^p_{inv}$, $\bar v = (\bar v_1, \dots, \bar v_d)^t \in \mathcal{N}^p$ und $\bar b = (\bar b_1, \bar b_2) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ surjektiv ist.
Dazu sei $(t, w) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$ mit $w = (w_1, \dots, w_d)^t$ gegeben. Genau dann ist $(t, w) \in \operatorname{range} D\Phi(u, v, b)$, wenn es $\bar u \in M^p_{inv}$, $\bar v = (\bar v_1, \dots, \bar v_d)^t \in \mathcal{N}^p$ und $\bar b = (\bar b_1, \bar b_2) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ gibt mit
$$DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar u = \Delta \bar u + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar u = t - (\bar b_1 + \bar b_2 u)$$
und
$$DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar v_j = \Delta \bar v_j + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar v_j = w_j - (D_2^2 f(\cdot,u)v_j\bar u + \bar b_2 v_j)$$
für $j \in \{1, \dots, d\}$.
Wir wählen $\bar b = (-\bar a u, \bar a)$ mit einem noch zu bestimmenden $\bar a \in C^k_G(\overline{\Omega})$. Da $u \in M^p_{inv}$ invariant ist, ist auch $\bar a u$ invariant. Außerdem ist u Lösung einer elliptischen Randwertaufgabe mit einer Nichtlinearität aus $C^k(\overline{\Omega})$, so dass $u \in C^k(\overline{\Omega})$ ist. Also gilt $\bar b = (-\bar a u, \bar a) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ für $\bar a \in C^k_G(\overline{\Omega})$.
Jetzt sind noch $\bar u \in M^p_{inv}$, $\bar v = (\bar v_1, \dots, \bar v_d)^t \in \mathcal{N}^p$ und $\bar a \in C^k_G(\overline{\Omega})$ gesucht, so dass
$$DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar u = \Delta \bar u + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar u = t \tag{5.11}$$
und
$$DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar v_j = \Delta \bar v_j + (D_2 f(\cdot,u) + b_2)\bar v_j = w_j - (D_2^2 f(\cdot,u)v_j\bar u + \bar a v_j) \tag{5.12}$$
für $j \in \{1, \dots, d\}$ gelten.
Wegen $b = (b_1, b_2) \in B(f)$ gilt $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S^{inv}_{n+1}$. Daher ist $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_{inv}}$ ein Isomorphismus. Das bedeutet, Gleichung (5.11) ist eindeutig lösbar. Wir fixieren die Lösung $\bar u$.

2. Also muss nur noch $\bar{a} \in C^k_G(\overline{\Omega})$ bestimmt werden, so dass

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} w_1 - (D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} + \bar{a} v_1) \\ \vdots \\ w_d - (D_2^2 f(\cdot, u) v_d \bar{u} + \bar{a} v_d) \end{pmatrix} \in \operatorname{range} \mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) \tag{5.13}$$

ist, wobei $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ in (5.10) definiert ist.

Ist (5.13) erfüllt, so ist $\langle s_1, \dots, s_d \rangle$ ein irreduzibler Unterraum von

$$\operatorname{range} DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p} = \{r \in N^p : \ \langle r, t\rangle = \int_\Omega rt = 0 \text{ für alle } t \in \ker DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p}\}$$

(vgl. Gleichung (1.4) in Abschnitt 1.4).

Es sei $\ker DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p} = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ mit irreduziblen Unterräumen $V_1, \dots, V_m$. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $v_1^{(j)}, \dots, v_d^{(j)}$ eine Transformationsbasis von V_j bezüglich $\rho^{(d)}$. Dann bilden $v_1^{(1)}, \dots, v_d^{(1)}, \dots, v_1^{(m)}, \dots, v_d^{(m)}$ eine Basis von $\ker DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p}$. Wir setzen noch $v^{(j)} := (v_1^{(j)}, \dots, v_d^{(j)})^t$ für $j \in \{1, \dots, d\}$.

Dann ist

$$\langle s_k, v_l^{(j)}\rangle = \int_\Omega s_k v_l^{(j)} = 0 \tag{5.14}$$

für alle k, l aus $\{1, \dots, d\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Da $s_1, \dots, s_d$ und $v_1^{(j)}, \dots, v_d^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ Transformationsbasen bezüglich $\rho^{(d)}$ sind, folgt wie in Lemma 2.3.1, dass die Matrizen $C_j = (c_{kl}^{(j)}) = (\langle s_k, v_l^{(j)}\rangle)$ mit $j \in \{1, \dots, m\}$ Vielfache der Einheitsmatrix sind. Summiert man über die Hauptdiagonalen dieser Matrizen, so ist die Bedingung (5.14) äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^d \langle s_k, v_k^{(j)}\rangle = \sum_{k=1}^d \int_\Omega s_k v_k^{(j)} = 0 \quad \text{für } j \in \{1, \dots, m\}$$

beziehungsweise

$$\sum_{k=1}^d \int_\Omega \bar{a} v_k v_k^{(j)} = \sum_{k=1}^d \int_\Omega (w_k - D_2^2 f(\cdot, u) v_k \bar{u}) v_k^{(j)} \tag{5.15}$$

für $j \in \{1, \dots, m\}$.

Wir wählen

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{l=1}^d v_l v_l^{(i)} \tag{5.16}$$

mit $\alpha_1, \dots \alpha_m$ aus $\mathbb{R}$. Sowohl $v_1, \dots, v_d$ als auch $v_1^{(j)}, \dots, v_d^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ sind Transformationsbasen bezüglich $\rho^{(d)}$. Daher folgt wie in Lemma 3.2.4, dass $\bar{a}$ invariant unter G ist. Da alle beteiligten Funktionen Lösungen von elliptischen Randwertaufgaben mit Koeffizienten aus $C^{k-1}(\overline{\Omega})$ sind, handelt es sich um Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$. Also ist $\bar{a} \in C^k_G(\overline{\Omega})$. Gleichung (5.15) führt nun zu einem linearen Gleichungssystem für $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^d v_l v_l^{(i)}\Big)\Big(\sum_{k=1}^d v_k v_k^{(j)}\Big) = \int_\Omega \sum_{k=1}^d (w_k - D_2^2 f(\cdot, u)) v_k^{(j)}, \quad j \in \{1, \dots, m\}.$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, falls die Koeffizientenmatrix

$$H = (h_{ji}) = \Big(\int_\Omega \Big(\sum_{l=1}^{d} v_l v_l^{(i)} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)} \Big) \Big)$$

regulär ist. Das ist der Fall, wenn die Funktionen $\sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)}$ mit $j \in \{1, \dots, m\}$ linear unabhängig sind. Ist dies erfüllt, so bilden wir mit der Lösung des Gleichungssystems $\bar{a}$ wie in (5.16). Mit dieser Wahl gilt dann (5.13). Das bedeutet, (5.11) und (5.12) sind erfüllbar. Also ist $(t, w) \in \operatorname{range} D\Phi(u, v, b)$, woraus die Surjektivität von $D\Phi(u, v, b)$ folgt.

3. Es bleibt nur noch die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ nachzuweisen. Dazu seien $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)} = 0.$$

Setzen wir $\tilde{v}_k := \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_k^{(j)}$ für $k \in \{1, \dots, d\}$, so ist

$$\sum_{k=1}^{d} v_k \tilde{v}_k = \sum_{k=1}^{d} v_k \Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j v_k^{(j)} \Big) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)} = 0. \tag{5.17}$$

Da $v_1, \dots, v_d$ und $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_d$ Transformationsbasen von irreduziblen Unterräumen von $\ker DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p}$ bilden, kann (5.17) nur gelten, wenn $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_d)^t = 0$ ist, denn sonst würde (5.17) Annahme (A3) (siehe Seite 72) widersprechen. Aus der linearen Unabhängigkeit von $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ folgt hieraus aber $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. Das bedeutet, dass auch $\sum_{k=1}^{d} v_k v_k^{(j)}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ linear unabhängig sind.

$\square$

Mit diesen Vorbereitungen kann die Dichtheit von $S_n(M^p)$ nachgewiesen werden.

Proposition 5.2.12 *Ist Annahme* (A3) *erfüllt, so ist*

$$S_n(M^p) = \{ f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \textit{für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \textit{ mit } \|u\|_\infty \le n \quad \textit{ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u)|_{M^p}) \}$$

dicht in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

BEWEIS:

1. Es seien $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$.

   Wegen der Dichtheit von

$$B(f) = \{ (b_1, b_2) \in C_G^k(\overline{\Omega}) \times C_G^k(\overline{\Omega}) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S_{n+1}^{inv} \}$$

in $C_G^k(\overline{\Omega}) \times C_G^k(\overline{\Omega})$ gibt es ein $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \in B(f)$ mit $\tilde{f} := f + \tilde{b}_1\eta_1 + \tilde{b}_2\eta_2 \in S_{n+1}^{inv}$ und

$$\|f - \tilde{f}\|_{C^k} = \|\tilde{b}_1\eta_1 + \tilde{b}_2\eta_2\|_{C^k} \le \|\tilde{b}_1\eta_1\|_{C^k} + \|\tilde{b}_2\eta_2\|_{C^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Aus dem Transversalitätssatz 1.2.4 folgt zusammen mit den Lemmata 5.2.10, 5.2.11 und 5.2.7, dass

$$\{b \in B(\tilde{f}) : 0 \notin \operatorname{range} \Phi_b\} \subseteq B'(\tilde{f}) = \{(b_1, b_2) \in B(\tilde{f}) : \tilde{f} + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S_n(M^p)\}$$

residual und somit auch dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Also gibt es ein $(b_1, b_2) \in B'(\tilde{f})$ mit $f^* := \tilde{f} + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in S_n(M^p)$ und

$$\|\tilde{f} - f^*\|_{C^k} = \|b_1\eta_1 + b_2\eta_2\|_{C^k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt

$$\|f - f^*\|_{C^k} \leq \|f - \tilde{f}\|_{C^k} + \|\tilde{f} - f^*\|_{C^k} < \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Dichtheit von $S_n(M^p)$ in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

□

Beweis von Satz 5.1.1

Mit diesen Vorbereitungen kann jetzt gezeigt werden, dass F_n für $n \in \mathbb{N}$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Korollar 5.2.13 *Es seien n und k aus $\mathbb{N}$, und es sei Annahme* (A3) *erfüllt.*
Dann ist

$$F_n = \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \textit{ für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \textit{ mit } \|u\|_\infty \leq n \textit{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Beweis: Nach Proposition 5.2.12 ist $S_n(M^p)$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ für jede isotypische Komponente M^p (ungleich M^p_{inv}) von $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. Ist $M^p = M^p_{inv}$ die Menge der invarianten Funktionen aus $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$, so ist $S_n(M^p) = S^{inv}_n$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ wegen Proposition 5.2.5. Die Offenheit von $S_n(M^p)$ zeigt man wie in Proposition 5.2.1. Daher ist

$$\begin{aligned} F_n &= \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n \text{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\} \\ &= \bigcap \{S_n(M^p) : M^p \text{ isotypische Komponente von } W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)\} \end{aligned}$$

residual und somit dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. □

Nun können wir Satz 5.1.1 beweisen:

Beweis von Satz 5.1.1: Es sei $k \in \mathbb{N}$. Aus Proposition 5.2.1 und Korollar 5.2.13 folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen F_n offen und dicht sind. Dies impliziert, dass

$$F^{inv} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Wie in Proposition 4.4.2 kann man folgern, dass auch im Fall $k = \infty$ die Menge F_n für $n \in \mathbb{N}$ dicht in $C^\infty_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Dies liefert wieder zusammen mit der Offenheit von F_n für $n \in \mathbb{N}$, dass F^{inv} residual in $C^\infty_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. □

5.3 Irreduzible Eigenräume

In diesem Abschnitt wird Satz 5.1.3 bewiesen.

