

Monodromieüberlagerung der versellen Deformation zyklischer Quotientensingularitäten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Stephan Brohme

aus Hamburg

Hamburg
2002

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Oswald Riemenschneider
und Prof. Dr. Rolf Berndt

Hamburg, den 18. April 2002

Prof. Dr. Reiner Hass
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Zyklische Quotientensingularitäten	4
1.1 Kettenbrüche und Invarianten	4
1.2 0-zulässige Ketten	5
1.3 Das Schema ∇_k	8
1.4 Gleichungen und Relationen	10
1.5 Arndts Konstruktion der versellen Deformation	12
1.6 Die reduzierten Komponenten der versellen Deformation	15
2 Die Überlagerung der versellen Deformation	18
2.1 Die Familie $\mathcal{Y} \rightarrow T$	18
2.2 Ein symmetrischer Ansatz	20
2.3 Die Komponenten des Raumes T_{red}	23
2.4 Monodromie	26
3 Die Diskriminanten der Familien $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$	27
3.1 Die Komponenten der Diskriminante	27
3.2 Die Singularitäten der Nachbarfasern	32
4 Total- und Basisraumgleichungen	33
4.1 Ein Algorithmus	33
4.2 Die Gleichungen in kleinen Einbettungsdimensionen	35
4.3 Kegel über rationalen Normkurven	40
4.4 Eingebettete Komponenten	42
Literaturverzeichnis	45

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Deformationen von Quotienten von $\mathbb{C}^2$ nach endlichen zyklischen Gruppen. Diese Klasse von rationalen Flächensingularitäten ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr Auflösungsgraph aus einer unverzweigten Kette von exzeptionellen projektiven Geraden besteht. Wir schreiben eine zyklische Quotientensingularität in der Form $X = X_{n,q}$, wobei die Gruppe von X erzeugt wird von dem Automorphismus $(u, v) \mapsto (\zeta_n u, \zeta_n^q v)$ mit teilerfremden n und q und einer primitiven n -ten Einheitswurzel ζ_n , und gewinnen $a = (a_2, \dots, a_{e-1})$ aus der Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{n-q}$.

Die Frage nach der versellen Deformation zyklischer Quotienten X , d.h. einer Deformation, die alle anderen Deformationen von X durch einen Basiswechsel mit eindeutiger Tangentialabbildung induziert, hat Arndt in seiner Dissertation [A] behandelt. Sein Resultat ist die Beschreibung der Struktur der Ideale des Basis- und des Totalraums einer versellen Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ von X . Es stellt sich heraus, daß der Basisraum S im allgemeinen viele Komponenten hat, die auch eingebettet sein können.

Eine entscheidende Beobachtung bei der Beschreibung der nicht-eingebetteten Komponenten ist der enge Zusammenhang zu den von Christophersen in [C1] eingeführten 0-zulässigen Ketten. Die Komponenten des reduzierten Basisraums der versellen Deformation von X werden parametrisiert durch die Ketten $k = (k_2, \dots, k_{e-1})$, deren Kettenbruchentwicklung den Wert Null ergibt und für die $k \leq a$ gilt. Für seinen Beweis dieser Tatsache in [Ste] benutzt Stevens die von Kollár und Shepherd-Barron gezeigte 1-1-Korrespondenz von P-Auflösungen von X und den Normalisierungen der Komponenten von S_{red} (siehe [KSB]). Eine P-Auflösung einer rationalen Flächensingularität ist definiert als eine Modifikation, auf der höchstens rationale Doppelpunkte oder die sogenannten T -Singularitäten liegen dürfen. Der Beweis in [Ste] erfolgt durch Induktion über die simultane Konstruktion der Auflösungsgraphen der P-Auflösungen zyklischer Quotienten einerseits und der Ketten a und k andererseits. Es ergibt sich unter anderem eine Darstellung des Tangentialraumes an alle Komponenten des reduzierten Basisraums, die sich damit als nicht-singulär herausstellen.

Als Glättung einer isolierten Singularität hat jede Deformation $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ über einer nicht-eingebetteten Komponente des versellen Basisraums von X eine sogenannte *Monodromieüberlagerung*. Die Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(S_k \setminus D_k)$ auf der Homologiegruppe $H_2(F)$, wobei D_k die Diskriminante von S_k bezeichne und F die Milnorfaser sei, induziert eine unverzweigte Überlagerung von $S_k \setminus D_k$, eine verzweigte Überlagerung von S_k und damit eine Deformation von X . In [C1] beschreibt Christophersen für zyklische Quotientensingularitäten $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ und 0-zulässige Ketten $k \leq a$ mit Hilfe von expliziten Gleichungen die Deformationen über der Komponente S_k und findet eine kanonische Galoische Überlagerung dieser Familie mit Gruppe $\mathfrak{G}_{a-k}$, dem direkten Produkt der symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_{a_\epsilon - k_\epsilon}$, $\epsilon = 2, \dots, e-1$, die durch Permutation der Deformationsparameter operieren. Die Vermutung, daß es sich hierbei um die Monodromieüberlagerung der Glättung $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ handelt, bestätigt sich in [BC]. Tatsächlich kann diese Deformation realisiert werden als Zusammenblasung der Deformation über einem bestimmten Unterraum des Deformationsraumes der M-Auflösung von X , die die zu k gehörige P-Auflösung dominiert. Diese Modifikation von X weist höchstens T -Singularitäten mit Milnorzahl 0 auf, und die zusammenzublasende Deformation hat keine Monodromie. Dies verallgemeinert die für alle

rationalen Flächensingularitäten gültige Tatsache, daß die zusammengeblasene verselle Deformation der minimalen Auflösung durch einen endlichen Basiswechsel aus der Familie über der Artinkomponente gewonnen werden kann. In diesem Fall ist die zugehörige P-Auflösung die Rationale Doppelpunkt-Auflösung der Singularität, über der als M-Auflösung die minimale Auflösung von X liegt.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Bestätigung der Vermutung von Riemenschneider, daß es eine Deformation von X gibt, die die verselle Deformation überlagert und die über jeder nicht-eingebetteten Komponente die oben beschriebene Monodromieüberlagerung induziert (siehe [BR]). Wie schon in [Rie1] für kleine Einbettungsdimensionen gezeigt werden konnte, operiert auf dieser Deformation in natürlicher Weise äquivariant die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1} = \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_{\epsilon-1}}$. Es stellt sich heraus, daß über jeder Komponente S_k lineare Räume $T_k \subset T_{red}$ liegen, die durch $\mathfrak{S}_{a-1}$ permutiert werden. Fixieren wir ein T_k , so erhalten wir alle Komponenten von T_{red} über S_k als Translate gT_k mit $g \in \mathfrak{S}_{a-1}$. Auf den Deformationen $g\mathcal{Y}_k \rightarrow gT_k$ operiert äquivariant die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k}$, und jede dieser Familien ist eine Monodromieüberlagerung von $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$. Aufgrund dieser Eigenschaften nennen wir die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1}$ die Monodromiegruppe der versellen Deformation von $X = X(a)$.

Der Beweis von Satz 2.1, der das Hauptresultat der Arbeit formuliert, erfolgt durch die explizite Konstruktion der Deformation über dem Raum T_{red} . Über die Systeme von Erzeugern des Ideals von X , die wir in 1.4 mit Hilfe des in 1.3 definierten Punkteschemas ∇_k angeben, können wir für alle $k \leq a$ flache Familien über linearen Räumen T_k mit spezieller Faser X konstruieren. Die Flachheit der einzelnen Familien folgt aus der Liftbarkeit des zum Erzeugendensystem gehörigen Systems von erzeugenden Relationen. Die Vereinigung all dieser Deformationen ergibt eine flache Familie über der Vereinigung der Basisräume T_{red} . Die Konstruktion erfolgt zunächst eingebettet in einen Raum, dessen Dimension größer als $\dim T_X^1$ ist und über dem die Gleichungen eine symmetrische Gestalt annehmen (siehe Abschnitt 2.2). Die Familie über T_{red} entsteht aus dieser Deformation durch das Herunterschneiden mit geeigneten linearen Gleichungen. Unter Verwendung von Arndts Konstruktion gelingt es zu zeigen, daß die Deformation mit Basisraum T_{red} auch induziert wird, wenn die Deformationsparameter in den Gleichungen für die verselle Deformation von X als symmetrische Funktionen aufgefaßt werden (Proposition 2.9). Aus der Beschreibung der Tangentialräume an die Komponenten $S_k \subset S$ können wir in Proposition 2.10 folgern, daß die Komponenten $gT_k, g \in \mathfrak{S}_{a-1}$ von T_{red} tatsächlich auf S_k abgebildet werden. Da die Überlagerung $gT_k \rightarrow S_k$ außerhalb der Diskriminante von S_k unverzweigt von der Ordnung $|\mathfrak{S}_{a-k}|$ ist, können wir schließen, daß die Deformation über gT_k eine Monodromieüberlagerung von $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ ist (Proposition 2.11).

Durch eine genauere Untersuchung der Familien $g\mathcal{Y}_k \rightarrow gT_k$ in Kapitel 3 gelingt die Bestimmung der Diskriminanten der Komponenten $gT_k \subset T_{red}$, d.h. des Ortes, über dem die Fasern singular sind (Proposition 3.3). Wir geben alle Singularitäten der Nachbarfasern an und diskutieren insbesondere die Fasern über den generischen Punkten der einzelnen Komponenten der Diskriminante (Proposition 3.6).

Der Ausgangspunkt für Kapitel 4 ist die Tatsache, daß in [A] ein Existenzbeweis für die Gleichungen der versellen Deformation von zyklischen Quotienten erbracht wird, aus dem sich aber (außer im Fall der Kegel über rationalen Normkurven) kein Algorithmus für deren Berechnung ableiten läßt. Wir geben in 4.1 eine Vermutung für einen induktiven Algorithmus

an. In den Abschnitten 4.2 und 4.3 zeigen wir, daß dieser bis zur Einbettungsdimension 7 und für Kegel über rationalen Normkurven zum Erfolg führt.

Abschließend verwenden wir im Abschnitt 4.4 die in 4.1 abgeleiteten Gleichungen, um mithilfe des Computeralgebra-Programms SINGULAR (siehe [GPS]) die Primärzerlegung der versellen Basisräume in einigen Beispielen bis zur Einbettungsdimension 8 zu berechnen. Diese Ergebnisse veranlassen uns, eine Vermutung über die Struktur der assoziierten Primideale der eingebetteten Komponenten für beliebige zyklische Quotientensingularitäten zu formulieren.

Mein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Oswald Riemenschneider für die Anregung zu dieser Arbeit und viele inspirierende Diskussionen über zyklische Quotientensingularitäten. Besonders danken möchte ich auch Dr. Jan Stevens für den stets hilfreichen Austausch über die verschiedenen Aspekte des behandelten Themas. Für die konsequente Ermunterung, die vorliegende Arbeit nach zahlreichen Unterbrechungen doch noch fertigzustellen, gebührt beiden ein zusätzliches Dankeschön.

1 Zyklische Quotientensingularitäten

1.1 Kettenbrüche und Invarianten

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind die zweidimensionalen zyklischen Quotientensingularitäten, d.h. Quotienten von $\mathbb{C}^2$ nach kleinen, endlichen zyklischen Gruppen $G \subset GL(2, \mathbb{C})$ ([Rie2]). Nach [B] kann man bis auf Konjugation annehmen, daß G erzeugt wird von einem Automorphismus der Gestalt

$$[u, v] \mapsto \begin{bmatrix} \zeta_n & 0 \\ 0 & \zeta_n^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

wobei ζ_n eine primitive n -te Einheitswurzel und q eine ganze zu n teilerfremde Zahl mit $0 < q < n$ sei. Der Quotient $\mathbb{C}^2/G$ hat eine Singularität im Ursprung, die wir mit $X := X_{n,q}$ bezeichnen. Zwei Quotienten $X_{n,q}$ und $X_{n',q'}$ sind genau dann isomorph, wenn $n = n'$ und $q = q'$ oder $qq' = 1(n)$ sind.

Quotientensingularitäten sind immer rational ([B]). In unserem Fall ist die exzeptionelle Menge auf der minimalen Auflösung eine Kette von Kurven $E_j \simeq \mathbb{P}^1$, $1 \leq j \leq r$:

$$\begin{array}{ccccccc} -b_1 & & -b_2 & & & & -b_{r-1} & & -b_r \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \cdots & \cdots & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$$

Die Selbstschnittzahlen $-b_j$ kann man aus der Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{q}$ ablesen. Es gilt:

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_r}}}$$

Über die Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{n-q}$

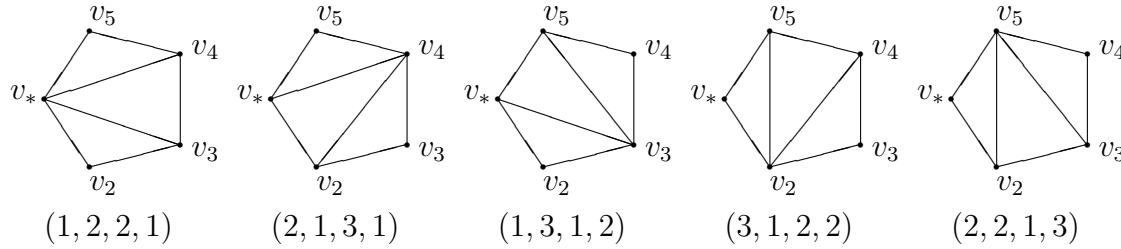
$$\frac{n}{n-q} = a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{e-1}}}}$$

läßt sich mit $u^{i_\epsilon} v^{j_\epsilon}$ für $\epsilon = 1, \dots, e$, wobei

$$\begin{aligned} i_1 &= n, & i_2 &= n - q, & i_{\epsilon+1} &= a_\epsilon i_\epsilon - i_{\epsilon-1} \\ j_1 &= 0, & j_2 &= 1, & j_{\epsilon+1} &= a_\epsilon j_\epsilon - j_{\epsilon-1} \end{aligned}$$

für $\epsilon = 2, \dots, e-1$ seien, ein minimales Erzeugendensystem der Invariantenalgebra berechnen ([Rie2]). Die Abbildung $u^{i_\epsilon} v^{j_\epsilon} \mapsto x_\epsilon$ mit $\epsilon = 1, \dots, e$ liefert eine minimale Einbettung von X in $\mathbb{C}^e$. Im folgenden werden wir zyklische Quotientensingularitäten in der Form $X = X(a) = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ angeben.

Zyklische Quotientensingularitäten können auch als zweidimensionale affine torische Varietäten aufgefaßt werden. In [O] wird gezeigt, daß die Varietät des Kegels $\langle (1, 0), (-q, n) \rangle \subset \mathbb{R}^2$ isomorph zu $X_{n,q}$ ist.

Abbildung 1: Triangulierungen für $e = 6$.

1.2 0-zulässige Ketten

In [C1] führt Christophersen die sogenannten *0-zulässigen Ketten* ein, um die Deformationen über den reduzierten Komponenten der versellen Deformation zyklischer Quotientensingularitäten zu beschreiben.

Ein Element $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in \mathbb{N}^{e-2}$ heiße eine *0-zulässige Kette*, wenn für die rekursiv durch $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ und $\alpha_{\epsilon+1} = k_{\epsilon}\alpha_{\epsilon} - \alpha_{\epsilon-1}$ definierte Folge gilt: $\alpha_{\epsilon} > 0$ für $1 \leq \epsilon \leq e-1$ und $\alpha_e = 0$. Diese beiden Bedingungen implizieren, daß der Kettenbruch zu k wohldefiniert ist und daß gilt:

$$k_2 - \underline{1} \overline{k_3} - \dots - \underline{1} \overline{k_{e-1}} = 0.$$

Mit K_{e-2} bezeichnen wir die Menge aller Nullketten der Länge $e-2$. Die Anzahl der Elemente von K_{e-2} ist gleich der Catalan-Zahl $c_{e-2} = \frac{1}{e-2} \binom{2(e-3)}{e-3}$. In [Ste] wird beschrieben, wie $k \in K_{e-2}$ als Triangulierung des $(e-1)$ -Gons mit den Ecken v_* und $v_2, \dots, v_{e-1}$ interpretiert werden kann (siehe Abbildung 1). Die Anzahl der Dreiecke, die die Ecke v_{ϵ} treffen, ist gleich k_{ϵ} . Die Zahl α_{ϵ} ist gleich 1 genau dann, wenn v_{ϵ} mit v_* verbunden ist. Die weiteren α_{ϵ} berechnen sich rekursiv über $\alpha_{\delta} = \alpha_{\epsilon} + \alpha_{\gamma}$, wenn v_{γ}, v_{δ} und v_{ϵ} ein Dreieck bilden mit $\gamma < \delta < \epsilon$.

Es gibt zwei kanonische Verfahren, aus Elementen von K_{e-2} Ketten aus K_{e-1} zu erzeugen: das Aufblasen und das Verlängern am ersten und am letzten Index.

Aufblasen von 0-zulässigen Ketten.

Ist $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in K_{e-2}$, so liegen die Ketten

$$(1, k_2 + 1, \dots, k_{e-1}), (k_2, \dots, k_{e-1} + 1, 1) \quad \text{und} \\ (k_2 + 1, \dots, k_i + 1, 1, k_{i+1} + 1, \dots, k_{e-1}), \quad 2 \leq i \leq e-2,$$

in K_{e-1} und es gilt:

Lemma 1.1 *Alle Elemente aus K_{e-1} entstehen durch Aufblasen aus Ketten aus K_{e-2} .*

Beweis: Es ist $K_1 = \{(0)\}$ und $K_2 = \{(1, 1)\}$. Ist $k \in K_{e-1}$, so gibt es einen Index mit $k_{\epsilon} = 1$, weil sonst $[k_2, \dots, k_{e-1}] = \frac{n}{q} > 0$ wäre. An dieser Stelle kann man niederblasen. $\square$

Verlängern von 0-zulässigen Ketten.

Ist $k = k^{\delta, \epsilon} = (k_{\delta+1}, \dots, k_l, \dots, k_{\epsilon-1}) \in K_{\epsilon-\delta-1}$ mit $\alpha_l = 1$ und $k_\epsilon = \#\{\alpha_\nu = 1, \nu \geq l\}$, so sei $k^{\delta, \epsilon+1} = (k_{\delta+1}, \dots, k_l + 1, \dots, k_{\epsilon-1}, k_\epsilon)$. Das Verkürzen von Ketten geschieht wie folgt: Es sei $k = k^{\delta, \epsilon+1} = (k_{\delta+1}, \dots, k_l, \dots, k_\epsilon) \in K_{\epsilon-\delta}$ und l der eindeutig bestimmte Index mit $\alpha_l = 1$ und $\alpha_\nu > 1$ für $l < \nu < \epsilon - 1$. Dann definieren wir $k^{\delta, \epsilon}$ als $(k_{\delta+1}, \dots, k_l - 1, \dots, k_{\epsilon-1})$. Analog definieren wir auch $k^{\delta-1, \epsilon}$ zu $k = k^{\delta, \epsilon} \in K_{\epsilon-\delta-1}$ und $k^{\delta, \epsilon}$ zu $k = k^{\delta-1, \epsilon} \in K_{\epsilon-\delta}$.

Lemma 1.2 *Die oben definierten Ketten $k^{\delta, \epsilon+1}$ und $k^{\delta, \epsilon}$ sind 0-zulässig, und es gilt die Gleichheit der Ketten $(k^{\delta, \epsilon+1})^{\delta, \epsilon}$ und k .*

Beweis: Ist $\alpha_l = 1$, so sieht man in der oben erwähnten Beschreibung aus [Ste], daß $v_\star, v_l$ und v_ϵ ein Dreieck bilden. Man kann v_ϵ weglassen und erhält eine neue Triangulierung, in der v_l ein Dreieck weniger trifft. Im anderen Fall kann man eine neue Ecke v_ϵ zwischen $v_\star$ und $v_{\epsilon-1}$ einführen. Alle Ecken v_ν mit $\alpha_\nu = 1$ und $\nu \geq l$, die in der alten Triangulierung $v_\star$ treffen, haben nun eine Verbindung zu v_ϵ . Hinzu kommt die Gerade $v_\epsilon v_\star$. Insgesamt folgt $k_\epsilon = \#\{\alpha_\nu = 1, \nu \geq l\}$. $\square$

Bemerkung 1.3 *i) Ist $k = k^{\delta, \epsilon} = (k_{\delta+1}, \dots, k_{\epsilon-1})$ eine 0-zulässige Kette aus $K_{\epsilon-\delta-1}$, so gilt $(k^{\delta, \epsilon-1})^{\delta+1, \epsilon-1} = (k^{\delta+1, \epsilon})^{\delta+1, \epsilon-1}$.*

ii) Für ein $k = k^{\delta, \epsilon} \in K_{\epsilon-\delta-1}$ ist die 0-zulässige Kette $k^{\delta', \epsilon'} \in K_{\epsilon'-\delta'-1}$ mit $\delta+1 \leq \delta'+1 \leq \epsilon'-1 \leq \epsilon-1$ wohldefiniert. Wir erhalten auf diese Weise das Pyramidengitter aus [C1].

Beweis: i) Es seien l und l' die Indizes mit $k^{\delta, \epsilon-1} = (k_{\delta+1}, \dots, k_l - 1, \dots, k_{\epsilon-2})$ und $k^{\delta+1, \epsilon} = (k_{\delta+2}, \dots, k_{l'} - 1, \dots, k_{\epsilon-1})$. Dann gilt entweder $l' \leq l$ oder es ist $l = \delta+1$ und $l' = \epsilon-1$. Da die Verlängerungen der Ketten $k^{\delta, \epsilon-1}$ und $k^{\delta+1, \epsilon}$ beim Index $\epsilon-2$ bzw. $\delta+2$ dieselbe Kette k ergeben, folgt im ersten Falle $k_{l'}^{\delta, \epsilon-1} = (k^{\delta, \epsilon-1})_{l'}^{\delta+1, \epsilon-1} + 1$ und $k_l^{\delta+1, \epsilon} = (k^{\delta+1, \epsilon})_l^{\delta+1, \epsilon-1} + 1$. Im zweiten Fall muß es einen Index l'' geben, so daß $k_{l''}^{\delta, \epsilon-1} = (k^{\delta, \epsilon-1})_{l''}^{\delta+1, \epsilon-1} + 1 = (k^{\delta+1, \epsilon})_{l''}^{\delta+1, \epsilon-1} + 1 = k_{l''}^{\delta+1, \epsilon}$. Daraus folgt die Gleichheit von $(k^{\delta, \epsilon-1})^{\delta+1, \epsilon-1}$ und $(k^{\delta+1, \epsilon})^{\delta+1, \epsilon-1}$.

Die Aussage ii) folgt durch wiederholte Anwendung von i). $\square$

Das folgende Lemma beweisen wir für die spätere Verwendung im Kapitel 3 zur Charakterisierung der Nachbarfasern von Deformationen zyklischer Quotientensingularitäten.

Lemma 1.4 *Für $k^{\delta, \epsilon} = (k_{\delta+1}, \dots, k_{\epsilon-1}) \in K_{\epsilon-\delta-1}$ gilt:*

- i) Ist $\alpha_\nu = 1 = \alpha_\mu$ mit $\nu \leq \mu$, so ist $k^{\nu-1, \mu+1} = (k_\nu - \alpha_{\nu-1}, k_{\nu+1}, \dots, k_{\mu-1}, k_\mu - \alpha_{\mu+1})$, und diese Kette kann man auch durch Niederblasen von Einsen links von ν und rechts von μ erzeugen.*
- ii) Ersetzen wir für einen Index ν mit $\alpha_\nu > 1$ das Element k_ν durch $k'_\nu > k_\nu$, so erhalten wir durch Niederblasen aller Einsen bei festgehaltenem Index ν die Kette einer Singularität mit $a_\nu = k'_\nu - k_\nu + 1$.*
- iii) Gelten für die Indizes $\nu < \mu$ die Bedingungen $\alpha_\nu = \alpha_\mu = 1$, so erhalten wir durch das Niederblasen der Kette, bei der k_ν und k_μ um Eins erhöht sind, die Kette einer Singularität.*

Beweis: i) Wir beweisen die zweite Aussage durch Induktion. Sie ist offenbar richtig für K_r mit $r \leq 3$. Dies sei auch der Fall für $r \leq \epsilon - \delta - 2$. Ist nun $\nu = \delta + 2$, so folgt $k_{\delta+1} = 1$, und wir können an dieser Stelle niederblasen. Andernfalls finden wir nach Induktionsannahme wegen $\alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} = \alpha_{\nu'}^{\delta,\epsilon} = 1$ einen Index ν' zwischen $\delta + 2$ und $\nu - 1$ mit $k_{\nu'}^{\delta+1,\epsilon} = 1$. Beim Übergang von $k_{\delta+1,\epsilon}$ zu $k_{\delta,\epsilon}$ bleibt entweder diese Eins erhalten oder es gilt $\nu' = \delta + 2$ und damit $k_{\delta+1}^{\delta,\epsilon} = 1$. Also können wir bei ν' oder $\delta + 1$ niederblasen.

ii) Man beachte, daß beim Niederblasen von k mit festgehaltenem ν der Wert von α_{ν} unverändert bleibt. Daraus ergibt sich, daß nach dem Niederblasen aller Einsen eine Kette entsteht, die genau eine Eins an der Stelle ν hat. Deshalb gilt für die modifizierte Kette nach der Anwendung aller Niederblasungen $a_{\nu} = k'_{\nu} - k_{\nu} + 1$, und als Ergebnis entsteht die Kette einer Singularität.

iii) Bläst man die Kette mit festgehaltenen ν und μ nieder, so hat das Ergebnis genau zwei Einsen, nämlich bei den Indizes ν und μ . Niederblasen der modifizierten Kette ergibt deshalb ein $(a_{\nu'}, \dots, a_{\mu'}) \geq (2, \dots, 2)$. $\square$

Zu jedem Element k aus $K_{\epsilon-2}$ betrachten wir den Vektor der α_{ν} . Wir setzen:

$$\alpha = \alpha(k) = (\alpha_2, \dots, \alpha_{\epsilon-1}).$$

Das folgende Lemma beschreibt, wie die α_{ν} induktiv im Pyramidengitter berechnet werden können.

