

Berechnung der  $\beta$ -Funktion der reinen Yang-Mills Theorie in  
3. Ordnung unter Verwendung der kovarianten  
Hintergrundfeldmethode

**Dissertation**  
zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereichs Physik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von  
**Jan-Peter Börnsen**  
aus Hamburg

Hamburg  
2002

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. H. Nicolai  
Prof. Dr. K. Fredenhagen

Gutachter der Disputation: Prof. Dr. H. Nicolai  
Prof. Dr. G. Mack

Datum der Disputation: 19.11.2002

Vorsitzender des Prüfungsausschusses: Prof. Dr. J. Bartels

Vorsitzender des Promotionsausschusses: Prof. Dr. G. Huber

Dekan des Fachbereiches Physik: Prof. Dr. F.-W. Büßer

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Effektivität der kovarianten Hintergrundfeldmethode anhand der konkreten Berechnung der  $\beta$ -Funktion für die reine Yang-Mills-Theorie bis in dritter Ordnung unter Beweis zu stellen.

Die entscheidenden Vorteile dieser Methode lassen sich wie folgt zusammenfassen: Zum einen führt die ausschließliche Verwendung von kovarianten Größen bezüglich des Hintergrundfeldes dazu, dass sich die Anzahl der zu berechnenden Graphen erheblich reduziert. Zum anderen bewirkt die Wahl der Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld, dass sich dies durch seine Feldstärke ausdrücken läßt und damit die generierten Graphen allesamt logarithmisch divergent sind. D. h., die Divergenzen enthalten keine Ableitungen bzw. sind unabhängig vom Impuls.

Die Berechnung an sich findet in zwei Stufen im Ortsraum statt. Zuerst werden aus der effektiven Wirkung die Graphen der Ordnung  $n$  generiert, mit dem Unterschied, dass die Feynman-Regeln nur kovariante Größen enthalten und die Propagatoren in dem Sinne exakt sind, als dass in ihnen sämtliche das Hintergrundfeld enthaltene Korrekturen aufsummiert sind. Mit Hilfe zweier Identitäten lassen sich anschließend alle skalaren Propagatoren derart in vektorielle überführen, dass die Anzahl der Graphen nochmals ca. auf die Hälfte reduziert wird. Im Falle der 2-Schleifen-Rechnung verbleiben drei und im Falle der 3-Schleifen-Rechnung um die hundert Graphen. Da bis zu diesem Zeitpunkt keine Näherung in die Rechnung eingegangen ist, kann an dieser Stelle auch das effektive Potential bestimmt werden. Dieses wird in der Arbeit exemplarisch bis in die zweite Ordnung berechnet.

Im nächsten Schritt werden die exakten Propagatoren und anschließend der gesamte Graph derart entwickelt, dass die dabei entstehenden neuen Graphen nur noch von der Feldstärke des Hintergrundfeldes abhängen. Für die Renormierung genügt es, sich auf die Graphen zu beschränken, die quadratisch in der Feldstärke sind. Unter Verwendung einiger algebraischer Identitäten, die sich mit der Renormierung vertragen, reduziert sich die Zahl der Graphen in zweiter Ordnung auf eins und in dritter Ordnung auf 24, ohne dass auch nur einer von ihnen explizit berechnet worden ist.

Die relativ zügige Art und Weise, mit der sich durch die Verwendung der kovarianten Hintergrundfeldmethode die Ergebnisse aus der Literatur verifizieren lassen, zeigt, dass mit ihrer Hilfe auch die Lösung von komplexeren Problemen, wie z. B. die 3-Schleifen-Rechnung in der Supergravitation durchaus im Bereich des Möglichen liegt.



## Abstract

The main purpose of this work is to demonstrate the effectiveness of the covariant background field method in the explicit calculation of the  $\beta$ -function for the pure Yang-Mills theory up to three loop.

The most important advantages of this method may be summarized as follows: By using solely covariant quantities in terms of the background field, the number of graphs to be calculated can be reduced significantly. By imposing the Fock-Schwinger gauge on the background field, the latter can be expressed in terms of its own field strength. Thus all generated graphs are logarithmically divergent, which means that the divergences contain no derivatives respectively no momentum.

The calculation has to be done in two steps in coordinate space. Starting from the effective action all graphs of the order  $n$  are generated. The corresponding Feynman rules contain only covariant terms and the propagators are exact, in so far as all corrections depending on the background field are summed up in them. By using two propagator identities all scalar propagators are transformed into vectorial ones, thus reducing the number of graphs once more to about approximately a half. Regarding the case of two-loop only three graphs remain, whereas in three-loop about one hundred graphs are left. Since, up to this point, no approximation has been used, it is still possible to calculate the effective potential, which will be done up to the second order.

The next step implies the evaluation of the exact propagators and afterwards of the whole graph in such a way, that the resulting new graphs depend only on the field strength of the background field. As long as one is interested in renormalization only, it is sufficient to consider only those graphs which contain the field strength quadratically. By using some algebraic identities, which do not interfere with renormalization, the number of graphs in second order is reduced to one and in third order to 24, without calculating any graph explicitly.

The efficient manner by which the results of the literature can be verified, shows that using the covariant background field method, should enable one to tackle even more complex problems such as e. g. the three loop calculation in supergravity.



*Für meine Eltern und  
meine Schwester*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die Hintergrundfeldmethode in einer skalaren Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Einführung . . . . .	5
2.2	Die Hintergrundfeldmethode in einer skalaren Theorie . . . . .	9
2.3	Der Wärmeleitungskern . . . . .	13
2.4	Der Propagator . . . . .	14
2.5	Die Feynman-Regeln . . . . .	16
2.6	Die 1-Schleifen-Rechnung . . . . .	16
2.7	Die 2-Schleifen-Rechnung . . . . .	19
2.8	Die 3-Schleifen-Rechnung . . . . .	22
2.9	Die Renormierungsgruppe . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Die Hintergrundfeldmethode in der reinen Yang-Mills-Theorie</b>	<b>25</b>
3.1	Einführung . . . . .	25
3.2	Die Hintergrundfeldmethode in der reinen Yang-Mills-Theorie . . . . .	28
3.3	Die Wärmeleitungskerne . . . . .	33
3.4	Die Propagatoren . . . . .	35
3.5	Die Feynman-Regeln . . . . .	37
3.6	Die 1-Schleifen-Rechnung . . . . .	39
3.7	Die 2-Schleifen-Rechnung . . . . .	41
3.8	Die 3-Schleifen-Rechnung . . . . .	48
3.9	Die Renormierungsgruppe . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Verwendete Methoden und weitere Details</b>	<b>67</b>
A.1	Notationen . . . . .	67
A.2	Identitäten für $G_i$ und $R_i$ . . . . .	68
A.3	Verwendete Gruppentheorie . . . . .	68
A.4	Beweis der Ward-Identität . . . . .	70

A.5	Berechnung der 2-Schleifen-Graphen . . . . .	71
A.6	Die $R^*$ -Methode . . . . .	74
A.7	Die Translationsmethode . . . . .	78
A.8	Die Divergenzen einiger ausgewählter Graphen . . . . .	82
A.8.1	1-Schleifen-Graphen . . . . .	82
A.8.2	2-Schleifen-Graphen . . . . .	82
A.8.3	3-Schleifen-Graphen . . . . .	83
<b>B</b>	<b>Mathematica</b>	<b>85</b>
B.1	Allgemeine Tipps und Tricks . . . . .	85
B.2	Die Programmroutinen . . . . .	86
B.3	Programm zum Berechnen der Divergenzen . . . . .	92

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Vergleich zwischen der üblichen und der kovarianten Hintergrundfeldmethode. . . . .	2
2.1	Der Propagator in der skalaren Theorie . . . . .	15
2.2	Effektive Wirkung der $A^4$ -Theorie in 2. Ordnung . . . . .	20
2.3	Divergenzen der effektiven Wirkung der $A^4$ -Theorie in 2. Ordnung . . . . .	21
2.4	Effektive Wirkung der $A^4$ -Theorie in 3. Ordnung . . . . .	22
2.5	Divergenzen der effektiven Wirkung der $A^4$ -Theorie in 3. Ordnung . . . . .	22
2.6	Die Divergenzen des Ball-Graphen entsprechen denen eines $V$ -Graphen . . . . .	23
3.1	Effektive Wirkung der reinen Yang-Mills-Theorie in 2. Ordnung in der erzeugenden Darstellung . . . . .	41
3.2	Tadpole-Identität . . . . .	42
3.3	Effektive Wirkung in 2. Ordnung . . . . .	43
3.4	Partielle Integration angewandt auf die Ur-Graphen . . . . .	45
3.5	Stern-Operation angewandt auf die Ur-Graphen . . . . .	45
3.6	Vereinfachte effektive Wirkung in 2. Ordnung . . . . .	46
3.7	Effektive Wirkung der reinen Yang-Mills-Theorie in 3. Ordnung in der erzeugenden Darstellung . . . . .	49
3.8	Hybrider Ball-Graph . . . . .	50
3.9	Beitrag der Ball-Graphen zur effektiven Wirkung in 3. Ordnung . . . . .	51
3.10	Beitrag der Tetraeder-Graphen zur effektiven Wirkung in 3. Ordnung . . . . .	52
3.11	Hybrider Tetraeder-Graph . . . . .	53
3.12	Vereinfachung eines Tetraeder-Graphen . . . . .	57
4.1	Vergleich zwischen der üblichen und der kovarianten Hintergrundfeldmethode in der Gravitation. . . . .	64
4.2	Die 3-Schleifen-Graphen der Supergravitation . . . . .	65
A.1	Zerlegung des Graphen $\Gamma$ in $G_n$ und den Restgraphen $\Gamma_0$ . . . . .	76
B.1	Linearität . . . . .	85



# Tabellenverzeichnis

3.1	Klassifizierung der Ball-Graphen . . . . .	54
3.2	Klassifizierung der Tetraeder-Graphen . . . . .	55
A.1	Identitäten der Strukturkonstanten . . . . .	70
A.2	Subgraphen des Ball-Graphen . . . . .	76
A.3	Grad der Divergenzen der Subgraphen . . . . .	77



# Kapitel 1

## Einleitung

Die entscheidende Größe in der Quantenfeldtheorie ist die effektive Wirkung, die, für eine gegebene klassische Wirkung, alle auftretenden Quanteneffekte zusammenfasst und aus der sich die S-Matrix ableiten lässt. Leider ist dieses Funktional im Allgemeinen nur im Rahmen der Störungstheorie berechenbar. Des Weiteren hat die übliche effektive Wirkung im Bereich der Eichtheorien den Nachteil, dass sie im Gegensatz zur S-Matrix nicht eichinvariant ist. Eine Lösung für dieses Problem stellt die Einführung eines Hintergrundfeldes dar [1, 2], siehe auch [3, 4]. Die dazugehörige modifizierte effektive Wirkung ist dann eichinvariant in Bezug auf das Hintergrundfeld. Diese sogenannte Hintergrundfeldmethode wurde ursprünglich erfunden, um theoretische Überlegungen aber auch explizite Berechnungen im Bereich der Yang-Mills-Theorie und der Quantengravitation zu vereinfachen. Bis Mitte der 70er Jahre war der Formalismus nur für Prozesse in erster Ordnung, d. h. in einer Schleife, anwendbar. Später erfolgte die Erweiterung auf höhere Schleifenordnungen [5, 6, 7, 8]. Der Nachweis der Renormierbarkeit der Yang-Mills-Theorie findet sich in [9, 10], während [11, 12, 13] den Beweis enthalten, dass die Hintergrundfeldmethode auf die gleiche S-Matrix führt. Die Ergebnisse für die UV-Divergenzen der Yang-Mills-Theorie in der Ordnung von einer Schleife [14, 15, 16] und in der Ordnung von zwei Schleifen [17, 18, 19, 20, 21] konnten mit Hilfe der Hintergrundfeldmethode [22, 23, 11, 24, 25, 26, 27] bestätigt werden. Die Hintergrundfeldmethode eignet sich ebenfalls zur Ermittlung des effektiven Potenzials, und die entsprechenden Berechnungen für die Yang-Mills-Theorie in der Ordnung von einer bzw. zwei Schleifen finden sich in [28] bzw. [29]. Für die im Rahmen der Gravitation auftretenden Rechnungen erweisen sich Methoden wie die Hintergrundfeldmethode als unerlässlich. Mit ihrer Hilfe wurden die Divergenzen in der Ordnung von einer Schleife [30] ermittelt, und in der Ordnung von zwei Schleifen wurde bewiesen, dass die Theorie nicht renormierbar ist [31, 32, 33]. Neuere Arbeiten verwenden die Hintergrundfeldmethode für Berechnungen im Standardmodell [34, 35].

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die Effektivität der kovarianten Hintergrundfeldmethode anhand der konkreten Berechnung der  $\beta$ -Funktion der Renormierungsgruppe in der Ordnung von drei Schleifen für die reine Yang-Mills-Theorie unter Beweis zu stellen. Dies gibt Anlass zu der Hoffnung, dass die offene Frage nach der Renormierbarkeit der Theorie der Supergravitation [36] in dritter Schleifenordnung mit ähnlichen Methoden beantwortet werden kann. In der Ordnung von drei Schleifen wurden die Funktionen der Renormierungsgruppe für die Yang-Mills-Theorie erstmals in [37] unter Verwendung üblicher Methoden aus der Quantenfeldtheorie berechnet. Dreizehn Jahre später wurde das Ergebnis in [38] verifiziert. Kürzlich wurde es in [39] nochmals bestätigt und auf Yukawa-Kopplungen und skalare Felder erweitert.

Obwohl die Autoren von [39] die Hintergrundfeldmethode benutzen und damit eine eichinvariante effektive Wirkung erhalten, führen sie ihre Berechnung, wie üblich, im Impulsraum durch [7, 22]. Dies bewirkt, dass die Eichinvarianz erst zum Schluss der Berechnung wieder offensichtlich wird. Die Ursache für diese Vorgehensweise liegt in dem Wunsch begründet, die Wechselwirkung mit dem Hintergrundfeld als Störung zu betrachten. Zur Eichfixierung wird zwar die übliche hinter-

grundfeldkovariante Feynman-Eichung gewählt, jedoch zur Definition des Propagators und der sonstigen Feynman-Regeln spaltet man jede kovariante Ableitung in ihre Bestandteile auf, d. h. in die partielle Ableitung und das Hintergrundeichfeld. Als Folge tauchen die Hintergrundfelder explizit in den Feynman-Regeln auf und die vorher leicht ersichtliche Eichinvarianz bezüglich des Hintergrundfeldes geht scheinbar verloren. Darüber hinaus führt diese Aufspaltung im Vergleich zur üblichen Störungstheorie zu einer erheblichen Zunahme der Anzahl der Vertizes. Für die Renormierung des Hintergrundfeldes reicht bekanntlich die Berechnung seiner Selbstenergie [7, 22]. Die dazu beitragenden Feynman-Graphen sind aus dimensional Gründen quadratisch divergent (siehe Bild A in Abbildung 1.1). Erst ganz zum Schluss, wenn alle Graphen aufsummiert werden, erhält man ein eichinvariantes Ergebnis, d. h. proportional zum Quadrat der Hintergrundfeldstärke. Dieser Umstand stellt einen wertvollen Test für die Richtigkeit der Berechnung dar. Gleichzeitig widerspricht dieser Ansatz aber der eigentlichen Idee der Hintergrundfeldmethode und führt so zu einem unnötigen Mehraufwand bei Rechnungen in höheren Schleifenordnungen, insbesondere in der Gravitationstheorie.

In dieser Arbeit wird daher die Eichkovarianz während der gesamten Rechnung explizit wie in [40, 41, 29, 26] erhalten und die oben erwähnte Aufspaltung der kovarianten Ableitungen vermieden. Dies verbietet den sonst üblichen Übergang zum Impulsraum und daher werden sämtliche Rechnungen im Ortsraum durchgeführt. Das Hintergrundfeld tritt in der Wirkung und damit auch in den Feynman-Regeln nur über kovariante Ableitungen und deren Kommutatoren, d. h. als Hintergrundfeldstärken, in Erscheinung und die Anzahl der Vertizes wird signifikant reduziert. Auch hier wählt man die hintergrundfeldkovariante Feynman-Eichung, aber im Gegensatz zur oben erwähnten Vorgehensweise erhält man einen vom Hintergrundfeld abhängigen Wellenoperator. Aus dem zugehörigen hintergrundfeldabhängigen bzw. exakten Propagator, d. h. dem inversen Wellenoperator, und den Vertizes lässt sich ein kompakter, wenn auch formaler Ausdruck für die effektive Wirkung in einer gegebenen Schleifenordnung herleiten [29]. Damit der exakte Propagator in beiden Raumzeitpunkten eichkovariant transformiert, enthält er insbesondere den Schwinger-Phasenfaktor

$$\Phi(x, y) = P \exp \left( \int_x^y B_\mu(z) \cdot dz^\mu \right),$$

wobei das Symbol  $P$  für die Pfadordnung des Lie-algebrawertigen Hintergrundfeldes  $B(x)$  steht. Dieser Phasenfaktor ist dimensionslos und führt deshalb in der Renormierung sogar zu quartisch divergenten Graphen. Wählt man aber die Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld, d. h.  $x \cdot B(x) = 0$ , lässt sich dieses als Funktion seiner eigenen Feldstärke schreiben [42]. Es spricht übrigens im Allgemeinen nichts dagegen, unterschiedliche Eichungen für das Hintergrundfeld und das Quantenfeld zu wählen. In [42] wird gezeigt, dass sich als Folge dieser Eichwahl eine Entwicklung des Propagators in Potenzen der Feldstärke angeben lässt. Verlangt man darüber hinaus, dass die Hintergrundfeldstärke kovariant konstant ist, d. h.  $D_\rho F_{\mu\nu} = 0$ , lässt sich sogar eine geschlossene Darstellung für den Wärmeleitungskern [28, 43] schreiben. Die Nebenbedingung  $D_\rho F_{\mu\nu} = 0$  ist analog zu der von Schwinger für ein Elektron in einem konstanten elektromagnetischen Feld [44, 45]. Im Gegensatz zu der im vorherigen Absatz geschilderten Vorgehensweise erhält man jetzt nur logarithmisch divergente Feynman-Graphen (siehe Bild B in Abbildung 1.1), von denen jeder einzelne eichinvariant ist.

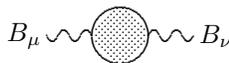


Bild A

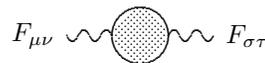


Bild B

Abbildung 1.1: Vergleich zwischen der üblichen (A) und der kovarianten (B) Hintergrundfeldmethode.

Sämtliche in dieser Arbeit vorkommenden Berechnungen wurden mit dem Programm *Mathematica* durchgeführt. Diese Wahl scheint im ersten Moment nicht die geeignetste zu sein, ist doch

*Mathematica* weder auf große Datenmengen noch auf Geschwindigkeit optimiert. Vermeidet man jedoch einige Ungeschicklichkeiten bei der Programmierung, kann man durchaus mit einigen tausend Termen rechnen und doch noch in endlicher Zeit Ergebnisse erhalten. Wählt man zusätzlich eine möglichst einfache Darstellung für die Feynman-Graphen und nutzt konsequent die Stärke von *Mathematica*, die in der Mustererkennung liegt, um die z. T. sehr komplexen Symmetrien zu implementieren, erhält man schließlich ein recht kompaktes Ergebnis.

Im zweiten Kapitel wird anhand der  $\phi^4$ -Theorie der Formalismus der Hintergrundfeldmethode vorgeführt. Dabei wird zum einen die Renormierung dieser Theorie bis in die dritte Ordnung explizit vorgerechnet [26, 46], und, da die Hintergrundfeldmethode sich auch zur Berechnung des effektiven Potenzials anbietet, zum anderen das effektive Potenzial bis in die zweite Ordnung berechnet (siehe auch [47, 48]).

Im dritten Kapitel werden die aus der  $\phi^4$ -Theorie gewonnenen Erkenntnisse, wie oben angedeutet, auf die allgemeine nichtabelsche Eichtheorie erweitert. Neben der Herleitung des effektiven Potenzials in erster Ordnung wird auch in diesem Fall die Renormierung unter Verwendung der  $R^*$ -Methode bis in die dritte Ordnung vorgeführt. Die Feynman-Graphen werden dabei in zwei Stufen aufsummiert. Zuerst werden die exakten Propagatoren in den Graphen belassen und mit Hilfe einer Ward-Identität und einigen Umformungen die Zahl der Graphen im Falle der dritten Ordnung auf ca. 100 reduziert. Anschließend werden die exakten Propagatoren in Potenzen der Feldstärke  $F$  entwickelt und aus den so entstandenen neuen Graphen die zu den Divergenzen beitragenden extrahiert und daraus die Gesamtdivergenz berechnet. Die sich anschließend ergebende  $\beta$ -Funktion deckt sich mit dem in [37, 38] und [39] gefundenen Ergebnis.

Das vierte Kapitel enthält einige allgemeine Anmerkungen über weitere mögliche Anwendungsbereiche der Hintergrundfeldmethode. Insbesondere findet sich hier eine Betrachtung, ob mit Hilfe der Hintergrundfeldmethode eine Überprüfung der Supergravitation auf ihre Renormierbarkeit in der Ordnung von drei Schleifen im Bereich des Möglichen liegt.

Im Anhang A finden sich u. a. die in dieser Arbeit verwendete Notation sowie weitere Konventionen und einige explizite Berechnungen. Außerdem wird die in [49, 50] entwickelte  $R^*$ -Methode vorgestellt. In [51] wird gezeigt, dass die  $\beta$ -Funktion der reinen Yang-Mills-Theorie bis in die Ordnung von zwei Schleifen unabhängig vom gewählten Renormierungsschema ist. In höheren Ordnungen gilt dies nur noch für die Renormierungsschemata, die auf dimensionaler Regularisierung beruhen [52], d. h. alle  $MS$ -Schemata. Mit Hilfe der  $R^*$ -Methode lassen sich nun aber die Feynman-Graphen direkt renormieren, d. h. es werden keine Counter-Terme im üblichen Sinne benötigt, da diese direkt aus den Graphen gewonnen werden können. Folglich ist nicht nur die  $\beta$ -Funktion, sondern sind auch schon die Divergenzen der einzelnen Feynman-Graphen unabhängig vom verwendeten  $MS$ -Schema. Die Überprüfung dieser Unabhängigkeit stellt einen effektiven Test für die korrekte Durchführung der Renormierung auf dem Niveau eines einzelnen Graphen dar. Zu guter Letzt werden die divergenten Anteile einiger der für die Renormierung benötigten 2- und 3-Schleifen-Diagramme aufgelistet.

Der Anhang B enthält schließlich einige Tipps zu dem verwendeten Programm *Mathematica* und einige Programmroutinen mit entsprechenden Ergebnissen.



## Kapitel 2

# Die Hintergrundfeldmethode in einer skalaren Theorie

### 2.1 Einführung

Obwohl die Effektivität der Hintergrundfeldmethode erst in Eichtheorien vollständig zum Tragen kommt, ist sie auch in einfachen skalaren Theorien von Nutzen. Im Rahmen der  $\phi^4$ -Theorie z. B. liefert die Hintergrundfeldmethode von vornherein die Summe aller 1-Schleifen-Graphen und führt somit direkt auf das effektive Potenzial [53, 54, 55, 47]. Auch in dem Bereich der nichtlinearen Sigma-Modelle hat sich diese Methode aufgrund der Erhaltung der Reparametrisierungsinvarianz bewährt [3, 56].

Da die  $\phi^4$ -Theorie die einfachste renormierbare Quantenfeldtheorie darstellt, ist es nicht verwunderlich, dass sie die einzige Theorie ist, bei der das effektive Potenzial bis in die Ordnung von drei Schleifen [48] bzw. die Renormierung bis in die Ordnung von fünf Schleifen bekannt ist (siehe [57, 58] und die Korrektur in [59]). Im folgenden sollen nun wesentliche Aspekte der Hintergrundfeldmethode anhand dieser Theorie exemplarisch vorgeführt werden. Zu diesem Zweck wird das effektive Potenzial bis in die Ordnung von zwei Schleifen bestimmt bzw. die Theorie bis in die Ordnung von drei Schleifen renormiert.

Sämtliche Definitionen und Berechnungen finden im Euklidischen Raum statt. Dies ist nicht zwingend notwendig, hat aber die Vorteile, dass keine imaginären Terme mehr auftreten, und dass das weiter unten eingeführte Pfadintegral wohldefiniert ist [60, 61, 62]. Für eine ausführliche Diskussion der in diesem Kapitel eingeführten Funktionale sei auf das Buch von Zinn-Justin [63] verwiesen, dessen Konventionen weitgehend übernommen wurden.

Die Wirkung der  $A^4$ -Theorie<sup>1</sup> hat die folgende Gestalt:

$$S[A] = \int dx \left( -\frac{1}{2} A \partial^2 A + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \frac{1}{4!} \lambda A^4 \right). \quad (2.1)$$

Die Quantisierung dieses Systems erfolgt durch die Verwendung des Pfadintegral-Formalismus. Dieser Vorgabe folgend wird das zu der Wirkung (2.1) gehörende erzeugende Funktional

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \exp(-S[A] + J \cdot A) \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Um das Erkennen von Gemeinsamkeiten bzw. Unterschieden zwischen der in diesem Kapitel behandelten skalaren Theorie und der im nächsten Kapitel erörterten Yang-Mills-Theorie zu erleichtern, soll das Quantenfeld grundsätzlich mit der Variablen  $A$  bezeichnet werden, d. h. im folgenden wird nicht – wie in der Literatur üblich – von der  $\phi^4$ -Theorie, sondern von der  $A^4$ -Theorie die Rede sein.

gebildet. Das Punktprodukt steht für die DeWitt'sche Summen- und Integrationskonvention (A.1). Die Normierungskonstante  $\mathcal{N}$  wird so gewählt, dass  $Z[0] = 1$  ist. Aus dem Funktional  $Z[J]$  lassen sich sämtliche  $n$ -Punkt-Green-Funktionen – und zwar sowohl die Verbundenen als auch die Unverbundenen – herleiten. Die Green-Funktionen<sup>2</sup> werden dabei durch Funktionaldifferentiation nach der Quelle an der Stelle  $J = 0$  gewonnen:

$$Z^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (2.3)$$

Natürlich lässt sich das erzeugende Funktional  $Z[J]$  auch als Summe über die Green-Funktionen  $Z^{(n)}$  darstellen

$$Z[J] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n Z^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n). \quad (2.4)$$

Sind nur verbundene Graphen von Interesse, lassen sich diese aus dem erzeugenden Funktional

$$W[J] = \ln Z[J] \quad (2.5)$$

gewinnen. Analog zu (2.3) werden die verbundenen  $n$ -Punkt-Green-Funktionen über

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (2.6)$$

definiert, und die Reihendarstellung des Funktionals  $W[J]$  ist durch

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) \quad (2.7)$$

gegeben. Schließlich erhält man mit Hilfe einer Legendre-Transformation das erzeugende Funktional, auch effektive Wirkung genannt,

$$\Gamma[\bar{A}] = J \cdot \bar{A} - W[J] \quad (2.8)$$

der  $n$ -Punkt-Vertexfunktionen. Das Argument  $\bar{A}$  der effektiven Wirkung  $\Gamma$  stellt den Erwartungswert des Feldes  $A$ , auch „klassisches Feld“ genannt, in Gegenwart der Quelle  $J$  dar und ist durch

$$\bar{A} = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \quad (2.9)$$

definiert. Diese Gleichung definiert implizit  $J[\bar{A}]$ , und in (2.8) eingesetzt, lässt sich zeigen, dass die effektive Wirkung nur von dem Erwartungswert  $\bar{A}$  abhängt. Die erste Funktionalableitung ist damit durch

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{A}} = \frac{\delta J}{\delta \bar{A}} \cdot \bar{A} + J - \frac{\delta W}{\delta J} \cdot \frac{\delta J}{\delta \bar{A}} = J \quad (2.10)$$

gegeben. Die Vertexfunktionen

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\bar{A}]}{\delta \bar{A}(x_1) \cdots \delta \bar{A}(x_n)} \right|_{\bar{A}=0} \quad (2.11)$$

haben die Eigenschaft, dass sie nach dem Entfernen eines beliebigen Propagators nicht in zwei disjunkte Teile zerfallen (ein entsprechender Beweis findet sich in [64]). Feynman-Graphen mit dieser Eigenschaft werden Ein-Teilchen-irreduzibel bzw. im Englischen *one particle irreducible* oder

<sup>2</sup>Um Verwechslungen mit dem in einem späteren Abschnitt definierten Propagator  $G(x, y)$  zu vermeiden, werden die Green-Funktionen abweichend von der üblichen Notation mit der Variablen  $Z^{(n)}$  beschrieben.

kurz 1PI genannt. In Anlehnung an die beiden vorhergehenden Fälle ergibt sich für die effektive Wirkung die folgende Entwicklung:

$$\Gamma[\bar{A}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \bar{A}(x_1) \cdots \bar{A}(x_n). \quad (2.12)$$

Des Weiteren lässt sich für die 2-Punkt-Funktionen durch eine Funktionalableitung der Gleichung (2.9) nach  $\bar{A}$  bzw. der Gleichung (2.10) nach  $J$  die Identität

$$\int dz W^{(2)}(x, z) \Gamma^{(2)}(z, y) = \int dz \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\bar{A}]}{\delta \bar{A}(z) \delta \bar{A}(y)} = \delta(x - y) \quad (2.13)$$

herleiten, d. h. die 2-Punkt-Funktionen  $\Gamma^{(2)}$  und  $W^{(2)}$  verhalten sich in diesem Sinne invers zueinander. Besonders deutlich wird dies, wenn man eine Fouriertransformation durchführt und dabei berücksichtigt, dass die  $A^4$ -Theorie translationsinvariant ist, d. h. die 2-Punkt-Funktionen nur von der Differenz der Koordinaten abhängen. Im Impulsraum sind die beiden Funktionen durch

$$W^{(2)}(p) = (p^2 + m^2 + \Pi(p))^{-1}; \quad \Gamma^{(2)}(p) = p^2 + m^2 + \Pi(p) \quad (2.14)$$

gegeben, wobei  $\Pi(p)$  für die Selbstenergie steht. In der Literatur wird  $W^{(2)}$  oft *vollständiger* Propagator genannt, da man durch eine Entwicklung nach der Selbstenergie eine Summe aus einfach verbundenen Graphen erhält, die sich aus dem freien massiven Propagator und den zugehörigen Quantenkorrekturen zusammensetzt [61, 65, 63].

Um Verwechslungen zu vermeiden, sei an dieser Stelle schon einmal darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit im Rahmen der Hintergrundfeldmethode noch zusätzlich der Begriff des *exakten* Propagators  $G(x, y)$  eingeführt werden soll (siehe Abschnitt 2.4).

Durch wiederholtes Anwenden der Funktionalableitungen nach  $J$  bzw.  $\bar{A}$  auf die Gleichung (2.13) erhält man weitere Beziehungen zwischen den verbundenen  $n$ -Punkt-Green-Funktionen und den  $n$ -Punkt-Vertex-Funktionen. Mit der Definition für die sogenannten *amputierten* Funktionen

$$W_{\text{amp}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int dy_1 \cdots dy_n \Gamma^{(2)}(x_1, y_1) \cdots \Gamma^{(2)}(x_n, y_n) W^{(n)}(y_1, \dots, y_n) \quad (2.15)$$

sind die beiden nächsten durch

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= W_{\text{amp}}^{(3)}(x_1, x_2, x_3), \\ \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= W_{\text{amp}}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &\quad + \int dy dz W_{\text{amp}}^{(3)}(x_1, x_2, y) W^{(2)}(y, z) W_{\text{amp}}^{(3)}(z, x_3, x_4) \\ &\quad + \int dy dz W_{\text{amp}}^{(3)}(x_1, x_3, y) W^{(2)}(y, z) W_{\text{amp}}^{(3)}(z, x_2, x_4) \\ &\quad + \int dy dz W_{\text{amp}}^{(3)}(x_1, x_4, y) W^{(2)}(y, z) W_{\text{amp}}^{(3)}(z, x_2, x_3) \end{aligned}$$

gegeben.

Die Darstellung der effektiven Wirkung in (2.12) ist nicht lokal. Eine lokale Darstellung im Ortsraum ist durch die Entwicklung

$$\Gamma[\bar{A}] = \int dx \left( V(\bar{A}) + \frac{1}{2} U(\bar{A}) \partial_\mu \bar{A} \partial^\mu \bar{A} + \cdots \right) \quad (2.16)$$

gegeben.  $V(\bar{A})$ ,  $U(\bar{A})$  und die Koeffizienten höherer Ordnungen sind Funktionen (keine Funktionale) vom Erwartungswert  $\bar{A}$ . Die Funktion  $V(\bar{A})$  wird effektives Potenzial genannt, und weder

für sie geschweige denn für die effektive Wirkung ist eine geschlossene Lösung bekannt. In einem weiteren Schritt stellt man daher die oben erwähnten Koeffizienten als Polynome in  $\hbar$  dar. Damit ist

$$\Gamma[\bar{A}] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[\bar{A}] \hbar^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int dx \left( V_n(\bar{A}) + \frac{1}{2} U_n(\bar{A}) \partial_\mu \bar{A} \partial^\mu \bar{A} + \dots \right) \hbar^n, \quad (2.17)$$

und im Falle der  $A^4$ -Theorie sind die Koeffizienten in nullter Ordnung natürlich durch

$$\begin{aligned} V_0(\bar{A}) &= \frac{1}{2} m^2 \bar{A}^2 + \frac{1}{4!} \lambda \bar{A}^4 \\ U_0(\bar{A}) &= 1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

gegeben. Die effektive Wirkung  $\Gamma[\bar{A}]$  geht also für  $\hbar \rightarrow 0$  in die klassische Wirkung  $S[\bar{A}]$  über, d. h.  $\Gamma[\bar{A}]$  kann als das quantenmechanische Analogon zu  $S[\bar{A}]$  betrachtet werden.

Leider weisen im Falle der  $A^4$ -Theorie einige der aus den Funktionalen  $Z, W$  bzw.  $\Gamma$  abgeleiteten Feynman-Graphen in  $d = 4$  Dimensionen UV-Divergenzen auf. Der Grad des höchsten Pols entspricht dabei im Maximalfall der Zahl der Schleifen des Diagramms. Das Abspalten bzw. Entfernen einer solchen Divergenz aus einem Feynman-Graphen wird Regularisierung genannt. Es gibt verschiedene Methoden der Regularisierung, gelingt es aber abhängig von der gewählten Methode alle dabei entstehenden Divergenzen in jeder Schleifenordnung durch eine Umdefinition der physikalischen Größen zu beseitigen, was in der  $A^4$ -Theorie der Fall ist, bezeichnet man die Theorie als renormierbar.

Dieser Methode liegt die folgende Idee zugrunde. Die ursprünglichen physikalischen Größen sind divergent und werden in der Literatur als *nackte* Parameter bezeichnet. Diese Parameter sind nicht direkt messbar, da sie von Selbstwechselwirkungen umgeben sind, aber ihre Divergenzen und die UV-Divergenzen der Feynman-Graphen heben sich gegeneinander weg. Die neuen renormierten physikalischen Größen, die entstehen nachdem die nackten physikalischen Größen die UV-Divergenzen absorbiert haben, sind endlich und damit messbar.

In der Wirkung (2.1) der  $A^4$ -Theorie gibt es drei physikalische Parameter, das Feld  $A$ , die Masse  $m$  und die Kopplungskonstante  $\lambda$ , die nun den nackten Größen  $A_0, m_0$  und  $\lambda_0$  entsprechen. Durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A_0 = \sqrt{Z_A} A \\ m &\rightarrow m_0 = \frac{\sqrt{Z_m}}{\sqrt{Z_A}} m \\ \lambda &\rightarrow \lambda_0 = \frac{Z_\lambda}{Z_A^2} \lambda \mu^\epsilon \\ J &\rightarrow J_0 = \frac{1}{\sqrt{Z_A}} J \end{aligned} \quad (2.19)$$

wird die Wirkung (2.1) in die renormierte Wirkung

$$S[A] = \int dx \left( -\frac{1}{2} Z_A A \partial^2 A + \frac{1}{2} Z_m m^2 A^2 + \frac{1}{4!} Z_\lambda \mu^{4-d} \lambda A^4 \right) \quad (2.20)$$

umgewandelt.

Im Rahmen der *dimensionalen* Regularisierung, welche in dieser Arbeit ausschließlich benutzt wird, berechnet man die Feynman-Integrale in  $d = 4 - \epsilon$  Dimensionen. Um zu gewährleisten, dass die Kopplungskonstante weiterhin dimensionslos bleibt, wird in der renormierten Wirkung der Masseterm  $\mu^{4-d}$  eingeführt. Die dimensionale Regularisierung führt ganz natürlich auf das Konzept der Renormierung mit minimaler Subtraktion (*MS*-Schema), d. h. die neuen Koeffizienten

lassen sich als Potenzreihe in  $\hbar$

$$Z_{A,m,\lambda} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_{A,m,\lambda}^{[n]} \hbar^n, \quad (2.21)$$

und die Koeffizienten von  $\hbar$  lassen sich als Laurent-Reihe in  $\epsilon$

$$Z_{A,m,\lambda}^{[n]} = \lambda^n \sum_{k=1}^n a_{A,m,\lambda}^{[k,n]} \frac{1}{\epsilon^k} \quad (2.22)$$

darstellen.

Das effektive Potenzial  $V(\bar{A})$  muss ebenfalls renormiert werden. In erster Ordnung sind die neuen Renormierungskonstanten durch

$$m_1^2 = Z_n^{[1]} m^2 + \tilde{m}_1^2, \quad (2.23)$$

$$\lambda_1 = Z_\lambda^{[1]} \lambda + \tilde{\lambda}_1 \quad (2.24)$$

gegeben. Sie enthalten neben einem divergenten Anteil, der den oben definierten Renormierungskonstanten der Wirkung  $S$  entspricht, auch einen endlichen Anteil. Dieser ergibt sich aus den Nebenbedingungen, die das effektive Potenzial  $V(\bar{A})$  erfüllen soll. Eine gängige Wahl im Rahmen der  $A^4$ -Theorie ist

$$\left. \frac{d^2 V}{d\bar{A}^2} \right|_{\bar{A}=0} = m^2, \quad (2.25)$$

$$\left. \frac{d^4 V}{d\bar{A}^4} \right|_{\bar{A}=0} = \lambda. \quad (2.26)$$

Geht man zu den neuen Renormierungskonstanten höherer Ordnungen über, finden sich endliche Teile der niedrigeren Ordnungen im divergenten Teil wieder, so dass nur der Pol, dessen Potenz der Schleifenordnung entspricht, dem durch minimale Subtraktion gewonnenen gleicht.

## 2.2 Die Hintergrundfeldmethode in einer skalaren Theorie

Die Ausführungen in diesem Abschnitt erfolgen in Anlehnung an die Artikel [22] und [66]. In der Hintergrundfeldmethode wird das Feld  $A$  in ein Hintergrundfeld  $B$  und ein Quantenfeld  $Q$  zerlegt, d. h.

$$A = B + Q \quad (2.27)$$

und ein neues erzeugendes Funktional

$$\tilde{Z}[B, J] = \frac{\int \mathcal{D}Q \exp(-S[B+Q] + J \cdot Q)}{\int \mathcal{D}Q \exp(-S[Q])} \quad (2.28)$$

definiert. Man beachte, dass nur das Quantenfeld  $Q$  an die Quelle  $J$  koppelt und dass deshalb das neue generierende Funktional von zwei Funktionen, nämlich  $J(x)$  und  $B(x)$ , abhängig ist. Die verbundenen Korrelationsfunktionen, in Anwesenheit des Hintergrundfeldes, werden jetzt vom Funktional

$$\tilde{W}[B, J] = \ln \tilde{Z}[B, J] \quad (2.29)$$

erzeugt. Eine Legendre-Transformation bezüglich  $J$  liefert eine neue effektive Wirkung

$$\tilde{\Gamma}[B, \bar{Q}] = J \cdot \bar{Q} - \tilde{W}[B, J], \quad (2.30)$$

in der der Erwartungswert des Quantenfeldes  $Q$  in Gegenwart der Quelle  $J$  und des Hintergrundfeldes  $B$  definiert wird durch

$$\bar{Q} = \frac{\delta \tilde{W}[B, J]}{\delta J}. \quad (2.31)$$

Zwischen diesen vom Hintergrundfeld abhängigen neuen Funktionalen und den üblicherweise verwendeten Funktionalen lassen sich unter der Annahme, dass das Maß für das Quantenfeld  $\mathcal{D}Q$  invariant bezüglich der Transformation  $Q \rightarrow Q + B$  ist, die folgenden Beziehungen herleiten. Die beiden Zustandssummen sind über

$$Z[J] = \exp(J \cdot B) \tilde{Z}[B, J] \quad (2.32)$$

miteinander verknüpft. Aus dieser Relation lässt sich mit Hilfe von (2.5) und (2.29) für die erzeugenden Funktionale der Korrelationsfunktionen die Gleichung

$$W[J] = J \cdot B + \tilde{W}[B, J] \quad (2.33)$$

ableiten. Eine anschließende Funktionalableitung nach der Quelle  $J$  führt mit Hilfe der Definitionen (2.9) und (2.31) auf die Beziehung

$$\bar{A} = B + \bar{Q} \quad (2.34)$$

zwischen den Erwartungswerten. Unter Verwendung der Gleichungen (2.8), (2.30), (2.33) und (2.34) folgt für die effektiven Wirkungen

$$\Gamma[B + \bar{Q}] = \tilde{\Gamma}[B + f, \bar{Q} - f], \quad (2.35)$$

wobei  $f$  für ein beliebiges skalares Feld steht. Die linke Seite dieser Gleichung zeigt, dass in der vorliegenden skalaren Feldtheorie das neue Funktional  $\tilde{\Gamma}$  nur von der Summe  $B + \bar{Q}$  abhängt. Mit dem Feld  $f$  lassen sich nun Teile des Hintergrundfeldes  $B$  in den Erwartungswert  $\bar{Q}$  oder umgekehrt Teile des Erwartungswertes  $\bar{Q}$  in das Hintergrundfeld  $B$  umwandeln, d. h. eine skalare Quantenfeldtheorie ohne Hintergrundfeld, aber mit einem von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert  $\bar{Q}$ , lässt sich in eine Quantenfeldtheorie mit Hintergrundfeld und verschwindendem Vakuumerwartungswert umwandeln. Folglich ist es für verschwindendes  $f$  irrelevant, ob man  $B$  oder  $\bar{Q}$  gleich Null wählt (im Falle der Eichtheorien wird dies nicht mehr uneingeschränkt gelten). Lässt man das Hintergrundfeld  $B$  verschwinden, erhält man die ursprüngliche Theorie mit  $Z = \tilde{Z}$ ,  $W = \tilde{W}$  und schließlich die effektiven Wirkungen mit den Erwartungswerten der Quantenfelder als Argument. Setzt man dagegen  $\bar{Q}$  gleich Null, vereinfacht sich die Gleichung (2.35) zu

$$\Gamma[B] = \tilde{\Gamma}[B, 0], \quad (2.36)$$

mit der Folge, dass eine Entwicklung dieser effektiven Wirkung nur noch Vakuumgraphen enthält. Dabei ist die Entwicklung nach  $\hbar$  identisch mit einer Entwicklung nach der Zahl der in den Feynman-Graphen enthaltenen Schleifen. Um dies zu zeigen, wird die bis hierhin aus Gründen der Übersichtlichkeit verwendete Annahme  $\hbar = 1$  fallengelassen. Damit wird die Gleichung (2.27) in

$$A = B + \sqrt{\hbar} Q \quad (2.37)$$

modifiziert und im erzeugenden Funktional (2.28) der Exponent mit  $1/\hbar$  gewichtet, d. h.

$$\tilde{Z}[B, J] = \int \mathcal{D}Q \exp\left(-\frac{1}{\hbar} S[B + \sqrt{\hbar} Q] + \frac{1}{\hbar} J \cdot \sqrt{\hbar} Q\right). \quad (2.38)$$

Zerlegt man nun den Strom in

$$J = \bar{J} + j \quad (2.39)$$

und setzt

$$j = \left. \frac{\delta S[A]}{\delta A} \right|_{A=B}, \quad (2.40)$$

so wird unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} S_n &= \int dx_1 \cdots dx_n \left. \frac{\delta S[A]}{\delta A(x_1) \cdots \delta A(x_n)} \right|_{A=B} Q(x_1) \cdots Q(x_n) \\ \bar{J}_1 &= \int dx \bar{J}(x) Q(x) \end{aligned}$$

der Exponent aus (2.28) zu

$$S[B + \sqrt{\hbar} Q] - \sqrt{\hbar} J \cdot Q = S[B] + \frac{\hbar}{2} S_2 + \frac{\hbar^{3/2}}{3!} S_3 + \frac{\hbar^2}{4!} S_4 - \hbar^{1/2} \bar{J}_1, \quad (2.41)$$

wobei der lineare Term in  $Q$  aufgrund von (2.40) weggefallen ist. Eingesetzt in (2.38) ergibt sich folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[B, J] &= e^{-\frac{1}{\hbar} S[B]} \int \mathcal{D}Q e^{-\frac{1}{2} S_2} \sum_{k,m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \hbar^{-k/2+m/2+n} \frac{1}{k! m! n!} \left( \frac{S_3}{3!} \right)^m \left( \frac{S_4}{4!} \right)^n \bar{J}_1^k \\ &= e^{-\frac{1}{\hbar} S[B]} \int \mathcal{D}Q e^{-\frac{1}{2} S_2} \times \\ &\quad \left[ 1 + \frac{\bar{J}_1^2}{2\hbar} + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \left( \bar{J}_1 - \frac{1}{2!3!} S_3 \bar{J}_1^2 \right) - \frac{1}{3!} S_3 \bar{J}_1 + \left( \frac{1}{(2!)^2 (3!)^2} S_3^2 - \frac{1}{2!4!} S_4 \right) \bar{J}_1^2 \right. \\ &\quad + \hbar^{1/2} \left( -\frac{1}{3!} S_3 + \left( \frac{1}{2! (3!)^2} S_3^2 - \frac{1}{4!} S_4 \right) \bar{J}_1 + \left( -\frac{1}{2! (3!)^4} S_3^3 + \frac{1}{2!3!4!} S_3 S_4 \right) \bar{J}_1^2 \right) \\ &\quad + \hbar \left( \frac{1}{2! (3!)^2} S_3^2 - \frac{1}{4!} S_4 + \left( -\frac{1}{(3!)^4} S_3^3 + \frac{1}{3!4!} S_3 S_4 \right) \bar{J}_1 \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( \frac{1}{2! (3!)^4 4!} S_3^4 - \frac{1}{(2!)^2 (3!)^2 4!} S_3^2 S_4 + \frac{1}{(2!)^2 (4!)^2} S_4^2 \right) \bar{J}_1^2 \right) + O(\bar{J}^3, \hbar^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ausgeschrieben hat der Term im Exponenten des Integrals die folgende Gestalt

$$-\frac{1}{2} S_2 = -\frac{1}{2} \int dx Q \Delta[B] Q, \quad (2.43)$$

wobei der Wellenoperator  $\Delta[B]$  im Falle der  $A^4$ -Theorie durch

$$\Delta[B] = \left( -\partial^2 + m^2 + \frac{1}{2} \lambda \mu^\epsilon B^2 \right) \quad (2.44)$$

gegeben ist. Durch Anwendung der folgenden Identität (Wick-Kontraktionen)

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}Q Q(x_1) \cdots Q(x_n) \exp \left( -\frac{1}{2} \int dx Q \Delta Q \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \exp \left( -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \Delta \right) (\Delta^{-1}(x_1, x_2) \cdots \Delta^{-1}(x_{n-1}, x_n) + \text{Permutationen}) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

entstehen die entsprechenden Feynman-Graphen. Dabei ist zu beachten, dass die Terme in (2.42), die eine ungerade Anzahl von Quantenfeldern beinhalten, wegfallen. Außerdem soll im weiteren Verlauf der Arbeit die zu dem Wellenoperator  $\Delta$  inverse Größe als exakter Propagator  $G(x, y)$  bezeichnet werden, wobei invers in dem Sinne gemeint ist, dass der exakte Propagator  $G(x, y)$  die Gleichung

$$\Delta G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.46)$$

erfüllt<sup>3</sup>. In der Praxis kann es, wie in den nächsten Abschnitten gezeigt wird, unter Umständen von Vorteil sein, zuerst den Wärmeleitungskern herzuleiten und aus ihm den Propagator zu ermitteln.

