

**Inverse Modellierung
nichtlinearer Flachwassergezeiten und
ihre Anwendung auf ein Randmeer**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
im Fachbereich Geowissenschaften
der Universität Hamburg

Hamburg, im November 2003

vorgelegt von
Eifu Taguchi
aus Miyagi, Japan

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Geowissenschaften der
Universität Hamburg auf Grund der Gutachten von

1. Gutachter: Prof. Dr. W. Zahel
2. Gutachter: Prof. Dr. J. Sündermann

Rigorosum: 17. Dez. 2002

Prof. Dr. U. Bismayer

Dekan des Fachbereichs Geowissenschaften

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	9
1 Einführung	11
1.1 Inverse Methode	11
1.1.1 Stark restringierte adjungierte Methode	12
1.1.2 Statistische Methode	13
1.1.3 Vierdimensionale Datenassimilation	13
1.1.4 Representer Methode	14
1.1.5 Direkte Methode	15
1.1.6 Semi-implizite direkte bzw. adjungierte Methode	15
1.2 Inverse Methode	16
1.3 Inverse Methode in der Ozeanographie	16
1.3.1 Globales ozeanisches Zirkulationsmodell (GOCM)	16
1.3.2 Gezeitenmodell	18
2 Ableitung der Inversen Methode	22
2.1 Klassisches Verfahren	22
2.1.1 Flachwassergleichungen	22
2.1.2 Vertikal integrierte Flachwassergleichungen	23
2.1.3 Skalierung der vertikal integrierten Differentialgleichungen	24
2.2 Direkte Methode	26
2.2.1 Ursprung und Eigenschaften der Residuen	28
2.2.2 Maximum Likelihood Schätzung	29
2.2.3 Datenextrapolation	31
2.2.4 Nichtlineare Assimilation	32
2.2.5 Iterationsmethode des direkten Verfahrens	33
2.3 Schwach restringierte adjungierte Methode	38

2.3.1	Ermittlung der expliziten adjungierten Gleichungen	39
2.3.2	Ermittlung der semi-impliziten adjungierten Gleichungen	46
2.3.2.1	Semi-implizite adjungierte Gleichungen	51
2.3.2.2	Minimumsuche im K-dimensionalen euklidischen Vektorraum	54
2.4	Zusammenfassung	54
3	Zwillingsexperiment	56
3.1	Gezeiten auf dem Schelf und im Randmeer	56
3.2	Zwillingsexperiment für ein Rechteckbecken	57
3.2.0.3	Greensche Funktion: Verbreitung einer Dateninformation	61
3.2.0.4	Assimilation von zu 12 Stationen gehörigen Daten durch EDV, IDV und IAV	63
3.3	Zusammenfassung	66
4	Feldexperiment	85
4.1	Assimilation durch EDV	86
4.1.1	M_2 -Haupttide	87
4.1.2	Obertiden	91
4.2	Vergleich der durch EDV, IDV und IAV erzielten Ergebnisse	95
4.3	Zusammenfassung	96
4.4	Tabellen und Abbildungen	99
5	Schlußfolgerung	166

Abbildungsverzeichnis

3.1	Assimilationsorte des Rechteckbeckens	59
3.2	Linien gleicher Wasserstandsamplituden und Linien gleicher meridionalen Volumentransporte der M_2 , M_4 und M_6 aus Modell B bzw. aus Modell A	70
3.3	Linien gleicher Phase des Wasserstands und Linien gleicher Phase des meridionalen Volumentransports der M_2 , M_4 und M_6 aus Modell B bzw. aus Modell A	71
3.4	Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsdifferenzen und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_2 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV)	72
3.5	Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsdifferenzen und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_4 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV).	73
3.6	Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsdifferenzen und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_6 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV).	74
3.7	Phasen des Wasserstands der wahren und der durch EDV bzw. IDV erzeugten M_2 , M_4 bzw. M_6	75
3.8	Amplituden der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsgleichung der M_2 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV).	76
3.9	Amplituden der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsgleichung der M_4 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV).	77
3.10	Amplitude der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsgleichung der M_6 (datenbeeinflußt durch EDV bzw. IDV).	78
3.11	Phasen der meridionalen Transporte der wahren und der durch EDV bzw. IDV erzeugten M_2 , M_4 bzw. M_6	79
3.12	Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportdifferenzen sowie der Residuen M_2 (datenbeeinflußt durch IAV).	80

3.13	Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportsdifferenzen sowie der Residuen M_4 (datenbeeinflusst durch IAV).	81
3.14	Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportsdifferenzen sowie der Residuen M_6 (datenbeeinflusst durch IAV).	82
3.15	Phasen des Wasserstandes und des meridionalen Volumentransportes der wahren und der durch IAV erzeugten M_2, M_4 bzw. M_6	83
3.16	Amplituden der meridionalen Impulsgleichungsresiduen und der mit der Schwerebeschleunigungsdifferenz multiplizierten Druckgradienten.	84
4.1	Assimilationspunkte	115
4.2	Referenzpunkte	116
4.3	Linien gleicher Amplitude der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_2	117
4.4	Linien gleicher Amplitude der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_4	118
4.5	Linien gleicher Amplitude der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_6	119
4.6	Linien gleicher Phase der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_2	120
4.7	Linien gleicher Phase der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_4	121
4.8	Linien gleicher Phase der klassisch bzw. datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_6	122
4.9	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_2	123
4.10	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_4	124
4.11	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Wasserstände der M_6	125
4.12	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_2	126
4.13	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_4	127
4.14	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflusst ermittelten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_6	128
4.15	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der Wasserstände der M_2	129

4.16 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der Wasserstände der M_4 130

4.17 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der Wasserstände der M_6 131

4.18 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der adjungierten Residuen der Massenerhaltungsgleichung 132

4.19 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 133

4.20 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten zonalen Geschwindigkeiten der M_4 134

4.21 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten zonalen Geschwindigkeiten der M_6 135

4.22 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_2 . . . 136

4.23 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_4 . . . 137

4.24 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_6 . . . 138

4.25 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der zonalen Geschwindigkeiten der M_2 139

4.26 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der zonalen Geschwindigkeiten der M_4 140

4.27 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der zonalen Geschwindigkeiten der M_6 141

4.28 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der adjungierten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_2 142

4.29 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 143

4.30 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 144

4.31 Linien gleicher Amplitude der datenbeeinflußt ermittelten meridionalen Geschwindigkeiten der M_6 145

4.32 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_2 146

4.33 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_4 147

4.34 Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der datenbeeinflußt ermittelten Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_6 148

4.35	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der meridionalen Geschwindigkeiten der M_2	149
4.36	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der meridionalen Geschwindigkeiten der M_4	150
4.37	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der Differenzen der meridionalen Geschwindigkeiten der M_6	151
4.38	Linien gleicher Amplitude und Linien gleicher Phase der adjungierten Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_2	152
4.39	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_2	153
4.40	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_4	154
4.41	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_6	155
4.42	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_2	156
4.43	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_4	157
4.44	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_6	158
4.45	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_2	159
4.46	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_4	160
4.47	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_6	161
4.48	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_2	162
4.49	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_4	163
4.50	Linien gleicher Amplitude des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_6	164
4.51	Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Wellendriftterme der Massenhaltungsgleichung	165

Tabellenverzeichnis

3.1	Normierte mittlere quadratische Abweichungen	61
3.2	Verbesserung des Wasserstands, der zonalen und der meridionalen Geschwindigkeiten durch δ -forcing der Daten	63
3.3	Verbesserung des Wasserstands und der Geschwindigkeiteskomponen- ten bei Anwendung der verschiedenen Datenassimilationsmethoden .	64
3.4	Vergleich der harmonischen Konstanten des Wasserstands der M_2 , M_4 und M_6 von verschiedenen Modellen	67
4.1	Gezeitenkonstanten der M_2 an Station 1 bis 42 (HAMSOM und EDV)	100
4.2	Gezeitenkonstanten der M_2 an Station 43 bis 79 (HAMSOM und EDV)	101
4.3	Gezeitenkonstanten der M_4 (HAMSOM und EDV)	102
4.4	Gezeitenkonstanten der M_6 (HAMSOM und EDV)	103
4.5	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 zwischen Messungen und klassischen Modellen an den Stationen 1–42	104
4.6	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 zwischen Messungen und klassischen Modellen an den Stationen 43–79	105
4.7	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_4 zwischen Messungen und klassischen Modellen	106
4.8	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_6 zwischen Messungen und klassischen Modellen	107
4.9	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 (IAV, IDV, EDV) an den Stationen 1-42.	108
4.10	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 (IAV, IDV, EDV) an den Stationen 43-79.	109
4.11	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_4 (IAV, IDV, EDV). .	110
4.12	Differenzen der Amplitude und der Phase der M_6 (IAV, IDV, EDV). .	111
4.13	Verbesserung des Wasserstands der M_2 Gezeiten (EDV).	112
4.14	Verbesserung des Wasserstands der M_4 , M_6 (EDV).	112
4.15	Verbesserung des Wasserstands der M_2 Gezeiten (IDV).	113

4.16	Verbesserung des Wasserstands der M_4, M_6 Gezeiten (IDV).	113
4.17	Verbesserung des Wasserstands der M_2 Gezeiten (IAV).	114
4.18	Verbesserung des Wasserstands der M_4, M_6 Gezeiten (IAV).	114

Kurzfassung

Die nichtlinearen Effekte langer barotropen Wellen in den Flachwassergebieten insbesondere der Keltischen und Irischen See werden am Beispiel der astronomischen M_2 -Gezeit und ihrer ersten beiden Obertiden (M_4, M_6) untersucht.

Zur Nutzung vorhandener Gezeitendaten für eine adäquate Reproduktion der gezeitenbedingten Druck- und Bewegungsfelder werden verschiedene Inverse Methoden eingesetzt, die zur Behandlung der nichtlinearen Gezeitendynamik entwickelt bzw. weiterentwickelt worden sind. Bei diesen Methoden handelt es sich um das semi-implizite bzw. explizite direkte Verfahren und um das implizite adjungierte Verfahren, die mit der Gezeitendynamik als schwacher Zwangsbedingung eine Anwendung auf Aufgabestellungen hoher Dimension zulassen.

Alle drei Methoden sind im Sinne der Minimumvarianzschätzung formuliert, und als numerische Lösungsmethode der sich ergebenden Differenzgleichungen wird von der Methode der konjugierten Gradienten Gebrauch gemacht, die sich als besonders speicherplatzsparend formulierbar erweist.

Die hohe Dimension des benutzten Randmeermodells ($> 10^6$), die komplexe Topographie des Untersuchungsgebietes und die schwer a priori abschätzbaren Modelldefizite erfordern zur Einschätzung der Wirksamkeit der bereitgestellten inversen Modelle die Durchführung von Modellexperimenten unter vereinfachten, leichter analysierbaren Bedingungen. Daher wurden Zwillingsexperimente bei vorgegebenem Modelldefizit für ein halboffenes Rechteckbecken konstanter Tiefe vorgenommen. Die Abmessungen des Rechteckbeckens entsprechen jenen des zu behandelnden natürlichen Meeresgebietes. Bei Assimilation einer beschränkten Anzahl vom klassischen Modell ohne künstliches Modelldefizit erzeugter Daten gelingt es, mit allen drei Methoden eine gute Reproduktion der als exakt definierten Modellergebnisse zu erzielen, d.h. die Wirkung des künstlichen Modelldefizits durch die Einführung von punktuellen exakten Wasserstandswerten gut auszugleichen. Voraussetzung für die wirksame Anwendung der Datenassimilationsmethoden ist dabei eine geeignete Gewichtung der Bestandteile des quadratischen Minimierungsfunktional. Insbesondere die Gewichtung der benutzten ersten und zweiten Modellresiduumsdifferenzen, die Eigenschaften der Modellfehlerkovarianz darstellen, mußte noch untersucht werden und konnte hinsichtlich der Güte der Ergebnisse und der Konvergenzeigenschaften der Verfahren optimiert werden. Der geringere räumliche Maßstab der Obertiden erfordert für einen wirksamen Ausgleich des sie beeinflussenden Modelldefizits häufig eine lokale Hinzunahme von Daten. Während mit allen drei Methoden gleicherma-

ßen vielversprechende dateninduzierte Korrekturen der simulierten Wasserstände und Geschwindigkeiten sowohl der M_2 als auch der Obertiden erzielt werden, zeigen sich in den mit der Datenassimilation verknüpften Modellresiduen erhebliche Unterschiede. Insbesondere bei Anwendung der neuentwickelten nichtlinearen EDV-Methode ergibt sich das in diesem Modellexperiment bekannte Modellresiduum mit hoher (M_2) bzw. zufriedenstellender (M_4) Genauigkeit, so daß bei Anwendungen auf reale Meeresgebiete vor allem von dieser Methode erzeugte Modellresiduen eine unmittelbare physikalische Interpretierbarkeit erwarten lassen.

In den Datenassimilationsexperimenten zur Reproduktion der M_2 -Gezeit und ihrer wichtigsten Obertiden im Gebiet der Keltischen und Irischen See erweisen sich für alle drei Methoden die Modellresiduen bzw. adjungierten Modellresiduen unabhängig von ihrem unterschiedlichen Charakter als gute Indikatoren für eine gelungene Assimilation der Wasserstandsdaten. Mit den im Zwillingsexperiment abgeschätzten Parametern gelingt mit allen Methoden eine ausnahmslos deutliche Verbesserung der modellerzeugten Gezeitenfelder gegenüber den ohne Dateneinfluß auf klassische Weise ermittelten Feldern, wenn der Vergleich mit allen verfügbaren Beobachtungen zugrundegelegt wird. Eine Analyse der Feldkorrekturen ergibt als Schwachstellen der klassischen Lösung die Darstellung der nichtlinearen Wechselwirkung, der Bodentopographie und der Resonanz. Der Vergleich der datenbeeinflußt erzielten Ergebnisse mit jenen, die von anderen Autoren in jüngerer Zeit durch Anwendung vergleichsweise hoch aufgelöster klassischer Modelle ermittelt wurden, bestätigt die Leistungsfähigkeit der verwendeten Methoden.

Besonders die erfolgreiche Anwendung der zur Erfassung der nichtlinearen Gezeitendynamik neu formulierten impliziten Methode verspricht auf Grund der geringen Anforderungen dieser Methode an Rechenzeit und Speicherplatz ihn gute Einsetzbarkeit bei Datenassimilationsproblemen hoher Dimension, wie sich z.B. bei der Modellierung der globalen ozeanischen Zirkulation auftreten.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Inverse Methode

Im allgemeinen gelingt es nicht, die Physik der Meeresbewegungen im realen Ozean durch eine wie auch immer geartete Modellsimulation exakt zu bestimmen. Stets müssen Vereinfachungen bei der Darstellung der Topographie des Meeresgebietes und in den hydrodynamischen Gleichungen vorgenommen werden, etwa hinsichtlich der Parameterisierung der Wirkung des Windfeldes und der ozeanischen Turbulenz. Abgesehen von Näherungen dieser Art, gelingt es wegen beschränkt zur Verfügung stehender Rechnerressourcen nur bedingt, das so definierte Differentialgleichungssystem mit hoher Genauigkeit numerisch zu lösen.

Mit der im letzten Jahrzehnt stark angewachsenen Menge zunehmend zuverlässigerer Meßdaten wurden Versuche unternommen, diese Daten im Sinne einer inversen Modellierung mit der gegebenen unvollständigen Modelldynamik zu kombinieren. Dabei muß beachtet werden, daß nicht nur die zu verwendenden Modelle Defizite bei der Beschreibung der realen Prozesse aufweisen, sondern daß auch die Daten in unterschiedlicher Weise mit Fehlern behaftet sind. Die Größe der zu analysierenden Felder, die leicht mehr als eine Million Elemente enthalten können, erfordert zudem höchst effektive auf die Beschränktheit rechnerischer Ressourcen zugeschnittene mathematische Methoden zur Behandlung der Datenassimilationsproblematik.

So bleiben nach der Verfassers Meinung für die Bearbeitung umfassenderer inverser Problemstellungen die nachstehend aufgeführten Verfahren übrig.

Stark restringierte adjungierte Methode (Le Dimet and Talagrand, 1986).

SEEK statistische Methode (Pham et al., 1998).

VCA vierdimensionale Datenassimilation (Derber, 1989).

Representer Methode (Bennett, 1992).

Direkte Methode (Zahel, 1991).

Semi-implizite direkte Methode (vorliegende Arbeit, 2002).

Semi-implizite schwach restringierte adjungierte Methode (vorliegende Arbeit, 2002).

Die beiden erstgenannten Methoden setzen das jeweils verwendete Ozeanmodell als exakt, die übrigen setzen es als verbesserungsbedürftig voraus. Alle obigen Methoden sind dazu geeignet, sowohl zur Behandlung linearer als auch nichtlinearer ozeanischer Probleme (Gezeiten, Zirkulation, Meereschemie etc.) herangezogen zu werden. Die drei zuletzt genannten Methoden sind äußerst flexibel und erlauben es prinzipiell, sowohl die Gesamtheit der Feldvariablen als auch Parameter, wie die Koeffizienten von Austausch und Bodenreibung sowie Anfangswerte und Randbedingungen, simultan zu ermitteln und dabei durch eine Residuenanalyse den Zugang zu der implizit durch die Daten korrigierten Modellphysik zu eröffnen.

Im Anschluß werden kurz die Vor- und Nachteile aller genannten Verfahren im Vergleich skizziert und schließlich eine Begründung für den Vorrang der drei zuletzt genannten Methoden gegeben.

1.1.1 Stark restringierte adjungierte Methode

Als Parameter bei ansonsten exakt zu erfüllenden Modellgleichungen werden die Koeffizienten von Austausch und Bodenreibung, die Anfangswerte und Antriebe geschätzt. Das seit langem in der Meteorologie bekannte (Sasaki, 1969) Verfahren fordert darüberhinaus die Glattheit der Lösungen. Die optimale Trajektorie eines solchen Systems wird durch die Lagrange-Funktion definiert, die sich aus der Kostenfunktion und der mit den Lagrangeschen Multiplikatoren multiplizierten Modellgleichungen zusammensetzt.

Die Gradienten der Funktion nach einer Anfangsbedingung (Le Dimet and Talagrand, 1986) bzw. nach den Parametern (Tziperman and Thacker, 1989) wurden durch die Vorwärtsintegration der Modellgleichungen und die Rückwärtsintegration der adjungierten Gleichungen ermittelt. Im Fall zugrundeliegender nichtlinearer Differentialgleichungen müssen dabei die gesamten Variablenwerte gespeichert werden, um die Koeffizienten der adjungierten Gleichungen auswerten zu können. Die Gradienten der gesuchten Steuervariablen (Kontrollvariablen) und folglich das Minimum der Kostenfunktion und damit die optimale Lösung können so gefunden werden. Wird bei diesem Vorgehen ganz auf die Statistik verzichtet, was wegen der ansonsten weitgehend unbekanntenen Fehlerkovarianzmatrix der Daten und der Steuervariablen, aber auch wegen der hohen Inanspruchnahme von Speicherplätzen häufig praktiziert wird, gelingt es, diese Methode auch auf komplexe, aufwendige Fragestellungen anzuwenden.

Als Nachteil ist trotz der oft beträchtlichen Verringerungen der Anzahl der Unbekannten die mit der Ermittlung der optimalen Trajektorie verbundene zeitlich aufwendige Rückwärtsintegration der adjungierten Gleichungen anzusehen, wozu im Fall nichtlinearer Gleichungen die Last des erhöhten Speicherplatzbedarfs hinzutritt.

1.1.2 Statistische Methode

Eine statistische Analyse zeichnet sich dadurch vorteilhaft aus, daß durch sie Informationen aus verschiedenen Quellen kombiniert und deren Korrelationen benutzt werden können (Bratseth, 1986). Die Verfügbarkeit von Satellitendaten (Meeresoberflächentemperatur (SST), Meeresoberflächentopographie (SSH) und Oberflächenströme (SSC)) hat die Bedeutung der statistischen Methode erhöht.

Die theoretische Grundlage ist gegeben durch die Minimumvarianz der Schätzung (Daley, 1991). Es wird eine gewichtete Kombination von Vorhersage und Beobachtung benutzt, um die Zustandsvariablen im statistischen Sinne zu verbessern. Als Ergebnis erhält man die optimale Interpolation (OI). Die OI-Methode wird wegen des geringen Rechenzeitbedarfs, beispielsweise bei der Real-Time-Vorhersage von Küstenströmungen (Breivik and Sætra, 2001) und beim komplexen Modell der physikalischen und biologischen Wechselwirkung angewandt (Anderson et al., 2000). Im Fall dieser Anwendungen werden sowohl die Anfangswerte als auch bestimmte Parameter korrigiert.

Anders als die OI erfaßt der Kalman-Filter (KF) die zeitliche Entwicklung des Schätzfehlers des Zustandsvektors in einer Fehlerkovarianzmatrix, die in jedem Zeitschritt aktualisiert werden muß. Ein Vorteil gegenüber OI besteht in der gegebenen dynamischen Konsistenz auf Grund dessen, daß die Modellgleichungen ständig in die Datenassimilation einbezogen werden. Wird beim linearen KF die Fehlerstatistik durch die Normalverteilung festgelegt, dann ist der zukünftige Systemzustand eindeutig bestimmt. Als Nachteil muß angesehen werden, daß die KF zu ihrer Durchführung einen großen Aufwand an Rechnerleistungen erfordert. Hinzu kommt noch die weitgehend unbekannte Fehlerstatistik der Messungen, der Anfangsschätzungen und der Modelldynamik (Brasseur et al., 1999), sofern deren Fehlerstatistik nicht als Gaußisch angenommen werden kann. In diesem Fall erweist sich dann die Angabe der Anfangsmatrix der Fehlerkovarianz als schwierig.

Pham et al. (1998) reduzierten den Aufwand durch die Entwicklung des SEEK-Filters (Sequential Evolutive Extended Kalman Filters) beträchtlich und ermöglichten eine wirklichkeitsnahe Anwendung des Kalmanfilters auf Ozeanmodelle (Brasseur et al., 1999). Dabei wird die Anfangsmatrix der Fehlerkovarianzen vor der Assimilation von Daten durch SVD (Singular Value Decomposition) in die EOFs (Empirical Orthogonal Functions) zerlegt. Dann wird eine begrenzte Anzahl von EOFs ausgewählt, die die Festlegung der in ihrer Dimension erheblich reduzierten Kovarianzmatrix ermöglicht. Der Algorithmus kann außerdem auf nichtlineare Probleme so erweitert werden, daß das Verfahren auch für die Anwendung auf umfangreiche nichtlineare Probleme geeignet ist.

1.1.3 Vierdimensionale Datenassimilation

Die Wettervorhersage stellt ein Anfangsproblem dar und bedarf flächendeckender Messungen mit hoher Genauigkeit. Derartige Messungen stehen gewöhnlich nicht zur Verfügung, so daß spezielle mathematische Hilfsmittel herangezogen werden müssen.

Diese Art geeigneter mathematischer Hilfsmittel sind unter der Bezeichnung objektive Analysis bekannt. Diese Technik verbessert sowohl die Beobachtungen als auch Modellparameter. Ein Anwendungsbeispiel ist gegeben durch die Ermittlung des dreidimensionalen Temperatur- und Windfeldes durch Doppler-Radar-Geräte (Lin and Chai, 2001; Wüst et al., 2001).

Bei meteorologischen Anwendungen ist diese inverse Methode mit dem perfekten Modell als 'four-dimensional variational data assimilation (4DVAR)' bezeichnet worden, da die Assimilation im 3-dimensionalen Raum und in der Zeit durchgeführt wird. 4DVAR kann zwar rein statistische Fehler in Daten bzw. im Modell (so in allen Parametern) eliminieren, hat jedoch die Tendenz, gegen die systematischen Fehler zu konvergieren (Lu and Browning, 1998). Bei der inversen Anfangsbedingung entsteht eine Unstetigkeit in zeitlicher Richtung, da das Modell außer bei $t = 0$ als exakt angenommen wird. Dies kann fatale Folgen nach sich ziehen.

Aus diesen Gründen hat Derber (1989) die VCA-Technik (Variational Continuous Assimilation Technique) entwickelt, die die Inexaktheit des Modells zuläßt.

Das Residuum setzt sich im Unterschied zur vorliegenden Arbeit aus der zeitlich abhängig vorgegebenen Funktion $\alpha(t)$ und aus der räumlich abhängigen Variablen $\lambda(x, y)$ zusammen. α bestimmt dabei die Verteilung des Residuums innerhalb des zeitlichen Intervalls. Damit spielt auch das Gewicht eine Rolle. Zu bestimmen sind dann nur die Gradienten jener Kostenfunktion J nach λ , die die gleiche Dimension wie die Anfangsbedingung besitzt. Dies führt zur Reduzierung des Speicherbedarfs und am Ende zu verschiedenen Optimierungstechniken wie dem Quasi-Newton-Verfahren.

Die Übertragung auf das vorliegende semi-implizite adjungierte Modell ist wegen des ähnlichen Ansatzes ohne große Schwierigkeiten möglich, was jedoch nicht gezeigt werden soll.

Der Vorteil des VCA-Verfahrens ist die kleine Zahl der Freiheitsgrade trotz der Berücksichtigung des Residuums. Sein Nachteil liegt in der im allgemeinen nicht bekannten zeitlichen Gewichtsfunktion $\alpha(t)$.

1.1.4 Representer Methode

Die Behandlung der Modelldefekte (schwach restringiert) kann im Sinne der Quadratminimierung bei gegebener Kostenfunktion, die durch die Modellresiduen und den Abstand von Modell und Daten definiert ist, vorgenommen werden (Bennett, 1992). Die Ermittlung der Modellvariablen und der Residuen erstreckt sich auf ein ganzes Zeitintervall (generalisierte Inverse). Dabei werden die Modellvariablen in einen klassischen Anteil und in einen Korrektur-Anteil zerlegt. Der letztgenannte Anteil setzt sich aus dem Koeffizientenvektor und der sich räumlich und zeitlich verändernden Representer Matrix-zusammen, die aus der Modelldynamik und der zusätzlich vorgegebenen Statistik (Dispersionsmatrix des Modells) bestimmt wird (Robinson et al., 1998).

Das Verfahren ist charakterisiert durch eine hohe Dimension der Representer-Matrix, deren Konstruktion Vorwärts- und Rückwärtsrechnungen mit den Modellgleichungen bzw. den adjungierten Gleichungen erfordert. Die dadurch bedingten extrem langen Rechenzeiten können als nachteilig bewertet werden.

Auf Anwendungen dieser Methode wird in einem späteren Abschnitt eingegangen werden.

1.1.5 Direkte Methode

In einer ersten Anwendung wurde die direkte Methode mit ungenauen Daten von Le Provost and Salmon (1986) für die datenkorrigierte Berechnung der Zirkulation der Labrador See eingesetzt. Dabei erfolgte die Ermittlung des geostrophisch balancierten Variablenfeldes durch die Minimierung eines Quadratfunktionals, das definiert war durch die zweiten Variablendifferenzen (Glattheitsforderung), durch den Abstand von Modell und Daten sowie die Modellgleichungen. Unter den gleichen Bedingungen wurde kürzlich die Berechnung der thermohalinen Zirkulation in der Fram Straße von Schlichtholz and Houssais (1999) vorgenommen.

Als in vieler Hinsicht verallgemeinerungsfähige inverse Methode wurde der direkte Ansatz von Zahel (1991) entwickelt und zur Berechnung der globalen Gezeiten eingesetzt, wie in späteren Abschnitten ausführlich dargestellt wird.

Die Anwendung der direkten inversen Methode beschränkt sich nicht auf Probleme der physikalischen Ozeanographie, sondern schließt auch Aufgabestellungen der Meeresbiologie und Meereschemie ein. So wurden von Natvik et al. (2001) Experimente zum stark nichtlinearen Zuwachs von Phyto- und Zooplankton bzw. Nährstoffs in zwei voll durchmischten Schichten durchgeführt.

Insgesamt ist die direkte Methode als ein das klassische Modell hervorragend ergänzendes anwendungsfreundliches Verfahren zu beurteilen.

1.1.6 Semi-implizite direkte bzw. adjungierte Methode

Die semi-implizite direkte und die semi-implizite adjungierte Methode werden als Ergänzung der expliziten direkten Methode Zahels (1991, 1995, 2000) zur rechenökonomischen Behandlung zeitabhängiger nichtlinearer Problemstellungen entwickelt.

Ziel ist eine wirkungsvolle Verarbeitung zunehmend verfügbar werdender umfangreicher Datensätze zur realitätsnahen Modellierung durch Flachwassereffekte und mesoskalige Wirbel bestimmter Bewegungsfelder.

Bei der Konzipierung wird die Eisetzbarkeit für langfristige Vorhersagen (Klimaänderungen) und die Erfassung des durch das Gesamtpotential bestimmten Gezeitensignals beachtet. Je nach Problemstellung können neben der verallgemeinerten expliziten direkten Methode dann die Vorteile der einen oder der anderen neu formulierten Methode genutzt werden. Vor der Anwendung der neuformulierten bzw. verallgemeinerten Methoden auf ein betreffendes reales ozeanisches Problem werden

sie unter kontrollierten Bedingungen, d.h. in einem fiktiven Szenarium mit vorgegebenen Modelldefekt, bekannten Lösungen und modellerzeugten Daten, hinsichtlich ihrer korrekten Formulierung und ihrer Leistungsfähigkeit getestet. Erst dann wird untersucht, welchen Beitrag sie zur Lösung einer realitätsnahen einige ihrer Möglichkeiten nutzenden Aufgabenstellung liefern können.

Es wird die M_2 -Gezeit mit ihren Obertiden im Gebiet der Keltischen und Irischen See unter Nutzung realer Pegeldaten modelliert, so daß die Anforderungen eines topographischen komplex strukturierten Gebietes mit ausgedehnten nichtlineare Effekte verursachenden Flachwassergebieten erfüllt werden müssen.

1.2 Inverse Methode

Im allgemeinen versteht man unter der inversen Methode die Schätzung einer unbekannt Ursache (Austausch, Randbedingungen etc.) durch bekannte Folgeerscheinungen (gemessene Wasserstände, konservative Tracer [z.B. Temperatur und Salzgehalt] bzw. nicht konservative Tracer [z.B. Sauerstoff, Silikat]) für ein Zirkulationsmodell (Robinson et al.,1998). So wird sie als Ergänzung zum klassischen Vorwärtsmodell benutzt.

Die bessere Reproduktion von Bewegungsfeldern durch Kombination der Daten mit den dynamischen Gleichungen wird in der Meteorologie als Assimilation bezeichnet (so z.B. Courtier and Talagrand, 1987). Das Hauptinteresse zielt dabei auf die Konstruktion möglichst genauer Anfangswerte.

1.3 Inverse Methode in der Ozeanographie

Die Zunahme immer präziser werdender sich auf die Meeresoberflächentopographie und die -temperatur beziehender Satellitendaten ermöglicht eine realistischere Darstellung der globalen Ozeanzirkulation (Yu and Malanotte-Rizzoli, 1998) bzw. der Gezeitenbewegungen (Egbert and Erofeeva, 2002). Neben der adjungierten Methode (Tziperman and Thacker, 1989) für das Zirkulationsmodell sind die Representer Methode (Bennett, 1992) und die Direkte Methode (Zahel, 1991) speziell für das regionale und globale Gezeitenmodell entwickelt worden. In den folgenden Abschnitten wird kurz die Entwicklung der in der Ozeanographie relevanten inversen Methode für GOCM und für das Gezeitenmodell dargestellt.

1.3.1 Globales ozeanisches Zirkulationsmodell (GOCM)

Vor nunmehr 20 Jahren vertraten (Wunsch and Minster, 1982) die Meinung, daß mit den verfügbaren und den zukünftig zu erwartenden Daten eine hinreichend genaue Bestimmung der allgemeinen Zirkulation im Meer praktisch unmöglich sei. Diese

Aussage trifft im Kern immer noch zu, obwohl sich Zahl und Umfang der Datensätze entgegen den Erwartungen deutlich erhöht haben.

Wegen der Dominanz des geostrophischen Gleichgewichts und damit einer vereinfachten Dynamik in mittleren Breiten war es naheliegend, daß erste Versuche zur Berücksichtigung von Daten in einem Zirkulationsmodell für das Gebiet des Nordatlantiks unternommen wurden.

Pionierarbeit leisteten Wunsch (1978) mit der Boxmethode und Stommel and Schott (1977) mit der Methode der β -Spirale. Wunschs Datengrundlage stellten die vom fahrenden Schiff gewonnenen Temperatur- und Salzgehaltsdaten dar. Die thermischen Windgleichungen dienten ihm als Modell zur simultanen Ermittlung der relativen geostrophischen Geschwindigkeiten und der Geschwindigkeiten des Referenzniveaus im gesamten geschlossenen westlichen Nordatlantik. Zur Vermeidung einer resultierenden singulären Matrix bei Annahme eines perfekten Modells (strong condition) (Bennett, 1992) waren Modellfehler zugelassen (weak condition).

Mit der Methode der β -Spirale werden die Geschwindigkeiten von Ort zu Ort ohne Berücksichtigung von Nachbarregionen aus dem lokalen horizontalen Dichtegradienten ermittelt. Die regelhafte Nichterfüllung der Massenerhaltung folgt aus dem lokalen Lösungsansatz (Olbers and Wenzel, 1989).

Neben der Nichterfüllung der Massenerhaltung im Großen treten bei der Box-Methode eine Reihe von weiteren Problemen auf, von denen die beiden wichtigsten kurz genannt werden sollen. Das Hauptproblem besteht darin, daß die zu lösenden linearen Gleichungen unterbestimmt bzw. rangdefizitär sind. Verfahren zur Behebung dieses Mangels zielen auf die Umwandlung der Problemstellung (Wunsch and Minster, 1982). So werden für die Minimierung des Quadratfunktionals a priori statistische Annahmen eingeführt und eine Singular Value Decomposition (SVD) einbezogen. Beide Maßnahmen haben sich als dafür geeignet erwiesen, unzuverlässige Dateninformationen herauszufiltern. Das zweite wesentliche Problem ergibt sich aus der zeitlich und örtlich unterschiedlichen Verfügbarkeit der sich auf verschiedene Größen beziehenden Daten. Dazu entwickelte Wunsch (1984, 1988a,b) das eclectic model, in dem z.B. die Referenzgeschwindigkeiten durch untere und obere Grenzen eingeschränkt sind. Damit sollte die durch mangelhafte hydrographische Daten und ebensolche Tracer-Daten verursachte Unterbestimmtheit beseitigt werden. Eine einfachere Lösung dieses Problems wird durch Anwendung des mathematischen Linear Programming geliefert (Schlitzer, 1989).

Wesentliche zu schätzende Parameter stellen bei der Modellierung der ozeanischen Zirkulation die Wärme- und Süßwasserflüsse an den Meeresoberfläche dar. Le Dimet and Talagrand (1986) formulierten eine zur Behandlung dieses Problems geeignete Extremalaufgabe. Die Reduzierung der Zahl der Unbekannten führt dann auf die adjungierte Methode, der bis in die Gegenwart große Bedeutung zukommt.

Zufolge der komplizierten Struktur der OGCMs wurde die adjungierte Methode zunächst auf die einfachen Ekman-Gleichungen angewandt (Yu and O'Brien, 1991), wobei die Windschub- und Austauschkoefizienten durch Nutzung von Messungen der Stromgeschwindigkeiten ermittelt wurden. Gleichzeitig wurde diese Technik für

Experimente mit den quasi-geostrophischen Gleichungen im Rechteckbecken eingesetzt (Tziperman and Thacker, 1989). Später wurden aus Satellitenmessungen abgeleitete Daten der Meeresoberflächentopographie (SSH) zur Assimilation herangezogen (Schröter et al, 1993). Die verwendeten quasigeostrophischen Gleichungen liefern für die mittleren Breiten realistische Zirkulationsmuster nicht jedoch für den äquatorialen Bereich, wo barokline Rossby- und Kelvin-Wellen die saisonale Variabilität der ozeanischen Zirkulation wesentlich bestimmen. Unter Zugrundelegung der linearisierten Flachwassergleichungen und der vierdimensionalen adjungierten Methode (strong condition) assimilierten Weaver and Anderson (1997) altimetrische SSH-Daten und ermittelten die Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung in den oberen Schichten des tropischen Pazifiks.

Erste Anwendungen der adjungierten Methode unter Zugrundelegung der primitiven Gleichungen (Cox-Ozeanmodell, 1984) basieren auf einer vereinfachten Dynamik (Tziperman et al. 1992a,b). Bessere den Beobachtungen nahe kommende Ergebnisse wurden von Yu and Malanotte-Rizzoli mit einem diagnostischen (1996) und einem prognostischen (1998) vollen nichtlinearen Modell erzielt. Der zu leistende Aufwand in diesem Fall eines stark nichtlinearen Optimierungsproblems ist hoch. So müssen zunächst gute Anfangswerte ermittelt (Sirkes et al., 1996) und alternative Suchverfahren wie Simulated Annealing verwendet werden.

Zur Vereinfachung der praktischen Handhabbarkeit der adjungierten Methode ist die automatische Erstellung des adjungierten Codes (Giering, 1995) realisiert worden, um Probleme der großskaligen Zirkulation leichter erfassen zu können. Eine Anwendung des so gewonnenen Codes erfolgte mit einem GOCM (Stammer et al., 2002) und hatte die Erforschung des Weltozeans zum Ziel. In den genannten Anwendungen der adjungierten Methode war ein genereller Modell-Defekt nicht zugelassen. Für die inverse Behandlung von Gezeitenproblemen müssen Modell-Defekte vorgesehen werden, wenn akzeptable datenbeeinflusste Lösungen erhalten werden sollen.

1.3.2 Gezeitenmodell

Die erste Kombination von Daten und Gezeitendynamik erfolgte vor 20 Jahren. In den beiden Arbeiten von Bennett and McIntosh/McIntosh and Bennett (1982/1984) wurde gezeigt, daß die Randbedingungen sowohl am festen als auch an offenen Rändern und die Zustandsvariablen der Partialtiden durch die von Küstenpegeln gelieferten Daten korrigiert werden können. Mit der Anwendung der Representer Methode wurde erstmals ein völlig neues Mittel zur Berücksichtigung von Dateninformationen in Modellen eingesetzt. Diese Methode lässt Fehler in Messungen, in Randbedingungen und vor allem im Modell selbst zu. Diese Fehler werden im Sinne der Minimierung eines Dateninformationen berücksichtigenden Quadratfunktionals berücksichtigt, wobei der Dateneinfluß durch Greensche Funktionen ausgedrückt wird.

Mit der zunehmenden Menge ozeanographischer Daten, vor allem der Satellitendaten, wird für ihre Nutzung eine grundlegende Weiterentwicklung der Datenassimila-

tionsmethoden erforderlich. Für die Gezeitendarstellung werden daher lineare Gleichungen verwendet und Lösungen im Frequenzraum gesucht, was zur Reduzierung der Zahl der Variablen führt (Bennett and McIntosh, 1982; McIntosh and Bennett, 1984). So führt Egbert et al. (1994) die TOPEX/POSEIDON Daten (T/P-Daten) in lineare barotrope Flachwassergleichungen ein und ermittelt unter Berücksichtigung aller bekannten Effekte vier Haupttiden (M_2 , S_2 , K_1 und O_1). Er reduziert dabei die Dimension der Representer Matrix dadurch, daß nur eine Teilmenge des gesamten Satellitendatensatzes genutzt wird.

Die Anwendung der Representer Methode bleibt im allgemeinen bei umfangreichen Datensätzen problematisch. So erfordert sie lange Rechenzeiten, da die Green'sche Funktion für jeden Datenpunkt ermittelt werden muß, wobei die linearisierten Flachwassergleichungen und deren adjungierte Gleichungen gelöst werden müssen. Egbert and Erofeeva (2002) eliminierten daher zunächst die Gezeitenströmungen aus den Impulsgleichungen und lösten die skalare Wellengleichung zweiter Ordnung im Frequenzraum durch Faktorisierung der Koeffizientenmatrix, was zur erheblichen Reduzierung der Rechenzeit führte. Das Resultat ist die Oregon State University Tidal Inversion Software (OTIS).

Im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode wurde die Representer Methode für den Südatlantik (Lyard, 1999) und für globale Gezeiten (Le Provost et al., 1998) entwickelt. Die Gitterauflösungen variieren von der Küste (ca. 10 km) bis hin zum Tiefenozean (ca. 200 km), um die Gezeiten auf dem Schelf und am Kontinentalabhangbereich besser erfassen zu können. Lyard benutzte eines durch Störungsansatz ermittelten linearisierten Bodenreibungsterm (quasi-linearisiertes harmonisches System), dessen Koeffizient a priori räumlich durch Assimilation ermittelt worden war. Eine Reproduktion der nichtlinearen Obertiden erfolgte nicht. Ferner wird die Representer-Methode sowohl zur Ermittlung der Werte am offenen Rand (Bogden and O'Donnel, 1998) als auch zur Auswertung der Oberflächenströmungen (SSC-Daten) durch HF-Radar (high frequency radar) (Scott et. al, 2000) verwendet.

Die mit Abstand effektivste inverse Methode für lineare globale Gezeiten wurde mit dem direkten Modell von Zahel (1991) entworfen. Dabei sind Fehler nur in den Impulsgleichungen erlaubt, da die meisten Ungenauigkeiten in Reibungs- bzw. in Austauschkoeffizienten und der Vernachlässigung von Wechselwirkungsprozessen mit nichtdargestellten baroklinen und nichtgezeitenbedingten barotropen Bewegungsvorgängen zu finden sind, und Massenerhaltung im allgemeinen weitgehend gewährleistet ist. Es benötigt wenig Rechenzeit und ist speicherplatzsparend, da es für den Frequenzraum formuliert werden kann und so die Zahl der Freiheitsgrade drastisch reduziert wird. Trotzdem verliert es dabei nicht seine Wirkung, denn was die Representer Methode an Möglichkeiten anbietet, wird auch weitgehend von dieser Methode geleistet.

Zahel führte ferner zum ersten Mal die explizite Fehlerkovarianzmatrix (1997) und numerisch vorteilhafter die Differenzen der Residuen (2000) zu einer besseren Darstellung der Modelldefizite ein. Ferner zog Zahel (1995) mit gravimetrischen Daten erstmals andere als sich unmittelbar auf die Feldvariablen beziehende Daten zur Assimilation heran und dokumentierte ihre Aussagekraft. Dieses Vorgehen hinsicht-

lich der Residuen führte zu einer besseren Verteilung der Dateninformation und schließlich zu signifikant besseren Ergebnissen.

Gekeler (1995) übertrug Zahels globales Dateneinfluß berücksichtigendes Modell auf ein Randmeer und bezog insbesondere die Methode der OI zu einer wirksamen dateninduzierten Korrektur der Werte am offenen Rand ein. Die verwendete lineare Dynamik erlaubte es nicht, zusammen mit den Daten den Einfluß der Nichtlinearitäten auf die lineare Gezeit in befriedigendem Maße zu erfassen.

Ray (2001) übernahm die von Zahel (1991, 1995) angewandte Methode im Frequenzraum und nutzte sie für die Assimilation von SSH-Daten der Satellitenmission T/P. Die zugrundeliegenden Differentialgleichungen sind linear und ohne Turbulenzterme. Anders als in den von Zahel durchgeführten Modellanwendungen ließ Ray Fehler in der Erfüllung der Kontinuitätsgleichung zu und führte nur Wasserstände als zu assimilierende Daten ein. Die Wasserstandsdaten in Rays Modell sind in jedem Gitterpunkt vorhanden, während Zahel nur etwa jeder 25. Gitterfläche Datenwerte zuordnet. Die Ergebnisse von Ray zeigen, daß durch die Daten tatsächlich eher Fehler in den Impulsgleichungen als in der Kontinuitätsgleichung ausgeglichen werden müssen.

Copeland and Bayne (1998) verwendeten die fiktiven Strom- und Wasserstandsdaten ¹ eines idealisierten Beckens in der schwach formulierten Kostenfunktion, die durch Optimierungstechnik minimiert werden konnte. Die Gradienten der gesamten zeitlichen und räumlichen Zustandsvariablen wurden aus den adjungierten Gleichungen gewonnen. Die so angewandte Methodik ähnelt der hier dargestellten und eingesetzten expliziten adjungierten Methode, wobei Copeland and Bayne die nichtlinearen Flachwasserterme und Glättungsterme außer Acht ließen und auf eine eingehende Analyse der Residuenfelder nichtlinearen Wechselwirkungen verzichteten. Unterschiede existieren außerdem in der Lösungsmethode. Copeland and Bayne ermittelten die extremalen Werte durch Minimierung der Kostenfunktion mit Hilfe der direkten Minimierungsmethode (Navon and Legler, 1987), mit der der Verfasser ebenfalls Untersuchungen vorgenommen hatte. Die Ergebnisse erwiesen sich im vorliegenden als nicht zufriedenstellend und sollen nicht erörtert werden. In der vorliegenden Arbeit wurden stattdessen die zugrundeliegenden Differentialgleichungen und deren adjungierte Gleichungen als ein zusammenhängendes System simultan behandelt. Die adjungierten Gleichungen stellen dabei die notwendigen Bedingungen für das Minimum der Kostenfunktion dar, die zusammen mit den zugrundeliegenden Differentialgleichungen exakt erfüllt werden müssen und nicht als Lieferanten der Gradienten der Kostenfunktion fungieren.

Außer den oben genannten Methoden zur Lösung des inversen Gezeitenproblems mit den Modellgleichungen als schwacher Zwangsbedingung finden noch folgende weitere Methoden Anwendung.

Seit 20 Jahren wird das HF-Radar für Messungen von Oberflächenströmungen und Wellenspektren benutzt (Essen et. al, 1999). Derartige Meßdaten sind zusammen mit Küstenpegeldaten in ein schwach restringiertes Gezeitenassimilationsmodell zur

¹die Strom- und Wasserstandsdaten wurden direkt durch das Modell gewonnen

Korrektur von Randwerten und Koeffizienten des Bodenreibungsterms im Gebiet des Dover Kanals eingeführt worden (Sentchev and Yaremchuk, 1999). Der quadratische Reibungsterm wurde dabei mit Hilfe eines Störungsansatzes entwickelt (quasi-lineares System). In diesem numerischen Experiment wurde die Minimierung der quadratischen Kostenfunktion durch die Augmented Lagrangian Multiplikator Method (Bertsekas, 1982 ; Le Dimet and Talagrand, 1986) erreicht.

Infolge der hohen Dissipationsrate auf dem Schelf ist dessen angemessene Darstellung in einem globalen Gezeitenmodell erforderlich. Mit der Nudging-Methode gelingt es, die nichtlinearen Flachwassergleichungen im Zusammenhang mit der Assimilation von Daten vergleichsweise einfach zu behandeln. Bei dieser Methode werden die gewichteten Datenresiduen, d.h. die Differenzen zwischen Datenwerten und Werten der entsprechenden Zustandsvariablen, den letztgenannten in den dynamischen Gleichungen hinzugefügt und so das dynamische Modell an die Beobachtungen herangeführt. Derartige Methoden, bei denen eine neue Näherung aus der vorhergehenden und den Residuen ermittelt wird, bezeichnet man als Relaxionsmethoden. Ihnen liegt die Idee zugrunde, daß die Residuen einen Indikator für die Größe der notwendigen Korrekturen darstellen, wobei die Messungen als exakt und die dynamischen Gleichungen als unexakt angenommen worden sind. Ein Nachteil dieses Rechensystems besteht darin, daß es extrem instabil (ill-posed) sein kann. Außerdem besteht bei den einfacheren Methoden, denen z.B. Nudging und OI zuzurechnen sind, dahingehend Unklarheit, wie die Lösung mit den Modell- und Datengleichungen zusammenhängt. Die letztgenannten Gleichungen sollen ja so gelöst werden, daß die Lösungen mit den Daten und den dynamischen Gleichungen konsistent bleiben. Die Nudging-Methode wurde in der Ozeanographie trotz der mathematisch unklaren Formulierung wegen der einfachen Algorithmen und weniger umfangreich benötigten Rechnerressourcen häufig angewendet (Fukumori, 2001).

Kantha (1995) und Tierney et al. (2000) ermittelten z.B. die verschiedenen halb- und ganztägigen Haupttiden des Weltozeans unter Nutzung von Altimeter- und Küstenpegeldaten. Die Berechnungen wurden mit hoher Gitternetzauflösung unter Berücksichtigung des quadratischen Bodenreibungsterms durchgeführt, um die Gezeiten auf dem Schelf besser wiedergeben zu können. Nichtlineare Obertiden, wie sie in den Flachwassergebieten entstehen, wurden jedoch nicht ermittelt.

Kapitel 2

Ableitung der Inversen Methode

2.1 Klassisches Verfahren

Zur Definition des Modells wird von den klassischen Flachwassergleichungen in sphärischen Koordinaten Gebrauch gemacht, die schließlich über die Tiefe integriert werden. Daraus ergeben sich die Differentialgleichungen für den Wasserstand und die mittleren meridionalen und zonalen Volumentransportkomponenten, wobei sich die Massenerhaltungsgleichung als linear ergibt. Sie werden zunächst skaliert, um die gleichen Größenordnung ($O(1)$) aller Komponenten und aller Modellresiduen zu erzielen. Sie werden explizit und semi-implizit diskretisiert und dienen als klassisches Modell, und später als Grundgleichungen der direkten Methode und der adjungierten Methode.

2.1.1 Flachwassergleichungen

Die Charakteristika der barotropen Gezeiten sind seit langem durch die Flachwassergleichungen als gut beschrieben bekannt (Hansen, 1949). Die dabei getroffenen Annahmen sind eine große Wellenlänge im Vergleich zur Wassertiefe, eine vernachlässigbar kleine Vertikalkomponente und die hydrostatische Approximation. Diese Annahmen ermöglichen eine Darstellung des unbekanntes Drucks durch den Wasserstand. Die nachstehenden im sphärischen Raum der Beschreibung der Gezeitendynamik zugrundegelegten hydrodynamischen Differentialgleichungen können z.B. Zehle (1970, 1977, 1978) entnommen werden.

(t, x, y) und (u, v) sind die Zeit- und Ortskoordinaten bzw. zonale und meridionale Volumentransportkomponenten. Für die Modellierung der Randmeergezeiten wird hier auf die Berücksichtigung der gezeitenerzeugenden Kräfte verzichtet (Mitschwingungszeit).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{Da \cos \phi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{Da} \frac{\partial u}{\partial \phi} - fv + gD \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} -$$

$$A_h \left(\frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) + \frac{ru}{D^2} \sqrt{u^2 + v^2} = p \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{Da \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{Da} \frac{\partial v}{\partial \phi} + fu + gD \frac{1}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} -$$

$$A_h \left(\frac{1}{a^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \right) + \frac{rv}{D^2} \sqrt{u^2 + v^2} = q \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial v \cos \phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) = s \quad (2.3)$$

In (2.1) bedeuten

- λ, ϕ ; geographische Länge bzw. Breite
- ζ ; Wasserstand
- h ; Ungestörte Meerestiefe
- a ; Erdradius
- D ; $D = h + \zeta$, aktuelle Meerestiefe
- f ; $f = 2\omega \sin \phi$, Coriolis- Parameter
- A_h ; Horizontaler Austauschkoeffizient
- r ; Bodenreibungskoeffizient
- g ; Schwerkraftbeschleunigung

p, q, s bezeichnen die Residuen der Impulsgleichungen bzw. der Massenerhaltungsgleichung. Diese Residuen verschwinden in der klassischen Formulierung.

2.1.2 Vertikal integrierte Flachwassergleichungen

Eine geeignete Diskretisierung der obigen vertikal integrierten Gleichungen ist von Mihardja (1991) gegeben worden. Die resultierenden Differenzgleichungen sind nachfolgend angegeben. Sie sind geeignet, Bewegungsfelder verschiedener Art (d.h. Gezeiten, winderzeugte Zirkulationen, Wattenmeerdynamik, Tsunami Wellen usw.) zu erfassen.

$$\begin{aligned} & \frac{(u - u^{n-1})}{\Delta t} + \frac{u^{n-1}}{H_u} \frac{(u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1})}{2\Delta x} + \frac{\bar{v}}{H_u} \frac{(u_{j-1}^{n-1} - u_{j+1}^{n-1})}{2\Delta y} - f_u \bar{v}^{n-1} \\ & + g \frac{H_u}{2\Delta x} (\zeta_{i+1} - \zeta + \zeta_{i+1}^{n-1} - \zeta^{n-1}) - \frac{A_h}{(\Delta x)^2} (u_{i-1}^{n-1} + u_{i+1}^{n-1} - 2u^{n-1}) \\ & - \frac{A_h}{(\Delta y)^2} (u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1} - 2u^{n-1}) + \frac{ru}{H_u^2} ((u^{n-1})^2 + \bar{v}^2)^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\frac{(v - v^{n-1})}{\Delta t} + \frac{\bar{u}}{H_v} \frac{(v_{i+1}^{n-1} - v_{i-1}^{n-1})}{2\Delta x} + \frac{v^{n-1}}{H_v} \frac{(v_{j-1}^{n-1} - v_{j+1}^{n-1})}{2\Delta y} - f_v \bar{u}^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
& +g\frac{H_v}{2\Delta y}(\zeta - \zeta_{j+1} + \zeta^{n-1} - \zeta_{j+1}^{n-1}) - \frac{A_h}{(\Delta x)^2}(v_{i-1}^{n-1} + v_{i+1}^{n-1} - 2v^{n-1}) \\
& - \frac{A_h}{(\Delta y)^2}(v_{j-1}^{n-1} + v_{j+1}^{n-1} - 2v^{n-1}) + \frac{rv}{H_v^2}((v^{n-1})^2 + \bar{u}^2)^{1/2} = 0 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\zeta - \zeta^{n-1})}{\Delta t} + \frac{1}{2\Delta x}(u - u_{i-1} + u^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}) \\
& + \frac{1}{2\Delta y \cos \phi_u}(v_{j-1} \cos \phi_{vj-1} - v \cos \phi_v + v_{j-1}^{n-1} \cos \phi_{vj-1} - v^{n-1} \cos \phi_v) = 0 \quad (2.6)
\end{aligned}$$

mit

- H_u, H_v ; Tiefe in u - bzw. v -Punkten
- r ; Bodenreibungskoeffizient
- ϕ_u, ϕ_v ; Breite der u - bzw. v -Punkte
- f_u, f_v ; Coriolis-Parameter in u - bzw. v -Punkten
- u, v ; horizontale Transportkomponenten
- ζ ; Wasserstand
- Δx : = $a \cos \phi \Delta \lambda$
- Δy : = $a \Delta \phi$.

Die explizite Diskretisierung erfolgt mit Hilfe der räumlichen Zentral- und zeitlichen Vorwärtsdifferenzen. Δt ist der Zeitschritt, der dem Kriterium von Courant, Friedrichs und Lewy (CFL) unterworfen ist. n bezeichnet den Zeitebenenindex, (i, j) sind die Indizes der Ortskoordinaten, und $(\Delta x, \Delta y)$ stellen die zonalen bzw. meridionalen Gitterabstände dar. Die Gitterpunkte, an denen die Werte für die Variablen (ζ, u, v) bestimmt werden, sind in einem Arakawa-C-Gitter angeordnet. In (2.4)-(2.6) sind um der Lesbarkeit Willen die Indizes n, i, j weggelassen worden.

Anders als im tiefen Ozean spielen die Austauschsterme im Schelfgebiet eine kleinere Rolle. Sie wurden wegen der schnelleren Konvergenz und vor allem wegen der numerischen Stabilität und ihrer Glättungseigenschaft eingeführt. Es wurde ausnahmslos der Wert $A_h = 4 \cdot m^2 s^{-1}$ für den Austauschkoeffizienten benutzt. Hingegen spielt der Bodenreibungskoeffizient für die Entstehung nichtlinearer Wechselwirkungen (NLWW) eine große Rolle. In der vorliegenden Arbeit wird der Reibungskoeffizient als $r = 0.0025$ gewählt. An geschlossenen Rändern verschwinden die Normalkomponenten der Transporte identisch, und an offenen Randpunkten werden die Wasserstände der Dirichlet-Bedingung unterworfen.

2.1.3 Skalierung der vertikal integrierten Differentialgleichungen

Die vertikal integrierten Flachwassergleichungen werden anschließend durch die Einheitstiefe $H_0 = 1$, eine charakteristische Länge L und durch $c = \sqrt{gH_{max}}$ wie folgt

skaliert. Dabei nehmen alle Variablen, einschließlich der Residuen, die Größenordnung Eins an. Dadurch soll eine bessere Konvergenz der inversen Methode erreicht werden.

$$L_u = \frac{(U - U^{n-1})}{\Delta t} + \frac{U^{n-1}}{H_u} \frac{(U_{i+1} - U_{i-1})^{n-1}}{2\Delta x} + \frac{\bar{V}}{H_u} \frac{(U_{j-1} - U_{j+1})^{n-1}}{2\Delta y} - F_u \bar{V} \quad (2.7)$$

$$+ G \frac{H_u}{\Delta x} (\zeta_{i+1} - \zeta)^{n-1} - \frac{A_H}{\Delta x^2} (U_{i-1} + U_{i+1} - 2U)^{n-1}$$

$$- \frac{A_H}{\Delta y^2} (U_{j-1} + U_{j+1} - 2U)^{n-1} + \frac{R}{H_u^2} U ((U^{n-1})^2 + \bar{V}^2)^{1/2} = P \quad \text{bzw.}$$

abgekürzt $A_P \underline{x} = \underline{a}_P \quad A_P \in M(k_P \times k_P; \mathfrak{R})$

k_P : Anzahl der Gleichungen der zonalen Komponenten

$$L_v = \frac{(V - V^{n-1})}{\Delta t} + \frac{\bar{U}}{H_v} \frac{(V_{i+1} - V_{i-1})^{n-1}}{2\Delta x} + \frac{V^{n-1}}{H_v} \frac{(V_{j-1} - V_{j+1})^{n-1}}{2\Delta y} - F_v \bar{U} \quad (2.8)$$

$$+ G \frac{H_v}{\Delta y} (\zeta - \zeta_{j+1})^{n-1} - \frac{A_H}{\Delta x^2} (V_{i-1} + V_{i+1} - 2V)^{n-1}$$

$$- \frac{A_H}{\Delta y^2} (V_{j-1} + V_{j+1} - 2V)^{n-1} + \frac{R}{H_v^2} V ((V^{n-1})^2 + \bar{U}^2)^{1/2} = Q \quad \text{bzw.}$$

abgekürzt $A_Q \underline{x} = \underline{a}_Q \quad A_Q \in M(k_Q \times k_Q; \mathfrak{R})$

k_Q : Anzahl der Gleichungen der meridionalen Komponenten

$$L_\zeta = \frac{(\zeta - \zeta^{n-1})}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (U - U_{i-1}) \quad (2.9)$$

$$+ \frac{1}{\Delta y} (V_{j-1} \Psi_{v_{j-1}} - V \Psi_v) = S \quad \text{bzw.}$$

abgekürzt $A_S \underline{x} = \underline{a}_S \quad A_S \in M(k_S \times k_S; \mathfrak{R})$

k_S : Anzahl der Massenerhaltungsgleichungen

Die Skalierung liefert folgende nichtdimensionale Größen, wobei die ursprünglichen dimensionsbehafteten Größen in den Gleichungen (2.1)–(2.6) nachfolgend mit einer Tilde gekennzeichnet sind.

P, Q, S ; $P := pL/(c^2 H_0), Q := qL/(c^2 H_0), S := sL/(cH_0)$	Residuen
x, y, t ; $x := \tilde{x}/L, y := \tilde{y}/L, t := \tilde{t}/L$	Orts- und Zeitkoordinaten
A_H ; $= A_h/(cL)$	Austauschkoeffizient
Ω ; $= \omega L/c$	Winkelgeschwindigkeit der Erde
G ; $= gH_0/c^2$	Schwerebeschleunigung
τ_2 ; $= T_2 c/L$	Periode der M_2 -Gezeiten
R ; $= rL/H_0$	Koeffizient der

F_u	$:= 2\Omega \sin \phi_u / (c/L)$	nichtlinearen Reibungsterme Coriolis- Parameter im U -Punkt
F_v	$:= 2\Omega \sin \phi_v / (c/L)$	Coriolis- Parameter im V -Punkt
h	$:= \tilde{h}/H_0$	Tiefe
ζ	$:= \tilde{\zeta}/H_0$	Wasserstand
H_u	$:= 0.5(h + h_{i+1} + \zeta^{n-1} + \zeta_{i+1}^{n-1})$	$(h + \zeta)$ im U -Punkt
H_v	$:= 0.5(h + h_{j+1} + \zeta^{n-1} + \zeta_{j+1}^{n-1})$	$(h + \zeta)$ im V -Punkt
U	$:= \tilde{u}/(cH_0)$	vertikal integrierter zonaler Impuls
V	$:= \tilde{v}/(cH_0)$	vertikal integrierter meridionaler Impuls
\bar{U}	$:= 0.25(U + U_{i-1} + U_{j+1} + U_{i-1,j+1})^{n-1}$	U im V -Punkt
\bar{V}	$:= 0.25(V + V_{i+1} + V_{j-1} + V_{i+1,j-1})^{n-1}$	V im U -Punkt
σ_2	$:= \kappa_2 L / c$	Frequenz der halbtägigen M_2 -Gezeiten
Δx	$:= (\Delta\lambda)a \cos \phi / L$	
Δy	$:= (\Delta\phi)a / L$	

Im Vorangegangenen wurden folgende Bezeichnungen benutzt.

c	$:= (gH_{max})^{1/2}$; maximale Phasengeschwindigkeit
ω	; Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung
κ_2	; Frequenz der M_2 -Gezeiten
T_2	; Periode der M_2 -Gezeit
Ψ_v	$:= \cos \phi_v / \cos \phi_u$
Ψ_{vj-1}	$:= \cos \phi_{vj-1} / \cos \phi_u$.

P, Q, S sind die skalierten Residuen der Impulsgleichungen bzw. der Massenerhaltungsgleichungen, die bei der klassischen Formulierung ohne Datenassimilation identisch verschwinden.

2.2 Direkte Methode

Die von Zahel (1991) angewandte im Frequenzraum formulierte direkte Methode des globalen Ozeans wird hier auf die nichtlinearen Flachwassergleichungen erweitert. Die Methode minimiert die dynamischen Residuen und die Datenresiduen im Sinne des kleinsten Quadrats des Funktionals und sucht zugleich die höchstwahrscheinlichen Residuen, die statistisch als normal verteilt angenommen worden sind. D.h. die direkte Methode von Zahel (1991) ist äquivalent zur Minimierung der Likelihood Funktion, welche in diesem Abschnitt vorgestellt wird.

Die direkte Methode ist ein äußerst wirkungsvolles und flexibles Assimilationsverfahren, das unter Verwendung der CGLS Methode mit vergleichsweise wenig Speicherplatzbedarf Speicherkapazitäten zu Lösungen führt. Bei Hinzunahme von hypothetischen Daten und von Glättungstermen gelangt man zu Reduktionen der Rechenzeit und zu einem stabilen Lösungssystem. In diesem Abschnitt wird ein Gleichungssystem aufgestellt, das im Sinne der Minimumvarianzschätzung optimale Lösungen liefert, in die die physikalischen Informationen der Daten sowohl an den Datenpunkten als auch in datenarmen Regionen einfließen werden.

Als Lösungsmethode wurde das CGLS-Verfahren gewählt. Das Verfahren bietet im Zusammenhang mit der direkten Methode weitere Anwendungsmöglichkeiten für die langfristige schwach restringierte Assimilation und damit für globale Zirkulationsmodelle, die räumlich und zeitlich weit verteilte Daten einbeziehen sollen. Auch im Hinblick auf diesen Aspekt wird das Lösungsverfahren ausführlich besprochen werden.

Die Differentialgleichungen wurden an allen feuchten Punkten durch Differenzgleichungen ersetzt. Damit fallen die Anzahl der Unbekannten und die der Gleichungen zusammen. k_P, k_Q und k_S bezeichnen die Anzahl der Gleichungen (2.7), (2.8) bzw. (2.9). Überdies werden $k = k_P + k_Q + k_S$ als Anzahl aller Unbekannten und $\underline{x} = (U_{ij}^n, V_{ij}^n, \zeta_{ij}^n) \in V(\mathfrak{R}^k)$ als der Lösungsvektor bezeichnet. Das Gleichungssystem (2.7)–(2.9) läßt sich nun bei der klassischen (i.e. $P, Q, S = 0$) und der inversen Formulierung in Matrixform ausdrücken als

$$A\underline{x} = \underline{a}, \quad \text{bzw.} \quad (2.10)$$

$$A\underline{x} - \underline{a} = \underline{r}_a \quad (2.11)$$

wobei $A \in M(k \times k; \mathfrak{R})$ durch die Koeffizienten des Differenzsystems mit dem Vektor \underline{x} der Unbekannten definiert ist, und $\underline{a} \in V(\mathfrak{R}^k)$ den Vektor der inhomogenen Terme (Bedingungen am offenen Rand) bezeichnet. Die Matrix A beschreibt das dynamische Gleichgewicht und die Massenerhaltung des Zustandsvektors \underline{x} während einer ganzen Periode und hängt im Fall der nichtlinearen Flachwassergezeiten selbst von dem Zustandsvektor \underline{x} ab.

Die k_d Datengleichungen

$$D\underline{x} - \underline{d} = \underline{r}_d, \quad D \in M(k_d \times k; \mathfrak{R}), \quad \underline{d} \in V(\mathfrak{R}^{k_d}) \quad (2.12)$$

$$\underline{r}_d \in V(\mathfrak{R}^{k_d})$$

sollen nun (2.10) im Sinne einer Minimierung von \underline{r}_a und \underline{r}_d ergänzen und so Dateninformationen und physikalisches Modell miteinander kombinieren. Dabei kennzeichnen D einen linearen Datenoperator und \underline{d} den durch die Meßwerte definierten Vektor.

Die Daten werden stets als nicht exakt betrachtet. So stellt der Vektor \underline{r}_d den Abstand der Meßwerte von den ihnen entsprechenden Modellgrößen dar.

Unsicherheiten der Modell- und Datengleichungen können durch $\underline{r}_a = (P, S, Q)$ und \underline{r}_d zusammengefaßt werden in

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_a \\ \underline{r}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \underline{x} - \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{d} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Die Gl. (2.13) beschreibt damit die zeitlichen und räumlichen Verteilungen der Modell- und Datenungenauigkeiten.

2.2.1 Ursprung und Eigenschaften der Residuen

Im weiteren wird, wenn keine Spezifizierung (Modellresiduen oder Datenresiduen) erfolgt, der Begriff Residuen für den dateninduzierten Ausgleich der Modellungenauigkeiten, d.h. die Modellresiduen \underline{r}_a , verwendet.

Die Liste möglicher Modelldefekte ist lang. McIntosh (1984) wandte die inverse Methode auf ein in mittleren Breiten gelegenes Modellgebiet an, das in seiner Ausdehnung dem in dieser Arbeit behandelten in etwa entspricht. Er schätzte den Reibungskoeffizienten und die Einführung von kartesischen Koordinaten (ebenes Modellgebiet) als die Quellen der größten Modellungenauigkeiten ein. Der letztgenannte Defekt ist in der vorliegenden Arbeit weitgehend behoben. Ausdrücklich als vernachlässigbare Defekte werden von ihm die lokalen Wirkungen der LSA und die hydrostatische Annahme eingestuft.

In der vorliegenden Modellanwendung muß angenommen werden, daß die Zugrundelegung einer stark geglätteten Topographie die größte Fehlerquelle in der Kontinuitätsgleichung darstellt. Durch das verwendete, gemessen an der Boden- und Küstentopographie, grobe Gitternetz können der steile Kontinentalabhang zur Tiefsee, die starken Tiefengradienten und die komplizierte Küstengestalt in der Irischen und Keltischen See und ganz besonders im nördlichen North Channel nicht aufgelöst werden.

Dieser topographiebedingte Defekt induziert in den Impulsgleichungen einen Fehler in der Darstellung bedeutsamer NLWW, der Resonanzeffekte der Haupttiden auf dem Schelf und in Ästuaren stark verfälschen kann. Der Defekt bei der Erfassung der NLWW erweist sich neben den korrekturbedürftigen Bedingungen an den offenen und geschlossenen Rändern als besonders bedeutsame Fehlerquelle.

Das Residuum \underline{r}_a stellt die zu bestimmende zeitliche Entwicklung des Ausgleichs beispielweise der oben aufgeführten Modelldefizite dar und wirkt auf das klassische Modell als dateninduzierter Antrieb. Durch geeignete Wahl der Daten und des Datentyps ist anzustreben, den Ausgleich der Defizite möglichst realitätsnah zu gestalten, d.h. das Residuum die Gestalt annehmen zu lassen, die zusammen mit den klassischen Modell das perfekte Modell liefert. Bei im einzelnen unbekanntem Defiziten des klassischen Modells bliebe dann noch die Identifizierung der Beiträge zum Residuum zu leisten, wenn nicht nur bessere Modellergebnisse, sondern auch Modellverbesserungen angestrebt werden.

Die zur Assimilation bereitgestellten Pegeldaten zeichnen sich in der Regel durch hohe Genauigkeit aus und sind daher einfach zu handhaben. Das Modell soll also diese Meßwerte sehr gut reproduzieren, ohne sie jedoch exakt wiederzugeben. Bei der a priori Fehlerschätzung und entsprechend festzulegender Datengewichtung muß beachtet werden, daß neben einem meist kleinen Meß- und Auswertungsfehler die Datenpositionen häufig nicht unerheblich von den Gitterpunkten abweichen.

2.2.2 Maximum Likelihood Schätzung

Falls Modell- und Datengleichungen linear sind, können die Zufallsgrößen als Gaußisch angenommen werden. Auf Grund der statistischen Annahme der Normalverteilung lassen sich die beiden Residuen \underline{r}_a bzw. \underline{r}_d durch die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\underline{r}_a) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{r}_a^t W_a \underline{r}_a\right), \quad W_a \in M(k \times k; \mathfrak{R}), \quad (2.14)$$

$$P(\underline{d}/\underline{x}) = P(\underline{r}_d) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{r}_d^t W_d \underline{r}_d\right), \quad W_d \in M(k \times k; \mathfrak{R}), \quad (2.15)$$

charakterisieren, wobei t die transponierte Matrix kennzeichnet. \underline{r}_a und \underline{r}_d sind voneinander unabhängig, und deren Erwartungen sind gleich Null.

$$A\underline{x} - \underline{a} = \underline{r}_a \quad E(\underline{r}_a) = 0 \quad (2.16)$$

$$D\underline{x} - \underline{d} = \underline{r}_d \quad E(\underline{r}_d) = 0. \quad (2.17)$$

Die Gewichte W_a bzw. W_d sollen die fehlenden physikalischen Informationen des Modells bzw. der Daten beinhalten.

