

**Der Einfluß von symmetriebrechenden Instabilitäten  
auf die nichtlineare Entwicklung von baroklinen Wellen**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich  
Geowissenschaften  
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Thomas Frisius

aus

Mölln

Hamburg

1999

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Geowissenschaften  
der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. K. Fraedrich  
und Prof. Dr. W. Zabel

Hamburg, den 07.07.1999

Prof. Dr. G. Miehlich  
Dekan  
des Fachbereichs Geowissenschaften

## Zusammenfassung

Die nichtlineare Entwicklung von baroklinen Wellen in vertikal gescherten Zonalströmungen wird im Rahmen der quasigeostrophischen und semigeostrophischen Approximation untersucht. Hierfür wird in einem Kanal auf einer rotierenden Ebene ein Zweischichtenfluid sowie ein kontinuierlich geschichtetes Fluid mit einer uniformen potentiellen Vorticity (UPV-System) betrachtet. In beiden Strömungssystemen bleiben verschiedene Strömungssymmetrien erhalten, wenn sie im anfänglichen Strömungsfeld exakt vorgegeben werden. Es werden in dieser Arbeit drei verschiedene Strömungssymmetrien untersucht, welche als Symmetrie Z, Symmetrie A und Symmetrie S bezeichnet werden. Die Symmetrie Z zeichnet sich durch eine vertikal antisymmetrische Zonalmittelströmung aus, welche meridional symmetrisch bezüglich der Kanalmitte ist. Der vorgegebene baroklin instabile Grundstrom sowie deren Normalmode unterliegen der Symmetrie Z. Die anderen beiden Symmetrien enthalten einen zusätzlichen Anteil, der eine vertikal symmetrische Zonalmittelströmung aufweist. Diese sind für Symmetrie A meridional antisymmetrisch und für Symmetrie S meridional symmetrisch bezüglich der Kanalmitte. Die Störung einer Strömungssymmetrie (Symmetriebruch) kann sich erheblich auf die Entwicklung auswirken, wenn die Strömungssymmetrie instabil ist. Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Untersuchung der Auswirkung des Symmetriebruchs auf die nichtlineare Entwicklung von baroklinen Wellen. Dabei wird die Symmetrie Z durch eine kleine Störung gebrochen, welche als natürliche Abweichung von der exakten Normalmodenstruktur verstanden werden kann.

Es wird eine Vielzahl von numerischen Simulationen in den quasigeostrophisch approximierten Strömungssystemen durchgeführt, die einen weiten Parameterbereich abdecken. Dabei wird die barokline Instabilität des Grundstroms sowie das Wellenaspektverhältnis variiert, wobei letzteres das Verhältnis der meridionalen zur zonalen Wirbelerstreckung wiedergibt. Bei den Simulationen der Lösungen mit der Symmetrie Z (Z-Lösung), bei welchen anfangs eine Normalmode-Störung vorgegeben wurde, wird das barokline Wachstum durch die Modifikation der vertikal antisymmetrischen Zonalmittelströmung beendet (barokline Equilibration). Die Simulationen der Lösungen mit der Symmetrie A (A-Lösung) und der Symmetrie S (S-Lösung), bei welchen anfangs dem Normalmode eine zusätzliche symmetriebrechende Störung überlagert wurde, zeigen merkbare Unterschiede. Die Tendenz zur Abweichung nimmt bei Erhöhung des Aspektverhältnisses zu und ist bei den A-Lösungen generell stärker ausgeprägt. Bei den Fällen mit einer deutlichen Abweichung zur Z-Lösung kommt es am Ende der baroklinen Wachstumsphase zu einer Übertragung von kinetischer Wellenenergie in die barotrope Zonalmittelströmung, wodurch das Wachstum beendet wird (barotrope Equilibration). Eine genauere Analyse von charakteristischen Fällen führt zu der Vermutung, daß die Amplifikation der barotropen Zonalmittelströmung auf die positive Rückkopplung zwischen der Meridionalscherung der barotropen Zonalmittelströmung und der Neigung der Wellenphase gegenüber der meridionalen Richtung

zurückzuführen ist (barotrope Welleninstabilität). Zwei weitere numerische Simulationen werden in einem semigeostrophisch approximierten UPV-System durchgeführt. Dabei wird einem vertikal antisymmetrischen jetförmigen Grundstrom eine Störung mit der Symmetrie Z sowie eine Störung mit der Symmetrie A überlagert. Während bei der Z-Lösung Zyklonen und Antizyklonen mit gleicher Amplitude anwachsen, bildet sich bei der A-Lösung die Zyklone gegenüber der Antizyklone sehr viel stärker aus. Zudem weist die Zyklone im späten Entwicklungsstadium Frontstrukturen auf, die auch in beobachteten Systemen zu finden sind.

Zur Beschreibung der barotropen Welleninstabilität wird die barotrope Vorticitygleichung um eine stationäre Wellenlösung linearisiert. Diese Gleichung besitzt Normalmoden mit der Symmetrie A (Mode A) und der Symmetrie S (Mode S). Die Instabilitätsanalyse ergibt eine zunehmende Instabilisierung mit zunehmendem Wellenaspektverhältnis, wobei die Wachstumsrate von Mode A stets größer ist als die von Mode S. Die nichtlineare Entwicklung von Mode A und Mode S weist eine gute Übereinstimmung mit der barotropen Zerfallsphase der vorher untersuchten A-Lösung bzw. S-Lösung auf. Im weiteren wird die Stabilität der simulierten Z-Lösungen bezüglich symmetriebrechender Störungen direkt analysiert. Dabei existieren ebenfalls Normalmoden mit der Symmetrie A und der Symmetrie S. Man findet, daß die symmetriebrechende Instabilität im wesentlichen durch die barotrope Welleninstabilität beschrieben wird, die in einigen Fällen mit einer baroklinen Instabilität zusammen wirkt. Ein Vergleich mit den simulierten Lösungen ergibt, daß die symmetriebrechenden Strömungen der merklich von den Z-Lösungen abweichenden A-Lösungen und S-Lösungen eine hohe Korrelation zu den berechneten Normalmoden annehmen. Das zeigt die Relevanz der symmetriebrechenden Instabilität für die von den Z-Lösungen abweichenden Entwicklungen. Die Ergebnisse dieser Arbeit führen zu der Schlußfolgerung, daß die barotrope Welleninstabilität maßgeblich die Entwicklung von baroklinen Wellen beeinflussen kann und vermutlich ein wichtiger Mechanismus für die Entstehung von außertropischen Zyklonen darstellt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Barokline Instabilität als Mechanismus für die Zyklogenese	1
1.2 Der Lebenszyklus von außertropischen Wettersystemen	1
1.3 Die Rolle der baroklinen Wellen für die allgemeine Zirkulation	5
1.4 Zielsetzung	7
<b>2 Formulierung der idealisierten Strömungssysteme</b>	<b>11</b>
2.1 Grundgleichungen des quasigeostrophischen Systems	11
2.2 Das quasigeostrophische Zweischichtensystem	13
2.2.1 Herleitung der Modellgleichungen	14
2.2.2 Randbedingungen	18
2.2.3 Energetik	19
2.3 Das quasigeostrophische System in uniformer potentieller Vorticity	21
2.3.1 Herleitung der Modellgleichungen	21
2.3.2 Randbedingungen	25
2.3.3 Energetik	26
2.4 Das semigeostrophische System in uniformer potentieller Vorticity	28
2.4.1 Die geostrophische Impulsapproximation	28
2.4.2 Herleitung der Gleichungen des semigeostrophischen UPV-Systems	30
<b>3 Strömungssymmetrien und Lösungen</b>	<b>33</b>
3.1 Definition des verallgemeinerten Systems	33
3.2 Die spektralen Gleichungen der freien Lösungen	37
3.3 Symmetrieeigenschaften der freien Lösungen	40
3.3.1 Symmetrie Z	40
3.3.2 Symmetrie A	41
3.3.3 Symmetrie S	43
3.3.4 Diskussion	44
3.4 Lösungen der linearisierten Gleichungen	44
3.4.1 Barokline Instabilität im Zweischichtensystem	46
3.4.2 Barokline Instabilität im UPV-System	47
3.4.3 Dynamische Interpretation der baroklinen Instabilität	49
3.5 Berücksichtigung der Randbedingungen im Zweischichtensystem	52
3.6 Numerisches Lösungsverfahren für das nichtlineare System	54
<b>4 Simulationen von baroklinen Wellenentwicklungen</b>	<b>55</b>
4.1 Allgemeines	55
4.2 Beschreibung der quasigeostrophischen Simulationen	56
4.3 Die Entwicklungen der Z-Lösungen	58
4.4 Die Entwicklungen der A-Lösungen	65
4.5 Die Entwicklungen der S-Lösungen	68
4.6 Beispiele für eine barotrope Equilibration	71

4.7 Barokline Wellenentwicklungen in dem semigeostrophischen UPV-System ..	80
4.7.1 Festlegung des Grundstroms .....	80
4.7.2 Lineare Instabilitätsanalyse .....	81
4.7.3 Beschreibung der numerischen Experimente .....	82
4.7.4 Resultate .....	83
4.7.5 Weitere Simulationen .....	88
<b>5 Analyse der symmetriebrechenden Instabilitäten</b>	<b>91</b>
5.1 Die barotrope Welleninstabilität .....	91
5.1.1 Formulierung des linearen barotropen Problems .....	91
5.1.2 Ergebnis der linearen Analyse .....	92
5.1.3 Vergleich mit der Analyse von Lorenz .....	94
5.1.4 Die barotrope Welleninstabilität in dem UPV-System .....	96
5.1.5 Nichtlineare Entwicklung der barotropen Welleninstabilität .....	99
5.2 Die Stabilität der Z-Lösungen bezüglich symmetriebrechender Störungen .	102
5.2.1 Formulierung der linearen Problems .....	102
5.2.2 Stabilitätsanalyse der Z-Lösungen .....	103
5.2.3 Stabilitätsanalyse des Falls $B = 0.3$ , $a = 3$ im Zweischichtensystem .	110
5.2.4 Stabilitätsanalyse der Z-Lösung im semigeostrophischen UPV-System	113
<b>6 Schlußbetrachtung</b>	<b>117</b>
6.1 Zusammenschau .....	117
6.2 Diskussion .....	120
<b>Anhang</b>	<b>125</b>
Symmetriebruch im vollständigen semigeostrophischen UPV-System .....	125
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>
<b>Danksagung</b>	<b>135</b>

# 1 Einleitung

Das atmosphärische Wettergeschehen in den mittleren Breiten wird durch die Entstehung, Verlagerung und Auflösung von synoptisch-skaligen Bodendruckanomalien (vornehmlich Tiefdruckgebiete mit Skalen von 500-3000km) beschrieben. Vom besonderen Interesse für die Wissenschaft ist das physikalische Verständnis der Entwicklung von einem Tiefdruckgebiet (Zyklogenese). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einigen Aspekten dieser Zyklogenese. Zunächst möchte ich eine Einleitung in diese Thematik bringen, bevor anschließend das Ziel meiner Arbeit dargelegt werden kann.

## 1.1 Barokline Instabilität als Mechanismus für die Zyklogenese

Margules (1903) stellte die Hypothese auf, daß die Tiefdruckgebiete (Zyklonen) ihre Energie aus der potentiellen Energie des meridionalen Temperaturkontrastes beziehen. Die Hypothese wurde später durch die theoretischen Arbeiten von Charney (1947) und Eady (1949) gestützt. Unter Verwendung der mit der Problemstellung verträglichen quasigeostrophischen Approximation gelang es ihnen zu zeigen, daß eine durch den polwärtigen Temperaturgradienten vertikal gescherte (barokline) Zonalströmung instabil ist bezüglich barokliner synoptisch-skaliger Wellenstörungen. Bis heute erkennt man den Mechanismus dieser sogenannten baroklinen Instabilität als Ursache für die Zyklogenese an. Diese Theorie erfuhr jedoch eine Modifikation durch die Studie von Farrell (1985), die auf das transiente Wachstum von gedämpften baroklinen Wellen eingeht. Das transiente Wachstum beschreibt ein vorübergehendes starkes Anwachsen einer Störung mit endlicher Amplitude, obwohl das lineare Eigenwertproblem nur eine Dämpfung aller Eigenvektorstörungen (Normalmoden) voraussagt. Entsprechend unterscheidet man nach Petterssen und Smebye (1971) zwei Typen der Zyklogenese, nämlich Typ A und Typ B. Bei Typ A resultiert die Zyklogenese aus der Instabilität eines ungestörten Grundzustandes, während bei Typ B das Wachstum der Zyklone am Boden durch einen stromaufwärts liegenden Höhentrog hervorgerufen wird.

## 1.2 Der Lebenszyklus von außertropischen Wettersystemen

Die meisten Zyklogenestheorien basieren auf einem Gleichungssystem, das um einen vorgegebenen Grundzustand linearisiert wurde. Dieses ist jedoch nicht geeignet, um den vollständigen Lebenszyklus des Wettersystems zu beschreiben. Die Beendigung des baroklinen Wachstums (Equilibration) kann mit Ausnahme der von Farrell (1985) studierten Fälle nur durch die nichtlinearen Terme des Gleichungssystems verursacht werden. Da eine analytische Lösung der nichtlinearen Gleichungen nur in wenigen Ausnahmefällen möglich ist, bedarf es der Verwendung von numerischen und konzeptionellen Modellen, um den Lebenszyklus physikalisch zu verstehen. Das wohl bedeutendste Konzeptmodell für den Lebenszyklus einer außertropischen Zyklone wurde von Bjerknes und Solberg (1922) vorgestellt. Die Beschreibung der Entwicklung

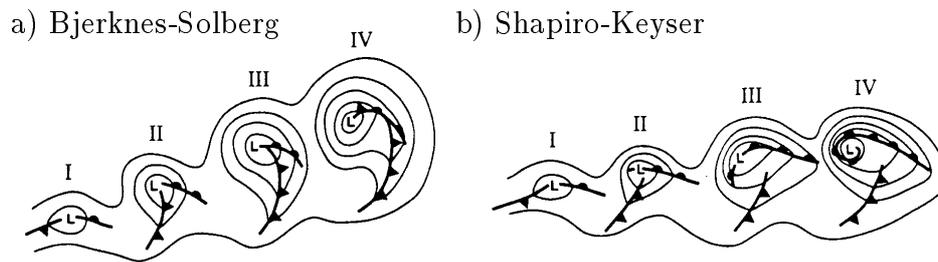


Abbildung 1.1: Zwei Konzeptmodelle für den Lebenszyklus von außertropischen Zyklonen. Im Bild sind Isobaren mit den Fronten dargestellt. a) Bjerknes-Solberg Modell, b) Shapiro-Keyser Modell (nach Schultz et. al 1998).

(siehe Abbildung 1.1a) ist geprägt von den damaligen Beobachtungen. Der Lebenszyklus wird ausgelöst durch eine Tiefdruckanomalie an einer Temperaturdiskontinuität (Polarfront). Danach verlagert sich der Warmsektor polwärts und die Zyklone wird intensiver. Später wird der Warmsektor von der ostwärts fortschreitenden Kaltluft eingeholt und angehoben, wobei eine sich durch erhöhte Windscherung auszeichnende Verbindungslinie (Okklusion) erhalten bleibt. Schließlich wird der Warmluftsektor vollständig vom Boden abgehoben und die Zyklone beginnt sich wieder aufzulösen. In den letzten zehn Jahren kam man zu der Auffassung, daß in einigen Situationen die Entwicklung anders abläuft. Das führte zu dem modifizierten Konzeptmodell von Shapiro und Keyser (1990) (siehe Abbildung 1.1.b). Im Gegensatz zum Bjerknes-Solberg Modell kommt es zu einem Bruch der Front in der Nähe des Zyklonenzentrums ("frontal fracture"), und einer T-förmigen Ausrichtung von Kalt- und Warmfront zueinander. Der westliche Teil der Warmfront biegt sich danach um das Tiefdruckgebiet herum und wird demnach als zurückgebogene Warmfront bezeichnet ("bent-back warm front"). Am Ende dreht sich die Front soweit um das Zentrum des Tiefs, daß die Warmluft abgeschnitten wird (Sekklusion). Die Theorie der linearen baroklinen Instabilität ist offenbar nicht in der Lage, diese beiden Konzeptmodelle zu bestätigen. Das ergibt sich im wesentlichen aus den folgenden Gründen:

- Barokline Instabilität beschreibt das Wachstum von baroklinen Wellen aufgrund eines kontinuierlichen Temperaturgradienten, während die Konzeptmodelle eine Temperaturdiskontinuität als Anfangszustand voraussetzen.
- Verbunden mit der baroklinen Instabilität ist die Entwicklung von Zyklonen wie auch Antizyklonen (Hochdruckgebiete). Der Mechanismus der baroklinen Instabilität liefert daher keine Begründung, warum nur Zyklonen an der Polarfront entstehen.
- Die barokline Instabilität liefert keinen Hinweis für das Auftreten von Okklusionen oder Sekklusionen.

Tatsächlich wurde seit der Arbeit von Bjerknes und Solberg die Instabilität von geostrophisch balancierten Diskontinuitätsflächen in einer Reihe von Studien unter-

sucht (z. B. Solberg 1928, Kotschin 1932, Orlanski 1968 und Iga 1993), wobei instabil anwachsende Wellen mit synoptischer Skala identifiziert wurden. Die nichtlineare Entwicklung einer solchen Frontalwelle wurde von Grammelvedt (1970) sowie Sinton und Mechoso (1984) simuliert. Die simulierte Entwicklung zeigte eine relativ gute Übereinstimmung mit dem Konzeptmodell von Bjerknes und Solberg. Auf der anderen Seite konnten Hoskins und Bretherton (1972) zeigen, daß durch ageostrophische Effekte barokline Wellen in der Wachstumsphase Fronten ausbilden (Frontogenese). Es scheint daher eher wahrscheinlich, daß die Polarfront aus der Wirkung der baroklinen Wellen hervorgeht und nicht umgekehrt, wie von Bjerknes und Solberg angenommen. Mehrere numerische Studien von baroklinen Wellenentwicklungen in idealisierten Kanalströmungen (z. B. Mudrick 1974, Takayabu 1986, Polavarapu und Peltier 1990, Rotunno et al. 1994) weisen auf, daß die Zyklogenese stets mit einer Frontogenese begleitet wird und die weitere Entwicklung mit den oben beschriebenen Konzeptmodellen im Einklang steht. Diese Studien zeigen auch, daß die Zyklone sich stärker ausbildet als die Antizyklone, obwohl mit der anfänglichen Normalmodenstörung Zyklonen und Antizyklonen mit gleicher Amplitude vorgegeben werden. Da die barokline Instabilität bezüglich zonal konstanter Störungen (symmetrische Instabilität) für die beobachteten Zonalmittelströmungen ausgeschlossen werden kann (siehe z. B. Holton 1992), muß es einen nichtlinearen Mechanismus geben, der das Wachstum von Zyklonen begünstigt. Mit dem semigeostrophisch approximierten System, das weniger einschränkend ist als das quasigeostrophische System, kann zwar eine Dominanz der Zyklonen in einer anwachsenden baroklinen Welle erklärt werden, aber semigeostrophische Entwicklungsstudien, wie z. B. von Hoskins und West (1979), offenbaren nur eine leichte Zyklonen-Antizyklonen Asymmetrie. Die Arbeit von Schär (1989) (siehe auch Davies et al. 1991) gibt dagegen einen anderen Hinweis für den Mechanismus. Schär konnte mit einem semigeostrophischen Modell nachweisen, daß eine stärkere Entwicklung der Zyklonen und zudem noch der Okklusionsprozess durch die Existenz einer vertikal konstanten (barotropen) Scherströmung mit zyklonaler Scherung im zonalen Grundstrom verursacht werden kann. Die Rolle der zonalen Zonalmittelströmung wird deutlich, wenn man sich veranschaulicht, daß ein zyklonaler Wirbel in eine Welle und eine zonale Scherströmung zerlegt werden kann (siehe Abbildung 1.2). Daraus wird klar, daß das Wachstum einer Zyklone mit der gleichzeitigen Amplifikation einer Scherströmung und einer baroklinen Welle verbunden ist.

Die Wechselwirkung der baroklinen Wellen mit barotropen zonalen Scherströmungen besitzt auch Bedeutung für die Energetik des Systems. Simmons und Hoskins (1978) zeigten mit einem reibungsfreien globalen Zirkulationsmodell der Atmosphäre, daß barokline Wellen einen Lebenszyklus durchlaufen, bei dem in der baroklinen Wachstumsphase potentielle Grundstromenergie in kinetische Wellenenergie und in der barotropen Auflösungsphase kinetische Wellenenergie in die kinetische Grundstromenergie übertragen wird (Abbildung 1.3), wobei die angefachte Zonalströmung im wesentlichen barotrop ist. Aufgrund der starken barotropen Scherung ist der Endzustand stabil bezüglich weiterer Störung mit der Folge, daß nur ein einziger

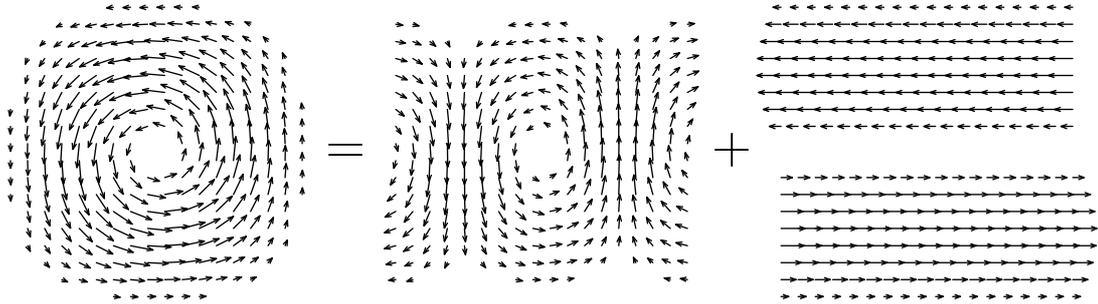


Abbildung 1.2: Beispiel für die Zerlegung eines zyklonalen Wirbels in eine Welle und eine zonale Scherströmung

Lebenszyklus auftritt. Eine Sensitivität bezüglich der anfänglichen barotropen Scherung wurde in weiteren numerischen Studien mit sphärischen Zirkulationsmodellen gefunden (Simmons und Hoskins 1980, Thorncroft et al. 1993, Hartmann und Zürcher 1998). Es gelingt auch den Lebenszyklus mit barokliner Wachstumsphase und barotroper Auflösungsphase (asymmetrischer Lebenszyklus) in quasigeostrophischen Kanalmodellen zu simulieren. Feldstein und Held (1989) untersuchten barokline Wellenlebenszyklen in dem quasigeostrophischen Zweischichtenmodell, das von Phillips (1951) entwickelt wurde, und beobachteten einen asymmetrischen Lebenszyklus nur bei Vorgabe einer kritischen Linie im anfänglichen zonalen Grundstrom. Eine kritische Linie liegt an dem Ort vor, wo die Phasengeschwindigkeit der baroklinen Welle identisch ist mit der Zonalgeschwindigkeit des Grundstroms. Nach der linearen Theorie wird an einer kritischen Linie ein Wellenstrahl absorbiert, da seine meridionale Wellenzahl gegen unendlich strebt (siehe z. B. James 1994). Bei Berücksichtigung von Nichtlinearitäten zeigt sich, daß die Welle an der kritischen Linie bricht und unter Umständen reflektiert wird (siehe z. B. Killworth und McIntyre 1985). Oftmals findet man die kritische Linie an einem Ort mit erhöhter meridionaler Windscherung, wo ein Brechen der Welle wahrscheinlich ist. Feldstein und Held kamen zu der Schlußfolgerung, daß zumindest in schwach instabilen Zonalströmungen die Vorgabe der kritischen Linie für das Brechen und den dadurch ausgelösten barotropen Zerfall der baroklinen Wellen notwendig ist. Nakamura (1993) demonstrierte mit einem quasigeostrophischen Kanalmodell, daß eine schwache barotrope Scherströmung im anfänglichen Grundstrom eine barotrope Auflösungsphase mit starker Amplifikation der barotropen Scherung verursachen kann, während bei Fehlen der barotropen Komponente im Grundstrom die Störungsenergie nicht zerfällt. Nakamura zeigte zuvor, daß bestimmte Strömungssymmetrien erhalten bleiben, wenn sie in der Anfangsströmung exakt vorgegeben werden. Er erklärte sein Ergebnis durch die Störung der Strömungssymmetrie (Symmetriebruch) durch die barotrope Scherströmung. Dieses Resultat stellt die generelle Notwendigkeit der anfänglichen Existenz einer kritischen Linie für die barotrope Auflösungsphase in Frage und führt zu der Vermutung, daß

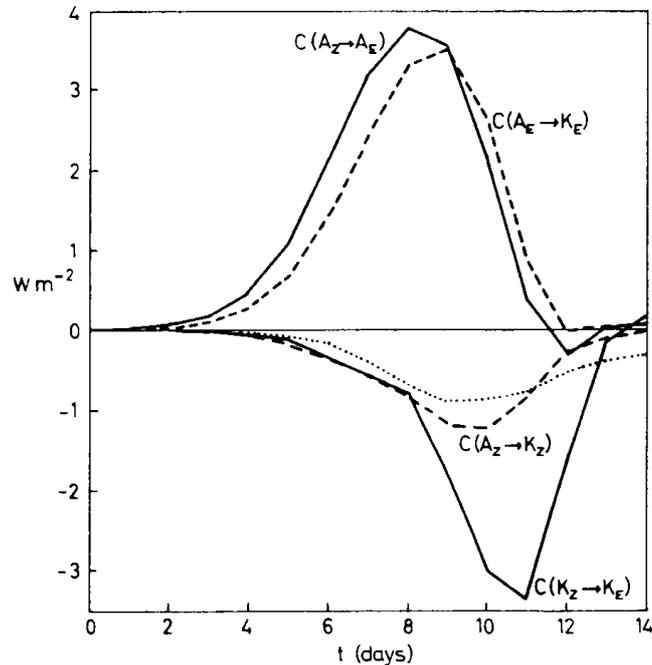


Abbildung 1.3: Energieumwandlungen als Funktion der Zeit in einem numerisch simulierten Lebenszyklus einer baroklinen Welle.  $A_Z$  und  $A_E$  sind die verfügbaren potentiellen Energie des zonalen Mittels bzw. der Störung.  $K_Z$  und  $K_E$  bezeichnen dementsprechend die kinetischen Energien.  $C(.. \rightarrow ..)$  symbolisiert die Umwandlung zwischen diesen Energieanteilen. Die gepunktete Kurve gibt die Rate der Energiedissipation wieder (nach Simmons und Hoskins 1978).

eine Instabilität bezüglich einer symmetriebrechenden Störung den asymmetrischen Lebenszyklus auslösen kann.

### 1.3 Die Rolle der baroklinen Wellen für die allgemeine Zirkulation

Die zonal gemittelte atmosphärische Zirkulation zeichnet sich durch drei Meridionalzirkulationszellen sowie einem außertropischen baroklinen Westwindjet aus. Während die Hadleyzelle in den niedrigen Breiten und die Polarzelle in den hohen Breiten thermodynamisch direkt zirkulieren, d. h. Temperaturgegensätze abbauen, besitzt die Ferrelzelle in den mittleren Breiten einen entgegengesetzten Drehsinn. Jeffreys (1926) erkannte, daß neben dem Wellentemperaturfluß der Wellenimpulsfluß für die Aufrechterhaltung dieser Zirkulation notwendig ist. Dabei muß der Wellenimpulsfluß in den Jet gerichtet sein. Starr (1948) folgerte daraus, daß die Wirbelachsen sich gegenüber der meridionalen Richtung neigen müssen, was auch beobachtet wird. Die Korrelation des Impulsflusses mit der Meridionalscherung des zonal gemittelten Zonalwindes beschreibt den kinetischen Energietransfer von den Wirbeln in die Zonalmittelströmung, und diese ist, angewendet auf die atmosphärische Zirkulation, stets positiv, da die Impulsflüsse zum Gradienten hin gerichtet sind (siehe Abbildung 1.4).

Diese Tatsache veranlaßte Starr (1968) die atmosphärische Zirkulation als ein negatives Wirbelviskositätsphänomen anzusehen. Würde man versuchen, die Wirkung der synoptisch-skaligen Wirbel auf die Zonalmittelströmung mit einem Diffusionsansatz zu parameterisieren, dann käme man auf einen negativen Diffusionskoeffizienten. Das Konzept der negativen Wirbelviskosität findet heutzutage wenig Beachtung, da es zu keiner zuverlässigen Parameterisierung der atmosphärischen Wirbel führt. Für das Verständnis der atmosphärischen Zirkulation ist es dennoch sinnvoll. Man muß sich jedoch darüber im klaren sein, daß bei einer negative Wirbelviskosität die Wirbel ihre kinetische Energie aus einer anderen Energieform beziehen muß. Diese ist in der Atmosphäre durch die verfügbare potentielle Energie gegeben. Balanciert wird die negative Wirbelviskosität der synoptisch-skaligen Wirbel durch die turbulente Bodenreibung. Diese Tatsache wirft die Frage auf, was passieren würde, wenn die turbulente Bodenreibung nicht mehr wirkt. Zwei Szenarien wären denkbar. Beim ersten Szenario erhöht die negative Wirbelviskosität die meridionale Scherung des Jets soweit, bis dieser scherungsindestabil wird (siehe z. B. Kuo 1973). Die durch die Scherungsindestabilität ausgelösten Wirbel hätten dann einen ausgleichenden positiven Wirbelviskositätseffekt. Beim zweiten Szenario bewirkt die Erhöhung der meridionalen Scherung eine Stabilisierung des Jets, so daß keine Wirbel mehr entstehen. Es stellt sich dann eine zonalsymmetrische Zirkulation ein. James und Gray (1986) konnten mit einem globalen Zirkulationsmodell zeigen, daß das zweite Szenario bei fehlender Bodenreibung in Erscheinung tritt. Da die Stabilisierung allein auf die barotrope Zonalmittelströmung zurückgeführt werden konnte, bezeichneten James und Gray diesen Stabilisierungsmechanismus als den "Barotropic Governor" Effekt. Das Auftreten dieses Effekts ist in Übereinstimmung mit dem numerischen Experiment

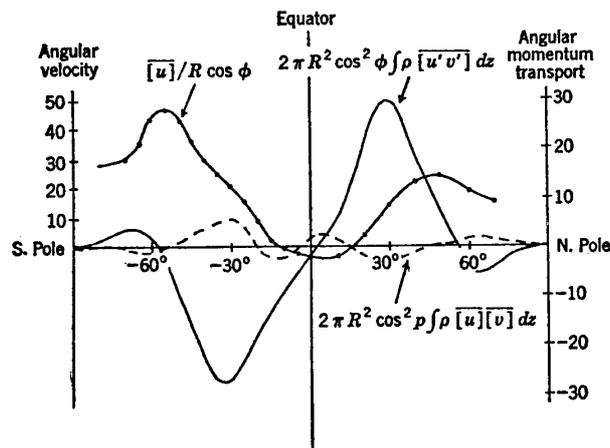


Abbildung 1.4: Beobachtete Drehimpulsbilanz in der Atmosphäre: Meridionalprofil des relativen Drehimpulses (durchgezogene Linie mit Punkten), des nordwärtigen Drehimpulstransports durch die Wellen (durchgezogene Linie) und des nordwärtigen Drehimpulstransports durch die zonal gemittelte Zirkulation (gestrichelte Linie) (nach Starr 1968).

von Simmons und Hoskins (1978), wo nach dem ersten asymmetrischen Lebenszyklus die barotrope Stabilisierung das Auftreten von weiteren Entwicklungen verhindert. Es ist aber auch denkbar, daß die Stabilisierung erst nach mehreren Lebenszyklen eintritt.

#### 1.4 Zielsetzung

In dieser Arbeit wird ein einfacher nichtlinearer Mechanismus vorgestellt, der einen solchen Einfluß auf die Entwicklung in einem baroklinen Wellenlebenszyklus haben kann, daß viele der bisher genannten Eigenschaften von synoptischen Systemen in Erscheinung treten. Obwohl dieser Mechanismus im Lebenszyklus nur über die Nichtlinearitäten des Systems wirken kann, kann er isoliert betrachtet als eine lineare Instabilität verstanden werden. Das wird im folgenden veranschaulicht.

Zunächst geht man von einer zweidimensionalen divergenzfreien Strömung aus, die durch die zweidimensionale Vorticitygleichung in den räumlichen Koordinaten  $x$  (in Ostrichtung) und  $y$  (in Nordrichtung) beschrieben wird. Die Vorticitygleichung besagt, daß die Vorticity  $\zeta$  entlang der Stromlinien erhalten bleibt, wobei  $\zeta$  mit der Stromfunktion  $\psi$  über die Beziehung

$$\zeta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

verknüpft ist. Nun sei die divergenzfreie Strömung zusammengesetzt aus einer Welle und einer zonal konstanten Scherströmung wie in dem Beispiel aus Abbildung 1.2. Dementsprechend wird unterschieden zwischen der Wellenvorticity und Scherströmungsvorticity. Die Wellenvorticity zeichnet sich durch in zonaler Richtung alternierende positive und negative Vorticityextrema aus, während bei der Scherströmungsvorticity ein zonales Band positiver Vorticity von zonalen Bändern negativer Vorticity umgeben wird. Es werden hier zwei charakteristische Fälle diskutiert (siehe schematische Abbildung 1.5). Beim ersten Fall (Abbildung 1.5a) erstreckt sich der zyklonale Wirbel in zonaler Richtung. In diesem Fall dominiert die Advektion von Scherströmungsvorticity durch die Wellenströmung gegenüber der Advektion von Wellenvorticity durch die Scherströmung. Demnach dreht sich die lange zonale Wirbelachse in Nordostrichtung. Der resultierende Wellenimpulsfluß ist nordwärts gerichtet und schwächt die Scherströmung ab. Beim zweiten Fall (Abbildung 1.5b) wird der gleiche Wirbel betrachtet, jedoch wurden die Wirbelachsen um  $90^\circ$  gedreht. Folglich erstreckt sich der zyklonale Wirbel in meridionaler Richtung. Hier dominiert die Advektion der Wellenvorticity durch die Scherströmung und die lange meridionale Wirbelachse kippt in Nordwestrichtung. Daraus ergibt sich ein südwärtiger Wellenimpulsfluß, der die Scherströmung verstärkt. Das Aspektverhältnis des zyklonalen Wirbels stellt dabei den entscheidenden Parameter dar, der festlegt, welcher Fall eintritt.

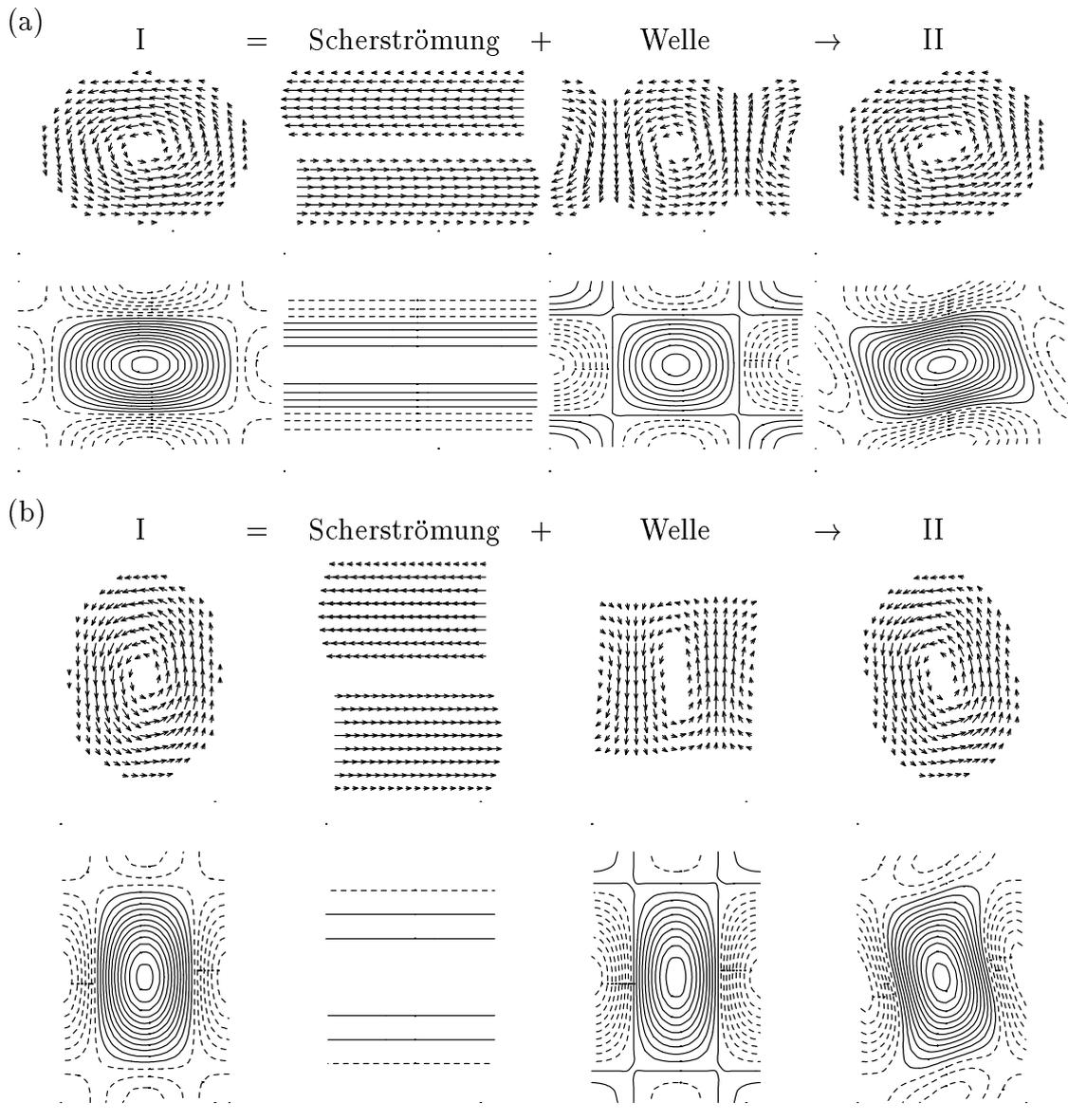


Abbildung 1.5: Schematische Darstellung der Wechselwirkung zwischen Scherströmung und Welle in einer divergenzfreien zweidimensionalen Strömung. Die obere Reihe zeigt die Geschwindigkeitsvektoren und die untere Reihe Isolinien der Vorticity. Isolinien mit positiver Vorticity sind durchgezogen und Isolinien mit negativer Vorticity sind gestrichelt dargestellt.

In dem diskutierten Beispiel besitzen Welle und Scherströmung eine gleich hohe Amplitude. Die Schlußfolgerungen sind aber auch dann richtig, wenn die Welle und Scherströmung eine sehr unterschiedliche Stärke aufweisen. Ist im ersten Fall die Amplitude der Welle nur sehr gering, dann wächst sie instabil an, da über dem Impulsfluss der Scherströmung die kinetische Energie entzogen wird. Das ergibt eine einfache Sche-

rungsinstabilität, die schon von Rayleigh (1880) entdeckt wurde. Ist im zweiten Fall die Scherströmung sehr schwach, dann kann sie über die negative Wirbelviskosität instabil anwachsen. Der Mechanismus dieser Instabilität wurde von Thompson (1970) beschrieben, um die Superrotation der Venusatmosphäre aufgrund der Neigung von Konvektionszellen zu erklären. Krishnamurti und Howard (1981) beobachteten eine Neigung von zweidimensionalen Konvektionszellen in einem Laborexperiment. Mit Hilfe eines niederspektralen Modells zeigten Howard und Krishnamurti (1986), daß die Neigung der Zellen durch den von Thompson gefundenen Instabilitätsmechanismus verursacht werden kann. Völlig unabhängig von diesen Arbeiten zeigten Lorenz (1972) und Gill (1974), daß ebene Rossbywellen instabil sind bezüglich Störungen, die zonalsymmetrische Scherströmungen mit einschließen. Hoskins (1973) betrachtete die Instabilität von Rossby-Haurwitz Wellen (sphärische Rossbywellen) und kam zu ähnlichen Ergebnissen. Das führte zu der Hypothese die kinetischen Umwandlungen in die Zonalmittelströmung auf diese barotrope Welleninstabilität zurückzuführen. Rossbywellen verlagern sich aufgrund der meridionalen Zunahme des Coriolisparameters. Die barotrope Welleninstabilität wirkt aber auch im Fall uniformer Rotation. In diesem Fall ist der Mechanismus der barotropen Welleninstabilität identisch mit dem, der von Thompson entdeckt wurde.

Die barotrope Welleninstabilität hat möglicherweise einen Einfluß auf den Lebenszyklus einer baroklinen Welle. Gibt man etwa eine vertikal und meridional gescherte Zonalströmung vor, die instabil ist gegenüber einer meridional erstreckten baroklinen Welle, so neigen sich schon in der linearen Wachstumsphase die Phasenlinien mit der Scherströmung (siehe z. B. McIntyre 1970). Der resultierende Impulsfluß verstärkt dann die meridionale Scherung der barotropen Zonalmittelströmung durch den negativen Wirbelviskositätseffekt. Die erhöhte Meridionalscherung beschleunigt wiederum den Neigungsvorgang, so daß eine positive Rückkopplung hervorgerufen wird. Sofern die anfängliche Scherung zyklonal ist, dominiert das Wachstum der Zyklone gegenüber dem Wachstum der Antizyklone. Schließlich erhöht sich die Scherung so weit, daß die Scherungsdeformation das barokline Wachstum unterbindet und die Welle sich am Ende in der Scherströmung auflöst. Je nachdem, ob der Endzustand stabil oder instabil ist, kann noch ein weiterer Lebenszyklus stattfinden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu zeigen, daß die barotrope Welleninstabilität tatsächlich einen deutlichen Einfluß auf die Entwicklung von baroklinen Wellen haben kann. Insbesondere wird demonstriert, daß die barotrope Welleninstabilität an

- dem Durchlaufen eines asymmetrischen Wellenlebenszyklus
- dem "Barotropic Governor" Effekt
- einer dem Shapiro-Keyser Konzeptmodell entsprechenden Zyklonenentwicklung

maßgeblich beteiligt sein kann. Um die wesentlichen Mechanismen hervorzuheben, beschränken sich die Untersuchungen auf idealisierte barokline Kanalströmungen. Zum

einen wird das Zweischichtensystem und zum anderen das kontinuierlich geschichtete System einer Strömung mit uniformer potentieller Vorticity (UPV-System) betrachtet. Beide Systeme werden durch eine quasigeostrophische Approximation vereinfacht, die im synoptischen Skalenbereich gültig ist. Es wird gezeigt, daß die mathematischen Gleichungsstrukturen der beiden Systeme sehr ähnlich sind und deshalb die numerische Integration zu vergleichbaren Ergebnissen führt. Das UPV-System bietet zudem noch den Vorteil, daß die weniger einschränkende semigeostrophische Approximation durch eine räumliche Koordinatentransformation erreicht werden kann. Im Rahmen der semigeostrophischen Approximation wird dann auch die Dynamik von subsynoptischen Strukturen wie Fronten mit berücksichtigt.

Der Aufbau dieser Arbeit gliedert sich wie folgt. In Kapitel 2 erfolgt zunächst eine Beschreibung der idealisierten Strömungssysteme. Die Strömungssysteme enthalten drei Lösungen mit unterschiedlichen Strömungssymmetrien, die von Nakamura (1993) entdeckt wurden. Diese Symmetrien werden in Kapitel 3 diskutiert. Bei der als zonoklin bezeichneten Symmetrie verschwindet die barotrope Zonalmittelströmung identisch. Folglich muß diese Symmetrie gebrochen werden, damit die Welle einen asymmetrischen Lebenszyklus durchlaufen kann. Im weiteren wird in Kapitel 3 die barokline Instabilität in den linearisierten Strömungssystemen analysiert. Kapitel 4 präsentiert die Ergebnisse einer großen Anzahl von numerisch simulierten Entwicklungen von baroklinen Wellen. Dabei wird das Augenmerk auf den Einfluß des Symmetriebruchs gerichtet. In Kapitel 5 wird die Stabilität einer barotropen Welle eingehend analysiert. Mit der gleichen Methode wird in Kapitel 5 auch die Stabilität der zonoklinen Strömungssymmetrie untersucht. Die Ergebnisse zeigen, daß der in Kapitel 4 beschriebene Symmetriebruch durch eine hydrodynamische Instabilität hervorgerufen wird, die im wesentlichen mit der barotropen Welleninstabilität übereinstimmt. In Kapitel 6 werden die Resultate dieser Arbeit zusammengefaßt und diskutiert.

## 2 Formulierung der idealisierten Strömungssysteme

Die Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich auf quasigeostrophisch und semigeostrophisch approximierete Strömungssysteme. Diese lassen es zu, wesentliche dynamische Eigenschaften von baroklinen Wellen im synoptischen Skalenbereich zu verstehen, wobei die Approximationen den mathematischen Zugang erheblich vereinfachen.

### 2.1 Grundgleichungen des quasigeostrophischen Systems

In diesem Abschnitt erfolgt eine knappe Herleitung des quasigeostrophischen Systems. Zunächst werden folgende charakteristische Skalen eingeführt:

$$\begin{aligned} L &= \text{horizontale Längenskala} \\ D &= \text{vertikale Längenskala} \\ V &= \text{horizontale Geschwindigkeitsskala} \\ VD/L &= \text{vertikale Geschwindigkeitsskala} \\ L/V &= \text{Zeitskala} \\ \rho_0 &= \text{Dichteskala} \\ g\rho_0 D &= \text{Druckskala} \end{aligned}$$

Hierbei ist  $g$  die Gravitationsbeschleunigung. Im weiteren werden alle Größen mit diesen Skalen entdimensioniert. Das betrachtete Fluid rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = f/2$  um eine vertikale Achse, wobei  $f$  den Coriolisparameter bezeichnet.

Es wird angenommen, daß die Dicke des Fluides klein ist gegenüber der charakteristischen horizontalen Längenskala der Bewegung, d. h.  $D/L \ll 1$ . Mit dieser Annahme kann die vertikale Bewegungsgleichung auf das hydrostatische Gleichgewicht reduziert werden. Zusätzlich wird das betrachtete Fluid idealisiert, indem es als reibungsfrei und inkompressibel angenommen wird. Die letzte Voraussetzung ist für Flüssigkeiten nahezu exakt erfüllt. Für ein gasförmiges Fluid müßte man die Kompressibilität mit berücksichtigen. Dieser Zusatzeffekt hat aber für die grundlegende Dynamik von baroklinen Wellen keine so große Bedeutung (Gross 1997). Mit den genannten Voraussetzungen erhält man die folgenden dimensionslosen primitiven Gleichungen für ein inkompressibles Fluid in Abhängigkeit von den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\text{Ro}^2} \frac{1}{F} \frac{1}{\varrho} \nabla_h p, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 , \quad (2.1c)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 , \quad (2.1d)$$

mit der totalen zeitlichen Ableitung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} .$$

Hier bezeichnet  $t$  die dimensionslose Zeit,  $\mathbf{v} = (u, v, 0)$  den Horizontalgeschwindigkeitsvektor,  $w$  die Vertikalgeschwindigkeit,  $\mathbf{k}$  den Einheitsvektor in vertikaler Richtung,  $p$  den Druck,  $\rho$  die Dichte und  $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0)$  den horizontalen Gradientenoperator. Die primitiven Gleichungen (2.1) hängen von den folgenden dimensionslosen Parametern ab:

$$\text{Ro} = \frac{V}{fL} \text{ die Rossbyzahl} \quad (2.2a)$$

und

$$\text{F} = \frac{f^2 L^2}{gD} \text{ die externe Rotations - Froudezahl} . \quad (2.2b)$$

Die Rossbyzahl ergibt sich aus dem Verhältnis von Trägheits- und Corioliskraft im rotierenden System. Die quasigeostrophische Approximation läßt sich hier durchführen, wenn die Rossbyzahl  $\text{Ro}$  klein ist, d. h.  $\text{Ro} \leq 0.1$ . Die externe Rotations-Froudezahl (im weiteren Froudezahl) setzt die aus der Rotation resultierende Trägheitskraft ins Verhältnis mit der aus der Oberflächenauslenkung resultierenden Schwerkraft. Auch diese Zahl wird als klein angenommen, d. h.  $\text{F} = O(\text{Ro})$ . Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß die Abweichung der Dichte  $\rho'$  vom Flächenmittel  $\rho_0(z)$  klein gegenüber der Rossbyzahl ist, d. h.  $\rho' = O(\text{Ro}^2)$ , und daß die vertikalen Dichteschwankungen einen Anteil von 10 % nicht überschreiten, d. h.  $(\rho_0(z) - 1) = O(\text{Ro})$ . Die angenommenen Größenordnungen der Dichteschwankungen erlauben eine Boussinesq-Approximation, die hier mit der quasigeostrophischen Approximation kombiniert wird. Eine ausführliche mathematische Herleitung des quasigeostrophischen Systems ist in dem Lehrbuch von Pedlosky (1987) zu finden. Hier sei nur erwähnt, daß man das quasigeostrophische System mit der Skalenanalyse erhalten kann. Dazu werden zunächst die Größenordnungen aller Terme (als Potenz der Rossbyzahl) in den Gleichungen bestimmt und

danach vorausgesetzt, daß die Terme gleicher Größenordnung jeweils die entsprechende Gleichung erfüllen müssen. Wird diese Methode so angewendet, dann erhält man mit den genannten Annahmen aus dem System (2.1a-d) das folgende quasigeostrophische Gleichungssystem:

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\text{Ro } F} \mathbf{k} \times \nabla_h \left( \frac{p'}{\varrho_0} \right), \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial y} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = 0, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p'}{\varrho_0} \right) = -\frac{\varrho'}{\varrho_0}, \quad (2.3c)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.3d)$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + u_g \frac{\partial \varrho'}{\partial x} + v_g \frac{\partial \varrho'}{\partial y} + w \frac{d\varrho_0}{dz} = 0. \quad (2.3e)$$

Hier bezeichnet  $p'$  die Abweichung des Drucks vom Flächenmittel,  $\mathbf{v}_g = (u_g, v_g, 0)$  den geostrophischen und  $\mathbf{v}_a = (u_a, v_a, 0)$  den ageostrophischen Geschwindigkeitsvektor. Es sei angemerkt, daß in diesem System keine thermodynamischen Beziehungen benötigt werden. Man kann aber durchaus die Dichteanomalie  $\varrho'$  als eine negative Temperaturanomalie ansehen.

## 2.2 Das quasigeostrophische Zweischichtensystem

Das Zweischichtenmodell auf einer uniform rotierenden Ebene ( $f$ -Ebene) stellt das einfachste Strömungssystem dar, in welchem die Entwicklung von Wellen aufgrund barokliner Instabilität untersucht werden kann. Dieses Modell beschreibt die Strömung zweier übereinander gelagerter homogener und inkompressibler Fluide mit unterschiedlicher Dichte, wobei das Schichtensystem durch horizontale Berandungen begrenzt wird. Die erste mathematische Beschreibung der baroklinen Instabilität in dem Zweischichtenmodell wurde von Phillips (1951) gebracht. Hart (1972) gelang es, barokline Wellen im Zweischichtensystem in einem Laborexperiment nachzuweisen. Bemerkenswert erscheint die Tatsache, daß in diesem Experiment die baroklinen Wellen rein mechanisch durch die unterschiedliche Rotationsfrequenz der oberen und unteren Berandung des Tanks verursacht werden.

### 2.2.1 Herleitung der Modellgleichungen

In dieser Arbeit wird auf die Idealisierung eines unendlich ausgedehnten geradlinigen Kanals mit der Breite  $W = \pi$  eingegangen, wobei die Fliehkräfte vernachlässigt werden. In diesem Fall kann man das Modell in den kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  formulieren, wobei  $x$  die Position längs zur Kanalrichtung,  $y$  die Position senkrecht zur Kanalrichtung und  $z$  die Höhe über der unteren Berandung angibt. In Anlehnung an geographische Koordinatensysteme wird  $x$  als Zonalkoordinate und  $y$  als Meridionalcoordinate bezeichnet.

Dieses Zweischichtensystem im Kanal ist in Abb. 2.1 schematisch dargestellt. Der Index 1(2) kennzeichnet die obere (untere) Schicht. Es bezeichnet  $\Delta\rho$  die Dichtedifferenz in der Größenordnung  $O(\text{Ro}^2)$  und  $h$  die dimensionslose Auslenkung der Grenzfläche zwischen den beiden Schichten. Der anfänglich gestörte zonale Grundstrom  $U$  ist vertikal antisymmetrisch und in der jeweiligen Schicht konstant. Die Strömung im Kanal sei in zentraler Richtung periodisch mit der Wellenlänge  $\lambda$ .

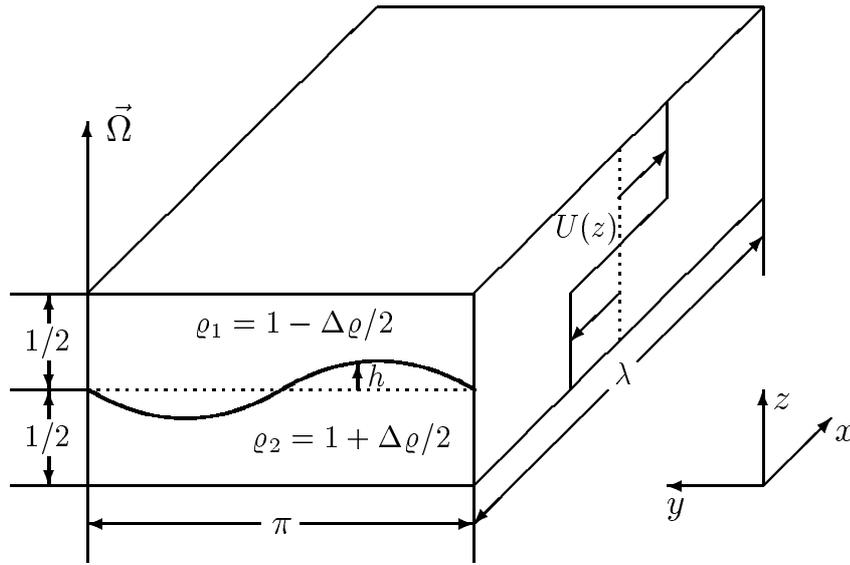


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Zweischichtensystems mit dem Grundstrom  $U(z)$  sowie Orientierung des verwendeten kartesischen Koordinatensystems.