<sup>3</sup>Man beachte, dass der exakte Propagator  $G(x, y)$  nicht dem vollständigen Propagator  $W^{(2)}(x, y)$  entspricht.

Damit haben das erzeugende Funktional der verbundenen Graphen und seine Funktionalableitung nach  $\bar{J}$  die Gestalt

$$\begin{aligned}
\tilde{W}[B, \bar{J}] &= \exp\left(\hbar \tilde{Z}[B, \bar{J}]\right) \\
&= -S[B] - \frac{\hbar}{2} \ln \det \Delta[B] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \bar{J}(x_1) G(x_1, x_2) \bar{J}(x_2) \\
&\quad - \frac{\hbar}{2} \int dx_1 \cdots dx_4 S_3(x_1, x_2, x_3) G(x_1, x_2) G(x_3, x_4) \bar{J}(x_4) \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{12} \int dx_1 \cdots dx_6 S_3(x_1, x_2, x_3) G(x_1, x_4) G(x_2, x_5) G(x_3, x_6) S_3(x_4, x_5, x_6) \\
&\quad + \frac{\hbar^2}{8} \int dx_1 \cdots dx_6 G(x_1, x_2) S_3(x_1, x_2, x_3) G(x_3, x_4) S_3(x_4, x_5, x_6) G(x_5, x_6) \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{8} \int dx_1 \cdots dx_4 G(x_1, x_2) S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) G(x_3, x_4) + \cdots, \tag{2.47}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \tilde{W}[B, \bar{J}]}{\delta \bar{J}(x)} &= \int dx_1 \bar{J}(x_1) G(x_1, x) \\
&\quad - \frac{\hbar}{2} \int dx_1 \cdots dx_3 S_3(x_1, x_2, x_3) G(x_1, x_2) G(x_3, x) + \cdots. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Aus der Nebenbedingung  $\delta \tilde{W}[B, \bar{J}]/\delta \bar{J}(x) = 0$  folgt nun, dass durch Anwendung des Wellenoperators  $\Delta$  auf die Gleichung (2.48) der Strom  $\bar{J}$  in erster Näherung durch

$$\bar{J}(x) = \frac{\hbar}{2} \int dx_1 dx_2 S_3(x_1, x_2, x) G(x_1, x_2) + \cdots \tag{2.49}$$

gegeben ist. Setzt man das so gewonnene  $\bar{J}$  in (2.47) ein, so heben sich der einfach verbundene Feynman-Graph (letzter Term in Gleichung (2.47)) mit den Termen, die  $\bar{J}$  enthalten (dritter und vierter Term), weg.

Dieses aus [26] stammende Verfahren kann bis in alle Ordnungen fortgesetzt werden, und es lässt sich allgemein zeigen, dass unter diesen Bedingungen

$$\tilde{\Gamma}[B, 0] = -\tilde{W}[B, \bar{J}] \Big|_{\delta \tilde{W}[B, \bar{J}]/\delta \bar{J} = 0} \tag{2.50}$$

gilt. Dabei bewirkt die Gleichung (2.49) für den Strom  $\bar{J}$ , dass zum einen sämtliche verbundenen Graphen, die nicht 1PI sind, weggehoben werden, und dass zum anderen nur noch Vakuumgraphen in der Entwicklung auftreten. Die sich daraus ergebende Entwicklung

$$\tilde{\Gamma}[B, 0] = S[B] + \frac{\hbar}{2} \ln \det \Delta[B] + O(\hbar^2) \tag{2.51}$$

zeigt, dass für verschwindendes  $\hbar$  die effektive Wirkung in die klassische Wirkung übergeht und die erste Quantenkorrektur sich aus der Determinanten des Wellenoperators errechnen lässt. Die Korrekturen höherer Ordnungen lassen sich am besten mit Hilfe der Feynman-Graphen darstellen. Es sei noch angemerkt, dass für Vakuumgraphen der Zusammenhang zwischen der Zahl der Schleifen  $L$  und der Anzahl  $V_n$  der Vertizes mit  $n$  Beinen durch

$$L = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} V_{i+2} \tag{2.52}$$

gegeben ist und sich im Rahmen der  $A^4$ - und Yang-Mills-Theorie auf

$$L = 1 + \frac{1}{2}V_3 + V_4 \quad (2.53)$$

reduziert.

## 2.3 Der Wärmeleitungskern

Für die dem Wellenoperator  $\Delta$  zugehörige Green-Funktion in  $d$  Dimensionen gilt

$$\Delta G(x, y) = \delta(x - y). \quad (2.54)$$

Der Wärmeleitungskern  $K(x, y; \tau)$  einer Green-Funktion  $G(x, y)$  erfüllt die sogenannte Wärmeleitungsgleichung

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta \right) K(x, y; \tau) = 0 \quad (2.55)$$

mit der Randbedingung

$$K(x, y; 0) = \delta(x - y) \quad (2.56)$$

und ist über die Gleichung

$$G(x, y) = \int_0^\infty d\tau K(x, y; \tau) \quad (2.57)$$

mit der Green-Funktion verknüpft, so dass automatisch (2.54) gilt. Für den speziellen Fall, dass  $\Delta = -\partial^2$  ist, hat die Wärmeleitungsgleichung die folgende geschlossene, translationsinvariante Lösung

$$K_0(x - y; \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{4\tau}\right). \quad (2.58)$$

Für allgemeinere Fälle, wie z. B. skalare Theorien mit Wechselwirkungen oder nichtabelsche Eichtheorien, hat die Wärmeleitungsgleichung keine geschlossene Lösung. Der zugehörige Operator  $\Delta$  hat die Form

$$\Delta = -\mathbb{1}D_x^2 + X(x), \quad D_\mu = \partial_\mu + N_\mu(x) \quad (2.59)$$

mit der Einschränkung, dass es sich bei den Funktionen  $X(x)$  um hermitesche Matrizen handelt, deren Elemente  $C^\infty$ -Funktionen sind. Der diesem  $\Delta$  zugehörige Wärmeleitungskern lässt sich für  $\tau \rightarrow +0$  als asymptotische Entwicklung

$$K(x, y; \tau) = K_0(x - y; \tau) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, y) \tau^j \quad (2.60)$$

darstellen. Die Funktionen  $a_j(x, y)$  werden im weiteren Verlauf als Wärmeleitungskoeffizienten bezeichnet und sind, sofern der Wärmeleitungskern dies auch ist, matrixwertig. Setzt man diesen Ansatz in die Wärmeleitungsgleichung (2.55) ein, erhält man für die Wärmeleitungskoeffizienten die folgende Iterationsgleichung

$$(n + (x - y)_\mu D_x^\mu) a_n(x, y) = -\Delta a_{n-1}(x, y) \quad \text{für } n \geq 0 \quad (2.61)$$

mit der Definition

$$a_{-1}(x, y) = 0. \quad (2.62)$$

Da zum einen die Wärmeleitungskerne dimensionslos sind und zum anderen  $\tau$  von der Dimension  $-2$  ist, müssen die Wärmeleitungskoeffizienten der Gleichung  $[a_j] = 2j$  genügen. Die eckigen Klammern stehen, wie in der Physik üblich, für die Einheiten bzw. Dimensionen, in denen die Größe gemessen wird.

Im Unterschied zu [26], in der der Wärmeleitungskern bzw. der Propagator sowohl für die skalare Theorie als auch die Yang-Mills-Theorie mit Hilfe der Wärmeleitungskoeffizienten soweit entwickelt wurde, wie dies für die Renormierung nötig ist, werden wir im folgenden durch Einführung weiterer Nebenbedingungen eine geschlossene Darstellung für die Wärmeleitungskerne beider Theorien herleiten. Weiter lässt sich zeigen, dass die Entwicklung dieser Wärmeleitungskerne für  $x \rightarrow y$  im Wesentlichen auf die gleichen Koeffizienten führt, die auch [26] durch Iteration als Wärmeleitungskoeffizienten gefunden haben.

## 2.4 Der Propagator

Aus dem Wärmeleitungskern lässt sich mit Hilfe der Gleichungen (2.57), (2.60) und (2.58) die folgende allgemeine Entwicklung für den Propagator herleiten

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_0^\infty d\tau K(x, y; \tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau K_0(x - y; \tau) \sum_{n=0}^\infty a_n(x, y) \tau^n \\ &= \sum_{n=0}^\infty G_n(x - y) a_n(x, y), \end{aligned} \quad (2.63)$$

wobei die Koeffizienten der Wärmeleitungskoeffizienten  $a_n(x, y)$  durch

$$G_n(x - y) = \int d\tau K_0(x - y; \tau) \tau^n = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - n - 1)}{4^{n+1} \pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(x - y)^{2(\frac{d}{2} - n - 1)}} \quad (2.64)$$

gegeben sind [26] und daher translationsinvariant sind. Dagegen ist der exakte Propagator  $G(x, y)$  im Allgemeinen aufgrund der nicht weiter spezifizierten Ortsabhängigkeit der Wärmeleitungskoeffizienten natürlich nicht translationsinvariant. Die Faltung zweier Green-Funktionen  $G_i$  und  $G_j$  lässt sich unter Verwendung der Gleichung (A.2) zu

$$\int dy G_i(x - y) G_j(y - z) = \frac{i! j!}{(i + j + 1)!} G_{i+j+1}(x - z) \quad (2.65)$$

herleiten. Damit ist gezeigt, dass sich jede Green-Funktion  $G_n$  aus dem Propagator der freien Theorie  $G_0$  über

$$\begin{aligned} G_n(x_0 - x_{n+1}) &= n! \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n G_0(x_0 - x_1) G_0(x_1 - x_2) \cdots G_0(x_n - x_{n+1}) \\ &= (n!) \begin{array}{c} x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \quad x_{n+1} \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (2.66)$$

gewinnen lässt. Die graphische Darstellung enthält im Gegensatz zur Formeldarstellung einen zusätzlichen Faktor  $(n!)$ . Im weiteren Verlauf werden diese Faktoren mit runden Klammern versehen, und beim Übergang von der graphischen Darstellung zur Formeldarstellung sind diese wegzulassen. Weitere Identitäten für die Funktionen  $G_n$  finden sich im Anhang A.2.

Im Impulsraum ist das Analogon zu den Green-Funktionen  $G_n(x)$  durch die Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \hat{G}_n(p) &= \int dx G_n(x) \exp(ipx) \\ &= \frac{n!}{p^{2(n+1)}} \end{aligned} \quad (2.67)$$

gegeben und, wie zu erwarten, ist auch  $\hat{G}_n(p)$  translationsinvariant.

In der durch die Wirkung (2.1) beschriebenen skalaren Theorie haben die Funktionen des in (2.59) beschriebenen Wellenoperators  $\Delta$  die folgende Gestalt

$$N_\mu(x) = 0 \quad \text{und} \quad X(x) = m^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu^\epsilon B^2(x), \quad (2.68)$$

wobei im Folgenden angenommen werden soll, dass  $X(x)$  keine Matrix ist, d. h. dass das skalare Feld nur eine Komponente hat.

Solange man wie im vorliegenden Fall nur an der Renormierung oder dem effektiven Potenzial  $V$  interessiert ist, darf in  $X$  das Hintergrundfeld  $B$  konstant gesetzt werden, nicht aber im 3er-Vertex (2.76), da sonst die für die Wellenrenormierung verantwortlichen Feynman-Graphen verloren gehen. Erst bei der Berechnung von  $U$  muss diese Bedingung auf  $X_{,\mu\nu\rho} = 0$  erweitert werden, wie in einer sehr subtilen Betrachtung aus [47] gezeigt wird. Konkret heißt dies, dass es genügt, den Wärmeleitungskern

$$K(x, y; \tau) = K_0(x - y; \tau) \exp(-X\tau) \quad (2.69)$$

zu verwenden, der durch Integration auf einen Propagator

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left( \frac{X}{(x - y)^2} \right)^{(d-2)/4} \mathcal{K}_{d/2-1} \left( \sqrt{(x - y)^2 X} \right) \quad (2.70)$$

mit modifizierter Masse  $m^2 + \lambda\mu^\epsilon B^2/2$  führt. Dabei steht  $\mathcal{K}_n(x)$  für die  $n$ . modifizierte Bessel-Funktion, die auch McDonald-Funktion genannt wird [67]. Im Impulsraum hat dieser Propagator die einfache Gestalt

$$\hat{G}(p) = \frac{1}{p^2 + X} = \frac{1}{p^2 + m^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu^\epsilon B^2}, \quad (2.71)$$

und es ist sofort ersichtlich, dass er neben dem freien massiven Propagator auch sämtliche von der Einführung des Hintergrundfeldes  $B$  stammenden Beiträge enthält. Propagatoren mit dieser Eigenschaft werden im folgenden zur Abgrenzung z. B. gegen den vollständigen Propagator mit dem Attribut *exakt* versehen. Eine andere Darstellung für den Propagator erhält man, indem die Exponentialfunktion unter dem Integral durch ihre Reihenentwicklung in  $\tau$  ersetzt wird. Die anschließende Integration führt im Ortsraum auf

$$G(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-X)^j}{j!} G_j(x - y) \quad (2.72)$$

bzw. im Impulsraum auf

$$\hat{G}(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-X)^j}{j!} \hat{G}_j(p) \quad (2.73)$$

und damit auf die Wärmeleitungskoeffizienten

$$a_j = \frac{(-X)^j}{j!}, \quad (2.74)$$

die wie erwartet die Iterationsgleichung (2.61) erfüllen. Diese Wärmeleitungskoeffizienten haben, wie im vorherigen Abschnitt gefordert, die Dimension  $2j$  und sind außerdem translationsinvariant.

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G_0(x - y) - G_1(x - y) X + \frac{1}{2} G_2(x - y) X^2 + \dots \\ \text{—————} &= \bullet\text{—————}\bullet - \bullet\text{—————}\bullet X + \frac{1}{2} \text{(2)} \bullet\text{—————}\bullet X^2 + \dots \end{aligned}$$

Abbildung 2.1: Der Propagator in der skalaren Theorie

Für die Renormierung genügt die Entwicklung (2.72) des Propagators bis einschließlich der Ordnung  $j = 2$ , da die Wirkung (2.1) keine Terme  $B^{2j}$  mit  $j > 2$  enthält.

Ist man dagegen am effektiven Potenzial  $V$  interessiert, kommt man nicht umhin, die vollständige Ortsraumdarstellung des Wärmeleitungskerns (2.69) bzw. des Propagators (2.70) zu verwenden.

## 2.5 Die Feynman-Regeln

Für die skalare Theorie ergeben sich die folgenden Feynman-Regeln. Der exakte Propagator ist durch

$$G(x, y) = \left( \frac{\delta^2 S[B + Q]}{\delta Q(x) \delta Q(y)} \Big|_{Q=0} \right)^{-1} \quad (2.75)$$

gegeben, während die Feynman-Regeln für die Vertizes sich aus

$$\frac{\delta^3 S[B + Q]}{\delta Q(x_1) \delta Q(x_2) \delta Q(x_3)} \Big|_{Q=0} = \lambda \int dx B(x) \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \delta(x - x_3) \quad (2.76)$$

und

$$\frac{\delta^4 S[B + Q]}{\delta Q(x_1) \delta Q(x_2) \delta Q(x_3) \delta Q(x_4)} \Big|_{Q=0} = \lambda \int dx \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \delta(x - x_3) \delta(x - x_4) \quad (2.77)$$

herleiten lassen.

## 2.6 Die 1-Schleifen-Rechnung

Die erste Quantenkorrektur in der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}[B, 0]$  ist durch den Term

$$\tilde{\Gamma}_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\det \Delta[B]}{\det \Delta[0]} \quad (2.78)$$

gegeben, der linear in  $\hbar$  ist. Die Determinanten dieses Terms lassen sich unter Verwendung einer modifizierten  $\zeta$ -Funktion in Integrale überführen, die von den Wärmeleitungskernen abhängen (siehe z. B. [68]). Aus diesen können schließlich ohne größeren Aufwand sowohl die 1-Schleifen-Divergenz als auch das effektive Potenzial in erster Ordnung bestimmt werden. Der Nenner in (2.78) wurde hinzugefügt, um die effektive Wirkung auf  $\tilde{\Gamma}_1[0] = 0$  zu normieren.

In einem ersten Schritt wird unter der Annahme, dass sich für den Wellenoperator  $\Delta$  ein wohldefiniertes Eigenwertproblem formulieren lässt, der folgende Ansatz

$$\Delta |n\rangle = \lambda_n |n\rangle \quad (2.79)$$

gemacht, wobei  $\lambda_n$  die den Eigenzuständen  $|n\rangle$  zugehörigen reellen Eigenwerte sind. Die entsprechenden Eigenfunktionen  $u_n(x) = \langle x | n \rangle$  erfüllen die Vollständigkeits- und Orthonormalrelationen

$$\begin{aligned} \sum_n u_n(x) u_n^*(y) &= \delta(x - y) \\ \int dx u_m(x) u_n^*(x) &= \delta_{mn} \end{aligned}$$

und ermöglichen die folgende formale Darstellung

$$K(x, y; \tau) = \sum_n e^{-\lambda_n \tau} u_n(x) u_n^*(y) \quad (2.80)$$

für den Wärmeleitungskern, wie sich durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung (2.55) und deren Anfangsbedingung (2.56) leicht zeigen lässt.

Im zweiten Schritt bietet es sich an, die Determinanten des Wellenoperators über die Eigenwerte zu berechnen. Zu diesem Zweck wird die folgende verallgemeinerte  $\zeta$ -Funktion

$$\zeta_{\Delta}(s) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^s} \quad (2.81)$$

definiert. Differenziert man diese Gleichung nach dem Argument der  $\zeta$ -Funktion, so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} - \left. \frac{d}{ds} \zeta_{\Delta}(s) \right|_{s=0} &= - \left. \frac{d}{ds} \sum_n e^{-s \ln \lambda_n} \right|_{s=0} = \sum_n \ln \lambda_n \\ &= \ln \prod_n \lambda_n = \ln \det \Delta \end{aligned} \quad (2.82)$$

zwischen der Ableitung der  $\zeta$ -Funktion und der Determinanten des Wellenoperators  $\Delta$ .

Im dritten Schritt schließlich wird die modifizierte  $\zeta$ -Funktion in ein Integral überführt, das von dem im ersten Schritt definierten Wärmeleitungskern abhängt. Ausgehend von der Integraldarstellung der  $\Gamma$ -Funktion

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau}$$

lässt sich mit Hilfe einer Skalierung der Integrationsvariablen  $\tau \rightarrow \lambda\tau$  die folgende Gleichung

$$\frac{1}{\lambda^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} e^{-\lambda\tau}$$

herleiten. Eingesetzt in Gleichung (2.81) erhält man die Laplace-Transformation der  $\zeta$ -Funktion

$$\zeta_{\Delta}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \sum_n e^{-\lambda_n \tau}. \quad (2.83)$$

Unter Verwendung der vollständigen und orthonormalen Eigenzustände  $|n\rangle$  des Wellenoperators  $\Delta$  lässt sich zeigen, dass die obige Summe mit der Spur des Wellenoperators gleichgesetzt werden kann und dass diese Spur dem Raumzeitintegral über den oben definierten Wärmeleitungskern entspricht.

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\lambda_n \tau} &= \sum_n \langle n | e^{-\Delta\tau} | n \rangle = \text{Tr} e^{-\Delta\tau} \\ &= \int dx \langle x | e^{-\Delta\tau} | x \rangle = \int dx \sum_n \langle x | e^{-\Delta\tau} | n \rangle \langle n | x \rangle \\ &= \sum_n e^{-\lambda_n \tau} u_n(x) u_n^*(x) = \int dx K(x, x; \tau) \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis erhält man aus Gleichung (2.83) verallgemeinert auf  $d$  Dimensionen die Beziehung

$$\zeta_{\Delta}(s, d) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \int dx K(x, x; \tau) \quad (2.84)$$

zwischen der  $\zeta$ -Funktion und dem Wärmeleitungskern  $K(x, x; \tau)$ . Wie man sieht, genügt es, den Wärmeleitungskern im diagonalen Limes, d. h. für gleiche Ortskoordinaten, zu kennen.

Mit den Ergebnissen (2.82) und (2.84) lassen sich sowohl die Divergenz als auch das effektive Potenzial in der Ordnung einer Schleife über die effektive Wirkung

$$\tilde{\Gamma}_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\det \Delta[B]}{\det \Delta[0]} \quad (2.85)$$

$$= - \lim_{s \rightarrow 0} \partial_s \left( \frac{1}{2} (\zeta_{\Delta[B]}(s, d) - \zeta_{\Delta[0]}(s, d)) \right) \quad (2.86)$$

$$= - \lim_{s \rightarrow 0} \partial_s \left( \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \int_{-\infty}^\infty dx (K(x, x; \tau|B) - K(x, x; \tau|0)) \right) \quad (2.87)$$

bestimmen. In der letzten Zeile wurde die Notation für den Wärmeleitungskern dahingehend erweitert, dass hinter dem senkrechten Strich angegeben wird, von welchem Hintergrundfeld der zugehörige Wellenoperator  $\Delta$  abhängig ist. Setzt man nun den im vorherigen Abschnitt berechneten Wärmeleitungskern (2.69) für die skalare Theorie ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= - \lim_{s \rightarrow 0} \partial_s \left( \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-d/2-1} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(4\pi)^{d/2}} (e^{-X\tau} - e^{-m^2\tau}) \right) \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \partial_s \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} (X^{d/2-s} - (m^2)^{d/2-s}) \int_{-\infty}^\infty dx \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(s - \frac{d}{2})}{\Gamma(s)} \left[ \left( \psi(s) - \psi\left(s - \frac{d}{2}\right) \right) (X^{d/2-s} - (m^2)^{d/2-s}) \right. \\ &\quad \left. X^{d/2-s} \ln X + (m^2)^{d/2-s} \ln m^2 \right] \int_{-\infty}^\infty dx, \end{aligned}$$

wobei  $\psi$  für die Digamma-Funktion steht, die über  $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  definiert ist. Bildet man den Limes  $s \rightarrow 0$ , fallen alle Terme weg, die kein  $\psi(s)$  enthalten. Mit der Beziehung

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} = -1 \quad (2.88)$$

gelangt man schließlich zu

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1 &= - \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) (X^{d/2} - (m^2)^{d/2}) \int_{-\infty}^\infty dx \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dx \left[ -\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{2} m^2 \lambda B^2 + \frac{1}{8} \lambda^2 B^4 \right) \right. \\ &\quad - \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \gamma - \frac{1}{4} \ln \frac{m^2}{4\pi} \right) m^2 \lambda B^2 - \left( \frac{3}{32} - \frac{1}{16} \gamma - \frac{1}{16} \ln \frac{m^2}{4\pi} \right) \lambda^2 B^4 \\ &\quad \left. + \left( \frac{m^4}{4} - \frac{m^2 \lambda B^2}{4} - \frac{\lambda^2 B^4}{16} \right) \ln \left[ 1 + \frac{\lambda B^2}{2m^2} \right] \right] + O(\epsilon), \quad (2.89) \end{aligned}$$

wobei die effektive Wirkung  $\tilde{\Gamma}_1$ , wie von einer 1-Schleifen-Rechnung erwartet, einen einfachen Pol enthält. Das effektive Potenzial  $V_1$  ist nach (2.17) durch

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{16\pi^2} \left( - \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \gamma - \frac{1}{4} \ln \frac{m^2}{4\pi} \right) m^2 \lambda B^2 - \left( \frac{3}{32} - \frac{1}{16} \gamma - \frac{1}{16} \ln \frac{m^2}{4\pi} \right) \lambda^2 B^4 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{m^4}{4} - \frac{m^2 \lambda B^2}{4} - \frac{\lambda^2 B^4}{16} \right) \ln \left[ 1 + \frac{\lambda B^2}{2m^2} \right] \right) + \frac{1}{2} m_1^2 B^2 + \frac{1}{4!} \lambda_1 B^4 \quad (2.90) \end{aligned}$$

gegeben. Dies entspricht dem von  $\epsilon$  unabhängigen Anteil der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}_1$  erweitert um zwei Summanden, die die Korrekturen für die Masse und die Kopplungskonstante beinhalten. Die

Normierung der effektiven Wirkung gemäß (2.85) bewirkt, dass das effektive Potenzial ebenfalls auf  $V_1(0) = 0$  normiert ist. Da die Größen  $m^2$  und  $\lambda$  bisher nur im klassischen Sinne definiert worden sind, lassen sich noch zwei Nebenbedingungen an das effektive Potenzial anlegen, um die Konstanten  $m_1$  und  $\lambda_1$  zu bestimmen. Wählt man für diese beiden Nebenbedingungen

$$\left. \frac{d^2 V}{dB^2} \right|_{B=0} = 0, \quad (2.91)$$

$$\left. \frac{d^4 V}{dB^4} \right|_{B=M} = \lambda, \quad (2.92)$$

so impliziert die erste Gleichung, dass die zweite Gleichung und das effektive Potenzial im Limes  $m^2 \rightarrow 0$  zu betrachten sind [47]. Dies führt auf das in [54] von Coleman und Weinberg gefundene effektive Potenzial in erster Ordnung

$$V_1(B) = \frac{\lambda^2 B^4}{256\pi^2} \left( \ln \frac{B^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right). \quad (2.93)$$

Sind die beiden Nebenbedingungen dagegen durch

$$\left. \frac{d^2 V}{dB^2} \right|_{B=0} = m^2, \quad (2.94)$$

$$\left. \frac{d^4 V}{dB^4} \right|_{B=0} = \lambda \quad (2.95)$$

gegeben, so erhält man in Übereinstimmung mit [47], [69] und [48] das folgende effektive Potenzial

$$V_1(B) = \frac{1}{16\pi^2} \left( -\frac{m^2 \lambda B^2}{8} - \frac{3\lambda^2 B^4}{32} + \left( \frac{m^4}{4} + \frac{m^2 \lambda B^2}{4} + \frac{\lambda^2 B^4}{16} \right) \ln \left[ 1 + \frac{\lambda B^2}{2m^2} \right] \right). \quad (2.96)$$

Im Anhang B.2 findet sich eine Implementierung der oben vorgestellten 1-Schleifen-Rechnung in *Mathematica*. Da, wie schon im Abschnitt 2.1 erwähnt, in erster Ordnung die beiden Renormierungsschemata die gleichen Divergenzen ergeben, lässt sich die Korrektur aus (2.89) mit  $\hat{\lambda} = \lambda/(16\pi^2)$  direkt als

$$\tilde{\Gamma}_1^{\text{div}} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \frac{\hat{\lambda}}{\epsilon} m^2 B^2(x) + \frac{1}{4!} \frac{3\hat{\lambda}}{\epsilon} \lambda \mu^\epsilon B^4(x) \right) \quad (2.97)$$

ablesen.

## 2.7 Die 2-Schleifen-Rechnung

Der Korrekturterm in der Ordnung von 2-Schleifen

$$\tilde{\Gamma}_2 = -\frac{\lambda \mu^\epsilon}{8} \int dx G(x, x)^2 + \frac{(\lambda \mu^\epsilon)^2}{12} \int dx dy G(x, y)^3 B(x) B(y) + \frac{1}{2} \int dx X_1 G(x, x)$$

besteht aus zwei Graphen, die zwei Schleifen enthalten, und einem Counterterm mit einer Schleife, der über  $X_1 = m_1^2 + \lambda_1 \frac{B^2}{2}$  mit dem Ergebnis der 1-Schleifen-Rechnung verbunden ist.

Um von der graphischen Darstellung in der Abbildung 2.2 auf der nächsten Seite zur obigen Formel zu gelangen, muss für jeden dicken Strich der volle Propagator  $G(x, y)$ , für jeden 3er-Vertex ein Term  $\lambda \mu^\epsilon B(x)$ , für jeden 4er-Vertex ein Term  $\lambda \mu^\epsilon$  sowie für jedes Kreuz ein Term  $X_1$  eingesetzt werden. Des Weiteren ist über den in jedem Vertex vorkommenden Ortsraumpunkt zu integrieren.

$$\tilde{\Gamma}_2 = -\frac{1}{8} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} + \frac{1}{12} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \hline \bigcirc \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bigcirc \\ \times \end{array}$$

Abbildung 2.2: Effektive Wirkung der  $A^4$ -Theorie in 2. Ordnung

Die ersten beiden Graphen der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}_2$  in Abbildung 2.2 werden aufgrund ihrer Topologie im weiteren Verlauf als  $K2$ - bzw.  $\Theta$ -Graphen bezeichnet.

Bis auf den  $\Theta$ -Graphen sind alle anderen Graphen lokal und damit einfach zu berechnen. Der  $\Theta$ -Graph dagegen wird in der Literatur sehr ausführlich behandelt und ist Gegenstand vieler Veröffentlichungen. Da zur Berechnung des effektiven Potenzials nur die UV-Divergenzen und der endliche Teil der  $\epsilon$ -Entwicklung von Interesse sind, sei für dieses Ergebnis exemplarisch auf [70] und [71] verwiesen.

Es existiert aber noch ein einfacherer Weg, das effektive Potenzial  $\tilde{\Gamma}_2$  zu berechnen [48]. Nutzt man die Tatsache, dass es genügt, den endlichen Teil des  $\Theta$ -Graphen im Limes  $x \rightarrow y$  zu kennen, kann man die modifizierte Bessel-Funktion  $K_{1-\epsilon/2}(\sqrt{(x-y)^2 X})$  aus (2.70) nach der Variablentransformation  $t = \sqrt{(x-y)^2 X}$  durch eine Entwicklung für kleine Argumente

$$K_{1-\epsilon/2}(t) = \frac{\pi}{2 \sin \left[ \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \pi \right]} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\Gamma[j+1] \Gamma \left[ j + \frac{\epsilon}{2} \right]} \left( \frac{t}{2} \right)^{2j-1-\epsilon/2} - \frac{1}{\Gamma[j+1] \Gamma \left[ j + 2 - \frac{\epsilon}{2} \right]} \left( \frac{t}{2} \right)^{2j+1-\epsilon/2} \right) \quad (2.98)$$

ersetzen. Eine anschließende Integration über  $t$  gefolgt von einer Entwicklung in  $\epsilon$  führt unter Vernachlässigung der Terme, die dann noch von  $t$  abhängig sind, auf das gewünschte Ergebnis. Legt man an das so gewonnene Potenzial  $V_2$  die schon aus der 1-Schleifen-Rechnung bekannten Nebenbedingungen

$$\left. \frac{d^2 V}{dB^2} \right|_{B=0} = m^2, \quad (2.99)$$

$$\left. \frac{d^4 V}{dB^4} \right|_{B=0} = \lambda \quad (2.100)$$

an, so erhält man in Übereinstimmung mit [47] und [48] das Potenzial

$$V_2(B) = \frac{1}{(16\pi)^2} \left( \frac{9\lambda^3 B^4}{32} - \left( \frac{5m^2 \lambda^2 B^2}{8} + \frac{5\lambda^3 B^4}{16} \right) \ln \left[ 1 + \frac{\lambda B^2}{2m^2} \right] + \left( \frac{m^4 \lambda}{8} + \frac{m^2 \lambda^2 B^2}{4} + \frac{3\lambda^3 B^4}{32} \right) \ln \left[ 1 + \frac{\lambda B^2}{2m^2} \right]^2 \right). \quad (2.101)$$

Eine Implementierung dieser 2-Schleifen-Rechnung in *Mathematica* findet sich ebenfalls im Anhang B.2.

Ist man dagegen nur an den Divergenzen der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}_2$  interessiert, reicht es aus, die Propagatoren aus Abbildung 2.2 durch die Entwicklung (2.72) für  $n = 2$  zu ersetzen. Terme höherer Ordnung werden nicht benötigt, da sie in der Wirkung  $S$  nicht vorkommen. Des Weiteren wird der Counterterm nicht mehr benötigt, da die Divergenzen der beiden ersten Feynman-Graphen

$$\tilde{\Gamma}_2 = \frac{1}{8} \left( \text{Diagram 1} \right) - \frac{1}{12} \left( \text{Diagram 2} - 3 \text{Diagram 3} \right) + \dots$$

Abbildung 2.3: Divergenzen der effektiven Wirkung der  $A^4$ -Theorie in 2. Ordnung

aus Abbildung 2.2 mit Hilfe der  $R^*$ -Methode berechnet werden, die automatisch die Beiträge aus der ersten Ordnung eliminiert.

Nach der Entwicklung der vollen Propagatoren bleiben drei Feynman-Graphen übrig, die divergent sind. Da jeder Punkt im Graphen für eine Integration im vierdimensionalen Raum und jede dünne Linie für einen Propagator der freien Theorie ( $G_0 \sim 1/x^2$ ) steht, ergibt sich der Grad der Divergenz  $D$  durch

$$4(p-1) - 2l = D, \quad (2.102)$$

wobei  $p$  für die Anzahl der Punkte und  $l$  für die Anzahl der Linien im Graphen steht. Die Zahl der Punkte wird um Eins reduziert, da die Wirkung  $S$  schon eine Integration enthält. Für  $D > 0$  enthält der Graph keine Divergenzen, für  $D = 0$  spricht man von einer logarithmischen Divergenz und für  $D = -2$  ist von einer quadratischen Divergenz die Rede, d. h. zwei Ableitungen wirken auf die  $\delta$ -Funktion.

Der Gleichung (2.102) folgend sind der  $K_2$ -Graph und der zweite  $\Theta$ -Graph in der zweiten Zeile der Abbildung 2.2 logarithmisch divergent. Sie bestimmen  $Z_m$  und  $Z_\lambda$  in zweiter Ordnung. Der erste  $\Theta$ -Graph hingegen ist quadratisch divergent und damit alleine für die Renormierung des Wellenoperators in zweiter Ordnung zuständig.

Im Rahmen der dimensional Regularisierung treten normalerweise Graphen, die geschlossene Schleifen (engl.: *Tadpoles*) enthalten, nicht auf, da die Integration über diese Schleifen Null ergibt [72]. Da aber die  $R^*$ -Methode auch die IR-Divergenzen berücksichtigt, müssen im vorliegenden Fall auch jene Graphen beachtet werden, die eine Schleife der Form  $G_1(0)$  enthalten, da diese Schleife eine vom Argument unabhängige IR-Divergenz enthält. Genauer hierzu findet sich in Anhang A.6.

Da nach Verwendung der Gleichungen im Anhang A.2 der  $K_2$ -Graph schon ein lokaler Term ist, reduziert sich die Renormierung in zwei Schleifen auf die Berechnung der beiden  $\Theta$ -Graphen. Die unter Zuhilfenahme der  $R^*$ -Methode berechneten Divergenzen dieser Graphen finden sich im Anhang A.8.

Damit sind die Divergenzen der effektiven Wirkung in der Ordnung von zwei Schleifen im Schema der minimalen Subtraktion durch

$$\tilde{\Gamma}_2^{\text{div}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{\hat{\lambda}^2}{12\epsilon} \right) \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{2\hat{\lambda}^2}{\epsilon^2} - \frac{\hat{\lambda}^2}{2\epsilon} \right) m^2 B^2(x) + \frac{1}{4!} \left( \frac{9\hat{\lambda}^2}{\epsilon^2} - \frac{3\hat{\lambda}^2}{\epsilon} \right) \lambda_{\mu\epsilon} B^4(x) \right) \quad (2.103)$$

gegeben.

## 2.8 Die 3-Schleifen-Rechnung

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_3 = & \frac{1}{16} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} + \frac{1}{48} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} - \frac{1}{8} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} \\
 & - \frac{1}{8} \begin{array}{c} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \frac{1}{16} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} + \frac{1}{24} \begin{array}{c} \triangle \\ \diagdown \quad \diagup \\ \triangle \end{array}
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.4: Effektive Wirkung der  $A^4$ -Theorie in 3. Ordnung

In der Ordnung von drei Schleifen erhält man für die  $A^4$ -Theorie die in der ersten Zeile von Abbildung 2.4 aufgeführten sechs Feynman-Diagramme. Sie werden ihrer Topologie entsprechend im weiteren Verlauf als  $K3$ -, Melone-, Schneemann-,  $V$ -, Ball- und Tetraeder-Graphen bezeichnet werden.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_3 = & \frac{1}{16} \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \\
 & + \frac{1}{48} \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} + 6 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} + 4(2) \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \right) \\
 & - \frac{1}{8} \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} - \frac{1}{8} \left( \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} \right) \\
 & + \frac{1}{16} \begin{array}{c} \bullet \\ \circ \\ \bullet \end{array} + \frac{1}{24} \begin{array}{c} \bullet \\ \triangle \\ \bullet \end{array} + \dots
 \end{aligned}$$

Abbildung 2.5: Divergenzen der effektiven Wirkung der  $A^4$ -Theorie in 3. Ordnung

Das Ergebnis für das effektive Potenzial in dritter Ordnung findet sich in [48]. Die Divergenzen der 3-Schleifen-Graphen werden mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Methode isoliert, d. h. die exakten Propagatoren der sechs 3-Schleifen-Graphen werden gemäß (2.72) entwickelt. Anschließend werden alle Graphen verworfen, für die  $D$  aus (2.102) größer als Null ist.

Von den divergenten Graphen in der zweiten und dritten Zeile von Abbildung 2.5 hat der erste Graph aus der zweiten Zeile mit  $D = -4$  den höchsten Grad der Divergenz. Da er aber kein Hintergrundfeld  $B$  enthält, trägt er nicht zur Renormierung bei. Der dritte Graph aus der zweiten Zeile und der zweite Graph aus der dritten Zeile sind mit  $D = -2$  für die Wellenrenormierung, d. h.  $Z_A$ , zuständig. Die restlichen Graphen sind nur logarithmisch divergent. Aus ihnen lassen sich  $Z_m$  und  $Z_\lambda$  gewinnen.

Es sei am Rande erwähnt, dass sich mit Hilfe der partiellen Integration zeigen lässt, dass die Divergenzen des Ball-Graphen aus der letzten Zeile in Abbildung 2.5 identisch sind mit denen des zweiten  $V$ -Graphen in der dritten Zeile. In Abbildung 2.6 wird dies graphisch gezeigt.

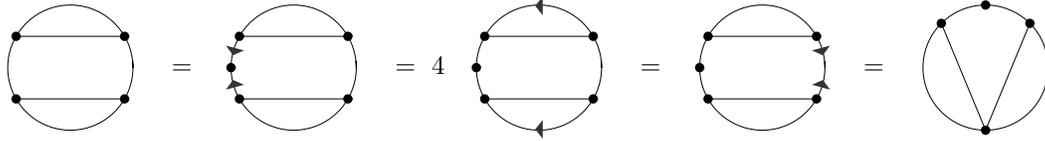


Abbildung 2.6: Die Divergenzen des Ball-Graphen entsprechen denen eines  $V$ -Graphen

Bis auf den Tetraeder-Graphen lassen sich alle Graphen unter Verwendung der Gleichung (A.2) auf Ausdrücke der Form  $a(x-y)^{-2n}$  reduzieren. Dabei sind sowohl  $a$  als auch  $n$  Funktionen der Dimension  $d$ . Um den Tetraeder-Graphen auf die gleiche Form zu bringen, kann man sich z. B. einer Methode bedienen, die im Englischen als *integration by parts* bezeichnet wird [73]. Die genaue Vorgehensweise übertragen auf den Ortsraum findet sich in Anhang A.7. Die Ergebnisse für die Divergenzen der einzelnen Feynman-Graphen sind im Anhang A.8 aufgeführt. Mit diesen Ergebnissen ist die effektive Wirkung in dritter Ordnung durch

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_3^{\text{div}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx & \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{\hat{\lambda}^3}{6\epsilon^2} + \frac{\hat{\lambda}^3}{24\epsilon} \right) \partial_\mu B(x) \partial^\mu B(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{14\hat{\lambda}^3}{3\epsilon^3} - \frac{61\hat{\lambda}^3}{18\epsilon^2} + \frac{29\hat{\lambda}^3}{24\epsilon} \right) m^2 B^2(x) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4!} \left( \frac{27\hat{\lambda}^3}{\epsilon^3} - \frac{62\hat{\lambda}^3}{3\epsilon^2} + \frac{(49 + 32\zeta(3))\hat{\lambda}^3}{8\epsilon} \right) \lambda \mu^\epsilon B^4(x) \right) \quad (2.104) \end{aligned}$$

gegeben.