Es seien Ω und G wie in Abschnitt 5.1. Weiterhin seien $p > N$ und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Ist u ein invariantes Gleichgewicht von (5.1) für ein $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, so erfüllt u die Randwertaufgabe

$$L_f(u) = \Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.18}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass für generische Nichtlinearitäten f die Linearisierung von (5.18) nur irreduzible Eigenräume hat. Dabei wird der Beweis von Brunovský, Poláčik [8, Theorem 3.b.1] ähnlich wie in Kapitel 4 auf den äquivarianten Fall übertragen.

Um zu zeigen, dass

$$H^{inv} = \{f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \text{ist } u \in GG(f) \cap M_{inv}^p, \text{ so sind alle}$$
$$\text{Eigenwerte von } DL_f(u)\ G\text{-einfach}\}.$$

residual in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist, setzen wir für m, n aus $\mathbb{N}$

$$H_{m,n} := \{f \in F^{inv} : \quad \text{ist } u \in GG(f) \cap M_{inv}^p \text{ mit } \|u\|_\infty \le n, \text{ so sind alle}$$
$$\text{Eigenwerte } \lambda \text{ von } DL_f(u) \text{ mit } |\lambda| \le m\ G\text{-einfach}\}$$

und weisen nach, dass für m, n aus $\mathbb{N}$ die Menge $H_{m,n}$ offen und dicht in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Dann folgt, dass

$$H^{inv} = \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} H_{m,n}$$

residual in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Proposition 5.3.1 *Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $H_{m,n}$ offen.*

Beweis: (Vgl. [8, Theorem 3.b.1])

Es seien m und n aus $\mathbb{N}$.

Es sei $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) \backslash H_{m,n}$, die gegen ein $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ konvergiert. Zu zeigen ist, dass dann $f \notin H_{m,n}$ ist.

Wegen $f_l \notin H_{m,n}$ für $l \in \mathbb{N}$ gibt es Folgen $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ und $(\lambda_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, so dass $\|u_l\|_\infty \le n$, $|\lambda_l| \le m$ und

$$L_{f_l}(u_l) = \Delta u_l + f_l(\cdot, u_l) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u_l|_{\partial\Omega} = 0$$

gilt und λ_l ein Eigenwert von $DL_{f_l}(u_l)$ mit reduziblem Eigenraum ist.

Wie im Beweis von Proposition 5.2.1 können wir durch den Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ gegen ein $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ konvergiert mit $\|u\|_\infty \le n$ und

$$L_f(u) = \Delta u + f(\cdot, u) = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Da die Folge $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ durch m beschränkt ist, können wir nach dem Übergang zu einer weiteren Teilfolge annehmen, dass $(\lambda_l)_{l\in\mathbb{N}}$ gegen ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \leq m$ konvergiert. Analog zu den Überlegungen aus dem Beweis von Proposition 5.2.1 kann man zeigen, dass λ Eigenwert von $DL_f(u) = \Delta + D_2 f(\cdot, u)$ ist. Dieser Operator ist äquivariant bezüglich der Gruppe $\mathrm{Stab}(u) = G$.

Es sei $\mathcal{V}$ eine Umgebung von λ in $\mathbb{C}$, so dass keine weiteren Eigenwerte von $DL_f(u)$ in $\mathcal{V}$ enthalten sind. Aus Satz 1.3.3 folgt, dass es ein $\delta > 0$ und ein $s \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle Operatoren $T' \in \mathcal{L}_G(W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))$, für die $\|DL_f(u) - T'\|_{\mathcal{L}(W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))} < \delta$ gilt, Eigenwerte $\mu_1, \ldots, \mu_s$ in $\mathcal{V}$ haben mit $\dim(E_\lambda) = \sum_{j=1}^s \dim(E_{\mu_j})$. Außerdem treten alle irreduziblen Darstellungen, die in E_λ vorkommen, auch in $\bigoplus_{j=1}^s E_{\mu_j}$ (mit den gleichen Vielfachheiten) auf. Wegen $f_l \to f$ für $l \to \infty$, $u_l \to u$ für $l \to \infty$ und $\lambda_l \to \lambda$ für $l \to \infty$ gibt es ein $l_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|DL_f(u) - DL_{f_l}(u_l)\|_{\mathcal{L}(W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega))} < \delta$ und $\lambda_l \in \mathcal{V}$ für alle $l > l_0$. Es sei nun $l > l_0$. Da der Eigenraum von $DL_{f_l}(u_l)$ zum Eigenwert λ_l reduzibel ist, muss auch E_λ reduzibel sein.

Hieraus folgt $f \notin H_{m,n}$. □

Es bleibt noch die Dichtheit von $H_{m,n}$ in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ zu zeigen. Dieser Nachweis basiert auf dem Beweis von Brunovský, Poláčik [8, Theorem 3.b.1] und wird analog zu den Überlegungen aus Kapitel 4 geführt: Zunächst wird gezeigt, dass für generische Nichtlinearitäten die Eigenräume des auf eine isotypische Komponente M^p eingeschränkten Operators $DL_f(u)|_{M^p}$ für $u \in GG(f) \cap M_{inv}^p$ irreduzibel sind. Dann weisen wir noch nach, dass sich die Eigenräume von $DL_f(u)$ generischer Weise nicht auf verschiedene isotypische Komponenten verteilen.

Gleiche isotypische Komponente

Es seien m, n und k aus $\mathbb{N}$ (der Fall $k = \infty$ ist zunächst ausgeschlossen).

Wie in Abschnitt 4.2 werden wir den Operator $DL_f(u)$ für $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $u \in GG(f) \cap M_{inv}^p$ zunächst auf eine isotypische Komponente einschränken und zeigen, dass alle Eigenwerte dieser Einschränkung G-einfach sind.

Es sei M^p eine isotypische Komponente von $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass die Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M^p äquivalent zu einer absolut irreduziblen Darstellung $\rho^{(d)} : G \ni g \mapsto A(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^d)$ von G auf $\mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sind. Weiterhin sei N^p die entsprechende isotypische Komponente von $L^p(\Omega)$. Wie in Kapitel 2 (vgl. Definition 2.1.1) betrachten wir

$$\mathcal{M}^p := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \in (W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega))^d : \begin{pmatrix} \rho(g) v_1 \\ \vdots \\ \rho(g) v_d \end{pmatrix} = A(g)^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \text{ für alle } g \in G \right\}$$

und entsprechend $\mathcal{N}^p \subset (L^p(\Omega))^d$.

Analog zu Lemma 4.2.1 beweist man die folgende Umformulierung des Problems:

Lemma 5.3.2 *Es seien $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $u \in GG(f) \cap M^p_{inv}$.*

Genau dann sind alle Eigenräume von $DL_f(u)|_{M^p}$ irreduzibel, wenn alle Eigenwerte von

$$\mathcal{DL}_f(u) : \mathcal{M}^p \ni \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} DL_f(u)v_1 \\ \vdots \\ DL_f(u)v_d \end{pmatrix} \in \mathcal{N}^p$$

einfach sind.

Im Folgenden zeigen wir, dass

$$Q_{m,n}(M^p) := \{f \in F_{n+1} : \text{ ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n, \text{ so sind alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } DL_f(u)|_{M^p} \text{ mit } |\lambda| \leq m \ G\text{-einfach}\}$$

dicht in

$$F_{n+1} = \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ für } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n+1 \text{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u))\}$$

ist. Der Beweis hiervon erfolgt ähnlich zu den Überlegungen aus den Abschnitten 4.2 und 5.2. Aus der Dichtheit von F_{n+1} in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ (Korollar 5.2.13) wird sich dann ergeben, dass auch $Q_{m,n}(M^p)$ in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ dicht ist.

Es sei ein $f \in F_{n+1}$ gegeben. Wir zeigen, dass es in der Nähe von f ein $\tilde{f} \in Q_{m,n}(M^p)$ gibt. Dazu seien η_1 und η_2 aus $C^\infty_0(\mathbb{R})$ mit $\eta_1(x) = 1$ und $\eta_2(x) = x$ für alle $x \in [-n-1, n+1]$. Wir setzen

$$B(f) := \{(b_1, b_2) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega}) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in F_{n+1}\}$$

und

$$B'(f) := \{(b_1, b_2) \in B(f) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in Q_{m,n}(M^p)\}$$

und verwenden den Transversalitätssatz 1.2.4 um nachzuweisen, dass $B'(f)$ dicht in $B(f)$ ist. Da nach Proposition 5.2.1 und Korollar 5.2.13 die Menge F_{n+1} offen und dicht ist, folgt wie in Lemma 5.2.8, dass $B(f)$ offen und dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ ist.

Um Satz 1.2.4 anwenden zu können, definieren wir die Abbildung (vgl. auch (4.4))

$$\begin{aligned} \Phi : M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times B(f) &\to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p \\ (u, v, \lambda, (b_1, b_2)) &\mapsto \big(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), (\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})v\big), \end{aligned}$$

wobei wieder

$$M_{n+1} := \{u \in M^p_{inv} : \|u\|_\infty < n+1\}$$

sei. Sind $u \in M_{n+1}$, $v = (v_1, \ldots, v_d)^t \in \mathcal{M}^p \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b = (b_1, b_2) \in B(f)$, so ist

$$\begin{aligned} \Phi(u, v, \lambda, b) &= \left(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), \begin{pmatrix} (DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})v_1 \\ \vdots \\ (DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})v_d \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\Delta u + f(\cdot, u) + b_1\eta_1(u) + b_2\eta_2(u), \begin{pmatrix} \Delta v_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda \operatorname{id})v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_d + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda \operatorname{id})v_d \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\eta_1(u) = 1$ und $\eta_2(u) = u$ für $u \in M_{n+1}$ gilt. Für $b \in B(f)$ sei noch

$$\Phi_b : M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (u, v, \lambda) \mapsto \Phi(u, v, \lambda, b) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p.$$

Ist $(u, v, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ für ein $b = (b_1, b_2) \in B(f)$, so ist $u \in GG(f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2) \cap M_{n+1}$ ein Gleichgewicht von (5.1) bezüglich der Nichtlinearität $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2$, und v ist Eigenvektor von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ zum Eigenwert λ. Wie in Lemma 4.2.4 kann man die Frage der Einfachheit von Eigenwerten auf den Nachweis zurückführen, dass 0 regulärer Wert von Φ_b für $b \in B$ ist.

Lemma 5.3.3 *Es sei $b = (b_1, b_2) \in B(f)$.*

Ist $0 \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$ regulärer Wert von Φ_b und ist $u \in GG(f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2) \cap M_{n+1}$, so sind alle Eigenwerte von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ einfach.

Beweis: Es sei $b = (b_1, b_2) \in B(f)$.

Die Abbildung Φ ist so definiert, dass genau dann $(u, v, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ gilt, wenn $u \in GG(f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2) \cap M_{n+1}$ ist und v Eigenvektor von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ zum Eigenwert λ ist.

Es sei nun 0 regulärer Wert von Φ_b, und es sei $(u, v, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ mit $v = (v_1, \ldots, v_d)^t$. Dann ist

$$D\Phi_b(u, v, \lambda) : M_{n+1} \times \mathcal{M}^p \times \mathbb{R} \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$

mit

$$\begin{aligned}
&D\Phi_b(u, v, \lambda)(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\lambda}) \\
&\quad = \left(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\bar{u}, \begin{pmatrix} (DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda\,\mathrm{id})\bar{v}_1 + D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} + \bar{\lambda} v_1 \\ \vdots \\ (DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda\,\mathrm{id})\bar{v}_d + D_2^2 f(\cdot, u) v_d \bar{u} + \bar{\lambda} v_d \end{pmatrix} \right) \\
&\quad = \left(\Delta\bar{u} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2)\bar{u}, \begin{pmatrix} \Delta\bar{v}_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\bar{v}_1 + D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} + \bar{\lambda} v_1 \\ \vdots \\ \Delta\bar{v}_d + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\bar{v}_d + D_2^2 f(\cdot, u) v_d \bar{u} + \bar{\lambda} v_d \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

für $\bar{u} \in M^p_{inv}$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_d)^t \in \mathcal{M}^p$ und $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ surjektiv.

