

Portfolio-Modelle mit unscharfen Parametern

Ein theoretischer und empirischer Vergleich mit dem klassischen Modell nach
Markowitz.

Dissertation

Zur Erlangung der Würde des Doktors der
Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Li Duan

Hamburg

2011

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, ohne deren liebevolle, geduldige und großzügige Unterstützung die Anfertigung dieser Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Peter Stahlecker für die intensive und motivierende wissenschaftliche Betreuung.

Li Duan
Hamburg, den 7. April 2011

Als Dissertation angenommen vom
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hamburg

Prüfungsausschuss
Vorsitzender: Prof. Dr. Bernhard Arnold
1. Gutachter: Prof. Dr. Peter Stahlecker
2. Gutachter: Prof. Dr. Claus-Peter Ortlieb

Disputation: 22. Februar 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung und allgemeine Grundlagen	3
2.1	Grundlage der Modellbildung	3
2.2	Wertpapiere	4
2.3	Portfolio-Management	5
2.4	Rendite	6
2.5	Statistische Kenngrößen und Konzepte	8
3	Das klassische Portfolio-Modell	11
3.1	Das Modell	11
3.2	Lösung des Modells	13
4	Grundlage der Fuzzy-Logik	17
4.1	Unschärfe als Anstoß zur Fuzzy-Logik	17
4.2	Unscharfe Mengen	19
4.3	Unscharfe Zahlen	21
4.4	Lineare Fuzzy-Optimierung	23
5	Fuzzy-Portfolio-Modelle	25
5.1	Überblick der vorhandenen Fuzzy-Portfolio-Modelle	25
5.2	Modellierung der Vorinformationen	26
5.3	Defuzzifikationsmethoden	31
5.3.1	Schwerpunktmethode für unscharfe Zahlen vom LR-Typ	31
5.3.2	Defuzzifikation durch α -Schnitte	33
5.4	Naive Renditemaximierung mit Schwerpunktmethode	34
6	Hauptmodell	41
6.1	Vorinformationen	41
6.2	Modell und Defuzzifikation	52
6.3	Modellvergleich und -lösung	56
6.3.1	Für risikoneutrale Anleger	57
6.3.2	Für pessimistische Anleger	58
6.3.3	Für optimistische Anleger	68
6.3.4	Abschließender Vergleich des Hauptmodells mit dem klassischen Modell	70
7	Implementierung der Modelle	72
7.1	Auswahl und Beschaffung des Datenmaterials	72
7.2	Aufbereitung des Datenmaterials	74
7.3	Nach dem klassischen Modell	75

7.4	Umsetzung des Fuzzy-Hauptmodells	76
7.5	Vergleich der Ergebnisse und kritische Beurteilung	97
8	Schlussbemerkung	106
	Anhänge	106
A	Verwendete elektronische Dateien	107
B	Symbolverzeichnis	109
C	Abbildungsverzeichnis	112
D	Tabellenverzeichnis	113
	Literaturverzeichnis	114

Kapitel 1

Einleitung

Seit seiner Auszeichnung mit dem Nobelpreis ist das Mean-Variance-Modell nach Harry M. Markowitz ein wichtiges quantitatives Instrument der Optimierung im Portfolio-Management. Diese Theorie brachte die Statistik in die Portfolio-Optimierung und signalisierte damit den erfolgreichen Einzug der quantitativen Methoden in das Portfolio-Management. Seitdem wurden zahlreiche statistische Modelle entworfen, die sich auf verschiedene Aspekte und Schwerpunkte der Portfolio-Optimierung konzentrieren.

Auch in dieser Arbeit wird das Ziel verfolgt, Modelle für die Portfolio-Optimierung zu entwerfen und zu implementieren. Dabei stehen quantitative Methoden im Vordergrund, die nicht der Statistik, sondern der Fuzzy-Logik zuzuordnen sind. Eine theoretische Grundlage wird in den ersten Abschnitten aufgebaut, Objekte in Portfolio-Management und -Optimierung werden vorgestellt und verwendete Begriffe werden definiert. Diese werden sowohl in den vorhandenen, statistischen Portfolio-Modellen, als auch in den neuen Modellen in einem Fuzzy-Kontext verwendet. Weiter wird das klassische Portfolio-Modell nach Markowitz vorgestellt, das als ein Vergleichsmodell für das neue Hauptmodell mit Fuzzy-Kontext dient.

Das Hauptmerkmal der angestrebten neuen Modelle besteht darin, die Fuzzy-Logik anstelle der Statistik für die Portfolio-Optimierung zu verwenden. Sowohl die Statistik als auch die Fuzzy-Logik erfassen die in der realen Welt auftretenden Unsicherheiten und Unschärfen quantitativ. Aber zwischen der Statistik und der Fuzzy-Logik gibt es Unterschiede in Rahmen der Voraussetzungen und hinsichtlich der zur Verfügung stehenden Konstrukte sowie Methoden.

Im Gegensatz zur Fuzzy-Logik ist die Statistik bereits vielseitig in der Literatur, Lehre und Forschung integriert. Doch der Einzug der Fuzzy-Logik in verschiedene Bereiche, in denen die Statistik als die hauptsächliche quantitative Analysemöglichkeit gilt, wird sicherlich nicht mehr in ferner Zukunft liegen. Auch das Portfolio-Management mit dem Ziel einer Portfolio-Optimierung ist einer dieser Bereiche. Bereits vor dem Millenniumswechsel wurden Portfolio-Modelle veröffentlicht, die Elemente und Methoden der Fuzzy-Logik verwenden. Parallel dazu wird Forschung zur Fuzzy-Logik selbst betrieben, so dass der Umfang und die Funktionalität des Instrumentariums stetig vergrößert und verbessert werden. In dieser Arbeit wird auf die Grundlagen der Fuzzy-Logik eingegangen. Anschließend wird die Einsatzmöglichkeit der Fuzzy-Logik am Modell demonstriert. Schließlich wird das eigentliche Hauptmodell entwickelt, das den Kern dieser Arbeit darstellt.

Methodisch wird zunächst die theoretische Seite behandelt, so dass eine theoretische Grundlage anhand der Beispiele aufgebaut wird. Anschließend werden Modelle entwickelt, die die reale Fragestellung der Portfolio-Optimierung aus einem bestimmten Blickwinkel mathematisch erfassen. Nach der Formulierung der Modelle wird stets nach einer adäquaten Lösung gesucht, die das Ergebnis der Optimierung darstellt. Zuletzt werden reale

historische Daten in Modellen eingesetzt und mit Hilfe der theoretischen Ergebnisse verarbeitet. Diese Ergebnisse stellen eine Verbindung zwischen den theoretischen Entwicklungen und der realen Welt dar. Da die Modelle stets unterschiedliche Schwerpunkte v. a. im Bezug auf Risikoerfassung und Risikodarstellung setzen, weichen die Modellformulierungen voneinander ab. Dies zieht wiederum unterschiedliche Modellergebnisse nach sich. Auch deswegen ist ein Vergleich der Ergebnisse sinnvoll und lohnenswert. Besonders wichtig ist der Vergleich zwischen dem bereits anerkannten klassischen Modell nach Markowitz und dem Hauptmodell als Neuentwicklung.

Nach diesem Schema wird in Kapitel 2 eine allgemeine theoretische Grundlage geschaffen. Dabei werden wichtige Elemente und Konzepte der Modellierung, des Portfolio-Managements und der Statistik dargestellt. Als das Vergleichskandidat für das zu entwickelnde Fuzzy-Modell wird das klassische Portfolio-Modell nach Markowitz in Kapitel 3 dargestellt. Anschließend, um in dieser Arbeit eine Trennlinie zwischen Statistik und Fuzzy-Logik zu ziehen, wird in Kapitel 4 mit Schwerpunkt auf unscharfen Mengen in die Fuzzy-Logik eingeführt. In Kapitel 5 wird neben einem groben Überblick über vorhandene Fuzzy-Modelle auch eine Einführung in zwei wichtige Defuzzifikationsmethoden angeboten. Darauf basierend wird als Hauptteil dieser Arbeit das Fuzzy-Hauptmodell in Kapitel 6 entwickelt und die zugehörigen Lösungen werden hergeleitet. Schließlich wird in Kapitel 7 anhand empirischer Daten das klassische Modell und das Fuzzy-Modell implementiert. Im letzten Kapitel runden abschließende Bemerkungen diese Arbeit ab.

Kapitel 2

Einführung und allgemeine Grundlagen

2.1 Grundlage der Modellbildung

Der Begriff Modell stammt ursprünglich von dem lateinischen Begriff „modulus“, was Maß oder Maßstab bedeutet. [Mey95] In der heutigen Definition ist ein Modell nicht zwingend nur ein reales Objekt. Es kann auch ein abstraktes Hilfsmittel zur schematischen Repräsentation eines Problems in vielen Wissenschaftsdisziplinen sein. Mit ihrer Hilfe werden komplizierte Sachverhalte und Problemstellungen der Realität erfasst, um eine anschließende systematische Analyse zu ermöglichen.

Der moderne Modellbegriff gewann erst im 19. Jahrhundert seine Form. Nach der Darstellung von Ortlieb geht „der Begriff des Modells im modernen Sinn“ [Ort06, S.35] auf Heinrich Hertz zurück. Nach seiner Beschreibung in „Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhang dargestellt“ (erschieden posthum 1894) sollen die „äußeren Gegenstände“ durch „innere Scheinbilder oder Symbole“ abgebildet werden, um die „erstrebte Voraussicht“ zu erlangen. Für die geeignete Wahl der Abbildung nennt Hertz drei Kriterien: Zulässigkeit, Richtigkeit und Zweckmäßigkeit.

Ein logisch widerspruchsfreies Modell erfüllt das Zulässigkeitskriterium. Das Modell ist richtig, wenn es die Realität richtig abbildet. Schließlich ist die Zweckmäßigkeit ein Kriterium, das die Verwendung des Modells hervorhebt. Dies schreibt vor, dass das Modell die wesentlichen Beziehungen des abzubildenden Gegenstandes bzw. Sachverhalts widerspiegelt. Falls zwei gleichzeitig zulässige und richtige Modelle konkurrieren, soll dasjenige gewählt werden, das für die Verwendung einfacher ist.

Leider können diese Bewertungskriterien in der Realität oft nicht objektiv angelegt werden, weil beispielsweise in vielen Wissenschaftsbereichen ein Experiment oder sonstige Überprüfungen nur teilweise möglich oder gar unmöglich sind. „Dennoch gibt es weitere Forderungen an eine saubere mathematische Modellbildung, die erfüllt werden sollen.“ Es sind die „Anforderungen, welche wir an eine wissenschaftliche Darlegung solcher Bilder stellen.“ [Ort06, S.37] Dies bedeutet, dass nicht nur die Voraussetzungen und Annahmen eines Modells klar formuliert werden sollen, sondern auch deren Begründungen. [Ort06, S.38] Durch diese Anforderung wird u. a. sichergestellt, dass die Modellierung zielgerichtet ist. Beispielsweise sollten die Funktionen der Annahmen klar sein, ebenso wie die Art und Weise, wie sie zur Lösung des realen Problems beitragen. Dadurch könnte sich herausstellen, von welchen Zusammenhängen bei der Modellierung abstrahiert wird, damit die Zweckmäßigkeit des Modells erfüllt wird.

In der Praxis ist die Modellierung eine in der Regel sehr komplexe Aufgabe, die keiner standardisierten Vorgehensweise folgt, aber in den meisten Lehrbüchern wie folgt beschrieben

wird: „Der Ausgangspunkt ist ein reales Problem oder erklärungsbedürftiges Phänomen, hieraus wird ein mathematisches Problem entwickelt, ein Bild der Wirklichkeit, dieses wird mit mathematischen Methoden gelöst, die mathematische Lösung wird hinsichtlich ihrer realen Bedeutung interpretiert und auf ihre Relevanz für das reale Problem überprüft.“ Die Abbildung 2.1 erläutert diese allgemeine Auffassung. [Ort06, S.39f.]

Dabei geht es nicht um eine Art Algorithmus, den man nur in Gang setzen muss, um gesicherte Erkenntnisse zu produzieren. Vielmehr bedarf die Modellierung eines genauen und problemspezifischen Vorgehens.

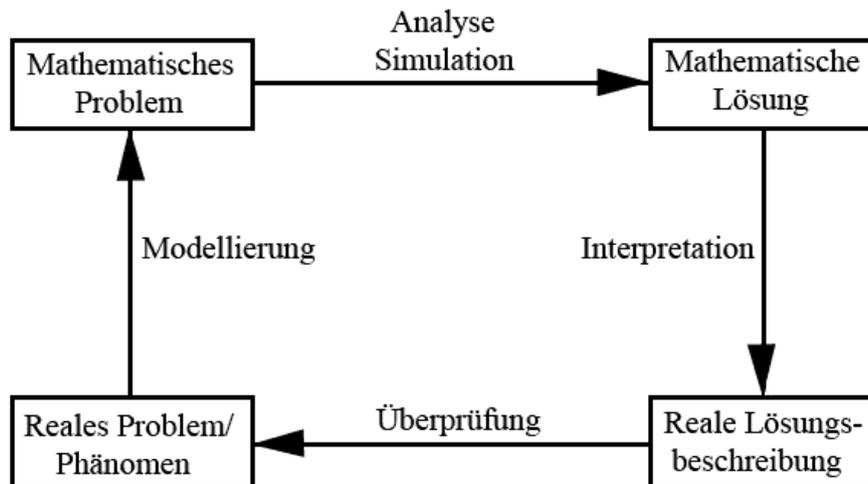


Abbildung 2.1: Modellierung

2.2 Wertpapiere

Allgemein kann ein Portfolio aus verschiedenen Positionen von Vermögensgegenständen bestehen, die v. a. Wertpapiere sind. Allen börslich handelbaren Wertpapieren ist gemeinsam, dass ihr Preis bedingt durch verschiedene Einflussfaktoren Schwankungen unterliegt. Dabei sind Angebot und Nachfrage, aber auch die unterschiedlichen subjektiven Einschätzungen eines Wertpapiers, die Haupteinflussfaktoren. Um den Preis eines Wertpapiers festzustellen, werden Angebote und Nachfragen an der Börse zusammengeführt. Die Feststellung des Preises wird auch als Notierung bezeichnet. Der ermittelte amtliche Preis bzw. Kurs eines Wertpapiers wird als Notiz bezeichnet. [Fra] Durch die Entwicklung des Börsenhandels werden neue Wertpapiere und Finanzinstrumente konstruiert, die auf der Börse gehandelt werden können. Für unser Portfolio-Modell werden schwerpunktmäßig Aktien und Anleihen betrachtet. Außer diesen beiden gibt es viele weitere Wertpapiere, auf die hier aber nicht eingegangen wird.

Aktienwesen

Die einfachste und grundlegendste Komponente eines Portfolios sind Aktien. Diese Art von Wertpapieren entstand in 16. Jahrhundert mit der Entstehung der Aktiengesellschaft im Bereich des Überseehandels. Jede Aktie bringt dem Inhaber grundsätzlich zwei Rechte.

Zunächst zertifiziert sie ihrem Inhaber sein Vermögensrecht bestehend aus dem Dividendenrecht, Bezugsrecht bei Kapitalerhöhung und dem Anspruch auf Anteil am Liquidationserlös bei der Auflösung der Aktiengesellschaft. Zusätzlich verleiht jede Aktie ihrem Inhaber Verwaltungsrechte bestehend aus dem Teilnahmerecht an der Hauptversammlung, dem Auskunftsrecht zu den Gesellschaftsangelegenheiten und dem Anfechtungsrecht bei Verdacht auf nicht satzungsgemäße Beschlussfassung auf der Hauptversammlung. [Bun]

Es ist, zu beachten, dass man aufgrund ihres erheblichen Unterschiedes zwischen Stamm- und Vorzugsaktie differenziert. Eine Stammaktie bringt gleichzeitig beide oben beschriebenen Rechte mit sich. Eine Vorzugsaktie gestattet jedoch kein Stimmrecht. Aber als Kompensation für den Verzicht auf das Stimmrecht wird in der Regel eine höhere Dividende gewährt. Im Normalfall wird stets von einer Stammaktie ausgegangen. Aktien können sowohl durch Kapitaleinlage bei der Gründung der Aktiengesellschaft, sogenannter Handel auf dem primären Markt, als auch durch Handel an den Börsen erworben werden, sogenannter Handel auf dem sekundären Markt. Die bekannteste und auch die maßgebliche Aktienbörse der Welt ist die New York Stock Exchange in Manhattan. In Deutschland ist die Frankfurter Börse die zentrale Anlaufstelle des Wertpapiergeschäfts. Die klassische Form der Börse ist die Präsenzbörse oder der Parketthandel. Durch technische Fortschritte, v. a. im Bereich der IT, gewinnt die Computerbörse immer mehr an Bedeutung. In Frankfurt ist es das XETRA(Exchange Electronic Trading)-Handelssystem und in New York das NASDAQ(National Association of Securities Dealers Automated Quotations System).

Anleihe

„Die Anleihe oder die Obligation ist eine Art der festverzinslichen Wertpapiere mit unterschiedlicher Laufzeit, die sowohl von Unternehmen, Kreditinstituten, aber auch von dem Staat emittiert werden.“ [Mey95, Band 2, S.8] Deswegen wird zwischen Unternehmensanleihen, Bankschuldverschreibungen und öffentlichen Anleihen unterschieden. Im Gegensatz zur Aktie wird durch den Erwerb einer Anleihe kein Anteil am Eigenkapital eines Unternehmens oder eines Kreditinstituts erworben, stattdessen wird den Unternehmen bzw. Kreditinstituten Fremdkapital gewährt. Neben dem Emittenten gibt es weitere Merkmale, wie z. B. Zinshöhe, Zinszahlung, Laufzeit und andere Modalitäten, die Anleihen voneinander unterscheiden. Anleihen sind eine Art festverzinsliches Wertpapier, aber sie enthalten weit mehr Risiken als das einfache Sparen. Zu den Risiken zählen beispielsweise das Kursrisiko, Ausfallrisiko, Zinsänderungsrisiko, Währungs- bzw. Wechselkursrisiko, Kündigungsrisiko und Inflationsrisiko.

2.3 Portfolio-Management

Allgemein wird eine Zusammenstellung des Anlagevermögens als Portfolio bezeichnet. Als Anlagevermögen gelten sowohl börslich handelbaren Wertpapiere, als auch diejenigen Anlagen, die nicht auf den Börsen gehandelt werden, z.B. Sparbucheinlagen oder Immobilien. Generell wird als Ziel der Vermögensverwaltung gesetzt, den Wert des zu betreuenden Portfolios zu erhalten und ihn zu maximieren. Da aber die meisten Investitionsobjekte, v. a. die börslich handelbaren Wertpapiere, zum Teil erheblichen Kursschwankungen unterliegen, ist eine Risikoeinstufung und -minimierung zwingend notwendig. Deswegen soll eine vorausgehende Analyse vor der Portfolio-Bildung durchgeführt werden, damit das resultierende Portfolio die Zielsetzungen optimal erfüllt. Aber nicht nur die anfängliche Zusammenstellung sondern auch das Portfolio-Management hat maßgeblichen Einfluss auf die Wertentwicklung des Portfolios. Grundsätzlich unterscheidet man zwischen aktiven

und passiven Portfolio-Strategien. (Vgl. [Sch09])

Die aktive Strategie versucht, durch Umschichtungen und Änderungen der Portfoliozusammensetzung eine risikoadjustierte Rendite zu erzielen, die besser als ein Benchmark- oder Vergleichsportfolio ist. Für die Zusammenstellung des Portfolios spielen zwei grundsätzliche Bestimmungsfaktoren eine Rolle. Einerseits sind es die Informationen der investierenden Seite, wie z. B. die Nutzen- und Risikovorstellung des Anlegers oder auch der Anlagehorizont. Andererseits sind es die Informationen der investierten Seite, wie z. B. Informationen über die Anlagemöglichkeiten. Das Portfolio-Management versucht, durch Anpassungen und Optimierungen des Portfolios eine maximale risikoadjustierte Überrendite im Vergleich zur Marktrendite zu erzielen. Aber hohe Kosten stellen einen unvermeidbaren Nebeneffekt dar, der möglicherweise die Überrendite erheblich vermindern kann. Diese Kosten entstehen einerseits durch häufige Anpassungen des Portfolios an die aktuellen Marktsituationen und andererseits durch die Beschaffung der Informationen aus den tiefgehenden Analysen der Marktsituationen. [Sch03, S.11f.]

Anders als die aktive Strategie setzt das passive Portfolio-Management auf den Mechanismus des Marktes oder die Markteffizienz. Dabei ist die Auffassung maßgebend, dass langfristig keine risikoadjustierte Überrendite im Vergleich zur Marktrendite erzielt werden kann. Deswegen besteht eine passive Portfolio-Strategie fast immer darin, in ein Marktportfolio oder einen Marktindex zu investieren, das bzw. der gerade die Entwicklung des gesamten Marktes widerspiegelt. Der Nachteil dieser Strategie im Vergleich zur aktiven Strategie steckt bereits in dieser Annahme, denn diese Strategie kann dauerhaft kein besseres Ergebnis als der Markt liefern.

2.4 Rendite

Um die Eigenschaften unterschiedlicher Portfolio-Zusammenstellungen miteinander vergleichen zu können, wird auf einheitlich definierte Kennzahlen oder Kenngrößen zurückgegriffen. Die bekannteste und auch die am häufigsten verwendete Kenngröße ist die Rendite, wenn der Ertrag bzw. die Performance eines Portfolios untersucht wird. Diese Kenngröße gibt an, welche prozentuale Wertsteigerung in dem betrachteten Zeitraum erreicht wurde. Oft wird die Rendite in den Wirtschaftswissenschaften als das Verhältnis zwischen dem Gewinn und dem eingesetzten Kapital definiert, aber man sollte beachten, dass die Rendite unterschiedlich definiert werden kann.

Für die Berechnung der Rendite spielen zwei Aspekte eine Rolle. Der erste Aspekt betrifft Aktiensplits und Dividenden. Dieser wird oft dadurch berücksichtigt, dass die Rendite aus den um Aktiensplitt und Dividenden adjustierten Kursdaten berechnet wird. Der zweite Aspekt betrifft die Modellierung der Zeit. Es gibt zwei Renditenarten, nämlich die diskrete und die kontinuierliche Rendite. Bei einer Unterstellung diskreter Perioden, d. h. dass sich die Zeit aus getrennten Zeitperioden oder gar aus getrennten Zeitpunkten zusammen ergibt, soll die diskrete Rendite verwendet werden. Wenn die Zeit als stetig modelliert wird, d. h. die Zeit ist zusammenhängend und kontinuierlich, soll die kontinuierliche Rendite entsprechend herangezogen werden. Beide Renditenarten haben wegen unterschiedlicher Annahmen der Rahmenbedingungen unterschiedliche Eigenschaften, die bei der Handhabung Vor- bzw. Nachteile aufweisen.

Definition 2.1 (Diskrete Rendite). Sei $W_i \in \mathbb{R}$ der Wert eines Wertpapiers bzw. eines Portfolios zum Zeitpunkt $i \in \mathbb{N}$ und $W_{i-1} \in \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $i - 1$. Die diskrete Rendite $r_i^{disk} \in \mathbb{R}$ eines Wertpapiers zwischen zwei Zeitpunkten i und $i - 1$ ist definiert durch den

Quotienten aus der wertmäßigen Veränderung zum Anfangswert des Papiers, genauer

$$r_i^{disk} = \frac{W_i - W_{i-1}}{W_{i-1}}. \quad (2.1)$$

Die Definition 2.1 entspricht dem allgemeinen Verständnis eines Zinssatzes, dass ein prozentualer Anteil des Grundkapitals am Ende eines Zeitraums erwirtschaftet wird und einmalig zusammen mit dem Grundkapital zurückgezahlt wird. In diesem Fall ist es der Wert eines Wertpapiers bzw. eines Portfolios. Bei Wertpapieren sollte jedoch des Weiteren beachtet werden, dass neben dem Kursgewinn auch Gewinne in Form von Dividenden oder Ausschüttungen realisiert werden können, was sich nicht zwingend im Wert des Wertpapiers am Ende der Periode niederschlägt. Ebenso sind Transaktionskosten für den An- und Verkauf des Wertpapiers denkbar, die den Ertrag mindern. Deswegen wird meistens in der Praxis von dem „Total Return“ oder „Performance“ gesprochen, wenn nicht nur der Anfangskurs und der Endkurs berücksichtigt werden, sondern auch die Kosten und sonstige Gewinne mitberücksichtigt werden.[Fra]

Bei der kontinuierlichen Modellierung der Zeit ergibt sich die stetige Rendite. Auch diese Rendite kann man als einen Zinssatz auffassen, wobei jedoch die Verzinsung kontinuierlich, also stetig durchgehend und damit nicht nur zu diskreten Zeitpunkten, stattfindet.

Definition 2.2 (kontinuierliche Rendite). *Die kontinuierliche Rendite eines Wertpapiers zwischen zwei Zeitpunkten i und $i - 1$ ist definiert durch den logarithmierten Wert des Quotienten aus dem Anfangswert und dem Endwert des Wertpapiers, genauer*

$$r_i^{kont} = \ln \left(\frac{W_i}{W_{i-1}} \right). \quad (2.2)$$

Diese Rendite kann ebenfalls als ein Grenzwert in Verbindung mit der diskreten Rendite dargestellt werden. Dabei wird die Periode zwischen Zeitpunkten i und $i - 1$ künstlich in $m \in \mathbb{N}$ kleine Perioden aufgeteilt, so dass

$$W_{i-1}(1 + r_i^{disk}) = W_i = \lim_{m \rightarrow \infty} W_{i-1} \left(1 + \frac{r_{i,m}^{disk}}{m} \right)^m = W_{i-1} \exp(r_i^{kont}) \quad (2.3)$$

gilt. Dabei ist $r_{i,m}^{disk}$ diejenige Rendite, die sich bei der Unterteilung der Periode zwischen $i - 1$ und i in m gleichgroßen Subperioden ergibt, so dass $1 + r_i^{disk} = \left(1 + \frac{r_{i,m}^{disk}}{m} \right)^m$ gilt. Entsprechend ist die Verbindung zwischen diskreter und kontinuierlicher Rendite

$$r_i^{disk} = \exp(r_i^{kont}) - 1. \quad (2.4)$$

Sowohl die diskrete als auch die kontinuierliche Rendite ist eine dimensionslose Zahl und beide werden häufig in Prozent angegeben.

Satz 2.3. *Bei kleinen Werten sind die diskrete und die kontinuierliche Rendite annähernd gleich groß.*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r_i^{disk} \mapsto f(r_i^{disk}) = \ln(1 + r_i^{disk})$. Diese Funktion liefert genau die zu r_i^{disk} passende kontinuierliche Rendite r_i^{kont} . Allgemein lässt sich eine Funktion, die in $a \in \mathbb{R}$ als Entwicklungspunkt n -mal differenzierbar ist, durch folgendes Taylorpolynom approximieren:

$$T_n f(r_i^{disk}, a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (r_i^{disk} - a)^k + \text{Rest}_{n+1}(r_i^{disk})$$

Dabei ist $\text{Rest}_{n+1}(r_i^{disk}) = \frac{1}{n!} \int_a^{r_i^{disk}} (r_i^{disk} - p)^n f^{(n+1)}(p) dp$ das Restglied. [Kön08, S.282f.] Nun wird die Funktion f durch die beiden ersten Glieder der Taylorreihe approximiert:

$$T_n f(r_i^{disk}, a) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (r_i^{disk} - a) = \ln(a) + \frac{1}{1+a} (r_i^{disk} - a)$$

Wählt man den Entwicklungspunkt $a = 0$, erhält man die gewünschte Approximation:

$$r_i^{kont} = f(r_i^{disk}) \approx \ln(1+0) + (r_i^{disk} - 0) = r_i^{disk}$$

□

Beide Renditen sind annähernd gleich groß, aber in welcher Größenordnung ist die Approximation vertretbar? Genau genommen liegt die Beantwortung dieser Frage in der Fehler-toleranz des Anwenders. Generell wird der Fehler dieser Approximation größer, wenn die Rendite betragsmäßig größer wird. Jedoch wird dieses Problem dadurch entschärft, dass bei Anwendung für kurze Zeiträume, z.B. bei Tagesrenditen, die Unterschiede gering sind, weil dabei die Renditen selbst im Allgemeinen klein sind. [PBS05, S.40]

Generell haben beide Arten der Renditen unterschiedliche Stärken in Bezug auf Praxis-nähe, Aussagekraft, Handhabbarkeit und theoretische Anwendung. Auch deswegen kann nicht pauschal die eine Renditeart der anderen vorgezogen werden. Vielmehr sollte die Entscheidung stets in Bezug auf die spezifische Anwendung gefällt werden.

2.5 Statistische Kenngrößen und Konzepte

Diese Kennzahlen können je nach Konstruktion Informationen über den zu erwartenden Ertrag oder über das Risiko eines Portfolios geben. Viele dieser Kennzahlen sind im Rahmen der Statistik definiert. Deswegen ist es sinnvoll, zunächst auf einige Grundlagen der Statistik und v. a. auf deren Anwendung bei der Performancemessung eines Portfolios einzugehen.

Erwartungswert

Der Erwartungswert ist ein wichtiger Lageparameter, der eine Verteilung auf der Wertskala lokalisiert. Er ist grundlegend für fast alle Portfolio-Modelle.

Definition 2.4 (Erwartungswert). *Sei X eine numerische Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (ω, \mathcal{A}, P) mit ω als Grundraum, \mathcal{A} als σ -Algebra auf ω und P als das zugehörige Maß. Ist X P -integrierbar, so heißt*

$$E(X) := E_P(X) = \int X dP < \infty \quad (2.5)$$

der Erwartungswert von X . Ist die Verteilung diskret und mit dem Träger $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, ist der Erwartungswert definiert durch

$$E(X) := E_P(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) < \infty. \quad (2.6)$$

Unterstellt man Normalverteilung und Unabhängigkeit für die Zufallsvariablen, d.h.

$$X_i \text{ i.i.d. mit } X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), i = 1, \dots, n$$

wird der Erwartungswert durch das arithmetische Mittel aller Beobachtungen erwartungstreu und konsistent geschätzt [Neu01, S.9f.], genauer

$$E(\bar{X}) = E\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung sind Streuungsparameter, die die Ausdehnung zur Charakterisierung einer Verteilung angeben. Da Streuungsparameter u. a. auch Unsicherheiten quantifizieren, werden sie oft als Risikomaße eingesetzt.

Definition 2.5 (Varianz und Standardabweichung). *Sei X eine quadratisch integrierbare reelle Zufallsvariable. Dann heißt*

$$\text{Var}(X) := E\left((X - E(X))^2\right) < \infty \quad (2.7)$$

die Varianz von X . Die Kenngröße

$$\sigma(X) := \sqrt{\text{Var}(X)} < \infty \quad (2.8)$$

heißt die Streuung oder Standardabweichung von X .

Berechnet man die empirische Standardabweichung aus den Renditen der Vergangenheit, erhält man die sogenannte historische Volatilität, die die Schwankungen um das historische Mittel bemisst. Deswegen kann man mit ihrer Hilfe ungefähr abschätzen, wie risikobehaftet ein Wertpapier bzw. ein Portfolio ist, falls das zukünftige Entwicklungsmuster dem der Vergangenheit in etwa entspricht. Die Volatilität ist ein klassisches Risikomaß, das bei der Portfolio-Selektion eingesetzt wird.

Für die Berechnung der Volatilität ist es wichtig, auf welchen Zeitraum sich die eingesetzten Renditen beziehen. Tages-, Wochen-, Monats- und auch Quartalsrenditen sind üblich. Aber welche Renditen genau zur Berechnung herangezogen werden, beeinflusst den Bezugszeitraum der resultierenden Volatilität. Damit man Volatilitäten für verschiedene Zeiträume miteinander vergleichen kann, annualisiert man sie, d. h. man rechnet die jeweilige Volatilität auf ein Jahr um. Zur Annualisierung der Volatilität wird die übliche Annahme gemacht, dass die Vergangenheitsrenditen unabhängig, identisch und normal verteilt sind. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_T$ die Teilperiodenvolatilitäten eines Börsenjahrs. Aufgrund der Unabhängigkeit der Renditen kann man ihre Varianzen addieren, um die gesamte Varianz zu ermitteln. Da sie identisch verteilt sind, haben sie auch die gleiche Varianz. Aus beiden Aussagen können wir die Gleichung für die Annualisierung der Volatilität ableiten:

$$\sigma_{ann}^2 = \sum_{i=1}^T \sigma_i^2 \stackrel{\sigma_1 = \dots = \sigma_T}{=} T\sigma_1^2 \implies \sigma_{ann} = \sqrt{T}\sigma_1 \quad (2.9)$$

Zentrale, gewöhnliche Momente

Sowohl der Erwartungswert, als auch die Varianz und weitere Kennzahlen, die hier nicht einzeln vorgestellt sind, bezeichnet man auch als auf ein Zentrum zentrierte, gewöhnliche Momente. Diese zentrierten, gewöhnlichen Momente werden formal wie folgt definiert.

Definition 2.6 (Zentrale, gewöhnliche Momente). *Sei m eine natürliche Zahl und $\alpha \in \mathbb{R}$. Das zentrale, gewöhnliche Moment der Ordnung m von einer Zufallsvariable X um das Zentrum α ist definiert durch*

$$M_m(X) = E((X - \alpha)^m). \quad (2.10)$$

Besitzt die Verteilung eine stetige Dichtefunktion f , gilt insbesondere

$$M_m(X) = \int (X - \alpha)^m dP = \int (x - \alpha)^m f(x) dx. \quad (2.11)$$

Ist eine Verteilung diskret, d.h. die Dichtefunktion f ist diskret, gilt entsprechend

$$M_m(X) = \sum_i (x_i - \alpha)^m P(X = x_i) = \sum_i (x_i - \alpha)^m f(x_i). \quad (2.12)$$

Kovarianz und Korrelationskoeffizient

Zwei Kenngrößen, die nicht zu den zentralen Momenten gehören, sind die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient, wobei die zweite Kenngröße durch eine Normierung der ersten entsteht. Beide Kenngrößen geben die Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen wieder und sind für die Portfolio-Analyse bedeutsam.

Definition 2.7. Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert durch

$$\text{Cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y))). \quad (2.13)$$

Der Korrelationskoeffizient ist definiert durch

$$\text{Kor}(X, Y) := \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (2.14)$$

Kovarianz und Korrelationskoeffizient sind wichtig v. a. für die Anleger, die mehr als eine Anlageposition im Portfolio haben. Anhand dieser Kenngrößen kann die lineare Abhängigkeit zwischen den Wertentwicklungen der verschiedenen Anlagepositionen gemessen und kontrolliert werden.

Kapitel 3

Das klassische Portfolio-Modell

Mit dem Mean-Variance-Modell markierte Harry Markowitz in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts den Anfang der modernen Portfolio-Theorie. Seitdem wurden Portfolio-Modelle entwickelt, die sich v. a. im Aspekt der Risikomessung voneinander unterscheiden. Diese Modelle dienen einem Portfolio-Manager oder einem Anleger als Werkzeuge, die ein optimales Portfolio anhand bestimmter Vorinformationen erzeugen können. Zu den nötigen Vorinformationen zählen beispielsweise historische Daten der Anlagemöglichkeiten sowie die eigene Risikoneigung. Ebenfalls spielt der Managementstil eine Rolle, weil dieser den Planungshorizont der Anlage maßgeblich beeinflusst.

Bei dem passiven Managementstil bzw. der Buy-and-Hold Strategie tendiert der Manager zu langfristiger Planung. Die festgelegte Portfolio-Aufteilung wird über der gesamten Planungsperiode beibehalten. Dieses Vorgehen wird auch durch die sogenannten einperiodigen Modelle abgebildet, bei denen nur eine Planungsperiode berücksichtigt wird. Bei den mehrperiodigen Modellen wird die Entwicklung des Portfolios über mehrere Planungsperioden gleichzeitig betrachtet. Einflüsse und Auswirkung von beispielsweise Umschichtungen und Anpassungen des Portfolios werden in den mehrperiodigen Modellen berücksichtigt.

Im Allgemeinen wurden bis Ende des letzten Jahrhunderts bei der Portfolio-Modellierung hauptsächlich statistische Kenngrößen verwendet, wie z. B. Erwartungswert und Varianz der Rendite des Portfolios. Dabei werden Renditen als Zufallsvariablen modelliert. In diesem Kapitel wird das klassische Portfolio-Modell nach Markowitz dargestellt, das als Vergleichsmodell zu der Neuentwicklung der Fuzzy-Modelle dienen wird.

3.1 Das Modell

Das Mean-Variance-Modell, oder zu Deutsch das Erwartungswert-Varianz-Modell, gilt als das klassische Portfolio-Modell. Dieses Modell wurde 1952 von Harry M. Markowitz in der Zeitschrift »Journal of Finance« veröffentlicht. [Mar52]

In diesem klassischen Portfolio-Modell sind der Erwartungswert und die Varianz der Portfolio-Rendite die maßgebenden Parameter für die Portfolio-Selektion, was zum Zeitpunkt der Veröffentlichung eine Innovation im Portfolio-Management darstellte. Aufgrund des hohen Rechenaufwands und der damals noch mit sehr hohen Kosten verbundenen, unzureichenden Rechenleistung der Computer blieb die Verwendung dieses Modells in der Praxis weitgehend aus. Durch die Weiterentwicklungen der Lösungsalgorithmen und die dramatischen Rechenleistungszuwächse gewann das heute klassische Portfolio-Modell an Bedeutung. Schließlich wurde Markowitz 1990 für seine Theorie zu Portfolio-Selektion, zusammen mit Merton H. Miller und William F. Sharpe, mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. [The]

In seinem Modell geht Markowitz von einer zweistufigen Portfolio-Selektion aus. Zunächst

werden die Vorinformationen der verfügbaren Assets beschafft, die eine Abschätzung der Renditenerwartungen und der Kovarianzmatrix ermöglichen. Anschließend in der zweiten Phase wird anhand der gegebenen Risikoneigung und der nun verfügbaren Vorinformationen genauer bestimmt, welche Gewichtungen das jeweilige Asset im Portfolio haben soll. Bei der Konstruktion ist Markowitz von den folgenden Annahmen ausgegangen. Zunächst geht er davon aus, dass die Renditenerwartung und die Varianz des Portfolios die einzigen Parameter sind, die den Anleger bei der Entscheidung beeinflussen. Diese ergeben sich aus den Vorinformationen über die verfügbaren Assets. Auch wird unterstellt, dass die aus den Vergangenheitsdaten geschätzten Vorinformationen ihre Gültigkeit in der Zukunft beibehalten. Höheres Risiko, in diesem Modell eine höhere Varianz, wird dann akzeptiert, wenn die Renditenerwartung in einem bestimmten Maß entsprechend der Risikoneigung höher ist. Von den Transaktionskosten und steuerlichen Aspekten wird abgesehen. Ferner wird die beliebige Teilbarkeit der Assets angenommen, so dass beispielsweise auch ein Bruchteil einer Aktie erworben werden kann.

Das Modell stellt zwei Ziele in den Mittelpunkt. Diese sind die Maximierung der erwarteten Rendite und die Minimierung des zu tragenden Risikos, also der Varianz. Es gibt verschiedene Möglichkeiten für eine Modellformulierung. Einerseits kann man entweder die Rendite oder die Varianz als gegeben betrachten und den jeweils anderen Parameter durch eine geeignete Portfolio-Aufteilung optimieren. Andererseits ist es möglich, beide Parameter durch einen Koeffizienten der Risikopräferenz zu verknüpfen und sie gleichzeitig zu optimieren. Dabei ist der Koeffizient der Risikopräferenz genau das Ausmaß der Kompensation zwischen Rendite und Risiko. Da die erste Variante meistens als anschaulicher angesehen wird, wird diese nachfolgend dargestellt.

Ausgehend von N verschiedenen Assets, von denen Vorinformationen bereits verfügbar sind, wird das Portfolio anhand des folgenden Optimierungsmodells gebildet. Dabei wird mit $X_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, N\}$ und $N \in \mathbb{N}$, der prozentuale Anteil des Assets i im Portfolio bezeichnet und in einem Vektor $X = (X_1 \ \dots \ X_N)^T$ zusammengefasst. Die Renditenerwartungen werden mit $\mu_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, N\}$ bezeichnet und im Vektor $\mu = (\mu_1 \ \dots \ \mu_N)^T$ zusammengefasst. Mit Σ wird die Kovarianzmatrix aller N Assets bezeichnet, wobei $\sigma_{ij}, i, j \in \{1, \dots, N\}$ im Falle $i = j$ die Varianz des i -ten Assets und im Falle $i \neq j$ die Kovarianz zwischen Asset i und j ist. Mit diesen Bezeichnungen ist die gesamte Rendite des Portfolios $\sum_{i=1}^N \mu_i X_i = \mu^T X$ und die Varianz ist

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} X_i X_j = X^T \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} X = X^T \Sigma X. \quad (3.1)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Kovarianz ist die Kovarianzmatrix symmetrisch. Darüber hinaus ist die Kovarianzmatrix stets positiv definit, falls jedes betrachtete Asset mit Risiko behaftet ist. Diese Eigenschaft spielt eine große Rolle bei der Berechnung der effizienten Portfolios. Das grundlegende Modell kann wie folgt formuliert werden:

<p>OP1</p> $\frac{1}{2} X^T \Sigma X \rightarrow \min_{X \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter den Nebenbedingungen:</p> $\mu^T X = E_0,$ $\mathbf{1}^T X = 1.$

Die Renditenerwartung des gesamten Portfolios wird als gegeben und fest betrachtet, wobei $E_0 \in [E_{\min}, E_{\max}]$ ist. Dieses Modell ist ein quadratisches Optimierungsproblem, wobei die

Zielfunktion quadratisch und alle Nebenbedingungen linear sind. Da die Kovarianzmatrix bei risikobehafteten Assets positiv definit ist, gilt $\frac{1}{2}X^T\Sigma X > 0$.

In der Zielfunktion wird die Varianz mit einem skalaren Vorfaktor $\frac{1}{2}$ minimiert. Dies ändert nicht die Minimalität der optimalen Lösung, aber es vereinfacht die Durchführung der Minimierungsaufgabe. Die Nebenbedingung $\mu^T X = E_0$ sichert das Niveau der erwarteten Portfolio-Rendite. $\mathbf{1}^T X = 1$ ist die sogenannte Budgetbedingung, die sicherstellt, dass das gesamte Ausgangsvermögen ausgeschöpft aber nicht überinvestiert wird.

3.2 Lösung des Modells

Um dieses Modell zu lösen, greift man auf die Lagrange-Methode zurück. Mit zwei eindimensionalen Lagrange-Multiplikatoren lässt sich eine Lagrange-Funktion dieses Optimierungsmodells aufstellen.

$$\mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = \frac{1}{2}X^T\Sigma X - \lambda_{E_0}(\mu^T X - E_0) - \gamma(X^T\mathbf{1} - 1) \quad (3.2)$$

Der Lagrange-Multiplikator λ_{E_0} ist der sogenannten Trade-off-Parameter zwischen Rendite und Varianz. Er integriert die Nebenbedingung über die Renditenerwartung in die Lagrange-Funktion. γ ist ein weiterer Lagrange-Multiplikator, der die Budgetbedingung in die Lagrange-Funktion einbindet.

Allgemein beschreibt der Trade-off die wechselseitige Abhängigkeit zwischen zwei Aspekten, die gleichzeitig betrachtet werden. Speziell bei der Portfolio-Analyse wird mit dem Trade-off-Parameter das Austauschverhältnis zwischen Rendite und Risiko für den Anleger erfasst. Falls dieser Parameter positiv ist, verursacht eine positive Veränderung eines Kriteriums auch eine positive Veränderung des anderen Kriteriums. Ist der Trade-off-Parameter negativ, führt eine Verbesserung eines Kriteriums zur Verschlechterung des anderen Kriteriums. Dieser Parameter hat eine wichtige Funktion in diesem Modell.

Satz 3.1. Seien $\mu \in \mathbb{R}^N$ mit $\mu \neq \zeta\mathbf{1}$, $\zeta \in \mathbb{R}$ der Vektor der Renditenerwartungen von $N \in \mathbb{N}$ Wertpapieren und $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$, die symmetrische, positiv definite Kovarianzmatrix, gegeben. Ferner seien die Bezeichnungen

$$a := \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \quad b := \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \quad \text{und} \quad c := \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}. \quad (3.3)$$

Die optimale Portfolio-Aufteilung hängt von der geforderten erwarteten Portfolio-Rendite E_0 affin linear ab und zwar genauer

$$X = \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} (a\mathbf{1} - b\mu) + E_0 \left(\frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} (c\mu - b\mathbf{1}) \right). \quad (3.4)$$

Beweis. Wir betrachten die Lagrange-Funktion (3.2)

$$\mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = \frac{1}{2}X^T\Sigma X - \lambda_{E_0}(\mu^T X - E_0) - \gamma(X^T\mathbf{1} - 1).$$

Die partielle Ableitung nach den Portfolio-Gewichtungen liefert die notwendige Bedingung.

$$\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = \Sigma X - \lambda_{E_0} \mu - \gamma \mathbf{1} = 0. \quad (3.5)$$

Zwei weitere Nebenbedingungen ergeben sich aus der partiellen Ableitung nach jeweils einem Lagrange-Multiplikator. Diese zwei Gleichungen sind die Nebenbedingungen des ursprünglichen Modells.

$$\nabla_{\lambda_{E_0}} \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = E_0 - \mu^T X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^T X = E_0 \quad (3.6)$$

$$\nabla_{\gamma} \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = 1 - \mathbf{1}^T X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1}^T X = 1 \quad (3.7)$$

Aus (3.5) folgt wegen der positiv definiten und damit invertierbaren Kovarianzmatrix Σ

$$X = \gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \Sigma^{-1} \mu. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung wird in (3.6) und (3.7) eingesetzt.

$$\begin{aligned} \mu^T (\gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \Sigma^{-1} \mu) &= \gamma \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \mu^T \Sigma^{-1} \mu = E_0 \\ \mathbf{1}^T (\gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \Sigma^{-1} \mu) &= \gamma \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mu = 1 \end{aligned}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen (3.3) können beiden Gleichungen als ein Gleichungssystem dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{E_0} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Das Gleichungssystem (3.9) hat genau dann eine eindeutige Lösung für λ_{E_0} und γ , wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ invertierbar ist. Dies ist jedoch sichergestellt. Um diese Tatsache zu zeigen,

sei $G = \begin{pmatrix} \mu & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$. Es gilt offensichtlich $G^T \Sigma^{-1} G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung des Satzes ist $\mu \neq \zeta \mathbf{1}$ mit $\zeta \in \mathbb{R}$, deswegen ist G linear unabhängig in den Spalten und hat den vollen Rang, nämlich zwei. Für einen beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq \mathbf{0}$ gilt daher $v := Gu \neq \mathbf{0}$. Da die Kovarianzmatrix Σ symmetrisch und positiv definit ist, ist auch ihre inverse Matrix symmetrisch und positiv definit. Aus diesen Bedingungen folgt:

$$v^T \Sigma^{-1} v = u^T G^T \Sigma^{-1} G u = u^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} u > 0. \quad (3.10)$$

Da (3.10) für beliebiges $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq \mathbf{0}$ gilt, muss die Matrix $G^T \Sigma^{-1} G$ positiv definit sein. Ferner folgt daraus

$$\det G^T \Sigma^{-1} G = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2 > 0. \quad (3.11)$$

Dies sichert die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (3.9), genauer

$$\begin{pmatrix} \lambda_{E_0} \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} cE_0 - b \\ a - bE_0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Durch das Einsetzen der beiden Multiplikatoren aus (3.12) in die Gleichung für den Vektor der Anteile (3.8) erhält man

$$\begin{aligned} X &= \gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \Sigma^{-1} \mu = \frac{a - bE_0}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \frac{cE_0 - b}{ac - b^2} \Sigma^{-1} \mu \\ &= \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} ((a - bE_0) \mathbf{1} + (cE_0 - b) \mu) \\ &= \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} (a \mathbf{1} - bE_0 \mathbf{1} + cE_0 \mu - b \mu) \\ &= \frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} (a \mathbf{1} - b \mu) + E_0 \left(\frac{1}{ac - b^2} \Sigma^{-1} (c \mu - b \mathbf{1}) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

als optimale Portfolio-Aufteilung. □

Die Portfolio-Aufteilung X ist also affin linear in der erwarteten Zielrendite des Portfolios E_0 . Weiter lässt sich die zugehörige Varianz berechnen. Zunächst wird die Gleichung (3.8)

in die Gleichung für die Varianz eingesetzt, um die Varianz in der Abhängigkeit von der Renditenerwartung darzustellen.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= X^T \Sigma X = X^T \Sigma (\gamma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} \Sigma^{-1} \mu) \\
&= \gamma X^T \Sigma \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \lambda_{E_0} X^T \Sigma \Sigma^{-1} \mu = \gamma X^T \mathbf{1} + \lambda_{E_0} X^T \mu \\
&= \gamma + \lambda_{E_0} E_0 = \frac{a - bE_0}{ac - b^2} + \frac{cE_0 - b}{ac - b^2} E_0 = \frac{a - bE_0 + cE_0^2 - bE_0}{ac - b^2} \\
&= \frac{cE_0^2 - 2bE_0 + a}{ac - b^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Gleichung (3.14) ist eine quadratische Funktion in der Abhängigkeit von E_0 . Deswegen kann die Varianz als eine Parabel von der Renditenerwartung dargestellt werden. Durch das Einsetzen des geforderten Niveaus der erwarteten Portfoliorendite erhält man die optimale Portfolio-Varianz.

Satz 3.2 (Varianzminimales Portfolio). *Ein globales, varianzminimales Portfolio erbringt eine erwartete Portfoliorendite von $E_0 = \frac{b}{c}$ mit einer Portfolio-Varianz von $\text{Var}(X) = \frac{1}{c}$.*

Beweis. Um das Minimum der Portfolio-Varianz zu bestimmen, wird diese Gleichung (3.14) nach E_0 abgeleitet und gleich null gesetzt.

$$\frac{d\text{Var}(X)}{dE_0} = \frac{d \frac{cE_0^2 - 2bE_0 + a}{ac - b^2}}{dE_0} = \frac{2cE_0 - 2b}{ac - b^2} = 0. \tag{3.15}$$

Die Gleichung (3.15) liefert die erwartete Portfoliorendite $E_0 = \frac{b}{c}$ für das globale varianzminimale Portfolio. Durch das Einsetzen dieser erwarteten Portfoliorendite in die Gleichung der Portfolio-Varianz ergibt sich die global minimale Portfolio-Varianz von $\frac{1}{c}$. Durch das Einsetzen der erwarteten Portfoliorendite in die Gleichung für die Portfolio-Aufteilung ergibt sich die globale varianzminimale Portfolio-Aufteilung. \square

Alle bisherigen Analysen gelten nur für ein Portfolio mit der Beschränkung der Budget und Renditenerwartung. Deswegen sind dabei Leerverkäufe möglich, d.h. negative Anteile sind zugelassen. [NN06, S.3ff.] Weitere Aspekte, wie z. B. die Berücksichtigung von Höchstanlagegrenze für bestimmte Assets, sind möglich. Aber sie wurden hier nicht berücksichtigt.

Für den Fall, dass der Anleger keine exakte Renditenvorstellung hat, kann beispielsweise das globale varianzminimale Portfolio gewählt werden. Es ist auch möglich, die Menge der optimalen Portfolios im Sinne von „kleinste Varianz bei gegebener Rendite“ zu bestimmen. Aus dieser Menge kann der Anleger anschließend anhand seiner Präferenzen das für ihn beste Portfolio auswählen. Wichtig dabei ist, dass die erwartete Portfolio-Rendite stets größer als die erwartete Portfolio-Rendite bei dem globalen varianzminimalen Portfolio sein soll. Diese optimalen Portfolios werden als die effizienten Portfolios bezeichnet. Sie ergeben grafisch auf der Varianz- oder Volatilität-Renditenerwartungs-Ebene die Effizienzlinie bzw. -kurve, die im Englischen als „efficient frontier“ bezeichnet wird. Die zugehörige Portfolio-Aufteilung und -Varianz können anhand der obigen Gleichungen berechnet werden.

Falls die Nichtnegativitätsbedingung aller Anteile erforderlich ist, so dass der Leerverkauf untersagt ist, kann der sogenannte „Critical Line Algorithm“ verwendet werden. Dieser Algorithmus wurde von Markowitz entwickelt und wird in »Portfolio Selection« [Mar08] sowie »Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets« [Mar89] ausführlich dargestellt.

Des Weiteren kann das klassische Modell durch Berücksichtigung einer risikofreien Anlage erweitert werden. Dies führt dazu, dass sich ein spezielles Portfolio auf der Effizienzkurve als das Marktportfolio auszeichnet. Dieses Marktportfolio bildet mit der risikofreien Anlage eine Kapitalmarktlinie, die dominantere Portfolios im Vergleich zu den Portfolios auf der Effizienzkurve darstellt. Für eine neue, risikobehaftete Anlage, die bei der Bildung des Marktportfolios nicht betrachtet wird, kann aufgrund der Kenntnis des Marktportfolios eine Bewertung durchgeführt werden, woraus die sogenannte Wertpapierlinie resultiert. Diese Erweiterungsanalyse ist als „Capital Asset Pricing Model“ (CAPM) bekannt und wurde in den sechziger Jahren von den amerikanischen Ökonomen William F. Sharpe, John Lintner und Jan Mossin vorgeschlagen und durchgeführt. Diese Arbeit wurde 1990 zusammen mit der Arbeit von Markowitz mit einem Nobelpreis [The] ausgezeichnet. Für eine genaue Ausführung von CAPM wird beispielsweise auf »Statistik, Ökonometrie, Optimierung« [PBS05] verwiesen.

Kapitel 4

Grundlage der Fuzzy-Logik

Das im Kapitel 3 dargestellte, klassische Portfolio-Modell verwendet statistische Kennzahlen, für die die sogenannten scharfen Mengen zwingende Voraussetzung sind. Dabei wird mit scharf die Eigenschaft bezeichnet, dass ein Element lediglich zwei Zustände bzgl. der Zugehörigkeit zu einer Menge annehmen kann, nämlich entweder zu dieser Menge gehörend oder nicht. Es gibt keinen Zustand zwischen diesen beiden Zuständen und deswegen wird diese Eigenschaft auch als die duale Logik bezeichnet. In der Realität und v. a. in dem normalen Sprachgebrauch erleben wir tagtäglich unscharfe Formulierungen. Mit unscharf ist an dieser Stelle gemeint, dass wir nicht direkt mit dualer Logik entscheiden können, weil es nicht nur zwei Entscheidungsmöglichkeiten sondern viele mögliche Zwischenzustände gibt. Diese Unschärfe taucht sowohl in der Linguistik als auch in vielen anderen Wissenschaftsbereichen auf. Als ein Beispiel kann die Formulierung dienen, dass die Rendite von einem optimierten Portfolio bedeutend größer als die Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers sein soll. In dieser Aussage wird die präzise Differenz zwischen den Renditen nicht direkt spezifiziert, vielmehr ist diese Differenz unscharf angegeben. Sie kann sich in einem Bereich bzw. in einer Bandbreite befinden, aber auch die Bandbreite ist nicht explizit spezifiziert. Um eben solche Unschärfen in der mathematischen Modellierung zu berücksichtigen, wurde die Fuzzy-Logik entwickelt. Das Wort Fuzzy kommt aus dem Englischen und bedeutet unscharf bzw. verschwommen. Genau dies setzt die Fuzzy-Logik in der Modellierung um.