## 2.9 Die Renormierungsgruppe

Mit den Ergebnissen der vorherigen drei Abschnitte ergeben sich die Renormierungsparameter bis in die dritte Ordnung zu

$$\begin{aligned} Z_A &= 1 + \left( -\frac{1}{12\epsilon} \right) \hat{\lambda}^2 + \left( -\frac{1}{6\epsilon^2} + \frac{1}{24\epsilon} \right) \hat{\lambda}^3 + \dots \\ Z_m &= 1 + \frac{\hat{\lambda}}{\epsilon} + \left( \frac{2}{\epsilon^2} - \frac{1}{2\epsilon} \right) \hat{\lambda}^2 + \left( \frac{14}{3\epsilon^3} - \frac{61}{18\epsilon^2} + \frac{29}{24\epsilon} \right) \hat{\lambda}^3 + \dots \\ Z_\lambda &= 1 + \frac{3\hat{\lambda}}{\epsilon} + \left( \frac{9}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} \right) \hat{\lambda}^2 + \left( \frac{27}{\epsilon^3} - \frac{62}{3\epsilon^2} + \frac{49 + 32\zeta(3)}{8\epsilon} \right) \hat{\lambda}^3 + \dots \end{aligned}$$

Zwischen den unrenormierten und renormierten Vertexfunktionen gilt die Beziehung

$$\tilde{\Gamma}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \lambda_0, m_0) = Z_A^{-n/2} \tilde{\Gamma}^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \lambda, m, \mu, \epsilon), \quad (2.105)$$

und da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von  $\mu$  ist, muss

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \left( Z_A^{-n/2} \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \lambda, m, \mu, \epsilon) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \left( -n\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z_A} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} \right) \tilde{\Gamma}_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \lambda, m, \mu, \epsilon) &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Die Koeffizienten lassen sich mit Hilfe der Renormierungsparameter perturbativ berechnen. Unter Berücksichtigung von  $\lambda = \lambda(\lambda_0 \mu^{-\epsilon})$  lassen sich die schon aus [74], [75] bekannten Ergebnisse verifizieren:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -\epsilon \lambda_0 \left( \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda} \right)^{-1} = -\epsilon \left( \frac{d}{d\lambda} \ln \left( \frac{Z_\lambda}{Z_A^2} \lambda \right) \right)^{-1} \\ \gamma(\lambda) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z_A} = \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \ln \sqrt{Z_A} \\ \gamma_m(\lambda) &= \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial m}{\partial \lambda} = \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \ln \sqrt{\frac{Z_m}{Z_A}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(\hat{\lambda}) &= -\epsilon \hat{\lambda} + 3\hat{\lambda}^2 - \frac{17}{3}\hat{\lambda}^3 + \left( \frac{145}{8} + 12\zeta(3) \right) \hat{\lambda}^4 + O(\hat{\lambda}^5) \\ \gamma(\hat{\lambda}) &= \frac{1}{12}\hat{\lambda}^2 - \frac{1}{16}\hat{\lambda}^3 + O(\hat{\lambda}^4) \\ \gamma_m(\hat{\lambda}) &= \hat{\lambda} - \frac{5}{6}\hat{\lambda}^2 + \frac{7}{2}\hat{\lambda}^3 + O(\hat{\lambda}^4) \end{aligned}$$

# Kapitel 3

## Die Hintergrundfeldmethode in der reinen Yang-Mills-Theorie

### 3.1 Einführung

Die im vorherigen Kapitel entwickelten Methoden zur Renormierung der  $A^4$ -Theorie lassen sich soweit verallgemeinern, dass sie z. B. auf eine Eichtheorie für nichtabelsche Felder (Yang-Mills-Theorie) angewandt werden können. Im Vergleich zu der bis hierhin behandelten Renormierung der  $A^4$ -Theorie stellt die Renormierung der Yang-Mills-Theorie eine ungleich schwerere Aufgabe dar. Trotzdem ist schon 1980 die 3-Schleifen-Rechnung durchgeführt [37] und 13 Jahre später in [38] bestätigt worden. Mittlerweile ist die Renormierung sogar bis in die vierte Ordnung bekannt [76]. Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen, dass im Rahmen der Eichtheorien

- die Verwendung der Hintergrundfeldmethode,
- die konsequente Beibehaltung der Eich-Kovarianz bezüglich des Hintergrundfeldes und
- die Wahl der Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld

die Renormierungsrechnungen erheblich vereinfachen. Zu diesem Zweck wird in diesem Kapitel die Renormierung der reinen Yang-Mills-Theorie in erster und zweiter Ordnung nahezu explizit vorgeführt und anschließend anhand der 3-Schleifen-Rechnung die sich insbesondere in höheren Ordnungen ergebenden Vereinfachungen skizzenhaft dargestellt. Die reine Yang-Mills-Theorie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie keine Materiefelder enthält und ihre Eichfelder nicht miteinander kommutieren. Die Beschränkung auf die Eichbosonen stellt hierbei keine unerlaubte Vereinfachung dar, da die Zahl der Feynman-Diagramme, die fermionische Propagatoren enthalten, vergleichsweise gering ist.

In der Yang-Mills-Theorie sind die Eichfelder durch

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)t^a$$

definiert. Dabei sind  $t^a$  die antihermiteschen Generatoren einer kompakten und einfachen Gruppe  $U$ . Genauer zu den Gruppeneigenschaften findet sich im Anhang A.3. Eine Eichtransformation der Eichfelder ist durch

$$A_\mu \rightarrow U^{-1}A_\mu U + U^{-1}\partial_\mu U, \quad (3.1)$$

gegeben, so dass sich aus ihnen über minimale Substitution

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

die kovariante Ableitung  $D_\mu$  gewinnen lässt, d. h.  $D'_\mu = U^{-1}D_\mu U$ . Damit transformiert auch der aus diesen Ableitungen gewonnene Feldstärketensor

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= [D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (3.2)$$

kovariant, d. h.  $F'_{\mu\nu} = U^{-1}F_{\mu\nu}U$  und die dazugehörige Wirkung

$$\begin{aligned} S_{\text{cl}} &= -\frac{1}{4T(D)g^2} \int dx \operatorname{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4g^2} \int dx F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ist ebenfalls invariant, wobei vom Übergang von der ersten zur zweiten Zeile die Normierung

$$\operatorname{tr}(t_a t_b) = -T(D) \delta_{ab}$$

verwendet worden ist. Im weiteren Verlauf soll dem Anhang A.3 folgend  $T(D) = 1/2$  gesetzt werden. Aus der Gleichung (3.1) lassen sich mit  $g(x) = \mathbf{1} + \Lambda(x)$  die infinitesimalen Eichtransformationen

$$\delta A_\mu = D_\mu \Lambda, \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \delta F_{\mu\nu} = [F_{\mu\nu}, \Lambda] \quad (3.5)$$

ableiten.

Es sei noch angemerkt, dass die Wirkung der kovarianten Ableitung  $D_\mu$  auf Lie-wertige Elemente über

$$\begin{aligned} D_\mu \Lambda &= \partial_\mu \Lambda + [A_\mu, \Lambda] \\ &= (\delta^{cb} \partial_\mu \Lambda^b + f^{abc} A_\mu^a \Lambda^b) t^c \\ &= (D_\mu^{cb} \Lambda^b) t^c \end{aligned}$$

definiert ist.

Aus der Wirkung (3.3) lassen sich die Bewegungsgleichungen und aus der Definition (3.2) die Bianchi-Identität

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.6)$$

$$D_\rho F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\rho} + D_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (3.7)$$

herleiten.

Der Vorgehensweise aus dem vorhergehenden Kapitel folgend, soll im nächsten Schritt die durch Gleichung (3.3) beschriebene klassische Theorie mit Hilfe des Pfadintegral-Formalismus quantisiert werden. Dabei muss allerdings aufgrund der Eichinvarianz ein Term zur Eichfixierung und der dazugehörige Faddeev-Popov-Term zur ursprünglichen Wirkung hinzugefügt werden, d. h. die neue Wirkung ist durch

$$S_{\text{tot}} = S_{\text{cl}} + S_{\text{fix}} + S_{\text{FP}} \quad (3.8)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{\text{fix}} &= -\frac{1}{\alpha} \int dx \operatorname{tr} G^2 = \frac{1}{2\alpha} \int dx (G^a)^2 \\ S_{\text{FP}} &= 2 \int dx \operatorname{tr} c^* \frac{\delta G}{\delta \Lambda} c = - \int dx c_a^* \frac{\delta G^a}{\delta \Lambda_b} c_b \end{aligned}$$

gegeben, wobei es sich bei  $c^*$  und  $c$  um masselose skalare Felder, auch Geistfelder genannt, handelt, die miteinander antikommutieren. Eine genaue Herleitung dieser als Faddeev-Popov-Methode

bekanntgewordenen Prozedur zur Erstellung des korrekten Pfadintegrals findet sich in den einschlägigen Lehrbüchern, z. B. ([61], [65], [77]). Die neue Wirkung  $S_{\text{tot}}$  ist zwar im Gegensatz zu  $S_{\text{cl}}$  nicht mehr eichinvariant, doch sie weist eine neue Symmetrie auf, die BRS-Symmetrie, genannt nach ihren Entdeckern Becchi, Rouet und Stora. Die infinitesimale BRS-Transformation  $s$  ist über

$$s A_\mu = D_\mu c \quad (3.9)$$

$$s c = -\frac{1}{2}[c, c] \quad (3.10)$$

$$s c^* = \frac{1}{\alpha} G \quad (3.11)$$

gegeben und hat zur Folge, dass

$$s S_{\text{tot}} = 0 \quad (3.12)$$

ist.

Das zu der modifizierten Wirkung  $S_{\text{tot}}$  der reinen Yang-Mills-Theorie gehörende erzeugende Funktional ist durch

$$Z[J, \eta^*, \eta] = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp(-S_{\text{tot}} + J \cdot A + \eta^* \cdot c + c^* \cdot \eta)}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp(-S_{\text{tot}})} \quad (3.13)$$

gegeben.

Aus dem erzeugenden Funktional  $Z[J, \eta^*, \eta]$  kann man über Funktionalableitungen nach  $J, \eta^*$  bzw.  $\eta$ , die von links auf die Argumente wirken, sämtliche  $n$ -Punkt-Green-Funktionen

$$\begin{aligned} Z^{(l,m,n)}(x_1 \dots x_l, y_1 \dots y_m, z_1 \dots z_n) \\ = \frac{\delta^{l+m+n} Z[J, \eta^*, \eta]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_l) \delta \eta^*(y_1) \dots \delta \eta^*(y_m) \delta \eta(z_1) \dots \delta \eta(z_n)} \Big|_{J=\eta^*=\eta=0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

generieren. Sollen allerdings nur verbundene Feynman-Graphen erzeugt werden, so ist das folgende Funktional

$$W[J, \eta^*, \eta] = \ln Z[J, \eta^*, \eta]$$

zur Herleitung der verbundenen  $n$ -Punkt-Green-Funktionen

$$\begin{aligned} W^{(l,m,n)}(x_1 \dots x_l, y_1 \dots y_m, z_1 \dots z_n) \\ = \frac{\delta^{l+m+n} W[J, \eta^*, \eta]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_l) \delta \eta^*(y_1) \dots \delta \eta^*(y_m) \delta \eta(z_1) \dots \delta \eta(z_n)} \Big|_{J=\eta^*=\eta=0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

zu verwenden. Für die Renormierung wird allerdings wieder die effektive Wirkung benötigt, die sich mit Hilfe der Erwartungswerte der an die Quellen gekoppelten Felder

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{\delta W}{\delta J} \\ \bar{C} &= \frac{\delta W}{\delta \eta^*} \\ \bar{C}^* &= \frac{\delta W}{\delta \eta} \end{aligned}$$

durch eine Legendre-Transformation aus  $W[J, \eta^*, \eta]$  zu

$$\Gamma[\bar{A}, \bar{C}^*, \bar{C}] = J \cdot \bar{A} + \eta^* \cdot \bar{C} + \bar{C}^* \cdot \eta - W[J, \eta^*, \eta]$$

ergibt. Wie aus der skalaren Theorie bekannt, sind die aus diesem Funktional abgeleiteten Vertexfunktionen

$$\begin{aligned} \Gamma^{(l,m,n)}(x_1 \dots x_l, y_1 \dots y_m, z_1 \dots z_n) \\ = \frac{\delta^{l+m+n} \Gamma[\bar{A}, \bar{C}^*, \bar{C}]}{\delta \bar{A}(x_1) \dots \delta \bar{A}(x_l) \delta \bar{C}^*(y_1) \dots \delta \bar{C}^*(y_m) \delta \bar{C}(z_1) \dots \delta \bar{C}(z_n)} \Big|_{\bar{A}=\bar{C}^*=\bar{C}=0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

mindestens zweifach verbunden, d. h. man erhält die gewünschten 1PI Feynman-Graphen.

Für den Eichfixierungsterm  $S_{\text{fix}}$  werden üblicherweise Ausdrücke gewählt, in denen das Eichfeld nur linear vorkommt. Ein Beispiel stellt die sogenannte Feynman-Eichung  $G = \partial^\mu A_\mu$  dar. Entsprechend dieser Wahl ergibt sich mit Hilfe der infinitesimalen Eichtransformation des Eichfeldes (3.4) der Faddeev-Popov Term zu

$$\begin{aligned} S_{\text{FP}} &= - \int dx dy c_a^*(x) \frac{\delta G^a(x)}{\delta \Lambda_b(y)} c_b(y) = - \int dx dy dz c_a^*(x) \frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \Lambda_b(y)} c_b(y) \\ &\quad \text{mit } \frac{\delta G^a(x)}{\delta A_\mu^c(z)} \frac{\delta A_\mu^c(z)}{\delta \Lambda_b(y)} = \delta_c^a \partial^\mu \delta(x-z) D_\mu^{cb} \delta(y-z) \\ &= - \int dx c_a^* \partial^\mu D_\mu^{ab} c_b = 2 \int dx \text{tr} (c^* \partial^\mu D_\mu c). \end{aligned}$$

## 3.2 Die Hintergrundfeldmethode in der reinen Yang-Mills-Theorie

Ähnlich wie in der  $A^4$ -Theorie zerlegen wir das Eichfeld  $A_\mu$  in ein Hintergrundfeld  $B_\mu$  und ein Quantenfeld  $Q_\mu$ , so dass

$$A_\mu = B_\mu + Q_\mu \quad (3.17)$$

ist. Sofern nicht explizit angegeben, werden ab hier alle im vorhergehenden Abschnitt definierten Funktionale des Eichfeldes  $A_\mu$  als Funktionale des Hintergrundfeldes  $B_\mu$  verstanden. Für die kovariante Ableitung und die Feldstärke beispielsweise bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned} D_\mu \Lambda &= \partial_\mu \Lambda + [B_\mu, \Lambda] \quad \text{und} \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu] \end{aligned}$$

ist und damit die im vorherigen Abschnitt definierte Feldstärke sich in

$$F_{\mu\nu}[B+Q] = F_{\mu\nu} + D_\mu Q_\nu - D_\nu Q_\mu + [Q_\mu, Q_\nu]$$

zerlegen lässt.

Die Eichtransformation (3.4) lässt sich auf verschiedene Weise auf das Hintergrund- und Quantenfeld verteilen. Die sich anbietenden Möglichkeiten sind zum einen

$$\delta B_\mu = 0, \quad (3.18)$$

$$\delta Q_\mu = D_\mu \Lambda + [Q_\mu, \Lambda], \quad (3.19)$$

wobei das Quantenfeld  $Q_\mu$  alleine die Transformation trägt, und zum anderen

$$\delta B_\mu = D_\mu \Lambda, \quad (3.20)$$

$$\delta Q_\mu = [Q_\mu, \Lambda], \quad (3.21)$$

wobei das Hintergrundfeld  $B_\mu$  wie üblich transformiert und das Quantenfeld  $Q_\mu$  einer homogenen Transformation unterzogen wird. Ihren Auswirkungen entsprechend wird die erste Transformation als *Quantenfeldtransformation* und die zweite als *Hintergrundfeldtransformation* bezeichnet.

Wie im vorhergehenden Abschnitt wird die klassische Wirkung um einen Eichfixierungsterm und den entsprechenden Faddeev-Popov-Term erweitert. Die neue Wirkung

$$\tilde{S}_{\text{tot}}[B, Q] = S_{\text{cl}}[B+Q] + \tilde{S}_{\text{fix}}[B, Q] + \tilde{S}_{\text{FP}}[B, Q] \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{\alpha} \int dx \operatorname{tr} \tilde{G}[B, Q]^2 \\ \tilde{S}_{\text{FP}} &= 2 \int dx \operatorname{tr} c^* \frac{\delta \tilde{G}}{\delta \Lambda} c\end{aligned}$$

enthält im Unterschied zu vorher eine Eichfixierung, die sowohl vom Hintergrundfeld abhängig sein kann als auch vom Quantenfeld abhängig sein muss. Dabei ist zu beachten, dass die im Faddeev-Popov-Term auftretende Funktionalableitung  $\delta \tilde{G}/\delta \Lambda$  unter Berücksichtigung der infinitesimalen Eichtransformation des Quantenfeldes (3.18, 3.19) auszuführen ist, da gerade diese Invarianz eichfixiert werden soll.

Die zugehörige BRS-Transformation

$$s Q_\mu = D_\mu c + [Q_\mu, c] \quad (3.23)$$

$$s c = -\frac{1}{2}[c, c] \quad (3.24)$$

$$s c^* = \frac{1}{\alpha} \tilde{G} \quad (3.25)$$

gewährleistet wieder, dass

$$s \tilde{S}_{\text{tot}} = 0 \quad (3.26)$$

ist.

Das erzeugende Funktional der Hintergrundfeldmethode ist durch

$$\tilde{Z}[B, J, \eta^*, \eta] = \frac{\int \mathcal{D}Q \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp\left(-\tilde{S}_{\text{tot}} + J \cdot Q + \eta^* \cdot c + c^* \cdot \eta\right)}{\int \mathcal{D}Q \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp\left(-\tilde{S}_{\text{tot}}\right)} \quad (3.27)$$

gegeben. Das Hintergrundfeld wird nicht an die Quelle  $J$  gekoppelt. Somit weist das neue Funktional  $\tilde{Z}[B, J, \eta^*, \eta]$  im Vergleich zum ursprünglichen  $Z[J, \eta^*, \eta]$  noch eine, wie schon in der Notation angedeutet, zusätzliche Abhängigkeit zum Hintergrundfeld auf. Analog zur bisherigen Vorgehensweise wird zum einen das Funktional der verbundenen Graphen

$$\tilde{W}[B, J, \eta^*, \eta] = \ln \tilde{Z}[B, J, \eta^*, \eta] \quad (3.28)$$

und zum anderen nach Einführung der Felder

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \frac{\delta \tilde{W}}{\delta J} \\ \bar{C} &= \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \eta^*} \\ \bar{C}^* &= \frac{\delta \tilde{W}}{\delta \eta}\end{aligned}$$

die effektive Wirkung

$$\tilde{\Gamma}[B, \bar{Q}, \bar{C}^*, \bar{C}] = J \cdot \bar{Q} + \eta \cdot \bar{C}^* + \bar{C} \cdot \eta^* - \tilde{W}[B, J, \eta^*, \eta]$$

definiert.

Nun folgt der entscheidende Punkt. Wählt man die Eichfixierung

$$\tilde{G} = D_\mu Q^\mu, \quad (3.29)$$

so ist der zugehörige Faddeev-Popov-Term durch

$$\tilde{S}_{\text{FP}} = 2 \int dx \operatorname{tr}(c^* D^\mu (D_\mu c + [Q_\mu, c])) \quad (3.30)$$

gegeben und damit das gesamte generierende Funktional  $\tilde{Z}[B, J, \eta^*, \eta]$  und folglich auch  $\tilde{W}[B, J, \eta^*, \eta]$  invariant unter der Hintergrundfeldtransformation (3.20, 3.21) erweitert um die Transformationen

$$\begin{aligned} \delta J_\mu &= [J_\mu, \Lambda], \\ \delta c &= [c, \Lambda], \\ \delta c^* &= [c^*, \Lambda], \\ \delta \eta &= [\eta, \Lambda], \\ \delta \eta^* &= [\eta^*, \Lambda]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für  $S_{\text{cl}}$  ist dies sofort einsichtig, da für  $\delta A_\mu = \delta B_\mu + \delta Q_\mu$  die Invarianz schon im vorherigen Abschnitt gezeigt worden ist. Für die Eichfixierung  $\tilde{G}$  und damit für  $S_{\text{fix}}$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= D_\mu Q^\mu \\ \Rightarrow \delta \tilde{G} &= [D_\mu \Lambda, Q^\mu] + D_\mu [Q^\mu, \Lambda] = [\tilde{G}, \Lambda] \\ \Rightarrow \delta \tilde{S}_{\text{fix}} &= -\frac{2}{\alpha} \int dx \operatorname{tr}(\tilde{G} [\tilde{G}, \Lambda]) = 0, \end{aligned}$$

wobei für das letzte Gleichheitszeichen die Zyklizität der Spur verwendet wurde.

Die Invarianz des Faddeev-Popov-Terms lässt sich nach partieller Integration unter Verwendung der Identitäten  $\delta D_\mu c = [D_\mu c, \Lambda]$  und  $[c^*, c] = [c, c^*]$  sowie der Jacobi-Identität und der Zyklizität der Spur wie folgt

$$\begin{aligned} \delta \tilde{S}_{\text{FP}} &= -2 \int dx \operatorname{tr} \left( [D_\mu c^*, \Lambda] D^\mu c + (D_\mu c^*) [D^\mu c, \Lambda] \right. \\ &\quad \left. + [D_\mu c^*, \Lambda] [Q_\mu, c] + (D_\mu c^*) [[Q_\mu, \Lambda], c] + (D_\mu c^*) [Q_\mu, [c, \Lambda]] \right) \\ &= -2 \int dx \operatorname{tr} \left( -[D_\mu c^*, D^\mu c] \Lambda + \Lambda [D_\mu c^*, D^\mu c] \right. \\ &\quad \left. + [D_\mu c^*, \Lambda] [Q_\mu, c] - (D_\mu c^*) [\Lambda, [Q_\mu, c]] \right) = 0 \end{aligned}$$

nachweisen. Dass auch die Kopplungen  $\eta^* \cdot c$  und  $c^* \cdot \eta$  invariant unter den Transformationen (3.31) sind, lässt sich mit Hilfe der Jacobi-Gleichung sofort zeigen.

Erweitert man die Hintergrundfeldtransformationen (3.31) um die Gleichungen

$$\delta \bar{Q}_\mu = [\bar{Q}_\mu, \Lambda] \quad (3.32)$$

$$\delta \bar{C} = [\bar{C}, \Lambda] \quad (3.33)$$

$$\delta \bar{C}^* = [\bar{C}^*, \Lambda] \quad , \quad (3.34)$$

so ist auch die effektive Wirkung  $\tilde{\Gamma}[B, \bar{Q}, \bar{C}^*, \bar{C}]$  invariant.

Die etwas ungewöhnliche Eichfixierung (3.29) gewährleistet zwar, dass die erzeugenden Funktionale  $\tilde{Z}, \tilde{W}$  und  $\tilde{\Gamma}$  invariant bezüglich der Hintergrundfeldtransformation sind, hat dafür aber den Nachteil, dass die aus der  $A^4$ -Theorie bekannte Relation (2.32)

$$Z[J] = \exp(J \cdot B) \tilde{Z}[B, J] \quad (3.35)$$

nur unter der Bedingung gilt, dass der Eichfixierungsterm des ursprünglichen Funktionals  $Z[J]$  von der Gestalt

$$G = \partial^\mu A_\mu - \partial^\mu B_\mu + [B^\mu, A_\mu] \quad (3.36)$$

ist. Wie zu erwarten, führt diese Wahl der Eichfixierung mit der Eichtransformation (3.4) auf den Faddeev-Popov-Term der Hintergrundfeldmethode (3.30). Zusammenfassend bedeutet dies, dass das erzeugende Funktional  $\tilde{Z}[J, B]$  der Hintergrundfeldmethode dem üblichen erzeugenden Funktional  $Z[J]$  bis auf einen multiplikativen Faktor entspricht, sofern in  $Z[J]$  die ungewöhnliche Eichung (3.36) verwendet wird. Da aber die  $S$ -Matrix unabhängig von der Wahl der Eichfixierung ist, müssen die aus  $Z[J]$  unabhängig von der Eichung und damit auch die aus  $\tilde{Z}[B, J]$  gewonnenen Ergebnisse, sofern sie messbar sind, gleich sein [11]. Damit gilt dann auch die Beziehung

$$W[B, J, \eta^*, \eta] = J \cdot B + \tilde{W}[B, J, \eta^*, \eta] \quad (3.37)$$

und die aus dieser Gleichung durch Funktionalableitung nach  $J$  gewonnene Gleichung

$$\bar{A} = B + \bar{Q}.$$

Damit stehen die effektiven Wirkungen über

$$\Gamma[B + \bar{Q}, \bar{C}^*, \bar{C}] = \tilde{\Gamma}[B, \bar{Q}, \bar{C}^*, \bar{C}] \quad (3.38)$$

miteinander in Beziehung. Wieder ist  $\Gamma$  und damit auch  $\tilde{\Gamma}$  nur von der Summe der Felder  $B + \bar{Q}$  abhängig, und für verschwindendes Hintergrundfeld geht  $\tilde{Z}$  in  $Z$  über.

Wählt man aber als Nebenbedingung  $\bar{Q} = 0$ , lässt sich die Beziehung der effektiven Wirkungen auf

$$\Gamma[B, \bar{C}^*, \bar{C}] = \tilde{\Gamma}[B, 0, \bar{C}^*, \bar{C}]$$

vereinfachen. Dabei erhält man ebenso wie in der  $A^4$ -Theorie eine effektive Wirkung  $\tilde{\Gamma}[B, 0, \bar{C}^*, \bar{C}]$ , deren Entwicklung in  $\hbar$  nur Vakuumgraphen enthält. Überdies ist sie invariant in Bezug auf die Eichtransformation des Hintergrundfeldes (3.20), (3.21), (3.31) und (3.34). Damit wird die Zahl der entstehenden Feynman-Graphen drastisch reduziert, wie sich später zeigen wird.

Wie im vorherigen Kapitel empfiehlt es sich, im Rahmen einer perturbativen Betrachtung den Strom  $J$  in

$$J_\mu = \bar{J}_\mu + j_\mu \quad (3.39)$$

mit

$$j_\mu = \left. \frac{\delta S_{\text{tot}}[B, Q]}{\delta Q^\mu} \right|_{Q=0} \quad (3.40)$$

aufzuspalten. Aus

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\text{tot}}[B, Q] - J \cdot Q &= S_{\text{cl}}[B + Q] + \tilde{S}_{\text{fix}}[B, Q] + \tilde{S}_{\text{FP}}[B, Q] - J \cdot Q \\ &= S_{\text{cl}}[B] + \underbrace{\left( \frac{\delta \tilde{S}_{\text{tot}}[B, Q]}{\delta Q} \right) \Big|_{Q=0}}_{=0} \cdot Q \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx \operatorname{tr} \left( Q^\mu \underbrace{\left( -\delta_{\mu\nu} D^2 + \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) D_\mu D_\nu - 2 \mathbf{F}_{\mu\nu} \right)}_{=\Delta_{\mu\nu}[B]} Q^\nu \right) \\ &\quad + \int dx \operatorname{tr} \left( c^* \underbrace{D_\mu D^\mu}_{=-\Delta[B]} c \right) \\ &\quad + \underbrace{\int dx \operatorname{tr} \left( (D_\mu Q_\nu) [Q^\mu, Q^\nu] + \frac{1}{4} [Q_\mu, Q_\nu] [Q^\mu, Q^\nu] + c^* D_\mu [Q^\mu, c] \right)}_{=\tilde{S}_{\text{int}}[B, Q]} - \bar{J} \cdot Q \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit der Feldstärke in der adjungierten Darstellung<sup>1</sup> und den Wellenoperatoren  $\Delta_{\mu\nu}$  und  $\Delta$  lässt sich nun ein neues erzeugendes Funktional

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[B, \bar{J}, \eta^*, \eta] = & \int \mathcal{D}Q \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp \left[ \right. \\ & \left. - S_{\text{cl}}[B] - \frac{1}{2} \int dx Q^\mu \Delta_{\mu\nu} Q^\nu + \int dx c^* \Delta c - \tilde{S}_{\text{int}}[B, Q] + \bar{J} \cdot Q + \eta^* \cdot c + c^* \cdot \eta \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

herleiten, das jetzt von einem neuen Strom  $\bar{J}$  abhängig ist und im Exponenten keinen im Feld  $Q$  linearen Term mehr enthält.

Damit ist gewährleistet, dass eine perturbative Entwicklung der effektiven Wirkung

$$\tilde{\Gamma}[B, 0, 0, 0] = -\tilde{W}[B, \bar{J}, \eta^*, \eta] \Big|_{\delta\bar{W}/\delta\bar{J} = \delta\bar{W}/\delta\eta^* = \delta\bar{W}/\delta\eta = 0} \quad (3.43)$$

nur Vakuumgraphen enthält, die mindestens 1PI sind. Die Entwicklung der effektiven Wirkung

$$\tilde{\Gamma}[B, 0, 0, 0] = S_{\text{cl}}[B] + \left( \frac{1}{2} \ln \det \Delta_{\mu\nu}[B] - \ln \det \Delta[B] \right) \hbar + O(\hbar^2) \quad (3.44)$$

in  $\hbar$  geht für  $\hbar \rightarrow 0$  in die klassische Wirkung  $S_{\text{cl}}[B]$  über, während sich die Korrektur linear in  $\hbar$  aus dem Logarithmus der Determinanten des jeweiligen Wellenoperators (3.41) ergibt. Korrekturen höherer Ordnungen in  $\hbar$  lassen sich am einfachsten mit Feynman-Graphen darstellen, die den Feynman-Regeln aus Abschnitt 3.5 entsprechend gebildet werden.

Für die weiteren Betrachtungen soll nun die Feynman-Eichung  $\alpha = 1$  gewählt werden. Damit vereinfacht sich der vektorielle Wellenoperator zu

$$\Delta_{\mu\nu}[B] = -(\delta_{\mu\nu} D^2 + 2 \mathbf{F}_{\mu\nu}). \quad (3.45)$$

Auch im Falle der Yang-Mills-Theorie trifft man bei der Entwicklung der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}[B, 0, 0, 0]$  auf UV-Divergenzen. Im Rahmen der Hintergrundfeldmethode genügt es, das Hintergrundfeld  $B$  und die Kopplungskonstante  $g$  über

$$B^\mu \rightarrow B_0^\mu = Z_B^{1/2} B^\mu \quad (3.46)$$

$$g^2 \rightarrow g_0^2 = Z_g g^2 \mu^\epsilon \quad (3.47)$$

zu ersetzen. Sowohl das Quantenfeld  $Q$  als auch die Geistfelder  $c^*$  und  $c$  bedürfen keiner Renormierung, da sie nur innerhalb der Vakuumgraphen vorkommen, so dass die Renormierungsfaktoren der Vertizes sich mit denen der Propagatoren wegheben würden [7].

Die renormierte Feldstärke ist von der Gestalt

$$F_{\mu\nu} = Z_B^{1/2} \left( \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + Z_g^{1/2} Z_B^{1/2} [B_\mu, B_\nu] \right), \quad (3.48)$$

und muss eichinvariant in Bezug auf die Hintergrundfeldtransformation (3.20) sein. Dies hat zur Folge, dass die beiden Renormierungsfaktoren über

$$Z_g^{1/2} Z_B^{1/2} = 1 \quad (3.49)$$

miteinander verknüpft sein müssen. Wie schon in [22] bemerkt worden ist, genügt es daher, die 2-Punkt-Funktionen des Hintergrundfeldes  $B_\mu$  zu berechnen. Wird dagegen wie im vorliegenden Fall die Kovarianz beibehalten, erhält man zum einen schließlich 2-Punkt-Funktionen der Feldstärke  $F_{\mu\nu}$  und zum anderen nimmt die Zahl der Vertizes im Vergleich zur üblichen Vorgehensweise nicht zu, d. h. die Feynman-Regeln enthalten, wie in Abschnitt 3.5 gezeigt, zwei 3er-Vertizes

<sup>1</sup> $\mathbf{F}_{\mu\nu} Q^\nu$  entspricht der Definition aus Anhang A.3 folgend dem Kommutator  $[F_{\mu\nu}, Q^\nu]$ .

und einen 4er-Vertex. Im Gegensatz hierzu finden sich in den Feynman-Regeln aus [22] vier 3er-Vertizes und fünf 4er-Vertizes. Konkret bedeutet dies, dass die Beibehaltung der Kovarianz in der Hintergrundfeldmethode zu einer Reduzierung der Feynman-Regeln, und damit auch zur Reduzierung der Feynman-Graphen führt. Im Falle der 2-Schleifen-Rechnung lässt sich auf diese Weise die Zahl der zu berechnenden Feynman-Graphen für die 2-Schleifen-Rechnung nochmals von zwölf auf einen 2-Schleifen-Graphen reduzieren.

Ein sehr eleganter Beweis für die Renormierbarkeit der Yang-Mills-Theorie in der Hintergrundfeldmethode findet sich in [10]. Für ein verschwindendes Hintergrundfeld wird man über die Gleichungen (3.35) und (3.36) auf die übliche Yang-Mills-Theorie in der Feynman-Eichung geführt, deren Renormierbarkeit bewiesen ist. Ausgehend von dieser Tatsache zeigen die Autoren Lüscher und Weisz unter Verwendung der BRS-, Hintergrundfeld- und einer Verschiebungssymmetrie, dass dann auch die Yang-Mills-Theorie in der Hintergrundfeldmethode renormierbar ist.

### 3.3 Die Wärmeleitungskerne

Analog zu dem Vorgehen in der  $A^4$ -Theorie lassen sich die beiden Wärmeleitungskerne der reinen Yang-Mills-Theorie unter Zuhilfenahme von Nebenbedingungen exakt darstellen [43]. Für den skalaren Wellenoperator  $\Delta$  der Geisfelder wird in Gleichung (2.59)

$$N_\mu(x) = B_\mu(x) \quad \text{und} \quad X(x) = 0$$

gesetzt und als Nebenbedingung

$$(D_\lambda F_{\mu\nu}) = [D_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0 \quad (3.50)$$

gefordert. Aus dieser Nebenbedingung folgt, dass

$$\begin{aligned} [D_\mu, [D_\nu, F_{\rho\sigma}]] - [D_\nu, [D_\mu, F_{\rho\sigma}]] &= 0 \\ \Rightarrow [D_\mu, [D_\nu, F_{\rho\sigma}]] + [D_\nu, [F_{\rho\sigma}, D_\mu]] &= 0 \\ \Rightarrow -[F_{\rho\sigma}, [D_\nu, D_\mu]] = [F_{\rho\sigma}, F_{\mu\nu}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

ist, d. h. der Kommutator zweier Feldstärken verschwindet, wobei für die letzte Umformung in (3.51) die Jacobi-Identität verwendet worden ist. Für den Wärmeleitungskern wird der folgende Ansatz gemacht

$$K(x, y; \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \Phi(x, y) \exp\left(-\frac{1}{4\tau}(x-y)^\mu \mathbf{M}_{\mu\nu}(\tau)(x-y)^\nu + \mathbf{N}(\tau)\right), \quad (3.52)$$

wobei der wegabhängige Phasenfaktor  $\Phi(x, y)$  der folgenden Definition

$$\Phi(x, y) = P \exp\left(\int_x^y B_\mu(z) dz_\mu\right)$$

genügt. Shore zeigt in [43], dass unter der Nebenbedingung (3.50) der Phasenfaktor  $\Phi(x, y)$  die folgenden Bedingungen

$$\Phi(x, y) F_{\mu\nu}(y) = F_{\mu\nu}(x) \Phi(x, y) \quad (3.53)$$

$$D_\mu(x) \Phi(x, y) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) (x-y)^\nu \Phi(x, y) \quad (3.54)$$

$$\Phi(x, y) \overleftarrow{D}_\mu(y) = -\frac{1}{2} \Phi(x, y) F_{\mu\nu}(y) (x-y)^\nu \quad (3.55)$$

erfüllt. Der Ansatz (3.52) ist so gewählt, dass man für verschwindende Feldstärke auf den freien Wärmeleitungskern (2.58) geführt wird, sofern für diesen Grenzfall  $\mathbf{M}_{\mu\nu} = \mathbf{1}\delta_{\mu\nu}$  und  $\mathbf{N} = 0$

ist. Setzt man nun den Ansatz (3.52) unter Berücksichtigung der Randbedingung (2.56) in die Wärmeleitungsgleichung

$$-D^2 K + \frac{\partial K}{\partial \tau} = 0 \quad (3.56)$$

ein, so führt dies auf die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_{\mu\nu}\tau + \mathbf{M}_{\mu\nu}^2 - \mathbf{M}_{\mu\nu} - [\mathbf{F}, \mathbf{M}]_{\mu\nu}\tau + \mathbf{F}_{\mu\nu}^2\tau^2 &= 0 \\ 2\dot{\mathbf{N}}\tau + \text{tr}(\mathbf{M}_{\mu\nu} - \mathbb{1}\delta_{\mu\nu}) &= 0. \end{aligned}$$

Da  $\mathbf{F}\tau$  die einzige dimensionslose Größe ist, muss sich  $\mathbf{M}$  als Polynom von  $\mathbf{F}\tau$  darstellen lassen. Daraus aber folgt mit der Gleichung (3.51), dass der Kommutator  $[\mathbf{F}, \mathbf{M}]_{\mu\nu}$  verschwindet. Die beiden Differentialgleichungen werden durch die nachstehenden Funktionen gelöst

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mu\nu} &= \mathbf{F}_{\mu\sigma}\tau (\coth \mathbf{F}\tau)_{\nu}^{\sigma} \\ &= \mathbb{1}\delta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \mathbf{F}_{\mu\nu}^{2n} \tau^{2n} \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= -\frac{1}{2} \ln (\mathbf{F}_{\mu\nu}^{-1} \tau^{-1} (\sinh \mathbf{F}\tau)^{\nu\mu}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!(2n)} \mathbf{F}_{\mu\nu}^{2n} \tau^{2n}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

so dass man auf den folgenden skalaren Wärmeleitungskern

$$\begin{aligned} K(x, y; \tau) &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \Phi(x, y) \\ &\exp \left[ -\frac{1}{4\tau} (x-y)^{\mu} \mathbf{F}_{\mu\sigma}\tau (\coth \mathbf{F}\tau)_{\nu}^{\sigma} (x-y)^{\nu} - \frac{1}{2} \ln (\mathbf{F}_{\mu\nu}^{-1} \tau^{-1} (\sinh \mathbf{F}\tau)^{\nu\mu}) \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

geführt wird [55], wobei  $B_n$  für die Bernoullischen Zahlen steht.

Aufgrund der Nebenbedingungen (3.51) und (3.53) lässt sich der vektorielle Wärmeleitungskern leicht aus dem skalaren Wärmeleitungskern herleiten. Um der Wärmeleitungsgleichung

$$-(\delta_{\mu\lambda} D^2 + 2\mathbf{F}_{\mu\lambda}) K_{\nu}^{\lambda} + \frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial \tau} = 0$$

mit der Randbedingung

$$K_{\mu\nu}(x, y; 0) = \mathbb{1}\delta_{\mu\nu}\delta(x-y)$$

zu genügen, reicht es aus, den skalaren Wärmeleitungskern um einen multiplikativen Faktor zu erweitern

$$K_{\mu\nu}(x, y; \tau) = K(x, y; \tau) (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu}, \quad (3.60)$$

wobei darauf zu achten ist, dass, je nachdem ob dieser Faktor von links oder rechts mit dem skalaren Wärmeleitungskern multipliziert wird, die Feldstärke  $\mathbf{F}$  im Punkt  $x$  bzw. im Punkt  $y$  zu nehmen ist.

Mit diesem Ergebnis lässt sich zeigen, dass der in der Feynman-Eichung gegebene vektorielle Wärmeleitungskern und der skalare Wärmeleitungskern über die Ward-Identität

$$D^{\mu} K_{\mu\nu} + K \overleftarrow{D}_{\nu} = 0 \quad (3.61)$$

zueinander in Beziehung stehen. Eine explizite Rechnung hierzu mit den Lösungen (3.59) und (3.60) findet sich im Anhang A.4. Die Ward-Identität (besser Wärmeleitungskernidentität) gilt aber auch ohne die Nebenbedingung (3.50) wie z. B. in [78] gezeigt wird.

### 3.4 Die Propagatoren

Über die Gleichung (2.57) lassen sich aus den Wärmeleitungskernen die zugehörigen Propagatoren ermitteln. Wie schon in Abschnitt 2.3 gezeigt, erfüllt der so gewonnene skalare Propagator die Wellengleichung

$$\Delta G(x, y) = \mathbb{1}\delta(x - y) \quad (3.62)$$

bzw. der vektorielle Propagator die Wellengleichung

$$\Delta_{\mu\lambda} G^\lambda_\nu(x, y) = \mathbb{1}\delta_{\mu\nu}\delta(x - y). \quad (3.63)$$

Des Weiteren lässt sich aus der Gleichung (3.61) nach einer Integration über  $\tau$  die Propagatoridentität

$$D^\mu G_{\mu\nu} + G \overleftarrow{D}_\nu = 0 \quad (3.64)$$

ableiten. Diese Identität wird sich im weiteren Verlauf als sehr nützlich erweisen. Es lassen sich nämlich alle Graphen, die skalare Propagatoren enthalten, mit ihrer Hilfe in Graphen umwandeln, die nur vektorielle Propagatoren enthalten. Dabei zeigt sich, dass die auf diese Art umgewandelten Graphen einen großen Teil der ursprünglichen, rein vektoriellen Graphen, wegheben.

Lässt man in Gleichung (3.64) eine weitere kovariante Ableitung von rechts auf die Propagatoren wirken, erhält man

$$D^\mu G_{\mu\nu}(x, y) \overleftarrow{D}^\nu = -G(x, y) \overleftarrow{D}^2 = -D^2 G(x, y) = \mathbb{1}\delta(x - y), \quad (3.65)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aufgrund der Wellengleichung (3.62) gilt.

Leider lassen sich die beiden Propagatoren nicht geschlossen darstellen, doch für die Renormierung genügt die Entwicklung bis in die quadratische Ordnung der Feldstärke. Unter Verwendung von  $z = x - y$  ist also der skalare Propagator durch

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_0^\infty d\tau K(x, y; \tau) \\ &= \int_0^\infty d\tau \Phi(x, y) K_0(z; \tau) \left( 1 - \frac{\tau}{12} z^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 z^\nu - \frac{\tau^2}{12} \mathbf{F}^2 \right) + O(\mathbf{F}^3) \\ &\quad \text{Integration über } \tau \text{ unter Verwendung von (2.64)} \\ &= \Phi(x, y) G_0(z) - \frac{1}{12} z^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 z^\nu G_1(z) - \frac{1}{12} \mathbf{F}^2 G_2(z) + O(\mathbf{F}^3) \end{aligned} \quad (3.66)$$

und der vektorielle Propagator durch

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x, y) &= \int_0^\infty d\tau K(x, y; \tau) (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} \\ &= \int_0^\infty d\tau K(x, y; \tau) (\delta_{\mu\nu} + 2\mathbf{F}_{\mu\nu}\tau + 2\mathbf{F}_{\mu\nu}^2\tau^2) + O(\mathbf{F})^3 \\ &= \int_0^\infty d\tau [K(x, y; \tau)\delta_{\mu\nu} + K_0(z; \tau) (2\Phi(x, y)\mathbf{F}_{\mu\nu}\tau + 2\mathbf{F}_{\mu\nu}^2\tau^2)] + O(\mathbf{F})^3 \\ &\quad \text{Integration über } \tau \text{ unter Verwendung von (2.64)} \\ &= \delta_{\mu\nu} G(x, y) + 2\Phi(x, y)\mathbf{F}_{\mu\nu} G_1(z) + 2\mathbf{F}_{\mu\nu}^2 G_2(z) + O(\mathbf{F}^3) \end{aligned} \quad (3.67)$$

gegeben. Der Phasenfaktor  $\Phi$  ist vom Hintergrundfeld  $B$  und damit auch von der Feldstärke  $\mathbf{F}$  abhängig und wird daher nur bei den Termen, die mindestens quadratisch in der Feldstärke sind, gleich Eins gesetzt.

Mit Hilfe der Identitäten aus dem Anhang A.2 lassen sich die Faktoren  $z$  zugunsten von entsprechenden Ableitungen entfernen. Damit ist die Reihenentwicklung des Geistpropagators durch

$$G(x, y) = \Phi(x, y) G_0(x - y) - \frac{1}{4} \mathbf{F}^2 G_2(x - y) - \frac{1}{3} \mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 \partial^\sigma \partial^\tau G_3(x - y) + O(\mathbf{F}^3)$$

$$\text{---} = \Phi(x, y) \bullet \text{---} \bullet - \frac{1}{4} \mathbf{F}^2 (2) \bullet \text{---} \bullet \bullet - \frac{1}{3} \mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 (3) \bullet \xrightarrow{\sigma} \xrightarrow{\tau} \bullet \text{---} \bullet \bullet + O(\mathbf{F}^3) \quad (3.68)$$

und die Reihenentwicklung des Gluonpropagators

$$G_{\mu\nu}(x, y) = \Phi(x, y) \delta_{\mu\nu} G_0(x - y) + 2 \Phi(x, y) \mathbf{F}_{\mu\nu} G_1(x - y) - \frac{1}{4} \mathbf{F}^2 \delta_{\mu\nu} G_2(x - y)$$

$$\text{---}_{\mu} \text{---}_{\nu} = \Phi(x, y) \delta_{\mu\nu} \bullet \text{---} \bullet + 2 \Phi(x, y) \mathbf{F}_{\mu\nu} \bullet \text{---} \bullet \bullet - \frac{1}{4} \mathbf{F}^2 \delta_{\mu\nu} (2) \bullet \text{---} \bullet \bullet$$


---


$$+ 2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 G_2(x - y) - \frac{1}{3} \mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 \delta_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^\tau G_3(x - y) + O(\mathbf{F}^3)$$

$$+ 2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 (2) \bullet \text{---} \bullet \bullet - \frac{1}{3} \mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 \delta_{\mu\nu} (3) \bullet \xrightarrow{\sigma} \xrightarrow{\tau} \bullet \text{---} \bullet \bullet + O(\mathbf{F}^3) \quad (3.69)$$

gegeben. Die beiden obigen Ausdrücke für die Propagatoren sind zweizeilig zu lesen, wobei die zweite Zeile die graphische Darstellung der ersten Zeile ist, d. h. der exakte skalare Propagator ist in den Feynman-Graphen durch eine dicke graue Linie und der exakte vektorielle Propagator durch eine dicke schwarze Linie gegeben. Leider verhindern die verbliebenen Phasenfaktoren, dass die oben gegebenen Entwicklungen der Propagatoren translationsinvariant sind. Diese Invarianz wird sich aber schließlich innerhalb der Feynman-Graphen mit Hilfe eines Tricks wiederherstellen lassen. Untersucht man die Entwicklungen (3.68) und (3.69) der Propagatoren auf UV-Divergenzen, so können diese nur in den Funktionen  $G_i$  vorkommen. Für  $d < 2$  weist allerdings keine der  $G_i$ -Funktionen eine UV-Divergenz auf. Dieses Ergebnis lässt sich analytisch auf höhere Dimensionen fortsetzen. Bezüglich der IR-Divergenzen ist es dagegen in  $n$  Dimensionen ab  $i + 1 \geq n/2$  notwendig die  $G_i$ -Funktionen durch die in Abschnitt A.2 definierten  $R_i$ -Funktionen zu ersetzen. Eine ausführliche Begründung für diese Vorgehensweise findet sich in Kapitel A.6. Die obigen Ausführungen haben zur Folge, dass in vier Dimensionen

$$G(x, x) = 0 \quad (3.70)$$

ist, für den vektoriellen Propagator aber

$$G_{\mu\nu}(x, x) = -G_{\nu\mu}(x, x) \neq 0 \quad (3.71)$$

gilt. Ursache hierfür ist der lineare Term in der Feldstärke, dessen IR-Divergenz unabhängig vom Ort ist und damit auch für den Fall, dass der Anfangs- und Endpunkt des Propagators gleich sind, nicht verschwindet.