In der vorliegenden Arbeit werden weitere Terme als Straffunktionen definiert, die unerwünschte Lösungseigenschaften bestrafen. Hierunter fallen z.B. das Auftreten der Gravitationswellen bei Berechnungen der Zirkulation, allzu starke Abweichungen von der klassischen Lösung ($:= \underline{x}_0$) bzw. von der zurückliegenden Analyse ($:= \underline{x}_p$). Nur der Term \underline{x}_p wird vorläufig für die folgenden mathematischen Ableitungen benutzt, und es wird angenommen, dessen Statistik lasse sich durch

$$\underline{x} - \underline{x}_p = \underline{r}_p \quad \underline{x}_p \in V(\mathfrak{R}^k), \quad E(\underline{r}_p) = 0 \quad (2.18)$$

$$P(\underline{r}_p) \sim \exp\left(-\frac{1}{2}\underline{r}_p^t W_p \underline{r}_p\right), \quad W_p \in M(k \times k; \mathfrak{R}) \quad (2.19)$$

beschreiben.

$P(\underline{d}/\underline{x}) = P(\underline{r}_d)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit der Beobachtung \underline{d} unter der vorgegebenen Modellvariablen \underline{x} . Bei der Assimilation wird jedoch umgekehrterweise $P(\underline{x}/\underline{d})$ gesucht. Aus der Bayeschen Regel gilt $P(\underline{d}/\underline{x}) = P(\underline{x}/\underline{d})P(\underline{d})/P(\underline{x})$, wobei $P(\underline{x})$ und $P(\underline{d})$ die Wahrscheinlichkeiten des Parameters \underline{x} ohne Daten \underline{d} bzw. des Parameters \underline{d} ohne Information über \underline{x} darstellen. Thacker (1988a) argumentierte dahingehend, daß sich die beiden gegenseitig aufheben ($P(\underline{d})/P(\underline{x}) \approx 1$).

Wir sind nun in der Lage mit den genannten Annahmen, die Wahrscheinlichkeitsfunktion (joint probability) $P(\underline{r}_a, \underline{r}_p, \underline{r}_d)$ als

$$\begin{aligned}
 P(\underline{r}_a)P(\underline{r}_p)P(\underline{x}/\underline{d}) &= P(\underline{r}_a)P(\underline{r}_p)P(\underline{d}/\underline{x})P(\underline{x})/P(\underline{d}) & (2.20) \\
 &\approx P(\underline{r}_a)P(\underline{r}_p)P(\underline{d}/\underline{x}) \\
 &= P(\underline{r}_a)P(\underline{r}_p)P(\underline{r}_d) \\
 &\sim \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{A}\underline{x} - \underline{a})^t W_a (\underline{A}\underline{x} - \underline{a})\right) \cdot \\
 &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}_p)^t W_p (\underline{x} - \underline{x}_p)\right) \cdot \\
 &\quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\underline{D}\underline{x} - \underline{d})^t W_d (\underline{D}\underline{x} - \underline{d})\right)
 \end{aligned}$$

anzugeben. Ziel ist es nun, die Residuen größter Wahrscheinlichkeit und folglich den bestmöglichen Modellvariablenvektor \underline{x} zu ermitteln, d.h., ein Maximum der Likelihood Funktion (2.20) zu finden (Lorenc, 1988).

Diese Suche nach einem Maximum ist äquivalent zur Minimierung der Funktion J :

$$\begin{aligned}
 J(\underline{x}) &= -\ln P(\underline{r}_a) - \ln P(\underline{r}_p) - \ln P(\underline{r}_d) & (2.21) \\
 &= \frac{1}{2}(\underline{A}\underline{x} - \underline{a})^t W_a (\underline{A}\underline{x} - \underline{a}) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}_p)^t W_p (\underline{x} - \underline{x}_p) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\underline{D}\underline{x} - \underline{d})^t W_d (\underline{D}\underline{x} - \underline{d}),
 \end{aligned}$$

wobei der Operator D in der vorliegenden Arbeit wegen der allein assimilierten Wasserstandsdaten gleich der Einheitsmatrix ist. Die Formulierung der Gleichung (2.21) beinhaltet, daß das Rauschen unterschiedlicher Herkunft unkorreliert ist, was an sich als nicht überzeugend angesehen werden muß.

Wenn die Matrix $W = (W_a, W_d, W_p)$ eine geeignete physikalisch begründete Statistik wiedergibt, sollte es unmittelbar möglich sein, durch die Minimierung der Gl. (2.21):

$$J(\underline{x}) = \min ! \quad (2.22)$$

zu optimalen Lösungen zu gelangen. Da die meisten statistischen Eigenschaften der Residuen a priori nicht hinreichend bekannt sind und daher die Struktur der Kovarianzmatrix W nicht vorher bestimmbar ist, kann ein Ausweg in der Art:

$$W_i = (E \langle \underline{r}_i \underline{r}_i^t \rangle)^{-1} \quad i = a, d, p \quad (2.23)$$

a posteriori gesucht werden, wobei die Bildung der inversen Matrizen wegen der symmetrischen und positiv definiten Kovarianzmatrix W_i berechtigt ist (Bryson and Ho, 1975; Talagrand, 1997; Courtier, 1997). $E \langle \underline{r} \rangle$ bezeichnet den Erwartungswert

des Zufallsvektors \underline{r} . Falls der Lösungsvektor \underline{x} durch Minimierung des Kostenfunktional (2.21) unter Berücksichtigung der Kovarianzmatrix (2.23) gefunden wird, handelt es sich um BLUE (best linear unbiased estimator). Wenn angenommen werden kann, daß Daten- und Modellfehler normal verteilt sind, ergibt sich eine Maximum-Likelihood Schätzung. Die Maximum-Likelihood Schätzung liefert wirksamste statistische Aussagen.

Die Minimierung des Kostenfunktional (2.21) bedeutet also die Maximierung der Wahrscheinlichkeit $P \sim \exp(-J)$, und die minimierte Varianz ist die Schätzung. Die Formulierungen (2.21)–(2.22) besitzen also stets statistische Bedeutung. Dies gilt für alle Formen der Matrix $W = (W_a, W_d, W_p)$ und für alle Fehlerverteilungen. Eine Erörterung der Frage, ob die betreffende Statistik auf einer Normalverteilung basiert oder nicht, ist daher nicht erforderlich.

In der Praxis wird eine Formulierung wie in (2.23) wegen der hohen Dimension der Matrix vermieden. Stattdessen wird sie oft als Diagonalmatrix angegeben, d.h. daß die Residuen statistisch voneinander unabhängig sind.

2.2.3 Datenextrapolation

Die Lösung der Minimierungsaufgabe (2.22) liefert jedoch wegen der physikalischen Unzulänglichkeiten der Matrix W und der Lückenhaftigkeit der Messungen auch im linearen Fall nicht immer zufriedenstellende und weiterführende Ergebnisse. Eine häufig vorkommende unerwünschte Erscheinung bei der Quadratanpassung sind Unstetigkeiten an Datenpunkten, die sich insbesondere einstellen können, wenn Meßwerte von isolierten Positionen bei Verwendung einer Diagonalmatrix in das Minimierungsfunktional eingeführt werden. Die Modellvariablen werden dann vorwiegend im Bereich der Meßpunkte verbessert, können aber auch in der Nachbarschaft der Meßpunkte unrealistisch große Werte annehmen.

Eine denkbare Gegenmaßnahme ist die Einführung von fiktiven Daten (bogus data; Thacker, 1989), z.B. klassischen Lösungen entnommene Werte in die Kostenfunktion. Ein anderer Weg wird durch die Einführung räumlicher und/oder zeitlicher Ableitungen der Modellvariablen \underline{x} (Thacker, 1988b) bzw. von Ableitungen des Residuums \underline{r} (Zahel, 2000) besprochen. Dieser Weg befördert die Glättung der Lösungen, unterdrückt Gravitationswellen hoher Frequenzen (low pass filter; Sasaki, 1970) und unterdrückt schließlich die Singularität an den Datenpunkten (Le Provost und Salmon, 1986). Die Verwendung der ersten Ableitung hat die zusätzliche Eigenschaft, eine numerisch besonders schnelle Konvergenz zu bewirken (Le Provost, 1986). Zahel benutzt erste und zweite Differenzen der benachbarten Residuen (2000). Vor allem die Hinzunahme der beiden Residuenableitungen spielt auch eine entscheidende Rolle bei der Korrektur der Physik in einem Gebiet, in dem Daten nicht ausreichend vorhanden sind.

Die klassische Lösung \underline{x}_0 und die Ableitungen der Residuen bzw. Modellvariablen sind hier als die hypothetischen Daten bezeichnet, die sowohl fehlende Daten im

Sinne einer Extrapolation im umliegenden Gebiet ergänzen als auch zur numerischen Stabilität beitragen.

2.2.4 Nichtlineare Assimilation

Bislang waren auf der einen Seite die Linearität der Modell- und Datengleichungen und auf der anderen Seite das stochastische Verhalten der Residuen nach dem normalverteilten Gauß-Markov-Zufallprozeß vorausgesetzt. Diese Annahmen verlieren im nichtlinearen Fall ihre Gültigkeit. Die Kovarianzmatrix in Gl. (2.21) hängt dann streng genommen nicht mehr von der Statistik der früheren Abschätzung ab. Da die Flachwassergleichungen ein quasi-lineares System darstellen, ist die Annahme berechtigt, daß sich die Komponenten des Zufallvektors \underline{x} quasi Gaußisch verhalten. Im diesem Fall wird angenommen, daß die Fehlerkovarianzmatrix der Lösungen die Inverse der Hesse-Matrix H (Schröter, 1994) am Minimum des Kostenfunktionalis ist. Im Prinzip ist es daher möglich, die Kovarianzmatrix W_i in (2.23) durch die Hesse-Matrix:

$$H = \frac{\partial^2 J}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_k^2} \end{pmatrix}$$

zu ersetzen (Thacker, 1988a). In der Nähe des Minimums der Kostenfunktion in (2.21) kann angenommen werden, daß sie sich linear und konvex verhält und daher eine gute Approximation der Inversen der Kovarianzmatrix ist. Das bedeutet, daß ein guter Startwert von \underline{x} bekannt sein muß, damit dort überhaupt der Minimumpunkt erreicht werden kann. Die klassische Lösung erweist sich häufig als ein geeignetes Startfeld. Die Ermittlung der Hesse-Matrix ist jedoch wegen der hohen Dimension des Lösungsvektors ohne weitere Maßnahmen in der Rechentechnik nicht möglich (Schröter, 1994).

Die andere Möglichkeit besteht in der Linearisierung des Kostenfunktionalis (2.21) um die vorherige Schätzung \underline{x}_p . Die sogenannte totale Inversion von Tarantola (1987) wird dargestellt durch eine Matrix so hoher Dimension, daß eine Anwendung ausgeschlossen ist.

Im Falle starker Nichtlinearität des Gleichungssystems ist nach der Kenntnis des Autors nur ein Lösungszugang durch die Variationsrechnung (Courtier, 1997) gegeben. Die Lösungen werden dabei durch die Optimierungstechnik gesucht, wobei die adjungierten Gleichungen die Gradienten der Kostenfunktion liefern. Die Nichtlinearität des Systems ist dann voll in den Differentialgleichungen und teilweise in den Koeffizienten der adjungierten Gleichungen enthalten. Das semi-implizite adjungierte Verfahren (IAV) in der vorliegenden Arbeit kann für dieses Vorgehen verwendet werden.

Die andere Möglichkeit bestünde darin, die Kovarianzmatrix empirisch anhand von Langzeitbeobachtungen zu ermitteln (Talagrand and Miyakoda, 1971). In der Ozeanographie fehlen jedoch im allgemeinen solche Daten.

2.2.5 Iterationsmethode des direkten Verfahrens

Die bisherigen Überlegungen rechtfertigen die Verbindung der Methode der kleinsten Quadrate (LSM) mit statistischen Methoden wie dem Kalman-Smoothing. Die LSM ist durchaus in der Lage, sowohl komplizierte stochastische Eigenschaften des Modells und der Daten zu erfassen, als auch mit ganz simpler Statistik zu guten Ergebnissen zu gelangen. Der besondere Vorteil der LSM ist die leichte Implementierung des nichtlinearen Modells. Dies gilt für die direkte, adjungierte und die Repesenter Methode gleichermaßen.

Die bisherigen Überlegungen führen uns dazu, die Quadratsumme aller in Betracht kommenden Residuen zu minimieren, um damit die beste Lösung zu erhalten. Dabei handelt es sich um die Residuen des Modells (\underline{r}_a), der Messungen (\underline{r}_d), der vorherigen Abschätzung (\underline{r}_p), der klassischen Lösung (\underline{r}_0), der ersten bzw. zweiten Ableitung der Residuen (\underline{r}_∇ bzw. \underline{r}_Δ) und derjenigen der Modellvariablen ($\underline{r}_{\nabla x}$ bzw. $\underline{r}_{\Delta x}$). Zusätzlich wird der Term \underline{r}_0 eingefügt, um eine unrealistisch große Abweichung der Analyse \underline{x} von der klassischen Lösung \underline{x}_0 zu vermeiden.

Wir fassen die Residuen in \underline{r} wie folgt zusammen

$$\begin{aligned}
 \underline{r} &= (\underline{r}_a, \underline{r}_d, \underline{r}_p, \underline{r}_0, \underline{r}_\nabla, \underline{r}_\Delta, \underline{r}_{\nabla x}, \underline{r}_{\Delta x})^t & (2.24) \\
 \underline{r}_a &= A\underline{x} - \underline{a} \\
 \underline{r}_d &= \underline{x} - \underline{d} \\
 \underline{r}_p &= \underline{x} - \underline{x}_p \\
 \underline{r}_0 &= \underline{x} - \underline{x}_0 \\
 \underline{r}_\nabla &= \nabla \underline{r}_a \\
 \underline{r}_\Delta &= \Delta \underline{r}_a \\
 \underline{r}_{\nabla x} &= \nabla \underline{x} \\
 \underline{r}_{\Delta x} &= \Delta \underline{x} \\
 \nabla \underline{x} &= \underline{x}_{i+1} - \underline{x} \quad \text{bzw.} \quad \underline{x}_{j-1} - \underline{x} \\
 \Delta \underline{x} &= \underline{x}_{i+1} + \underline{x}_{i-1} + \underline{x}_{j+1} + \underline{x}_{j-1} - 4\underline{x} \quad \text{usw.} \\
 &\quad \underline{r}_a, \underline{r}_p, \underline{r}_0 \in V(\mathfrak{R}^k) \\
 &\quad \underline{r}_\nabla \in V(\mathfrak{R}^{k_\nabla}) \\
 &\quad \underline{r}_\Delta \in V(\mathfrak{R}^{k_\Delta}) \\
 &\quad \underline{r}_{\nabla x} \in V(\mathfrak{R}^{k_{\nabla x}}) \\
 &\quad \underline{r}_{\Delta x} \in V(\mathfrak{R}^{k_{\Delta x}}) \\
 &\quad \underline{r}_d \in V(\mathfrak{R}^{k_d}) \\
 &\quad \underline{r} \in V(\mathfrak{R}^{3k+k_d+k_\nabla+k_\Delta+k_{\nabla x}+k_{\Delta x}})
 \end{aligned}$$

(2.25)

Die bestmögliche Lösung sei mathematisch dort zu finden, wo die gewichtete Kostenfunktion $J := \frac{1}{2}(J_a + J_d + J_s)$ ein globales Minimum \underline{x} im zulässigen Bereich

annimmt (Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung), wobei J_a, J_d und J_s die gewichteten Residuen des Modells, der Messungen bzw. der Strafterme bedeuten.

$$2J = J_a + J_d + J_s \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} J_a &= W_P \underline{P} \underline{P} + W_Q \underline{Q} \underline{Q} + W_S \underline{S} \underline{S} \\ &= \sum_{ijn} (W_P P^2 + W_Q Q^2 + W_S S^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_d &= W_d \underline{r}_d^t \underline{r}_d \delta_{ij} \\ &= \sum_{ijn} (W_d (\zeta - \zeta_d)^2 \delta_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_s &= W_p \underline{r}_p^t \underline{r}_p + W_0 \underline{r}_0^t \underline{r}_0 \\ &+ W_{\nabla} \underline{r}_{\nabla}^t \underline{r}_{\nabla} + W_{\Delta} \underline{r}_{\Delta}^t \underline{r}_{\Delta} + W_{\nabla x} \underline{r}_{\nabla x}^t \underline{r}_{\nabla x} + W_{\Delta x} \underline{r}_{\Delta x}^t \underline{r}_{\Delta x} \\ &= \sum_{ijn} (W_p^{\zeta} (\zeta - \zeta_p)^2 + W_p^u (U - U_p)^2 + W_p^v (V - V_p)^2 \\ &+ W_0^{\zeta} (\zeta - \zeta_0)^2 + W_0^u (U - U_0)^2 + W_0^v (V - V_0)^2 \\ &+ W_{\nabla}^p ((P_{i+1} - P)^2 / d_x^2 + (P_{j-1} - P)^2) \\ &+ W_{\nabla}^q ((Q_{i+1} - Q)^2 / d_x^2 + (Q_{j-1} - Q)^2) \\ &+ W_{\nabla}^s ((S_{i+1} - S)^2 / d_x^2 + (S_{j-1} - S)^2) \\ &+ W_{\Delta}^p ((P_{i+1} + P_{i-1} - 2P) / d_x^2 + P_{j+1} + P_{j-1} - 2P)^2) \\ &+ W_{\Delta}^q ((Q_{i+1} + Q_{i-1} - 2P) / d_x^2 + Q_{j+1} + Q_{j-1} - 2Q)^2) \\ &+ W_{\Delta}^s ((S_{i+1} + S_{i-1} - 2P) / d_x^2 + S_{j+1} + S_{j-1} - 2S)^2) \\ &+ W_{\nabla \zeta}^{\zeta} ((\zeta_{i+1} - \zeta)^2 / d_x^2 + (\zeta_{j-1} - \zeta)^2) \\ &+ W_{\nabla U}^u ((U_{i+1} - U)^2 / d_x^2 + (U_{j-1} - U)^2) \\ &+ W_{\nabla V}^v ((V_{i+1} - V)^2 / d_x^2 + (V_{j-1} - V)^2) \\ &+ W_{\Delta \zeta}^{\zeta} ((\zeta_{i+1} + \zeta_{i-1} - 2P) / d_x^2 + \zeta_{j+1} + \zeta_{j-1} - 2\zeta)^2) \\ &+ W_{\Delta U}^u ((U_{i+1} + U_{i-1} - 2P) / d_x^2 + U_{j+1} + U_{j-1} - 2U)^2) \\ &+ W_{\Delta V}^v ((V_{i+1} + V_{i-1} - 2P) / d_x^2 + V_{j+1} + V_{j-1} - 2V)^2). \end{aligned}$$

$$d_x = \cos(\phi) \quad \phi := \text{Breitengrad}$$

$$\underline{P} = (P_{ij}^n) \in V(\mathfrak{R}^{kP})$$

$$\underline{Q} = (Q_{ij}^n) \in V(\mathfrak{R}^{kQ})$$

$$\underline{S} = (S_{ij}^n) \in V(\mathfrak{R}^{kS})$$

$$\underline{x} = (\zeta_{ij}^n, U_{ij}^n, V_{ij}^n)$$

$$W_{\nabla}^{p,q,s} = (W_{\nabla}^p, W_{\nabla}^q, W_{\nabla}^s) \quad (2.27)$$

$$W_{\Delta}^{p,q,s} = (W_{\Delta}^p, W_{\Delta}^q, W_{\Delta}^s) \quad (2.28)$$

$$W_{\nabla x}^{u,v,\zeta} = (W_{\nabla U}^u, W_{\nabla V}^v, W_{\nabla \zeta}^{\zeta}) \quad (2.29)$$

$$W_{\Delta x}^{u,v,\zeta} = (W_{\Delta U}^u, W_{\Delta V}^v, W_{\Delta \zeta}^{\zeta}) \quad (2.30)$$

$$W_d (\zeta - \zeta_d)^2 \delta_{ij} = \begin{cases} W_d (\zeta - \zeta_d)^2 & : \text{ wenn Daten in(i,j) vorhanden} \\ 0 & : \text{ sonst.} \end{cases}$$

Der Beobachtungsvektor \underline{d} setzt sich aus den allein vorliegenden Wasserstandsmessungen ζ_d zusammen. Im nichtlinearen Fall wird ein lokales Minimum in einer gewissen Umgebung von \underline{x}_0 gesucht.

Die hierbei für die Strafterme eingeführten Gewichte gaben die relative Wichtigkeit der einzelnen Terme an, und daher besitzen ihre absoluten Größen keine Bedeutung. In der vorliegende Arbeit werden die Modellgewichte und das Meßgewicht als 1 ($W_P = W_Q = W_S = 1$) und die übrigen als von der Größe eines Bruchteiles von 1 ($W_p = W_0 = W_{\nabla}^{p,q,s} = W_{\Delta}^{p,q,s} = W_{\nabla x}^{u,v,\zeta} = W_{\Delta x}^{u,v,\zeta} = O(10^{-2} \sim 10^{-3})$) angenommen.

Unter der Voraussetzung, daß eine Funktion $I(\underline{x})$ in der Matrixform wie

$$I(\underline{x}) = (\underline{y} - C\underline{x})^t(\underline{y} - C\underline{x})$$

geschrieben ist, gilt für das lokale Minimum (bzw. den stationären Punkt) die notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla I(\underline{x}) \\ &= \nabla(\underline{y}^t \underline{y} - (C\underline{x})^t \underline{y} - \underline{y}^t C\underline{x} + (C\underline{x})^t C\underline{x}) \\ &= \nabla(\underline{y}^t \underline{y} - \underline{x}^t C^t \underline{y} - \underline{y}^t C\underline{x} + \underline{x}^t C^t C\underline{x}) \\ &= 2(-C^t \underline{y} + C^t C\underline{x}) \end{aligned}$$

und schließlich,

$$C^t C\underline{x} = C^t \underline{y}. \quad (2.31)$$

Die eindeutige Lösung \underline{x} von (2.31) ist nach Maßgabe der Minimierung von $I(\underline{x})$ Minimallösung des nachfolgenden überbestimmte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} W_P(A_P \underline{x} - \underline{a}_P) &= 0 \\ W_Q(A_Q \underline{x} - \underline{a}_Q) &= 0 \\ W_S(A_S \underline{x} - \underline{a}_S) &= 0 \\ W_d(\underline{x} - \underline{d})\delta_{ij} &= 0 \\ W_p(\underline{x} - \underline{x}_p) &= 0 \\ W_0(\underline{x} - \underline{x}_0) &= 0 \\ W_{\nabla}^{p,q,s} \nabla \underline{r}_a &= 0 \\ W_{\Delta}^{p,q,s} \Delta \underline{r}_a &= 0 \\ W_{\nabla x}^{u,v,\zeta} \nabla \underline{x} &= 0 \\ W_{\Delta x}^{u,v,\zeta} \Delta \underline{x} &= 0, \end{aligned}$$

das in zusammengefaßter Form in der Gestalt:

$$L\underline{x} - \underline{l} = 0 \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
L &\in M((3k + k_d + k_\nabla + k_\Delta + k_{\nabla x} + k_{\Delta x}) \times k; \mathfrak{R}) \\
\underline{l} &\in V(\mathfrak{R}^{3k+k_d+k_\nabla+k_\Delta+k_{\nabla x}+k_{\Delta x}}) \\
\underline{x}, \underline{x}_p, \underline{x}_0 &\in V(\mathfrak{R}^k) \\
\underline{a} &\in V(\mathfrak{R}^k) \\
\underline{d} &\in V(\mathfrak{R}^{k_d})
\end{aligned}$$

geschrieben wird, wobei die Komponenten des Operator L und des Vektors \underline{l} nicht mehr angegeben sind, jedoch unmittelbar zusammengestellt werden können. Die Gewichte erlauben Manipulationen insofern, als die mathematischen bzw. physikalischen Eigenschaften der einzelnen Terme durch Gewichtsänderungen unterdrücken bzw. verstärkt werden können. Wenn z.B. eine glattere Dateninterpolation gewünscht wird, dann sind W_Δ bzw. $W_{\Delta x}$ zu erhöhen.

Als hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum (2.21) muß die symmetrische Hesse-Matrix H positiv definit sein. Die Konstruktion dieser Matrix erfordert die Ermittlung der Gradienten von J nach der Anzahl exakt so häufig wie es Steuervariable gibt ($O(10^6)$). Dies ist weder zeitlich noch angesichts der verfügbaren Speicherkapazitäten möglich. Stattdessen wird der Zuwachs der Residuen der Kontinuitäts- und Impulsgleichungen während der Iteration ständig geprüft. Sobald sie anzuwachsen beginnen, wird das Verfahren mit geänderten \underline{x}_0 von A) Anfangswerte an wiederholt, was sich als numerisch solide erwies.

Infolge der außerordentlich großen Anzahl von Unbekannten kommt nur das CGLS Verfahren als Lösungsmethode in Frage (Paige and Saunders, 1982), wobei keine Nullen in der Matrix gespeichert werden. So bleibt die Dimension der benutzten Speicherplätze in der Ordnung etwa des Zehnfachen der Zahl der Variablen.

Bei der numerischen Anwendung wurde das Residuum $L^t \underline{r} = L^t(\underline{l} - L\underline{x})$ anstatt $\underline{r} = \underline{l} - L\underline{x}$ minimiert. Vorteile liegen in den durchzuführenden einfacheren Matrix-Operationen wie $L\underline{x}$ und $L^t \underline{r}$ und in der Einsparung von Rechenzeit und Speicherplätzen.

Im nachfolgend angegebenen Rechenschema werden Hilfsvektoren

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{q}} &\in V(\mathfrak{R}^{3k+k_d+k_\nabla+k_\Delta+k_{\nabla x}+k_{\Delta x}}) \quad \text{und} \\
\underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{p}} &\in V(\mathfrak{R}^k)
\end{aligned}$$

eingeführt.

A) Anfangswerte:

$$\begin{aligned}
\underline{r}_0 &= \underline{l} - L\underline{x}_0 \\
\underline{\tilde{s}}_0 &= L\underline{r}_0 \\
\underline{\tilde{p}}_1 &= \underline{\tilde{s}}_0 \\
\gamma_0 &= \|\underline{\tilde{s}}_0\|^2
\end{aligned}$$

B) Iterationsschleife:

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{q}}_i &= L\tilde{\underline{p}}_i \\
\alpha_i &= \gamma_{i-1} / \|\tilde{\underline{q}}_i\|^2 \\
\underline{x}_i &= \underline{x}_{i-1} + \alpha_i\tilde{\underline{p}}_i \\
\underline{r}_i &= \underline{r}_{i-1} - \alpha_i\tilde{\underline{q}}_i \\
\tilde{\underline{s}}_i &= L^t\underline{r}_i \\
\gamma_i &= \|\tilde{\underline{s}}_i\|^2 \\
\beta_i &= \gamma_i/\gamma_{i-1} \\
\tilde{\underline{p}}_{i+1} &= \tilde{\underline{s}}_i + \beta_i\tilde{\underline{p}}_i.
\end{aligned}$$

Nach ausreichender Iteration soll das Verfahren mit A) Anfangswerte wiederholt werden, das beim Erreichen der Stationarität von \underline{r} bzw. bei hinreichend kleinem Wert von γ abgebrochen wird. Der Re-start ist für den nichtlinearen Fall unbedingt nötig, um ein lokales Minimum zu vermeiden.

Der Quotient des größten Eigenwertes der Hesse-Matrix zu ihrem kleinsten, d.h. die Konditionszahl, bestimmt den Erfolg des CGLS Verfahrens. Fast alle Probleme des überbestimmten Systems mit fehlerbehafteten Daten sind schlecht konditioniert (d.h., gekennzeichnet durch eine große Konditionszahl). Demzufolge müssen geeignete Maßnahmen ergriffen werden. Ansonsten können eine zu langsame Konvergenz der Iteration und sogar unrealistisch große Werte die Folge sein. Die schlechte Konditionierung der Gl. (2.32) kann durch eine relativ einfache Spaltenskalierung (Zahel, 1991), die Hinzunahme fiktiver Daten (Thacker, 1989) und der Ableitungen der Residuen (Zahel, 2000) bzw. der Modellvariablen (Thacker, 1988b) verbessert werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde festgestellt:

- 1) Die Spaltenskalierung trägt nicht zur Beschleunigung des Verfahrens bei und daher wird sie nicht eingeführt.
- 2) Die Hinzunahme der ersten und/oder zweiten Ableitungen der Unbekannten führt zur erheblichen Beschleunigung der numerischen Berechnung. Dabei spielt die erste Ableitung die größere Rolle. Auch bei alleiniger Berücksichtigung der zweiten Ableitung werden die Ergebnisse der Assimilation oft besser.
- 3) Die Berücksichtigung der ersten und/oder zweiten Ableitungen der Residuen ist in Bezug auf die Güte der Rechenergebnisse wirksamer als diejenige der Ableitungen der Modellvariablen. In der vorliegenden Arbeit wird daher von der zweiten Ableitung der Residuen Gebrauch gemacht.
- 4) Der Versuch, die datenbeeinflussten Lösungen in der Nähe der klassischen Lösungen zu halten (dafür sorgen die Termen $W_0^\zeta(\zeta - \zeta_0)^2 + W_0^u(U - U_0)^2 + W_0^v(V - V_0)^2$ in Gl. (2.26)), garantiert stets die besseren Lösungen. Die Terme $W_p^\zeta(\zeta - \zeta_p)^2 + W_p^u(U - U_p)^2 + W_p^v(V - V_p)^2$ sorgen dafür, daß die neuen Werte bei der Minimumsuche nicht allzu sehr von den alten Werten abweichen. Diese Terme verstärken außerdem die Hauptdiagonaldominanz der Matrix und verbessern damit die Konvergenzeigenschaften.

In der vorliegenden Arbeit werden dann nur die in 3) und 4) genutzten Terme zum Zweck einer besseren Konditionierung berücksichtigt.

Die CGLS-Programmtechnik kann überdies für langzeitliche Probleme wie das der globalen Zirkulation und das der Gezeiten mit vollständig berücksichtigtem Potential von Vorteil sein. Zahel (persönliche Mitteilung, 2002) arbeitete die Erweiterungsmöglichkeiten des direkten Verfahrens auf die Kombinationstiden mit einem eindimensionalen Modell aus und testete das erweiterte Verfahren mit einem Kanalmodell.

Die Erfassung nichtlinearer Wassereffekte erstreckt sich in der vorliegenden Arbeit auf die Obertiden. Das bedeutet für die Durchführung der angegebenen Datenassimilationsprozedur mit der direkten Methode, daß bedingt durch die strikte Periodizität von Haupt- und Obertiden mit der Periode der Haupttide das Minimierungszeitintervall auf diese Periode beschränkt werden kann. Bei der Berücksichtigung der Wechselwirkung der astronomischen Haupttiden miteinander, die zur Entstehung von Kombinationstiden führen, kann ein solches für alle beteiligten Tiden strikte Periodizität garantierendes Zeitintervall nicht angegeben werden.

Dennoch kann die für die Obertiden entwickelte und angewandte direkte Methode unmittelbar auch auf das allgemeinere nichtlineare Problem vieler berücksichtigter astronomischer Partialtiden angewendet werden. Dazu werden das Gezeitenpotential, die Bedingungen am offenen Rand und die Daten für den aktuellen Zeitbereich bereitgestellt. Dann wird nach Zahl und Perioden der berücksichtigten astronomischen Tiden ein festes Zeitintervall festgelegt, z.B. 14 Tage bei einer simultanen Untersuchung von M_2 und S_2 . Die Anwendung der beschriebenen direkten Methode erfolgt nun in zeitlich aneinander anschließenden Zeitintervallen – im Beispiel 14 Tage-Intervallen. Während im Fall einer astronomischen Tide die Periodizitätsbedingung benutzt wird, haben bei diesem iterativen Vorgehen die Endwerte des vorangegangenen Zeitintervalles im aktuellen Zeitintervall die Bedeutung von Anfangswerten. Im Anfangszeitintervall können als Anfangswerte die der klassischen Lösung entnommenen Werte herangezogen werden. Nach einer hinreichend großen Anzahl von Zeitintervallen stellt sich in dem Sinne ein stabiler Zustand ein, daß die Analyse im weiteren Verlauf der Iteration resultierender Zeitreihen gleiche harmonische Konstanten liefert.

Das beschriebene Vorgehen ist auf einen realitätsnah definierten Kanal mit fiktiven Daten angewendet worden und hat sowohl hinsichtlich der Reproduktion der als wahr definierten Variablenfelder als auch im Vergleich mit artifizuell vorausgesetzter Kommensurabilität – damit existiert ein Periodenintervall für alle Tiden – überzeugende Ergebnisse geliefert.

2.3 Schwach restringierte adjungierte Methode

Die adjungierte Methode wird im allgemeinen eingeführt, um die Anzahl der zu ermittelnden Unbekannten zu reduzieren. D.h. die Lösungen werden nicht im gesamten Feld gesucht, sondern auf einen Teil davon (z.B. Anfangswerte, Parameter usw. als Steuervariable) beschränkt. Die adjungierten Gleichungen liefern dabei die Gradienten einer Kostenfunktion, mit denen der Abstand dynamisch im Sinne der

vorgeschriebenen Physik zwischen den assimilierten Werten und den Daten minimiert werden soll.

In diesem Abschnitt werden die schwach restringierte adjungierte Methode für das explizite Modell und für das semi-implizite HAMSOM ermittelt. Die erstere wird jedoch nur theoretisch abgeleitet und nicht angewendet. Die schwach restringierte adjungierte Methode führt zwar nicht zur Reduzierung der Zahl der Unbekannten, jedoch ermitteln die adjungierten Gleichungen den Beitrag der Daten zu den datenarmen Bereichen hervorragend und zugleich werden die Lösungen algebraisch durch die Substitution leicht und schnell ermittelt. Dies könnte sich als ein Vorteil bei der Minimumsuche mit Hilfe der Gradienten erweisen. In der vorliegenden Arbeit werden jedoch die Modellgleichungen mit den adjungierten Gleichungen simultan durch Anwendung des CGSL Verfahrens gelöst.

Ein Vorteil dieser Prozedur liegt darin, daß die Anzahl der Unbekannten immer gleich bleibt (doppelt so groß wie die Zahl der Modellvariablen). Der andere Vorteil besteht in der leichten Überführung in die stark restringierte Methode, die VCA-Technik (Lewis und Derber, 1985) bzw. in die schwach restringierte Representer-Methode (Bennett, 1992).

Die Residuen des direkten Modells sind eine Folge der Minimierung des Quadratfunktional eines überbestimmten Gleichungssystems (d.h. Substitution). Durch die Einführung der schwach restringierten adjungierten Methode ist es möglich, die Residuen direkt in den Minimierungsvorgang zu integrieren und sie zusammen mit den Modellvariablen zu bestimmen. In der Terminologie der Optimierung bezeichnet man die Residuen dabei als unabhängige Steuervariable, die sich durch eine eigene Physik in der Gestalt von (gewichteten) adjungierten hydrodynamischen Differentialgleichungen beschreiben lassen. Dies ist der Hauptunterschied zur direkten Methode, bei der das Residuum die Fluktuation um die durch die klassische Lösungen erfüllten Gleichungsterme (d.h. $P, Q, S = 0$) darstellt.

In der vorliegenden Arbeit werden die Residuen als Antrieb betrachtet, und durch die adjungierten Gleichungen wird ihre physikalische Bedeutung beibehalten. So sind sie hier nicht mehr bloß Hilfsmittel für die Ermittlung von Gradienten einer Kostenfunktion, sondern bleiben Teil der Physik.

2.3.1 Ermittlung der expliziten adjungierten Gleichungen

Wie oben liegen einmal das Modell (2.7)–(2.9) als Bedingung vor und zum anderen die inexakten Messungen ζ_d , die nur sporadisch vorhanden sind. Gesucht ist die Feldvariable $\underline{\chi} := (\underline{x}, r_a)$ unter der Maßgabe, die Wasserständen als einzig bekannte physikalische Größen gut anzunähern. Die dafür notwendigen Bedingungen werden dabei ähnlich wie im Falle der direkten Methode zunächst über die Aufstellung der Kostenfunktion hergeleitet. Die Ableitung dieser Bedingungen liefert jene adjungierten Gleichungen, die am Ende zusammen mit dem Modell die Optimierungsaufgabe ohne Nebenbedingungen darstellen.

Die adjungierten Gleichungen spielen bei der Ermittlung der bestmöglichen Werte eine wichtige Rolle. Durch sie werden physikalische Informationen der Meßwerte in datenarme Gebiete übermittelt. Die Ableitungen der Residuen bzw. Modellvariablen unterstützen die Datenübertragung und unterdrücken dadurch das übermäßige Anwachsen von Residuen und Modellvariablen an einzelnen Rechenpunkten (sog. Glättung der Daten).

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie solche adjungierte Gleichungen in diskreter Form einfach gewonnen werden können. Tziperman and Thacker (1989) zeigten dies an Hand der nichtlinearen Vorticity Gleichung im Kontinuum. Obwohl sie dabei die Ableitung mit dem perfekten Modell vorgenommen haben, gilt die Methode prinzipiell ebenfalls für das Modell mit Residuum. Die adjungierte Gleichung in Differenzenform sollte jedoch nicht durch die direkte Diskretisierung der für das Kontinuum abgeleiteten adjungierten Gleichung gewonnen werden. Sie müssen auf die diskretisierten Differentialgleichungen bezogen werden. Bennett (1992) demonstrierte die Ermittlung der adjungierten Gleichungen unter Verwendung der Substitutionsmethode. Daley (1991) bzw. Thacker and Long (1988) ermittelten sie durch direkte Ableitung der Kostenfunktion nach einer Steuervariable. Diese beiden Standardmethoden können bei komplizierten Grundgleichungen zu einer sehr mühsamen Ermittlung der adjungierten Gleichungen führen.

Die nachfolgende Methode der Spiegelung erleichtert die Aufstellung der zu komplizierten Differentialgleichungen gehörigen adjungierten Gleichungen, wobei die mathematische Unexaktheit bei der Formulierung im Kauf genommen wird. Hier geht es in erster Linie um einen leichteren Zugang zu den adjungierten Gleichungen. Zu diesem Zweck wird eine einfache Variationsaufgabe formuliert, und zwar ohne Spezifizierung der physikalischen Bedeutung bzw. Gültigkeit.

Variationsaufgabe :

Gesucht sei die Extremalfunktion $u(t, x)$ des Kostenfunktional $J(u)$:

$$\begin{aligned} J(u) &= 1/2 \int ((u_t + uu_x)^2 + W(u - u_d)^2) dxdt \\ \lambda &:= u_t + uu_x \\ u &= u_d + \epsilon, \end{aligned}$$

wobei $u(t, x)$ eine Feldvariable, u_d eine Messung, ϵ ein Meßfehler, W eine Konstante und $\lambda(t, x)$ ein Residuum bezeichnen. Das Modell und die Messungen werden als fehlerbehaftet angesehen. Deren statistische Eigenschaften sollen hier nicht spezifiziert werden. Die Randbedingung und die Anfangsbedingung werden vorläufig ebenfalls nicht spezifiziert. Die notwendige Bedingung des Minimums des Kostenfunktional bezüglich der Steuervariablen (unabhängige Variable) u ist, daß die erste Variation $\delta J(u)$ verschwindet:

$$0 = \delta J(u) = \int \nabla J(u) \cdot \delta u dxdt,$$

vorausgesetzt daß für jede kleine Änderung von u die Zunahme $\delta J(u)$ existiert, wobei δ den Variationsoperator (Courant and Hilbert, 1966) und $\nabla J(u)$ den Gradienten

von $J(u)$ ($= \frac{\partial J(u)}{\partial u}$) bezeichnen. In nichtlinearen Problemen ist das Variationsproblem jedoch oft nicht lösbar. Daher werden die Lösungen gewöhnlich im diskreten Raum gesucht.

Die Aufgabe wird also auf ein diskretes Minimierungsproblem (i.e. Modell- und Datengleichungen) umgeschrieben:

Optimierungsaufgabe

Gesucht sei die diskrete Lösung u des folgenden diskreten Minimierungsproblems:

$$\begin{aligned} J_{\Delta}(u) : &= 1/2 \sum ((L_u)^2 + W(u - u_d)^2 \delta_{ij}) \\ L_u : &= \frac{u - u^{n-1}}{\Delta t} + u^{n-1} \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \\ &= \lambda \\ u &= u_d + \epsilon, \end{aligned}$$

wobei die Indizes (n, i) die diskretisierte Zeitebene und die Ortskoordinaten kennzeichnen. Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird häufig von den Gradienten von $J_{\Delta}(u)$ Gebrauch gemacht. Die direkte Ermittlung nach $\frac{\partial J_{\Delta}}{\partial u}$ führt zur höheren Ordnung der Differenzen- bzw. Differentialgleichungen und ist daher oft schwer durchführbar. Außerdem ist diese Methode zeitlich ineffektiv, da die Gradienten im realistischen Fall für alle Steuervariablen ($=O(10^6)$) und für in der Regel ($=O(10^2)$) Iterationsschritte ermittelt werden müssen. Derartige Operationen sind auch bei Einsatz modernster Computer sehr zeitaufwendig. Eine Alternative stellt die Einführung der adjungierten Gleichungen dar, mit deren Hilfe die rechenzeitintensiven Operationen der Gradientenermittlung drastisch reduziert werden, da sich die Gesamtheit der Gradienten dabei gleichzeitig ergibt.

Die adjungierten Gleichungen (i.e. die notwendige Bedingung) müssen direkt aus dem Kostenfunktional $J_{\Delta}(u)$ (nicht aus $J(u)$) ermittelt werden. Am Minimum des Kostenfunktionals $J_{\Delta}(u)$ muß dessen Gradient bezüglich der Steuervariablen identisch verschwinden (Daley, 1991). Aus dieser Forderung resultiert dann folgende adjungierte Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla J_{\Delta}(u) \\ &= \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{\Delta t} + \lambda^{n+1} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1} \lambda_{i-1}^{n+1} - u_{i+1} \lambda_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x} + W(u - u_d) \delta_{ij} \\ &:= L_{\Delta}^{\lambda} + W(u - u_d) \delta_{ij} \\ &:= L_{\Delta}^*, \end{aligned}$$

wobei L_{Δ}^{λ} bzw. L_{Δ}^* der diskrete formale adjungierte Operator bzw. der diskrete adjungierte Operator bedeuten.

Die direkte Ableitung der adjungierten Gleichung in der beschriebenen Art ist immer noch mühsam, und es wird eine alternative Methode gesucht, bei der die Ermittlung der adjungierten Gleichung fast automatisch erfolgen soll. Entsprechend dem Kontinuum wird angenommen, daß die Variation $\delta J_{\Delta}(u)$ in jedem Punkt (n, i)

für eine kleine Änderung δu existiert. Diese Annahme ist jedoch mathematisch abgeschwächt. Sie ermöglicht dennoch eine vereinfachte Ermittlung der adjungierten Gleichungen, insbesondere bei zugrundeliegenden komplizierten Differentialgleichungen wie in HAMSOM.

Die Bildung der ersten Variation des Differenzenfunktional $J_\Delta(u)$ sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta J_\Delta(u) \\
&= \sum \lambda \delta \lambda + W(u - u_d) \delta_{ij} \delta u \\
&= \sum \lambda \delta L_u + W(u - u_d) \delta_{ij} \delta u \\
&= \sum \lambda \left(\frac{\delta u - \delta u^{n-1}}{\Delta t} + \delta u^{n-1} \frac{u_{i+1}^{n-1} - u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} + u^{n-1} \frac{\delta u_{i+1}^{n-1} - \delta u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x} \right) + W(u - u_d) \delta_{ij} \delta u \\
&:= \sum \lambda L_{\delta_u} + W(u - u_d) \delta_{ij} \delta u \\
&= \sum \delta u \left(\frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{\Delta t} + \lambda^{n+1} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1} \lambda_{i-1}^{n+1} - u_{i+1} \lambda_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x} + W(u - u_d) \delta_{ij} \right) \\
&= \sum \delta u (L_\Delta^\lambda + W(u - u_d) \delta_{ij}) \\
&= \sum \delta u L_\Delta^* \\
&= \sum \delta u \nabla J_\Delta(u),
\end{aligned}$$

wobei $\nabla J_\Delta(u)$ für alle δu verschwinden soll, d.h. für alle (n, i) gelte:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla J_\Delta(u) \\
&= L_\Delta^* \\
&= L_\Delta^\lambda + W(u - u_d) \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Damit wurden die notwendige Bedingung und der Gradient von $J_\Delta(u)$ gefunden. Der Operator der ersten Variation L_{δ_u} und der formale adjungierte Operator L_Δ^λ sind in den oben durchgeführten Umformungen leicht zu identifizieren. Die beiden Operatoren stehen im folgenden Zusammenhang:

$$\sum \lambda L_{\delta_u} = \sum \delta u L_\Delta^\lambda.$$

Der formale adjungierte Operator läßt sich nach der Regel der Spiegelung:

$$\begin{aligned}
\sum \lambda (\dots + C_{i\pm a', j\pm b'}^{n\pm c'} \delta u_{i\pm a, j\pm b}^{n\pm c} + \dots) \\
= \sum \delta u (\dots + C_{i\pm a', j\pm b'}^{n\pm c' \mp c} \lambda_{i\mp a, j\mp b}^{n\mp c} + \dots)
\end{aligned}$$

leicht ermitteln, wobei $C_{i\pm a', j\pm b'}^{n\pm c'}$ den Koeffizienten der Variation $\delta u_{i\pm a, j\pm b}^{n\pm c}$ darstellt und insbesondere im nichtlinearen Fall von der Feldvariable u abhängen kann. Die Spiegelung sollte dabei auf die Indizes der ersten Variation δu der Feldvariablen u

bezogen werden. Nach diesem Prinzip läßt sich die oben dargestellte Ermittlung der adjungierten Gleichung leicht nachvollziehen.

Die bisher nicht berücksichtigten Bedingungen am Rande und die Periodizitätsbedingungen müssen noch für die Feldvariable und die adjungierte Variable spezifiziert werden. Die Index-Vektoren der Zeit ($:= \underline{N}_t$) und des Raumes ($:= \underline{I}_x$) der Feldvariable u werden durch:

$$\begin{aligned}\underline{N}_t &= (0, 1, 2, \dots, n, \dots, N) \\ \underline{I}_x &= (0, 1, 2, \dots, i, \dots, I + 1),\end{aligned}$$

und die Periodizität und die Randbedingungen durch:

$$\begin{aligned}u(0, x) &= u(N, x) \\ u(t, 0) &= u_0 && \text{Dirichlet Bedingung am linken Rand} \\ u(t, I + 1) &= u(t, I - 1) && \text{Neumann Bedingung am rechten Rand}\end{aligned}$$

definiert, wobei u_0 identisch Null und $u(t, I + 1) = u(t, I)$ sein können. Werte für die Feldvariable u werden dann im Zeitintervall von $\underline{N}_t = (1, 2, \dots, n, \dots, N)$ und im Raumintervall von $\underline{I}_x = (1, 2, \dots, i, \dots, I)$ gesucht.

Die periodische Bedingung der adjungierten Variablen, die hier nicht anders als ein Residuum ist, wird angenommen als:

$$\lambda(N + 1, x) = \lambda(1, x),$$

wobei die Zeitpunkte der Periodizität im Vergleich zur Feldvariable u um 1 erhöht worden sind.

Die adjungierten Operatoren für die Zeitebenen $\underline{N}_t = (1, 2, \dots, n, \dots, N)$ sind dann:

$$\begin{aligned}L_{\Delta}^*(N, i) &= \frac{\lambda^N - \lambda^1}{\Delta t} + \lambda^1 \frac{u_{i+1}^N - u_{i-1}^N}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1}^N \lambda_{i-1}^1 - u_{i+1}^N \lambda_{i+1}^1}{2\Delta x} + W(u^N - u_d^N) \delta_{ij} \\ &\vdots \\ L_{\Delta}^*(n, i) &= \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{\Delta t} + \lambda^{n+1} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1} \lambda_{i-1}^{n+1} - u_{i+1} \lambda_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x} + W(u - u_d) \delta_{ij} \\ &\vdots \\ L_{\Delta}^*(1, i) &= \frac{\lambda^1 - \lambda^2}{\Delta t} + \lambda^2 \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^1}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1}^1 \lambda_{i-1}^2 - u_{i+1}^1 \lambda_{i+1}^2}{2\Delta x} + W(u^1 - u_d^1) \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Die adjungierten Operatoren für den Raumkoordinaten $\underline{I}_x = (1, 2, \dots, i, \dots, I)$ sind dann:

$$\begin{aligned}L_{\Delta}^*(n, 1) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_1^{n+1}}{\Delta t} + \lambda_1^{n+1} \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} - \frac{u_2 \lambda_2^{n+1}}{2\Delta x} + W(u_1 - u_{d1}) \delta_{ij} \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\Delta}^*(n, i) &= \frac{\lambda - \lambda^{n+1}}{\Delta t} + \lambda^{n+1} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i-1}\lambda_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}\lambda_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x} + W(u - u_d)\delta_{ij} \\
&\vdots \\
L_{\Delta}^*(n, I) &= \frac{\lambda_I - \lambda_I^{n+1}}{\Delta t} + \frac{u_{I-1}\lambda_{I-1}^{n+1}}{2\Delta x} + W(u_I - u_{dI})\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß die Randbedingungen der adjungierten Variablen und diejenigen der ersten Variation δu überhaupt nicht benutzt worden sind. Im allgemeinen sollte eine solche Annahme wie:

$$\lambda(n, I) = 0$$

nicht gemacht werden.

Durch oben eingeführte Methode der Indizespiegelung ergibt sich eine mühelose Aufstellung der adjungierten Gleichungen folgenden Musters:

(1) Die Kostenfunktionen J , J_a , J_d und J_s sind durch die Gl. (2.26) definiert, wobei J_a , J_d und J_s Residuen-, Daten- bzw. Strafantteil bezeichnen.

(2) Die zugrundeliegenden Differenzenoperatoren L_u , L_v und L_{ζ} sind durch die Gl. (2.7)-(2.9) definiert, und deren adjungierte Operatoren L_u^* , L_v^* und L_{ζ}^* sind nachstehend ermittelt.

$$0 = \frac{\partial J}{\partial U} = L_u^* + \frac{\partial J_s}{\partial U}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
L_u^* &= W_P \left(\frac{P - P^{n+1}}{\Delta t} + \frac{P^{n+1}}{H_u^{n+1}} \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{PR}{(H_u^{n+1})^2} \sqrt{U^2 + (\bar{V}^{n+1})^2} \right. \\
&+ \left(U_{i-1} \left(\frac{P}{H_u} \right)_{i-1}^{n+1} - U_{i+1} \left(\frac{P}{H_u} \right)_{i+1}^{n+1} \right) \frac{1}{2\Delta x} + \left(\left(\frac{P\bar{V}}{H_u} \right)_{j+1}^{n+1} - \left(\frac{P\bar{V}}{H_u} \right)_{j-1}^{n+1} \right) \frac{1}{2\Delta y} \\
&- \frac{A_H}{\Delta x^2} (P_{i+1}^{n+1} + P_{i-1}^{n+1} - 2P^{n+1}) - \frac{A_H}{\Delta y^2} (P_{j+1}^{n+1} + P_{j-1}^{n+1} - 2P^{n+1}) \Big) \\
&+ W_Q \left(\frac{1}{4} \left(Q_{i+1}^{n+1} \frac{V_{i+2} - V}{H_{vi+1}^{n+1}} + Q^{n+1} \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{H_v^{n+1}} \right. \right. \\
&+ \left. \left. Q_{j-1}^{n+1} \frac{V_{i+1, j-1} - V_{i-1, j-1}}{H_{vj-1}^{n+1}} + Q_{i+1, j-1}^{n+1} \frac{V_{i+2, j-1} - V_{j-1}}{H_{vi+1, j-1}^{n+1}} \right) \frac{1}{2\Delta x} \right. \\
&- \left. \frac{1}{4} (F_{vi+1} Q_{i+1}^{n+1} + F_v Q^{n+1} + F_{vj-1} Q_{j-1}^{n+1} + F_{vi+1, j-1} Q_{i+1, j-1}^{n+1}) \right) \\
&+ W_S \left(\frac{1}{\Delta x} (S - S_{i+1}) \right) \\
\frac{\partial J_s}{\partial U} &= W_p^u (U - U_p) + W_0^u (U - U_0) - W_{\nabla U}^u \Delta U + W_{\Delta U}^u \Delta \Delta U
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial V} = L_v^* + \frac{\partial J_s}{\partial V} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} L_v^* &= W_Q \left(\frac{Q - Q^{n+1}}{\Delta t} + \frac{Q^{n+1}}{H_v^{n+1}} \frac{V_{j-1} - V_{j+1}}{2\Delta y} + \frac{Q^{n+1}R}{(H_v^{n+1})^2} \sqrt{V^2 + (\bar{U}^{n+1})^2} \right. \\ &+ \left(V_{j+1} \left(\frac{Q}{H_v} \right)_{j+1}^{n+1} - V_{j-1} \left(\frac{Q}{H_v} \right)_{j-1}^{n+1} \right) \frac{1}{2\Delta y} + \left(\left(\frac{Q\bar{U}}{H_v} \right)_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{Q\bar{U}}{H_v} \right)_{i+1}^{n+1} \right) \frac{1}{2\Delta x} \\ &- \frac{A_H}{\Delta x^2} (Q_{i+1}^{n+1} + Q_{i-1}^{n+1} - 2Q^{n+1}) - \frac{A_H}{\Delta y^2} (Q_{j+1}^{n+1} + Q_{j-1}^{n+1} - 2Q^{n+1}) \Big) \\ &+ W_P \left(\frac{1}{4} \left(P_{i-1}^{n+1} \frac{U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1}}{H_{ui-1}^{n+1}} + P^{n+1} \frac{U_{j-1} - U_{j+1}}{H_u^{n+1}} \right. \right. \\ &+ \left. \left. P_{j+1}^{n+1} \frac{U - U_{j+2}}{H_{uj+1}^{n+1}} + P_{i-1,j+1}^{n+1} \frac{U_{i-1} - U_{i-1,j+2}}{H_{ui-1,j+1}^{n+1}} \right) \frac{1}{2\Delta y} \right. \\ &- \left. \frac{1}{4} (F_{ui+1} P_{i+1}^{n+1} + F_u P^{n+1} + F_{uj+1} P_{j+1}^{n+1} + F_{ui-1,j+1} P_{i-1,j+1}^{n+1}) \right) \\ &+ W_S \left(\frac{\Psi_v}{\Delta y} (S_{j+1} - S) \right) \\ \frac{\partial J_s}{\partial V} &= W_p^v (V - V_p) + W_0^v (V - V_0) - W_{\nabla V}^v \Delta V + W_{\Delta V}^v \Delta \Delta V \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = L_\zeta^* + \frac{\partial J_s}{\partial \zeta} + \frac{\partial J_d}{\partial \zeta}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} 0 = L_\zeta^* &= W_S \frac{S - S^{n+1}}{\Delta t} + W_P G \frac{(H_u P)_{i-1}^{n+1} - (H_u P)^{n+1}}{\Delta x} \\ &+ W_Q G \frac{(H_v Q)^{n+1} - (H_v Q)_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} \\ \frac{\partial J_d}{\partial \zeta} &= W_d^\zeta (\zeta - \zeta_d) \delta_{ij} \\ \frac{\partial J_s}{\partial \zeta} &= W_p^\zeta (\zeta - \zeta_p) + W_0^\zeta (\zeta - \zeta_0) - W_{\nabla \zeta}^\zeta \Delta \zeta + W_{\Delta \zeta}^\zeta \Delta \Delta \zeta \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial P} = W_P P + W_{\nabla P}^P \Delta P + W_{\Delta P}^P \Delta \Delta P \quad (2.36)$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial Q} = W_Q Q + W_{\nabla Q}^Q \Delta Q + W_{\Delta Q}^Q \Delta \Delta Q \quad (2.37)$$

$$0 = \frac{\partial J}{\partial S} = W_S S + W_{\nabla S}^S \Delta S + W_{\Delta S}^S \Delta \Delta S \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_{i-1} + P_{i+1} + P_{j-1} + P_{j+1} - 4P \\ \Delta\Delta P &= P_{i+2} + P_{i-2} + P_{j+2} + P_{j-2} + 2(P_{i+1,j+1} + P_{i+1,j-1} + P_{i-1,j+1} + P_{i-1,j-1}) \\ &\quad - 8(P_{i+1} + P_{i-1} + P_{j+1} + P_{j-1}) + 20P\end{aligned}$$

ΔU , ΔV , $\Delta\zeta$, $\Delta\Delta U$, $\Delta\Delta V$ und $\Delta\Delta\zeta$ lassen sich genau so wie oben diskretisieren. Die Zeitindizes sind fortlaufend $n = 1, 2, \dots, N$ und die Periodizitätsbedingungen des Modells bzw. der adjungierten Variable sind

$$\begin{aligned}\underline{x}(0) &= \underline{x}(N) \\ \underline{r}_a(1) &= \underline{r}_a(N + 1).\end{aligned}$$

Die adjungierten Gleichungen geben damit die Sensitivität der Skalarfunktion J an, die gegenüber kleinen Variationen der einzelnen Steuervariablen besteht. Darüber hinaus werden durch sie die Daten interpretiert und in datenarme Gebiete übermittelt. Das Minimum des Funktionals – und damit die gesuchte mathematische Lösung – müssen dort vermutet werden, wo die Gradienten identisch verschwinden. Die Ableitungen der Residuen bzw. der Zustandsvariablen haben ähnliche Eigenschaften und tragen zur Stabilisierung des Gleichungssystems bei, ohne dabei die statistische Eigenschaften der Daten zu beeinflussen. Zusätzlich übertragen sie sogar zuverlässige Informationen in Gebiete, in denen lediglich unzuverlässige Daten vorhanden sind (Wüst et al., 2001). Hierbei beschreiben die adjungierten Variablen das Maß der Nichterfüllung der klassischen Gleichungen.

2.3.2 Ermittlung der semi-impliziten adjungierten Gleichungen

Die Formulierung einer expliziten Diskretisierung der Differentialgleichungen (2.1)–(2.3) läßt einen maximalen Zeitschritt von $\Delta t_{CFL} := \Delta x \Delta y / (gH_{max}(\Delta x^2 + \Delta y^2))^{1/2}$ zu (Seiler, 1989). Dadurch werden große Rechnerressourcen und Rechenzeit benötigt, deren Inanspruchnahme zu vermeiden sind.

In der vorliegenden Arbeit wurden Differentialgleichungen in sphärischen Koordinaten (2.1)–(2.3) zunächst ähnlich wie bei Mihardja (1991) auf kartesische Koordinaten diskretisiert, wobei die räumliche Verteilung der Variablen (ζ , U , V) in einer Zeitebene nach dem Schema des Arakawa-C-Gitters vorgenommen worden ist (Backhaus, 1983). Dabei wurden lediglich die Terme der Druckgradientenkraft in den Impulsgleichungen und die Divergenzterme in der Kontinuitätsgleichung implizit formuliert.

Das Zwillingsexperiment im späteren Abschnitt zeigt, daß der Zeitschritt ohne weiteres auf das Vierfache des CFL Kriteriums vergrößert werden kann. Eine darüber hinausgehende Zunahme des Zeitschritts führt allerdings bei unveränderter Amplitude zu einem Phasenfehler.

Das modifizierte HAMSOM-Modell wird hier in Matrixform $A\underline{x} = 0$ umgeschrieben. Der Zweck dieser Veränderung liegt in der leichteren Implementierung der CGSL Iteration, sowie in der einfacheren Ableitung der adjungierten Gleichungen.

$$\begin{aligned}
L_\zeta &= a_1\zeta + a_2\zeta_{i+1} + a_3\zeta_{i-1} + a_4\zeta_{j-1} + a_5\zeta_{j+1} + a_6\zeta^{n-1} + a_7\zeta_{i+1}^{n-1} \\
&+ a_8\zeta_{i-1}^{n-1} + a_9\zeta_{j-1}^{n-1} + a_{10}\zeta_{j+1}^{n-1} + a_{11}U^{n-1} + a_{12}U_{i+1}^{n-1} + a_{13}U_{i-1}^{n-1} + a_{14}U_{j-1}^{n-1} \\
&+ a_{15}U_{j+1}^{n-1} + a_{16}U_{i-1,j-1}^{n-1} + a_{17}U_{i-1,j+1}^{n-1} + a_{18}U_{i-2}^{n-1} + a_{19}V^{n-1} + a_{20}V_{i+1}^{n-1} \\
&+ a_{21}V_{i-1}^{n-1} + a_{22}V_{j-1}^{n-1} + a_{23}V_{j+1}^{n-1} + a_{24}V_{i+1,j-1}^{n-1} + a_{25}V_{i-1,j-1}^{n-1} + a_{26}V_{j-2}^{n-1} \\
&= S \quad (2.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_u &= b_1U + b_2U^{n-1} + b_3U_{i+1}^{n-1} + b_4U_{i-1}^{n-1} + b_5U_{j-1}^{n-1} + b_6U_{j+1}^{n-1} \\
&+ b_7V^{n-1} + b_8V_{i+1}^{n-1} + b_9V_{j-1}^{n-1} + b_{10}V_{i+1,j-1}^{n-1} \\
&+ b_{11}\zeta + b_{12}\zeta_{i+1} + b_{13}\zeta^{n-1} + b_{14}\zeta_{i+1}^{n-1} \\
&= P \quad (2.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_v &= c_1V + c_2V^{n-1} + c_3V_{i+1}^{n-1} + c_4V_{i-1}^{n-1} + c_5V_{j-1}^{n-1} + c_6V_{j+1}^{n-1} \\
&+ c_7U^{n-1} + c_8U_{i-1}^{n-1} + c_9U_{j+1}^{n-1} + c_{10}U_{i-1,j+1}^{n-1} \\
&+ c_{11}\zeta + c_{12}\zeta_{j+1} + c_{13}\zeta^{n-1} + c_{14}\zeta_{j+1}^{n-1} \\
&= Q \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten bzw. die Substitution sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{\cos \phi_v}{\cos \phi_u} \\
R^u &= \left(1 + \frac{R\Delta t}{(H^u)^2}(U^2 + \bar{V}^2)^{1/2}\right)^{-1} \\
R^v &= \left(1 + \frac{R\Delta t}{(H^v)^2}(V^2 + \bar{U}^2)^{1/2}\right)^{-1} \\
C^x &= G \cdot R^u \cdot H^u \left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)^2 \\
C^y &= G \cdot R^v \cdot H^v \left(\frac{\Delta t}{2\Delta y}\right)^2 \\
C^* &= 1 + C^x + C_{i-1}^x + C^y \Psi + C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
C &= 1 - C^x - C_{i-1}^x - C^y \Psi - C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
E_u &= (1 + R^u) \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
E_v &= (1 + R^v) \Psi \frac{\Delta t}{2\Delta y} \\
F^{x*} &= F_u \cdot R^u \frac{\Delta t^2}{2\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{y*} &= F_v \cdot R^v \Psi \frac{\Delta t^2}{2\Delta y} \\
A_H U^{x*} &= A_H \cdot R^u \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^3} \\
A_H U^{y*} &= A_H \cdot R^u \frac{\Delta t^2}{2\Delta x \Delta y^2} \\
A_H V^{x*} &= A_H \cdot R^v \Psi \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2 \Delta y} \\
A_H V^{y*} &= A_H \cdot R^v \Psi \frac{\Delta t^2}{2\Delta y^3} \\
ConU^{x*} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} \cdot \frac{R^u}{H^u} \\
ConU^{y*} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta x \Delta y} \cdot \frac{R^u}{H^u} \\
ConV^{x*} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta x \Delta y} \cdot \frac{R^v \Psi}{H^v} \\
ConV^{y*} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta y^2} \cdot \frac{R^v \Psi}{H^v} \\
F^x &= \Delta t F_u R^u \\
F^y &= \Delta t F_v R^v \\
ConU^x &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot \frac{R^u}{H^u} \\
ConU^y &= \frac{\Delta t}{2\Delta y} \cdot \frac{R^u}{H^u} \\
ConV^x &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \cdot \frac{R^v}{H^v} \\
ConV^y &= \frac{\Delta t}{2\Delta y} \cdot \frac{R^v}{H^v} \\
A_H U^x &= A_H \cdot R^u \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\
A_H U^y &= A_H \cdot R^u \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\
A_H V^x &= A_H \cdot R^v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \\
A_H V^y &= A_H \cdot R^v \frac{\Delta t}{\Delta y^2} \\
G_u &= G \cdot H^u R^u \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
G_v &= G \cdot H^v R^v \frac{\Delta t}{2\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 + C^x + C_{i-1}^x + C^y \Psi + C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
a_2 &= -C^x \\
a_3 &= -C_{i-1}^x \\
a_4 &= -C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
a_5 &= -C^y \Psi \\
a_6 &= -1 + C^x + C_{i-1}^x + C^y \Psi + C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
a_7 &= -C^x \\
a_8 &= -C_{i-1}^x \\
a_9 &= -C_{j-1}^y \Psi_{j-1} \\
a_{10} &= -C^y \Psi \\
a_{11} &= E_u - 2A_H U^{x*} - 2A_H U^{y*} - A_H U_{i-1}^{x*} + Con U_{i-1}^{x*} \cdot U_{i-1} \\
&\quad + 0.25 F^{y*} - 0.25 F_{j-1}^{y*} \\
a_{12} &= -Con U^{x*} \cdot U + A_H U^{x*} \\
a_{13} &= -E_{ui-1} + 2A_H U_{i-1}^{x*} + 2A_H U_{i-1}^{y*} + A_H U^{x*} + Con U^{x*} \cdot U_{j-1} \\
&\quad + 0.25 F^{y*} - 0.25 F^{y*} U \\
a_{14} &= -Con U^{y*} \cdot \bar{V} + A_H U^{y*} - 0.25 F_{j-1}^{y*} \\
a_{15} &= Con U^{y*} \cdot \bar{V} + A_H U^{y*} + 0.25 F^{y*} \\
a_{16} &= Con U_{i-1}^{y*} \cdot \bar{V}_{i-1} - A_H U_{i-1}^{y*} - 0.25 F_{j-1}^{y*} \\
a_{17} &= -Con U_{i-1}^{y*} \cdot \bar{V}_{i-1} - A_H U_{i-1}^{y*} + 0.25 F^{y*} \\
a_{18} &= -Con U_{i-1}^{x*} \cdot U_{i-1} - A_H U_{i-1}^{x*} \\
a_{19} &= -E_v + 2A_H V^{x*} + 2A_H V^{y*} + A_H V_{j-1}^{y*} \\
&\quad + 0.25 F^{x*} - 0.25 F_{i-1}^{x*} + Con V_{j-1}^{y*} \cdot V_{j-1} \\
a_{20} &= -A_H V^{x*} + Con V^{x*} \cdot \bar{U} + 0.25 F^{x*} \\
a_{21} &= -A_H V^{x*} - Con V^{x*} \cdot \bar{U} - 0.25 F_{i-1}^{x*} \\
a_{22} &= E_{vj-1} - 2A_H V_{j-1}^{x*} - 2A_H V_{j-1}^{y*} - A_H V^{y*} + Con V^{y*} \cdot V \\
&\quad + 0.25 F^{x*} - 0.25 F_{i-1}^{x*} \\
a_{23} &= -Con V^{y*} \cdot V - A_H V^{y*} \\
a_{24} &= A_H V_{j-1}^{x*} - Con V_{j-1}^{x*} \cdot \bar{U}_{j-1} + 0.25 F^{x*} \\
a_{25} &= A_H V_{j-1}^{x*} + Con V_{j-1}^{x*} \cdot \bar{U}_{j-1} - 0.25 F_{i-1}^{x*} \\
a_{26} &= A_H V_{j-1}^{y*} - Con V_{j-1}^{y*} \cdot V_{j-1}
\end{aligned}$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = -R^u + 2A_H U^x + 2A_H U^y$$

$$b_3 = U \cdot Con U^x - A_H U^x$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= -U \cdot \text{Con}U^x - A_H U^x \\
b_5 &= \bar{V} \cdot \text{Con}U^y - A_H U^y \\
b_6 &= -\bar{V} \cdot \text{Con}U^y - A_H U^y \\
b_7 &= -0.25F^x \\
b_8 &= -0.25F^x \\
b_9 &= -0.25F^x \\
b_{10} &= -0.25F^x \\
b_{11} &= -G_u \\
b_{12} &= G_u \\
b_{13} &= -G_u \\
b_{14} &= G_u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 \\
c_2 &= -R^v + 2A_H V^x + 2A_H V^y \\
c_3 &= \bar{U} \cdot \text{Con}V^x - A_H V^x \\
c_4 &= -\bar{U} \cdot \text{Con}V^x - A_H V^x \\
c_5 &= V \cdot \text{Con}V^y - A_H V^y \\
c_6 &= -V \cdot \text{Con}V^y - A_H V^y \\
c_7 &= 0.25F^y \\
c_8 &= 0.25F^y \\
c_9 &= 0.25F^y \\
c_{10} &= 0.25F^y \\
c_{11} &= G_v \\
c_{12} &= -G_v \\
c_{13} &= G_v \\
c_{14} &= -G_v
\end{aligned}$$

Sämtliche Koeffizienten der Massenerhaltungsgleichung sind zeitabhängig. Daher muß diese Gleichung iterativ z.B. durch das SOR Verfahren (Backhaus, 1983)¹ gelöst werden.

Das hier eingeführte semi-implizite HAMSOM-Modell kann zur Ermittlung von klassischen Lösungen genutzt werden, die bei der Assimilation zur Definition des Anfangsfeldes der Iteration verwendet werden können.

¹In vorliegender Arbeit wurde der Relaxionsparameter $\omega = 1.2$ benutzt.

2.3.2.1 Semi-implizite adjungierte Gleichungen

Seit Le Dimet and Talagrand (1986) nahm die Verwendung der adjungierten Methode in Verbindung mit der optimalen Steuerung/Variationsmethode stark zu. Diese Methode wurde dahingehend konzipiert, die Anzahl der Unbekannten drastisch zu reduzieren. Mit Hilfe der adjungierten Gleichungen können alle Gradienten einer vorbestimmten Kostenfunktion durch einmalige Rückwärtsintegration gleichzeitig ermittelt und gesuchte Lösungen durch eine Optimierungstechnik gefunden werden.

Die relativ geringe Abhängigkeit des semi-impliziten Modells vom Zeitschritt ist Veranlassung, ein entsprechendes adjungiertes HAMSOM-Modell zu entwickeln.