Wegen $b \in B(f)$ ist $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in F_{n+1}$. Daher kann man wie in Lemma 5.2.10 sehen, dass Operator

$$T : M_{n+1} \times \mathcal{M}^p \ni (\bar{u}, \bar{v}) \mapsto D\Phi_b(u, v, \lambda)(\bar{u}, \bar{v}, 0) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p$$

ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist und dass

$$\ker T = \{0\} \times \ker(\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda\,\mathrm{id})$$

gilt und die Kodimension von $\operatorname{range} T$ gegeben ist durch $\dim\ker(\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda\,\mathrm{id})$. Wegen $v \in \ker(\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda\,\mathrm{id})$ und

$$\operatorname{range} D\Phi_b(u, v, \lambda) = \operatorname{range} T \oplus (\{0\} \times \langle v \rangle)$$

ist $D\Phi_b(u,v,\lambda)$ genau dann surjektiv, wenn $\ker(\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)+\lambda\,\mathrm{id})=\langle v\rangle$, also wenn λ ein einfacher Eigenwert von $\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ ist. □

Um den Transversalitätssatz 1.2.4 auf Φ anwenden zu können, müssen nun noch die Voraussetzungen dafür überprüft werden.

Lemma 5.3.4 *Für alle* $(u,v,\lambda,b)\in\Phi^{-1}(0)$ *ist* $D\Phi_b(u,v,\lambda)$ *ein Fredholm-Operator mit Index* 1.

Beweis: Es sei $(u,v,\lambda,b)\in\Phi^{-1}(0)$.

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 5.3.3 folgt aus diesem Beweis, dass T ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist und

$$\operatorname{range} D\Phi_b(u,v,\lambda)=\operatorname{range} T\oplus(\{0\}\times\langle v\rangle)$$

gilt. Daher ist $D\Phi_b(u,v,\lambda)$ ein Fredholm-Operator mit Index 1. □

Lemma 5.3.5 *Ist Annahme* (A4) *erfüllt, so ist* $0\in N^p_{inv}\times\mathcal{N}^p$ *regulärer Wert von* Φ.

Beweis: Es sei $(u,v,\lambda,b)\in\Phi^{-1}(0)$ mit $v=(v_1,\ldots,v_d)^t$ und $b=(b_1,b_2)$. Wir müssen nachweisen, dass

$$D\Phi(u,v,\lambda,b): M^p_{inv}\times\mathcal{M}^p\times\mathbb{R}\times(C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega}))\to N^p_{inv}\times\mathcal{N}^p$$

surjektiv ist.

Dazu sei $(t,w)\in N^p_{inv}\times\mathcal{N}^p$. Genau dann ist $(t,w)\in\operatorname{range} D\Phi(u,v,\lambda,b)$, wenn es $\bar u\in M^p_{inv}$, $\bar v=(\bar v_1,\ldots,\bar v_d)^t\in\mathcal{M}^p$, $\bar\lambda\in\mathbb{R}$ und $\bar b=(\bar b_1,\bar b_2)\in C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega})$ gibt mit

$$\Delta\bar u+(D_2f(\cdot,u)+b_2)\bar u+\bar b_1+\bar b_2u=t, \tag{5.19}$$

$$\begin{pmatrix}\Delta\bar v_1+(D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda)\bar v_1+D_2^2f(\cdot,u)v_1\bar u+(\bar\lambda+\bar b_2)v_1\\ \vdots\\ \Delta\bar v_d+(D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda)\bar v_d+D_2^2f(\cdot,u)v_d\bar u+(\bar\lambda+\bar b_2)v_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_d\end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

Wir wählen $\bar\lambda=0$ und $\bar b=(-\bar a u,\bar a)$ mit einem noch zu bestimmenden $\bar a\in C^k_G(\overline{\Omega})$. Aufgrund von $u\in C^k_G(\overline{\Omega})$ ist $\bar b\in C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega})$. Wegen $f+b_1\eta_1+b_2\eta_2\in F_{n+1}$ ist dann (5.19) eindeutig lösbar. Wir fixieren die Lösung $\bar u$. Jetzt muss nur noch $\bar a\in C^k_G(\overline{\Omega})$ so bestimmt werden, dass

$$s=\begin{pmatrix}s_1\\ \vdots\\ s_d\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}w_1-(D_2^2f(\cdot,u)v_1\bar u+\bar a v_1)\\ \vdots\\ w_d-(D_2^2f(\cdot,u)v_d\bar u+\bar a v_d)\end{pmatrix}\in\operatorname{range}(\mathcal{DL}_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)+\lambda\,\mathrm{id}) \tag{5.21}$$

gilt.

Wie in den Schritten 2 und 3 des Beweises von Lemma 5.2.11 sieht man, dass dies möglich ist, wenn Annahme (A3) (siehe Seite 72) erfüllt ist, was der Fall ist, da die Gültigkeit von Annahme (A4) auch Annahme (A3) impliziert.

Hieraus ergibt sich, dass $D\Phi(u,v,\lambda,b)$ surjektiv ist. □

Jetzt kann man den Transversalitätssatz 1.2.4 anwenden.

Proposition 5.3.6 *Ist Annahme* (A4) *erfüllt, so ist $Q_{m,n}(M^p)$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass

$$Q_{m,n}(M^p) = \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \text{ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n, \text{ so sind alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } DL_f(u)|_{M^p} \text{ mit } |\lambda| \leq m \text{ } G\text{-einfach}\}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Dazu seien $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Gesucht ist jetzt ein $\tilde{f} \in Q_{m,n}(M^p)$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{C^k} < \varepsilon$.

Der Transversalitätssatz 1.2.4, angewandt auf Φ, liefert, dass

$$C(f) := \{b \in B(f) : 0 \text{ ist regulärer Wert von } \Phi_b\}$$

residual und somit auch dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ ist. Aus den Lemmata 5.3.2 und 5.3.3 folgt

$$C(f) \subseteq B'(f) = \{(b_1, b_2) \in B(f) : f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in Q_{m,n}(M^p)\}.$$

Somit ist auch $B'(f)$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$. Daher gibt es ein $(b_1, b_2) \in B'(f)$, so dass $\tilde{f} := f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in Q_{m,n}(M^p)$ ist und $\|f - \tilde{f}\|_{C^k} = \|b_1\eta_1 + b_2\eta_2\|_{C^k} < \varepsilon$ gilt. □

Korollar 5.3.7 *Es sei Annahme* (A4) *erfüllt.*

Dann ist

$$Q_{m,n} := \bigcap\{Q_{m,n}(M^p) : M^p \text{ isotypische Komponente von } W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)\}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Beweis: Es sei M^p eine isotypische Komponente von $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. Aus Proposition 5.3.6 folgt, dass $Q_{m,n}(M^p)$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Die Offenheit von $Q_{m,n}(M^p)$ ergibt sich wie in Proposition 5.3.1. Hieraus folgt, das $Q_{m,n}$ residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. □

Als nächstes muss noch gezeigt werden, dass sich generisch die Eigenräume nicht auf verschiedene isotypische Komponenten verteilen (vgl. Abschnitt 4.3).

Verschiedene isotypische Komponenten

Es seien m, n und k aus $\mathbb{N}$.

Weiterhin seien N^p_1 und N^p_2 voneinander verschiedene isotypische Komponenten von $L^p(\Omega)$, und M^p_1 und M^p_2 seien die entsprechenden isotypischen Komponenten von $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$. Für $j \in \{1, 2\}$ sei $\rho_j : G \ni g \mapsto A_j(g) \in \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_j})$ eine irreduzible, orthogonale Darstellung von G auf $\mathbb{R}^{d_j}$ für $d_j \in \mathbb{N}$, die äquivalent zu den Darstellungen auf den irreduziblen Unterräumen von M^p_j und N^p_j ist.

Wir wollen nun nachweisen, dass

$$R_{m,n}(M^p_1, M^p_2) := \{f \in Q_{m,n} : \quad \text{ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n, \text{ so sind alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } DL_f(u)|_{M^p_1 \oplus M^p_2} \text{ mit } |\lambda| \leq m \text{ } G\text{-einfach}\}$$

dicht in $C^k_G(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ ist. Dazu betrachten wir wieder für $j\in\{1,2\}$ die Menge

$$\mathcal{M}_j^p := \left\{ \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_{d_j}\end{pmatrix} \in (W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega))^{d_j} : \begin{pmatrix} \rho(g)v_1\\ \vdots \\ \rho(g)v_{d_j}\end{pmatrix} = A_j(g)^t \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_{d_j}\end{pmatrix} \text{ für alle } g\in G\right\}$$

(vgl. Definition 2.1.1) und entsprechend die Menge $\mathcal{N}_j^p \subset (L^p(\Omega))^{d_j}$. Für $f\in Q_{m,n}$, $u\in GG(f)\cap M^p_{inv}$ und $j\in\{1,2\}$ definieren wir auf $\mathcal{M}_j^p$ durch

$$\mathcal{DL}_f^j(u) : \mathcal{M}_j^p \ni \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_{d_j}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} DL_f(u)v_1\\ \vdots \\ DL_f(u)v_{d_j}\end{pmatrix} \in \mathcal{N}_j^p$$

einen zu $DL_f(u)|_{M_j}$ korrespondierenden Operator.

Es sei ein $f\in Q_{m,n+1}$ gegeben. Wir weisen im Folgenden nach, dass es in der Nähe von f ein $f^*\in R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ gibt. Dazu seien wieder η_1 und η_2 aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\eta_1(x)=1$ und $\eta_2(x)=x$ für alle $x\in[-n-1,n+1]$. Wir setzen

$$B(f) := \{(b_1,b_2)\in C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega}) : f+b_1\eta_1+b_2\eta_2\in Q_{m,n+1}\}$$

und

$$B'(f) := \{(b_1,b_2)\in C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega}) : f+b_1\eta_1+b_2\eta_2\in R_{m,n}(M_1^p,M_2^p)\}$$

und zeigen, dass $B'(f)$ dicht in $B(f)$ ist. Dabei folgt wie in Lemma 5.2.8, dass $B(f)$ offen und dicht in $C^k_G(\overline{\Omega})\times C^k_G(\overline{\Omega})$ ist, denn nach Korollar 5.3.7 ist $Q_{m,n+1}$ dicht, und die Offenheit von $Q_{m,n+1}$ ergibt sich analog zu Proposition 5.3.1.

Es sei

$$M_{n+1} := \{u\in M^p_{inv} : \|u\|_\infty < n+1\}.$$

Um wieder den Transversalitätssatz 1.2.4 anwenden zu können, definieren wir die Abbildung

$$\Phi : M_{n+1}\times(\mathcal{M}_1^p\setminus\{0\})\times(\mathcal{M}_2^p\setminus\{0\})\times\mathbb{R}\times B(f)\to N^p_{inv}\times\mathcal{N}_1^p\times\mathcal{N}_2^p$$

durch

$$\begin{aligned}\Phi\ &(u,v,w,\lambda,b)\\ &= \Big(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), (\mathcal{DL}^1_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)+\lambda\,\mathrm{id})v, (\mathcal{DL}^2_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)+\lambda\,\mathrm{id})w\Big)\\ &= \Big(\Delta u + f(\cdot,u)+b_1\eta_1(u)+b_2\eta_2(u), \begin{pmatrix} \Delta v_1 + (D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda\,\mathrm{id})v_1\\ \vdots\\ \Delta v_{d_1} + (D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda\,\mathrm{id})v_{d_1}\end{pmatrix},\\ &\qquad\qquad \begin{pmatrix} \Delta w_1 + (D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda\,\mathrm{id})w_1\\ \vdots\\ \Delta w_{d_2} + (D_2f(\cdot,u)+b_2+\lambda\,\mathrm{id})w_{d_2}\end{pmatrix}\Big)\end{aligned}$$

für $u \in M^p_{inv}$, $v = (v_1, \ldots, v_{d_1})^t \in \mathcal{M}^p_1 \setminus \{0\}$,$w = (w_1, \ldots, w_{d_2})^t \in \mathcal{M}^p_2 \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $b = (b_1, b_2) \in B(f)$. Weiterhin sei für $b \in B(f)$

$$\Phi_b : M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p_1 \setminus \{0\}) \times (\mathcal{M}^p_2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (u, v, w, \lambda) \mapsto \Phi(u, v, w, \lambda, b) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_1 \times \mathcal{N}^p_2.$$

Die Abbildung Φ ist so definiert, dass genau dann $(u, v, w, \lambda) \in \Phi_b^{-1}(0)$ für ein $b = (b_1, b_2) \in B(f)$ gilt, wenn $u \in GG(f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2) \cap M_{n+1}$ ist und v und w Eigenvektoren von $\mathcal{DL}^1_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ beziehungsweise von $\mathcal{DL}^2_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)$ zum Eigenwert λ sind.