Die vertikale Integration der hydrostatischen Grundgleichung (2.3c) ergibt

$$p = \begin{cases} \hat{p} + (1 - \frac{\Delta\rho}{2})(1 - z) & \text{für } z \geq \frac{1}{2} + h \\ \hat{p} + (1 - \frac{\Delta\rho}{2})(\frac{1}{2} - h) + (1 + \frac{\Delta\rho}{2})(\frac{1}{2} + h - z) & \text{für } z < \frac{1}{2} + h \end{cases} . \quad (2.4)$$

Der Druck  $\hat{p}$  wird von der oberen festen Berandung (bei  $z = 1$ ) ausgeübt. Dieser Druck resultiert aus einer Zwangskraft, die bei einer freien Oberfläche verschwinden würde. Bei Beachtung der Vertikalabhängigkeit des Druckes erhält man für die geostrophische Beziehung (2.3a) und die quasigeostrophische Bewegungsgleichung (2.3b) in den beiden Schichten

$$\mathbf{v}_{g1} = \frac{1}{\text{Ro F}} \mathbf{k} \times \nabla_h \hat{p} , \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{v}_{g2} = \frac{1}{\text{Ro F}} \mathbf{k} \times \nabla_h (\hat{p} + \Delta \rho h) , \quad (2.5b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{g1}}{\partial t} + u_{g1} \frac{\partial \mathbf{v}_{g1}}{\partial x} + v_{g1} \frac{\partial \mathbf{v}_{g1}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{a1} = 0 , \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{g2}}{\partial t} + u_{g2} \frac{\partial \mathbf{v}_{g2}}{\partial x} + v_{g2} \frac{\partial \mathbf{v}_{g2}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{a2} = 0 . \quad (2.5d)$$

Aus diesen Gleichungen folgt die vertikale Unabhängigkeit des geostrophischen und des ageostrophischen Geschwindigkeitsvektors innerhalb der jeweiligen Schicht. Demnach erhält man durch die vertikale Integration der Kontinuitätsgleichung (2.3d) unter Beachtung der Randbedingung  $w = 0$  bei  $z = 0, 1$

$$\left(\frac{1}{2} - h\right) \nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a1} - \frac{dh}{dt} = 0 , \quad (2.6a)$$

$$\left(\frac{1}{2} + h\right) \nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a2} + \frac{dh}{dt} = 0 . \quad (2.6b)$$

Eine zusätzliche Einschränkung im quasigeostrophischen Zweischichtenmodell besteht in der Annahme, daß die Auslenkung  $h$  der Grenzfläche klein ist, d. h.  $h = O(\text{Ro})$ . In diesem Fall ergeben sich aus der quasigeostrophischen Skalierung die folgenden approximierten Kontinuitätsgleichungen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_{g1} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{g1} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{2} \nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a1} = 0 , \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u_{g2} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{g2} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{2} \nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a2} = 0 . \quad (2.7b)$$

Die kinematische Randbedingung an der Grenzfläche verlangt nun, daß

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a1} = -\nabla_h \cdot \mathbf{v}_{a2} . \quad (2.8)$$

Die divergenzbehafteten Anteile der ageostrophischen Strömung heben sich also in der Summe gegeneinander auf. Es ist auch möglich, daß die ageostrophische Strömung einen divergenzfreien Anteil besitzt. Da dieser aber dynamisch keinen Einfluß auf die Entwicklung der divergenzfreien geostrophischen Strömung ausübt, kann die divergenzfreie Komponente auch vernachlässigt werden. Daher wird angenommen, daß

$$\mathbf{v}_{a1} = -\mathbf{v}_{a2} =: \mathbf{v}_a . \quad (2.9)$$

Aus den geostrophischen Beziehungen (2.5a,b) kann man eine Stromfunktion für die beiden Schichten definieren

$$\psi_1 = \frac{1}{\text{Ro F}} \hat{p} \quad \text{und} \quad \psi_2 = \frac{1}{\text{Ro F}} (\hat{p} + \Delta \varrho h) . \quad (2.10a,b)$$

Unter Verwendung der Bewegungsgleichungen und der vertikal integrierten Kontinuitätsgleichungen ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi_1 - F_1 (\psi_1 - \psi_2)) + J(\psi_1, \nabla_h^2 \psi_1 - F_1 (\psi_1 - \psi_2)) = 0 , \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \psi_2 + F_1 (\psi_1 - \psi_2)) + J(\psi_2, \nabla_h^2 \psi_2 + F_1 (\psi_1 - \psi_2)) = 0 , \quad (2.11b)$$

wobei  $F_1 = 2F/\Delta \varrho$  die interne Froudezahl in der Größenordnung  $O(1)$  und

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y}$$

den Jacobi-Operator bezeichnet. Diese Gleichungen besagen, daß die quasigeostrophische potentielle Vorticity (abgekürzt PV)  $q_n = \nabla^2 \psi_n + (-1)^n F_1 (\psi_1 - \psi_2)$  in der jeweiligen Schicht erhalten bleibt.

Für spätere Betrachtungen ist es sinnvoll, die Stromfunktion im Zweischichtensystem formal als Funktion von  $z$  zu definieren und in einen vertikal symmetrischen Anteil  $\psi_M$  sowie in einen vertikal antisymmetrischen Anteil  $\psi_T$  zu unterteilen. Das führt zu

$$\psi_M(x, y, z, t) = (\psi_1(x, y, t) + \psi_2(x, y, t))/2 \quad (2.12a)$$

und

$$\psi_T(x, y, z, t) = \begin{cases} (\psi_1(x, y, t) - \psi_2(x, y, t))/2 & \text{für } z \geq \frac{1}{2} + h \\ -(\psi_1(x, y, t) - \psi_2(x, y, t))/2 & \text{für } z < \frac{1}{2} + h \end{cases} . \quad (2.12b)$$

Die vertikale Antisymmetrie von  $\psi_T$  ist aufgrund der Grenzflächenauslenkung nur näherungsweise gültig. Diese Näherung ist aber verträglich mit der Skalierung des quasigeostrophischen Zweischichtensystems und wird deshalb vorausgesetzt. Im weiteren wird  $\psi_M$  als barotrope und  $\psi_T$  als barokline Stromfunktion bezeichnet. Der barotrope und barokline Geschwindigkeitsvektor wird dann definiert durch

$$\mathbf{V}_M = (U_M, V_M) = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi_M \text{ bzw. } \mathbf{V}_T = (U_T, V_T) = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi_T . \quad (2.13a,b)$$

Der anfangs vorgegebene zonale Grundstrom  $U(z)$  ist vertikal antisymmetrisch und besitzt keine meridionale Scherung (siehe Abb. 2.2), d. h.

$$U(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z \geq 1/2 \\ -1 & \text{für } z < 1/2 \end{cases} . \quad (2.14)$$

Diese einfache Form ermöglicht es, die barokline Instabilität bezüglich kleiner Störungen analytisch zu beschreiben, wie es von Phillips (1951) durchgeführt wurde. Die Einbeziehung einer meridionalen Scherung im Grundstrom würde dagegen das mathematische Problem so verkomplizieren, daß keine analytische Lösung möglich ist (siehe McIntyre 1970). Es ist für die spätere Analyse von Nutzen, diesen Grundstrom von der zeitlich sich entwickelnden Strömung abzuziehen. Daher wird definiert, daß

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi_M(x, y, z, t) , \quad (2.15a)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = \psi_T(x, y, z, t) + U(z)(y - \frac{\pi}{2}) , \quad (2.15b)$$

wobei  $\Psi$  und  $\Phi$  die Abweichungen der barotropen bzw. baroklinen Stromfunktion vom zonalen Grundstrom bezeichnen.

Durch Addition bzw. Subtraktion der PV-Gleichungen (2.11) erhält man schließlich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 \Psi + \frac{\partial}{\partial x} \nabla_h^2 \Phi + J(\Psi, \nabla_h^2 \Psi) + J(\Phi, \nabla_h^2 \Phi) = 0 , \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(2F_I - \nabla_h^2)\Phi - \frac{\partial}{\partial x}(2F_I + \nabla_h^2)\Psi + J(\Psi, (2F_I - \nabla_h^2)\Phi) - J(\Phi, \nabla_h^2\Psi) = 0 . \quad (2.16b)$$

### 2.2.2 Randbedingungen

Die Variablen  $\psi_M$  und  $\psi_T$  müssen bei  $y = 0$  und  $y = \pi$  Randbedingungen erfüllen. Im Fall eines festen Randes dürfen dort keine geostrophischen und ageostrophischen Meridionalströmungen auftreten. Die geostrophische Randbedingung wird durch

$$V_M = \frac{\partial\psi_M}{\partial x} = 0 \text{ und } V_T = \frac{\partial\psi_T}{\partial x} = 0 \text{ bei } y = 0, \pi \quad (2.17a,b)$$

vorgegeben. Zur Herleitung der ageostrophischen Randbedingung wird der rotationsfreie Anteil der ageostrophischen Geschwindigkeit als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials dargestellt, d. h.

$$\mathbf{v}_a = \nabla_h \chi . \quad (2.18)$$

Damit erhält man für die Vorticitygleichung in den beiden Schichten

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2\psi_n) + J(\psi_n, \nabla_h^2\psi_n) = (-1)^n \frac{1}{\text{Ro}} \nabla_h^2\chi \text{ für } n = 1, 2 . \quad (2.19)$$

Am Rand gilt:

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} = 0 \text{ bei } y = 0, \pi \quad (2.20)$$

Dieses Neumannsche Randwertproblem ist bis auf eine additive Konstante nur dann lösbar, wenn die Bedingung

$$\int_0^\pi \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_h^2\psi_n) + J(\psi_n, \nabla_h^2\psi_n) \, dx dy = 0 \quad (2.21)$$

erfüllt wird (Bronstein und Semendjajew 1991, Seite 501). Der zweite Summand im Integral verschwindet aufgrund der geostrophischen Randbedingungen an den seitlichen Berandungen und der Periodizität in zonaler Richtung. Deshalb gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial[\psi_n]}{\partial y} \right) = 0 \text{ bei } y = 0, \pi , \quad (2.22)$$

wobei  $[..] = \int_0^\lambda (..) dx / \lambda$  das zonale Mittel definiert. Die zonal gemittelte Zonalströmung muß an den Rändern aufgrund dieser Bedingung zeitlich konstant bleiben. Die Bewegungsgleichung für die barotrope Strömung erfüllt bereits die ageostrophische Randbedingung aufgrund der Divergenzfreiheit der barotropen Strömung. Die ageostrophische Randbedingung reduziert sich demnach auf

$$\frac{\partial[U_T]}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial[\psi_T]}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{bei } y = 0, \pi . \quad (2.23)$$

Die barokline zonal gemittelte Strömung könnte am Rand zeitlich variieren, wenn nur die geostrophische Randbedingung vorausgesetzt werden würde. Das erklärt sich durch den geostrophischen Massenfluß der baroklinen Wellen, die einen zonal gemittelten Gradienten in der Oberflächenauslenkung  $h$  an den Berandungen erzeugen können. Dieser Gradient ist über die geostrophische Beziehung (2.5b) wiederum verknüpft mit einer baroklinen zonalen Strömungskomponente. Das geostrophische Gleichgewicht dieser Strömungskomponente kann aber nur über eine ageostrophische Meridionalströmung hergestellt werden, die an einem festen Rand nicht auftreten darf. Deshalb wird an einem festen Rand der Aufbau eines meridionalen Gradienten von  $h$  durch eine ausgleichende Vertikalbewegung verhindert. Man könnte erwarten, daß die Vernachlässigung der ageostrophischen Randbedingung keine so große Auswirkung auf die Dynamik im Zweischichtenmodells hätte. Die Energetik zeigt jedoch, daß über die ageostrophische Strömung nicht vernachlässigbare Energiebeträge durch die Berandungen treten können.

### 2.2.3 Energetik

Zur Analyse der zeitlichen Entwicklung werden auch energetische Größen betrachtet, die im folgenden diskutiert werden. Multipliziert man die Bewegungsgleichungen mit  $\mathbf{v}_{gi}$  und die vertikal integrierte Kontinuitätsgleichung mit  $h$ , dann kann man nach einigen Umformungen folgende Energiegleichung herleiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}_M^2 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_T^2 + F_I \psi_T^2 \right) \\ + \nabla_h \cdot \left( \mathbf{V}_M \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}_M^2 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_T^2 + F_I \psi_T^2 \right) + \mathbf{V}_T (\mathbf{V}_M \cdot \mathbf{V}_T) \right) = -\frac{1}{\text{Ro}} \nabla_h \cdot (\mathbf{v}_a \psi_T) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Integration dieser Gleichung über das Kanalgebiet ergibt bei Beachtung der Randbedingungen (2.17a,b) und (2.20)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{V}_M^2 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_T^2 + F_I \psi_T^2 \right\} = 0 , \quad (2.25)$$

wobei die Gebietsintegration durch

$$\{..\} = \frac{1}{\pi\lambda} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\lambda (..) \, dx dy dz$$

symbolisiert wurde. Die integrierte Energiegleichung besagt, daß die Summe aus kinetischer Energie  $K = \frac{1}{2}\{\mathbf{V}_M^2 + \mathbf{V}_T^2\}$  und verfügbarer potentieller Energie  $A = \{F_1\psi_T^2\}$  erhalten bleibt.

Werden die Variablen  $G$  in zonales Mittel  $[G]$  und Abweichung vom zonalen Mittel  $G^*$  zerlegt, so kann man die Energieterme noch weiter aufspalten in die kinetische Energie der Störungen  $K_e$ , die zonale kinetische Energie  $K_z$ , die verfügbare potentielle Energie der Störungen  $A_e$ , und die zonale verfügbare potentielle Energie  $A_z$ , welche definiert sind durch:

$$K_e = \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{V}_M^{*2} + \frac{1}{2} \mathbf{V}_T^{*2} \right\}, \quad K_z = \left\{ \frac{1}{2} [U_M]^2 + \frac{1}{2} [U_T]^2 \right\}, \quad (2.26a,b)$$

$$A_e = F_1 \{ \psi_T^{*2} \}, \quad A_z = F_1 \{ [\psi_T]^2 \}. \quad (2.26c,d)$$

Mit diesen Energietermen resultieren die folgenden Energiegleichungen:

$$\frac{dK_e}{dt} = +C(A_e, K_e) + C(K_z, K_e), \quad (2.27a)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = +C(A_z, K_z) - C(K_z, K_e), \quad (2.27b)$$

$$\frac{dA_e}{dt} = +C(A_z, A_e) - C(A_e, K_e), \quad (2.27c)$$

$$\frac{dA_z}{dt} = -C(A_z, K_z) - C(A_z, A_e), \quad (2.27d)$$

wobei die Energieumwandlungen durch

$$C(A_e, K_e) = \frac{1}{\text{Ro}} \{ \psi_T^* \nabla_h \cdot \mathbf{v}_a^* \}, \quad (2.28a)$$

$$C(A_z, K_z) = \frac{1}{\text{Ro}} \left\{ [\psi_T] \frac{\partial [v_a]}{\partial y} \right\}, \quad (2.28b)$$

$$C(K_z, K_e) = - \left\{ [U_M^* V_M^* + U_T^* V_T^*] \frac{\partial [U_M]}{\partial y} + [U_M^* V_T^* + U_T^* V_M^*] \frac{\partial [U_T]}{\partial y} \right\}, \quad (2.28c)$$

$$C(A_z, A_e) = \{ 2F_1 [V_M^* \psi_T^*] [U_T] \} \quad (2.28d)$$

gegeben sind. Diese Gleichungen beschreiben den Energiezyklus nach Lorenz (1955) im quasigeostrophischen Zweischichtenmodell.

### 2.3 Das quasigeostrophische System in uniformer potentieller Vorticity

Im Hinblick auf atmosphärische synoptische Wettersysteme sind die Annahmen des quasigeostrophischen Zweischichtenfluids nicht angemessen. Obwohl unterschiedlich temperierte Luftmassen oftmals nahezu diskontinuierlich an der Polarfront voneinander getrennt werden (Berggren 1952), ist die bis zum Boden reichende Polarfront nicht mit der Skalierung im quasigeostrophischen Zweischichtenmodell verträglich. Die realistischere Annahme einer kontinuierlichen Dichteverteilung läßt dagegen eine quasigeostrophische Skalierung der bis zum Boden reichenden baroklinen Zonen zu, wenn diese nicht zu kleinräumig sind. Viele Laborexperimente zur experimentellen Untersuchung von baroklinen Wellen basieren ebenfalls auf einer kontinuierlichen Dichteverteilung, die durch unterschiedliche Erwärmung des Fluids erreicht wird. Erwähnt sei hier die Veröffentlichung von Fultz et. al (1959), die eine detaillierte Zusammenfassung von Experimenten in einem rotierenden Zylinder gibt. Charney (1947) konnte als erster die baroklinen Instabilität in einer kontinuierlich geschichteten Atmosphäre analytisch beschreiben. Eine sehr viel einfachere analytische Lösung wurde von Eady (1949) gefunden. Die Einfachheit seiner Lösung beruht auf der Annahme einer uniformen potentiellen Vorticity. Obwohl diese Annahme in der oberen Troposphäre nicht gerechtfertigt ist, kann man unter dieser Voraussetzung die außertropische Zyklogenese relativ realistisch beschreiben. Das wurde zum Beispiel in einer numerischen Studie von Schär und Wernli (1993) mit einem semigeostrophischen Modell gezeigt. Um eine mathematische Vereinfachung zu erreichen, wird in dieser Arbeit ebenfalls auf die Idealisierung einer uniformen potentiellen Vorticity zurückgegriffen. Das mit dieser Annahme assoziierte Strömungssystem wird abkürzend als UPV-System bezeichnet.

#### 2.3.1 Herleitung der Modellgleichungen

Wie beim Zweischichtenmodell wird auch im UPV-System die geometrische Idealisierung eines in zentraler Richtung unendlich ausgedehnten Kanals vorausgesetzt. Jedoch werden die seitlichen Berandungen nicht als feste Berandungen behandelt. Stattdessen wird die sich zeitlich entwickelnde Lösung über die Berandungen hinaus periodisch fortgesetzt. Für diese vereinfachte Behandlung gibt es mehrere Gründe, die später erörtert werden. Die geometrischen Abmessungen des Kanals, schematisch dargestellt in Abbildung 2.2, stimmen mit denen des Zweischichtensystems überein. Der meridional konstante zonale Grundstrom  $U(z)$  ist vertikal antisymmetrisch und nimmt wie in der Lösung von Eady (1949) linear mit der Höhe zu.

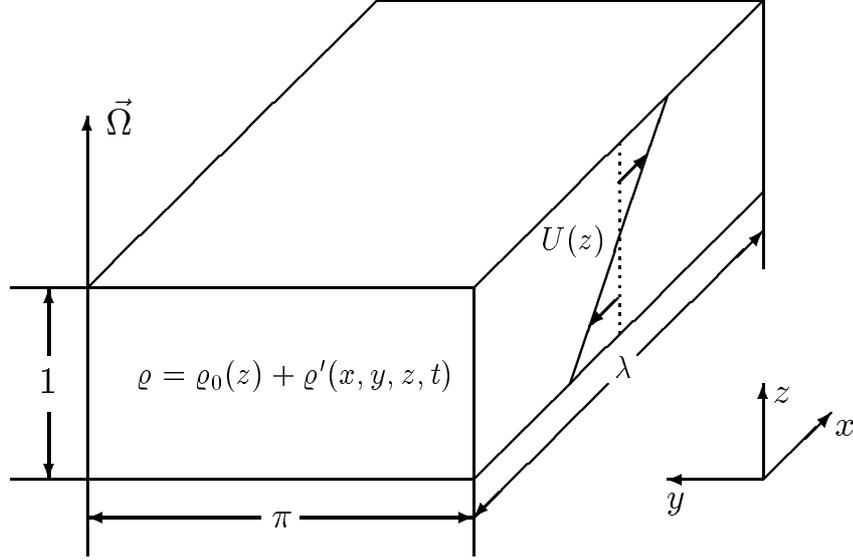


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des kontinuierlich geschichteten UPV-Systems mit Grundstrom  $U(z)$  sowie Orientierung des verwendeten kartesischen Koordinatensystems.

Aus Gl. (2.3a) erhält man die geostrophische Stromfunktion

$$\psi = \frac{1}{\text{Ro } F} \frac{p'}{\rho_0} . \quad (2.29)$$

Mit Hilfe dieser Stromfunktion kann man das quasigeostrophische System (2.3a-e) reduzieren auf die folgende Vorticity- und Temperaturgleichung:

$$\frac{\partial \nabla_h^2 \psi}{\partial t} + J(\psi, \nabla_h^2 \psi) = \frac{1}{\text{Ro}} \frac{\partial w}{\partial z} , \quad (2.30a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + J\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + \frac{1}{\text{Ro}} \frac{N^2 D^2}{f^2 L^2} w = 0 , \quad (2.30b)$$

wobei  $\partial \psi / \partial z$  als Temperatur interpretiert wird. Die Größe

$$N = \left( -\frac{g}{\rho_0 D} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

definiert die Brunt-Väisälä Frequenz, welche die Frequenz von internen Schwerkoszillationen bestimmt. Es wird hier von dem idealisierten Fall ausgegangen, daß diese Frequenz nicht mit der Höhe  $z$  variiert.

Die Vorticitygleichung (2.30a) und die Temperaturgleichung (2.30b) kann man zusammenfassen in eine Gleichung für die quasigeostrophische potentielle Vorticity  $q$

$$\frac{\partial}{\partial t}q + J(\psi, q) = 0 \quad \text{mit } q = \nabla_h^2\psi + \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

wobei hier  $F_I = 4f^2L^2/N^2D^2$  die kontinuierliche Version der internen Froudezahl bezeichnet. Bei Diskretisierung der Vertikalkoordinate  $z$  auf zwei Modellflächen würde man ein Zweiflächenmodell erhalten. Bei geeigneter Wahl der Modellflächen und einer Differenzenformulierung für die Vertikalableitung kann man zeigen, daß die Gleichungen (2.30a,b) sich in die PV-Gleichungen des Zweischichtensystems umformen lassen. Diese Äquivalenz vom Zweiflächenmodell und dem Zweischichtenmodell ist ebenfalls von Pedlosky (1987) gezeigt worden. Die Formulierung eines Zweiflächenmodells kann jedoch aufgrund der sehr groben Diskretisierung physikalisch nicht gerechtfertigt werden.

Eine erhebliche Vereinfachung des quasigeostrophischen Systems erfolgt, wenn die potentielle Vorticity des Ausgangszustandes verschwindet. In diesem Fall folgt aus der Erhaltung der potentiellen Vorticity, daß diese auch für jeden beliebigen Zeitpunkt  $t$  verschwindet, d. h. es muß

$$\nabla_h^2\psi + \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.33)$$

in dem Fluid erfüllt werden. Diese Laplace-Gleichung kann eindeutig gelöst werden, wenn Dirichlet'sche oder Neumann'sche Randbedingungen vorliegen. An der unteren und oberen Berandung werden Neumann'schen Randbedingungen durch die Temperaturgleichung (2.30b) vorgegeben. Da an diesen Rändern die Vertikalgeschwindigkeit  $w$  verschwindet, vereinfacht sich dort Gl. (2.30b) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) + J\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{bei } z = 0, 1. \quad (2.34a,b)$$

Es wird angenommen, daß die Anfangsverteilung der Stromfunktion  $\psi$  sich in einen vertikal symmetrischen Anteil  $\psi_M$  mit der Eigenschaft

$$\psi_M(x, y, z, t = 0) = \psi_M(x, y, 1 - z, t = 0) \quad (2.35a)$$

und in einen vertikal antisymmetrischen Anteil  $\psi_T$  mit der Eigenschaft

$$\psi_T(x, y, z, t = 0) = -\psi_T(x, y, 1 - z, t = 0) \quad (2.35b)$$

aufspalten läßt. Die Rechtfertigung für diese Annahme wird im nächsten Kapitel erkennbar.

Aus dieser Annahme folgt unmittelbar, daß

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi_M(x, y, z, t = 0) = -\frac{\partial}{\partial z}\psi_M(x, y, 1 - z, t = 0) \quad (2.36a)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi_T(x, y, z, t = 0) = \frac{\partial}{\partial z}\psi_T(x, y, 1 - z, t = 0) . \quad (2.36b)$$

Durch die horizontale Differentiation bleibt die vertikale Symmetrie erhalten und das Produkt aus zwei Größen mit gleicher (unterschiedlicher) vertikaler Symmetrie ist vertikal symmetrisch (antisymmetrisch). Deshalb erhält das UPV-System die vertikale Symmetrieeigenschaft der Anfangsverteilung. Wie beim Zweischichtensystem werden folgende Definitionen verwendet:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi_M(x, y, z, t) = \frac{\psi(x, y, z, t) + \psi(x, y, 1 - z, t)}{2} , \quad (2.37a)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \psi_T(x, y, z, t) + U_0\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\psi(x, y, z, t) - \psi(x, y, 1 - z, t)}{2} + U_0\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) , \end{aligned} \quad (2.37b)$$

$$\mathbf{V}_M = (U_M, V_M) = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi_M , \quad \mathbf{V}_T = (U_T, V_T) = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi_T , \quad (2.37c,d)$$

wobei  $\Psi$  und  $\Phi$  die Abweichung der vertikal symmetrischen Stromfunktion bzw. vertikal antisymmetrischen Stromfunktion vom zonalen Grundstrom  $U(z)$  definiert. Auch

hier wird  $\psi_M$  als barotrope Stromfunktion und  $\psi_T$  als barokline Stromfunktion bezeichnet. Es muß jedoch angemerkt werden, daß  $\psi_M$  eine barokline Komponente enthalten kann. Der Grundstromparameter  $U_0$ , der die vertikale Scherung beschreibt, wird erst später festgelegt.

Bei Beachtung der vertikalen Symmetrieeigenschaft kann man die Temperaturreandbedingungen (2.34a,b) durch Addition bzw. Subtraktion umformen in

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi + J(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial z}) + J(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial z}) = 0 \quad \text{bei } z = 1, \quad (2.38a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - U_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi + J(\Psi, \frac{\partial \Phi}{\partial z}) + J(\Phi, \frac{\partial \Psi}{\partial z}) = 0 \quad \text{bei } z = 1. \quad (2.38b)$$

Diese Rechnung zeigt, daß das UPV-System mit der genannten Symmetrieeigenschaft eine mathematische Struktur besitzt, die der des Zweischichtensystems (Gl. (2.16)) sehr ähnlich ist.

### 2.3.2 Randbedingungen

Im UPV-System wird nur das Verschwinden der geostrophischen Meridionalgeschwindigkeit vorausgesetzt, d. h. die Bedingungen

$$V_M = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad V_T = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{bei } y = 0, \pi \quad (2.39a,b)$$

müssen erfüllt werden. Auf die ageostrophische Randbedingung wird verzichtet und stattdessen die Lösung über die Ränder hinaus periodisch fortgesetzt.

Die vereinfachte Formulierung einer doppelperiodischen Region ist durchaus oft in der Literatur anzufinden, insbesondere dann, wenn semigeostrophische Modelle verwendet werden (z. B. Hoskins 1976, Hoskins und West 1979, Heckley und Hoskins 1982, Davies et al. 1991). Die Wahl dieser Formulierung begründet sich durch die folgenden Punkte:

- In der realen Atmosphäre existieren keine festen vertikalen Berandungen auf der synoptischen Skala. Es ist daher nicht offensichtlich, daß die vollständige Berücksichtigung der Kanalberandungen im Hinblick auf atmosphärische Wettersysteme realistischere Bedingungen schafft.
- In den kontinuierlichen Systemen bei fester Berandung besteht das Problem, daß bei den Kantenlinien des Kanals der aus den Wellentemperaturflüssen resultierende Temperaturgradient unstetig wird, da dieser im zonalen Mittel aufgrund der

fehlenden Vertikalgeschwindigkeit und der Vernachlässigung der ageostrophischen Advektion nicht abgebaut werden kann. Es kommt daher zu sehr starken meridionalen Gradienten in der Zonalmittelströmung, die bei der numerischen Behandlung Probleme bereiten.

- Die Wahl einer doppeltperiodischen Region erlaubt die Erweiterung des quasi-geostrophischen UPV-System auf ein semigeostrophisches UPV-System durch eine einfache Koordinatentransformation (Hoskins 1975).

Die Nichterhaltung der Energie durch ageostrophische Energieflüsse über die Berandungen erweist sich als ein Nachteil der vereinfachten Formulierung. Der Energiezuwachs bleibt jedoch beschränkt und kann durch einen Zusatzterm beschrieben werden.

### 2.3.3 Energetik

Aus dem System (2.3) kann man folgende Energiegleichung ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} (\nabla_h \psi)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right) + J(\psi, \frac{1}{2} (\nabla_h \psi)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2) \\ = -\frac{1}{\text{Ro}} \nabla_h \cdot (\mathbf{v}_a \psi) - \frac{1}{\text{Ro}} \frac{\partial}{\partial z} (w \psi) . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Gebietsintegration dieser Energiegleichung ergibt bei Beachtung der geostrophischen Randbedingungen (2.39a,b):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} (\nabla_h \psi_M)^2 + \frac{1}{2} (\nabla_h \psi_T)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi_M}{\partial z} \right)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi_T}{\partial z} \right)^2 \right\} = -\frac{1}{\text{Ro}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (v_a \psi) \right\} \quad (2.41)$$

Aufgrund der zonalen Impulsgleichung kann man die rechte Seite dieser Gleichung umformen in

$$\frac{1}{\text{Ro}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} (v_a \psi) \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \frac{\partial u_g}{\partial t} + J(\psi, u_g) \right) \psi \right) \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial [u_g]}{\partial t} [\psi] \right) \right\} . \quad (2.42)$$

Der letzte Schritt der Umformung folgt aus der Tatsache, daß die Stromfunktion  $\psi$  entlang des Randes nicht variiert. Für eine weitere Vereinfachung dieses Terms

wird erwähnt, daß der zeitabhängige Anteil von  $[\psi]$  am Rand verschwindet. Diese vorweggenommene Eigenschaft der doppelperiodischen Lösung wird erst im nächsten Kapitel verständlich und führt zu der Erhaltungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}(\nabla_h \psi_M)^2 + \frac{1}{2}(\nabla_h \psi_T)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi_M}{\partial z} \right)^2 + \frac{F_I}{8} \left( \frac{\partial \psi_T}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} (U_T[\psi_T]) \right\} = 0. \quad (2.43)$$

Demgemäß wird die Energiezufuhr durch die Kanalberandungen durch den letzten Term beschrieben.

Wie beim Zweischichtensystem werden die Energien weiter aufgespalten in die Energien der zonal gemittelten Strömung und in die Energien der Störungen mit dem Ergebnis

$$K_e = \left\{ \left( \frac{1}{2} \mathbf{V}_M^* \right)^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{V}_T^*)^2 \right\}, \quad K_z = \left\{ \frac{1}{2} [U_M]^2 + \frac{1}{2} [U_T]^2 \right\}, \quad (2.44a,b)$$

$$A_e = \left\{ \frac{F_I}{8} \frac{\partial \psi_M^*}{\partial z}^2 + \frac{F_I}{8} \frac{\partial \psi_T^*}{\partial z}^2 \right\}, \quad A_z = \left\{ \frac{F_I}{8} \frac{\partial [\psi_M]}{\partial z}^2 + \frac{F_I}{8} \frac{\partial [\psi_T]}{\partial z}^2 \right\}. \quad (2.44c,d)$$

Damit der Grundstrom im UPV-System genau soviel verfügbare potentielle Energie besitzt wie der Grundstrom im Zweischichtensystem, wird der Grundstromparameter mit  $U_0 = (8)^{\frac{1}{2}}$  festgelegt.

Die entsprechenden Energieumwandlungen berechnen sich zu

$$C(A_e, K_e) = \frac{1}{\text{Ro}} \left\{ w^* \frac{\partial \psi_M^*}{\partial z} + w^* \frac{\partial \psi_T^*}{\partial z} \right\}, \quad (2.45a)$$

$$C(A_z, K_z) = \frac{1}{\text{Ro}} \left\{ [w] \frac{\partial [\psi_M]}{\partial z} + [w] \frac{\partial [\psi_T]}{\partial z} \right\}, \quad (2.45b)$$

$$C(K_z, K_e) = - \left\{ [U_M^* V_M^* + U_T^* V_T^*] \frac{\partial [U_M]}{\partial y} + [U_M^* V_T^* + U_T^* V_M^*] \frac{\partial [U_T]}{\partial y} \right\}, \quad (2.45c)$$

$$C(A_z, A_e) = \frac{F_I}{4} \left\{ [V_M^* \frac{\partial \psi_M^*}{\partial z} + V_T^* \frac{\partial \psi_T^*}{\partial z}] \frac{\partial [U_M]}{\partial z} + [V_M^* \frac{\partial \psi_T^*}{\partial z} + V_T^* \frac{\partial \psi_M^*}{\partial z}] \frac{\partial [U_T]}{\partial z} \right\}. \quad (2.45d)$$

Mit diesen Termen kann man folgende Gleichung für die totale Störungsenergie ableiten:

$$\frac{d}{dt} (K_e + A_e) = \{\mathbf{E} \cdot \nabla[u_g]\} , \quad (2.46)$$

wobei  $\mathbf{E}$  den Eliassen-Palm Fluß (EP-Fluß) bezeichnet (siehe Edmon et al 1980), der durch

$$\mathbf{E} = \left( 0, -[u_g^* v_g^*], \frac{F_I}{4} [v_g^* \frac{\partial \psi^*}{\partial z}] \right) \quad (2.47)$$

definiert wird. Mit dieser Gleichung kann man den lokalen Anteil an der Energieumwandlung in die Störung einfach diagnostizieren, indem man das Skalarprodukt aus dem EP-Fluß und dem Gradienten der Zonalmittelströmung in der  $y$ - $z$  Ebene bildet. Folglich wird den Störungen Energie entzogen (zugeführt), wenn die Zonalmittelströmung in Richtung des EP-Flusses abnimmt (zunimmt).

## 2.4 Das semigeostrophische System in uniformer potentieller Vorticity

Während der Entwicklung von baroklinen Wellen kann es zur Ausbildung von starken Temperaturgradienten (Fronten) kommen. Selbst in quasigeostrophischen Systemen ist eine starke Verdichtung der Temperaturkonturen durch Streckungs- und Scherungsdeformationen möglich. Hoskins und Bretherton (1972) zeigten jedoch, daß dieser Prozess durch die ageostrophische Advektion erheblich beschleunigt wird. Zur richtigen Beschreibung dieses Phänomens sind daher die quasigeostrophisch approximierten Gleichungen nicht geeignet. Eine mathematisch elegante Alternative bildet das semigeostrophische System, das von Hoskins (1975) eingeführt wurde. Hoskins zeigte, daß das semigeostrophische System in uniformer potentieller Vorticity nach einer räumlichen Transformation identisch mit dem quasigeostrophischen UPV-System ist. Deshalb können die mit dem quasigeostrophischen UPV-System gewonnenen Ergebnisse mit dieser Transformation in das semigeostrophische UPV-System übertragen werden. Der Vorteil des semigeostrophischen Systems gegenüber dem quasigeostrophischen liegt in einer realistischeren Wiedergabe von subsynoptischen Strukturen, die in extratropischen Wettersystemen beobachtet werden (siehe z. B. Schär und Wernli 1993).

### 2.4.1 Die geostrophische Impulsapproximation

Grundlage des semigeostrophischen Systems ist die sogenannte geostrophische Impulsapproximation. Die Approximation verlangt, daß die Beschleunigungskraft gegenüber der Corioliskraft klein ist, d. h.

$$\left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| \ll \frac{1}{\text{Ro}} |\mathbf{v}| . \quad (2.48)$$

Diese Forderung schränkt die Krümmung der Stromlinien ein, weil starke Krümmungen mit hohen Fliehbeschleunigungen verbunden sind. Starke horizontale Windscherungen (hohe Vorticity), wie sie an Fronten auftreten, können aber durchaus verträglich sein mit der Forderung (2.48). Die Bewegungsgleichung (2.1a) läßt sich umformen in

$$\frac{d\mathbf{v}_g}{dt} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \left( \mathbf{v} - \mathbf{v}_g + \text{Ro}^2 \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} \right) = 0, \quad (2.49)$$

Der letzte Term in der Klammer kann aufgrund der Voraussetzung (2.48) vernachlässigt werden. Das führt bei zusätzlicher Beachtung der Boussinesq-Approximation zu dem System

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{k} \times \nabla_h \psi, \quad (2.50a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_g}{dt} + \frac{1}{\text{Ro}} \mathbf{k} \times \mathbf{v}_a = 0, \quad (2.50b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\text{RoF}} \frac{\varrho'}{\varrho_0}, \quad (2.50c)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.50d)$$

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0. \quad (2.50e)$$

Hoskins (1975) zeigte, daß aus diesem System die Erhaltung von

$$Q_g = -\boldsymbol{\zeta}_g \cdot \nabla \varrho \quad (2.51)$$

folgt, wobei

$$\boldsymbol{\zeta}_g = \left( -\frac{\partial v_g}{\partial z}, \frac{\partial u_g}{\partial z}, \frac{1}{\text{Ro}} + \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \text{Ro} \nabla u_g \times \nabla v_g. \quad (2.52)$$

Abgesehen von dem nichtlinearen Term des Vorticityvektors  $\boldsymbol{\zeta}_g$  stellt  $Q_g$  die potentielle Vorticity einer geostrophischen Strömung dar.

## 2.4.2 Herleitung der Gleichungen des semigeostrophischen UPV-Systems

In dem approximierten System (2.50) ist die Advektion durch die ageostrophische Geschwindigkeit mit enthalten. Somit benötigt man die explizite Kenntnis dieser Geschwindigkeit, um das System zu lösen. Man kann jedoch diese Advektion durch eine räumliche Koordinatentransformation eliminieren. Dazu werden die sogenannten geostrophischen Koordinaten

$$\tilde{x} = x + \text{Ro } v_g, \quad \tilde{y} = y - \text{Ro } u_g, \quad \tilde{z} = z, \quad \tilde{t} = t \quad (2.53a,b,c,d)$$

eingeführt. Die totale Zeitableitung bleibt durch die Transformation unberührt und schreibt sich in den neuen Koordinaten,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + u_g \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + v_g \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + w \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \quad (2.54)$$

da

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = u_g \quad \text{und} \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = v_g. \quad (2.55)$$

Somit erscheint die ageostrophische Advektion nicht mehr explizit in den neuen Koordinaten. Die Differentialoperatoren transformieren sich über die Jacobi Matrix  $\mathbf{A}$ , d. h.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \text{Ro} \frac{\partial v_g}{\partial x} & -\text{Ro} \frac{\partial u_g}{\partial x} & 0 \\ \text{Ro} \frac{\partial v_g}{\partial y} & 1 - \text{Ro} \frac{\partial u_g}{\partial y} & 0 \\ \text{Ro} \frac{\partial v_g}{\partial z} & -\text{Ro} \frac{\partial u_g}{\partial z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Die inverse Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\text{Ro}}{\det \mathbf{A}} \left( \frac{1}{\text{Ro}} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) & \frac{\text{Ro}}{\det \mathbf{A}} \frac{\partial u_g}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\text{Ro}}{\det \mathbf{A}} \frac{\partial v_g}{\partial y} & \frac{\text{Ro}}{\det \mathbf{A}} \left( \frac{1}{\text{Ro}} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) & 0 \\ -\frac{\text{Ro}^2}{\det \mathbf{A}} \left( \frac{\partial v_g}{\partial z} \left( \frac{1}{\text{Ro}} - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial u_g}{\partial z} \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) & \frac{\text{Ro}^2}{\det \mathbf{A}} \left( \frac{\partial u_g}{\partial z} \left( \frac{1}{\text{Ro}} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \right) - \frac{\partial v_g}{\partial z} \frac{\partial u_g}{\partial x} \right) & 1 \end{pmatrix}.$$

(2.57)

Mit Hilfe der inversen Jacobi Matrix und der Definition  $\tilde{\psi} = \psi + \frac{1}{2}\text{Ro}(u_g^2 + v_g^2)$  kann man zeigen, daß

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}}. \quad (2.58a,b,c)$$

So wird die geostrophische Strömung und die Temperatur im transformierten System ebenfalls durch eine Stromfunktion beschrieben werden. Weiter gilt

$$\det \mathbf{A} = \text{Ro } \boldsymbol{\zeta}_g \cdot \mathbf{k} =: \text{Ro } \zeta_g \quad (2.59)$$

und

$$Q_g = -\boldsymbol{\zeta}_g \cdot \nabla \varrho = -\zeta_g \frac{\partial \varrho}{\partial \tilde{z}} = \zeta_g \left( \text{Ro } F \varrho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{d\varrho_0}{d\tilde{z}} \right). \quad (2.60)$$

Die Vertikalkomponente des Wirbelvektors  $\boldsymbol{\zeta}_g$  ist demnach identisch mit der Determinante der Jacobi Matrix und zeigt im transformierten System senkrecht zu den Flächen gleicher Höhe  $\tilde{z}$ . Diese Komponente schreibt sich in den transformierten Koordinaten

$$\zeta_g = \frac{1}{\text{Ro}^2} \left( \frac{1}{\text{Ro}} - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \text{Ro} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right)^2 \right)^{-1}. \quad (2.61)$$

Obwohl der nichtlineare Term klein ist (Hoskins 1975), besitzt er Bedeutung für den meridionalen Phasenverlauf der anwachsenden Störung. Eine genauere Diskussion dieses Terms findet sich im Anhang. Wie in den meisten Studien, die Gebrauch von semigeostrophischen Modellen machen, wird der nichtlineare Term in Gl. (2.61) aufgrund der erheblichen Vereinfachung vernachlässigt.

Die potentielle Vorticity für den in Gl. (2.37) definierten Grundstrom ist  $Q_g = -\text{Ro}^{-1} d\varrho_0/dz$  und daher uniform. Daraus folgt mit Gl. (2.60) und Gl. (2.61), daß

$$\tilde{\nabla}_h^2 \tilde{\psi} + \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} = 0, \quad (2.62)$$

mit  $\tilde{\nabla}_h = (\partial/\partial\tilde{x}, \partial/\partial\tilde{y}, 0)$ . Die Temperaturrandbedingungen schreiben sich in den transformierten Koordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{t}} \left( \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{z}} \right) + \tilde{J}(\tilde{\psi}, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{z}}) = 0 \text{ bei } z = 0, 1, \quad (2.63)$$

wobei

$$\tilde{J}(A, B) = \frac{\partial A}{\partial\tilde{x}} \frac{\partial B}{\partial\tilde{y}} - \frac{\partial B}{\partial\tilde{x}} \frac{\partial A}{\partial\tilde{y}}.$$

Somit ist gezeigt worden, daß im Fall uniformer potentieller Vorticity das semigeostrophische System in den geostrophischen Koordinaten mathematisch identisch ist mit dem quasigeostrophischen System in den physikalischen Koordinaten. Als zusätzlicher äußerer Parameter erscheint die Rossbyzahl  $Ro$ , die in dem quasigeostrophischen System nicht explizit auftritt. Für  $Ro \rightarrow 0$  geht das semigeostrophische System in das quasigeostrophische System über, da in diesem Grenzfall die geostrophischen Koordinaten  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  mit den physikalischen Koordinaten  $x, y, z$  übereinstimmen.

Für die Untersuchung der Entwicklung idealisierter barokliner Wellen bietet das semigeostrophische System den Vorteil, daß durch die Transformation das Koordinatengitter an den Fronten verfeinert wird. Dadurch wird es ermöglicht, die Frontogenese zu simulieren, selbst dann, wenn die geostrophischen Koordinaten keine Fronten auflösen könnten. Als Nachteil der semigeostrophischen Formulierung erweist sich das mögliche Auftreten eines sogenannten frontalen Kollapses, woraufhin die Koordinatentransformation in den physikalischen Raum nicht mehr durchgeführt werden kann. Der frontale Kollaps erfolgt, wenn lokal

$$\frac{1}{Ro} = \tilde{\nabla}_h^2 \tilde{\psi}. \quad (2.64)$$

In diesem Fall nimmt die Vorticity  $\zeta_g$  einen unendlichen Wert an, was nur an Diskontinuitätsflächen möglich ist. Zur Verhinderung des frontalen Kollapses müßte man Diffusionsterme zu den Erhaltungsgleichungen im physikalischen Raum hinzufügen. Das würde aber wiederum das Lösungsverfahren erschweren.

### 3 Strömungssymmetrien und Lösungen

In diesem Kapitel werden die Symmetrieeigenschaften und Lösungen der in Kapitel 2 formulierten Systeme eingehend diskutiert. Da das quasigeostrophische Zweischichtensystem und das quasigeostrophische UPV-System viele Gemeinsamkeiten aufweisen, wird zur einheitlichen Darstellung vorerst ein verallgemeinertes System definiert.

#### 3.1 Definition des verallgemeinerten Systems

Das verallgemeinerte System sei gegeben durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{A}\Psi) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}\Phi) + J(\Psi, \mathcal{C}\Psi) + J(\Phi, \mathcal{D}\Phi) = 0, \text{ bei } z = 1 \quad (3.1a)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}\Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{F}\Psi) + J(\Psi, \mathcal{G}\Phi) + J(\Phi, \mathcal{H}\Psi) = 0, \text{ bei } z = 1. \quad (3.1b)$$

Hierbei sind  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ , und  $\mathcal{H}$  lineare Operatoren mit der Eigenschaft, daß das orthogonale System der verwendeten Entwicklungsfunktionen für eine festgehaltene Höhe  $z$  einen Eigenraum bezüglich dieser Operatoren bildet. Die festgehaltene Höhe liegt bei  $z = 1$ , da im UPV-System dort die prognostischen Gleichungen (2.38) vorgegeben sind, die ja die Randbedingungen für die Laplace-Gleichung (2.33) liefern. Im Zweischichtensystem ist dagegen die Bedingung  $z = 1$  nur aus formalen Gründen notwendig. Die barotrope Stromfunktion  $\Psi$  und die barokline Stromfunktion  $\Phi$  werden nach komplexwertigen orthogonalen Funktionen der Form

$$\begin{aligned} E_{k,l}^M(x, y, z) &= E_{k,l}^{Mr}(x, y, z) + iE_{k,l}^{Mi}(x, y, z) = G_{k,l}^M(z)(F_{k,l}^r(x, y) + iF_{k,l}^i(x, y)) \\ &= G_{k,l}^M(z)(\cos akx + i \sin akx) \sin ly, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} E_{k,l}^T(x, y, z) &= E_{k,l}^{Tr}(x, y, z) + iE_{k,l}^{Ti}(x, y, z) = G_{k,l}^T(z)(F_{k,l}^r(x, y) + iF_{k,l}^i(x, y)) \\ &= G_{k,l}^T(z)(\cos akx + i \sin akx) \sin ly \end{aligned} \quad (3.2b)$$

entwickelt, wobei die Wellenzahlen  $k$ ,  $l$  als zonale bzw. meridionale Wellenzahl bezeichnet werden und ganze Zahlen sind. Die Konstante  $a = 2\pi/\lambda$  stellt das horizontale Aspektverhältnis der Fundamentalwelle ( $k = 1$ ,  $l = 1$ ) dar und hängt von der Vorgabe

der zonalen Länge  $\lambda$  des Kanals ab. Die Funktionen  $G_{k,l}^M(z)$  (vertikal symmetrisch) bzw.  $G_{k,l}^T(z)$  (vertikal antisymmetrisch) sind von dem jeweiligen System abhängig.

Die Anwendung der Operatoren auf diese Eigenfunktion ergibt mit der genannten Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}E_{k,l}^M &= a_{k,l}E_{k,l}^M, \quad \mathcal{B}E_{k,l}^T = b_{k,l}E_{k,l}^T, \quad \mathcal{C}E_{k,l}^M = c_{k,l}E_{k,l}^M, \quad \mathcal{D}E_{k,l}^T = d_{k,l}E_{k,l}^T, \\ \mathcal{E}E_{k,l}^T &= e_{k,l}E_{k,l}^T, \quad \mathcal{F}E_{k,l}^M = f_{k,l}E_{k,l}^M, \quad \mathcal{G}E_{k,l}^T = g_{k,l}E_{k,l}^T, \quad \mathcal{H}E_{k,l}^M = h_{k,l}E_{k,l}^M, \end{aligned} \quad (3.3)$$

bei  $z = 1$

wobei  $a_{k,l}$ ,  $b_{k,l}$ ,  $c_{k,l}$ ,  $d_{k,l}$ ,  $e_{k,l}$ ,  $f_{k,l}$ ,  $g_{k,l}$ , und  $h_{k,l}$ , die Eigenwerte zu dem jeweiligen Operator bezeichnen.

Im Zweischichtensystem sind die Variablen in vertikaler Richtung innerhalb der jeweiligen Schicht konstant. Daher kann man leicht nachweisen, daß das Zweischichtensystem sich in der Form (3.1) darstellen läßt. Im UPV-System müssen zunächst die Eigenfunktionen  $E_{k,l}^M$  und  $E_{k,l}^T$  vollständig bestimmt werden. Aufgrund der Forderung nach uniformer potentieller Vorticity (Gleichung (2.33)) und der Orthogonalität der Eigenfunktion gilt:

$$\nabla_h^2 E_{k,l}^M + \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2 E_{k,l}^M}{\partial z^2} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_h^2 E_{k,l}^T + \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2 E_{k,l}^T}{\partial z^2} = 0. \quad (3.4a,b)$$

Durch Einsetzen von (3.2) reduzieren sich diese Gleichungen auf

$$\frac{d^2 G_{k,l}^M}{dz^2} - \Gamma_{k,l}^2 G_{k,l}^M = 0 \quad (3.5a)$$

und

$$\frac{d^2 G_{k,l}^T}{dz^2} - \Gamma_{k,l}^2 G_{k,l}^T = 0, \quad (3.5b)$$

wobei  $\Gamma_{k,l} = 2((a^2 k^2 + l^2)/F_I)^{\frac{1}{2}}$ .

Mit den geforderten Symmetrieeigenschaften folgt:

$$G_{k,l}^M(z) = \frac{\cosh\left(\Gamma_{k,l}\left(z - \frac{1}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l}\right)} \quad (3.6a)$$

und

$$G_{k,l}^T(z) = \frac{\sinh\left(\Gamma_{k,l}\left(z - \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l}\right)}. \quad (3.6b)$$

Dabei wurden die Funktionen so normiert, daß sie an der oberen Berandung ( $z = 1$ ) den Wert 1 annehmen.

Im UPV-System bestimmen also die Hyperbelfunktion die vertikale Abhängigkeit der Wellen. Folglich nehmen Stromfunktion und Temperaturanomale bei Annäherung an die obere oder untere Berandung nahezu exponentiell zu. Dieser Effekt verstärkt sich für hohe Wellenzahlen und es ist daher eine starke Ausprägung kleinskaliger Strukturen (z. B. Fronten) an den Berandungen zu erwarten. Die in Gl. (3.6) genannten Funktionen sind in vertikaler Richtung um  $z = 1/2$  symmetrisch (Cosinus hyperbolicus) bzw. antisymmetrisch (Sinus hyperbolicus). Da jede beliebige Temperaturverteilung in der doppeltperiodischen Ebene durch eine Fourierentwicklung angenähert werden kann, läßt sich also die resultierende Stromfunktion innerhalb der Berandungen immer in einen vertikal symmetrischen und einen vertikal antisymmetrischen Teil zerlegen. Ein möglicher Anteil, der keine dieser beiden Symmetrieeigenschaften erfüllt, wäre im UPV-System zeitlich konstant und würde an den Berandungen keinen Beitrag zur Temperatur liefern. Diese mögliche Komponente tritt nicht auf, da der anfängliche Grundstrom eine solche Asymmetrie nicht besitzt. Durch die Kenntnis der Entwicklungsfunktionen kann man jetzt die Eigenwerte zu den Operatoren bestimmen. Diese sind in Tabelle 3.1 für das Zweischichtensystem wie auch für das UPV-System angegeben.

Die Formulierung des Systems (3.1) ist so allgemein gehalten, daß weitere Strömungssysteme in diese Kategorie fallen. Erwähnt sei hier das System eines zweidimensionalen instabil geschichteten Boussinesq-Fluides (z. B. Saltzman 1962), in welchem die Ausbildung von Konvektionsrollen aufgrund der konvektiven Instabilität beschrieben werden kann. Dieses System basiert im nichtviskosen und nichtdiffusiven Fall auf den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_h^2 \Psi) - \frac{g}{T_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + J(\Psi, \nabla_h^2 \Psi) = 0, \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Phi) - \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + J(\Psi, \Phi) = 0, \quad (3.7b)$$

wobei die  $z$ -Koordinate mit der  $y$ -Koordinate vertauscht wurde. Hier definiert  $\Psi$  die Stromfunktion der zweidimensionalen Strömung,  $\Phi$  die Temperaturanomale,  $\Delta T/H$

	Zweischichtensystem	UPV-System
$\mathcal{A}$	$\nabla_h^2(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{B}$	$\nabla_h^2(\cdot)$	$-U_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}\right)(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{C}$	$\nabla_h^2(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{D}$	$\nabla_h^2(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{E}$	$(2F_I - \nabla_h^2)(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{F}$	$-(2F_I + \nabla_h^2)(\cdot)$	$-U_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}\right)(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{G}$	$(2F_I - \nabla_h^2)(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$\mathcal{H}$	$-\nabla_h^2(\cdot)$	$\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) _{z=1}$
$a_{k,l}$	$-(a^2k^2 + l^2)$	$\Gamma_{k,l} \tanh(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$
$b_{k,l}$	$-(a^2k^2 + l^2)$	$-U_0 \left(1 - \frac{1}{2}\Gamma_{k,l} \coth(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})\right)$
$c_{k,l}$	$-(a^2k^2 + l^2)$	$\Gamma_{k,l} \tanh(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$
$d_{k,l}$	$-(a^2k^2 + l^2)$	$\Gamma_{k,l} \coth(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$
$e_{k,l}$	$2F_I + a^2k^2 + l^2$	$\Gamma_{k,l} \coth(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$
$f_{k,l}$	$-2F_I + a^2k^2 + l^2$	$-U_0 \left(1 - \frac{1}{2}\Gamma_{k,l} \tanh(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})\right)$
$g_{k,l}$	$2F_I + a^2k^2 + l^2$	$\Gamma_{k,l} \coth(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$
$h_{k,l}$	$a^2k^2 + l^2$	$\Gamma_{k,l} \sinh(\frac{1}{2}\Gamma_{k,l})$

Tabelle 3.1: Operatoren und Eigenwerte des Zweischichtensystems und des UPV-Systems.

den linearen Temperaturgradienten des Grundzustandes und  $T_0$  die mittlere Temperatur.

In (3.7) erscheinen die Operatoren  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{H}$  nicht, da sie die Multiplikation mit der Null bedeuten. Trotz dieser Einschränkung läßt sich die konvektive Instabilität durchaus mit der baroklinen Instabilität in den quasigeostrophischen Systemen vergleichen,

weil beide Erscheinungen durch einen linearen Dichtegradienten hervorgerufen werden und diesen mittels einer zweidimensionalen Rollenströmung verringern. Im weiteren fällt auch das System einer divergenzfreien und barotropen Strömung im Kanal formal in die Kategorie des Systems (3.1). Es ist aber sinnvoller, die rein barotrope Strömung als eine Speziallösung des Zweischichtensystems anzusehen. Das kann man einfach verifizieren, indem man in den Gleichungen (2.11a,b)  $\psi_1 = \psi_2$  setzt.

### 3.2 Die spektralen Gleichungen der freien Lösungen

Die beiden quasigeostrophischen Strömungssysteme besitzen freie Lösungen. Eine freie Lösung ist hier so definiert, daß sie nicht von den Randbedingungen an den meridionalen Berandungen des Kanals abhängt. Somit üben diese Berandungen keine Zwangskräfte auf die Lösung aus. Die hier betrachteten freien Lösungen erfüllen zwar ohnehin die geostrophischen Randbedingungen, jedoch nicht die ageostrophischen Randbedingungen.

Zur Herleitung der spektralen Gleichungen, welche die zeitliche Entwicklung der freien Lösung beschreiben, werden die Variablen  $\Phi$  und  $\Psi$  zunächst in eine doppelte Fourierreihe entwickelt, d. h.

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} G_{k,l}^M(z) (\Psi_{k,l}^r(t) F_{k,l}^r(x, y) + \Psi_{k,l}^i(t) F_{k,l}^i(x, y)) \quad , \quad (3.8a)$$

bzw.