4.1 Unschärfe als Anstoß zur Fuzzy-Logik

Die Fuzzy-Logik dient in der ersten Linie der mathematischen Erfassung von in der Realität auftauchenden Unschärfen bzw. Unsicherheiten. Dabei sollte beachtet werden, dass die erwähnte Unsicherheit nicht als die Unsicherheit im Zusammenhang der Wahrscheinlichkeitstheorie verstanden werden soll. Der Grund ist, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie zwar ebenfalls Unsicherheiten mathematisch erfasst, aber sie basiert auf der dualen Logik, was sich grundlegend von der Fuzzy-Logik unterscheidet. Auch unterscheiden sich die Objekte klar voneinander, mit denen sich die beiden Theorien beschäftigen. Auf der anderen Seite kann man aber die Fuzzy-Logik als eine Erweiterung der dualen Logik auffassen, denn die duale Logik kann man mittels bestimmter Spezifikationen der Fuzzy-Logik, genauer gesagt durch bestimmte Einschränkungen der Fuzzy-Logik, abbilden.

Die Grundlagen der Fuzzy-Logik wurden Mitte des 19. Jahrhunderts entwickelt. Die Grundsteine wurden von L. A. Zadeh, einem iranischstämmigen Professor für Elektrotechnik an der University of California, gelegt. Seine Innovation und damit die der Fuzzy-Logik bestand darin, die bis dahin geltende scharfe Mengenlehre um die unscharfe Mengenlehre zu erweitern. Die resultierende Möglichkeit, die Unschärfe eines realen Systems mathematisch zu beschreiben, stieß auf große Resonanz in der Fachwelt. Die unscharfe Mengenlehre ist

Gegenstand des nächsten Abschnittes. In diesem Abschnitt werden die Anwendungsmöglichkeiten und die Auswirkungen der Fuzzy-Logik genauer betrachtet.

Im alltäglichen Sprachgebrauch gibt es viele unscharfen Aussagen, die mathematisch nur schwierig zu erfassen sind. Die Adjektive und Adverbien wie „etwa“, „sehr“, „ungefähr“, „viel“, „wenig“ sind gute Beispiele aus dem normalen Sprachgebrauch für unscharfe Formulierungen. Mit diesen Begriffen werden nicht wie in der dualen Logik exakte Beziehungen oder Relationen angegeben. Stattdessen wird ein Bereich angegeben, in dem eine gewünschte oder betrachtete Eigenschaft zutrifft.

Mit der dualen Logik würde man bei der mathematischen Erfassung von vielen, unscharfen Aussagen nicht weiterkommen, denn bei der dualen Logik stehen nur die scharfen Relationen wie größer, gleich oder kleiner zur Verfügung. Genau diese Problematik versucht die Fuzzy-Logik aufzulösen. Man beschränkt sich nicht auf eine dichotome Entscheidungsfindung, sondern unterscheidet zwischen den Erfüllungsgraden verschiedener Ausgänge. Die Gedankenmuster bei der Fuzzy-Logik ist nicht vom „entweder-oder“-Typ sondern vom „mehr-oder-weniger“-Typ.

Es gibt viele Gründe, warum die Unschärfe ihren Platz in der Realität hat. Einer dieser Gründe ist, dass es für Menschen komfortabler ist, nur unscharfe anstatt exakte Angaben zu machen. Anders als exakte Angaben können unscharfe Angaben ein breites Spektrum an Fällen beinhalten. Damit kann die Gültigkeit der Aussagen erweitert werden bzw. die Beschränktheit der Anforderungen reduziert werden. Die Existenz der unscharfen Aussagen kann auch darauf beruhen, dass bestimmte, exakte Informationen überhaupt nicht zur Verfügung stehen oder nur sehr schwierig beschafft werden können. Deswegen kann diese Information nur teilweise oder bruchstückhaft herangezogen werden, eben mit einer Unschärfe. Zusammenfassend können Unschärfen systematisch in drei verschiedene Kategorien aufgeteilt werden[Zim01]:

- **Intrinsische Unschärfe** beruht auf einer unscharfen Empfindung des Menschen, die durch die Sprache ausgedrückt wird. Sowohl die Empfindung als auch der anschließende linguistische Ausdruck lassen keine exakte Formulierung zu. Beispiel: Die Person A ist sehr alt.
- **Informationelle Unschärfe** wird durch ein Informationsdefizit oder eine Informationsreduktion verursacht. Dabei sind Informationen für eine exakte Beschreibung nur unzureichend vorhanden, oder komplexe Zusammenhänge werden reduziert, so dass als Ergebnis eine unscharfe Formulierung entsteht. Zwei Beispiele: Der Vermögensverwalter ist vertrauenswürdig oder das Betriebsklima in dem Unternehmen ist schlecht.
- **Unschärfe Relationen** entstehen beim Vergleichen zwischen zwei Objekten, wo keine dichotome Aussage gemacht wird. Stattdessen wird nur eine unscharfe Relation verwendet, damit trotz nicht exakter Angaben sinnvolle Informationen daraus gezogen werden können. Zwei Beispiel: Person A ist etwas älter als Person B oder beide sind ungefähr gleich groß.

Einen Ausweg für die Erfassung der Unschärfe in der mathematischen Modellierung stellt die Fuzzy-Logik v. a. durch die Fuzzy-Sets oder die unscharfen Mengen dar. Diese sind nicht wie gewöhnliche Mengen der klassischen Mengenlehre, wobei ein Element der Grundmenge entweder in der Menge ist oder nicht zu der Menge gehört. Bei einer unscharfen Menge kann die Zugehörigkeit eines Elements der Grundmenge unscharf sein. Dadurch werden Unschärfen mathematisch erfasst und anschließend in mathematische Modellen eingebunden. Als Referenzen für die Methoden der Fuzzy-Logik kann auf [BG93], [DP80], [Böh93] und [Zim01] verwiesen werden.

4.2 Unschärfe Mengen

Unschärfe Mengen sind grundlegende Komponenten der Fuzzy-Logik. Sie dienen der mathematischen Erfassung und der Modellierung der Unschärfe. Diese mathematischen Konstrukte wurden zusammen mit Operationsmöglichkeiten von L. A. Zadeh in Rahmen der Theorie zum „Fuzzy-Set“ 1965 veröffentlicht. [Zad65] (Bereits vor Zadeh haben sich viele bekannte Wissenschaftler mit der Problematik der Unschärfen befasst. Beispielsweise haben sich W. G. Leibniz und B. Russell mit Unschärfen in der Sprachgebrauch und W. Heisenberg mit der Unschärfe in der Physik beschäftigt. Letzterer ist ebenfalls weltberühmt durch die „Heisenbergsche Unschärferelation“.)

Für eine unscharfe Menge sind zwei Voraussetzungen nötig. Einerseits wird eine Grundmenge vorausgesetzt, über der eine unscharfe Menge gebildet wird. Diese Grundmenge beinhaltet Kandidaten, die auf Zugehörigkeit zur unscharfen Menge beurteilt werden. Andererseits muss eine Zugehörigkeitsfunktion (engl. membership function) spezifiziert werden. Diese weist den einzelnen Kandidaten aus der Grundmenge einen Wert für die Zugehörigkeit zu. Die Zugehörigkeitsfunktion legt fest, wie stark ein Element aus der ursprünglichen Grundmenge zu der unscharfen Menge gehört. Es ist nicht zwingend notwendig, dass der Wertebereich der Zugehörigkeitsfunktion das reelle Intervall zwischen Null und Eins sein muss. Dies wird aber aus Bequemlichkeit oft eingehalten. Je größer der Wert der Zugehörigkeitsfunktion für ein Element ist, desto höher ist seine Zugehörigkeit zu dieser unscharfen Menge.

Eine klassische Menge lässt sich auch als eine spezielle unscharfe Menge darstellen, nämlich mit der Indikatorfunktion als die Zugehörigkeitsfunktion. Dabei ist der Wertebereich der Zugehörigkeit nicht mehr ein reelles Intervall, sondern nur die beide Werte Null und Eins. Damit kann ein Element nur entweder zu einer scharfen Menge gehören oder nicht. Aufgrund der klaren Trennung zwischen Zugehörigkeit und Nichtzugehörigkeit der Elemente wird eine klassische Menge auch als scharfe Menge bezeichnet.

Im Folgenden werden die unscharfen Mengen nach der Darstellung und Konstruktion von Zadeh vorgestellt. [Zad65]

Definition 4.1 (Unschärfe Menge). *Sei Ω eine Menge. Ferner sei die Funktion $f_{\tilde{A}} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ gegeben. \tilde{A} mit*

$$\tilde{A} := \{(\omega, f_{\tilde{A}}(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \quad (4.1)$$

heißt eine unscharfe Menge über der Grundmenge Ω . Dabei wird $f_{\tilde{A}}$ als die Zugehörigkeitsfunktion bezeichnet.

Um die unscharfe Menge zu veranschaulichen, wird folgendes Beispiel angegeben.

Sei die Menge der Reellen Zahlen \mathbb{R} die Grundmenge Ω . Sei \tilde{A} die unscharfe Menge der Zahlen, die viel größer als Null sind. Offensichtlich kommen nur diejenigen Zahlen auf der Zahlengerade in Frage, die größer als Null sind. Aber um der Anforderung „viel größer“ gerecht zu werden, muss die Zugehörigkeit dieser Zahlen zur unscharfen Menge genauer spezifiziert werden. Sei die Zugehörigkeitsfunktion $f_{\tilde{A}}(\omega)$ für die unscharfe Menge \tilde{A}

$$f_{\tilde{A}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ \frac{\omega}{100}, & 0 \leq \omega < 100 \\ 1, & 100 \leq \omega \end{cases}$$

Um das Beispiel einfach zu gestalten, wird die Zugehörigkeitsfunktion als stückweise lineare Funktion definiert. Alle Zahlen, die kleiner als Null sind, sind nicht in \tilde{A} enthalten. Hingegen sind alle Zahlen, die größer oder gleich 100 sind, mit einer Zugehörigkeit Eins in \tilde{A} , also vollständig zugehörend. Alle Zahlen zwischen Null und 100 sind nur teilweise in \tilde{A} enthalten.

Definition 4.2 (Unschärfe leere Menge). *Die unscharfe Menge $\tilde{A} := \{(\omega, f_{\tilde{A}}(\omega)) | \omega \in \Omega\}$ mit $f_{\tilde{A}}(\omega) = 0 \forall \omega \in \Omega$ heißt eine unscharfe leere Menge.*

Eine klassische scharfe Menge ist genau dann leer, wenn sie kein Element enthält. Da die unscharfe Menge Elemente auch teilweise beinhalten kann, wird für die leere unscharfe Menge gefordert, dass die Zugehörigkeit für alle Elemente der Grundmenge den Wert Null annimmt. [Zad65] Dadurch wird sichergestellt, dass kein einziges Element aus der Grundmenge auch nur teilweise enthalten ist. Dies ist konsistent mit der Bedeutung der leeren Menge.

Um u. a. die Bewertung einer unscharfen Menge bzw. eine Anordnung der Elemente in einer unscharfen Menge zu ermöglichen, wird die so genannte α -Niveaumenge definiert. [Böh93, S.16f.]

Definition 4.3 (α -Niveaumenge bzw. α -Schnitt). *Sei \tilde{A} eine unscharfe Menge über der Grundmenge Ω mit $\tilde{A} := \{(\omega, f_{\tilde{A}}(\omega)) | \omega \in \Omega\}$ und sei $\alpha \in (0, 1]$. Dann heißt die scharfe Menge*

$$A_\alpha = \{\omega | f_{\tilde{A}}(\omega) \geq \alpha, \omega \in \Omega\}$$

eine α -Niveaumenge bzw. α -Schnitt von \tilde{A} .

Mit diesem Konstrukt ist es möglich, aus einer unscharfen Menge eine Familie von scharfen Teilmengen anhand des Zugehörigkeitswerts zu bilden. Alle Elemente in einer α -Niveaumenge müssen die Bedingung erfüllen, dass ihre Zugehörigkeit in der unscharfen Menge \tilde{A} mindestens den Schwellenwert α ist. Da die Bedingung zur Bildung einer α -Niveaumenge die Elemente der ursprünglichen unscharfen Menge in scharfen Mengen aufteilt, wird die α -Niveaumenge auch als α -Schnitt bezeichnet. [Böh93, S.16f.]

Definition 4.4 (Normiertheit einer unscharfen Menge). *Sei \tilde{A} eine unscharfe Menge über der Grundmenge Ω mit $\tilde{A} := \{(\omega, f_{\tilde{A}}(\omega)) | \omega \in \Omega\}$. \tilde{A} heißt normiert, wenn die Bedingung*

$$\sup_{\omega \in \Omega} f_{\tilde{A}}(\omega) = 1$$

erfüllt ist.

Eine nicht normierte unscharfe Menge kann normiert werden. Dies geschieht durch einen Streckungsfaktor, der mit der Zugehörigkeitsfunktion multipliziert wird. Dementsprechend kann aus jeder nicht leeren unscharfen Menge eine normierte unscharfe Menge geformt werden. [Böh93, S.18f.]

Definition 4.5 (Gleichheit unscharfer Mengen). *Zwei unscharfen Mengen \tilde{A} und \tilde{B} über der Grundmenge Ω werden als gleich definiert, wenn*

$$f_{\tilde{A}}(\omega) = f_{\tilde{B}}(\omega) \forall \omega \in \Omega$$

gilt.

Da eine unscharfe Menge durch ihre Zugehörigkeitsfunktion charakterisiert wird, ist bei einer Gleichheit die vollständige Gleichheit der Zugehörigkeitsfunktion über der ganzen Grundmenge zu fordern. Damit ist gewährleistet, dass jedes Element aus der Grundmenge mit der gleichen Zugehörigkeit in beiden Mengen enthalten ist.

Definition 4.6 (Unschärfes Komplement). *Das Komplement von der unscharfen Menge \tilde{A} wird durch die unscharfe Menge $\bar{\tilde{A}}$ mit*

$$f_{\bar{\tilde{A}}}(\omega) = 1 - f_{\tilde{A}}(\omega) \forall \omega \in \Omega$$

definiert.

Die Definition 4.6 ist ebenfalls nahe liegend, wenn man die Komplementbildung der scharfen Mengen zum Vergleich heranzieht. Falls ein Element in einer scharfen Menge ist, ist es nicht in der komplementären scharfen Menge enthalten. Auf die unscharfen Mengen übertragen, muss sich die Zugehörigkeitsfunktion von der Menge und ihrem Komplement für jedes Element aus der Grundmenge auf Eins summieren.

4.3 Unscharfe Zahlen

In der Realität kommen nicht nur unscharfe Mengen sondern auch unscharfe Zahlen vor. Gerade wegen der Informationsungenauigkeit oder wegen der Komplexität eines bestimmten Systems ist es häufig unmöglich, eine exakte Angabe zu machen. Daher ist es bequemer, eine unscharfe Zahl zu verwenden, die trotz ihrer Unschärfe einen Informationsinhalt besitzt. Beispielsweise wird die Größe einer Person durch „ungefähr 1,8m groß“ zwar nicht genau spezifiziert, aber jeder Mensch kann sich die Größe der betreffenden Person sehr wohl vorstellen.

Eine solche unscharfe Zahl können wir anhand einer unscharfen Menge mit geeigneter Zugehörigkeitsfunktion festlegen. Damit das Konstrukt der unscharfen Zahl auch der menschlichen Intuition entspricht, wird eine weitere Eigenschaft von der Zugehörigkeitsfunktion gefordert. Intuitiv muss die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl genau an einer Stelle das Maximum haben, wobei die Zugehörigkeitsfunktion links des Maximums einen monoton ansteigenden Verlauf und rechts des Maximums einen monoton abfallenden Verlauf haben soll. Diese Forderung wird als die Konvexität der unscharfen Menge bezeichnet und wie folgt definiert. [Böh93, S.121.]

Definition 4.7 (Konvexität unscharfer Mengen). *Eine unscharfe Menge \tilde{A} auf einem Intervall Ω heißt konvex, wenn für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ und $\zeta \in [0, 1]$ die Zugehörigkeitsungleichung*

$$f_{\tilde{A}}((1 - \zeta)\omega_1 + \zeta\omega_2) \geq \min(f_{\tilde{A}}(\omega_1), f_{\tilde{A}}(\omega_2)) \quad (4.2)$$

erfüllt ist.

Hier soll man beachten, dass die Konvexität der unscharfen Menge nicht der Konvexität einer Funktion in der Analysis entspricht, auch wenn derselbe Begriff verwendet wird. Mit der Definition 4.7 der Konvexität der unscharfen Menge kann nun die unscharfe Zahl definiert werden.

Definition 4.8 (Unscharfe Zahl). *Eine normierte, konvexe unscharfe Menge \tilde{A} über \mathbb{R} mit den Eigenschaften*

1. $f_{\tilde{A}}(\omega) = 1$ gilt für genau ein $\omega \in \mathbb{R}$
2. $f_{\tilde{A}}$ ist stückweise stetig

heißt eine unscharfe Zahl. Eine reelle unscharfe Zahl ist als positiv definiert, wenn $f_{\tilde{A}}(\omega) = 0 \forall \omega < 0$ ist. Eine unscharfe Zahl wird als negativ definiert, wenn $f_{\tilde{A}}(\omega) = 0 \forall \omega \geq 0$ ist.

Es sei darauf hingewiesen werden, dass ein Vergleich zweier unscharfer Zahlen ganz anders als ein Vergleich zwischen zwei reellen Zahlen ist. Auch wenn das Maximum der jeweiligen Zugehörigkeitsfunktion beider unscharfer Zahlen bei dem gleichen Wert liegt, müssen die Verläufe der Zugehörigkeitsfunktion nicht identisch sein. Damit sind auch beide unscharfe Zahlen nicht gleich. Es wird auf die Gleichheit von zwei unscharfen Mengen zurückgegriffen, die ebenfalls bei den unscharfen Zahlen Gültigkeit besitzt. Entsprechend sind zwei unscharfe Zahlen genau dann gleich, wenn die Zugehörigkeitsfunktionen beider unscharfer Zahlen identisch sind.

Eine spezielle Klasse der unscharfen Zahlen sind solche mit einer LR-Zugehörigkeitsfunktion, wobei L für links und R für rechts steht. Bei diesen unscharfen Zahlen kann die Zugehörigkeitsfunktion in linke und rechte Teilzugehörigkeitsfunktionen aufgeteilt werden. [Böh93, S.13f.]

Definition 4.9 (Unschärfe Zahl vom LR-Typ). *Seien $a < m_1 < m_2 < b \in \mathbb{R}$. Eine Zugehörigkeitsfunktion $f_{\tilde{A}}$ von einer unscharfen Zahl \tilde{A} heißt vom LR-Typ, wenn sie als zwei Teilzugehörigkeitsfunktionen L, R mit den folgenden Eigenschaften dargestellt werden kann.*

1. $L, R : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$
2. $L(m_1) = R(m_2) = 1$
3. L ist monoton steigend und R ist monoton fallend in \mathbb{R}_+ .

Damit kann $f_{\tilde{A}}$ dargestellt werden als:

$$f_{\tilde{A}}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin [a, b] \\ L(\omega) & a \leq \omega < m_1 \\ 1, & m_1 \leq \omega \leq m_2 \\ R(\omega) & m_2 < \omega \leq b \end{cases}. \quad (4.3)$$

Bemerkung 4.10. *Im Falle $m_1 - a = 0$ verschwindet die Teilzugehörigkeitsfunktion L . Im Falle $b - m_2 = 0$ verschwindet die Teilzugehörigkeitsfunktion R . Falls beide Fälle gleichzeitig eintreten, reduziert sich die unscharfe Zahl auf ein scharfes Intervall $[m_1, m_2]$. Ist ferner $m_1 = m_2$, ist \tilde{A} eine scharfe Zahl.*

Wie man aus der Definition 4.3 entnehmen kann, ist $m_1 - a$ bzw. $b - m_2$ die Spannweite auf der linken bzw. auf der rechten Seite. Das Intervall (a, b) ist der Träger und $[m_1, m_2]$ ist das Intervall mit der maximalen Zugehörigkeit Eins.

Insbesondere die normierten unscharfen Zahlen mit einer dreiecksförmigen Zugehörigkeitsfunktion sind vom LR-Typ. Diese sind sehr handlich und nützlich aufgrund ihrer Beschaffenheit und ihrer einfachen Operationsmöglichkeiten. Allgemein kann eine solche unscharfe Zahl durch drei Parameter $a_0 < a_1 < a_2 \in \mathbb{R}$ bestimmt werden:

$$f_{\tilde{A}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin [a_0, a_2] \\ \frac{\omega - a_0}{a_1 - a_0} & a_0 \leq \omega \leq a_1 \\ \frac{a_2 - \omega}{a_2 - a_1} & a_1 \leq \omega \leq a_2 \end{cases}.$$

Nun wird das kartesische Produkt der unscharfen Mengen und das Erweiterungsprinzip angegeben. [Zad65] Das Erweiterungsprinzip verschafft der Fuzzy-Logik eine Grundlage, „klassische Konzepte auf die ihnen entsprechenden unscharfen Konzepte“ zu erweitern. [Böh93, S.141]

Definition 4.11 (Kartesisches Produkt und das Erweiterungsprinzip). *Seien $\Omega_i, i = 1, \dots, n$ und Y Grundmengen. Seien $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, n$ unscharfe Mengen mit einer jeweiligen Grundmenge Ω_i . Sei $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.*

1. *Das n -stellige kartesische Produkt der unscharfen Mengen $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, n$ ist definiert durch*

$$\tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_n = \left\{ \left((\omega_1, \dots, \omega_n), \min \left(f_{\tilde{A}_1}(\omega_1), \dots, f_{\tilde{A}_n}(\omega_n) \right) \right) \right\} \quad (4.4)$$

2. Sei $g : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \rightarrow Y$, $g(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto y$ eine invertierbare Funktion. Sie wird zu einer Funktion \hat{g} erweitert, die für alle $\tilde{A}_i, i = 1, \dots, n$ gesetzt wird

$$\tilde{B} = \hat{g}(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \left\{ \left((\omega_1, \dots, \omega_n), \min \left(f_{\tilde{A}_1}(\omega_1), \dots, f_{\tilde{A}_n}(\omega_n) \right) \right) \right\} \quad (4.5)$$

$$f_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{y=g(\omega_1, \dots, \omega_n)} \left\{ \min \left(f_{\tilde{A}_1}(\omega_1), \dots, f_{\tilde{A}_n}(\omega_n) \right) \right\} & \text{wenn } g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.6)$$

Dabei wird mit $g^{-1}(y)$ das Urbild von $y \in Y$ bezeichnet.

4.4 Lineare Fuzzy-Optimierung

Bei der klassischen linearen Optimierung wird eine lineare Zielfunktion unter Berücksichtigung von linearen Nebenbedingungen optimiert. Dabei greift man auf die Lösungsmethoden, wie z. B. den Simplex-Algorithmus, zurück. Wenn unscharfe Mengen in die Modellierung einbezogen werden, sind entsprechende Lösungsverfahren nötig. Die Entscheidungsprobleme mit Einbeziehung der unscharfen Mengen haben Bellman und Zadeh untersucht. [BZ70] Später entstandene Optimierungskonzepte können als Weiterentwicklung des von Bellman und Zadeh entwickelten Verfahrens angesehen werden.

Bei einem konventionellen linearen Optimierungsproblem ergibt sich eine Menge der zulässigen Lösungen bzw. Handlungsalternativen durch alle vorhandenen Nebenbedingungen. Aus dieser Menge der zulässigen Lösungen wird die Zielfunktion optimiert. Diejenige zulässige Lösung mit dem besten Zielfunktionswert wird als die optimale Lösung bestimmt. Dabei ist deutlich, dass die Zielfunktion und die Nebenbedingungen asymmetrische Aufgaben besitzen. Sämtliche Nebenbedingungen schränken den Lösungsraum ein und die Zielfunktion determiniert die bestmögliche Lösung aus dem eingeschränkten Lösungsraum. Da die Nebenbedingungen stets scharfe Restriktionen des gesamten Optimierungsraumes sind, ist die Menge der zulässigen Lösung ebenfalls scharf. Deswegen erfüllen alle zulässigen Lösungen alle Nebenbedingungen eindeutig.

Anders ist die Optimierung unter Einbeziehung der unscharfen Mengen. Da nun die Restriktionen unscharfe Bedingungen enthalten, können die Nebenbedingungen auch teilweise erfüllt sein. Für die unscharfen Mengen ist es charakteristisch, dass Elemente der Grundmenge eine bestimmte Zugehörigkeit haben, die durch die Zugehörigkeitsfunktion festgelegt wird. Wenn nun mehrere unscharfe Mengen mit jeweils unterschiedlicher Zugehörigkeitsfunktion betrachtet werden, die gleichzeitig das Optimierungsproblem einschränken, müssen sie auch entsprechend behandelt werden. Elemente aus der Grundmenge, die einen hohen Erfüllungsgrad einer unscharfen Restriktion vorweisen, können bei anderen Restriktionen nur einen niedrigen Erfüllungsgrad haben. Die graduelle Erfüllung der Bedingungen ist der grundlegende Unterschied zwischen scharfer und unscharfer Optimierung.

Bellman und Zadeh haben in ihrem Aufsatz „Decision-Making in a Fuzzy-Environment“ [BZ70] vorgeschlagen, bei der unscharfen Optimierung die Zielfunktion und alle Nebenbedingungen gleichzeitig zu betrachten. Nach ihrem Lösungskonzept werden Zielfunktion und Nebenbedingungen symmetrisch betrachtet. Anschließend wird eine simultane Optimierung aller Erfüllungsgrade durchgeführt. Das Ergebnis der Optimierung ist diejenige Handlungsalternative, die alle Nebenbedingungen und die Zielfunktion gleichzeitig bestmöglich erfüllt. Dieses Konzept bezeichnen Bellman und Zadeh als „confluence of goals and constraints“, also der Zusammenfluss oder Zusammenwirkung von Zielfunktion und Nebenbedingungen. [BZ70]

Eine simultane Vergleichbarkeit der Zielfunktion und aller Nebenbedingungen ist nicht zwingend gegeben. Es kann notwendig sein, eine Zugehörigkeitsfunktion für die Zielfunktion mit Hilfe zusätzlicher Informationen festzulegen. Auch die Nebenbedingungen sollen vergleichbar vorliegen, so dass eine simultane Optimierung sämtlicher Erfüllungsgrade möglich ist.

Konkret schlagen Bellman und Zadeh vor, ein Lösungsverfahren durch Durchschnittsbildung der unscharfen Mengen zu verwenden. Das Ergebnis aus der Durchschnittsbildung ist eine unscharfe Menge über der Grundmenge. Anschließend wird aus dieser unscharfen Menge eine Handlungsalternative als Lösung ausgesucht, die gleichzeitig einen höchsten Erfüllungsgrad aller Bedingungen besitzt.

Da Zielfunktion und Nebenbedingungen normalerweise in einem konkurrierenden Zusammenhang stehen, ist ein Kompromiss einzugehen. Eine Erhöhung der graduellen Zielerfüllung der Zielfunktion oder einer Nebenbedingung kann eine graduelle Verletzung einer oder mehrerer Nebenbedingungen bedeuten. Dies ist nicht mit der Verletzung einer Nebenbedingung in einem klassischen Optimierungsproblem gleichzusetzen, weil bei der unscharfen Modellierung eine gewisse Verletzung grundsätzlich zugelassen ist. Trotzdem soll darauf geachtet werden, dass die bestmögliche Handlungsalternative einen gewissen Erfüllungsgrad besitzen muss, so dass diese plausibel erscheint.

Ausgehend von m Nebenbedingungen sei $f_i, i = 1, \dots, m$ die Zugehörigkeitsfunktion für jede Nebenbedingung. Sei f_Z die Zugehörigkeitsfunktion für die Zielfunktion und X der Vektor der Optimierungsvariablen. Das Optimierungsproblem nach Bellman und Zadeh ist

<p>OP2</p> $\lambda \rightarrow \max_{X, \lambda}$ <p>Unter den Nebenbedingungen:</p> $\lambda \leq f_Z(X),$ $\lambda \leq f_1(X), \dots, \lambda \leq f_m(X).$

Oder kurz:

$$\left\{ \min_X \{f_Z(X), f_1(X), \dots, f_m(X)\} \right\} \rightarrow \max_X. \quad (4.7)$$

Kapitel 5

Fuzzy-Portfolio-Modelle

Mit der Verbreitung des klassischen Portfolio-Modells und der zunehmenden Bedeutung des Asset-Managements wird die kontinuierliche Weiterentwicklung der Portfolio-Theorie motiviert, wobei u. a. neue Portfolio-Modelle entwickelt werden. In den folgenden Abschnitten werden zunächst einige Fuzzy-Portfolio-Modelle in Gruppen vorgestellt. Diese dienen der Abgrenzung der neuen Modelle von den bereits vorhandenen. Des Weiteren werden neue Modellierungsmöglichkeiten der Vorinformationen als unscharfe Mengen vorgeschlagen. Die zugehörigen Eigenschaften werden untersucht und entsprechende Verarbeitungsprozeduren dargestellt. Anschließend werden in einem naiven Modell die vorgestellten Methoden und Konzepte demonstriert.

5.1 Überblick der vorhandenen Fuzzy-Portfolio-Modelle

In den letzten fünfzehn Jahren hat die Fuzzy-Logik ihren Weg in die Portfolio-Modellierung gefunden. Neue Portfolio-Modelle mit unscharfen Elementen und Intervallprogrammierung wurden vorgeschlagen. Grob können die bereits entwickelten Fuzzy-Modelle in drei Gruppen aufgeteilt werden. Einen Überblick über diese Modelle ist in »On Fuzzy-Portfolio Selection Problems« von Wang und Zhu, zu finden. Vgl. [WS02]. Als weitere Referenz wird ebenfalls auf [IR00] verwiesen.

Die erste Gruppe umfasst Modelle, bei denen der klassische Ansatz von Markowitz weitgehend adaptiert wird. Neu dabei ist die Verwendung der Fuzzy-Logik bei der Entscheidungsfindung. Bei Markowitz sind die erwartete Portfoliorendite und -varianz die zentralen Optimierungsparameter. Darauf aufbauend geht Watada einen Schritt weiter, indem er für die erwartete Portfoliorendite bzw. -varianz jeweils eine Zugehörigkeitsfunktion spezifiziert, die die unscharfe Präferenz des Anlegers berücksichtigt. Die anschließende Optimierung besteht darin, beide Zugehörigkeitswerte zu maximieren. Diese Optimierung bedarf der erwarteten Renditen und der Kovarianzmatrix der einzelnen Wertpapiere als Vorinformationen ähnlich wie bei dem klassischen Modell. [Wat97] Im Vergleich zum klassischen Modell besteht die Innovation darin, dass der Anleger nicht mehr den einzigen Trade-off-Parameter zwischen Renditen und Varianz spezifiziert, sondern seine vagen Präferenzen für Renditen und Varianz getrennt spezifizieren kann. Auch ist es möglich, verschiedene Typen von Zugehörigkeitsfunktionen heranzuziehen, die sich in Form und in der Handhabung unterscheiden. (Vgl. dazu ebenfalls [Ram98], [PTU01] und [LLV02].)

Die zweite Modellgruppe ist dadurch gekennzeichnet, dass hierbei die Fuzzy-Logik stellvertretend für die Statistik eingesetzt bzw. zum Teil auf beide Theorien zurückgegriffen wird. In der Statistik hat jede Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Analog steht in der Fuzzy-Logik die sogenannte Possibilitätsverteilung zur Verfügung. Sie wird oft durch die Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Menge definiert und hat ähnliche Eigen-

schaften wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Beispielsweise ist es möglich, jeweils für die Renditen der einzelnen Wertpapiere eine Zugehörigkeitsfunktion als Possibilitätsverteilung zu spezifizieren. Anschließend können Kennzahlen wie der unscharfe Mittelwert und die unscharfe Varianz konstruiert werden. Das Ziel der Optimierung bleibt, wie im klassischen Modell, die beste Kombination der beiden Kennzahlen für das Gesamtportfolio zu finden und die entsprechende Portfolio-Aufteilung zu bestimmen. (Vgl. dazu auch [DP87], [Hei92], [CF01], [CFM02], [LYK02], [PMT05] und [AB08].) Ferner lässt die Possibilitätsverteilung weitere Möglichkeiten zu, wie z. B. die Definition von Necessität- oder Kreditibilitätsmaße (engl. necessity bzw. credibility), die ebenfalls als Optimierungsparameter des Gesamtportfolios verwendet werden können. Anhand dieser Maße werden Modelle formuliert, die ähnliche Ziele wie das Safety-First-Modell nach Roy [Roy52] und nach Kataoka [Kat63] verfolgen. Zudem wird auf [IT00], [TGT00], [Hua06], [Hua07] und [LL08] verwiesen.

Die dritte Gruppe umfasst Modelle mit Intervallprogrammierung. Anders als bei den ersten beiden Gruppen werden Intervalle als spezielle unscharfe Zahlen bei der Modellierung verwendet. Beispielsweise werden Renditen der Wertpapiere in dem Modell von Lai et al. als Intervalle definiert, wobei die Zugehörigkeit für alle Renditen zwischen den jeweiligen oberen und unteren Intervallgrenzen Eins und außerhalb des geschlossenen Intervalls Null ist. Vgl. dazu [TG99], [LWJ⁺02], [Ida03] und [LX07]. Man kann diese Modellierung so verstehen, dass eine Bandbreite für mögliche Renditen jedes Wertpapiers spezifiziert wird. Jeder Wert in dieser Bandbreite wird gleich betrachtet. Anhand dieser Renditenintervalle wird die Renditenbandbreite des Gesamtportfolios berechnet. Neben der Rendite wird ein Risikomaß berücksichtigt, damit das Risiko bei der Optimierung minimiert werden kann. Der Vorteil der Intervallprogrammierung liegt darin, dass die Intervalle einfache Konstrukte sind und Unschärfe deutlich wiedergeben können. Des Weiteren ist es möglich, die Intervallgrenzen als „best and worst cases“ zu interpretieren, die als eine anschauliche Einschätzung des Portfolios angeboten werden.

Einige der Portfolio-Modelle der obigen drei Gruppen sind nicht linear. Sie lassen sich aber durch geschickte Umformulierung oder Transformation in lineare Optimierungsmodelle umwandeln. Andere bedürfen, wie das klassische Portfolio-Modell, Lösungsmethoden der nicht linearen Programmierung. Dafür kann beispielsweise der genetische Algorithmus genannt werden, der bereits bei der Lösung von einigen Fuzzy-Portfolio-Modellen implementiert wurde. Vgl. dazu [SHF94], [Nis97], [CL05] und [LP02].

5.2 Modellierung der Vorinformationen

Bei allen quantitativen Portfolio-Modellen dienen historische Kursreihen der Wertpapiere als Vorinformation. Oft werden Periodenschlusskurse berücksichtigt, v. a. Tagesschlusskurse, aus denen Renditen berechnet werden. Für die statistischen Modelle werden in erster Linie die erwarteten Renditen und die Kovarianzmatrix der Renditen geschätzt, die die eigentlichen Inputs sind. Bei allen Modellen werden sowohl Kurse als auch Renditen stets als scharfe Zahlen, d. h. als reelle Zahlen, modelliert.

Durch die Einbeziehung der Fuzzy-Logik ist es nun möglich, Renditen unscharf zu modellieren. Nach wie vor stehen Zeitreihen der Tagesschlusskurse der Wertpapiere im Mittelpunkt. Neben den Tagesschlusskursen gibt es weitere verfügbare Kursinformationen. Diese sind beispielsweise die Tageseröffnungskurse, die Tageshöchst- und die Tagestiefstkurse, die v. a. für den sogenannten Candle-Stick-Chart verwendet werden. Diese vier Zeitreihen stellen unterschiedliche Informationen zur Verfügung und geben zusammen den gesamten Schwankungsbereich der Tageskurse grob wieder.

Nun, um die grobe Tagesschwankung zu berücksichtigen, werden Vorinformationen als unscharfe Zahlen modelliert. Jede Tagesrendite eines Wertpapiers wird mit einer dreieck-

förmigen Zugehörigkeitsfunktion modelliert, die mit drei Parametern identifiziert wird. Jeder dieser drei Parameter ist eine scharfe reelle Zahl. (Vgl. Abschnitt 4.3)

Im Folgenden wird von N Wertpapieren ausgegangen, von denen historische Kursinformationen zu T Tagen verfügbar sind. Diese Tagesbeobachtungen werden in Vektoren zusammengefasst. Seien $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_T$ diese unscharfen Renditenvektoren. Jeder unscharfe Renditenvektor wird durch drei Vektoren aus \mathbb{R}^N determiniert. Seien $r_1, \dots, r_T \in \mathbb{R}^N$ die Vektoren der Tagesrenditen mit maximaler Zugehörigkeit. Seien $a_1, \dots, a_T \in \mathbb{R}^N$ und $b_1, \dots, b_T \in \mathbb{R}^N$ die Vektoren für die zugehörigen Spannweite links bzw. rechts. Mit diesen drei Sätzen von Vektoren lassen sich die unscharfen Renditenvektoren vollständig spezifizieren.

$$\tilde{R}_i = (r_i, a_i, b_i)_{LR}, \quad i \in \{1, \dots, T\} \quad (5.1)$$

Entsprechend kann man die Zugehörigkeitsfunktion für diese unscharfen Renditen angeben, wobei i der Tagesindex und j der Wertpapierindex ist.

$$f_{\tilde{R}_i}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin [r_{i,j} - a_{i,j}, r_{i,j} + b_{i,j}] \\ \frac{\omega - r_{i,j} + a_{i,j}}{a_{i,j}} & r_{i,j} - a_{i,j} \leq \omega < r_{i,j} \\ \frac{r_{i,j} + b_{i,j} - \omega}{b_{i,j}} & r_{i,j} < \omega \leq r_{i,j} + b_{i,j} \end{cases}, \quad \forall i \in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (5.2)$$

Die Zugehörigkeitsfunktion, wie oben definiert, lässt sich in folgender Grafik anschaulich darstellen: Um stetige Renditen aus den Kursreihen zu gewinnen, werden die Zeitreihen

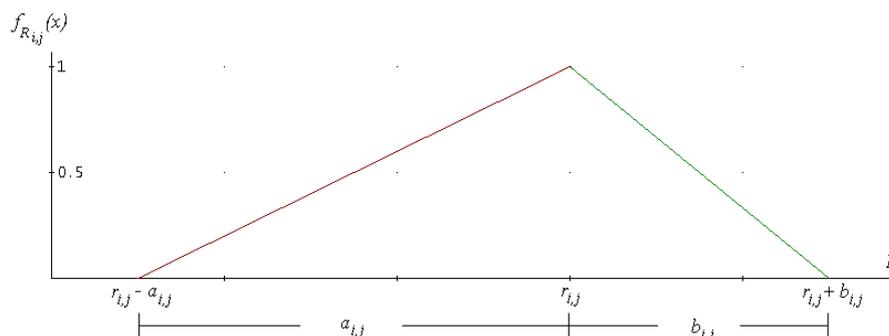


Abbildung 5.1: Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Rendite

der Tagesschlusskurse zunächst logarithmiert und anschließend werden die Differenzen je zwei aufeinander folgender Werte gebildet. Auf ähnliche Weise können unscharfe, stetige Tagesrenditen berechnet werden. Zuvor muss man jedoch festlegen, wie die Renditen berechnet werden, denn nun steht mehr als nur eine Zeitreihe zur Verfügung und verschiedene Möglichkeiten sind denkbar.

Seien $k_0, \dots, k_T \in \mathbb{R}^N$ die Vektoren der Tagesschlusskurse, $l_0, \dots, l_T \in \mathbb{R}^N$ die Vektoren der Tagestiefstkurse und $h_0, \dots, h_T \in \mathbb{R}^N$ die Vektoren der Tageshöchstkurse. Aus diesen drei Sätzen von Vektoren können unscharfe Renditen auf folgenden vier Wegen determiniert werden. Weitere Methoden sind möglich und denkbar, werden hier jedoch nicht berücksichtigt.

Variante 1: Der Vortagesschlusskurs als Bezugswert

Der Vortagesschlusskurs wird als Bewertungsgrundlage für die Ermittlung der Tagesrendite des darauffolgenden Tages verwendet. Zusätzlich werden Spannweiten berechnet, wobei ebenfalls der Vortagesschlusskurs als Bezugswert verwendet wird. Die stetige Rendite zwischen dem Vortagesschlusskurs und dem Tagestiefstkurs des betrachteten Tages ist der

ungünstigste Fall. Die Spannweite nach links wird als die Differenz zwischen der Rendite der Tagesschlusskurse und der Rendite des ungünstigsten Falls berechnet. Analog kann die Spannweite nach rechts berechnet werden. Dabei werden der Vortageschlusskurs und der Tageshöchstkurs des betrachteten Tages herangezogen. Zusammengefasst kann eine unscharfe Rendite eines Wertpapiers j zum Tag i bestimmt werden durch:

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j}, \\ a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln k_{i-1,j}), \\ b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln k_{i-1,j} - r_{i,j}, \\ \forall i &\in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Satz 5.1. Die Parameter $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ sind positiv.

Beweis. $r_{i,j} = \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j}$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$. $l_{i,j} \leq k_{i,j} \leq h_{i,j}$ gilt für alle $i \in \{0, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln k_{i-1,j}) \\ &= \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j} - \ln l_{i,j} + \ln k_{i-1,j} \\ &= \ln k_{i,j} - \ln l_{i,j} \geq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln k_{i-1,j} - r_{i,j} \\ &= h_{i,j} - \ln k_{i-1,j} - \ln k_{i,j} + \ln k_{i-1,j} \\ &= \ln h_{i,j} - \ln k_{i,j} \geq 0 \end{aligned}$$

Beide Spannweiten sind folglich positiv. □

Variante 2: Der Vortagestiefstkurs als Bezugswert

Falls ein Anleger sehr optimistisch eingestellt ist, kann er stets den Vortagestiefstkurs als Bewertungsgrundlage benutzen.

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \ln k_{i,j} - \ln l_{i-1,j}, \\ a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln l_{i-1,j}), \\ b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln l_{i-1,j} - r_{i,j}, \\ \forall i &\in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Offensichtlich sind $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ genauso groß wie in der Variante 1. Aber die Rendite mit der maximalen Zugehörigkeit ist größer oder gleich der in der Variante 1, weil $l_{i,j} \leq k_{i,j} \leq h_{i,j}$ für alle $i \in \{0, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ gilt.

Variante 3: Der Vortageshöchstkurs als der einheitliche Bezugswert

Ist der Anleger sehr pessimistisch, würde er den Vortageshöchstkurs als Bewertungsgrundlage heranziehen. In der Umsetzung bedeutet das:

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \ln k_{i,j} - \ln h_{i-1,j}, \\ a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln h_{i-1,j}), \\ b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln h_{i-1,j} - r_{i,j}, \\ \forall i &\in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Auch hier sind $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ genauso groß wie in den ersten beiden Varianten. Aber ist die Rendite mit der maximalen Zugehörigkeit ist nun kleiner.

Variante 4: „Best and worst cases“

Abgesehen von diesen ersten drei Varianten ist es möglich, die „best and worst cases“ zu berücksichtigen. Dabei wird die Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit aus den aufeinander folgenden Tagesschlusskursen berechnet. Für die linke Spannweite wird der Fall betrachtet, in dem die Rendite zweier aufeinanderfolgender Tage am schlechtesten ausfällt. Sinngemäß ist es die stetige Rendite zwischen dem Vortageshöchstkurs und dem Tiefstkurs des betrachteten Tages. Umgekehrt muss die rechte Spannweite den besten Fall wiedergeben. Dabei wird die stetige Rendite zwischen dem Vortagestiefstkurs und dem Höchstkurs des betrachteten Tages berechnet. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 r_{i,j} &= \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j}, \\
 a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln h_{i-1,j}), \\
 b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln l_{i-1,j} - r_{i,j}, \\
 \forall i &\in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Satz 5.2. $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ sind größer oder gleich Null.

Beweis. $r_{i,j} = \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j}$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$. $l_{i,j} \leq k_{i,j} \leq h_{i,j}$ gilt für alle $i \in \{0, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$.

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} &= r_{i,j} - (\ln l_{i,j} - \ln h_{i-1,j}) \\
 &= \ln k_{i,j} - \ln k_{i-1,j} - \ln l_{i,j} + \ln h_{i-1,j} \\
 &= \underbrace{(\ln k_{i,j} - \ln l_{i,j})}_{\geq 0} + \underbrace{(\ln h_{i-1,j} - \ln k_{i-1,j})}_{\geq 0} \geq 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 b_{i,j} &= \ln h_{i,j} - \ln l_{i-1,j} - r_{i,j} \\
 &= \ln h_{i,j} - \ln l_{i-1,j} - \ln k_{i,j} + \ln k_{i-1,j} \\
 &= \underbrace{(\ln h_{i,j} - \ln k_{i,j})}_{\geq 0} + \underbrace{(\ln k_{i-1,j} - \ln l_{i-1,j})}_{\geq 0} \geq 0
 \end{aligned}$$

Damit sind $a_{i,j}$ und $b_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ größer gleich Null. \square

Normalerweise bewegt sich der Tageskurs nur in kleinem Bereich, so dass die Spannweite der unscharfen Rendite ebenfalls klein bleibt. Im extremen Fall kann es vorkommen, dass es nur eine einzige Tagesnotierung gibt. In diesem Fall wäre der Tagesschlusskurs gleichzeitig der Tageshöchst- und Tagestiefstkurs, wodurch die Spannweiten bei den ersten drei Varianten gleich Null werden. Damit reduziert sich die unscharfe Rendite auf eine scharfe Rendite. Im Allgemeinen aber, v. a. bei Aktien mit hoher Liquidität und Marktkapitalisierung, ergeben sich positive Spannweiten.

Da die Renditen als unscharf modelliert werden und jede einzelne speziell als eine unscharfe Zahl des LR-Typs repräsentiert wird, sollte speziell die Operationsmöglichkeit dieser Konstrukte genauer betrachtet werden.

Definition 5.3 (Unschärfe Summe und skalares Produkt). *Seien $\tilde{R}_{1,1} = (r_{1,1}, a_{1,1}, b_{1,1})_{LR}$ und $\tilde{R}_{2,1} = (r_{2,1}, a_{2,1}, b_{2,1})_{LR}$ zwei unscharfe Renditen. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Summe der beiden unscharfen Renditen ist definiert als eine unscharfe Rendite mit*

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{1,1} + \tilde{R}_{2,1} &= (r_{1,1}, a_{1,1}, b_{1,1})_{LR} + (r_{2,1}, a_{2,1}, b_{2,1})_{LR} \\
 &= (r_{1,1} + r_{2,1}, a_{1,1} + a_{2,1}, b_{1,1} + b_{2,1})_{LR}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Die skalare Multiplikation einer unscharfen Rendite mit einer reellen Zahl ist definiert durch

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{R}_{1,1} &= \alpha(r_{1,1}, a_{1,1}, b_{1,1})_{LR} \\ &= \begin{cases} (\alpha r_{1,1}, \alpha a_{1,1}, \alpha b_{1,1})_{LR} & \alpha \geq 0 \\ (\alpha r_{1,1}, |\alpha b_{1,1}|, |\alpha a_{1,1}|)_{LR} & \alpha < 0 \end{cases}.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Die Differenz beider unscharfer Renditen ist definiert durch eine unscharfe Rendite mit

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{1,1} - \tilde{R}_{2,1} &= (r_{1,1}, a_{1,1}, b_{1,1})_{LR} - (r_{2,1}, a_{2,1}, b_{2,1})_{LR} \\ &= (r_{1,1}, a_{1,1}, b_{1,1})_{LR} + (-r_{2,1}, b_{2,1}, a_{2,1})_{LR} \\ &= (r_{1,1} - r_{2,1}, a_{1,1} + b_{2,1}, b_{1,1} + a_{2,1})_{LR}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

An dieser Stelle wird auf eine genaue Ausführung zur Prüfung der Wohldefiniertheit verzichtet. Interessierte seien beispielsweise auf »Fuzzy-Logik« von Böhme verwiesen, wo eine detaillierte Ausführung hierzu zur Verfügung steht. [Böh93, S.123f.] Auch lässt sich nachprüfen, dass die Definition 5.3 in Einklang mit dem Erweiterungsprinzip nach Zadeh steht. (Vgl. Abschnitt 4.3) Beispielhaft wird nun diese Überprüfung für die Addition durchgeführt.

Das kartesische Produkt aus zwei unscharfen Renditen ist die Ausgangsmenge. Sei die Summe aus zwei unscharfen Renditen mit g bezeichnet. Die Grundmenge der unscharfen Renditen ist die Menge der reellen Zahlen. Sie ist zugleich auch die Grundmenge, über der die unscharfe Renditensumme als Bildmenge definiert ist. Seien $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g(\omega_1, \omega_2) \mapsto y \in \mathbb{R}$. Folglich ist die Erweiterung von $\tilde{R}_{1,1} + \tilde{R}_{2,1}$ unter g die unscharfe Rendite mit

$$\begin{aligned}\hat{g}(\tilde{R}_{1,1} + \tilde{R}_{2,1}) &= \left\{ \left(g(\omega_1, \omega_2), \min \left(f_{\tilde{R}_{1,1}}(\omega_1), f_{\tilde{R}_{2,1}}(\omega_2) \right) \right) \mid (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ f_{\tilde{R}_{1,1} + \tilde{R}_{2,1}}(y) &= \begin{cases} \sup_{\substack{y=g(\omega_1, \omega_2) \\ (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2}} \left\{ \min \left(f_{\tilde{R}_{1,1}}(\omega_1), f_{\tilde{R}_{2,1}}(\omega_2) \right) \right\} & \text{wenn } g^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Als direkte Anwendung der definierten Operationen kann man eine k -Tage-Durchschnittsrendite herleiten. Damit ist es möglich, die mittlere unscharfe Rendite eines Zeitraums von k -Tagen zu berechnen, ähnlich wie die Durchschnittsrendite bei scharfen Renditen. Da die Renditen immer stetig sind, wird die Durchschnittsrendite durch das arithmetische Mittel bestimmt.

Definition 5.4 (k -Tage-Durchschnittsrendite). Seien $\tilde{R}_{i,j} = (r_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j})_{LR}$ mit $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq T$. Die k -Tage-Durchschnittsrendite des Wertpapiers j ist definiert durch

$$\tilde{R}_j^k = \frac{1}{k} \sum_{i=T-k+1}^T \tilde{R}_{i,j} = \left(\sum_{i=T-k+1}^T \frac{r_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{a_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{b_{i,j}}{k} \right)_{LR} \quad (5.10)$$

Wichtig bei der Definition 5.4 ist, zu beachten, dass zur Berechnung die unscharfen Renditen der k aktuellsten Tage herangezogen werden. Durch verschiedene Zeiträume ist die Glättung der zufälligen Schwankungen ebenfalls unterschiedlich. Diese Eigenschaft kann in den Modellen ausgenutzt werden. Aus den Kursinformationen von $K + 1$ Tagen mit $K \in \mathbb{N}$ können Tagesrenditen von K Tagen errechnet werden. Aus diesen K Tagesrenditen können insgesamt $K + 1 - k$ gleitende k -Tage-Durchschnitte berechnet werden. Diese werden ähnlich berechnet, wobei aber die Summierung jeweils über einer anderen Indexmenge stattfindet.

5.3 Defuzzifikationsmethoden

Unschärfe Objekte können aufgrund ihrer Unschärfe nur in seltenen Fällen miteinander verglichen werden. Um sie trotzdem sinnvoll miteinander vergleichen und auswerten zu können, werden Verfahren entwickelt, die ein unscharfes Objekt in ein scharfes und äquivalentes Objekt unter bestimmten Gesichtspunkten verwandeln. Solche Verfahren werden als Defuzzifikationsmethoden bezeichnet. In diesem Abschnitt werden zwei Defuzzifikationsmethoden vorgestellt, die in den folgenden Modellen ihre Verwendung finden. Es gibt weitere Defuzzifikationsmethoden, auf die hier nicht einzeln eingegangen wird. Bei Interesse wird beispielsweise auf [VLK99] und [Zim01] verwiesen.

5.3.1 Schwerpunktmethod für unscharfe Zahlen vom LR-Typ

Die Schwerpunktmethod ist eine einfache Defuzzifikationsmethode speziell für unscharfe Zahlen vom LR-Typ. Ursprünglich ist Schwerpunkt ein Begriff aus der Physik und bezeichnet das Zentrum eines Objektes oder eines Objektverbundes bezogen auf die Schwerkraft. Für die unscharfen Zahlen stellt der Schwerpunkt ebenfalls eine Art Zentrum dar, das die Zahlen repräsentiert. Mit dem euklidischen Abstand zwischen dem Schwerpunkt einer unscharfen Zahl und dem Ursprung ist es möglich, unscharfe Zahlen miteinander zu vergleichen.

Definition 5.5 (Schwerpunkt einer unscharfen Zahl vom LR-Typ). *Sei \tilde{A} eine unscharfe Zahl vom LR-Typ mit der Zugehörigkeitsfunktion*

$$f_{\tilde{A}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin [a, b] \\ L(\omega) & a \leq \omega < m_1 \\ 1 & m_1 \leq \omega \leq m_2 \\ R(\omega) & m_2 < \omega \leq b \end{cases}, \quad a < m_1 < m_2 < b \in \mathbb{R}.$$

Ferner seien beide Teilzugehörigkeitsfunktionen $L : [a, m_1] \rightarrow [0, 1]$ und $R : [m_2, b] \rightarrow [0, 1]$ in ihrem zuständigen Bereich umkehrbar. Seien die Umkehrfunktionen mit $L^{-1} : [0, 1] \rightarrow [a, m_1]$ und $R^{-1} : [0, 1] \rightarrow [m_2, b]$ bezeichnet.

