Spiegelungsstrukturen und K-Loops

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Elisabetta Gabrieli
aus Gardone V.T. Brescia, Italien

Hamburg
2000

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg
auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. A. Kreuzer
und Prof. Dr. Dr. h. c. H. Karzel

Hamburg, den 24.11.1999

Prof. Dr. H. Daduna,
Dekan des Fachbereiches Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Begriff der *Spiegelungsstruktur* hat seinen Ursprung in der absoluten Geometrie, insbesondere in der euklidischen Geometrie.
Im Jahre 1933 gibt Thomsen ein spiegelungstheoretisches Axiomensystem für die euklidische Geometrie an (vgl. [22]). Hier wird zum ersten Mal die (euklidische) Elementargeometrie allein durch Rechnen in der Bewegungsgruppe aufgebaut. Der Grundgedanke ist der, daß es zu jedem Punkt und jeder Geraden der euklidischen Ebene genau eine Punktspiegelung bzw. eine Geradenspiegelung gibt. Man hat also eine injektive Abbildung von der Menge aller Punkte und Geraden in die Bewegungsgruppe. Die Relationen *Inzidenz* und *Senkrechtstehen* lassen sich dann einfach durch eine algebraische Relation in der Gruppe ausdrücken: Bezeichnet man mit $\widetilde{p}$ bzw. $\widetilde{G}$ die zum Punkt p bzw. der Geraden G zugehörige Punktspiegelung bzw. Geradenspiegelung, so bedeutet

$$p \in G \iff \widetilde{p} \circ \widetilde{G} \quad \text{ist involutorisch,}$$
$$G \perp H \iff \widetilde{G} \circ \widetilde{H} \quad \text{ist involutorisch.}$$

A. Schmidt ist der Erste, der den Dreispiegelungssatz als Axiom in einem rein gruppentheoretisch formulierten Axiomensystem für die absolute Geometrie fordert. Bachmann vereinfacht später das Schmidt'sche Axiomensystem zu folgender Form (vgl. [1]):
Es sei G eine Gruppe, $J := \{x \in \mathrm{G} \mid x^2 = id,\ x \neq id\} \subset \mathrm{G}$ die Teilmenge aller involutorischen Elemente von G und $\mathrm{E} \subset J$ ein Erzeugendensystem, das invariant gegenüber inneren Automorphismen ist, d.h. für jedes $a \in \mathrm{G}$ gilt $a\mathrm{E}a^{-1} \subseteq \mathrm{E}$. Die Menge E spielt die Rolle der Geradenmenge, und die Punkte sind involutorische Gruppenelemente, die sich als Produkte zweier Geraden darstellen lassen. Er fordert die Dreispiegelungssätze für Punkt- und Lotbüschel, ein Reichhaltigkeitsaxiom und daß die Menge der Punkte und Geraden einen Inzidenzraum bilden.
Die weitere Entwicklung der Spiegelungstheorie wird 1954 durch ein Axiomensystem von Sperner [21] beeinflußt. Sperner untersucht, unter welchen minimalen Voraussetzungen der Satz von Desargues mit rein gruppentheoretischen Hilfsmitteln beweisbar ist. Er geht von einer Gruppe G und von einem involutorischen Erzeugendensystem E aus und verlangt im wesentlichen nur noch den allgemeinen Dreispiegelungssatz. Die Erzeugenden aus E übernehmen wieder die Rolle von Geraden, die Geradenbüschel die Rolle von Punkten. Die hierdurch gegebenen, noch allgemeineren absoluten Geometrien können ungewöhnliche Eigenschaften haben, z.B. daß Geraden auf sich selbst senkrecht stehen können. Das liegt

wesentlich an der Charakteristik des Koordinatenkörpers K, die in diesem Fall gleich zwei ist. Im A. Schmidt-Bachmann'schen Axiomensystem ist das nicht möglich.
Die umfassendsten Untersuchungen stammen hier von Karzel, wobei man auch Beiträge von Kannenberg, Harms und Ellers erwähnen sollte.

Die Theorie der K-Loops geht aus der Theorie der Fastbereiche hervor (vgl. [7]): Da bis heute keine Beispiele für echte Fastbereiche bekannt sind um partielle Resultate zu erreichen, untersuchen W. Kerby und H. Wefelscheid die additive Struktur eines Fastbereiches und nennen solche Strukturen „K-Loops“[1]. A. A. Ungar zeigt schließlich in [23] und [24], daß die Menge der Geschwindigkeiten $\mathbb{R}_c^3 := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < c\}$, die betragsmäßig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, mit der relativistischen Geschwindigkeitsaddition „$\oplus$“ einen K-Loop bildet und gibt damit ein interessantes Beispiel aus der Physik an (vgl. auch [16]). Seitdem ist das Interesse an K-Loops wieder aufgeblüht.
In den letzten Jahren heben verschiedene Autoren eine enge Beziehung zwischen K-Loops und Geometrie hervor (vgl. z.B. [13] [14] [12]).
Wir betrachten eine nicht elliptische absolute Geometrie $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}, \equiv, \alpha)$. Wir bezeichnen mit $\widetilde{p}$ die Punktspiegelung am Punkt $p \in \mathbf{P}$, d.h. eine Bewegung von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}, \equiv, \alpha)$ mit der Eigenschaft $\widetilde{p} \circ \widetilde{p} = id$ und $Fix\, \widetilde{p} = \{p\}$. Es sei $0 \in \mathbf{P}$ ein ausgezeichneter Punkt und p' der Mittelpunkt zwischen 0 und p für jeden Punkt p. Für $a, b \in \mathbf{P}$ setzen wir $a + b := \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(b)$. Dann können wir die folgenden zwei Fälle unterscheiden:

1. Falls $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}, \equiv, \alpha)$ eine singuläre Geometrie ist (insbesondere ein euklidischer Raum), dann bildet das Paar $(\mathbf{P}, +)$ eine abelsche Gruppe.

2. Falls $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}, \equiv, \alpha)$ eine ordinäre Geometrie ist (insbesondere ein hyperbolischer Raum), dann ist die Struktur $(\mathbf{P}, +)$ ein echter K-Loop.

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit Spiegelungsstrukturen, K-Loops und ihren Zusammenhängen.
Im ersten Kapitel werden zunächst in Abschnitt 1 einige Eigenschaften von Schiefkörpern mit involutorischen Antiautomorphismen, kinematischen Algebren, euklidischen Hüllen und Quaternionenerweiterungen zusammengestellt, die für die weiteren Untersuchungen nötig sind.
In Abschnitt 2 bzw. Abschnitt 3 beweisen wir Eigenschaften von orthogonalen und unitären Vektorräumen bzw. projektiv unitären und metrischen Räumen, die wir für unsere weiteren Entwicklungen (siehe Paragraph 2.6) brauchen. Die Hauptresultate werden in Satz 1.2.6 für den Vektorraum-Fall und in Satz 1.3.6 für den projektiven Fall geschildert.

Kern der Arbeit ist Kapitel 2. Darin werden die Beziehungen zwischen Loops und Spiegelungsstrukturen untersucht.
Im ersten Abschnitt werden die grundlegenden Definitionen von *Quasigruppe* (*Rechtsquasigruppe*), *Loop* (*Rechtsloop*) und *K-Loop* gegeben.
In Abschnitt 2 führen wir die Begriffe *Abbildungsmenge*, *Strukturkeim*, *Bündelkeim* und dadurch auch den Begriff *Inzidenzfaserung* und *gefaserter Loop* ein und beweisen einige wichtige Eigenschaften.

[1] Das „K“ ist zu Ehren von H. Karzel.

Abschnitt 3 diskutiert den Zusammenhang zwischen Abbildungmengen und Quasigruppen bzw. Loops.
In Abschnitt 4 werden die Begriffe *Spiegelungsstruktur* bzw. *Punktspiegelungsstruktur* und *Spiegelungsgeometrie* bzw. *Punktspiegelungsgeometrie* eingeführt. Jeder Spiegelungsstruktur läßt sich ein K-Loop zuordnen (siehe Satz 2.4.2). Dieser K-Loop ist genau dann eine Gruppe, wenn die Spiegelungsstruktur singulär ist (siehe Satz 2.4.6).
In Abschnitt 5 geben wir neue interessante Beispiele von Punktspiegelungsstrukturen und von Spiegelungsstrukturen an, die keine Punktspiegelungsstrukturen sind (vgl. §2.5.3). Diese Beispiele stammen von projektiven unitären Räumen bzw. von metrischen Räumen. Außerdem erkunden wir die Struktur des abgeleiteten K-Loops näher.
Wenn wir von einem Rechtsloop ausgehen, dann können wir eine Spiegelungsstruktur bzw. eine Punktspiegelungsstruktur ableiten. Dieses Problem wird in Abschnitt 6 diskutiert. Die Hauptsätze werden in 2.6.4 und 2.6.7 vorgestellt.
In Abschnitt 7 wird der Begriff *Spiegelungskeim* eingeführt. Wir betrachten einen gefaserten Rechtsloop und die Geradenspiegelung an den Elementen der Faserung. Dann können wir den Begriff *Senkrecht*, *Lote fällen* und *Lote errichten* (vgl. Sätze 2.7.6 und 2.7.9) und durch die Geradenspiegelungen (Spiegelungskeime) den Begriff *Punktspiegelung* ableiten. Das Haupttheorem wird in 2.7.16 vorgestellt, wobei ein K-Loop aus einem gefaserten Rechtsloop mit Spiegelungskeimen konstruiert wird.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Geweben und Loops. Im ersten Abschnitt werden grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Netzen, Ketten und 3-Geweben gegeben und ihr Zusammenhang mit der Theorie der Loops hervorgehoben (siehe Sätze 3.1.13 und 3.1.14).
Im zweiten Abschnitt werden klassische, anschauliche Schließungssätze in 3-Geweben vorgestellt, die gewisse Klassen von Loops kennzeichnen (Reidemeister-Bedingung, Bolsche 3 Bedingung und Sechseckbedingung). Außerdem wird eine neue Konfiguration, die Knickkonfiguration (siehe S. 97), welche die von den Bolschen 3-Geweben abgeleiteten K-Loops vollständig charakterisiert (siehe Satz 3.2.7), vorgeführt.

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. Helmut Karzel für die Anregung zum Thema dieser Dissertation und seine hervorragende Betreuung während der Arbeit ganz herzlich bedanken. Ich danke Herrn Prof. Dr. Alexander Kreuzer für seine Unterstützung an der Universität Hamburg. Einen besonderen Dank möchte ich auch an Michael und Olaf für das Korrekturlesen und an Eckart für die EDV-Unterstützung aussprechen.

Hamburg, im August 1999

Elisabetta Gabrieli

1

Grundbegriffe der metrischen Geometrie

1.1 Schiefkörper mit involutorischen Antiautomorphismen

Im Folgenden bezeichne $(\mathrm{L}, +, \cdot)$ einen beliebigen Körper und $(\mathrm{H}, +, \cdot, -)$ einen Körper mit einem involutorischen Antiautomorphismus $- : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$, d.h. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathrm{H} \colon \overline{\lambda + \mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$, $\overline{\lambda \cdot \mu} = \overline{\mu} \cdot \overline{\lambda}$ und $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$. Es sei $\mathrm{F} := \mathit{Fix}\,(-) = \{\lambda \in \mathrm{H} \mid \overline{\lambda} = \lambda\}$.
Dann gilt

Lemma 1.1.1. $(\mathrm{F}, +)$ *ist eine Gruppe mit den Eigenschaften*

$$\{\alpha + \overline{\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{H}\} \cup \{\alpha \cdot \overline{\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{H}\} \subset \mathrm{F} \quad \textit{und} \quad \alpha\,\mathrm{F}\,\overline{\alpha} = \mathrm{F} \quad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathrm{H} \setminus \{0\} := \mathrm{H}^*.$$

Beweis. Für alle $\alpha \in \mathrm{H}$ ist

$$\overline{\alpha + \overline{\alpha}} = \overline{\alpha} + \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\alpha} + \alpha = \alpha + \overline{\alpha}\,, \quad \overline{\alpha\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\alpha} = \alpha\,\overline{\alpha} \quad \text{und} \quad \overline{\alpha\,\mathrm{F}\,\overline{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\mathrm{F}}\,\overline{\alpha} = \alpha\,\mathrm{F}\,\overline{\alpha}.$$

□

Wir führen auf F eine Relation ein. Für α, $\beta \in \mathrm{F}$ sei

$$\alpha \sim \beta \colon \iff \exists\, z \in \mathrm{H}^* \quad \text{mit} \quad \beta = z\alpha\overline{z}.$$

Proposition 1.1.2. *„$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Da $1 \in \mathrm{H}^*$ und $\overline{1} = 1$ ist „$\sim$“ reflexiv.
„$\sim$“ ist symmetrisch: Es sei $\alpha \sim \beta$, dann gilt $\beta = z\alpha\overline{z}$ für ein $z \in \mathrm{H}^*$. Daraus folgt

$$\alpha = z^{-1}\beta(\overline{z})^{-1} = z^{-1}\beta(\overline{z^{-1}})\,,$$

da„$-$“ ein Antiautomorphismus ist.

„$\sim$" ist transitiv: Es seien α, β, $\gamma \in \mathrm{F}$ mit $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$. Dann gilt $\alpha = z\beta\overline{z}$ und $\beta = q\gamma\overline{q}$ für z, $q \in \mathrm{H}^*$. Daraus folgt

$$\alpha = z(q\gamma\overline{q})\overline{z} = zq\gamma\overline{zq} = h\gamma\overline{h} \quad \text{für} \quad h = zq \in \mathrm{H}^*\,, \quad \text{d.h.} \quad \alpha \sim \gamma.$$

$\square$

Hierdurch erhalten wir eine Klasseneinteilung von F in Äquivalenzklassen. Es sei

$$\mathrm{F}/_\sim := \{[\alpha]_\sim, [\beta]_\sim \cdots \mid \alpha, \beta \in \mathrm{F}\}.$$

Wir identifizieren die Klasse $[\alpha]_\sim$ mit dem Repräsentanten α.

Wir können zwei Fälle unterscheiden:

a) $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}$, d.h. F ist multiplikativ abgeschlossen.

b) $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \not\subset \mathrm{F}$.

Bemerkung. Es gibt involutorische Antiautomorphismen mit $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \not\subset \mathrm{F}$:
Es sei $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ der reelle Quaternionenkörper. Wir definieren die Abbildung

$$\iota := -\circ^i : \begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow \quad \mathbb{H} \\ x & \longmapsto \quad i\overline{x}(-i) \end{cases},$$

wobei „^{i}" der innere Automorphismus $x \longrightarrow ix(-i)$ ist und $\overline{x} := \xi_0 - \xi_1 i - \xi_2 j - \xi_3 ij$ für $x := \xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 ij \in \mathbb{H}$.
ι ist ein involutorischer Antiautomorphismus.
Wir betrachten $\mathrm{F} := Fix(\iota) = \{x \in \mathbb{H} \mid \iota(x) = x\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\iota(x) = x \iff i\overline{x}(-i) = x \iff xi = i\overline{x} \iff \\ &\iff (\xi_0 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 ij)i = i(\xi_0 - \xi_1 i - \xi_2 j - \xi_3 ij) \iff \\ &\iff \xi_0 i - \xi_1 - \xi_2 ij + \xi_3 j = \xi_0 i + \xi_1 - \xi_2 ij + \xi_3 j \iff \xi_1 = 0. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathrm{F} = \{\alpha + \beta j + \gamma ij \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} + \mathbb{R}j + \mathbb{R}ij$, und es gilt $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \not\subset \mathrm{F}$, da

$$(ij)j = -i \notin \mathrm{F}.$$

Lemma 1.1.3. *Wenn a) gilt, so ist* F *ist ein kommutativer normaler Unterkörper von* H, *i.Z.* $\mathrm{F} \trianglelefteq \mathrm{H}$, *d.h.* $\forall\, a \in \mathrm{H}^*\colon a\mathrm{F}a^{-1} \subset \mathrm{F}$.

Beweis. Für $a, b \in \mathrm{F}$ gilt also $a \cdot b = \overline{a \cdot b} = \overline{b} \cdot \overline{a} = b \cdot a$.
Da für jedes $a \in \mathrm{H}^*$, $a^{-1} = \overline{a} \cdot (a\overline{a})^{-1}$ gilt, folgt mit 1.1.1

$$a\mathrm{F}a^{-1} = a\mathrm{F}\overline{a}(a\overline{a})^{-1} \subset \mathrm{F}(a\overline{a})^{-1} \subset \mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}.$$

$\square$

Definition 1.1.1.

$$\mathrm{Z(L)} := \{c \in \mathrm{L} \mid \forall\, x \in \mathrm{L} \colon cx = xc\}$$

heißt das *Zentrum* von L.

Satz 1.1.4 (Cartan-Brauer-Hua). *Ist* M *ein echter Unterkörper von* L *mit* $a\mathrm{M}a^{-1} \subset \mathrm{M}$ *für alle* $a \in \mathrm{L}^*$, *so folgt* $\mathrm{M} \subset \mathrm{Z(L)}$.

Beweis. vgl. [3] (S. 323). □

Nach 1.1.3, 1.1.4 folgt

Satz 1.1.5. *Es sei Char* $\mathrm{H} \neq 2$. *Wenn a) gilt, so ist* F *ein Körper, der im Zentrum von* H *enthalten ist, d.h.* $\mathrm{F} \subset \mathrm{Z(H)}$, *und* $(\mathrm{F_N}, \cdot)$ *mit* $\mathrm{F_N} := \{z\overline{z} \mid z \in \mathrm{H}^*\}$ *ist eine kommutative Untergruppe von* $(\mathrm{F}^*, \cdot)$ *mit* $\mathrm{F}^{(2)} := \{x^2 \mid x \in \mathrm{K}^*\} \leq \mathrm{F_N}$. *Für* $\mathrm{N} := \{x \in \mathrm{H} \mid \overline{x} = -x\}$ *ist* $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N}$ *die direkte Summe der* F*-Untervektoräume* F *und* N.

Wir geben hier einen direkten Beweis für diesen Satz an.

Beweis. Für jedes $y \in \mathrm{H}$ gilt

$$y = \frac{1}{2}(y + \overline{y}) + \frac{1}{2}(y - \overline{y}) \quad \text{mit} \quad y + \overline{y} \in \mathrm{F} \quad \text{und} \quad y - \overline{y} \in \mathrm{N}\,, \quad \text{d.h.} \quad \mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N}.$$

Es sei jetzt $\lambda \in \mathrm{F}^*$ und $x \in \mathrm{N}$. Es gilt $\lambda x = \mu + y$ mit $\mu \in \mathrm{F}$, $y \in \mathrm{N}$, und daraus folgt $-x\lambda = \overline{x}\overline{\lambda} = \overline{\lambda x} = \mu - y$. Somit ist

$$\lambda x - x\lambda = 2\mu \quad (1)$$

und daher $\lambda^{-1}x\lambda = x - 2\lambda^{-1}\mu$. Wir setzen

$$\xi := 2\lambda^{-1}\mu \quad (2).$$

Es gilt $\xi \in \mathrm{F}$, da $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}$. Dann gilt

$$\lambda^{-1}x\lambda = x - \xi \quad (3),$$

somit

$$(\lambda^{-1}x\lambda)^2 = \lambda^{-1}x^2\lambda = x^2 \quad (4),$$

weil $(\mathrm{F}, \cdot)$ kommutativ ist (vgl. 1.1.3) und $x^2 \in \mathrm{F}$, da $\overline{x^2} = \overline{x}\,\overline{x} = (-x)(-x) = x^2$. Wir setzen (3) in (4) ein:

$$x^2 = (x - \xi)^2 = x^2 - \xi x - x\xi + \xi^2.$$

Daraus folgt

$$\xi^2 = \overline{\xi^2} = -x\xi + \xi(-x) = -(x\xi + \xi x) = -\xi^2 \iff \xi^2 = 0 \iff \xi = 0.$$

Also gilt $0 = \xi = 2\lambda^{-1}\mu$ (vgl. (2)), und daraus folgt $\mu = 0$, da $\lambda \neq 0$, somit $\lambda x = x\lambda$ (vgl. (1)), d.h. $\mathrm{F} \subset \mathrm{Z(N)}$.
Es sei jetzt $\eta + x \in \mathrm{H}$ mit $\eta \in \mathrm{F}$ und $x \in \mathrm{N}$. Da $(\mathrm{F}, \cdot)$ kommutativ ist und $\mathrm{F} \subset \mathrm{Z(N)}$, gilt

$$\lambda(\eta + x) = \lambda\eta + \lambda x = \eta\lambda + x\lambda = (\eta + x)\lambda\,,$$

d.h. $\mathrm{F} \subset \mathrm{Z(H)}$.
Nach 1.1.1 ist $\mathrm{F_N} \subset \mathrm{F}$. Es seien $u\overline{u}$, $v\overline{v} \in \mathrm{F_N}$, dann gilt

$$(u\overline{u})(v\overline{v}) = x\overline{x} \quad \text{mit} \quad x = uv\,, \quad \text{weil}$$
$$x\overline{x} = u(v\overline{v})\overline{u} \overset{v\overline{v}\in\mathrm{F}\subset\mathrm{Z(H)}}{=} (u\overline{u})(v\overline{v}).$$

Es sei $u\overline{u} \in \mathrm{F_N}$. Dann gilt

$$(u\overline{u})^{-1} = \overline{u}^{-1}u^{-1} = \overline{(u^{-1})}\;\overline{\overline{(u^{-1})}} = w\overline{w} \quad \text{mit} \quad w = \overline{u}^{-1}.$$

Es sei $u \in \mathrm{F}$. Dann ist $u^2 = uu = u\overline{u}$. Daraus folgt $\mathrm{F}^{(2)} \subseteq \mathrm{F_N}$. □

Bemerkung. Im Fall *a*) läßt sich die Relation „$\sim$“ so schreiben: Für α, $\beta \in \mathrm{F}$

$$\alpha \sim \beta\colon \iff \exists\, z \in \mathrm{H}^* \quad \text{mit} \quad \beta = \alpha z\overline{z} \iff \alpha^{-1}\beta \in \mathrm{F_N} \iff \alpha\beta \in \mathrm{F_N}.$$

Definition 1.1.2. Wenn M ein Unterkörper von Z(L) ist, so nennt man das Paar (L, M) eine *Divisionsalgebra* oder L eine Divisionsalgebra über M.

Definition 1.1.3. Eine Divisionsalgebra (L, M) heißt *quadratisch* oder auch *kinematisch*, wenn $x^2 \in \mathrm{M} + \mathrm{M}x$ für alle $x \in \mathrm{L}$.
Für jedes $x \in \mathrm{L} \setminus \mathrm{M}$ gibt es genau zwei Elemente α_x, $\beta_x \in \mathrm{M}$ mit

$$x^2 = \alpha_x + \beta_x x.$$

Für $\lambda \in \mathrm{M}$ setzen wir

$$\alpha_\lambda := -\lambda^2\,, \quad \beta_\lambda := 2\lambda.$$

Satz 1.1.6. *Wenn a) gilt, so ist* (H, F) *eine quadratische Divisionsalgebra.*

Beweis. Nach 1.1.3 und 1.1.5 ist (H, F) eine Divisionsalgebra.
Es sei $q \in \mathrm{H}$. Dann gilt nach 1.1.1 $\alpha = q + \overline{q} \in \mathrm{F}$, $\beta = q\overline{q} \in \mathrm{F}$ und somit

$$\alpha q - \beta = (q + \overline{q})q - q\overline{q} = q^2,$$

also $q^2 \in \mathrm{F}q + \mathrm{F}$, d.h. die Divisionsalgebra ist quadratisch. □

Satz 1.1.7. *Wenn* (L, M) *eine kinematische Divisionsalgebra ist, so gibt es einen involutorischen Antiautomorphismus* $-\colon \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ *mit Fix* $(-) = \mathrm{M}$.

Beweis. Die Abbildung

$$-: \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}\,; \quad x \longmapsto \overline{x} := \beta_x - x$$

ist ein involutorischer Antiautomorphismus mit $Fix\,(-) = \mathrm{M}$. (vgl. [11], 4.1, 4.3) □

Definition 1.1.4. Wenn L ein Körper ist mit $[\mathrm{L} : \mathrm{M}] = 4$ für $\mathrm{M} = \mathrm{Z(L)}$, so heißt (L, M) *Quaternionenalgebra* und L *Quaternionenkörper*.

Es gilt dann (vgl. [11])

Satz 1.1.8. *Wenn* (L, M) *eine Quaternionenalgebra ist, so gibt es Elemente* $a, b \in \mathrm{L}$, *so daß die Elemente* $1, a, b, c := ab$ *eine Basis von* (L, M) *bilden und die folgende Multiplikationstafel erfüllt ist, wobei* α_a, α_b, $\beta_c \in \mathrm{M}$:

$\cdot$	a	b	c
a	α_a	c	$\alpha_a b$
b	$\beta_c - c$	α_b	$\beta_c b - \alpha_b a$
c	$\beta_c a - \alpha_a b$	$\alpha_b a$	$\beta_c c - \alpha_a \alpha_b$

Unter der Voraussetzung $Char\,\mathrm{M} \neq 2$ *läßt sich* $\beta_c = 0$ *erreichen, und falls* M *sogar ein euklidischer Körper*[1] *ist, zusätzlich noch* $\alpha_a = \alpha_b = -1$.
Für $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ *erhalten wir den klassischen reellen Quaternionenkörper* $\mathbb{H}$.

Es gilt folgender Satz (vgl.[25], S.271)

Satz 1.1.9. *Jede quadratische Divisionsalgebra* (L, M) *ist von einem der folgenden Typen:*

(i) L *ist kommutativ,* $[\mathrm{L} : \mathrm{M}] \leq 2$ *und separabel über* M.

(ii) L *ist kommutativ und rein inseparabel über* M, *d.h.* $Char\,\mathrm{M} = 2$ *und* $x^2 \in \mathrm{M}$ *für alle* $x \in \mathrm{L}$.

(iii) (L, M) *ist eine Quaternionenalgebra.*

Aus den Sätzen 1.1.6 und 1.1.9 und der Voraussetzung $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}$ folgt, daß $[\mathrm{H} : \mathrm{F}] \leq 4$ ist. Zusammen mit 1.1.5 und 1.1.8 erhalten wir

Satz 1.1.10. *Wenn* $Char\,\mathrm{H} \neq 2$ *ist, so ist* $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N}$ *eine direkte Summe (vgl. 1.1.5), und für* N *kommen die Dimensionen* 0, 1 *und* 3 *in Frage. Daher können nur die folgenden Fälle auftreten:*

(i) $- = id \iff \mathrm{N} = \{0\} \iff \mathrm{H} = \mathrm{F}$.

(ii) $- \neq id$ *und* $dim\,\mathrm{N} = 1$. *Hier ist für* $i \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$: $\mathrm{N} = \mathrm{F}i$, *also* $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}i = \mathrm{F}(i)$, *die quadratische Körpererweiterung mit* $i^2 = \alpha \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{F}^{(2)}$.

[1] Ein Körper $(\mathrm{K}, +, \cdot)$ heißt *euklidisch*, wenn $\mathrm{K}^{(2)}$ ein Positivbereich ist, d.h.
$\mathrm{K} := \mathrm{K}^{(2)} \,\dot\cup\, (-\mathrm{K}^{(2)}) \,\dot\cup\, \{0\}$, $\mathrm{K}^{(2)} + \mathrm{K}^{(2)} \subset \mathrm{K}^{(2)}$ und $\mathrm{K}^{(2)} \cdot \mathrm{K}^{(2)} \subset \mathrm{K}^{(2)}$.

(iii) *$- \neq id$ und $\dim \mathrm{N} > 1$, d.h. (H, F) ist eine Quaternionenalgebra. Hier gibt es $i, j \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{N} = \mathrm{F}i \oplus \mathrm{F}j \oplus \mathrm{F}k$ für $k := ij$ und der Multiplikationstafel*

$\cdot$	i	j	k
i	α	k	αj
j	$-k$	β	$-\beta i$
k	$-\alpha j$	βi	$-\alpha\beta$

so daß für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{F}$ stets $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 - \alpha\beta x_3^2 \notin \mathrm{F}^{(2)}$ gilt.

Es gilt:

Satz 1.1.11. *Es sei $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ ein kommutativer Körper, N ein 1- bzw. 3-dimensionaler F-Vektorraum, $\{i\}$, bzw. $\{i, j, k\}$ eine Basis von N und α, $\beta \in \mathrm{F}$ sowie $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N}$ die direkte Summe.*

(i) *Für $\dim \mathrm{N} = 1$ sei H durch*

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) := (x_1 x_2 + \alpha y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

mit einer Multiplikation versehen und es sei

$$-: \begin{cases} \mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{H} \\ z = x + iy & \longmapsto & \overline{z} := x - iy. \end{cases}$$

Dann ist „$-$" ein involutorischer Antiautomorphismus mit $Fix(-) = \mathrm{F}$ und die kommutative F-Algebra $\mathrm{F}(\sqrt{\alpha}) := (\mathrm{H}, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $-\alpha \notin \mathrm{F}^{(2)} \cup \{0\}$ gilt.

Falls F angeordnet[2] ist, so gilt $z\overline{z} > 0$ für alle $z \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$ genau dann, wenn $\alpha < 0$.

(ii) *Für $\dim \mathrm{N} = 3$ sei H wie üblich durch die Tafel aus Satz 1.1.10 mit einer Multiplikation versehen und es sei*

$$-: \begin{cases} \mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{N} & \longrightarrow & \mathrm{H} \\ z = \xi + n & \longmapsto & \overline{z} := \xi - n. \end{cases}$$

Dann ist die Quaternionenerweiterung $\mathrm{F}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) := (\mathrm{H}, +, \cdot)$ eine nicht kommutative F-Algebra, „$-$" ein involutorischer Antiautomorphismus mit

$Fix(-) \cdot Fix(-) \subset Fix(-) = \mathrm{F}$. Die Erweiterung $\mathrm{F}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ ist genau dann ein Körper, wenn

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 - \alpha\beta x_3^2 \notin \mathrm{F}^{(2)} \cup \{0\}$$

für alle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{F}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ gilt.

Falls F angeordnet ist, gilt $z\overline{z} > 0$ für alle $z \in \mathrm{H} \setminus \{0\}$ genau dann, wenn α, $\beta < 0$.

---

[2]Ein Körper $(\mathrm{K}, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, wenn auf K eine totale Ordnungsrelation „$<$" erklärt ist, so daß gilt:

(a) Für x, y, $z \in \mathrm{K}$ mit $x < y$ gilt $x + z < y + z$.

(b) Für x, $y \in \mathrm{K}$ mit $0 < x$, y gilt $0 < x \cdot y$.

Nach [2] gilt:

Satz 1.1.12. *Jeder angeordnete kommutative Körper* $(\mathrm{F}, +, \cdot, <)$ *besitzt eine euklidische Hülle* $(\overline{\mathrm{F}}, +, \cdot, <)$, *d.h. es gibt einen euklidischen Körper* $(\overline{\mathrm{F}}, +, \cdot)$, *so daß* F *ein Unterkörper von* $\overline{\mathrm{F}}$ *ist und daß für* $\alpha,\ \beta \in \mathrm{F}$ *gilt* $\alpha < \beta \iff \beta - \alpha \in \overline{\mathrm{F}}^{(2)}$.

Hieraus folgt zusammen mit Satz 1.1.11

Satz 1.1.13. *Es sei* $(\mathrm{F}, +, \cdot, <)$ *ein angeordneter kommutativer Körper,* $(\overline{\mathrm{F}}, +, \cdot)$ *seine euklidische Hülle und* $\alpha,\ \beta \in \mathrm{F}$ *mit* $\alpha,\ \beta < 0$. *Dann gilt*

(i) $\mathrm{F}(\sqrt{\alpha})$ *und* $\overline{\mathrm{F}}(\sqrt{\alpha})$ *sind quadratische Körpererweiterungen von* F *bzw.* $\overline{\mathrm{F}}$, *und* $\mathrm{F}(\sqrt{\alpha})$ *läßt sich als Unterköper von* $\overline{\mathrm{F}}(\sqrt{\alpha})$ *auffassen: Ein Element* $x+iy \in \mathrm{F}+\mathrm{F}i = \mathrm{F}(\sqrt{\alpha})$ *mit* $x,\ y \in \mathrm{F}$ *wird mit dem Element* $x + y\underline{i} \in \overline{\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{F}}\underline{i} = \overline{\mathrm{F}}(\sqrt{\alpha})$ *identifiziert, wobei* $i^2 = \alpha = \underline{i}^2$ *gelten soll.*

(ii) *Die Quaternionenerweiterungen* $\mathrm{F}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ *und* $\overline{\mathrm{F}}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ *sind Körper, und* $\mathrm{F}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ *läßt sich als Unterkörper von* $\overline{\mathrm{F}}_q(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$ *auffassen.*

Es gilt

Proposition 1.1.14. *Für* $(\mathrm{H}, +, \cdot, -)$ *und* $\mathrm{F} = Fix(-)$ *gelte* $\mathrm{F}\cdot\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$, *und es sei* $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ *ein euklidischer Körper. Dann gilt*

$$\forall\, x \in \mathrm{H}^*\colon x\overline{x} \in \mathrm{F}^{(2)}.$$

Beweis. Wir nehmen $x\overline{x} < 0$ an. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathrm{F}$ mit $x\overline{x} = -\lambda^2$. Es gilt:

$$(x + \lambda)(\overline{x} + \overline{\lambda}) = x\overline{x} + \lambda^2 + \lambda\overline{x} + x\lambda = \lambda(\overline{x} + x).$$

Wir setzen $\mu := \overline{x} + x \in \mathrm{F}$ und $y := x - \frac{1}{2}\mu$. Da $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ als euklidischer Körper auch pythagoreisch[3] ist, gibt es ein $\nu \in \mathrm{F}$ mit $\nu^2 = \lambda^2 + (\frac{\mu}{2})^2$. Dann gilt

$$y + \overline{y} = 0 \quad \text{und} \quad y\,\overline{y} = x\overline{x} - \frac{1}{2}\mu(x + \overline{x}) + \frac{1}{4}\mu^2 = -(\lambda^2 + \frac{1}{4}\mu^2) := -\nu^2 \quad (*).$$

Wir betrachten

$$(y + \nu)(\overline{y} + \nu) = y\overline{y} + \nu^2 + \nu(y + \overline{y}) = 0.$$

Daraus folgt $y = -\nu$ also $\overline{y} = -\overline{\nu} = -\nu$. Daher gilt wegen $(*)$ $y\overline{y} = 0$, woraus $y = 0$ folgt, d.h. $x = \frac{1}{2}\mu$. Hieraus erhalten wir den Widerspruch $x\overline{x} = \frac{1}{4}\mu^2 > 0$. □

Proposition 1.1.15. *Ein pythagoreischer Körper* $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ *mit der Eigenschaft:*

$$(1) \quad \mathrm{F}^{(2)} + 1 \subset \mathrm{F}^{(4)}$$

ist euklidisch.

[3] Ein Körper $(\mathrm{K}, +, \cdot)$ heißt pythagoreisch, wenn für alle $a \in \mathrm{K}$ gilt $1 + a^2 \in \mathrm{K}^{(2)} := \{x^2 \colon x \in \mathrm{K}^*\}$.

Beweis. Es seien a, $b \in \mathrm{F}^*$. Wegen (1) gibt es ein $c \in \mathrm{F}^*$ mit $c^4 = (ab^{-2})^2 + 1$ und es folgt

$$a^2 + b^4 = b^4\big((ab^{-2})^2 + 1\big) = b^4 c^4 = (bc)^4 \in \mathrm{F}^{(4)}.$$

Also gilt

$$(2) \quad \mathrm{F}^{(2)} + \mathrm{F}^{(4)} \subset \mathrm{F}^{(4)}.$$

Es sei $x := bc$. Aus $a^2 + b^4 = x^4$ erhalten wir

$$a^2 = x^4 - b^4 = (x^2 - b^2)(x^2 + b^2).$$

Da F pythagoreisch ist, also $x^2 + b^2 \in \mathrm{F}^{(2)}$ ist, folgt aus dieser Gleichung, daß es ein $d \in \mathrm{F}$ gibt mit $x^2 - b^2 = d^2$. Insgesamt gilt:

$$x^4 = d^4 + b^4 + 2d^2b^2 = a^2 + b^4\,, \quad \text{d.h.} \quad a^2 = d^4 + (\sqrt{2}db)^2 \overset{(2)}{\in} \mathrm{F}^{(4)}.$$

Also gibt es ein $s \in \mathrm{F}^*$ mit $a^2 = s^4 = (s^2)^2$, woraus $a = \pm s^2$ folgt. Damit ist gezeigt, daß $\mathrm{F}^* = \mathrm{F}^{(2)} \cup (-\mathrm{F}^{(2)})$. Wir müssen jetzt zeigen, daß $\mathrm{F}^{(2)} \cap (-\mathrm{F}^{(2)}) = \emptyset$.
In einem pythagoreischen Körper F ist $(\mathrm{F}^{(2)}, +)$ eine Halbgruppe mit $\mathrm{F}^{(2)} \subset \mathrm{F}^*$.
Wir nehmen jetzt an, daß $\mathrm{F}^{(2)} \cap (-\mathrm{F}^{(2)}) \neq \emptyset$, dann gibt es x, $y \in \mathrm{F}^*$ mit $x^2 = -y^2$. Also $0 = x^2 + y^2$, im Widerspruch zu $\mathrm{F}^{(2)} \subset \mathrm{F}^*$. $\square$

1.2 Orthogonale und unitäre Vektorräume

Es sei $(\mathrm{H},+,\cdot)$ ein Körper mit $Char\,\mathrm{H} \neq 2$, der einen Antiautomorphismus $-\colon \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}$ mit $- \circ - = id$ besitzt, es sei $\mathrm{F} = Fix\,(-)$ und $(\mathbf{V},\mathrm{H})$ ein Linksvektoraum.

Definition 1.2.1. Eine Abbildung

$$f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathrm{H}$$

heißt *Semibilinearform* bezüglich „$-$", wenn für alle $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathrm{H}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{c}) &= f(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) + f(\mathfrak{b},\mathfrak{c}) \\ f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) &= f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + f(\mathfrak{a},\mathfrak{c}) \\ f(\lambda\mathfrak{a},\mathfrak{b}) &= \lambda f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \\ f(\mathfrak{a},\lambda\mathfrak{b}) &= f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\overline{\lambda}. \end{aligned}$$

Definition 1.2.2. Eine Semibilinearform f heißt *hermitesche Form* bezüglich „$-$", wenn für alle $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ gilt

$$f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = \overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}.$$

Falls „$-$" die Identität ist – dann ist $(\mathrm{H},+,\cdot)$ ein kommutativer Körper – so heißt f *symmetrische Bilinearform*.

Definition 1.2.3. Das Tripel $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ heißt *unitärer Raum*, wenn $(\mathbf{V},\mathrm{H})$ ein Linksvektorraum und $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathrm{H}$ eine hermitesche Form ist. Falls f eine symmetrische Bilinearform ist, so heißt $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ *orthogonaler* oder *quadratischer* oder *metrischer Vektorraum* .

Definition 1.2.4. Es sei $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ ein unitärer Raum oder ein orthogonaler Vektorraum. Eine Abbildung $\sigma\colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ heißt *Isometrie*, wenn σ ein Vektorraumautomorphismus ist und wenn für alle $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{V}$ gilt:

$$f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = f(\sigma(\mathfrak{x}),\sigma(\mathfrak{y})).$$

Die Gruppe $\mathbf{U}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ aller Isometrien des unitären Raumes $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ auf sich heißt *unitäre Gruppe*. Die Gruppe $\mathbf{O}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ aller Isometrien des orthogonalen Vektorraumes $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ auf sich heißt *orthogonale Gruppe*.

Mit Hilfe von f führen wir jetzt eine Äquivalenzrelation im unitären Raum bzw. im orthogonalen Vektorraum $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ ein. Für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ sei

$$\mathfrak{a} \overline{\sim} \mathfrak{b} :\Longleftrightarrow\ f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \sim f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})\,,$$

wobei „$\sim$ " die entsprechende Äquivalenzrelation in F ist (vgl. 1.1.2). Dann ist

$$\mathbf{V}_\alpha := \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \in \alpha\}$$

eine Klasseneinteilung der Vektoren von $\mathbf{V}$ bezüglich der Äquivalenzrelation in $\mathbf{V}$.
Es gilt

Proposition 1.2.1. $\mathrm{H}^*\mathbf{V}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha$.

Beweis. Offensichtlich gilt $\mathbf{V}_\alpha \subset \mathrm{H}^*\mathbf{V}_\alpha$. Wir zeigen, daß $\mathrm{H}^*\mathbf{V}_\alpha \subset \mathbf{V}_\alpha$.
Es sei $\lambda\mathfrak{x} \in \mathrm{H}^*\mathbf{V}_\alpha$ mit $f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = \xi \in \alpha$, d.h. $\xi = z\alpha\overline{z}$ für ein $z \in \mathrm{H}^*$.
Wir betrachten $f(\lambda\mathfrak{x},\lambda\mathfrak{x}) = \lambda f(\mathfrak{x},\mathfrak{x})\overline{\lambda} = \lambda\xi\overline{\lambda}$. Es gilt

$$\lambda\xi\overline{\lambda} = \lambda z\alpha\overline{z}\overline{\lambda} = \lambda z\alpha\overline{\lambda z} = q\alpha\overline{q} \quad \text{mit} \quad q = \lambda z \in \mathrm{H}^*, \quad \text{d.h.} \quad \lambda\mathfrak{x} \in \mathbf{V}_\alpha.$$

□

Proposition 1.2.2. *Für $\sigma \in \mathbf{U}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ bzw. $\sigma \in \mathbf{O}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ gilt $\sigma(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha$.*

Beweis. Für $\sigma \in \mathbf{U}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ bzw. $\sigma \in \mathbf{O}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ und $\mathfrak{x} \in \mathbf{V}$ gilt $f\big(\sigma(\mathfrak{x}),\sigma(\mathfrak{x})\big) = f(\mathfrak{x},\mathfrak{x})$, also $\sigma(\mathbf{V}_\alpha) = \mathbf{V}_\alpha$. □

Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{V}^{**} := \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \neq 0\}$$

und definieren eine *Orthogonalität*: Für $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ setzen wir

$$\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b} :\iff f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 0.$$

Es sei

$$\mathfrak{a}^\perp := \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid \mathfrak{x} \perp \mathfrak{a}\} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}^\perp := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^\perp = \mathbf{V}\}$$

das *Radikal* von $\mathbf{V}$. Dann gilt

Satz 1.2.3. *Die Relation „$\perp$“ ist symmetrisch, $\mathbf{V}^{**} \cap \mathbf{V}^\perp = \emptyset$, für jedes $\mathfrak{a} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}^\perp$ ist $\mathfrak{a}^\perp$ eine Hyperebene und für $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^{**}$ gilt $\mathbf{V} = \mathrm{H}\mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{a}^\perp$.*

Beweis. Wegen $f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = \overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})}$ gilt: $f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 0 \iff f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = 0$.
Wir betrachten die Abbildung

$$l\colon \begin{cases} \mathbf{V} \longrightarrow \mathrm{H} \\ \mathfrak{x} \longmapsto f(\mathfrak{x},\mathfrak{a}) \end{cases}.$$

Da f eine semibilineare Abbildung ist, ist l eine Linearform und $l^{-1}(0) = \mathfrak{a}^\perp$, d.h. l ist genau dann die Nullform, wenn $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^\perp$.
Für $\mathfrak{a} \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}^\perp$ ist also $\mathfrak{a}^\perp$ immer eine Hyperebene. Es ergeben sich die zwei Fälle:

1. $\mathfrak{a}$ ist anisotrop, d.h. $\mathfrak{a} \not\perp \mathfrak{a} \iff f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \neq 0$. Hier gilt also $\mathbf{V} = \mathrm{H}\mathfrak{a} \bigoplus \mathfrak{a}^\perp$.

2. $\mathfrak{a}$ ist isotrop, d.h. $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{a} \iff f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0$. Dies ergibt $\mathrm{H}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^\perp$.

□

Bemerkung. Falls $\mathbf{V}^\perp = \{0\}$, ist die Abbildung

$$\perp\colon \begin{cases} \mathbf{V}^* & \longrightarrow & \mathfrak{H} \\ \mathfrak{a} & \longmapsto & \mathfrak{a}^\perp \end{cases}$$

eine nicht ausgeartete Polarität.

Definition 1.2.5. Eine hermitesche Form heißt *definit* oder *nullteilig*, wenn $\mathbf{V}_0^* = \emptyset$ ist. Wir wollen eine hermitesche Form hier *indefinit* nennen, falls $\mathbf{V}^\perp = \{0\}$ und $\mathbf{V}_0^* \neq \emptyset$ ist.

Falls F in einem angeordneten Körper $(\mathrm{K}, +, \cdot, \leq)$ enthalten ist, können wir den Begriff positiv definite (bzw. negativ definite) hermitesche Form einführen.

Definition 1.2.6. Eine hermitesche Form f heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) wenn gilt:

$$\forall \mathfrak{x} \in \mathbf{V}^*\colon f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) > 0 \quad (\text{bzw.} \quad \forall \mathfrak{x} \in \mathbf{V}^*\colon f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) < 0).$$

Definition 1.2.7. Für $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^{**}$ heißt

$$\widetilde{\mathfrak{a}}\colon \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V};\ \mathfrak{x} \longmapsto -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{-1} \mathfrak{a}$$

Spiegelung am Vektor $\mathfrak{a}$.

Wir definieren

$$\approx := \{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V} \mid \exists\, \mathfrak{c} \in \mathbf{V}^{**}\colon \widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\}.$$

Satz 1.2.4. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}^{**}$, $\lambda \in \mathrm{H}^*$ *und* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbf{V}$. *Dann gelten:*

(1) $\widetilde{\lambda\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x})$.

(2) $\widetilde{\mathfrak{a}}$ *ist eine lineare Abbildung, d.h.* $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda\mathfrak{x}) = \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x})$, $\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})$.

(3) $\widetilde{\mathfrak{a}}$ *ist involutorisch, d.h.* $\widetilde{\mathfrak{a}}^2 = id \neq \widetilde{\mathfrak{a}}$.

(4) $\widetilde{\mathfrak{a}}$ *ist eine Isometrie, d.h.* $\widetilde{\mathfrak{a}} \in \mathbf{U}(\mathbf{V}, \mathrm{H}, f)$, *bzw.* $\widetilde{\mathfrak{a}} \in \mathbf{O}(\mathbf{V}, \mathrm{H}, f)$.

(5) *Fix* $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathrm{H}\mathfrak{a}$ *und Fix* $\big((-1)^\bullet \circ \widetilde{\mathfrak{a}}\big) := \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = -\mathfrak{x}\} = \mathfrak{a}^\perp$.

