

Spindynamik in Bose-Einstein Kondensaten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereiches Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Holger Schmaljohann
aus Kiel

Hamburg
2004

Gutachter der Dissertation : Prof. Dr. Klaus Sengstock
Prof. Dr. Günter Huber
Prof. Dr. Hans A. Bachor

Gutachter der Disputation : Prof. Dr. Klaus Sengstock
Prof. Dr. Andreas Hemmerich

Datum der Disputation : 18. März 2004

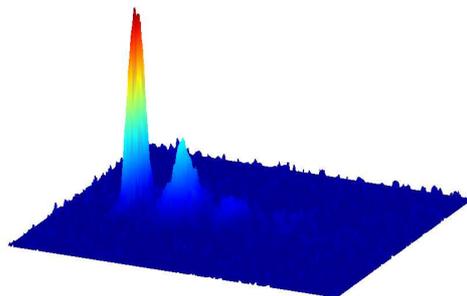
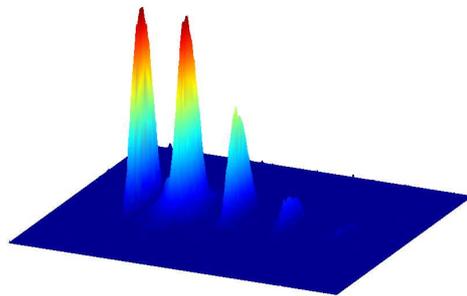
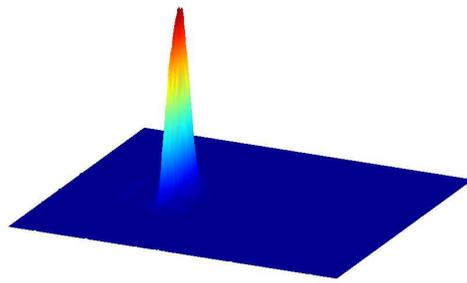
Vorsitzender des Prüfungsausschusses : Dr. Klaus Petermann

Vorsitzender des Promotionsausschusses : Prof. Dr. Roland Wiesendanger

Dekan des Fachbereichs Physik : Prof. Dr. Günter Huber

„In der Wissenschaft beginnt alles Neue damit, dass
jemand brummt 'Hmm... das ist ja komisch.'“

Isaac Asimov



Zusammenfassung

Mit der experimentellen Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten in verdünnten atomaren Gasen wurde 1995 ein neues faszinierendes Forschungsfeld eröffnet. Seitdem sind eine Vielzahl an fundamentalen Fragestellungen zu schwach wechselwirkenden Bose-Einstein Kondensaten studiert worden, welche zumeist auf der Nichtlinearität der Systeme basieren. Fast alle bisherigen experimentellen Arbeiten untersuchen jedoch nur das Verhalten ein-komponentiger Bose-Einstein Kondensate. Lediglich in zwei Arbeitsgruppen am JILA und MIT (sowie parallel zu dieser Arbeit am Georgia Tech) wurden die besonderen Eigenschaften, welche auf der komplexeren Wechselwirkung von zwei bzw. drei-komponentigen Bose-Einstein Kondensaten beruhen, analysiert.

Im Rahmen der vorliegenden Promotion wurde erstmals die vielschichtige Dynamik fünf-komponentiger Bose-Einstein Kondensate sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht. Basierend auf einem $F=2$ Spin-System konnte ein wichtiger Beitrag zu magnetischen Wechselwirkungen in atomaren Quantensystemen gegeben werden, wobei der Schwerpunkt der Arbeit auf der zeitlichen Dynamik, dem magnetischen Grundzustand in Abhängigkeit verschiedener Parameter sowie auf den unterschiedlichen Verlustkanälen liegt.

Die Experimente wurden mit ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ durchgeführt. Die dafür erforderliche Apparatur sowie alle notwendigen Lasersysteme des Experimentes wurden im Rahmen dieser Arbeit konzipiert und aufgebaut.

Ein zentrales Ergebnis der Messungen ist, dass Kondensate aus ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ ein polares (anti-ferromagnetisches) Verhalten zeigen. Im Rahmen dieser Arbeit konnte jedoch gezeigt werden, dass hieraus nicht auf eine polare Phase geschlossen werden kann, da dieser Zustand bei einem vorhandenen magnetischen Offsetfeld auch der Grundzustand der zyklischen Phase ist. Diese magnetische Phase ist eine Folge der komplexen Wechselwirkungen. Sie tritt in Systemen aus Atomen mit Spin eins nicht auf und wurde hier erstmals unter Berücksichtigung von Magnetfeldern ausführlich analysiert.

Bei der experimentellen Untersuchung der Spindynamik konnte gezeigt werden, dass diese im vorliegendem System im Vergleich zu den bisherigen Experimenten mit ^{23}Na sehr schnell stattfindet (~ 10 ms gegenüber ~ 1 s). Dies erlaubt erstmals Experimente zur Spindynamik, bei denen diese schneller abläuft als die Thermalisierung des Ensembles. Dies erlaubt neue Studien zur kohärenten Dynamik. Begleitend zu den umfangreichen experimentellen Ergebnissen wurde ein Modell zur Analyse der Spindynamik entwickelt und mit diesem insbesondere der Einfluss von zusätzlichen Offset-Magnetfeldern auf die Dynamik charakterisiert.

Ebenso konnte eine Magnetisierung bei Kondensaten, die mit einem Gesamtspin ungleich null präpariert waren, festgestellt werden. Dieser Effekt resultiert aus der Spindynamik zusammen mit spinabhängigen Verlusten. Diese Verluste treten bei Wechselwirkungen mit Übergängen in den unteren Hyperfeinzustand auf. Für die Mischung aus den Spinzuständen $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ sowie der Gleichverteilung über alle m_F Komponenten konnten die Zwei-Körper Zerfallsraten bestimmt werden.

Die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse stellen eine wesentliche Erweiterung des Verständnisses von mehr-komponentigen Bose-Einstein Kondensaten dar.

Abstract

The experimental realization of Bose-Einstein condensation with atomic gases opened up a new fascinating research area. Since 1995 a myriad of fundamental effects of weak interacting Bose-Einstein condensates have been studied, many of them based on the non-linearity of the system. In almost all experiments the behavior of only one-component condensates is analyzed. Only in two groups at JILA and at MIT (as well as at Georgia Tech simultaneously to this thesis) the special effects of two- and three-component condensates have been studied.

In the present thesis the complex dynamics of five-component Bose-Einstein condensates is investigated experimentally and theoretically. Based on a $F=2$ spin-system an important contribution to the magnetic interaction in atomic quantum-gases is made. The main emphasis of this work is on the dynamics of the spin-states, the magnetic groundstate and its dependence on various parameters and the different loss-channels.

The experiments are realized with ^{87}Rb atoms within the hyperfine manifold $F=2$. The required apparatus as well as all essential laser-systems of the experiment have been designed and built.

One main result of the measurements is the observation of a polar behavior of ^{87}Rb condensates in the $F=2$ hyperfine state. It is shown in this thesis that this does not unambiguously imply a polar phase for the atoms. The groundstate of the cyclic phase can be shifted by a magnetic field into a region where polar behavior also represents the spin-state with minimum energy. The cyclic phase does not exist in spin-one systems and is a result of the complex interactions in spin-two systems. In this thesis the effects of magnetic fields for spin-two systems with respect to the ground states are analyzed in detail.

In comparison to the experiments with ^{23}Na the experimental investigations of spindynamics show a very fast built up of the population in the “new” spin components (~ 10 ms versus ~ 1 s). This effect allows for experiments with spindynamics faster than the thermalization of the ensemble for the first time. Accompanying to the detailed experimental results a model for the analysis of spindynamics has been developed. In particular this model contains the influence of additional magnetic offset fields to the spindynamics.

Furthermore a magnetization of condensates with initial total spin unequal to zero has been observed. This effect results from spindynamics combined with spin-dependent losses. These losses appear due to transitions into the lower hyperfine state. The two-body loss rates for a mixture of the spin-states $|m_F = +2\rangle$ together with $|m_F = -2\rangle$ as well as for an equipartition over all m_F components have been determined.

The results of this thesis give an important extension to the understanding of multi-component Bose-Einstein condensates.



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bose-Einstein Kondensation	6
2.1	Thermodynamische Betrachtung	7
2.2	Quantenmechanische Beschreibung	9
2.2.1	Gross-Pitaevskii Gleichung	10
2.2.2	Thomas-Fermi Näherung	11
3	Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad	13
3.1	Grundlagen	13
3.2	Theoretische Beschreibung für Spin 1 Teilchen	15
3.2.1	<i>mean-field</i> Beschreibung	17
3.2.2	Grundzustände ohne Magnetfeld	18
3.2.3	Mischbarkeit von m_F Zuständen	18
3.2.4	Die Spinausheillänge	20
3.3	Erweiterung auf Atome mit Spin 2	21
3.4	Einbeziehung von Magnetfeldern	23
3.4.1	Einfluss des linearen Zeeman-Effekts	24
3.4.2	Einfluss des quadratischen Zeeman-Effekts	25
3.5	Grundzustände in $F=1$ und $F=2$	27
3.5.1	Die Phasendiagramme für $F=1$	28
3.5.2	Die Phasendiagramme für $F=2$	31
3.5.3	Neue Darstellung der Phasendiagramme	35
3.5.4	Energieunterschiede	37
3.6	Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten	37
3.6.1	Zeitliche Entwicklungen der Spinkomponenten mit Spin 2	42

4	Realisierung von BEC	45
4.1	Rubidium 87	46
4.2	Das Vakuumsystem	47
4.3	Das Lasersystem	48
4.4	Die magneto-optische Falle	51
4.4.1	System aus 2d und 3d MOT	52
4.4.2	Optische Melasse	54
4.5	Die Magnetfalle	55
4.5.1	Ioffe-Pritchard Falle	56
4.5.2	Umladen der Atome in die Magnetfalle	58
4.5.3	Lebensdauerermessung	60
4.6	Die evaporative Kühlung	60
4.7	Detektion und Auswertung	62
4.7.1	Absorptions-Aufnahmen	62
4.7.2	Bestimmung der Ensemble-Parameter	63
4.8	Beobachtung von Bose-Einstein Kondensaten	64
4.8.1	<i>time-of-flight</i> Messungen	64
4.8.2	Detektion des Phasenübergangs	64
4.8.3	Atomlaser	67
5	Optische Falle	68
5.1	Die Dipolkraft	69
5.2	Designüberlegungen zur optischen Falle	70
5.2.1	Parameter einer zylindersymmetrischen Dipolfalle	71
5.2.2	Einfluss der Gravitation	71
5.2.3	Drei-Körper Stöße	73
5.2.4	Realisierte Fallengeometrie	75
5.3	Laden der Dipolfalle	76
5.4	Fallenfrequenzmessungen	78
5.5	Kühlen in der optischen Falle	79
6	Experimente mit spinor BEC's	84
6.1	Zustandspräparation	84
6.1.1	Adiabatische Passage und Landau-Zener Übergänge	85
6.1.2	Untersuchte Spinpräparationen	86
6.2	Kontrolle des Magnetfeldes	87
6.2.1	Einstellung des Offsetmagnetfeldes	88
6.2.2	Kompensation des Magnetfeldgradienten	89
6.2.3	Energieanteile	90
6.3	Beobachtung von Spindynamik	91
6.3.1	Anfängliche Spindynamikraten	94
6.4	Oszillationen	95
6.5	Phasenabhängigkeit der Spindynamik	97
6.6	Thermalisierungseffekte	99

6.7	Messungen zum Grundzustand	101
6.8	Verlustprozesse in $F=2$	107
6.9	Magnetisierungsprozesse	109
6.10	Zusammenfassung	110
7	Ausblick	112
A	Physikalische Daten	115
B	Schema des Lasersystems	122
C	Spinabhängige Wechselwirkung in $F=2$	123
C.1	Gebräuchliche Darstellung	124
C.2	Alternative Darstellung	126
C.3	Formeln zur zeitlichen Entwicklung	127

Einleitung

Die Bose-Einstein Kondensation von verdünnten atomaren Gasen ist ein faszinierendes Phänomen, welches es erlaubt, eine Vielzahl von quantenmechanischen Effekten auf einer makroskopischen Skala zu beobachten. Bei diesem Effekt wird der Grundzustand des Systems von einem makroskopischen Anteil der Atome besetzt. Dies beruht allein auf der Quantenstatistik für Bosonen. Die Vorhersage der Bose-Einstein Kondensation erfolgte 1925 von Einstein [1] noch vor der Entwicklung der Quantenmechanik und der Unterteilung von Teilchen in Bosonen und Fermionen. Inspiriert durch de Broglie's Konzept der Wellennatur von Masse behafteten Teilchen [2], erweiterte Einstein die von Bose aufgestellte Statistik für Photonen [3] auf Teilchen mit Masse. Er stellte fest, dass bei dem Absenken der Temperatur des Gases ab einer kritischen Temperatur die Verteilung nicht mehr alle Teilchen aufnehmen kann und folgerte daraus, dass die übrigen Atome den Grundzustand bevölkern müssen. Auch wenn es siebzig Jahre bis zur Realisierung dieses Effektes in atomaren Gasen gedauert hat, so fand die Theorie schon 1938 bei der Erklärung der Übergangstemperatur von „normalem“ zu superfluidem ^4He seine erste Anwendung [4]. In der Folgezeit erweiterten viele theoretische Arbeiten das Verständnis von superflüssigem Helium und führten somit auch zu einer detaillierteren Beschreibung der Bose-Einstein Kondensation. Insbesondere ist die Einführung des Ordnungsparameters bzw. der makroskopischen Wellenfunktion zu nennen [5], welche sich als Standard für die Darstellung der kondensierten Atome etabliert hat.

Die Experimente mit superfluidem Helium sind selbst bei Temperaturen deutlich unterhalb der kritischen Temperatur durch den Anteil von zirka 90% nicht-kondensierter Helium-Atome limitiert. Dies und die starke Wechselwirkung in einer Flüssigkeit erschweren die theoretische Beschreibung und führten zu dem Wunsch nach Experimenten mit schwach wechselwirkenden atomaren Gasen mit möglichst hohem kondensiertem Anteil. Nach anfänglicher Skepsis, ob die Bose-Einstein Kondensation mit einem atomaren Gas überhaupt erreicht werden kann, stellte sich heraus, dass in verdünnten Gasen für

Einleitung

einige Elemente bei Dichten im Bereich von 10^{14} cm^{-3} die Molekülbildung wesentlich langsamer als die Thermalisierung stattfindet. Die Experimente können also in einem meta-stabilen Zustand durchgeführt werden.

Um die kritische Temperatur von einigen hundert Nanokelvin für das Erzielen der makroskopischen Besetzung des Grundzustandes bei den niedrigen Dichten zu erreichen, mussten neue Methoden zum Kühlen von atomaren Gasen entwickelt werden. Mit Hilfe der Laserkühlung [6, 7, 8] gelang es, atomare Ensembles im μK -Bereich zu präparieren. Vor allem Alkali-Atome zeigen sich hierbei als besonders geeignet, da neben dem vergleichsweise einfachen Termschema kontinuierliche Laserquellen im erforderlichen Wellenlängenbereich vorhanden sind. Für die Experimente zur Bose-Einstein Kondensation dient die magneto-optische Falle [9] als erster Schritt zur Erhöhung der Phasenraumdichte. Ein Abkühlen unter die kritische Temperatur allein mit Hilfe der Methoden der Laserkühlung wird durch Reabsorptionsprozesse verhindert. Das atomare Ensemble wird nach der Laserkühlung zunächst in ein harmonisches Potential umgeladen, welches durch magnetische oder optische Felder erzeugt wird. Mit Hilfe der evaporativen Kühlung [10], die ursprünglich für spin-polarisierten Wasserstoff entwickelt wurde, wird die Phasenraumdichte weiter erhöht. Hierbei werden die Atome mit der höchsten Energie aus dem Fallenpotential entfernt. Durch elastische Stoßprozesse gelangt das Ensemble wieder in ein thermisches Gleichgewicht. Mit der Kombination aus Laserkühlung und evaporativer Kühlung wurde es möglich, die kritische Temperatur für den Phasenübergang zur Bose-Einstein Kondensation in einem atomaren Gas zu unterschreiten.

Dies gelang erstmals 1995 mit Rubidium [11], Natrium [12] und Lithium [13, 14]. Seitdem kam es zu einem regelrechten *run* auf dieses Gebiet der Physik. Dies wird sowohl durch die Anzahl der Publikationen mit theoretischem Inhalt als auch durch die Vielzahl experimenteller Arbeiten deutlich. Mittlerweile gibt es zirka 40 Experimente zur Bose-Einstein Kondensation. Mit diesen sind die meisten elementaren Experimente von ein-komponentigen Bose-Einstein Kondensaten durchgeführt worden. Sie umfassen Untersuchungen zu Anregungen [15, 16, 17], zur Interferenz [18, 19], zur Atomoptik [20, 21], zur Kohärenz [22, 23, 24], zur Superfluidität [25, 26, 27, 28] und vielem mehr. In den neueren Experimenten wurde zum einen versucht, andere Elemente zu kondensieren wie beispielsweise meta-stabiles Helium [29, 30]. Experimente hiermit sollen genaue Ergebnisse zur Quantenstatistik ermöglichen, da aufgrund der hohen inneren Energie der Teilchen ein Einzel-Atom-Nachweis mit einer hohen Quanteneffizienz erfolgen kann. Ebenso würden sich aus Kondensaten bestehend aus Chromatomen neue Möglichkeiten aufgrund des vergleichsweise hohen Dipolmomentes ergeben [31]. Weiterhin konnte kürzlich ein Bose-Einstein Kondensat aus Molekülen, welche sich jeweils aus zwei Fermionen zusammensetzen, detektiert werden [32, 33, 34]. Dieses stellt einen wichtigen Schritt auf dem Weg zur Realisierung des BCS-Übergangs von fermionischen Atomen dar [35] und gibt wegen der komplexeren inneren Struktur der Moleküle neue Manipulationsmöglichkeiten. Neben den Versuchen „neue“ Elemente zu kondensieren, wurden in letzter Zeit Ansätze zu komplexeren Fallengeometrien zum Beispiel in optischen Gittern umgesetzt [36]. Zudem rückt der Einfluss der Dimensionalität auf die Eigenschaften der Kondensate in das Interesse [37].

Im Vergleich zu ein-komponentigen Bose-Einstein Kondensaten sind erst vergleichsweise wenig Experimente mit Kondensaten bestehend aus mehreren Spinkomponenten durchgeführt worden. Im Gegensatz zu den frühen Experimenten mit flüssigem ^4He besitzen die Alkaliatome einen Spin ungleich null und somit mehrere interne Hyperfeinzustände. Es ist also möglich, eine Mischung von Bose-Einstein Kondensaten bestehend aus Atomen in verschiedenen internen Zustände herzustellen.

Erste Versuche, eine Mischung aus zwei unterschiedlichen Quantenflüssigkeiten zu realisieren, wurden 1953 von L. Guttman und J.R. Arnold [38] vorgenommen. Sie untersuchten eine Mischung aus ^4He mit ^6He . Jedoch konnte kein Auftreten eines superfluiden Verhaltens von ^6He festgestellt werden. Dies liegt in der kurzen Halbwertszeit von einer halben Sekunde des radioaktiven ^6He begründet. Trotzdem kam es zu einer Reihe von theoretischen Arbeiten zu diesem Themenkreis [39, 40, 41]. Seit der Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten mit atomaren Gasen gab es eine Vielzahl an theoretischen Überlegungen zu dem Verhalten von mehr-komponentigen Kondensaten [42, 43, 44, u.a.].

Für atomare Gase, welche in Magnetfallen gespeichert sind, gibt es die Beschränkung, nur Atome in den Zuständen fangen zu können, für welche das Magnetfeldminimum energetisch günstiger ist. Für die Atome mit Gesamtspin $3/2$, wie ^{87}Rb und ^{23}Na , sind dies die Zustände $|F=1, m_F=-1\rangle$, $|F=2, m_F=1\rangle$ sowie $|F=2, m_F=2\rangle$. Obwohl das gleichzeitige Speichern von mehr als einer Komponente instabil gegenüber hyperfeinändernden Stößen ist, konnten in der Arbeitsgruppe von E.A. Cornell einige bemerkenswerte Experimente mit Mischsystemen aus den Zuständen $|F=1, m_F=-1\rangle$ und $|F=2, m_F=2\rangle$, bzw. $|F=1, m_F=-1\rangle$ und $|F=2, m_F=1\rangle$ durchgeführt werden. So wurde eine Phasenseparation zwischen den unterschiedlichen Komponenten detektiert [45, 46] und Messungen der relativen Phase zwischen den Komponenten zeigten, dass trotz der räumlichen Trennung eine kohärente Dynamik beobachtet werden konnte [47]. Weiterhin wurde das Verhalten der mehr-komponentigen Kondensate auf eine resonante und nicht-resonante Kopplung zwischen den Komponenten hin untersucht. Diese Kopplung verbindet die externe Bewegung des Massenmittelpunktes mit dem internen Freiheitsgrad der kondensierten Atome und führt zu unterschiedlichen dynamischen Effekten [48, 49]. Die aktuellen Arbeiten [50, 51] dieser Arbeitsgruppe beschäftigen sich mit der Wechselwirkung der thermischen mit den kondensierten Atomen. Hierbei wird insbesondere eine Domänenbildung und ein durch Dekohärenz verursachtes Kühlen beobachtet.

Im Gegensatz zu Kondensaten, welche in magnetischen Potentialen gefangen sind, werden in optischen Fallen die Atome unabhängig von der Spineinstellung gespeichert. Somit stellt der Spin der Atome in diesen Fallen einen zusätzlichen Freiheitsgrad des Kondensates dar. Für Atome im Hyperfeinzustand $F=1$ liegt ein Spin-1 System vor, während eine Mischungen aus den Zuständen $|F=1, m_F=-1\rangle$ und $|F=2, m_F=1\rangle$ als ein effektives Spin-1/2 System verstanden werden kann. Der Unterschied zwischen den beiden Systemen liegt hauptsächlich darin begründet, dass sich in dem Spin-1 System die Besetzung in den einzelnen Spinzuständen ändern kann. Dies ermöglicht die Beobachtung von Spindynamik. Dabei bestimmen die Streueigenschaften des jeweiligen Atoms den Grundzustand für die Spinzusammensetzung des Systems und damit die magnetischen

Einleitung

Eigenschaften des kondensierten Gases. Entsprechend wird beispielsweise erwartet, dass es ohne externes Magnetfeld bei der ferromagnetischen Phase zu einer Domänenbildung und somit zu einer spontanen Symmetriebrechung kommt. In der Gruppe von W. Ketterle wurden die ersten Experimente zu diesem Thema mit ^{23}Na im Hyperfeinzustand $F=1$ realisiert. Dabei konnte gezeigt werden, dass dieses Spinor-Kondensat eine polare (anti-ferromagnetische) Wechselwirkung besitzt [52]. Weitergehende Untersuchungen mit Spinor-Kondensaten wurden zu meta-stabilen Zuständen [53] und zum Quantentunneln [54] durchgeführt.

Ausgehend von diesen wenigen Experimenten zu Kondensaten mit internem Freiheitsgrad war es Ziel dieser Arbeit, weitergehende grundlegende Studien zu Grundzuständen, Dynamik, Kohärenz und zu anderen Aspekten von Spinsystemen in Quantengasen durchzuführen und damit auch allgemein Aussagen über Magnetismus in Gasen treffen zu können. Im Rahmen der Arbeit konnten erstmals Experimente zu Spinor-Kondensaten mit Gesamtspin zwei realisiert werden. Dies stellt eine Erweiterung der bisher untersuchten Systeme dar und ermöglicht die Beobachtung einer komplexeren Dynamik. Ebenso ist eine Verbindung zu d-Wellen Supraleiter gegeben, da beide Systeme durch einen fünf-dimensionalen Ordnungsparameter beschrieben werden [55]. Für die Deutung der experimentellen Ergebnisse wurden Simulationen zur Bestimmung des Grundzustandes und zur Abhängigkeit der Spindynamik von dem Offsetmagnetfeld vorgenommen. Basierend auf den Überlegungen konnte eine Vielzahl von miteinander verknüpften Effekten verstanden und analysiert werden.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert :

Zunächst werden im folgenden Kapitel 2 die für die Arbeit relevanten theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation in Anlehnung an bekannte theoretische Modelle eingeführt. Hierbei wird in der quantenmechanischen Beschreibung insbesondere der Einfluss durch die atomare Wechselwirkung deutlich.

In Kapitel 3 wird die theoretische Beschreibung von Bose-Einstein Kondensaten mit dem Spin als internen Freiheitsgrad dargestellt. Insbesondere wird im Rahmen dieser Arbeit erstmals der Einfluss des quadratischen Zeeman-Effekts auf das atomare Ensemble mit Gesamtspin zwei diskutiert. Es werden die in dieser Arbeit berechneten Diagramme, welche in Abhängigkeit vom Gesamtspin der Atome, vom Magnetfeld und von der magnetischen Phase der Atome die energetisch günstigste Spineinstellung angeben, vorgestellt. Weiterhin werden die Ergebnisse einer Simulation der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii Gleichung mit Spinfreiheitsgrad analysiert und die Auswirkung eines magnetischen Offsetfeldes auf die Spindynamik herausgestellt.

Die für die geplanten Experimente aufgebaute Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten mit ^{87}Rb Atomen wird in Kapitel 4 beschrieben. Dabei wird auf die charakteristischen Eigenschaften des Experimentes und der erzielten Kondensate eingegangen.

Da die Kondensate innerhalb einer Magnetfalle erzeugt werden, stellt der Spin der Atome keinen Freiheitsgrad für das Kondensat dar. In Kapitel 5 wird die in das Experiment integrierte optische Falle vorgestellt. Insbesondere wird neben den Falleneigen-

schaften ein Kühlverfahren präsentiert, welches es erlaubt, den Kondensatanteil nach dem Umladen aus der Magnetfalle in die optische Falle zu erhöhen.

Nach einer kurzen Darstellung der Spinpräparation werden in dem für den experimentellen Teil der Arbeit zentralen Kapitel 6 die Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente zur Spindynamik dargestellt. Dabei handelt es sich um die ersten Messungen zur Spindynamik von Kondensaten im Hyperfeinzustand $F=2$. Die beobachteten unterschiedlichen Effekte führen zu einem komplexen Verhalten in der zeitlichen Entwicklung der Spinzusammensetzung. Da diese Effekte unterschiedlich mit der Zeit skalieren, können sie weitgehend getrennt voneinander diskutiert werden. Neben dem Grundzustand für die Spinzusammensetzung im Kondensat wird unter anderem die Entwicklung in die unterschiedlichen m_F Komponenten in Abhängigkeit von unterschiedlichen Anfangszuständen analysiert. Ebenso werden spinabhängige Verlustprozesse und die Auswirkung dieser auf die Spindynamik untersucht.

Abschließend werden im Ausblick weitere Experimente vorgeschlagen, mit denen neue Aspekte von mehr-komponentigen Bose-Einstein Kondensaten untersucht werden können und die zu einem noch weitergehenden Verständnis dieser beitragen können.

Bose-Einstein Kondensation

In einem Gas aus identischen Bosonen kommt es unterhalb einer kritischen Temperatur zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustandes eines das System begrenzenden externen Potentials. Die Grundlage für das Auftreten der so genannten Bose-Einstein Kondensation von massebehafteten Bosonen ist deren Verteilungsfunktion. Diese Statistik für ununterscheidbare Teilchen wurde 1924 von Bose für die Beschreibung der Schwarzkörperstrahlung aufgestellt [56] und von Einstein auf massebehaftete Teilchen erweitert [3]. Sie besitzt die folgende Form :

$$N_i = \left(\exp \left(\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T} \right) - 1 \right)^{-1}, \quad (2.1)$$

wobei N_i die mittlere Besetzung des Zustandes mit der Energie ϵ_i , k_B die Boltzmannkonstante und μ das chemische Potential angeben. Dieses ist in der großkanonischen Beschreibung eine Funktion der Teilchenzahl N und der Temperatur T . Das chemische Potential tritt in der Verteilungsfunktion auf, da die Anzahl von massebehafteten Teilchen im Gegensatz zu Photonen eine Erhaltungsgröße ist. Die Gesamtteilchenzahl ist bestimmt über die Summe der Besetzung der einzelnen Energieniveaus

$$N = \sum_i N_i. \quad (2.2)$$

Betrachtet man hohe Temperaturen, so verliert die Quantennatur der Statistik ihre Bedeutung. Hier nimmt das chemische Potential hohe negative Werte an [57]. Daher ist die mittlere Besetzung aller Zustände kleiner eins und die Verteilungsfunktion geht in die Boltzmannverteilung über.

Bei tiefen Temperaturen werden die Quantenphänomene ab einer bestimmten Temperatur deutlich. Beim Absenken der Temperatur steigt der Wert des chemischen Potentials an und nähert sich dem niedrigsten möglichen Energiewert ϵ_0 . Dieser Wert kann

von dem chemischen Potential nicht überschritten werden, da sonst die Besetzung des niedrigsten Energieniveaus einen negativen Wert annehmen müsste. Beim Annähern des chemischen Potentials an diesen Wert steigt die Besetzung des Grundzustandes immer mehr an. Gilt $\mu = \epsilon_0$, so wird der Grundzustand von einem makroskopischen Anteil der Bosonen im System besetzt. Die Temperatur, ab der die Besetzung des Grundzustandes makroskopische Werte annimmt, wird kritische Temperatur T_c genannt und ergibt sich aus den Gleichungen 2.1 und 2.2. Die Besonderheit der Bose-Einstein Kondensation ist jedoch nicht, dass ab einer bestimmten Temperatur der Grundzustand des Systems makroskopisch besetzt wird, sondern dass dies bei einer Temperatur auftritt, bei der die mittlere Energie eines Teilchens wesentlich größer ist als der Energieabstand $\epsilon_1 - \epsilon_0$. Dieser Umstand erlaubt es auch im nächsten Abschnitt für die Bestimmung der grundlegenden thermodynamischen Größen von der Summation über die einzelnen Energieniveaus auf die Integral-Darstellung überzugehen [58, 59]. Im letzten Abschnitt 2.2 dieses Kapitels werden anschließend die fundamentalen theoretischen Aspekte der quantenmechanischen Beschreibung zusammengefasst, welche auch im Weiteren für die Beschreibung der Kondensate mit Spinfreiheitsgrad benötigt werden.

2.1 Thermodynamische Betrachtungen zur Bose-Einstein Kondensation

Im Folgenden werden die Eigenschaften von nicht wechselwirkenden Bosonen in einem anisotropen harmonischen Potential betrachtet. Es werden die Übergangstemperatur zur Quantenentartung und die relative Besetzung des Grundzustandes in Abhängigkeit der Temperatur berechnet. Die Ergebnisse lassen sich direkt zur Beschreibung der Experimente heranziehen, da die Fallenpotentiale in guter Näherung harmonisch sind. In semiklassischer Näherung geht die Summation aus Gleichung 2.1 in ein Integral über und hat die Form :

$$N = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) n(\epsilon) . \quad (2.3)$$

Die Zustandsdichte für ein harmonisches Potential ist durch

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar\bar{\omega}^3} \quad (2.4)$$

bestimmt [57] mit $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$. Bei dieser Näherung wird der Grundzustand nicht mit berücksichtigt, kann aber gesondert mit einbezogen werden. Vernachlässigt man die Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators, so kann das chemische Potential maximal den Wert null annehmen. Die kritische Temperatur T_c ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} N(T, \mu = 0) &= \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) (\exp[\epsilon/(k_B T)] - 1)^{-1} \\ &= 2\zeta(3) \frac{1}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3} \cdot (k_B T)^3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Bose-Einstein Kondensation

wobei ζ die Riemannsche Zeta Funktion ist. T_c ergibt sich somit zu

$$k_B T_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}} \approx 0,94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}. \quad (2.6)$$

Bei der kritischen Temperatur kann die Verteilung gerade noch alle Teilchen aufnehmen. Senkt man die Temperatur weiter ab, so ist dies nicht mehr der Fall. Der restliche Anteil der Bosonen muss den bis jetzt nicht berücksichtigten Grundzustand bevölkern. Man sieht, dass die Übergangstemperatur linear mit der Fallenfrequenz $\bar{\omega}$ skaliert. Ein stärker Einschluss führt also ebenso wie eine größere Teilchenzahl zu höheren Übergangstemperaturen. Daher wird bei der experimentellen Umsetzung auf diese beiden Aspekte besonders geachtet. Ebenso kann an Gleichung 2.6 abgelesen werden, dass üblicherweise $k_B T_c \gg \hbar \bar{\omega}$ gilt. Dies ist die Voraussetzung für die vorgenommene Näherung.

Unterhalb der Übergangstemperatur ist die Anzahl der Teilchen in den angeregten Zuständen durch Gleichung 2.5 bestimmt, wobei dieses Ergebnis unabhängig von der Gesamtteilchenzahl im System ist. Diese ergibt sich aus der Summe der thermischen Teilchen und der Teilchen, die den Grundzustand besetzen :

$$N_{ges.} = N_{therm.} + N_0. \quad (2.7)$$

Hiermit und mit der Kenntnis aus Gleichung 2.5, dass die Anzahl der thermischen Atome proportional zu T^3 ist, folgt die relative Besetzung des Grundzustands in Abhängigkeit von der Temperatur. Es gilt für harmonische Potentiale [60]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.8)$$

Der Kondensatanteil steigt also nach anfänglichem Unterschreiten der kritischen Temperatur schnell an, so dass zum Beispiel bei $T = 0,5 \cdot T_c$ schon 87,5% der Teilchen den Grundzustand bevölkern. Die obige Berechnung der relativen Besetzung des Kondensates für ein Kastenpotential liefert einen Exponenten von 3/2 statt 3 in Gleichung 2.8. Neben der einfacheren experimentellen Umsetzung einer harmonischen Fallengeometrie gegenüber einem Kastenpotential führt ein harmonisches Potential weiterhin zu dem Vorteil eines schnelleren Anstiegs des Kondensatanteils nach Unterschreiten der kritischen Temperatur.

Eine alternative Beschreibung der Bose-Einstein Kondensation liefert die Betrachtung der Phasenraumdichte [61]. Dies ist die Anzahl der Teilchen in dem Volumen eines Quaders mit der Seitenlänge der thermischen de Broglie Wellenlänge

$$\lambda(T) = (2\pi\hbar^2/(m k_B T))^{0.5}. \quad (2.9)$$

Bestimmt man über Gleichung 2.3 die Dichteverteilung als Funktion des Ortes, so gilt im Fallenzentrum $n(\vec{r}_{min}, T_c) = \zeta(3/2) \cdot \lambda^{-3}(T_c)$. Für die Phasenraumdichte gilt also:

$$n(\vec{r}_{min}, T_c) \cdot \lambda^3(T_c) = \zeta(3/2) \approx 2,612. \quad (2.10)$$

2.2. Quantenmechanische Beschreibung

Anschaulich bedeutet dies, dass der Grundzustand anfängt makroskopisch besetzt zu werden, falls der mittlere Abstand der Atome in die Größenordnung der thermischen de Broglie Wellenlänge kommt, oder im Bild der Wellenfunktionen gesprochen, wenn die Wellenfunktionen der einzelnen Bosonen anfangen sich zu überlappen.

Thermodynamische Korrekturen für die in diesem Abschnitt angegebenen Größen, welche die endliche Teilchenzahl und die Wechselwirkung der Atome mit berücksichtigen, sind in der Größenordnung von einigen Prozent und spielen somit in der thermodynamischen Beschreibung nur eine untergeordnete Rolle.

Qualitativ lässt sich die Änderung in der kritischen Temperatur durch die Wechselwirkung wie folgt verstehen. Im Falle einer repulsiven Wechselwirkung zwischen den Atomen kommt es verglichen mit wechselwirkungsfreien Teilchen zu einer Verringerung der Dichte in dem Fallenpotential. Die Phasenraumdichte wird also durch eine repulsive Wechselwirkung verringert und die kritische Temperatur nimmt einen niedrigeren Wert an. Eine quantitative Beschreibung dieses Effektes befindet sich in [62].

Auch die endliche Teilchenzahl führt zu einer Änderung in dem Phasenübergang. Während es in der Gleichung 2.8 bei der kritischen Temperatur sprunghaft zu einer Besetzung des Grundzustandes kommt, ist dieser Übergang bei einer endlichen Teilchenzahl glatt. Jedoch ist dieser Übergangsbereich sehr klein, so dass immer noch von einem Phasenübergang gesprochen werden kann. Durch numerische Berechnungen konnte gezeigt werden, dass der Einfluss der endlichen Teilchenzahl nur für geringe Teilchenzahlen bis 10^4 einen nicht vernachlässigbaren Einfluss hat [63].

2.2 Quantenmechanische Beschreibung

Im Gegensatz zu den thermodynamischen Größen ist die atomare Wechselwirkung in der quantenmechanischen Betrachtungsweise eines realen atomaren bosonischen Gases ein essentieller Bestandteil, ohne die keine Aussagen über die Eigenschaften der Bose-Einstein Kondensate getroffen werden können. Im Gegensatz zu flüssigem Helium, wo die starke Wechselwirkung genaue theoretische Beschreibungen erschwert, kann im Fall verdünnter atomarer Gase diese Wechselwirkung theoretisch gut beschrieben werden. Der Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung für ein Ensemble aus Bosonen in einem externen Potential V_{ext} und mit angesprochenem Wechselwirkungspotential $V(\vec{r} - \vec{r}')$ lautet [60]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \int d^3\vec{r} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \\ & + \frac{1}{2} \int \int d^3\vec{r} d^3\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei stehen $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t)$ und $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eines Bosons am Ort \vec{r} zur Zeit t . Die Zeitentwicklung des Feldoperators $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ wird durch

Bose-Einstein Kondensation

die Heisenberg-Gleichung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\vec{r}, t) &= [\hat{\Psi}(\vec{r}, t), \hat{H}] \\ &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + \int d^3\vec{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r}' - \vec{r}) \hat{\Psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

beschrieben, wobei die Kommutatorregel für Bosonen $[\hat{\Psi}(\vec{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}', t)] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ verwendet wird. Für die Darstellung des Zwei-Körper Wechselwirkungspotentials genügt es bei niedrigen Temperaturen die s-Wellenstreulänge a_s zu berücksichtigen, da die anderen Stoßkanäle ausgefroren sind. Somit lässt es sich schreiben als [57]

$$V(\vec{r}' - \vec{r}) = g \delta(\vec{r}' - \vec{r}) \quad \text{mit} \quad g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (2.13)$$

2.2.1 Gross-Pitaevskii Gleichung

In der von Bogoliubov [64] entwickelten *mean-field* Beschreibung eines schwach wechselwirkenden Bose-Gases wird der Feldoperator mit $\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t) + \hat{\delta}(\vec{r}, t)$ identifiziert. Dabei beschreibt die komplexe Funktion $\Psi(\vec{r}, t)$ den Erwartungswert des Feldoperators und $\hat{\delta}(\vec{r}, t)$ die Schwankungen des Systems um diesen Mittelwert. Es wird angenommen, dass das Kondensat durch das *mean-field* beschrieben wird und die Schwankungen nur zu kleinen Korrekturen führen, die in erster Näherung vernachlässigt werden können. Somit ergibt sich für die Beschreibung von Bose-Einstein Kondensaten aus Gleichung 2.12 unter Verwendung von 2.13 die Gross-Pitaevskii Gleichung [65, 66]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + g|\Psi(\vec{r}, t)|^2 \right) \Psi(\vec{r}, t). \quad (2.14)$$

Die Besonderheit dieser Schrödingergleichung ist die durch die atomare Wechselwirkung verursachte Nichtlinearität. Diese kann in Experimenten ausgenutzt werden, um zum Beispiel Solitonen [26, 25], Vortices [67, 28] oder Vierwellenmischung [20] in verdünnten atomaren Gasen zu realisieren. Mit dem Separationsansatz $\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) \cdot \exp(-i\mu t/\hbar)$ ergibt sich die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung :

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\vec{r}) + g|\varphi(\vec{r})|^2 \right) \varphi(\vec{r}) = \mu \varphi(\vec{r}). \quad (2.15)$$

Hierbei gibt das chemische Potential μ die benötigte Energie an, um ein Teilchen dem Kondensat hinzuzufügen. Die Anzahl der Bosonen im Kondensat ist durch das Quadrat der Wellenfunktion bestimmt, da $|\varphi(\vec{r})|^2 = n(\vec{r})$ die Dichte der Kondensatwellenfunktion beschreibt. Das Vorzeichen des Wechselwirkungsterms ist durch die Streulänge a_s gegeben. Bei ^{87}Rb ist diese positiv. Das bedeutet, es liegt eine repulsive atomare Wechselwirkung vor. Diese Eigenschaft wirkt stabilisierend auf das Bose-Einstein Kondensat, da die Wechselwirkung zu einer Abnahme der Dichte führt und somit das Verhältnis aus Drei-Körper Verlustprozessen zu elastischen Zwei-Körper Stößen verringert wird. Durch

eine attraktive Wechselwirkung wird die Dichte im Kondensat hingegen erhöht, so dass der Verlustkanal mit steigender Teilchenzahl zunimmt. Dieser Effekt führt zu einer maximalen Anzahl von Atomen, bei der ein Kondensat mit attraktiver Wechselwirkung noch stabil ist [68, 69].

Die Ausheillänge

Eine experimentell wichtige Größe ist die Länge, auf der die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung Dichteänderungen glättet. Die Kondensatdichte kann nämlich keine Unstetigkeit aufweisen. Dies lässt sich verstehen, wenn man den Beitrag der kinetischen Energie zur Gross-Pitaevskii Gleichung schreibt als $\frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\sqrt{n}|^2$. Bei einer Unstetigkeit in der Dichtefunktion würde der Quantendruck divergieren. Der minimale Abstand ξ , über dem eine Dichteänderung von Null auf n möglich ist, wird Ausheillänge genannt. Sie lässt sich bestimmen, indem man die Anteile aus kinetischer Energie eines Teilchens in diesem Bereich $\hbar^2/(2m\xi^2)$ und Wechselwirkungsenergie $4\pi\hbar^2 a_s n/m$ gleichsetzt :

$$\xi = 1/\sqrt{8\pi n a_s} . \quad (2.16)$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit realisierten Kondensate mit ^{87}Rb ist die Ausheillänge kleiner als ein Mikrometer. Bei der Betrachtung der Grenzen von Spindomänen in Spinor-Kondensaten wird das Konzept der Ausheillänge wieder aufgegriffen (siehe Abschnitt 3.2.4).

2.2.2 Thomas-Fermi Näherung

Die Gross-Pitaevskii Gleichung 2.15 lässt sich auf Grund der Nichtlinearität im Allgemeinen nicht analytisch bestimmen, so dass entweder eine numerische Behandlung oder eine Näherung nötig ist. Falls die Wechselwirkung repulsiv und deren Anteil wesentlich größer als die kinetische Energie ist ($N|a_s| \gg \sqrt{\hbar/(m\bar{\omega})}$), so kann in der Gross-Pitaevskii Gleichung der Beitrag der kinetischen Energie vernachlässigt werden. Diese Bedingung ist bei den verwendeten Fallenfrequenzen ab einer Teilchenzahl größer 10^4 sehr gut erfüllt. Die Dichte in der Thomas-Fermi Näherung berechnet sich zu :

$$n(\vec{r}) = \varphi^2(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\mu - V_{ext}(\vec{r})}{g} & \text{für } \mu - V_{ext}(\vec{r}) > 0 , \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (2.17)$$

Die Radien der Wellenfunktion lassen sich direkt aus $\mu = V_{ext}(\vec{r}^*)$ bestimmen :

$$r_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} , \quad i = x, y, z . \quad (2.18)$$

Für die Berechnung der Werte muss noch das chemische Potential bekannt sein. Die Normierungsbedingung von φ liefert den Zusammenhang zwischen dem chemischen Potential und der Teilchenzahl. In harmonischen Fallen gilt :

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(a_s N \sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega} . \quad (2.19)$$

Bose-Einstein Kondensation

Somit liefert die Thomas-Fermi Näherung wichtige Ergebnisse über die Dichteverteilung von Bose-Einstein Kondensaten. Diese bilden die Grundlage bei der Bestimmung der Ensembleparameter aus Flugzeitbildern.