Lemma 1.5 *Es sei $k = k^{\delta,\epsilon} \in K_{\epsilon-\delta-1}$ mit $k = (k_{\delta+1}, \dots, k_{\epsilon-1})$. Dann gilt*

$$\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon} = \begin{cases} \alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} + \alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} & \text{wenn } \alpha_{\mu}^{\delta,\epsilon} > 1 \text{ für } \mu \in \{\delta+2, \dots, \epsilon-2\} \\ \alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} + \alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} - \alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

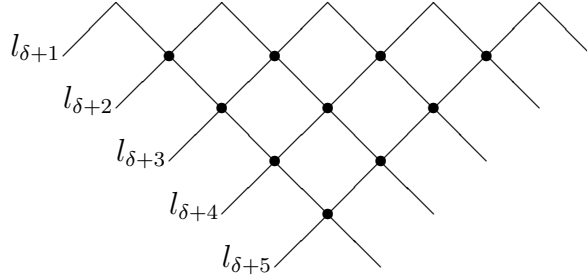
Beweis: Im ersten Fall gilt $\alpha_{\mu}^{\delta,\epsilon} > 1$ für alle $\mu \in \{\delta+2, \dots, \epsilon-2\}$. Man hat:

$$k^{\delta,\epsilon-1} = (k_{\delta+1} - 1, \dots, k_{\epsilon-2}) \quad \text{und} \quad k^{\delta+1,\epsilon} = (k_{\delta+2}, \dots, k_{\epsilon-1} - 1).$$

Dann ist $\alpha_{\delta+1}^{\delta,\epsilon} = 1 = \alpha_{\delta+1}^{\delta,\epsilon-1} + 0$ und $\alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon} = k_{\delta+1} = \alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon-1} + 1$, und man erhält die Behauptung wegen $k_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} = k_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} = k_{\nu}$ induktiv für $\delta+2 \leq \nu \leq \epsilon-2$:

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon} &= k_{\nu} \alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon} - \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon} \\ &= k_{\nu} (\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} + \alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon}) - (\alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon-1} + \alpha_{\nu-1}^{\delta+1,\epsilon}) \\ &= \alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon-1} + \alpha_{\nu+1}^{\delta+1,\epsilon}. \end{aligned}$$

Ist $\alpha_{\mu} = 1$ für ein $\mu \in \{\delta+2, \dots, \epsilon-2\}$, so seien $\nu \leq \mu$ die Indizes mit $k_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} = k_{\nu}^{\delta+1,\epsilon-1} + 1$ und $k_{\mu}^{\delta+1,\epsilon} = k_{\mu}^{\delta+1,\epsilon-1} + 1$ (siehe 1.3 ii)). Dann gelten für $\delta+1 \leq \gamma \leq \nu$ die Beziehungen $\alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon-1}$ und $\alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon-1}$, für $\nu < \gamma < \mu$ gilt $\alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon-1} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon-1}$, und für $\mu \leq \gamma \leq \epsilon-1$ haben wir $\alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon}$ und $\alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon-1} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon-1}$. Damit gilt $\alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon} + \alpha_{\gamma}^{\delta,\epsilon-1} - \alpha_{\gamma}^{\delta+1,\epsilon-1}$ in allen drei Fällen wie behauptet. $\square$

Abbildung 2: Die Menge $\nabla_{\delta, \delta+6}$.

1.3 Das Schema ∇_k

Jeder 0-zulässigen Kette $k = (k_{\delta+1}, \dots, k_{\epsilon-1})$ in $K_{\epsilon-\delta-1}$ ordnen wir in diesem Abschnitt ein dreieckiges Punkteschema als Teilmenge der Menge

$$\nabla_{\delta, \epsilon} = \{(\delta', \epsilon') \in \mathbb{N}^2 : \delta + 1 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 1\}$$

zu. Wir definieren die folgenden $\epsilon - \delta - 1$ Teilmengen von $\nabla_{\delta, \epsilon}$ mit jeweils $\epsilon - \delta - 2$ Elementen:

$$l_\nu = \{(\mu, \nu + 1), \mu = \delta, \dots, \nu - 2\} \cup \{(\nu - 1, \mu), \mu = \nu + 2, \dots, \epsilon\}$$

mit $\nu = \delta + 1, \dots, \epsilon - 1$ (siehe Abbildung 2 für eine Veranschaulichung dieser Menge von Doppelindizes für $\epsilon - \delta = 6$. Die Indizes mit konstantem $\epsilon' - \delta'$ liegen jeweils auf einer horizontalen Geraden).

Proposition 1.6 *Zu jeder Kette $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in K_{e-2}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Teilmenge ∇_k von $\nabla_{1, e}$ mit den Eigenschaften:*

i) *Der Schnitt $l_\epsilon \cap \nabla_k$ enthält genau k'_ϵ Elemente. Dabei sei:*

$$k'_\nu = \begin{cases} k_\nu, & \text{falls } \alpha_\nu = 1 \\ k_\nu + 1, & \text{falls } \alpha_\nu > 1. \end{cases}$$

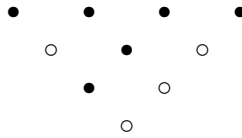
ii) *Es gilt $\nabla_{k^{\delta, \epsilon}} = \nabla_{\delta, \epsilon} \cap \nabla_k$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über e : a) $e = 4$: Hier ist $K_2 = \{(1, 1)\}$ und $\nabla_{1, 4} = \nabla_{(1, 1)}$. b) Es sei $e \geq 5$ und $k = (k_2, \dots, k_{e-1}) \in K_{e-2}$ mit $k^{1, e-1} = (k_2, \dots, k_l - 1, \dots, k_{e-2})$. Nach der Induktionsannahme ist das Schema $\nabla_{k^{1, e-1}}$ schon definiert. Um ii) zu gewährleisten, müssen wir dieses Schema zu ∇_k ergänzen. Für alle $i \geq l$ mit $\alpha_i^{1, e-1} = 1$ nehme man den Schnittpunkt der $(e-1)$ -ten und der i -ten Geraden hinzu. Dann ist wegen $k_{e-1} = \#\{i \geq l : \alpha_i^{1, e-1} = 1\}$ und der Definition von k' die Bedingung i) erfüllt. Es genügt nun zu zeigen, daß $\nabla_{k^{2, e}} = \nabla_{2, e} \cap \nabla_k$ ist. Wir unterscheiden die Fälle: 1) $(1, e) \in \nabla_k$ und 2) $(1, e) \notin \nabla_k$.

Fall 1): Hier gilt $k_2^{1,e} = k_2^{1,e-1} + 1$. Nach Induktion ist $\nabla_{2,e-1} \cap \nabla_k = \nabla_{2,e-1} \cap \nabla_{k^{1,e-1}} = \nabla_{k^{2,e-1}}$. Es sei der Index ν' so gewählt, daß $k_{\nu'}^{1,e-1} = k_{\nu'}^{2,e-1} + 1$ ist. Um aus $\nabla_{k^{1,e-1}}$ die Menge $\nabla_{k^{2,e-1}}$ zu konstruieren, müssen alle Schnittpunkte $l_2 \cap l_\nu$ mit $\alpha_\nu^{2,e-1} = 1, \nu \leq \nu'$ entfernt werden. Daraus folgt, daß bei der Konstruktion von $\nabla_{k^{1,e}}$ aus $\nabla_{k^{1,e-1}}$ genau die Punkte auf l_{e-1} hinzugenommen werden müssen, die auch beim Übergang von $\nabla_{k^{2,e-1}}$ zu $\nabla_{k^{2,e}}$ entstehen.

Fall 2): Man berücksichtige, daß aus $k_\nu = k_\nu^{1,e-1} + 1$ und $k_{\nu'} = k_{\nu'}^{2,e} + 1$ die Beziehungen $k_\nu^{2,e} = k_\nu^{2,e-1} + 1$ und $k_{\nu'}^{1,e-1} = k_{\nu'}^{2,e-1} + 1$ folgen. Dann folgt die Behauptung wie unter 1). $\square$

Beispiel: Im Fall $e = 7, k = (2, 2, 1, 4, 1), \alpha = (1, 2, 3, 1, 1), k' = (2, 3, 2, 4, 1)$ ergibt sich das Schema $\nabla_{(2,2,1,4,1)}$:



Bemerkung 1.7 Die α_ν können folgendermaßen aus dem Schema ∇_k gewonnen werden: Es ist $\alpha_\nu = 1$, genau wenn unterhalb der Geraden l_ν keine Punkte von ∇_k liegen. Für jeden anderen Index γ gibt es eindeutig bestimmte Indizes $\nu < \gamma < \mu$, so daß die Geraden l_ν, l_γ, l_μ paarweise nicht-leere Durchschnitte in ∇_k haben. Es gilt $\alpha_\gamma = \alpha_\nu + \alpha_\mu$.

Beweis: Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß diese Aussage für $\epsilon - \delta - 1 \leq 3$ gilt. Nehmen wir weiter an, daß sie für $\epsilon - \delta - 1$ gezeigt ist, so erhalten wir die Aussage für $\epsilon - \delta$, indem wir an einem Index mit $k_\gamma^{\delta, \epsilon+1} = 1$ niederblasen. Die Behauptung folgt, weil die neue gebrochene Gerade l_γ , die beim Aufblasen entsteht, nur genau die Geraden $l_{\gamma-1}$ und $l_{\gamma+1}$ in ∇_k schneidet und $l_{\gamma-1} \cap l_{\gamma+1} \neq \emptyset$ gilt. Es folgt $\alpha_\gamma = \alpha_{\gamma-1} + \alpha_{\gamma+1}$. $\square$

Das folgende Lemma beschreibt, wie aus dem Punkteschema ∇_k einer 0-zulässigen Kette k die Schemata der Ketten, die durch das Auf- und Niederblasen von k entstehen, gewonnen werden können.

Lemma 1.8 Für $k = (k_{\delta+1}, \dots, k_{\epsilon-1}) \in K_{\epsilon-\delta-1}$ gilt:

- i) Liegen auf der Geraden l_γ der Menge ∇_k nur die Punkte $(\gamma-2, \gamma+1)$ und $(\gamma-1, \gamma+2)$ für $\delta+2 \leq \gamma \leq \epsilon-2$ oder nur $(\delta, \delta+3)$ oder $(\epsilon-3, \epsilon)$ für $\gamma = \delta+1$ beziehungsweise $\gamma = \epsilon-1$, so erhalten wir durch das Herausnehmen dieser Geraden das Schema $\nabla_{\tilde{k}}$ zur beim Index γ niedergeblasenen Kette $\tilde{k}$.
- ii) Durch das Einfügen einer gebrochenen Geraden mit nur einem Punkt $(\delta-1, \delta+2)$ oder $(\epsilon-2, \epsilon+1)$ oder den zwei Punkten $(\gamma-2, \gamma+1), (\gamma-1, \gamma+2)$ entsteht das Schema zur Kette, die an dieser Stelle aufgeblasen ist.

Beweis: i) Ist $\delta + 2 \leq \gamma \leq \epsilon - 2$, so werden bei dieser Operation aus der Geraden $l_{\gamma-1}$ nur der Punkt $(\gamma - 2, \gamma + 1)$ und aus $l_{\gamma+1}$ nur $(\gamma - 1, \gamma + 2)$ entfernt. Da sich beim Niederblasen $\alpha_{\gamma-1}$ und $\alpha_{\gamma+1}$ nicht verändern, folgt für die neue Kette: $\tilde{k}'_{\gamma-1} = k_{\gamma-1} - 1$ und $\tilde{k}'_{\gamma+1} = k_{\gamma+1} - 1$. Wegen der Eindeutigkeit vom $\nabla_{\tilde{k}}$ folgt die Behauptung. Entsprechendes gilt für $\gamma = \delta + 1$ und $\gamma = \epsilon - 1$.

ii) Da bei dieser Operation nur die Nachbargeraden einen neuen Punkt erhalten, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit des Schemas ∇_k . $\square$

1.4 Gleichungen und Relationen

Für eine zyklische Quotientensingularität $X = X(a_2, \dots, a_{e-1}) \subset \mathbb{C}^e$ kann ein Erzeugendensystem des Ideals $I_X \subset \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_e\}$ als Verschwinden der verallgemeinerten Minoren $g_{\delta, \epsilon} = x_\delta x_\epsilon - p_{\delta, \epsilon}$ (mit $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$) der folgenden Matrix interpretiert werden:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{e-3} & x_{e-2} & X_{e-1} \\ & 1 & X_3 & X_4 & \dots & X_{e-2} & 1 \\ X_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{e-2} & x_{e-1} & x_e \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dabei setzen wir:

$$X_\epsilon = \begin{cases} x_\epsilon^{a_\epsilon-1}, & \epsilon = 2, e-1 \\ x_\epsilon^{a_\epsilon-2}, & 3 \leq \epsilon \leq e-2. \end{cases}$$

Als verallgemeinerten Minor einer Matrix dieser Gestalt mit den Elementen f_ϵ ($\epsilon = 1, \dots, r$) in der oberen, g_ϵ ($\epsilon = 1, \dots, r$) in der unteren Zeile sowie den Elementen h_ϵ ($\epsilon = 2, \dots, r-1$) in der Mitte verstehen wir die Ausdrücke:

$$f_\delta g_\epsilon - f_\epsilon g_\delta \prod_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} h_\nu, \quad 1 \leq \delta < \epsilon \leq r.$$

Auf diese Weise erhalten wir die Gleichungen für zyklische Quotientensingularitäten, die in [Rie2] angegeben werden.

Im Falle der Einbettungsdimension 5 hat die verselle Deformation von X zwei Komponenten, über denen sich die Familien determinantal schreiben lassen. Dies entspricht zwei verschiedenen Erzeugendensystemen des Ideals der Singularität. Neben dem oben angegebenen System von Gleichungen erhalten wir das zweite durch

$$rk \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & X_3 \\ & X_2 & \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ & & X_4 \\ X_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} < 2,$$

wobei $X_2 = x_2^{a_2-2}$, $X_4 = x_4^{a_4-2}$ und $X_3 = x_3^{a_3-1}$ sei und die Minoren wie oben zu interpretieren sind. Diese beiden Systeme unterscheiden sich durch die letzte Gleichung. Im ersten Fall ist $x_1 x_5 = x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-2} x_4^{a_4-1}$ und im zweiten $x_1 x_5 = x_2^{a_2-2} (x_3^{a_3-1})^2 x_4^{a_4-2}$. Die Exponenten der rechten Seiten dieser Gleichungen ergeben sich aus den 0-zulässigen Ketten $(1, 2, 1)$ bzw. $(2, 1, 2)$ und den zugehörigen α_ν .

Wie dies für alle zyklischen Quotienten zu verallgemeinern ist, wurde in [C2] und [Ste] gezeigt. Tatsächlich gibt es zu jedem Element der Menge

$$K_{e-2}(X) := \{k \in K_{e-2} : k_\epsilon \leq a_\epsilon, \epsilon = 2, \dots, e-1\}$$

ein minimales System von Erzeugern von I_X .

Im folgenden zeigen wir, wie man diese Gleichungen im allgemeinen Fall über das entsprechende Schema ∇_k ermitteln kann.

Es sei $k \in K_{e-2}(X)$ gegeben. Wir konstruieren Gleichungen der Form

$$g_{\delta,\epsilon}^k = x_\delta x_\epsilon - p_{\delta,\epsilon}^k, \quad 2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1,$$

wobei $p_{\delta,\epsilon}^k \in \mathbb{C}[x_{\delta+1}, \dots, x_{e-1}]$. Unabhängig von k setzen wir zunächst:

$$p_{\delta-1,\delta+1}^k = x_\delta^{a_\delta} \text{ für } \delta = 2, \dots, e-1.$$

Für die Doppelindizes (δ, ϵ) mit $\epsilon - \delta > 2$ sei dann:

$$p_{\delta,\epsilon}^k = \begin{cases} p_{\delta,\epsilon-1}^k p_{\delta+1,\epsilon}^k x_{\delta+1}^{-1} x_{\epsilon-1}^{-1} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \in \nabla_k \\ p_{\delta,\epsilon-1}^k p_{\delta+1,\epsilon}^k (p_{\delta+1,\epsilon-1}^k)^{-1} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases} \quad (2)$$

Proposition 1.9 *Zu jedem $k \in K_{e-2}(X)$ bilden die Polynome $g_{\delta,\epsilon}^k = x_\delta x_\epsilon - p_{\delta,\epsilon}^k$ mit $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$ ein minimales Erzeugendensystem des Ideals von X .*

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas 1.5 zeigt man durch Induktion:

$$p_{\delta,\epsilon}^k = x_{\delta+1}^{\alpha_{\delta+1}^{\delta,\epsilon}(a_{\delta+1}-k_{\delta+1}^{\delta,\epsilon})} \dots x_{\epsilon-1}^{\alpha_{\epsilon-1}^{\delta,\epsilon}(a_{\epsilon-1}-k_{\epsilon-1}^{\delta,\epsilon})} \in \mathbb{C}[x_{\delta+1}, \dots, x_{e-1}] \quad (3)$$

Für $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$ ergeben sich die klassischen quasideterminantal Gleichungen, die $g_{\delta,\epsilon}^k$ sind die Minoren der Matrix (1). Ist $k \in K_{e-2}(X)$ beliebig, so definiere man für $2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1$:

$$I_{\delta,\epsilon}^k := (g_{\delta',\epsilon'}^k, \delta+1 \leq \delta'+1 \leq \epsilon'-1 \leq \epsilon-1).$$

Man zeigt dann induktiv, daß für $k, k' \in K_{e-2}(X)$ die Ideale $I_{\delta,\epsilon}^k$ und $I_{\delta,\epsilon}^{k'}$ für alle Doppelindizes (δ, ϵ) übereinstimmen. Da $(\delta, \delta+3), \delta = 1, \dots, \epsilon-3$, immer in ∇_k liegt, folgt diese Behauptung für $\epsilon - \delta \leq 3$. Man zeigt durch Induktion $g_{\delta,\epsilon}^k \equiv g_{\delta,\epsilon}^{k'} \pmod{I_{\delta-1,\epsilon-1}^{k'}}$ wie im entsprechenden Beweis für die gestörten Polynome in 2.5. $\square$

Wir zeigen nun, daß die Berechnung über das Schema ∇_k auf die schon aus der Literatur bekannten Gleichungen führt. Zu einem anderen Resultat kommt man über den in [JS1] beschriebenen Ansatz.

Korollar 1.10 *Die Erzeugendensysteme $(g_{\delta,\epsilon}^k)$ mit $k \in K_{e-2}(X)$ stimmen mit denen in [C1] und [Ste] angegebenen überein.*

Beweis: Formel (3) ist die in [C1, 1.2.2.] angegebene. Um die Gleichheit mit den in [Ste] konstruierten Gleichungen zu zeigen, beweisen wir, daß die dortigen Formeln auch auf (3) führen. Es sei $k \in K_{\epsilon-2}(X)$, und man betrachte $g_{\delta,\epsilon}^k$. Wir wählen mit $\delta + 1 = \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{m-1} < \nu_m = \epsilon - 1$ genau die Indizes, für die $\alpha_{\delta,\epsilon}$ gleich 1 ist. Nach der Konstruktion in [Ste] kann man die Gleichung dann in der Form

$$w_{\delta+1,\delta} Z_{\delta+1} \prod_{\mu=1}^m (w_{\nu_\mu,\nu_\mu+1} w_{\nu_\mu+1,\nu_\mu} Z_{\nu_\mu}) w_{\epsilon-1,\epsilon} = 1$$

schreiben. Mit der Formel aus dem Lemma 6.2.1 in [Ste] bekommen wir für Indizes ν mit $\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon} > 1$ den richtigen Faktor $(Z_{\nu} z_{\nu}^{2-k_{\nu}^{\delta,\epsilon}})^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}} = z_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}(a_{\nu}-k_{\nu}^{\delta,\epsilon})}$. Für ν_{μ} mit $1 \leq \mu \leq m$ erhalten wir

$$z_{\nu_{\mu}}^{1-\alpha_{\nu_{\mu}}^{\delta,\epsilon}-1} Z_{\nu_{\mu}} z_{\nu_{\mu}}^{1-\alpha_{\nu_{\mu}+1}^{\delta,\epsilon}}.$$

Wegen $\alpha_{\nu_{\mu}-1}^{\delta,\epsilon} + \alpha_{\nu_{\mu}+1}^{\delta,\epsilon} = k_{\nu_{\mu}}^{\delta,\epsilon}$ folgt unsere Behauptung. □

Proposition 1.11 *Ist $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ und $k \in K_{e-2}(X)$, dann gilt*

$$\begin{aligned} x_{\delta} g_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\gamma} g_{\delta,\epsilon}^k &\in I_{\gamma,\epsilon-1} \quad \text{für } \gamma < \delta < \epsilon - 1, \\ x_{\delta} g_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\epsilon} g_{\gamma,\delta}^k &\in I_{\gamma+1,\epsilon} \quad \text{für } \gamma + 1 < \delta < \epsilon, \end{aligned}$$

und diese Beziehungen induzieren ein (minimales) System von Erzeugern des Relationenmoduls des Ideals I_X .

Beweis: Für $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$ wird in [Rie2] gezeigt, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} x_{\delta} g_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\gamma} g_{\delta,\epsilon}^k &= (p_{\delta,\epsilon}^k / x_{\delta+1}) g_{\gamma,\delta+1}^k \quad \text{für } \gamma < \delta < \epsilon - 1 \\ x_{\delta} g_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\epsilon} g_{\gamma,\delta}^k &= (p_{\gamma,\delta}^k / x_{\delta-1}) g_{\delta-1,\epsilon}^k \quad \text{für } \gamma + 1 < \delta < \epsilon. \end{aligned}$$

Aufgrund der Äquivalenz von $g_{\delta,\epsilon}^k$ und $g_{\delta,\epsilon}^{k'}$ modulo $I_{\delta-1,\epsilon-1}^{k'}$ folgt die Behauptung dann auch für alle anderen $k \in K_{e-2}$. □

1.5 Arndts Konstruktion der versellen Deformation

Eine Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ einer Singularität X heißt *versell*, wenn alle Deformationen $\mathcal{X}' \rightarrow S'$ von X durch einen Basiswechsel $S' \rightarrow S$ mit eindeutiger Tangentialabbildung aus dieser Deformation hervorgehen. Ist X isoliert, so existiert eine verselle Deformation (siehe [G]), und der Tangentialraum des Basisraums kann mit dem Raum der infinitesimalen Deformationen T_X^1 identifiziert werden. Die Hindernisse, eine infinitesimale Deformation zu liften, liegen in dem Raum T_X^2 . Für zyklische Quotientensingularitäten $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ wird in [Rie2], [A] und auch [Al2] gezeigt, daß

$$\tau := \dim T_X^1 = \sum_{\epsilon=2}^{e-1} (a_{\epsilon} - 1) + (e - 4).$$

Darüber hinaus findet sich in [A] und [C2] die folgende Formel für die Dimension des Raums der Obstruktionen:

$$\dim T_X^2 = (e-2)(e-4).$$

Verwenden wir die Basis von T_X^1 in [A, 3.1.3], so ergibt sich, daß die verselle Familie von erster Ordnung durch die folgenden $e-2$ Gleichungen

$$x_{\delta-1}y_{\delta+1} = P_{\delta-1,\delta+1} = Z_\delta, \quad \delta = 2, \dots, e-1$$

induziert wird. Dabei sei

$$Z_\delta = Z_\delta^{(0,0)} = y_\delta(x_\delta^{a_\delta-1} + x_\delta^{a_\delta-2}s_\delta^{(1)} + \dots + s_\delta^{(a_\delta-1)})$$

und

$$y_\epsilon = \begin{cases} x_\epsilon & \text{für } \epsilon = 2, e-1 \\ x_\epsilon + t_\epsilon & \text{für } \epsilon = 3, \dots, e-2. \end{cases}$$

Man kann Arndts Ansatz zur Konstruktion der versellen Deformation als meromorphe Erweiterung der Familie über der Artinkomponente verstehen. Setzt man etwa in (1):

$$X_\epsilon = \begin{cases} Z_\epsilon x_\epsilon^{-1} & = x_\epsilon^{a_\epsilon-1} + x_\epsilon^{a_\epsilon-2}s_\epsilon^{(1)} + \dots + s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}, & \epsilon = 2, e-1 \\ Z_\epsilon x_\epsilon^{-1}y_\epsilon^{-1} & = x_\epsilon^{a_\epsilon-2} + x_\epsilon^{a_\epsilon-3}s_\epsilon^{(1)} + \dots + x_\epsilon^{-1}s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}, & \epsilon = 3, \dots, e-2 \end{cases}$$

und ersetzt in der unteren Zeile für $\epsilon = 3, \dots, e-2$ das Element x_ϵ durch das oben definierte y_ϵ , dann ergeben die verallgemeinerten (2×2) -Minoren der entstehenden Matrix die Ausgangsgleichungen $x_\delta y_\epsilon = \tilde{P}_{\delta\epsilon}$ aus [A]. Durch Einführung der Gleichungen $s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)} = 0, \epsilon = 3, \dots, e-2$ erhalten wir die Darstellung der Deformation über der Artinkomponente aus [Rie2].