Der Einfachheit halber wird die Kostenfunktion gemäß (2.26) nur durch die Residuen des Modells (J_a) und durch diejenigen der Daten (J_d) definiert. Eine Berücksichtigung des Strafterms (J_s) wird wegen dessen Unerheblichkeit ausgespart. Die Ableitung der adjungierten Gleichungen entspricht derjenigen des expliziten Falles; mithin wird sie hier nicht wiedergegeben.

Adjungierte Massenerhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned} L_\zeta^* = & a_1^* S + a_2^* S_{i+1} + a_3^* S_{i-1} + a_4^* S_{j-1} + a_5^* S_{j+1} + a_6^* S^{n+1} + a_7^* S_{i+1}^{n+1} \\ & + a_8^* S_{i-1}^{n+1} + a_9^* S_{j-1}^{n+1} + a_{10}^* S_{j+1}^{n+1} + a_{11}^* P + a_{12}^* P_{i-1} + a_{13}^* P^{n+1} \\ & + a_{14}^* P_{i-1}^{n+1} + a_{15}^* Q + a_{16}^* Q_{j-1} + a_{17}^* Q^{n+1} + a_{18}^* Q_{j-1}^{n+1} + W_d \zeta = W_d \zeta_d \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Adjungierte zonale bzw. meridionale Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} L_u^* = & b_1^* P + b_2^* P^{n+1} + b_3^* P_{i+1}^{n+1} + b_4^* P_{i-1}^{n+1} + b_5^* P_{j-1}^{n+1} + b_6^* P_{j+1}^{n+1} + b_7^* Q^{n+1} \\ & + b_8^* Q_{i+1}^{n+1} + b_9^* Q_{j-1}^{n+1} + b_{10}^* Q_{i+1,j-1}^{n+1} + b_{11}^* S^{n+1} + b_{12}^* S_{i+1}^{n+1} + b_{13}^* S_{i-1}^{n+1} \\ & + b_{14}^* S_{j-1}^{n+1} + b_{15}^* S_{j+1}^{n+1} + b_{16}^* S_{i+1,j+1}^{n+1} + b_{17}^* S_{i+1,j-1}^{n+1} + b_{18}^* S_{i+2}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} L_v^* = & c_1^* Q + c_2^* Q^{n+1} + c_3^* Q_{i+1}^{n+1} + c_4^* Q_{i-1}^{n+1} + c_5^* Q_{j-1}^{n+1} + c_6^* Q_{j+1}^{n+1} + c_7^* P^{n+1} \\ & + c_8^* P_{i-1}^{n+1} + c_9^* P_{j+1}^{n+1} + c_{10}^* P_{i-1,j+1}^{n+1} + c_{11}^* S^{n+1} + c_{12}^* S_{i+1}^{n+1} + c_{13}^* S_{i-1}^{n+1} \\ & + c_{14}^* S_{j-1}^{n+1} + c_{15}^* S_{j+1}^{n+1} + c_{16}^* S_{i+1,j+1}^{n+1} + c_{17}^* S_{i-1,j+1}^{n+1} + c_{18}^* S_{j+2}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Substitutionen:

$$\begin{aligned} a_1^* &= W_S (1 + C^x + C_{i-1}^x + C^y \phi + C_{j-1}^y \phi_{j-1})^{n-1} \\ a_2^* &= W_S (-C^x)^{n-1} \\ a_3^* &= W_S (-C_{i-1}^x)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4^* &= W_S(-C_{j-1}^y \phi_{j-1})^{n-1} \\
a_5^* &= W_S(-C^y \phi)^{n-1} \\
a_6^* &= W_S(-1 + C^x + C_{i-1}^x + C^y \phi + C_{j-1}^y \phi_{j-1})^n \\
a_7^* &= W_S(-C^x)^n \\
a_8^* &= W_S(-C_{i-1}^x)^n \\
a_9^* &= W_S(-C_{j-1}^y \phi_{j-1})^n \\
a_{10}^* &= W_S(-C^y \phi)^n \\
a_{11}^* &= W_P(-G_u)^{n-1} \\
a_{12}^* &= W_P(+G_u)_{i-1}^{n-1} \\
a_{13}^* &= W_P(-G_u)^n \\
a_{14}^* &= W_P(+G_u)_{i-1}^n \\
a_{15}^* &= W_Q(+G_v)^{n-1} \\
a_{16}^* &= W_Q(-G_v)_{j-1}^{n-1} \\
a_{17}^* &= W_Q(+G_v)^n \\
a_{18}^* &= W_Q(-G_v)_{j-1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1^* &= W_P \\
b_2^* &= W_P(-R^u + 2A_H U^x + 2A_H U^y + A_H U^x (U_{i+1} - U_{i-1}))^n \\
b_3^* &= W_P(-U_{i+1} \cdot \text{Con} U_{i+1}^x - A_H U_{i+1}^x)^n \\
b_4^* &= W_P(+U_{i-1} \cdot \text{Con} U_{i-1}^x - A_H U_{i-1}^x)^n \\
b_5^* &= W_P(-\bar{V}_{j-1} \cdot \text{Con} U_{j-1}^y - A_H U_{j-1}^y)^n \\
b_6^* &= W_P(+\bar{V}_{j+1} \cdot \text{Con} U_{j+1}^y - A_H U_{j+1}^y)^n \\
b_7^* &= W_Q(0.25F^y + 0.25\text{Con} V^x (V_{i+1} - V_{i-1}))^n \\
b_8^* &= W_Q(0.25F_{i+1}^y + 0.25\text{Con} V_{i+1}^x (V_{i+2} - V))^n \\
b_9^* &= W_Q(0.25F_{j-1}^y + 0.25\text{Con} V_{j-1}^x (V_{i+1,j-1} - V_{i-1,j-1}))^n \\
b_{10}^* &= W_Q(0.25F_{i+1,j-1}^y + 0.25\text{Con} V_{i+1,j-1}^x (V_{i+2,j-1} - V_{j-1}))^n \\
b_{11}^* &= W_S(E_u - 2A_H U^{x*} - 2A_H U^{y*} - A_H U_{i-1}^{x*} + \text{Con} U_{i-1}^{x*} \cdot U_{i-1} \\
&\quad + 0.25F^{y*} - 0.25F_{j-1}^{y*} \\
&\quad + 0.25\text{Con} U^{x*} (V_{i+1} - V_{i-1}) + 0.25\text{Con} V_{j-1}^{x*} (V_{i-1,j-1} - V_{i+1,j-1}))^n \\
b_{12}^* &= W_S(-E_u + 2A_H U^{x*} + 2A_H U^{y*} + A_H U_{i+1}^{x*} + \text{Con} U_{i+1}^{x*} \cdot U_{i+1} \\
&\quad + 0.25F_{i+1}^{y*} - 0.25F_{i+1,j-1}^{y*} \\
&\quad + 0.25\text{Con} V_{i+1}^{x*} (V_{i+2} - V) + 0.25\text{Con} V_{i+1,j-1}^{x*} (V_{j-1} - V_{i+2,j-1}))^n \\
b_{13}^* &= W_S(-\text{Con} U_{i-1}^{x*} \cdot U_{i-1} + A_H U_{i-1}^{x*})^n \\
b_{14}^* &= W_S(\text{Con} U_{j-1}^{y*} \cdot \bar{V}_{j-1} + A_H U_{j-1}^{y*} + 0.25F_{j-1}^{y*} \\
&\quad + 0.25\text{Con} V_{j-1}^{x*} (V_{i+1,j-1} - V_{i-1,j-1}))^n \\
b_{15}^* &= W_S(-\text{Con} U_{j+1}^{y*} \cdot \bar{V}_{j+1} + A_H U_{j+1}^{y*} - 0.25F^{y*} + 0.25\text{Con} V^{x*} (V_{i-1} - V_{i+1}))^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{16}^* &= W_S(\text{Con}U_{j+1}^{y*} \cdot \bar{V}_{j+1} - A_H U_{j+1}^{y*} - 0.25F_{i+1}^{y*} + 0.25\text{Con}V_{i+1}^{x*}(V - V_{i+2}))^n \\
b_{17}^* &= W_S(-\text{Con}U_{j-1}^{y*} \cdot \bar{V}_{j-1} - A_H U_{j-1}^{y*} + 0.25F_{i+1,j-1}^{y*} \\
&\quad + 0.25\text{Con}V_{i+1,j-1}^{x*}(V_{i+2,j-1} - V_{j-1}))^n \\
b_{18}^* &= W_S(-\text{Con}U_{i+1}^{x*} \cdot U_{i+1} - A_H U_{i+1}^{x*})^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1^* &= W_Q \\
c_2^* &= W_Q(-R^v + 2A_H V^x + 2A_H V^y + \text{Con}V^y(V_{j-1} - V_{j+1}))^n \\
c_3^* &= W_Q(-\bar{U}_{i+1} \cdot \text{Con}V_{i+1}^x - A_H V_{i+1}^x)^n \\
c_4^* &= W_Q(+\bar{U}_{i-1} \cdot \text{Con}V_{i-1}^x - A_H V_{i-1}^x)^n \\
c_5^* &= W_Q(-V_{j-1} \cdot \text{Con}V_{j-1}^y - A_H V_{j-1}^y)^n \\
c_6^* &= W_Q(-V_{j+1} \cdot \text{Con}V_{j+1}^y - A_H V_{j+1}^y)^n \\
c_7^* &= W_P(-0.25F^x + 0.25\text{Con}U^y(U_{j-1} - U_{j+1}))^n \\
c_8^* &= W_P(-0.25F_{i-1}^x + 0.25\text{Con}U_{i-1}^y(U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1}))^n \\
c_9^* &= W_P(-0.25F_{j+1}^x + 0.25\text{Con}U_{j+1}^y(U - U_{j+2}))^n \\
c_{10}^* &= W_P(-0.25F_{i-1,j+1}^x + 0.25\text{Con}U_{i-1,j+1}^y(U_{i-1} - U_{i-1,j+2}))^n \\
c_{11}^* &= W_S(-E_v + 2A_H V^{x*} + 2A_H V^{y*} + A_H V_{j-1}^{y*} + \text{Con}V_{j-1}^{y*} \cdot V_{i-1} \\
&\quad + 0.25F^{x*} - 0.25F_{i-1}^{x*} + 0.25\text{Con}U^{y*}(U_{j+1} - U_{j-1}) \\
&\quad + 0.25\text{Con}U_{i-1}^{y*}(U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1}))^n \\
c_{12}^* &= W_S(-A_H V_{i+1}^{x*} - \text{Con}V_{i+1}^{x*} \cdot \bar{U}_{i+1} \\
&\quad - 0.25F^{x*} + 0.25\text{Con}U^{y*}(U_{j-1} - U_{j+1}))^n \\
c_{13}^* &= W_S(-A_H V_{i-1}^{x*} + \text{Con}V_{i-1}^{x*} \cdot \bar{U}_{i-1} \\
&\quad + 0.25F_{i-1}^{x*} + 0.25\text{Con}U_{i-1}^{y*}(U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1}))^n \\
c_{14}^* &= W_S(-\text{Con}V_{j-1}^{y*} \cdot V_{j-1} - A_H V_{j-1}^{y*})^n \\
c_{15}^* &= W_S(E_v - 2A_H V^{x*} - 2A_H V^{y*} - A_H V_{j+1}^{y*} + \text{Con}V_{j+1}^{y*} \cdot V_{j+1} \\
&\quad + 0.25F_{j+1}^{x*} - 0.25F_{i-1,j+1}^{x*} + 0.25\text{Con}U_{j+1}^{y*}(U_{j+2} - U) \\
&\quad + 0.25\text{Con}U_{i-1,j+1}^{y*}(U_{i-1} - U_{i-1,j+2}))^n \\
c_{16}^* &= W_S(A_H V_{i+1}^{x*} + \text{Con}V_{i+1}^{x*} \cdot \bar{U}_{i+1} - 0.25F_{j+1}^{x*} + 0.25\text{Con}U_{j+1}^{y*}(U - U_{j+2}))^n \\
c_{17}^* &= W_S(A_H V_{i-1}^{x*} - \text{Con}V_{i-1}^{x*} \cdot \bar{U}_{i-1} + 0.25F_{i-1,j+1}^{x*} \\
&\quad + 0.25\text{Con}U_{i-1,j+1}^{y*}(U_{i-1,j+2} - U_{i-1}))^n \\
c_{18}^* &= W_S(A_H V_{j+1}^{y*} - \text{Con}V_{j+1}^{y*} \cdot V_{j+1})^n
\end{aligned}$$

Die adjungierten Variablen (P, Q, S) werden in zwei Zeitebenen ($n, n + 1$) definiert. Gleiches gilt für die Koeffizienten der adjungierten Massenerhaltungsgleichung, hier liegen allerdings Ebenen im Sinne ($n, n - 1$) vor. Dies ergibt sich aus der Zeitabhängigkeit der Koeffizienten.

Der Term $W_d \zeta_d \delta_{ij}$ in Gleichung (2.42) impliziert, daß er nur dort berücksichtigt wird, wo sich Daten befinden. Allein dieser Term ist für die Assimilationslösungen im Sinne der Gleichungen (2.39–2.41) bzw. deren adjungierten Gleichungen (2.42–2.44) bestimmend. Aus diesem Grunde wird er als δ -Forcing bezeichnet.

Die Art und Weise, wie durch die adjungierten Gleichungen (2.42–2.44) Daten $W_d \zeta_d \delta_{ij}$ interpretiert und deren Information in datenfreie Bereiche transportiert werden, wird beim Zwillingsexperiment demonstriert.

Liegt ein einziger Datenpunkt vor, so stellen sich die Gleichungen (2.42)–(2.44) als Green'sche Funktion dar. Damit kann die vorliegende semi-implizite Formulierung auf die Representer Methode (Bennett, 1992) erweitert werden.

2.3.2.2 Minimumsuche im K-dimensionalen euklidischen Vektorraum

Der Minimalpunkt der obigen unrestringierten Optimierungsaufgabe wird gewöhnlich durch ein numerisches Suchverfahren ermittelt. Hierzu werden Gradienten-, konjugierte Gradienten- oder Quasi-Newton-Verfahren benutzt, da die Gradienten aller einzelnen Steuervariablen ($\chi \in V(\mathfrak{R}^K, K = 2k)$) durch eine einzige Integration der adjungierten Gleichungen mit bestimmt werden können.

Häufig angewandt wird das konjugierte Gradientenverfahren in der Fletcher-Reeves- bzw. Polak-Ribiera-Version. Das Quasi-Newton-Verfahren muß wegen des hohen Aufwandes an Speicherkapazität ausgeschlossen werden. Das präkonditionierte konjugierte Gradientenverfahren (Derber and Rosati, 1989) wäre hierzu eine gute Alternative.

Bisher mit der direkten Methode erzielte gute Ergebnisse legen nahe, die Modellgleichungen und adjungierten Gleichungen mit der gleichen Iterationsmethode entsprechend zu lösen. Die Anzahl der Unbekannten und die Rechenzeit verdoppeln sich jeweils, da die adjungierten Variablen zusätzlich bestimmt werden müssen. Trotz allem erwies sich das Verfahren auch hier als hochgradig effektiv.

2.4 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, daß die direkte Methode die höchstwahrscheinlichsten Residuen im statistischen Sinne durch Maxmierung der Likelihood Funktion liefert.

Die Möglichkeit der datenbeeinflussten Ermittlung der zeitlich und räumlich sich verändernden Zustandsvariablen durch die direkte bzw. adjungierte Methode ist bei Verwendung des semi-impliziten HAMSOM Modells sichergestellt.

Die in der vorliegenden Arbeit ermittelte semi-implizite adjungierte Methode kann auf die VCA Technik von Derber (1989) erweitert werden, welche jedoch nicht in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden soll. Diese Maßnahme könnte zukünftig bei der Assimilation von Daten in ozeanische Modelle langzeitlicher Variabilität eine Rolle spielen.

Wie McIntosh and Bennett (1984) zeigten, ist die Fehlerliste der numerischen Modelle lang. Die Hauptquelle der Fehler liegt in den oft nicht genau bekannten Randbedingungen sowohl an offenen als auch an geschlossenen Rändern sowie in den ungenau ermittelten Tiefentopographien. Diese Defizite können nicht durch die bloße Verfeinerung der Gitternetze oder durch Einführung eines 3D-Modells beseitigt werden.

Die Datenassimilation hebt dieses Problem auf und bietet gute Möglichkeiten zu Lösungsverbesserungen in inneren und in Randgebieten, auch dann, wenn die Daten im Inneren liegen. Obwohl viele Assimilationsmethoden erprobt worden sind (Anderson et al., 2000), erweisen sich die meisten von ihnen für zeitabhängige Gleichungssysteme hoher Dimension wegen der benötigten Speicherkapazitäten als nicht geeignet. So sind z.B. gut bewährte Methoden des Kalman-Filters, des Kalman-Smoothings und die Representer Methode (Bennett, 1992) für diese Anwendung schon von vornherein auszuschließen.

Der Ausweg wird oft darin gesucht, die Anzahl der gesuchten Variablen zu reduzieren. Im allgemeinen ist dies nur im linearen Fall bedingt realisierbar. Eine Möglichkeit könnte die Anwendung der optimalen Steuerung zusammen mit Einführung der adjungierten Gleichungen (Le Dimet and Talagrand, 1986) sein. Eine andere ist gegeben durch die Umwandlung der Feldvariablen in den spektralen Raum (Zahel, 1991; Egbert and Erofeeva, 2002). Die beiden Vorgehen versagen allerdings im nichtlinearen Fall. Das erste Vorgehen erlaubt es zwar, die nichtlinearen Gleichungen leicht zu behandeln, jedoch müssen alle Variablenwerte zur Auswertung der adjungierten Gleichungen gespeichert werden, was bei zeitlich großskaligen Problemen nicht durchführbar ist.

Zur Behandlung der großskaligen zeitabhängigen Probleme bleiben daher nur einige Möglichkeiten übrig. Dabei handelt es sich um den SEEK-Filter (Pham et al., 1998), um VCA (Derber, 1989) und die vorgestellte direkte und adjungierte Methode.

Die in der vorliegenden Arbeit erörterte direkte und adjungierte Methode ist als Minimum-Varianz-Schätzung formuliert worden, wobei die Fehlerstatistik als Gaußisch angenommen, jedoch nicht spezifiziert worden ist. Stattdessen wird lediglich die relative Wichtigkeit der einzelnen Terme a priori vorgegeben. Im Prinzip werden dennoch bei den Methoden die höchstwahrscheinlichsten Residuen ermittelt. Es ist daher naheliegend, die Residuenfelder statistisch zu analysieren und mögliche mathematische/physikalische Aussagen zu treffen. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch nicht darauf eingegangen.

Die semi-implizite direkte und die adjungierte Methode sind durchaus geeignet, um mit ihnen nichtlineare langzeitige Phänomene zu behandeln.

Kapitel 3

Zwillingsexperiment

3.1 Gezeiten auf dem Schelf und im Randmeer

Die Revolution der jeweils zwei Körper, Erde und Mond bzw. Erde und Sonne, erzeugt überall auf der Erde die gleich gerichtete und gleich große Fliehkraft. Durch diese Kraft und die örtlich unterschiedliche Anziehungskraft des Gestirns (Mond bzw. Sonne) entsteht das gezeitenerzeugende Potential (GP) in jedem Punkt der Erde und führt zu einer Deformation der Erd-, Luft- und Wassermassen. Die daraus resultierenden Schwingungen werden als Erd-, Atmosphären- bzw. Meeresgezeiten bezeichnet und stehen miteinander in Wechselwirkung. Schwerepotential und GP definieren zusammen als Äquipotentialfläche die Gleichgewichtsgezeiten von Erde und Ozean. Die Abweichung der ozeanischen, die Massenverlagerung durch die Erdgezeiten berücksichtigenden Gleichgewichtszeit vom Geoid beschreibt die ungestörte Meeresoberfläche.

Es wurde bereits von Doodson (1921) gezeigt, daß sich das GP durch eine Reihe harmonischer Funktionen konstanter Amplitude und Frequenz darstellen läßt, also durch die Reihe der unendlich vielen Partialtiden. Die wichtigsten Partialtiden sind die halbtägige Haupt-Mondtide M_2 , die Haupt-Sonnentide S_2 , die eintägige Haupt-Mondtide O_1 und die Haupt-Deklinationstide K_1 .

Das ständig fluktuierende GP generiert die Gezeiten-Wellen. Sie werden topographisch (durch die Küste, die Tiefenänderungen, die Inseln usw.) und physikalisch (durch die Erddrehung, nichtlineare Effekte, Dichteänderungen usw.) modifiziert. Das topographiebedingte Auftreten von Schelfwellen und die die Entstehung von Amphidromien durch die Einwirkung der Corioliskraft sind dafür Beispiele.

Wegen der, verglichen mit den halb- und gantztägigen Potentialanteilen, großen Trägheit des Ozeans können die ozeanischen Gezeiten anders als z.B. die Erdgezeiten auch nicht annähernd durch die Gleichgewichtstheorie beschrieben werden. Die Darstellung der ozeanischen Gezeitendynamik wird vielmehr durch die Laplaceschen Differentialgleichungen vorgenommen. In wenig ausgedehnten Meeresgebieten, wie z.B. der Irischen und Keltischen See, ist die direkte Wirkung des GP vernachlässig-

bar. In diesen Gebieten werden die Gezeiten durch den Energiezufluß über die offenen Ränder erzeugt.

Die nichtlinearen Wechselwirkungen (NLWW) gewinnen auf dem Schelf und dort insbesondere in den Flachwassergebieten an Bedeutung. Die Bodenreibung führt einerseits zur Dissipation von Gezeitenenergie und andererseits trägt sie neben Flachwassertermen zur Erzeugung von höheren harmonischen Wellen bei, die keinen direkten astronomischen Ursprung besitzen. Die extrem lange Dauer des Hochwassers von 3 Stunden in Southampton zeigt, welchen großen Einfluß die höheren harmonischen durch NLWW erzeugten Gezeitenbestandteile, d.h. die Ober- und Kombinationstiden, auf den Gezeitenwasserstand haben können.

3.2 Zwillingsexperiment für ein Rechteckbecken

Um die Güte der Datenassimilationsverfahren zu prüfen, wurde das Gebiet der Irischen und Keltischen See im Modell durch ein einfaches halboffenes Rechteckbecken mit südlichem Eingang ersetzt. Die Ost-West-Ausdehnung des Beckens ist gegeben durch 4°W bis 6°W , die Süd-Nord-Ausdehnung durch $50^\circ 10'\text{N}$ bis 57°N . Die Wasserstände der M_2 am offenen Rand auf $50^\circ 10'$ nördlicher Breite wurden entsprechend den realistischen Werten zwischen $5^\circ 45'\text{W}$ und $7^\circ 45'\text{W}$ vorgegeben. Als konstante Beckentiefe wurde der mittlere Wert der Irischen See von 40 m gewählt.

Für eine derart einfache Beckengestalt liefert die numerische Behandlung der zugrundegelegten Differentialgleichungen im allgemeinen eine sehr gute Näherung der exakten Lösung der Differentialgleichungen. Wir führen zunächst Simulationsrechnungen mit zwei Modellen durch, und zwar mit dem den realen Wert $g = 9.81\text{ms}^{-2}$ der Schwerebeschleunigung benutzenden Modell A und dem den um 10% reduzierten Wert $g' = 0.9g$ verwendenden Modell B.

Modell B berücksichtigt also die für den offenen Ozean in guter Näherung gültige Parameterisierung des LSA-Effektes (Ocean Load and Self-Attraction Effect). Modell A repräsentiert hingegen die Annahme, daß in einem Modell des Nordwesteuropäischen Schelfs eine Reduktion der Schwerebeschleunigung von 3% eine gute Parameterisierung des LSA-Effektes darstellt (Pingree and Griffith, 1987), wenn an den offenen Rändern realistische den LSA-Effekt enthaltende Gezeitenwasserstände vorgegeben werden. Tatsächlich wird in Modell A diese geringfügige Reduktion von g vernachlässigt.

Für die gegebene Modellierungsaufgabe hat die Veränderung des Wertes der Schwerebeschleunigung also keine unmittelbar realitätsnahe Bedeutung, sondern stellt einen artifiziellen Modelldefekt dar, der durch die Assimilation von Daten ausgeglichen werden soll und der in ähnlicher Weise entsteht, wenn in einem regionalen Modell die Parameterisierung des LSA-Effektes wie in einem globalen Modell vorgenommen wird. Hier soll die korrekte Gezeitendynamik als durch das Modell A dargestellt angesehen werden und die Verwendung von g' in Modell B einen artifiziellen Modelldefekt einführen. Dieser Defekt ist nicht unerheblich, denn eine mit

$O(10^{-1})$ reduzierte Schwerebeschleunigung beeinflußt die Ausbreitung der Schwellen deutlich.

Wird vorausgesetzt, daß der so eingeführte Modellfehler der Struktur nach bekannt ist, dann kann die Datenassimilationsaufgabe mit g' als Steuervariablen leicht gelöst werden. Da im realen Fall Modellfehler als gänzlich unbekannt anzusehen sind, soll die Assimilationsaufgabe unter Beibehaltung des artifiziiell reduzierten Wertes g' gelöst werden. Dann entsteht ein dynamisches Residuum im Modell C dadurch, daß die Modell A entnommenen fiktiven Daten den Modellfehler in Modell B im Fall gelungener Assimilation zumindest partiell ausgleichen. Im Idealfall ist das Residuum gegeben durch Einsetzen der Assimilationslösung in die Differenz der den Modellen B und A zugrundeliegenden Differentialgleichungen.

Im numerischen Modellexperiment wird das HAMSOM-Modell mit einem Zeitschritt von 180 sec. und meridionalen und zonalen Gitterpunktabständen von jeweils 5' verwendet. Strom- und Wasserstandspunkte sind in einem Arakawa C-Gitter angeordnet. Folgende Methoden werden zur inversen Modellierung herangezogen:

Implizites Direktes Verfahren (in der Folge mit IDV bezeichnet),

Expliziten Direktes Verfahren (in der Folge mit EDV bezeichnet) und

Implizites Adjungiertes Verfahren (in der Folge mit IAV bezeichnet).

Die Eigenschaften dieser Verfahren sollen untersucht werden. Als Startwerte der durchzuführenden Iteration werden die Ergebnisse des Modells B benutzt. Den Gewichtskonstanten werden in der vorliegenden Arbeit fast ausschließlich die folgenden Werte zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 W_P &= 1 \\
 W_Q &= 1 \\
 W_S &= 1 \\
 W_d &= 1 \\
 W_p &= 0.001 \\
 W_0 &= 0.001 \\
 W_{\Delta}^{p,q,s} &= 0.01 \\
 \text{Alle Gewichte sonst} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Den Residuen der Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichungen und der Datengleichungen wurde also jeweils die Gewichtskonstante Eins zugeordnet. Für alle übrigen Größen wurde gemäß ihrer angenommenen relativen Bedeutung ein Bruchteil von Eins gewählt. In die Kostenfunktion eingeführt wurden mithin die fiktiven Daten, a priori Schätzungen der Gleichungen und Glattheitsannahmen über die Residuen durch ihre 1. und 2. Ableitungen. Die zahlreiche Assimilationsexperimente haben, wie ausgeführt werden wird, ergeben, daß die berücksichtigten Terme für die Minimalsuche und eine erfolgreiche Kompensation der defizitären Physik ausreichen.

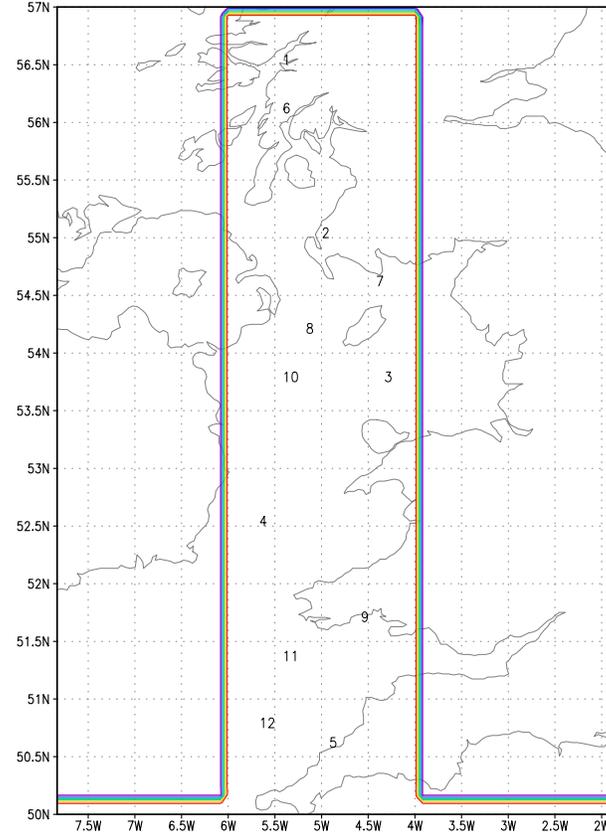


Abbildung 3.1: Schematisches halboffenes Rechteckbecken im Bereich der Keltischen und Irischen See. Von den durch die Ziffern 1 bis 12 gekennzeichneten Positionen werden Daten in das Modell assimiliert.

Als fiktive Meßdaten wurden von Modell A erzeugte Wasserstandswerte von 12 gleichmäßig über das Becken verteilten Positionen für die Assimilation ausgewählt. Diese Positionen sind im Abb. 3.1 mit den Ziffern 1 bis 12 gekennzeichnet.

Es wurde für die Assimilation der Wasserstände angenommen, daß an diesen Positionen die harmonischen Gezeitenkonstanten der Haupttide M_2 und der beiden Obertiden M_4 und M_6 bekannt sind und die Wasserstände sich darstellen lassen in der Form

$$\zeta_d = const. + \zeta_d(M_2) + \zeta_d(M_4) + \zeta_d(M_6) + \sum_{j=4}^{12} \hat{\zeta}_j(M_{2j}) \quad (3.2)$$

$$const. = \zeta_0$$

$$\zeta_d(M_2) = a_1 \cos(\sigma_2 t) + b_1 \sin(\sigma_2 t)$$

$$\zeta_d(M_4) = a_2 \cos(2\sigma_2 t) + b_2 \sin(2\sigma_2 t)$$

$$\zeta_d(M_6) = a_3 \cos(3\sigma_2 t) + b_3 \sin(3\sigma_2 t)$$

$$\hat{\zeta}_j(M_{2j}) = \hat{a}_j \cos(j\sigma_2 t) + \hat{b}_j \sin(j\sigma_2 t).$$

Um die Vorgehensweise im realitätsnahen Modellfall nachzubilden, werden nur die Werte a_j und b_j dem Modell A entnommen, wohingegen die Werte \hat{a}_j und \hat{b}_j im Laufe der Iteration für $4 \leq j \leq 12$ gewonnen werden.

In Abb. 3.2 und in Abb. 3.3 sind die Linien gleicher Amplitude bzw. die Linien gleicher Phase des Wasserstands (oben) und des Volumentransports (unten) für M_2 (links), M_4 (mitte) und M_6 (rechts) dargestellt. Gestrichelt sind die zu den Ergebnissen von Modell B gehörigen Isolinien und farbig die zu jenen von Modell A gehörigen gekennzeichnet. Die Amphidromien der M_2 Tide sind zufolge der Überlagerung einer stärkeren einlaufenden und einer schwächeren reflektierten Kelvinwelle westlich der zentralen Achse gelegen, und es treten zwei ebenfalls westlich von ihr gelegene Gebiete maximaler Gezeitenströme auf. Dagegen erscheinen die Amphidromien der Obertide achsennah, und die Gebiete maximaler Gezeitenströme erstrecken sich fast symmetrisch zur Hauptachse von meridionalem Rand zu meridionalem Rand.

Der Abstand der Modellösungen Modell A(o) und Modell B(m) voneinander wird für die Tiden $M_2(j = 1)$, $M_4(j = 2)$ und $M_6(j = 3)$ durch die in (3.9)–(3.11) gegebenen Größen beschrieben.

$$\zeta_j^o(x, y, t) := A_j^{\zeta^o}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^o}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.3)$$

$$\zeta_j^m(x, y, t) := A_j^{\zeta^m}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^m}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.4)$$

$$u_j^o(x, y, t) := A_j^{u^o}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{u^o}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.5)$$

$$u_j^m(x, y, t) := A_j^{u^m}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{u^m}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.6)$$

$$v_j^o(x, y, t) := A_j^{v^o}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{v^o}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.7)$$

$$v_j^m(x, y, t) := A_j^{v^m}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{v^m}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.8)$$

$$j := 1, 2, 3,$$

$$\zeta := \text{Wasserstand}$$

$$u := \text{zonale Geschwindigkeiten}$$

$$v := \text{meridionale Geschwindigkeiten,}$$

$$\bar{\zeta}_j := \left(\int \int \int (\zeta_j^m(x, y, t) - \zeta_j^o(x, y, t))^2 dx dy dt / \int \int \int \zeta_j^o(x, y, t)^2 dx dy dt \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

$$\bar{u}_j := \left(\int \int \int (u_j^m(x, y, t) - u_j^o(x, y, t))^2 dx dy dt / \int \int \int u_j^o(x, y, t)^2 dx dy dt \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_j := \left(\int \int \int (v_j^m(x, y, t) - v_j^o(x, y, t))^2 dx dy dt / \int \int \int v_j^o(x, y, t)^2 dx dy dt \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Dabei werden die Integrale über das gesamte Modellgebiet und eine M_2 -Periode erstreckt.

Tabelle 3.1 zeigt die normierten mittleren quadratischen Abweichungen jeweils der Wasserstände und der Geschwindigkeitskomponenten voneinander, wenn die Schwerebeschleunigung g (Modell A) um 10% reduziert wird (Modell B). Die Änderungen wachsen von etwa einem Viertel (M_2) über Zweidrittel (M_4) bis auf ein Ganzes (M_6) an.

Tabelle 3.1:

Normierte mittlere quadratische Abweichungen, jeweils der Wasserstände und der Geschwindigkeitskomponenten voneinander.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
M_{2j}	M_2	M_4	M_6
ζ_j	24%	78%	100%
\bar{u}_j	28%	57%	91%
\bar{v}_j	27%	73%	100%

In Abb. 3.3 sind die Linien gleicher Phase aus Gründen der Übersichtlichkeit ohne Angabe der Phasenwerte dargestellt. Die Drehwellen schreiten zyklonisch voran, die Phase aus Modell B(m) ist gegenüber derjenigen aus Modell A(o) meistens verzögert.

Weiter ist festzustellen, daß durch die Reduktion der Schwerebeschleunigung die Amphidromien des Wasserstands und des Volumentransports für alle drei Tiden (M_2, M_4, M_6) nach Norden verlagert werden. Die Zahl der Amphidromien steigt mit dem sich periodenabhängig reduzierenden räumlichen Maßstab von 2(M_2) über 3(M_4) auf 5(M_6). Die implizite Kompensation des Modellfehlers und damit eine befriedigende Reproduktion aller Feldvariablen ($O(10^6)$) durch die Assimilation der Wasserstände von lediglich 12 Positionen muß vor allem im Hinblick auf den Einfluß der kleinskaligeren Obertiden als nicht einfach angesehen werden.

3.2.0.3 Greensche Funktion: Verbreitung einer Dateninformation

Es ist zweckmäßig zu wissen, wie und in welchem Maße sich eine Information über den Wasserstand in die Gebiete verbreitet, in denen sich keine Stationen mit zur Assimilation herangezogenen Daten befinden (datenfreie Gebiete). Es sollen hier hauptsächlich die örtliche Abhängigkeit der Lösungsverbesserungen von der Datenposition und der Einfluß der Gewichtung der zweiten Residuenableitung untersucht werden.

Zu diesem Zweck wurden drei Datenpositionen, eine am Kopf (Station 1), eine in der Mitte (Station 3) und eine am Ende (Station 5) des Rechteckbeckens ausgesucht und dort die Wasserstandsdaten einzeln assimiliert (im folgenden δ -forcing genannt). Die Residuen S, P und Q der Kontinuitäts- bzw. der Impulsgleichungen stellen schließlich die erzwungenen Schwingungen dar, die durch das δ -forcing angeregt und durch die gewichteten zweiten Ableitungen der Residuen geglättet werden. Die Gewichtskonstanten sollen zunächst die gleichen Werte, wie in Gl. (3.1) angeben, annehmen.

Als Lösungsmethode wird das semi-implizite adjungierte Verfahren IAV benutzt. Die auf die angegebene Art erzeugten Residuen werden als Greensche Funktion bzw. in der vorliegenden Arbeit als adjungiertes Residuum bezeichnet und unterscheiden

sich von denjenigen, die durch die direkte Methode gewonnen werden. Das adjungierte Residuum interpretiert die Daten physikalisch im Sinne eines vorgegebenen Quadratfunktionals und gibt die Information in der Regel epizentrisch weiter. Die Änderungen der Feldvariablen in datenfreien Gebieten werden im Zusammenhang mit dem Einflußbereich des adjungierten Residuums untersucht.

Die Verbesserung durch die Assimilation wird nach den Ausdrücken (3.21)–(3.23) mit sich über das Untersuchungsgebiet und eine M_2 -Periode erstreckenden Integralen berechnet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 3.2 wiedergegeben.

$$\zeta_j^a(x, y, t) := A_j^{\zeta^a}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^a}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.12)$$

$$u_j^a(x, y, t) := A_j^{u^a}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{u^a}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.13)$$

$$v_j^a(x, y, t) := A_j^{v^a}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{v^a}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (3.14)$$

$$D\zeta_j^{oa} := \int \int \int (\zeta_j^o(x, y, t) - \zeta_j^a(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.15)$$

$$D\zeta_j^{om} := \int \int \int (\zeta_j^o(x, y, t) - \zeta_j^m(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.16)$$

$$Du_j^{oa} := \int \int \int (u_j^o(x, y, t) - u_j^a(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.17)$$

$$Du_j^{om} := \int \int \int (u_j^o(x, y, t) - u_j^m(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.18)$$

$$Dv_j^{oa} := \int \int \int (v_j^o(x, y, t) - v_j^a(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.19)$$

$$Dv_j^{om} := \int \int \int (v_j^o(x, y, t) - v_j^m(x, y, t))^2 dx dy dt \quad (3.20)$$

$$V\zeta_j := ((D\zeta_j^{om} - D\zeta_j^{oa})/D\zeta_j^{oa})^{1/2} \quad (3.21)$$

$$Vu_j := ((Du_j^{om} - Du_j^{oa})/Du_j^{oa})^{1/2} \quad (3.22)$$

$$Vv_j := ((Dv_j^{om} - Dv_j^{oa})/Dv_j^{oa})^{1/2} \quad (3.23)$$

$$j := 1, 2, 3,$$

In den obigen Ausdrücken kennzeichnen die Indizes a, m und o die durch Modell C (Assimilation), Modell B (g') bzw. Modell A (g) erhaltenen Werte. Der Index j kennzeichnet die Tiden $M_2(j = 1)$, $M_4(j = 2)$ und $M_6(j = 3)$. $V\zeta_j$ gibt die Verbesserung der Wasserstände der Modell-B-Lösung durch Assimilation von Daten an. Entsprechendes gilt für Vu_j und Vv_j .

Die Tabelle 3.2 zeigt die Verbesserung des Wasserstands und der zonalen und meridionalen Geschwindigkeiten durch δ -forcing in den Meßstationen 1,3 bzw. 5. Die größten Änderungen des Wasserstands und der meridionalen Geschwindigkeit erfolgen bei Anregung in Station 1. In diesem Fall, bei dem die Station der Anregung im Bereich der zum offenen Ende hin exponentiell abklingenden Poincaré-Randwelle liegt, wird das schlechteste Assimilationsergebnis für die zonalen Geschwindigkeiten erreicht. Die kleinsten Änderungen stellen sich bei der Anregung in Station 5 ein.

Tabelle 3.2:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands, der zonalen und der meridionalen Geschwindigkeiten durch δ -forcing der Daten an den 3 Meßstationen 1,3 bzw. 5. Positive Werte: Verbesserung ; negative Werte: Verschlechterung

	Station 1			Station 3			Station 5		
	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j
$j = 1(M_2)$	10.2	-40.1	2.7	3.5	-27.4	1.2	0.2	-0.3	0.6
$j = 2(M_4)$	4.9	-28.8	0.8	1.1	-17.3	-1.2	1.9	-7.9	-1.3
$j = 3(M_6)$	2.3	13.1	-1.4	0.5	1.0	-1.7	2.9	-6.0	-0.4

Das liegt vermutlich daran, daß sich diese zusätzliche Information von der durch die Randbedingung gegebenen wenig unterscheidet. Mäßige Wirkung wird durch die Anregung in Station 3 erreicht. Allgemein tritt bei der zonalen Geschwindigkeit durch das δ -forcing eher eine Verschlechterung als eine Verbesserung ein. Durch die Anregung an mehreren Stationen gelangt man zu einer Verbesserung, wie sich später zeigen wird.

In der Regel reicht die Information von einer einzigen Station nicht dafür aus, eine signifikante Verbesserung aller Feldvariablen in einem solchen ausgedehnten Gebiet zu erzielen. Es läßt sich allgemein feststellen, daß die Verbesserungen der Feldvariablen über den Bereich signifikant von Null verschiedener adjungierter Residuen hinausreicht.

3.2.0.4 Assimilation von zu 12 Stationen gehörigen Daten durch EDV, IDV und IAV

Die Assimilation von allein zu einer Station gehörigen Dateninformation reicht nicht aus, um einen das ganze Untersuchungsgebiet erfassenden physikalischen Defekt zu kompensieren und eine befriedigende Reproduktion der als real definierten Gezeiten zu erreichen. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von Untersuchungen erörtert, die mit Hilfe von EDV, IDV und IAV und der Assimilation von Daten von 12 Stationen Stationen (IAV) durchgeführt wurden.

Außer der Anzahl und Verteilung der Datenstationen spielt für die Güte der Modellergebnisse die Gewichtung der zweiten Residuenableitungen eine wesentliche Rolle. Eine zu starke und damit unrealistische Glättung der Residuen kann zu völlig unrealistischen Werten auch der Feldvariablen führen. Eine zu geringe oder gar fehlende Glättung reduziert in der Regel die Verbesserung der Gezeitenreproduktion nicht entscheidend.

Zunächst sei Bezug genommen auf die beckenweiten Reproduktionseigenschaften nach Maßgabe der in (3.21)–(3.23) definierten Verbesserungen des Wasserstands und der Geschwindigkeitskomponenten (Tabelle 3.3). Der Verbesserungsgrad für den

Tabelle 3.3:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands und der Geschwindigkeitskomponenten bei Anwendung der verschiedenen Datenassimilationsmethoden.

	EDV			IDV			IAV		
	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j	$V\zeta_j$	Vu_j	Vv_j
$j = 1(M_2)$	$1.0 \cdot 10^3$	51	440	976	22	482	$4.1 \cdot 10^3$	113	175
$j = 2(M_4)$	792	19	313	745	20	285	$1.3 \cdot 10^3$	30	166
$j = 3(M_6)$	994	233	646	890	194	430	426	52	253

Wasserstand der Haupttide und der Obertiden liegt bei allen verwendeten Methoden, d.h. EDV, IDV oder IAV, und allen verwendeten Datenanzahlen bei $O(10^3)$. Für die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich Werte zwischen $O(10)$ und $O(10^3)$. Die Verbesserungsgrade fallen für die meridionalen Geschwindigkeit durchwegs höher aus als für die zonale Geschwindigkeit.

Aus Tabelle 3.4 geht hervor, daß durch die Assimilation mit EDV – ähnliches gilt für IDV und IAV – an den Datenstationen die Wasserstandswerte von M_2 , M_4 und M_6 mit hoher Genauigkeit reproduziert werden, d.h. daß die Datenterme zum Minimierungsfunktional nur einen geringen Beitrag leisten. Ein Maß für die Güte der Methode stellt diese hervorragende Anpassung nicht dar, dafür ist die Übereinstimmung an den datenferneren Positionen entscheidend. Diese Übereinstimmung wird im Falle der Anwendung der Methoden EDV und IDV an Hand der Linien gleicher Amplituden und der Linien gleicher Phasen der dateninduzierten Differenzen des Wasserstands bzw. des Volumentransports für M_2 , M_4 bzw. M_6 in den Abb. 3.4–3.7 (Wasserstand) und 3.8–3.11 (Volumentransport) überprüft.

Es ist im Vergleich mit Abb. 3.2, links, wo die Wasserstands- und Volumentransportdifferenzen zwischen Modell A und Modell B dargestellt sind, und Abb. 3.4 links klar zu erkennen, daß sowohl mit EDV als auch mit IDV im gesamten Gebiet eine deutliche, zufriedenstellende Verbesserung der Wasserstandsamplitude erzielt wird.

Die dateninduzierten Wasserstandsdifferenzen, die die Intensität der Lösungskorrektur durch Dateneinfluß repräsentieren, fallen in den Bereichen großer Wasserstandsamplituden der M_2 aus. Das Bild der Residuen der Massenerhaltungsgleichung in Abb. 3.4, rechts zeigt deutliche Unterschiede zwischen den beiden Methoden (oben und unten). Im Fall der expliziten Methode (EDV) fallen die Residuen um eine Ordnung kleiner aus als die der IDV Methode. Das bedeutet, daß die EDV-Methode Massenerhaltung gewährleistet und damit dem Umstand Rechnung getragen wurde, daß der artifizielle Fehler einer reduzierten Schwerebeschleunigung allein die Impulsgleichungen betrifft.

Die IDV-Methode garantiert keine Massenerhaltung und zeigt eine im Norden der Wasserstandsamplitude vergleichbare Residuenverteilung im Sinne einer reflektierten Kelvinwelle. Im Süden erinnert die Residuenverteilung an eine Sverdrup-Welle.

Ähnliches wie für die M_2 -Wasserstände gilt für jene der Obertiden M_4 und M_6 . Das betrifft die datenbedingt verbesserte Reproduktion der Wasserstände, die Gebiete maximaler Differenzen, das weitgehende Verschwinden der Massenerhaltungsresiduen bei Anwendung von EDV und den Zusammenhang der entsprechenden Residuen bei IDV mit der Verteilung der Wasserstandsamplituden (Abb. 3.5 und 3.6).

Die Phasen des Wasserstands bestätigen für alle drei Tiden (Abb. 3.7, der Übersichtlichkeit wegen sind die Phasenwerte weggelassen) die deutliche Verbesserung, die durch die Assimilation der Daten (EDV bzw. IDV) gegenüber der Modell B-Lösung (Abb. 3.3) erzielt worden ist. Mit zunehmender Ordnung der Tiden fällt die Verbesserung des Phasenverlaufs, d.h. die Übereinstimmung der Phasen von Modell A mit denen von Modell C geringer aus. Auch der meridionale Volumentransport wird ausgehend von Modell B durch die Assimilation der Wasserstandsdaten von 12 Positionen deutlich besser, also näher zu den Ergebnissen von Modell A, wiedergegeben (Abb. 3.8–3.10, links). Diese Feststellung gilt für alle drei Tiden und das gesamte Untersuchungsgebiet, wie der Vergleich mit den Amplitudendifferenzen zwischen den durch Modell A bzw. durch Modell B berechneten meridionalen Volumentransporten (Abb. 3.2 unten) erkennen läßt.

Die Residuen der meridionalen Impulsgleichung zeigen in ihrer Amplitudenverteilung bei Anwendung von EDV (Abb. 3.8–3.10, rechts oben) eine derjenigen der Volumentransporte sehr ähnliche Struktur (Abb. 3.8–3.10, links). Lage und Anzahl der Knotenpunkte (1,3 bzw. 5) stimmen sichtlich überein. Die Amplitudenverteilung der Residuen ist bei Anwendung von IDV für alle Tiden ähnlich strukturiert (Abb. 3.8–3.10, rechts unten), jedoch treten in Überlagerung des von EDV bekannten Grundmusters Maxima im Bereich der Datenpositionen auf. Dennoch ist der Verbesserungsgrad bei IDV im gesamten kaum schlechter als bei EDV (Tabelle 3.3).

Ganz analog zu den bei der Erörterung des Wasserstands getroffenen Feststellungen ist Abb. 3.11 für den Volumentransport zu entnehmen, daß die Phasen eine gleichartige periodenabhängige Verbesserung durch die Assimilation der Wasserstandsdaten erfahren. In diesem Fall ist die Ausgangssituation vor der Datenassimilation in der Abb. 3.3, unten dargestellt.

Die explizite Methode beansprucht bei der Assimilation von Daten (EDV) im allgemeinen sowohl ein hohes Maß an Rechenzeit- als auch ein solches an Speicherplatzressourcen, weil die CFL-Bedingung erfüllt werden muß. Beim impliziten Verfahren ist es nach eigenen Untersuchungen möglich, die Anzahl der bei EDV erforderlichen Zeitschritte ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust bis auf ein Drittel zu reduzieren. Eine weitere Verringerung der Zahl der Zeitschritte führt zwar nicht bei der Haupttide M_2 , jedoch bei den Obertiden zu zunehmend ungenauen Lösungen. In der vorliegenden Arbeit wurde für EDV die Minimalzahl der nach dem CFL-Kriterium möglichen Zeitschritte und für IDV ca. die Hälfte dieser Zahl gewählt. Die für die jeweils erforderlichen Iterationen benötigte Rechenzeit beträgt im Falle der Methoden IDV, EDV und IAV 30, 120 bzw. 120 Stunden auf dem benutzten Rechner SC900 (Parallelrechner der Universität Hamburg. Prozessoren: 18 Mips R10000, 194MHz. Cache: 2 Mbyte/Prozessor. Hauptspeicher: 3 Gigabyte. Plattenspeicher: 76 Gigabyte).

Diese hier verwendeten Verfahren erweisen sich als sensitiv gegenüber Änderungen der Werte der Datengewichte. Starke Erhöhung dieser Werte führen dazu, daß die Qualität der Ergebnisse deutlich abnimmt. Schließlich Fall macht sich kein Dateneinfluß mehr bemerkbar, und es ergibt sich die Lösung von Modell B.

Die auch bei vergleichsweise niedrigem Datengewicht durch EDV in den Datenpositionen erreichte Anpassung an die wahren Werte wird durch das realitätsnahe Experiment bestätigt werden.

Die IAV Methode unterscheidet sich von der direkten Methode dadurch, daß sie die Modellresiduen mit den adjungierten Gleichungen ermittelt, die die notwendigen Bedingungen für das Minimum der quadratischen Kostenfunktion darstellen. Es konnte, wie Tabelle 3.3 hinsichtlich des beckenweiten Lösungsverhaltens zeigte, sowohl für die Haupttide als auch für die Obertide erreicht werden. Die Amplituden- und Phasenverteilungen des Wasserstandes (Abb. 3.12–3.14, links oben, Vergleichsszenario 3.15 oben) zeigen bei Anwendung von IAV eine exzellente Übereinstimmung mit den wahren Verteilungen, die die mit EDV und IDV erreichte Übereinstimmung (Abb. 3.4–3.6, links, Abb. 3.7) bis auf M_6 fast überall deutlich übertrifft.

Für die Volumentransporte (Abb. 3.12–3.14, links unten; Abb. 3.15 unten bzw. Abb. 3.8–3.10, links; Abb. 3.11) ist die bei Anwendung von IAV nicht so ausgeprägt. Die Amplituden der Differenzen zwischen wahren und IAV-erzeugten Wasserständen (Abb. 3.12–3.14, oben Mitte) zeigen ebenso, wie das bei EDV und IDV der Fall ist, im ganzen Gebiet eine glatte Verteilung.

Ähnliches gilt für die aus der Anwendung von IAV resultierenden Amplitudenverteilungen der adjungierten Residuen der Kontinuitätsgleichung (Abb. 3.12–3.14, rechts oben). Dagegen zeigen die Amplituden der adjungierten Residuen der meridionalen Impulsgleichung starke lokale Maxima, wie sie von der EDV-Anwendung nicht und von der IDV-Anwendung bekannt sind.

Zum Schluß wird noch erwähnt, dass ein Versuch unternommen worden ist, wobei die Datenpunkten von 12 auf 24 erhöht und mit Verwendung von IAV berechnet wurden. Die Ergebnisse zeigten, dass die Obertiden dadurch verbessert worden sind.

3.3 Zusammenfassung

Neues methodisches Vorgehen

- 1) Zur Ermittlung der nichtlinearen Obertiden wurden die schwach restringierte inverse Methode unter Zugrundelegung der zeitabhängigen, voll nichtlinearen Flachwassergleichungen auf ein idealisierendes Recheckbecken angewandt.
- 2) Es wurde parallel von der zeitabhängigen nichtlinearen direkten Methode, explizit bzw. implizit formuliert, und von der adjungierten Methode Gebrauch gemacht.
- 3) Die durch die Daten induzierten Residuen- bzw. adjungierten Residuenfelder sind harmonisch analysiert und in drei Gezeitenkomponenten, d.h. in eine halbtägige

Tabelle 3.4:

Vergleich der harmonischen Konstanten des Wasserstandes der M_2 (oben), M_4 (Mitte) und M_6 (unten) von Modell A (wahre Werte), Modell B (vor Assimilation) und Modell C (nach Assimilation mit EDV).

	Wahre Werte		Vor Inverse		Nach Inverse	
Station	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
Station	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)
1	156.24	90.39	147.61	107.33	156.18	90.44
2	31.81	2.12	30.95	353.80	31.74	2.11
3	164.17	286.36	162.63	297.57	164.16	286.40
4	142.48	263.14	121.93	278.35	142.33	263.17
5	136.84	150.57	139.95	147.52	136.92	150.56
6	126.85	91.77	116.76	109.14	126.80	91.83
7	93.53	318.68	97.61	327.00	93.60	318.73
8	101.18	285.39	107.72	297.00	101.11	285.39
9	135.27	218.88	114.09	218.40	135.24	218.82
10	153.75	270.14	147.63	284.13	153.62	270.14
11	78.28	208.51	60.73	195.06	78.17	208.45
12	84.36	150.67	94.06	141.58	84.36	150.56
	Wahre Werte		Vor Inverse		Nach Inverse	
Station	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
Station	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)
1	11.02	108.86	9.18	154.49	11.00	108.98
2	13.40	277.58	11.52	322.9	13.39	277.79
3	7.69	133.28	8.55	168.13	7.69	133.43
4	7.94	105.68	5.50	166.27	7.93	105.84
5	5.23	278.62	4.93	340.36	5.23	278.42
6	3.25	140.50	2.30	204.74	3.25	140.48
7	10.91	261.37	8.04	302.00	10.90	261.51
8	3.35	264.49	0.82	287.92	3.33	264.60
9	7.21	298.70	7.98	340.93	7.21	298.68
10	11.28	95.34	10.92	144.25	11.27	95.44
11	8.97	276.04	9.12	330.27	8.98	276.13
12	7.57	278.96	6.91	340.19	7.57	279.01
	Wahre Werte		Vor Inverse		Nach Inverse	
Station	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase	Amplitude	Phase
Station	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)	(cm)	(Grad)
1	7.58	79.53	7.74	150.86	7.56	79.90
2	1.27	101.58	5.11	131.85	1.28	100.64
3	4.03	278.40	7.60	318.09	4.06	278.75
4	3.44	307.27	5.00	68.52	3.42	307.34
5	5.27	188.08	7.02	292.06	5.32	188.28
6	7.08	208.96	9.78	273.07	7.05	209.03
7	9.79	61.66	13.58	118.46	9.78	61.64
8	10.29	51.61	9.54	111.26	10.26	51.69
9	7.42	35.67	7.45	94.74	7.37	35.66
10	9.40	222.44	12.20	290.13	9.39	222.61
11	2.62	55.09	2.81	299.46	2.57	55.63
12	5.61	194.60	10.46	291.18	5.63	194.76

astronomische sowie in eine vierteltägige und sechsteltägige Obertide, zerlegt worden.

4) Der Abstand der Assimilationslösungen von den klassischen Lösungen ist ebenfalls harmonisch zerlegt und sichtbar gemacht worden.

Erzielte Ergebnisse

Das der Modelluntersuchung mit bekanntem Modelldefekt zugrundegelegte Rechteckbecken ist so gewählt worden, daß seine Abmessungen denen des zu behandelnden natürlichen Meeregebietes entsprechen. Zudem ist die Zahl der Unbekannten im Rechteckmodell so festgelegt worden, daß sie nahezu mit der im realitätsnahen Modell übereinstimmt ($O(10^6)$). Die für dieses schematische Gebiet berechneten beiden Amphidromien der M_2 ähneln in ihrer Verteilung sehr jenen, die für das Gebiet der Keltischen und Irischen See nachgewiesen sind. Daher können viele der mit dem Rechteckmodell ermittelten Datenassimilationseigenschaften auch für das realitätsnahe Modell als grundsätzlich gültig angesehen werden.

Für den Erfolg der inversen Methode ist außer der Verfügbarkeit genauer Daten eine gute Strategie bei der räumlichen Anordnung der Datenpositionen von grundlegender Bedeutung. Das gilt insbesondere für Küstenregionen, in denen Pegeldata nur unregelmäßig und lückenhaft verteilt vorhanden sind. Die hinsichtlich der Datenposition nicht optimierte Einzelanregung (δ -forcing) zeigt, daß der Einfluß einzelner Daten lediglich eine Umgebung einer Nord-Süd-Ausdehnung von ca. 2° umfassen und die dateninduzierte Lösungsverbesserung ortsabhängig werden kann.

Ferner spielt die Gewichtung der einzelnen Terme, ohne daß im kleinen die Lösungen sehr sensitiv von ihr abhängen, eine wichtige Rolle. Den skalierten Modellresiduen und den skalierten Datendifferenzen wird das Gewicht Eins zugeordnet. Als geeignet für eine erfolgreiche Realisierung des Dateneinflusses auf die Lösung und eine physikalisch sinnvolle implizite Korrektur der Modellgleichungen erweisen sich Gewichte der ersten und zweiten Residuenableitungen, die einen Bruchteil von Eins betragen. Ein für die Ableitungen zu groß gewähltes Gewicht bedeutet, daß die Dekorrelationslänge für die angenommenen Modellfehler unrealistisch groß ausfällt. In diesem Fall wird keine oder eine nur unbedeutende Lösungsverbesserung durch die Datenassimilation erzielt, weil dann ein verschwindendes Residuum angenähert wird. Verschwindende Ableitungsgewichte hingegen lassen durchaus signifikante dateninduzierte Lösungsverbesserungen zu, reduzieren jedoch die physikalische Aussagekraft der Residuen und bedingen zufolge einer größeren Anzahl nötiger Iterationschritte eine längere Rechenzeit. Die zweite Ableitung trägt mehr als die erste Ableitung zu einem besseren Ergebnis bei. Allerdings beschleunigt die Hinzunahme der ersten Ableitung den Iterationsprozeß. Diese zuletzt wiedergegebenen Ergebnisse sind durch zahlreiche Experimente bestätigt worden, die im einzelnen hier nicht dargestellt werden sollen.

Mit denselben Daten können sich bei Anwendung der direkten Methode EDV bzw. IDV unterschiedliche Residuenverteilungen ergeben, obwohl die datenbeeinflussten

Variablenfelder fast identisch sind. EDV interpretierte im Rechteckmodell mit reduzierter Schwerebeschleunigung die Kontinuitätsgleichung korrekterweise als exakt und das Residuum der Impulsgleichung als gegeben durch den mit der Schwerebeschleunigungsdifferenz multiplizierten Druckgradienten (Abb. 3.16), d.h. der vorgegebenen Modelldifferenz. Dabei fallen die Residuen der Obertiden um eine Ordnung kleiner aus als die wahren Modelldifferenzen, was auf die nicht ganz gelungenen Reproduktion der beiden Obertiden zurückzuführen ist.

Im allgemeinen stimmt die Residuenverteilung mit der Verteilung der Differenzen zwischen wahrer und durch Assimilation berechneter Lösung überein. Dieses kann bedeuten, daß Modellvariablen datenbeeinflußt die wahren Werte dort besser annehmen, wo die Residuen sich stärker bemerkbar machen.

Im Fall nicht optimaler Datenassimilation können steile Maxima der Residuenamplituden an den Datenpunkten auftreten und die Wasserstands- und Transportfelder dabei dennoch überall glatt verlaufen.

Insgesamt ist festzustellen, daß die nichtlineare inverse Methode geeignet ist, mit Hilfe von Dateninformationen die Ergebnisse klassischer Modelle erheblich zu verbessern und unter bestimmten Umständen auch physikalisch interpretierbare Residuen zu liefern. Somit dürfen ähnliche Eigenschaften von den Ergebnissen eines realitätsnahen Modells erwartet werden, wenn diese Methode bei Nutzung geeigneter realer Daten angewendet wird. So wird im folgenden die erprobte Modell- und Ergebniskorrektur durch Daten auf ein ansonsten gut untersuchtes Randmeer übertragen.

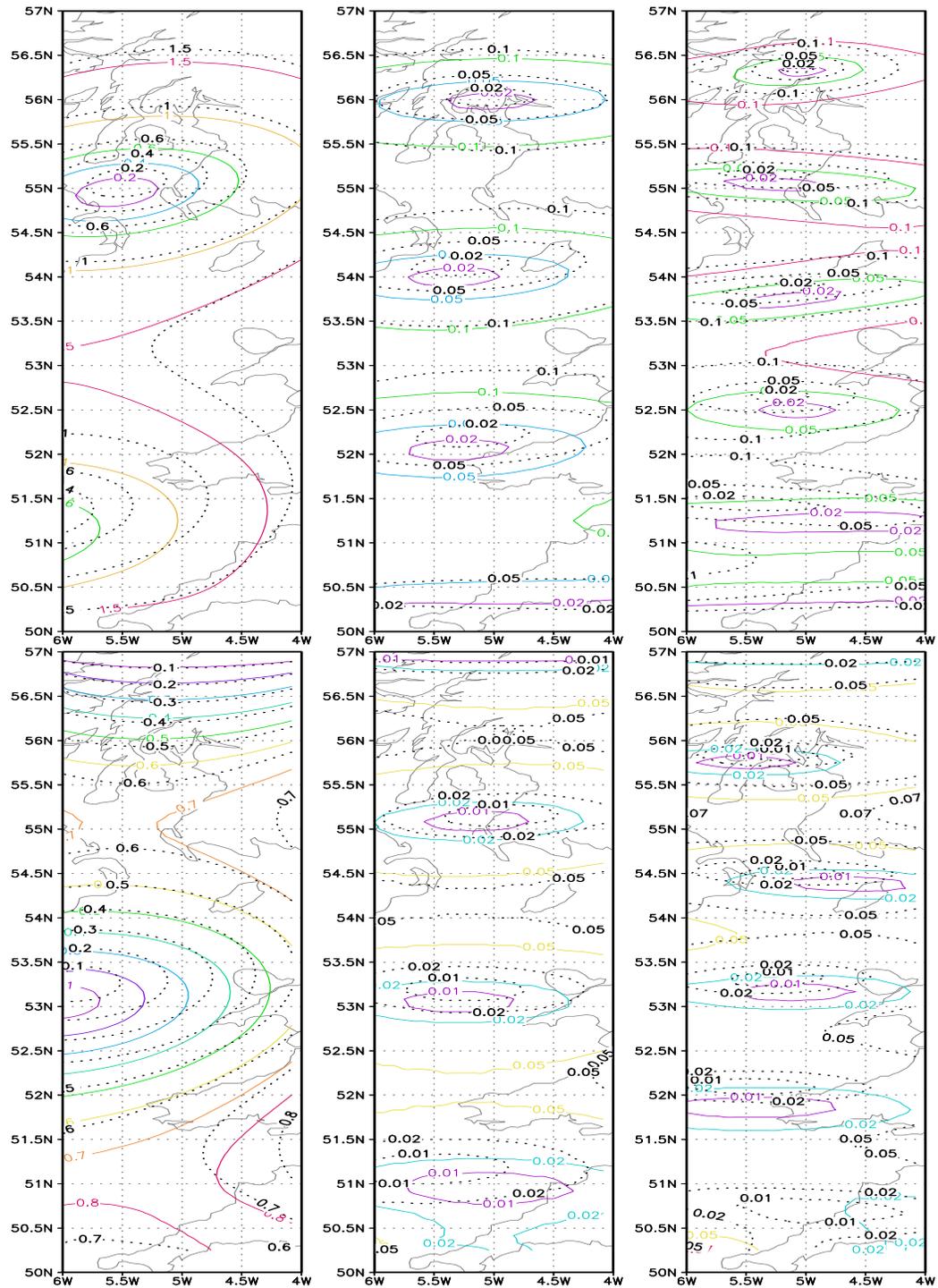


Abbildung 3.2:

- 1) Links: Linien gleicher Wasserstandsamplituden [m] (oben) und Linien gleicher meridionaler Volumentransporte [$19.8\text{m}^2/\text{s}$] (unten) der M_2 -Gezeit aus Modell B (gestrichelt) bzw. aus Modell A (farbig).
- 2) Mitte: Gleich wie in 1), jedoch für die M_4 -Obertide.
- 3) Rechts: Gleich wie in 1), jedoch für die M_6 -Obertide.

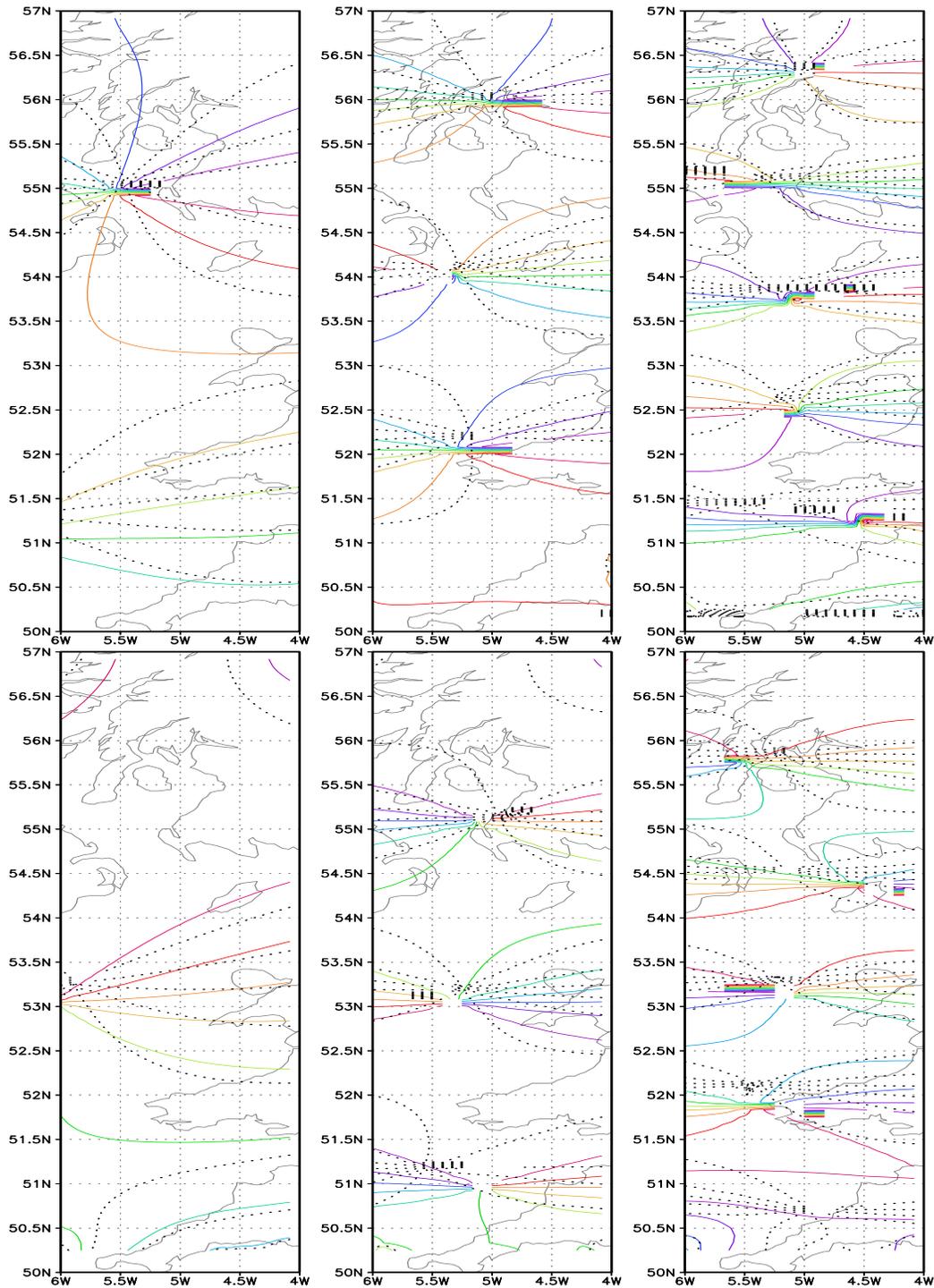


Abbildung 3.3:

- 1) Links: Linien gleicher Phase des Wasserstands (oben) und Linien gleicher Phase des meridionalen Volumentransports (unten) der M_2 -Gezeit aus Modell B (gestrichelt) bzw. aus Modell A (farbig).
- 2) Mitte: Gleich wie in 1), jedoch für die M_4 -Obertide.
- 3) Rechts: Gleich wie in 1), jedoch für die M_6 -Obertide.