Es sei noch erwähnt, dass die Näherung nur für Bereiche mit hoher Dichte gilt. Insbesondere an den Rändern des Kondensates wird die Dichteverteilung also nicht korrekt beschrieben. Deutlich macht dies auch, dass dort die Dichteverteilung nicht differenzierbar ist und somit der Quantendruck nicht ermittelt werden kann.

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

Im Gegensatz zu dem superfluiden ^4He , welches keinen Spinfreiheitsgrad besitzt, ist dieser bei den typischerweise in Experimenten mit schwach wechselwirkenden Gasen verwendeten Atomen vorhanden. So kann beispielsweise ein ^{87}Rb Atom im Hyperfeinzustand $F=1$ die drei Spineinstellungen $|m_F = -1\rangle$, $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ annehmen. Werden die Atome in einem Potential gefangen, welches den selben Einschluss für alle Spinkomponenten bietet, so stellt der Spin einen Freiheitsgrad für das Kondensat dar. Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen des vorherigen Kapitels werden im Folgenden die Änderungen in der Beschreibung der Kondensate sowie neue Effekte, die im Spinfreiheitsgrad begründet liegen, dargestellt. Insbesondere werden der Einfluss von Magnetfeldern auf den Grundzustand in der Spinzusammensetzung der Atome und die Dynamik in der Spinentwicklung untersucht. In beiden Fällen stellt sich heraus, dass dem in den meisten Veröffentlichungen vernachlässigten quadratischen Zeeman-Effekt eine entscheidende Rolle zukommt.

3.1 Grundlagen

Da die experimentell in Magnetfallen erzeugten Kondensate in der Regel nur aus einer Spinkomponente bestehen, werden diese Kondensate durch eine skalare Wellenfunktion $\varphi(\vec{r})$ beschrieben. Bei Kondensaten mit Spinfreiheitsgrad, auch Spinor-Kondensate genannt, muss diese ein-komponentige Wellenfunktion $\varphi(\vec{r})$ durch einen Vektor $\vec{\varphi}(\vec{r})$ ersetzt werden. Die Anzahl der Komponenten dieses Vektors hängt von dem Hyperfeinzustand F der Atome ab und beträgt $2F+1$. Die Komponenten beschreiben die Besetzung der verschiedenen magnetischen Unterzustände.

Im Weiteren werden kleine magnetische Felder im Bereich von einem Gauss vorausgesetzt, so dass die Energie der atomaren Zustände durch den Zeeman-Effekt be-

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

schrieben wird und F noch eine gute Quantenzahl ist. Gleichzeitig definiert das magnetische Offsetfeld eine Quantisierungsachse für die Spinkomponenten. Im Unterschied zu reinen mehr-komponentigen Kondensaten, wie zum Beispiel Mischungen aus Atomen in den Hyperfeinzuständen $|F = 1, m_F = -1\rangle$ und $|F = 2, m_F = +1\rangle$ [45], wo die Amplituden der Komponenten zeitlich konstant sind, können diese bei Spinor-Kondensaten zeitlich variieren. Ursache hierfür sind spinändernde Stöße wie zum Beispiel $2 \times |m_F = 0\rangle \leftrightarrow |m_F = -1\rangle + |m_F = +1\rangle$. Die Wechselwirkung in zweiter Quantisierung wird durch [70]

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \frac{4\pi\hbar^2}{2m} \sum_{i,j,k,l=-F}^F a_{ij,kl} \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}_1) \hat{\Psi}_j^\dagger(\vec{r}_2) \hat{\Psi}_k(\vec{r}_1) \hat{\Psi}_l(\vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (3.1)$$

beschrieben. Der Parameter $a_{ij,kl}$ gibt die Streulänge für einen Stoß zwischen zwei Teilchen an. Dabei bezeichnen die Indizes k und l die m_F Zustände der einlaufenden Atome und i und j die m_F Zustände der auslaufenden Atome (siehe Abbildung 3.1). In den Fällen, in denen $a_{ij,kl}$ einen Stoßprozess beschreibt, welcher den Gesamtspin nicht erhält und daher verboten ist, nimmt die Streulänge den Wert null an. Die Anzahl der notwendigen Parameter $a_{ij,kl}$ zur Beschreibung dieser Wechselwirkung wird durch die Invarianz gegenüber einem Teilchenaustausch ($a_{ij,kl} = a_{ji,kl}$), die Invarianz gegenüber der Zeitumkehr ($a_{ij,kl} = a_{lk,ij}$) und die Rotationsinvarianz begrenzt [70].

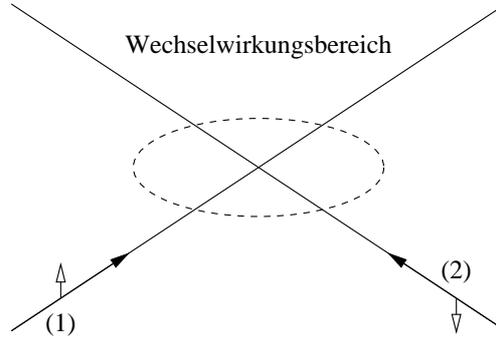


Abbildung 3.1: Die Abbildung skizziert einen Stoßprozess zwischen zwei Atomen. Befinden sich die beiden Atome anfänglich jeweils in dem Zustand $|F = 1, m_F = +1\rangle$, ist der Gesamtspin des Paares während der Wechselwirkung zwei und die Spineinstellungen der Atome können sich nicht ändern. Stoßen jedoch zwei Teilchen in den Zuständen $|F = 1, m_F = 0\rangle$ miteinander, so kann es zu einer Spinänderung durch die Wechselwirkung kommen. Findet diese statt, so befinden sich beide Teilchen anschließend in einer Superposition der Zustände $|F = 1, m_F = -1\rangle$ und $|F = 1, m_F = +1\rangle$. Dabei entsteht die Superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}(|F = 1, m_F = -1\rangle + |F = 1, m_F = +1\rangle)$ bei einem Stoß mit Gesamtspin 2 und die Superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}(|F = 1, m_F = -1\rangle - |F = 1, m_F = +1\rangle)$ bei einem Stoß mit Gesamtspin 0.

Im Fall von s-Wellenstreuung können zwei Bosonen mit dem Hyperfeinspin $F=1$ zu einem Zustand mit Gesamtspin $\mathcal{F} = 0$ oder $\mathcal{F} = 2$ koppeln. Der Zustand mit Gesamt-

3.2. Theoretische Beschreibung für Spin 1 Teilchen

spin $\mathcal{F} = 1$ ist verboten, da die Wellenfunktion symmetrisch unter dem Austausch der Atome sein muss. Die interatomare Wechselwirkung ist unabhängig von der Ausrichtung des Gesamtspins und wird allein durch dessen Betrag festgelegt. Unter Verwendung der beschriebenen Einschränkungen reduziert sich das Wechselwirkungspotential aus Gleichung 3.1 zu [71, 72]

$$V_{int}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \sum_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}} \mathcal{P}_{\mathcal{F}}. \quad (3.2)$$

Die Streulänge $a_{\mathcal{F}}$ beschreibt einen Stoß zwischen zwei Atomen mit Gesamtspin \mathcal{F} und $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ ist der Projektionsoperator auf einen solchen Stoß.

3.2 Theoretische Beschreibung für Spin 1 Teilchen

Die Berechnungen und die Interpretation zur interatomaren Wechselwirkung vereinfachen sich, wenn die Projektoren durch Drehimpulsoperatoren ausgedrückt werden. Zunächst erfolgt eine Beschreibung für Atome im Hyperfeinzustand $F=1$, da dort die Formeln übersichtlicher sind und die Erweiterung für Atome in $F=2$ auf diesen aufbaut. Die Projektoren \mathcal{P}_0 und \mathcal{P}_2 können durch die Spinmatrizen $\vec{\mathcal{S}} = (\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y, \mathcal{S}_z)^T$ ausgedrückt werden [71, 72]. Da diese Umrechnung elementar für die weitere Beschreibung ist, wird sie kurz skizziert. Alle möglichen Stöße zwischen zwei Teilchen mit Spin eins werden durch die Projektoren mit Gesamtspin null und zwei beschrieben, daher gilt [71]

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_2 = 1. \quad (3.3)$$

Weiterhin folgt nach den Regeln der Drehimpulskopplung für den Gesamtspin \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \cdot (\mathcal{F} + 1) &= \vec{\mathcal{S}}_1^2 + \vec{\mathcal{S}}_2^2 + 2\vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2 \\ &= 2 + 2 + 2\vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei $\vec{\mathcal{S}}_i$ den Spin des i -ten Teilchen beschreibt. Somit nimmt das Skalarprodukt $\vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2$ bei einem Stoß mit Gesamtspin $\mathcal{F} = 0$ den Wert -2 und bei einem Stoß mit Gesamtspin $\mathcal{F} = 2$ den Wert 1 an. Man gelangt also unter Ausnutzung der Gleichung 3.3 zu den folgenden Gleichungssystemen :

$$\mathcal{F} = 0 : \mathcal{P}_0 = 1 = \alpha + \beta \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2 = \alpha - 2\beta, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F} = 2 : \mathcal{P}_0 = 0 = \alpha + \beta \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2 = \alpha + \beta,$$

$$\mathcal{F} = 0 : \mathcal{P}_2 = 0 = \gamma + \delta \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2 = \gamma - 2\delta, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F} = 2 : \mathcal{P}_2 = 1 = \gamma + \delta \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2 = \gamma + \delta.$$

Aus der Lösung dieser Gleichungen erhält man die Darstellung der Projektoren durch die Drehimpulsoperatoren :

$$\mathcal{P}_0 = \frac{1}{3}(1 - \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{3}(2 + \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2). \quad (3.7)$$

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

Insgesamt lassen sich die Wechselwirkungsbeiträge somit schreiben :

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_0}{m} \mathcal{P}_0 + \frac{4\pi\hbar^2 a_2}{m} \mathcal{P}_2 = g_0 + g_2 \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2, \quad (3.8)$$

mit

$$g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{2a_2 + a_0}{3} \quad \text{und} \quad g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{a_2 - a_0}{3} \quad (3.9)$$

und den Spinmatrizen [73]

$$\mathcal{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der spinabhängige Anteil der Wechselwirkung wird nun allein durch den Term $g_2 \vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2$ beschrieben, während g_0 die Wechselwirkungsenergie für alle Stöße unabhängig von der Spineinstellung angibt. In zweiter Quantisierung lautet der Hamiltonoperator :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \int d^3\vec{r} \left[\hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext.}(\vec{r}) \right) \hat{\Psi}_i(\vec{r}) \right. \\ & + \frac{1}{2} g_0 \hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_j^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_i(\vec{r}) \hat{\Psi}_j(\vec{r}) \\ & \left. + \frac{1}{2} g_2 \left(\hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) (\mathcal{S}_\alpha)_{i,j} \hat{\Psi}_j(\vec{r}) \right) \cdot \left(\hat{\Psi}_k^\dagger(\vec{r}) (\mathcal{S}_\alpha)_{k,l} \hat{\Psi}_l(\vec{r}) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei der Index α die Werte x, y und z annimmt und über gleiche Indizes summiert wird. Der Wechselwirkungsanteil dieses Hamiltonoperators setzt sich aus drei unterschiedlichen Beiträgen zusammen. Diese sind zum einen die Wechselwirkung mit gleichen Teilchen, die Wechselwirkung von Teilchen in unterschiedlichen m_F Komponenten und ein Stoß welcher zu einer Änderung der Spineinstellungen führt. Der Wechselwirkungsanteil des Hamiltonoperators lautet [70]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left[(g_0 + g_2) \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_1 + g_0 \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0 + (g_0 + g_2) \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_{-1} \hat{\Psi}_{-1} \right. \\ & + 2 \left((g_0 + g_2) \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_0 + (g_0 - g_2) \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_{-1} + (g_0 + g_2) \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_{-1} \right) \\ & \left. + 2g_2 \left(\hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_{-1} + \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Gleichung 3.11 enthält in unterschiedlichen Zeilen die verschiedenen Wechselwirkungsterme. Aus dieser Gleichung kann für jede mögliche Wechselwirkung zwischen zwei Komponenten die effektive Streulänge abgelesen werden. Der Wechselwirkungsparameter g_0 tritt bei allen Prozessen, die nicht zu einer Änderung in der Spinzusammensetzung führen, mit dem selben Vorzeichen auf. Im Gegensatz hierzu liefert der Parameter g_2 in Abhängigkeit von der Spineinstellung einen unterschiedlichen Energiebeitrag. Der

3.2. Theoretische Beschreibung für Spin 1 Teilchen

Faktor zwei vor den Wechselwirkungen in den unteren beiden Zeilen ist darauf zurückzuführen, dass es sich hier um unterscheidbare Teilchen handelt. In einem System von Atomen im Hyperfeinzustand $F=1$ gibt es nur zwei mögliche Stoßprozesse, welche zu einer Änderung in der Spinzusammensetzung führen : $\hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_1 \hat{\Psi}_{-1}$, bzw. $\hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_{-1}^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_0$. Alle anderen Stoßprozesse, die zu einer Änderung in der Spinzusammensetzung führen würden, sind nicht erlaubt, da diese eine Änderung des Gesamtspins zur Folge hätten.

3.2.1 *mean-field* Beschreibung

In der *mean-field* Beschreibung von Spinor-Kondensaten wird davon ausgegangen, dass alle Atome den gleichen Zustand

$$\vec{\phi}(\vec{r}, t) = \phi_1(\vec{r}, t)|1, 1\rangle + \phi_0(\vec{r}, t)|1, 0\rangle + \phi_{-1}(\vec{r}, t)|1, -1\rangle \quad (3.12)$$

besetzen. Jedes einzelne Atome befindet sich also in einer Superposition mehrerer Zustände. Die Wellenfunktion $\vec{\varphi}(\vec{r}, t)$ kann daher als Produkt geschrieben werden :

$$\vec{\varphi}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{\zeta}, t) = \prod_{i=1}^N \vec{\phi}(\vec{r}_i, \vec{\zeta}, t), \quad (3.13)$$

wobei $\vec{\zeta}$ die Anteile der Spinkomponenten darstellt. In der *mean-field* Beschreibung wird der Feldoperator $\hat{\Psi}$ also wieder durch seinen Mittelwert $\vec{\varphi}$ genähert (entsprechend Abschnitt 2.2.1). Da dieser nun aus mehreren Komponenten besteht, kann er folgendermaßen dargestellt werden :

$$\vec{\varphi}(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)} \vec{\zeta}(\vec{r}, t), \quad (3.14)$$

wobei $n(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(\vec{r}, t)|^2$ die Dichte der Teilchen unabhängig von der Spineinstellung beschreibt. Damit die Teilchenzahl über die Dichte bestimmt ist, muss für alle \vec{r} und zu jedem Zeitpunkt $\vec{\zeta}^*(\vec{r}, t)\vec{\zeta}(\vec{r}, t) = 1$ gelten. Das Energiefunktional, welches aus Gleichung 3.10 abgeleitet werden kann, besitzt die folgende Form :

$$\begin{aligned} E - \mu N = & \int d^3\vec{r} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla \sqrt{n(\vec{r})} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} n(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}(\vec{r}) \right. \\ & \left. + V_{ext} n(\vec{r}) + \frac{n^2(\vec{r})}{2} \left(g_0 + g_2 \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_{\alpha} \vec{\zeta}(\vec{r}) \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_{\alpha} \vec{\zeta}(\vec{r}) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mit Hilfe des Variationsansatzes [60] $\delta E / \delta \vec{\varphi}^* = i\hbar \partial_t \vec{\varphi}$ ergibt sich die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{\varphi}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g_0 n(\vec{r}, t) + g_2 \mathcal{S}_{\alpha} \vec{\varphi}(\vec{r}, t) \vec{\varphi}^*(\vec{r}, t) \mathcal{S}_{\alpha} \right) \vec{\varphi}(\vec{r}, t). \quad (3.16)$$

Basierend auf den Gleichungen 3.15 und 3.16 werden im Weiteren die magnetischen Grundzustände für die Spineinstellung und die Entwicklung der Spinkomponenten berechnet.

3.2.2 Grundzustände ohne Magnetfeld

Die Energie des durch Gleichung 3.15 beschriebenen Systems ist abhängig von der Spinzusammensetzung. Welche Spinnischung den Grundzustand angibt, wird durch das Vorzeichen von g_2 bestimmt, da alle anderen Beiträge spinunabhängig sind.

Ist g_2 negativ, so wird die Energie minimiert, falls $\langle \vec{S} \rangle$ maximiert wird. Dies ist zum Beispiel dann erreicht, wenn sich alle Atome im Zustand $|m_F = +1\rangle$ befinden. Man spricht daher von einer ferromagnetischen Wechselwirkung. Alle Drehungen dieses Zustandes im Spin-Raum ergeben den gleichen Energiewert, da die interatomare Wechselwirkung invariant unter diesen Drehungen ist. Der Grundzustand ist also entartet. Ein negativer Wert von g_2 ist nach Gleichung 3.9 gleichbedeutend mit $a_0 > a_2$. Falls alle Atome sich im Zustand $|m_F = +1\rangle$ befinden, so gibt es nur Stöße mit einem Gesamtspin $\mathcal{F} = 2$ und keinen Beitrag mehr durch einen Stoß mit $\mathcal{F} = 0$. Die Wechselwirkungsenergie wird somit allein durch die Streulänge a_2 bestimmt. Auch die Dichteverteilung in der Thomas-Fermi Näherung ergibt sich allein durch diese Streulänge. Entsprechend Gleichung 2.17 berechnet sie sich durch $n(\vec{r}) = (\mu - V_{ext.})m/(4\pi\hbar^2 a_2)$.

Gilt $g_2 > 0$, so liefern die Zustände mit $\langle \vec{S} \rangle = 0$ einen minimalen Energiewert. Eine mögliche Realisierung ist die Besetzung des Zustandes $|m_F = 0\rangle$. Diese Wechselwirkung heißt polar (oder anti-ferromagnetisch). Die Wechselwirkungsenergie stammt in diesem Fall allein von der spinunabhängigen Wechselwirkung g_0 . In der Thomas-Fermi Näherung muss im Vergleich zu der ferromagnetischen Wechselwirkung a_2 durch $(a_0 + 2a_2)/3$ ersetzt werden. Die Beiträge stammen im polaren Grundzustand also aus Stößen mit Gesamtspin null und zwei.

Berechnungen mit Methoden der Vielteilchentheorie liefern für sehr kleine Magnetfelder einen anderen Grundzustand für die polare Phase, welcher nicht als Produktzustand geschrieben werden kann [74]. Die Höhe dieses Magnetfeldes, bei dem eine Abweichung noch zu beachten ist, hängt unter anderem von den Stoßparametern und der Dichte ab [75]. Eine Abschätzung mit experimentellen Parametern liefert Werte für das Magnetfeld, unterhalb dessen der nicht-Produktzustand energetisch günstiger ist, die im Bereich kleiner 10^{-7}G liegen. Da die in den Experimenten verwendeten typischen Offsetfelder im Bereich einiger hundert Milligauss lagen, liefert der *mean-field* Ansatz auch bei polarer Wechselwirkung den korrekten Grundzustand.

3.2.3 Mischbarkeit von m_F Zuständen

Präpariert man ein Kondensat in zwei unterschiedlichen Zuständen, so stellt sich die Frage, ob die Energie bei einer örtlichen Überlagerung oder bei einer Trennung der Komponenten minimal ist. Dies kann durch eine Betrachtung der Wechselwirkungsenergiedichte in *mean-field* Näherung beantwortet werden [42, 43]. Die Wechselwirkungsenergiedichte im Kondensat wird durch

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}(g_a n_a^2 + g_b n_b^2 + 2g_{ab} n_a n_b) \quad (3.17)$$

beschrieben, wobei g_i den Wechselwirkungsparameter der Komponente i , bzw. der Mischung bezeichnet und n_i die zugehörige Dichte. Setzt man eine feste Teilchenzahl

3.2. Theoretische Beschreibung für Spin 1 Teilchen

und ein festes Volumen für das Kondensat voraus, so erhält man die Wechselwirkungsenergien für die beiden Fälle. Mischen die Komponenten, so ergibt sich eine Energie von :

$$E_{mix} = \frac{N^2}{2V}(g_a + g_b + 2g_{ab}), \quad (3.18)$$

und im Fall einer Separation erhält man :

$$E_{sep} = \frac{N^2}{2} \left(\frac{g_a}{V_a} + \frac{g_b}{V_b} \right), \quad (3.19)$$

mit $V = V_a + V_b$. Die Volumina V_a und V_b können bestimmt werden, indem man den selben Druck der beiden Komponenten voraussetzt [70]:

$$g_a \left(\frac{N}{V_a} \right)^2 = g_b \left(\frac{N}{V_b} \right)^2. \quad (3.20)$$

Durch die Berechnung der Differenz $E_{mix} - E_{sep}$ gelangt man zu dem Ergebnis, dass eine Separation der Komponenten eintritt, falls $g_{ab} > \sqrt{g_a g_b}$ gilt. Eine Mischung der Komponenten wird hingegen energetisch bevorzugt für den Fall : $\sqrt{g_a g_b} > g_{ab}$.

Um für zwei m_F Komponenten den energetisch favorisierten Zustand zu bestimmen, müssen die Streulängen der Stoßprozesse bekannt sein. Im Fall eines Systems aus Atomen im Hyperfeinzustand $F=1$ können diese der Gleichung 3.11 entnommen werden¹. In einem System mit den Komponenten $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ ergibt sich für Stöße zwischen identischen Teilchen der Wechselwirkungsparameter $g_0 + g_2$ und für Stöße zwischen den unterschiedlichen Komponenten $g_0 - g_2$. Bei polarer Wechselwirkung ($g_2 > 0$) mischen diese Komponenten, da hier $g_0 - g_2 < \sqrt{(g_0 + g_2)^2}$ erfüllt ist. Bei ferromagnetischer Wechselwirkung ($g_2 < 0$) hingegen mischen sich die beiden Komponenten nicht.

In einer Mischung der Komponenten $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ lautet der Wechselwirkungsparameter für Stöße zwischen den Atomen mit $|m_F = 0\rangle$: g_0 , zwischen Atomen mit $|m_F = +1\rangle$: $g_0 + g_2$ und zwischen den unterschiedlichen Komponenten : $g_0 + g_2$. Demnach mischen die Komponenten bei einer ferromagnetischen Wechselwirkung, während es bei einer polaren Wechselwirkung zu einer Separation kommt. Dieser Effekt konnte mit einer polaren Phase für ^{23}Na gemessen und für Experimente zum Tunneln ausgenutzt werden [52, 53].

Mischbarkeit von Spinkomponenten bei ^{87}Rb in $F=2$

Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente ist von Interesse, welche Spinkomponenten von ^{87}Rb im Hyperfeinzustand $F=2$ mischen und welche separieren. Die Berechnung kann entsprechend den Gleichungen 3.19 und 3.18 vorgenommen werden. Hierfür notwendig ist die Kenntnis der Streulängen und der Kopplung zwischen den Spinkomponenten. Die Kopplung der Spinkomponenten für Atome im Hyperfeinzustand

¹Es gilt zu beachten, dass der Vorfaktor von zwei in Gleichung 3.11 für Stöße mit unterschiedlichem Spin in diesem Fall nicht beachtet werden darf. Dieser wurde schon in Gleichung 3.18 berücksichtigt.

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

$F=2$ ist in Anhang C.1 und C.2 angegeben. Auf die Besonderheiten dieser im Fall von Spin-2 Teilchen wird in Abschnitt 3.3 noch näher eingegangen. Für die in Tabelle 3.1 erzielten Ergebnisse wurden die Streulängen aus [76] verwendet und die in Abschnitt 3.3 dargestellte Basis der Projektionsoperatoren verwendet.

Tabelle 3.1: Die Tabelle verdeutlicht, welche Spinkomponenten von ^{87}Rb sich im Hyperfeinzustand $F=2$ mischen (mit M gekennzeichnet), und bei welchen Komponenten eine Phasenseparation zu erwarten ist (mit S gekennzeichnet).

m_F	+2	+1	0	-1	-2
+2	M	S	M	M	M
+1	S	M	S	M	M
0	M	S	M	S	M
-1	M	M	S	M	S
-2	M	M	M	S	M

Diese Methode zur Untersuchung der Separation oder Mischbarkeit lässt sich leicht auf mehr als zwei Komponenten erweitern. Um festzustellen, ob drei Komponenten mischen, müssen jedoch mehrere Fälle verglichen werden. Weiterhin wurde in der Beschreibung nur der Fall behandelt, in dem die beiden Komponenten gleich besetzt sind. Dies stellt keine allgemeine Beschränkung dar und kann an beliebige Verhältnisse angepasst werden.

Ein Vergleich zwischen thermischen Atomen und den Atomen im Bose-Einstein Kondensat zeigt, dass aus einer Separation zweier Komponenten im Kondensat nicht auf eine Separation der thermischen Komponenten geschlossen werden kann. Dies begründet sich durch die unterschiedliche Betrachtung der Wechselwirkung von Atomen im Kondensat und in der thermischen Wolke. Da die thermischen Atome im Gegensatz zu Atomen im Kondensat unterschiedliche Zustände besetzen, verdoppeln sich die Wechselwirkungsbeiträge in den Gleichungen 3.18 und 3.19 für thermische Teilchen in der gleichen Komponente. So kann es zu einem unterschiedlichen Verhalten im Kondensat und der thermischen Wolke kommen.

3.2.4 Die Spinausheillänge

Treten innerhalb der Kondensatwellenfunktion Änderungen in den Amplituden der Spinkomponenten auf, so können diese nicht beliebig scharf sein. Diese Eigenschaft lässt sich analog zu einer Dichteschwankung im Kondensat behandeln (siehe Abschnitt 2.2.1). Der zweite Anteil in der kinetischen Energie in Gleichung 3.15 nimmt zu, je kleiner der Bereich ist, in dem sich zwei m_F Komponenten voneinander abgrenzen. Entsprechend Gleichung 2.16 kann sich die Spineinstellung im Kondensat nicht innerhalb einer geringeren Länge als

$$\xi_{spin} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\Delta E}} \quad (3.21)$$

3.3. Erweiterung auf Atome mit Spin 2

ändern. Der Energieunterschied ist durch die Differenz in den Streulängen bestimmt und berechnet sich zu [70]:

$$\Delta E = g_{ab}n_b - g_a n_a = \mu_a \left(\frac{g_{ab}}{\sqrt{g_a g_b}} - 1 \right), \quad (3.22)$$

wobei $\mu_a = g_a n_a$ das chemische Potential der Atome im Zustand $|m_F = a\rangle$ bei einer Kondensatdichte n_a angibt. ΔE beschreibt die Höhe der Energiebarriere zwischen Spin-domänen mit $|m_F = a\rangle$ und $|m_F = b\rangle$. Die Spinausheillänge ξ_{spin} gibt die Länge an, in der der Übergang stattfindet.

Entsprechend können auch die Spinausheillängen bei Kondensaten aus Atomen mit Hyperfeinspin 2 berechnet werden. Wie Tabelle 3.1 zeigt, wird eine Separation bei Spinmischungen aus den Komponenten $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = +1\rangle$, $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$, sowie $|m_F = +1\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$ erwartet. Für diese Mischungen gilt $\Delta E \simeq 0.55\mu_{0,+1}$ und die Spinausheillänge nimmt Werte im Bereich von $1\ \mu\text{m}$ an. Dabei wurde eine Dichte von $4 \times 10^{14}\ \text{cm}^{-3}$ angenommen und die Streulängen aus [76] verwendet. Der Übergangsbereich ist also sehr klein und kann mit der im Experiment vorhandenen Auflösung nicht detektiert werden.

3.3 Erweiterung auf Atome mit Spin 2

Bei der Beschreibung eines Kondensates, dessen Atome den Spin zwei besitzen, sind Stöße zwischen zwei Atomen mit Gesamtspin $\mathcal{F} = 0, 2$ und 4 möglich. Entsprechend Abschnitt 3.2 kann das Problem mit drei Projektionsoperatoren $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4$ und drei Streulängen a_0, a_2, a_4 behandelt werden.

Für die Berechnungen zeigt sich eine Umrechnung der Projektionsoperatoren in die folgenden Operatoren als nützlich [75, 76]. Dies sind : die Identität, der Operator $\vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2$ (welcher neben der spinerhaltenden Wechselwirkung auch die spinändernden Stöße mit $\Delta m_F = 1$ beschreibt) und der Projektionsoperator \mathcal{P}_0 . Die Umrechnung erfolgt unter Verwendung von $\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_4 = 1$ [71] und der Regel für die Addition zweier Drehimpulse $\mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) = \vec{\mathcal{S}}_1^2 + \vec{\mathcal{S}}_2^2 + 2\vec{\mathcal{S}}_1 \cdot \vec{\mathcal{S}}_2$. Der Projektionsoperator \mathcal{P}_0 besitzt den Erwartungswert $\langle \mathcal{P}_0 \rangle = 2/5 |\zeta_2 \zeta_{-2} - \zeta_1 \zeta_{-1} + \zeta_0^2/2|^2$ [75]. Da die Berechnung der Wechselwirkungsterme zu länglichen Formeln führt und auf dem selben Prinzip wie für Teilchen mit Spin eins basiert, werden diese im Anhang C dargestellt. Als Ergebnis erhält man das folgende Energiefunktional :

$$E - \mu N = \int d^3 \vec{r} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla \sqrt{n(\vec{r})} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} n(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}(\vec{r}) + V_{ext} n(\vec{r}) + \frac{n^2(\vec{r})}{2} \left(g_0 + g_2 \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha \vec{\zeta}(\vec{r}) \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha \vec{\zeta}(\vec{r}) + g_4 \langle \mathcal{P}_0 \rangle \right) \right). \quad (3.23)$$

Dieses unterscheidet sich von dem Energiefunktional für Spinor-Kondensate bestehend aus Spin eins Teilchen durch den zusätzlichen Term $g_4 \langle \mathcal{P}_0 \rangle$. Dieser beschreibt die neue Kopplungen in diesem System.

3.4. Einbeziehung von Magnetfeldern

Für die zyklische Phase beschreibt

$$C = \frac{1}{2}(e^{i\phi}, 0, \sqrt{2}, 0, -e^{-i\phi}) \quad (3.27)$$

den Grundzustand. Dieser ist eine Linearkombination der polaren Grundzustände P_0 und P . Die Energien der Linearkombination und des Zustandes C unterscheiden sich jedoch aufgrund der Nichtlinearität in der Gross-Pitaevskii Gleichung. Da kein Magnetfeld eine Quantisierungsachse für die angebenen Zustände vorgibt, sind natürlich alle Drehungen dieser Zustände wieder Grundzustände der entsprechenden Phasen.

Eine alternative Basis

Mit der vorgestellten Darstellung der Projektionsoperatoren lassen sich gut die Grundzustände in Abhängigkeit der Streulängen berechnen und daher wird diese in der Literatur häufig verwendet. Leider ist die Darstellung des Projektionsoperators \mathcal{P}_0 wenig intuitiv, da er sich nicht durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren darstellen lässt.

Dies gelingt, wenn die Projektionsoperatoren durch die Identität, $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ und $\vec{S}_1^2 \cdot \vec{S}_2^2$ ausgedrückt werden. Die Umrechnung der Projektionsoperatoren erfolgt unter Verwendung derselben Formeln wie im vorherigen Fall. Mit dem Operator $\vec{S}_1^2 \cdot \vec{S}_2^2$ werden alle möglichen Kopplungen in dem F=2 System beschrieben (siehe Anhang C.2). Also alle spinerhaltenden und spinändernden Stöße. Im Unterschied zu Atomen im Hyperfeinzustand F=1 gibt es neben zwölf spinändernden Stößen mit $\Delta m_F = 1$ auch einen Stoßprozess mit $\Delta m_F = 2$, nämlich $2 \times |m_F = 0\rangle \leftrightarrow |m_F = +2\rangle + |m_F = -2\rangle$. Die Möglichkeit eines solchen Stoßes wird bei Betrachtung der Spinmatrix \mathcal{S}_x deutlich (siehe Anhang C). Da diese nur von null verschiedene Einträge direkt oberhalb und unterhalb der Diagonalen besitzt, enthält das Quadrat dieser Matrix auch von null verschiedene Einträge an den Positionen i, j mit $j = i \pm 2$. Diese ermöglichen eine Kopplung mit $\Delta m_F = 2$.

Das Energiefunktional nimmt bei dieser Darstellung der Projektionsoperatoren die folgende Form an :

$$\begin{aligned} E - \mu N = \int d^3\vec{r} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla \sqrt{n(\vec{r})} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} n(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \nabla \vec{\zeta}(\vec{r}) + V_{ext} n(\vec{r}) \right. \\ & \left. + \frac{n^2(\vec{r})}{2} \left(\tilde{g}_0 + \tilde{g}_2 \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha \vec{\zeta}(\vec{r}) \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha \vec{\zeta}(\vec{r}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \tilde{g}_4 \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha^2 \vec{\zeta}(\vec{r}) \vec{\zeta}^*(\vec{r}) \mathcal{S}_\alpha^2 \vec{\zeta}(\vec{r}) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Im Weiteren wird immer angegeben, in welchem Fall es sinnvoller ist, diese Darstellung zu benutzen. Die Kopplungskonstanten werden mit \tilde{g}_i statt g_i bezeichnet und sind so von denen in der anderen Darstellung zu unterscheiden.

3.4 Einbeziehung von Magnetfeldern

Das Verhalten eines Atoms kann durch Magnetfelder beeinflusst werden. Dabei hängt die Wechselwirkung von der Spineinstellung des Atoms ab. Durch magnetische Felder

wird daher die Dynamik und der Grundzustand von Spinor-Kondensaten manipuliert. Fragt man nach dem Grundzustand im System bei einem gegebenen Magnetfeld, so wird in den theoretischen Betrachtungen in der Regel „nur“ der absolute Grundzustand unter Beachtung des linearen Zeeman-Effekts berechnet [74, 71, 72, 77, 75, 78]. Dieser Zustand kann in der Regel im Experiment nicht beobachtet werden, da die Spinerhaltung während der Dynamik eine Entwicklung in diesen Zustand verhindert. Es gibt vielmehr für jede Gesamtspineinstellung und jede magnetische Phase einen anderen Grundzustand, in den sich das Kondensat entwickeln wird. Des weiteren wird der Grundzustand in einem homogenen Magnetfeld allein durch den quadratischen und nicht durch den linearen Zeeman-Effekt, wie erstmals in [52] dargestellt, bestimmt.

Im Folgenden wird die Auswirkung der Magnetfelder auf die Kondensate analysiert und es werden die experimentell zugänglichen Phasendiagramme vorgestellt. Dabei wurden im Verlauf dieser Arbeit erstmals die Phasendiagramme für Gesamtspin zwei berechnet, welche in Kapitel 6 für die Interpretation der Messungen benötigt werden. Außerdem konnte eine zusätzliche anschauliche Darstellung für diese gefunden werden.

3.4.1 Einfluss des linearen Zeeman-Effekts

In einem homogenen Magnetfeld \vec{B} wird die Energie des Kondensates durch den linearen Zeeman-Effekt um den Betrag

$$E_{lin} = - \int d^3\vec{r} g_F \mu_B |\vec{B}| n(\vec{r}) \langle \mathcal{S}_z \rangle \quad (3.29)$$

verschoben. Der Landé-Faktor wird mit g_F und das Bohr'sche Magneton mit μ_B bezeichnet. Im Weiteren wird die Abkürzung

$$p = g_F \mu_B |\vec{B}| \quad (3.30)$$

verwendet. Die Energie wird für ^{87}Rb -Atome im Zustand $|F = 2, m_F = -2\rangle$ gegenüber Atomen in allen anderen m_F Zuständen am meisten abgesenkt. Ohne Berücksichtigung der Wechselwirkungsenergie wäre dies also der Grundzustand. Wird ein Kondensat in dem Zustand $|F = 2, m_F = 0\rangle$ präpariert, so kann der Grundzustand nur über eine nicht-spinerhaltende Wechselwirkung, zum Beispiel die dipolare Relaxation, angenommen werden. Dieser Stoßprozess spielt für die in Kapitel 6 vorgestellten Experimente keine Rolle. Für die Berechnung des Grundzustandes muss die Besetzung der Spinkomponenten unter der Nebenbedingung der Gesamtspinerhaltung vorgenommen werden. Ein spinändernder Stoß, welcher den Gesamtspin erhält, führt zu einer Änderung der Energie im System, weil sich die spinabhängige Wechselwirkungsenergie verändert. Der Beitrag von dem linearen Zeeman-Effekt bleibt unverändert, da sich die Energiedifferenzen zwischen den „neuen“ Zuständen und den „alten“ aufheben. So ist beispielsweise die Energie von zwei Atomen in den Zuständen $|m_F = 0\rangle$ unabhängig von der linearen Zeemanenergie. Nach einer möglichen spinändernden Wechselwirkung können die Zustände $|m_F = -1\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ besetzt sein. Betrachtet man die Energie beider Zustände, so ist auch diese unabhängig von dem linearen Zeeman-Effekt.

3.4. Einbeziehung von Magnetfeldern

Während der Berechnung des Grundzustandes wird der Gesamtspin x im Energiefunktional erhalten, falls die Nebenbedingung $\langle \mathcal{S}_z \rangle = x$ erfüllt ist. Formal kann dies erreicht werden, indem zu dem Energiefunktional

$$-\lambda \int d^3\vec{r} n(\vec{r}) \langle \mathcal{S}_z \rangle \quad (3.31)$$

addiert wird. Dabei stellt λ einen Lagrange-Multiplikator dar. Bei der Minimierung des Energiefunktionals ist der Wert von λ noch unbestimmt. Die Werte für die Besetzung der Spinkomponenten sind nach der Minimierung eine Funktion von λ . Setzt man diese in die Gleichung $\langle \mathcal{S}_z \rangle = x$ ein, kann λ ermittelt werden. Somit lässt sich die Besetzung der Spinkomponenten unter der Nebenbedingung eines konstanten Gesamtspins ermitteln. Bei Gesamtspin null gilt beispielsweise $\lambda = p$. Die Grundzustandsenergie wird in diesem Fall also nicht durch den linearen Zeeman-Effekt beeinflusst, wie in dem oben erwähnten Beispiel gezeigt wurde.

Inhomogenitäten im Magnetfeld können zu räumlichen Variationen in der Spinbesetzung führen, da die Zeemanenergie über das Kondensat variiert. Liegt eine Inhomogenität vor, so muss das Energiefunktional durch den folgenden Beitrag ergänzt werden :

$$E_{lin} = - \int d^3\vec{r} p(z) n(\vec{r}) \langle \mathcal{S}_z \rangle, \quad (3.32)$$

wobei z die Richtung des Gradienten angibt und $p(z) = g_f \mu_B B' z$ gilt. Bei einem vorhandenen Magnetfeldgradienten ist es für ein Kondensat mit Gesamtspin null energetisch am günstigsten, die Zustände $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ zu besetzen, wobei die Komponenten separieren. Bei ^{87}Rb Atomen mit Hyperfeinspin eins befindet sich die Komponente $|m_F = +1\rangle$ im Bereich eines niedrigeren Magnetfeldes und die Komponente $|m_F = -1\rangle$ im Bereich eines höheren Magnetfeldes. Das Kondensat wäre also durch den Magnetfeldgradienten in zwei Spindomänen polarisiert. Bei Experimenten zur Spindynamik muss daher der Magnetfeldgradient experimentell gut kontrollierbar sein.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Energie des linearen Zeeman-Effektes für ^{87}Rb zwischen Zuständen mit $\Delta m_F = 1$ $34 \mu\text{K G}^{-1}$ beträgt. Würde die Gesamtspinerhaltung nicht gelten, so müsste man bei typischen Kondensatdichten Magnetfelder in der Größenordnung von $50 \mu\text{G}$ realisieren, damit die spinabhängige Wechselwirkung einen gleich großen Energiebeitrag wie die Zeemanenergie liefert. Erst dann ließe sich bei Dichten von $4,0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ der Einfluss auf die Dynamik durch die spinabhängige Wechselwirkung $g_2 n \approx k_B \times 2 \text{ nK}$ beobachten.