(6) $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\mathfrak{b}} \iff \mathrm{H}\mathfrak{a} = \mathrm{H}\mathfrak{b}$.

(7) $\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \in \mathbf{V}^{**}$.

(8) $\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})}$.

Beweis. **(1)** Es gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) &= -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x}, \lambda\mathfrak{a}) f(\lambda\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{a})^{-1} \lambda\mathfrak{a} = -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a})\overline{\lambda}\big(\lambda f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\overline{\lambda}\big)^{-1}\lambda\mathfrak{a} = \\ &= -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a})\overline{\lambda}\,\overline{\lambda}^{-1} f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{-1}\lambda^{-1}\lambda\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}).\end{aligned}$$

(2) Es ist

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda\mathfrak{x}) = -\lambda\mathfrak{x} + 2f(\lambda\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} = \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}).$$

(3) Für alle $\mathfrak{x} \in \mathbf{V}$ gilt:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = \widetilde{\mathfrak{a}}(-\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a}) = \\ &= \mathfrak{x} - 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} + 2f(-\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} + 4f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{x}.\end{aligned}$$

(4) Es gilt

$$\begin{aligned}&f(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}),\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})) = f\big(-\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a}, -\mathfrak{y} + 2f(\mathfrak{y},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a}\big) = \\ &= f(-\mathfrak{x}, -\mathfrak{y} + 2f(\mathfrak{y},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a}) + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}f\big(\mathfrak{a}, -\mathfrak{y} + 2f(\mathfrak{y},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a}\big) = \\ &= f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) - 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})\overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}}\ \overline{f(\mathfrak{y},\mathfrak{a})} - 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}f(\mathfrak{a},\mathfrak{y}) + \\ &+ 4f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}}\ \overline{f(\mathfrak{y},\mathfrak{a})} = f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}).\end{aligned}$$

(5) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} \in Fix\,\widetilde{\mathfrak{a}} &\iff \mathfrak{x} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} \\ &\iff \mathfrak{x} = f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} \iff \mathfrak{x} \in \mathrm{H}\mathfrak{a}\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} \in Fix\,\big((-1)^{\bullet} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}\big) &\iff -\mathfrak{x} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} \\ &\iff f(\mathfrak{x},\mathfrak{a}) = 0 \iff \mathfrak{x} \in \mathfrak{a}^{\perp}.\end{aligned}$$

(6) Für alle $\mathfrak{x} \in \mathbf{V}$ gilt

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = \widetilde{\mathfrak{b}}(\mathfrak{x}) \iff -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} = -\mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{x},\mathfrak{b})f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{b} \iff \\ &f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\mathfrak{a} = f(\mathfrak{x},\mathfrak{b})f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{b} \iff \mathrm{H}\mathfrak{a} = \mathrm{H}\mathfrak{b}.\end{aligned}$$

(7) Nach (4) gilt

$$f\big(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}),\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})\big) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) \neq 0\,,$$

weil $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}^{**}$, also $\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \in \mathbf{V}^{**}$.

(8) Wegen (3) ist $\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}$ involutorisch und

$$Fix\,(\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}) = \widetilde{\mathfrak{a}}(Fix\,\widetilde{\mathfrak{b}}) \overset{(5)}{=} \mathrm{H}\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \overset{(5)}{=} Fix\,\widetilde{\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})}.$$

Nach 1.2.3 und (5) ist $\widetilde{\mathfrak{a}}$ eine Abbildung, die so definiert ist:

$$\widetilde{\mathfrak{a}}\colon \begin{cases} \mathrm{H}\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp} & \longrightarrow \quad \mathrm{H}\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp} \\ \mathfrak{x} := \xi\mathfrak{a} + \mathfrak{y} & \longmapsto \quad \xi\mathfrak{a} - \mathfrak{y} \end{cases}.$$

Es gilt

$$Fix\,(\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}) = \mathrm{H}\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) \qquad (1).$$

Wegen $\big(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})\big)^{\perp} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^{\perp})$ gilt für $\mathfrak{y} \in \big(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})\big)^{\perp} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}^{\perp})$: $\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) \in \mathfrak{b}^{\perp}$, also

$$\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) = \widetilde{\mathfrak{a}} \circ \big(- \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y})\big) \overset{(2)}{=} -\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{y}) \overset{(3)}{=} -\mathfrak{y}.$$

Daraus folgt

$$\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}} \mid_{(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}))^{\perp}} = -id \mid_{(\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}))^{\perp}} \qquad (2).$$

Aus (1) und (2) folgt $\widetilde{\mathfrak{a}} \circ \widetilde{\mathfrak{b}} \circ \widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\mathfrak{a}(\mathfrak{b})}$. □

Da die Spiegelungen an anisotropen Vektoren involutorische Isometrien sind (vgl. 1.2.4), ergibt sich sofort

Lemma 1.2.5. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ *mit* $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$. *Dann gilt* $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$ *und* $f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$.

Beweis. Nach 1.2.4.4 ist für jedes $\mathfrak{c} \in \mathbf{V}^{**}$: $\widetilde{\mathfrak{c}} \in \mathbf{U}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$, bzw. $\widetilde{\mathfrak{c}} \in \mathbf{O}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$. Daher gilt

$$f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}),\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a})).$$

Nach 1.2.4.3 ist $\widetilde{\mathfrak{c}}$ involutorisch. Daher gilt

$$f(\mathfrak{a},\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a})) = f(\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}),\widetilde{\mathfrak{c}} \circ \widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a})) = f(\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}),\mathfrak{a}).$$

□

Satz 1.2.6. *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ *mit* $\alpha := f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$, $\beta := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$ *und* $\gamma := f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = 2(\alpha+\beta)$. *Dann gilt*

1. *Wenn* $\gamma \neq 0$, *d.h.* $\alpha \neq -\beta$ *ist, so gilt* $\widetilde{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$.
2. *Wenn* $\gamma = 0$, *d.h.* $\alpha = -\beta$ *und* $\alpha \neq 0$ *ist, so gilt* $\mathfrak{a}-\mathfrak{b} \in \mathbf{V}^{**}$ *und* $\widetilde{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = -\mathfrak{b}$.
3. *Wenn* $\gamma = \alpha = 0$, *so gilt* $\mathrm{H}\mathfrak{a} + \mathrm{H}\mathfrak{b} \subset \mathbf{V}_0$, $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b} \iff \mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a}^{\perp} \cap \mathbf{V}^{**} \neq \emptyset$.
4. *Wenn* $\alpha \neq \beta, -\beta$ *ist, so gilt* $\widetilde{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, $\widetilde{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = -\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ *sowie* $f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = 2(\alpha-\beta)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
&2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 2\alpha + 2\beta = \gamma = f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \quad (1) \quad \text{und}\\
&2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) - 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 2\alpha - 2\beta =\\
&= f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) + f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) - f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) - f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \quad (2).
\end{aligned}$$

1. Es sei $\gamma \neq 0$. Dann gilt

$$\widetilde{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) := -\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}+\mathfrak{b})f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \overset{(1)}{=} -\mathfrak{a}+\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{b}.$$

2. Es sei $\gamma = 0$ und $\alpha \neq 0$. Dann ist $\alpha = -\beta$ und

$$f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \overset{(2)}{=} 4\alpha \neq 0.$$

Daraus folgt $\mathfrak{a}-\mathfrak{b} \in \mathbf{V}^{**}$ und

$$\widetilde{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) := -\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \overset{(2)}{=} -\mathfrak{a}+\mathfrak{a}-\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}.$$

3. Es sei $\gamma = \alpha = 0$. Daraus folgt $\beta = 0$, d.h. $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \in \mathbf{V}_0$. Es gilt $\mathrm{H}\mathfrak{a}+\mathrm{H}\mathfrak{b} \subset \mathbf{V}_0$: Es sei $\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b} \in \mathrm{H}\mathfrak{a}+\mathrm{H}\mathfrak{b}$. Dann gilt

$$f(\lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}, \lambda\mathfrak{a}+\mu\mathfrak{b}) = \lambda f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\overline{\lambda} + \mu f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})\overline{\mu} + \lambda f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\overline{\mu} + \mu f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})\overline{\lambda} = 0 \qquad (3).$$

Falls es ein $\mathfrak{c} \in \mathbf{V}^{**}$ gibt mit $\widetilde{\mathfrak{c}}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$, dann gilt

$$-\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c}$$

und daraus folgt $\mathfrak{c} = \lambda(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ mit $\lambda \in \mathrm{H}^*$ falls $\mathfrak{a} \not\perp \mathfrak{c}$. In diesem Fall ergibt sich der Widerspruch $f(\mathfrak{c},\mathfrak{c}) = \lambda\gamma\overline{\lambda} = 0$.
Falls $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{c}$ ist, folgt $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}$, und es gilt $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}^\perp \cap \mathbf{V}^{**} \neq \emptyset$.
4. Es sei $\alpha \neq \beta, -\beta$. Dann gilt

$$\widetilde{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = -\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})f(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{-1}(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) \overset{(2)}{=} -\mathfrak{a}+\mathfrak{a}-\mathfrak{b} = -\mathfrak{b}.$$

Nach 1. ist $\widetilde{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}\,(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$. Weiterhin gilt

$$f(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) - f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) - f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) + f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) = \alpha - \alpha - \beta + \beta = 0,$$

d.h. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \perp \mathfrak{a}-\mathfrak{b}$. □

Aus 1.2.6 ergibt sich sofort

Korollar 1.2.7. *Es seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ *mit* $\alpha := f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$, $\beta := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})$. *Dann gilt*

1. *Falls* $\alpha \neq -\beta$ *gilt* $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.
2. *Falls* $0 \neq \alpha = -\beta$ *gilt* $\mathfrak{a} \approx -\mathfrak{b}$.
3. *Falls* $0 = \alpha = -\beta$ *gilt* $\mathfrak{a} \not\approx \mathfrak{b}$ *falls* $\mathfrak{b} \neq -\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{a}^\perp \subset \mathbf{V}^0$.
4. *Falls* $\alpha \neq \beta, -\beta$ *gilt* $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{a} \approx -\mathfrak{b}$.

Proposition 1.2.8. *Es sei* f *eine hermitesche Form, die nicht die Nullform ist und* $\lambda \in \mathrm{H}^*$. *Dann ist*

$$\lambda \cdot f \colon \begin{cases} \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \longrightarrow \quad \mathrm{H} \\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) & \longmapsto \quad \lambda f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \end{cases}$$

eine hermitesche Form genau dann, wenn $\lambda \in \mathrm{F} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{H})$.

Beweis. Es sei $\lambda \in \mathrm{F} \cap \mathrm{Z(H)}$. Dann gilt

$$\lambda f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \overline{\lambda} f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\overline{\lambda} = \overline{f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})}\,\overline{\lambda} = \overline{\lambda f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})}.$$

Es sei $\lambda \cdot f$ eine hermitesche Form.
Da f nicht die Nullform ist, gibt es $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathbf{V}$ mit $\gamma := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \neq 0$. Es gilt

$$f(\gamma^{-1}\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \gamma^{-1} f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 1,$$

also gibt es $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{V}$ mit $f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = 1$. Es gilt

$$\lambda = \lambda f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \overline{\lambda f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})} = f(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\overline{\lambda} = \overline{\lambda}.$$

Daraus folgt $\lambda \in \mathrm{F}$. Es sei $h \in \mathrm{H}$ beliebig. Dann gilt:

$$\lambda h = \lambda f(h\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \overline{\lambda f(\mathfrak{y},h\mathfrak{x})} = \overline{f(\mathfrak{y},h\mathfrak{x})}\,\overline{\lambda} = \overline{f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})\overline{h}}\,\overline{\lambda} \overset{\lambda\in\mathrm{F}}{=} hf(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\lambda = h\lambda,$$

d.h. $\lambda \in \mathrm{Z(H)}$. □

Definition 1.2.8. Eine hermitesche Form f heißt *normierbar*, wenn es ein $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}$ gibt mit $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \neq 0$ und wenn $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \in \mathrm{Z(H)}$ gilt. f heißt *genormt*, wenn es ein $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}$ gibt mit $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 1$.

Im Fall *a*), d.h. $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}$ (vgl. S. 4), gilt:

Satz 1.2.9. *Es sei f nicht die Nullform. Dann gilt:*

(**1**) $\mathbf{V}^{**} \neq \emptyset$.

(**2**) *Wenn $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^{**}$ ist, so ist $g = f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}f$ eine genormte hermitesche Form, und es gilt $g(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 1$.*

Beweis. „(1)“ Da f nicht die Nullform ist, gibt es $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{V}$ mit $\lambda := f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \neq 0$. Falls

$$0 = f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{y},\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y},\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})$$

ist, gilt

$$\lambda = f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = -f(\mathfrak{y},\mathfrak{x}) = -\overline{f(\mathfrak{x},\mathfrak{y})} = -\overline{\lambda}$$

und

$$f(\lambda\mathfrak{x}+\mathfrak{y},\lambda\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = \lambda f(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + f(\mathfrak{y},\mathfrak{x})\overline{\lambda} = \lambda^2 + \overline{\lambda}^2 = 2\lambda^2 \neq 0.$$

„(2)“ Nach 1.2.8 ist $g = f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}f$ eine hermitesche Form, da $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \in \mathrm{F} \subset \mathrm{Z(H)}$ (vgl. 1.1.5), und nach Definition ist $g(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 1$. □

1.3 Projektiv unitäre und metrische Räume

Wir betrachten hier die projektive Koordinatengeometrie $\Pi(\mathbf{V},\mathrm{H})$, die dem unitären bzw. orthogonalen Vektorraum $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ zugeordnet ist. Wenn

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbf{V}^* & \longrightarrow \quad \mathbf{V}^*/\mathrm{H}^* \\ \mathfrak{x} & \longmapsto \quad \mathrm{H}^*\mathfrak{x} \end{cases}$$

die kanonische Abbildung ist, und $\mathfrak{L}_2$ die Menge aller zweidimensionalen Untervektoräume von $(\mathbf{V},\mathrm{H})$ bezeichnet (vgl. z.B. [15] S.61), ist

$$\mathbf{P} := \varphi(\mathbf{V}^*) = \mathbf{V}^*/\mathrm{H}^*$$

die Punktmenge und

$$\mathfrak{G} := \{\varphi(L^*) \mid L \in \mathfrak{L}_2\}$$

die Gerademenge des projektiven Raumes $\Pi(\mathbf{V},\mathrm{H})$.
Es gelten folgende Sätze (vgl. z.B. [15] (12.7), (12.8)):

Satz 1.3.1. *Jeder semilinearen Permutation $\sigma \in \ ,(\mathbf{V},\mathrm{H})$ des Linksvektoraumes $(\mathbf{V},\mathrm{H})$ entspricht genau eine Kollineation $\overline{\sigma}$ von $\Pi(\mathbf{V},\mathrm{H})$, die durch die Gleichung*

$$\varphi \circ \sigma|_{\mathbf{V}^*} = \overline{\sigma} \circ \varphi$$

bestimmt ist.

Satz 1.3.2. *Für $\sigma,\ \tau \in \ ,(\mathbf{V},\mathrm{H})$ gilt $\overline{\sigma} = \overline{\tau}$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathrm{H}^*$ gibt mit $\tau = \lambda\sigma$.*

Mit Hilfe der hermiteschen Form f bzw. der symmetrischen Bilinearform f können wir den projektiven Raum $\Pi(\mathbf{V},\mathrm{H}) = (\mathbf{P},\mathfrak{G})$ mit folgenden zusätzlichen Strukturen versehen:

1. Zunächst erhalten wir wegen 1.2.1 eine Klasseneinteilung der Punktmenge $\mathbf{P}$.
Für jedes $\alpha \in \mathrm{F}/_\sim$ sei jetzt

$$\mathbf{P}_\alpha := \varphi(\mathbf{V}_\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \neq 0\,, \quad \mathbf{P}_0 := \varphi(\mathbf{V}_0^*)\,, \quad \mathbf{P}^{**} := \varphi(\mathbf{V}^{**}) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^\perp := \varphi(\mathbf{V}^{\perp *}).$$

Für $a,\ b \in \mathbf{P}$ setzen wir

$$a \sim b :\Longleftrightarrow\ \exists\, \alpha \in \mathrm{F}/_\sim \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbf{P}_\alpha.$$

2. Für jedes $a \in \mathbf{P}^{**}$, es gibt also ein $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^{**}$ mit $a = \varphi(\mathfrak{a})$, definieren wir

$$\widetilde{a} := \overline{\overline{\mathfrak{a}}}.$$

Die Abbildung $\widetilde{a}$ ist wohldefiniert nach 1.2.4.1.
Es sei $\widetilde{\mathbf{P}^{**}} := \{\widetilde{a} \mid a \in \mathbf{P}^{**}\}$ und $\ , := \mathbf{P}\big(\mathbf{U}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)\big)$ die projektive unitäre Gruppe, bzw. $\Omega := \mathbf{P}\big(\mathbf{O}(\mathbf{V},\mathrm{H},f)\big)$ die projektive orthogonale Gruppe.

Nach 1.2.2 und 1.2.4.4 folgt

Proposition 1.3.3. *$\widetilde{\mathbf{P}^{**}} \subset$, bzw. $\widetilde{\mathbf{P}^{**}} \subset \Omega$ und , $(\mathbf{P}_\alpha) = \mathbf{P}_\alpha$ bzw. $\Omega(\mathbf{P}_\alpha) = \mathbf{P}_\alpha$.*

3. Weiterhin induziert die durch f gegebene Orthogonalität „$\perp$“ in $\mathbf{V}$ eine Polarität π in dem zugehörigen projektiven Raum $\mathbf{P} = \Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ gemäß dem folgenden kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\perp} & \mathfrak{L} \\ \downarrow^{\varphi} & & \downarrow^{\varphi} \\ \mathbf{P} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{T} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathfrak{x} & \xmapsto{\perp} & \mathfrak{x}^{\perp} \\ \downarrow^{\varphi} & & \downarrow^{\varphi} \\ \varphi(\mathfrak{x}) & \xmapsto{\pi} & \varphi(\mathfrak{x}^{\perp *}) \end{array}$$

(wobei $\mathfrak{L}$ die Menge der Untervektorräume von $\mathbf{V}$ und $\mathfrak{T}$ die Menge der Teilräume des projektiven Raumes $\mathbf{P} = \Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ ist), weil für a, $b \in \mathbf{P}$ mit $a \in \pi(b)$ auch $b \in \pi(a)$ gilt.
Diese Polarität ordnet jedem Punkt $p \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}^{\perp}$ nach 1.2.3 eine Hyperebene $\pi(p)$ und jedem $p \in \mathbf{P}^{\perp}$ den ganzen Raum $\mathbf{P}$ zu.
Die Polarität π ist also nicht ausgeartet, d.h. eine injektive Abbildung von $\mathbf{P}$ auf die Menge der Hyperebenen von $\Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$, wenn das Radikal $\mathbf{P}^{\perp} = \emptyset$ ist.

Damit haben wir den projektiven Raum $\Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ mit einer zusätzlichen geometrischen Struktur $(\mathbf{P}^{**}, \sim, \widetilde{\mathbf{P}^{**}}, \pi)$ versehen.

Aus 1.2.8 folgt

Satz 1.3.4. *Zwei hermitesche Formen f und g induzieren dieselbe geometrische Struktur in $\Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$, wenn es ein $\lambda \in \mathrm{F} \cap \mathrm{Z}(\mathrm{H})$ mit $\lambda \neq 0$ und $g = \lambda f$ gibt.*

Beweis. Es gilt

$$\mathbf{V}_f^{**} := \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \neq 0\} = \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid \lambda f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \neq 0,\, \lambda \neq 0\} =: \mathbf{V}_g^{**}.$$

Damit ist $\mathbf{P}_f^{**} := \varphi(\mathbf{V}_f^{**}) = \varphi(\mathbf{V}_g^{**}) =: \mathbf{P}_g^{**}$ und die Polarität, induziert von f, stimmt mit der von g induzierten Polarität überein, d.h. $\pi_f = \pi_g$.
Ferner gilt $\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{P}_{\lambda\alpha}$ für $\lambda \neq 0$. Damit ist $a \sim_f b \iff a \sim_g b$.
Es gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{a}}_f(\mathfrak{x}) &:= -\mathfrak{x} + f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{-1} \mathfrak{a} \overset{\lambda \in \mathrm{Z(H)}}{=} -\mathfrak{x} + \lambda f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})^{-1} \lambda^{-1} \mathfrak{a} = \\ &= -\mathfrak{x} + \lambda f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) \big(\lambda f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\big)^{-1} \mathfrak{a} =: \widetilde{\mathfrak{a}}_g(\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{\mathbf{P}}_f^{**} = \widetilde{\mathbf{P}}_g^{**}$. □

Es gilt

Satz 1.3.5. *Es seien a, $b \in \mathbf{P}^{**}$. Dann gilt $\widetilde{a}(b) \in \mathbf{P}^{**}$, $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)}$ und $\widetilde{a}(b) \in \overline{a, b}$, wobei $\overline{a, b}$ die Verbindungsgerade von a und b bezeichnet.*

Beweis. Aus 1.2.4.7 folgt $\widetilde{a}(b) \in \mathbf{P}^{**}$ und aus 1.2.4.8 $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)}$. Da für jede Gerade $G \in \mathfrak{G}$ und für jedes $a \in \mathbf{P}^{**}$ die Gleichung $\widetilde{a}(G) = G$ erfüllt ist, gilt

$$\overline{a, b} = \widetilde{a}(\overline{a, b}) = \overline{\widetilde{a}(a), \widetilde{a}(b)} = \overline{a, \widetilde{a}(b)}\,,$$

d.h. $\widetilde{a}(b) \in \overline{a, b}$. □

Definition 1.3.1. Es seien $a,\, b \in \mathbf{P}$. Das Element $m \in \mathbf{P}^{**}$ heißt *Mittelpunkt* von (a,b), wenn gilt

$$\widetilde{m}(a) = b.$$

Wir bezeichnen mit

$$M_{(a,b)} := \{m \in \mathbf{P}^{**} \mid \widetilde{m}(a) = b\}$$

die Menge der Mittelpunkte von (a,b).

Satz 1.3.6. *Es seien $a,\, b \in \mathbf{P}$ mit $a \neq b$.*

1. *Wenn $M_{(a,b)} \neq \emptyset$ ist, so gilt $a \sim b$ und es gibt $\mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(a)$, $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ mit*

$$(*) \qquad \alpha := f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) \quad \beta := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}) \in \mathrm{F} \quad \textit{und} \quad \alpha + \beta \neq 0.$$

2. *Wenn es $\mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(a)$, $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ mit $(*)$ gibt, so ist*

$$\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \in M_{(a,b)}.$$

3. *Wenn $a \sim b$ und $\mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(a)$, $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ mit*

$$f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) =: \alpha \quad \textit{und} \quad c := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

ist, so gilt für $M_{(a,b)}$:

(i) Für $\alpha, c \neq 0$, also $a,\, b \in \mathbf{P}^{**}$ und $b \notin \pi(a)$:

$$„M_{(a,b)} \neq \emptyset \iff \exists\, \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-\alpha\}:\ \xi\alpha^{-1}\xi = c\alpha^{-1}\overline{c}\,“ \quad \textit{und}$$

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + \xi\overline{c}^{-1}\mathfrak{b}) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-\alpha\}:\ \xi\alpha^{-1}\xi = c\alpha^{-1}\overline{c}\}.$$

(ii) Für $\alpha = 0$, $c \neq 0$, also $a,\, b \in \mathbf{P}_0$ und $b \notin \pi(a)$:

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + \xi\overline{c}^{-1}\mathfrak{b}) \mid \xi \in \mathrm{F}^*\} \neq \emptyset \quad \textit{und} \quad |M_{(a,b)}| = |\mathrm{F}^*|.$$

(iii) Für $\alpha \neq 0$ und $c = 0$, also $a,\, b \in \mathbf{P}^{**}$ und $b \in \pi(a)$:

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + z\mathfrak{b}) \mid z \in \mathrm{H}^*\colon z\alpha\overline{z} = \alpha\} \neq \emptyset.$$

(iv) Für $\alpha = c = 0$, also $a,\, b \in \mathbf{P}_0$ und $b \in \pi(a)$:

$$M_{(a,b)} = \emptyset.$$

Beweis. Wegen $a \neq b$ gilt:

$$\diamond \quad \text{Für alle} \quad \mathfrak{a}' \in \varphi^{-1}(a)\,, \quad \mathfrak{b}' \in \varphi^{-1}(b) \quad \text{ist stets} \quad \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' \neq 0.$$

1. Nach Definition 1.2.7 liegt jeder Mittelpunkt von (a, b) auf der Verbindungsgeraden von a und b. Für $m \in M_{a,b}$ und $\mathfrak{m} \in \varphi^{-1}(m)$ muß also nach 1.2.5 gelten:

$$\exists\, \mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(a)\,,\ \mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \neq 0 \text{ nach } \diamond\,,\ \alpha := f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})\,,$$
$$\beta := f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) \in \mathrm{F}\,, \quad f(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}) = 2(\alpha + \beta) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = \alpha + \beta \neq 0.$$

2. folgt aus 1.2.6.1.

3. Da bereits $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) =: \alpha$ gilt, müssen wir wegen (1) und (2) nach Lösungen $z \in \mathrm{H}^*$ suchen, für die wegen $(*)$ gelten muß:

$$\alpha = f(z\mathfrak{b}, z\mathfrak{b}) = z\alpha\overline{z}\,,$$

$$\xi := c\overline{z} = f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\overline{z} = f(\mathfrak{a}, z\mathfrak{b}) = f(z\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = zf(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = z\overline{c} \in \mathrm{F} \quad \text{und} \quad \alpha + \xi \neq 0.$$

Also

$$(**) \qquad \alpha = z\alpha\overline{z}\,, \quad c\overline{z} = z\overline{c} \quad \text{mit} \quad z\overline{c} \neq -\alpha.$$

Für jede Lösung $z \in \mathrm{H}^*$ von $(**)$ ist $\varphi(\mathfrak{a} + z\mathfrak{b}) \in M_{(a,b)}$.
Wir betrachten zunächst den Fall $c \neq 0$:
Setzen wir $\xi := c\overline{z}$, so gilt

$$\xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-\alpha\}\,,\ z = \xi\overline{c}^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha = \xi\overline{c}^{-1}\alpha c^{-1}\xi \quad \text{also} \quad \xi^{-1}\alpha\xi^{-1} = \overline{c}^{-1}\alpha c^{-1}.$$

Damit gilt nach 2.

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + \xi\overline{c}^{-1}\mathfrak{b}) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-\alpha\} \colon \xi^{-1}\alpha\xi^{-1} = \overline{c}^{-1}\alpha c^{-1}\}.$$

Für $\alpha = 0$ kommt also jedes $\xi \in \mathrm{F}^*$ in Frage und daher ist $|M_{(a,b)}| = |\mathrm{F}^*|$.
Damit sind (i) und (ii) bewiesen.
Es sei jetzt $c = 0$. Dann bleibt von $(**)$ nur

$$\alpha = z\alpha\overline{z} \quad \text{und} \quad \alpha \neq 0$$

übrig. Damit gilt

$$M_{(a,b)} = \emptyset \quad \text{für} \quad \alpha = c = 0 \quad \text{und}$$

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + z\mathfrak{b}) \mid z \in \mathrm{H}^* \colon z\alpha\overline{z} = \alpha\} \neq \emptyset \quad \text{für} \quad c = 0\,,\ \alpha \neq 0\,,$$

denn $\varphi(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$, $\varphi(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) \in M_{(a,b)}$, womit (iv) und (iii) bewiesen sind. □

Bemerkung. Wenn f eine symmetrische Bilinearform ist, d.h. „$-$“ ist die Identität und $\mathrm{F} = \mathrm{H}$ ein kommutativer Körper, dann folgt aus Satz 1.3.6:
Wenn $a \sim b$, $\mathfrak{a} \in \varphi^{-1}(a)$, $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ mit $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) =: \alpha$ und $c := f(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ ist, so gilt für $M_{(a,b)}$:

(*i*) Für α, $c \neq 0$:

$$M_{(a,b)} \neq \emptyset \iff \exists\, \xi \in \mathrm{H}^* \setminus \{-\alpha\} \colon \xi^2 = c^2 \quad \text{und} \quad M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})\}.$$

(*ii*) Für $\alpha = 0$, $c \neq 0$:

$$M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} + \xi c^{-1}\mathfrak{b}) \mid \xi \in \mathrm{H}^*\} \neq \emptyset \quad \text{und} \quad |M_{(a,b)}| = |\mathrm{H}^*|.$$

(*iii*) Für $\alpha \neq 0$, $c = 0$: $M_{(a,b)} = \{\varphi(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b})\} \neq \emptyset$.

(*iv*) Für $\alpha = c = 0$: $M_{(a,b)} = \emptyset$.

Für a, $b \in \mathbf{P}$ setzen wir

$$a \approx b \colon \iff \exists\, c \in \mathbf{P}^{**} \colon \widetilde{c}(a) = b.$$

Es gilt

Proposition 1.3.7. *Es sei*

$$\kappa \colon \begin{cases} \mathbf{P} & \longrightarrow \quad \mathrm{F}/_{\sim} \\ p := \mathrm{H}^*\mathfrak{p} & \longmapsto \quad [f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})]_{\sim} \end{cases}$$

Für a, $b \in \mathbf{P}$ mit $a \approx b$ gilt $\kappa(a) = \kappa(b)$.

Beweis. Es sei $c = \varphi(\mathfrak{c})$ mit $\widetilde{c}(a) = b$. Dann ist $f(\mathfrak{c},\mathfrak{c}) \neq 0$, und es gilt

$$-\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} &f(\mathfrak{b},\mathfrak{b}) = f(-\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c}, -\mathfrak{a} + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}\mathfrak{c}) = \\ &f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) - 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}f(\mathfrak{c},\mathfrak{a}) - 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})\overline{f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}}\;\overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})} + \\ &+ 4f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})\overline{f(\mathfrak{c},\mathfrak{c})^{-1}}\;\overline{f(\mathfrak{a},\mathfrak{c})} = f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Daraus folgt $[f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})]_{\sim} = [f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})]_{\sim}$, somit ist $\kappa(a) = \kappa(b)$. □

2

Spiegelungsstrukturen und abgeleitete Loops

2.1 Binäre Operationen

Definition 2.1.1. Eine Menge $\mathbf{L}$ mit einer binären Operation

$$+ \colon \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L} \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

heißt *Rechtsquasigruppe*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

L1r Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Gleichung $a + x = b$ eindeutig lösbar in $\mathbf{L}$.

Ein Element $0 \in \mathbf{L}$ heißt *rechtsneutral* bzw. *linksneutral*, wenn für alle $x \in \mathbf{L}$ die Gleichung $x + 0 = x$ bzw. $0 + x = x$ gilt. Wenn eine Rechtsquasigruppe ein rechtsneutrales Element besitzt, dann bezeichnen wir mit $-a$ die Lösung der Gleichung $a + x = 0$ für jedes $a \in \mathbf{L}$.

Definition 2.1.2. Ein *Rechtsloop* ist eine Rechtsquasigruppe mit der Eigenschaft:

L2 Es gibt ein neutrales Element $0 \in \mathbf{L}$ mit $0 + a = a = a + 0$ für jedes $a \in \mathbf{L}$.

Definition 2.1.3. Eine Rechtsquasigruppe (bzw. ein Rechtsloop) $(\mathbf{L}, +)$ heißt *Quasigruppe* (bzw. *Loop*), wenn zusätzlich gilt:

L1l Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Gleichung $y + a = b$ eindeutig lösbar in $\mathbf{L}$.

Es sei $(\mathbf{L}, +)$ eine Rechtsquasigruppe. Dann ist für jedes $a \in \mathbf{L}$ die Abbildung

$$a^+ \colon \mathbf{L} \to \mathbf{L}\,, \quad x \longmapsto a + x$$

eine Permutation von $\mathbf{L}$, also $a^+ \in \mathit{Sym}\,\mathbf{L}$, wobei $\mathit{Sym}\,\mathbf{L}$ die symmetrische Gruppe von $\mathbf{L}$ (d.h. die Gruppe aller Permutationen von $\mathbf{L}$) bezeichnet.

Wir setzen

$$\mathbf{L}^+ := \{a^+ \mid a \in \mathbf{L}\}.$$

Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist somit die Abbildung

$$\delta_{a,b} := ((a+b)^+)^{-1} \circ a^+ \circ b^+$$

ebenfalls eine Permutation von $\mathbf{L}$, die im Falle einer Rechtsquasigruppe mit rechtsneutralem Element 0 dieses festläßt. Nach A. Kreuzer und H. Wefelscheid [18] nennen wir dann die von den Abbildungen $\delta_{a,b}$ erzeugte Untergruppe

$$\Delta := \langle \{\delta_{a,b} \mid a, b \in \mathbf{L}\} \rangle$$

der symmetrischen Gruppe $Sym\,\mathbf{L}$ die *Strukturgruppe* der Rechtsquasigruppe.

Definition 2.1.4. Ein Loop $(\mathbf{L}, +)$ heißt *K-Loop*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

LK1 Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Abbildung $\delta_{a,b}$ ein Automorphismus des Loops $(\mathbf{L}, +)$. Es gilt also:

$$\delta : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to Aut\,(\mathbf{L}, +)\ ;\ (a,b) \mapsto \delta_{a,b}$$

ist eine Abbildung, so daß für alle Elemente $a, b, c \in \mathbf{L}$ die Gleichung

$$a + (b + c) = (a + b) + \delta_{a,b}(c)$$

gilt.

LK2 Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ gilt:

a) $\quad -(a+b) = -a + (-b)$

b) $\quad \delta_{a,b} = \delta_{a,b+a}$.

Bemerkung. Nach [17] ist in einem Loop **LK2b** äquivalent zu

B (Bol-Identität) Für alle $a, b, c \in \mathbf{L}$ gilt

$$a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c\,, \quad \text{d.h.} \quad a^+ \circ b^+ \circ a^+ = (a + (b + a))^+.$$

Definition 2.1.5. Ein Loop $(\mathbf{L}, +)$ heißt *Bol-Loop*, wenn die Bol-Identität gilt, und ein Bol-Loop heißt *Bruck-Loop*, wenn zusätzlich **LK2a)** gilt.

Nach [17] gilt:

Theorem 2.1.1. *Ein Loop* $(\mathbf{L}, +)$ *ist genau dann ein K-Loop, wenn er ein Bruck-Loop ist.*

Definition 2.1.6. Eine nicht-leere Menge U eines Loops $(\mathbf{L}, +)$ heißt *Unterloop*, wenn $(U, +)$ selbst ein Loop ist, d.h. es muß gelten:

1. $U + U \subset U$.
2. Für alle $a,\ b \in U$ sind die Gleichungen $a + x = b$ und $y + a = b$ in U lösbar.

Es gilt (vgl. [5])

Proposition 2.1.2. *Jeder Unterloop eines K-Loops ist selbst ein K-Loop.*

2.2 Abbildungsmengen, Bündelkeime und Faserungen

Definition 2.2.1. Es sei $\mathbf{M} \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{M})$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbf{M}$. $\mathfrak{B}$ heißt *Bündel* bezüglich eines Punktes $b \in \mathbf{M}$, wenn gilt:

FS1 $\forall\, X \in \mathfrak{B} \colon |X| \geq 2$

FS2 $\bigcup \mathfrak{B} = \mathbf{M}$

FS3 $\forall\, X, Y \in \mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad X \neq Y \colon X \cap Y = \{b\}$.

Definition 2.2.2. Es sei $\mathfrak{C} \subset \mathit{Sym}\,\mathbf{M}$ eine ausgezeichnete Teilmenge der symmetrischen Gruppe einer Menge $\mathbf{M} \neq \emptyset$ mit der Eigenschaft:

B1′ $\exists\, 0 \in \mathbf{M} \colon \mathfrak{C}(0) = \mathbf{M}$.

Wir nennen das Tripel $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}; 0)$ mit **B1′** *Abbildungsmenge.*

Bemerkung. Für jedes $a \in \mathbf{M}$ ist dann die Menge der Abbildungen

$$[0 \to a] := \{\alpha \in \mathfrak{C} \mid \alpha(0) = a\} \quad \text{nicht leer.}$$

Definition 2.2.3. Für $\alpha, \beta \in \mathfrak{C}$ und $\gamma \in [0 \to \alpha \circ \beta(0)]$ bzw. $\gamma \in [0 \to \alpha^{-1} \circ \beta(0)]$ setzen wir

$$\delta^{\gamma}_{\alpha,\beta} := \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \beta \quad \text{bzw.} \quad \delta^{\gamma}_{\alpha^{-1},\beta} := \gamma^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \beta.$$

Die von $\delta^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ und $\delta^{\gamma}_{\alpha^{-1},\beta}$ erzeugte Gruppe

$$\Delta := \langle \{\delta^{\gamma}_{\alpha,\beta}\,,\ \delta^{\gamma}_{\alpha^{-1},\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathfrak{C}\ ,\ \gamma \in [0 \to \alpha \circ \beta(0)] \quad \text{bzw.} \quad \gamma \in [0 \to \alpha^{-1} \circ \beta(0)]\}\rangle$$

nennen wir die *Strukturgruppe der Abbildungsmenge* $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}; 0)$.

Es sei

$$\langle \mathfrak{C} \rangle_0 := \langle \{\sigma \in \langle \mathfrak{C} \rangle \mid \sigma(0) = 0\}\rangle.$$

Es gilt

Proposition 2.2.1. $\Delta \leq \langle \mathfrak{C} \rangle_0 \leq \langle \mathfrak{C} \rangle$*, und* $\langle \mathfrak{C} \rangle$ *operiert transitiv auf* $\mathbf{M}$.

Definition 2.2.4. Wenn $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}; 0)$ eine Abbildungsmenge und $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{M})$ eine Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbf{M}$ ist, so nennen wir $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}, 0, \mathfrak{S})$ einen *schwachen Strukturkeim*, wenn die Bedingung

Z1 $\forall\, \delta \in \Delta\,,\ \forall\, X \in \mathfrak{S} \colon\ \delta(X) \in \mathfrak{S}$

erfüllt ist, und einen *Strukturkeim*, wenn zusätzlich gilt

Z2 $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{C}, \forall X \in \mathfrak{S}$ mit $0 \in \alpha^{-1} \circ \beta(X)$: $\alpha^{-1} \circ \beta(X) \in \mathfrak{S}$.

Aus einem schwachen Strukturkeim $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}, 0, \mathfrak{S})$ erhalten wir eine globale Struktur $(\mathbf{M}, \langle\mathfrak{C}\rangle, \overline{\mathfrak{S}})$ mit

$$\overline{\mathfrak{S}} = \{\gamma(X) \mid \gamma \in \mathfrak{C},\ X \in \mathfrak{S}\}.$$

Satz 2.2.2. *Es sei* $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}, 0, \mathfrak{S})$ *ein Strukturkeim. Dann ist*

$$\langle\mathfrak{C}\rangle \leq Aut\,(\mathbf{M}, \overline{\mathfrak{S}}),$$

d.h. die von $\mathfrak{C}$ *erzeugte Gruppe ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe der globalen Struktur* $(\mathbf{M}, \overline{\mathfrak{S}})$.

Beweis. Es seien $\alpha, \beta \in \mathfrak{C}$ und $\varepsilon(X) \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit $X \in \mathfrak{S}$ und $\varepsilon \in \mathfrak{C}$. Es gilt für $\gamma_1 \in [0 \to \beta \circ \varepsilon(0)]$ und $\gamma_2 \in [0 \to \alpha \circ \gamma_1(0)]$: $\quad Y := \delta^{\gamma_1}_{\beta,\varepsilon}(X) \in \mathfrak{S}$ und $\delta^{\gamma_2}_{\alpha,\gamma_1}(Y) \in \mathfrak{S}$ wegen **Z1**, also

$$\alpha \circ \beta \circ \varepsilon(X) = \alpha \circ \gamma_1 \circ \delta^{\gamma_1}_{\beta,\varepsilon}(X) = \alpha \circ \gamma_1(Y) = \gamma_2 \circ \delta^{\gamma_2}_{\alpha,\gamma_1}(Y) \in \overline{\mathfrak{S}}.$$

□

Definition 2.2.5. Ein (schwacher) Strukturkeim $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}, 0, \mathfrak{S})$, in dem $\mathfrak{S}$ ein Bündel bezüglich 0 ist, heißt *(schwacher) Bündelkeim.*

Es gilt

Satz 2.2.3. *Wenn* $(\mathbf{M}, \mathfrak{C}, 0, \mathfrak{S})$ *ein Bündelkeim ist, so ist das Paar* $(\mathbf{M}, \overline{\mathfrak{S}})$ *ein Inzidenzraum*[1]*,* $\langle\mathfrak{C}\rangle$ *eine Untergruppe der Gruppe der Kollineationen von* $(\mathbf{M}, \overline{\mathfrak{S}})$*,* $\mathfrak{S} \subset \overline{\mathfrak{S}}$ *und sogar* $\mathfrak{S} = \{S \in \overline{\mathfrak{S}} \mid 0 \in S\}$.

Beweis. Es seien $a, b \in \mathbf{M}$ mit $a \neq b$, $\alpha \in [0 \to a]$. Da $\mathfrak{S}$ ein Bündel ist und $\alpha^{-1}(b) \neq \alpha^{-1}(a) = 0$, gibt es genau ein $X \in \mathfrak{S}$ mit

$$\alpha^{-1}(b) \in X \in \mathfrak{S} \quad (*),$$

und da $a = \alpha(0) \in \alpha(X) \in \overline{\mathfrak{S}}$ ist, ist $\alpha(X)$ eine „Gerade“ aus $\overline{\mathfrak{S}}$, die die „ Punkte“ a und b enthält.
Es sei jetzt $Y \in \mathfrak{S}$ und $\gamma \in \mathfrak{C}$ mit $a, b \in \gamma(Y)$.
Dann gilt 0, $\alpha^{-1}(b) \in \alpha^{-1} \circ \gamma(Y) =: Z$, also $Z \in \mathfrak{S}$ wegen **Z2** und, weil $\mathfrak{S}$ bezüglich 0 ein Bündel ist, $Z = X$ also

$$\alpha(X) = \alpha(Z) = \gamma(Y).$$

[1] $\mathbf{M}$ ist eine Menge, deren Elemente wir *Punkte* nennen, $\overline{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{M})$ Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbf{M}$, deren Elemente wir *Geraden* nennen, und es gelten folgende Axiome:
Zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in \mathbf{M}$ gibt es genau eine Gerade $G \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit $a, b \in G$.
Jede Gerade $G \in \overline{\mathfrak{S}}$ enthält mindestens zwei Punkte.

Folglich haben a und b genau eine „Verbindungsgerade". Da sich jedes $X \in \overline{\mathfrak{S}}$ in der Form $X = \gamma(Y)$ mit $Y \in \mathfrak{S}$, $\gamma \in Sym\,\mathbf{M}$ darstellen läßt, gilt $|X| = |Y| \geq 2$ nach **FS1**.
Wegen 2.2.2 gilt $\langle \mathfrak{C} \rangle \leq Aut\,(\mathbf{M}, \overline{\mathfrak{S}})$.
Es sei $\alpha \in \mathfrak{C}$ beliebig, $\beta := \alpha$ und $\gamma \in [0 \to \alpha^{-1} \circ \beta(0)] = [0 \to 0]$.
Dann ist $\delta^{\gamma}_{\alpha^{-1},\beta} = \gamma^{-1} \in \Delta$, also auch $\gamma \in \Delta$. Somit gilt nach **Z1**

$$\gamma(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \gamma^{-1}(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S},$$

woraus $\gamma(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}$ folgt, also gilt $\mathfrak{S} = \gamma(\mathfrak{S}) \subset \overline{\mathfrak{S}}$ nach Definition von $\overline{\mathfrak{S}}$. □

Proposition 2.2.4. *Wenn* $(\mathbf{L}, +)$ *ein Rechtsloop ist, dann ist* $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^+; 0)$ *eine Abbildungsmenge, deren Strukturgruppe* Δ *mit der Strukturgruppe des Rechtsloops übereinstimmt.*

Beweis. Für jedes $a \in \mathbf{L}$ gilt $a^+ \in Sym\,\mathbf{L}$ und $a^+(0) = a$; damit ist $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^+; 0)$ eine Abbildungsmenge (vgl. Definition 2.2.2).
Es sei $c^+ \in [0 \longrightarrow a^+ \circ b^+(0)]$. Dann gilt $c^+(0) = a^+ \circ b^+(0) = a^+(b) = a + b$. Daraus folgt

$$\delta^{c^+}_{a^+,b^+} := (c^+)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ = \left((a+b)^+\right)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ = \delta_{a,b}.$$

Falls $c^+ \in [0 \longrightarrow (a^+)^{-1} \circ b^+(0)]$ gilt, ist $c = c^+(0) = (a^+)^{-1}(b)$, d.h. $a^+(c) = b$, und somit

$$\delta^{c^+}_{(a^+)^{-1},b^+} := (c^+)^{-1} \circ (a^+)^{-1} \circ b^+ = (c^+)^{-1} \circ (a^+)^{-1} \circ (a+c)^+ = \delta^{-1}_{a,c}.$$

□

Definition 2.2.6. Eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ der Potenzmenge von $\mathbf{L}$ heißt *Inzidenzfaserung* (vgl. [26]) und die Struktur $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F})$ *gefaserter Rechtsloop* , wenn $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^+, 0, \mathfrak{F})$ ein schwacher Bündelkeim ist und jedes $X \in \mathfrak{F}$ ein Unterrechtsloop von $(\mathbf{L}, +)$ ist.

Bemerkung. Falls $(\mathbf{L}, +)$ ein Rechtsloop ist, folgt **Z2** aus **Z1**, d.h.

$$\forall\, X \in \mathfrak{F}, \quad \forall\, a^+, b^+ \in \mathbf{L}^+ \quad \text{mit} \quad 0 \in (a^+)^{-1} \circ b^+(X) \colon (a^+)^{-1} \circ b^+(X) \in \mathfrak{F}.$$

Beweis. Es sei $c^+ := (a^+)^{-1} \circ b^+$. Dann ist $0 \in c + X$ und $-c \in X$. Daraus folgt

$$c + X = c^+(X) = \left((c + (-c))^+\right)^{-1} \circ c^+ \circ (-c)^+(X) = \delta_{c,-c}(X) \in \mathfrak{F}$$

wegen **Z1**. □

Satz 2.2.5. *Es sei* $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F})$ *ein gefaserter Rechtsloop und*

$$\mathfrak{G} := \overline{\mathfrak{F}} = \{a + X \mid a \in \mathbf{L}\,,\ X \in \mathfrak{F}\}$$

die Menge aller Rechtsnebenklassen von Elementen aus $\mathfrak{F}$. *Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(1) $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^+, 0, \mathfrak{F})$ *ist ein Bündelkeim.*

(2) $\forall\, a,b \in \mathbf{L}\,,\ \forall\, X \in \mathfrak{F}$ *mit* $b \in a+X$, $\exists\, Y \in \mathfrak{F}$: $a+X = b+Y$.