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} G_{k,l}^T(z) (\Phi_{k,l}^r(t) F_{k,l}^r(x, y) + \Phi_{k,l}^i(t) F_{k,l}^i(x, y)) \quad . \quad (3.8b)$$

Hierbei definieren  $\Psi_{k,l}^r$ ,  $\Psi_{k,l}^i$ ,  $\Phi_{k,l}^r$  und  $\Phi_{k,l}^i$  die zeitabhängigen Koeffizienten zu den entsprechenden Eigenfunktionen. Das Einsetzen dieser Entwicklung in das verallgemeinerte System (3.1) ergibt bei Beachtung der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen das folgende System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{k,l}^r}{dt} = & -ak \frac{b_{k,l}}{a_{k,l}} \Phi_{k,l}^i \\ & - \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left( \frac{c_{k_2,l_2}}{a_{k,l}} (\alpha_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^r \Psi_{k_2,l_2}^i + \beta_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^i \Psi_{k_2,l_2}^r) \right. \\ & \left. + \frac{d_{k_2,l_2}}{a_{k,l}} (\alpha_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^r \Phi_{k_2,l_2}^i + \beta_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^i \Phi_{k_2,l_2}^r) \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_{k,l}^i}{dt} &= ak \frac{b_{k,l}}{a_{k,l}} \Phi_{k,l}^r & (3.9b) \\
&- \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left( \frac{c_{k_2,l_2}}{a_{k,l}} (\gamma_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^i \Psi_{k_2,l_2}^i + \epsilon_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^r \Psi_{k_2,l_2}^r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d_{k_2,l_2}}{a_{k,l}} (\gamma_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^i \Phi_{k_2,l_2}^i + \epsilon_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^r \Phi_{k_2,l_2}^r) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_{k,l}^r}{dt} &= -ak \frac{f_{k,l}}{e_{k,l}} \Psi_{k,l}^i & (3.9c) \\
&- \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left( \frac{g_{k_2,l_2}}{e_{k,l}} (\alpha_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^r \Phi_{k_2,l_2}^i + \beta_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^i \Phi_{k_2,l_2}^r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{k_2,l_2}}{e_{k,l}} (\alpha_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^r \Psi_{k_2,l_2}^i + \beta_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^i \Psi_{k_2,l_2}^r) \right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_{k,l}^i}{dt} &= ak \frac{f_{k,l}}{e_{k,l}} \Psi_{k,l}^r & (3.9d) \\
&- \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{\infty} \left( \frac{g_{k_2,l_2}}{e_{k,l}} (\gamma_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^i \Phi_{k_2,l_2}^i + \epsilon_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Psi_{k_1,l_1}^r \Phi_{k_2,l_2}^r) \right. \\
&\quad \left. + \frac{h_{k_2,l_2}}{e_{k,l}} (\gamma_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^i \Psi_{k_2,l_2}^i + \epsilon_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} \Phi_{k_1,l_1}^r \Psi_{k_2,l_2}^r) \right) .
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen sind die sogenannten Wechselwirkungskoeffizienten gegeben durch

$$\begin{aligned}
\alpha_{k_1,l_1,k_2,l_2}^{k,l} &= \{F_{k,l}^r J(F_{k_1,l_1}^r, F_{k_2,l_2}^i)\} / \{F_{k,l}^r F_{k,l}^r\} & (3.10a) \\
&= \frac{a}{4} (- (k_1 l_2 - k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k,|k_1-k_2|} \delta_{l,|l_1-l_2|} \\
&\quad + (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k,k_1+k_2} \delta_{l,|l_1-l_2|} \\
&\quad - (k_1 l_2 + k_2 l_1) \delta_{k,|k_1-k_2|} \delta_{l,l_1+l_2} \\
&\quad + (k_1 l_2 - k_2 l_1) \delta_{k,k_1+k_2} \delta_{l,l_1+l_2} ) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{k_1, l_1, k_2, l_2}^{k, l} &= \{F_{k, l}^r J(F_{k_1, l_1}^i, F_{k_2, l_2}^r)\} / \{F_{k, l}^r F_{k, l}^r\} \\
&= \frac{a}{4} \left( (k_1 l_2 - k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \right. \\
&\quad + (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \\
&\quad + (k_1 l_2 + k_2 l_1) \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, l_1 + l_2} \\
&\quad \left. + (k_1 l_2 - k_2 l_1) \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, l_1 + l_2} \right),
\end{aligned} \tag{3.10b}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{k_1, l_1, k_2, l_2}^{k, l} &= \{F_{k, l}^i J(F_{k_1, l_1}^i, F_{k_2, l_2}^i)\} / \{F_{k, l}^i F_{k, l}^i\} \\
&= \frac{a}{4} \left( -(k_1 l_2 - k_2 l_1) \frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|} \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \right. \\
&\quad + (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \\
&\quad - (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|} \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, l_1 + l_2} \\
&\quad \left. + (k_1 l_2 - k_2 l_1) \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, l_1 + l_2} \right),
\end{aligned} \tag{3.10c}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{k_1, l_1, k_2, l_2}^{k, l} &= \{F_{k, l}^i J(F_{k_1, l_1}^r, F_{k_2, l_2}^r)\} / \{F_{k, l}^i F_{k, l}^i\} \\
&= \frac{a}{4} \left( -(k_1 l_2 - k_2 l_1) \frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|} \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \right. \\
&\quad - (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{l_1 - l_2}{|l_1 - l_2|} \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, |l_1 - l_2|} \\
&\quad - (k_1 l_2 + k_2 l_1) \frac{k_1 - k_2}{|k_1 - k_2|} \delta_{k, |k_1 - k_2|} \delta_{l, l_1 + l_2} \\
&\quad \left. - (k_1 l_2 - k_2 l_1) \delta_{k, k_1 + k_2} \delta_{l, l_1 + l_2} \right),
\end{aligned} \tag{3.10d}$$

wobei  $\delta_{i_1, i_2}$  das Kronecker Symbol mit der Eigenschaft

$$\delta_{i_1, i_2} = \begin{cases} 1 & \text{for } i_1 = i_2 \\ 0 & \text{for } i_1 \neq i_2 \end{cases} \tag{3.11}$$

bezeichnet.

Es ist offenbar, daß die Wechselwirkungskoeffizienten nur dann nicht verschwinden, wenn die sogenannten Resonanzbedingungen

$$k = |k_1 \pm k_2| \quad \text{and} \quad l = |l_1 \pm l_2| \quad (3.12)$$

erfüllt werden. Die meisten Wechselwirkungskoeffizienten sind folglich Null. Diese Eigenschaft beruht auf der Verwendung von trigonometrischen Funktionen in der Fourierreentwicklung. Bei Verwendung von anderen Eigenfunktionen ist eine derart geringe Anzahl von nicht verschwindenden Koeffizienten nicht zu erwarten. Silbermann (1954) hat z. B. in einem barotropen spektralen Modell auf der Kugel die Kugelflächenfunktionen für die Entwicklung verwendet. In diesem Fall ergeben sich Wechselwirkungskoeffizienten, die das ganze Spektrum der meridionalen Wellenzahlen einbeziehen. Da im UPV-System nur freie Lösungen betrachtet werden, kann man die Lösungen durch das Gleichungssystem (3.9) vollständig beschreiben. Im Zweischichtensystem müssen jedoch noch die ageostrophischen Randbedingungen mit berücksichtigt werden. Dieser Punkt wird im Abschnitt 3.5 behandelt.

### 3.3 Symmetrieeigenschaften der freien Lösungen

Bestimmte Symmetrieeigenschaften der freien Lösungen bleiben im allgemeinen System erhalten. Daher kann die Symmetrie der Anfangsströmung sich entscheidend auf die weitere Entwicklung auswirken. Drei verschiedene Strömungssymmetrien, bezeichnet durch Symmetrie Z, Symmetrie A und Symmetrie S, sind hier von Bedeutung. Die Existenz dieser drei Strömungssymmetrien in quasigeostrophischen Systemen wurde erstmals von Nakamura (1993) erkannt. Unabhängig von der Arbeit von Nakamura fanden Mundt und Hart (1994) die gleichen Strömungssymmetrien im quasigeostrophischen Zweischichtensystem.

#### 3.3.1 Symmetrie Z

Die Lösung, die der Symmetrie Z unterliegt, kann dargestellt werden durch die Entwicklung

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z, t) &= -\text{Re} \left( i \Psi^i(t) \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z) \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2m-1, 2n-1}^i E_{2m-1, 2n-1}^{M^i} + \Psi_{2m, 2n}^i E_{2m, 2n}^{M^i}) , \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z, t) &= \operatorname{Re} \left( \Phi^r(t) \cdot \mathbf{E}_S^T(x, y, z) \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{2m-1, 2n-1}^r E_{2m-1, 2n-1}^{Tr} + \Phi_{2m, 2n}^r E_{2m, 2n}^{Tr}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{0, 2n}^r E_{0, 2n}^{Tr} .
\end{aligned} \tag{3.13b}$$

Hier bezeichnet  $\Phi^r$  den baroklinen Zustandsvektor mit den Kosinusvariablen  $\Phi_{k,l}^r$  als Komponenten und  $\Psi^i$  den barotropen Zustandsvektor mit den Sinusvariablen  $\Psi_{k,l}^i$  als Komponenten. Weiter definiert  $\mathbf{E}_S^M$  ( $\mathbf{E}_S^T$ ) den vertikal symmetrischen (antisymmetrischen) Eigenfunktionsvektor mit der Eigenschaft, daß nur die Komponenten  $E_{k,l}^M$  ( $E_{k,l}^T$ ) nicht verschwinden, bei denen  $k+l$  eine gerade Zahl bildet. Abkürzend werde eine Komponente mit dieser Eigenschaft als spektral gerade bezeichnet. Die Existenz dieser Symmetrie folgt direkt aus den spektralen Gleichungen. Aufgrund der Resonanzbedingungen (3.12) ergibt sich, daß die nichtlineare Wechselwirkung von spektral geraden Komponenten nur auf Komponenten übertragen wird, die ihrerseits ebenfalls spektral gerade sind. Da das für die linearen Tendenzen genauso gilt, ist damit die Existenz von Lösungen mit ausschließlich spektral geraden Komponenten gezeigt. Zusätzlich sind die Koeffizienten  $\Psi_{k,l}^r$  und  $\Phi_{k,l}^i$  identisch null. Folglich kann man an den spektralen Gleichungen leicht erkennen, daß die Tendenzen in den Gleichungen (3.9a) und (3.9d) verschwinden. Somit bleibt die Symmetrie  $Z$  erhalten.

In der Lösung mit der Symmetrie  $Z$  existiert keine barotrope Stromfunktion im zonalen Mittel, da die Variable  $\Psi$  nur aus Sinuskomponenten entwickelt wurde. Dieses folgt auch aus der Tatsache, daß die Phase der baroklinen und der barotropen Stromfunktionswelle jeweils meridional nicht variiert (siehe Beispiel Abb. 3.1). Deshalb transportieren diese Wellen in meridionaler Richtung keinen Impuls, der für die Ausbildung von barotropen Zonalmittelströmungen notwendig wäre. Um die Abwesenheit einer barotropen Zonalmittelströmung hervorzuheben, wurde Symmetrie  $Z$  von Mundt und Hart (1994) als zonokline Symmetrie bezeichnet. Zusätzlich ist die zonal gemittelte Zonalströmung hier in meridionaler Richtung symmetrisch bezüglich der Kanalmitte, da für  $k=0$  (zonal konstant) eine Komponente nur dann spektral gerade sein kann, wenn  $l$  ebenfalls eine gerade Zahl ist.

### 3.3.2 Symmetrie A

Die Lösungen mit der Symmetrie  $A$  setzen sich zusammen aus einem Anteil, welcher der Symmetrie  $Z$  unterliegt, und einem sogenannten zonotropen Anteil (Definition von Mundt und Hart 1994), der die Entwicklung von barotropen Zonalmittelströmungen zuläßt. Diese sind meridional antisymmetrisch bezüglich der Kanalmitte. Die Fourierentwicklung von Lösungen mit der Symmetrie  $A$  schreibt sich

$$\Psi(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left( -i\Psi^i(t) \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z) + \Psi^r(t) \cdot \mathbf{E}_A^M(x, y, z) \right) \tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2m-1,2n-1}^i E_{2m-1,2n-1}^{Mi} + \Psi_{2m,2n}^i E_{2m,2n}^{Mi}) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2m-1,2n}^r E_{2m-1,2n}^{Mr} + \Psi_{2m,2n-1}^r E_{2m,2n-1}^{Mr}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{0,2n-1}^r F_{0,2n-1}^r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z, t) &= \operatorname{Re} \left( \Phi^r(t) \cdot \mathbf{E}_S^T(x, y, z) - i \Phi^i(t) \cdot \mathbf{E}_A^T(x, y, z) \right) \quad (3.14b) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{2m-1,2n-1}^r E_{2m-1,2n-1}^{Tr} + \Phi_{2m,2n}^r E_{2m,2n}^{Tr}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{0,2n}^r E_{0,2n}^{Tr} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{2m-1,2n}^i E_{2m-1,2n}^{Ti} + \Phi_{2m,2n-1}^i E_{2m,2n-1}^{Ti}) .
\end{aligned}$$

Hier definiert  $\Psi^r$  den barotropen Zustandsvektor mit den Kosinusvariablen  $\Psi_{k,l}^r$  als Komponenten und  $\Phi^i$  den baroklinen Zustandsvektor mit den Sinusvariablen  $\Phi_{k,l}^i$  als Komponenten. Weiter bildet  $\mathbf{E}_A^M$  ( $\mathbf{E}_A^T$ ) den vertikal symmetrischen (antisymmetrischen) Eigenfunktionsvektor mit der Eigenschaft, daß nur die Komponenten  $E_{k,l}^M$  ( $E_{k,l}^T$ ) nicht verschwinden, bei denen  $k+l$  eine ungerade Zahl bildet. Diese Komponenten werden daher als spektral ungerade benannt. Die Existenz der Symmetrie A läßt sich ebenfalls anhand der spektralen Gleichungen beweisen. Die linearen Tendenzen erhalten offensichtlich die Symmetrie A. Die nichtlineare Wechselwirkung der zotropen Komponenten untereinander führt aufgrund der Resonanzbedingungen nur zur Anregung von spektral geraden Koeffizienten. Zusätzlich verschwinden die Koeffizienten  $\Psi_{k,l}^i$  und  $\Phi_{k,l}^r$  für den zotropen Anteil. Daher wird die nichtlineare Wechselwirkung der spektral ungeraden Komponenten untereinander auf Komponenten mit der Symmetrie Z übertragen. Die Wechselwirkung der zotropen mit den zonoklinen Komponenten führt auf die Anregung von spektral ungeraden Koeffizienten. Da in diesem Fall  $\Psi_{k,l}^i$  mit  $\Psi_{k,l}^r$  und  $\Phi_{k,l}^i$  mit  $\Phi_{k,l}^r$  in der Gleichung für die barotrope Stromfunktion miteinander wechselwirken, ergibt sich dadurch nur eine Tendenz für die Kosinuskoeffizienten. Entsprechend ergibt diese Wechselwirkung in den Gleichungen für die barokline Stromfunktion nur eine Tendenz für die Sinuskoeffizienten. Somit ist gezeigt worden, daß Lösungen mit der Symmetrie A existieren.

Das wichtigste Merkmal der Lösungen mit der Symmetrie A ist die mögliche Existenz einer meridional antisymmetrischen barotropen Zonalströmung im zonalen Mittel. Das erklärt sich durch die zotropen Wellenkomponenten, die für eine bestimmte zonale Wellenzahl gegenüber dem zonoklinen Wellenanteil um  $90^\circ$  phasenverschoben ist. Dadurch zeigt die barotrope bzw. barokline Stromfunktionswelle einen meridional antisymmetrischen Phasenverlauf, so daß im vertikalen und zonalen Mittel Impuls

transportiert wird, der die meridional antisymmetrische Zonalmittelströmung forciert (siehe Beispiel Abb. 3.1).

### 3.3.3 Symmetrie S

Die Lösungen der Symmetrie S besitzen einen zusätzlichen zonotropen Anteil, der die Entwicklung von barotropen, meridional symmetrischen Zonalmittelströmungen verursachen kann. Die Fourier-Entwicklung für diese Lösungen lautet:

$$\begin{aligned}
\Psi(x, y, z, t) &= \operatorname{Re} \left( -i\Psi^i(t) \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z) + \Psi^r(t) \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z) \right) & (3.15a) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2m-1, 2n-1}^i E_{2m-1, 2n-1}^{Mi} + \Psi_{2m, 2n}^i E_{2m, 2n}^{Mi}) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi_{2m-1, 2n-1}^r E_{2m-1, 2n-1}^{Mr} + \Psi_{2m, 2n}^r E_{2m, 2n}^{Mr}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{0, 2n}^r E_{0, 2n}^{Mr} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y, z, t) &= \operatorname{Re} \left( \Phi^r(t) \cdot \mathbf{E}_S^T(x, y, z) - i\Phi^i(t) \cdot \mathbf{E}_S^T(x, y, z) \right) & (3.15b) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{2m-1, 2n-1}^r E_{2m-1, 2n-1}^{Tr} + \Phi_{2m, 2n}^r E_{2m, 2n}^{Tr}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{0, 2n}^r E_{0, 2n}^{Tr} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_{2m-1, 2n-1}^i E_{2m-1, 2n-1}^{Ti} + \Phi_{2m, 2n}^i E_{2m, 2n}^{Ti}) .
\end{aligned}$$

Die einzige Einschränkung dieser Symmetrie besteht in dem Auftreten von ausschließlich spektral geraden Komponenten. Die Existenz von Symmetrie S wurde bereits bei der Beschreibung der Symmetrie Z bewiesen. Wie bei Lösungen der Symmetrie A ermöglicht die Symmetrie S die Entwicklung von barotropen Zonalmittelströmungen durch die meridionale Variation der Wellenphase. Allerdings ist in diesem Fall der Phasenverlauf und die barotrope Zonalmittelströmung meridional symmetrisch (siehe Abb. 3.1).

Für Lösungen mit der Symmetrie S und der Symmetrie Z ist auch die Symmetriebeziehung

$$\Psi(x, y, z, t) = -\Psi\left(x - \frac{\pi}{a}, \pi - y, t\right) , \quad \Phi(x, y, z, t) = -\Phi\left(x - \frac{\pi}{a}, \pi - y, t\right) \quad (3.16a,b)$$

gültig. Die Existenz dieser Symmetrieeigenschaft in quasigeostrophischen Systemen wurde bereits von Schär (1989) gefunden. Die Beziehungen (3.16a,b) haben zur Folge,

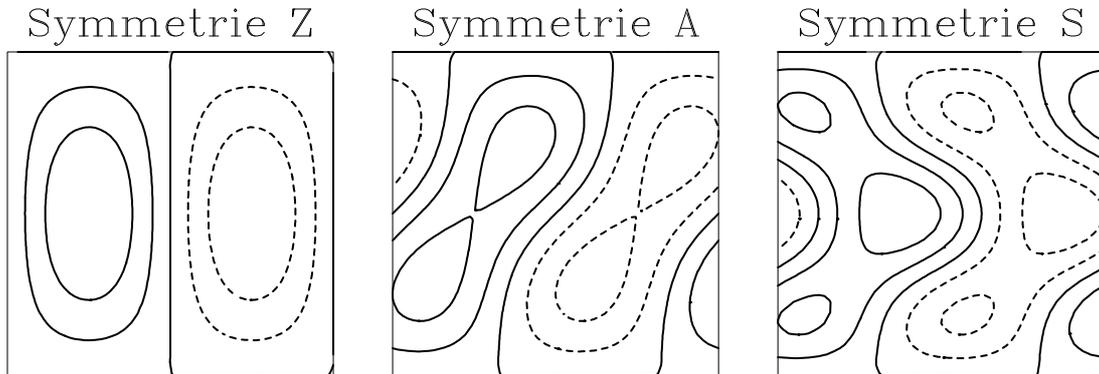


Abbildung 3.1: Musterbeispiele für die Wellenstromfunktion mit der Symmetrie Z (links), Symmetrie A (mitte) und Symmetrie S (rechts).

daß der zonale Abstand zwischen dem Druckminimum und dem Druckmaximum einer sich entwickelnden baroklinen Welle konstant bleibt.

### 3.3.4 Diskussion

In den hier behandelten quasigeostrophischen Strömungssystemen existieren drei verschiedene Strömungssymmetrien. Das hat zur Folge, daß eine solche Symmetrieeigenschaft für alle Zeiten bestehen bleibt, wenn sie anfangs vorgegeben wird. Da in realen Systemen eine Symmetrieeigenschaft niemals exakt erfüllt werden kann, ist die Vorgabe einer Symmetrie unrealistisch, wenn eine kleine Abweichung von der Strömungssymmetrie (Symmetriebruch) sich aufgrund einer sogenannten symmetriebrechenden Instabilität mit der Zeit verstärkt. Dennoch wurden in Studien zur Entwicklung von baroklinen Wellen in quasigeostrophischen oder semigeostrophischen Systemen oftmals bestimmte Symmetrieeigenschaften vorausgesetzt. In Tabelle 2 ist eine Übersicht über einige dieser Studien mit den verwendeten Symmetrieeigenschaften gegeben. Die Problematik des Symmetriebruchs wurde nur in den Studien von Davies et al. (1991) und Nakamura (1993) diskutiert.

### 3.4 Lösungen der linearisierten Gleichungen

Um die barokline Instabilität bezüglich kleiner Störungen zu untersuchen, werden die spektralen Gleichungen um den Grundstrom linearisiert. Durch die Linearisierung vereinfacht sich das System (3.9) zu

$$\frac{d\Psi_{k,l}^r}{dt} = -ak \frac{b_{k,l}}{a_{k,l}} \Phi_{k,l}^i, \quad \frac{d\Psi_{k,l}^i}{dt} = ak \frac{b_{k,l}}{a_{k,l}} \Phi_{k,l}^r, \quad (3.17a,b)$$

Studie	Approximation	Strömungssystem	Symmetrie
Pedlosky (1970)	QG	Zweischichten	Z
Drazin (1970)	QG	UPV	Z
Hoskins (1976)	SG	UPV	Z
Hoskins & West (1979)	SG	UPV	S
Boville (1980)	QG	Zweischichten	Z
Feldstein & Held (1989)	QG	Zweischichten	S
Davies et al. (1991)	SG	UPV	S,-
Nakamura (1993)	QG	UPV	Z,A,S

Tabelle 3.2: Übersicht über einige Studien zur Entwicklung von baroklinen Wellen. Die Abkürzungen QG bzw. SG bezeichnen jeweils die quasigeostrophische bzw. semigeostrophische Approximation. Der Querstrich - in der vierten Spalte besagt, daß auch eine Entwicklung betrachtet wurde, die keine der drei Symmetrien Z,A,S aufweist.

$$\frac{d\Phi_{k,l}^r}{dt} = -ak \frac{f_{k,l}}{e_{k,l}} \Psi_{k,l}^i, \quad \frac{d\Phi_{k,l}^i}{dt} = ak \frac{f_{k,l}}{e_{k,l}} \Psi_{k,l}^r. \quad (3.17c,d)$$

In dem linearen System wechselwirkt  $\Psi_{k,l}^i$  mit  $\Phi_{k,l}^r$  und  $\Psi_{k,l}^r$  mit  $\Phi_{k,l}^i$ . Daher reicht es aus, die Variablen  $\Psi_{k,l}^i$  und  $\Phi_{k,l}^r$  isoliert zu betrachten.

Der Ansatz

$$\Psi_{k,l}^i = X e^{\sigma t}, \quad \Phi_{k,l}^r = Y e^{\sigma t} \quad (3.18a,b)$$

führt im instabilen Fall zu der Eigenvektorelösung (Normalmode)

$$\Psi_{k,l}^i = X e^{\sigma t}, \quad \Phi_{k,l}^r = X \frac{a_{k,l} \sigma}{ak b_{k,l}} e^{\sigma t}, \quad \sigma = \pm ak \left( -\frac{b_{k,l} f_{k,l}}{a_{k,l} e_{k,l}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.19a,b,c)$$

Im Instabilitätsfall ist der Eigenwert  $\sigma$  reell und beschreibt das exponentielle Anwachsen (Abklingen) einer Anfangsstörung. Da durch den reziproken Wert der Wachstumsrate  $\sigma$  eine charakteristische Zeitskala der Entwicklung vorgegeben wird, ist es sinnvoll eine neue Zeitvariable durch

$$T = |\sigma| t \quad (3.20)$$

zu definieren. Mit dieser neuen Zeitvariable kann man zum einem besser die Entwicklungen mit unterschiedlichen äußeren Parametern miteinander vergleichen und zum anderen kann für die numerischen Simulationen ein parameterunabhängiger Integrationszeitschritt gewählt werden.

### 3.4.1 Barokline Instabilität im Zweischichtensystem

Im Zweischichtensystem nimmt die Wachstumsrate die Form

$$\sigma = \pm ak \left( \frac{2F_I - a^2k^2 - l^2}{2F_I + a^2k^2 + l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

an. Dieses Ergebnis wurde bereits von Phillips (1951) erlangt.

Hier gilt als Instabilitätskriterium

$$a^2k^2 + l^2 < 2F_I . \quad (3.22)$$

Im weiteren kann man zeigen, daß bei fester zonaler Wellenzahl  $k$  der Normalmode mit der meridionalen Wellenzahl  $l = 1$  am stärksten anwächst. Bei festgehaltener interner Froudezahl  $F_I$  (d. h. festgehaltener statischer Stabilität) ergibt sich für das Aspektverhältnis der am schnellsten anwachsenden Fundamentalwelle

$$a_f = \left( (8F_I^2 + 4F_I)^{\frac{1}{2}} - 2F_I - 1 \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (3.23)$$

Abb. 3.2 zeigt für die Fundamentalwelle Isolinien der Wachstumsrate als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und der internen Froudezahl  $F_I$  sowie den Verlauf von  $a_f$ . Man kann aus dem Instabilitätsdiagramm entnehmen, daß die Wachstumsrate bei festgehaltenem Aspektverhältnis mit zunehmendem  $F_I$  monoton ansteigt. Damit kann  $F_I$  als eindeutiger Instabilitätsparameter verwendet werden.

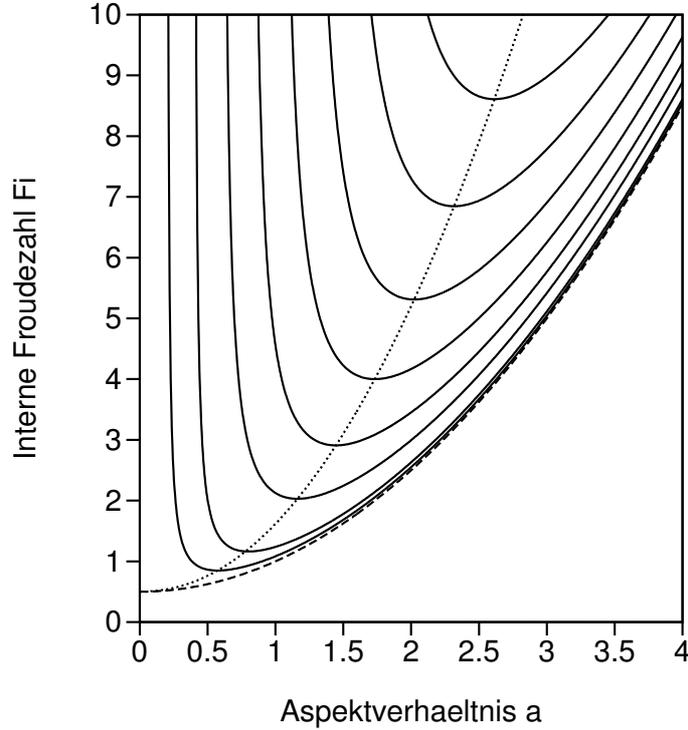


Abbildung 3.2: Isolinien der Wachstumsrate für die Fundamentalwelle als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und der internen Froudezahl  $F_I$  im Zweischichtensystem. Der Isolinienabstand beträgt 0.2. Die gestrichelte Linie begrenzt den instabilen Bereich und die gepunktete Linie zeigt den Verlauf von  $a_f$  als Funktion von  $F_I$ .

Der instabil anwachsende Normalmode besitzt im Zweischichtensystem die Form

$$\Psi_{k,l}^i = X e^{\sigma t}, \quad \Phi_{k,l}^r = X \left( \frac{2F_I - (a^2 k^2 + l^2)}{2F_I + (a^2 k^2 + l^2)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\sigma t}. \quad (3.24a,b)$$

Dieser Mode zeichnet sich dadurch aus, daß bei marginaler Instabilität die barotrope Stromfunktionswelle gegenüber der baroklinen klar dominiert. Daher besitzt die Welle im schwach instabilen Fall nur eine geringe vertikale Phasendifferenz (Neigung der Trog- und Rückenachse).

### 3.4.2 Barokline Instabilität im UPV-System

Das barokline Instabilitätsproblem im UPV-System wurde bereits von Eady (1949) gelöst. Für die Wachstumsrate ergibt sich im UPV-System

$$\sigma = \pm akU_0 \left( \left( \frac{1}{2} \coth\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right) - \frac{1}{\Gamma_{k,l}} \right) \left( \frac{1}{\Gamma_{k,l}} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.25)$$

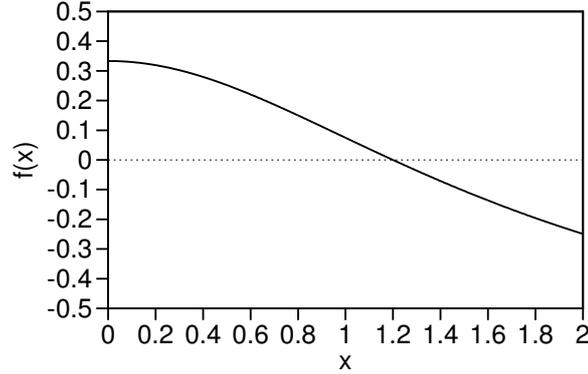


Abbildung 3.3: Graphischer Verlauf der Funktion  $f(x) = (\coth(x) - 1/x)(1/x - \tanh(x))$ .

Als Instabilitätskriterium erhält man

$$\frac{2}{\Gamma_{k,l}} - \tanh\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right) > 0, \quad (3.26)$$

da  $\coth(x) > 1/x$  für  $x > 0$ . Die transzendente Gleichung  $\coth(x) = x$  besitzt die Lösung  $x = 1.1997$  (Eady 1949). Daher kann man das Instabilitätskriterium auch durch

$$\frac{1}{2}\Gamma_{k,l} = \left(\frac{a^2 k^2 + l^2}{F_I}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.1997 \quad (3.27)$$

ausdrücken.

Die Funktion  $(\coth(x) - 1/x)(1/x - \tanh(x))$  ist streng monoton fallend (siehe Abb. 3.3). Daher wächst auch im UPV-System der Normalmode mit der meridionalen Wellenzahl  $l = 1$  am stärksten bei festgehaltener zonaler Wellenzahl  $k$ . Eine analytische Beziehung für das Aspektverhältnis  $a_f$  der am schnellsten anwachsenden Fundamentalwelle bei festgehaltener Froudezahl  $F_I$  kann im UPV-System nicht hergeleitet werden. Die durch numerische Iteration gewonnene Funktion  $a_f(F_I)$  ist in Abb. 3.4 zusammen mit den Linien gleicher Wachstumsrate für die Fundamentalwelle gezeigt. Die Verteilung der Wachstumsrate im UPV-System besitzt gegenüber dem Zweischichtensystem eine qualitativ ähnliche Struktur. Ein quantitativer Unterschied findet sich in der stärkeren Steigung der kritischen Kurve  $F_I = (a^2 + 1)/(1.1997)^2$ , welche den instabilen Bereich verkleinert.

Der Normal Mode nimmt im UPV-System die folgende Struktur an:

$$\Psi_{k,l}^i = X e^{\sigma t}, \quad \Phi_{k,l}^r = X \left( \frac{\frac{1}{\Gamma_{k,l}} - \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right)}{\frac{1}{2} \coth\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right) - \frac{1}{\Gamma_{k,l}}} \right)^{\frac{1}{2}} \tanh\left(\frac{\Gamma_{k,l}}{2}\right) e^{\sigma t}. \quad (3.28a,b)$$

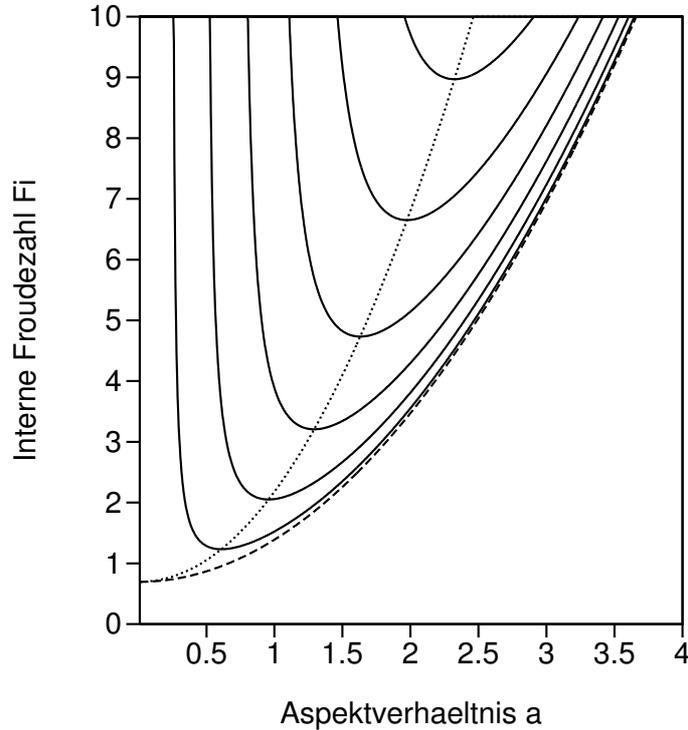


Abbildung 3.4: Isolinien der Wachstumsrate für die Fundamentalwelle als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und der Internen Froudezahl  $F_I$  im UPV-System. Der Isolinienabstand beträgt 0.2. Die gestrichelte Linie begrenzt den instabilen Bereich und die gepunktete Linie zeigt den Verlauf von  $a_f$  als Funktion von  $F_I$ .

Auch hier approximiert der Normalmode eine vertikal konstante Wellenphase, wenn die zonale Wellenlänge sich dem kritischen Wert nähert. Im Gegensatz zum Zweischichtensystem besitzt der Normalmode beim kritischen Wert verfügbare potentielle Energie, da der vertikal symmetrische Teil der Welle Temperaturanomalien aufweist.

### 3.4.3 Dynamische Interpretation der baroklinen Instabilität

Es existieren zwei Kriterien für die Zonalmittelströmung  $[u_g]$ , von denen mindestens eine erfüllt sein muß, damit in quasigeostrophischen Systemen barokline Instabilität auftreten kann. Das erste Kriterium wurde von Charney und Stern (1962) formuliert und besagt, daß in einer kontinuierlich geschichteten Zonalmittelströmung der Gradient der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity  $q$ , welcher durch

$$\frac{\partial[q]}{\partial y} = -\frac{\partial^2[u_g]}{\partial y^2} - \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2[u_g]}{\partial z^2} \quad (3.29)$$

gegeben ist, innerhalb der Berandungen negatives sowie positives Vorzeichen aufweisen muß, damit es zu einer internen Instabilität kommen kann. Es ist klar, daß im

UPV-System dieses Kriterium nicht erfüllt wird, da der Vorticitygradient in diesem System verschwindet. Im Zweischichtensystem erhält man für den PV-Gradienten

$$\frac{\partial[q_n]}{\partial y} = -\frac{\partial[u_{gn}]^2}{\partial y^2} - (-1)^n F_I [u_{g1} - u_{g2}] \quad \text{für } n = 1, 2. \quad (3.30)$$

Pedlosky (1964) konnte zeigen, daß das Kriterium von Charney und Stern (1962) sich auch auf das diskontinuierliche Zweischichtensystem übertragen läßt. Der vertikal antisymmetrische Grundstrom ohne Meridionalscherung erfüllt dieses Kriterium, da der potentielle Vorticitygradient in der oberen Schicht positiv und in der unteren Schicht negativ ist. Es handelt sich daher im Zweischichtenmodell um eine interne barokline Instabilität.

Ein erweitertes Kriterium wurde von Bretherton (1966a) formuliert. Zur Anwendung dieses Kriteriums wird eine erweiterte potentielle Vorticity durch

$$q_e(z) = q(z) + \frac{F_I}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta(z) - \frac{F_I}{4} \frac{\partial \psi}{\partial z} \delta(z - 1) \quad (3.31)$$

definiert, wobei  $\delta(x)$  die Dirac'sche Delta-Funktion bezeichnet. Diese Vertikalstruktur der potentiellen Vorticity würde sich formal ergeben, wenn an der unteren (oberen) Berandung die Dichte Null ist und unmittelbar darüber (darunter) die Dichte einen endlichen Wert annimmt. Mit dieser Formulierung konzentriert sich die potentielle Vorticity in dem UPV-System in unendlich dünnen Schichten an der oberen und unteren Berandung. Bretherton (1966a) zeigte, daß der meridionale Gradient von  $q_e$ , der durch

$$\frac{\partial[q_e]}{\partial y} = -\frac{\partial^2[u_g]}{\partial y^2} - \frac{F_I}{4} \frac{\partial^2[u_g]}{\partial z^2} - \frac{F_I}{4} \frac{\partial[u_g]}{\partial z} \delta(z) + \frac{F_I}{4} \frac{\partial[u_g]}{\partial z} \delta(z - 1), \quad (3.32)$$

gegeben ist, in dem betrachteten Raum inklusive der Berandungen negative sowie positive Vorzeichen aufweisen muß, damit es zur Instabilität kommen kann. Da im UPV-System ein negativer meridionaler Temperaturgradient an beiden Berandungen auftritt, ist diese Instabilitätsbedingung erfüllt.

Anhand der schematischen Abbildung 3.5 nach Bretherton (1966b) kann der Mechanismus der baroklinen Instabilität qualitativ erklärt werden. Dabei wird die potentielle Vorticity im Zweischichtensystem betrachtet. Als Ausgangszustand wird dem Grundstrom eine barotrope Störungswelle überlagert (Abb. 3.5a), wobei positive potentielle Vorticity mit zyklonaler und negative potentielle Vorticity mit antizyklonaler Scherung in zonalen Richtung verbunden sind. Die Wechselwirkung dieser Welle mit

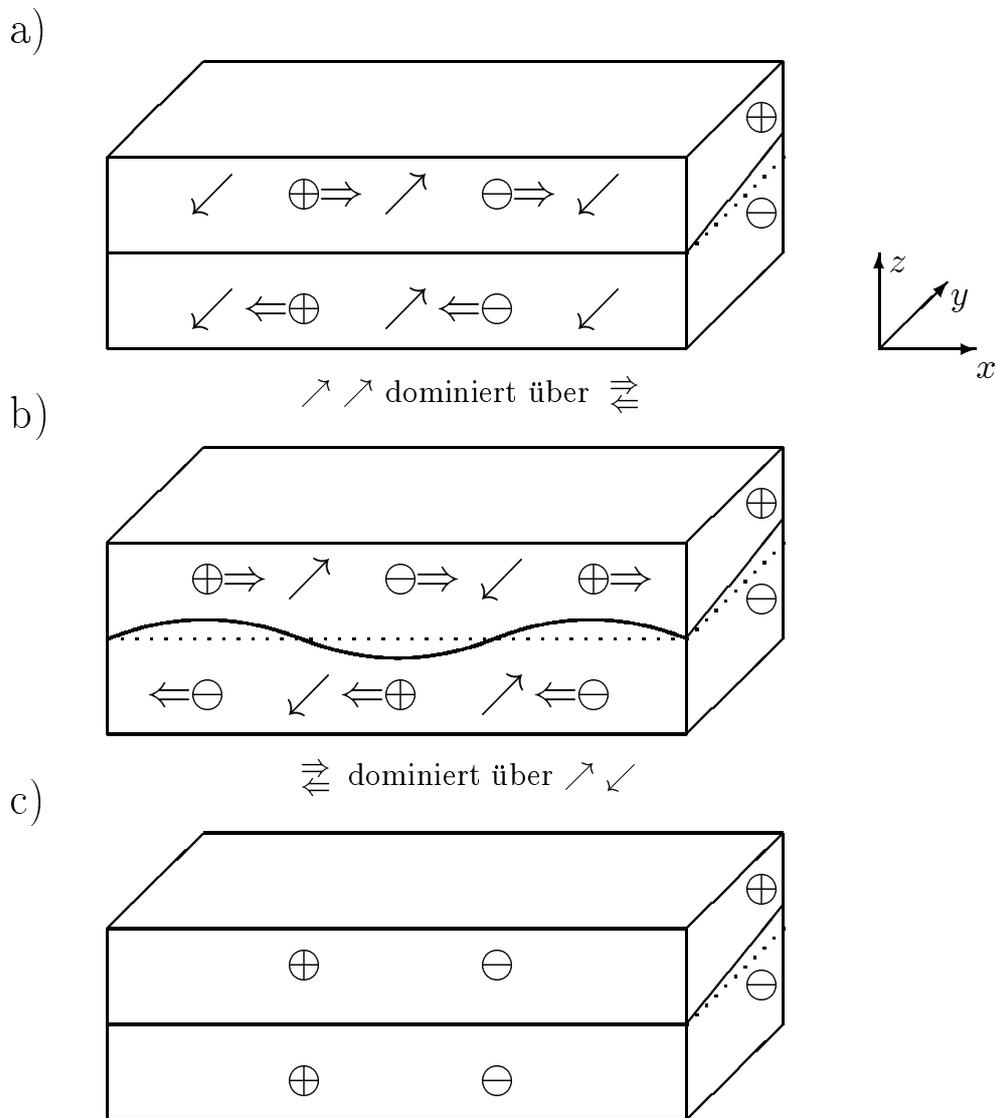


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung der baroklinen Instabilität im Zweischichtensystem nach Bretherton (1966b). Positive potentielle Vorticity wird dargestellt durch  $\oplus$  und negative durch  $\ominus$ . Die Pfeile  $\Rightarrow$ ,  $\Leftarrow$  deuten die Advektion von potentieller Störungsvorticity durch den Grundstrom an und die Pfeile  $\nearrow$ ,  $\searrow$  symbolisieren die Advektion von potentieller Vorticity des Grundstroms durch die Störung. a) Barotrope Anfangsstörung, b) angeregter barokliner Mode durch die Anfangsstörung, c) Rückwirkung des angeregten Modes.

dem Grundstrom führt zu der Anregung einer baroklinen Störungswelle. Dabei stehen zwei Terme in Konkurrenz. Das ist zum einen die Advektion von potentieller Vorticity des Grundstroms durch die Störung (Generationsterm  $v_g^* \partial[q]/\partial y$ , dünne Pfeile) und zum anderen die Advektion von potentieller Vorticity der Störung durch

den vertikal gescherten Grundstrom (Advektionsterm  $[u_g]\partial q^*/\partial x$ , breite Pfeile). Im Instabilitätsfall überwiegt der Generationsterm. Da bei Verkürzung der zonalen Wellenlänge die potentielle Vorticity  $q^*$  sich gegenüber der Meridionalgeschwindigkeit  $v_g^*$  sehr viel stärker vergrößert, existiert eine kritische Wellenlänge, die den Instabilitätsbereich abgrenzt (short wave cut-off). Im Instabilitätsfall wird nun die in Abb. 3.5b gezeigte vertikal antisymmetrische Verteilung der potentiellen Vorticity forciert. Diese vertikal antisymmetrische Störungswelle ist exakt um  $\pi/2$  gegenüber der barotropen Störungswelle phasenverschoben. Bei der Wechselwirkung der vertikal antisymmetrischen Störungswelle mit dem Grundstrom konkurrieren wieder der Generationsterm und der Advektionsterm. Diesmal dominiert jedoch der Advektionsterm, da die Meridionalgeschwindigkeit der vertikal antisymmetrischen Welle gegenüber seiner potentiellen Vorticity nur schwach ausgeprägt ist. Selbst bei sehr langen Wellen bleibt diese Dominanz bestehen. Daher wird durch die Rückwirkung der baroklinen Welle die ursprüngliche barotrope Welle verstärkt (Abb. 3.5c), was zu einer positiven Rückkopplung bzw. Instabilität führt. Der Instabilitätsmechanismus im UPV-System läßt sich in gleicher Weise beschreiben, wenn die Temperatur an den horizontalen Berandungen als potentielle Vorticity in einer sehr dünnen Schicht interpretiert wird.

### 3.5 Berücksichtigung der Randbedingungen im Zweischichtensystem

Die bisher behandelten freien Lösungen erfüllen zwar die geostrophischen jedoch nicht die ageostrophischen Randbedingungen, da die Zonalmittelströmung am Rand sich zeitlich verändern kann. Durch solche zeitlichen Schwankungen wird eine ageostrophische Meridionalströmung am seitlichen Rand ausgelöst. Wird dagegen ein fester Rand angenommen, so muß zu der freien Lösung eine Korrektur addiert werden. Im Zweischichtensystem braucht aufgrund der ageostrophischen Randbedingung (2.23) nur der zonal gemittelte Anteil der baroklinen Stromfunktion korrigiert werden. Diese Korrektur  $\Phi_C(y, t)$  ist nach Phillips (1954) eine Lösung der zonal gemittelten PV-Gleichung im Zweischichtensystem; daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( 2F_I - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_C = 0 . \quad (3.33)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\Phi_C(y, t) = C_S(t) \sinh \left( (2F_I)^{\frac{1}{2}} \left( y - \frac{\pi}{2} \right) \right) + C_A(t) \cosh \left( (2F_I)^{\frac{1}{2}} \left( y - \frac{\pi}{2} \right) \right) + C_0(y), \quad (3.34)$$

wobei  $C_0(y)$  eine beliebige Funktion von  $y$  ist. Diese Funktion kann jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit als Teil der freien Lösung angesehen werden. Die

Koeffizienten  $C_S$  bzw.  $C_A$  müssen so gewählt werden, daß die meridional symmetrische bzw. antisymmetrische Zonalmittelströmung an den seitlichen Rändern verschwindet. Aus dieser Forderung ergeben sich folgende Differentialgleichungen für die Korrektur:

$$\frac{dC_S}{dt} = -\frac{1}{(2F_1)^{\frac{1}{2}} \cosh((2F_1)^{\frac{1}{2}}\pi/2)} \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{d\Phi_{0,2n}^r}{dt}, \quad (3.35a)$$

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{1}{(2F_1)^{\frac{1}{2}} \sinh((2F_1)^{\frac{1}{2}}\pi/2)} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \frac{d\Phi_{0,2n-1}^r}{dt}. \quad (3.35b)$$

Die Korrektur der freien Lösungen hat keinen Einfluß auf die genannten Symmetrieeigenschaften, da meridional symmetrische und antisymmetrische Zonalmittelströmungen nur durch meridional symmetrische bzw. antisymmetrische Korrekturströmungen ergänzt werden. Die Lösungen mit den drei Symmetrien Z,A,S haben die Eigenschaft, daß die barokline Zonalmittelströmung meridional symmetrisch ist. Daher wird nur der symmetrische Anteil der Korrektur benötigt. Dieser kann mit Hilfe der Funktionen  $F_{0,2n}^r$  und  $y - \pi/2$  entwickelt werden, d. h.

$$\sinh\left((2F_1)^{\frac{1}{2}}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\pi} \sinh\left((2F_1)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}\right) \left(y - \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+2n^2/F_1)} F_{0,2n}^r\right) \quad (3.36)$$

Die Addition der Tendenzen (3.9) für die freie Lösung (gekennzeichnet durch den Index f) mit den Tendenzen der spektral entwickelten Korrektur führt zu dem folgenden System:

$$\frac{d\Psi_{k,l}^r}{dt} = -akU_c\Phi_{k,l}^i + \frac{d^f\Psi_{k,l}^r}{dt} \quad \text{für } k \geq 0, l \geq 1, \quad (3.37a)$$

$$\frac{d\Psi_{k,l}^i}{dt} = akU_c\Phi_{k,l}^r + \frac{d^f\Psi_{k,l}^i}{dt} \quad \text{für } k \geq 1, l \geq 1, \quad (3.37b)$$

$$\frac{d\Phi_{k,l}^r}{dt} = akU_c \frac{2F_1 - a^2k^2 - l^2}{2F_1 + a^2k^2 + l^2} \Psi_{k,l}^i + \frac{d^f\Phi_{k,l}^r}{dt} \quad \text{für } k \geq 1, l \geq 1, \quad (3.37c)$$

$$\frac{d\Phi_{k,l}^i}{dt} = -akU_c \frac{2F_1 - a^2k^2 - l^2}{2F_1 + a^2k^2 + l^2} \Psi_{k,l}^r + \frac{d^f\Phi_{k,l}^i}{dt} \quad \text{für } k \geq 1, l \geq 1, \quad (3.37d)$$

$$\frac{d\Phi_{0,l}^r}{dt} = \frac{d^f\Phi_{0,l}^r}{dt} - \frac{4(2F_1)^{\frac{1}{2}}}{\pi l(2F_1 + l^2)} \tanh\left((2F_1)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{d^f\Phi_{0,2n}^r}{dt} \quad \text{für } l \geq 2, l = \text{gerade}, \quad (3.37e)$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{2}{\pi(2F_1)^{\frac{1}{2}}} \tanh\left((2F_1)^{\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{d^f\Phi_{0,2n}^r}{dt}. \quad (3.37f)$$

Dabei bezeichnet  $U_c$  die Korrektur des uniformen und vertikal antisymmetrischen Grundstroms  $U$ . Die Gleichungen (3.37a-f) bilden ein dynamisches System für das fest berandete Zweischichtensystem.

### 3.6 Numerisches Lösungsverfahren für das nichtlineare System

Die spektralen Gleichungssysteme (3.9) und (3.37) bestehen aus einer unendlichen Anzahl von Differentialgleichungen. Für eine numerische Lösung muß daher eine Approximation durch den Abbruch der Fourierentwicklung bei einer zonalen Wellenzahl  $N_x$  und einer meridionalen Wellenzahl  $N_y$  stattfinden (spektrale Abschneidung). In diesem Fall wird die Entwicklung der freien Lösung durch  $(4N_x + 2)N_y$  gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben. Mit Hilfe eines zeitlichen Integrationschemas können die Gleichungen von einem beliebigen Anfangszustand zeitlich integriert werden. Als Integrationschema wird hier das Runge-Kutta Verfahren (siehe z. B. Haltiner und Williams 1980) verwendet. Das Verfahren erweist sich als sehr akkurat in der Erhaltung von konservativen Größen (z. B. Energie oder Enstrophie), sofern die räumliche Auflösung ausreichend ist.

Bei fast allen Simulationen wird ein Zeitschritt von  $\Delta T = 0.005$  sowie eine spektrale Abschneidung bei  $N_x=8$  und  $N_y=20$  verwendet. Die höhere spektrale Auflösung in meridionaler Richtung wird notwendig aufgrund der starken Scherungsdeformation durch die Zonalmittelströmung. Die durch die seitlichen Berandungen eingeschränkte Meridionalströmung übt dagegen nur eine relativ schwache Scherungsdeformation aus, so daß die niedrigere zonale Auflösung gerechtfertigt ist. Die hier gewählte Auflösung entspricht etwa einer spektralen Dreiecksabschneidung bei der Großkreiswellenzahl 42 (T42) in einem sphärischen Zirkulationsmodell, wenn man bedenkt, daß bei T42 21 Wellenzahlen pro Hemisphäre zur Verfügung stehen und 7 zonale Subharmonien von einer synoptischen Welle mit der zonalen Wellenzahl 6 aufgelöst werden.

Bei einigen Lösungen kommt es im fortgeschrittenen Entwicklungsstadium zu einem Brechen der Wellen, wobei extrem kleine Skalen entstehen. Diese können selbst bei sehr hoher Auflösung nicht wiedergegeben werden. Daher ist es notwendig den Energie- und Enstrophietransport zu den kleinen Skalen mittels einer Hyperdiffusion zu parameterisieren. Dazu wird der Diffusionsoperator  $k_h \nabla^6$  auf die Vorticity im Zweischichtensystem bzw. auf die Temperatur im UPV-System angewendet und der entsprechende Term zu den Tendenzgleichungen hinzugefügt. Die Diffusionskonstante  $k_h$  wird so berechnet, daß die kleinstskalige Komponente mit einer Zeitskala von  $\tau = 0.005$  gedämpft wird.

## 4 Simulationen von baroklinen Wellenentwicklungen

In diesem Kapitel wird die nichtlineare Entwicklung der baroklinen Wellen mit Hilfe von numerischen Simulationen eingehend untersucht, wobei das Augenmerk auf den Einfluß des Symmetriebruchs gerichtet ist. Zunächst wird erst einmal konkret beschrieben, auf welche Weise die Nichtlinearitäten die Entwicklung beeinflussen können.

### 4.1 Allgemeines

Wenn der Grundstrom durch einen Normalmode mit sehr schwacher Amplitude gestört wird, dann amplifiziert sich die Störung anfangs exponentiell mit gleichbleibender Struktur. Die Impuls- und Temperaturflüsse der Störung verändern im Laufe der Entwicklung den Zustand im zonalen Mittel. Diese Änderung wächst anfangs ebenfalls exponentiell an und zwar mit der doppelten Wachstumsrate, da die Flüsse aus Produkten zweier Störgrößen hervorgerufen werden. Die Korrektur des zonalen Mittels wird also früher oder später nicht mehr vernachlässigbar sein und die Entwicklung entscheidend beeinflussen. Im allgemeinen bewirkt die Korrektur eine Abschwächung des Wellenwachstums durch eine zunehmende Stabilisierung der Zonalmittelströmung. Schließlich kommt es zur Beendigung des Wachstums. Dieses Ereignis wird als Equilibration bezeichnet. Dabei werden hier drei verschiedene Equilibrationsmechanismen unterschieden:

- Die barokline Equilibration: Die meridionalen Temperaturflüsse der Störung modifizieren das meridionale Temperaturprofil so, daß die Zonalmittelströmung baroklin stabil wird.
- Die nichtgeostrophische Equilibration: Aufgrund der vertikalen Temperaturadvektion erhöht sich die statische Stabilität soweit, daß die Wellenlänge der anwachsenden Störung die kritische Wellenlänge unterschreitet und dadurch kein weiteres Wachstum mehr stattfinden kann.
- Die barotrope Equilibration: Aufgrund der meridionalen Impulsflüsse der Störung nimmt die meridionale Scherung der barotropen Zonalmittelströmung soweit zu, daß die resultierende Deformation ein weiteres Wellenwachstum verhindert.

Generell können alle drei Mechanismen bei der Equilibration beteiligt sein. Man kann jedoch diese Mechanismen auch isolieren. Zunächst ist festzustellen, daß die nichtgeostrophische Equilibration in quasigeostrophischen Systemen nicht auftreten kann, da die vertikale Temperaturadvektion linearisiert wurde und demnach die Schichtungsstabilität sich nicht ändert. Wird vorausgesetzt, daß die anwachsende Welle der Symmetrie  $Z$  unterliegt, dann kann die barotrope Equilibration das Wachstum ebenfalls nicht beenden, da aufgrund des fehlenden Impulstransports die barotrope

Zonalmittelströmung exakt verschwindet. Folglich verbleibt von den genannten Mechanismen nur die barokline Equilibration. Die analytische Beschreibung einer baroklinen Equilibration gelang Pedlosky (1970) für das Zweischichtensystem und Drazin (1970) für das UPV-System. Nach der Equilibration zeigen diese Lösungen eine barokline Zerfallsphase, in der die Störungsenergie wieder in die potentielle Energie des zonalen Mittels umgewandelt wird. Eine solche Lösung wird als symmetrischer Lebenszyklus bezeichnet (Feldstein und Held 1989). Die Lösung beschränkt sich jedoch auf den schwach instabilen Fall, wo die Wellenlänge nahe bei dem kritischen Wert liegt und die Welle nur eine geringe Amplitude erreicht.