3.4.2 Einfluss des quadratischen Zeeman-Effekts

Im vorherigen Abschnitt wurde beschrieben, dass der Grundzustand in einem homogenen Magnetfeld durch den linearen Zeeman-Effekt nicht verändert wird. Selbst bei einem sehr kleinen Magnetfeld stellt der lineare Zeeman-Effekt jedoch nur eine Näherung dar. Korrekt wird die Verschiebung der Energieniveaus durch ein Magnetfeld für Teilchen mit $F = I \pm \frac{1}{2}$ mit der Breit-Rabi Formel bestimmt. Diese beschreibt den Übergang

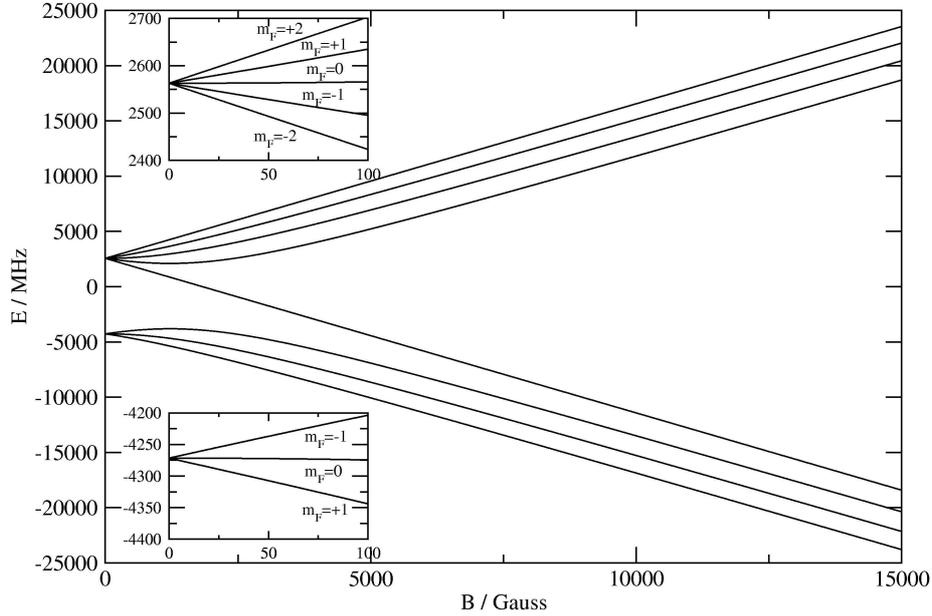


Abbildung 3.3: In der Abbildung sind die Energieniveaus von ^{87}Rb Atomen in Abhängigkeit vom Magnetfeld dargestellt. Die Breit-Rabi Formel beschreibt den Übergang vom Zeeman-Effekt, welcher bei kleinen Magnetfeldern die wesentliche Verschiebung der Energieniveaus angibt, zum Paschen-Back-Effekt, welcher auftritt, wenn das externe Magnetfeld keine kleine Störung mehr darstellt.

von dem linearen Zeeman-Effekt zum Paschen-Back-Effekt [79] (siehe Abbildung 3.3). Obwohl im Experiment die verwendeten Magnetfelder im Bereich einiger hundert Milligauss lagen, kommt es schon in diesem Bereich zu einer für die Experimente relevanten Abweichung vom linearen Zeeman-Effekt. Durch eine Reihenentwicklung nach dem Magnetfeld, welche nach dem quadratischen Term abgebrochen wird, kann der Einfluss des Magnetfeldes auf den Grundzustand eines Kondensates mit Spinfreiheitsgrad berücksichtigt werden [52]. Die Verschiebung der Energieniveaus in quadratischer Abhängigkeit vom Magnetfeld kann direkt über die Breit-Rabi Formel bestimmt werden. Die Energieverschiebung der m_F Komponenten bei einem Atom durch den quadratischen Zeeman-Effekt berechnet sich über :

$$\Delta E_{quadr} = \mp \frac{\mu_B^2 B^2}{\Delta E_0} \left(1 - \frac{4m_F^2}{(2I+1)^2} \right), \quad (3.33)$$

wobei μ_B das Bohr'sche Magneton, ΔE_0 die Hyperfeinstrukturaufspaltung und I den Kernspin bezeichnen. Das Vorzeichen ist für den Fall $F=1$ negativ und für Atome im Zustand $F=2$ positiv. Dies lässt sich auch direkt aus den Krümmungen der Kurven in Abbildung 3.3 ablesen. Es sei bemerkt, dass für Atome mit Kernspin $5/2$, wie beispielsweise ^{85}Rb , wo $F=2$ der untere Hyperfeinzustand ist, das Vorzeichen in der Energieverschiebung durch den quadratischen Zeeman-Effekt negativ ist. Abbildung 3.4 zeigt,

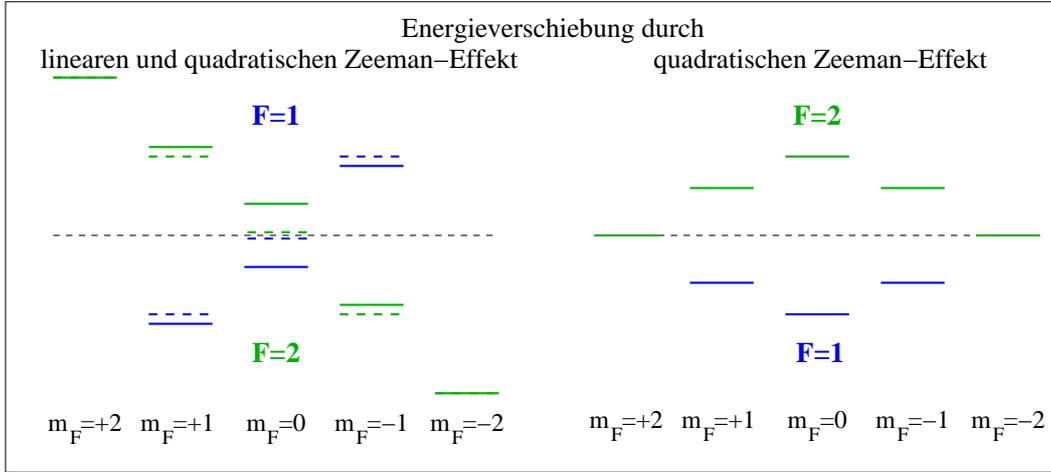


Abbildung 3.4: Die Abbildung zeigt die Verschiebung der m_F Komponenten von ^{87}Rb Atomen in den Zuständen $F=1$ und $F=2$ durch den linearen und quadratischen Zeeman-Effekt. Zur Verdeutlichung wurde der Beitrag des quadratischen Zeeman-Effektes verstärkt dargestellt. Die Änderung in der Gesamtenergie bei einen spinändernden Stoß ist allein durch den quadratischen Zeeman-Effekt bestimmt. Dieser Einfluss auf die Niveaus ist im rechten Bereich dargestellt. Der quadratische Zeeman-Effekt führt bei Atomen im Hyperfeinzustand $F=1$ zu einer energetischen Favorisierung von $2 \times |0\rangle$ im Vergleich zu $|+1\rangle + |-1\rangle$. Im Gegensatz dazu wird bei Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ durch die Vorzeichenänderung im quadratischen Zeeman-Effekt gerade der andere Zustand energetisch begünstigt.

in welcher Weise sich die Energieniveaus bei ^{87}Rb in Abhängigkeit vom Magnetfeld verschieben. Da die magnetische Quantenzahl m_F quadratisch in die Formel eingeht, werden die Zustände $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ in dieselbe Richtung verschoben. Eine Mischung aus Atomen im Zustand $|F = 1, m_F = +1\rangle$ und $|F = 1, m_F = -1\rangle$ besitzt also eine höhere Energie als der Zustand $|F = 1, m_F = 0\rangle$. Im Fall von Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ ist dies gerade umgekehrt.

Der Beitrag zum Energiefunktional der makroskopisch besetzten Wellenfunktion ist :

$$E_{quadr} = -q \int d^3\vec{r} n(\vec{r}) (\langle S_z^2 \rangle - 4) \quad (3.34)$$

$$\text{mit } q = \pm(\mu_B^2 B^2)/(4\Delta E_0). \quad (3.35)$$

Dabei gibt q die relative Energieänderung der Zustände durch den quadratischen Zeeman-Effekt an. Für ^{87}Rb ergibt sich $|q| B^{-2} \approx h \times 72 \text{ Hz G}^{-2} \approx k_B \times 3,5 \text{ nK G}^{-2}$.

3.5 Grundzustände in F=1 und F=2

Das Energiefunktional eines Bose-Einstein Kondensates mit Spinfreiheitsgrad in einem Magnetfeld setzt sich aus Anteilen der Gleichungen 3.23, 3.29 und 3.34 zusammen.

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

Es kann in einen spinunabhängigen Anteil und einen spinabhängigen Anteil unterteilt werden. Es lässt sich also schreiben als :

$$E_{ges} = \int d^3 \vec{r} (\tilde{E}_0 + \tilde{E}_{spin}). \quad (3.36)$$

Der spinunabhängige Anteil setzt sich aus der kinetischen Energie, dem Fallenpotential, dem chemischen Potential und der spinunabhängigen Wechselwirkung zusammen. Der spinabhängige Energiebeitrag für Atome im Hyperfeinzustand F=2 hat unter Vernachlässigung der kinetischen Energie die Form²:

$$\tilde{E}_{spin} = n(\vec{r}) \left(-p \langle \mathcal{S}_z \rangle + q \langle \mathcal{S}_z^2 \rangle + \frac{g_2}{2} n(\vec{r}) \langle \vec{\mathcal{S}} \rangle^2 + \frac{2g_4}{5} n(\vec{r}) \langle \mathcal{P}_0 \rangle \right). \quad (3.37)$$

Gleichung 3.37 kann auch für die Behandlung des Falls F=1 angewandt werden, indem $g_4 = 0$ gesetzt wird³.

Für die weiteren Berechnungen werden die Konstanten

$$c_1 = \frac{1}{2} g_2 n \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{4}{5} g_4 n \quad (3.38)$$

eingeführt. Um die Spinmischung mit minimaler Energie zu bestimmen, muss E_{ges} minimiert werden. Dies erweist sich jedoch als relativ aufwendig. Nimmt man an, dass sich das Kondensat eine konstante Dichte besitzt, so reicht es aus, eine Minimierung des spinunabhängigen Anteil vorzunehmen. In [80] wurde gezeigt, dass sie so berechneten Phasendiagramme für Atome in F=1 sehr gut mit denen übereinstimmen, welche durch eine Minimierung von E_{ges} bestimmt wurden.

3.5.1 Die Phasendiagramme für F=1

Phasendiagramme für den Fall F=1 wurden erstmals von Stenger et al. [52] veröffentlicht und lassen direkt einen Rückschluss von experimentellen Ergebnissen auf die magnetische Phase des Atoms zu. Die freien Parameter bei der Minimierung sind p (siehe Gleichung 3.30), q (siehe Gleichung 3.34) und c_1 (siehe Gleichung 3.38). Dabei können p und q unabhängig voneinander⁴ im Experiment eingestellt werden, während das Vorzeichen von c_1 durch eine Eigenschaft des Atoms bestimmt ist. Für $c_1 < 0$ liegt eine ferromagnetische Wechselwirkung vor und für $c_1 > 0$ eine polare Wechselwirkung.

Für $c_1 = 0$ ist die spinabhängige Wechselwirkung nicht vorhanden. In diesem Fall wird allein durch das Magnetfeld bestimmt, welche Spinmischung den Grundzustand

²Der Term $-4q$ aus Gleichung 3.34 wird nicht berücksichtigt, da bei der Berechnung der Grundzustände nur die energetischen Unterschiede der verschiedenen Mischungen relevant sind.

³Außerdem gilt zu beachten, dass sich das Vorzeichen von q ändert.

⁴Dass die beiden Parameter p und q unabhängig voneinander eingestellt werden können, mag auf den ersten Blick überraschen, da p mit dem Magnetfeld und q mit dem Quadrat des Magnetfeldes skaliert. Da in den Experimenten der Gesamtspin der Atome erhalten ist, wird p jedoch nicht allein durch den linearen Zeeman-Effekt bestimmt, sondern auch durch den Gesamtspin des Ensembles (siehe Abschnitt 3.4.1).

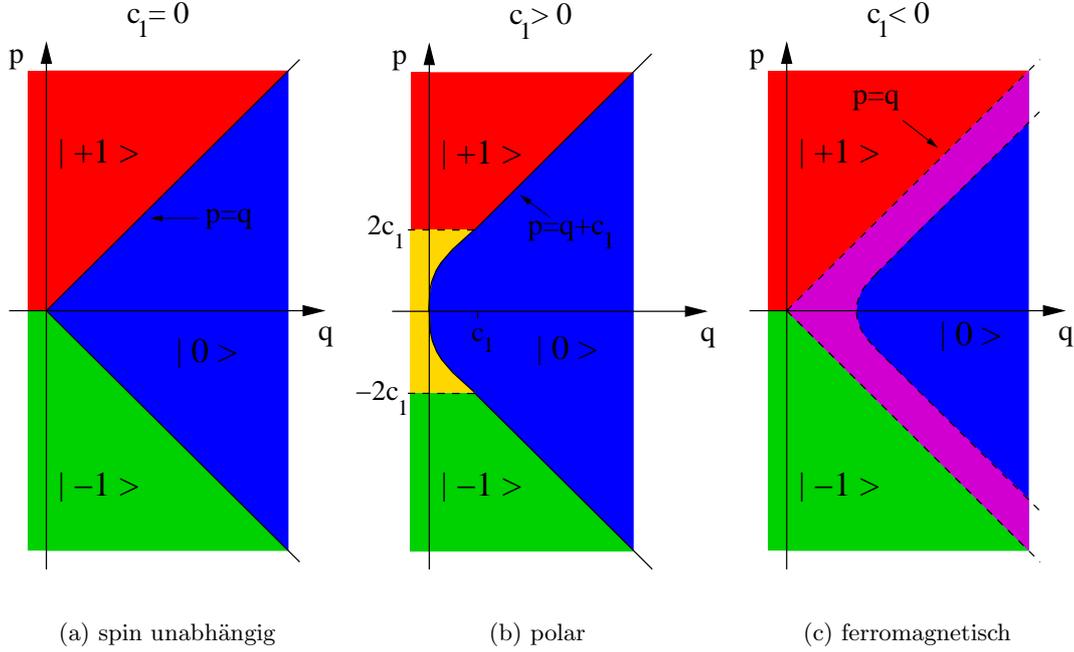


Abbildung 3.5: Phasendiagramme für $F=1$ Spinor-Kondensate. Zur Berechnung der drei Diagramme wurde das Energiefunktional aus Gleichung 3.37 minimiert (mit $c_2 = 0$). Die Abbildungen zeigen in Abhängigkeit von p und q den Zustand minimaler Energie. Die Grenzen zwischen unterschiedlichen Mischungen sind mit einer durchgezogenen Linie markiert, falls es sich um einen unstetigen Übergang handelt. Einen glatten Übergang kennzeichnet eine gestrichelte Linie. Der Mischbereich bei polarer Wechselwirkung (in gelb dargestellt) stellt eine Superposition der Zustände $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ dar. Die Amplituden der Komponenten in diesem Bereich sind $\zeta_{\pm 1}^2 = (2c_1 \pm p)/(4c_1)$. Die Energie des Spinor-Kondensates ist dabei unabhängig von der relativen Phase der Komponenten. Dies ist bei dem in magenta gekennzeichnetem Mischbereich in der ferromagnetischen Phase anders. Hier mischen alle drei Komponenten, wobei der Anteil der Komponente $|m_F = -1\rangle$ bei positiven Werten von p sehr gering ist (entsprechend die Komponente $|m_F = +1\rangle$ bei negativem p). In diesem Fall ist die Energie abhängig von der relativen Phasenlage der einzelnen Komponenten. Setzt man die Phase der Komponente $|m_F = 0\rangle$ null, so wird der energetisch günstigste Zustand angenommen, falls für die Phasen ϕ_{+1} und ϕ_{-1} gilt : $\phi_{+1} + \phi_{-1} = 0$.

beschreibt (siehe Abbildung 3.5(a)). Für $p < q$ ist $|m_F = 0\rangle$ der Grundzustand des Systems, da der quadratische Zeeman-Effekt zu einer Energieabsenkung dieses Zustandes und zu einer Erhöhung der Zustände $|m_F = -1\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ führt. Für $p > q$ hingegen „gewinnt“ die Energieabsenkung des Zustandes $|m_F = +1\rangle$ durch den linearen Zeeman-Effekt gegenüber dem quadratischen Zeeman-Effektes. Der Zustand mit allen Atomen in $|m_F = +1\rangle$ stellt den Grundzustand dar.

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

Bei einer polaren Wechselwirkung (siehe Abbildung 3.5(b)) vergrößert sich im Vergleich zu dem Fall $c_1 = 0$ der Bereich, in dem die Besetzung des Zustandes $|m_F = 0\rangle$ den Grundzustand angibt, da dieser durch die spinabhängige Wechselwirkung bevorzugt wird (siehe Abschnitt 3.2.2). Bei kleinen Werten von q stellt eine Mischung der Komponenten $|m_F = -1\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ den energetisch günstigsten Zustand dar. In diesem mit gelb markierten Bereich nimmt mit steigendem linearen Zeeman-Effekt (p) der Anteil mit Atomen im Zustand $|m_F = +1\rangle$ zu. Es gibt also einen glatten Übergang bei $p = 2c_1$ in den Bereich mit dem Grundzustand $|m_F = +1\rangle$ (und entsprechend in $|m_F = -1\rangle$ bei $p = -2c_1$). Die Mischung aus den Komponenten $|m_F = -1\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ wird angenommen, da sie durch die polare Wechselwirkung gegenüber einer Mischung der Komponenten $|m_F = +1\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$ energetisch günstiger ist. Der Übergang in den Bereich, in dem $|m_F = +1\rangle$ (entsprechend $|m_F = -1\rangle$) den Grundzustand stellt, ist unabhängig von q . Für die Werte mit $q < c_1$ wird der Übergang von dem Mischbereich zu $|m_F = 0\rangle$ mit $p = \pm 2\sqrt{c_1 q}$ beschrieben.

Falls eine ferromagnetische Wechselwirkung $c_1 < 0$ vorliegt, so verringert sich im Vergleich zu dem Fall $c_1 = 0$ der Bereich im Phasendiagramm, in dem $|m_F = 0\rangle$ den Grundzustand beschreibt, da durch die ferromagnetische Wechselwirkung die Energie für diesen Zustand erhöht wird. In dem magenta-farbenen Bereich liegt eine Mischung aller drei Zustände vor. Die Übergänge in diesen Bereich verlaufen stetig. Für positive Werte von p ist die Beimischung des Zustandes $|m_F = -1\rangle$ nur gering (und entsprechend für $p < 0$ die von $|m_F = +1\rangle$). Die Abgrenzung zu dem Bereich mit $|m_F = 0\rangle$ wird durch die Funktion $p = \pm\sqrt{q(q + 4c_1)}$ beschrieben.

Um im Experiment die unterschiedlichen Punkte in einem Phasendiagramm zu untersuchen, kann der Parameter q über das Magnetfeld eingestellt und der Wert von $|c_1|$ durch die Dichte im Kondensat beeinflusst werden. Der Parameter p wird durch den Gesamtspin des Ensembles bestimmt. Es kann nun vorkommen, dass der Wert von p nicht eindeutig einem Gesamtspin entspricht. Dies ist beispielsweise in Abbildung 3.5(a) für die Punkte mit $|p| = q$ der Fall. Für ein präpariertes Kondensat mit einem Spin pro Teilchen von $1/2$ und $1/3$ erhält man in beiden Fällen den Wert $p = q$. Dies bedeutet, dass sich ein Kondensat mit diesen Spins pro Teilchen nicht auf einen Punkt abbilden lässt. Der Grund dafür ist die Tatsache, dass eine Mischung von m_F Komponenten energetisch höhere Werte annimmt als eine Separation der Zustände (siehe Abschnitt 3.2.3). Die Kondensatwellenfunktion mit einem Spin pro Atom von $1/2$ wird sich in zwei gleichgroße Teile separieren, welche aus den Komponenten $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ bestehen. Die Breite des Übergangsbereiches zwischen den Komponenten ist durch die Spinausheillänge ξ_{spin} bestimmt (siehe Abschnitt 3.2.4). Für eine Kondensatwellenfunktion mit $1/3$ Spin pro Atom ist entsprechend der Anteil von Atomen mit $|m_F = 0\rangle$ um die Hälfte größer als der von Atomen im Zustand $|m_F = +1\rangle$. Die Ausrichtung der Komponenten des Kondensates erfolgt entlang eines beliebig kleinen Magnetfeldgradienten. Mit Hilfe eines künstlich angelegten Magnetfeldgradienten kann ein solcher Effekt auch experimentell erzwungen werden. Dazu präpariert man ein Kondensat aus Atomen ohne spinabhängige Wechselwirkung (siehe Abbildung 3.5(a)) mit Gesamtspin null und wählt die Amplitude des Magnetfeldgradienten so groß, dass an den „Endpunkten“ der Kondensatwellenfunktion $|p| > q$ gilt. Die Wellenfunktion mit

niedrigster Energie stellt sich dann ein, wenn sich der mittlere Abschnitt im Zustand $|m_F = 0\rangle$ befindet und die äußeren Teile den Zustand $|m_F = +1\rangle$ beziehungsweise $|m_F = -1\rangle$ besetzen.

3.5.2 Die Phasendiagramme für F=2

Die Phasendiagramme für Spinor-Kondensate im Hyperfeinzustand F=2 wurden erstmals im Rahmen dieser Arbeit berechnet und sind essentiell für die Interpretation der Messergebnisse, welche in Kapitel 6 vorgestellt werden. Während die Phasendiagramme für Atome in F=1 sich analytisch berechnen lassen, trifft dies nicht auf alle Phasen des F=2 Systems zu. Ein wesentlicher Unterschied zu Kondensaten aus Atomen im Hyperfeinzustand F=1 besteht für ^{87}Rb in einem Vorzeichenwechsel des quadratischen Zeeman-Effektes und der Existenz der zyklischen Phase. Der Vorzeichenwechsel des Parameters q führt zu einer Favorisierung der Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ gegenüber den Zuständen $|m_F = \pm 1\rangle$ und der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ gegenüber dem Zustand $|m_F = 0\rangle$ mit steigendem Magnetfeld.

Die ferromagnetische und die polare Phase

Die Grundzustände der ferromagnetischen und der polaren Phase in Abhängigkeit des linearen Zeeman-Effektes wurden in [75, 76] bestimmt.

Die polare Phase wird angenommen, falls $c_2 < 0$ und $c_1 - c_2/20 > 0$ gilt. Die ferromagnetische Phase tritt auf, falls $c_1 < 0$ und $c_1 - c_2/20 < 0$ erfüllt sind (entsprechend den Gleichungen 3.24). Neben dem linearen Zeeman-Effekt hebt auch der quadratische Zeeman-Effekt die Entartung der Grundzustände P , P_0 und P_1 (siehe Definition in Gleichung 3.25) in der polaren Phase auf. Für $q < 0$ favorisieren beide Effekte den Zustand P . Daher gibt es im Gegensatz zu den Phasendiagrammen im F=1 System keine Änderung bei unterschiedlichen Werten von q . Gleiches gilt für die ferromagnetische Phase. Der quadratische Zeeman-Effekt führt bei beiden magnetischen Phasen zu einer Stabilisierung der Grundzustände. Vergleicht man die Phasendiagramme dieser Phasen zwischen F=1 mit negativen Wert von q und F=2, so ergibt sich die gleiche Struktur. In den Phasendiagrammen für Atome im Hyperfeinzustand F=1 sind lediglich die Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ statt $|m_F = \pm 2\rangle$ besetzt (siehe Abbildung 3.5(b) und 3.6(a)).

Bei Atomen mit einer ferromagnetischen Phase kommt es bei Kondensaten, welche mit Gesamtspin null präpariert wurden, zu einer Separation der Komponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$. Dies stellt eine spontane Symmetriebrechung entsprechend der Domänenbildung bei einem konventionellen Ferromagneten dar, falls kein Magnetfeldgradient über dem Kondensat liegt, der die Richtung der Separation vorgeben würde. Dieser Effekt kann bei einer ferromagnetischen Wechselwirkung mit Atomen im Hyperfeinzustand F=1 nicht beobachtet werden, da in diesem Fall der quadratische Zeeman-Effekt diesen Zustand nicht stabilisiert.

Bei Kondensaten aus Atomen mit einer polaren Phase muss es zu einer Mischung der Zustände $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ kommen, wobei der Anteil der Atome im Zustand $|m_F = +2\rangle$ mit steigendem p zunimmt und es zu einem stetigen Übergang bei

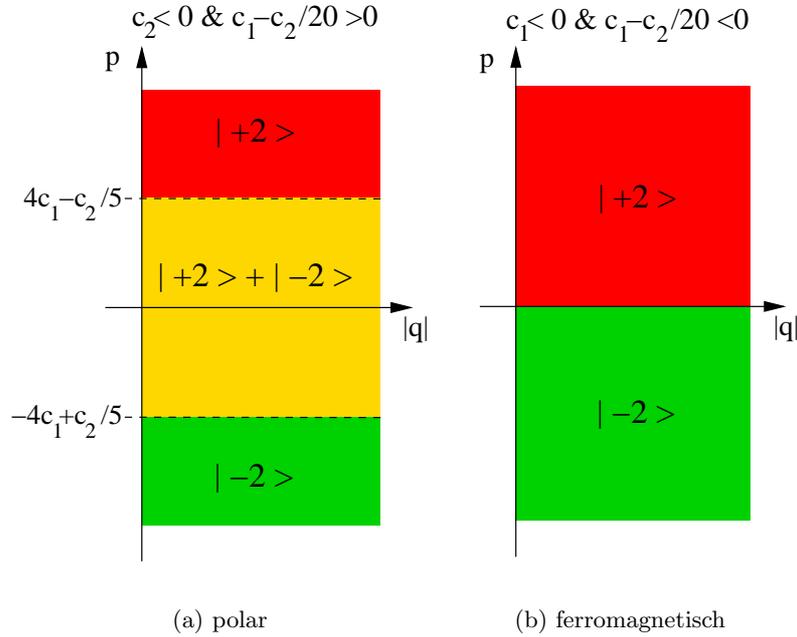


Abbildung 3.6: Phasendiagramme der polaren (a) und ferromagnetischen (b) Phase von Spinor-Kondensaten aus Atomen im Zustand $F=2$. Der Übergang des Mischbereiches in die voll polarisierten Bereiche der polaren Phase erfolgt stetig. Die Amplitude der m_F Komponenten in dem Mischbereich ist $|\zeta_{\pm 2}|^2 = (4c_1 - c_2/5 \pm p)/(8c_1 - 2c_2/5)$. Die ferromagnetische Phase wird wie die polare Phase durch den quadratischen Zeeman-Effekt stabilisiert.

$p=4c_1-c_2/5$ kommt. Somit sind die polare Phase und die ferromagnetische Phase klar voneinander zu unterscheiden.

Die zyklische Phase

Diese Phase kommt in Spinor-Kondensaten mit Spin eins nicht vor und stellt somit eine Besonderheit des Systems bestehend aus Atomen im Hyperfeinspin zwei dar. Die zyklische Phase wird angenommen, falls $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ gilt. Im Gegensatz zu den beiden anderen Phasen zeichnet sich diese „neue“ Phase durch einen Grundzustand bei $B = 0$ aus, in dem drei Zustände besetzt sind. Dies sind die Komponenten $|m_F = +2\rangle$, $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ (entsprechend Gleichung 3.27). Da die Energie der $|m_F = 0\rangle$ Komponente durch den quadratischen Zeeman-Effekt angehoben wird, wird diese Phase nicht durch ein magnetisches Offsetfeld stabilisiert. Die Berechnung des Grundzustandes in Abhängigkeit von dem linearen und dem quadratischen Zeeman-Effekt erweist sich gegenüber dem Fall in $F=1$ als komplexer, da in diesem Fall über acht freie Va-

riablen zu minimieren ist⁵. Eine analytische Lösung konnte aufgrund der zahlreichen spinändernden Stöße und Abhängigkeiten von den Phasen der Komponenten nicht gefunden werden. Die Berechnung der Phasendiagramme für die zyklische Phase wurde in folgender Weise vorgenommen : Zuerst wurde das Energiefunktional 3.37 auf einem groben Gitter in Abhängigkeit von p und q minimiert. Aus den Ergebnisse konnte abgelesen werden, welche Mischungen den Grundzustand in Abhängigkeit vom Magnetfeld beschreiben. Eine erneute numerische Minimierung auf einem feineren Raster unter Verwendung aller möglichen Grundzustände lieferte dann die Phasendiagramme für die zyklische Phase (siehe Abbildung 3.7).

Die Besetzung der Komponenten und die Grenzen zwischen den unterschiedlichen Mischungen können analytisch bestimmt werden, falls in einer Mischung nicht drei m_F Zustände besetzt sind. Als Beispiel wird im Weiteren die Bestimmung der Grenze zwischen dem Mischbereich aus den Komponenten ζ_{+2} mit ζ_{-2} zu dem reinen Zustand $\zeta_{+2} = 1$ angegeben. Grundlage hierfür ist Gleichung 3.37. Da in dem Mischbereich nur die beiden voll gestreckten Zustände besetzt sind, kann die Energiedichte durch eine Variable beschrieben werden ($\zeta_{-2} = \sqrt{1 - \zeta_{+2}^2}$) und hat in diesem Fall die Form :

$$\tilde{E}_{spin}(\zeta_{+2}) = -2p(2\zeta_{+2}^2 - 1) - 4q + 4c_1(1 - 2\zeta_{+2}^2)^2 + \frac{4}{5}c_2\zeta_{+2}^2(1 - \zeta_{+2}^2). \quad (3.39)$$

Bestimmt man die Ableitung von 3.39 nach ζ_{+2} und setzt diese gleich null, so ergibt sich :

$$\zeta_{+2} = \pm \sqrt{\frac{p + 4c_1 - \frac{1}{5}c_2}{8c_1 - \frac{2}{5}c_2}}. \quad (3.40)$$

Die Grenzen des Mischbereiches ergeben sich nun aus $\zeta_{+2}^2 = 0$ und $\zeta_{+2}^2 = 1$. Der Übergang in den reinen Zustand $|m_F = -2\rangle$ erfolgt bei $p = -4c_1 + \frac{c_2}{5}$. Bei Werten von $p > +4c_1 - \frac{c_2}{5}$ beschreibt der Zustand $|m_F = +2\rangle$ den Zustand mit minimaler Energie. Auf diese Art lassen sich weitere Grenzen bestimmen.

Die Amplituden in dem Mischbereich der Komponenten $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ sind

$$|\zeta_{+2}|^2 = (2c_1 + p + |q|)/(6c_1) \quad \text{und} \quad |\zeta_{-1}|^2 = (4c_1 - p - |q|)/(6c_1). \quad (3.41)$$

Entsprechend verhalten sich die Amplituden in der Mischung aus den Spinzuständen $|m_F = -2\rangle$ mit $|m_F = +1\rangle$.

Die Amplituden der Komponenten in dem Mischbereich von $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -2\rangle$ werden durch

$$|\zeta_{\pm 2}|^2 = (4c_1 - c_2/5 \pm p)/(8c_1 - 2c_2/5) \quad (3.42)$$

bestimmt.

Bei einer Mischung von zwei Komponenten hat aufgrund der Symmetrie von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in dem Hamiltonoperator der Gleichung 3.1 die

⁵Insgesamt sind fünf Amplituden und fünf Phasen zu berücksichtigen. Aufgrund der Normierung der Amplituden und der Unabhängigkeit von der absoluten Phase ergeben sich acht freie Variablen.

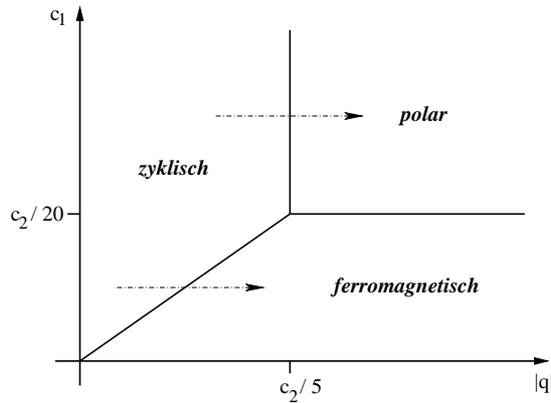
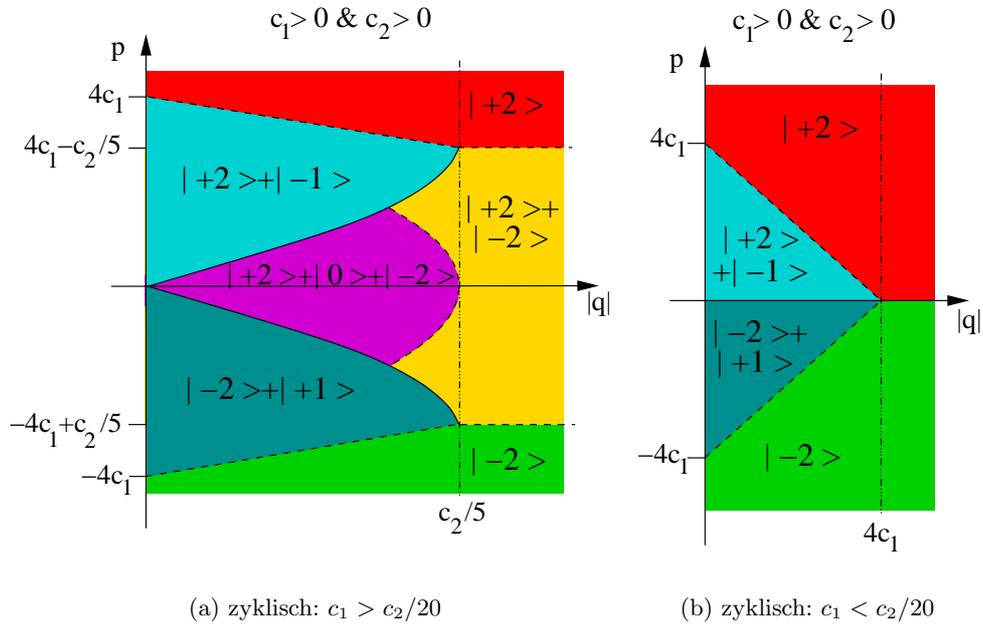


Abbildung 3.7: Die Diagramme (a) und (b) zeigen die Grundzustände der zyklischen Phase in Abhängigkeit von p und $|q|$. Für $|q| > c_2/5$, bzw. $|q| > 4c_1$ zeigt sich, dass die zyklische Phase ein ferromagnetisches oder polares Verhalten annimmt. Welches Verhalten angenommen wird, wird von den Streulängen bestimmt und ist in (c) dargestellt. Die stetigen Übergänge zwischen unterschiedlichen Mischungen in den Diagrammen (a) und (b) sind wieder durch unterbrochene Linien gekennzeichnet, während zwei Gebiete mit einem unstetigen Übergang durch eine durchgezogene Linie abgegrenzt werden.

Phase der Komponenten keine Auswirkung auf die Energie des Systems. Dies ist nicht mehr der Fall, falls drei oder mehr Komponenten besetzt sind. Insbesondere für die Mischung aus $|m_F = 0\rangle$ mit $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ wird die minimale Energie angenommen, falls $\phi_{+2} + \phi_{-2} = \pm\pi$ gilt. Dabei wurde ϕ_0 als absolute Phase $\phi_0 \equiv 0$ gesetzt.

Es zeigt sich, dass der Grundzustand eines Kondensates aus Atomen mit zyklischer Phase in Abhängigkeit von c_1 und c_2 ab einer bestimmten Magnetfeldstärke entweder mit dem ferromagnetischen oder dem polaren Grundzustand identisch ist. Im Gegensatz zur Bestimmung der magnetischen Phase bei Atomen im Hyperfeinzustand F=1 tritt hier also bei einem Offsetfeld $B > 0$ noch eine Komplikation auf: Wird der ferromagnetische Grundzustand von dem Kondensat angenommen, so kann nicht ausgeschlossen werden, dass für die Atome bei $B = 0$ eine zyklische Wechselwirkung vorliegt. Entsprechend kann bei einer Entwicklung des Kondensates in den polaren Grundzustand nicht direkt auf eine polare Phase geschlossen werden.

Für Kondensate mit Gesamtspin größer null gibt es einen Bereich, in dem die Mischung $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ den Grundzustand für die zyklische Phase beschreibt. Diese Mischung ist für die zyklische Phase gegenüber dem polaren Grundzustand bevorzugt. Jedoch bewirkt der quadratische Zeeman-Effekt (wie bei der Mischung der Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ mit der Komponente $|m_F = 0\rangle$) eine Reduzierung in der Besetzung der Komponente $|m_F = -1\rangle$ und es findet ein Übergang in den polaren oder ferromagnetischen Grundzustand statt (siehe Abbildung 3.7(a) und (b)).

Weiterhin gilt zu beachten, dass an der Grenze zwischen den Mischgebieten aus $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ sowie $|m_F = \pm 2\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$ in Abbildung 3.7(a) die beiden Mischungen einen unterschiedlichen Gesamtspin besitzen. Präpariert man ein Kondensat, so dass dieses sich auf dieser Grenzlinie befindet, so kommt es wie bei der ferromagnetischen Phase zu einer Ausbildung von zwei Domänen. Hierbei besetzt ein Teil des Kondensates die Zustände $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$, während die andere Hälfte aus den Komponenten besteht $|m_F = \pm 2\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$.

3.5.3 Neue Darstellung der Phasendiagramme

Die im vorhergehenden Abschnitt präsentierten Phasendiagramme sind leider nicht intuitiv zugänglich, da der Wert p sowohl durch den linearen Zeeman-Effekt als auch durch den Gesamtspin des Ensembles beeinflusst wird. Um eine zugänglichere Darstellung der Phasendiagramme zu erhalten, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine alternative Darstellung ausgearbeitet, mit denen die Diagramme leichter interpretiert werden können, da in diesen die p -Koordinate durch den mittleren Spin pro Teilchen ersetzt wird.

Abbildung 3.8 zeigt die verschiedenen Diagramme für die drei unterschiedlichen magnetischen Phasen. Sie lassen sich leicht aus den „herkömmlichen“ Diagrammen (siehe Abbildung 3.6 und 3.7) konstruieren. Möchte man das Diagramm für eine beliebige magnetische Phase bestimmen, so wählt man einen Gesamtspin und einen bestimmten Wert von q aus. Anschließend schaut man in dem entsprechenden Phasendiagramm in „herkömmlichen“ Darstellung, welcher Zustand mit diesem Gesamtspin den Grundzustand beschreibt.

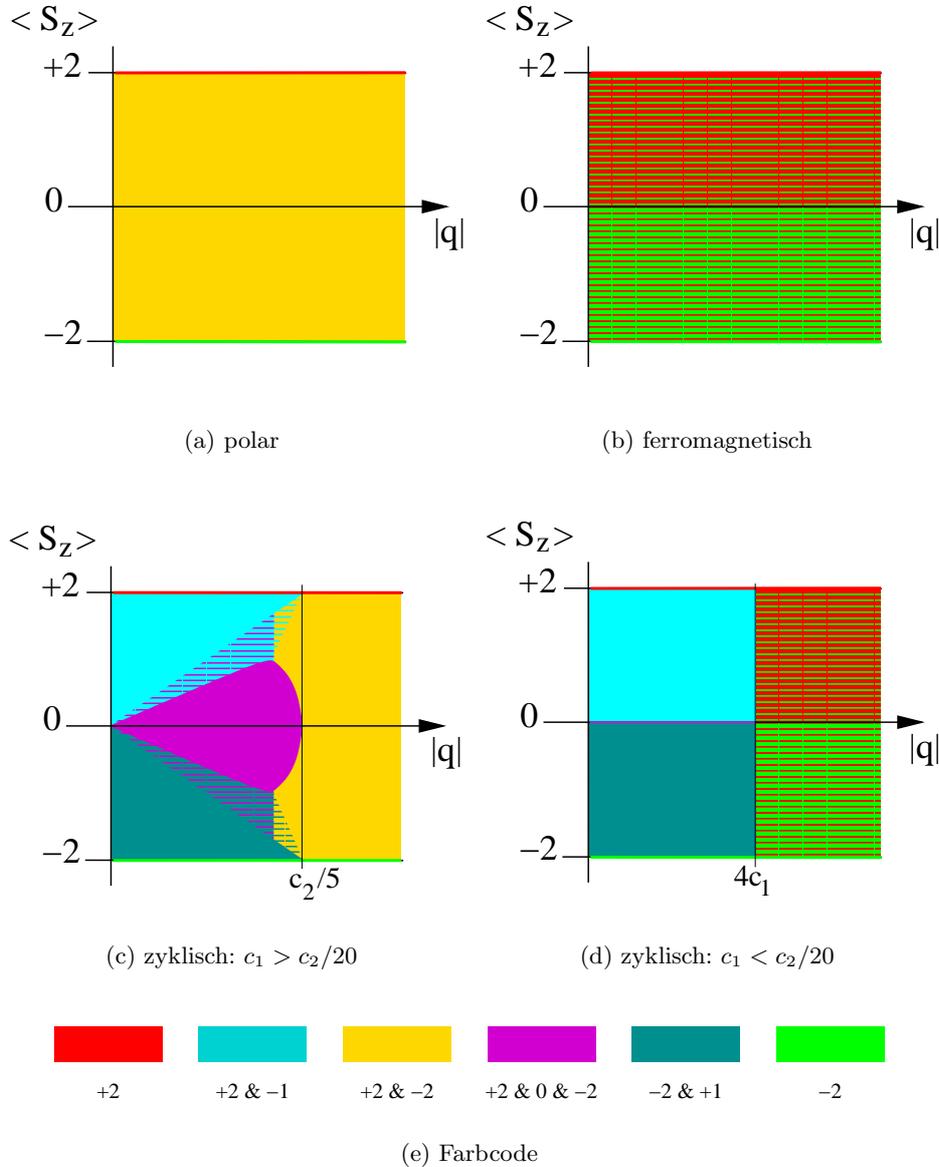


Abbildung 3.8: Die Abbildungen (a)-(d) zeigen eine alternative Darstellung der Phasendiagramme für Spinor-Kondensate aus Atomen mit Hyperfeinspin $F=2$. In einfarbig gekennzeichneten Gebieten ist der Grundzustand eine Mischung aus mehreren Spin-zuständen. In gestreiften Gebieten hingegen kommt es zu einer Separation zwischen den unterschiedlichen Mischungen. Abbildung (e) zeigt, welche Mischungen die Farben darstellen. Über den Spin pro Teilchen ergibt sich, wie die einzelnen Komponenten besetzt sind.

3.6. Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten

Im Fall der polaren Phase ist die Umsetzung sehr einfach, da dort immer eine Mischung aus den Zuständen $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -2\rangle$ den Grundzustand darstellt. Es ändert sich mit dem Gesamtspin also nur das Mischungsverhältnis.

Bei der ferromagnetischen Phase wird der Grundzustand ebenfalls durch die Zustände $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -2\rangle$ beschrieben, hier kommt es jedoch zu einer Phasenseparation der Komponenten. Je größer der mittlere Spin pro Atom ist, desto größer wird der Bereich mit Atomen im Zustand $|m_F = +2\rangle$, bis letztlich bei dem Gesamtspin $+2$ alle Atome diesen Zustand besetzen.

Im Fall der zyklischen Phase ändert sich der Grundzustand in Abhängigkeit vom Offsetmagnetfeld. Die Bestimmung der Graphen erfolgt jedoch, wie bei der ferromagnetischen und der polaren Phase. In dem Phasendiagramm mit $c_1 > c_2/20$ ist der Übergang zwischen den Bereichen, in denen eine Mischung aus $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ bzw. aus $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -2\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ vorliegt, nicht stetig mit der Spinänderung. Daher existiert ein Bereich, in dem es zu einer Phasenseparation der Mischungen aus $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ einerseits und $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -2\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ andererseits kommt. In dem Phasendiagramm für den Fall $c_1 < c_2/20$ tritt keine Phasenseparation auf.

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass diese Darstellung der Phasendiagramme einen Nachteil besitzt. Da der Einfluss des linearen Zeeman-Effektes eliminiert wurde, kann auch die Auswirkung eines Magnetfeldgradienten auf den Grundzustand nicht mehr wiedergegeben werden. Abbildung 3.7(b) zeigt, dass bei $q < 4c_1$ mit steigendem Offsetfeld ein immer kleiner Magnetfeldgradient ausreicht, um eine Separation in die unterschiedlichen Komponenten zu erzielen. Dieser Effekt ist in Abbildung 3.8(d) nicht mehr zu erkennen.

3.5.4 Energieunterschiede

Der Grundzustand eines Kondensates mit Spinfreiheitsgrad wird durch die Streulängen, das Magnetfeld und den Gesamtspin bestimmt. Auch der Energieunterschied zwischen einer beliebigen Mischung zu dem Grundzustand wird durch diese Parameter beeinflusst. Zusätzlich kann es noch durch die relative Phase zwischen den m_F Komponenten zu unterschiedlichen Energiedifferenzen kommen. Die Tabelle 3.2 gibt für die polare und die zyklische Phase die Energiedifferenzen zu dem entsprechenden Grundzustand mit Gesamtspin null an. Als Grundlage werden neben den experimentellen Parametern die in [76] angegebenen Streulängen verwendet, wobei für die zyklische Phase das Vorzeichen des spinabhängigen Wechselwirkungsterms g_4 getauscht wurde.

3.6 Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten

Neben der Frage nach den Grundzuständen in Abhängigkeit von den Streulängen, vom Magnetfeld und vom Gesamtspin ist die zeitliche Dynamik in der Besetzung der Spinkomponenten eine der zentralen physikalischen Fragestellungen der vorliegenden Arbeit. Die Spindynamik erlaubt unter anderem fundamentale Rückschlüsse auf die Wechsel-

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

Tabelle 3.2: Die Tabelle enthält für die polare und die zyklische Phase die Energiedifferenzen einiger Zustände zum Grundzustand der jeweiligen Phase. In der zweiten und vierten Spalte werden entsprechend dem Zustand in der ersten Spalte die minimalen Energiewerte dieser Mischung bezogen auf den Grundzustand der Phase angegeben. Bei Mischungen mit drei oder mehr besetzten Komponenten hängt die Energiedifferenz von den relativen Phasen ab. In den Spalten drei und fünf ist in diesen Fällen die mögliche Energiedifferenz durch die Wahl von anderen Phasenwerten angegeben.