Der Schwerpunkt von \tilde{A} ist definiert durch (x_0, y_0) mit

$$x_0(\tilde{A}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{\tilde{A}}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{A}}(\omega) d\omega} = \frac{\int_a^{m_1} \omega L(\omega) d\omega + \int_{m_1}^{m_2} \omega d\omega + \int_{m_2}^b \omega R(\omega) d\omega}{\int_a^{m_1} L(\omega) d\omega + \int_{m_1}^{m_2} d\omega + \int_{m_2}^b R(\omega) d\omega}, \quad (5.11)$$

$$y_0(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 y (R^{-1}(y) - L^{-1}(y)) dy}{\int_0^1 (R^{-1}(y) - L^{-1}(y)) dy}. \quad (5.12)$$

Dabei liegt (x_0, y_0) in der Grundmenge-Zugehörigkeit-Ebene mit x_0 als einem Wert aus der Grundmenge und y_0 als einem Wert der Zugehörigkeit.

Nach der Definition 5.5 ist die Umkehrbarkeit der beiden Teilzugehörigkeitsfunktionen in ihrem zuständigen Bereich die Voraussetzung für die Anwendung der Schwerpunktmethod. Entsprechend der Definition 5.5 besteht der Schwerpunkt aus zwei Komponenten. [WYXC06] Die erste Komponente ist eine mit dem Zugehörigkeitswert gewichtete Summe über der Grundmenge, die anhand der gesamten Masse der Zugehörigkeit normiert wird. Diese Komponente kann als das Zentrum der unscharfen Zahl in der Grundmenge aufgefasst werden. Die zweite Komponente wird analog gebildet. Dabei werden aber die Umkehrfunktionen der Teilzugehörigkeitsfunktionen verwendet. Da beide Teilzugehörigkeitsfunktionen die gleiche Bildmenge $[0, 1]$ haben, ist es möglich, dass ein Zugehörigkeitswert jeweils ein Element aus der Grundmenge durch $R^{-1}(y)$ und $L^{-1}(y)$ als Bild hat. Da

aber für jede Zugehörigkeit zwischen Null und Eins $R^{-1}(y)$ einen größeren Wert aus der Grundmenge als $L^{-1}(y)$ zuordnet, ist die Differenz $R^{-1}(y) - L^{-1}(y)$ für alle $y \in [0, 1]$ stets größer als Null. Nach Konstruktion kann die zweite Komponente als das Zentrum der Zugehörigkeit aufgefasst werden. Je höher das Zentrum der Zugehörigkeit ist, desto geringer ist die zugehörige Unschärfe. Je kleiner der Wert der Zugehörigkeit im Zentrum ist, desto höher ist die zugehörige Unschärfe.

Der Schwerpunkt einer unscharfen Zahlen mit dreieckförmiger Zugehörigkeitsfunktion, also mit linearen Teilzugehörigkeitsfunktionen, hat eine besonders einfache Beschaffenheit.

Satz 5.6 (Schwerpunkt einer unscharfen Zahl mit dreieckförmiger Zugehörigkeitsfunktion). Sei $\tilde{R}_{i,j} = (r_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j}), i \in \{1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}$ eine beliebige, normierte unscharfe Tagesrendite mit einer dreieckförmigen Zugehörigkeitsfunktion

$$f_{\tilde{R}_i}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin [r_{i,j} - a_{i,j}, r_{i,j} + b_{i,j}] \\ \frac{\omega - r_{i,j} + a_{i,j}}{a_{i,j}} & r_{i,j} - a_{i,j} \leq \omega < r_{i,j} \\ 1, & r_{i,j} \\ \frac{r_{i,j} + b_{i,j} - \omega}{b_{i,j}} & r_{i,j} < \omega \leq r_{i,j} + b_{i,j} \end{cases}. \quad (5.13)$$

Dann ist Ihr Schwerpunkt gegeben durch

$$x_0(\tilde{R}_{i,j}) = r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3} \text{ und } y_0(\tilde{R}_{i,j}) = \frac{1}{3}. \quad (5.14)$$

Beweis. Die erste Komponente des Schwerpunktes lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} x_0(\tilde{R}_{i,j}) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega} \\ &= \frac{\int_{r_{i,j} - a_{i,j}}^{r_{i,j}} \omega L_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j}} \omega d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j} + b_{i,j}} \omega R_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega}{\int_{r_{i,j} - a_{i,j}}^{r_{i,j}} L_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j}} d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j} + b_{i,j}} R_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) d\omega} \\ &= \frac{\int_{r_{i,j} - a_{i,j}}^{r_{i,j}} \frac{\omega(\omega - r_{i,j} + a_{i,j})}{a_{i,j}} d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j} + b_{i,j}} \frac{\omega(r_{i,j} + b_{i,j} - \omega)}{b_{i,j}} d\omega}{\int_{r_{i,j} - a_{i,j}}^{r_{i,j}} \frac{\omega - r_{i,j} + a_{i,j}}{a_{i,j}} d\omega + \int_{r_{i,j}}^{r_{i,j} + b_{i,j}} \frac{r_{i,j} + b_{i,j} - \omega}{b_{i,j}} d\omega} \\ &= r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Für die zweite Komponente des Schwerpunktes wird die Umkehrfunktion der Teilzugehörigkeitsfunktionen benötigt, die wie folgt bestimmt wird.

$$\begin{aligned} L_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) = \frac{\omega - r_{i,j} + a_{i,j}}{a_{i,j}} &\Leftrightarrow a_{i,j} L_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) - a_{i,j} + r_{i,j} = \omega \\ &\Rightarrow L_{\tilde{R}_{i,j}}^{-1}(y) = a_{i,j} y - a_{i,j} + r_{i,j} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} R_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) = \frac{r_{i,j} + b_{i,j} - \omega}{b_{i,j}} &\Leftrightarrow r_{i,j} + b_{i,j} - b_{i,j} L_{\tilde{R}_{i,j}}(\omega) = \omega \\ &\Rightarrow R_{\tilde{R}_{i,j}}^{-1}(y) = r_{i,j} + b_{i,j} - b_{i,j} y \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mit diesen Umkehrfunktionen kann man die zweite Komponente des Schwerpunktes berechnen.

$$\begin{aligned} y_0(\tilde{R}_{i,j}) &= \frac{\int_0^1 y (R^{-1}(y) - L^{-1}(y)) dy}{\int_0^1 (R^{-1}(y) - L^{-1}(y)) dy} \\ &= \frac{\int_0^1 y ((r_{i,j} + b_{i,j} - b_{i,j} y) - (a_{i,j} y - a_{i,j} + r_{i,j})) dy}{\int_0^1 ((r_{i,j} + b_{i,j} - b_{i,j} y) - (a_{i,j} y - a_{i,j} + r_{i,j})) dy} \\ &= \frac{\int_0^1 y(1 - y)(b_{i,j} + a_{i,j}) dy}{\int_0^1 (1 - y)(b_{i,j} + a_{i,j}) dy} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (5.18)$$

□

Offensichtlich ist die zweite Komponente einer normierten unscharfen Zahl mit einer dreieckförmigen Zugehörigkeitsfunktion stets konstant ein Drittel. Wenn man verschiedene, normierte, unscharfe Zahlen mit dreieckförmiger Zugehörigkeitsfunktion in der Grundmenge-Zugehörigkeit-Ebene darstellt, liegen ihre Schwerpunkte daher genau auf einer Gerade, die parallel zur Grundmenge-Achse liegt.

Mit der obigen Erkenntnis können normierte unscharfe Zahlen mit dreieckförmiger Zugehörigkeitsfunktion einfach anhand der ersten Komponente des Schwerpunktes miteinander verglichen werden, weil y_0 stets gleich bleibt. Zur Veranschaulichung wird beispielhaft eine unscharfe Zahl mit dreieckförmiger Zugehörigkeitsfunktion auf der Grundmenge-Zugehörigkeit-Ebene in der Abbildung 5.2 dargestellt.

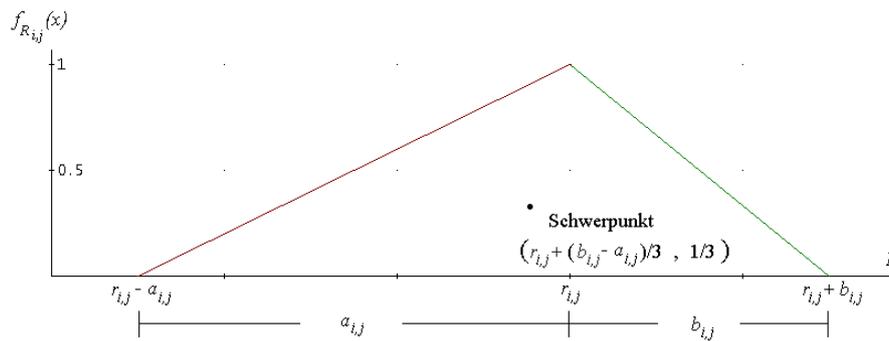


Abbildung 5.2: Schwerpunkt einer normierten unscharfen Zahl

Der Schwerpunkt kann auch als der geometrische Mittelpunkt der dreieckförmigen Fläche zwischen der Zugehörigkeitsfunktion und der Grundmenge-Achse interpretiert werden. Anhand der Schwerpunkte ist es damit möglich, zwei oder mehrere unscharfe Zahlen miteinander zu vergleichen.

5.3.2 Defuzzifikation durch α -Schnitte

Im Abschnitt 4.2 wurden α -Niveaumengen bzw. α -Schnitte als ein wichtiges Hilfsmittel einführend diskutiert. Anhand der α -Schnitte ist es möglich, eine unscharfe Menge durch eine Familie von klassischen, scharfen Mengen zu identifizieren, wobei jede Menge dieser Familie einem bestimmten α -Niveau zugeordnet wird.

Die Defuzzifikation durch α -Schnitte erfolgt in drei Schritten. Zunächst werden die α -Schnitte bestimmt. Anschließend wird innerhalb jedes α -Schnitts eine Maximierung und Minimierung einer nach dem Erweiterungsprinzip erweiterten Funktion durchgeführt. Mit diesen Ergebnissen wird ein Optimum innerhalb eines α -Schnitts bestimmt. Zuletzt wird dann über allen möglichen α -Schnitten insgesamt betrachtet und eine erneute Optimierung durchgeführt.

Ausgegangen wird von zwei unscharfen Mengen, nämlich \tilde{A} über der Grundmenge Ω und \tilde{B} über der Grundmenge Y . Ferner sei \hat{g} eine erweiterte Funktion von $g : \Omega \rightarrow Y, g(\omega) \mapsto y$ im Sinne des Erweiterungsprinzips (vgl. Abschnitt 4.3). Sei $f_{\tilde{A}}$ die Zugehörigkeitsfunktion von \tilde{A} und $f_{\tilde{B}}$ von \tilde{B} . Die von \hat{g} induzierten α -Schnitte von \tilde{B} werden dargestellt als

$$\mathcal{B}_g^\alpha = \{y \in Y \mid y = g(\omega), \omega \in \Omega, f_{\tilde{B}}(y) \geq \alpha\}. \quad (5.19)$$

Zu jedem dieser α -Schnitte werden das Minimum und das Maximum festgestellt. Mit diesen beiden scharfen Werten wird ein α -Schnitt repräsentiert. Weiter werden beide Werte

unter Zuhilfenahme des Hurwicz-Prinzips zusammen betrachtet. Dabei wird ein Hurwicz-Parameter eingefügt, der einen Wert aus dem geschlossenen Intervall zwischen und Null und Eins annehmen kann. Mit unterschiedlicher Wertsetzung dieses Parameters werden verschiedene Risikoeinstellungen wiedergegeben. Für eine theoretisch fundierte Ausführung wird auf [AGS02] verwiesen.

Anschließend werden alle α -Schnitte gleichzeitig berücksichtigt. Falls die Zugehörigkeitsfunktion stetig ist, wird über alle α -Niveaus integriert. Wenn die Zugehörigkeitsfunktion diskret ist, wird summiert. In beiden Fällen wird eine Gewichtung der verschiedenen α -Schnitte benötigt. Im Fall der stetigen Zugehörigkeitsfunktion ist die Gewichtung eine stetige Funktion und im Fall der diskreten Zugehörigkeit ist die Gewichtung eine diskrete Funktion. (Vgl. [SAG99], [HS03] und [SS09].)

5.4 Naive Renditemaximierung mit Schwerpunktmethod

In diesem Abschnitt wird ein einfaches und naives Fuzzy-Modell konstruiert, in dem kein explizites Risikomaß berücksichtigt wird. Stattdessen werden für das Portfolio die unscharfen k -Tage-Durchschnittsrenditen betrachtet. Auch wenn kein Risikomaß im Modell explizit berücksichtigt wird, kann durch den Aufbau des Modells eine gewisse Risikoreduktion erzielt werden. Dies wird durch die Berücksichtigung von verschiedenen unscharfen k -Tage-Durchschnittsrenditen erreicht, so dass das resultierende Portfolio hinsichtlich der Rendite eine bestimmte Güte in verschiedenen vergangenen Zeiträumen erhält.

Dieses Modell dient hauptsächlich der Demonstration der unscharfen Konstrukte in der Modellierung. Zunächst wird die Hauptkomponente des Modells betrachtet.

Satz 5.7 (k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrendite). *Seien $\tilde{R}_{i,j} = (r_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j})_{LR}$ mit $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ insgesamt T unscharfe Tagesrenditen von N Wertpapieren. Man entscheidet sich für eine der vier Bewertungsvarianten. (Vgl. Abschnitt 5.2) Sei $X = (x_1 \ \dots \ x_N)^T \in \mathbb{R}^N, x_j \geq 0 \forall j \in \{1, \dots, N\}$ die Aufteilung des Portfolios. Die Rendite des gesamten Portfolios in den aktuell vergangenen k -Tagen mit festem $k \in \{1, \dots, T\}$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \tilde{R}_P^k &= (r_P^k, a_P^k, b_P^k)_{LR} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_{i,j} r_{i,j}}{k}, \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_{i,j} a_{i,j}}{k}, \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_{i,j} b_{i,j}}{k} \right)_{LR}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Beweis. Die unscharfen k -Tage-Durchschnittsrenditen sind gemäß Definition 5.4 gegeben durch

$$\tilde{R}_j^k = \frac{1}{k} \sum_{i=T-k+1}^T \tilde{R}_{i,j} = \left(\sum_{i=T-k+1}^T \frac{r_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{a_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{b_{i,j}}{k} \right)_{LR}, \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Da sich die Rendite des gesamten Portfolios aus den Renditen der einzelnen Wertpapieren zusammensetzt, kann man die Gesamrendite als eine gewichtete Summe der einzelnen Wertpapierrenditen darstellen. Die gesamte Portfolio-Rendite ist gemäß Definition 5.3 entsprechend

$$\begin{aligned} \tilde{R}_P^k &= \sum_{j=1}^N x_j \tilde{R}_j^k = \sum_{j=1}^N x_j \left(\sum_{i=T-k+1}^T \frac{r_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{a_{i,j}}{k}, \sum_{i=T-k+1}^T \frac{b_{i,j}}{k} \right)_{LR} \\ &= \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j r_{i,j}}{k}, \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j a_{i,j}}{k}, \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j b_{i,j}}{k} \right)_{LR} \end{aligned}$$

□

Weiter können die unscharfen Portfolio-Durchschnittsrenditen mittels der Schwerpunkt-
methode (vgl. 5.3.1) miteinander verglichen werden. Die k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrendite
ist wie im Satz 5.7. Der zugehörige Schwerpunkt ist nach Satz 5.6

$$\begin{aligned}
x_0(\tilde{R}_P^k) &= r_P^k + \frac{b_P^k - a_P^k}{3} \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j r_{i,j}}{k} + \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j a_{i,j}}{k} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j b_{i,j}}{k} \right) \quad (5.21) \\
y_0(\tilde{R}_P^k) &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Durch Umformungen wird ersichtlich, dass der Schwerpunkt der k -Tage-Portfolio-Durch-
schnittsrendite ebenfalls aus den Schwerpunkten der einzelnen Tagesrenditen der Wertpa-
pierre berechnet werden kann.

$$\begin{aligned}
x_0(\tilde{R}_P^k) &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j r_{i,j}}{k} + \frac{1}{3} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j b_{i,j}}{k} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j a_{i,j}}{k} \right) \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j}{k} \left(r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3} \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j}{k} x_0(\tilde{R}_{i,j}), \\
y_0(\tilde{R}_P^k) &= \frac{1}{3} = y_0(\tilde{R}_{i,j}), \\
&\forall i \in \{T - k + 1, \dots, T\}, j \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned}$$

Es ist also gleichgültig, ob man zuerst die Portfolio-Durchschnittsrendite berechnet und
anschließend mit der Schwerpunkt-
methode defuzzifiziert, oder zuerst die einzelnen Tages-
renditen defuzzifiziert und dann mit den Schwerpunkten der einzelnen Tagesrenditen den
Schwerpunkt der Portfolio-Durchschnittsrendite berechnet. Diese Eigenschaft gilt speziell
bei diesen Gegebenheiten und kann nicht ohne Weiteres verallgemeinert werden.

Nun wird ein Optimierungsmodell basierend auf diesen Voraussetzungen konstruiert.

Unter der Annahme, dass ein Anleger das Ziel der Maximierung der Portfolio-Durch-
schnittsrendite verfolgt, wird dies als Zielfunktion spezifiziert. Es ist plausibel, dass bzgl.
der Vorinformationen ein Portfolio ein anderes dominiert, falls es in mehreren Szenarien
besser abschneidet. Um dies abzubilden, werden mehrere Zielfunktionen mit verschiedenen
 k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrenditen spezifiziert. Da nun die Portfolio-Durchschnitts-
rendite unscharf ist und die zweite Komponente des Schwerpunktes bei der Gegebenheit
konstant gleich ein Drittel ist, wird lediglich die erste Komponente des Schwerpunktes der
Portfolio-Durchschnittsrendite maximiert. Als Nebenbedingungen dienen die Nichtnega-
tivitätsbedingungen der prozentualen Anteile der einzelnen Anlagepositionen. Auch die
Budget-Bedingung wird hinzugezogen. Diese sichert die Ausschöpfung des Anfangskapi-
tals. Das Optimierungsmodell ist wie folgt:

OP3

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=T-k+1}^T \frac{x_j}{k} \left(r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3} \right) \rightarrow \max_{x_j, j=1, \dots, N}, \forall k = 1, \dots, T$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\mathbf{1}^T X = \sum_{j=1}^N x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Dieses Optimierungsmodell ist ein Mehrzieloptimierungsmodell. Generell ist es möglich, ein Mehrzieloptimierungsmodell nach dem Prinzip von Zadeh und Bellman umzuformulieren. (Vgl. Abschnitt 4.4) Für die Umformulierung muss zuvor eine Zugehörigkeitsfunktion für die Zielerfüllung jeder Zielfunktion konstruiert werden. Allgemein kann eine solche Zugehörigkeitsfunktion die Präferenzen des Anlegers wiedergeben. Es gibt viele Möglichkeiten zur Festlegung der Zugehörigkeitsfunktionen. Um dieses demonstrative Modell überschaubar und anschaulich zu halten, wird die Zugehörigkeitsfunktion als stückweise linear festgelegt.

Bei dem vorliegenden Problem wird die Portfolio-Durchschnittsrendite als Grad der Zielerfüllung verstanden. Eine Schwellenrendite wird festgelegt. Portfolio-Durchschnittsrenditen, die kleiner als die Schwellenrendite sind, haben eine Zugehörigkeit von Null. Ferner wird eine zufrieden stellende Rendite festgelegt. Portfolio-Durchschnittsrenditen, die größer als die zufriedenstellende Rendite sind, haben eine Zugehörigkeit von Eins. Alle Werte zwischen den beiden Vergleichsrenditen haben eine proportional ansteigende Zugehörigkeit. Theoretisch ist es möglich, dass der Investor für jede k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrendite stets die gleiche Schwellenrendite und zufriedenstellende Rendite setzt, doch adäquater ist es, diese der jeweiligen Rahmensituation anzupassen. Sei

$$x_0^{\max,k} := \max_j \frac{1}{k} \sum_{i=T-k+1}^T \left(r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3} \right) \quad (5.22)$$

der Schwerpunkt der höchstmöglichen k -Tage-Durchschnittsrendite eines einzelnen Wertpapiers. Für ein festes $k \in \{1, \dots, T\}$ ist es sinnvoll, dies als den Schwerpunkt der zufriedenstellenden Portfolio-Durchschnittsrendite zu setzen.

Auf ähnliche Weise kann man den Schwerpunkt der Schwellenrendite als

$$x_0^{\min,k} := \min_j \frac{1}{k} \sum_{i=T-k+1}^T \left(r_{i,j} + \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{3} \right) \quad (5.23)$$

setzen. Da $x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N$ gilt, liegt der Schwerpunkt der k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrendite stets zwischen diesen beiden Werten. Also gilt

$$x_0^{\min,k} \leq x_0(\tilde{R}_P^k) \leq x_0^{\max,k}. \quad (5.24)$$

Bei jedem festen k ist die lineare Zugehörigkeitsfunktion für das Ziel Z_k

$$f_{Z_k} \left(x_0(\tilde{R}_P^k) \right) = \begin{cases} 0, & x_0(\tilde{R}_P^k) < x_0^{\min,k} \\ \frac{x_0(\tilde{R}_P^k) - x_0^{\min,k}}{x_0^{\max,k} - x_0^{\min,k}}, & x_0^{\min,k} \leq x_0(\tilde{R}_P^k) \leq x_0^{\max,k}, \forall k \in \{1, \dots, T\}. \\ 1, & x_0^{\min,k} < x_0(\tilde{R}_P^k) \end{cases} \quad (5.25)$$

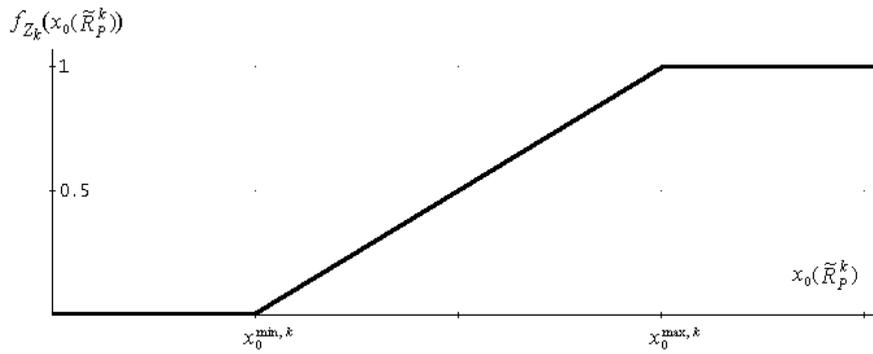


Abbildung 5.3: Zugehörigkeitsfunktion eines Ziels

Das Modell nach der Umformulierung aufgrund der Berücksichtigung der Zugehörigkeitsfunktionen lässt sich darstellen als

OP4

$$\min \left\{ f_{Z_1}(x_0(\tilde{R}_P^1)), \dots, f_{Z_T}(x_0(\tilde{R}_P^T)) \right\} \longrightarrow \max_{x_j, j=1, \dots, N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Nach Zadeh und Bellman [BZ70] kann dieses Modell äquivalent umformuliert werden, sodass die Einzel-Mehrrestriktionsstruktur ersichtlich wird.

OP5

$$\min \{ \lambda_k, k \in \{1, \dots, T\} \} \longrightarrow \max_{\substack{x_j, j=1, \dots, N \\ \lambda_k, k=1, \dots, T}}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$f_{Z_k}(x_0(\tilde{R}_P^k)) = \frac{x_0(\tilde{R}_P^k) - x_0^{\min,k}}{x_0^{\max,k} - x_0^{\min,k}} \geq \lambda_k, k = 1, \dots, T,$$

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

In diesem Modell existieren neben N Variablen für die Portfolio-Aufteilung weitere T Variablen für die Zielerfüllungsgrade. Da aber die minimale Zielerfüllung maximiert werden soll, kann das Modell um $T - 1$ Variablen reduziert werden. Dies führt zum folgenden Modell mit insgesamt $N + 1$ Entscheidungs- bzw. Optimierungsvariablen:

$$\lambda \longrightarrow \max_{\lambda, x_j, j=1, \dots, N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$f_{Z_k} \left(x_0(\tilde{R}_P^k) \right) = \frac{x_0(\tilde{R}_P^k) - x_0^{\min, k}}{x_0^{\max, k} - x_0^{\min, k}} \geq \lambda, k = 1, \dots, T,$$

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Mit diesem Modell wird das Portfolio darauf hin optimiert, dass durch die Variation der Anteile der einzelnen Wertpapiere alle k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrenditen maximiert werden. Aufgrund der gleichzeitigen Mehrzieloptimierung ist die gesamte Zielerfüllung nur so gut wie die Zielerfüllung des am schlechtesten erfüllten Einzelziels. Da die k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrenditen stets auf der Basis der Renditenbeobachtungen der letzten k -Tage mit $k \in \{1, \dots, T\}$ berechnet werden, haben sie unterschiedliche Aussagekraft. Je größer der Zeitraum ist, desto größer ist der Glättungseffekt. Umgekehrt können solche Schwankungen, v. a. in einem bestimmten zeitlichen Rahmen, wichtig sein. Deswegen sollen Zielerfüllungsgrade nicht pauschal einheitlich zur Bewertung herangezogen werden. Sie können individuelle Gewichtungen bekommen, die eine Adjustierung vornehmen. Dies wird durch eine Gewichtungsfunktion für den einzelnen Zielerfüllungsgrad je nach Länge des Zeitraums festgelegt. Sei beispielsweise $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ eine Gewichtungsfunktion. Das ursprüngliche Modell kann in das folgende Modell erweitert werden:

$$\lambda \longrightarrow \max_{\lambda, x_j, j=1, \dots, N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$f_{Z_k} \left(x_0(\tilde{R}_P^k) \right) = \frac{x_0(\tilde{R}_P^k) - x_0^{\min, k}}{x_0^{\max, k} - x_0^{\min, k}} \geq g(k)\lambda, k = 1, \dots, T,$$

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Falls der Anleger tendenziell auf die Durchschnittsrendite der längeren Zeiträume achtet, kann die Gewichtungsfunktion beispielsweise monoton steigend spezifiziert werden. Falls umgekehrt die Durchschnittsrendite von kürzeren Zeiträumen mehr Gewicht haben soll, kann die Gewichtungsfunktion als monoton fallend spezifiziert werden. In einem extremen Fall kann die Funktion sogar so konstruiert werden, dass nur für einen einzelnen Wert von k der Funktionswert gleich Eins ist, wobei die Funktion für alle restlichen Werte von k den Wert Null zuordnet.

Das Modell kann kompakter gefasst werden:

OP6

$$\lambda \longrightarrow \max_{\lambda, x_j, j=1, \dots, N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$g(k) \left(x_0^{\max, k} - x_0^{\min, k} \right) \lambda - x_0(\tilde{R}_P^k) \leq -x_0^{\min, k}, k = 1, \dots, T,$$

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

In der Matrixschreibweise ist dieses Modell äquivalent mit

$$\lambda \longrightarrow \max_{\lambda, x_j, j=1, \dots, N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{pmatrix} g(1) \left(x_0^{\max, 1} - x_0^{\min, 1} \right) & \sum_{i=T}^T \frac{x_0(\tilde{R}_{i,1})}{1} & \dots & \sum_{i=T}^T \frac{x_0(\tilde{R}_{i,N})}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(T) \left(x_0^{\max, T} - x_0^{\min, T} \right) & \sum_{i=T}^T \frac{x_0(\tilde{R}_{i,T})}{T} & \dots & \sum_{i=T}^T \frac{x_0(\tilde{R}_{i,N})}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_0^{\min, 1} \\ \vdots \\ -x_0^{\min, T} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{1}^T X = 1,$$

$$x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, N.$$

Für dieses einfache Modell mit dem Fokus auf Renditenmaximierung gibt es sowohl weitere Modifikations- als auch Erweiterungsmöglichkeiten. Eine davon ist, die lineare Zugehörigkeitsfunktion durch eine andere Funktion, beispielsweise die logistische Funktion, zu ersetzen. Generell hat die logistische Funktion die Gestalt

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-d(x-c)}}, a, c, d \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

Dabei ist $a > 0$ die Sättigungsgrenze und die obere Asymptote. Da die Rendite maximiert wird und der höchstmögliche Erfüllungsgrad Eins ist, kann man $a = 1$ setzen. Nach der Festlegung von a wird die logistische Funktion weiter durch die Parameter d und c definiert. Dabei ist c derjenige Wert, der den zugehörigen Funktionswert $\frac{a}{2}$ hat. c markiert die Rendite bzw. den Wert des Schwerpunktes, bei dem die Zielerfüllung 50% beträgt. Der Parameter d steuert den Krümmungsverlauf der Funktion.

Bei der Verwendung einer logistischen Funktion als Zugehörigkeitsfunktion muss darauf geachtet werden, dass sie einen asymptotischen Verlauf hat. Genauer gelten mit $d > 0$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-d(x-c)}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \text{ und } f(x) = \frac{1}{1 + e^{-d(x-c)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

Bei einer Zugehörigkeitsfunktion in dieser Gestalt kann die Zielerfüllung das Niveau 100% nie erreichen. Außerdem wäre das gesamte Optimierungsmodell durch die Verwendung der logistischen Gleichung nicht mehr linear. Dies kann aber durch geschickte Substitution und Umformulierung des Modells wieder in ein lineares Optimierungsproblem transformiert werden. [Wat97]

Abgesehen von der Modifizierung der Zielerfüllungsfunktion kann eine zusätzliche Risikoerücksichtigung eingeführt werden. Ähnliche wie die Varianz für statistische Portfolio-Modelle können Fuzzy-Konstrukte im Rahmen des vorliegenden Modells eingebunden werden, beispielsweise unter Einbeziehung der Unschärfe. Wenn das Konstrukt der unscharfen

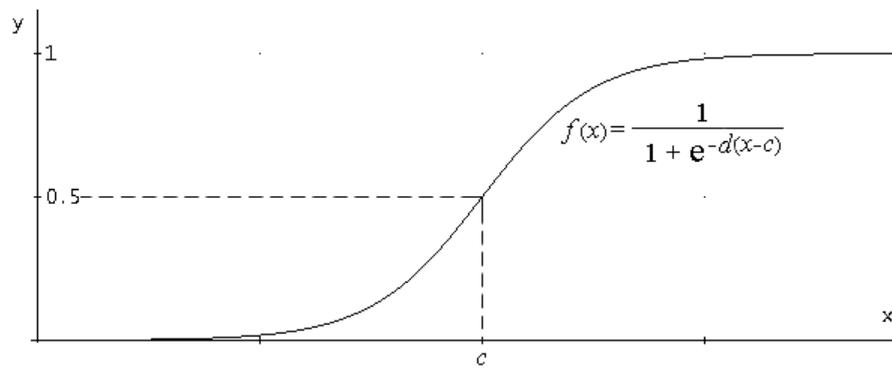


Abbildung 5.4: Logistische Funktion

Zahl genauer betrachtet wird, wird die Unschärfe v. a. durch die Spannweite nach unten bzw. nach oben berücksichtigt. Da die Portfolio-Durchschnittsrendite eine unscharfe Zahl ist, kann ein Risikomaß aus den Spannweiten und der Zugehörigkeitsfunktion konstruiert werden. Neben den Spannweiten der unscharfen Rendite können weitere Kennzahlen zur Konstruktion zusätzlicher Risikomaße hinzugezogen werden. Beispielsweise können vergleichbare Kennzahlen wie die Varianz in der Statistik konstruiert werden, falls die Zugehörigkeitsfunktion bestimmte Voraussetzungen erfüllen. Als Referenz wird auf die Arbeiten von Carlsson et.al. [CF01] verwiesen.

Kapitel 6

Hauptmodell

In diesem Kapitel wird das Fuzzy-Hauptmodell konstruiert, das den Kern dieser Arbeit darstellt. In diesem Modell wird eine neuartige Modellierung der Vorinformationen verwendet. Ähnlich wie bei Markowitz wird von den Gebühren der Transaktionen und von den steuerlichen Aspekten abstrahiert. Der Fokus wird auf die Rendite und speziell die Unschärfe bzw. die Unsicherheit der Rendite gelegt.

Nachfolgend wird zunächst auf die Vorbereitung der Vorinformationen eingegangen. Anhand der gewonnenen Inputs wird das Hauptmodell formuliert. Anschließend wird eine Lösung für das Hauptmodell auf zwei verschiedenen Wegen hergeleitet und miteinander verglichen.

6.1 Vorinformationen

In diesem Abschnitt wird die Verarbeitung der historischen Kursdaten dargestellt. Mit dieser Verarbeitung werden Informationen in einer besonderen Form, nämlich als Ellipsoid, für das Hauptmodell ermittelt und vorbereitet.

Es wird von N Wertpapieren ausgegangen, von denen die unscharfen Tagesrenditen aus den historischen Kursdaten zur Verfügung stehen. Diese unscharfen Renditen $\tilde{R}_{i,j} = (r_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j})_{LR}$ mit $i \in \{1, \dots, T\}$ und $j \in \{1, \dots, N\}$ dienen als Datengrundlage. Dabei ist i der Periodenindex und j der Wertpapierindex. Diese unscharfen Renditen sind sämtlich mit einer dreieckförmigen Zugehörigkeitsfunktion ausgestattet. (Vgl. Abschnitt 5.2)

Es ist möglich, anstatt der unscharfen Renditen direkt die normalen Periodenschlussrenditen zu verwenden. In diesem Fall entfällt die Schwerpunktbildung und man kann direkt mit der Ermittlung des Ellipsoids anfangen. Um es allgemein zu halten, wird der unscharfe Fall betrachtet. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Periodenlänge ein Tag ist. (Aber auch andere Periodenlängen können unter entsprechender Berücksichtigung verwendet werden.)

Nun werden die unscharfen Renditen zum gleichen Zeitpunkt nicht mehr einzeln sondern stets im Zusammenhang betrachtet. Zu einem festen Tag werden also nicht N eindimensionale unscharfe Datenpunkte, sondern ein N -dimensionaler unscharfer Datenpunkt betrachtet.

Zunächst wird die lokale Unschärfe in der Tagesbetrachtung reduziert. Nach diesem Schritt ergibt sich ein Vektor mit N Schwerpunkten zu jedem gegebenen Zeitpunkt. Da die Zugehörigkeitsfunktion für jede einzelne Wertpapierrendite stets dreieckförmig ist, genügt es, die horizontale Komponente des Schwerpunkts zu betrachten. (Vgl. Abschnitt 5.3.1) Jeder Vektor mit N Tagesrenditenschwerpunkten zum Tag i wird fortan mit R_i bezeichnet und

hat die Gestalt

$$R_i := x_0(\tilde{R}_i) = r_i + \frac{b_i - a_i}{3} = \begin{pmatrix} r_{i,1} + \frac{b_{i,1} - a_{i,1}}{3} \\ \vdots \\ r_{i,N} + \frac{b_{i,N} - a_{i,N}}{3} \end{pmatrix}, \text{ mit festem } i \in \{1, \dots, T\}.$$

Nach wie vor wird die Schwerpunktbildung mit $x_0(\bullet)$ gekennzeichnet.

Jeder Schwerpunkt gibt die Lage der entsprechenden unscharfen Zahl unter Berücksichtigung der jeweils zugehörigen Unschärfe wieder. Damit bleibt anstatt der Kombination aus drei Parametern, nämlich dem Zentrum und den beiden Spannweiten, lediglich ein Lageparameter zu berücksichtigen. Dieser Schritt kann als eine lokale Defuzzifikation aufgefasst werden.

Als Zwischenergebnis steht zu jedem Zeitpunkt $i \in \{1, \dots, T\}$ ein N -dimensionaler Vektor aus \mathbb{R}^N zur Verfügung. Aus allen T Datenpunkten werden die Informationen sowohl hinsichtlich der Lage, als auch hinsichtlich der strukturellen Zusammenhänge in geeigneter Form vorbereitet, die anschließend als Dateninput für das Hauptmodell verwendet werden.

Für die Beschaffung der Inputs wird auf die Methode des umhüllenden volumenminimalen Ellipsoids zurückgegriffen. Man betrachtet die Schwerpunkte bzw. Renditen wieder als eine gesamte unscharfe Menge und die vorliegenden historischen Daten werden als ein α -Schnitt dieser unscharfen Menge aufgefasst. Dieser α -Schnitt wird als ein Ellipsoid betrachtet, das verschiedene sinnvolle Zugehörigkeitsfunktionen zulässt. Es wird also ein Ellipsoid in \mathbb{R}^N gesucht, das alle Datenpunkte mit vorgegebener Fehlertoleranz in sich umfasst und gleichzeitig volumenminimal ist.

Da dieses Optimierungsproblem bei vielen Fragestellungen in ähnlicher Form vorkommt, gibt es viele Forschungsarbeiten zu diesem Thema. Verschiedene Methoden und Lösungsalgorithmen sind vorhanden, die stetig weiter verbessert werden. Unter allen Algorithmen ist der von Khachiyan sehr bekannt. Er gilt als ein bewährter, grundlegender Algorithmus. [TY07] In dieser Arbeit wird der Algorithmus von Khachiyan herangezogen und zur Bestimmung des umhüllenden volumenminimalen Ellipsoids verwendet.

Geometrisch ist das Ellipsoid ein Konstrukt im Euklidischen Raum, das ein Zentrum besitzt und in jeder Dimension die symmetrische Eigenschaft bzgl. des Zentrums besitzt. Jedes Ellipsoid in \mathbb{R}^N kann durch eine Menge von Punkten beschrieben werden:

$$Ellipsoid = \{\omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - c)^T Q (\omega - c) \leq t\} \quad (6.1)$$

Die linke Seite der Restriktionsungleichung in (6.1) ist eine quadratische Form in $\omega \in \mathbb{R}^N$. Darin ist das Zentrum des Ellipsoids c . Q ist eine symmetrische, positiv definite Matrix mit reellen Einträgen und der Dimension $N \times N$. Durch Q wird die Struktur und die Orientierung des Ellipsoids in \mathbb{R}^N charakterisiert.

Bemerkung 6.1 (Quadratische Q -Norm). *Fortan wird $(\omega - c)^T Q (\omega - c)$ als quadratische Q -Norm von ω bzgl. c bezeichnet oder kürzer als quadratische Q -Norm von ω .*

Der Parameter t in der Restriktionsungleichung ist eine positive reelle Konstante, welche die gerade noch zu berücksichtigende, maximale quadratische Q -Norm bzgl. c angibt. Offensichtlich ist die quadratische Q -Norm bzgl. c gleich der euklidischen Norm in \mathbb{R}^N , falls die Strukturmatrix Q die Einheitsmatrix ist und c dem Ursprung entspricht. Durch geeignete Skalierung der Matrix Q kann der Parameter t auf eins normiert werden. (Bei einigen spezifischen Problemstellungen kann es sinnvoll sein, die Konstante t auf die Anzahl der Dimensionen des zugrundeliegenden Grundraums, in diesem Fall N , zu normieren.) Nach der Normierung der Konstante t enthält die Matrix Q ebenfalls Information über

der Größe des Ellipsoids. Um das Ellipsoid zu bestimmen, müssen das Zentrum c und die Strukturmatrix Q bestimmt werden. Das Ellipsoid, das durch die gegebenen Datenpunkte bestimmt wird, repräsentiert alle gegebenen Datenpunkte.

Bemerkung 6.2. *Im Folgenden wird von der Ellipsoidgleichung*

$$\text{Ellipsoid} = \{\omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - c)^T Q (\omega - c) \leq 1\} \quad (6.2)$$

mit positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und $c \in \mathbb{R}^N$ ausgegangen. Ferner wird angenommen, dass die gegebenen Datenpunkte den Raum \mathbb{R}^N vollständig aufspannen können, d. h. die $N \times T$ Matrix

$$\begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(\tilde{R}_{1,1}) & \cdots & x_0(\tilde{R}_{T,1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0(\tilde{R}_{1,N}) & \cdots & x_0(\tilde{R}_{T,N}) \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

hat den vollen Rang N . Im Normalfall übersteigt die Anzahl der Datenpunkte die Dimensionen bei weitem und die obige Matrix hat vollen Rang.

Die Bestimmung der Gleichung des Ellipsoids anhand der gegebenen Datenpunkte erfolgt in drei Schritten. Zunächst wird künstlich eine Struktur durch sogenanntes „Lifting“ erzeugt. Danach wird das duale Problem der eigentlichen Volumenminimierung gelöst, was die Entwicklung eines Algorithmus vorbereitet. Zuletzt wird der iterative Algorithmus von Khachiyan angegeben.

Schritt 1: Lifting der Datenpunkte

Gegeben sind T Datenpunkte für die Bestimmung des zugehörigen Ellipsoids. Diese Datenpunkte müssen keine bestimmte Struktur vorweisen. Aber durch einen Kunstgriff wie folgt wird eine Symmetrie hergestellt. Dabei wird die Dimension des Grundraums um eins erhöht und alle Datenpunkte symmetrisch dupliziert. Es wird also nicht mehr die Menge der Datenpunkte $\{R_1, \dots, R_T\}$ mit $R_i \in \mathbb{R}^N, i = 1, \dots, T$ betrachtet, sondern die Menge $\left\{ \pm \begin{pmatrix} R_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \pm \begin{pmatrix} R_T \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Diese $2T$ Datenpunkte sind punktsymmetrisch zum Ursprung in \mathbb{R}^{N+1} . Aufgrund der Symmetrie ist das Zentrum des umhüllenden Ellipsoids für diese $2T$ Datenpunkte im Ursprung von \mathbb{R}^{N+1} . Diese Prozedur wird als „Lifting“ bezeichnet.

Satz 6.3. *Seien $R_1, \dots, R_T \in \mathbb{R}^N$ insgesamt T Datenpunkte, die den Raum \mathbb{R}^N vollständig aufspannen. Das umhüllende volumenminimale Ellipsoid für $\{R_1, \dots, R_T\}$ entspricht dem Durchschnitt zwischen dem volumenminimalen Ellipsoid für $\left\{ \pm \begin{pmatrix} R_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \pm \begin{pmatrix} R_T \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\{\omega \in \mathbb{R}^{N+1} : \omega_{N+1} = 1\}$ als affinem Unterraum von \mathbb{R}^{N+1} , genauer*

$$\begin{aligned} \text{Ellipsoid}(\{R_1, \dots, R_T\}) \times \{1\} = \\ \text{Ellipsoid} \left(\left\{ \pm \begin{pmatrix} R_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \pm \begin{pmatrix} R_T \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \cap \{\omega \in \mathbb{R}^{N+1} : \omega_{N+1} = 1\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Beweis. Vgl. [KT93] und [TY07]. □

Seien im Folgenden $a_i = \begin{pmatrix} R_i \\ 1 \end{pmatrix}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$.

Schritt 2: Bestimmung des Ellipsoids

Allgemein lässt sich das Volumen eines N -dimensionalen Ellipsoids mit den obigen Bezeichnungen anhand der Formel

$$\text{Vol}(\text{Ellipsoid}) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} \frac{1}{\sqrt{\det Q}} \quad (6.5)$$

berechnen, wobei $\Gamma(\bullet)$ die Gammafunktion darstellt. [GLS93, S.67ff.] Die Konstante $\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}$ hängt lediglich von der Dimension N ab. Deswegen kann das Problem zur Bestimmung des N -dimensionalen volumenminimalen Ellipsoids, das gleichzeitig alle T Datenpunkte $\{R_1, \dots, R_T\}, R_i \in \mathbb{R}^N$ enthält, wie folgt dargestellt werden:

OP7

$$\frac{1}{\sqrt{\det Q}} = (\det Q^{-1})^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min_{c, Q} \iff \ln \det Q^{-1} \rightarrow \min_{c, Q}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$(R_i - c)^T Q (R_i - c) \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$Q \in \left\{ J \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid J = J^T, J \text{ positiv definit} \right\}.$$

Nach dem Lifting ergibt sich ein neues, aber ähnliches Optimierungsproblem bzgl. der Menge der zum Ursprung punktsymmetrischen Punkte $\{\pm a_1, \dots, \pm a_T\}$, wobei M die neue zugehörige Strukturmatrix mit der Dimension $(N + 1) \times (N + 1)$ bezeichnet:

OP8

$$\ln \det M^{-1} \rightarrow \min_M$$

unter den Nebenbedingungen:

$$a_i^T M a_i \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, T\},$$

$$M \in \left\{ J \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)} \mid J = J^T, J \text{ positiv definit} \right\}.$$

Beide Optimierungsprobleme sind wegen (6.4) miteinander verbunden. Es ist vorteilhaft, zunächst das Problem bzgl. der punktsymmetrischen Datenpunkte nach dem Lifting, zu lösen. Daraus geht die Lösung des ursprünglichen Problems hervor. Aufgrund der Gleichung

$$a_i^T M a_i = (-a_i)^T M (-a_i), \forall i \in \{1, \dots, T\}$$

werden lediglich die Punkte $\{a_i \mid i \in \{1, \dots, T\}\}$ in der Nebenbedingung berücksichtigt. Dies wurde bereits im OP8 berücksichtigt.

Um dieses Optimierungsproblem zu lösen, wird das duale Problem formuliert. [TY07] Dabei werden

$$a_i^T M a_i \leq 1 \iff \text{tr}((a_i a_i^T) M) \leq 1$$

und die konjugierte Funktion von $\ln \det M^{-1}$ verwendet. [Boy09, S.222f] Dieses Problem beinhaltet bereits Komponenten, die in Khachiyans Algorithmus verwendet werden.

OP9

$$F(u) := \ln \det \sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \rightarrow \min_u$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^T u_i = 1,$$

$$u_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, T\}.$$

In der Dualisierung werden Entscheidungsvariablen $u_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, T\}$ eingeführt. Dabei ist die Zielfunktion $F(u)$ linear und ist stetig in

$$S := \left\{ u \in \mathbb{R}^T \mid \sum_{i=1}^T u_i = 1, u_1 \geq 0, \dots, u_T \geq 0 \right\}$$

als ein kompakter Unterraum von \mathbb{R}^T . Sei $u^* = (u_1^* \ \dots \ u_T^*)^T \in S$ die optimale Lösung des obigen Optimierungsproblems OP9 mit $F(u^*) > -\infty$ oder äquivalenterweise mit $\det \sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T > 0$.

Die notwendigen Bedingungen für die Optimalität des obigen Optimierungsproblems sind

$$\begin{aligned} a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^* (a_i a_i^T) \right)^{-1} a_k + s_k^* &= \lambda^*, \forall k \in \{1, \dots, T\}, \\ \sum_{i=1}^T u_i^* &= 1 \text{ und } u_i^* s_i^* = 0, \forall k \in \{1, \dots, T\}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

wobei $s_i^* \geq 0, \forall k \in \{1, \dots, T\}$ Schlupfvariablen sind. [TY07] Ferner zeigt Khachiyan das folgende Lemma mit der Bezeichnung der Menge $S_F = \{u \in S \mid F(u) > -\infty\}$ bzw. $S_F = \{u \in S \mid \det \sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T > 0\}$. Vgl.[Kha96].

Satz 6.4 (Lemma von Khachiyan). *Für jedes $u \in S_F$ als zulässige Lösung des dualen Optimierungsproblems gilt*

$$\sum_{i=1}^T u_i a_i^T \left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} a_i = N + 1 \tag{6.7}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T u_i a_i^T \left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} a_i &= \sum_{i=1}^T u_i \operatorname{spur} \left(\left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} (a_i a_i^T) \right) \\ &= \operatorname{spur} \left(\left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right) \right) = N + 1 \end{aligned}$$

Dabei beachte man $a_i \in \mathbb{R}^{N+1}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$ und entsprechend gilt

$$\left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} \left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}.$$

□

Schritt 3: Khachiyans Algorithmus

Mit obigen Vorbereitungen kann nun die Lösung des eigentlichen Problems, nämlich die Bestimmung des volumenminimalen Ellipsoids, das alle T gegebenen Datenpunkte umfasst, in einem Satz dargestellt werden. Der Beweis folgt der Ausführung von Todd und Yildirim. [TY07] Dieser Satz dient dem numerischen Algorithmus von Khachiyani als Grundlage.

Satz 6.5. Seien $\{R_1, \dots, R_T\}, R_i \in \mathbb{R}^N$ und mit diesen die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times T}$$

gegeben, die \mathbb{R}^N vollständig aufspannen. Nach dem Lifting seien die Datenpunkte mit $a_i = \begin{pmatrix} R_i \\ 1 \end{pmatrix}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$ bezeichnet. Weiter seien $u^* = (u_1^* \cdots u_T^*)^T \in \mathbb{R}^T$ die optimal

gewählten Entscheidungsvariablen und die Diagonalmatrix $U^* := \begin{pmatrix} u_1^* & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_T^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{T \times T}$.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich das volumenminimale Ellipsoid wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} & \text{Ellipsoid}(\{R_1, \dots, R_T\}) \\ &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - Pu^*)^T \left(N^{-1} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} \right) (\omega - Pu^*) \leq 1 \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

bzw.

$$\text{Ellipsoid}(\{R_1, \dots, R_T\}) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - c)^T Q (\omega - c) \leq 1 \right\}$$

Die Strukturmatrix des volumenminimalen Ellipsoids ist

$$Q = N^{-1} \left(PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T \right)^{-1} \quad (6.9)$$

und das Zentrum des volumenminimalen Ellipsoids ist

$$c = Pu^*. \quad (6.10)$$

Beweis. Nach dem Lifting der eigentlichen Datenpunkte ist das duale Problem zum volumenminimalen Ellipsoid OP9. Nach Satz 6.4 (Lemma von Khachiyani) gilt

$$\sum_{i=1}^T u_i a_i^T \left(\sum_{k=1}^T u_k a_k a_k^T \right)^{-1} a_i = N + 1.$$

Die Optimalitätsbedingungen (6.6) ergeben mit diesem Lemma [TY07]

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^T u_k^* a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T \right)^{-1} a_k = N + 1, \\ & \sum_{k=1}^T u_k^* = 1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die optimale Lösung für das duale Problem hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} & \text{Ellipsoid}(\{a_1, \dots, a_T\}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \mid \omega \in \mathbb{R}^N, \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Mit entsprechenden Bezeichnungen der Datenmatrix, der optimalen Entscheidungsvariablen und der Diagonalmatrix mit den optimalen Entscheidungsvariablen als Diagonale gilt die Matrixzerlegung

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T &= \begin{pmatrix} PU^*P^T & Pu^* \\ u^{*T}P^T & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & Pu^* \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ u^{*T}P^T & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dabei ist $\mathbf{0}$ der Nullvektor und I die Einheitsmatrix mit jeweils geeigneter Dimension. Ferner gilt

$$\left(\sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -u^{*T}P^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Pu^* \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Diese inverse Matrix ist die Strukturmatrix des Ellipsoids und wird in die Restriktionsungleichung des Ellipsoids eingesetzt.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^* a_i a_i^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \leq 1 \\ \Rightarrow &\frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ -u^{*T}P^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Pu^* \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \omega - Pu^* \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega - Pu^* \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N+1} \left((\omega - Pu^*)^T (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} (\omega - Pu^*) + 1 \right) \leq 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Aus (6.15) folgt unmittelbar:

$$(\omega - Pu^*)^T (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} (\omega - Pu^*) \leq N. \quad (6.16)$$

Damit kann das gesuchte volumenminimale Ellipsoid dargestellt werden als

$$\begin{aligned} &\text{Ellipsoid}(\{R_k, \forall k \in \{1, \dots, T\}\}) \\ &= \left\{ \omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - Pu^*)^T \frac{1}{N} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1} (\omega - Pu^*) \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

In der Restriktionsungleichung können die Strukturmatrix $Q = \frac{1}{N} (PU^*P^T - Pu^*u^{*T}P^T)^{-1}$ und das Zentrum des Ellipsoids als $c = Pu^*$ entsprechend identifiziert werden. \square

Im Satz 6.5 wird davon ausgegangen, dass die optimalen Entscheidungsvariablen $u_i^*, i \in \{1, \dots, T\}$ bereits vorliegen. Um diese zu berechnen, wird ein iteratives Verfahren angewendet. Im Hinblick auf die Funktion $F(u) = \ln \det \sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T = \ln \det PU^*P^T$ kann man die Menge der Punkte $\hat{u}(k, \tau) := (1 - \tau)u + e_k \tau$ auf einer Strecke betrachten, wobei e_k der k -te kanonische Einheitsvektor und $\tau \in [0, 1)$ ist. Aufgrund der Gleichung [Kha96]

$$\begin{aligned} \det \left(\sum_{i=1}^T \hat{u}_i(k, \tau) a_i a_i^T \right) &= \det \left((1 - \tau) \sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T + \tau a_k a_k^T \right) \\ &= (1 - \tau)^{N+1} \left[1 + \frac{\tau}{1 - \tau} \left(a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \right)^{-1} a_k \right) \right] \det \left(\sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \right), \end{aligned} \quad (6.18)$$

wobei zur Erinnerung $\sum_{i=1}^T \hat{u}_i(k, \tau) a_i a_i^T \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}
F(\hat{u}(k, \tau)) &= F((1 - \tau)u + e_k \tau) = \ln \det \left((1 - \tau) \sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T + \tau a_k a_k^T \right) \\
&= N \ln(1 - \tau) + \ln \left[1 + \tau \left(a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \right)^{-1} a_k - 1 \right) \right] \\
&\quad + \ln \det \left(\sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \right)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Um die optimale Wahl von τ als Suchschrittweite bei der Optimierung zu bestimmen, bildet man die Ableitung von $F(\hat{u}(k, \tau))$ nach τ und erhält

$$\frac{dF(\hat{u}(k, \tau))}{d\tau} = \frac{N}{1 - \tau} + \frac{a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^k(\tau) a_i a_i^T \right)^{-1} a_k - 1}{1 + \tau \left(a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^k(\tau) a_i a_i^T \right)^{-1} a_k - 1 \right)}. \tag{6.20}$$

Sei $g(u) := a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i a_i a_i^T \right)^{-1} a_k$. Da $\tau \in [0, 1)$ ist, gilt $1 - \tau > 0$. Weiter gilt $g(u) \geq 0$, und damit $1 + \tau(g(u) - 1) > 0$. Die Gleichnullsetzung von (6.20) liefert

$$\begin{aligned}
-\frac{N}{1 - \tau} + \frac{g(u) - 1}{1 + \tau(g(u) - 1)} &= 0 \\
\Leftrightarrow (g(u) - 1)(1 - \tau) &= N + N\tau(g(u) - 1) \\
\Leftrightarrow g(u) - 1 - N &= \tau(g(u) - 1)(N + 1) \\
\Leftrightarrow \tau &= \frac{g(u) - (N + 1)}{(g(u) - 1)(N + 1)}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

als Vorschrift für die Parametersetzung in der iterativen Berechnung des Ellipsoids.

Nun wird der Algorithmus von Khachiyan dargestellt. [TY07] Dabei werden die Datenpunkte $R_k, \forall k \in \{1, \dots, T\}$ unter einer gegebenen Fehlertoleranz $\epsilon > 0$ abgedeckt. Die sogenannte ϵ -Optimalität liegt vor, falls die folgende Restriktion erfüllt ist:

$$a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^k(\tau) a_i a_i^T \right)^{-1} a_k \leq (1 + \epsilon)(N + 1), \quad \forall k \in \{1, \dots, T\}. \tag{6.22}$$

Khachiyan's Algorithmus

1. Input:

- (a) Die ursprünglichen Datenpunkte $\{R_i \mid i \in \{1, \dots, T\}, R_i \in \mathbb{R}^N\}$ werden in einer Matrix zusammengefasst:

$$P = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times T}.$$

- (b) Fehlertoleranz $\epsilon > 0$.