Die nichtgeostrophische Equilibration kann nur isoliert werden, wenn die Impuls- und Temperaturflüsse der baroklinen Welle nicht von der Meridionalen Koordinate  $y$  abhängen und deshalb auch die Zonalmittelströmung nicht modifizieren. Eine solche Lösung ist tatsächlich möglich, wenn die meridional begrenzte Kanalregion durch eine unendlich ausgedehnte Ebene in der Systemformulierung ersetzt wird. Dann kann die meridionale Wellenzahl  $l$  auch den Wert 0 annehmen. In diesem Fall ist der Normalmode (3.19) eine exakte Lösung des nichtlinearen Systems und wächst ohne zeitliche Begrenzung exponentiell an. Nakamura und Held (1989) konnten zeigen, daß bei der Verwendung von primitiven Gleichungen das Wachstum einer zweidimensionalen baroklinen Welle durch die statische Stabilisierung beendet wird. Die von Nakamura und Held (1989) untersuchte nichtgeostrophische Equilibration hat viele Gemeinsamkeiten mit dem von Bjerknes und Solberg (1922) postulierten Okklusionsprozess, da der Bereich mit positiver Temperaturanomalie in Bodennähe sich immer mehr verkleinert und schließlich vom Boden abgehoben wird. In dem semigeostrophischen System kann dagegen die nichtgeostrophische Equilibration aufgrund des vorher auftretenden frontalen Kollapses nicht beschrieben werden (Hoskins und Bretherton 1972).

Einen Hinweis für die barotrope Equilibration gibt die numerische Studie Simmons und Hoskins (1978), in welcher der Lebenszyklus einer baroklinen Welle mit einem globalen atmosphärischen Zirkulationsmodell simuliert wurde. Der Lebenszyklus zeigt, daß der baroklinen Wachstumsphase eine barotrope Zerfallsphase folgt, in der kinetische Energie in eine barotrope Scherströmung übertragen wird (siehe Abbildung 1.3). Da dem ersten asymmetrischen Lebenszyklus kein weiterer folgt, wurde die Zonalmittelströmung durch die barotrope Scherung effektiv stabilisiert ("Barotropic Governor" Effekt). Es wird später in diesem Kapitel gezeigt, daß eine Equilibration auch bei Fixierung der vertikal antisymmetrischen Zonalmittelströmung erreicht werden kann. Da bei einem solchen Experiment eine barokline oder nichtgeostrophische Equilibration ausgeschlossen ist, muß es sich um eine barotrope Equilibration handeln.

#### 4.2 Beschreibung der quasigeostrophischen Simulationen

Um eine möglichst allgemein gültige Aussagen treffen zu können, werden viele numerische Simulationen in einem breit angelegten Parameterbereich durchgeführt. Die

quasigeostrophischen Systeme besitzen zwei externe Parameter:

- Die interne Froudezahl  $F_I$
- Das Aspektverhältnis  $a$

Die relevanten Parameterbereiche lassen sich jedoch besser eingrenzen, wenn man  $F_I$  durch einen neuen Parameter ersetzt, der die Instabilität des Grundstroms besser beschreibt. Daher wird der sogenannte Baroklinitätsparameter  $B$  definiert durch

$$B = \frac{\sigma(F_I, a)}{\sigma(F_{I,f}(a), a)}, \quad (4.1)$$

wobei  $F_{I,f}(a)$  die interne Froudezahl bezeichnet, bei der das Aspektverhältnis  $a$  mit dem Aspektverhältnis  $a_f$  des am schnellsten anwachsenden Normalmodes übereinstimmt. Der Baroklinitätsparameter beschreibt also bei vorgegebenen  $a$  das Verhältnis der Wachstumsrate zu der mit  $F_{I,f}$  berechneten Wachstumsrate. Für  $B < 1$  besitzt der am schnellsten anwachsende Normalmode eine höhere zonale Wellenlänge und für  $B > 1$  eine geringere. Es kann möglich sein, daß für  $B > 1$  die subharmonische Welle mit  $k = 2$  schneller anwächst und die Entwicklung dominiert. Daher ist es nicht sinnvoll Werte von  $B$  zu betrachten, die weit über eins liegen.

Bei den Simulationen wird dem Grundstrom eine kleine Störung überlagert. Die Amplitude der Anfangsstörung ist so klein, daß über einige Zeit die nichtlinearen Terme klein bleiben. Die Störung setzt sich zusammen aus dem Normalmode (3.19) mit  $k = 1$ ,  $l = 1$  (Fundamentalwelle) und einer zusätzlichen symmetriebrechenden Störung  $\Psi'$  in der barotropen Stromfunktion. Daher wird die Stromfunktion am Anfang beschrieben durch

$$\Psi(x, y, z, t = 0) = 0.05 E_{1,1}^{Mi}(x, y, z) + \Psi'(x, y, z), \quad (4.2a)$$

$$\Phi(x, y, z, t = 0) = 0.05 \left( -\frac{a_{1,1} f_{1,1}}{b_{1,1} e_{1,1}} \right)^{\frac{1}{2}} E_{1,1}^{Tr}(x, y, z). \quad (4.2b)$$

Die zusätzliche symmetriebrechende Störung besitzt die Form

$$\Psi'(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{Symmetrie Z} \\ 0.05 E_{1,2}^{Mr}(x, y, z) / G_{1,2}^M(\frac{1}{2}) & \text{Symmetrie A} \\ 0.05 E_{1,3}^{Mr}(x, y, z) / G_{1,3}^M(\frac{1}{2}) & \text{Symmetrie S.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Mit dieser Wahl ergeben sich die in Abb. 3.1 gezeigten Muster für die barotrope Stromfunktion  $\psi$ . Die drei simulierten Lösungen werden jeweils abkürzend als Z-Lösung, A-Lösung und S-Lösung bezeichnet. Es werden für alle drei Strömungssymmetrien Z, A, S in beiden Strömungssystemen eine große Anzahl von Simulationen durchgeführt, die einen weiten Bereich in dem durch  $a$  und  $B$  aufgespannten Parameterraum abdecken. Das Aspektverhältnis wird von  $a = 1.0$  in Abständen von  $\Delta a = 0.1$  bis auf  $a = 3.0$  und der Baroklinitätsparameter von  $B = 0.1$  in Abständen von  $\Delta B = 0.1$  bis auf  $B = 1.5$  erhöht. Das ergibt pro Symmetrie 315 Simulationen. Jede Simulation wird bei  $T = 10$  beendet. Da die Zeit mit der Wachstumsrate skaliert wurde, fällt in dem simulierten Zeitraum wenigstens ein Equilibrationsereignis. Im weiteren wurden auch Simulationen der freien Lösungen im Zweischichtensystem durchgeführt, um den Einfluß der Kanalberandungen abzuschätzen. Diese zusätzlichen Experimente werden jedoch nur am Rande diskutiert.

#### 4.3 Die Entwicklungen der Z-Lösungen

Zunächst werden die Z-Lösungen im Zweischichtensystem diskutiert. In Abbildung 4.1 ist die zeitliche Entwicklung der in Gl. (2.26) definierten Energieterme dargestellt. Man erkennt, daß der anfängliche Vorrat an zonaler verfügbarer potentieller Energie  $A_z$  deutlich von den äußeren Parametern abhängt. Bei Zunahme des Baroklinitätsparameters sowie des Aspektverhältnisses erhöht sich dieses Energieniveau. Mit Ausnahme der Simulationen mit  $B = 0.1$  erreicht die kinetische Störungsenergie  $K_e$  im Laufe der Entwicklung annähernd das anfängliche Energieniveau. Daher wird die verfügbare potentielle Energie nahezu komplett in die kinetische Energie der Störung umgewandelt. Die verfügbare potentielle Störungsenergie  $A_e$  erhält dagegen vergleichsweise kleine Beträge. In den Fällen mit  $B = 0.1$  und  $B = 0.4$  kann man sogar die  $A_e$ -Kurven nicht mehr erkennen, was auf eine sehr geringe vertikale Achsenneigung der Störung hindeutet. Die zonale kinetische Energie  $K_z$  bleibt in allen Fällen unter ihrem anfänglichen Wert. Die Störungen übertragen demnach keine kinetische Energie in die Zonalmittelströmung. Das Verhalten nach dem Erreichen des Energiemaximums hängt ebenfalls stark von den äußeren Parametern ab. Bei sehr schwacher Baroklinität ( $B = 0.1$ ) tritt in dem betrachteten Zeitraum nur ein einziger Lebenszyklus auf, während in den anderen Fällen mehrere Maxima in der Störungsenergie vorkommen. Bei zunehmender Baroklinität verringert sich die Abnahme der Störungsenergie nach der ersten Equilibration. Die Lösung scheint bei starker Baroklinität ( $B = 1$ ) einen barotropen Gleichgewichtszustand mit verschwindender Zonalmittelströmung anzustreben. Dieser Zustand kann jedoch nie erreicht werden, da an den Kanalberandungen die barokline Zonalmittelströmung erhalten bleiben muß.

Die Abbildung 4.2 zeigt für die diskutierten Fälle die potentielle Vorticity in der unteren Schicht zum Zeitpunkt der Equilibration (das erste Auftreten eines Maximums in der totalen Störungsenergie  $A_e + K_e$ ). Die potentielle Vorticity in der oberen Schicht (nicht gezeigt) ist aufgrund der vertikalen Symmetrieeigenschaft identisch,

### Zweischichtensystem, Symmetrie Z

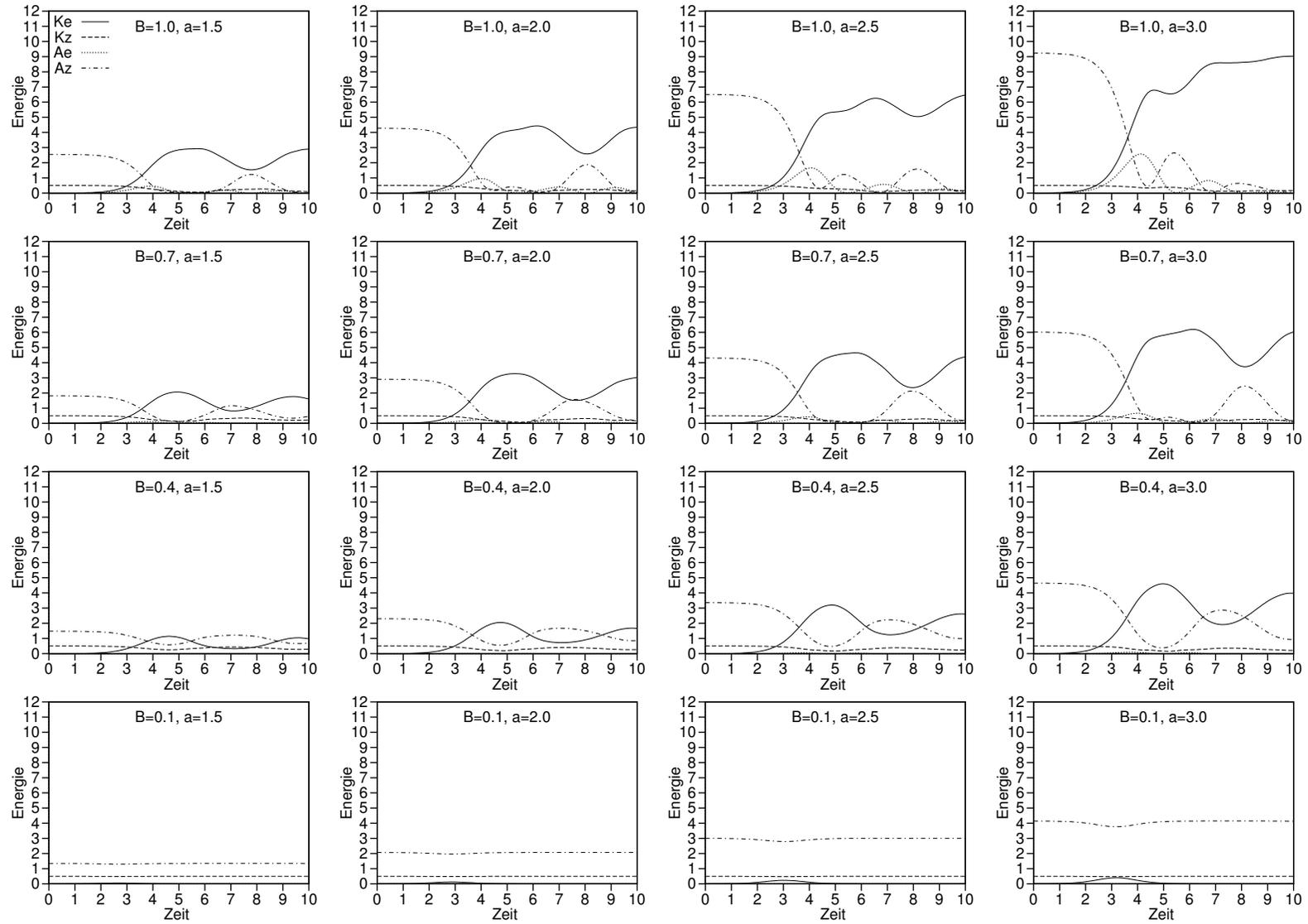


Abb. 4.1: Energetik als Funktion der Zeit für einige Z-Lösungen im Zweischichtensystem. Dargestellt sind  $K_e$  (durchgezogene Kurve),  $K_z$  (gestrichelte Kurve),  $A_e$  (gepunktete Kurve) und  $A_z$  (strich-gepunktete Kurve).

### Zweischichtensystem, Symmetrie Z

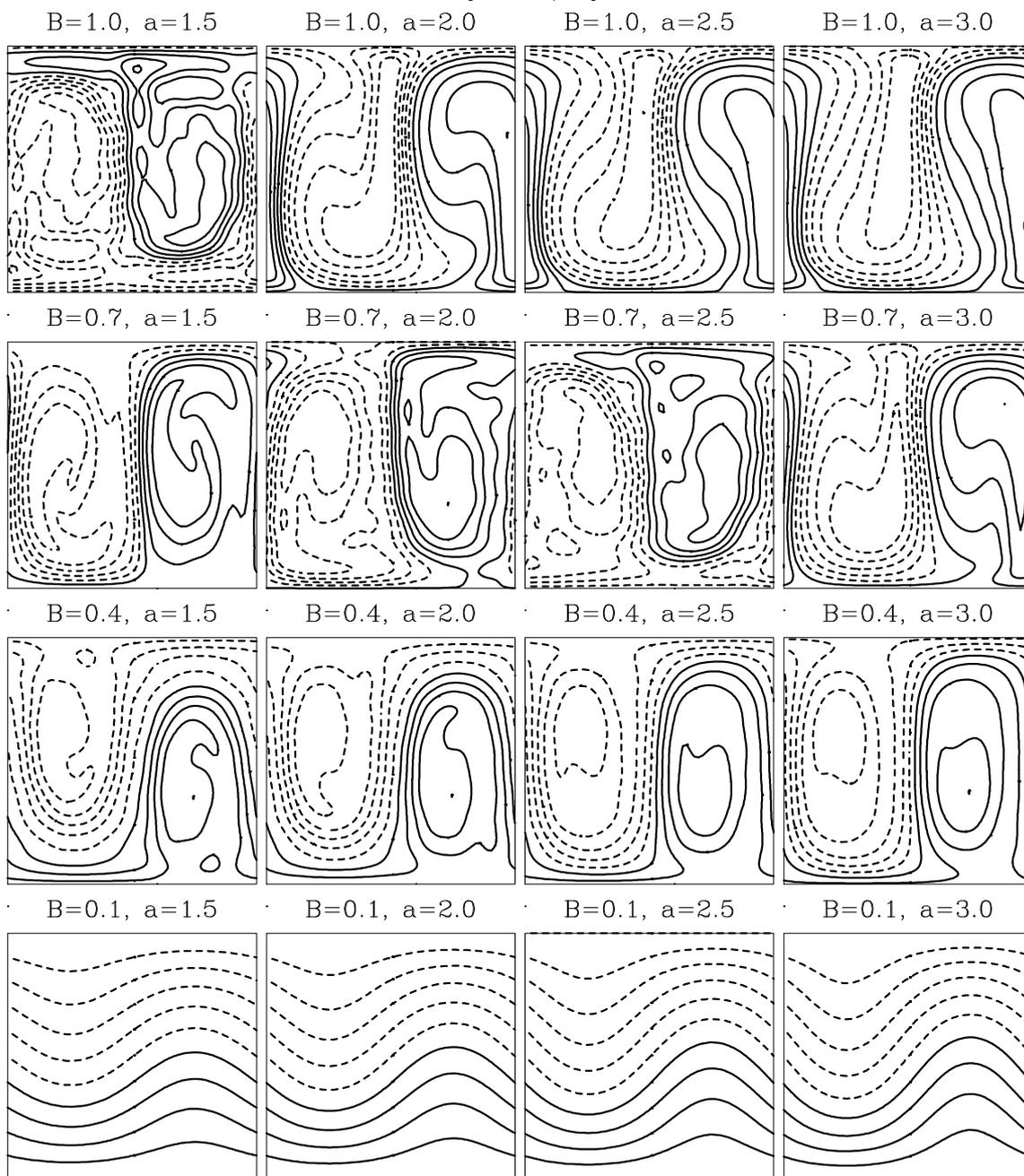


Abbildung 4.2: Horizontalverteilungen der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht des Zweischichtensystems für einige Z-Lösungen. Das gezeigte Gebiet erstreckt sich in meridionaler Richtung über die ganze Breite des Kanals und in zonaler Richtung über eine Wellenlänge. Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt und der Isolinienabstand wurde so festgelegt, daß 10 Isolinien abgebildet werden.

wenn man das Vorzeichen umkehrt. Man erkennt mit Ausnahme der schwach instabilen Fälle ( $B = 0.1$ ) eine Dominanz der Störung gegenüber dem zonalen Mittel. Bei hoher Instabilität ( $B \geq 0.7$ ) werden die Anomalien so weit ausgelenkt, daß eine Vorzeichenumkehr des zonal gemittelten PV-Gradienten auftritt. Nach der schematischen Abbildung 3.5 bewirkt die Vorzeichenumkehr die Umwandlung der positiven Rückkopplung in eine negative, wodurch eine Equilibration eingeleitet werden kann. Erst wenn der barokline Anteil der Welle ebenfalls das Vorzeichen wechselt, kann die positive Rückkopplung wieder einsetzen. Vermutlich werden so die nachfolgenden Lebenszyklen verursacht. Bei den schwach instabilen Fällen ( $B = 0.1$ ) wird dagegen der Gradient der zonal gemittelten potentiellen Vorticity nur leicht verringert. Es stellt sich daher die Frage, welcher Mechanismus bei schwacher Instabilität die Equilibration bewirkt. Zur Beantwortung dieser Frage wird zunächst darauf hingewiesen, daß auch die Krümmung des Strömungsprofils einen Beitrag zum zonal gemittelten PV-Gradienten liefert. Am Anfang der Entwicklung verschwindet diese Krümmung, aber durch die meridionale Massenadvektion der Welle verringert sich die vertikale Scherung der Zonalmittelströmung in der Kanalmitte stärker als bei den Kanalberandungen. Die daraus resultierende Krümmung im Strömungsprofil schwächt den zonal gemittelten PV-Gradienten zusätzlich ab. Deshalb kann der in Abbildung 3.5a dargestellte Generationsterm bei schwacher Instabilität im Laufe der Entwicklung seine Dominanz gegenüber dem Advektionsterm, der durch die Profilkrümmung kaum beeinflußt wird, verlieren. Der gleiche Mechanismus bewirkt die Equilibration in der analytischen Lösung von Pedlosky (1970) (siehe auch Pedlosky 1987), die nur bei schwacher Instabilität gültig ist. Es ist anzunehmen, daß die schwach instabilen Fälle durch diese Lösung recht gut approximiert werden. Zumindest können diese Fälle wandfrei mit einer minimalen spektralen Abschneidung bei zonaler Wellenzahl 1 und meridionaler Wellenzahl 2 numerisch simuliert werden. Bei der minimalen Auflösung besteht wie in der analytischen Lösung lediglich eine Wechselwirkung zwischen den beiden Moden der anwachsenden Fundamentalwelle und einem Mode der baroklinen Zonalmittelströmung.

In Abbildung 4.3 ist für das Zweischichtensystem der Anteil der totalen Störungsenergie  $A_e + K_e$  an der Gesamtenergie  $E_g = A + K$  bei der Equilibration sowie der Zeitpunkt der Equilibration als Funktion des Aspektverhältnisses und des Baroklinitätsparameters gezeigt. In diesen Parameterdiagrammen kann man zwei kennzeichnende Bereiche (Regime) ausmachen. Der eine Bereich ist gekennzeichnet durch eine hohe Abhängigkeit von den äußeren Parametern und findet sich bei niedrigen Werten des Baroklinitätsparameters. Dort erfolgt eine Zunahme des Energieanteils bei Verstärkung der Baroklinität und Erhöhung des Aspektverhältnisses. Auch der Zeitpunkt der Equilibration erhöht sich dementsprechend. Man kann annehmen, daß in diesem Bereich die Equilibration durch den eben beschriebenen Effekt der Profilkrümmung verursacht wird. In dem anderen Bereich besteht dagegen eine sehr geringe Abhängigkeit von den äußeren Parametern, wobei das erreichte Energieverhältnis über 90% liegt. Bei sehr hohen Werten des Baroklinitätsparameters kann man so-

## Zweischichtensystem, Symmetrie Z

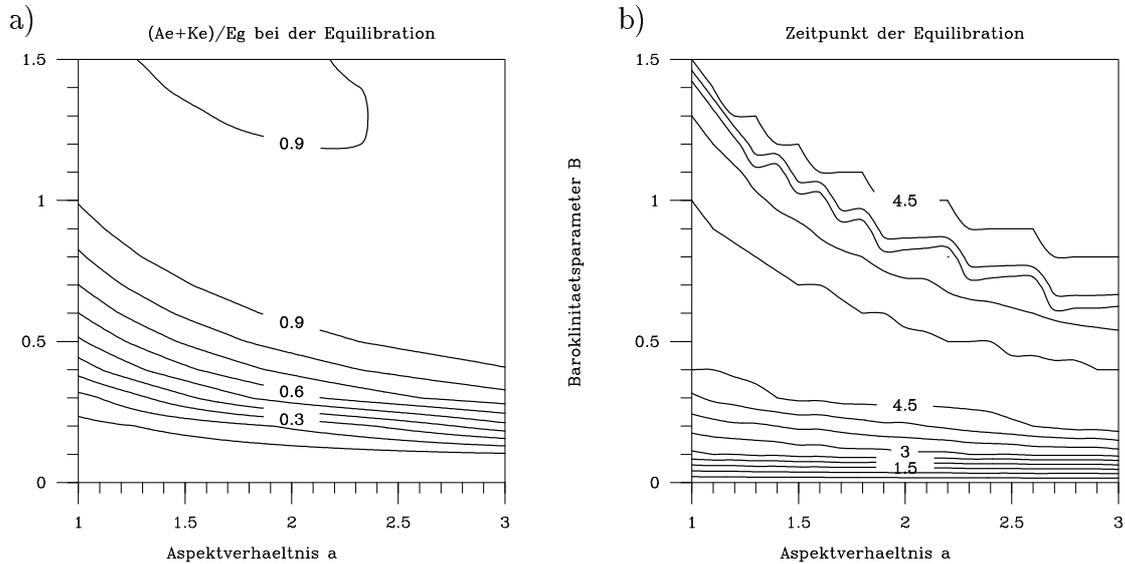
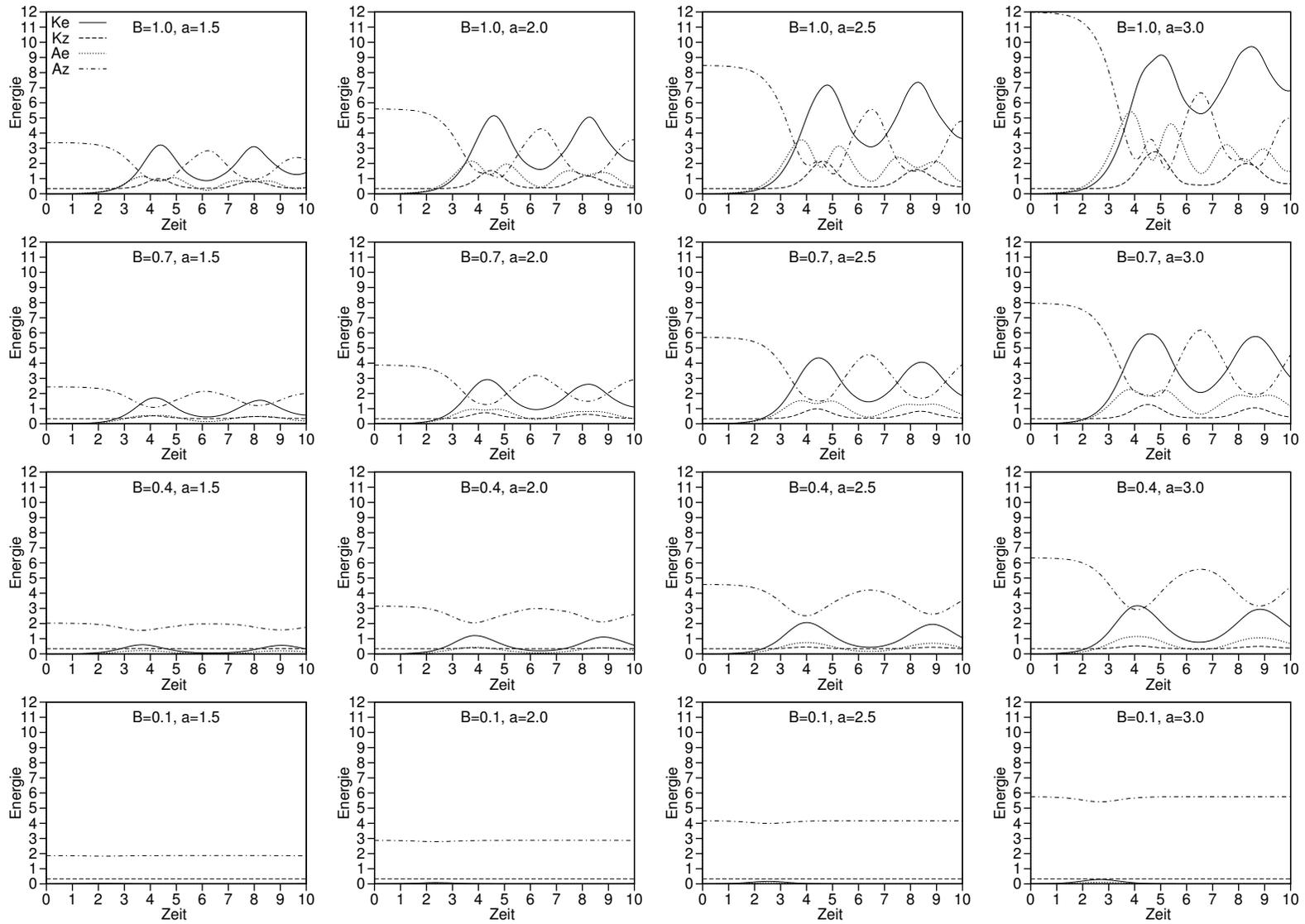


Abbildung 4.3: Verteilungen als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die Z-Lösungen im Zweischichtensystem: a) Anteil der totalen Störungsenergie  $A_e + K_e$  an der Gesamtenergie  $E_g$  zum Zeitpunkt der Equilibration (Isolinienabstand  $\Delta = 0.1$ ), b) Zeitpunkt der Equilibration (Isolinienabstand  $\Delta = 0.5$ ).

gar eine Unabhängigkeit des Equilibrationszeitpunktes von den äußeren Parametern verzeichnen. Hier wird vermutlich die Equilibration ausschließlich durch die Vorzeichenumkehr des PV-Gradienten herbeigeführt.

Abbildung 4.4 zeigt die Energetik einiger numerischer Z-Lösungen im UPV-System. Bei schwacher Instabilität ( $B = 0.1$ ) gleicht die Entwicklung der im Zweischichtensystem. In den etwas instabileren Fällen ( $B = 0.4$ ) erreicht jedoch die Störung im Vergleich zum Zweischichtensystem ein geringes Energieniveau, wobei die verfügbare potentielle Störungsenergie  $A_e$  einen höheren Anteil davon erhält. Letzteres resultiert aus der Tatsache, daß auch der vertikal symmetrische Wellenteil im UPV-System verfügbare potentielle Energie enthält. Das geringere Energieverhältnis im UPV-System ist dagegen vermutlich auf die offenen Kanalberandungen zurückzuführen, da Simulationen von freien Lösungen im Zweischichtensystem ein sehr ähnliches Verhalten zeigen. Anscheinend fällt der Profilkrümmungseffekt im offenen Kanal stärker aus. Im offenen Kanal werden die Temperaturgradienten aufgrund der Wellentemperaturflüsse an der Berandung erhöht und folglich die vertikale Scherung in der Zonalmittelströmung verstärkt. Dadurch vergrößert sich aber auch die Krümmung im Meridionalprofil, da in der Kanalmitte die vertikale Scherung abnimmt. Im fest berandeten Kanal ist dagegen eine Änderung der zonal gemittelten Strömung am Rand nicht möglich. So kommt es am Rand zu Vertikalbewegungen, die den Temperaturgradienten abschwächen. Bei den stark instabilen Fällen ( $B = 1$ ) verzeichnet man

UPV-System, Symmetrie Z



63

Abb. 4.4: Energetik als Funktion der Zeit für einige Z-Lösungen im UPV-System. Dargestellt sind  $K_e$  (durchgezogene Kurve),  $K_z$  (gestrichelte Kurve),  $A_e$  (gepunktete Kurve) und  $A_z$  (strich-gepunktete Kurve).

## UPV-System, Symmetrie Z

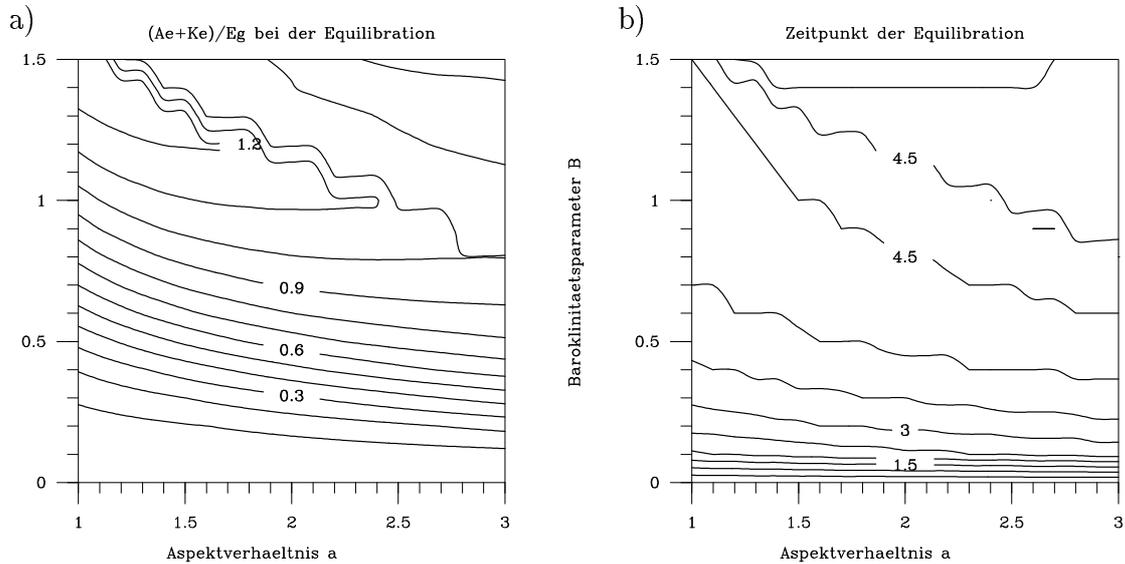


Abbildung 4.5: Verteilungen als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die Z-Lösungen im UPV System: a) Das Verhältnis von totaler Störungsenergie zur Gesamtenergie bei der Equilibration (Isolinienabstand  $\Delta = 0.1$ ), b) Zeitpunkt der Equilibration (Isolinienabstand  $\Delta = 0.5$ ).

hohe Energieschwankungen nach der ersten Equilibration. Es ist im Gegensatz zum Zweischichtensystem nicht erkennbar, daß die Lösung einen Gleichgewichtszustand anstrebt. Dieses Verhalten wurde auch bei den freien Lösungen im Zweischichtensystem festgestellt und ist deshalb ebenfalls vermutlich auf die Randbedingungen zurückzuführen. Eine Erklärung für diesen Unterschied kann jedoch nicht gegeben werden.

Nach Bretherton (1966a) übernimmt die Temperatur an den Berandungen des UPV-Systems die Rolle der potentiellen Vorticity. Tatsächlich besitzen die räumlichen Verteilungen der Temperatur im UPV-System an der unteren Berandung eine große Ähnlichkeit zu den Verteilungen der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht des Zweischichtensystems. Da keine wesentlichen Unterschiede bestehen, wird auf eine Diskussion dieser Verteilungen verzichtet. Abbildung 4.5 zeigt die gleichen Parameterdiagramme wie Abbildung 4.3, jedoch für das UPV-System. Im Vergleich zum Zweischichtensystem kann man eine Vergrößerung des Bereiches verzeichnen, in dem der Störungsenergieanteil weniger als 90% beträgt. Dieses Ergebnis erklärt sich wahrscheinlich durch den veränderten Profilkrümmungseffekt im UPV-System. Es existiert auch eine Region mit einem Energieverhältnis von über 100%, da die Gesamtenergie im UPV-System nicht erhalten bleibt. Dieses Verhältnis übersteigt jedoch nicht 130 %, so daß die Energiezufuhr von außen nur einen gemäßigten Einfluß auf das Energiebudget ausübt. Ein Bereich mit einer geringen Abhängigkeit von den äußeren

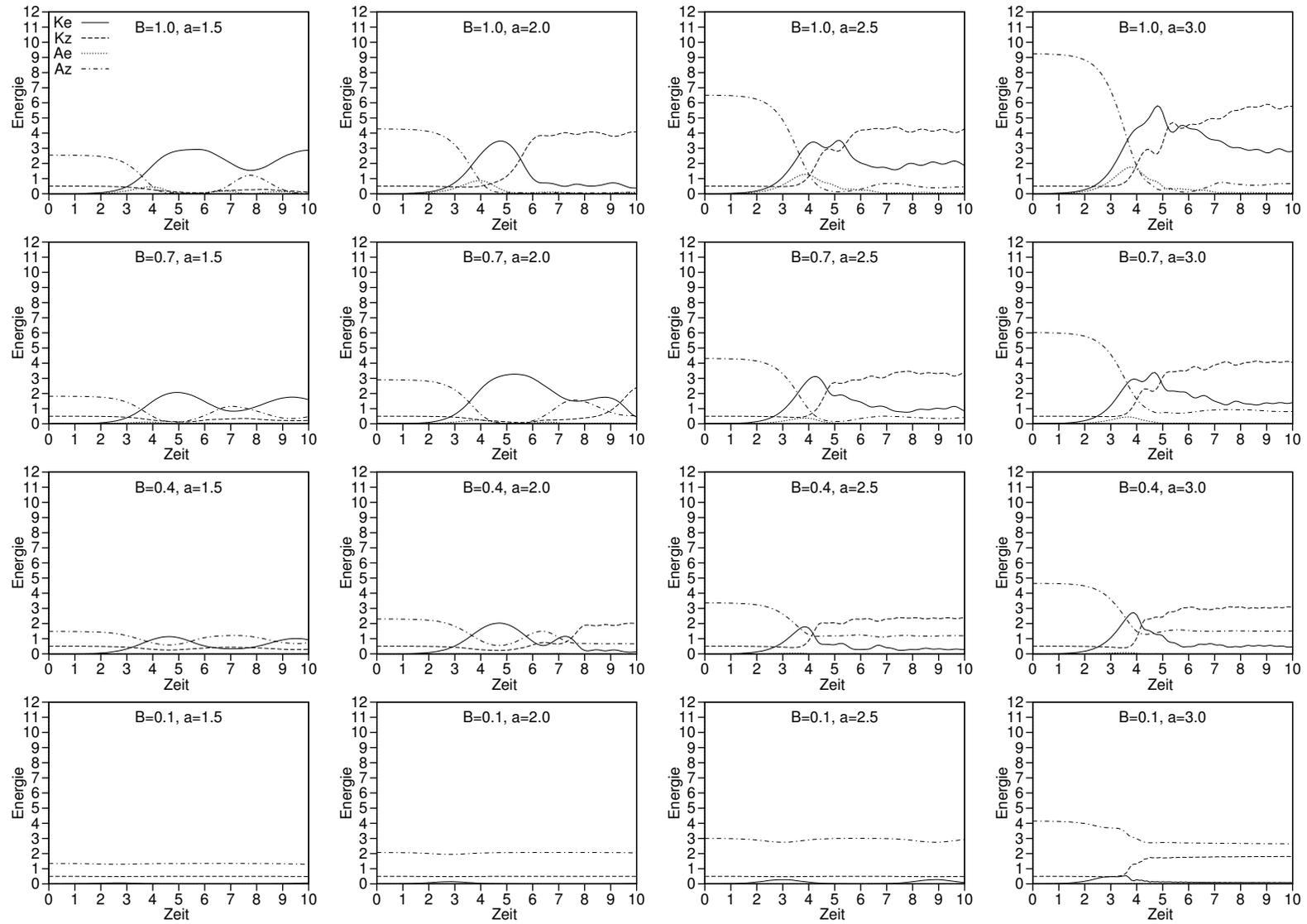
Parametern tritt im UPV-System nicht auf. Das ist vermutlich ebenfalls eine Folge der offenen Kanalberandungen.

#### 4.4 Die Entwicklungen der A-Lösungen

In Abbildung 4.6 ist die Energetik einiger A-Lösungen im Zweischichtensystem gezeigt. In den Fällen mit niedrigem Aspektverhältnis ( $a = 1.5$ ) kann kein Unterschied zu den entsprechenden Z-Lösungen festgestellt werden. Daher spielt der Symmetriebruch in diesen Fällen für die Entwicklung bis zum Zeitpunkt  $T = 10$  keine Rolle. In den Fällen  $B = 0.4$ ,  $a = 2$ , und  $B = 0.7$ ,  $a = 2$  gleichen sich die Entwicklungen der A- und Z-Lösungen bis zum Zeitpunkt der Equilibration, aber zu einem späteren Zeitpunkt erkennt man ein Anwachsen der zonalen kinetischen Energie  $K_z$  mit einer gleichzeitigen Abnahme der kinetischen Störungsenergie  $K_e$ . In allen anderen Fällen mit  $B \geq 0.4$  und  $a \geq 2$  beginnt das Wachstum von  $K_z$  schon in der Equilibrationsphase und die Lösung strebt einen Gleichgewichtszustand an, in dem  $K_z$  den größten Anteil an der Gesamtenergie besitzt. Das Verhalten nach der ersten Equilibration gestaltet sich sehr unterschiedlich. Bei einigen Simulationen verbleibt  $K_e$  auf einem hohem Niveau (z. B. der Fall  $B = 1$ ,  $a = 3$ ). In anderen Fällen dagegen kann man das Auftreten eines einzigen asymmetrischen Lebenszyklus mit einer klar definierten barotropen Auflösungsphase feststellen, wonach  $K_e$  auf einem sehr geringen Niveau verbleibt (z. B. der Fall  $B = 1$ ,  $a = 2$ ). Bei schwacher Instabilität ( $B = 0.1$ ) ist der Symmetriebruch für die erste Entwicklung unbedeutend mit Ausnahme des Falls mit hohem Aspektverhältnis ( $a = 3$ ). Interessanterweise erreicht  $K_z$  in diesem Fall ein viel höheres Niveau als die Störungsenergie. Die Störung wandelt daher den größten Teil der durch barokline Prozesse gewonnenen Energie unmittelbar in die kinetische Energie der Zonalströmung um. Insgesamt stellt sich heraus, daß der symmetriebrechende Anteil der Anfangsstörung in den meisten Simulationen die Entwicklung gravierend modifiziert. Im UPV-System hat der Symmetriebruch eine sehr ähnliche Auswirkung auf die Energetik (nicht gezeigt). Als Unterschied ist zu erwähnen, daß in den drei Fällen  $B = 0.7$ ,  $a = 2.0$ ,  $B = 0.3$ ,  $a = 2.0$  und  $B = 0.1$ ,  $a = 3.0$  der Symmetriebruch die Entwicklung nicht beeinflusst. Auch für diesen Unterschied kommt als Ursache der offene Rand im UPV-System in Frage, da die entsprechenden freien Lösungen im Zweischichtensystem das gleiche Verhalten zeigen.

Abbildung 4.7 zeigt horizontale Verteilungen der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht des Zweischichtensystems sowie der Temperatur an der unteren Berandung des UPV-Systems zum Zeitpunkt der Equilibration in den Fällen, in denen der Symmetriebruch einen merklichen Einfluß auf die Equilibration ausübt. Abgesehen von dem Fall  $B = 1$ ,  $a = 3$  besteht eine große Ähnlichkeit zwischen den Verteilungen der potentiellen Vorticity des Zweischichtensystems und den Temperaturverteilungen des UPV-Systems. In allen Fällen wird die meridionale Phasenneigung der Welle deutlich. Bei schwächerer Instabilität hat jedoch die Phasenneigung während der Entwicklung die Richtung gewechselt (vergleiche Abbildung 3.1). Eine mögliche Erklärung für diesen Wechsel liefert die im Fall  $B = 0.4$  vorliegende Stabilität der

### Zweischichtensystem, Symmetrie A



99

Abb. 4.6: Energetik als Funktion der Zeit für einige A-Lösungen im Zweischichtensystem. Dargestellt sind  $K_e$  (durchgezogene Kurve),  $K_z$  (gestrichelte Kurve),  $A_e$  (gepunktete Kurve) und  $A_z$  (strich-gepunktete Kurve).

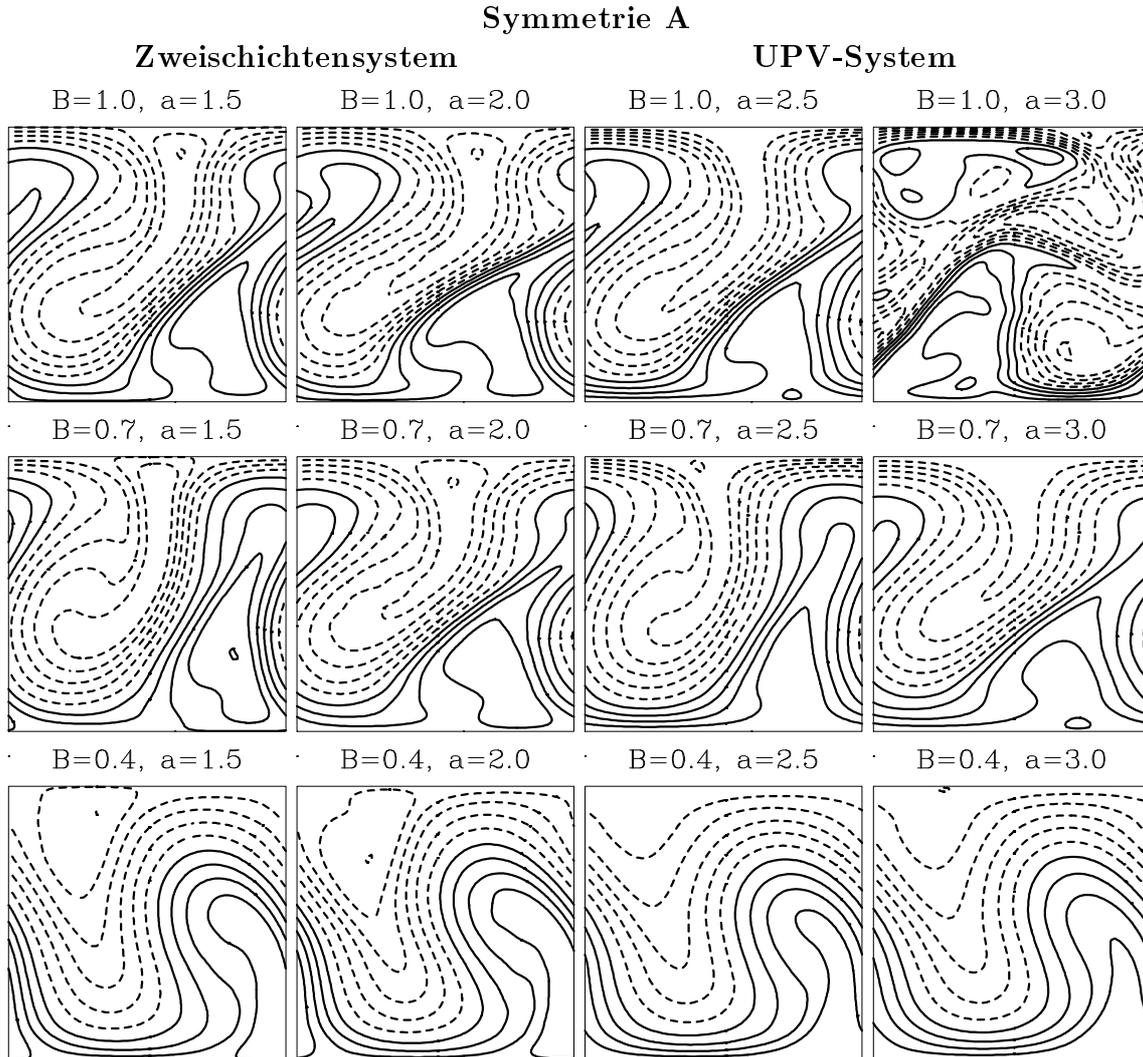


Abbildung 4.7: Horizontalverteilungen für einige A-Lösungen zum Zeitpunkt der Equilibration. Die beiden linken Spalten zeigen Horizontalverteilungen der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht des Zweischichtensystems und die beiden rechten Spalten Horizontalverteilungen der Temperatur an der unteren Berandung im UPV-System. Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt und der Isolinienabstand wurde so festgelegt, daß 10 Isolinien abgebildet werden.

Zonalströmung bezüglich des Normalmodes mit meridionaler Wellenzahl 2. Im stabilen (oder korrekter gesagt neutralen) Fall nehmen die Eigenwerte des Normalmodes einen imaginären Wert an. Daher schwingt die symmetriebrechende Störung zumindest in dem Zeitraum, wo die Nichtlinearitäten keine Rolle spielen. Infolge der Schwingung ist also der Phasenneigungswechsel möglich. Bei stärkerer Instabilität ( $B = 0.7$  und  $B = 1$ ) ist dagegen der zonale Grundstrom auch instabil bezüglich dieses Normalmodes. Dementsprechend sollte auch kein Wechsel der Phasenneigung stattfinden. Ferner kann man in den stark instabilen Fällen die Ausprägung von Li-

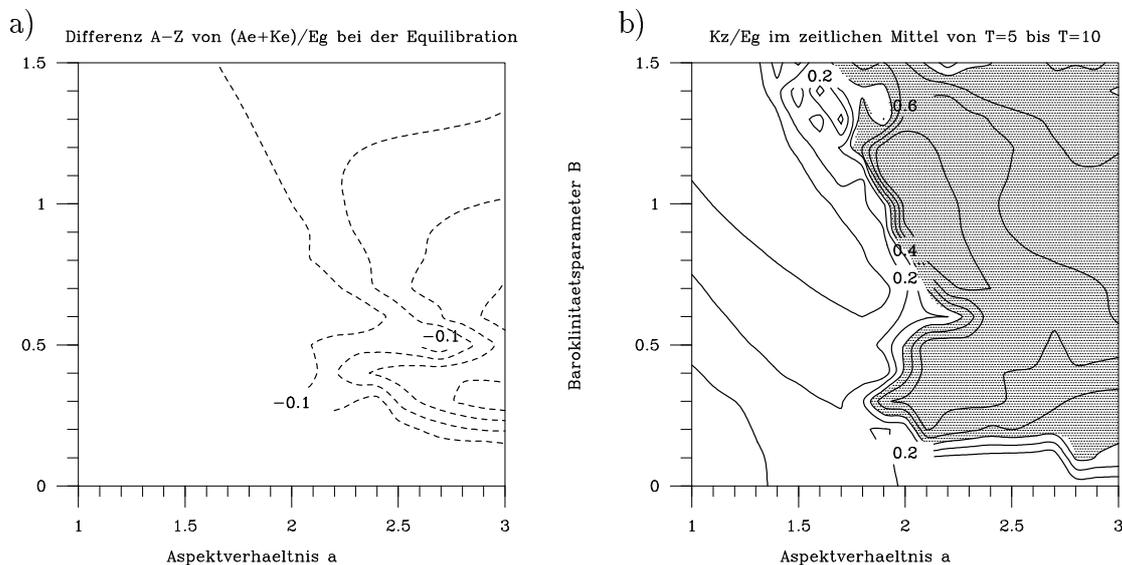
nien mit sehr starkem PV- bzw. Temperaturgradienten erkennen. Synoptisch würde man diese Linien als Kaltfronten interpretieren. Da sich bei den Z-Lösungen eine solche Front nicht bildet, resultiert diese Front anscheinend aus der Scherungsdeformation der barotropen Zonalmittelströmung. Entsprechend wäre eine Warmfront entstanden, hätte man anfangs eine umgekehrte Phasenneigung vorgegeben. An den Kanalberandungen zeigen sich ebenfalls frontartige Strukturen. Diese sind eine Folge der geostrophischen Randbedingung, die eine starke Strömungskonfluenz hervorruft. Im UPV-System kann man im Fall  $B = 1$ ,  $a = 3$  eine Ablösung der positiven Temperaturanomale von ihrer Quelle erkennen. In allen anderen Fällen findet ebenfalls eine solche Sekklusion statt, jedoch zu einem späteren Zeitpunkt.

In Abbildung 4.8 ist in den Parameterdiagrammen dargestellt, um welchen Betrag der Symmetriebruch den maximal erreichten Störungsenergieanteil verändert und welchen Energieanteil die zonale kinetische Energie  $K_z$  im zeitlichen Mittel von  $T = 5$  bis  $T = 10$  besitzt. Man erkennt, daß in beiden Systemen der Symmetriebruch die maximale Störungsenergie in der rechten Hälfte des Parameterdiagramms sichtbar abschwächt. In der linken Hälfte ist dagegen der Einfluß nur gering. Ferner kann man ein Minimum in der Abschwächung bei  $B = 0.5$ ,  $a = 2.7$  im Zweischichtensystem und bei  $B = 0.5$ ,  $a = 2.8$  im UPV-System identifizieren. Eine geringere Abschwächung erfolgt auch bei hohen Werten des Baroklinitätsparameters. Vermutlich wirkt sich dort der Symmetriebruch aufgrund der starken baroklinen Instabilität nicht so stark auf die Equilibration aus. Noch deutlicher zeichnet sich der Symmetriebruch bei dem zeitlich gemittelten zonalen kinetischen Energieanteil ab. In den entsprechenden Parameterdiagrammen kann man eine stufenartige Abgrenzung zwischen zwei Regimen ausmachen. In dem einen Regime liegt der zeitlich gemittelte Anteil unter 40%. In dem anderen Regime liegt der Wert weit über der anfänglichen kinetischen Energie. Man kann daraus schließen, daß im zeitlichen Mittel die Störungen in diesem Regime einen negativen Wirbelviskositätseffekt zeigen. Ein Minimum bei  $B = 0.5$ ,  $a = 2.8$  tritt in dem zeitlichen Mittel von  $K_z$  nicht auf, da in diesem Fall der barotrope Zerfall zu einem späteren Zeitpunkt doch noch erfolgte. Die Verteilungen besitzen weitere Detailstrukturen, deren Ursachen im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht geklärt werden können.

#### 4.5 Die Entwicklungen der S-Lösungen

Bei den S-Lösungen wirkt sich der Symmetriebruch nur in den Fällen mit  $a > 2.6$  sowie in den Fällen mit einem sehr hohen Baroklinitätsparameter ( $B > 1$ ) aus. Die Diskussion bleibt daher auf diesen Bereich beschränkt. Abbildung 4.9 zeigt die Energetik für einige Simulationen im Zweischichtensystem mit  $a = 3$ . In den Fällen  $B = 0.4$  und  $B = 1$  durchläuft die Lösung einen klar definierten asymmetrischen Lebenszyklus, wobei die kinetische Energie der Zonalmittelströmung nach der Auflösungsphase mehr als 70% von der totalen Energie erhält. In dem Fall  $B = 0.7$  verläuft die Entwicklung dagegen zunächst genauso wie in der Z-Lösung. Erst zum Zeitpunkt  $T = 9$  tritt ein exponentielles Wachstum der zonalen kinetischen Energie auf. Bei

## Zweischichtensystem, Symmetrie A



## UPV-System, Symmetrie A

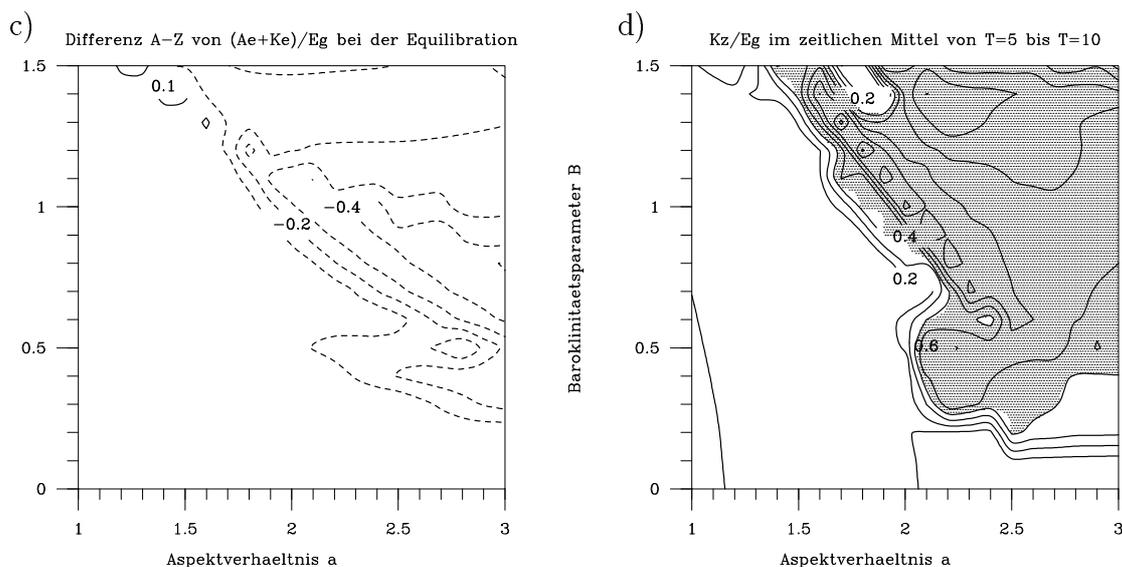


Abbildung 4.8: Verteilungen als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die A-Lösungen: a) Die Differenz zwischen der A-Lösung und der Z-Lösung von dem Anteil der Störungsenergie an der Gesamtenergie zum Zeitpunkt der Equilibration im Zweischichtensystem, b) Anteil der über den Zeitraum  $5 \leq T \leq 10$  gemittelten zonalen kinetischen Energie an der Gesamtenergie im Zweischichtensystem, c) wie a) jedoch im UPV-System, d) wie b) jedoch im UPV-System. Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.1$ , negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt und die Null-Linie wird nicht gezeigt. Bei b) und c) sind die Bereiche mit einem Verhältnis von mehr als 0.4 schattiert.