Nachdem man sich auf die Feynman-Eichung ( $\alpha = 1$ ) und auf die Nebenbedingung (3.50) festgelegt hat, bleibt eine weitere Freiheit, nämlich eine Eichwahl für das Hintergrundfeld  $B_\mu(x)$ . Statt der Feynman-Eichung soll allerdings in diesem Fall die Fock-Schwinger-Eichung [79, 80] gewählt werden. Die Äquivalenz der beiden Eichungen wird in [81] gezeigt. Die Wahl der Fock-Schwinger-Eichung erweist sich als besonders effektiv, da, wie sich zeigen wird, mit ihrer Hilfe sämtliche entstehenden Feynman-Graphen nach einer Reihenentwicklung in logarithmisch divergente Graphen überführt werden. Dies bedeutet, dass sich die Divergenzen dieser Graphen als Laurent-Reihe darstellen lassen, die im Ortsraum keine Ableitungen bzw. im Impulsraum keine Impulsabhängigkeiten enthält. Die von Schwinger und Fock unabhängig voneinander vorgeschlagene Eichung

$$x^\mu B_\mu^a(x) = 0 \quad (3.72)$$

lässt sich durch eine Fourier-Transformation in

$$\partial^\mu B_\mu^a(p) = 0$$

umwandeln und entspricht damit der Lorentz-Eichung im Impulsraum. In diesem Sinne sind also die Fock-Schwinger-Eichung im Ortsraum und die Lorentz-Eichung im Impulsraum dual zueinander. Die Fock-Schwinger-Eichung bewirkt, dass sich das Potenzial  $B_\mu^a(x)$  als Funktion der eigenen Feldstärke  $F_{\mu\nu}^a(x)$  darstellen lässt [42]. Um dies zu zeigen, ersetzt man in der durch Ableiten der Fock-Schwinger-Eichung (3.72) nach  $x_\nu$  entstehenden Gleichung

$$B_\nu(x) + x^\mu \partial_\nu B_\mu(x) = 0$$

die Ableitung des Potenzials  $B_\mu(x)$  im zweiten Term durch die Feldstärke mit einem entsprechenden Korrekturterm. Da aber aufgrund der Fock-Schwinger-Eichung  $x^\mu [B_\nu(x), B_\mu(x)]$  gleich Null ist, erhält man schließlich die folgende Beziehung

$$(1 + x^\mu \partial_\mu) B_\nu(x) = x^\mu F_{\mu\nu}(x).$$

Unter Verwendung der Variablentransformation  $x = \lambda x$  und der Identität  $\lambda \partial / \partial \lambda f(\lambda x) = x^\mu \partial_\mu f(\lambda x)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) B_\nu(\lambda x) &= \lambda x^\mu F_{\mu\nu}(\lambda x) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda B_\nu(\lambda x)) &= \lambda x^\mu F_{\mu\nu}(\lambda x) \\ \Rightarrow B_\nu(x) &= \int_0^1 d\lambda \lambda x^\mu F_{\mu\nu}(\lambda x) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Da also zum einen das Hintergrundfeld  $B_\nu$  sich auf Grund der Fock-Schwinger-Eichung über die Feldstärke  $F_{\mu\nu}$  definieren lässt und zum anderen aus der Nebenbedingung (3.50) folgt, dass der Kommutator zweier Feldstärken verschwindet, reduziert sich die Nebenbedingung (3.50) auf

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} = 0,$$

d. h. die Feldstärke  $F_{\mu\nu}$  ist konstant. Damit lässt sich das Integral in der Gleichung (3.73) lösen und man erhält ein lineares von der Feldstärke abhängiges Potenzial

$$B_\nu(x) = -\frac{1}{2} x_\mu F_{\mu\nu} \quad (3.74)$$

aus dem sich der folgende Phasenfaktor

$$\Phi(x, y) = \exp\left(\frac{1}{2} x^\mu F_{\mu\nu} y^\nu\right) \quad (3.75)$$

ergibt. Diese spezielle Gestalt des Phasenfaktors ermöglicht es, alle vorkommenden Feynman-Graphen in logarithmisch divergente Graphen zu überführen. Nebenbei sei bemerkt, dass der so gewählte Phasenfaktor natürlich die Gleichungen (3.53-3.55) erfüllt.

## 3.5 Die Feynman-Regeln

Für die Yang-Mills-Theorie ergeben sich mit der erlaubten Transformation  $Q \rightarrow gQ$  die folgenden Feynman-Regeln. Der skalare und der vektorielle Propagator sind durch

$$G^{ab}(x, y) = \left( \frac{\delta^2 \tilde{S}_{\text{FP}}[B, Q, c^*, c]}{\delta c^{*b}(y) \delta c^a(x)} \Big|_{Q=0} \right)^{-1} = - \left( (D^2)^{ab} \right)^{-1} \quad (3.76)$$

$$G_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = \left( \frac{\delta^2 (S[B + gQ] + \tilde{S}_{\text{fix}}[B, Q])}{\delta Q_\nu^b(y) \delta Q_\mu^a(x)} \Big|_{Q=0} \right)^{-1} = - \left( \delta_{\mu\nu} (D^2)^{ab} + 2F_{\mu\nu}^{ab} \right)^{-1} \quad (3.77)$$

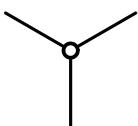
gegeben. Der nur Gluonen enthaltende 3er-Vertex hat die Gestalt

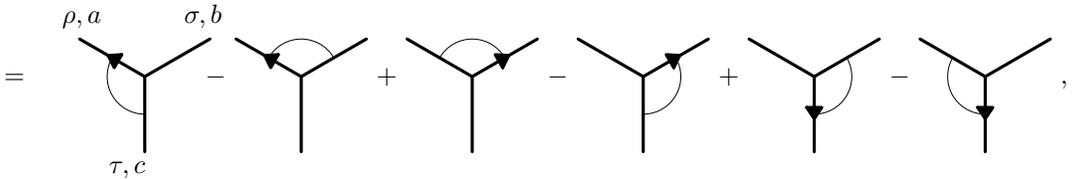
$$\frac{\delta^3 S[B + gQ]}{\delta Q_\rho^a(x_1)\delta Q_\sigma^b(x_2)\delta Q_\tau^c(x_3)} \Big|_{Q=0} = g \int dx ($$

$$f^{bcm} \delta_{\rho\tau} \delta(x-x_2)\delta(x-x_3)D_\sigma^{ma} \delta(x-x_1) - f^{bcm} \delta_{\rho\sigma} \delta(x-x_2)\delta(x-x_3)D_\tau^{ma} \delta(x-x_1) +$$

$$f^{acm} \delta_{\sigma\tau} \delta(x-x_1)\delta(x-x_3)D_\rho^{mb} \delta(x-x_2) - f^{acm} \delta_{\rho\sigma} \delta(x-x_1)\delta(x-x_3)D_\tau^{mb} \delta(x-x_2) +$$

$$f^{abm} \delta_{\sigma\tau} \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)D_\rho^{mc} \delta(x-x_3) - f^{abm} \delta_{\rho\tau} \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)D_\sigma^{mc} \delta(x-x_3))$$

$$=$$


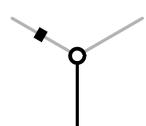
$$=$$


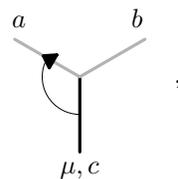
$$(3.78)$$

wobei die erste mit einem Kreis versehene graphische Darstellung als *erzeugender* Vertex bezeichnet wird. Das Ersetzen der erzeugenden Vertizes in einem Feynman-Graphen durch die sechs in der zweiten graphischen Darstellung aufgeführten Vertizes entspricht einer graphischen Wick-Kontraktion. Der Pfeil in jedem Vertex steht für eine kovariante Ableitung, die natürlich nur auf den Ast wirkt, auf dem sie liegt. Der Bogen gibt an, mit welchem vektoriiellen Propagator der Lorentz-Index der Ableitung kontrahiert. Da die verbleibenden beiden Propagatoren immer kontrahiert sind, wird der entsprechende zweite Bogen weggelassen.

Für den die Geister enthaltenden 3er-Vertex ergibt die Einführung eines erzeugenden Vertex in Bezug auf eine knappe Darstellung keinen Sinn. Trotzdem soll er der Vollständigkeit halber eingeführt werden. Damit ist also

$$\frac{\delta^3 \tilde{S}_{\text{FP}}[B, Q, c^*, c]}{\delta c^a(x_1)\delta c^{*b}(x_2)\delta Q_\mu^c(x_3)} = g \int dx f^{cam} \delta(x-x_1)\delta(x-x_3)D_\mu^{mb} \delta(x-x_2)$$

$$=$$


$$=$$


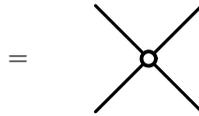
$$(3.79)$$

mit der Zusatzregel, dass im Rahmen der Wick-Kontraktionen nur die Graphen ungleich Null sind, in denen jeder graue Ast, der ein schwarzes Quadrat enthält, mit einem grauen Ast verbunden ist, der kein schwarzes Quadrat enthält.

Der 4er-Vertex ist über

$$\frac{\delta^4 S[B + gQ]}{\delta Q_\mu^a(x_1) \delta Q_\nu^b(x_2) \delta Q_\sigma^c(x_3) \delta Q_\tau^d(x_4)} \Big|_{Q=0} = g^2 \int dx \delta(x - x_1) \delta(x - x_2) \delta(x - x_3) \delta(x - x_4) \times$$

$$(f_{abm} f_{mcd} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\tau} - \delta_{\mu\tau} \delta_{\nu\sigma}) + f_{acm} f_{mbd} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\tau} - \delta_{\mu\tau} \delta_{\nu\sigma}) + f_{adm} f_{mcb} (\delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\tau} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\tau}))$$



$$=$$

definiert. Man beachte, dass in der graphischen Darstellung des 4er-Vertex eine  $\delta$ -Funktion (gestrichelte Linie) eingefügt wurde. Dabei sind die beiden Indizes der Raum-Zeit-Punkte, die über Bögen mit der  $\delta$ -Funktion verbunden sind, miteinander kontrahiert. Das Gleiche gilt für die verbleibenden beiden Indizes. Sind die oberen bzw. unteren beiden Propagatoren miteinander kontrahiert, lässt man dem Beispiel der 3er-Vertizes folgend, die entsprechenden Bögen weg. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass es nur noch 3er-Vertizes gibt, und damit die Zahl der möglichen Topologien der Feynman-Graphen stark verringert wird.

### 3.6 Die 1-Schleifen-Rechnung

Ebenso wie in der  $A^4$ -Theorie lassen sich sowohl die Divergenzen als auch das effektive Potenzial in der ersten Ordnung aus den Determinanten der Wellenoperatoren der beiden Propagatoren berechnen. Zu diesem Zweck werden die Determinanten durch die Wärmeleitungskerne ausgedrückt.

Die Korrektur ist also durch

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\det \Delta_{\mu\nu}[B]}{\det \Delta_{\mu\nu}[0]} - \ln \frac{\det \Delta[B]}{\det \Delta[0]} \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \partial_s \left( \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \operatorname{tr} \int dx \right. \\
&\quad \left. \left[ (K^\mu_\nu(x, x; \tau|B) - K^\mu_\nu(x, x; \tau|0)) - 2(K(x, x; \tau|B) - K(x, x; \tau|0)) \right] \right) \\
&= \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^{1+d/2}} \operatorname{tr} \int dx \left[ \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu (\exp 2\mathbf{F}\tau)^\nu_\nu - d \mathbf{1} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu - \mathbf{1} \right) \right] \quad (3.81)
\end{aligned}$$

gegeben. Leider lässt sich dieses Integral aber nicht wie in der  $A^4$ -Theorie geschlossen lösen. Es divergiert für  $\tau \rightarrow \infty$ . Diese Problematik firmiert unter der Bezeichnung „Die Infrarot-Katastrophe der reinen Yang-Mills-Theorie“. Betrachtet man dagegen die UV-Divergenzen, empfiehlt es sich  $\tilde{\Gamma}_1$  nach  $\tau$  zu entwickeln und nach der Integration das Ergebnis im Limes  $\tau \rightarrow 0$  zu betrachten. Mit

$$\exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu = \mathbf{1} + \frac{1}{12} \mathbf{F}^2 \tau^2 + \dots \quad (3.82)$$

und

$$(\exp 2\mathbf{F}\tau)^\nu_\nu = d \mathbf{1} - 2\mathbf{F}^2 \tau^2 + \dots \quad (3.83)$$

gelangt man schließlich zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_1 &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \frac{11}{3\epsilon} C_2 (F_{\mu\nu}^a)^2 \int dx + \\
&\quad \frac{1}{2(4\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^3} \operatorname{tr} \int dx \left[ \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu (\exp 2\mathbf{F}\tau)^\nu_\nu - 4 \mathbf{1} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu - \mathbf{1} \right) \right] + O(\epsilon), \quad (3.84)
\end{aligned}$$

wobei der erste Term in der Entwicklung von  $\tilde{\Gamma}_1$  die UV-Divergenz darstellt und das effektive Potenzial  $V_1$  wieder durch den zweiten Term mit einem entsprechenden Korrekturfaktor, d. h.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^3} \operatorname{tr} \left[ \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu (\exp 2\mathbf{F}\tau)^\nu_\nu - 4 \mathbf{1} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu - \mathbf{1} \right) \right] + \frac{1}{4g_1^2} C_2 (F_{\mu\nu}^a)^2, \quad (3.85)
\end{aligned}$$

gegeben ist. Auch hier ist die Kopplungskonstante bisher nur im klassischen Sinne definiert worden, und um die Korrekturen  $g_n$  zu bestimmen, wird als Nebenbedingung

$$\left. \frac{dV}{d\mathbf{F}^2} \right|_{\operatorname{tr}(\mathbf{F}^2)=0} = 0 \quad (3.86)$$

gewählt. Dies führt auf

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{2(4\pi)^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^3} \operatorname{tr} \left[ \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu (\exp 2\mathbf{F}\tau)^\nu_\nu - 4 \mathbf{1} + \frac{5}{3} \mathbf{F}^2 \tau^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left( \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sinh \mathbf{F}\tau}{\mathbf{F}\tau} \right) \right)^\mu_\mu - \mathbf{1} - \frac{1}{12} \mathbf{F}^2 \tau^2 \right) \right], \quad (3.87)
\end{aligned}$$

was mit dem Ergebnis aus [28] übereinstimmt. Die UV-Divergenzen lassen sich direkt aus (3.84) ablesen und damit ist die effektive Wirkung durch

$$\tilde{\Gamma}_1^{\text{div}} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \frac{11}{3\epsilon} C_2 \int dx (F_{\mu\nu}^a)^2 \quad (3.88)$$

gegeben.

### 3.7 Die 2-Schleifen-Rechnung

Der Korrekturterm in zweiter Ordnung lässt sich schnell erstellen, indem man die Vertizes in den 2-Schleifen-Graphen der  $A^4$ -Theorie durch die oben definierten erzeugenden Vertizes ersetzt und anschließend den entsprechenden Geist-Graphen hinzufügt (siehe Abbildung 3.1).

$$\tilde{\Gamma}_2 = -\frac{1}{8} \text{ (diagram)} + \frac{1}{12} \text{ (diagram)} - \frac{1}{2} \text{ (diagram)} \quad (3.89)$$

Abbildung 3.1: Effektive Wirkung der reinen Yang-Mills-Theorie in 2. Ordnung in der erzeugenden Darstellung

Die Symmetriefaktoren bleiben dabei erhalten und in Anlehnung an ihre Gestalt sollen auch weiterhin Graphen, die die Topologie des ersten Graphen aufweisen, als  $K_2$ -Graphen und Graphen, die topologisch dem zweiten bzw. dritten Graphen gleichen, als  $\Theta$ -Graphen bezeichnet werden.

Ersetzt man im ersten Graphen den erzeugenden 4er-Vertex gemäß (3.80), wird man auf

$$\begin{aligned} & \text{diagram} = \text{diagram} - \text{diagram} \\ & + \text{diagram} - \text{diagram} \\ & + \text{diagram} - \text{diagram} \end{aligned} \quad (3.90)$$

geführt. Der zweite Graph in der ersten Zeile lässt sich aber mit Hilfe von (3.71) in den ersten Graphen der ersten Zeile überführen. Aufgrund der Identität (3.71) ist außerdem  $G^\mu_\mu(x, x)$  gleich

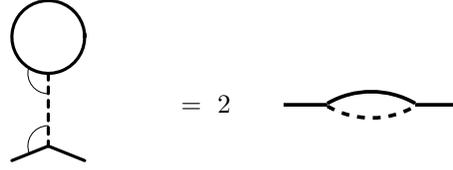


Abbildung 3.2: Tadpole-Identität

Null, d. h. der erste Graph in der zweiten Zeile und der zweite Graph in der dritten Zeile fallen weg. Die Auflösung der „Verdrillung“ im ersten Graphen der zweiten Zeile wird wegen der Antisymmetrie der Strukturkonstanten durch ein zusätzliches Minuszeichen korrigiert.

Die verbliebenen beiden Graphen lassen sich mit der in Abbildung 3.2 illustrierten Tadpole-Identität ineinander überführen. Die formelhafte Darstellung dieser Identität ist durch

$$f_{abc}G_{\mu\nu}^{cb}(x, x)\delta(x - x')f_{ab'c'}G_{b'\bullet}^{\mu}(x', y')G_{c'\bullet}^{\nu}(x', z') = 2G_{\mu\nu}^{bb'}(x, x')\delta(x - x')f_{abc}G_c^{\mu}(x, y')f_{ac'b'}G_{c'\bullet}^{\nu}(x', z') \quad (3.91)$$

gegeben, und zu ihrer Herleitung werden nur die Jacobi-Identität und Gleichung (3.71) benötigt. Damit ist also gezeigt, dass

$$= -6 \quad (3.92)$$

ist und sich in einen Graphen mit  $\Theta$ -Topologie überführen lässt.

Ersetzt man gemäß (3.78) die erzeugenden Vertizes des ersten  $\Theta$ -Graphen in Abbildung 3.1, erhält man zunächst 36 Graphen. Diese hohe Anzahl lässt sich mit der folgenden Überlegung vermindern: In jedem Feynman-Graphen, der nur erzeugende Dreiervertizes enthält, lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit einer dieser erzeugenden Dreiervertizes durch nur einen Repräsentanten aus den sechs Vertizes korrigiert um den Faktor 6 ersetzen. Im vorliegenden Fall erhält man also nur noch sechs Graphen, von denen sich einer sogar durch Vertauschung der Raumzeitkoordinaten in einen schon vorhandenen überführen lässt.

Ersetzt man schließlich noch die erzeugenden Vertizes des Geist-Graphen nach (3.79), ergibt sich für die effektive Wirkung in zweiter Ordnung die in Abbildung 3.3 auf der nächsten Seite gezeigte graphische Darstellung.

Wie man sieht, hat die Anwendung der in Abbildung 3.2 beschriebenen Tadpole-Identität dazu geführt, dass nur noch Graphen einer Topologie vorkommen. Auch in höheren Ordnungen lässt sich mit dieser Identität die Anzahl der Topologien und damit auch die Anzahl der Graphen reduzieren.

Bevor weitere Vereinfachungen durchgeführt werden, soll der graphischen Darstellung eine ähnlich effektive formelhafte Darstellung zur Seite gestellt werden. Als besonders geeignet erweist sich die von I. Jack und H. Osborn in [26] eingeführte Klammernotation. Sie hat den Vorteil, dass sie frei von Gruppenindizes ist und die Symmetrien der Graphen leicht ersichtlich sind. Sie ist durch

$$(A, B, C) := f_{a_1 b_1 c_1} f_{a_2 b_2 c_2} A^{a_1 a_2} B^{b_1 b_2} C^{c_1 c_2} = - \text{Diagram} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_2 = & \frac{3}{4} \text{ (circle with horizontal dashed line) } \\
& + \frac{1}{2} \left( - \text{ (circle with horizontal solid line, two arcs) } + \text{ (circle with horizontal solid line, one arc) } \right. \\
& \quad + \text{ (circle with horizontal solid line, one arc) } - 2 \text{ (circle with horizontal solid line, two arcs) } + \text{ (circle with horizontal solid line, two arcs) } \left. \right) \\
& - \frac{1}{2} \text{ (circle with horizontal solid line, two arcs) }
\end{aligned}$$

Abbildung 3.3: Effektive Wirkung in 2. Ordnung

definiert, wobei das Minuszeichen daher rührt, dass in der graphischen Darstellung die Indizes der Strukturkonstanten immer gegen den Uhrzeigersinn benannt werden. Als Folge sind die Symmetrien durch

$$(A, B, C) = (A, C, B) = (B, A, C) \quad (3.94)$$

gegeben, d. h. die drei Propagatoren eines  $\Theta$ -Graphen sind völlig symmetrisch zueinander.

Die zu der graphischen Darstellung der Korrektur in zweiter Ordnung aus Abbildung 3.3 gehörige Klammernotation ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_2 = & \int dx dy \left[ \frac{3}{4} (\mathbb{1}, G_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}) \right. \\
& + \frac{1}{2} \left( - (G_{\mu\nu}, G_{\rho\sigma}, D_\rho G_{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\sigma) + (D_\rho G_{\mu\nu}, G_{\rho\sigma}, G_{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\sigma) \right. \\
& \quad + (G_{\mu\nu}, D_\mu G_{\rho\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, G_{\rho\sigma}) - 2 (G_{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, D_\mu G_{\rho\nu}, G_{\rho\sigma}) \\
& \quad \left. + (G_{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, G_{\rho\nu}, D_\mu G_{\rho\sigma}) \right) \\
& \left. - \frac{1}{2} (D_\mu G, G_{\mu\nu}, G \overleftarrow{D}_\nu) \right], \quad (3.95)
\end{aligned}$$

wobei bis zu diesem Punkt nur die Feynman-Eichung verwendet wurde.

Die effektive Wirkung (3.95) lässt sich weiter vereinfachen. In einem ersten Schritt wird nun mit Hilfe der Ward-Identität (3.64) der Geist-Graph in einen Gluon-Graphen umgewandelt. Graphisch bzw. in der Klammernotation wird dies durch

$$\begin{array}{c} \text{Geist-Graph} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Gluon-Graph} \end{array} \iff (D_\mu G, G_{\mu\nu}, G \overleftarrow{D}_\nu) = (G_{\mu\nu} \overleftarrow{D}_\nu, G_{\mu\sigma}, D_\rho G_{\rho\sigma})$$

(3.96)

veranschaulicht. Der neu entstandene Graph weist allerdings eine Besonderheit auf: Alle kovarianten Ableitungen kontrahieren mit dem Propagator auf den sie jeweils wirken. Solche Graphen werden im weiteren Verlauf als Ur-Graphen bezeichnet. In der Menge der  $\Theta$ -Graphen mit einer Ableitung pro Vertex gibt es genau noch einen weiteren Ur-Graphen. Er lässt sich aus dem ersten Graphen in Abbildung 3.3 gewinnen, indem man die  $\delta$ -Funktion gemäß (3.65) ersetzt, d. h.

$$\begin{array}{c} \text{Ur-Graph 1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Ur-Graph 2} \end{array} \iff (G_{\mu\nu}, \mathbb{1}, G_{\mu\nu}) = (G_{\mu\nu}, D_\rho G_{\rho\sigma} \overleftarrow{D}_\sigma, G_{\mu\nu}).$$

(3.97)

Betrachtet man die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
 & (D_\mu G_1, G_2, G_3) + (G_1, D_\mu G_2, G_3) + (G_1, G_2, D_\mu G_3) \\
 &= \partial_\mu (G_1, G_2, G_3) + ([B_\mu, G_1], G_2, G_3) + (G_1, [B_\mu, G_2], G_3) + (G_1, G_2, [B_\mu, G_3]) \\
 & \quad \text{und die Identität } D[C, E] + [C, D]E = [C, DE] \\
 &= \partial_\mu (G_1, G_2, G_3) + [B_\mu, (G_1, G_2, G_3)],
 \end{aligned}$$

so stellt man fest, dass der Kommutator verschwindet, da es sich bei dem Klammersausdruck  $(G_1, G_2, G_3)$  um einen Skalar handelt. Berücksichtigt man weiterhin, dass die totale Ableitung im ersten Term aufgrund der Randbedingungen ebenfalls nicht zum Ergebnis beiträgt, lassen sich partielle Integrationen unter Verwendung der kovarianten Ableitung in einem Vertex der Graphen ausführen.

Aus den beiden Ur-Graphen z. B. lassen sich wie in Abbildung 3.4 auf der nächsten Seite durch zweifache partielle Integration die restlichen fünf Graphen mit dem jeweils richtigen Vorfaktor, aber nicht immer mit dem richtigen Vorzeichen erzeugen.

Die richtigen Vorzeichen erhält man aus der Zahl der Bögen, die ausgehend von der Ableitung im Uhrzeigersinn die Ableitung mit dem zugehörigen Propagator kontrahieren. Ist die Zahl ungerade, wird das Vorzeichen negativ. Diese Operation wird im weiteren Verlauf als Stern-Operation bezeichnet und durch ein kleines \*-Zeichen rechts oben am Graphen gekennzeichnet. Die graphische Darstellung der Stern-Operation angewandt auf die beiden Ur-Graphen wird in Abbildung 3.5 auf der nächsten Seite gezeigt.

Die  $\Theta$ -Graphen der Yang-Mills Theorie lassen sich in zwei Klassen aufteilen. Die erste Klasse enthält alle Graphen, die sich durch partielle Integrationen in den beiden Vertices aus dem Ur-Graphen gewinnen lassen, dessen beide Ableitungen auf einem Propagator liegen. Das graphische Pendant hierzu findet sich in der ersten Zeile von Abbildung 3.3. Der in der zweiten Zeile aus dem Geist-Graphen über (3.96) gewonnene Ur-Graph führt nach partieller Integration in beiden Vertices auf die Graphen der zweiten Klasse.

Der Geist-Graph hat nach der Umwandlung in den Ur-Graphen und der anschließenden partiellen Integration sogar zwei richtige Vorfaktoren und hebt daher zwei der drei Graphen, die aus dem Ur-Graphen nach Anwendung der Stern-Operation entstanden sind, weg.

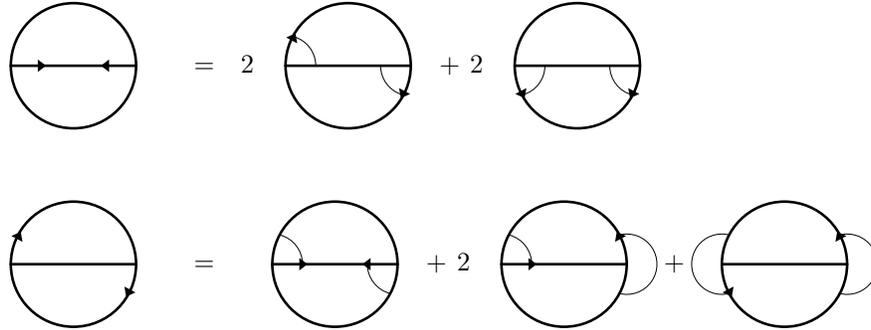


Abbildung 3.4: Partielle Integration angewandt auf die Ur-Graphen

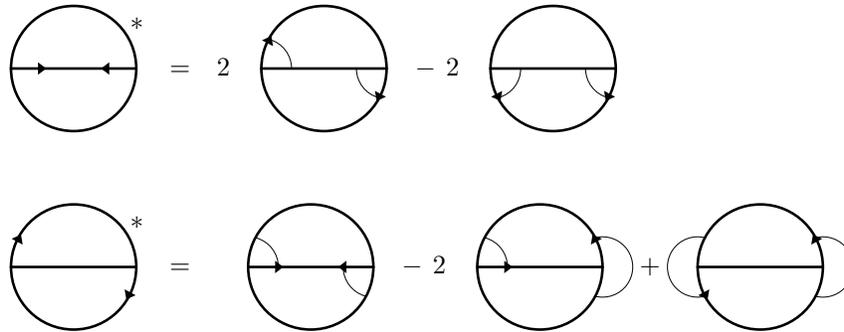


Abbildung 3.5: Stern-Operation angewandt auf die Ur-Graphen

Wie die Abbildung 3.6 zeigt, lassen sich die 2-Schleifen-Graphen der effektiven Wirkung mit der Stern-Operation in einer wesentlich kompakteren Form darstellen und unter Verwendung der Identitäten (3.64) und (3.65) die Anzahl der Graphen von ursprünglich sieben auf drei Graphen senken.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass bis zu diesem Punkt nur die Feynman-Eichung in die Betrachtung eingeflossen ist. Die Ward-Identität (3.64) und die Identität, die die Propagatoren mit der  $\delta$ -Funktion in Relation setzt (3.65), gelten nämlich wie schon erwähnt auch ohne die Annahme, dass  $D_\rho F_{\mu\nu} = 0$  ist.

Es bleibt zu erwähnen, dass die Eichinvarianz in Bezug auf das Hintergrundfeld  $B_\mu$  nicht verletzt worden ist und dass alle bis hierhin verwendeten Identitäten nichtperturbativ im Hintergrundfeld  $B_\mu$  sind, d. h., dass die neue effektive Wirkung in zweiter Ordnung auch für die Berechnung der endlichen Teile geeignet ist.

Ergänzt um die Annahme, dass die Feldstärke konstant in Bezug auf die kovariante Ableitung ist (3.50), kann im nächsten Schritt in den Graphen die Entwicklung der Propagatoren (3.68, 3.69) eingesetzt werden. Da in der Wirkung die Feldstärke nur in quadratischer Ordnung enthalten ist, werden sämtliche Terme, die die Feldstärke in höherer Ordnung enthalten, verworfen.

Danach wird die Wirkung der kovarianten Ableitung unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.54, 3.55) berechnet und in den Graphen, in denen die Feldstärke in quadratischer Ordnung

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_2 = & \text{Diagram 1} \\
& + \frac{1}{4} \left( \text{Diagram 2}^* - \text{Diagram 3} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left( \text{Diagram 4}^* - \text{Diagram 5} \right) \\
= & \text{Diagram 1} - \text{Diagram 3} - 2 \text{Diagram 5}
\end{aligned}$$

Abbildung 3.6: Vereinfachte effektive Wirkung in 2. Ordnung

vorkommt, der Phasenfaktor gleich Eins gesetzt.

Nimmt man weiterhin an, dass die Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld  $B_\mu$  gilt, ist der Phasenfaktor durch (3.75) definiert und die Feldstärke konstant.

Anschließend kann aufgrund der Translationsinvarianz in allen übrigen Graphen [42] ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Vertex im Nullpunkt fixiert werden. Dies hat zur Folge, dass die verbliebenen Phasenfaktoren der 2-Schleifen-Graphen zu Eins werden, d. h.

$$\Phi(0, y) = \mathbf{1}. \quad (3.98)$$

Nach diesem Schritt sind die Phasenfaktoren auch in den Graphen verschwunden, die nur linear oder gar nicht von der Feldstärke abhängig sind. Da, unabhängig von der betrachteten Schleifenordnung, der divergente Anteil der Graphen, die die Feldstärke nur in linearer Form enthalten, symmetrisch in den beiden Indizes der Feldstärke ist, fallen diese Graphen aus reinen Symmetrieüberlegungen weg. Für die 2-Schleifen-Graphen lässt sich sogar zeigen, dass die Graphen, in denen die Feldstärke gar nicht vorkommt, ebenfalls aufgrund von Symmetrien und anderen Eigenschaften der Feynman-Graphen gleich Null sind.

Im Falle der 3-Schleifen-Rechnung wurde dieser Umstand nicht überprüft, sondern als gegeben angenommen.

Übrig bleiben also schließlich nur Graphen, die keinen Phasenfaktor mehr enthalten, die logarithmisch divergent und von quadratischer Ordnung in der Feldstärke sind. Da der Phasenfaktor die einzige Funktion in den Graphen war, die Gruppenindizes enthält und gleichzeitig ortsabhängig ist, lassen sich die verbliebenen Graphen in jeweils einen normalen Feynman-Graphen und einen

gruppentheoretischen Graphen faktorisieren. Eine ausführliche Berechnung des zweiten und dritten Graphen aus der letzten Zeile in Abbildung 3.6 findet sich im Anhang A.5, während im folgenden diese Vorgehensweise skizzenhaft anhand des letzten Graphen aus der erwähnten Abbildung vorgeführt werden soll.

$$\begin{aligned}
(G_{\mu\nu}, G_{\rho\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, D_\rho G_{\mu\sigma}) &= (\Phi G_0, \Phi G_0 \overleftarrow{D}_\mu, D_\mu \Phi G_0) + \dots & (3.99) \\
&= -(\Phi G_0, \Phi \partial_\mu G_0, \Phi \partial_\mu G_0) + (\Phi G_0, \Phi \mathbf{F}_{\mu\rho} \partial_\rho G_1, \Phi \mathbf{F}_{\mu\sigma} \partial_\sigma G_1) + \dots \\
&\quad \text{fixieren des Vertex nach Novikov} \\
&= (G_0, \mathbf{F}_{\mu\rho} \partial_\rho G_1, \mathbf{F}_{\mu\sigma} \partial_\sigma G_1) + \dots
\end{aligned}$$

Von den nach der Entwicklung entstehenden 16 Graphen wird in (3.99) nur der Graph exemplarisch berechnet, der keine Feldstärke enthält. Die übrigen Graphen werden, sofern sie nur linear in der Feldstärke sind, auf analoge Art und Weise in Graphen mit quadratischem Feldstärkeanteil umgewandelt.

$$\begin{aligned}
(G_0, \mathbf{F}_{\mu\rho} \partial_\rho G_1, \mathbf{F}_{\mu\sigma} \partial_\sigma G_1) &= G_0(x-y) \partial_\rho G_1(x-y) \partial_\sigma G_1(x-y) (\mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\rho}, \mathbf{F}_{\mu\sigma}) \\
&= - \left( \text{Diagram 1} \right) \left( \text{Diagram 2} \right) & (3.100) \\
&= \frac{1}{4\epsilon} \delta_{\rho\sigma} \delta(x-y) \quad \frac{1}{2} C_2^2 F_{\mu\rho}^a F_{\mu\sigma}^a \\
&= \frac{1}{8\epsilon} C_2^2 (F_{\mu\rho}^a)^2 \delta(x-y)
\end{aligned}$$

Der erste Graph in (3.100) ist ein ganz normaler Feynman-Graph und seine Divergenzen sind im Anhang A.8 aufgeführt, während der zweite Graph aus den Strukturkonstanten besteht und mit Hilfe der Regeln aus Tabelle A.1 gelöst wird. Rechnet man erst den Feynman-Graphen aus und führt anschließend die entsprechenden Kontraktionen durch, so genügen die folgenden beiden Identitäten

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2) &= C_2 \text{tr}(\mathbf{F}^2) = C_2^2 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2} C_2 \text{tr}(\mathbf{F}^2) = \frac{1}{2} C_2^2 (F_{\mu\nu}^a)^2,
\end{aligned}$$

um alle in zweiter Ordnung entstehenden gruppentheoretischen Graphen zu berechnen.

Sieht man allerdings davon ab, die Feynman-Graphen sofort zu berechnen und versucht mit einigen Manipulationen, die in den Anhängen A.5 und A.6 beschrieben werden, die Graphen ineinander zu überführen, zeigt sich, dass sich die Zahl der Feynman-Graphen für die 2-Schleifen-Rechnung sogar auf zwei bzw. einen Graphen reduzieren lässt.

Damit ist der divergente Anteil der effektiven Wirkung in zweiter Ordnung durch

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_2^{\text{div}} &= (G_{\mu\nu}, \mathbb{1}, G_{\mu\nu}) - (G_{\mu\nu}, G_{\rho\sigma}, D_\mu G_{\rho\sigma} \overleftarrow{D}_\nu) - 2(G_{\mu\nu}, G_{\rho\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, D_\rho G_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{17}{12}(\mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) - \frac{17}{6}(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0)\end{aligned}\quad (3.101)$$

$$= \frac{17}{12} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) - \frac{17}{6} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \end{array} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0)\quad (3.102)$$

$$= -\frac{17}{6}(G_0, \partial_\mu G_1, \partial^\mu G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0)\quad (3.103)$$

$$= -\frac{17}{6} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \text{---} \circ \\ \circ \end{array} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0)\quad (3.104)$$

$$= \frac{34}{3\epsilon} \left( \frac{C_2}{16\pi^2} \right)^2 S_{\text{cl}} + O(\epsilon^0)\quad (3.105)$$

gegeben, wobei der Übergang von der graphischen Darstellung (3.102) nach (3.104) bzw. von der Gleichung (3.101) nach (3.103) sich mit Hilfe der Identität (A.27) bewerkstelligen lässt. Dieser Graph enthält keine Subdivergenzen, d. h. er muss nicht mit Hilfe der  $R^*$ -Methode renormiert werden und er enthält nur einen einfachen Pol. Somit lässt sich also schon auf Ebene der Feynman-Graphen das Fehlen eines quadratischen Poles in zweiter Ordnung der Yang-Mills-Theorie zeigen.

### 3.8 Die 3-Schleifen-Rechnung

Im weiteren Verlauf werden die im vorherigen Abschnitt verwendeten Methoden so verallgemeinert, dass sie sich auch zur Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung eignen. Mit ihrer Hilfe wird anschließend die  $\beta$ -Funktion der reinen Yang-Mills-Theorie in der Ordnung von drei Schleifen hergeleitet.

Auch in diesem Fall werden zuerst die Vertizes der 3-Schleifen-Graphen aus der  $A^4$ -Theorie wieder durch die erzeugenden Vertizes aus Kapitel 3.5 ersetzt und die entsprechenden Geist-Graphen hinzugefügt (siehe Abbildung 3.7). Die sich hieraus in dritter Ordnung ergebende effektive Wirkung lässt sich ebenfalls insofern vereinfachen, als dass durch wiederholte Anwendung der Tadpole-Identität (3.2) die Zahl der vorkommenden Topologien auf zwei reduziert werden kann.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_3 = & \frac{1}{16} \left( \text{Diagram 1} \right) + \frac{1}{48} \left( \text{Diagram 2} \right) - \frac{1}{8} \left( \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \right) - \frac{1}{8} \left( \text{Diagram 5} \right) \\
 & + \frac{1}{16} \left( \text{Diagram 6} - 4 \text{Diagram 7} + 4 \text{Diagram 8} - 8 \text{Diagram 9} \right) \\
 & + \frac{1}{24} \left( \text{Diagram 10} - 8 \text{Diagram 11} - 6 \text{Diagram 12} \right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.7: Effektive Wirkung der reinen Yang-Mills-Theorie in 3. Ordnung in der erzeugenden Darstellung

Für die Graphen der ersten Topologie, die in Anlehnung an ihre Gestalt als Ball-Graphen bezeichnet werden, wird die folgende Klammernotation bzw. graphische Darstellung eingeführt:

$$\begin{aligned}
 (A, B, C|K, L, M)_1 & := f_{a_1 b_1 c_1} f_{a_2 b_2 c_2} f_{a_3 b_3 c_3} f_{a_4 b_4 c_4} A^{a_1 a_2} B^{b_2 b_3} C^{c_2 c_3} K^{a_3 a_4} L^{b_3 b_4} M^{c_3 c_4} \\
 & = \text{Diagram (Ball-Graph)} \tag{3.106}
 \end{aligned}$$

Die Ball-Graphen weisen die folgenden Symmetrien auf

$$\begin{aligned}
 (A, B, C|K, L, M)_1 & = (A, C, B|K, L, M)_1 \\
 & \quad \text{gespiegelt an der Senkrechten} \\
 & = (\tilde{K}, \tilde{B}, \tilde{C}|\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{M})_1 \\
 & \quad \text{gespiegelt an der Waagerechten} \\
 & = (\tilde{A}, \tilde{L}, \tilde{M}|\tilde{K}, \tilde{B}, \tilde{C})_1,
 \end{aligned}$$

wobei die Propagatoren, über denen eine Schlangenlinie steht, rückwärts zu lesen sind, d. h.  $\tilde{G}_{\mu\nu}(x, y) = G_{\nu\mu}(y, x)$ . Damit ergeben sich für jeden Ball-Graphen 16 mögliche Darstellungen.

Die Graphen der zweiten Topologie werden aufgrund ihres Symmetrieverhaltens Tetraeder-Graphen genannt. Auch für diese Graphen wird eine Klammernotation bzw. graphische Darstellung eingeführt:

$$\begin{aligned}
 (A, B, C|K, L, M)_2 & := f_{a_1 b_1 c_1} f_{a_2 b_2 c_2} f_{a_3 b_3 c_3} f_{a_4 b_4 c_4} A^{a_1 a_2} B^{b_1 b_4} C^{c_1 c_3} K^{a_4 a_3} L^{b_3 b_2} M^{c_2 c_4} \\
 & = \text{Diagram (Tetraeder-Graph)} \tag{3.107}
 \end{aligned}$$

Für die Tetraeder-Graphen ergeben sich die folgenden Symmetrien

$$(A, B, C|K, L, M)_2 \stackrel{\text{zyklisch}}{=} (B, C, A|L, M, K)_2 \stackrel{\text{invertiert}}{=} (C, B, A|\tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{K})_2 \\ \stackrel{\text{gedreht}}{=} (\tilde{L}, M, \tilde{A}|\tilde{B}, C, \tilde{K})_2,$$

die 24 Darstellungen ermöglichen.

Die aus der effektiven Wirkung  $\tilde{\Gamma}_3$  in Abbildung 3.7 hergeleiteten Ball- bzw. Tetraeder-Graphen sind in Abbildung 3.9 bzw. 3.10 graphisch dargestellt. Dabei sind sowohl die Ward- als auch die Tadpole-Identität (3.2) schon in die Darstellung eingegangen.