Zustand	polare		zyklische	
	Wechselwirkung Energie / nK	Δ Energie / nK	Wechselwirkung Energie / nK	Δ Energie / nK
$ 0\rangle$	1,08	-	1,14	-
$ -1\rangle + +1\rangle$	0,83	-	0,89	-
$ -2\rangle + +2\rangle$	0	-	0,13	-
$ -1\rangle + 0\rangle + +1\rangle$	0,89	55,02	0,95	54,23
$ -2\rangle + 0\rangle + +2\rangle$	0,70	0,38	0	0,38
Gleichverteilung	0,58	77,39	0,13	75,90

wirkungseigenschaften des atomaren Gases.

Als wesentlicher Ansatz wird im Weiteren die Auswirkung von Magnetfeldern und der relativen Phasen auf die Dynamik mit Hilfe einer Simulation basierend auf der Gross-Pitaevskii Gleichung analysiert. Eine Dissipation durch die Wechselwirkung mit der thermischen Wolke wird zwar vernachlässigt, so dass die Evolution in den Grundzustand nicht berechnet werden kann, jedoch können wichtige Rückschlüsse auf den Einfluss des Magnetfeldes auf die Dynamik gewonnen werden. Ebenso zeigt ein Vergleich zwischen den Simulationen und den Experimenten, dass die anfänglich beobachtete Dynamik recht gut wiedergegeben wird (siehe Kapitel 6).

Die zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten wurde in [81] für Atome mit Hyperfeinspin $F=1$ untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Entwicklung sensitiv auf die anfängliche relative Phase und die Besetzungen der m_F Komponenten ist. Falls eine dieser Größen nicht scharf bestimmt ist, werden stationäre Zustände angenommen. Anderenfalls kommt es zu einem oszillatorischen Verhalten. Die stationären Zustände sind allein auf die nicht-lineare Wechselwirkung zurückzuführen, da auch in diesem Modell Dissipation durch eine thermische Komponente nicht berücksichtigt wurde.

Im Folgenden wird die zeitliche Entwicklung der Besetzungen bei definierten Startwerten für die Phase und die Besetzung der Zustände simuliert. Mit Hilfe des Separationsansatzes $\vec{\varphi}(\vec{r}, t) = \sqrt{n(\vec{r}, t)}e^{i\phi(t)} \cdot \vec{\zeta}(\vec{r}, t)$ lässt sich die zeitabhängige Gross-Pitaevskii

3.6. Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten

Gleichung 3.16 in zwei Gleichungen auftrennen. Diese besitzen die folgende Form :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\phi(t)} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext.}(\vec{r}) + g_0 n(\vec{r}) \right) \sqrt{n(\vec{r}, t)} e^{i\phi(t)}, \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{\zeta}(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2 n(\vec{r}, t) \nabla^2}{2m} \vec{\zeta}(\vec{r}, t) + \tilde{g}_2 n(\vec{r}, t) \vec{\mathcal{S}} \vec{\zeta}(\vec{r}, t) \vec{\zeta}^*(\vec{r}, t) \vec{\mathcal{S}} \vec{\zeta}(\vec{r}, t) \\ &+ \tilde{g}_4 n(\vec{r}, t) \vec{\mathcal{S}}^2 \vec{\zeta}(\vec{r}, t) \vec{\zeta}^*(\vec{r}, t) \vec{\mathcal{S}}^2 \vec{\zeta}(\vec{r}, t) \\ &- p \mathcal{S}_z \vec{\zeta}(\vec{r}, t) + q (\mathcal{S}_z^2 - 4) \vec{\zeta}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dabei muss erst Gleichung 3.43 gelöst werden und anschließend kann Gleichung 3.44 bestimmt werden. Bei den Simulationen wurde eine homogene Dichte $n(\vec{r}) = n$ angenommen und vorausgesetzt, dass es zu keiner Separation der Zustände kommen kann : $\vec{\zeta}(\vec{r}, t) = \vec{\zeta}(t)$. Für den Fall $F=1$ vereinfacht sich das Differentialgleichungssystem 3.44 bei Vernachlässigung der spinabhängigen sowie spinerhaltenden Wechselwirkungsterme⁶ zu :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{+1} &= g_2 n \zeta_{-1}^* \zeta_0^2 - p \zeta_{+1} - 3q \zeta_{+1}, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_0 &= 2g_2 n \zeta_0^* \zeta_1 \zeta_{-1} - 4q \zeta_0, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{-1} &= g_2 n \zeta_{+1}^* \zeta_0^2 + p \zeta_{-1} - 3q \zeta_{-1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Das Gleichungssystem 3.45 lässt sich mit numerischen Verfahren relativ leicht lösen.

Im Gegensatz zu der Dynamik bei einer Kopplung eines kohärenten resonanten Lichtfeldes mit einem Zwei-Niveau Atom, bei der es zu einer Oszillation zwischen den beiden Niveaus kommt, zeigen die Gleichungen 3.45, dass es zu keiner Änderung in der Spinzusammensetzung kommt, falls nur eine Komponente besetzt ist. Für das „Starten“ der Spindynamik wird also ein minimaler Anteil in einem anderen m_F Zustand benötigt. Dies entspricht dem Verhalten bei einer bosonischen Verstärkung und beruht auf der Nichtlinearität des Differentialgleichungssystems 3.45. Insbesondere unterscheiden sich diese beiden physikalischen Systeme durch die Kopplungsart der Zustände. Während für die Kopplung der Zustände des Zwei-Niveau Atoms ein externes Feld benötigt wird, ist diese bei Kondensaten mit Spinfreiheitsgrad per se gegeben. Da in beiden Systemen eine kohärente zeitliche Entwicklung der Zustände erfolgt, kommt es jeweils zu einem periodischen Verhalten.

Es zeigt sich, dass der lineare Zeeman-Effekt durch den Übergang in eine rotierende Basis aus dem Gleichungssystem eliminiert werden kann. Man erhält das Gleichungssystem 3.45 mit $p = 0$ in den neuen Variablen ξ , wenn man $\xi_{\pm 1} = \zeta_{\pm 1} \cdot \exp(\mp i p t / \hbar)$ und $\xi_0 = \zeta_0$ setzt. Der lineare Zeeman-Effekt führt also nur zu einer Drehung der Phasen $\phi_{+1}(t)$ und $\phi_{-1}(t)$ mit der Eigenschaft, dass $\phi_{+1}(t) + \phi_{-1}(t)$ konstant bleibt. Eine Änderung in der zeitlichen Entwicklung verursacht der lineare Zeeman-Effekt also

⁶Die spinabhängigen sowie spinerhaltenden Wechselwirkungsterme führen zu einem geringen Unterschied in der zeitlichen Entwicklung der Spinkomponenten. Die Näherung führt zu keiner Änderung des Magnetfeldeinflusses auf die Spindynamik.

nicht. Dieser Umstand ist in den spinändernden Stößen zu sehen⁷, da es bei einem solchen Stoß unabhängig von dem linearen Zeeman-Effekt zu derselben Phasenänderung kommt (siehe Gleichung 3.45).

Die Abbildung 3.9 zeigt den Einfluss eines Offsetmagnetfeldes auf die kohärente Spindynamik anhand von drei Simulationen. In der Abbildung 3.9(a) ist das Verhalten ohne ein Magnetfeld simuliert worden. In den beiden folgenden Abbildungen wurde der Einfluss des quadratischen Zeeman-Effektes berücksichtigt. In Abbildung 3.9(b) ist der Wert von q kleiner als die spinabhängige Wechselwirkung $g_2 n$ und in (c) gilt $q > g_2 n$. Die Abbildungen (d)-(f) zeigen die zeitliche Entwicklung der Phasen $\phi_{+1}(t) - \phi_0(t) + \phi_{-1}(t)$. Wird der quadratische Zeeman-Effekt vernachlässigt, kommt es zu einer Oszillation in den Spinzuständen mit einer Amplitude von $\Delta|\zeta_0|^2 \approx 0.7$ in der $|m_F = 0\rangle$ Komponente. Die Berücksichtigung des quadratischen Zeeman-Effektes führt bei einem niedrigen Magnetfeld zu einer Verringerung der Amplitude und einer Erhöhung der Oszillationsfrequenz. Ein hohes Magnetfeld, wie in (c) simuliert, führt zu einer Blockade der Spindynamik. Hierbei gilt zu beachten, dass in den Abbildungen (c) und (f) die Entwicklung der Besetzungen und der Phase nur über einen kleineren Zeitraum dargestellt wird. In den Abbildungen (d)-(f) ist die zeitliche Änderung der Phase $\phi_{+1} - \phi_0 + \phi_{-1}$ dargestellt. Diese Phase ist unter anderem in Gleichung 3.45 für die Entwicklung von ζ_{+1} verantwortlich. Es zeigt sich, dass sich diese Phase durch den quadratischen Zeeman-Effekt schneller ändert. Dies führt zu einer kürzeren Oszillationsperiode und einer geringeren Amplitude bei der Spindynamik. Für große Magnetfelder findet aufgrund der schnellen Phasenänderung keine Spinänderung mehr statt. Die Spindynamik wird also durch den Einfluss des quadratischen Zeeman-Effektes blockiert. Dies lässt sich folgendermaßen verstehen : Der quadratische Zeeman-Effekt führt zu einer Änderung in den Phasen. Diese Änderung bleibt, anders als beim linearen Zeeman-Effekt, nicht konstant, sondern die Phase $\phi_{+1}(t) - \phi_0(t) + \phi_{-1}(t)$ ändert sich mit steigendem Magnetfeld immer schneller. Da die relative Phase für die Änderung in der Besetzung der Spinkomponenten wichtig ist (siehe Abbildung 3.9(d)), steht für die Dynamik also bei einer Erhöhung des Magnetfeldes immer weniger Zeit zur Verfügung. Es kommt neben einer Erhöhung der Frequenz zu einer Abnahme der Amplitude.

Es sei darauf hingewiesen, dass es ohne Magnetfeld zwei Fälle gibt, in denen die zeitliche Entwicklung zu einer stationären Lösung führt. Diese werden für die Phasen $\phi_{+1} = -\phi_{-1} = \pm\pi/4$ und $\phi_0 = 0$ angenommen. Die Berücksichtigung des quadratischen Zeeman-Effektes führt in diesen Fällen zu einer Oszillation, da die obige Phasenbedingung zeitlich nicht mehr konstant ist.

Für eine quantitative Beschreibung der Auswirkung durch ein Magnetfeld ersetzt man im Differentialgleichungssystem 3.45

$$\lambda_{\pm 1} = \zeta_{\pm 1} \exp(\mp i(p \pm 3q)t/\hbar) \quad \text{und} \quad \lambda_0 = \zeta_0 \exp(-i4qt/\hbar), \quad (3.46)$$

⁷Die Gesamtspinerhaltung muss bei der zeitlichen Entwicklung nicht mehr „erzwungen“ werden, da diese in der Simulation der Gross-Pitaevskii Gleichung enthalten ist.

3.6. Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten

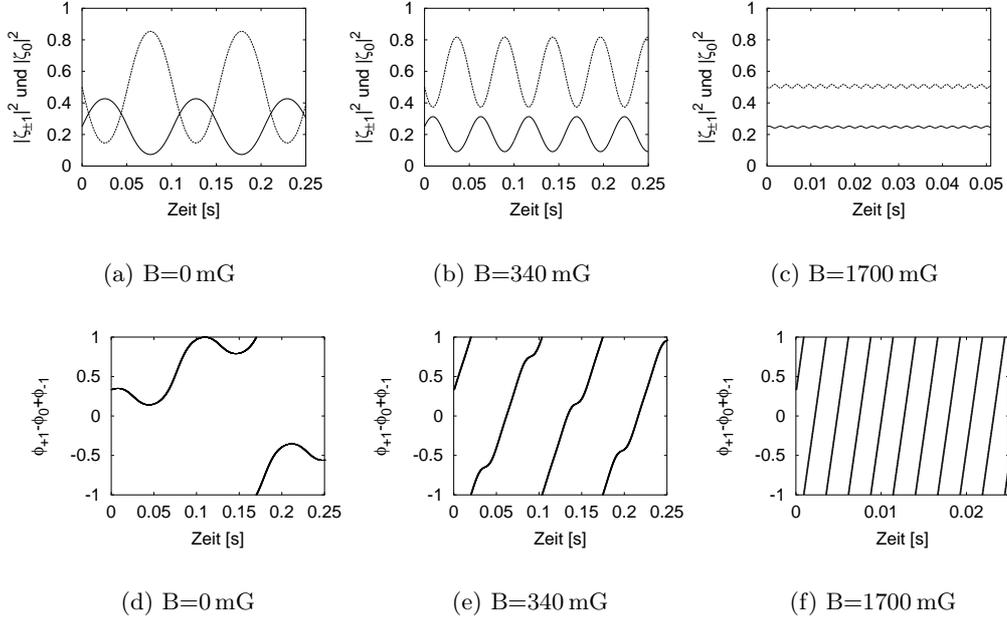


Abbildung 3.9: Die Abbildungen zeigen die Entwicklung in den Besetzungen der m_F Komponenten (a)-(c) und der Phase $\phi_{+1} - \phi_0 + \phi_{-1}$ (d)-(f) in einem $F=1$ System mit der Zeit in Abhängigkeit von einem Magnetfeld. Für diese Simulation wurden die Phasen $\phi_{+1}(t_0) = 0$, $\phi_0(t_0) = 0$ und $\phi_{-1}(t_0) = \pi/3$ gesetzt und die Besetzung in $|m_F = 0\rangle$ beträgt anfänglich $|\zeta_0(t_0)| = \sqrt{1/2}$. Die restliche Besetzung wurde symmetrisch auf die anderen Zustände $|\zeta_{+1}(t_0)| = |\zeta_{-1}(t_0)| = \sqrt{1/4}$ aufgeteilt. Die Ordinate skaliert bei den Abbildungen (d)-(f) in Einheiten von π .

so dass man zu dem folgenden Gleichungssystem gelangt :

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{+1} &= g_2 n \lambda_{-1}^* \lambda_0^2 e^{i2qt/\hbar}, \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \lambda_0 &= 2g_2 n \lambda_0^* \lambda_1 \lambda_{-1} e^{-i2qt/\hbar}, \\
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \lambda_{-1} &= g_2 n \lambda_{+1}^* \lambda_0^2 e^{i2qt/\hbar}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Für hohe Magnetfelder wird in erster Ordnung die Änderung in der Besetzung durch die Exponentialfunktion beschrieben. Für $\lambda_0(t)$ ergibt sich dann :

$$\lambda_0(t_{final}) = \lambda_0(t_0) - \left[\frac{g_2 n}{2q} \lambda_0^*(t_0) \lambda_{-1}(t_0) \lambda_{+1}(t_0) e^{-i2qt/\hbar} \right]_{t_0}^{t_{final}}. \tag{3.48}$$

Man kann ablesen, dass es für $2q \gg g_2 n$ zu keiner Änderung in der Besetzung kommen wird. Die Amplitude der Oszillation wird mit $2q/(g_2 n)$ gedämpft und die Frequenz

steigt linear mit q an. Die Auswirkung des Magnetfeldes auf die Spindynamik ähnelt dem Einfluss der Verstimmung bei einer Kopplung eines kohärenten Lichtfeldes an ein Zwei-Niveau Atom.

Um Spindynamik in einem Bose-Einstein Kondensat beobachten zu können, ist es notwendig, bei einem niedrigen Magnetfeld zu arbeiten. Das Offsetmagnetfeld kann als ein Schalter betrachtet werden, mit dem die Spindynamik aktiviert und deaktiviert werden kann.

3.6.1 Zeitliche Entwicklungen der Spinkomponenten mit Spin 2

Das Differentialgleichungssystem für die zeitliche Entwicklung der m_F Komponenten für Atome im Hyperfeinzustand $F=2$ zeigt ein ähnliches Verhalten wie das Spin-1 System. Die entsprechenden Differentialgleichungen befinden sich im Anhang (Gleichung C.10). Auch hier kommt es zu keiner Änderung in den Besetzungen, falls nur eine Komponente besetzt ist. Die Abbildung 3.10(a) zeigt eine zeitliche Entwicklung der relativen Besetzung der m_F Zustände. Für die Simulation wurden eine Dichte von $4 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und die Streulängen a_0, a_2 und a_4 für ^{87}Rb aus [76] verwendet. Im Ausgangszustand waren die Komponenten $|m_F = \pm 2\rangle$ jeweils mit annähernd 50% besetzt. Die restlichen Zustände wurden mit jeweils $10^{-3}\%$ besetzt. Man erkennt deutlich, dass die Spindynamik mit einer Verzögerung von etwa 35 ms einsetzt. Da der spinabhängige Wechselwirkungsterm \tilde{g}_4 einen kleineren Betrag als \tilde{g}_2 besitzt, kommt es bei der Spindynamik hauptsächlich zu einer Kopplung der Komponenten durch den \tilde{g}_2 Term. Dies bedeutet, dass die Spinänderungen mit $\Delta m_F = 1$ gegenüber denen mit $\Delta m_F = 2$ dominieren. Dieser Effekt ist anhand der Abbildung 3.10(a) gut zu erkennen. Bevor es zu einer Erhöhung in der Besetzung der Spinkomponenten $|m_F = 0\rangle$ kommt, steigt die Besetzung der Spinkomponenten $|m_F = \pm 1\rangle$. Dieses ist ebenfalls bei einer Abnahme in der Besetzung der Komponenten $|m_F = 0\rangle$ zu beobachten.

Wie auch in dem Fall $F=1$ lässt sich der lineare Zeeman-Effekt durch eine zeitliche Propagation in den Phasen eliminieren. Dies erfolgt durch $\xi_{\pm 2} = \zeta_{\pm 2} \cdot \exp(\mp i 2 p t / \hbar)$, $\xi_{\pm 1} = \zeta_{\pm 1} \cdot \exp(\mp i p t / \hbar)$ und $\xi_0 = \zeta_0$.

Beim quadratischen Zeeman-Effekt gibt es zwar den Unterschied zu dem Fall $F=1$, dass die Zustände $\zeta_{\pm 2}$ nicht durch das Magnetfeld beeinflusst werden, es folgen letztlich aber dieselben Eigenschaften für die zeitliche Entwicklung der Spinpopulationen. Ein hohes Magnetfeld unterdrückt die Spindynamik im Kondensat. Dies wird anhand der Abbildungen 3.10(b) und (c) deutlich. Hier wurde im Vergleich zu Abbildung (a) zusätzlich ein Magnetfeld von 340 mG bzw. von 680 mG in die Simulation integriert. Dies ändert in (b) nicht die Zeit bis zum Einsetzen der Spindynamik, aber die anschließende Spindynamik wird deutlich von dem Magnetfeld beeinflusst. In Abbildung 3.10(c) wird die Spindynamik durch das Magnetfeld fast vollständig unterdrückt.

Eine deutlich komplexere Dynamik stellt sich ein, wenn eine Gleichverteilung in alle fünf Komponenten als Startwert gewählt wird. Diese Spindynamik ist sehr stark von der Wahl der Phasen abhängig. Für die in Abbildung 3.10(d) und (e) dargestellten

3.6. Zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten

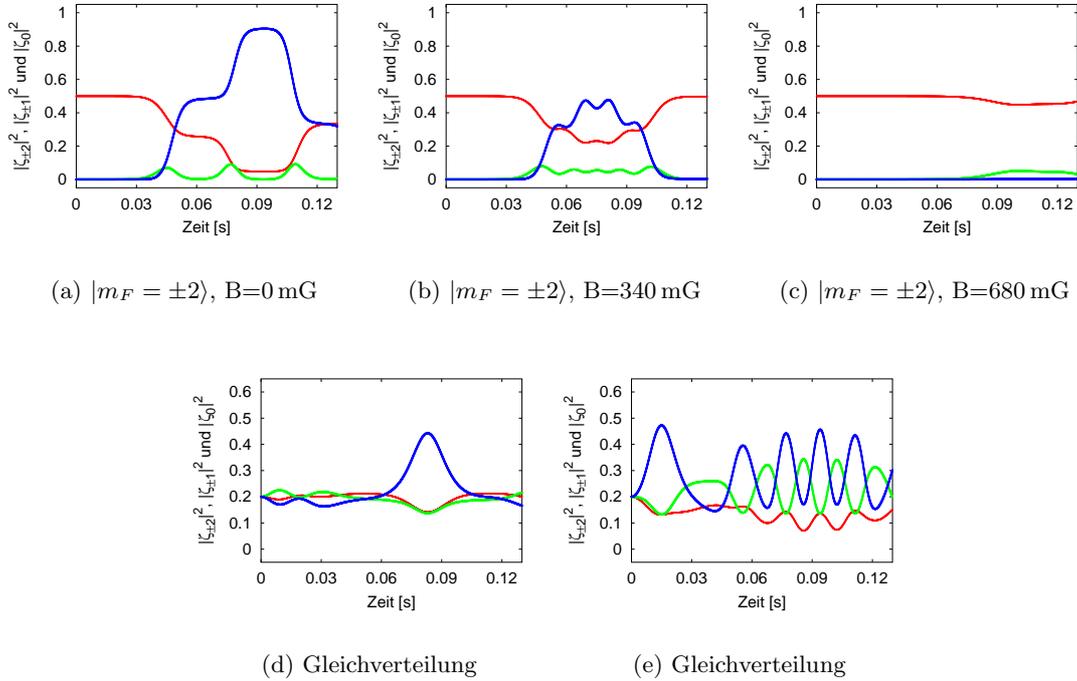


Abbildung 3.10: In Abbildung (a) ist die für ^{87}Rb erwartete kohärente Spindynamik dargestellt ohne ein Magnetfeld dargestellt. Im Ausgangszustand besetzen die Atome fast nur die Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$. Damit die Dynamik stattfindet, wurden die übrigen Zustände sehr schwach besetzt. Die Komponente $|m_F = 0\rangle$ ist in blau, die Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ in grün und $|m_F = \pm 2\rangle$ in rot dargestellt. Wird in der Simulation zusätzlich ein Magnetfeld berücksichtigt, so führt dieses zu einer deutlich anderen Dynamik in der Spinentwicklung bzw. unterdrückt diese fast vollständig (Abbildung (b) und (c)). Die Abbildungen (d) und (e) zeigen die Abhängigkeit der Spindynamik von der Wahl der anfänglichen Phasenwerte. Die beiden Simulationen wurden bei einem Magnetfeld von 340 mG und einer anfänglichen Gleichverteilung in den Spinkomponenten durchgeführt.

Simulationen wurden die folgenden Anfangswerte gewählt :

$$\begin{aligned} \phi_{\pm 2} &= 0, \phi_{\pm 1} = \pi/2 \text{ und } \phi_0 = 0 && \text{für Abbildung 3.10(d),} \\ \phi_{\pm 2} &= \pi, \phi_{\pm 1} = \pi/2 \text{ und } \phi_0 = 0 && \text{für Abbildung 3.10(e) .} \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung in den Spinkomponenten kommt es in Abbildung 3.10(d) erst nach zirka 60 ms zu einer deutlichen Änderung in den Besetzungen. Bei den für die Abbildung 3.10(e) gewählten Startwerten für die Phasen setzt diese hingegen sofort ein und es kommt zu einer schnellen Oszillation mit einer Periode im Bereich von 15 ms. Weiterhin ist deutlich zu erkennen, dass nach 50 ms in Abbildung 3.10(e) die Besetzungen der Zustände $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = \pm 2\rangle$ in Phase sind. Nimmt die Besetzung der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ ab, so erhöht sich diese in den anderen Spinkomponenten. Dieses Verhal-

Theorie zu BEC mit Spinfreiheitsgrad

ten zeigt wiederum die stärkere Kopplung zwischen Zuständen mit $\Delta m_F=1$ gegenüber solchen mit $\Delta m_F=2$.

Realisierung von BEC mit ^{87}Rb -Atomen

In diesem Kapitel werden die Charakteristika der im Rahmen der vorliegenden Dissertation geplanten und aufgebauten Apparatur zur Erzeugung von ^{87}Rb Bose-Einstein Kondensaten beschrieben. Um die folgenden Abschnitte zu motivieren, wird zunächst kurz auf die experimentellen Voraussetzungen für die Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten in verdünnten Gasen eingegangen.

Von der Vorhersage der Bose-Einstein Kondensation bis zur Realisierung mit einem atomaren Gas hat es 70 Jahre gedauert, da hierfür sehr tiefe Temperaturen benötigt werden. Dies ergibt sich aus Gleichung 2.10. Setzt man eine Temperatur von einem Kelvin voraus, so erhält man bei Verwendung der Masse von ^{87}Rb eine Dichte von etwa 10^{23} cm^{-3} . Eine Dichte wie sie in einem Festkörpern angenommen wird. Man muss also ein anderes Temperatur-Dichte Regime wählen, damit das Ensemble bei der kritischen Temperatur noch als Gas vorliegt. Bei genauerer Betrachtung der Temperatur-Dichte Abhängigkeit stellt man fest, dass bei allen Elementen der Übergang zur Bose-Einstein Kondensation nur in einem Bereich gelingt, wo die energetisch günstigste Konfiguration kein Gas mehr ist (siehe Abbildung 4.1). Eine Ausnahme stellt nur spinpolarisierter Wasserstoff dar. Dieser bleibt bis zum Temperaturnullpunkt im gasförmigen Zustand [83, 84]. Alle Bose-Einstein Kondensate aus anderen Atomen können nur in einem meta-stabilen Zustand erzielt werden. Damit dieser Zustand über einen längeren Zeitraum stabil ist, muss ein Dichteregime gewählt werden, in dem die elastischen Zwei-Körper Stöße gegenüber den Drei-Körper Stößen, welche für die Molekülbildung verantwortlich sind und somit zu Verlusten führen, dominieren. Die realisierten Bose-Einstein Kondensate befinden sich also im kinetischem Gleichgewicht, aber nicht im chemischen. Die Stoßeigenschaften der Atome stellen die wesentlichen Rahmenbedingungen für die experimentelle Umsetzung der Bose-Einstein Kondensation in verdünnten Gasen dar. Für ^{87}Rb und ^{23}Na beträgt die Lebensdauer bei einer Dichte von zirka 10^{14} cm^{-3} einige Sekunden und somit ist ein großes Zeitfenster für Experimente mit Bose-Einstein Kon-

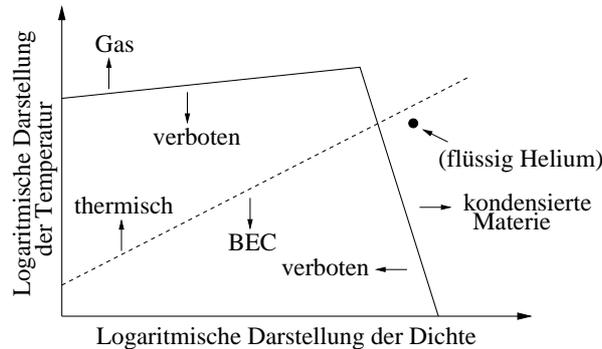


Abbildung 4.1: Dargestellt ist ein für alle Atome geltendes Phasendiagramm. Die gestrichelte Linie zeigt den Übergang zwischen einer rein thermischen Verteilung und einem Bose-Einstein Kondensat. Die übrigen Linien deuten die Grenzen zwischen erlaubten und verbotenen Zonen im Temperatur-Dichte Graphen an. Selbst für niedrige Dichten erfolgt die Bose-Einstein Kondensation nur in Bereichen, in denen der gasförmige Aggregatzustand nicht der energetisch günstigste Zustand ist. Diese Abbildung ist [82] entnommen.

densaten gegeben.

Aus Gleichung 2.10 ergibt sich bei einer Dichte von 10^{14} cm^{-3} für ^{87}Rb eine kritische Temperatur von etwa 400 nK. Die Grundlage zum Erzielen solcher Temperaturen ist die Laserkühlung [8, 6, 7] in Verbindung mit dem evaporativen Kühlen [10, 85], welches meist nach einem Transfer der Atome in eine Magnetfalle eingesetzt wird. Die Evaporation dauert in der Regel zehn bis dreißig Sekunden. Um während dieser Phase nicht einen Großteil der Atome durch Stöße mit dem Hintergrundgas zu verlieren, wird ein Vakuum mit einem Druck von etwa 10^{-11} mbar benötigt.

Auf die experimentelle Umsetzung der beschriebenen Voraussetzungen und die Detektion des atomaren Gases wird im Weiteren eingegangen.

4.1 Rubidium 87

Bei der Planung eines Experimentes zur Bose-Einstein Kondensation spielt die Auswahl des Elementes eine weitreichende Rolle. Dabei hat sich ^{87}Rb als ein Element mit sehr guten Eigenschaften herausgestellt. Zum einen eignet es sich sehr gut für die Laserkühlung und weiterhin besitzt es günstige Stößeigenschaften, die eine effiziente evaporative Kühlung ermöglichen. Zudem liegt der zum optischen Kühlen benötigte Übergang von ^{87}Rb bei 780 nm, so dass hier Laserdioden oder Festkörperlaser verwendet werden können. Zentral für diese Arbeit ist jedoch insbesondere, dass ^{87}Rb im Hyperfeinzustand $F=2$ auch bei einer Spinmischung vergleichsweise lange Lebensdauern aufweist. Dieser Effekt beruht auf einer „zufälligen“ destruktiven Interferenz von Zerfallskanälen [45, 86]. Nur dadurch wurden die in Kapitel 6 vorgestellten Untersuchungen zu $F=2$ Spinor-Kondensaten möglich. Wie in einer früheren Arbeit [87] gezeigt wurde,

sind derartige Experimente mit ^{23}Na nicht möglich.

4.2 Das Vakuumsystem

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Vakuumsystem ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Es kann in zwei Bereiche unterteilt werden, welche durch eine differentielle Pumpstufe miteinander verbunden sind. Die differentielle Pumpstufe besitzt einen Durchmesser von 6 mm und hat einen Leitwert von $0,23 \text{ l s}^{-1}$. Somit ist es möglich, einen Druckgradienten zwischen der mittleren Öffnung der differentiellen Pumpstufe und dem unteren UHV-Bereich mit $P_{oben} > 200 P_{unten}$ aufzubauen. Der Effekt der differentiellen Pumpstufe wird zusätzlich durch zwei Graphitröhrchen (Poco CZR-2) erhöht.

Der untere Teil der Vakuumkammer stellt den UHV-Bereich dar, in dem die Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten durchgeführt werden. Hier wurde ein Druck von $1-2 \times 10^{-11}$ mbar erzielt.

Der obere Teil des Vakuumsystems dient der Präparation eines kalten Atomstrahls von ^{87}Rb Atomen. Der notwendige Rubidium-Dampfdruck kann mit Hilfe eines von vier Dispensern (Seas Rb/NF/7/17/FT10-10) aufgebaut werden. Die Aktivierung erfolgt während der Experimente durch einen Strom von 6 A.

Die in diesem Bereich der Vakuumkammer verwendete Quarzzelle besitzt keinen Glas-zu-Metall-Übergang. Die Dichtung der Quarzzelle erfolgt mit Helikoflex-Dichtringen (Typ HN200). Durch die Verwendung dieser Zelle ist es möglich, die Distanz zwischen den magneto-optischen Fallen in den beiden Bereichen der Vakuumkammer zu minimieren. Der Abstand beträgt 28 cm. Die Minimierung dieses Abstandes ist vorteilhaft, da der Atomstrahl eine gewisse Divergenz aufweist und somit bei einer kürzeren Distanz mehr Atome in den Empfangsbereich der unteren magneto-optischen Falle gelangen.

Das Ausheizen der Apparatur

Um den angegebenen Druck im Bereich von 10^{-11} mbar in einer Vakuumkammer zu realisieren, muss diese ausgeheizt werden. Bei Verwendung von Quarzzellen oder auch Quarzfenstern in einer Vakuumapparatur kommt es häufig zu einem Bruch des Glases, da die Wärmeausdehnungskoeffizienten von Stahl und Quarz sehr unterschiedlich sind. Um diesen Gefahrenpunkt zu umgehen, wurde das Vakuumsystem ohne Quarzzellen auf 350°C geheizt und dann für die Dauer von etwa einer Woche bei dieser Temperatur ausgeheizt. Nach dem Abkühlen wurden die Blindflansche gegen die Quarzzellen ausgetauscht. Bei der Montage wurde die Vakuumkammer mit Argon durchströmt, so dass während dieser Phase nur eine vernachlässigbare Menge Luft in die Apparatur gelangen konnte. Mit dieser Prozedur konnte der notwendige Druck ohne ein Ausheizen der Quarzzellen erreicht werden.

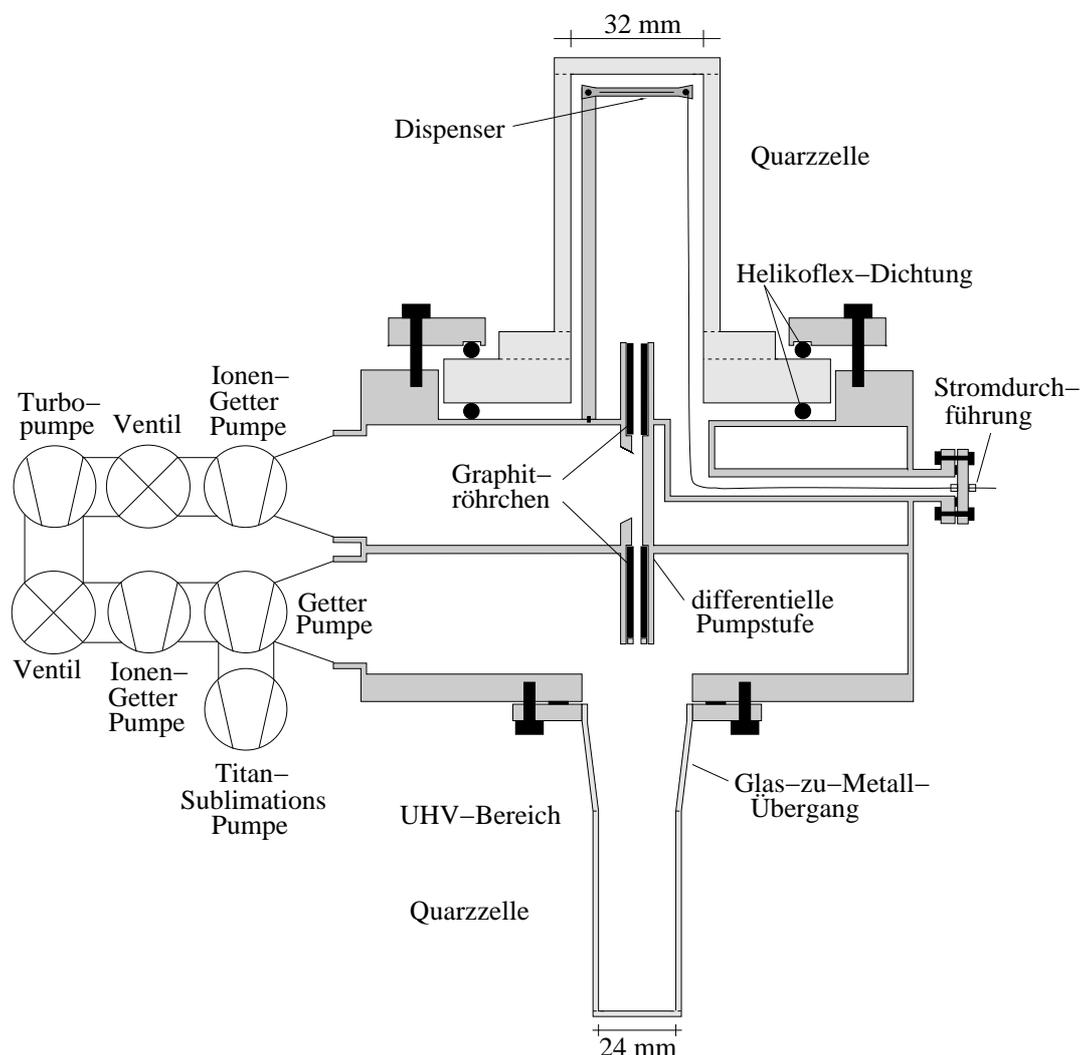


Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch die Hauptkammer des Vakuumsystems mit zwei Quarzzellen. Die obere Zelle dient als Quellenbereich, während in der unteren Zelle die Experimente durchgeführt werden. Die beiden Quarzzellen sind durch eine differentielle Pumpstufe voneinander getrennt. Die Vakuumpumpen sind schematisch in die Zeichnung integriert.

4.3 Das Lasersystem

Das im Rahmen dieser Arbeit geplante und zusammen mit Dipl.-Phys. Michael Erhard aufgebaute Lasersystem zur Manipulation von ^{87}Rb Atomen basiert auf Halbleiterlasern. Es ermöglicht das Verhalten der Atome in den jeweiligen Phasen des Experimentes in gewünschter Weise zu beeinflussen.

Für die unterschiedlichen Prozesse werden verschiedene Frequenzen benötigt. Diese

sind in Tabelle 4.1 angegeben. Für die Realisierung der Frequenzen werden zwei Gitterstabilisierte Diodenlaser [88] eingesetzt. Mit Hilfe dopplerfreier FM-Spektroskopie [89] werden diese auf die *cross-over* der Hyperfeinübergänge $F=2 \rightarrow F'=2$ und $F=2 \rightarrow F'=3$ bzw. $F=1 \rightarrow F'=1$ und $F=1 \rightarrow F'=2$ der ^{87}Rb D_2 Linie *gelockt*. Die Frequenzverschiebung für die jeweilige Anwendung und das Schalten der Lichtfelder erfolgt mit akkustooptischen Modulatoren (Crystal Technology Model 3200). Anschließend kann zur Leistungserhöhung eine weitere Laserdiode durch *injection lock* auf der entsprechenden Wellenlänge betrieben werden [88].

Um das Licht zum Experiment zu führen, werden *single-mode* Fasern (3M FS-SN-4224, nicht polarisationserhaltend) verwendet. Nach dem Austreten aus der Faser werden die Strahlen mit Hilfe eines Achromaten kollimiert. Die Fasern bieten neben der hohen Flexibilität zusätzlich den Vorteil, dass das austretende Licht ein sauberes Modenprofil besitzt. Außerdem kann die Polarisation des Lichtes mit Hilfe von so genannten Polarisationswippen nahezu beliebig eingestellt werden [90]. Messungen der Polarisation des Lichtes hinter einer Faser haben ergeben, dass die erzielte Polarisation Abweichungen im Bereich von 5% gegenüber der gewünschten Polarisation aufweist. Diese Polarisation bleibt ohne eine messbare Drift über mehrere Wochen konstant. Es zeigt sich, dass eine starke Biegung der Faser nach einer Polarisationswippe zu einem geringeren Einstellbereich in der Polarisation führt. Um den Einstellbereich nicht zu begrenzen, sollte eine starke Biegung vermieden werden.

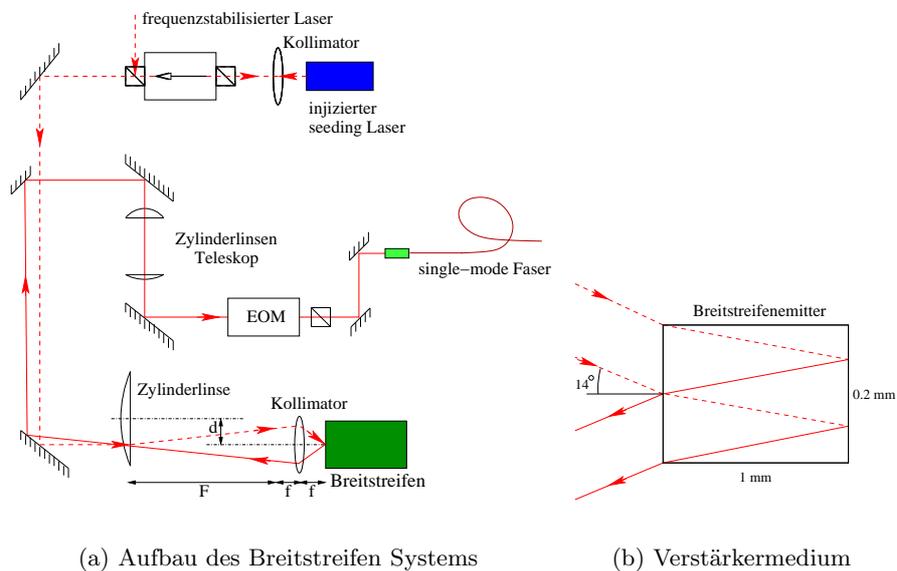


Abbildung 4.3: Die Abbildungen zeigen eine schematische Darstellung des Breitstreifen-systems.

Für den Betrieb der aufgebauten großvolumigen drei-dimensionalen magneto-optischen Falle wird eine Leistung von mindestens 60 mW benötigt. Für die Bereitstellung

Realisierung von BEC

dieser Leistung wird ein Breitstreifenemitter (Modell HPD 1120-C) als Verstärkermedium benutzt. Der Aufbau dieser Komponente ist in Abbildung 4.3 dargestellt und entspricht im Wesentlichen der Beschreibung in [91]. Ein Diodenlaser mit einer Ausgangsleistung um 50mW wird durch einen Frequenz-stabilisierten Laser injiziert, so dass der Diodenlaser Licht mit einer definierten Frequenz emittiert. Eine Beeinflussung der Diode durch den Breitstreifenemitter wird durch einen Faraday-Isolator mit einer Abschwächung von 30 dB verhindert. Mit Hilfe eines Kollimators mit einer Brennweite von $f=4,5$ mm und einer Zylinderlinse mit einer Brennweite von $F=80$ mm wird der Laserstrahl auf den Breitstreifen abgebildet. Dieses System ergibt einen Fokus in der vertikalen Achse und stellt ein Teleskop für die horizontale Achse dar. Der Strahl der Laserdiode besitzt an der Frontfacette des Breitstreifens etwa dessen vertikale und halbe horizontale Ausdehnung. Der Strahl kann aufgrund der geringen Reflektivität an der Frontfacette in den Chip eintreten und wird an der Rückseite reflektiert. Um das verstärkte Lichtfeld von dem zu verstärkenden räumlich zu trennen, wird die Zylinderlinse um eine Strecke d verschoben. So tritt das Lichtfeld des Diodenlasers unter einem Winkel auf den Breitstreifen (siehe Abbildung 4.3(b)) und das verstärkte Lichtfeld tritt unter dem selben Winkel auf der anderen Seite des Chips wieder aus. Durch einen Spiegel wird der verstärkte Lichtstrahl nach einer Strecke von zirka 20 cm umgelenkt. Zur Strahlformung wird ein Zylinderlinsenteleskop mit einem Brennweitenverhältnis von 1:3 benutzt. Bevor der Strahl in eine *single-mode* Faser gekoppelt wird, sorgt ein elektrooptischer Modulator (Linos LM202-P) dafür, dass die Intensität schnell geregelt oder geschaltet werden kann. Die *gelockte* Ausgangsleistung liegt bei 350 mW. Da das Modenprofil des Breitstreifenemitters relativ schlecht ist, können nur etwa 100 mW in eine *single-mode* Faser eingekoppelt werden.