(3) $(\mathbf{L},\mathfrak{G})$ *ist ein Inzidenzraum.*

(4) $\mathbf{L}^{+} \subset Aut\,(\mathbf{L},\mathfrak{G})$.

Beweis. **(1)** Es seien jetzt $a,b \in \mathbf{L}$ und $X \in \mathfrak{F}$ mit $0 \in (a^{+})^{-1} \circ b^{+}(X)$, d.h. $a \in b^{+}(X)$. Daher gibt es ein $x \in X$ mit $a = b+x$. Da jedes $X \in \mathfrak{F}$ ein Unterrechtsloop ist, gilt $x + X = X$, also $(x^{+})^{-1}(X) = X$, und somit

$$(a^{+})^{-1} \circ b^{+}(X) = ((b+x)^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ x^{+} \circ (x^{+})^{-1}(X) = \delta_{b,x}(X) \in \mathfrak{F}$$

nach **Z1**, woraus **Z2** folgt.

(2) Es sei $b \in a+X$. Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $b = a+x$.
Es sei $Y := \delta_{a,x}(X)$. Dann ist $Y \in \mathfrak{F}$ nach **Z1** und

$$b+Y = (a+x)+\delta_{a,x}(X) = a+(x+X) = a+X,$$

da X ein Unterrechtsloop von $(\mathbf{L},+)$ ist.

(3) folgt aus **(1)** und Satz 2.2.3.

(4) folgt aus Satz 2.2.2. □

Proposition 2.2.6. *Es sei* $(\mathbf{L},+,\mathfrak{F})$ *ein gefaserter Rechtsloop und es sei*

$$Aut\,(\mathbf{L},+,\mathfrak{F}) := \{\sigma \in Aut\,(\mathbf{L},+) \mid \forall\, X \in \mathfrak{F}:\ \ \sigma(X) \in \mathfrak{F}\}\,.$$

Dann ist $Aut\,(\mathbf{L},+,\mathfrak{F}) \leq Aut\,(\mathbf{L},\mathfrak{G})$.

Beweis. Es sei $\sigma \in Aut\,(\mathbf{L},+,\mathfrak{F})$ und $a+X \in \mathfrak{G}$. Dann gilt

$$\sigma(a+X) = \sigma(a)+\sigma(X) = \sigma(a)+Y \in \mathfrak{G}$$

mit $Y := \sigma(X) \in \mathfrak{F}$. □

2.3 Beziehungen zwischen Binären Operationen und Abbildungsmengen

Satz 2.3.1. *Es sei* $(\mathbf{Q},+)$ *eine Rechtsquasigruppe und* $0 \in \mathbf{Q}$ *ausgezeichnet. Dann gilt:*

(1) *Wenn* 0 *ein rechtsneutrales Element von* $(\mathbf{Q},+)$ *ist, so ist* $(\mathbf{Q},\mathbf{Q}^+;0)$ *eine Abbildungsmenge, die der Bedingung*

B1 *Für jedes* $a \in \mathbf{Q}$ *besteht* $[0 \to a]$ *aus genau einem Element*

genügt, und hier gilt $[0 \to a] = \{a^+\}$.

(2) *Wenn* $(\mathbf{Q},\mathbf{Q}^+;0)$ *die Bedingung* **B1** *erfüllt, d.h. zu jedem* $a \in \mathbf{Q}$ *gibt es genau ein* $a' \in \mathbf{Q}$ *mit* $a'^+(0) = a$, *so ist* $(\mathbf{Q},\mathbf{Q}^+;0)$ *eine Abbildungsmenge, und es gilt:*

(i) *Die Abbildung* $' : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}\,;\; x \longmapsto x'$ *ist eine Bijektion.*

(ii) *Die Strukturgruppe* Δ *von* $(\mathbf{Q},\mathbf{Q}^+;0)$ *wird erzeugt von den Abbildungen*

$$\delta_{a,b} := \big((a+(b+0))'^+\big)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ \quad \textit{mit} \quad a,b \in \mathbf{Q}.$$

(iii) *Für* $a \oplus b := a'^+(b)$ *ist* $(\mathbf{Q},\oplus)$ *eine Rechtsquasigruppe mit* 0 *als rechtsneutralem Element,*

$$\mathbf{Q}^\oplus := \{a^\oplus \mid a \in \mathbf{Q}\} = \{a'^+ \mid a \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q}^+\,,$$

und für die Abbildungen

$$\delta^\circ_{a,b} := \big((a \oplus b)^\oplus\big)^{-1} \circ a^\oplus \circ b^\oplus \quad \textit{mit} \quad a,b \in \mathbf{Q}\,,$$

die die Strukturgruppe Δ° *der Abbildungsmenge* $(\mathbf{Q},\mathbf{Q}^\oplus;0)$ *erzeugen, gilt* $\delta^\circ_{a,b} := \delta_{a',b'}$ *und somit* $\Delta^\circ = \Delta$.

(iv) *Für*

$$a \boxplus b := a^\oplus \circ (0^\oplus)^{-1}(b) = a'^+ \circ (0'^+)^{-1}(b)$$

ist $(\mathbf{Q},\boxplus)$ *ein Rechtsloop mit* 0 *als neutralem Element, und es gilt*

a)

$$\mathbf{Q}^\boxplus := \{a^\boxplus \mid a \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{Q}^\oplus \circ (0^\oplus)^{-1} = \mathbf{Q}^+ \circ (0'^+)^{-1},$$
$$\textit{also} \qquad \langle \mathbf{Q}^\boxplus \rangle \le \langle \mathbf{Q}^\oplus \rangle = \langle \mathbf{Q}^+ \rangle.$$

b) *die Strukturgruppe* $\Delta^\square$ *der Abbildungsmenge* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\boxplus; 0)$ *wird erzeugt von den Abbildungen*

$$\delta^\square_{a,b} := \left((a \boxplus b)^\boxplus\right)^{-1} \circ a^\boxplus \circ b^\boxplus \quad mit \quad a, b \in \mathbf{Q},$$

für die

$$\delta^\square_{a,b} = 0^\oplus \circ \delta^\circ_{a,\overline{b}} \circ (\delta^\circ_{0,\overline{b}})^{-1} \circ (0^\oplus)^{-1} \quad mit \quad \overline{b} := (0^\oplus)^{-1}(b)$$

gilt, also

$$\Delta^\square \leq 0^\oplus \circ \Delta^\circ \circ (0^\oplus)^{-1} = 0'^+ \circ \Delta^\circ \circ (0'^+)^{-1}.$$

c) *Für den Rechtsloop* $(\mathbf{Q}, \boxplus)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

B *(Bol Identität)* $\forall\, a, b \in \mathbf{Q} \,:\; a^\boxplus \circ b^\boxplus \circ a^\boxplus = (a \boxplus (b \boxplus a))^\boxplus$

A2 $\forall\, a, b \in \mathbf{Q} \,:\; a^+ \circ (0'^+)^{-1} \circ b^+ \circ (0'^+)^{-1} \circ a^+ \in \mathbf{Q}^+$

(3) $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+; 0)$ *erfülle* **B1** *und es sei* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{Q})$.

(i) *Wenn* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+; 0; \mathfrak{S})$ *ein schwacher Strukturkeim ist, so ist auch* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\oplus; 0; \mathfrak{S})$ *ein schwacher Strukturkeim; wenn* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\oplus; 0; \mathfrak{S})$ *ein schwacher Strukturkeim ist, so ist* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\boxplus; 0; 0'^+(\mathfrak{S}))$ *ein schwacher Strukturkeim.*

(ii) *Wenn* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+; 0; \mathfrak{S})$ *ein Strukturkeim ist, so ist auch* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\oplus; 0; \mathfrak{S})$ *ein Strukturkeim, und wenn* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\oplus; 0; \mathfrak{S})$ *ein Strukturkeim ist, so ist* $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\boxplus; 0; 0'^+(\mathfrak{S}))$ *ein Strukturkeim.*

Beweis. **(1)** Da 0 rechtsneutral ist, gilt für jedes $a \in \mathbf{Q}$, $a = a + 0 = a^+(0)$, also

$$a^+ \in [0 \to a]\,; \quad \text{und} \quad x^+ \in [0 \to a]$$

impliziert $a = x^+(0) = x + 0 = x$. Daher gilt $[0 \to a] = \{a^+\}$.

(2) „**(i)**" Wegen **B1** ist die Abbildung „$'$" eine Injektion. Wenn $a \in \mathbf{Q}$ vorgegeben ist, so gilt $\left(a^+(0)\right)' = a$. Also ist „$'$"auch surjektiv.
„**(ii)**" Es seien $a^+, b^+ \in \mathbf{Q}^+$, $c := a^+ \circ b^+(0)$ und $d := (a^+)^{-1} \circ b^+(0)$. Nach Voraussetzung ist $[0 \longrightarrow c] = \{c'^+\}$ und $[0 \longrightarrow d] = \{d'^+\}$ also

$$\delta_{a,b} := \delta^{c'^+}_{a^+,b^+} = (c'^+)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ = \left((a + (b + 0))'^+\right)^{-1} \circ a^+ \circ b^+$$

und $\varepsilon := \delta^{d'^+}_{(a^+)^{-1},b^+} = (d'^+)^{-1} \circ (a^+)^{-1} \circ b^+$ also

$$(\varepsilon)^{-1} = (b^+)^{-1} \circ a^+ \circ \left((a^+)^{-1} \circ b^+(0)\right)'^+ = (a^+ \circ (a^+)^{-1} \circ b^+)^{-1} \circ a^+ \circ \left((a^+)^{-1} \circ b^+(0)\right)'^+$$
$$= \left((a + d')^+\right)^{-1} \circ a^+ \circ d'^+ = \delta_{a,d'}.$$

Damit wird die Strukturgruppe Δ der Abbildungsmenge $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^+; 0)$ (vgl. Definition 2.2.3) von den Abbildungen $\delta_{a,b}$ erzeugt.

„**(iii)**“ Für $a, b \in \mathbf{Q}$ betrachten wir die Gleichung

$$a \oplus x = a'^{+}(x) = b.$$

Da $a'^{+} \in Sym\,\mathbf{Q}$, gilt $x = (a'^{+})^{-1}(b)$. Weiterhin gilt

$$a \oplus 0 = a'^{+}(0) = a.$$

Also ist $(\mathbf{Q}, \oplus)$ eine Rechtsquasigruppe mit rechtsneutralem Element 0.
Es sei $a \in \mathbf{Q}$ und $b := a^{+}(0)$. Dann ist $b' = a$, da

$$b = b'^{+}(0) = a^{+}(0) \quad \text{also} \quad b^{\oplus} = b'^{+} = a^{+}\,,$$

d.h. $\mathbf{Q}^{+} \subset \mathbf{Q}^{\oplus}$. Die Inklusion $\mathbf{Q}^{\oplus} \subset \mathbf{Q}^{+}$ ist trivial. Aus $\mathbf{Q}^{+} = \mathbf{Q}^{\oplus}$ folgt $\Delta = \Delta^{\circ}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}\delta_{a',b'} &= \left((a' + (b' + 0))'^{+}\right)^{-1} \circ a'^{+} \circ b'^{+} = \left((a'^{+} \circ b'^{+}(0))'^{+}\right)^{-1} \circ a'^{+} \circ b'^{+} = \\ &= \left((a'^{+}(b))'^{+}\right)^{-1} \circ a'^{+} \circ b'^{+} = \left((a \oplus b)^{\oplus}\right)^{-1} \circ a^{\oplus} \circ b^{\oplus} =: \delta^{\circ}_{a,b}.\end{aligned}$$

„**(iv)**“ Da $a^{\oplus}$, $(0^{\oplus})^{-1} \in Sym\,\mathbf{Q}\,,\ \exists_1\, x \in \mathbf{Q}$:

$$\begin{aligned}&a \boxplus x = a^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1}(x) = b\,, \quad \text{und es ist}\\ &0 \boxplus a = 0^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1}(a) = a \quad \text{und}\\ &a \boxplus 0 = a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}(0) = a'^{+}(0) = a\,,\end{aligned}$$

also ist $(\mathbf{Q}, \boxplus)$ ein Rechtsloop.
Offensichtlich gilt „**a)**“
„**b)**“ Es sei $\overline{b} := (0^{\oplus})^{-1}(b)$. Dann ist $b = 0^{\oplus}(\overline{b}) = 0 \oplus \overline{b}$ und daraus folgt $b^{\oplus} = (0 \oplus \overline{b})^{\oplus}$.
Es gilt $a \boxplus b = a \oplus \overline{b}$, und somit

$$\begin{aligned}&\delta^{\square}_{a,b} = 0^{\oplus} \circ \left((a \oplus \overline{b})^{\oplus}\right)^{-1} \circ a^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1} \circ b^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1} = \\ &0^{\oplus} \circ \delta^{\circ}_{a,\overline{b}} \circ (\overline{b}^{\oplus})^{-1} \circ (0^{\oplus})^{-1} \circ \overline{b}^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1} = 0^{\oplus} \circ \delta^{\circ}_{a,\overline{b}} \circ (\delta^{\circ}_{0,\overline{b}})^{-1} \circ (0^{\oplus})^{-1}.\end{aligned}$$

Dies bedeutet

$$\delta^{\square}_{a,0\oplus b} = 0^{\oplus} \circ \delta^{\circ}_{a,b} \circ (\delta^{\circ}_{0,b})^{-1} \circ (0^{\oplus})^{-1},$$

woraus $\Delta^{\square} \leq 0^{\oplus} \circ \Delta^{\circ} \circ (0^{\oplus})^{-1}$ folgt.
„**c)**“ Für alle $a, b \in \mathbf{Q}$ gilt:

$$\begin{aligned}&a^{\boxplus} \circ b^{\boxplus} \circ a^{\boxplus} = a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}.\\ &a \boxplus (b \boxplus a) = a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}(a).\end{aligned}$$

$$(a \boxplus (b \boxplus a))^{\boxplus} = (a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}(a))'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}.$$

Also

$$a^{\boxplus} \circ b^{\boxplus} \circ a^{\boxplus} = (a \boxplus (b \boxplus a))^{\boxplus} \iff a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a'^{+} = \\ = \big(a'^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b'^{+} \circ (0'^{+})^{-1}(a)\big)'^{+}.$$

Es ist nach (2)(i) die Abbildung „$'$“ eine Permutation, also ist **B** äquivalent mit der Aussage

A2′ $\forall\, a, b \in \mathbf{Q}\colon a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a^{+} = \big(a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ (a^{+}(0))\big)^{+}$,

aus der sich **A2** ergibt. Aus **A2** folgt, daß es ein $c \in \mathbf{Q}$ gibt mit

$$a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a^{+} = c^{+}.$$

Durch Anwendung auf 0 erhalten wir

$$c^{+}(0) = a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a^{+}(0)\,,$$

also

$$a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a^{+} = \big((a^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ b^{+} \circ (0'^{+})^{-1} \circ a^{+}(0)\big)^{+}.$$

Also folgt **A2′** aus **A2**.

(3)„(i)“ Es sei $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{+}, 0, \mathfrak{S})$ ein schwacher Strukturkeim, dann gilt

$$\forall\, \delta \in \Delta \quad \forall\, X \in \mathfrak{S}\colon \delta(X) \in \mathfrak{S} \quad (\text{vgl. } \mathbf{Z1}).$$

Nach (2)(iii) ist $\Delta^{\circ} = \Delta$, daher ist $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\oplus}, 0, \mathfrak{S})$ ein schwacher Strukturkeim.
Es sei jetzt $Y := 0^{\oplus}(X)$ mit $X \in \mathfrak{S}$ und $\delta^{\square}_{a,b} \in \Delta^{\square}$. Dann gilt nach b)

$$\delta^{\square}_{a,b}(Y) = 0^{\oplus} \circ \delta^{\circ}_{a,\bar b} \circ (\delta^{\circ}_{0,\bar b})^{-1} \circ (0^{\oplus})^{-1}(Y) = 0^{\oplus} \circ \delta^{\circ}_{a,\bar b} \circ (\delta^{\circ}_{0,\bar b})^{-1} \circ (0^{\oplus})^{-1} \circ 0^{\oplus}(X) = \\ 0'^{+} \circ \delta^{\circ}_{a,\bar b} \circ (\delta^{\circ}_{0,\bar b})^{-1}(X).$$

Wenn $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\oplus}, 0, \mathfrak{S})$ ein schwacher Strukturkeim ist, gilt $\delta^{\circ}_{a,\bar b} \circ (\delta^{\circ}_{0,\bar b})^{-1}(X) = T \in \mathfrak{S}$, und daraus folgt $\delta^{\square}_{a,b}(Y) = 0'^{+}(T) \in 0'^{+}(\mathfrak{S})$, d.h. **Z1** gilt für $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\boxplus}, 0, 0'^{+}(\mathfrak{S}))$.
„(ii)“ Wegen $\Delta^{\circ} = \Delta$ ist $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\oplus}, 0, \mathfrak{S})$ ein Strukturkeim, wenn $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{+}, 0, \mathfrak{S})$ ein Strukturkeim ist.
Es sei jetzt $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\oplus}, 0, \mathfrak{S})$ ein Strukturkeim. Dann gilt für alle $a^{\oplus}$, $b^{\oplus} \in \mathbf{Q}^{\oplus}$ und für alle $X \in \mathfrak{S}$

$$0 \in (a^{\oplus})^{-1} \circ b^{\oplus}(X) \Rightarrow (a^{\oplus})^{-1} \circ b^{\oplus}(X) \in \mathfrak{S} \quad (\text{vgl. } \mathbf{Z2}).$$

Es seien $a^{\boxplus}$, $b^{\boxplus} \in \mathbf{Q}^{\boxplus}$, $Y = 0'^{+}(X) \in 0'^{+}(\mathfrak{S})$ mit

$$0 \in (a^{\boxplus})^{-1} \circ b^{\boxplus}(Y) = \big(a^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1}\big)^{-1} \circ b^{\oplus} \circ (0^{\oplus})^{-1} \circ 0^{\oplus}(X) = 0^{\oplus} \circ (a^{\oplus})^{-1} \circ b^{\oplus}(X);$$

dann folgt

$$(a^{\boxplus})^{-1} \circ b^{\boxplus}(Y) = 0^{\oplus} \circ (a^{\oplus})^{-1} \circ b^{\oplus}(X) \in 0'^{+}(\mathfrak{S})\,,$$

d.h. **Z2** gilt für $\big(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\boxplus}, 0, 0'^{+}(\mathfrak{S})\big)$. $\square$

Proposition 2.3.2. *Wenn ein Rechtsloop* $(\mathbf{Q}, +)$ *der Bol-Identität* **B** *genügt, so ist er ein Bol-Loop.*

Beweis. Wenn die Gleichung $x + a = b$ eine Lösung in $\mathbf{Q}$ hat, so gilt $a + (x + a) = a + b$, also wegen der Bol-Identität

$$(a+b)^+ = a^+ \circ x^+ \circ a^+ \quad \text{und somit} \quad x^+ = (a^+)^{-1} \circ (a+b)^+ \circ (a^+)^{-1}.$$

Daher $x = (a^+)^{-1} \circ (a+b)^+ \circ (a^+)^{-1}(0)$ und

$$\begin{aligned} x + a = x^+(a) &= (a^+)^{-1} \circ (a+b)^+ \circ (a^+)^{-1}(a) = \\ &= (a^+)^{-1} \circ (a+b)^+(0) = (a^+)^{-1} \circ a^+(b) = b. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.3. *Wenn in einem Rechtsloop* $(\mathbf{Q}, +)$ *die Bedingung*

B2 $\quad \forall\, a \in \mathbf{Q}\colon a^+ \circ \mathbf{Q}^+ \circ a^+ = \mathbf{Q}^+$

erfüllt ist, so folgt die Bol-Identität **B**.

Beweis. Wegen **B2** gibt es zu jedem $x \in \mathbf{Q}$ ein $y \in \mathbf{Q}$ mit $a^+ \circ x^+ \circ a^+ = y^+$. Die Anwendung auf 0 ergibt

$$a^+ \circ x^+ \circ a^+(0) = a + (x + a) = y^+(0) = y\,,$$

also $a^+ \circ x^+ \circ a^+ = (a + (x + a))^+$, da in einem Rechtsloop $[0 \to p] = \{p^+\}$. □

Proposition 2.3.4. *In einem Rechtsloop* $(\mathbf{Q}, +)$ *sind die Aussagen äquivalent:*

(**1**) *Für alle* $a \in \mathbf{Q}$ *ist die Gleichung* $x + a = 0$ *lösbar.*

(**2**) $(\mathbf{Q}^+)^{-1}(0) = \mathbf{Q}\,.$

Beweis. Da die Gleichung $0 = x + a = x^+(a)$ mit $(x^+)^{-1}(0) = a$ gleichwertig ist , folgt die Äquivalenz von (1) und (2). □

2.4 Spiegelungsstrukturen und Spiegelungsgeometrien

Definition 2.4.1. Es sei $\mathbf{M} \neq \emptyset$ eine Menge, $0 \in \mathbf{M}$ ein ausgezeichnetes Element,

$$J := \{\sigma \in Sym\,\mathbf{M} \mid \sigma^2 = id\},$$

$J^* := J \setminus \{id\}$ die Menge aller Involutionen von $\mathbf{M}$, und es sei

$$^\circ : \ \mathbf{M} \longrightarrow J\,; \ \ x \to x^\circ$$

eine Abbildung, die den Axiomen

B1 $\quad \forall\, x \in \mathbf{M} \, : \ x^\circ(0) = x$

B2 $\quad \forall\, a, b \in \mathbf{M} \ \exists\, c \in \mathbf{M} \, : \ a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = c^\circ$

genügt. Es sei $\mathbf{M}^\circ := \{x^\circ \mid x \in \mathbf{M}\}$. Dann nennen wir das Tripel $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *Spiegelungsstruktur*.

Bemerkung. Jede Spiegelungstruktur $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ ist eine Abbildungsmenge mit $\mathfrak{C} = \mathbf{M}^\circ$.

Für alle $a, b \in \mathbf{M}$ setzen wir

$$a^+ := a^\circ \circ 0^\circ\,, \ \ a + b := a^+(b)\,, \ \ -a := 0^\circ(a).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \delta_{a,b} &:= ((a+b)^+)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ = 0^\circ \circ (a+b)^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ, \\ \mathbf{M}^+ &:= \{x^+ \mid x \in \mathbf{M}\} = \mathbf{M}^\circ \circ 0^\circ. \end{aligned}$$

Aus **B1** und **B2** folgt:

Proposition 2.4.1. *Wenn* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine Spiegelungsstruktur ist, so gilt für alle* a, $b \in \ \mathbf{M}$

$$a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = \big(a^\circ \circ b^\circ(a)\big)^\circ.$$

Beweis. Nach **B2** gibt es ein $c \in \mathbf{M}$ mit $c^\circ = a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ$. Es gilt

$$c \overset{(\mathbf{B1})}{=} c^\circ(0) = a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ(0) \overset{(\mathbf{B1})}{=} a^\circ \circ b^\circ(a),$$

also $a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = \big(a^\circ \circ b^\circ(a)\big)^\circ$. □

Es gilt (vgl. auch [8])

Satz 2.4.2. *Wenn* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine Spiegelungsstruktur ist und* $a + b := a^\circ \circ 0^\circ(b)$ *für alle* a, $b \in \mathbf{M}$, *so ist* $(\mathbf{M}, +)$ *ein K-Loop.*

Beweis. Da $a^+ = a^\circ \circ 0^\circ \in Sym\,\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^\circ \subset J$, hat die Gleichung $a+x=b$ die eindeutige Lösung

$$x := 0^\circ \circ a^\circ(b).$$

Wegen $0^+ = 0^\circ \circ 0^\circ = id$, ist $0+a=a$. Es gilt $a+0 = a^\circ \circ 0^\circ(0) = a^\circ(0) = a$, d.h. 0 ist neutrales Element.
Die Gleichung $x+a=b$ ist eindeutig lösbar: Wir setzen

$$x := (-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ \circ (-a)^\circ(0) \overset{2.4.1}{=} \Big((-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ(-a)\Big)^\circ(0).$$

Somit ist

$$x^\circ = \Big((-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ(-a)\Big)^\circ.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} x+a = x^\circ \circ 0^\circ(a) &= \Big((-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ(-a)\Big)^\circ \circ 0^\circ(a) = \\ &= \Big((-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ(-a)\Big)^\circ(-a) \\ &\overset{2.4.1}{=} (-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ \circ (-a)^\circ(-a) = \\ &= (-a)^\circ \circ \big((-a)^\circ(b)\big)^\circ(0) \overset{\mathbf{B1}}{=} (-a)^\circ(-a)^\circ(b) \overset{\mathbf{M}^\circ\subset J}{=} b. \end{aligned}$$

Nach **B1** und $\mathbf{M}^\circ \subset J$ folgt

$$a+(-a) = a+0^\circ(a) = a^\circ \circ 0^\circ \circ 0^\circ(a) = a^\circ(a) = 0$$

und

$$-a+a = (-a)^\circ \circ 0^\circ(a) = (-a)^\circ(-a) = 0.$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} &a^+ \circ b^+ \circ a^+ = (a+(b+a))^+ \iff a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ = \\ &= (a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(0))^\circ \circ 0^\circ \iff a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ = \big(a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(0)\big)^\circ. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ &\overset{2.4.1}{=} a^\circ \circ \big(0^\circ \circ b^\circ(0)\big)^\circ \circ a^\circ \overset{2.4.1}{=} \\ &= \Big(a^\circ \circ \big(0^\circ \circ b^\circ(0)\big)^\circ \circ a^\circ(0)\Big)^\circ \overset{2.4.1}{=} \big(a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(0)\big)^\circ. \end{aligned}$$

Damit ist die Bol-Identität bewiesen.
Da

$$0^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ(0) = 0^\circ \circ a^\circ(0) = 0^\circ(a) = -a = (-a)^\circ(0)$$

nach **B1** und der Definition von $-a$ gilt, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &0^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ = (-a)^\circ \iff \forall\, b \in \mathbf{M}\colon\ -(a+b) = 0^\circ(a+b) = 0^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ(b) = \\ &= (-a)^\circ(b) = (-a)^\circ \circ 0^\circ \circ 0^\circ(b) = (-a)^+(-b) = -a+(-b). \end{aligned}$$

So ist $(\mathbf{M},+)$ ein Bruck-Loop und nach 2.1.1 ein K-Loop. $\square$

Definition 2.4.2. Eine Spiegelungsstruktur $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ heißt *singulär*, wenn

$$\forall\, a, b, c \in \mathbf{M} \quad \text{gilt} \quad a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ = c^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ\,,$$

und *ordinär*, wenn

$$\exists\, a, b, c \in \mathbf{M} \quad \text{mit} \quad a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \neq c^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ.$$

Proposition 2.4.3. *Es sei* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine singuläre Spiegelungsstruktur. Dann ist der zugehörige K-Loop* $(\mathbf{M}, +)$ *kommutativ (vgl.* 2.4.2*).*

Beweis. Für alle a, $b \in \mathbf{M}$ gilt

$$a + b = b + a \iff a^\circ \circ 0^\circ(b) = b^\circ \circ 0^\circ(a) \overset{\mathbf{B1}}{\iff} a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ(0) = b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(0).$$

Wenn $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ eine singuläre Spiegelungsstruktur ist, gilt

$$a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ = c^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ \quad \text{für alle} \quad a, b, c \in \mathbf{M},$$

und daraus folgt $a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ = b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ$, d.h. $(\mathbf{M}, +)$ ist kommutativ. □

Lemma 2.4.4. *Es sei* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine singuläre Spiegelungsstruktur. Dann gilt für alle* a*,* b*,* $c \in \mathbf{M}$*:* $a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \in \mathbf{M}^\circ$*.*

Beweis. Wir zeigen, daß es ein $d \in \mathbf{M}$ gibt mit $a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ = d^\circ$. Wir setzen $d := a^\circ \circ b^\circ(c)$. Es sei $\sigma := a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \circ d^\circ$. Da die Spiegelungstruktur singulär ist, gilt für alle $x \in \mathbf{M}$

$$\begin{aligned}&\sigma(x) = a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \circ d^\circ(x) \overset{\mathbf{B1}}{=} c^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ \circ d^\circ \circ x^\circ(0) = x^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \circ d^\circ \circ a^\circ(0) = \\ &x^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ \circ d^\circ \circ c^\circ(0) \overset{\mathbf{B1}}{=} x^\circ \circ d^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ(c) = x^\circ \circ d^\circ(d) \overset{\mathbf{B1}}{=} x^\circ(0) \overset{\mathbf{B1}}{=} x.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.4.5. *Es sei* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine Spiegelungsstruktur. Für alle* a*,* b*,* $c \in \mathbf{M}$ *gilt* $a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ \in \mathbf{M}^\circ$ *genau dann, wenn der zugehörige K-Loop* $(\mathbf{M}, +)$ *assoziativ ist.*

Beweis. Für alle a, b, $c \in \mathbf{M}$ gilt

$$\begin{aligned}&(a + b) + c = a + (b + c) \iff \big(a^\circ \circ 0^\circ(b)\big)^\circ \circ 0^\circ(c) = a^\circ \circ 0^\circ\big(b^\circ \circ 0^\circ(c)\big) \iff \\ &\iff \big(a^\circ \circ 0^\circ(b)\big)^\circ = a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \iff a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \in \mathbf{M}^\circ \overset{\mathbf{B2}}{\iff} b^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ \in \mathbf{M}^\circ.\end{aligned}$$

Die vorherigen Äquivalenzen sind gleichbedeutend mit

$$a^\circ \circ b^\circ \circ c^\circ = (a^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ) \circ 0^\circ \circ c^\circ \in \mathbf{M}^\circ.$$

□

Aus 2.4.4 und 2.4.5 folgt

Satz 2.4.6. *Es sei* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *eine Spiegelungsstruktur und* $(\mathbf{M}, +)$ *der zugehörige K-Loop (vgl.* 2.4.2*).* $(\mathbf{M}, +)$ *ist genau dann eine Gruppe, wenn* $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ *singulär ist.*

Definition 2.4.3. Es sei

$$\widetilde{\ }: \mathbf{M} \longrightarrow J^*\,;\ \ x \to \widetilde{x}$$

eine Abbildung mit $Fix\,\widetilde{x} = \{x\}$ für jedes $x \in \mathbf{M}$.
Wir setzen $\widetilde{\mathbf{M}} = \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbf{M}\}$.
Das Paar $(\mathbf{M}, \widetilde{\mathbf{M}})$ heißt *Punktspiegelungsstruktur*, wenn die folgenden beiden Axiome erfüllt sind:

S1 $\quad \forall\, a, b \in \mathbf{M}\ \ \exists_1\, m \in \mathbf{M}:\ \widetilde{m}(a) = b$

B2 $\quad \forall\, a, b \in \mathbf{M}\ \ \exists\, c \in \mathbf{M}:\ \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{c}$ (vgl. [12]).

Es sei jetzt $(\mathbf{M}, \widetilde{\mathbf{M}})$ eine Punktspiegelungsstruktur und $0 \in \mathbf{M}$ ein ausgezeichnetes Element. Für jedes $a \in \mathbf{M}$ bezeichnen wir mit a' das Element von $\mathbf{M}$ mit $\widetilde{a'}(0) = a$ und setzen $a^\circ = \widetilde{a'}$.
Dann ist das Tripel $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ eine Spiegelungsstruktur (vgl. Definition 2.4.1) und es gilt (vgl. [12])

Satz 2.4.7. *Für alle $a, b \in \mathbf{M}$ sei $a + b := \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(b)$. Dann ist $(\mathbf{M}, +)$ ein K-Loop.*

Es gilt:

Satz 2.4.8. *Es sei $0 \in \mathbf{M}$ ausgezeichnet und $\widetilde{\ }: \mathbf{M} \longrightarrow J^*$ eine Abbildung mit $Fix\,\widetilde{x} = \{x\}$ für jedes $x \in \mathbf{M}$, die die Bedingungen*

$$\mathbf{B1'} \quad \forall\, x \in \mathbf{M} \quad \exists_1\, x' \in \mathbf{M}\colon \widetilde{x'}(0) = x$$

*und **B2** erfüllt. Dann ist für $\widetilde{\mathbf{M}} := \{\widetilde{x} \mid x \in \mathbf{M}\}$ das Paar $(\mathbf{M}, \widetilde{\mathbf{M}})$ eine Punktspiegelungsstruktur.*

Beweis. Es seien $a,\ b \in \mathbf{M}$. Nach $\mathbf{B1'}$ gibt es genau ein $a' \in \mathbf{M}$ mit $\widetilde{a'}(0) = a$ und $\widetilde{a'}(a) = 0$, da für jedes $x \in \mathbf{M}$ $\widetilde{x}$ eine Involution ist. Es sei $c := \widetilde{a'}(b)$, dann ist $\widetilde{a'}(c) = b$.
Wir setzen $\widetilde{m} := \widetilde{\widetilde{a'}(c')}$, wobei $\widetilde{c'}(0) = c$ wegen $\mathbf{B1'}$. Wegen **B2** gilt $\widetilde{\widetilde{a'}(c')} = \widetilde{a'} \circ \widetilde{c'} \circ \widetilde{a'}$.
Daraus folgt

$$\widetilde{m}(a) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{c'} \circ \widetilde{a'}(a) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{c'}(0) \overset{\mathbf{B1'}}{=} \widetilde{a'}(c) = b.$$

$\square$

Definition 2.4.4. Es sei $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ bzw. $(\mathbf{M}, \widetilde{\mathbf{M}})$ eine Spiegelungstruktur bzw. eine Punktspiegelungsstruktur, $(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$ Inzidenzraum mit $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{P}(\mathbf{M})$. Wenn

$$\mathbf{M}^\circ \subset Aut\,(\mathbf{M}, \mathfrak{G}) \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{\mathbf{M}} \subset Aut\,(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$$

eine Teilmenge der Kollineationsgruppe des Inzidenzraumes $(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$ ist und wenn

$$(*) \quad \forall\, X \in \mathfrak{G} \quad \text{mit} \quad 0 \in X\colon\ 0^\circ(X) = X \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{0}(X) = X$$

gilt, so nennen wir die Struktur $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0; \mathfrak{G})$ bzw. $(\mathbf{M}, \widetilde{\mathbf{M}}; 0; \mathfrak{G})$ *Spiegelungsgeometrie*, bzw. *Punktspiegelungsgeometrie*.

Im Folgenden sei $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0; \mathfrak{G})$ eine Spiegelungsgeometrie und $(\mathbf{M}, +)$ der gemäß 2.4.2 $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^\circ; 0)$ zugeordnete K-Loop.
Es gilt:

Lemma 2.4.9. *Für jedes $X \in \mathfrak{G}$ mit $0 \in X$ und für jedes $a \in X$ gilt $a^\circ(X) = X$.*

Beweis. Für $a = 0$ gilt $0^\circ(X) = X$ nach der Voraussetzung $(*)$.
Es sei also $a \neq 0$. Dann ist $X = \overline{0, a}$. Da $a^\circ \in Aut\,(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$ ist, gilt

$$a^\circ(X) = \overline{a^\circ(0), a^\circ(a)} \in \mathfrak{G}.$$

Nach **B1** ist $a^\circ(0) = a$, und wegen $a^\circ \in J$ folgt $a^\circ(a) = 0$. Daraus folgt $a^\circ(X) = \overline{a, 0} = X$.
□

Satz 2.4.10. $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}(0) := \{X \in \mathfrak{G} \mid 0 \in X\}$ *ist eine Inzidenzfaserung des K-Loops* $(\mathbf{M}, +)$.

Beweis. Da $(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum ist, ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}(0)$ ein Bündel von $\mathbf{M}$ (vgl. Definition 2.2.1). Es sei $X \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}(0)$, und es seien $a, b \in X$. Aus 2.4.9 folgt

$$a + b := a^\circ \circ 0^\circ(b) \in a^\circ \circ 0^\circ(X) \overset{(*)}{=} a^\circ(X) \overset{2.4.9}{=} X.$$

Es sei x die Lösung von

$$b = a + x = a^\circ \circ 0^\circ(x).$$

Dann gilt:

$$x = 0^\circ \circ a^\circ(b) \in 0^\circ \circ a^\circ(X) \overset{2.4.9}{=} 0^\circ(X) \overset{(*)}{=} X.$$

Für die Lösung y von

$$b = y + a = y^\circ \circ 0^\circ(a)$$

erhalten wir

$$y^\circ(b) = 0^\circ(a).$$

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

I Fall $\quad b \neq 0^\circ(a)$.

Dann ist wegen 2.4.9 $\quad 0^\circ(a) \in X$ und somit $X = \overline{b, 0^\circ(a)}$. Weil y° die Punkte b und $0^\circ(a)$ vertauscht, folgt hieraus $y^\circ(X) = X$, also

$$y = y^\circ(0) \in y^\circ(X) = X.$$

II Fall $b = 0^\circ(a)$.

Nach **B2** gibt es ein $c \in \mathbf{M}$ mit $0^\circ \circ y^\circ \circ 0^\circ = c^\circ$.

Aus $y^\circ(b) = y^\circ(0^\circ(a)) = 0^\circ(a)$ folgt

$$c^\circ(a) = 0^\circ \circ y^\circ \circ 0^\circ(a) = a = a^\circ(0),$$

$$\text{also} \quad c^\circ \circ a^\circ(0) = a^\circ(0), \quad \text{d.h.} \quad a^\circ \circ c^\circ \circ a^\circ(0) = 0 = 0^\circ(0)$$

und wegen **B1** und **B2** gilt

$$a^\circ \circ c^\circ \circ a^\circ = 0^\circ, \quad \text{d.h.} \quad c^\circ = a^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ.$$

Wegen **B1** und 2.4.9 gilt

$$c = c^\circ(0) = a^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(0) \in X \quad \text{und somit} \quad y = y^\circ(0) = 0^\circ \circ c^\circ \circ 0^\circ(0) = 0^\circ(c) \in X.$$

Damit ist bewiesen, daß jedes $X \in \mathfrak{F}$ ein Unterloop von $(\mathbf{M}, +)$ ist.
Nun seien $a, b \in \mathbf{M}$ beliebig; aus $\delta_{a,b}(0) = 0$ und $x^\circ \in Aut\,(\mathbf{M}, \mathfrak{G})$ für jedes $x \in \mathbf{M}$ folgt

$$\delta_{a,b}(X) = 0^\circ \circ (a+b)^\circ \circ a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ(X) \in \mathfrak{F},$$

d.h. **Z1** ist erfüllt für $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, 0, \mathfrak{F})$. Somit ist $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, 0, \mathfrak{F})$ ein schwacher Bündelkeim, in dem jedes $X \in \mathfrak{F}$ ein Unterloop ist. Daher ist $\mathfrak{F}$ eine Inzidenzfaserung (vgl. Definition 2.2.6). Nach 2.2.5 ist $(\mathbf{M}, \mathbf{M}^+, 0, \mathfrak{F})$ sogar ein Bündelkeim. □

Satz 2.4.11. *Für jedes $X \in \mathfrak{F} := \{G \in \mathfrak{G} \mid 0 \in G\}$ sind die folgende Aussagen äquivalent:*

(**i**) $\forall\, a, b \in X \quad \exists\, c \in \mathbf{M}\colon 0^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ = c^\circ$.

(**ii**) *$(X^+, \circ)$ ist eine Gruppe.*

Beweis. Es seien $a,\ b \in X$, $d := a + b = a^\circ \circ 0^\circ(b)$ und $c := b^\circ \circ d^\circ(b)$. Wegen 2.4.2 gilt $d \in X$ und weiter $c \in X$. Wegen 2.4.1 gilt

$$b^\circ \circ d^\circ \circ b^\circ = \big(b^\circ \circ d^\circ(b)\big)^\circ = c^\circ.$$

Wegen

$$\begin{aligned} &a^+ \circ b^+ = a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ \\ &\text{und} \quad (a+b)^+ = d^\circ \circ 0^\circ \end{aligned}$$

erhalten wir die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} a^+ \circ b^+ = (a+b)^+ \iff a^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ = d^\circ \iff b^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ = d^\circ \\ \iff 0^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ = b^\circ \circ d^\circ \circ b^\circ = c^\circ. \end{aligned}$$

Da weiterhin $(a+b)^+(0) = a + b = d = a^+ \circ b^+(0)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} a^+ \circ b^+ \in \mathbf{M}^+ \iff a^+ \circ b^+ = d^+ \in X^+ \iff 0^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ \in \mathbf{M}^\circ \iff \\ \iff 0^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ = c^\circ \in X^\circ, \end{aligned}$$

woraus die Äquivalenz der Aussagen (**i**), (**ii**) folgt. □

Satz 2.4.12. *Für alle $a \in \mathbf{M} \setminus \{0\}$ ist $Fix\, a^\circ \subset \overline{0,a}$.*

Beweis. Es sei $x \in Fix\, a^\circ$, d.h. $x = a^\circ(x)$. Dann gilt $x \neq 0$ wegen $a \neq 0$, und

$$x^\circ \circ a^\circ \circ x^\circ \overset{2.4.1}{=} (x^\circ \circ a^\circ(x))^\circ = (x^\circ(x))^\circ = 0^\circ.$$

Daraus folgt $a^\circ = x^\circ \circ 0^\circ \circ x^\circ$ und hieraus nach 2.4.9 und $(*)$

$$a^\circ(\overline{0,x}) = x^\circ \circ 0^\circ \circ x^\circ(\overline{0,x}) = x^\circ \circ 0^\circ(\overline{0,x}) = x^\circ(\overline{0,x}) = \overline{0,x},$$

also

$$a = a^\circ(0) \in \overline{0,x} \Rightarrow x \in \overline{0,a}.$$

□

Proposition 2.4.13. *Wenn $Fix\, 0^\circ \neq \{0\}$, dann ist $0^\circ = id$.*

Beweis. Es sei $a \in Fix\, 0^\circ \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$a^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ \overset{2.4.1}{=} (a^\circ \circ 0^\circ(a))^\circ = (a^\circ(a))^\circ = 0^\circ \quad (1), \quad \text{d.h.} \quad a^\circ \circ 0^\circ = 0^\circ \circ a^\circ \quad (2).$$

Nach $(*)$ gilt für alle $X \in \mathfrak{G}(0)$, $0^\circ(X) = X$ und für alle $Y \in \mathfrak{G}(a^\circ(0)) = \mathfrak{G}(a)$ gilt $a^\circ(Y) \in \mathfrak{G}(0)$, wegen $(*)$ $\quad 0^\circ(a^\circ(Y)) = a^\circ(Y)$. Hieraus folgt

$$0^\circ(Y) \overset{(1)}{=} a^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(Y) = a^\circ(a^\circ(Y)) = Y \quad (3).$$

Es sei $b \in \mathbf{M} \setminus \overline{0,a}$. Wegen $(*)$ ist $\quad 0^\circ(\overline{0,b}) = \overline{0,b}$ und mit (3) folgt $\quad 0^\circ(\overline{a,b}) = \overline{a,b}$. Daraus und aus $b \in \overline{0,b} \cap \overline{a,b}$ folgt $0^\circ(b) = b$.
Falls $c \in \overline{0,a}$, ist $\{c\} = \overline{0,c} \cap \overline{b,c}$ und $c \notin \overline{0,b}$. Es gilt $0^\circ(\overline{0,c}) = \overline{0,c}$ wegen $(*)$. Aus $b \in Fix\, 0^\circ \setminus \{0\}$ und (3) folgt $0^\circ(\overline{b,c}) = \overline{b,c}$. Insgesamt gilt also $0^\circ(c) = c$. Folglich ist $0^\circ = id$. □

Wir können die folgende Klasseneinteilung betrachten:

I $0^\circ = id$

II $0^\circ \neq id \overset{2.4.13}{\Rightarrow} Fix\, 0^\circ = \{0\}$

Proposition 2.4.14. *Für $a \in \mathbf{M}$ und $b \in Fix\, a^\circ$ gilt $a^\circ = b^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ$, d.h.*

I *Wenn $0^\circ = id$, ist $Fix\, a^\circ = \emptyset$ für alle $a \in \mathbf{M} \setminus \{0\}$.*

II *Wenn $0^\circ \neq id$, ist $|Fix\, a^\circ| \leq 1$ und $Fix\, (a+a)^\circ = \{a\}$ für alle $a \in \mathbf{M} \setminus \{0\}$.*

Beweis. Es sei $a \in \mathbf{M}$. Für alle $b \in Fix\, a^\circ$ gilt:

$$b^\circ \circ a^\circ \circ b^\circ \overset{2.4.1}{=} \bigl(b^\circ \circ a^\circ(b)\bigr)^\circ = \bigl(b^\circ(b)\bigr)^\circ \overset{\mathbf{B1}}{=} 0^\circ,$$

also $a^\circ = b^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ$ somit $Fix\, a^\circ = b^\circ(Fix\, 0^\circ)$ und

$$a = a^+(0) = a^\circ \circ 0^\circ(0) = b^\circ \circ 0^\circ \circ b^\circ \circ 0^\circ(0) = b^+(b) = b + b.$$

I Hier ist $Fix\, 0^\circ = \mathbf{M}$, also $Fix\, a^\circ = b^\circ(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$, d.h. $a^\circ = id$ und $a = a^\circ(0) = 0$. Somit ist $Fix\, a^\circ = \emptyset$ für alle $a \in \mathbf{M} \setminus \{0\}$.
II Hier gilt nach 2.4.13 $Fix\, 0^\circ = \{0\}$, also $Fix\, a^\circ = b^\circ(0) = \{b\}$ für $b \in Fix\, a^\circ$. Somit gilt $|Fix\, a^\circ| \leq 1$ für alle $a \in \mathbf{M}$, und $b \in Fix\, a^\circ$ impliziert $a = b + b$. Es gilt

$$(a+a)^\circ(a) = \bigl(a^\circ \circ 0^\circ(a)\bigr)^\circ(a) \overset{2.4.1}{=} a^\circ \circ 0^\circ \circ a^\circ(a) = a^\circ \circ 0^\circ(0) = a^\circ(0) = a\,,$$

also $Fix\,(a+a)^\circ = \{a\}$. □

Bemerkung. Für $a \in \mathbf{M} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $x + x = a$ keine Lösung im Fall **I** und höchstens eine Lösung im Fall **II**.