Lemma 5.3.8 *Es sei $b \in B(f)$.*
Ist $0 \notin \operatorname{range} \Phi_b$, so ist $b \in B'(f)$.

Beweis: Es sei $b = (b_1, b_2) \in B(f)$.
Angenommen, es ist $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \notin R_{m,n}(M^p_1, M^p_2)$.
Dann gibt es ein $u \in GG(f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2) \cap M^p_{inv}$ mit $\|u\|_\infty \leq n$ und einen Eigenwert λ von $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_1 \oplus M^p_2}$ mit $|\lambda| \leq m$, so dass der zugehörige Eigenraum E_λ nicht irreduzibel ist.
Wegen $b \in B(f)$ ist $f + b_1\eta_1 + b_2\eta_2 \in Q_{m,n+1}$. Das bedeutet, die Eigenräume zum Eigenwert λ von $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_1}$ und $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_2}$ sind irreduzibel. Wegen der Reduzibilität des Eigenraums E_λ von $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_1 \oplus M^p_2}$ zum Eigenwert λ gibt es daher irreduzible Unterräume V_1 von M^p_1 und V_2 von M^p_2 mit $E_\lambda = V_1 \oplus V_2$. Für $j \in \{1, 2\}$ sei $v^{(j)}_1, \ldots, v^{(j)}_{d_j}$ eine Transformationsbasis von V_j. Setzen wir $v^{(j)} := (v^{(j)}_1, \ldots, v^{(j)}_{d_j})^t$ für $j \in \{1, 2\}$, so gilt $(\mathcal{DL}^j_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})v^{(j)} = 0$. Daher ist $\Phi_b(u, v^{(1)}, v^{(2)}, \lambda) = 0$.
Hieraus folgt die Behauptung. □

Wie in Abschnitt 4.3 werden wir den Transversalitätssatz 1.2.4 verwenden um zu zeigen, dass für eine residuale Menge von $b \in B(f)$ der Wert 0 nicht im Bild von Φ_b ist. Dazu überprüfen wir erst die Voraussetzungen von Satz 1.2.4.

Lemma 5.3.9 *Für alle $(u, v, w, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ ist $D\Phi_b(u, v, w, \lambda)$ ein Fredholm-Operator mit Index 1.*

Beweis: Wie in Lemma 5.3.4 kann man sehen, dass die Linearisierungen der Abbildungen

$$M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p_1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_1$$
$$(u, v, \lambda) \mapsto \Big(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), (\mathcal{DL}^1_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})v\Big)$$

und

$$M_{n+1} \times (\mathcal{M}^p_2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_2$$
$$(u, w, \lambda) \mapsto \Big(L_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u), (\mathcal{DL}^2_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})w\Big)$$

an (u, v, λ) beziehungsweise (u, w, λ) mit $(u, v, w, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ und $b = (b_1, b_2)$ Fredholm-Operatoren mit Index 1 sind. Wie im Beweis von Lemma 4.3.2 folgt hieraus, dass dann auch $D\Phi_b(u, v, w, \lambda)$ für $(u, v, w, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ ein Fredholm-Operator mit Index 1 ist. □

Lemma 5.3.10 *Es sei Annahme* (A4) *erfüllt.*
Dann ist $0 \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_1 \times \mathcal{N}^p_2$ regulärer Wert von Φ.

Beweis: Es sei $(u, v, w, \lambda, b) \in \Phi^{-1}(0)$ mit $v = (v_1, \ldots, v_{d_1})^t$, $w = (w_1, \ldots, w_{d_2})^t$ und $b = (b_1, b_2)$. Wir müssen zeigen, dass

$$D\Phi(u, v, w, \lambda, b) : M^p_{inv} \times \mathcal{M}^p_1 \times \mathcal{M}^p_2 \times \mathbb{R} \times (C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})) \to N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_1 \times \mathcal{N}^p_2$$

surjektiv ist.

Ist $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in N^p_{inv} \times \mathcal{N}^p_1 \times \mathcal{N}^p_2$, so ist genau dann $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in \operatorname{range} D\Phi(u, v, w, \lambda, b)$, falls es $\bar{u} \in M^p_{inv}$, $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{d_1})^t \in \mathcal{M}^p_1$, $\overline{w} = (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{d_2})^t \in \mathcal{M}^p_2$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ und $\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2) \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$ gibt mit

$$\Delta\bar{u} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2)\bar{u} + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 u = t, \tag{5.22}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\bar{v}_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\bar{v}_1 + D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b}_2) v_1 \\ \vdots \\ \Delta\bar{v}_{d_1} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\bar{v}_{d_1} + D_2^2 f(\cdot, u) v_{d_1} \bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b}_2) v_{d_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{d_1} \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

$$\begin{pmatrix} \Delta\overline{w}_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\overline{w}_1 + D_2^2 f(\cdot, u) w_1 \bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b}_2) w_1 \\ \vdots \\ \Delta\overline{w}_{d_2} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda)\overline{w}_{d_2} + D_2^2 f(\cdot, u) w_{d_2} \bar{u} + (\bar{\lambda} + \bar{b}_2) w_{d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_{d_2} \end{pmatrix}. \tag{5.24}$$

Wir wählen $\bar{\lambda} = 0$ und $\bar{b} = (-\bar{a}u, \bar{a})$ mit $\bar{a} \in C^k_G(\overline{\Omega})$ (vgl. auch Beweis von Lemma 5.3.5). Aufgrund von $u \in C^k_G(\overline{\Omega})$ ist $\bar{b} \in C^k_G(\overline{\Omega}) \times C^k_G(\overline{\Omega})$. Wegen $b \in B(f)$ ist dann (5.22) eindeutig lösbar. Wenn wir diese Lösung $\bar{u}$ festhalten, muss nur noch $\bar{a} \in C^k_G(\overline{\Omega})$ gesucht werden, so dass

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{d_1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{v}_1 - (D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} + \bar{a} v_1) \\ \vdots \\ \hat{v}_{d_1} - (D_2^2 f(\cdot, u) v_{d_1} \bar{u} + \bar{a} v_{d_1}) \end{pmatrix} \in \operatorname{range}(\mathcal{DL}^1_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id}) \tag{5.25}$$

und

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{d_2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{w}_1 - (D_2^2 f(\cdot, u) w_1 \bar{u} + \bar{a} w_1) \\ \vdots \\ \hat{w}_{d_2} - (D_2^2 f(\cdot, u) w_{d_2} \bar{u} + \bar{a} w_{d_2}) \end{pmatrix} \in \operatorname{range}(\mathcal{DL}^2_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id}) \tag{5.26}$$

gilt.

Ist (5.25) erfüllt, so ist $\langle s_1, \ldots, s_{d_1} \rangle$ ein irreduzibler Unterraum von

$$\begin{aligned} \operatorname{range}(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})|_{M^p_1} = \{r \in M^p_1 :\ \langle r, q \rangle = \int_\Omega rq = 0 \text{ für alle} \\ q \in \ker(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})|_{M^p_1}\}. \end{aligned}$$

Wegen $b \in B(f)$ ist λ ein G-einfacher Eigenwert von $DL_{f+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_1}$, das heißt der Eigenraum zum Eigenwert λ von $DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)|_{M^p_1}$ ist irreduzibel. Wegen $\Phi(u, v, w, \lambda, b) = 0$ gilt daher $\ker(DL_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u) + \lambda \operatorname{id})|_{M^p_1} = \langle v_1, \ldots, v_{d_1} \rangle$.

Aus (5.25) folgt somit

$$C = (c_{jk}) := (\langle s_j, v_k \rangle) = \Big(\int_\Omega s_j v_k \Big) = 0 \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_1}.$$

Wie in Lemma 2.3.1 kann man sehen, dass C äquivariant ist und somit ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Die Summation über die Hauptdiagonale liefert daher, dass

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d_1} \bar{a} v_j^2 = \int_\Omega \sum_{j=1}^{d_1} (\hat{v}_j - D_2^2 f(\cdot, u) v_j \bar{u}) v_j \tag{5.27}$$

erfüllt sein muss. Analog folgt aus (5.26), dass $\bar{a}$ so gewählt sein muss, dass zusätzlich noch

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{d_2} \bar{a} w_j^2 = \int_\Omega \sum_{j=1}^{d_2} (\hat{w}_j - D_2^2 f(\cdot, u) w_j \bar{u}) w_j \tag{5.28}$$

gilt.

Wählen wir

$$\bar{a} = \alpha \sum_{j=1}^{d_1} v_j^2 + \beta \sum_{j=1}^{d_2} w_j^2 \tag{5.29}$$

mit α, β aus $\mathbb{R}$, so führen (5.27) und (5.28) auf ein lineares Gleichungssystem für α und β. Wie im Beweis von Lemma 4.3.3 kann man zeigen, dass dieses Gleichungssystem lösbar ist, falls Annahme (A4) (siehe Seite 73) erfüllt ist. Mit dieser Lösung bilden wir $\bar{a}$ gemäß (5.29). Mit dieser Wahl von $\bar{a}$ sind dann (5.25) und (5.26) erfüllt. Daher ist $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in \operatorname{range} D\Phi(u, v, w, \lambda, b)$ und somit $D\Phi(u, v, w, \lambda, b)$ surjektiv. □

Nun kann Satz 1.2.4 angewandt werden.

Proposition 5.3.11 *Ist Annahme* (A4) *erfüllt, so ist die Menge* $R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ *dicht in* $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

BEWEIS:

1. Es sei $f \in Q_{m,n+1}$.

   Der Transversalitätssatz 1.2.4 liefert, dass

   $$C(f) := \{b \in B(f) : 0 \text{ regulärer Wert von } \Phi_b\}$$

   residual in $B(f)$ ist.

   Es sei nun $b \in C(f)$. Dann ist $D\Phi_b(u, v, w, \lambda)$ für alle $(u, v, w, \lambda) \in \Phi^{-1}(0)$ surjektiv. Sind $(u, v, w, \lambda) \in \Phi^{-1}(0)$ und $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in N_{inv}^p \times \mathcal{M}_1^p \times \mathcal{M}_2^p$, so muss es $\bar{u} \in M_{inv}^p$, $\bar{v} \in \mathcal{M}_1^p$, $\overline{w} \in \mathcal{M}_2^p$ und $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ geben mit

   $$D\Phi_b(u, v, w, \lambda)(\bar{u}, \bar{v}, \overline{w}, \bar{\lambda}) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}).$$

   Wegen $b \in B(f)$ ist die Gleichung

   $$\Delta \bar{u} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2) \bar{u} = \hat{u}$$

   eindeutig lösbar. Da λ ein einfacher Eigenwert von $\mathcal{DL}^1_{f+b_1\eta_1+b_2\eta_2}(u)\,|_{M_1^p}$ mit Eigenvektor v ist, gibt es auch eindeutig bestimmte $\bar{v} = (\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{d_1})^t \in \mathcal{M}_1^p$ und $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ mit

   $$\begin{pmatrix} \Delta \bar{v}_1 + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda) \bar{v}_1 + \bar{\lambda} v_1 \\ \vdots \\ \Delta \bar{v}_{d_1} + (D_2 f(\cdot, u) + b_2 + \lambda) \bar{v}_{d_1} + \bar{\lambda} v_{d_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 - D_2^2 f(\cdot, u) v_1 \bar{u} \\ \vdots \\ \hat{v}_{d_1} - D_2^2 f(\cdot, u) v_{d_1} \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Dann ist aber

$$\begin{pmatrix} \Delta\overline{w}_1 + (D_2 f(\cdot,u) + b_2 + \lambda)\overline{w}_1 + \bar{\lambda} w_1 \\ \vdots \\ \Delta\overline{w}_{d_2} + (D_2 f(\cdot,u) + b_2 + \lambda)\bar{w}_{d_2} + \bar{\lambda} w_{d_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_1 - D_2^2 f(\cdot,u) w_1 \bar{u} \\ \vdots \\ \hat{w}_{d_2} - D_2^2 f(\cdot,u) w_{d_2} \bar{u} \end{pmatrix}$$

nicht mehr für alle $\hat{w} \in \mathcal{N}_2^p$ lösbar (vgl. auch Beweis von Proposition 4.3.4).