Nach dieser Faser schließt sich ein kompaktes Element an, in dem das Licht auf sechs weitere *single-mode* Fasern aufgeteilt wird. Dieses System der Firma OFR besteht neben einem Faserauskoppler und sechs Fasereinkopplern aus Halbwellenplatten, doppelbrechenden Kristallen und Spiegeln (siehe Abbildung 4.4). Das Licht in den sechs Fasern dient zum Betrieb der magneto-optischen Falle. Das kompakte Aufteilungssystem bietet zwei Vorteile gegenüber einem herkömmlichen Aufbau einer magneto-optischen Falle. Diese sind ein platzsparender Aufbau im Bereich der Vakuumkammer und eine hohe räumliche Stabilität der MOT-Strahlen, da ein kurzer und direkter Strahlengang nach der Auskopplung möglich ist. Diese Vorteile erkauft man sich jedoch mit dem Nachteil, dass die Effizienz¹ des Aufteilersystems ca. 60% beträgt. Die Intensitäten der einzelnen Strahlen schwanken auf einer Zeitskala von Monaten.

Eine schematische Darstellung des kompletten optischen Systems befindet sich in Anhang B.

¹Es wurden auch höhere Effizienten erreicht. Es zeigte sich aber, dass die Effizienz der einzelnen Ports sich innerhalb weniger Tage auf etwa 60% verringerte.

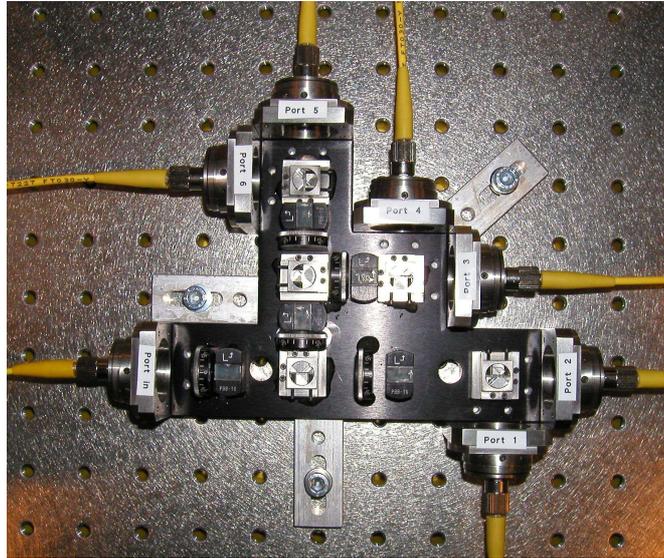


Abbildung 4.4: Kompaktes optisches System mit Hilfe dessen das Licht aus einer single-mode Faser in sechs single-mode Fasern aufgeteilt wird.

4.4 Die magneto-optische Falle

Mit Hilfe der magneto-optischen Falle können neutrale Atome mit einer niedrigen kinetischen Energie abgebremst und im Fallenzentrum gespeichert werden. Sie dient in fast allen Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation als erster Schritt zum Erhöhen der Phasenraumdicke. Diese steigt im Vergleich zu einem Gas bei 300 K um einen Faktor von etwa 10^6 und es werden Phasenraumdichten im Bereich von 10^{-6} erreicht.

Das Prinzip dieser Fallentechnik basiert auf dem Impulsübertrag von Photonen auf Atome [7]. Mit Hilfe eines magnetischen Quadrupolfeldes und sechs zirkular polarisierten Laserstrahlen kann ein orts- und geschwindigkeitsabhängiges Kraftfeld erzeugt werden,

Tabelle 4.1: Übersicht über die verwendeten Laserleistungen, Einstrahlzeiten sowie Verstimmungen für die einzelnen Anwendungen.

Anwendung	Zeitdauer [s]	Leistung [mW]	gemessener $1/e^2$ Strahldurchmesser	Hyperfeinübergang der D_2 Linie	Verstimmung
2d-MOT	10-30	40-80	10mm; 50mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	$-2,7 \Gamma$
Rückpumper (2d)	10-30	3,5	10mm; 50mm	$F=1 \rightarrow F'=2$	≈ 0
pushing Strahl	10-30	$\leq 0,7$	4mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	≈ 0
MOT	10-30	60	22mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	$-3,1 \Gamma$
Melasse	15×10^{-3}	60	22mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	$-3,1 \Gamma; -5,3 \Gamma$
Rückpumper	10-30	3,0	22mm	$F=1 \rightarrow F'=2$	≈ 0
Umpumper	$0,1 \times 10^{-3}$	0,3	6mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	≈ 0
Detektion	$0,2 \times 10^{-3}$	2,0	40mm	$F=2 \rightarrow F'=3$	-3Γ bis 0

welches für langsame Atome einen überkritisch gedämpften harmonischen Oszillator darstellt [9]. Eine ausführliche Diskussion findet sich z.B. in [92].

4.4.1 Das System aus einer zwei- und einer drei-dimensionalen MOT

In dem aufgebauten Experiment werden zwei unterschiedliche Realisierungen einer magneto-optischen Falle eingesetzt. Dies ist neben einer „herkömmlichen“ drei-dimensionalen MOT, welche zum Speichern der kalten Atome dient, eine zwei-dimensionale MOT. Mit dieser wird ein kalter Atomstrahl erzeugt. Durch die Ausrichtung des Atomstrahls über der differentiellen Pumpstufe gelangen so die kalten Atome in den Bereich der unteren Quarzzone (siehe Abbildung 4.2), wo sie von der drei-dimensionalen MOT gefangen werden können.

Im Folgenden wird auf die Besonderheiten der zwei-dimensionalen magneto-optischen Falle eingegangen. Anschließend werden die verwendeten Parameter des Systems und die charakteristischen Messdaten vorgestellt.

Eigenschaften einer zwei-dimensionalen MOT

Eine zwei-dimensionale magneto-optische Falle wurde zuerst zum transversalen Kühlen und Komprimieren eines Atomstrahls benutzt [93, 94]. Es zeigt sich jedoch, dass allein durch das zwei-dimensionale Kühlen in einer Hintergrundgas-Zelle ein Strahl von kalten Atomen mit einem Fluss bis zu 3×10^{10} Atomen pro Sekunde erzeugt werden kann [95, 96, 97].

Für die experimentelle Realisierung einer zwei-dimensionalen MOT wird ein zwei-dimensionales magnetisches Quadrupolfeld benötigt. Die Linie mit Magnetfeld null definiert die freie Propagationsrichtung der Atome. Durch vier Laserstrahlen wirkt senkrecht zu dieser Richtung die Spontankraft auf die Atome. Diese führt zu einer Kühlung und einem Einschluss in radialer Richtung.

Nachfolgend wird die Funktionsweise der zwei-dimensionalen magneto-optischen Falle in Abhängigkeit von den experimentellen Parameter diskutiert.

Eine Besonderheit der Falle besteht darin, dass bei einer endlichen Länge der zwei-dimensionalen MOT die Geschwindigkeitsverteilung der Atome entlang der freien Achse nicht einer thermischen Verteilung entspricht. Sie liegt bei kleinen Geschwindigkeiten, obwohl keine Kühlung in dieser Achse erfolgt. Für die Kühlung der Atome in radialer Richtung ist die Wechselwirkungszeit in der zwei-dimensionalen MOT entscheidend. Atome mit einer hohen Geschwindigkeit parallel zur Quadrupolachse befinden sich nur für eine kurze Zeit im Einfangbereich, so dass diese Atome in radialer Richtung nicht ausreichend gekühlt werden. Dieser Effekt führt somit zu einer Selektion von Atomen mit einer geringen Geschwindigkeit in longitudinaler Richtung. Eine Verlängerung der zwei-dimensionalen MOT in dieser Richtung ermöglicht das Kühlen von Atomen mit einer höheren Geschwindigkeit entlang dieser Achse.

Weiterhin steigt der atomare Fluss in der zwei-dimensionalen MOT linear mit einer Erhöhung des Rubidium-Drucks an. Dies gilt, solange Stöße innerhalb der zwei-

dimensionalen MOT vernachlässigt werden können. Stöße innerhalb der MOT beeinflussen die radial gekühlten Atome. Insbesondere Licht-induzierte Stöße [98] stellen aufgrund des hohen Stoßquerschnittes einen effektiven Verlustkanal dar. Je länger die zwei-dimensionale MOT ist, desto länger halten sich die Atome mit einer Geschwindigkeit v in dieser auf. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Stöße von Atomen der Geschwindigkeit v mit der Länge der MOT steigt, oder dass bei fester Länge die langsameren Atome durch einen solchen Stoßprozess bevorzugt verloren gehen. Wird die zwei-dimensionale MOT in dem Regime betrieben, wo die mittlere freie Weglänge der Atome vergleichbar mit der Länge der zwei-dimensionalen MOT ist, so führt eine Verlängerung dieser zu einer Erhöhung der mittleren Geschwindigkeit, aber nicht zu einem höheren Fluss.

Experimentelle Realisierung

Die zwei-dimensionale MOT wird mit einem radialen magnetischen Quadrupolfeld mit 18 G cm^{-1} und zwei Laserstrahlen betrieben. Die Laserstrahlen werden jeweils durch ein Zylinderlinsenteleskop auf $1 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ ($1/e^2$ Durchmesser) aufgeweitet. Sie verlaufen senkrecht zum Quadrupolfeld und senkrecht zueinander. Die zwei-dimensionale magneto-optische Falle ergibt sich durch Rückreflexion dieser Strahlen.

In den während dieser Arbeit durchgeführten Experimenten zur Analyse des durch die zwei-dimensionale MOT erzeugten Atomstrahls wurde nicht die Geschwindigkeitsverteilung vermessen. Statt dessen wurde die Laderate der drei-dimensionalen MOT als Optimierungskriterium verwendet. Dabei wurde ein Magnetfeldgradient von $B' = 18 \text{ G cm}^{-1}$ in der 3-dimensionalen MOT verwendet. In Abbildung 4.5(a) ist eine typische Ladekurve der unteren MOT dargestellt. Hierzu wurde die Fluoreszenz der Atome auf eine Fotodiode abgebildet. Die Kalibrierung erfolgte durch Absorptionenaufnahmen mit einer CCD-Kamera. Mit dem beschriebenen System konnte eine Laderate von $1,3 \times 10^8$ Atomen pro Sekunde erzielt werden.

Unter Verwendung eines *pushing* Strahls ließ sich die Laderate deutlich erhöhen (siehe Abbildung 4.5(a)). Es wurde eine Laderate von bis zu $1,1 \times 10^9$ Atomen pro Sekunde gemessen. Der *pushing* Strahl verläuft dabei entlang des Magnetfeldminimums der zwei-dimensionalen MOT in Richtung der differentiellen Pumpstufe. Abbildung 4.5(b) zeigt den Einfluss der Frequenz des *pushing* Strahls auf die Laderate. Den stärksten Einfluss auf die Laderate besitzt ein resonanter Strahl. Dieser wechselwirkt bevorzugt mit sehr langsamen Atomen und beschleunigt diese in Richtung der differentiellen Pumpstufe. Somit kommt es zu einem höheren Fluss. Insbesondere gelangen so Atome in den Einfangbereich der drei-dimensionalen MOT, welche sonst aufgrund der endlichen Geschwindigkeit in radialer Richtung nicht in diesen Bereich gekommen wären.

Bei rot verstimmtem Licht fällt die Laderate schnell ab, während sie bei blau verstimmtem Licht über einen weiten Frequenzbereich sehr hoch bleibt. Diese Beobachtung ist einsichtig, da ein rot verstimmtter *pushing* Strahl hauptsächlich mit Atomen wechselwirkt, die sich von der differentiellen Pumpstufe entfernen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich das aufgebaute System durch eine hohe Laderate bei einer vergleichsweise geringen benötigten Laserleistung von 40-80 mW auszeichnet. In der drei-dimensionalen MOT konnten bei einem Magnetfeldgradienten von

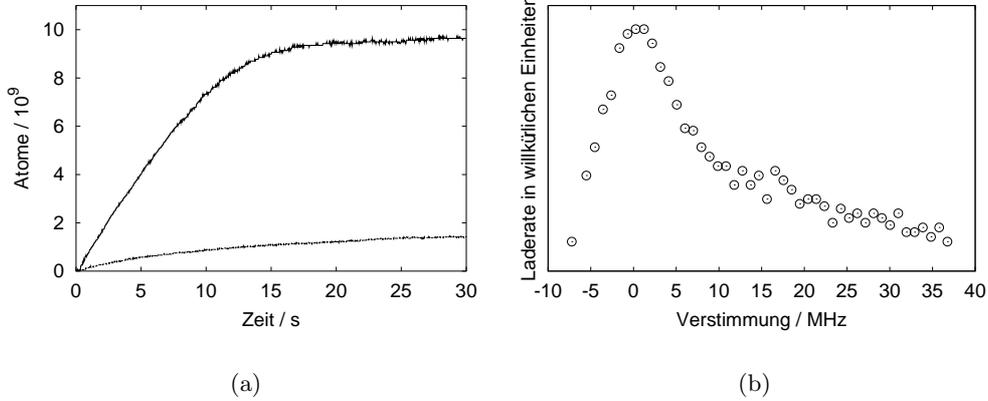


Abbildung 4.5: Abbildung (a) zeigt die Ladekurve der MOT mit und ohne Verwendung des *pushing* Strahls. Insgesamt konnten bis zu 10^{10} Atome in der MOT gefangen werden. In Abbildung (b) ist die Abhängigkeit der Laderate von der Verstimmung des *pushing* Strahls gegenüber der Resonanz des Übergangs $F = 2 \rightarrow F' = 3$ dargestellt.

18 G/cm bis zu 10^{10} Atome innerhalb von zirka 15 s gefangen werden. Die Temperatur der Atome in der MOT beträgt $150 \pm 30 \mu\text{K}$.

4.4.2 Optische Melasse

Nach der MOT-Phase und vor dem Umladen der Atome in die Magnetfalle werden die Atome noch durch eine optische Melasse weiter abgekühlt. Der Kühlmechanismus ist das Polarisations-Gradienten-Kühlen [99, 100]. In der experimentellen Umsetzung besteht diese Phase aus zwei Abschnitten. Nach dem Abklingen des Anti-Helmholtzfeldes wird für fünf Millisekunden eine optische Melasse mit einer Verstimmung von drei Linienbreiten und anschließend für weitere zehn Millisekunden mit einer Verstimmung von etwa fünf Linienbreiten angewandt. Diese Vorgehensweise zeigte sich als sinnvoll, da die erreichbare Grenztemperatur mit der Verstimmung sinkt. Anfänglich erweist sich die geringere Verstimmung als vorteilhaft, um eine hohe Streurrate zu erhalten. Obwohl auch ein Absenken der Intensität der Laserstrahlen zu einem Absenken der erreichbaren Temperatur führen sollte [92], wurde dies nicht beobachtet. Ein Absenken der Laserintensität führte nur zu einer Abnahme der Teilchenzahl. Es wurde eine Temperatur des Gases von $50 \mu\text{K}$ erzielt. Diese liegt oberhalb der theoretisch erreichbaren Grenze von einer Rückstoßenergie. Diese ist für eine hohe Teilchenzahl jedoch aufgrund von Reabsorptionsprozessen nicht zu erreichen [101].

Als eine Hilfe im Labor-Alltag stellte sich die folgende Methode zum Testen der Melasse heraus [102]: Nach dem Laden der Atome in die magneto-optische Falle wurde für eine Sekunde eine Melasse bei einer Verstimmung von fünf Linienbreiten gefahren. Anschließend wurde wieder das Anti-Helmholtzfeld der magneto-optischen Falle eingeschaltet. Ein Wiedereinfang von $> 50\%$ ließ auf gut justierte Strahlengänge und eine

akzeptable Polarisation des Lichtes sowie auf ein Intensitätsgleichgewicht der entgegengesetzten Strahlen schließen.

4.5 Die Magnetfalle

In einer Magnetfalle kann ein kaltes atomares Ensemble thermisch isoliert gespeichert werden. Ein solches konservatives Potential ermöglicht es, die Phasenraumdicke eines atomaren Gases weiter zu erhöhen. Für die Speicherung wird die Wechselwirkung des magnetischen Moments der Atome mit einem Magnetfeld ausgenutzt. Das Wechselwirkungspotential für ein Atom mit dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$ in einem Magnetfeld \vec{B} beträgt :

$$\begin{aligned} V_{ext.} &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ &= m_F g_F \mu_B |\vec{B}|, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei μ_B das Bohr'sche Magneton, m_F den magnetischen Unterzustand und g_F den Landé-Faktor des Hyperfeinzustandes bezeichnen. Dabei wird davon ausgegangen, dass das magnetische Moment eines Atoms bei einer Bewegung durch das Magnetfeld diesem adiabatisch folgen kann. Aus den Maxwell-Gleichungen kann abgeleitet werden, dass mit Hilfe von statischen Feldern nur Magnetfeldminima erzeugt werden können [103]. Bei Experimenten mit ^{87}Rb können Atome in den Spinzuständen $|F = 2, m_F = -2\rangle$, $|F = 2, m_F = -1\rangle$ und $|F = 1, m_F = 1\rangle$ magnetisch gespeichert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden nur Atome im Zustand $|F = 2, m_F = -2\rangle$ benutzt.

Die einfachste Konfiguration für die Erzeugung eines magnetischen Einschlusses besteht aus zwei Spulen in Anti-Helmholtz Anordnung. Das resultierende Feld besitzt im Zentrum einen Punkt mit Magnetfeld null. Falls Atome sich diesem Punkt nähern, so kann die Adiabazitätsbedingung

$$\hbar\omega_{Lamor} = m_F g_F \mu_B |\vec{B}| \gg \frac{|\dot{\vec{B}}|}{|\vec{B}|} \quad (4.2)$$

nicht mehr erfüllt werden. Es kommt zu den so genannten Majorana-Übergängen [104] in andere m_F Zustände. Dies stellt einen Verlustprozess dar. Es gibt im Wesentlichen zwei unterschiedliche Feldgeometrien, die diesen Verlustkanal vermeiden. Bei der TOP-Falle [105] wird dem Quadrupolfeld ein rotierendes Offsetfeld überlagert. Da die Atome das zeitlich gemittelte magnetische Feld „sehen“, gibt es im Fallenzentrum keinen Punkt mit Magnetfeld null und die Bedingung 4.2 kann erfüllt werden. Die zeitlich gemittelte Geometrie des zeitabhängigen Fallenpotentials ist harmonisch, wobei eine Fallenfrequenz um den Faktor acht größer ist als die übrigen zwei Fallenfrequenzen [61]. Die resultierende Geometrie des atomaren Ensembles in einer solchen Falle ist zum Umladen in eine optische Dipolfalle nicht optimal. Die im Experiment eingesetzte Falle erlaubt eine relativ gute Modenanpassung an eine optische Falle (siehe Kapitel 5) und wird im Folgenden beschrieben.

4.5.1 Ioffe-Pritchard Falle

Im Gegensatz zu der TOP-Falle realisiert die Ioffe-Pritchard Falle [106, 107] ein Fallenpotential mit einem kleinen Offset-Magnetfeld durch ein statisches Magnetfeld. Das Fallenpotential setzt sich aus Magnetfeldern mehrerer Spulen zusammen. Eine Realisierung einer Ioffe-Pritchard Falle ist die Kleeblattfalle [108]. Diese ist in Abbildung 4.6(a) dargestellt. Mit Hilfe der in gelb dargestellten Spulen wird ein harmonisches Feld (B'') mit einem Offset (B_0) in der z -Achse realisiert. Die Kleeblattspulen (in rot dargestellt) erzeugen ein Gradientenfeld (B') in Richtung der x - und y -Achsen. Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen ergibt sich für diese Spulenanordnung das folgende Magnetfeld [109] :

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} B'' \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Unter Beachtung der Zylindersymmetrie ergibt sich für den Bereich $\rho < B_0/B'$ ein harmonischer Verlauf des Fallenpotentials. Die Krümmung in radialer Richtung

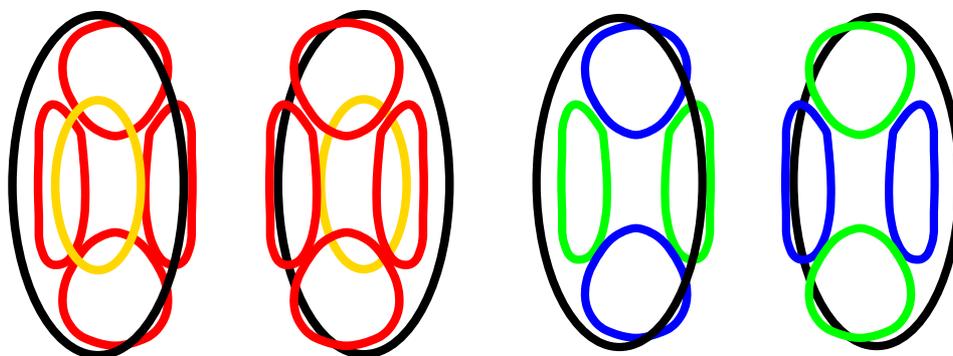
$$B''_{\rho} = \frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \quad (4.4)$$

hängt vom Offsetfeld B_0 ab. Dieses kann mit Hilfe eines Helmholtzspulenpaares (siehe Abbildung 4.6(a)) eingestellt werden. Da die kritische Temperatur bei höheren Fallenfrequenzen steigt (siehe Gleichung 2.6) und für eine schnelle Thermalisierung des Ensembles während der Evaporation eine hohe Stoßrate vorteilhaft ist, wird ein niedriges Offsetfeld eingestellt, bei dem die Adiabazitätsbedingung 4.2 noch erfüllt ist [61].

Besonderheiten der verwendeten Falle

Die in das Experiment integrierte Magnetfalle wurde von Dipl.-Phys. Markus Kottke konzipiert und realisiert [110]. Die Spulengeometrie ist in Abbildung 4.6(b) dargestellt und weicht von der oben beschrieben ab. Es ergibt sich jedoch die gleiche Feldgeometrie. Die longitudinale Krümmung wird direkt von den Kleeblattspulen durch eine unterschiedliche Wicklungszahl der gegenüberliegenden Spulen (siehe Abbildung 4.6(b)) erzeugt. Es werden keine Dipolspulen benötigt und somit muss kein Offsetfeld kompensiert werden. Die exakte Einstellung des Offsetfeldes erfolgt über drei positionierbare Windungen. Die vier-Dee Falle [111] ähnelt dieser Realisierung. Bei dieser werden nur je zwei der vier Kleeblattspulen verwendet. Dies führt zu einem schwächeren Gradienten und somit zu einem niedrigeren Aspektverhältnis in den Fallenfrequenzen.

Bei dem Design der realisierten Spulengeometrie wurde darauf geachtet, dass das Verhältnis aus mittlerer Fallenfrequenz zu der benötigten elektrischen Leistung einen möglichst niedrigen Wert annimmt. Diese Minimierung erfolgte unter der Nebenbedingung, eine möglichst kleine Induktivität zu erzielen, damit die Magnetfalle schnell im Vergleich zu den Fallenfrequenzen ausgeschaltet werden kann [61].



(a) ursprüngliche Spulengeometrie [108]

(b) realisierte Spulengeometrie

Abbildung 4.6: In der Abbildung (a) ist die Spulengeometrie einer gewöhnlichen Kleeblatt Falle wiedergegeben. Die gelben Spulen stellen die Dipolspulen dar. In diesen fließt der Strom in derselben Richtung. Die schwarzen Spulen sind in Helmholtz-Konfiguration verschaltet und dienen zum Einstellen des Offsetfeldes. Mit Hilfe der roten Spulen kann das Gradientenfeld erzeugt werden. Dazu werden gegenüberliegende Spulen in entgegengesetzter Richtung mit Strom durchflossen. Ebenso fließt der Strom in benachbarten Spulen in der jeweils anderen Richtung. In (b) ist die Spulengeometrie wiedergegeben, welche im Experiment verwendet wird. Die schwarzen Spulen werden in Helmholtz-Konfiguration genutzt. Die blauen und grünen Spulen werden wie die Gradientenspulen in (a) beschaltet. Sie zeichnen sich durch eine unterschiedliche Windungsanzahl aus.

Tabelle 4.2: Eigenschaften der Magnetfalle

B_0	0,3-1,5 G
$B' @ 112A$	184 G cm ⁻¹
$B'' @ 112A$	77 G cm ⁻²
P @ 112A	2,5kW
$\omega_{long.}$	$2\pi \cdot 11$ Hz
$\omega_{rad.} @ B_0 = 0,5$ G	$2\pi \cdot 332$ Hz
Induktivität	280 μH
Abschaltspannung	800 V
$B_{Helmholtz}/I$	2,61 G A ⁻¹

Ein weiterer Vorteile der eingesetzten Falle gegenüber einer konventionellen Realisierung ist das folgende Merkmal : Aus Stabilitätsgründen wird die Magnetfalle in der Regel mit einem Netzteil betrieben. Da im vorliegenden Fall aber nur für das Umladen der Atome in die Magnetfalle die Helmholtzspulen benötigt werden, können hier die Kleeblattspulen und die Helmholtzspulen von unterschiedlichen Netzteilen versorgt werden. Im Experiment wird der Strom für die Kleeblattspulen durch ein Agilent 6692A

Realisierung von BEC

Netzteil und für die Helmholtzspulen durch ein Delta Elektronika SM 15-200D Netzteil zur Verfügung gestellt. Wichtiger für die Realisierung der Experimente zur Spindynamik in Bose-Einstein Kondensaten ist, die Möglichkeit nach dem Umladen des Kondensates das Offsetfeld erhöhen zu können, um den Spin beim Ausschalten der Magnetfalle zu halten. Dies ist bei einer konventionellen Spulengeometrie nicht möglich. Nachteilig bei der verwendeten Geometrie ist, dass der Magnetfeldgradient B' nicht mehr unabhängig von der Magnetfeldkrümmung B'' eingestellt werden kann. Diese Variabilität wurde bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten jedoch nicht benötigt.

4.5.2 Umladen der Atome in die Magnetfalle

Der Transfer der kalten Atome nach der Melassenphase in die Magnetfalle kann durch Berücksichtigung einiger physikalischer Aspekte optimiert werden. Die Realisierung wird im Folgenden vorgestellt.

Optisches Pumpen

Nach Beenden der Melassenphase befinden sich die ^{87}Rb Atome in allen magnetischen Unterzuständen des Hyperfeinzustandes $F=2$. Da die Magnetfalle nur für die Unterzustände $|m_F = +1\rangle$ und $|m_F = +2\rangle$ ein attraktives Potential darstellt, werden nur etwa zwei fünftel der Atome gefangen. Des Weiteren ist die evaporative Kühlung zustandselektiv, so dass im vorliegenden Fall alle Atome im Zustand $|m_F = +1\rangle$ verloren gehen. Um den Anteil der Atome im Zustand $|m_F = +2\rangle$ zu erhöhen, wird ein resonanter Lichtpuls mit der Polarisation σ_+ eingestrahlt. Dies führt nach einigen Absorptions-Emissionszyklen zu einer Polarisation der Atome.

Im Experiment wurde für das optische Pumpen der Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 3$ gewählt. Der eingestrahlte Lichtpuls hatte eine Dauer von $100\mu\text{s}$. Die Quantisierungsachse wurde durch ein Magnetfeld von einem Gauss festgelegt. Die Atomzahl im Zustand $|m_F = +2\rangle$ konnte so etwa auf das Doppelte erhöht werden. Es werden bis zu $3,5 \times 10^9$ Atome in der Magnetfalle gefangen. Die Effizienz des optischen Pumpens ist durch Reabsorptionsprozesse von emittierten Photonen mit beliebiger Polarisation limitiert.

Einfluss der Gravitation

Die in einer Magnetfalle gespeicherten Atome „spüren“ neben dem Fallenpotential auch das Gravitationspotential der Erde. Aus der Überlagerung beider folgt eine Verschiebung des Fallenzentrums um

$$\Delta x = -\frac{mg}{m_F g_F \mu_B B''_x}. \quad (4.5)$$

Für die im Experiment verwendeten Parameter ergibt sich eine Verschiebung um 1,9 mm.

Im Vergleich zur Magnetfalle führt die Gravitation bei einer magneto-optischen Falle zu keiner relevanten Verschiebung des Fallenzentrums, da innerhalb dieser Kräfte von bis zu $10^5 g$ wirken.

Durch einen Versatz in den Fallenzentren würden die Atome beim Einschalten der Magnetfalle potentielle Energie gewinnen. Dies bedeutet einen Verlust an Phasenraum-dichte. So halbiert sich die Phasenraum-dichte schon bereits bei einer geringeren Verschiebung als der $1/e$ -Ensemble-radius [112]. Der Ortsunterschied der Fallenzentren von magneto-optischer Falle und Magnetfalle muss daher ausgeglichen werden. Im Experiment wird das Fallenzentrum der magneto-optischen Falle durch ein Offsetmagnetfeld mit dem Zentrum der Atome in der Magnetfalle in Übereinstimmung gebracht.

Laden der Magnetfalle

Beim Umladen des atomaren Ensembles in die Magnetfalle gilt es zu beachten, dass die Dichteverteilung des Gases möglichst einer Gleichgewichtsverteilung in der Magnetfalle entspricht. Ist die Krümmung in der Magnetfalle zu hoch, kommt es durch den Gewinn an potentieller Energie zu einer Temperaturerhöhung.

Die Anpassung der Krümmung des Magnetfeldes in radialer Richtung kann durch ein Offsetfeld (siehe Gleichung 4.4) eingestellt werden. In axialer Richtung kann die Krümmung durch den Strom in der Magnetfalle beeinflusst werden. Durch diese Parameter kann ein modenangepasster Transfer des atomaren Ensembles in die Magnetfalle realisiert werden. Dabei ergibt sich die erforderliche Krümmung aus [112]:

$$B''_{\rho} = \frac{2k_B T}{m_F g_F \mu_B R^2}, \quad (4.6)$$

wobei R dem $1/e$ -Radius des lasergekühlten atomaren Ensembles entspricht.

Für die experimentelle Umsetzung des Umladens der Atome wurde die Magnetfalle bei einem Strom von 112 A betrieben. Diesem wurde zusätzlich ein magnetisches Offsetfeld von 261 G überlagert. Hieraus resultiert eine Magnetfeldkrümmung von 91 G cm^{-2} in radialer Richtung und von 77 G cm^{-2} in longitudinaler Richtung. Diese Parameter erlauben einen geeigneten Transfer des Ensembles in das magnetische Potential.

Adiabatische Kompression der Atome

Nach dem Laden der Magnetfalle wird das Offsetfeld verringert, indem der Strom durch die Helmholtzspulen heruntergefahren wird. Dabei stellt $d\omega/dt \ll \omega^2$ die Adiabazitätsbedingung für die Änderung der Fallenfrequenzen dar. Das niedrige Offsetfeld führt zu einem stärkeren Einschluss in radialer Richtung und somit zu einer höheren Stoßrate. Dies ist die Voraussetzung für eine schnelle Rethermalisierung des Gases während der Evaporation. Es zeigt sich, dass durch die adiabatische Kompression in einer Ioffe-Pritchard Falle zusätzlich die Phasenraum-dichte um einen Faktor e erhöht wird [113]. Dies wird durch die Änderung des Fallenpotentials in radialer Richtung verursacht. In radialer Richtung verläuft das Potential bei einem niedrigen Offsetfeld nur noch nahe des Fallenzentrums harmonisch und außerhalb linear.

Bei den durchgeführten Experimenten erfolgte die Absenkung des magnetischen Offsetfeldes innerhalb von 2,5 Sekunden.

4.5.3 Lebensdauermessung der Atome in der Magnetfalle

Eine lange Aufenthaltsdauer der Atome in der Magnetfalle ist die Voraussetzung für das Erreichen der Quantenentartung durch evaporatives Kühlen. Die Lebensdauer des atomaren Ensembles in einer Magnetfalle ist durch Stöße mit dem Hintergrundgas limitiert. In Abbildung 4.7 ist die Teilchenzahl in Abhängigkeit von der Haltezeit dargestellt.

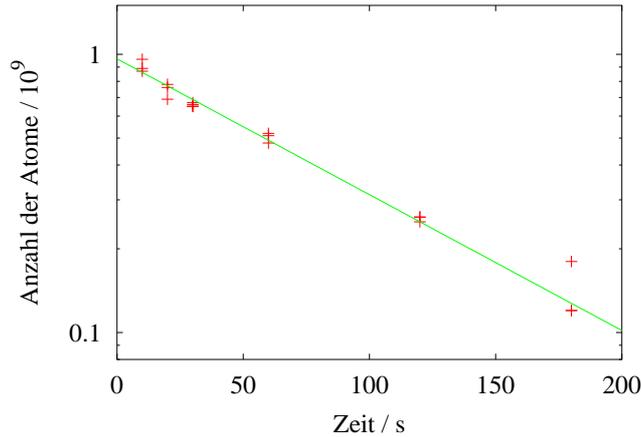


Abbildung 4.7: Lebensdauermessung der Atome in der Magnetfalle.

stellt. An die Messpunkte wurde eine Exponential-Funktion gefittet. Diese ergibt eine $1/e$ -Verweildauer der Atome von 89 Sekunden in der Magnetfalle. Somit sind die Voraussetzungen für eine effektive evaporative Kühlung erfüllt.

4.6 Die evaporative Kühlung

Mit Hilfe des Verfahrens der evaporativen Kühlung kann die Phasenraumdichte eines atomaren Gases erhöht werden [10]. Sie ist essentiell für die Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten. Die Grundidee besteht darin, den hochenergetischen Teil der Boltzmann-Verteilung zu entfernen (siehe Abbildung 4.8). Anschließend gelangen die verbleibenden Atome durch etwa fünf bis zehn elastische Stöße pro Atom wieder in ein thermisches Gleichgewicht. Neben einer Temperaturerniedrigung führt dieser Prozess auch zu einer Dichteerhöhung und stellt sich daher als sehr effektiv heraus [114].

Die Umsetzung für magnetisch gespeicherte Atome erfolgt über die Einstrahlung einer Radiofrequenz [115]. Durch diese werden m_F Übergänge induziert, so dass das magnetische Potential für diese Atome nicht mehr attraktiv sondern repulsiv wirkt. Die Resonanzbedingung lautet $\hbar\omega_{rf} = \mu_B |g_F| |\vec{B}(\vec{r})|$ und ist ortsabhängig, aber bei kleinen Magnetfeldern nicht selektiv auf den m_F Zustand [116]. Sie ist auf Äquipotentialflächen erfüllt und limitiert die Potentialhöhe der Magnetfalle. Diese Grenze kann über

$$|m_F| \hbar(\omega_{rf} - \omega_0) = \mu_B |m_F g_F| |\vec{B}(\vec{r}) - \vec{B}_0| \quad (4.7)$$

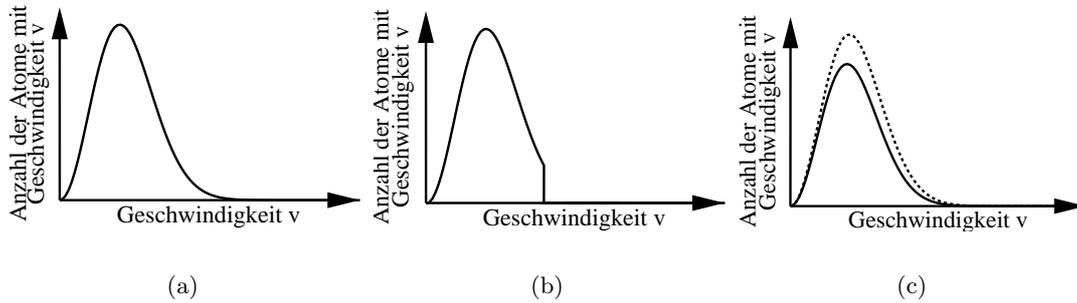


Abbildung 4.8: Die drei Abbildungen zeigen das Prinzip des evaporativen Kühlens. In Abbildung (a) ist die Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung eines Gases dargestellt. Durch die Evaporation werden alle Atome entfernt, welche eine Grenzggeschwindigkeit überschreiten. Somit ergibt sich eine Geschwindigkeitsverteilung, wie sie Abbildung (b) zeigt. Durch elastische Stöße zwischen den Atomen thermalisiert das Gas wieder und es stellt sich eine neue thermische Verteilung ein. Diese ist neben der ursprünglichen Verteilung in Abbildung (c) dargestellt und zeichnet sich durch eine niedrigere Temperatur und eine geringere Teilchenzahl aus.

berechnet werden, wobei die Resonanz am Potentialminimum durch das Offsetfeld B_0 bestimmt ist. Das Einstrahlen einer Radiofrequenz ω_{rf} hat also das Entfernen aller Atome ab einer bestimmten Energie zur Folge. Die Grenzenergie ist durch die Gleichung 4.7 bestimmt. Eine kontinuierliche Evaporation bei konstanter Frequenz führt zur einer kontinuierlichen Temperaturerniedrigung. Diese wird jedoch immer ineffizienter, da die relative Besetzung der hochenergetischen Zustände mit abnehmender Temperatur sinkt (siehe Abbildung 4.8(c)). Um stets einen signifikanten Anteil aus der Verteilung zu entfernen, wird die Radiofrequenz abgesenkt. Diese Änderungen erfolgen jeweils nach dem Rethermalisieren des Gases. Da die Evaporation auch zu einer Dichteerhöhung führt und somit die Stoßrate für die elastischen Zwei-Körper Stöße steigt, gelangt man in das Regime der beschleunigten Evaporation. Es kann also immer schneller ein hochenergetischer Anteil aus dem Ensemble entfernt werden.

Im Experiment wird die evaporative Kühlung durch drei lineare Rampen realisiert. Die Startfrequenz liegt bei 35,0 MHz. Die Frequenz wurde mit $5,0 \text{ MHz s}^{-1}$ bis auf 10,0 MHz heruntergefahren. Anschließend wurde die Frequenz mit $1,0 \text{ MHz s}^{-1}$ bis auf 2,0 MHz verringert. Die Quantenentartung wurde mit einer Frequenzänderung von $0,25 \text{ MHz s}^{-1}$ auf 0,3 MHz erreicht. Insgesamt konnten Temperaturen unterhalb von 300 nK mit einer Teilchenzahl von 10^6 realisiert werden.

Die benötigte Zeit bis zum Erreichen der Quantenentartung beträgt etwa 20 s. Ein Vergleich mit der in Abschnitt 4.5.3 bestimmten Verweildauer des Gases in der Magnetfalle von 89 s zeigt, dass Stöße mit dem Hintergrundgas keine Limitierung darstellen. Die Phasenraumdichte des Gases wird durch diese Kühlmethode um etwa sechs Größenordnungen erhöht, wobei von den anfänglich $3,5 \times 10^9$ Atomen zirka 99,9% verloren gehen.

4.7 Detektion und Auswertung

Mit Hilfe einer Abbildung der atomaren Ensemble kann man einige seiner physikalischen Eigenschaften bestimmen. Dazu werden die Atome über ein Teleskop auf eine CCD-Kamera abgebildet. Im Folgenden wird auf das Prinzip von Absorptions-Aufnahmen und deren Auswertung eingegangen.

4.7.1 Absorptions-Aufnahmen

Eine einfache und effektive Methode, die atomare Wolke abzubilden, basiert auf der Absorption von nahresonantem Licht. Dazu wird auf die Atome ein um δ gegenüber der atomaren Resonanz verstimmt aufgeweiteter Detektionsstrahl für eine Wechselwirkungszeit im Bereich von einigen zehn Mikrosekunden eingestrahlt. Mit dem Gesetz von Lambert-Beer bestimmt sich die Intensitätsverteilung hinter dem Ensemble :

$$I(y, z) = I_0(y, z) \exp \left(- \sigma \int dx n(x, y, z) \right), \quad (4.8)$$

wobei $n(x, y, z)$ die Dichte und σ den Wechselwirkungsquerschnitt beschreibt². Der Wechselwirkungsquerschnitt ist eine Funktion der Verstimmung δ des Lichtes gegenüber der Resonanz, der Linienbreite Γ und der Polarisation des Lichtstrahls. Es gilt :

$$\sigma = \frac{2I_{sat}}{\hbar\omega\Gamma} \times \left(1 + \left(\frac{2\delta}{\Gamma} \right)^2 \right). \quad (4.9)$$

Führt man die Integration in Gleichung 4.8 aus, so kann man die Teilchenzahl in einem kleinen Bereich $[y, y + \Delta; z, z + \Delta]$ bestimmen :

$$N(y, y + \Delta; z, z + \Delta) = - \frac{\Delta^2}{\sigma} \ln \left(\frac{I(y, z)}{I_0(y, z)} \right). \quad (4.10)$$

Die Teilchenzahl kann also berechnet werden, falls die Intensitätsverteilungen mit und ohne das absorbierende Gas bekannt sind. Diese werden durch zwei Aufnahmen bestimmt. Um Fehler durch Streulicht und den Dunkelstrom im CCD-Chip zu minimieren, wird ein weiteres Bild ohne Detektionsstrahl aufgenommen. Dieses wird pixelweise jeweils von den anderen subtrahiert.

Der experimentelle Aufbau wurde in Zusammenarbeit mit S. van Staa realisiert und basiert auf einem 1:1 Bildtransfer [117]. Die eingesetzte Kamera (Photometrics, Sensys) besitzt einen 12 Bit CCD-Chip (Kodak KAF-1401E) mit einer Quanteneffizienz bei

²Bei Verwendung eines gegenüber der Resonanz verstimmt Detektionsstrahls kommt es durch die Atome auch zu einer Phasenverschiebung des transmittierenden Lichtes. Da Photosensoren jedoch nicht sensitiv auf die Phase sind, zeigt das Absorptionsbild nur die räumliche Variation der transmittierten Intensität. Um die Phaseninformation zu erhalten, muss die Phasenverschiebung in eine Intensitätsänderung transformiert werden. Dies ist die Grundlage für nicht-destruktive Abbildungsverfahren [61].

780 nm von 40%. Die Pixel haben eine Seitenlänge von $6,8 \mu\text{m} \times 6,8 \mu\text{m}$. Die Aufnahmen wurden mit einem Detektionsblitz vorgenommen, welcher eine Dauer von $200 \mu\text{s}$ besaß, die Polarisation war zirkular eingestellt und die Intensität betrug ein Zehntel der Sättigungsintensität.

4.7.2 Bestimmung der Ensemble-Parameter

Mit Hilfe der über ein Absorptionsbild bestimmten Dichteverteilung lassen sich einige physikalische Eigenschaften wie beispielsweise Temperatur, Teilchenzahl und Kondensatanteil eines Gases ermitteln. Die Bestimmung der Dichteverteilung wird nach einer gewissen Flugzeit vorgenommen. Dies hat unter anderem den Vorteil, dass man aufgrund der unterschiedlichen Ausdehnung von thermischen Atomen und dem Kondensat diese Anteile unterscheiden kann. Betrachtet man eine thermische Verteilung in einer anisotropen Falle, so ist die gespeicherte Energie unabhängig von der Koordinatenachse. Dies führt nach langer Fallzeit zu einer isotropen Ausdehnung der atomaren Wolke (siehe Abbildung 4.9(a)). Im Gegensatz dazu steigt in einem Bose-Einstein Kondensat die Wechselwirkungsenergie in den Achsen mit den Fallenfrequenzen. Bei einem nicht-adiabatischen Ausschalten der Falle kommt es zu einer Umsetzung der Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie und somit nach einer gewissen Fallzeit zu einer Umkehr des Aspektverhältnisses [11, 118] (siehe Abbildung 4.9(b)). Unter Verwendung der Thomas-Fermi Näherung kann die zeitliche Entwicklung der Radien nach einem Ausschalten der Falle vorhergesagt werden [118]. Die Dichteverteilung bleibt parabelförmig, nur die Ausdehnung skaliert mit der Zeit :

$$\begin{aligned} r_\rho(t) &= r_\rho(0) \sqrt{1 + \omega_\rho^2 t^2}, \\ r_z(t) &= r_z(0) \left(1 + \frac{\omega_z^2}{\omega_\rho^2} \left(\omega_\rho t \arctan(\omega_\rho t) - \ln(\sqrt{1 + \omega_\rho^2 t^2}) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Durch die Umwandlung der Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie erfolgt für $\omega_\rho t < 1$ eine Beschleunigung in radialer Richtung. In axialer Richtung ist diese nur gering und erfolgt für $\omega_\rho t < \omega_\rho^2/\omega_z^2$. Anschließend liegt in beiden Richtungen eine gleichförmige Bewegung vor. Eine analytische Form für die Ausdehnung des Kondensates lässt sich nur im Fall einer Zylindersymmetrie angeben. Falls alle drei Fallenfrequenzen unterschiedlich sind (siehe Kapitel 5), bleibt es zwar bei einem Skalierungsverhalten in den Achsen, dieses kann aber nicht mehr analytisch berechnet werden.