2. Initialisierung der Variablen:

- (a) Iterationszähler $h := 0$

(b) Datenpunkte nach dem Lifting

$$a_i := \begin{pmatrix} R_i \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}, \forall i \in \{1, \dots, T\}$$

(c) Dimension des Ellipsoids nach dem Lifting $n := N + 1$

(d) Vektor der Entscheidungsvariablen:

$$u^0 := \frac{1}{T} \mathbf{1}$$

(e) Sei $U^h \in \mathbb{R}^{T \times T}$ die Diagonalmatrix mit

$$U^h = \begin{pmatrix} u_1^h & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_T^h \end{pmatrix}.$$

3. Iterationsschritt $h \rightarrow h + 1$

Prüfe, ob für den aktuellen Vektor der Entscheidungsvariablen u^h bereits die Bedingung (6.22) für alle $k \in \{1, \dots, T\}$ erfüllt ist.

- Falls die Bedingung (6.22) erfüllt ist, wird die Iteration abgebrochen.
- Falls die Bedingung (6.22) nicht erfüllt ist, werden folgende Berechnungen durchgeführt:

(a) Feststellung des vom Nullpunkt am weitesten entfernt liegenden Punktes a_j mit

$$j := \operatorname{argmax}_{k \in \{1, \dots, T\}} \left\{ a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^h a_i a_i^T \right)^{-1} a_k \right\}.$$

(b) Berechnung der gewichteten quadrierten Norm des am weitesten vom Nullpunkt entfernt liegenden Punktes:

$$g_h := a_j^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^h a_i a_i^T \right)^{-1} a_j.$$

(c) Optimale Schrittweite zur Verbesserung des Zielfunktionswerts

$$\tau_h := \frac{g_h - n}{(g_h - 1)n}.$$

(d) Update der Entscheidungsvariablen:

$$u^{h+1} := (1 - \tau_h)u^h + \tau_h e_j$$

mit e_j als der j -te kanonische Einheitsvektor.

(e) Iterationszähler erhöhen: $h := h + 1$.

4. Ausgabe nach Erreichen der Bedingung (6.22).

(a) Strukturmatrix des approximativ volumenminimalen Ellipsoids:

$$Q_h := N^{-1}(PU^h P^T - (Pu^h)(Pu^h)^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

(b) Zentrum des Ellipsoids:

$$c_h := Pu^h \in \mathbb{R}^N.$$

Khachiyans Algorithmus geht zunächst von der Gleichgewichtung aller vorhandenen Datenpunkte aus und berechnet nach dem Lifting die implizierte Strukturmatrix des Ellipsoids. Falls genauere Kenntnisse über die Datenpunkte vorliegen, können die Entscheidungsvariablen auch besser initialisiert werden. Vor jeder Iteration wird überprüft, ob die ϵ -Optimalität für sämtliche Datenpunkte erfüllt ist. Falls sie erreicht wird, können die Strukturmatrix Q und das Zentrum c des Ellipsoids für die ursprünglichen Datenpunkte ausgegeben werden. Andernfalls wird das Ellipsoid der Datenpunkte nach dem Lifting in der Form weiter verbessert.

In jedem Iterationsschritt werden die Entscheidungsvariablen als Gewichtung der Datenpunkte so aktualisiert, dass derjenige Datenpunkt stärker gewichtet wird, der vom Zentrum des aktuellen Ellipsoids, und zwar dem Ursprung, am weitesten entfernt liegt. Alle anderen Datenpunkte werden proportional weniger gewichtet, so dass die Summe aller Gewichtungen nach der Aktualisierung immer noch Eins ergibt. Die aktuelle quadratische Q -Norm ist dabei ausschlaggebend für die Entfernungsmessung. Mit jeder Aktualisierung der Entscheidungsvariablen wird die implizierte, neue Strukturmatrix erneut berechnet.

Spezialfall

Falls alle Datenpunkte an der Hülle des volumenminimalen Ellipsoids liegen, sind die anfänglichen Entscheidungsvariablen $u^0 = \frac{1}{T}\mathbf{1} \in \mathbb{R}^T$ bereits optimal. Es gelten $Tu^0u^{0T} = u^0\mathbf{1}^T = u^0\mathbf{1}^T\mathbf{1}u^{0T}$ und $\mathbf{1}u^{0T} = u^0\mathbf{1}^T$. Mit diesen Identitäten erhalten wir aus der Gleichung für die Strukturmatrix:

$$\begin{aligned} N^{-1}Q^{-1} &= PU^0P^T - (Pu^0)(Pu^0)^T = \frac{1}{T}PP^T - (Pu^0)(Pu^0)^T \\ &= \frac{1}{T}(PP^T - TPu^0u^{0T}P^T) = \frac{1}{T}(PP^T - 2TPu^0u^{0T}P^T + TPu^0u^{0T}P^T) \\ &= \frac{1}{T}(PP^T - 2Pu^0\mathbf{1}^T P^T + Pu^0\mathbf{1}^T\mathbf{1}u^{0T}P^T) \\ &= \frac{1}{T}(PP^T - P\mathbf{1}u^{0T}P^T - Pu^0\mathbf{1}^T P^T + Pu^0\mathbf{1}^T\mathbf{1}u^{0T}P^T) \\ &= \frac{1}{T}(P - Pu^0\mathbf{1}^T)(P - Pu^0\mathbf{1}^T)^T \end{aligned}$$

In diesem Fall ist es offensichtlich, dass die inverse Matrix der Strukturmatrix dem N -Fachen der empirischen Kovarianzmatrix entspricht, mit N als Anzahl der Dimensionen. Das Zentrum des volumenminimalen Ellipsoids $c = Pu^0$ entspricht dem arithmetischen Mittelwert aller Datenpunkte.

Dies wird an einem besonders einfachen Beispiel demonstriert. Drei paarweise linear unabhängige Punkte in \mathbb{R}^2 werden herangezogen. Seien sie $R_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $R_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $R_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$. Da in \mathbb{R}^2 drei beliebige, linear unabhängige Punkte stets an der Hülle eines geeigneten Ellipsoids (in diesem Fall eine Ellipse) liegen, sind die Entscheidungsvariablen mit gleicher Gewichtung für alle Punkte bereits optimal. Dies erkennt man ebenfalls durch eine Überprüfung von

$$a_k^T \left(\sum_{i=1}^T u_i^0 a_i a_i^T \right)^{-1} a_k, \forall k \in \{1, \dots, T\}.$$

Leicht erhält man aus den drei Punkten nach dem Lifting

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^T u_i^0 a_i a_i^T \right)^{-1} &= \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{35}{9} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit jeweils zugehöriger quadratischer Q-Norm

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{35}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{35}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{14}{9} & -\frac{5}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{2}{3} & \frac{35}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

In diesem Fall ist keine Iteration nötig. Die Strukturmatrix und das Zentrum des Ellipsoids sind:

$$\begin{aligned} Q &= N^{-1} \left(P U^0 P^T - (P u^0) (P u^0)^T \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \\ c &= P u^0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die quadratischen Q-Normen für alle drei originalen Punkte sind

$$\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 1,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 1,$$

und

$$\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 1,$$

die ebenfalls anzeigen, dass die Punkte genau an der Hülle des volumenminimalen Ellipsoids liegen.

Nachdem die Struktur und das Zentrum des Ellipsoids festgelegt worden sind, kann man

das α -Niveau anhand der quadratischen Q -Norm bzgl. c gestalten. Da eine zunehmende Distanz vom Zentrum eine Erhöhung der Unschärfe bedeutet, werden die α -Niveaus anhand einer nicht steigenden Funktion $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ festgelegt. Jeder α -Schnitt des Ellipsoids mit $\alpha \in (0, 1]$ lässt sich mit

$$B_\alpha = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - c)^T Q (\omega - c) \leq s(\alpha) \right\} \quad (6.23)$$

identifizieren.

Zur Veranschaulichung der α -Schnitte werden in Matlab zufällig hundert zweidimensionale Punkte generiert. Mit dem vorgestellten Khachiyans Algorithmus wird das volumenminimale Ellipsoid berechnet. Nachdem die Strukturmatrix und das Zentrum berechnet werden, wird $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+, \alpha \mapsto s(\alpha) = 1 - \alpha$ beispielhaft festgelegt. Das Ergebnis wird in der Abbildung 6.1 dargestellt, wobei die Ellipsen die α -Schnitte für $\alpha = 0$ und $\alpha = 0,5$ anzeigen.

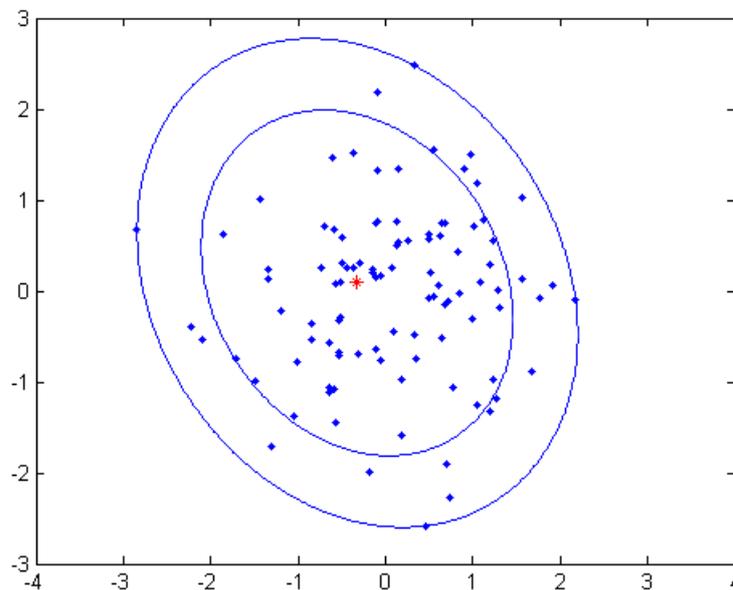


Abbildung 6.1: Zweidimensionale α -Schnitte

6.2 Modell und Defuzzifikation

Mit dem Khachiyans Algorithmus lassen sich die Renditen als ein Ellipsoid darstellen. Nun wird die mögliche Gesamtrendite in dem Fuzzy-Hauptmodell, das im Folgenden entwickelt wird, anhand des ermittelten Ellipsoids maximiert.

Die mögliche Gesamtrendite des Portfolios ergibt sich als gewichtete Summe aus den Renditen der einzelnen Positionen. Da die Renditen der einzelnen Positionen selbst mit Unschärfe bzw. Unsicherheit behaftet sind, ist die Gesamtrendite ebenfalls unscharf. Aus diesem Grund muss diese Unschärfe der Rendite in der Nebenbedingung berücksichtigt werden. Hierbei spielen die α -Schnitte eine Hauptrolle, weil sie die Berücksichtigung der graduellen Unschärfe determinieren.

Mit einer beliebigen, aber festen Portfolio-Aufteilung $X = (x_1 \ \cdots \ x_N)^T, X \in \mathbb{R}^N$

können zu jedem α -Schnitt die höchste und die niedrigste mögliche Gesamrendite ermittelt werden. (An dieser Stelle wird die Budgetbedingung für eine gültige Portfolio-Aufteilung nicht berücksichtigt, weil die Portfolio-Aufteilung als gegeben betrachtet wird.) Diese extremen Renditen werden mit dem Hurwicz-Prinzip zusammengebracht. Die anschließende Defuzzifikation berücksichtigt die vorgegebenen Risikoeinstellung und sämtliche α -Schnitte gleichzeitig, wodurch die mögliche Gesamrendite dann berechnet wird. Es ist auch möglich, zunächst die Defuzzifikation für Best- bzw. Worstcases aller α -Schnitte durchzuführen und erst dann die beiden resultierenden extremen Renditen anhand des Hurwicz-Prinzips zusammenzubringen. Beide Vorgehensweisen liefern das gleiche Ergebnis.

Die Gesamrendite des Portfolios ist $X^T R$. Dabei ist $R \in \mathbb{R}^N$ ein α -Schnitt in der Ellipsoidgestalt. Die Strukturmatrix $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ des zugehörigen Ellipsoids ist positiv definit und das Zentrum sei weiterhin mit $c \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet.

Die Zugehörigkeitsfunktion dieser unscharfen Menge kann auf unterschiedlicher Weise definiert werden, wobei die quadratische Q -Norm bzgl. c stets maßgebend ist. Beispielsweise können die einzelnen α -Schnitte festgelegt werden, die die Zugehörigkeit festlegen. Sei $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine nicht steigende Funktion, die die maximal erlaubte, quadratische Norm mit Q bzgl. c für jeden α -Schnitt angibt. Jeder α -Schnitt kann als

$$B_\alpha = \{\omega \in \mathbb{R}^N \mid (\omega - c)^T Q (\omega - c) \leq s(\alpha)\}$$

zu einem gegebenen α festgehalten werden. Wenn $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine umkehrbare Funktion ist, ist die Zugehörigkeitsfunktion gerade eine Modifikation der Umkehrfunktion von s innerhalb der entsprechenden Definitionsmenge. In diesem Fall ist es gleichgültig, ob die Zugehörigkeitsfunktion festgelegt wird oder die α -Schnitte anhand der Funktion s . In vielen Fällen ist die direkte Festlegung der α -Schnitte durch $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ allgemeiner.

Für die anschließende Defuzzifikation werden zunächst die höchste und niedrigste mögliche Gesamrendite zu einem vorgegebenen α -Niveau berechnet. Die zugehörigen Optimierungsaufgaben sind:

<p>OP10a</p> $X^T R \rightarrow \max_{R \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter der Nebenbedingung:</p> $(R - c)^T Q (R - c) \leq s(\alpha).$	und	<p>OP10b</p> $X^T R \rightarrow \min_{R \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter der Nebenbedingung:</p> $(R - c)^T Q (R - c) \leq s(\alpha).$
---	-----	---

Die Ergebnisse aus OP10a und OP10b sind die gesuchten extremen Renditen.

Wir halten diese fest:

Satz 6.6 (Maximale und minimale Rendite). *Seien folgende Voraussetzungen gegeben:*

- eine beliebige aber feste Portfolio-Aufteilung $X \in \mathbb{R}^N$ mit $X \neq \mathbf{0}$
- $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symmetrisch und positiv definit als die Strukturmatrix des volumenminimalen Ellipsoids der Vorinformationen
- $c \in \mathbb{R}^N$ als das Zentrum des volumenminimalen Ellipsoids der Vorinformationen
- $s : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ als eine nicht steigende Funktion, die die α -Schnitte für das volumenminimalen Ellipsoids der Vorinformationen spezifiziert.

- α -Schnitte des Ellipsoids $B_\alpha = \left\{ R \in \mathbb{R}^N \mid (R - c)^T Q (R - c) \leq s(\alpha) \right\}$ mit $\alpha \in (0, 1]$

Obige Optimierungsprobleme OP10a und OP10b implizieren jeweils die extreme Rendite

$$R^* := \operatorname{argmax}_{R \in B_\alpha} X^T R = c + Q^{-1} X \sqrt{\frac{s(\alpha)}{X^T Q^{-1} X}}$$

bzw.

$$R_* := \operatorname{argmin}_{R \in B_\alpha} X^T R = c - Q^{-1} X \sqrt{\frac{s(\alpha)}{X^T Q^{-1} X}}$$
(6.24)

Diese Renditen implizieren weiter jeweils eine extreme Portfolio-Rendite

$$\max_{R \in B_\alpha} X^T R = X^T R^* = X^T c + \sqrt{s(\alpha) X^T Q^{-1} X}$$

bzw.

$$\min_{R \in B_\alpha} X^T R = X^T R_* = X^T c - \sqrt{s(\alpha) X^T Q^{-1} X}.$$
(6.25)

Beweis. Die Funktion $X \mapsto X^T R$ ist linear und nimmt auf einer kompakten Menge, wie jeder α -Schnitt, ein Maximum und ein Minimum an. Wir betrachten die zugehörige Lagrange-Funktion mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(R, \lambda) = X^T R - \frac{\lambda}{2} \left((R - c)^T Q (R - c) - s(\alpha) \right). \quad (6.26)$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung ist

$$\nabla_R \mathcal{L}(R, \lambda) = X - \lambda Q (R - c) = 0. \quad (6.27)$$

Nach Voraussetzung ist Q positiv definit und damit invertierbar. Man erhält

$$\lambda^{-1} Q^{-1} X = R - c. \quad (6.28)$$

Die Gleichung (6.28) wird in die Nebenbedingung der Optimierungsprobleme OP10a und OP10b eingesetzt.

$$(R - c)^T Q (R - c) = (\lambda^{-1} Q^{-1} X)^T Q (\lambda^{-1} Q^{-1} X) = \lambda^{-2} X^T Q^{-1} X = s(\alpha) \quad (6.29)$$

Unter der Berücksichtigung von $X \neq \mathbf{0}$ und der positiv definiten Matrix Q^{-1} folgt sofort $X^T Q^{-1} X > 0$. Damit folgt aus (6.29) unmittelbar

$$\frac{1}{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{s(\alpha)}{X^T Q^{-1} X}}. \quad (6.30)$$

Man kann (6.30) in (6.28) einsetzen und erhält

$$R = c \pm Q^{-1} X \sqrt{\frac{s(\alpha)}{X^T Q^{-1} X}}.$$

Diese Vektoren stellen die extremen Renditen (6.24) zu einem gegebenen α -Niveau mit beliebiger, aber fester Portfolio-Aufteilung dar. Sie implizieren die beiden extremen möglichen Gesamtrenditen des Portfolios (6.25). \square

Die Ergebnisse in (6.25) zeigen, dass sich die möglichen Gesamtrenditen im Best- und Worstcase eines gegebenen α -Schnitts aus zwei Summanden ergeben. Der erste Teil ist das Ergebnis aus der Multiplikation der Portfolio-Aufteilung und der Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit, nämlich das Zentrum des Ellipsoids der Vorinformationen. Er ist unabhängig von dem vorgegebenen α -Niveau. Der zweite Summand hängt direkt von dem α -Niveau ab. Dieser Teil ist eine Adjustierung der Rendite wegen der Unschärfe. Einerseits ist diese Adjustierung proportional zu $\sqrt{s(\alpha)}$. Je höher das α -Niveau ist, desto kleiner ist sie, da weniger Unschärfe berücksichtigt wird. Andererseits ist die Adjustierung von der Portfolio-Aufteilung und von der Struktur des Ellipsoids abhängig. Die möglichen Gesamtrenditen im Best- bzw. Worstcase unterscheiden sich also nur in der Adjustierung. Im Bestcase ist die Adjustierung $\sqrt{s(\alpha)X^TQ^{-1}X}$ positiv und in Worstcase negativ, wie in (6.25) dargestellt.

Weiterhin werden beide extremen Renditen anhand des Hurwicz-Prinzips mit einem Parameter $q \in [0, 1]$ zusammengebracht. Mit der Festlegung dieses Parameters kann die Risikoeinstellung angepasst werden. Durch Fixierung des Hurwicz-Parameters q ergibt sich die mögliche Gesamtrendite für ein gegebenes α

$$\begin{aligned} G_\alpha &= q \min_{R \in B_\alpha} X^T R + (1 - q) \max_{R \in B_\alpha} X^T R \\ &= q \left(X^T c - \sqrt{s(\alpha)X^TQ^{-1}X} \right) + (1 - q) \left(X^T c + \sqrt{s(\alpha)X^TQ^{-1}X} \right) \quad (6.31) \\ &= X^T c - (2q - 1) \sqrt{s(\alpha)X^TQ^{-1}X}. \end{aligned}$$

Um alle α -Niveaus geeignet zu berücksichtigen, wird eine Gewichtungsfunktion eingeführt. (Vgl. Abschnitt 5.3.2) Sei $w : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit

$$\int_0^1 w(\alpha) d\alpha = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 w(\alpha) d\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha < \infty. \quad (6.32)$$

Bei einer umfassenden Betrachtung werden alle möglichen Gesamtrenditen zum verschiedenen α -Niveau gewichtet. Nach diesem Schritt erhalten wir eine von dem α -Niveau unabhängige mögliche Gesamtrendite.

$$\begin{aligned} G &= \int_0^1 w(\alpha) G_\alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 w(\alpha) \left(X^T c - (2q - 1) \sqrt{s(\alpha)X^TQ^{-1}X} \right) d\alpha \\ &= X^T c - (2q - 1) \sqrt{X^TQ^{-1}X} \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha \end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r := \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha > 0$ eine positive Konstante. Dann lässt sich die mögliche Gesamtrendite über allen α -Niveaus darstellen als

$$G = X^T c - (2q - 1)r \sqrt{X^TQ^{-1}X}. \quad (6.33)$$

Man sieht, dass die Struktur der möglichen Gesamtrendite nach diesem Schritt erhalten geblieben ist. Auch sie besteht aus zwei Summanden. Der erste Summand bleibt $X^T c$, nämlich die Rendite im Zentrum des Ellipsoids. Anhand des Hurwicz-Parameters q und der Konstante r , die aus der Gewichtung der α -Niveaus resultiert, wird eine Adjustierung vorgenommen. Diese Adjustierung ist von der Portfolio-Aufteilung und von der Struktur des Ellipsoids abhängig.

Nun kann das optimale Portfolio im Hinblick auf die mögliche Gesamtrendite ermittelt werden, wobei die Budgetbedingung des Portfolios explizit berücksichtigt werden muss. Das resultierende Gesamtmodell unter Zulassung von Leerverkäufen ist

OP11

$$G = X^T c - (2q - 1)r\sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Dieses Modell OP11 wird in dieser Arbeit als Fuzzy-Hauptmodell oder kurz Hauptmodell bezeichnet. Bei Leerverkaufsverbot müssen zusätzliche Nichtnegativitätsbedingungen im Modell berücksichtigt werden.

6.3 Modellvergleich und -lösung

In diesem vorbereitenden Abschnitt wird die Ähnlichkeit der Problemstrukturen des klassischen Portfolio-Modells einerseits und des Fuzzy-Hauptmodells andererseits dargestellt. Dies bereitet u. a. auch einen indirekten Lösungsweg des Hauptmodells vor.

Bei einem Vergleich des klassischen Portfolio-Modells mit dem vorliegenden Fuzzy-Hauptmodell wird deutlich, dass beide Modelle eine ähnliche mathematische Struktur aufweisen. Das klassische Portfolio-Modell mit Hinblick auf die Erwartungswert-Varianz-Effizienz des Portfolios ist:

$$X^T \Sigma X \rightarrow \min_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$X^T \mu = E_0,$$

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Σ ist dabei die Kovarianzmatrix aller Anlagemöglichkeiten und μ ist der Vektor der Erwartungsrendite. Dieses Modell kann in einer äquivalenten Form unter Zuhilfenahme eines Trade-Off-Parameters λ_{E_0} dargestellt werden. Dieser Trade-Off-Parameter stellt im klassischen Modell das Kompensationsverhältnis zwischen Varianz und Rendite dar.

$$X^T \Sigma X - \lambda_{E_0} X^T \mu \rightarrow \min_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Das klassische Portfolio-Modell lässt sich in dualer Weise mit einem Trade-Off-Parameter λ_V aufbauen, der das Kompensationsverhältnis zwischen Rendite und Varianz des gesamten Portfolios darstellt:

OP12

$$X^T \mu - \lambda_V X^T \Sigma X \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Diese Darstellung ist sehr ähnlich zu dem erarbeiteten Fuzzy-Hauptmodell. Bekanntlich ist die Kovarianzmatrix der Renditen symmetrisch und positiv definit, falls alle Wertpapiere risikobehaftet sind. Deswegen ist die Varianz des gesamten Portfolios stets größer als Null, wenn die Portfolio-Aufteilung nicht die Null-Investition ist. Vergleichbar mit der Kovarianzmatrix ist die inverse Matrix der Strukturmatrix des Ellipsoids. Die Berechnung der geschätzten Kovarianzmatrix und der Strukturmatrix des Ellipsoids sind sehr unterschiedlich. Auch die Auffassungen über Vorinformationen unterscheiden sich in beiden Fällen. Aber mathematisch sind beide symmetrisch und positiv definit. Dies bedeutet, dass sie beide invertierbar und ihre inversen Matrizen ebenfalls symmetrisch und positiv definit sind.

Der Unterschied zwischen beiden Modellen besteht aber darin, dass in dem Fuzzy-Hauptmodell $\sqrt{X^T Q^{-1} X}$ berücksichtigt wird und nicht die direkte quadratische Form $X^T Q^{-1} X$ selbst. Aber auch dies beeinflusst nicht die mathematische Strukturähnlichkeit beider Optimierungsprobleme, da die Wurzelfunktion für alle positiven reellen Zahlen eine positive und streng monotone Transformation ist. Somit ist das Optimum von $X^T Q^{-1} X$ auch gleichzeitig das Optimum von $\sqrt{X^T Q^{-1} X}$.

Im Vergleich zu dem klassischen Modell bietet das neue Modell eine genauere Spezifikation bzw. eine Aufschlüsselung des Trade-Off-Parameters λ_U zwischen der Gesamrendite und der zugehörigen Adjustierung aufgrund der Unschärfe. Dieser Trade-Off-Parameter ist nach dem Fuzzy-Hauptmodell

$$\lambda_U := (2q - 1)r = (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha. \quad (6.34)$$

Dabei ist q der Hurwicz-Parameter, $w(\alpha)$ ist die Gewichtungsfunktion der α -Schnitte und $s(\alpha)$ legt die maximale quadratische Q -Norm bzgl. c innerhalb eines α -Schnitts fest.

Für einen risikoneutralen Anleger ist der Parameter $q = 0,5$, also $\lambda_U = 0$. Damit entfällt die komplette Adjustierung. Dieser Anleger optimiert das Portfolio lediglich nach der Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit, nämlich im Zentrum des Ellipsoids.

Für einen pessimistischen Anleger ist der Parameter $0,5 < q \leq 1$ und damit $0 < \lambda_U < \infty$. In diesem Fall fordert der Anleger eine Kompensation durch die Rendite, wenn er zusätzliches Risiko aufnimmt bzw. wenn die Unschärfe und Unsicherheit zunimmt. Die Adjustierung wirkt als ein Strafterm, der die Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit mindert und er hängt von $r = \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha > 0$ ab. Je höher r ist, desto höher fällt die nötige Kompensation aus. In dem extremen Fall $q = 1$ ist $\lambda_U = r$.

Für einen optimistischen Anleger ist der Parameter $0 \leq q < 0,5$. Daraus resultiert für den Trade-Off $-\infty < \lambda_U < 0$. In diesem Fall ist der Anleger risikofreudig, d. h. Risiko bzw. Unschärfe wird nicht negativ kompensiert, sondern positiv. Eine positive Adjustierung wird zu der Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit vorgenommen, wenn die Unschärfeadjustierung steigt. In dem extremen Fall $q = 0$ ist $\lambda_U = -r$.

Die Ermittlung der aus dem Modell implizierten optimalen Portfolio-Aufteilung lässt sich nach der oben angegebenen Wahl des Hurwicz-Parameters genau in drei Teilaufgaben aufteilen, nämlich risikoneutral, -scheu oder -freudig. Dies wird in den folgenden Unterabschnitten durchgeführt.

6.3.1 Für risikoneutrale Anleger

Nach Konstruktion ergibt sich für risikoneutrale Anleger $q = 0,5$ und $\lambda_U = 0$. Er optimiert lediglich $X^T c$. Falls Leerverkäufe zugelassen sind, ist das Optimierungsproblem nicht beschränkt. Falls Leerverkäufe untersagt sind, wird anhand des folgenden linearen Optimierungsproblems optimiert.

OP13

$$X^T c \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T \mathbf{1} = 1,$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Hierbei handelt es sich um ein lineares Optimierungsproblem in einer kompakten Menge, daher resultiert eine Randlösung als Optimum. Das optimale Portfolio wird dadurch realisiert, dass der Anleger das gesamte Anlagebudget in diejenige Anlagemöglichkeit investiert, die die höchste Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit erwirtschaftet. Dabei wird lediglich die Rendite im Zentrum des Ellipsoids der Vorinformationen betrachtet. Die Lösung lässt sich darstellen als

$$x_{I_{\max}} = 1 \text{ mit } I_{\max} := \operatorname{argmax}\{c_i, i \in \{1, \dots, N\}\} \text{ und } x_i = 0 \quad \forall i \neq I_{\max}. \quad (6.35)$$

Dieses Portfolio besteht lediglich aus einer Position.

Abgesehen vom Leerverkaufsverbot kann es Beschränkungen für bestimmte Positionen geben, z. B. Anforderungen der Mindestbeteiligungen und bzw. oder Anforderungen hinsichtlich des jeweiligen Leerverkaufslimits. Des Weiteren kann es Anforderungen bei der Betrachtung von speziellen Positionsgruppen geben, beispielsweise, dass der Anteil der Aktien in einem bestimmten Wirtschaftssektor zusammen eine bestimmte Grenze nicht überschreiten darf. Alle diese Nebenbedingungen können in zwei Gruppen aufgeteilt werden, in Gleichungen oder Ungleichungen. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Gleichungen als Nebenbedingungen und sei $N_2 \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Ungleichungen als Nebenbedingungen. $C^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N}$ und $C^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N}$ seien die Koeffizienten für die Nebenbedingungen. $p^1 \in \mathbb{R}^{N_1}$ bzw. $p^2 \in \mathbb{R}^{N_2}$ legen die jeweiligen Grenzen fest.

Das entsprechende Optimierungsmodell ist

OP14

$$X^T c \rightarrow \max_X$$

unter der Nebenbedingung:

$$C^1 X = p^1, N_1 \in \mathbb{N}, C^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N}, p^1 \in \mathbb{R}^{N_1},$$

$$C^2 X \leq p^2, N_2 \in \mathbb{N}, C^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N}, p^2 \in \mathbb{R}^{N_2}.$$

Die linearen Zusatzbedingungen schränken den Lösungsraum ein und können dazu führen, dass der Lösungsraum leer wird. Außerdem ist zu erkennen, dass das Modell OP13 lediglich ein Sonderfall von OP14 ist. Allgemein handelt es sich hierbei um ein lineares Optimierungsmodell. Wenn es eine optimale Lösung hat, ist es stets eine Lösung auf dem Rand des zulässigen Lösungsraums. Wenn der Lösungsraum leer oder unbeschränkt ist, gibt es keine optimale Lösung.

6.3.2 Für pessimistische Anleger

Für risikoscheue bzw. pessimistische Anleger ist der Hurwicz-Parameter $0,5 < q \leq 1$. Damit gelten nach Konstruktion $r = \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha > 0$ und $2q - 1 > 0$. Es ergibt sich

für den Trade-Off

$$\lambda_U = (2q - 1)r = (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha > 0. \quad (6.36)$$

Bei dieser Konfiguration und unter Zulassung von Leerverkäufen kann das Modell auf einen direkten Weg gelöst werden. Dies ist ebenfalls Gegenstand des Diskussionspapers von Professor Stahlecker und mir zu dem vorliegenden Fuzzy-Hauptmodell. [DS10]

Ist $\lambda_U > 0$ gegeben bleibt das Modell

<p>OP15</p> $X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter der Nebenbedingung:</p> $X^T \mathbf{1} = 1.$
--

Im Folgenden sei die Euklidische Norm mit $\|\bullet\|$ bezeichnet. Weiter werden die Bezeichnungen

$$z := Q^{-\frac{1}{2}} X, \quad u := Q^{\frac{1}{2}} c \quad \text{und} \quad v := Q^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} \quad (6.37)$$

für die Variablentransformationen eingeführt. Damit ist das Modell OP15 äquivalent zu

<p>OP16</p> $z^T u - \lambda_U \sqrt{z^T z} \rightarrow \max_{z \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter der Nebenbedingung:</p> $z^T v = 1.$
--

Satz 6.7. *Unter der Bedingung $\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 + (u^T v)^2 > 0$ ist das Optimum des obigen Modells OP16*

$$z = \frac{u}{\beta} - \frac{v^T u - \beta}{\beta \|v\|^2} v = \frac{u}{\beta} - \frac{v^T u v}{\beta \|v\|^2} + \frac{v}{\|v\|^2} \quad \text{mit} \quad (6.38)$$

$$\beta := \sqrt{\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 + (u^T v)^2}.$$

Beweis. Die Funktion $z \mapsto g(z) = z^T u - \lambda_U \sqrt{z^T z}$ ist für $\lambda_U > 0$ streng konkav in der Menge $\{z \in \mathbb{R} \mid z^T v = 1\}$. Somit hat das obige Optimierungsproblem höchstens eine Lösung. Weiter ist $g(z)$ nur an der Stelle $z = \mathbf{0}$ nicht differenzierbar, aber nach $z^T v = z^T Q^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1} = 1$ ist dies bereits ausgeschlossen. Wir betrachten die Lagrange-Funktion des obigen Optimierungsproblems OP16 mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = z^T u - \lambda_U \sqrt{z^T z} - \lambda (v^T z - 1). \quad (6.39)$$

Die notwendigen Bedingungen sind

$$\nabla_z \mathcal{L}(z, \lambda) = u - \frac{\lambda_U z}{\sqrt{z^T z}} - \lambda v = 0, \quad (6.40)$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(z, \lambda) = 1 - v^T z = 0. \quad (6.41)$$

Sei zunächst die Bezeichnung $\beta := \frac{\lambda_U}{\|z\|}$. Damit ist die notwendige Bedingung (6.40) äquivalent mit

$$u - \beta z - \lambda v = 0. \quad (6.42)$$

Wegen (6.41) folgt nach der Linksmultiplikation von (6.40) mit v^T

$$v^T u - \beta v^T z - \lambda v^T v \stackrel{(6.41)}{=} v^T u - \beta - \lambda \|v\|^2 = 0.$$

Es folgt

$$\beta = v^T u - \lambda \|v\|^2. \quad (6.43)$$

Da die Strukturmatrix und ihre inverse Matrix symmetrisch und positiv definit sind, gilt $\|v\|^2 = \mathbf{1}^T Q^{\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T Q \mathbf{1} > 0$. Damit folgt aus der obigen Gleichung

$$\lambda = \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2}. \quad (6.44)$$

(6.44) wird in die notwendige Bedingung (6.42) eingesetzt und es ergibt sich

$$u - \beta z - \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2} v = 0 \iff \beta z = u - \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2} v. \quad (6.45)$$

Da $\beta = \frac{\lambda_U}{\|z\|}$ ist, gilt $\lambda_U = \beta \|z\|$. Dementsprechend folgt

$$\begin{aligned} \lambda_U^2 &= \beta^2 \|z\|^2 = \beta^2 z^T z = (\beta z)^T (\beta z) \stackrel{(6.45)}{=} \left(u - \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2} v \right)^T \left(u - \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2} v \right) \\ &= u^T u - 2 \frac{v^T u - \beta}{\|v\|^2} v^T u + \frac{(v^T u - \beta)^2}{\|v\|^4} v^T v \\ &= \|u\|^2 - 2 \frac{(v^T u)^2}{\|v\|^2} + 2 \frac{\beta v^T u}{\|v\|^2} + \frac{(v^T u)^2}{\|v\|^2} - 2 \frac{\beta v^T u}{\|v\|^2} + \frac{\beta^2}{\|v\|^2} \\ &= \|u\|^2 - \frac{(v^T u)^2}{\|v\|^2} + \frac{\beta^2}{\|v\|^2} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 + (u^T v)^2 > 0$ und es folgt aus (6.46) unmittelbar

$$\beta = \sqrt{\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 + (u^T v)^2} > 0. \quad (6.47)$$

(6.47) in Verbindung mit (6.45) liefert die Lösung von OP16:

$$z = \frac{u}{\beta} - \frac{v^T u - \beta}{\beta \|v\|^2} v = \frac{u}{\beta} - \frac{v^T u v}{\beta \|v\|^2} + \frac{v}{\|v\|^2}.$$

□

Mit dem Lösungsergebnis unter der Annahme $\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 + (u^T v)^2 > 0$ lässt sich die zugehörige Portfolio-Aufteilung einfach ermitteln, denn es gilt $z = Q^{-\frac{1}{2}} X$ und entsprechend gilt $Q^{\frac{1}{2}} z = Q^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}} X = X$. Damit ist die optimale Portfolio-Aufteilung

$$X = Q^{\frac{1}{2}} z = Q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{\beta} - \frac{v^T u v}{\beta \|v\|^2} + \frac{v}{\|v\|^2} \right) = \frac{Q^{\frac{1}{2}} u}{\beta} - \frac{v^T u Q^{\frac{1}{2}} v}{\beta \|v\|^2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}} v}{\|v\|^2}. \quad (6.48)$$

Unabhängig von der direkten Lösung wird das Fuzzy-Hauptmodell mit $\lambda_U > 0$ mit dem klassischen Portfolio-Modell nach Markowitz verglichen. Bei $\lambda_U > 0$ hat das Hauptmodell eine ähnliche mathematische Struktur wie das klassische Portfolio-Modell. (Vgl. Abschnitt 6.3) Deswegen kann ein ähnlicher Lösungsweg wie bei dem klassischen Modell eingeschlagen werden. Auch hier sind Leerverkäufe zunächst zugelassen. Mit den ursprünglichen Bezeichnungen ist das Fuzzy-Hauptmodell OP15

$$X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Die Lösung erfolgt in zwei Stufen. Zunächst wird die optimale Rendite-Adjustierungskombination für jede mögliche Rendite des Portfolios ohne direkte Berücksichtigung des Trade-Offs λ_U ermittelt. Anschließend wird λ_U spezifiziert und erneut optimiert, um das optimale Portfolio zu erhalten.

Erste Stufe:

Feststellung der optimalen Rendite-Adjustierungskombination

Die Zielfunktion besteht aus zwei Summanden, nämlich der Gesamrendite des Portfolios im Zentrum des Ellipsoids und der Adjustierung durch die Unschärfe. λ_U ist streng positiv und beliebig aber fest vorgegeben. Die Maximierung der eigentlichen Zielfunktion $X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X}$ kann ebenfalls dadurch gelöst werden, dass $X^T c$ maximiert und die Adjustierung $\lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X}$ bzw. $X^T Q^{-1} X$ minimiert wird, da λ_U fest vorgegeben ist.

Anstatt auf den direkten Lösungsweg kann das originale Optimierungsproblems auf einen zweistufige Lösungsweg gelöst werden. Zunächst wird eine Menge von strukturähnlichen Optimierungsproblemen gelöst. Alle diese Optimierungsprobleme sind gleichgestaltet, d. h., dass sie insbesondere in der Formulierung übereinstimmen und mit genau einer Ausnahme die gleichen Parameter aufweisen. Der einzige Unterschied zwischen je zwei Optimierungsproblemen ist das Niveau der Gesamrendite $X^T c$. Alle Optimierungsprobleme für $E_0 \in [E_{min}; E_{max}]$ mit geeignet festgelegtem E_{min} und E_{max} werden gelöst. Ein ähnliches Vorgehen wird auch bei der Lösung des klassischen Modells verwendet. Die Idee ist dabei, dass in jedem Optimierungsproblem die Gesamrendite als fix betrachtet und die entsprechende Adjustierung minimiert wird. Wenn alle optimalen Rendite-Adjustierungskombinationen zur Verfügung stehen, kann eine weitere Optimierung auf der zweiten Stufe durchgeführt werden, damit die ursprüngliche Zielfunktion mit vorgegebenem λ_U maximiert wird. Dieser Weg stellt einen indirekten Lösungsweg dar. Er hat den Vorteil, dass der Lösungsweg große Ähnlichkeit mit dem des klassischen Modells hat.

Entsprechend der obigen Darstellung wird das folgende Optimierungsproblem betrachtet.

OP17

$$\frac{1}{2} X^T Q^{-1} X \rightarrow \min_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter der Nebenbedingung:

$$X^T c = E_0,$$

$$X^T \mathbf{1} = 1.$$

Satz 6.8. Seien $c \neq \zeta \mathbf{1}, \zeta \in \mathbb{R}$ das Zentrum und $Q \in \mathbb{R}^{N \times N}$ die symmetrische, positiv definite Strukturmatrix des Ellipsoids gegeben. Die optimale Portfolio-Aufteilung aus dem obigen Optimierungsmodell ist

$$X = \frac{1}{ak - b^2} Q (a \mathbf{1} - bc) + E_0 \left(\frac{1}{ak - b^2} Q (kc - b \mathbf{1}) \right). \tag{6.49}$$

Dabei sind die Bezeichnungen

$$a := c^T Q c, \quad b := \mathbf{1}^T Q c = c^T Q \mathbf{1} \quad \text{und} \quad k := \mathbf{1}^T Q \mathbf{1}. \tag{6.50}$$

Beweis. Wir betrachten die Lagrange-Funktion mit zwei Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_{E_0} \in \mathbb{R}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = \frac{1}{2} X^T Q^{-1} X - \lambda_{E_0} (X^T c - E_0) - \gamma (X^T \mathbf{1} - 1).$$

Die partielle Ableitung nach den Portfolio-Gewichtungen liefert die notwendige Bedingung

$$\nabla_X \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = Q^{-1} X - \lambda_{E_0} c - \gamma \mathbf{1} = 0. \quad (6.51)$$

Zwei weitere Nebenbedingungen ergeben sich nach der partiellen Ableitung jeweils nach einem Lagrange-Multiplikator λ_{E_0} und γ . Diese zwei Gleichungen sind die Nebenbedingungen des ursprünglichen Modells.

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda_{E_0}} \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = E_0 - X^T c = 0 &\Leftrightarrow X^T c = E_0, \\ \nabla_{\gamma} \mathcal{L}(X, \lambda_{E_0}, \gamma) = 1 - X^T \mathbf{1} = 0 &\Leftrightarrow X^T \mathbf{1} = 1. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Aus (6.51) folgt nach der Linksmultiplikation mit der symmetrischen positiv definiten Strukturmatrix Q

$$X = \lambda_{E_0} Qc + \gamma Q\mathbf{1}. \quad (6.53)$$

Diese Gleichung wird in die beiden Nebenbedingungen in (6.52) eingesetzt. Es folgt

$$\begin{aligned} (\lambda_{E_0} Qc + \gamma Q\mathbf{1})^T c &= \lambda_{E_0} c^T Qc + \gamma \mathbf{1}^T Qc = E_0 \\ (\lambda_{E_0} Qc + \gamma Q\mathbf{1})^T \mathbf{1} &= \lambda_{E_0} c^T Q\mathbf{1} + \gamma \mathbf{1}^T Q\mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Bezeichnungen (6.50), die sämtlich für skalaren Größen stehen, ergibt sich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{E_0} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & k \end{pmatrix}$ invertierbar ist. Dies ist aber nach den Voraussetzungen gegeben.

Um dies zu zeigen, sei $G = \begin{pmatrix} c & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ und es gilt offensichtlich $G^T QG = \begin{pmatrix} a & b \\ b & k \end{pmatrix}$. Nach Voraussetzung ist $c \neq \zeta \mathbf{1}$ mit $\zeta \in \mathbb{R}$, deswegen ist G linear unabhängig in den Spalten und hat den vollen Rang, nämlich zwei. Für einen beliebigen Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq \mathbf{0}$ gilt daher $v := Gu \neq \mathbf{0}$. Da die Strukturmatrix Q symmetrisch und positiv definit ist, ist auch ihre inverse Matrix symmetrisch und positiv definit. Aus diesen Bedingungen folgt:

$$v^T Qv = u^T G^T QGu = u^T (G^T QG)u > 0. \quad (6.55)$$

Da (6.55) für beliebiges $u \in \mathbb{R}^2$ mit $u \neq \mathbf{0}$ gilt, muss die Matrix $G^T QG$ auch positiv definit sein. Ferner folgt daraus

$$\det G^T QG = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & k \end{pmatrix} = ak - b^2 > 0. \quad (6.56)$$

Dies sichert die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (6.54), genauer

$$\begin{pmatrix} \lambda_{E_0} \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{1}{ak - b^2} \begin{pmatrix} k & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{ak - b^2} \begin{pmatrix} kE_0 - b \\ a - bE_0 \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

Durch Einsetzen der beiden Multiplikatoren (6.57) in die Gleichung für den Vektor der Anteile (6.53) erhält man (6.49)

$$\begin{aligned}
X &= \lambda_{E_0} Qc + \gamma Q\mathbf{1} = \frac{kE_0 - b}{ak - b^2} Qc + \frac{a - bE_0}{ak - b^2} Q\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{ak - b^2} Q((kE_0 - b)c + (a - bE_0)\mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{ak - b^2} Q(a\mathbf{1} - bc) + E_0 \left(\frac{1}{ak - b^2} Q(kc - b\mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

als optimale Portfolio-Aufteilung. □

Die obige, optimale Portfolio-Aufteilung hängt affin linear von E_0 ab. Mit ihr lässt sich die zugehörige Adjustierung aufgrund der Unschärfe durch Einsetzen in $\sqrt{X^T Q^{-1} X}$ ermitteln. Dabei wird u. a. auf die notwendige Bedingung (6.53) zurückgegriffen.

$$\begin{aligned}
X^T Q^{-1} X &= X^T Q^{-1} (\lambda_{E_0} Qc + \gamma Q\mathbf{1}) \\
&= \lambda_{E_0} X^T Q^{-1} Qc + \gamma X^T Q^{-1} Q\mathbf{1} = \lambda_{E_0} X^T c + \gamma X^T \mathbf{1} \\
&= \lambda_{E_0} E_0 + \gamma = \frac{kE_0 - b}{ak - b^2} E_0 + \frac{a - bE_0}{ak - b^2} = \frac{kE_0^2 - bE_0 + a - bE_0}{ak - b^2} \quad (6.58) \\
&= \frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}.
\end{aligned}$$

Da die Strukturmatrix Q positiv definit ist, ist ihre inverse Matrix Q^{-1} ebenfalls positiv definit. Im Zusammenhang mit der Bedingung $X^T \mathbf{1} = 1$ gilt insbesondere $X^T Q^{-1} X > 0$. Da weiter die Gesamtrendite $X^T c$ in jedem einzelnen Optimierungsproblem als E_0 festgehalten wird, lässt sich die zugehörige Adjustierung aufgrund der Unschärfe nach dem obigen Ergebnis als

$$\sqrt{X^T Q^{-1} X} = \sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}} \quad (6.59)$$

festhalten. Mit (6.59) werden alle optimalen Renditen-Adjustierungs-Kombinationen festgehalten, bei denen die Adjustierung aufgrund der Unschärfe bei gegebener Portfolio-Rendite minimal ist. Des Weiteren kann das Portfolio mit minimaler Adjustierung lokalisiert werden. Dieses Ergebnis wird in dem folgenden Satz festgehalten.

Satz 6.9. *Unter allen optimierten Portfolios ist die Adjustierung $\sqrt{X^T Q^{-1} X}$ bei $E_0 = b/k$ minimal.*

Beweis. Wenn ein Portfolio die optimale Rendite-Adjustierungs-Kombination aufweist, muss $X^T \mathbf{1} = 1$ und insbesondere $X \neq \mathbf{0}$ erfüllt sein. Nach Voraussetzung ist die Strukturmatrix des Ellipsoids positiv definit. Zusammen mit $X \neq \mathbf{0}$ ist zwingend $X^T Q^{-1} X > 0$. Da die Quadratwurzel eine monotone Funktion für alle positiven reellen Zahlen ist, ist $\sqrt{X^T Q^{-1} X}$ genau dann minimal, wenn $X^T Q^{-1} X$ minimal ist. Um das Minimum von $X^T Q^{-1} X$ zu bestimmen, wird sie nach E_0 abgeleitet und gleich Null gesetzt.

$$\frac{dX^T Q^{-1} X}{dE_0} = \frac{d \frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}}{dE_0} = \frac{2kE_0 - 2b}{ak - b^2} = 0 \Rightarrow E_0 = \frac{b}{k}.$$

□

Zweite Stufe:

Feststellung optimaler Portfolio-Aufteilung

Die ursprüngliche Zielfunktion ist

$$X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N} .$$

Unter der Budgetbedingung $X^T \mathbf{1} = 1$ können nun alle optimalen Rendite-Adjustierungs-Kombinationen als

$$\left(X^T c = E_0, \sqrt{X^T Q^{-1} X} = \sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}} \right)$$

dargestellt werden. Wie bereits gezeigt, ist die Adjustierung $\sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}}$ stets positiv und bei $E_0 = \frac{b}{k}$ minimal. Weiter ist die Adjustierung offensichtlich für alle $E_0 > \frac{b}{k}$ streng monoton steigend. Die ursprüngliche Zielfunktion kann nun durch Ersetzen als eine Funktion in E_0 dargestellt werden, wobei $\lambda_U > 0$ explizit berücksichtigt wird.

$$f(E_0) = E_0 - \lambda_U \sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}} \quad (6.60)$$

Nach dem Ersetzen besteht die jetzige Zielfunktion immer noch aus zwei Summanden. Der erste ist ein linearer Term, nämlich die Funktionsvariable selbst. Der zweite Summand hat Eigenschaften wie oben diskutiert, jedoch mit dem Zusatz, dass er mit einer skalaren Konstante multipliziert wird. Diese Funktion ist für $E_0 > \frac{b}{k}$ stetig, da beide Summanden als Funktionen selbst stetig sind.

Nun wird das Maximum der ursprünglichen Zielfunktion gesucht, wodurch das optimale Portfolio berechnet wird.

Satz 6.10. Sei die ursprüngliche Zielfunktion mit $f(E_0) = E_0 - \lambda_U \sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}}$ bezeichnet. Ferner seien $E_0 > \frac{b}{k}$, $0,5 < q \leq 1$ und der Trade-Off $\lambda_U = (2q-1) \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha > 0$ vorgegeben. Unter der Voraussetzung $\lambda_U^2 k - ak + b^2 > 0$ ist das optimale Portfolio charakterisiert durch

$$E_0 = \frac{b}{k} + \frac{ak - b^2}{k \sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}}. \quad (6.61)$$

Beweis. Die Funktion $f(E_0)$ in (6.60) ist im Bereich $E_0 > \frac{b}{k}$ streng konkav, was im Folgenden klar ersichtlich wird. Daher wird die erste Ableitung von $f(E_0)$ bestimmt, um ihr globales Maximum im Bereich $E_0 > \frac{b}{k}$ zu bestimmen.

$$\frac{df(E_0)}{dE_0} = 1 - \lambda_U \frac{d\sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2}}}{dE_0} = 1 - \lambda_U \sqrt{\frac{ak - b^2}{kE_0^2 - 2bE_0 + a}} \frac{kE_0 - b}{ak - b^2}. \quad (6.62)$$

(6.62) lässt sich weiter umformen:

$$f'(E_0) = 1 - \lambda_U \sqrt{\frac{1}{kE_0^2 - 2bE_0 + a} \frac{(kE_0 - b)^2}{ak - b^2}} = 1 - \lambda_U \sqrt{\frac{k}{ak - b^2} - \frac{1}{kE_0^2 - 2bE_0 + a}}. \quad (6.63)$$

Bei $E_0 = \frac{b}{k}$ ist die Steigung von $f(E_0)$ eins, denn es gilt

$$f'\left(\frac{b}{k}\right) = 1 - \lambda_U \sqrt{\frac{k}{ak - b^2} - \frac{1}{\frac{b^2}{k} - \frac{2b^2}{k} + a}} = 1 - \lambda_U \sqrt{\frac{k}{ak - b^2} - \frac{k}{ak - b^2}} = 1.$$

Gleichzeitig ist bei $E_0 = \frac{b}{k}$ das Minimum des quadratischen Terms $kE_0^2 - 2bE_0 + a$ unter der Berücksichtigung von $k = \mathbf{1}^T Q \mathbf{1} > 0$. Die möglichen Nullstellen von $kE_0^2 - 2bE_0 + a$ sind bei $(b \pm \sqrt{b^2 - ak})/k$. Nach Voraussetzung ist aber $ak - b^2 > 0$, d. h. $b^2 - ak < 0$. (Vgl.(6.56)) Deswegen hat $kE_0^2 - 2bE_0 + a$ keine reellen Nullstellen. Also gilt $kE_0^2 - 2bE_0 + a > 0$ für $E_0 > \frac{b}{k}$ und $kE_0^2 - 2bE_0 + a$ ist für alle $E_0 > \frac{b}{k}$ streng monoton steigend. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $(kE_0^2 - 2bE_0 + a)^{-1}$ für alle $E_0 > \frac{b}{k}$ streng monoton fallend ist. Gemäß (6.63) ist deshalb die erste Ableitung $f'(E_0)$ für $E_0 > \frac{b}{k}$ streng monoton fallend. Entsprechend ist die Funktion $f(E_0)$ für $E_0 > \frac{b}{k}$ streng konkav und kann höchstens ein Maximum haben und zwar dort, wo die Ableitung Null ist.

Für die Berechnung des eindeutigen Maximums von $f(E_0)$ wird (6.62) gleich Null gesetzt.

$$1 - \lambda_U \sqrt{\frac{ak - b^2}{kE_0^2 - 2bE_0 + a} \frac{kE_0 - b}{ak - b^2}} = 0 \Leftrightarrow \lambda_U \sqrt{\frac{ak - b^2}{kE_0^2 - 2bE_0 + a} \frac{kE_0 - b}{ak - b^2}} = 1. \quad (6.64)$$

Da $E_0 > \frac{b}{k}$ bzw. $kE_0 - b > 0$ vorausgesetzt ist, kann man (6.64) nach E_0 auflösen.