Der fünfte Graph in der dritten Zeile von  $\Gamma_{\text{Ball}}^{(3)}$  stellt eine Besonderheit dar. Wie aus Abbildung 3.8 ersichtlich wird, ist er ein Hybrid aus einem Geist-Graphen und einem Ur-Graphen, auf den der Stern-Operator wirkt. Die obere Schleife besteht aus zwei Vektorpropagatoren, die gemäß der Stern-Operation partiell integriert werden, während die untere Schleife zwei Geist-Propagatoren enthält, die mit Hilfe der Ward-Identität in Vektorpropagatoren umgewandelt und daher ganz normal partiell integriert werden.

$$\begin{aligned} & \text{Diagram with asterisk} = \text{Diagram 1} - 2 \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \\ & = \left( G_{\mu\nu}, D_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} \overline{D}_\sigma | \right. \\ & \quad \left. G_{\tau\lambda}, G \overline{D}_\mu, D_\lambda G \right)_1 - 2 \left( G_{\mu\nu} \overline{D}_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} \overline{D}_\sigma | \right. \\ & \quad \left. G_{\tau\lambda}, G D_\mu, D_\lambda G \right)_1 + \left( G_{\mu\nu} \overline{D}_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} | \right. \\ & \quad \left. D_\tau G_{\sigma\lambda}, G D_\mu, D_\lambda G \right)_1 \\ & = \text{Diagram 4} - 2 \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} \\ & = \left( G_{\mu\nu}, D_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} \overline{D}_\sigma | \right. \\ & \quad \left. G_{\tau\lambda}, D_\eta G_{\eta\mu}, G_{\lambda\kappa} \overline{D}_\kappa \right)_1 - 2 \left( G_{\mu\nu} \overline{D}_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} \overline{D}_\sigma | \right. \\ & \quad \left. G_{\tau\lambda}, D_\eta G_{\eta\mu}, G_{\lambda\kappa} \overline{D}_\kappa \right)_1 + \left( G_{\mu\nu} \overline{D}_\rho, G_{\nu\sigma}, G_{\rho\tau} | \right. \\ & \quad \left. D_\tau G_{\sigma\lambda}, D_\eta G_{\eta\mu}, G_{\lambda\kappa} \overline{D}_\kappa \right)_1 \\ & = \text{Diagram with dagger} \end{aligned}$$

Abbildung 3.8: Hybrider Ball-Graph

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{\text{Ball}}^{(3)} = & \left( \frac{9}{4} \right) \left( \text{Diagram 1} \right) + \left( \frac{1}{8} \right) \left( \text{Diagram 2} \right) - \left( \text{Diagram 3} \right) + \left( \frac{3}{4} \right) \left( \text{Diagram 4} \right) + \left( \text{Diagram 5} \right) \\
 & + 4 \left( \text{Diagram 6} \right) + \left( \frac{1}{8} \right) \left( \text{Diagram 7} \right) + 2 \left( \text{Diagram 8} \right) + 4 \left( \text{Diagram 9} \right) + 4 \left( \text{Diagram 10} \right) \\
 & + \frac{1}{16} \left( \text{Diagram 11} \right) + 8 \left( \text{Diagram 12} \right) - \left( \text{Diagram 13} \right) + 4 \left( \text{Diagram 14} \right) - 2 \left( \text{Diagram 15} \right) + \left( \text{Diagram 16} \right) \\
 & + 16 \left( \text{Diagram 17} \right) + 16 \left( \text{Diagram 18} \right) - \left( \text{Diagram 19} \right) + 4 \left( \text{Diagram 20} \right) + 4 \left( \text{Diagram 21} \right) - \left( \text{Diagram 22} \right) \\
 & + 8 \left( \text{Diagram 23} \right) - \left( \text{Diagram 24} \right) + 8 \left( \text{Diagram 25} \right) + 8 \left( \text{Diagram 26} \right) + \left( \text{Diagram 27} \right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.9: Beitrag der Ball-Graphen zur effektiven Wirkung in 3. Ordnung

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_{\text{Tetraeder}}^{(3)} = & \left( \begin{array}{c} 6 \\ +6 \\ +6 \\ +6 \\ +6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right) \\
 & \left( \begin{array}{c} 2 \\ +8 \\ +8 \\ +8 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right) \\
 & +4 \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \end{array} \right) \\
 & + \frac{1}{24} \left( \begin{array}{c} 3 \\ +6 \\ - \\ +12 \\ +24 \\ +12 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array} \right) \\
 & +24 \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ - \\ \text{Diagram 18} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.10: Beitrag der Tetraeder-Graphen zur effektiven Wirkung in 3. Ordnung

Der zweite Graph in der letzten Zeile von  $\Gamma_{\text{Tetraeder}}^{(3)}$  aus Abbildung 3.10 bedarf ebenfalls einer genaueren Erklärung. Wie aus der Abbildung 3.11 ersichtlich wird, enthält er einen Vertex, auf den der Stern-Operator wirkt, und eine aus drei Geist-Propagatoren bestehende Schleife. Man beachte, dass dieser Graph als einziger eine ungerade Anzahl von Geist-Propagatoren enthält und daher die Anwendung der Ward-Identität zu einem Vorzeichenwechsel führt.

$$\begin{aligned}
 & \text{Graph with loop and star} = \text{Graph 1} - \text{Graph 2} \\
 & = \left( G \overline{D}_\mu, D_\nu G, G_{\nu\rho} \overline{D}_\tau \mid G_{\sigma\tau}, G_{\rho\mu}, G \overline{D}_\sigma \right)_2 - \left( G \overline{D}_\mu, D_\nu G, G_{\nu\rho} \mid G_{\sigma\tau}, D_\tau G_{\rho\mu}, G \overline{D}_\sigma \right)_2 \\
 & = - \text{Graph 3} + \text{Graph 4} \\
 & = - \left( D_\kappa G_{\kappa\mu}, G_{\nu\eta} \overline{D}_\eta, G_{\nu\rho} \overline{D}_\tau \mid G_{\sigma\tau}, G_{\rho\mu}, D_\lambda G_{\lambda\sigma} \right)_2 + \left( D_\kappa G_{\kappa\mu}, G_{\nu\eta} \overline{D}_\eta, G_{\nu\rho} \mid G_{\sigma\tau}, D_\tau G_{\rho\mu}, D_\lambda G_{\lambda\sigma} \right)_2 \\
 & = \text{Graph 5}
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.11: Hybrider Tetraeder-Graph

Wählt man aus den Abbildungen 3.9 auf Seite 51 und 3.10 auf der vorherigen Seite nur die Graphen, die keine  $\delta$ -Funktion enthalten, wird ersichtlich, dass sich die Ball-Graphen in elf Klassen und die Tetraeder-Graphen in sechs Klassen unterteilen lassen.

Die Benennung der Klassen und der zugehörige Ur-Graph lassen sich aus den ersten beiden Spalten der Tabellen 3.1 auf der nächsten Seite und 3.2 auf Seite 55 entnehmen. Die dritte Spalte gibt die Anzahl der Graphen an, die man erhält, wenn man den Stern-Operator auf den Ur-Graphen anwendet. Durch Umwandlung der Geist-Propagatoren in Gluon-Propagatoren mit Hilfe der Identität (3.64) und anschließende partielle Integration lässt sich die Zahl der Graphen pro Klasse reduzieren. Zu den Klassen ohne passende Geist-Graphen werden Ur-Graphen addiert, partiell integriert und anschließend wieder abgezogen. Wie in der vierten Spalte angegeben, reduziert sich damit die Zahl der zu berechnenden Graphen, die keinen 4er-Vertex enthalten, auf ca. die Hälfte. Die in Klammern angegebene Ziffer steht für die Zahl der hinzugefügten Ur-Graphen.

Klasse	Ur-Graph	Anzahl	Reduktion	Klasse	Ur-Graph	Anzahl	Reduktion
B.1		7	2 + (1)	B.7		6	3
B.2		10	4	B.8		10	4
B.3		7	2	B.9		10	4 + (1)
B.4		16	8 + (1)	B.10		8	4 + (1)
B.5		16	8	B.11		3	1 + (1)
B.6		6	3 + (1)				
						99	43 + (6)

Tabelle 3.1: Klassifizierung der Ball-Graphen

Auf diese Weise lässt sich, wie in Tabelle 3.1 gezeigt, nur durch die Anwendung der Ward-Identität und die Hinzufügung einiger passender Ur-Graphen die Zahl der Ball-Graphen von ursprünglich 99 auf 49 reduzieren. Das gleiche gilt für die Tetraeder-Graphen. Ihre Anzahl wird, wie in Tabelle 3.2 aufgeführt, von 60 auf 31 verringert.

Die restlichen Feynman-Graphen enthalten mindestens einen 4er-Vertex und damit natürlich auch mindestens eine  $\delta$ -Funktion. Folglich lassen sich aufgrund der Jacobi-Identität Ball-Graphen, deren 4er-Vertex sich aus den beiden linken oder beiden rechten 3er-Vertizes zusammensetzt, wie in (3.108) graphisch bzw. in (3.109) mit Hilfe der Klammernotation dargestellt, in zwei Tetraeder-Graphen transformieren.

$$\begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{(Kreis mit 4er-Vertex)} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Tetraeder-Graph 1} \\ \text{(links 3er-Vertex, rechts 3er-Vertex)} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Tetraeder-Graph 2} \\ \text{(links 3er-Vertex, rechts 3er-Vertex)} \end{array} \quad (3.108)$$

$$(\delta, G_1, G_2 | G_3, G_4, G_5)_1 = (\delta, G_1, \tilde{G}_4 | G_3, G_5, G_2)_2 + (\delta, G_1, \tilde{G}_5 | G_3, G_4, G_2)_2 \quad (3.109)$$

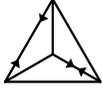
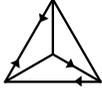
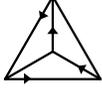
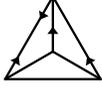
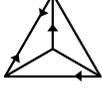
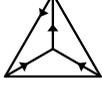
Klasse	Ur-Graph	Anzahl	Reduktion	Klasse	Ur-Graph	Anzahl	Reduktion
$T.1$		4	1 + (1)	$T.4$		16	8 + (1)
$T.2$		6	2	$T.5$		8	4 + (1)
$T.3$		10	4 + (1)	$T.6$		16	8
						60	27 + (4)

Tabelle 3.2: Klassifizierung der Tetraeder-Graphen

Die Graphen bestehend aus den Strukturfunktionen lassen sich, wie schon im Fall der 2-Schleifen-Rechnung unter Verwendung der Tabelle A.1 lösen. Im einzelnen erhält man:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2)_1 &= - C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{F}^2, \mathbf{1}, \mathbf{1})_1 &= - C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}_{\mu\nu})_1 &= \frac{1}{2} C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu})_1 &= -\frac{1}{2} C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu})_1 &= -\frac{1}{4} C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_1 &= - C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2
\end{aligned} \tag{3.110}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2)_2 &= \frac{1}{2} C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}_{\mu\nu})_2 &= -\frac{1}{4} C_2^3 (F_{\mu\nu}^a)^2 \\
(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu})_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Im nächsten Schritt werden in den Graphen die vollen Propagatoren durch ihre Entwicklung bis in die quadratische Ordnung der Feldstärke ersetzt. Wie im Fall der 2-Schleifen-Ordnung werden alle Graphen höherer Ordnung als  $O(F^2)$  vernachlässigt und die Phasenfaktoren in den Graphen der Ordnung  $O(F^2)$  gleich Eins gesetzt. Anschließend wird in den restlichen Graphen, d. h. den Graphen, die von der Ordnung  $O(F)$  oder konstant in der Feldstärke sind, die Wirkung der kovarianten Ableitungen auf die Phasenfaktoren berechnet. Da die Phasenfaktoren (3.75) von den Vertexkoordinaten, die Propagatoren aber von den Differenzen der Vertexkoordinaten abhängig sind, erweist es sich als sinnvoll, die Phasenfaktoren umzuschreiben. Sei  $x_0, \dots, x_n$  ein beliebiger verbundener Pfad durch den Graphen, der den Punkt  $x_0$  mit dem Punkt  $x_n$  verbindet. Dann gilt

für den Phasenfaktor zwischen den beiden letzten Punkten des Pfades

$$\begin{aligned}
\Phi(x_{n-1}, x_n) &= \exp \frac{1}{2} x_{n-1}^\mu F_{\mu\nu} x_n^\nu \\
&= \exp \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{n-1} (x_{n-i} - x_{n-i-1})^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu + x_0^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} ((x_{n-i} - x_{n-i-1})^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu + x_0^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu) \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{i=0}^{n-1} ((x_{n-i} - x_{n-i-1})^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu + x_0^\mu F_{\mu\nu} (x_n - x_{n-1})^\nu)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Der Vorgehensweise aus [42] folgend und wie schon anhand der 2-Schleifen-Rechnung vorgeführt, fixiert man einen beliebigen Punkt des Feynman-Graphen als Startpunkt  $x_0$  im Ursprung des Koordinatensystems. Dies hat zur Folge, dass alle Phasenfaktoren, die den Startpunkt  $x_0$  enthalten, gleich Eins gesetzt werden können und die restlichen Phasenfaktoren nur noch Koordinatendifferenzen enthalten, die mit den entsprechenden Propagatoren des Graphen unter Verwendung der Regeln in Anhang A.2 in neue Propagatoren überführt werden können. Zum Schluss werden sämtliche Graphen verworfen, die nicht von quadratischer Ordnung in der Feldstärke sind, und die Fixierung des Startpunktes aufgehoben. Damit ist es gelungen, die ursprünglichen, nur exakte Propagatoren enthaltenden Feynman-Graphen, in gewöhnliche Feynman-Graphen, erweitert um ein Produkt aus Strukturkonstanten, umzuwandeln.

Besonders erwähnenswert ist, dass die Divergenzen eines Graphen unabhängig sowohl von dem ausgesuchten Anfangspunkt als auch von dem zwischen Anfangs- und Endpunkt gewählten Pfad sind.

Nach dieser Entwicklung gemäß (3.66, 3.67) erhält man nach der Verwendung einiger offensichtlicher Identitäten ca. 2000 Graphen. Auch hier soll davon abgesehen werden, diese direkt auszurechnen. Stattdessen soll die Anzahl der Graphen mit Hilfe ähnlicher Identitäten, wie sie im Fall der 2-Schleifen-Rechnung benutzt wurden, drastisch reduziert werden.

Zu diesem Zweck werden unter Verwendung der Identitäten aus Anhang A.2 zuerst die  $\delta$ -Tensoren aus den Graphen entfernt. Dabei ist darauf zu achten, inwiefern die  $\delta$ -Tensoren, die sich zu einem dimensional  $d$  zusammenfassen lassen, zu einer Subdivergenz gehören.

Im nächsten Schritt werden die Tetraeder-Graphen, die vier Ableitungen enthalten (Tetraeder-Graphen mit mehr Ableitungen kommen nicht vor), in Tetraeder-Graphen überführt, die weniger Ableitungen enthalten. Zu diesem Zweck wird eine Basis von Tetraeder-Graphen mit vier Ableitungen erstellt, die soweit möglich aus Tetraeder-Graphen ohne Subdivergenzen besteht. Da diese Graphen nur einen einfachen Pol enthalten, können sie mittels der Identität

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\sigma\tau} = \frac{1}{d(d-1)} (\delta_{\mu\tau} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\tau}) \mathbf{F}^2 \tag{3.113}$$

in einfachere Graphen überführt werden, wobei der  $\epsilon$ -Anteil der Dimension  $d$  nicht zu der Divergenz beiträgt, d. h. die Dimension  $d$  kann gleich Vier gesetzt werden.

Das wohl einfachste Beispiel für die Transformation eines Tetraeder-Graphen mit vier Ableitungen in einen Tetraeder-Graphen ohne Ableitungen findet sich in Abbildung 3.12. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese Umformungen nur solange gelten, wie man nicht am endlichen Teil der Graphen interessiert ist.

$$\begin{aligned}
 & \left( \text{tetrahedron with external lines } \mu, \nu, \sigma, \tau \text{ and factor } (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\sigma\tau})_2 \right) \\
 &= \frac{1}{12} \left( \text{tetrahedron with two internal lines} - \text{tetrahedron} \right) (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2)_2 + O(\epsilon^0) \\
 &= -\frac{1}{24} \left( \text{tetrahedron with a loop} + \text{tetrahedron} \right) (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2)_2 + O(\epsilon^0) \quad (3.114)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.12: Vereinfachung eines Tetraeder-Graphen

Multipliziert man die Gleichung (3.113) mit einem  $\delta$ -Tensor, der jeweils mit einem Index der beiden Feldstärken kontrahiert ist, gelangt man zu der Identität

$$\mathbf{F}^2_{\mu\nu} = \mathbf{F}^2 \frac{\delta_{\mu\nu}}{d}, \quad (3.115)$$

mit deren Hilfe sich Tetraeder-Graphen, die zwei Ableitungen aber keine Subdivergenzen enthalten, in den einfachsten Tetraeder-Graphen überführen lassen, der weder Ableitungen noch Subdivergenzen enthält (siehe zweiter Graph in der zweiten und dritten Zeile aus Abbildung 3.12).

Schließlich lassen sich unter Zuhilfenahme einiger weiterer, leicht erschließbarer Identitäten alle Tetraeder-Graphen auf den oben erwähnten, einfachsten Tetraeder-Graphen zurückführen. Zu guter Letzt verschwindet sogar der Graph selbst, so dass keine Tetraeder-Graphen zurückbleiben. Da diese Graphen als einzige 3-Schleifen-Graphen Divergenzen mit einem  $\zeta(3)$  Term enthalten, weist auch das Endresultat keinen solchen Term auf.

Gegenwärtig gelingt es, die Summe der zur Berechnung der Divergenzen der effektiven Wirkung benötigten Feynman-Graphen auf 24 zu reduzieren. Leider lässt sich der Prozess zur Reduzierung der Anzahl der benötigten Graphen nur sehr begrenzt automatisieren. Aufgrund der Komplexität und Menge der Regeln ist man teilweise gezwungen, einige der Vereinfachungen per Hand vorzugeben. Vielleicht lässt sich hier ein intelligenteres Verfahren finden. Die vollständige Lösung für die Divergenzen der effektiven Wirkung in der Ordnung von drei Schleifen findet sich auf den nächsten Seiten. Jedes Klammerpaar enthält drei Zeilen. Die erste Zeile enthält eine graphische Darstellung

des entsprechenden Feynman-Graphen, wobei folgende Definitionen Eingang gefunden haben:

$$\begin{aligned} \rightarrow &\Leftrightarrow \partial_\mu \\ \rightarrow &\Leftrightarrow \partial_\nu \\ \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ \bar{\mathbf{F}}^2 &= (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} | \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}^2)_2 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile enthält die am Anfang des Kapitels eingeführte Klammernotation. Die Divergenzen des Graphen sind in der dritten Zeile aufgeführt, wobei der Faktor  $C_2^3/(16\pi^2)^3 S_{\text{cl}}$  weggelassen wurde. Die Definition der Klammer findet sich im Anhang A.1.

$$\begin{aligned} \Gamma_3^{\text{div}} = & \frac{1}{6} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 6 \\ (G_1, G_0, \partial_{\rho\sigma} G_0 | \\ \mathbf{1}, \partial_{\mu\nu} G_0, \partial_{\rho\sigma} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, 0, \frac{17}{1152}) \end{array} \right) + \frac{7}{3} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ 6 \\ (G_0, G_0, \partial_\rho G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, \partial_{\rho\mu\nu} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, 0, \frac{1}{768}) \end{array} \right) - \frac{3}{2} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ -6 \\ (G_3, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbf{1}, \partial_\nu G_0, \partial_\rho G_0 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (-\frac{1}{12}, \frac{7}{48}, -\frac{67}{576}) \end{array} \right) \\ & + \left(1 - \frac{7}{3}d\right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 6 \\ (G_0, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, \partial_{\rho\nu} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (-\frac{1}{12}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{48}) \end{array} \right) - \frac{65}{3} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ 6 \\ (G_3, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, \partial_{\rho\nu} G_0 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (-\frac{1}{6}, \frac{5}{72}, \frac{35}{864}) \end{array} \right) \\ & + \frac{51}{4} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 2 \\ (G_0, G_0, \partial_{\mu\nu} G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, 0, \frac{1}{432}) \end{array} \right) - \frac{961}{12} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ -2 \\ (G_0, G_0, G_0 | \\ \mathbf{1}, \partial_\mu G_0, \partial_\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (\frac{1}{6}, -\frac{7}{24}, \frac{3}{16}) \end{array} \right) + \frac{10183}{48} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ 2 \\ (G_2, G_0, G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, \partial_{\mu\nu} G_0 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, \frac{1}{12}, -\frac{1}{48}) \end{array} \right) \\ & + \frac{632491}{4608} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ (G_0, G_0, G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, G_1 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-\frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}) \end{array} \right) - \frac{82699}{2304} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ (G_1, G_0, G_0 | \\ \mathbf{1}, G_0, G_0 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) \end{array} \right) - \frac{6668113}{41472} \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ (G_0, G_0, G_1 | \\ \mathbf{1}, \mathbf{1}, G_1 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-2, 1, 0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{16405}{432} - \frac{20651}{5184}d + \frac{241}{192}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} 24 \text{ } \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\sigma} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_1, \partial_{\rho\sigma\mu\nu} G_4 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (2, -\frac{2}{3}, 0) \end{array} \right) \\
& + \frac{7}{9}d \left( \begin{array}{c} 12 \text{ } \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbb{1}, \partial_{\rho\sigma} G_2, \partial_{\sigma\nu} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (\frac{1}{4}, \frac{7}{24}, -\frac{73}{576}) \end{array} \right) + \left( -\frac{241}{24} - \frac{241}{96}d \right) \left( \begin{array}{c} 12 \text{ } \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\mu\nu} G_0 | \\ \mathbb{1}, \partial_{\rho\sigma} G_2, \partial_{\rho\sigma} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, \frac{1}{4}, -\frac{5}{288}) \end{array} \right) \\
& + \left( -\frac{6529}{54} - \frac{32081}{5184}d + \frac{241}{64}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} 6 \text{ } \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_1, \partial_{\rho\nu} G_3 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0) \end{array} \right) \\
& + \left( -\frac{16603}{648} + \frac{7573}{10368}d + \frac{499}{1152}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} 6 \text{ } \bar{\mathbf{F}}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\sigma} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_1, \partial_{\rho\sigma} G_3 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-2, \frac{7}{6}, \frac{1}{48}) \end{array} \right) \\
& - \frac{14}{3} \left( \begin{array}{c} 4 \text{ } \bar{\mathbf{F}}_{\mu\nu}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\mu} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_2, \partial_{\rho\nu} G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2)_2 \\ (0, -\frac{1}{3}, \frac{7}{36}) \end{array} \right) + \left( \frac{2749}{216} - \frac{7}{36}d \right) \left( \begin{array}{c} 4 \text{ } \bar{\mathbf{F}}^2 \\ \text{Diagram} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\rho\sigma} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_2, \partial_{\rho\sigma} G_2 \mathbf{F}^2)_2 \\ (0, -\frac{4}{3}, \frac{19}{24}) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{185}{162} \left( \begin{array}{c} 6 \\ \text{Diagram 1} \\ \bar{\mathbf{F}}^2_{\mu\nu} \\ (\mathbb{1}, G_0, G_0 | \\ \mathbb{1}, G_0, \partial_{\mu\nu} G_3 \mathbf{F}^2_{\mu\nu})_2 \\ (0, \frac{1}{2}, -\frac{7}{16}) \end{array} \right) + \left( \frac{763}{32} + \frac{775}{384}d - \frac{241}{384}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} 6 \\ \text{Diagram 2} \\ \bar{\mathbf{F}}^2_{\mu\nu} \\ (\mathbb{1}, G_0, G_0 | \\ \mathbb{1}, \partial_{\mu\nu} G_0, G_3 \mathbf{F}^2_{\mu\nu})_2 \\ (0, 0, \frac{1}{32}) \end{array} \right) \\
& + \left( -\frac{3385}{96} - \frac{2017}{1152}d + \frac{241}{128}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 3} \\ \bar{\mathbf{F}}^2_{\mu\nu} \\ (\mathbb{1}, G_0, \partial_{\mu\nu} G_0 | \\ \mathbb{1}, G_1, G_2 \mathbf{F}^2_{\mu\nu})_2 \\ (0, \frac{1}{6}, -\frac{5}{144}) \end{array} \right) \\
& + \left( \frac{3507715}{5184} - \frac{16281731}{414272}d + \frac{18422737}{27648}d^2 - \frac{11149}{4608}d^3 - \frac{241}{6144}d^4 \right) \left( \begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 4} \\ \bar{\mathbf{F}}^2 \\ (\mathbb{1}, G_0, G_0 | \\ \mathbb{1}, G_0, G_2 \mathbf{F}^2)_2 \\ (0, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) \end{array} \right) \\
& + \left( \frac{1093061}{4608} - \frac{36075}{1024}d - \frac{41537}{9216}d^2 \right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \bar{\mathbf{F}}^2 \\ (\mathbb{1}, G_0, G_0 | \\ \mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}) \end{array} \right) \\
& + \left( -\frac{1180189}{13824} + \frac{242191}{4608}d - \frac{901981}{165888}d^2 + \frac{10009}{27648}d^3 \right) \left( \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \bar{\mathbf{F}}^2 \\ (\mathbb{1}, G_1, G_1 | \\ \mathbb{1}, \mathbb{1}, G_1 \mathbf{F}^2)_2 \\ (-4, 0, 0) \end{array} \right) + O(\epsilon^0)
\end{aligned}$$

$$= \left( -\frac{748}{27\epsilon^2} + \frac{2857}{81\epsilon} \right) \left( \frac{C_2}{16\pi^2} \right)^3 S_{\text{cl}} + O(\epsilon^0)$$

Wie erwartet, findet sich aufgrund der sich gegenseitig weghebenden Tetraeder-Graphen in dem Ergebnis keine Divergenz, die einen  $\zeta(3)$  Term enthält. Auch fehlt, wie schon im Fall der 2-Schleifen-Divergenz, der Pol höchster Ordnung.

### 3.9 Die Renormierungsgruppe

Aus den vorherigen drei Abschnitten erhält man die Renormierung der Kopplungskonstanten  $g$  bis in die dritte Ordnung mit

$$Z_g^{-1} = 1 + \frac{22}{3\epsilon} \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} + \frac{34}{3\epsilon} \left( \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} \right)^2 + \left( \frac{748}{27\epsilon^2} - \frac{2857}{81\epsilon} \right) \left( \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} \right)^3. \quad (3.116)$$

Leitet man die Gleichung (3.47) nach dem Massenparameter  $\mu$  ab, wird man auf

$$\mu \frac{\partial g_0^2}{\partial \mu} = Z_g g \mu^\epsilon \left( \epsilon g + g \mu \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} + 2\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \right) \quad (3.117)$$

geführt. Die linke Seite der Gleichung ergibt Null und der letzte Term in der Klammer wird als  $\beta$ -Funktion definiert. Damit ist

$$\beta = -\epsilon \frac{g}{2} - \mu \frac{g}{2} \frac{\partial \ln Z_g}{\partial \mu} \quad (3.118)$$

und mit der Ersetzung  $\frac{\partial}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g} = \beta \frac{\partial}{\partial g}$  gelangt man zu

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\epsilon \left[ \frac{d}{dg} \ln Z_g g^2 \right]^{-1} \\ &= -\epsilon \frac{g}{2} - \frac{11}{3} g \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} - \frac{34}{3} g \left( \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} \right)^2 - \frac{2857}{54} g \left( \frac{g^2 C_2}{16\pi^2} \right)^3 + O(g^9). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Diese Entwicklung stimmt mit den Ergebnissen aus der Literatur [37, 38, 39] überein. Es sei noch erwähnt, dass das Ergebnis für die  $\beta$ -Funktion unabhängig vom gewählten  $MS$ -Renormierungsschema ist [52].



## Kapitel 4

# Zusammenfassung und Ausblick

Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, lässt sich mittels der kovarianten Hintergrundfeldmethode die  $\beta$ -Funktion der reinen Yang-Mills-Theorie bis in die Ordnung von drei Schleifen im Vergleich zu den bisher verwendeten Methoden auf verhältnismäßig einfache Art und Weise berechnen. So konnte mit Hilfe einiger formaler Manipulationen die gesamte 2-Schleifen-Rechnung auf die Berechnung eines einzigen logarithmisch divergenten Feynman-Graphen und die 3-Schleifen-Rechnung zumindest auf die Berechnung von 24 logarithmisch divergenten Graphen reduziert werden. Da keiner der 24 Graphen der Klasse der Tetraeder-Graphen angehört, lässt sich ohne Berechnung eines einzigen Graphen zeigen, dass das Ergebnis keine Divergenzen mit einem  $\zeta(3)$  Term enthält. Die Ergebnisse stimmen sowohl mit denen unter Zuhilfenahme konventioneller Methoden [37, 38] berechneten, als auch denen unter Verwendung einer nichtkovarianten Hintergrundfeldmethode [39] gewonnenen, überein.

Die wichtigsten Eigenschaften bzw. Vorteile der kovarianten Hintergrundfeldmethode lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Sie enthält genauso viele Propagatoren und Vertizes wie die konventionelle Feldtheorie.
- Der ausschließliche Gebrauch von kovarianten Größen bewirkt, dass, im Gegensatz zur nichtkovarianten Hintergrundfeldmethode (siehe z. B. [11]), die Transversalität zu jedem Zeitpunkt offensichtlich ist und damit die Zahl der Graphen stark reduziert wird.
- Die Berechnung findet in zwei Schritten statt. Zuerst werden die entsprechenden Graphen unter Beibehaltung der exakten Propagatoren generiert. Danach wird die Zahl der Graphen durch Verwendung der Ward-Identität (3.64), künstlichem Hinzufügen von Ur-Graphen mit anschließender partieller Integration, Anwendung der Jacobi-Identität etc. auf unter die Hälfte reduziert. Erst dann wird in einem zweiten Schritt der verbliebene vektorielle Propagator entwickelt.
- Die Einführung der Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld bewirkt, dass dieses nur noch über seine Feldstärke in Erscheinung tritt. Als Folge müssen nach der Entwicklung des vektoriellen Propagators nur noch logarithmisch divergente Graphen berechnet werden.

Besonders der letzte Punkt stellt eine große Erleichterung dar, da nunmehr keine quadratisch divergenten Graphen mehr berechnet werden müssen und die ursprünglichen Graphen in ein Produkt aus zwei getrennten Graphen zerfallen, von denen der eine die Gruppenindizes und der andere die Lorentz-Indizes enthält.

Eine Erweiterung der kovarianten Hintergrundfeldmethode auf skalare und fermionische Felder ist übrigens ohne weiteres möglich (siehe z. B. [42] für den exakten Propagator eines Quark-Feldes) und macht damit die Methode auch für phänomenologische Berechnungen anwendbar.

Die in der Einführung geäußerte Hoffnung, die Endlichkeit der Supergravitation in der Ordnung von drei Schleifen nachzuweisen bzw. auszuschließen, soll anhand von Analogien zur Yang-Mills-Theorie kurz konkretisiert werden. Die Einstein'sche Theorie der Schwerkraft ist in der Ordnung von einer Schleife noch endlich [82], dagegen konnten [32, 33] zeigen, dass dies in zwei Schleifen nicht mehr gilt. Eine mögliche Lösung für dieses Problem stellt die Theorie der Supergravitation [36] dar. Sie ist ebenfalls nicht renormierbar, aber aufgrund ihrer lokalen Supersymmetrie erzeugt sie, sowohl in erster als auch in zweiter Schleifenordnung, eine endliche S-Matrix [83]. Ähnlich wie bei der Einstein'schen Gravitationstheorie erwartet man [84] hier in der Ordnung von drei Schleifen eine Divergenz der S-Matrix der Form

$$\Gamma_{\infty}^{(3)} = \frac{1}{\epsilon} G_N^2 \int C^4 + \dots \quad , \quad (4.1)$$

wobei  $C^4$  für ein Skalar bestehend aus vier Weyl-Tensoren bzw.  $G_N$  für die Newton'sche Gravitationskonstante steht und die Punkte alle fermionischen Anteile enthalten. Die tatsächliche Existenz bzw. Nichtexistenz einer solchen Divergenz kann nur durch eine explizite Berechnung gezeigt werden, die bis jetzt aufgrund der Komplexität der anfallenden Rechnungen nicht durchgeführt wurde. Entgegen der allgemeinen Erwartung konnte in jüngerer Zeit in [85, 86] mit stringtheoretischen Methoden gezeigt werden, dass für die maximal erweiterte Supergravitationstheorie ( $N = 8$ ) die S-Matrix höchstwahrscheinlich in der Ordnung von drei Schleifen endlich ist und vermutlich erst in der Ordnung von fünf Schleifen divergiert! Dies auf der einen Seite ermutigende Ergebnis ließe sich mit einer expliziten Rechnung in drei Schleifen klären und zwar für alle Fälle von  $N = 1$  bis  $N = 8$ , andererseits scheint, mindestens für  $N = 8$ , das Problem sich in die schwindelerregende Ordnung von fünf Schleifen zu verschieben. Einige Gedanken und Ergebnisse, wie man dieses Resultat unter Verwendung von quantenfeldtheoretischen Methoden bestätigen könnte, finden sich in [87].

Zum Schluss soll skizzenhaft gezeigt werden, wie eine solche Rechnung in drei Schleifen für die Supergravitation bewerkstelligt werden könnte. Dabei sollen die Methoden, die im Rahmen der Yang-Mills-Theorie vorgestellt wurden, schrittweise übernommen werden. Ausgehend von der Wirkung der Supergravitation wählt man für die unterschiedlichen Quantenfelder passende hintergrundfeldkovariante Eichungen [88, 89] und als Analogon für die Fock-Schwinger-Eichung normale Koordinaten für die Hintergrundfeldmetrik [90, 91, 92, 93]. Die Wahl der normalen Koordinaten bewirkt, dass die Hintergrundfeldmetrik nur über ihre Feldstärke, d. h. den Weyl-Tensor, in Erscheinung tritt. Darüberhinaus ist es erlaubt, genau wie in der Yang-Mills-Theorie, von einer kovariantkonstanten Hintergrundfeldstärke, d. h. einem lokal symmetrischen Raum  $\nabla C = 0$ , aus zu gehen.

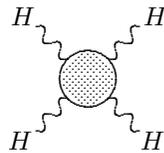


Bild A

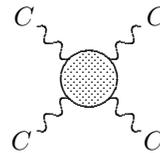


Bild B

Abbildung 4.1: Vergleich zwischen der üblichen (A) und der kovarianten (B) Hintergrundfeldmethode in der Gravitation.

Im Rahmen des üblichen nichtkovarianten Ansatzes [82] wird die Hintergrundfeldmetrik linearisiert, d. h.  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}$ . Schließlich muss man dann in der Ordnung von drei Schleifen sich mit bis zu achtfach divergente Feynman-Graphen auseinandersetzen (siehe Bild A in Abbildung 4.1)! Benutzt man hingegen die kovariante Hintergrundfeldmethode, wird man auf logarithmisch divergente Feynman-Graphen mit vier Hintergrundfeldstärken geführt (siehe Bild B in Abbildung 4.1). Die in diesen Feynman-Graphen auftretenden Quantenfeldpropagatoren haben unter Weglassung

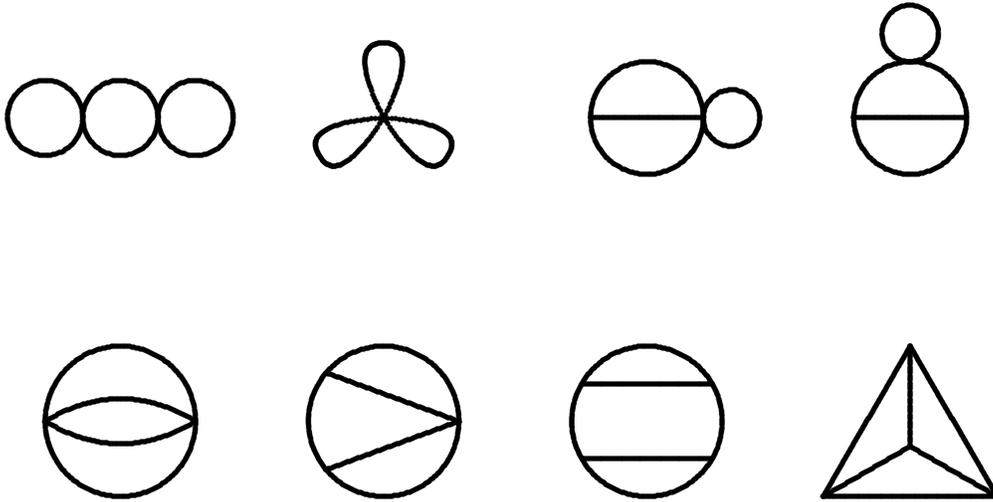


Abbildung 4.2: Die 3-Schleifen-Graphen der Supergravitation (die dicken Linien stehen für alle auftretenden Felder insofern die entsprechenden Vertizes existieren).

sämtlicher Indizes die Gestalt

$$G(x, y) = \sum_{k=0}^4 C^k G_k(x - y) \quad , \quad (4.2)$$

wobei im Gegensatz zur Yang-Mills-Theorie der Propagator bis in vierter Ordnung in der Feldstärke entwickelt werden muss, da sonst nicht alle Divergenzen berücksichtigt würden. Im Unterschied zur Yang-Mills-Theorie hat die Supergravitation eine nichtpolynomiale Wirkung, so dass auch die Vertizes die fünf bzw. sechs Quantenfelder enthalten, zu berücksichtigen sind. Die korrespondierenden Feynman-Graphen entsprechen dem dritten bzw. zweiten Diagramm in Abbildung 4.2. Die ersten vier Graphen aus Abbildung 4.2 lassen sich in Graphen mit ein bzw. zwei Schleifen zerlegen und sind daher relativ einfach zu berechnen. Auch in der Supergravitation erfordern die Tetraeder-Graphen den höchsten Rechenaufwand. Es empfiehlt sich daher, eine Eichung zu wählen, bei der insbesondere die Anzahl der 3er-Vertizes möglichst gering gehalten wird. Tatsächlich lässt sich die Anzahl der 3er-Vertizes, die drei Gravitonen enthalten, bis auf zwei reduzieren [33]. Die lokale Supersymmetrie der Theorie gibt Anlass zu der Vermutung, dass sich die Anzahl der 3er-Vertizes, die zwei Gravitinos und ein Graviton enthalten, ebenfalls auf eine ähnliche Größenordnung verringern lässt.

Mit diesen hier kurz angerissenen Verbesserungen, die sich aus der Verwendung der kovarianten Hintergrundfeldmethode ergeben, scheint auch eine 3-Schleifen-Rechnung im Rahmen der Supergravitation schon heute im Bereich des Möglichen zu liegen.



# Anhang A

## Verwendete Methoden und weitere Details

### A.1 Notationen

Die griechischen Buchstaben  $\mu, \nu, \dots$  sind Lorentz-Indizes, die von 0 bis  $d - 1$  laufen, wobei  $d$  für die Dimension des Raumes steht. Die Farbindizes der  $SU(N)$  werden in der fundamentalen Darstellung mit den lateinischen Buchstaben  $i, j, \dots$  und in der adjungierten Darstellung durch die lateinischen Buchstaben  $a, b, \dots$  beschrieben.

Das Punktprodukt ist gemäß der DeWitt'schen Summenkonvention als

$$a \cdot b = \int dx a^i(x) b_i(x) \quad (\text{A.1})$$

definiert, wobei  $i$  für sämtliche Indizes steht, die in  $a$  und  $b$  gemeinsam vorkommen und über die summiert wird. Ebenso wird in dieser Arbeit durchgehend nur  $dx$  statt des  $d^d x$  für Mehrfachintegrale geschrieben, da aus dem Kontext sofort ersichtlich wird, ob es sich um eine mehrdimensionale Betrachtung handelt.

Sind in einem Produkt von Tensoren bzw. in einem Tensor selber einige Indizes in ein Klammernpaar eingeschlossen, so ist der Term in Bezug auf diese Indizes zu symmetrisieren. So gilt z. B.:

$$\begin{aligned} \delta_{(\mu\nu} \partial_{\rho)} &= \delta_{\mu\nu} \partial_{\rho} + \delta_{\nu\mu} \partial_{\rho} + \delta_{\mu\rho} \partial_{\nu} + \delta_{\rho\mu} \partial_{\nu} + \delta_{\nu\rho} \partial_{\mu} + \delta_{\rho\nu} \partial_{\mu} \\ &= 2 \delta_{\mu\nu} \partial_{\rho} + 2 \delta_{\mu\rho} \partial_{\nu} + 2 \delta_{\nu\rho} \partial_{\mu} \end{aligned}$$

Der verallgemeinerte Tensor  $\delta_{\mu_1 \dots \mu_n}$  entspricht für  $n = 2$  dem üblichen  $\delta$ -Tensor, während er für eine größere gerade Anzahl von Indizes in eine aus  $(n - 1)!!$  Termen bestehende Summe transformiert. Jeder Term dieser Summe ist ein Produkt aus  $n/2$   $\delta$ -Tensoren, auf die die Indizes derart verteilt sind, dass jede mögliche Kombination vorkommt. So gilt z. B. für  $n = 4$

$$\delta_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Für eine ungerade Anzahl von Indizes ist der Tensor nicht definiert.

Um eine knappe und übersichtliche Notation zu erreichen, werden die Divergenzen eines  $n$ -Schleifen-Graphen oft durch einen Klammersausdruck dargestellt. Dabei ist die gewählte Notation durch

$$(\dots, a, b, c_1; c_2) = \dots + \frac{a}{\epsilon^3} + \frac{b}{\epsilon^2} + \frac{c_1 + c_2 \zeta(3)}{\epsilon} \quad (\text{A.3})$$

gegeben.

## A.2 Identitäten für $G_i$ und $R_i$

In  $d$  Dimensionen sind die Funktionen  $G_i$  und die zugehörigen von IR-Divergenzen bereinigten Funktionen  $R_i$  durch

$$G_{i-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - i\right)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{i-\frac{d}{2}} \quad \text{für } i > 0$$

$$R_{i-1}(x) = G_{i-1}(x) + \frac{\mu^{-\epsilon}}{8\pi^2\epsilon} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^{i-(d+\epsilon)/2} \quad \text{für } i > d/2$$

definiert und daraus ergeben sich für die Ableitungen die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu G_i(x) &= -\frac{1}{2} x_\mu G_{i-1}(x) \\ \partial_\mu R_i(x) &= -\frac{1}{2} x_\mu R_{i-1}(x) \\ \partial^2 G_i(x) &= -i G_{i-1}(x) \\ \partial^2 R_i(x) &= -i R_{i-1}(x) + \frac{\mu^{-\epsilon}}{16\pi^2} \frac{1}{(i-2)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{i-2} \\ \partial^2 G_0(x) &= -\delta(x). \end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten lassen sich Produkte der  $G_i$ -Funktionen in andere Produkte umwandeln. Einige der am häufigsten verwendeten Umformungen sind

$$G_i \partial_\mu G_j = G_{j-1} \partial_\mu G_{i+1} \quad (\text{A.4})$$

$$G_i \partial_\mu \partial_\nu G_j = (\partial_\mu G_{i+1}) \partial_\nu G_{j-1} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} G_i G_{j-1} \quad (\text{A.5})$$

$$= (\partial_\mu \partial_\nu G_{i+2}) G_{j-2} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (G_i G_{j-1} - G_{i+1} G_{j-2}), \quad (\text{A.6})$$

wobei kein Index einen Wert kleiner als Null annehmen darf. Es gibt auch einige von der Dimension  $d$  abhängige Umformungen. Solche Identitäten, wie z. B.

$$(d-2-2i) G_i(x) \partial_\mu G_j(x) = (d-2-2j) G_j(x) \partial_\mu G_i(x) \quad (\text{A.7})$$

$$\partial_\mu G_0(x) \partial^\mu G_{i+1}(x) = \left(\frac{d}{2} - 1\right) G_0(x) G_i(x), \quad (\text{A.8})$$

sind mit Vorsicht zu genießen, da immer darauf geachtet werden muss, ob  $d$  in einer UV-divergenten Subschleife steht.

Die bis hierhin vorgestellten Umformungen befassen sich mit Propagatoren, die alle den gleichen Anfangs- und ebenso den gleichen Endpunkt besitzen, d. h. sie werden im Ortsraum einfach miteinander multipliziert. Für Propagatoren, die aneinander anschließen, wird die Identität

$$\int dy \frac{1}{(x-y)^{2\alpha}} \frac{1}{(y-z)^{2\beta}} = \pi^{d/2} \frac{\Gamma(d/2 - \alpha) \Gamma(d/2 - \beta) \Gamma(\alpha + \beta - d/2)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(d - \alpha - \beta)} \frac{1}{(x-z)^{2(\alpha+\beta-d/2)}} \quad (\text{A.9})$$

benötigt.

## A.3 Verwendete Gruppentheorie

Eine Lie-Gruppe  $G$  wird *halbeinfach* genannt, wenn sie keine abelschen invarianten Untergruppen enthält. Besitzt sie dagegen überhaupt keine invarianten Untergruppen, wird sie als *einfach* bezeichnet. Eine Lie-Gruppe  $G$  heißt *kompakt*, wenn ihre Parametrisierung aus einer endlichen Zahl von beschränkten Parametrisierungsbereichen besteht.

Ausgehend von einer kompakten einfachen Lie-Gruppe  $G$  mit den Elementen

$$U(x) = e^{\Lambda(x)} \quad \text{mit } \Lambda(x) = t_a \Lambda^a(x),$$

deren antihermitesche Generatoren  $t_a$  mit  $a = 1, \dots, \dim(G)$  der Algebra

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c$$

genügen, lassen sich der Dynkin-Index und der Casimir-Operator über

$$\text{tr}(t_a t_b) = -T(D) \delta_{ab} \tag{A.10}$$

$$t_a t_a = -C_2(D) \mathbf{1} \tag{A.11}$$

definieren. In dieser auch als *fundamental* bezeichneten Darstellung ist  $T(D) = 1/2$  eine übliche Wahl als Normierungsbedingung.