2.5 Beispiele

In diesem Paragraph wollen wir Beispiele von Punktspiegelungsstrukturen und von Spiegelungsstrukturen konstruieren. Hierzu gehen wir von einem unitären Vektorraum $(\mathbf{V}, \mathrm{H}, f)$ bezüglich „$-$“ aus (vgl. Definition 1.2.3), wobei wir voraussetzen:

1. $Char\,\mathrm{H} \neq 2$.
2. Für $\mathrm{F} := Fix\,(-)$ sei $\mathrm{F} \cdot \mathrm{F} \subset \mathrm{F}$.
3. f sei nicht die Nullform.

Es sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}) := \Pi(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ der dem Linksvektorraum $(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ zugeordnete projektive Raum. Es gilt:

Satz 2.5.1. *Für jedes $\alpha \in \mathrm{F}^*$ erfüllt die Menge $\widetilde{\mathbf{P}_\alpha} := \{\widetilde{a} \mid a \in \mathbf{P}_\alpha\}$ das Axiom*

$$\textbf{B2} \quad \textit{Für alle} \quad \widetilde{a}, \widetilde{b} \in \widetilde{\mathbf{P}_\alpha} \colon \exists\, \widetilde{c} \in \widetilde{\mathbf{P}_\alpha} \quad \textit{mit} \quad \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{c}$$

(wobei $c = \widetilde{a}(b)$ ist).

Beweis. Nach 1.3.5 ist $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)}$ und nach 1.3.3 gilt $\widetilde{a}(b) \sim b$, also $\widetilde{\widetilde{a}(b)} \in \widetilde{\mathbf{P}_\alpha}$. ☐

Es sei T ein Teilraum des projektiven Raumes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$. Es gilt:

Satz 2.5.2. *Für alle $\widetilde{a}$, $\widetilde{b} \in \widetilde{T \cap \mathbf{P}_\alpha} := \{\widetilde{x} \mid x \in T \cap \mathbf{P}_\alpha\}$ gibt es ein $c \in T \cap \mathbf{P}_\alpha$ mit $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{c}$, d.h. $T \cap \mathbf{P}_\alpha$ genügt dem Axiom* **B2**.

Beweis. Es seien a, $b \in T \cap \mathbf{P}_\alpha$. Nach 2.5.1 gibt es ein $c \in \mathbf{P}_\alpha$ mit $\widetilde{c} = \widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a}$ und $c = \widetilde{a}(b)$. Wegen 1.3.5 ist $c \in \overline{a, b} \subset T$, weil T ein Teilraum von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$ ist. ☐

Wir wollen jetzt genauer untersuchen, wann das Paar $(T \cap \mathbf{P}_\alpha, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_\alpha})$ eine Punktspiegelungsstruktur ist. Nach 1.2.9 ist die Menge $\mathbf{P}^{**}$ nicht leer. Wir zeichnen in $\mathbf{P}^{**}$ einen Punkt o aus und denken uns f so genormt, daß $o \in \mathbf{P}_1$ (vgl. 1.2.9), daß es also $\mathfrak{e} \in \varphi^{-1}(o)$ gibt mit $f(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = 1$. Weiterhin betrachten wir nur Teilräume T mit $o \in T$. Dann ist $\pi(o) = \varphi(\mathfrak{e}^{\perp *})$ eine Hyperebene mit $o \notin \pi(o)$, und es gilt $T = \bigcup\{\overline{o, x} \mid x \in \pi(o) \cap T\}$. Aus 2.5.2 und 2.4.8 folgt:

Satz 2.5.3. *Das Paar $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ ist genau dann eine Punktspiegelungsstruktur (vgl. Definition 2.4.3), wenn es einen Punkt $o \in T \cap \mathbf{P}_1$ gibt, so daß gilt:*

$$\mathbf{B1'} \quad \forall\, a \in T \cap \mathbf{P}_1 \colon |M_{(o,a)} \cap \mathbf{P}_1| = 1.$$

Die Bedingung $\mathbf{B1'}$ ist daher gleichwertig mit der Forderung, daß für jede Gerade G mit $o \in G \subset T$ gilt:

$$\forall\, a \in G \cap \mathbf{P}_1 \colon |M_{(o,a)} \cap \mathbf{P}_1| = 1.$$

Satz 2.5.3 läßt sich also auch in der Form aussprechen:

Satz 2.5.4. *Für einen projektiven Teilraum T mit $o \in T$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ *ist eine Punktspiegelungsstruktur.*

ii) Für jede $G \in \mathfrak{G}$ *mit* $o \in G \subset T$ *ist* $(G \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{G \cap \mathbf{P}_1})$ *eine Punktspiegelungsstruktur.*

Deshalb betrachten wir in dem nächsten Abschnitt den Fall, daß T eine Gerade ist.

2.5.1 Lineare Punktspiegelungsstrukturen

Es sei T eine Gerade und $b := \pi(o) \cap T$, $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$, also

$$T := \overline{o, b} = \{\varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \mid (x, y) \in \mathrm{H}^2 \setminus \{(0,0)\}\}.$$

Wir setzen $\beta := f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$. Dann gilt wegen $f(\mathfrak{e}, \mathfrak{b}) = 0$:

$$\varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \in \mathbf{P}_1 \iff f(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}, x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) = x\overline{x} + \beta y\overline{y} \sim 1\,,$$

also

$$T \cap \mathbf{P}_1 := \{\varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \mid (x, y) \in \mathrm{H}^2 \colon x\overline{x} + \beta y\overline{y} = 1\}.$$

Nun untersuchen wir $M_{(o,a)} \cap \mathbf{P}_1$ für jedes $a \in T \cap \mathbf{P}_1 \setminus \{o\}$.
Es sei zuerst $a = \varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \neq b$ mit $x\overline{x} + \beta y\overline{y} = 1$ und $c := f(\mathfrak{e}, x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) = \overline{x}$. Wegen 1.3.6.3.($i$) gilt:

$$\begin{aligned} M_{(o,a)} &= \{\varphi\big(\mathfrak{e} + \xi x^{-1}(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b})\big) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \overline{x}x\} \\ &= \{\varphi\big((1+\xi)\mathfrak{e} + \xi x^{-1} y\mathfrak{b}\big) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \overline{x}x\}. \end{aligned}$$

Da F wegen 1.1.3 ein kommutativer Körper ist, hat die quadratische Gleichung $\xi^2 = \overline{x}x$

- genau eine Lösung, wenn $\overline{x}x = 0$ ist (daraus folgt $x = 0$, d.h. $a = b$ im Widerspruch zur Voraussetzung),
- genau zwei Lösungen ξ, $-\xi$, wenn $\overline{x}x \in \mathrm{F}^{(2)}$ und
- keine Lösung, wenn $\overline{x}x \notin \mathrm{F}^{(2)} \cup \{0\}$.

Damit erhalten wir für $a = \varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \neq b$ mit $x\overline{x} + \beta y\overline{y} = 1$:

$$M_{(o,a)} \neq \emptyset \iff \overline{x}x \in \mathrm{F}^{(2)}.$$

Es sei jetzt $x\overline{x} + \beta y\overline{y} = 1$ und $\overline{x}x = \xi^2 \in \mathrm{F}^{(2)}$, also

$$M_{(o,a)} = \{m_1 := \varphi\big((1+\xi)\mathfrak{e} + \xi x^{-1} y\mathfrak{b}\big), m_2 := \varphi\big((1-\xi)\mathfrak{e} - \xi x^{-1} y\mathfrak{b}\big)\}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} &f\big((1+\xi)\mathfrak{e}+\xi x^{-1}y\mathfrak{b},(1+\xi)\mathfrak{e}+\xi x^{-1}y\mathfrak{b}\big)=(1+\xi)^2+\xi^2x^{-1}y\overline{y}\,\overline{x}^{-1}\beta=\\ &=(1+\xi)^2+\xi^2(\overline{x}x)^{-1}y\overline{y}\beta=(1+\xi)^2+y\overline{y}\beta=(1+\xi)^2+1-\xi^2=2(1+\xi)\end{aligned}$$

und

$$f\big((1-\xi)\mathfrak{e}-\xi x^{-1}y\mathfrak{b},(1-\xi)\mathfrak{e}-\xi x^{-1}y\mathfrak{b}\big)=2(1-\xi)$$

gilt

$$m_1\in\mathbf{P}_{2(1+\xi)}\quad\text{und}\quad m_2\in\mathbf{P}_{2(1-\xi)}.$$

Daher ist $|M_{(o,a)}\cap\mathbf{P}_1|=1$ genau dann, wenn für genau einen der Werte

$$\eta\in\{2(1+\xi),2(1-\xi)\}\quad\text{gilt}\quad\eta\sim 1.$$

Es sei jetzt $a=b$, also $\beta\sim 1$, d.h. es gibt ein $\mathfrak{b}\in\varphi^{-1}(b)$ mit $\beta=f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})=1$. Dann ist $c:=f(\mathfrak{e},y\mathfrak{b})=0$, und nach 1.3.6.3.$(iii)$ erhalten wir

$$M_{(o,a)}=M_{(o,b)}=\{\varphi(\mathfrak{e}+z\mathfrak{b})\mid z\in\mathrm{H}^*\colon z\overline{z}=1\}$$

und $f(\mathfrak{e}+z\mathfrak{b},\mathfrak{e}+z\mathfrak{b})=1+z\overline{z}=2$, also $M_{(o,a)}\subset\mathbf{P}_2$. Da $1\cdot\overline{1}=1$ und $(-1)\cdot(\overline{-1})=1$ gilt, ist $2\leq|M_{(o,a)}|$ und somit

$$\begin{aligned} &M_{(o,a)}\cap\mathbf{P}_1=\emptyset\quad\text{falls}\quad 2\not\sim 1\quad\text{und}\\ &|M_{(o,a)}\cap\mathbf{P}_1|=|M_{(o,a)}|\geq 2\quad\text{falls}\quad 2\sim 1.\end{aligned}$$

Aus Satz 2.5.3 und den vorherigen Bemerkungen folgt:

Theorem 2.5.5. *Es sei $T:=\overline{o,b}$ eine Gerade mit $b\in\pi(o)$, und es sei $\beta=f(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$. Das Paar $(T\cap\mathbf{P}_1,\widetilde{T\cap\mathbf{P}_1})$ ist eine Punktspiegelungsstruktur genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$b:=\pi(o)\cap T\notin\mathbf{P}_1$, d.h. $\beta\not\sim 1$.*
2. *Für jede Lösung $(x,y)\in\mathrm{H}^2$ von $x\overline{x}+\beta y\overline{y}=1$ gilt $x\overline{x}\in\mathrm{F}^{(2)}$ und entweder $2\big(1+\sqrt{x\overline{x}}\big)\sim 1$ oder $2\big(1-\sqrt{x\overline{x}}\big)\sim 1$.*

Wir untersuchen jetzt den Fall $\beta=0$.
Hier vereinfacht sich die Gleichung $x\overline{x}+\beta y\overline{y}=1$ zu $x\overline{x}=1\in\mathrm{F}^{(2)}$. Es gilt $2\big(1+\sqrt{x\overline{x}}\big)=4\sim 1$ und $2\big(1-\sqrt{x\overline{x}}\big)=0\not\sim 1$. Also ist

$$T\cap\mathbf{P}_1=\{\varphi(x\mathfrak{e}+y\mathfrak{b})\mid(x,y)\in\mathrm{H}^2\colon x\overline{x}=1\}=\{\varphi(\mathfrak{e}+t\mathfrak{b})\mid t\in\mathrm{H}\}=T\setminus\{b\}.$$

Aus 2.5.5 folgt

Satz 2.5.6. *Wenn $\beta=0$ ist, so ist das Paar $(T\setminus\{b\},\widetilde{T\setminus\{b\}})$ eine Punktspiegelungsstruktur.*

Wir beschränken uns jetzt auf den speziellen Fall, daß der Fixkörper $(\mathrm{F},+,\cdot)$ euklidisch ist. Dann ist $\mathrm{F}^{(2)}$ ein Positivitätsbereich, $\leq := \{(x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{F} \mid y-x \in \mathrm{F}^{(2)} \cup \{0\}\}$ eine totale Ordnungsrelation auf F, $(\mathrm{F},+,\cdot,\leq)$ ein angeordneter Körper mit

$$\mathrm{F}^{(2)} := \{x \in \mathrm{F} \colon 0 < x\},$$

und F zerfällt bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$ in drei Klassen:

$$\mathrm{F}/_{\sim} := \{[1]_{\sim}, [-1]_{\sim}, [0]_{\sim}\},$$

(vgl. S. 4). Daher können wir den unitären Vektoraum $(\mathbf{V},\mathrm{H},f)$ auch in drei disjunkte Teile zerlegen

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &:= \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \sim 1\} \\ \mathbf{V}_{-1} &:= \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V} \mid f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \sim -1\} \\ \mathbf{V}_0 &:= \{\mathfrak{x} \in \mathbf{V}^* \mid f(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = 0\}. \end{aligned}$$

Es seien $\mathbf{P}_1 := \varphi(\mathbf{V}_1)$, $\mathbf{P}_{-1} := \varphi(\mathbf{V}_{-1})$ und $\mathbf{P}_0 := \varphi(\mathbf{V}_0)$, wobei φ die kanonische Abbildung ist, (vgl. S. 18). Da $\mathrm{H}^*\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1$, $\mathrm{H}^*\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{V}_{-1}$ und $\mathrm{H}^*\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_0$ gilt, ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \mathbin{\dot\cup} \mathbf{P}_{-1} \mathbin{\dot\cup} \mathbf{P}_0$ eine disjunkte Zerlegung der Punktmenge des projektiven Raumes $\Pi(\mathbf{V},\mathrm{H}) := (\mathbf{P},\mathfrak{G})$, der zu dem Linksvektorraum $(\mathbf{V},\mathrm{H})$ gehört (vgl. S. 18).

Hier brauchen wir nur den Fall $\beta \sim -1$ zu diskutieren, weil $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ für $\beta \sim 0$ stets (vgl. 2.5.6) bzw. für $\beta \sim 1$ niemals (vgl. 2.5.5) eine Punktspiegelungsstruktur ist.

Wir betrachten die Gleichung

$$x\overline{x} - y\overline{y} = 1.$$

Es gilt $x\overline{x} = 1 + y\overline{y} \geq 1$. Dann ist $x\overline{x} \in \mathrm{F}^{(2)}$ wegen 1.1.14.
Falls $y = 0$, gilt $a := \varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) = o$. Für $a \neq o$ gilt dann $y \neq 0$, daraus folgt $x\overline{x} = 1 + y\overline{y} > 1$, somit ist $1 < \sqrt{x\overline{x}}$. Dann gilt

$$2(1+\sqrt{x\overline{x}}) \sim 1 \quad \text{und} \quad 2(1-\sqrt{x\overline{x}}) \not\sim 1.$$

Damit haben wir mit Hilfe von 2.5.5 und 2.5.6 folgenden Satz bewiesen:

Satz 2.5.7. *Wenn $(\mathrm{F},+,\cdot)$ ein euklidischer Körper ist und T eine Gerade mit $o \in T$, dann ist das Paar $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ eine Punktspiegelungsstruktur genau dann, wenn $T \cap \pi(o) \in \mathbf{P}_0 \cup \mathbf{P}_{-1}$.*

Aus 2.5.7 folgt wegen 2.4.7:

Satz 2.5.8. *Wenn $(\mathrm{F},+,\cdot)$ ein euklidischer Körper ist, T eine Gerade mit $o \in T$ und $T \cap \pi(o) \in \mathbf{P}_0 \cup \mathbf{P}_{-1}$, dann ist das Paar $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$ ein K-Loop bezüglich der Operation $x \boxplus y := \widetilde{x'} \circ \widetilde{o}(y)$, wobei $x' \in M_{(o,x)} \cap \mathbf{P}_1$ ist.*

Wir wollen jetzt die Struktur des K-Loops $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$ aus Satz 2.5.8 näher erkunden. Wenn $\{b\} := T \cap \pi(o)$ ist, so haben wir die zwei Fälle $b \in \mathbf{P}_0$ und $b \in \mathbf{P}_{-1}$ zu betrachten. Im ersten Fall gilt für jedes $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ stets $f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0$, im zweiten gibt es ein $\mathfrak{b} \in \varphi^{-1}(b)$ mit $f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = -1$. In beiden Fällen gilt:

$$T = \{\varphi(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{b}) \mid (x, y) \in \mathrm{H}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \quad \text{und}$$
$$T \setminus \{b\} = \{\varphi(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}) \mid t \in \mathrm{H}\}.$$

Da

$$f(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}, \mathfrak{e} + t\mathfrak{b}) = 1 + t\bar{t}f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \beta = f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 0 \\ 1 - t\bar{t} & \text{falls} \quad \beta = f(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = -1 \end{cases}$$

ist, gilt

$$T \cap \mathbf{P}_1 = \{\varphi(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}) \mid t \in \mathrm{H}\} = T \setminus \{b\} \quad \text{falls} \quad b \in \mathbf{P}_0 \quad \text{und}$$
$$T \cap \mathbf{P}_1 = \{\varphi(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}) \mid t \in \mathrm{H} \colon t\bar{t} < 1\} \quad \text{falls} \quad b \in \mathbf{P}_{-1}.$$

Die Abbildung

$$\psi \colon T \setminus \{b\} \longrightarrow \mathrm{H}; \quad \varphi(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}) \longmapsto t$$

ist eine Bijektion, und wenn wir $\mathrm{H}_{<1} := \{t \in \mathrm{H} \mid t\bar{t} < 1\}$ setzen, gilt

$$\psi^{-1}(\mathrm{H}) = T \cap \mathbf{P}_1 \quad \text{bzw.} \quad \psi^{-1}(\mathrm{H}_{<1}) = T \cap \mathbf{P}_1.$$

Es seien jetzt $x = \varphi(\mathfrak{x})$, $y = \varphi(\mathfrak{y}) \in (T \cap \mathbf{P}_1) \setminus \{o\}$ mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{e} + s\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{e} + t\mathfrak{b}$. Dann ist $\psi(x) = s$ und $\psi(y) = t$.

1. Fall $\quad b \in \mathbf{P}_0$.

   Es gilt

$$f(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = f(\mathfrak{e}, \mathfrak{x}) = 1,$$

   also ist $\alpha = c = 1$ in 1.3.6.3. Daher hat die Gleichung $\xi\alpha^{-1}\xi = c\alpha^{-1}c$, also $\xi^2 = 1$, nur die zwei Lösungen 1 und -1, von denen nur $1 \neq -\alpha = -1$ ist. Nach 1.3.6.3.(i) besteht also $M_{(o,x)}$ nur aus dem einzigen Punkt

$$x' := \varphi\big(\mathfrak{e} + 1(\mathfrak{e} + s\mathfrak{b})\big) = \varphi(\mathfrak{e} + \frac{1}{2}s\mathfrak{b}),$$

   für den $\psi(x') = \frac{1}{2}s$ gilt. Da

$$f(\mathfrak{y}, \mathfrak{e}) = f(\mathfrak{e} + t\mathfrak{b}, \mathfrak{e}) = f(\mathfrak{e}, \mathfrak{e}) = 1$$

   ist, gilt

$$\widetilde{o}(y) = \varphi(-\mathfrak{e} - t\mathfrak{b} + 2\mathfrak{e}) = \varphi(\mathfrak{e} - t\mathfrak{b})$$

und, da

$$f(\mathfrak{e}-t\mathfrak{b},\mathfrak{e}+\frac{1}{2}s\mathfrak{b})=f(\mathfrak{e}+\frac{1}{2}s\mathfrak{b},\mathfrak{e}+\frac{1}{2}s\mathfrak{b})=1$$

ist, gilt

$$x\boxplus y:=\widetilde{x'}\circ\widetilde{o}(y)=\varphi\big(-\mathfrak{e}+t\mathfrak{b}+2(\mathfrak{e}+\frac{1}{2}s\mathfrak{b})\big)=\varphi\big(\mathfrak{e}+(t+s)\mathfrak{b}\big)\,,$$

d.h. $\psi(x\boxplus y)=s+t$. Damit ist gezeigt:

Satz 2.5.9. *Wenn $b\in\mathbf{P}_0$ ist, ist der K-Loop $(T\cap\mathbf{P}_1,\boxplus)$ isomorph zur kommutativen Gruppe* $(\mathrm{H},+)$.

2. Fall $\quad b\in\mathbf{P}_{-1}$.

Es gilt

$$f(\mathfrak{e},\mathfrak{e})=1\quad\text{und}\quad f(\mathfrak{x},\mathfrak{x})=1-s\overline{s}>0.$$

Für $\mathfrak{x}_1:=\frac{1}{\sqrt{1-s\overline{s}}}\mathfrak{x}$ gilt

$$\varphi(\mathfrak{x}_1)=x\,,\quad\alpha=f(\mathfrak{e},\mathfrak{e})=f(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_1)=1\quad\text{und}\quad c=f(\mathfrak{e},\mathfrak{x}_1)=\frac{1}{\sqrt{1-s\overline{s}}}\in\mathrm{F},$$

woraus $1<c$ folgt. Daher ist hier die Gleichung $(\xi c^{-1})^2=1$ zu lösen, so daß wir aus 1.3.6.3.(i)

$$M_{(o,x)}=\{\varphi(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}_1),\varphi(\mathfrak{e}-\mathfrak{x}_1)\}$$

erhalten. Nun ist

$$f(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}_1,\mathfrak{e}+\mathfrak{x}_1)=2(1+c)>0\quad\text{und}\quad f(\mathfrak{e}-\mathfrak{x}_1,\mathfrak{e}-\mathfrak{x}_1)=2(1-c)<0,$$

weil $1<c$. Also gilt

$$\begin{aligned}M_{(o,x)}\cap\mathbf{P}_1&=\{\varphi(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}_1)\}=\{\varphi\big(\mathfrak{e}+c(\mathfrak{e}+s\mathfrak{b})\big)\}=\{\varphi\big(\mathfrak{e}+(1+c)^{-1}cs\mathfrak{b}\big)\}=\\&=\{\varphi\big(\mathfrak{e}+(1+c^{-1})^{-1}s\mathfrak{b}\}=:\{x'\},\end{aligned}$$

und somit $\psi(x')=(1+c^{-1})^{-1}s$. Hier gilt ebenfalls

$$f(\mathfrak{y},\mathfrak{e})=f(\mathfrak{e},\mathfrak{e})=1\quad\text{also}\quad\widetilde{o}(y)=\varphi(\mathfrak{e}-t\mathfrak{b})\,,$$

aber

$$f(\mathfrak{e}-t\mathfrak{b},\mathfrak{e}+(1+c^{-1})^{-1}s\mathfrak{b})=1+t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1}\quad\text{und}$$

$$f(\mathfrak{e}+(1+c^{-1})^{-1}s\mathfrak{b},\mathfrak{e}+(1+c^{-1})^{-1}s\mathfrak{b})=1-s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2}.$$

Folglich ist

$$
\begin{aligned}
&x \boxplus y := \widetilde{x'} \circ \widetilde{o}(y) =\\
&= \varphi\Big(-\mathfrak{e} + t\mathfrak{b} + 2\big(1 + t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1}\big)\big(1 - s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2}\big)^{-1}\big(\mathfrak{e} + s(1+c^{-1})^{-1}\mathfrak{b}\big)\Big) =\\
&= \varphi\bigg(\Big(-1 + (2 + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1})(1 - s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2})^{-1}\Big)\mathfrak{e} +\\
&\qquad + \Big(t + (2 + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1})(1 - s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2})^{-1}s(1+c^{-1})^{-1}\Big)\mathfrak{b}\bigg) =\\
&= \varphi\bigg(\Big(-(1 - s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2}) + 2 + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1}\Big)\mathfrak{e} +\\
&\qquad + \Big((1 - s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2})t + (2 + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1})s(1+c^{-1})^{-1}\Big)\mathfrak{b}\bigg) =\\
&= \varphi\bigg(\Big(1 + s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2} + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1}\Big)\mathfrak{e} + \Big(t + ts\overline{s}(1+c^{-1})^{-2} + 2s(1+c^{-1})^{-1}\Big)\mathfrak{b}\bigg).
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\psi(x \boxplus y) =& \Big(1 + s\overline{s}(1+c^{-1})^{-2} + 2t\overline{s}(1+c^{-1})^{-1}\Big)^{-1} \cdot \Big(t + ts\overline{s}(1+c^{-1})^{-2} +\\
&+ 2s(1+c^{-1})^{-1}\Big) = \Big((1+c^{-1})^2 + s\overline{s} +\\
&+ 2t\overline{s}(1+c^{-1})\Big)^{-1}\Big((1+c^{-1})^2 t + ts\overline{s} + 2s(1+c^{-1})\Big).
\end{aligned}
$$

Wir setzen jetzt $c^{-1} := \sqrt{1 - s\overline{s}}$ ein, dann erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\psi(x \boxplus y) =& \Big((1 + \sqrt{1-s\overline{s}})^2 + s\overline{s} + 2t\overline{s}(1 + \sqrt{1-s\overline{s}})\Big)^{-1} \cdot \Big((1 + \sqrt{1-s\overline{s}})^2 t +\\
&+ ts\overline{s} + 2s(1 + \sqrt{1-s\overline{s}})\Big) =\\
=& \Big(1 + \sqrt{1-s\overline{s}} + t\overline{s} + t\overline{s}\sqrt{1-s\overline{s}}\Big)^{-1} \cdot \Big(t + t\sqrt{1-s\overline{s}} +\\
&+ s + s\sqrt{1-s\overline{s}}\Big) =\\
=& \Big((1 + t\overline{s})(1 + \sqrt{1-s\overline{s}})\Big)^{-1}\Big((t+s)(1 + \sqrt{1-s\overline{s}})\Big) =\\
=& (1 + t\overline{s})^{-1}(t+s).
\end{aligned}
$$

Damit ist für diesen Fall gezeigt:

Satz 2.5.10. *Wenn $b \in \mathbf{P}_{-1}$ ist, ist der K-Loop $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$ isomorph zu $(\mathrm{H}_{<1}, \oplus)$, wobei*

$$\forall\, s, t \in \mathrm{H}_{<1} \colon s \oplus t := (1 + t\overline{s})^{-1}(s + t).$$

Nach der Voraussetzung „$\mathrm{F}\cdot\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$“ kommen für $(\mathrm{H}, +, \cdot, -)$ wegen 1.1.10 nur die folgenden Fälle vor:

1. $\mathrm{H} = \mathrm{F}$, d.h. $(\mathrm{H}, +, \cdot)$ ist kommutativ und $- = id$.
2. (H, F) ist eine separabele quadratische Körpererweiterung.
3. (H, F) ist eine Quaternionenalgebra über F.

Es gilt folgender Hilfssatz:

Lemma 2.5.11. *Es sei* $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ *ein angeordneter kommutativer Körper,*

$$\mathrm{F}_{<1} := \{t \in \mathrm{F} \mid t^2 < 1\} \quad \textit{und} \quad \mathrm{F}^+ := \{t \in \mathrm{F} \mid t > 0\}.$$

Dann ist $(\mathrm{F}_{<1}, \oplus)$ *mit* $s \oplus t := (1 + ts)^{-1}(s + t)$ *eine kommutative Gruppe, die zu* $(\mathrm{F}^+, \cdot)$ *isomorph ist, und*

$$\omega\colon \mathrm{F}_{<1} \longrightarrow \mathrm{F}^+; \quad t \longmapsto (-t+1)^{-1}(t+1)$$

ist ein Isomorphismus von $(\mathrm{F}_{<1}, \oplus)$ *auf* $(\mathrm{F}^+, \cdot)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung ω bijektiv ist. Es sei $\lambda > 0$. Die Gleichung $\lambda = (-t+1)^{-1}(t+1)$ formen wir um zu $-\lambda t + \lambda = t + 1$ und erhalten hieraus
$t = (\lambda + 1)^{-1}(\lambda - 1)$.
Es gilt:

$$0 \leq t^2 = (\lambda+1)^{-2}(\lambda-1)^2 < 1 \iff (\lambda-1)^2 < (\lambda+1)^2 \iff \lambda > 0.$$

Damit ist gezeigt, daß ω bijektiv ist. Die Funktion ω ist isoton: $\forall\, s, t \in \mathrm{F}_{<1}$ gilt $1 - s$, $1 - t > 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} &\omega(s) = (-s+1)^{-1}(s+1) < \omega(t) = (-t+1)^{-1}(t+1) \iff \\ &\iff (-t+1)(s+1) < (-s+1)(t+1) \iff s < t. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\omega(s \oplus t) = \big(-(1+ts)^{-1}(s+t)+1\big)^{-1}\big((1+ts)^{-1}(s+t)+1\big) = \\ &= \big(-(s+t)+1+ts\big)^{-1}(s+t+1+ts) = \big((-t+1)(-s+1)\big)^{-1}(t+1)(s+1) = \\ &= (-s+1)^{-1}(-t+1)^{-1}(t+1)(s+1) = \omega(s)\cdot\omega(t). \end{aligned}$$

□

Aus 2.5.11 folgt

Satz 2.5.12. *Wenn für* $(\mathrm{H}, +, \cdot, -)$ *der Fixkörper* $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ *ein euklidischer Körper ist mit* $- = id$, *(d.h.* $\mathrm{F} = \mathrm{H}$*) und* $T \in \mathfrak{G}$, $o \in T$, *mit* $T \cap \pi(o) \in \mathbf{P}_{-1}$, *dann ist der K-Loop* $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus) \simeq (\mathrm{F}_{<1}, \oplus)$ *(vgl. 2.5.8 und 2.5.10) isomorph zur kommutativen Gruppe* $(\mathrm{F}^+, \cdot)$.

Bemerkung zum Satz:

Falls $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ der Körper der reelle Zahlen ist, so ist $(\mathbb{R}, +)$ isomorph zur Untergruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ von $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, und somit auch zum Unter-K-Loop $(T \cap \mathbf{P}_1, +)$.

Wir betrachten jetzt den Fall $- \neq id$.
Es gilt

Satz 2.5.13. *Es sei* $(\mathrm{F},+,\cdot,\leq)$ *ein angeordneter kommutativer Körper und* H *entweder eine quadratische Körpererweiterung* $\mathrm{F}(\sqrt{\alpha})$ *oder eine Quaternionenerweiterung* $\mathrm{F}_q(\sqrt{\alpha},\sqrt{\beta})$ *mit* $z\overline{z}>0$ *für alle* $z\in\mathrm{H}\setminus\{0\}$ *(vgl. 1.1.11). Es sei* $\mathrm{H}_{<1}=\{z\in\mathrm{H}\mid z\overline{z}<1\}$. *Dann ist* $(\mathrm{H}_{<1},\oplus)$ *mit* $a\oplus b:=(1+b\overline{a})^{-1}(a+b)$ *ein K-Loop, für jedes* $a\in\mathrm{H}_{<1}\setminus\{0\}$ *bildet der Zentralisator*

$$\mathrm{Z}(a):=\{z\in\mathrm{H}_{<1}\mid z\oplus a=a\oplus z\}$$

eine Gruppe, die isomorph zu $(\mathrm{F}_{<1},\oplus)$ *mit* $\lambda\oplus\mu=(1+\mu\lambda)^{-1}(\lambda+\mu)$ *ist und damit auch zur kommutativen Gruppe* $(\mathrm{F}^+,\cdot)$ *(vgl. 2.5.11).*

$$\mathfrak{F}:=\{\mathrm{Z}(a)\mid a\in\mathrm{H}_{<1}\setminus\{0\}\}$$

ist eine Inzidenzfaserung (vgl. Definition 2.2.6) des K-Loops $(\mathrm{H}_{<1},\oplus)$. *Ferner ist die Abbildung*

$$\omega\colon\mathrm{H}_{<1}\longrightarrow\mathrm{F}^+\oplus\mathrm{N}\,;\quad z\longmapsto(-z+1)^{-1}(z+1)$$

eine Bijektion, wobei

$$\mathrm{N}:=\{t\in\mathrm{H}\mid\overline{t}=-t\}$$

ist.

Beweis. Für $a,\,b\in\mathrm{H}_{<1}$ gilt

$$1+b\overline{a}\neq0\,,\quad\text{d.h.}\quad\overline{a}^{-1}\neq-b\quad(*):$$

Angenommen $\overline{a}^{-1}=-b$, dann wäre wegen $b\in\mathrm{H}_{<1}$

$$1>b\overline{b}=(\overline{a}^{-1})(a^{-1})=(a\overline{a})^{-1}\,,\quad\text{d.h.}\quad a\overline{a}>1,$$

im Widerspruch zu $a\in\mathrm{H}_{<1}$.
Daher ist die Operation $a\oplus b$ ausführbar, und wir müssen jetzt zeigen, daß $a\oplus b$ in $\mathrm{H}_{<1}$ liegt. Da für alle $z\in\mathrm{H}$ stets $z\overline{z}\in\mathrm{F}$, $z\overline{z}\geq0$ ist und F im Zentrum von H liegt, gilt

$$\begin{aligned}
&a\oplus b\in\mathrm{H}_{<1}\iff(a\oplus b)(\overline{a\oplus b})=(1+b\overline{a})^{-1}(a+b)(\overline{a}+\overline{b})(1+a\overline{b})^{-1}=\\
&=\big((1+a\overline{b})(1+b\overline{a})\big)^{-1}(a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b})=\big((1+a\overline{b})(\overline{1+a\overline{b}})\big)^{-1}(a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b})<1\\
&\iff a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{a}+b\overline{b}<1+b\overline{a}+a\overline{b}+a\overline{b}b\overline{a}\iff\\
&\iff 0<1-a\overline{a}-b\overline{b}+a\overline{a}b\overline{b}=(1-a\overline{a})(1-b\overline{b}).
\end{aligned}$$

Diese letzte Bedingung ist aber erfüllt, weil $a,\,b\in\mathrm{H}_{<1}$ sind.
Für jedes $a\in\mathrm{H}_{<1}$ gilt

$$a\oplus0=0\oplus a=a\,,$$

d.h. 0 ist das neutrale Element von $(\mathrm{H}_{<1},\oplus)$.

Wir betrachten die Gleichung

$$(1) \quad b = x \oplus a = (1 + a\overline{x})^{-1}(x + a).$$

Wir können (1) in der Form

$$(2) \quad (1 + a\overline{x})b = x + a$$

schreiben. Für $a = 0$ folgt $x = b$. Es sei daher $a \neq 0$. Setzen wir $y := a\overline{x}$, also $x = \overline{y}\,\overline{a}^{-1}$, so folgt aus (2):

$$(3) \quad \overline{y}\,\overline{a}^{-1} - yb = b - a.$$

Wir zerlegen $y = \eta + z$ mit $\eta \in \mathrm{F}$ und $z \in \mathrm{N} := \{t \in \mathrm{H} \mid \overline{t} = -t\}$ (vgl. 1.1.5) und setzen in (3) ein:

$$-z\overline{a}^{-1} - zb = b - a - \eta\overline{a}^{-1} + \eta b \Rightarrow z(\overline{a}^{-1} + b) = -b + a + \eta\overline{a}^{-1} - \eta b.$$

Wegen $(*)$ gilt $\overline{a}^{-1} \neq -b$, also folgt hieraus

$$(4) \quad z = (a + \eta\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)b)(\overline{a}^{-1} + b)^{-1}.$$

Es gilt

$$\overline{z} = (a^{-1} + \overline{b})^{-1}(\overline{a} + \eta a^{-1} - (1 + \eta)\overline{b}),$$

und da $z \in \mathrm{N}$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}
&\overline{z} = -z \iff (a^{-1} + \overline{b})(a + \eta\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)b) = -(\overline{a} + \eta a^{-1} - (1 + \eta)\overline{b})(\overline{a}^{-1} + b)\\
&\iff 1 + \eta a^{-1}\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)a^{-1}b + \overline{b}a + \eta\overline{b}\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)\overline{b}b =\\
&\qquad = -(1 + \eta a^{-1}\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)\overline{b}\overline{a}^{-1} + \overline{a}b + \eta a^{-1}b - (1 + \eta)\overline{b}b)\\
&\iff 2 + 2\eta a^{-1}\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)(a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1}) + (\overline{b}a + \overline{a}b) + \eta(\overline{b}\overline{a}^{-1} + a^{-1}b) - 2(1 + \eta)\overline{b}b =\\
&= 0 \iff 2\eta(a^{-1}\overline{a}^{-1} - \overline{b}b) = -2 + a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1} - \overline{b}a - \overline{a}b + 2\overline{b}b.
\end{aligned}$$

Es gilt $a^{-1}\overline{a}^{-1} = (\overline{a}a)^{-1} \neq \overline{b}b$:
Angenommen $(\overline{a}a)^{-1} = \overline{b}b < 1$, dann wäre $\overline{a}a > 1$ im Widerspruch zu $a \in \mathrm{H}_{<1}$.
Dann erhalten wir

$$\eta = \frac{1}{2}(-2 + a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1} - \overline{b}a - \overline{a}b + 2\overline{b}b)(a^{-1}\overline{a}^{-1} - \overline{b}b)^{-1}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
y =&\eta + z \overset{(4)}{=} \eta + (a + \eta\overline{a}^{-1} - (1 + \eta)b)(\overline{a}^{-1} + b)^{-1} =\\
=&\frac{1}{2}(-2 + a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1} - \overline{b}a - \overline{a}b + 2\overline{b}b)(a^{-1}\overline{a}^{-1} - \overline{b}b)^{-1} +\\
&+ a(\overline{a}^{-1} + b)^{-1} + \frac{1}{2}(-2 + a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1} - \overline{b}a - \overline{a}b + 2\overline{b}b)(a^{-1}\overline{a}^{-1} - \overline{b}b)^{-1}\overline{a}^{-1}(\overline{a}^{-1} + b)^{-1}\\
&- \big(1 + \frac{1}{2}(-2 + a^{-1}b + \overline{b}\overline{a}^{-1} - \overline{b}a - \overline{a}b + 2\overline{b}b)(a^{-1}\overline{a}^{-1} - \overline{b}b)^{-1}\big)b(\overline{a}^{-1} + b)^{-1} := \Phi(a, b),
\end{aligned}$$

und

$$x = \overline{y}\,\overline{a}^{-1} = \overline{\Phi(a,b)}\,\overline{a}^{-1}$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (1).
Wir betrachten jetzt

$$(5) \quad b = a \oplus x = (1 + x\overline{a})^{-1}(a + x).$$

Die Gleichung (5) kann in der Form

$$(6) \quad b + (x\overline{a})b = a + x \iff (x\overline{a})b - x = a - b$$

geschrieben werden. Für $a = 0$ folgt $x = b$. Es sei $a \neq 0$. Wir setzen $y := x\overline{a}$, also $x = y\overline{a}^{-1}$. Dann müssen wir folgende Gleichung lösen:

$$(7) \quad yb - y\overline{a}^{-1} = y(b - \overline{a}^{-1}) = a - b.$$

Da $b - \overline{a}^{-1} \neq 0$ (vgl. $(*)$) ist, erhalten wir aus (7)

$$y = (a - b)(b - \overline{a}^{-1})^{-1}, \quad \text{d.h.} \quad x = (a - b)(b - \overline{a}^{-1})^{-1}\overline{a}^{-1}$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung (5).
Damit ist gezeigt, daß $(\mathrm{H}_{<1}, \oplus)$ ein Loop ist.
Nunmehr betrachten wir die euklidische Hülle $\overline{\mathrm{F}}$ von $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$. Gemäß der Sätze 1.1.12 und 1.1.13 läßt sich dann die Divisionsalgebra (H, F) als Unteralgebra einer Divisionsalgebra $(\overline{\mathrm{H}}, \overline{\mathrm{F}})$ auffassen. Daher ist auch $(\mathrm{H}_{<1}, \oplus)$ ein Unterloop von $(\overline{\mathrm{H}_{<1}}, \oplus)$, der nach 2.5.10 ein K-Loop ist. Also ist wegen 2.1.2 auch $(\mathrm{H}_{<1}, \oplus)$ ein K-Loop.
Für $a \in \mathrm{H}_{<1} \setminus \{0\}$ gilt

$$\mathrm{Z}(a) := \{z \in \mathrm{H}_{<1} \mid a \oplus z = z \oplus a\} = \{z \in \mathrm{H}_{<1} \mid z\overline{a} = a\overline{z}\}.$$

Es sei $z \in \mathrm{Z}(a)$. Dann gilt

$$z\overline{a} = a\overline{z} = \overline{z\overline{a}} \iff z\overline{a} \in \mathrm{F} \iff z\overline{a}a \in \mathrm{F}a \iff z \in \mathrm{F}a.$$

Daraus folgt $\mathrm{Z}(a) \subset \mathrm{F}a$, also $\mathrm{Z}(a) = (\mathrm{F}a) \cap \mathrm{H}_{<1}$. Für $z \in \mathrm{Z}(a)$ ist also $z = \lambda a$ mit $\lambda \in \mathrm{F}$ und $z\overline{z} = \lambda^2 a\overline{a} < 1$. Da $a\overline{a} > 0$ für $a \neq 0$ ist, setzen wir $a' := \frac{a}{\sqrt{a\overline{a}}}$. Dann gilt

$$a'\overline{a}' = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Z}(a) = \{\lambda a' \mid \lambda^2 < 1\}.$$

Es seien jetzt $\lambda a'$, $\mu a' \in \mathrm{Z}(a)$. Dann gilt

$$\lambda a' \oplus \mu a' = (1 + \mu a' \lambda \overline{a}')^{-1}(\lambda a' + \mu a') = (1 + \mu\lambda)^{-1}(\lambda + \mu)a' = (\lambda \oplus \mu)a'.$$

Also ist $(\mathrm{Z}(a), \oplus)$ isomorph zu $(\mathrm{F}_{<1}, \oplus)$ und wegen 2.5.12 zur kommutativen Gruppe $(\mathrm{F}^+, \cdot)$.

$$\mathfrak{F} := \{\mathrm{Z}(a) \mid a \in \mathrm{H}_{<1} \setminus \{0\}\}$$

bildet ein Bündel bezüglich 0 (vgl. Definition 2.2.1), denn es gilt

$$\mathrm{Z}(a) \cap \mathrm{Z}(b) = \begin{cases} \{0\} & \text{wenn} \quad \mathrm{F}a \neq \mathrm{F}b \\ \mathrm{Z}(a) & \text{wenn} \quad b \in \mathrm{F}a. \end{cases}$$

Da $(\mathrm{H}_{<1}, \oplus)$ ein K-Loop ist, gilt

$$\forall\, \delta := \big((a \oplus b)^{\oplus}\big)^{-1} \circ a^{\oplus} \circ b^{\oplus} \in Aut\,(\mathrm{H}_{<1}, \oplus) \quad \text{(vgl. Definition 2.1.4, } \mathbf{LK1}\text{)}.$$

Daher gilt für alle

$$\mathrm{Z}(a) \in \mathfrak{F}\colon\;\; \delta\big(\mathrm{Z}(a)\big) \in \mathfrak{F}\,,$$

d.h. $\mathfrak{F}$ ist eine Inzidenzfaserung (vgl. Definition 2.2.6).
Durch die Formel

$$\omega(z) = (-z+1)^{-1}(z+1)$$

wird eine Bijektion von $\mathrm{H} \setminus \{1\}$ auf $\mathrm{H} \setminus \{-1\}$ beschrieben und durch

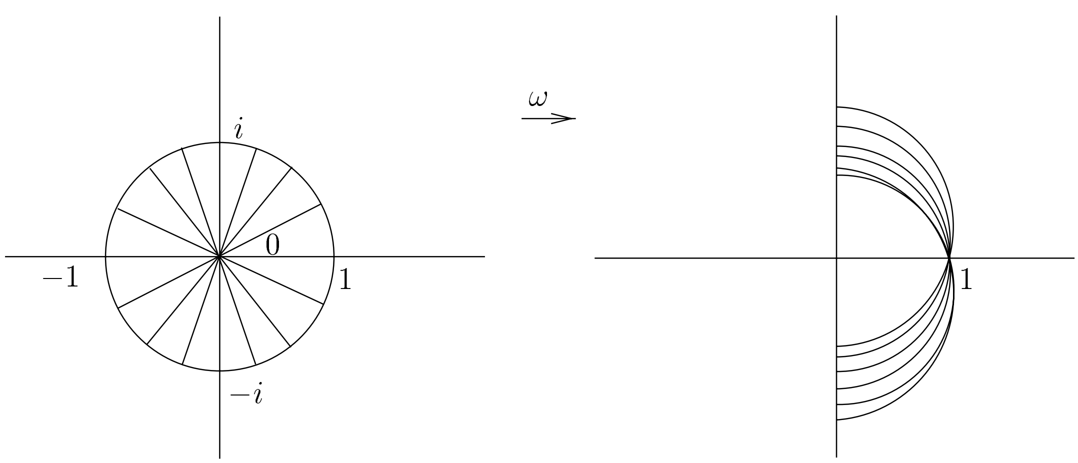
$$\omega^{-1}(u) = (1+u)^{-1}(u-1)$$

die Umkehrabbildung von $\mathrm{H} \setminus \{-1\}$ auf $\mathrm{H} \setminus \{1\}$. Für $z \in \mathrm{H} \setminus \{1\}$ gilt dabei wegen $(1-z)(1-\overline{z}) > 0$:

$$\omega(z) \in \mathrm{F}^{+} + \mathrm{N} \iff 0 < \omega(z) + \overline{\omega(z)} = (1-z)^{-1}(1+z) + (1-\overline{z})^{-1}(1+\overline{z}) \iff$$
$$0 < (1-\overline{z})(1+z) + (1-z)(1+\overline{z}) = 2(1-\overline{z}z) \iff z\overline{z} < 1 \iff z \in \mathrm{H}_{<1}.$$

Also $\omega(\mathrm{H}_{<1}) = \mathrm{F}^{+} + \mathrm{N}$. □

Bemerkung. Für den Fall $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ und $\mathrm{H} = \mathbb{C}$ ist in der Gaußschen Zahlenebene $\mathrm{H}_{<1}$ das Innere des Einheitskreises und $\mathrm{F}^{+} + \mathrm{N}$ die rechte offene durch die imaginäre Achse begrenzte Halbebene. Die Faserung $\mathfrak{F}$ besteht aus allen offenen Strecken, die den Punkt 0 enthalten und durch den Einheitskreis begrenzt werden. Die Abbildung ω führt dieses Streckenbüschel in das Büschel aller Halbkreise durch den Punkt 1 über, die auf der imaginären Achse senkrecht stehen und durch sie begrenzt werden.



FIGUR 2.1.