Also kann $D\Phi_b(u, v, w, \lambda)$ nicht surjektiv sein. Da aber 0 regulärer Wert von Φ_b ist, muss somit $\Phi_b^{-1}(0) = \emptyset$ gelten.

Zusammen mit Lemma 5.3.8 ergibt sich jetzt, dass

$$B'(f) \supseteq \{b \in B(f) : 0 \notin \operatorname{range} \Phi_b\} \supseteq C(f)$$

residual und somit dicht in $B(f)$ ist.

2. Nun seien $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Gesucht ist ein $f^* \in R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ mit $\|f - f^*\|_{C^k} < \varepsilon$.

   Aufgrund der Dichtheit von $Q_{m,n+1}$ in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ gibt es ein $\tilde{f} \in Q_{m,n+1}$ mit $\|f - \tilde{f}\|_{C^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Nach den Überlegungen aus Beweisschritt 1 ist die Menge $B'(\tilde{f})$ dicht in $B(\tilde{f})$. Es gibt daher ein $b = (b_1, b_2) \in B'(\tilde{f})$, so dass für $f^* := \tilde{f} + b_1\eta_1 + b_2\eta_2$ gilt $f^* \in R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ und $\|\tilde{f} - f^*\|_{C^k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

   Dann ist
   $$\|f - f^*\|_{C^k} \le \|f - \tilde{f}\|_{C^k} + \|\tilde{f} - f^*\|_{C^k} < \varepsilon.$$

   Hieraus folgt die Behauptung.

□

Korollar 5.3.12 *Ist Annahme* (A4) *erfüllt, so ist*

$$H_{m,n} = \bigcap\{R_{m,n}(M_1^p, M_2^p) : M_1^p, M_2^p \textit{ isotypische Komponenten von } W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\}$$

residual in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Beweis: Es seien M_1^p und M_2^p voneinander verschiedene isotypische Komponenten von $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Nach Proposition 5.3.11 ist $R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ dicht in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Die Offenheit von $R_{m,n}(M_1^p, M_2^p)$ ergibt sich wie in Proposition 5.3.1. Hieraus folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 5.1.3

Nun können die Ergebnisse aus Proposition 5.3.1 und Korollar 5.3.12 zusammengefasst werden:

Sind m, n und k aus $\mathbb{N}$, so folgt aus Proposition 5.3.1, dass

$$H_{m,n} = \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv} \text{ mit } \|u\|_\infty \leq n, \text{ so sind alle Eigenwerte } \lambda \text{ von } DL_f(u) \text{ mit } |\lambda| \leq m \ G\text{-einfach}\}$$

offen ist. Korollar 5.3.12 liefert, dass $H_{m,n}$ dicht in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist. Hieraus ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} H^{inv} &= \{f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \text{ ist } u \in GG(f) \cap M^p_{inv}, \text{ so sind alle Eigenwerte von } DL_f(u) \ G\text{-einfach}\} \\ &= \bigcap_{m,n \in \mathbb{N}} H_{m,n} \end{aligned}$$

residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Damit ist Satz 5.1.3 für $k \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Wie in Abschnitt 4.4 kann man hieraus nun folgern, dass auch im Fall $k = \infty$ die Menge H^{inv} residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist.

Dies schließt den Beweis von Satz 5.1.3 ab.

Kapitel 6

Spezielle Gruppen

In diesem Kapitel wird nachgewiesen, dass die Annahmen (A1) bis (A4) für bestimmte Gruppen erfüllt sind.

Dabei werden im ersten Abschnitt ein- und zweidimensionale irreduzible Darstellungen betrachtet, danach werden die zweidimensionalen Darstellungen der Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ untersucht.

Im dritten Abschnitt wird nachgewiesen, dass die Annahmen (A1) bis (A4) für die Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt sind. Daher können die Generizitätssätze aus den Kapiteln 3, 4 und 5 auf diese Gruppen angewandt werden, und es werden die daraus resultierenden Sätze formuliert.

6.1 Ein- und zweidimensionale Darstellungen

In diesem Abschnitt betrachten wir ein- und zweidimensionale irreduzible Darstellungen.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand. Weiterhin seien G eine kompakte Lie-Gruppe und $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ eine Darstellung von G auf $\mathbb{R}^N$, so dass Ω invariant unter G (bezüglich ρ) ist. Dazu betrachten wir die dadurch induzierte Darstellung auf $L^p(\Omega)$ für $p \in (1, \infty)$.

Gegeben sei noch ein formal-selbstadjungierter, äquivarianter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung $L : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Wir betrachten im Folgenden das Eigenwertproblem zu L auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen

$$(L + \lambda\,\mathrm{id})u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von L und E_λ der zugehörige Eigenraum, so lässt sich $E_\lambda = \oplus_{\nu=1}^s U_\nu$ als direkte Summe von irreduziblen Unterräumen $U_1, \ldots, U_s$ darstellen.

In den folgenden beiden Lemmata wird untersucht, wie sich die Transformationsbasen von U_ν und U_μ für ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$ zueinander verhalten, wenn einer der beiden Unterräume eindimensional ist oder beide Räume zweidimensional sind und die Darstellungen $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent sind.

Lemma 6.1.1 *Es seien λ ein Eigenwert von L und E_λ der zugehörige Eigenraum. Weiterhin seien U_1 und U_2 irreduzible Unterräume von E_λ mit Dimensionen d_1 beziehungsweise d_2. Dabei sei $d_1 = 1$. Es sei $U_1 = \langle u_1 \rangle$, und zu U_2 sei eine normierte Transformationsbasis $v_1, \dots, v_{d_2}$ bezüglich einer geeigneten irreduziblen Darstellung $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_2})$ gegeben.*

Dann ist

$$u_1^2 \neq \frac{1}{d_2} \sum_{k=1}^{d_2} v_k^2. \tag{6.1}$$

Dabei ist (6.1) als Ungleichung in $C^\infty(\overline{\Omega})$ zu verstehen, das heißt, die Funktionen sollen nicht identisch gleich sein. Es ist durchaus möglich, dass es Punkte $x \in \Omega$ gibt mit $u_1^2(x) = \frac{1}{d_2} \sum_{k=1}^{d_2} v_k^2(x)$, solange es mindestens ein $x \in \Omega$ gibt, für das Ungleichheit besteht.

Beweis: (vgl. Driscoll [10, Lemma 2.4]) Es gibt ein Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ mit $u_1|_{\partial\Omega'} = 0$ und $u_1(x) > 0$ für alle $x \in \Omega'$. Dann ist u_1 Lösung des Eigenwertproblems

$$(L + \mu\,\mathrm{id})u = 0 \quad \text{auf } \Omega', \quad u|_{\partial\Omega'} = 0 \tag{6.2}$$

zum Eigenwert λ.

Nach [13, Theorem 8.38] ist der erste Eigenwert eines Eigenwertproblems einfach und die zugehörige Eigenfunktion ist auf dem Gebiet positiv. Da alle anderen Eigenfunktionen zu dieser orthogonal (in $L^2(\Omega)$) sind, müssen sie Vorzeichenwechsel haben. Die Eigenfunktion zum ersten Eigenwert ist also die einzige Eigenfunktion, die auf dem Gebiet positiv ist.

Wegen $u_1 > 0$ auf Ω' folgt hieraus, dass λ für das Eigenwertproblem (6.2) der erste Eigenwert ist und als solcher einfach ist.

Angenommen, es ist

$$u_1^2 = \frac{1}{d_2} \sum_{k=1}^{d_2} v_k^2.$$

Wegen $u_1|_{\partial\Omega'} = 0$ müssen auch $v_1, \dots, v_{d_2}$ auf $\partial\Omega'$ verschwinden. Also sind auch $v_1, \dots, v_{d_2}$ Lösungen von (6.2) zum Eigenwert λ. Da dieser aber einfach ist und $u_1, v_1, \dots, v_{d_2}$ linear unabhängig sind, ergibt sich ein Widerspruch. □

Lemma 6.1.2 *Es sei λ ein Eigenwert von L. Weiterhin seien U_1 und U_2 zweidimensionale irreduzible Unterräume des zugehörigen Eigenraums E_λ, so dass $\rho|_{U_1}$ und $\rho|_{U_2}$ äquivalent sind. Es seien u_1, u_2 eine Transformationsbasis von U_1 und v_1, v_2 eine Transformationsbasis von U_2 bezüglich einer geeigneten Darstellung $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$.*

Dann können nicht gleichzeitig

$$u_1^2 + u_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \tag{6.3}$$

und

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \tag{6.4}$$

erfüllt sein.

Auch hier sind (6.3) und (6.4) als Gleichungen in $C^\infty(\overline{\Omega})$ zu verstehen.

BEWEIS: Angenommen, es gelten (6.3) und (6.4).

Es gibt ein Gebiet $\Omega' \subset \Omega$, so dass $u_1(x) > 0$ für alle $x \in \Omega'$ und $u_1|_{\partial\Omega'} = 0$ ist. Wie im Beweis von Lemma 6.1.1 ist dann λ der erste Eigenwert des Eigenwertproblems

$$(L + \mu \,\mathrm{id})u = 0 \quad \text{auf } \Omega', \quad u|_{\partial\Omega'} = 0 \tag{6.5}$$

mit Eigenfunktion u_1.

Es sei $x \in \partial\Omega'$. Wegen $u_1(x) = 0$ und Gleichung (6.4) gilt entweder $u_2(x) = 0$ oder $v_2(x) = 0$. Ist $u_2(x) = 0$, so folgt aus (6.3), dass auch $v_2(x) = 0$ sein muss. Also ist in jedem Fall $v_2(x) = 0$, das heißt, es ist $v_2|_{\partial\Omega'} = 0$. Daher ist auch v_2 eine Lösung des Eigenwertproblems (6.5) zum Eigenwert λ. Da aber λ für dieses Problem ein einfacher Eigenwert ist und u_1, v_2 linear unabhängig sind, ergibt sich auch hier ein Widerspruch. □

Bemerkung 6.1.3 Es gelten die gleichen Bezeichnungen wie in Lemma 6.1.2

1. Man kann die Gleichungen (6.3) und (6.4) auch punktweise als Schnitt von einem Kreis und einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ interpretieren: Sind v_1 und v_2 gegeben, so bedeutet Gleichung (6.3), dass $u_1(x)$ und $u_2(x)$ für jedes $x \in \Omega$ auf einem Kreis mit Radius $(v_1(x)^2 + v_2(x)^2)^{\frac{1}{2}}$ liegen. Gleichung (6.4) heißt, dass $(u_1(x), u_2(x))^t$ im $\mathbb{R}^2$ orthogonal zu $(v_1(x), v_2(x))^t$ für jedes $x \in \Omega$ ist. Die Kombination der beiden Gleichungen beschreibt gerade den Schnitt von einem Kreis mit einer Geraden, also zwei Punkte. Durch die Vorgabe von $v_1(x)$ und $v_2(x)$ für $x \in \Omega$ sind also $u_1(x)$ und $u_2(x)$ (fast) eindeutig festgelegt. Die folgenden Überlegungen zeigen, dass dies aber zu einem Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Eigenfunktionen führt.