Es gelten die offensichtlichen Beziehungen:

$$\tilde{P}_{\delta-1,\delta+1} = Z_\delta, \quad \delta = 2, \dots, e-1$$

und für $\epsilon - \delta > 2$:

$$\tilde{P}_{\delta,\epsilon} = \frac{Z_{\delta+1}}{x_{\delta+1}} \frac{Z_{\delta+2}}{x_{\delta+2}y_{\delta+2}} \dots \frac{Z_{\epsilon-2}}{x_{\epsilon-2}y_{\epsilon-2}} \frac{Z_{\epsilon-1}}{y_{\epsilon-1}}. \quad (4)$$

Unter Verwendung des in Kapitel 4 definierten Polynoms $Z_\epsilon^{(0,1)}$ ist außerdem:

$$\tilde{P}_{\delta,\epsilon+1} = \tilde{P}_{\delta\epsilon} \frac{Z_\epsilon^{(0,1)}}{x_{\epsilon-1}}. \quad (5)$$

Im allgemeinen Fall sind nur die Funktionen $\tilde{P}_{\delta,\delta+2}$ holomorph. Die Funktionen $\tilde{P}_{\delta,\epsilon}$ mit $\epsilon - \delta > 2$ liegen im Ring

$$R := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, x_3^{-1}, \dots, x_{e-2}^{-1}, y_3^{-1}, \dots, y_{e-2}^{-1}, s, t].$$

Für ein Polynom P in $\mathbb{C}[x, s, t] = \mathbb{C}[y, s, t]$ schreiben wir $h = h(P) = P|_{x=0} \in \mathbb{C}[s, t]$ für seinen x -konstanten und $h' = h'(P) = P|_{y=0} \in \mathbb{C}[s, t]$ für seinen y -konstanten Teil.

Die verselle Deformation von X erhält man nun durch die folgenden Schritte (siehe [A, (4.1.3)]):

- I) Für $\epsilon - \delta = 2$ ist $P_{\delta,\epsilon} = \tilde{P}_{\delta,\epsilon}$ ein Polynom und $G_{\delta,\epsilon} = x_\delta y_\epsilon - P_{\delta,\epsilon}$ eine Liftung der Gleichung $g_{\delta,\epsilon}$. Es sei:

$$\mathfrak{a}_0 := (h_{\delta-1,\delta+1} = s_\delta^{(a_\delta-1)} t_\delta, \delta = 3, \dots, e-2).$$

- II) Angenommen, die Polynome $P_{\delta',\epsilon'}$ seien definiert für $\epsilon' - \delta' < \epsilon - \delta$, so daß

$$G_{\delta',\epsilon'} := x_{\delta'} y_{\epsilon'} - P_{\delta',\epsilon'}$$

eine Liftung der Gleichung $g_{\delta',\epsilon'}$ ist.

Man setze:

$$\mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} := (h_{\delta',\epsilon'}, \delta + 1 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 2, \\ h'_{\delta',\epsilon'}, \delta + 2 \leq \delta' + 1 < \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 1) + \mathfrak{a}_0$$

und außerdem

$$I_{\delta+1,\epsilon-1} := (G_{\delta',\epsilon'}, \delta + 1 < \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 < \epsilon - 1) \\ + \mathfrak{a}_{\delta,\epsilon} \mathbb{C}\{x, s, t\}.$$

Wir setzen $I'_{\delta+1,\epsilon-1} := I_{\delta+1,\epsilon-1} R$. Nun gibt es nach [A][4.1.6 (4)] ein Polynom $P_{\delta,\epsilon}$ mit

$$\begin{aligned} P_{\delta,\epsilon} &= \tilde{P}_{\delta,\epsilon} \bmod I'_{\delta+1,\epsilon-1} \\ P_{\delta,\epsilon}|_{s,t=0} &= p_{\delta,\epsilon}. \end{aligned}$$

- III) Schließlich definiert man

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &:= \mathfrak{a}_{1,e} \\ I &:= (G_{\delta,\epsilon} : 2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1) + \mathfrak{a} \mathbb{C}\{x, s, t\}. \end{aligned}$$

Man erhält die folgenden $\dim T_X^2 = (e-2)(e-4)$ (vgl. [A], 3.2.3) Gleichungen für den Basisraum S der versellen Deformation (siehe Abbildung 3):

$$h_{\delta-1,\delta+1} = t_\delta s_\delta^{(a_\delta-1)}, \quad x\text{-konstanter Anteil von } P_{\delta-1,\delta+1}, \quad \delta = 3, \dots, e-2,$$

$$\begin{aligned} h_{\delta,\epsilon}, \quad &x\text{-konstanter Anteil von } P_{\delta,\epsilon}, \quad 2 \leq \delta+1 < \epsilon-1 \leq e-2, \\ h'_{\delta,\epsilon}, \quad &y\text{-konstanter Anteil von } P_{\delta,\epsilon}, \quad 3 \leq \delta+1 < \epsilon-1 \leq e-1. \end{aligned}$$

Durch Nachweis der Injektivität der Obstruktionsabbildung $(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}_{\mathbb{C}\tau\mathfrak{a}})^* \rightarrow T_X^2$ wird in [A, Satz 4.1.6] gezeigt:

Satz 1.12 *Die durch die Abbildung $\mathbb{C}\{s, t\}/\mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{C}\{x, s, t\}/I$ induzierte flache Familie mit spezieller Faser X ist versell.*

Beispiele für Basisräume für kleine Einbettungsdimensionen und Kegel über rationalen Normkurven geben wir in den Abschnitten 4.2 und 4.3 an.

Das folgende Lemma benötigen wir im Beweis von Proposition 2.9.

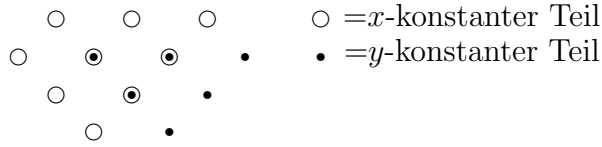


Abbildung 3: Indizes für die Basisraumgleichungen für $e = 7$

Lemma 1.13 *Die meromorphen Gleichungen $\tilde{P}_{\delta,\epsilon}$ in (4) sind äquivalent zu $\frac{\tilde{P}_{\delta,\epsilon-1}\tilde{P}_{\delta+1,\epsilon}}{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1}}$ modulo dem Ideal $I'_{\delta+1,\epsilon-1}$.*

Beweis: Für $\epsilon - \delta = 3$ gilt Gleichheit. Sei also $\epsilon - \delta > 3$: Nach Definition ist $\tilde{P}_{\delta,\epsilon}$ gleich $\frac{\tilde{P}_{\delta,\epsilon-1}\tilde{P}_{\delta+1,\epsilon}}{\tilde{P}_{\delta+1,\epsilon-1}}$ und deshalb folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\delta,\epsilon} - \frac{\tilde{P}_{\delta,\epsilon-1}\tilde{P}_{\delta+1,\epsilon}}{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1}} &= \tilde{P}_{\delta,\epsilon} \left(\frac{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1} - \tilde{P}_{\delta+1,\epsilon-1}}{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1}} \right) \\ &\equiv P_{\delta,\epsilon} \left(\frac{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1} - P_{\delta+1,\epsilon-1}}{x_{\delta+1}y_{\epsilon-1}} \right). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck liegt in $I'_{\delta+1,\epsilon-1}$, weil $P_{\delta,\epsilon}$ ein Polynom ist und $x_{\delta+1}y_{\epsilon-1} - P_{\delta+1,\epsilon-1} = G_{\delta+1,\epsilon-1}$ ein Element des Ideals $I_{\delta+1,\epsilon-1}$ ist. $\square$

1.6 Die reduzierten Komponenten der versellen Deformation

Der entscheidende Schritt zur Bestimmung der reduzierten Komponenten von Quotientensingularitäten war der in [KSB] bewiesene Zusammenhang der Komponenten mit gewissen Modifikationen der Singularität.

Definition 1.14 *Eine P-Auflösung $Y \rightarrow X$ einer (Quotienten)- Singularität ist eine Modifikation, die höchstens Singularitäten Y_i mit $K_{Y_i}^2 \in \mathbb{Z}$ besitzt und für die $K_Y E > 0$ gilt für alle exzeptionellen Kurven E . Hierbei sei $\tilde{Y}_i$ die minimale Auflösung von Y_i .*

Die Singularitäten Y mit $K_{Y_i}^2 \in \mathbb{Z}$ sind genau die rationalen Doppelpunkte und die zyklischen Quotienten $\mathbb{C}^2/G_{r^2s,rsd-1}$ mit positiven ganzen Zahlen r, s, d , für die gilt: $r \geq 2, s \geq 1, (r, d) = 1$, die sogenannten T -Singularitäten. Diese können auch als Quotient eines rationalen Doppelpunktes A_{rs-1} modulo einer Gruppenoperation $(u, v, w) \mapsto (\zeta_r u, \zeta_r^{-1} v, \zeta_r^d w)$ aufgefaßt werden. Die invarianten Deformationen von A_{rs-1} induzieren eine Komponente des versellen Basisraums von Y , die qG -Komponente. Ist $Y \rightarrow X$ eine P-Auflösung einer Quotientensingularität und sind $Y_1, \dots, Y_r$ die Singularitäten auf Y , so definiert das Produkt der qG -Komponenten der T -Singularitäten und der gesamten versellen Basisräume der rationalen Doppelpunkte unter den Y_i einen Unterraum Def'_Y von Def_Y , der unter der

Kontraktionsabbildung die Normalisierung einer Komponente des versellen Basisraums von X ergibt. Nicht isomorphe P-Auflösungen ergeben dabei auch verschiedene Komponenten (vgl. [KSB]).

In [Ste] wird dies ausgenutzt, um durch einen induktiven Prozeß, bei dem durch Aufblasungen der Ketten a und k die Auflösungsgraphen der P-Auflösungen entstehen, zu zeigen:

Satz 1.15 *Die Anzahl der irreduziblen Komponenten des reduzierten Basisraums der versellen Deformation einer zyklischen Quotientensingularität X ist gleich der Anzahl der Elemente der Menge $K_{e-2}(X)$.*

Wählen wir die Koordinaten für den umgebenden Raum $\mathbb{C}^\tau$ des Basisraums S der versellen Deformation so wie im Kapitel 1.5, so gilt nach [Ste]:

Satz 1.16 *Der Tangentialraum an die zu $k \in K_{e-2}(X)$ gehörige Komponente des reduzierten versellen Basisraums einer zyklischen Quotientensingularität X wird erzeugt von*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s_\epsilon^{(j)}}, & 1 \leq j \leq a_\epsilon - k_\epsilon, \\ & \frac{\partial}{\partial t_\epsilon} + (\alpha_{\epsilon-1} - 1) \frac{\partial}{\partial s_\epsilon^{(1)}}, & \text{falls } \alpha_\epsilon = 1, 3 \leq \epsilon \leq e - 2. \end{aligned}$$

Insbesondere ist jede dieser Komponenten glatt.

Die P-Auflösung zu $k \in K_{e-2}(X)$ hat höchstens $e - 2$ Singularitäten:

$$Z_\epsilon = A_{\alpha_\epsilon(a_\epsilon - k_\epsilon) - 1} / \mathbb{Z}_{a_\epsilon}, \quad 2 \leq \epsilon \leq e - 1,$$

wobei $A_{rs-1}/\mathbb{Z}_r$ eine T -Singularität mit Index r und kanonischer Überlagerung A_{rs-1} ist, wenn $r \geq 2$ ist, eine A_{s-1} -Singularität für $r = 1$ und $s \geq 1$ und ein glatter Punkt im Falle $s = 0$.

In [BC] wird gezeigt, daß die Monodromiegruppe der Familie über der qG -Komponente einer T -Singularität vom Typ $A_{rs-1}/\mathbb{Z}_r$ genau S_s ist. Da die Monodromiegruppe der Familie $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ das Produkt der Monodromiegruppen der Familien der T -Singularitäten über ihren qG -Komponenten und der rationalen Doppelpunkte über den gesamten versellen Basisräumen auf der entsprechenden P-Auflösung ist, folgt:

Satz 1.17 ([BC], 3.5.) *Für $k \in K_{e-2}(X)$ ist die Monodromiegruppe der zugehörigen Komponente isomorph zu $\mathfrak{S}_{a-k} = \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon - k_\epsilon}$.*

Tatsächlich liegt über jeder P-Auflösung Y von X eine M-Auflösung Z von X und für $f : Z \rightarrow Y$ ist $K_Z = f^*K_Y$. Die Modifikation Z hat höchstens T_0 -Singularitäten, d.h. T -Singularitäten mit Milnorzahl 0 (also mit $s = 1$), und es gilt $K_Z E \geq 0$ für alle exzeptionellen Kurven von $Z \rightarrow X$. Die Abbildung der Deformationsräume $\text{Def}'_Z \rightarrow \text{Def}'_Y$ ist eine Überlagerung mit Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k}$. Dies verallgemeinert die Situation für die Artinkomponente. Hier ist Y die Rationale Doppelpunkt-Auflösung und Z die minimale Auflösung von X .

Bemerkungen: i) Für eine Konstruktion der P-Auflösungen aus den torischen Daten der Singularität verweisen wir den Leser auf die Arbeit [Al3].

ii) In [JS2] werden zyklische Quotientensingularitäten als Sandwich-Singularitäten aufgefaßt. Für eine Darstellung von X als $X(C, l)$ mit einer dekorierten Kurve (C, l) mit nur glatten Zweigen wird gezeigt, daß es eine Bijektion zwischen der Mengen der Glättungskomponenten des versellen Basisraums einerseits und der Menge der kombinatorischen Glättungskomponenten andererseits $\mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{I}(C, l)$ gibt ([JS2, Theorem (6.18)]). Jede Glättung kann als sogenannte Bild-Deformation realisiert werden und kann deshalb durch eine Inzidenzmatrix dargestellt werden. Für zyklische Quotientensingularitäten sind dies genau die reduzierten CQS-Matrizen, deren zugehörige Differenzmatrizen sich aus der Triangulierung eines $k \in K_{e-2}(X)$ ableiten lassen ([JS2, Theorem (6.184)]). Eine Folgerung aus dieser Darstellung von Glättungskomponenten zyklischer Quotientensingularitäten ist die Zyklizität der Fundamentalgruppe der Milnorfaser der Glättung.

Zur genaueren Charakterisierung der T -Singularitäten auf der P-Auflösung einer zyklischen Quotientensingularität ergänzen wir noch die folgenden Lemmata.

Lemma 1.18 *Für eine Singularität $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ gilt:*

- i) X ist genau dann vom Typ T , wenn es einen Index δ mit $i_\delta = j_\delta$ gibt.
- ii) Ist $X = X_{r^2s, rsd-1}$ eine T -Singularität, so gilt $n = i_\delta^2(a_\delta - 1)$ und $q = i_\delta(a_\delta - 1)l_\delta - 1$, wobei $l_1 = l_2 = 1$ und $l_{e+1} = a_\epsilon l_\epsilon - l_{e-1}$ seien. Es ist also $r = i_\delta, s = a_\delta - 1$ und $d = l_\delta$.

Beweis: i) In [Ste] wird gezeigt, daß das a einer T -Singularität einer Kette $k \in K_{e-2}$ entspricht, die genau eine Eins hat. Dieser Index δ ist der zentrale Index von $X(a)$.

ii) Man zeigt zunächst durch Induktion

$$\begin{aligned} j_{e+1}i_\epsilon - j_\epsilon i_{e+1} &= n, & \epsilon &= 1, \dots, e-1 \\ i_\epsilon + qj_\epsilon &= nl_\epsilon, & \epsilon &= 1, \dots, e. \end{aligned}$$

Dann folgt für X mit zentralem Index δ : $n = j_{\delta+1}i_\delta - i_\delta i_{\delta+1} = i_\delta(a_\delta i_\delta - j_{\delta-1} - j_{\delta+1}) = i_\delta^2(a_\delta - 1)$. Dabei benutzen wir $j_{\delta-1} + i_{\delta+1} = i_\delta$, was aus der Tatsache folgt, daß wir eine 0-zulässige Kette erhalten, wenn wir in a das a_δ durch 1 ersetzen. Dann impliziert $i_\delta + qi_\delta = nl_\delta$ auch $q = (a_\delta - 1)i_\delta l_\delta - 1$ und damit die Behauptung über d . $\square$

Lemma 1.19 *Für eine zyklische Quotientensingularität $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ und $k \in K_{e-2}(X)$ erhält man die T -Singularitäten der P-Auflösung zu k wie folgt: Ersetze in der Kette k das Element k_ϵ durch a_ϵ und blase Einsen nieder.*

Beweis: Zunächst sei $\alpha_\epsilon = 1$. Das Niederblasen der Einsen endet in diesem Fall mit $(a_\epsilon - k_\epsilon)$. Denn bläst man die Kette k mit fixiertem ϵ nieder, so erhält man (0) . Ist $\alpha_\epsilon > 1$, so endet das Niederblasen von k offenbar bei einer Kette k' , die genau eine Eins an der Stelle ϵ hat. Deshalb gehört das niedergeblasene a zu einer T -Singularität mit den Parametern $r = \alpha_\epsilon, s = a_\epsilon - k_\epsilon$ und dem d des zentralen Index von k' . $\square$

2 Die Überlagerung der versellen Deformation

2.1 Die Familie $\mathcal{Y} \rightarrow T$

Für alle rationalen Singularitäten parametrisiert die Artinkomponente die simultan auflösbaren Deformationen. Bekanntlich kann man die Deformationen der minimalen Auflösung von X zusammenblasen, und die resultierende Familie geht durch einen endlichen Basiswechsel aus der Deformation über der Artinkomponente hervor (vgl. [W2]).

Für zyklische Quotienten $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ kann man diesen Basiswechsel folgendermaßen durchführen: Man fasse die Parameter $s_\epsilon^{(j)}$ als symmetrische Funktionen in neuen Variablen $t_\epsilon^{(j)}$ auf und setze

$$X_\epsilon = \begin{cases} \prod_{\nu=1}^{a_\epsilon-1} (x_\epsilon + t_\epsilon^{(\nu)}), & \epsilon = 2, e-1 \\ \prod_{\nu=1}^{a_\epsilon-2} (x_\epsilon + t_\epsilon^{(\nu)}), & 3 \leq \epsilon \leq e-2. \end{cases}$$

Dann gehen die Gleichungen der in 1.5 beschriebenen Familie über der Artinkomponente in Gleichungen für die simultan auflösbare Familie über (siehe [Rie2]).

Auf analoge Weise definieren wir einen Basiswechsel der gesamten versellen Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ von X . Man setze für $\epsilon = 2, \dots, e-1$:

$$(x_\epsilon^{a_\epsilon-1} + x_\epsilon^{a_\epsilon-2} s_\epsilon^{(1)} + \dots + s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}) = (x_\epsilon + t_\epsilon^{(1)}) \cdots (x_\epsilon + t_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}). \quad (6)$$

Es sei also $s_\epsilon^{(a_\epsilon-i)}$ die $(a_\epsilon - i)$ -te symmetrische Funktion in den neuen Variablen $t_\epsilon^{(j)}$, $2 \leq \epsilon \leq e-1$ und $1 \leq j \leq a_\epsilon - 1$. Dies definiert eine endliche Abbildung $\phi^* : \mathbb{C}\{s_\epsilon^{(i)}, t_\epsilon\} \rightarrow \mathbb{C}\{t_\epsilon^{(j)}, t_\epsilon\}$. Der Raum $T \subset \mathbb{C}^\tau$ (mit Koordinaten $t_\epsilon^{(j)}, t_\epsilon$) sei das Urbild von S unter dieser Abbildung, $\mathcal{Y} \rightarrow T$ die induzierte Deformation.

Nach Konstruktion operiert die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1} = \prod_{\epsilon=1}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon-1}$ äquivariant auf dieser Familie. Über der Artinkomponente $\{s_3^{(a_3-1)} = \dots = s_{e-2}^{(a_{e-2}-1)} = 0\}$ liegen dann die linearen Unterräume $\{t_3^{(i_3)} = \dots = t_{e-2}^{(i_{e-2})} = 0\} \subset T$ mit $1 \leq i_\epsilon \leq a_\epsilon - 1$ für $\epsilon = 3, \dots, e-2$. Für jeden dieser Räume reduziert sich ϕ zu dem oben beschriebenen Basiswechsel zu einer simultan auflösbaren Familie. Auf der induzierten Deformation $\mathcal{Y}_{(i_3, \dots, i_{e-2})} \rightarrow T_{(i_3, \dots, i_{e-2})}$ operiert die Gruppe $G_k = \mathfrak{S}_{a_2-1} \times \mathfrak{S}_{a_3-2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{a_{e-2}-2} \times \mathfrak{S}_{a_{e-1}-1}$. Die Deformation ist eine Monodromieüberlagerung der Familie $\mathcal{X}_a \rightarrow S_a$ über der Artinkomponente S_a .

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß diese Eigenschaften der Deformation $\mathcal{Y} \rightarrow T$ auch über den anderen reduzierten Komponenten von S richtig sind.

Satz 2.1 *Es sei $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ eine zyklische Quotientensingularität und $\mathcal{X} \rightarrow S$ eine verselle Deformation von X in der durch Arndts Algorithmus bestimmten Form. Der durch (6) gegebene endliche Basiswechsel induziert eine Deformation $\mathcal{Y} \rightarrow T$, auf der die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1} = \prod_{\nu=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon-1}$ äquivariant operiert und die die folgenden Eigenschaften hat:*

- i) *Über jeder Komponente $S_k \subset S$, $k \in K_{e-2}(X)$, liegen lineare Unterräume $T_k^\nu \subset T_{\text{red}}$, die durch $\mathfrak{S}_{a-1}$ permutiert werden.*
- ii) *Auf einer Familie $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ operiert die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k} = \prod_{\nu=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon-k_\epsilon}$, und diese Deformation ist eine Monodromieüberlagerung von $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$.*

iii) Die Totalraumgleichungen von $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ berechnen sich als Liftungen der Gleichungen $g_{\delta,\epsilon}^k$ nach dem Schema ∇_k .

Beweis: Der Beweis des Satzes ist Inhalt der Propositionen 2.9, 2.10 und 2.11. In den nächsten beiden Abschnitten konstruieren wir explizit flache Familien $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ für $k \in K_{e-2}(X)$, die von der Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1}$ permutiert werden und auf denen die Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k}$ operiert. Alle diese Deformationen passen zusammen zu einer Deformation über T_{red} , die über der versellen Familie liegt (siehe Proposition 2.9). Wir können dann zeigen, daß unter dieser Abbildung gT_k auf die Komponente S_k abgebildet wird (Proposition 2.10). Es folgt schließlich in Proposition 2.11, daß die Deformation $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ eine Monodromieüberlagerung von $\mathcal{X}_k \rightarrow T_k$ ist. $\square$

Beispiele: i) $e = 5$: Das Ideal des versellen Basisraums wird erzeugt durch die Polynome $s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-1)}, s_3^{(a_3-1)} t_3, s_4^{(a_4-1)} s_3^{(a_3-1)}$. Die beiden Komponenten sind $\{s_3^{(a_3-1)} = 0\}$, die Artin-komponente, und $\{s_2^{(a_2-1)} = t_3 = s_4^{(a_4-1)} = 0\}$. Die entsprechenden linearen Unterräume von T sind $\{t_3^{(i)} = 0\}$ mit $i \leq a_3 - 1$ bzw. $\{t_2^{(j)} = t_3 = t_4^{(k)} = 0\}$ mit $j \leq a_2 - 1$ und $k \leq a_4 - 1$.

ii) $e = 6$: Ist $a \geq 3$, so erhalten wir die folgenden fünf Komponenten des versellen Basisraums S . Man vergleiche hierzu die Gleichungen des versellen Basisraums aus dem Kapitel 4.2. In der dritten Spalte stehen die Ideale der Komponenten von T_{red} .

k	Ideal von S_k	Ideal von T_k
$(1, 2, 2, 1)$	$(s_3^{(a_3-1)}, s_4^{(a_4-1)})$	$(t_3^{(i)}, t_4^{(j)})$
$(1, 3, 1, 2)$	$(s_3^{(a_3-1)}, s_3^{(a_3-2)}, t_4, s_5^{(a_5-1)})$	$(t_3^{(i)}, t_3^{(j)}, t_4, t_5^{(k)})$
$(2, 1, 3, 1)$	$(s_2^{(a_2-1)}, t_3, s_4^{(a_4-2)}, \tilde{s}_4^{(a_4-2)})$	$(t_2^{(i)}, t_3, t_4^{(j)}, t_4^{(k)} - t_4)$
$(3, 1, 2, 2)$	$(s_2^{(a_2-1)}, s_2^{(a_2-2)}, t_3, t_4, s_4^{(a_4-1)}, s_5^{(a_5-1)})$	$(t_2^{(i)}, t_2^{(j)}, t_3, t_4, t_4^{(k)}, t_5^{(l)})$
$(2, 2, 1, 3)$	$(s_2^{(a_2-1)}, t_3, s_3^{(a_3-1)}, t_4, s_5^{(a_5-1)}, s_5^{(a_5-2)})$	$(t_2^{(i)}, t_3, t_3^{(j)}, t_4, t_5^{(k)}, t_5^{(l)})$

Bemerkungen: i) Man beachte, daß die Komponenten von T im allgemeinen nicht reduziert sind. Ist etwa $X = X(3, 3, 3, 3)$ und $k = (1, 3, 1, 2)$, so erhalten wir über S_k die beiden Komponenten $\{(t_3^{(1)})^2 = t_3^{(1)} + t_3^{(2)} = t_4 = t_5^{(1)} = 0\}$ und $\{(t_3^{(1)})^2 = t_3^{(1)} + t_3^{(2)} = t_4 = t_5^{(2)} = 0\}$.

ii) In [Al1] konstruiert Altmann für isolierte torische Gorensteinsche Singularitäten die verselle Deformation. Die Komponenten des versellen Basisraums sind in diesem Fall glatt und entsprechen gewissen Zerlegungen des den Kegel der Singularität determinierenden Polyeders in sogenannte Minkowski-Summen.