Wählt man speziell die Gruppe  $SU(N)$ , ist ihre Dimension gleich  $N^2 - 1$ . Jede antihermitesche  $N \times N$  Matrix  $A$  lässt sich über

$$A = c_0 \mathbf{1} + c_a t_a \tag{A.12}$$

darstellen. Die oben gewählte Normierung legt dann die Konstanten mit

$$\text{tr}(A \mathbf{1}) = c_0 \text{tr}(\mathbf{1}) + c_a \text{tr}(t_a) \Rightarrow c_0 = \frac{\text{tr}(A)}{N} \tag{A.13}$$

$$\text{tr}(A t_b) = c_0 \text{tr}(t_b) + c_a \text{tr}(t_a t_b) \Rightarrow c_a = -2 \text{tr}(A t_a) \tag{A.14}$$

fest. Setzt man diese Ergebnisse in (A.12) ein, so erhält man

$$A_{ij} = \frac{1}{N} A_{kl} \delta_{kl} \delta_{ij} - 2(t_a)_{kl} A_{kl} (t_a)_{ij} \tag{A.15}$$

$$\Rightarrow (t_a)_{ij} (t_a)_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk} \right). \tag{A.16}$$

Damit ergibt sich sofort

$$t_a t_a = \frac{1 - N^2}{2N} \mathbf{1} \tag{A.17}$$

$$t_a t_b t_a = \frac{1}{2N} t_b \quad . \tag{A.18}$$

Damit ist der Casimir-Operator in der fundamentalen Darstellung durch  $(1 - N^2)/(2N)$  multipliziert mit der Einheitsmatrix gegeben (1. Schur'sches Lemma). Man beachte, dass in  $\delta_{ab}$  die Indizes bis  $N^2 - 1$  und in  $\delta_{ij}$  die Indizes bis  $N$  laufen.

In der adjungierten Darstellung

$$(T_a)_{bc} = -f_{abc} \tag{A.19}$$

erhält man den Casimir-Operator

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_a T_b) &= -f_{acd} f_{bcd} \\ &= 2 \text{tr}([t_a, t_c], [t_b, t_c]) \\ &= 2 \text{tr}(2t_a t_c t_b t_c - t_a t_b t_c t_c - t_b t_a t_c t_c) \\ &= 2N \text{tr}(t_a t_b) = -N \delta_{ab} \end{aligned} \tag{A.20}$$

für die  $SU(N)$ -Gruppen.

In dieser Arbeit werden sämtliche adjungierten Größen durch Fettdruck gekennzeichnet, und der Casimir-Operator bleibt unbestimmt. So ist z. B. die adjungierte Feldstärke durch

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mu\nu} &:= F_{\mu\nu}^a (T^a)^{bc} = -F_{\mu\nu}^a f^{abc} \\ \mathbf{F}^2 &:= F_{\mu\nu}^c (T^c)^{ai} F_{\nu\mu}^d (T^d)^{ib} = F_{\mu\nu}^c f^{cai} F_{\nu\mu}^d f^{dib} \\ \text{tr}(\mathbf{F}^2) &= C_2(F_{\mu\nu}^a)^2 \end{aligned}$$

gegeben. Dabei steht  $\text{tr}$  für die Spur über die Gruppenindizes.

Strukturkonstanten	Adjungierte Darstellung	Graphisch
$f_{abc}$	$-(T_a)_{bc}$	
$f_{iaj}f_{jbi} = -C_2\delta_{ab}$	$\text{tr}(T_a T_b) = -C_2\delta_{ab}$	
$f_{abi}f_{cdi} = f_{bci}f_{dai} - f_{bdi}f_{cai}$	$f_{abi}(T_i)_{dc} = [T_a, T_b]_{dc}$ $= (T_a)_{di}(T_b)_{ic} - (T_b)_{di}(T_a)_{ic}$	
$f_{iaj}f_{jbk}f_{kci} = -\frac{1}{2}C_2f_{abc}$	$\text{tr}(T_a T_b T_c) = T_i T_b T_i$ $= -\frac{1}{2}C_2(T_b)_{ac}$	

Tabelle A.1: Identitäten der Strukturkonstanten

Es erweist sich als sehr effektiv, für Produkte adjungierter Größen eine graphische Darstellung zu etablieren. Mit der Definition

$$\delta_{ab} = a \text{-----} b; \quad \delta_{aa} = \dim(G)$$

ist eine solche in Tabelle A.1 aufgeführt.

## A.4 Beweis der Ward-Identität

Der vektorielle und der skalare Wärmeleitungskern der Yang-Mills-Theorie sind in der Feynman-Eichung  $\alpha = 1$  über die Identität

$$D^\mu(x)K_{\mu\nu}(x, y, \tau) + K(x, y, \tau)\overleftarrow{D}_\nu(y) = 0 \quad (\text{A.21})$$

miteinander verknüpft.

Gilt zusätzlich die Nebenbedingung (3.50), lässt sich die Wärmeleitungskernidentität (3.61) wie folgt herleiten. Dabei werden die Argumente der Funktionen aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen, sofern die Eindeutigkeit der Ausdrücke gewährleistet ist.

Unter Verwendung der Identitäten (3.54) und (3.55) erhält man

$$\begin{aligned} D_\mu K &= -\frac{1}{2\tau} K (\mathbf{M} + \mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} (x - y)^\nu \\ K \overleftarrow{D}_\mu &= \frac{1}{2\tau} K (\mathbf{M} - \mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} (x - y)^\nu, \end{aligned}$$

und damit

$$D_\mu K + K \overleftarrow{D}_\mu = -K \mathbf{F}_{\mu\nu} (x - y)^\nu. \quad (\text{A.22})$$

Damit ist die kovariante Ableitung des vektoriellen Wärmeleitungskerns durch

$$\begin{aligned}
D^\mu K_{\mu\nu} &= (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} D^\mu K \\
&= (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} \left( -K \overleftarrow{D}^\mu - K \mathbf{F}^\mu_\lambda (x-y)^\lambda \right) \\
&= -K \overleftarrow{D}_\nu - (\exp(2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\mu\nu} K \overleftarrow{D}^\mu - (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} K \mathbf{F}^\mu_\lambda (x-y)^\lambda \\
&= -K \overleftarrow{D}_\nu - K \left( \frac{1}{2\tau} (\exp(2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\mu\nu} (\mathbf{M} - \mathbf{F}\tau)^\mu_\lambda + (\exp 2\mathbf{F}\tau)_{\mu\nu} \mathbf{F}^\mu_\lambda \right) (x-y)^\lambda \\
\text{mit } (\exp(\mathbf{F}))_{\mu\nu} &= (\exp(-\mathbf{F}))_{\nu\mu} \\
&= -K \overleftarrow{D}_\nu - K \left( \frac{1}{2\tau} (\exp(-2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\nu\mu} (\mathbf{M} - \mathbf{F}\tau)^\mu_\lambda + (\exp(-2\mathbf{F}\tau)_{\nu\mu} \mathbf{F}^\mu_\lambda \right) (x-y)^\lambda
\end{aligned}$$

beschrieben. Berücksichtigt man nun, dass auf Grund der Nebenbedingung (3.50) der Kommutator zweier Feldstärken verschwindet, lässt sich der erste Term in der Klammer umschreiben. Mit (3.57) ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\tau} (\exp(-2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\nu\mu} (\mathbf{M} - \mathbf{F}\tau)^\mu_\lambda &= \frac{1}{2\tau} (\exp(-2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\nu\mu} (\mathbf{F}\tau(\cosh \mathbf{F}\tau) - \mathbf{F}\tau)^\mu_\lambda \\
&= -(\exp(-2\mathbf{F}\tau) - \delta)_{\nu\mu} \left( \frac{\exp(-2\mathbf{F}\tau)}{\exp(-2\mathbf{F}\tau) - \delta} \right)^\mu_\sigma \mathbf{F}^\sigma_\lambda \\
&= -(\exp(-2\mathbf{F}\tau))_{\nu\mu} \mathbf{F}^\mu_\lambda
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung bewiesen.

## A.5 Berechnung der 2-Schleifen-Graphen

In diesem Teil des Anhangs sollen die UV-Divergenzen der letzten beiden Graphen aus der letzten Zeile in Abbildung 3.6 explizit vorgerechnet werden. Mit

$$\begin{aligned}
D_\mu \Phi G_0 \overleftarrow{D}_\nu &= -\Phi \partial_\mu \partial_\nu G_0 - \frac{1}{2} \Phi \mathbf{F}_{\mu\nu} G_0 - \Phi \mathbf{F}_{\mu\lambda} \partial^\lambda \partial_\nu G_1 + \Phi \mathbf{F}_{\nu\lambda} \partial^\lambda \partial_\mu G_1 \\
&\quad + \mathbf{F}_{\mu\lambda} \mathbf{F}_{\nu\rho} \partial^\lambda \partial^\rho G_2 - \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 G_1 + O(\mathbf{F}^3) \\
\text{und} \\
\mathbf{F}_{\sigma\tau} D_\mu \Phi G_1 \overleftarrow{D}_\nu &= -\Phi \mathbf{F}_{\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\nu G_1 - \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\nu} G_1 - \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\rho\nu} \partial^\rho \partial_\mu G_2 \\
&\quad + \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\rho\mu} \partial^\rho \partial_\nu G_2 + O(\mathbf{F}^3)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
D_\mu G_{\sigma\tau} \overleftarrow{D}_\nu &= \delta_{\sigma\tau} D_\mu \Phi G_0 \overleftarrow{D}_\nu + 2\mathbf{F}_{\sigma\tau} D_\mu \Phi G_1 \overleftarrow{D}_\nu + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}^2 \partial_\mu \partial_\nu G_2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\lambda\rho}^2 \partial^\lambda \partial^\rho \partial_\mu \partial_\nu G_3 - 2\mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 \partial_\mu \partial_\nu G_2 \\
&= -\Phi \left( \delta_{\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\nu G_0 + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\nu} G_0 + 2\mathbf{F}_{\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\nu G_1 \right. \\
&\quad \left. + 2\delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\lambda} \partial^\lambda \partial_\nu G_1 - 2\delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\nu\lambda} \partial^\lambda \partial_\mu G_1 \right) \\
&\quad - \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\nu} G_1 - \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\rho\nu} \partial^\rho \partial_\mu G_2 + \mathbf{F}_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\rho\mu} \partial^\rho \partial_\nu G_2 \\
&\quad + \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\lambda} \mathbf{F}_{\nu\rho} \partial^\lambda \partial^\rho G_2 - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\mu\nu}^2 G_1 + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}^2 \partial_\mu \partial_\nu G_2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \delta_{\sigma\tau} \mathbf{F}_{\lambda\rho}^2 \partial^\lambda \partial^\rho \partial_\mu \partial_\nu G_3 - 2\mathbf{F}_{\sigma\tau}^2 \partial_\mu \partial_\nu G_2 + O(\mathbf{F}^3). \tag{A.23}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis, die Identität  $(\mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{F}_{\rho\sigma}) = -(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}_{\rho\sigma})/2$  und die bekannten Symmetrien der  $\Theta$ -Graphen führen schließlich auf

$$\begin{aligned}
\left( G^{\mu\nu}, G^{\sigma\tau}, D_\mu G_{\sigma\tau} \overleftarrow{D}_\nu \right) &= -(\Phi \delta^{\mu\nu} G_0, \Phi \delta^{\sigma\tau} G_0, \Phi \delta_{\sigma\tau} \partial_\mu \partial_\nu G_0) \\
&+ 6(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) - (\delta_{\mu\nu} G_0, G_0, \delta^{\mu\nu} G_1 \mathbf{F}^2) \\
&- \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} G_0, \delta^{\mu\nu} G_0, G_1 \mathbf{F}^2) \\
&- 2(\delta_{\mu\nu} G_0, \delta^{\mu\nu} G_1, \partial^\rho \partial^\sigma G_1 \mathbf{F}_{\rho\sigma}^2) - 2(\delta_{\mu\nu} G_0, \delta^{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma G_0, G_2 \mathbf{F}_{\rho\sigma}^2) \\
&- 2(G_0, \delta_{\mu\nu} G_0, \delta^{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma G_2 \mathbf{F}_{\rho\sigma}^2) + O(\mathbf{F}^3), \tag{A.24}
\end{aligned}$$

wobei, wie erwartet, die Graphen, die linear in der Feldstärke sind, aus Gründen der Symmetrie, wegfallen. Der erste Term in (A.24) verschwindet ebenfalls, da nach einer Kontraktion mit  $\delta^{\mu\nu}$  der Term  $\partial_\mu \partial_\nu G_0$  zu einer  $\delta$ -Funktion wird, deren Anfangs- und Endpunkt mit denen einer  $G_0$ -Funktion übereinstimmen.

Die  $\delta$ -Tensoren, die zusammen zu einer Dimension  $d$  kontrahieren, lässt man bei den jeweiligen  $G_i$ -Funktionen stehen, damit bei der Renormierung unter Verwendung der  $R^*$ -Methode klar bleibt, ob ein Faktor  $d$  sich vollständig in einem Subgraphen befindet und damit das in  $d$  enthaltene  $\epsilon$  gleich Null gesetzt wird oder nicht. In vielen Fällen lassen sich die jeweiligen  $d$ -Faktoren über die Identität

$$d G_i = (2 + 2i - x_\mu \partial^\mu) G_i \tag{A.25}$$

beseitigen. Für den zweiten Graphen aus (A.24) bedeutet dies z. B.

$$\begin{aligned}
(\delta_{\mu\nu} G_0, G_0, \delta^{\mu\nu} G_1 \mathbf{F}^2) &= 4(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + 2(\partial_\mu G_1, G_0, \partial^\mu G_1 \mathbf{F}^2) \\
&= 6(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) - (\mathbf{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2), \tag{A.26}
\end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen durch die Gleichung

$$\partial_1 \cdot \partial_2 = \frac{1}{2} \partial_3^2 - \frac{1}{2} \partial_1^2 - \frac{1}{2} \partial_2^2 \tag{A.27}$$

gegeben ist. Die Zahlen im Index der partiellen Ableitungen geben an, auf welchen Propagator im 3er-Vertex die jeweilige Ableitung wirkt. Im Impulsraum ist das Analogon bekannt als

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} p_3^2 - \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{2} p_2^2. \tag{A.28}$$

Unter Verwendung der Identitäten (A.4) und (A.6) gelangt man schließlich für den zweiten Graphen aus der letzten Zeile in Abbildung 3.6 auf das Ergebnis

$$\begin{aligned}
\left( G^{\mu\nu}, G^{\sigma\tau}, D_\mu G_{\sigma\tau} \overleftarrow{D}_\nu \right) &= \frac{1}{2} (\mathbf{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) + 3(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) \\
&- 4(G_0, G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) - 2(G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_0, G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) \\
&+ O(\mathbf{F}^3), \tag{A.29}
\end{aligned}$$

und für den dritten Graphen erhält man

$$\begin{aligned}
\left( G^{\mu\nu}, G_{\rho\nu} \overleftarrow{D}^\sigma, D^\rho G_{\mu\sigma} \right) &= -\frac{1}{2} (G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + (G_0, G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) \\
&+ 2(G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_0, G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) + O(\mathbf{F}^3). \tag{A.30}
\end{aligned}$$

Nun gilt es, die letzten beiden Graphen zu eliminieren, die Ableitungen enthalten, welche nicht miteinander kontrahieren. Zu diesem Zweck geht man von zwei keine Subdivergenzen enthaltenden Graphen aus. Zum einen ist dies der Graph

$$\begin{aligned}
(2) \quad \text{Diagram} & (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) = \frac{1}{4} \text{Diagram} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) + (2) \text{Diagram} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) \\
(\partial_\rho G_1, \partial_\sigma G_1, \partial^\rho \partial^\sigma \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) &= \frac{1}{4} (\mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) + (G_0, G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2), \quad (\text{A.31})
\end{aligned}$$

der zur besseren Veranschaulichung zusätzlich in graphischer Notation aufgeführt wird. Wie man sieht, lässt sich dieser Graph durch wiederholte Anwendung der Identität (A.27) in zwei der aus den Gleichungen (A.29) und (A.30) bekannten Graphen zerlegen. Aus der Eigenschaft, dass dieser Graph keine Subdivergenzen enthält, folgt, dass er höchstens einen einfachen Pol in  $\epsilon$  besitzt. Man kann daher, sofern nur die Divergenzen des Graphen von Interesse sind, die Identität

$$F_{\mu\nu}^2 = \frac{\delta_{\mu\nu}}{d} F^2 \quad (\text{A.32})$$

verwenden und  $d = 4$  setzen. Es gilt also auch

$$\begin{aligned}
(2) \quad \text{Diagram} & (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) = -\frac{1}{2} (2) \text{Diagram} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \\
&= \frac{1}{8} \text{Diagram} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) - \frac{1}{4} \text{Diagram} (\mathbb{1}, \mathbb{1}, \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \\
&\text{bzw.} \\
(\partial_\rho G_1, \partial_\sigma G_1, \partial^\rho \partial^\sigma \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) &= -\frac{1}{2} (\partial_\rho G_1, \partial_\sigma G_1, \partial^\rho \partial^\sigma G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \\
&= \frac{1}{8} (\mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) - \frac{1}{4} (G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0), \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

so dass man schließlich durch Vergleich der rechten Seiten von (A.31) und (A.33) auf die Identität

$$(G_0, G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) = -\frac{1}{8} (\mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) - \frac{1}{4} (G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \quad (\text{A.34})$$

geführt wird. Analog lässt sich mit Hilfe des keine Subdivergenzen enthaltenden Graphen

$$(4) \quad \text{Diagram} = (\partial_\rho G_1, \partial^\rho \partial_\sigma \partial_\tau G_2, \partial^\sigma \partial^\tau \partial^\mu \partial^\nu G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) \quad (\text{A.35})$$

die Identität

$$(G_0, \partial^\mu \partial^\nu G_0, G_2 \mathbf{F}_{\mu\nu}^2) = -\frac{1}{12} (\mathbb{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) + \frac{1}{6} (G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \quad (\text{A.36})$$

herleiten. Berücksichtigt man nun noch, dass

$$(G_{\mu\nu}, \mathbf{1}, G_{\mu\nu}) = 2(\mathbf{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0) \quad (\text{A.37})$$

ist, erhält man das in Abschnitt 3.7 vorgestellte Ergebnis für die Divergenz der Yang-Mills-Theorie in der Ordnung von zwei Schleifen:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_2^{\text{div}} &= (G_{\mu\nu}, \mathbf{1}, G_{\mu\nu}) - (G_{\mu\nu}, G_{\rho\sigma}, D_\mu G_{\rho\sigma} \overleftarrow{D}_\nu) - 2(G_{\mu\nu}, G_{\rho\nu} \overleftarrow{D}_\sigma, D_\rho G_{\mu\sigma}) \\ &= \frac{17}{12}(\mathbf{1}, G_1, G_1 \mathbf{F}^2) - \frac{17}{6}(G_0, G_0, G_1 \mathbf{F}^2) + O(\epsilon^0). \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Setzt man anschließend für die Graphen die im Anhang A.8 gegebenen Werte ein, wird das aus der Literatur bekannte Ergebnis verifiziert.

## A.6 Die $R^*$ -Methode

Die  $R^*$ -Methode stellt eine Verallgemeinerung der von Bogoliubov und Parasiuk in [94] vorgestellten  $R$ -Operation dar. Mit ihrer Hilfe lassen sich zusätzlich zu den UV- auch die IR-Divergenzen aus den Feynman-Graphen eliminieren. Der Formalismus wurde 1982 von K. G. Chetyrkin und F. V. Tkachev in [49] vorgestellt und in korrigierter Fassung 1985 von V. A. Smirnov und K. G. Chetyrkin veröffentlicht [50].

Üblicherweise werden zur Berechnung der UV-Divergenz in einer gegebenen Schleifenordnung die UV-Divergenzen niedrigerer Ordnung mit Hilfe von Countertermen abgezogen. Die  $R^*$ -Methode jedoch erlaubt es, jeden einzelnen Feynman-Graphen direkt zu renormieren, so dass die Einführung von Countertermen entfällt. Dabei werden zu jedem Feynman-Graphen einige Korrekturterme derart addiert, dass man für denselben im Rahmen der dimensional Regularisierung ein vom Renormierungsschema unabhängiges Ergebnis erhält.

Wie im weiteren Verlauf gezeigt wird, stellt diese Tatsache eine nicht zu unterschätzende Möglichkeit dar, die Ergebnisse für die UV-Divergenz auf ihre Richtigkeit hin zu überprüfen. Addiert man die Korrekturterme aller Feynman-Graphen, so entspricht dieser Beitrag natürlich dem, den man im üblichen Fall erhält, wenn man die Divergenzen aller Feynman-Diagramme summiert, die Counterterme enthalten. Da einige dieser Subgraphen jeweils in verschiedenen Feynman-Graphen vorkommen und die Anzahl der Korrekturgraphen mit der Schleifenzahl stark zunimmt, erhöht sich bei der Verwendung der  $R^*$ -Methode leider der Rechenaufwand. Hinzu kommt, dass einige der Manipulationen, die bei nicht renormierten Graphen erlaubt sind, im Falle der renormierten Graphen nicht verwendet werden dürfen.

Der Algorithmus der die Korrekturterme der  $R^*$ -Methode generiert, lässt sich einigermaßen einfach auf dem Computer implementieren, wird allerdings erst für Graphen mit mehr als drei Schleifen oder sehr vielen Ableitungen wirklich benötigt.

Es ist daher von Fall zu Fall zu entscheiden, ob man Counterterme einführt oder, wie im vorliegenden Fall, die  $R^*$ -Methode benutzt, den höheren Rechenaufwand in Kauf nimmt und dafür schon auf dem Niveau des einzelnen Graphen etwaige Fehler in der Renormierungsrechnung findet.

Im nächsten Abschnitt wird die  $R^*$ -Methode für masselose Feynman-Graphen beschrieben und anhand von einigen Beispielen illustriert.

In Anlehnung an die in [50] verwendete Notation werden im folgenden die Größen definiert, die einen Feynman-Graphen und seine Subgraphen charakterisieren. Ausgehend von einem 1PI Feynman-Graphen  $\Gamma$  stellt  $L(\Gamma)$  die Zahl der Linien und  $V(\Gamma)$  die Zahl der Vertizes des Graphen dar. Für einen Subgraphen  $\gamma$ , der aus einer Untermenge von Linien und den daran gekoppelten Vertizes besteht, wird mit  $c(\gamma)$  noch zusätzlich die Zahl der verbundenen Komponenten bestimmt. Mit diesen Definitionen lässt sich die  $R$ -Operation formulieren und damit die

UV-Divergenzen ermitteln. Eventuell vorhandene IR-Divergenzen werden meistens umgangen, indem einigen geschickt ausgesuchten masselosen Propagatoren eine Masse  $m$  zugewiesen und das Ergebnis nach der Integration im Limes  $m \rightarrow 0$  betrachtet wird ([]).

Diese Methode versagt leider zunehmend bei höheren Schleifenzahlen. Mit der  $R^*$ -Operation dagegen lassen sich systematisch alle UV- und IR-Divergenzen niedrigerer Schleifenordnungen beseitigen. Die Raumzeitstruktur der Feynman-Graphen legt nahe, dass die UV- und IR-Divergenzen über eine duale Operation in Verbindung stehen [95].

Zur Formulierung der  $R^*$ -Operation werden zwei weitere Arten von Subgraphen eingeführt. Unter dem Subgraphen

$$\bar{\gamma} = \Gamma \setminus \gamma \quad (\text{A.39})$$

versteht man den Graphen, den man erhält, wenn aus  $\Gamma$  sämtliche Linien entfernt werden, die zu  $\gamma$  gehören. Es werden dagegen keine Vertizes entfernt, d. h. es gilt  $V(\Gamma \setminus \gamma) = V(\Gamma)$ . Den zweiten Subgraphen

$$\tilde{\gamma}_c = \Gamma / \gamma, \quad (\text{A.40})$$

auch reduzierter Subgraph genannt, erhält man, indem man jede im Subgraphen  $\gamma$  vorkommende verbundene Komponente im Graphen  $\Gamma$  zu einem Vertex zusammenzieht. Von besonderem Interesse ist, wie sich zeigen wird, der Subgraph  $\tilde{\gamma} = \Gamma / \tilde{\gamma}$ . Es bleibt zu erwähnen, dass ein Schnitt eines Graphen durch eine Menge von Linien gegeben ist, die, wenn man sie aus dem Graphen entfernt, einen unverbundenen Graphen zurücklassen. Ein minimaler Schnitt wird Kozyklus genannt.

Aus diesen Definitionen lassen sich die folgenden, zu den aus der üblichen UV-Renormierung bekannten, dualen Kenngrößen für einen Feynman-Graphen  $\Gamma$  ableiten. An die Stelle der Forderung, dass der Subgraph  $\gamma$  die Eigenschaft, 1PI zu sein, aufweisen muss, tritt im Rahmen der IR-Divergenzen die Bedingung, dass der dem Subgraphen  $\gamma$  zugehörige Graph  $\tilde{\gamma}$  Ein-Vertex-irreduzibel bzw. 1VI (*one vertex irreducible*) ist, d. h.  $\tilde{\gamma}$  zerfällt nach der Entfernung eines beliebigen Vertex nicht in zwei oder mehr disjunkte Teile.

Die Zahl der in einem Subgraphen  $\gamma$  vorhandenen Schleifen ist durch

$$R(\gamma) = L(\gamma) - V(\gamma) + c(\gamma) \quad (\text{A.41})$$

gegeben und das infrarote Analogon durch die Zahl der unabhängigen Kozyklen

$$\mathcal{M}^\Gamma(\gamma) = L(\gamma) - R(\Gamma) + R(\bar{\gamma}), \quad (\text{A.42})$$

die im Subgraphen  $\gamma$  enthalten sind.

Der Grad für die UV-Divergenz ist durch

$$\omega(\gamma) = 4R(\gamma) - 2L(\gamma) + \sum_i a_i \quad (\text{A.43})$$

gegeben, während der Grad der IR-Divergenz sich aus

$$\tilde{\omega}(\gamma) = 4\mathcal{M}^\Gamma(\gamma) - 2L(\gamma) - \sum_i a_i \quad (\text{A.44})$$

gewinnen lässt. Die Summe der  $a_i$  entspricht der Zahl der im Subgraphen  $\gamma$  vorhandenen Ableitungen.

Als erste Konsequenz dieser Ausführungen weisen für  $n > d/2$  sämtliche  $G_n$ -Funktionen IR-Divergenzen auf. Dies sieht man leicht, wenn man einen Graphen  $\Gamma$  wie in Abbildung A.1 in einen Subgraphen  $\gamma = G_n$  und einen Restgraphen  $\bar{\gamma} = \Gamma_0$  zerlegt. Eingesetzt in (A.42) ist damit die Zahl der Kozyklen  $\mathcal{M}^\Gamma(G_n)$  durch  $n$  und damit  $\tilde{\omega}(G_n)$  durch  $2n$  gegeben.

Zur Vermeidung dieser IR-Divergenzen müssen im Rahmen der  $R^*$ -Methode sämtliche  $G_n$ -Funktionen in einem gegebenen Feynman-Graphen durch die in Anhang A.2 definierten  $R_n$ -Funktionen ersetzt werden.

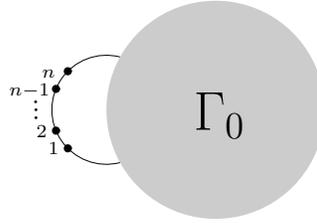
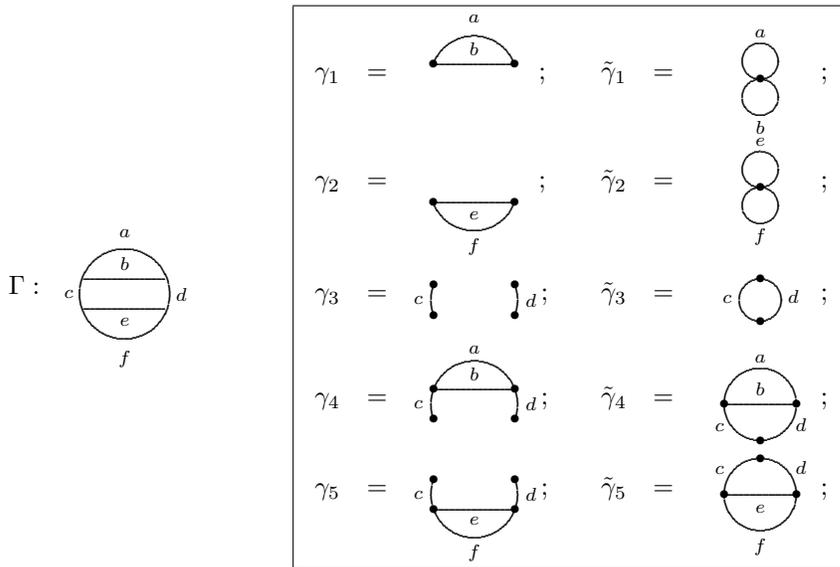
Abbildung A.1: Zerlegung des Graphen  $\Gamma$  in  $G_n$  und den Restgraphen  $\Gamma_0$ 

Tabelle A.2: Subgraphen des Ball-Graphen

Weitere wesentliche Aspekte der  $R^*$ -Methode sollen im folgenden beispielhaft anhand des Ball-Graphen  $\Gamma$  aus der  $A^4$ -Theorie erklärt werden.

Wie in Tabelle A.2 gezeigt wird, enthält der Ball-Graph  $\Gamma$  fünf Subgraphen. Die ersten beiden Graphen sind UV-divergent und die übrigen drei Graphen sind IR-divergent und müssen daher im Sinne der  $R^*$ -Methode mit berücksichtigt werden. Über die Zahl der Schleifen bzw. die Zahl der Kozyklen lässt sich der Grad der Divergenz für die einzelnen Subgraphen bestimmen. Die entsprechenden Werte finden sich in der Tabelle A.3.

Je nachdem in welchen Vertizes die Hintergrundfelder sich befinden, müssen jeweils andere Subgraphen berücksichtigt werden. Dabei genügt es, die Subgraphen zu betrachten, die, wenn sie aus dem Graphen  $\Gamma$  entfernt werden, einen verbundenen Restgraphen zurücklassen, der die Hintergrundfelder enthält. Für logarithmisch divergente Graphen, wie z. B. den Ball-Graphen, genügt es, zwei beliebige Vertizes mit Hintergrundfeldern, im folgenden durch dicke Striche gekennzeichnet, zu versehen.

$\gamma_1$	$\mathcal{R} = 1$	–	$w = 0$	–
$\gamma_2$	$\mathcal{R} = 1$	–	$w = 0$	–
$\gamma_3$	–	$\mathcal{M} = 1$	–	$\tilde{w} = 0$
$\gamma_4$	–	$\mathcal{M} = 2$	–	$\tilde{w} = 0$
$\gamma_5$	–	$\mathcal{M} = 2$	–	$\tilde{w} = 0$

Tabelle A.3: Grad der Divergenzen der Subgraphen

Für den Fall, dass die Hintergrundfelder in den beiden oberen Vertices ansetzen, erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}} \left[ \text{Diagram} \right] &= \text{Diagram} - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \text{Diagram} - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \text{Diagram} + \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \text{Diagram} \\
&\quad - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_3] \text{Diagram} - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_4] \text{Diagram} + \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_3] \text{Diagram} \\
&\quad + \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_3] \text{Diagram} + \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_4] - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\tilde{\gamma}_3] \\
&= f_R^3 \left( -\frac{4}{3\epsilon^3} - \frac{10-6\gamma}{3\epsilon^2} - \frac{92-60\gamma+18\gamma^2-\pi^2}{12\epsilon} + \dots \right) - 0 \\
&\quad - f_R^2 \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3-2\gamma}{\epsilon} - \frac{54-36\gamma+12\gamma^2-\pi^2}{12} + \dots \right) + 0 - 0 \\
&\quad - f_R \left( -\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon} + (2-\gamma) - \frac{48-24\gamma+6\gamma^2-\pi^2}{24} \epsilon + \dots \right) + 0 \\
&\quad + f_R \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( -\frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon} + (2-\gamma) - \frac{48-24\gamma+6\gamma^2-\pi^2}{24} \epsilon + \dots \right) \\
&\quad + \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( -\frac{2}{\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \right) - \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( -\frac{2}{\epsilon} \right) \\
&= \frac{8}{3\epsilon^3} - \frac{4}{3\epsilon^2} - \frac{2}{3\epsilon} + \dots,
\end{aligned}$$

wobei  $\overline{\mathcal{R}}$  dem lokalen divergenten sowie endlichen Anteil und  $\mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}$  nur dem lokalen divergenten Anteil des Graphen entspricht. Wie man aus dem Beispiel ersehen kann, fallen die Graphen weg, bei denen nach der Entfernung der Subgraphen der Restgraph nicht mehr 1PI ist oder die Hintergrundfelder gemeinsam in einem Vertex zu liegen kommen. Der Faktor  $f_R$  ist durch ein Polynom in  $\epsilon$  gegeben, dessen höchste Potenz gleich  $R[\Gamma] - 1$  ist, d. h. im Falle des Ball-Graphen ist

$$f_R = 1 + c_1\epsilon + c_2\epsilon^2,$$

wobei die Werte der Konstanten  $c_n$  durch das gewählte Renormierungsschema vorgegeben sind. Der Faktor  $f_R$  wird mit den einzelnen Summanden multipliziert, wobei die Potenz von  $f_R$  der Schleifenzahl des Restgraphen entspricht. Wie schon am Anfang der Arbeit erwähnt, stellt der Umstand, dass das Endergebnis unabhängig vom Renormierungsschema und damit von den Konstanten  $c_n$  ist, einen sehr guten Test für die richtige Renormierung schon auf Basis der einzelnen Graphen dar.

Befinden sich die Hintergrundfelder im Vertex links oben und im Vertex rechts unten, sieht die

Rechnung etwas einfacher aus:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{R}} \left[ \text{Ball-Graph} \right] &= \text{Ball-Graph} - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \text{Ball-Graph} - \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \text{Ball-Graph} + \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_1] \mathcal{K}\overline{\mathcal{R}}[\gamma_2] \text{Ball-Graph} \\
&= f_R^3 \left( \frac{8}{\epsilon^3} + \frac{8-\gamma}{\epsilon^2} + \frac{48-24\gamma+6\gamma^2-\pi^2}{6\epsilon} \right) \\
&\quad - f_R^2 \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{5-2\gamma}{\epsilon} + \frac{114-60\gamma+12\gamma^2-\pi^2}{12} + \dots \right) \\
&\quad - f_R^2 \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{5-2\gamma}{\epsilon} + \frac{114-60\gamma+12\gamma^2-\pi^2}{12} + \dots \right) \\
&\quad + f_R \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon} \right) \left( \frac{2}{\epsilon} + (2-\gamma) - \frac{48-24\gamma+6\gamma^2-\pi^2}{24} \epsilon + \dots \right) \\
&= \frac{8}{3\epsilon^3} - \frac{4}{3\epsilon^2} - \frac{2}{3\epsilon} + \dots
\end{aligned}$$

Unter anderem fällt auf, dass es in diesem Fall keine Subgraphen gibt, die IR-Divergenzen enthalten. Wie man sieht, lohnt es sich also, für logarithmisch divergente Graphen zu prüfen, in welche Vertizes man die beiden Hintergrundfelder verlegt.

Ein weiteres Problem stellen die  $\delta$ -Tensoren aus dem ersten Term in der Entwicklung (3.67) des Vektorpropagators dar. Solange sie mit den Ableitungen bzw. den Feldstärken kontrahieren, ergeben sich keine Konflikte mit der  $R^*$ -Methode. Erst wenn mehrere  $\delta$ -Funktionen zusammen zu einem  $d$  kontrahieren, ist, wie im Anhang A.5 für die Berechnung der 2-Schleifen-Graphen schon erwähnt, Vorsicht angebracht. Je nachdem, ob die zu den  $\delta$ -Tensoren gehörenden Propagatoren zusammen in einem Subgraphen liegen oder nicht, wird  $d$  gleich 4 bzw.  $4-\epsilon$  gesetzt.

Für den Ball-Graphen bedeutet dies z. B., dass

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c} \delta_{\mu\nu} \\ \delta_{\mu\nu} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} \neq \begin{array}{c} \delta_{\mu\nu} \\ \delta_{\sigma\mu} \quad \delta_{\nu\rho} \\ \delta_{\rho\sigma} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} \\
&\left( \frac{32}{3}, -4, -\frac{10}{3} \right) \neq \left( \frac{32}{3}, -8, -\frac{4}{3} \right)
\end{aligned}$$

ist. Mit Hilfe der Identität A.25 lässt sich der linke Ball-Graph in

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{c} \delta_{\mu\nu} \\ \delta_{\mu\nu} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} = 2 \begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} \\
&= 3 \begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Ball-Graph} \\ \text{Ball-Graph} \end{array} \tag{A.45} \\
&\left( \frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3} \right) \quad \left( \frac{4}{3}, -2, \frac{4}{3} \right) \quad (4, -2, 0)
\end{aligned}$$

überführen.

## A.7 Die Translationsmethode

Zur Berechnung von Feynman-Graphen höherer Ordnung müssen je nach Topologie des Graphen neue Methoden entwickelt werden. Besonders bewährt hat sich in diesem Fall der von Chetyrkin und Tkachov in [96] vorgestellte Algorithmus namens *integration by parts*. Dieses Verfahren,

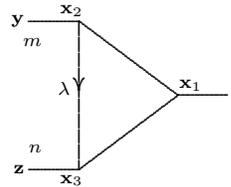
das im folgenden Translationsmethode genannt wird, soll in der Ortsraumdarstellung anhand des Tetraeder-Graphen aus dem zweiten Kapitel vorgestellt werden. Dieser lässt sich mit den herkömmlichen Methoden nicht mehr berechnen, da die Propagatoren in den erwähnten Graphen Dreiecke bilden.

Die Translationsmethode verträgt sich im Allgemeinen nicht mit der  $R^*$ -Methode, d. h. auf renormierte Graphen ist sie nicht anwendbar. Trotzdem ist sie von großer Hilfe, wenn man sie im Rahmen der  $R^*$ -Methode auf den unrenormierten Graphen anwendet. Für besagten Tetraeder-Graphen ist dies allerdings ohne Bedeutung, da der renormierte und der unrenormierte Graph identisch sind.

Ausgehend von der Identität

$$G_0(x_1 - x_2) G_0(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^\lambda G_0(x_2 - x_3) G_m(y - x_2) G_n(z - x_3) * ((x_1 - x_2)_\lambda + (x_2 - x_3)_\lambda + (x_3 - x_1)_\lambda) = 0, \quad (\text{A.46})$$

die sich graphisch wie folgt

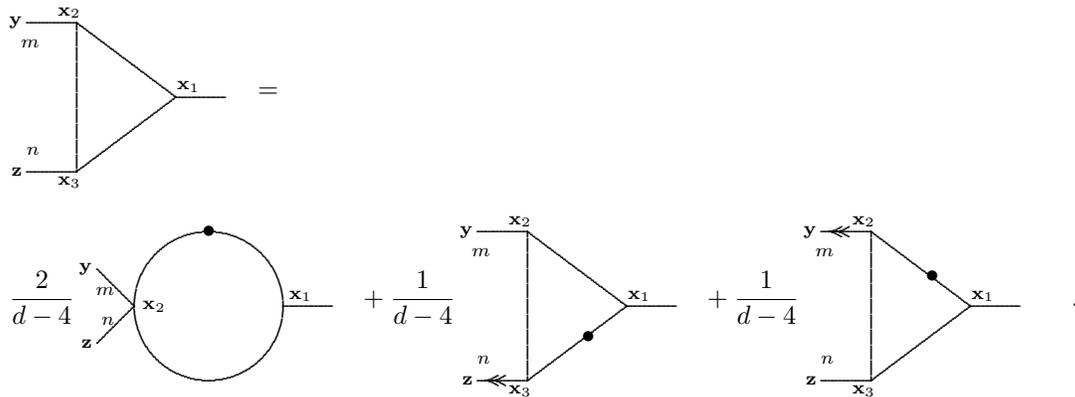


$$((x_1 - x_2)_\lambda + (x_2 - x_3)_\lambda + (x_3 - x_1)_\lambda) = 0 \quad (\text{A.47})$$

darstellen lässt, gelangt man mit Hilfe der Regeln aus Abschnitt A.2 auf

$$G_0(x_1 - x_2) G_0(x_1 - x_3) G_0(x_2 - x_3) G_m(y - x_2) G_n(z - x_3) = \frac{2}{d-4} G_0(x_1 - x_2) G_1(x_1 - x_2) G_m(y - x_2) G_n(z - x_2) + \frac{1}{d-4} G_1(x_1 - x_2) G_0(x_1 - x_3) G_0(x_2 - x_3) \partial^2 G_m(y - x_2) G_n(z - x_3) + \frac{1}{d-4} G_0(x_1 - x_2) G_1(x_1 - x_3) G_0(x_2 - x_3) G_m(y - x_2) \partial^2 G_n(z - x_3)$$

bzw. in graphischer Darstellung auf



Wendet man diese Regel auf den einfachsten Tetraeder-Graphen an, so stellt man fest, dass, wie in Gleichung (A.48) veranschaulicht, die Divergenz des Tetraeder-Graphen proportional zu der Differenz zweier identischer  $V$ -Graphen ist, die sich nur insofern unterscheiden, als dass die Hintergrundfelder der beiden  $V$ -Graphen an unterschiedliche Raumpunkte koppeln. Da beide  $V$ -Graphen

logarithmisch divergent sind, weisen sie die gleichen Divergenzen auf und ihre Reihenentwicklungen in  $\epsilon$  divergieren erst ab den endlichen Anteilen. Dies erklärt, warum der Tetraeder-Graph nur einen einfachen Pol enthält, und bestätigt den Satz, dass Graphen ohne Subdivergenzen keine Pole höherer Ordnung als Eins enthalten.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = \frac{2}{\epsilon} \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) = \frac{4}{\epsilon} \zeta(3) \quad (\text{A.48})$$

Die oben hergeleitete Regel lässt sich verallgemeinern und so lange rekursiv auf den unrenormierten Tetraeder-Graphen anwenden, bis er auf  $V$ -Graphen reduziert ist. Der verallgemeinerte Ansatz lautet

$$\partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\lambda \mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) * \\ ((x_1 - x_2)_\lambda + (x_2 - x_3)_\lambda + (x_3 - x_1)_\lambda) = 0 \quad (\text{A.49})$$

und hat die folgende graphische Darstellung

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \quad \left[ (x_1 - x_2)_\lambda + (x_2 - x_3)_\lambda + (x_3 - x_1)_\lambda \right] = 0 \quad (\text{A.50})$$

Damit erhält man bei gleicher Vorgehensweise wie auf der vorherigen Seite die Identität

$$\begin{aligned} & \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) = \\ & \left( -i_4 \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3+1}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4-1}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) \right. \\ & - i_5 \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2+1}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5-1}(z - x_3) \\ & + i_1 \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3+1}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1-1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) \\ & + i_1 \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_m} G_{i_2+1}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1-1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) \\ & + \sum_{j=1}^m \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) \\ & + \sum_{j=1}^k \partial_{x_2}^{\nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_m} G_{i_2}(x_1 - x_2) \partial_{x_3}^{\rho_1 \dots \rho_k} G_{i_3}(x_1 - x_3) \partial_{x_2}^{\mu_1 \dots \mu_n} G_{i_1}(x_2 - x_3) G_{i_4}(y - x_2) G_{i_5}(z - x_3) \\ & \left. \right) / (d + n - 4 - 2i_1 - i_2 - i_3), \quad (\text{A.51}) \end{aligned}$$

die graphisch etwas anschaulicher durch

$$= \frac{1}{d + n - 4 - 2i_1 - i_2 - i_3}$$

$$+ \sum_{j=1}^m \dots - \sum_{j=1}^k \dots \quad (A.52)$$

gegeben ist.

## A.8 Die Divergenzen einiger ausgewählter Graphen

In den folgenden Abschnitten werden die Divergenzen einiger Graphen aufgelistet, die nicht über partielle Integration ineinander überführt werden können. Es werden nicht alle diese Ergebnisse zur Ermittlung der  $\beta$ -Funktionen der  $A^4$ -Theorie bzw. reinen Yang-Mills-Theorie bis in dritter Ordnung benötigt. Trotzdem wurden sie zu Kontrollzwecken mit dem Programm `CalcGraphUV.nb`, das im Anhang B.3 in einer gekürzten Fassung beschrieben und auf der beiliegenden CD enthalten ist, berechnet und sollen daher an dieser Stelle aufgeführt werden.