Für die Analyse der Absorptionenaufnahmen werden die Dichteverteilungen einer thermischen Wolke und eines Bose-Einstein Kondensates addiert und entlang einer Achse integriert. Diese Verteilungen werden mit den folgenden Formeln beschrieben [58, 59, 61]:

$$\tilde{n}_{th.}(x, z) = \frac{\tilde{n}_{th.}(0, 0)}{g_2(1)} \cdot g_2 \left(\exp \left(1 - \frac{x^2}{r_{x,th.}^2} - \frac{z^2}{r_{z,th.}^2} \right) \right), \quad (4.12)$$

$$\tilde{n}_{BEC}(x, z) = \tilde{n}_{BEC}(0, 0) \cdot \max \left(1 - \frac{x^2}{r_{x,BEC}^2} - \frac{z^2}{r_{z,BEC}^2}, 0 \right), \quad (4.13)$$

wobei gilt : $g_2(x) = \sum_i x^i i^{-2}$. Wird eine Überlagerung dieser Verteilungen an eine Absorptionsaufnahme gefittet, so können mehrere physikalische Parameter bestimmt werden. Über die Ausdehnung eines thermischen Ensembles kann unter Verwendung der Fallenfrequenzen die Temperatur berechnet werden. Für Bose-Einstein Kondensate ergibt sich das chemische Potential μ in zylinder-symmetrischen Fallen aus dem Durchmesser des Kondensates in radialer Richtung (siehe Gleichung 2.18). Weiterhin kann durch die bimodale Verteilung leicht der Kondensatanteil N_0/N ermittelt werden und somit lässt sich über Gleichung 2.8 auch die Temperatur des Gases ermitteln.

4.8 Beobachtung von Bose-Einstein Kondensaten

Unter Verwendung der in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Verfahren wurde die Quantenentartung mit ^{87}Rb Atomen im Rahmen dieser Arbeit realisiert. Die charakteristischen Messungen werden nun vorgestellt.

4.8.1 *time-of-flight* Messungen

Wie in Abschnitt 4.7.2 beschrieben, kann ein Bose-Einstein Kondensat über die unterschiedlich starke Ausdehnung in den Achsen nach einem nicht-adiabatischem Ausschalten der anisotropen Falle nachgewiesen werden. Die Abbildung 4.9 zeigt zwei Messreihen. In (a) wurde ein thermisches Ensemble präpariert und in (b) ein Bose-Einstein Kondensat. Die Messreihen sind aus Aufnahmen unterschiedlicher Experimente zusammengesetzt, da es sich bei den Absorptionsaufnahmen um ein destruktives Verfahren handelt. Anhand der Abbildungen ist deutlich der Übergang der Verteilung eines thermischen Ensembles aus der anisotropen Falle nach einer Flugzeit von 21ms in eine Verteilung mit isotroper Ausdehnung zu erkennen. Das Bose-Einstein Kondensat besitzt nur nach einer Fallzeit von etwa 16 ms eine isotrope Ausdehnung. Anschließend ist aufgrund der in kinetische Energie umgesetzten Wechselwirkungsenergie eine oblate Form zu beobachten (siehe Abschnitt 4.7.2). Die Änderung des Aspektverhältnisses ist ein eindeutiger Nachweis für das Erzielen der Quantenentartung in einem schwach wechselwirkendem Bose-Gas.

4.8.2 Detektion des Phasenübergangs

Durch die Detektion des atomaren Gases nach einer festen Fallzeit und bei unterschiedlicher Endfrequenz der Evaporationsrampe kann der Phasenübergang von einer thermischen Verteilung in ein Kondensat beobachtet werden. Beispielhaft ist dies in Abbildung 4.10 gezeigt. Neben vier Absorptionsaufnahmen sind jeweils auch die Schnitte entlang des Maximums in horizontaler und vertikaler Richtung dargestellt. Diese geben die verschiedenen Verteilungen bei unterschiedlichem Kondensatanteil wieder. Die bimodale Verteilung eines nur teilweise kondensierten Gases ist deutlich in Abbildung (c) zu erkennen. Die Temperatur in Abbildung (a) liegt bei 450 nK und damit knapp über der kritischen Temperatur. Diese ist in (b) gerade erreicht, entsprechend besetzen 1% der Atome den Grundzustand. In Abbildung (c) liegt ein Kondensatanteil von 20% vor

4.8. Beobachtung von Bose-Einstein Kondensaten

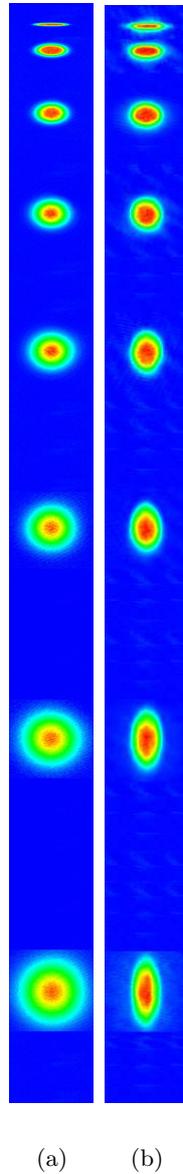


Abbildung 4.9: Die Abbildungen zeigen zwei atomare Ensembles nach Fallzeiten von 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31 und 36 ms. In (a) ist eine thermische Verteilung präpariert worden. Abbildung (b) zeigt die Änderung des Aspektverhältnisses bei einem Bose-Einstein Kondensat. Zu einem besseren Vergleich ist die Ausdehnung der Bilder in (a) um einen Faktor vier herunterskaliert worden.

und in (d) sind etwa 80% der Atome kondensiert. Dies entspricht bei $4,1 \times 10^5$ Atomen einer Temperatur von $259 \text{ nK} = 0,59 T_c$.

Realisierung von BEC

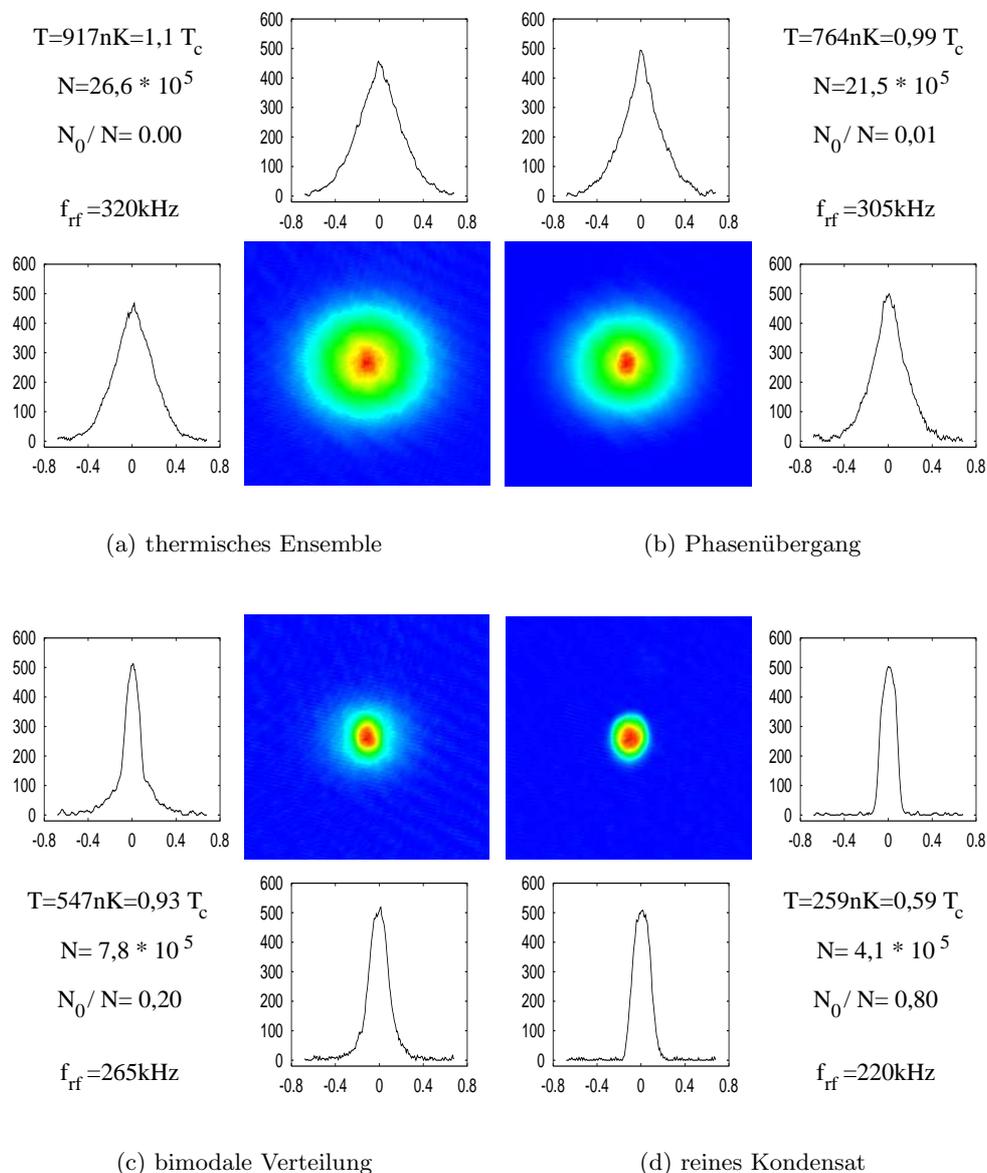


Abbildung 4.10: Die vier Abbildungen zeigen den Phasenübergang von einer thermischen Wolke (a) zu einem reinen Bose-Einstein Kondensat (d). Die horizontalen und vertikalen Schnitte geben die unterschiedlichen Dichteverteilungen an. Die horizontalen Schnitte sind über beziehungsweise unter den Bildern dargestellt. Die vertikalen Schnitte sind links und rechts neben den Bildern zu sehen. Die Abszisse der Schnitte gibt die Position in Millimetern auf dem CCD-Chip an. Die Ordinate gibt die Anzahl der auf einen Pixel abgebildeten Atome an. Die Bilder wurden nach einer Flugzeit von 20 ms mit einem Abbildungsverhältnis von 1:1 aufgenommen.

4.8.3 Atomlaser

Der Atomlaser ist eine der am meisten diskutierten Anwendungen von Bose-Einstein Kondensaten [119, 120, 121]. Man spricht von einem Atomlaser, wenn aus einem gespeicherten Kondensat kohärent Atome ausgekoppelt werden, analog wie beim herkömmlichen Laser. Im Vergleich zu diesem entspricht der Resonator der Falle und die Photonen den Atomen im Kondensat. Bei magnetisch gespeicherten Atomen kann die Auskopplung beispielsweise durch eine Radiofrequenz erfolgen, welche Übergänge in magnetisch nicht gefangene Zustände induziert [119]. Abbildung 4.11 zeigt einen quasi-kontinuierlichen Atomlaserstrahl. Der Fluss beträgt zirka $6,5 \times 10^3$ Atome ms^{-1} .

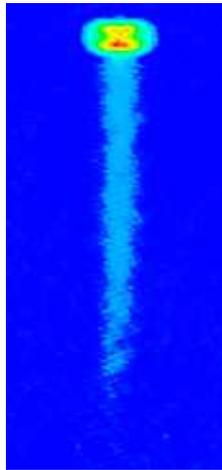


Abbildung 4.11: Die Absorptionaufnahme zeigt den im Rahmen dieser Arbeit realisierten Atomlaser. Die Auskopplung der Atome erfolgt über 17 ms durch induzierte Übergänge in den Zustand $|m_F = 0\rangle$. Da das Kondensat im Zustand $|m_F = +2\rangle$ erzeugt wurde, müssen also zwei Übergänge stattfinden. Die Doppelstruktur in dem Kondensat gibt den Anteil der Atome in dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ wieder.

Eine optische Falle für kalte ^{87}Rb Atome

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für optische Fallen und Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten in einer solchen Falle vorgestellt. Dabei werden insbesondere die Eigenschaften der in das Experiment integrierten optischen Falle beschrieben. Weiterhin wird ein neues Verfahren zum Kühlen in dieser Falle vorgestellt.

Die überwiegende Anzahl der Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten wurden in magnetischen Fallen realisiert. In den Magnetfallen können jedoch nicht alle magnetischen Unterzustände gefangen werden, d.h. die Studien zum Magnetismus in Quantengasen in dieser Arbeit wären in einer solchen Falle nicht möglich. Es ist daher notwendig, die Experimente in einer optischen Falle durchzuführen. Aber auch generell weisen optische Fallen einige Vorteile auf, die hier kurz genannt werden sollen. So kann ein Kondensat in dem Zustand $|m_F = 0\rangle$ nicht in einer Magnetfalle erzeugt oder gespeichert werden. Die nicht-speicherbaren Zustände (*high field seeker*) liegen energetisch niedriger, so dass es durch dipolare Relaxation, welche einen Stoßprozess beschreibt, in dem die Spins der Atome umklappen, zu einem Verlust an Teilchen und einem Heizen kommen kann. Dieser Prozess erschwert beispielsweise die Kondensation von Cäsium in einer Magnetfalle, während in einer optischen Falle diese Komplikation vermieden werden kann [122]. Eine optische Falle bietet also die Möglichkeit, eine größere Anzahl von Elementen zu kondensieren, da alle magnetischen Unterzustände das selbe Fallenpotential „sehen“. Die erste Realisierung eines Kondensates in einem optischen Potential wurde durch einen Transfer eines ^{23}Na Kondensates aus einer Magnetfalle in eine optische Falle erreicht [123]. Eine rein optische Realisierung von Bose-Einstein Kondensaten durch evaporatives Kühlen in einer Dipolfalle ist erstmals Chapman und Mitarbeitern [124] mit ^{87}Rb gelungen. Neben dem Vorteil, alle m_F Komponenten fangen zu können, kann bei dieser Fallenart auch das Offset-Magnetfeld beliebig eingestellt werden. Somit lassen sich Effekte messen, die durch Magnetfelder beeinflusst werden, wie beispielsweise Feshbachresonanzen [125, 126, 127, 128, 129]. Bei diesen ändern sich

die Stoßeigenschaften der Atome, welche bei geeigneten Parametern in Moleküle transferiert werden können [130, 131, 132, 133, 134].

Ein weiterer Vorteil von optischen Fallen besteht in der Kontrolle der Position im Mikrometerbereich und des zeitlichen Schaltens beziehungsweise Rampens des Lichtfeldes über einen akkusto-optischen Modulator. Dies ermöglicht Experimente zur Untersuchung von einer reversiblen Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten [135], Untersuchungen zur Superfluidität [136] und dem Verfahren des Kondensates über Distanzen von einigen zehn Zentimetern [137].

Allerdings muss auch erwähnt werden, dass optische Dipolfallen in Bezug auf Bose-Einstein Kondensate einige grundlegende physikalische und technische Schwierigkeiten aufweisen, die für die jeweiligen Experimente überwunden werden müssen. So besitzen die optischen Fallen im Vergleich zu einer Magnetfalle nur ein sehr kleines Fallenvolumen. Bei Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation mit rein optischen Methoden führt dies zu einer niedrigeren Teilchenzahl nach dem Umladen der Atome aus der magneto-optischen Falle, so dass sich das Erreichen der Quantenentartung als schwierig erweist [124, 122].

Eine wesentliche Herausforderung dieser Arbeit bestand darin, mögliche Laserquellen zu analysieren, den konkreten Aufbau zu konzipieren und zu realisieren.

5.1 Die Dipolkraft

Atome in einem inhomogenen Lichtfeld erfahren je nach Verstimmung des Feldes gegenüber der Resonanz eine Kraft in oder entgegen der Richtung des Lichtfeldgradienten. Diese für die durchgeführten Experimente wichtige Kraft, die in guter Näherung als eine rein konservative Kraft darstellbar ist, soll im Weiteren diskutiert werden.

Anschaulich lässt sich die Wechselwirkung zwischen einem Zwei-Niveau Atom mit einem Energieunterschied von $\hbar\omega_0$ zwischen den beiden Zuständen und einem Lichtfeld mit der Frequenz ω_L wie folgt verstehen: In einem harmonischen Potential wird in dem Atom durch das elektrische Wechselfeld eines nicht-resonanten Lichtfeldes ein Dipolmoment in dem Atom induziert. Dieses oszilliert mit der Frequenz des Lichtfeldes. Gilt $\omega_L < \omega_0$, so kann der Dipol dem Lichtfeld folgen. Somit befindet sich das Dipolmoment mit dem elektrischen Feld in Phase. In einem inhomogenen Lichtfeld werden die Dipole dann zum Intensitätsmaximum beschleunigt. Im Gegensatz dazu schwingt das Dipolmoment gegenphasig zum elektrischen Feld, wenn $\omega_L > \omega_0$ gilt. Die Atome bewegen sich dann in Richtung minimaler Intensität.

Die exakte quantenmechanische Beschreibung liefert das *dressed-atom* Bild [138]. Das Dipolpotential nimmt die folgende Form an [139]:

$$U(\vec{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \cdot \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega_L} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega_L} \right) I(\vec{r}), \quad (5.1)$$

wobei Γ die Zerfallsrate des angeregten Zustandes und $I(\vec{r})$ die Intensität des Lichtfeldes

angibt. Die Rabi-Frequenz ist durch

$$\Omega^2(\vec{r}) = \frac{6\pi c^2 \Gamma}{\hbar \omega_0^3} I(\vec{r}) \quad (5.2)$$

gegeben und ist ortsabhängig. Für die Berechnung bei Atomen mit mehreren Übergängen ergibt sich das Gesamtpotential aus der Addition der Einzelpotentiale.

Betrachtet man einen Fokus eines rot-verstimmten Lasers, so kann dieser ein Fallenpotential für Atome darstellen. In der Nähe des Fokus wird die Intensitätsverteilung in guter Näherung durch einen harmonischen Verlauf beschrieben. Für kleine ρ und z gilt :

$$I(\rho, z) \approx I_0 \cdot \left(1 - 2 \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_r} \right)^2 \right), \quad (5.3)$$

wobei z die Ausbreitungsrichtung des Strahls, w_0 die Strahltaile und z_r die Rayleighlänge angeben. Aus den Gleichungen 5.1 und 5.3 lassen sich die Fallenfrequenzen

$$\omega_\rho = \sqrt{-\frac{4}{mw_0^2}U(0)} \quad \text{und} \quad \omega_z = \sqrt{-\frac{2}{mz_r^2}U(0)} \quad (5.4)$$

bestimmen.

Sind Atome in einer optischen Falle gefangen, so kann es durch Streuprozesse zu einem Heiz- und Verlustprozess kommen. Die Streuung der Photonen an einem Atom erweist sich also als eine Limitierung für die Speicherung der Atome. Die Streurrate ist durch

$$\Gamma_{\text{Streurate}}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar \omega_0^3} \left(\frac{\omega_L}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega_L} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega_L} \right)^2 I(\vec{r}) \quad (5.5)$$

bestimmt [139]. Im Gegensatz zu dem Fallenpotential skaliert die Streurrate mit dem Quadrat von $(\Gamma/(\omega_0 - \omega_L) + \Gamma/(\omega_0 + \omega_L))$. Somit kann durch eine Erhöhung der Verstimmung und der Intensität die Streurrate bei gleichbleibendem Fallenpotential verringert werden.

5.2 Designüberlegungen zur optischen Falle

In den durchgeführten Experimenten wurde das Kondensat in einer Magnetfalle erzeugt und anschließend in eine optische Dipolfalle transferiert. Die Fallenparameter der optischen Falle werden durch die Strahleigenschaften entsprechend den Gleichungen 5.1 und 5.3 bestimmt. In Abschnitt 5.2.1 wird eine Berechnung aufgeführt, bei welcher die Fallenfrequenzen der optischen Falle mit denen in der Magnetfalle übereinstimmen [117]. Die Falle wird dabei mit einem zylindersymmetrischen Fokus realisiert. Unter Berücksichtigung der Gravitation und von Drei-Körper Stößen zeigt sich jedoch, dass diese Fallengeometrie nicht optimal für die geplanten Experimente ist. Die Auswirkung dieser Effekte auf das atomare Ensemble werden anschließend diskutiert und in Abschnitt 5.2.4 wird die realisierte Fallengeometrie vorgestellt.

5.2. Designüberlegungen zur optischen Falle

Im Experiment wurde ein Nd-YAG Laser mit einer Wellenlänge von 1064 nm eingesetzt (Innolight, Mephisto 1 Watt). Im Prinzip sind Laser mit einer höheren Wellenlänge vorzuziehen, da mit der Verstimmung entsprechend Gleichung 5.5 die Streurrate sinkt. Jedoch limitiert dieser Verlustkanal nicht die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente.

5.2.1 Parameter einer zylindersymmetrischen Dipolfalle

Ideal für das Umladen des Kondensates aus der Magnetfalle in eine optische Falle wäre es, wenn die Fallenfrequenzen beider Fallen identisch wären. Unter der Verwendung von $\omega_z = 2\pi \cdot 11 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \cdot 275 \text{ Hz}$ ergeben sich die folgenden Parameter für die optische Falle :

Mit den Gleichungen 5.4 und der Abhängigkeit der Rayleighlänge von der Strahltaile $z_r = \pi w_0^2 / \lambda$ ist die zu erzielende Strahltaile über das Aspektverhältnis bestimmt :

$$w_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_\rho}{\omega_z}. \quad (5.6)$$

Bei einem Aspektverhältnis von $\omega_\rho / \omega_z = 25$ und der Wellenlänge von $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ergibt sich eine Strahltaile von $w_0 = 6 \mu\text{m}$ und entsprechend eine Rayleighlänge von $z_r = 150 \mu\text{m}$. Mit den Gleichungen 5.1 und 5.4 kann die notwendige optische Leistung ermittelt werden. Für die Realisierung dieser Falle werden $200 \mu\text{W}$ benötigt. Die Fallentiefe beträgt $k_B \cdot 450 \text{ nK}$. Es handelt sich also um eine extrem schwache Falle. Die Streurrate beträgt $\Gamma_{\text{Streurrate}}(0) = 2\pi \cdot 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$. Bei den typischen experimentellen Zeitintervallen der Kondensate in der optischen Falle von einigen Sekunden kann dieser Verlustprozess vernachlässigt werden.

5.2.2 Einfluss der Gravitation

Bei den bisherigen Berechnungen wurde der Einfluss der Gravitation auf die Atome vernachlässigt. Man kann diesen Effekt mit Hilfe magnetischer Felder kompensieren [122] und so Experimente in sehr flachen Fallen durchführen [140]. Weiterhin stellt sich heraus, dass in optischen Fallen aufgrund der sehr niedrigen Potentialhöhe die Anzahl der Kondensatome begrenzt ist und Anregungen von Kondensaten sich von denen in einem rein harmonischen Potential unterscheiden [141].

Die Verwendung von magnetischen Feldern zur Kompensation der Gravitation hat jedoch zur Folge, dass das Fallenpotential selektiv auf die einzelnen magnetischen Unterezustände wirkt, so dass Experimente zur Spindynamik nicht durchgeführt werden können. Daher musste bei den vorgenommenen Experimenten zur Spindynamik die Gravitation allein durch das Lichtfeld kompensiert werden. Im Vergleich zu ^{23}Na erweist es sich für ^{87}Rb Atome als schwerer, diese Bedingung zu erfüllen, da die Masse um einen Faktor von etwa 3,8 größer ist. Um zu sehen, welche Beschleunigung in Abhängigkeit vom Ort durch die optische Falle kompensiert wird, ist es sinnvoll, diese physikalische Größe zu berechnen. In Abbildung 5.1 ist die Beschleunigung der Atome durch die berechnete Dipolfalle dargestellt. Die maximale Beschleunigung auf die Atome in

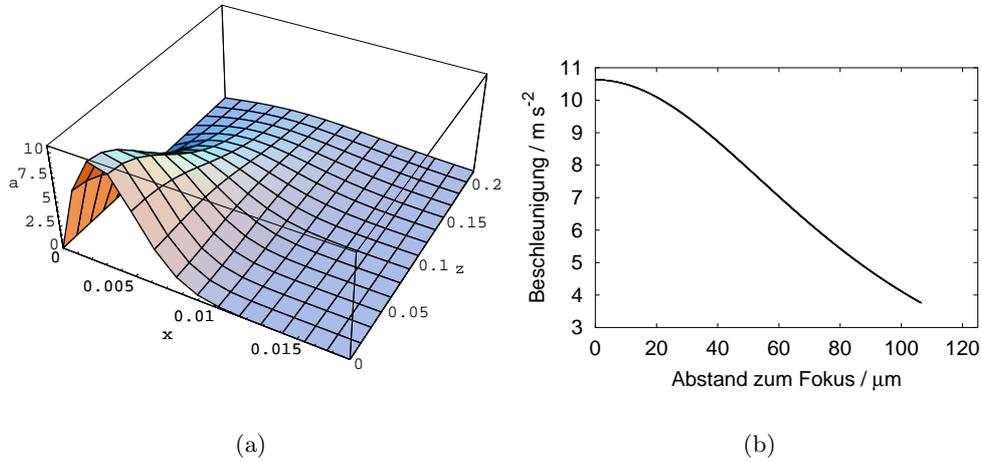


Abbildung 5.1: Die beiden Abbildungen zeigen die Beschleunigung von ^{87}Rb Atomen in einer Dipolfalle. Für die Berechnung wurden die in Abschnitt 5.2.1 angegebenen Werte verwendet. In (a) ist die Beschleunigung als Funktion des Ortes der Atome dargestellt, während (b) die maximale Beschleunigung in Abhängigkeit vom Abstand in longitudinaler Richtung vom Fokus angibt. Es zeigt sich, dass diese Falle die Atome nur sehr nahe des Fokus gegen die Gravitation halten kann. Da die Ausdehnung typischer Kondensate entlang dieser Achse jedoch etwa $150\mu\text{m}$ beträgt, stellt dieses Lichtfeld keine Falle für die Atome dar.

Abhängigkeit des Abstands zum Fokus in der Ausbreitungsrichtung des Lichtes liegt bei $a_{max}(z) = a(w(z)/2, z)$, wobei $w(z)$ die Strahltaile am Ort z beschreibt. Entsprechend den Abbildungen 5.1 erweist sich die berechnete optische Falle als zu schwach, um den Einfluss der Gravitation kompensieren zu können.

Um die maximale Beschleunigung der Atome durch eine optischen Falle zu erhöhen, gibt es mehrere Möglichkeiten. So kann beispielsweise die Leistung des Lichtfeldes erhöht werden. Da die maximale Beschleunigung linear mit der Leistung skaliert, kann ein Regime gefunden werden, in dem die Gravitation nicht mehr zu einem Verlust der Atome aus dem Fallenpotential führt. Dies führt zu höheren Fallenfrequenzen und verursacht eine höhere Dichte, was unter Beachtung der Drei-Körper Stoßrate von ^{87}Rb mit Hyperfeinspin $F=2$ und $F=1$ als nicht geeignet erscheint (siehe Abschnitt 5.2.3). Experimente mit Kondensaten in einer zylindersymmetrischen Dipolfalle mit einer Strahltaile von etwa $8\mu\text{m}$ im Fokus haben gezeigt, dass eine Leistung von 4mW nötig war, um das Ensemble gegen die Gravitation zu halten. Dies entspricht einer mittleren Fallenfrequenz von $\bar{\omega} = 2\pi \cdot 268\text{Hz}$ statt $2\pi \cdot 110\text{Hz}$ und einer maximalen Beschleunigung von 90m s^{-2} im Fallenzentrum. Bei niedrigeren Leistungen konnte beobachtet werden, wie die Atome an einer Stelle aus dem Fallenpotential entweichen. Dies geschah an einer Position, welche vom Fokus in Propagationsrichtung versetzt ist und lässt sich durch die geringere Haltekraft mit wachsendem Abstand zum Fokus erklären (siehe Abbil-

dung 5.1(b)). Die Atome konnten immer nur an einer Position aus der Falle entweichen. Diese Asymmetrie lässt sich durch einen kleinen Winkel im Dipolfallenstrahl oder durch eine leichte Dejustage der Fallenzentren von Magnetfalle und optischer Falle erklären.

5.2.3 Drei-Körper Stöße

Unter Berücksichtigung der Experimente zu Spinor-Kondensaten mit ^{23}Na im Hyperfeinzustand $F=1$ [52] sollten die Kondensate mit einer Dichte von 10^{14} cm^{-3} in der optischen Falle über einen Zeitraum von einigen Sekunden gehalten werden können, um die Entwicklung in den Grundzustand messen zu können. Der Prozess, der diese Haltezeit im Wesentlichen limitiert, sind Verluste durch Drei-Körper Stöße. Dabei bilden zwei Atome ein Molekül, während der dritte Stoßpartner benötigt wird, um Energie- und Impulserhaltung zu erfüllen. Aufgrund der freiwerdenden Energie verlassen alle drei Teilchen das Fallenpotential, so dass dieser Prozess nur zu einem Verlust an Teilchen, nicht aber zu einem Heizen des Ensembles führt. Da für diesen Prozess drei Atome an dem selben Ort sein müssen, skaliert der Verlust mit dem Quadrat der mittleren Dichte $\langle n^2 \rangle$. Im Vergleich hierzu sind die spinändernden Stöße proportional zur mittleren Dichte $\langle n \rangle$, da es sich um einen Zwei-Körper Stoßprozess handelt. Unter Verwendung der Thomas-Fermi Näherung (siehe Abschnitt 2.2.2) kann die Abhängigkeit der mittleren Dichte und der quadratischen mittleren Dichte von den experimentellen Parametern unter Verwendung der Formel

$$\langle \eta \rangle = N^{-1} \int d^3r \eta(\vec{r}) n(\vec{r}) \quad (5.7)$$

bestimmt werden. Es ergibt sich unter Verwendung von Gleichung 2.18 und 2.19 :

$$\langle n \rangle = c_2 N^{2/5} \quad \text{und} \quad \langle n^2 \rangle = c_3 N^{4/5}$$

mit

$$c_2 = \frac{15^{2/5}}{14\pi} \left(\frac{m\bar{\omega}}{\hbar\sqrt{a}} \right)^{6/5} \quad \text{und} \quad c_3 = 7c_2^2/6.$$

Während die mittlere Dichte mit $\bar{\omega}^{6/5}$ skaliert, erhöht sich die quadratische mittlere Dichte mit $\bar{\omega}^{12/5}$, so dass niedrigere Fallenfrequenzen das Verhältnis von Zwei-Körper zu Drei-Körper Stößen erhöhen.

Der zeitliche Verlust von Atomen durch unterschiedliche Stoßprozesse kann mit Hilfe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} N(t) = N(t) \cdot (\gamma + G \langle n(t) \rangle + L \langle n^2(t) \rangle) \quad (5.8)$$

beschrieben werden. Hierbei gibt γ die Verlustrate durch einen Ein-Körper Prozess wie beispielsweise durch Stöße mit dem Hintergrundgas an, G bestimmt die Verluste durch inelastische Zwei-Körper Stöße und L ist ein Maß für die Drei-Körper Verluste.

Bei Kondensaten aus ^{87}Rb Atomen in den Spinzuständen $|F = 2, m_F = +2\rangle$ und $|F = 1, m_F = -1\rangle$ kann der inelastische Zwei-Körper Prozess vernachlässigt werden¹.

Für einen reinen Ein- und Drei-Körper Verlust kann die Differentialgleichung 5.8 analytisch gelöst werden. Die allgemeine Lösung lautet :

$$N(t) = \left(\left(\frac{1}{N_0^{4/5}} + c_3 L \gamma^{-1} \right) \cdot \exp\left(\frac{4}{5} \gamma t\right) - c_3 L \gamma^{-1} \right)^{-5/4}, \quad (5.9)$$

wobei N_0 die anfängliche Teilchenzahl angibt.

In Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten konnte der Wert für L in den beiden Hyperfeinzuständen gemessen werden. Für ^{87}Rb Kondensate aus Atomen im Zustand $F=1$ gilt $L = 5,8 \times 10^{-30} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ [22] und für Kondensate aus Atomen im Zustand $F=2$ gilt $L = 1,8 \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ [142]. Verglichen mit dem Wert für ^{23}Na $L = 1,1 \times 10^{-30} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ [123] zeigt sich, dass bei ^{87}Rb die Verluste durch Drei-Körper Stöße wesentlich höher liegen. Dies hat einen schnelleren Teilchenverlust bei gleichen Fallenfrequenzen zur Folge. Abbildung 5.2 zeigt die Anzahl der Atome in den beiden Hyperfeinzuständen bei der im Experiment verwendeten mittleren Fallenfrequenz von $\bar{\omega} = 2\pi \cdot 143 \text{ Hz}$ (siehe Abschnitt 5.4).

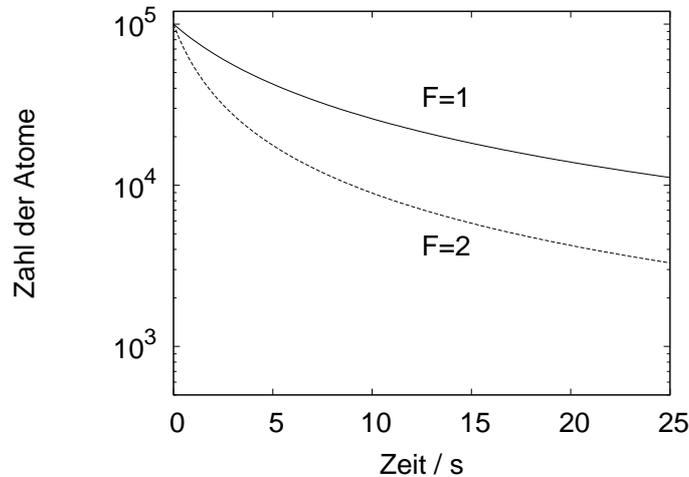


Abbildung 5.2: Die Abbildung zeigt die zeitliche Änderung der Atome in einem Bose-Einstein Kondensat aus ^{87}Rb durch einen reinen Drei-Körper Verlustprozess bei einer mittleren Fallenfrequenz von $\bar{\omega} = 2\pi \cdot 143 \text{ Hz}$. Die schnellere Abnahme ergibt sich für Atome im Hyperfeinzustand $F=2$, während Atome im Hyperfeinzustand $F=1$ einen geringeren Verlust zeigen.

Es gilt noch zu beachten, dass die Wahrscheinlichkeit im Kondensat für drei Teilchen am selben Ort zu sein um einen Faktor sechs gegenüber von thermischen Atomen

¹Im Fall von $|F = 1, m_F = -1\rangle$ ergibt sich $G < 1,6 \times 10^{-16} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ [22].

5.2. Designüberlegungen zur optischen Falle

geringer ist. Dies resultiert aus der Tatsache, dass für Kondensate die Korrelationsfunktion n -ter Ordnung $g^{(l)}(0)$ unabhängig von l den Wert eins annimmt und für thermische Ensembles gilt $g^{(l)}(0) = l!$. Da die Korrelationsfunktion der Ordnung l ein Maß für die lokalen Dichtefluktuationen von $n^{(l-1)}$ ist, folgt für $L_{BEC} = 1/6 L_{thermisch}$. Dies konnte experimentell verifiziert werden [22].

5.2.4 Realisierte Fallengeometrie

Wie der vorhergehende Abschnitt zeigt, ist es nicht sinnvoll, eine optische Falle mit sehr hohen Fallenfrequenzen zu betreiben, da dies zu einer schnellen Abnahme der Atomzahl führt. Es gilt also einerseits, eine optische Falle mit Fallenfrequenzen, die vergleichbar mit denen in der Magnetfalle sind, zu realisieren, und andererseits muss diese Falle die Atome gegen die Gravitation halten.

Eine mögliche Lösung besteht darin, die Strahltaile im Fokus zu vergrößern. Dies erfordert bei gleicher mittlerer Fallenfrequenz eine höhere Leistung des Lichtstrahls und resultiert in einem höheren Aspektverhältnis der Falle. Da es jedoch gilt die Änderungen des Magnetfeldes über das Kondensat möglichst gut zu kompensieren, ist es nicht sinnvoll, die Ausdehnung entlang der langen Achse des Kondensates zu erhöhen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Fallenfrequenzen nicht mehr zylindersymmetrisch zu wählen. Bei der Umsetzung wird die Geometrie so gewählt, dass in vertikaler Richtung die höchste Fallenfrequenz die Atome gegen die Gravitation hält. So können die erwähnten Punkte erfüllt werden. Für die Umsetzung einer solchen Falle gibt es zwei Möglichkeiten :

Zum einen kann ein entsprechendes Lichtfeld durch zwei Zylinderlinsen mit unterschiedlichen Brennweiten erzeugt werden [87], so dass sich die Strahltaile in vertikaler Richtung und in horizontaler Richtung senkrecht zur Ausbreitung des Lichtes an der gleichen Position befinden, aber unterschiedliche Werte annehmen. Da die Linsenfehler von Zylinderlinsen verglichen mit sphärischen Linsen recht hoch sind, lässt sich mit dieser Methode keine kleine Strahltaile in vertikaler Richtung erzielen. Es gilt zu beachten, dass aus Platzgründen der Abstand zwischen dem Fokus des Lasers und der ersten Linse mindestens 25 cm betragen muss. Aus Berechnungen mit Strahltaillen von $20\mu\text{m}$ und $100\mu\text{m}$ und Fallenfrequenzen von $\omega_{vert.} = 2\pi \cdot 774 \text{ Hz}$, $\omega_{long.} = 2\pi \cdot 6,6 \text{ Hz}$ und $\omega_{horiz.} = 2\pi \cdot 155 \text{ Hz}$ ergibt sich eine notwendige Leistung von 500 mW. Diese kann mit dem verwendeten Lasersystem nicht realisiert werden. Weiterhin ist die Fallenfrequenz in longitudinaler Richtung relativ klein.

Eine alternative Realisierung einer optischen Falle mit drei unterschiedlichen Fallenfrequenzen kann durch das Einführen eines Astigmatismus erreicht werden. Dieser wird durch eine Zylinderlinse, die zwischen der *single-mode* Faser und einer Kollimationslinse platziert wird, erzeugt (siehe Abbildung 5.3(a)). Der Abstand der Foki δ ist durch den Abstand d der Zylinderlinse von der *single-mode* Faser und deren Brennweite f bestimmt. Es gilt $\delta = (d^{-1} - f^{-1})^{-1}$. Bei den Experimenten betrug der Abstand der Foki zwischen 3,5 mm und 4,0 mm und konnte durch eine Verschiebung der Zylinderlinse geändert werden. Mit dieser Konfiguration kann also das Aspektverhältnis flexibel eingestellt werden ohne die Dipolfalle zu dejustieren, da die Zylinderlinse nur den Fokus

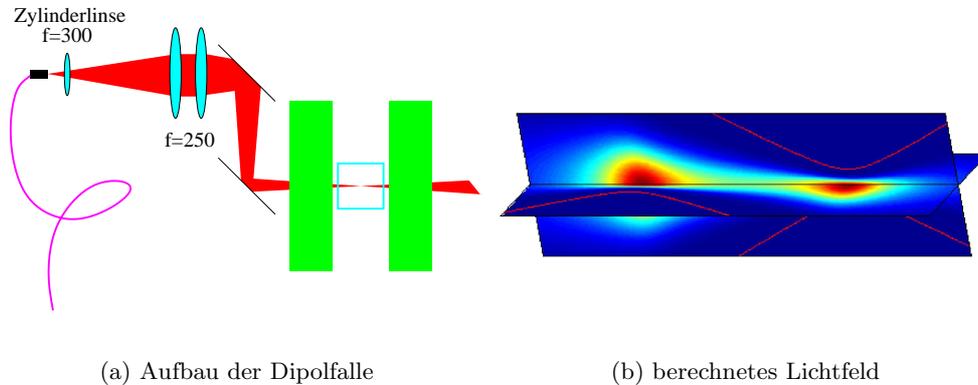


Abbildung 5.3: Die Abbildung (a) zeigt schematisch den Aufbau zur Erzeugung des optischen Fallenpotentials. Das Licht tritt aus einer optischen Faser aus. Die Zylinderlinse mit einer Brennweite von 300 mm sorgt dafür, dass die Foki in horizontaler und vertikaler Richtung in der Glaszelle an unterschiedlichen Positionen sind. Die sphärischen Linsen haben jeweils eine Brennweite von 250 mm. Diese bilden über zwei Spiegel das durch die Zylinderlinse verzerrte Faserende in die Glaszelle ab. Die Magnetfalle wird durch den grünen Bereich angedeutet. In Abbildung (b) ist eine Berechnung des Lichtfeldes dargestellt. Die Atome werden in den rechten Fokus umgeladen.

in der Horizontalen verschiebt. Des Weiteren wird die Strahltaile in der Vertikalen nur sehr schwach durch die Zylinderlinse beeinflusst. Somit kann ein Fallenpotential mit einer Falltiefe von $10 \mu\text{K}$ bei einer Leistung im Bereich von 100 mW erzielt werden. Als Nachteil gegenüber anderen Realisierungen zeigt sich, dass die Fallengeometrie sensitiv auf Verkippungen in axialer Richtung ist. Dies resultiert aus der Asymmetrie des Potentials. Es ist vorteilhaft, den „hinteren“ Fokus etwas niedriger als den „vorderen“ Fokus zu setzen. Im Experiment betrug der Winkel gegenüber der Horizontalen etwa $0,25^\circ$.

5.3 Laden der Dipolfalle

Die Falltiefe der optischen Falle ist bei maximaler Lichtleistung von 300 mW in der Größenordnung von $30 \mu\text{K}$ und besitzt ein Volumen von etwa $2 \text{ mm} \times 270 \mu\text{m} \times 45 \mu\text{m}$. Es können folglich nur kalte Atome innerhalb eines kleinen Raumbereichs gefangen werden. Für das Umladen der Atome in die Magnetfalle ist somit eine Strategie notwendig, welche eine räumliche Überlagerung der magnetischen und optischen Fallenpotentiale erlaubt. Dazu wurde folgendermaßen vorgegangen : Zuerst erfolgte eine Justage senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Fallenlichtes. Dies erfordert einen Umbau der CCD-Kamera an eine Position, an welcher die Atome in der Magnetfalle und der Fokus des Lasers abgebildet werden können. Die Bestimmung der Position der Atome in der Magnetfalle erfolgte durch eine Fluoreszenzmessung an einem kleinem Ensemble von etwa 5×10^6 Atomen. Anschließend wurde der Fokus des Fallenlasers mit Hilfe zweier

Mikrometerschrauben (Mitutoyo mit 500nm Auflösung) auf diesen Punkt justiert. Das Übersetzungsverhältnis der Mikrometerschrauben beträgt etwa 1:10 und 1:5, so dass die Einstellung in diesen Achsen mit einer Genauigkeit kleiner $5\ \mu\text{m}$ beziehungsweise kleiner $2,5\ \mu\text{m}$ erfolgen kann. Für die Justage der dritten Achse wurde die Kamera wieder an der ursprünglichen Position platziert. Mit Hilfe von Absorptionenaufnahmen konnten die Positionen der beiden Fallen in axialer Richtung überlagert werden. Dazu wurde die Dipolfalle mit Hilfe eines Verschiebetisches entlang der Achse in $100\ \mu\text{m}$ Schritten verschoben. Die Atome in der Magnetfalle wurden durch eine Evaporationsrampe bis auf 5 MHz herabgekühlt. Anschließend wurde das Lichtfeld für die Dipolfalle mit maximaler Intensität eingeschaltet. Um sehen zu können, ob die Atome durch das Lichtfeld gehalten werden, wurden die Atome bei eingeschalteter Dipolfalle 5 ms nachdem die Magnetfalle ausgeschaltet wurde detektiert. Mit dieser Strategie ist es immer gelungen, Atome aus der Magnetfalle in die Dipolfalle umzuladen. Eine weitergehende Optimierung der Justage in den drei Achsen erfolgte nach einem Absenken der Intensität des Fallenlasers und nach einem weiteren Abkühlen der Atome.

