Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht den Basisraum der versellen Deformation $\mathcal{X} \to S$ von zyklischen Quotientensingularitäten, d.h. von Quotienten $X_{n,q} = \mathbb{C}^2/G_{n,q}$, wobei $G_{n,q} \subset GL(2,\mathbb{C})$ erzeugt wird von einem Automorphismus der Gestalt $(u,v) \mapsto (\zeta_n u, \zeta_n^q v)$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen $0 < q < n$ und einer primitiven Einheitswurzel ζ_n.

In seiner Hamburger Dissertation beschreibt Arndt das Ideal des Basisraums S als Unterraum eines glatten Raums der Dimension $T_X^1 = \sum_{\epsilon=2}^{e-1}(a_\epsilon - 1) + (e-4)$, wobei die Kette $a = (a_2, \ldots, a_{e-1})$ aus der Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{n-q}$ berechnet wird. Der Raum S ist im allgemeinen singulär mit vielen Komponenten, die auch eingebettet sein können. Die Anzahl der Komponenten von S_{red} ist nach Stevens und Christophersen gleich der Anzahl der 0-zulässigen Ketten $k \leq a$, also höchstens gleich der Catalan-Zahl $c_{e-2} = \frac{1}{e-2}\binom{2(e-3)}{e-3}$. Die reduzierte Komponente S_k zur Kette k ist die Kontraktion eines Unterraums des Deformationsraums einer P-Auflösung von X, die höchstens rationale Doppelpunkte oder zyklische Quotientensingularitäten vom Typ T aufweist. Nach einem Resultat von Behnke und Christophersen ist die Monodromiegruppe der Glättung $\mathcal{X}_k \to S_k$ isomorph zur Gruppe $\mathfrak{S}_{a-k}$, dem Produkt der zyklischen Gruppen $\mathfrak{S}_{a_\epsilon - k_\epsilon}$, $\epsilon = 2, \ldots, e-1$. Die Monodromieüberlagerung dieser Deformation steht im Zusammenhang zu der über der P-Auflösung zu k liegenden M-Auflösung von X, auf der höchstens T-Singularitäten mit Milnorzahl 0 liegen.

Wir zeigen, daß es eine Überlagerung $\mathcal{Y} \to T$ der gesamten versellen Deformation mit Gruppe $\mathfrak{S}_{a-1} = \prod_{\epsilon=2}^{e-1} \mathfrak{S}_{a_\epsilon - 1}$ gibt, die alle Monodromieüberlagerungen der Deformationen $\mathcal{X}_k \to S_k$ über den reduzierten Komponenten induziert. Die Komponenten der Reduktion von T sind lineare Unterräume, deren Gleichungen sich aus den Daten der Ketten k ableiten lassen. Über jeder Komponente $S_k \subset S_{red}$ liegen im allgemeinen mehrere T_k^ν, die durch $\mathfrak{S}_{a-1}$ permutiert werden. Explizite Gleichungen für die flachen Familien $\mathcal{Y}_k^\nu \to T_k^\nu$ ergeben sich über Liftungen eines Erzeugendensystems des Ideals von X, das über ein zu k gehöriges dreieckiges Punkteschema $\bigtriangledown_k$ berechnet werden kann. Die Diskriminante dieser Familien und die Ketten a' aller Singularitäten $X(a')$ der Nachbarfasern ergeben sich direkt aus den Ketten a und k.

Ausgehend von der Darstellung der Total- und Basisraumideale in Arndts Dissertation kommen wir zu einem Algorithmus für deren explizite Berechnung. Wir zeigen, daß dieses Verfahren die Basisraumgleichungen im allgemeinen Fall bis zur Einbettungsdimension 8 und für alle Kegel über rationalen Normkurven $X_{n,1}$ $(n \geq 4)$ liefert. Diese Gleichungen verwenden wir, um mithilfe des Computeralgebra-Programms SINGULAR die Primärzerlegung des Basisraumideals in einigen Beispielen bis zur Einbettungsdimension 8 zu ermitteln. Die Ergebnisse führen uns auf eine Vermutung über die Gestalt der assoziierten Primideale der eingebetteten Komponenten des versellen Basisraums.