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \sqrt{\frac{kE_0^2 - 2bE_0 + a}{ak - b^2} \frac{ak - b^2}{kE_0 - b}} = \sqrt{\frac{(kE_0^2 - 2bE_0 + a)(ak - b^2)}{(kE_0 - b)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{k(ak - b^2)E_0^2 - 2b(ak - b^2)E_0 + (ak - b^2)a}{k^2E_0^2 - 2kbE_0 + b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{ak-b^2}{k}(k^2E_0^2 - 2kbE_0 + b^2 - b^2 + ak)}{k^2E_0^2 - 2kbE_0 + b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{ak - b^2}{k} \left(1 + \frac{ak - b^2}{(kE_0 - b)^2}\right)} \\ \Rightarrow \lambda_U^2 &= \frac{ak - b^2}{k} \left(1 + \frac{ak - b^2}{(kE_0 - b)^2}\right) \Leftrightarrow \frac{\lambda_U^2 k}{ak - b^2} - 1 = \frac{ak - b^2}{(kE_0 - b)^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda_U^2 k - ak + b^2}{(ak - b^2)^2} = \frac{1}{(kE_0 - b)^2}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda_U^2 k - ak + b^2 > 0$, wir bilden auf beiden Seiten den Kehrwert.

$$\frac{(ak - b^2)^2}{\lambda_U^2 k - ak + b^2} = (kE_0 - b)^2 \Rightarrow E_0 = \frac{b}{k} + \frac{ak - b^2}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}}.$$

Dies ist die Rendite des optimalen Portfolios. □

Nach Satz 6.10 lässt sich die optimale Portfolio-Rendite durch Einsetzen des Trade-Offs in der Gleichung (6.61) ermitteln. Die dabei getroffene Voraussetzung $\lambda_U^2 k - ak + b^2 > 0$ stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Wie im Satz 6.10 gezeigt lässt sich der Trade-Off als Funktion in Abhängigkeit von der Portfolio-Rendite darstellen, genauer

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{(kE_0^2 - 2bE_0 + a)(ak - b^2)}{(kE_0 - b)^2}} = \sqrt{\frac{k(ak - b^2)E_0^2 - 2b(ak - b^2)E_0 + (ak - b^2)a}{k^2E_0^2 - 2kbE_0 + b^2}}.$$

Diese Funktion hat eine Asymptote mit

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{k(ak - b^2)E_0^2 - 2b(ak - b^2)E_0 + (ak - b^2)a}{k^2E_0^2 - 2kbE_0 + b^2}} \xrightarrow{E_0 \nearrow \infty} \sqrt{\frac{ak - b^2}{k}}. \quad (6.65)$$

Deswegen können optimierte Portfolios nur einen Trade-Off haben, der einen positiven Wert größer als $\sqrt{\frac{ak-b^2}{k}}$ hat. Kleinere Werte als $\sqrt{\frac{ak-b^2}{k}}$ wären für den Trade-Off nicht möglich. Aus dieser Tatsache folgt die Bedingung

$$\lambda_U > \sqrt{\frac{ak-b^2}{k}} \Rightarrow \lambda_U^2 > \frac{ak-b^2}{k} \Leftrightarrow \lambda_U^2 k - ak + b^2 > 0, \quad (6.66)$$

die für den Satz 6.10 vorausgesetzt wurde.

Auf der anderen Seite gilt für den Trade-Off wie im Satz 6.10 gezeigt

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{ak-b^2}{k} \left(1 + \frac{ak-b^2}{(kE_0-b)^2}\right)}. \quad (6.67)$$

Falls die Rendite gegen den Wert $E_0 = \frac{b}{k}$ von oben konvergiert, gilt

$$\frac{ak-b^2}{(kE_0-b)^2} \xrightarrow{E_0 \searrow \frac{b}{k}} \infty. \quad (6.68)$$

Man beachte dabei $ab - k^2 > 0$. (Vgl. Satz 6.8.) Es folgt unmittelbar aus (6.67) und (6.68)

$$\lambda_U = \sqrt{\frac{ak-b^2}{k} \left(1 + \frac{ak-b^2}{(kE_0-b)^2}\right)} \xrightarrow{E_0 \searrow \frac{b}{k}} \infty. \quad (6.69)$$

Für $E_0 < \frac{b}{k}$ wäre der Trade-Off negativ und nicht Gegenstand dieses Abschnitts. Deswegen ist es für pessimistische Anleger sinnvoll, einen Trade-Off mit $\lambda_U \in \left(\sqrt{\frac{ak-b^2}{k}}, \infty\right)$ zu wählen.

Nach dem Ergebnis der oben ausgeführten, zweistufigen Optimierung steht die Portfolio-Rendite direkt in Abhängigkeit vom den Parametern λ_U , a , k , und b . Der funktionale Ausdruck der Rendite kann in die Gleichung für die Portfolio-Aufteilung eingesetzt werden, um die optimale Portfolio-Aufteilung zu ermitteln. Dabei bleiben $a = c^T Q c$, $b = \mathbf{1}^T Q c = c^T Q \mathbf{1}$ und $k = \mathbf{1}^T Q \mathbf{1}$ wie (6.50). Nach dem Einsetzen ergibt sich die optimale Portfolio-Aufteilung:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{ak-b^2} Q(a\mathbf{1} - bc) + \frac{E_0}{ak-b^2} Q(kc - b\mathbf{1}) \\ &= \frac{Q}{ak-b^2} \left(a\mathbf{1} - bc + \left(\frac{b}{k} + \frac{ak-b^2}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} \right) (kc - b\mathbf{1}) \right) \\ &= \frac{Q}{ak-b^2} \left(a\mathbf{1} - bc + bc - \frac{b^2}{k} \mathbf{1} + \frac{(ak-b^2)c}{\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} - \frac{(ak-b^2)b\mathbf{1}}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} \right) \\ &= \frac{Q}{ak-b^2} \left(\frac{ak-b^2}{k} \mathbf{1} + \frac{(ak-b^2)c}{\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} - \frac{(ak-b^2)b\mathbf{1}}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} \right) \\ &= \frac{Q\mathbf{1}}{k} + \frac{Q(kc - b\mathbf{1})}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Im Endeffekt werden lediglich drei Daten für die Feststellung der optimalen Portfolio-Aufteilung benötigt. Diese sind die Strukturmatrix Q , das Zentrum c des Ellipsoids aus den Vorinformationen und der Trade-Off-Parameter λ_U . Der Trade-Off wird mit dem Hurwicz-Parameter q und mit dem Integral $\int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha$ als eine Konstante berechnet.

Nun werden die Lösungen über den direkten und über den indirekten, zweistufigen Lösungsweg miteinander verglichen. Bei einer korrekten Durchführung muss auf beiden voneinander unabhängigen Lösungswegen die gleiche Lösung herauskommen. Genau dies wird im Folgenden gezeigt. Auf dem indirekten Weg ergab sich die optimale Portfolio-Aufteilung (6.70). Bei dem direkten Lösungsweg wurden die Bezeichnungen $z = Q^{-\frac{1}{2}}X$, $u = Q^{\frac{1}{2}}c$ und $v = Q^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ verwendet. Klar ersichtlich gelten folgende Verbindungen zwischen den Bezeichnungen beider Lösungswege:

$$\begin{aligned} a &= c^T Q c = u^T u = \|u\|^2, \\ b &= \mathbf{1}^T Q c = c^T Q \mathbf{1} = u^T v = v^T u \text{ und} \\ k &= \mathbf{1}^T Q \mathbf{1} = v^T v = \|v\|^2. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Durch Austauschen der Bezeichnungen in der Gleichung (6.70) ergibt sich die folgende Gleichung.

$$\begin{aligned} X &= \frac{Q\mathbf{1}}{k} + \frac{Q(kc - b\mathbf{1})}{k\sqrt{\lambda_U^2 k - ak + b^2}} \\ &= \frac{Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}}{\|v\|^2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}}Q^{\frac{1}{2}}(\|v\|^2 c - v^T u \mathbf{1})}{\|v\|^2 \sqrt{\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 + (u^T v)^2}} \\ &= \frac{Q^{\frac{1}{2}}v}{\|v\|^2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}}(\|v\|^2 u - v^T uv)}{\|v\|^2 \sqrt{\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 + (u^T v)^2}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

Mit $\beta = \sqrt{\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 + (u^T v)^2}$ folgt weiter

$$X = \frac{Q^{\frac{1}{2}}v}{\|v\|^2} + \frac{Q^{\frac{1}{2}}(\|v\|^2 u - v^T uv)}{\|v\|^2 \beta} = Q^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u}{\beta} - \frac{v^T uv}{\beta \|v\|^2} + \frac{v}{\|v\|^2} \right) \quad (6.73)$$

Genau dieses Ergebnis ergibt sich unmittelbar auf dem direkten Lösungsweg und es steht in eindeutiger Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus der zweistufigen Optimierung. Des Weiteren teilen die Ergebnisse aus beiden Lösungswegen die gleiche Voraussetzung, nämlich $\lambda_U^2 k - ak + b^2 > 0$ oder $\lambda_U^2 \|v\|^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 + (u^T v)^2 > 0$. Diese schränkt die Allgemeinheit wie oben gezeigt nicht ein.

Die obigen Ergebnisse gelten für den Fall der Zulassung von Leerverkäufen. Falls Leerverkäufe nicht erlaubt sind, müssen die Nicht-Negativitätsbedingungen zusätzlich berücksichtigt werden. Entsprechend hat das Modell folgende Gestalt:

<p>OP18</p> $X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$ <p>unter den Nebenbedingungen:</p> $X^T \mathbf{1} = 1,$ $x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$
--

Um weitere Anlagebedingungen wie beispielsweise eine Mindestanlage- oder Höchstanlagegrenze zu berücksichtigen, können weitere lineare Bedingungen hinzugefügt werden. Dabei sind zwei Arten von Bedingungen möglich, nämlich lineare Gleichungs- und lineare Ungleichungsbedingung.

OP19

$$X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$C^1 X = p^1, N_1 \in \mathbb{N}, C^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N}, p^1 \in \mathbb{R}^{N_1},$$

$$C^2 X \leq p^2, N_2 \in \mathbb{N}, C^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N}, p^2 \in \mathbb{R}^{N_2}.$$

Um dieses allgemeine Optimierungsproblem mit zusätzlichen linearen Nebenbedingungen zu lösen, kann man auf die Critical-Line-Algorithm von Markowitz zurückgreifen. Dabei ist das Lösungsvorgehen ähnlich wie im uneingeschränkten Modell. Die Lösungen der ersten Stufe dieses Problems hängen abschnittsweise linear von der Gesamrendite ab. Jeder einzelne Abschnitt hat eine unterschiedliche Anlagenzusammensetzung, d. h. die investierten Positionen, bei denen die Gewichtungen größer als Null sind, sind in jedem Abschnitt unterschiedlich. Durch Lokalisierung des genauen Abschnitts und Ermittlung der genauen Zusammensetzung in der zweiten Stufe kann die optimale Portfolio-Aufteilung zu einem gegebenen Trade-Off λ_U berechnet werden. Auf eine detaillierte Ausführung vom Critical-Line-Algorithm wird an dieser Stelle verzichtet und auf Markowitz verwiesen.[Mar89]

6.3.3 Für optimistische Anleger

Für risikofreudige bzw. optimistische Anleger ist der Hurwicz-Parameter $0 \leq q < 0,5$. Damit ist der Trade-Off $\lambda_U = (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha) \sqrt{s(\alpha)} d\alpha$ streng negativ. Ähnlich wie bei der Modelllösung für pessimistische Anleger wird zunächst das Modell ohne die Nichtnegativitätsbedingung betrachtet.

OP20

$$X^T c - \lambda_U \sqrt{X^T Q^{-1} X} = X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$X^1 = 1.$$

Die Zielfunktion hat die gleiche Struktur wie die Zielfunktion für pessimistische Anleger. Der erste Summand bleibt die Gesamrendite des Portfolios. Im Gegensatz zu der Zielfunktion für pessimistische Anleger ist die Adjustierung in der Zielfunktion für optimistische Anleger nun stets positiv, d. h. hohe Adjustierung aufgrund der Unschärfe ist erwünscht. Dies kann damit begründet werden, dass ein optimistischer Anleger zusätzliches Risiko nicht bestraft, sondern belohnt, solange es der Renditesteigerung in einem bestimmten Verhältnis dienen kann.

Satz 6.11. *Seien mindestens zwei unterschiedliche Wertpapiere als Anlagemöglichkeiten gegeben, d. h. diese Wertpapiere unterscheiden sich mindestens in Hinblick auf die zugehörigen Renditen oder auf die Adjustierung aufgrund der Unschärfe. Sei Q^{-1} das Inverse der Strukturmatrix des Ellipsoids und c das zugehörige Zentrum des Ellipsoids. Weiter sei $\lambda_U < 0$ gegeben. Dann ist das Optimierungsproblem OP20 nicht beschränkt.*

Beweis. Seien zunächst die Renditen der einzelnen Anlagepositionen nicht sämtlich gleich. Dann gilt

$$\min_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i < \max_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i.$$

Offensichtlich ist $|\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \geq 0$ und es folgt weiter $X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \geq X^T c$. Seien $low := \arg \min_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i$ und $high := \arg \max_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i$. Damit ist $c_{high} - c_{low} > 0$. Seien die Portfolio-Aufteilung mit $x_{low} = 1 - x_{high}$ und $x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{high, low\}$ gewählt. Nach diesem Anlageschema erbringt das gesamte Portfolio eine Gesamrendite in Höhe von

$$X^T c = c_{high} x_{high} + c_{low} x_{low} = (c_{high} - c_{low}) x_{high} + c_{low}. \quad (6.74)$$

Mit $c_{high} - c_{low} > 0$ folgt

$$X^T c = (c_{high} - c_{low}) x_{high} + c_{low} \xrightarrow{x_{high} \rightarrow \infty} \infty \quad (6.75)$$

und aufgrund von $X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \geq X^T c$ ist die Zielfunktion erst recht nicht beschränkt.

Seien die Renditen aller Wertpapiere im Zentrum des Ellipsoids sämtlich gleich, d. h.

$$\min_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i.$$

In diesem Fall muss es nach Voraussetzung mindestens zwei Wertpapiere geben, die unterschiedliche Adjustierungen aufgrund der Unschärfe aufweisen. Seien die Indizes diese beiden Wertpapiere wieder mit $high$ bzw. low bezeichnet, wobei $high \neq low$ ist. Seien $x_{low} = 1 - x_{high}$ und $x_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{high, low\}$ als Portfolio-Aufteilung wie oben.

Da in diesem Fall $\min_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} c_i$ also $c_{high} - c_{low} = 0$ ist, folgt entsprechend

$$X^T c = c_{high} x_{high} + c_{low} x_{low} = (c_{high} - c_{low}) x_{high} + c_{low} = c_{low} \quad (6.76)$$

und damit

$$X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} = c_{low} + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X}. \quad (6.77)$$

Die Strukturmatrix des Ellipsoids und damit auch ihre inverse Matrix Q^{-1} sind symmetrisch und positiv definit. Daraus folgt, dass sämtliche Eigenwerte von Q^{-1} größer als Null sind. Sei $\lambda_k > 0$ der kleinste Eigenwert der Matrix Q^{-1} . Sei die Euklidische Norm mit $\|\bullet\|$ bezeichnet. Es gilt

$$|\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \geq |\lambda_U| \sqrt{\lambda_k \|X\|^2} = |\lambda_U| \sqrt{\lambda_k} \|X\|. \quad (6.78)$$

Mit der wie oben festgelegten Portfolio-Aufteilung gilt dann

$$X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} = c_{low} + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \geq c_{low} + |\lambda_U| \sqrt{\lambda_k} \|X\| \xrightarrow{x_{high} \rightarrow \infty} \infty. \quad (6.79)$$

□

In der Realität sind stets Grenzen für den Leerverkauf vorhanden, ebenfalls kann es weitere Bedingungen geben, die eine Randlösung implizieren. Um das Optimierungsproblem allgemein zu halten, wird anstelle von der Portfolio-Budget-Bedingung ein Bedingungssystem mit $N_1 + N_2$ linearen Nebenbedingungen eingefügt. Die Portfolio-Budget-Bedingung wird als eine dieser Bedingungen eingebettet. Das entsprechende Optimierungsmodell ist dann

OP21

$$X^T c + |\lambda_U| \sqrt{X^T Q^{-1} X} \rightarrow \max_{X \in \mathbb{R}^N}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$C^1 X = p^1, N_1 \in \mathbb{N}, C^1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N}, p^1 \in \mathbb{R}^{N_1},$$

$$C^2 X \leq p^2, N_2 \in \mathbb{N}, C^2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N}, p^2 \in \mathbb{R}^{N_2}.$$

In bestimmten Situationen kann eine Randlösung optimal sein, wenn die zulässige Menge nicht leer und gleichzeitig beschränkt ist. Aber dafür kann keine allgemeine explizite Lösung angegeben werden.

6.3.4 Abschließender Vergleich des Hauptmodells mit dem klassischen Modell

Durch die Lösung über den indirekten Lösungsweg ist ersichtlich, dass das Fuzzy-Hauptmodell und das klassische Modell hinsichtlich der mathematischen Problemstruktur Ähnlichkeiten besitzen. Für beide Modelle kann eine explizite Lösung im Fall eines pessimistischen Anlegers und unter Zulassung von Leerverkäufen angegeben werden. Falls Leerverkäufe untersagt werden, kann in beiden Modellen keine explizite Lösung angegeben werden. Für eine Lösung in diesem Fall kann der Critical-Line-Algorithm, der ursprünglich für das klassische Modell entwickelt wurde, aufgrund der mathematischen Ähnlichkeit der Problemstruktur herangezogen werden. Abgesehen von der Ähnlichkeit der mathematischen Problemstruktur ist es wichtig, zu betonen, dass beide Modelle unterschiedliche Auffassungen über die Vorinformationen implizieren und sich jeweils aus einer anderen Art der Informationsverarbeitung ergeben. Deswegen darf keinesfalls den Schluss gezogen werden, dass aufgrund eines möglichen und ähnlichen Lösungswegs das Inhaltliche bei beiden Modellen gleich sei.

Für das klassische Modell ist der theoretische Erwartungswert notwendig, der in der Praxis nicht direkt zur Verfügung steht. Der theoretische Erwartungswert soll sich aus einer Untersuchung der zur Verfügung stehenden Vorinformationen ergeben und wird stets durch eine Schätzung ersetzt. Oft wird der Erwartungswert durch den arithmetischen Mittelwert geschätzt und für bestimmte Verteilungen ist dieses Vorgehen auch adäquat. Die Güte der Schätzung hängt davon ab, ob Informationen über die zugrundeliegende Verteilung bzw. über den datenerzeugenden Prozess vorliegen. Auch hängt die Güte der Schätzung davon ab, wie groß der Stichprobenumfang ist. Unter der Normalverteilungsannahme der Renditen ist die Schätzung durch den arithmetischen Mittelwert beispielsweise gerechtfertigt. Aber diese Annahme selbst ist kontrovers. Selbstverständlich kann der Erwartungswert besser geschätzt werden, wenn sichere Informationen über die zugrundeliegende Verteilung verfügbar sind. Selbst dann bleibt es eine Schätzung, die immer noch vom Stichprobenumfang beeinflusst wird. Des Weiteren muss die theoretische Kovarianzmatrix für das Modell geschätzt werden. Sie hängt ebenfalls von der Verfügbarkeit der Informationen über die zugrundeliegende Verteilung bzw. über den datenerzeugenden Prozess ab. Außerdem ist die Varianz eine Größe, die Schwankungen sowohl in der positiven als auch in der negativen Richtung zusammenfasst. Effekte beider Richtungen lassen sich nicht mehr auseinander halten. Zusammengefasst baut das klassische Modell auf zwei theoretische Größen, die in der Praxis nicht direkt zur Verfügung stehen. Dementsprechend kann es bei der praktischen Anwendung Diskrepanzen geben. Die Ergebnisse können auch nur höchstens so gut wie die Schätzung der theoretischen Größen sein. Zu diesem Thema gibt es viele Forschungsarbeiten, die u. a. versuchen, die Plausibilität der Ergebnisse durch statistische Methoden wie z. B. Tests und Konfidenzintervalle zu rechtfertigen. (Vgl. dazu [BS08] und [BS09].) Dadurch sollte versucht werden, das subtile endogene Manko aufgrund der theoretischen Rahmenbedingungen zu überwinden. Doch das Manko ist wie erwähnt von endogener Natur, was bereits durch den theoretische Rahmen und die Grundlagen des Modells determiniert ist.

Bei dem Fuzzy-Hauptmodell sind die Rahmenbedingungen komplett anders. Keine Schätzungen sind nötig, weil dabei die Modellinputs als eine unscharfe Menge modelliert werden, die lediglich die gegebenen Vorinformationen adaptiert. Entsprechend bedarf es keiner weiteren theoretischen Zusatzbedingungen oder Annahmen wie die zugrundeliegende

Verteilung oder der datenerzeugender Prozess in der Statistik. Entsprechend der Modellierung werden die Vorinformationen durch das volumenminimale Ellipsoid berücksichtigt, das beispielsweise durch den vorgestellten Algorithmus von Khachiyan bestimmt werden kann. Dieses Ellipsoid repräsentiert einen spezifischen α -Schnitt. Aber durch das gewonnene Zentrum und die Strukturmatrix des Ellipsoids können alle anderen α -Schnitte anhand unterschiedlicher maximaler Q-Normen als äquivalentes Gegenstück der Zugehörigkeitsfunktion spezifiziert werden. Da getrennte Ergebnisse des bestmöglichen Falls und des schlechtestmöglichen Falls in jedem α -Schnitt vorliegen, kann zwischen beiden unterschieden werden. Wie diese beiden Fälle bei der Gesamtbetrachtung jeweils gewichtet werden, wird durch den Hurwice-Parameter festgelegt. Des Weiteren wird der Trade-Off-Parameter im Hauptmodell durch verschiedene Komponente bestimmt, der aber im klassischen Modell als eine gegebene Größe unerklärt bleibt. Dadurch wird den Trade-Off-Parameter besser erklärt.

Insgesamt kann zusammengefasst werden, dass das Fuzzy-Hauptmodell im Vergleich zum klassischen Modell mit weniger theoretischen Zusatzbedingungen auskommt, aber mehr Flexibilität und Erklärbarkeit hinsichtlich der Einstellungen anbietet. Diese Aspekte können u. a. in einem praktischen Einsatz vorteilhaft sein.

Kapitel 7

Implementierung der Modelle

Im Folgenden wird das Fuzzy-Hauptmodell implementiert, wobei reale Kursdaten verwendet werden. Das klassische Mean-Variance-Modell wird als Vergleichsmodell herangezogen. Ergebnisse aus beiden Modellen werden verglichen und diskutiert.

Eine zwingende Voraussetzung für die Implementierung sind die Daten. Diese werden für das klassische Modell verarbeitet, um die effizienten Portfolios im Sinne der klassischen Portfolio-Theorie zu bestimmen. Danach wird das Fuzzy-Hauptmodell auf der gleichen Datenbasis implementiert, um die optimalen Portfolios nach dem Fuzzy-Hauptmodell zu bestimmen. Abschließend werden die Ergebnisse aus beiden Modellen miteinander verglichen.

7.1 Auswahl und Beschaffung des Datenmaterials

Sowohl das klassische Portfolio-Modell nach Markowitz, als auch die Fuzzy-Modelle, setzen an dem Punkt an, an dem der Anleger bereits eine Vorauswahl über die einzelnen Anlagemöglichkeiten getroffen hat. Diese sind beispielsweise durch die Verfügbarkeit und Handelbarkeit beschränkt oder durch eigene Präferenzen determiniert. Theoretisch ist es möglich, eine große Anzahl an Wertpapieren durch die Modelle zu berücksichtigen. Um den Aufwand im Rahmen zu halten, aber auch um die Ergebnisse sinnvoll darstellen und vergleichen zu können, werden die auf XETRA gehandelten Aktientitel aus dem DAX(Deutscher Aktienindex) ausgewählt.

Die Entscheidung, lediglich dreißig DAX-Aktien für die Implementierung auszuwählen, beruht hauptsächlich auf zwei Überlegungen. Zu einem sind die DAX-Aktien die Umsatzstärksten in Deutschland[Fra], weshalb sie eine hohe Marktrelevanz haben. Auch ist somit eine hohe Liquidität dieser Wertpapiere gewährleistet. Zum anderen wird der DAX oft als ein Stellvertreter der gesamten deutschen Wirtschaft betrachtet, weil die darin aufgelisteten Unternehmen das breite Spektrum der deutschen Ökonomie größtenteils abdecken. (Auch aus diesem Grund wird der DAX häufig als das Markt-Portfolio bzw. Benchmark-Portfolio herangezogen.)

Für die Implementierung der Modelle werden also Aktien folgender Unternehmen berücksichtigt:

1. Adidas AG (Sportartikelindustrie)
2. Allianz SE (Versicherung)
3. BASF SE (Chemieindustrie)
4. Bayer AG NA (Pharmaindustrie)
5. Beiersdorf AG (Kosmetik- und Konsumgüterindustrie)

6. BMW AG St (Automobilindustrie)
7. Commerzbank AG (Finanzdienstleister)
8. Daimler AG (Automobilindustrie)
9. Deutsche Bank AG (Finanzdienstleister)
10. Deutsche Börse AG (Finanzdienstleister)
11. Deutsche Lufthansa AG (Luftfahrt)
12. Deutsche Post AG (Post- und Logistikkonzern)
13. Deutsche Telekom AG (Kommunikationsanbieter)
14. E. ON AG (Energieversorgung)
15. Fresenius Medical Care AG & Co. KGaA St (Pharmaindustrie & medizinische Dienstleister)
16. Fresenius SE Vz (Gesundheitskonzern)
17. Henkel AG- & Co. KGaA Vz (Chemieindustrie)
18. Infineon Technologies AG (Halbleiterindustrie)
19. K+S AG (Chemieindustrie)
20. Linde AG (Gas- und Engineering-Unternehmen)
21. MAN SE St (Automobilindustrie)
22. Merck KGaA (Pharma- und Chemieindustrie)
23. Metro AG St (Groß- und Einzelhandel)
24. Münchener Rück AG (Versicherung)
25. RWE AG St (Energieversorgung)
26. Salzgitter AG (Stahlindustrie)
27. SAP AG (Informationstechnologie)
28. Siemens AG (Elektroindustrie)
29. Thyssen Krupp AG (Industrie- und Technologiekonzern)
30. Volkswagen AG St (Automobilindustrie)

Zu jedem der DAX-Unternehmen wird ein Firmenportrait auf der Internetseite der Deutschen Börse Frankfurt zur Verfügung gestellt.[Deu] Dort werden neben Finanzzahlen auch Informationen zu den jeweiligen Unternehmensfeldern und -tätigkeiten zur Einsicht angeboten. Neben den qualitativen Informationen sind die quantitativen Informationen im Hinblick auf die Implementierung von hoher Bedeutung.

Für das klassische Portfolio-Modell von Markowitz wird als Input neben dem Erwartungswert des Renditevektors auch die Kovarianzmatrix aller berücksichtigten Anlagemöglichkeiten benötigt. Diese werden aus den historischen Kursen geschätzt, weil die theoretischen Werte nicht zur Verfügung stehen. Ein Tagesdatensatz jeder historischen Aktienkursreihe beinhaltet häufig neben dem Schlusskurs vier weitere Werte, nämlich Eröffnungskurs, Tageshoch, Tagesstief und Handelsvolumen. Diese geben die Tagesdynamik einer Aktie grob wieder. In der vorliegenden Implementierung werden der Erwartungswert des Renditevektors und die Kovarianzmatrix sowohl anhand der Tagesschlusskurse, als auch anhand der Tagesschwerpunkte geschätzt. Die Ergebnisse werden dann miteinander verglichen. Für das Fuzzy-Hauptmodell werden ebenfalls beide Arten von Vorinformationen herangezogen, die entsprechend des Modellrahmens verarbeitet werden. (Vgl. Abschnitt 5.2)

Die hier verwendeten historischen Kursreihen sind der Internetseite „Börse Online“ [Bör]

entnommen, wo sie durch Eingabe von Aktienname, Auswahl des Börsenplatzes und zeitlicher Rahmen als Tabelle angezeigt werden. Jede Zeile der Tabelle beinhaltet den Datensatz eines Tags, der aus „Datum“, „Eröffnung“, „Schlusskurs“, „Tageshoch“, „Tagestief“ und dem Handelsvolumen des Tages besteht.

Insgesamt werden Tageskurse der letzten sechs Jahre, also Kurse vom 1. Januar 2004 bis einschließlich 30. Dezember 2009, herangezogen. Diese Festlegung wird zu einem dadurch begründet, dass die Aktualität der Kursentwicklung berücksichtigt wird und zum anderen ist es wichtig, dass ein vertretbares Datenvolumen in Hinblick auf die Aussagekraft und den zugehörigen Aufwand zur Schätzung herangezogen wird.

Um die Berechnungen zu automatisieren, werden alle berücksichtigten Daten von den dreißig DAX-Unternehmen zusammen in einer Excel-Datei gespeichert. Jede Tabelle beinhaltet die Kursreihe eines Unternehmens und auf einer Übersichtstabelle werden alle Zeitreihen der Hauptinformation, sei es die Reihe der Schlusskurse oder die Schwerpunkte, zusammengefasst. Diese Übersichtstabelle dient als Grundlage für weitere Berechnungen.

7.2 Aufbereitung des Datenmaterials

In der Zeitreihe sind auch Tageskurse von geschlossenen Handelstagen vorhanden. Diese entsprechen genau dem Tagesschlusskurs des unmittelbar vorangegangenen Handelstages. Diese Tage sind

- Neujahr, der 1. Januar, jeden Jahres
- Tag der Arbeit, der 1. Mai, jedes Jahres
- Weihnachtsfeiertage, der 24. bis 26. Dezember, jedes Jahres
- Karfreitage: 9. April 2004, 25. März 2005, 14. April 2006, 6. April 2007, 21. März 2008 und 10. April 2009
- Ostermontage: 12. April 2004, 28. März 2005, 17. April 2006, 9. April 2007, 24. März 2008 und 13. April 2009

Des Weiteren sind der 31. Dezember 2004, 28. Mai 2007, 31. Dezember 2007 und 31. Dezember 2009 ebenfalls keine Handelstage, daher werden sie auch nicht berücksichtigt. Wenn alle Nicht-Handelstage bei der Betrachtung entfernt werden, bleiben Kursinformationen von 1523 Börsentagen in jeder einzelnen Zeitreihe vorhanden.

Jede Tagesrendite im herkömmlichen Sinne ist die Differenz zwischen den natürlichen Logarithmen zweier aufeinanderfolgender Tagesschlusskurse. Die Tagesrendite wird in einer separaten Spalte auf dem Datenblatt jeder einzelnen Aktie angelegt. Eigentlich müssen diskrete Tagesrenditen für das klassische Modell eingesetzt werden. Da aber die Tagesrenditen überwiegend klein sind, können sie approximativ gleich den kontinuierlichen Renditen gesetzt werden. (Vgl. Abschnitt 3.1) Bei Bedarf kann bei der Ausgabe der Ergebnisse eine Annualisierung durchgeführt werden. Häufig wird dafür unterstellt, dass ein normales Börsenjahr durchschnittlich 250 Börsenhandelstage beinhaltet und jeden Tag im langfristigen Mittel die gleiche Rendite erbringt. (Vgl. Abschnitt 2.4f.)

Zusätzlich zu den kontinuierlichen Renditen wird der „best and worst case“-Schwerpunkt berechnet. Dieser wird in einer weiteren Spalte auf dem Datenblatt jeder einzelnen Aktie gespeichert. Für die Berechnung des Schwerpunkts werden die Tageshöchst- und Tagesstiefstkurse neben den Schlusskursen zweier aufeinander folgender Handelstage hinzugezogen. (Vgl. Abschnitt 5.2)

Um den Import der Daten in Matlab zu vereinfachen, werden die Tagesrenditen bzw. Schwerpunkte aller berücksichtigten Aktien auf zwei Datenblättern zu einer Übersicht zusammengeführt. Diese beiden Datenblätter enthalten jeweils 1523 Dateneinträge der 30

DAX-Aktien. Die verschiedenen Aktien werden nach Spalten sortiert und die Tage nach Zeilen. Mittels der Matlab-internen Funktion „xlsread“ können diese Daten in Matlab eingelesen werden und stehen für weitere Berechnungen zur Verfügung.

7.3 Nach dem klassischen Modell

Der Erwartungswert des Renditenvektors und die Kovarianzmatrix werden als Input für das klassische Modell aus den Tagesrenditen geschätzt. Anhand der kontinuierlichen Tagesrenditen wird der Erwartungswert der kontinuierlichen Tagesrenditen durch den arithmetischen Mittelwert aller kontinuierlichen Tagesrenditen in einem bestimmten Zeitraum geschätzt. Die Mittelwerte können durch die Matlab-interne Funktion „mean“ aus den Daten berechnet werden. Weiter können die Erwartungswerte der Tagesrenditen durch entsprechende Kalkulation und Annualisierung in diskrete Jahresrenditenerwartungen umgerechnet werden. (Vgl. Abschnitt 2.4f.) Die Kovarianzmatrix kann anhand der Matlab-internen Funktion „cov“ ermittelt werden. Diese Funktion liefert die erwartungstreue Schätzung der Kovarianzmatrix. Das Ergebnis ist eine symmetrische und positiv definite Matrix. Ähnlich wie bei der Renditenerwartung kann mit der Annahme von durchschnittlichen 250 Börsentagen eine Annualisierung durchgeführt werden. (Vgl. Abschnitt 2.4f.)

Nach obigen Vorbereitungen stehen sowohl die Erwartungswerte der Renditen als auch die Kovarianzmatrix der einzelnen Aktien zur Verfügung. Weiterhin können die effizienten Portfolios unter Zulassung von Leerverkäufen berechnet werden. Mit der eigens verfassten Matlab-Prozedur „MEffLine“ können alle effizienten Portfolios in der Renditenerwartung-Volatilität-Ebene dargestellt werden. Dabei haben alle dargestellten Portfolios eine Renditenerwartung, die größer als die Renditenerwartung der varianzminimalen und gleichzeitig kleiner als die größte Renditenerwartung jeder einzelnen Aktie ist.

Um anschließend die Ergebnisse des klassischen Modells und des Fuzzy-Modells zu vergleichen, werden sowohl die Tagesschlusskurse als auch die Tagesschwerpunkte als Vorinformationen verwendet. Insgesamt 15 verschiedene Zeiträume mit unterschiedlicher Länge und unterschiedlichem Anfang für die Dateneingrenzung werden berücksichtigt. Aus Vorinformationen unterschiedlicher Zeiträume sind unterschiedliche Schätzungen der Renditenerwartung und Kovarianzmatrix zu erwarten, v.a. mit Hinblick auf 2008 als ein von der Finanzkrise geprägtes Jahr. Um bei einer Bewertung auf Jahresbasis zu bleiben, werden Daten in Jahresabschnitte aufgeteilt und lediglich Daten bis einschließlich 2008 zur Schätzung herangezogen. Die zeitlichen Perioden können in die folgenden fünf Gruppen aufgeteilt werden:

- Daten eines einzigen Jahres: 2004, 2005, 2006, 2007 und 2008
- Daten zweier aufeinanderfolgender Jahre beginnend mit: 2004, 2005, 2006 und 2007
- Daten dreier aufeinanderfolgender Jahre beginnend mit: 2004, 2005 und 2006
- Daten von vier aufeinanderfolgenden Jahren beginnend mit: 2004 und 2005
- Daten fünf aufeinanderfolgender Jahre beginnend mit 2004.

Optimierungsergebnisse als Effizienzlinien können in Diagramme anschaulich dargestellt werden.

Beim klassischen Modell ist das Portfolio mit minimaler Varianz von Interesse, da dieses Portfolio den effizienten Teil des Umhüllenden aller möglichen Portfolios markiert. Alle effizienten Portfolios müssen eine höhere Portfolio-Rendite als dieses varianzminimale Portfolio aufweisen. Wie im Abschnitt 3.2 zum klassischen Modell gezeigt, hat dieses Portfolio eine Renditenerwartung $\frac{b}{c}$ und eine Varianz $\frac{1}{c}$. Dabei ist $b = \mathbf{1}^T \Sigma \mu$ und $c = \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}$.

Dieses Portfolio wird in allen Diagrammen markiert. Weiter werden die annualisierte Rendite und Volatilität des Portfolios berechnet.

Sämtliche Berechnungen werden in Matlab durchgeführt. Dabei wird eine Hauptprozedur „m_Aufteilungen“ verfasst, in der die Parameter spezifiziert und die Vorinformationen als Dateninput eingelesen werden. Verschiedene Zeiträume für die Dateneingrenzung werden in dieser Prozedur spezifiziert. Nach Ausführung dieser Prozedur wird eine Tabelle generiert, in der sämtliche Aufteilungen für ein spezifisches Trade-Off mit entweder Tagesrenditen oder Schwerpunkten der unscharfen Tagesrenditen für alle Zeiträume angegeben werden. Bei der Ausführung wird eine Prozedur „m_write“ verwendet, die die nötigen Daten in einer Spalte der Ergebnistabelle anzeigt. Diese Prozedur wiederum greift auf die Prozedur „Markowitz“ zurück, die die Aufteilung und die zugehörige erwartete Rendite in einem Szenario berechnet. (Vgl. Beschreibung der Matlab-Prozeduren und -Funktionen im Anhang A)

Zunächst werden die Effizienzlinien aus den Tagesschlusskursen in den Abbildungen 7.1 und 7.2 zusammenfassend dargestellt.

Anschließend werden die Effizienzlinien, die aus den Tagesschwerpunkten als Vorinformationsinput resultieren, in den Abbildungen 7.3 und 7.4 zusammenfassend dargestellt. Dabei ist ein Tagesschwerpunkt stets die mit Tageshöchstkurs und -tiefstkurs modifizierte Tagesrendite. (Vgl. Abschnitt 5.2)

Um gezieltere Vergleiche zu ermöglichen, werden beispielhaft drei bestimmte Trade-Offs für pessimistische Anleger aufgegriffen, diese sind $\frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$, $\frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$ und $\frac{2}{3}$. Wie diese Werte determiniert werden, wird im anschließenden Abschnitt 7.4 dargestellt. An dieser Stelle steht die Portfolio-Aufteilung zu diesen Trade-Offs im Vordergrund.

Der Trade-Off bei dem klassischen Modell gibt stets das Austauschverhältnis zwischen der Portfolio-Rendite und dem -risiko gemessen durch die Varianz der Portfoliorendite an. Um eine Parallelität und eine Ähnlichkeit der Konstruktion zwischen dem klassischen Modell und dem Fuzzy-Modell anzustreben, ist der Trade-Off an dieser Stelle zwischen dem Erwartungswert und der Volatilität der Portfoliorendite.

Alle Berechnungen wurden in Matlab ausgeführt und die Ergebnisse aller Portfolios mit folgenden drei Aspekten werden für den Vergleich und die Auswertung in einer Excel-Tabelle übersichtlich zusammengefasst.

- Tagesrendite oder Tagesschwerpunkt als Vorinformation
- 15 Zeiträume für die Dateneinschränkung
- Trade-Off: $\frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$, $\frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$ und $\frac{2}{3}$

Diese Tabellen werden nun ebenfalls aufgelistet. Die Tabellen 7.1 bis 7.3 umfassen Ergebnisse aus dem klassischen Modell mit Tagesrenditen als Input. Die Tabellen 7.4 bis 7.6 umfassen Ergebnisse aus dem klassischen Modell mit Tagesschwerpunkten als Input. Dabei ist $E(R)$ die erwartete Rendite auf Jahresbasis und die Volatilität ist ebenfalls eine annualisierte Größe aus dem klassischen Modell. „A-1_u*B“ ist die auf Tagesbasis berechnete, erwartete Rendite(A), die um den Trade-Off(1_u) und Volatilität(B) adjustiert ist.

7.4 Umsetzung des Fuzzy-Hauptmodells

Im Folgenden wird zunächst auf die Vorinformationen und deren Verarbeitung eingegangen. Anschließend wird die genaue Festlegung der drei ausgewählten Trade-Offs dargestellt.

Für die Implementierung des Fuzzy-Hauptmodells stehen die gleichen Daten wie für das

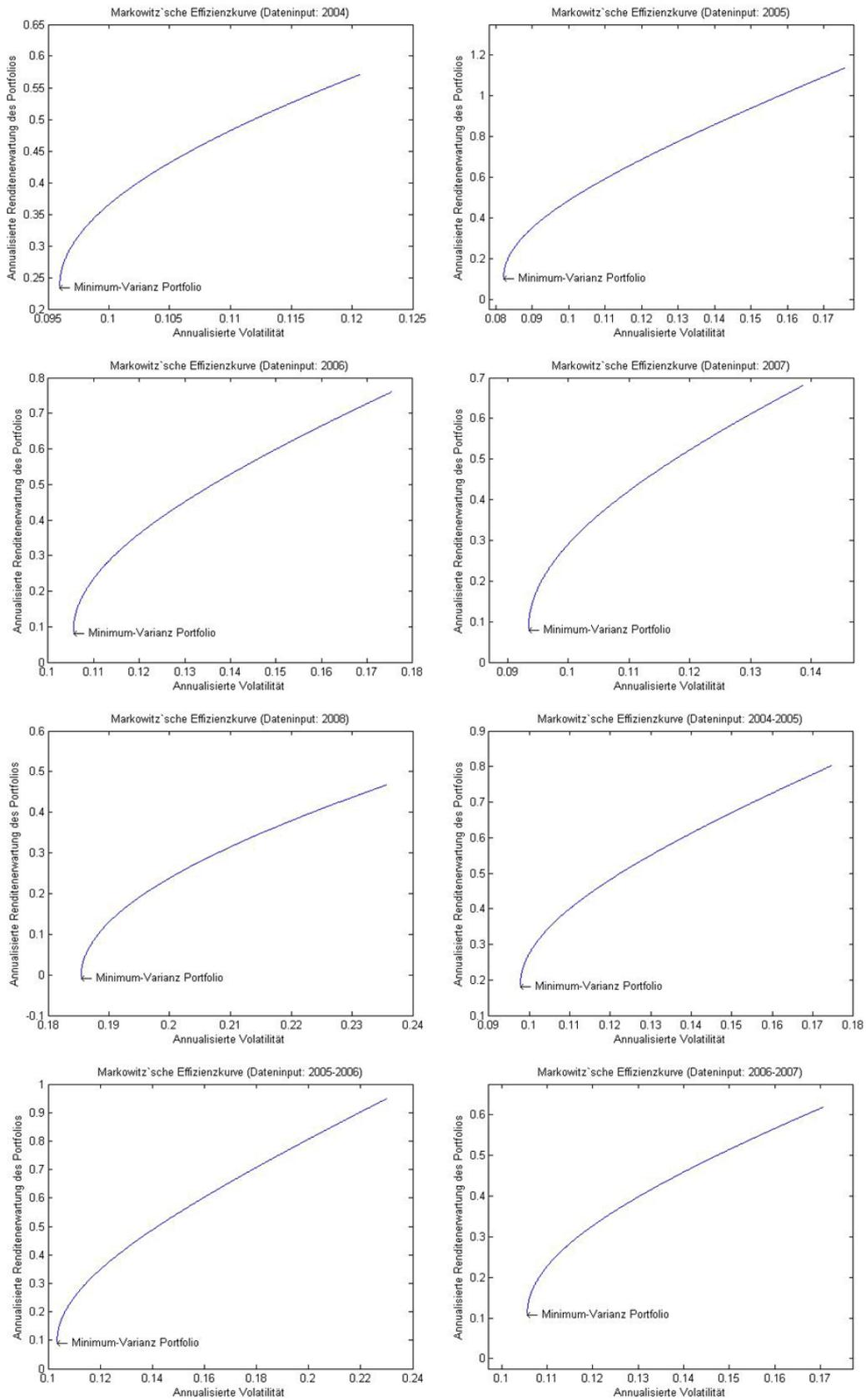


Abbildung 7.1: Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesrendite), Teil 1

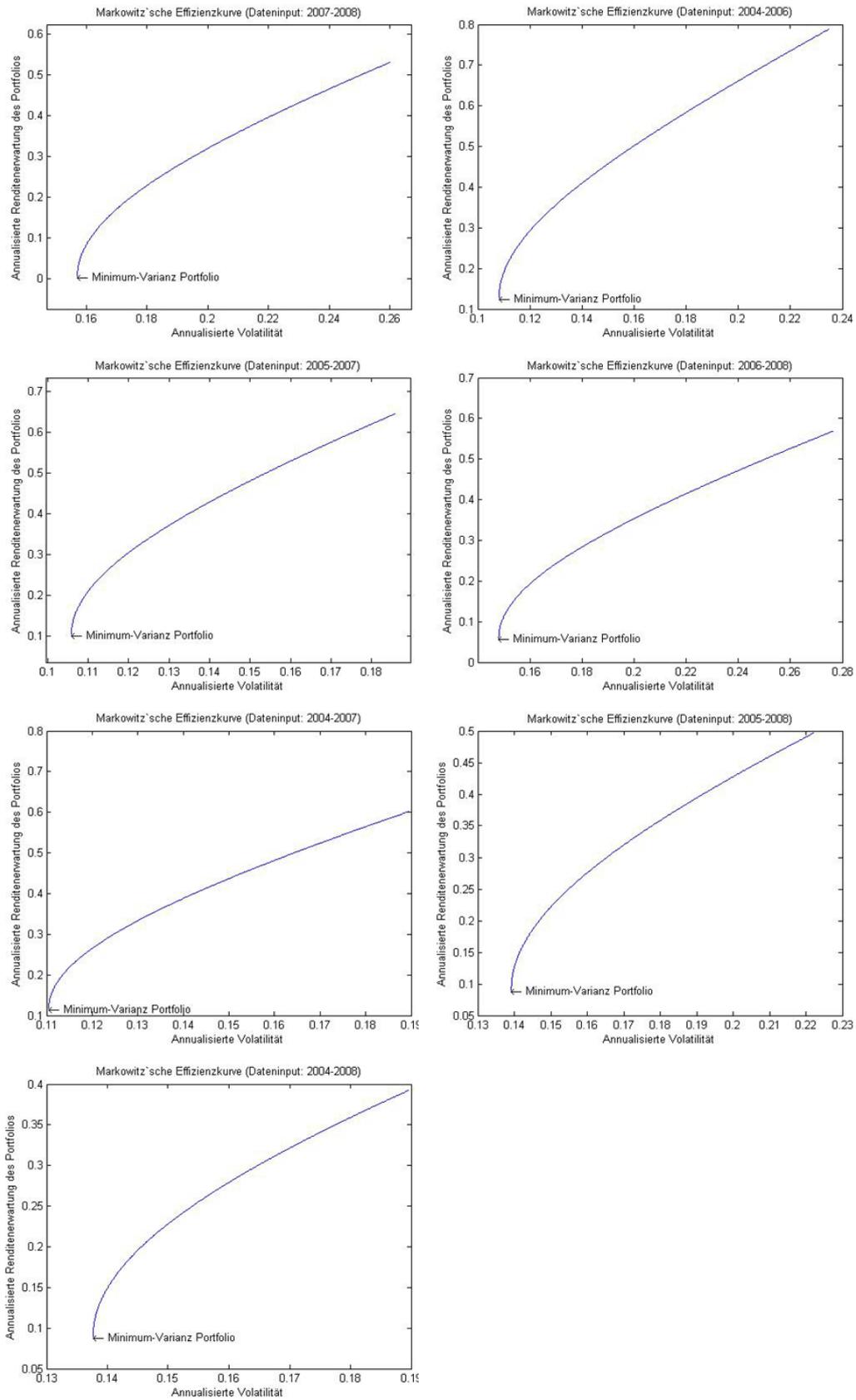


Abbildung 7.2: Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesrendite), Teil 2

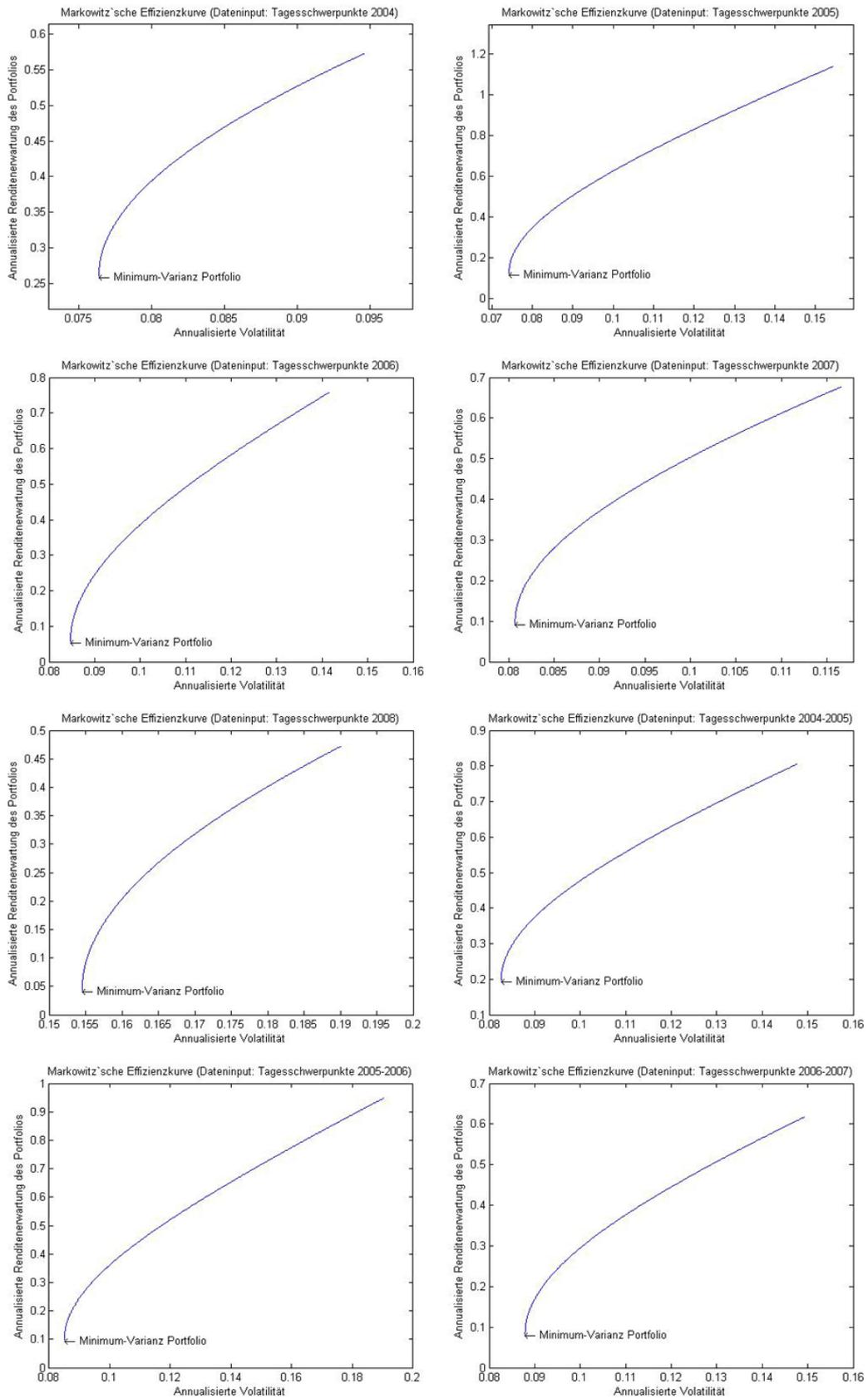


Abbildung 7.3: Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesschwerpunkte), Teil 1

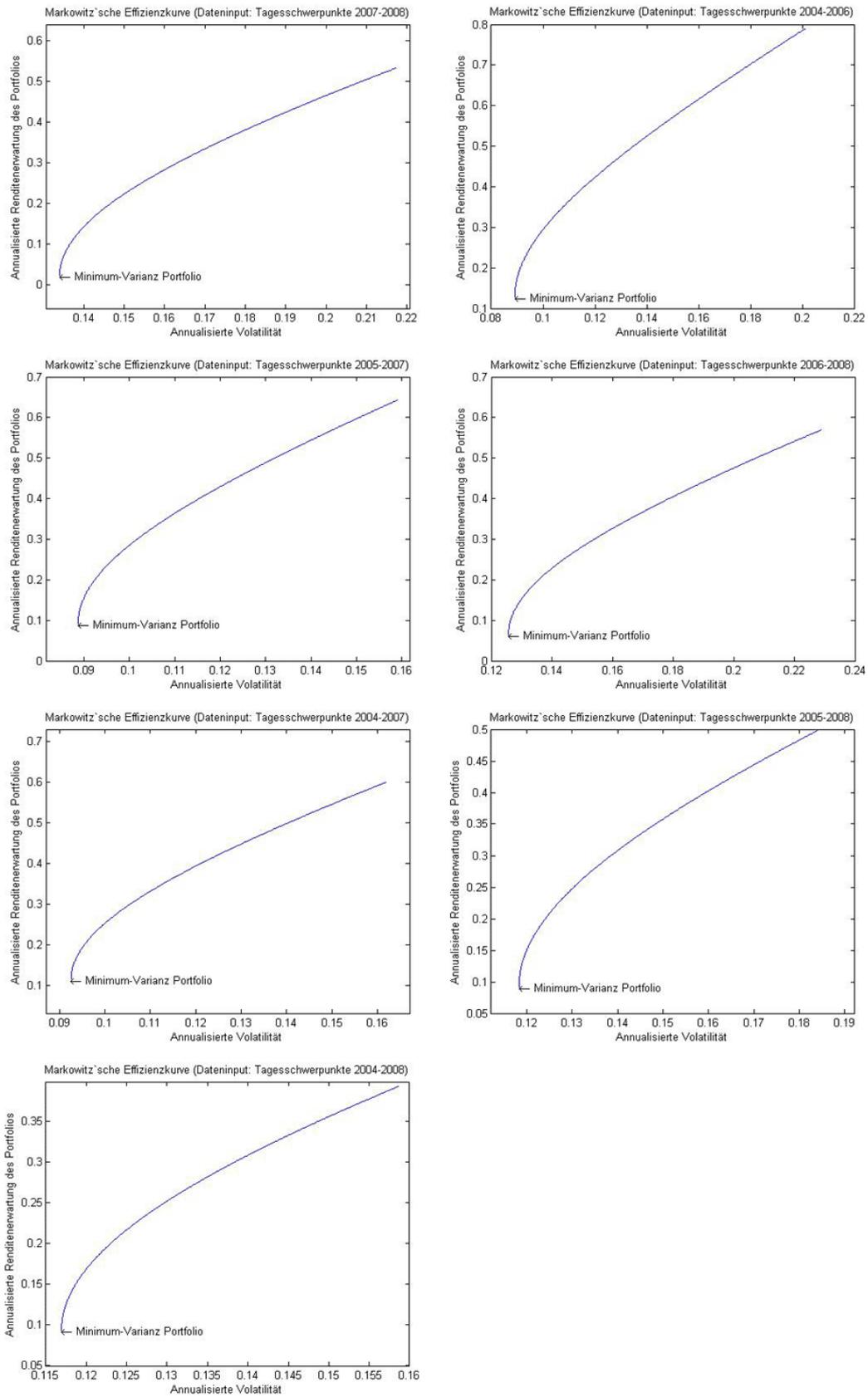


Abbildung 7.4: Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesschwerpunkte), Teil 2