### A.8.1 1-Schleifen-Graphen

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \frac{2}{\epsilon} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \frac{2}{3\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{6\epsilon} \delta_{\mu\nu} \partial^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \frac{1}{2\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho - \frac{1}{24\epsilon} \delta_{(\mu\nu} \partial_\rho) \partial^2 \end{array} & & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \frac{2}{5\epsilon} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\sigma - \frac{1}{80\epsilon} \delta_{(\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma) \partial^2 \\ + \frac{1}{120\epsilon} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^2)^2 \end{array} \\
 \end{array} \tag{A.53}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x'' \\ \text{---} \triangle \text{---} \\ x \quad \mu \quad \nu \quad x' \\ -\frac{1}{2\epsilon} \delta_{\mu\nu} \end{array} & \begin{array}{c} x'' \\ \text{---} \triangle \text{---} \\ x \quad \mu \quad \nu \quad \rho \quad x' \\ \frac{1}{12\epsilon} (\delta_{(\mu\nu} \partial_\rho) - \delta_{(\mu\nu} \partial'_\rho)) \end{array} & \begin{array}{c} x'' \\ \text{---} \triangle \text{---} \\ x \quad \mu \quad \nu \quad \rho \quad \lambda \quad x' \\ +\frac{1}{24\epsilon} \delta_{\mu\nu\rho\lambda} (\partial^2 + \partial^\tau \partial'_\tau + \partial'^2) \\ + \frac{1}{48\epsilon} (\delta_{(\mu\nu} \partial_\rho \partial'_\lambda) - \delta_{(\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda) - \delta_{(\mu\nu} \partial'_\rho \partial'_\lambda)) \end{array} \\
 \end{array} \tag{A.54}$$

### A.8.2 2-Schleifen-Graphen

Im folgenden sind einige 2-Schleifen-Graphen mit ihren Divergenzen aufgeführt. Auch wenn nur der zweite Graph aus der zweiten Zeile in (A.55) explizit zur Berechnung der 2-Schleifen-Divergenz benötigt wird, werden die Divergenzen der anderen Graphen zur Ermittlung der Divergenzen der

3-Schleifen-Graphen benötigt, die diese als Subgraphen enthalten.

$$\begin{aligned}
 & \left( 0, \frac{1}{2} \right) \partial^2 \quad (-4, 0) \quad (-2, 1) \\
 & \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{8} \right) \delta_{\mu\nu} \quad \left( 0, -\frac{1}{4} \right) \delta_{\mu\nu} \quad \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{16} \right) \delta_{\mu\nu} \quad \left( -\frac{1}{4}, \frac{7}{48} \right) \delta_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

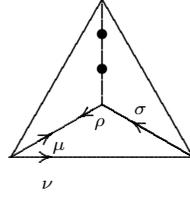
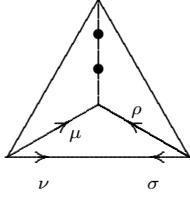
Mit Hilfe der Translationsinvarianz lässt sich zeigen, dass eine weitere Beziehung gilt, nämlich

$$\text{Graph} - 2 \times \text{Graph} = 0 \tag{A.56}$$

### A.8.3 3-Schleifen-Graphen

Da sich, die Tetraeder-Graphen ausgenommen, die Divergenzen der 3-Schleifen-Graphen der reinen Yang-Mills-Theorie mit etwas Aufwand berechnen lassen, sollen in diesem Abschnitt nur die Ergebnisse für einige Tetraeder-Graphen aufgeführt werden. Es sei noch einmal betont, dass diese Ergebnisse nur zu Kontrollzwecken hergeleitet wurden und keinen Eingang in die eigentliche Rechnung gefunden haben. Sie mögen lediglich dazu dienen, einigen Lesern die Möglichkeit zu geben, eigene Ergebnisse mit den hier aufgeführten zu vergleichen, da, wie schon erwähnt, die  $R^*$ -Methode schon auf dem Niveau der Graphen Resultate liefert, die unabhängig vom gewählten  $MS$ -Schema sind.

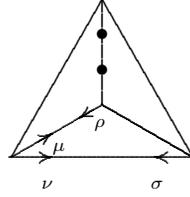
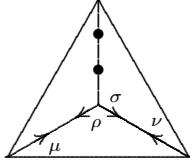
$$\begin{aligned}
 & \left( 0, 0, 0; 1 \right) \delta_{\mu\nu} \quad \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{23}{48} \right) \delta_{\mu\nu} \quad \left( 0, -\frac{1}{3}, \frac{11}{24} \right) \delta_{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.57}$$



$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{12}, & \frac{25}{288}, & -\frac{35}{2304} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} 0, & -\frac{5}{288}, & \frac{19}{768} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

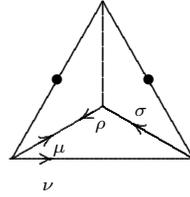
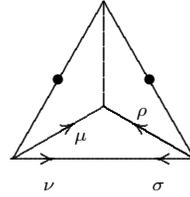
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{72}, & \frac{1}{54}, & -\frac{203}{20736} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{36}, & -\frac{11}{864}, & -\frac{419}{20736} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

(A.58)



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{36}, & -\frac{41}{864}, & \frac{403}{20736}; & -\frac{1}{36} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}, & \frac{85}{864}, & -\frac{1253}{20736}; & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

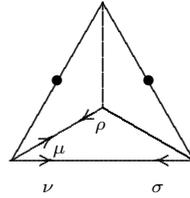
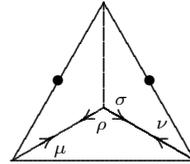
$$\begin{pmatrix} 0, & \frac{7}{288}, & -\frac{67}{2304} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} 0, & -\frac{5}{288}, & \frac{73}{2304} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$



$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{18}, & \frac{19}{216}, & -\frac{31}{2592}; & -\frac{1}{36} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}, & \frac{7}{54}, & -\frac{119}{1296}; & \frac{1}{18} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

$$\begin{pmatrix} 0, & -\frac{1}{18}, & \frac{49}{864} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{12}, & -\frac{17}{144}, & \frac{31}{864} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

(A.59)



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{18}, & -\frac{1}{54}, & \frac{1}{648} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}, & \frac{23}{216}, & -\frac{13}{324} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{36}, & -\frac{1}{432}, & -\frac{1}{648} \end{pmatrix} \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} + \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}, & \frac{11}{108}, & -\frac{85}{2592} \end{pmatrix} \delta_{\mu(\sigma}\delta_{\nu)\rho}$$

# Anhang B

## Mathematica

Abgesehen von dem Befehl `Compile` verwendet *Mathematica* eine Interpreter-Sprache, das heißt die Befehle werden erst zur Laufzeit in Maschinensprache übersetzt. *Mathematica* ist daher nicht für „brute force“ Berechnungen geeignet und scheint im ersten Moment für eine 3-Schleifen-Rechnung aus dem Bereich der Renormierungstheorie ungeeignet. Doch viele Probleme lassen sich durch Verwendung von ausgefeilten Algorithmen zur Mustererkennung (*pattern matching*) so weit vereinfachen, dass zum Schluss nur eine überschaubare Menge an Termen übrigbleibt. Dies gilt auch für den vorliegenden Fall. Doch bevor einige der speziell für die 3-Schleifen-Rechnung entwickelten Routinen vorgestellt werden, folgen einige allgemeine Hinweise zur effektiven Programmierung.

### B.1 Allgemeine Tipps und Tricks

Die Linearität einer Funktion wird üblicherweise in *Mathematica* und ähnlichen Computeralgebra-Programmen wie folgt dargestellt:

```
f[a_ + b_] := f[a] + f[b]
```

Diese Regel führt aber bei längeren Ausdrücken zu Problemen, da sie rekursiv nach jedem Teil der Summe wieder aufgerufen wird. Abhilfe lässt sich mit Hilfe des Befehls `Distribute` schaffen. Die gleiche Regel lautet nun<sup>1</sup>

```
g[a___,b_Plus,c___] := Distribute[tmp[a,b,c],Plus,tmp,Plus,g].
```

Diese Darstellung der Linearität ist allgemeiner, da `g` von beliebig vielen Variablen abhängen darf, und arbeitet vor allen Dingen nicht mehr rekursiv. In der Abbildung B.1 ist die Laufzeit der Definitionen für die Funktionen `f` und `g` in Abhängigkeit von der Anzahl der Terme dargestellt.

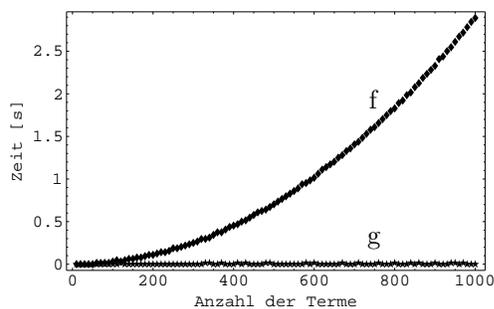


Abbildung B.1: Linearität

<sup>1</sup>Dieser Trick wurde von einem mir namentlich nicht bekannten Physiker auf der *Mathematica*-Konferenz 92 vorgestellt.

Ein weiteres Problem stellt die Substitution von Termen in einer großen Summe dar. Sollen z. B. alle Terme einer Summe `exp` durch den Ausdruck `ersatz` ersetzt werden, die die Funktion `f[x]` linear, aber nicht die Funktion `g[x]` enthalten, so liegt es nahe, den Ansatz

$$\text{exp} //. \{a\_ + b\_ . f[x] \rightarrow a + \text{ersatz} /; \text{FreeQ}[\{b\}, g[x]]\} \quad (\text{B.1})$$

zu wählen. Enthält die Summe jedoch viele Terme, die ersetzt werden sollen, empfiehlt es sich den Befehl `Map` zu verwenden. Der Ansatz

$$\text{Map}[(\# /. \{a\_ . + b\_ . f[x] \rightarrow a + \text{ersatz} /; \text{FreeQ}[\{b\}, g[x]]\})\&, \text{exp}] \quad (\text{B.2})$$

gewährleistet, dass die Regel nur einmal auf jeden Term und nicht wiederholt auf die gesamte Summe angewendet wird.

Die in fast allen Programmen verwendete Befehl `Collect2` wird durch das Einlesen der Datei `Collectt.m` eingebunden und stellt eine gute Alternative zu dem in *Mathematica* implementierten Befehl `Collect` dar. Der neue Befehl `Collect2` kann zum Einen nicht nur Variablen sondern auch Funktionen ausklammern und erhält zum Anderen weitgehend die Struktur des ursprünglichen Ausdrucks. Die Routine stammt aus dem Programm *FeynCalc* von Rolf Mertig et. al. und ist im Netz unter [www.feyncalc.org](http://www.feyncalc.org) zu beziehen.

## B.2 Die ProgrammROUTINEN

Auf der beiliegenden CD befinden sich alle hier besprochenen und damit die meisten der verwendeten Programme. Zuerst soll gezeigt werden, wie sich das effektive Potenzial der  $A^4$ -Theorie mit *Mathematica* in erster und zweiter Ordnung berechnen lässt. Das folgende Programm ist aus Gründen der Anschauung an die Vorgehensweise ohne Computeralgebrasystem angelehnt. Zuerst werden einige Variablen und der Wärmeleitungskern `HK` definiert. Anschließend werden die Potenziale bis in zweiter Ordnung eingeführt.

Zur Berechnung des effektiven Potenzials in erster Ordnung genügt es, dieses nach  $\epsilon$  zu entwickeln, danach die Variablen  $m_1$  und  $\lambda_1$  gemäß den Nebenbedingungen von Coleman und Weinberg bzw. J.-M. Chung und B. Chung zu bestimmen und die sich daraus ergebenden Korrekturterme zum ursprünglichen Potenzial zu addieren.

Zur Ermittlung des effektiven Potenzials in zweiter Ordnung wird die in Abschnitt 2.7 präsentierte Vorgehensweise in *Mathematica* übernommen, d. h. zuerst wird die modifizierte Bessel-Funktion  $K_{1-\epsilon/2}(t)$  nach kleinen Argumenten entwickelt. Danach wird die Integration über die Regel  $x^n \rightarrow s^{-(n+1)}/(n+1)$  ausgeführt und anschließend der Limes für  $s \rightarrow 0$  berechnet. Zu guter Letzt werden die unter den gegebenen Nebenbedingungen ermittelten Korrekturterme zum effektiven Potenzial hinzugefügt.

Es sei noch angemerkt, dass der vom Package `Notation` zur Verfügung gestellte Befehl `Symbolize` dazu dient, zusammengesetzte Ausdrücke für *Mathematica* zu einem Symbol zusammenzufassen.

### ■ Notation und Regeln

```
Needs["Utilities`Notation`"];

Symbolize[V0];
Symbolize[V1]; Symbolize[V1ε]; Symbolize[V1CW]; Symbolize[V1CC];
Symbolize[V2]; Symbolize[V2ε]; Symbolize[V2CC];
Symbolize[m1]; Symbolize[m2];
Symbolize[λ1]; Symbolize[λ2];
```

```
Clear[IfRule, LogRules, HK, X, V, V0, V1, V1ε, V1CW, V1CC, V2, V2ε, V2CC, m1, λ1, m2, λ2];
```

```
IfRule = {If[a_, b_, c_] => b};
```

```
LogRules = {Log[4] -> 2 Log[2],
             Log[m2] -> 2 Log[m],
             Log[ $\frac{m^2}{4\pi}$ ] -> 2 Log[m] - 2 Log[2] - Log[π],
             Log[m2 +  $\frac{v^2 \lambda}{2}$ ] -> Log[1 +  $\frac{v^2 \lambda}{2 m^2}$ ] + 2 Log[m]};
```

```
HK[x_, t_] =  $\frac{1}{(4 \pi t)^{d/2}} \text{Exp}[-\frac{x^2}{4 t} - X t];$ 
```

```
X = m2 +  $\frac{\lambda v^2}{2}$ ;
```

```
V0 =  $\frac{1}{2} m^2 v^2 + \frac{1}{4!} \lambda v^4$ ;
```

```
V1 =
```

```
-Limit[D[ $\left(\int_0^\infty \frac{\tau^{s-1}}{2 \text{Gamma}[s]} \text{Plus}[\text{HK}[0, \tau], -\text{HK}[0, \tau] /. v \rightarrow 0] d\tau /. \text{IfRule}\right), s], s -> 0];$ 
```

```
V2 = - $\frac{\lambda}{8} \left(\int_0^\infty \text{HK}[0, \tau_1] d\tau_1 /. \text{IfRule}\right)^2 + \frac{\lambda^2 v^2}{12} \frac{2 \pi^{d/2}}{\text{Gamma}[\frac{d}{2}]} x^{d-1}$ 
 $\left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \text{HK}[x, \tau_1] \text{HK}[x, \tau_2] \text{HK}[x, \tau_3] d\tau_1 /. \text{IfRule}\right) d\tau_2 /. \text{IfRule}\right) d\tau_3 /. \right.$ 
 $\left. \text{IfRule}\right) dx - \left(\frac{m_1^2}{2} + \frac{\lambda_1 v^2}{4}\right) \left(\int_0^\infty \text{HK}[0, \tau_1] d\tau_1 /. \text{IfRule}\right);$ 
```

## ■ Effektives Potential 1. Ordnung

```
V1ε = ExpandAll[Normal[ExpandAll[Series[V1 /. d -> 4 - ε, {ε, 0, 0}]]] /. LogRules];
```

```
(* Die Randbedingungen von Coleman und Weinberg: *)
```

```
λ1 /: λ1 := ExpandAll[PowerExpand[D[-V1ε, {v, 4}] /. v -> M]];
```

```
V1CW = ExpandNumerator[
```

```
Limit[ExpandAll[V1ε +  $\frac{1}{4!} \lambda_1 v^4$ ], m -> 0] /. Log[M2 λ] -> -Log[ $\frac{v^2}{M^2}$ ] + Log[v2 λ];
```

```
Print["\nDas effektive Potential in 1.Ordnung nach Coleman und Weinberg: \n",
      V1CW, "\n"];
```

Das effektive Potential in 1.Ordnung nach Coleman und Weinberg:

$$\frac{-25 v^4 \lambda^2 + 6 v^4 \lambda^2 \text{Log}\left[\frac{v^2}{M^2}\right]}{1536 \pi^2}$$

```
(* Die Randbedingungen von Chung und Chung: *)
m1 /: m1^2 := ExpandAll[PowerExpand[D[-V1^e, {v, 2}] /. v -> 0]];
lambda1 /: lambda1 := ExpandAll[PowerExpand[D[-V1^e, {v, 4}] /. v -> 0]];
V1^CC = Collect[ExpandAll[V1^e + 1/2 m1^2 v^2 + 1/4! lambda1 v^4], Log[_]];
Print["\nDas effektive Potential in 1.Ordnung nach Chung und Chung: \n", V1^CC];
```

Das effektive Potential in 1.Ordnung nach Chung und Chung:

$$-\frac{m^2 v^2 \lambda}{128 \pi^2} - \frac{3 v^4 \lambda^2}{512 \pi^2} + \left( \frac{m^4}{64 \pi^2} + \frac{m^2 v^2 \lambda}{64 \pi^2} + \frac{v^4 \lambda^2}{256 \pi^2} \right) \text{Log} \left[ 1 + \frac{v^2 \lambda}{2 m^2} \right]$$

## ■ Effektives Potential 2. Ordnung

```
V2^e = ExpandAll[Normal[ExpandAll[Series[PowerExpand[ExpandAll[PowerExpand[V2 /.
    dx -> 1/sqrt[x] /. x -> x/sqrt[x] /.
    BesselK[a_, b_] -> BesselK[a, PowerExpand[Simplify[b]]] /.
    BesselK[a_, x]^3 ->
    Normal[Series[BesselK[a, x]^3, {x, 0, 3}]] /. d -> 4 - e] /.
    v^2 lambda -> 2 x c - 2 m^2]] /. x^n -> s^(n+1)/(n+1) /. s^n?Positive+m.e -> 0 /.
    s^n?Positive -> 0, {e, 0, 0}] /. x c -> m^2 + v^2 lambda/2] /.
Log[s] -> 0 /. s^n?Negative -> 0]];
```

```
(* Die Randbedingungen von Chung und Chung: *)
m2 /: m2^2 := ExpandAll[PowerExpand[D[-V2^e, {v, 2}] /. v -> 0]];
lambda2 /: lambda2 := ExpandAll[PowerExpand[D[-V2^e, {v, 4}] /. v -> 0]];
V2^CC = Collect[ExpandAll[Plus[V2^e + 1/2 m2^2 v^2 + 1/4! lambda2 v^4,
    -(V2^e + 1/2 m2^2 v^2 + 1/4! lambda2 v^4) /. v -> 0] /. LogRules], Log[_]];
Print["\nDas effektive Potential in 2.Ordnung nach Chung und Chung: \n", V2^CC];
```

Das effektive Potential in 2.Ordnung nach Chung und Chung:

$$-\frac{9 v^4 \lambda^3}{8192 \pi^4} + \left( \frac{5 m^2 v^2 \lambda^2}{2048 \pi^4} + \frac{5 v^4 \lambda^3}{4096 \pi^4} \right) \text{Log} \left[ 1 + \frac{v^2 \lambda}{2 m^2} \right] + \left( -\frac{m^4 \lambda}{2048 \pi^4} - \frac{m^2 v^2 \lambda^2}{1024 \pi^4} - \frac{3 v^4 \lambda^3}{8192 \pi^4} \right) \text{Log} \left[ 1 + \frac{v^2 \lambda}{2 m^2} \right]^2$$

Im Rahmen der reinen Yang-Mills-Theorie wird zuerst das kurze Programm `GenerateGraph.nb` benötigt. Es generiert die Feynman-Graphen mit exakten Propagatoren für die reine Yang-Mills-Theorie in zweiter und dritter Ordnung. Unter Verwendung der für die jeweilige Topologie der Graphen bekannten Symmetrien erkennt anschließend die ebenfalls in dem Programm enthaltene Routine `SortIndex` gleiche Graphen und reduziert in dritter Ordnung die Zahl der Graphen auf die in den Tabellen 3.1 und 3.2 angegebenen Werte.

Das Hauptprogramm `YMCalc.nb` besteht aus einer größeren Ansammlung von Regeln und Routinen, mit deren Hilfe sich die Graphen auf vielfältige Weise manipulieren und auch zeichnen lassen. Um die  $\beta$ -Funktion zu bestimmen, müssen zuerst die exakten Propagatoren der mittels

`GenerateGraph.nb` gewonnenen Graphen gemäß (3.68) und (3.69) expandiert werden. Dafür ist der Befehl `Eval` zuständig. Die algebraische Reduktion der dabei entstehenden Graphen (ca. 2000) auf die in Abschnitt 3.8 aufgeführten 24 Graphen erfolgte in mehreren Schritten, bei denen das Programm auf die jeweilige Situation angepasst wurde. Ein direktes Nachvollziehen durch einfaches Ausführen des Programmes ist daher nicht möglich. In der vorliegenden Form ist das Programm nur für den kundigen Anwender geeignet, da es weder Kommentare enthält noch Fehler abfängt bzw. alle denkbaren Fälle und Ausnahmen berücksichtigt.

Die Divergenzen einzelner Graphen lassen sich mit Hilfe des Programmes `CalcGraphUV.nb` berechnen. Eine etwas verkürzte Version, mit der sich die Divergenzen der 24 Graphen, die zur Ermittlung von  $\Gamma_3^{\text{div}}$  benötigt werden, bestimmen lassen, findet sich im Anhang B.3. Wie man sieht, lässt sich schon mit wenigen Definitionen ein Programm erstellen, mit dessen Hilfe die UV-Divergenzen von vielen Klassen von Feynman-Graphen ermittelt werden können.

Im Folgenden wird ein kurzer Abriss der in `CalcGraphUV.nb` verwendeten Symbole und der zugehörigen Syntax gegeben. Als erstes wird das Arbeitsverzeichnis festgelegt und zwei Dateien eingelesen. Die Datei `uvdiv2.m` enthält einige 1-Schleifen-Divergenzen, die über den Befehl `KR` abgerufen werden können (siehe das Beispiel am Ende dieses Abschnitts). Nachdem mit dem Befehl `Clear` eventuelle Vorgaben für die folgenden Definitionen gelöscht wurden, werden die Regeln für die kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}[f, \{\mu_1, \dots, \mu_n, \mathbf{x}\}] = D_x^{\mu_1} \cdots D_x^{\mu_n} f \quad (\text{B.3})$$

definiert. Anschließend wird der verallgemeinerte Tensor

$$\delta[\mu_1, \dots, \mu_n] = \delta_{\mu_1 \cdots \mu_n} \quad (\text{B.4})$$

eingeführt.

Die Darstellung der  $\delta$ -Funktion ist über

$$\text{ID}[\{\mu_1, \dots, \mu_i, \mathbf{x}\}, \{\nu_1, \dots, \nu_j, \mathbf{y}\}] = \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_i} \delta(x - y) \overleftarrow{\partial}_{\nu_1} \cdots \overleftarrow{\partial}_{\nu_j} \quad (\text{B.5})$$

implementiert. Mit Hilfe der zusätzlich eingeführten Regeln `IDPartialRule` und `PIIDRule` lassen sich die Ableitungen sowohl innerhalb der  $\delta$ -Funktion verschieben als auch über partielle Integration von ihr entfernen. Die Regel `IDRule` schließlich eliminiert  $\delta$ -Funktionen, auf die keine Ableitungen mehr wirken.

Danach wird eine verallgemeinerte Differenz zwischen zwei Koordinaten in der Raumzeit eingeführt. Sie ist über die Beziehung

$$\text{dI}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \{\mu_1, \dots, \mu_i\}, \mathbf{p}] = (x - y)_{\mu_1} \cdots (x - y)_{\mu_i} (x - y)^p \quad (\text{B.6})$$

gegeben.

Die in `R2GRule` zusammengefassten Regeln zerlegen die renormierten Propagatoren in unrenormierte Propagatoren und eine entsprechende Erweiterung, bestehend aus Funktionen von `dI`, während die Sammlung von Regeln in `G2dIRule` die unrenormierten Propagatoren als Funktionen von `dI` darstellt. Die in `GRule` aufgeführten Transformationen wandeln gemäß den Identitäten aus Abschnitt A.2 Produkte aus einem `dI`-Term und einem unrenormierten Propagator in Ausdrücke um, die ausschließlich Propagatoren und Ableitungen von Propagatoren enthalten.

Basierend auf der Identität (A.2) werden in `GKazRule` und `KazdIRule` sequentiell aneinanderhängende Propagatoren zusammengefasst. Einige der in `KazdIRule` definierten Regeln werden aufgrund ihres Umfangs nicht mit aufgeführt. Sie werden nur aus Gründen der Geschwindigkeit gegeben, könnten aber auch rekursiv während der Laufzeit hergeleitet werden.

Für eine Funktion der Gestalt  $1/x^{2\alpha}$  ist die  $d$ -dimensionale Fourier-Transformation [97] durch

$$\int dx \frac{1}{x^{2\alpha}} \exp(ik \cdot x) = \pi^\alpha \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^{\alpha - d/2} \quad (\text{B.7})$$

definiert. Um das singuläre Verhalten der Funktion  $1/x^{2\alpha}$  zu ermitteln, bedient man sich der inversen Fourier-Transformation, die unter Verwendung der formalen Identität

$$\int dk k^{2\beta} \exp(-ik \cdot x) = (-\partial^2)^\beta \int dk \exp(-ik \cdot x) = (2\pi)^d (-\partial^2)^\beta \delta(x) \quad (\text{B.8})$$

durch

$$\frac{1}{x^{2\alpha}} = \pi^\alpha \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{\partial^2}{4\pi}\right)^{\alpha-d/2} \delta(x) \quad (\text{B.9})$$

gegeben ist. Die zugehörige Routine ist im Programm als `FourierRule[0]` implementiert. Die Transformationen für Terme, die zusätzliche  $x$ -Tensoren im Zähler aufweisen, lassen sich rekursiv aus `FourierRule[0]` ableiten. Aber auch hier werden aus Gründen der Laufzeit diese, soweit benötigt, über die Identitäten `FourierRule[1]` bis `FourierRule[6]` vorgegeben.

Die verallgemeinerte Wellenzahl schließlich ist in Anlehnung an die Definition der Differenz als

$$\mathbb{k}[\{\mu_1, \dots, \mu_i\}, \mathbf{p}] = k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_i} k^p \quad (\text{B.10})$$

definiert.

Es folgen nun zwei Funktionen namens `CalcIR` und `CalcUV`, die fast identisch aufgebaut sind. Die Funktion `CalcIR` findet nur bei Subgraphen ihre Anwendung, da sie, wie ihr Name schon vermuten lässt, dazu dient, IR-Divergenzen zu ermitteln. Aufgrund der Ähnlichkeit der beiden Funktionen wird hier nur die Funktion `CalcUV` kurz beschrieben. Die ersten vier Argumente sind der Feynman-Graph (`arg`) an sich, die Ordnung (`n`), an der die Reihenentwicklung abgebrochen werden soll und die beiden Punkte (`x,y`), an die das Hintergrundfeld koppelt. Die weiteren Variablen dienen nur als Schalter, die, je nachdem wie sie gesetzt sind, Zwischenergebnisse ausdrucken bzw. die Funktion an gegebener Stelle unterbrechen.

Nachdem in den ersten beiden Schritten die `R`- und `G`-Funktionen unter Berücksichtigung einiger Regeln für eventuell auftretende `ID`-Funktionen auf `dI`-Terme zurückgeführt wurden, wird im dritten Schritt unter Zuhilfenahme der `KazdRule` über sämtliche Raumzeitpunkte, mit Ausnahme der beiden als Argumente gegebenen, integriert.

Die verbliebenen 2-Punkt-Funktionen werden schließlich mit Hilfe der passenden `FourierRule` transformiert. Da nur der divergente Anteil der Graphen bestimmt werden soll und für Subgraphen  $d = 4$  gesetzt wird, kann man sich bei dem Exponenten der partiellen Ableitung aus Gleichung (B.9) auf den ganzzahligen Anteil beschränken.

Schließlich muss das Ergebnis noch nach  $\epsilon$  entwickelt werden. Um dieses Verfahren zu beschleunigen, werden alle  $\Gamma$ -Funktionen rekursiv auf die Form  $\Gamma(1+x)$  gebracht und danach unter Verwendung der Identität

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-x)^s}{s} \zeta(s)\right) \quad (\text{B.11})$$

entfernt, wobei  $\gamma$  für die Eulersche Konstante steht. Solange nur die Divergenzen der Graphen berechnet werden sollen, darf in Gleichung (B.11) im oberen Index der Summe  $\infty$  durch die Schleifenanzahl des Graphen ersetzt werden. Um auch die Divergenzen von Graphen mit bis zu 5 Schleifen ermitteln zu können, wurde für das Programm im Anhang B.3 der Index probeweise auf 5 gesetzt.

Die Berechnungen wurden auf einem Rechner durchgeführt, der einen Athlon XP 1800 Prozessor und 512 MB Speicher enthielt.

Die Divergenzen des ersten Graphen aus  $\Gamma_3^{\text{div}}$  in Abschnitt 3.8 lassen sich in zwei Schritten ermitteln. Zuerst berechnet man die Divergenz des Subgraphen, der sich ergibt, wenn man aus dem ursprünglichen Graphen den  $R_3$ -Propagator entfernt. Die Laufzeit beträgt 3.6s und die zugehörige Ein- und Ausgabe haben die folgende Gestalt:

In[284]:=

```
SubGraph[2, 2, 5] =
  Collect2[CalcUV[(16 π²)² *
    (vf2 G[0, {x[1]}, {x[2]}] G[0, {x[1]}, {μ, λ, x[2]}]
      G[0, {x[2]}, {ν, ρ, x[3]}] G[1, {x[1]}, {x[3]}] -
    vf1 KR[G[0, {x[1]}, {x[2]}] G[0, {x[1]}, {μ, λ, x[2]}], {x[2]}]
      G[0, {x[2]}, {ν, ρ, x[3]}] G[1, {x[1]}, {x[3]}]
    ), 0, x[2], x[3]], δ[___]] // VorFaktorRule[x[2], x[3]]
```

$$\begin{aligned}
 \text{Out[284]} = & \left( \frac{1}{36 \epsilon^2} + \frac{23}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\nu, \rho, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \mu] + \\
 & \left( -\frac{1}{36 \epsilon^2} + \frac{7}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\mu, \rho, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \nu] + \\
 & \left( -\frac{1}{36 \epsilon^2} + \frac{7}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\mu, \nu, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \rho] + \\
 & \left( -\frac{1}{36 \epsilon^2} + \frac{7}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\lambda, \rho, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\mu, \nu] + \\
 & \left( -\frac{1}{72 \epsilon^2} + \frac{7}{1728 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\text{id1}, \text{id1}, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \rho] \delta[\mu, \nu] + \\
 & \left( -\frac{1}{36 \epsilon^2} + \frac{7}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\lambda, \nu, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\mu, \rho] + \\
 & \left( -\frac{1}{72 \epsilon^2} + \frac{7}{1728 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\text{id1}, \text{id1}, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \nu] \delta[\mu, \rho] + \\
 & \left( \frac{1}{36 \epsilon^2} - \frac{1}{864 \epsilon} \right) \mathbb{D}[\{\lambda, \mu, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\nu, \rho] - \\
 & \frac{5 \mathbb{D}[\{\text{id1}, \text{id1}, x[2]\}, \{x[3]\}] \delta[\lambda, \mu] \delta[\nu, \rho]}{576 \epsilon}
 \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis lassen sich die Divergenzen des ersten Graphen ermitteln. Die Laufzeit beträgt weitere 4.6s und die entsprechende Eingabe mit Ergebnis ist durch

In[286]:= **V6**[2, 2, 5] =

```
Collect2[CalcUV[(16 π²)³
  (vf3 G[0, {x[1]}, {x[2]}] G[0, {x[1]}, {μ, λ, x[2]}] *
    G[0, {x[2]}, {ν, ρ, x[3]}] R[3, {x[2]}, {μ, λ, x[3]}] *
    G[1, {x[1]}, {x[3]}] -
  vf2 KR[G[0, {x[1]}, {x[2]}] G[0, {x[1]}, {μ, λ, x[2]}], {x[2]}] *
    G[0, {x[2]}, {ν, ρ, x[3]}] R[3, {x[2]}, {μ, λ, x[3]}] *
    G[1, {x[1]}, {x[3]}] -
  vf1 1 / (16 π²)² SubGraph[2, 2, 5] R[3, {x[2]}, {μ, λ, x[3]}]
), 0, x[2], x[3]], δ[___]] /. a_ δ[μ_, ν_] => ExpandAll[a] δ[μ, ν]
```

$$\text{Out[286]} = -\frac{17 \delta[\nu, \rho]}{576 \epsilon}$$

gegeben.

### B.3 Programm zum Berechnen der Divergenzen

```

SetDirectory["f:\\mathematica\\4.1\\work\\dissertation\\graphen"];

<< Collectt.m;
<< uvdiv2.m;

Clear[D,  $\delta$ , d, G, R, D, DPartialRule, PIDRule, DRule,
  MultiFreeQ, R2GRule, G2dRule, GRule, FourierRule, k, GKazRule,
  KazdRule, CalcIR, CalcUV, GammaRule, SimpRule, VorFaktorRule];

D[arg_, {x[n_]}] = arg;
D[arg_, {ind_, x[n_]}] := 0 /; FreeQ[arg, x[n]];

(* Linearität und Verschachtelung *)
D[a___, b_Plus, c___] := Distribute[tmp[a, b, c], Plus, tmp, Plus, D];
D /: D[D[arg_, {ind1___, x[n_]}], {ind2___, x[n_]}] := D[arg, {ind2, ind1, x[n]}];

(* Produktregel *)
D[a_b_, {ind_, x[n_]}] :=
  D[a D[b, {Last[{ind}], x[n]}], Join[Drop[{ind}, -1], {x[n]}]] +
  D[b D[a, {Last[{ind}], x[n]}], Join[Drop[{ind}, -1], {x[n]}]];
D[a_^n_?IntegerQ, {ind_, x[m_]}] :=
  n D[a^(n-1) D[a, {Last[{ind}], x[m]}], Join[Drop[{ind}, -1], {x[m]}]] /; FreeQ[{a}, d];

(* Ableitung der Propagatoren *)
D[f_[l1___, {ind1___, x[n_]}, l2___], {ind2___, x[n_]}] :=
  f[l1, {ind2, ind1, x[n]}, l2] /; MemberQ[{VG, SG, PhG, G, R, D}, f];

(* Ableitung von Produkten aus Differenzen *)
D[d[x[n1_], x[n2_], {ind1___}, p1_], {ind2___, x[n3_]}] := Which[
  n1 == n3, p1 D[d[x[n1], x[n2], {ind1, Last[{ind2]}], p1 - 2],
  Join[Drop[{ind2}, -1], {x[n3]}]] +
  Sum[ $\delta$ [Last[{ind2}], {ind1}][i], {i, 1, Length[{ind1]}],
  D[d[x[n1], x[n2], Drop[{ind1}, {i}], p1], Join[Drop[{ind2}, -1], {x[n3]}]],
  n2 == n3, -p1 D[d[x[n1], x[n2], {ind1, Last[{ind2]}], p1 - 2],
  Join[Drop[{ind2}, -1], {x[n3]}]] -
  Sum[ $\delta$ [Last[{ind2}], {ind1}][i], {i, 1, Length[{ind1]}],
  D[d[x[n1], x[n2], Drop[{ind1}, {i}], p1], Join[Drop[{ind2}, -1], {x[n3]}]],
  True, 0];

(*  $\delta$ -Tensor *)
 $\delta$ [ $\mu$ _,  $\mu$ _] = d;
 $\delta$  /:  $\delta$ [ $\mu$ _,  $\nu$ _]^2 := d /;  $\mu$  !=  $\nu$ ;
 $\delta$ [l1___] := Apply[ $\delta$ , Sort[{l1}]] /; Not[OrderedQ[{l1}]];
 $\delta$ [l1___]  $\delta$ [l2___] ^=
  Apply[ $\delta$ , Flatten[{Complement[{l1}, {l2}], Complement[{l2}, {l1}]}]] /;
  Length[{l1}  $\cap$  {l2}] == 1 && (Length[{l1}] == 2 || Length[{l2}] == 2);

```

```

δ[ids_] :=
ExpandAll[ $\sum_{ii=2}^{\text{Length}[\{\text{ids}\}]} \delta[\{\text{ids}\}[\![1]\!], \{\text{ids}\}[\![ii]\!]] \text{Apply}[\delta, \text{Drop}[\text{Drop}[\{\text{ids}\}, \{\text{ii}\}], 1]]] /;$ 
Length[\{\text{ids}\}] > 2 && EvenQ[Length[\{\text{ids}\}]];

G /: G[i_, {l1___, x_}, {l2___, x_}] := 0;

(* D Funktion *)
D[c1___, {l1___, x_}, c2___] :=
D[c1, Flatten[Sort[\{l1\}], x], c2] /; Sort[\{l1\}] != \{l1\};
D[c1___, {l1___, x_}, c2___, {l2___, y_}, c3___] :=
D[c1, \{l2, y\}, c2, \{l1, x\}, c3] /; Not[OrderedQ[\{x, y\}]];
D[\{x_}, \{y_}\]^n ^:= (0; Print["Achtung: D^n, n, " gefunden!!"]);
D /: d[x_, y_, {l1___}, p_] D[\{x_}, \{y_}] := 0 /; Not[p == 0 && \{l1\} == \{\}];
D /: d[x_, y_, {ind1___, μ_}, p_] D[\{l1___, x_}, \{l2___, y_}] :=
ExpandAll[d[x, y, \{ind1\}, p] (-1)^Length[\{l1\}]  $\sum_{i=1}^{\text{Length}[\{\text{l1}, \text{l2}\}]} \delta[\mu, \{\text{l1}, \text{l2}\}[\![i]\!]]$ 
D[\{x\}, Drop[\{\text{l1}, \text{l2}, y\}, \{i\}]]] /; Length[\{\text{l1}, \text{l2}\}] > 0;
D /: d[x_, y_, {ind1___}, p_] D[\{l1___, x_}, \{l2___, y_}] :=
ExpandAll[d[x, y, \{ind1\}, p - 2]
Module[\{\mu\}, Times[d[x, y, \{\mu\}, 0], d[x, y, \{\mu\}, 0] D[\{\text{l1}, x\}, \{\text{l2}, y\}]]] /;
Length[\{\text{l1}, \text{l2}\}] > 0 && EvenQ[ExpandAll[p /. d → 4 /. ε → 0]];

D /: D[\{x_}, \{y_}] G[i_, {___, x_}, {___, y_}] := 0;

DPartialRule[x_] = {D[c1___, {l1___, μ_, x_}, c3___] =>
 $\sum_{i1=1}^{\text{Length}[\{c1\}]}$  -Apply[D, Join[MapAt[Prepend[\#, μ] &, \{c1\}, i1], {\text{l1}, x}, c3]] +
 $\sum_{i1=1}^{\text{Length}[\{c3\}]}$  -Apply[D, Join[\{c1, \text{l1}, x\}, MapAt[Prepend[\#, μ] &, \{c3\}, i1]]]};

PIDRule[l_ : {}] = {a_. + b_ D[l1___, {l2___, x[n_]}, l3___] =>
a + (-1)^Length[\{l2\}] D[b, \{l2, x[n]\}] D[l1, \{x[n]\}, l3] /; FreeQ[l, x[n]]};

DRule[l1___] = {
c1_. + c2_. D[a1___, \{x_}, a2___, \{y_}, a3___] =>
Plus[c1, c2 D[a1, \{x\}, a2, a3] /. D[_] → 1 /. y → x] /; FreeQ[\{l1\}, y],
c1_. + c2_. D[a1___, \{x_}, a2___, \{y_}, a3___] =>
Plus[c1, c2 D[a1, a2, \{y\}, a3] /. D[_] → 1 /. x → y] /; FreeQ[\{l1\}, x]};

```

```
(* Differenzen *)
d[x_, x_, {}, 0] = 1;
d[x_, x_, {___}, p_] = 0;
d[x_, y_, {}, 0] = 1;
d[x_, y_, {ind___}, p_] := (-1)Length[{ind}] d[y, x, {ind}, p] /; Not[OrderedQ[{x, y}]]
d[x_, y_, {ind___}, p_] := d[x, y, Sort[{ind}], p] /; Not[OrderedQ[{ind}]]
d[x_, y_, {ind1___, μ_, μ_, ind2___}, p_] := d[x, y, {ind1, ind2}, p + 2]
d /: d[x_, y_, {ind1___}, p1_] d[x_, y_, {ind2___}, p2_] :=
  d[x, y, Sort[{ind1, ind2}], p1 + p2];
d /: d[x_, y_, {}, p_] n := d[x, y, {}, n p];
d /: d[x_, y_, {ind1___}, p_] 2 := d[x, y, {ind1, ind1}, 2 p];
d /: d[x_, y_, {ind1___}, p_] δ[ind2___] :=
  d[x, y, {ind1} /. ({ind1} ∩ {ind2})[[1]] → Complement[{ind2}, {{(ind1} ∩ {ind2})[[1]]}][[1]],
  p] /; ({ind1} ∩ {ind2}) ≠ {}
```

```
(* Definitionen einiger nützlicher Funktionen *)
```

```
MultiFreeQ[l1_List, l2_List] := Apply[And, Map[FreeQ[l1, #] &, l2]]
```

```
R2GRule = {
  R[i_?Positive, {l1___, x_}, {l2___, y_}] → (-1)Length[{l2}] R[i, {l1, l2, x}, {y}],
  R[i_, {ind1___, x_}, {ind2___, y_}] →
    G[i, {ind1, x}, {ind2, y}] /; i -  $\frac{1}{2}$  Length[{ind1, ind2}] < 1,
  R[i_?Positive, {x_}, {y_}] → G[i, {x}, {y}] -
    (-1)i  $\frac{2}{(i-1)! 4^{i+1} \pi^2 \epsilon}$  ReleaseHold[Hold[d[x, y, {}, 2 i - 2]]]
  (*Hold,damit auch R1 richtig berechnet wird*),
  R[i_?Positive, {μ_, x_}, {y_}] → - $\frac{1}{2}$  d[x, y, {μ}, 0] R[i - 1, {x}, {y}],
  R[i_?Positive, {μ_, ν_, x_}, {y_}] →
    - $\frac{1}{2}$  δ[μ, ν] R[i - 1, {x}, {y}] -  $\frac{1}{2}$  d[x, y, {μ}, 0] R[i - 1, {ν, x}, {y}],
  R[i_?Positive, {μ_, ν_, ρ_, x_}, {y_}] →
    - $\frac{1}{2}$  δ[ν, ρ] R[i - 1, {μ, x}, {y}] -
     $\frac{1}{2}$  δ[μ, ρ] R[i - 1, {ν, x}, {y}] -  $\frac{1}{2}$  d[x, y, {ρ}, 0] R[i - 1, {μ, ν, x}, {y}],
  R[i_?Positive, {μ_, ν_, ρ_, σ_, x_}, {y_}] →
    - $\frac{1}{2}$  δ[ρ, σ] R[i - 1, {μ, ν, x}, {y}] -  $\frac{1}{2}$  δ[ν, σ] R[i - 1, {μ, ρ, x}, {y}] -
     $\frac{1}{2}$  δ[μ, σ] R[i - 1, {ν, ρ, x}, {y}] -  $\frac{1}{2}$  d[x, y, {σ}, 0] R[i - 1, {μ, ν, ρ, x}, {y}],
  R[i_?Positive, {id1___, x_}, {id2___, y_}] →
    (-1)Length[{id2}]+1  $\frac{1}{2}$  D[d[x, y, {{id1, id2}[-1]}, 0] R[i - 1, {x}, {y}], Flatten[
      {Drop[{id1, id2}, -1], x}]] /; UnsameQ[id1, id2] && Length[{id1, id2}] > 0};
```

```

G2dRule = {
  G[i_(*?NonNegative*), {x_}, {y_}] →  $\frac{\text{Gamma}[\frac{d}{2} - i - 1]}{4^{i+1} \pi^{d/2}} \mathcal{D}[x, y, \{\}, 2 + 2i - d],$ 
  G[i_(*?NonNegative*), {l1___, x_}, {l2___, y_}] ⇒
    (-1)Length[{l2}] G[i, {l1, l2, x}, {y}],
  G[i_(*?Positive*), {μ_, x_}, {y_}] ⇒ - $\frac{1}{2} \mathcal{D}[x, y, \{\mu\}, 0] G[i - 1, \{x\}, \{y\}],$ 
  G[i_(*?Positive*), {μ_, ν_, x_}, {y_}] ⇒
     $\frac{1}{4} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \nu\}, 0] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] - \frac{1}{2} \delta[\mu, \nu] G[i - 1, \{x\}, \{y\}] /; \mu \neq \nu,$ 
  G[i_(*?Positive*), {μ_, ν_, ρ_, x_}, {y_}] ⇒
    - $\frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \nu, \rho\}, 0] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] +$ 
     $\frac{1}{4} \mathcal{D}[x, y, \{\rho\}, 0] \delta[\mu, \nu] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] + \frac{1}{4} \mathcal{D}[x, y, \{\nu\}, 0] \delta[\mu, \rho]$ 
     $G[i - 2, \{x\}, \{y\}] + \frac{1}{4} \mathcal{D}[x, y, \{\mu\}, 0] \delta[\nu, \rho] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] /; \mu \neq \nu \neq \rho,$ 
  G[i_(*?Positive*), {μ_, ν_, ρ_, σ_, x_}, {y_}] ⇒
     $\frac{1}{16} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \nu, \rho, \sigma\}, 0] G[i - 4, \{x\}, \{y\}] -$ 
     $\frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\nu, \rho\}, 0] \delta[\mu, \sigma] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] - \frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \rho\}, 0]$ 
     $\delta[\nu, \sigma] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] - \frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \nu\}, 0] \delta[\rho, \sigma] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] -$ 
     $\frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\sigma, \rho\}, 0] \delta[\mu, \nu] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] - \frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\nu, \sigma\}, 0]$ 
     $\delta[\mu, \rho] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] - \frac{1}{8} \mathcal{D}[x, y, \{\mu, \sigma\}, 0] \delta[\nu, \rho] G[i - 3, \{x\}, \{y\}] +$ 
     $\frac{1}{4} \delta[\mu, \nu] \delta[\rho, \sigma] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] + \frac{1}{4} \delta[\mu, \rho] \delta[\nu, \sigma] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] +$ 
     $\frac{1}{4} \delta[\mu, \sigma] \delta[\nu, \rho] G[i - 2, \{x\}, \{y\}] /; \mu \neq \nu \neq \rho \neq \sigma,$ 
  G[i_(*?Positive*), {id1___, x_}, {id2___, y_}] ⇒
    (-1)Length[{id2}]+1  $\frac{1}{2} \mathcal{D}[\mathcal{D}[x, y, \{\{id1, id2\}[-1]\}, 0] G[i - 1, \{x\}, \{y\}], \text{Flatten}[$ 
     $\{\text{Drop}[\{id1, id2\}, -1], x\}] /; \text{UnsameQ}[id1, id2] \&\& \text{Length}[\{id1, id2\}] > 0,$ 
  G[i_?Positive, l1___, {c1___, μ_, c2___, ν_, c3___}, l2___] ⇒
    -i G[i - 1, l1, {c1, c2, c3}, l2];