Die Fallenfrequenzen der Dipolfalle sind in axialer und vertikaler Richtung größer als in der Magnetfalle (siehe Abschnitt 5.4). In der dritten Achse besitzt die Dipolfalle verglichen mit der Magnetfalle jedoch eine niedrigere Fallenfrequenz. Befinden sich die Atome in dem überlagerten Potential der beiden Fallen, so kommt es bei einem schnellen Ausschalten des magnetischen Potentials zu einem Heizen, welches sich in einer Verringerung der Atome im Kondensat äußert. Um ein adiabatisches Umladen aus der Magnetfalle in die optische Falle zu realisieren, wurde wie folgt vorgegangen : Die optische Falle wurde entsprechend der oben beschriebenen Prozedur mit dem Potential der Magnetfalle bei einem Offsetfeld von 52 G überlagert. Dieses Offsetfeld reduziert die radiale Fallenfrequenz der Magnetfalle auf $2\pi \cdot 90\ \text{Hz}$ und verschiebt das Fallenzentrum durch den Einfluss der Gravitation um $200\ \mu\text{m}$ nach unten (entsprechend Gleichung 4.5). Um den Transfer zu realisieren, wurde die Dipolfalle eingeschaltet, während sich die Atome in der Magnetfalle bei niedrigem Offsetfeld befinden. Sie „sehen“ zu diesem Zeitpunkt das optische Potential nicht. Durch ein langsames Erhöhen des Offsetmagnetfeldes werden die Atome abgesenkt und spüren zusätzlich die Dipolkraft. Eine zeitliche Variation in der Erhöhung des Offsetmagnetfeldes zeigt, dass bei einer Rampe von 600 ms der Transfer ideal ist. Bei einer schnelleren Erhöhung des Offsetfeldes wurden Kondensatanteile von 20% und bei einer langsameren Rampe dieselben Temperaturen wie bei 600 ms gemessen. Es zeigte sich, dass im Vergleich zu der beschriebenen Umladestrategie ein adiabatisches Einschalten des Lichtfeldes nach der Erhöhung des magnetischen Offsetfeldes keine Änderungen in der Temperatur hat. Dies lässt sich durch das Absenken der Atome in das optische Potential begründen.

Durch das Offsetfeld von 52 G wird auch der Spin bei dem Abschalten der Magnetfalle gehalten. Es gilt zu beachten, dass aufgrund der Spulengeometrie das magnetische Fallenpotential unabhängig von dem Offsetfeld geschaltet werden kann (siehe Abschnitt 4.5.1). Da der Strom in den Kleeblattspulen aus technischen Gründen nur schnell geschaltet und nicht ohne eine schnelle Stromänderung abgesenkt werden konnte, kam es zu Anregungen des umgeladenen Ensembles. Insbesondere bei geringen Laserleistungen von 90 mW konnte nach 50 ms Haltezeit eine Asymmetrie in der Verteilung der

thermischen Atome beobachtet werden. Alle in Kapitel 6 beschriebenen Experimente wurden mit einer Leistung von 130 mW durchgeführt. Hier konnte ein Kondensatanteil bei einer Gesamtteilchenzahl von 10^6 Atomen von 40% direkt nach dem Umladen in die Dipolfalle realisiert werden.

5.4 Fallenfrequenzmessungen

Da bei den physikalischen Parametern wie der kritischen Temperatur und der mittleren Dichte die Fallenfrequenzen als einzige experimentelle Variable eingehen, müssen diese für die Bestimmung der experimentellen Ergebnisse bekannt sein. Die Fallenfrequenzen lassen sich in der Regel ermitteln, indem das Kondensat kurzzeitig in einer Achse ausgelenkt wird und man es anschließend in dieser Achse oszillieren lässt. Durch Absorptionsoptionen nach unterschiedlich langen Haltezeiten lässt sich dann die Fallenfrequenz messen. Diese Technik kann in den beiden Achsen senkrecht zum Detektionsstrahl angewendet werden.

Zur Bestimmung der axialen Fallenfrequenz wurde nach dem Umladen in die optische Falle ein Magnetfeldgradient von 25 G cm^{-1} für eine Zeit von 200 ms angelegt und dann innerhalb von $15 \mu\text{s}$ ausgeschaltet. Anschließend wurde die mittlere Position des Kondensates in dieser Achse durch Aufnahmen zu unterschiedlichen Zeiten nach jeweils 31 ms Fallzeit gemessen. Die Messpunkte sind in Abbildung 5.4 (a) zusammen mit einem an die Daten angepassten Sinus dargestellt. Der Fit ergibt bei einer optischen Leistung von 130 mW eine axiale Fallenfrequenz von $2\pi \cdot 21,1 \pm 0,1 \text{ Hz}$.

Die Abbildung 5.4 (b) gibt eine entsprechende Messung der vertikalen Fallenfrequenz wieder. Hierbei wurde zur Auslenkung aus dem Potentialminimum nicht ein Magnetfeldgradient benutzt, sondern die Falle wurde für eine Zeit von 0,25 ms ausgeschaltet. Dies entspricht einer Auslenkung um $0,3 \mu\text{m}$. Die Position der Atome wurde hier ebenfalls nach unterschiedlich langer Haltezeit und einer Fallzeit von 31 ms detektiert. Es ergab sich eine Fallenfrequenz in der vertikalen Achse von $2\pi \cdot 891 \pm 6 \text{ Hz}$.

Die Fallenfrequenz der dritten Achse kann mit diesen Methoden nicht ermittelt werden, da die Atome in Richtung der CCD-Kamera schwingen würden. Leider erreicht die Auflösung, falls die Kamera in der senkrechten Achse zur Bewegung der Atome aufgebaut wird, nicht die notwendige Genauigkeit, um die Schwingung analysieren zu können. Die dritte Fallenfrequenz kann also nur über eine indirekte Messung bestimmt werden. Zu der Bestimmung wurde der Drei-Körper Verlustprozess ausgenutzt. Zum Vergleich mit dem Literaturwert $L = (1,8 \pm 0,5) \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ aus [142] wurde diese Konstante durch eine Lebensdauerermessung bestimmt. Dies erfolgte mit Kondensaten in der Magnetfalle. Da das Potential dieser Falle zylindersymmetrisch ist, sind alle drei Fallenfrequenzen bekannt. Der ermittelte Wert von $(2,0 \pm 0,25) \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit dem Literaturwert überein. Zur Bestimmung der dritten Fallenfrequenz in der Dipolfalle wurden zwei Lebensdauerermessungen (Eine Messung bei einer Leistung des Fallenlasers von 130 mW und eine weitere bei 240 mW.) durchgeführt. Da die Fallenfrequenzen mit der Wurzel der Intensität skalieren (siehe Gleichungen 5.1 und 5.4), lassen sich diese aus den gemessenen Fallenfrequenzen bei 130 mW für die optische

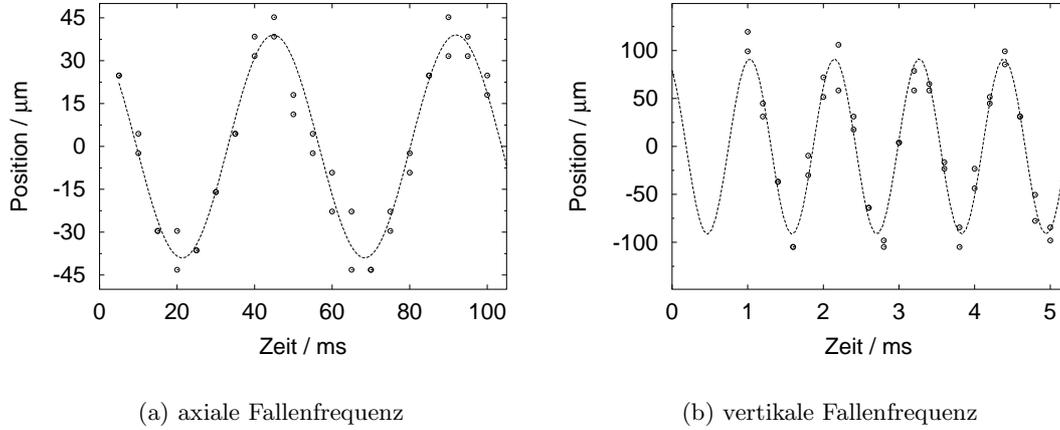


Abbildung 5.4: Abbildung (a) zeigt die zeitliche Änderung der axialen Auslenkung eines Bose-Einstein Kondensates nach einer Fallzeit von 31 ms. Die Bewegung entspricht einer Oszillation mit einer Frequenz von $2\pi \cdot 21,1$ Hz. In (b) ist die Abhängigkeit der vertikalen Position des Kondensates von der Haltezeit nach 31 ms Fallzeit wiedergegeben. Die Oszillation wurde durch ein kurzes Ausschalten des Fallenlasers realisiert.

Falle mit 240 mW umrechnen. Durch einen Fit der Gleichung 5.9 an die Anzahl der Atome im Kondensat in Abhängigkeit von der Haltezeit wurde eine Fallenfrequenz von $2\pi \cdot (155 \pm 21 \text{ Hz}) \times \sqrt{240/130}$ aus der Messung mit der tieferen Dipolfalle ermittelt (siehe Abbildung 5.5). Die Streurrate beträgt etwa $2\pi \cdot 0,016$ Hz und kann für die Berechnung vernachlässigt werden. Das Verhältnis der Fallenfrequenzen stimmt in guter Näherung mit der Berechnung bei einem Versatz der Foki von 3,5 mm und Strahltaillen von $12 \mu\text{m}$ in vertikaler Achse und $18 \mu\text{m}$ in horizontaler Achse überein. Bei der Bestimmung der Parameter aus der Lebensdaueremessung bei 130 mW Leistung in der Dipolfalle ergibt sich ein zusätzlicher Ein-Teilchen Verlust mit $\gamma = 2\pi \cdot 0,12$ Hz. Der Ursprung dieses Verlustprozesses ist nicht verstanden.

5.5 Kühlen in der optischen Falle

Im Rahmen dieser Arbeit ist eine neue Methode zum Nachkühlen in einer optischen Falle entwickelt worden. Diese ist verwandt mit der Kühlung durch selektive Anregungen in einer optischen Stehwelle [143]. Ebenso konnte parallel zu dieser Arbeit gezeigt werden, dass selbst in einer Magnetfalle vom Ioffe-Pritchard Typ bei einem niedrigen Offsetfeld und einer konstanten Radiofrequenz der lineare Verlauf des Potentials in radialer Richtung zu einem Kühlen durch ein Schütteln genutzt werden kann [144].

Da der Kondensatanteil nach dem Umladen in die Dipolfalle typischerweise etwa 20% bis maximal 40% beträgt, ist es vorteilhaft für die weiteren Experimente, das Ensemble in dieser Falle weiter zu kühlen. Dabei bietet es sich an, die Falltiefe durch eine

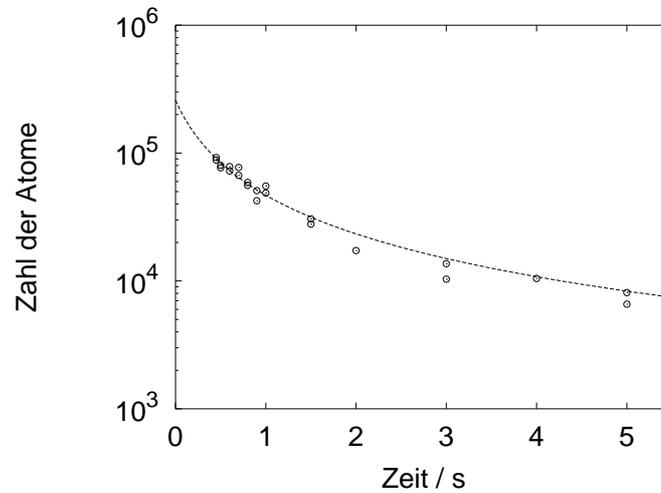


Abbildung 5.5: Die Bestimmung der horizontalen Fallenfrequenz in der Detektionsebene wurde mit Hilfe des bekannten Koeffizienten für den Drei-Körper Verlust ermittelt. Die hierzu durchgeführte Lebensdauermessung in der optischen Falle bei einer Leistung von 240 mW ergibt eine Fallenfrequenz von $\sqrt{240/130} \times 2\pi \cdot 155$ Hz.

Verringerung der Laserleistung herab zu senken. Der Kondensatanteil lässt sich so auf Werte von nahezu eins erhöhen. Als Problem stellt sich jedoch heraus, dass bei diesen geringen Fallentiefen das Kondensat nur für einen kurzen Zeitraum gehalten werden kann. Aufgrund der Asymmetrie der Falle entsteht ein Punkt, an dem die Atome aus dem Potential entweichen können. Ein solcher Vorgang ist in Abbildung 5.6 dargestellt. In diesem Fall betrug die Leistung des Lichtfeldes 66 mW.

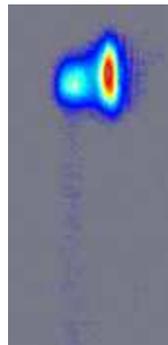


Abbildung 5.6: Die Abbildung zeigt ein atomares Ensemble nach einer Flugzeit von 31 ms. Im linken Teil des Bildes ist ein Bereich zu erkennen, in dem die Atome von der Dipolfalle nicht mehr gehalten werden.

Um einen solchen Teilchenverlust zu umgehen, musste das Ensemble auf eine andere Weise gekühlt werden. Hierzu wurde die Amplitude des Lichtfeldes mit einer Frequenz

5.5. Kühlen in der optischen Falle

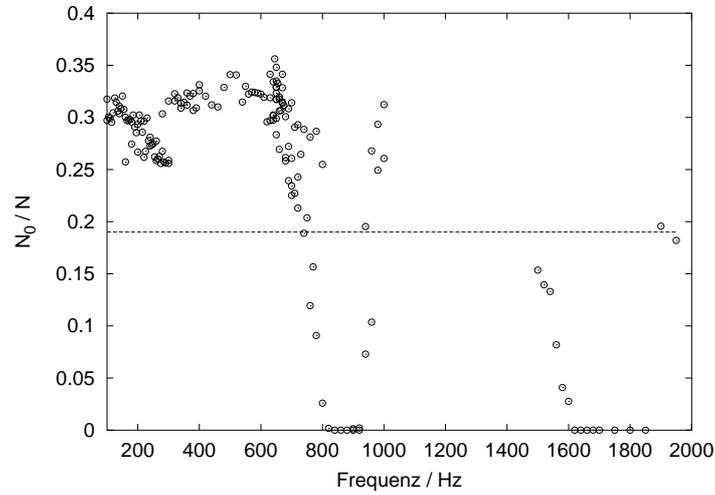
moduliert. Dieser Vorgang führt in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz zu einem Heizen oder zu einem Kühlen des Ensembles (siehe Abbildung 5.7(a)).

Der Heizprozess tritt entsprechend einer parametrischen Anregung dann auf, falls die Modulationsfrequenz gerade einem Vielfachen einer Fallenfrequenz entspricht. Die Atome des Kondensates werden durch die Modulation in die höheren Energiezustände angeregt und es kommt zu einem Schmelzen des Kondensates. Ein Beispiel für einen solchen Vorgang ist in Tabelle 5.1 gegeben. Bei einer Modulation mit $2\pi \cdot 42$ Hz sinkt der Kondensatanteil sehr stark ab, während sich die Anzahl der Atome im Vergleich zu einer Messung ohne eine Modulation nur leicht verringert. Dieser Effekt konnte bei einer Modulation mit der axialen und vertikalen Fallenfrequenz gemessen werden. Nach dem Beenden der Variation der Intensität lag jeweils ein thermisches Ensemble vor. Bei der dritten Fallenfrequenz konnte dieser Effekt nicht eindeutig nachgewiesen werden, da diese Frequenz aufgrund der Fallengeometrie nicht so leicht moduliert werden kann.

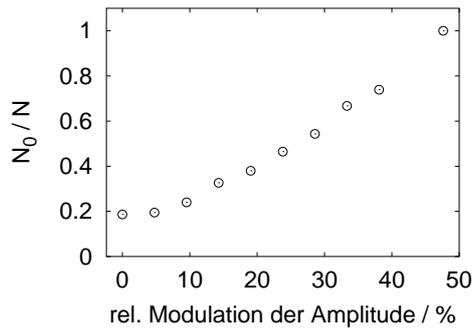
Tabelle 5.1: Die Tabelle enthält die Atomzahlen in der thermischen Wolke sowie im Kondensat nach jeweils einer Sekunde Haltezeit in der optischen Falle. Die Daten der ersten Zeile entsprechen Messungen in denen das Fallenpotential zeitlich konstant gehalten wurde. Die zweite Zeile enthält die Teilchenzahlen bei einem maximalen Herabsenken der Falltiefe um den Faktor 0,5. Bei den Daten der dritten Zeile wurde im Vergleich nur die Modulationsfrequenz geändert.

Frequenz	thermische Atome	BEC Atome	Gesamtzahl der Atome
-	$18,0 \times 10^4$	$4,6 \times 10^4$	$22,6 \times 10^4$
$2\pi \cdot 42$ Hz	$15,5 \times 10^4$	$0,1 \times 10^4$	$15,6 \times 10^4$
$2\pi \cdot 650$ Hz	$< 0,1 \times 10^4$	$7,6 \times 10^4$	$7,6 \times 10^4$

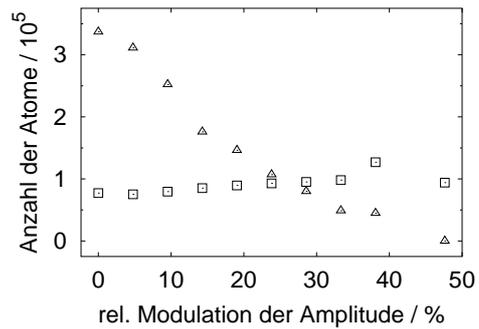
Ein Kühleffekt tritt bei Modualtionsfrequenzen auf, welche nicht mit den Fallenfrequenzen oder dessen Vielfachen übereinstimmen. Dies verdeutlicht Abbildung 5.7(a) und ein Beispiel in Tabelle 5.1. Dieser Effekt kann nicht bei rein harmonischen Potentialen auftreten. Da die optische Falle nur eine geringe Tiefe besitzt, lässt sich die Falle nur im Zentrum durch ein harmonisches Potential beschreiben. Befinden sich die höher energetischen Teilchen des atomaren Ensembles in Bereichen, in welchen das Potential von der harmonischen Näherung abweicht, so kann der Kühlprozess folgendermaßen erklärt werden : Bei einem Intensitätsverlauf proportional zu $\exp(-r^2)$ nimmt der energetische Unterschied zwischen benachbarten Zuständen bei höheren Zuständen ab. Dies bedeutet, dass in einer isotropen Falle mit einem solchen Potential die Übergänge bei hohen Quantenzahlen durch niedrigeren Frequenzen getrieben werden als bei Atomen, die den Grundzustand der Falle besetzen. Eine Modulation des Potentials bei niedrigeren Frequenzen gegenüber der Fallenfrequenz im Zentrum der Falle bewirkt also nur eine Anregung von Atomen, die eine hohe mittlere Energie besitzen. Damit diese Atome die Falle verlassen, müssen sie über viele Zustände befördert werden. Hierbei kommt zugute, dass die Zustände mit zunehmender Quantenzahl immer dichter liegen und somit die Möglichkeit eines Übergang in einen Zustand mit höherer Energie ansteigt. Weiterhin



(a)



(b)



(c)

Abbildung 5.7: In Abbildung (a) ist in Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz der Kondensatanteil aufgetragen. Man erkennt, dass bei der vertikalen Fallenfrequenz und dem doppelten dieser das Ensemble geheizt wird, während es bei den übrigen Frequenzen zu einem Kühleffekt führt. Der Kondensatanteil ohne die Modulation der Falle ist mit einer horizontalen Linie gekennzeichnet. In Abbildung (b) ist der Einfluss einer unterschiedlichen Amplitude bei einer Modulationsfrequenz von $2\pi \cdot 650$ Hz und einer Modulationsdauer von 500 ms dargestellt. Je größer der Wert für die Amplitude ist, desto höher ist der Kühleffekt. Abbildung (c) zeigt die zugehörige Anzahl der Atome in der thermischen und kondensierten Komponente. Man erkennt, dass der Anteil der kondensierten Atome (mit Quadraten gekennzeichnet) leicht mit größerer Amplitude steigt, während die Anzahl der thermischen Atome stark abnimmt.

5.5. Kühlen in der optischen Falle

kann der Kühleffekt durch eine höhere Modulationstiefe, wie Abbildung 5.7(b) zeigt, verstärkt werden. Insgesamt liegt also ein Kühlmechanismus vor, welcher sowohl auf der Anharmonizität des Fallenpotentials als auch auf dem Herabsenken der Falltiefe beruht.

Experimente mit spinor BEC's

In diesem Kapitel werden die zentralen experimentellen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit vorgestellt. Es wird gezeigt, dass bei den Experimenten mit Spinor-Kondensaten aus ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ eine reichhaltige Spindynamik beobachtet wird. Die bei den Messungen beobachteten Effekte lassen sich recht gut mit der in Kapitel 3 vorgestellten Theorie erklären. Für die in diesem Kapitel beschriebenen Experimente ist es essentiell, dass das Fallenpotential unabhängig von der Spineinstellung der Atome ist. Diese Voraussetzung ist durch den Transfer der Atome in die optische Falle gegeben. Weiterhin folgt aus der Drehimpulserhaltung, dass sich bei einer Spinänderung der Gesamtspin nicht ändern darf. Da sich die Atome nach dem Umladen aus der Magnetfalle in der Dipolfalle im Zustand $|F = 2, m_F = +2\rangle$ befinden, ist der Gesamtspin maximal und es kann keine Spindynamik stattfinden. Im folgenden Abschnitt wird daher kurz erläutert, in welcher Weise der Transfer der Atome in andere magnetische Unterzustände experimentell umgesetzt werden kann. Die Präparation der Atome in beliebige m_F Komponenten oder eine kohärente Überlagerung aus mehreren Zuständen bietet die Möglichkeit für die Untersuchungen an Bose-Einstein Kondensaten mit Spinfreiheitsgrad. Neben der Präparation des Spinzustandes der Atome ist es wichtig, das Magnetfeld an dem Ort des Fallenpotentials zu kennen. Die Messungen hierzu werden in Abschnitt 6.2 vorgestellt. Anschließend werden die Ergebnisse zur Spindynamik von ^{87}Rb im Hyperfeinzustand $F=2$ diskutiert.

6.1 Zustandspräparation

Für die Präparation eines atomaren Gases in eine beliebige Mischung aus magnetischen Unterzuständen gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine Voraussetzung für die meisten Verfahren (und auch das hier eingesetzte) ist es, dass anfänglich alle Atome dieselbe Spineinstellung besitzen. Daher ist es notwendig, dass der Spin der Atome nach dem

Umladen in die optische Falle nicht durch das Ausschalten der Magnetfalle beeinflusst wird. Dies wird durch ein hinreichend großes magnetisches Offsetfeld erreicht (siehe Abschnitt 5.3).

Ein magnetisches Offsetfeld dient während der Präparation für die Aufhebung der Entartung der m_F Zustände. Die energetische Aufspaltung der Zustände wird durch den linearen und quadratischen Zeeman-Effekt bestimmt. Hierbei gilt zu beachten, dass der quadratische Term bei hinreichender Größe für eine Separation der einzelnen Übergänge sorgt (siehe Gleichung 3.33). Die Übergänge zwischen den Spineinstellungen können dann getrennt voneinander behandelt werden. Somit können Übergänge durch eine entsprechende Radiofrequenz beispielsweise zwischen den Zuständen $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ induziert werden, ohne dabei den Zustand $|m_F = +1\rangle$ zu besetzen.

6.1.1 Adiabatische Passage und Landau-Zener Übergänge

Im Folgenden wird kurz auf das Prinzip der verwendeten Zustandspräparation eingegangen. Eine ausführliche Diskussion dieser Technik findet sich in [145]. Und in [146] wird die experimentelle Umsetzung beschrieben.

Mit Hilfe einer adiabatischen Passage kann der Zustand eines Atoms geändert werden. Als Vorteil gegenüber anderen Verfahren zeigt es sich, dass diese Methode unter anderem unkritischer gegenüber Schwankungen im Magnetfeld ist. Für den Transfer zwischen den unterschiedlichen Zuständen hebt ein Magnetfeld die energetische Entartung der m_F Zustände auf. Betrachtet wird bis auf Weiteres nur der Übergang zwischen den Zuständen $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$. Lässt man eine nichtresonante Radiofrequenz mit einem Atom im Zustand $|m_F = +2\rangle$ wechselwirken, so kann diese Wechselwirkung im *dressed-atom* Bild beschrieben werden. Im Unterschied zu der in Kapitel 5 beschriebenen Dipolkraft liegt hier ein homogenes Feld vor, so dass keine Kraft auf die Atome wirkt und das System aus Atom und Photon lediglich in neuen Eigenzuständen beschrieben wird.

Wird die Radiofrequenz nun langsam verändert und dabei die Resonanz zwischen den beiden Zuständen überstrichen, so befinden sich die Atome nach dem Abschalten der Frequenz in dem Zustand $|m_F = +1\rangle$. Anschaulich kommt es im Bereich der Resonanz zu einer vermiedenen Kreuzung (*avoided crossing*).

Es gilt zu beachten, dass der Transfer nur dann vollständig erfolgt, wenn die Variation über die Resonanzfrequenz langsam vorgenommen wird. Bei einer nicht adiabatischen Änderung befinden sich die Atome anschließend in einer Superposition aus den beiden Zuständen $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$. Je schneller die Änderung in der Frequenz vorgenommen wird, desto höher ist die Amplitude in der Wellenfunktion des anfänglich besetzten Zustandes. Die Adiabazitätsbedingung ist abhängig von dem Verhältnis des Quadrates der Rabi-Frequenz und der Änderung in der Radiofrequenz [145].

Es sei noch bemerkt, dass ein Mischzustand aus einer Überlagerung von zwei oder mehreren m_F Komponenten durch diese Technik nicht wieder in eine m_F Komponente überführt werden kann, da bei einer adiabatischen Passage über eine vermiedene Kreuzung die Amplituden der jeweiligen Komponenten gerade tauschen.

Betrachtet man nun wieder alle fünf Komponenten des Hyperfeinzustands $F=2$ der

^{87}Rb Atome, so unterscheiden sich die Resonanzfrequenzen zwischen Übergängen der magnetischen Unterzustände jeweils um den Betrag $\mu_B^2 B^2 / (2\Delta E_0)$ (siehe Abbildung 6.1). Möchte man, ausgehend von Atomen mit der Spineinstellung $|m_F = +2\rangle$ in einen beliebigen anderen Zustand oder eine Superposition aus Zuständen transferieren, so ist dies mit einer Frequenzrampe über die vier vermiedenen Kreuzungen möglich, wobei die Geschwindigkeit der Frequenzänderung über die jeweilige Resonanz bestimmt mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zustandsänderung stattfindet. Während mit dieser Methode bei der Realisierung einer Mischung die Amplituden der einzelnen Komponenten gut eingestellt werden können, ist die relative Phase zwischen den Komponenten nicht kontrollierbar und folglich von Experiment zu Experiment unterschiedlich.

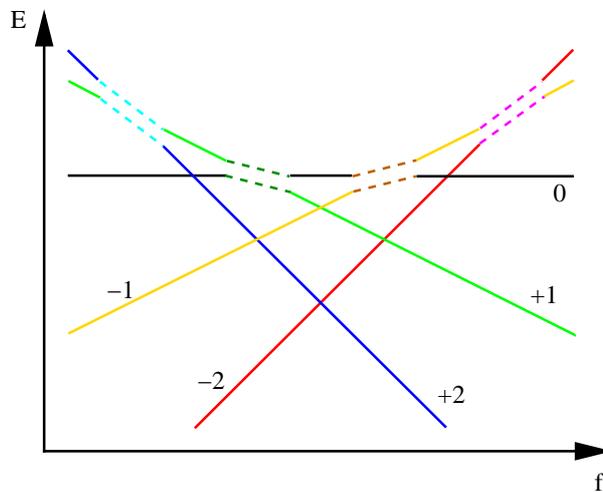


Abbildung 6.1: In der Abbildung sind die fünf dressed states von ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ bei einem Magnetfeld in Abhängigkeit von der Radiofrequenz dargestellt. Im Experiment befinden sich die Atome anfänglich im Zustand $|m_F = +2\rangle$. Daher kann mit einer Frequenzrampe von niedrigen zu hohen Frequenzen jeder Zustand präpariert werden. Wird die Frequenz zeitlich erniedrigt, so ist nur eine Zustandsänderung in die m_F Komponenten $+1$ möglich. Die nicht-vermiedenen Kreuzungen stellen mehr Photonenübergänge dar. Diese führen zu keiner Änderung in der Besetzung.

6.1.2 Untersuchte Spinpräparationen

In Abbildung 6.2 sind die erzeugten Spinzusammensetzungen dargestellt, welche im weiteren Verlauf dieses Kapitels zur Untersuchung der Spindynamik dienen. Neben den Fällen, in denen nur eine Spineinstellung präpariert wurde, sind vier Zustände bestehend aus zwei m_F Komponenten und zwei Zustände bestehend aus drei m_F Komponenten erzeugt worden. Für die Präparation wurde ein Magnetfeld von 26,1 G angelegt.

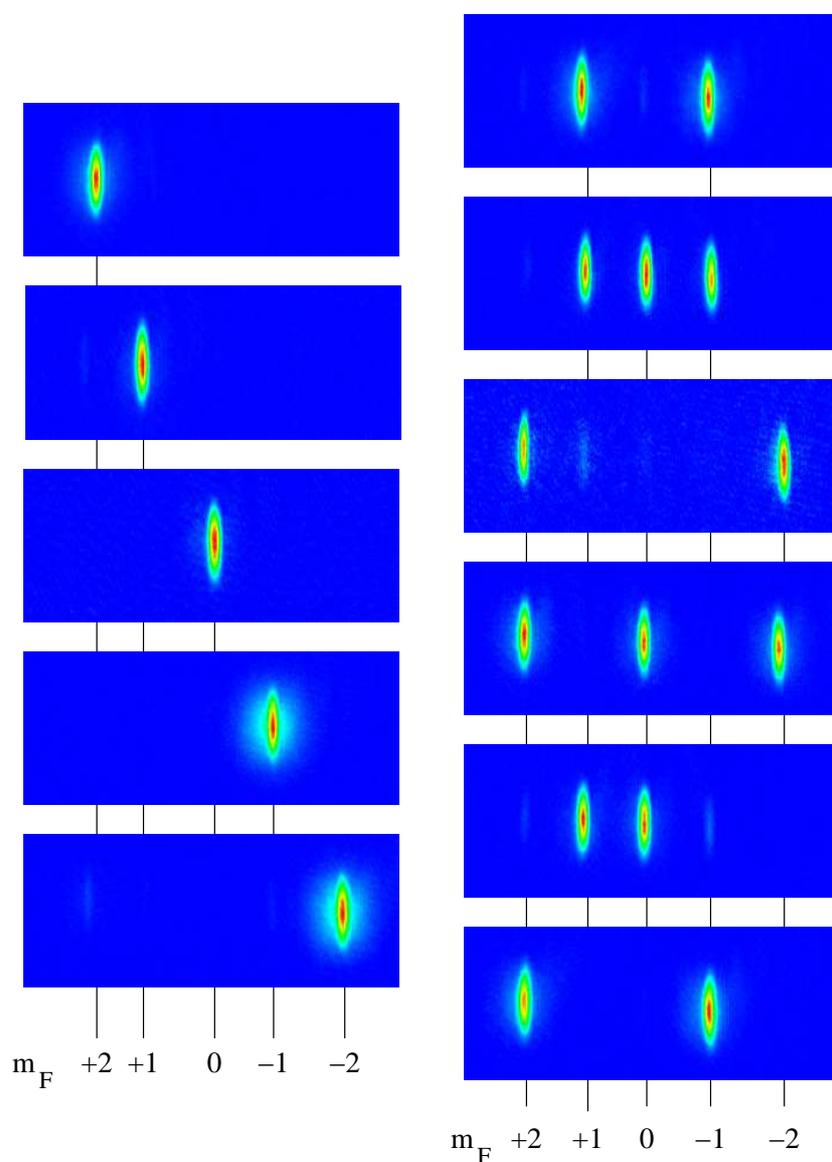


Abbildung 6.2: In der linken Spalte sind die präparierten Zustände bestehend aus einem m_F Zustand abgebildet. In der rechten Spalte sind die Superpositionen aus zwei und drei Spineinstellungen dargestellt.

6.2 Kontrolle des Magnetfeldes

Das Magnetfeld ist für die Beobachtung neben der Präparation des anfänglichen Spinzustandes und der mittleren Dichte der einzige weitere und zentrale Parameter, welcher die Ergebnisse der Experimente zur Spindynamik beeinflusst. So kann beispielsweise der Grundzustand, welcher die Spinzusammensetzung mit minimaler Energie beschreibt,

durch ein magnetisches Offsetfeld verändert werden (siehe Abschnitt 3.5.2). Ebenso unterdrückt ein hohes Offsetfeld die kohärente Spindynamik (siehe Abschnitt 3.6). Diese beiden Eigenschaften erfordern es, ein möglichst kleines magnetisches Offsetfeld zu realisieren. Neben dem Offsetfeld gilt es auch den Magnetfeldgradienten weitestgehend zu eliminieren. Existiert ein solcher Gradient entlang der axialen Richtung über das Kondensat, so wirkt eine von der Spineinstellung abhängige Kraft auf die Atome. Ist der Gradient ausreichend hoch, führt dieser unabhängig von der spinabhängigen Wechselwirkung zu einer Separation der m_F Komponenten. Dies würde eine Bestimmung des magnetischen Grundzustandes verhindern.

6.2.1 Einstellung des Offsetmagnetfeldes

Ziel bei der Einstellung des Offsetmagnetfeldes ist es, dieses zu minimieren, da, wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, das Magnetfeld zu einer Unterdrückung der Spindynamik führen kann. Weiterhin gilt es jedoch während der Experimente eine definierte Quantisierungsachse vorzugeben, damit bei der Separation der Spinkomponenten durch einen Magnetfeldgradienten die m_F Zustände nicht auf eine neue Basis projiziert werden. Die Justage erfolgte folgendermaßen :

Zuerst wurde ein Kondensat im Zustand $|m_F = +2\rangle$ in die optische Falle geladen. Anschließend wurde das axiale Offsetfeld von 52 G, welches die Erhaltung der Spineinstellung während des Ausschaltens der Magnetfalle garantiert, heruntergefahren. Zuvor wurde diesem hohen Feld ein kleines axiales Offsetfeld von anfänglich etwa 2 G überlagert. Dieses soll die Quantisierungsachse erhalten und eine Beeinflussung durch transversale und zeitlich schwankende Felder verhindern. Die Kontrolle, ob das Führungsfeld hoch genug ist, erfolgte nach Haltezeiten von 10 ms bis 200 ms. Hierzu wurden nach dem Ausschalten des Fallenpotentials die Spinkomponenten durch einen Magnetfeldgradienten separiert. Falls nur Atome in dem magnetischen Unterzustand $|m_F = +2\rangle$ detektiert werden konnten, war das Führungsfeld ausreichend groß.

Es zeigte sich, dass bis zu einem Magnetfeld von 170 ± 20 mG der Spin noch gehalten werden konnte. Die beste Kompensation von störenden Offsetmagnetfeldern wurde mit Hilfe von Experimenten mit einer magneto-optischen Falle erzielt. Die Position der MOT ist nur dann unabhängig von der Wahl des Magnetfeldgradienten, wenn kein zusätzliches Offsetfeld vorhanden ist. Somit kann eine Magnetfeldkompensation vorgenommen werden. Anschließende Versuche, transversale Felder weitergehend zu verringern, führten nicht zu einem niedrigeren Haltemagnetfeld, bei welchem noch alle Atome in dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ detektiert wurden. Die Ursache hierfür können sowohl störende inhomogene Offsetfelder als auch magnetische Wechselfelder sein.

Um sicherzugehen, dass nicht kompensierte Magnetfelder auch bei längeren Messungen zu keiner Verfälschung der Spinzusammensetzung führen, wurde bei den Experimenten zur Spindynamik für das Haltefeld der doppelte Wert des Stromes, bei welchem gerade noch alle Atome im Zustand $|m_F = +2\rangle$ detektiert wurden, verwendet.

Die Eichung des bei den Experimenten eingestellten Offsetmagnetfeldes erfolgte durch zwei adiabatische Passagen. Die erste adiabatische Passage wurde bei einer Radiofrequenz von $2\pi \times 18,273$ MHz und einem Offsetfeld von etwa 26,1 G ohne das axiale

Haltefeld aus dem Zustand $|m_F = +1\rangle$ in den Zustand $|m_F = 0\rangle$ durchgeführt. Mit Hilfe der zweiten adiabatischen Passage, bei der zusätzlich das axiale Haltefeld während der adiabatischen Passage eingeschaltet war, lässt sich der Wert des Haltefeldes ermitteln, da die Position der Übergänge zwischen den magnetischen Unterzuständen allein durch das Magnetfeld bestimmt ist. Der Transfer vom Zustand $|m_F = +1\rangle$ in den Zustand $|m_F = 0\rangle$ erfolgte mit dem zusätzlichen axialen Haltefeld bei einer Frequenz von $2\pi \times 18,521$ MHz. Mit Hilfe der Formeln 3.29 und 3.33 kann die Aufspaltung zwischen den Zuständen in Abhängigkeit vom Magnetfeld berechnet werden :

$$\hbar\omega_{rf} = |g_F|\mu_B B - \frac{\mu_B^2 B^2}{4\Delta E_0}. \quad (6.1)$$

Für das axiale Haltefeld ergibt sich somit ein Wert von 340 ± 16 mG. Da die Kompensationsspulen dieselbe Spulengeometrie besitzen, kann die Abweichung im Magnetfeld von dem Wert null durch die Ungenauigkeit in der StromEinstellung abgeschätzt werden. Es ergibt sich eine Unsicherheit von 11 mG. Somit ergibt sich insgesamt ein Magnetfeld von 340 ± 20 mG.

6.2.2 Kompensation des Magnetfeldgradienten

Ein Magnetfeldgradient in axialer Richtung bewirkt eine spinabhängige Kraft auf die Atome. Liegt ein Magnetfeldgradient vor, so führt dies zu einer Separation der unterschiedlichen m_F Komponenten. Ob ein solcher Magnetfeldgradient in axialer Richtung vorliegt, kann mit Hilfe der Trajektorien von Kondensaten mit unterschiedlichen Spineinstellungen überprüft werden. Da die Komponenten $|m_F = \pm 2\rangle$ am empfindlichsten auf magnetische Felder reagieren, wird die größte Genauigkeit erreicht, wenn man die Positionen dieser Komponenten nach einer gewissen Flugzeit betrachtet. Dazu sind zwei Experimente notwendig, in denen jeweils ein Kondensat im Zustand $|m_F = +2\rangle$ beziehungsweise im Zustand $|m_F = -2\rangle$ erzeugt wird. Ein Vergleich der horizontalen Positionen dieser beiden Kondensate gibt dann Aufschluss über den axialen Magnetfeldgradienten. Unter Vernachlässigung der unterschiedlichen Positionen der m_F Komponenten innerhalb des Fallenpotentials berechnet sich der Magnetfeldgradient durch die Differenz der Positionen für die Komponenten $|m_F = \pm 2\rangle$ nach einer Flugzeit t durch :

$$\partial_z B(z) = \frac{m}{2g_F\mu_B t^2} \times \frac{\Delta z}{2}. \quad (6.2)$$

Für die durchgeführten Experimente wurde der Gradient so eingestellt, dass die Mittelpunkte der Kondensate aus den Zuständen $|m_F = +2\rangle$ bzw. $|m_F = -2\rangle$ auf den selben Pixel der CCD-Kamera abgebildet wurden. Bei einer Auflösung von $17 \mu\text{m}$ und einer Fallzeit von 31 ms ergibt sich somit ein maximaler Magnetfeldgradient in axialer Richtung von unter 15 mG cm^{-1} . Der tatsächliche Gradient ist wahrscheinlich um etwa einen Faktor zwei geringer, da die Absorptionbilder der Kondensate in den unterschiedlichen Spinzuständen keine Verschiebung zueinander aufzeigen.

Zusätzlich kann über die Bilder mit Hilfe des Unterschiedes in den vertikalen Positionen auch eine Beeinflussung durch den Gradienten in dieser Richtung beobachtet

Experimente mit spinor BEC's

werden. Durch die Auswertung der Absorptionsaufnahmen zeigt sich, dass der Gradient in vertikaler Richtung einen Wert kleiner 30 mG cm^{-1} annimmt.

Aus den Werten für die Gradienten in vertikaler und axialer Richtung kann aufgrund der Maxwell Gleichung $\text{div} \vec{B}(\vec{r})=0$ eine obere Schranke für den Magnetfeldgradienten der dritten Achse angegeben werden. In der dritten Achse liegt der Betrag des Gradienten unterhalb von 45 mG cm^{-1} . Da die Ausdehnung der Kondensatwellenfunktion in jeder Achse anti-proportional zur jeweiligen Fallenfrequenz ist (siehe Gleichung 2.18), ist der Energiebeitrag in axialer Richtung mindestens um einen Faktor 3,5 bzw. 13,5 größer als entlang den anderen Richtungen.

6.2.3 Energieanteile

Unter Verwendung der vorhergesagten Streulängen für ^{87}Rb im Hyperfeinzustand $F=2$ können die Energien der spinabhängigen Wechselwirkung mit den durch das Magnetfeld hervorgerufenen Energieverschiebungen verglichen werden. Für die Streulängen werden die folgenden Werte benutzt : $a_0=89,4 a_B$; $a_2=94,5 a_B$; $a_4=106,0 a_B$ [76], wobei a_B den Bohr'schen Radius bezeichnet. Bei 10^5 Atomen im Kondensat ergibt sich bei den vorhandenen Fallenparametern mit Formel 5.8 eine mittlere Dichte von $n = 4,0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Aus den Gleichungen 3.9 ergeben sich die Energiebeiträge für die atomare Wechselwirkung :

$$\begin{aligned}\frac{n}{2}g_0 &= k_B \times 147,9 \text{ nK} = \hbar 2\pi \times 3080,6 \text{ Hz} , \\ \frac{n}{2}g_2 &= k_B \times 0 \dots 9,8 \text{ nK} = \hbar 2\pi \times 0 \dots 203,6 \text{ Hz} , \\ \frac{4n}{5}g_4 &= k_B \times 0 \dots 0,2 \text{ nK} = \hbar 2\pi \times 0 \dots 4,2 \text{ Hz} .\end{aligned}$$

Da die Beiträge der Wechselwirkungsterme g_2 und g_4 abhängig von der Spineinstellung der Atome sind, wurde der mögliche Bereich angegeben.