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	7,62%	1,76%	3,17%	11,52%	10,29%	7,40%	1,61%	8,08%	10,83%	5,67%	5,88%	7,96%	8,30%	6,47%	8,52%
Allianz	-21,99%	-15,99%	-18,15%	-13,80%	-6,10%	-15,44%	-17,53%	-15,70%	-9,47%	-19,65%	-15,79%	-12,09%	-18,25%	-12,74%	-14,78%
BASF	13,48%	-6,16%	15,70%	5,90%	-4,14%	3,41%	8,48%	11,41%	-5,75%	11,26%	6,86%	-0,42%	10,29%	-0,58%	1,94%
Bayer	-13,23%	-2,41%	2,33%	-0,15%	2,33%	-9,59%	1,60%	2,26%	3,59%	-4,25%	1,65%	3,71%	-3,32%	2,92%	-0,18%
Beiersdorf	7,44%	23,21%	8,33%	-1,56%	23,76%	12,65%	14,94%	3,62%	16,99%	11,59%	8,95%	15,67%	8,53%	16,36%	14,90%
BMW	3,45%	15,64%	2,44%	-0,44%	-7,77%	12,59%	7,18%	-1,00%	-6,25%	6,56%	2,43%	-5,46%	2,44%	-2,67%	-2,00%
Com.bank	-2,28%	1,35%	0,71%	-4,40%	1,36%	-0,60%	-0,74%	-2,27%	1,48%	-1,44%	-2,38%	0,64%	-2,64%	0,53%	0,83%
Daimler	-4,09%	-2,02%	-4,20%	-0,57%	-9,20%	-5,65%	-3,75%	-3,94%	-9,11%	-4,83%	-5,26%	-8,24%	-6,39%	-8,82%	-9,04%
Dt.Bank	5,33%	-11,19%	-25,48%	-3,40%	-11,74%	2,00%	-14,28%	-12,03%	-12,33%	-4,39%	-12,00%	-12,25%	-6,02%	-12,12%	-9,53%
Dt.Börse	14,28%	8,45%	6,07%	-2,43%	-9,40%	10,83%	4,99%	2,92%	-7,50%	6,61%	3,15%	-4,61%	4,30%	-3,27%	-2,01%
Lufthansa	-5,01%	1,94%	11,87%	-1,48%	20,84%	-2,48%	10,71%	5,88%	11,90%	3,89%	6,36%	12,93%	2,26%	11,75%	8,40%
Post	4,99%	4,30%	17,26%	11,34%	14,02%	4,34%	13,80%	14,16%	14,22%	10,90%	13,17%	14,68%	11,64%	13,16%	11,23%
Telekom	15,55%	11,35%	11,67%	10,80%	-12,71%	12,56%	13,36%	11,71%	-4,51%	14,12%	12,78%	0,20%	13,12%	1,47%	3,98%
Eon	18,53%	7,73%	-7,61%	1,26%	-18,32%	14,92%	-2,79%	-4,87%	-11,06%	3,28%	-2,22%	-10,05%	2,91%	-8,42%	-5,04%
Fres. Med	5,71%	14,57%	13,17%	7,50%	22,62%	12,47%	14,28%	11,29%	17,84%	14,87%	13,22%	18,15%	14,93%	18,43%	19,36%
Fresenius	17,34%	11,36%	-4,54%	-1,28%	4,75%	12,76%	3,07%	-3,53%	1,85%	5,88%	0,89%	-0,69%	3,07%	2,00%	3,54%
HenkelVZ	10,42%	-0,81%	14,99%	7,85%	-0,53%	7,84%	9,33%	10,27%	3,33%	13,16%	8,67%	6,65%	10,91%	6,55%	8,75%
Infineon	-4,16%	-9,81%	0,39%	2,19%	-0,82%	-7,10%	-6,50%	1,97%	-0,50%	-5,90%	-2,51%	-0,64%	-3,40%	-1,50%	-2,47%
K+S	8,55%	-1,93%	0,43%	-1,75%	7,06%	4,30%	-0,26%	-1,73%	4,51%	4,04%	-1,81%	3,82%	0,41%	3,17%	3,78%
Linde	5,53%	10,80%	2,34%	9,00%	9,15%	8,75%	4,69%	3,99%	11,86%	5,08%	6,06%	7,95%	6,58%	8,07%	8,29%
MAN	5,52%	-3,45%	3,03%	7,22%	-1,67%	-1,75%	-2,21%	3,22%	0,00%	-2,56%	0,49%	-0,11%	-0,28%	-0,89%	-1,22%
Merck	5,76%	4,88%	5,85%	8,62%	16,29%	6,06%	6,41%	7,38%	14,29%	6,95%	6,61%	11,74%	7,47%	10,43%	10,45%
Metro	7,77%	1,02%	17,75%	9,02%	3,13%	7,13%	11,74%	12,42%	5,64%	11,37%	11,25%	7,19%	11,60%	7,46%	7,98%
Mün. Rück	7,67%	13,30%	14,43%	14,68%	13,11%	8,18%	15,60%	15,62%	14,43%	11,81%	15,92%	14,26%	13,65%	14,47%	13,38%
RWE	-2,83%	-0,04%	14,89%	11,59%	25,54%	-2,90%	7,67%	13,58%	19,43%	4,90%	9,23%	18,12%	6,50%	15,51%	12,85%
Salzgitter	11,54%	-1,91%	-8,97%	-14,33%	-9,49%	3,26%	-5,55%	-9,85%	-11,34%	-2,87%	-6,89%	-10,19%	-4,41%	-8,17%	-5,88%
SAP	-5,74%	14,99%	-0,36%	15,14%	13,55%	2,09%	5,31%	7,91%	16,22%	0,61%	9,28%	13,43%	4,97%	13,02%	9,95%
Siemens	-8,03%	0,49%	-1,05%	-0,52%	0,89%	-3,96%	-0,72%	-0,51%	1,75%	-1,80%	0,47%	0,09%	-1,18%	0,20%	-0,93%
Thyssen	-10,30%	12,43%	-2,21%	2,10%	-3,79%	-1,92%	-0,23%	-1,63%	-0,73%	-3,97%	-0,41%	-1,05%	-3,15%	-0,78%	-2,87%
VW	1,19%	-3,88%	5,72%	10,39%	7,02%	-2,14%	-0,20%	9,41%	8,41%	-0,90%	5,95%	8,60%	5,14%	7,97%	7,81%
E(R)	30,22%	22,73%	16,63%	18,84%	5,82%	24,37%	15,40%	16,04%	3,79%	16,32%	14,67%	8,33%	15,33%	11,52%	11,40%
Volatilität	9,70%	8,42%	10,68%	9,52%	18,64%	9,87%	10,44%	10,65%	15,76%	10,87%	10,66%	14,84%	11,11%	13,96%	13,80%
A-1_u*B	-1,07%	-0,95%	-1,25%	-1,10%	-2,27%	-1,12%	-1,22%	-1,25%	-1,92%	-1,27%	-1,25%	-1,79%	-1,31%	-1,67%	-1,65%

Tabelle 7.1: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $\frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	8,96%	2,65%	-0,55%	11,59%	10,81%	8,63%	0,57%	7,22%	11,53%	5,43%	5,62%	7,36%	8,57%	6,26%	8,80%
Allianz	-22,45%	-14,28%	-18,50%	-14,31%	-4,98%	-14,27%	-16,56%	-16,21%	-9,58%	-19,01%	-15,46%	-12,04%	-18,05%	-12,36%	-14,56%
BASF	15,34%	-7,75%	14,26%	9,96%	-5,16%	3,75%	7,54%	12,31%	-5,75%	11,59%	6,89%	-0,59%	10,90%	-1,03%	1,83%
Bayer	-13,54%	-2,50%	2,37%	2,04%	2,45%	-8,94%	1,65%	3,26%	4,77%	-4,04%	2,75%	4,49%	-2,52%	3,81%	0,41%
Beiersdorf	5,79%	24,28%	9,01%	-2,85%	23,69%	11,57%	15,09%	3,41%	16,94%	10,88%	8,67%	15,96%	7,62%	16,23%	14,32%
BMW	2,19%	15,41%	2,15%	-3,38%	-6,60%	11,43%	5,93%	-3,47%	-7,07%	4,97%	0,07%	-6,13%	0,06%	-3,49%	-2,88%
Com.bank	-4,08%	2,91%	-1,83%	-3,58%	0,53%	-0,08%	-1,24%	-3,34%	1,30%	-1,90%	-2,71%	-0,03%	-3,05%	0,24%	0,59%
Daimler	-4,08%	-2,34%	-6,79%	1,79%	-11,44%	-5,90%	-5,24%	-4,25%	-8,62%	-5,73%	-5,97%	-8,54%	-6,95%	-9,15%	-9,50%
Dt.Bank	5,27%	-11,08%	-24,54%	-6,69%	-12,72%	1,14%	-14,53%	-13,94%	-13,78%	-4,81%	-13,76%	-13,32%	-7,51%	-13,30%	-10,52%
Dt.Börse	14,69%	14,32%	6,82%	0,18%	-10,70%	12,92%	7,10%	5,11%	-7,18%	8,10%	5,63%	-3,87%	6,23%	-2,21%	-1,08%
Lufthansa	-6,60%	0,12%	15,81%	-3,65%	22,61%	-3,87%	12,84%	6,98%	12,34%	4,18%	6,87%	14,51%	2,00%	12,98%	8,96%
Post	5,79%	4,93%	17,24%	10,88%	14,67%	4,27%	13,71%	13,71%	14,03%	10,39%	12,91%	14,35%	11,34%	12,93%	10,91%
Telekom	16,69%	0,67%	9,34%	10,93%	-12,73%	9,67%	8,86%	10,88%	-4,67%	12,18%	10,13%	-0,44%	11,60%	-0,46%	2,77%
E.ON	20,04%	7,33%	-8,43%	4,43%	-18,37%	14,79%	-3,99%	-3,80%	-9,56%	2,65%	-1,92%	-9,12%	3,47%	-8,00%	-4,71%
Fres. Med	3,01%	16,88%	12,06%	8,38%	23,66%	11,69%	15,13%	10,95%	18,43%	14,35%	13,65%	18,33%	14,63%	19,01%	19,54%
Fresenius	19,38%	12,32%	-4,03%	-1,54%	4,73%	14,05%	3,68%	-3,38%	1,46%	6,95%	1,21%	-0,69%	3,59%	2,38%	4,08%
HenkelVZ	9,12%	-0,81%	16,59%	5,20%	-1,45%	6,82%	10,35%	9,65%	1,96%	13,41%	8,42%	6,06%	10,34%	6,19%	8,33%
Infineon	-5,99%	-10,07%	1,30%	0,67%	-1,90%	-8,90%	-6,23%	1,57%	-1,70%	-6,65%	-3,19%	-1,61%	-4,47%	-2,55%	-3,68%
K+S	10,90%	-3,15%	0,57%	-0,88%	8,20%	4,95%	-0,99%	-0,70%	5,47%	4,73%	-1,48%	4,67%	1,29%	3,61%	4,45%
Linde	4,71%	12,31%	2,30%	6,71%	9,72%	8,76%	5,34%	2,92%	12,00%	5,04%	5,85%	7,51%	6,22%	8,00%	8,21%
MAN	8,55%	-1,74%	3,86%	10,82%	-2,75%	0,59%	-1,33%	4,73%	0,58%	-1,62%	1,87%	0,43%	1,21%	-0,37%	-0,53%
Merck	6,67%	4,74%	5,47%	8,57%	15,42%	6,82%	6,11%	7,25%	14,64%	7,39%	6,49%	11,64%	7,92%	10,53%	10,99%
Metro	8,90%	-3,19%	17,91%	10,14%	2,60%	6,10%	9,74%	12,97%	5,58%	10,66%	10,57%	7,24%	11,43%	7,00%	7,75%
Mün. Rück	6,96%	13,43%	14,22%	13,16%	15,39%	7,75%	15,11%	14,21%	15,64%	11,12%	15,15%	15,08%	12,71%	15,19%	13,73%
RWE	-1,43%	4,06%	17,48%	8,80%	25,23%	0,18%	11,40%	14,09%	18,12%	8,00%	11,08%	18,21%	8,42%	16,84%	14,33%
Salzgitter	13,39%	1,25%	-7,96%	-16,23%	-8,40%	6,20%	-3,75%	-10,28%	-11,52%	-0,93%	-6,05%	-10,10%	-3,20%	-7,09%	-4,59%
SAP	-5,03%	16,05%	-1,76%	12,83%	14,88%	2,63%	4,66%	6,13%	15,53%	0,42%	7,97%	12,71%	4,03%	12,22%	9,29%
Siemens	-9,46%	-1,72%	-4,18%	1,20%	0,36%	-5,04%	-3,21%	0,09%	1,96%	-3,75%	0,85%	-0,19%	-1,16%	-0,11%	-1,45%
Thyssen	-12,10%	8,03%	-0,02%	0,80%	-4,46%	-4,68%	-0,29%	-1,15%	-1,36%	-4,37%	-1,27%	-0,57%	-4,05%	-1,39%	-3,73%
VW	-1,61%	-3,07%	9,83%	14,04%	6,70%	-3,04%	2,55%	13,09%	8,50%	0,38%	9,16%	8,70%	7,39%	8,09%	7,93%
E(R)	37,28%	36,73%	25,31%	30,68%	12,44%	30,56%	21,60%	21,26%	7,16%	19,99%	19,23%	10,65%	19,02%	14,07%	13,85%
Volatilität	10,05%	9,11%	11,11%	10,10%	18,97%	10,18%	10,74%	10,90%	15,92%	11,05%	10,88%	14,95%	11,29%	14,08%	13,92%
A-1_u*B	-0,47%	-0,41%	-0,58%	-0,50%	-1,12%	-0,50%	-0,57%	-0,59%	-0,95%	-0,60%	-0,59%	-0,88%	-0,62%	-0,81%	-0,80%

Tabelle 7.2: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $\frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	10,39%	3,79%	-4,56%	11,68%	11,33%	9,90%	-0,51%	6,36%	12,20%	5,20%	5,36%	6,80%	8,83%	6,06%	9,06%
Allianz	-22,94%	-12,08%	-18,88%	-14,91%	-3,89%	-13,05%	-15,56%	-16,71%	-9,68%	-18,38%	-15,13%	-11,99%	-17,86%	-12,01%	-14,34%
BASF	17,30%	-9,81%	12,72%	14,73%	-6,17%	4,11%	6,57%	13,21%	-5,76%	11,91%	6,93%	-0,76%	11,50%	-1,46%	1,73%
Bayer	-13,87%	-2,63%	2,41%	4,60%	2,57%	-8,28%	1,71%	4,26%	5,90%	-3,84%	3,84%	5,22%	-1,74%	4,66%	0,98%
Beiersdorf	4,06%	25,65%	9,74%	-4,36%	23,61%	10,45%	15,23%	3,20%	16,89%	10,19%	8,39%	16,23%	6,72%	16,10%	13,77%
BMW	0,86%	15,11%	1,83%	-6,85%	-5,44%	10,22%	4,64%	-5,95%	-7,85%	3,41%	-2,29%	-6,76%	-2,27%	-4,27%	-3,72%
Com.bank	-5,98%	4,92%	-4,56%	-2,61%	-0,29%	0,47%	-1,76%	-4,42%	1,13%	-2,35%	-3,04%	-0,67%	-3,45%	-0,02%	0,35%
Daimler	-4,06%	-2,76%	-9,58%	4,58%	-13,64%	-6,16%	-6,77%	-4,56%	-8,15%	-6,60%	-6,68%	-8,82%	-7,51%	-9,46%	-9,95%
Dt.Bank	5,20%	-10,93%	-23,52%	-10,56%	-13,68%	0,26%	-14,79%	-15,86%	-15,16%	-5,22%	-15,53%	-14,34%	-8,98%	-14,42%	-11,46%
Dt.Börse	15,13%	21,91%	7,63%	3,25%	-11,97%	15,09%	9,28%	7,32%	-6,86%	9,55%	8,09%	-3,18%	8,12%	-1,20%	-0,20%
Lufthansa	-8,28%	-2,22%	20,05%	-6,21%	24,35%	-5,31%	15,03%	8,09%	12,76%	4,48%	7,38%	16,02%	1,76%	14,15%	9,49%
Post	6,64%	5,74%	17,22%	10,33%	15,32%	4,19%	13,62%	13,25%	13,84%	9,89%	12,65%	14,04%	11,05%	12,70%	10,61%
Telekom	17,90%	-13,12%	6,84%	11,09%	-12,75%	6,67%	4,22%	10,05%	-4,83%	10,28%	7,49%	-1,05%	10,10%	-2,29%	1,62%
E.ON	21,65%	6,81%	-9,32%	8,17%	-18,42%	14,65%	-5,22%	-2,72%	-8,12%	2,03%	-1,62%	-8,24%	4,02%	-7,60%	-4,39%
Fres. Med	0,15%	19,87%	10,86%	9,43%	24,68%	10,88%	16,01%	10,60%	19,00%	13,85%	14,08%	18,50%	14,34%	19,56%	19,71%
Fresenius	21,54%	13,56%	-3,48%	-1,84%	4,70%	15,40%	4,31%	-3,22%	1,09%	8,00%	1,53%	-0,68%	4,10%	2,75%	4,60%
HenkelVZ	7,74%	-0,81%	18,31%	2,08%	-2,35%	5,77%	11,39%	9,01%	0,66%	13,65%	8,16%	5,50%	9,78%	5,83%	7,93%
Infineon	-7,94%	-10,41%	2,28%	-1,11%	-2,98%	-10,76%	-5,95%	1,17%	-2,85%	-7,39%	-3,87%	-2,53%	-5,53%	-3,54%	-4,82%
K+S	13,39%	-4,72%	0,71%	0,14%	9,32%	5,62%	-1,75%	0,34%	6,38%	5,41%	-1,15%	5,47%	2,15%	4,04%	5,08%
Linde	3,85%	14,26%	2,25%	4,01%	10,28%	8,77%	6,01%	1,85%	12,13%	5,00%	5,65%	7,09%	5,86%	7,93%	8,14%
MAN	11,76%	0,47%	4,75%	15,05%	-3,82%	3,03%	-0,43%	6,26%	1,15%	-0,71%	3,26%	0,95%	2,66%	0,13%	0,12%
Merck	7,63%	4,55%	5,06%	8,50%	14,58%	7,61%	5,81%	7,11%	14,97%	7,81%	6,38%	11,55%	8,37%	10,61%	11,51%
Metro	10,10%	-8,61%	18,07%	11,45%	2,08%	5,04%	7,67%	13,52%	5,53%	9,95%	9,89%	7,29%	11,25%	6,57%	7,54%
Mün. Rück	6,21%	13,59%	13,99%	11,37%	17,64%	7,30%	14,60%	12,78%	16,80%	10,44%	14,38%	15,84%	11,79%	15,87%	14,06%
RWE	0,05%	9,36%	20,28%	5,52%	24,93%	3,38%	15,26%	14,61%	16,86%	11,04%	12,93%	18,30%	10,31%	18,11%	15,74%
Salzgitter	15,35%	5,34%	-6,89%	-18,46%	-7,32%	9,25%	-1,89%	-10,72%	-11,68%	0,97%	-5,21%	-10,02%	-2,01%	-6,07%	-3,36%
SAP	-4,28%	17,43%	-3,27%	10,11%	16,20%	3,19%	4,00%	4,34%	14,86%	0,24%	6,66%	12,02%	3,11%	11,46%	8,66%
Siemens	-10,97%	-4,58%	-7,54%	3,23%	-0,16%	-6,15%	-5,77%	0,70%	2,17%	-5,66%	1,23%	-0,45%	-1,15%	-0,41%	-1,95%
Thyssen	-14,00%	2,35%	2,34%	-0,74%	-5,11%	-7,54%	-0,35%	-0,67%	-1,96%	-4,77%	-2,12%	-0,12%	-4,93%	-1,98%	-4,54%
VW	-4,57%	-2,03%	14,24%	18,33%	6,39%	-3,98%	5,40%	16,80%	8,59%	1,64%	12,36%	8,80%	9,59%	8,21%	8,05%
E(R)	44,75%	54,81%	34,66%	44,63%	18,95%	36,99%	27,98%	26,52%	10,40%	23,59%	23,79%	12,85%	22,63%	16,49%	16,19%
Volatilität	10,65%	10,58%	11,86%	11,23%	19,49%	10,69%	11,26%	11,32%	16,18%	11,34%	11,25%	15,13%	11,58%	14,28%	14,11%
A-1_u*B	-0,27%	-0,23%	-0,36%	-0,29%	-0,75%	-0,30%	-0,36%	-0,37%	-0,64%	-0,38%	-0,38%	-0,59%	-0,40%	-0,54%	-0,53%

Tabelle 7.3: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	7,55%	2,09%	-0,47%	11,46%	15,40%	7,62%	0,01%	6,66%	13,48%	4,60%	5,11%	8,81%	7,14%	7,39%	8,70%
Allianz	-12,87%	-7,93%	-13,43%	-8,43%	-8,75%	-8,21%	-12,67%	-10,58%	-10,58%	-13,05%	-10,24%	-11,96%	-11,66%	-11,43%	-12,73%
BASF	17,59%	-0,17%	18,05%	3,47%	-9,56%	10,97%	12,58%	11,02%	-8,46%	17,34%	8,34%	-2,19%	13,44%	-1,98%	1,38%
Bayer	-12,96%	1,12%	-0,58%	4,81%	-0,81%	-10,06%	0,43%	2,80%	4,47%	-6,63%	2,37%	3,54%	-3,47%	2,97%	-0,79%
Beiersdorf	7,98%	19,49%	11,18%	-2,96%	25,36%	11,26%	15,15%	2,96%	18,79%	11,52%	7,66%	18,53%	7,70%	18,22%	16,70%
BMW	1,76%	14,55%	3,84%	0,14%	-8,24%	10,80%	7,41%	0,25%	-6,17%	6,11%	3,24%	-5,04%	3,07%	-2,51%	-1,99%
Com.bank	-2,91%	2,88%	-3,38%	-4,34%	3,48%	0,08%	-2,04%	-3,87%	4,68%	-2,26%	-2,56%	3,71%	-2,75%	3,67%	3,52%
Daimler	-4,57%	-4,88%	-5,84%	5,62%	-11,19%	-7,53%	-5,84%	-1,08%	-8,65%	-6,58%	-3,07%	-8,91%	-4,76%	-9,11%	-9,21%
Dt.Bank	4,96%	-8,75%	-15,84%	-2,24%	-10,78%	1,66%	-11,57%	-8,09%	-13,13%	-2,90%	-9,92%	-13,35%	-5,00%	-13,92%	-11,33%
Dt.Börse	14,23%	10,56%	3,55%	-2,73%	-11,02%	12,11%	4,65%	1,86%	-7,86%	6,04%	2,81%	-4,85%	4,02%	-3,20%	-1,83%
Lufthansa	-6,40%	0,63%	12,48%	-5,94%	17,96%	-5,16%	10,04%	4,33%	10,33%	1,02%	4,48%	11,67%	-0,32%	10,28%	6,21%
Post	5,51%	8,06%	16,73%	9,09%	18,93%	6,11%	14,95%	12,81%	17,02%	11,13%	12,65%	17,08%	11,20%	16,05%	13,95%
Telekom	13,25%	11,50%	10,37%	7,63%	-1,41%	12,86%	12,45%	10,80%	2,33%	14,02%	12,20%	5,56%	13,15%	6,05%	8,21%
E.ON	19,68%	7,16%	-0,93%	3,95%	-27,61%	14,78%	1,10%	-0,74%	-14,77%	6,47%	-0,07%	-11,08%	4,14%	-10,06%	-6,45%
Fres. Med	10,45%	17,93%	16,64%	8,57%	23,24%	16,35%	17,35%	13,23%	21,12%	18,17%	15,95%	21,93%	18,20%	22,12%	23,78%
Fresenius	14,97%	10,32%	-5,89%	0,52%	0,52%	9,56%	2,71%	-3,82%	-2,35%	3,61%	1,13%	-4,14%	1,83%	-0,81%	0,00%
HenkelVZ	8,96%	1,79%	14,92%	8,67%	-0,23%	10,45%	9,99%	11,63%	4,45%	15,07%	9,95%	7,46%	13,08%	7,36%	10,74%
Infineon	-5,96%	-11,39%	-1,16%	1,81%	-2,97%	-8,33%	-6,88%	0,97%	-2,44%	-6,52%	-2,95%	-2,32%	-4,20%	-3,14%	-3,99%
K+S	11,96%	-2,93%	-5,21%	-3,27%	6,90%	4,71%	-4,87%	-3,69%	5,31%	2,26%	-3,88%	4,29%	-0,47%	3,21%	4,26%
Linde	4,64%	8,30%	3,04%	9,16%	14,57%	7,00%	5,47%	2,77%	13,47%	4,65%	4,82%	8,25%	4,71%	8,61%	8,26%
MAN	3,80%	-6,12%	-0,25%	5,69%	0,25%	-3,14%	-3,85%	1,12%	0,56%	-3,84%	-1,50%	0,28%	-1,83%	-0,96%	-1,08%
Merck	2,95%	6,24%	5,54%	7,59%	21,78%	5,09%	5,78%	6,46%	15,81%	5,34%	6,10%	10,96%	6,48%	10,04%	9,53%
Metro	7,92%	1,55%	11,10%	12,61%	0,09%	6,59%	7,00%	11,46%	3,80%	8,82%	10,20%	5,13%	10,63%	5,26%	6,06%
Mün. Rück	2,31%	7,07%	18,87%	8,52%	9,11%	3,02%	14,03%	12,76%	10,26%	8,71%	10,53%	10,97%	7,92%	10,54%	9,34%
RWE	-2,19%	0,93%	11,94%	10,29%	26,16%	-1,31%	8,35%	-10,95%	-11,20%	5,56%	11,00%	16,99%	8,79%	15,82%	13,55%
Salzgitter	14,16%	-2,70%	-7,10%	-18,47%	-7,93%	3,35%	-4,28%	-10,95%	-11,20%	-1,18%	-6,92%	-10,81%	-3,78%	-8,04%	-5,40%
SAP	-2,14%	9,87%	3,83%	13,58%	12,09%	2,48%	5,26%	8,13%	13,07%	1,42%	8,03%	11,43%	5,00%	10,77%	8,58%
Siemens	-5,28%	-3,01%	-5,36%	-1,83%	-1,14%	-4,10%	-3,10%	-1,29%	-1,32%	-2,80%	-1,11%	-2,42%	-3,05%	-2,48%	-3,91%
Thyssen	-18,99%	4,85%	0,73%	4,87%	-2,08%	-8,05%	0,11%	0,68%	0,90%	-5,73%	-0,25%	1,42%	-4,47%	0,57%	-2,62%
VW	-0,36%	0,99%	2,63%	12,15%	7,88%	-0,96%	0,28%	7,79%	9,12%	-0,35%	5,90%	9,06%	5,24%	8,71%	8,55%
E(R)	33,95%	26,20%	16,41%	22,41%	11,88%	26,43%	16,78%	14,03%	6,00%	16,74%	14,27%	9,39%	15,39%	12,42%	12,25%
Volatilität	7,77%	7,66%	8,64%	8,28%	15,58%	8,37%	8,62%	8,88%	13,47%	8,97%	8,96%	12,62%	9,32%	11,88%	11,74%
A-1_u*B	-0,82%	-0,84%	-1,00%	-0,93%	-1,87%	-0,93%	-0,99%	-1,04%	-1,63%	-1,04%	-1,05%	-1,52%	-1,09%	-1,41%	-1,40%

Tabelle 7.4: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $\frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	9,04%	2,93%	-5,86%	10,93%	15,36%	9,48%	-1,93%	5,51%	14,00%	4,17%	4,54%	7,96%	7,34%	6,98%	8,91%
Allianz	-12,88%	-7,57%	-14,12%	-9,32%	-8,04%	-7,27%	-11,82%	-11,53%	-10,75%	-12,41%	-9,91%	-12,01%	-11,37%	-11,13%	-12,51%
BASF	19,58%	0,26%	17,79%	7,78%	-11,29%	11,81%	12,17%	11,91%	-8,76%	17,98%	8,54%	-2,62%	14,27%	-2,86%	0,97%
Bayer	-12,55%	0,34%	-1,43%	8,54%	-1,44%	-9,59%	0,32%	3,90%	5,68%	-6,58%	3,57%	4,20%	-2,57%	3,81%	-0,18%
Beiersdorf	5,48%	19,64%	13,63%	-4,72%	25,37%	9,43%	15,84%	2,67%	18,61%	10,75%	7,30%	18,87%	6,48%	18,00%	15,95%
BMW	1,05%	14,30%	3,39%	-3,39%	-8,00%	9,45%	5,93%	-2,38%	-7,18%	4,28%	0,46%	-5,97%	0,24%	-3,51%	-3,06%
Com.bank	-5,60%	6,92%	-6,97%	-2,97%	2,56%	1,17%	-2,22%	-5,04%	4,29%	-2,55%	-2,66%	2,73%	-3,14%	3,24%	3,05%
Daimler	-4,78%	-7,07%	-10,29%	8,64%	-12,81%	-8,18%	-8,28%	-1,47%	-7,99%	-7,77%	-3,87%	-9,13%	-5,36%	-9,46%	-9,72%
Dt.Bank	5,15%	-11,14%	-15,23%	-5,90%	-11,50%	0,27%	-12,92%	-10,03%	-14,65%	-3,66%	-12,46%	-14,50%	-6,75%	-15,49%	-12,62%
Dt.Börse	14,77%	16,86%	4,98%	1,24%	-12,30%	14,66%	6,97%	4,43%	-6,86%	7,54%	5,60%	-3,64%	6,21%	-1,68%	-0,49%
Lufthansa	-8,27%	-1,27%	18,81%	-9,37%	20,63%	-6,56%	13,50%	5,87%	10,97%	1,62%	5,32%	13,72%	-0,51%	11,85%	6,96%
Post	6,11%	10,16%	15,66%	8,73%	19,25%	5,94%	14,47%	12,11%	16,69%	10,24%	12,15%	16,45%	10,66%	15,60%	13,43%
Telekom	13,99%	-0,69%	8,27%	7,04%	-2,45%	9,49%	7,77%	9,92%	1,61%	11,81%	9,45%	4,63%	11,46%	3,61%	6,66%
E.ON	21,54%	5,86%	-2,15%	7,34%	-28,63%	15,10%	-0,03%	0,10%	-13,37%	6,03%	0,34%	-10,43%	4,80%	-9,70%	-6,18%
Fres. Med	5,69%	22,15%	15,10%	10,84%	23,54%	15,86%	18,61%	12,75%	21,57%	17,99%	16,71%	22,11%	18,18%	23,06%	24,16%
Fresenius	20,19%	10,91%	-4,71%	-0,31%	0,91%	11,31%	3,61%	-3,51%	-2,77%	4,87%	1,51%	-3,99%	2,47%	-0,30%	0,76%
HenkelVZ	6,51%	1,75%	16,25%	5,81%	-0,86%	8,83%	10,94%	11,07%	3,31%	15,33%	9,72%	6,86%	12,53%	7,06%	10,42%
Infineon	-8,03%	-12,21%	-0,11%	-0,38%	-4,23%	-10,37%	-6,70%	0,48%	-3,89%	-7,35%	-3,88%	-3,48%	-5,52%	-4,40%	-5,39%
K+S	14,48%	-4,78%	-5,70%	-1,99%	8,31%	5,37%	-5,98%	-2,10%	6,68%	3,07%	-3,34%	5,50%	0,68%	3,78%	5,08%
Linde	3,31%	9,13%	2,82%	5,68%	16,13%	6,79%	6,22%	1,23%	13,70%	4,73%	4,25%	7,97%	4,15%	8,79%	8,34%
MAN	7,49%	-3,88%	0,52%	10,62%	-1,92%	-0,10%	-2,57%	2,88%	0,99%	-2,58%	0,27%	0,85%	0,04%	-0,26%	-0,17%
Merck	4,02%	6,44%	5,32%	7,00%	21,67%	5,93%	5,35%	6,16%	16,26%	5,68%	5,83%	10,88%	6,89%	10,12%	10,12%
Metro	9,41%	-4,36%	10,10%	13,18%	-0,41%	5,46%	4,04%	11,67%	3,70%	7,84%	9,02%	5,14%	10,23%	4,69%	5,77%
Mün. Rück	1,71%	9,19%	19,27%	7,27%	12,55%	3,01%	13,75%	11,48%	11,97%	8,08%	9,84%	12,08%	6,98%	11,66%	9,95%
RWE	-1,73%	6,36%	14,58%	7,09%	27,91%	1,28%	12,11%	14,31%	17,17%	8,36%	12,86%	17,59%	10,57%	17,57%	15,31%
Salzgitter	17,12%	1,29%	-5,28%	-21,07%	-6,10%	6,75%	-1,97%	-11,45%	-11,55%	1,11%	-5,76%	-10,73%	-2,29%	-6,60%	-3,70%
SAP	-0,37%	11,32%	3,77%	11,73%	12,86%	3,55%	4,98%	6,62%	12,39%	1,40%	7,08%	10,79%	4,31%	10,06%	8,04%
Siemens	-6,22%	-5,78%	-10,42%	0,41%	-1,22%	-5,21%	-6,15%	-0,68%	-0,97%	-4,87%	-0,76%	-2,78%	-3,10%	-2,93%	-4,61%
Thyssen	-21,91%	0,14%	2,87%	2,67%	-3,42%	-11,58%	-0,21%	0,86%	-0,11%	-6,46%	-1,59%	1,81%	-5,88%	-0,44%	-3,93%
VW	-4,28%	2,79%	9,11%	16,89%	7,58%	-2,12%	4,20%	12,25%	9,24%	1,34%	9,88%	9,13%	7,98%	8,86%	8,69%
E(R)	42,75%	43,45%	28,63%	37,62%	19,89%	33,72%	24,37%	20,04%	10,04%	20,85%	19,64%	12,30%	19,65%	15,71%	15,33%
Volatilität	8,20%	8,51%	9,25%	9,04%	15,97%	8,73%	8,99%	9,18%	13,66%	9,17%	9,22%	12,76%	9,53%	12,04%	11,89%
A-1_u*B	-0,33%	-0,35%	-0,45%	-0,41%	-0,90%	-0,40%	-0,46%	-0,48%	-0,80%	-0,48%	-0,49%	-0,74%	-0,51%	-0,68%	-0,67%

Tabelle 7.5: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	10,77%	4,18%	-13,04%	10,21%	15,32%	11,50%	-4,05%	4,29%	14,51%	3,74%	3,95%	7,14%	7,53%	6,59%	9,11%
Allianz	-12,89%	-7,02%	-16,35%	-10,52%	-7,33%	-6,24%	-10,91%	-12,52%	-10,91%	-11,76%	-9,57%	-12,05%	-11,08%	-10,85%	-12,29%
BASF	21,85%	0,89%	19,75%	13,57%	-13,04%	12,72%	11,72%	12,84%	-9,05%	18,62%	8,74%	-3,02%	15,09%	-3,71%	0,57%
Bayer	-12,09%	-0,82%	-3,29%	13,56%	-2,08%	-9,08%	0,20%	5,06%	6,86%	-6,53%	4,81%	4,83%	-1,67%	4,63%	0,40%
Beiersdorf	2,61%	19,88%	16,53%	-7,08%	25,38%	7,44%	16,59%	2,37%	18,44%	9,99%	6,92%	19,21%	5,26%	17,79%	15,23%
BMW	0,24%	13,93%	3,36%	-8,14%	-7,76%	7,99%	4,31%	-5,14%	-8,17%	2,45%	-2,40%	-6,86%	-2,61%	-4,47%	-4,09%
Com.bank	-8,70%	12,95%	-11,45%	-1,12%	1,63%	2,36%	-2,43%	-6,26%	3,92%	-2,84%	-2,75%	1,79%	-3,52%	2,83%	2,60%
Daimler	-5,01%	-10,34%	-16,02%	12,70%	-14,45%	-8,88%	-10,93%	-1,89%	-7,34%	-8,96%	-4,69%	-9,34%	-5,95%	-9,80%	-10,22%
Dt.Bank	5,36%	-14,69%	-12,62%	-10,83%	-12,24%	-1,24%	-14,40%	-12,07%	-16,13%	-4,42%	-15,08%	-15,60%	-8,50%	-17,01%	-13,88%
Dt.Börse	15,39%	26,23%	6,80%	6,57%	-13,60%	17,44%	9,49%	7,11%	-5,89%	9,05%	8,48%	-2,47%	8,41%	-0,20%	0,82%
Lufthansa	-10,42%	-4,10%	26,37%	-13,99%	23,33%	-8,08%	17,26%	7,49%	11,59%	2,22%	6,18%	15,68%	-0,69%	13,37%	7,68%
Post	6,79%	13,29%	13,99%	8,24%	19,57%	5,76%	13,96%	11,37%	16,37%	9,34%	11,63%	15,85%	10,11%	15,17%	12,93%
Telekom	14,85%	-18,85%	5,71%	6,25%	-3,50%	5,82%	2,66%	9,00%	0,92%	9,59%	6,60%	3,75%	9,76%	1,24%	5,17%
E.ON	23,68%	3,93%	-3,74%	11,89%	-29,67%	15,44%	-1,26%	0,99%	-12,01%	5,58%	0,76%	-9,81%	5,46%	-9,35%	-5,93%
Fres. Med	0,22%	28,44%	13,69%	13,91%	23,84%	15,32%	19,98%	12,25%	22,02%	17,81%	17,49%	22,28%	18,16%	23,98%	24,52%
Fresenius	26,18%	11,78%	-3,75%	-1,42%	1,31%	13,22%	4,59%	-3,19%	-3,18%	6,12%	1,89%	-3,84%	3,12%	0,18%	1,49%
HenkelVZ	3,68%	1,69%	17,87%	1,96%	-1,50%	7,08%	11,99%	10,49%	2,20%	15,59%	9,48%	6,28%	11,98%	6,76%	10,11%
Infineon	-10,41%	-13,43%	0,99%	-3,32%	-5,51%	-12,58%	-6,51%	-0,03%	-5,30%	-8,18%	-4,83%	-4,59%	-6,84%	-5,62%	-6,75%
K+S	17,37%	-7,52%	-6,51%	-0,27%	9,74%	6,09%	-7,18%	-0,43%	8,02%	3,89%	-2,79%	6,66%	1,84%	4,33%	5,88%
Linde	1,78%	10,37%	2,39%	1,00%	17,72%	6,56%	7,05%	-0,37%	13,93%	4,82%	3,66%	7,70%	3,59%	8,97%	8,42%
MAN	11,73%	-0,56%	2,10%	17,25%	-4,13%	3,21%	-1,17%	4,73%	1,41%	-1,32%	2,09%	1,39%	1,91%	0,42%	0,71%
Merck	5,26%	6,73%	5,24%	6,19%	21,56%	6,84%	4,88%	5,84%	16,71%	6,02%	5,55%	10,80%	7,31%	10,20%	10,70%
Metro	11,11%	-13,16%	8,03%	13,95%	-0,93%	4,24%	0,82%	11,89%	3,60%	6,86%	7,80%	5,15%	9,84%	4,13%	5,48%
Mün. Rück	1,01%	12,35%	20,62%	5,59%	16,05%	3,01%	13,44%	10,14%	13,64%	7,45%	9,13%	13,16%	6,03%	12,74%	10,54%
RWE	-1,20%	14,45%	17,41%	2,79%	29,68%	4,11%	16,21%	15,03%	16,37%	11,17%	14,79%	18,18%	12,35%	19,27%	17,00%
Salzgitter	20,53%	7,24%	-3,36%	-24,58%	-4,24%	10,47%	0,56%	-11,96%	-11,88%	3,40%	-4,57%	-10,66%	-0,79%	-5,20%	-2,05%
SAP	1,66%	13,49%	4,16%	9,24%	13,65%	4,72%	4,67%	5,04%	11,73%	1,39%	6,10%	10,16%	3,61%	9,38%	7,51%
Siemens	-7,31%	-9,89%	-16,57%	3,43%	-1,30%	-6,41%	-9,48%	-0,03%	-0,62%	-6,95%	-0,39%	-3,14%	-3,14%	-3,36%	-5,29%
Thyssen	-25,27%	-6,87%	5,19%	-0,28%	-4,78%	-15,43%	-0,56%	1,05%	-1,10%	-7,20%	-2,97%	2,18%	-7,29%	-1,41%	-5,20%
VW	-8,78%	5,46%	16,50%	23,27%	7,28%	-3,39%	8,48%	16,92%	9,34%	3,05%	13,98%	9,19%	10,73%	9,00%	8,83%
E(R)	52,86%	69,14%	42,53%	58,08%	28,02%	41,67%	32,65%	26,34%	13,98%	24,98%	25,18%	15,10%	23,92%	18,91%	18,31%
Volatilität	9,02%	10,61%	10,43%	10,70%	16,62%	9,37%	9,65%	9,68%	13,98%	9,50%	9,66%	12,98%	9,87%	12,30%	12,13%
A-1_u*B	-0,17%	-0,17%	-0,27%	-0,22%	-0,59%	-0,23%	-0,28%	-0,30%	-0,53%	-0,30%	-0,31%	-0,49%	-0,32%	-0,44%	-0,44%

Tabelle 7.6: Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $1 - u = \frac{2}{3}$

klassische Modell zur Verfügung. Als Vorinformationen dienen die kontinuierlichen Tagesrenditen und die Tagesschwerpunkte der dreißig DAX-Aktien. Analog zu der Schätzung der Renditenerwartung und Kovarianzmatrix für das klassische Modell ist die Ermittlung der Strukturmatrix und des zugehörigen Zentrums des volumenminimalen Ellipsoids für das Hauptmodell notwendig. Dabei wird ein Ellipsoid durch beide gesuchten Komponenten charakterisiert, so dass das Ellipsoid alle Datenpunkte des vorgegebenen Zeitraums umfasst und gleichzeitig das kleinste Volumen einnimmt. Dies geschieht numerisch mit dem Algorithmus von Khachiyan mit einer Fehlertoleranz. (Vgl. Abschnitt 5.2) Im Matlab-File-Exchange ist der Algorithmus bereits von Nima Moshtagh als Matlab-Funktion „Minimum Volume Enclosing Ellipsoid“ implementiert. (Vgl. [Mat] und [Mos]) Dieser wird für die Berechnungen in dieser Arbeit modifiziert und angepasst. Bei vorgegebenen Datenpunkten und Fehlertoleranz liefert diese Matlab-Funktion die Strukturmatrix und das Zentrum des gesuchten Ellipsoids als Ergebnis. Um eine anschauliche Kontrolle zu gewährleisten, können die quadratische Q -Norm sämtlicher Datenpunkte berechnet und grafisch dargestellt werden.

Auch für das Fuzzy-Hauptmodell werden sowohl die Tagesrenditen als auch die Tagesschwerpunkte als Input verwendet. Des Weiteren werden die gleichen Zeiträume für die Dateneingrenzung wie im letzten Abschnitt verwendet. (Vgl. Abschnitt 7.3)

Das Hauptmodell und das klassische Modell sind hinsichtlich der mathematischen Problemstruktur sehr ähnlich. (Vgl. Unterabschnitt 6.3) Das Inverse der Strukturmatrix bei dem Hauptmodell kann als das Gegenstück zur Kovarianzmatrix im klassischen Modell angesehen werden. Das Zentrum des Ellipsoids wiederum ist das Gegenstück zum Vektor der Erwartungsrenditen im klassischen Modell. Für pessimistische Anleger ist ein ähnliches Lösungsverfahren wie beim klassischen Modell möglich. Deswegen kann man für das Hauptmodell ebenfalls eine künstliche „Effizienzlinie“ darstellen, um sie mit der aus dem klassischen Modell abgeleiteten Effizienzlinie zu vergleichen. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die direkte Vergleichbarkeit der Effizienzlinien aus beiden Modellen – wenn überhaupt – nur bedingt gegeben ist, weil die Volatilität im klassischen Modell und die Unschärfeadjustierung im Hauptmodell sich bereits in der Definition und Konstruktion unterscheiden.

Aus den Tagesschlusskursen als Input ergeben sich die Effizienzlinien, die in den Abbildungen 7.5 und 7.6 dargestellt sind.

Für die Bestimmung dieser „künstlichen“ Effizienzlinien wird jeweils ein Ellipsoid mit Hilfe der gegebenen Daten berechnet, so dass das Ellipsoid gleichzeitig volumenminimal ist und alle Datenpunkte unter einer gegebenen Fehlertoleranz beinhaltet. Dies Ellipsoid wird durch die Matlab-Funktion „MVE“ berechnet. (Vgl. Anhang A) Um das Ergebnis zu überprüfen und dadurch eine Absicherung des Ellipsoids zu erreichen, wird die mit der Strukturmatrix bewertete quadratische Q -Norm bzgl. des Zentrums von jedem Datenpunkt berechnet. Dies geschieht durch die Matlab-Prozedur „Q-Norm“. Die Abbildungen 7.7 und 7.8 stellen dieser quadratische Q -Normen zusammenfassend dar.

Anhand der Darstellung der quadratischen Q -Norm für alle Datenpunkte verschiedener Szenarien ist es auffällig, dass nach der Ermittlung des volumenminimalen Ellipsoids anhand des Khachiyans Algorithmus ungefähr hundert Datenpunkte an bzw. etwas außerhalb der Hülle des Ellipsoids liegen. Diese Datenpunkte sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre quadratische Q -Norm gleich bzw. größer als eins ist. Außerdem sieht man in der Darstellung, dass sich bei kürzeren Perioden, beispielsweise ein Jahr, die Datenpunkte relativ gleichmäßig über den ganzen Ellipsoid verteilen. Aber bei längeren Perioden, beispielsweise vier Jahre, kann man die Ausreißer besser identifizieren, denn man kann in der Darstellung der quadratischen Q -Norm eine Stelle finden, an der die Norm deutlich

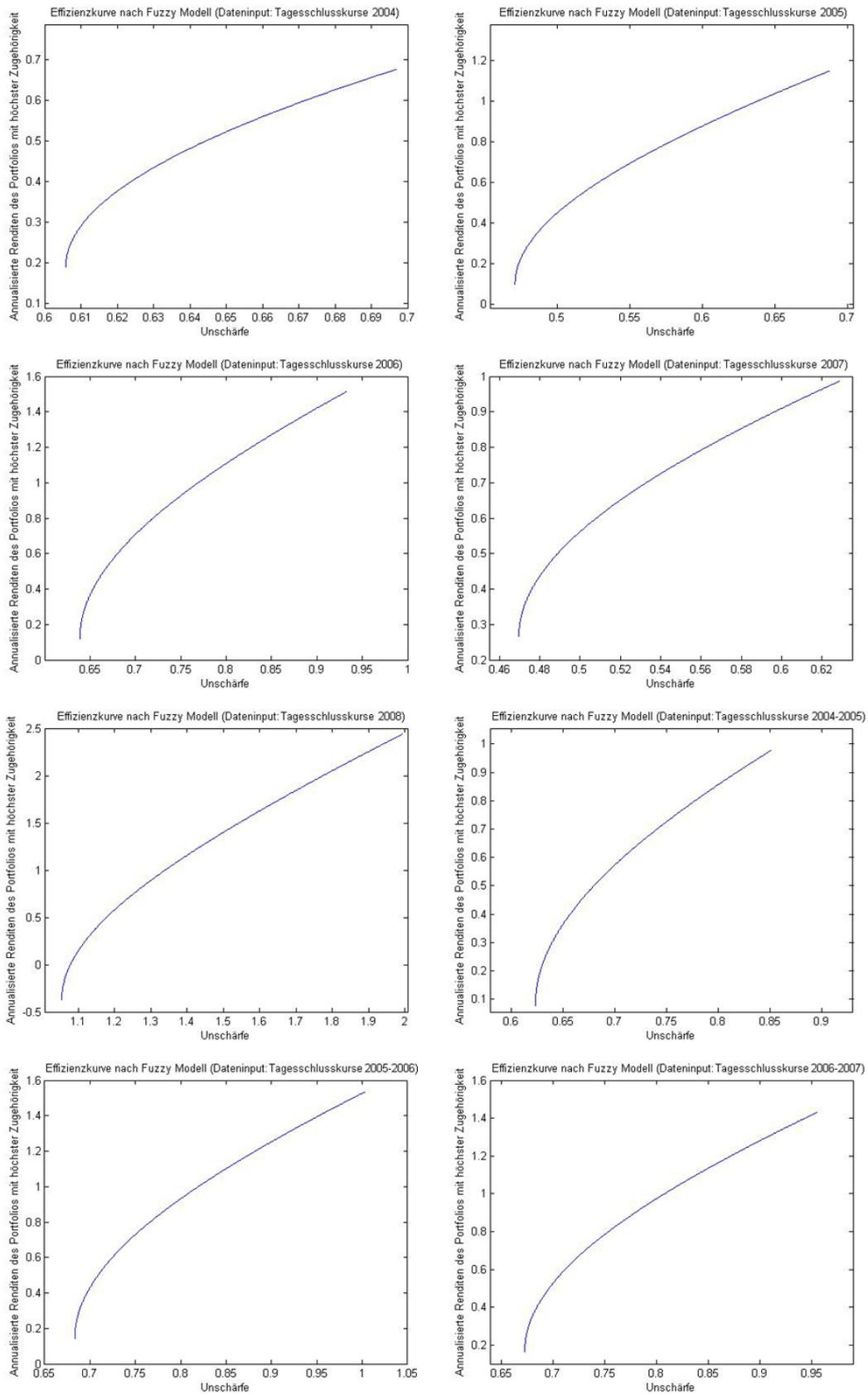


Abbildung 7.5: Effizienlinien nach Hauptmodell(Tagesrendite), Teil 1

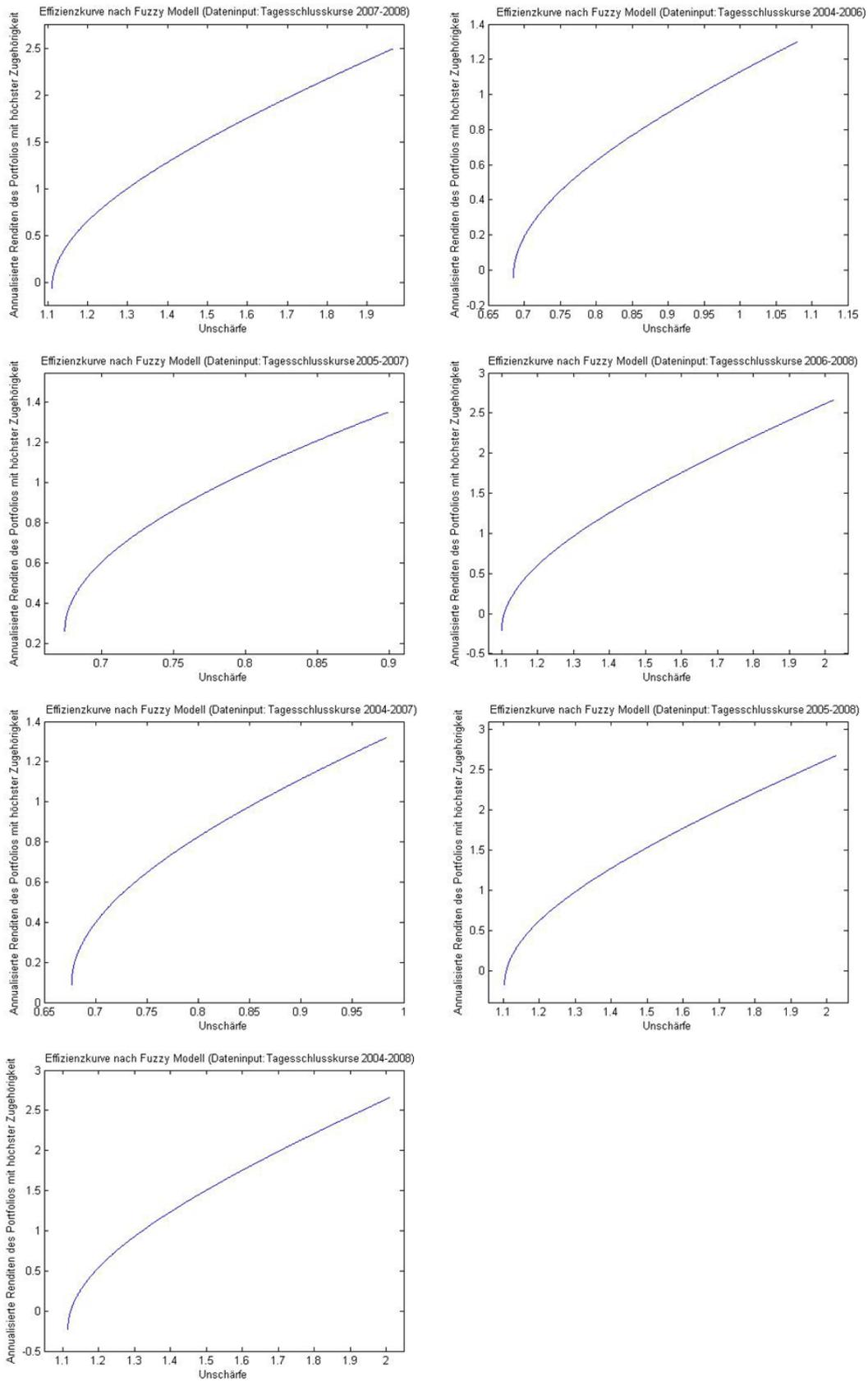


Abbildung 7.6: Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesrendite), Teil 2

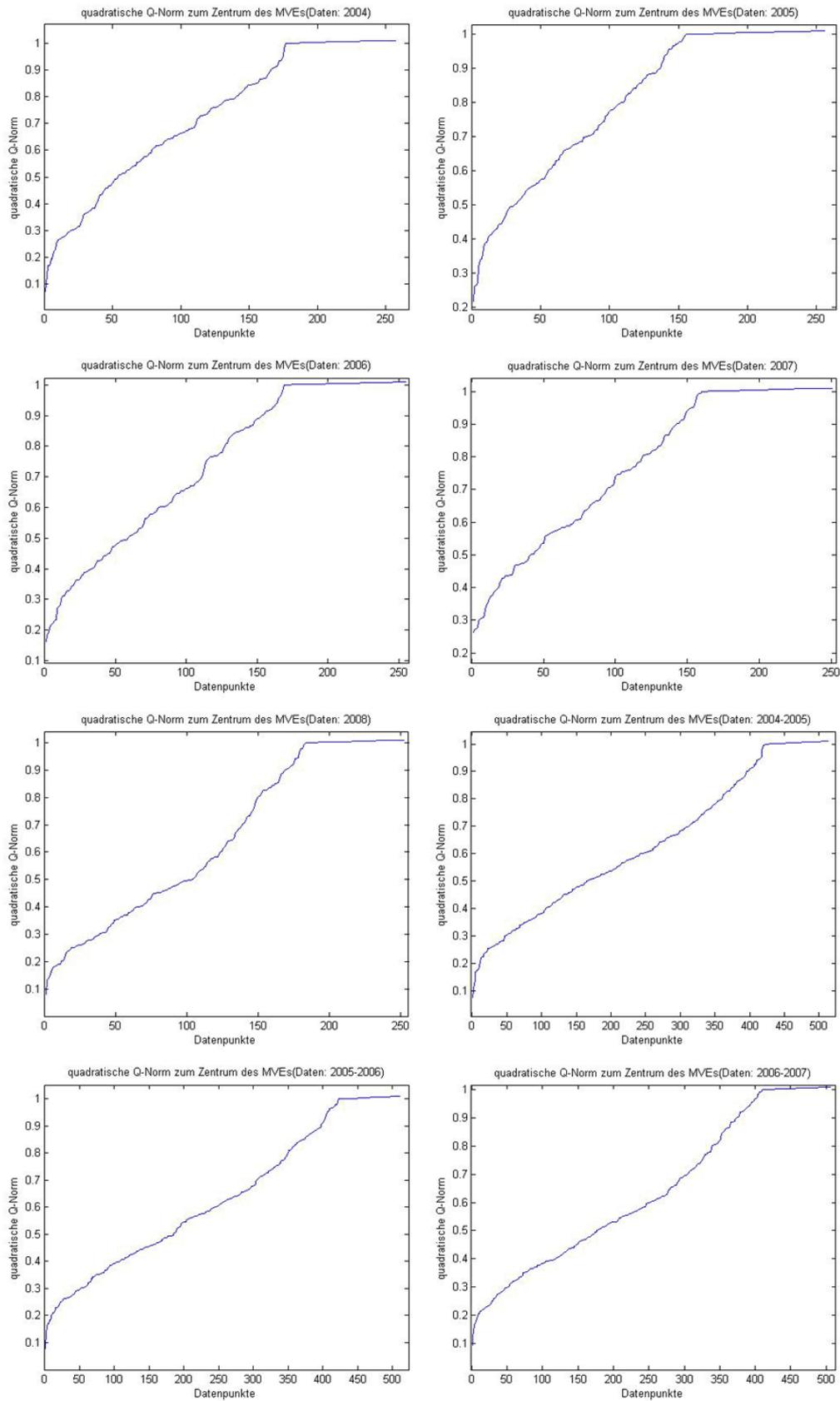


Abbildung 7.7: Quadratische Q-Norm(Tagesrendite), Teil 1

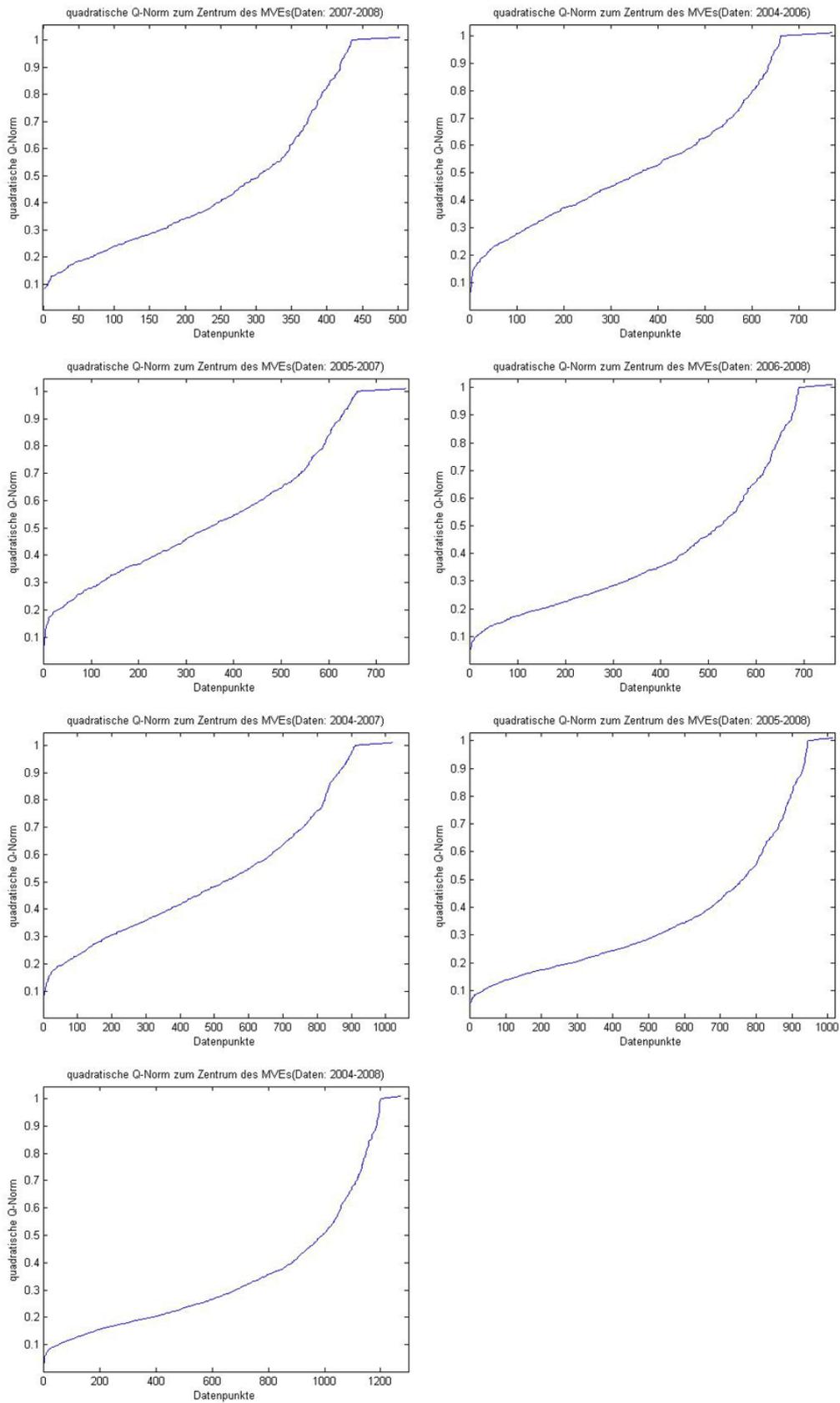


Abbildung 7.8: Quadratische Q-Norm(Tagesrendite), Teil 2

extremer ansteigt. Wichtig ist zu berücksichtigen, dass die maximale Norm für alle zu berücksichtigenden Datenpunkte, d.h. auch inklusiv der Ausreißer, stets auf eins kalibriert ist. (Bei einer möglichen Weiterentwicklung der Implementierung können die Ausreißer besser berücksichtigt werden.)