2.5.2 Zwei- und höher-dimensionale Punktspiegelungsstrukturen

Es sei T ein Teilraum des projektiven Raumes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$ mit $o \in T$ und $dim\, T = p$. Wenn

$$T \cap \pi(o) \subset \mathbf{P}_{-1} \cup \mathbf{P}_0$$

ist, so ist nach 2.5.7 $(G \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{G \cap \mathbf{P}_1})$ für jede gerade $G := \overline{o, t}$ mit $t \in T \cap \pi(o)$ eine Punktspiegelungsstruktur, also auch $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ wegen 2.5.4.
Es sei jetzt

$$T \cap \pi(o) \not\subset \mathbf{P}_{-1} \cup \mathbf{P}_0\,,$$

d.h. $T \cap \pi(o) \cap \mathbf{P}_1 \neq \emptyset$, und es sei $e_2 \in T \cap \pi(o) \cap \mathbf{P}_1$. Dann gibt es ein $\mathfrak{e}_2 \in \varphi^{-1}(e_2)$ mit $f(\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2) = 1$, und für alle $(x, y) \in \mathrm{H}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x\mathfrak{e} + y\mathfrak{e}_2, x\mathfrak{e} + y\mathfrak{e}_2) = x\overline{x} + y\overline{y} > 0.$$

Folglich ist $G := \varphi\big((\mathrm{H}\mathfrak{e} + \mathrm{H}\mathfrak{e}_2)^*\big)$ eine Gerade durch o mit $G \subset \mathbf{P}_1$. Nach 2.5.7 ist $(G, \widetilde{G})$ keine Punktspiegelungsstruktur, also ist nach 2.5.4 auch $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ keine Punktspiegelungsstruktur. Damit ist gezeigt:

Satz 2.5.14. *Es sei* $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ *ein euklidischer Körper und* T *ein Teilraum von* $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$ *mit* $o \in T$. *Dann ist* $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ *genau dann eine Punktspiegelungsstruktur, wenn* $\big(T \cap \pi(o)\big) \cap \mathbf{P}_1 = \emptyset$ *gilt. Wenn* $\pi(o) \cap \mathbf{P}_1 = \emptyset$ *ist, so ist* $(\mathbf{P}_1, \widetilde{\mathbf{P}_1})$ *eine Punktspiegelungsstruktur.*

Aus 2.5.14 folgt wegen 2.4.7

Satz 2.5.15. *Wenn* $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ *ein euklidischer Körper ist,* T *ein Teilraum von* $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$ *mit* $o \in T$ *und* $T \cap \pi(o) \subset \mathbf{P}_0 \cup \mathbf{P}_{-1}$, *dann ist das Paar* $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$ *ein K-Loop bezüglich der Operation* $x \boxplus y := \widetilde{x'} \circ \widetilde{o}(y)$, *wobei* $x' \in M_{(o,x)} \cap \mathbf{P}_1$ *ist.*

Wir wollen jetzt die Spiegelungsstrukturen von Satz 2.5.14 klassifizieren.
Es sei $\mathbf{U}$ der Untervektorraum von $(\mathbf{V}, \mathrm{H})$ mit $\varphi(\mathbf{U}^*) = T \cap \pi(o)$, und es seien

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^+ &:= \{\mathfrak{u} \in \mathbf{U} \mid f(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) > 0\} \\ \mathbf{U}_0 &:= \{\mathfrak{u} \in \mathbf{U} \mid f(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0\} \\ \mathbf{U}^- &:= \{\mathfrak{u} \in \mathbf{U} \mid f(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) < 0\} \\ \mathbf{U}_{<1} &:= \{\mathfrak{u} \in \mathbf{U} \mid -f(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) < 1\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\varphi\big((\mathrm{H}\mathfrak{e} + \mathbf{U})^*\big) = T$$

(wegen 1.2.3) und

$$T \setminus \pi(o) = \{\varphi(\mathfrak{e} + \mathfrak{u}) \mid \mathfrak{u} \in \mathbf{U}\}.$$

Daher ist

$$\psi = \begin{cases} T \setminus \pi(o) & \longrightarrow & \mathbf{U} \\ \varphi(\mathfrak{e} + \mathfrak{u}) & \longmapsto & \mathfrak{u} \end{cases}$$

eine Bijektion, genauer eine Kollineation des affinen Raumes $T \setminus \pi(o)$ auf den durch den Vektorraum $(\mathbf{U}, \mathrm{H})$ bestimmten affinen Raum.

Wegen 2.5.14 setzen wir $T \cap \pi(o) \subset \mathbf{P}_0 \cup \mathbf{P}_{-1}$ voraus, d.h. $\mathbf{U}^+ = \emptyset$, und somit ist $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{U}^-$. Also f ist nicht positiv auf $\mathbf{U}$.

Es gilt:

Proposition 2.5.16. $\mathit{Rad}(\mathbf{U}, \mathrm{H}, f\,|_{\mathbf{U}}) := \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} = \mathbf{U}_0$.

Beweis. Es seien $\mathfrak{x} \in \mathbf{U}_0$, $\mathfrak{y} \in \mathbf{U}$ und $\lambda \in \mathrm{F}$. Dann gilt

$$0 \geq f(\lambda\mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \lambda\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \lambda\big(f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}\big) + f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$$

mit $0 \geq f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$, weil f nicht positiv auf $\mathbf{U}$ ist. Es gilt also

$$-f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \geq \lambda\big(f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}\big)\,, \ \forall\, \lambda \in \mathrm{F}.$$

Wir nehmen jetzt an, daß $\alpha := f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \neq 0$ ist.
Falls $\alpha > 0$ ist und $\lambda > \alpha^{-1}\big(-f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})\big)$ gewählt wird, erhalten wir den Widerspruch $-f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) > -f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$.
Falls $\alpha < 0$ ist und $\lambda < \alpha^{-1}\big(-f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})\big)$ gewählt wird, dann gilt $\lambda\alpha > -f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$, daher erhalten wir den Widerspruch $-f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) > -f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})$.
Also gilt $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = 0$, d.h. $\overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = -f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathbf{U}_0$ und $\mathfrak{y} \in \mathbf{U}$.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\big(f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\big)^2 = \big(-f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\big)^2 = \big(\overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}\big)^2 = \overline{f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = \\ &\overline{f\big(f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\big)} = -f\big(f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\big) = -f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \end{aligned}$$

also $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$. □

Nunmehr wenden wir ψ auf die Punktspiegelungsstruktur $(T \cap \mathbf{P}_1, \widetilde{T \cap \mathbf{P}_1})$ an.
Es ergeben sich die folgenden drei Typen:

1. $T \cap \pi(o) \subset \mathbf{P}_0$, d.h. $T \cap \mathbf{P}_1 = T \setminus \pi(o)$ ist ein affiner Raum der Dimension p, und somit ist

$$\psi(T \cap \mathbf{P}_1) = \mathbf{U} = \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_{<1}.$$

2. $T \cap \pi(o) \subset \mathbf{P}_{-1}$, (d.h. $\mathbf{U} = \mathbf{U}^- \cup \{0\}$, also $\mathbf{U}_0 = \{0\}$ und f negativ definit auf $\mathbf{U}$). Hier gilt:

$$\psi(T \cap \mathbf{P}_1) = \mathbf{U}_{<1}\,,$$

denn für jedes $\mathfrak{x} := \mathfrak{e} + \mathfrak{u} \in \varphi^{-1}(T \cap \mathbf{P}_1)$ gilt

$$f(\mathfrak{e}+\mathfrak{u}, \mathfrak{e}+\mathfrak{u}) = 1 + f(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) > 0 \quad \text{mit} \quad f(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) \leq 0 \iff 0 \leq -f(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) < 1.$$

Da $-f$ positiv definit auf $\mathbf{U}$ ist, stellt $\mathbf{U}_{<1}$ das Innere einer p-dimensionalen Einheitskugel dar.

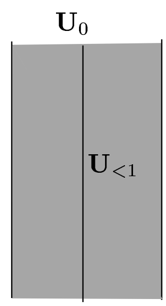
3. $\big(T \cap \pi(o)\big) \cap \mathbf{P}_0 \neq \emptyset$ und $\big(T \cap \pi(o)\big) \cap \mathbf{P}_{-1} \neq \emptyset$, d.h. $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{U}^-$ mit $\mathbf{U}_0 \neq \{0\}$ und $\mathbf{U}^- \neq \emptyset$.

   Hier gilt ebenfalls

   $$\psi(T \cap \mathbf{P}_1) = \mathbf{U}_{<1}\,,$$

   wobei das Radikal $\mathbf{U}_0$ von $(\mathbf{U}, \mathrm{H}, f\,|\,_{\mathbf{U}})$ (vgl. 2.5.16) in $\mathbf{U}_{<1}$ enthalten ist. In diesem Fall ist $\mathbf{U}_{<1}$ ein „Zylinder" mit $\mathbf{U}_0$ als Achse über einer $(p-r)$-dimensionalen Einheitskugel, wobei $r = dim\,\mathbf{U}_0$ ist.

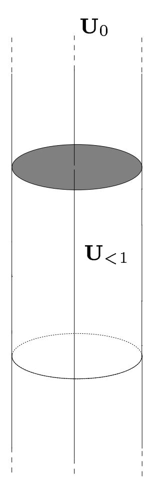
   Wenn $dim\,\mathbf{U} = 2$, dann ist T eine projektive Ebene und $T \cap \pi(o)$ eine projektive Gerade. In diesem Fall ist $dim\,\mathbf{U}_0 = 1$, und $\mathbf{U}_{<1} := \{\mathfrak{u} \in \mathbf{U} \mid -f(\mathfrak{u},\mathfrak{u}) < 1\}$ ist der Streifen längs der Achse $\mathbf{U}_0$ (siehe Figur 2.2).



Figur 2.2.

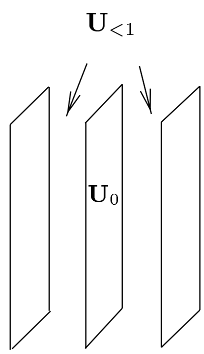
   Wenn $dim\,\mathbf{U} = 3$, dann ist $dim\,T = 3$, und $T \cap \pi(o)$ ist eine projektive Ebene. In diesem Fall unterscheidet man zwei Unterfälle:

   (a) Falls $dim\,\mathbf{U}_0 = 1$, ist $\mathbf{U}_{<1}$ ein Kreiszylinder mit Achse $\mathbf{U}_0$ (siehe Figur 2.3).



Figur 2.3.

(b) Falls $dim\,\mathbf{U}_0 = 2$, ist $\mathbf{U}_{<1}$ das Innere von zwei zu $\mathbf{U}_0$ parallelen Ebenen (siehe Figur 2.4).



Figur 2.4.

Mit ψ können wir in allen drei Fällen die Punktspiegelungsstruktur und die Loop-Struktur von $T \cap \mathbf{P}_1$ auf $\mathbf{U}_{<1}$ übertragen, indem wir beachten, daß für $\mathfrak{x} \in \mathbf{U}_{<1}$ gilt

$$\psi\big(\varphi(\mathfrak{e}+\mathfrak{x})\big) = \mathfrak{x}.$$

Wir wollen jetzt $\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = \psi\big(\varphi(\widetilde{\mathfrak{e}+\mathfrak{a}})(\mathfrak{e}+\mathfrak{x})\big)$ ausrechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{e}+\mathfrak{a}}(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}) &= -(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}) + 2f(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}, \mathfrak{e}+\mathfrak{a})f(\mathfrak{e}+\mathfrak{a}, \mathfrak{e}+\mathfrak{a})^{-1}(\mathfrak{e}+\mathfrak{a})\\
&= -\mathfrak{e} - \mathfrak{x} + 2f(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}, \mathfrak{e}+\mathfrak{a})\big(1+f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\big)^{-1}(\mathfrak{e}+\mathfrak{a})\\
&= \Big(-1 + 2(1+f(\mathfrak{x},\mathfrak{a}))\big(1+f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\big)^{-1}\Big)\mathfrak{e} - \mathfrak{x} + 2\big(1+f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})\big)\big(1+f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\big)^{-1}\mathfrak{a}.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}} := 2\big(1+f(\mathfrak{x},\mathfrak{a})\big)\big(1+f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\big)^{-1}.$$

Dann erhalten wir

$$\widetilde{\mathfrak{e}+\mathfrak{a}}(\mathfrak{e}+\mathfrak{x}) = (-1+\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}})\mathfrak{e} - \mathfrak{x} + \tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}}\mathfrak{a}$$

und

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) &= (1-\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{x} - \tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}}\mathfrak{a}) = (1-\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{x} + (-1+\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}})^{-1}\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}}\mathfrak{a}\\
&= (1-\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{x} + (1-\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}}^{-1})^{-1}\mathfrak{a}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{o}} = 2\big(1+f(\mathfrak{x},\mathfrak{o})\big)\big(1+f(\mathfrak{o},\mathfrak{o})\big)^{-1} = 2.$$

Dann ist

$$(*) \quad \widetilde{\mathfrak{o}}(\mathfrak{x}) = (1-2)^{-1}\mathfrak{x} + (1-2^{-1})^{-1}\mathfrak{o} = -\mathfrak{x}.$$

Für $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ wollen wir jetzt $\mathfrak{a}'$ bestimmen, so daß $\widetilde{\mathfrak{a}'}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{a}$. Es gilt:

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{o}) = (1 - \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{o} + (1 - \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}^{-1})^{-1}\mathfrak{a} = (1 - \tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}}^{-1})^{-1}\mathfrak{a}$$

und

$$\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{a}} = 2\big(1 + f(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})\big)\big(1 + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\big)^{-1} = 2\big(1 + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\big)^{-1},$$

daher folgt

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{o}) = \Big(1 - 2^{-1}\big(1 + f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\big)\Big)^{-1}\mathfrak{a} = 2\big(1 - f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\mathfrak{a}.$$

Das Element $\mathfrak{a}'$ ist eine der Lösungen $\mathfrak{y}$ der Gleichung

$$2\big(1 - f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})\big)^{-1}\mathfrak{y} = \mathfrak{a}\,, \quad \text{d.h.} \quad 2\mathfrak{y} = \big(1 - f(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})\big)\mathfrak{a}.$$

Also hat $\mathfrak{y}$ die Form $\mathfrak{y} = \lambda\mathfrak{a}$ mit $\lambda \in \mathrm{F}$. Wir setzen $\mathfrak{y} = \lambda\mathfrak{a}$ ein:

$$\begin{aligned} &2\lambda\mathfrak{a} = \big(1 - f(\lambda\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{a})\big)\mathfrak{a} = \big(1 - \lambda f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\overline{\lambda}\big)\mathfrak{a} \iff \\ &2\lambda = 1 - \lambda f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})\overline{\lambda} \iff \lambda^2 f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) + 2\lambda - 1 = 0 \quad \text{da} \quad \lambda \in \mathrm{F}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

1. $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$.

   Dann gilt

$$\tau_{\mathfrak{x},\mathfrak{a}} = 2\big(1 + f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a})\big),$$

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\mathfrak{x}) = -\big(1 + 2f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\Big(\mathfrak{x} - 2\big(1 + f(\mathfrak{x}, \mathfrak{a})\big)\mathfrak{a}\Big),$$

   $\lambda = 2^{-1}$, d.h. $\mathfrak{a}' = 2^{-1}\mathfrak{a}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} &= \widetilde{\mathfrak{a}'} \circ \widetilde{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}) \overset{(*)}{=} \widetilde{\mathfrak{a}'}(-\mathfrak{b}) \\ &= -\big(1 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\Big(-\mathfrak{b} - 2\big(1 + 2^{-1}f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)\mathfrak{a}\Big) \end{aligned}$$

   mit

$$\tau_{-\mathfrak{b},2^{-1}\mathfrak{a}} = 2 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}),$$

   also

$$-(1 - \tau_{-\mathfrak{b},2^{-1}\mathfrak{a}})^{-1} = \big(1 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}.$$

   Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} &= \Big(1 - \big(2 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)\Big)^{-1}(-\mathfrak{b}) + \Big(1 - \big(2 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\Big)^{-1}(2^{-1}\mathfrak{a}) \\ &= \big(1 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\mathfrak{b} + \big(1 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}\big(2 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)2^{-1}\mathfrak{a} \\ &= \big(1 - f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) - 2^{-1}\big(1 + f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\big)^{-1}f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})\mathfrak{a}. \end{aligned}$$

   Falls $f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$ ist, ist

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$

   d.h. die Loop-Operation „$\oplus$“ stimmt mit der Vektorraumsaddition „$+$“ überein.

2. $f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) \neq 0$.

   Dann müssen wir die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\lambda - f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1} = 0$$

   lösen. Wir erhalten

$$\lambda_{1,2} = -f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1} \pm \sqrt{f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-2} + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}} = -f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\big(1 \mp \sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\big),$$

   und, da $\{a'\} = M_{(0,a)} \cap \mathbf{P}_1$ mit $a' = \varphi^{-1}(\mathfrak{e}+\mathfrak{a}')$, d.h. $f(\mathfrak{e}+\mathfrak{a}', \mathfrak{e}+\mathfrak{a}') = 1 + f(\lambda\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{a}) = 1 + \lambda^2 f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) > 0$ ist, ist

$$\lambda_1 = -f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\big(1 - \sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\big)$$

   die gesuchte Lösung, denn

$$\begin{aligned}
&1 + \lambda_1^2 f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\big(1 - \sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\big)^2 = \\
&2 + 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1} - 2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})} = \\
&2f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\big(f(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) + 1 - \sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\big) > 0 \quad \forall\, \mathfrak{a} \in \mathbf{U}_{<1}
\end{aligned}$$

   gilt.

Es gilt

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \widetilde{\lambda\mathfrak{a}}(-\mathfrak{b}) = (\tau_{-\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}} - 1)^{-1}(\mathfrak{b} + \tau_{-\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}}\,\lambda\mathfrak{a})$$

mit

$$\tau_{-\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}} = 2\big(1 - f(\mathfrak{b},\mathfrak{a})\overline{\lambda}\big)\big(1 + \lambda f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\overline{\lambda}\big)^{-1}$$

und

$$\lambda = -f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})^{-1}\big(1 - \sqrt{1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})}\big) \in \mathrm{F}.$$

Wir setzen

$$\alpha := 1 + f(\mathfrak{a},\mathfrak{a})\,, \quad c := f(\mathfrak{b},\mathfrak{a}).$$

Dann gilt

$$\lambda = (1 + \sqrt{\alpha})^{-1},$$

$$\tau_{-\mathfrak{b},\lambda\mathfrak{a}} = 1 + \sqrt{\alpha}^{-1}(1 - c)$$

also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} &= (1 - c)^{-1}\sqrt{\alpha}\Big(\mathfrak{b} + \big(1 + \sqrt{\alpha}^{-1}(1 - c)\big)(1 + \sqrt{\alpha})^{-1}\mathfrak{a}\Big) \\
&= (1 - c)^{-1}\sqrt{\alpha}\,\mathfrak{b} + \big((1 - c)^{-1}\sqrt{\alpha} + 1\big)(1 + \sqrt{\alpha})^{-1}\mathfrak{a}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{a} \in \mathbf{U}_{<1}$ gilt $\alpha > 0$. Falls $c := f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 0$ ist, ist

$$\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} = \sqrt{\alpha}\, \mathfrak{b} + \mathfrak{a}.$$

Nach 2.4.10 ist $G := \varphi(\mathfrak{e} + \mathrm{H}\mathfrak{b}) \cap \mathbf{P}_1$ für jedes $\mathfrak{b} \in \mathbf{U}^*$ ein Unterloop von $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$, und

$$\{\psi\big(\varphi(\mathfrak{e} + \mathrm{H}\mathfrak{b}) \cap \mathbf{P}_1\big) \mid \mathfrak{b} \in \mathbf{U}^*\}$$

liefert uns eine Inzidenzfaserung des K-Loops $(\mathbf{U}_{<1}, \oplus)$. Hierbei gilt

$$\begin{array}{l} \psi\big(\varphi(\mathfrak{e} + \mathrm{H}\mathfrak{b})\big) = \mathrm{H}\mathfrak{b} \cap \mathbf{U}_{<1} \quad \text{und} \\ (\mathrm{H}\mathfrak{b} \cap \mathrm{H}_{<1}, \oplus) \cong (\mathrm{H}, +) \quad \text{falls} \quad \mathfrak{b} \in \mathbf{U}_0 \quad (\text{vgl. } 2.5.9) \\ (\mathrm{H}\mathfrak{b} \cap \mathrm{H}_{<1}, \oplus) \cong (\mathrm{H}_{<1}, \oplus) \quad \text{falls} \quad \mathfrak{b} \in \mathbf{U}^- \quad (\text{vgl. } 2.5.10). \end{array}$$

Im Fall 3. ist $\varphi(\mathfrak{e} + \mathbf{U}_0) \cap \mathbf{P}_1$ eine Untergruppe von $(T \cap \mathbf{P}_1, \boxplus)$, die von ψ isomorph auf $(\mathbf{U}_0, +)$ abgebildet wird.

2.5.3 Beispiele von Spiegelungsgeometrien, die nicht Punktspiegelungsgeometrien sind

Im Folgenden sei $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter, kommutativer Körper. Wenn α, $\beta \in \mathrm{F}$ mit α, $\beta > 0$, so sei:

- $\mathrm{H}_\alpha = \mathrm{F}(i)$ die quadratische Körpererweiterung von F, die durch $i^2 = -\alpha$ gegeben ist; der von der Identität verschiedene F-Antiautomorphismus ist dann durch

  $$z = x + iy \longrightarrow \overline{z} = x - iy$$

  definiert, und es gilt $z\overline{z} = x^2 + \alpha y^2 \geq 0$.

- $\mathrm{H}_{\alpha,\beta} = \mathrm{F}(i,j)$ die Quaternionenerweiterung von F, die durch $i^2 = -\alpha$, $j^2 = -\beta$ und $ij = -ji$ bestimmt ist; der involutorische Antiautomorphismus, der genau F elementweise festläßt, ist gegeben durch

  $$z = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij \longrightarrow x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 ij,$$

  und es gilt $z\overline{z} = x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 \geq 0$.

Im Folgenden sei H einer der drei Körper F, H_α, $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$. Im Fall $\mathrm{H} = \mathrm{F}$ sei $- = id$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(\mathbf{V}, \mathrm{H}) = (\mathrm{H}^n, \mathrm{H})$ der n-dimensionale Vektorraum über H. Setzen wir

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{V} \times \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathrm{H} \\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) & \longmapsto & \mathfrak{x}\,\overline{\mathfrak{y}} := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i\,, \end{array} \right.$$

so ist f im Fall $\mathrm{H} \neq \mathrm{F}$ eine positiv definite hermitesche Form und im Fall $\mathrm{H} = \mathrm{F}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Also ist $(\mathbf{V}, \mathrm{H}, f)$ ein positiv definiter unitärer bzw. orthogonaler Vektorraum.

Wir betrachten den vergrößerten Vektorraum $\mathbf{W} = \mathrm{H} \oplus \mathbf{V}$ und setzen f auf $\mathbf{W} \times \mathbf{W}$ durch

$$\Phi\colon \mathbf{W} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathrm{H}; \quad \big((\xi, \mathfrak{x}), (\eta, \mathfrak{y})\big) \longmapsto \xi\overline{\eta} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{y}}$$

fort. Dann ist $(\mathbf{W}, \mathrm{H}, \Phi)$ auch ein unitärer bzw. orthogonaler Vektorraum mit einer nicht definiten hermiteschen Form bzw. einer nicht definiten symmetrischen Bilinearform (vgl. Definition 1.2.5), und für $(\xi, \mathfrak{x}) \in \mathbf{W}$ gilt

$$\Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) = \xi\overline{\xi} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} \in \mathrm{F}.$$

Wir können $\mathbf{W}$ daher in drei disjunkte Teile zerlegen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}^+ &:= \{(\xi, \mathfrak{x}) \in \mathbf{W} \mid \Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) > 0\} \\
\mathbf{W}_0 &:= \{(\xi, \mathfrak{x}) \in \mathbf{W} \mid \Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) = 0\} \\
\mathbf{W}^- &:= \{(\xi, \mathfrak{x}) \in \mathbf{W} \mid \Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) < 0\}.
\end{aligned}$$

Es sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G})$ der projektive Raum, der dem unitären (bzw. orthogonalen) Vektorraum $(\mathbf{W}, \mathrm{H}, \Phi)$ zugeordnet ist, und $\varphi\colon \mathbf{W}^* \longrightarrow \mathbf{W}^*/\mathrm{H}^*$ die kanonische Abbildung. Es seien

$$\mathbf{P}^+ := \varphi(\mathbf{W}^+)\,, \quad \mathbf{P}_0 := \varphi(\mathbf{W}_0^*)\,, \quad \mathbf{P}^- := \varphi(\mathbf{W}^-).$$

Da $\mathrm{H}^*\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}^+$, $\mathrm{H}^*\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_0$ und $\mathrm{H}^*\mathbf{W}^- = \mathbf{W}^-$ gilt, ist $\mathbf{P} = \mathbf{P}^+ \mathbin{\dot\cup} \mathbf{P}_0 \mathbin{\dot\cup} \mathbf{P}^-$ eine disjunkte Zerlegung der Punktmenge des projektiven Raumes.
Es sei

$$\mathbf{W}^{(2)} := \{(\xi, \mathfrak{x}) \in \mathbf{W} \mid \xi\overline{\xi} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} \in \mathrm{F}^{(2)}\} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}^{(2)} := \varphi(\mathbf{W}^{(2)}) \subset \mathbf{P}^+.$$

Die Spiegelung (vgl. Definition 1.2.7) am Vektor $(\alpha, \mathfrak{a}) \in \mathbf{W} \setminus \mathbf{W}_0 := \mathbf{W}^{**}$ nimmt hier die Form

$$\widetilde{(\alpha, \mathfrak{a})}\colon \begin{cases} \mathbf{W} & \longrightarrow \quad \mathbf{W} \\ (\xi, \mathfrak{x}) & \longmapsto \quad -(\xi, \mathfrak{x}) + 2(\xi\overline{\alpha} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{a}})(\alpha\overline{\alpha} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}})^{-1}(\alpha, \mathfrak{a}) \end{cases}$$

an.

Es gilt folgendes

Theorem 2.5.17. *Es sei* $\mathfrak{G}^{(2)} := \{G \cap \mathbf{P}^{(2)} \mid G \in \mathfrak{G}\colon G \cap \mathbf{P}^{(2)} \neq \emptyset\}$, *und es sei* $0 := \mathrm{H}^*(1, \mathfrak{o})(\in\ \mathbf{P}^{(2)})$. *Dann gilt:*

(1) $(\mathbf{P}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(2)})$ *ist ein Inzidenzraum.*

(2) $\forall\, a \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{P}_0\colon \widetilde{a}(\mathbf{P}^{(2)}) = \mathbf{P}^{(2)}$ *und* $\widetilde{a}_{|\mathbf{P}^{(2)}} \in \mathit{Aut}\,(\mathbf{P}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(2)})$.

(3) $\forall\, a \in \mathbf{P}^+\colon |\mathit{Fix}\,(\widetilde{a}_{|\mathbf{P}^{(2)}})| \leq 1$.

Falls für alle $z \in \mathrm{H}^*$ *noch die Bedingung* $z\overline{z} \in \mathrm{F}^{(2)}$ *erfüllt ist, gilt weiterhin:*

(**4**) $\forall\, a \in \mathbf{P}^{(2)} \quad \exists_1\, a' \in \mathbf{P}^{+}\colon \widetilde{a'}(0) = a.$

(**5**) *Es sei*

$$\circ : \begin{cases} \mathbf{P}^{(2)} & \longrightarrow \quad J^* \cap Aut\,(\mathbf{P}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(2)}) \\ a & \longmapsto \quad a^\circ := \widetilde{a'}_{|\mathbf{P}^{(2)}}. \end{cases}$$

Dann ist $\left(\mathbf{P}^{(2)}, \left(\mathbf{P}^{(2)}\right)^\circ, 0, \mathfrak{G}^{(2)}\right)$ *eine Spiegelungsgeometrie.*

(**6**) *Wenn* $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ *euklidisch ist, dann ist* $\mathbf{P}^{+} = \mathbf{P}^{(2)}$ *und* $\left(\mathbf{P}^{+}, \widetilde{\mathbf{P}^{+}}, 0, \mathfrak{G}^{(2)}\right)$ *eine Punktspiegelungsgeometrie.*

Beweis. **(1)** Da $(\mathbf{P}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(2)})$ der Spurraum eines projektiven Raumes ist, ist er ein Inzidenzraum.

(2) Nach 1.2.4 ist $\sigma := \widetilde{(\alpha, \mathfrak{a})}$ für jedes $(\alpha, \mathfrak{a}) \in \mathbf{W}^{**}$ eine involutorische Isometrie. Deshalb ist $\Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) = \Phi\big(\sigma(\xi, \mathfrak{x}), \sigma(\xi, \mathfrak{x})\big)$, und daher gilt für $\overline{\widetilde{(\alpha, \mathfrak{a})}} =: \widetilde{a}$ (siehe S. 15) $\widetilde{a}(\mathbf{P}^{(2)}) = \mathbf{P}^{(2)}$.
Nach Definition ist $\widetilde{a}_{|\mathbf{P}^{(2)}}$ eine Kollineation des Inzidenzraumes $(\mathbf{P}^{(2)}, \mathfrak{G}^{(2)})$.

(3) Es sei $a := \mathrm{H}^*(\alpha, \mathfrak{a}) \in \mathbf{P}^{+}$. Wegen 1.2.4 gilt

$$Fix\, \widetilde{a} = \{a\} \cup a^{\perp} \quad (1),$$

und, da $a \in \mathbf{P}^{+}$ ist, gilt

$$\Phi\big((\alpha, \mathfrak{a}), (\alpha, \mathfrak{a})\big) = \alpha\overline{\alpha} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} > 0\,, \quad \text{d.h.} \quad \alpha\overline{\alpha} > \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} \quad (2).$$

Es sei $x = \mathrm{H}^*(\xi, \mathfrak{x}) \in a^{\perp}$. Dann gilt

$$0 = \Phi\big((\alpha, \mathfrak{a}), (\xi, \mathfrak{x})\big) = \alpha\overline{\xi} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{x}}\,, \quad \text{d.h.} \quad \alpha\overline{\xi} = \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{x}} \quad (3).$$

Da die Form f positiv definit ist, gilt für alle $\mathfrak{a} \in \mathbf{V}^*$: $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} > 0$. Daraus folgt mit (2) $\alpha \neq 0$. Aus (3) folgt dann

$$\overline{\xi} = \alpha^{-1}\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{x}} \quad \text{und} \quad \xi = \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\alpha}^{-1} \quad (4).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi\big((\xi, \mathfrak{x}), (\xi, \mathfrak{x})\big) &= \xi\overline{\xi} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} \overset{(4)}{=} \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{a}}\,\overline{\alpha}^{-1}\alpha^{-1}\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} = \\ &= \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{a}}(\alpha\overline{\alpha})^{-1}\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} \overset{\alpha\overline{\alpha}, \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} \in \mathrm{F}}{=} \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}(\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}(\alpha\overline{\alpha})^{-1} - 1) < 0\,, \end{aligned}$$

weil $\mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}} > 0$ und $\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}(\alpha\overline{\alpha})^{-1} < 1$, (vgl. (2)).
Damit ist $a^{\perp} \in \mathbf{P}^{-}$, und daraus folgt mit (1) $Fix\,(\widetilde{a}_{|\mathbf{P}^{(2)}}) = \{a\}$.

(4) Es sei $a = \mathrm{H}^*(\alpha, \mathfrak{a}) \in \mathbf{P}^{(2)}$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathrm{F}^*$ mit

$$\alpha\overline{\alpha} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = \lambda^2$$

und nach Voraussetzung ein $\nu \in \mathrm{F}^*$ mit $\alpha\overline{\alpha} = \nu^2$. So ist

$$a = \mathrm{H}^*(\alpha, \mathfrak{a}) = \mathrm{H}^*\big((\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\alpha, (\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\mathfrak{a}\big) \quad \text{mit} \quad (\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\alpha \in \mathrm{F} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} &\Phi\Big(\big((\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\alpha, (\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\mathfrak{a}\big), \big((\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\alpha, (\nu\lambda)^{-1}\overline{\alpha}\mathfrak{a}\big)\Big) = \\ &(\nu\lambda)^{-2}\big((\overline{\alpha}\alpha)^2 - \overline{\alpha}\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}\alpha\big) = \frac{\overline{\alpha}(\alpha\overline{\alpha} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}})\alpha}{\alpha\overline{\alpha}(\alpha\overline{\alpha} - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}})} = 1. \end{aligned}$$

Deshalb können wir $a = \mathrm{H}^*(\alpha, \mathfrak{a})$ mit $\alpha \in \mathrm{F}$ und $\alpha^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = 1$ voraussetzen.
Aus $\alpha^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = 1$ folgt $1 < \alpha$, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$, weil nach Voraussetzung die Form f positiv definit ist. Es gilt $c := \Phi\big((1, \mathfrak{o}), (\alpha, \mathfrak{a})\big) = \overline{\alpha}$.
Wegen 1.3.6 ist

$$\begin{aligned} &M_{(0,a)} \neq \emptyset \iff \exists\, \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \overline{\alpha}\alpha \quad \text{und} \\ &M_{(0,a)} = \{\varphi\big((1, \mathfrak{o}) + \xi\alpha^{-1}(\alpha, \mathfrak{a})\big) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \overline{\alpha}\alpha\}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$M_{(0,a)} = \{\varphi(1 + \xi, \xi\alpha^{-1}\mathfrak{a}) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \alpha\overline{\alpha}\}.$$

Da $\alpha \in \mathrm{F}$, gilt $\xi = \pm\alpha$, und daraus folgt

$$M_{(0,a)} = \{\varphi(1 + \alpha, \mathfrak{a}), \varphi(-1 + \alpha, \mathfrak{a})\}.$$

Wir setzen jetzt

$$b = \mathrm{H}^*(1 + \alpha, \mathfrak{a}) \quad \text{und} \quad c = \mathrm{H}^*(-1 + \alpha, \mathfrak{a}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} &= 1 + \alpha^2 + 2\alpha - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = 2(1 + \alpha) > 0 \quad \text{und} \\ (-1 + \alpha)^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} &= 1 + \alpha^2 - 2\alpha - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}} = 2(1 - \alpha) < 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{b}(1, \mathfrak{o}) &= -(1, \mathfrak{o}) + 2(1 + \alpha)\big((1 + \alpha)^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}\big)^{-1}(1 + \alpha, \mathfrak{a}) = \\ &= -(1, \mathfrak{o}) + 2(1 + \alpha)\big(2(1 + \alpha)\big)^{-1}(1 + \alpha, \mathfrak{a}) = -(1, \mathfrak{o}) + (1 + \alpha, \mathfrak{a}) = (\alpha, \mathfrak{a}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{c}(1, \mathfrak{o}) &= -(1, \mathfrak{o}) + 2(-1 + \alpha)\big((-1 + \alpha)^2 - \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{a}}\big)^{-1}(-1 + \alpha, \mathfrak{a}) = \\ &= -(1, \mathfrak{o}) - 2(1 - \alpha)\big(2(1 - \alpha)\big)^{-1}(-1 + \alpha, \mathfrak{a}) = -(1, \mathfrak{o}) + (1 - \alpha, -\mathfrak{a}) = -(\alpha, \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Somit ist $\widetilde{b}(1, \mathfrak{o}) = -\widetilde{c}(1, \mathfrak{o}) = (\alpha, \mathfrak{a})$ mit $b \in \mathbf{P}^+$, $c \in \mathbf{P}^-$, und daraus folgt $a' = b$.

(5) Es gilt:
B1 $\forall\, c \in \mathbf{P}^{(2)} \colon c^\circ(0) = \widetilde{c'}(0) = c$, nach (4) und nach Definition von „$\circ$“.

Es seien $a, b \in \mathbf{P}^{(2)}$. Dann gilt

$$a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = \widetilde{a'} \circ \widetilde{b'} \circ \widetilde{a'}_{|\mathbf{P}^{(2)}} \overset{1.3.5}{=} \widetilde{a'(b')}_{|\mathbf{P}^{(2)}}$$

mit $\widetilde{a'}(b') \in \mathbf{P}^+$ und $c := a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ(0) \in \mathbf{P}^{(2)}$.
Daraus folgt $a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = c^\circ = \widetilde{\widetilde{a'}(b')}_{|\mathbf{P}^{(2)}}$, d.h. es gilt **B2**.

(6) Wenn $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ ein euklidischer Körper ist, dann ist $\mathrm{F}^+ = \mathrm{F}^{(2)}$, und daraus folgt $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}^{(2)}$. Für $\widetilde{\mathbf{P}^+} := \{\widetilde{a} \mid a \in \mathbf{P}^+\}$ gilt wegen (4) das Axiom **S1** (vgl. 2.4.3).

□

Bemerkungen:

1. Wenn F ein pythagoreischer Körper ist, und wenn für die Körper H_α, $\mathrm{H}_{\alpha,\beta}$ die Elemente α bzw. β in $\mathrm{F}^{(2)}$ gewählt sind, so ist die Bedingung $z\overline{z} \in \mathrm{F}^{(2)}$ für alle $z \in \mathrm{H}$ erfüllt. Wir erhalten folglich mit Satz 2.5.17 eine echte Spiegelungsgeometrie $\big(\mathbf{P}^{(2)}, \big(\mathbf{P}^{(2)}\big)^\circ, 0, \mathfrak{G}^{(2)}\big)$, die keine Punktspiegelungsgeometrie ist, sobald $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$ ein pythagoreischer Körper ist, der nicht euklidisch ist.

   In diesem Fall genügt wegen 1.1.15 der Körper F nicht der Bedingung $\mathrm{F}^{(2)} + 1 \subset \mathrm{F}^{(4)}$, d.h. es gibt ein $\eta \in \mathrm{F}^*$ mit $\alpha^2 = 1 + \eta^2$ aber $\alpha \notin \mathrm{F}^{(2)}$. Für den Punkt $a = \varphi\big((\alpha, \eta\mathfrak{e}_1)\big)$ mit $\mathfrak{e}_1 = (1, 0, \cdots 0)$ gilt:

   $$\Phi\big((\alpha, \eta\mathfrak{e}_1), (\alpha, \eta\mathfrak{e}_1)\big) = \alpha^2 - \eta^2 = 1.$$

   Also ist $a \in \mathbf{P}_1$,

   $$\begin{aligned} M_{(0,a)} &= \{\varphi\big((1, \mathfrak{o}) + \xi\alpha^{-1}(\alpha, \eta\mathfrak{e}_1)\big) \mid \xi \in \mathrm{F}^* \setminus \{-1\} \colon \xi^2 = \alpha\overline{\alpha} = \alpha^2\} = \\ &= \{\varphi\big((1+\alpha, \eta\mathfrak{e}_1)\big), \varphi\big((1-\alpha, -\eta\mathfrak{e}_1)\big)\} \quad \text{und} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \Phi\big((1+\alpha, \eta\mathfrak{e}_1), (1+\alpha, \eta\mathfrak{e}_1)\big) &= (1+\alpha)^2 - \eta^2 = 2(1+\alpha) \\ \Phi\big((1-\alpha, -\eta\mathfrak{e}_1), (1-\alpha, -\eta\mathfrak{e}_1)\big) &= (1-\alpha)^2 - \eta^2 = 2(1-\alpha). \end{aligned}$$

   Da in dem pythagoreischen Körper F für $\beta \in \mathrm{F}$

   $$2(1+\beta) \in \mathrm{F}^{(2)} \iff 1 + \beta \in \mathrm{F}^{(2)} \iff \beta \in \mathrm{F}^{(2)},$$

   gilt, ist $2(1+\alpha) \notin \mathrm{F}^{(2)}$ und somit $M_{(0,a)} \cap \mathbf{P}^{(2)} = \emptyset$.

2. Für den Fall $\mathrm{H} = \mathrm{F}$, also $- = id$, ist $\big(\mathbf{P}^{(2)}, \big(\mathbf{P}^{(2)}\big)^\circ, 0, \mathfrak{G}^{(2)}\big)$ immer eine Spiegelungsgeometrie. Sie ist keine Punktspiegelungsgeometrie für nicht euklidische, angeordnete Körper $(\mathrm{F}, +, \cdot, \leq)$.

2.6 Rechtsloops, die zu Spiegelungsstrukturen führen

In diesem Abschnitt sei $(\mathbf{L},+)$ ein Rechtsloop. Die Abbildung

$$\nu\colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}\,; \quad a \to -a$$

mit $a+(-a)=0$ ist injektiv. Daher ist auch für jedes $a \in \mathbf{L}$ die Abbildung $a^\circ := a^+ \circ \nu$ injektiv, und es gilt:

$$\begin{aligned} &a^\circ \in Sym\,\mathbf{L} \iff \nu \in Sym\,\mathbf{L} \\ &\nu \circ \nu = id \iff \forall\, a \in \mathbf{L} \,:\, (-a)+a=0. \end{aligned}$$

Lemma 2.6.1. *Wenn $\nu \in Aut\,(\mathbf{L},+) \cap J$, dann $-a+a=0, \quad a^\circ \circ a^\circ = \delta_{a,-a}$ und $\nu \circ (-a)^+ = a^+ \circ \nu$ für alle $a \in \mathbf{L}$.*

Beweis. Da $\nu \in Aut\,(\mathbf{L},+) \cap J$ ist, gilt

$$\nu \circ (-a)^+(x) = \nu(-a+x) = \nu(-a)+\nu(x) = a-x = a^+ \circ \nu(x) = a^\circ(x),$$

woraus $a^\circ \circ a^\circ = a^+ \circ (-a)^+ = \delta_{a,-a}$ folgt. □

Bemerkung. Wenn $\nu \in Sym\,\mathbf{L}$ gilt, genügt die Abbildung $^\circ$ dem Axiom **B1**.

Satz 2.6.2. *Es sei $\nu \in Aut\,(\mathbf{L},+) \cap J$, und für jedes $x \in \mathbf{L}$ sei $\delta_{x,-x} = id$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbf{L}$:*

$$a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = (a+(-b+a))^\circ \iff \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} = id.$$

Beweis. Aus $id = \delta_{b,-b} = b^+ \circ (-b)^+$ folgt (vgl.2.6.1)

$$id = b^\circ \circ b^\circ = b^\circ \circ b^+ \circ \nu \iff b^\circ = \nu \circ (b^+)^{-1} = \nu \circ (-b)^+.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = a^+ \circ \nu \circ \nu \circ (-b)^+ \circ a^+ \circ \nu = a^+ \circ (-b)^+ \circ a^+ \circ \nu = \\ (a+(-b+a))^+ \circ ((a+(-b+a))^+)^{-1} \circ a^+ \circ (-b+a)^+ \circ ((-b+a)^+)^{-1} \circ (-b)^+ \circ a^+ \circ \nu \\ = (a+(-b+a))^+ \circ \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} \circ \nu, \end{aligned}$$

d.h.

$$a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = (a+(-b+a))^\circ \iff \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} = id.$$

□

Es gilt

Satz 2.6.3. *Es sei $\nu \in Aut\,(\mathbf{L},+) \cap J$ und $\delta_{a,-a} = id$ für jedes $a \in \mathbf{L}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) **B2** *d.h.* $\forall\, a \in \mathbf{L}\colon a^\circ \circ \mathbf{L}^\circ \circ a^\circ = \mathbf{L}^\circ$

(2) *Für alle* $a, b \in \mathbf{L}\colon \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} = id$

(3) $(\mathbf{L}, +)$ *ist ein K-Loop.*

Beweis. „**(1)** $\iff$ **(2)**“ folgt aus 2.6.2.

„**(1)** $\Rightarrow$ **(3)**“ nach 2.4.2.

„**(3)** $\Rightarrow$ **(2)**“ $\forall\, a, b, c \in \mathbf{L}$ gilt

$$a^+ \circ b^+ \circ a^+ = \big(a + (b+a)\big)^+ \iff a + \big(-b + (a+c)\big) = a + \big((-b+a) + \delta_{-b,a}(c)\big) =$$
$$\big(a + (-b+a)\big) + \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a}(c) = \big(a + (-b+a)\big) + c \iff \delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} = id\,,$$

(vgl. [18]). Also ist die Bol-Identität **B** äquivalent zu „$\delta_{a,-b+a} \circ \delta_{-b,a} = id$“. Nach 2.1.1 folgt die Aussage. □

Nach 2.6.3 folgt:

Satz 2.6.4. *Es sei* $\nu \in Aut\,(\mathbf{L}, +) \cap J$ *und für alle* $a, b \in \mathbf{L}\colon \delta_{a,-a} = \delta_{a,b+a} \circ \delta_{b,a} = id$. *Dann ist* $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^\circ; 0)$ *mit* $\mathbf{L}^\circ := \{x^\circ := x^+ \circ \nu \mid x \in \mathbf{L}\}$ *eine Spiegelungsstruktur.*

Für $a \in \mathbf{L}$ sei

$$\widetilde{a} := a^+ \circ \nu \circ (a^+)^{-1} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{L}} := \{\widetilde{a} \mid a \in \mathbf{L}\}.$$

Definition 2.6.1. Ein Loop $(\mathbf{L}, +)$ heißt *durch zwei teilbar* (bzw. *eindeutig durch zwei teilbar*), wenn es für jedes $a \in \mathbf{L}$ ein (bzw. genau ein) $b \in \mathbf{L}$ gibt mit $b + b = a$.