### Zweischichtensystem, Symmetrie S

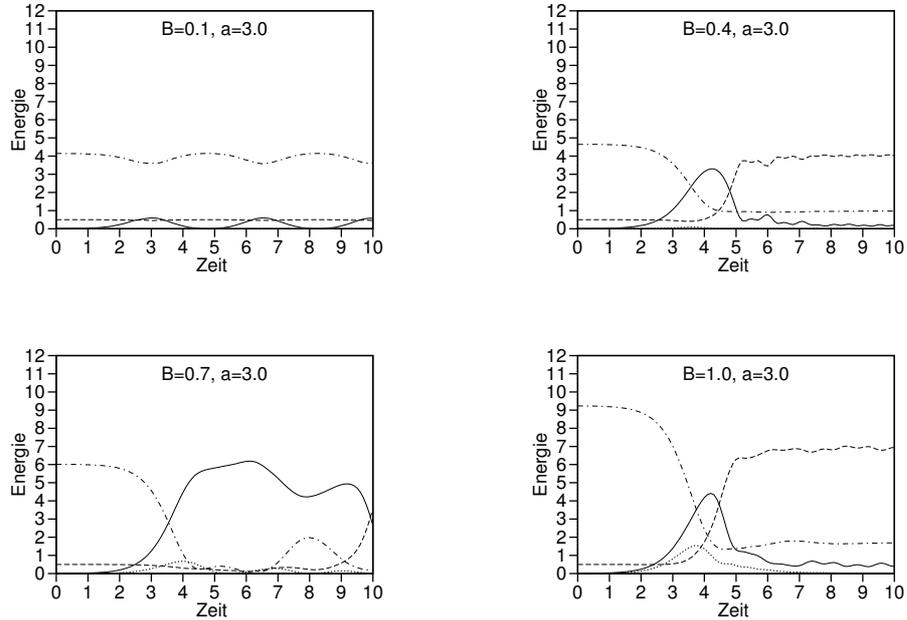


Abbildung 4.9: Energetik als Funktion der Zeit für einige S-Lösungen im Zweischichtensystem. Dargestellt sind  $K_e$  (durchgezogene Kurve),  $K_z$  (gestrichelte Kurve),  $A_e$  (gepunktete Kurve) und  $A_z$  (strich-gepunktete Kurve).

schwacher Instabilität ( $B = 0.1$ ) kommt es im Unterschied zu der Z-Lösung zu einer periodischen Abfolge von mehreren symmetrischen Lebenszyklen. Dieses Verhalten ist ebenfalls in allen anderen schwach instabilen Fällen mit einer symmetriebrechenden Anfangsstörung zu verzeichnen (siehe auch Abbildung 4.6). Vermutlich ist das Auftreten eines einzigen symmetrischen Lebenszyklus - wie in der schwach instabilen zonoklinen Lösung (Abbildung 4.2) und wie bei der analytischen Lösung von Pedlosky (1970) - nur dann möglich, wenn anfangs eine Normalmode-Störung vorliegt.

Abbildung 4.10 zeigt horizontale Verteilungen der potentiellen Vorticity der unteren Schicht des Zweischichtensystems sowie der Temperatur an der unteren Berandung des UPV-Systems zum Zeitpunkt der Equilibration für die Fälle  $B = 0.4, a = 3$  und  $B = 1, a = 3$ . Auch bei den S-Lösungen gleichen die Verteilungen des Zweischichtensystems denen des UPV-Systems. Im Fall  $B = 0.4, a = 3$  ist die Auswirkung des Symmetriebruchs auf die Verteilungen zu diesem Zeitpunkt nicht so deutlich ausgeprägt. Es ist jedoch festzustellen, daß die Anomalien im Vergleich zu der entsprechenden Z-Lösung weniger weit in meridionaler Richtung ausgelenkt wurden. Bei starker Instabilität ( $B = 1$ ) tritt der Symmetriebruch sehr viel deutlicher hervor. In diesem Fall kommt es zu der Entstehung einer Warmfront und einer Kaltfront, die wie in dem Konzeptmodell von Shapiro und Keyser (1990) sich zu einander etwa senkrecht anordnen. Eine ähnliche Anordnung wurde auch in der semigeostrophischen Studie

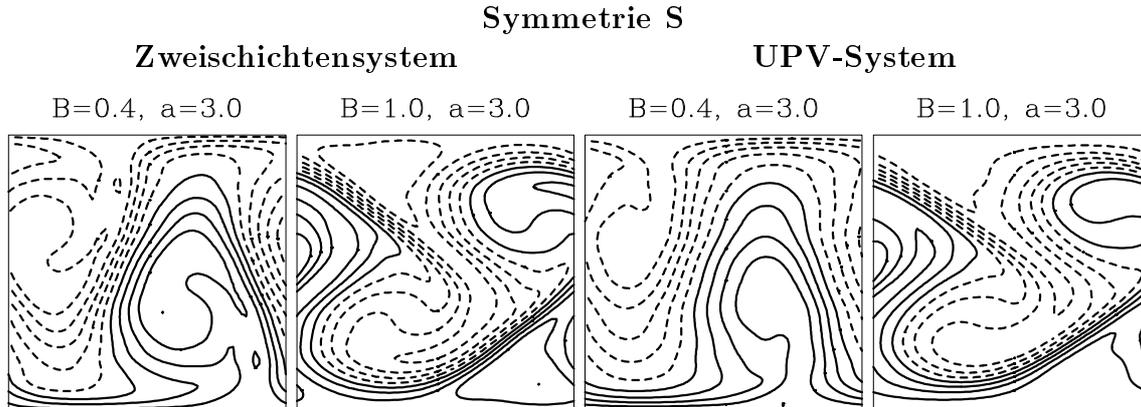


Abbildung 4.10: Horizontalverteilungen für einige S-Lösungen zum Zeitpunkt der Equilibration. Die beiden linken Bilder zeigen Horizontalverteilungen der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht des Zweischichtensystems und die beiden rechten Bilder Horizontalverteilungen der Temperatur an der unteren Berandung im UPV-System. Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt und der Isolinienabstand wurde so festgelegt, daß 10 Isolinien abgebildet werden.

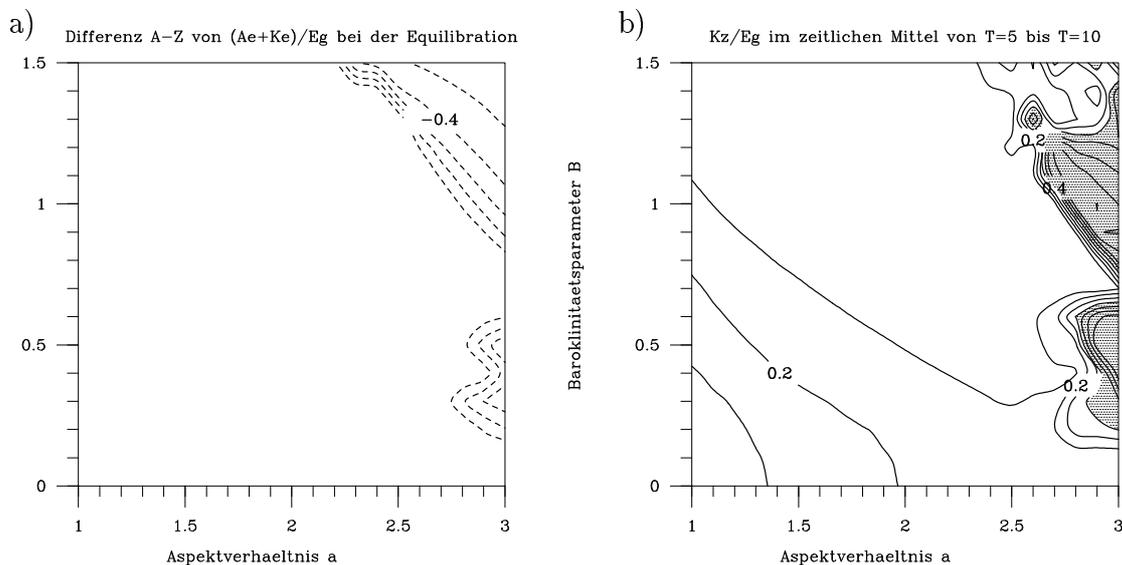
von Hoskins und West (1979) gefunden. Da Hoskins und West nur Lösungen mit der Symmetrie S betrachteten, ist vermutlich die T-förmige Anordnung der separat auftretenden Warm- und Kaltfront eine Folge der Scherungsdeformation von ostwärts gerichteten Zonalmittelströmungen, die ihr Maximum in der Kanalmitte aufweisen.

In Abbildung 4.11 werden die in Abschnitt 4.4 diskutierten Parameterdiagramme für die S-Lösung gezeigt. Es wird deutlich, daß der Symmetriebruch nur in einem kleinen Bereich des Diagramms Auswirkung auf die Entwicklung besitzt. Man kann in beiden Systemen zwei Bereiche identifizieren, in denen eine Abschwächung der Störungsenergie bei der Equilibration und ein hoher Mittelwert der zonalen kinetischen Energie erreicht wird. Der eine Bereich liegt bei sehr hohen Werten des Aspektverhältnisses ( $a \geq 2.8$ ) und bei mittlerer Instabilität ( $B \approx 0.5$ ). Der andere Bereich ist dagegen gekennzeichnet durch starke Instabilität ( $B > 0.9$ ), wobei auch niedrigere Werte des Aspektverhältnisses  $a$  mit eingeschlossen werden. Zwischen diesen beiden Bereichen kann man keine nennenswerte Auswirkung des Symmetriebruchs auf die erste Equilibration feststellen, was bereits bei der energetischen Entwicklung des Falls  $B = 0.7$ ,  $a = 3$  erkennbar war (Abbildung 4.9). Die Verteilungen des Anteils der zonalen kinetischen Energie an der Gesamtenergie offenbaren eine ähnliche Struktur. Der klar abgegrenzte Bereich mit erhöhter zentraler kinetischer Energie weist jedoch eine weniger stark ausgeprägte Lücke bei  $B = 0.7$ ,  $a = 3$  auf, da in diesem Bereich erst im Anschluß an die erste Equilibration dem zonalen Mittel kinetische Energie zugeführt wurde.

#### 4.6 Beispiele für eine barotrope Equilibration

In diesem Unterabschnitt werden Fälle analysiert, bei denen der Symmetriebruch zu

## Zweischichtensystem, Symmetrie S



## UPV-System, Symmetrie S

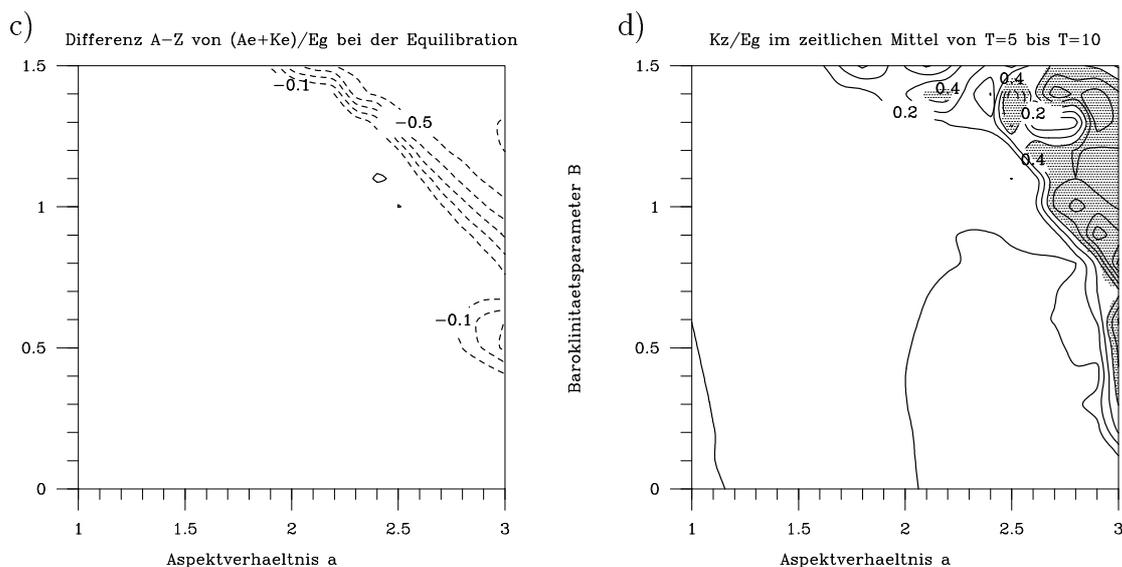


Abbildung 4.11: Verteilungen als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die S-Lösungen: a) Die Differenz zwischen der S-Lösung und der Z-Lösung von dem Anteil der Störungsenergie an der Gesamtenergie zum Zeitpunkt der Equilibration im Zweischichtensystem, b) Anteil der über den Zeitraum  $5 \leq T \leq 10$  gemittelten zonalen kinetischen Energie an der Gesamtenergie im Zweischichtensystem, c) wie a) jedoch im UPV-System, d) wie b) jedoch im UPV-System. Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.1$ , negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt und die Null-Linie wird nicht gezeigt. Bei b) und c) sind die Bereiche mit einem Verhältnis von mehr als 0.4 schattiert.

einer besonders deutlichen Modifizierung der Entwicklung führt. Aus den Parameterdiagrammen (Abbildung 4.8 und Abbildung 4.11) kann man entnehmen, daß im Zweischichtensystem eine starke Abschwächung der Störungsenergie bei der Equilibration im Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  sowohl für die A-Lösung als auch für die S-Lösung auftritt. Die Annahme eines Aspektverhältnisses von  $a = 3$  mag dem Leser als unrealistisch hohe Anisotropie der Fundamentalwelle erscheinen. Die hier präsentierten Ergebnisse zeigen jedoch, daß bei der A-Lösung sowie der S-Lösung die Zyklonen und Antizyklonen aufgrund der Überlagerung von Zonalmittelströmungen eine sehr viel geringere Anisotropie aufweisen. Abbildung 4.12 zeigt für alle drei Symmetrien die verschiedenen Energieterme als Funktion der Zeit. Die zeitlichen Entwicklungen der totalen Störungsenergie (Abbildung 4.12a) sind nahezu identisch bis zum Zeitpunkt  $T = 3$ . Danach verringert sich das Wellenwachstum der A-Lösung gegenüber der Z-Lösung und es kommt zu einer raschen Equilibration. Im Anschluß an die Equilibration fällt die Störungsenergie auf einen niedrigen Wert ab. Die weitere Entwicklung zeigt zwar einige Schwankungen, die Störungsenergie bleibt aber auf einem niedrigen Niveau. Eine ähnliche Entwicklung durchläuft die S-Lösung mit einer zeitlichen Verschiebung, die das Erreichen einer höheren Störungsamplitude bewirkt. Im Gegensatz zur A-Lösung folgen dem ersten Lebenszyklus weitere regelmäßig wiederkehrende Lebenszyklen, deren Amplitude langsam abnimmt. Die totale Störungsenergie der Z-Lösung erreicht ein sehr viel höheres Niveau bei der Equilibration, die zu einem späteren Zeitpunkt auftritt. Daher ist offenbar ein zusätzlicher Mechanismus für die Equilibration der A-Lösung sowie der S-Lösung verantwortlich. Bei logarithmischer Skalierung der Abszisse (Abbildung 4.12b) kann man auch die Entwicklung bei sehr kleiner Energieamplitude verfolgen und zudem die Intervalle mit exponentiellem Wachstum identifizieren, da in diesem Diagramm eine Exponentialfunktion als Gerade erscheint. Bei  $T = 0$  liegen die A-Lösung und die S-Lösung durch die symmetriebrechende Störung auf einem höherem Energieniveau. Da am Anfang aber nur der Fundamentalwellenanteil anwächst, konvergieren alle drei Lösungen relativ schnell auf eine Gerade. Der symmetriebrechende Anteil der Störung beeinflusst folglich die lineare Wachstumsphase nicht und entfaltet erst sehr viel später seine Wirkung. Bei der Equilibration der A-Lösung und der S-Lösung kommt es zu einer gleichzeitigen Amplifikation der zonalen kinetischen Energie  $K_z$  (Abbildung 4.12c), welche im weiteren Verlauf eine sichtbare Antikorrelation mit der Entwicklung der totalen Störungsenergie aufweist. Bei der Z-Lösung verbleibt die zonale kinetische Energie dagegen auf einem niedrigen Niveau. Die A-Lösung und die S-Lösung zeigen nach dem ersten Lebenszyklus nur noch sehr geringe Schwankungen in der zonalen verfügbaren potentiellen Energie  $A_z$  (Abbildung 4.12d). Folglich sind die Fluktuationen der totalen Störungsenergie eine Folge der kinetischen Energieumwandlung  $C(K_z, K_e)$ , was auch die Antikorrelation bezüglich  $K_z$  erklärt. Die Z-Lösung weist im Unterschied eine Antikorrelation der Störungsenergie mit  $A_z$  auf. Daher muß die barokline Energieumwandlung  $C(A_z, A_e)$  für das Verhalten der Störungsenergie verantwortlich sein. Diese Schlußfolgerungen werden durch die Abbildung 4.13 bestätigt, in welcher die zeitliche Entwicklung dieser Umwandlungen gezeigt wird.

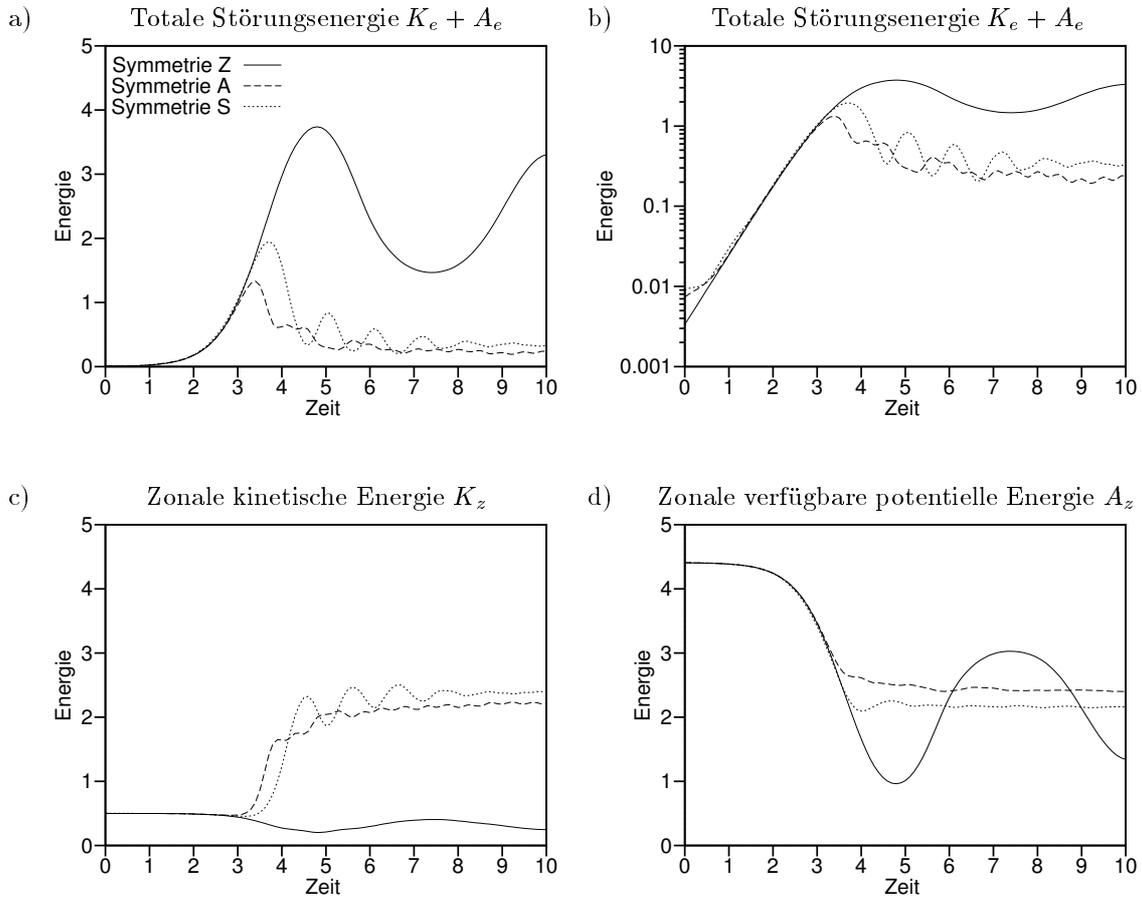


Abbildung 4.12: Energetik des Falls  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem für die Z-Lösung (durchgezogene Kurve), die A-Lösung (gestrichelte Kurve) und die S-Lösung (gepunktete Kurve): a) Totale Störungsenergie  $K_e + A_e$ , b) wie bei a) jedoch mit logarithmisch skaliertter Abszisse, c) zonale kinetische Energie  $K_z$ , d) zonale verfügbare potentielle Energie  $A_z$ .

In Abbildung 4.14 werden zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion zusammen mit der potentiellen Vorticity in der unteren Schicht für die drei Lösungen gezeigt. Um die zeitlich sich entwickelnde Strömung hervorzuheben, wurde der meridional konstante Grundstrom von der Stromfunktion abgezogen, was man auch durch eine im quasigeostrophischen System gültige Galilei-Transformation erreichen könnte. Außerdem werden zur besseren Übersicht in zonaler Richtung zwei Wellenlängen dargestellt. Am Anfang der Entwicklung ( $T = 2.5$ ) sind bereits leichte Unterschiede erkennbar. Bei der A-Lösung sowie der S-Lösung neigen sich die Phasenlinien. Die A-Lösung weist zudem eine stärkere Ausprägung der Zyklonenentwicklung auf. Die Stromfunktionswelle ist mit der Vorticitywelle nahezu in Phase, was als Folge der geringen vertikalen Neigung der Wellenphase bei schwacher Instabilität anzusehen ist. Ab dem Zeitpunkt  $T = 3.5$  wird deutlich, daß die drei Entwicklungen auseinanderlaufen. Die Z-Lösung behält die anfängliche Wellenstruktur bis zum Ende der Ent-

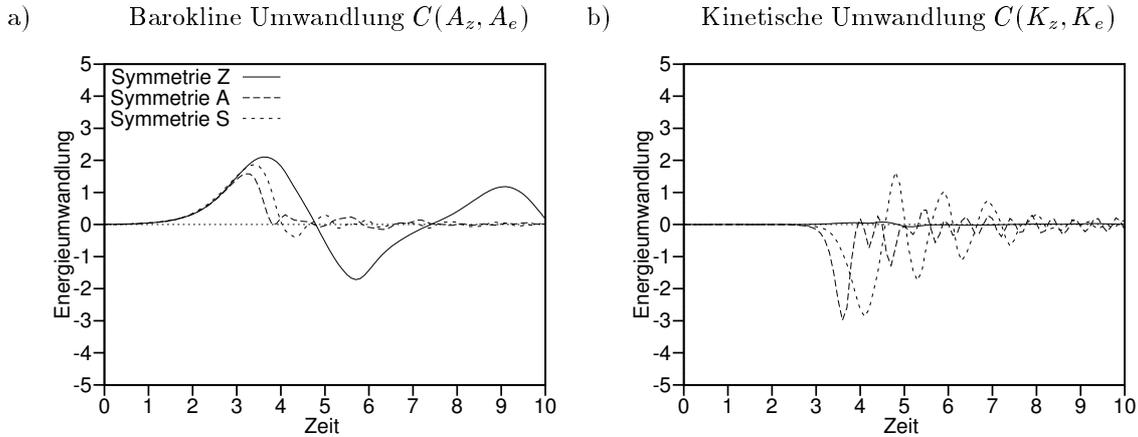


Abbildung 4.13: Energieumwandlungen des Falls  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem für die Z-Lösung (durchgezogene Kurve), die A-Lösung (gestrichelte Kurve) und die S-Lösung (gepunktete Kurve): a) Barokline Umwandlung  $C(A_z, A_e)$ , b) kinetische Umwandlung  $C(K_z, K_e)$ .

wicklung bei, und die Konturen der potentiellen Vorticity werden immer weiter ausgelenkt, ohne daß die PV-Anomalien von ihrer Quelle abgeschnitten werden. Bei der A-Lösung neigen sich die dominierenden Zyklonen in zunehmenden Maße gegenüber der meridionalen Richtung, wobei die zyklonal gescherte Zonalmittelströmung immer mehr Gewicht erhält. Diese Entwicklung entspricht dem in Abschnitt 1.4 qualitativ diskutierten Neigungsvorgang einer meridional erstreckten Zyklone. Die Konturen der potentiellen Vorticity sind der Scherungsdeformation der zyklonal gescherten Zonalmittelströmung ausgesetzt. Daher werden die Konturen in der Kanalmitte aufgrund der maximalen Scherung besonders stark deformiert, so daß zum Zeitpunkt  $T = 4$  die zuvor durch dünne Verbindungsstreifen mit der Quelle verbundenen PV-Anomalien abgeschnitten werden. Der Abschneidungsprozess kann nur aufgrund der Horizontaldiffusion stattfinden, da die potentielle Vorticity eine Erhaltungsgröße ist und somit ein noch so dünner Streifen bestehen bleiben müßte. Die Scherung in der Kanalmitte verkleinert also besonders effizient die Skalen der Anomalien und sorgt über die Hyperdiffusion für eine irreversible Vermischung von potentieller Vorticity. Die Stromfunktionsstörungen bleiben bis zum letzten Zeitpunkt ( $T=4.5$ ) erhalten und besitzen Ähnlichkeit zu den Katzenaugen der analytischen Stewartson-Warn-Warn Lösung (Stewartson 1978 und Warn und Warn 1978), die das Verhalten einer Rossbywelle an einer kritischen Linie beschreibt. Die erst im Laufe des Lebenszyklus entstandene kritische Linie liegt bei der A-Lösung in der Kanalmitte. Die S-Lösung beschreibt eine weniger drastische Entwicklung. Im Unterschied zur Z-Lösung wandert die Wellenstörung mit zunehmender Phasengeschwindigkeit nach Osten, wobei sich die Zyklonen und Antizyklonen in meridionaler Richtung gegeneinander verschieben. Daraus resultiert eine nordostwärtige Zugbahn für die Zyklonenzentren und eine südostwärtige Zugbahn für die Antizyklonenzentren. Zu einem ähnlichen Ergebnis

kamen Wallace et al. (1988) bei der Analyse der beobachteten Zugbahnen auf der Nordhemisphäre. Bei der S-Lösung ist die meridionale Verschiebung der Zyklonen und Antizyklonen eine Folge der Entstehung einer barotropen Zonalmittelströmung, die in der Kanalmitte nach Osten und in der Nähe der seitlichen Berandungen nach Westen gerichtet ist. Wie bei der A-Lösung gewinnt die Zonalmittelströmung immer mehr Gewicht, wobei die Zyklonen und Antizyklonen ebenfalls die Form von Katzenaugen annehmen. Bei der S-Lösung treten die kritischen Linien nördlich und südlich der Kanalmitte auf. Im weiteren erkennt man, daß der Raum in unmittelbarer Nähe der Berandungen nahezu wellenfrei ist. Vermutlich wirken die kritischen Linien wie Barrieren, die die Störungen in der Mitte des Kanals einfangen. Die Anomalien der potentiellen Vorticity werden auch bei der S-Lösung von ihrer Quelle abgeschnitten. Eine deutliche Vermischung findet bis zu diesem Zeitpunkt jedoch nicht statt, da sich aufgrund der fehlenden Scherung in der Kanalmitte die Skalen nicht so schnell verkleinern.

Es wäre auch möglich gewesen, bei der A-Lösung und S-Lösung den symmetriebrechenden Anteil mit einem umgekehrten Vorzeichen vorzugeben. Bei der A-Lösung hätte sich die Welle in die entgegengesetzte Richtung geneigt und es wäre eine Antizyklone in einer antizyklonal gescherten Zonalmittelströmung entstanden. Bei der S-Lösung hätte sich eine meridional symmetrische Zonalmittelströmung entwickelt, die in der Kanalmitte nach Westen gerichtet wäre. Die Zyklonen (Antizyklonen) würden sich nach Südwesten (Nordwesten) verlagern. Obwohl diese entgegengesetzten Entwicklungen im Hinblick auf synoptische Wettersysteme sehr ungewöhnlich sind, ist im Rahmen der hier betrachteten quasigeostrophisch approximierten Systeme kein Vorzeichen beim Symmetriebruch prädestiniert.

Abbildung 4.15 zeigt die zeitliche Entwicklung der zonal gemittelten Meridionalprofile der barotropen Zonalströmung, des Impulsflusses der barotropen Störungen und der Varianz der barotropen Stromfunktion als Funktion der Zeit für die A-Lösung und die S-Lösung. Bei der A-Lösung entwickelt sich eine meridional antisymmetrische Scherströmung infolge des meridional symmetrischen Impulsflusses. In der barotropen Auflösungsphase erniedrigt sich die Störungamplitude am schnellsten in der Kanalmitte. Anschließend bewirkt die hohe Scherung in der Kanalmitte eine Unterdrückung der Störungsaktivität, während sie in dem nördlichen und südlichen Teil des Kanals erhalten bleibt. Nach Beendigung der Zerfallsphase stellt sich eine hochfrequente, aber schwache Schwingung der Aktivität ein. Dieses Verhalten resultiert aus der entgegengesetzten Wanderung der Störungen nördlich und südlich der kritischen Linie und ist vergleichbar mit einer sogenannten strukturellen "Vacillation", welche in Laborexperimenten beobachtet wurde (siehe Pfeffer et al. 1980). Bei der S-Lösung generieren die Impulsflüsse während der barotropen Auflösungsphase eine meridional symmetrische Scherströmung, die in der Kanalmitte ostwärts und in Nähe der Berandungen westwärts gerichtet ist. Im Gegensatz zur A-Lösung reduziert sich die Störungsaktivität erst an der Nord- und Südflanke der Störung. In der Kanal-

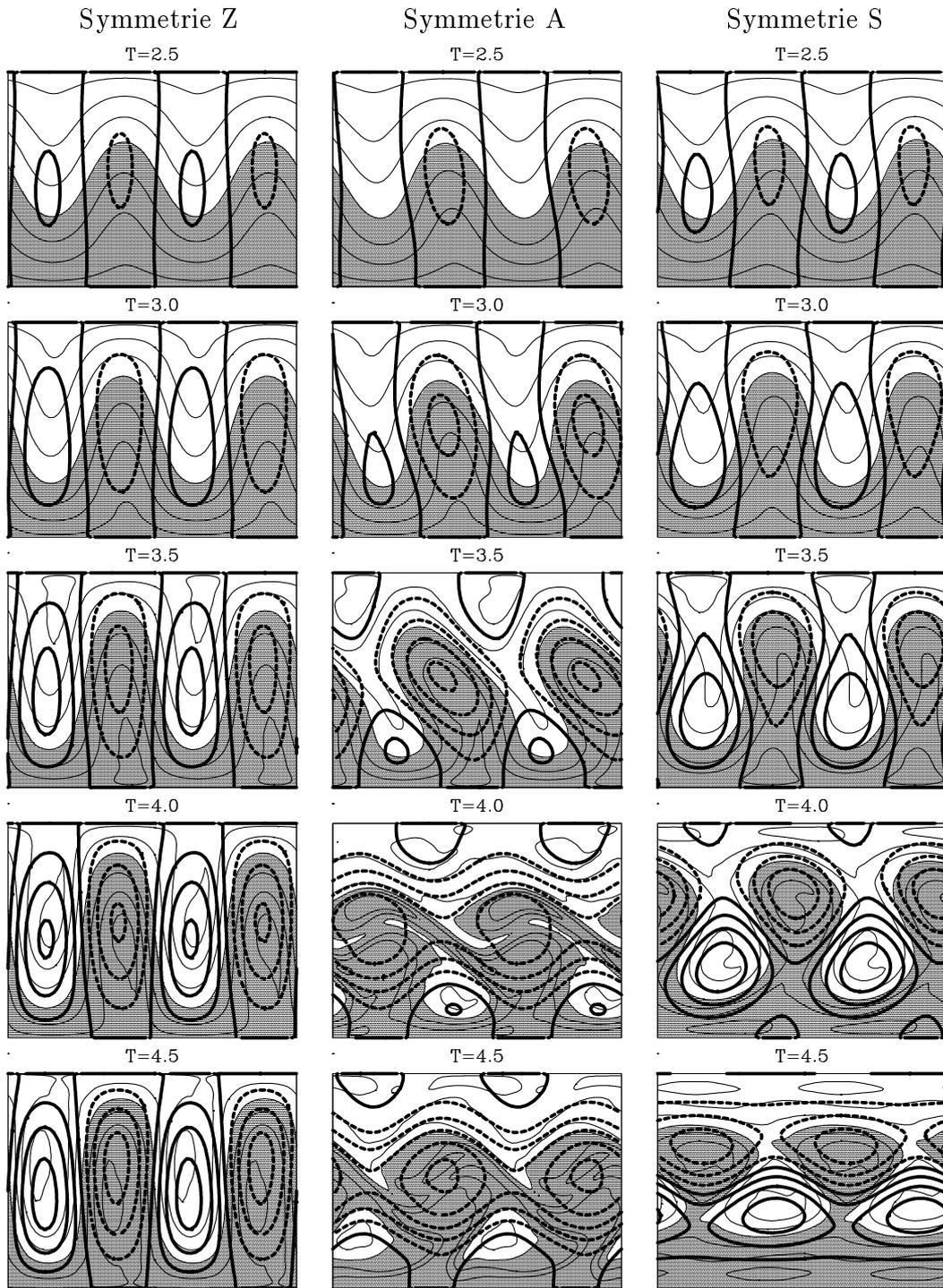


Abbildung 4.14: Zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion (dicke Isolinien,  $\Delta=0.5$ ) und der potentiellen Vorticity (dünne Isolinien,  $\Delta=5$ ) des Falls  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  in der unteren Schicht des Zweischichtensystems für die Z-Lösung (linke Spalte), die A-Lösung (mittlere Spalte) und die S-Lösung (rechte Spalte). Negative Isolinien der Stromfunktion sind gestrichelt dargestellt und Bereiche mit positiver potentieller Vorticity sind schattiert.

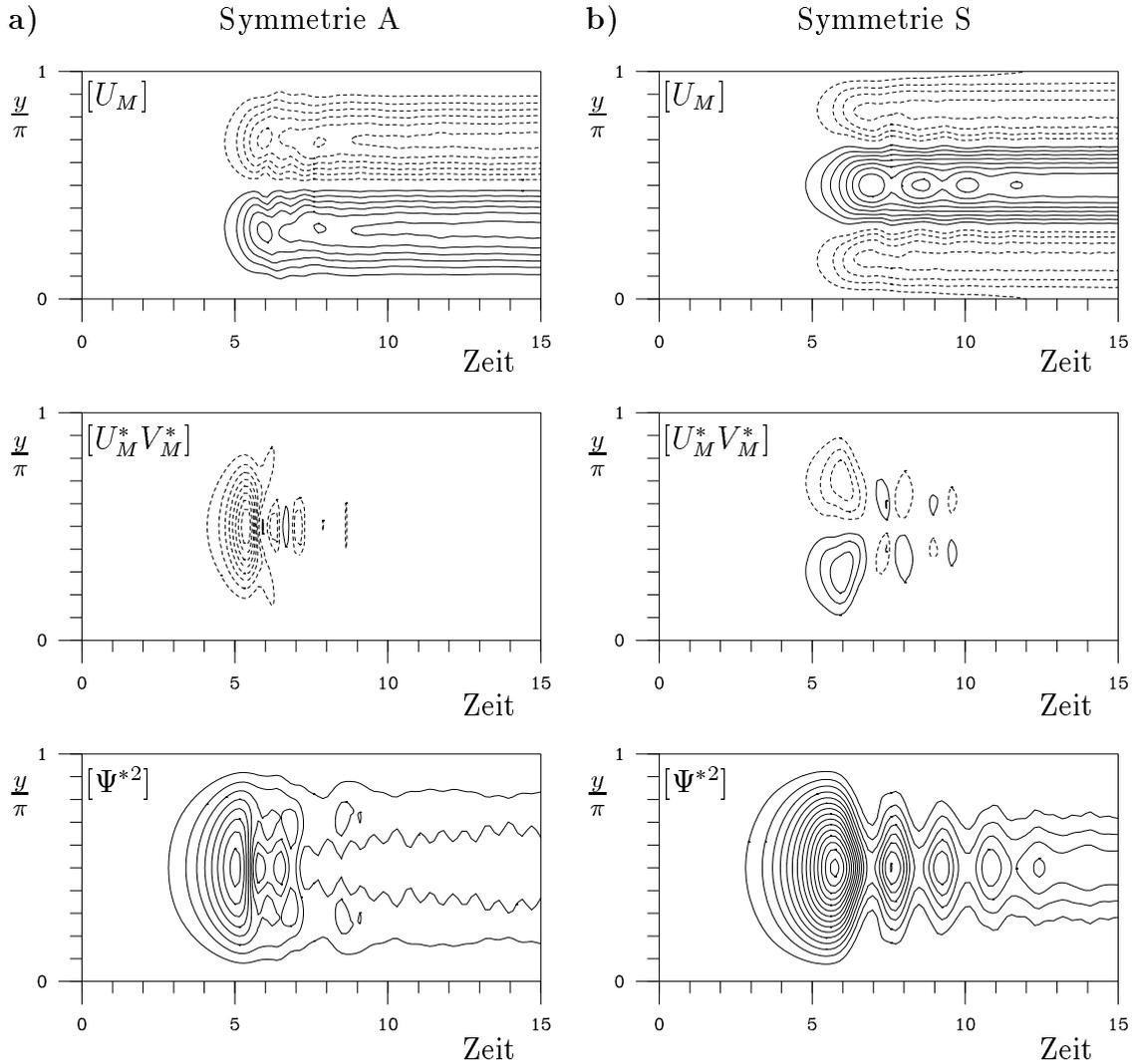


Abbildung 4.15: Zeitliche Entwicklung der Meridionalprofile der barotropen Zonalmittelströmung  $[U_M]$  (oberes Diagramm, Isolinienabstand  $\Delta = 0.5$ ), des Impulsflusses der barotropen Störungen  $[U_M^* V_M^*]$  (mittleres Diagramm, Isolinienabstand  $\Delta = 0.2$ ) und der Varianz der barotropen Stromfunktion  $[\Psi^{*2}]$  (unteres Diagramm, Isolinienabstand  $\Delta = 0.05$ ) für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem. a) A-Lösung, b) S-Lösung.

mitte behält die Störung eine endliche Amplitude bei, da dort die Meridionalscherung verschwindet. Nachdem die Scherströmung ihre maximale Amplitude erreicht hat, wechselt der Impulsfluß mehrere Male sein Vorzeichen, was die Fluktuationen der kinetischen Energieumwandlung (siehe Abbildung 4.13b) und der Störungsaktivität in der Kanalmitte bewirkt. Die beiden kritischen Linien in dem barotropen Strömungsprofil verursachen vermutlich dieses Verhalten und verhindern eine Aus-

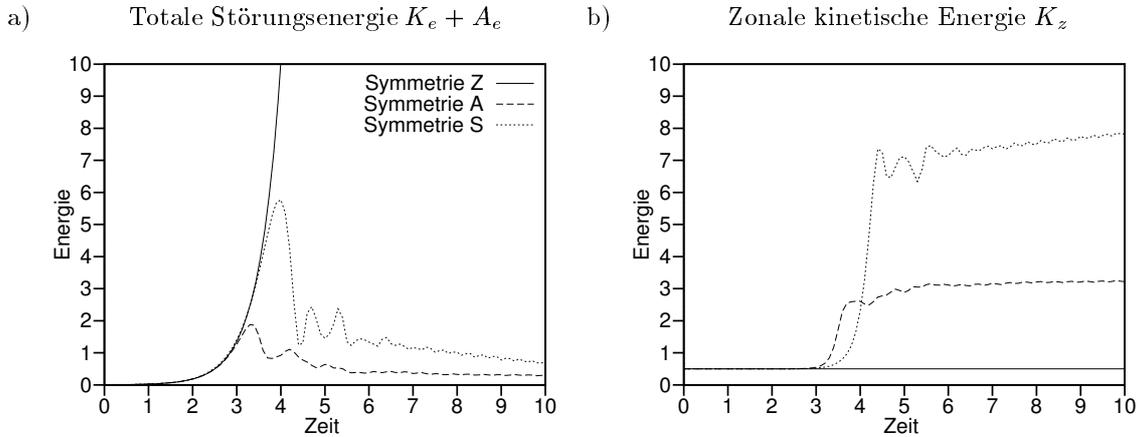


Abbildung 4.16: Energetik des Falls  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem für die Z-Lösung (durchgezogene Kurve), die A-Lösung (gestrichelte Kurve) und die S-Lösung (gepunktete Kurve) bei Fixierung der vertikal antisymmetrischen Zonalmittelströmung: a) Totale Störungsenergie  $K_e + A_e$ , b) zonale kinetische Energie  $K_z$ .

breitung der Störungen zu den Berandungen. Ein ähnliches Verhalten wurde in der Entwicklungsstudie von Barnes und Young (1992) mit einem globalen Zirkulationsmodell gefunden. Sie erklärten die Entwicklung durch das wiederholte Auftreten einer sogenannten "Überreflektion" der abgestrahlten Wellenaktivität an der kritischen Linie (siehe Killworth und McIntyre 1985). Eine Abstrahlung von Wellenaktivität ist in dieser Simulation jedoch nicht erkennbar. Das liegt vermutlich an dem geringen Abstand zwischen der Kanalmitte und den kritischen Linien.

Es ist möglich die barotrope Equilibration in den quasigeostrophischen Systemen zu isolieren, indem man die vertikal antisymmetrische Zonalmittelströmung fixiert. Obwohl es keine physikalische Rechtfertigung für eine solche Fixierung gibt, ist es sinnvoll zu testen, ob die Beendigung des baroklinen Wachstums alleine durch die Ausbildung von barotropen Scherströmungen möglich ist. Daher wurden zwei zusätzliche Simulationen der A-Lösung und der S-Lösung im Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  bei Fixierung des vertikal antisymmetrischen Anteils der Zonalmittelströmung durchgeführt. Da das erreichte Energieniveau in diesen Simulationen sehr viel höher liegt, wird der Zeitschritt auf  $\Delta T = 0.002$  und die Zeitskala für die Hyperdiffusion auf  $\tau = 0.002$  erniedrigt. Die Energetik dieser Simulationen ist in Abbildung 4.16 gezeigt. Zum Vergleich wurde auch die Entwicklung der totalen Störungsenergie der Z-Lösung dargestellt, die sich einfach durch ein exponentielles Wachstum auszeichnet. Wie bei den Lösungen ohne Fixierung schwächt sich ab dem Zeitpunkt  $T = 3$  das barokline Wachstum der A-Lösung schnell gegenüber dem der Z-Lösung ab, so daß kurz darauf die Equilibration erfolgt. Das Energiemaximum liegt nicht sehr viel höher als das der entsprechenden Simulation ohne Fixierung, und auch die weitere Entwicklung unterscheidet sich nicht

wesentlich. Bei der S-Lösung fällt das Wachstum zu einem etwas späteren Zeitpunkt gegenüber der Z-Lösung zurück. Da jedoch die Z-Lösung durch das exponentielle Wachstum bereits ein hohes Energieniveau erreicht hat, liegt das Energiemaximum der S-Lösung im Vergleich zur Simulation ohne Fixierung bei einem viel höheren Wert. Die sekundären Lebenszyklen der S-Lösung wiederholen sich aufgrund der stärkeren Amplitude mit einer höheren Frequenz und sind unregelmäßiger. Die Ergebnisse der beiden Experimente weisen die Möglichkeit einer barotropen Equilibration auf und passen gut in das Konzept des "Barotropic Governor" Effektes, da eine Zonalmittelströmung allein durch die Amplifikation einer barotropen Komponente stabilisiert wurde.

#### 4.7 Barokline Wellenentwicklungen in dem semigeostrophischen UPV-System

In diesem Unterabschnitt wird die Rolle des Symmetriebruchs bei der Entwicklung einer baroklinen Welle in dem semigeostrophischen UPV-Systems untersucht. Eine ähnliche Untersuchung wurde bereits von Schär (1989) bzw. Davies et al. (1991) durchgeführt. In diesen Arbeiten wurde die Symmetrie durch eine barotrope Zonalmittelströmung mit meridional antisymmetrischer Scherung gebrochen. Hier wird im Unterschied dazu ein Fall diskutiert, bei dem der Symmetriebruch durch die Anfangsstörung ausgelöst wird.

##### 4.7.1 Festlegung des Grundstroms

Der zonale Grundstrom wird für dieses Experiment in der Weise formuliert, daß die vertikale Scherung in der Kanalmitte maximal ist und kontinuierlich bei Annäherung an die seitliche Berandung verschwindet. Das kann erreicht werden, indem man in den geostrophischen Koordinaten eine sinusförmige Zonalmittelströmung zu dem in (2.37b) definierten horizontal ungescherten Grundstrom hinzuaddiert. Das führt zu einer vertikal antisymmetrischen Jetströmung, die in den geostrophischen Koordinaten durch

$$U(\tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{U_0}{2} \left( \tilde{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\tilde{y}) \frac{\sinh\left(\Gamma_{0,2}\left(\tilde{z} - \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\frac{1}{2}\Gamma_{0,2}\right)} \right) \quad (4.4)$$

ausgedrückt wird. Im Hinblick auf synoptische Systeme kann mit dieser Jetströmung eine realistischere Entwicklung erwartet werden, da die Baroklinität sich in der Mitte des Kanals konzentriert und deshalb die Polarfront besser repräsentiert werden kann. Zudem verschwindet der Temperaturgradient an den seitlichen Berandungen. Dadurch werden die unrealistischen Randeffekte reduziert. Die seitlichen Berandungen sind im semigeostrophischen UPV-System zwar offen, aber die Symmetrie der Lösung erlaubt nur eine sehr begrenzte randüberschreitende Strömung. Nakamura (1993) betrachtete die gleiche Form des Grundstroms. Im Vergleich zu Nakamura wird hier

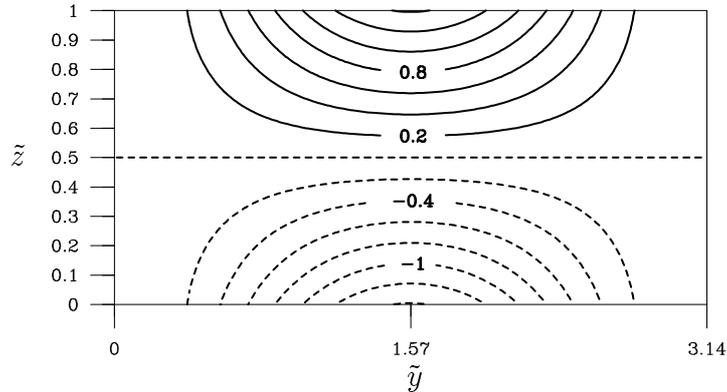


Abbildung 4.17: Zonalmittelströmung  $U$  im semigeostrophischen UPV-System als Funktion der geostrophischen Koordinaten  $\tilde{y}$  und  $\tilde{z}$ . Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.2$  und negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt.

jedoch eine deutlich geringere interne Froudezahl (d. h. höhere statische Stabilität) mit dem Wert  $F_I = 8$  vorgegeben (Nakamura wählte einen Wert von  $F_I \approx 40$ ). Für die Rossbyzahl wird  $Ro=0.04$  angenommen. Diese Wahl ist ein Kompromiß, der einerseits eine merkliche Frontogenese während der Entwicklung ermöglicht und andererseits den frontalen Kollaps zu einem späten Zeitpunkt erfolgen läßt. Abbildung 4.17 zeigt den Grundstrom (4.4) als Funktion der geostrophischen Koordinaten  $\tilde{x}$  und  $\tilde{z}$ . Diese Verteilung unterscheidet sich nur sehr wenig von der in den physikalischen Koordinaten.

#### 4.7.2 Lineare Instabilitätsanalyse

Die lineare Instabilität des meridional variierenden Grundstroms (4.4) kann nicht analytisch berechnet werden. Folglich müssen die Normalmoden mit den dazugehörigen Eigenwerten numerisch aus der Jacobi-Matrix des linearisierten Systems bestimmt werden. Dazu werden Routinen aus der NAG Fortran Bibliothek verwendet. Ein Vergleich der Ergebnisse mit den numerischen Simulationen weist eine sehr gute Übereinstimmung des errechneten mit dem simulierten Wachstum auf. Abbildung 4.18 zeigt die Wachstumsrate des am schnellsten anwachsenden Normalmodes als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$ . Zum Vergleich ist in dem Diagramm auch der Verlauf der in Gl. (3.25) gegebenen Wachstumsrate bei Vorgabe des meridional konstanten Grundstroms eingezeichnet. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Jetströmung im Vergleich zum meridional konstanten Grundstrom weniger instabil ist. Dieses Ergebnis erklärt sich wahrscheinlich durch die geringere verfügbare potentielle Energie des jetförmigen Grundstroms. Der Kurvenverlauf der Wachstumsrate ist in beiden Fällen ähnlich. Das maximale Wachstum in der Jetströmung findet man bei  $a = 2.3$ . Bei dem meridional konstanten Grundstrom liegt es bei einem etwas geringeren Wert. Aufgrund der vertikalen Antisymmetrie der Jetströmung verschwindet der Imaginärteil des Eigenwerts. Die Struktur des Normalmodes (nicht gezeigt) zeichnet sich im Unterschied

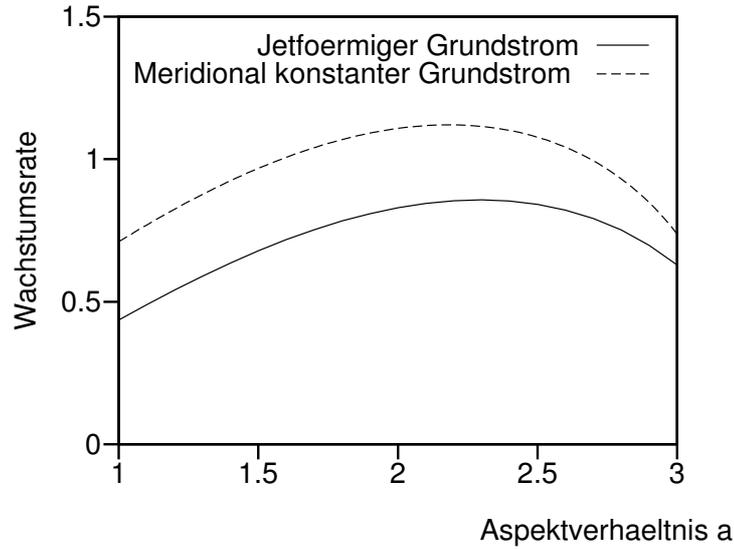


Abbildung 4.18: Wachstumsrate des am schnellsten anwachsenden Normalmodes als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  für die in Gl. (4.4) definierte Jetströmung (durchgezogene Kurve) und für den meridional konstanten Grundstroms (gestrichelte Kurve).

zu der Fundamentalwelle durch eine geringere meridionale Ausdehnung aus, so daß das Meridionalprofil der Amplitude etwa mit dem Meridionalprofil des Grundstroms übereinstimmt.

#### 4.7.3 Beschreibung der numerischen Experimente

Nakamura (1993) hat nachgewiesen, daß der am schnellsten anwachsende Normalmode eines vertikal antisymmetrischen Grundstroms stets der Symmetrie Z unterliegt. Daher kann man auch bei Vorgabe der Jetströmung (4.4) den Symmetriebruch untersuchen. Es werden zwei Simulationen durchgeführt. Bei dem ersten Experiment wird eine Z-Lösung durch die Vorgabe einer Normalmode-Störung mit einem Aspektverhältnis von  $a = 2$  simuliert. Dadurch ist die Wellenlänge dieser Störung geringfügig höher als die des am schnellsten anwachsenden Normalmodes. Die Normalmode-Störung wird so normiert, daß die kinetische Störungsenergie bei  $K_e = 0.009$  liegt. Bei der zweiten Lösung wird eine A-Lösung durch die Vorgabe der Normalmode-Störung und einer zusätzlichen symmetriebrechenden Störung  $\Psi' = -0.05 E_{1,2}^{Mr}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})/G_{1,2}^M(\frac{1}{2})$  simuliert. Der symmetriebrechende Anteil besitzt im Vergleich zu den quasigeostrophischen Simulationen der A-Lösung ein negatives Vorzeichen. Damit wird erreicht, daß sich die Anfangsstörung entgegen dem Uhrzeigersinn neigt und somit eine Zyklonenentwicklung bevorzugt wird. Bei den beiden Simulationen wird eine spektrale Abschneidung bei  $N_y = 40$  und  $N_x = 8$  durchgeführt. Der Zeitschritt wird mit  $\Delta T = 0.002$  und die Zeitskala für die Hyperdiffusion mit  $\tau = 0.002$  vorgegeben. Die höhere räumliche Auflösung verhindert die sogenannten Gibbs-Phänomene (siehe z. B. Hack 1992), die bei der niedrigeren Auflösung in der Nähe der Fronten auftreten.

Abgesehen von diesen lokalen numerischen Probleme sind die Lösungen jedoch nicht sensitiv bezüglich der räumlichen Auflösung.

#### 4.7.4 Resultate

Die Energetik der simulierten Lösungen wurde im geostrophischem Raum durchgeführt. Daher stimmen die Energieterme mit denen des quasigeostrophischen UPV-Systems überein, und können auch nach dem Auftreten eines frontalen Kollapses berechnet werden. Man kann davon ausgehen, daß eine Energetik im physikalischen Raum keine einschneidenden Unterschiede aufweist, da die Koordinatentransformation die zonal gemittelten Größen und damit die zonalen Energieterme kaum modifiziert. Abb. 4.19 zeigt die zeitliche Entwicklung der verschiedenen Energieterme der beiden Lösungen. Auch bei diesen Simulationen wirkt sich der Symmetriebruch deutlich auf die energetische Entwicklung aus, so daß es ab  $T = 4$  zu einer Divergenz der Lösungen kommt. Danach erfährt die A-Lösung eine rasche Equilibration, wobei kinetische Energie von der Störung in die Zonalmittelströmung übertragen wird. Die energetische Entwicklung der A-Lösung gleicht also qualitativ der, die in Abschnitt 4.6 diskutiert wurde. Als Unterschied erscheint jedoch die Tatsache, daß die verfügbare potentielle und die kinetische Energie der Störungen in der Wachstumsphase etwa die gleiche Größenordnung haben. Dieses Ergebnis erklärt sich durch die ausgeprägte vertikale Phasenneigung der anwachsenden Welle, hervorgerufen durch die hohe Instabilität des Grundzustandes. Die Störung der Z-Lösung erreicht im Vergleich zur A-Lösung ein sehr viel höheres Energieniveau und wandelt in der Zerfallsphase die Energie wieder in die potentielle Energie des zonalen Mittels um.