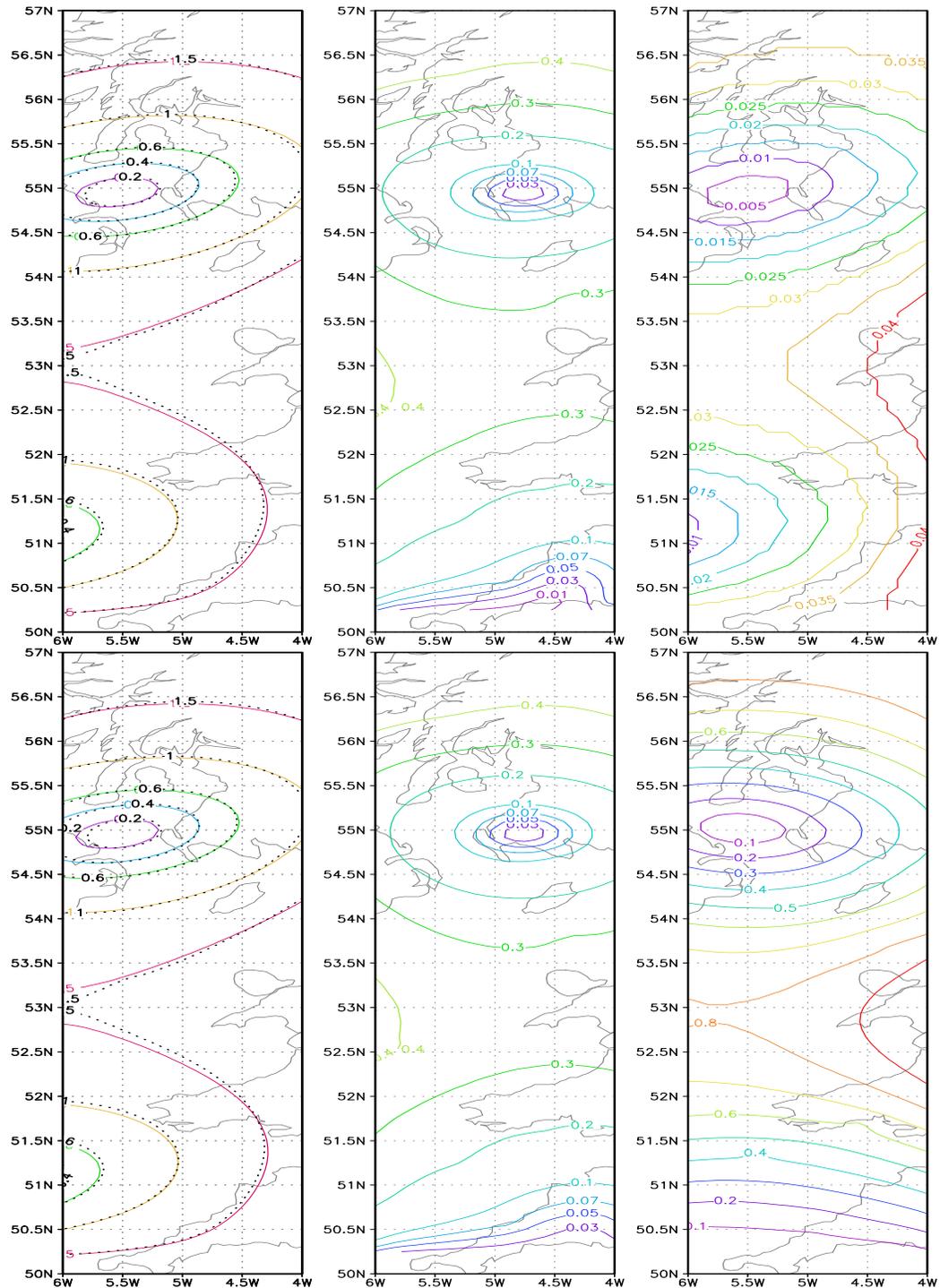


Abbildung 3.4:

Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsunterschiede und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_2 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

- 1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands [m] der M_2 . Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).
- 2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der M_2 -Wasserstandsunterschiede zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten [m].
- 3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_2 -Anteils des Kontinuitätsgleichungsresiduums erzeugt durch EDV (oben) bzw. erzeugt durch IDV (unten). (EDV: normiert durch [$0.001m/s$], IDV: normiert durch [$0.001m/s$]).

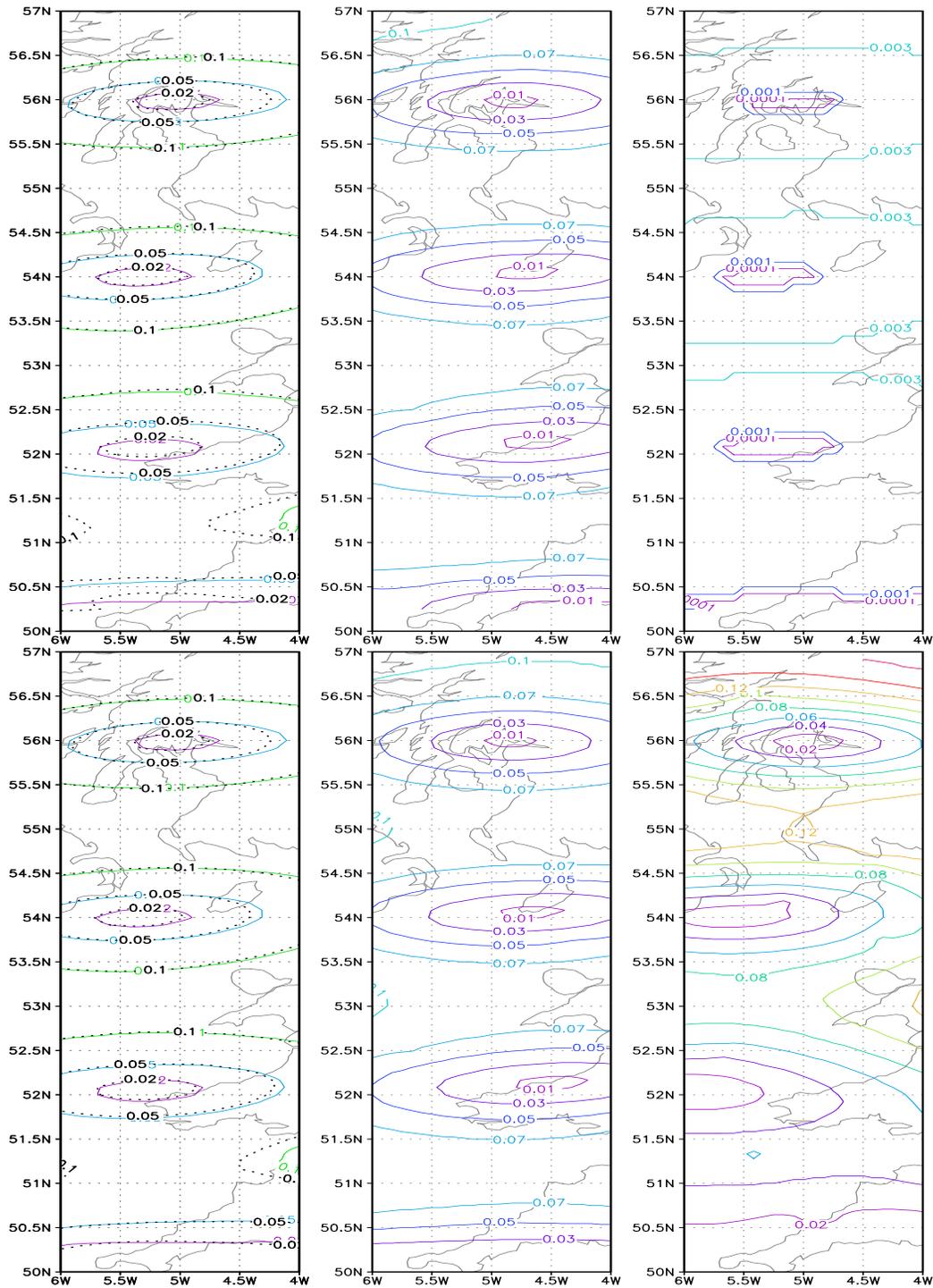


Abbildung 3.5:

Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsunterschiede und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_4 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands [m] der M_4 . Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der M_4 -Wasserstandsunterschiede zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten [m].

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_4 -Anteils des Kontinuitätsgleichungsresiduums erzeugt durch EDV (oben) bzw. erzeugt durch IDV (unten). (EDV: normiert durch [$0.001m/s$], IDV: normiert durch [$0.001m/s$]).

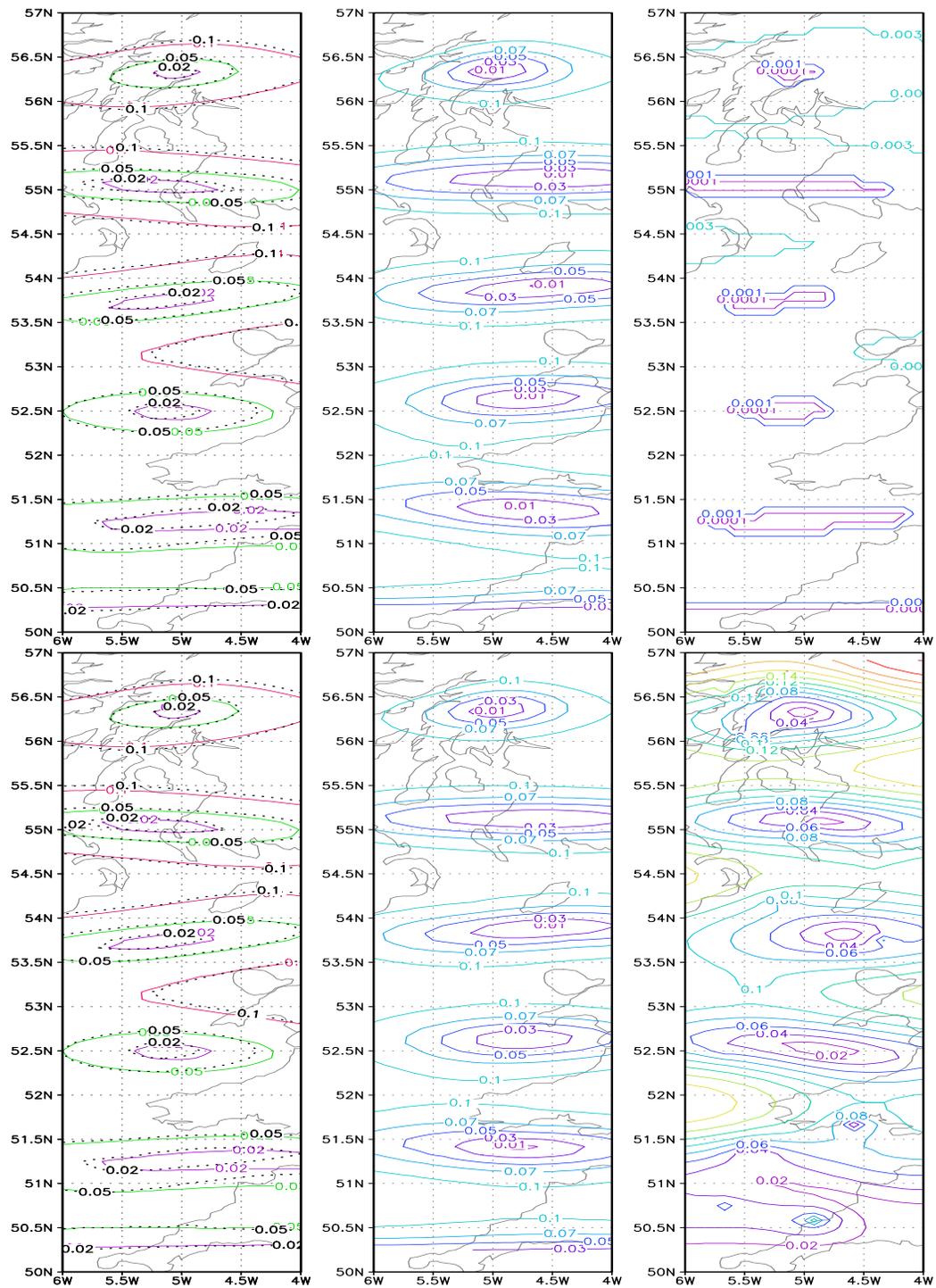


Abbildung 3.6:

Amplituden der Wasserstände, Wasserstandsunterschiede und der Residuen der Kontinuitätsgleichung der M_6 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands [m] der M_6 . Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der M_6 -Wasserstandsunterschiede zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten [m].

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_6 -Anteils des Kontinuitätsgleichungsresiduums erzeugt durch EDV (oben) bzw. erzeugt durch IDV (unten). (EDV: normiert durch [0.001m/s], IDV: normiert durch [0.001m/s]).

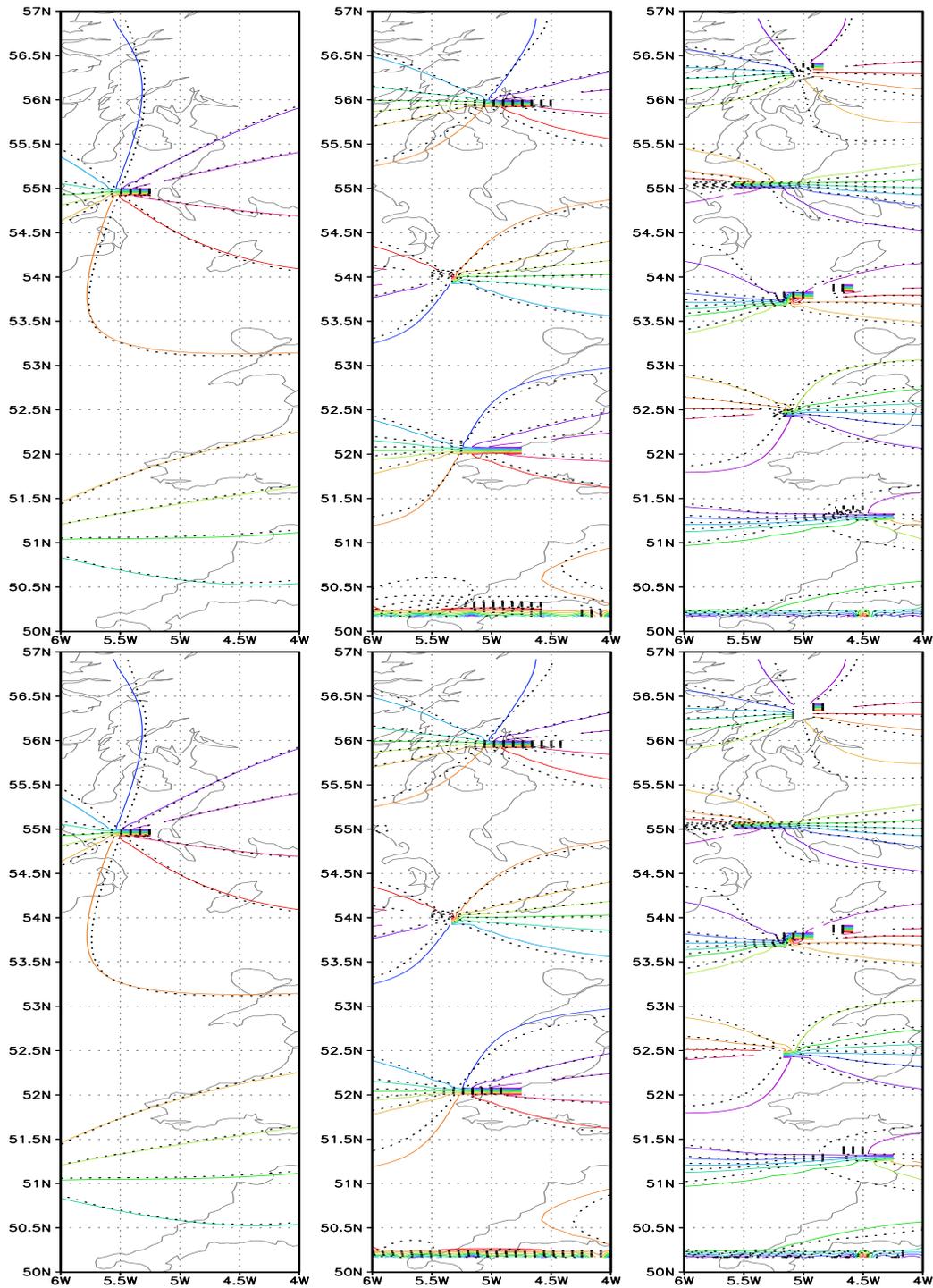


Abbildung 3.7:

Phasen des Wasserstands der wahren und der durch EDV bzw. IDV erzeugten M_2 , M_4 bzw. M_6 .

1) Links: Linien gleicher Phase des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) erzeugten Wasserstands der M_2 .

2) Mitte: wie 1), jedoch M_4 .

3) Rechts: wie 1), jedoch M_6 .

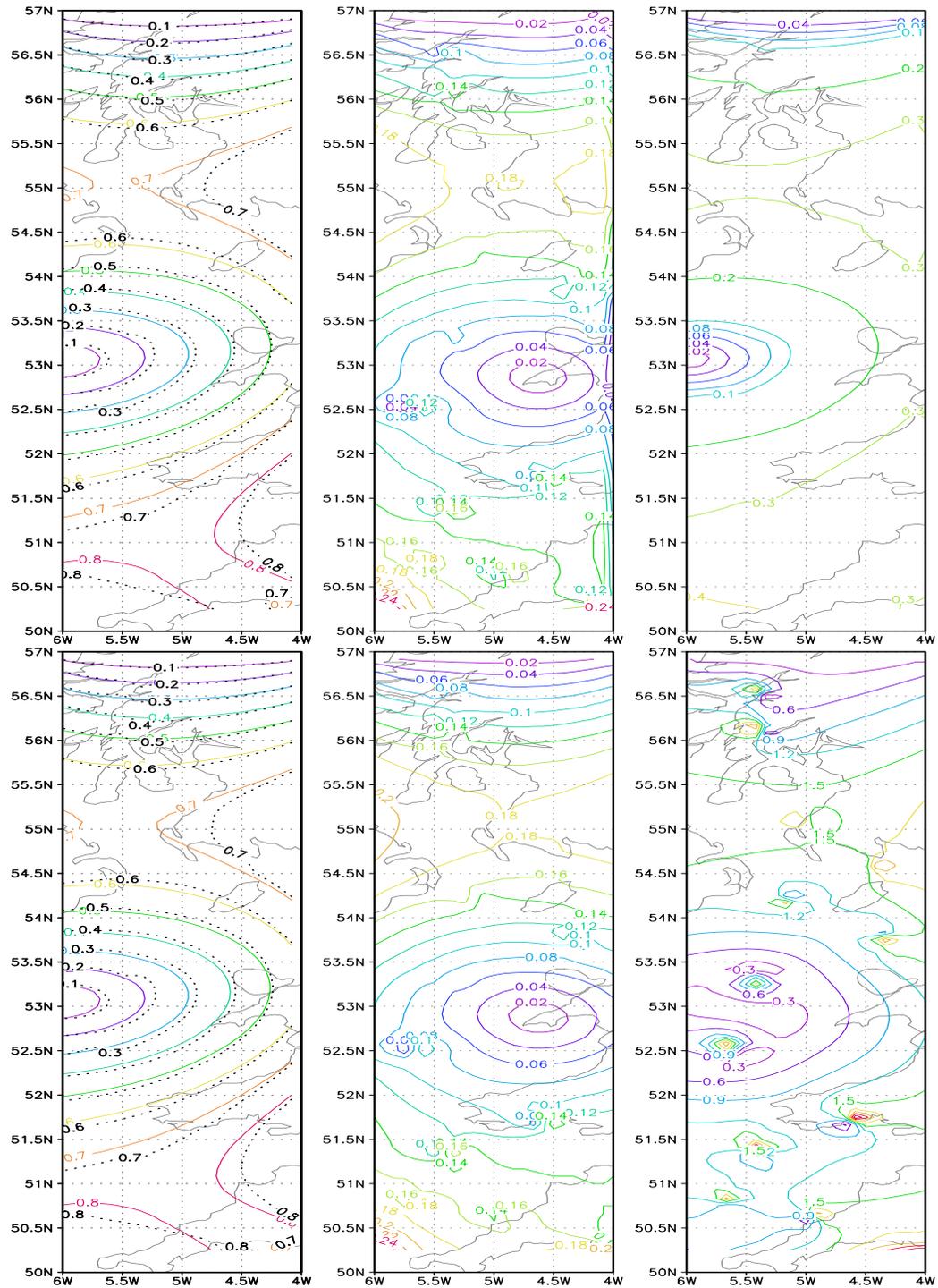


Abbildung 3.8:

Amplituden der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsgleichung der M_2 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) meridionalen Transports [$44.3m^2/s$] der M_2 . Erzeugt durch EDV bzw. IDV.

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der meridionalen M_2 -Transportdifferenzen [$40m^2/s$] zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten.

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_2 -Anteils des meridionalen Impulsgleichungsresiduums [$0.001m^2/s^2$]. Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).

Bemerkung: Die wahren Werte in 1) oben und 1) unten unterscheiden sich geringfügig, da sie mit dem expliziten bzw. impliziten klassischen Modell gewonnen worden sind.

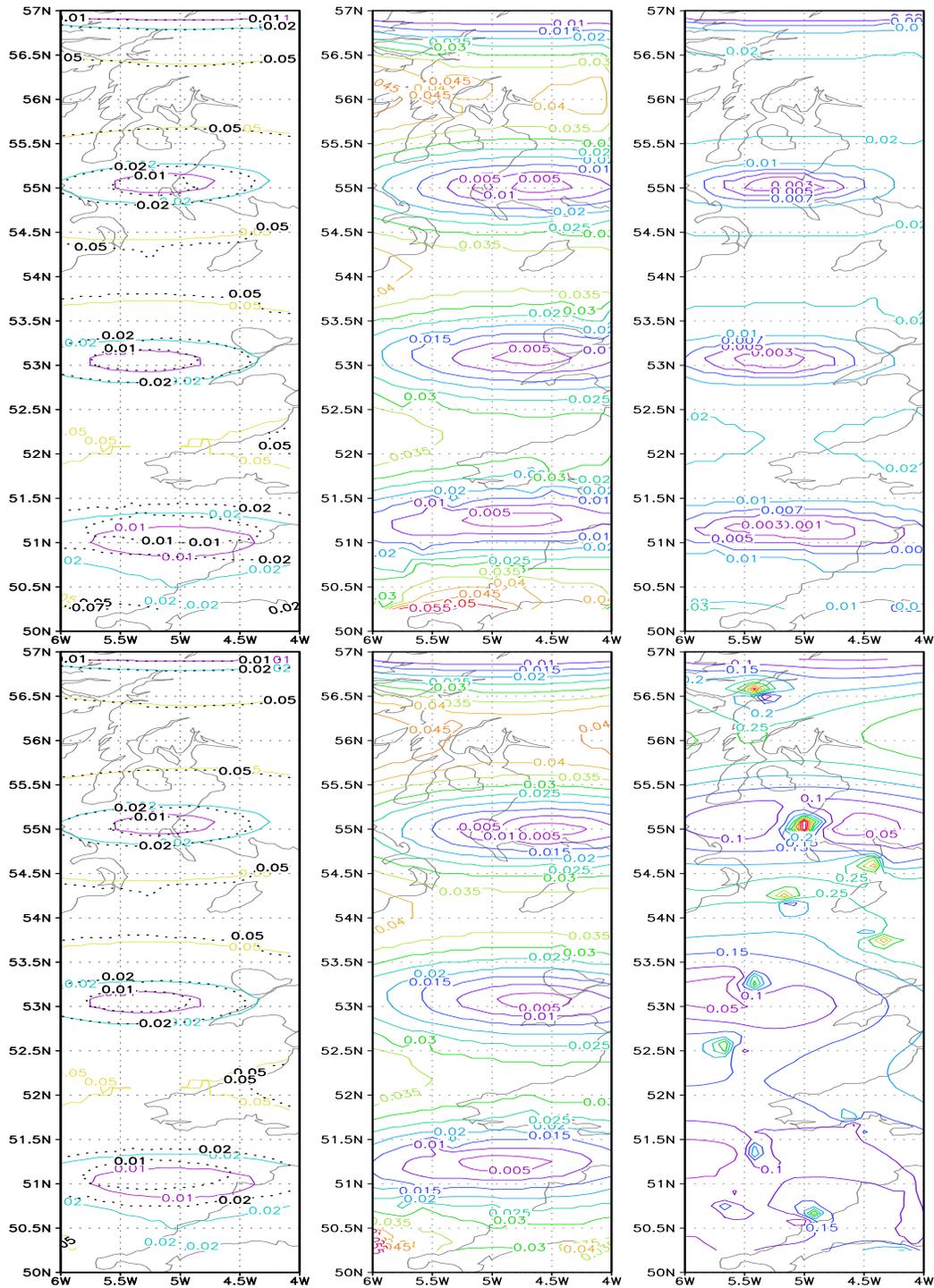


Abbildung 3.9:

Amplituden der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsleichung der M_4 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) meridionalen Transports [$44.3m^2/s$] der M_4 . Erzeugt durch EDV (oben) bzw. IDV (unten).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der meridionalen M_4 -Transportdifferenzen [$40m^2/s$] zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten.

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_4 -anteils des meridionalen Impulsleichungsresiduums [$0.001m^2/s^2$]. Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).

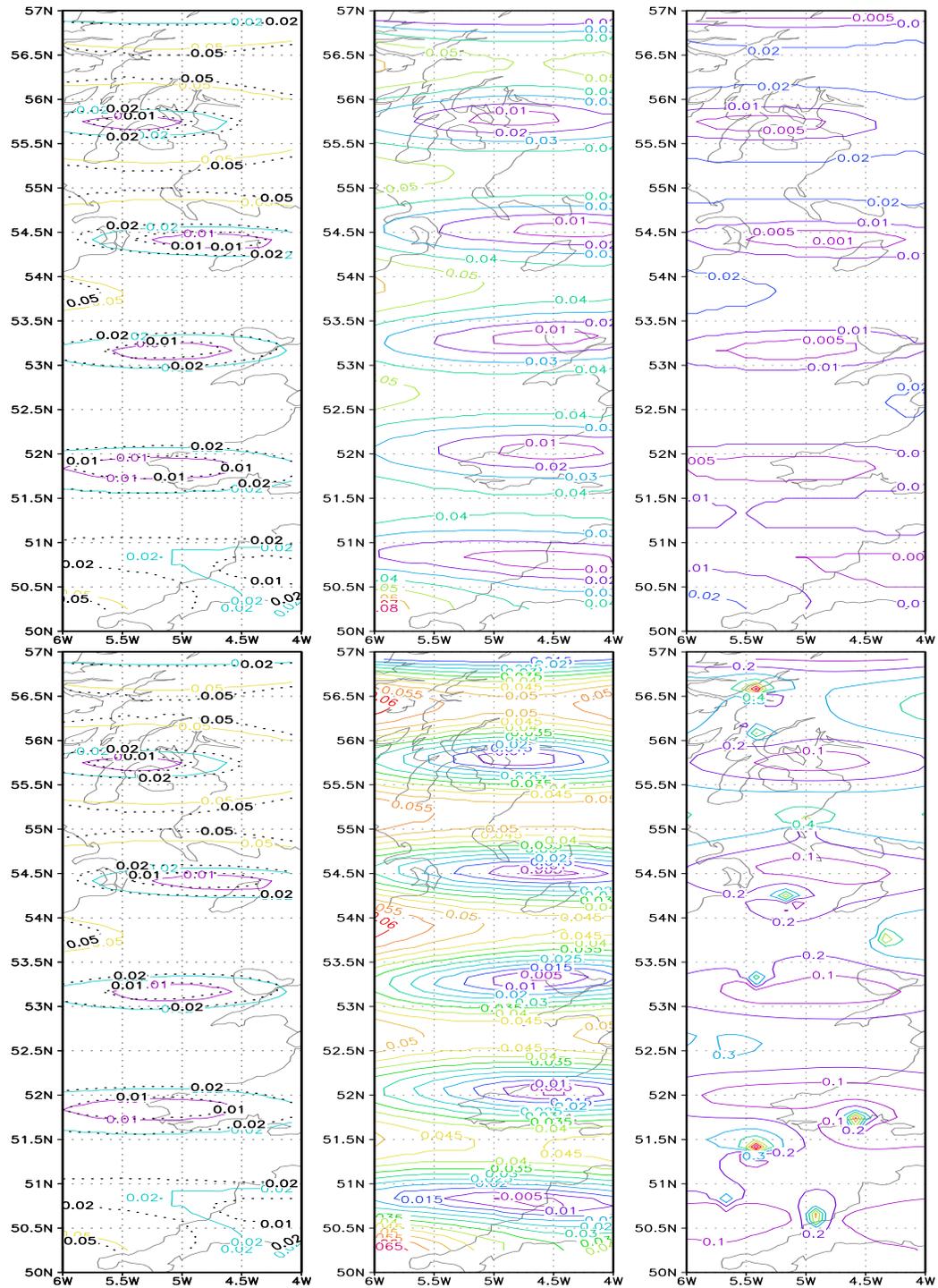


Abbildung 3.10:

Amplituden der Volumentransporte, der Transportdifferenzen und der meridionalen Impulsgleichung der M_6 (datenbeeinflusst durch EDV bzw. IDV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) meridionalen Transports [$44.3m^2/s$] der M_6 . Erzeugt durch EDV (oben) bzw. IDV (unten).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der meridionalen M_6 -Transportdifferenzen [$40m^2/s$] zwischen wahren Werten und durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) ermittelten Werten.

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude des M_6 -Anteils des meridionalen Impulsgleichungsresiduums [$0.001m^2/s^2$]. Erzeugt durch EDV (oben) bzw. durch IDV (unten).

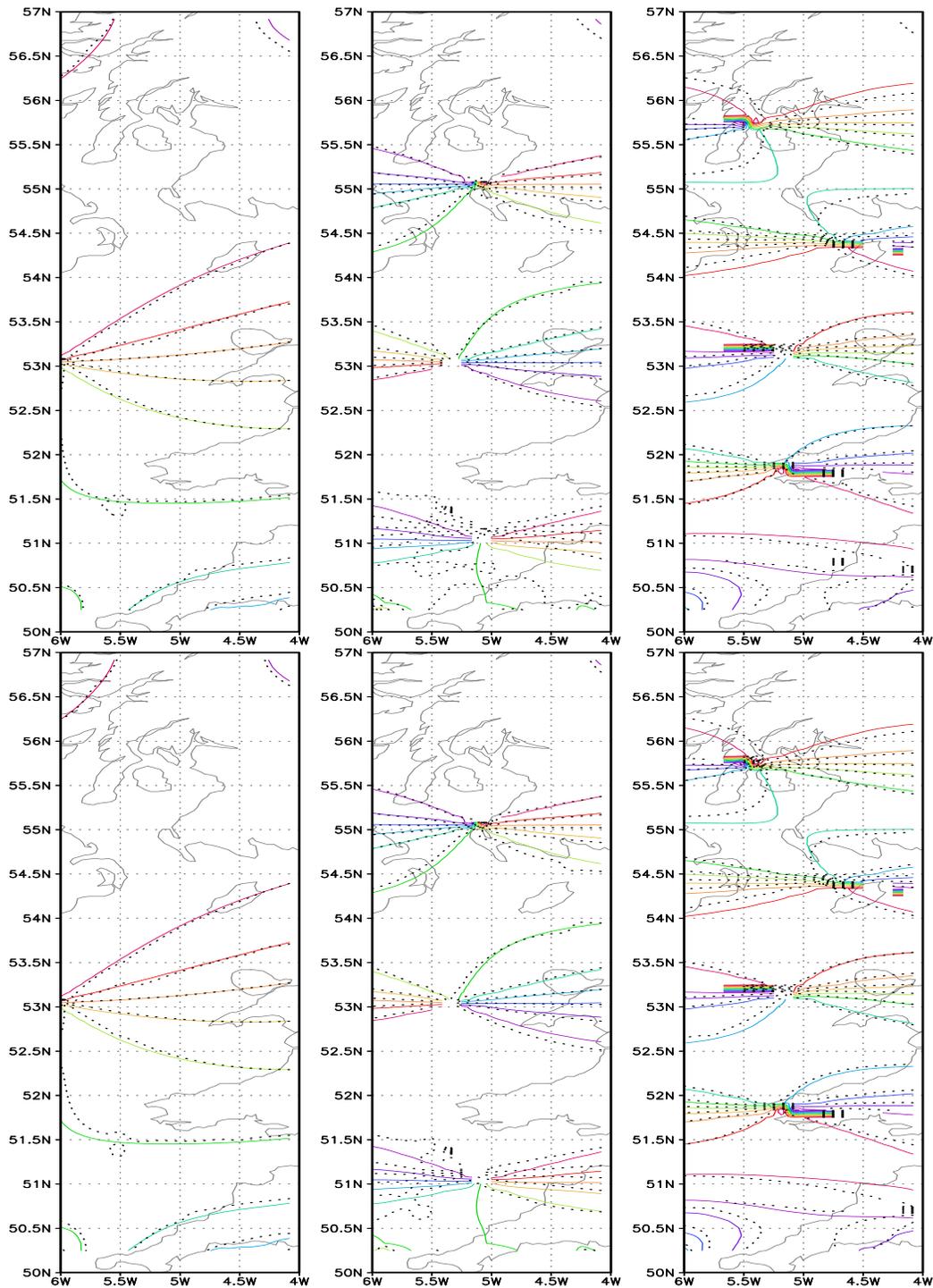


Abbildung 3.11:

Phasen der meridionalen Transporte der wahren und der durch EDV bzw. IDV erzeugten M_2 , M_4 bzw. M_6 .

1) Links: Linien gleicher Phase des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten durch EDV (oben) bzw. IDV (unten) erzeugten meridionalen Volumentransports der M_2 .

2) Mitte: wie 1), jedoch M_4 .

3) Rechts: wie 1), jedoch M_6 .

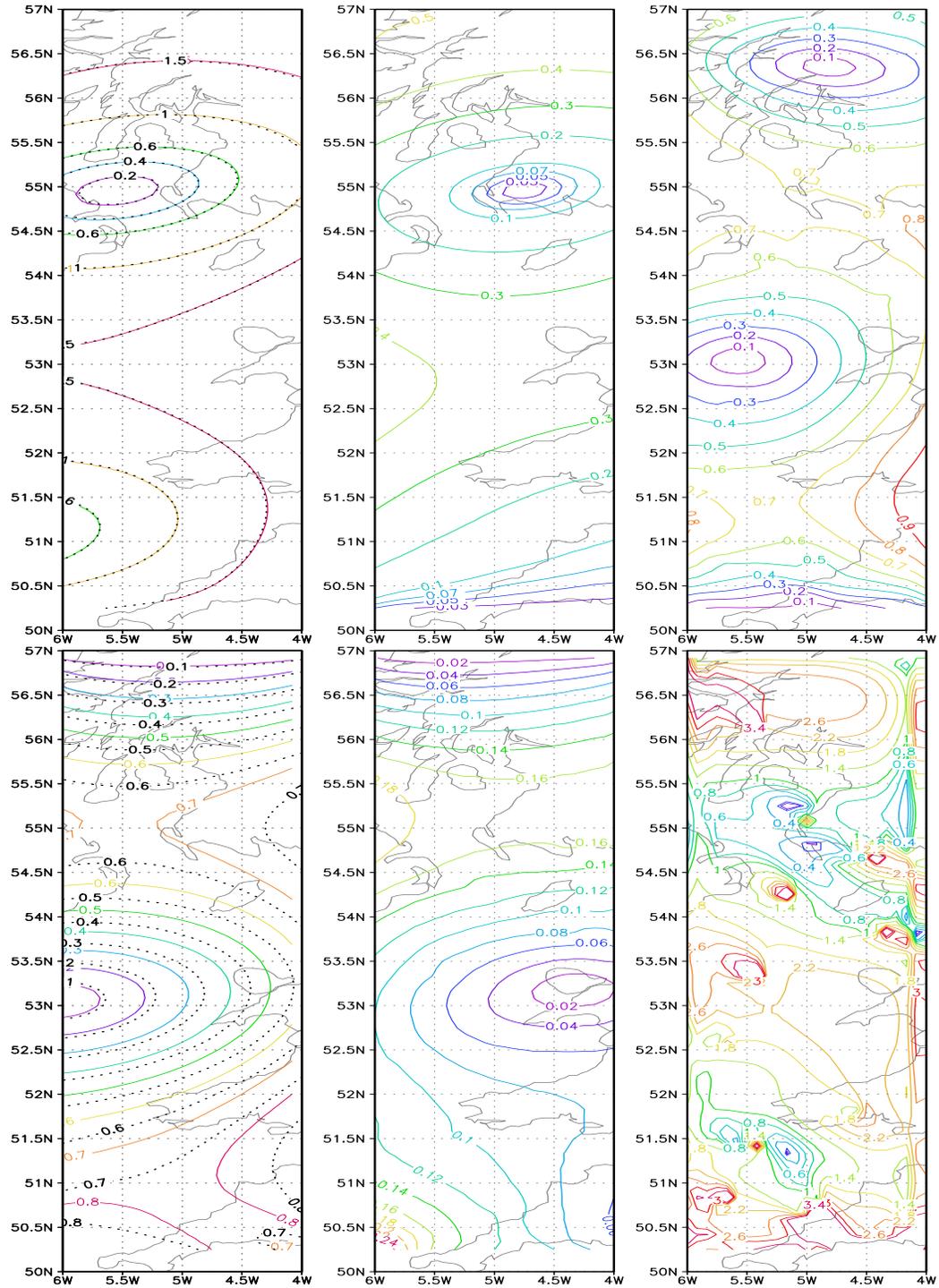


Abbildung 3.12:

Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportdifferenzen sowie der Residuen M_2 (datenbeeinflusst durch IAV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands (m) (oben) bzw. meridionalen Volumentransports der M_2 (unten). Erzeugt durch die adjungierte Methode (IAV).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der Differenzen (jeweils normiert durch die maximale Amplitude der M_2 Wasserstands- bzw. Transportdifferenz) zwischen den wahren (farbig) M_2 -Wasserständen (oben) bzw. M_2 -Transporten (unten) und den durch IAV erzeugten (gestrichelt) M_2 -Wasserständen bzw. Transporten.

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude (normiert durch die maximale Amplitude des vertikalen M_2 -Residuums) und gleicher Phase des vertikalen (oben) bzw. meridionalen (unten) durch IAV erzeugten Residuums der M_2 .

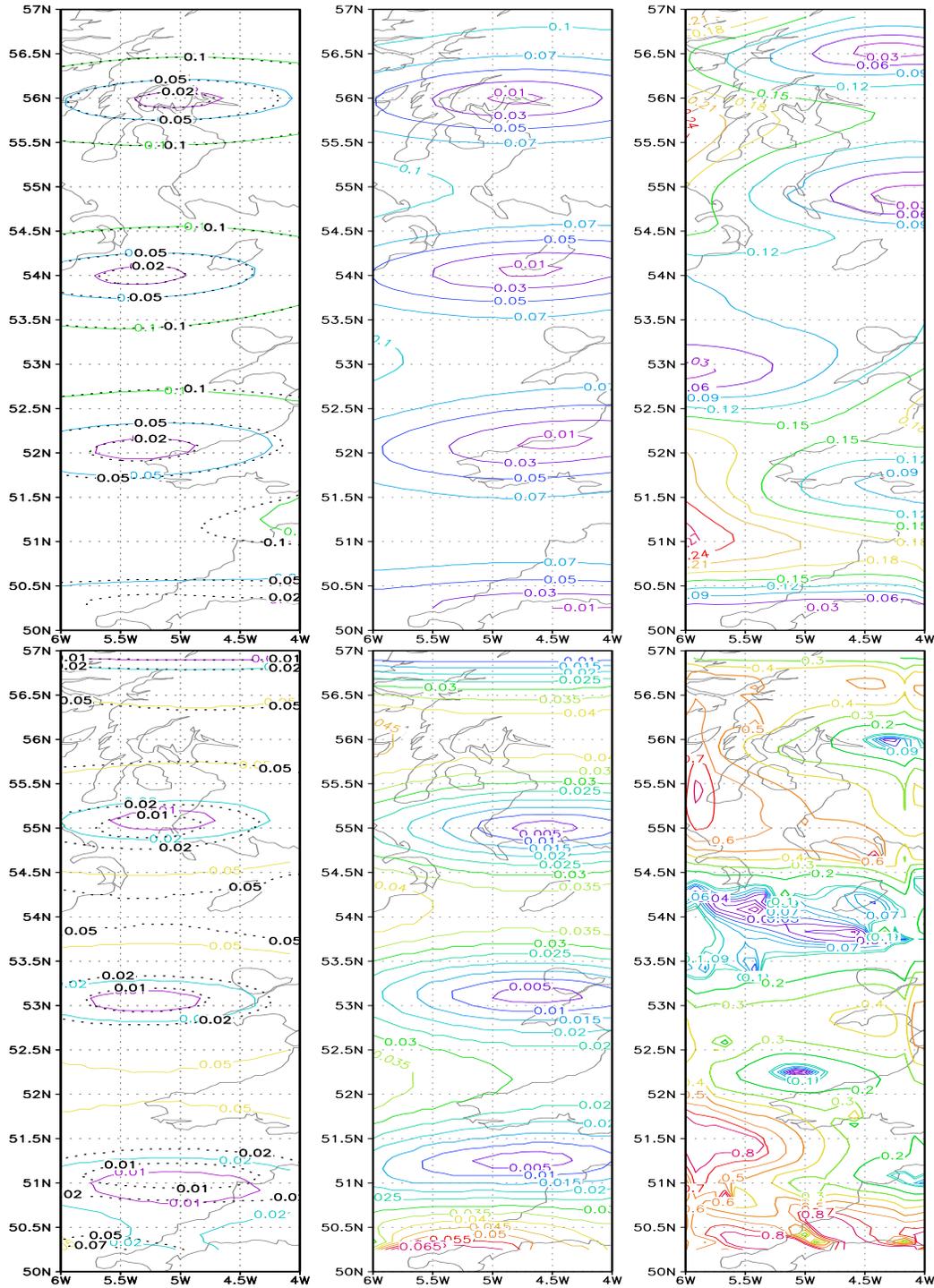


Abbildung 3.13:

Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportdifferenzen sowie der Residuen M_4 (datenbeeinflusst durch IAV).

- 1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands (m) (oben) bzw. meridionalen Volumentransports der M_4 (unten). Erzeugt durch die adjungierte Methode (IAV).
- 2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der Differenzen (jeweils normiert durch die maximale Amplitude der M_2 Wasserstands- bzw. Transportdifferenz) zwischen den wahren (farbig) M_4 -Wasserständen (oben) bzw. M_4 -Transporten (unten) und den durch IAV erzeugten (gestrichelt) M_4 -Wasserständen bzw. Transporten.
- 3) Rechts: Linien gleicher Amplitude (normiert durch die maximale Amplitude des vertikalen M_2 -Residuums) und gleicher Phase des vertikalen (oben) bzw. meridionalen (unten) durch IAV erzeugten Residuums der M_4 .

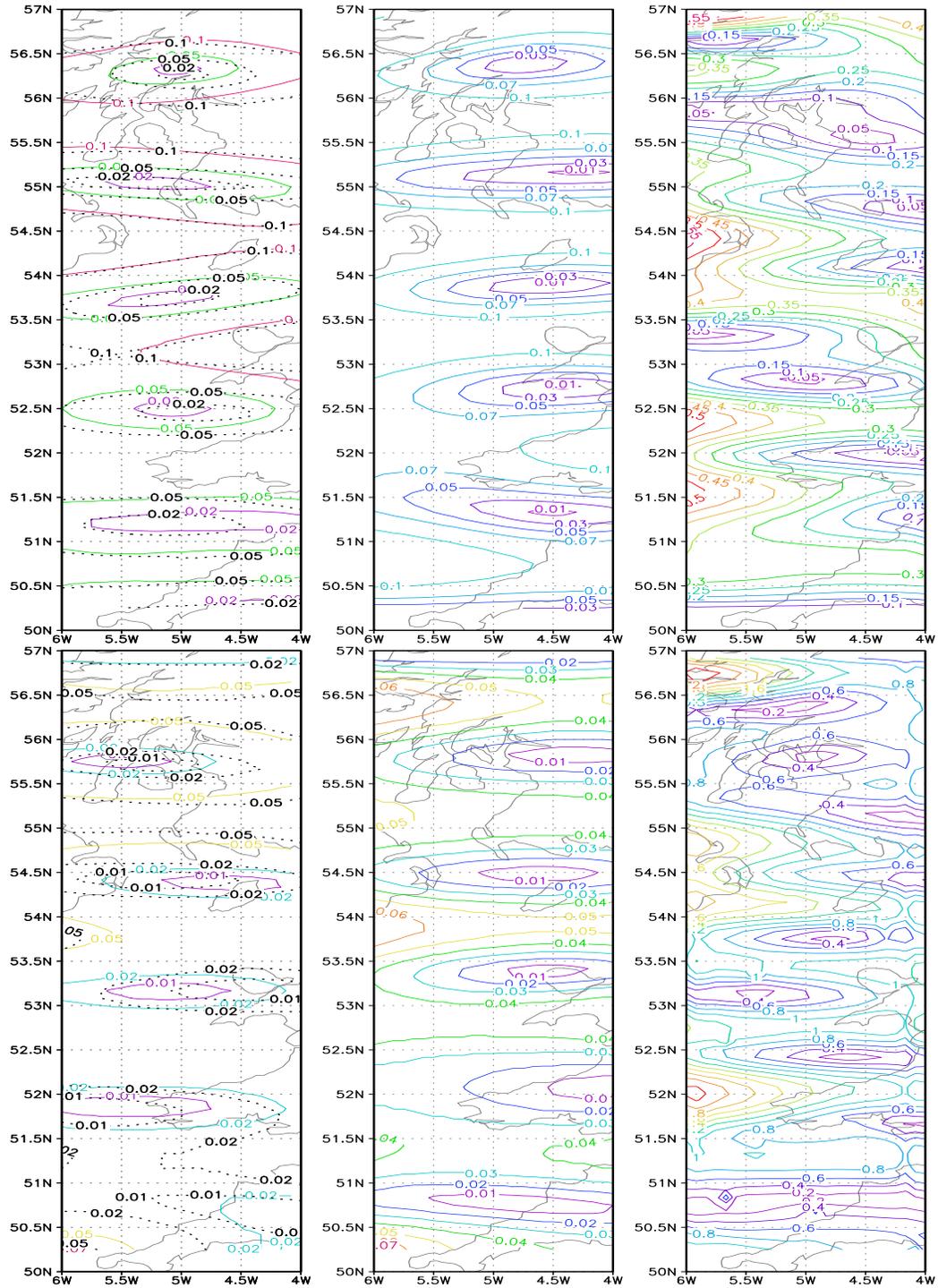


Abbildung 3.14:

Amplituden des Wasserstands, des Volumentransports, der Wasserstands- und der Transportdifferenzen sowie der Residuen M_6 (datenbeeinflusst durch IAV).

1) Links: Linien gleicher Amplitude des wahren (farbig) und des datenbeeinflussten (gestrichelt) Wasserstands (m) (oben) bzw. meridionalen Volumentransports der M_6 (unten). Erzeugt durch die adjungierte Methode (IAV).

2) Mitte: Linien gleicher Amplitude der Differenzen (jeweils normiert durch die maximale Amplitude der M_2 Wasserstands-differenz) zwischen den wahren (farbig) M_6 -Wasserständen (oben) bzw. M_6 -Transporten (unten) und den durch IAV erzeugten (gestrichelt) M_6 -Wasserständen bzw. Transporten.

3) Rechts: Linien gleicher Amplitude (normiert durch die maximale Amplitude des vertikalen M_2 -Residuums) und gleicher Phase des vertikalen (oben) bzw. meridionalen (unten) durch IAV erzeugten Residuums der M_6 .

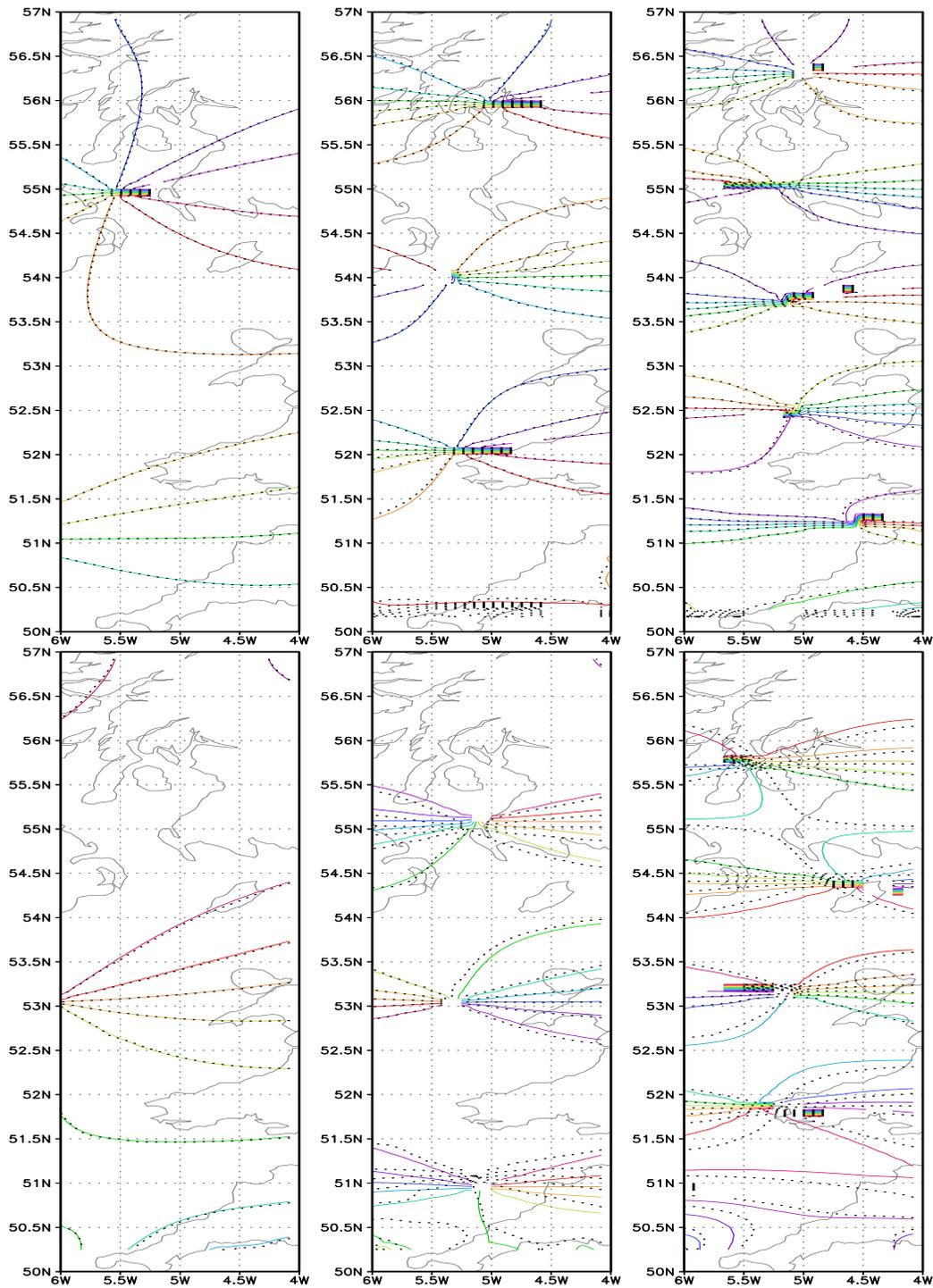


Abbildung 3.15:

Phasen des Wasserstandes und des meridionalen Volumentransportes der wahren und der durch IAV erzeugten M_2 , M_4 bzw. M_6 .

- 1) Links: Linien gleicher Phase des wahren (farbig) und des durch IAV erzeugten (gestrichelt) Wasserstandes (oben) bzw. meridionalen Volumentransports (unten) der M_2 .
- 2) Mitte: wie 1), jedoch M_4 .
- 3) Rechts: wie 1), jedoch M_6 .

Kapitel 4

Feldexperiment

Die Keltische See ist nach Westen durch einen starken Tiefengradienten vom offenen Meer abgegrenzt. Sie ist Teil des Nordwesteuropäischen Schelfs, auf den die im offenen Atlantischen Ozean erzeugten Gezeitenwellen treffen, bevor sie durch die Irischen, Schottischen und Britischen Inseln deformiert werden. Die vom tiefen Ozean eintreffenden Wellen breiten sich auf dem Schelf im wesentlichen als Kelvinwelle aus, dringen einerseits über die Keltische in die Irische See bzw. in den Englischen Kanal ein und breiten sich andererseits nach Norden direkt in die Nordsee aus. In den Flachwassergebieten insbesondere der West- und Südseite der Nordsee und des Englischen und St. Georgs-Kanals wird dort in beträchtlichem Maß Gezeitenenergie dissipiert, wo die halbtägigen Gezeitenströmungsgeschwindigkeiten am größten sind.

Die Überlagerung der ein- und auslaufenden Wellen verursachen zusammen mit der ablenkenden Kraft der Erdrotation die Bildung von Amphidromien, und zwar mit dem Abstand einer halben Wellenlänge zur Küste im Falle der der Küste nächstgelegenen Amphidromie. Dabei werden die einlaufenden Kelvinwellen infolge ihrer hohen Strömungsgeschwindigkeiten durch die stete Einwirkung der Bodenreibung abgewächt und am Ende des Beckens mit geringerer Amplitude reflektiert. Eine Folge davon ist die Verlagerung der Amphidromie zur Seite des Energiemaximums der reflektierten Welle, wie das bei der M_2 -Tide in der Irischen See und im Englischen Kanal beobachtet wird (Simpson, 1998). Die Stromellipsen tendieren dabei unter dem Einfluß der lateralen Ränder dazu, eine alternierende Form anzunehmen. Im Zentrum der Amphidromie der M_2 -Tide herrschen starke Strömungen, die durch turbulente Durchmischung Schichtungsbildung verhindern und in Englischen und in St. Georgs-Kanal dort zu Flachwasserfronten am Übergang zum Ozean führen, wo die Gezeitenströmungen schwach und das Meer geschichtet ist.

Im behandelten Gebiet ($50^{\circ}10'N-57^{\circ}0'N$; $2^{\circ}25'W-7^{\circ}50'W$) sind die halbtägigen Gezeiten durch hohe Wasserstände gekennzeichnet, und zwar insbesondere an der Ostseite der Irischen See, im Bristol Kanal und im Severn Ästuar. Die dortigen Wasserstände sind durch Amplifizierung und Dissipation bestimmt. Für die Amplifizierung sind die Änderungen in der trichterförmigen Geometrie (Bristol Kanal) und vor allem die Viertel-Wellenlängen-Resonanz bestimmend (Howarth and Pugh, 1983). Die entsprechende Resonanzperiode beträgt in der Keltischen See 11 Stunden und

im Bereich Keltischer See/Bristol Kanal 12 Stunden. In der Irischen See ist die Situation komplizierter. Die südlich vom St. Georgs-Kanal und nördlich vom Nordkanal einlaufenden Wellen treffen auf den Ostteil der See und regen diese resonant an.

Die Dissipation ist von geringerer Bedeutung, da sie erst bei einer Tiefe von etwa 20 m bedeutsam wird. Die Konturlinien der Tiefe sind in Abb. 4.1 bzw. 4.2 zu sehen. Die Dissipation spielt im Bristol Kanal, im Severn Ästuar und an der Ost- und Westküste der Irischen See eine wesentliche Rolle. Dort sind die nichtlinearen Effekt auch am größten, und in diesen Gebieten tritt M_6 vorzugsweise auf.

Die Obertiden in diesem Flachwassergebiet werden durch die horizontalen Gradienten der Ströme (M_4) und durch die quadratische Bodenreibung (M_4 und M_6) produziert. Die Amplitude der M_4 beträgt, vergleichbar mit der der O_1 , zwischen 5 cm und 10 cm in der Keltischen See (Davies, 1986) und kann im Severn Ästuar 80 cm übertreffen.

4.1 Assimilation durch EDV

Anders als im Zwillingsexperiment ist die Fehlerursache nicht a priori bekannt. Die Güte der Datenassimilation wird an Hand von nicht zur Assimilation verwendeten Meßdaten abgeschätzt. Für beide Zwecke, d.h. die Assimilation und den Vergleich, stehen insgesamt für die M_2 -Tide (Tabellen 4.1, 4.1) Daten von 79 Positionen, für die M_4 -Tide (Tabelle 4.3) und die M_6 -Tide (Tabelle 4.4) Daten von 46 bzw. 28 Positionen zur Verfügung. Für die Daten standen die Wasserstandsmessungen von Alcock and Howarth (1978), Alcock et al. (1980), Alcock (1982a,b), Alcock and Pugh (1982), Davies and Jones (1992), Sinha and Pingree (1997) und Young et al. (2000) in Form von harmonischen Konstanten zur Verfügung. Die Wasserstandsdaten sind mit den Nummern 1–76 den jeweiligen Stationen zugeordnet (Tabelle 4.1). Die Daten, die lediglich der Abschätzung der Approximationsgüte dienen und nicht für die Assimilation verwendet werden, sind in der ersten Spalte mit einem Asterix * gekennzeichnet und in Abb. 4.2 eingetragen. Es handelt sich bei ihnen um M_2 -Daten von 10 Positionen, M_4 - und M_6 -Daten von 6 bzw. 4 Positionen. Diese Daten werden als Referenzdaten bezeichnet. Sie müssen in allen Teilbereichen des Untersuchungsgebietes vertreten sein und verteilen sich folgendermaßen: Keltische See (Stat. 18,41), Bristol Kanal (Stat. 33), Severn Ästuar (Stat. 27), St. Georgs-Kanal (Stat. 14), Irische See (Stat. 47,73 und 79) und Nordkanal (Stat. 44,78). Von diesen Stationen liegen vier (Stat. 14,27,33 und 73) an den Küsten und sechs im Inneren (Stat. 18,41,44,47,78 und 79).

Die exakte Reproduktion sowohl der Haupt- als auch der Obertiden wird sich aus folgenden Gründen als schwierig erweisen.

1) An einigen Positionen (Stat. 27,33,41,47,73 und 79) nehmen die Wasserstandsamplituden der halbtägigen Gezeiten zufolge der Resonanz und der topographischen Randwellen, die im Modell nur angenähert dargestellt werden können, 2 m übertreffende Werte an.

- 2) Der Flachwassereffekt (Abb. 4.39–4.51) ist lokal unterschiedlich vorhanden.
- 3) Die Küstentopographie wird im Modell im allgemeinen nicht genügend gut angenähert, was am Verlauf der natürlichen Küstenlinien im Vergleich zur 0 m -Linie erkennbar ist (Abb. 4.1). Der Darstellungsfehler bei der Approximation des natürlichen Küstenverlaufs kann sich im ganzen Gebiet, insbesondere aber an der Küste (Stat. 14,27,33 und 73) bei der Bestimmung der vergleichbaren Modellwerte nachteilig auswirken.
- 4) Die teilweise starken Tiefengradienten, wie sie insbesondere im Nordkanal (Stat. 44 und 48) auftreten, können in der Massenerhaltungsgleichung Ungenauigkeiten hervorrufen.
- 5) Der Gitterabstand ist als von vornherein zu grob für die Darstellung des Lösungsverhaltens anzusehen.

Zwischen den zitierten Ergebnissen klassischer Modelle und den Messungen bestehen überall, insbesondere aber im Bristol Kanal und im Severn Ästuar, wo die Gitternetze keine hinreichend hohe Auflösung besitzen, erhebliche Diskrepanzen. Auch an der Ostseite der Irischen See stimmen berechnete und gemessene Wasserstände nicht überein. Für dieses Gebiet wird die Reibungswirkung überschätzt mit der Folge, daß die Wasserstandsamplituden zu stark gedämpft werden. Als Gegenmaßnahme wird vorgeschlagen (Sinha and Pingree, 1997), das Gitternetz zu verfeinern und einen linearisierten Reibungstensor kombiniert mit dem nichtlinearen Reibungsterm einzuführen. Dieses Vorgehen entspricht nicht dem Sinn unseres Vorhabens. Vielmehr wird versucht, durch eine implizite Korrektur der Dynamik zufolge der assimilierten Daten zu besseren Ergebnissen zu gelangen.

Das explizite Modell wird bei Einführung von Pegeldata zusammen mit der direkten Methode angewandt, und es werden die gleichen Gewichte wie beim Zwillingsexperiment (3.1) benutzt.

Die ersten Ergebnisse der Assimilation sind für die M_2 -Tide und für die Obertiden M_4 , M_6 in den Tabellen 4.1–4.4 wiedergegeben. Zum Vergleich werden ihnen dort die mit der klassischen Methode gewonnenen Werte gegenübergestellt. In den Tabellen 4.5–4.8 werden die Ergebnisse anderer Autoren (Davies and Jones, 1992; Young et al., 2000; Sinha and Pingree, 1997) aufgelistet und dann im Vergleich mit den hier ermittelten Ergebnissen diskutiert. So soll zunächst ein quantitativer Eindruck vermittelt werden.

4.1.1 M_2 -Haupttide

Das gesamte Gebiet an der Westseite Britanniens zeichnet sich insbesondere mit Schottlands Küste, dem Nordkanal, dem Bristol Kanal und dem Severn Ästuar durch eine hochkomplizierte Küstentopographie aus. Die groben Gitternetze, wie sie Davies and Jones (1992) benutzten und wie sie vorliegend verwendet werden, erlauben weder die Erfassung der komplexen Bodentopographie noch diejenige der Küstenberandung. Diese Defizite des Modells sind besonders groß im nördlichen Nordkanal, in der Irischen See und in den Ästuaren.

Davies and Jones (1992) wählten ein Modellgebiet, das dem vorliegenden ähnelt, und durch finite Differenzen einer meridionalen und zonalen Auflösung von $4'$ bzw. $6'$ dargestellt wurde. Die diskrete Darstellung der vertikalen Abhängigkeiten erfolgte spektral durch Spline-Funktionen im Sinne der Galerkin-Methode. Gegenüber den zweidimensionalen Finite-Differenzen-Modellen konnte dahingehend eine Verbesserung erzielt werden, daß unrealistische Dämpfungen in Flachwassergebieten reduziert wurden.

Young et al. (2000) erhielten mit einem Modell, das demjenigen von Davies and Jones (1992) methodisch gleicht, eine hohe Auflösung von maximal $1km$ und nichtorthogonale Koordinaten nördlich des Nordkanals verwendet, die bis jetzt besten Ergebnisse. Der Wert des Bodenreibungskoeffizienten war in diesen Arbeiten wie üblich zu 0.0025 angenommen worden.

Gute Ergebnisse lieferte auch das explizite zweidimensionale Modell von Sinha and Pingree (1997), das von zentralen Differenzen in Raum und Zeit bei zonalen und meridionalen Gitterabständen von $2.5'$ bzw. $5'$ Gebrauch macht. Als wesentliche Neuerung wurde in das Modell ein linearer Reibungstensor eingeführt, der zusammen mit dem nichtlinearen Reibungsterm für das Gleichgewicht zwischen Erzeugung der Flachwassertiden und ihrer Dissipation sorgt.

Die durch HAMSOM klassisch berechneten Gezeitenkonstanten weisen erhebliche Abweichungen von den aus Messungen abgeleiteten aus. Die Differenzen betragen bei den Amplituden der M_2 , M_4 und M_6 bis über $2m$, $20cm$ bzw. bis zu $3.3cm$. Bei den Phasen der Obertiden treten Differenzen von über 100° auf. Neben der zu geringen räumlichen Auflösung von $5'$ mit all ihren Konsequenzen tragen zur mangelhaften Reproduktion die Unsicherheiten bei der Reibungs- und Austauschparameterisierung und den Bedingungen am offenen Rand bei. Daß das zeitweilige Trockenfallen weiter Flächen unberücksichtigt bleibt, könnte auch eine Rolle spielen.

Anders als beim klar definierten Modellfehler des Zwillingsexperimentes sind die Modellfehler des realitätsnah formulierten Modells vielfältiger Natur. Die wesentliche Aufgabe besteht nun darin zu prüfen, inwieweit die Daten einbeziehenden Modelle diese verschiedenartigen Fehler ausgleichen und bessere Ergebnisse als die herkömmlichen klassischen Modelle liefern. Im folgenden sollen die Ergebnisse der Daten einbeziehenden Modelle mit jenen der drei oben genannten klassischen Modelle verglichen werden. Zunächst mögen in diesem Sinne die durch Anwendung des EDV-Modells erhaltenen Ergebnisse erörtert werden.

Tabelle 4.1–4.2 ist zu entnehmen, daß die M_2 Gezeitenkonstanten durch den Einsatz der EDV-Methode gegenüber HAMSOM an den Meßstationen erheblich besser reproduziert worden sind. An den Assimilationspunkten liegen die Amplituden- und Phasendifferenzen zwischen EDV und Messung unter $1cm$ bzw. 1° . An den Referenzpunkten betragen die größten Differenzwerte $6.4cm$ bzw. bei 9.5° . Als genaueres Maß zur Beschreibung der durch die inverse Methode erzielten Verbesserungen mögen mit

$$\zeta_j^d(x, y, t) := A_j^{\zeta^d}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^d}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.1)$$

$$\zeta_j^a(x, y, t) := A_j^{\zeta^a}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^a}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.2)$$

$$\zeta_j^H(x, y, t) := A_j^{\zeta^H}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^H}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.3)$$

$$\zeta_j^D(x, y, t) := A_j^{\zeta^D}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^D}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.4)$$

$$\zeta_j^Y(x, y, t) := A_j^{\zeta^Y}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^Y}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.5)$$

$$\zeta_j^S(x, y, t) := A_j^{\zeta^S}(x, y) \cos(j\sigma_2 t) + B_j^{\zeta^S}(x, y) \sin(j\sigma_2 t) \quad (4.6)$$

$$D\zeta_j^{dH} := \frac{1}{N_{dH}} \iiint (\zeta_j^d(x, y, t) - \zeta_j^H(x, y, t))^2 \delta(x - x_{dH})(y - y_{dH}) dx dy dt \quad (4.7)$$

$$D\zeta_j^{da} := \frac{1}{N_{da}} \iiint (\zeta_j^d(x, y, t) - \zeta_j^a(x, y, t))^2 \delta(x - x_{da})(y - y_{da}) dx dy dt \quad (4.8)$$

$$D\zeta_j^{dD} := \frac{1}{N_{dD}} \iiint (\zeta_j^d(x, y, t) - \zeta_j^D(x, y, t))^2 \delta(x - x_{dD})(y - y_{dD}) dx dy dt \quad (4.9)$$

$$D\zeta_j^{dY} := \frac{1}{N_{dY}} \iiint (\zeta_j^d(x, y, t) - \zeta_j^Y(x, y, t))^2 \delta(x - x_{dY})(y - y_{dY}) dx dy dt \quad (4.10)$$

$$D\zeta_j^{dS} := \frac{1}{N_{dS}} \iiint (\zeta_j^d(x, y, t) - \zeta_j^S(x, y, t))^2 \delta(x - x_{dS})(y - y_{dS}) dx dy dt \quad (4.11)$$

$$(4.12)$$

folgende Grössen dienen

$$V_E \zeta_j^{Ha} := ((D\zeta_j^{dH} - D\zeta_j^{da})/D\zeta_j^{da})^{1/2} \quad (4.13)$$

$$V_E \zeta_j^{Da} := ((D\zeta_j^{dD} - D\zeta_j^{da})/D\zeta_j^{da})^{1/2} \quad (4.14)$$

$$V_E \zeta_j^{Ya} := ((D\zeta_j^{dY} - D\zeta_j^{da})/D\zeta_j^{da})^{1/2} \quad (4.15)$$

$$V_E \zeta_j^{Sa} := ((D\zeta_j^{dS} - D\zeta_j^{da})/D\zeta_j^{da})^{1/2} \quad (4.16)$$

$$j := 1, 2, 3.$$

Hierin bezeichnen die Indizes a, d und H Assimilation, Messung bzw. HAMSOM, und die Werte $j = 1, 2, 3$ beziehen sich auf M_2, M_4 bzw. M_6 . Die Indizes D, Y und S kennzeichnen die Arbeiten von Davies and Jones (1997), Young et al. (2000) bzw. Sinha and Pingree (1997). $V_E \zeta_j^{Ha}$ zeigt z.B. die Verbesserung der Wasserstände durch die EDV-Assimilation gegenüber der klassischen Modellierung mit HAMSOM an. Werden die Indizes I oder A anstelle von E für die Grösse V verwendet, dann kennzeichnet sie die durch die implizite direkte bzw. die semi-implizite adjungierte Methode erreichte Verbesserung der Wasserstände.

Um den Flachwassereffekt und dessen möglichen Zusammenhang mit der Assimilation zu überprüfen, werden folgende Begriffsbildungen vorgenommen.

Als Beitrag der zonalen Advektionsterme wird

$$\text{BZA} := \frac{U}{H} U_x + \frac{V}{H} U_y$$

als Beitrag der meridionalen Advektionsterme wird

$$\text{BMA} := \frac{U}{H} V_x + \frac{V}{H} V_y$$

als Beitrag des zonalen und meridionalen Reibungsterms wird

$$\text{BZR} := \frac{R}{H^2} U(U^2 + V^2)^{1/2} \text{ bzw.}$$

$$\text{BMR} = \frac{R}{H^2} V(U^2 + V^2)^{1/2}$$

und schließlich als Beitrag der Wellendrift als

$$\text{BWD} := u\zeta_x + v\zeta_y$$

definiert.

Die Werte der Beiträge werden jeweils über eine M_2 -Periode integriert. Die Bedeutung der einzelnen Terme erschließt sich aus den Gleichungen (2.7)–(2.9). Alle Beiträge werden zunächst harmonisch analysiert und anschließend für alle Tiden mit dem jeweiligen maximalen Wert des M_2 -Anteils normiert. Die Ergebnisse sind in den Abb. 4.39 bis 4.51 zusammengestellt. Dabei zu achten ist, daß BWD durch die Daten nach der Assimilation erzeugt worden ist. Alle Beiträge zeigen lokal unterschiedliche Intensität jeweiligen Flachwasserterme in zonalen und meridionalen Gleichung bzw. in der Kontinuitätsgleichung an.

Zu beachten ist, daß die Differenzen zwischen datenbeeinflußt und klassisch berechneten Wasserständen nicht normiert sind, um die wahre Größenordnung der Verbesserung erkennen zu lassen. Die Residuen sind wie beim Zwillingsexperiment normiert. Im übrigen sind die Abb. 4.1 und 4.2 mit der Wiedergabe der Meerestopographie und die folgenden 49 Abbildungen, die jeweils aus Anwendungen von EDV, IDV und IAV resultierende Isolinien zeigen, mit ausführlichen Beschreibungen versehen.

Tabelle 4.13 zeigt die prozentualen Verbesserungen, die durch Anwendungen der Assimilation gegenüber den klassischen Modellanwendungen (HAMSOM, Davies and Jones (1992), Young et al. (2000) und Sinha and Pingree (1997)) an Assimilations- und Referenzpunkten erzielt worden sind. Die Verbesserung durch EDV an den Assimilationspunkten beträgt zwischen $O(10^3)\%$ und $O(10^4)\%$ und wird nicht mehr dargestellt. Sie kann durch die Wahl des Datengewichts stark beeinflusst werden und sagt wenig aus über die gebietsweite Verbesserung. An den Referenzpunkten wird durch EDV immer noch eine Verbesserung von 103%, 168%, 42% bzw. 26% erreicht.

In den Abb. 4.3 und 4.6 sind jeweils links die Linien gleicher Amplitude bzw. die Linien gleicher Phase der klassischen mit HAMSOM und mit EDV ermittelten Wasserstände der M_2 -Tide dargestellt. Die Amplituden sind in allen Teilgebieten des Untersuchungsgebietes durch EDV gegenüber den klassisch ermittelten Werten deutlich angehoben worden, z.B. um ca. 20 cm in der Keltischen See und um ca. 40 cm in der Irischen See. Die mit Assimilation berechneten Phasen sind im St. Georgs-Kanal gegenüber denen des klassischen Modells um 10° – 20° verzögert.

Die Isolinien von Amplitude und Phase der datenbeeinflußten Wasserstände zeigen ein dem von Davies and Jones (1992) ermittelten recht ähnliches Bild. Ein Grund dafür besteht darin, daß die Werte am offenen Rand dieser Arbeit entnommen wurden. In der Irischen See besteht gute Übereinstimmung des Isolinienverlaufs mit dem von Sinha and Pingree (1997) angegebenen. Von Young et al. (2000) werden dort die

Wasserstandsamplituden unterschätzt. Die Lage der Amphidromie an der Küste von Nordirland stimmt hingegen mit der in beiden Arbeiten angegebenen gut überein.