Im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, daß man die Struktur des Raums T_{red} schon in einem Raum höherer Dimension wiederfindet, in dem die Ausgangsgleichungen eine symmetrische Gestalt haben. Der Basisraum T_{red} ergibt sich dann durch das Herunterschneiden mit geeigneten linearen Gleichungen.

2.2 Ein symmetrischer Ansatz

Zu einer zyklischen Quotientensingularität $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ konstruieren wir Deformationen über Unterräumen des Raums mit den folgenden $N = \sum_{\epsilon=2}^{e-1} (a_\epsilon + 2)$ Parametern:

$$\begin{aligned} t_\epsilon^l, & \quad \epsilon = 1, \dots, e-2 \\ t_\epsilon^r, & \quad \epsilon = 3, \dots, e \\ t_\epsilon^{(\nu)}, & \quad \epsilon = 2, \dots, e-1 \text{ und } \nu = 1, \dots, a_\epsilon. \end{aligned}$$

Wir schreiben $x_\epsilon^l = x_\epsilon + t_\epsilon^l, \epsilon = 1, \dots, e-2$ sowie $x_\epsilon^r = x_\epsilon + t_\epsilon^r, \epsilon = 3, \dots, e$ und führen die folgenden ersten $e-2$ Gleichungen ein (vgl. [Rie3]):

$$x_{\delta-1}^l x_{\delta+1}^r = X_\delta := \prod_{\nu=1}^{a_\delta} (x_\delta + t_\delta^{(\nu)}), \quad \delta = 2, \dots, e-1. \quad (7)$$

Für ein $k \in K_{e-2}(X)$ definieren wir $U_k \subset \mathbb{C}^N$ durch die folgenden Bedingungen:

- i) $\alpha_\nu = 1$: $\alpha_{\nu+1}$ der Variablen $t_\nu^{(j)}$ seien gleich t_ν^l , und weitere $\alpha_{\nu-1}$ der Variablen $t_\nu^{(j)}$ seien gleich t_ν^r . Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$t_\nu^{(1)} = \dots t_\nu^{(\alpha_{\nu+1})} = t_\nu^l, \quad t_\nu^{(\alpha_{\nu+1}+1)} = \dots = t_\nu^{(k_\nu)} = t_\nu^r.$$

- ii) $\alpha_\nu > 1$: $t_\nu^{(j)} = t_\nu^l = t_\nu^r$ für k_ν der Variablen $t_\nu^{(j)}$. Wir setzen in diesem Fall:

$$t_\nu^{(1)} = \dots t_\nu^{(k_\nu)} = t_\nu^r = t_\nu^l.$$

Auf dem umgebenden Raum operiert in natürlicher Weise die Gruppe $\mathfrak{H}_a := \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon}$ durch Permutation der $t_\epsilon^{(\nu)}, \nu = 1, \dots, a_\epsilon$ in jedem Index ϵ . Auf U_k operiert die Gruppe $\mathfrak{H}_{a-k} := \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon - k_\epsilon}$.

Proposition 2.2 *Ausgehend von den Gleichungen (7) entstehen durch die Anwendung des Schemas ∇_k wie in (2) über dem linearen Raum U_k die holomorphen Gleichungen*

$$x_\delta^l x_\epsilon^r = P_{\delta,\epsilon}^k = Z_{\delta+1}^{\delta,\epsilon} \cdots Z_{\epsilon-1}^{\delta,\epsilon}, \quad 2 \leq \delta+1 \leq \epsilon-1 \leq e-1,$$

wobei:

$$Z_\nu^{\delta,\epsilon} = \frac{X_\nu^{\alpha_\nu^{\delta,\epsilon}}}{(x_\nu^l)^{\alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon}} (x_\nu^r)^{\alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon}}}.$$

Beweis: 1) Die Holomorphie der angegebenen Gleichungen folgt unmittelbar aus $\alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon} \leq \alpha_{\nu+1}, \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon} \leq \alpha_{\nu-1}$ und $k_\nu^{\delta,\epsilon} \alpha_\nu^{\delta,\epsilon} \leq k_\nu \alpha_\nu^{\delta,\epsilon} \leq a_\nu \alpha_\nu^{\delta,\epsilon}$.

2) Die Übereinstimmung mit den Gleichungen, die man über das Schema ∇_k ermittelt, zeigen wir durch Induktion. Wegen $\alpha_{\delta+1}^{\delta-1,\delta+1} = \alpha_{\delta-1}^{\delta-1,\delta+1} = 0$ und $\alpha_\delta^{\delta-1,\delta+1} = 1$ stimmen die Ausdrücke für $\epsilon - \delta = 2$ mit den Gleichungen aus dem Ansatz überein. Sei also $\epsilon - \delta > 2$. Wir unterscheiden die Fälle: a) $(\delta, \epsilon) \in \nabla_k$ und b) $(\delta, \epsilon) \notin \nabla_k$.

a) In diesem Fall wird durch $x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r$ geteilt. Für $\delta + 1 < \nu < \epsilon - 1$ gilt

$$Z_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} Z_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} = \frac{X_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon} + \alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon-1}}}{(x_{\nu}^l)^{\alpha_{\nu+1}^{\delta+1,\epsilon} + \alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon-1}} (x_{\nu}^r)^{\alpha_{\nu-1}^{\delta+1,\epsilon} + \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon-1}}} = \frac{X_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}}}{(x_{\nu}^l)^{\alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon}} (x_{\nu}^r)^{\alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon}}} = Z_{\nu}^{\delta,\epsilon}.$$

Die letzte Gleichung folgt aus Lemma 1.5. Die Kette $k^{\delta,\epsilon}$ geht durch Modifikation an der Stelle $\delta + 1$ aus $k^{\delta,\epsilon-1}$ hervor. Wegen $k_{\delta+1}^{\delta,\epsilon} = k_{\delta+1}^{\delta,\epsilon-1} + 1$ und $\alpha_{\delta}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\delta}^{\delta,\epsilon-1} = 0$ folgt $\alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon-1} + 1$ und wir erhalten für $\nu = \delta + 1$:

$$\frac{Z_{\delta+1}^{\delta,\epsilon-1}}{x_{\delta+1}^l} = \frac{X_{\delta+1}^{\alpha_{\delta+1}^{\delta,\epsilon-1}}}{(x_{\delta+1}^l)^{\alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon-1} + 1} (x_{\delta+1}^r)^{\alpha_{\delta}^{\delta,\epsilon-1}}} = \frac{X_{\delta+1}^{\alpha_{\delta+1}^{\delta,\epsilon}}}{(x_{\delta+1}^l)^{\alpha_{\delta+2}^{\delta,\epsilon}} (x_{\delta+1}^r)^{\alpha_{\delta}^{\delta,\epsilon}}} = Z_{\delta+1}^{\delta,\epsilon}.$$

Völlig analog zeigt man $\frac{Z_{\epsilon-1}^{\delta+1,\epsilon}}{x_{\epsilon-1}^r} = Z_{\epsilon-1}^{\delta,\epsilon}$.

b) Es wird durch die rechte Seite der Gleichung zum Doppelindex $(\delta + 1, \epsilon - 1)$ geteilt. In diesem Fall entsteht $k^{\delta,\epsilon}$ aus $k^{\delta,\epsilon-1}$ durch Modifikation an einer Stelle $\delta + 1 < \rho < \epsilon - 1$. Es gilt nach Lemma 1.5: $\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon} = \alpha_{\nu}^{\delta-1,\epsilon} + \alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon-1} - \alpha_{\nu}^{\delta+1,\epsilon-1}$. Das Behauptete folgt dann wie in Teil a). $\square$

Bemerkung 2.3 Jeder Automorphismus aus $\mathfrak{H}_a$ erzeugt eine weitere Familie $g\mathcal{Z}_k \rightarrow gU_k$, die durch Gleichungen wie in Proposition 2.2 beschrieben wird und auf der äquivariant die Gruppe $\mathfrak{H}_{a-k}$ durch Permutation der Variablen $t_{\epsilon}^{(\nu)}$ operiert.

Um die Flachheit der Familien $g\mathcal{Z}_k \rightarrow gU_k$ zeigen zu können, benötigen wir das folgende Lemma, dessen Beweis in [A, Lemma 1.2.1] geführt wird.

Lemma 2.4 Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein flacher Morphismus analytischer Stellenalgebren mit spezieller Faser $B_0 = B/\mathfrak{m}_A B = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^e}/I_0$, wobei I_0 ein Primideal sei. Gilt für zwei Funktionen $F, G \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^e} \hat{\otimes} A$, daß $FG \in I$ und $\bar{F} \notin I_0$, dann folgt $G \in I$.

Proposition 2.5 i) Die Abbildungen $\mathcal{Z}_k \rightarrow U_k$ sind flach.

ii) Die Deformationen $\mathcal{Z}_k \rightarrow U_k$ und $\mathcal{Z}_{k'} \rightarrow U_{k'}$ zu zwei Elementen $k, k' \in K_{e-2}(X)$ stimmen auf dem Durchschnitt $U_k \cap U_{k'}$ überein.

Beweis: i) (Vgl.[C2, Proposition 2.1.2.]) Wir schreiben $G_{\delta,\epsilon}^k = x_{\delta}^l x_{\epsilon}^r - P_{\delta,\epsilon}^k$, $2 \leq \delta + 1 \leq \epsilon - 1 \leq e - 1$. Das Ideal I^k von $\mathcal{Z}_k$ wird erzeugt von diesen Funktionen und den linearen Gleichungen des Basisraums U_k . Weiter setzen wir

$$I_{\delta,\epsilon}^k = (G_{\delta',\epsilon'}^k, \delta + 1 \leq \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 1).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_{\delta}^l G_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\gamma}^l G_{\delta,\epsilon}^k &\in I_{\gamma,\epsilon-1}^k && \text{für } \gamma < \delta < \epsilon - 1 \\ x_{\delta}^r G_{\gamma,\epsilon}^k - x_{\epsilon}^r G_{\gamma,\delta}^k &\in I_{\gamma+1,\epsilon}^k && \text{für } \gamma + 1 < \delta < \epsilon \end{aligned}$$

Zum Beweis betrachten wir ohne Einschränkung nur den oberen Fall. Es sei zunächst $\gamma = \delta - 1$, und ρ sei der Index mit $k_{\rho}^{\delta, \epsilon} + 1 = k_{\rho}^{\delta-1, \epsilon}$. Dann folgt, daß auf der Geraden l_{δ} der Menge ∇_k zwischen $(\delta - 1, \epsilon)$ und $(\delta - 1, \rho + 1)$ kein Punkt liegt. Daraus ergibt sich:

$$P_{\delta-1, \epsilon}^k = \frac{P_{\delta-1, \epsilon-1}^k P_{\delta, \epsilon}^k}{P_{\delta, \epsilon-1}^k} = \frac{P_{\delta-1, \epsilon-2}^k P_{\delta, \epsilon}^k}{P_{\delta, \epsilon-2}^k} = \dots = \frac{P_{\delta-1, \rho}^k P_{\delta, \epsilon}^k}{x_{\delta}^l x_{\rho}^r}.$$

Daraus schließen wir:

$$x_{\delta}^l G_{\delta-1, \epsilon}^k - x_{\delta-1}^l G_{\delta, \epsilon}^k = (P_{\delta-1, \rho}^k - x_{\delta-1}^l x_{\rho}^r) \frac{P_{\delta, \epsilon}^k}{x_{\rho}^r} = -G_{\delta-1, \rho}^k \frac{P_{\delta, \epsilon}^k}{x_{\rho}^r}.$$

Dann bemerken wir, daß

$$\sum_{\nu=\gamma}^{\delta-1} x_{\gamma}^l x_{\gamma+1}^l \cdots \hat{x}_{\nu}^l \hat{x}_{\nu+1}^l \cdots x_{\delta}^l (x_{\nu}^l P_{\nu+1, \epsilon}^k - x_{\nu+1}^l P_{\nu, \epsilon}^k) = \prod_{\nu=\gamma+1}^{\delta-1} x_{\nu}^l (x_{\delta}^l G_{\gamma, \epsilon}^k - x_{\gamma}^l G_{\delta, \epsilon}^k).$$

Da $\bar{I}_{\gamma, \epsilon-1}^k$ ein Primideal ist, folgt, daß das Polynom $(x_{\delta}^l G_{\gamma, \epsilon}^k - x_{\gamma}^l G_{\delta, \epsilon}^k)$ modulo dem maximalen Ideal von U_k im Ideal $I_{\gamma, \epsilon-1}^k$ liegt. Wegen 1.11 haben wir eine Liftung der erzeugenden Relationen vom ersten Typ gefunden. Analoges folgt für den zweiten Typ. Da alle erzeugenden Relationen liftbar sind, folgt die Flachheit (siehe [Ar]).

ii) Seien $k, k' \in K_{e-2}(X)$. Wir zeigen die Übereinstimmung der Ideale $I_{\delta, \epsilon}^k$ und $I_{\delta, \epsilon}^{k'}$ auf der Menge $U_k \cap U_{k'}$ durch Induktion über $\epsilon - \delta$. Die Gleichheit der Funktionen $G_{\delta-1, \delta+1}^k$ und $G_{\delta-1, \delta+1}^{k'}$ auf dem Durchschnitt gilt nach Konstruktion. Wegen $(1, 4), \dots, (e-3, e) \in \nabla_k \cap \nabla_{k'}$ gilt auch $G_{\delta, \delta+3}^k = G_{\delta, \delta+3}^{k'}$. Es sei also $\epsilon > \delta + 3$. Wir zeigen nun $G_{\delta, \epsilon}^k \equiv G_{\delta, \epsilon}^{k'} \pmod{I_{\delta+1, \epsilon-1}^k}$.

1. Fall: $(\delta, \epsilon) \in \nabla_k$ und $(\delta, \epsilon) \in \nabla_{k'}$. Es gilt:

$$P_{\delta, \epsilon}^k = \frac{P_{\delta+1, \epsilon}^k P_{\delta, \epsilon-1}^k}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} \equiv \frac{P_{\delta+1, \epsilon}^{k'} P_{\delta, \epsilon-1}^{k'}}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} = P_{\delta, \epsilon}^{k'},$$

denn nach Induktion gilt $P_{\delta+1, \epsilon}^k \equiv P_{\delta+1, \epsilon}^{k'} \pmod{I_{\delta+2, \epsilon-1}^k}$ und $P_{\delta, \epsilon-1}^k \equiv P_{\delta, \epsilon-1}^{k'} \pmod{I_{\delta+1, \epsilon-2}^k}$. Deshalb folgt wegen $I_{\delta+2, \epsilon-1}^k, I_{\delta+1, \epsilon-2}^k \subset I_{\delta+1, \epsilon-1}^k$, daß $(P_{\delta, \epsilon}^k - P_{\delta, \epsilon}^{k'}) x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r \in I_{\delta+1, \epsilon-1}^k$. Aus dem Lemma 2.4 schließen wir $P_{\delta, \epsilon}^k \equiv P_{\delta, \epsilon}^{k'} \pmod{I_{\delta+1, \epsilon-1}^k}$.

2. Fall: Entweder $(\delta, \epsilon) \notin \nabla_k$ oder $(\delta, \epsilon) \notin \nabla_{k'}$. Wir erhalten:

$$\frac{P_{\delta, \epsilon-1}^k P_{\delta+1, \epsilon}^k}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} - \frac{P_{\delta, \epsilon-1}^{k'} P_{\delta+1, \epsilon}^{k'}}{P_{\delta+1, \epsilon-1}^k} = \frac{P_{\delta, \epsilon-1}^k P_{\delta+1, \epsilon}^k (x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r - P_{\delta+1, \epsilon-1}^k)}{P_{\delta+1, \epsilon-1}^k x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} \in \frac{1}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} I_{\delta+1, \epsilon-1}^k.$$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{P_{\delta, \epsilon-1}^{k'} P_{\delta+1, \epsilon}^{k'}}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} - \frac{P_{\delta, \epsilon-1}^{k'} P_{\delta+1, \epsilon}^{k'}}{P_{\delta+1, \epsilon-1}^{k'}} \in \frac{1}{x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r} I_{\delta+1, \epsilon-1}^{k'}.$$

Insgesamt folgt damit aus der Induktionsannahme wie im ersten Fall $(P_{\delta, \epsilon}^k - P_{\delta, \epsilon}^{k'}) x_{\delta+1}^l x_{\epsilon-1}^r \in I_{\delta+1, \epsilon-1}^k$ und damit die Behauptung.

Da das Ideal $I_{\delta, \epsilon}^k$ erzeugt wird durch die Ideale $I_{\delta+1, \epsilon}^k$ und $I_{\delta, \epsilon-1}^k$ und die Funktion $G_{\delta, \epsilon}^k$, folgt $I_{\delta, \epsilon}^k = I_{\delta, \epsilon}^{k'}$ und damit auch $I^k = I^{k'}$. $\square$

Korollar 2.6 Die Vereinigung der Deformationen $g\mathcal{Z}_k \rightarrow gU_k$ mit $k \in K_{e-2}(X)$ und $g \in \mathfrak{H}_a$ ist eine Deformation von X , auf der die Gruppe $\mathfrak{H}_a$ äquivariant operiert.

2.3 Die Komponenten des Raumes T_{red}

Ausgehend von einem Raum U_k mit $k \in K_{e-2}(X)$ schneiden wir nun mit den folgenden $2e - 2$ Gleichungen herunter:

$$\begin{aligned} t_\nu^l &= 0, & \nu &= 1, \dots, e-2 \\ t_\nu^r &= 0, & \nu &= e-1, e \\ t_\nu^{(k_\nu)} &= t_\nu^r, & \alpha_\nu &= 1 \text{ mit } 3 \leq \nu \leq e-2 \\ t_\nu^{(k_\nu)} &= 0, & \alpha_\nu &> 1 \text{ oder } \nu = 2, e-1. \end{aligned}$$

Nach eventueller Umbenennung der Parameter und Identifikation von t_ϵ mit t_ϵ^r erhalten wir einen umgebenden Raum der Dimension $\dim T_X^1$ mit Koordinaten

$$\begin{aligned} t_\epsilon^{(\nu)}, & \quad \epsilon = 2, \dots, e-1, \nu = 1, \dots, a_\epsilon - 1 \\ t_\epsilon, & \quad \epsilon = 3, \dots, e-2. \end{aligned}$$

Der lineare Raum T_k sei das Bild von U_k in diesem Raum. Das Ideal $\mathfrak{a}^k$ von T_k wird erzeugt durch die einzelnen Ideale $\mathfrak{a}_\epsilon^k$ mit $\epsilon = 2, \dots, e-1$, wobei

$$\mathfrak{a}_\epsilon^k = \begin{cases} (t_\epsilon^{(1)}, \dots, t_\epsilon^{(k_\epsilon-1)}, t_\epsilon) & \text{falls } \alpha_\epsilon > 1 \text{ oder } \epsilon = 2, e-1 \\ (t_\epsilon^{(1)}, \dots, t_\epsilon^{(\alpha_\epsilon+1)}, t_\epsilon^{(\alpha_\epsilon+1+1)} - t_\epsilon, \dots, t_\epsilon^{(k_\epsilon-1)} - t_\epsilon) & \text{falls } \alpha_\epsilon = 1 \text{ mit } \epsilon = 3, \dots, e-2. \end{cases} \quad (8)$$

Auf dem umgebenden Raum $\mathbb{C}^\tau$ operiert die Gruppe $\mathfrak{G}_{a-1} = \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon-1}$ durch Permutation der Koordinaten in jedem Index ϵ . Für das Bild von T_k unter einem Automorphismus $g \in \mathfrak{G}_{a-1}$ schreiben wir kurz gT_k .

Für die ersten $e-2$ Gleichungen $G_{\delta-1, \delta+1}^k = x_{\delta-1}y_{\delta+1} - Q_{\delta-1, \delta+1}^k, \delta = 2, \dots, e-1$ des Totalraums der Deformation $\mathcal{Y}_k := \mathcal{Z}_k \times_{U_k} T_k \rightarrow T_k$ erhalten wir:

$$Q_{\delta-1, \delta+1}^k := \begin{cases} x_\delta^{k_\delta} X_\delta^k & \text{falls } \alpha_\delta > 1 \text{ oder } \delta = 2, e-1 \\ x_\delta^{\alpha_\delta+1} y_\delta^{\alpha_\delta-1} X_\delta^k & \text{falls } \alpha_\delta = 1 \text{ mit } \delta = 3, \dots, e-2 \end{cases}$$

mit $X_\delta^k = \prod_{\nu=k_\delta}^{a_\delta-1} (x_\delta + t_\delta^{(\nu)})$.

Bemerkung 2.7 Die Polynome $Q_{\delta, \epsilon}^k$ in den Erzeugern $G_{\delta, \epsilon}^k$ des Ideals I^k des Totalraumes der Deformation $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ ergeben sich für $\epsilon - \delta > 2$ gemäß

$$Q_{\delta, \epsilon}^k = \begin{cases} Q_{\delta, \epsilon-1}^k Q_{\delta+1, \epsilon}^k x_{\delta+1}^{-1} y_{\epsilon-1}^{-1} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \in \nabla_k \\ Q_{\delta, \epsilon-1}^k Q_{\delta+1, \epsilon}^k (Q_{\delta+1, \epsilon-1}^k)^{-1} & \text{falls } (\delta, \epsilon) \notin \nabla_k. \end{cases}$$

Es gilt genauer:

$$Q_{\delta, \epsilon}^k = \prod_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} x_\nu^{\beta_\nu^{\delta, \epsilon}} y_\nu^{\gamma_\nu^{\delta, \epsilon}} (X_\nu^k)^{\alpha_\nu^{\delta, \epsilon}},$$

wobei

$$\beta_\nu^{\delta, \epsilon} = \begin{cases} \alpha_\nu^{\delta, \epsilon} (k_\nu - k_\nu^{\delta, \epsilon}) & \text{falls } \alpha_\nu > 1 \text{ oder } \nu = 2, e-1 \\ \alpha_{\nu+1}^{\delta, \epsilon} - \alpha_{\nu+1}^{\delta, \epsilon} & \text{falls } \alpha_\nu = 1 \text{ mit } \nu = 3, \dots, e-2 \end{cases}$$

sowie

$$\gamma_{\nu}^{\delta,\epsilon} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha_{\nu} > 1 \text{ oder } \nu = 2, e-1 \\ \alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon} & \text{falls } \alpha_{\nu} = 1 \text{ mit } \nu = 3, \dots, e-2. \end{cases}$$

Beweis: Diese Beziehungen folgen direkt aus der Berechnung der $P_{\delta,\epsilon}^k$ im Abschnitt zuvor. Durch den Übergang von U_k zu T_k erhalten wir nämlich:

$$Z_{\nu}^{\delta,\epsilon} = \begin{cases} x_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}(k_{\nu}-k_{\nu}^{\delta,\epsilon})}(X_{\nu}^k)^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}} & \text{falls } \alpha_{\nu} > 1 \text{ oder } \nu = 2, e-1 \\ x_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}\alpha_{\nu+1}-\alpha_{\nu+1}^{\delta,\epsilon}} y_{\nu}^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}\alpha_{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon}} (X_{\nu}^k)^{\alpha_{\nu}^{\delta,\epsilon}} & \text{falls } \alpha_{\nu} = 1 \text{ mit } 3 \leq \nu \leq e-2. \end{cases}$$

□

Wir schließen hier noch das folgende Lemma an, das im Beweis der Proposition 2.9 benötigt wird (vgl. [C1], 3.3.1).

Lemma 2.8 *Die Polynome $Q_{\delta,\epsilon}^k$ sind für $1 \leq \delta$ und $\epsilon < e$ durch ein $x_{\nu'}$ und für $1 < \delta$ und $\epsilon \leq e$ durch ein y_{ν} teilbar.*

Beweis: Es sei $Q_{\delta,\epsilon} = Q_{\delta,\epsilon}^k$ mit $k \in K_{e-2}(X)$. Für $1 < \delta$ gibt es einen Index ν mit $k_{\nu}^{\delta-1,\epsilon} = k_{\nu}^{\delta,\epsilon} + 1$. Es gilt dann $\alpha_{\nu-1}^{\delta-1,\epsilon} = \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon} + 1$ und deshalb $\alpha_{\nu-1} > \alpha_{\nu-1}^{\delta,\epsilon}$. Also ist der ν -te Faktor von $Q_{\delta,\epsilon}$ durch y_{ν} teilbar. Falls $\epsilon < e$ gibt es einen Index ν' mit $k_{\nu'}^{\delta+1,\epsilon} = k_{\nu'}^{\delta,\epsilon} + 1$, und es folgt die Teilbarkeit des ν' -ten Faktors durch $x_{\nu'}$. □

Es sei nun eine verselle Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ der Singularität gegeben. Wir setzen voraus, daß diese Deformation die Gestalt wie in 1.5 hat.