2. Angenommen, es sind (6.3) und (6.4) gleichzeitig erfüllt.

   Es gibt ein Gebiet $\Omega' \subset \Omega$ mit $v_1(x) \neq 0$ für $x \in \Omega'$. Auf Ω' gilt wegen (6.4)

   $$u_1 = -\frac{u_2 v_2}{v_1}.$$

   Mit (6.3) ergibt sich nun

   $$v_1^2 + v_2^2 = \frac{u_2^2 v_2^2}{v_1^2} + u_2^2$$

   beziehungsweise

   $$(v_1^2 + v_2^2)v_1^2 = (v_1^2 + v_2^2)u_2^2.$$

   Da v_1 auf Ω' nicht verschwindet, ist $v_1^2(x) + v_2^2(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega'$, und es folgt

   $$u_2(x)^2 = v_1(x)^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega'. \tag{6.6}$$

   Angenommen, es ist $u_2(x) = v_1(x)$ für ein $x \in \Omega'$. Wegen der Stetigkeit von u_2 und v_2 und Gleichung (6.6) gibt es dann eine ganze Umgebung von x, auf der $u_2 = v_1$ gilt, was aber wegen der linearen Unabhängigkeit von u_2 und v_1 nicht sein kann. Denn stimmen Lösungen von elliptischen Randwertaufgaben auf einer offenen Menge überein, so sind sie gleich ([22, III.19], siehe auch Abschnitt 6.2).

   Analog sieht man, dass es kein $x \in \Omega'$ geben kann mit $u_2(x) = -v_1(x)$.

   Das bedeutet, (6.3) und (6.4) können nicht gleichzeitig erfüllt sein.

3. Diese elementaren Überlegungen schlagen aber fehl im Fall, dass man zwei äquivalente dreidimensionale irreduzible Unterräume betrachtet. Denn dann beschreiben die (6.3) und (6.4) entsprechenden Gleichungen geometrisch den Schnitt einer Kugel und einer Geraden im $\mathbb{R}^3$, also einen Kreis. Dies führt aber nicht zu einem Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Eigenfunktionen.

   Man kann sich bei den Überlegungen auch nicht auf Gleichung (6.3) beschränken, wie man es in Annahme (A1) (siehe Seite 45) im Fall zweier Unterräume machen möchte, deren Darstellungen nicht äquivalent sind.

□

6.2 Die Gruppen O(2) und $\mathbb{D}_n$

In diesem Abschnitt weisen wir nach, dass für die zweidimensionalen Darstellungen der Gruppen $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ die Bedingungen aus den Annahmen (A1) bis (A4) erfüllt sind. Dieser Beweis basiert auf der speziellen Struktur der Darstellungen dieser Gruppen, wobei es im Wesentlichen auf die Spiegelungen ankommt.

Der Satz von Aronszajn

Zur Vorbereitung wird in diesem Unterabschnitt noch ein Hilfsmittel aus der Eindeutigkeitstheorie elliptischer Differentialoperatoren bereitgestellt.

Eine analytische Funktion, die eine unendlichfache Nullstelle hat, verschwindet identisch. Sind die Koeffizienten eines elliptischen Differentialoperators analytisch, so sind es auch die Lösungen des zugehörigen homogenen Randwertproblems. Sind die Koeffizienten jedoch nur aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, so gilt das auch für die Lösungen des Randwertproblems.

Das folgende Ergebnis besagt, dass trotzdem Lösungen, die eine unendlichfache Nullstelle haben, identisch Null sind.

Definition 6.2.1 *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ ein Gebiet. Eine messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ hat eine* unendlichfache Nullstelle *an $x_0 \in \Omega$, falls*

$$\int_{|x-x_0|<\varepsilon} |u| = O(\varepsilon^n) \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 6.2.2 (Satz von Aronszajn) [3] *Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und es sei L ein linearer, elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$. Die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ erfülle die Differentialungleichung*

$$|Lu|^2 \leq M\Big(\sum_{j=1}^N |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 + |u|^2\Big), \tag{6.7}$$

wobei $M > 0$ eine Konstante sei.

Gibt es ein $x_0 \in \Omega$, so dass u an x_0 eine unendlichfache Nullstelle hat, so ist $u = 0$.

Die Eigenschaft, dass eine Lösung eines linearen, elliptischen Randwertproblems, die eine unendlichfache Nullstelle hat, identisch Null ist, nennt man auch *strong unique continuation property*. Hieraus folgt auch sofort die *weak unique continuation property*, dass nämlich Lösungen linearer, elliptischer Randwertprobleme, die auf einer offenen Menge Null sind, identisch verschwinden (vgl. [22, III.19]).

Ist Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und ist L ein strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, so ist $\ker L \subset C^\infty(\overline{\Omega})$. Ist $u \in \ker L$, so versteht man üblicherweise unter einer unendlichfachen Nullstelle von u ein $x_0 \in \Omega$ mit $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Dabei benutzen wir die Multiindex-Schreibweise für Ableitungen: Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ bezeichnet

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass eine unendlichfache Nullstelle in diesem Sinne auch die Bedingung aus Definition 6.2.1 erfüllt.

Korollar 6.2.3 *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und es sei L ein strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$. Ist u eine Lösung von*

$$Lu = 0 \quad \text{auf}\, \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

und gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, so ist $u = 0$.

Beweis: Es sei $x_0 \in \Omega$ mit $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $k \in \mathbb{N}$ mit $(k+1) + N > n$. Wegen $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ergibt sich mit dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha u(x_0 + \Theta(x - x_0))}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha u(x_0 + \Theta(x - x_0))}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha \end{aligned}$$

mit einem $\Theta \in (0, 1)$.

Es sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\} \subset \Omega$. Nun sei $\varepsilon \in (0, r)$. Dann gibt es ein $C > 0$ mit

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |\sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha u(x_0 + \Theta(x - x_0))}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha| \\ &\le C\|u\|_{C^{k+1}(B_r(x_0))}|x - x_0|^{k+1} \\ &\le C\|u\|_{C^{k+1}(B_r(x_0))}\varepsilon^{k+1} \end{aligned}$$

für alle $x \in \Omega$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$\int_{|x - x_0| < \varepsilon} |u(x)| dx \le \int_{|x - x_0| < \varepsilon} C\|u\|_{C^{k+1}(B_r(x_0))}\varepsilon^{k+1} dx \le C'\varepsilon^{k+1+N} \le C'\varepsilon^n$$

mit einem $C' > 0$. Hieraus ergibt sich, dass u an x_0 eine unendlichfache Nullstelle im Sinne von Definition 6.2.1 hat. Da wegen $Lu = 0$ die Differentialungleichung (6.7) trivialerweise erfüllt ist, folgt aus Satz 6.2.2, dass $u = 0$ ist. $\square$

Zweidimensionale Darstellungen von $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$

Es sei im Folgenden G entweder $\mathbf{O}(2)$ oder $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dabei wird die Gruppe $\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ von der Drehung φ um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ und einer Spiegelung κ an einer Symmetrieachse erzeugt, die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ besteht aus den Drehungen $\varphi(\alpha)$ und den Spiegelungen $\kappa\varphi(\alpha)$ mit $\alpha \in [0, 2\pi)$, wobei κ eine feste Spiegelung ist (vgl. Beispiel 1.1.4).

Wir betrachten eine Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ von G auf $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, die äquivalent ist zu $\rho' : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\rho'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \rho'(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

im Fall $G = \mathbb{D}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und

$$\rho'(\varphi(\alpha)) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \rho'(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in [0, 2\pi)$ im Fall $G = \mathbf{O}(2)$ (vgl. Beispiel 1.1.4). Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\rho(g)$ für $g \in G$ auf den ersten $N-2$ Komponenten wie die Identität wirkt und auf den letzten zwei Komponenten wie $\rho'(g)$. Das bedeutet, ist $x = (y, z) \in \mathbb{R}^N$ mit $y \in \mathbb{R}^{N-2}$ und $z \in \mathbb{R}^2$, so sei $\rho(g)x = (y, \rho'(g)z)$ für alle $g \in G$.

Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, das invariant unter G bezüglich der Darstellung ρ ist. Weiterhin sei L ein strikt elliptischer, äquivarianter, formal-selbstadjungierter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$Lu = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.8}$$

Lemma 6.2.4 *Es seien u_1, u_2, v_1, v_2 linear unabhängige Lösungen des Randwertproblems* (6.8) *mit*

$$\begin{pmatrix} \rho(\kappa)u_1 \\ \rho(\kappa)u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho(\kappa)v_1 \\ \rho(\kappa)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Dann gilt

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 \neq 0. \tag{6.10}$$

Dabei ist (6.10) wieder als Ungleichung in $C^\infty(\overline{\Omega})$ aufzufassen, das heißt, es muss mindestens ein $x \in \Omega$ geben mit $u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) \neq 0$.

Beweis:

1. Angenommen, es ist
$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0. \tag{6.11}$$
Beweisidee: Aus der Symmetriebedingung (6.9) folgt, dass u_2 und v_2 auf $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ verschwinden, da sie bezüglich der Spiegelung κ ungerade sind. Aufgrund der Annahme müssen dann auch u_1 oder v_1 auf $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ Null sein, was aber zu einem Widerspruch führen wird, da diese Funktionen unter der Spiegelung κ invariant sind.

2. Aus (6.9) folgt $u_2(x,-y) = \rho(\kappa)u_2(x,y) = -u_2(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $(x,0) \in \Omega$. Das heißt, u_2 ist ungerade in der letzten Komponente. Daher muss $u_2(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $(x,0) \in \Omega$ sein. Die Annahme (6.11) liefert dann
$$u_1(x,0)v_1(x,0) = 0 \qquad \text{für alle } (x,0) \in \Omega. \tag{6.12}$$
Behauptung: Es gibt ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ *mit* $U \times \{0\} \subset \Omega$ *und* $u_1(x,0) = 0$ *oder* $v_1(x,0) = 0$ *für alle* $x \in U$.

   Wegen (6.12) muss für jedes $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $(x,0) \in \Omega$ einer der beiden Faktoren $u_1(x,0)$ und $v_1(x,0)$ Null sein. Angenommen, es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^{N-1}$ mit $(x_0,0) \in \Omega$ und $v_1(x_0,0) \neq 0$. Dann ist also $u_1(x_0,0) = 0$. Wegen der Stetigkeit von v_1 gibt es eine ganze Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^{N-1}$ mit $v_1(x,0) \neq 0$ für $x \in U$. Dabei sei U so gewählt, dass $U \times \{0\} \subset \Omega$ erfüllt ist, was wegen der Offenheit von Ω möglich ist. Dann ist $u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$.

3. Ohne Einschränkung können wir also annehmen, dass es ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ mit $U \times \{0\} \subset \Omega$ und $u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ gibt.

   Behauptung: Für alle $x \in U$ *und alle Multiindizes* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ *gilt* $D^\alpha u_1(x,0) = 0$.

   Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt $D^\alpha u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$.

   3.1. Wegen $u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ ist $D_j u_1(x,0) = 0$ und auch $D_j^l u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ und alle $j \in \{1,\ldots,N-1\}$ und $l \in \mathbb{N}$.
   Aus (6.9) folgt $\rho(\kappa)u_1(x,y) = u_1(x,-y) = u_1(x,y)$ für $(x,y) \in \Omega$.
   Es sei $x \in U$. Wäre $D_N u_1(x,0) > 0$, so würde für hinreichend kleines $y > 0$ gelten
   $$\frac{u_1(x,y) - u_1(x,0)}{y} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{u_1(x,-y) - u_1(x,0)}{-y} > 0.$$
   Hieraus folgt $u_1(x,-y) < u_1(x,0) < u_1(x,y)$. Wegen $u_1(x,-y) = u_1(x,y)$ kann dies jedoch nicht sein.
   Ebenso zeigt man, dass $D_N u_1(x,0) < 0$ nicht gelten kann.
   Also ist $D_N u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$.
   Somit gilt $D_l u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ und $l \in \{1,\ldots,N\}$.