In Abb. 4.12 links sind die Linien gleicher Amplitude und gleicher Phase der M_2 -Residuen der Massenerhaltungsgleichung aufgezeichnet worden. Die Phasen zeigen ein die Keltische See vollständig erfassendes gleichmäßiges Anwachsen in nordwestlicher Richtung mit gleichmäßigem Anstieg der Amplituden nach rechts zur Ausbreitungsrichtung. Die Irische See wird dominiert durch zwei zyklonische Amphidromien, die der Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Kelvinwelle entsprechen. Der Amplitudenanstieg zur Irischen Küste hin ist besonders ausgeprägt. Starke Gradienten im Bereich der Datenpositionen treten außer an Station 20 nicht auf. Insgesamt ergibt sich für diese Residuen, daß sie ein den Gezeitenwellen entsprechendes Wellenverhalten zeigen.

Die Linien gleicher Amplitude und gleicher Phase der Wasserstandsdifferenzen zwischen EDV-Lösung und klassischer HAMSOM-Lösung (Abb. 4.15, links) verhalten sich in der Keltischen See ähnlich wie die oben erörterten Isolinien der Residuen. Die Phasen wachsen dann aber über die Irische See bis in den Nordkanal weiter an, wobei die Amplituden in Fortschrittsrichtung und nach rechts ansteigen. Letztere erreichen an der Ostseite der Irischen See dort ein Maximum, wo die Bodenreibung die größte Bedeutung besitzt.

Die Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Wellendriftterme in der Massenerhaltungsgleichung der M_2 -Tide (Abb. 4.51, links) kennzeichnen die Gebiete, wo der nichtlineare Effekt der Wellendriftterme durch die Daten wiedergegeben worden ist. Als solche sind erkennbar der St. Georgs-Kanal und die Gebiete östlich von Wicklow Head, nördlich von Anglesey, sowie südlich von Islay. Datenabhängige Verbesserungen treten zwar in allen diesen Gebieten, aber eben auch in der gesamten Irischen See auf.

Es ist anzunehmen, daß eine verbesserte implizite Erfassung von nichtlinearen Flachwassertermen (BWD) bzw. von topographischen Wellen und von Resonanzeffekten durch die Assimilation von Daten realisiert worden ist, und die Residuenwellen die beckenweite Verwirklichung der Korrekturen anzeigen.

Erwartungsgemäß herrschen starke meridionale Strömungen an der Ostküste Irlands dort, wo sich die M_2 -Wasserstandsamphidromie befindet (Abb. 4.29, links). Die Differenzen zwischen den meridionalen Geschwindigkeiten der klassischen und der EDV-Lösung (Abb. 4.35, links) nehmen vom St. Georgs-Kanal bis zum nördlichen Ausgang zum Atlantik und an den westlichen offenen Rändern der Keltischen See größere Werte als in den anderen Gebieten an. Diese Änderungen des Strömungsfeldes entsprechen etwa den Maxima der Residuen der meridionalen Impulsgleichung (Abb. 4.32, links).

4.1.2 Obertiden

Die bislang besten Ergebnisse für die halbtägigen Tiden und insbesondere für deren Obertiden lieferte das zweidimensionale Modell von Sinha and Pingree (1997). Da-

her werden hauptsächlich die Ergebnisse jener Arbeit zum Vergleich mit denen der vorliegenden Arbeit herangezogen.

Die im offenen Ozean angeregte M_2 -Gezeit trifft auf den Nordwesteuropäischen Schelf und stellt dort eine Energiequelle dar, der als Senken die Regionen mit starker Bodenreibung gegenüberstehen. Die Vorhersage ist mit Hilfe numerischer Simulation mit hoher Genauigkeit durchführbar. Sinha and Pingree (1997) erreichten einen RMS-Fehler von ca. 4.5 cm bei den Amplituden und einen solchen von 3.1° bei den Phasen. Die M_4 -Obertide wird durch Advektion und Bodenreibung erzeugt, und die M_6 -Obertide verdankt ihre Existenz hauptsächlich der Bodenreibung und der Wellendrift. Obertiden werden daher einerseits durch Reibung erzeugt, andererseits aber durch sie abgeschwächt. Die M_6 -Obertide wird in der Simulation überschätzt, wenn die nichtlineare Wechselwirkung mit anderen Tiden, wie z.B. der S_2 und der N_2 , nicht berücksichtigt wird. Rechnungen mit klassischen Modellen bestätigen dies (Jones and Davies, 1996). Die Einbeziehung weiterer astronomischer Partialtiden in Modelle mit Datenassimilation verspricht eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse, benötigt jedoch erhebliche zusätzliche Rechnerressourcen. Die Möglichkeit, solche Rechnungen mit dem vorliegenden Modell nach einer Verallgemeinerung des benutzten Algorithmus durchzuführen, wird in einem späteren Abschnitt erörtert werden.

Es ist schwierig, M_4 und vor allem M_6 mit hinreichender Genauigkeit dort zu reproduzieren, wo viele Hochwassertiden (Ober- und Kombinationstiden) und mehrere astronomischen Tiden miteinander wechselwirken. Die Qualität der Reproduktion abzuschätzen und die Gezeitenkonstanten der Obertiden wirkungsvoll für die Assimilation zu nutzen, wird oft erschwert durch große Meßfehler etwa bei der M_6 -Tide (Robinson, 1979) und dadurch, daß Gitterpunkte und Meßstationen ungünstig zueinander liegen. Das kann sich mit wachsender Ordnung der Obertiden zunehmend nachteilig auswirken. Hinzu kommen die üblichen Modelldefizite, wie unzureichend aufgelöste topographische Strukturen und Nichtberücksichtigung zeitweise trockenfallender Flächen.

Trotz aller anderen Unzulänglichkeiten scheint eine geeignete Parameterisierung der Reibungskoeffizienten den größten Beitrag zu einer besseren Modellierung der Obertiden leisten zu können. Sinha and Pingree (1997) zeigen, daß eine Kombination von linearisiertem Reibungstensor und quadratischer Reibung die M_6 -Wasserstände in die Nähe der realen Werte bringt, da das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Abschwächung besser dargestellt werden kann. Es wäre künftig vorteilhaft, diese Parameterisierung im Modell mit Assimilation zu nutzen.

Meßdaten stehen von 46 und 29 Stationen für M_4 bzw. M_6 zur Verfügung (Abb. 4.1). Davon liegen 21 Datenpositionen der M_4 im Bristolkanal bzw. im Severn Ästuar, hinzu kommen 6 Positionen mit Referenzdaten für M_4 (Abb. 4.2 bzw. Tabelle 4.3) und 4 Positionen mit Referenzdaten für M_6 (Abb. 4.2 bzw. Tabelle 4.4). Optisch erscheinen die Positionen, von denen Daten zur Assimilation genutzt werden, gleichmäßig verteilt. Doch gerade für die Reproduktion der M_6 ist die genaue Lage der Datenpositionen für den Einfluß der Daten bei der Assimilation sehr wichtig, wie die Ergebnisse des Zwillingsexperimentes gezeigt haben.

In den Tabellen 4.3, 4.4, 4.7 und 4.8 sind die Ergebnisse der Assimilation den klassisch erzielten gegenübergestellt. Die Unterschiede zwischen den EDV-Ergebnissen und den Messungen nehmen für die M_4 an den meisten Stellen sowohl für Amplitude als auch für Phasen Werte von $O(10^{-1})$ an. Der größte Unterschied beträgt dabei 4.4 cm und wird an der Referenzstation 47 angenommen, die auf dem flachen Schelf an der Ostseite der Irischen See liegt. Bei den Phasen beträgt der größte Fehler 76° . Er wird an der Referenzstation 44 mitten in der Bucht Firth of Lorne angenommen. An den Referenzstationen fällt die Reproduktion der Meßwerte also deutlich schlechter aus als an den Assimilationsstationen. Dennoch ist an diesen Stationen eine Verbesserung gegenüber HAMSOM und Sinha and Pingree um 504% bzw. um 26% erzielt worden (Tabelle 4.14).

Bei den Phasen der M_6 -Obertide sind die Abweichungen von den Messungen mit $O(10)$ signifikant, aber akzeptabel. Es ist allgemein schwierig, die Phasen der Obertiden mit hoher Genauigkeit zu reproduzieren, wie bereits die Ergebnisse des Zwillingsexperiments gezeigt haben. Die Verbesserungen durch das EDV-Modell betragen an den Referenzpunkten gegenüber HAMSOM und Sinha and Pingree (1997) 100% bzw. 37% (Tabelle 4.14).

Die Linien gleicher Amplitude und gleicher Phase der klassisch und EDV ermittelten M_4 -Wasserstände (Abb. 4.4 bzw. 4.7, jeweils links) und die des M_6 -Wasserstands (Abb. 4.5 bzw. 4.8, jeweils links) weichen jeweils erheblich voneinander ab. Die M_4 -Amplituden im Bereich der Amphidromie im St. Georgs-Kanal sind durch die Assimilation verringert worden. Die 0.1 m -Isolinien der EDV-Lösung verlaufen in der Irischen See in Ost-West-Richtung, während diejenigen der klassischen Lösung in Nord-Süd-Richtung küstenparallel angeordnet sind (Abb. 4.4). Die Isolinien von Amplitude und Phase in Abb. 4.10 liefern ein Bild, das im großen und ganzen mit dem von Sinha and Pingree (1997) ermittelten übereinstimmt.

Die zwei Amphidromien der M_6 -Obertide an der Ostküste Irlands verschmelzen nach der Assimilation in eine einzige (Abb. 4.8, links), so daß sich auch eine wesentliche dateninduzierte Veränderung bei den Linien gleicher Amplituden ergibt (Abb. 4.5, links). Im Vergleich zum Schwingungsbild in Sinha and Pingree (1997) fehlt eine Amphidromie an der Westseite der Keltischen See. Ihr Fehlen liegt vermutlich an dem Einfluß der vorgegebenen Werte am nahegelegenen offenen Rand.

Den Abb. 4.13 und 4.16 ist zu entnehmen, daß die Verteilung der Maxima der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_4 in der Irischen See ein ähnliches Bild wie die Maxima der Wasserstandsdifferenzen zwischen klassischer und EDV-Lösung zeigt. Die gleiche Tendenz besteht bei der M_6 (Abb. 4.14 und 4.17, links). Das relativ starke lokale Residuenmaximum in der Nähe des offenen Randes an Station 20 (Abb. 4.13 bzw. 4.14) liefert einen nur geringen Beitrag zur Verbesserung der Wasserstände um diesen Punkt (Abb. 4.16 und 4.17). Die Assimilation von Meßdaten in der Nähe der offenen Ränder trägt, wie schon das Zwillingsexperiment gezeigt hat, wenig zur verbesserten Reproduktion unabhängiger Messungen bei.

Die Darstellung der Residuen der Impulsgleichungen (Abb. 4.23, 4.24, 4.33 und 4.34, links) läßt an einigen Meßstationen lokale Maxima erkennen. Das impliziert jedoch

nicht, daß die Reproduktion von Geschwindigkeiten und Transporten dort Defizite aufweist. Der Strömungsverlauf ist überall glatt (Abb. 4.20 und 4.21) und zeigt keine Abhängigkeit von der Lage der Meßstationen.

Die Linien gleicher Amplitude der Differenzen zwischen klassisch und mit Assimilation ermittelten Geschwindigkeiten (Abb. 4.25, 4.26 und 4.27, Mitte) zeigen, wo sich die Assimilation in welchem Ausmaß ausgewirkt hat. Die Residuen stehen im allgemeinen mit den Differenzen in engem Zusammenhang (Abb. 4.22, 4.23 und 4.24, Mitte).

Für die Erzeugung der M_6 spielen die Strömungsgeschwindigkeit, die Tiefe und die Bodenbeschaffenheit eine wichtige Rolle. Bei Betrachtung der Abb. 4.47 und 4.50 (links), die die Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Reibungsterme der zonalen bzw. der meridionalen Impulsgleichung der M_6 wiedergeben, ist mit Blick auf die Abb. 4.21 bzw. 4.31 (links) ersichtlich, daß M_6 -Strömungen bevorzugt dort erzeugt werden, wo der Beitrag der Reibungsterme am stärksten ausgeprägt ist. Das gilt für das Gebiet der beiden Amphidromien und jenes um die Insel Anglesey, wo die M_2 -Strömungen am stärksten (Abb. 4.19 bzw. 4.29, links) sind. Im Flachwassergebiet an der Ostseite der Irischen See sind M_6 -Gezeitenstrom (Abb. 4.21, 4.31, links) und M_6 -Wasserstand (Abb. 4.11, links) vergleichsweise stärker vergrößert, obwohl dort der Beitrag seitens der Reibungsterme gering ist. Es wird vermutet, daß dort Resonanz und NLWW zwischen den beteiligten Komponenten dafür verantwortlich sind.

Die Advektionsterme sind hauptsächlich für die Erzeugung der M_4 -Tide verantwortlich und nehmen dort die größten Werte an, wo starke Stromscherungen auftreten, z.B. in schmalen Kanälen (North Channel), an zerrissenen Küsten (Westküste Schottlands), rund um Inseln (Anglesey und Isle of Man), um Halbinseln (Lleyn), an trichterförmigen Eingängen (St. Georgs-Kanal) (Abb. 4.40, 4.43, jeweils links) sowie um die beiden Amphidromien (Abb. 4.9, links), wo die Gradienten der M_2 -Gezeitenströme am größten sind (Abb. 4.19, 4.29, links). Dort sind Energieflüsse der M_4 am intensivsten (Davies and Kwong, 2000).

Die Abb. 4.40 und 4.43 bzw. 4.19 und 4.29, jeweils links, zeigen, daß ein Beitrag der Advektionsterme zur Erzeugung des M_4 -Gezeitenstroms bevorzugt dort geleistet wird, wo die Isolinien der M_2 -Gezeitenströme stark verdichtet sind und nicht notwendig allein bei hohen Stromgeschwindigkeiten. Eine Ausnahme stellt wie bei der M_6 die ganze östliche Seite der Irischen See dar. Dieses Gebiet ist durch verstärkte meridionale M_4 -Gezeitenströmungen gekennzeichnet. Die Abb. 4.16, 4.26 und 4.36 zeigen, daß die meisten Verbesserungen der M_4 an den östlichen und westlichen Rändern der Irischen See und südlich des St. Georgs-Kanals stattgefunden haben. In den meisten dieser Gebiete werden jedoch durch Reibungs- und Advektionsterme keine Beiträge geleistet. Die Ursache kann wie bei der M_6 -Tide an der Resonanz und an der NLWW liegen.

Dieser Umstand kann darauf hindeuten, daß an der Ostseite der Irischen See neben den Einflüssen der Topographie und der Resonanz der Einfluß der NLWW zwischen der Haupttide M_2 und den Obertiden M_4 , M_6 wirksam sein kann.

4.2 Vergleich der durch EDV, IDV und IAV erzielten Ergebnisse

Was die Haupttide M_2 betrifft, so unterscheiden sich die durch EDV, IDV und IAV berechneten Wasserstandsverteilungen (Abb. 4.9) kaum voneinander. Lediglich auf der Ostseite des Irischen See treten in der Nähe der Küste merkliche Unterschiede auf. Der Verlauf der 2.8 m-Isolinie der Amplitude (Abb. 4.3) zeigt, daß dort durch IDV die Amplituden unterschätzt werden. Dementsprechend fällt dort die Amplitudendifferenz zur klassischen Lösung geringer als bei den anderen datenbeeinflussten Lösungen aus. Die Phasen schreiten von der Nordseite der Halbinsel Cornwall in die Irische See hinein fort, und es bildet sich nördlich von Irland eine zyklonische Amphidromie aus, die anders ist als die unmittelbar östlich der Irischen Küste gelegene voll ausgebildet ist. Das so grob charakterisierte Schwingungsbild der M_2 stimmt weitgehend auch in den Einzelheiten für EDV, IDV und IAV überein.

Die Linien gleicher M_2 -Amplitude der durch IDV gelieferten Residuen der Massenerhaltungsgleichung (Abb. 4.12, Mitte) stellen ein Muster dar, das dem durch die Wasserstandsdifferenzen zwischen klassisch und IDV-Lösung gegebenen (Abb. 4.15, Mitte) strukturell entspricht. In der Irischen See hat sich dabei ein der Ostküste vorgelagerter, sich kaum zeitlich verändernder Residuenstau mit konstanter Phase von 60° gebildet. Dies kann als Resonanz interpretiert werden, die bei der klassischen Lösungen nicht genügend reproduziert worden ist. Daran zu erinnern ist, daß die durch EDV gelieferten Residuen der Massenerhaltungsgleichung (Abb. 4.12, links) in der Irischen See die Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Kelvinwellen darstellen.

Die Amplitudenverteilung der Residuen (Abb. 4.12, 4.13, 4.14, rechts) und die adjungierten Residuen (Abb. 4.18) des IAV-Modells zeigt eine datenpunktunabhängige Verteilung, wie sie von den EDV-Residuen (Abb. 4.12, links) bekannt ist. Bei Vorliegen dieser Eigenschaften der Residuen kann die Assimilation als gelungen angesehen werden, wie das die Ergebnisse der Zwillingsexperimente bereits gezeigt haben.

Die zonalen M_2 -Strömungsgeschwindigkeiten (Abb. 4.19) bzw. die Differenzen zwischen ihnen und denen der klassischen Lösung (Abb. 4.25) ergeben für alle drei Modelle sehr ähnliche Verteilungen, und das gilt auch für die Gebiete schwacher zonaler Strömungen im Westteil der Irischen See und in der Keltischen See. Die EDV- und IDV-Residuen zeigen eine ähnliche relative räumliche Größenverteilung wie die Amplituden der zonalen Strömungen. Hinsichtlich des Vergleichs der von den drei Modellen gelieferten meridionalen M_2 -Strömungen gilt ähnliches wie für die zonalen M_2 -Strömungen (Abb. 4.29, 4.35).

Die mit EDV, IDV und IAV berechneten M_4 -Wasserstandsverteilungen (Abb. 4.10) unterscheiden sich auch nicht wesentlich voneinander, doch die Unterschiede fallen deutlicher als bei der M_2 aus. So sind nicht ganz zu vernachlässigende Unterschiede bei den Amplituden in der gesamten Irischen See und im nördlichen Bereich festzustellen. Bei den Linien gleicher Amplitude der M_4 -Differenzen zwischen den datenbeeinflussten und der klassischen Lösung (Abb. 4.16) besteht die gleiche Ten-

denz. Die offensichtlich durch EDV, IDV, IAV besser reproduzierten Wasserstände in der Keltischen See, im nördlichen Teil der Irischen See und im Nordkanal bis hin zum Atlantik (Referenzwerte, Sinha and Pingree (1997)) spiegeln sich in der Größenverteilung der Residuen (Abb. 4.13 und 4.16) bis auf die Westseite der Irischen See wider. Die Isolinien der Massenerhaltungsresiduen bilden für EDV und IDV keine Maxima an den Datenpositionen, so daß es naheliegt anzunehmen, daß sich der physikalische Inhalt der Daten gleichmäßig verbreitet hat.

Die Wasserstandsverteilungen der M_6 -Tide, die durch Anwendung der Modelle EDV und IDV ermittelt wurden, unterscheiden sich deutlich weniger voneinander als von der durch das IAV-Modell berechneten Wasserstandsverteilung (Abb. 4.11, 4.17). Die differierende Datenwirkung macht sich in voneinander abweichenden Residuenverteilungen bemerkbar, die mehr oder weniger sich voneinander unterscheidende Lösungen verursachen. In der Abb. 4.17 ist gut zu erkennen, daß Lösungsverbesserungen überwiegend in der gesamten Keltischen See und in schmalen Küstenbereichen Englands und Irlands erzielt worden sind. Dort nehmen auch die Beiträge der Residuen (Abb. 4.14) größere Werte als in der Umgebung an.

Den Tabellen 4.13 bis 4.18 ist sowohl für die Haupttide M_2 als auch für die Obertiden M_4 und M_6 zu entnehmen, daß durch alle drei Methoden der Datenassimilation etwa die gleichen Verbesserungen erreicht werden.

4.3 Zusammenfassung

Die neuartige Modelluntersuchung unter Nutzung von Daten für die Verbesserung der Ergebnisse des nichtlinearen Modells wurden in den folgenden Schritten durchgeführt.

- 1) Zur Ermittlung der realen nichtlinearen Obertiden wurde die schwach restringierte inverse Methode mit zeitabhängigen, voll nichtlinearen Flachwassergleichungen als Modell auf dem Schelfgebiet angewandt.
- 2) Es wurde von den zeitabhängigen nichtlinearen expliziten und semi-impliziten direkten Methoden und von der adjungierten Methode Gebrauch gemacht.
- 3) Die Residuenfelder sind harmonisch analysiert und in drei Komponenten (in die Haupttide und die ersten beiden Obertiden) zerlegt worden.
- 4) Der Abstand der assimilierten Lösung zur klassischen Lösung wurde ebenfalls harmonisch zerlegt und sichtbar gemacht.

Die Vorgehensweise in den Schritten 1) bis 4) erfolgte genauso wie beim Zwillingsexperiment. Der Unterschied besteht allein darin, daß an die Stelle eines schematischen Meeresgebietes und fiktiver Daten ein natürliches Randmeer und reale Daten getreten sind.

- 5) Die Flachwassereffekte im Modell der Keltischen und Irischen See wurden harmonisch dargestellt.

- 6) Die möglichen Regionen bedeutsamer NLWW werden durch die in 3) bis 5) vorgenommene Analyse geliefert.
- 7) Der Vergleich der durch Anwendung der Methoden EDV, IDV bzw. IAV erzielten Ergebnisse gibt Aufschluß über die Wirksamkeit der Assimilation der realen Daten.

Mit Ausnahme der Keltischen See ist das untersuchte Gebiet durch die auf Flachwassereffekte zurückzuführende Erzeugung von Obertiden und durch Energiedissipation zufolge von Bodenreibung gekennzeichnet. Bedeutung bei der Erfassung dieser Phänomene kommen insbesondere der NLWW zwischen den Gezeitenkomponenten und der Resonanz zu.

Die gewählte räumliche Auflösung im Modell ist nicht als ausreichend anzusehen, um kleinräumige topographische Strukturen des Untersuchungsgebietes, wie etwa die zerrissene Westküste Schottlands, Bristol- und Nordkanal sowie das Severn Ästuar, wirksam zu erfassen. Als dynamisch relevante Unsicherheit muß auch betrachtet werden, daß die Bedingungen an den offenen Rändern nur unzureichend bekannt sind. Es kann daher nicht überraschen, daß das klassische HAMSOM-Modell keine befriedigenden Ergebnisse geliefert hat. So ergab sich als Zielsetzung, die Defekte des klassischen Modells durch Nutzung von Meßdaten zumindest partiell zu kompensieren.

Die Art der Nutzung der Dateninformation erfolgte durch unterschiedliche Methoden, und zwar durch die direkte Methode im expliziten und impliziten Modell sowie durch die adjungierten Methode. Ein Vergleich der Güte der Reproduktion der Haupt- und Obertiden bei Verwendung der verschiedenen Methoden wurde vorgenommen. Für eine Analyse der datenbeeinflußten Reproduktion der Gezeiten wurden herangezogen die Residuen, die adjungierten Residuen und die Differenzen zwischen klassischer Lösung und datenbeeinflußten Lösungen. Außerdem hat der Vergleich der Ergebnisse mit den auf klassische Weise ermittelten anderer Autoren, wie denen von Sinha and Pingree (1997) mit modifiziertem Reibungsansatz und Young et al. (2000) mit 3 dimensionalem Modell hoher Auflösung gezeigt, daß die Datenassimilationsmethoden sehr leistungsfähig sind.

Die Beiträge der Flachwassereffekte zu den beiden Obertiden zufolge von Reibungs-, Advektions- und Wellendriftterm treten jeweils an fast den gleichen geographischen Positionen intensiver auf. Es handelt sich dabei um Bereiche im St. Georgs-Kanal, westlich von Lleyne, um die Insel Anglesey und solche nördlich vom Nordkanal. Diese Bereiche stimmen natürlicherweise überwiegend mit den durch starke meridionale und/oder zonale Obertidenströmungen charakterisierten Gebieten überein. Diese Strömungen mögen direkt durch Advektions- und/oder Reibungsterme erzeugt werden. Ausnahmegebiete stellen in dieser Hinsicht die Flachwassergebiete an der Ostseite der Irischen See und jenes um Wicklow Head an der Ostseite Irlands dar, wo sich auch starke Obertidenströmungen einstellen.

Die halbtägigen Residuen und die adjungierten Residuen der Kontinuitätsgleichung besitzen Eigenschaften fortschreitender Wellen, die allerdings von den angewandten

inversen Methoden abhängig sind. Bei glattem Verlauf der Linien gleicher Amplitude und denen gleicher Phase liegt es nach den Erfahrungen des Zwillingsexperimentes nahe, daß die Datenassimilation mit hoher Wirksamkeit stattgefunden hat.

Die Differenzen zwischen der klassischen Lösung und den datenbeeinflußten Lösungen können so wie die Residuen harmonisch analysiert und in halb-, viertel- und sechsteltägige Differenzen aufgespalten werden. Sie besitzen ebenfalls einen starken fortschreitenden Anteil. Sie erweisen sich hilfreich für die Analyse, da sie die Schwachstellen der klassischen Lösung aufdecken. Als solche stellen sich z.B. Orte heraus, an denen die NLWW, Bodentopographie und Resonanz wirksam sind. Die Ostseite der Irischen See ist ein Beispiel, wo durch die starken Obertidenströmungen und die hohen Wasserstände der Haupttide charakterisiert ist.

Der direkte Vergleich der durch Assimilation erzeugten Werte mit Meßwerten der M_2 -Obertiden deutet dennoch darauf hin, daß bei den Phasen eine gute Übereinstimmung der datenbeeinflußten Modellösungen mit der Realität noch nicht gegeben ist.

Der Reibungskoeffizient ist keine universelle Konstante und wird außerdem in den verwendeten Modellen auf die Transporte U bzw. V bezogen, anstatt die Bodenströmung zugrunde zu legen, wodurch eine Überdämpfung des Wasserstandes und der Strömungen der M_2 auf dem flachen Schelf bewirkt werden kann. Dieser Effekt wird zusätzlich verstärkt, wenn eine einzige Partialtide (M_2) in die Modellrechnung eingeht und die Wechselwirkung mit anderen Partialtiden (z.B. S_2) im Reibungsterm nicht berücksichtigt wird. Diese tragen wiederum der Überschätzung von M_6 Obertiden bei (Sinha und Pingree, 1997).

Von den Zwillingsexperimenten ist bekannt, daß für eine erfolgreiche Datenassimilation bei der Berechnung der Obertiden mehr Messungen benötigt werden als bei der der Haupttide. Insbesondere die M_6 -Tide erfordert eine große Anzahl von Meßdaten, die gerade für die kurzperiodischen Obertiden am wenigsten zahlreich sind. Sie fehlen in den Gebieten um die Insel Anglesey und um die Halbinsel Llyn sowie an der Südostküste Irlands sogar vollständig, die als intensivere Beiträge des Flachwassereffektes leistendes Gebiet für diese Obertiden wichtig sind. Da die Reichweite der Greenschen Funktion um den Datenpunkt in den meridionalen Richtungen lediglich ca. 2 Grad betragen kann, wie aus den Zwillingsexperimenten bekannt ist, sind mehrere gleichmäßig verteilte Messungen erforderlich, um ein genaues Bild der Obertiden, hier insbesondere der M_6 , zu erhalten.

Die Differenzen zwischen klassisch und datenbeeinflußt ermittelten M_4 -Wasserständen (Abb. 4.16) weisen bei Anwendung aller drei inverser Methoden ähnliche Amplituden auf.

Trotz allem kann die Reproduktion der Obertiden im Hinblick auf die relativ gute Übereinstimmung mit den vorhandenen Messungen als zufriedenstellend eingestuft werden.

Die Linien gleicher Amplitude und gleicher Phase der Residuen (Abb. 4.12) und der Differenzen (Abb. 4.15) zeigen bei der Haupttide M_2 vergleichsweise glatte Kurvenverläufe mit Wellencharakter, was auf eine gelungene Assimilation von Daten hin-

deutet. Eine Ausnahme stellen die bei Anwendung der IAV-Methode resultierenden Residuen dar, die keine systematische Verteilung erkennen lassen. Stattdessen verdeutlicht die Verteilung der Isolinien der adjungierten Residuen (Abb. 4.18, links), die auch in der Nähe von Meßstationen keine Unregelmäßigkeiten erkennen läßt, die wirkungsvolle Assimilation der Daten mit dieser Methode.

4.4 Tabellen und Abbildungen

Tabelle 4.1:

Gezeitenkonstanten der M_2 an Station 1 bis 42 mit Positionsangabe (westl. Länge, nördl. Breite). Geliefert durch Messungen, klassische HAMSOM Methode und EDV Assimilationsmethode.

Station	Position		Messungen		Klassisch		EDV	
	Länge (Grad)	Breite (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
1	5°02'	51°44'	224.9	173.1	190.4	166.4	224.9	173.1
2	4°12'	51°03'	254.2	165.0	251.9	162.2	254.2	165.0
3	4°56'	51°42'	229.2	174.0	198.3	165.4	229.2	174.0
4	4°42'	51°40'	262.0	170.0	215.8	167.7	262.0	170.0
5	4°56'	50°33'	245.0	149.0	221.2	144.6	244.9	149.0
6	4°42'	50°42'	236.0	143.0	228.5	146.9	236.0	143.0
7	4°40'	51°11'	257.6	162.6	226.8	157.6	257.6	162.6
8	4°58'	52°00'	135.8	207.6	127.2	190.4	135.8	207.6
9	4°07'	51°13'	308.0	161.7	222.2	177.1	308.0	161.7
10	6°27'	52°20'	48.8	188.0	71.8	148.1	48.8	188.0
11	6°02'	52°59'	79.8	254.9	47.7	323.0	79.8	254.9
12	6°21'	52°15'	56.0	156.9	85.0	147.3	56.0	156.9
13	4°05'	52°25'	150.8	229.5	127.2	213.4	150.8	229.5
14*	4°34'	52°57'	140.4	269.5	102.3	254.1	136.2	267.6
15	4°32'	52°09'	141.2	218.4	125.7	204.7	141.2	218.4
16	7°00'	51°03'	162.6	144.2	160.7	140.3	162.5	144.1
17	6°36'	51°45'	144.6	154.1	146.1	147.6	144.5	154.1
18*	6°30'	51°20'	165.7	151.5	161.4	146.0	163.2	150.9
19	6°08'	50°36'	190.6	142.1	181.9	139.9	190.4	142.1
20	7°32'	50°33'	157.4	136.2	158.7	132.8	157.6	136.0
21	5°48'	52°06'	110.5	183.8	114.0	162.4	110.5	183.6
22	2°43'	51°30'	422.0	201.9	281.1	256.2	422.0	201.9
23	2°59'	51°33'	413.0	198.0	272.0	258.3	413.0	198.0
24	3°55'	51°37'	315.0	173.2	170.9	208.4	315.0	173.2
25	3°16'	51°23'	382.0	186.0	220.5	246.5	382.0	186.0
26	2°39'	51°37'	417.0	211.0	287.6	258.5	416.9	211.0
27*	3°09'	51°27'	392.0	192.0	231.1	249.4	393.0	189.5
28	3°42'	51°28'	317.0	173.0	177.5	214.9	317.0	173.0
29	3°20'	51°11'	362.0	179.0	222.0	234.0	362.2	179.1
30	2°59'	51°21'	423.0	197.0	198.3	229.3	422.8	197.0
31	3°07'	51°23'	404.0	188.6	243.3	251.9	404.0	188.6
32	2°51'	51°27'	415.0	196.0	266.9	254.0	414.8	196.0
33*	3°49'	51°35'	315.0	173.0	171.6	209.0	315.6	174.1
34	3°38'	51°13'	342.0	189.0	199.8	212.8	342.1	189.0
35	2°30'	51°42'	301.0	234.0	303.5	260.3	301.1	234.0
36	2°29'	51°44'	268.0	237.0	309.9	261.0	268.0	237.0
37	2°33'	51°40'	354.0	224.0	301.9	260.7	353.9	224.0
38	3°58'	51°34'	317.0	175.6	169.3	208.2	317.0	175.6
39	4°19'	51°34'	279.0	170.6	216.4	166.5	279.0	170.6
40	5°01'	51°25'	232.0	162.3	201.2	160.1	232.0	162.4
41*	5°00'	50°55'	236.0	149.9	215.4	150.0	234.6	153.0
42	3°06'	51°20'	388.0	186.1	238.1	247.0	388.0	186.1

Tabelle 4.2:

Die Gezeitenkonstanten der M_2 an Station 43 bis 79 mit Positionsangabe (westl. Länge, nördl. Breite). Geliefert durch Messungen, klassische HAMSOM Methode und EDV Assimilationsmethode.

Station	Position		Messungen		Klassisch		EDV	
	Länge (Grad)	Breite (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
43	3°10'	51°24'	393.0	189.5	231.1	249.4	393.0	189.5
44*	5°35'	54°58'	97.0	325.3	71.1	293.8	90.6	315.8
45	5°45'	55°52'	26.0	87.0	39.3	173.8	26.0	88.0
46	6°10'	55°28'	7.0	125.3	45.9	186.4	7.1	127.0
47*	3°43'	53°46'	265.8	317.9	214.2	314.0	263.7	318.8
48	4°08'	53°46'	237.7	316.7	184.3	310.3	237.7	316.7
49	3°40'	54°09'	265.3	324.7	223.8	326.2	265.3	324.7
50	3°55'	54°39'	257.5	332.8	230.2	341.3	257.5	332.8
51	3°12'	53°31'	287.5	315.6	247.8	315.8	287.5	315.6
52	5°22'	53°26'	136.9	309.2	100.3	298.5	137.1	309.1
53	5°07'	54°50'	134.2	332.6	93.2	318.1	134.0	332.6
54	7°24'	55°23'	108.6	180.2	127.7	165.6	108.7	180.1
55	5°29'	56°25'	108.5	163.3	110.0	185.5	108.5	163.3
56	6°05'	56°37'	129.4	168.8	126.4	174.1	129.4	168.8
57	5°26'	54°28'	156.0	316.0	116.5	307.2	155.9	316.0
58	5°47'	54°51'	96.0	318.0	79.4	296.1	96.1	318.0
59	6°02'	55°08'	59.0	311.0	45.7	277.6	58.9	311.1
60	6°11'	55°38'	16.0	91.0	36.8	180.4	16.0	91.2
61	6°06'	55°51'	51.0	149.0	40.1	177.5	50.3	148.6
62	5°44'	55°41'	19.0	81.0	36.2	177.9	18.9	81.7
63	5°38'	55°19'	66.0	337.0	61.5	326.6	66.2	337.1
64	5°28'	55°36'	102.0	347.0	80.7	326.5	102.0	347.0
65	5°18'	55°43'	107.0	342.0	81.5	325.5	107.0	342.0
66	4°49'	55°38'	107.0	343.3	79.9	323.8	107.0	343.3
67	4°52'	55°15'	105.0	340.0	72.7	320.5	105.0	340.0
68	4°18'	53°24'	235.0	305.0	173.4	291.4	235.0	305.0
69	6°12'	53°24'	134.0	326.0	107.5	317.4	134.0	326.0
70	4°36'	53°00'	140.0	270.0	104.6	257.3	140.1	270.0
71	4°24'	54°52'	233.0	343.0	231.0	349.0	233.0	343.0
72	4°22'	54°19'	262.0	328.0	198.8	329.8	262.0	328.0
73*	3°09'	54°03'	292.0	327.0	254.9	333.6	300.2	326.5
74	4°28'	54°09'	231.0	327.0	194.7	330.3	231.0	327.0
75	2°53'	54°04'	308.0	326.0	264.8	335.8	308.0	326.0
76	3°13'	53°23'	292.0	318.0	248.9	314.9	292.0	318.0
77	5°06'	51°42'	224.0	173.0	188.2	164.4	223.9	173.0
78*	5°25'	54°46'	125.0	324.0	94.1	307.8	126.4	322.6
79*	4°07'	53°46'	237.0	317.0	184.3	310.3	237.7	316.7

Tabelle 4.3:

Gezeitenkonstanten der M_4 , geliefert durch Messungen, klassische HAMSOM Methode und EDV Assimilationsmethode.

Station	Position		Messungen		Klassisch		EDV	
	Länge (Grad)	Breite (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8	4°58'	52°00'	11.5	21.6	10.2	15.7	11.5	21.6
9	4°07'	51°13'	10.1	350.1	17.6	301.4	10.1	350.2
16	7°00'	51°03'	4.6	221.3	5.2	250.7	4.6	221.5
17	6°36'	51°45'	2.5	209.6	5.1	271.4	2.5	209.9
18*	6°30'	51°20'	3.5	223.4	6.0	264.0	3.6	230.1
19	6°08'	50°36'	5.5	219.5	6.2	241.4	5.5	219.6
20	7°32'	50°33'	5.2	219.1	3.7	237.5	5.0	219.9
21	5°48'	52°06'	3.8	18.8	4.2	327.3	3.8	18.7
22	2°43'	51°30'	34.0	346.8	36.4	101.3	34.0	346.8
23	2°59'	51°33'	18.0	357.0	30.7	106.8	18.0	357.0
24	3°55'	51°37'	6.0	29.2	29.9	308.9	6.0	29.3
25	3°16'	51°23'	12.0	32.0	6.7	60.7	12.0	32.0
26	2°39'	51°37'	41.0	359.0	41.7	105.6	41.0	359.0
27*	3°09'	51°27'	13.0	19.0	11.2	86.6	12.3	13.1
28	3°42'	51°28'	12.0	9.0	25.2	310.7	12.0	9.1
29	3°20'	51°11'	11.0	39.0	13.2	355.3	11.0	39.0
30	2°59'	51°21'	10.0	353.0	13.7	327.0	10.0	352.7
31	3°07'	51°23'	12.7	32.1	16.2	95.0	12.7	32.1
32	2°51'	51°27'	15.0	355.0	27.3	97.5	15.0	355.0
33*	3°49'	51°35'	5.0	26.0	29.7	308.8	5.5	27.1
34	3°38'	51°13'	4.0	58.0	20.6	317.8	4.0	57.6
35	2°30'	51°42'	80.0	65.0	53.7	107.6	80.0	65.0
36	2°29'	51°44'	82.0	83.0	58.8	107.9	82.0	83.0
37	2°33'	51°40'	63.0	53.0	53.0	108.7	63.0	53.0
38	3°58'	51°34'	11.0	39.2	29.8	309.0	11.0	39.2
39	4°19'	51°34'	6.0	1.2	15.3	285.0	6.0	1.1
40	5°01'	51°25'	4.9	302.7	12.0	286.0	4.9	302.4
41*	5°00'	50°55'	4.9	268.0	11.4	266.5	6.8	253.7
42	3°06'	51°20'	8.1	30.0	12.2	65.1	8.1	30.1
43	3°10'	51°24'	12.3	13.1	11.2	86.6	12.3	13.1
44*	5°35'	54°58'	1.6	73.9	4.0	140.1	0.6	149.9
45	5°45'	55°52'	2.8	89.6	4.7	253.9	2.8	89.8
46	6°10'	55°28'	1.6	70.0	4.2	238.3	1.6	70.1
47*	3°43'	53°46'	11.6	204.2	11.0	212.8	16.0	204.5
48	4°08'	53°46'	9.7	194.9	4.7	199.8	9.7	195.0
49	3°40'	54°09'	11.5	216.8	12.2	258.2	11.5	216.9
50	3°55'	54°39'	11.1	246.9	17.7	312.1	11.1	246.9
51	3°12'	53°31'	16.9	196.3	25.5	200.0	16.9	196.3
52	5°22'	53°26'	7.1	54.0	8.9	75.0	7.1	54.0
53	5°07'	54°50'	0.6	277.1	4.5	115.3	0.6	275.6
54	7°24'	55°23'	2.4	210.4	1.0	126.7	2.4	210.5
55	5°29'	56°25'	3.0	159.0	9.9	0.5	3.0	159.0
56	6°05'	56°37'	4.3	182.0	0.3	6.2	4.3	182.0
58	5°47'	54°51'	1.5	68.0	4.1	130.0	1.5	68.4
69	6°12'	53°24'	9.6	53.2	11.2	82.3	9.6	53.2
74	4°28'	54°09'	5.7	233.0	6.5	292.0	5.7	233.0

Tabelle 4.4:

Gezeitenkonstanten der M_6 , geliefert durch Messungen, klassische HAMSOM Methode und EDV Assimilationsmethode.

Station	Position		Messungen		Klassisch		EDV	
	Länge (Grad)	Breite (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8	4°58'	52°00'	0.2	36.3	2.1	343.1	0.2	36.5
9	4°07'	51°13'	1.7	337.2	2.0	143.8	1.7	337.1
16	7°00'	51°03'	1.2	157.1	1.3	303.9	1.2	156.3
17	6°36'	51°45'	1.9	168.4	3.7	289.1	1.9	168.6
18*	6°30'	51°20'	1.5	157.7	2.2	291.3	1.3	155.6
19	6°08'	50°36'	0.7	87.6	0.8	328.0	0.7	88.0
20	7°32'	50°33'	0.4	49.8	0.5	339.5	0.4	52.0
21	5°48'	52°06'	0.3	213.0	3.5	294.2	0.3	217.8
31	3°07'	51°23'	4.1	225.4	7.2	23.0	4.1	225.3
40	5°01'	51°25'	0.4	81.3	1.6	121.2	0.4	82.9
41*	5°00'	50°55'	0.6	98.6	1.6	70.6	1.7	72.1
42	3°06'	51°20'	5.6	224.2	8.9	13.2	5.6	224.3
43	3°10'	51°24'	6.4	231.7	7.9	6.3	6.4	231.9
44*	5°35'	54°58'	0.6	169.1	1.4	140.4	1.5	166.5
45	5°45'	55°52'	4.0	88.3	6.9	125.2	4.0	88.5
46	6°10'	55°28'	1.8	112.4	4.0	127.7	1.8	112.6
47*	3°43'	53°46'	1.4	12.0	1.6	292.2	1.9	322.3
48	4°08'	53°46'	1.5	302.2	1.3	268.9	1.5	302.2
49	3°40'	54°09'	0.8	6.8	2.9	305.1	0.8	6.2
50	3°55'	54°39'	0.7	232.8	1.9	12.9	0.7	232.9
51	3°12'	53°31'	3.7	13.6	3.0	50.5	3.7	13.6
52	5°22'	53°26'	0.6	262.6	0.8	180.1	0.6	262.1
53	5°07'	54°50'	0.3	196.6	0.7	55.7	0.3	199.5
54	7°24'	55°23'	0.2	39.1	0.4	60.0	0.2	39.6
55	5°29'	56°25'	1.8	351.5	4.2	57.7	1.8	351.5
56	6°05'	56°37'	1.2	6.5	0.5	353.9	1.2	6.4
58	5°47'	54°51'	1.0	170.8	0.9	145.5	1.0	170.9
69	6°12'	53°24'	0.4	175.6	2.0	169.4	0.4	175.7
74	4°28'	54°09'	0.6	354.5	0.4	349.5	0.6	354.4

Tabelle 4.6:

Diffrenzen der Amplitude und der Phase der M_2 zwischen Messungen und klassischen Modellen (Davies und Jones, 1992; Young et al., 2000; Singha und Pingree, 1997) bzw. EDV an den Stationen 43-79.

Station	Davies/Jones		Young et. al		Sinha/Pingree		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
43							0.0	0.0
44*							-6.4	-9.5
45							0.0	1.0
46			-0.3	-22.4			0.1	1.7
47*							-2.1	0.9
48							0.0	0.0
49							0.0	0.0
50			-13.4	1.5			0.0	0.0
51			-8.5	2.2	1.9	2.6	0.0	0.0
52					-3.8	-2.9	0.2	-0.1
53			-10.9	0.1	-11.2	-3.4	-0.2	0.0
54					5.5	-4.0	0.1	-0.1
55					6.6	-3.6	0.0	0.0
56					7.5	-2.1	0.0	0.0
57			-11.5	3.9			-0.1	0.0
58			-8.1	-0.6	-1.9	-4.7	0.0	0.0
59			-4.4	4.3			-0.1	0.1
60			-1.0	-14.0			0.0	0.2
61			-0.1	0.7			-0.7	-0.4
62			3.0	-0.6			-0.1	0.7
63			11.8	9.9			0.2	0.1
64			-2.1	-2.2			0.0	0.0
65			-4.1	1.8			0.0	0.0
66			-4.3	-0.8			0.0	0.0
67			-7.0	0.3			0.0	0.0
68			-6.0	2.3			0.0	0.0
69			-14.1	-4.2	-7.0	-2.5	0.0	0.0
70			-4.4	-0.8			0.0	0.0
71			4.8	-0.1			0.0	0.0
72			-33.1	0.6			0.0	0.0
73*			-2.8	1.1			8.2	-0.5
74			-12.3	0.3	-10.9	0.2	0.0	0.0
75			-6.2	2.6			0.0	0.0
76			-9.2	0.6			0.0	0.0
77			-5.0	0.8			-0.1	0.0
78*			-10.1	0.5			1.4	-1.4
79*			-8.9	-0.1			0.7	-0.3

Tabelle 4.7:

Differenzen der Amplitude und der Phase der M_4 zwischen Messungen und klassischen Modellen (Davies und Jones, 1992; Young et al., 2000; Singha und Pingree, 1997) bzw. EDV.

Station	Davies/Jones		Young et. al		Sinha/Pingree		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8					-2.2	-1.8	0.0	0.0
9					-3.8	-4.8	0.0	0.1
16					0.2	15.2	0.0	0.2
17							0.0	0.3
18*							0.1	6.7
19							0.0	0.1
20							-0.2	0.8
21					-1.1	-29.8	0.0	-0.1
22							0.0	0.0
23							0.0	0.0
24							0.0	0.1
25							0.0	0.0
26							0.0	0.0
27*							-0.7	-5.9
28							0.0	0.1
29							0.0	0.0
30							0.0	-0.3
31							0.0	0.0
32							0.0	0.0
33*							0.5	1.1
34							0.0	-0.4
35							0.0	0.0
36							0.0	0.0
37							0.0	0.0
38							0.0	0.0
39							0.0	-0.1
40							0.0	-0.3
41*							1.9	-14.3
42							0.0	0.1
43							0.0	0.0
44*							-1.0	76.0
45							0.0	0.2
46							0.0	0.1
47*							4.4	0.1
48							0.0	0.1
49							0.0	0.1
50							0.0	0.1
51					5.1	0.4	0.0	0.0
52					1.6	12.2	0.0	0.0
53					0.8	146.4	0.0	-1.5
54					-0.9	-1.2	0.0	0.1
55					0.6	79.4	0.0	0.0
56					-0.8	46.7	0.0	0.0
58					-0.2	9.7	0.0	0.4
69					0.6	18.0	0.0	0.0
74					-1.6	10.9	0.0	0.0

Tabelle 4.8:

Differenzen der Amplitude und der Phase der M_6 zwischen Messungen und klassischen Modellen (Davies und Jones, 1992; Young et al., 2000; Singha und Pingree, 1997) bzw. EDV Assimilationsmethoden.

Station	Davies/Jones		Young et. al		Sinha/Pingree		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8					0.4	-116.8	0.0	0.2
9					0.6	15.6	0.0	-0.1
16					-0.2	-1.8	0.0	-0.8
17							0.0	0.2
18*							-0.2	-2.1
19							0.0	0.4
20							0.0	2.2
21					0.6	-22.5	0.0	1.1
31							0.0	-0.1
40							0.0	1.6
41*							1.1	-26.5
42							0.0	0.1
43							0.0	0.2
44*							0.9	-2.6
45							0.0	0.2
46							0.0	0.2
47*							0.5	-49.7
48							0.0	0.0
49							0.0	-0.6
50							0.0	0.1
51					-1.8	20.7	0.0	0.0
52					0.1	27.8	0.0	-0.5
53					0.3	-114.4	0.0	-1.1
54					0.9	-114.6	0.0	0.5
55					-0.4	110.9	0.0	0.0
56					0.3	-160.4	0.0	-0.1
58					-0.4	-90.8	0.0	0.1
69					0.8	127.9	0.0	0.1
74					0.0	153.8	0.0	-0.1

Tabelle 4.9:

Die Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 zwischen Messungen und klassischem HAMSOM und IAV, IDV bzw. EDV Assimilationsmethoden an den Stationen 1-42.

Station	HAMSOM		IAV		IDV		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
1	-34.5	-6.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	-2.3	-2.8	0.3	-0.1	0.2	0.1	0.0	0.0
3	-30.9	-8.6	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-46.2	-2.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-23.8	-4.4	-0.5	-0.2	-0.5	-0.2	-0.1	0.0
6	-7.5	3.9	0.2	0.1	0.2	0.1	0.0	0.0
7	-30.8	-5.0	0.1	-0.1	0.3	-0.4	0.0	0.0
8	-8.6	-17.2	0.1	-0.1	0.2	0.0	0.0	0.0
9	-85.8	15.4	0.1	0.0	-0.1	0.1	0.0	0.0
10	23.0	-39.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	-32.1	68.1	-0.1	0.0	-0.2	0.2	0.0	0.0
12	29.0	-9.6	0.0	0.1	0.2	0.1	0.0	0.0
13	-23.6	-16.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14*	-38.1	-15.4	-4.1	-1.6	-5.6	-2.1	-4.2	-1.9
15	-15.5	-13.7	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
16	-1.9	-3.9	-0.2	-0.2	-0.3	-0.3	-0.1	-0.1
17	1.5	-6.5	-0.3	0.0	-0.2	0.0	-0.1	0.0
18*	-4.3	-5.5	-2.4	-0.7	-2.0	-0.7	-2.5	-0.6
19	-8.7	-2.2	-0.5	-0.1	-0.8	-0.1	0.2	0.0
20	1.3	-3.4	0.6	-0.9	0.6	-0.8	0.2	-2.0
21	3.5	-21.4	0.2	-0.6	0.2	-1.5	0.0	-0.2
22	-140.9	54.3	0.2	0.1	-0.2	0.0	0.0	0.0
23	-141.0	60.3	-0.1	0.0	-0.2	0.0	0.0	0.0
24	-144.1	35.2	-0.1	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0
25	-161.5	60.5	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0
26	-129.4	47.5	-0.6	0.0	-0.8	0.0	-0.1	0.0
27*	-160.9	57.4	0.9	-2.5	0.9	-2.6	1.0	-2.5
28	-139.5	41.9	-0.1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0
29	-140.0	55.0	0.3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
30	-224.7	32.3	-0.3	-0.1	-1.5	-0.1	-0.2	0.0
31	-160.7	63.3	-0.2	0.0	-0.4	0.1	0.0	0.0
32	-148.1	58.0	0.0	0.0	-0.2	0.0	0.0	0.0
33*	-143.4	36.0	-0.1	0.2	-2.0	1.4	0.6	1.1
34	-142.2	23.8	0.0	0.2	0.2	-0.1	0.1	0.0
35	2.5	26.3	0.3	-0.1	0.7	-0.2	0.1	0.0
36	41.9	24.0	0.3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
37	-52.1	36.7	-0.7	0.1	-0.8	0.1	-0.1	0.0
38	-147.7	32.6	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
39	-62.6	-4.1	0.1	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
40	-30.8	-2.2	-0.1	0.1	-0.1	0.3	0.0	0.1
41*	-20.6	0.1	0.5	3.1	0.3	2.6	-1.4	3.1
42	-149.9	60.9	0.5	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0

Tabelle 4.10:

Die Differenzen der Amplitude und der Phase der M_2 zwischen Messungen und klassischem HAMSOM und IAV, IDV bzw. EDV Assimilationsmethoden an den Stationen 43-79.

Station	HAMSOM		IAV		IDV		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
43	-161.9	59.9	-0.1	0.0	-0.1	-0.1	0.0	0.0
44*	-25.9	-31.5	-7.7	-9.4	-6.1	-9.7	-6.4	-9.5
45	13.3	86.8	0.5	10.3	0.1	5.3	0.0	1.0
46	38.9	61.6	0.3	12.9	1.3	13.6	0.1	1.7
47*	-51.6	-3.9	-0.8	0.6	-10.2	-0.1	-2.1	0.9
48	-53.4	-6.4	0.0	0.0	-0.7	-0.1	0.0	0.0
49	-41.5	1.5	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
50	-27.3	8.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51	-39.7	0.20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
52	-36.6	-10.7	-0.3	-0.4	-0.2	-0.6	0.2	-0.1
53	-41.0	-14.5	-0.3	-0.3	-0.9	-0.3	-0.2	0.0
54	19.1	-14.6	-0.1	-0.8	0.6	-0.6	0.1	-0.1
55	1.5	22.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
56	-3.0	5.3	0.0	0.2	-0.1	0.1	0.0	0.0
57	-39.5	-8.8	-0.4	0.2	-0.6	0.1	-0.1	0.0
58	-16.6	-21.9	0.1	-0.3	0.4	-0.1	0.1	0.0
59	-13.3	-33.4	0.2	1.5	-0.4	1.0	-0.1	0.1
60	20.8	89.4	-0.4	-0.2	0.2	1.4	0.0	0.2
61	-10.9	28.5	-4.4	-4.4	-3.9	-2.3	-0.7	-0.4
62	17.2	96.9	-0.8	2.5	-0.3	3.9	-0.1	0.7
63	-4.5	-10.4	0.5	0.8	1.1	0.5	0.2	0.1
64	-21.3	-20.5	0.1	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0
65	-25.5	-16.5	0.0	0.0	-0.1	0.1	0.0	0.0
66	-27.1	-19.5	0.0	-0.1	0.0	-0.1	0.0	0.0
67	-32.3	-19.5	-0.1	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0
68	-61.6	-13.6	-0.1	0.1	-0.2	-0.1	0.0	0.0
69	-26.5	-8.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
70	-35.4	-12.7	-0.2	0.1	-0.4	0.0	0.0	0.0
71	-2.0	6.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
72	-63.2	1.8	0.0	0.0	-0.3	0.0	0.0	0.0
73*	-37.1	6.6	3.6	-0.5	-8.7	0.8	8.2	-0.5
74	-36.3	3.3	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
75	-43.2	9.8	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
76	-43.1	-3.1	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
77	-35.8	-8.6	-0.1	0.0	-0.4	0.0	-0.1	0.0
78*	-30.9	-16.2	0.7	-1.6	0.2	-1.7	1.4	-1.4
79*	-52.7	-6.7	0.7	-0.3	0.0	-0.4	0.7	-0.3

Tabelle 4.11:

Die Differenzen der Amplitude und der Phase der M_4 zwischen Messungen und klassischem HAMSOM und IAV, IDV bzw. EDV Assimilationsmethoden.

Station	HAMSOM		IAV		IDV		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8	-1.3	-5.9	0.0	0.5	0.0	0.2	0.0	0.0
9	7.5	-48.7	-0.1	-0.9	0.1	0.0	0.0	0.1
16	0.6	29.4	0.0	-0.3	0.0	1.7	0.0	0.2
17	2.6	61.8	0.0	-0.1	0.0	2.0	0.0	0.3
18*	2.5	40.6	0.2	-1.1	0.4	7.0	0.1	6.7
19	0.7	21.9	0.0	-0.1	0.0	1.0	0.0	0.1
20	-1.5	18.4	-0.3	0.7	-0.5	3.2	-0.2	0.8
21	0.4	-51.5	-0.1	0.2	-0.3	-0.4	0.0	-0.1
22	2.4	114.5	0.0	-0.1	-0.1	0.1	0.0	0.0
23	12.7	109.8	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
24	23.9	-80.3	0.0	1.0	0.1	0.3	0.0	0.1
25	-5.3	28.7	0.1	0.5	0.1	0.2	0.0	0.0
26	0.7	106.6	-0.2	0.1	-0.1	0.2	0.0	0.0
27*	-1.8	67.6	-0.8	-6.4	-0.7	-5.6	-0.7	-5.9
28	13.2	-58.3	0.0	-0.1	0.0	0.4	0.0	0.1
29	2.2	-43.7	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
30	3.7	-26.0	0.2	-1.0	-0.1	-2.0	0.0	-0.3
31	3.5	62.9	-0.1	-0.2	-0.1	0.0	0.0	0.0
32	12.3	102.5	0.1	0.3	0.1	-0.1	0.0	0.0
33*	24.7	-77.2	1.2	-1.6	0.5	-12.5	0.5	1.1
34	16.6	-100.2	0.2	4.8	0.0	-3.1	0.0	-0.4
35	-26.3	42.6	-0.1	-0.2	-0.2	-0.2	0.0	0.0
36	-23.2	24.9	0.1	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0
37	-10.0	55.7	-0.1	0.2	0.0	0.1	0.0	0.0
38	18.8	-90.2	-0.1	-0.5	-0.1	-0.3	0.0	0.0
39	9.3	-76.2	0.0	-0.4	0.0	-0.7	0.0	-0.1
40	7.1	-16.7	0.0	-0.1	0.2	-1.8	0.0	-0.3
41*	6.5	-1.5	0.6	-8.9	2.9	-10.1	1.9	-14.3
42	4.1	35.1	0.0	0.7	0.1	-0.3	0.0	0.1
43	-1.1	73.5	-0.1	-0.5	0.0	0.3	0.0	0.0
44*	2.4	66.2	-0.8	-49.3	-0.7	70.8	-1.0	76.0
45	1.9	164.3	-0.1	-2.5	0.0	0.7	0.2	0.2
46	2.6	168.3	-0.1	0.0	-0.1	-0.9	0.0	0.1
47*	-0.6	8.4	1.1	-7.2	2.2	1.4	4.4	0.1
48	-5.1	4.9	0.0	0.6	-0.2	-0.1	0.0	0.1
49	0.7	41.4	0.0	0.0	0.0	0.3	0.0	0.1
50	6.6	65.2	0.0	0.0	-0.1	0.3	0.0	0.0
51	8.6	3.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
52	1.8	21.0	-0.1	0.3	0.2	0.3	0.0	0.0
53	3.9	-161.8	-0.1	8.0	-0.3	-8.3	0.0	-1.5
54	-1.4	-83.7	-0.1	2.7	-0.1	0.4	0.0	0.1
55	6.9	-158.5	0.0	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0
56	-4.0	-175.8	-0.1	0.7	-0.1	-0.3	0.0	0.0
58	2.6	62.0	0.0	2.1	-0.1	4.3	0.0	0.4
69	1.6	29.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
74	0.8	59.0	0.0	-0.1	0.0	0.3	0.0	0.0

Tabelle 4.12:

Die Differenzen der Amplitude und der Phase der M_6 zwischen Messungen und klassischem HAMSOM und IAV, IDV bzw. EDV Assimilationsmethoden.

Station	HAMSOM		IAV		IDV		EDV	
	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)	Amplitude (cm)	Phase (Grad)
8	1.9	-53.2	0.0	-1.4	0.0	6.1	0.0	0.2
9	0.3	166.6	0.0	-1.4	-0.1	-1.3	0.0	-0.1
16	0.1	146.8	0.0	-0.5	-0.1	-7.6	-0.0	-0.8
17	1.8	120.7	0.0	0.0	-0.1	-1.1	0.0	0.2
18*	0.7	133.6	0.2	2.7	-0.2	-19.4	-0.2	-2.1
19	0.1	-119.6	0.0	2.5	0.1	-2.6	0.0	0.4
20	0.1	-70.3	-0.1	9.0	-0.1	12.0	0.0	2.2
21	3.2	81.2	0.0	4.9	0.0	0.2	0.0	1.1
31	3.1	157.6	0.1	-1.0	0.1	-0.1	0.0	-0.1
40	1.2	39.9	0.0	0.8	0.1	-7.6	0.0	1.6
41*	1.0	-28.0	-0.1	31.4	1.8	-31.7	1.1	-26.5
42	3.3	149.0	-0.1	1.4	0.1	0.6	0.0	0.1
43	1.5	134.6	-0.1	-0.7	0.0	0.8	0.0	0.2
44*	0.8	-28.7	0.0	-21.8	1.2	-4.3	0.9	-2.6
45	2.9	36.9	0.0	0.2	0.0	0.6	0.0	0.2
46	2.2	15.3	0.0	-1.2	0.1	-0.7	0.0	0.2
47*	0.2	-79.8	-0.1	-128.1	0.8	-47.7	0.5	-49.7
48	-0.2	-33.3	0.0	0.7	0.0	2.3	0.0	0.0
49	2.1	-61.7	0.0	-0.3	0.0	-3.2	0.0	-0.6
50	1.2	140.1	0.0	0.0	0.0	1.6	0.0	0.1
51	-0.7	36.9	0.0	0.2	0.0	0.1	0.0	0.0
52	0.2	-82.5	0.0	6.6	0.0	-2.1	0.0	-0.5
53	0.4	-140.9	0.0	-3.0	-0.1	-25.0	0.0	-1.1
54	0.2	20.9	0.0	0.9	0.0	0.6	0.0	0.5
55	2.4	66.2	0.0	0.0	0.0	0.3	0.0	0.0
56	-0.7	-12.6	0.0	0.7	0.0	0.0	0.0	-0.1
58	-0.1	-25.3	0.0	0.7	0.0	0.4	0.0	0.1
69	1.6	-6.2	0.0	0.1	0.0	0.7	0.0	0.1
74	-0.2	-5.0	0.0	0.1	0.0	-0.1	0.0	-0.1

Tabelle 4.13:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_2 Gezeiten durch die EDV Methode, im Vergleich zu HAMSOM, Davies und Jones (1992), Young et al. (2000) und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Davies	vs. Young	vs. Sinha
	$V_E \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_E \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_E \zeta_j^{Da}$	$V_E \zeta_j^{Ya}$	$V_E \zeta_j^{Sa}$
$j = 1(M_2)$	$8 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	168	42	26

Tabelle 4.14:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_4 bzw. M_6 Gezeiten durch die EDV Methode, im Vergleich zu HAMSOM und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Sinha	
	$V_E \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_E \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_E \zeta_j^{Sa}(ASS)$	$V_E \zeta_j^{Sa}(REF)$
$j = 2(M_4)$	$6 \cdot 10^4$	504	$7 \cdot 10^3$	26
$j = 3(M_6)$	$3 \cdot 10^4$	100	$1 \cdot 10^4$	37

Tabelle 4.15:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_2 Gezeiten durch die IDV Methode, im Vergleich zu HAMSOM, Davies und Jones (1992), Young et al. (2000) und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Davies	vs. Young	vs. Sinha
	$V_I \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_I \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_I \zeta_j^{Da}$	$V_I \zeta_j^{Ya}$	$V_I \zeta_j^{Sa}$
$j = 1(M_2)$	$1.4 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^3$	152	34	3.3

Tabelle 4.16:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_4 bzw. M_6 Gezeiten durch die IDV Methode, im Vergleich zu HAMSOM und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Sinha	
	$V_I \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_I \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_I \zeta_j^{Sa}(ASS)$	$V_I \zeta_j^{Sa}(REF)$
$j = 2(M_4)$	$1.3 \cdot 10^4$	648	$1 \cdot 10^3$	51
$j = 3(M_6)$	$6.0 \cdot 10^4$	76	$2 \cdot 10^4$	1.5

Tabelle 4.17:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_2 Gezeiten durch die IAV Methode, im Vergleich zu HAMSOM, Davies und Jones (1992), Young et al. (2000) und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Davies	vs. Young	vs. Sinha
	$V_A \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_A \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_A \zeta_j^{Da}$	$V_A \zeta_j^{Ya}$	$V_A \zeta_j^{Sa}$
$j = 1(M_2)$	$1.3 \cdot 10^4$	$1.3 \cdot 10^3$	182	50	16

Tabelle 4.18:

Die Verbesserung (%) des Wasserstands der M_4 bzw. M_6 Gezeiten durch die IAV Methode, im Vergleich zu HAMSOM und Sinha und Pingree (1997), wobei (ASS) und (REF) die Assimilations- bzw. Referenzpunkte bedeuten.

	vs. HAMSOM		vs. Sinha	
	$V_A \zeta_j^{Ha}(ASS)$	$V_A \zeta_j^{Ha}(REF)$	$V_A \zeta_j^{Sa}(ASS)$	$V_A \zeta_j^{Sa}(REF)$
$j = 2(M_4)$	$1.6 \cdot 10^4$	970	$2 \cdot 10^3$	117
$j = 3(M_6)$	$9.0 \cdot 10^3$	100	$2 \cdot 10^3$	16

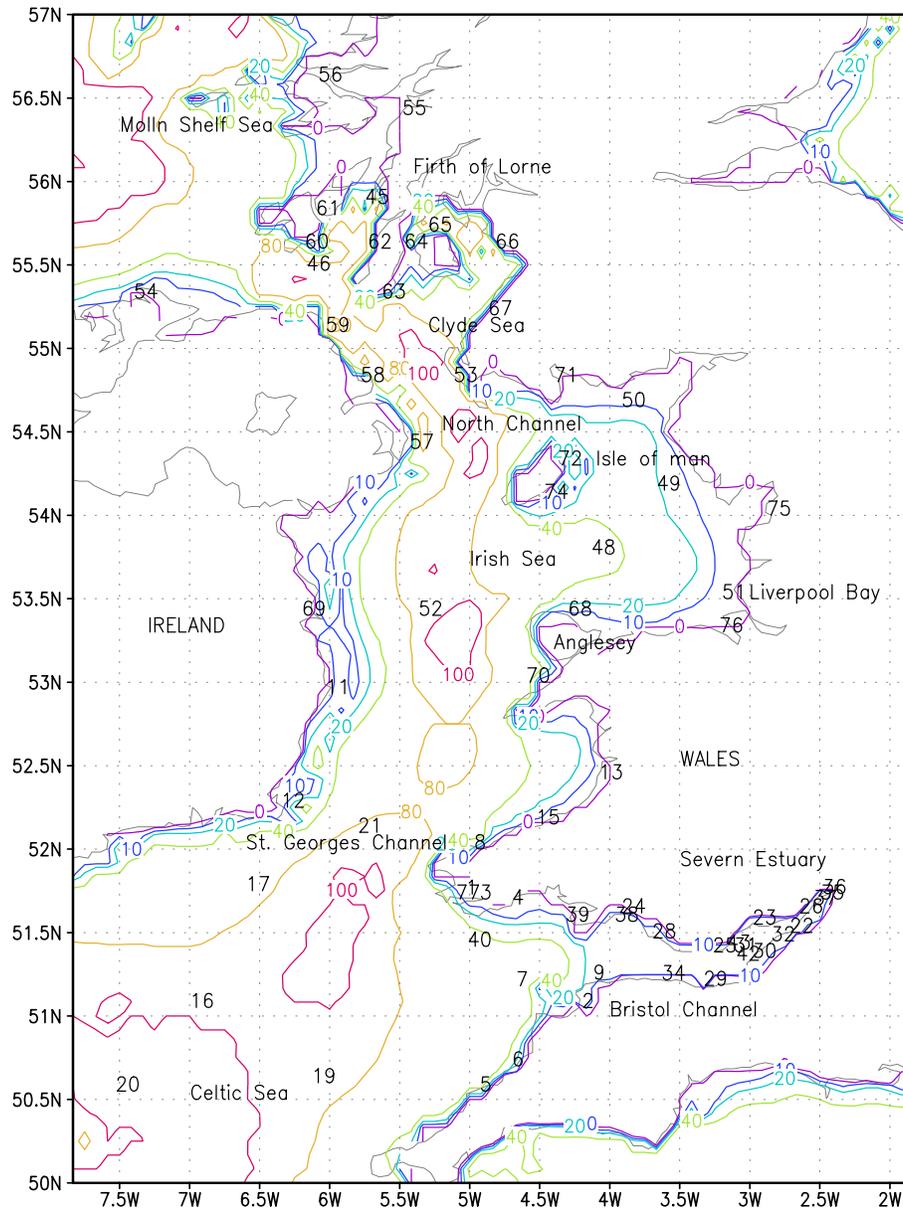


Abbildung 4.1: Die Linien gleicher Tiefe von 0m, 10m, 20m, 40m, 80m bzw. 100m. Die Iso-
linien von 0m sind die interpolierten Linien, die zur numerischen Behandlung
angenähert worden sind. Die Zahlen geben die Nummern der Stationen an, von
denen Daten in die Assimilation einbezogen worden sind.