Proposition 2.9 *Der durch*

$$\sum_{\nu=0}^{a_{\epsilon}-1} x_{\epsilon}^{(a_{\epsilon}-1)-\nu} s_{\epsilon}^{(\nu)} = \prod_{\nu=1}^{a_{\epsilon}-1} (x_{\epsilon} + t_{\epsilon}^{(\nu)}), \quad \epsilon = 2, \dots, e-1, \quad (s_{\epsilon}^{(0)} = 1)$$

induzierte Basiswechsel impliziert ein karthesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_k & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_k & \longrightarrow & S \end{array}$$

Beweis: Wir betrachten das induzierte Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{X}} & & \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_k} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^e} \hat{\otimes} \mathbb{C}\{s_{\epsilon}^{(\nu)}, t_{\epsilon}\} & \xrightarrow{\psi^* = id \otimes \phi^*} & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^e} \hat{\otimes} \mathbb{C}\{t_{\epsilon}^{(\nu)}, t_{\epsilon}\} / \mathfrak{a}^k \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{C}\{s_{\epsilon}^{(\nu)}, t_{\epsilon}\} & \xrightarrow{\phi^*} & \mathbb{C}\{t_{\epsilon}^{(\nu)}, t_{\epsilon}\} / \mathfrak{a}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_S & & \mathcal{O}_{T_k} \end{array}$$

und zeigen, daß unter den horizontalen Abbildungen die Total- und Basisraumgleichungen von $\mathcal{X} \rightarrow S$ auf die Ideale I^k bzw. $\mathfrak{a}^k$ abgebildet werden.

Wie zuvor setzen wir $I_{\delta,\epsilon}^k = (G_{\delta',\epsilon'}^k, \delta + 1 \leq \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 \leq \epsilon - 1)$ und zeigen durch Induktion über $\epsilon - \delta$ die folgende Äquivalenz:

$$Q_{\delta,\epsilon}^k \equiv \psi^*(P_{\delta,\epsilon}) \bmod I_{\delta+1,\epsilon-1}^k.$$

Man beachte, daß die Gültigkeit dieser Aussage für Doppelindizes (δ', ϵ') mit $\epsilon' - \delta' \leq \epsilon - \delta$ impliziert, daß die entsprechenden Erzeuger des Ideals von S auf das Ideal $\mathfrak{a}^k$ abgebildet werden (siehe Lemma 2.8). Daraus schließen wir $\psi^*(I_{\delta,\epsilon}) \subset I_{\delta,\epsilon}^k$.

Zunächst gilt $P_{\delta-1,\delta+1} = y_\delta Z_\delta^{(0,1)}$, und dieses Polynom wird modulo $\mathfrak{a}^k$ auf $Q_{\delta-1,\delta+1}^k$ abgebildet. Daraus folgt auch $\psi^*(h_{\delta-1,\delta+1}) = 0, \delta = 3, \dots, e-2$. Es sei nun $\epsilon - \delta > 2$ und die Aussage für alle (δ', ϵ') mit $\epsilon' - \delta' < \epsilon - \delta$ bewiesen. Wir unterscheiden wieder die Fälle i) $(\delta, \epsilon) \in \nabla_k$ und ii) $(\delta, \epsilon) \notin \nabla_k$.

i) Man setze $\tilde{R} := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_e, x_3^{-1}, \dots, x_{e-2}^{-1}, y_3^{-1}, \dots, y_{e-2}^{-1}, t_\epsilon^{(\nu)}, t]$ und betrachte die kanonische Fortsetzung $\psi^* : R \rightarrow \tilde{R}$. Es gilt dann modulo $I_{\delta+1,\epsilon-1}^k \tilde{R}$:

$$\begin{aligned} Q_{\delta,\epsilon}^k &= \frac{Q_{\delta,\epsilon-1}^k Q_{\delta,\epsilon-1}^k}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}} && \text{(nach Definition)} \\ &\equiv \frac{\psi^*(P_{\delta,\epsilon-1}) \psi^*(P_{\delta,\epsilon-1})}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= \psi^*\left(\frac{P_{\delta,\epsilon-1} P_{\delta,\epsilon-1}}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}}\right) && \text{(Definition von } \psi^*) \\ &\equiv \psi^*\left(\frac{\tilde{P}_{\delta,\epsilon-1} \tilde{P}_{\delta,\epsilon-1}}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}}\right) && \text{(Kapitel 1.5, } \psi^*(I'_{\delta+1,\epsilon-2}), \psi^*(I'_{\delta+2,\epsilon-1}) \subset I_{\delta+1,\epsilon-1}^k) \\ &\equiv \psi^*(\tilde{P}_{\delta,\epsilon}) && \text{(Lemma 1.13, } \psi^*(I'_{\delta+1,\epsilon-1}) \subset I_{\delta+1,\epsilon-1}^k) \\ &\equiv \psi^*(P_{\delta,\epsilon}) && \text{(Kapitel 1.5, Induktionsvoraussetzung).} \end{aligned}$$

Nun folgt wie in [A, p. 43] die Gleichheit $I_{\delta+1,\epsilon-1}^k = I_{\delta+1,\epsilon-1}^k \tilde{R} \cap \mathbb{C}[x, t]$. Ist nämlich $G \in I_{\delta+1,\epsilon-1}^k \tilde{R} \cap \mathbb{C}[x, t]$, so gibt es einen Exponenten l , so daß $F^l G \in I_{\delta+1,\epsilon-1}^k$, wobei $F = x_3 \cdots x_{e-2} y_3 \cdots y_{e-2}$. Da aber $F|_{t=0} \notin \bar{I}_{\delta+1,\epsilon-1} = (g_{\delta',\epsilon'}, \delta + 1 < \delta' + 1 \leq \epsilon' - 1 < \epsilon - 1)$, folgt nach dem Lemma 2.4, daß G in $I_{\delta+1,\epsilon-1}^k$ liegt. Daraus ergibt sich die Behauptung, da $Q_{\delta,\epsilon}^k$ und $\psi^*(P_{\delta,\epsilon})$ in $\mathbb{C}[x, t]$ liegen.

ii) In diesem Fall folgt wie in Proposition 2.5, daß

$$\frac{Q_{\delta,\epsilon-1}^k Q_{\delta+1,\epsilon}^k}{Q_{\delta+1,\epsilon-1}^k} - \frac{Q_{\delta,\epsilon-1}^k Q_{\delta+1,\epsilon}^k}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}} \in \frac{1}{x_{\delta+1} y_{\epsilon-1}} I_{\delta+1,\epsilon-1}^k \subset I_{\delta+1,\epsilon-1}^k \tilde{R}.$$

Deshalb folgt die Behauptung auch hier wie im Fall i).

□

Insgesamt erhalten wir einen Basiswechsel der Vereinigung der Räume T_k und ihrer Translate unter der Wirkung von $\mathfrak{G}_{a-1}$ sowie ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\bigcup_{\substack{k \in K_{e-2}(X) \\ g \in \mathfrak{G}_{a-1}}} g\mathcal{Y}_k & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bigcup_{\substack{k \in K_{e-2}(X) \\ g \in \mathfrak{G}_{a-1}}} gT_k & \longrightarrow & T & \longrightarrow & S
\end{array}$$

Proposition 2.10 *Unter der Abbildung $\phi : T \rightarrow S$ werden die Räume gT_k , $g \in \mathfrak{G}_{a-k}$ auf die Komponente S_k abgebildet.*

Beweis: Wir können Gleichungen für das Bild der gT_k angeben. Ist $\alpha_\epsilon > 1$ oder $\epsilon = 2, e-1$, so wird das Ideal des Bildes durch $s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}, \dots, s_\epsilon^{(a_\epsilon-(k_\epsilon-1))}$ und t_ϵ erzeugt. Der Tangentialraum für einen solchen Index wird erzeugt durch

$$\frac{\partial}{\partial s_\epsilon^{(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_\epsilon^{(a_\epsilon-k_\epsilon)}}. \quad (9)$$

Im Falle $\alpha_\epsilon = 1$ mit $3 \leq \epsilon \leq e-2$ haben wir unter den Gleichungen $\alpha_{\epsilon+1}$ symmetrische Funktionen $s_\epsilon^{(a_\epsilon-1)}, \dots, s_\epsilon^{(a_\epsilon-\alpha_{\epsilon+1})}$. Die restlichen Erzeuger des Ideals des Bildes sind die $\alpha_{\epsilon-1}$ ersten Koeffizienten von $Z_\epsilon^{(\alpha_{\epsilon+1},1)}$, aufgefaßt als Polynom in y_ϵ , also $\sigma_\epsilon^{(\alpha_{\epsilon+1},2)}, \dots, \sigma_\epsilon^{(\alpha_{\epsilon+1},\alpha_{\epsilon-1})}$. Hierbei seien die Polynome $Z_\epsilon^{(i,j)}$ und $\sigma_\epsilon^{(i,j)}$ definiert wie in 4.1. Unter der natürlichen Graduierung der Deformationsparameter, d.h. mit $\deg(s_\epsilon^{(\nu)}) = a_\epsilon - \nu$ und $\deg(t_\epsilon) = 1$ ist das Polynom $\sigma_\epsilon^{(i,j)}$ quasihomogen von Grad $a_\epsilon - i - j + 1$. Es folgt, daß der Grad der oben angegebenen Erzeuger größer oder gleich $a_\epsilon - k_\epsilon + 1 = a_\epsilon - (\alpha_{\epsilon-1} + \alpha_{\epsilon+1} - 1)$ ist. Deshalb tauchen die Variablen $s_\epsilon^{(\nu)}$ mit $\nu \leq a_\epsilon - k_\epsilon$ nicht in linearen Termen dieser Polynome auf, und wir können auch in diesem Fall die Vektoren (9) als erste $a_\epsilon - k_\epsilon$ Erzeuger des Tangentialraumes wählen. Ist $a_\epsilon > k_\epsilon$, so kann man dieses Erzeugendensystem mit $\partial/\partial t_\epsilon$ vervollständigen. Für $a_\epsilon = k_\epsilon$ ist $\sigma_\epsilon^{(\alpha_{\epsilon+1},\alpha_{\epsilon-1})} = s_\epsilon^{(1)} - (\alpha_{\epsilon-1} - 1)t_\epsilon$. Die Vektoren (9) und $\partial/\partial t_\epsilon + (\alpha_{\epsilon-1} - 1)\partial/\partial s_\epsilon^{(1)}$ bilden also immer ein Erzeugendensystem des Tangentialraumes für einen solchen Index.

Insgesamt folgt, daß der Tangentialraum an das Bild von gT_k genau der Tangentialraum der Komponente S_k ist (vgl. 1.16). Daraus schließen wir $\phi(gT_k) = S_k$. $\square$

2.4 Monodromie

Es sei $\mathcal{X} \rightarrow S$ eine Glättung einer isolierten Singularität X der Dimension n . Den Basisraum S setzen wir als glatt voraus. Mit $D \subset S$ bezeichnen wir die Diskriminante, also den Ort, über dem die Fasern der Familie singular sind. Man erhält eine Milnorfaserung (vgl. [L, 2.B]):

$$F \hookrightarrow \mathcal{X}' \rightarrow S \setminus D$$

Die Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(S \setminus D)$ (im Basispunkt) induziert Operationen auf den Homologiegruppen $H_i(F)$. Es gilt $H_i(F) = 0$ für $i > n$ (siehe [L, (5.6)_n]). Aus der Beschreibung der Fundamentalgruppe von $S \setminus D$ in [L, 7.A] und Satz (5.14) dort folgt, daß die Operation auf $H_i(F)$ für $i < n$ trivial ist. Wir betrachten hier den Fall $H_n(F) = H_n(F, \mathbb{Q})$ (vgl. [BC, Theorem in 3.4]).

Unter der *Monodromiegruppe* der Glättung $\mathcal{X} \rightarrow S$ verstehen wir die Gruppe

$$M := \text{Im}(\pi_1(S \setminus D)) \rightarrow \text{Aut}(H_n(F)).$$

Es sei

$$0 \rightarrow K \rightarrow \pi_1(S \setminus D) \rightarrow M.$$

Der Kern K induziert eine unverzweigte Überlagerung der Mannigfaltigkeit $S \setminus D$, die sich eindeutig zu einer verzweigten Überlagerung $U \rightarrow S$ fortsetzen läßt.

Als *Monodromieüberlagerung* der Glättung bezeichnen wir die induzierte Deformation $\mathcal{X}_U \rightarrow U$. Nach Konstruktion ist die Operation von $\pi_1(U \setminus D_U) = K$ auf der Faser F trivial.

Proposition 2.11 *Die Familien $g\mathcal{Y}_k \rightarrow gT_k$ mit $k \in K_{\epsilon-2}(X)$ und $g \in \mathfrak{G}_{a-k}$ sind Monodromieüberlagerungen der Familie $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$.*

Beweis: Es genügt, die Behauptung für die Familien $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ zu zeigen. Nach Proposition 2.10 wird T_k in die Komponente S_k abgebildet. Da die Abbildung endlich ist und die Dimensionen von T_k und S_k übereinstimmen, ist $T_k \rightarrow S_k$ surjektiv. Diese Abbildung ist sogar $\mathfrak{G}_{a-k}$ -äquivariant, induziert also eine Abbildung $T_k/\mathfrak{G}_{a-k} \rightarrow S_k$. Nach [BC] ist diese Gruppe genau die Monodromiegruppe von $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$. Die Gruppe $\mathfrak{G}_{a-k}$ operiert auf T_k effektiv. In der Tat ist $T_k \rightarrow S_k$ außerhalb der Diskriminante von S_k eine unverzweigte Überlagerung vom Grad $|\mathfrak{G}_{a-k}|$ (vgl. 3.4). Es folgt, daß T_k die eindeutig bestimmte Überlagerung von S_k mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{a-k}$ ist. $\square$

3 Die Diskriminanten der Familien $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$

3.1 Die Komponenten der Diskriminante

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Diskriminanten der Deformationen $g\mathcal{Y}_k \rightarrow gT_k$ einer zyklischen Quotientensingularität. Wir benutzen dabei die Kenntnis der expliziten Gleichungen aus 2.3 und ähnliche Techniken wie in [C1]. Als Korollar erhalten wir die Diskriminanten der Familien aus [C1]. Ein weiteres Resultat ist die Bestimmung aller möglichen Singularitäten der Nachbarfasern, insbesondere über den generischen Punkten der einzelnen Komponenten der Diskriminante (vgl. [C3]). Die Resultate werden nur für die Deformation $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ (d.h. $g = id$) formuliert, verallgemeinern sich aber sofort für alle g .

Wir beginnen mit einer Charakterisierung der singulären Punkte in den Fasern der Deformationen (vgl. [C1, 2.1.3]).

Lemma 3.1 *In einem singulären Punkt einer Faser $(\mathcal{Y}_k)_p$ ist $x_1 = x_e = 0$, und wenn $x_e \neq 0 \neq y_e$, so hat das Polynom X_e^k eine mehrfache Nullstelle.*

Beweis: Eine $n \times n$ -Matrix heiße Semi-Dreiecksmatrix, wenn es einen Index ν gibt, so daß $a_{ij} = 0$ ist für $1 \leq j < \nu$ und $i > j$ sowie für $\nu < j \leq n$ und $j > i$. Für eine solche Matrix gilt $\det(a_{ij}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$. Tatsächlich bleibt in der Leibnizformel für diese Determinante nur für Permutationen π mit $\pi(j) \leq j$ für $j < \nu$ und $\pi(j) \geq j$ für $j > \nu$ ein nichttrivialer Summand übrig. Dies ist offenbar nur für $\pi = id$ der Fall. Um die Aussage des Lemmas zu beweisen,

betrachten wir die folgenden $(e-2) \times (e-2)$ -Unterdeterminanten der Jacobimatrix.

1) Für einen Index $1 \leq \nu \leq n$ seien die Zeilenindizes, d.h. die Indizes der Gleichungen, deren Ableitungen bestimmt werden, $(1, \nu), \dots, (\nu-2, \nu), (\nu-1, \nu+1), (\nu, \nu+2), \dots, (\nu, e)$, und die Spaltenindizes $1, \dots, \nu-2, \nu, \nu+2, \dots, e$. Dabei lasse man Doppelindizes (i, j) mit $j < i+2$ einfach weg. Die entstehende Untermatrix der Jacobimatrix ist eine Semi-Dreiecksmatrix mit den Diagonalelementen x_1 und x_e für $\nu = 1$ bzw. $\nu = e$. In den anderen Fällen hat die Diagonale die Werte y_ν für die Spalten $1, \dots, \nu-2$ sowie x_ν für die Spalten $\nu+2, \dots, e$ und $\frac{\partial Q_{\nu-1, \nu+1}^k}{\partial x_\nu}$ für die Spalte mit dem Index ν .

2) Bei den gleichen Zeilenindizes wie unter 1) betrachten wir die Spalten mit den Indizes $1, \dots, \nu-1, \nu+2, \dots, e$. Die entstehende Semi-Dreiecksmatrix hat die Diagonalelemente y_ν für die Spalten $1, \dots, \nu-2$, den Wert $y_{\nu+1}$ für den Spaltenindex ν und x_ν für die Indizes $\nu+2, \dots, e$.

3) Analog wie unter 2) erhalten wir mit den Spalten $1, \dots, \nu-2, \nu+1, \dots, e$ die Ableitungen y_ν für $1, \dots, \nu-2$, den Wert $x_{\nu-1}$ für die Ableitung von $G_{\nu-1, \nu+1}^k$ nach $x_{\nu+1}$ und x_ν als weitere Diagonalelemente.

Insgesamt folgt aus 1), 2) und 3) und dem Verschwinden all dieser Minoren in einem singulären Punkt der Faser, daß $x_1 = x_e = 0$ ist und im Fall $x_\nu \neq 0 \neq y_\nu$, daß $x_{\nu-1} = y_{\nu+1} = \frac{\partial Q_{\nu-1, \nu+1}^k}{\partial x_\nu} = 0$. Wegen $Q_{\nu-1, \nu+1}^k = x_\nu^{\alpha_\nu+1} y_\nu^{\alpha_\nu-1} X_\nu^k$ folgt deshalb auch $X_\nu^k = \frac{\partial X_\nu^k}{\partial x_\nu} = 0$. $\square$

Im folgenden Lemma wird gezeigt, wie man unter gewissen Voraussetzungen aus den Gleichungen der Deformation $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ in einem Punkt einer Faser Gleichungen für eine Singularität niedrigerer Einbettungsdimension erhält. Die betrachteten Koordinatentransformationen entsprechen dem Niederblasen und Abschneiden der Ketten k und a (vgl. [C1, 3.2.2]).

Lemma 3.2 *Es sei $X = X(a)$, $k \in K_{e-2}$ und $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ eine Deformation wie in 2.3. Dann gilt:*

- i) *(Niederblasen der Ketten k und a): Angenommen, $p \in T_k$ und $q = 0$ sei ein Punkt in der Faser über p . Ist $k_\epsilon = 1$ und $x_{\epsilon-1}y_{\epsilon+1} = x_\epsilon u$ mit einer lokalen Einheit u , so ist $((\mathcal{Y}_k)_p, q)$ isomorph zu einer Singularität mit bei ϵ niedergeblasenem a , deren Gleichungen durch das Punkteschema zur bei ϵ niedergeblasenen Kette k' entstehen.*
- ii) *(Abschneiden der Ketten k und a): Ist $q \in (\mathcal{Y}_k)_p$ und gilt $x_\nu = 0$ für $\nu \leq \epsilon$, so sei $i := \max\{i \leq \epsilon : t_i \neq 0\}$. Existiert i , so ist q isomorph zu einer Singularität q' , deren Gleichungen der Kette $k^{i-1, \epsilon}$ entsprechen.*

Beweis: i) Die Gleichungen, deren Indizes zu Punkten oberhalb der Geraden $l_\epsilon \subset \nabla_k$ gehören, können weggelassen werden. Die restlichen Gleichungen sind gemäß dem bei ϵ zusammengeblasenen Schema zu berechnen (vgl. Lemma 1.8 i)). Tatsächlich gilt für das Polynom $Q_{\delta, \epsilon+1}^k$ mit $\delta \leq \epsilon-3$ wegen $(\delta, \epsilon+1) \notin \nabla_k$:

$$Q_{\delta, \epsilon+1}^k = \frac{Q_{\delta, \epsilon}^k Q_{\delta+1, \epsilon+1}^k}{Q_{\delta+1, \epsilon}^k} = \frac{Q_{\delta+1, \epsilon}^k Q_{\delta, \epsilon-1}^k Q_{\delta+1, \epsilon+1}^k}{Q_{\delta+1, \epsilon}^k (x_{\delta+1} y_{\epsilon-1} = Q_{\delta+1, \epsilon-1}^k)} = \frac{Q_{\delta, \epsilon-1}^k Q_{\delta+1, \epsilon+1}^k}{(x_{\delta+1} y_{\epsilon-1} = Q_{\delta+1, \epsilon-1}^k)}.$$

Analoges gilt für $Q_{\epsilon-1,\gamma}^k$ mit $\gamma \geq \epsilon + 3$. Für die beiden neuen Startgleichungen ergibt sich

$$x_{\epsilon-2}y_{\epsilon+1} = \frac{Q_{\epsilon-2,\epsilon}^k}{x_{\epsilon-1}}u_{\epsilon} \quad \text{und} \quad x_{\epsilon-1}y_{\epsilon+2} = \frac{Q_{\epsilon,\epsilon+2}^k}{y_{\epsilon+1}}u_{\epsilon}.$$

Durch eine Koordinatentransformation mit $\tilde{y}_{\epsilon+1} = y_{\epsilon+1}/u_{\epsilon}$ usw. erhalten wir wieder Standardgleichungen, falls $a_{\epsilon-1}, a_{\epsilon+1} \geq 3$. Gilt etwa $a_{\epsilon-1} = 2$ und $k_{\epsilon-1} = 1$, so ergibt sich $k' = (0)$. Im Fall $a_{\epsilon-1} = k_{\epsilon-1} = 2$ blasen wir weiter nieder.

ii) Es gilt $y_i \neq 0$, und wegen $x_{\delta} = Q_{\delta,i}^k/y_i$ können die Variablen x_{δ} mit $\delta \leq i-2$ eliminiert werden. Als neue erste Gleichung ergibt sich:

$$x_{i-1}\left(\frac{y_{i+1}}{y_i}\right) = x_i^{\alpha_{i+1}} \prod_{\nu=k_i}^{a_i-1} (x_i + t_i^{(\nu)}).$$

Die neue Singularität entspricht dem abgeschnittenen $a' = (a_i - \alpha_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{e-1})$. Analoges gilt für q mit $y_{\nu} = 0$ für $\nu \geq \epsilon$. $\square$

Die folgenden Teilmengen von T_k definieren wir, um die Aussage über die Komponenten der Diskriminante der Familie $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ formulieren zu können. Wir setzen (vgl. [C1]):

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^k &:= \{p \in T_k : \exists \delta : X_{\delta}^k \text{ hat mehrfache Nullstelle}\} \\ \tilde{D}_{\delta}^k &:= \{p \in T_k : t_{\delta}^{(k_{\delta})} = 0\} \\ \tilde{D}_{\delta,\epsilon}^k &:= \{p \in T_k : t_{\delta}^{(k_{\delta})} = t_{\epsilon}^{(k_{\epsilon})} - t_{\epsilon} = 0 \text{ und } t_{\nu} = 0, \delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 1\}. \end{aligned}$$

Proposition 3.3 *Für eine zyklische Quotientensingularität $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ und eine 0-zulässige Kette $k \in K_{e-2}(X)$ ist die Diskriminante der Deformation $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ genau die Menge*

$$\tilde{D}^k := \tilde{\Delta}^k \cup \bigcup_{\substack{\alpha_{\epsilon} > 1 \\ g \in \mathfrak{G}_{a-k}}} g\tilde{D}_{\epsilon}^k \cup \bigcup_{\substack{\alpha_{\delta}=1, \alpha_{\epsilon}=1 \\ g \in \mathfrak{G}_{a-k}}} g\tilde{D}_{\delta,\epsilon}^k \subset T_k.$$

Beweis: 1) Wir beweisen zunächst, daß die Menge $\tilde{D}^k$ in der Diskriminante liegt.

i) $p \in \tilde{\Delta}^k$: Ist ξ eine mehrfache Nullstelle von X_{δ} im Punkte $p \in T_k$, so enthält die Faser über p den Punkt mit $x_1 = \dots = x_{\delta-1} = x_{\delta} - \xi = y_{\delta+1} = \dots = y_e = 0$. Nach 3.2 ii) können wir annehmen, daß alle t_{ϵ} verschwinden. Ist dann für einen Index $k_{\epsilon} = 1$ und hat die rechte Seite der Gleichung $G_{\epsilon-1,\epsilon+1}^k$ nur einen einfachen Faktor x_{ϵ} , so blasen wir wie in 3.2 i) nieder. Als Ergebnis erhalten wir die Gleichungen einer Singularität, die isomorph zu A_l ist, wenn k bis zu $k^{\delta-2,\delta+2}$ reduziert wurde.

ii) $p \in \tilde{D}_{\delta}^k$: Die Faser über p enthält den Punkt mit $x_{\nu} = 0, \nu \leq \delta$ und $y_{\nu} = 0, \nu > \delta$. In der Tat verschwinden in diesem Punkt wegen Lemma 2.8 alle Gleichungen $G_{\gamma,\epsilon}^k$ für $\epsilon \leq \delta$ oder $\gamma \geq \delta$. Ist $\epsilon > \delta$ und $\gamma < \delta$, so hat wegen $p \in \tilde{D}_{\delta}^k$ das Polynom $Q_{\gamma,\epsilon}^k$ einen Faktor X_{δ}^k , der durch x_{δ} teilbar ist. Man beachte, daß in diesem Fall $a_{\delta} > k_{\delta}$ ist. Wir reduzieren durch eventuelles Abschneiden wie in Lemma 3.2 ii) auf den Fall $t_{\epsilon} = 0$ für alle ϵ . Dann blasen wir nieder, falls ein ν mit $k_{\nu} = 1$ existiert (vgl. Lemma 3.2 i)). Das Ergebnis ist entweder singulär, weil jede rechte Seite der Initialgleichungen einen Faktor x_{ν}^2 enthält, oder

man endet bei $k^{\delta-2,\delta+2} = (2, 1, 2)$. Die Bedingung $t_\delta^{(k_\delta)} = 0$ garantiert dann, daß die Faser in diesem Punkt singulär ist.

iii) $p \in \tilde{D}_{\delta,\epsilon}^k$: In der Faser $(\mathcal{Y}_k)_p$ liegt der Punkt mit $x_\nu = 0, \nu \leq \epsilon - 1$ und $y_\nu = 0, \nu \geq \epsilon$. Wegen Lemma 2.8 verschwinden in diesem Punkt alle Gleichungen $G_{\nu,\mu}$ mit $\mu \leq \epsilon$ oder $\nu \geq \epsilon$. Im Fall $\mu > \epsilon$ und $\nu < \epsilon$ hat das Polynom $Q_{\nu,\mu}^k$ einen Faktor X_ϵ^k , der aufgrund der Voraussetzung $t_\epsilon^{(k_\epsilon)} = t_\epsilon$ durch y_ϵ teilbar ist. Wie unter ii) schneiden wir ab und blasen nieder, bis eine Singularität entsteht oder die Kette $k' = (1, 1)$. Wir bemerken, daß wir in diesem Fall die Gleichungen für $a' = (a'_\delta, a'_\epsilon) \geq (2, 2)$ erzeugt haben.