   3.2. Hieraus folgt sofort auch $D_l D_N u_1(x,0) = 0$ für $x \in U$ und $l \in \{1,\ldots,N-1\}$.
   Es sei $x \in U$. Aus $Lu_1 = 0$ ergibt sich zusammen mit $u_1(x,0) = 0$, $D_l u_1(x,0) = 0$, $D_N u_1(x,0) = 0$ und $D_l^2 u_1(x,0) = 0$ und $D_l D_N u_1(x,0) = 0$ für $l \in \{1,\ldots,N-1\}$
   $$\begin{aligned} 0 &= Lu_1(x,0) \\ &= \sum_{j,k=1}^N D_j(a_{jk}(x,0)D_k u_1(x,0) + b_j(x,0)u_1(x,0)) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^N c_j(x,0)D_j u_1(x,0) + d(x,0)u_1(x,0) \\ &= a_{NN}(x,0)D_N^2 u_1(x,0). \end{aligned}$$

Aufgrund der Elliptizität von L ist $a_{NN}(x,0) \neq 0$, also muss $D_N^2 u_1(x,0) = 0$ gelten.

Daher ist $D^\alpha u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq 2$.

3.3. Es sei nun $m > 2$ und es gelte $D^\alpha u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq m-1$.

Dann folgt sofort $D_l D^\alpha u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$, $l \in \{1,\dots,N-1\}$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq m-1$.

Aufgrund der Vertauschbarkeit der Ableitungen bleibt nur noch zu zeigen, dass $D_N^m u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ gilt. Aus $Lu_1 = 0$ folgt $D_N^{m-2} Lu_1 = 0$. Wegen $D^\alpha u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq m$ und $\alpha \neq (0,m)$ und $Lu_1 = 0$ ergibt sich hieraus $LD_N^{m-2} u_1(x,0) = 0$ für $x \in U$. Wie im vorigen Beweisschritt folgt nun $D_N^2 D_N^{m-2} u_1(x,0) = D_N^m u_1(x,0) = 0$ für alle $x \in U$.

4. Also gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $D^\alpha u(x_0) = 0$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Aus Korollar 6.2.3 folgt nun $u_1 = 0$, was aber nicht sein kann. Also ist die Annahme (6.11) falsch und es gilt $u_1 v_1 + u_2 v_2 \neq 0$.

□

Lemma 6.2.5 *Es seien u_1, u_2, v_1, v_2 linear unabhängige Lösungen des Randwertproblems* (6.8) *mit*

$$\begin{pmatrix} \rho(\kappa) u_1 \\ \rho(\kappa) u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho(\kappa) v_1 \\ \rho(\kappa) v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Dann gilt

$$u_1^2 + u_2^2 \neq v_1^2 + v_2^2. \tag{6.14}$$

Auch (6.14) ist als Ungleichung in $C^\infty(\overline{\Omega})$ zu verstehen.

Beweis: Wir setzen $\tilde{u}_j = u_j - v_j$ und $\tilde{v}_j = u_j + v_j$ für $j \in \{1,2\}$. Dann sind $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ linear unabhängig und aus (6.13) folgt

$$\begin{pmatrix} \rho(\kappa) \tilde{u}_1 \\ \rho(\kappa) \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ -\tilde{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho(\kappa) \tilde{v}_1 \\ \rho(\kappa) \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ -\tilde{v}_2 \end{pmatrix}.$$

Lemma 6.2.4 liefert nun

$$\tilde{u}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 = (u_1 - v_1)(u_1 + v_1) + (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \neq 0.$$

Also ist

$$u_1^2 + u_2^2 \neq v_1^2 + v_2^2.$$

□

Bemerkung 6.2.6

1. Im Beweis von Lemma 6.2.4 wird benötigt, dass die Koeffizienten von L und die Lösungen des Randwertproblems (6.8) unendlich oft differenzierbar sind.

2. Die im Beweis von Lemma 6.2.4 verwendete Methode basiert darauf, dass die Gruppe G Spiegelungen enthält. Daher kann sie nicht für die zweidimensionalen Darstellungen der Gruppen $\mathbb{Z}_n$ oder $\mathbf{SO(2)}$ angewandt werden.

3. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein unter der vollen Symmetrie-Gruppe des Würfels invariantes Gebiet im $\mathbb{R}^3$. Sind u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 Transformationsbasen von irreduziblen Unterräumen von $\ker L$ bezüglich der „natürlichen" dreidimensionalen Darstellung der Gruppe, so folgt aus
$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$
lediglich die Existenz einer Geraden im $\mathbb{R}^3$, so dass eine der Funktionen auf dieser Geraden Null ist und invariant unter den Spiegelungen an dieser Geraden ist. Hieraus kann man aber nicht auf eine unendlichfache Nullstelle schließen, dazu wäre eine Ebene, auf der die Funktion verschwindet und bezüglich der sie spiegelungssymmetrisch ist, nötig. (Wären u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 Transformationsbasen bezüglich einer anderen dreidimensionalen Darstellung der Gruppe, so gäbe es eine solche Ebene, und man könnte die Existenz einer unendlichfachen Nullstelle nachweisen.)

   Diese Überlegungen zeigen, dass bei manchen höherdimensionalen Darstellungen die Beweismethode von Lemma 6.2.4 ebenfalls versagt.

□

6.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, dass die Annahmen (A1) bis (A4) für bestimmte Gruppen erfüllt sind, und es werden die sich daraus ergebenden Generizitätssätze formuliert.

Zunächst sollen die Ergebnisse aus den Kapiteln 3 und 4 angewandt werden.

Ist Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$, und ist $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein strikt elliptischer, selbstadjungierter, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω, so betrachten wir das Eigenwertproblem zu L auf Ω mit Dirichlet-Randbedingungen
$$(L + \lambda\,\mathrm{id})u = 0 \quad \text{auf } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Satz 6.3.1 *Es sei G die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ oder $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand, das invariant unter einer Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ der Gruppe G auf $\mathbb{R}^N$ ist. Außerdem sei $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Dann ist die Menge
$$B' := \{b \in C_G^\infty(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$
residual in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$.

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 4.1.1, falls wir nachweisen, dass in der gegebenen Situation Annahme (A2) (siehe Seite 58) erfüllt ist. (Man kann auch alternativ Satz 3.1.1 verwenden.)

Es sei $b \in C^\infty(\overline{\Omega})$, und es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $L_b = L + b$. Für den zugehörigen Eigenraum gelte

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu,$$

wobei $U_1, \ldots, U_s$ irreduzible Unterräume seien. Ist $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, so sei $u_1^{(\nu)}, \ldots, u_{d_\nu}^{(\nu)}$ eine normierte Transformationsbasis von U_ν bezüglich einer geeigneten irreduziblen Darstellung $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ mit $d_\nu \in \mathbb{N}$.

1. Es seien ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$. Sind $d_\nu = d_\mu = 1$ und sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so gilt
$$u_1^{(\nu)} u_1^{(\mu)} \neq 0,$$
denn wenn Lösungen von elliptischen Randwertproblemen auf einer offenen Menge verschwinden, sind sie identisch Null ([22, III.19], siehe auch Abschnitt 6.2).

2. Es seien ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$, und es sei $d_\nu = 1$ und $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ seien nicht äquivalent. Aus Lemma 6.1.1 folgt
$$(u_1^{(\nu)})^2 \neq \frac{1}{d_\mu} \sum_{k=1}^{d_\mu} (u_k^{(\mu)})^2.$$

3. Nun seien ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$ mit $d_\nu = d_\mu = 2$.

   Sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so seien $\rho_\nu = \rho_\mu$ und aus Lemma 6.2.4 folgt
$$u_1^{(\nu)} u_1^{(\mu)} + u_2^{(\nu)} u_2^{(\mu)} \neq 0.$$
   Falls $\rho|_{U_\nu}$ nicht äquivalent zu $\rho|_{U_\mu}$ ist, liefert Lemma 6.2.5
$$(u_1^{(\nu)})^2 + (u_2^{(\nu)})^2 \neq (u_1^{(\mu)})^2 + (u_2^{(\mu)})^2.$$

Hieraus folgt, dass Annahme (A2) (und auch Annahme (A1)) erfüllt ist. □

Da Annahme (A1) (siehe Seite 45) etwas weniger einschränkend ist als Annahme (A2) und Satz 3.1.1 (im Gegensatz zu Satz 4.1.1) auch Gruppen, die Darstellungen vom komplexen Typ haben, zulässt, kann man aus Satz 3.1.1 zusammen mit Lemma 6.1.2 eine analoge Generizitätsaussage für weitere Gruppen erhalten:

Satz 6.3.2 *Es sei G eine Gruppe, die nur eindimensionale und höchstens eine zweidimensionale irreduzible Darstellung hat. Weiterhin sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand, das invariant unter einer Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ der Gruppe G auf $\mathbb{R}^N$ ist. Außerdem sei $L : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten aus $C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Dann ist die Menge

$$B' := \{b \in C_G^\infty(\overline{\Omega}) : \text{ alle Eigenwerte von } L_b = L + b \text{ sind } G\text{-einfach}\}$$

residual in $C_G^\infty(\overline{\Omega})$.

Satz 6.3.2 kann zum Beispiel auf die Gruppen $\mathbb{Z}_3$ und $\mathbb{Z}_4$ angewandt werden (auch auf $\mathbb{D}_3$ und $\mathbb{D}_4$, doch auf diese Gruppen kann auch Satz 6.3.1 angewandt werden).

BEWEIS: Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $L_b = L + b$ für ein $b \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Der zugehörige Eigenraum sei

$$E_\lambda = \bigoplus_{\nu=1}^{s} U_\nu,$$

wobei $U_1, \ldots, U_s$ irreduzible Unterräume seien. Ist $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, so sei $u_1^{(\nu)}, \ldots, u_{d_\nu}^{(\nu)}$ eine normierte Transformationsbasis von U_ν bezüglich einer geeigneten irreduziblen Darstellung $\rho_\nu : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^{d_\nu})$ mit $d_\nu \in \{1, 2\}$.

1. Es seien ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$. Sind $d_\nu = d_\mu = 1$ und sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent, so folgt (wie im Beweis von Satz 6.3.1)

$$u_1^{(\nu)} u_1^{(\mu)} \neq 0.$$

2. Es seien ν, μ aus $\{1, \ldots, s\}$. Ist $d_\nu = 1$ und sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ nicht äquivalent, so liefert Lemma 6.1.1

$$(u_1^{(\nu)})^2 \neq \frac{1}{d_\mu} \sum_{k=1}^{d_\mu} (u_k^{(\mu)})^2.$$

3. Nun seien noch ν und μ aus $\{1, \ldots, s\}$ mit $d_\nu = d_\mu = 2$. Da G nur eine zweidimensional irreduzible Darstellung hat, sind $\rho|_{U_\nu}$ und $\rho|_{U_\mu}$ äquivalent und es ist $\rho_\nu = \rho_\mu$. Aus Lemma 6.1.2 folgt, dass

$$(u_1^{(\nu)})^2 + (u_2^{(\nu)})^2 = (u_1^{(\mu)})^2 + (u_2^{(\mu)})^2$$

und

$$u_1^{(\nu)} u_1^{(\mu)} + u_2^{(\nu)} u_2^{(\mu)} = 0$$

nicht gleichzeitig erfüllt sein können.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass Annahme (A1) erfüllt ist. Satz 3.1.1 liefert somit die Behauptung. □

Als nächstes betrachten wir Reaktions-Diffusions-Gleichungen:

Es sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und es sei G eine kompakte Lie-Gruppe, so dass Ω invariant unter einer Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ von G auf $\mathbb{R}^N$ ist. Für $f \in C_G^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ betrachten wir die äquivariante Reaktions-Diffusions-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$u_t = \Delta u + f(\cdot, u) =: L_f(u) \quad \text{auf } \Omega, t > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ für } t > 0. \tag{6.15}$$

Durch (6.15) wird für $p > N$ ein lokaler Halbfluss auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ erzeugt. Die Menge der unter G invarianten Gleichgewichte dieses Halbflusses werde mit $GG_{inv}(f)$ bezeichnet.