Satz 2.6.5. *Es sei* $\nu \in Aut\,(\mathbf{L}, +) \cap J$ *und* $\delta_{a,-a} = id$ *für alle* $a \in \mathbf{L}$. *Dann gilt:*

(1) $Fix\,(a+a)^\circ \ni a \iff \delta_{a,a}(-a) = -a.$

(2) $\widetilde{a} = (a+a)^\circ \iff \delta_{a,a} = id.$

(3) *Es sei* $(\mathbf{L}, +)$ *durch zwei teilbar, und für alle* $a \in \mathbf{L}$ *sei* $\delta_{a,a} = id$. *Dann gilt:*

  (i) $\widetilde{\mathbf{L}}(0) = \mathbf{L}$

  (ii) *Wenn* $(\mathbf{L}, +)$ *ein Loop ist, so ist* $(\mathbf{L}, \widetilde{\mathbf{L}})$ *eine transitive Permutationsmenge.*

  (iii) *Wenn* $(\mathbf{L}, +)$ *ein eindeutig durch zwei teilbarer Loop ist, so ist* $(\mathbf{L}, \widetilde{\mathbf{L}})$ *eine reguläre Permutationsmenge.*

(4) *Wenn* $\delta_{a,b+a} \circ \delta_{b,a} = id$ *für alle* $a, b \in \mathbf{L}$ *gilt, und* $(\mathbf{L}, +)$ *eindeutig durch zwei teilbar ist, so ist* $(\mathbf{L}, \widetilde{\mathbf{L}})$ *eine Punktspiegelungsstruktur.*

Beweis. **(1)** Nach 2.6.1 gilt $a^\circ \circ a^\circ = \delta_{a,-a} = a^+ \circ (-a)^+$, und nach Voraussetzung ist $a^+ \circ (-a)^+ = \delta_{a,-a} = id$, also gilt

$$(-a)^+ = (a^+)^{-1} \quad (*).$$

Es gilt

$$a^+(0) = a = (a+a)^\circ(a) = (a+a)^+ \circ \nu(a) = (a+a)^+(-a) =$$
$$a^+ \circ a^+ \circ \delta_{a,a}^{-1}(-a) \iff -a = \delta_{a,a} \circ (a^+)^{-1}(0) \stackrel{(*)}{=} \delta_{a,a} \circ (-a)^+(0) = \delta_{a,a}(-a).$$

(2) Es gilt

$$\widetilde{a} = a^+ \circ \nu \circ (a^+)^{-1} \stackrel{(*)}{=} a^+ \circ \nu \circ (-a)^+ \stackrel{2.6.1}{=} a^+ \circ a^+ \circ \nu = (a+a)^+ \circ \delta_{a,a} \circ \nu,$$

also

$$\widetilde{a} = (a+a)^+ \circ \nu = (a+a)^\circ \iff \delta_{a,a} = id.$$

(3) (i) Es seien $a, b, c \in \mathbf{L}$ mit $c + c = a$. Nach (2) gilt

$$\widetilde{c}(0) = (c+c)^\circ(0) = a^\circ(0) = a,$$

d.h. $\widetilde{\mathbf{L}}(0) = \mathbf{L}$.
(ii) Wenn $(\mathbf{L}, +)$ ein Loop ist, gibt es genau ein $d \in \mathbf{L}$ mit $d - a = b$. Der Loop $\mathbf{L}$ ist nach Voraussetzung durch zwei teilbar, also gibt es ein $e \in \mathbf{L}$ mit $e + e = d$, und es gilt

$$\widetilde{e}(a) \stackrel{(2)}{=} (e+e)^\circ(a) = d^\circ(a) = d^+(-a) = d - a = b.$$

(iii) Wenn $\mathbf{L}$ eindeutig durch zwei teilbar ist, gibt es genau ein $e \in \mathbf{L}$ mit $e + e = d$, also mit $\widetilde{e}(a) = b$.

(4) Nach 2.6.3 genügt das Tripel $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^\circ; 0)$ dem Axiom **B2**, und $(\mathbf{L}, +)$ ist ein Loop, sogar ein K-Loop. Aus $\delta_{a,b+a} \circ \delta_{b,a} = id$ folgt für $b = 0$:

$$id = \delta_{a,a} \circ \delta_{0,a} = \delta_{a,a} \circ ((0+a)^+)^{-1} \circ 0^+ \circ a^+ = \delta_{a,a} \circ (a^+)^{-1} \circ a^+ = \delta_{a,a},$$

also wegen (2) $(a+a)^\circ = \widetilde{a}$.
Da $(\mathbf{L}, +)$ durch zwei teilbar ist, gilt $\widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^\circ$. Nach Voraussetzung ist aber $(\mathbf{L}, +)$ sogar ein eindeutig durch zwei teilbarer Loop. Daher operiert $\widetilde{\mathbf{L}}$ regulär auf $\mathbf{L}$ nach (3)(iii), d.h. **S1** gilt. □

Satz 2.6.6. *Es sei* $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F})$ *ein gefaserter Rechtsloop und* $(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$ *mit*

$$\mathfrak{G} = \{a + X \mid a \in \mathbf{L}\,,\ X \in \mathfrak{F}\}$$

der zugehörige Inzidenzraum (vgl.2.2.5). Wenn $\nu \in Aut\,(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F})$*, d.h.* ν *ist ein Automorphismus des Rechtsloops mit* $\nu(X) \in \mathfrak{F}$ *für alle* $X \in \mathfrak{F}$*, dann ist* ν *eine Kollineation des Inzidenzraumes* $(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$*, und* $\mathbf{L}^\circ$ *ist eine Teilmenge der Kollineationsgruppe von* $(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$*, also* $\mathbf{L}^\circ \subset Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$.

Beweis. Es sei $G = a + X \in \mathfrak{G}$. Dann gilt

$$\nu(G) = \nu(a + X) = \nu(a) + \nu(X) \in \mathfrak{G},$$

da $\nu(X) \in \mathfrak{F}$. Es sei jetzt $b + X = H \in \mathfrak{G}$. Dann ist

$$a^+(b + X) = a^+ \circ b^+(X) = (a + b)^+ \circ \delta_{a,b}(X) \in \mathfrak{G},$$

da $\delta_{a,b}(X) \in \mathfrak{F}$ nach **Z1**, d.h. $a^+ \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$, und somit $a^\circ = a^+ \circ \nu \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$. $\square$

Aus den Sätzen 2.6.4, 2.6.5 und 2.6.6 ergibt sich der folgende Hauptsatz:

Theorem 2.6.7. *Es sei* $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F})$ *ein gefaserter Rechtsloop,* $\mathfrak{G}$ *wie in* 2.6.6*, und es sei* $\nu \in Aut\,(\mathbf{L}, +) \cap J$, $\delta_{a,-a} = \delta_{a,b+a} \circ \delta_{b,a} = id$ *für alle* $a, b \in \mathbf{L}$*, und für jedes* $X \in \mathfrak{F}$: $\nu(X) = X$*. Dann gilt:*

(1) $(\mathbf{L}, \mathbf{L}^\circ; 0; \mathfrak{G})$ *ist eine Spiegelungsgeometrie.*

(2) *Wenn* $(\mathbf{L}, +)$ *außerdem eindeutig durch zwei teilbar ist, dann ist* $(\mathbf{L}, \widetilde{\mathbf{L}}; 0; \mathfrak{G})$ *eine Punktspiegelungsgeometrie.*

2.7 Spiegelungskeime

Im Folgenden sei $(\mathbf{L},+,\mathfrak{F},\sim)$ eine Struktur, die den folgenden Bedingungen genügt:

Definition 2.7.1. Es sei $(\mathbf{L},+,\mathfrak{F})$ ein gefaserter Rechtsloop (vgl. Definition 2.2.6), und es sei

$$\sim\colon \mathfrak{F} \longrightarrow Aut\,(\mathbf{L},+,\mathfrak{F}) \cap J^*\,; \quad A \longmapsto \widetilde{A}$$

eine Abbildung von der Inzidenzfaserung in die Menge aller involutorischen Automorphismen von $(\mathbf{L},+)$, die die Faserung $\mathfrak{F}$ erhalten (vgl. 2.2.6), so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

SK1 $\quad \forall\, A \in \mathfrak{F}\colon Fix\,\widetilde{A} = A.$

SK2 $\quad \forall\, A,B,C \in \mathfrak{F} \quad \exists\, D \in \mathfrak{F}\colon \widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{C} = \widetilde{D}.$

Wir setzen

$$\widetilde{\mathfrak{F}} := \{\widetilde{A} \mid A \in \mathfrak{F}\}.$$

Dann hat die Struktur $(\mathbf{L},+,\mathfrak{F},\sim)$ folgende Eigenschaften:

Lemma 2.7.1. *Es seien A, B,..., $X \in \mathfrak{F}$, a, b,...$\in \mathbf{L}$, $\sigma \in Aut\,(\mathbf{L},+)$. Dann gilt:*

(1) $Fix\,(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}) = \{0\} \iff A \neq B.$

(2) $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{A} = \widetilde{\widetilde{A}(B)}.$

(3) $\sigma\circ a^+\circ\sigma^{-1} = \big(\sigma(a)\big)^+$, *insbesondere* $\widetilde{B}\circ a^+\circ\widetilde{B} = \big(\widetilde{B}(a)\big)^+.$

(4) *Wenn $a \in A$, dann ist $\widetilde{A}\circ a^+\circ\widetilde{A} = \big(\widetilde{A}(a)\big)^+ = a^+$, und daraus folgt $\widetilde{A}\circ a^+ = a^+\circ\widetilde{A}$ und $b^+\circ\widetilde{A}\circ(b^+)^{-1} = (b+a)^+\circ\delta_{b,a}\circ\widetilde{A}\circ\delta_{b,a}^{-1}\circ\big((b+a)^+\big)^{-1}$.*

(5) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) *Wenn $a+X = b+Y$, dann $a^+\circ\widetilde{X}\circ(a^+)^{-1} = b^+\circ\widetilde{Y}\circ(b^+)^{-1}$.*

ii) $\forall\, x \in X$ *gilt* $\widetilde{\delta_{a,x}(X)} = \delta_{a,x}\circ\widetilde{X}\circ\delta_{a,x}^{-1}.$

Beweis. **(1)** Es sei $c \in Fix\,(\widetilde{A}\circ\widetilde{B})\setminus\{0\}$, $C \in \mathfrak{F}$ mit $c \in C$ und $D \in \mathfrak{F}$, so daß $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{C} = \widetilde{D}$ (vgl. **SK2**). Dann ist $0, c \in Fix\,(\widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{C}) = Fix\,\widetilde{D} \overset{\mathbf{SK1}}{=} D$, und daraus folgt $C = D$, da $\mathfrak{F}$ ein Bündel bezüglich 0 ist (vgl. **FS3**). Dann ist $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ und, nach **SK1**, $A = B$.

(2) Nach **SK2** gibt es ein $C \in \mathfrak{F}$ mit $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{A} = \widetilde{C}$. Es sei $x \in \widetilde{A}(B)$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $x = \widetilde{A}(b)$. Ferner gilt $\widetilde{A}\circ\widetilde{B}\circ\widetilde{A}(x) = \widetilde{A}\circ\widetilde{B}(b) = \widetilde{A}(b) = x$. Daraus folgt $C = \widetilde{A}(B)$.

(3) Es gilt $\sigma\circ a^+(x) = \sigma(a+x) = \sigma(a)+\sigma(x) = \big(\sigma(a)\big)^+\circ\sigma(x)$ für alle $x \in \mathbf{L}$, weil $\sigma \in Aut\,(\mathbf{L},+)$.

(4) Da $\widetilde{A} \in Aut\,(\mathbf{L},+,\mathfrak{F})$, gilt nach (3): $\widetilde{A} \circ a^+ \circ \widetilde{A} = \big(\widetilde{A}(a)\big)^+$. Nach **SK1** gilt $\widetilde{A}(a) = a$. Dann ist $\widetilde{A} = a^+ \circ \widetilde{A} \circ (a^+)^{-1}$ und

$$(b+a)^+ \circ \delta_{b,a} \circ \widetilde{A} \circ \delta_{b,a}^{-1}\big((b+a)^+\big)^{-1} = b^+ \circ a^+ \circ \widetilde{A} \circ (a^+)^{-1} \circ (b^+)^{-1} = b^+ \circ \widetilde{A} \circ (b^+)^{-1}.$$

(5) „$ii) \Rightarrow i)$" Es sei $x \in X$ mit $b = a + x$. Dann ist $a + X = b + Y = (a+x) + Y = (a+x) + \delta_{a,x} \circ \delta_{a,x}^{-1}(Y) = a + \big(x + \delta_{a,x}^{-1}(Y)\big)$. Daraus folgt $X = x + \delta_{a,x}^{-1}(Y) = x^+ \circ \delta_{a,x}^{-1}(Y) \iff (x^+)^{-1}(X) = \delta_{a,x}^{-1}(Y)$. Da $(X,+)$ ein Unterrechtsloop ist (vgl. Definition 2.2.6), ist $x^+(X) = X$, somit $(x^+)^{-1}(X) = X$ und daher $\delta_{a,x}(X) = Y$. Jetzt betrachten wir

$$\begin{aligned} b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} &= (a+x)^+ \circ \widetilde{\delta_{a,x}(X)} \circ \big((a+x)^+\big)^{-1} \overset{ii)}{=} \\ &= (a+x)^+ \circ \delta_{a,x} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,x}^{-1}\big((a+x)^+\big)^{-1} \overset{(4)}{=} a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1}. \end{aligned}$$

„$i) \Rightarrow ii)$" Es gilt $a + X = (a+x) + \delta_{a,x}(X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &(a+x)^+ \circ \widetilde{\delta_{a,x}(X)} \circ \big((a+x)^+\big)^{-1} \overset{i)}{=} a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \overset{(4)}{=} \\ &= (a+x)^+ \circ \delta_{a,x} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,x}^{-1} \circ \big((a+x)^+\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\delta_{a,x} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,x}^{-1} = \widetilde{\delta_{a,x}(X)}$. □

Wenn wir von einem gefaserten Rechtsloop ausgehen, können wir einen Inzidenzraum $(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$ konstruieren, wobei $\mathfrak{G}$ die Menge aller Rechtsnebenklassen von Elementen aus $\mathfrak{F}$ ist, (vgl. 2.2.5).
Jetzt wollen wir die Abbildung $\sim$ auf die Menge $\mathfrak{G}$ erweitern.
Wir setzen voraus, daß die Bedingung

$$\textbf{SKS3} \qquad \forall\, a \in \mathbf{L}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{F}, \quad \forall\, x \in X: \widetilde{\delta_{a,x}(X)} = \delta_{a,x} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,x}^{-1}$$

gilt. Dann ist wegen 2.7.1.5 durch die Vorschrift

$$\sim : \mathfrak{G} \longrightarrow Sym\,\mathbf{L}; \quad G := a + X \longmapsto \widetilde{G} = \widetilde{a+X} := a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1}$$

die Abbildung $\sim$ von $\mathfrak{F}$ auf ganz $\mathfrak{G}$ forgesetzt.
Wir nennen $\widetilde{a+X}$ *Geradenspiegelung* und setzen

$$\widetilde{G} := \{\widetilde{a+X} \mid a + X \in \mathfrak{G}\}.$$

Es sei von nun an $(\mathbf{L},+,\mathfrak{F},\sim)$ eine Struktur gemäß Definition 2.7.1, die noch dem Axiom **SKS3** genügt.

Es gilt folgender Satz:

Satz 2.7.2. *Es seien A, $B \in \mathfrak{F}$, G', X', Y', $Z' \in \mathfrak{G}$ mit $X' \cap Y' = \{d\}$. Dann gilt:*

(1) $\widetilde{G'} \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}) \cap J^*$ *und* $Fix\,\widetilde{G'} = G'$.

(2) $Fix\,(\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}) = \{d\}$ *und* $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} = \widetilde{X'(Y')}$.

(3) *Die Aussagen sind äquivalent:*

i) $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'} \in J^*$.

ii) $d \in Z'$.

iii) $\exists\, T' \in \mathfrak{G}\colon \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} = \widetilde{T'}$.

(4) *Wenn* $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \in J^*$, *dann ist* $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}(Z') = Z'$ *genau dann, wenn* $d \in Z'$.

Beweis. **(1)** Nach Definition gilt $\forall\, X \in \mathfrak{F}\colon \widetilde{X} \in Aut\,(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}) \cap J^*$. Dann ist $\widetilde{X} \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}) \cap J^*$ (vgl. 2.2.6), und aus 2.2.5.4 erhalten wir $\widetilde{\mathfrak{G}} \subset Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}) \cap J^*$. Es sei jetzt $G' = g + A$ mit $A \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$Fix\,\widetilde{G'} = Fix\big(g^+ \circ \widetilde{A} \circ (g^+)^{-1}\big) = g + Fix\,\widetilde{A} \overset{\mathbf{SK1}}{=} g + A =: G'.$$

(2) Nach 2.2.5.2 gibt es $X, Y \in \mathfrak{F}$ mit $X' = d + X$, $Y' = d + Y$ und $X \neq Y$, weil $X' \neq Y'$. Nach 2.7.1.1 gilt $Fix\,(\widetilde{X} \circ \widetilde{Y}) = \{0\}$, und daraus folgt

$$\begin{aligned} Fix\,(\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}) &= Fix\,\big(d^+ \circ \widetilde{X} \circ (d^+)^{-1} \circ d^+ \circ \widetilde{Y} \circ (d^+)^{-1}\big) = \\ &= Fix\,\big(d^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ (d^+)^{-1}\big) = d^+ \circ \big(Fix\,(\widetilde{X} \circ \widetilde{Y})\big) = d^+(0) = d. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} &= d^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} \circ (d^+)^{-1} \overset{2.7.1.2}{=} d^+ \circ \widetilde{\widetilde{X}(Y)} \circ (d^+)^{-1} = \\ &= \widetilde{d + \widetilde{X}(Y)} = (d^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{(d^+)^{-1}} \circ d^+(Y)) = \widetilde{X'(Y')}. \end{aligned}$$

(3) „*i)* $\Rightarrow$ *ii)*“ Es gilt $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'}(d) = \widetilde{Z'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'}(d) = \widetilde{Z'}(d)$.
Wegen (2) gilt $Fix\,(\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}) = \{d\}$. Daraus folgt $\widetilde{Z'}(d) = d$, und aus (1) erhalten wir $d \in Z'$.

„*ii)* $\Rightarrow$ *iii)*“ Nach 2.2.5.2 gibt es ein $Z \in \mathfrak{F}$ mit $Z' = d + Z$, da $d \in Z'$. Wegen **SK2** gibt es ein $T \in \mathfrak{F}$ mit $\widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{Z} = \widetilde{T}$. Es sei jetzt $T' = d + T$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'} &= d^+ \circ \widetilde{X} \circ (d^+)^{-1} \circ d^+ \circ \widetilde{Y} \circ (d^+)^{-1} \circ d^+ \circ \widetilde{Z} \circ (d^+)^{-1} = \\ &= d^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{Z} \circ (d^+)^{-1} = d^+ \circ \widetilde{T} \circ (d^+)^{-1} = \widetilde{T'}. \end{aligned}$$

„*iii)* $\Rightarrow$ *i)*“Es sei nun $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'} = \widetilde{T'}$. Dann ist $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'} \in J^*$ wegen (1).

(4) Es sei $d \in Z'$. Dann gilt wegen (2)

$$\begin{aligned} (\widetilde{X'} \circ \widetilde{\widetilde{Y'}(Z')}) &= \widetilde{X'} \circ \widetilde{\widetilde{Y'}(Z')} \circ \widetilde{X'} \overset{(2)}{=} \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Z'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} \overset{(3)}{=} \\ &= \widetilde{Z'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} = \widetilde{Z'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{Y'} \circ \widetilde{X'} \circ \widetilde{X'} = \widetilde{Z'}, \end{aligned}$$

da (3) gilt und nach Voraussetzung $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \in J^*$.
Daher erhalten wir mit **SK1** $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}(Z') = Z'$.

Jetzt setzen wir voraus, daß $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}(Z') = Z'$. Es sei $z \in Z' \setminus \{d\}$ und $U' = \overline{z, d}$ die Verbindungsgerade zwischen z und d. Dann ist $\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}(U') = U'$ nach dem ersten Beweisschritt. Wir nehmen an, daß $U' \neq Z'$ ist. Dann erhalten wir $\{z\} = Z' \cap U' \in Fix\,(\widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'}) \overset{(2)}{=} \{d\}$. Daraus folgt $d \in U' = Z'$. □

Satz 2.7.3. *Für $a \in \mathbf{L}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $a^+ \circ \widetilde{\mathfrak{G}} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{\mathfrak{G}}$.

ii) $:=$ **SK3** $\quad \forall\, b \in \mathbf{L}$: $\delta_{a,b} \circ \widetilde{\mathfrak{F}} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \widetilde{\mathfrak{F}}$.

iii) $\forall\, G \in \mathfrak{G}$: $a^+ \circ \widetilde{G} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{a^+(G)}$.

Beweis. Es sei $G = b + Y$ mit $Y \in \mathfrak{F}$. Nach 2.2.5 ist

$$a^+(G) = (a+b) + \delta_{a,b}(Y) \in \mathfrak{G} \quad \text{mit} \quad \delta_{a,b}(Y) \in \mathfrak{F}.$$

Nach Definition der Fortsetzung von „$\sim$“ gilt

$$(1) \quad \widetilde{a^+(G)} = (a+b)^+ \circ \widetilde{\delta_{a,b}(Y)} \circ \big((a+b)^+\big)^{-1}.$$

Weitehin gilt

$$(2) \quad Fix\,\big(a^+ \circ \widetilde{G} \circ (a^+)^{-1}\big) = a^+(Fix\,\widetilde{G}) \overset{2.7.2.1}{=} a^+(G)$$

und

$$(3) \quad a^+ \circ \widetilde{G} \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ (\widetilde{b+Y}) \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \circ (a^+)^{-1} =$$
$$= (a+b)^+ \circ \delta_{a,b} \circ \widetilde{Y} \circ \delta_{a,b}^{-1} \circ \big((a+b)^+\big)^{-1}.$$

Die Aussagen (1), (2) und (3) zeigen

$$a^+ \circ \widetilde{G} \circ (a^+)^{-1} \in \widetilde{\mathfrak{G}} \iff a^+ \circ \widetilde{G} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{a^+(G)} \iff$$
$$\iff \delta_{a,b} \circ \widetilde{Y} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \widetilde{\delta_{a,b}(Y)}\,,$$

womit die Äquivalenz von (i), (ii) und (iii) bewiesen ist. □

Bemerkung. Es gilt $\langle \mathbf{L}^+, \widetilde{\mathfrak{F}} \rangle = \langle \mathbf{L}^+, \widetilde{\mathfrak{G}} \rangle$.

Aus Satz 2.7.3 und 2.7.1.2 folgt

Satz 2.7.4. *Für alle a, $b \in \mathbf{L}$ gelte* **SK3**. *Dann gilt für jedes $\gamma \in \langle \mathbf{L}^+, \widetilde{\mathfrak{G}} \rangle$ und jedes $G \in \mathfrak{G}$: $\gamma \circ \widetilde{G} \circ \gamma^{-1} = \widetilde{\gamma(G)}$. Insbesondere ist $\widetilde{\widetilde{A}(G)} = \widetilde{A} \circ \widetilde{G} \circ \widetilde{A}$ für $A \in \mathfrak{G}$.*

Beweis. 1. Für $\gamma = a^+ \in \mathbf{L}^+$ gilt $\gamma \circ \widetilde{G} \circ \gamma^{-1} = \widetilde{\gamma(G)}$ nach 2.7.3.*iii*).
2. Für $\gamma = \widetilde{X}$ mit $X \in \mathfrak{F}$ und $G = a + Y$ gilt

$$\begin{aligned} &\widetilde{X} \circ \widetilde{G} \circ \widetilde{X} = \widetilde{X} \circ a^+ \circ \widetilde{Y} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{X} = \\ &= \widetilde{X} \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{X} \overset{2.7.1.2,3}{=} \\ &= \big(\widetilde{X}(a)\big)^+ \circ \widetilde{\widetilde{X}(Y)} \circ \Big(\big(\widetilde{X}(a)\big)^+\Big)^{-1} = \widetilde{\widetilde{X}(a) + \widetilde{X}(Y)} = \widetilde{\widetilde{X}(a+Y)} = \widetilde{\widetilde{X}(G)} \in \mathfrak{G}. \end{aligned}$$

3. Für $\gamma = \widetilde{B}$ mit $B = b + X$ und $X \in \mathfrak{F}$ gilt

$$\begin{aligned} &\widetilde{B} \circ \widetilde{G} \circ \widetilde{B} = b^+ \circ \widetilde{X} \circ (b^+)^{-1} \circ \widetilde{G} \circ b^+ \circ \widetilde{X} \circ (b^+)^{-1} \overset{1.}{=} \\ &= b^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{H} \circ \widetilde{X} \circ (b^+)^{-1} \overset{2.}{=} b^+ \circ \widetilde{F} \circ (b^+)^{-1} \overset{1.}{=} \widetilde{D} \end{aligned}$$

für $H := (b^+)^{-1}(G) \in \mathfrak{G}$, $F := \widetilde{X}(H) \in \mathfrak{G}$ und $D := b^+(F) \in \mathfrak{G}$. □

Definition 2.7.2. Zwei Geraden A, $B \in \mathfrak{G}$ heißen *senkrecht* (i.Z. $A \perp B$), wenn das Produkt der Geradenspiegelungen an A und B eine Involution ist, d.h. $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$. Für $a \in \mathbf{L}$ sei

$$(a \perp A) := \{X \in \mathfrak{G} \mid a \in X \quad \text{und} \quad X \perp A\}.$$

Proposition 2.7.5. *Es seien A, $B \in \mathfrak{F}$ mit $A \perp B$ und $a \in A$. Dann ist $(a + B) \perp A$.*

Beweis. Aus $A \neq B$ und $a \in A$ folgt $a + B \neq a + A = A$, weil A ein Unterrechtsloop ist. Aus 2.7.1.4 und $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$ folgt

$$\begin{aligned} &\widetilde{A} \circ (\widetilde{a+B}) = \widetilde{A} \circ a^+ \circ \widetilde{B} \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ (a^+)^{-1} = \\ &a^+ \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A} \circ (a^+)^{-1} \overset{2.7.1.4}{=} a^+ \circ \widetilde{B} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{A} = \widetilde{a+B} \circ \widetilde{A}, \end{aligned}$$

daher erhalten wir $a + B \perp A$. □

Proposition 2.7.6. (Lote fällen) *$\forall A \in \mathfrak{G}$, $\forall p \in \mathbf{L} \setminus A$ $\exists_1 B \in \mathfrak{G}$ mit $p \in B$ und $B \perp A$, und es gilt $(p \perp A) = \overline{p, \widetilde{A}(p)}$ also $(p \perp A) = \{B\}$.*

Beweis. Falls für $p \in L \setminus A$ das Lot $B = (p \perp A)$ existiert, so gilt $p \neq \widetilde{A}(p)$ und p, $\widetilde{A}(p) \in \widetilde{A}(B) = B$. Daher ist $(p \perp A) = \overline{p, \widetilde{A}(p)}$. Es sei jetzt $B := \overline{p, \widetilde{A}(p)}$. Nach 2.7.2.1 folgt $\widetilde{A}(B) = \overline{\widetilde{A}(p), \widetilde{A} \circ \widetilde{A}(p)} = B$. Nach 2.7.4 gilt $\widetilde{B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$, d.h. $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$, da $A \neq B$ wegen $p \notin A$ gilt. □

Für unsere Strukturen $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ können wir zwei Fälle unterscheiden:

1. $\forall A, B \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$ gilt $A \cap B = \emptyset$.
2. $\exists A, B \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$ und $A \cap B \neq \emptyset$.

Hier betrachten wir nur den Fall 2.

Definition 2.7.3. Die Struktur $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ heißt *regulär*[2], wenn

$$\widetilde{\mathfrak{F}} \circ \widetilde{\mathfrak{F}} \cap J^* \neq \emptyset$$

und *stark regulär*, wenn

$$|\widetilde{\mathfrak{F}} \circ \widetilde{\mathfrak{F}} \cap J^*| = 1$$

ist.

Proposition 2.7.7. *Es seien A, $B \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$ und $A \cap B = \{d\}$. Dann gibt es X, $Y \in \mathfrak{F}$ mit $\widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \in J^*$.*

Beweis. Nach 2.2.5.2 gibt es X, $Y \in \mathfrak{F}$ mit $A = d + X$ und $B = d + Y$ und

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \circ \widetilde{B} &= d^+ \circ \widetilde{X} \circ (d^+)^{-1} \circ d^+ \circ \widetilde{Y} \circ (d^+)^{-1} = \\ &= d^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ (d^+)^{-1} \in J^* \iff \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \in J^*.\end{aligned}$$

□

Definition 2.7.4. Da wir nur den Fall 2 betrachten, können wir Elemente auszeichnen: Es seien X_0, $Y_0 \in \mathfrak{F}$ mit $\widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \in J^*$ und

$$\widetilde{0} := \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0}.$$

Es gilt

Proposition 2.7.8. *$Fix\,\widetilde{0} = \{0\}$, und für alle $X \in \mathfrak{F}$: $\widetilde{0}(X) = X$ und $\widetilde{0} \circ \widetilde{X} = \widetilde{X} \circ \widetilde{0}$.*

Beweis. $Fix\,\widetilde{0} = \{0\}$ folgt aus 2.7.1.1 und $\widetilde{0}(X) = X$, $\forall\, X \in \mathfrak{F}$ aus 2.7.2.4. Es gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{0} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{0} &= \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \overset{\widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \in J^*}{=} \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{Y_0} \circ \widetilde{X_0} \overset{2.7.1.2}{=} \\ &= \widetilde{X_0} \circ \widetilde{\widetilde{Y_0}(X)} \circ \widetilde{X_0} \overset{2.7.1.2}{=} \widetilde{\widetilde{X_0}\big(\widetilde{Y_0}(X)\big)} = \widetilde{\widetilde{0}(X)} = \widetilde{X}.\end{aligned}$$

□

Wir können zu jedem Punkt eine Abbildung definieren

$$\sim\colon \mathbf{L} \longrightarrow J^*; \quad p \longmapsto \widetilde{p} := p^+ \circ \widetilde{0} \circ (p^+)^{-1}.$$

Wir setzen $\widetilde{\mathbf{L}} := \{\widetilde{p} \mid p \in \mathbf{L}\}$ und nennen die Elemente von $\widetilde{\mathbf{L}}$ *Punktspiegelungen*.

Satz 2.7.9. *Es seien a, b, $c ... \in \mathbf{L}$, A, B, $C ... \in \mathfrak{G}$. Dann gilt:*

(1) $\forall\, a \in \mathbf{L}\ \exists\, B$, $C \in \mathfrak{G}$ *mit* $\widetilde{a} = \widetilde{B} \circ \widetilde{C}$ *und* $a \in B$, C.

[2] vgl. [6]

(2) $\widetilde{\mathbf{L}} \subset Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}) \cap J^*$, *Fix* $\widetilde{a} = \{a\}$ *und* $\forall\, G \in \mathfrak{G}$ *mit* $a \in G$: $\widetilde{a}(G) = G$.

(3) (Lote errichten) *Für alle* $A \in \mathfrak{G}$ *und für jedes* $a \in A$ *gibt es ein* $B \in \mathfrak{G}$ *mit* $a \in B$, $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \in J^*$ *und* $\widetilde{B} = \widetilde{a} \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \widetilde{a}$, *d.h.* $(a \perp A) \neq \emptyset$.

(4) $\widetilde{0} \circ a^+ \circ \widetilde{0} = \big(\widetilde{0}(a)\big)^+$, *d.h.* $\widetilde{0} \circ \mathbf{L}^+ \circ \widetilde{0} = \mathbf{L}^+$ *und* $\widetilde{0} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{0} = \widetilde{\widetilde{0}(A)}$, *d.h.* $\widetilde{0} \circ \widetilde{\mathfrak{G}} \circ \widetilde{0} = \widetilde{\mathfrak{G}}$.

(5) $\forall\, X \in \mathfrak{F}$: $\widetilde{\widetilde{X}(a)} = \widetilde{X} \circ \widetilde{a} \circ \widetilde{X}$.

Beweis. **(1)** Wir setzen $B := a + X_0$, $C := a + Y_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{B} \circ \widetilde{C} &= a^+ \circ \widetilde{X_0} \circ (a^+)^{-1} \circ a^+ \circ \widetilde{Y_0} \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \circ (a^+)^{-1} = \\ &= a^+ \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{a}.\end{aligned}$$

(2) Es sei $a \in \mathbf{L}$. Nach Definition ist

$$\widetilde{a} = a^+ \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1},$$

also $\widetilde{a} \in J^*$, da $\widetilde{0} \in J^*$. Wegen 2.7.2.1 und (1) ist $\widetilde{a} \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$. Weiterhin gilt

$$Fix\,\widetilde{a} = a^+(Fix\,\widetilde{0}) \stackrel{2.7.8}{=} a^+(\{0\}) = \{a\}.$$

Es sei $X \in \mathfrak{F}$ mit $G = a + X = a^+(X)$. Nach 2.7.8 ist $\widetilde{0}(X) = X$ und somit

$$\widetilde{a}(G) = a^+ \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1}\big(a^+(X)\big) = a^+ \circ \widetilde{0}(X) = a^+(X) = G.$$

(3) Es sei $A := a + Z$ mit $Z \in \mathfrak{F}$, $U \in \mathfrak{F}$ mit $\widetilde{Z} \circ \widetilde{0} = \widetilde{U}$ (vgl. **SK2**) und $B := a + U$. Dann gilt $a \in B$,

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \circ \widetilde{B} &= a^+ \circ \widetilde{Z} \circ (a^+)^{-1} \circ a^+ \circ \widetilde{U} \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ \widetilde{Z} \circ \widetilde{U} \circ (a^+)^{-1} = \\ &= a^+ \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{a} \in J^*,\end{aligned}$$

also $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} = \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$ und daher $\widetilde{B} = \widetilde{A} \circ \widetilde{a} = \widetilde{a} \circ \widetilde{A}$, d.h.

$$B \in (a \perp A) := \{X \in \mathfrak{G} \mid a \in X\,,\ X \perp A\}.$$

(4) Nach den Definitionen 2.7.1 und 2.7.4 ist $\widetilde{0} \in Aut\,(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}) \cap J^*$. Daher gilt für jedes $x \in \mathbf{L}$:

$$\widetilde{0} \circ a^+ \circ \widetilde{0}(x) = \widetilde{0}\big(a + \widetilde{0}(x)\big) = \widetilde{0}(a) + \widetilde{0}^2(x) = \widetilde{0}(a) + x = \big(\widetilde{0}(a)\big)^+(x).$$

Es sei $A = a + X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\widetilde{0} \circ \widetilde{A} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \widetilde{a + X} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ a^+ \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1} \circ \\ &\widetilde{0} \stackrel{2.7.8}{=} \big(\widetilde{0}(a)\big)^+ \circ \widetilde{X} \circ \Big(\big(\widetilde{0}(a)\big)^+\Big)^{-1} = \widetilde{\widetilde{0}(a) + X} \stackrel{2.7.8}{=} \widetilde{\widetilde{0}(a) + \widetilde{0}(X)} = \widetilde{\widetilde{0}(a + X)} = \widetilde{\widetilde{0}(A)}.\end{aligned}$$

(5) Es sei $X \in \mathfrak{F}$, $a \in \mathbf{L}$. Dann gilt

$$\widetilde{X} \circ \widetilde{a} \circ \widetilde{X} = \widetilde{X} \circ a^+ \circ \widetilde{0} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{X} = \widetilde{X} \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ \widetilde{X} =$$

$$\overset{2.7.1.3}{=} \big(\widetilde{X}(a)\big)^+ \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X} \circ \Big(\big(\widetilde{X}(a)\big)^+\Big)^{-1} \overset{2.7.8}{=} \big(\widetilde{X}(a)\big)^+ \circ \widetilde{0} \circ \Big(\big(\widetilde{X}(a)\big)^+\Big)^{-1} = \widetilde{\widetilde{X}(a)}.$$

□

Definition 2.7.5. Eine Struktur $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ gemäß Definition 2.7.1 heiße *Rechtsloop mit Spiegelungskeim*, wenn zusätzlich das Axiom

SK3 $\quad \forall\, a, b \in \mathbf{L}\colon \quad \delta_{a,b} \circ \widetilde{\mathfrak{F}} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \widetilde{\mathfrak{F}}$

erfüllt ist.

Im Folgenden sei $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ ein regulärer (vgl. 2.7.3) Rechtsloop mit Spiegelungskeim. Es gilt

Satz 2.7.10. *Für alle a, $b \in \mathbf{L}$ und alle $B \in \mathfrak{G}$ gilt:*

(1) $\forall\, X \in \mathfrak{F}\colon \delta_{a,b} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \widetilde{\delta_{a,b}(X)}$.

(2) $\widetilde{a} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(B)}$, *d.h.* $\widetilde{a} \circ \widetilde{\mathfrak{G}} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\mathfrak{G}}$.

(3) $\widetilde{a}(B) = B \iff a \in B$.

(4) $\widetilde{a} \circ \widetilde{b} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\widetilde{a}(b)}$, *d.h.* $\widetilde{a} \circ \widetilde{\mathbf{L}} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\mathbf{L}}$.

(5) *Falls* $\delta_{a,b} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}$ *ist, so gilt* $a^+ \circ \widetilde{b} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{a^+(b)}$, *d.h.* $a^+ \circ \widetilde{\mathbf{L}} \circ (a^+)^{-1} = \widetilde{\mathbf{L}}$.

(6) *Falls* $\delta_{a,b} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}$ *ist, so gilt* $\widetilde{B} \circ \widetilde{a} \circ \widetilde{B} = \widetilde{\widetilde{B}(a)}$, *d.h.* $\widetilde{B} \circ \widetilde{\mathbf{L}} \circ \widetilde{B} = \widetilde{\mathbf{L}}$.

(7) *Falls* $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ *stark regulär ist, so gilt* $\delta_{a,b} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}$.

Beweis. **(1)** ist eine Konsequenz der Definition 2.7.5.
(2) Es sei $a \in \mathbf{L}$, nach 2.7.9.1 $\exists\, C, D \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{a} = \widetilde{C} \circ \widetilde{D}$. Dann gilt

$$\widetilde{a} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{a} = \widetilde{C} \circ \widetilde{D} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{D} \overset{2.7.9.2}{=} \widetilde{C} \circ \widetilde{D} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{D} \circ \widetilde{C} \overset{2.7.4}{=}$$

$$= \widetilde{C} \circ \widetilde{\widetilde{D}(B)} \circ \widetilde{C} \overset{2.7.4}{=} \widetilde{\widetilde{C}\big(\widetilde{D}(B)\big)} = \widetilde{\widetilde{a}(B)}.$$

(3) Nach 2.7.9.2 gilt: „$a \in B \Rightarrow \widetilde{a}(B) = B$“. Es sei jetzt $\widetilde{a}(B) = B$, $b \in B \setminus \{a\}$ und $B' := \overline{a, b}$. Dann gilt $b \neq \widetilde{a}(b) \in B$ nach 2.7.9.2. Also ist $B = \overline{b, \widetilde{a}(b)}$, und nach 2.7.9.2 gilt $B' = \widetilde{a}(B') \ni b, \widetilde{a}(b)$. Daraus folgt $a \in B' = \overline{b, \widetilde{a}(b)} = B$.

(4) ist eine Konsequenz von (2) und 2.7.9.1.

(5) Es gilt

$$a^+ \circ \widetilde{b} \circ (a^+)^{-1} = a^+ \circ b^+ \circ \widetilde{0} \circ (b^+)^{-1} \circ (a^+)^{-1} = (a+b)^+ \circ \delta_{a,b} \circ \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}^{-1} \circ \big((a+b)^+\big)^{-1}$$

$$= (a+b)^+ \circ \widetilde{0} \circ \big((a+b)^+\big)^{-1} = \widetilde{a+b} = \widetilde{a^+(b)}.$$

(6) Es sei $B = b + Y$ mit $Y \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\widetilde{B} \circ \widetilde{a} \circ \widetilde{B} = b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \circ \widetilde{a} \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} =$$

$$\overset{(4)}{=} b^+ \circ \widetilde{Y} \circ \widetilde{(b^+)^{-1}(a)} \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \overset{2.7.9.5}{=} b^+ \circ \left(\widetilde{\widetilde{Y}\left(\widetilde{(b^+)^{-1}(a)}\right)}\right) \circ (b^+)^{-1} \overset{2.7.4}{=}$$

$$= b^+ \circ \widetilde{\widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1}(a)} = \widetilde{\widetilde{B}(a)}.$$

(7) Es gilt

$$\delta_{a,b} \circ \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \delta_{a,b} \circ \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \circ \delta_{a,b}^{-1} =$$

$$(\delta_{a,b} \circ \widetilde{X_0} \circ \delta_{a,b}^{-1}) \circ (\delta_{a,b} \circ \widetilde{Y_0} \circ \delta_{a,b}^{-1}) \overset{(1)}{=} \widetilde{\delta_{a,b}(X_0)} \circ \widetilde{\delta_{a,b}(Y_0)}.$$

Da nach **Z1** $\delta_{a,b}(X_0)$, $\delta_{a,b}(Y_0) \in \mathfrak{F}$ (vgl. die Definitionen 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6), gilt

$$\widetilde{0} = \widetilde{\delta_{a,b}(X_0)} \circ \widetilde{\delta_{a,b}(Y_0)},$$

weil $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ stark regulär ist. Also ist $\delta_{a,b} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}$. □

Proposition 2.7.11. *Für alle X', $Y' \in \mathfrak{G}$ und für alle $p \in \mathbf{L}$ gilt*

$$X' \perp Y' \iff (p + X') \perp (p + Y'), \text{ d.h. } \quad \mathbf{L}^+ \subset Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}, \perp) \quad (vgl. \quad 2.2.5.4).$$

Beweis. Es seien $X' = a + X$ und $Y' = b + Y$ mit X, $Y \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$p + X' = p + (a + X) = (p + a) + \delta_{p,a}(X) \quad \text{und}$$

$$\widetilde{p + X'} = (p + a)^+ \circ \widetilde{\delta_{p,a}(X)} \circ \left((p + a)^+\right)^{-1} \overset{\mathbf{SK3}}{=} (p + a)^+ \circ \delta_{p,a} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{p,a}^{-1} \circ \left((p + a)^+\right)^{-1} =$$

$$= p^+ \circ a^+ \circ \delta_{p,a}^{-1} \circ \delta_{p,a} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{p,a}^{-1} \circ \delta_{p,a} \circ (a^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1} = p^+ \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1}.$$

Analog gilt

$$\widetilde{p + Y'} = p^+ \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1}.$$

Daraus folgt:

$$\widetilde{p + X'} \circ \widetilde{p + Y'} = p^+ \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1} \circ p^+ \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1} =$$

$$= p^+ \circ a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} \circ (p^+)^{-1} \in J^* \iff$$

$$\iff a^+ \circ \widetilde{X} \circ (a^+)^{-1} \circ b^+ \circ \widetilde{Y} \circ (b^+)^{-1} = \widetilde{X'} \circ \widetilde{Y'} \in J^*.$$

□

Aus 2.7.6 und 2.7.9.3 folgt

Satz 2.7.12. (Lote fällen und errichten) *Es seien $p \in \mathbf{L}$ und $G \in \mathfrak{G}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{lllll} p \notin G & \Longleftrightarrow & \widetilde{p} \circ \widetilde{G} \notin J^* & \Rightarrow & (p \perp G) = \overline{p, \widetilde{G}(p)}. \\ p \in G & \Longleftrightarrow & \widetilde{p} \circ \widetilde{G} \in J^* & \Rightarrow & \exists_1 H \in \mathfrak{G} \colon \widetilde{H} = \widetilde{p} \circ \widetilde{G} \quad \textit{und} \quad H \in (p \perp G). \end{array}$$

Beweis. Da wegen 2.7.2.1 und 2.7.9.2 $Fix\, \widetilde{G} = G$ und $Fix\, \widetilde{p} = \{p\}$ ist, gilt:

$$\widetilde{p} \circ \widetilde{G} \in J^* \iff \widetilde{G} = \widetilde{p} \circ \widetilde{G} \circ \widetilde{p} \overset{2.7.10.2}{=} \widetilde{p(G)} \iff$$
$$\iff Fix\, \widetilde{G} = Fix\, \widetilde{p(G)} \overset{2.7.2}{\iff} G = \widetilde{p}(G) \overset{2.7.10.3}{\iff} p \in G.$$

□

Bemerkung. Für alle $p \in \mathbf{L}$ und alle $G \in \mathfrak{G}$ gilt $|(p \perp G)| = 1 \iff (\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ ist stark regulär.

Definition 2.7.6. Es seien a, $b \in \mathbf{L}$. Das Element $m \in \mathbf{L}$ heißt *Mittelpunkt* von (a, b), wenn $\widetilde{m}(a) = b$.

Proposition 2.7.13. *Wenn a, $b \in \mathbf{L}$, $a \neq b$ und $\widetilde{m}(a) = b$, dann $m \in \overline{a, b}$.*

Beweis. Wegen 2.7.9.1 gibt es für jedes $m \in \mathbf{L}$, X, $Y \in \mathfrak{G}$ mit $\widetilde{m} = \widetilde{X} \circ \widetilde{Y}$ und $\{m\} = X \cap Y$. Nach 2.7.2.4 gilt $\widetilde{X} \circ \widetilde{Y}(\overline{a, b}) = \overline{a, b}$ genau dann, wenn $m \in \overline{a, b}$. □

Wir betrachten jetzt die folgende Abbildung

$$\mu \colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}\,; \quad x \longmapsto x + \widetilde{0}(-x) = x - \widetilde{0}(x).$$

Dann gilt:

Satz 2.7.14. **(1)** *$\forall\, x \in \mathbf{L} \colon \widetilde{x}(0) = \mu(x)$.*

(2) *$\forall\, x \in \mathbf{L} \colon (0, x)$ hat mindestens einen Mittelpunkt genau dann, wenn μ surjektiv ist.*

(3) *$\forall\, x \in \mathbf{L} \colon (0, x)$ hat höchstens einen Mittelpunkt genau dann, wenn μ injektiv ist.*

(4) *$\forall\, x \in \mathbf{L} \colon (0, x)$ hat genau einen Mittelpunkt genau dann, wenn μ bijektiv ist.*

(5) *Wenn für alle a, $b \in \mathbf{L} \colon \delta_{a,b} \circ \widetilde{0} = \widetilde{0} \circ \delta_{a,b}$, und wenn die Kürzungsregel*

$$\forall\, x, y, a \in \mathbf{L} \quad x + a = y + a \Rightarrow x = y \quad (*)$$

gilt, ist μ injektiv.

Beweis. **(1)** Es sei $x \in \mathbf{L}$. Dann ist

$$0 = x + (-x) = x^+(-x)\,, \quad \text{also} \quad (x^+)^{-1}(0) = -x.$$

Daraus folgt

$$\widetilde{x}(0) = x^+ \circ \widetilde{0} \circ (x^+)^{-1}(0) = x^+ \circ \widetilde{0}(-x) = x + \widetilde{0}(-x) = \mu(x).$$

(2) Nach Definition hat $(0, x)$ mindestens einen Mittelpunkt genau dann, wenn es ein x' mit $x = \widetilde{x'}(0) \overset{(1)}{=} \mu(x')$ gibt, also wenn μ surjektiv ist.

(3) Es seien p, $q \in \mathbf{L}$ mit $\widetilde{p}(0) = \widetilde{q}(0)$. Es gilt:

$$\widetilde{p}(0) = p^+ \circ \widetilde{0} \circ (p^+)^{-1}(0) \overset{2.7.9.4}{=} \widetilde{0} \circ \big(\widetilde{0}(p)\big)^+ \circ (p^+)^{-1}(0) = \widetilde{0} \circ \big(\widetilde{0}(p)\big)^+ \circ (-p)^+ \circ \delta_{p,-p}^{-1}(0) =$$
$$\widetilde{0} \circ \big(\widetilde{0}(p) - p\big)^+ \circ \delta_{\widetilde{0}(p),-p} \circ \delta_{p,-p}^{-1}(0) = \widetilde{0} \circ \big(\widetilde{0}(p) - p\big)^+(0) = \widetilde{0} \circ \big(\widetilde{0}(q) - q\big)^+(0) = \widetilde{q}(0)$$
$$\iff \widetilde{0}(p) - p = \widetilde{0}(q) - q \iff \widetilde{0}(\widetilde{0}(p) - p) = \widetilde{0}(\widetilde{0}(q) - q) \iff \mu(p) = \mu(q).$$

Also ist μ injektiv genau dann, wenn es höchstens einen Mittelpunkt gibt.