2) Wir beweisen, daß jeder Punkt der Diskriminante in der Menge $\tilde{D}^k$ liegt. Sei p ein Punkt in der Diskriminante von $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$. Der Beweis erfolgt durch Induktion. Für $e = 4$ haben wir die Gleichungen $x_1x_3 = x_2X_2, x_2x_4 = x_3X_3$ und $x_1x_4 = X_2X_3$. Man zeigt, daß, wenn $\prod_{\nu=1}^{a_2-1} t_2^{(\nu)} \neq 0$ oder $\prod_{\nu=1}^{a_3-1} t_3^{(\nu)} \neq 0$ und X_2 und X_3 keine mehrfachen Nullstellen haben, die Faser glatt ist. Zunächst folgt in einem singulären Punkt der Faser aus dem Verschwinden des Minors x_1^2 natürlich $x_1 = 0$. Wir betrachten dann die weiteren Minoren $(x_2X_2)'X_2X_3'$, $(x_2X_2)'(x_2X_3)'$ und $-(x_2X_2)'x_2$ der Jacobimatrix. Sei nun $\prod_{\nu=1}^{a_2-1} t_2^{(\nu)} \neq 0$. Ist $x_2 = 0$, so folgt: $(x_2X_2)' = X_2 \neq 0$ und deshalb $X_3' = 0$. Da auch $0 = (x_3X_3)' = x_3X_3' + X_3$ gilt, folgt $X_3 = 0$, also $q \in \tilde{\Delta}$. Ist $x_2 \neq 0$, so folgt $(x_2X_2)' = 0$ und wegen $X_2 = 0$ auch $X_2' = 0$, also auch $q \in \tilde{\Delta}$.

Es sei nun $e \geq 5$ und q ein singulärer Punkt der Faser über p , der nicht in $\tilde{\Delta}^k$ liegt. Man reduziere dann zunächst auf den Fall $t_\epsilon = 0, \epsilon = 3, \dots, e - 2$. Ist nämlich ϵ der kleinste Index, für den x_ϵ eine Einheit ist, und δ der größte Index, für den y_δ eine Einheit ist, so ist die Faser isomorph zu einer Singularität mit $a' = (a_\delta - \alpha_{\delta-1}, \dots, a_\epsilon - \alpha_{\epsilon-1})$. Aus den Gleichungen folgt nämlich $x_{\delta-\nu} = Q_{\delta-\nu,\delta}^k/y_\delta$ für $\nu = 2, \dots, \delta - 1$ und damit, daß diese Monome nicht gebraucht werden, um das maximale Ideal zu generieren. Analog schließt man auch für $y_\epsilon + \nu, \nu = 2, \dots, e - \epsilon$. Aus der Singularität von $((\mathcal{Y}_k)_p, q)$ folgt damit $\delta < \epsilon$. Es gilt also $x_\nu = y_\nu = 0$ für $\nu = \delta + 1, \dots, \epsilon - 1$. Anwendung von Lemma 3.2 ii) ergibt die Behauptung. Ist $t_\nu^{(1)} = 0$ für alle ν , so liegt im Falle $k = (1, 2, \dots, 2, 1)$ der Punkt p in $\tilde{D}_{2,e}^k$. Andernfalls hat k ein $k_\delta = 1$ mit $3 \leq \delta \leq e - 2$, und es folgt $p \in \tilde{D}_\delta^k$. Gibt es einen Index δ , so daß $t_\delta^{(1)} \neq 0$, so blasen wir nieder wie in Lemma 3.2 und erhalten eine Singularität niedrigerer Einbettungsdimension. Nach der Induktionsannahme liegt dieser Punkt dann in der behaupteten Menge. $\square$

Korollar 3.4 Die Diskriminante der bei Christophersen beschriebenen Deformation $\mathcal{X}_k \rightarrow V_k$ ist die Menge

$$D := \Delta^k \cup \bigcup_{\alpha_\epsilon > 1} D_\epsilon^k \cup \bigcup_{\alpha_\delta = 1, \alpha_\epsilon = 1} D_{\delta,\epsilon}^k \subset V_k,$$

wobei

$$\Delta^k := \{p \in T_k : \exists \delta : Z_\delta^{(k_\delta)} \text{ hat mehrfache Nullstelle}\}$$

$$D_\delta^k := \{p \in V_k : s_\delta^{(a_\delta - k_\delta)} = 0\}$$

$$D_{\delta,\epsilon}^k := \{p \in V_k : s_\delta^{(a_\delta - k_\delta)} = \tilde{s}_\epsilon^{(a_\epsilon - k_\epsilon)} = 0 \text{ und } t_\nu = 0, \delta + 1 \leq \nu \leq \epsilon - 1\}$$

mit $Z_\epsilon^k = \sum_{\nu=0}^{a_\epsilon - k_\epsilon} y_\epsilon^{a_\epsilon - k_\epsilon - \nu} \tilde{s}_\epsilon^{(\nu)}$, also $\tilde{s}_\epsilon^{(a_\epsilon - k_\epsilon)} = \sum_{\nu=0}^{a_\epsilon - k_\epsilon} (-t_\epsilon)^\nu s_\epsilon^{(a_\epsilon - k_\epsilon - \nu)}$.

Beweis: Nach Umbenennung der Deformationsparameter vermöge $s_\epsilon^{(a_\epsilon - \nu)} = t_\epsilon^{(\nu)}$ (mit $\epsilon = 2, \dots, e-1$ und $\nu = 1, \dots, a_\epsilon - 1$) und $t_\epsilon = s_\epsilon$ ($\epsilon = 3, \dots, e-2$) können die Gleichungen für die Basisräume V_k aus [C1] in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} s_\epsilon^{(\nu)} &= 0, \quad \epsilon = 2, \dots, e-1; \nu = a_\epsilon - (k_\epsilon - 1), \dots, a_\epsilon - 1 \\ t_\epsilon &= 0, \quad \alpha_\epsilon > 0. \end{aligned}$$

Die Zerlegung von $Z_\epsilon^{(k_\epsilon)} = x_\epsilon^{a_\epsilon - k_\epsilon} + x_\epsilon^{a_\epsilon - k_\epsilon - 1} s_\epsilon^{(1)} + \dots + s_\epsilon^{(a_\epsilon - k_\epsilon)}$ aus [C1] in Linearfaktoren ergibt einen Basiswechsel $T_k \rightarrow V_k$, der die Gleichungen aus Abschnitt 2.3 induziert. Aus der Proposition 3.3 erhalten wir dann die Behauptung. Wir bemerken nur, daß die Bedingung $\tilde{s}_\epsilon^{(a_\epsilon - k_\epsilon)} = 0$ äquivalent ist zur Teilbarkeit von $Z_\epsilon^{k_\epsilon}$ durch y_ϵ , also zum Verschwinden eines weiteren $t_\epsilon^{(\nu)}$. $\square$

Korollar 3.5 Für $k \neq l$ aus $K_{e-2}(X)$ und $g, g' \in \mathfrak{G}_{a-1}$ sind die Fasern $(g\mathcal{Y}^k)_p$ und $(g'\mathcal{Y}^l)_p$ über jedem Punkt p von $gT_k \cap g'T_l$ singulär.

Beweis: Ohne Einschränkung betrachten wir nur den Fall $g = g' = id$. Es sei p ein Punkt in $T_k \cap T_l$. Wir wählen Indizes δ und ϵ mit maximalem $\epsilon - \delta$, so daß $k^{\delta, \epsilon} = l^{\delta, \epsilon}$. Ohne Einschränkung sei $\epsilon < e$, und es seien $k_\nu^{\delta, \epsilon+1} = k_\nu^{\delta, \epsilon} + 1$ und $l_\mu^{\delta, \epsilon+1} = l_\mu^{\delta, \epsilon} + 1$ mit $\nu < \mu$. Wir schließen, daß $\alpha_\mu(k) > 0$ und $k_\mu = k_\mu^{\delta, \epsilon+1} < l_\mu$. Es ist $t_\mu = 0$ auf T_k , und es verschwinden die Funktionen $t_\mu^{(1)}, \dots, t_\mu^{(k_\mu)}$, woraus $p \in \tilde{D}_\mu^k$ folgt.

Um auch $p \in \tilde{D}^l$ zu zeigen, beweisen wir durch Induktion, daß auf jedem Pfad durch das Pyramidengitter von $k^{\delta, \epsilon}$ zu k und $l^{\delta, \epsilon}$ zu l eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

- i) Es gibt einen Index i , für den $k_i^{\iota, \kappa} > l_i^{\iota, \kappa}$ und $\alpha_i(l^{\iota, \kappa}) > 1$ gelten.
- ii) Es gibt Indizes $i_1 \leq \dots \leq i_{2s}$ mit $i_{2\mu-1} < i_{2\mu}$ für $\mu = 1, \dots, s$ und den Eigenschaften
 - $\alpha_{\nu'}(k^{\iota, \kappa}) > 1$ für $2\mu - 1 < \nu' < 2\mu$,
 - $k_{i_{2\mu-1}}^{\iota, \kappa} - \alpha_{i_{2\mu-1}-1}(k^{\iota, \kappa}) > l_{i_{2\mu-1}}^{\iota, \kappa} - \alpha_{i_{2\mu-1}-1}(l^{\iota, \kappa})$ für $\mu = 1, \dots, s$ und
 - $k_{i_\nu}^{\iota, \kappa} > l_{i_\nu}^{\iota, \kappa}$ und $\alpha_{i_\nu}(k^{\iota, \kappa}) = \alpha_{i_\nu}(l^{\iota, \kappa}) = 1$ für alle ν .

Darüber hinaus stimmen die Ketten $k^{\iota, \kappa}$ und $l^{\iota, \kappa}$ außerhalb der Intervalle von Indizes $[i_{2\mu-1}, i_{2\mu}]$ überein.

In der Tat ist die Behauptung richtig für $\delta' = \delta$ und $\epsilon' = \epsilon + 1$, denn es gilt in diesem Fall $k_\nu > l_\nu, k_\epsilon > l_\epsilon$ und auch $\alpha_\mu(k^{\delta, \epsilon+1}) > 1$, und natürlich stimmen die Ketten außerhalb von $[\nu, \mu]$ überein. Also gilt ii). Wir nehmen an, daß die Aussage für $k^{\iota, \kappa}$ und $l^{\iota, \kappa}$ bewiesen ist, und verlängern diese Ketten nach links und rechts. Es genügt, nur den Übergang von $k^{\iota, \kappa}$ zu $k^{\iota-1, \kappa}$ und $l^{\iota, \kappa}$ zu $l^{\iota-1, \kappa}$ zu betrachten. Gilt für $k^{\iota, \kappa}$ und $l^{\iota, \kappa}$ die Aussage i), so bleibt dies auch der Fall, da $l^{\iota, \kappa}$ an der Stelle i nicht mehr modifiziert wird. Im Fall ii) seien $k_\nu^{\iota-1, \kappa} = k_\nu^{\iota, \kappa} + 1$ und $l_\mu^{\iota-1, \kappa} = l_\mu^{\iota, \kappa} + 1$. Ist $\nu = \mu$ und dieser Index größer als i_1 , so gilt i) mit $i = i_1$. Ist $\nu = \mu \leq i_1$, so gilt offenbar ii), da links von i_1 die Ketten $k^{\iota, \kappa}$ und $l^{\iota, \kappa}$ übereinstimmen. Aus $\nu < \mu$ folgt die Gültigkeit von i) mit $i = \nu$, da $k_\nu^{\iota, \kappa} \geq l_\nu^{\iota, \kappa}$ gilt. Schließlich folgt im verbleibenden Fall für $\mu < \nu$, daß i) gilt mit $i = i_1$, wenn $i_1 < \mu$. Ist dagegen $\mu \leq i_1$, so haben wir ii) mit dem ersten Indexintervall $[\iota, \nu]$.

Insgesamt ergibt sich, daß für k und l die Aussagen i) oder ii) gelten. Im ersten Fall ist offenbar $p \in \tilde{D}_i^l$. Gilt ii), so ist $p \in \tilde{D}_{i_{2s-1}, i_{2s}}^l$, denn es gilt $t_{i_{2s-1}}^{(l^{\iota, \kappa})} = 0$, wegen $\alpha_{i_{2s-1}}(k^{\iota, \kappa}) > \alpha_{i_{2s-1}}(l^{\iota, \kappa})$, $t_{i_{2s}}^{(l^{\iota, \kappa})} = t_{i_{2s}}$ und $t_j = 0$ für $j = i_{2s-1} + 1, \dots, i_{2s} - 1$. Damit folgt $p \in \tilde{D}^l$. $\square$

3.2 Die Singularitäten der Nachbarfasern

Ist $X = X(a)$ und $k \in K_{e-2}(X)$, so verstehen wir unter $X = X(a')$ mit $k \leq a' \leq a$ die Singularität, die dadurch entsteht, daß wir im Falle von $a'_\epsilon = k_\epsilon = 1$ alle Einsen in k und a' simultan niederblasen (siehe Lemma 3.2 i)).

Proposition 3.6 *Sei $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ eine zyklische Quotientensingularität und $k \in K_{e-2}(X)$.*

- i) (Vgl. [C3]) *Die Singularitäten der Nachbarfasern der Familie $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ sind genau die zyklischen Quotienten $X = X(a'_2, \dots, a'_{e-1})$ mit $k \leq a' \leq a$ und die rationalen Doppelpunkte A_l mit $l \leq a_\epsilon - k_\epsilon - 1$.*
- ii) *Die Singularitäten über den generischen Punkten der einzelnen Komponenten der Diskriminante $\tilde{D}^k$ sind*

- *der Doppelpunkt A_1 auf $\tilde{\Delta}^k$,*
- *die T_0 -Singularität auf der M -Auflösung von k zum Index δ auf $\tilde{D}_\delta^k$ und*
- *die Singularität zur Niederblasung der bei δ und ϵ jeweils um Eins erhöhten Kette k auf $\tilde{D}_{\delta,\epsilon}^k$.*

Beweis: i) Im Beweis zur vorhergehenden Proposition haben wir gesehen, wie man im Fall $q = 0$ und $t_\epsilon = 0$ für $\epsilon = 3, \dots, e-2$ die genannten Singularitäten mit $k' < a' < a$ erhält. Ist $t_\epsilon \neq 0$ für einen Index ϵ , so können wir durch Abschneiden auf den ersten Fall reduzieren (vgl. Lemma 3.2 ii)). Ist nun $q \neq 0$, dann ist aber für einen Index mit $x_\epsilon \neq 0$ entweder $y_\epsilon = 0$, oder X_ϵ^k hat eine mehrfache Nullstelle. Im ersten Fall ist x_ϵ eine lokale Einheit, und wir können hinten abschneiden. Im zweiten Fall erhalten wir eine A_l -Singularität mit $l \leq a_\epsilon - k_\epsilon - 1$.

ii) Auf $\tilde{\Delta}^k$ hat im allgemeinen Fall nur genau ein Polynom X_ϵ^k eine Nullstelle der Ordnung zwei, die ungleich Null ist. An dieser Stelle hat die Faser eine A_1 -Singularität.

Die Singularität im generischen Punkt von $\tilde{D}_\delta^k$ erhalten wir durch Niederblasen der Kette $k' = (k_2, \dots, k_{\delta-1}, k_\delta + 1, k_{\delta+1}, \dots, k_{e-1})$. Nach Lemma 1.4 ii) und Lemma 1.19 ergibt sich eine T -Singularität mit $r = \alpha_\delta$ und Milnorzahl $s - 1 = 0$.

In einem allgemeinen Punkt von $\tilde{D}_{\delta,\epsilon}^k$ können wir k und a simultan an allen Einsen von k niederblasen. Aus Lemma 1.4 i) und iii) folgt dann die Behauptung. $\square$

Beispiel: $X = (3, 3, 3, 3)$ und $k = (2, 2, 1, 3)$. Die Singularitäten der Nachbarfasern sind:

- i) Alle $X(a_2, a_3, a_4, 3)$ mit $2 \leq a_\epsilon \leq 3, \epsilon = 2, 3, 4$.
- ii) $(2, 3, 1, 3) \rightsquigarrow (2, 2, 2)$, $(3, 3, 1, 3) \rightsquigarrow (3, 2, 2)$ sowie die A_1 auf der qG -Komponente der T -Singularität $(2, 2, 3, 3)$.

Bemerkung: Bekanntlich ist die verselle Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ in einer Umgebung eines singulären Punktes einer Faser wieder versell (siehe [P]). Eine Betrachtung der Gleichungen für die einzelnen Familien legt die Vermutung nahe, daß die Deformation $\mathcal{Y} \rightarrow T$ Monodromieüberlagerungen der versellen Deformationen für die Singularitäten der Nachbarfasern

induziert. Ist $X = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ eine zyklische Quotientensingularität, $k \in K_{e-2}(X)$ und $\mathcal{Y} \rightarrow T_{red}$ die in 2.3 beschriebene Überlagerung der versellen Deformation von X , so sei q ein singulärer Punkt in der Faser über der Komponente T_k . Nach Lemma 3.2 ist die Familie $\mathcal{Y}_k \rightarrow T_k$ in einer Umgebung von p isomorph zu einer Familie $\mathcal{Y}'_{k'} \rightarrow T'_{k'}$, wobei a' und k' durch simultane Niederblasungen aus a und k entstehen. In der Tat können die für die Faser über p beschriebenen Koordinatentransformationen auch auf $\mathcal{Y}_k$ angewendet werden. Betrachtet man nun die $e - 2$ ersten Gleichungen, die die Familie $\mathcal{Y} \rightarrow T$ beschreiben, so sieht man, daß diese unter den Transformationen in der Nähe von p in Ausgangsgleichungen einer Familie $\mathcal{Y}' \rightarrow T'$ übergehen. Da sich alle $k'' \in K_{e'-2}(X')$ dadurch erzeugen lassen, daß man die Aufblasungen, die von k' zu k führen, auf k'' anwendet, erhalten wir in einer Umgebung von p tatsächlich alle Komponenten vom T'_{red} .

4 Total- und Basisraumgleichungen

4.1 Ein Algorithmus

In diesem Kapitel wird erläutert, wie die in Abschnitt 1.5 beschriebenen Polynome $P_{\delta,\epsilon}$ in den Totalraumgleichungen der versellen Deformation zyklischer Quotientensingularitäten berechnet werden können. Die in 4.2 formulierte Vermutung über einen induktiven Algorithmus wird durch explizite Durchführung der Rechnungen bis zur Einbettungsdimension 7 und für alle Kegel über rationalen Normkurven bestätigt.

Um die Polynome $P_{\delta,\epsilon}$ in den Totalraumgleichungen $G_{\delta,\epsilon} = x_\delta y_\epsilon - P_{\delta,\epsilon}$ näher beschreiben zu können, leiten wir zunächst aus $Z_\epsilon = Z_\epsilon^{(0,0)}$ durch Teilen durch x_ϵ und durch $y_\epsilon = x_\epsilon + t_\epsilon$ (für $\epsilon = 3, \dots, e - 2$) mit Rest die Polynome $Z_\epsilon^{(i,j)}$ ab. Wir erhalten:

$$Z_\epsilon^{(i,j)} = Z_\epsilon^{(i+1,j)} x_\epsilon + \sigma_\epsilon^{(i+1,j)} = Z_\epsilon^{(i,j+1)} y_\epsilon + \sigma_\epsilon^{(i,j+1)}, \quad (10)$$

wobei $\sigma_\epsilon^{(i,j)} \in \mathbb{C}[s_\epsilon^{(\nu)}, t_\epsilon]$. Weiter schreiben wir:

$$P_{\delta,\epsilon} = \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} x_\nu P_{\delta,\epsilon}^\nu + h(P_{\delta,\epsilon}),$$

mit $P_{\delta,\epsilon}^\nu \in \mathbb{C}[x_{\delta+1}, \dots, x_\nu, s, t]$. Dann können wir zeigen, daß sich aus den Polynomen $P_{\nu,\epsilon-1}^\mu$, $\nu \leq \epsilon - 3$ ein Kandidat für $P_{\delta,\epsilon}$ berechnen läßt.

Bemerkung 4.1 Modulo $I'_{\delta\epsilon} \subset R$ gilt $\tilde{P}_{\delta,\epsilon} = P_{\delta,\epsilon} + R_{\delta,\epsilon}$ mit

$$P_{\delta,\epsilon} = \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon-2} \left(\prod_{i=1}^{l-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l-1)}, \quad (11)$$

$$R_{\delta,\epsilon} = \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} x_\nu \frac{R_{\delta,\epsilon}^\nu}{x_{\epsilon-2}}, \quad R_{\delta,\epsilon}^\nu = \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \nu} \left(\prod_{i=1}^l P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}} \right) \sigma_{\epsilon-1}^{(0, l)}. \quad (12)$$

Beweis: Wir zeigen durch Induktion, daß $P_{\delta,\epsilon}$ für $l = 2, \dots, \epsilon - \delta - 1$ äquivalent ist zu:

$$\sum_{\substack{\delta=\nu_1<\dots<\nu_{l'}=\epsilon-2 \\ l' \leq l}} \left(\prod_{i=1}^{l'-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}} \right) Z_{\epsilon-1}^{(0, l'-1)} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} x_\nu \left(\sum_{\substack{\delta=\nu_1<\dots<\nu_{l'}=\nu \\ l' \leq l}} \left(\prod_{i=1}^{l'-1} P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}} \right) \frac{\sigma_{\epsilon-1}^{(0, l')}}{x_{\epsilon-2}} \right) + A_l \quad (13)$$

mit

$$A_l = \sum_{\substack{\delta=\nu_1<\dots<\nu_{l'} \leq \epsilon-3 \\ l'=l}} \left(\prod_{i=1}^{l'-1} (P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}}) P_{\nu_{l'}, \epsilon-1} \frac{Z_{\epsilon-1}^{(0, l')}}{x_{\epsilon-2}} \right), \quad A_{\epsilon-\delta-1} = 0.$$

In der Tat erhalten wir die Aussage für $l = 2$, denn:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\delta, \epsilon} &\equiv P_{\delta, \epsilon-1} \frac{Z_{\epsilon-1}^{(0, 1)}}{x_{\epsilon-2}} \\ &\equiv \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-2} x_\nu P_{\delta, \epsilon-1}^\nu \frac{y_{\epsilon-1} Z_{\epsilon-1}^{(0, 2)} + \sigma_{\epsilon-1}^{(0, 2)}}{x_{\epsilon-2}} + P_{\delta, \epsilon-1}^{\epsilon-2} Z_{\epsilon-1}^{(01)} \\ &\equiv P_{\delta, \epsilon-1}^{\epsilon-2} Z_{\epsilon-1}^{(0, 1)} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} x_\nu P_{\delta, \epsilon-1}^\nu \frac{\sigma_{\epsilon-1}^{(0, 2)}}{x_{\epsilon-2}} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} P_{\delta, \epsilon-1}^\nu P_{\nu, \epsilon-1} \frac{Z_{\epsilon-1}^{(0, 2)}}{x_{\epsilon-2}}. \end{aligned}$$

Im Induktionsschritt entwickeln wir die Terme $P_{\nu', \epsilon-1}$ in den x_μ und erhalten:

$$\begin{aligned} A_l &= \sum_{\substack{\delta=\nu_1<\dots<\nu_{l'} \leq \epsilon-3 \\ l'=l}} \left[\left(\prod_{i=1}^{l'-1} (P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}}) P_{\nu_{l'}, \epsilon-1}^{\epsilon-2} Z_{\epsilon-1}^{(0, l')} \right) + \left(\prod_{i=1}^{l'-1} (P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}}) \sum_{\mu=\nu_{l'}'+1}^{\epsilon-3} P_{\nu_{l'}, \epsilon-1}^\mu x_\mu \frac{\sigma_{\epsilon-1}^{(0, l'+1)}}{x_{\epsilon-2}} \right) \right] \\ &+ \sum_{\substack{\delta=\nu_1<\dots<\nu_{l'} \leq \epsilon-3 \\ l'=l}} \left(\prod_{i=1}^{l'-1} (P_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}}) \sum_{\mu=\nu_{l'}'+1}^{\epsilon-3} P_{\nu_{l'}, \epsilon-1}^\mu P_{\mu, \epsilon-1} \frac{Z_{\epsilon-1}^{(0, l'+1)}}{x_{\epsilon-2}} \right). \end{aligned}$$

Man sieht, daß für alle $(\nu_1, \dots, \nu_{l'})$ der erste Summand zur ersten Summe und der zweite Summand zur zweiten Summe in (13) gehören. Der dritte Summand ist genau A_{l+1} . $\square$

Der rechnerische Nachweis für kleine Einbettungsdimensionen und der Beweis für Kegel über rationalen Normkurven beliebigen Grades veranlaßt uns dazu, die folgende Vermutung zu formulieren.