In Abbildung 4.20 (Abbildung 4.21) sind zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion (Temperatur) an der unteren Berandung für die Z-Lösung und die A-Lösung gezeigt. Wie in Abbildung 4.14 wurde auch in Abbildung 4.20 der meridional konstante Anteil des Grundstroms von der Stromfunktion abgezogen. Am Anfang der Entwicklung ( $T = 2$ ) erkennt man in der Kanalmitte eine barokline Zone mit einer überlagerten Wellenstörung, wobei nördlich und südlich dieser Zone sich schwache Antizyklogen bzw. Zyklonen befinden. Schon jetzt kann man bei der A-Lösung eine meridionale Neigung der Wellenphase feststellen, während die Z-Lösung einen Phasenverlauf aufweist, der etwa das Jetprofil des westwärts gerichteten Grundstroms wiedergibt. In der weiteren Entwicklung ( $T = 3$  und  $T = 4$ ) werden die Temperaturanomalien bei gleichbleibenden Phasenverlauf zunehmend meridional ausgelenkt. Dabei verlagern sich die Zyklonen nordwärts und die Antizyklogen südwärts. Bereits in diesem Entwicklungsstadium dominieren in der A-Lösung die Zyklonen gegenüber den Antizyklogen. Die Z-Lösung weist dagegen Zyklonen und Antizyklogen mit gleichhoher Amplitude auf. Im weiteren kann man bei der A-Lösung registrieren, daß sich an der Ostseite der positiven Temperaturanomalie der Gradient verstärkt, während er sich an der Westseite abschwächt. Ab  $T = 5$  kommt es bei beiden Lösungen zu einer Frontogenese. Bei der Z-Lösung windet sich die Front um die positiven

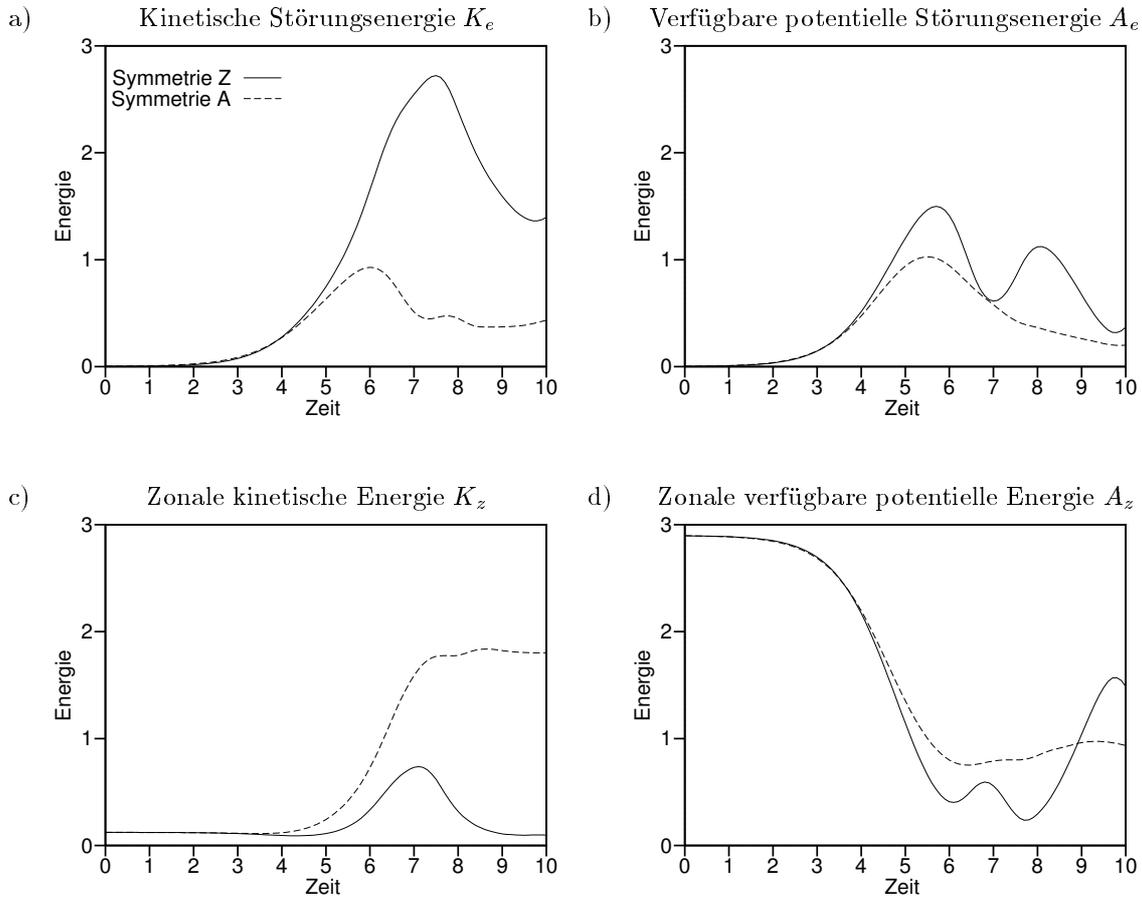


Abbildung 4.19: Energetik im semigeostrophischen UPV-System für die Simulation der Z-Lösung (durchgezogene Kurve) und die Simulation der A-Lösung (gestrichelte Kurve): a) Kinetische Störungsenergie  $K_e$ , b) verfügbare potentielle Störungsenergie  $A_e$ , c) zonale kinetische Energie  $K_z$ , d) zonale verfügbare potentielle Energie  $A_z$ .

und negativen Temperaturanomalien. Ein solcher Frontenverlauf kann durch keine der in der Einleitung genannten synoptischen Konzeptmodelle (siehe Abbildung 1.1) bestätigt werden. Bei der A-Lösung kündigt sich im Zentrum der Zyklone eine spiralenförmige Bewegung der positiven Temperaturanomalie an. Dabei biegt sich die Warmfront um die Zyklone herum. Die Entstehung einer Kaltfront deutet sich ebenfalls an. Diese steht jedoch noch nicht mit der Warmfront in Verbindung. Die Entwicklung der A-Lösung scheint mit dem Konzeptmodell von Shapiro und Keyser (1990) (siehe Abbildung 1.1b) im Einklang zu stehen. Zum Zeitpunkt  $T = 6$  kommt es bei der Z-Lösung zu einer erheblichen Verstärkung der Warmfront an der offenen Berandung, durch die bereits Fluidelemente aus der periodisch fortgesetzten Region getreten sind. Diese Warmfront resultiert aus der dortigen Strömungskonfluenz. Eine ähnliche Entwicklung wurde von Hoskins (1976) bei einer semigeostrophischen Simulation gefunden. Da die von Hoskins simulierte Lösung ebenfalls der Symmetrie Z

unterlag, ist die Warmfrontogenese an der Berandung wahrscheinlich charakteristisch für eine Z-Lösung. Die A-Lösung offenbart zu diesem Zeitpunkt typische Merkmale einer ausgereiften Zyklone. Die in die Zyklone spiralförmig bewegenden negativen Temperaturanomalien bewirken ein Zusammenlaufen von Warm- und Kaltfront, die in einer Okklusionsfront fortgesetzt werden. Diese wiederum verbindet die sekkludierte Warmanomalie im Zentrum der Zyklone mit ihrem Ursprungsort. Im weiteren findet man bei den Fronten Knicke in den Stromlinien, die dem synoptischen Meteorologen sehr vertraut sind und auf eine erhöhte Vorticity hindeuten. Ähnliche Strukturen wurden von Polavarapu und Peltier (1990) mit einem hochauflösenden nichthydrostatischen Modell bei Vorgabe eines vertikal antisymmetrischen Grundstroms (der Fall HBF ihrer Studie) gefunden. Das läßt vermuten, daß die A-Lösung eine bessere semigeostrophische Approximation der exakten Lösung repräsentiert als die Z-Lösung. Unmittelbar nach dem Zeitpunkt  $T = 6$  tritt in beiden Lösungen ein frontaler Kollaps auf. Bei der Z-Lösung kollabiert die Warmfront an der seitlichen Berandung und bei der A-Lösung die Okklusionsfront sowie die zurückgebogene Warmfront.

Aufgrund der vertikalen Antisymmetrie verläuft die Entwicklung der Temperatur an der oberen Berandung sehr ähnlich mit dem entgegengesetzten Vorzeichen ab. Daher werden bei der A-Lösung Kaltanomalien sekkludiert. Ein solcher Prozess findet sich auch in anderen numerischen Studien (z. B. Thorncroft und Hoskins 1990). Die Dynamik an der oberen Berandung ist jedoch nicht realistisch im Hinblick auf atmosphärische Systeme, da eine geneigte Tropopause mit einem meridionalen PV-Gradienten nicht berücksichtigt wird.

Abbildung 4.22 zeigt in den physikalischen Koordinaten zeitlich aufeinanderfolgende Meridionalschnitte der Zonalmittelströmung  $U$  und des EP-Flusses für die Z-Lösung und die A-Lösung. Die entsprechenden Verteilungen in den geostrophischen Koordinaten  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$  weisen nur leichte Unterschiede auf. Daher kann man auch die energetische Beziehung (2.46), die im quasigeostrophischen UPV-System gültig ist, bei der Interpretation anwenden. Die Pfeile des EP-Flusses sind so skaliert, daß sie erst ab dem Zeitpunkt  $T = 4$  in Erscheinung treten. Vorher besitzt das Vektorfeld zwar eine geringere Amplitude, aber eine ähnliche Struktur. Am Anfang der Entwicklung ( $T = 2$ ) unterscheidet sich die Zonalmittelströmung aufgrund der geringen Störungsamplitude kaum von dem Grundstrom (Abbildung 4.17). Man kann lediglich erkennen, daß die vertikale Scherung sich ein wenig reduziert hat und bei der A-Lösung eine leichte Asymmetrie erscheint. Dieser Trend setzt sich beim darauffolgenden Zeitpunkt ( $T = 3$ ) fort. Zum Zeitpunkt  $T = 4$  spalten sich in beiden Lösungen die Jets an der oberen und unteren Berandung auf. Das ist eine Folge des Temperaturflusses, der die Vertikalscherung in der Kanalmitte reduziert und als Vertikalkomponente des EP-Flusses zu diesem Zeitpunkt dominiert. Die Vertikalkomponente des EP-Flusses ist von der westwärtigen Strömung an der unteren Berandung zur ostwärtigen Strömung an der oberen Berandung gerichtet. Aufgrund der energetischen Beziehung (2.46) entziehen demnach die Störungen der Zonalmittelströmung Energie. Eine solche Ver-

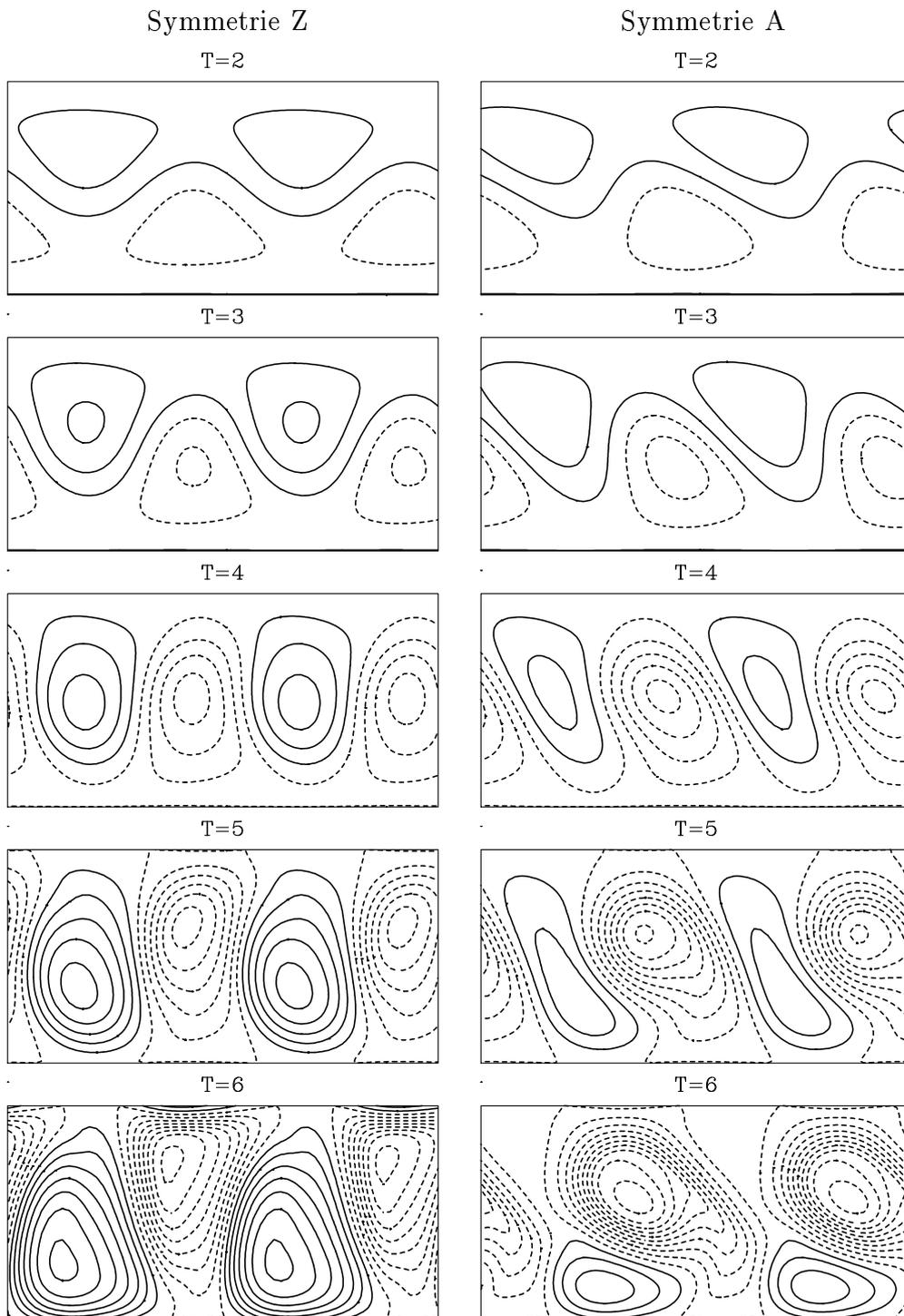


Abbildung 4.20: Zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta=0.3$ ) an der unteren Berandung des semigeostrophischen UPV-Systems für die Z-Lösung (linke Spalte) und die A-Lösung (rechte Spalte). Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt. Die gezeigte Region erstreckt sich in zonalen Richtung über zwei Wellenlängen und in meridionaler Richtung über die ganze Kanalbreite.

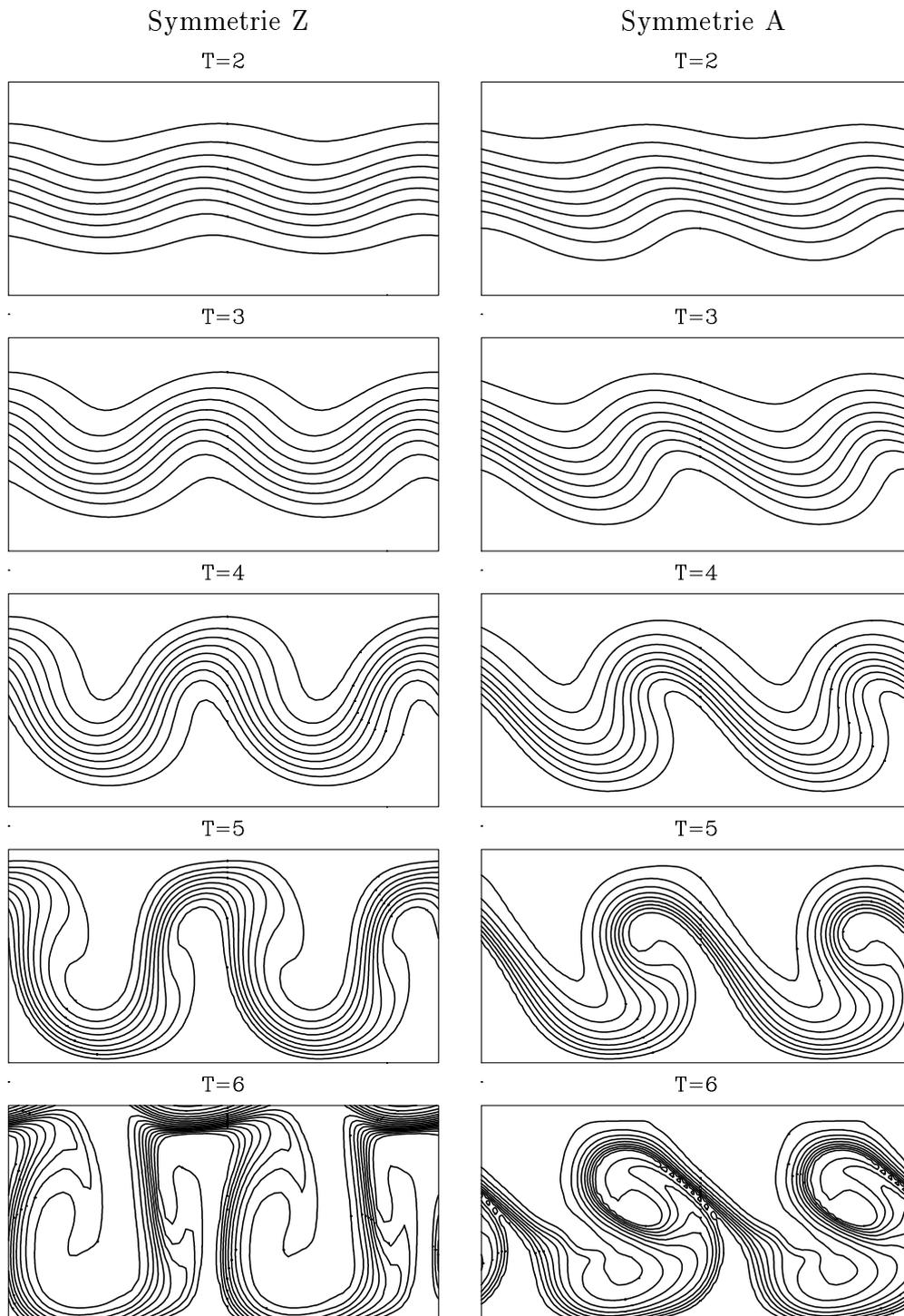


Abbildung 4.21: Zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Temperatur (Isolinienabstand  $\Delta=0.5$ ) an der unteren Berandung des semigeostrophischen UPV-Systems für die Z-Lösung (linke Spalte) und die A-Lösung (rechte Spalte).

teilung ist charakteristisch für eine barokline Wachstumsphase. Bei der A-Lösung kann man schon eine nordwärtige Neigung des EP-Flusses ausmachen. Da der meridional antisymmetrische Anteil an der Zonalmittelströmung bereits eine deutliche zyklonale Scherung aufweist, wird über die Horizontalkomponente des EP-Flusses kinetische Störungsenergie an die Zonalmittelströmung abgegeben. Dieser Prozess kann jedoch zu diesem Zeitpunkt das barokline Wachstum noch nicht kompensieren. Zum Zeitpunkt  $T = 5$  ist die Vertikalscherung der Z-Lösung in der Kanalmitte durch den Temperaturfluß nahezu vollständig verschwunden, während bei den Kanalberandungen die Vertikalscherung zugenommen hat. Die A-Lösung zeigt auch diese lokale Abschwächung und Verstärkung der Vertikalscherung. Zusätzlich hat sich bei der A-Lösung die barotrope Komponente der Zonalmittelströmung und die Horizontalkomponente des EP-Flusses merklich verstärkt. Einige Vektoren haben daher bereits eine zum Gradienten der Zonalströmung entgegengesetzte Richtung und tragen demnach zum Zerfall der Störungsenergie bei. Zum Zeitpunkt  $T = 6$  hat die Vertikalscherung der Z-Lösung in der Mitte des Kanals ihr Vorzeichen umgekehrt, während der Temperaturfluß noch nach Norden gerichtet ist. Daher wird in der Kanalmitte Störungsenergie in die potentielle Energie des Grundstroms umgewandelt. Bei den Berandungen haben sich sehr starke Zonalströmungen entwickelt, deren positive Vertikalscherung zusammen mit dem vertikal ausgerichteten EP-Fluß den negativen Beitrag in der Kanalmitte kompensiert. Die Energetik zeigt jedoch, daß kurz nach diesem Zeitpunkt die negative barokline Umwandlung in der Kanalmitte überwiegt, so daß es zu einer baroklinen Equilibration aufgrund der Vorzeichenumkehr des meridionalen Temperaturgradienten kommt. Die Störung der A-Lösung zerfällt zu dem Zeitpunkt  $T = 6$  bereits barotrop, was man daran erkennen kann, daß die meisten Vektoren des EP-Flusses eine Komponente besitzen, die gegen den Gradienten der Zonalmittelströmung ausgerichtet ist. In der Nähe der unteren Berandung hat sich der Temperaturfluß in der nördlichen Hälfte des Kanals sichtlich abgeschwächt, während er in der südlichen Hälfte bestehen bleibt. Diese Abschwächung resultiert aus der spiralförmigen Bewegung der Temperaturanomalien in der ausgereiften Zyklone (siehe Abbildung 4.21).

#### 4.7.5 Weitere Simulationen

Es wurde eine weitere A-Lösung simuliert, bei der das Vorzeichen des symmetriebrechenden Anteils der Störung umgekehrt wurde. In diesem Fall dominieren die Antizyklonen bei der Entwicklung, während die schwachen Zyklonen zu der nördlichen Berandung driften. Auch die Struktur des Temperaturfeldes ist ungewöhnlich. Die Kalt- und Warmfront vereinigen sich zwar in einer Okklusionsfront. Die sekludierte Warmanomalie spiralt jedoch nicht in die Zyklone sondern in die Antizyklone. Es wurde auch eine Simulationen der A-Lösung bei Vorgabe einer niedrigeren internen Froudezahl durchgeführt ( $F_1 = 6.25$ ). In diesem Fall wächst der Normalmode mit  $a = 2$  am schnellsten an. Bei dieser Simulation ist die Auswirkung des Symmetriebruchs nicht so hoch wie in dem bereits diskutierten Fall mit  $F_1 = 8$ . Folglich

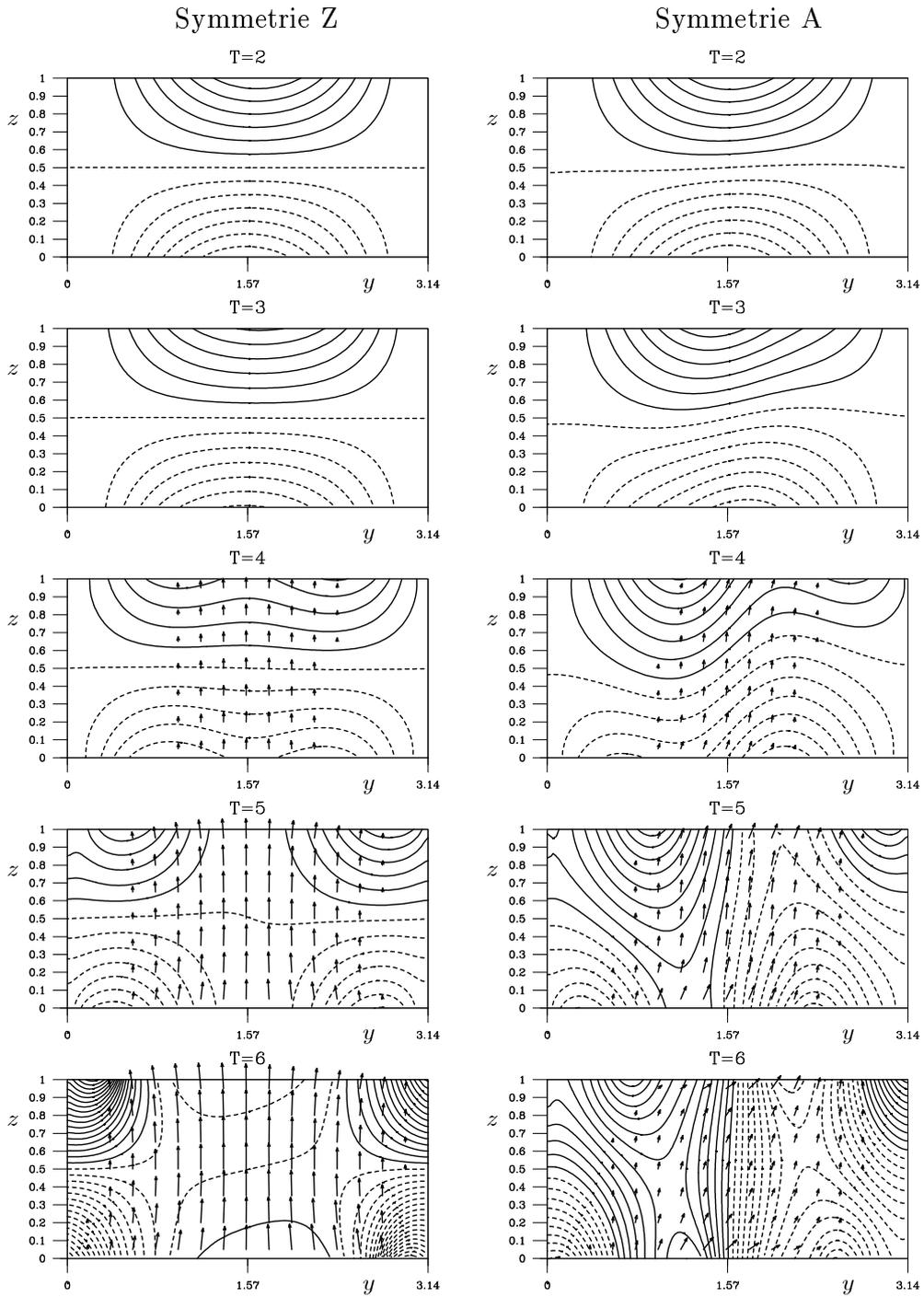


Abbildung 4.22: Zeitlich aufeinanderfolgende Meridionalschnitte der Zonalmittelströmung  $U$  (Isolinien) und des Eliassen-Palm Flusses (Pfeile) im semigeostrophischen UPV-System als Funktion der physikalischen Koordinaten  $y$  und  $z$  für die Z-Lösung (linke Spalte) und die A-Lösung (rechte Spalte). Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.2$  und negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt.

muß der symmetriebrechende Anteil der Störung eine höhere Amplitude besitzen, um eine vergleichbare Entwicklung zu erhalten. Das ist der Fall, wenn anfangs zu dem Normalmode die Störung  $\Psi' = -0.07 E_{1,2}^{Mr}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})/G_{1,2}^M(\frac{1}{2})$  addiert wird. Die Entwicklung verläuft sehr ähnlich bis zum Zeitpunkt  $T = 5$ . Zum Zeitpunkt  $T = 6$  ist ebenfalls eine spiralförmige Bewegung der Temperaturanomalien auszumachen. Die Fläche der sekludierten Warmanomalie ist jedoch größer und die Kaltfront ist vergleichsweise schwach. Die Simulation mit  $F_1 = 8$  weist daher eine bessere Übereinstimmung mit den in der Einleitung beschriebenen Konzeptmodellen auf und wurde aus diesem Grund für die Diskussion bevorzugt.

## 5 Analyse der symmetriebrechenden Instabilitäten

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den symmetriebrechenden Instabilitäten. Zuerst wird die barotrope Welleninstabilität eingehend beschrieben. Danach wird die Stabilität der simulierten Z-Lösungen bezüglich symmetriebrechender Normalmoden untersucht, um zu sehen, inwiefern die barotrope Welleninstabilität an dem Symmetriebruch beteiligt ist.

### 5.1 Die barotrope Welleninstabilität

#### 5.1.1 Formulierung des linearen barotropen Problems

Eine zweidimensionale divergenzfreie Strömung wird durch die Vorticitygleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 \Psi + J(\Psi, \nabla_h^2 \Psi) = 0 \quad (5.1)$$

beschrieben. Dabei ist  $\Psi$  die Stromfunktion einer zweidimensionalen Strömung. Lorenz (1972) und Gill (1974) gingen bei ihrer Instabilitätsanalyse von einer ebenen Rossbywelle als Grundzustand aus. Um die barotrope Welleninstabilität besser mit den Ergebnissen der Simulationen im Kanal zu vergleichen, wird hier als Grundzustand die stationäre Fundamentalwelle in der Form

$$\Psi_0 = \sin y \sin ax \quad (5.2)$$

betrachtet. Die Linearisierung der Vorticitygleichung um diesen Grundzustand ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 \Psi' - \left( \cos y \sin ax \frac{\partial}{\partial x} - a \sin y \cos ax \frac{\partial}{\partial y} \right) (1 + a^2 + \nabla_h^2) \Psi' = 0 \quad , \quad (5.3)$$

wobei  $\Psi'$  die Stromfunktion der Störung bezeichnet. Man kann nachweisen, daß die linearisierte Gleichung die Größe

$$h = \left\{ (\nabla_h^2 \Psi')^2 - (1 + a^2) (\nabla_h \Psi')^2 \right\} \quad (5.4)$$

erhält (siehe Gill 1974).

Die Normalmodenlösung der linearisierten Gleichung unterliegt entweder der Symmetrie A (Mode A), d. h.

$$\Psi' = e^{\sigma t} \mathbf{\Psi}^{r'} \cdot \mathbf{E}_A^M(x, y, z), \quad (5.5)$$

oder der Symmetrie S (Mode S), d. h.

$$\Psi' = e^{\sigma t} \Psi^{r'} \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z). \quad (5.6)$$

Hier bezeichnet  $\Psi^{r'}$  den Normalmode-Vektor mit den Kosinusvariablen als Komponenten. Der Eigenwert  $\sigma$  ist im allgemeinen komplex, wobei der Realteil die Wachstumsrate und der Imaginärteil die Frequenz wiedergibt.

Aufgrund der Erhaltungsbeziehung (5.4) und der Orthogonalität der Eigenfunktionen folgt als notwendige Bedingung für die Instabilität, daß

$$1 + a^2 > -\frac{\nabla_b^2 F_0}{F_0} \quad (5.7)$$

erfüllt werden muß, wobei  $F_0$  die in dem Kanalgebiet definierte Eigenfunktion mit dem kleinsten Eigenwert bezüglich des Laplace Operators ist (siehe Gill 1974). Diese Bedingung ist eine Konsequenz des Fjørtoft-Theorems (Fjørtoft 1953). Das besagt, daß im Instabilitätsfall zumindest ein Normalmode eine größere Skala (d. h. kleineren Eigenwert bezüglich des Laplace-Operators) besitzen muß als die des Grundstroms. Da die Fundamentalwelle der Wellenmode mit der größten Skala ist, muß  $F_0$  eine Zonalmittelströmung repräsentieren. Für Mode A ist die Bedingung stets erfüllt, weil der Koeffizient der Eigenfunktion  $E_{0,1}^{Mr}$  im Mode A enthalten ist. Dagegen muß für die Instabilität bezüglich Mode S die Bedingung  $a > (3)^{1/2}$  eingehalten werden. Dann ist die Skala des meridional symmetrischen Jets  $U(y) = \cos 2y$  größer als die der Fundamentalwelle. Umgekehrt kann dieser Jet als Grundstrom aufgrund des Fjørtoft Theorems nur dann instabil sein, wenn  $a < (3)^{1/2}$ . Eine Instabilitätsanalyse von Kuo (1973) führte übrigens zu diesem Ergebnis.

### 5.1.2 Ergebnis der linearen Analyse

Um das lineare Problem zu lösen, wird die spektrale Entwicklung bei einer bestimmten Wellenzahl abgebrochen. Danach werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Jakobi Matrix mit der NAG-Routine bestimmt. In allen instabilen Fällen besitzt der am schnellsten anwachsende Normalmode einen reellen Eigenwert. Demnach liegt eine rein aperiodische Instabilität vor. Abbildung 5.1 zeigt die Wachstumsraten von den am schnellsten anwachsenden Normalmoden der stationären Welle als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  für eine spektrale Abschneidung bei der Wellenzahl 19 (durchgezogene Kurve) und der Wellenzahl 20 (gestrichelte Kurve). Abbildung 5.1a enthält die Wachstumsrate von Mode A und Abbildung 5.1b die von Mode S. Abbildung 5.1c und Abbildung 5.1d zeigen dasselbe mit dem Unterschied, daß in der linearisierten Gleichung (5.3) ein Hyperdiffusionsterm hinzugefügt wurde. In allen

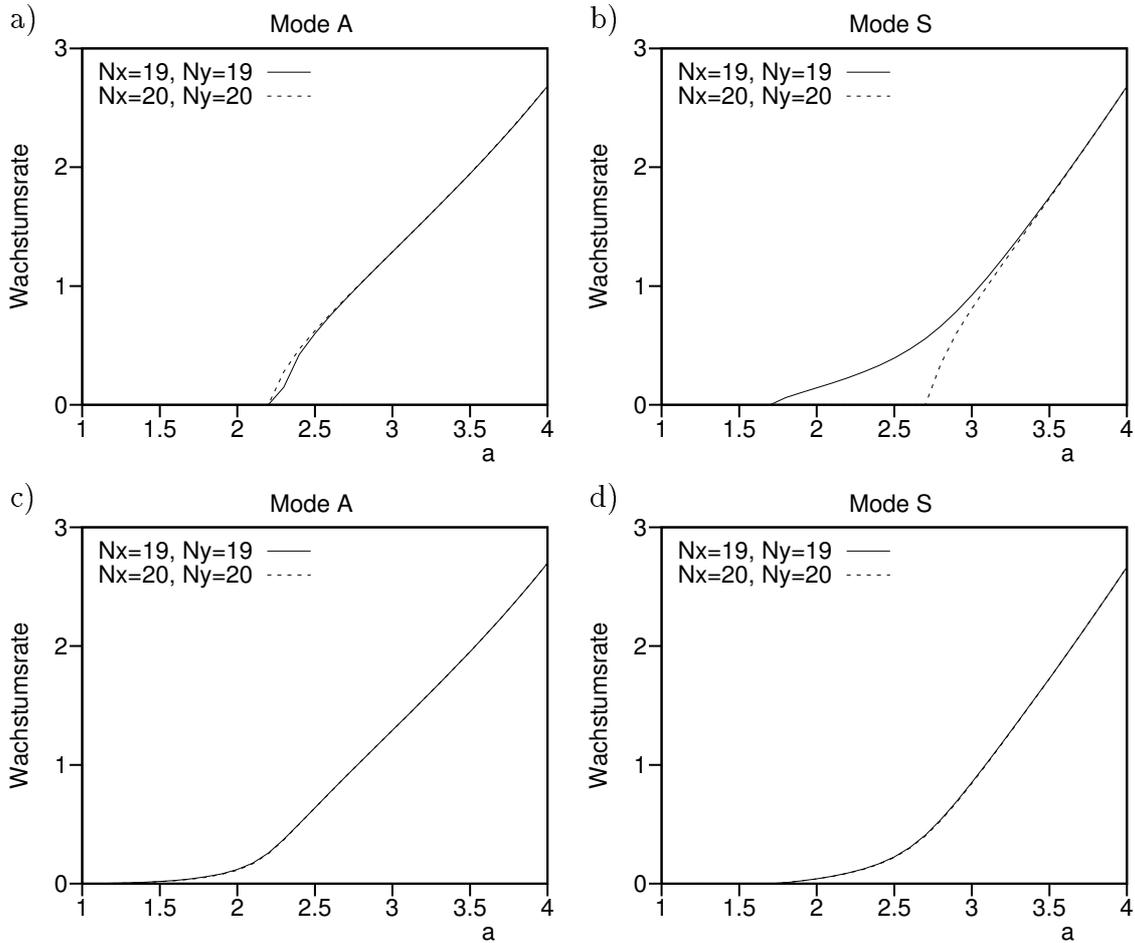


Abbildung 5.1: Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Normalmode der barotropen stationären Welle als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  für eine spektrale Abschneidung bei Wellenzahl 19 (durchgezogene Kurve) und bei Wellenzahl 20 (gestrichelte Kurve). a) Mode A, b) Mode S, c) Mode A unter Verwendung von Hyperdiffusion, d) Mode S unter Verwendung von Hyperdiffusion.

Fällen beobachtet man eine monotone Zunahme der Wachstumsrate bei Vergrößerung des Aspektverhältnisses. Das deckt sich mit den qualitativen Überlegungen in Abschnitt 1.5. Erstaunlicherweise besitzen die Lösungen eine hohe Sensitivität bezüglich der spektralen Abschneidung und bezüglich der Hyperdiffusion. Während die Fundamentalwelle bezüglich Mode A für  $a < 2.2$  stabil ist, wenn keine Diffusion verwendet wird, treten im Diffusionsfall für  $a > 1.5$  nicht vernachlässigbare Wachstumsraten auf. Bei Berechnung der Wachstumsrate von Mode A ohne Diffusion ist die Sensitivität bezüglich der spektralen Abschneidung gering; sie ist jedoch erkennbar in dem Bereich  $2.2 < a < 2.5$ . Eine starke Sensitivität zeigt dagegen der Mode S. Bei der ungeraden spektralen Abschneidung (bei Wellenzahl 19) beobachtet man gemäß dem Fjørtoft-Theorem eine Instabilisierung für  $a > (3)^{1/2}$ . Im Gegensatz dazu er-

gibt sich bei einer geraden spektralen Abschneidung (bei Wellenzahl 20) Stabilität für  $a < 2.7$ . Durch die Hinzufügung von Hyperdiffusion verschwindet diese Sensitivität, wobei sich ein mittlerer Kurvenverlauf einstellt. Bei sehr hohen Werten von  $a$  resultiert in allen Fällen eine nahezu lineare Zunahme der Wachstumsrate. Die starke Sensitivität bezüglich der spektralen Abschneidung und der Hyperdiffusion ist sehr ungewöhnlich für ein lineares Instabilitätsphänomen, in dem sehr kleine Skalen keine Rolle spielen sollten. Um auszuschließen, daß die gewählte Auflösung zu gering ist, wurde die gleiche Analyse wiederholt für eine spektrale Abschneidung bei Wellenzahl 29 und 30. Das Ergebnis ist nahezu identisch. Daher resultiert das Phänomen tatsächlich aus der spektralen Behandlung der kleinsten noch aufgelösten Skalen und ist als mathematisches Artefakt der spektralen Methode anzusehen. Es ist jedoch sinnvoll dieses mathematische Phänomen mit Hilfe der Hyperdiffusion zu eliminieren, da diese ohnehin in den numerischen Modellen Verwendung findet. Bei Verwendung von Hyperdiffusion ergeben sich auch nahezu identische Ergebnisse, wenn man bei  $N_x = 8$  und  $N_y = 20$  abschneidet. Daher wird bei den weiteren Analysen diese spektrale Abschneidung stets verwendet.

Abbildung 5.2 präsentiert einige Stromfunktionsmuster von Mode A und Mode S. Mode A zeichnet sich durch ein wellenförmiges Band mit positiver Stromfunktion in der Kanalmitte aus. Aufgrund dieser Struktur ist die Scherung der Zonalmittelströmung im wesentlichen antizyklonal. Man erkennt im weiteren, daß der um  $90^\circ$  gegenüber der Fundamentalwelle verschobene Wellenteil des Musters eine Dipolstruktur in meridionaler Richtung annimmt. Daher bewirkt die Überlagerung von Mode A mit der Fundamentalwelle einen sich mit der Scherung der Zonalmittelströmung neigenden Wirbel. Bei zunehmenden Aspektverhältnis verkleinert sich die meridionale Ausdehnung des wellenförmigen Bands mit positiver Stromfunktion. Daraus resultiert eine Erhöhung der meridionalen Wellenzahl der Zonalmittelströmung. Bei dem Stromfunktionsmuster von Mode S dominiert der Wellenteil gegenüber dem Zonalmittel, wobei die Maxima im nördlichen Teil des Kanals und die Minima im südlichen Teil des Kanals zu finden sind. Daraus ergibt sich eine jetartige westwärtige Zonalmittelströmung in der Kanalmitte. Der für den Jet notwendige Impulstransport wird über die meridionale Wellenzahl 3 der Stromfunktionswelle bewirkt. Dieser Wellenteil ist jedoch aufgrund der Dominanz der Fundamentalwelle nicht erkennbar. Wie bei Mode A erhöht sich die meridionale Wellenzahl der Zonalmittelströmung mit zunehmendem Aspektverhältnis, so daß sich ostwärts gerichtete Jets in der Nähe des Nord- und Südrandes ausbilden. Da die Eigenwerte nicht vom Vorzeichen des Eigenvektors abhängen, ist es auch möglich, daß die Strömung von Mode A und Mode S entgegengesetzt gerichtet ist.

### 5.1.3 Vergleich mit der Analyse von Lorenz

Die lineare Analyse von Lorenz (1972) bezog sich auf die Instabilität einer ebenen

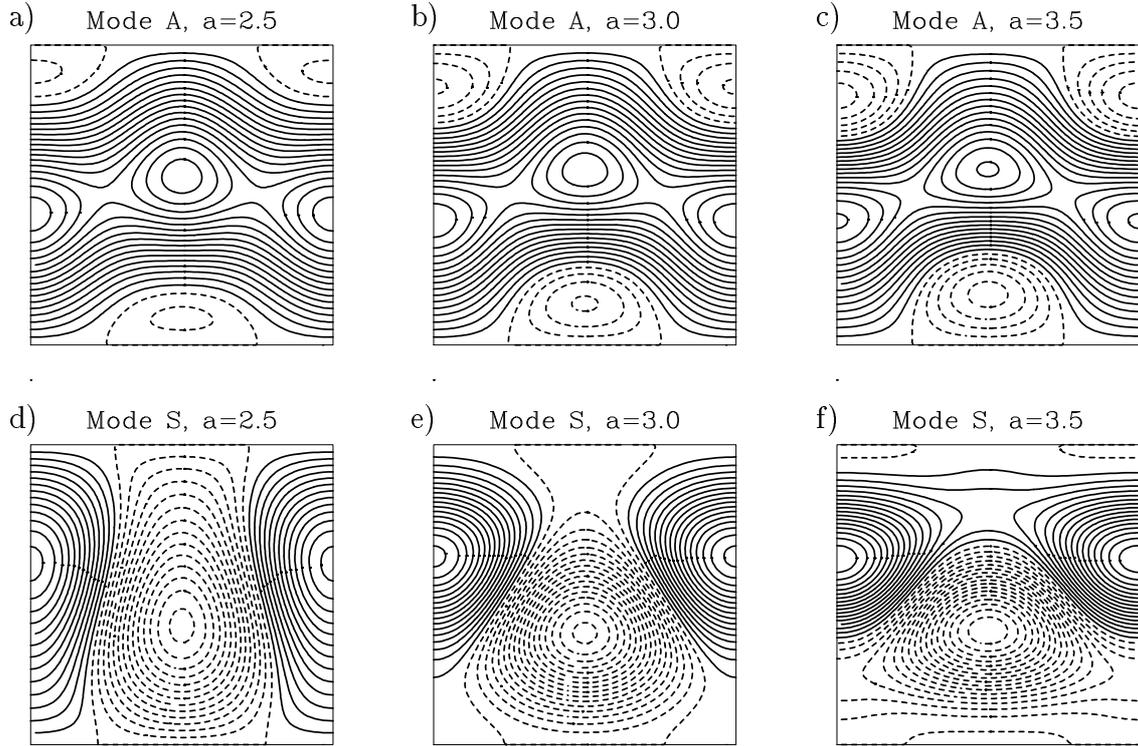


Abbildung 5.2: Stromfunktionsmuster von dem am schnellsten anwachsenden Normalmode: a) Mode A,  $a = 2.5$ , b) Mode A,  $a = 3.0$ , c) Mode A,  $a = 3.5$ , d) Mode S,  $a = 2.5$ , e) Mode S,  $a = 3.0$ , f) Mode S,  $a = 3.5$ . Negative Isolinien sind gestrichelt abgebildet.

Welle in der Form

$$\Psi_0 = A_0 \sin ax . \quad (5.8)$$

Die mathematische Behandlung des entsprechenden Problems ist einfach, da in die Normalmoden nur eine einzige meridionale Wellenzahl  $l$  ( $l$  muß bei diesem Problem keine ganze Zahl sein) mit eingeht. Lorenz (1972) konnte nachweisen, daß die Betrachtung von nur einer zonalen Wellenzahl und des zonalen Mittels ausreicht, um daß Problem im Fall  $l < a/2$  näherungsweise zu lösen. In diesem Fall erhält man für die Wachstumsrate (für die Herleitung siehe auch Hoskins und Hollingworth 1973)

$$\sigma = alA_0 \left( \frac{a^2 - l^2}{2(a^2 + l^2)} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (5.9)$$

welche maximal wird für

$$l_f = (2^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}} a . \quad (5.10)$$

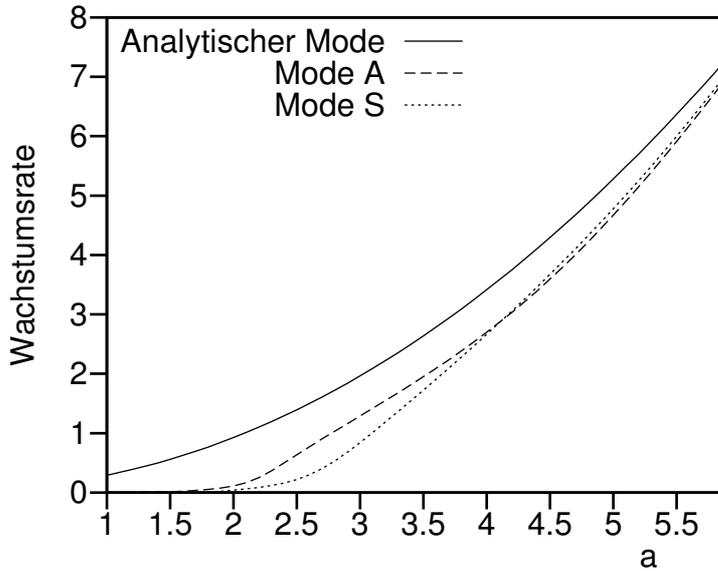


Abbildung 5.3: Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Mode A, von dem am schnellsten anwachsenden Mode S und von dem am schnellsten anwachsenden analytischen Normalmode der ebenen Welle (siehe Text) als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$ .

Um dieses Ergebnis mit der Stabilität der hier betrachteten Fundamentalwelle zu vergleichen, ist es sinnvoll eine ebene Welle mit dem gleichen Energiebetrag vorzugeben. Das führt zu

$$\Psi_0 = \left( \frac{1 + a^2}{2a^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Abbildung 5.3 zeigt die Wachstumsrate des am schnellsten anwachsenden analytischen Normalmodes, d. h.  $\sigma(l_f)$  zusammen mit den schon diskutierten Wachstumsraten von Mode A und Mode S. Es deutet sich an, daß die Eigenwerte von Mode A und Mode S sich immer mehr der analytischen Kurve nähern, wenn das Aspektverhältnis zunimmt. Aufgrund dieses Ergebnisses kann eine Verringerung des Randeinflusses bei Vergrößerung des Aspektverhältnisses vermutet werden. Im weiteren kann bei Mode A und Mode S festgestellt werden, daß für hohe Werte des Aspektverhältnisses mehrfache Jets in Erscheinung treten, was in Übereinstimmung mit der Beziehung (5.10) ist.

#### 5.1.4 Die barotrope Welleninstabilität in dem UPV-System

Eine zweidimensional divergenzfreie Strömung stellt eine Speziallösung des Zweischichtensystems dar. Entsprechend ist eine vertikal symmetrische Strömung mit

uniformer potentieller Vorticity eine Speziallösung des UPV-Systems. In diesem Fall beschreibt die Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + J(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial z}) = 0 \quad \text{bei } z = 1 \quad (5.12)$$

die zeitliche Entwicklung, wobei  $\Psi$  vertikal symmetrisch um  $z = 1/2$  ist und die Bedingung

$$\nabla_h^2 \Psi + \frac{F_1}{4} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.13)$$

erfüllen muß. Daher stellt die stationäre Welle

$$\Psi_0 = \frac{\cosh \left( \Gamma_{1,1} \left( z - \frac{1}{2} \right) \right)}{\cosh \left( \frac{1}{2} \Gamma_{1,1} \right)} \sin y \sin ax \quad (5.14)$$

eine Lösung dieses Systems dar. Linearisiert man Gl. (5.12) bezüglich dieser Lösung, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Psi'}{\partial z} \right) + \left( \cos y \sin ax \frac{\partial}{\partial x} - a \sin y \cos ax \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \Gamma_{1,1} \tanh \left( \frac{\Gamma_{1,1}}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi' = 0 \quad \text{bei } z = 1 . \quad (5.15)$$

Das linearisierte System besitzt ebenfalls Normalmode-Lösungen mit der Symmetrie A (Mode A) sowie der Symmetrie S ( Mode S). Als Instabilitätskriterium gilt hier

$$\Gamma_{1,1} \tanh \left( \frac{\Gamma_{1,1}}{2} \right) > \frac{\partial F_0}{\partial z} / F_0 . \quad (5.16)$$

Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \tanh(cx) / \tanh(x) = c$  geht dieses Kriterium für  $F_1 \rightarrow \infty$  in die Beziehung (5.7) über. In diesem Grenzfall verschwindet die Vertikalabhängigkeit der Welle und das Instabilitätsproblem reduziert sich folglich auf das der barotropen Strömung.

Bei der numerisch durchgeführten Instabilitätsanalyse wurde die stationäre Welle (5.14) im UPV-System so normiert, daß ihre kinetische Energie auf dem gleichen

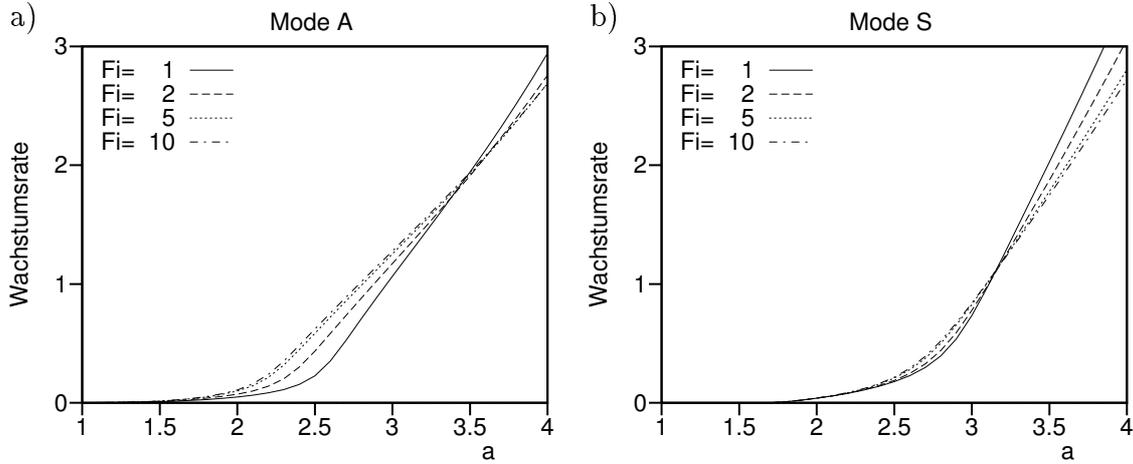


Abbildung 5.4: Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Normalmode der stationären Welle im UPV-System als Funktion des Aspektverhältnisses für  $F_I = 1$  (durchgezogene Kurve)  $F_I = 2$  (gestrichelte Kurve),  $F_I = 5$  (gepunktete Kurve) und  $F_I = 10$  (strich-gepunktete Kurve). a) Mode A, b) Mode S.

Niveau liegt wie die der barotropen stationären Welle (5.2). Damit ist ein besserer Vergleich möglich. Abbildung 5.4 zeigt die Wachstumsraten von Mode A und Mode S als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  für verschiedene Werte der internen Froudezahl  $F_I$ . Man kann für beide Normalmoden eine Konvergenz der Wachstumsrate bei einer Zunahme von  $F_I$  registrieren. Im Fall  $F_I = 10$  sind die Kurven der Wachstumsrate nahezu identisch mit denen des barotropen Systems. Man kann daher davon ausgehen, daß ab diesem Wert die Dynamik der vertikal symmetrischen Strömung im UPV-System in die Dynamik einer zweidimensionalen divergenzfreien Strömung übergeht. Das mag einen verwundern, da doch in der zweidimensionalen Strömung die potentielle Vorticity keineswegs uniform ist. Diese Aussage ist zwar richtig, aber bei dem Grenzübergang  $F_I \rightarrow \infty$  kann bei einer beliebigen zweidimensionalen Vorticityverteilung die Annahme einer uniformen potentiellen Vorticity durch die Addition einer verschwindend kleinen Vertikalanomalie aufrechterhalten werden. Die verschwindend kleine Vertikalanomalie ist dann natürlich bedeutungslos und die Strömung verhält sich so, als wäre sie exakt barotrop. Bei kleineren Werten der internen Froudezahl ( $F_I = 1$ ,  $F_I = 2$ ) findet man eine Abschwächung der Instabilität für  $a < 3$  und eine Verstärkung für  $a > 3.5$ . Im Bereich der Abschwächung besitzt die statische Stabilität also einen dämpfenden Einfluß. Infolge eines hohen Wertes von  $\Gamma_{1,1}$  im Bereich  $a > 3.5$  ergibt sich eine Verstärkung der Wellenamplitude an den Berandungen. Das bewirkt vermutlich die Zunahme der Instabilität für  $a > 3.5$ . Die räumlichen Stromfunktionsfelder der am schnellsten anwachsenden Normalmoden (nicht gezeigt) in  $z = 1/2$  weisen in den Fällen  $F_I = 5$  und  $F_I = 10$  eine gute Übereinstimmung mit denen des barotropen Systems auf. In den Fällen  $F_I = 1$  und  $F_I = 2$  überwiegt der zonal gemittelte Anteil des Modes A gegenüber seinem Wellenanteil. Der Wellenanteil wird anscheinend durch die erhöhte statische Stabilität unterdrückt.

### 5.1.5 Nichtlineare Entwicklung der barotropen Welleninstabilität

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie die nichtlineare Entwicklung eines der instabilen stationären Welle überlagerten Normalmodes verläuft. Dazu werden numerische Simulationen im barotropen Strömungssystem durchgeführt. Sehr ähnliche Experimente wurden von Soloviev et al. (1996) durchgeführt, um die Neigung von Konvektionszellen in einer zweidimensionalen Strömung zu simulieren. Obwohl in deren Simulationen die Auftriebskräfte der Temperaturanomalien mitberücksichtigt wurden, offenbart sich hier im barotropen Fall eine sehr ähnliche Entwicklung. Es wurden für die Entwicklung von Mode A und Mode S jeweils drei Simulationen bei Vorgabe der Aspektverhältnisse  $a = 2.5$ ,  $a = 3$  und  $a = 3.5$  durchgeführt. Die in Gl. (5.2) definierte stationäre Welle wurde so normiert, daß deren kinetische Energie bei  $K_e = 2$  liegt. Die zonale kinetische Energie des Normalmodes wird mit einem Wert von  $K_z = 0.001$  vorgegeben. Der simulierte Zeitraum erstreckt sich von  $t = 0$  bis  $t = 20$  (die Zeit  $t$  ist hier nicht mit der Wachstumsrate normiert).

Abbildung 5.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Energieterme dieser Simulationen. Im barotropen Fall bleibt die Summe aus der zonalen kinetischen Energie  $K_z$  und der kinetischen Wellenenergie  $K_e$  erhalten. Daher sind die Entwicklungen von  $K_z$  und  $K_e$  zueinander antikorreliert. Abgesehen von der Entwicklung des Mode S für  $a = 2.5$  wird in allen anderen Fällen der größte Teil der kinetischen Energie in die der Zonalmittelströmung übertragen. Die Entwicklungen von Mode S zeigen regelmäßige Schwingungen in der kinetischen Wellenenergie, wobei die Schwingungsamplitude sich schnell verringert. Bei Mode A verhält sich die kinetische Wellenenergie nach dem Zerfall zunächst sehr unregelmäßig, aber später schwankt sie nur sehr wenig. Die für  $a = 3$  noch erkennbare hochfrequente Schwingung resultiert aus der strukturellen "Vacillation", die bereits bei der A-Lösung im Zweischichtensystem in Erscheinung getreten ist. Insgesamt besteht eine gute Übereinstimmung der energetischen Entwicklung von Mode A und Mode S im barotropen System mit der barotropen Zerfallsphase der in Abschnitt 4.6 diskutierten A-Lösung bzw. S-Lösung (siehe Abbildung 4.12). Die zonale kinetische Energie  $K_z$  wurde mit logarithmischer Skalierung dargestellt. Man kann deutlich erkennen, daß der Logarithmus von  $K_z$  am Anfang linear zunimmt. Die verwendete NAG-Routine bestimmt daher zuverlässig die Normalmoden. Exponentielles Wachstum bleibt fast bis zum Ende der Zerfallsphase erhalten. Daraus kann man schließen, daß der Mechanismus der barotropen Welleninstabilität den Zerfall von kinetischer Wellenenergie verursacht.