(4) folgt aus (2) und (3).

(5) Es sei $\widetilde{x}(0) \overset{(1)}{=} \mu(x) = \mu(y) = \widetilde{y}(0)$, $z := (x^+)^{-1}(0)$, $p := (x^+)^{-1}(y)$, d.h. $y = x^+(p)$. Dann gilt

$$\widetilde{y} = \widetilde{x^+(p)} \overset{2.7.10.4}{=} x^+ \circ \widetilde{p} \circ (x^+)^{-1} \Rightarrow \widetilde{p} = (x^+)^{-1} \circ \widetilde{y} \circ x^+.$$

Aus $\widetilde{x}(0) = x^+ \circ \widetilde{0} \circ (x^+)^{-1}(0) = \widetilde{y}(0)$ und $\widetilde{y} = x^+ \circ \widetilde{p} \circ (x^+)^{-1}$ folgt

$$\widetilde{0}(z) = \widetilde{0}\big((x^+)^{-1}(0)\big) = (x^+)^{-1} \circ x^+ \circ \widetilde{0} \circ (x^+)^{-1}(0) = (x^+)^{-1} \circ \widetilde{x}(0) = (x^+)^{-1} \circ \widetilde{y}(0) =$$
$$= (x^+)^{-1} \circ x^+ \circ \widetilde{p} \circ (x^+)^{-1}(0) = \widetilde{p} \circ (x^+)^{-1}(0) = \widetilde{p}(z) = p^+ \circ \widetilde{0} \circ (p^+)^{-1}(z).$$

Wir setzen $u := (p^+)^{-1}(z)$. Dann gilt $\widetilde{0} \circ p^+(u) = p^+ \circ \widetilde{0}(u)$. Weiterhin gilt

$$p + u = p^+(u) = \widetilde{0} \circ p^+ \circ \widetilde{0}(u) \overset{2.7.9.4}{=} \big(\widetilde{0}(p)\big)^+(u) = \widetilde{0}(p) + u.$$

Wegen der Kürzungsregel $(*)$ ist $p = \widetilde{0}(p)$, und weil $Fix\,\widetilde{0} = \{0\}$ gilt, folgt $p = 0$. Daraus folgt $y = x^+(p) = x^+(0) = x$. □

Satz 2.7.15. *Es sei μ bijektiv. Dann gibt es für alle a, $b \in \mathbf{L}$ genau einen Mittelpunkt m von (a, b).*

Beweis. Für $x \in \mathbf{L}$ sei $x' \in \mathbf{L}$ mit $\mu(x') = x$, d.h. $\widetilde{x'}(0) = x$ wegen 2.7.14.1 und 2.7.14.4. Es seien jetzt a, $b \in \mathbf{L}$. Wir setzen $c := \widetilde{0} \circ \widetilde{a'}(b)$ und $m := \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(c')$. Dann gilt:

$$\widetilde{m}(a) = \widetilde{\widetilde{a'}\big(\widetilde{0}(c')\big)}(a) \overset{2.7.10.2}{=} \widetilde{a'} \circ \widetilde{\widetilde{0}(c')} \circ \widetilde{a'}(a) \overset{2.7.10.2}{=} \widetilde{a'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{c'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{a'}(a) =$$
$$= \widetilde{a'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{c'} \circ \widetilde{0}(0) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{c'}(0) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(c) = b.$$

Es sei $m \in \mathbf{L}$ mit $b = \widetilde{m}(a) = \widetilde{m} \circ \widetilde{a'}(0)$. Dann gilt

$$\widetilde{a'}(b) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{m} \circ \widetilde{a'}(0) \overset{2.7.10.2}{=} \widetilde{\widetilde{a'}(m)}(0)$$
$$\text{also} \quad \left(\widetilde{a'}(b)\right)' = \widetilde{a'}(m),$$

weil μ bijektiv ist. Daraus folgt

$$m = \widetilde{a'} \circ \left(\widetilde{a'}(b)\right)',$$

d.h. m ist eindeutig bestimmt. $\square$

Im Folgenden sei die Abbildung $\mu\colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L};\ x \longmapsto x - \widetilde{0}(x)$ bijektiv.
Für $a,\ b,\ ...x \in \mathbf{L}$ sei $x' := \mu^{-1}(x)$.
Wir definieren eine Abbildung

$$^\circ\colon \mathbf{L} \longrightarrow Sym\,\mathbf{L} \cap J^*; \quad x \longmapsto x^\circ := \widetilde{x'}$$

und setzen

$$a^\oplus := \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}.$$

Dann gilt:

Theorem 2.7.16. *Es sei $(\mathbf{L}, +, \mathfrak{F}, \sim)$ ein regulärer Rechtsloop mit Spiegelungskeim, so daß die Abbildung μ bijektiv ist, und es sei $a \oplus b := \widetilde{\mu^{-1}(a)} \circ \widetilde{0}(b) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(b)$ für $a,\ b \in \mathbf{L}$. Dann ist $(\mathbf{L}, \oplus, \mathfrak{F}, \sim)$ ein regulärer K-Loop mit Spiegelungskeim, in dem $\mathfrak{F}$ aus Unterloops von $(\mathbf{L}, \oplus)$ besteht. Die Abbildung*

$$\mu^\oplus\colon \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{L}; \quad x \longmapsto x \oplus x = x \ominus \widetilde{0}(x)$$

(wobei $\ominus a$ die Lösung der Gleichung $a \oplus x = 0$ ist) ist bijektiv, und außerdem gilt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^\oplus := \{a \oplus X \mid a \in \mathbf{L}, X \in \mathfrak{F}\}.$$

Beweis. Den Beweis führen wir in folgenden Schritten:

1. $(\mathbf{L}, \oplus)$ ist ein K-Loop:

   Es gilt $Fix\,\widetilde{a} = \{a\}$ für jedes $a \in \mathbf{L}$ und $\widetilde{a} \in J^*$ nach 2.7.9.2. Weiterhin gibt es wegen 2.7.15 für alle $a,\ b \in \mathbf{L}$ genau einen Mittelpunkt m von (a, b), und nach 2.7.10.2 ist $\widetilde{a} \circ \widetilde{\mathbf{L}} \circ \widetilde{a} = \widetilde{\mathbf{L}}$ für jedes $a \in \mathbf{L}$. Dann ist wegen 2.4.7 $(\mathbf{L}, \oplus)$ ein K-Loop.

2. $\mu^\oplus$ ist bijektiv:

   Es sei $a \in \mathbf{L}$ gegeben. Wir betrachten die Gleichung:

$$a = \mu^\oplus(x) = x \oplus x = \widetilde{x'} \circ \widetilde{0}(x) = \widetilde{x'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{x'}(0) \overset{2.7.10.2}{=}$$
$$= \widetilde{\widetilde{x'}(0)}(0) = \widetilde{x}(0) \overset{2.7.14.1}{=} \mu(x).$$

   Also ist $x := \mu^{-1}(a) = a'$ die eindeutige Lösung und somit $\mu^\oplus$ bijektiv.

3. Jedes $A \in \mathfrak{F}$ ist ein Unterloop:

   Es sei jetzt $A \in \mathfrak{F}$ und $a \in A$. Dann ist $a' \in A$ (vgl. 2.7.13), und daraus folgt

$$a^{\oplus}(A) = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(A) \overset{2.7.9.2}{=} A.$$

   Es seien a, $b \in A$ und $x \in \mathbf{L}$ mit $b = a \oplus x = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(x)$. Dann gilt

$$x = \widetilde{0} \circ \widetilde{a'}(b) \in \widetilde{0} \circ \widetilde{a'}(A) = A.$$

   Es sei jetzt $b = y \oplus a = \widetilde{y'} \circ \widetilde{0}(a)$. Nach 2.7.9.2 gilt $\widetilde{0}(a) \in A$. Nach Definition ist y' der Mittelpunkt von $(\widetilde{0}(a), b)$, und wegen 2.7.13 gilt $y' \in \overline{\widetilde{0}(a), b} = A$, daher ist $y \in A$. Daraus folgt, daß A ein Unterloop von $(\mathbf{L}, \oplus)$ ist.

4. $\mathfrak{F}$ ist eine Inzidenzfaserung:

   Nach 2.7.9.2 gilt

$$\delta^{\oplus}_{a,b} = \left((a \oplus b)^{\oplus}\right)^{-1} \circ a^{\oplus} \circ b^{\oplus} = \widetilde{0} \circ \widetilde{c'} \circ \widetilde{a'} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{b'} \circ \widetilde{0} \in Aut\,(\mathbf{L}, \mathfrak{G}) \quad \text{mit} \quad c = a \oplus b.$$

   Also ist $\delta^{\oplus}_{a,b}(X) \in \mathfrak{F}$, weil $\delta^{\oplus}_{a,b}(0) = 0$ ist. Daher ist $\mathfrak{F}$ eine Inzidenzfaserung des Loops $(\mathbf{L}, \oplus)$, (vgl. 2.2.6).

5. $\forall\, A \in \mathfrak{F}$ ist $\widetilde{A} \subset Aut\,(\mathbf{L}, \oplus)$:

   Es sei jetzt $a \in \mathbf{L}$ und $X \in \mathfrak{F}$. Dann gilt

$$\widetilde{\widetilde{X}(a')}(0) \overset{2.7.9.5}{=} \widetilde{X} \circ \widetilde{a'} \circ \widetilde{X}(0) \overset{\mathbf{SK1}}{=} \widetilde{X} \circ \widetilde{a'}(0) = \widetilde{X}(a) = \left(\widetilde{\widetilde{X}(a)}\right)'(0).$$

   Daraus folgt $\widetilde{X}(a') = \left(\widetilde{X}(a)\right)'$, weil μ injektiv ist (vgl. 2.7.14.3). Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(a) \oplus \widetilde{X}(b) &= \left(\widetilde{\widetilde{X}(a)}\right)' \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X}(b) = \widetilde{\widetilde{X}(a')} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X}(b) \overset{2.7.9.5}{=} \\ &= \widetilde{X} \circ \widetilde{a'} \circ \widetilde{X} \circ \widetilde{0} \circ \widetilde{X}(b) \overset{2.7.8}{=} \widetilde{X} \circ \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(b) = \widetilde{X}(a \oplus b),\end{aligned}$$

   d.h. $\widetilde{X} \subset Aut\,(\mathbf{L}, \oplus)$ für alle $X \in \mathfrak{F}$.

   Damit ist $(\mathbf{L}, \oplus, \mathfrak{F}, \sim)$ eine reguläre Struktur gemäß der Definitionen 2.7.1 und 2.7.3.

6. $(\mathbf{L}, \oplus, \mathfrak{F}, \sim)$ ist ein K-Loop mit Spiegelungskeim:

   Für jedes $a \in \mathbf{L}$ gilt

$$\widetilde{a} = a^{+} \circ \widetilde{0} \circ (a^{+})^{-1} = a^{+} \circ \widetilde{X_0} \circ \widetilde{Y_0} \circ (a^{+})^{-1}, \quad \text{mit} \quad X_0, Y_0 \in \mathfrak{F}.$$

   Daher ist $\delta^{\oplus}_{a,b}$ ein Element der Gruppe $\langle \mathbf{L}^{+}, \widetilde{\mathfrak{G}} \rangle$. Nach 2.7.4 gilt für alle $X \in \mathfrak{F}$

$$\delta^{\oplus}_{a,b} \circ \widetilde{X} \circ (\delta^{\oplus}_{a,b})^{-1} = \widetilde{\delta^{\oplus}_{a,b}(X)}\,,$$

   d.h. **SK3** gilt für $(\mathbf{L}, \oplus, \mathfrak{F}, \sim)$. Damit ist $(\mathbf{L}, \oplus, \mathfrak{F}, \sim)$ ein K-Loop mit Spiegelungskeim gemäß der Definition 2.7.5.

7. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{\oplus}$:

   Wegen 2.2.5.3 ist $(\mathbf{L}, \mathfrak{G}^{\oplus})$ ein Inzidenzraum, und nach 2.7.8 und 2.7.9.2 gilt

   $$a \oplus X = \widetilde{a'} \circ \widetilde{0}(X) = \widetilde{a'}(X) \in \mathfrak{G}.$$

   Daraus folgt $\mathfrak{G}^{\oplus} \subset \mathfrak{G}$. Die Inklusion $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^{\oplus}$ gilt, weil $(\mathbf{L}, \mathfrak{G})$ und $(\mathbf{L}, \mathfrak{G}^{\oplus})$ Inzidenzräume sind.

$\square$

3

Loops und Gewebe

3.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Netzen im Zusammenhang mit Loops

Definition 3.1.1. Es sei $\mathbf{P}$ eine nicht-leere Menge, und es seien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ zwei Teilmengen der Potenzmenge von $\mathbf{P}$; die Elemente von $\mathbf{P}$ bzw. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ heißen *Punkte* bzw. *Erzeugende*. Das Tripel $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ heißt *Netz*, wenn jede Erzeugende $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ mindestens zwei Punkte enthält und es gilt:

N1 Zu jedem Punkt $x \in \mathbf{P}$ und zu jedem $i \in \{1, 2\}$ gibt es genau eine Erzeugende $G \in \mathfrak{G}_i$ mit $x \in G$, die wir mit $[x]_i := G$ bezeichnen.

N2 Je zwei Erzeugende aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ schneiden sich in genau einem Punkt.

Definition 3.1.2. Es sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ein Netz und $\alpha \in \mathit{Sym}\,\mathbf{P}$ eine Permutation der Menge $\mathbf{P}$. Die Abbildung α heißt *Kollineation* (oder *Automorphismus*) von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$, wenn gilt

K Für jedes $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \colon \alpha(X) \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$.

Wir bezeichnen mit $, := \mathit{Aut}\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2)$ die Gruppe aller Kollineationen des Netzes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$.
Es seien $a, x \in \mathbf{P}$ und $\alpha \in ,$. Wegen **K** gilt dann $\alpha([a]_1) = [\alpha(a)]_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und $1 = |[x]_2 \cap [a]_1|$ wegen **N2**, woraus $1 = |\alpha([x]_2) \cap [\alpha(a)]_i|$ folgt.
Nach **N1** und **N2** folgt hieraus

$$\alpha([x]_1) = [\alpha(x)]_i \quad \text{und} \quad \alpha([x]_2) = [\alpha(x)]_j \quad \text{mit} \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}.$$

Damit gilt für jedes $\alpha \in ,$ entweder

1. $\forall\, x \in \mathbf{P} \colon \alpha([x]_1) = [\alpha(x)]_1$ und dann $\alpha([x]_2) = [\alpha(x)]_2$ oder

2. $\forall x \in \mathbf{P}\colon \alpha([x]_1) = [\alpha(x)]_2$ und $\alpha([x]_2) = [\alpha(x)]_1$.

Es sei $, ^+ := \mathit{Aut}\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ bzw. $, ^-$, die Menge aller Kollineationen vom Typ 1 bzw. vom Typ 2.
Dann gilt $, \; = , ^+ \dot\cup , ^-$. Falls $, ^- \neq \emptyset$, so ist $, ^+$ ein Normalteiler von $,$ vom Index 2, und wir erhalten:

Proposition 3.1.1. *Es seien $\alpha \in , ^+$, $\beta \in , ^-$ und $x \in \mathbf{P}$. Dann gilt*

1. $\alpha([x]_i) = [\alpha(x)]_i$ *für* $i \in \{1, 2\}$,
2. $\beta([x]_1) = [\beta(x)]_2$ *und* $\beta([x]_2) = [\beta(x)]_1$.

Wir führen jetzt eine binäre Operation $\Box$ auf der Punktmenge des Netzes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ein:

$$\Box : \mathbf{P} \times \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}; \quad (x, y) \longmapsto x \Box y := [x]_1 \cap [y]_2.$$

Definition 3.1.3. Eine Teilmenge S der Punktmenge $\mathbf{P}$ eines Netzes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ heißt *Unternetz*, wenn für alle $x, y \in S\colon x \Box y \in S$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ die Menge aller Unternetze von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$.

Lemma 3.1.2. *$\mathfrak{N}$ ist durchschnittsabgeschlossen und für die zugehörige Hüllenoperation*

$$^{\Box} : \left\{ \begin{array}{lll} \mathfrak{P}(\mathbf{P}) & \longrightarrow & \mathfrak{N} \\ X & \longmapsto & X^{\Box} := \bigcap \{N \in \mathfrak{N} \mid X \subseteq N\} \end{array} \right.$$

gilt

$$X^{\Box} = X \Box X := \{x \Box y \mid x, y \in X\}.$$

Beweis. Es seien $x, y, x', y' \in X$. Wegen $X^{\Box} \in \mathfrak{N}$ und $x \Box x = x$ gilt

$$(i) \quad X \subset X \Box X \subset X^{\Box}.$$

Nach Definition von „$^{\Box}$“ gilt

$$(x \Box y) \Box (x' \Box y') = [x \Box y]_1 \cap [x' \Box y']_2 = [x]_1 \cap [y']_2 = x \Box y' \in X \Box X.$$

Also ist $X \Box X \in \mathfrak{N}$, und mit (i) folgt $X^{\Box} = X \Box X$. $\Box$

Lemma 3.1.3. *Es seien $x, y \in P$, $\alpha \in , ^+$ und $\beta \in , ^-$. Dann gilt:*

$$\alpha(x \Box y) = \alpha(x) \Box \alpha(y) \quad \textit{und} \quad \beta(x \Box y) = \beta(y) \Box \beta(x).$$

Beweis. Wegen 3.1.1 erhalten wir:

$$\alpha(x \Box y) = \alpha([x]_1 \cap [y]_2) = [\alpha(x)]_1 \cap [\alpha(y)]_2 = \alpha(x) \Box \alpha(y)$$
$$\beta(x \Box y) = \beta([x]_1 \cap [y]_2) = [\beta(x)]_2 \cap [\beta(y)]_1 = [\beta(y)]_1 \cap [\beta(x)]_2 = \beta(y) \Box \beta(x).$$

$\Box$

Definition 3.1.4. Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{P}$ der Punktmenge eines Netzes $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ heißt *Kette* von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$, wenn gilt

N3 Für jedes $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \colon |X \cap K| = 1$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}$ die Menge aller Ketten von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$.

Aus **N1**, **N2** und **N3** folgt:

Proposition 3.1.4. *Es sei $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ und $K \in \mathfrak{K}$. Dann gilt:*

(1) *Die Restriktion*

$$\square\,|_{K\times K} \colon \begin{cases} K \times K & \longrightarrow \quad \mathbf{P} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto \quad x_1 \square x_2 \end{cases}$$

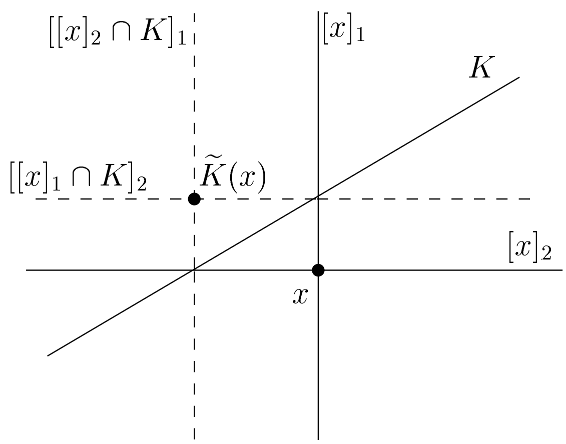
ist eine Bijektion.

(2) $x_1 \square x_2 \in K \iff x_1 = x_2$.

(3) *Für $x \in K$ gilt $[x]_1 = x \square K$, $[x]_2 = K \square x$, $|[x]_1| = |K| = |[x]_2| = |\mathfrak{G}_1| = |\mathfrak{G}_2|$ und $|\mathbf{P}| = |K|^2$.*

Lemma 3.1.5. *Für jedes $K \in \mathfrak{K}$ sei*

$$\widetilde{K} : \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}; \quad x \longmapsto \big[[x]_1 \cap K\big]_2 \cap \big[[x]_2 \cap K\big]_1 = ([x]_2 \cap K) \square ([x]_1 \cap K),$$



FIGUR 3.1.

und es sei $\widetilde{\mathfrak{K}} := \{\widetilde{K} \mid K \in \mathfrak{K}\}$. Dann gilt:

(1) *Für $x_1, x_2 \in K$ gilt $\widetilde{K}(x_1 \square x_2) = x_2 \square x_1$.*

(2) *$\widetilde{K}$ ist eine involutorische Permutation mit Fix $\widetilde{K} = K$.*

(3) $\widetilde{\mathfrak{K}} \subset\, ,^{-}$ *und* $\widetilde{\mathfrak{K}}^2 \subset\, ,^{+}$.

Beweis. „(1)“ Nach Definition von $\widetilde{K}$ gilt

$$\widetilde{K}(x) = x_2 \Box x_1 \quad \text{für} \quad x = x_1 \Box x_2.$$

„(2)“ Es sei $K \in \mathfrak{K}$. Nach 3.1.4.1 läßt sich jedes $x \in \mathbf{P}$ in der Form $x = x_1 \Box x_2$ mit x_1, $x_2 \in K$ darstellen, und nach (1) gilt $\widetilde{K}(x) = x_2 \Box x_1$. Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} &\widetilde{K} \circ \widetilde{K}(x) = \widetilde{K}(x_2 \Box x_1) = x_1 \Box x_2 = x \quad \text{und} \\ &x_2 \Box x_1 = \widetilde{K}(x) = x = x_1 \Box x_2 \iff x_1 = x_2 \overset{3.1.4.2}{\iff} x \in K. \end{aligned}$$

Also ist $Fix\,\widetilde{K} = K$, und $\widetilde{K}$ ist eine Involution.
„(3)“ Es sei $X \in \mathfrak{G}_i$ und $x := X \cap K$. Nach 3.1.4.3 gilt

$$[x]_i = X = \begin{cases} x \Box K & \text{für} \quad i = 1 \\ K \Box x & \text{für} \quad i = 2\,, \end{cases}$$

und somit

$$\widetilde{K}([x]_1) = \widetilde{K}(x \Box K) = K \Box x = [x]_2\,, \quad \widetilde{K}([x]_2) = x \Box K = [x]_1.$$

Also gilt $\widetilde{K} \in , ^{-}$. $\Box$

Lemma 3.1.6. *Es sei $\alpha \in , ^{-}$.*

1. *Wenn $\alpha \circ \alpha = id$ ist, so ist $Fix\,\alpha \in \mathfrak{K}$.*

2. *Wenn $Fix\,\alpha \in \mathfrak{K}$ ist, dann gilt $\widetilde{Fix\,\alpha} = \alpha$.*

Beweis. Es sei $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$, etwa $X \in \mathfrak{G}_1$. Da $\alpha \in , ^{-}$, ist $\alpha(X) \in \mathfrak{G}_2$, und nach **N2** gilt

$$c := X \cap \alpha(X) \in \mathbf{P}.$$

Wenn $\alpha \circ \alpha = id$ ist, so gilt

$$\alpha(c) = \alpha(X) \cap \alpha\big(\alpha(X)\big) = \alpha(X) \cap X = c,$$

und c ist der einzige Fixpunkt von α, der in X enthalten ist. Daraus folgt $X \cap Fix\,\alpha = c$, d.h. $Fix\,\alpha \in \mathfrak{K}$.
Es sei jetzt $K = Fix\,\alpha \in \mathfrak{K}$, $x \in \mathbf{P}$ und x_1, $x_2 \in K$ mit $x = x_1 \Box x_2$ Dann ist

$$\alpha(x_i) = x_i$$

und, weil $\alpha \in , ^{-}$,

$$\alpha(x) = \alpha(x_1 \Box x_2) \overset{3.1.3}{=} \alpha(x_2) \Box \alpha(x_1) = x_2 \Box x_1 \overset{3.1.5.1}{=} \widetilde{K}(x).$$

$\Box$

Lemma 3.1.7. *Für alle $A, B, C \in \mathfrak{K}$ gilt:*

(1) $\widetilde{A}(B) \in \mathfrak{K}$.

(2) $\widetilde{\widetilde{A}(B)} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$.

(3) $Fix\,(\widetilde{A} \circ \widetilde{B}) = (A \cap B)^{\Box}$.

(4) $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \in J^* \iff \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \in \widetilde{\mathfrak{K}}$.

Beweis. **(1)** Es sei $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$. Dann

$$|\widetilde{A}(B) \cap X| = |\widetilde{A}\big(B \cap \widetilde{A}(X)\big)| = |B \cap \widetilde{A}(X)| = 1,$$

weil $\widetilde{A} \circ \widetilde{A} = id$ nach 3.1.5.2 ist; daraus folgt $\widetilde{A}(B) \in \mathfrak{K}$.
(2) Aus $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A} \in \,,^{-}$ und

$$Fix\,(\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}) = \widetilde{A}(Fix\,\widetilde{B}) \overset{3.1.5.2}{=} \widetilde{A}(B) \in \mathfrak{K} \quad \text{nach} \quad (1)$$

folgt mit 3.1.6

$$\widetilde{\widetilde{A}(B)} = Fix\,(\widetilde{\widetilde{A} \circ \widetilde{B}} \circ \widetilde{A}) = \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}.$$

(3) Es sei $\alpha := \widetilde{A} \circ \widetilde{B}$ und $x, y \in A \cap B$. Dann ist $\alpha \in \,,^{+}$ und $x, y \in Fix\,\alpha$ nach 3.1.5.2. Nach 3.1.3 gilt

$$\alpha(x \Box y) = \alpha(x) \Box \alpha(y) = x \Box y,$$

und nach 3.1.2 ist

$$(A \cap B)^{\Box} = (A \cap B) \Box (A \cap B) \subseteq Fix\,\alpha.$$

Es sei jetzt $x \in Fix\,\alpha$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(x) &= \big[[x]_1 \cap A\big]_2 \cap \big[[x]_2 \cap A\big]_1 = \\ &= \widetilde{B}(x) = \big[[x]_1 \cap B\big]_2 \cap \big[[x]_2 \cap B\big]_1. \end{aligned}$$

Daraus folgt

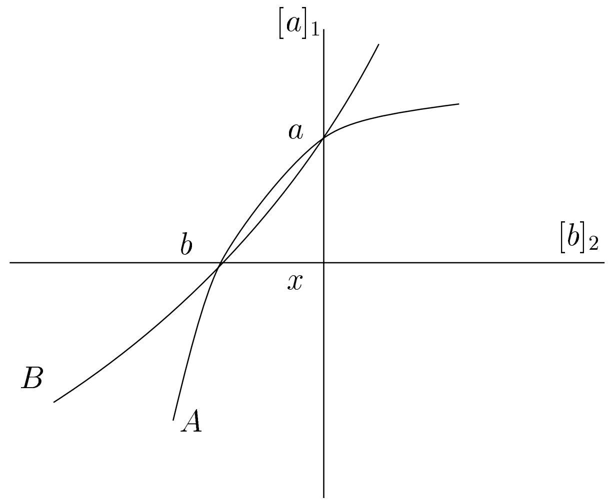
$$\begin{aligned} \big[[x]_1 \cap A\big]_2 &= \big[[x]_1 \cap B\big]_2 \quad \text{und} \\ \big[[x]_2 \cap A\big]_1 &= \big[[x]_2 \cap B\big]_1. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} &a := [x]_1 \cap \big[[x]_1 \cap A\big]_2 = [x]_1 \cap A = [x]_1 \cap B \in A \cap B \quad \text{und} \\ &b := [x]_2 \cap A = [x]_2 \cap B \in A \cap B, \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$x = [a]_1 \cap [b]_2 = a \Box b \in (A \cap B) \Box (A \cap B), \quad \text{d.h.} \quad Fix\,\alpha \subseteq (A \cap B)^{\Box} \quad \text{(Siehe Figur 3.2).}$$



FIGUR 3.2.

(4) „$\Leftarrow$“ ist klar.
„$\Rightarrow$“ Es sei $\alpha := \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \in J^*$ nach 3.1.5.3 $\alpha \in\ ,\ ^-$. Dann gilt nach 3.1.6 $Fix\,\alpha \in \mathfrak{K}$ und

$$\alpha = \widetilde{Fix\,\alpha} \in \widetilde{\mathfrak{K}}.$$

□

Im Folgenden sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ein Netz, für das die Menge $\mathfrak{K}$ der Ketten nicht leer ist. Wir wollen jetzt Teilmengen $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ betrachten, die gewisse Eigenschaften besitzen.

Definition 3.1.5. Eine Teilmenge $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{K}$ heißt *transitiv* bzw. *scharf transitiv* oder *regulär*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

T $\quad \forall\, A, B \in \mathfrak{S} \quad \exists\, C \in \mathfrak{S} \colon \widetilde{C}(A) = B$

bzw.

$\overline{\mathbf{T}}$ $\quad \forall\, A, B \in \mathfrak{S} \quad \exists_1\, C \in \mathfrak{S} \colon \widetilde{C}(A) = B$

symmetrisch, wenn gilt

S $\quad \forall\, A, B \in \mathfrak{S} \colon \widetilde{A}(B) \in \mathfrak{S}.$

Es gilt folgendes

Theorem 3.1.8. *Es sei $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ eine symmetrische und reguläre Menge von Ketten und $E \in \mathfrak{L}$ eine ausgezeichnete Kette. Für jedes $A \in \mathfrak{L}$ bezeichnen wir mit A' das Element von $\mathfrak{L}$ mit der Eigenschaft*

$$\widetilde{A'}(E) = A \quad (\textit{vgl. } \overline{\mathbf{T}}),$$

und für alle $A, B \in \mathfrak{L}$ setzen wir

$$A \oplus B := \widetilde{A'} \circ \widetilde{E}(B).$$

Dann ist das Paar $(\mathfrak{L}, \oplus)$ ein K-Loop.

Beweis. Nach 3.1.5.2 ist $\widetilde{K}$ für jedes $K \in \mathfrak{L}$ eine involutorische Permutation von $\mathbf{P}$. Da $\mathfrak{L}$ symmetrisch ist, gilt $\widetilde{K}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$. Wir betrachten die Menge

$$\widetilde{\mathfrak{L}} := \{\widetilde{L}_{|\mathfrak{L}} \colon L \in \mathfrak{L}\} \subset J^*_{|\mathfrak{L}} := \{\sigma \in Sym\, \mathfrak{L} \mid \sigma^2 = id \neq \sigma\}$$

und die Abbildung

$$^\circ \colon \mathfrak{L} \longrightarrow J^*_{|\mathfrak{L}}; \quad X \longmapsto X^\circ := \widetilde{X'}_{|\mathfrak{L}}.$$

Es gilt **B1** (siehe Definition 2.4.1), weil die Menge $\mathfrak{L}$ regulär ist. Nach 3.1.7.2 gilt für alle A, $B \in \mathfrak{L}$:

$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A} = \widetilde{\widetilde{A}(B)}\,,$$

und da $\mathfrak{L}$ symmetrisch ist, gilt

$$\widetilde{\widetilde{A}(B)} := \widetilde{C} \in \widetilde{\mathfrak{L}}.$$

Hierdurch erhalten wir für alle A, $B \in \mathfrak{L}$:

$$A^\circ \circ B^\circ \circ A^\circ := \widetilde{A}'_{|\mathfrak{L}} \circ \widetilde{B'}_{|\mathfrak{L}} \circ \widetilde{A}'_{|\mathfrak{L}} = \widetilde{\widetilde{A}'_{|\mathfrak{L}}(B'_{|\mathfrak{L}})} = \widetilde{C'}_{|\mathfrak{L}} = C^\circ,$$

d.h. **B2** gilt (siehe Definition 2.4.1). Dann ist das Tripel $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^\circ, E)$ eine Spiegelungsstruktur (vgl. Definition 2.4.1) und wegen 2.4.2 $(\mathfrak{L}, \oplus)$ ein K-Loop. □

Satz 3.1.9. *Es sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{K}$ eine symmetrische Menge von Ketten (vgl. Definition 3.1.5), $E \in \mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Kette, so daß das Tripel $(\mathfrak{G}, \widetilde{\mathfrak{G}}, E)$ das Axiom* **B1′** *erfüllt (vgl. Satz 2.4.8), d.h.*

$$\mathbf{B1'} \quad \forall\, A \in \mathfrak{G} \quad \exists_1 A' \in \mathfrak{G} \colon \widetilde{A}'(E) = A.$$

Dann ist $(\mathfrak{G}, \widetilde{\mathfrak{G}}, E)$ eine Spiegelungsstruktur.

Beweis. Nach 3.1.5.2 ist $\widetilde{X}$ eine involutorische Permutation von $\mathfrak{G}$ für jedes $X \in \mathfrak{G}$. Daher bleibt nur zu zeigen, daß **B2** für alle A, $B \in \mathfrak{G}$ gilt (vgl. Definition 2.4.1). Nach 3.1.7.2 gilt $\widetilde{\widetilde{A}(B)} = \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A}$, und da $\mathfrak{G}$ symmetrisch ist, gilt $\widetilde{A}(B) \in \mathfrak{G}$. Daraus folgt $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. □

Aus 3.1.9 und 2.4.2 folgt:

Satz 3.1.10. *Es sei $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{K}$ eine symmetrische Menge von Ketten, $E \in \mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Kette, so daß $(\mathfrak{G}, \widetilde{\mathfrak{G}}, E)$* **B1′** *erfüllt. Für alle A, $B \in \mathfrak{G}$ setzen wir $A \oplus B := \widetilde{A}' \circ \widetilde{E}(B)$. Dann ist das Paar $(\mathfrak{G}, \oplus)$ ein K-Loop.*

Definition 3.1.6. Es sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ein Netz und $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{K}$ eine Teilmenge von Ketten von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$. Wir nennen $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G})$ *Kettenstruktur*.

Definition 3.1.7. Eine Kettenstruktur $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ heißt 3-*Gewebe*, wenn gilt:

N1′ Zu jedem Punkt $x \in \mathbf{P}$ gibt es genau ein $[x]_3 \in \mathfrak{G}_3$ mit $x \in [x]_3$.

Bemerkung. Wenn $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ ein 3-Gewebe ist, dann sind $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3)$ und $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ Netze.

Es sei $E \in \mathfrak{K}$ eine ausgezeichnete Kette. Für jedes $K \in \mathfrak{K}$ betrachten wir die Abbildung

$$\widehat{K}\colon E \longrightarrow E\,; \quad x \longmapsto \big[[x]_1 \cap K\big]_2 \cap E.$$

Bemerkung. $\widehat{K}$ ist eine Permutation von E mit $\widehat{E} = id$, und für $\gamma \in Sym\, E$ ist die Menge

$$K(\gamma) := \{x \square \gamma(x) \mid x \in E\}$$

eine Kette mit $\widehat{K(\gamma)} = \gamma$.

Es gelten folgende Propositionen:

Proposition 3.1.11. *Für $\sigma \in Sym\, E$ seien*

$$\sigma_1\colon \begin{cases} \mathbf{P} := E \square E & \longrightarrow \quad \mathbf{P} \\ x \square y & \longmapsto \quad \sigma(x) \square y \end{cases}, \qquad \sigma_2\colon \begin{cases} \mathbf{P} := E \square E & \longrightarrow \quad \mathbf{P} \\ x \square y & \longmapsto \quad x \square \sigma(y) \end{cases}$$

und $\overline{\sigma} = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Dann ist $\overline{\sigma} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$.

Proposition 3.1.12. *Für σ, $\tau \in Sym\, E$ gilt:*

(1) $(\sigma \circ \tau)_1 = \sigma_1 \circ \tau_1$, $(\sigma \circ \tau)_2 = \sigma_2 \circ \tau_2$ *und* $\overline{\sigma \circ \tau} = \overline{\sigma} \circ \overline{\tau}$.

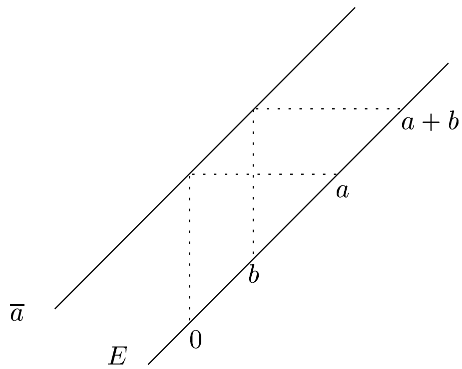
(2) $\overline{\sigma} = id \iff \sigma = id$.

Es gilt folgender Satz (vgl. z.B. [9])

Satz 3.1.13. *Es sei $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ ein 3-Gewebe, $0 \in \mathbf{P}$ ein ausgezeichneter Punkt und $E := [0]_3$. Für jedes $a \in E$ seien*

$$\begin{aligned} &\overline{a} := [0 \square a]_3\,, \\ &a^+ := \widehat{\overline{a}}\colon E \longrightarrow E\,; \quad x \longmapsto \big[[x]_1 \cap \overline{a}\big]_2 \cap E \\ &\textit{und für alle} \quad a, b \in E\,,\ a + b := a^+(b). \end{aligned}$$

Dann ist $(E, +)$ ein Loop mit neutralem Element 0.



FIGUR 3.3.

Es gilt folgender Satz (vgl. z.B. [9] 2.5, [10] S.81)

Satz 3.1.14. *Es sei* $(E,+)$ *ein Loop mit neutralem Element* 0*, für* $a \in E$ *sei* $a^+ \colon E \longrightarrow E\,;\quad x \longmapsto a+x$ *und* $K(a^+) = \{x \Box a^+(x) \mid x \in E\}$*. Wir setzen:*

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &:= E \times E \\ \mathfrak{G}_1 &:= \{\{x\} \times E \mid x \in E\} \\ \mathfrak{G}_2 &:= \{E \times \{x\} \mid x \in E\} \\ \mathfrak{G}_3 &:= \{K(a^+) \mid a \in E\}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ *ein* 3*-Gewebe.*

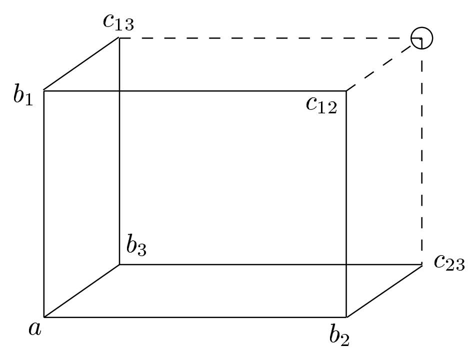
3.2 Schließungssätze in 3-Geweben und K-Loops

Anschauliche Schließungssätze in 3-Geweben, die gewisse Klassen von 3-Geweben kennzeichnen, können ausgedrückt werden durch Spiegelungen an Elementen von $\mathfrak{G}_3$.

Definition 3.2.1. Ein *Reidemeister* 3*-Gewebe* (vgl. [20]) ist ein 3-Gewebe, das der nach Reidemeister benannten Bedingung genügt:

RE Es seien $a \in \mathbf{P}$, $b_i \in [a]_i$, $c_{ij} := [b_i]_j \cap [b_j]_i$ für $i,\ j \in \{1,2,3\}$, mit $i \neq j$. Dann gilt

$$[c_{12}]_3 \cap [c_{13}]_2 \cap [c_{23}]_1 \neq \emptyset.$$



FIGUR 3.4. **RE**

Die Bedingung **RE** kann in der Form **RE**$'$ geschrieben werden:

RE$'$ Es seien $A,\ B,\ C,\ D \in \mathfrak{G}_3$ mit $Fix\,(\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{D}_{|\mathfrak{G}_1}) \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{D}_{|\mathfrak{G}_1} = id_{|\mathfrak{G}_1}.$$

Beweis. Es seien $X \in \mathfrak{G}_1$, $a := A \cap X$, $b_1 := D \cap X$, $b_2 := [a]_2 \cap B$ und $c_{12} := [b_1]_2 \cap [b_2]_1$. Dann gilt

$$\widetilde{D}(X) = \widetilde{D}([b]_1) = [b_1]_2\,, \quad \widetilde{B} \circ \widetilde{A}(X) = \widetilde{B}([a]_2) = \widetilde{B}([b_2]_2) = [b_2]_1,$$

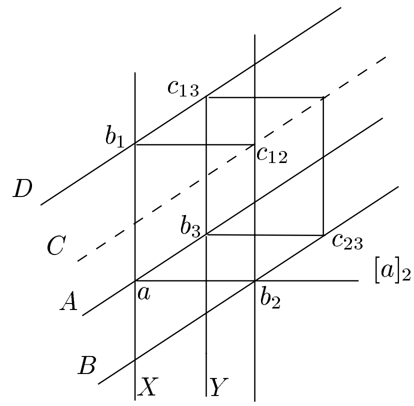
und daraus folgt

$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{D}(X) = X \iff \widetilde{C} \circ \widetilde{D}(X) = \widetilde{C}([b_1]_2) = \widetilde{B} \circ \widetilde{A}(X) = [b_2]_1 \iff$$
$$\iff c_{12} \in C \iff C = [c_{12}]_3.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß $[c_{12}]_3 = C$ ist. Es seien $Y \in \mathfrak{G}_1$, $b_3 := Y \cap A = Y \cap [a]_3$, $c_{13} := [b_1]_3 \cap [b_3]_1 = D \cap Y$ und $c_{23} := [b_2]_3 \cap [b_3]_2 = B \cap [b_3]_2$. Dann gilt

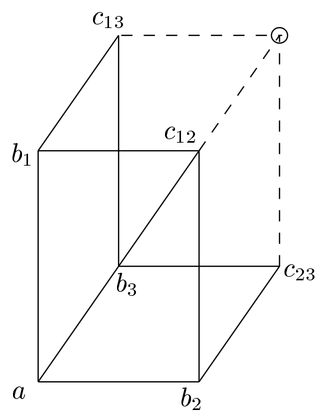
$$\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{D}(Y) = Y \iff \widetilde{C} \circ \widetilde{D}(Y) = \widetilde{C}([c_{13}]_2) = \widetilde{B} \circ \widetilde{A}(Y) = \widetilde{B}([b_3]_2) = [c_{23}]_1$$
$$\iff [c_{12}]_3 \cap [c_{23}]_1 \cap [c_{13}]_2 \neq \emptyset.$$

□



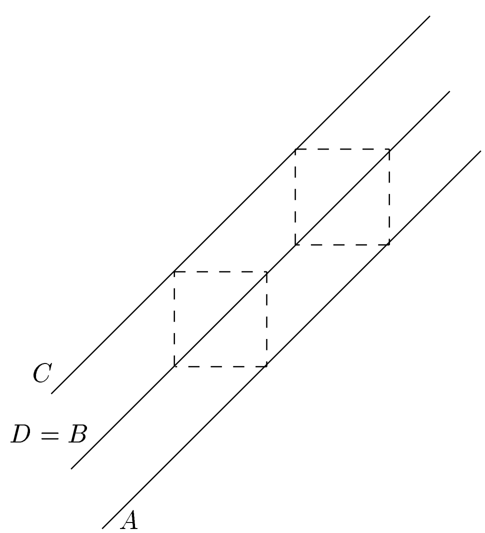
FIGUR 3.5. **RE′**

Die Spezialisierung der Reidemeister-Bedingung **RE** oder **RE′**, ergänzt durch die zusätzliche Voraussetzung $c_{12} \in [a]_3$ bzw. $B = D$, führt zur Bolschen 3-Bedingung **BOL3** oder **BOL3′**, die Bol-Loops kennzeichnen, (vgl. [4]).



FIGUR 3.6. **BOL 3**

Definition 3.2.2. Ein 3-Gewebe heißt *Bolsches 3-Gewebe*, wenn die Bedingung **BOL3** oder **BOL3′** erfüllt ist.

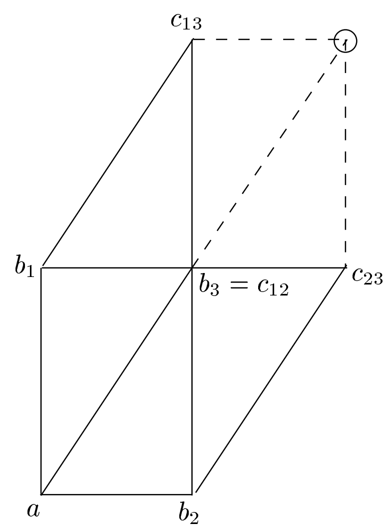


FIGUR 3.7. **BOL′3**

Die Bedingungen **BOL3** und **BOL3′** sind äquivalent mit

BOL3″ $\mathfrak{G}_3$ ist symmetrisch, (vgl. [19]).

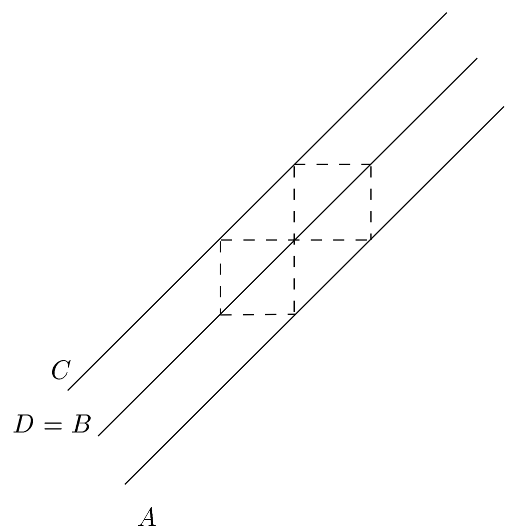
Verlangt man als weitere Voraussetzung $c_{12} = b_3$, so spricht man von der *Sechseckbedingung* **HEX**.



Figur 3.8. **HEX**

Die Bedingung **HEX** ist äquivalent mit

HEX′ Es sei $X \in Fix(\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{B}_{|\mathfrak{G}_1})$. Dann gilt $\widetilde{B} \circ \widetilde{C}(X) \in Fix(\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{B}_{|\mathfrak{G}_1})$.