Vermutung 4.2 *Startet man mit $P_{\delta-1, \delta+1} = Z_\delta$, so werden durch (11) induktiv Polynome $P_{\delta, \epsilon}$ definiert, die modulo $I'_{\delta, \epsilon}$ äquivalent zu der rationalen Funktion $\tilde{P}_{\delta, \epsilon}$ sind. Genauer gilt $R_{\delta, \epsilon}^\nu \in I'_{\delta, \epsilon}$.*

Korollar 4.3 *Ist die Vermutung 4.2 richtig, so erhält man auch Algorithmen für die Basisraumgleichungen. Für die x -konstanten Teile gilt zum Beispiel:*

$$h_{\delta,\epsilon} = \sum_{\delta=\nu_1 < \dots < \nu_l = \epsilon-2} \left(\prod_{i=1}^{l-1} h_{\nu_i, \epsilon-1}^{\nu_{i+1}} \right) \sigma_{\epsilon-1}^{(1,l+1)},$$

wobei die $h_{\nu, \epsilon-1}^\mu$ der x -konstante Teil des Polynoms $P_{\nu, \epsilon-1}^\mu$ sei.

4.2 Die Gleichungen in kleinen Einbettungsdimensionen

Für die Durchführung der Berechnungen in diesem Abschnitt bemerken wir zunächst, daß durch Induktion folgt, daß die Polynome $P_{\delta,\epsilon}$ aus Monomen in den $Z_\nu^{(i,j)}$ und $\sigma_\nu^{(ij)}$ der Gestalt

$$\sigma \prod_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} Z_\nu^{(i_\nu, j_\nu)}, \quad \sigma = \prod_{\nu=\delta+2}^{\epsilon-2} \sigma_\nu$$

mit Monomen $\sigma_\nu \in \mathbb{C}[\sigma_\nu^{(ij)}]$ bestehen. Für ein solches Monom, kurz σZ , und ein $\nu \in \{\delta+1, \dots, \epsilon-1\}$ definieren wir

$$(\sigma Z)^\nu := \sigma(\sigma_{\nu+1}^{(i_{\nu+1}+1, j_{\nu+1})} \dots \sigma_{\epsilon-1}^{(i_{\epsilon-1}+1, j_{\epsilon-1})}) \left(\prod_{\mu=\delta+1}^{\nu-1} Z_\mu^{(i_\mu, j_\mu)} \right) Z_\nu^{(i_\nu+1, j_\nu)}. \quad (14)$$

Dann gilt offenbar

$$\sigma Z = \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-1} x_\nu (\sigma Z)^\nu + h(\sigma Z).$$

Für $P_{\delta,\epsilon}$, das eine Summe von Monomen σZ ist, können wir dann $P_{\delta,\epsilon}^\nu = \sum (\sigma Z)^\nu$ setzen.

Proposition 4.4 *Die Vermutung 4.2 ist richtig für alle Gleichungen $P_{\delta,\epsilon}$ mit $\epsilon - \delta \leq 6$.*

Beweis: i) (vgl. [A, p. 53]) $\epsilon - \delta \leq 4$. Aus $P_{\delta,\delta+2} = Z_{\delta+1}$ schließen wir mit (11) und (12):

$$P_{\delta,\delta+3} = P_{\delta,\delta+2}^{\delta+1} Z_{\delta+2}^{(0,1)} = Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(0,1)}, \quad R_{\delta,\delta+3} = 0,$$

also

$$h_{\delta,\delta+3} = \sigma_{\delta+1}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)}, \quad h'_{\delta,\delta+3} = \sigma_{\delta+1}^{(1,1)} \sigma_{\delta+2}^{(0,2)}.$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} P_{\delta,\delta+4} &= P_{\delta,\delta+3}^{\delta+2} Z_{\delta+3}^{(0,1)} + P_{\delta,\delta+3}^{\delta+1} P_{\delta+1,\delta+3}^{\delta+2} Z_{\delta+3}^{(0,2)} \\ &= Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+3}^{(0,1)} + \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(0,2)} \end{aligned}$$

und

$$R_{\delta,\delta+4} = R_{\delta,\delta+4}^{\delta+1} = x_{\delta+1} P_{\delta+1,\delta+3}^{\delta+2} \frac{\sigma_{\delta+3}^{(0,2)}}{x_{\delta+2}} = x_{\delta+1} Z_{\delta+1}^{(1,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \frac{\sigma_{\delta+3}^{(0,2)}}{x_{\delta+2}} \in (h'_{\delta+1,\delta+4}).$$

Für die x - und y -konstanten Teile von $P_{\delta,\delta+4}$ erhalten wir:

$$h_{\delta,\delta+4} = \sigma_{\delta+1}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} + \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+1}^{(3,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)}, \quad h'_{\delta,\delta+4} = \sigma_{\delta+1}^{(1,1)} \sigma_{\delta+2}^{(1,2)} \sigma_{\delta+3}^{(0,2)} + \sigma_{\delta+1}^{(2,1)} (\sigma_{\delta+2}^{(1,1)})^2 \sigma_{\delta+3}^{(0,3)}.$$

ii) Für $\epsilon = \delta + 5$ ergibt sich mit (11):

$$\begin{aligned} P_{\delta,\delta+5} &= P_{\delta,\delta+4}^{\delta+3} Z_{\delta+1}^{(0,1)} + P_{\delta,\delta+3}^{\delta+2} P_{\delta+2,\delta+4}^{\delta+3} Z_{\delta+1}^{(0,2)} + P_{\delta,\delta+4}^{\delta+1} P_{\delta+1,\delta+4}^{\delta+3} Z_{\delta+1}^{(0,2)} \\ &\quad + P_{\delta,\delta+4}^{\delta+1} P_{\delta+1,\delta+4}^{\delta+2} P_{\delta+2,\delta+4}^{\delta+3} Z_{\delta+1}^{(0,3)} \\ &= Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,1)} + \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+4}^{(0,1)} \\ &\quad + \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(2,1)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} + \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} \\ &\quad + \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} + \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} Z_{\delta+1}^{(3,0)} Z_{\delta+2}^{(1,0)} Z_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+4}^{(0,2)} \\ &\quad + \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} (\sigma_{\delta+3}^{(1,1)})^2 Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,3)} + \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} Z_{\delta+1}^{(3,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} Z_{\delta+3}^{(1,0)} Z_{\delta+4}^{(0,3)}. \end{aligned}$$

Für den Rest erhalten wir aus (12):

$$\begin{aligned} R_{\delta,\delta+5} &= x_{\delta+3}^{-1} (x_{\delta+1} R_{\delta,\delta+5}^{\delta+1} + x_{\delta+2} R_{\delta,\delta+5}^{\delta+2}) \\ &= x_{\delta+3}^{-1} (x_{\delta+1} P_{\delta,\delta+4}^{\delta+1} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)} + x_{\delta+2} (P_{\delta,\delta+4}^{\delta+2} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)} + P_{\delta,\delta+4}^{\delta+1} P_{\delta+2,\delta+4}^{\delta+2} \sigma_{\delta+1}^{(0,3)})) \\ &= x_{\delta+3}^{-1} (x_{\delta+1} (Z_{\delta+1}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)} + Z_{\delta+1}^{(3,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)}) \\ &\quad + x_{\delta+2} (Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(2,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)} + Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)} \\ &\quad + Z_{\delta+1}^{(2,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,1)} (\sigma_{\delta+3}^{(1,1)})^2 \sigma_{\delta+4}^{(0,3)} + Z_{\delta+1}^{(3,0)} Z_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(2,0)} \sigma_{\delta+2}^{(1,1)} \sigma_{\delta+3}^{(1,2)} \sigma_{\delta+3}^{(1,1)} \sigma_{\delta+4}^{(0,2)})). \end{aligned}$$

Man sieht, daß der erste und der dritte Summand in $(h'_{\delta+2,\delta+5})$, der sechste in $(h_{\delta+1,\delta+4})$, der zweite Summand in $(h_{\delta+1,\delta+4}, h'_{\delta+1,\delta+5})$ und die Summe des vierten und fünften Summanden in $(h'_{\delta+1,\delta+5})$ liegen.

iii) $\epsilon = \delta + 6$: In diesem Fall geben wir wegen des hohen Rechenaufwands nur die einzelnen Terme des Restes $R_{1,7}$ an. Zur Vereinfachung schreiben wir ein Monom

$$\sigma Z = \prod_{2 \leq \nu \leq 6, 1 \leq \mu \leq 4} \sigma_{\nu}^{(i_{\nu}^{\mu}, j_{\nu}^{\mu})} \prod_{2 \leq \nu \leq 6} Z_{\nu}^{(i_{\nu}, j_{\nu})}$$

als Matrix in der Form:

$$\begin{array}{ccccc} i_2 j_2 & i_3 j_3 & i_4 j_4 & & \\ & i_3^1 j_3^1 & i_4^1 j_4^1 & i_5^1 j_5^1 & i_6^1 j_6^1 \\ & i_3^2 j_3^2 & i_4^2 j_4^2 & i_5^2 j_5^2 & \\ & i_3^3 j_3^3 & i_4^3 j_4^3 & i_5^3 j_5^3 & \\ & i_3^4 j_3^4 & i_4^4 j_4^4 & i_5^4 j_5^4 & \end{array}$$

Faktoren $\sigma_{\nu}^{(i_{\nu}^{\mu}, j_{\nu}^{\mu})}$ und $Z_{\nu}^{(i_{\nu}, j_{\nu})}$, die gleich Eins sind, werden dabei in der Matrix weggelassen. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte die Summanden von $R_{1,7}^2$ und in den Spalten zwei bis vier die von $R_{1,7}^3$ (Spalten 2-4). Dabei haben die sieben Zeilen ihren Ursprung in den sieben Summanden des Polynoms $P_{1,6}$.

$P_{1,6}^2 \sigma_6^{(0,2)}$	$P_{1,6}^3 \sigma_6^{(0,2)}$	$P_{1,6}^2 P_{2,6}^3 \sigma_6^{(0,3)}$	
20 21 21 11 02	10 21 21 11 02	20 20 21 21 11 03 21 11	20 30 21 21 11 03 20 12 11
30 20 22 11 02 11	20 20 11 22 11 02	30 20 20 22 11 03 11 21 11	30 30 20 22 11 03 11 20 12 11
20 31 20 12 02 11	10 31 20 12 02 11	20 20 31 20 12 03 11 11 21	20 30 31 20 12 03 11 12 20 11
30 30 20 12 02 11 12	20 30 11 20 12 02 12	30 20 30 20 12 03 11 12 11 21	30 30 30 20 12 03 11 12 12 21 11
30 20 21 12 02 21 11	20 20 21 21 12 02 11	30 20 20 21 12 03 21 11 11 21	30 30 20 21 12 03 21 11 12 20 11
40 20 21 12 02 20 12 11	30 20 20 21 12 02 11 12	40 20 20 21 12 03 20 12 11 11 21	40 30 20 21 12 03 20 12 12 11 11 20
30 30 20 13 02 21 11 11	20 30 21 20 13 02 11 11	30 20 30 20 13 03 21 11 11 11 21	30 30 30 20 13 03 21 11 12 11 20 11

Die Summe der Terme in der ersten Spalte liegt im Ideal $I_{1,7}$. Zum Beispiel sind die ersten beiden Summanden Vielfache von $h'_{4,7} = \sigma_5^{(1,1)} \sigma_6^{(0,2)}$. Die Summe der Terme vier und sieben liegt modulo $h'_{2,7}$ im Ideal.

Für $R_{1,7}^4 = P_{1,6}^4 \sigma_6^{(0,2)} + (P_{1,6}^2 P_{2,6}^4 + P_{1,6}^3 P_{3,6}^4) \sigma_6^{(0,3)} + P_{1,6}^2 P_{2,6}^3 P_{3,6}^4 \sigma_6^{(0,4)}$ erhalten wir:

$P_{1,6}^4 \sigma_6^{(0,2)}$	$P_{1,6}^2 P_{2,6}^4 \sigma_6^{(0,3)}$		$P_{1,6}^3 P_{3,6}^4 \sigma_6^{(0,3)}$	$P_{1,6}^2 P_{2,6}^3 P_{3,6}^4 \sigma_6^{(0,3)}$
10 11 21 11 02	20 10 21 21 21 11 03 11	20 20 20 21 21 11 03 11 12	10 21 20 21 11 03 11	20 20 20 21 21 11 04 21 11 11
20 10 22 11 11 02	30 10 21 20 22 11 03 11 11	30 20 20 20 22 11 03 11 11 12	20 20 20 11 22 11 03 11	30 20 20 20 22 11 04 11 21 11 11
10 21 20 11 12 02	20 10 21 31 20 12 03 11 11	20 20 20 31 20 12 03 11 12 11	10 31 20 20 12 03 11 11	20 20 20 31 20 12 04 11 11 11
20 20 20 11 12 12 02	30 10 21 30 20 12 03 11 12 11	30 20 20 30 20 12 03 11 12 12 11	20 30 20 11 20 12 03 12 11	30 20 20 30 20 12 04 11 12 11 21 11
20 10 21 21 11 12 02	30 10 21 20 21 12 03 21 11 11	30 20 20 20 21 12 03 21 11 11	20 20 20 21 21 12 03 11 11	30 20 20 20 21 12 04 21 11 11 21 11
30 10 21 20 12 12 02 11	40 10 21 20 21 12 03 20 12 11 11	40 20 20 20 21 12 03 20 12 12 11 11	30 20 20 20 21 12 03 11 12 11	40 20 20 20 21 12 04 20 12 11 11 21 11
20 20 20 21 11 13 02 11	30 10 21 30 20 13 03 21 11 11 11	30 20 20 30 20 13 03 21 11 12 11 11	20 30 20 21 20 13 03 11 11 11	30 20 20 30 20 13 04 21 11 11 11 11 21

Wir führen nur die ersten sieben Summanden von $P_{1,6}^2 P_{2,6}^3 P_{3,6}^4 \sigma_6^{(0,3)}$ auf, weil jeder Summand, der den Faktor $\begin{smallmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 12 \\ 11 & 11 \end{smallmatrix}$ besitzt, schon im Ideal liegt. Die Summen aller Monome mit einem gemeinsamen Faktor $Z_2^{(i,j)} Z_3^{(k,l)} Z_4^{(m,n)}$ liegen jeweils im Ideal. Man sieht zum Beispiel, daß vor $Z_2^{(2,0)} Z_3^{(2,0)} Z_4^{(2,0)}$ als Faktor genau der Erzeuger h'_{27} steht. Insgesamt folgt $R_{1,7}^4 \in (h_{3,5}, h_{4,6}, h_{3,6}, h'_{4,7}, h'_{3,7}, h'_{2,7})$. $\square$

Korollar 4.5 *Der Algorithmus im Abschnitt 3.3 liefert für alle zyklischen Quotientensingularitäten X alle Basisraumgleichungen $h_{\delta\epsilon}$ und $h'_{\delta\epsilon}$ mit $\epsilon - \delta \leq 6$. Insbesondere erhalten wir alle Basisraumgleichungen für $e = e(X) \leq 8$.*

Beispiele: Um die Gleichungen in den Variablen $s_\epsilon^{(\nu)}, t_\epsilon$ zu schreiben, müssen noch die Polynome $\sigma_\epsilon^{(i,j)}$ aufgelöst werden. Hierzu führen wir wie in ([A], 5.1) die Variablen $\tilde{s}_\epsilon^{(\nu)}$ ein, indem wir setzen:

$$Z_\delta = y_\delta \sum_{\nu=1}^{a_\delta-1} x_\delta^\nu s_\delta^{(a_\delta-1-\nu)} = x_\delta \sum_{\nu=1}^{a_\delta-1} y_\delta^\nu \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-1-\nu)}, \quad \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-1-\nu)} = \sum_{\mu=\nu}^{a_\delta-1} \binom{\mu-1}{\nu-1} (-t_\delta)^{\mu-\nu} s_\delta^{(a_\delta-1-\mu)}.$$

Dabei sei $s_\delta^{(0)} = 1$. In diesen Variablen ergibt sich dann für die $\sigma_\delta^{(i,j)}$, die wir in diesem Abschnitt brauchen (man beachte $\sigma_\delta^{(i,j)} = (\sigma_\delta^{(i,j-1)} - \sigma_\delta^{(i-1,j)})/t_\delta$):

$\sigma_\delta^{(i,j)}$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 0$		0	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-1)} - t_\delta \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-2)}$	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-2)} - t_\delta \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-3)}$	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-3)} - t_\delta \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-4)}$
$i = 1$	$s_\delta^{(a_\delta-1)} t_\delta$	$s_\delta^{(a_\delta-1)}$	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-2)}$	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-3)}$	$\tilde{s}_\delta^{(a_\delta-4)}$
$i = 2$	$s_\delta^{(a_\delta-1)} + t_\delta s_\delta^{(a_\delta-2)}$	$s_\delta^{(a_\delta-2)}$	$\frac{(s_\delta^{(a_\delta-2)} - \tilde{s}_\delta^{(a_\delta-2)})}{t_\delta}$		
$i = 3$	$s_\delta^{(a_\delta-2)} + t_\delta s_\delta^{(a_\delta-3)}$	$s_\delta^{(a_\delta-3)}$			
$i = 4$	$s_\delta^{(a_\delta-3)} + t_\delta s_\delta^{(a_\delta-4)}$	$s_\delta^{(a_\delta-4)}$			

i) Der Basisraum für $e = 5$ hat die drei Gleichungen

$$h_{2,4} = s_3^{(a_3-1)} t_3, \quad h_{1,4} = s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-1)}, \quad h'_{2,5} = s_3^{(a_3-1)} s_4^{(a_4-1)}$$

und die beiden Komponenten $s_3^{(a_3-1)} = 0$ und $s_2^{(a_2-1)} = t_3 = s_4^{(a_4-1)} = 0$.

ii) Im Fall $e = 6$ erhalten wir die Basisraumgleichungen:

$$\begin{aligned}
h_{2,4} &= s_3^{(a_3-1)} t_3 & h_{3,5} &= s_4^{(a_4-1)} t_4 \\
h_{1,4} &= s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-1)} & h_{2,5} &= (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)}) s_4^{(a_4-1)} \\
h'_{2,5} &= s_3^{(a_3-1)} (s_4^{(a_4-1)} - t_4 \tilde{s}_4^{(a_4-2)}) & h'_{3,6} &= s_4^{(a_4-1)} s_5^{(a_5-1)} \\
h_{1,5} &= s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-2)} s_4^{(a_4-1)} & h'_{2,6} &= s_3^{(a_3-1)} \tilde{s}_4^{(a_4-2)} s_5^{(a_5-1)} \\
&+ s_2^{(a_2-2)} (s_3^{(a_3-1)})^2 \tilde{s}_4^{(a_4-2)} & &+ s_3^{(a_3-2)} (s_4^{(a_4-1)})^2 s_5^{(a_5-2)}
\end{aligned}$$

Man beachte bei der Berechnung von $h_{1,5}$, daß $\sigma_3^{(1,1)} \sigma_3^{(2,0)}$ modulo $h_{2,4}$ äquivalent zu $(\sigma_3^{(1,1)})^2$ ist. Die möglichen fünf Komponenten finden sich in den Beispielen am Ende des Abschnitts 2.1.

iii) $e = 7$: Neben den 3 Gleichungen

$$h_{2,4} = t_3 s_3^{(a_3-1)}, h_{3,5} = t_4 s_4^{(a_4-1)}, h_{4,6} = t_5 s_5^{(a_5-1)}$$

erhalten wir für $\epsilon - \delta = 3, 4$:

$$\begin{aligned}
h_{1,4} &= s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-1)} \\
h_{2,5} &= (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)}) s_4^{(a_4-1)} & h'_{2,5} &= s_3^{(a_3-1)} (\tilde{s}_4^{(a_4-1)} - t_4 \tilde{s}_4^{(a_4-2)}) \\
h_{3,6} &= (s_4^{(a_4-1)} + t_4 s_4^{(a_4-2)}) s_5^{(a_5-1)} & h'_{3,6} &= s_4^{(a_4-1)} (\tilde{s}_5^{(a_5-1)} - t_5 \tilde{s}_5^{(a_5-2)}) \\
& & h'_{4,7} &= s_5^{(a_5-1)} s_6^{(a_6-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{1,5} &= s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-2)} s_4^{(a_4-1)} + s_2^{(a_2-2)} (s_3^{(a_3-1)})^2 \tilde{s}_4^{(a_4-2)} \\
h_{2,6} &= (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)}) s_4^{(a_4-2)} s_5^{(a_5-1)} + (s_3^{(a_3-2)} + t_3 s_3^{(a_3-3)}) (s_4^{(a_4-1)})^2 \tilde{s}_5^{(a_5-2)} \\
h'_{2,6} &= s_3^{(a_3-1)} \tilde{s}_4^{(a_4-2)} (\tilde{s}_5^{(a_5-1)} - t_5 \tilde{s}_5^{(a_5-2)}) + s_3^{(a_3-2)} (s_4^{(a_4-1)})^2 (\tilde{s}_5^{(a_5-2)} - t_5 \tilde{s}_5^{(a_5-3)}) \\
h'_{3,7} &= s_4^{(a_4-1)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} s_6^{(a_6-1)} + s_4^{(a_4-2)} (s_5^{(a_5-1)})^2 s_6^{(a_6-2)}
\end{aligned}$$

sowie für $\epsilon - \delta = 5$:

$$\begin{aligned}
h_{1,6} &= s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-2)} s_4^{(a_4-2)} s_5^{(a_5-1)} \\
&+ s_2^{(a_2-2)} s_3^{(a_3-1)} (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)}) \left(\frac{s_4^{(a_4-2)} - \tilde{s}_4^{(a_4-2)}}{t_4} \right) s_5^{(a_5-1)} \\
&+ s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3-3)} s_4^{(a_4-1)} (s_4^{(a_4-1)} + t_4 s_4^{(a_4-2)}) \tilde{s}_5^{(a_5-2)} \\
&+ s_2^{(a_2-2)} s_3^{(a_3-1)} (s_3^{(a_3-2)} + t_3 s_3^{(a_3-3)}) \tilde{s}_4^{(a_4-2)} (s_4^{(a_4-1)} + t_4 s_4^{(a_4-2)}) \tilde{s}_5^{(a_5-2)} \\
&+ s_2^{(a_2-2)} s_3^{(a_3-2)} (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)}) s_4^{(a_4-1)} s_4^{(a_4-2)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} \\
&+ s_2^{(a_2-3)} (s_3^{(a_3-1)} + t_3 s_3^{(a_3-2)})^2 s_3^{(a_3-1)} \tilde{s}_4^{(a_4-2)} s_4^{(a_4-2)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} \\
&+ s_2^{(a_2-2)} s_3^{(a_3-2)} (s_3^{(a_3-2)} + t_3 s_3^{(a_3-3)}) (s_4^{(a_4-1)})^2 (s_4^{(a_4-1)} + t_4 s_4^{(a_4-2)}) \tilde{s}_5^{(a_5-3)} \\
h'_{2,7} &= s_3^{(a_3-1)} \tilde{s}_4^{(a_4-2)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} s_6^{(a_6-1)} \\
&+ s_3^{(a_3-2)} (s_4^{(a_4-1)})^2 \tilde{s}_5^{(a_5-3)} s_6^{(a_6-1)} \\
&+ s_3^{(a_3-1)} \left(\frac{s_4^{(a_4-2)} - \tilde{s}_4^{(a_4-2)}}{t_4} \right) (s_5^{(a_5-1)})^2 s_6^{(a_6-2)} \\
&+ s_3^{(a_3-2)} s_4^{(a_4-1)} s_4^{(a_4-2)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} s_5^{(a_5-1)} s_6^{(a_6-2)} \\
&+ s_3^{(a_3-2)} s_4^{(a_4-2)} s_4^{(a_4-1)} s_5^{(a_5-1)} \tilde{s}_5^{(a_5-2)} s_6^{(a_6-2)} \\
&+ s_3^{(a_3-3)} (s_4^{(a_4-1)} + t_4 s_4^{(a_4-2)}) (s_4^{(a_4-1)})^2 (\tilde{s}_5^{(a_5-2)})^2 s_6^{(a_6-2)} \\
&+ s_3^{(a_3-2)} (s_4^{(a_4-2)})^2 (s_5^{(a_5-1)})^3 s_6^{(a_6-3)}
\end{aligned}$$

4.3 Kegel über rationalen Normkurven

Beschreibungen der versellen Deformationen von Kegeln über rationalen Kurven finden sich schon bei [Pi, II.8.]. Die folgende Proposition zeigt, daß der Algorithmus aus 4.1 zu den in [A, 5.1.4] angegebenen Gleichungen führt.