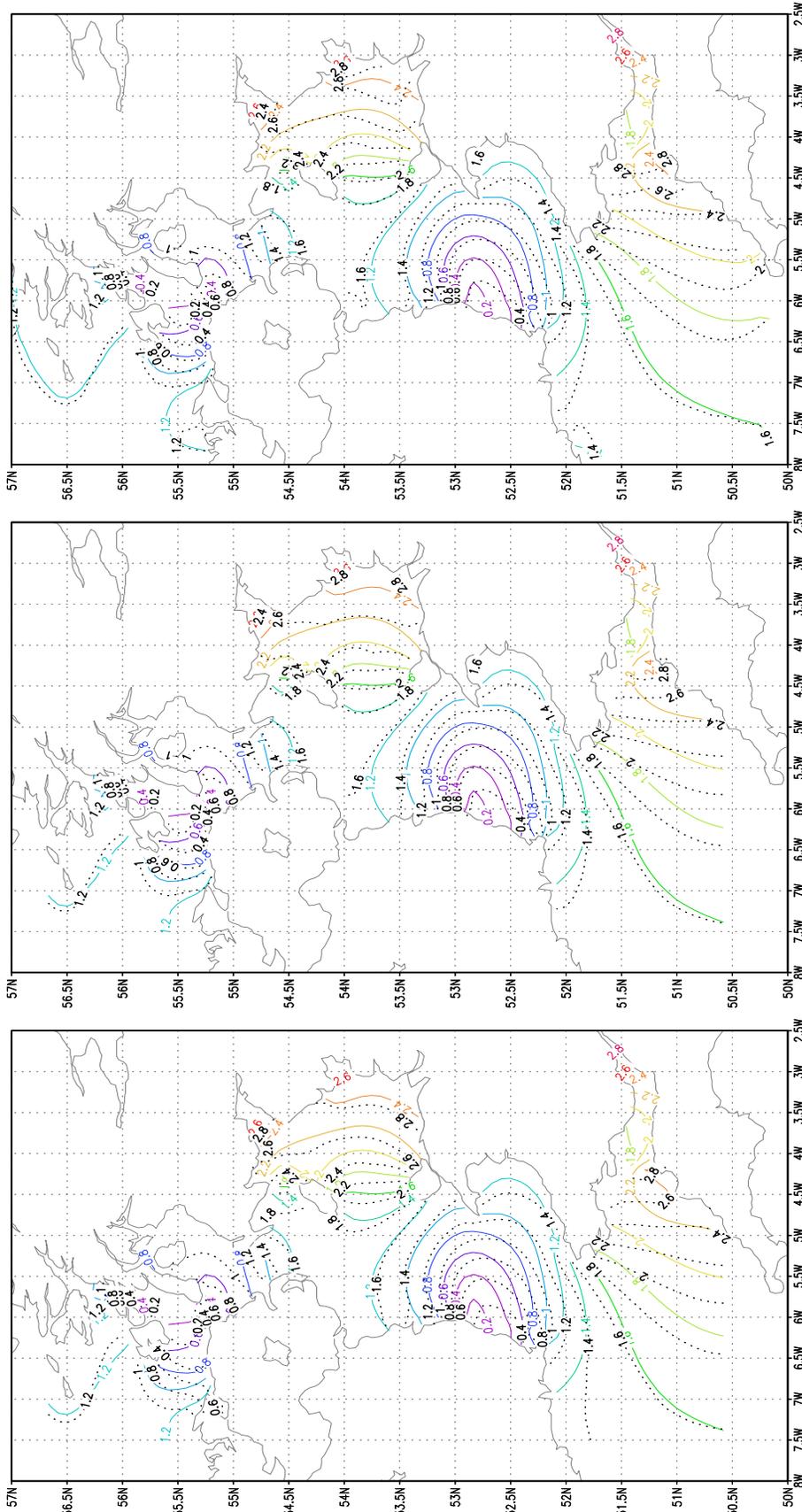


Abbildung 4.3:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

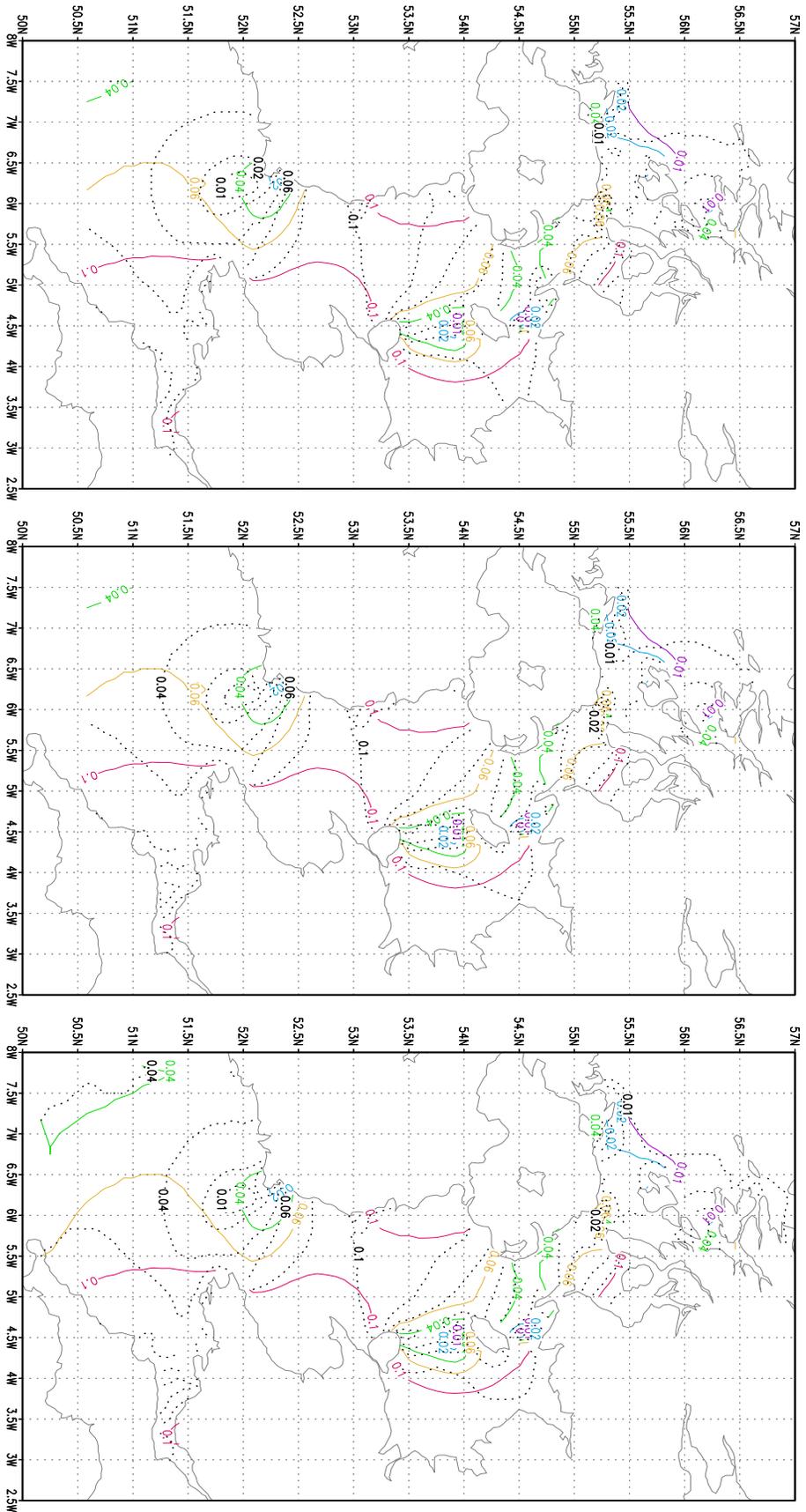
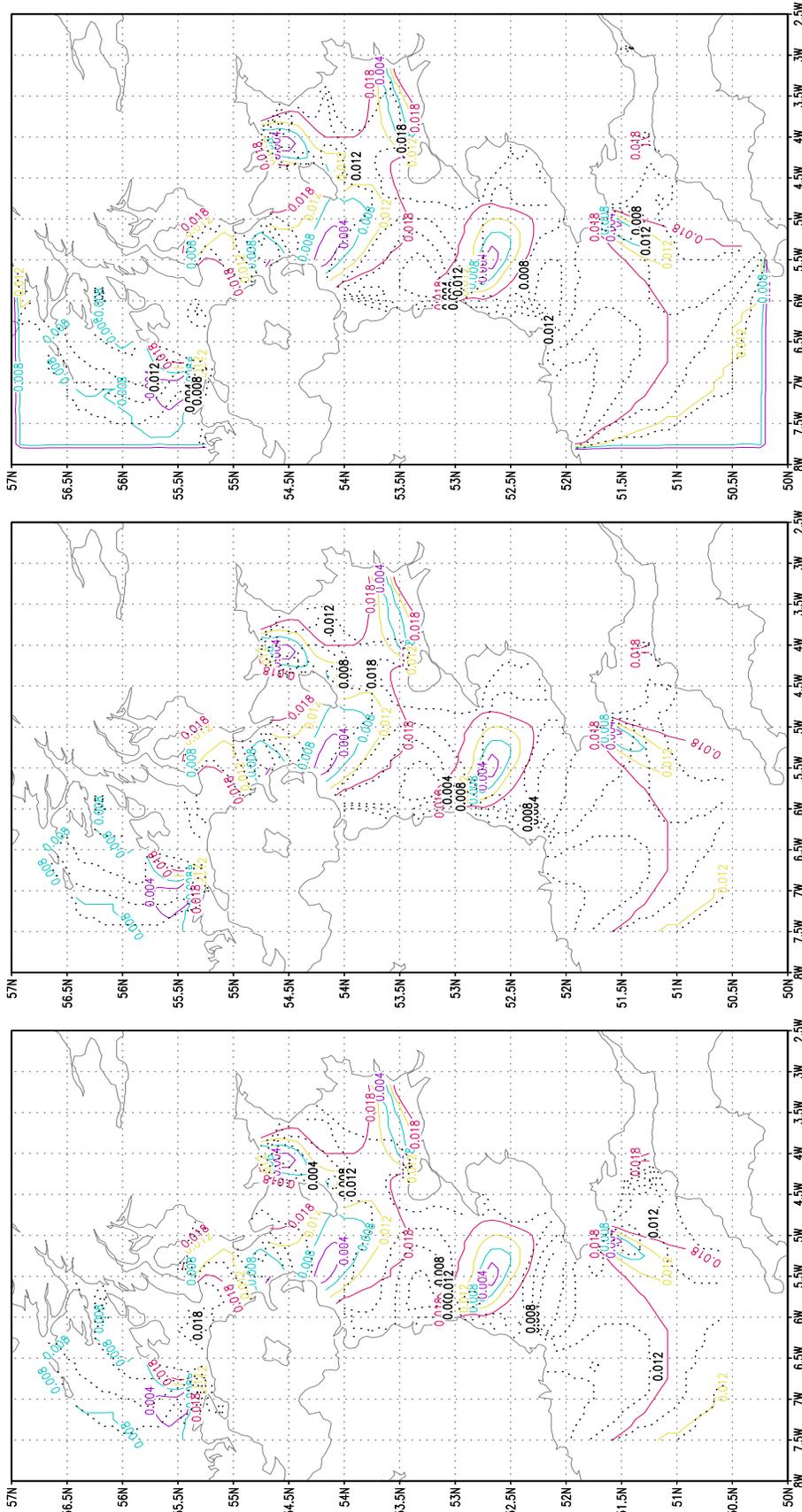


Abbildung 4.4:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).



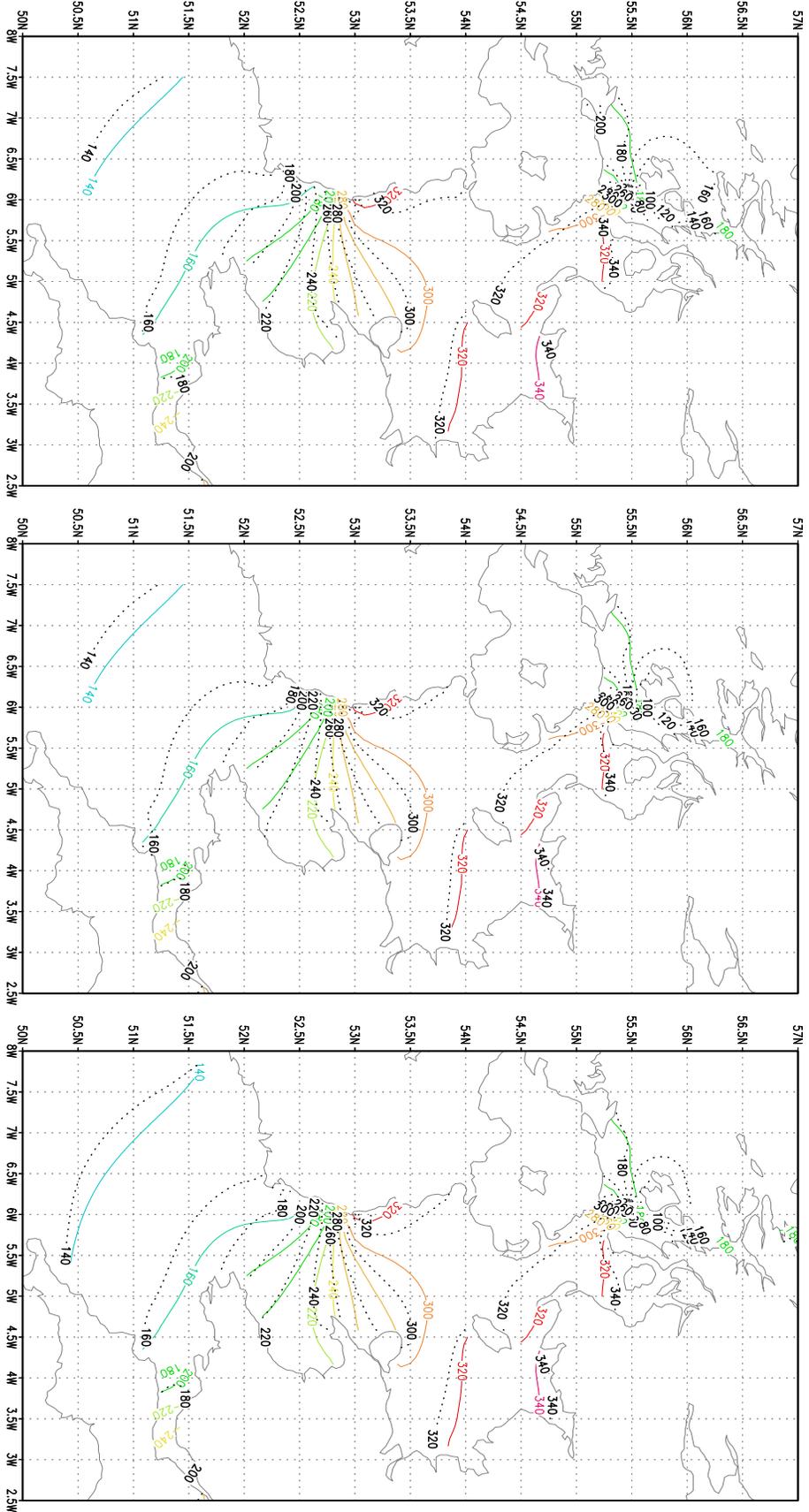


Abbildung 4.6:

- 1) Links: Die Linien gleicher Phasen (f[Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Phasen (f[Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und der assimilierten (gestrichelt) Wasserstands des M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Phasen (f[Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und der assimilierten (gestrichelt) Wasserstands des M_2 durch die implizite adjungierte Methode (LAV).

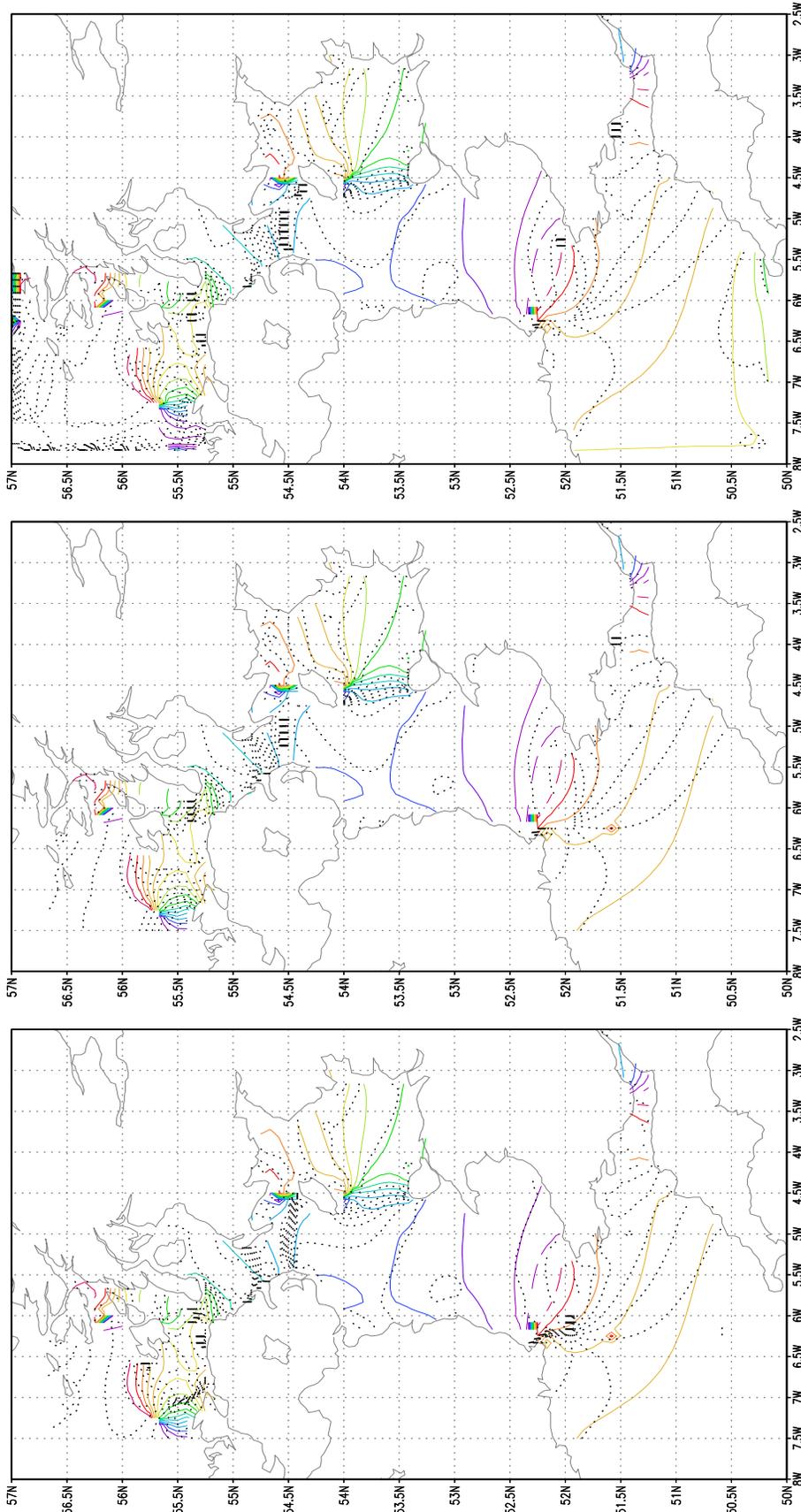


Abbildung 4.7:

- 1) Links: Die Linien gleicher Phasen ([Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Phasen ([Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Phasen ([Grad] bezogen auf Greenwich) des klassischen (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

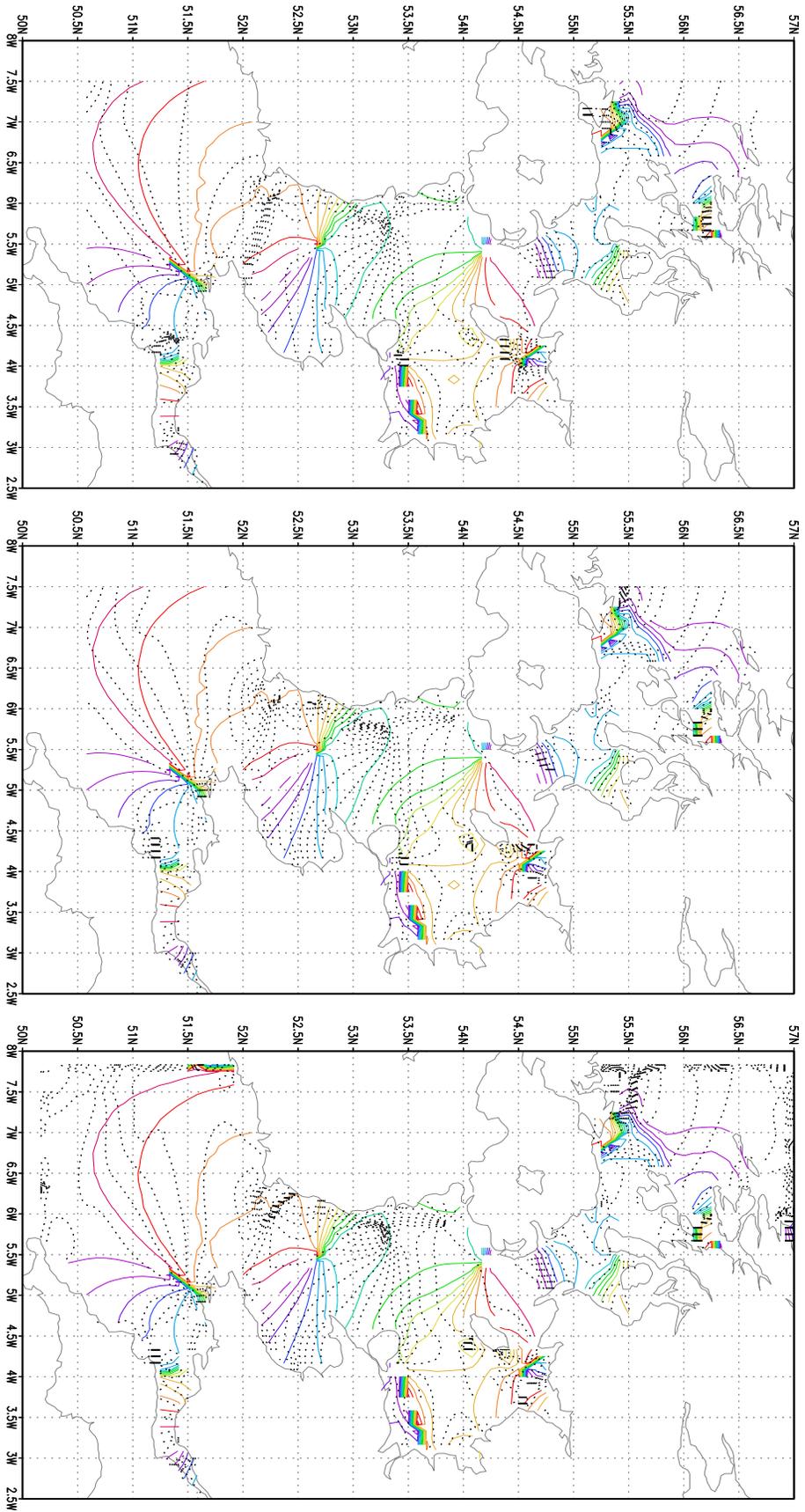


Abbildung 4.8:

- 1) Links: Die Linien gleicher Phasen (Grad) bezogen auf Greenwich (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Phasen (Grad) bezogen auf Greenwich (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Phasen (Grad) bezogen auf Greenwich (Farbe) und des assimilierten (gestrichelt) Wasserstands der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (LAV).

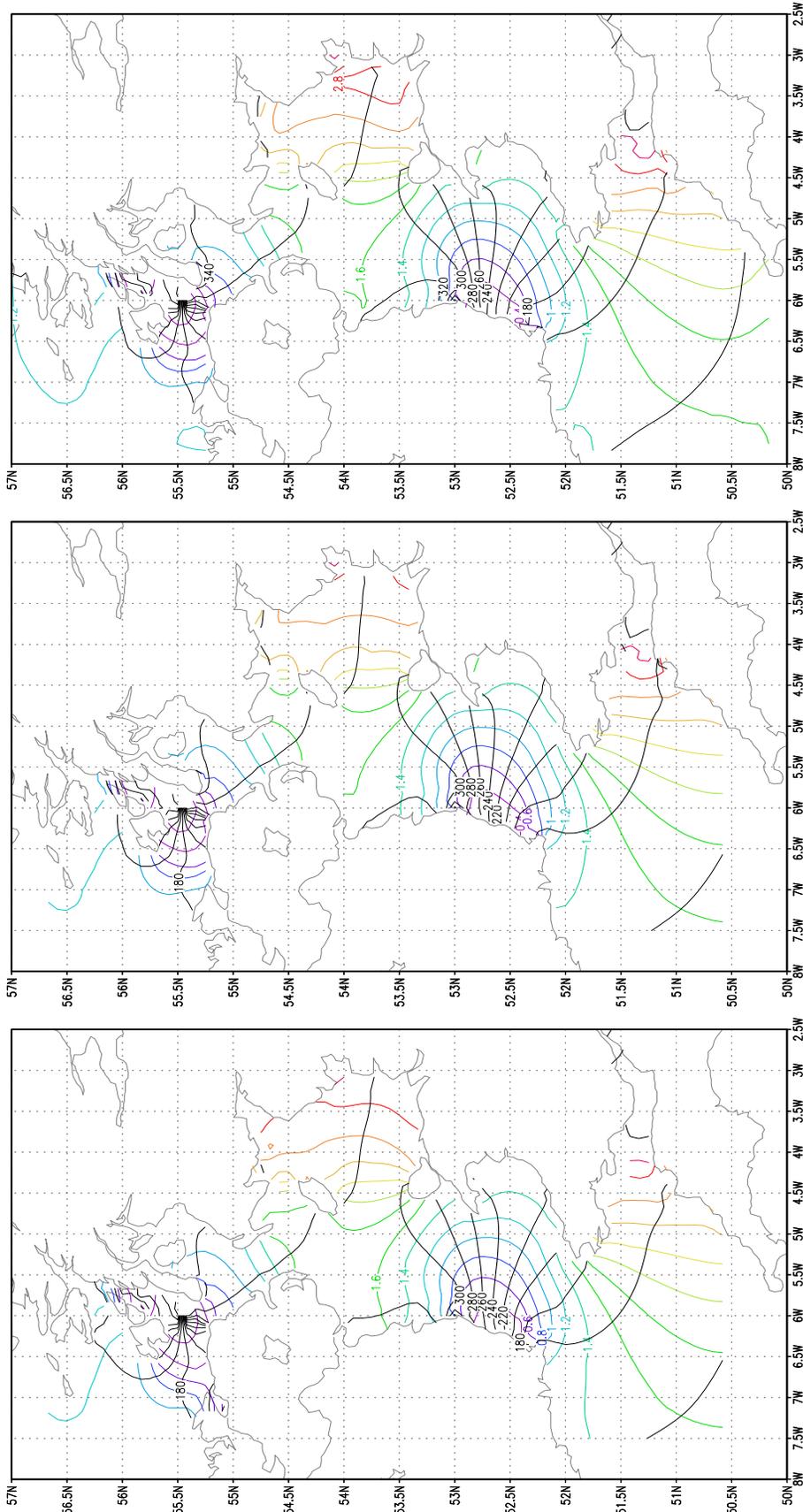


Abbildung 4.9:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

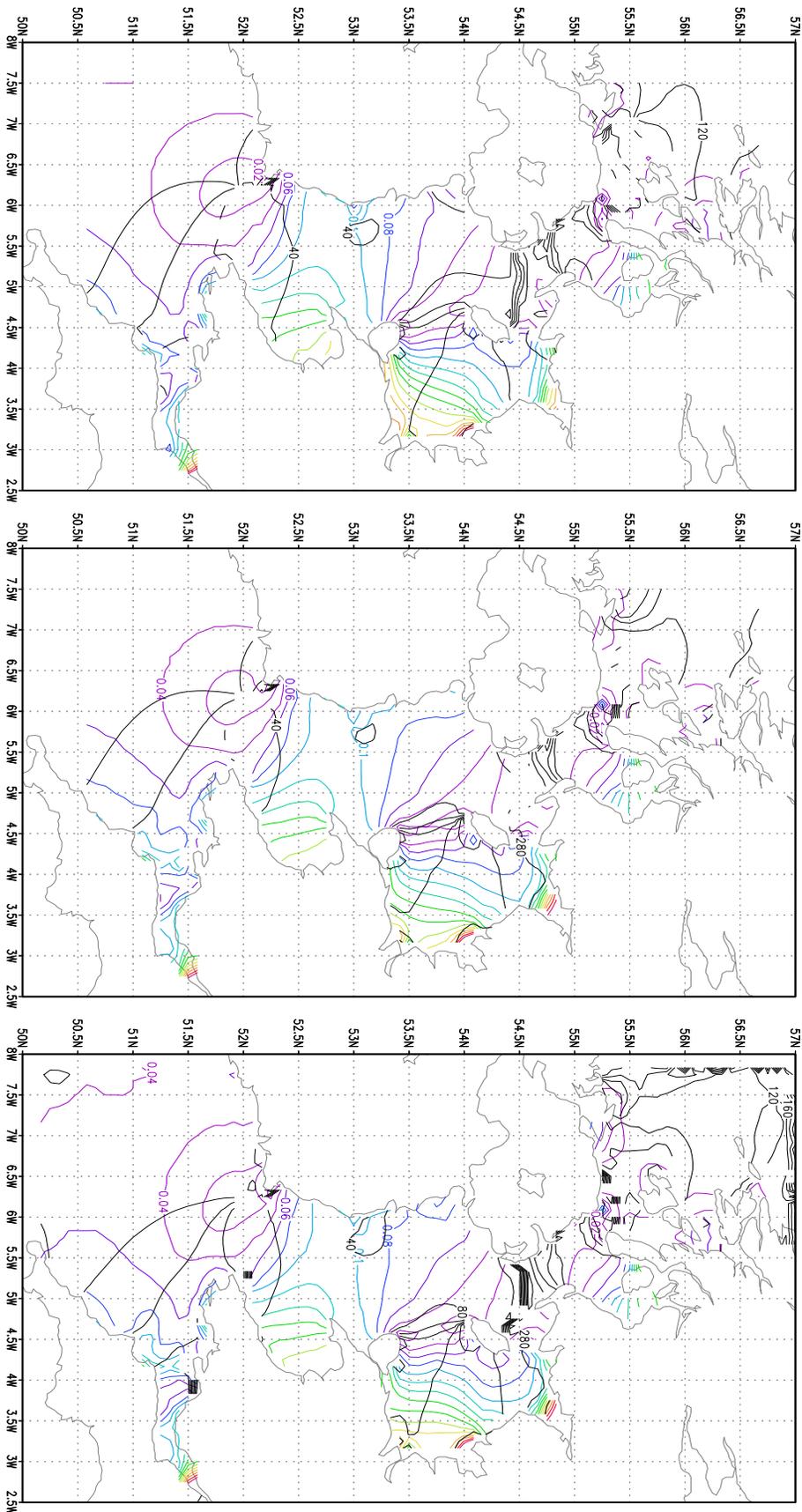


Abbildung 4.10:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (LAV).

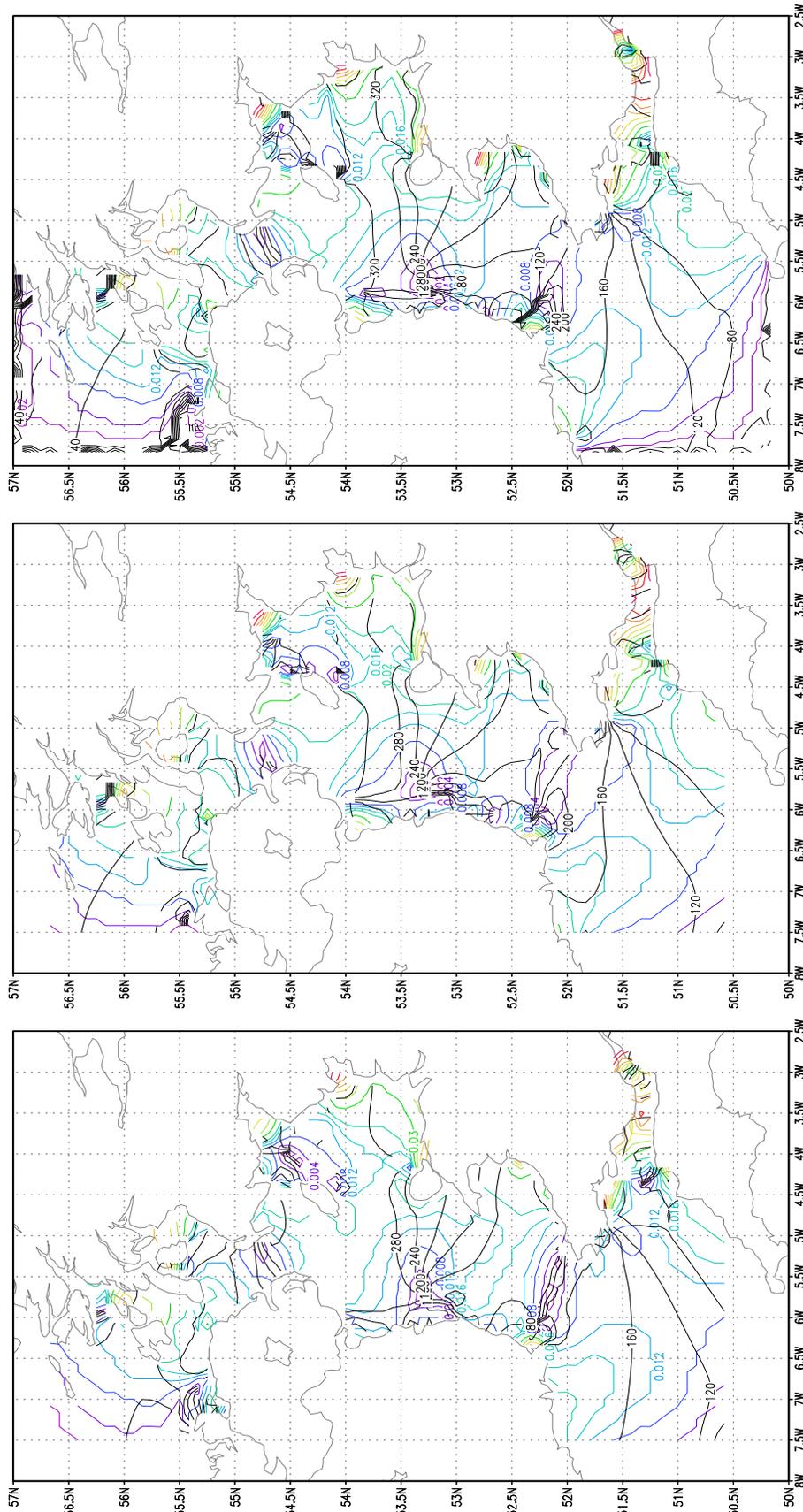


Abbildung 4.11:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[m]$ und gleicher Phase $[Grad]$ bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[m]$ und gleicher Phase $[Grad]$ bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[m]$ und gleicher Phase $[Grad]$ bezogen auf Greenwich) des assimilierten Wasserstands der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

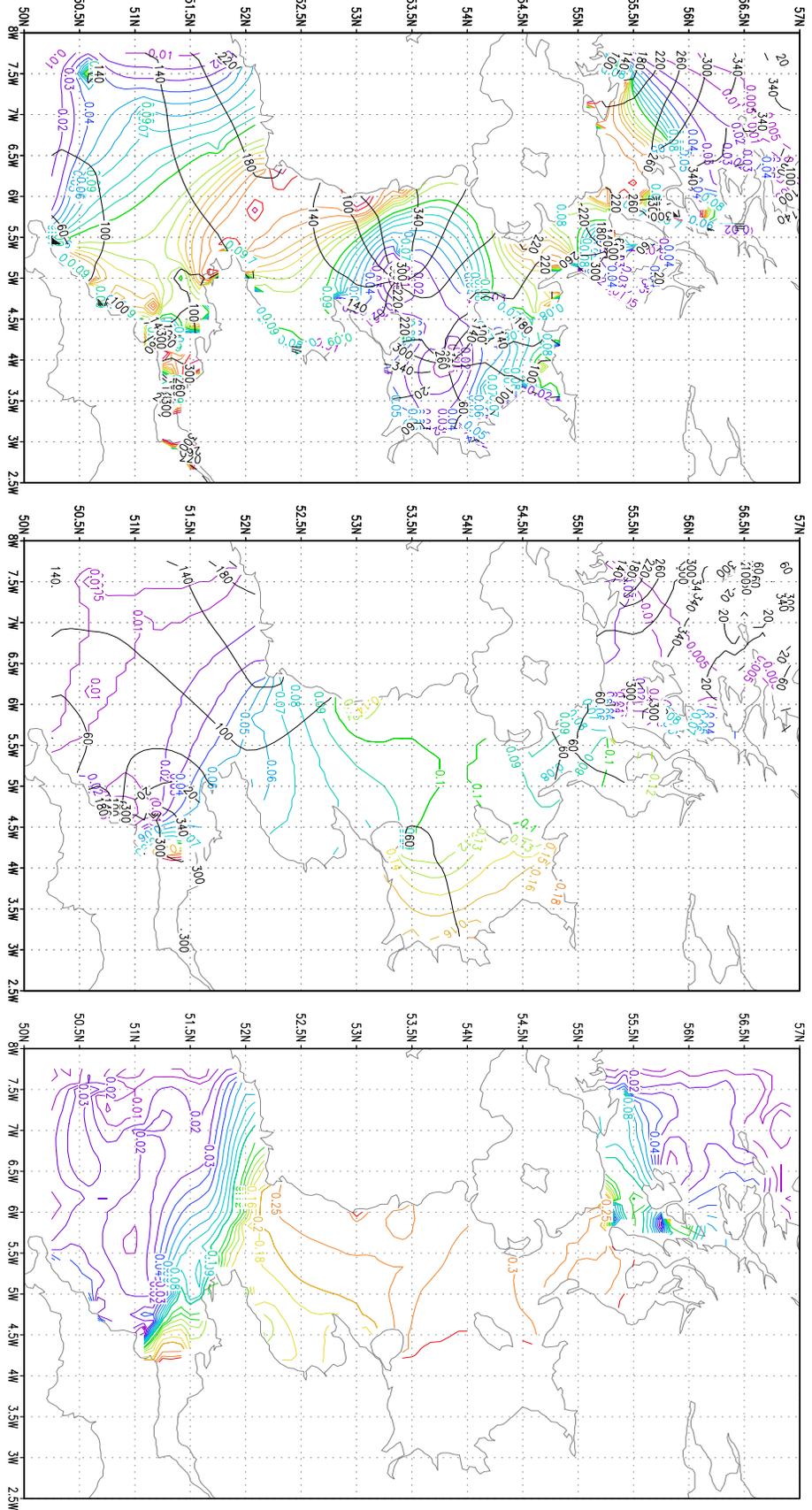


Abbildung 4.12:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] und gleicher Phase [Grad] bezogen auf Greenwich) der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] und gleicher Phase [Grad] bezogen auf Greenwich) der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

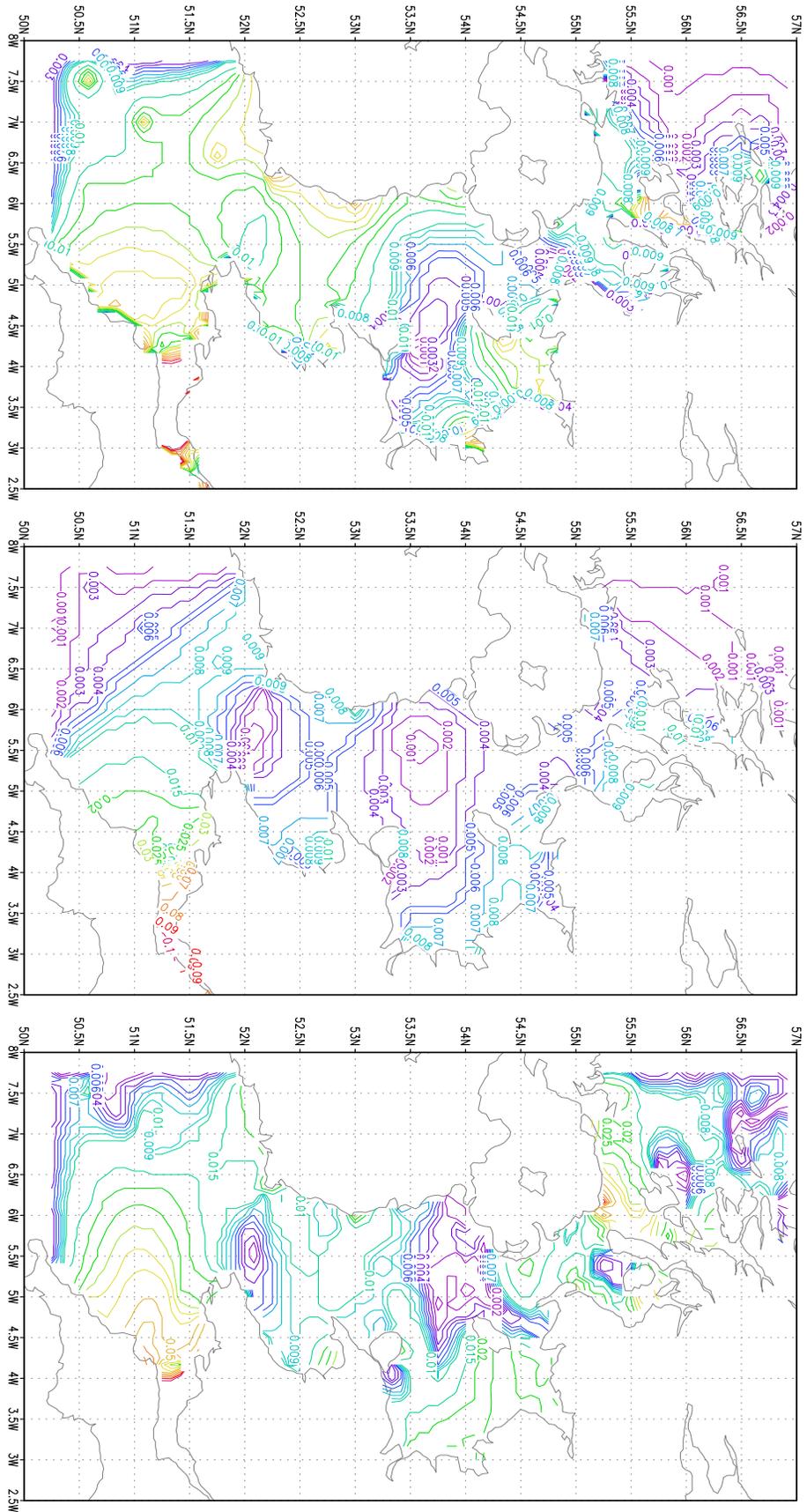


Abbildung 4.14:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m/s]$ der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m/s]$ der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m/s]$ der Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

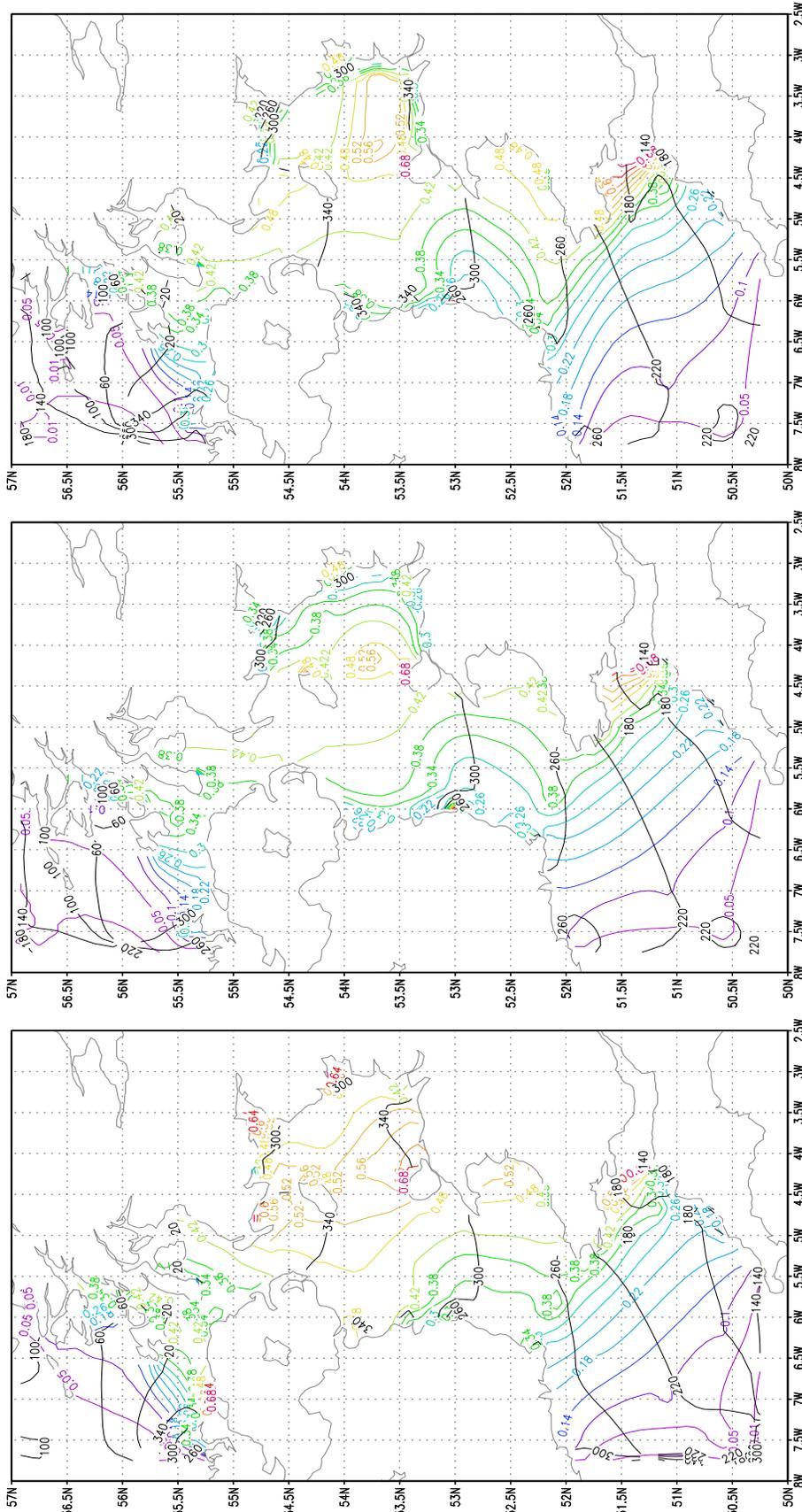


Abbildung 4.15:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

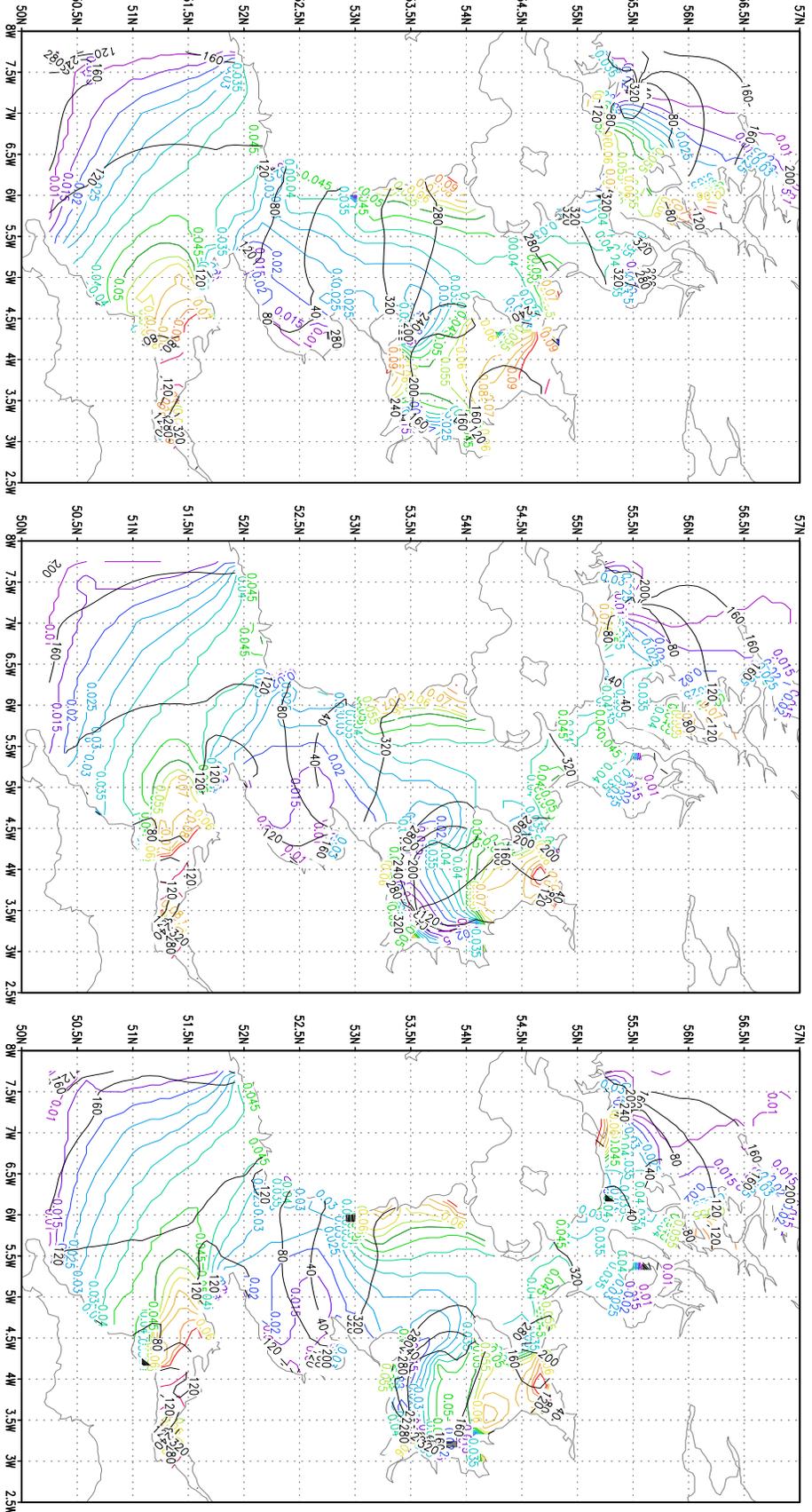


Abbildung 4.16:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase [Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase [Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase [Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_4

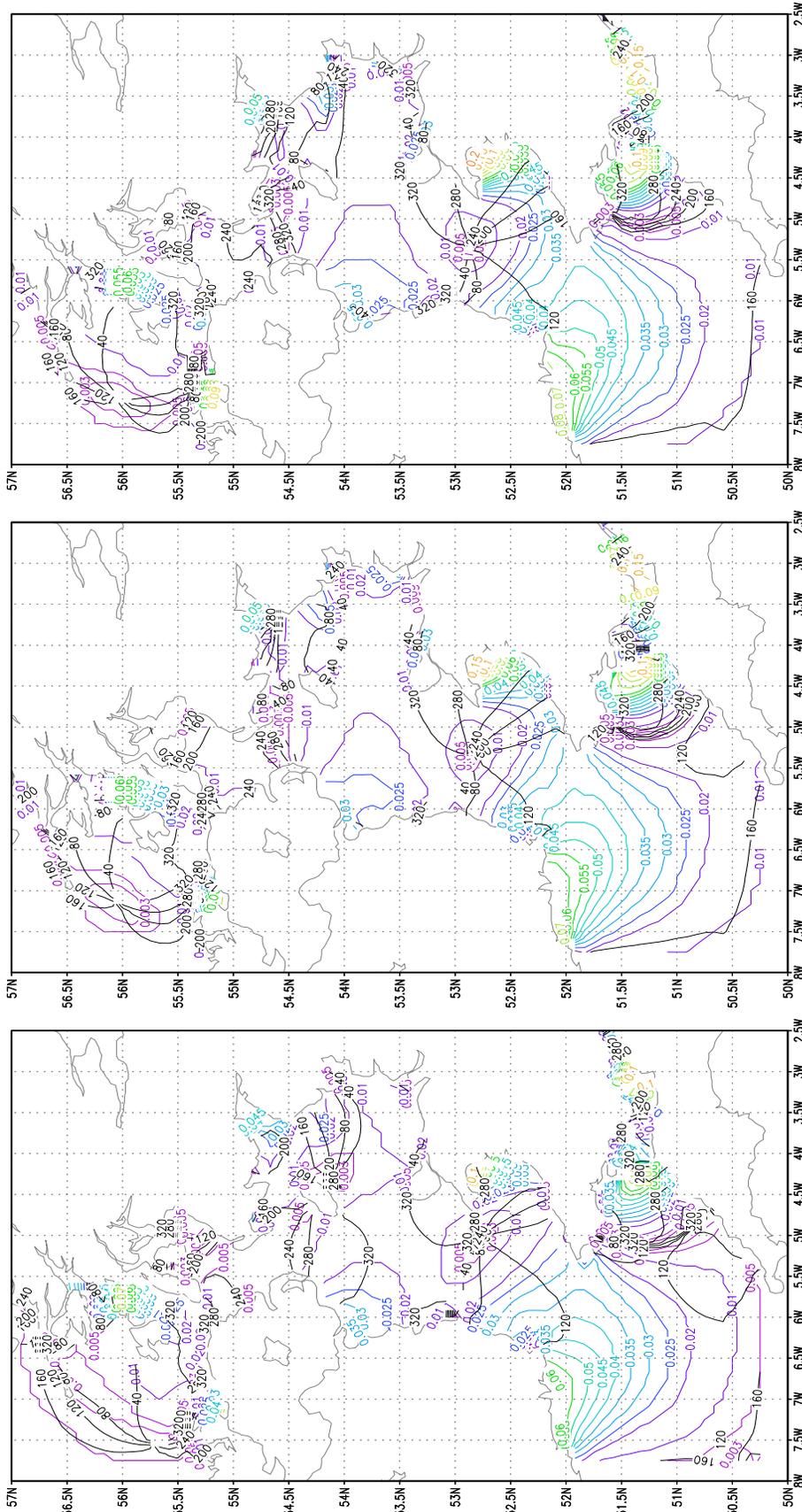


Abbildung 4.17:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m] (Farbe) und gleicher Phase ([Grad] bezogen auf Greenwich) (schwarz) der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten Wasserständen der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

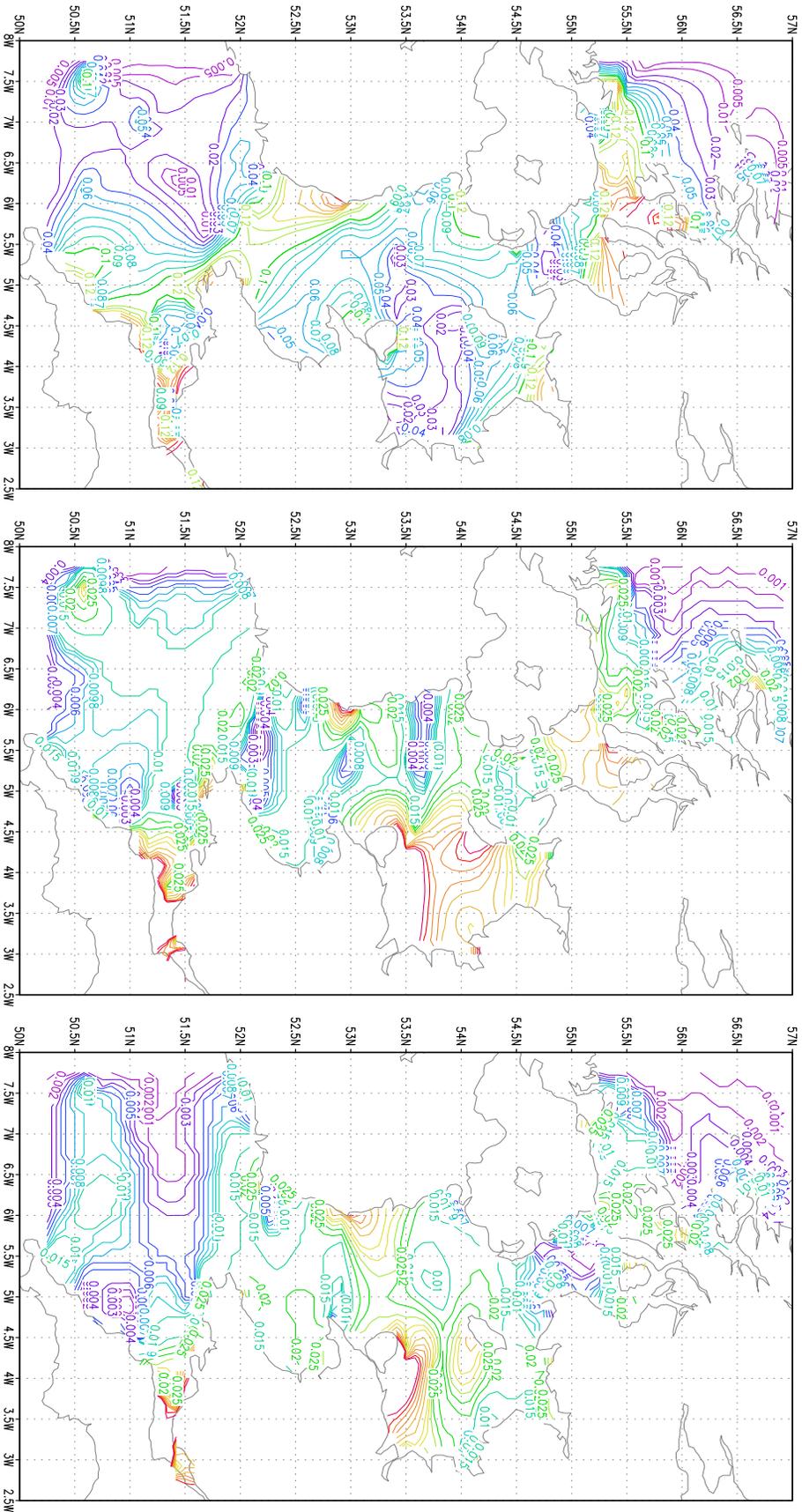


Abbildung 4.18:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] der adjungierten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] der adjungierten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m/s$] der adjungierten Residuen der Massenerhaltungsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

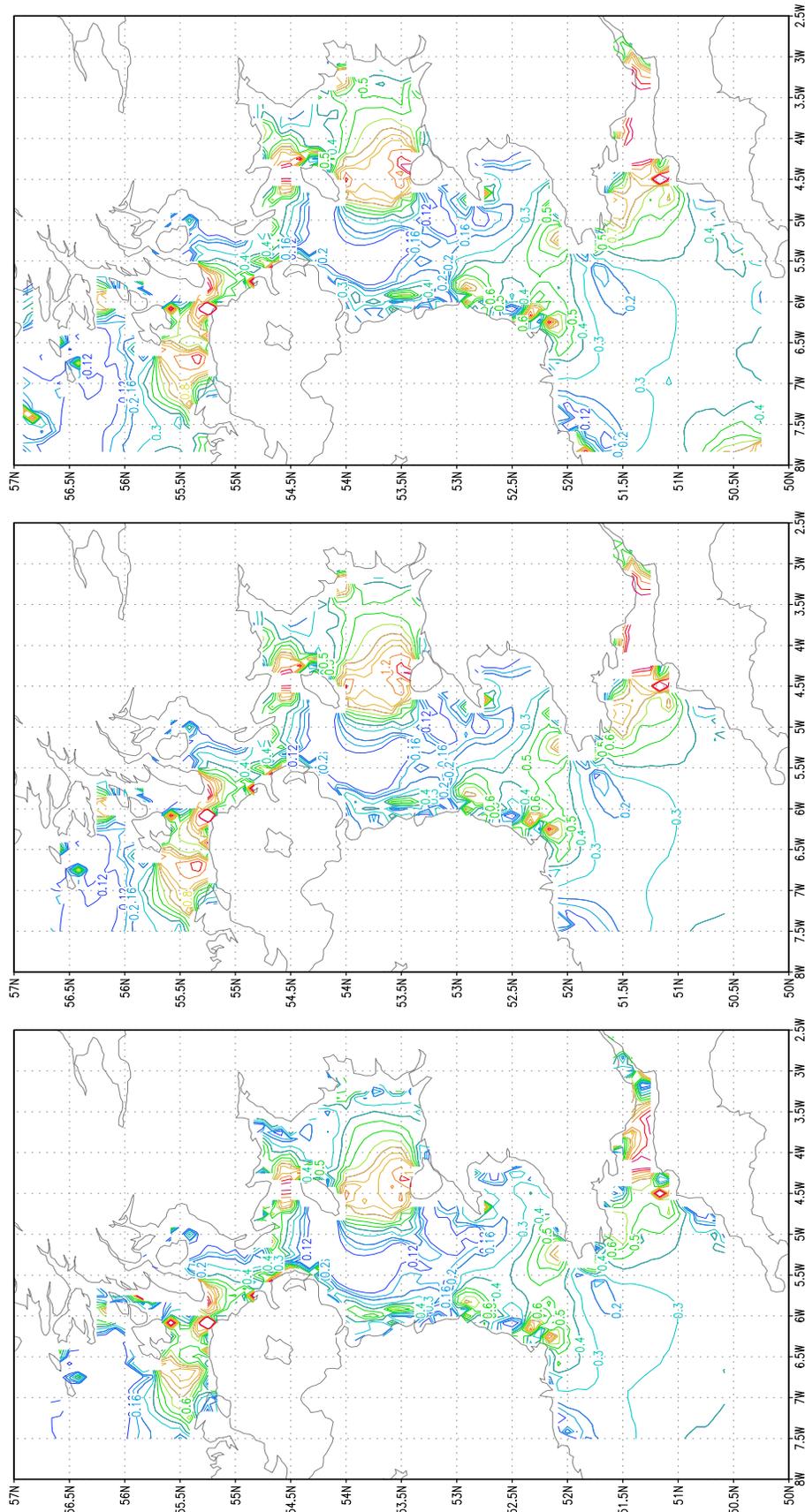
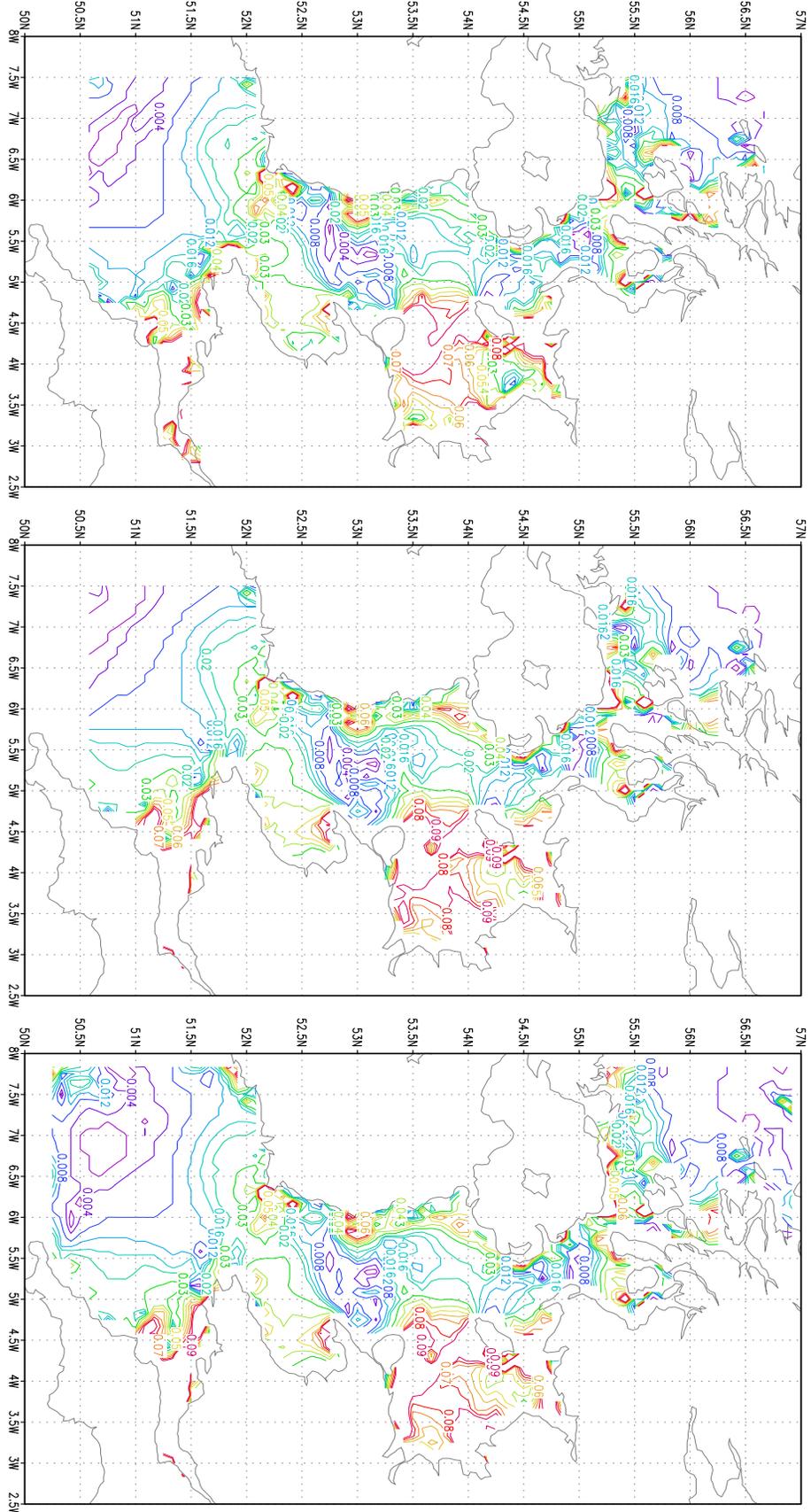
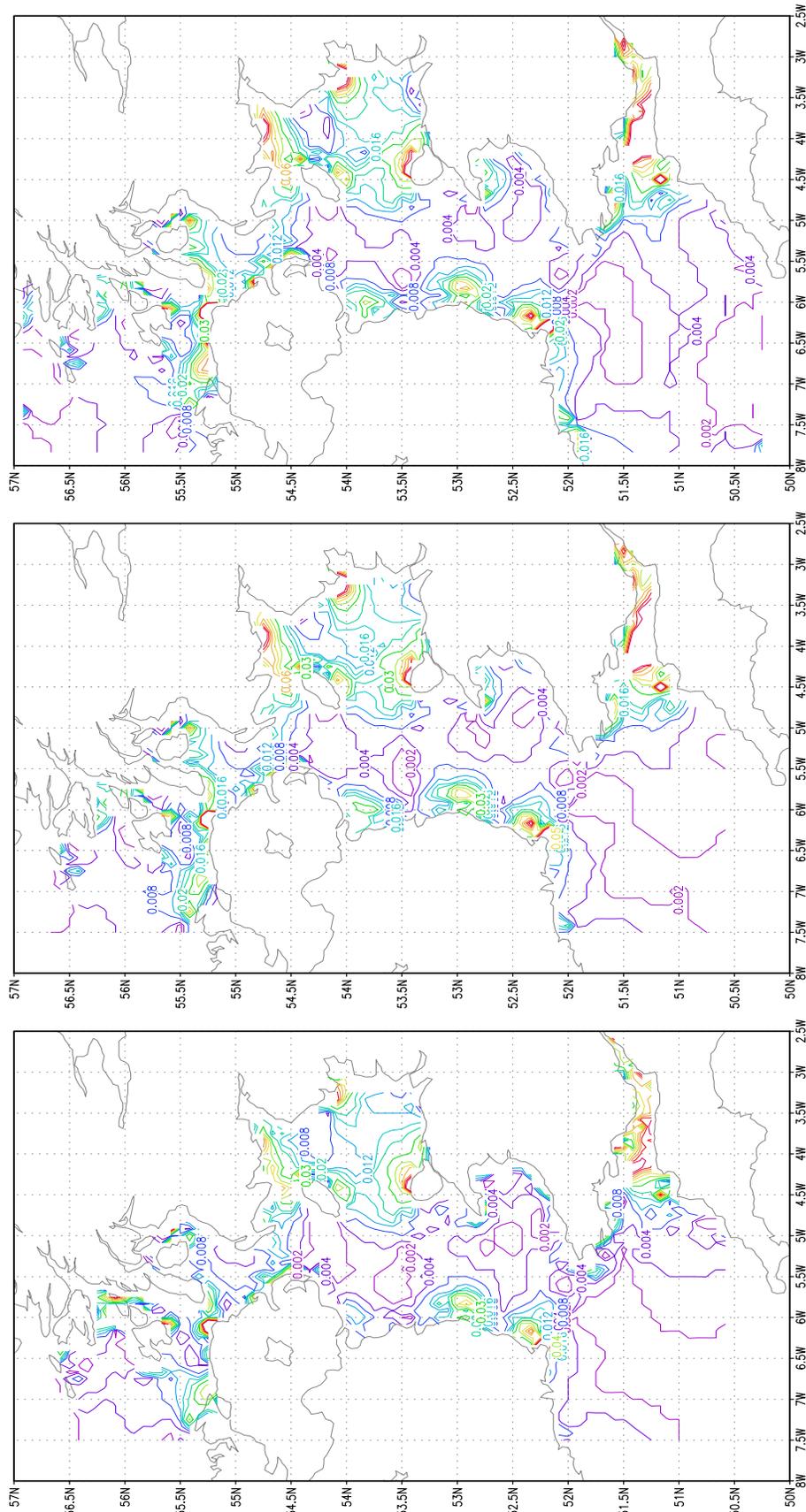


Abbildung 4.19:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (LAV).





