

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit ist es, die Effektivität der kovarianten Hintergrundfeldmethode anhand der konkreten Berechnung der  $\beta$ -Funktion für die reine Yang-Mills-Theorie bis in dritter Ordnung unter Beweis zu stellen.

Die entscheidenden Vorteile dieser Methode lassen sich wie folgt zusammenfassen: Zum einen führt die ausschließliche Verwendung von kovarianten Größen bezüglich des Hintergrundfeldes dazu, dass sich die Anzahl der zu berechnenden Graphen erheblich reduziert. Zum anderen bewirkt die Wahl der Fock-Schwinger-Eichung für das Hintergrundfeld, dass sich dies durch seine Feldstärke ausdrücken läßt und damit die generierten Graphen allesamt logarithmisch divergent sind. D. h., die Divergenzen enthalten keine Ableitungen bzw. sind unabhängig vom Impuls.

Die Berechnung an sich findet in zwei Stufen im Ortsraum statt. Zuerst werden aus der effektiven Wirkung die Graphen der Ordnung  $n$  generiert, mit dem Unterschied, dass die Feynman-Regeln nur kovariante Größen enthalten und die Propagatoren in dem Sinne exakt sind, als dass in ihnen sämtliche das Hintergrundfeld enthaltene Korrekturen aufsummiert sind. Mit Hilfe zweier Identitäten lassen sich anschließend alle skalaren Propagatoren derart in vektorielle überführen, dass die Anzahl der Graphen nochmals ca. auf die Hälfte reduziert wird. Im Falle der 2-Schleifen-Rechnung verbleiben drei und im Falle der 3-Schleifen-Rechnung um die hundert Graphen. Da bis zu diesem Zeitpunkt keine Näherung in die Rechnung eingegangen ist, kann an dieser Stelle auch das effektive Potential bestimmt werden. Dieses wird in der Arbeit exemplarisch bis in die zweite Ordnung berechnet.

Im nächsten Schritt werden die exakten Propagatoren und anschließend der gesamte Graph derart entwickelt, dass die dabei entstehenden neuen Graphen nur noch von der Feldstärke des Hintergrundfeldes abhängen. Für die Renormierung genügt es, sich auf die Graphen zu beschränken, die quadratisch in der Feldstärke sind. Unter Verwendung einiger algebraischer Identitäten, die sich mit der Renormierung vertragen, reduziert sich die Zahl der Graphen in zweiter Ordnung auf eins und in dritter Ordnung auf 24, ohne dass auch nur einer von ihnen explizit berechnet worden ist.

Die relativ zügige Art und Weise, mit der sich durch die Verwendung der kovarianten Hintergrundfeldmethode die Ergebnisse aus der Literatur verifizieren lassen, zeigt, dass mit ihrer Hilfe auch die Lösung von komplexeren Problemen, wie z. B. die 3-Schleifen-Rechnung in der Supergravitation durchaus im Bereich des Möglichen liegt.

## Abstract

The main purpose of this work is to demonstrate the effectiveness of the covariant background field method in the explicit calculation of the  $\beta$ -function for the pure Yang-Mills theory up to three loop.

The most important advantages of this method may be summarized as follows: By using solely covariant quantities in terms of the background field, the number of graphs to be calculated can be reduced significantly. By imposing the Fock-Schwinger gauge on the background field, the latter can be expressed in terms of its own field strength. Thus all generated graphs are logarithmically divergent, which means that the divergences contain no derivatives respectively no momentum.

The calculation has to be done in two steps in coordinate space. Starting from the effective action all graphs of the order  $n$  are generated. The corresponding Feynman rules contain only covariant terms and the propagators are exact, in so far as all corrections depending on the background field are summed up in them. By using two propagator identities all scalar propagators are transformed into vectorial ones, thus reducing the number of graphs once more to about approximately a half. Regarding the case of two-loop only three graphs remain, whereas in three-loop about one hundred graphs are left. Since, up to this point, no approximation has been used, it is still possible to calculate the effective potential, which will be done up to the second order.

The next step implies the evaluation of the exact propagators and afterwards of the whole graph in such a way, that the resulting new graphs depend only on the field strength of the background field. As long as one is interested in renormalization only, it is sufficient to consider only those graphs which contain the field strength quadratically. By using some algebraic identities, which do not interfere with renormalization, the number of graphs in second order is reduced to one and in third order to 24, without calculating any graph explicitly.

The efficient manner by which the results of the literature can be verified, shows that using the covariant background field method, should enable one to tackle even more complex problems such as e. g. the three loop calculation in supergravity.