Anschließend werden analog zum vorherigen Abschnitt die „künstlichen“ Effizienzlinien, die aus den Tagesschwerpunkten als Vorinformationsinput resultieren, zusammenfassend dargestellt. Dabei ist ein Tagesschwerpunkt stets der mit dem Tageshöchstkurs und Tagestiefstkurs modifizierte Tagesschlusskurs, wie im Abschnitt 5.2 dargestellt wird.

Für diese Berechnungen basierend auf den Tagesschwerpunkten kann man ebenfalls die quadratische Q -Norm der Datenpunkte zum Zentrum ermitteln und zu Kontrollzwecken heranziehen. Nachfolgend sind die entsprechenden quadratischen Q -Normen dargestellt.

Auch hierbei fällt auf, dass bei kürzeren Perioden prozentual mehr Datenpunkte an bzw. etwas außerhalb der Hülle des Ellipsoids liegen.

Bereits bei der Implementierung des klassischen Modells werden drei Trade-Offs für eine genaue Bewertung bestimmter Portfolios ausgewählt. Wie diese Werte determiniert werden, wird nun dargestellt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die folgenden drei Werte demonstrative Beispiele sind und daher situationsgerechtere Festlegungen, die davon abweichen, durchaus möglich sind und entsprechend vorzuziehen wären.

Zunächst wird der Anleger als pessimistisch angenommen und zwar mit $q = 1$. Die Zugehörigkeitsfunktion für die α -Schnitte kann auf verschiedene Weise spezifiziert werden. Wichtig ist dabei, dass diese Funktion im Bereich für Alpha zwischen Null und Eins nicht steigend ist. Sei sie beispielsweise $s(\alpha) = 7 - 6\alpha$. Die Gewichtung der einzelnen α -Schnitten bei der Endbetrachtung wird zunächst als konstant gewählt, nämlich als $w(\alpha) = 1$. Wichtig bei der Gewichtungsfunktion ist ihre Integrierbarkeit im Intervall zwischen Null und Eins für Alpha, und dass $\int_0^1 w(\alpha)d\alpha = 1$ erfüllt ist. Mit diesen Spezifikationen ergibt sich ein Trade-Off von

$$\begin{aligned}\lambda_U &= (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha)d\alpha = \int_0^1 \sqrt{7 - 6\alpha}d\alpha \\ &= \left[-\frac{(7 - 6\alpha)^{\frac{3}{2}}}{9} \right]_0^1 = \frac{7\sqrt{7} - 1}{9} \approx 1,9467.\end{aligned}$$

Um die Auswirkung des Trade-Offs zu zeigen, wird nun $q = 0,75$ gesetzt. Dieser Wert zeigt bereits, dass der Anleger im Vergleich zu vorher optimistischer ist. Mit der gleichen Spezifikation der α -Schnitte und mit der Gewichtungsfunktion des ersten Trade-Offs ergibt sich nun der Trade-Off

$$\begin{aligned}\lambda_U &= (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{7 - 6\alpha}d\alpha \\ &= \frac{7\sqrt{7} - 1}{18} \approx 1,9467.\end{aligned}$$

Für ein drittes Beispiel wird der Hurwicz-Parameter gleich Eins gesetzt. Die Bestimmung der α -Schnitte wird nun optimistischer, nämlich als $s(\alpha) = 1 - \alpha^2$ gewählt. Die Gewichtungsfunktion wird so modifiziert, dass die niedrigen α -Schnitte weniger ins Gewicht fallen. Zum Zweck der Übersichtlichkeit wird sie linear als $w(\alpha) = 2\alpha$ festgelegt. Mit diesen Spezifikationen ergibt sich ein Trade-Off von

$$\begin{aligned}\lambda_U &= (2q - 1) \int_0^1 w(\alpha)d\alpha = \int_0^1 2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}d\alpha \\ &= \left[-\frac{(1 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

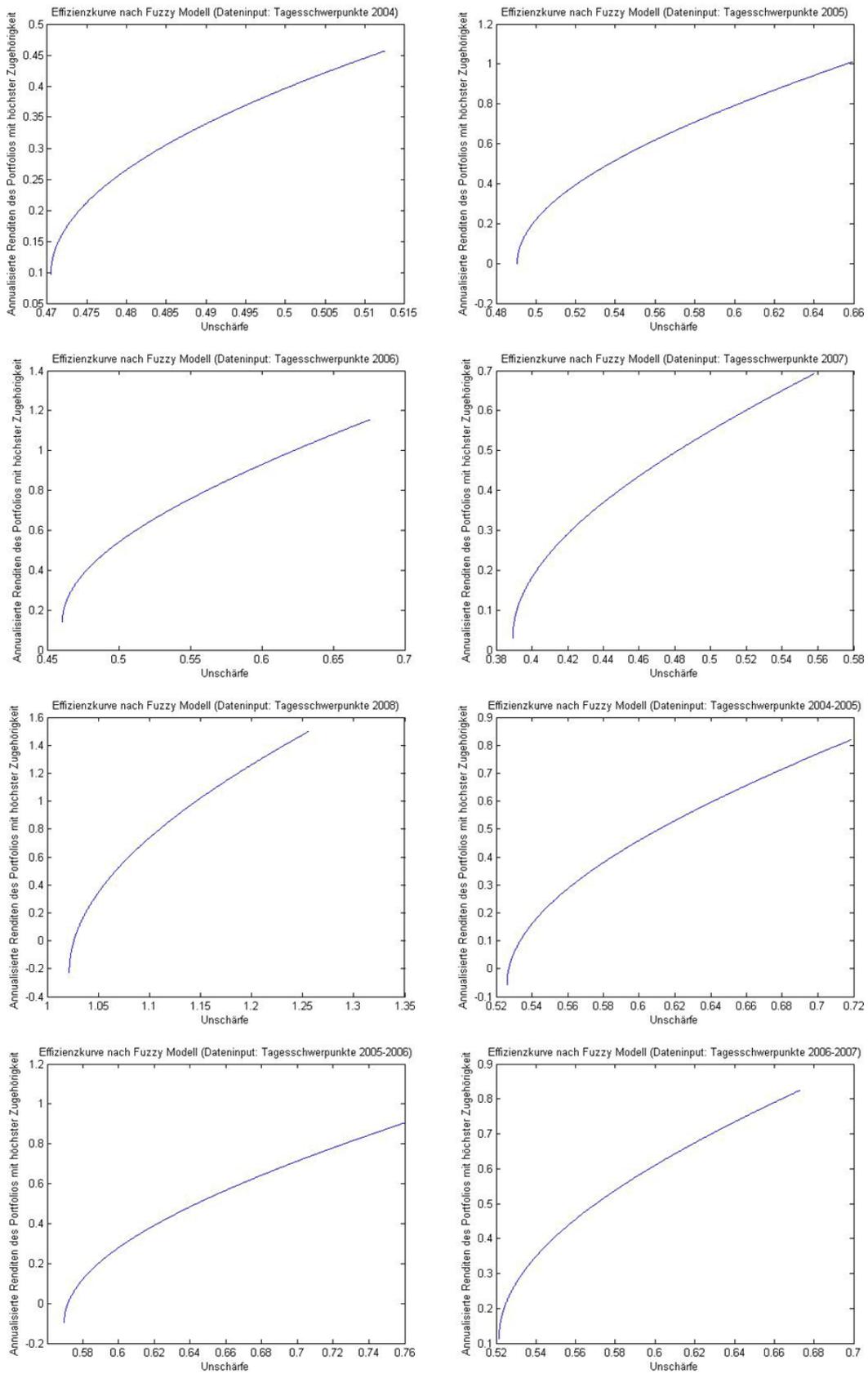


Abbildung 7.9: Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesschwerpunkte), Teil 1

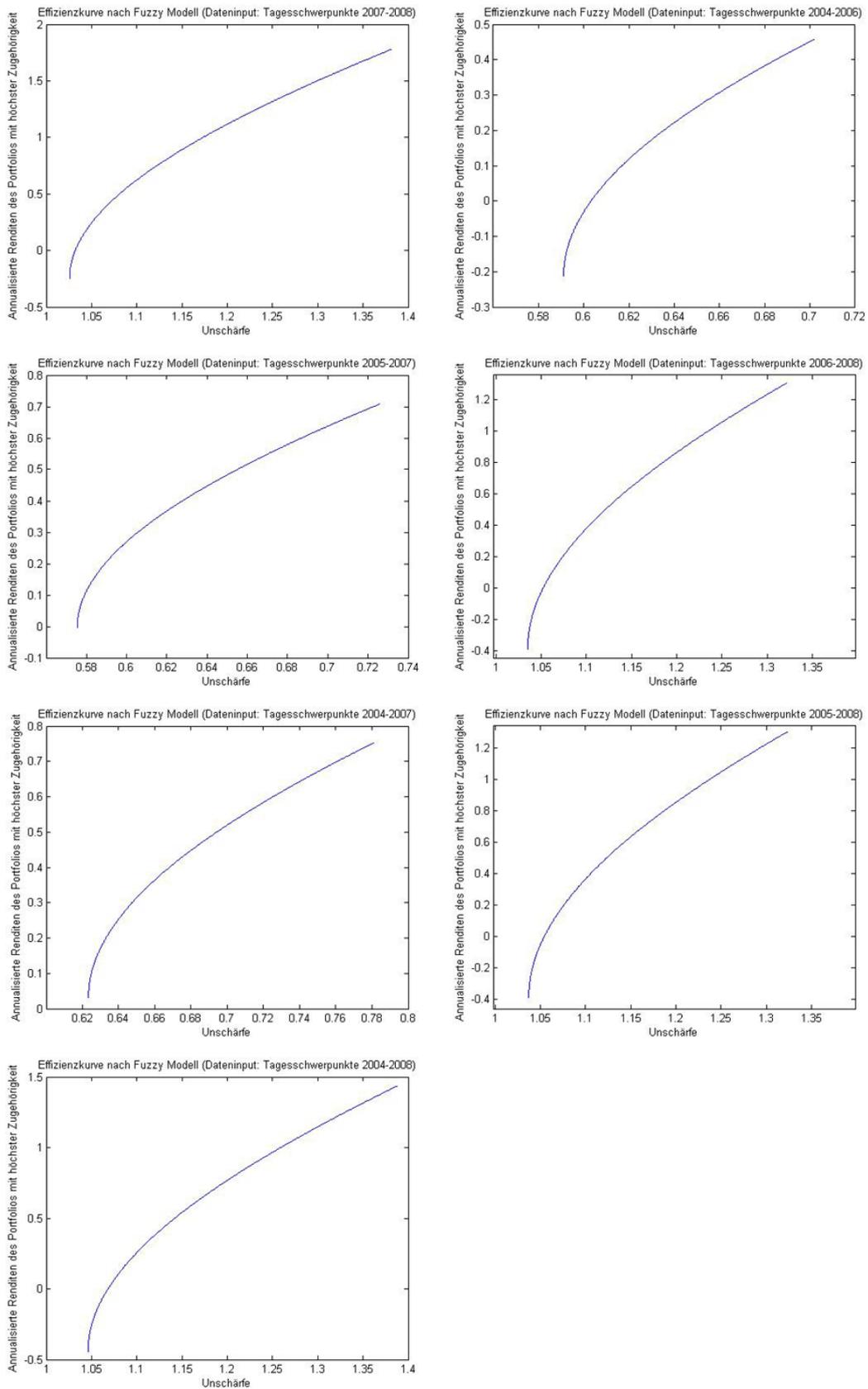


Abbildung 7.10: Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesschwerpunkte), Teil 2

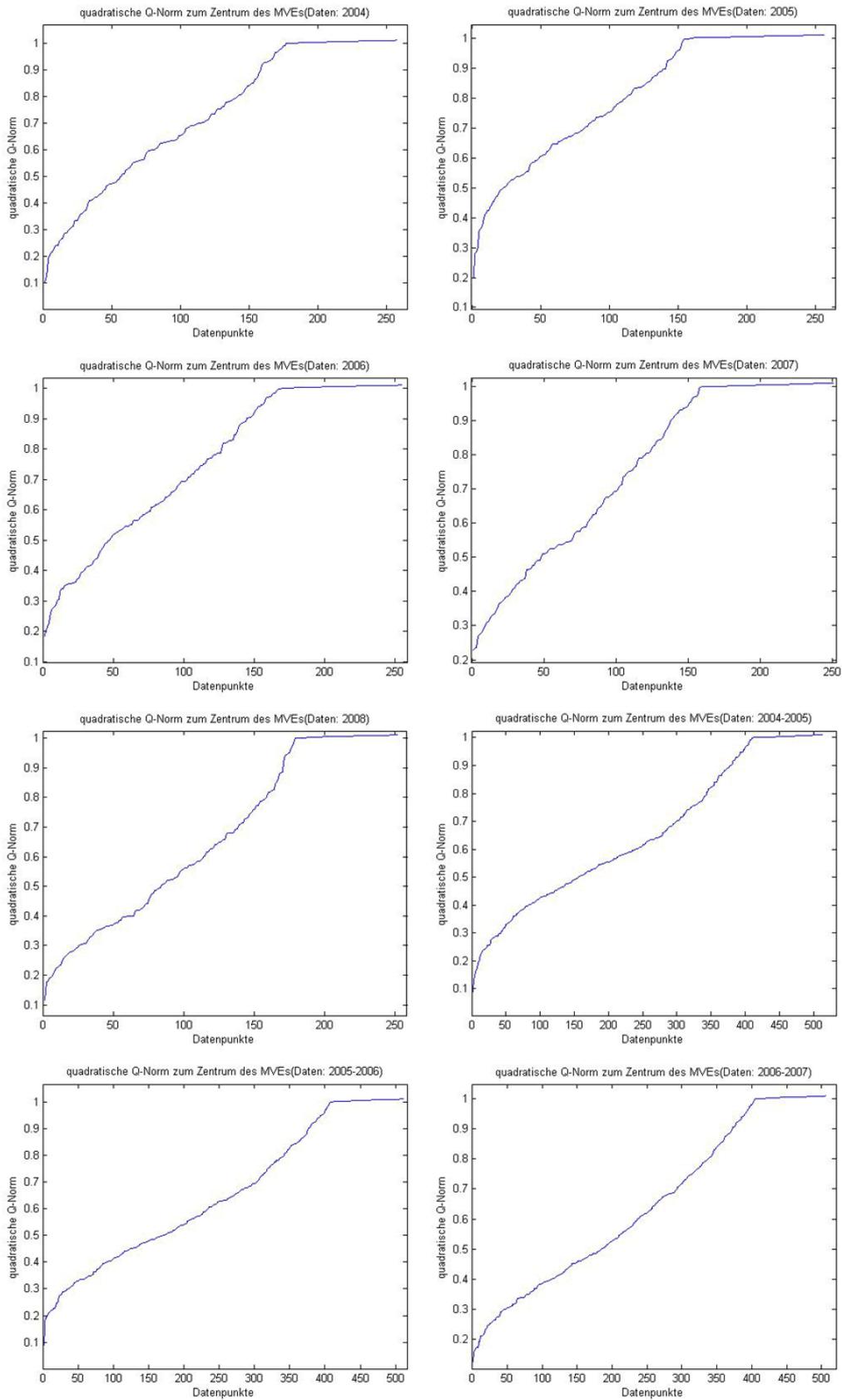


Abbildung 7.11: Quadratische Q -Norm(Tagesschwerpunkte), Teil 1

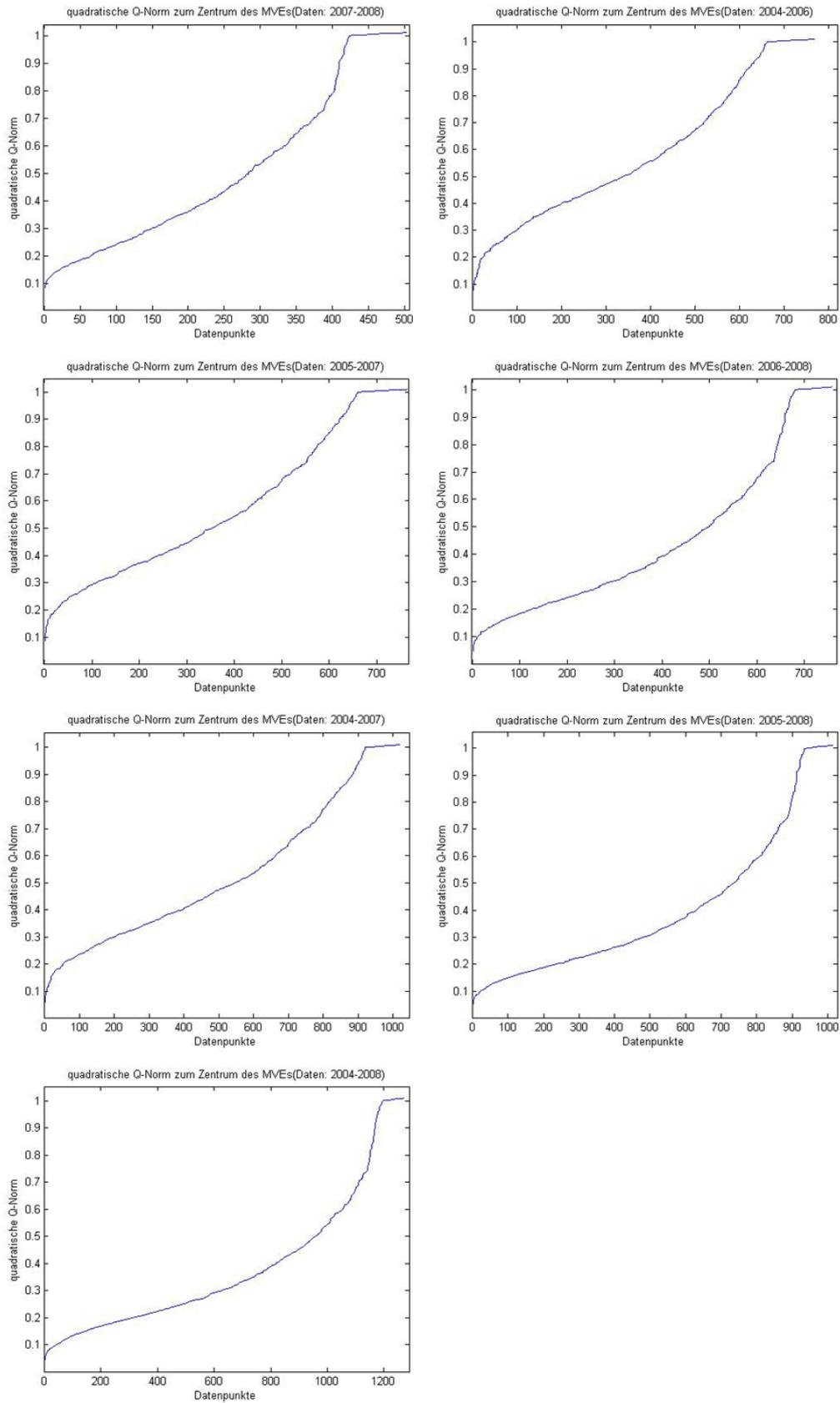


Abbildung 7.12: Quadratische Q -Norm(Tagesschwerpunkte), Teil 2

Alle Berechnungen werden hier in Matlab durchgeführt. Die Ergebnisse aller optimierten Portfolios mit folgenden drei Aspekten werden für Vergleich und Auswertung in einer Excel-Tabelle übersichtlich zusammen gefasst.

- Tagesrendite bzw. Tagesschwerpunkt als Vorinformation
- 15 Zeiträume für die Dateneingrenzung
- drei verschiedene Trade-Offs

Diese Tabellen sind unten beigefügt. Die Tabellen 7.7 bis 7.9 zeigen die Ergebnisse aus dem Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input. 7.10 bis 7.12 zeigen die Ergebnisse aus dem Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input. Dabei steht „R_c“ für die Rendite im Zentrum des Ellipsoids. Die „Unschärfe“ ist die Adjustierung durch die Unschärfe auf Jahresbasis und „A-l_u*B“ ist die mit der Unschärfe(B) und Trade-Off(l_u) adjustierte Rendite auf Jahresbasis(A). „G_Tag“ ist die auf einen Tag umgerechnete Rendite.

Alle Berechnungen werden ebenfalls in Matlab durchgeführt, ähnlich wie die Berechnungen zum klassischen Modell. Dabei ist „f_Aufteilungen“ die Matlab-Prozedur, die auf die Prozedur „f_write“ zugreift. Die Prozedur „f_write“ wiederum greift auf die Prozedur „FuzzyModel“ zurück.

7.5 Vergleich der Ergebnisse und kritische Beurteilung

Mit den vorliegenden Ergebnissen können die Implementierungen sowohl hinsichtlich der praktischen Anwendung als auch hinsichtlich der qualitativen Eigenschaften bei diesen speziellen Gegebenheiten beurteilt werden.

Praktische Aspekte

Sowohl das klassische Modell als auch das Fuzzy-Hauptmodell lassen sich auf die vorliegenden Daten einwandfrei anwenden. Der Lösungsweg des Fuzzy-Hauptmodells ist dem des klassischen Modells ähnlich. Daher beansprucht die eigentliche Lösung bei beiden Modellen fast den gleichen zeitlichen Aufwand, falls die benötigten Inputgrößen für beide Modelle bereits zur Verfügung stehen.

Da das klassische Modell lediglich die Schätzung der erwarteten Renditen und die Kovarianzmatrix als Inputgrößen benötigt und diese Schätzungen bereits als Standardfunktion bei vielen Programmen effektiv implementiert sind, ist die Zeit für die Aufbereitung der Inputgrößen für das klassische Modell relativ kurz. Hingegen erfordert das Fuzzy-Modell mit der Strukturmatrix und dem Zentrum eines Ellipsoids ein anderes Verfahren, bei dem die Inputgrößen aus den historischen Daten aufwendiger als bei den gängigen statistischen Größen berechnet werden müssen. Für die Berechnungen in den vorherigen Abschnitten wurde der Algorithmus von Khachiyan verwendet. Bei dem Fuzzy-Modell ist der Arbeitsaufwand auch deswegen etwas größer als der bei dem klassischen Modell, weil dieser Algorithmus zur Ermittlung des Ellipsoids in vielen Programmen nicht vorhanden ist und daher neu programmiert werden muss. Der reine Rechenaufwand für die Berechnung der Strukturmatrix und des Zentrums ist v. a. bei einem größeren Datenumfang bei dem jetzigen Stand deutlich umfangreicher als im Fall des klassischen Modells. Damit ist die Rechenzeit für die Optimierung des Fuzzy-Hauptmodells insgesamt auch länger als für die Optimierung nach dem klassischen Modell. Derzeit wird aber auch der Lösungsalgorithmus zum Problem des volumenminimalen Ellipsoids(engl. minimum volume ellipsoid) weiterentwickelt, neuere Algorithmen werden ebenfalls entworfen und analysiert, sodass in Zukunft mit effektiveren Lösungsverfahren und Algorithmen zurechnen ist. Damit kann

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	10,92%	5,91%	-2,46%	10,28%	15,65%	14,12%	4,53%	3,44%	15,41%	4,33%	3,95%	12,55%	4,64%	11,82%	12,51%
Allianz	-13,19%	-13,37%	-28,60%	0,27%	-0,81%	-5,98%	-25,09%	-11,44%	0,35%	-17,83%	-9,59%	0,23%	-9,90%	0,13%	0,36%
BASF	21,08%	-0,67%	7,55%	6,74%	-6,57%	17,09%	5,38%	16,65%	-13,04%	17,11%	16,58%	-18,88%	21,57%	-19,02%	-20,09%
Bayer	-11,63%	-4,74%	7,11%	-2,13%	3,79%	-11,91%	6,27%	7,99%	2,94%	0,31%	8,26%	8,10%	1,56%	8,07%	8,51%
Beiersdorf	4,57%	19,71%	8,33%	-0,85%	23,35%	4,53%	12,86%	7,23%	19,64%	0,65%	6,65%	21,43%	-3,34%	21,73%	18,28%
BMW	9,60%	14,34%	4,90%	2,97%	-10,64%	23,85%	2,73%	-3,77%	-5,60%	10,97%	-3,34%	-0,34%	2,90%	0,30%	0,87%
Com.bank	-7,22%	-2,63%	2,35%	-13,07%	3,79%	0,20%	0,88%	-0,04%	2,92%	4,05%	-0,20%	1,28%	2,92%	1,16%	1,41%
Daimler	-9,78%	2,42%	1,01%	0,04%	-8,62%	-7,04%	-1,61%	-1,18%	-12,70%	-5,56%	-4,54%	-12,12%	-6,82%	-12,14%	-12,42%
Dt.Bank	2,69%	-2,54%	-21,48%	3,27%	-20,66%	-1,25%	-12,53%	-6,80%	-19,49%	-8,35%	-3,79%	-17,79%	-7,62%	-17,83%	-18,32%
Dt.Börse	10,08%	10,20%	0,62%	-1,01%	-9,18%	7,71%	4,63%	3,28%	-7,42%	3,67%	5,04%	-8,86%	6,91%	-8,72%	-8,38%
Lufthansa	-5,00%	3,98%	5,13%	-1,80%	54,01%	-4,44%	8,05%	2,38%	43,98%	6,17%	1,05%	34,53%	1,39%	34,42%	35,65%
Post	7,00%	7,92%	6,37%	11,55%	20,64%	5,59%	6,03%	7,72%	18,19%	6,04%	8,08%	15,08%	7,67%	14,76%	14,36%
Telekom	13,91%	1,00%	10,79%	7,41%	-20,87%	6,15%	7,10%	8,65%	-16,21%	4,75%	4,38%	-12,96%	4,20%	-12,78%	-13,67%
E.ON	24,01%	7,16%	-2,38%	-3,97%	-15,52%	18,02%	-3,05%	-9,54%	-13,74%	-2,43%	-7,70%	-17,32%	-1,08%	-17,11%	-15,60%
Fres. Med	4,33%	21,63%	16,44%	15,56%	25,09%	7,35%	22,80%	15,35%	26,39%	16,32%	14,44%	31,62%	16,92%	31,56%	32,89%
Fresenius	21,16%	10,77%	-2,25%	-6,29%	4,49%	12,56%	-3,68%	-3,45%	7,07%	1,47%	-3,08%	5,46%	-0,97%	5,29%	6,43%
HenkelVZ	6,86%	-6,14%	15,01%	8,95%	-9,95%	5,11%	3,14%	13,91%	-0,48%	9,12%	7,94%	0,90%	6,61%	1,22%	1,47%
Infineon	1,64%	-9,71%	2,23%	2,89%	0,22%	-1,89%	-2,09%	5,59%	-0,21%	0,74%	5,79%	1,29%	7,04%	1,28%	0,96%
K+S	-1,32%	-7,54%	2,84%	-3,45%	9,85%	-5,85%	2,12%	-3,11%	8,65%	3,87%	-3,51%	9,32%	-0,10%	9,42%	9,42%
Linde	3,09%	16,63%	0,17%	8,27%	14,82%	6,57%	3,75%	0,37%	17,85%	-2,45%	2,74%	20,57%	-0,66%	20,22%	21,13%
MAN	14,17%	-11,87%	-0,47%	4,46%	6,23%	1,69%	-2,98%	2,62%	6,12%	-4,85%	0,99%	4,97%	-1,76%	5,23%	4,93%
Merck	6,74%	5,88%	6,89%	7,85%	22,80%	4,00%	7,11%	7,50%	18,53%	7,16%	6,72%	10,48%	10,03%	10,44%	10,88%
Metro	1,68%	7,89%	32,42%	8,22%	1,85%	8,81%	28,33%	10,50%	3,70%	22,70%	13,34%	8,56%	14,03%	8,70%	8,55%
Mün.Rück	12,90%	5,11%	27,67%	-1,00%	5,24%	3,38%	21,53%	5,21%	5,41%	16,66%	7,05%	6,42%	13,80%	6,59%	6,66%
RWE	-7,85%	-3,09%	9,20%	12,27%	11,37%	-5,23%	10,98%	11,58%	5,07%	9,51%	12,58%	3,59%	8,21%	3,52%	2,20%
Salzgitter	12,39%	-7,29%	-11,54%	-9,73%	-15,59%	3,47%	-13,55%	-13,48%	-14,23%	-12,27%	-13,87%	-17,34%	-13,37%	-17,50%	-16,32%
SAP	-9,43%	13,25%	-8,59%	17,61%	1,40%	-5,97%	-4,05%	4,27%	3,35%	-11,12%	5,23%	7,45%	0,60%	7,55%	5,89%
Siemens	-8,04%	10,80%	9,10%	2,34%	4,61%	7,47%	7,89%	7,08%	4,16%	13,85%	6,60%	2,58%	4,74%	2,40%	2,54%
Thyssen	-16,80%	5,39%	-2,16%	5,48%	-17,18%	-7,71%	-1,46%	2,27%	-12,44%	1,22%	2,42%	-5,75%	2,31%	-5,58%	-5,91%
VW	1,43%	-0,38%	3,79%	6,86%	6,39%	-0,39%	4,00%	9,25%	5,83%	4,19%	9,78%	4,92%	7,56%	4,85%	4,82%
R_c	22,87%	16,26%	20,80%	31,12%	-27,92%	12,78%	22,17%	24,24%	3,09%	1,29%	33,23%	-10,29%	15,45%	-7,31%	-11,97%
Unschärfe	60,65%	47,18%	64,02%	47,05%	105,55%	62,43%	68,45%	67,42%	111,25%	68,57%	67,53%	110,27%	67,77%	110,57%	111,69%
A-1_u*B	-95,19%	-75,58%	-103,84%	-60,47%	-233,40%	-108,76%	-111,08%	-107,00%	-213,48%	-132,19%	-98,23%	-224,95%	-116,48%	-222,55%	-229,39%
G_Tag	-7,38%	-5,74%	-7,80%	-5,67%	-13,11%	-7,64%	-8,34%	-8,20%	-13,68%	-8,44%	-8,18%	-13,62%	-8,28%	-13,64%	-13,80%

Tabelle 7.7: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $\underline{u} = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	11,24%	6,70%	-2,97%	10,96%	15,62%	14,37%	4,74%	3,64%	15,58%	4,47%	4,40%	12,37%	4,86%	11,71%	12,42%
Allianz	-13,92%	-13,55%	-28,20%	1,77%	-0,93%	-5,62%	-24,91%	-10,25%	0,26%	-17,96%	-7,71%	0,18%	-8,56%	0,08%	0,29%
BASF	20,54%	-0,69%	6,32%	7,15%	-6,77%	16,53%	4,15%	16,46%	-12,85%	15,33%	16,12%	-19,03%	21,51%	-19,17%	-20,32%
Bayer	-12,06%	-5,01%	8,92%	-1,79%	3,75%	-11,73%	8,19%	9,04%	3,13%	1,23%	9,38%	8,62%	1,79%	8,61%	9,07%
Beiersdorf	3,79%	20,01%	8,67%	-0,95%	22,78%	3,74%	13,07%	7,21%	19,38%	-0,35%	6,81%	21,22%	-4,31%	21,53%	17,97%
BMW	8,15%	13,63%	5,50%	2,28%	-9,80%	22,07%	1,89%	-4,02%	-5,04%	10,88%	-4,12%	0,54%	2,40%	1,11%	1,73%
Com.bank	-7,87%	-2,89%	1,45%	13,76%	3,81%	-0,48%	0,42%	-0,55%	2,98%	3,59%	-0,54%	1,17%	2,36%	1,07%	1,32%
Daimler	-9,28%	3,31%	0,02%	0,71%	-9,00%	-6,34%	-0,92%	-1,59%	-13,07%	-4,80%	-4,40%	-12,34%	-6,71%	-12,35%	-12,67%
Dt.Bank	3,47%	-2,15%	-21,80%	3,16%	-20,74%	-0,65%	-12,74%	-7,32%	-19,63%	-7,84%	-4,40%	-17,84%	-7,19%	-17,86%	-18,35%
Dt.Börse	9,91%	11,33%	1,19%	-0,75%	-8,33%	7,29%	4,99%	3,17%	-6,67%	3,71%	4,78%	-7,95%	6,71%	-7,84%	-7,46%
Lufthansa	-4,70%	3,92%	6,17%	-1,92%	53,60%	-4,18%	9,16%	2,56%	44,10%	6,94%	1,27%	33,87%	1,54%	33,78%	34,95%
Post	7,14%	7,85%	6,01%	11,37%	19,34%	5,91%	5,08%	7,78%	17,13%	5,69%	7,85%	13,62%	7,70%	13,33%	12,86%
Telekom	14,89%	-1,45%	9,44%	7,54%	-20,46%	6,62%	5,82%	7,51%	-16,04%	4,09%	3,51%	-12,37%	3,46%	-12,20%	-13,01%
E.ON	24,40%	8,72%	-2,80%	-4,35%	-15,42%	18,20%	-4,10%	-10,52%	-13,17%	-3,60%	-8,93%	-17,43%	-2,42%	-17,20%	-15,56%
Fres. Med	3,73%	22,61%	16,65%	16,60%	25,12%	7,14%	23,42%	16,92%	26,28%	16,27%	16,21%	31,58%	18,25%	31,52%	32,81%
Fresenius	22,06%	10,73%	-2,22%	-6,85%	4,71%	13,45%	-3,96%	-3,55%	7,15%	1,68%	-3,51%	5,43%	-1,17%	5,25%	6,42%
HenkelVZ	6,69%	-5,67%	15,53%	8,38%	-8,45%	5,34%	3,25%	13,31%	0,46%	9,81%	7,92%	2,14%	7,08%	2,45%	2,89%
Infineon	1,51%	-9,34%	1,27%	2,56%	-0,32%	-2,08%	-2,77%	5,05%	-0,77%	0,24%	5,15%	0,81%	6,62%	0,81%	0,45%
K+S	-0,81%	-8,98%	2,89%	-3,42%	9,14%	-6,07%	1,71%	-2,72%	7,87%	4,35%	-3,25%	8,52%	0,33%	8,60%	8,57%
Linde	2,47%	17,16%	0,45%	8,54%	14,90%	6,02%	4,07%	1,40%	17,88%	-2,60%	3,60%	20,60%	0,16%	20,28%	21,24%
MAN	14,99%	-11,18%	-0,68%	4,34%	6,91%	2,18%	-3,01%	2,10%	6,64%	-5,36%	0,59%	5,68%	-2,30%	5,91%	5,66%
Merck	7,27%	5,64%	6,72%	7,92%	22,11%	4,68%	6,87%	6,93%	18,04%	7,22%	6,23%	9,65%	10,00%	9,58%	9,97%
Metro	2,05%	7,56%	32,36%	8,06%	1,73%	8,53%	27,82%	10,49%	3,46%	22,45%	12,93%	8,62%	13,94%	8,75%	8,61%
Mün.Rück	12,77%	5,25%	25,56%	-2,08%	5,27%	3,12%	20,78%	5,02%	5,60%	16,10%	6,36%	6,58%	12,98%	6,75%	6,79%
RWE	-7,70%	-3,01%	9,27%	11,81%	11,98%	-4,59%	11,09%	10,95%	5,06%	10,10%	12,15%	3,78%	8,02%	3,71%	2,26%
Salzgitter	12,22%	-6,73%	-11,83%	-9,85%	-15,59%	3,78%	-13,75%	-13,93%	-14,23%	-12,22%	-14,27%	-17,65%	-13,50%	-17,79%	-16,58%
SAP	-9,34%	12,70%	-7,61%	16,90%	1,07%	-6,21%	-2,68%	4,03%	2,78%	-10,16%	5,08%	7,42%	0,34%	7,49%	5,78%
Siemens	-8,63%	9,40%	9,81%	2,93%	4,32%	7,03%	8,00%	7,88%	4,03%	13,96%	7,34%	2,12%	5,14%	1,95%	2,06%
Thyssen	-17,04%	4,16%	-1,10%	5,44%	-16,60%	-8,08%	-1,01%	2,68%	-12,10%	1,74%	2,63%	-4,73%	2,42%	-4,58%	-4,88%
VW	2,06%	-0,01%	5,00%	7,30%	6,28%	0,03%	5,31%	10,30%	5,76%	5,05%	10,81%	4,79%	8,55%	4,73%	4,70%
R_c	26,84%	23,16%	29,66%	35,71%	-18,35%	17,71%	30,27%	31,97%	12,19%	7,11%	40,72%	0,03%	22,07%	2,92%	-1,06%
Unschärfe	60,84%	47,51%	64,46%	47,27%	106,02%	62,67%	68,84%	67,80%	111,69%	68,85%	67,89%	110,77%	68,09%	111,07%	112,22%
A-1_u*B	-32,38%	-23,08%	-33,07%	-10,30%	-121,54%	-43,30%	-36,74%	-34,02%	-96,52%	-59,91%	-25,36%	-107,79%	-44,21%	-105,19%	-110,28%
G_Tag	-3,64%	-2,83%	-3,85%	-2,77%	-6,60%	-3,79%	-4,12%	-4,05%	-6,83%	-4,21%	-4,02%	-6,82%	-4,10%	-6,83%	-6,91%

Tabelle 7.8: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	11,55%	7,45%	-3,45%	11,59%	15,59%	14,60%	4,94%	3,82%	15,75%	4,60%	4,83%	12,20%	5,06%	11,60%	12,34%
Allianz	-14,60%	-13,71%	-27,83%	3,17%	-1,05%	-5,28%	-24,73%	-9,12%	0,17%	-18,09%	-5,94%	0,14%	-7,32%	0,04%	0,23%
BASF	20,04%	-0,71%	5,16%	7,54%	-6,96%	16,00%	3,00%	16,29%	-12,67%	13,66%	15,69%	-19,18%	21,46%	-19,31%	-20,53%
Bayer	-12,45%	-5,27%	10,63%	-1,47%	3,72%	-11,57%	10,00%	10,03%	3,32%	2,08%	10,44%	9,10%	2,00%	9,11%	9,59%
Beiersdorf	3,06%	20,30%	8,99%	-1,04%	22,25%	3,00%	13,27%	7,20%	19,13%	-1,28%	6,95%	21,03%	-5,21%	21,33%	17,68%
BMW	6,80%	12,95%	6,07%	1,64%	-9,02%	20,41%	1,11%	-4,25%	-4,53%	10,79%	-4,85%	1,37%	1,93%	1,86%	2,53%
Com.bank	-8,47%	-3,14%	0,59%	-14,41%	3,84%	-1,11%	-0,02%	-1,02%	3,04%	3,17%	-0,85%	1,07%	1,83%	0,98%	1,25%
Daimler	-8,82%	4,16%	-0,92%	1,34%	-9,36%	-5,68%	-0,27%	-1,97%	-13,42%	-4,09%	-4,26%	-12,54%	-6,61%	-12,54%	-12,91%
Dt.Bank	4,20%	-1,79%	-22,10%	3,06%	-20,82%	-0,09%	-12,93%	-7,81%	-19,76%	-7,37%	-4,96%	-17,89%	-6,78%	-17,89%	-18,38%
Dt.Börse	9,75%	12,39%	1,73%	-0,50%	-7,54%	6,90%	5,32%	3,06%	-5,96%	3,74%	4,53%	-7,09%	6,53%	-7,02%	-6,60%
Lufthansa	-4,42%	3,87%	7,15%	-2,03%	53,22%	-3,93%	10,21%	2,73%	44,22%	7,66%	1,48%	33,26%	1,67%	33,17%	34,30%
Post	7,27%	7,78%	5,68%	11,20%	18,12%	6,20%	4,20%	7,84%	16,13%	5,36%	7,63%	12,25%	7,74%	12,00%	11,45%
Telekom	15,80%	-3,76%	8,16%	7,67%	-20,08%	7,06%	4,62%	6,44%	-15,88%	3,48%	2,69%	-11,83%	2,77%	-11,67%	-12,40%
E.ON	24,76%	10,20%	-3,20%	-4,70%	-15,33%	18,37%	-5,09%	-11,44%	-12,63%	-4,68%	-10,08%	-17,53%	-3,67%	-17,29%	-15,53%
Fres. Med	3,17%	23,53%	16,86%	17,56%	25,15%	6,95%	24,01%	18,41%	26,17%	16,21%	17,87%	31,55%	19,50%	31,49%	32,75%
Fresenius	22,90%	10,70%	-2,19%	-7,38%	4,91%	14,28%	-4,22%	-3,64%	7,21%	1,88%	-3,91%	5,40%	-1,36%	5,21%	6,42%
HenkelVZ	6,53%	-5,22%	16,01%	7,86%	-7,03%	5,55%	3,35%	12,74%	1,34%	10,45%	7,90%	3,30%	7,52%	3,61%	4,21%
Infineon	1,40%	-9,00%	0,36%	2,24%	-0,83%	-2,25%	-3,40%	4,54%	-1,28%	-0,22%	4,54%	0,37%	6,22%	0,36%	-0,03%
K+S	-0,33%	-10,34%	2,94%	-3,39%	8,47%	-6,28%	1,32%	-2,35%	7,13%	4,80%	-3,00%	7,76%	0,73%	7,83%	7,78%
Linde	1,89%	17,66%	0,71%	8,80%	14,97%	5,50%	4,37%	2,37%	17,92%	-2,74%	4,41%	20,62%	0,92%	20,34%	21,34%
MAN	15,75%	-10,53%	-0,87%	4,22%	7,54%	2,64%	-3,05%	1,61%	7,14%	-5,83%	0,21%	6,35%	-2,80%	6,55%	6,34%
Merck	7,77%	5,42%	6,57%	7,98%	21,46%	5,31%	6,64%	6,39%	17,57%	7,28%	5,76%	8,86%	9,97%	8,78%	9,12%
Metro	2,39%	7,25%	32,31%	7,91%	1,62%	8,27%	27,34%	10,49%	3,23%	22,22%	12,55%	8,68%	13,85%	8,81%	8,67%
Mün. Rück	12,65%	5,38%	23,55%	-3,09%	5,30%	2,89%	20,08%	4,85%	5,79%	15,58%	5,71%	6,73%	12,21%	6,90%	6,93%
RWE	-7,57%	-2,93%	9,32%	11,39%	12,55%	-3,99%	11,20%	10,36%	5,05%	10,64%	11,74%	3,96%	7,83%	3,89%	2,32%
Salzgitter	12,06%	-6,20%	-12,10%	-9,96%	-15,60%	4,08%	-13,93%	-14,34%	-14,24%	-12,19%	-14,64%	-17,93%	-13,63%	-18,06%	-16,83%
SAP	-9,26%	12,19%	-6,68%	16,24%	0,77%	-6,44%	-1,39%	3,81%	2,25%	-9,26%	4,94%	7,39%	0,09%	7,43%	5,67%
Siemens	-9,17%	8,06%	10,49%	3,48%	4,04%	6,62%	8,10%	8,63%	3,91%	14,07%	8,04%	1,68%	5,53%	1,53%	1,62%
Thyssen	-17,26%	2,99%	-0,10%	5,40%	-16,05%	-8,42%	-0,59%	3,07%	-11,77%	2,23%	2,82%	-3,77%	2,52%	-3,64%	-3,91%
VW	2,65%	0,35%	6,15%	7,71%	6,17%	0,42%	6,55%	11,28%	5,69%	5,85%	11,78%	4,67%	9,47%	4,62%	4,58%
R_c	30,54%	29,69%	38,04%	40,02%	-9,39%	22,31%	37,88%	39,23%	20,69%	12,55%	47,76%	9,69%	28,27%	12,48%	9,17%
Unschärfe	61,14%	48,04%	65,13%	47,62%	106,73%	63,04%	69,45%	68,38%	112,37%	69,29%	68,46%	111,54%	68,59%	111,83%	113,04%
A-1_u*B	-10,22%	-2,33%	-5,38%	8,27%	-80,55%	-19,72%	-8,42%	-6,36%	-54,22%	-33,64%	2,12%	-64,67%	-17,45%	-62,07%	-66,19%
G_Tag	-2,46%	-1,91%	-2,59%	-1,85%	-4,54%	-2,57%	-2,78%	-2,73%	-4,66%	-2,87%	-2,70%	-4,66%	-2,78%	-4,67%	-4,73%

Tabelle 7.9: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	6,51%	6,28%	1,03%	11,10%	16,98%	14,92%	1,50%	0,51%	18,83%	6,67%	2,46%	18,66%	5,89%	18,83%	18,86%
Allianz	-3,95%	-7,56%	-25,73%	-1,64%	-2,97%	-2,44%	-9,53%	-8,34%	-3,02%	-11,37%	-5,21%	-4,35%	-11,62%	-4,31%	-3,83%
BASF	32,77%	8,87%	6,74%	7,19%	-14,79%	24,99%	16,92%	17,97%	-13,10%	27,96%	15,06%	-11,22%	21,43%	-11,03%	-12,74%
Bayer	-15,15%	-1,37%	3,36%	-0,78%	-1,43%	-5,35%	4,33%	2,99%	-0,99%	-3,95%	4,93%	-1,52%	-2,79%	-1,66%	-2,13%
Beiersdorf	6,48%	17,23%	10,79%	9,32%	23,26%	4,45%	11,82%	-3,61%	24,24%	3,96%	-0,35%	23,59%	-3,97%	23,59%	20,10%
BMW	4,86%	16,14%	10,89%	5,93%	-0,34%	17,03%	4,47%	4,03%	-0,65%	9,60%	1,31%	1,17%	3,04%	1,02%	2,29%
Com.bank	-12,33%	0,69%	-0,98%	-9,42%	-0,68%	-1,75%	2,08%	-3,88%	0,17%	2,95%	0,11%	2,92%	2,10%	2,89%	3,25%
Daimler	-11,47%	-1,26%	1,56%	2,36%	-17,94%	-12,01%	-0,37%	1,58%	-17,95%	-11,07%	-2,74%	-17,53%	-6,76%	-17,44%	-18,02%
Dt.Bank	-0,46%	-9,73%	-8,35%	2,71%	-15,60%	0,18%	-9,82%	-1,11%	-16,43%	-5,77%	-1,65%	-15,88%	-1,46%	-15,81%	-16,89%
Dt.Börse	15,89%	13,45%	-2,37%	-4,07%	-1,21%	14,96%	1,56%	-2,44%	-2,41%	3,14%	-0,85%	-4,57%	-0,50%	-4,64%	-4,43%
Lufthansa	-2,79%	4,40%	2,42%	-5,31%	38,42%	0,88%	-0,53%	-3,67%	38,84%	4,79%	-5,48%	36,89%	1,52%	36,74%	35,99%
Post	-1,19%	9,37%	10,27%	9,87%	19,89%	-3,95%	8,56%	9,31%	20,36%	6,11%	9,40%	21,83%	8,63%	21,96%	21,97%
Telekom	18,24%	6,83%	4,81%	11,47%	-2,52%	5,13%	6,09%	10,42%	-4,39%	3,13%	7,78%	-6,08%	4,15%	-5,85%	-6,30%
E.ON	8,02%	5,56%	0,62%	-6,08%	-35,03%	6,22%	-5,21%	-9,10%	-36,35%	-6,25%	-10,30%	-33,08%	-10,10%	-33,26%	-31,34%
Fres. Med	20,13%	15,98%	36,44%	11,21%	18,21%	17,69%	30,71%	24,09%	18,46%	34,50%	22,20%	20,58%	28,97%	20,52%	21,91%
Fresenius	12,63%	9,02%	-17,01%	0,21%	4,66%	8,12%	-10,64%	-5,20%	5,16%	-14,67%	-0,73%	2,89%	-4,31%	2,99%	3,04%
HenkelVZ	7,11%	-2,24%	21,13%	14,57%	-4,67%	10,75%	13,09%	19,44%	-4,07%	14,65%	13,35%	-5,13%	13,87%	-5,11%	-3,45%
Infineon	-1,31%	-13,22%	0,59%	0,95%	-1,05%	-3,63%	-3,18%	4,41%	-0,75%	-4,96%	4,43%	-0,35%	3,01%	-0,35%	-0,34%
K+S	0,50%	-10,60%	0,18%	-4,77%	7,55%	-5,09%	-6,26%	-2,47%	7,74%	2,74%	-4,41%	8,60%	2,32%	8,67%	9,11%
Linde	2,42%	16,52%	-2,65%	9,13%	11,82%	5,42%	7,83%	-7,09%	12,63%	1,94%	1,48%	13,83%	-2,05%	13,81%	14,20%
MAN	5,21%	-12,21%	0,34%	4,71%	11,55%	-11,39%	-0,93%	3,08%	7,44%	-5,26%	0,99%	5,25%	-2,51%	5,10%	3,88%
Merck	3,82%	7,94%	8,05%	7,37%	29,78%	-1,39%	7,65%	7,13%	22,79%	5,63%	5,79%	22,23%	6,41%	22,21%	23,04%
Metro	4,44%	-1,52%	19,48%	11,06%	-0,48%	8,16%	21,87%	10,84%	0,98%	19,79%	12,48%	0,10%	11,24%	0,06%	0,39%
Mün.Rück	15,49%	2,48%	22,10%	-0,44%	-1,97%	6,52%	8,15%	5,36%	-1,79%	6,53%	0,72%	-4,86%	4,68%	-4,72%	-4,78%
RWE	-0,35%	-2,00%	5,34%	14,34%	16,84%	-0,67%	7,41%	12,81%	20,61%	11,23%	17,19%	21,94%	15,85%	21,79%	20,12%
Salzgitter	21,80%	-3,57%	-15,39%	-9,55%	-20,61%	8,70%	-10,13%	-11,93%	-22,33%	-7,00%	-9,15%	-25,00%	-8,24%	-25,04%	-23,91%
SAP	-7,96%	11,81%	-4,89%	13,22%	14,92%	-2,54%	-6,37%	6,88%	15,77%	-9,52%	6,75%	18,49%	3,82%	18,36%	18,17%
Siemens	-6,58%	9,53%	13,68%	-4,09%	-1,82%	1,25%	12,56%	3,67%	-0,64%	14,31%	3,86%	1,68%	5,91%	1,68%	1,94%
Thyssen	-24,23%	1,43%	2,59%	10,47%	2,89%	-8,70%	-3,42%	6,06%	4,46%	-4,01%	1,44%	1,78%	0,17%	1,86%	2,69%
VW	1,45%	1,75%	-5,03%	7,61%	6,34%	3,56%	-0,18%	8,27%	6,40%	4,17%	9,13%	7,14%	11,31%	7,14%	7,24%
R_c	14,47%	8,16%	20,39%	6,39%	-4,09%	-0,35%	-2,31%	16,13%	-8,73%	-15,22%	4,41%	-24,76%	7,91%	-24,86%	-30,08%
Unschärfe	47,12%	49,19%	46,16%	38,98%	102,46%	52,69%	57,07%	52,22%	102,84%	59,21%	57,62%	103,76%	62,41%	103,97%	104,84%
A-1_u*B	-77,27%	-87,61%	-69,48%	-69,50%	-203,56%	-102,92%	-113,40%	-85,52%	-208,92%	-130,48%	-107,75%	-226,76%	-113,58%	-227,26%	-234,17%
G_Tag	-5,74%	-6,02%	-5,60%	-4,77%	-12,63%	-6,49%	-7,04%	-6,36%	-12,70%	-7,35%	-7,08%	-12,87%	-7,65%	-12,90%	-13,03%