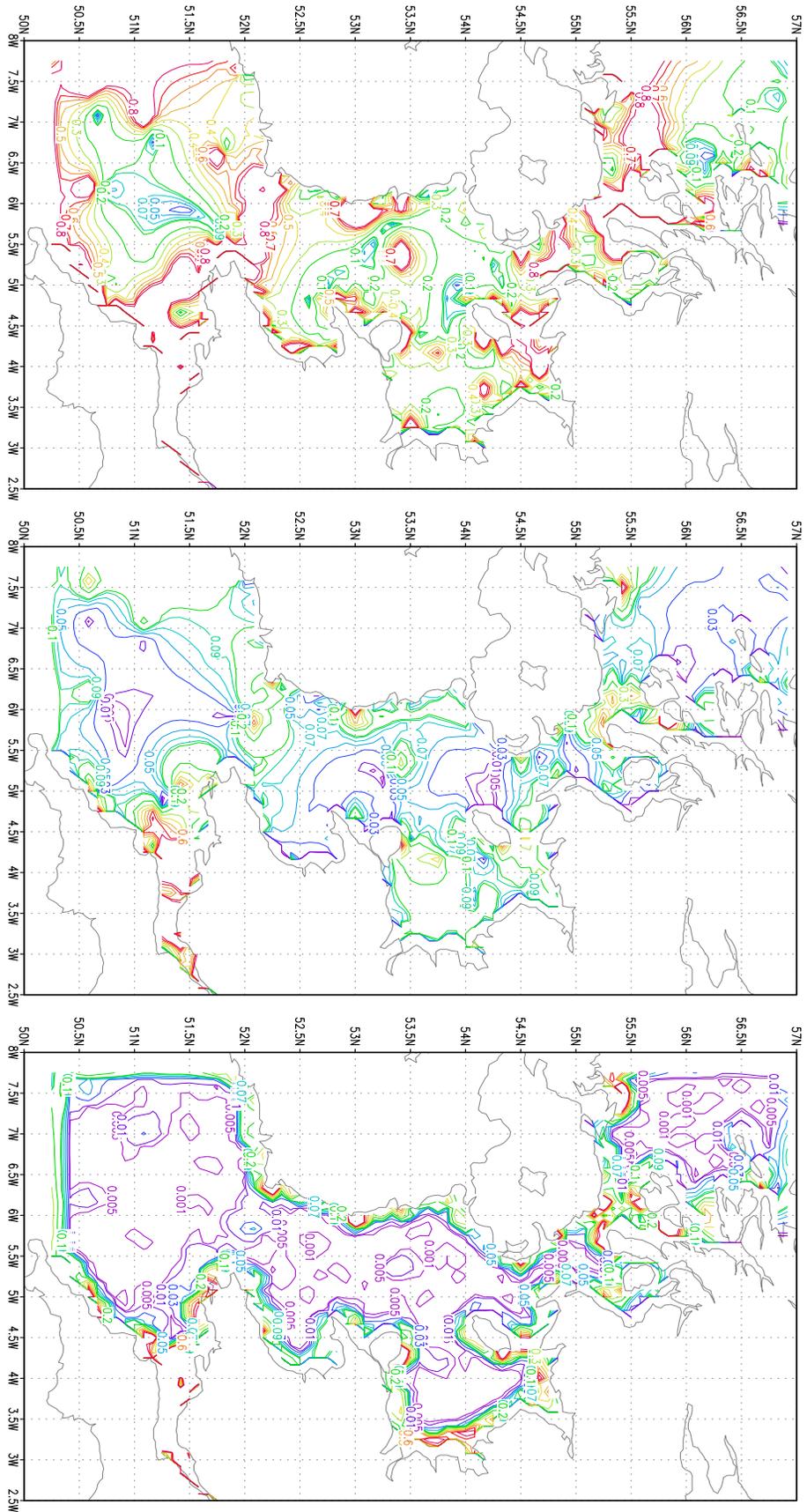


Abbildung 4.22:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (DDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

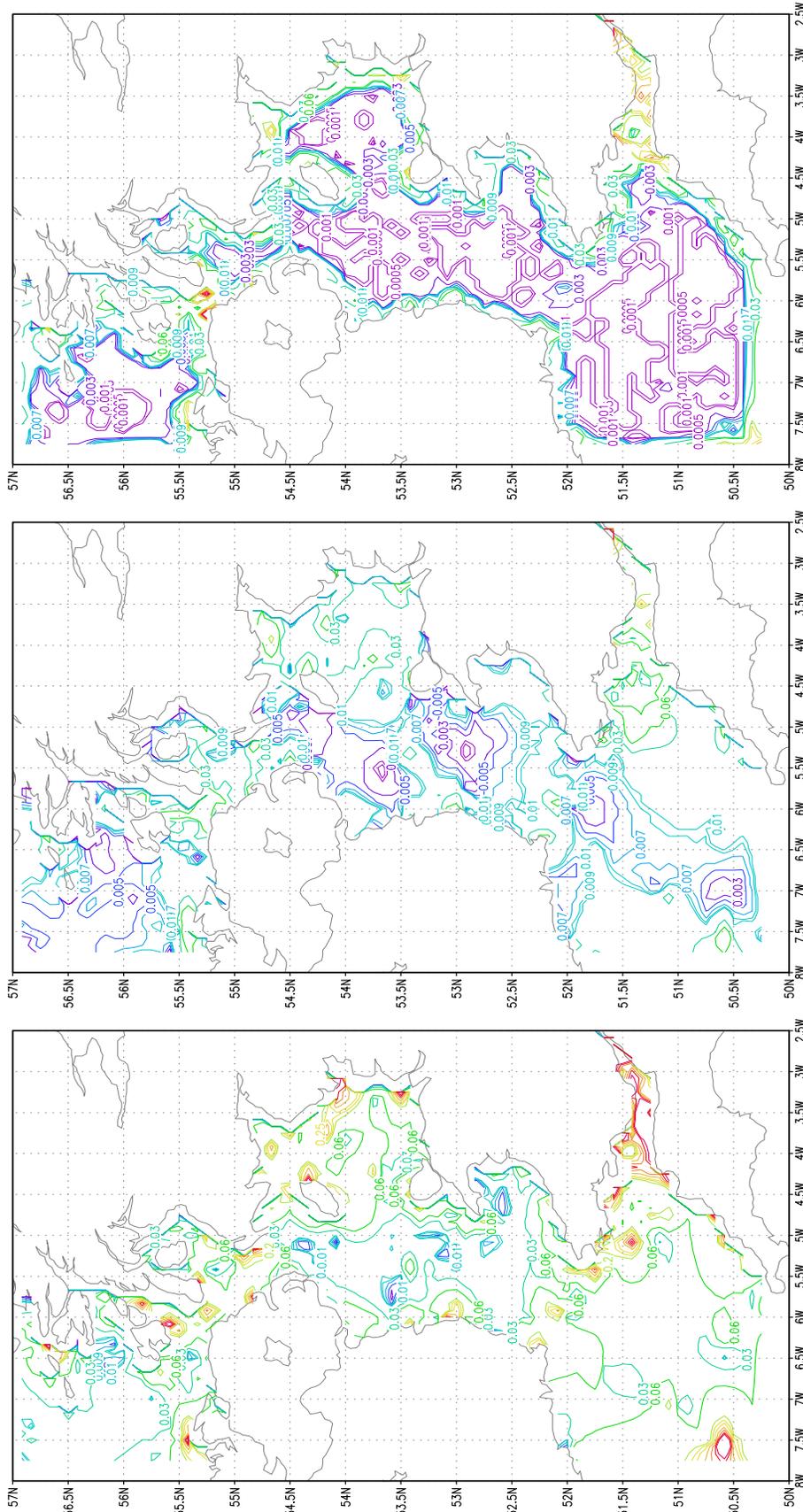


Abbildung 4.23:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m^2/s^2]$ der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m^2/s^2]$ der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-2}m^2/s^2]$ der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

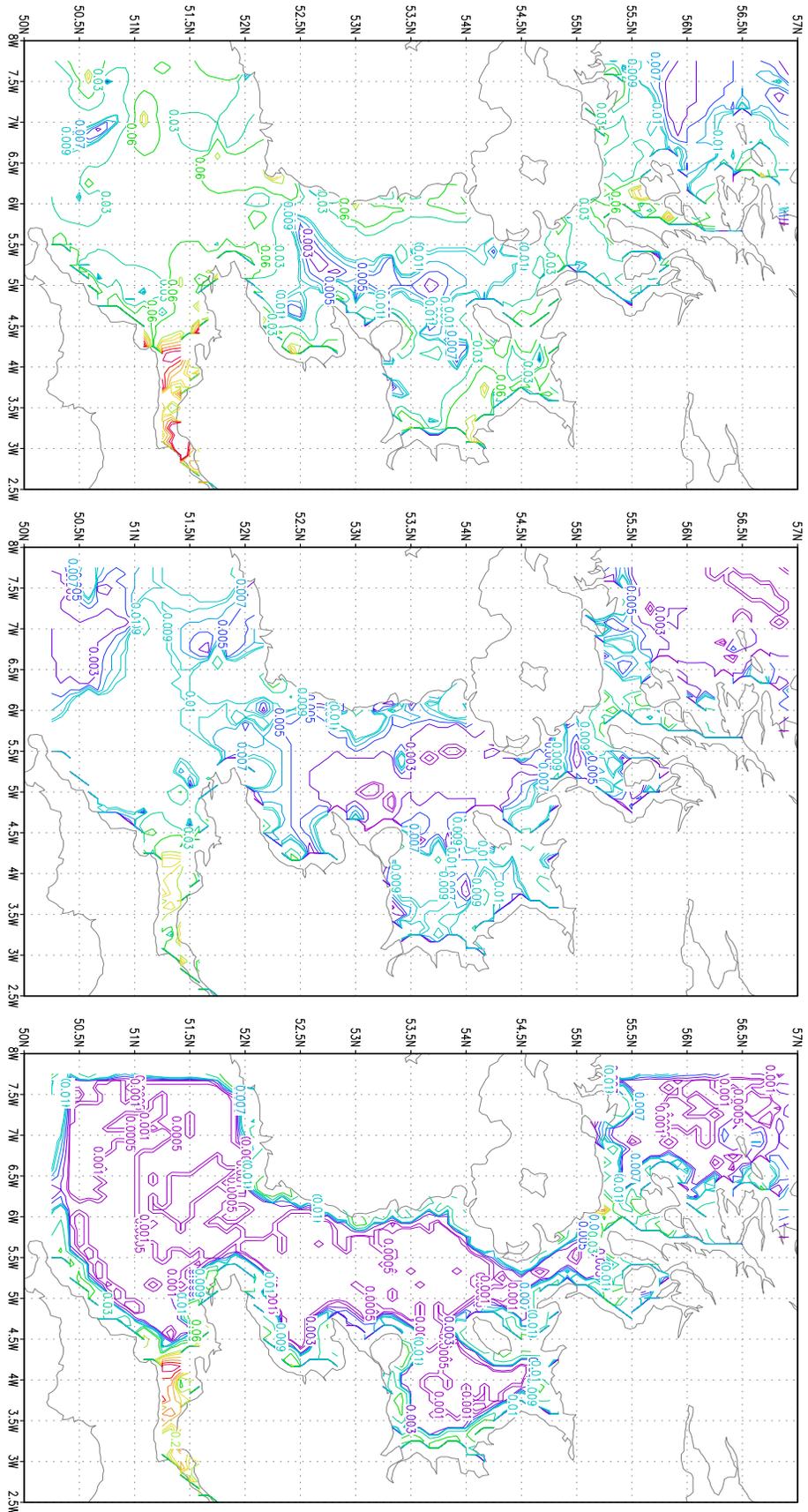


Abbildung 4.24:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

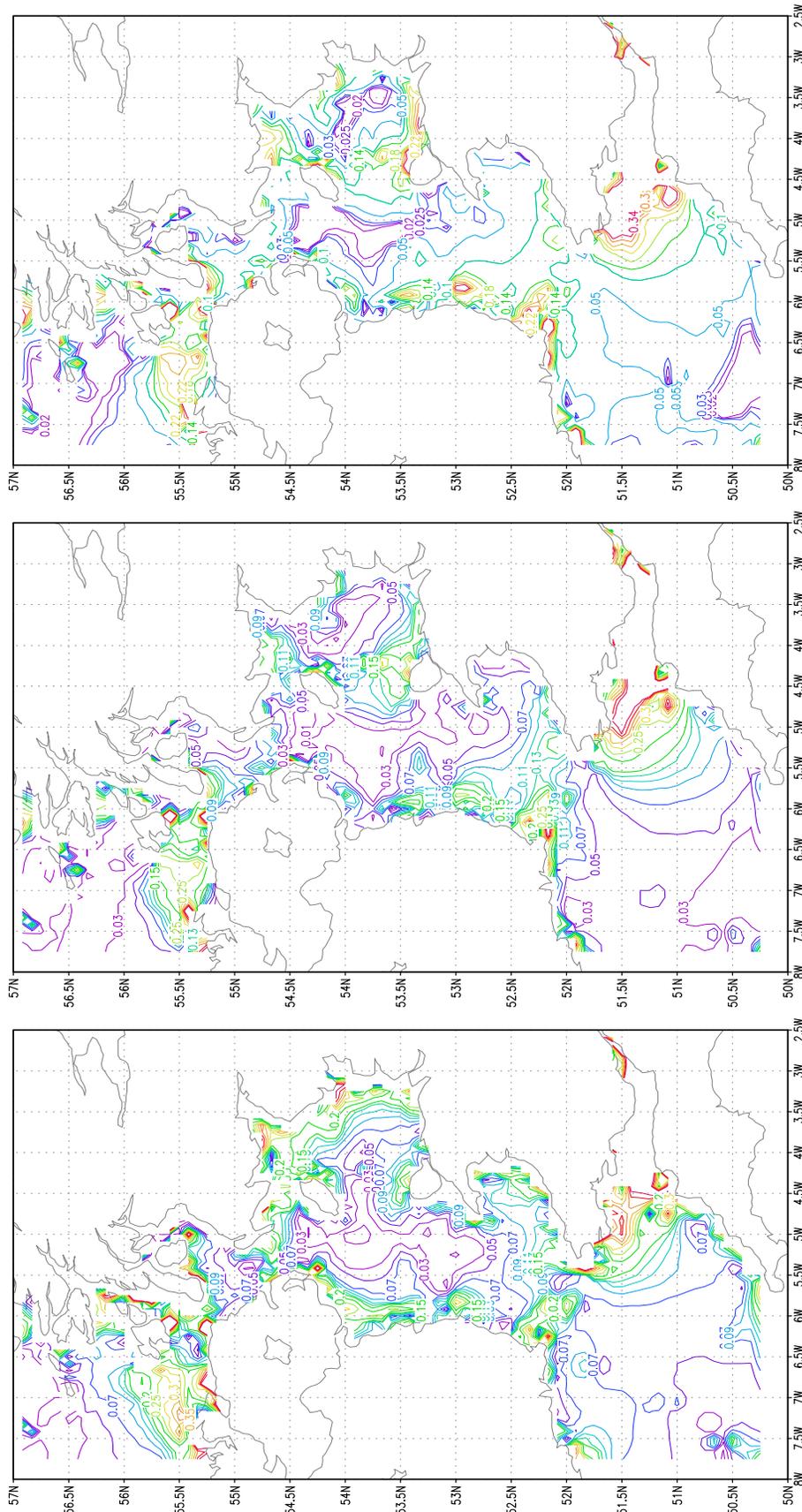


Abbildung 4.25:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

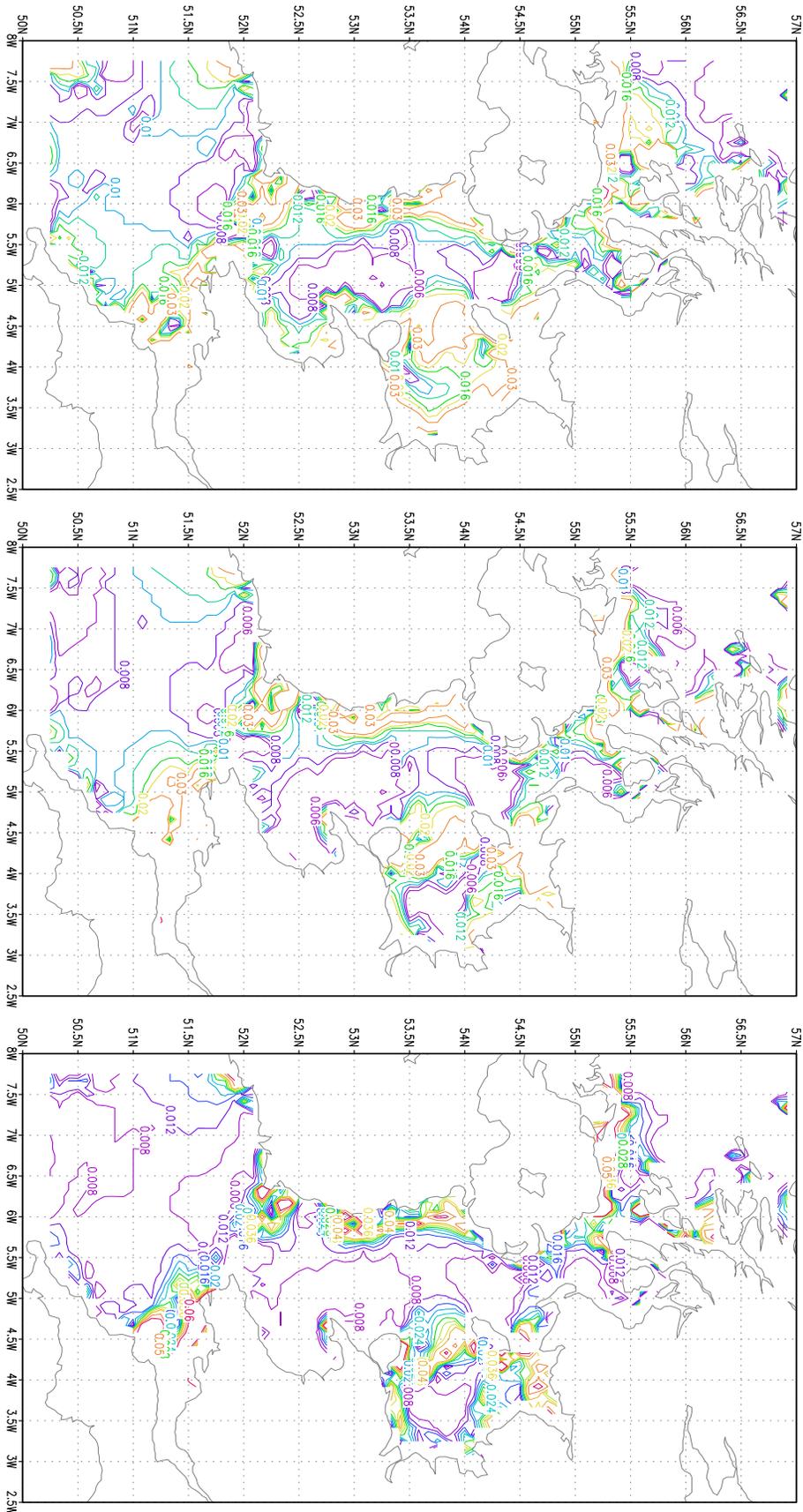


Abbildung 4.26:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassichen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassichen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassichen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (TAV).

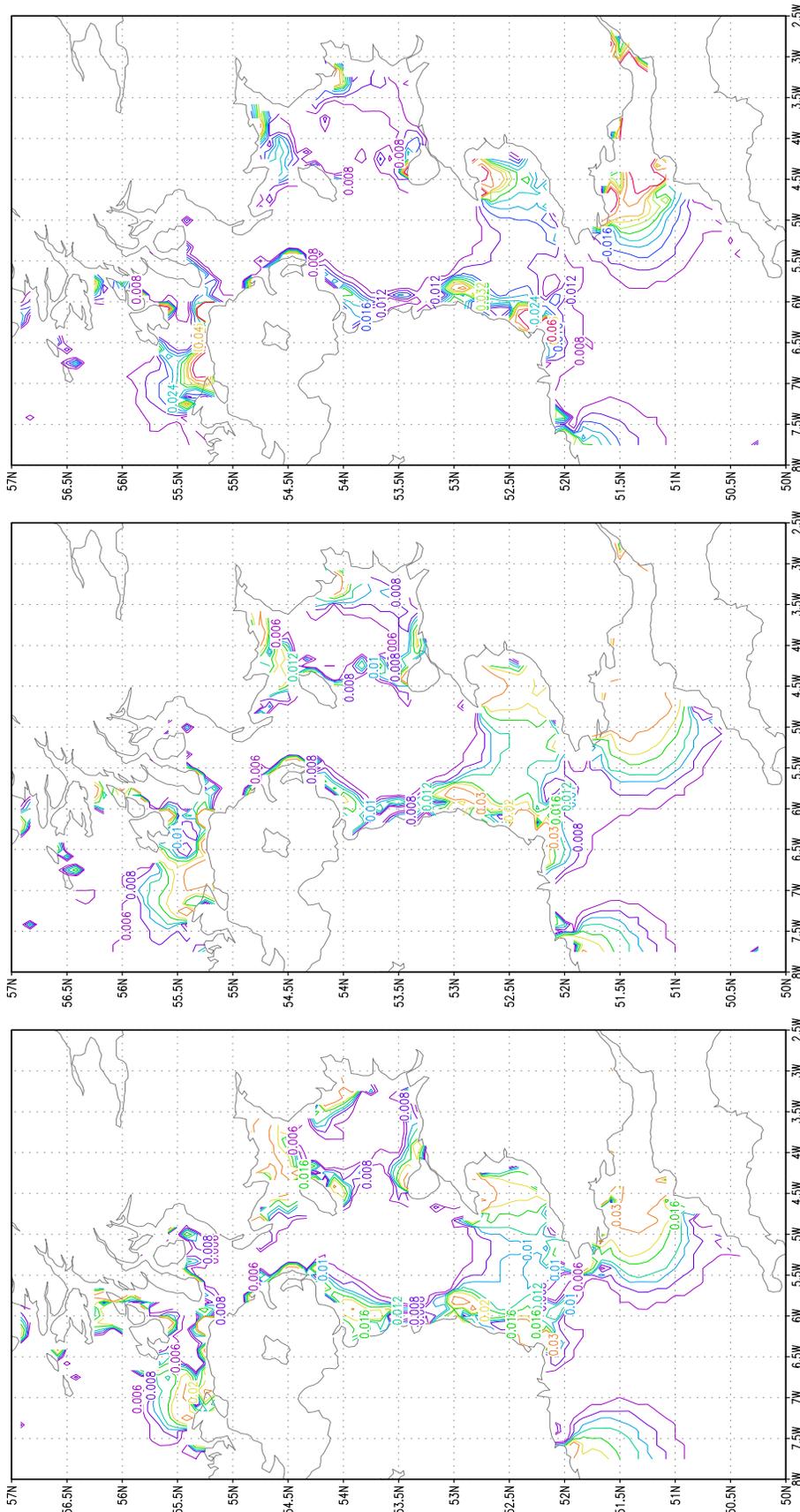


Abbildung 4.27:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten zonalen Geschwindigkeiten der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

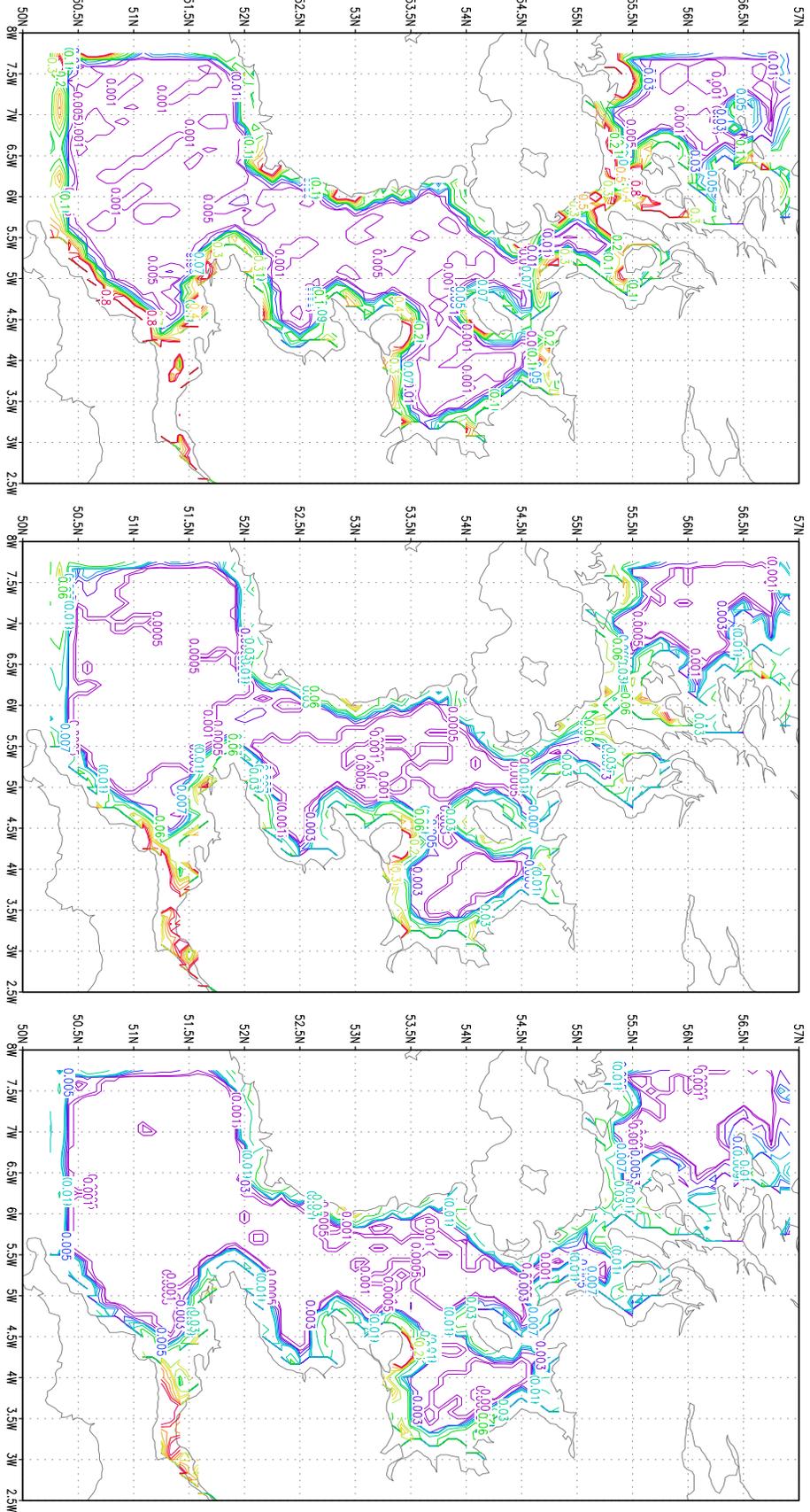


Abbildung 4.28:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude der adjungierten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude der adjungierten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude der adjungierten Residuen der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

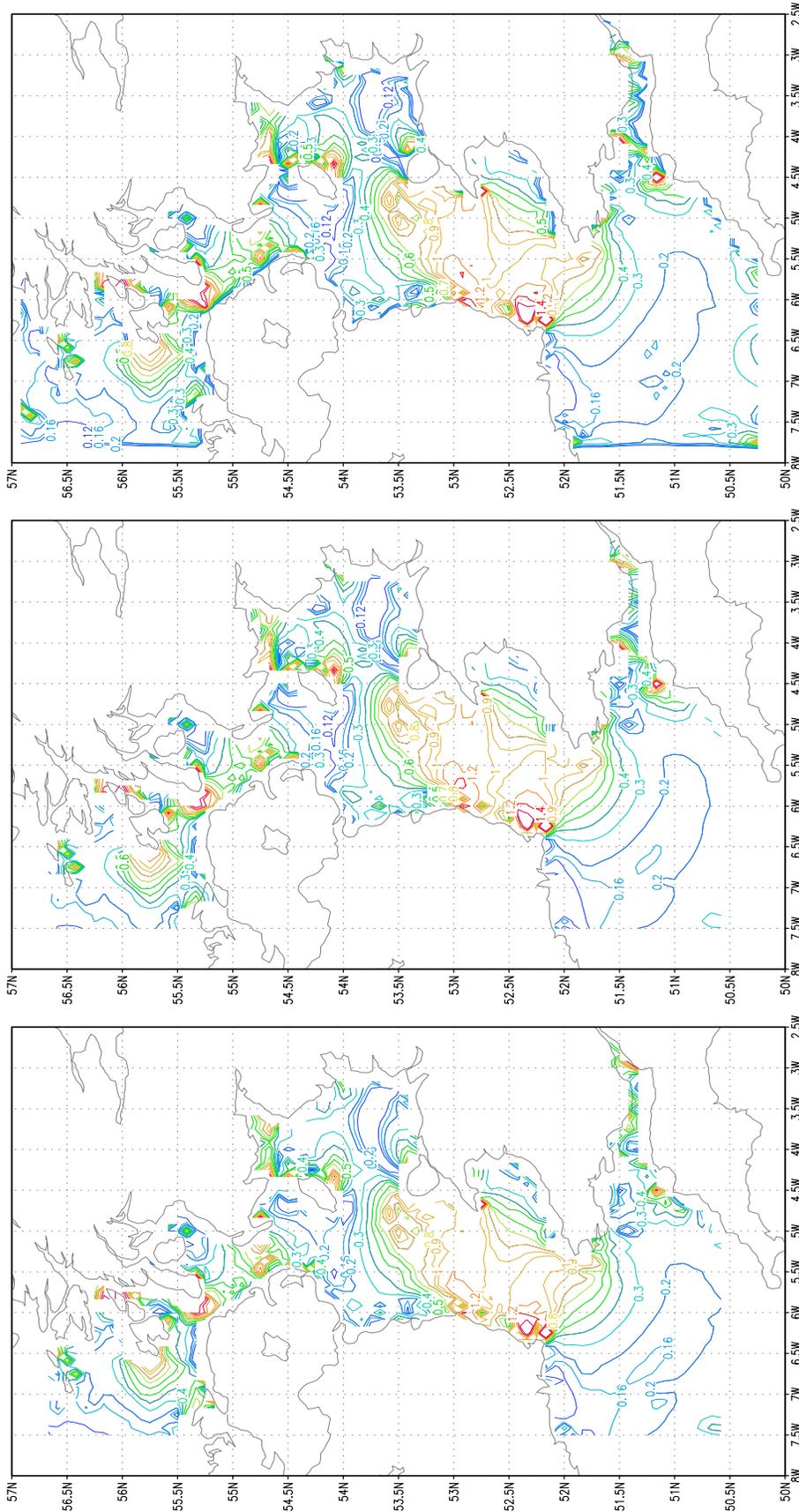


Abbildung 4.29:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

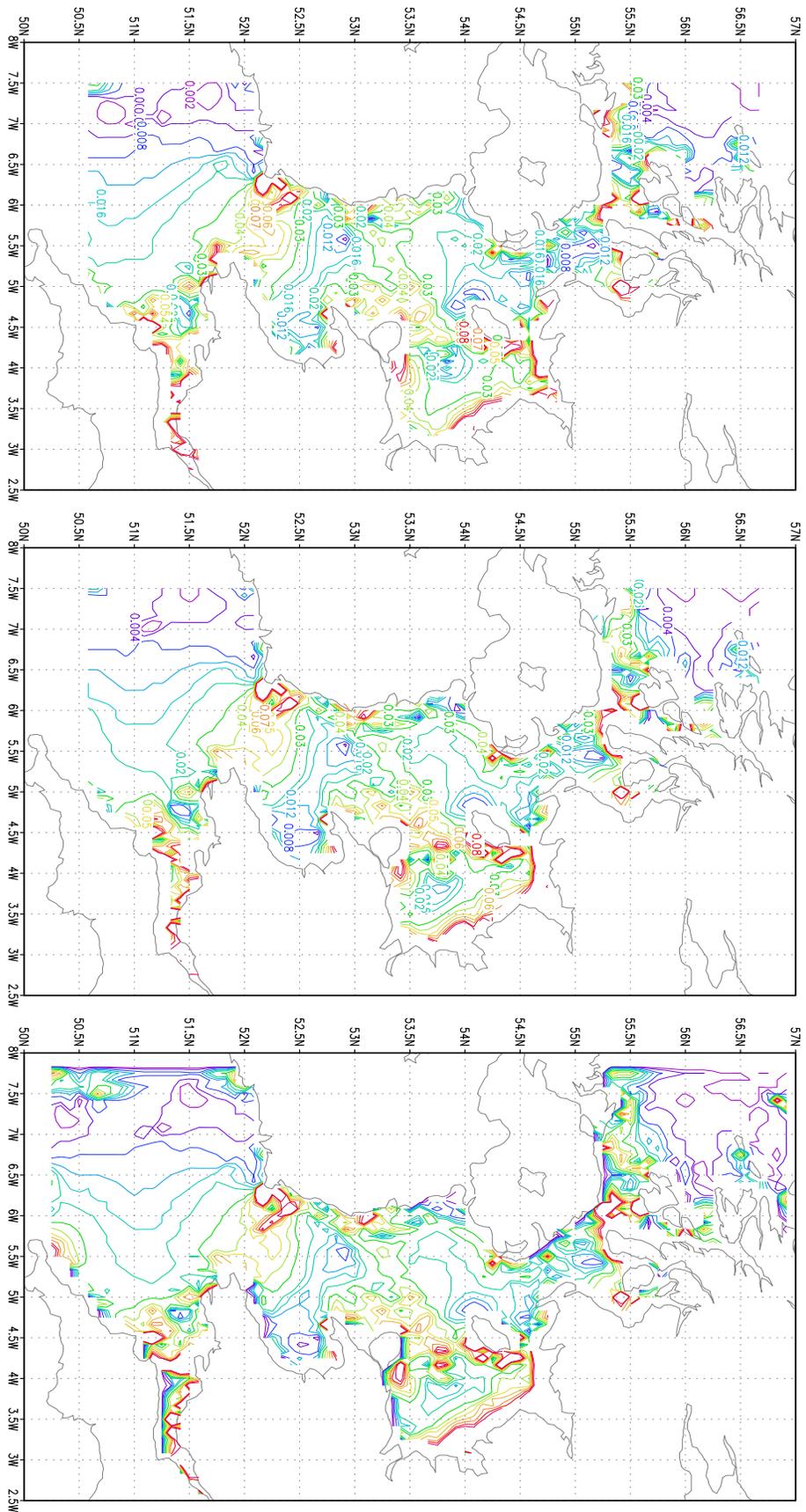
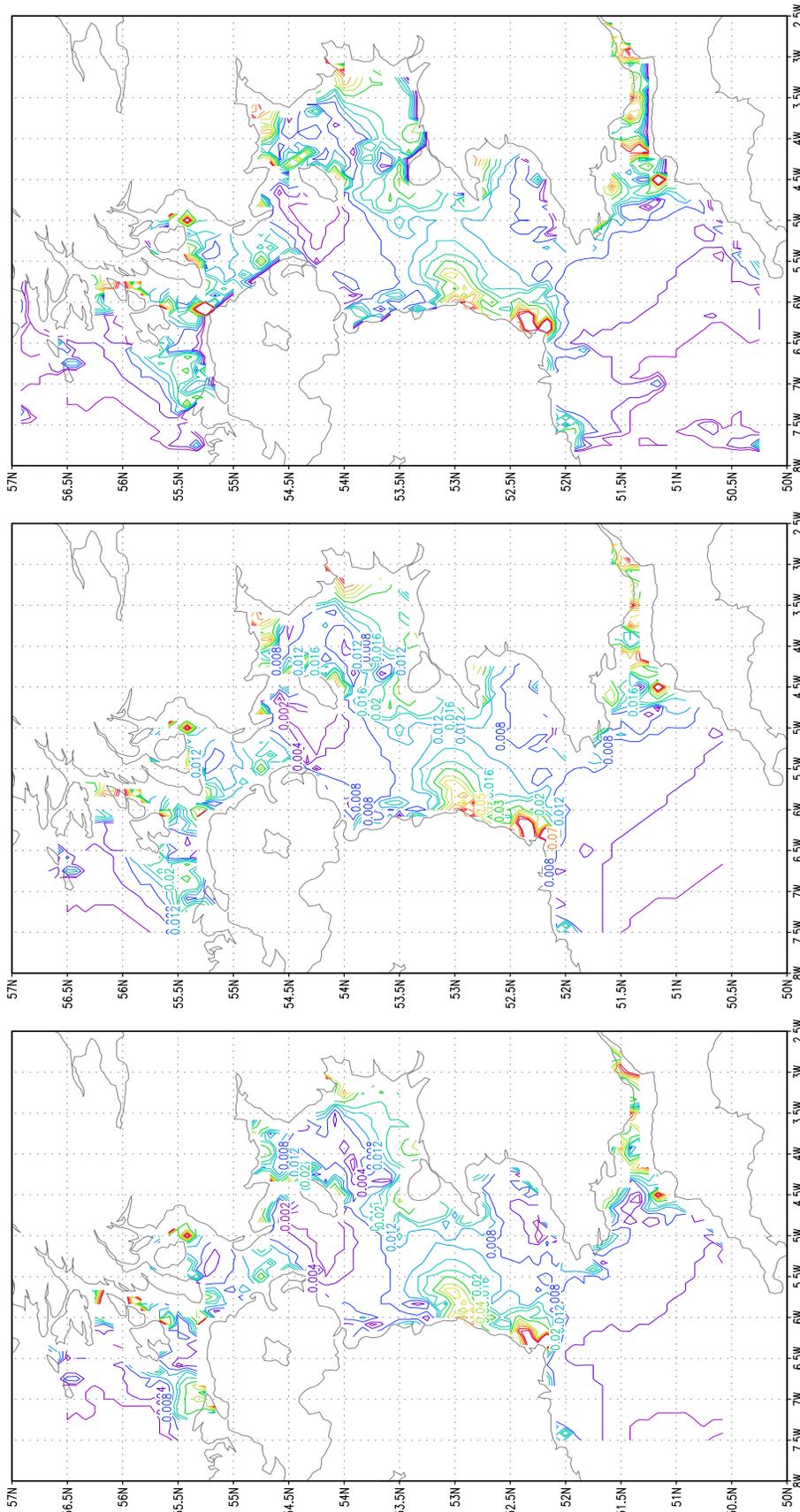


Abbildung 4.30:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).



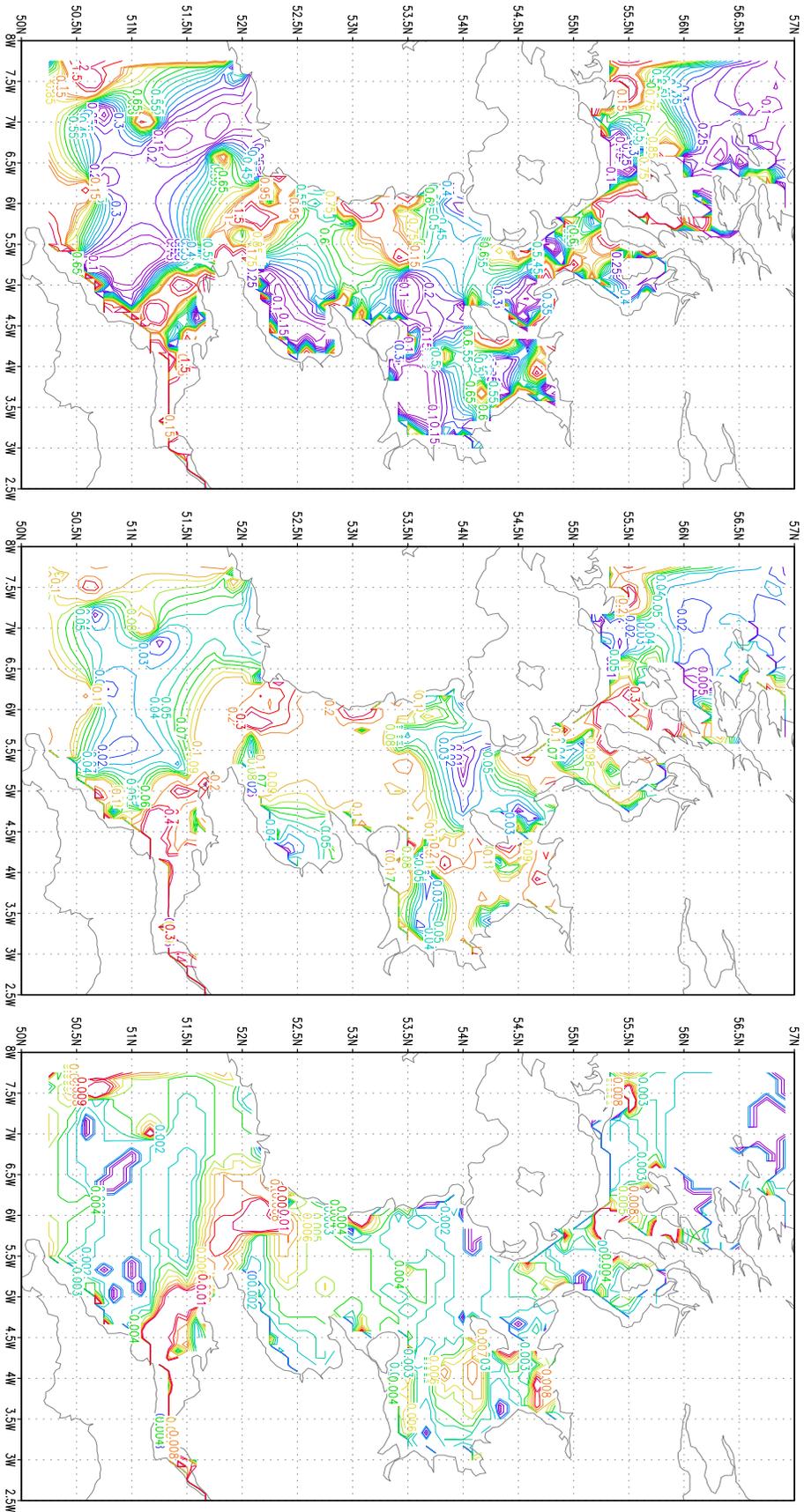


Abbildung 4.32:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

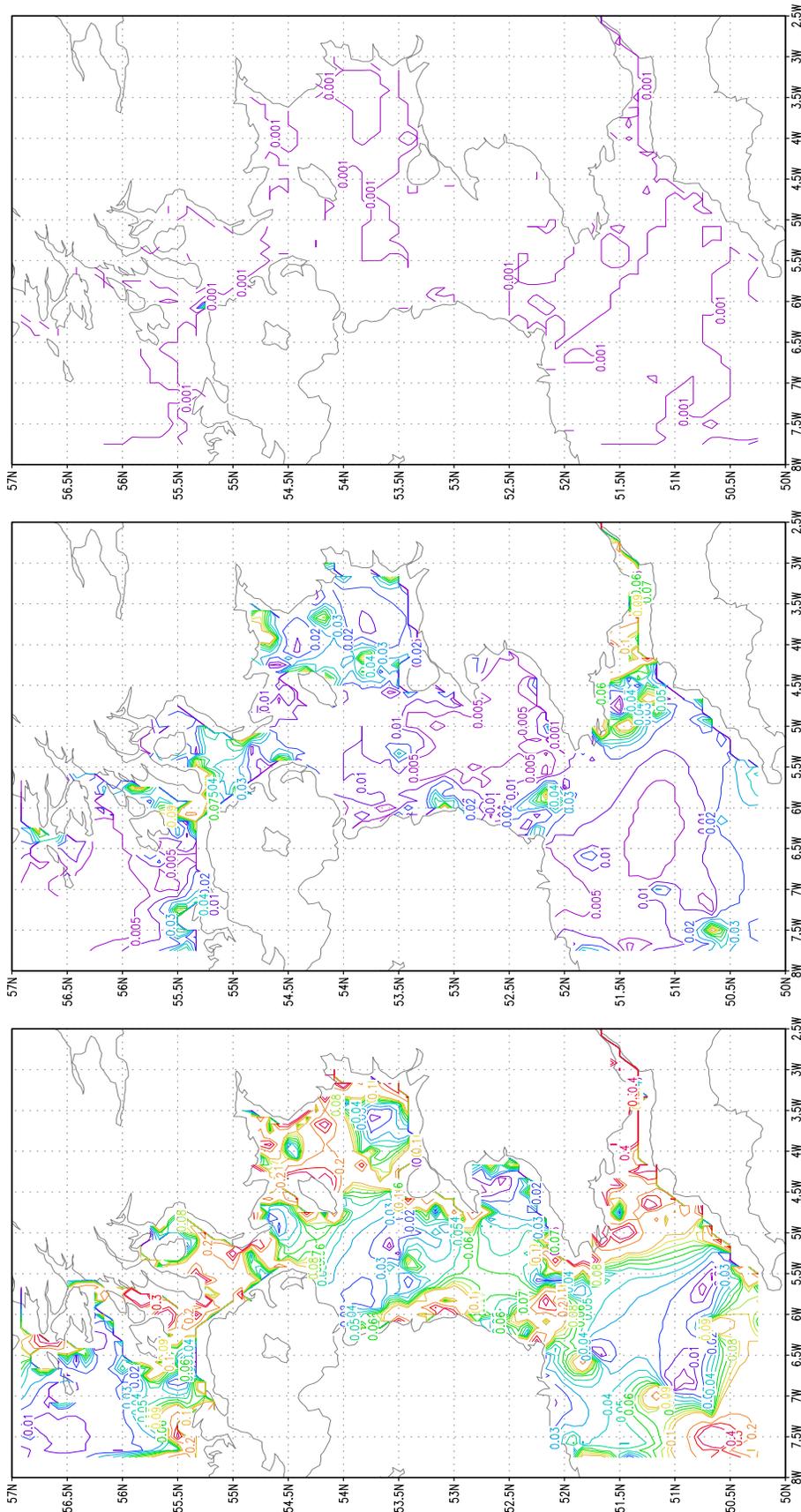


Abbildung 4.33:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

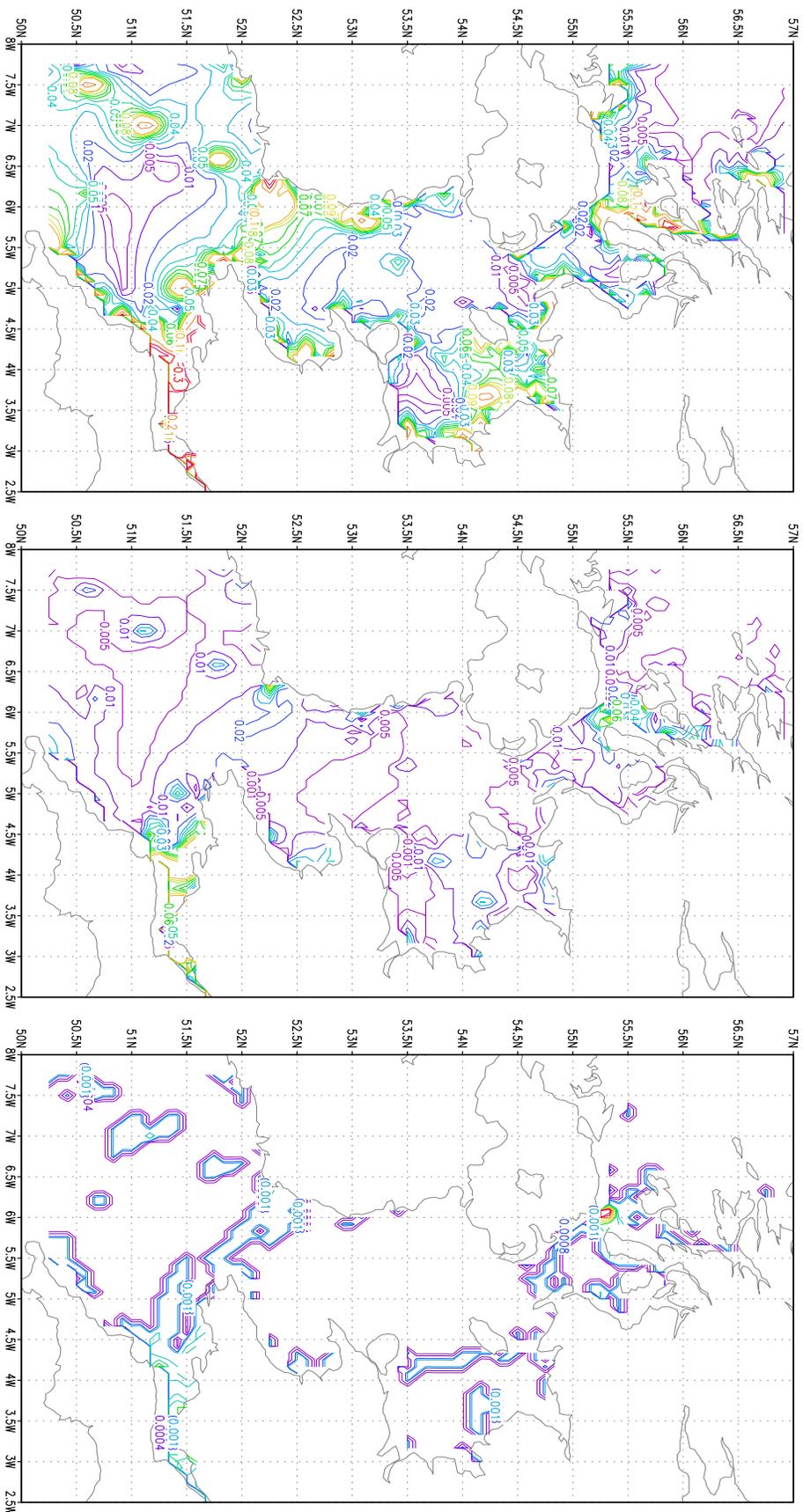


Abbildung 4.34:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der Residuen der meridionalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (TAV).

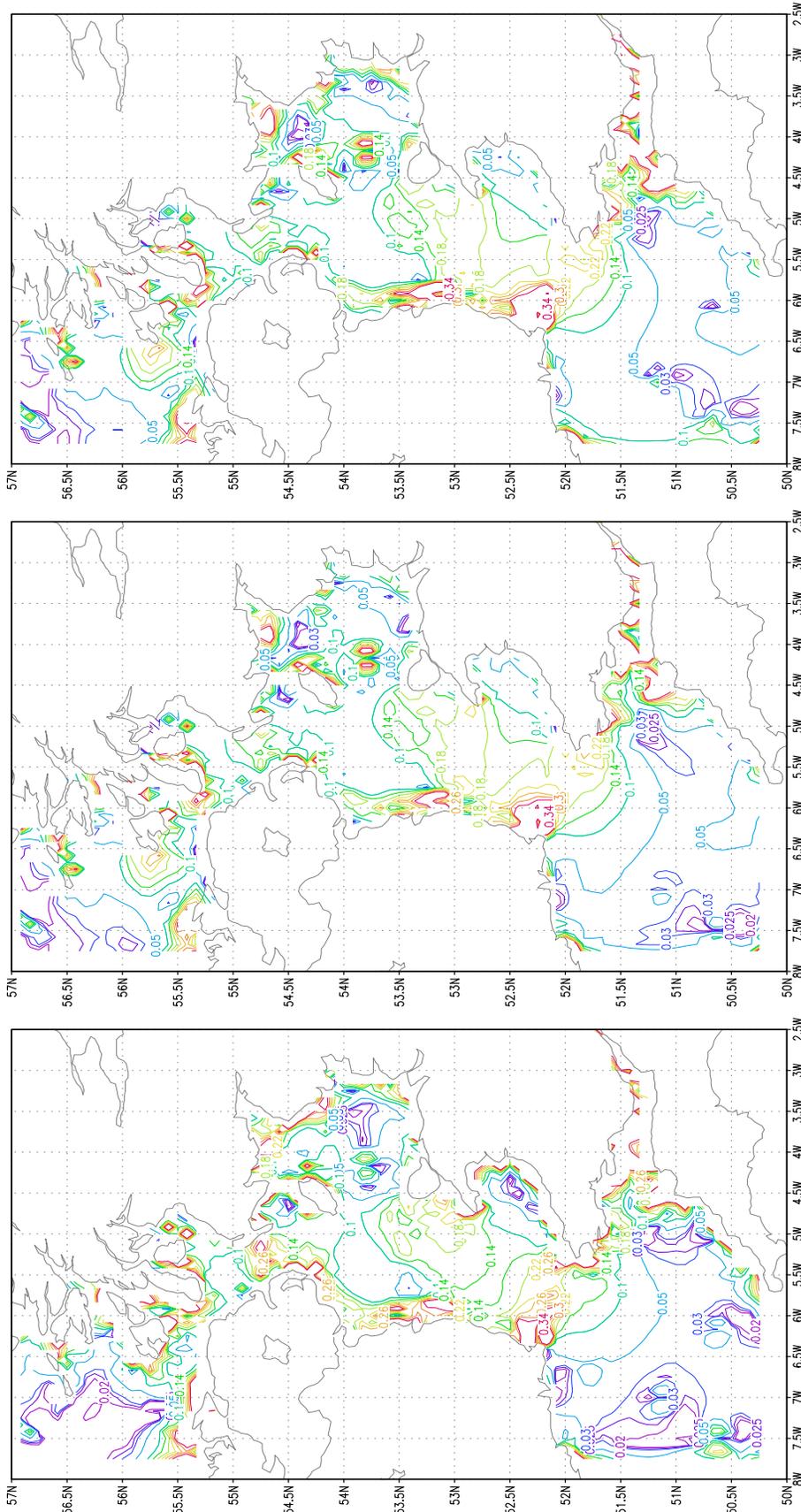


Abbildung 4.35:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [m/s] der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

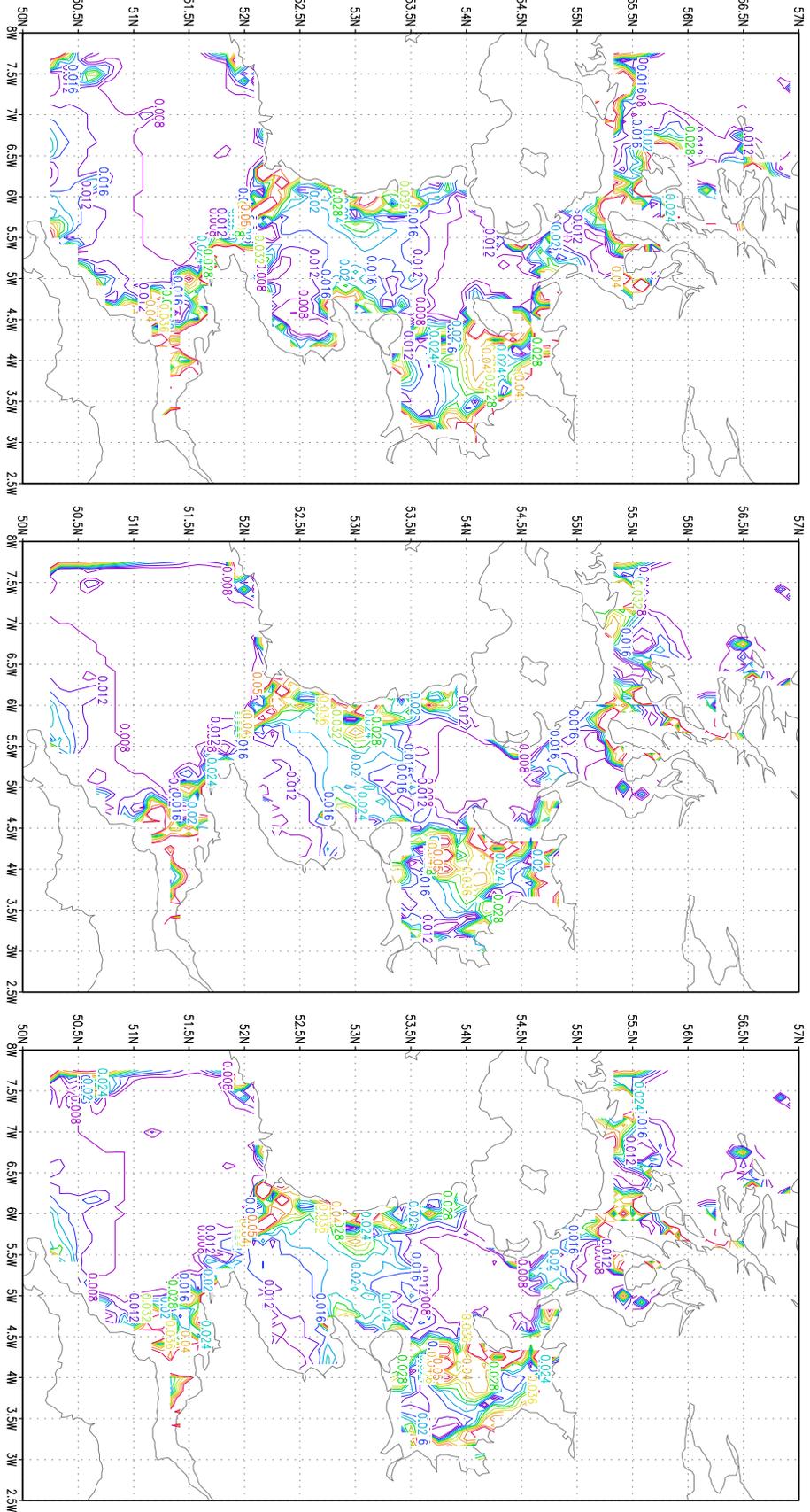
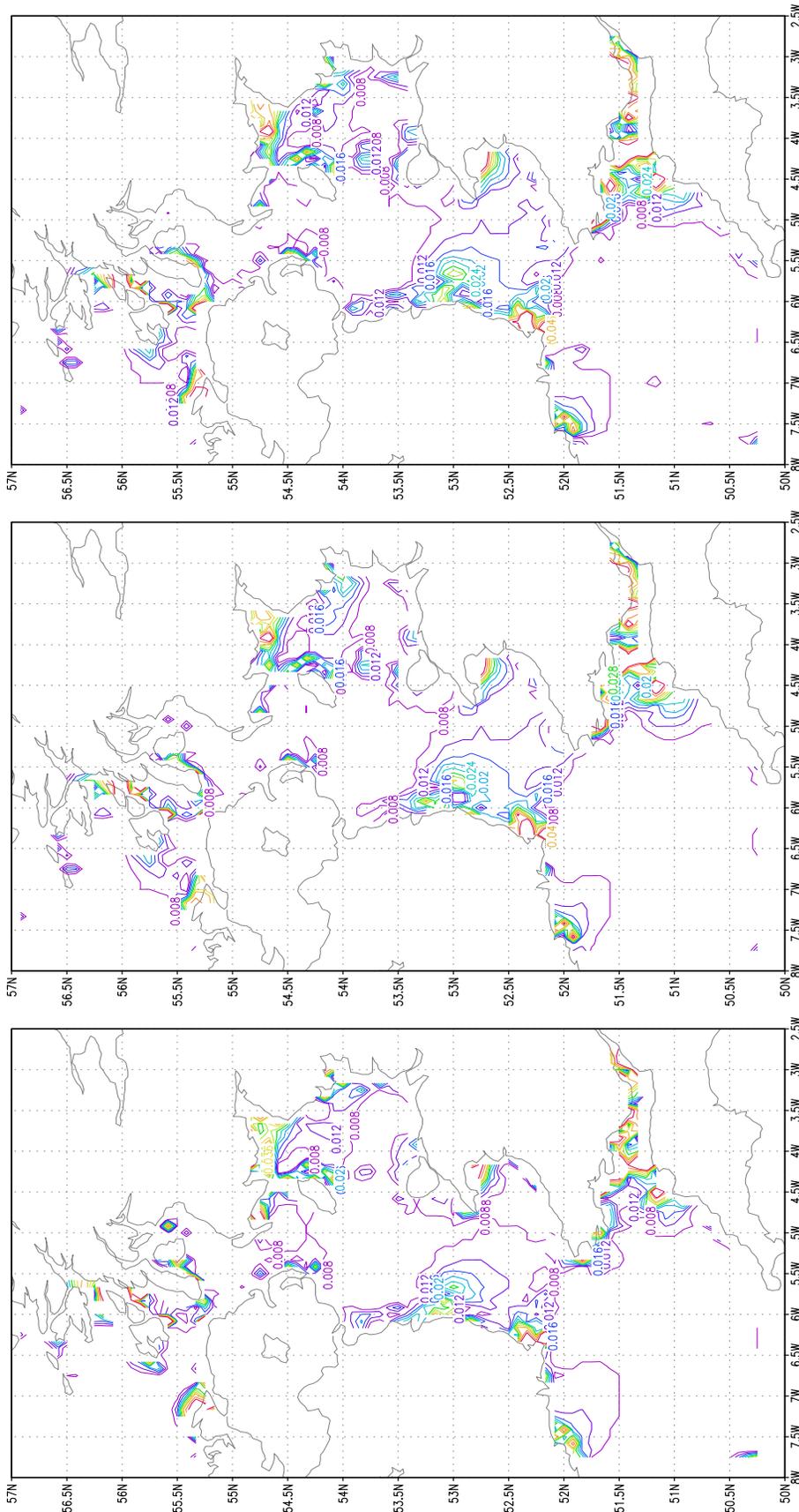


Abbildung 4.36:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[m/s]$ der Differenzen zw. den klassischen und den assimilierten meridionalen Geschwindigkeiten der M_4 durch die implizite aufjungerte Methode (LAV).



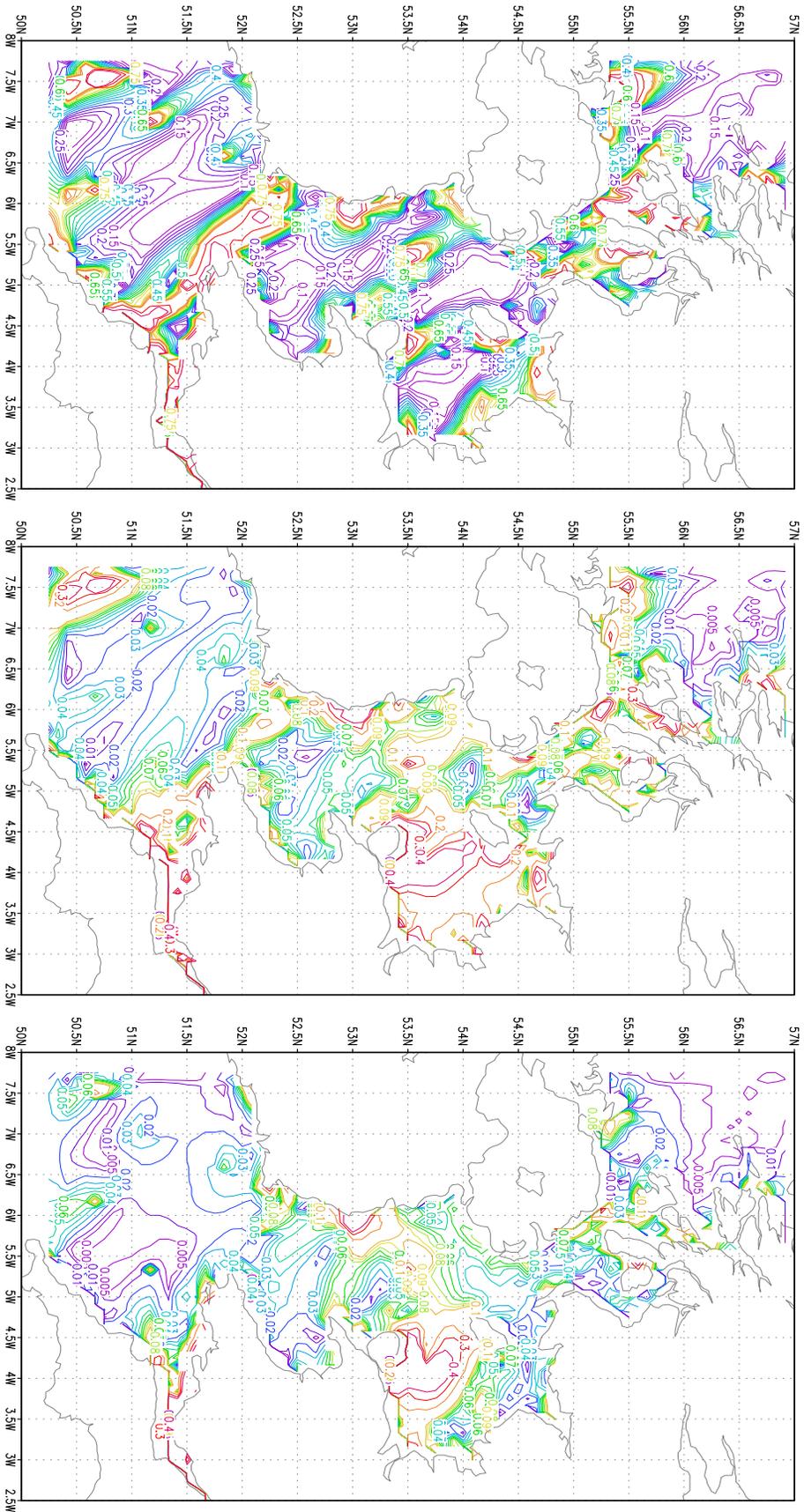


Abbildung 4.38:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der adjungierten Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der adjungierten Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-2}m^2/s^2$] der adjungierten Residuen der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

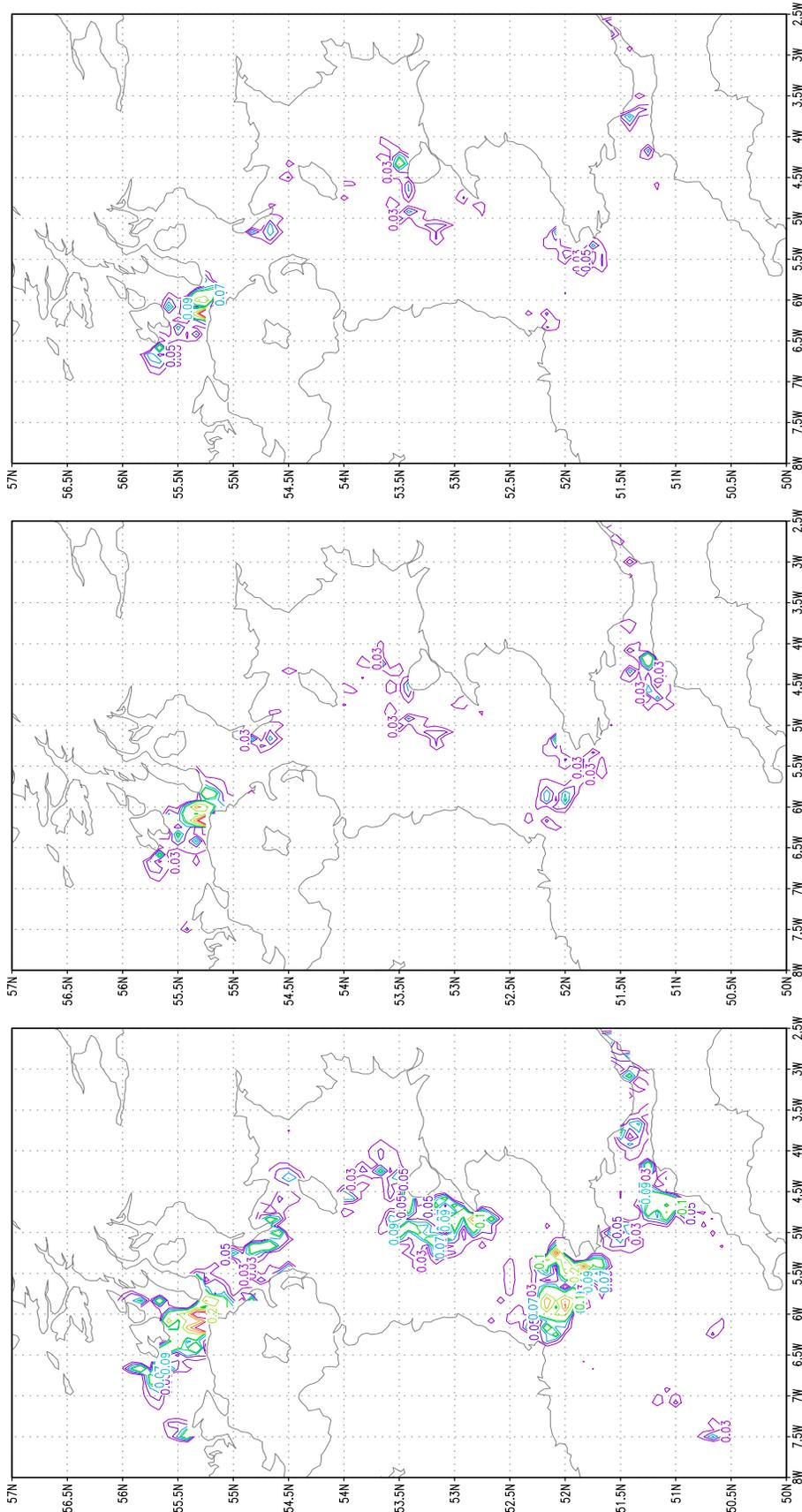


Abbildung 4.39:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

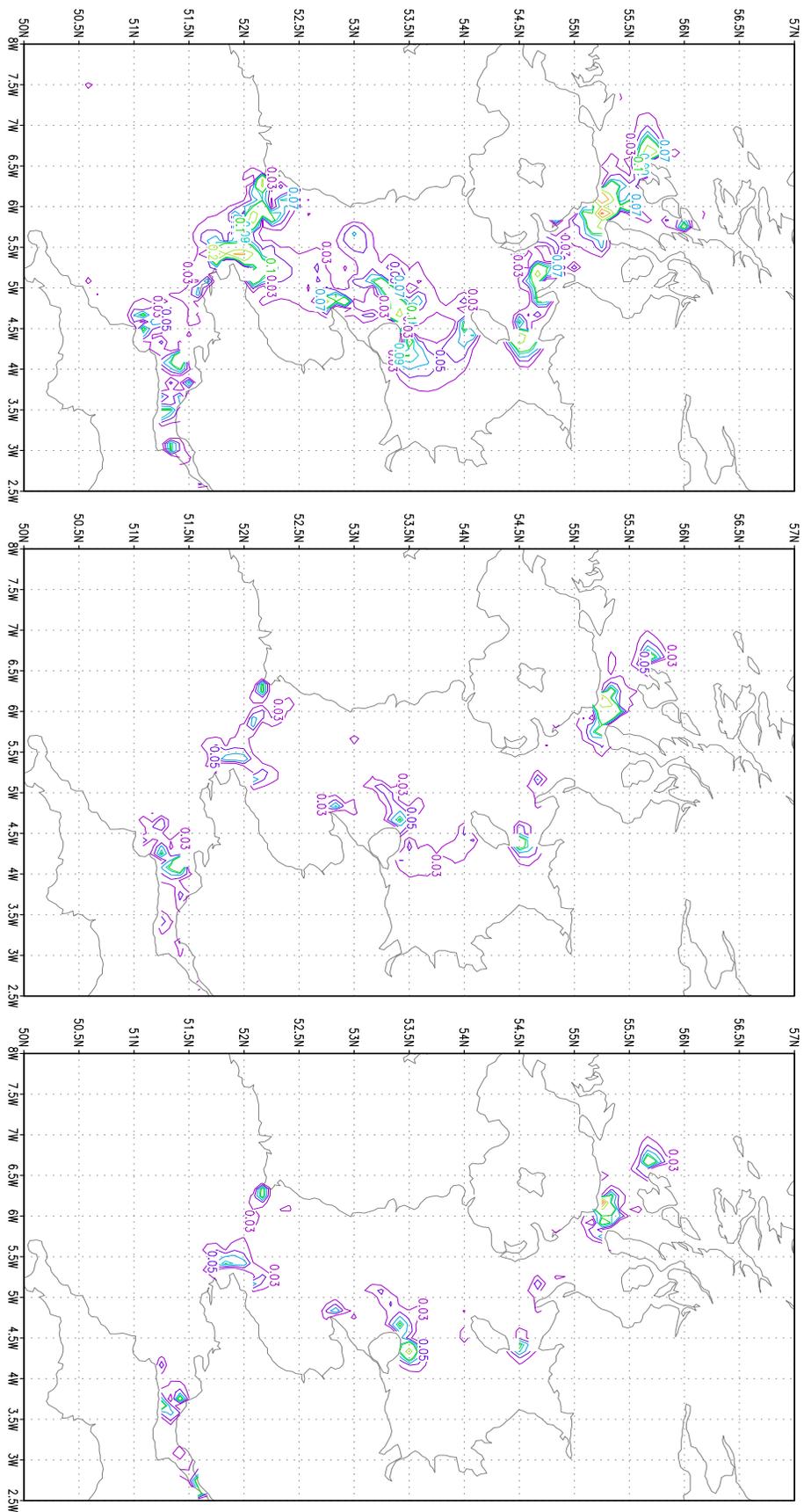


Abbildung 4.40:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

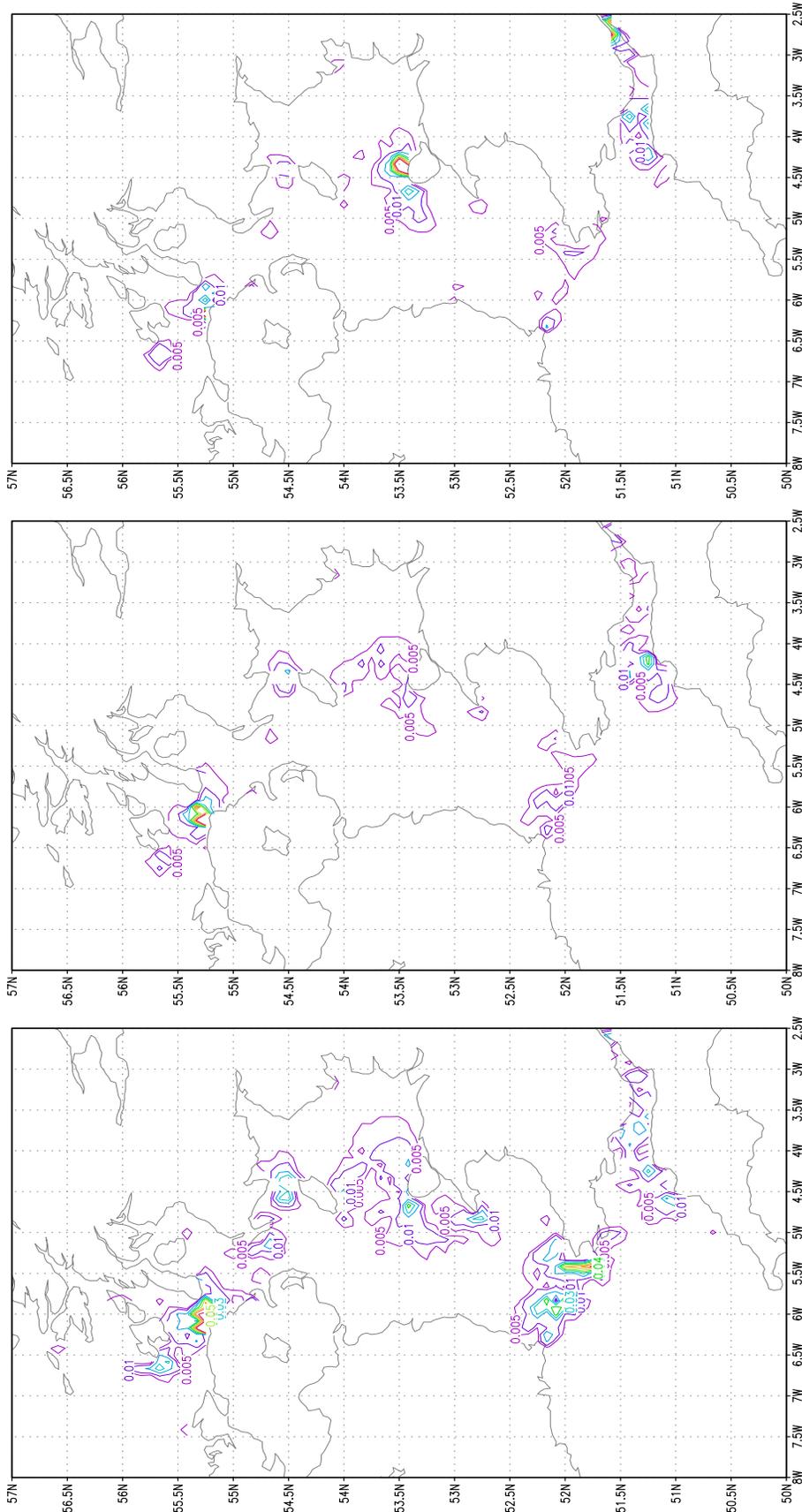


Abbildung 4.41:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1}m^2/s^2]$ des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1}m^2/s^2]$ des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1}m^2/s^2]$ des Beitrags der Advektionsterme der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