Figur 3.9. **HEX′**

Wenn $p \in \mathbf{P}$ ein ausgezeichnetes Element ist und die Sechseckbedingung für $c_{12} = b_3 = p$ gilt, dann bezeichnen wir mit **HEX(p)** die Sechseckbedingung bezüglich p.
HEX(p) ist äquivalent mit

HEX(p)′ Es sei $[p]_1 \in Fix\,(\widetilde{A} \circ \widetilde{[p]}_3 \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{[p]}_{3|\mathfrak{G}_1})$. Dann gilt

$$\widetilde{[p]}_3 \circ \widetilde{C}([p]_1) \in Fix\,(\widetilde{A} \circ \widetilde{[p]}_3 \circ \widetilde{C} \circ \widetilde{[p]}_{3|\mathfrak{G}_1}).$$

Im Folgenden seien $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ ein 3-Gewebe, $E \in \mathfrak{G}_3$ eine ausgezeichnete Kette und $0 \in E$. Es sei $(E, +)$ der von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ abgeleitete Loop (vgl. 3.1.13). Für jedes $a \in E$ sei $-a$ bzw. $\sim a$ die Lösung der Gleichung $a + x = 0$ bzw. $x + a = 0$ und $\nu\colon E \longrightarrow E\,;\ x \longmapsto -x$. Für jedes $x \in E$ identifizieren wir x mit $[x]_1$ und X mit $X \cap E$, wobei $X \in \mathfrak{G}_1$ ist.

Dann gilt

Proposition 3.2.1. *Für alle a, $b \in E$ gilt:*

$$\begin{aligned} &a + b = \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}}(b) \quad \textit{und} \\ &E^+ := \{\widetilde{E} \circ \widetilde{A} \mid A \in \mathfrak{G}_3\}. \end{aligned}$$

Zuerst beweisen wir folgenden Hilfssatz:

Lemma 3.2.2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) $\forall\, a \in E\colon a^+ = a^+ \circ (\sim a)^+ \circ a^+$.

ii) $\delta_{\sim a, a} = id$.

iii) $\widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3)$.

Aus i) folgt $\sim a = -a$.

Beweis. „*i)* $\iff$ *ii)*" Für alle $a \in E$:

$$\begin{aligned} &a^+ = a^+ \circ (\sim a)^+ \circ a^+ \iff (\sim a)^+ \circ a^+ = id \iff \quad \text{für jedes} \quad x \in E: \\ &x = (\sim a)^+ \circ a^+(x) = \sim a + (a + x) = (\sim a + a) + \delta_{\sim a, a}(x) \iff \delta_{\sim a, a} = id. \end{aligned}$$

„*i)* $\iff$ *iii)*" Für alle a, $x \in E$ gilt:

$$\overline{\sim a} = [a \Box 0]_3\,, \quad \overline{a} = [0 \Box a]_3.$$

Nach Definition gilt

$$a^+(x) = a + x = \big[[x]_1 \cap \overline{a}\big]_2 \cap E.$$

Es sei

$$x' := (\sim a)^+ \circ \big(a^+(x)\big) = (\sim a)^+(a + x) = \big[\overline{\sim a} \cap [a + x]_1\big]_2 \cap E\,,$$

d.h.

$$(*) \quad (a + x) \Box x' \in \overline{\sim a}.$$

Nach 3.1.3 und 3.1.5 gilt

$$\widetilde{E}\big(x \Box (a + x)\big) = \widetilde{E}(a + x) \Box \widetilde{E}(x) = (a + x) \Box x,$$

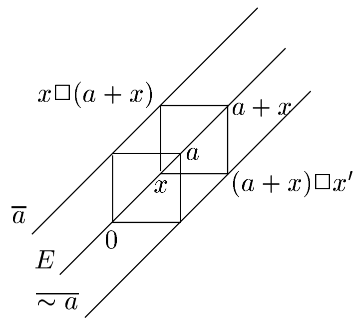
daher folgt

$$
\begin{aligned}
&(\sim a)^+ \circ a^+ = id \iff x = x' \iff \\
&\overline{\sim a} \overset{(*)}{\ni} (a+x)\Box x' = (a+x)\Box x = \widetilde{E}\big(x\Box(a+x)\big), \quad \text{mit} \quad x\Box(a+x) \in \overline{a}, \\
&\iff \widetilde{E}(\overline{a}) = \overline{\sim a},
\end{aligned}
$$

womit

$$\widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3) \iff \forall\, a \in E\colon (\sim a)^+ \circ a^+ = id$$

folgt.



FIGUR 3.10.

Es gilt $a^+ = a^+ \circ (\sim a)^+ \circ a^+ \iff a^+ \circ (\sim a)^+ = id$, d.h.

$$(**) \quad \forall\, x \in E\colon a^+ \circ (\sim a)^+(x) = x.$$

Wir setzen $x = 0$ in $(**)$ ein. Dann gilt $a + (\sim a + 0) = 0$ und daher $a + (\sim a) = 0$, d.h. $\sim a = -a$. $\Box$

Es gilt folgende

Proposition 3.2.3. *Für $a,\ b \in E,\ c := a + b$ und $d := b + a$ gilt:*

(1) $\delta_{a,a} = id \iff (a+a)^+ = a^+ \circ a^+ \iff \widetilde{\overline{a}}(E) \in \mathfrak{G}_3$.

(2) $\forall\, a \in E\colon \delta_{a,-a} = a^+ \circ (-a)^+ = id \iff \widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3)$.

(3) $\delta_{a,b} = \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\,|_{\mathfrak{G}_1}$.

(4) $\delta_{a,b} = \delta_{b,a}^{-1} \iff \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}(\overline{d}) \in \mathfrak{G}_3$.

(5) $\delta_{a,b+a} = \delta_{b,a}^{-1} \iff \big(a + (b+a)\big)^+ = a^+ \circ b^+ \circ a^+ \iff \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E}(\overline{b}) \in \mathfrak{G}_3$.

(6) $\delta_{a,b} \in Aut\,(E, +) \iff \forall\, X \in \mathfrak{G}_3\,,\ \exists\, X' \in \mathfrak{G}_3$ *mit*

$\widetilde{X'} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{x}} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{\overline{c}}\,|_{\mathfrak{G}_1} = id_{\mathfrak{G}_1}$.

Beweis. (**1**) Es gilt

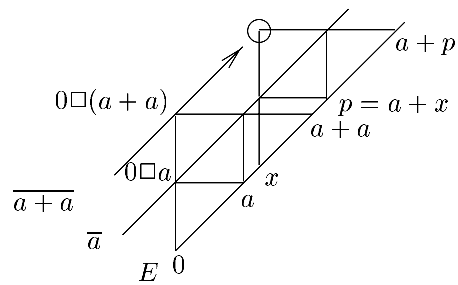
$$\delta_{a,a} = \big((a+a)^+\big)^{-1} \circ a^+ \circ a^+ = id \iff (a+a)^+ = a^+ \circ a^+.$$

Zu jedem Punkt $p \in E$ gibt es ein $x \in E$ mit $p = a + x$. Es sei $\overline{a} = [0\Box a]_3$. Dann gilt

$$\widetilde{\overline{a}}(p) = x\Box(a+p)$$

und somit

$$(a+a)+x = a+(a+x) = a+p \iff \widetilde{\overline{a}}(p) = x\Box(a+p) \in [0\Box(a+a)]_3.$$



FIGUR 3.11.

Also gilt $\delta_{a,a} = id$ genau dann, wenn

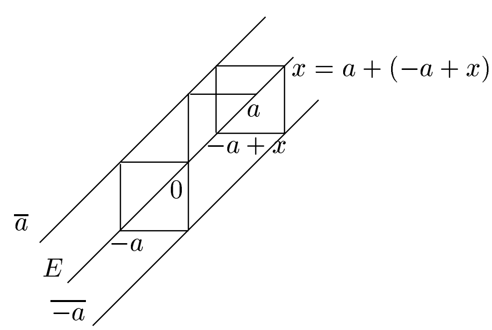
$$\widetilde{\overline{a}}(E) = [0\Box(a+a)]_3 \in \mathfrak{G}_3.$$

(**2**) Wegen 3.2.2 ist die Aussage „$\delta_{\sim a,a} = id$" äquivalent mit $\widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3)$, und aus $\delta_{\sim a,a} = id$ folgt $\sim a = -a$. Also gilt

$$\widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3) \Rightarrow \delta_{a,-a} = id.$$

Es sei jetzt $\delta_{a,-a} = id \quad \forall\, a \in E$. Dann gilt für jedes $x \in E$

$$a^+ \circ (-a)^+(x) = x \iff a + (-a+x) = x \overset{\text{Fig. 3.12}}{\iff} (-a+x)\Box x \in \overline{a}.$$



FIGUR 3.12.

Daher folgt

$$\begin{aligned}
&\widetilde{E}\big((-a+x)\square x\big) \overset{3.1.3,3.1.5}{=} \widetilde{E}(x)\square\widetilde{E}(-a+x) = x\square(-a+x) \in \overline{-a} \\
&\iff \widetilde{E}(\overline{a}) = \overline{-a}, \quad \text{da} \quad \overline{a} = \{(-a+x)\square x \mid x \in E\},
\end{aligned}$$

d.h. $\widetilde{E} \in Aut\,(\mathbf{P},\mathfrak{G}_3)$.
(**3**) Es gilt

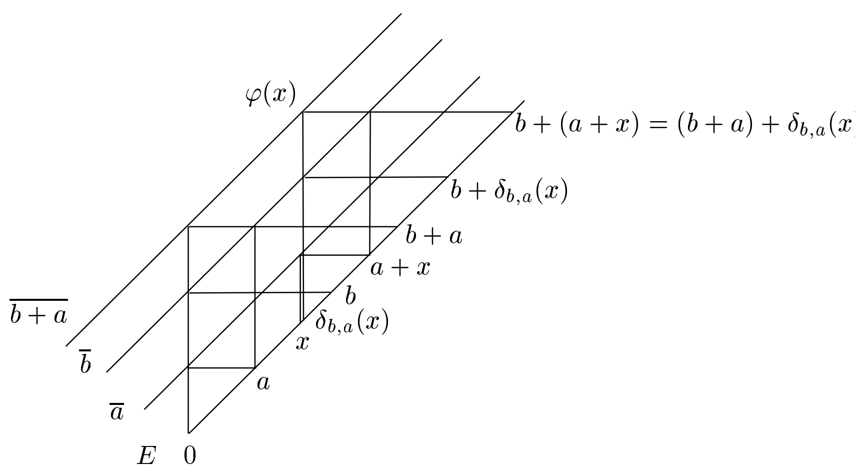
$$\delta_{a,b} := \big((a+b)^+\big)^{-1} \circ a^+ \circ b^+ \overset{3.2.1}{=} \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}|_{\mathfrak{G}_1} = \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}|_{\mathfrak{G}_1}\ .$$

(**4**) Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \mathbf{P} \\ x & \longmapsto \quad \delta_{b,a}(x)\square\big(b+(a+x)\big). \end{cases}$$

Wegen $b+(a+x) = (b+a)+\delta_{b,a}(x)$, gilt $\varphi(E) = \overline{b+a} =: \overline{d}$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\Big(\delta_{b,a}(x)\square\big(b+(a+x)\big)\Big) = \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\big(\big[[\delta_{b,a}(x)]_1 \cap \overline{b}\,\big]_1 \cap \big[[b+(a+x)]_2 \cap \overline{b}\,\big]_2\big) \\
&\overset{3.1.5.3}{=} \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E}\big(\big[[\delta_{b,a}(x)]_1 \cap \overline{b}\,\big]_2 \cap \big[[b+(a+x)]_2 \cap \overline{b}\,\big]_1\big) = \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E}([b+\delta_{b,a}(x)]_2 \cap [a+x]_1) \\
&= \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E}\big((a+x)\square\big(b+\delta_{b,a}(x)\big)\big) \overset{3.1.5.1}{=} \widetilde{\overline{a}}\big((b+\delta_{b,a}(x))\square(a+x)\big) \\
&= \widetilde{\overline{a}}\big(\big[[b+\delta_{b,a}(x)]_1 \cap \overline{a}\big]_1 \cap \big[[a+x]_2 \cap \overline{a}\big]_2 \overset{3.1.5.3}{=} \big[[b+\delta_{b,a}(x)]_1 \cap \overline{a}\big]_2 \cap \big[[a+x]_2 \cap \overline{a}\big]_1 \\
&= [a+(b+\delta_{b,a}(x)\big)]_2 \cap [x]_1 = x\square\big(a+(b+\delta_{b,a}(x))\big) = x\square\big((a+b)+\delta_{a,b}\circ\delta_{b,a}(x)\big).
\end{aligned}$$



Figur 3.13.

Für $x = 0$ folgt

$$\widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\big(0\square(b+a)\big) = 0\square(a+b).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\delta_{a,b} \circ \delta_{b,a} = id \iff \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}(\overline{d}) = \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\big(\varphi(E)\big) = \\
&= \{x\square\big((a+b)+x\big) \mid x \in E\} = [0\square(a+b)]_3 \in \mathfrak{G}_3.
\end{aligned}$$

(**5**) Es gilt

$$\delta_{a,b+a} = \Big(\big(a+(b+a)\big)^+\Big)^{-1} \circ a^+ \circ (b+a)^+ = \delta_{b,a}^{-1} = \Big(\big((b+a)^+\big)^{-1} \circ b^+ \circ a^+\Big)^{-1} =$$

$$=(a^+)^{-1} \circ (b^+)^{-1} \circ (b+a)^+ \iff \Big(\big(a+(b+a)\big)^+\Big)^{-1} \circ a^+ = (a^+)^{-1} \circ (b^+)^{-1} \iff$$

$$\iff \big(\big(a+(b+a)\big)^+ = a^+ \circ b^+ \circ a^+.$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\gamma\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \quad \overline{b} \\ x & \longmapsto \quad \Big[E \cap \big[\overline{a} \cap [x]_1\big]_2\Big]_1 \cap \overline{b} = [a+x]_1 \cap \overline{b}. \end{cases}$$

Die Abbildung γ ist eine Bijektion, und es gilt

$$b^+ \circ a^+(x) = [\gamma(x)]_2 \cap E$$

woraus folgt

$$\widetilde{E}\big(\gamma(x)\big) = \widetilde{E}\Big((a+x)\Box\big(b+(a+x)\big)\Big) \overset{3.1.5.1}{=} \big(b+(a+x)\big)\Box(a+x)$$

also

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{a}} \circ \widetilde{E}\big(\gamma(x)\big) &= \widetilde{\widetilde{a}}\Big(\big[[b+(a+x)]_1 \cap \overline{a}\big]_1 \cap \big[[a+x]_2 \cap \overline{a}\big]_2\Big) \\ &\overset{3.1.5.3}{=} \big[b+(a+x)]_1 \cap \overline{a}\big]_2 \cap \big[[a+x]_2 \cap \overline{a}\big]_1 \\ &= \big[a+\big(b+(a+x)\big)\big]_2 \cap [x]_1 = x\Box\big(a+(b+(a+x))\big) \end{aligned}$$

für $x = 0$,

$$\widetilde{E}\big(\gamma(0)\big) = (b+a)\Box a$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{a}} \circ \widetilde{E}\big(\gamma(0)\big) &= \widetilde{\widetilde{a}}\big((b+a)\Box a\big) = \widetilde{\widetilde{a}}\Big(\big[[b+a]_1 \cap \overline{a}\big]_1 \cap \big[[a]_2 \cap \overline{a}\big]_2\Big) \\ &\overset{3.1.5.3}{=} \big[[b+a]_1 \cap \overline{a}\big]_2 \cap \big[[a]_2 \cap \overline{a}\big]_1 = [a+(b+a)]_2 \cap [0]_1 \\ &= 0\Box\big(a+(b+a)\big) \in [0\Box\big(a+(b+a)\big)]_3 = \overline{a+(b+a)}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\widetilde{\widetilde{a}} \circ \widetilde{E}(\overline{b}) = \widetilde{\widetilde{a}} \circ \widetilde{E}\big(\gamma(E)\big) = \overline{a+(b+a)}$$

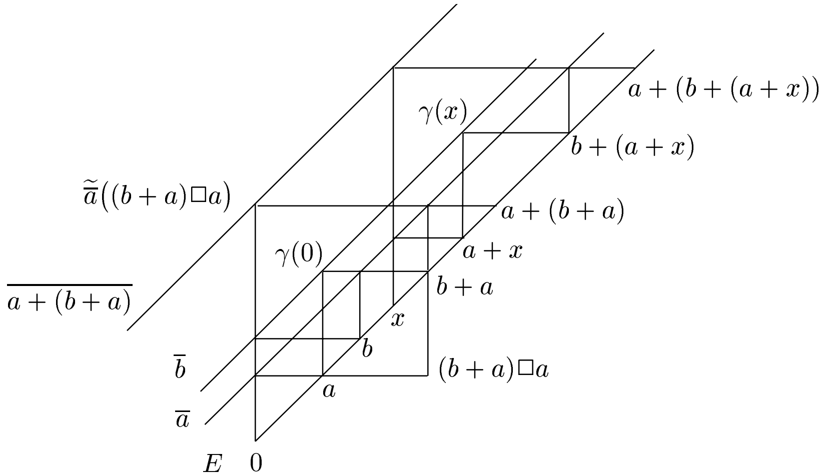
genau dann, wenn für jedes $x \in E$:

$$x\Box\Big(a+\big(b+(a+x)\big)\Big) \in \overline{a+(b+a)},$$

d.h. wenn für jedes $x \in E$:

$$a^+ \circ b^+ \circ a^+(x) = \big(a+(b+a)\big)^+(x)$$

gilt.



FIGUR 3.14.

(**6**) Nach (3) ist $\delta_{a,b} = \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}}\,|_{\mathfrak{G}_1}$. Für alle $x,\ y \in E$ mit $x^+ = \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{x}}$ (vgl. 3.2.1), $\overline{x} \in \mathfrak{G}_3$ gilt

$$\delta_{a,b} \circ x^+(y) = \delta_{a,b}(x) + \delta_{a,b}(y) = \big(\delta_{a,b}(x)\big)^+ \circ \big(\delta_{a,b}(y)\big) \iff$$
$$\delta_{a,b} \circ x^+ = \big(\delta_{a,b}(x)\big)^+ \circ \delta_{a,b} \iff \delta_{a,b} \circ x^+ \circ \delta_{a,b}^{-1} \in E^+ \iff$$
$$\widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{x}} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{\overline{c}} \in E^+ \overset{3.2.1}{\iff}$$
$$\exists\, X' \in \mathfrak{G}_3 \quad \text{mit} \quad \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{x}} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{\overline{c}} = \widetilde{E} \circ \widetilde{X'} \iff$$
$$\widetilde{X'} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{c}} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{x}} \circ \widetilde{\overline{b}} \circ \widetilde{E} \circ \widetilde{\overline{a}} \circ \widetilde{\overline{c}}\,|_{\mathfrak{G}_1} = id_{\mathfrak{G}_1}.$$

□

Wenn $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ ein 3-Gewebe ist, dann sind $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3)$ bzw. $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ Netze und $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_1$ Teilmengen von Ketten von $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_3)$ bzw. $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$. Für jedes $A \in \mathfrak{G}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_1$ sei

$$\widetilde{A}\colon \mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}\,; \quad x \longmapsto \big[[x]_i \cap A\big]_j \cap \big[[x]_j \cap A\big]_i$$

mit $\{i,j\} \in \{1,3\}$ bzw. $\{i,j\} \in \{2,3\}$ (vgl. 3.1.5).

Es sei $\sigma \in \mathrm{S}_3$, wobei S_3 die symmetrische Gruppe von 3 Elemente ist, und $0 \in \mathbf{P}$ ein ausgezeichneter Punkt.

Definition 3.2.3. Wir nennen das Paar $(0,\sigma)$ *Koordinatensystem* und die Bijektion

$$\mathbf{P} \longrightarrow [0]_{\sigma(3)} \times [0]_{\sigma(3)}\,; \quad x \longmapsto \big([x]_{\sigma(1)} \cap [0]_{\sigma(3)}, [x]_{\sigma(2)} \cap [0]_{\sigma(3)}\big)$$

die *Koordinatenfunktion*.

Zur Vereinfachung setzen wir $\sigma = id$ und $E := [0]_3$. Dann ist

$$\mathbf{P} = E \Box E = \{x \Box y \mid x, y \in E\},$$

und x, y sind die Koordinaten des Punktes $x \Box y$.

Definition 3.2.4. Für jeden Punkt $q \in \mathbf{P}$ und jede Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_3$ sei q_σ die durch

$$q_\sigma : \begin{cases} [q]_{\sigma(3)} & \longrightarrow \quad [q]_{\sigma(3)} \\ x & \longmapsto \quad \Big[\big[[x]_{\sigma(2)} \cap [q]_{\sigma(1)}\big]_{\sigma(3)} \cap [q]_{\sigma(2)}\Big]_{\sigma(1)} \cap [q]_{\sigma(3)} \end{cases}$$

definierte Permutation der Erzeugenden $[q]_{\sigma(3)}$ und

$$\overline{q_\sigma} : \begin{cases} \mathbf{P} & \longrightarrow \quad \mathbf{P} \\ p = [x]_{\sigma(1)} \cap [y]_{\sigma(2)} & \longmapsto \quad [q_\sigma(x)]_{\sigma(1)} \cap [q_\sigma(y)]_{\sigma(2)} \end{cases}$$

mit $x := [p]_{\sigma(1)} \cap [q]_{\sigma(3)}$, $y := [p]_{\sigma(2)} \cap [q]_{\sigma(3)}$ die *Erweiterung von* q_σ auf $\mathbf{P}$ (gemäß 3.1.11). Es gilt $\mathit{Fix}\, q_\sigma = \mathit{Fix}\, \overline{q_\sigma} = \{q\}$.

Bemerkung. $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ erfüllt die Sechseckbedingung bezüglich eines Punktes q genau dann, wenn $q_\sigma \circ q_\sigma = id$.

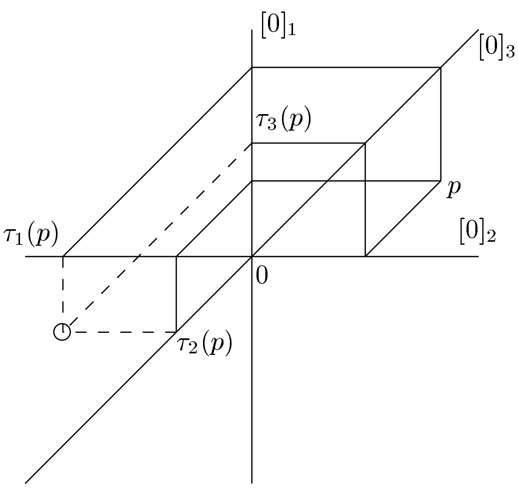
Wir betrachten jetzt die folgende *Knickkonfiguration* bezüglich eines Punktes $q \in \mathbf{P}$ und einer Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_3$:

$\mathbf{KN}(q;\sigma)$ Es seien $\sigma \in \mathrm{S}_3$, $\tau_i \in \mathrm{S}_3 \setminus \mathrm{A}_3$ mit $\tau_i(1) = i$ (d.h. $\tau_1 = (23)$, $\tau_2 = (12)$, $\tau_3 = (13)$), und sei

$$\tau_{\sigma(i)q}(p) := \Big[\big[[p]_{\sigma(i)} \cap [q]_{\sigma\circ\tau_i(2)}\big]_{\sigma\circ\tau_i(3)} \cap [q]_{\sigma(i)}\Big]_{\sigma\circ\tau_i(2)} \cap [q]_{\sigma\circ\tau_i(3)}.$$

Die Knickkonfiguration schließt sich, wenn für jedes $p \in \mathbf{P}$

$$\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} \big[\tau_{\sigma(i)q}(p)\big]_i \neq \emptyset.$$



FIGUR 3.15. $\mathbf{KN}(0; id)$

Es gilt folgendes Kennzeichnungtheorem:

Satz 3.2.4. *Es sei $q \in \mathbf{P}$ und $\sigma \in \mathrm{S}_3$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) $\overline{q}_\sigma \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_{\sigma(3)})$.

(2) *Die Knickkonfiguration* $\mathbf{KN}(q;\sigma)$ *bezüglich* q *und* σ *schließt sich.*

Beweis. O.b.d.A. können wir $\sigma = id$, $q = 0$ und $E = [0]_3$ voraussetzen.
Wir setzen $\tau_i := \tau_{i0}$ (mit $i \in \{1,2,3\}$). Es sei $A \in \mathfrak{G}_3$, $a \in E$ mit $a\Box 0 \in A$ und

$$A' := \left[\overline{0}_{id}(a\Box 0)\right]_3 = \left[0_{id}(a)\Box 0\right]_3.$$

Für jedes $p := x_1\Box x_2 \in A$ mit x_1, $x_2 \in E$ gilt

$$\overline{0}_{id}(p) = 0_{id}(x_1)\Box 0_{id}(x_2) = [0_{id}(x_1)]_1 \cap [0_{id}(x_2)]_2 = [\tau_1(p)]_1 \cap [\tau_2(p)]_2.$$

Dann gilt

$$\overline{0}_{id}(A) \in \mathfrak{G}_3 \iff \overline{0}_{id}(A) = A' \iff [\tau_1(p)]_1 \cap [\tau_2(p)]_2 \in A' := [\tau_3(p)]_3.$$

$\square$

Es gilt

Satz 3.2.5. *Es sei $q \in \mathbf{P}$, $\sigma \in \mathrm{S}_3$, $\omega \in \mathrm{A}_3$, $\tau \in \mathrm{S}_3 \setminus \mathrm{A}_3$. Dann gilt:*

(**1**) *Wenn $\tau \circ \sigma(1) = \sigma(2)$, dann gilt $q_\sigma \circ q_{\tau\circ\sigma} = id_{[q]_{\sigma(3)}}$ und $\overline{q_\sigma} \circ \overline{q_{\tau\circ\sigma}} = id$.*

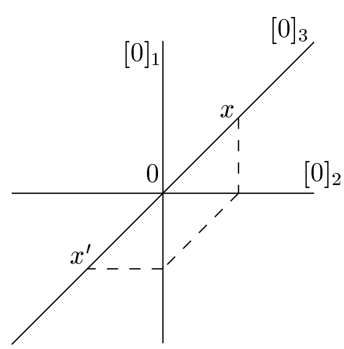
(**2**) *Wenn $\overline{q_\sigma} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_{\sigma(3)})$, dann ist $\overline{q_{\omega\circ\sigma}} = \overline{q_\sigma}$ (d.h. wenn sich die Knickkonfiguration bezüglich q für eine Permutation $\sigma_0 \in \mathrm{S}_3$ schließt, dann schließt sie sich für alle Permutationen $\sigma \in \mathrm{S}_3$).*

Beweis. (**1**) O.b.d.A. können wir $q = 0$ voraussetzen. Es sei zuerst $\sigma = id$. Aus $\tau \circ \sigma(1) = \tau(1) = \sigma(2) = 2$ und $\tau \notin \mathrm{A}_3$ folgt dann $\tau = (12)$.
Nach Definition 3.2.4 gilt für jedes $x \in [0]_3$ (vgl. Fig. 3.16):

$$0_{(12)}(x) = \left[\left[[x]_1 \cap [0]_2\right]_3 \cap [0]_1\right]_2 \cap [0]_3 =: x',$$

und (vgl. Fig. 3.16):

$$0_{id}(x') = \left[\left[[x']_2 \cap [0]_1\right]_3 \cap [0]_2\right]_1 \cap [0]_3 = x.$$



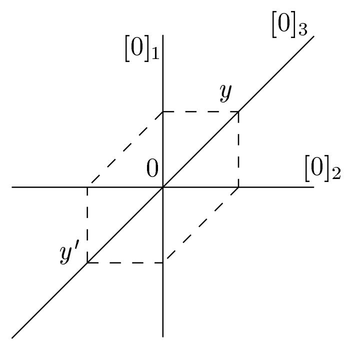
FIGUR 3.16.

Also $0_{id} \circ 0_{(12)} = id_{[0]_3}$. Daraus folgt mit 3.1.12 $\overline{0_{id} \circ 0_{(12)}} = \overline{0_{id}} \circ \overline{0_{(12)}} = id$.
Es sei jetzt $\sigma = (12)$. Aus $\tau \circ (12)(1) = \tau(2) = (12)(2) = 1$ und $\tau \notin \mathrm{A}_3$ folgt dann $\tau = (12)$. Nach Definition 3.2.4 gilt für jedes $y \in [0]_3$:

$$0_{(12)}(y) = \Big[\big[[y]_1 \cap [0]_2\big]_3 \cap [0]_1\Big]_2 \cap [0]_3 =: y',$$

und (vgl. Fig. 3.17):

$$0_{(12)}(y') = \Big[\big[[y']_1 \cap [0]_2\big]_3 \cap [0]_1\Big]_2 \cap [0]_3 = y.$$



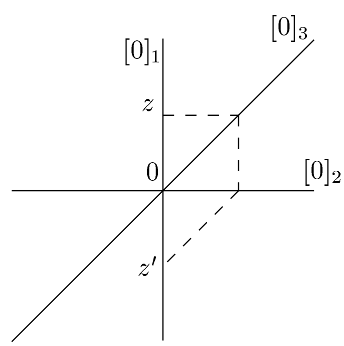
FIGUR 3.17.

Also $0_{(12)} \circ 0_{(12)} = id_{[0]_3}$. Daraus folgt mit 3.1.12 $\overline{0_{(12)} \circ 0_{(12)}} = \overline{0_{(12)}} \circ \overline{0_{(12)}} = id$.
Es sei nun $\sigma = (123)$. Aus $\tau \circ (123)(1) = \tau(2) = (123)(2) = 3$ und $\tau \notin \mathrm{A}_3$ folgt dann $\tau = (23)$. Nach Definition 3.2.4 gilt für jedes $z \in [0]_1$:

$$0_{(13)}(z) = \Big[\big[[z]_2 \cap [0]_3\big]_1 \cap [0]_2\Big]_3 \cap [0]_1 =: z',$$

und (vgl. Fig. 3.18):

$$0_{(123)}(z') = \Big[\big[[z']_3 \cap [0]_2\big]_1 \cap [0]_3\Big]_2 \cap [0]_1 = z.$$



FIGUR 3.18.

Also $0_{(123)} \circ 0_{(13)} = id_{[0]_1}$. Daraus folgt mit 3.1.12 $\overline{0_{(123)} \circ 0_{(13)}} = \overline{0_{(123)}} \circ \overline{0_{(13)}} = id$.

(**2**) Es sei $\omega = (123)$ und $p \in \mathbf{P}$. Wir wählen $x_1, x_2 \in [0]_3$ und $y_1, y_2 \in [0]_1$ mit

$$p = [x_1]_1 \cap [x_2]_2 = [y_1]_2 \cap [y_2]_3.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} x_1' &:= 0_{id}(x_1) = \Big[\big[[x_1]_2 \cap [0]_1\big]_3 \cap [0]_2\Big]_1 \cap [0]_3 = [\tau_1(p)]_1 \cap [0]_3, \\ x_2' &= 0_{id}(x_2) = \Big[\big[[x_2]_2 \cap [0]_1\big]_3 \cap [0]_2\Big]_1 \cap [0]_3 = \Big[\big[[p]_2 \cap [0]_1\big]_3 \cap [0]_2\Big]_1 \cap [0]_3 \\ &= \big[[y_1]_3 \cap [0]_2\big]_1 \cap [0]_3 = \tau_2(p). \end{aligned}$$

Daraus folgt (vgl. 3.1.11)

$$\overline{0_{id}}(p) = x_1' \square x_2' = p'.$$

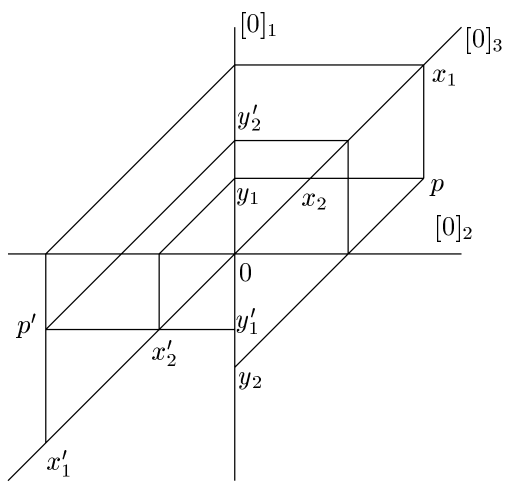
Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} y_1' &:= 0_{(123)}(y_1) = \Big[\big[[y_1]_3 \cap [0]_2\big]_1 \cap [0]_3\Big]_2 \cap [0]_1 = [x_2']_2 \cap [0]_1 = [\tau_2(p)]_2 \cap [0]_1, \\ y_2' &:= 0_{(123)}(y_2) = \Big[\big[[y_2]_3 \cap [0]_2\big]_1 \cap [0]_3\Big]_2 \cap [0]_1 = \Big[\big[[p]_3 \cap [0]_2\big]_1 \cap [0]_3\Big]_2 \cap [0]_1 = \tau_3(p) \end{aligned}$$

daher (wegen Definition 3.2.4) ergibt sich

$$\overline{0_{(123)}}(p) = [y_1']_2 \cap [y_2']_3 = [x_2']_2 \cap [y_2']_3 = [\tau_2(p)]_2 \cap [\tau_3(p)]_3.$$

Also gilt $\overline{0_{id}}(p) = \overline{0_{(123)}}(p)$ genau dann, wenn $[\tau_1(p)]_1 \cap [\tau_2(p)]_2 \cap [\tau_3(p)]_3 \neq \emptyset$.



Figur 3.19.

Somit gilt $\overline{0_{id}} = \overline{0_{(123)}}$ genau dann, wenn sich die Knickkonfiguration bezüglich 0 und $\sigma = id$ schließt. Da $\overline{0_{id}} \in Aut\,(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_3)$ ist, gilt $\overline{0_{(123)}} = \overline{0_{id}}$ wegen 3.2.4. $\square$

Satz 3.2.6. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) $\nu \in \mathit{Aut}\,(E,+)$.

(2) *Die Knickkonfiguration* $\mathbf{KN}(0;id)$ *bezüglich* 0 *und* $\sigma = id$ *schließt sich.*

(3) $\overline{\nu} = \overline{0_{id}} \in \mathit{Aut}\,(\mathbf{P},\mathfrak{G}_3)$.

Beweis. „(1) $\iff$ (2)“ Die Abbildung

$$E \times E \longrightarrow \mathbf{P}\,; \quad (a,b) \longmapsto p := b\Box(a+b)$$

ist bijektiv, und wie man aus Fig. 3.20 ersieht, gilt:

$$\begin{aligned}\tau_1(p) &= (-b)\Box 0 = \nu(b)\Box 0,\\ \tau_2(p) &= -(a+b) = \nu(a+b),\\ \tau_3(p) &= 0\Box(-a) = 0\Box\nu(a).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\nu(a)+\nu(b) = \left[\overline{\nu(a)} \cap [\nu(b)]_1\right]_2 \cap E = \left[[\tau_3(p)]_3 \cap [\tau_1(p)]_1\right]_2 \cap E.$$

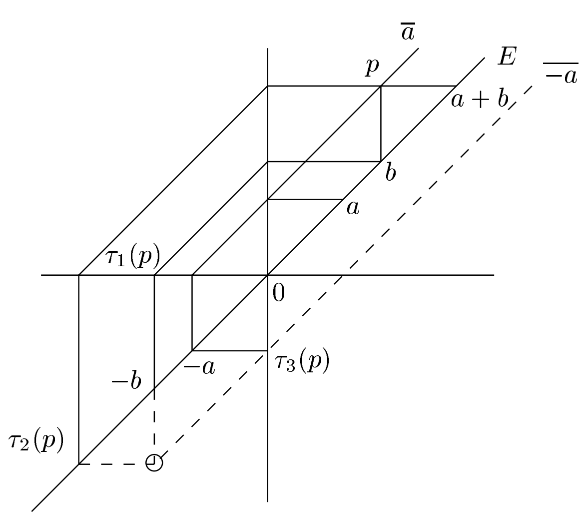
Also gilt

$$\nu(a)+\nu(b) = \nu(a+b) \iff [\tau_2(p)]_2 \ni [\tau_3(p)]_3 \cap [\tau_1(p)]_1.$$

Nach Definition gilt

$$\forall\, x \in E\colon 0_{id}(x) = \left[\left[[x]_2 \cap [0]_1\right]_3 \cap [0]_2\right]_1 \cap [0]_3 = -x,$$

also $0_{id} = \nu$, d.h. nach 3.1.12.2 $\overline{\nu} = \overline{0_{id}}$.
Nunmehr gilt „(2) $\iff$ (3)“ nach Satz 3.2.4. $\Box$



FIGUR 3.20.

Aus 2.1.1 und 3.2.6 erhalten wir folgenden Hauptsatz:

Theorem 3.2.7. *Es sei* $(E, +)$ *der vom* 3-*Gewebe* $(\mathbf{P}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3)$ *abgeleitete Loop (vgl. Satz 3.1.13). Dann ist* $(E, +)$ *ein K-Loop genau dann, wenn* $\mathfrak{G}_3$ *symmetrisch ist (d.h. es gilt* **BOL3**$''$*) und die Knickkonfiguration* $\mathbf{KN}(0; id)$ *bezüglich des Punktes* 0 *und* $\sigma = id$ *schließt sich.*

Beweis. Wegen 3.2.6 ist die Schließung der Knickkonfiguration $\mathbf{KN}(0; id)$ bezüglich des Punktes 0 und $\sigma = id$ gleichbedeutend mit $\nu \in Aut\,(E, +)$ und wegen [19] ist die Symmetrie von $\mathfrak{G}_3$ äquivalent zu der bolschen 3-Bedingung, d.h. der Loop $(E, +)$ erfüllt die Bol-Identität (vgl. [4]). Die Behauptung folgt dann aus 2.1.1. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. 2. Auflage 1973. Springer Berlin-Heidelberg-New York, 1959.

[2] Becker, E.: Euklidische Körper und euklidische Hüllen von Körpern. *J. Reine u. Angew. Math.* **268/269** (1974), 41–52.

[3] Benz, W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Springer Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

[4] Bol, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie 65. Gewebe und Gruppen. *Math. Ann.* **114** (1937), 414–431.

[5] Im, B.: K-Loops in the Minkowski world over an ordered field. *Results Math.* **25** (1994), 60–63

[6] Karzel, H.: Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien. *Arch. Math.* **6** (1955), 284–295.

[7] Karzel, H.: Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechteckaxiom. *Abh. Math. Univ. Hamburg* **32** (1968), 191–206.

[8] Karzel, H.: Recent developments on absolute geometries and algebraization by K-loops. *Erscheint in Discrete Mathematics.* (1999)

[9] Karzel, H. und Kroll, H.-J. Perspectivities in circle geometries. In: *Geometry von Staudt's point of view*. Ed. by P. Plaumann and K. Strambach. Dordrecht-Boston-London, 1981, 51–99.

[10] Karzel, H. und Kroll, H.-J.: *Geschichte der Geometrie seit Hilbert*. Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[11] Karzel, H. und Kist, G. Kinematic algebras and their geometries. In: *Rings and Geometry, NATO ASI Series, Ser. C: Math. and Phys. Sci.* Bd. **160**. D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1985, 437–509.

[12] KARZEL, H. und KONRAD, A.: Reflection groups and K–loops. *J. Geom.* **52** (1995), 120–129.

[13] KARZEL, H. und WEFELSCHEID H.: Groups with an involutory antiautomorphism and K-loops; Application to space-time-world and hyperbolic geometry I. *Results Math.* (1993), 338–354.

[14] KARZEL, H. und WEFELSCHEID H.: A geometric construction of the K-loop of a hyperbolic space. *Geom. Dedicata* **58** (1995), 227–236.

[15] KARZEL, H., SÖRENSEN, K. und WINDELBERG, D.: *Einführung in die Geometrie*. Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973.

[16] KREUZER, A.: Algebraische Struktur der relativistischen Geschwindigkeitsaddition. *Beiträge zur Geometrie und Algebra* **23** TUM-M9312, Technische Universität München (1993)

[17] KREUZER, A.: Inner mappings of Bol loops. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **123** (1998), 53–57.

[18] KREUZER, A. und WEFELSCHEID, H.: On K-loops of finite order. *Results Math.* **25** (1994), 79–102.

[19] KÜHLBRANDT, H.: Automorphismen von 2-Strukturen. *Beiträge zur Geometrie und Algebra* **5** TUM-M7910, Technische Universität München (1980), 49–65.

[20] REIDEMEISTER, K.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. V. Gewebe und Gruppen. *Math. Z.* **29** (1929), 427–435.

[21] SPERNER, E.: Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. *Arch. Math.* **5** (1954), 458–468.

[22] THOMSEN, G.: Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung. *Hamburger Math. Einzelschr.* **15** (1933)

[23] UNGAR, A. A.: Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group. *Found. Phys. Lett.* **1** (1988), 57–89.

[24] UNGAR, A. A.: Weakly associative groups. *Results Math.* **17** (1990), 149–168.

[25] WÄHLING, H.: *Theorie der Fastkörper*. Thales Verlag, Essen, 1987.

[26] ZIZIOLI, E.: Fibered incidence loops and kinematic loops. *J. Geom* **30** (1987), 144–156.

Axiome

L1r Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Gleichung $a + x = b$ eindeutig lösbar in $\mathbf{L}$.

L2 Es gibt ein neutrales Element $0 \in \mathbf{L}$ mit $0 + a = a = a + 0$ für jedes $a \in \mathbf{L}$.

L1l Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Gleichung $y + a = b$ eindeutig lösbar in $\mathbf{L}$.

LK1 Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ ist die Abbildung $\delta_{a,b}$ ein Automorphismus des Loops $(\mathbf{L}, +)$.

LK2 Für alle Elemente $a, b \in \mathbf{L}$ gilt:
a) $-(a + b) = -a + (-b)$
b) $\delta_{a,b} = \delta_{a,b+a}$.

B (Bol-Identität) Für alle $a, b, c \in \mathbf{L}$ gilt $a + (b + (a + c)) = (a + (b + a)) + c$, d.h. $a^+ \circ b^+ \circ a^+ = (a + (b + a))^+$.

FS1 $\forall X \in \mathfrak{B} \colon |X| \geq 2$.

FS2 $\bigcup \mathfrak{B} = \mathbf{M}$.

FS3 $\forall X, Y \in \mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad X \neq Y \colon X \cap Y = \{b\}$.

Z1 $\forall \delta \in \Delta, \ \forall X \in \mathfrak{S} : \ \ \delta(X) \in \mathfrak{S}$.

Z2 $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{C}, \forall X \in \mathfrak{S}$ mit $0 \in \alpha^{-1} \circ \beta(X) \colon \alpha^{-1} \circ \beta(X) \in \mathfrak{S}$.

B1 $\forall x \in \mathbf{M} \ : \ x^\circ(0) = x$.

B2 $\forall a, b \in \mathbf{M} \ \exists c \in \mathbf{M} \ : \ a^\circ \circ b^\circ \circ a^\circ = c^\circ$.

S1 $\forall a, b \in \mathbf{M} \ \ \exists_1 m \in \mathbf{M} \ : \ \widetilde{m}(a) = b$.

B1′ $\forall x \in \mathbf{M} \quad \exists_1 x' \in \mathbf{M} \colon \widetilde{x'}(0) = x$.

N1 Zu jedem Punkt $x \in \mathbf{P}$ und zu jedem $i \in \{1, 2\}$ gibt es genau eine Erzeugende $G \in \mathfrak{G}_i$ mit $x \in G$, die wir mit $[x]_i := G$ bezeichnen.

N2 Je zwei Erzeugende aus verschiedenen Klassen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ schneiden sich in genau einem Punkt.

K Für jedes $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \colon \alpha(X) \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$.

N3 Für jedes $X \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \colon |X \cap K| = 1$.

T	$\forall\, A, B \in \mathfrak{G} \quad \exists\, C \in \mathfrak{G}\colon \widetilde{C}(A) = B.$
$\overline{\mathbf{T}}$	$\forall\, A, B \in \mathfrak{G} \quad \exists_1\, C \in \mathfrak{G}\colon \widetilde{C}(A) = B.$
S	$\forall\, A, B \in \mathfrak{G}\colon \widetilde{A}(B) \in \mathfrak{G}.$
N1′	Zu jedem Punkt $x \in \mathbf{P}$ gibt es genau ein $[x]_3 \in \mathfrak{G}_3$ mit $x \in [x]_3$.
SK1	$\forall\, A \in \mathfrak{F}\colon Fix\, \widetilde{A} = A.$
SK2	$\forall\, A, B, C \in \mathfrak{F} \quad \exists\, D \in \mathfrak{F}\colon \widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \widetilde{D}.$
SKS3	$\forall\, a \in \mathbf{L}, \quad \forall\, X \in \mathfrak{F}, \quad \forall\, x \in X\colon \widetilde{\delta_{a,x}(X)} = \delta_{a,x} \circ \widetilde{X} \circ \delta_{a,x}^{-1}.$
SK3	$\forall\, a, b \in \mathbf{L}\colon \delta_{a,b} \circ \widetilde{\widetilde{\mathfrak{F}}} \circ \delta_{a,b}^{-1} = \widetilde{\widetilde{\mathfrak{F}}}.$

Index

Zusammenfassung

Das Thema dieser Arbeit ist die Beziehung zwischen K-Loops und Spiegelungsgeometrie bzw. Punktspiegelungsgeometrie.
Eine zentrale Aussage ist Satz 2.4.2, der Spiegelungsstrukturen algebraisch K-Loops zuordnet. Andererseits läßt sich mit jedem K-Loop eine Spiegelungsstruktur assoziieren (vgl. Satz 2.6.4), aus der der K-Loop zurückgewonnen werden kann.
Nachdem in [12] und [13] gezeigt worden war, daß man aus jeder nicht elliptischen absoluten Geometrie einen K-Loop ableiten kann, stellt sich die gleiche Aufgabe für weitere Geometrien, um einen Überblick über möglichst viele Beispielklassen von K-Loops zu gewinnen.
Die vorliegende Dissertation verfolgt dieses Ziel für die unitären Geometrien.
Zuerst werden orthogonale und unitäre Räume betrachtet und dann metrische projektive Räume. Ein Hauptproblem ist die Untersuchung von Mittelpunkten in unitären bzw. projektiven unitären Räume. Diese benötigt man, um Punktspiegelungsstrukturen zu erhalten (vgl. die Paragraphen 1.2 und 1.3). Dann wird die Struktur der zugehörigen K-Loops näher erkundet und es werden neue Beispielklassen von K-Loops vorgestellt (vgl. Paragraph 2.5).
Ein anderer Ansatz zur Theorie der K-Loops ist die Theorie der 3-Gewebe.
Nach Kreuzer (vgl. [17]) stimmen die Begriffe K-Loop und Bruck-Loop überein. Bruck-Loops sind Bol-Loops, in denen das Invertieren ein Automorphismus ist. Bol gewann die nach ihm benannten Bol-Loops durch Koordinatisierung von 3-Geweben, die bestimmte Schließungsfiguren erfüllen.
In dem letzten Kapitel der Arbeit wird genau bestimmt, welche Konfigurationen K-Loops festlegen. In Paragraph 3.2 wird eine neue Konfiguration eingeführt, die sogenannte Knickkonfiguration, die die von 3-Geweben abgeleiteten K-Loops vollständig charakterisiert.