In der Abbildung 5.6 werden zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion und der Vorticity für die Entwicklung von Mode A und Mode S im Fall  $a = 3$  gezeigt. Die nichtlineare Entwicklung von Mode A und Mode S entfaltet Stromfunktionsmuster, die in ähnlicher Form bei der A-Lösung bzw. der S-Lösung im Zweischichtensystem auftreten (siehe Abbildung 4.14). Lediglich zum Zeitpunkt  $t = 3.9$  erkennt man bei der Simulation von Mode A keine "Katzenaugen" sondern

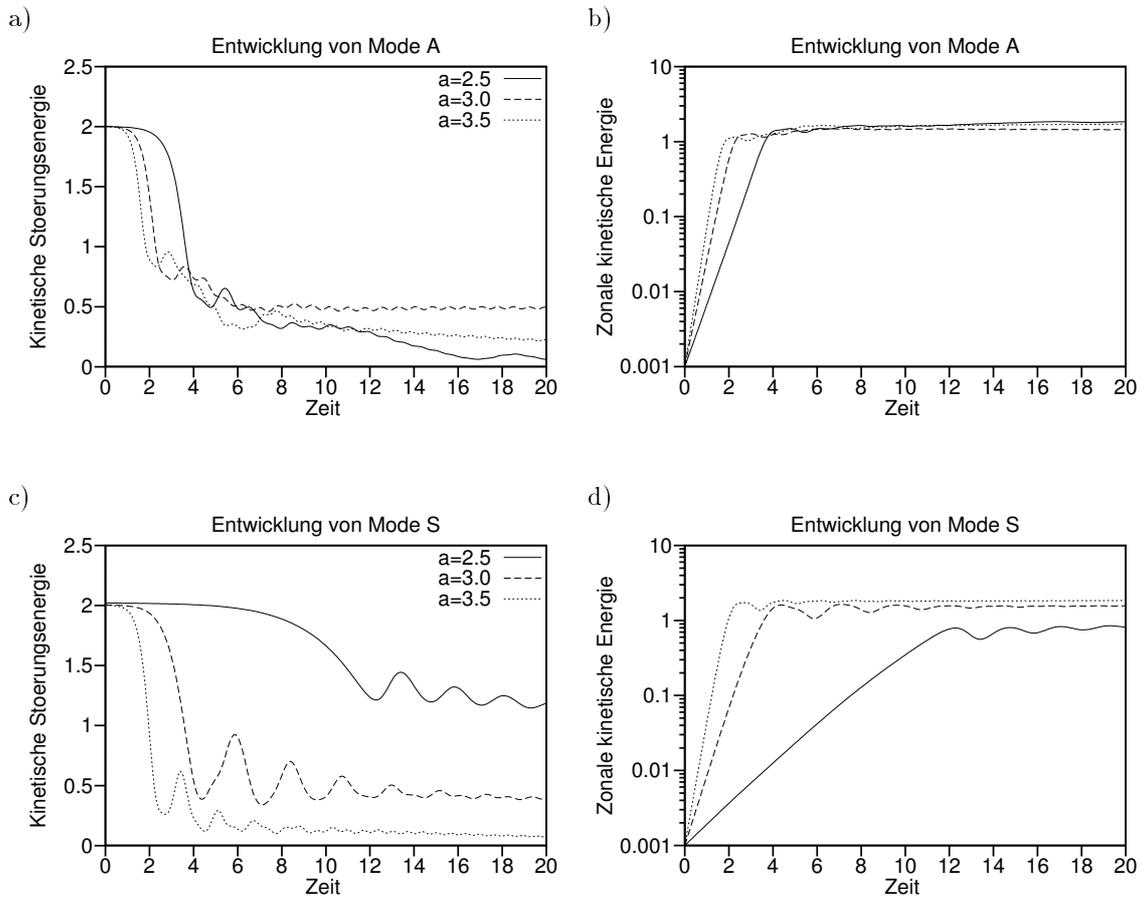


Abbildung 5.5: Energetik einiger Simulationen im barotropen Strömungssystem bei Vorgabe des am schnellsten anwachsenden Normalmodes der stationären Welle mit  $a = 2.5$  (durchgezogene Kurve),  $a = 3$  (gestrichelte Kurve) und  $a = 3.5$  (gepunktete Kurve). a) Kinetische Störungsenergie  $K_e$  bei Vorgabe von Mode A, b) zonale kinetische Energie  $K_z$  bei Vorgabe von Mode A, c) kinetische Störungsenergie  $K_e$  bei Vorgabe von Mode S, d) zonale kinetische Energie  $K_z$  bei Vorgabe von Mode S.

eine sich neigende Zyklone. Dieser auch im Zweisichtensystem zwischenzeitlich auftretende Neigungsvorgang ist ein Bestandteil der strukturellen "Vacillation" und stellt eine Übergangsphase zu den Zeitpunkten dar, wo "Katzenaugen" mit verschwindender Meridionalneigung zu erkennen sind. Die anfänglichen Muster der Vorticityverteilung sind nahezu identisch mit denen der Stromfunktion. Das erklärt sich durch die Stationarität der Lösung (5.2), bei der sich die Stromlinien und Vorticitylinien nicht schneiden dürfen. In dem weiteren zeitlichen Verlauf werden jedoch die Vorticityanomalien durch die Zonalmittelströmung stärker deformiert als die Stromfunktionsanomalien. Kurz nach dem Zeitpunkt  $t = 2.9$  der Simulation von Mode A werden die Vorticityanomalien in der Kanalmitte schließlich auseinandergerissen während bei der Simulation von Mode S diese erhalten bleiben. Diese Entwicklung der Vorticity weist

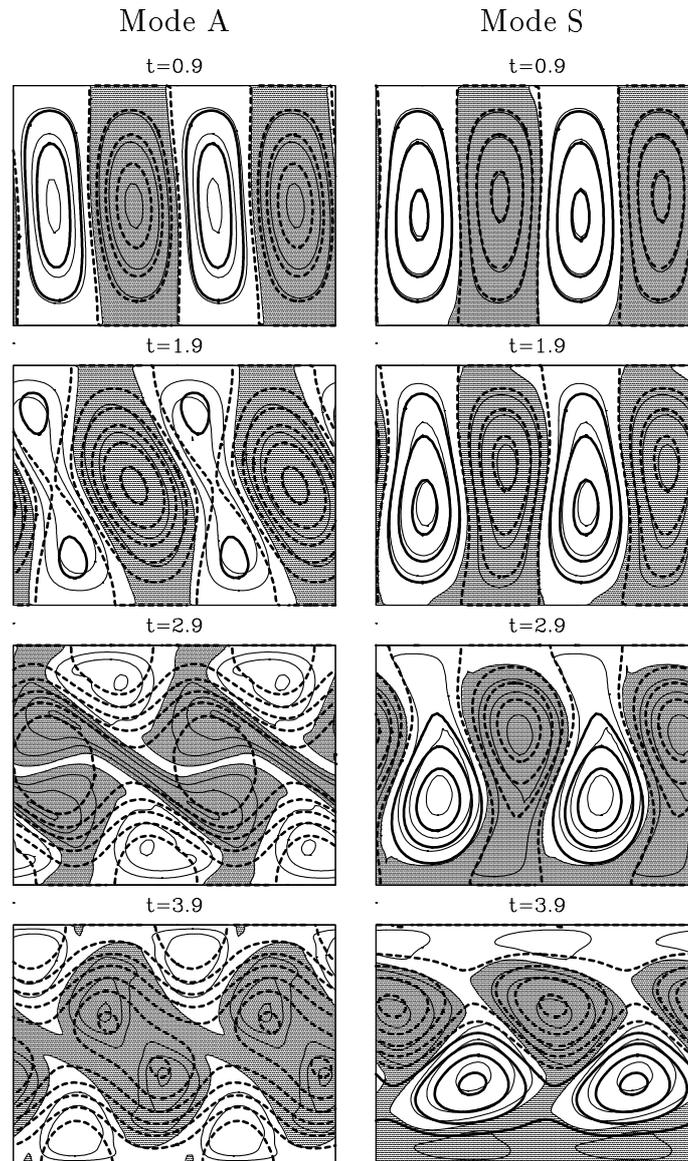


Abbildung 5.6: Zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen der Stromfunktion (dicke Isolinien,  $\Delta=0.5$ ) und der Vorticity (dünne Isolinien,  $\Delta=5$ ) für die nichtlineare Entwicklung von Mode A (linke Spalte) und Mode S (rechte Spalte) der stationären barotropen Welle mit  $a = 3$ . Negative Isolinien der Stromfunktion sind gestrichelt dargestellt und Bereiche mit positiver Vorticity sind schattiert.

also ebenfalls viele Gemeinsamkeiten mit den entsprechenden PV-Verteilungen der in Abschnitt 4.6 diskutierten Fälle auf (Abbildung 4.14), wenn man von dem Fehlen eines zonal gemittelten Vorticitygradienten in der anfänglichen Verteilung absieht. Die räumlichen Muster im barotropen System geben also einen weiteren Hinweis dafür, daß die barotrope Zerfallsphase der in Abschnitt 4.6 diskutierten A- und S-Lösung

durch die barotrope Welleninstabilität verursacht wird.

## 5.2 Die Stabilität der Z-Lösungen bezüglich symmetriebrechender Störungen

Es besteht die Möglichkeit, daß eine zonokline Lösung (Z-Lösung) hydrodynamisch instabil ist bezüglich einer symmetriebrechenden Störung. Das wurde im vorherigen Abschnitt bereits für den Spezialfall einer barotropen Strömung gezeigt, da die stationäre Lösung (5.2) der Symmetrie Z unterliegt und der Mode A bzw. Mode S diese Symmetrie bricht. In diesem Abschnitt wird die Stabilität der simulierten zonoklinen Lösungen untersucht, um zu bestätigen, daß der aufgetretene Symmetriebruch tatsächlich durch eine hydrodynamische Welleninstabilität hervorgerufen wird.

### 5.2.1 Formulierung des linearen Problems

Linearisiert man das verallgemeinerte System (3.1) um eine zonokline Lösung (gekennzeichnet mit  $Z$ ), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{A}\Psi') + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{B}\Phi') + J(\Psi^Z, \mathcal{C}\Psi') + J(\Phi^Z, \mathcal{D}\Phi') \\ + J(\Psi', \mathcal{C}\Psi^Z) + J(\Phi', \mathcal{D}\Phi^Z) = 0 \quad , \quad \text{bei } z = 1 \quad , \quad (5.17a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E}\Phi') + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{F}\Psi') + J(\Psi^Z, \mathcal{G}\Phi') + J(\Phi^Z, \mathcal{H}\Psi') \\ + J(\Psi', \mathcal{G}\Phi^Z) + J(\Phi', \mathcal{H}\Psi^Z) = 0 \quad , \quad \text{bei } z = 1 \quad . \quad (5.17b) \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen kann man in der Form

$$\Psi' = \Psi^{r'} \cdot \mathbf{E}_A^M(x, y, z) \quad , \quad \Phi' = \Phi^{i'} \cdot \mathbf{E}_A^T(x, y, z) \quad (\text{Mode A}) \quad (5.18)$$

oder in der Form

$$\Psi' = \Psi^{r'} \cdot \mathbf{E}_S^M(x, y, z) \quad , \quad \Phi' = \Phi^{i'} \cdot \mathbf{E}_S^T(x, y, z) \quad (\text{Mode S}) \quad (5.19)$$

schreiben. Hier tritt zusätzlich  $\Phi^{i'}$  als Zustandsvektor der vertikal antisymmetrischen Strömung mit den Sinustermen als Komponenten in Erscheinung. Die Überlagerung von Mode A oder Mode S mit der Z-Lösung bewirkt einen Symmetriebruch, der zu der Symmetrie A bzw. Symmetrie S führt. Die Existenz solcher Lösungen wurde von

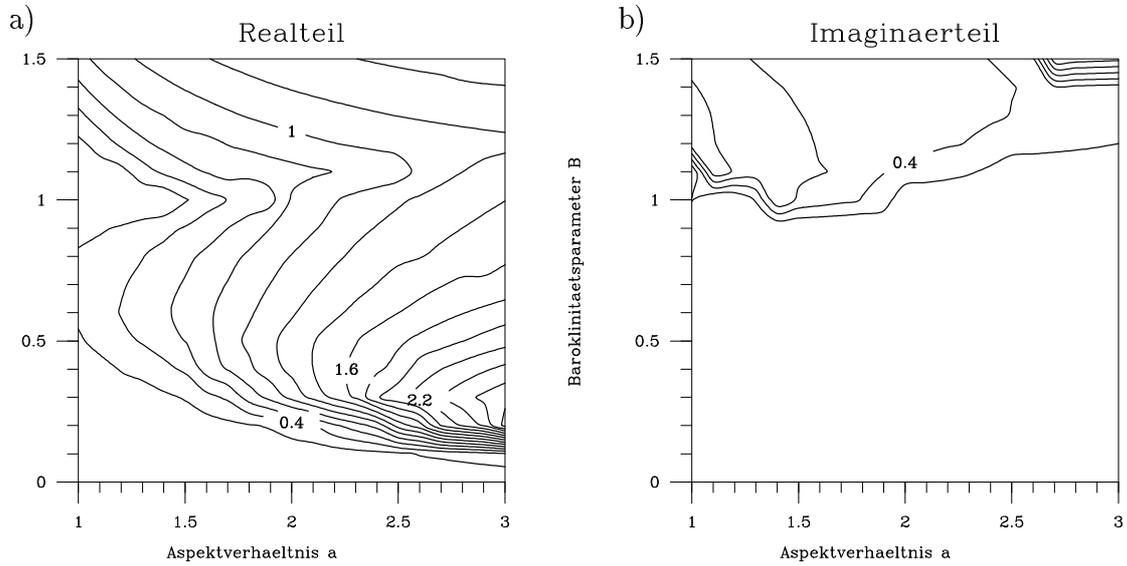
Mundt und Hart (1994) bewiesen. Da in den Lösungen der vertikal antisymmetrische Anteil der Zonalmittelströmung verschwindet, bezeichneten sie diese als zonotrope Moden. Entsprechend wird der Anteil der Strömung, der nicht der Symmetrie  $Z$  unterliegt, als zonotrope Strömung benannt. Da die zonokline Lösung instationär ist, unterliegen auch die Eigenvektoren und Eigenwerte der Jakobimatrix der Zeit. Folglich besitzt das linearisierte System keine einfache Lösung und die Eigenwerte beschreiben nur das unmittelbare Wachstum einer anfänglichen Normalmode-Störung. Variiert jedoch die Struktur des am schnellsten anwachsenden Normalmodes nur schwach während der zeitlichen Entwicklung, dann kann dieser Bedeutung für den Symmetriebruch besitzen, da in diesem Fall der Störung genügend Zeit bleibt sich dem Normalmode anzunähern. Im weiteren geben die Eigenwerte der Jakobimatrix Auskunft darüber, wie instabil die zonokline Lösung überhaupt ist.

### 5.2.2 Stabilitätsanalyse der $Z$ -Lösungen

Zunächst wird die Stabilität aller simulierten  $Z$ -Lösungen bezüglich Mode A und Mode S untersucht. Da es zu aufwendig wäre den ganzen Entwicklungszeitraum zu untersuchen, muß man sich auf einen bestimmten Zeitpunkt beschränken. Dieser sollte so gewählt werden, daß man die mögliche Relevanz der symmetriebrechenden Instabilitäten erkennen kann. Tritt die Instabilität erst kurz vor der Equilibration auf, so ist ein Einfluß der symmetriebrechenden Instabilität nicht wahrscheinlich. Daher wird die Stabilitätsanalyse zu dem Zeitpunkt durchgeführt, an dem die Störung erst 25% der bei der Equilibration insgesamt zugeführten Störungsenergie erhalten hat. Für die Analyse werden die spektralen Koeffizienten der simulierten  $Z$ -Lösungen herangezogen und die Eigenwerte sowie Eigenvektoren mit Hilfe der NAG-Routine bestimmt.

Abbildung 5.7 zeigt die Eigenwerte von dem am schnellsten anwachsenden Mode A in dem von  $a$  und  $B$  aufgespannten Parameterraum für das Zweischichtensystem sowie für das UPV-System. Es ist zu beachten, daß die Eigenwerte mit der Wachstumsrate der baroklin anwachsenden Fundamentalwelle (Gl.(3.19c)) normiert wurden. Folglich sind die tatsächlichen Eigenwerte in dem oberen Teil der Parameterdiagramme größer und in dem unteren Teil kleiner. Die Größenordnung der Eigenwerte und die Verteilungsstruktur sind in beiden Systemen sehr ähnlich. Der Realteil der Eigenwerte (Wachstumsrate) nimmt für einen festgehaltenen Wert von  $B$  monoton zu bei Erhöhung des Aspektverhältnisses  $a$ . Bei Erhöhung des Baroklinitätsparameters  $B$  und festgehaltenem  $a$  steigt die Wachstumsrate zunächst schnell an, sinkt dann aber wieder langsam ab auf ein Minimum bei  $B = 1.1$ . Maximales Wachstum findet man bei  $B = 0.2$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem und bei  $B = 0.4$ ,  $a = 3$  im UPV-System. Das ist in grober Übereinstimmung mit der bei diesen Parametern festgestellten Energieabschwächung der A-Lösung zum Zeitpunkt der Equilibration (Abbildung 4.8a,c). Obwohl nicht alle Details der in Abbildung 4.8a,c gezeigten Energieabschwächung erklärt werden können, ist es plausibel anzunehmen, daß die hier beschriebene symmetriebrechende Instabilität maßgeblich an dem Symmetriebruch beteiligt ist. Für

### Zweischichtensystem, Mode A



### UPV-System, Mode A

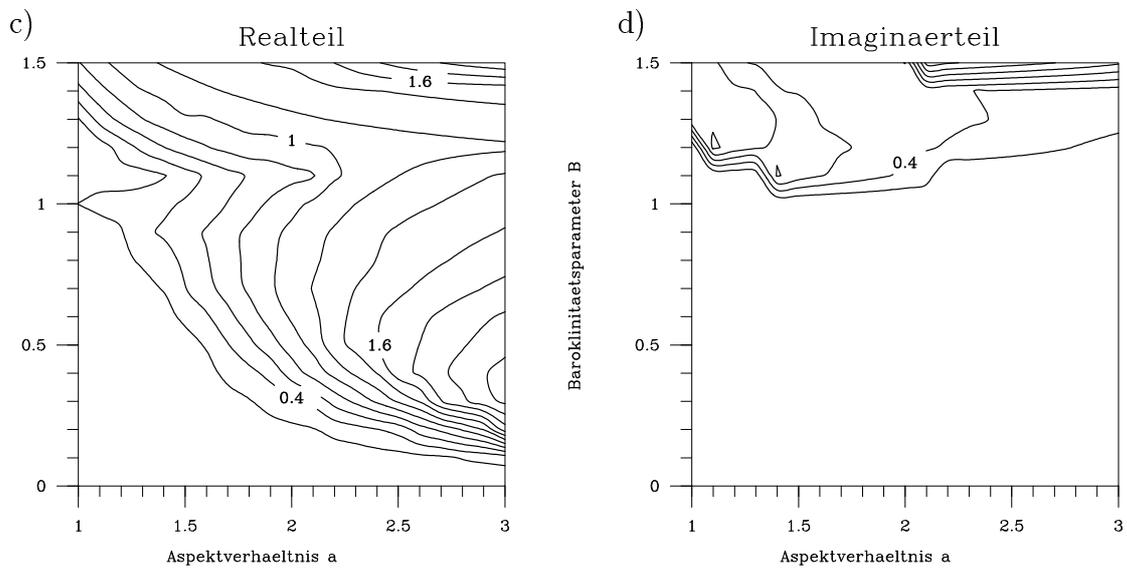


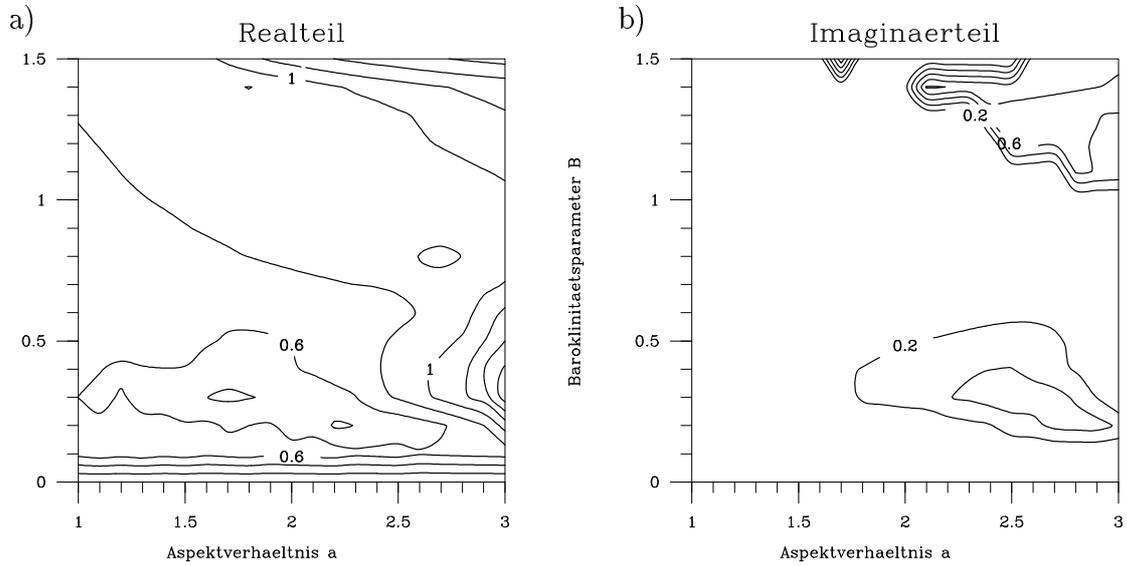
Abbildung 5.7: Eigenwerte von dem am schnellsten anwachsenden Normalmode als Funktion des Aspectverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die Instabilität der Z-Lösung bezüglich Mode A zu dem Zeitpunkt, an dem die Störung 25% der Equilibrationsenergie erhalten hat. a) Zweischichtensystem, Realteil, b) Zweischichtensystem, Imaginärteil, c) UPV-System, Realteil, d) UPV-System, Imaginärteil. Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.2$ .

sehr hohe Werte des Baroklinitätsparameters  $B$  wird der Eigenwert komplex. In diesem Bereich schwingt der anwachsende Normalmode mit der Frequenz, die durch den Imaginärteil des Eigenwerts gegeben ist. Die Frequenz liegt jedoch deutlich unter der Wachstumsrate, so daß sich die Struktur des Normalmodes nur relativ langsam verändert.

Die entsprechenden Parameterdiagramme für die Eigenwerte von dem am schnellsten anwachsenden Mode S sind in Abbildung 5.8 gezeigt. Die Verteilungen der Wachstumsrate weisen auch hier viele Gemeinsamkeiten auf. Die Wachstumsrate liegt für  $B > 0$  oberhalb von 0.4. In dem größten Teil des Parameterraums ist die Instabilität verbunden mit der baroklinen Instabilität bezüglich der im Mode S enthaltenen Fundamentalwelle. Durch diese Instabilität wird die Z-Lösung nicht merklich beeinflusst, da die anwachsende Fundamentalwelle der Z-Lösung und die von Mode S nicht direkt miteinander wechselwirken können. Bei mittlerer Baroklinität und sehr hohen Werten des Aspektverhältnisses ( $a > 2.8$ ) liegt die Wachstumsrate über 1. Diese Bereiche fallen in etwa mit denen zusammen, in welchen der Symmetriebruch sich auf die Equilibration auswirkt (siehe Abbildung 4.11). Komplexe Eigenwerte erscheinen für  $a > 1.7$  bei mittlerer und starker Baroklinität. Im Zweischichtensystem findet sich dazwischen ein Bereich mit reellen Eigenwerten. Im UPV-System treten jedoch in diesem Bereich nur komplexe Eigenwerte auf. Die Frequenz (Imaginärteil) ist aber sehr viel kleiner als die Wachstumsrate. Zu einem späteren Zeitpunkt wird der Eigenwert auch im UPV-System reell. Vermutlich resultiert diese Zeitverschiebung aus der geringeren Equilibrationsenergie im UPV-System (siehe Abb. 4.5).

Das räumliche Muster von dem am schnellsten anwachsenden Mode A hängt im instabilen Bereich kaum von den äußeren Parametern und dem Strömungssystem ab. Abbildung 5.8 zeigt die barotrope und barokline Stromfunktion von diesem Mode für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem. Das Muster der barotropen Stromfunktion offenbart eine bemerkenswerte Ähnlichkeit mit dem des Normalmodes der barotropen Welle (Abbildung 5.2). Aus diesem Grunde kann man annehmen, daß der Mechanismus der barotropen Welleninstabilität an der Instabilisierung der Z-Lösung beteiligt ist. Das Muster der baroklinen Stromfunktion besitzt gegenüber der barotropen eine deutlich geringere Amplitude (der Isolinienabstand in Abbildung 5.9b beträgt nur ein Fünftel von dem in Abb 5.9a und wird dominiert durch die Eigenfunktion  $E_{0,2}^{Ti}$ ). Die vertikale Phasendifferenz von Mode A bewirkt eine positive barokline Umwandlung  $C(A_z, A_e)$ . Dieses Ergebnis steht im scheinbaren Widerspruch zu dem Umstand, daß im Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  der Grundstrom (2.14) stabil ist bezüglich des Normalmodes mit  $k = 1$ ,  $l = 2$ . Dieser Widerspruch klärt sich auf, wenn man die Advektion von potentieller Vorticity der Fundamentalwelle durch die barotrope Scherströmung von Mode A bei der Interpretation mit berücksichtigt. Dann stellt sich heraus, daß dieser Term in der Tat das Muster der baroklinen Stromfunktion forciert. Bei größeren Werten des Baroklinitätsparameters ( $B \approx 1$ ) ergibt sich das gleiche Muster, aber die Amplitude der baroklinen Stromfunktion liegt höher,

### Zweischichtensystem, Mode S



### UPV-System, Mode S

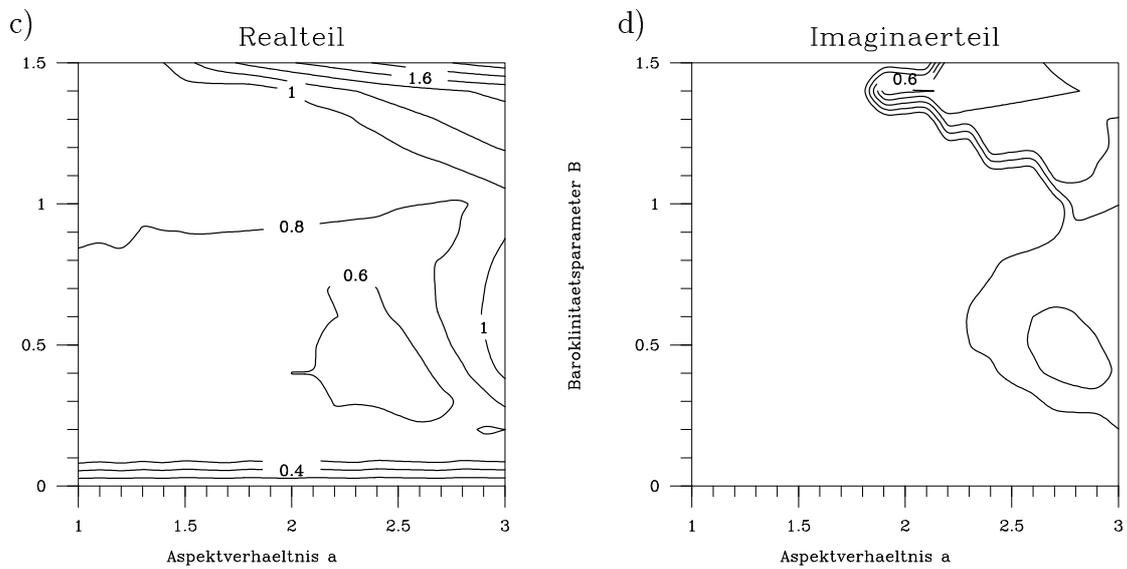


Abbildung 5.8: Eigenwerte von dem am schnellsten anwachsenden Normalmode als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$  für die Instabilität der Z-Lösung bezüglich Mode S zu dem Zeitpunkt, an dem die Störung 25% der Equilibrationsenergie erhalten hat. a) Zweischichtensystem, Realteil, b) Zweischichtensystem, Imaginärteil, c) UPV-System, Realteil, d) UPV-System, Imaginärteil. Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.2$ .

### Zweischichtensystem, Mode A

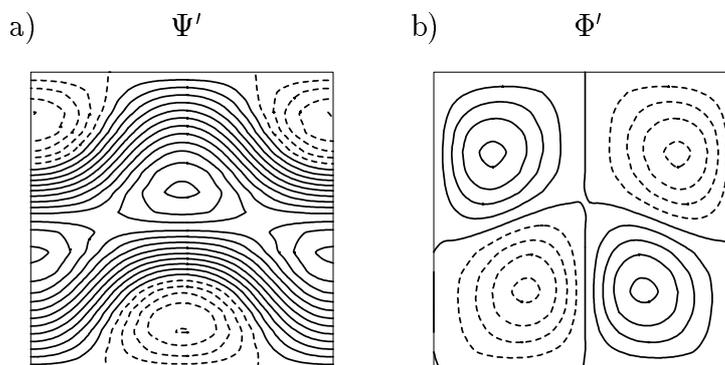


Abbildung 5.9: Horizontale Stromfunktionsverteilungen von dem am schnellsten anwachsenden Mode A im Zweischichtensystem für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  zu dem Zeitpunkt, an dem die Störung 25% der Equilibrationsenergie erhalten hat. a) Barotrope Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta = 0.1$ ), b) barokline Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta = 0.002$ ). Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt.

da der Grundstrom in diesem Fall auch instabil ist bezüglich des Normalmodes mit  $k = 1$ ,  $l = 2$ .

Das Muster von dem am schnellsten anwachsenden Mode S gleicht in dem Bereich mit Wachstumsraten unter 1 der Fundamentalwelle. Geht man in den Bereich mit höheren Wachstumsraten über, so nimmt im Zweischichtensystem die barotrope Stromfunktion des Normalmodes immer mehr die Form von dem Mode S der barotropen Welle (Abbildung 5.2) an. Bei dem Instabilitätsmaximum ergibt sich schließlich die beste Übereinstimmung. Das kann man in Abbildung 5.10 erkennen, in welcher das Stromfunktionsmuster von Mode S für die Parameter  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem gezeigt ist. Das Wellenmuster der baroklinen Stromfunktion (Abbildung 5.10b) weist im Vergleich zu der Fundamentalwelle eine Verstärkung der Wellenamplitude in der Kanalmitte auf. Auch dieses Merkmal ist auf die Advektion von potentieller Vorticity der Fundamentalwelle durch die barotrope Zonalmittelströmung zurückzuführen, welche sich durch einen westwärts gerichteten Jet in der Kanalmitte auszeichnet. Im UPV-System ist der Eigenwert in diesem Bereich komplex. Daher ergibt sich auch eine andere Normalmodestruktur. Nach dem Übergang zu einem reellen Eigenwert stimmt jedoch das Muster im UPV-System mit dem im Zweischichtensystem überein.

Um zu ermitteln, ob Mode A und Mode S relevant für die entsprechende Entwicklung der A-Lösung bzw. S-Lösung sind, wurde die Korrelation

$$C = \left| \frac{\Psi^{rA(S)} \cdot \Psi^{r'} + \Phi^{iA(S)} \cdot \Phi^{i'}}{(\Psi^{rA(S)} \cdot \Psi^{rA(S)} + \Phi^{iA(S)} \cdot \Phi^{iA(S)})^{1/2} (\Psi^{r'} \cdot \Psi^{r'} + \Phi^{i'} \cdot \Phi^{i'})^{1/2}} \right| \quad (5.20)$$

### Zweischichtensystem, Mode S

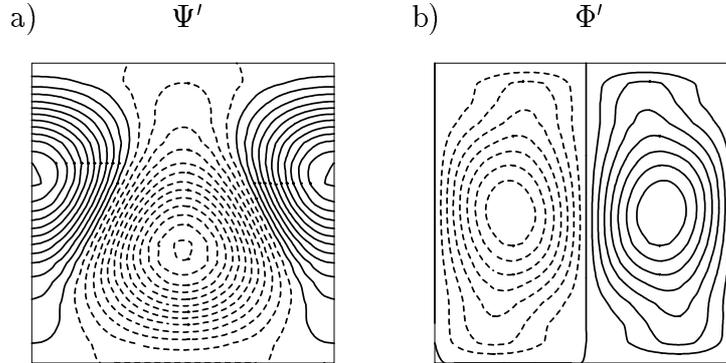


Abbildung 5.10: Horizontale Stromfunktionsverteilungen von dem am schnellsten anwachsenden Mode S im Zweischichtensystem für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  zu dem Zeitpunkt, an dem die Störung 25% der Equilibrationsenergie erhalten hat. a) Barotrope Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta = 0.1$ ), b) barokline Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta = 0.002$ ). Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt.

berechnet, wobei  $\Psi^{rA(S)}$  und  $\Phi^{iA(S)}$  den barotropen bzw. baroklinen Zustandsvektor des zonotropen Anteils der A-Lösung (S-Lösung) bezeichnet. Die Korrelation  $C$  ist nur sinnvoll in den Fällen, in denen die A-Lösung bzw. S-Lösung sich nicht zu sehr von der Z-Lösung unterscheidet, d. h. die Linearisierungsbedingung noch gültig ist. Diese Bedingung ist zu dem betrachteten frühen Zeitpunkt in der Entwicklung sicherlich erfüllt. Bei komplexen Eigenwerten, ist die Korrelation von der Schwingungsphase abhängig. In diesem Fall wurde die Phase betrachtet, bei der die Korrelation  $C$  maximal ist. Abbildung 5.11 zeigt die Korrelation  $C$  in beiden Strömungssystemen für die A-Lösung und die S-Lösung in dem durch  $a$  und  $B$  aufgespannten Parameterraum. Man erkennt, daß bei den A-Lösungen der Großteil des Parameterbereiches eine Korrelation von mehr als 90% aufweist. Entlang einer Linie, die sich von  $B = 1.1$ ,  $a = 1$  bis nach  $B = 0.5$ ,  $a = 2.7$  erstreckt, treten mehrere Minima in der Korrelation hervor. Es ist bemerkenswert, daß man bei dieser Linie eine geringere Abschwächung der maximalen Störungsenergie durch den Symmetriebruch feststellen kann (Abbildung 4.8). Sogar das Minimum bei  $B = 0.5$ ,  $a = 2.7$  im Zweischichtensystem und bei  $B = 0.5$ ,  $a = 2.8$  im UPV-System findet man ebenfalls als Abschwächungsminimum in Abbildung 4.8 wieder. Daraus kann man schließen, daß die schwache Auswirkung des Symmetriebruchs auf die Equilibration aus der geringen Korrelation der zonotropen Strömung mit dem symmetriebrechenden Normalmode resultiert. Die genaueren Ursachen für das Auftreten dieser Minima können hier jedoch nicht geklärt werden. Die Korrelation  $C$  nimmt bei den S-Lösungen nur für  $a > 2$  Werte über 90% an. Im Zweischichtensystem erkennt man bei hohem Aspektverhältnis vereinzelte Streifen mit geringerer Korrelation. Der Streifen bei  $B = 0.7$  könnte das Ausbleiben eines Symmetriebruchs erklären (siehe Abb. 4.11). Im UPV-System treten diese Streifen nicht auf. Vermutlich hat sich die symmetriebrechende Strömung schon längere Zeit

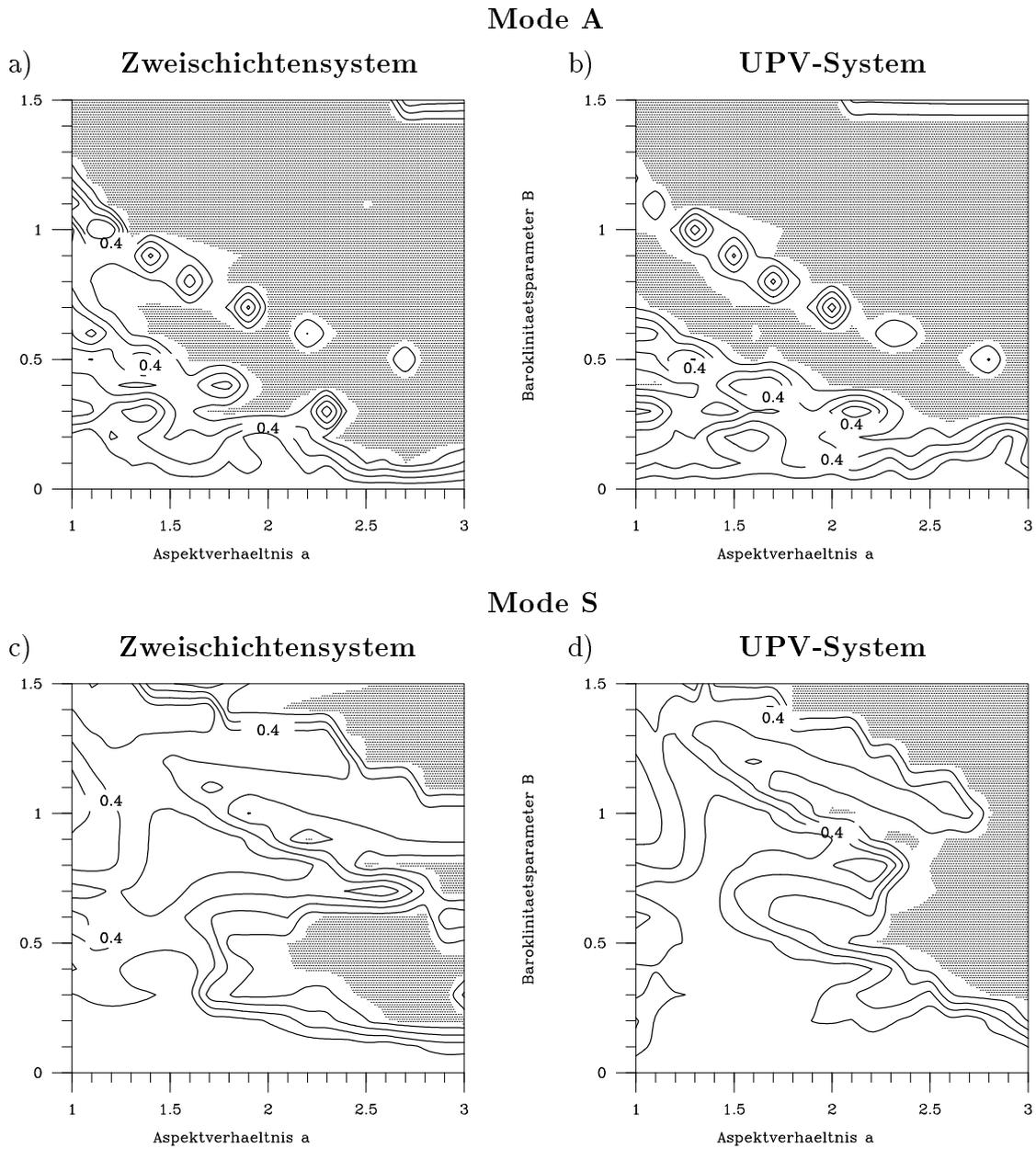


Abbildung 5.11: Korrelation  $C$  (siehe Text) als Funktion des Aspektverhältnisses  $a$  und des Baroklinitätsparameters  $B$ . a) Bezüglich Mode A im Zweischichtensystem, b) bezüglich Mode A im UPV-System, c) bezüglich Mode S im Zweischichtensystem, d) bezüglich Mode S im UPV-System. Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.2$  und Bereiche mit Korrelationen von mehr als 90% sind schattiert dargestellt.

an den komplexen Mode angepaßt, der jedoch kurz danach in einen reellen übergeht.

### 5.2.3 Stabilitätsanalyse des Falls $B = 0.3$ , $a = 3$ im Zweischichtensystem

Die bisherigen Analysen wurden lediglich für einen bestimmten Zeitpunkt durchgeführt. Es ist daher nicht lückenlos geklärt, ob die barotrope Welleninstabilität tatsächlich die Equilibration der A-Lösung und S-Lösung im Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  verursacht (siehe Abschnitt 4.6). Aus diesem Grund wurden weitere Instabilitätsanalysen für den Zeitraum  $T = 0$  bis  $T = 5$  dieses Falls in Zeitschritten von  $\Delta T = 0.1$  durchgeführt. Zusätzlich wurde die tatsächliche Wachstumsrate der kinetischen Energie der zonotropen Strömung (zonotrope kinetische Energie) berechnet, um festzustellen, ob die Amplifikation der zonotropen Strömung mit der durch die Analyse vorausgesagten übereinstimmt.

Abbildung 5.12 faßt die Ergebnisse dieser Analyse für den Mode A zusammen. Die Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Mode A (Abbildung 5.12a, durchgezogene Linie) steigt monoton an bis zum Zeitpunkt  $T = 3.7$ , wo die Rate einen Wert von etwa 3.7 erhält. Danach durchläuft die Wachstumskurve sowohl ein Minimum als auch ein Maximum, wobei letzteres etwa zu dem Equilibrationszeitpunkt der Z-Lösung erreicht wird. Die durch zwei geteilte tatsächliche Wachstumsrate der zonotropen kinetischen Energie der simulierten A-Lösung wurde ebenfalls berechnet (Abbildung 5.12a, gepunktete Linie) und zeigt am Anfang eine andere Entwicklung. Zuerst fällt die kinetische Energie ab und danach steigt sie wieder an. Vermutlich resultiert dieses Schwingungsverhalten aus der bereits erwähnten Stabilität des Grundstroms bezüglich des Normalmodes mit der meridionalen Wellenzahl 2. Ab dem Zeitpunkt  $T = 2$  erhält die tatsächliche Wachstumsrate Werte, die nur wenig unter der berechneten linearen Wachstumsrate liegen. Zum Zeitpunkt  $T = 3.3$  erreicht die tatsächliche Wachstumsrate ihr Maximum und fällt schnell ab. Unmittelbar danach findet bei der A-Lösung auch die Equilibration statt (vergleiche Abbildung 4.12). Die Korrelation  $C$  (Abbildung 5.12b) weist bis zum Zeitpunkt  $T = 2$  nur geringe Werte auf, was mit dem Verlauf der Kurven in Abbildung 5.12a im Einklang steht. Danach erreicht die Korrelation im Zeitintervall von  $T = 2.4$  bis  $T = 3.5$  erstaunlich hohe Werte, die über 99% liegen. Das ist ein deutlicher Hinweis, daß der Symmetriebruch in diesem Fall tatsächlich durch eine sekundäre Normalmodeninstabilität verursacht wird. Das barotrope Stromfunktionsmuster von Mode A verändert sich in diesem Zeitintervall nur sehr wenig und gleicht dem in Abbildung 5.9 gezeigten. Daraus könnte sich eine Erklärung für die hohe Korrelation ergeben, da der zonotropen Strömung genügend Zeit bleibt sich dem Mode A anzupassen.

Abbildung 5.13 zeigt die Ergebnisse der entsprechenden Analyse für den Mode S. Die Instabilität bezüglich Mode S offenbart im Vergleich zu Mode A eine kompliziertere zeitliche Entwicklung. Die Abbildung 5.13a enthält die Wachstumsrate von dem am schnellsten und von dem am zweitschnellsten anwachsenden Normalmode. Es treten innerhalb des betrachteten Zeitraums 4 Bifurkationen auf, die durch die vertikalen

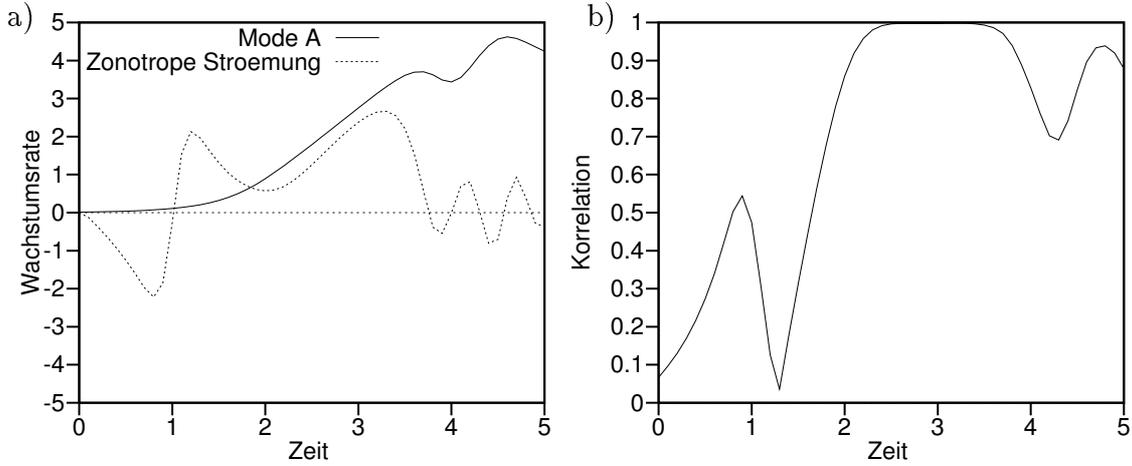


Abbildung 5.12: Zeitliche Entwicklungen für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweisichtensystem: a) Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Mode A der Z-Lösung (durchgezogene Linie) und halbe Wachstumsrate der zonotropen kinetischen Energie von der entsprechenden A-Lösung (gepunktete Kurve), b) Korrelation  $C$  (siehe Text).

Linien in Abbildung 5.13a gekennzeichnet werden. Diese Bifurkationen trennen die Bereiche mit zwei unterschiedlichen realen Eigenwerten von den Bereichen mit zwei komplexen Eigenwerten, die den gleichen Realteil aufweisen. Am Anfang der Entwicklung sind die beiden Eigenwerte zunächst real. Ein Vergleich mit dem Strömungsmuster (nicht gezeigt) ergibt, daß der größere Eigenwert mit der baroklinen Instabilität der Zonalmittelströmung bezüglich der Fundamentalwelle und der andere Eigenwert mit der noch schwachen barotropen Welleninstabilität in Verbindung steht. Nach der ersten Bifurkation ( $T = 2.2$ ) vereinigen sich diese beiden Normalmoden zu einem komplexen Normalmode, der beide Instabilitätsmechanismen enthält. Das Verhalten des komplexen Normalmodes wird durch periodisch wiederkehrende Übergänge von barokliner Instabilität in barotrope Welleninstabilität charakterisiert. Dabei wechselt jedoch das Vorzeichen des Normalmodes. Diese Periode mit einem komplexen Eigenwert ist jedoch zu kurz, um eine Vorzeichenumkehr der barotropen Zonalmittelströmung zu bewirken, da der Imaginärteil des Eigenwerts klein ist ( $\text{Im}(\sigma) \approx 0.3$ ). Zwischen der zweiten Bifurkation ( $T = 2.8$ ) und dritten Bifurkation ( $T = 4$ ) treten wieder zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte auf und es wird der Zeitpunkt erreicht, wo die Analyse in Abschnitt 5.2.2 durchgeführt wurde. Diesmal ist der am schnellsten anwachsende Normalmode mit der barotropen Welleninstabilität verbunden, wobei der barotrope Anteil des Musters (Abbildung 5.10) kaum variiert. Der am zweitschnellsten anwachsende Normalmode beschreibt in diesem Intervall die barokline Instabilität der Zonalmittelströmung, die sich auf die Randgebiete des Kanals konzentriert, weil die Vertikalscherung in der Kanalmitte bereits stark abgeschwächt wurde. Zum Zeitpunkt  $T = 4$  kommt es zu einer weiteren Bifurkation. Da die S-Lösung schon vorher ihre Equilibration erfahren hat, besitzt diese Bifurkation keine Relevanz mehr für den Equilibrationsvorgang.

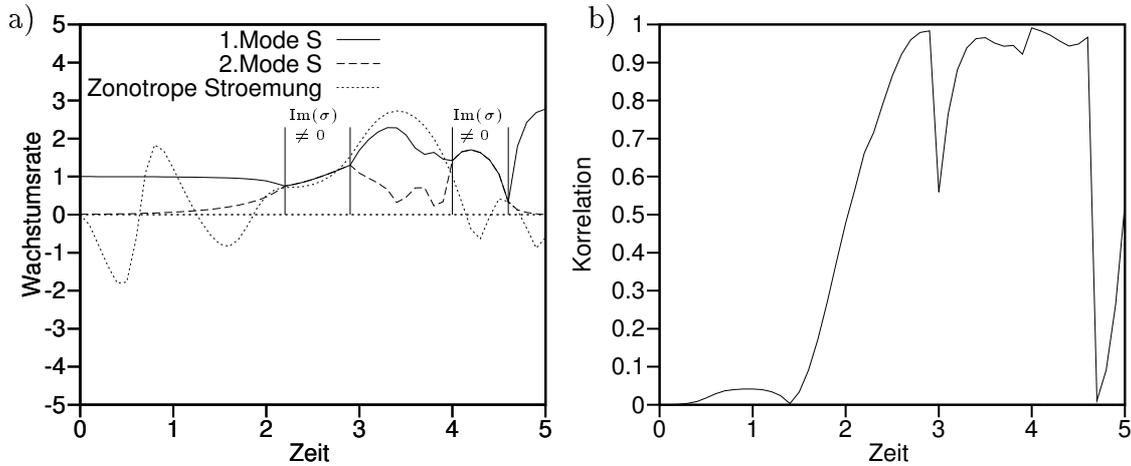


Abbildung 5.13: Zeitliche Entwicklungen für den Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem: a) Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Mode S der Z-Lösung (durchgezogene Kurve), Wachstumsrate von dem am zweitschnellsten anwachsenden Mode S der Z-Lösung (gestrichelte Kurve), und halbe Wachstumsrate der zonotropen kinetischen Energie von der entsprechenden S-Lösung (gepunktete Kurve), b) Korrelation  $C$  (siehe Text). Die vertikalen Linien in a) grenzen den Bereich ein, wo der Imaginärteil des Eigenwertes nicht verschwindet.

Die zonotrope kinetische Energie der S-Lösung (Abbildung 5.13a, gepunktete Linie) zeigt bis zum Zeitpunkt  $T = 2$  ein Schwingungsverhalten. Die Schwingungsperiode ist kleiner als die von der entsprechenden Schwingung bei der A-Lösung. Vermutlich resultiert diese Schwingung aus der Stabilität der Zonalmittelströmung bezüglich des Normalmodes mit der meridionalen Wellenzahl 3, wobei dieser Normalmode mit einer höheren Frequenz schwingt. Aufgrund dieser Schwingung kehrt sich das Vorzeichen der symmetriebrechenden Störung zweimal um, so daß die anfänglich Tendenz erhalten bleibt und somit eine in der Kanalmitte ostwärts gerichtete barotrope Zonalmittelströmung resultiert. Kurz vor der ersten Bifurkation passt sich das Wachstum dem des am zweitschnellsten anwachsenden Normalmode an. Auch nach der Bifurkation ergibt sich für die zonotrope Strömung eine gute Übereinstimmung des Wachstums der zonotropen Strömung mit dem Realteil des komplexen Eigenwertes. In dem zweiten Intervall mit aperiodischer Instabilität folgt das Wachstum etwa dem des am schnellsten anwachsenden Normalmodes und fällt danach ab, da die Equilibration stattfindet. Die Korrelation der zonotropen Strömung der S-Lösung mit dem am schnellsten anwachsenden Mode S (Abbildung 5.13b) beginnt ab dem Zeitpunkt  $T = 1.4$  monoton anzusteigen. Die zonotrope Strömung nähert sich also zunächst der Fundamentalwelle an. Diese Tendenz setzt sich auch nach der ersten Bifurkation fort, da die Fundamentalwelle auch in dem komplexen Normalmode mit enthalten ist. Nach der zweiten Bifurkation springt die Korrelation abrupt auf einen niedrigen Wert, nimmt danach aber wieder rasch zu, so daß die zonotrope Strömung in diesem Intervall die barotrope Welleninstabilität umsetzen kann und eine barotrope Equilibration verursacht. Die Korrelation erreicht nicht so hohe Werte wie bei der

entsprechenden A-Lösung. Trotzdem kann man auch in diesem Fall die Relevanz der sekundären Normalmodeninstabilität für die nichtlineare Entwicklung erkennen.

#### 5.2.4 Stabilitätsanalyse der Z-Lösung im semigeostrophischen UPV-System

In dem semigeostrophischen UPV-System findet die Dynamik in dem transformierten Raum statt. Daher kann die Instabilitätsanalyse genauso durchgeführt werden wie bisher. Die simulierte Z-Lösung ist stabil bezüglich Mode S, da das Aspektverhältnis zu klein ist. So wird nur die Instabilität bezüglich Mode A untersucht. Abbildung 5.14, Abbildung 5.15 und Abbildung 5.16 zeigen die Ergebnisse dieser Analyse. Die Wachstumsrate des am schnellsten anwachsenden Mode A (Abbildung 5.14a) liegt schon am Anfang der Entwicklung bei einem endlichen Wert. Dieser ist verbunden mit der baroklinen Instabilität des Grundstroms bezüglich eines Normalmodes mit der meridionalen Wellenzahl 2. Das kann man in Abbildung 5.15 erkennen, welche in den geostrophischen Koordinaten zeitlich aufeinanderfolgende Stromfunktions- und Temperaturmuster von Mode A bei  $z = 0.5$  zeigt. Es ist dabei zu beachten, daß nur der vertikal symmetrische Anteil der Stromfunktion einen Beitrag zu der Strömung bei  $z = 0.5$  und entsprechend nur der vertikal antisymmetrische Anteil der Stromfunktion einen Beitrag zu der Temperatur bei  $z = 0.5$  liefert. Die Wachstumsrate nimmt bis zum Zeitpunkt  $T = 3$  zu. Dieser Anstieg begründet sich in dem zunehmenden Einfluß der barotropen Welleninstabilität, die mit der baroklinen Instabilität zusammen wirkt. In Abbildung 5.15 kann das bestätigt werden, da die Stromfunktion von Mode A bei  $z = 0.5$  immer mehr die Strukturen von dem in Abbildung 5.2 abgebildeten barotropen Muster von Mode A annimmt. Nach dem Zeitpunkt  $T = 3$  sinkt die Wachstumsrate schnell ab und es kommt zu einer Bifurkation, wobei die beiden am schnellsten anwachsenden reellen Normalmoden in einen komplexen Normalmode übergehen. Die Struktur des komplexen Normalmodes verändert sich nicht sehr stark in dem weiteren Entwicklungsverlauf. Das Muster des komplexen Normalmodes ist für den Zeitpunkt  $T = 4.5$  in Abbildung 5.16 gezeigt. Man erkennt deutlich, daß in das Temperaturmuster auch Eigenfunktionen mit der zonalen Wellenzahl  $k = 2$  eingehen. Die Einbeziehung der höheren zonalen Wellenzahl resultiert höchstwahrscheinlich aus der Wechselwirkung zwischen der Stromfunktionswelle von Mode A und der Temperaturwelle der Z-Lösung. Die höchste Korrelation der zonotropen Strömung mit dem komplexen Mode A findet man bei einer langsam zunehmenden Phase (nicht gezeigt), die Beträge um  $3\pi/4$  annimmt. Bei dieser Phase besitzt das Stromfunktionsmuster von Mode A eine ähnliche Struktur wie das von dem reellen Mode A zum Zeitpunkt  $T = 3$ . Daher trägt auch nach dem Auftreten der Bifurkation die barotrope Welleninstabilität zu der Instabilisierung der Z-Lösung bei.