Proposition 4.6 *Für die Total- und Basisraumgleichungen der versellen Deformation des Kegels über einer rationalen Normkurve vom Grad $n = e - 1$ gilt:*

$$P_{\delta, \delta+2} = y_\delta(x_\delta + s_\delta), \quad h_{\delta, \delta+2} = s_\delta t_\delta$$

und für $\delta + 2 < \epsilon$:

$$\begin{aligned}
P_{\delta, \epsilon} &= (y_{\delta+1} + s_{\delta+1})x_{\epsilon-1} + \sum_{\nu=2}^{\epsilon-\delta-1} s_{\delta+\nu}x_{\epsilon-\nu} + h_{\delta, \epsilon} \\
&= y_{\delta+1}(x_{\epsilon-1} + s_{\epsilon-1}) + \sum_{\nu=1}^{\epsilon-\delta-2} s_{\delta+\nu}y_{\epsilon-\nu} + h'_{\delta, \epsilon},
\end{aligned}$$

wobei gilt

$$h_{\delta, \epsilon} = \sum_{\mu=1}^{\epsilon-\delta-2} (s_{\delta+\mu} + t_{\delta+\mu})s_{\epsilon-\mu}, \quad h'_{\delta, \epsilon} = s_{\delta+1}(s_{\epsilon-1} - t_{\epsilon-1}) + \sum_{\mu=2}^{\epsilon-\delta-2} s_{\delta+\mu}s_{\epsilon-\mu}.$$

Beweis: Wegen $Z_\epsilon^{(0,3)} = \sigma_\epsilon^{(0,4)} = 0$ schließen wir in unserem Fall aus den Formeln (11) und (12):

$$P_{\delta,\epsilon} = P_{\delta,\epsilon}^{\epsilon-2} Z_{\epsilon-1}^{(0,1)} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} P_{\delta,\epsilon-1}^\nu P_{\nu,\epsilon-1}^{\epsilon-2} Z_{\epsilon-1}^{(0,2)} \quad (15)$$

$$R_{\delta,\epsilon} = \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-3} x_\nu P_{\delta,\epsilon-1}^\nu \frac{\sigma_{\epsilon-1}^{(0,2)}}{x_{\epsilon-2}} + \sum_{\delta < \nu_1 < \nu_2 \leq \epsilon-3} x_{\nu_2} P_{\delta,\epsilon-1}^{\nu_1} P_{\nu_1,\epsilon-1}^{\nu_2} \frac{\sigma_{\epsilon-1}^{(0,3)}}{x_{\epsilon-2}} \quad (16)$$

Wir zeigen induktiv, daß diese Polynome die obige Gestalt haben und daß die Reste $R_{\delta,\epsilon}$ in den Idealen $I'_{\delta,\epsilon}$ liegen. Ist dann zunächst $\epsilon = \delta + 3$, so folgt $R_{\delta,\delta+3} = 0$ und wie behauptet:

$$\begin{aligned} P_{\delta,\delta+3} &= P_{\delta,\delta+2}^{\delta+1} Z_{\delta+2}^{(0,1)} = Z_{\delta+1}^{(1,0)} Z_{\delta+2}^{(0,1)} \\ &= (x_{\delta+1} + t_{\delta+1} + s_{\delta+1})(x_{\delta+2} + s_{\delta+2}) \\ &= (y_{\delta+1} + s_{\delta+1})x_{\delta+2} + x_{\delta+1}s_{\delta+2} + (s_{\delta+1} + t_{\delta+1})s_{\delta+2} \end{aligned}$$

Es sei die Aussage für $\epsilon \geq \delta + 3$ bewiesen. Wir schließen wegen $Z_\epsilon^{(0,1)} = (x_\epsilon - s_\epsilon)$ und $Z_\epsilon^{(0,2)} = 1$ mit der Formel (15) und aus der Induktionsannahme:

$$\begin{aligned} P_{\delta,\epsilon+1} &= P_{\delta,\epsilon}^{\epsilon-1} Z_\epsilon^{(0,1)} + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-2} P_{\delta,\epsilon}^\nu P_{\nu,\epsilon}^{\epsilon-1} Z_\epsilon^{(0,2)} \\ &= (y_{\delta+1} + s_{\delta+1})(x_\epsilon - s_\epsilon) + \sum_{\nu=\delta+1}^{\epsilon-2} s_{\epsilon+\delta-\nu} (y_{\nu+1} + s_{\nu+1}) \\ &= (y_{\delta+1} + s_{\delta+1})x_\epsilon + x_{\delta+1}s_\epsilon + (t_{\delta+1} + s_{\delta+1})s_\epsilon + \sum_{\nu=2}^{\epsilon-\delta-1} s_{\delta+\nu} (x_{\epsilon-\nu+1} + (s_{\epsilon-\nu+1} + t_{\epsilon-\nu+1})) \\ &= (y_{\delta+1} + s_{\delta+1})x_\epsilon + \sum_{\nu=2}^{\epsilon-\delta} s_{\delta+\nu} x_{\epsilon+1-\nu} + h_{\delta,\epsilon+1}. \end{aligned}$$

Für den Rest $R_{\delta,\epsilon+1}$ erhalten wir mit (16) und $\sigma_\epsilon^{(0,2)} = (s_\epsilon - t_\epsilon)$, $\sigma_\epsilon^{(0,3)} = 1$:

$$\begin{aligned} R_{\delta,\epsilon-1} &= \frac{1}{x_{\epsilon-1}} \left[\sum_{\nu=1}^{\epsilon-\delta-2} x_{\delta+\nu} s_{\epsilon-\nu} (s_\epsilon - t_\epsilon) + \sum_{\nu_1=1}^{\epsilon-\delta-2} \sum_{\nu_2=\nu_1}^{\epsilon-\delta-\nu_1-1} x_{\delta+\nu_2} s_{\epsilon-\nu_1} s_{\epsilon+\nu_1-\nu_2} \right] \\ &= \frac{1}{x_{\epsilon-1}} \left[\sum_{\nu=1}^{\epsilon-\delta-2} x_{\delta+\nu} s_{\epsilon-\nu} (s_\epsilon - t_\epsilon) + \sum_{\nu_1=2}^{\epsilon-\delta-2} x_{\delta+\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu-1} s_{\epsilon-\nu+\mu} s_{\epsilon-\mu} \right] \\ &= \frac{1}{x_{\epsilon-1}} \sum_{\nu=1}^{\epsilon-\delta-2} x_{\delta+\nu} h'_{\epsilon-\nu-1,\epsilon+1} \in I'_{\delta,\epsilon+1} \end{aligned}$$

□

4.4 Eingebettete Komponenten

Pinkham zeigt in ([Pi]), daß die verselle Deformation eines Kegels über einer rationalen Normkurve vom Grad $n \geq 5$ neben der Artinkomponenten noch genau eine eingebettete Komponente besitzt. Wir geben in diesem Abschnitt einige Ergebnisse zur Anzahl der eingebetteten Komponenten für zyklische Quotientensingularitäten bis zur Einbettungsdimension 8 an, die wir ausgehend von den Gleichungen in 4.2 mithilfe des Computeralgebra-Programms SINGULAR (siehe [GPS]) erzielen konnten.

i) $e = 6$: Für die Singularität $X(3, 3, 3, 3)$ findet man genau eine eingebettete Komponente, deren assoziiertes Primideal durch die Monome $s_2^{(2)}, s_3^{(2)}, s_4^{(2)}, s_5^{(2)}, t_3, t_4$ erzeugt wird. Diese Komponente liegt also in der Komponente $D_{2,5}$ der Diskriminante der Artinkomponente, über der $X(2, 2, 2, 2)$ als generische Singularität auftaucht (siehe 3.6).

ii) $e = 7$: Bei unseren Rechnungen für Singularitäten mit $(a_2, \dots, a_6) \leq (4, 4, 4, 4, 4)$ finden wir maximal elf eingebettete Komponenten, die bereits für die Singularität $X(3, 3, 3, 3, 3)$ auftauchen. Den assoziierten Primidealen dieser Komponenten lassen sich eindeutig die folgenden Ketten aus $\mathbb{N}^{e-2}$ zuordnen:

$$(1, 3, 2, 2, 2), (3, 1, 3, 2, 2), (2, 3, 1, 3, 2), (2, 2, 3, 1, 3), (2, 2, 2, 3, 1), \\ (2, 2, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 2), (2, 3, 2, 2, 2), (2, 2, 3, 2, 2), (2, 2, 2, 3, 2), (2, 2, 2, 2, 3).$$

Der Zusammenhang zu dem von SINGULAR berechneten System von Erzeugern dieser Ideale ist der folgende: Für das Ideal der Komponente zur Kette $l = (l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$ ergeben sich als Erzeuger die Monome

$$s_\epsilon^{(a_\epsilon - i)}, \quad \epsilon = 2, \dots, 6, \quad i = 1, \dots, l_\epsilon - 1$$

und zusätzlich die Monome t_4, t_5 für $(1, 3, 2, 2, 2)$, die Monome t_3, t_4 für $(2, 2, 2, 3, 1)$ sowie t_3, t_4, t_5 für alle übrigen Ketten.

Eine eingebettete Komponente kommt genau dann im versellen Basisraum einer Singularität $X(a_2, \dots, a_6)$ vor, wenn für die zugehörige Kette l die Ungleichungen $l_\epsilon \leq a_\epsilon$ erfüllt sind. Wir bemerken, daß die eingebetteten Komponenten zu den Ketten $(3, 1, 3, 2, 2)$, $(2, 3, 1, 3, 2)$ und $(2, 2, 3, 1, 3)$ in den Komponenten der 0-zulässigen Ketten $(2, 1, 3, 2, 1)$ bzw. $(1, 3, 1, 3, 1)$ bzw. $(1, 3, 2, 1, 2)$ liegen, jeweils in der Komponente $D_{2,6}$ der Diskriminante. Im allgemeinen Punkt liegt hier eine Singularität $X(2, 2, 2, 2, 2)$. Alle anderen eingebetteten Komponenten liegen in der Artinkomponente.

iii) $e = 8$: Unsere Rechnungen für Singularitäten $X(a_2, a_3, 2, 2, 2, 2)$ mit $a_2 \leq 5$ und $a_3 \leq 4$ ergeben eingebettete Komponenten, die den folgenden Ketten zugeordnet werden können:

$$(1, 3, 2, 2, 2, 2), (1, 4, 2, 2, 2, 2), \\ (2, 2, 2, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 2, 2), (2, 3, 2, 2, 2, 2), (2, 4, 2, 2, 2, 2), (4, 2, 2, 2, 2, 2).$$

Auch in diesem Fall kommen die eingebetteten Komponenten zu diesen Ketten genau dann im Basisraum vor, wenn $a \leq l$ gilt. Alle sieben Komponenten tauchen auf, wenn $a_2 \geq 4$ und $a_3 \geq 4$ gilt.

Aufgrund dieser Ergebnisse kommen wir zu der Vermutung, daß die assoziierten Primideale der eingebetteten Komponenten des versellen Basisraums zyklischer Quotienten durch Ketten $l = (l_2, \dots, l_{e-1})$ der oben beschriebenen Gestalt parametrisiert werden. Für $e = 6$ gibt es genau eine Kette $l = (2, 2, 2, 2)$, und die Ketten l der Länge $e - 2 \geq 5$ sind genau die Aufblasungen der Ketten der Länge $e - 3$ und die Ketten der Gestalt $(2, \dots, 2, l_e, 2, \dots, 2)$ mit $2 \leq l_e \leq e - 4, \epsilon = 2, \dots, e - 1$. Es ist zu erwarten, daß eine eingebettete Komponente genau dann im Basisraum der Singularität $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ vorkommt, wenn $a_\epsilon \leq l_\epsilon, \epsilon = 2, \dots, e - 1$ gilt.

Beispiel: Für die Berechnung der Primärzerlegung des Ideals des versellen Basisraums der Singularität $X(4, 4, 4, 4, 4)$ mithilfe der SINGULAR-Library `primdec.lib` (vgl. [DPS]) verwenden wir eine Darstellung der Gleichungen aus 4.2 im Ring mit den Erzeugern $s2(i), i = 1, 2, 3, t3, s3(i), i = 1, 2, 3, t4, s4(i), i = 1, 2, 3, t5, s5(i), i = 1, 2, 3$ und $s6(i), i = 1, 2, 3$. Die Definition des Rings, der Erzeuger des Ideals und schließlich des Ideals selbst erfolgt durch die unten stehenden SINGULAR-Kommandos. Die Rechenzeit beträgt unter Verwendung von SINGULAR 2.0 auf einem Rechner mit einem Prozessor mit 700 MHz und 128 MB Arbeitsspeicher etwa zwanzig Minuten.

```
ring r=0,(s2(1..3),s3(1..3),t3,s4(1..3),t4,s5(1..3),t5,s6(1..3)),dp;

poly h24 = t3*s3(3); poly h35 = t4*s4(3); poly h46 = t5*s5(3);
poly h14 = s2(3)*s3(3);
poly h25 = (s3(3)+t3*s3(2))*s4(3);
poly hp25 = s3(3)*(s4(3)-t4*(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2));
poly h36 = (s4(3)+t4*s4(2))*s5(3);
poly hp36 = s4(3)*(s5(3)-t5*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2));
poly hp47 = s5(3)*s6(3);
poly h15 = s2(3)*s3(2)*s4(3)+s2(2)*s3(3)^2*(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2);
poly h26 = (s3(3)+t3*s3(2))*s4(2)*s5(3)
           +(s3(2)+t3*s3(1))*s4(3)^2*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2);
poly hp26 = s3(3)*(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2)*(s5(3)-t5*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2))
           +s3(2)*s4(3)^2*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2-t5*(s5(1)-2*t5));
poly hp37 = s4(3)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)*s6(3)
           +s4(2)*s5(3)^2*s6(2);
poly h16 = s2(3)*s3(2)*s4(2)*s5(3)
           +s2(2)*s3(3)*(s3(3)+t3*s3(2))*(s4(1)-t4)*s5(3)
           +s2(3)*s3(1)*s4(3)*(s4(3)+t4*s4(2))*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)
           +s2(2)*s3(3)*(s3(2)+t3*s3(1))
           *(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2)*(s4(3)+t4*s4(2))*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)
           +s2(2)*s3(2)*(s3(3)+t3*s3(2))*s4(3)*s4(2)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)
           +s2(1)*(s3(3)+t3*s3(2))^2*s3(3)
           *(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2)*s4(2)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)
           +s2(2)*s3(2)*(s3(2)+t3*s3(1))
           *s4(3)^2*(s4(3)+t4*s4(2))*(s5(1)-2*t5);
poly hp27 = s3(3)*(s4(2)-t4*s4(1)+t4^2)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)*s6(3)
           +s3(2)*s4(3)^2*(s5(1)-2*t5)*s6(3)
```

```

+s3(3)*(s4(1)-t4)*s5(3)^2*s6(2)
+s3(2)*s4(3)*s4(2)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)*s5(3)*s6(2)
+s3(2)*s4(2)*s4(3)*s5(3)*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)*s6(2)
+s3(1)*(s4(3)+t4*s4(2))*s4(3)^2*(s5(2)-t5*s5(1)+t5^2)^2*s6(2)
+s3(2)*s4(2)^2*s5(3)^3*s6(1);

```

```

ideal i = hp24, hp35, hp46, h14, h25, hp25, h36, hp36, hp47, h15,
h26, hp26, hp37, h16, hp27;

```


Literaturverzeichnis

- [Al1] Altmann, K. *The versal deformation of an isolated toric Gorenstein singularity*, Invent. math. 128 (1997), 443-479
- [Al2] Altmann, K. *The computation of the vector space T^1 for affine toric varieties*, Journal of Pure and Applied Algebra 95 (1994), 239-259
- [Al3] Altmann, K. *P-resolutions of cyclic quotients from the toric viewpoint*, in: Progress in Mathematics, Vol. 162: Singularities - The Brieskorn Anniversary Volume, Birkhäuser Verlag: Basel, 1998
- [Al4] Altmann, K. *Deformations of affine torus varieties*, Beiträge zur Algebra und Geometrie (1993), 119-150
- [A] Arndt, J.: *Verselle Deformationen zyklischer Quotientensingularitäten*, Diss. Hamburg 1988
- [Ar] Artin, M.: *Lectures on Deformations of Singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976
- [B] Brieskorn, E., *Rationale Singularitäten komplexer Flächen*, Invent. math. 4 (1968), 336-358
- [BC] Behnke, K., Christophersen, J.: *M-Resolutions and deformations of quotient singularities*, Am. J. Math. 116 (1994), 881-903
- [BR] Behnke, K., Riemenschneider, O.: *Quotient singularities and their deformations*, in: Singularity Theory. Proceedings of the summer school on singularities held at Trieste 1991, World Scientific: Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1995
- [C1] Christophersen, J.: *On the components and discriminant of the versal base space of cyclic quotient singularities*, in: Singularity Theory and its Applications, SLN 1262, Springer: New York, 1991
- [C2] Christophersen, J.: *Obstruction spaces of rational singularities and deformations of cyclic quotients*, Thesis, Oslo, 1990
- [C3] Christophersen, J.: *Adjacencies of cyclic quotient singularities*, Manuskript, Oslo, 1996
- [DPS] Decker, W., Pfister, G., Schönemann, H.: `primdec.lib`. A SINGULAR 2.0 library for computing the primary decomposition and the radical of ideals, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, <http://www.singular.uni-kl.de>, 2001
- [G] Grauert, H.: *Über Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen*, Inventiones Mathematicae 15 (1972), 171-198
- [GPS] Greuel, G.-M., Pfister, G., Schönemann, H.: SINGULAR 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, <http://www.singular.uni-kl.de>, 2001

- [JS1] De Jong, T., Van Straten, D.: *On the deformation theory of rational surface singularities with reduced fundamental cycle*, J. Algebraic Geometry 3 (1994), 117-172
- [JS2] De Jong, T., Van Straten, D.: *Deformation theory of sandwiched singularities*, Duke Mathematical Journal, Vol 95, No. 3 (1998), 451-522
- [KSB] Kollár, J., Shepherd-Barron, N. I.: *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. math. 91 (1986), 299-338
- [L] Looijenga, E.J.N.: *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, London Math. Soc. Lecture Notes Series: 77, Cambridge, 1984
- [O] Oda, T.: *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3/15), Springer-Verlag, 1988
- [Pi] Pinkham, H. C.: *Deformations of algebraic varieties with G_m -action*, Astérisque 20 (1974)
- [P] Pourcin, G. *Déformations des singularités isolées*, Astérisque 16 (1974), 161-173
- [Rie1] Riemschneider, O.: *Special surface singularities. A survey on the geometry and combinatorics of their deformations*, in: Analytic varieties and singularities, RIMS Kokyuroku 807, Kyoto, 1992
- [Rie2] Riemschneider, O.: *Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)*, Math. Ann. 209 (1974), 211-248
- [Rie3] Riemschneider, O.: Manuskript 25. Juli 1996, Hamburg
- [Ste] Stevens, J.: *On the versal deformation of cyclic quotient singularities*, in: Singularity Theory and its Applications, SLN 1262, Springer: New York, 1991
- [W1] Wahl, J.: *Smoothings of normal surface singularities*, Topology 20 (1981), 216-246
- [W2] Wahl, J.: *Simultaneous Resolution of Rational Singularities*, Compositio Mathematica 38 (1979), 43-54

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht den Basisraum der versellen Deformation $\mathcal{X} \rightarrow S$ von zyklischen Quotientensingularitäten, d.h. von Quotienten $X_{n,q} = \mathbb{C}^2/G_{n,q}$, wobei $G_{n,q} \subset GL(2, \mathbb{C})$ erzeugt wird von einem Automorphismus der Gestalt $(u, v) \mapsto (\zeta_n u, \zeta_n^q v)$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $0 < q < n$ und einer primitiven Einheitswurzel ζ_n .

In seiner Hamburger Dissertation beschreibt Arndt das Ideal des Basisraums S als Unterraum eines glatten Raums der Dimension $T_X^1 = \sum_{\epsilon=2}^{e-1} (a_\epsilon - 1) + (e - 4)$, wobei die Kette $a = (a_2, \dots, a_{e-1})$ aus der Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{n-q}$ berechnet wird. Der Raum S ist im allgemeinen singulär mit vielen Komponenten, die auch eingebettet sein können. Die Anzahl der Komponenten von S_{red} ist nach Stevens und Christophersen gleich der Anzahl der 0-zulässigen Ketten $k \leq a$, also höchstens gleich der Catalan-Zahl $c_{e-2} = \frac{1}{e-2} \binom{2(e-3)}{e-3}$. Die reduzierte Komponente S_k zur Kette k ist die Kontraktion eines Unterraums des Deformationsraums einer P-Auflösung von X , die höchstens rationale Doppelpunkte oder zyklische Quotientensingularitäten vom Typ T aufweist. Nach einem Resultat von Behnke und Christophersen ist die Monodromiegruppe der Glättung $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ isomorph zur Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k}$, dem Produkt der zyklischen Gruppen $\mathfrak{S}_{a_\epsilon - k_\epsilon}$, $\epsilon = 2, \dots, e - 1$. Die Monodromieüberlagerung dieser Deformation steht im Zusammenhang zu der über der P-Auflösung zu k liegenden M-Auflösung von X , auf der höchstens T -Singularitäten mit Milnorzahl 0 liegen.

Wir zeigen, daß es eine Überlagerung $\mathcal{Y} \rightarrow T$ der gesamten versellen Deformation mit Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1} = \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon-1}$ gibt, die alle Monodromieüberlagerungen der Deformationen $\mathcal{X}_k \rightarrow S_k$ über den reduzierten Komponenten induziert. Die Komponenten der Reduktion von T sind lineare Unterräume, deren Gleichungen sich aus den Daten der Ketten k ableiten lassen. Über jeder Komponente $S_k \subset S_{red}$ liegen im allgemeinen mehrere T_k^ν , die durch $\mathfrak{S}_{a-1}$ permutiert werden. Explizite Gleichungen für die flachen Familien $\mathcal{Y}_k^\nu \rightarrow T_k^\nu$ ergeben sich über Liftungen eines Erzeugendensystems des Ideals von X , das über ein zu k gehöriges dreieckiges Punkteschema ∇_k berechnet werden kann. Die Diskriminante dieser Familien und die Ketten a' aller Singularitäten $X(a')$ der Nachbarmannigfaltigkeiten ergeben sich direkt aus den Ketten a und k .

Ausgehend von der Darstellung der Total- und Basisraumideale in Arndts Dissertation kommen wir zu einem Algorithmus für deren explizite Berechnung. Wir zeigen, daß dieses Verfahren die Basisraumgleichungen im allgemeinen Fall bis zur Einbettungsdimension 8 und für alle Kegel über rationalen Normkurven $X_{n,1}$ ($n \geq 4$) liefert. Diese Gleichungen verwenden wir, um mithilfe des Computeralgebra-Programms SINGULAR die Primärzerlegung des Basisraumideals in einigen Beispielen bis zur Einbettungsdimension 8 zu ermitteln. Die Ergebnisse führen uns auf eine Vermutung über die Gestalt der assoziierten Primideale der eingebetteten Komponenten des versellen Basisraums.

Lebenslauf

Name: Stephan Brohme
Geburtsdatum: 20. August 1964
Geburtsort: Hamburg

1970 - 1974 Volksschule Kapellenweg 63
Hamburg

1974 - 1983 Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Hamburg
Abitur

1984 Beginn des Studiums der Mathematik
an der Universität Hamburg

1985 **Vordiplom**
Nebenfach Physik

1986 - 1990 **Hauptstudium**
Schwerpunkte: komplex-analytische und algebraische Geometrie
bei Prof. Dr. Riemenschneider, Dr. Behnke, Dr. Müllich
und Dr. Stevens

1992 **Diplom**
Thema: *Verselle Basisräume minimal-elliptischer Flächensingularitäten
und Deformationen schwach-normaler Hyperflächensingularitäten*
bei Prof. Dr. Riemenschneider
Nebenfach Physik

1992 - 1995 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**
am Mathematischen Seminar der Universität Hamburg,
1993-1995 im Rahmen des DFG-Schwerpunktes „Komplexe Mannigfaltigkeiten“

1995 - 1996 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**
Fachbereich Elektrotechnik
Universität der Bundeswehr, Hamburg

1996 - 2000 **Application Executive** und **Financial Consultant**
Reuters AG, Düsseldorf

2000 - 2001 **Product Manager**
EFFIX S.A., Paris

seit 2001 **Managing Consultant**
Reuters AG, Düsseldorf