Benedetta Alinovi
Halfordered Chain Structures, Splittings by Chains and Convexity
2002

ABSTRACT

In 1949 E. Sperner [33], [34] generalized by his "orderfunction in a geometry" the concept "ordered" to "halfordered affine or projective geometry". If (K, t) is the ternary ring coordinatizing an affine plane then there is a one-to-one correspondence between the halforders η of the plane and the betweenness functions ξ of K which turn (K, t) in a halfordered ternary ring (K, t, ξ).

In 1981 H. Karzel and H.-J. Kroll [21] introduced the notions "$I-$net" and "$I-$chain net" in particular $2-$net $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ and $2-$chain net $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K})$, also called chain structure (affine planes can be considered as particular chain structures). If $\mathfrak{C}$ denotes the set of all chains of a $2-$net $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ then there is a ternary operation $\tau : \mathfrak{C}^3 \to \mathfrak{C}$ such that for a fixed $E \in \mathfrak{C}$, $(\mathfrak{C}, \cdot)$ with $A \cdot B := \tau(A, E, B)$ is a group which is isomorphic to the symmetric group $SymE$.

The aim of this thesis is to introduce concepts of orderfunction, order and halforder in chain structures, to develop their theory and to relate them with "one dimensional" orderstructures which are given for instance on the points of a chain E.

It will be shown: If $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}; \eta)$ is a halfordered chain structure then the halforder η induces on each chain $E \in \mathfrak{K}$ a betweenness function ξ and with E a splitting E_s of $\mathcal{P}$ (i.e. a partition of $\mathcal{P} \setminus E$ into two parts). Between the splittings E_s of $\mathcal{P}$ by E and the betweenness functions ξ on E there is a bijective connection. If α denotes the isomorphism from $SymE$ onto $(\mathfrak{C}, \cdot)$ and $Aut(E, \xi)$ the permutations of E preserving ξ, then $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{C}_\xi := \alpha(Aut(E, \xi)) \leq (\mathfrak{C}, \cdot)$ and η can be extended to a halforder $\overline{\eta}$ of $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{C}_\xi)$ such that $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}; \eta)$ appears as a substructure of the *envelopping* (maximal) halfordered chain structure $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{C}_\xi; \overline{\eta})$.

In this frame the interplay between properties (like related, selfrelated, harmonic, anharmonic, convex or order) of halfordered sets (E, ξ), halfordered chain structures $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}; \eta)$ and splittings by a chain $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2; E_s)$ is studied.

In this way halfordered algebraic structures like halfordered or ordered loops, groups or fields can be lifted to halfordered or ordered envelopping chain structures.

ZUSAMMENFASSUNG

1949 verallgemeinerte E. Sperner [33], [34] durch seine „Ordnungsfunktion einer Geometrie" den Begriff „angeordnete Geometrie" zu „halbgeordnete affine oder projektive Geometrie". Ist (K, t) der ternäre Ring, der eine affine Ebene koordinatisiert, so gibt es eine eineindeutige Beziehung zwischen den Halbordnungen η der Ebene und den Zwischenfunktionen ξ von K. Dadurch wird (K, t) ein halbgeordneter ternärer Ring (K, t, ξ).
H. Karzel und H.-J. Kroll [21] führten 1981 die Begriffe „$I-$net" und „$I-$chain net" ein. Besondere Beachtung erfuhren dabei die $2-$Netze $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ und die $2-$chain nets $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K})$, welche auch Kettenstrukturen genannt werden. Affine Ebenen können als besondere Kettenstrukturen angesehen werden. Bezeichnet $\mathfrak{C}$ die Menge aller Ketten eines $2-$Netzes $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$, dann gibt es eine ternäre Operation $\tau : \mathfrak{C}^3 \to \mathfrak{C}$, so dass für ein ausgezeichnetes $E \in \mathfrak{C}$ durch $A \cdot B := \tau(A, E, B)$ eine Gruppenstruktur definiert ist, welche zur Symmetrischen Gruppe $SymE$ isomorph ist.
Ziel dieser Dissertation ist die Begriffe Ordnungsfunktion, Anordnung und Halbordnung in Kettenstrukturen einzuführen, ihre Theorie zu entwickeln und sie mit eindimensionalen Ordnungsstrukturen, zum Beispiel gegeben durch die Punkte einer Kette, zu verbinden.
Es wird gezeigt werden, dass wenn $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}; \eta)$ eine halbgeordnete Kettenstruktur ist, die Halbordnung η auf jeder Kette $E \in \mathfrak{K}$ eine Zwischenfunktion ξ induziert und durch E eine Seiteneinteilung E_s von $\mathcal{P}$ gegeben ist (also eine Zerlegung von $\mathcal{P} \setminus E$ in zwei Teile). Es gibt einen bijektiven Zusammenhang zwischen den Zwischenfunktionen ξ auf E und den Seiteneinteilungen E_s, die durch E auf $\mathcal{P}$ induziert werden. Bezeichnet α den Isomorphismus von $SymE$ nach $(\mathfrak{C}, \cdot)$ und $Aut(E, \xi)$ die Permutationen von E, die ξ erhalten, dann ist $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{C}_\xi := \alpha(Aut(E, \xi)) \leq (\mathfrak{C}, \cdot)$ und η kann auf eine Halbordnung $\overline{\eta}$ von $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{C}_\xi)$ ausgedehnt werden, wodurch $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}, \eta)$ zur Unterstruktur einer maximalen halbgeordneten Kettenstruktur $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{C}_\xi, \overline{\eta})$ wird.
In diesem Zusammenhang werden die Beziehungen zwischen Eigenschaften von halbgeordneten Mengen (E, ξ), halbgeordneten Kettenstrukturen $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K}; \eta)$ und Seiteneinteilungen durch eine Kette $(\mathcal{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2; E_s)$ untersucht.
Auf diese Weise können halbgeordnete algebraische Strukturen wie halbgeordnete oder angeordnete Loops, Gruppen oder Körper zu halbgeordneten oder angeordneten Kettenstrukturen angehoben werden.