Tabelle 7.10: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $\underline{u} = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	6,51%	7,41%	-0,12%	11,13%	16,71%	15,89%	0,64%	0,17%	19,01%	6,45%	2,48%	18,44%	5,85%	18,61%	18,62%
Allianz	-4,32%	-8,37%	-26,08%	-1,25%	-2,47%	-2,20%	-9,59%	-8,20%	-2,57%	-11,40%	-4,39%	-4,03%	-10,93%	-3,97%	-3,49%
BASF	32,31%	9,47%	5,81%	7,57%	-15,56%	23,13%	16,55%	18,41%	-13,26%	26,19%	14,96%	-11,13%	21,14%	-10,93%	-12,72%
Bayer	-14,86%	-1,70%	4,62%	-0,85%	-1,50%	-4,71%	5,86%	3,19%	-1,11%	-3,58%	5,32%	-1,36%	-2,92%	-1,49%	-2,00%
Beiersdorf	5,35%	17,86%	10,95%	-9,37%	23,20%	3,69%	12,50%	-3,94%	24,33%	3,02%	-0,50%	23,77%	-4,66%	23,78%	20,19%
BMW	4,07%	15,89%	11,47%	5,57%	0,07%	16,32%	2,92%	3,45%	-0,34%	8,76%	0,49%	1,55%	2,44%	1,40%	2,72%
Com.bank	-14,05%	1,66%	-1,69%	-9,58%	-1,16%	-2,72%	1,83%	-3,95%	-0,23%	2,68%	0,10%	2,86%	1,68%	2,82%	3,21%
Daimler	-11,31%	-0,83%	0,65%	2,70%	-18,83%	-11,06%	0,23%	1,78%	-18,63%	-10,18%	-2,35%	-18,12%	-6,43%	-18,03%	-18,67%
Dt.Bank	0,30%	-10,91%	-8,64%	2,43%	-16,36%	1,30%	-10,90%	-2,14%	-17,21%	-5,29%	-3,40%	-16,66%	-1,04%	-16,60%	-17,76%
Dt.Börse	16,59%	14,33%	-2,05%	-3,94%	0,39%	15,03%	1,92%	-2,44%	-0,77%	3,06%	-1,03%	-3,28%	-0,66%	-3,34%	-3,09%
Lufthansa	-3,16%	4,02%	3,25%	-5,70%	38,51%	0,95%	1,11%	-3,47%	38,56%	5,15%	-5,06%	36,62%	1,22%	36,46%	35,62%
Post	-1,38%	8,92%	9,80%	9,64%	18,33%	-4,73%	7,72%	9,51%	19,01%	5,29%	9,49%	20,67%	8,89%	20,78%	20,77%
Telekom	19,61%	5,03%	3,98%	11,21%	-2,11%	5,01%	5,04%	9,63%	-3,46%	2,23%	6,99%	-5,34%	3,52%	-5,10%	-5,57%
E.ON	8,96%	5,55%	-0,11%	-5,96%	-33,94%	6,95%	-6,81%	-9,77%	-36,50%	-7,98%	-11,22%	-33,25%	-11,02%	-33,45%	-31,40%
Fres. Med	18,96%	17,23%	36,54%	11,91%	17,68%	17,64%	31,13%	25,02%	17,52%	35,00%	23,23%	19,56%	29,25%	19,51%	20,91%
Fresenius	13,88%	9,35%	-17,14%	0,59%	4,69%	9,03%	-10,63%	-4,73%	5,51%	-14,62%	-0,36%	2,95%	-4,15%	3,06%	3,09%
HenkelVZ	6,80%	-2,04%	22,06%	14,05%	-1,46%	10,91%	14,13%	19,41%	-1,66%	16,04%	13,69%	-2,62%	14,84%	-2,60%	-0,70%
Infineon	-1,52%	-13,97%	-0,06%	0,53%	-1,87%	-3,63%	-4,17%	3,87%	-1,49%	-5,58%	3,80%	-0,99%	2,65%	-0,99%	-0,98%
K+S	0,34%	-11,99%	0,13%	-4,62%	6,02%	-5,19%	-6,67%	-1,89%	6,17%	2,87%	-3,81%	7,22%	2,91%	7,28%	7,74%
Linde	1,38%	16,84%	-2,58%	9,57%	12,16%	4,14%	8,35%	-7,35%	13,02%	1,72%	1,18%	14,09%	-1,98%	14,05%	14,40%
MAN	6,48%	-10,88%	0,73%	4,90%	13,37%	-10,06%	-0,50%	2,84%	8,80%	-5,29%	0,61%	6,24%	-3,14%	6,08%	4,80%
Merck	4,50%	7,93%	8,30%	7,43%	29,64%	-0,91%	7,53%	6,83%	22,55%	6,07%	5,59%	21,79%	6,27%	21,75%	22,56%
Metro	5,69%	-2,59%	19,95%	11,39%	-0,98%	8,75%	21,78%	11,44%	0,79%	21,16%	12,86%	-0,13%	12,25%	-0,16%	0,20%
Mün.Rück	14,93%	3,50%	20,83%	-0,34%	-0,90%	5,17%	6,97%	5,69%	-1,34%	5,24%	0,94%	-4,59%	4,05%	-4,45%	-4,50%
RWE	-0,51%	-0,77%	5,79%	13,82%	16,75%	-0,20%	8,07%	12,48%	20,94%	13,04%	17,11%	22,75%	16,25%	22,60%	20,91%
Salzgitter	22,17%	-2,97%	-15,47%	-10,09%	-18,67%	9,31%	-10,11%	-12,32%	-21,13%	-6,87%	-9,30%	-24,21%	-8,15%	-24,24%	-23,07%
SAP	-7,77%	12,18%	-4,35%	12,40%	13,47%	-2,82%	-5,72%	6,51%	14,99%	-9,51%	6,30%	18,06%	3,30%	17,92%	17,73%
Siemens	-7,21%	8,53%	13,86%	-3,58%	-3,29%	0,66%	12,48%	4,28%	-1,88%	14,67%	4,51%	0,78%	6,14%	0,78%	1,01%
Thyssen	-24,84%	-0,61%	2,98%	10,24%	2,08%	-9,22%	-3,34%	6,44%	4,24%	-3,71%	1,57%	1,40%	-0,04%	1,50%	2,39%
VW	2,11%	1,94%	-3,39%	8,19%	6,03%	3,57%	1,69%	9,25%	6,16%	5,39%	10,18%	6,97%	12,44%	6,98%	7,06%
R_c	19,32%	16,76%	26,78%	9,91%	14,82%	5,22%	5,14%	20,91%	7,56%	-9,13%	9,31%	-10,23%	12,71%	-10,32%	-15,37%
Unschärfe	47,36%	49,61%	46,47%	39,15%	103,39%	52,96%	57,43%	52,45%	103,63%	59,51%	57,85%	104,47%	62,64%	104,68%	105,56%
A-1_u*B	-26,78%	-31,53%	-18,45%	-28,20%	-85,81%	-46,33%	-50,77%	-30,14%	-93,31%	-67,05%	-47,00%	-111,92%	-48,26%	-112,22%	-118,11%
G_Tag	-2,84%	-2,99%	-2,75%	-2,37%	-6,31%	-3,24%	-3,51%	-3,15%	-6,35%	-3,70%	-3,52%	-6,47%	-3,81%	-6,49%	-6,56%

Tabelle 7.11: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $\frac{7\sqrt{7}-1}{18}$ $\approx 0,9733$

Daten	2004	2005	2006	2007	2008	04-05	05-06	06-07	07-08	04-06	05-07	06-08	04-07	05-08	04-08
Adidas	6,50%	8,49%	-1,20%	11,17%	16,45%	16,81%	-0,17%	-0,15%	19,18%	6,25%	2,50%	18,22%	5,81%	18,40%	18,40%
Allianz	-4,67%	-9,14%	-26,42%	-0,90%	-1,99%	-1,98%	-9,64%	-8,08%	-2,15%	-11,43%	-3,62%	-3,73%	-10,29%	-3,65%	-3,16%
BASF	31,88%	10,04%	4,93%	7,93%	-16,30%	21,39%	16,20%	18,83%	-13,41%	24,53%	14,87%	-11,04%	20,88%	-10,83%	-12,71%
Bayer	-14,59%	-2,01%	5,81%	-0,91%	-1,57%	-4,10%	7,30%	3,37%	-1,21%	-3,24%	5,67%	-1,22%	-3,05%	-1,34%	-1,88%
Beiersdorf	4,29%	18,45%	11,10%	-9,42%	23,14%	2,98%	13,14%	-4,24%	24,42%	2,13%	-0,64%	23,94%	-5,29%	23,96%	20,28%
BMW	3,33%	15,65%	12,02%	5,24%	0,47%	15,65%	1,46%	2,91%	-0,05%	7,97%	-0,27%	1,91%	1,88%	1,75%	3,14%
Com.bank	-15,66%	2,58%	-2,36%	-9,73%	-1,62%	-3,63%	1,60%	-4,00%	-0,62%	2,42%	0,10%	2,80%	1,28%	2,76%	3,17%
Daimler	-11,16%	-0,41%	-0,21%	3,02%	-19,68%	-10,16%	0,80%	1,97%	-19,28%	-9,35%	-1,98%	-18,69%	-6,12%	-18,60%	-19,28%
Dt.Bank	1,02%	-12,03%	-8,91%	2,17%	-17,08%	2,36%	-11,92%	-3,10%	-17,95%	-4,83%	-5,04%	-17,40%	-0,64%	-17,34%	-18,57%
Dt.Börse	17,25%	15,17%	-1,75%	-3,82%	1,91%	15,11%	2,25%	-2,44%	0,79%	2,98%	-1,19%	-2,06%	-0,81%	-2,11%	-1,84%
Lufthansa	-3,51%	3,66%	4,04%	-6,05%	38,60%	1,01%	2,65%	-3,29%	38,30%	5,48%	-4,67%	36,35%	0,93%	36,19%	35,27%
Post	-1,56%	8,49%	9,36%	9,42%	16,84%	-5,45%	6,92%	9,69%	17,74%	4,51%	9,58%	19,57%	9,14%	19,68%	19,63%
Telekom	20,90%	3,33%	3,20%	10,97%	-1,73%	4,90%	4,06%	8,89%	-2,58%	1,38%	6,25%	-4,63%	2,93%	-4,40%	-4,88%
E.ON	9,85%	5,53%	-0,80%	-5,86%	-32,90%	7,63%	-8,31%	-10,39%	-36,65%	-9,60%	-12,08%	-33,41%	-11,88%	-33,62%	-31,45%
Fres. Med	17,86%	18,42%	36,63%	12,56%	17,18%	17,59%	31,53%	25,88%	16,63%	35,46%	24,19%	18,60%	29,51%	18,55%	19,96%
Fresenius	15,04%	9,65%	-17,26%	0,95%	4,72%	9,89%	-10,63%	-4,29%	5,84%	-14,58%	-0,01%	3,00%	-4,01%	3,13%	3,14%
HenkelVZ	6,52%	-1,85%	22,94%	13,56%	1,60%	11,07%	15,11%	19,38%	0,61%	17,34%	14,00%	-0,24%	15,75%	-0,24%	1,90%
Infineon	-1,72%	-14,69%	-0,68%	0,14%	-2,65%	-3,63%	-5,10%	3,37%	-2,20%	-6,16%	3,22%	-1,59%	2,33%	-1,59%	-1,59%
K+S	0,19%	-13,31%	0,08%	-4,48%	4,56%	-5,28%	-7,07%	-1,34%	4,68%	2,98%	-3,26%	5,92%	3,46%	5,97%	6,45%
Linde	0,40%	17,14%	-2,51%	9,99%	12,49%	2,94%	8,84%	-7,60%	13,39%	1,50%	0,90%	14,32%	-1,91%	14,28%	14,59%
MAN	7,67%	-9,62%	1,10%	5,07%	15,11%	-8,81%	-0,10%	2,62%	10,09%	-5,32%	0,27%	7,18%	-3,72%	7,01%	5,67%
Merck	5,14%	7,91%	8,54%	7,48%	29,51%	-0,47%	7,43%	6,56%	22,32%	6,49%	5,41%	21,37%	6,14%	21,32%	22,11%
Metro	6,87%	-3,61%	20,40%	11,69%	-1,46%	9,29%	21,69%	11,99%	0,62%	22,43%	13,21%	-0,34%	13,20%	-0,36%	0,02%
Mün. Rück	14,40%	4,47%	19,63%	-0,24%	0,13%	3,90%	5,87%	5,99%	-0,92%	4,04%	1,15%	-4,34%	3,46%	-4,20%	-4,24%
RWE	-0,67%	0,39%	6,21%	13,33%	16,67%	0,25%	8,69%	12,16%	21,25%	14,74%	17,04%	23,51%	16,63%	23,36%	21,66%
Salzgitter	22,52%	-2,39%	-15,55%	-10,59%	-16,83%	9,88%	-10,08%	-12,68%	-20,00%	-6,74%	-9,44%	-23,47%	-8,06%	-23,49%	-22,27%
SAP	-7,60%	12,53%	-3,84%	11,65%	12,09%	-3,09%	-5,11%	6,17%	14,25%	-9,51%	5,87%	17,65%	2,83%	17,51%	17,31%
Siemens	-7,80%	7,59%	14,03%	-3,09%	-4,69%	0,10%	12,40%	4,85%	-3,05%	15,01%	5,12%	-0,06%	6,35%	-0,07%	0,13%
Thyssen	-25,41%	-2,55%	3,34%	10,03%	1,31%	-9,72%	-3,26%	6,79%	4,03%	-3,42%	1,69%	1,04%	-0,23%	1,15%	2,11%
VW	2,73%	2,12%	-1,85%	8,72%	5,74%	3,59%	3,46%	10,17%	5,94%	6,53%	11,15%	6,82%	13,50%	6,82%	6,90%
R_c	23,87%	24,93%	32,82%	13,20%	32,82%	10,45%	12,15%	25,39%	23,00%	-3,42%	13,89%	3,50%	17,19%	3,40%	-1,48%
Unschärfe	47,72%	50,27%	46,96%	39,42%	104,83%	53,38%	57,99%	52,81%	104,87%	59,96%	58,22%	105,57%	63,00%	105,78%	106,67%
A-1_u*B	-7,95%	-8,58%	1,52%	-13,08%	-37,06%	-25,14%	-26,51%	-9,82%	-46,92%	-43,40%	-24,92%	-66,88%	-24,81%	-67,12%	-72,59%
G_Tag	-1,92%	-2,02%	-1,85%	-1,61%	-4,29%	-2,21%	-2,40%	-2,13%	-4,33%	-2,54%	-2,40%	-4,44%	-2,59%	-4,45%	-4,50%

Tabelle 7.12: Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $u=\frac{2}{3}$

die Rechenzeit möglicherweise erheblich reduziert werden.

Bei den Berechnungen gibt es insgesamt drei Faktoren, die das Optimierungsergebnis beeinflussen. Als erstes ist die Art der Rohdaten von Bedeutung. Zwei Arten sind in der Implementierung berücksichtigt, nämlich die Tagesrenditen und die Tagesschwerpunkte. Diese unterscheiden sich dadurch, dass die Tagesschwerpunkte bereits eine Unschärfe berücksichtigen und aus mehreren Tagesinformationen berechnet werden. Da es zwischen beiden Datenreihen durchaus Unterschiede gibt, sind die Ergebnisse aus der gleichen Modelloptimierung entsprechend unterschiedlich. Als ein weiterer Faktor beeinflusst der Zeitraum für die Dateneingrenzung das Optimierungsergebnis maßgeblich, denn dadurch wird auch der Datenumfang spezifiziert. Insgesamt stehen Ergebnisse zu 15 verschiedenen Zeiträumen für die Dateneingrenzung zur Verfügung, die sich jeweils hinsichtlich der Zeiträumlänge oder hinsichtlich des Anfangszeitpunktes unterscheiden. Da v. a. die Verarbeitung der Rohdaten durch unterschiedliche Methoden für beide Modelle stattfindet, gibt es Unterschiede im Hinblick auf die Reduktion und die Hervorhebung des Informationsgehalts. Als der dritte und letzte Faktor wird das Optimierungsergebnis durch das vorgegebene Trade-Off beeinflusst. Um es überschaubar zu halten, wurden in der Implementierung drei Werte für das Trade-Off punktuell berücksichtigt. Mit diesen Einstellungen ergeben sich insgesamt $2 \cdot 15 \cdot 3 = 90$ verschiedene mögliche Einzelszenarien, die jeweils ein zugehöriges Optimierungsergebnis als Portfolio-Aufteilung erzeugen.

Extreme Leerverkaufspositionen

Bei den Ergebnissen kann beobachtet werden, dass das klassische Modell in der überwiegenden Anzahl der betrachteten Szenarien extremere Leerverkaufspositionen als das Fuzzy-Hauptmodell in dem optimierten Portfolio vorsieht. Zunächst werden die Szenarien betrachtet, bei denen Schlusskurse als Modellinput verwendet werden. Hier sieht das klassische Modell in einer überwiegenden Anzahl der Szenarien bei allen drei Parameterwerten für den Trade-Off, aber mit unterschiedlichen zeitlichen Rahmen, stets extremere Leerverkaufsposition als das Fuzzy-Modell vor. Bei den Szenarien, in denen Tagesschwerpunkte als Modellinput verwendet werden, scheint der Parameterwert für den Trade-Off einen Einfluss bei diesem Vergleich zu haben. Bei dem kleinsten betrachteten Parameterwert für den Trade-Off, nämlich $\frac{2}{3}$, ist das Fuzzy-Modell hinsichtlich der extremsten Leerverkaufsposition besser als das klassische Modell. Wenn der Parameterwert sich auf $\frac{7\sqrt{7}-1}{18}$ vergrößert, sieht das Fuzzy-Modell in überwiegenden Szenarien eine extremere Leerverkaufsposition als das klassische Modell vor. Wenn sich der Parameterwert schließlich auf $\frac{7\sqrt{7}-1}{9}$ einstellt, ist die extremste Leerverkaufsposition des klassischen Modells ebenfalls weniger extrem.

Bildung der Long- und Shortpositionen

In den meisten Fällen ist die qualitative Bildung von Long- und Shortpositionen bei beiden Modellen ähnlich, d. h. die Tendenz, ob eine Aktie gekauft oder leerverkauft werden soll, ist bei vielen Positionen gleich. Damit resultiert aus beiden Modellen eine qualitativ ähnliche Portfolio-Aufteilung. Aber die quantitative Höhe der einzelnen Positionen aus beiden Portfolio-Aufteilungen kann sich bei gleicher Datengrundlage eines bestimmten Szenarios gravierend unterscheiden. Daraus resultieren Unterschiede bei der Rendite und bei anderen Kennzahlen, wobei die erwarteten Renditen sich bereits von den Renditen im Zentrum des volumenminimalen Ellipsoids unterscheiden. Für eine einfache Simulation wurden die Kursdaten unmittelbar nach dem ausgewählten Zeitraum herangezogen und die entsprechenden Renditen für die optimalen Portfolio-Aufteilungen wurden berechnet. Dabei sind genau die erwähnten Unterschiede festzustellen. (Die Ergebnisse der einfachen Simulation

können in der Excel-Tabelle „Aufteilungen_MitMakro.xlsm“ eingesehen werden.)

Reaktion auf Änderung des Trade-Offs

Des Weiteren weisen beide Modelle unterschiedliche Reaktionen bei einer Änderung des Trade-Offs auf. Generell kann beobachtet werden, dass die prozentuale Änderung in der optimalen Portfolio-Aufteilung nach dem klassischen Modell erheblich höher ausfällt als in der Portfolio-Aufteilung nach dem Fuzzy-Hauptmodell, wenn sich der Trade-off ändert.

Wertmäßige Auffälligkeiten

Auffällig ist ebenfalls, dass mit Ausnahme eines einzigen Szenarios die aus dem Modell prognostizierte Erwartungsrendite für das optimale Portfolio nach dem klassischen Modell stets positiv ist. Im Vergleich dazu sind die Renditen im Zentrum des volumenminimalen Ellipsoids in einigen Szenarien aber negativ. Dies ist hauptsächlich darin begründet, dass sich die Bewertung der gleichen historischen Datengrundlage in beiden Modellen unterscheidet. Wo das klassische Modell die arithmetische Mittelwertbildung zur Schätzung der Erwartungsrendite verwendet, wird beim Fuzzy-Hauptmodell das Zentrum des volumenminimalen umhüllenden Ellipsoids der Datenpunkte verwendet. Beide Methoden unterscheiden sich hinsichtlich der Glättung und der Berücksichtigung der Extremwerte.

Auch hinsichtlich des absoluten Niveaus ist der Unschärfeadjustierung des Fuzzy-Hauptmodells in allen Szenarien größer als die annualisierte Volatilität aus dem klassischen Modell. Jedoch darf dies nicht pauschal als größere Unsicherheit interpretiert werden. Die Kennzahl $\sqrt{250X^TQ^{-1}X}$ ist mathematisch ähnlich konstruiert wie die annualisierte Volatilität, die aber lediglich einen Anhaltspunkt für den Vergleich zwischen Fuzzy-Hauptmodell und klassischem Modell liefern soll. Beide Größen dürfen keinesfalls unter der Annahme, dass sie identischen Charakter haben, verglichen werden oder gar pauschal bzgl. des Niveaus verglichen werden.

Weitere Aspekte

Alle dieser Beobachtungen beschränken sich lediglich auf die hier betrachteten Fälle und können deswegen nicht ohne Weiteres verallgemeinert werden, denn das Ergebnis hängt stets von den Vorinformationen ab.

Aus einem anderen Blickwinkel betrachtet hat das Fuzzy-Hauptmodell deutliche Vorteile im Vergleich zum klassischen Modell, nämlich seine Flexibilität der Gestaltung sowie seitens der Erklärbarkeit. Beispielsweise ist es beim Fuzzy-Hauptmodell möglich, der Trade-Off durch die Festlegung der Grenzen der α -Schnitte und die Festlegung der Gewichtungen der einzelnen α -Schnitte bei der Endbetrachtung festzulegen. Gerade durch diese beiden Komponenten kann der Trade-Off zwischen Unschärfeadjustierung und Rendite mit höchster Zugehörigkeit erklärt werden.

Was ebenfalls nicht außer Acht gelassen werden darf, ist die Statistik mit den stochastischen Methoden selbst. Diese setzt für die Schätzung der benötigten Kenngrößen stets bestimmte Verteilungsnahmen bzw. Annahmen über den Daten erzeugenden Prozess voraus, damit die Schätzung optimal ist. Diese Problematik ist im Fuzzy-Hauptmodell hingegen nicht vorhanden, weil dabei die Daten einfach als Datenpunkte aufgefasst werden. Daher sind keine besonderen Annahmen über Zusammenhänge der Datenpunkte nötig. Diese werden als Datenpunkte in einem mehr-dimensionalen Raum betrachtet. Struktur und Zusammenhänge der Datenpunkte werden durch das Ellipsoid in einer reduzierten Form zusammengefasst. Im Vergleich ist die Handhabung der Vorinformation im Fuzzy-Hauptmodell anschaulicher und nachvollziehbarer.

Kapitel 8

Schlussbemerkung

In der vorliegenden Arbeit wurde angestrebt, einige Methoden und Möglichkeiten der Fuzzy-Logik als mathematisches Werkzeug in Bezug auf die Portfolio-Theorie darzustellen und anzuwenden. Da klare Unterschiede zwischen der Fuzzy-Logik und der Statistik existieren, unterscheiden sich die in der jeweiligen Theorie entwickelten Modelle auch deutlich. Aber wie v. a. beim Fuzzy-Hauptmodell gezeigt wurde, existiert eine große Ähnlichkeit hinsichtlich der Problemstrukturen, wenn man das Optimierungsproblem unter dem Aspekt seiner mathematischen Gegebenheit und Beschaffenheit beurteilt. Auch deswegen bieten sich sehr ähnliche Lösungswege an, wodurch das Verständnis erleichtert wird. Zudem zeigen die Simulationsergebnisse weiterhin Indizien, dass es eine qualitative Ähnlichkeit zwischen den optimalen Portfolios aus beiden Modellen gibt. Trotzdem sollte stets betont werden, dass die einzelnen Kennzahlen der Ergebnisse aus beiden Modellen, beispielsweise Volatilität vs. Unschärfeadjustierung, unterschiedlich interpretiert werden müssen und nicht nur einfach bzgl. des Niveaus miteinander verglichen werden können. Des Weiteren sind diese Kennzahlen z. T. künstlich, d. h. lediglich durch einen ähnlichen funktionalen Zusammenhang erzeugt, um Anhaltspunkte für einen möglichen Vergleich zu schaffen.

Die Statistik ist durch ihre Entwicklung bis heute bereits eine sehr umfangreiche mathematische Theorie, die in vielen Anwendungsgebieten etabliert ist. Hingegen befindet die Fuzzy-Logik noch in der stetigen Entwicklung, weil ihre Erfindung und Entwicklung deutlich später als die der Statistik liegt. Derzeit werden Forschungen bzgl. der Fuzzy-Logik, nicht zuletzt auch wegen ihrer herausragenden Bedeutung und Anwendung in der Informationstechnik, betrieben, so dass mit weiteren Erkenntnissen und Werkzeugen sowie Verbesserungen der Lösungsalgorithmen bestimmter Fragestellungen zu rechnen ist.

Im Vergleich zu den anderen Fuzzy-Portfolio-Modellen wird bei dem vorliegenden Fuzzy-Hauptmodell ein Weg eingeschlagen, der die Vorteile der unscharfen Mengen mit der Überschaubarkeit der mathematischen Modellierung und ihrer anschließenden Lösungsfindung verbindet. Dabei sind keine besonderen Annahmen im Bezug auf die Struktur der Vorinformationen notwendig, aber trotzdem können die Vorinformationen sinnvoll berücksichtigt und verarbeitet werden. Die unterschiedlichen Auffassungen der Vorinformationen dürfen jedoch nicht außer Acht gelassen werden. Der verwendete Algorithmus zur Bestimmung des volumenminimalen Ellipsoids nach Khachiyan ist ebenfalls durchschaubar und kann gut implementiert werden. Durch die hier verwendete Defuzzifikation anhand der α -Schnitte wird die unscharfe Problemstellung in eine gut lösbare scharfe Problemstellung überführt, die mittels einfacher normaler Optimierungsmethoden gelöst werden kann. Insgesamt ist die Portfolio-Optimierung anhand des vorliegenden Fuzzy-Hauptmodell überschaubar und eignet sich deswegen auch für die Praxisanwendung.

Anhang A

Verwendete elektronische Dateien

Auf dieser Dissertation beiliegenden CD befinden sich alle zur Implementierung verwendeten Daten und Matlab-Skripte. Es handelt sich dabei um folgende Dateien:

- **Kursdaten.xlsx**: Hier sind die Kursdaten der 30 DAX Aktien von 2004 bis einschließlich 2009 auf separaten Datenblättern gespeichert, wobei der Aufbau der Datenblätter analog ist. Jeder dieser 30 Datenblätter hat acht Spalten, die nacheinander Datum, Tageseröffnungskurs, Schlusskurs, Tageshoch, Tagestief, Volumen, Tagesrendite „Schl.-Schl.“ und den „best and worst case“-Schwerpunkt „Zentroid“ beinhalten. Die stetigen Tagesrenditen ergeben sich als Differenz zweier Schlusskurse von aufeinanderfolgenden Tagen. Die Tagesschwerpunkte werden Abschnitt 5.2 entsprechend berechnet. Um den Import in Matlab zu erleichtern, wird eine Übersicht gemacht. Die Daten werden per SVERWEIS auf ein Datenblatt gebracht, sowohl für die Tagesschlussrendite als auch für den Schwerpunkt. Diese Übersicht wird dann in einer separaten Datei abgespeichert.
- **Input_30DAX.xlsx**: Übersicht der stetigen Tagesrenditen und Tagesschwerpunkte auf jeweils einem eigenen Datenblatt. Ein weiteres Datenblatt „Tabelle 1“ dient als Schnittstelle für den Datenimport in Matlab.
- **MVE.m**: Matlab-Skript zur Ermittlung der Strukturmatrix und des zugehörigen Ellipsoidzentrums. Es basiert auf der Vorarbeit von Nima Moshtagh (University of Pennsylvania, 2005), die im Matlab Forum zur Verfügung steht. (Moshtagh, 2010)
- **QNorm.m**: Matlab-Skript zur Ermittlung und Darstellung der quadratischen Q-Norm aller Datenpunkte in berechnetem Ellipsoid.
- **MEffLine.m**: Matlab-Skript zur Ermittlung und Darstellung der Effizienzlinie der klassischen Portfolio-Theorie.
- **FEffLine.m**: Matlab-Skript zur Ermittlung und Darstellung der künstlichen Effizienzlinie des Fuzzy Hauptmodells.
- **m_write.m**: Funktion für „m_Aufteilungen“
- **Markowitz.m**: Matlab-Skript zur Ermittlung der Portfolio-Aufteilung anhand der gegebenen Erwartungsrenditen, Kovarianzmatrix und Trade-Off nach dem klassischen Portfolio-Theorie.
- **m_Aufteilungen.m**: Matlab-Skript für die Erzeugung der Tabelle der Aufteilungen zum klassischen Modell
- **f_write.m**: Funktion für „f_Aufteilungen“

- FuzzyModel.m: Ermittlung der Portfolio-Aufteilung anhand der gegebenen Strukturmatrix, des Zentrums des Ellipsoids und des Trade-Offs nach dem Fuzzy Hauptmodell.
- f_Aufteilungen.m: Matlab-Skript für die Erzeugung der Tabelle der Aufteilungen zum Fuzzy Modell
- 30 Matrizen für Matlab in mat-Format: Jede dieser Matrizen ist eine der anhand von MVE.m berechneten Strukturmatrizen. Durch den jeweiligen Dateinamen werden die Strukturmatrizen voneinander unterschieden. Dabei steht „Q“ für Strukturmatrix, „C“ für Centroid, „R“ für Tagesrendite, gefolgt von der Spezifikation des Zeitraums und der Fehlertoleranz.
- 30 Vektoren für Matlab in mat-Format: Jede dieser Matrizen beinhaltet eines der anhand von MVE.m berechneten Zentren des volumenminimalen Ellipsoids. Die Dateinamen wurden ähnlich wie bei den Strukturmatrizen gewählt. Das kleine „c“ am Anfang steht für das Zentrum.
- Aufteilungen_MitMakro.xlsm: Excel-Tabelle mit allen Portfolio-Aufteilungen der 90 verschiedenen Szenarien. Das eingebettete Makro ermöglicht einen direkten Vergleich von Portfolios aus dem klassischen Modell zum Portfolio aus dem Fuzzy Hauptmodell.
- Alfaschnitte.m: Darstellung der Alphaschnitte. Es wird zufällig eine Anzahl von Punkten im zweidimensionalen Raum generiert. Anschließend wird mittels MVE.m die entsprechende Strukturmatrix generiert und das zugehörige Zentrum ermittelt. Zum Schluss werden die Ergebnisse grafisch dargestellt.

Anhang B

Symbolverzeichnis

$\mathbf{1}$	der Einsvektor als Spaltenvektor mit geeigneter Dimension
$\mathbf{0}$	der Nullvektor als Spaltenvektor mit geeigneter Dimension bzw. die Nullmatrix mit geeigneter Dimension
a	eine reelle Zahl
a_i	Für unscharfe Rendite ist a_i der Vektor mit den linken Spannweiten der Renditen zum Tag i . In Khachiyans Algorithmus ist a_i ein $N + 1$ -dimensionaler Datenpunkt nach dem lifting.
$a_{i,j}$	die linke Spannweite der Rendite zum Tag i vom Wertpapier j
b	eine reelle Zahl
b_i	der Vektor mit den rechten Spannweiten der Renditen zum Tag i
$b_{i,j}$	die rechte Spannweite der Rendite zum Tag i vom Wertpapier j
c	Im klassischen Modell ist c eine reelle Zahl berechnet aus dem Einsvektor und der Kovarianzmatrix. Im Hauptmodell ist c der Vektor des volumenminimalen Ellipsoids.
E	der Operator für die Bildung des Erwartungswerts
E_0	die vom Investor angegebene Zielrendite des Portfolios
e_k	der k -te kanonische Einheitsvektor als Spaltenvektor
e	die Eulerische Zahl
G	die Gesamrendite aggregiert mit gegebenen Gewichtungen über allen α -Schnitten
G_α	die Gesamrendite innerhalb eines gegebenen α -Schnitts
h_i	die Tageshöchstkurse zum Tag i
$h_{i,j}$	der Tageshöchstkurs des Wertpapiers j zum Tag i
$high$	die Bezeichnung eines speziellen Positionsindex(Kontext beachten)
low	die Bezeichnung eines speziellen Positionsindex(Kontext beachten)
i, j	Indizes(Kontext beachten)
I	die Einheitsmatrix mit geeigneter Dimension
I_{max}	die Bezeichnung eines speziellen Positionsindex(Kontext beachten)
k	eine reelle Zahl oder ein Index(Kontext beachten)

k_i	der Vektor der Tagesschlusskurse zum Tag i
$k_{i,j}$	der Tagesschlusskurs des Wertpapiers j zum Tag i
\tilde{l}_i	der Vektor der Tagestiefstkurse zum Tag i
$\tilde{l}_{i,j}$	der Tagestiefstkurs des Wertpapiers j zum Tag i
\emptyset	die leere Menge
\mathbb{N}	die Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	die Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^N	die Menge der reellen N -dimensionalen Vektoren
$\mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$	die Menge der reellen $N_1 \times N_2$ -dimensionalen Matrizen, mit $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$
\mathbb{R}_+	die Menge der positiven reellen Zahlen
N	die Anzahl der Wertpapiere im Portfolio
P	die Datenmatrix, die alle Datenpunkte als Spalten enthält
q	der Hurwicz-Parameter
Q	die Strukturmatrix des volumenminimalen Ellipsoids der Vorinformationen
r	eine positive reelle Zahl
r_i	die Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit aller Wertpapier zum Tag i
$r_{i,j}$	die Rendite mit der höchsten Zugehörigkeit vom Wertpapier j zum Tag i
R_i	der Renditen- bzw. Schwerpunktvektor des Tages i
\tilde{R}_i	die unscharfe Renditen des Tages i
\tilde{R}_j^k	die unscharfe k -Tage-Durchschnittsrendite des Wertpapiers j
\tilde{R}_P^k	die unscharfe k -Tage-Portfolio-Durchschnittsrendite
R^*	der Portfolio-Rendite maximierende Renditenvektor innerhalb eines gegebenen α -Schnitts
R_*	der Portfolio-Rendite minimierende Renditenvektor innerhalb eines gegebenen α -Schnitts
α	eine reelle Zahl
β	eine reelle Zahl
λ	der Lagrange-Parameter oder eine reelle Zahl
λ_E	der Trade-Off als Kompensationsverhältnis zwischen Varianz und Rendite
λ_k	der kleinste Eigenwert
λ_U	der Trade-Off als Kompensationsverhältnis zwischen Rendite und Unschärfe
λ_V	der Trade-Off als Kompensationsverhältnis zwischen Rendite und Varianz
μ	die Erwartungsrenditen als Spaltenvektor
Ω	eine Grundmenge
ω	ein Element aus einer gegebenen Grundmenge
π	die Kreiszahl
Σ	die Kovarianzmatrix
σ	die Standardabweichung
τ	eine reelle Zahl
ζ	eine reelle Zahl
T	die Anzahl der Perioden(meistens Tage)
X	Im Kapitel 2: Zufallsvariable. In übrigen Kapitel: die Portfolio-Aufteilung.

$x_0^{\max,k}$	der Schwerpunkt der höchstmöglichen k -Tage-Durchschnittsrendite eines einzelnen Wertpapiers
$x_0^{\min,k}$	der Schwerpunkt der kleinstmöglichen k -Tage-Durchschnittsrendite eines einzelnen Wertpapiers
$\nabla_x(\bullet)$	die Ableitung von \bullet nach x in Spaltenschreibweise
$\det \bullet$	die Determinante der Matrix \bullet
$\exp(\bullet)$	der Funktionswert aus der Exponentialfunktion zur Basis e an der Stelle \bullet
bzw. e^\bullet	
$\Gamma(\bullet)$	der Funktionswert der Γ -Funktion an der Stelle \bullet
\bullet^{-1}	die inverse Matrix bzw. die inverse Funktion von \bullet
$\mathcal{L}(\bullet)$	die Lagrange-Funktion abhängig von \bullet
\bullet_{LR}	Zeigt an, dass \bullet eine unscharfe Zahl von LR-Typ ist.
\bullet_P	Zeigt an, dass die Größe \bullet sich auf das ganze Portfolio bezieht.
$\text{spur}(\bullet)$	die Spur der Matrix \bullet
$\tilde{\bullet}$	Zeigt an, dass \bullet eine unscharfe Menge oder eine unscharfe Zahl ist.
\bullet^T	der transponierte Vektor bzw. die transponierte Matrix von \bullet
$x_0(\bullet)$	die erste Komponente des Schwerpunkts von \bullet
$y_0(\bullet)$	die zweite Komponente des Schwerpunkts von \bullet
$f_{\tilde{\bullet}}$	die Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{\bullet}$
$L_{\tilde{\bullet}}$	linker Teil der Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl $\tilde{\bullet}$ vom LR-Typ
$R_{\tilde{\bullet}}$	rechter Teil der Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Zahl $\tilde{\bullet}$ vom LR-Typ

Anhang C

Abbildungsverzeichnis

2.1	Modellierung	4
5.1	Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Rendite	27
5.2	Schwerpunkt einer normierten unscharfen Zahl	33
5.3	Zugehörigkeitsfunktion eines Ziels	37
5.4	Logistische Funktion	40
6.1	Zweidimensionale α -Schnitte	52
7.1	Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesrendite), Teil 1	77
7.2	Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesrendite), Teil 2	78
7.3	Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesschwerpunkte), Teil 1	79
7.4	Effizienzlinien nach klassischem Modell(Tagesschwerpunkte), Teil 2	80
7.5	Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesrendite), Teil 1	88
7.6	Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesrendite), Teil 2	89
7.7	Quadratische Q -Norm(Tagesrendite), Teil 1	90
7.8	Quadratische Q -Norm(Tagesrendite), Teil 2	91
7.9	Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesschwerpunkte), Teil 1	93
7.10	Effizienzlinien nach Hauptmodell(Tagesschwerpunkte), Teil 2	94
7.11	Quadratische Q -Norm(Tagesschwerpunkte), Teil 1	95
7.12	Quadratische Q -Norm(Tagesschwerpunkte), Teil 2	96

Anhang D

Tabellenverzeichnis

7.1	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$	81
7.2	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$	82
7.3	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$	83
7.4	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$	84
7.5	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$	85
7.6	Ergebnisse nach klassischem Modell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$	86
7.7	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$	98
7.8	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$	99
7.9	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesrenditen als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$	100
7.10	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{9} \approx 1,9467$	101
7.11	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{7\sqrt{7}-1}{18} \approx 0,9733$	102
7.12	Ergebnisse nach Fuzzy-Hauptmodell mit Tagesschwerpunkten als Input und Trade-Off= $l_u = \frac{2}{3}$	103

Literaturverzeichnis

- [AB08] APPADOO, S. S. ; BECTOR, C. R.: Application of possibility theory to investment decisions. In: *Fuzzy Optimization and Decision Making* 7 (2008), S. 35–57
- [AGS02] ARNOLD, Bernhard F. ; GRÖSSL, Ingrid ; STAHLACKER, Peter: The minimax, the minimin, and the Hurwicz adjustment principle. In: *Theory and Decision* 52 (2002), S. 233–260
- [BG93] BANDEMER, Hans ; GOTTWALD, Siegfried: *Einführung in Fuzzy-Methoden*. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Berlin : Akademie Verlag, 1993. – ISBN 0–631–15381–0
- [Böh93] BÖHME, Gert: *Fuzzy-Logik Einführung in die algebraischen und logischen Grundlagen*. München : Springer Verlag, 1993. – ISBN 3–540–56658–9
- [Boy09] BOYD, Stephen P.: *Convex Optimization*. 7th printing with corrections. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. – ISBN 0–521–83378–7
- [Bör] BÖRSE ONLINE: *Historische Kurse*. <http://www.boerse-Online.de/kurse-tools/historische-kurse>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [BS08] BODNAR, Taras ; SCHMID, Wolfgang: Estimation of optimal portfolio compositions for Gaussian returns. In: *Statistics and Decisions* 26 (2008), S. 179–201
- [BS09] BODNAR, Taras ; SCHMID, Wolfgang: Econometrical analysis of the sample efficient frontier. In: *The European Journal of Finance* 15 (2009), S. 317–335
- [Bun] BUNDESMINISTERIUM DER JUSTIZ (Hrsg.): *Aktiengesetz*. <http://bundesrecht.juris.de/aktg/index.html>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [BZ70] BELLMAN, Richard E. ; ZADEH, Lotfi A.: Decision-making in a fuzzy environment. In: *Management Science* 17 (1970), Nr. 4, S. 141–164
- [CF01] CARLSSON, Christer ; FULLÉR, Rober: On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers. In: *Fuzzy Sets and Systems* 122 (2001), S. 315–326
- [CFM02] CARLSSON, Christer ; FULLÉR, Rober ; MAJLENDER, Péter: A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score. In: *Fuzzy Sets and Systems* 131 (2002), S. 13–21
- [Che98] CHENG, Ching-Hsue: A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method. In: *Fuzzy Sets and Systems* 95 (1998), S. 307–317
- [CL05] CHEN, Yan-Ju ; LIU, Yan-Kui: Portfolio Selection in Fuzzy Environment. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics* Bd. 5. Guangzhou, China : IEEE, 2005, S. 2694–2699

- [Deu] DEUTSCHE BÖRSE AG: *Homepage der Börse Frankfurt*. <http://boerse-frankfurt.com>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [DP80] DUBIOS, Didier J. ; PRADE, Henri M.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York : Academic Press, 1980. – ISBN 0–12–222750–6
- [DP87] DUBIOS, Didier J. ; PRADE, Henri M.: The Mean Value of A Fuzzy Number. In: *Fuzzy Sets and Systems* 24 (1987), S. 279–300
- [DS10] DUAN, Li ; STAHLCKER, Peter: Ein Ansatz zur Portfoliotheorie mit unscharfen Parametern. In: *Beiträge aus dem Institut für Statistik und Ökonometrie, Diskussionspapier* 86 (2010), S. 1–20
- [Fra] FRANKFURTER ALLGEMEINE ZEITUNG: *Börsenlexikon*. <http://boersenlexikon.faz.net/>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [GLS93] GRÖTSCHEL, Martin ; LOVÁSZ, László ; SCHRIJVER, Alexander: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. 2., corrected edition. Berlin : Academic Press, 1993. – ISBN 3–540–56740–2
- [Hei92] HEILPERN, Stanislaw: The Expected Value of a Fuzzy Number. In: *Fuzzy Sets and Systems* 47 (1992), S. 81–86
- [HS03] HAUENSCHILD, Nils ; STAHLCKER, Peter: Nash-Equilibria in a Heterogeneous Oligopoly with Fuzzy Information. In: *Review of Economic Design* 8 (2003), S. 165–184
- [Hua06] HUANG, Xiaoxia: Credibility Based Fuzzy Portfolio Selection. In: *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Vancouver, BC, Canada : IEEE, July 2006, S. 159–163
- [Hua07] HUANG, Xiaoxia: Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information. In: *European Journal of Operational Research* 180 (2007), S. 396–405
- [Hua08] HUANG, Xiaoxia: Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. In: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (2008), S. 1096–1101
- [Ida03] IDA, M.: Portfolio Selection Problem with Interval Coefficients. In: *Applied Mathematics Letters* 16 (2003), S. 709–713
- [IR00] INUIGUCHI, Masahiro ; RAMÍK, Jaroslav: Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem. In: *Fuzzy Sets and Systems* 111 (2000), S. 3–28
- [IT00] INUIGUCHI, Masahiro ; TANINO, Tanino: Portfolio Selection under Independent Possibilistic Information. In: *Fuzzy Sets and Systems* 115 (2000), S. 83–92
- [Kat63] KATAOKA, Shinji: A Stochastic Programming Model. In: *Econometrica* 31 (1963), S. 181–196
- [Kha96] KHACHYAN, Leonid G.: Rounding of Polytopes in the Real Number Model of Computation. In: *Mathematics of Operations Research* 21 (1996), S. 307–320

- [Kön08] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1*. 6., durchgesehene Auflage. Berlin : Springer Verlag, 2008. – ISBN 3–540–66153–0
- [KT93] KHACHIYAN, Leonid G. ; TODD, Michael J.: On the Complexity of Approximating the Maximal Inscribed Ellipsoid for a Polytope. In: *Mathematical Programming* 61 (1993), S. 137–159
- [Kuc00] KUČHTA, Dorota: Fuzzy capital budgeting. In: *Fuzzy Sets and Systems* 111 (2000), S. 367–385
- [Kum05] KUMAR, E. A. Piyush und Yilidrim Y. Piyush und Yilidrim: Minimum-Volume Enclosing Ellipsoids and Core Sets. In: *Journal of Optimization Theory and Applications* 126 (2005), Nr. 1, S. 1–21
- [LL08] LI, Pingke ; LIU, Baoding: Entropy of Credibility Distributions for Fuzzy Variables. In: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (2008), S. 123–129
- [LLV02] LEÓN, T. ; LIERN, V. ; VERCHER, E.: Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach. In: *European Journal of Operational Research* 139 (2002), S. 178–189
- [LP02] LANGDON, William B. ; POLI, Riccardo: *Foundations of genetic programming: with 12 tables*. 1 edition. Berlin : Springer Verlag, 2002. – ISBN 3–540–42451–2
- [LWJ⁺02] LAI, K.K. ; WANG, S.Y. ; J.P., Xu ; S.S., Zhu ; FANG, Y.: A Class of Linear Interval Programming Problems and Its Application to Portfolio Selection. In: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (2002), Nr. 6, S. 698–703
- [LX07] LI, J. ; XU, J.P.: A Class of Possibilistic Portfolio Selection Model with Interval Coefficients and Its Application. In: *Fuzzy Optimization and Decision Making* 6 (2007), S. 123–137
- [LYK02] LIU, Baoding ; YIAN-KUI, Liu: Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models. In: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (2002), S. 445–450
- [Mar52] MARKOWITZ, Harry M.: Portfolio Selection. In: *Journal of Finance* 7 (1952), Nr. 1, S. 77–91
- [Mar89] MARKOWITZ, Harry M.: *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Reprint. Oxford : Blackwell, 1989. – ISBN 0–631–15381–0
- [Mar08] MARKOWITZ, Harry M.: *Portfolio Selection: die Grundlagen der optimalen Portfolio-Auswahl*. 1.Auflage. München : FinanzBuch-Verlag, 2008. – ISBN 3–898–79118–1
- [Mat] MATHWORKS: *Matlab File Exchange*. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [Mey95] MEYERS, L.: *Meyers Grosses Taschen Lexikon in 24 Bänden*. 5., überarbeitete Auflage. Mannheim : Bibliographisches Institut, 1995. – ISBN 3–411–11245–X

- [MMMN08] MA, Jian ; MAKAROV, Yuri V. ; MILLER, Cail H. ; NGUYEN, Tony B.: Use Multi-Dimensional Ellipsoid to Monitor Dynamic Behavior of Power Systems Based on PMU Measurement. In: *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century*. Pittsburgh, PA, USA : IEEE, July 2008, S. 1–8
- [Mos] MOSHTAGH, Nima: *Minimum Volum Enclosing Ellipsoid Algorithmus*. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/9542>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [Neu01] NEUHAUS, Georg: *Kursskript: Mathematische Stochastik*. 2001
- [Nis97] NISSEN, Volker: *Einführung in evolutionäre Algorithmen: Optimierung nach dem Vorbild der Evolution*. Braunschweig : Vieweg Verlag, 1997. – ISBN 3-528-05499-9
- [NN06] NIEDERMAYER, Andras ; NIEDERMAYER, Daniel: Applying Markowitz’s Critical Line Algorithm. In: *Universität Bern, Department of Economics, Diskussionspaper* (2006)
- [Ort06] ORTLIEB, Claus-Peter: *Vorlesungsskript: Mathematische Modellierung und Simulation*. 2006
- [PBS05] PODDIG, Thorsten ; BRINKMANN, Ulf ; SEILER, Katharina: *Portfoliomanagement: Konzepte und Strategien: Theorie und praxisorientierte Anwendungen mit Excel*. 1. Auflage. Bad Soden/Ts. : Uhlenbruch Verlag, 2005. – ISBN 3-933-20750-9
- [PMT05] PENG, Jin ; MOK, Henry M. ; TSE, Wai-Man: Credibility Programming Approach to Fuzzy Portfolio Selection Problems. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics* Bd. 4. Guangzhou, China : IEEE, August 2005, S. 2523–2528
- [PTU01] PARRA, M.Arenas ; TEROL, A. B. ; URÍA, M.V. R.: A Fuzzy Goal Programming Approach to Portfolio Selection. In: *European Journal of Operations Research* 133 (2001), S. 287–297
- [Ram98] RAMASWAMY, Srichander: Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory. In: *BIS Working Papers* 59 (1998)
- [Roy52] ROY, Andrew D.: Safety First and the Holding of Assets. In: *Econometrica* 20 (1952), S. 355–370
- [SAG99] STAHLCKER, Peter ; ARNOLD, Bernhard F. ; GRÖSSL, Ingrid: Monopolistic Competition and Supply Behaviour under Fuzzy Price Information. In: *Homo oeconomicus XV(4)*. Die Schriftenreihe des Münchner Instituts für Integrierte Studien 35 (1999), S. 561–580
- [Sch03] SCHNEDLER, Philip: *Der Nutzen aktiver Portfoliostrategien: Prognosemodelle für den Aktien- und Bondmarkt*, Universität St. Gallen, Diss., 2003
- [Sch09] SCHOPF, Michael: *Aktives und passives Portfoliomanagement für Asset Manager*. 1. Auflage. Hamburg : IGEL Verlag GmbH, 2009 (Recht - Wirtschaft - Steuern). – ISBN 978-3-86815-213-5
- [SF03] SUN, Peng ; FREUND, Robert M.: Computation of Minimum Volume Covering Ellipsoids. In: *Operations Research* 52 (2003), Nr. 5, S. 690–706

- [SHF94] SCHÖNEBURG, Eberhard ; HEINZMANN, Frank ; FEDDERSEN, Sven: *Genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien: eine Einführung in Theorie und Praxis der simulierten Evolution*. 1. Auflage. Bonn : Addison-Wesley Verlag, 1994. – ISBN 3–89319–493–2
- [SS09] SANDER, Philip ; STAHLCKER, Peter: Ultimatum Games and Fuzzy Information. In: *Statistical Inference, Econometric Analysis and Matrix Algebra*. Heidelberg : Physica-Verlag, 2009, S. 395–410. – Festschrift in Honour of Götz Trenkler
- [TG99] TANAKA, Hideo ; GUO, Pei J.: Portfolio selection based on upper and lower exponential possibility distributions. In: *European Journal of Operational Research* 114 (1999), S. 115–126
- [TGT00] TANAKA, Hideo ; GUO, Pei J. ; TÜRKSEN, I. B.: Portfolio Selection Based on Fuzzy Probabilities and Possibility Distributions. In: *Fuzzy Sets and Systems* 111 (2000), S. 387–397
- [The] THE NOBEL FOUNDATION: *The Official Website of the Nobel Prize*. <http://nobelprize.org>, Abruf: 7. September 2010. Online
- [TY07] TODD, Michael J. ; YIDIRIM, E. A.: On Khachiyan’s Algorithm for the Computation of Minimum Volume Enclosing Ellipsoids. In: *Discrete Applied Mathematics* 155 (2007), S. 1731–1744
- [VLK99] VAN LEEKWIJCK, Werner ; KERRE, Etienne E.: Defuzzification: criteria and classification. In: *Fuzzy Sets and Systems* 108 (1999), S. 159–178
- [Wat97] WATADA, Junzo: Fuzzy Portfolio Selection and Its Applications to Decision Making. In: *Tatra Mountains Mathematics Publication* 13 (1997), S. 219–248
- [WS02] WANG, Shou Y. ; SHANG, Zhu S.: On Fuzzy Portfolio Selection Problems. In: *Fuzzy Optimization and Decision Making* 1 (2002), S. 361–377
- [WYXC06] WANG, Ying-Ming ; YANG, Jian-Bo ; XU, Dong-Ling ; CHIN, Kwai-Sang: On the Centroids of Fuzzy Numbers. In: *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), S. 919–926
- [Zad65] ZADEH, Leonid A.: Fuzzy Sets. In: *Information and Control* 8 (1965), S. 338–353
- [ZE96] ZHU, L. P. ; ELISHAKOFF, I.: Derivation of Multi-Dimensional Ellipsoidal Convex Model for Experimental Data. In: *Mathematical and Computer Modelling* 24 (1996), Nr. 2, S. 103–114
- [Zim01] ZIMMERMANN, Hans-Jürgen: *Fuzzy Sets Theory and Its Applications*. 4. edition. Boston : Kluwer Academic Publishers, 2001. – ISBN 0–7923–7435–5