Die halbe Wachstumsrate der zonotropen kinetischen Energie (Abbildung 5.14a) nähert sich im reellen Bereich zunächst der Wachstumsrate von Mode A an. Bei der Bifurkation wächst die zonotrope Strömung aber unvermindert weiter, während die Wachstumsrate von Mode A sich merklich verringert hat. Dieser Unterschied erklärt sich vermutlich durch die schnelle strukturelle Änderung von Mode A, was man

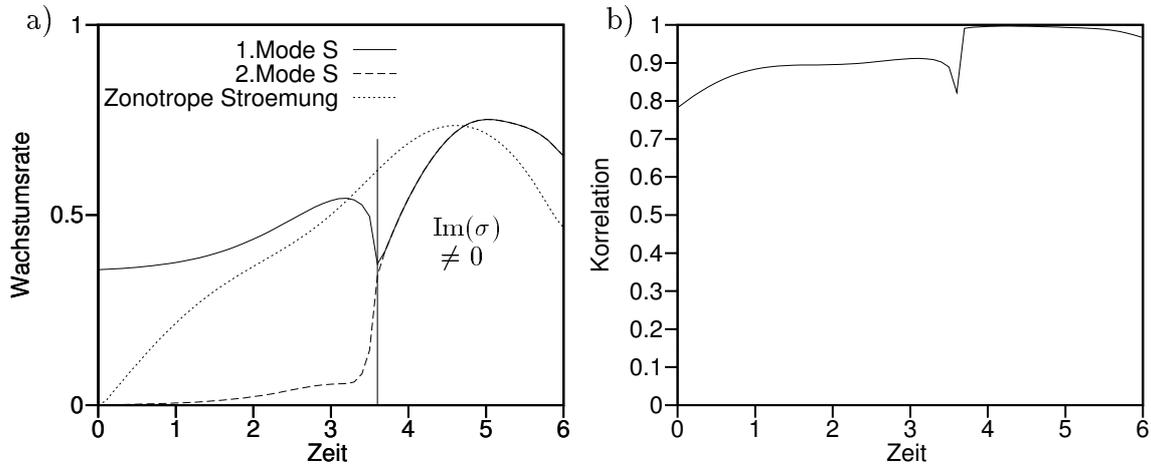


Abbildung 5.14: Zeitliche Entwicklungen für die Analyse der semigeostrophischen Z-Lösung: a) Wachstumsrate von dem am schnellsten anwachsenden Mode S der Z-Lösung (durchgezogene Kurve), Wachstumsrate von dem am zweitschnellsten anwachsenden Mode S der Z-Lösung (gestrichelte Kurve), und halbe Wachstumsrate der zonotropen kinetischen Energie von der entsprechenden A-Lösung (gepunktete Kurve), b) Korrelation  $C$  (siehe Text). Bei der vertikalen Linie in a) geht der reelle Eigenwert in einen komplexwertigen über.

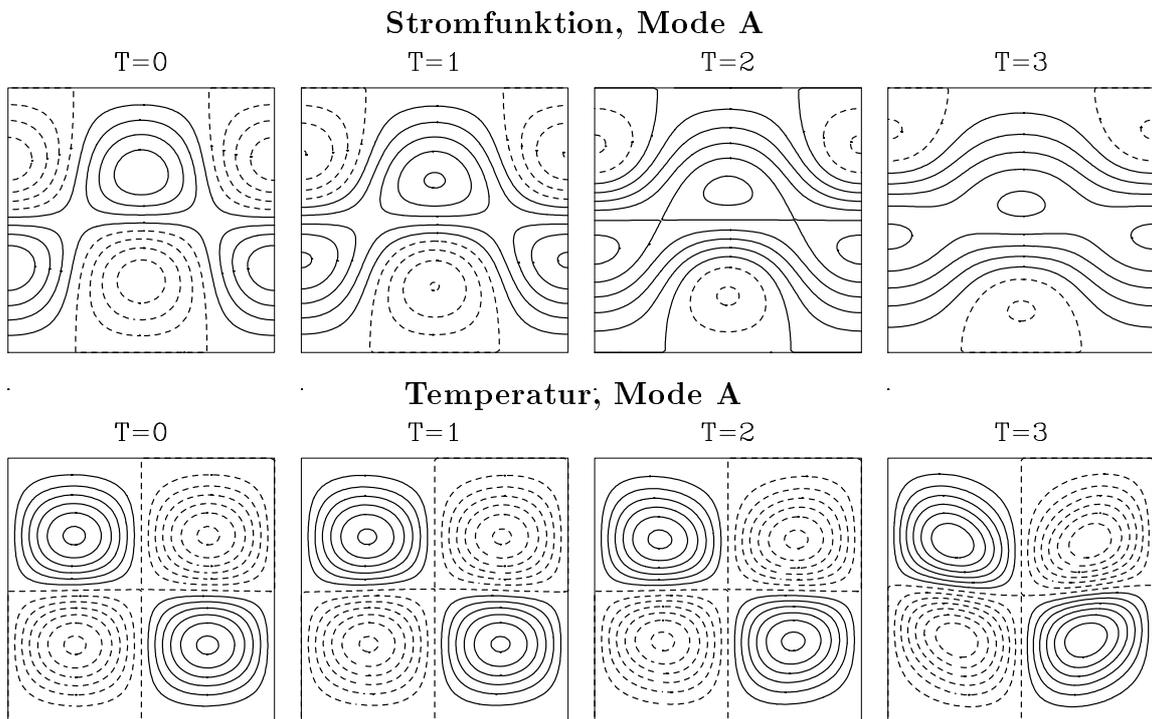


Abbildung 5.15: Zeitlich aufeinanderfolgende Horizontalverteilungen von dem am schnellsten anwachsenden Mode A der semigeostrophischen Z-Lösung in den geostrophischen Koordinaten. Die obere Reihe zeigt die Stromfunktion bei  $z = 0.5$  und die untere Reihe die Temperatur bei  $z = 0.5$ . Der Isolinenabstand beträgt  $\Delta = 0.2$  und negative Isolinen sind gestrichelt dargestellt.

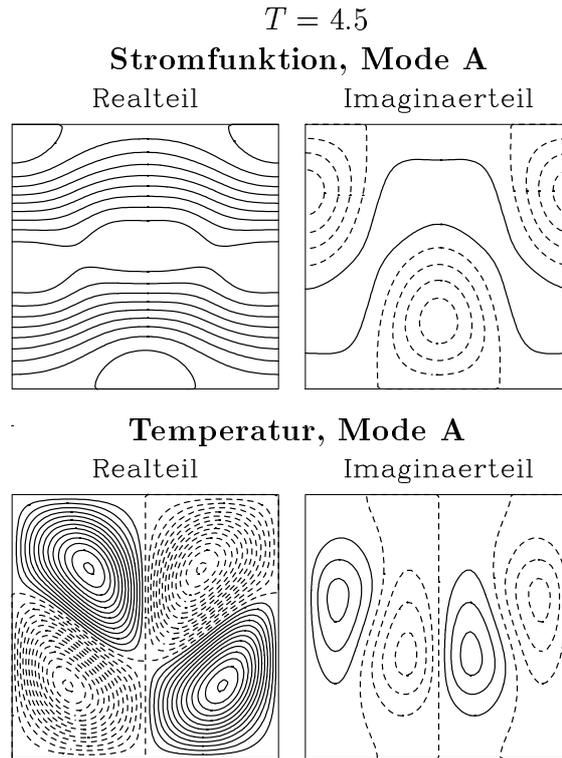


Abbildung 5.16: Horizontalverteilungen von dem am schnellsten anwachsenden Mode A der semigeostrophischen Z-Lösung in den geostrophischen Koordinaten für den Zeitpunkt  $T = 4.5$ . a) Realteil der Stromfunktion bei  $z = 0.5$ , b) Imaginärteil der Stromfunktion bei  $z = 0.5$ , c) Realteil der Temperatur bei  $z = 0.5$ , d) Imaginärteil der Temperatur bei  $z = 0.5$ . Der Isolinienabstand beträgt  $\Delta = 0.1$  und negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt.

auch an der spontanen Abnahme der Korrelation  $C$  (Abbildung 5.14b) kurz vor der Bifurkation erkennen kann. Nach der Bifurkation erreicht die Korrelation enorm hohe Werte (über 99%). Die noch bestehende Diskrepanz zwischen der berechneten und beobachteten Wachstumsrate könnte hier durch die unterschiedliche Amplitude von Real- und Imaginärteil des komplexen Musters von Mode A begründet werden. Da die Phase sich in dem Bereich zwischen  $\pi/2$  und  $\pi$  befindet und stetig zunimmt, gewinnt der Realteil mit der höheren Amplitude immer mehr an Gewicht. Daraus würde ein zusätzliches Energiewachstum folgen, das möglicherweise die Diskrepanz aufklärt. Ab  $T = 4.5$  fällt das Wachstum der zonotropen kinetischen Energie zurück, da die A-Lösung von der Z-Lösung abweicht und bald danach die Equilibration erfährt.

Insgesamt zeigt sich, daß die Zyklonenentwicklung bei der semigeostrophischen A-Lösung durch eine symmetriebrechende Instabilität verursacht wird. Das Stromfunktionsmuster der zonotropen Strömung weist bei  $z = 0.5$  bis kurz vor der Equilibration eine gute Übereinstimmung mit dem Mode A der barotropen Welleninstabilität auf (Abbildung 5.2). Das ist bemerkenswert, wenn man bedenkt, daß die Zyklone in den physikalischen Koordinaten viele Detailstrukturen (Fronten, Okklusionen und spiralförmig bewegende Temperaturanomalien) aufweist, welche in beobachteten Wettersystemen ebenfalls zu finden sind. Man kann sogar den Einfluß der barotropen

Welleninstabilität im Stromfunktionsmuster an der unteren Berandung registrieren, wenn die Stromfunktion in den zonoklinen und zonotropen Anteil aufgespalten wird. Diese Aufspaltung ist in Abbildung 5.17 zum Zeitpunkt  $T = 5$  in den geostrophischen Koordinaten darstellt. Man stellt fest, daß der zonokline Anteil eine Welle mit einem geringen Zonalmittel beschreibt, während der zonotrope Anteil dem Muster der barotropen Welleninstabilität entspricht. Diese Übereinstimmung führt zu dem Schluß, daß die barokline Instabilität das Wachstum des zonoklinen Anteils bewirkt und die barotrope Welleninstabilität den zonotropen Anteil hervorruft. Die beiden Instabilitätsmechanismen sind somit wichtig für das Verständnis der Zyklogenese in dem hier betrachteten Fall.

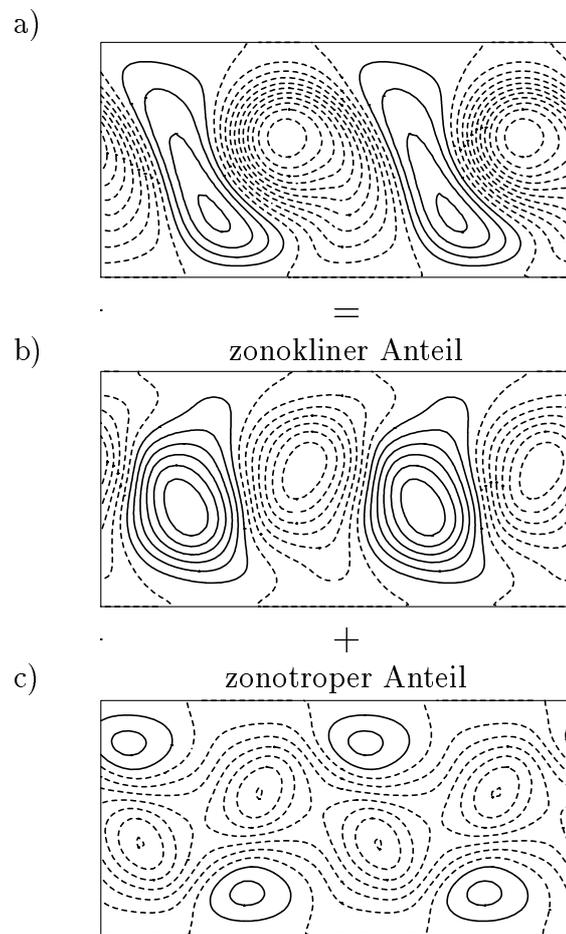


Abbildung 5.17: Stromfunktion (Isolinienabstand  $\Delta=0.2$ ) an der unteren Berandung des semi-geostrophischen UPV-Systems zum Zeitpunkt  $T = 5$  in den geostrophischen Koordinaten. a) Vollständige Verteilung, b) zonokliner Anteil, c) zonotroper Anteil. Negative Isolinien sind gestrichelt dargestellt. Die gezeigte Region erstreckt sich in zonaler Richtung über zwei Wellenlängen und in meridionaler Richtung über die ganze Kanalbreite.

## 6 Schlußbetrachtung

### 6.1 Zusammenschau

In dieser Arbeit wurde die nichtlineare Entwicklung von baroklinen Wellen im Rahmen der quasigeostrophischen und semigeostrophischen Approximation untersucht. Dabei wurde die Wellenentwicklung in einer vertikal gescherten Kanalströmung eines Zweischichtenfluids sowie eines kontinuierlichen Fluids mit einer uniformen potentiellen Vorticity betrachtet. In dem Zweischichtensystem wurden seitliche Kanalberandungen vorgegeben, während in dem kontinuierlichen System (UPV-System) die Lösung in meridionaler Richtung periodisch fortgesetzt wurde. Als externe Parameter der quasigeostrophisch approximierten Systeme wirken die interne Froudezahl  $F_1$  und das Aspektverhältnis  $a$  der Fundamentalwelle (Welle mit minimaler zonaler und meridionaler Wellenzahl). Das Aspektverhältnis  $a$  setzt die meridionale Wirbelausdehnung ins Verhältnis zu der zonalen. Bei dem Übergang zu dem semigeostrophischen UPV-System mittels der geostrophischen Koordinatentransformation kommt die Rossbyzahl als weiterer externer Parameter hinzu. Obwohl die beiden quasigeostrophischen Strömungssysteme aus unterschiedlichen physikalischen Voraussetzungen resultieren, besitzen sie eine sehr ähnliche mathematische Struktur. Ferner weisen beide Systeme eine barokline Instabilität des vertikal gescherten Grundstroms auf. Begründet wird diese Übereinstimmung mit der Interpretation der Temperatur an den Berandungen des UPV-Systems durch potentielle Vorticityanomalien in infinitesimal dünnen Schichten (Bretherton 1966a).

Es wurden drei verschiedene Strömungssymmetrien betrachtet, welche in beiden Strömungssystemen erhalten bleiben, wenn man sie in der Anfangsströmung exakt vorgibt. Die am stärksten einschränkende Symmetrie Z weist meridional symmetrische Zonalmittelströmungen auf, die zugleich eine vertikale Antisymmetrie besitzen. Die letztgenannte Eigenschaft zeichnet Symmetrie Z als eine sogenannte zonokline Strömungssymmetrie aus. Die zonotropen Strömungssymmetrien haben hingegen vertikal symmetrische Zonalmittelströmungen. Die Überlagerung von der zonoklinen Symmetrie Z mit der zonotropen Strömungssymmetrie, welche eine meridional antisymmetrische (symmetrische) Zonalmittelströmung aufweist, führt dann zu der Symmetrie A (S). Ein Symmetriebruch liegt vor, wenn die Strömung von einer bestimmten Strömungssymmetrie abweicht. Verstärkt sich ein sehr kleiner Symmetriebruch deutlich im Entwicklungsverlauf, so ist die Strömungssymmetrie instabil bezüglich einer symmetriebrechenden Störung. Die symmetriebrechende Instabilität kann als hydrodynamische Instabilität einer Strömung, die einer bestimmten Strömungssymmetrie unterliegt, verstanden werden. Bei Vorhandensein einer deutlichen symmetriebrechenden Instabilität ist es unwahrscheinlich, daß eine Strömungssymmetrie erhalten bleibt, da die völlige Abwesenheit von symmetriebrechenden Störungen nicht realistisch ist. Der in dieser Arbeit betrachtete vertikal gescherte Grundstrom sowie der dazugehörige Normalmode unterliegt der Symmetrie Z. Im Mittelpunkt steht hier daher die Untersuchung der Stabilität von Lösungen mit der Symmetrie Z (Z-Lösung)

bezüglich kleiner symmetriebrechender Störungen, welche als natürliche Abweichungen von der exakten Normalmodenstruktur verstanden werden können.

Um die Auswirkung des Symmetriebruchs auf die Z-Lösung in einem weiten Parameterbereich aufzuzeigen, wurde eine Vielzahl von numerischen Simulationen der quasigeostrophischen Lösungen durchgeführt. Der betrachtete Parameterraum wird durch das Aspektverhältnis  $a$  und einem Baroklinitätsparameter  $B$  aufgespannt. Der Baroklinitätsparameter  $B$  beschreibt die Stärke der baroklinen Instabilität und wurde eingeführt, um den Bereich mit barokliner Instabilität besser einzugrenzen. Für die Simulationen der Z-Lösungen wurde am Anfang einfach der am schnellsten anwachsende Normalmode dem vertikal antisymmetrischen Grundstrom überlagert. Im Falle der Symmetrie A (A-Lösung) und der Symmetrie S (S-Lösung) wurde dem Normalmode eine weitere Störung hinzugefügt, welche die Wellenphase gegenüber der meridionalen Richtung auslenkt und die zonokline Symmetrie Z bricht.

Das Verhalten der simulierten Lösungen hängt merkbar von den äußeren Parametern und der Anfangsstörung ab. So nimmt bei den Z-Lösungen das Verhältnis der erreichten Störungsenergie zur Gesamtenergie sowie die Dauer bis zum Erreichen der Equilibration bei Erhöhung des Baroklinitätsparameters zu. Die barokline Wachstumsphase der Z-Lösungen kann dabei nur durch die Modifikation der vertikal antisymmetrischen Zonalmittelströmung beendet werden (barokline Equilibration). Der in den A- und S-Lösungen vorgegebene Symmetriebruch modifiziert das Verhalten der baroklinen Wellen in vielen Fällen. Die Modifikation äußert sich in erster Linie durch das Wachstum von barotropen Zonalmittelströmungen unmittelbar vor der ersten Equilibration. Die simulierten A-Lösungen unterscheiden sich in dem Großteil des betrachteten Parameterraums merklich von der Z-Lösung. Dabei nimmt die Auswirkung des Symmetriebruchs bei Erhöhung des Aspektverhältnisses zu. Die simulierten S-Lösungen weisen nur bei hohen Werten des Aspektverhältnisses ( $a > 2.7$ ) merkliche Unterschiede zu den Z-Lösungen auf.

Insgesamt stimmen die Lösungen in dem Zweischichtensystem mit denen in dem UPV-System in ihrem Verhalten weitgehend überein. Die meisten Unterschiede sind auf die unterschiedliche Randformulierungen zurückzuführen. Folglich ist die Dynamik des Zweischichtenfluids vergleichbar mit der Dynamik des kontinuierlich geschichteten Fluids mit uniformer potentieller Vorticity. Dabei muß die potentielle Vorticity der unteren (oberen) Schicht des Zweischichtensystems mit der Temperatur an der unteren (oberen) Berandung des UPV-Systems verglichen werden, da diese Erhaltungsgrößen die Dynamik steuern.

Bei hohem Aspektverhältnis ( $a = 3$ ) und mittlerem Baroklinitätsparameter ( $B = 0.3$ ) wirkt sich der Symmetriebruch besonders stark aus. Diese Parameter wurden daher für eine nähere Untersuchung festgehalten. In diesem Fall weisen sowohl die A-Lösung als auch die S-Lösung einen klar definierten asymmetrischen Lebenszyklus mit barokliner Wachstums- und barotroper Auflösungsphase auf. Es stellte sich heraus, daß

die Amplifikation der barotropen Zonalmittelströmung aus dem Wellenimpulsfluß aufgrund der zunehmenden meridionalen Phasenneigung resultiert. Eine Equilibration der A- und S-Lösung wurde selbst in den Simulationen beobachtet, in denen die vertikal antisymmetrische Zonalmittelströmung zeitlich konstant gehalten wurde. Damit wurde demonstriert, daß eine barotrope Equilibration stattfinden kann, wobei die Zonalmittelströmung ausschließlich durch die Modifikation des barotropen Anteils stabilisiert wird ("Barotropic Governor" Effekt).

Um einen engeren Zusammenhang zu atmosphärischen Wettersystemen herzustellen, wurden zwei weitere Simulationen in dem semigeostrophischen UPV-System mit einem jetartigen Grundstrom durchgeführt, welcher besser die Polarfront wiedergibt. Es wurde eine Z-Lösung durch Vorgabe des am schnellsten anwachsenden Normalmodes und eine A-Lösung mit einer zusätzlich überlagerten symmetriebrechenden Störung simuliert. Bei der Z-Lösung kommt es zu der Entwicklung von Zyklonen und Antizyklonen mit vergleichbarer Amplitude. Die A-Lösung zeigt dagegen eine Unterdrückung der Antizyklonenentwicklung, so daß Zyklonen schon in der Wachstumsphase die Strömung dominieren. Dabei strömen an der unteren Berandung die Temperaturanomalien spiralförmig in die Zyklone und es entstehen Frontstrukturen, wie sie in dem Shapiro-Keyser Konzeptmodell (Abbildung 1.1) zu finden sind.

Um den Symmetriebruch in den durchgeführten Simulationen zu verstehen, wurden die symmetriebrechenden Instabilitäten eingehend untersucht. Zunächst wurde die Instabilität einer stationären barotropen Fundamentalwelle in einer zweidimensionalen divergenzfreien Strömung analysiert. Die um diese Lösung linearisierte Gleichung besitzt Normalmoden mit der Symmetrie A (Mode A) als auch Normalmoden mit der Symmetrie S (Mode S). Die Wachstumsraten dieser Normalmoden nehmen bei Vergrößerung des Wellenaspektverhältnisses monoton zu und sind für Mode A größer als für Mode S. Für sehr große Aspektverhältnisse nähern sich die Wachstumsraten von Mode A und Mode S der von Lorenz (1972) analytisch bestimmten Wachstumsrate für die Instabilität einer ebenen barotropen Welle an. Die barotrope Welleninstabilität wurde auch in dem UPV-System untersucht, wobei ähnliche Ergebnisse erlangt wurden. Im weiteren wurde die nichtlineare Entwicklung der barotropen Welleninstabilität numerisch simuliert. Die Simulationen von Mode A und Mode S zeigten dabei in ihrer energetischen Entwicklung sowie in den räumlichen Strukturen viele Gemeinsamkeiten mit der barotropen Zerfallsphase der A-Lösung bzw. der S-Lösung, welche zuvor als Beispiele für eine barotrope Equilibration betrachtet wurden (beim Fall  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  im Zweischichtensystem).

Mehr Gewißheit für die Relevanz von symmetriebrechenden Instabilitäten konnte durch die direkte Stabilitätsanalyse der simulierten baroklinen Z-Lösungen gewonnen werden. Die um die Z-Lösung linearisierten Gleichungen besitzen zonotrope Lösungen, die entweder der Symmetrie A (Mode A) oder der Symmetrie S (Mode S) unterliegen. Zunächst wurde die Stabilität aller Z-Lösungen zu einem festgelegten Zeitpunkt in der baroklinen Wachstumsphase ermittelt. Die Z-Lösungen sind zu

diesem Zeitpunkt in dem größten Teil des Parameterraums instabil bezüglich Mode A. Das barotrope Stromfunktionsmuster stimmt in dem instabilen Bereich gut mit der Struktur des in der rein barotropen Analyse gewonnenen Mode A überein. Die Bereiche mit einer Instabilität bezüglich Mode A fallen in etwa mit den Bereichen zusammen, in denen der Symmetriebruch bei der A-Lösung deutliche Auswirkungen zeigte. Die Z-Lösungen sind in dem gesamten Parameterraum instabil bezüglich Mode S. Jedoch ist in dem größten Bereich die Instabilität verbunden mit der baroklinen Instabilität bezüglich der Fundamentalwelle, welche die Entwicklung der Z-Lösung kaum beeinflussen kann. In einem kleinen Bereich, der sich bei hohen Werten des Aspektverhältnisses befindet, weist die Wachstumsrate höhere Werte auf. Das barotrope Stromfunktionsmuster nimmt dort die Struktur des in der barotropen Analyse gewonnenen Mode S an. Eine detailliertere Analyse der Z-Lösung im Zweischichtensystem mit den Parametern  $B = 0.3$ ,  $a = 3$  ergab, daß die zonotropen Strömungen von der A- und der S-Lösung kurz vor der Equilibration die Form von Mode A bzw. Mode S annehmen, welche zu diesem Zeitpunkt eine barotrope Welleninstabilität beschreiben. Schließlich wurde die Stabilität der simulierten Z-Lösung in dem semigeostrophischen UPV-System untersucht. Die Z-Lösung ist in diesem Fall instabil bezüglich eines Mode A, der die barotrope Welleninstabilität mit einer baroklinen Instabilität kombiniert. Die zonotrope Strömung der A-Lösung passt sich schon am Anfang diesem Normalmode an, wobei zunächst die barokline Instabilität den Symmetriebruch bewirkt. Danach gewinnt die barotrope Welleninstabilität immer mehr an Bedeutung und verursacht die Zyklognese.

## 6.2 Diskussion

In dieser Arbeit wurde demonstriert, daß symmetriebrechende Instabilitäten die Entwicklung von baroklinen Wellen in quasigeostrophischen und semigeostrophischen Systemen drastisch modifizieren können. Insbesondere zeigten die zahlreichen Simulationen und Analysen, daß die barotrope Welleninstabilität

- im wesentlichen für die Verstärkung der aufgetretenen Symmetriebrüchen verantwortlich ist
- das Wachstum von barotropen Zonalmittelströmungen während der barotropen Equilibration verursacht
- die Zyklognese in dem semigeostrophischen UPV-System herbeiführt
- sich mit zunehmendem Wellenaspektverhältnis verstärkt

Die Ergebnisse klären somit auf, warum in den Studien von Schär (1989), Davies et al. (1991) und Nakamura (1993) die Vorgabe einer symmetriebrechenden barotropen Scherströmung eine starke Modifikation der baroklinen Wellenentwicklung verursacht. Die barotrope Welleninstabilität bezüglich Mode A wirkt in einem großen Parameterbereich, während die barotrope Welleninstabilität bezüglich Mode S dagegen lediglich bei Wirbeln mit einer hohen meridionalen Erstreckung relevant ist. Bei atmosphärischen synoptisch-skaligen Systemen ist daher nur eine Auswirkung der durch Mode

A beschriebenen Instabilität zu erwarten.

Daß der symmetriebrechenden Welleninstabilität bezüglich Mode A in der Tat bei der außertropischen Zyklogenese eine wichtige Rolle zukommen kann, zeigten die semigeostrophischen Simulationen. Während ohne Symmetriebruch sich eine barokline Welle mit gleichstarken Zyklonen und Antizyklonen entwickelte, zeigte sich mit Symmetriebruch eine klare Dominanz des Zyklonenwachstums (zyklonale Entwicklung), welches zu der Ausbildung von realistischen Frontstrukturen führte. Die Amplifikation der symmetriebrechenden Störung ist folglich ein wichtiger Vorgang bei der Zyklagenese. Die Zyklagenese kann als ein Resultat von zwei verschiedenen Instabilitäten verstanden werden. Die barokline Instabilität sorgt für das Wachstum der baroklinen Welle, während die barotrope Welleninstabilität für die Entwicklung der zyklonal gescherten Zonalmittelströmung verantwortlich ist. Die daraus resultierende Überlagerung von Welle und Zonalmittelströmung bildet die anwachsende Zyklone (siehe Abbildung 1.2 und Abbildung 5.17). Die Fragestellung, warum in Beobachtungen (z. B. Bjerknes und Solberg 1922) und numerischen Studien (z. B. Polavarapu und Peltier 1990) stets die zyklonale Entwicklung beobachtet wird, kann jedoch im Rahmen der hier verwendeten approximierten Systeme nicht erklärt werden, da der gleichwahrscheinliche Symmetriebruch mit umgekehrten Vorzeichen zu der Bildung von dominierenden Antizyklonen führen würde (antizyklonale Entwicklung). Die Tendenz zur zyklonalen Entwicklung muß folglich eine Konsequenz von Effekten sein, die durch die quasigeostrophische oder semigeostrophische Approximation vernachlässigt werden.

In der Studie von Snyder et al. (1991) wird eine mögliche Erklärung für diese Tendenz gebracht. Diese Autoren verglichen die barokline Wellenentwicklung in einem semigeostrophischen Modell mit einer entsprechenden Entwicklung in einem auf den primitiven Gleichungen basierenden Modell. Als Grundzustand wurde die ursprünglich von Hoskins und West (1979) verwendete jetförmige Zonalmittelströmung vorgegeben. Die auf den primitiven Gleichungen basierende Simulation offenbarte eine zyklonale Entwicklung, welche in dem semigeostrophischen Modell nicht auftrat. Für die Erklärung wurde zunächst gezeigt, daß die semigeostrophische Approximation nicht alle Terme in der Größenordnung  $O(Ro^2)$  berücksichtigt. Es ist bemerkenswert, daß der vernachlässigte nichtlineare Term in Gl. (2.61) bei einer vollständigen  $O(Ro^2)$ -Approximation (hypogeostrophische Approximation) mit vierfacher Amplitude in Erscheinung tritt und von Snyder et al. tatsächlich als Ursache für die zyklonale Entwicklung identifiziert werden konnte. Im Anhang wird gezeigt, daß dieser Term eine Verschiebung der Störung auf die linke Seite des Jets (in Strömungsrichtung gesehen) bewirkt und somit die Strömungssymmetrie bricht. Obwohl der zusätzliche Term klein ( $O(Ro^2)$ ) ist, kann er den entscheidenden Anstoß für die zyklonale Entwicklung liefern, da die Scherung auf der linken Seite des Jets stets zyklonal ist. Folglich ist es möglich, daß durch den nichtlinearen Zusatzterm die Störung aufgrund der zyklonalen Scherung geneigt wird und die Welleninstabilität im späteren Entwicklungsstadium

die zyklonale Entwicklung bewirkt. Die Fragestellung, in welchem Maße der zusätzliche Term einerseits und der Mechanismus der Welleninstabilität andererseits an der zyklonalen Entwicklung beteiligt ist, kann jedoch hier nicht beantwortet werden. In der neueren Studie von Wernli et al. (1998) wurden ebenfalls semigeostrophische Simulationen mit solchen verglichen, die auf den primitiven Gleichungen basieren. Die meridionale Symmetrie der baroklinen Jetströmung wurde bei diesen Experimenten durch die Anfangstörung als auch durch die barotrope Scherströmung gebrochen, wobei die Amplitude der letzteren variiert wurde. Der Vergleich brachte im Gegensatz zu Snyder et al. (1991) lediglich geringe Unterschiede in der baroklinen Wellenentwicklung hervor. Daher geben anscheinend die  $O(\text{Ro}^2)$ -Terme nur in den Fällen die Tendenz zur zyklonalen Entwicklung vor, wenn die meridionale Symmetrie anfangs nur leicht oder gar nicht gestört wird.

Im weiteren könnte der Mechanismus der barotropen Welleninstabilität an dem von Simmons und Hoskins (1978) simulierten baroklinen Wellenlebenszyklus beteiligt sein. In der barotropen Zerfallsphase dieses Lebenszyklus neigen sich in der oberen Troposphäre die Wellentröge in antizyklonaler Richtung und die potentiellen Vorticityanomalien werden dort in ähnlicher Weise vermischt (siehe z. B. Thorncroft et al. 1993), wie es in Abbildung 4.14 zu sehen ist. Dieser Vorgang könnte gleichzeitig die von Starr (1968) postulierte negative Wirbelviskosität (Abbildung 1.4) erklären, da bei dem Auflösungsprozess Zonalimpuls in nordwärtige Richtung übertragen wird. Hieraus ergibt sich jedoch auch ein Widerspruch, da die antizyklonale Neigung der Wellentröge sowie die nordwärtige Ausrichtung des Wellenimpulsflusses ein Merkmal einer antizyklonalen Entwicklung ist. Diese wurde jedoch - wie oben ausgeführt - als untypisch angesehen.

Eine mögliche Aufklärung dieses Widerspruchs liefert das von Thorncroft et al. (1993) postulierte "Saturation-Propagation-Saturation" Verhalten (SPS-Hypothese), welches im folgenden kurz beschrieben wird. Am Anfang wächst die barokline Wellenstörung in Bodennähe auf der polwärtigen Seite des Jets an und entwickelt sich dementsprechend zyklonal. Folglich entstehen am Boden vornehmlich Zyklonen, die im weiteren Verlauf okkludieren. Danach bricht der Temperaturfluß in Bodennähe an der polwärtigen Seite des Jets zusammen, während auf der äquatorwärtigen Seite des Jet der noch bestehende Temperaturfluß eine vertikale Ausbreitung von Wellenaktivität aufgrund des meridionalen PV-Gradienten bewirkt (siehe Edmon et al. 1980). Bei der Vertikalausbreitung gewinnt die barokline Welle zusätzliche Energie und neigt sich jetzt antizyklonal, wodurch eine äquatorwärtige Ausbreitungskomponente hinzukommt. Schließlich zerfällt die Wellenenergie in der oberen Troposphäre durch den antizyklonalen Neigungsvorgang. Da die Wellenenergie erst während der Ausbreitungsphase ihr Maximum erreicht, dominiert die in der oberen Troposphäre stattfindende antizyklonale Entwicklung die Energetik der atmosphärischen Zirkulation. Die in Bodennähe stattfindende zyklonale Entwicklung prägt dagegen das Erscheinungsbild der synoptischen Bodenbeobachtungen. Eine wichtige Voraussetzung für das SPS-

Verhalten stellt die anfängliche Existenz eines überall positiven PV-Gradienten dar, der einerseits für eine Konzentration des anfänglichen Wachstums in Bodennähe und andererseits für die Vertikalausbreitung von Wellenaktivität verantwortlich ist. Ferner zeigten Balasubramanian und Garner (1997) durch ein Vergleich von Simulationen in kartesischer und sphärischer Geometrie, daß die metrischen Terme in den sphärischen Gleichungen eine weitere wichtige Voraussetzung für dieses SPS-Verhalten bilden. Es ist klar, daß diese Effekte in den hier behandelten Strömungssystemen nicht enthalten sind.

Da in der nordhemisphärischen Zirkulation der Grundstrom eine starke zonale Variation der Zonalmittelströmung aufweist, findet die Zyklogese nur lokal in den sogenannten Stormtracks statt. Folglich werden durch die Zyklogese zonale Scherströmungen auch nur in diesen Stormtracks forciert. Es besteht also Grund zur Annahme, daß die quasistationären großskaligen Bodendruckanomalien (Islandtief und Aleutentief) die Entsprechung zu der barotropen Zonalmittelströmung in den hier diskutierten Simulationen bilden. Umgekehrt kann man vermuten, daß eine quasistationäre Hochdruckanomalie (Blockierung) aus einer antizyklonalen Entwicklung resultiert, die zwar unwahrscheinlicher aber dennoch möglich sein sollte. Unterstützt wird dieses Hypothese durch Beobachtungen, die eine Forcierung von Blockierungen durch synoptische Impulsflüsse zeigen (Green 1977). Es ist jedoch zu bemerken, daß die zonale Variation der zeitlich gemittelten Strömung Zusatzeffekte hervorruft, die hier nicht behandelt wurden.

Die eben gebrachten Ausführungen zeigen, daß in dieser Arbeit einige Annahmen gemacht wurden, die in der realen Atmosphäre nicht erfüllt sind. Dazu kommen noch weitere Prozesse, wie z. B. die Freisetzung von Kondensationswärme in den Tiefdruckgebieten und die Bodenreibung. Trotz allem kann dem in dieser Arbeit dargestellten Instabilitätsmechanismus eine grundlegende Bedeutung für die atmosphärische Dynamik zukommen. Schließlich wurde gezeigt, daß synoptische Störungen mit Hilfe dieses Mechanismus potentielle Grundstromenergie irreversibel in die kinetische Energie von großskaligen Strömungen (planetare Wellen und Zonalmittelströmungen) umwandeln können. Die daraus resultierenden Anomalien werden nur langsam gedämpft und beeinflussen wiederum die Stabilität der atmosphärischen Strömung bezüglich synoptisch-skaliger Wellen (z. B. über den "Barotropic Governor" Effekt). Über diese Wechselwirkung wird klar, daß die hochfrequenten synoptischen Störungen schlecht vorhersagbare niederfrequente Variabilität verursachen können.



## Anhang

### Symmetriebruch im vollständigen semigeostrophischen UPV-System

Bei Berücksichtigung der nichtlinearen Terme in Gl. (2.61) erhält man in den geostrophischen Koordinaten für die potentielle Vorticity folgenden Ausdruck:

$$Q_g = \frac{\frac{1}{\text{Ro}} F \varrho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\text{Ro}^2} \frac{d\varrho_0}{d\tilde{z}}}{\frac{1}{\text{Ro}} - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \text{Ro} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right)^2} . \quad (\text{A.1})$$

Setzt man die uniforme potentielle Vorticity des Grundstroms  $Q_g = -\text{Ro}^{-1} d\varrho_0/dz$  in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$\tilde{\nabla}_h^2 \tilde{\psi} + \frac{F_1}{4} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} - \text{Ro} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right)^2 = 0 . \quad (\text{A.2})$$

Um den Effekt auf die anfängliche Störung zu untersuchen, wird diese Gleichung um die Zonalmittelströmung linearisiert mit dem Ergebnis:

$$\left( 1 + \text{Ro} \frac{\partial [u_g]}{\partial \tilde{y}} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{F_1}{4} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{z}^2} = 0 . \quad (\text{A.3})$$

Der zweite Term in der Klammer ist dafür verantwortlich, daß die Störung auf die linke Seite des Jets (in Strömungsrichtung gesehen) verschoben wird. Das wird an dem Beispiel einer einfachen Jetströmung in der Form

$$[u_g] = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \left( \tilde{y} - \frac{\pi}{2} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

demonstriert. Die vertikale Variation dieser Strömung wird der Einfachheit halber nicht berücksichtigt. Mit diesem Grundstrom ergibt sich für Gl. (A.3):

$$\left( 1 - \text{Ro} \left( \tilde{y} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{F_1}{4} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}'}{\partial \tilde{z}^2} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Für die Störung wird folgender Separationsansatz gemacht:

$$\psi'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = F(\tilde{y}) \sin(a\tilde{x}) \cosh\left(2\left(\frac{a^2 + l_m^2}{F_I}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{z}\right) \quad (\text{A.6})$$

Die Konstante  $l_m$  kann als modifizierte meridionale Wellenzahl interpretiert werden, deren Wert nahe bei 1 liegt. Mit diesem Ansatz resultiert folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 F}{d\tilde{y}^2} + (l_m^2 + a^2 \text{Ro}(\tilde{y} - \frac{\pi}{2}))F = 0. \quad (\text{A.7})$$

Die Lösung dieser Gleichung kann mit der WKB-Methode gewonnen werden (siehe z. B. Gill 1982), da die zweite Ableitung von dem Faktor  $(l_m^2 + a^2 \text{Ro}(\tilde{y} - \frac{\pi}{2}))$  die Größenordnung  $O(\text{Ro}^2)$  aufweist. Damit ist

$$F(\tilde{y}) = \frac{1}{(l_m^2 + a^2 \text{Ro}(\tilde{y} - \frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3\text{Ro}} \left( (l_m^2 + a^2 \text{Ro}(\tilde{y} - \frac{\pi}{2}))^{\frac{3}{2}} - (l_m^2 - a^2 \text{Ro} \frac{\pi}{2})^{\frac{3}{2}} \right)\right) \quad (\text{A.8})$$

annähernd eine Lösung der Gl. (A.7). Die modifizierte meridionale Wellenzahl  $l_m$  muß so bestimmt werden, daß die geostrophischen Randbedingungen erfüllt werden.

Abbildung A.1 zeigt bei Vorgabe von  $a = 2$  diese Lösung für  $\text{Ro}=0.1$  und zum Vergleich die Lösung von Gl. (A.7), wenn  $\text{Ro}=0$  (quasigeostrophischer Fall). Die WKB-Lösung wurde zuvor mit einer numerischen Lösung von Gl. (A.7) verglichen, wobei nur sehr geringe Unterschiede festgestellt wurden. Man erkennt, daß das Maximum gegenüber der quasigeostrophischen Lösung auf die linke Seite des Jets verschoben wird. Sehr viel deutlicher würde die Verschiebung in dem von Snyder et al. (1991) eingeführten hypogeostrophischen System auftreten, da in diesem System der nichtlineare Term in (A.2) mit vierfacher Amplitude auftritt. Für eine vollständige Lösung des Problems müßte man noch die vertikale Variation von  $[u_g]$  und die Randbedingungen bei  $z = 0, 1$  (Gl. (2.62)) beachten. Die Randbedingungen bewirken, daß die Störung zyklonal geneigt wird, da sie auf die Seite des Jets mit zyklonaler Scherung verschoben wurde. Normalmoderechnungen von Snyder et al. (1991) und Nakamura (1993) bestätigen diese Aussagen. Zudem wurde gefunden, daß der Normalmode im hypogeostrophischen System eine gute Übereinstimmung mit dem aus dem primitiven

Gleichungssystem resultierenden Normalmode aufweist. Es kann also vermutet werden, daß die Modifikation der Störung durch den nichtlinearen Term in der Gleichung (A.2) den entscheidenden Anstoß für eine zyklonale Entwicklung liefert.

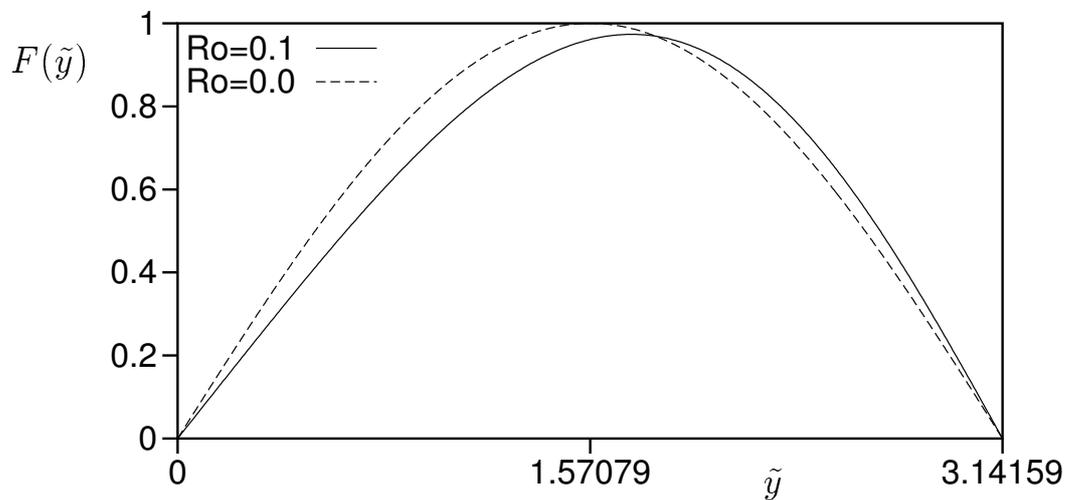


Abbildung A.1: Verlauf der WKB-Lösungen von Gl. (A.7) für  $Ro=0.1$  (durchgezogene Kurve) und  $Ro=0$  (gestrichelte Kurve).



## Literaturverzeichnis

- Balasubramanian, G., und S. T. Garner, 1997: The role of momentum fluxes in shaping the life cycle of a baroclinic wave. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 510-533.
- Barnes, J. R., und R. E. Young, 1992: Nonlinear baroclinic instability on the sphere: Multiple life cycles with surface drag and thermal damping. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 861-878 .
- Berggren, R., 1952: The distribution of temperature and wind connected with active tropical air in the higher troposphere, and some remarks concerning clear air turbulence at high altitude. *Tellus*, **4**, 43-53.
- Bjerknes, J., und H. Solberg, 1922: Life cycle of cyclones and the polar front theory of atmospheric circulation. *Geofys. Publ.*, **3** (1), 3-18.
- Boville, B. A., 1980: Amplitude vacillation on an  $f$ -plane. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1413-1423.
- Bretherton, F. P., 1966a: Critical layer instability in baroclinic flows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 325-334.
- Bretherton, F. P., 1966b: Baroclinic instability and the short wavelength cut-off in terms of potential vorticity. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 335-345.
- Bronstein, I. N., und K. A. Semendjajew, 1991: Taschenbuch der Mathematik. 25. Auflage, Verlag Nauka (Moskau), 824 S.
- Charney, J. G., 1947: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.*, **4**, 135-162.
- Charney, J. G., und M. E. Stern, 1962: On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 159-172.
- Davies H. C., C. Schär und H. Wernli, 1991: The palette of fronts and cyclones within a baroclinic wave development. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1666-1689.
- Drazin, P. G., 1970: Non-linear baroclinic instability of a continuous zonal flow. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **96**, 667-676.
- Eady, E. T., 1949: Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33-52.
- Edmon H. J., B. J. Hoskins und M. E. McIntyre, 1980: Eliassen-Palm cross sections for the troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2600-2616.
- Farrell, B. F., 1985: Transient growth of damped baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2718-2727.
- Feldstein, S. B., und I. M. Held, 1989: Barotropic decay of baroclinic waves in a two-layer beta-plane model. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3416-3430.
- Fjørtoft, R., 1953: On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow. *Tellus*, **5**, 225-230.

- Fultz, D., R. R. Long, G. V. Owens, W. Bohan, R. Kaylor und J. Weil, 1959: Studies of thermal convection in a rotating cylinder with some implications for large-scale atmospheric motions. *Meteor. Monogr.*, **4**, Nr. 21, 1-104.
- Gill, A. E., 1974: The stability of planetary waves on an infinite beta-plane. *Geophys. Fluid Dyn.*, **6**, 29-47.
- Gill, A. E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press (San Diego), 662S.
- Grammeltvedt, A., 1970: Numerical simulation of the motion of atmospheric fronts using a two layer model. *Tellus*, **22**, 627-637.
- Green, 1977: The weather during July 1976: Some dynamical considerations of the drought. *Weather*, **32**, 120-126.
- Gross, B. D., 1997: The effect of compressibility on barotropic and baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 24-31.
- Hack, J. J., 1992: Numerical and computational concepts. In *Climate system modeling*, K. E. Trenberth (Ed.), Cambridge University Press (Cambridge), 283-318.
- Haltiner, G. J., und R. T. Williams, 1980: Numerical prediction and dynamic meteorology. Zweite Auflage, John Wiley and Sons (New-York), 477 S.
- Hart, J. E., 1972: A laboratory study of baroclinic instability. *Geophys. Fluid Dyn.*, **3**, 181-209.
- Hartmann D. L., und P. Zuercher, 1998: Response of baroclinic life cycles to barotropic shear *J. Atmos. Sci.*, **55**, 297-313.
- Heckley, W. A., und B. J. Hoskins, 1982: Baroclinic waves and frontogenesis in a non-uniform potential vorticity semi-geostrophic model. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1999-2016.
- Holton, J. R., 1992: An introduction to dynamic meteorology. 3. Auflage, Academic Press (San Diego), 507 S.
- Hoskins, B. J., 1973: Stability of the Rossby-Haurwitz wave. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **99**, 723-745.
- Hoskins, B. J., 1975: The geostrophic momentum approximation and the semi-geostrophic equations. *J. Atmos. Sci.*, **32**, 233-242.
- Hoskins, B. J., 1976: Baroclinic waves and frontogenesis. Part I: Introduction and Eady waves. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **102**, 103-122.
- Hoskins, B. J., und F. P. Bretherton, 1972: Atmospheric frontogenesis models: Mathematical formulation and solution. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 11-37.
- Hoskins, B. J., und A. Hollingworth, 1973: On the simplest example of the barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 150-153.
- Hoskins, B. J., und N. V. West, 1979: Baroclinic waves and frontogenesis. Part II: Uniform potential vorticity jet flows - cold and warm fronts. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1663-1680.

- Howard, L. N., und R. Krishnamurti, 1986: Large-scale flow in turbulent convection: A mathematical model. *J. Fluid Mech.*, **170**, 385-410.
- Iga, K., 1993: Reconsideration of Orlanski's instability theory of frontal waves. *J. Fluid Mech.*, **255**, 213-236.
- James, I. N., 1994: Introduction to circulating atmospheres. Cambridge University Press (Cambridge), 422 S.
- James, I. N., und L. J. Gray, 1986: Concerning the effect of surface drag on the circulation of a baroclinic planetary atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **112**, 1231-1250.
- Jeffreys, H., 1926: On the dynamics of geostrophic winds. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **52**, 85-104.
- Killworth, P. D., und M. E. McIntyre, 1985: Do Rossby-wave critical layers absorb, reflect, or over-reflect? *J. Fluid Mech.*, **161**, 449-492.
- Krishnamurti, R., und L. N. Howard, 1981: Large-scale flow generation in turbulent convection. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **78**, 1981-1985.
- Kotschin, N., 1932: Über die Stabilität von Margules'schen Diskontinuitätsflächen. *Beitr. Phys. Atmos.*, **18**, 129-164.
- Kuo, H. L., 1973: Dynamics of quasigeostrophic flows and instability theory. *Adv. Appl. Mech.*, **13**, 247-330.
- Lorenz, E. N., 1955: Available potential energy and the maintenance of the general circulation. *Tellus*, **7**, 157-167.
- Lorenz, E. N., 1972: Barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 258-264.
- Margules, M., 1903: Über die Energie der Stürme. Anhang zum Jahrbuch der K. K. Zentral-Anstalt für Meteorologie und Geodynamik (Wien), 1-26.
- McIntyre, M. E., 1970: On the non-separable parallel flow instability problem. *J. Fluid Mech.*, **40**, 273-306.
- Mudrick, S. E., 1974: A numerical study of frontogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 869-892.
- Mundt, M. D., und J. E. Hart, 1994: Secondary instability, EOF reduction, and the transition to baroclinic chaos. *Physica D*, **78**, 65-92.
- Nakamura, N., 1993: Momentum flux, flow symmetry, and the nonlinear barotropic governor. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 2159-2179.
- Nakamura, N., und I. M. Held, 1989: Nonlinear equilibration of two-dimensional Eady waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3055-3064.
- Orlanski, I., 1968: Instability of frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 178-200.
- Pedlosky, J., 1964: The stability of currents in the atmosphere and the ocean: Part I. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 201-219.
- Pedlosky, J., 1970: Finite-amplitude baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 15-30.

- Pedlosky, J., 1987: Geophysical fluid dynamics. 2. Auflage, Springer-Verlag (New-York), 710 S.
- Petterssen, S., und S. J. Smebye, 1971: On the development of extratropical cyclones. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **97**, 457-482.
- Pfeffer, R. L., G. Buzyna und R. Kung, 1980: Time-dependent modes of behaviour of thermally driven rotating fluids. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2129-2149.
- Phillips, N. A., 1951: A simple three-dimensional model for the study of large-scale extratropical flow patterns. *J. Meteor.*, **8**, 381-394.
- Phillips, N. A., 1954: Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus*, **3**, 273-286.
- Polavarapu, S. M., und W. R. Peltier, 1990: The structure and nonlinear evolution of synoptic scale cyclones: Life cycle simulations with a cloud-scale model. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2645-2672.
- Rayleigh, Lord, 1880: On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, **9**, 57-70.
- Rotunno, R., W. C. Skamarock und C. Snyder, 1994: An analysis of frontogenesis in numerical simulations of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **51**, 3373-3398.
- Saltzman, B., 1962: Finite amplitude convection as an initial value problem - I. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 329-341.
- Schär, C., 1989: Dynamische Aspekte der aussertropischen Zyklogenese. Theorie und numerische Simulation im Limit der balancierten Strömungssysteme. Dissertation Nr. 8845 der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich. 241 S.
- Schär, C., und H. Wernli 1993: Structure and evolution of an isolated semi-geostrophic cyclone. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 57-90.
- Schultz, D. M., D. Keyser und L. F. Bosart, 1998: The effect of large-scale flow on low-level frontal structure and evolution in midlatitude cyclones. *Mon. Wea. Rev.*, **126**, 1767-1791.
- Shapiro, M. A., und D. Keyser, 1990: Fronts, jet streams and the tropopause. In *Extratropical cyclones, The Erik Palmén Memorial Volume*, C. W. Newton und E. O. Holopainen (Eds.), Amer. Meteor. Soc., 167-191.
- Silbermann, I., 1954: Planetary waves in the atmosphere. *J. Meteor.*, **11**, 27-34.
- Simmons, A. J. und B. J. Hoskins, 1978: The life cycles of some nonlinear baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 414-432.
- Simmons, A. J. und B. J. Hoskins, 1980: Barotropic influences on the growth and decay of nonlinear baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1679-1684.
- Sinton, D. M., und C. R. Mechoso, 1984: Nonlinear evolution of frontal waves *J. Atmos. Sci.*, **41**, 3501-3517.

- Snyder, C., W. C. Skamarock und R. Rotunno, 1991: A comparison of primitive-equation and semigeostrophic simulations of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 2179-2194.
- Solberg, H., 1928: Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen. *Geophys. Publ.*, **5**, 1-120.
- Soloviev, G. I., V. D. Shapiro, R. C. J. Somerville und B. Shkoller, 1996: The tilting instability with buoyant forcing in a two-dimensional viscous fluid. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2671-2684.
- Starr, V. P., 1948: An essay on the general circulation of the earth's atmosphere. *J. Meteor.*, **5**, 39-43.
- Starr, V. P., 1968: Physics of negative viscosity phenomena. McGraw-Hill, 256 S.
- Stewartson, K., 1978: The evolution of the critical layer of a Rossby wave. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **9**, 185-200.
- Takayabu, 1986: Roles of the horizontal advection on the formation of surface fronts and on the occlusion of a cyclone developing in the baroclinic westerly jet. *J. Meteor. Soc. Japan*, **64**, 329-345.
- Thompson R., 1970: Venus's general circulation is a merry-go-round. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 1107-1116.
- Thorncroft, C. D. und B. J. Hoskins, 1990: Frontal cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 2317-2336.
- Thorncroft, C. D., B. J. Hoskins und M. E. McIntyre, 1993: Two paradigms of baroclinic-wave life-cycle behaviour. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **119**, 17-55.
- Wallace, J. M., G. H. Lim und M. L. Blackmon, 1988: Relationship between cyclone tracks, anticyclone tracks, and baroclinic waveguides. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 439-462.
- Warn, T., und H. Warn, 1978: The evolution of a nonlinear Rossby wave critical layer. *Stud. Appl. Math.*, **59**, 37-71.
- Wernli, H., R. Fehlmann und D. Lüthi, 1998: The effect of barotropic shear on upper-level induced cyclogenesis: semigeostrophic and primitive equation numerical simulations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 2080-2094.



## Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. K. Fraedrich für die Ermöglichung und Betreuung dieser Arbeit.

Bei Herrn Prof. Dr. W. Zahel möchte ich mich für seine bereitwillige Beteiligung an der Begutachtung und seine fachlichen Hinweise bedanken.

Herrn Dr. I. N. James von der Universität Reading in England danke ich für diverse Anregungen und Kritik.

Dem Deutschen Klimarechenzentrum (DKRZ) danke ich für die Bereitstellung von Hochleistungsrechnern, womit die Durchführung von zahlreichen Simulationen ermöglicht wurde.

Den Mitarbeitern des meteorologischen Instituts der Universität Hamburg danke ich für die gute Zusammenarbeit.

Besonders danke ich meiner Freundin Martina und meinen Eltern für ihre Geduld und Unterstützung.



## Tabellarischer Lebenslauf

Name: Thomas Frisius  
Geburtsdatum: 09.09.1967  
Geburtsort: Mölln  
Eltern: Friedrich Frisius  
Lena Frisius, geb. Schmidt  
Familienstand: ledig

### Schulbildung

- Grundschule: September 1974 - Juli 1978 Grundschule Buckhorn in Hamburg
- Gymnasium: September 1978 - Juni 1987 Gymnasium Buckhorn in Hamburg
- Abitur: Juni 1987 am Gymnasium Buckhorn in Hamburg

Grundwehrdienst: Juli 1987 - Oktober 1988 im Pionierbataillon 61

### Studium

- Grundstudium: SS 1989 - SS 1991 in Meteorologie an der Universität Hamburg
- Vordiplom: Oktober 1991 in Meteorologie an der Universität Hamburg
- Hauptstudium: WS 1991/92 - SS 1995 in Meteorologie an der Universität Hamburg
- Diplom: September 1995 in Meteorologie an der Universität Hamburg

Promotion: Ab November 1995 in der Abteilung für theoretische Meteorologie des meteorologischen Instituts der Universität Hamburg