Satz 6.3.3 *Es sei G die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ oder $\mathbb{D}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ mit glattem Rand, das invariant unter einer Darstellung $\rho : G \to \mathbf{GL}(\mathbb{R}^N)$ der Gruppe G auf $\mathbb{R}^N$ ist.*

Dann ist die Menge

$$\{f \in C^\infty_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}) : \quad \textit{für } u \in GG_{inv}(f) \textit{ ist } 0 \notin \sigma(DL_f(u)) \textit{ und} \\ \textit{alle Eigenwerte von } DL_f(u) \textit{ sind } G\textit{-einfach}\}$$

residual in $C^\infty_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Das bedeutet, für generische Nichtlinearitäten $f \in C^\infty_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ sind die invarianten Gleichgewichte von (6.15) hyperbolisch und die Linearisierung von L_f an einem solchen invarianten Gleichgewicht hat nur G-einfache Eigenwerte.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 6.3.1 kann man sehen, dass die Annahmen (A3) und (A4) (siehe Seiten 72 und 73) erfüllt sind. Aus den Sätzen 5.1.1 und 5.1.3 folgt nun die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[1] R. ABRAHAM, J. ROBBIN. *Transversal Mappings and Flows.* Benjamin, 1967.

[2] J. H. ALBERT. Genericity of Simple Eigenvalues for Elliptic PDE's. Proc. Am. Math. Soc., 48, 413-418, 1975.

[3] N. ARONSZAJN. A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order. J. Math. Pur. Appl., 36, 235-249, 1957.

[4] M. S. BERGER. *Nonlinearity and Functional Analysis. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis.* Academic Press, 1977.

[5] D. D. BLEECKER, L. C. WILSON. Splitting the Spectrum of a Riemannian Manifold. SIAM J. Math. Anal., 11, 813-818, 1980.

[6] P. BRUNOVSKÝ, S.-N. CHOW. Generic properties of stationary state solutions of reaction-diffusion equations. J. Differ. Equations, 53, 1-23, 1984.

[7] P. BRUNOVSKÝ, P. POLÁČIK. Generic hyperbolicity for reaction diffusion equations on symmetric domains. Z. angew. Math. Phys., 38, 172-183, 1987.

[8] P. BRUNOVSKÝ, P. POLÁČIK. The Morse-Smale Structure of a Generic Reaction-Diffusion Equation in Higher Space Dimension. J. Differ. Equations, 135, 129-181, 1997.

[9] P. CHOSSAT, R. LAUTERBACH. *Methods in Equivariant Bifurcations and Dynamical Systems.* World Scientific, 2000.

[10] B. H. DRISCOLL. Eigenvalues on a domain with discrete rotational symmetry. SIAM J. Math. Anal., 18, 941-953, 1987.

[11] M. J. FIELD. Equivariant dynamical systems. Trans. Am. Math. Soc., 259, 185-205, 1980.

[12] D. FUJIWARA, M. TANIKAWA, S. YUKITA. The spectrum of the Laplacian and boundary perturbation. Proc. Japan Acad., 54(A), 87-91, 1978.

[13] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224. Springer-Verlag, 1983.

[14] M. GOLUBITSKY, I. STEWART, D. G. SCHAEFFER. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory,* Vol. II. Applied Mathematical Sciences 69. Springer-Verlag, 1988.

[15] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Lecture Notes in Mathematics 840. Springer-Verlag, 1981.

[16] D. Henry. Generic properties of equilibrium solutions by perturbation of the boundary. Dynamics of infinite dimensional systems, Proc. NATO Adv. Study Inst., Lisbon/Port. 1986, NATO ASI Ser., Ser. F 37, 129-139, 1987.

[17] T. Kato. *Pertubation Theory for Linear Operators,* 2nd edition. Springer-Verlag, 1980.

[18] A. A. Kirilov. *Elements of the Theory of Representations.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 220. Springer-Verlag, 1976.

[19] D. Lupo, A. M. Micheletti. On Multiple Eigenvalues of Selfadjoint Compact Operators. J. Math. Anal. Appl., 172, 106-116, 1993.

[20] D. Lupo, A. M. Micheletti. On the Persistence of the Multiplicity of Eigenvalues for Some Variational Elliptic Operators Depending on the Domain. J. Math. Anal. Appl., 193, 990-1002, 1995.

[21] A. M. Micheletti. Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 26, 151-169, 1972.

[22] C. Miranda. *Partial Differential Equations of Elliptic Type.* Second Revised Edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2. Springer-Verlag, 1970.

[23] N. Nicolaisen, B. Werner. Some remarks on period doubling in systems with symmetry. Z. angew. Math. Phys., 46, 566-579, 1995.

[24] S. Ozawa. The Eigenvalues of the Laplacian and Perturbation of Boundary Condition. Proc. Japan Acad., 55(A), 121-124, 1979.

[25] A. L. Pereira. Eigenvalues of the Laplacian on symmetric regions. Nonlinear Differ. Equ. Appl., 2, 63-109, 1995.

[26] A. L. Pereira. Generic hyperbolicity for scalar parabolic equations. Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A 123, 1031-1040, 1993.

[27] P. Poláčik. Generic hyperbolicity in one-dimensional reaction-diffusion equations with general boundary conditions. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 11, 593-597, 1987.

[28] F. Quinn. Transversal Approximation on Banach Manifolds. Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., 15, 213-222, 1970.

[29] F. Rellich. *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems.* Gordon and Breach Science Publishers, 1969.

[30] C. Rocha. Generic properties of equilibria of reaction-diffusion equations with variable diffusion. Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A 101, 45-55, 1985.

[31] P. Rynne. Genericity of hyperbolicity and saddle-node bifurcations in reaction-diffusion equations depending on a parameter. Z. angw. Math. Phys., 47, 730-739, 1996.

[32] J. C. Saut, R. Temam. Generic Properties of Nonlinear Boundary Value Problems. Commun. Partial Differ. Equations, 4, 293-319, 1979.

[33] C. G. Simader. *On Dirichlet's Boundary Value Problem.* Lecture Notes in Mathematics 268. Springer-Verlag, 1972.

[34] E. Stiefel, A. Fässler. *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendungen.* Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik 46. B. G. Teubner, 1979.

[35] M. Tanikawa. The Spectrum of the Laplacian and Smooth Deformation of the Riemannian Metric. Proc. Japan Acad., 55(A), 125-127, 1979.

[36] M. Tanikawa. The Spectrum of the Laplacian of a $\mathbb{Z}_3$-Invariant Domain. Proc. Japan Acad., 57(A), 13-18, 1981.

[37] K. Uhlenbeck. Generic Properties of Eigenfunctions. Am. J. Math., 98, 1059-1078, 1976.

[38] A. Vanderbauwhede. *Local bifurcation and symmetry,* Research Notes in Mathematics, 75. Pitman, 1982.

[39] D. Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, 1995.

[40] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, 1982.

Zusammenfassung

In der Theorie Dynamischer Systeme wird die zeitliche Entwicklung eines Systems beschrieben durch Flüsse (oder Halbflüsse), die zum Beispiel von partiellen Differentialgleichungen erzeugt werden. Wichtige Informationen über das System liefert das Spektrum der Linearisierung der jeweiligen Gleichung.
In dieser Arbeit werden generische Eigenschaften des Spektrums von äquivarianten partiellen Differentialoperatoren untersucht. Dabei ist eine Eigenschaft generisch für eine Klasse von Operatoren, wenn die Menge der Operatoren mit dieser Eigenschaft residual ist, also der abzählbare Durchschnitt von Mengen, die offen und dicht sind. Ein Operator heißt äquivariant, wenn er mit der Aktion einer kompakten Lie-Gruppe (die die Symmetrien des Problems beschreibt) vertauscht.

Ein Hauptergebnis der Arbeit ist, dass generisch äquivariante, elliptische Differentialoperatoren nur G-einfache Eigenwerte haben. Dabei heißt ein Eigenwert eines äquivarianten Operators G-einfach, wenn der dazugehörige Eigenraum irreduzibel ist, also keine nichttrivialen Unterräume, die unter der Gruppenaktion invariant sind, besitzt.
Genauer wird folgendes gezeigt: Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe, die noch einer Annahme genügt, und es sei Ω ein unter G invariantes Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei L ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^k(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit $C^k_G(\overline{\Omega})$ werde die Menge der unter G invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$ bezeichnet. Dann ist die Menge der Funktionen $b \in C^k_G(\overline{\Omega})$, für die alle Eigenwerte von $L + b$ G-einfach sind, residual in $C^k_G(\overline{\Omega})$. Die Annahme, der die Gruppe genügen muss, ist im Fall $k = \infty$ zum Beispiel für die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ und die Diedergruppen $\mathbb{D}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllt.
Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Ergebnissen von Albert und Uhlenbeck, die im Fall ohne Symmetrie bewiesen haben, dass für eine residuale Menge von $b \in C^k(\overline{\Omega})$ die Operatoren $L + b$ nur einfache Eigenwerte haben. Im Fall äquivarianter Operatoren hat Pereira ein ähnliches Ergebnis für Störungen durch Gebietsvariation gezeigt.
Es werden zwei Beweise präsentiert, die auf den Ansätzen von Albert, Uhlenbeck und Pereira basieren. Zentrale Hilfsmittel sind dabei ein Störungssatz beziehungsweise ein Transversalitätssatz. Die Idee bei der Übertragung auf den äquivarianten Fall ist, irreduzible Unterräume durch geeignet gewählte Basen dieser Räume darzustellen.

Im zweiten Ergebnis der Arbeit wird die gleiche Beweismethode verwendet, um Gleichgewichte von äquivarianten Reaktions-Diffusions-Gleichungen zu untersuchen.
Es seien Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und G eine kompakte Lie-Gruppe, so dass Ω invariant unter G ist. Es sei $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ die Menge der Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, die in der Raumvariablen invariant unter G sind. Gegeben sei nun die äquivariante Reaktions-Diffusions-Gleichung $u_t = \Delta u + f(\cdot, u)$ mit $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Ein Gleichgewicht u des von dieser Gleichung erzeugten Halbflusses heißt hyperbolisch, falls das Spektrum der Linearisierung des Operators $\Delta + f$ an u nicht die imaginäre Achse trifft. Es wird gezeigt, dass die Menge der $f \in C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, für die alle unter der Gruppen invarianten Gleichgewichte der Gleichung $u_t = \Delta u + f(\cdot, u)$ hyperbolisch sind, residual in $C^k_G(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist, falls die Gruppe G wieder einer Annahme genügt, die für $\mathbf{O}(2)$ und $\mathbb{D}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllt ist.
Dies ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Brunovský, Poláčik, die im Fall ohne Symmetrie gezeigt habe, dass generisch die Gleichgewichte der Reaktions-Diffusions-Gleichung hyperbolisch sind.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Roland Weber
Geburtstag:	18. Januar 1974
Geburtsort:	Gießen

Schulausbildung

1980-1990	Grundschule, Förderstufe und gymnasialer Zweig der Brüder-Grimm-Schule in Gießen-Kleinlinden
1990-1993	Gymnasiale Oberstufe der Landgraf-Ludwig-Schule in Gießen
14. Juni 1993	Abitur

Studium

1993-2000	Studium der Mathematik und Physik an der Justus-Liebig-Universität in Gießen
8. März 1999	Diplom in Mathematik
15. Mai 2000	Erstes Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik
2000-2002	Promotionsstudium im Fach Mathematik an der Universität Hamburg

Berufliche Tätigkeit

1999-2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg