

Name: Roland Weber
Titel: Spektrale Generizität bei äquivarianten Differentialoperatoren:
 G -Einfachheit und Hyperbolizität
Jahr der Drucklegung: 2002

Zusammenfassung

In der Theorie Dynamischer Systeme wird die zeitliche Entwicklung eines Systems beschrieben durch Flüsse (oder Halbflüsse), die zum Beispiel von partiellen Differentialgleichungen erzeugt werden. Wichtige Informationen über das System liefert das Spektrum der Linearisierung der jeweiligen Gleichung.

In dieser Arbeit werden generische Eigenschaften des Spektrums von äquivarianten partiellen Differentialoperatoren untersucht. Dabei ist eine Eigenschaft generisch für eine Klasse von Operatoren, wenn die Menge der Operatoren mit dieser Eigenschaft residual ist, also der abzählbare Durchschnitt von Mengen, die offen und dicht sind. Ein Operator heißt äquivariant, wenn er mit der Aktion einer kompakten Lie-Gruppe (die die Symmetrien des Problems beschreibt) vertauscht.

Ein Hauptergebnis der Arbeit ist, dass generisch äquivalente, elliptische Differentialoperatoren nur G -einfache Eigenwerte haben. Dabei heißt ein Eigenwert eines äquivarianten Operators G -einfach, wenn der dazugehörige Eigenraum irreduzibel ist, also keine nichttrivialen Unterräume, die unter der Gruppenaktion invariant sind, besitzt.

Genauer wird folgendes gezeigt: Es sei G eine kompakte Lie-Gruppe, die noch einer Annahme genügt, und es sei Ω ein unter G invariantes Gebiet im \mathbb{R}^N für ein $N \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei L ein äquivarianter, selbstadjungierter, strikt elliptischer, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung mit Koeffizienten aus $C^k(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Mit $C_G^k(\overline{\Omega})$ werde die Menge der unter G invarianten Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$ bezeichnet. Dann ist die Menge der Funktionen $b \in C_G^k(\overline{\Omega})$, für die alle Eigenwerte von $L + b$ G -einfach sind, residual in $C_G^k(\overline{\Omega})$. Die Annahme, der die Gruppe genügen muss, ist im Fall $k = \infty$ zum Beispiel für die Gruppe $\mathbf{O}(2)$ und die Diedergruppen \mathbb{D}_n ($n \in \mathbb{N}$) erfüllt.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von Ergebnissen von ALBERT und UHLENBECK, die im Fall ohne Symmetrie bewiesen haben, dass für eine residuale Menge von $b \in C^k(\overline{\Omega})$ die Operatoren $L + b$ nur einfache Eigenwerte haben. Im Fall äquivarianter Operatoren hat PEREIRA ein ähnliches Ergebnis für Störungen durch Gebietsvariation gezeigt.

Es werden zwei Beweise präsentiert, die auf den Ansätzen von ALBERT, UHLENBECK und PEREIRA basieren. Zentrale Hilfsmittel sind dabei ein Störungssatz beziehungsweise ein Transversalitätssatz. Die Idee bei der Übertragung auf den äquivarianten Fall ist, irreduzible Unterräume durch geeignet gewählte Basen dieser Räume darzustellen.

Im zweiten Ergebnis der Arbeit wird die gleiche Beweismethode verwendet, um Gleichgewichte von äquivarianten Reaktions-Diffusions-Gleichungen zu untersuchen.

Es seien Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^N für ein $N \in \mathbb{N}$ und G eine kompakte Lie-Gruppe, so dass Ω invariant unter G ist. Es sei $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ die Menge der Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, die in der Raumvariablen invariant unter G sind. Gegeben sei nun die äquivariante Reaktions-Diffusions-Gleichung $u_t = \Delta u + f(\cdot, u)$ mit $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Ein Gleichgewicht u des von dieser Gleichung erzeugten Halbflusses heißt hyperbolisch, falls das Spektrum der Linearisierung des Operators $\Delta + f$ an u nicht die imaginäre Achse trifft. Es wird gezeigt, dass die Menge der $f \in C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, für die alle unter der Gruppen invarianten Gleichgewichte der Gleichung $u_t = \Delta u + f(\cdot, u)$ hyperbolisch sind, residual in $C_G^k(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ ist, falls die Gruppe G wieder einer Annahme genügt, die für $\mathbf{O}(2)$ und \mathbb{D}_n ($n \in \mathbb{N}$) erfüllt ist.

Dies ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von BRUNOVSKÝ, POLÁČIK, die im Fall ohne Symmetrie gezeigt habe, dass generisch die Gleichgewichte der Reaktions-Diffusions-Gleichung hyperbolisch sind.