```

```

GRule = {
  Literal[d[x_, y_, {l1___, μ_}, p_] G[i_, {l2___, x_}, {y_}] =>
    -d[x, y, {l1}, p] D[d[x, y, {μ}, 0] G[i, {x}, {y}], {l2, x}] -
    2 d[x, y, {l1}, p] G[i + 1, {l2, μ, x}, {y}] + d[x, y, {l1, μ}, p] G[i, {l2, x}, {y}],
  Literal[d[x_, y_, {}, n_] G[i_, {l1___, x_}, {l2___, y_}] =>
    ExpandAll[d[x, y, {}, n - 2] Module[{μ}, Apply[Times,
      {d[x, y, {μ}, 0], d[x, y, {μ}, 0] G[i, {l1, x}, {l2, y}] /. GRule[1]]]]] /;
    Length[{l1, l2}] > 0 && EvenQ[n], G[0, l1___, {c1___, μ_, c2___, μ_, c3___},
    l2___] => -D[l1, {c1, c2, c3}, l2],
  G[-1, l1_, l2_] => D[l1, l2],
  G[i_ (*?Positive*), l1___, {c1___, μ_, c2___, μ_, c3___}, l2___] =>
    -i G[i - 1, l1, {c1, c2, c3}, l2],
  G[i_, {l1___, x_}, {l2___, y_}] => G[i, {l2, y}, {l1, x}] /; Not[OrderedQ[{x, y}]],
  R[i_, {l1___, x_}, {l2___, y_}] => R[i, {l2, y}, {l1, x}] /; Not[OrderedQ[{x, y}]],
  G[i_, {l1___, x_}, {l2___, y_}] =>
    (-1)Length[{l2}] G[i, Flatten[Sort[{l1, l2}], x], {y}]];

GKazRule[arg : {}] =
  {a_. + b_ G[i_, {l1___, x_}, {l2___, y_}] G[j_, {l3___, u_}, {l4___, v_}] =>
    (Which[x === u, a + b (-1)Length[{l1, l3}]  $\frac{i! j!}{(i + j + 1)!}$  *
      G[i + j + 1, {l1, l2, y}, {l3, l4, v}],
      x === v, a + b (-1)Length[{l1, l4}]  $\frac{i! j!}{(i + j + 1)!}$  *
      G[i + j + 1, {l1, l2, y}, {l3, l4, u}],
      y === u, a + b (-1)Length[{l2, l3}]  $\frac{i! j!}{(i + j + 1)!}$  *
      G[i + j + 1, {l1, l2, x}, {l3, l4, v}],
      y === v, a + b (-1)Length[{l2, l4}]  $\frac{i! j!}{(i + j + 1)!}$  *
      G[i + j + 1, {l1, l2, x}, {l3, l4, u}],
      True, Print[" Fall in GKazRule nicht berücksichtigt"])] /;

    Length[Union[{x, y, u, v}]] = 3 &&
    FreeQ[{b, arg}, {x, y, u, v}] /. {c1___, v1_, c2___, v1_, c3___} -> v1,
  a_. + b_ G[0, {l1___, x_}, {l2___, y_}] => ExpandAll[
    a - (-1)Length[{l2}] D[b, {{l1, l2}[[1]], x} G[0, {{l1, l2}[[2]], x}, {y}]] /;
    Length[{l1, l2}] = 2 && FreeQ[{arg}, x] &&
    MultiFreeQ[{b}, {G[i_, {___, x}, {___, y}], d[x, y, ___]}],
  a_. + b_ G[0, {l1___, x_}, {l2___, y_}] => ExpandAll[
    a - (-1)Length[{l1}] D[b, {{l1, l2}[[1]], y} G[0, {x}, {{l1, l2}[[2]], y}]] /;
    Length[{l1, l2}] = 2 && FreeQ[{arg}, y] &&
    MultiFreeQ[{b}, {G[i_, {___, x}, {___, y}], d[x, y, ___]}]
  };

```

```

KazcdRule = {
    •,
    •,
    •,
a_ + c1_ d[x_, y_, {μ_, ν_}, n1_] d[u_, v_, {λ_}, n2_] :=
Module[{cp1 = Complement[{x, y}, {u, v}][[1]], cp2 = Complement[{u, v}, {x, y}][[1]]},
  a + c1 πd/2 ExpandAll[

$$\frac{\text{Gam}\left[\frac{d+n1}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[\frac{d+n2}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[-\frac{d+n1+n2}{2} - 1\right]}{4 \text{Gam}\left[-\frac{n1}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{n2}{2}\right] \text{Gam}\left[d + 3 + \frac{n1+n2}{2}\right]}$$

  ] *
  (-1)Position[{u,v}, ({x,y} ∩ {u,v})][[1]][[1,1]] *
  ((d + n1 + 2) (d[cp1, cp2, {μ}, d + n1 + n2 + 2] δ[ν, λ] +
    d[cp1, cp2, {ν}, d + n1 + n2 + 2] δ[μ, λ]) -
    (d + n2 + 2) d[cp1, cp2, {λ}, d + n1 + n2 + 2] δ[μ, ν] +
    (d + n1 + 2) (d + n1 + n2 + 2) d[cp1, cp2, {μ, ν, λ}, d + n1 + n2]) /;
  Length[{x, y} ∩ {u, v}] == 1 && FreeQ[{c1}, ({x, y} ∩ {u, v})[[1]]],
a_ + c1_ d[x_, y_, {μ_, ν_}, n1_] d[u_, v_, {}, n2_] :=
Module[{cp1 = Complement[{x, y}, {u, v}][[1]], cp2 = Complement[{u, v}, {x, y}][[1]]},
  a + c1 πd/2 ExpandAll[

$$\frac{\text{Gam}\left[\frac{d+n1}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[\frac{d+n2}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{d+n1+n2}{2} - 1\right]}{4 \text{Gam}\left[-\frac{n1}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{n2}{2}\right] \text{Gam}\left[d + 2 + \frac{n1+n2}{2}\right]}$$

  ] *
  ((d + n2) d[cp1, cp2, {}, d + n1 + n2 + 2] δ[μ, ν] -
    (d + n1 + 2) (d + n1 + n2 + 2) d[cp1, cp2, {μ, ν}, d + n1 + n2]) /;
  Length[{x, y} ∩ {u, v}] == 1 && FreeQ[{c1}, ({x, y} ∩ {u, v})[[1]]],
a_ + c1_ d[x_, y_, {μ_}, n1_] d[u_, v_, {ν_}, n2_] :=
Module[{cp1 = Complement[{x, y}, {u, v}][[1]], cp2 = Complement[{u, v}, {x, y}][[1]]},
  a + c1 πd/2 ExpandAll[

$$\frac{\text{Gam}\left[\frac{d+n1}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[\frac{d+n2}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[-\frac{d+n1+n2}{2} - 1\right]}{2 \text{Gam}\left[-\frac{n1}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{n2}{2}\right] \text{Gam}\left[d + 2 + \frac{n1+n2}{2}\right]}$$

  ] *
  (-1)Position[{x,y}, ({x,y} ∩ {u,v})][[1]][[1,1]] + Position[{u,v}, ({x,y} ∩ {u,v})][[1]][[1,1]] *
  (d[cp1, cp2, {}, n1 + n2 + d + 2] δ[μ, ν] + (d + n1 + n2 + 2)
    d[cp1, cp2, {μ, ν}, d + n1 + n2]) /;
  Length[{x, y} ∩ {u, v}] == 1 && FreeQ[{c1}, ({x, y} ∩ {u, v})[[1]]],
a_ + c1_ d[x_, y_, {μ_}, n1_] d[u_, v_, {}, n2_] :=
Module[{cp1 = Complement[{x, y}, {u, v}][[1]], cp2 = Complement[{u, v}, {x, y}][[1]]},
  a + c1 πd/2 ExpandAll[

$$\frac{\text{Gam}\left[\frac{d+n1}{2} + 1\right] \text{Gam}\left[\frac{d+n2}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{d+n1+n2}{2}\right]}{\text{Gam}\left[-\frac{n1}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{n2}{2}\right] \text{Gam}\left[d + 1 + \frac{n1+n2}{2}\right]}$$

  ]
  d[cp1, cp2, {μ}, d + n1 + n2] /;
  Length[{x, y} ∩ {u, v}] == 1 && FreeQ[{c1}, ({x, y} ∩ {u, v})[[1]]],
a_ + c1_ d[x_, y_, {}, n1_] d[u_, v_, {}, n2_] :=
Module[{cp1 = Complement[{x, y}, {u, v}][[1]], cp2 = Complement[{u, v}, {x, y}][[1]]},
  a + c1 πd/2 ExpandAll[

$$\frac{\text{Gam}\left[\frac{d+n1}{2}\right] \text{Gam}\left[\frac{d+n2}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{d+n1+n2}{2}\right]}{\text{Gam}\left[-\frac{n1}{2}\right] \text{Gam}\left[-\frac{n2}{2}\right] \text{Gam}\left[d + \frac{n1+n2}{2}\right]}$$

  ]
  d[cp1, cp2, {}, d + n1 + n2] /;
  Length[{x, y} ∩ {u, v}] == 1 && FreeQ[{c1}, ({x, y} ∩ {u, v})[[1]]];

```

FourierRule[0] =

$$\left\{ \text{d}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \{\}, \mathbf{n}_-] \Rightarrow \pi^{-n/2} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2}]]}{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2}]] \right\};$$

FourierRule[1] = {d[x\_, y\_, {μ\_}, n\_] =>

$$-\pi^{-n/2-1} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 1]]}{2 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2} - 1]] \text{K}[\{\mu\}, 0];$$

FourierRule[2] = {d[x\_, y\_, {μ\_, ν\_}, n\_] =>

$$-\pi^{-n/2-2} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 1]]}{8 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2} - 2]] * \\ (\text{K}[\{\}, 1] \delta[\mu, \nu] - (n+d+2) \text{K}[\{\mu, \nu\}, 0]);$$

FourierRule[3] = {d[x\_, y\_, {μ\_, ν\_, λ\_}, n\_] =>

$$\pi^{-n/2-3} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 2]]}{16 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2} - 3]] * \\ (\text{K}[\{\mu\}, 1] \delta[\nu, \lambda] + \text{K}[\{\nu\}, 1] \delta[\mu, \lambda] + \text{K}[\{\lambda\}, 1] \delta[\mu, \nu] - \\ (n+d+4) \text{K}[\{\mu, \nu, \lambda\}, 0]);$$

FourierRule[4] = {d[x\_, y\_, {μ\_, ν\_, λ\_, ρ\_}, n\_] =>

$$\pi^{-n/2-4} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 2]]}{64 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2} - 4]] * \\ (\text{K}[\{\}, 2] \delta[\mu, \nu, \lambda, \rho] - \\ (n+d+4) (\text{K}[\{\mu, \nu\}, 1] \delta[\lambda, \rho] + \text{K}[\{\mu, \lambda\}, 1] \delta[\nu, \rho] + \text{K}[\{\mu, \rho\}, 1] \delta[\nu, \lambda] + \\ \text{K}[\{\nu, \lambda\}, 1] \delta[\mu, \rho] + \text{K}[\{\nu, \rho\}, 1] \delta[\mu, \lambda] + \text{K}[\{\lambda, \rho\}, 1] \delta[\mu, \nu]) + \\ (n+d+4) (n+d+6) \text{K}[\{\mu, \nu, \lambda, \rho\}, 0]);$$

FourierRule[5] = {d[x\_, y\_, {μ\_, ν\_, λ\_, ρ\_, σ\_}, n\_] =>

$$-\pi^{-n/2-5} \frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 3]]}{128 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]} \text{d}2\text{o}4\text{Pi}[\text{ExpandAll}[-\frac{n+d}{2} - 5]] * \\ (\text{K}[\{\sigma\}, 2] \delta[\mu, \nu, \lambda, \rho] + \text{K}[\{\rho\}, 2] \delta[\mu, \nu, \lambda, \sigma] + \text{K}[\{\lambda\}, 2] \delta[\mu, \nu, \rho, \sigma] + \\ \text{K}[\{\nu\}, 2] \delta[\mu, \lambda, \rho, \sigma] + \text{K}[\{\mu\}, 2] \delta[\nu, \lambda, \rho, \sigma] - \\ (n+d+6) (\text{K}[\{\lambda, \mu, \rho\}, 1] \delta[\nu, \sigma] + \text{K}[\{\lambda, \mu, \nu\}, 1] \delta[\rho, \sigma] + \\ \text{K}[\{\nu, \rho, \sigma\}, 1] \delta[\lambda, \mu] + \text{K}[\{\mu, \rho, \sigma\}, 1] \delta[\lambda, \nu] + \\ \text{K}[\{\mu, \nu, \sigma\}, 1] \delta[\lambda, \rho] + \text{K}[\{\mu, \nu, \rho\}, 1] \delta[\lambda, \sigma] + \\ \text{K}[\{\lambda, \rho, \sigma\}, 1] \delta[\mu, \nu] + \text{K}[\{\lambda, \nu, \sigma\}, 1] \delta[\mu, \rho] + \\ \text{K}[\{\lambda, \nu, \rho\}, 1] \delta[\mu, \sigma] + \text{K}[\{\lambda, \mu, \sigma\}, 1] \delta[\nu, \rho]) + \\ (n+d+6) (n+d+8) \text{K}[\{\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma\}, 0]);$$

```

FourierRule[6] =
{d[x_, y_, {μ_, ν_, λ_, ρ_, σ_, τ_}, n_] :=
-π-n/2-6  $\frac{\text{Gamma}[\text{ExpandAll}[\frac{n+d}{2} + 3]]}{512 \text{Gamma}[\text{ExpandAll}[-\frac{n}{2}]]}$  d2o4Pi[ExpandAll[- $\frac{n+d}{2} - 6$ ]] *
(K[{}, 3] δ[μ, ν, λ, ρ, σ, τ] -
(n+d+6) (
K[{μ, ν}, 2] δ[λ, ρ, σ, τ] + K[{μ, λ}, 2] δ[ν, ρ, σ, τ] +
K[{μ, ρ}, 2] δ[ν, λ, σ, τ] + K[{μ, σ}, 2] δ[ν, λ, ρ, τ] +
K[{μ, τ}, 2] δ[ν, λ, ρ, σ] + K[{ν, λ}, 2] δ[μ, ρ, σ, τ] +
K[{ν, ρ}, 2] δ[μ, λ, σ, τ] + K[{ν, σ}, 2] δ[μ, λ, ρ, τ] +
K[{ν, τ}, 2] δ[μ, ρ, λ, σ] + K[{λ, ρ}, 2] δ[μ, ν, σ, τ] +
K[{λ, σ}, 2] δ[μ, ν, ρ, τ] + K[{λ, τ}, 2] δ[μ, ν, ρ, σ] +
K[{ρ, σ}, 2] δ[μ, ν, λ, τ] + K[{ρ, τ}, 2] δ[μ, ν, λ, σ] +
K[{σ, τ}, 2] δ[μ, ν, ρ, λ]) +
(n+d+6) (n+d+8) (
K[{μ, ν, λ, ρ}, 1] δ[σ, τ] + K[{μ, ν, λ, σ}, 1] δ[ρ, τ] +
K[{μ, ν, ρ, σ}, 1] δ[λ, τ] + K[{μ, λ, ρ, σ}, 1] δ[ν, τ] +
K[{ν, λ, ρ, σ}, 1] δ[μ, τ] + K[{μ, ν, λ, τ}, 1] δ[ρ, σ] +
K[{μ, ν, ρ, τ}, 1] δ[λ, σ] + K[{μ, ρ, λ, τ}, 1] δ[ν, σ] +
K[{ν, ρ, λ, τ}, 1] δ[μ, σ] + K[{μ, ν, σ, τ}, 1] δ[λ, ρ] +
K[{μ, λ, σ, τ}, 1] δ[ν, ρ] + K[{ν, λ, σ, τ}, 1] δ[μ, ρ] +
K[{μ, ρ, σ, τ}, 1] δ[ν, λ] + K[{ν, ρ, σ, τ}, 1] δ[μ, λ] +
K[{ρ, λ, σ, τ}, 1] δ[μ, ν]) -
(n+d+6) (n+d+8) (n+d+10) K[{μ, ν, ρ, λ, σ, τ}, 0]);

d2o4Pi[a_?NumberQ+n_.ε] =  $\frac{\text{K}[\{\}, a]}{(-4\pi)^a}$ ;
d2o4Pi[a_?IntegerQ] =  $\frac{\text{K}[\{\}, a]}{(-4\pi)^a}$ ;
d2o4Pi[n_.ε] = 1; (* K[{},0] *)
d2o4Pi[0] = 1; (* K[{},0] *)
Derivative[n_][d2o4Pi][m_] = 0;

K[{}, 0] = 1;
K[{ind___}, p_] := K[Sort[{ind}], p] /; Not[OrderedQ[{ind}]];
K[{ind1___, μ_, μ_, ind2___}, p_] := K[{ind1, ind2}, p+1];
K /: K[{ind1___}, p1_] K[{ind2___}, p2_] := K[Sort[{ind1, ind2}], p1+p2];
K /: K[{}, p_] n := K[{}, np];
K /: K[{ind1___}, p_] 2 := K[{ind1, ind1}, 2p];
(*K[{ind1___}, n_?Negative]=0;*)
K /: K[{ind1___}, p_] δ[ind2___] :=
K[{ind1} /. ({ind1} ∩ {ind2})][1] => Complement[{ind2}, ({ind1} ∩ {ind2})][1]][1],
p] /; ({ind1} ∩ {ind2}) ≠ {};

```

```

CalcIR[arg_, n_, x_, y_, p1_: 0, p2_: 0, p3_: 0] :=
Module[{temp1, temp2, temp3, temp4, time1, time2, time3, ii, l1, maximum = 5},
  time1 = Timing[
    temp1 = ExpandAll[B[x] B[y] arg /. R2GRule] /. GKazRule[{x, y}];
    temp1 = If[Head[temp1] === Plus,
      ExpandAll[
        Map[({# /. DPartialRule[x] /. DPartialRule[y] /. PIDRule[{x, y]} /.
          DRule[{x, y]} /. GRule) &, temp1]],
      ExpandAll[
        temp1 /. DPartialRule[x] /. DPartialRule[y] /. PIDRule[{x, y]} /.
          DRule[{x, y]} /. GRule]];
  ];
  Switch[p1, 1, Print[" R2GRule angewandt: ", time1],
    2, Print[" R2GRule angewandt: ", temp1, " in ", time1],
    3, Return[temp1]];
  time2 = Timing[
    temp2 = ExpandAll[temp1 /. G2dRule];
  ];
  Switch[p2, 1, Print[" G2dRule angewandt: ", time2],
    2, Print[" G2dRule angewandt: ", temp2, " in ", time2],
    3, Return[temp2]];
  time3 = Timing[
    temp3 = If[Head[temp2] === Plus,
      Collect2[ExpandAll[Map[({# /. KazdRule) &, temp2]], d[___]] /.
        Gam[x1_] => Gam[Expand[x1]],
      Collect2[ExpandAll[temp2 /. KazdRule], d[___]] /.
        Gam[x1_] => Gam[Expand[x1]]];
  ];
  temp3 =
  Collect2[ExpandAll[temp3 /. d -> 4 - ε /. B[_] -> 1 /. D[{x}, {y}] -> 1] /. Gam -> Gamma /.
    SimpRule /. GRule, d[___]];
  Switch[p3, 1, Print["KazdRule angewandt: ", time3],
    2, Print["KazdRule angewandt: ", temp3, " in ", time3],
    3, Return[temp3]];
  temp4 = temp3 /. GammaRule /. Gamma[x1_] =>  $\left(\frac{\Gamma[1 + x1]}{x1} \text{ ; Head}[x1] \neq \text{Plus}\right) /.$ 

$$\Gamma[1 + x1] \rightarrow \text{Exp}\left[-\text{EulerGamma } x1 + \sum_{s=2}^{\text{maximum}} \text{Zeta}[s] \frac{(-x1)^s}{s}\right] /.$$

    {vf -> 1 + aa1 ε + aa2 ε2,
      vf1 -> 1 + aa1 ε + aa2 ε2,
      vf2 -> 1 + 2 aa1 ε + aa12 ε2 + 2 aa2 ε2,
      vf3 -> 1 + 3 aa1 ε + 3 aa12 ε2 + 3 aa2 ε2};
  If[Head[temp4] === Plus,
    Return[Map[ExpandAll[ExpandAll[Normal[Series[#, {ε, 0, n}]] / ε] /.
      PolyGamma[i_, z_] -> (-1)i+1 i!  $\left(\text{Zeta}[i + 1] - \sum_{n1=1}^{z-1} \frac{1}{n1^{i+1}}\right)$  &, temp4]],
    Return[ExpandAll[ExpandAll[Normal[Series[temp5, {ε, 0, n}]] / ε] /.
      PolyGamma[i_, z_] -> (-1)i+1 i!  $\left(\text{Zeta}[i + 1] - \sum_{n1=1}^{z-1} \frac{1}{n1^{i+1}}\right)$ ]]];
  ]

```

```

CalcUV[arg_, n_, x_, y_, p1_: 0, p2_: 0, p3_: 0, p4_: 0] :=
Module[{temp1, temp2, temp3, temp4, temp5, time1, time2, time3, time4, s, max = 5},
time1 = Timing[
temp1 = ExpandAll[B[x] B[y] arg ∈ // R2GRule] // GKazRule[{x, y}];
temp1 = If[Head[temp1] === Plus, ExpandAll[Map[
(# // DPartialRule[x] // DPartialRule[y] /. PIDRule[{x, y}] /.
DRule[{x, y}] // GRule /.
{a_. + b_ G[0, {μ_, ν_, x}, {y}] ⇒ a - b k[{μ, ν}, -1] // MultiFreeQ[{b},
{G[___], d[___]}] /. {a_. + b_ G[0, {μ_, ν_, ρ_, x}, {y}] ⇒
a - b k[{μ, ν, ρ}, -1] // MultiFreeQ[{b}, {G[___], d[___]}] /.
{a_. + b_ G[1, {μ_, ν_, ρ_, σ_, x}, {y}] ⇒ a + b k[{μ, ν, ρ, σ}, -2] //
MultiFreeQ[{b}, {G[___], d[___]}]}) &, temp1]], ExpandAll[
temp1 // DPartialRule[x] // DPartialRule[y] /. PIDRule[{x, y}] /.
DRule[{x, y}] // GRule];];
Switch[p1, 1, Print[" R2GRule angewandt: ", time1],
2, Print[" R2GRule angewandt: ", temp1, " in ", time1],
3, Return[temp1]];
time2 = Timing[temp2 = ExpandAll[temp1 // G2dRule];];
Switch[p2, 1, Print[" G2dRule angewandt: ", time2],
2, Print[" G2dRule angewandt: ", temp2, " in ", time2],
3, Return[temp2]];
time3 = Timing[temp3 = If[Head[temp2] === Plus,
Collect2[ExpandAll[Map[(# // KazdRule) &, temp2]], d[___] /.
Gam[x1_] ⇒ Gam[Expand[x1]],
Collect2[ExpandAll[temp2 // KazdRule], d[___] /.
Gam[x1_] ⇒ Gam[Expand[x1]]];];
temp3 = Collect2[ExpandAll[temp3 // d → 4 - ε // B[_] → 1 /.
D[{x}, {y}] → 1] // Gam → Gamma // SimpRule // GRule, d[___]];
Switch[p3, 1, Print["KazdRule angewandt: ", time3],
2, Print["KazdRule angewandt: ", temp3, " in ", time3],
3, Return[temp3]];
time4 = Timing[temp4 = ExpandAll[temp3 /.
{d[x, y, {ind1___}, p_] ⇒ (d[x, y, {ind1}, p] /.
FourierRule[Length[{ind1}])} // d → 4 - ε // B[_] → 1 /.
D[{x}, {y}] → 1 // SimpRule];];
Switch[p4, 1, Print[" FourierRule angewandt: ", time4],
2, Print[" FourierRule angewandt: ", temp4, " in ", time4],
3, Return[temp4]];
temp5 = temp4 // GammaRule // Gamma[x1_] ⇒  $\left(\frac{\Gamma[1 + x1]}{x1} // \text{Head}[x1] \neq \text{Plus}\right) //$ 
Gamma[1 + x1_] ⇒ Exp[-EulerGamma x1 +  $\sum_{s=2}^{\max} \text{Zeta}[s] \frac{(-x1)^s}{s}$ ] /.
{vf → 1 + aa1 ε + aa2 ε2, vf1 → 1 + aa1 ε + aa2 ε2,
vf2 → 1 + 2 aa1 ε + aa12 ε2 + 2 aa2 ε2, vf3 → 1 + 3 aa1 ε + 3 aa12 ε2 + 3 aa2 ε2};
If[Head[temp5] === Plus, Return[Map[
ExpandAll[ExpandAll[Normal[Series[#, {ε, 0, n}]] / ε] /.
PolyGamma[i_, z_] → (-1)i+1 i!  $\left(\text{Zeta}[i + 1] - \sum_{s=1}^{z-1} \frac{1}{s^{i+1}}\right)$ ] &, temp5]],
Return[ExpandAll[ExpandAll[Normal[Series[temp5, {ε, 0, n}]] / ε] /.
PolyGamma[i_, z_] → (-1)i+1 i!  $\left(\text{Zeta}[i + 1] - \sum_{s=1}^{z-1} \frac{1}{s^{i+1}}\right)$ ]]];];

```

```

GammaRule = {Gamma[c1_. + n_Integer?Negative] =>  $\frac{\text{Gamma}[c1 + n + 1]}{c1 + n}$ ,
             Gamma[c1_. + n_Integer?Positive] => Gamma[c1 + n - 1] (c1 + n - 1)};

SimpRule = {Gamma[x_]^n_ => Gamma[ExpandAll[x]]^n,
            Power[x_, y_] => Power[x, ExpandAll[y]],
            d2o4Pi[x_] => d2o4Pi[ExpandAll[x]]};

VorFaktorRule[x_, y_] = {
  k[{ind___}, 0] => D[{ind, x}, {y}],
  k[{ind___}, 1] => D[{ind, id1, id1, x}, {y}] /; FreeQ[{ind}, id1],
  k[{ind___}, 2] =>
    D[{ind, id1, id1, id2, id2, x}, {y}] /; MultiFreeQ[{ind}, {id1, id2}],
  a_  $\delta[\mu_, \nu_]$   $\delta[\rho_, \sigma_]$  D[arg_] =>
    ExpandAll[a]  $\delta[\mu, \nu]$   $\delta[\rho, \sigma]$  D[arg] /; FreeQ[{a},  $\delta[___]$ ],
  a_  $\delta[\mu_, \nu_]$  D[arg_] => ExpandAll[a]  $\delta[\mu, \nu]$  D[arg] /; FreeQ[{a},  $\delta[___]$ ],
  a_ D[arg_] => ExpandAll[a] D[arg] /; FreeQ[{a},  $\delta[___]$ ];
}

```

# Literaturverzeichnis

- [1] B. S. DEWITT, *Dynamical theory of groups and fields*, Gordon and Breach, 1965.
- [2] B. S. DEWITT, Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory, *Phys. Rev.* **162**, 1195 (1967).
- [3] J. HONERKAMP, Chiral Multi-Loops, *Nucl. Phys.* **B36**, 130 (1971).
- [4] G. 'T HOOFT, An Algorithm for the Poles at Dimension Four in the Dimensional Regularization Procedure, *Nucl. Phys.* **B62**, 444 (1973).
- [5] G. 'T HOOFT, The Background Field Method in Gauge Field Theories, in *Acta Universitatis Wratislavenensis 38, 12th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz; Functional and Probabilistic Methods in Quantum Field Theory. Vol. I*, 1975.
- [6] B. DEWITT, in *Quantum Gravity II*, Oxford University Press, 1981.
- [7] L. F. ABBOTT, The Background Field Method Beyond One Loop, *Nucl. Phys.* **B185**, 189 (1981).
- [8] D. G. BOULWARE, Gauge Dependence of the Effective Action, *Phys. Rev.* **D23**, 389 (1981).
- [9] H. KLUBERG-STERN und J. B. ZUBER, Renormalization of Nonabelian Gauge Theories in a Background Field Gauge. I. Green's Functions, *Phys. Rev.* **D12**, 482 (1975).
- [10] M. LÜSCHER und P. WEISZ, Background Field Technique and Renormalization in Lattice Gauge Theory, *Nucl. Phys.* **B452**, 213 (1995), hep-lat/9504006.
- [11] L. F. ABBOTT, M. T. GRISARU und R. K. SCHAEFER, The Background Field Method and the S-Matrix, *Nucl. Phys.* **B229**, 372 (1983).
- [12] C. BECCHI und R. COLLINA, Further Comments on the Background Field Method and Gauge Invariant Effective Actions, *Nucl. Phys.* **B562**, 412 (1999), hep-th/9907092.
- [13] R. FERRARI, M. PICARIELLO und A. QUADRI, Algebraic Aspects of the Background Field Method, *IFUM-669-FT* (2000), hep-th/0012090.
- [14] H. D. POLITZER, Reliable perturbative Results for strong Interactions?, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [15] D. GROSS und F. WILCZEK, Ultraviolet Behavior of nonabelian Gauge Theories, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [16] E. E. T. P. CHENG und L. F. LI, Higgs Phenomena In Asymptotically Free Gauge Theories, *Phys. Rev.* **D9**, 2259 (1974).
- [17] W. E. CASWELL, Asymptotic behavior of nonabelian Gauge Theories to Two Loop Order, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 244 (1974).

- [18] D. R. T. JONES, Two Loop Diagrams in Yang-Mills Theory, *Nucl. Phys.* **B75**, 531 (1974).
- [19] M. E. MACHACEK und M. T. VAUGHN, Two Loop Renormalization Group Equations In A General Quantum Field Theory. 1. Wave Function Renormalization, *Nucl. Phys.* **B222**, 83 (1983).
- [20] M. E. MACHACEK und M. T. VAUGHN, Two Loop Renormalization Group Equations In A General Quantum Field Theory. 2. Yukawa Couplings, *Nucl. Phys.* **B236**, 221 (1984).
- [21] M. E. MACHACEK und M. T. VAUGHN, Two Loop Renormalization Group Equations In A General Quantum Field Theory. 3. Scalar Quartic Couplings, *Nucl. Phys.* **B249**, 70 (1985).
- [22] L. F. ABBOTT, Introduction to the Background Field Method, *Acta Phys. Polon.* **B13**, 33 (1982).
- [23] D. M. CAPPER und A. MACLEAN, The Background Field Method At Two Loops: A General Gauge Yang-Mills Calculation, *Nucl. Phys.* **B203**, 413 (1982).
- [24] R. M. VAN DAMME, Most General Two Loop Counterterm For Fermion Free Gauge Theories With Scalar Fields, *Phys. Lett.* **B110**, 239 (1982).
- [25] S. ICHINOSE und M. OMOTE, Renormalization using the Background Field Method, *Nucl. Phys.* **B203**, 221 (1982).
- [26] I. JACK und H. OSBORN, Two-Loop Background Field Calculations for Arbitrary Background Fields, *Nucl. Phys.* **B207**, 474 (1982).
- [27] R. M. J. VAN DAMME, *The Two - Loop Renormalization of General Quantum Field Theories.*, PhD thesis, 1984, INIS-mf-9756.
- [28] M. J. DUFF und M. RAMON-MEDRANO, On the effective Lagrangian for the Yang-Mills-Field, *Phys. Rev.* **D12**, 3357 (1975).
- [29] I. A. BATALIN und G. K. SAVVIDY, Vacuum Polarization by Covariant-constant Gauge Field: Two-loop Approximation, *Yerevan Physics Institute preprint EFI-299(24)-78* (1978).
- [30] G. 'T HOOFT und M. J. VELTMAN, One Loop Divergencies in the Theory of Gravitation, *Annales Poincare Phys. Theor.* **A20**, 69 (1974).
- [31] M. H. GOROFF und A. SAGNOTTI, Quantum Gravity at Two Loops, *Phys. Lett.* **B160**, 81 (1985).
- [32] M. H. GOROFF und A. SAGNOTTI, The ultraviolet behavior of Einstein Gravity, *Nucl. Phys.* **B266**, 709 (1986).
- [33] A. E. M. VAN DE VEN, Two Loop Quantum Gravity, *Nucl. Phys.* **B378**, 309 (1992).
- [34] P. A. GRASSI, The abelian Anti-Ghost Equation for the Standard Model in the 't Hooft Background Gauge, *Nucl. Phys.* **B537**, 527 (1999), hep-th/9804013.
- [35] A. DENNER, S. DITTMAYER und G. WEIGLEIN, The Background Field Formulation of the Electroweak Standard Model, *Acta Phys. Polon.* **B27**, 3645 (1996).
- [36] P. VAN NIEUWENHUIZEN, Supergravity, *Phys. Rept.* **68**, 189 (1981).
- [37] O. V. TARASOV, A. A. VLADIMIROV und A. Y. ZHARKOV, The Gell-Mann-Low Function Of QCD In The Three Loop Approximation, *Phys. Lett.* **B93**, 429 (1980).
- [38] S. A. LARIN und J. A. M. VERMASEREN, The Three Loop QCD Beta Function and Anomalous Dimensions, *Phys. Lett.* **B303**, 334 (1993).

- [39] A. G. PICKERING, J. A. GRACEY und D. R. JONES, Three loop gauge beta-function for the most general single gauge-coupling theory, *Phys. Lett.* **B510**, 347 (2001), hep-ph/0104247.
- [40] J. HONERKAMP, The Question of Invariant Renormalizability of the Massless Yang-Mills Theory in a Manifest Covariant Approach, *Nucl. Phys.* **B48**, 269 (1972).
- [41] I. BATALIN, S. MATINIAN und G. SAVVIDY, Vacuum Polarization by a Source-Free Gauge Field, *Sov. J. Nucl. Phys.* **26**, 214 (1977).
- [42] V. A. NOVIKOV, M. A. SHIFMAN, A. I. VAINSHTEIN und V. I. ZAKHAROV, Calculations in External Fields in Quantum Chromodynamics. Technical Review, *Fortschr. Phys.* **32**, 585 (1984).
- [43] G. M. SHORE, Symmetry Restoration and the Background Field Method, *Ann. Phys.* **137**, 262 (1981).
- [44] W. HEISENBERG und H. EULER., Consequences of Dirac's Theory of Positrons, *Z. Phys.* **98**, 714 (1936).
- [45] J. SCHWINGER, On Gauge Invariance and Vacuum Polarization, *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [46] I. JACK und H. OSBORN, Background Field Calculations in Curved Spacetime (I) General Formalism and Application to Scalar Fields, *Nucl. Phys.* **B234**, 331 (1984).
- [47] J. ILIOPOULOS, C. ITZYKSON und A. MARTIN, Functional Methods and Perturbation Theory, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 165 (1975).
- [48] J. M. CHUNG und B. K. CHUNG, Three-loop Renormalization of the Effective Potential, *Phys. Rev.* **D56**, 6508 (1997).
- [49] K. G. CHETYRKIN und F. V. TKACHEV, Infrared R Operation and Ultraviolet Counterterms in the MS Scheme, *Phys. Lett.* **B114**, 340 (1982).
- [50] K. G. CHETYRKIN und V. A. SMIRNOV, R\* Operation corrected, *Phys. Lett.* **B144**, 419 (1984).
- [51] A. N. SCHELLEKENS, *Perturbative QCD and Lepton Pair Production.*, PhD thesis, Nijmegen U., 1981, RX-953.
- [52] E. BRAATEN und J. LEVEILLE, Minimal Subtraction and Momentum Subtraction in Quantum Chromodynamics at Two-loop Order, *Phys. Rev.* **D24**, 1369 (1981).
- [53] R. JACKIW, Functional Evaluation of the Effective Potential, *Phys. Rev.* **D9**, 1686 (1974).
- [54] S. COLEMAN und E. WEINBERG, Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking, *Phys. Rev.* **D7**, 1888 (1973).
- [55] M. R. BROWN und M. J. DUFF, Exact results for effective Lagrangians, *Phys. Rev.* **D11**, 2124 (1975).
- [56] P. S. HOWE, G. PAPADOPOULOS und K. S. STELLE, The Background Field Method and the Nonlinear Sigma Model, *Nucl. Phys.* **B296**, 26 (1988).
- [57] D. I. KAZAKOV, The Method of Uniqueness, a new Powerful Technique for Multiloop Calculations, *Phys. Lett.* **B133**, 406 (1983).
- [58] D. I. KAZAKOV, Calculation of Feynman Integrals by the Method of 'Uniqueness', *Theor. Math. Phys.* **58**, 223 (1984).

- [59] H. KLEINERT, J. NEU und V. SCHULTE-FROHLINDE, Five Loop Renormalization Group Functions of  $O(N)$  Symmetric  $\phi^4$  Theory and epsilon Expansions of Critical Exponents up to epsilon<sup>5</sup>, *Phys. Lett.* **B272**, 39 (1991), Erratum-Ibid. **B319**, 545 (1993), hep-th/9503230.
- [60] D. BALIN und A. LOVE, *Introduction to Gauge Field Theory*, IOP Publishing Limited, 1986.
- [61] L. H. RYDER, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985.
- [62] R. RIVERS, *Path integral methods in quantum field theory*, Cambridge University Press, 1987.
- [63] J. ZINN-JUSTIN, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1989.
- [64] R. H. BRANDENBERGER, Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universe Models, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 1 (1985).
- [65] P. RAMOND, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [66] K. SCHARNHORST, Background Field Method And Effective Action, *HUTP-87/A087* (1987).
- [67] I. S. GRADSTEIN und I. M. RYSHIK, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, volume 2, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt/M., 1 edition, 1981.
- [68] R. A. BERTLMANN, *Anomalies in Quantum Field Theories*, Clarendon Press Oxford, 1996.
- [69] C. FORD und D. R. JONES, The Effective potential and the differential equations method for Feynman integrals, *Phys. Lett.* **B274**, 409 (1992), Erratum-ibid. **B 285** (1992) 399.
- [70] A. I. DAVYDYCHEV und J. B. TAUSK, Two Loop Selfenergy Diagrams with different Masses and the Momentum Expansion, *Nucl. Phys.* **B397**, 123 (1993).
- [71] A. I. DAVYDYCHEV und J. B. TAUSK, A Magic Connection between massive and massless Diagrams, *Phys. Rev.* **D53**, 7381 (1996), hep-ph/9504431.
- [72] G. 'T HOOFT und M. J., *Diagrammar*, (1973).
- [73] K. G. CHETYRKIN und V. A. SMIRNOV, Dimensional Regularization And Infrared Divergences, *Theor. Math. Phys.* **56**, 770 (1984).
- [74] G. M. CICUTA und E. MONTALDI, Analytic Renormalization Via Continuous Space Dimension, *Lett. Nuovo Cim.* **4**, 329 (1972).
- [75] A. A. VLADIMIROV, D. KAZAKOV und O. V. TARASOV, Calculation of critical exponents by Quantum Field Theory Methods, *Sov. Phys. JETP* **50**, 521 (1979).
- [76] T. VAN RITBERGEN, J. A. VERMASEREN und S. A. LARIN, The four-loop beta function in quantum chromodynamics, *Phys. Lett.* **B400**, 379 (1997), hep-ph/9701390.
- [77] T. MUTA, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 1987.
- [78] N. K. NIELSEN und P. VAN NIEUWENHUIZEN, Gauge Independence Of The Local Trace Anomaly Of Vectors And Antisymmetric Tensor Fields, *Phys. Rev.* **D38**, 3183 (1988).
- [79] V. A. FOCK, *Sov. Phys.* **12**, 404 (1937).
- [80] J. SCHWINGER, *Particles, Sources and Fields. Volume II*, 1973.
- [81] R. DELBOURGO und TRIYANTA, Equivalence between the Fock-Schwinger Gauge and the Feynman Gauge, *Int. J. Mod. Phys.* **A7**, 5833 (1992).
- [82] G. 'T HOOFT und M. J. VELTMAN, One Loop Divergencies In The Theory Of Gravitation, *Annales Poincare Phys. Theor.* **A20**, 69 (1974).

- [83] M. T. GRISARU, Two Loop Renormalizability Of Supergravity, *Phys. Lett.* **B66**, 75 (1977).
- [84] S. DESER, J. H. KAY und K. S. STELLE, Renormalizability Properties Of Supergravity, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 527 (1977).
- [85] Z. BERN, L. DIXON, D. C. DUNBAR, M. PERELSTEIN und J. S. ROZOWSKY, On the Relationship Between Yang-Mills Theory and Gravity and its Implication for Ultraviolet Divergences, *Nucl. Phys.* **B530**, 401 (1998).
- [86] Z. BERN, Perturbative quantum gravity and its relation to gauge theory, gr-qc/0206071.
- [87] K. S. STELLE, Revisiting supergravity and superYang-Mills renormalization, hep-th/0203015.
- [88] M. K. FUNG, P. VAN NIEUWENHUIZEN und D. R. JONES, Transversality of the Gravitino Selfenergy, Ward Identities and dimensional Regularization, *Phys. Rev.* **D22**, 2995 (1980).
- [89] A. DAS und D. Z. FREEDMAN, Gauge Quantization For Spin 3/2 Fields, *Nucl. Phys.* **B114**, 271 (1976).
- [90] L. PARKER, Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-time: Effective Action and Energy Momentum Tensor, in *Recent Developments In Gravitation, Cargese 1978*, edited by M. LEVY und S. DESER, p. 219, New York, 1978, Plenum.
- [91] T. S. BUNCH und P. PANANGADEN, On Renormalization Of Lambda Phi\*\*4 Field Theory In Curved Space-Time. II, *J. Phys.* **A13**, 919 (1980).
- [92] S. L. ADLER, J. LIEBERMAN und Y. J. NG, Regularization Of The Stress Energy Tensor For Vector And Scalar Particles Propagating In A General Background Metric, *Annals Phys.* **106**, 279 (1977).
- [93] U. MÜLLER, C. SCHUBERT und A. M. VAN DE VEN, A closed formula for the Riemann normal coordinate expansion, *Gen. Rel. Grav.* **19**, 1759 (1999).
- [94] N. N. BOGOLIUBOV und O. S. PARASIUK, On the Multiplication of the Causal Function in the Quantum Theory of Fields, *Acta Math.* **97**, 227 (1957).
- [95] V. A. SMIRNOV, Absolutely Convergent Alpha Representation Of Analytically And Dimensionally Regularized Feynman Amplitudes, *Theor. Math. Phys.* **59**, 563 (1984).
- [96] K. G. CHETYRKIN und F. V. TKACHOV, Integration by Parts: The Algorithm to Calculate  $\beta$ - Functions in 4 Loops, *Nucl. Phys.* **B192**, 159 (1981).
- [97] I. M. GELFAND und G. E. SHILOV, *Generalized Functions*, volume 1, Academic Press, 1968.



## Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Hermann Nicolai für die Betreuung meiner Arbeit, seine unendliche Geduld und die, aus seiner guten Menschenkenntnis heraus geborene Idee, mich mit Anton van de Ven zusammen arbeiten zu lassen.

Ganz besonderer Dank geht an Anton van de Ven, der für den größten Teil meines physikalischen Wissens über Eichtheorien verantwortlich zeichnet, mir mit seinem Enthusiasmus und seiner Disziplin über schwierige Fragestellungen hinweg geholfen hat und sich dabei immer wie selbstverständlich an die durch meine Situation vorgegebenen Bedürfnisse angepasst hat.

Des weiteren möchte ich mich bedanken bei einer Vielzahl von Betreuern und Zivildienstleistenden, die in stundenlangen Sitzungen dieses Manuskript nach meinen Anweisungen zu Papier gebracht bzw. meine Programme, gefolgt von unzähligen Änderungen, in den Computer eingegeben haben.

Weiterhin danke ich Jan Wiemer und Peter beim Graben für viele Nachmittage gefüllt mit anregenden Diskussionen und Einblicken in ihre Arbeitsgebiete.

Insbesondere möchte ich auch Herrn Gertz und seinen Mitarbeitern von der Unfallkasse Schleswig-Holstein danken, die mich in jeder ihnen möglichen Form unterstützt haben. Dank der vielen Gespräche und Besuche waren sie stets in der Lage mir adäquat, kreativ und unbürokratisch zu helfen.