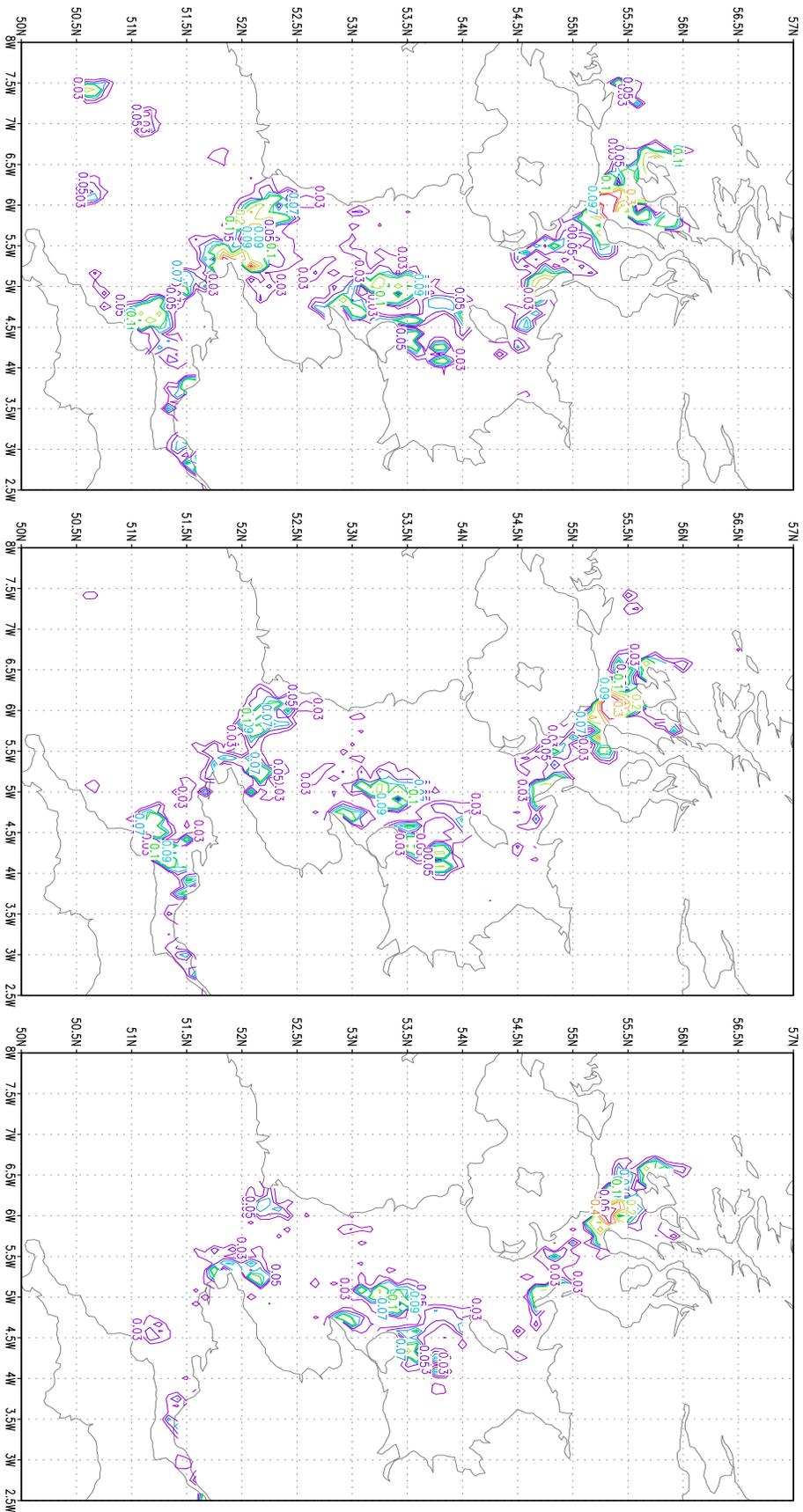


Abbildung 4.42:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

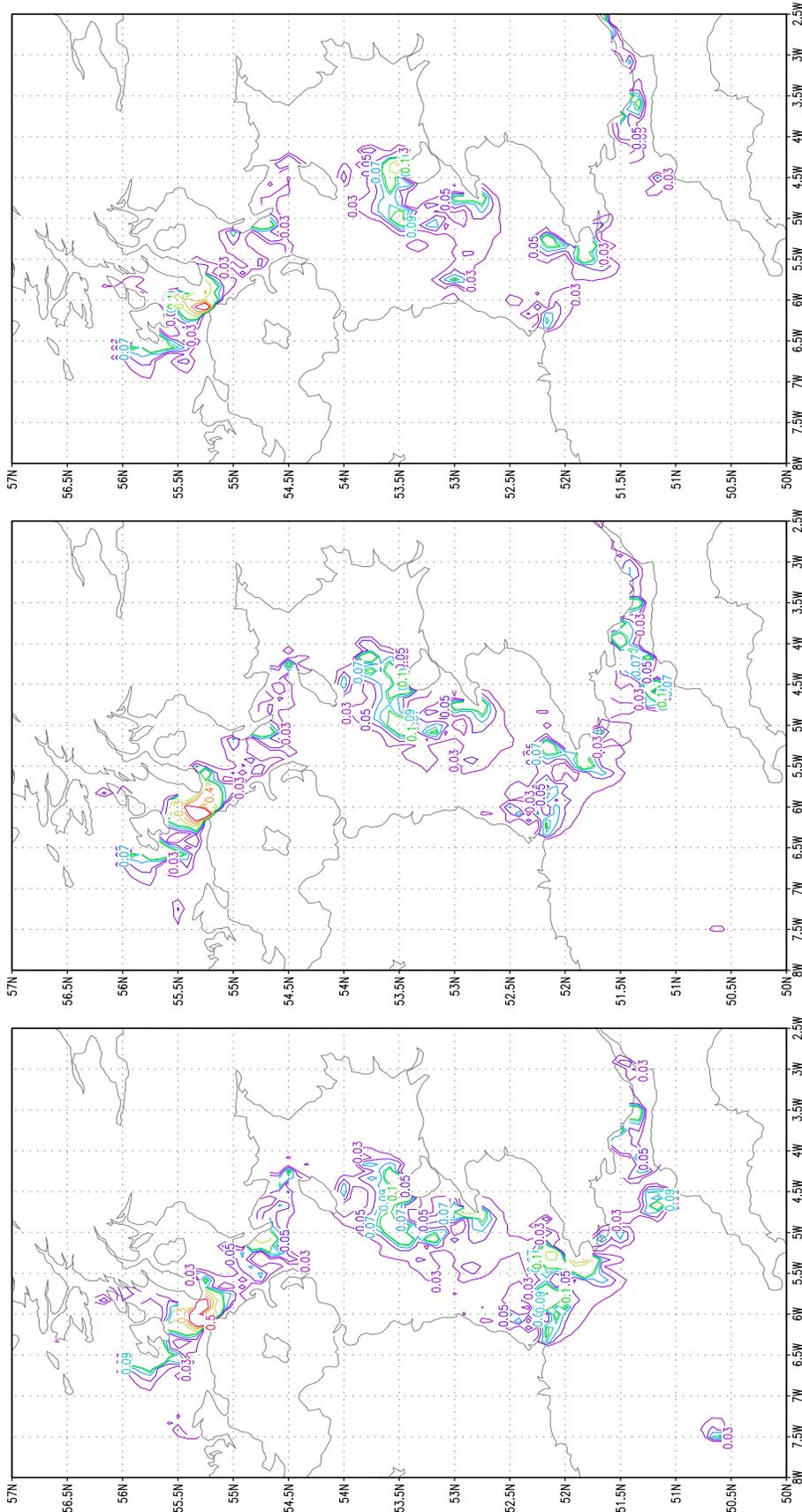


Abbildung 4.43:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

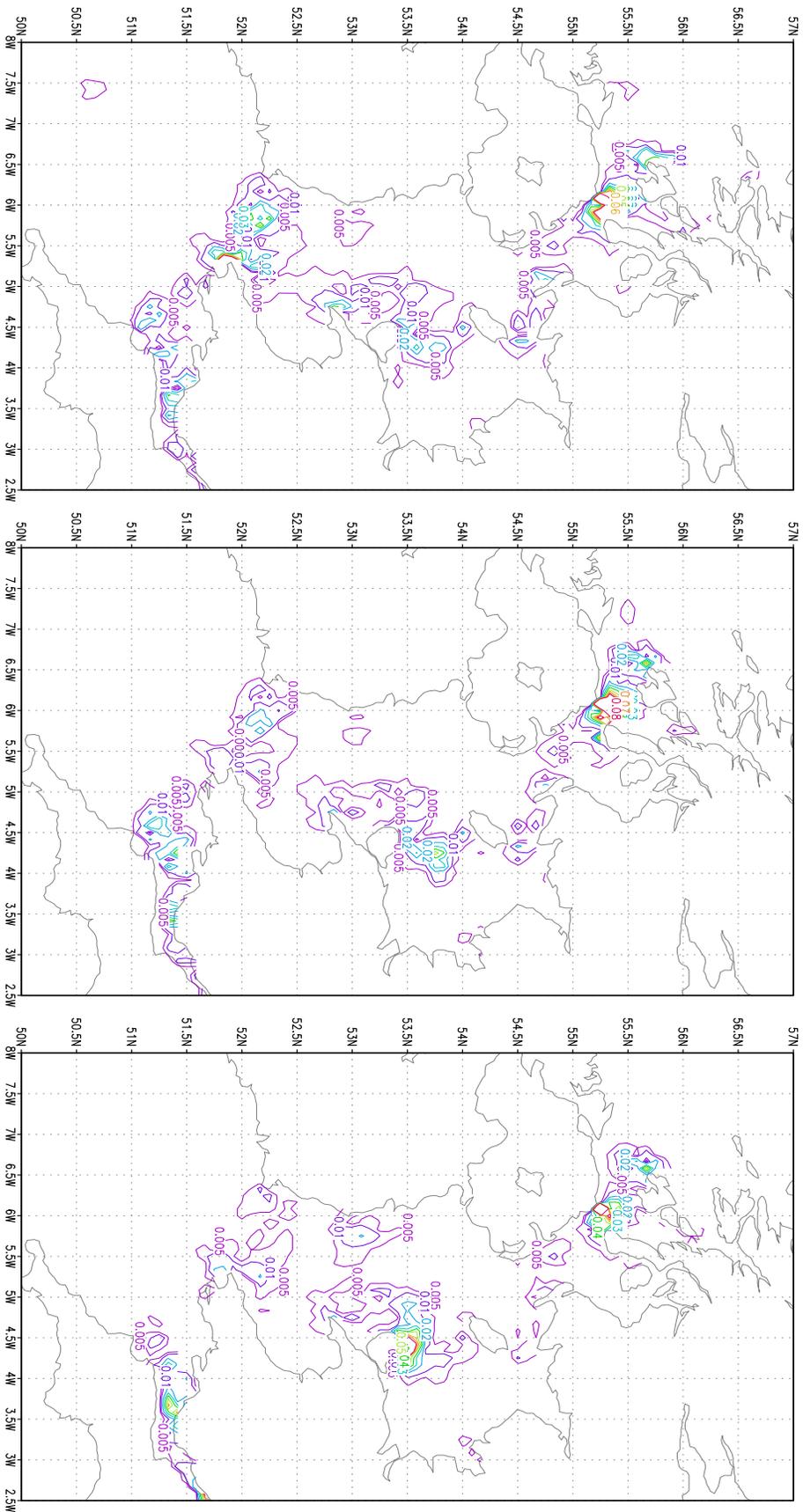


Abbildung 4.44:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags der Advektionsterme der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

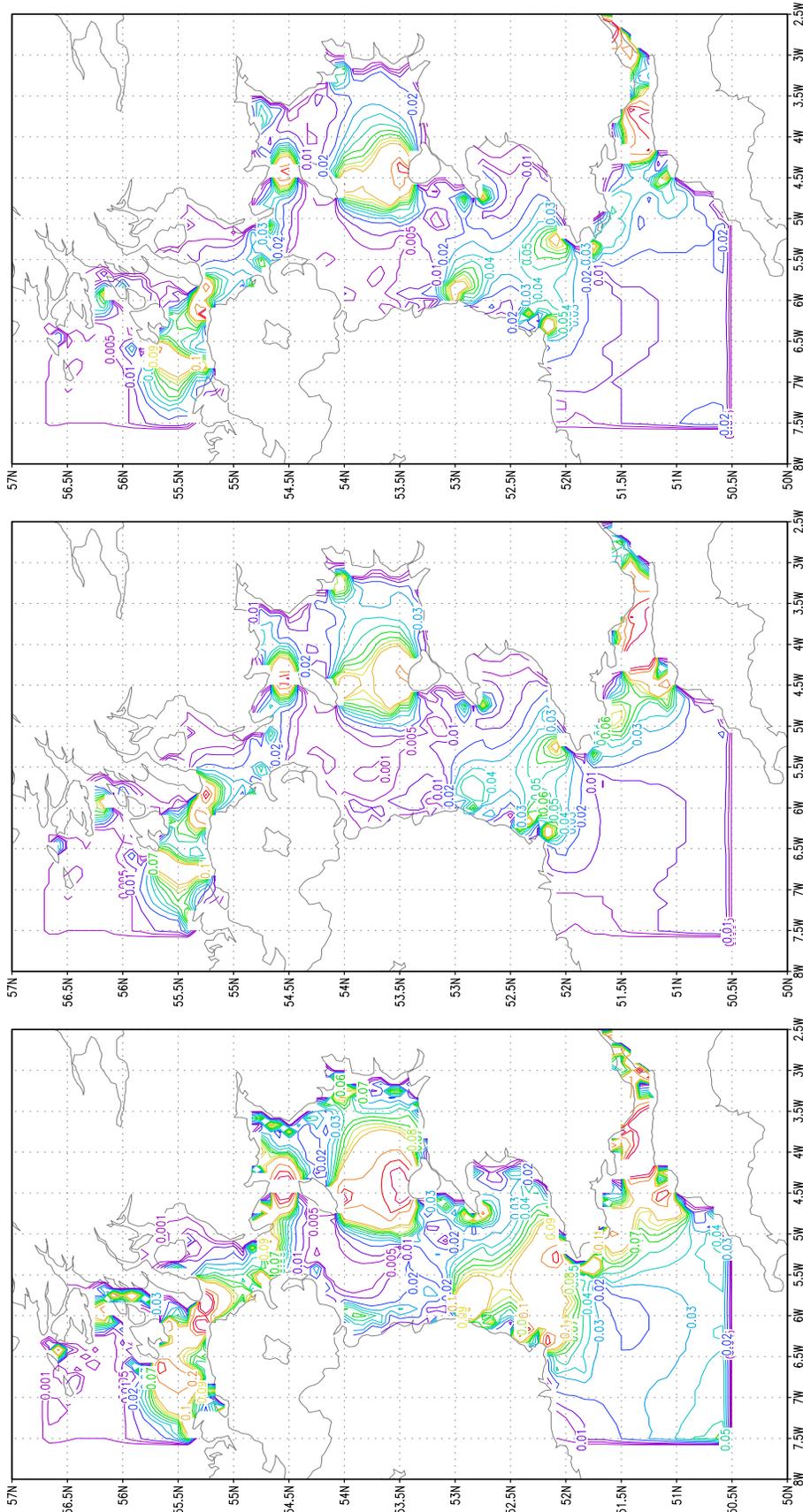


Abbildung 4.45:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

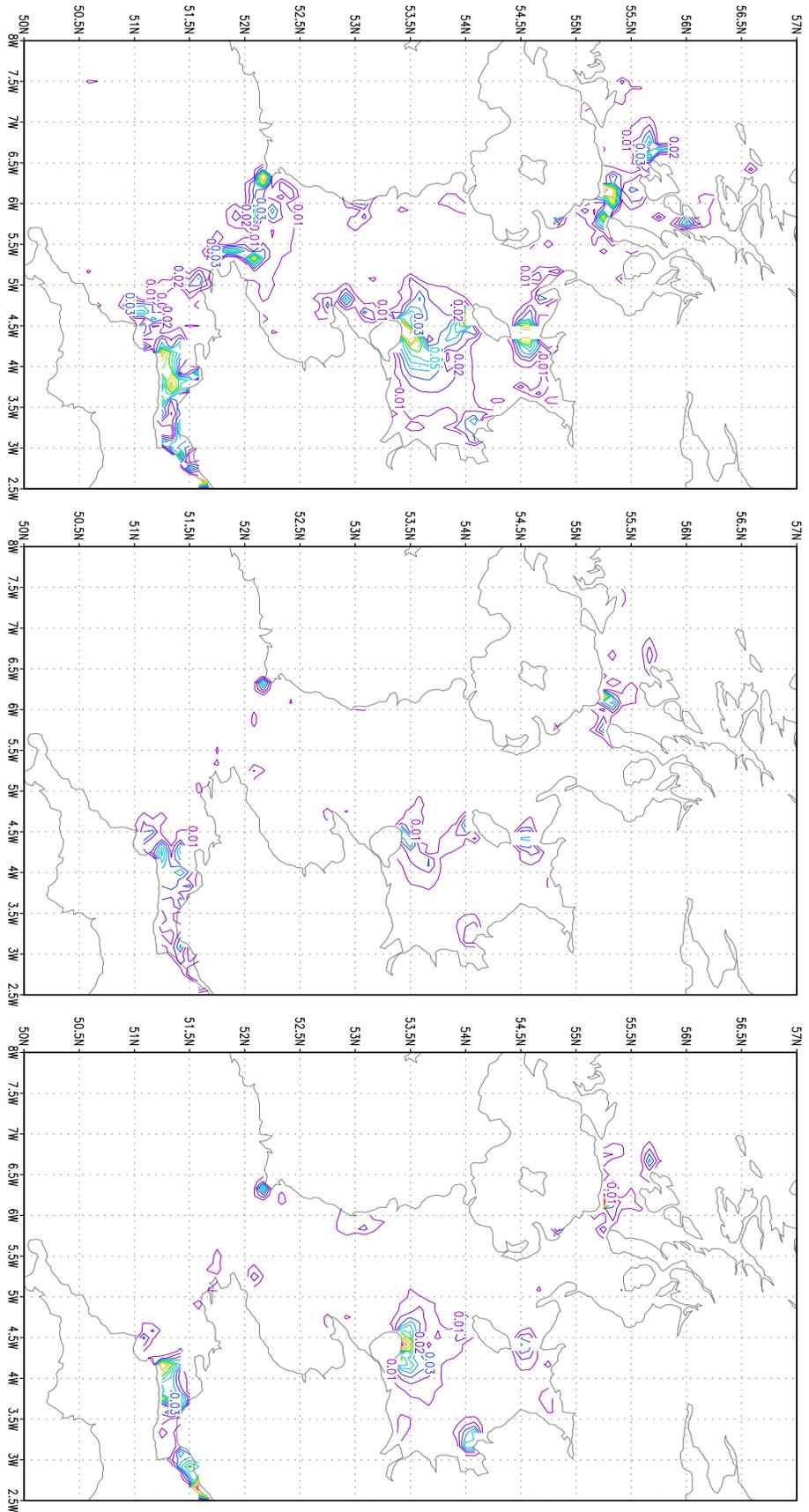


Abbildung 4.46:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

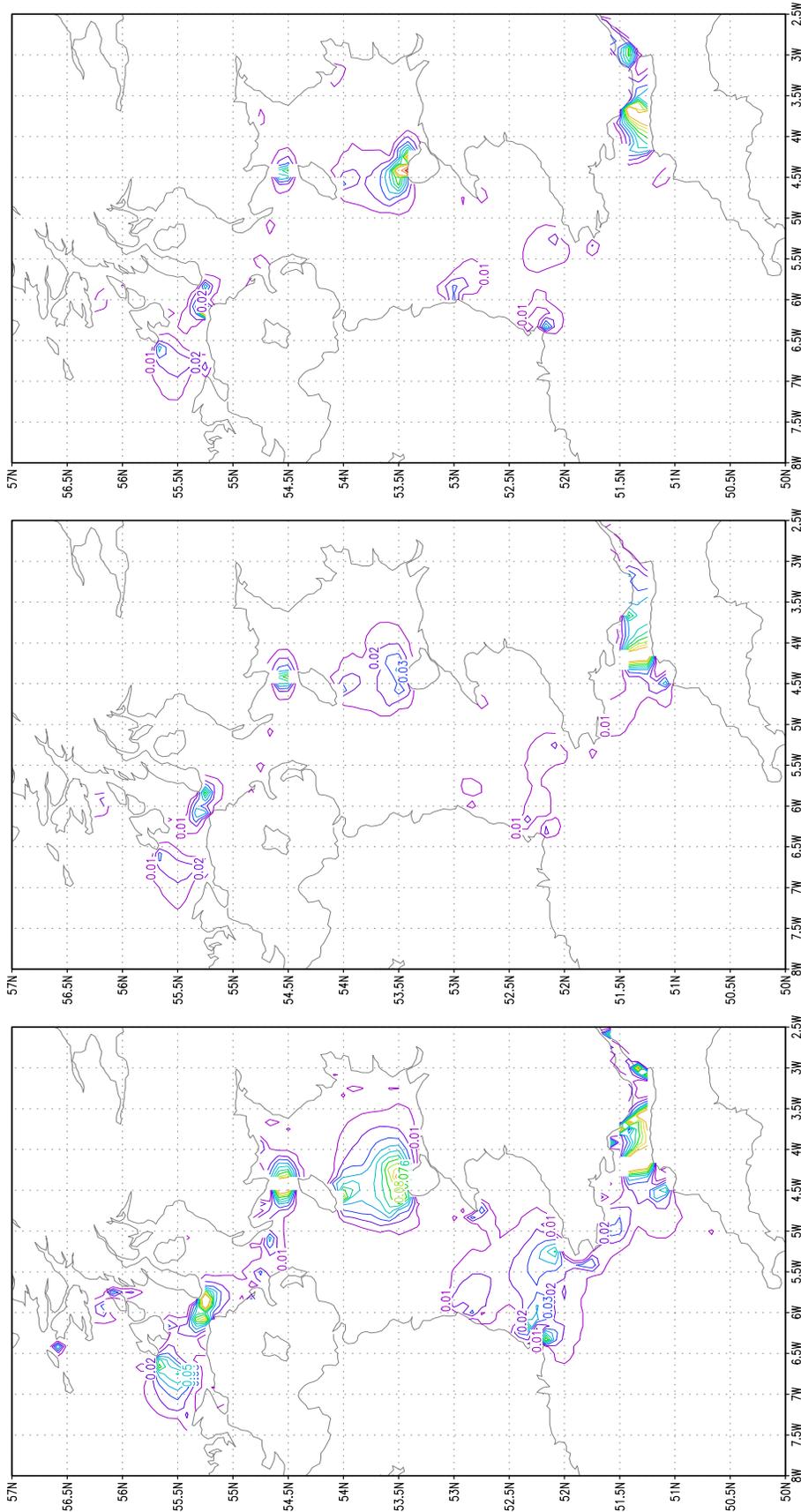


Abbildung 4.47:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1} m^2 / s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der zonalen Impulsgleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

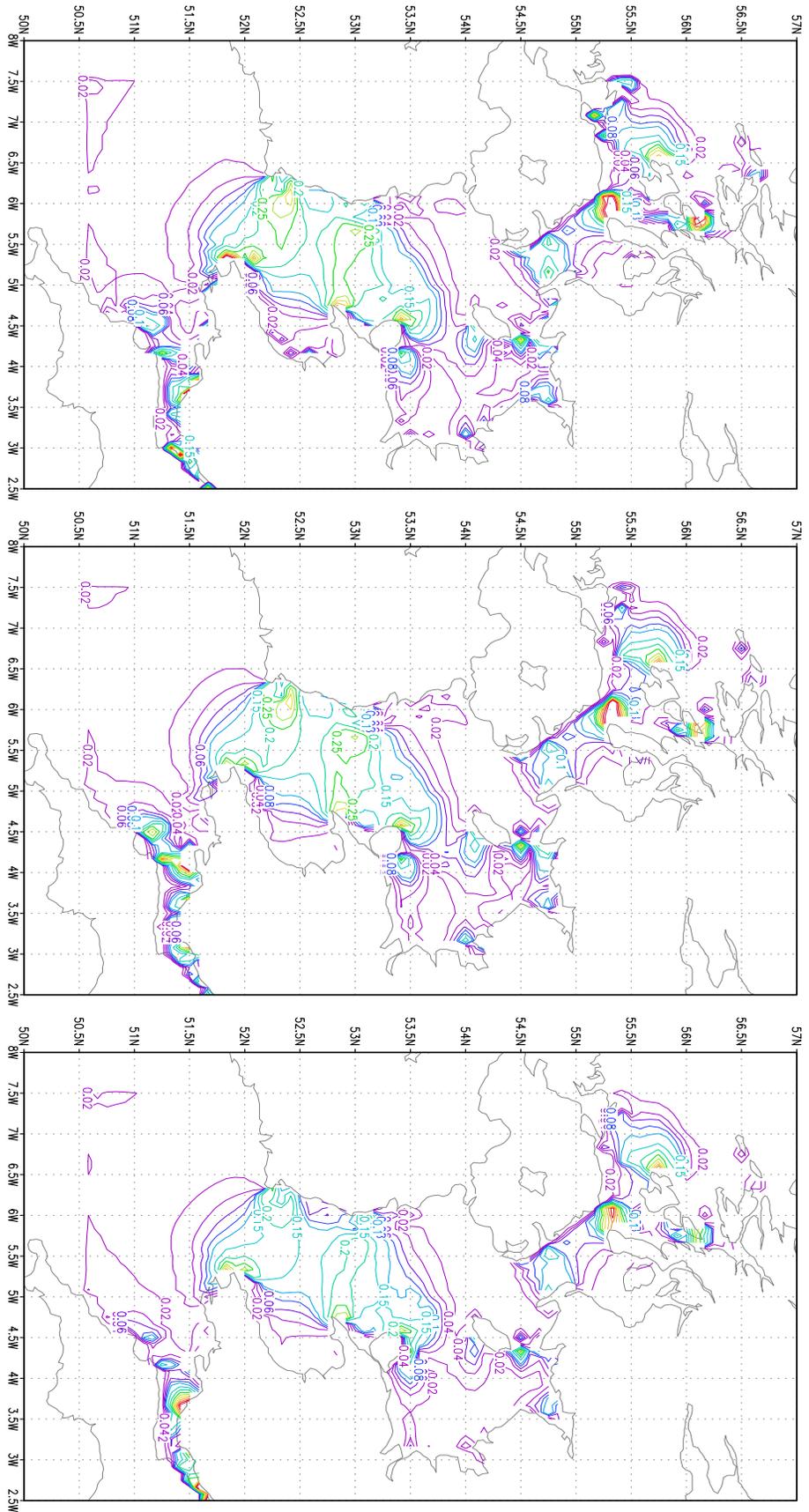


Abbildung 4.48:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_2 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_2 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

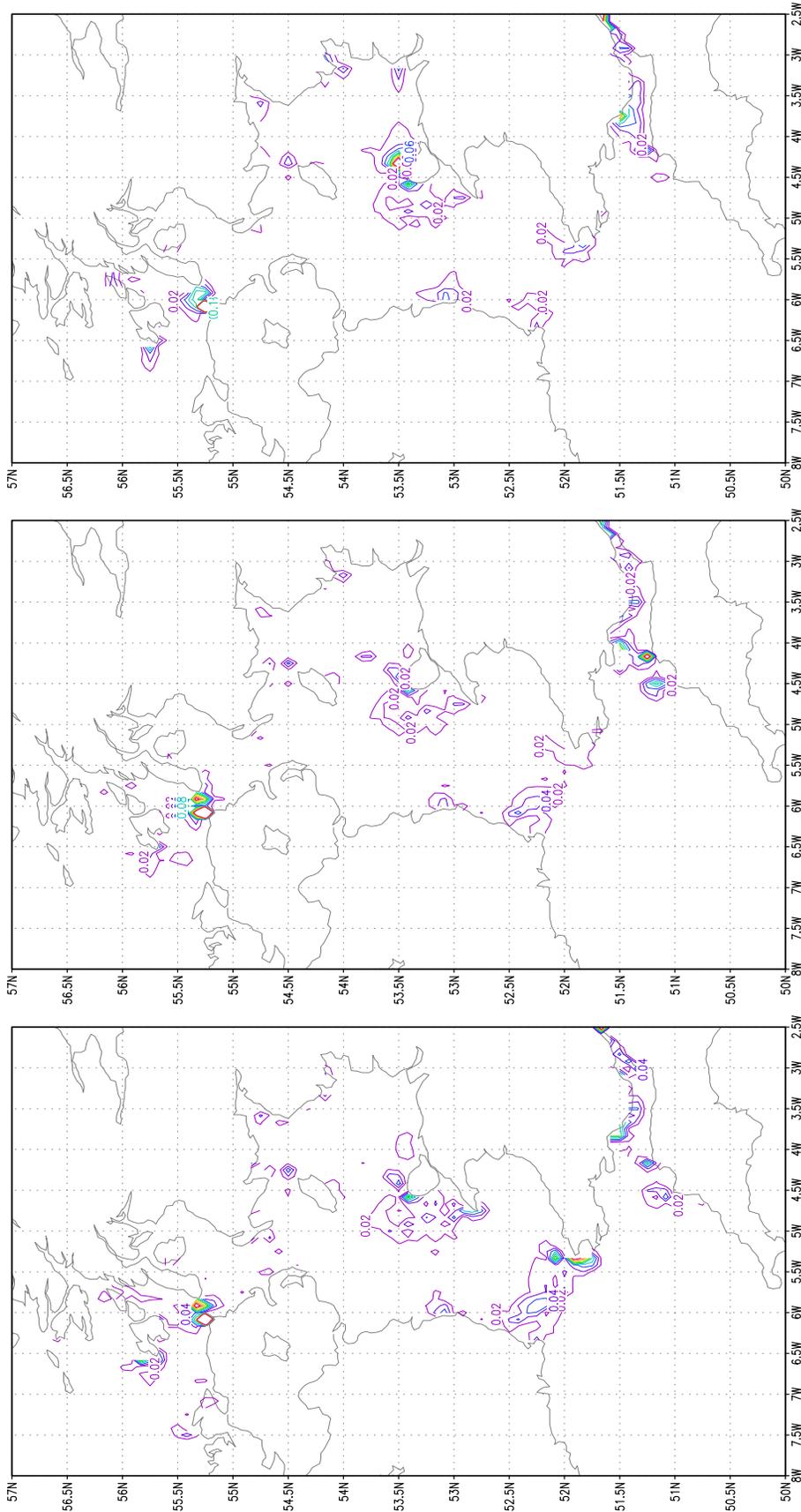


Abbildung 4.49:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1} m^2/s^2]$ des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1} m^2/s^2]$ des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude $[10^{-1} m^2/s^2]$ des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsgleichung der M_4 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

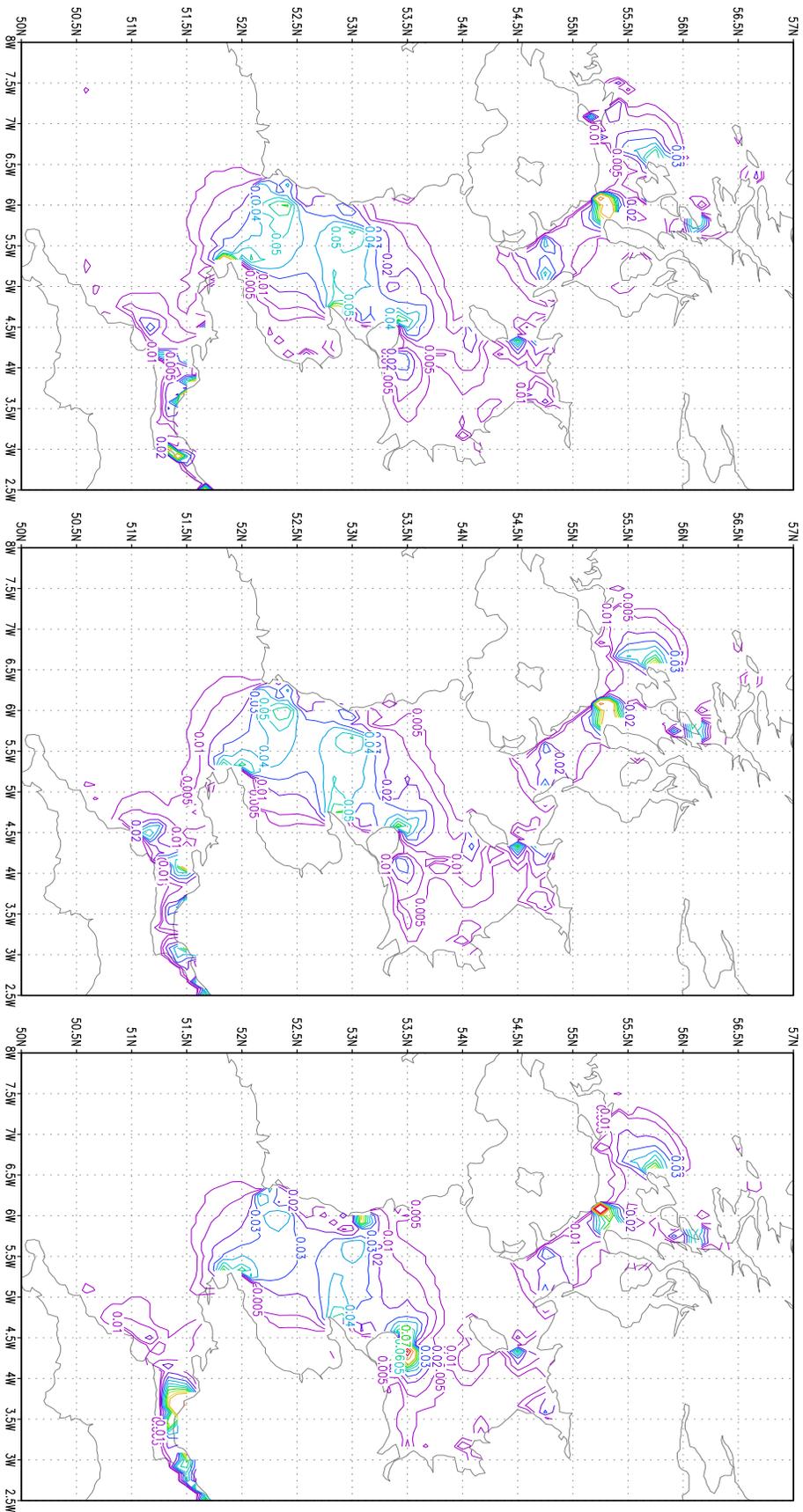


Abbildung 4.50:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die explizite direkte Methode (EDV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die implizite direkte Methode (IDV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude [$10^{-1}m^2/s^2$] des Beitrags des Reibungsterms der meridionalen Impulsleichung der M_6 durch die implizite adjungierte Methode (IAV).

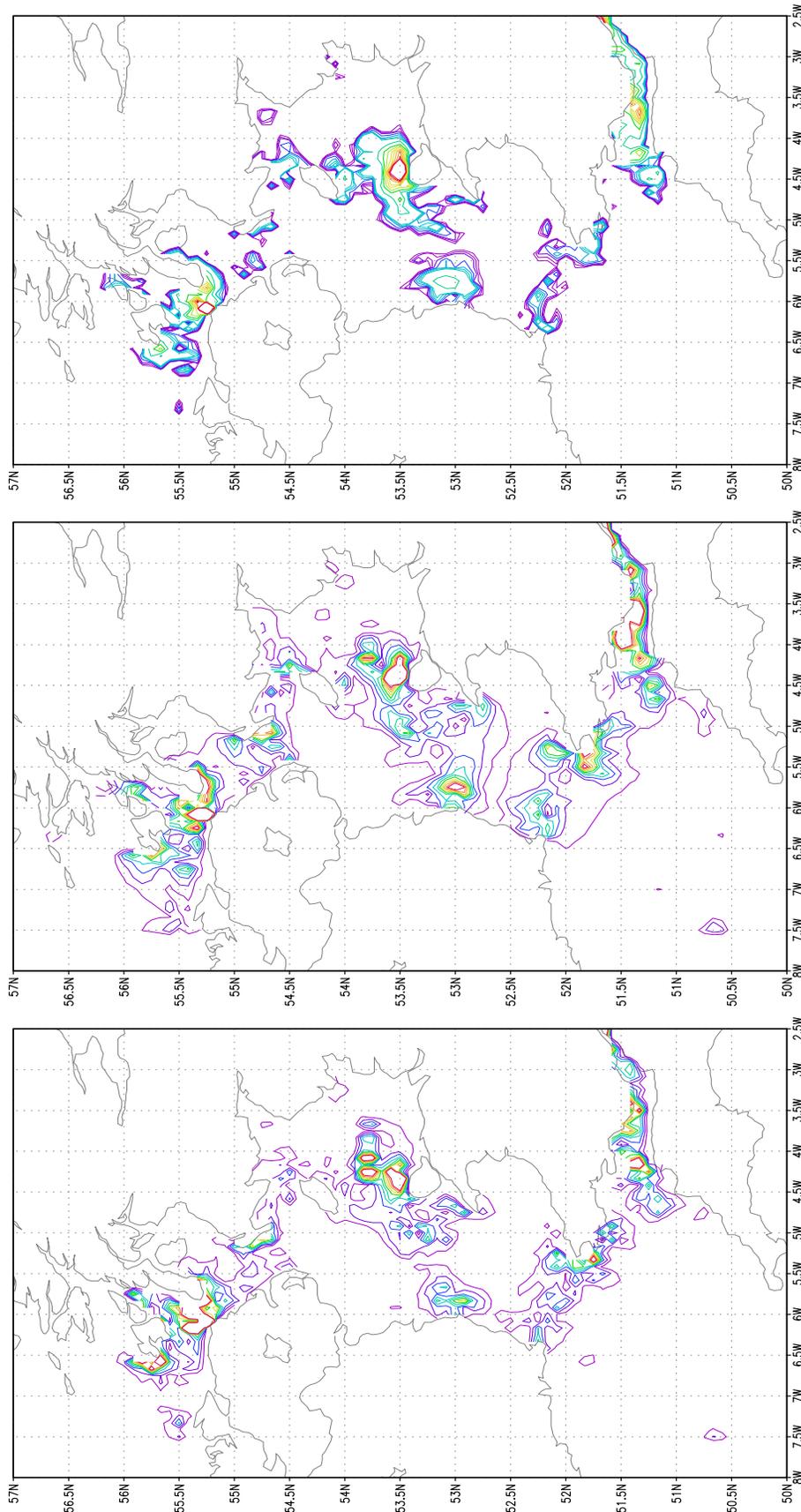


Abbildung 4.51:

- 1) Links: Die Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Wellendriftterme der Massenerhaltungsgleichung der M_2 durch die implizite semi-adjungierte Methode (IAV).
- 2) Mitte: Die Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Wellendriftterme der Massenerhaltungsgleichung der M_4 durch die implizite semi-adjungierte Methode (IAV).
- 3) Rechts: Die Linien gleicher Amplitude des Beitrags der Wellendriftterme der Massenerhaltungsgleichung der M_6 durch die implizite semi-adjungierte Methode (IAV).

Kapitel 5

Schlußfolgerung

Mit den klassischen numerischen Modellen können die wirklichen Werte oft nicht genügend genau wiedergegeben werden. Dieser Mangel ist wesentlich zurückzuführen auf physikalische und numerische Modelldefizite. Daß die Kombination von Modell und Daten diese Defizite partiell ausgleichen kann, ist seit längerem bekannt und wurde besonders erfolgreich mit linearen Gezeitenmodellen verifiziert. Nichtlineare Modellanwendungen mit der restringierten adjungierten Methode lieferten für das Anfangswertproblem der ozeanischen Zirkulation umfangreiche Erfahrungen. Die Behandlung inverser nichtlinearer ozeanischer Probleme mit dem dynamischen Modell als schwacher Zwangsbedingung wird jetzt im realistischen Maßstab zur Reproduktion nichtlinearer, sich zeitlich und räumlich verändernder Bewegungsfelder aufgenommen. In dieser Arbeit wurde das nichtlineare Gezeitenproblem in einem realen Randmeer untersucht. Dazu wurden drei unterschiedliche schwach restringierte inverse Methoden abgeleitet, mit den vorhandenen Wasserstandsdaten angewendet und die Ergebnisse im Hinblick auf die verbesserte Wiedergabe der Modellvariablen, d.h. der Wasserstände und der Volumentransporte, miteinander verglichen. Der Datenassimilation im realen Randmeer vorangestellt wurde die Behandlung eines fiktiven Datenassimilationsszenariums in einem schematischen Rechteckbecken natürlicher Abmessungen, um die abgeleiteten Methoden bei bekanntem Modelldefekt testen und ihre Leistungsfähigkeit abzuschätzen.

Die Zwillingsexperimente des fiktiven Szenariums zeigen, daß der vorgegebene systematische Fehler in der Schwerebeschleunigung durch die Assimilation von als wahr definierten Wasserständen der Haupt- und Obertiden aufgehoben werden kann. Schwierigkeiten, mit Hilfe von Daten Korrekturen zu erzielen, können jedoch bei den Obertiden auftreten, insbesondere dort wo die Flachwassereffekte stärker in Erscheinung treten und wo Daten ganz fehlen. Die Wasserstandsgleichungsresiduen haben Wellencharakter. Sie besitzen Amplitude und Phase einer stehenden Welle im Rechteckbecken. Im Falle der Anwendung der EDV-Methode ergibt sich in sehr guter Näherung als Impulsgleichungsresiduum das durch den vorgegebenen Defekt definierte in Gestalt der mit der Schweredifferenz multiplizierten Druckgradienten. Das Kontinuitätsgleichungsresiduum muß wegen der allein artifiziell veränderten Impulsgleichungen bei optimal gelungener Datenassimilation verschwinden. Im Falle der

EDV-Methode ergeben sich tatsächlich für die Haupttide und die Obertiden nahezu verschwindende Kontinuitätsgleichungsresiduen. Die semi-implizite direkte und die adjungierte Methode liefern wegen ihrer numerischen Formulierung trotz ansonsten sehr guter Ergebnisse keine entsprechende Reproduktion der theoretischen Residuen.

Im realistischen Modell wird die Kontinuitätsgleichung wegen der nicht hinreichend bekannten Tiefentopographie nicht sehr hoch gewichtet, so daß sich auch bei Anwendung von EDV nicht verschwindende Kontinuitätsgleichungsresiduen mit Wellencharakter ergeben.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Residuen und die Differenzen zwischen klassischer Lösung und datenbeeinflußten Lösungen harmonisch analysiert und die Komponenten untersucht. Es konnten so Hinweise auf physikalische Defekte der klassischen Lösung erhalten werden. Beispielsweise gelang es, Orte zu identifizieren, an denen die NLWW zwischen Haupt- und Obertiden bzw. die Resonanz unterschätzt worden waren.

Im Vergleich mit klassisch ermittelten Ergebnissen anderer Autoren ergibt sich, daß alle hier verwendeten Assimilationsmethoden (EDV, IDV und IAV) zumindest die Reproduktion der nichtlinearen Gezeitendynamik besser oder wenigstens gleichwertig realisieren können, ohne daß Maßnahmen der Gitternetzverfeinerung (Young et al., 2000) bzw. der Einführung eines zusätzlichen Reibungstensors (Sinha und Pingree, 1997) zum nichtlinearen Reibungsterm ergriffen werden müssen.

Die direkte und adjungierte Methode sind durchaus geeignet, andere nichtlineare zeitabhängige Probleme mit größeren Dimensionen wie z.B. die globale Zirkulation zu behandeln, und ermutigen zu weiteren Entwicklungen.

Als Vor- bzw. Nachteile der getesteten und angewendete vier unterschiedlichen inversen Methoden vermochten die folgend angegeben ermittelt werden.

EDV: Sowohl beim Zwillings- als auch beim Feldexperiment zeigt die EDV-Methode die beste Eignung zur Reproduktion der Feldvariablen. Beim Experiment im idealisierenden Becken gibt diese Methode die wahren Residuen sehr gut wieder, rekonstruiert mit Hilfe hochgenauer (fiktiver) Daten die artfiziell verfälschte Modellphysik fast perfekt. Im realen Feldexperiment zeigen die Residuen eine dem Charakter und dem räumlichen Maßstab der Gezeit entsprechende Verteilung, die vor dem Hintergrund der Ergebnisse des Zwillingsexperimentes auf eine partielle dateninduzierte Korrektur der fehlerbehafteten Modelleigenschaften hindeuten. Der Aufwand an Rechenzeit und der Speicherplatzbedarf können die Anwendbarkeit auf Probleme größerer Dimension einschränken.

IDV: Mit dieser Methode werden nur wenig schlechtere Ergebnisse als mit EDV für das schematische Rechteckbecken und für das reale Meeregebiet der Irischen und Keltischen See gewonnen. Auch mit IDV werden vermittels der erzeugten Residuen nach allen Erfahrungen Schwachstellen der klassischen Lösung und speziell Regionen ursprünglich nicht hinreichend gut dargestellter NLWW zwischen den Gezeitenkomponenten identifiziert. Der vergleichsweise geringe Bedarf an Rechenzeit und Speicherkapazität weist die IDV-Methode zusammen mit ihrer Leistungsfähigkeit

als für die Durchführung aufwendigerer Datenassimilationsexperimente geeignetste Methode aus.

IAV: Die Erwartung hinsichtlich der Aussagekraft der Residuenfelder, die sich auf deren Beschreibung durch die adjungierten Gleichungen stützen, konnte nicht voll erfüllt werden. Wegen des relativ hohen Rechenzeitbedarfs und der komplizierten numerischen Formulierung wird die weitergehende Nutzbarkeit nicht so hoch eingeschätzt. Als Vorteile wird die leichte Überführung in andere gängige Methoden, wie z.B. die Representer-Methode, VCA und die stark restringierte Methode, angesehen.

EAV: Ergebnisse der expliziten adjungierten Verfahrens wurden in der vorliegenden Arbeit nicht gezeigt. EAV benötigt die meisten Speicherplätze und die längste Rechenzeit.

Direkte Anwendung der beiden adjungierten Methoden (IAV und EAV) ist ohne Modifikation für aufwendigere Gezeitenmodellierungen, etwa die Ermittlung eines größeren Satzes von Kombinationstiden, weniger geeignet. Dagegen sind die beiden direkten Methoden mit ihren Erweiterungsmöglichkeiten als vielseitig und umfassend anwendbar zu betrachten.

Literaturverzeichnis

- [Alcock (1982a)] Alcock G. A. (1982a). Offshore bottom pressure records, North Channel of Irish Sea. IOS–data report No. **27**, Institute of Oceanographic Sciences.
- [Alcock (1982b)] Alcock G. A. (1982b). Offshore bottom pressure records, Celtic Sea, 1980. IOS–data report No. **28**, Institute of Oceanographic Sciences.
- [Alcock and Howarth (1978)] Alcock G. A. and Howarth, M. (1978). Offshore tide gauge & moored current meter records from the Irish Sea, 1977. IOS–data report No. **15**, Institute of Oceanographic Sciences.
- [Alcock and Pugh (1982)] Alcock G. A. and Pugh, D. T. (1982). Observation of tides in the Severn Estuary and Bristol Channel. IOS–report No. **112**, Institute of Oceanographic Sciences.
- [Alcock et al. (1980)] Alcock G. A., MacDonald, D. C. C., and Vassie, J. M. (1980). Offshore bottom pressure records from the Celtic Sea and South-West Approaches to the U.K. IOS–data report No. **22**, Institute of Oceanographic Sciences.
- [Anderson et al. (2000)] Anderson L. A., Robinson A. R. and Lozano C. J. (2000). Physical and biological modeling in the Gulf stream region: I. Data assimilation methodology. *Deep-Sea Research I*, **47**, 1787–1827.
- [Backhaus (1983)] Backhaus J. O. (1983). A semi-implicit scheme for the shallow water equations for applications to shelf sea modelling. *Continental Shelf Research*, **2**, 243–254.
- [Bennett (1992)] Bennett A. F. (1992). Inverse methods in physical oceanography. Cambridge University Press.
- [Bennett and McIntosh (1982)] Bennett A. F. and McIntosh P. C. (1982). Open ocean modeling as an inverse problem: Tidal theories. *J. Phys. Oceanogr.*, **12**, 1004–1018.
- [Bertsekas (1982)] Bertsekas D. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange multiplier methods*. Academic Press.

- [Bogden and O'Donnel, 1998] Bogden P. S. and O'Donnel J. (1998). Generalized inverse with shipboard current measurements: tidal and nontidal flows in Long Island Sound. *J. of Marine Research*, **56**(5), 995–1027.
- [Brasseur et al. (1999)] Brasseur P., Ballabrera-Poy J. and Verron J. (1999). Assimilation of altimetric data in the mid-latitude oceans using the Singular Evolutive Extended Kalman filter with an eddy-resolving, primitive equation model. *J. of Marine Systems*, **22**, 269–294.
- [Bratseth (1986)] Bratseth A. M. (1986). Statistical interpolation by means of successive corrections. *Tellus*, **38A**, 439–447.
- [Breivik and Sætra (2001)] Breivik Ø. and Sætra Ø. (2001). Real time assimilation of HF radar currents into a coastal ocean model. *J. of Marine Systems*, **28**, 161–182.
- [Bryson and Ho (1975)] Bryson A. E. and Ho Y. C. (1975). *Applied optimal control*. Hemisphere Publishing Corp., New York, NY, 1975.
- [Copeland and Bayne (1998)] Copeland G. J. M. and Bayne G. L. S. (1998). Tidal flow modelling using a direct minimisation method. *Coastal Engineering*, **34**, 129–161.
- [Courtier (1997)] Courtier P. (1997). Variational methods. *J. of the Meteorological Society of Japan*. **75**, 211–218.
- [Courtier and Talagrand (1987)] Courtier P. and Talagrand O. (1987). Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II:Numerical results. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **113**, 1329–1347.
- [Cox (1984)] Cox M. D. (1984). A primitive equation, 3-dimensional model of the ocean. *CFDL Ocean Group Tech. Rep. /Princeton University*, **1**.
- [Daley (1991)] Daley R. (1991). *Atmospheric data analysis*. Cambridge University Press.
- [Davies (1986)] Davies A. M. (1986). A three-dimensional model of the northwest european continental shelf, with application to the M_4 tide. *J. Phys. Oceanogr.*, **16**, 797–813.
- [Davies and Jones (1992)] Davies A. M. and Jones J. E. (1992). A three-dimensional model of the M_2 , S_2 , N_2 , K_1 and O_1 in the Celtic and Irish Seas. *Progr. Oceanogr.*, **29**, 197–234.
- [Derber (1989)] Derber J. (1989). A variational continuous assimilation technique. *Mon. Weather Rev.*, **117**, 2437–2446.
- [Derber and Rosati (1989)] Derber J. and Rosati A. (1989). A global oceanic data assimilation system. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1333–1347.

- [Doodson (1921)] Doodson, A. T. (1921). The harmonic development of the tide generating potential. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **100**, 305–329.
- [Egbert and Erofeeva (2002)] Egbert G. D. and Erofeeva S. Y. (2002). Efficient inverse modeling of barotropic ocean tides. *J. Atmos. Ocea. Technology*, **19**(2), 183–204.
- [Egbert et al. (1994)] Egbert G. D., Bennett A. F. and Foreman G. G. (1994). TOPEX/POSEIDON tides estimated using a global inverse model. *J. Geophys. Res.*, **99**(C12), 84 821–84 852.
- [Essen et al. (1999)] Essen H.-H, Gurgel K.-W. and Schlick T. (1999). Measurement of ocean wave height and direction by means of HF radar: an empirical approach. *Deutsche Hydrographische Zeitschrift*, **51**(4), 369–383.
- [Fukumori (2001)] Fukumori I. (2001). Data assimilation by models. In: *Satellite altimetry and earth sciences*. Fu, L.-L. and Cazenave A. (eds.). International geophysics series, **69**, 237–265.
- [Gekeler (1995)] Gekeler J. (1995). Assimilating data into a tidal model of the Irish and Celtic seas. *Continental Shelf Research*, **15**(11-12), 1382–1408.
- [Giering (1995)] Giering R. (1995). *Erstellung eines adjungierten Modells zur Assimilierung von Daten in ein Modell der globalen ozeanischen Zirkulation*. Dissertation. Universität Hamburg.
- [Hansen (1949)] Hansen W. (1949). Die halbtägigen Gezeiten im Nordatlantischen Ozean. *Deutsche hydrographische Zeitschrift*, **2**, 44–61.
- [Howarth and Pugh (1983)] Howarth M. J. and Pugh D. T. (1983). Observations of tides over the continental shelf of north-west europe. In: *Physical oceanography of coastal and shelf seas*. Johns B. (ed.). Elsevier oceanographie series, **35**, 135–188.
- [Jones and Davies (1996)] Jones J. E. and Davies A. M. (1996). A high-resolution, three-dimensional model of the M_2 , M_4 , M_6 , S_2 , N_2 , K_1 and O_1 tides in the eastern Irish Sea. *Estuarine, Coastal & Shelf Science*, **42**(3), 311–346.
- [Kantha (1995)] Kantha L. H. (1995). Barotropic tides in the global oceans from a nonlinear tidal model assimilating altimetric tides. 1. Model description and results. *J. Geophys. Res.*, **100**(C12), 25 283–25 308.
- [Le Dimet and Talagrand (1986)] Le Dimet F.-X. and Talagrand O. (1986). Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical aspects. *Tellus*, **38**(A), 97–110.
- [Le Provost (1986)] Le Provost C. (1986). The variational inverse method for the general circulation in the ocean. In *Variational methods in geosciences.*, Y.K. Sasaki, (eds.). *ELSEVIER*, 55–70.

- [Le Provost and Salmon (1986)] Le Provost C. and Salmon R.(1986). A variational method for inverting hydrographic data. *J. of Marine Research*, **44**, 1–34.
- [Le Provost et al. (1998)] Le Provost C., Lyard F., Molines J. M., Genco M. L. and Rabilloud F. (1998). A hydrodynamic ocean tide model improved by assimilating a satellite altimeter–derived data set. *J. Geophys. Res.*, **103**(C3), 5513–5529.
- [Lewis and Derber (1985)] Lewis J. M. and Derber J. C. (1985). The use of adjoint equations to solve a variational adjustment problem with advective constraints. *Tellus*, **37A**, 309–322.
- [Lin and Chai (2001)] Lin C.-L. and Chai T. (2001). Retrieval of flow structures in a convective boundary layer using an adjoint model: Identical twin experiments. *J. of The Atmospheric Sciences*, **58**, 1767–1783.
- [Lorenc (1988)] Lorenc A. C. (1988). Optimal nonlinear objective analysis. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, **114**, 205–240.
- [Lu and Browning (1998)] Lu C. and Browning G. L. (1998). The impact of observational and model errors on four-dimensional variational data assimilation. *J. of the Atmospheric Sciences*, **55**, 995–1037.
- [Lyard (1999)] Lyard F. H. (1999). Data assimilation in a wave equation: A variational representer approach for the Grenoble tidal model. *J. of Computational Physics*, **149**(1), 1–31.
- [McIntosh (1984)] McIntosh P. C. (1984). *Tidal modeling as an inverse problem*. Dissertation, Monash University, Australien.
- [McIntosh and Bennett (1984)] McIntosh P. C. and Bennett A. F. (1984). Open ocean modeling as an inverse problem: M_2 tides in Bass Strait. *J. Phys. Oceanogr.*, **12**(10), 1004–1018.
- [Mihardja (1991)] Mihardja D. K. (1991). *Energy and momentum budget of the tides in Indonesian waters*. Bericht aus dem Zentrum für Meeres- und Klimaforschung der Universität Hamburg. **14**.
- [Natvik et al. (2001)] Natvik L.-J., Eknes M. and Evensen G. (2001). A weak constraint inverse for a zero-dimensional marine ecosystem model. *J. of Marine Systems*, **28**, 19–44.
- [Navon and Legler (1987)] Navon, I. M. and Legler D. M. (1987). Conjugate-gradient methods for large scale minimization in Meteorology. *Mon. Weather Rev.*, **115**, 1479-1505.
- [Olbers and Wenzel (1989)] Olbers D. and Wenzel M. (1989). Determining diffusivities from hydrographic data by inverse methods with application to the Circumpolar Current. In *Oceanic circulation models: Combining data and dynamics*. 95–140. Anderson, L.T. and Willebrand, J. (eds.). *Kluwer Academic Publ.*, 95–122.

- [Paige and Saunders (1982)] Paige C. C. and Saunders M. A. (1982). sparse linear equations and least squares problems. *ACM Trans. Math. Software*, **8**, 195–209.
- [Pham et al. (1998)] Pham D. T., Verron J., and Roubaud, M. C. (1998). A singular evolutive extended Kalman filter with EOF initialization for data assimilation in Oceanography. *J. of Marine Systems*, **16**(3–4), 323–340.
- [Pingree and Griffiths (1987)] Pingree R. D. and Griffiths D. K. (1987). Tidal friction for semidiurnal tides. *Continental Shelf Research*, **7**(10), 1181–1209.
- [Ray (2001)] Ray R. D. (2001). Inversion of ocean tidal currents from measured elevations. *J. of Marine Systems*, **28**, 1–18.
- [Robinson (1979)] Robinson I. S. (1979). Tidal dynamics of the Irish and Celtic seas. *Geophysical J. of the Royal Astronomical Society*, **56**, 159–197.
- [Robinson et al. (1998)] Robinson A. R., Lermusiaux P. F. J. and Sloan N. Q. (1998). Data assimilation. *The Sea*, **10**, 541–594.
- [Sasaki (1969)] Sasaki Y. (1969). Proposed inclusion of time variation terms, observational and theoretical, in numerical variational objective analysis. *J. of the Meteorological Society of Japan.*, **47**, 115–124.
- [Sasaki (1970)] Sasaki Y. (1970). Numerical variational analysis formulated under the constraints as determined by longwave equations and a low-pass filter. *Mon. Weather Rev.*, **98**, 885–898.
- [Schlitzer (1989)] Schlitzer R. (1989). Model of the nutrient and carbon cycles in the North Atlantic. An application of linear programming methods. In *Oceanic circulation models: combining data and dynamics.*, Anderson, D.L.T. and Willebrand, J., (eds.). *Kluwer Academic Publ.*, 452–462.
- [Schlichtholz and Houssais (1999)] Schlichtholz P. and Houssais M.-N. (1999). An inverse modeling study in Fram Strait. Part I: dynamics and circulation. *Deep-Sea Research II*, **46**, 1083–1135.
- [Schröter (1989)] Schröter J. (1989). Driving of non-linear time dependent ocean models by observation of transient tracer - a problem of constrained optimization. In : *Ocean Circulation Models: Combining Data and Dynamics*. 257–285. edited by Anderson D. and Willebrand J., Kluwer Academic Publishers.
- [Schröter (1994)] Schröter J. (1994). A sensitivity analysis of variational data assimilation. In: *Data assimilation*. Brasseur P.P. and Nihoul C.J. (eds.). NATO ASI Series **19**, 59–84.
- [Schröter et al. (1993)] Schröter J., Seiler U. and Wenzel M. (1993). Variational assimilation of Geosat data into an eddy-resolving model of the Gulf stream extension area. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 925–953.

- [Scott et al. (2000)] Scott R.K., Allen J. S., Egbert G. D. and Miller R. N. (2000). Assimilation of surface current measurements in a coastal ocean model. *J. Phys. Oceanogr.*, **30**(9), 2359–2378.
- [Seiler (1989)] Seiler U. (1989). An investigation to the tides of the world ocean and their instantaneous angular momentum budgets. *Mitteilung des Instituts für Meereskunde der Universität Hamburg*, **29**.
- [Sentchev and Yaremchuk (1999)] Sentchev A. and Yaremchuk M. (1999). Tidal motions in the Dover Straits as a variational inverse of the sea level and surface velocity data. *Continental Shelf Research*, **19/15**(16), 1905–1932.
- [Shulman et al. (1998)] Shulman I., Lewis J. K., Blumberg A. F. and Kim B. N. (1998). Optimized boundary conditions and data assimilation with application to the M_2 tide in the Yellow Sea. *J. Atmos. Ocea. Technology*, **15**(4), 1066–1071.
- [Sinha and Pingree (1997)] Sinha B. and Pingree R. D. (1997). The principal lunar semidiurnal tide and its harmonics: baseline solutions for M_2 and M_4 constituents on the North-west European Continental Shelf. *Continental Shelf Research*, **17**(11), 1321–1365.
- [Sirkes et al. (1996)] Sirkes Z., Tziperman E. and Thacker W. C. (1996). Combining data and a global primitive equation ocean general circulation model using the adjoint method. In: *Modern approaches to data assimilation in ocean modeling*. Malanotte-Rizzoli (ed.). ELSEVIER. 119–145.
- [Simpson (1998)] Simpson J.H. (1998). The Celtic seas coastal segment (19, E). *The Sea*, **11**, 659–698.
- [Stammer et al. (2002)] Stammer D., Wunsch C., Giering R., Eckert C., Heimbach P., Marotzke J., Adcroft A., Hill C. N., Marschall J. (2002). Global ocean circulation during 1992–1997, estimated from ocean observations and a general circulation model. *J. Geophys. Res.*, **107**(C9), 1–27.
- [Stommel and Schott (1977)] Stommel H. and Schott F. (1977). The beta spiral and the determination of the absolute velocity field from hydrographic station data. *Deep-sea Research*, **24**, 325–329.
- [Talagrand, (1997)] Talagrand O. (1997). Assimilation of observations, an introduction. *J. of the Meteorological Society of Japan*. **75**, 191–209.
- [Talagrand and Miyakoda (1971)] Talagrand O. and Miyakoda K. (1971). The assimilation of past data in dynamical analysis. II *Tellus*, **23**, 318–327.
- [Tarantola (1987)] Tarantola A. (1987). *Inverse Problem Theory*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- [Thacker (1988a)] Thacker W. C. (1988a). Three lectures on fitting numerical models to observations. *GKSS*, **87/E/65**.

- [Thacker (1988b)] Thacker W. C. (1988b). Fitting models to inadequate data by enforcing spatial and temporal smoothness. *J. Geophys. Res.* , **93**, 6177–6196.
- [Thacker (1989)] Thacker W. C. (1989). The role of the Hessian matrix in fitting models to measurements. *J. Geophys. Res.* , **94**(C5), 655–10665.
- [Thacker and Long (1988)] Thacker W. C. and Long, R. B. (1988). Fitting dynamics to data. *J. Geophys. Res.* , **93**(C2), 1227–1240.
- [Tierney et al. (2000)] Tierney C. C., Kantha L. H. and Born G. H. (2000). Shallow and deep water global ocean tides from altimetry and numerical modeling. *J. Geophys. Res.*, **105**(C5), 11259–11277.
- [Tziperman and Thacker (1989)] Tziperman E. and Thacker W. C. (1989). An optimal control/adjoint equations approach to studying the oceanic general circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, **19**, 1471–1485.
- [Tziperman et al. (1992a)] Tziperman E., Thacker W. C., Long R. B. and Hwang S.-M.(1992a). Oceanic data analysis using a general circulation model. Part I: Simulations. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 1434–1457.
- [Tziperman et al. (1992b)] Tziperman E., Thacker W. C., Long R.B., Hwang S.-M. and Rintoul S.R. (1992b). Oceanic data analysis using a general circulation model. Part II: A North Atlantic model. *J. Phys. Oceanogr.*, **22**, 1458–1485.
- [Weaver and Anderson (1997)] Weaver T. W. and Anderson D. L. T. (1997). Variational assimilation of altimeter data in a multilayer model of the tropical Pacific ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **27**, 664–682.
- [Wunsch (1978)] Wunsch C. (1978). The general circulation of the North Atlantic west of 50W determined from inverse methods. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, **16**, 583–620.
- [Wunsch (1984)] Wunsch C. (1984). An eclectic Atlantic Ocean circulation model. Part I: The meridional flux of heat. *J. Phys. Oceanogr.*, **14** , 1712–1733 .
- [Wunsch (1988a)] Wunsch C. (1988a). Eclectic modelling of the North Atlantic. II: Transient tracer and the ventilation of the eastern basin thermocline. *Phil. Trans. Roy. Soc.* , **A**, 201–236.
- [Wunsch (1988b)] Wunsch C. (1988b). Transient tracers as a problem in control theory. *J. Geophys. Res.*, **93**(C7), 8099–8110.
- [Wunsch and Minster (1982)] Wunsch C. and Minster J-F. (1982). Methods for box models and ocean circulation tracers: Mathematical programming and nonlinear inverse theory. *J. Geophys. Res.*, **87**(C8), 5647–5662.
- [Wüst et al. (2001)] Wüst M., Zawadzki I. and Schmid W. (2001). Noise filtering in a variational wind field retrieval from Doppler radar. *Meteorologische Zeitschrift*, **10**(2), 131–140.

- [Young et al. (2000)] Young E. F., Aldridge J. N. and Brown J. (2000). Development and validation of a three-dimensional curvilinear model for the study of fluxes through the North Channel of the Irish Sea. *Continental Shelf Research*, **20**, 997–1035
- [Yu and Malanotte-Rizzoli (1996)] Yu L. and Malanotte-Rizzoli P. (1996). Analysis of the North Atlantic climatologies using a combined OGCM/adjoint approach. *Continental Shelf Research*, **54**, 867–913.
- [Yu and Malanotte-Rizzoli (1998)] Yu L. and Malanotte-Rizzoli P. (1998). Inverse modeling of seasonal variations in the North Atlantic Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, **28**, 902–922.
- [Yu and O'Brien (1991)] Yu L. and O'Brien J. J. (1991). Variational estimation of the wind stress drag coefficient and the oceanic Eddy viscosity profile. *J. Phys. Oceanogr.*, **21**, 709–719.
- [Zahel (1970)] Zahel W. (1970). *Die Reproduktion gezeitenbedingter Bewegungsvorgänge im Weltozean mittels des hydrodynamisch-numerischen Verfahrens*. Dissertation, Universität Hamburg.
- [Zahel (1977)] Zahel W. (1977). A global hydrodynamical-numerical 1°-model of the ocean tides: The oscillation system of the M_2 -tide and its distribution of energy dissipation. *Ann. Geophys.*, **33**, 31–40.
- [Zahel (1978)] Zahel W. (1978). The influence of solid Earth deformations on semi-diurnal and diurnal oceanic tides. In: *Tidal friction and the Earth's rotation*. Brosche P. and Sündermann J. (eds.), Springer Verlag, 98–124.
- [Zahel (1991)] Zahel W. (1991). Modeling ocean tides with and without assimilating data. *J. Geophys. Res.*, **96**(B12), 20379–20391.
- [Zahel (1995)] Zahel W. (1995). Assimilating ocean tide determined data into global tidal models. *J. of Marine Systems*, **6**, 3–13.
- [Zahel (1997)] Zahel W. (1997). Ocean tides. In: *Tidal phenomena*. H. Wilhelm, W. Zürn, H.-G. Wenzel (eds.), Springer, 113–143.
- [Zahel (2000)] Zahel W., Gaviño J. H. and Seiler U. (2000). Angular momentum and energy budget of a global ocean tide model with data assimilation. *GEOS*, **20**(4), 400–413.

Danksagung

Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Zahel vom ZMK für die wissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit. Ohne seine moralische und fürsorgliche Unterstützung während meiner gesamten Studien- und Promotionszeit wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Meinen Dank möchte ich Herrn Prof. Dr. Sündermann und Herrn Prof. Backhaus vom ZMK für die gute Einführung in die Forschung der Ozeanographie aussprechen.

Außerdem möchte ich Herrn Dr. Wriedt, Herrn Dr. Meincke und Herrn Mensah vom RRZ sowie Frau Quast vom DKRZ für die großzügige Bereitstellung der Recheneinrichtungen und für die freundliche Beratung danken.

Für die Unterstützung meines Promotionsstudiums bedanke ich mich herzlich bei Herrn E. Helms von der Universität Hamburg.

Für die langjährige moralische Unterstützung gebührt der Familie Flechsenhar und für das Korrekturlesen der Arbeit der Familie Dr. Damm Dank.

Mein besonderer Dank richtet sich an meine Frau Zhuo. Ihr Verständnis, ihre Geduld und ihre langjährige Unterstützung sind unschätzbar gewesen. Diese Arbeit wird ihr gewidmet.