Im Gegensatz zu der Stoßwechselwirkung ist der Energiebeitrag durch das magnetische Offsetfeld nicht von der Dichte abhängig. Die Energieverschiebung der m_F Zustände bei 340 mG beträgt pro Atom :

$$q = k_B \times m_F^2 \cdot 0,4 \text{ nK} = \hbar 2\pi \times m_F^2 \cdot 8,3 \text{ Hz} .$$

Man erkennt, dass die Energieänderung der m_F Komponenten durch das Magnetfeld wesentlich kleiner ist als die Änderung durch die spinabhängige Wechselwirkung von g_2 . Dies bedeutet, dass die Aufspaltung der Zustände durch den quadratischen Zeeman-Effekt bei der Spindynamik nur eine untergeordnete Rolle spielt. Im Gegensatz dazu ist die Wechselwirkungsenergie, welche durch den Term g_4 beschrieben wird, sehr klein. Daher wird es sehr schwer sein, den Einfluss dieses Terms in der Dynamik zu messen.

Weiterhin kann noch die Energie durch den Magnetfeldgradienten in axialer Richtung von $\partial_z B_z \leq 15 \text{ mG cm}^{-1}$ abgeschätzt werden. Dieser hat in axialer Richtung den meisten Einfluss, da in dieser die Ausdehnung entsprechend den Verhältnissen der Fallenfrequenzen am größten ist. Der Radius des Kondensates in dieser Achse berechnet

6.3. Beobachtung von Spindynamik

sich durch Gleichung 2.18 zu $r_{axial} \approx 37,5 \mu\text{m}$. Der Energieunterschied zwischen dem Mittelpunkt des Kondensates und dem Rand in axialer Richtung ist abhängig von der Spineinstellung und beträgt :

$$\Delta p < k_B \times m_F \cdot 1,9 \text{ nK} = \hbar 2\pi \times m_F \cdot 39,4 \text{ Hz} .$$

Es sei darauf hingewiesen, dass es sich hierbei um eine Abschätzung nach oben handelt. Trotzdem zeigt sich, dass auch hier die spinabhängige Wechselwirkungsenergie von g_2 einen höheren Beitrag liefert. Der Einfluss des Gradienten ist also hinreichend klein, so dass die Grundzustände unterschieden werden können (siehe hierzu auch Abbildung 3.6(a)). Wie schon bei dem Einfluss des Offsetfeldes ist auch in diesem Fall der Energiebeitrag des Terms g_4 im Vergleich zum möglichen Beitrag des Gradienten wesentlich geringer. Jedoch ist keine entscheidende Abhängigkeit des g_4 Terms in der p-Achse der Phasendiagramme gegeben, so dass diese unterschiedlichen Energiebeiträge für die Unterscheidung zwischen den verschiedenen Phasen keine Rolle spielen.

6.3 Beobachtung von Spindynamik

In diesem Abschnitt werden die erstmals erzielten Ergebnisse zur Spindynamik von Kondensaten im Hyperfeinzustand $F=2$ vorgestellt. Der experimentelle Ablauf dieser Experimente ist in Abbildung 6.3 schematisch dargestellt. Nach der Präparation der Spinzustände wird das Magnetfeld von etwa 27 G auf 340 mG innerhalb von 20 ms heruntergerampft. Nach Abschnitt 3.6 findet erst bei einem niedrigen magnetischen Offsetfeld Spindynamik statt, so dass ein definierter Anfangszeitpunkt für die Entwicklung des Spins gegeben ist. Diese Entwicklung wird im Folgenden anhand eines Kondensates, welches in dem Zustand $|m_F = 0\rangle$ präpariert wurde, dargestellt.

Bei einer rein thermischen Verteilung konnte über einen Zeitraum von 10 s keine Änderung in der Spinzusammensetzung beobachtet werden. Bei den Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten tritt diese schon nach 10 ms auf. Eine solch schnelle Dynamik wird bei Kondensaten mit Hyperfeinspin $F=1$ nicht beobachtet [52, 147, 146]. Hier beginnt sich die Spinzusammensetzung bei ähnlichen Dichten innerhalb von einigen Sekunden zu ändern. Bei beiden Systemen skaliert die spinerhaltende Wechselwirkung mit der Summe zweier Streulängen und die spinändernde Wechselwirkung, welche zu einer Änderung mit $\Delta m_F = 1$ führen kann, mit der Differenz dieser Streulängen (siehe Gleichung 6.2.3 für $F=1$ und Gleichung C.4 für $F=2$). Die Ursache für dieses unterschiedliche Verhalten muss also in den Streulängen begründet sein. In den Systemen mit Kondensaten in $F=1$ ist das Verhältnis der *mean-field* Beiträge von spinändernd zu spinerhaltend etwa 1:100. Bei den vorliegenden Bose-Einstein Kondensaten von ^{87}Rb mit Spinfreiheitsgrad im Zustand $F=2$ ist das Verhältnis der unterschiedlichen Prozesse hingegen im Bereich von 1:10 (siehe Abschnitt 6.2.3).

In Abbildung 6.4(a) ist die Verteilung in die Spinkomponenten des im Zustand $|m_F = 0\rangle$ präparierten Kondensates dargestellt. Die Haltezeit in der Dipolfalle betrug 10 ms. An diesem Absorptionsbild lassen sich mehrere Eigenschaften ablesen. Zum einen

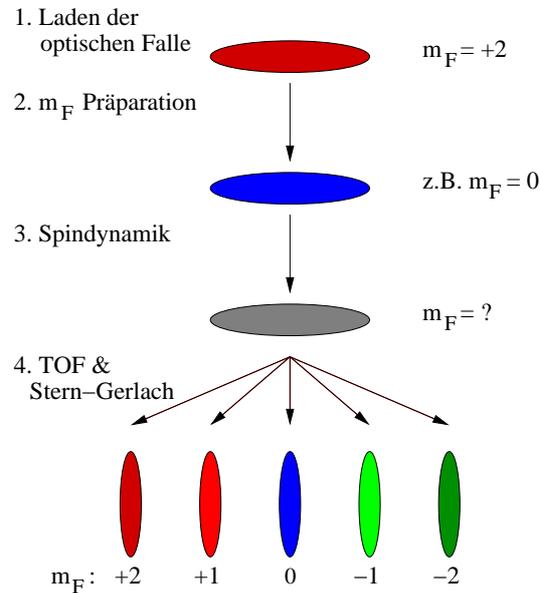


Abbildung 6.3: Schema des experimentellen Ablaufes der Versuche zur Spindynamik. Die Kondensate werden in der Magnetfalle erzeugt und anschließend, wie in Kapitel 5 beschrieben, in die optische Falle umgeladen. Bis zu diesem Zeitpunkt besetzen die Atome den Zustand $|F = 2, m_F = +2\rangle$. Aufgrund der Spinerhaltung kann es zu keiner Änderung in der Spinzusammensetzung kommen. Mit Hilfe einer adiabatischen Passage werden die Atome in einen beliebigen m_F Zustand transferiert. In der Abbildung ist zum Beispiel der Transfer in den Zustand $|m_F = 0\rangle$ dargestellt. Unter Berücksichtigung der Gesamtpinnerhaltung können die Atome von diesem Zustand aus ihre Spineinstellung ändern. Diese Dynamik findet nur bei einer hohen Dichte in der optischen Falle statt. Durch das Ausschalten des Fallenpotentials ist der Zeitpunkt, bis zu dem Spindynamik stattfindet, definiert. Während der Flugzeit von 31 ms bis zur Detektion wird für 5 ms ein Magnetfeldgradient eingeschaltet. Dieser führt zu einer räumlichen Separation der unterschiedlichen m_F Komponenten, so dass die Anzahlen der Atome in den jeweiligen Spinkomponenten unabhängig voneinander detektiert werden können.

zeigt dieses Bild deutlich, dass die Besetzung in den Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ wesentlich größer ist als in den voll gestreckten Zuständen $|m_F = \pm 2\rangle$. Diese entspricht der Erwartung, wenn man die Energiebeiträge der beiden spinändernden Wechselwirkungen berücksichtigt. Das Verhältnis von g_2 zu g_4 liegt bei etwa 50 (siehe Abschnitt 6.2.3). Der *mean-field* Beitrag des Terms g_2 beinhaltet keine Wechselwirkung mit $\Delta m_F = \pm 2$. Vernachlässigt man also den Beitrag des Terms g_4 , welcher eine Kopplung zwischen den Zuständen $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = \pm 2\rangle$ enthält (siehe Anhang C), können die Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ nur angenommen werden, falls vorher die Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ besetzt sind.

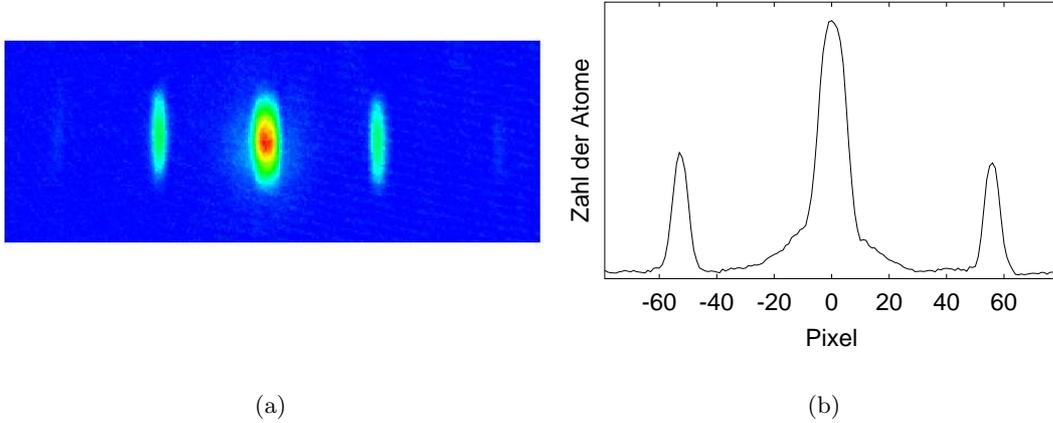


Abbildung 6.4: Abbildung (a) zeigt ein Absorptionsbild eines Bose-Einstein Kondensates, welches in dem Zustand $|m_F = 0\rangle$ präpariert wurde. Die Haltezeit in der Dipolfalle bei niedrigem Magnetfeld betrug 10 ms. Während dieser Zeit sind die zwei Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ bevölkert worden. Die Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ sind nur sehr gering besetzt. Zur Verdeutlichung der quantitativen Verteilung in die Zustände ist in Abbildung (b) die Summe über die Spalten angegeben. Man erkennt, dass die Kondensatanteile in den Zuständen $|m_F = \pm 1\rangle$ im Gegensatz zu dem Kondensatanteil in $|m_F = 0\rangle$ keine thermische Verteilung besitzen.

Betrachtet man in Abbildung 6.4(b) die Summe über die Spalten des Bildes (a), so kann man Aussagen über den Prozess treffen, welcher zur Spindynamik führt. Neben einer Dynamik entsprechend der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii Gleichung 3.16 ist prinzipiell auch eine Wechselwirkung zwischen thermischen Atomen mit dem Kondensat als Ursache für die Spindynamik möglich. Zwei Beobachtungen an der Abbildung 6.4(b) schließen als Ursache jedoch eine Wechselwirkung zwischen thermischen Atomen mit dem Kondensat aus. Wäre die Spindynamik durch eine solche Wechselwirkung verursacht, so müssten in den neu besetzten Zuständen auch thermische Atome detektiert werden. Dies ist jedoch nicht zu erkennen, vielmehr sind die Kondensatanteile in den Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ sehr rein. Weiterhin sollte eine Wechselwirkung zwischen thermischen Atomen mit dem Kondensat dazu führen, dass die Breite der Kondensate in den neu besetzten Zuständen mit der in dem ursprünglich präparierten Zustand übereinstimmt und nur die Amplitude skaliert. Auch dies wird nicht beobachtet. Stattdessen ist die Breite der Verteilung in den Zuständen $|m_F = \pm 1\rangle$ nur halb so groß wie die des Kondensates im Zustand $|m_F = 0\rangle$. Hierzu sei bemerkt, dass die Maxima der Dichten im Fallenpotential an derselben Stelle liegen. Zur Überprüfung wurden die Positionen von Kondensaten in den unterschiedlichen m_F Zuständen mit dem selben Stern-Gerlach Feld bestimmt¹. Mit dieser Beobachtung stimmt überein, dass die Ausdehnung in der

¹Hierfür ist es notwendig, dass die Haltezeiten der Kondensate immer gleich sind, da sich das Strom-

vertikalen Achse in allen drei Komponenten gleich groß ist. Da sich nach dem Ausschalten des Fallenpotentials die *mean-field* Energie in kinetische Energie umsetzen konnte und erst anschließend die Komponenten separiert wurden, kann aus der vertikalen Ausdehnung auf die relative Position im Kondensat zurückgeschlossen werden. Somit besetzt das Kondensat in der Mitte drei Zustände und an den Enden in axialer Richtung nur die ursprüngliche Komponente. Dieser Effekt kann mit den Simulationen aus Abschnitt 3.6.1 erklärt werden. Bei einer konstanten Dichte und einem sehr geringen Anteil von Atomen in den Zuständen $|m_F = \pm 1\rangle$ kommt es nach einem gewissen Zeit zu einem plötzlichen Einsetzen der Spindynamik (siehe hierzu Abbildung 6.5(b)). Da die Gleichungen zur Spinentwicklung linear in der Dichte sind (siehe Gleichung C.10), kommt es zu dem Einsetzen der Spindynamik im Kondensat zu unterschiedlichen Zeiten. Die Spindynamik beginnt also in der Mitte des Kondensates und nicht gleichzeitig über das Kondensat verteilt. Die unterschiedlichen Fallenfrequenzen in den drei Raumrichtungen führen dazu, dass nach der Haltezeit von 10 ms die Spindynamik in der axialen Richtung noch im Fallenzentrum lokalisiert werden kann, während dies in der vertikalen Achse nicht mehr möglich ist. Das im Experiment beobachtete Verhalten entspricht also der Entwicklung entsprechend der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii Gleichung.

Hierzu sei angemerkt, dass eine Überprüfung über den Ursprung der Spindynamik mit Experimenten im Zustand $F=1$ [52, 147] nur schwer vorgenommen werden kann, da in diesen Systemen die Spindynamik langsam gegenüber dem Reziproken der axialen Fallenfrequenz und gegenüber Thermalisierungseffekten ist.

6.3.1 Anfängliche Spindynamikraten

Bei den Messungen zur Entwicklung der Spineinstellung stellt sich heraus, dass die Dynamik in die „neuen“ Spinkomponenten von dem präparierten Anfangszustand abhängt. Die abgeschätzten Raten der anfänglichen Entwicklung in die „neuen“ Komponenten sind in Tabelle 6.1 für die unterschiedlichen Ausgangszustände angegeben. Diese Raten dienen lediglich zum Vergleich der Spindynamik zwischen unterschiedlichen Ausgangszuständen und anderen Prozessen. Für die Bestimmung der Rate in den Zustand $|X\rangle$ wurde an die zeitlich zunehmende Teilchenzahl in der neu besetzten Spinkomponente eine phänomenologische Exponentialfunktion gefittet. Mit Hilfe der anfänglichen Steigung der Exponentialfunktion $\frac{dN_{|X\rangle}}{dt}$, der Atomzahl in dem präparierten Spinzustand N_{start} und der anfänglichen mittleren Dichte $\langle n_{start} \rangle$ wird der Wert der Spindynamikrate berechnet. Hierbei wird angenommen, dass es sich bei der Spindynamik um einen Zwei-Körper Prozess handelt. Die Raten ergeben sich dann mit Hilfe der Gleichung :

$$G_{\rightarrow|X\rangle} = \frac{dN_{|X\rangle}}{dt} \cdot (N_{start} \langle n_{start} \rangle)^{-1}. \quad (6.3)$$

Auch wenn die Werte für die so ermittelten Raten nur eine Kenngröße für die Anfangsrate der Spindynamik ist, können anhand ihrer ein paar fundamentale Eigenschaften abgelesen werden. Zum einen stellt sich heraus, dass auf kurzen Zeitskalen im Bereich von

integral für das Stern-Gerlach Magnetfeld aus technischen Gründen mit der Haltezeit leicht ändert.

20 ms die Rate für den Prozess $2 \times |m_F = 0\rangle \rightarrow |m_F = -1\rangle + |m_F = +1\rangle$ einen ähnlichen Wert annimmt wie der umgekehrte Prozess $|m_F = -1\rangle + |m_F = +1\rangle \rightarrow 2 \times |m_F = 0\rangle$. Dies entspricht dem Verhalten eines reversiblen oder kohärenten Prozesses.

Es zeigt sich weiterhin, dass die Gesamtspinerhaltung auch anhand der Raten abgelesen werden kann. Eine Ausnahme scheint hier der Fall zu sein, bei dem das Kondensat anfänglich in der Spinkomponenten $|m_F = +1\rangle$ präpariert wurde. Nimmt man jedoch an, dass sich eine Mischung aus Atomen in den Zuständen $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = +1\rangle$ schnell in die Zustände $|m_F = -1\rangle$ und $|m_F = +2\rangle$ entwickeln, so berechnen sich die „neuen“ Raten aus den Werten in der Tabelle $G_{\rightarrow|+2\rangle} - G_{\rightarrow|-1\rangle} = 17,7$ und $G_{\rightarrow|0\rangle} + G_{\rightarrow|-1\rangle} = 16,9$. Diese stimmen dann wieder mit der erwarteten Spinerhaltung überein.

Tabelle 6.1: Die Tabelle gibt an, welche Dynamik für die verschiedenen Anfangspräparationen beobachtet wurde. Neben der anfänglichen Spindynamikrate in die benachbarten m_F Komponenten ist auch der beobachtete Endzustand angegeben. Auf den Effekt, dass bei Präparationen mit anfänglichem Gesamtspin größer null der Endzustand ein Kondensat mit der Spineinstellung +2 ist, wird in Abschnitt 6.9 eingegangen.

anfangs präparierte m_F Zustände	anfänglicher Gesamtspin	anfänglicher Kanal in den m_F Zustand $G [10^{-13} \text{cm}^3 \text{s}^{-1}]$	letztlich bevölkerte m_F Zustände
$ 0\rangle$	0	$\rightarrow \pm 1 \approx 21,0$	Gleichverteilung
$ +1\rangle + -1\rangle$	0	$\rightarrow 0 \approx 26,9$ $\rightarrow \pm 2 \approx 4,6$	Gleichverteilung
$ +1\rangle + 0\rangle + -1\rangle$	0	$\rightarrow \pm 2 \approx 5,0$	Gleichverteilung
$ +2\rangle + -2\rangle$	0	-	$ +2\rangle + -2\rangle$
$ +2\rangle + 0\rangle + -2\rangle$	0	$\rightarrow \pm 1 < 0,1$	$ +2\rangle + -2\rangle$
$ +2\rangle + -1\rangle$	1/2	-	$ +2\rangle$
$ +1\rangle + -0\rangle$	1/2	$\rightarrow +2 \approx 21,7$ $\rightarrow -1 \approx 19,2$	$ +2\rangle$
$ +1\rangle$	1	$\rightarrow +2 \approx 22,4$ $\rightarrow 0 \approx 12,2$ ($\rightarrow +1 \approx 4,7$)	$ +2\rangle$
$ +2\rangle$	2	-	$ +2\rangle$

6.4 Oszillationen

Im Vergleich zum vorhergehenden Abschnitt wird nun die Entwicklung der Spindynamik auf längeren Zeitskalen betrachtet. Hierzu dient als Ausgangspunkt wieder ein Kondensat, bei dem die Atome anfänglich den Zustand $|m_F = 0\rangle$ besetzen. Die zeitliche Entwicklung der Spinzusammensetzung wird durch eine Detektion nach einer unter-

schiedlich langen Haltezeit in der Dipolfalle untersucht. Anschließend werden die Kondensatanteile in den verschiedenen Spinkomponenten mit Hilfe eines zwei-dimensionalen Fits bestimmt und die relativen Besetzungen der m_F Zustände im Kondensat berechnet. In Abbildung 6.5(a) ist die gemessene Entwicklung innerhalb der ersten 50 ms dargestellt, wobei jeder Datenpunkt den Mittelwert aus vier Messungen angibt. Es zeigt sich, dass die Komponenten mit $|m_F = \pm 1\rangle$ nach etwa 10 ms besetzt werden. Für die Komponenten mit $|m_F = \pm 2\rangle$ erfolgt die Besetzung erst nach weiteren 10 ms. Die Verzögerung in der Besetzung dieser Zustände ergibt sich, wie im vorhergehende Abschnitt erläutert, aus dem sehr kleinen Wert für den Wechselwirkungsterm g_4 , so dass die voll gestreckten Zustände erst besetzt werden, nachdem ein hoher relativer Anteil die Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ bevölkert. Diesen Effekt beobachtet man auch in der Simulation der Dynamik durch Gleichung C.10 in Abbildung 6.5(b). Für diese Simulation wurde eine konstante Dichte von $4,0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ und eine anfängliche Besetzung der Spinkomponenten $|m_F \neq 0\rangle$ von $2 \times 10^{-3}\%$ angenommen. Weiterhin kann man sowohl in der Simulation als auch an den Messungen erkennen, dass es nach dem Besetzen der Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ zu einer Abnahme in den Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ kommt. Die gemessene Entwicklung in den Spinkomponenten innerhalb der ersten Millisekunden entspricht also in etwa dem simulierten Verhalten.

Bei einer längeren Haltezeit in der optischen Falle zeigt sich jedoch ein deutlicher Unterschied zwischen den Messdaten und der Simulation. In der Simulation wird nach 13 ms wieder der Ausgangszustand angenommen (siehe Abbildung 6.5(d)). Es kommt ähnlich wie in den Simulationen zur Spindynamik im Hyperfeinzustand $F=1$ zu einem oszillatorischen Verhalten (siehe Abbildung 3.9). In den Experimenten kann diese Wiederkehr in den anfänglich präparierten Zustand nicht beobachtet werden. Jedoch lässt sich auch hier in der zeitlichen Entwicklung ein anti-zyklisches Verhalten in der Besetzung der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ gegenüber der Zustände $|m_F = \pm 2\rangle$ beobachten (siehe Abbildung 6.5(c)). Diese Beobachtung deutet auf eine zumindest teilweise kohärente Dynamik innerhalb der ersten 300 ms hin. Die Unterschiede zwischen der Simulation und den Messdaten können durch mehrere Effekte verursacht sein. So nimmt die Dichte in den Experimenten aufgrund von Verlustprozessen schnell ab, während diese in den Simulationen als konstant angenommen wurde. Weiterhin stellt sich heraus, dass diese Verluste spinabhängig sind (siehe hierzu Abschnitt 6.8). Auch wird der Einfluss der thermische Wolke auf die Spindynamik vernachlässigt. Auf diesen Aspekt wird in Abschnitt 6.6 eingegangen. In den Experimenten beobachtet man nach den 300 ms Haltezeit, dass alle fünf Komponenten annähernd gleich besetzt sind. Abbildung 6.6 zeigt drei Absorptionsbilder nach unterschiedlichen Haltezeiten.

Neben dem eben beschriebenen Experiment ergaben sich auch ausgehend von einer Mischung aus den Zuständen $|m_F = \pm 1\rangle$ innerhalb der ersten 50 ms Hinweise auf eine Oszillation in den Spinbesetzungen. Dass in dieser Versuchsreihe eine Oszillation nicht über einen längeren Zeitraum beobachtet werden konnte, kann durch den vergleichsweise hohen Anteil von thermischen Atomen bei den Experimenten liegen. Der Kondensatanteil betrug hier lediglich etwa 50%.

6.5. Phasenabhängigkeit der Spindynamik

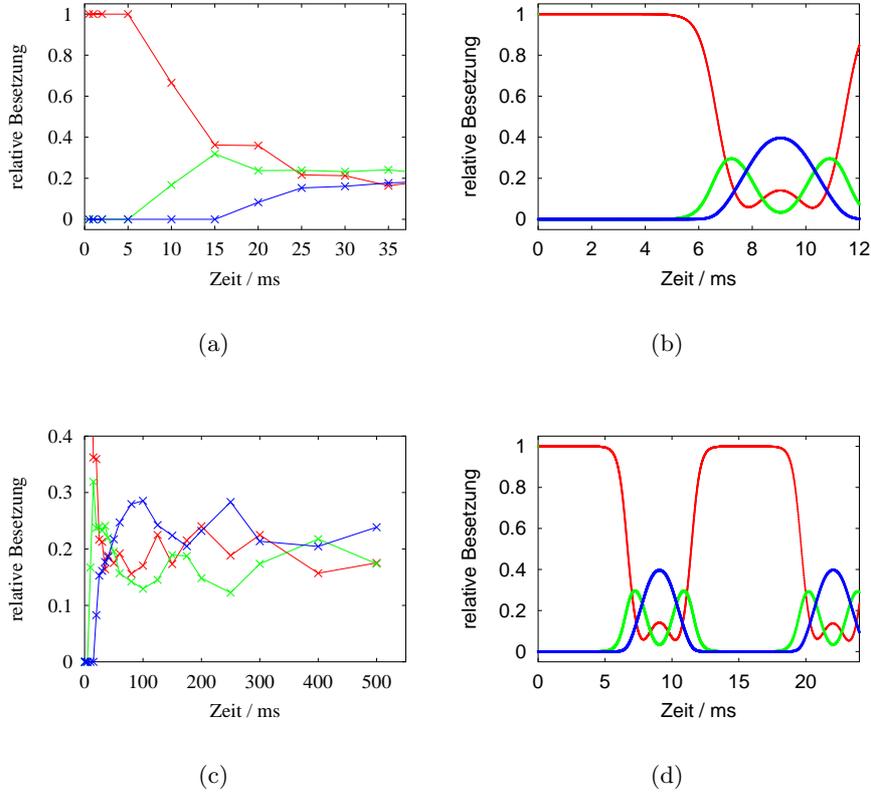


Abbildung 6.5: Der Ausgangspunkt für die Abbildungen ist ein Kondensat im Zustand $|m_F = 0\rangle$ (rot). In (a) ist die gemessene Entwicklung von der relativen Besetzung der Spinkomponenten dargestellt. Neben dem Effekt, dass die voll gestreckten Zustände (blau) erst angenommen werden, nachdem die Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ (grün) besetzt wurden, zeigt sich auch eine Abnahme in der Besetzung dieser Zustände. Diese beiden Effekte werden durch die Simulation der Dynamik, welche die Abbildung (b) wiedergibt, bestätigt. Bei längeren Haltezeiten weichen die Messergebnisse deutlich von der Simulation ab. Bei den experimentellen Daten in Abbildung (c) ist eine kleine Oszillation innerhalb der ersten 300 ms zwischen den Komponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ und $|m_F = \pm 2\rangle$ zu erkennen. Anschließend ist die Besetzung der Zustände annähernd gleichverteilt. Im Gegensatz dazu zeigt die Simulation in (d) ein deutlich anderes Verhalten (siehe Text).

6.5 Phasenabhängigkeit der Spindynamik

Bei den bis jetzt beschriebenen Experimenten wurden die Atome in einer m_F Komponente oder in einer Superposition aus zwei m_F Komponenten präpariert. In diesen Fällen ist die Energie des Kondensates nicht von den Phasen der einzelnen Komponenten abhängig. Wird das Kondensat jedoch in einer Superposition aus drei Spineinstellungen präpariert, so hängt die Energie von der relativen Phasenlage der Kom-

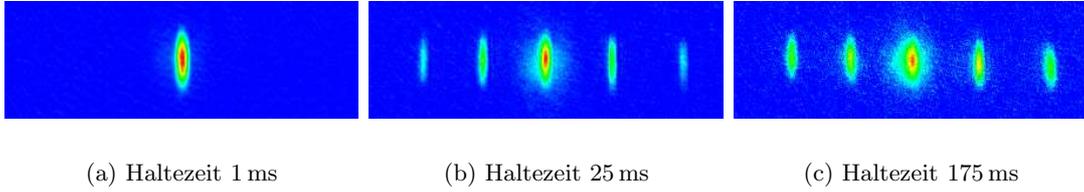


Abbildung 6.6: Die drei Absorptionbilder zeigen ausgehend von dem präparierten Zustand $|m_F = 0\rangle$ die Besetzung der Spinkomponenten nach unterschiedlichen Haltezeiten.

ponenten ab. Während bei einer Superposition aus zwei Komponenten nur die spin-erhaltende Wechselwirkung, bei der sich die Phasen gerade herausheben (siehe z.B. Gleichung C.5), zur Energie beiträgt, kommt bei einer Superposition aus drei Spineinstellungen noch die spinändernde Wechselwirkung hinzu. Für ein Kondensat, in dem die Komponenten $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = \pm 1\rangle$ besetzt sind, ist dies unter anderem der Term $\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_0 + \varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_{-1}$ (siehe Gleichung C.6). Der Wert dieses Beitrags hängt neben den Amplituden auch von den relativen Phasen ab.

Die relativen Phasen können während der Präparation mit Hilfe der adiabatischen Passage und im Weiteren nicht vollständig kontrolliert werden und sind somit vermutlich von Experiment zu Experiment unterschiedlich. Die Auswirkungen der verschiedenen relativen Phasen auf die Spindynamik wurden anhand von Kondensaten untersucht, welche in einer Superposition der Zustände $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = \pm 1\rangle$ präpariert wurden. Bei den Experimenten wurde wieder die Haltezeit variiert und aus den Bildern wurden die relativen Besetzungen der m_F Komponenten bestimmt. Abbildung 6.7(a) zeigt für kurze Haltezeiten die relative Besetzung der Zustände $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = \pm 1\rangle$. Dabei entspricht ein Datenpunkt einer Messung. Es ist zu erkennen, dass nach etwa 2,5 ms die relativen Besetzungen in den Zuständen deutlich schwanken, wie es zu erwarten ist, wenn die Phasen der Komponenten nicht reproduzierbar von Experiment zu Experiment eingestellt werden können. Die Daten zeigen auch, dass innerhalb der ersten 2,5 ms nur geringe Schwankungen auftreten. Dies zeigt, dass innerhalb dieser Zeit unabhängig von den relativen Phasen keine Spindynamik stattfindet.

Dass das in Abbildung 6.7(a) beobachtete Verhalten nicht auf einem Schwanken in der Präparation durch die adiabatische Passage verursacht wurde, verdeutlicht Abbildung 6.7(b). Da innerhalb der ersten Millisekunden nur Spindynamik, aber keine Thermalisierung stattfindet (siehe Abschnitt 6.3), gibt ein Vergleich zwischen der Differenz der Kondensatanteile $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = -1)$ und der Differenz $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = 0)$ Aufschluß über den Ursprung der beobachteten Schwankungen in Abbildung (a). Die Änderungen in der Differenz $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = -1)$ sind ein Maß für die Ungenauigkeit in der Reproduzierbarkeit der Präparation und die unterschiedlichen Werte von $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = 0)$ zeigen, welchen Einfluss im Verhältnis dazu die Spindynamik hat. Abbildung 6.7(b) zeigt, dass der in Abbildung 6.7(a) gezeigte Effekt durch die unterschiedlichen relativen Phasen und nicht durch eine ungenaue Präparation verursacht ist. Somit konnte die

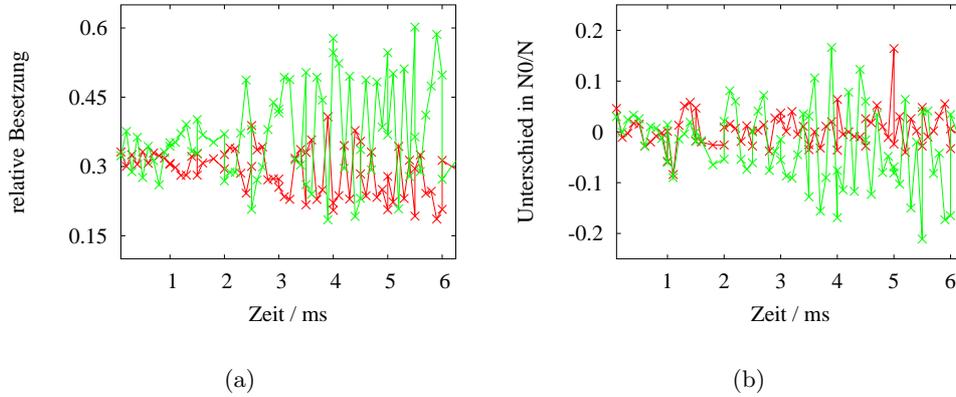


Abbildung 6.7: Abbildung (a) zeigt die zeitliche Änderung in den relativen Besetzungen der Spinkomponenten des Kondensates mit der Zeit. Mit rot ist die relative Besetzung der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ dargestellt und grün entspricht der Besetzung der Komponente $|m_F = 0\rangle$. Zur Erhöhung der Deutlichkeit wurden die relativen Besetzungen in den Komponenten $|m_F = \pm 2\rangle$ nicht in die Abbildung eingetragen. Da die Entwicklung von der relativen Phasenlage abhängig ist, wird nach etwa 3 ms ein Schwanken in der relativen Besetzungen beobachtet. Abbildung (b) zeigt, dass die in (a) gemessenen Fluktuationen nicht in einer schwankenden Präparation begründet liegen, sondern in der von Experiment zu Experiment unterschiedliche relative Phase zwischen den Spinkomponenten. Während $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = -1)$ (rot) die Schwankung durch die Präparation angibt, zeigt $N_0/N(m_F = +1) - N_0/N(m_F = 0)$ (grün) zusätzlich noch die Abhängigkeit von den Phasen.

Empfindlichkeit der anfänglichen Spindynamik auf die relativen Phasen gezeigt werden, wenn sich der Ausgangszustand aus einer Superposition von drei m_F Komponenten zusammensetzt.

Beobachtet man die Spinzusammensetzung über einen längeren Zeitraum, so entwickelt sich das System in den Zustand, bei dem alle Komponenten des Spinors gleich besetzt sind (siehe Abbildung 6.8). Dieser Zustand wird nach etwa 200 ms erreicht (siehe hierzu Abschnitt 6.7).

6.6 Thermalisierungseffekte

Wie schon in Abschnitt 6.3 beschrieben, findet die Spindynamik auf einer schnelleren Zeitskala statt als die Thermalisierung. Dies hat Auswirkungen auf die Entwicklung des Systems. Beim Übergang in die *mean-field* Beschreibung wird der Operator $\hat{\Psi} = \Psi + \hat{\delta}$ durch den Mittelwert Ψ ersetzt und die Schwankungen $\hat{\delta}$ werden vernachlässigt. Diese Schwankungen beinhalten unter anderem den Austausch von Atomen im Kondensat mit Atomen in der thermischen Wolke. Befinden sich alle Atome in dem selben Spinzustand,

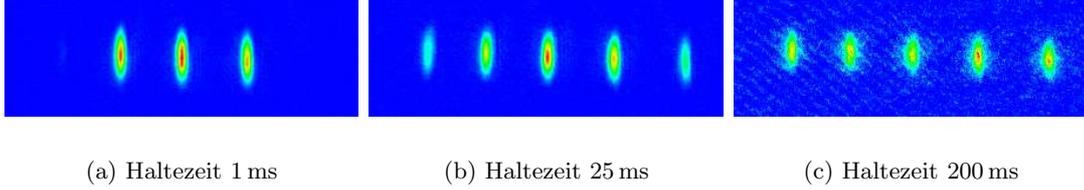


Abbildung 6.8: Die drei Absorptionbilder zeigen, ausgehend von dem präparierten Zustand $|m_F = +1\rangle$, $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$, die Besetzung der Spinkomponenten nach unterschiedlichen Haltezeiten.

so führt dieser Prozess zu keiner weiteren Änderung und kann vernachlässigt werden. In dem hier vorliegenden Fall ist dies nur der Fall, solange noch keine Spindynamik stattgefunden hat und alle Atome den präparierten Zustand besetzen.

Nach anfänglicher Spindynamik befinden sich die Kondensatome in einen anderen Zustand bezüglich des Spinfreiheitsgrades als die thermischen Atome. Präpariert man beispielsweise das atomare Ensemble in dem Zustand $|m_F = 0\rangle$, so befinden sich nach einer Wartezeit von 15 ms die thermischen Atome weiterhin in dem Ausgangszustand, und die Kondensatome nehmen aufgrund der kohärenten Entwicklung eine Superposition der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ an. Die Kondensatome befinden sich also in einem anderen internen Zustand als die thermischen Atome. Man kann sich das atomare Ensemble als ein Gemisch aus zwei unterschiedlichen Atomsorten vorstellen. Es sei im Folgenden der Einfachheit halber die Spindynamik unterdrückt. Ein Teilchenaustausch zwischen dem Kondensat und der thermischen Verteilung führt nun zum Ausbilden einer thermischen Wolke „für“ das Kondensat und ein Kondensat in dem Zustand der thermischen Wolke entsteht. Dieser Vorgang ist schematisch in Abbildung 6.10(a) dargestellt. Dieser Prozess dauert an, bis das Kondensat und die thermischen Atome dieselbe Spinnischung besitzen. Abbildung 6.9 zeigt eine Messkurve für einen solchen Vorgang. Es ist die Anzahl der thermischen Atome und Kondensatome in einer „neuen“ Spinkomponente abgebildet. Die Abbildung zeigt, dass die Besetzung des Zustandes für das Kondensat und die thermischen Atome auf unterschiedlichen Zeitskalen stattfindet. Außerdem ist zu erkennen, dass nach etwa 100 ms das Verhältnis von thermischen Atomen zu Atomen im Kondensat nahezu konstant bleibt.

Weiterhin ist zu beachten, dass bei dem beschriebenen Prozess noch ein weiterer Effekt hinzukommt. Entsprechend Abbildung 6.10(a) entstehen durch den Teilchenaustausch jeweils ein neues Kondensat und eine neue thermische Wolke. Dabei verringert sich die Phaseraumdichte gegenüber dem präpariertem Zustand um einen Faktor zwei, so dass es zu einem Schmelzen der Kondensate beziehungsweise einer Verringerung von N_0/N kommen muss. Dieser Vorgang ist exemplarisch in Abbildung 6.10(b) dargestellt. Für diese Beobachtung wurde der Kondensatanteil auf unter 50% in der anfänglich präparierten Spinzusammensetzung gewählt. Man erkennt, dass nach 40 ms Haltezeit in allen fünf Spinkomponenten ein Kondensat beobachtet wird. Die Thermalisierung führt zu dem Schmelzen der Kondensate in den nicht präparierten Spinkomponenten,

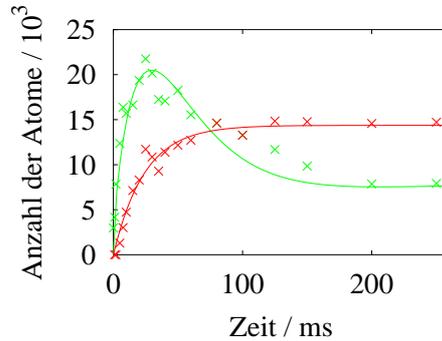


Abbildung 6.9: Die Abbildung zeigt zum einen, wie sich die Anzahl der Kondensatome (grün gekennzeichnet) mit der Zeit in einer ursprünglich nicht besetzten Komponente ändert. Anfänglich wird, ausgehend von der Superposition aus den m_F Komponenten 0 und +1, die Spinkomponente +2 besetzt. Da die Spindynamik nur im Kondensat stattfindet, baut sich die thermische Verteilung (rot gekennzeichnet) langsamer auf.

während in den Spinkomponenten $|m_F = \pm 1\rangle$ noch ein kleiner Kondensatanteil nach 200 ms zu erkennen ist. Dass in den „neuen“ Spinkomponenten keine Kondensate mehr beobachtet werden können, kann unterschiedliche Gründe haben. Neben der angesprochenen Thermalisierung würde auch eine Dekohärenz diese Messung erklären. Dieser Effekt führt dazu, dass die Atome sich nach einer gewissen Zeit nicht mehr in einer Superposition von Spinzuständen befinden, sondern eine bestimmte Spinkomponente besetzen. Die Folge wäre ein schnelles Schmelzen der Kondensate in m_F Komponenten, welche nur schwach besetzt sind. Weiterhin führt die Dekohärenz zu einem Absenken der Temperatur, da Kondensatome in die thermische Verteilung gehen [51]. Ein solcher Vorgang konnte in den gemessenen Daten nicht beobachtet werden. Dies begründet sich darin, dass für eine solche Messung die Dekohärenz und die Thermalisierung in einer wesentlich kürzeren Zeit ablaufen müssen als alle anderen Prozesse, welche die Lebensdauer des Kondensates beeinflussen.

Es ist noch anzumerken, dass die hier verwendete Betrachtungsweise sehr vereinfacht ist, da angenommen wurde, dass keine Spindynamik während der Thermalisierung stattfindet.

6.7 Messungen zum Grundzustand

In den bisherigen Experimenten wurden die Spindynamik und die folgende Thermalisierung untersucht. Im Weiteren wird analysiert, welche Spinzusammensetzung den Zustand mit minimaler Energie beschreibt. Hierfür dienen die in Abschnitt 3.5.2 eingeführten Phasendiagramme als Grundlage für die Bestimmung der magnetischen Phase.

Um eine Aussage über den Grundzustand treffen zu können, wurde die zeitliche Entwicklung der in Abbildung 6.2 vorgestellten unterschiedlichen Präparationen unter-

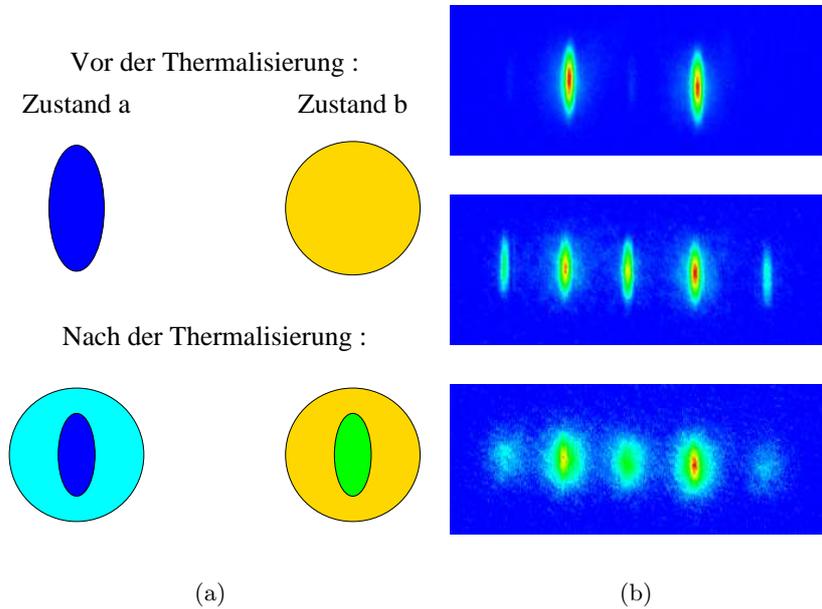


Abbildung 6.10: Abbildung (a) zeigt schematisch den Thermalisierungsprozess. Nach der Spindynamik und vor der Thermalisierung befinden sich die Kondensatome in dem Spinzustand a und die thermischen Atome in dem Spinzustand b. Durch die Thermalisierung kommt es zu einem Austausch zwischen den unterschiedlichen „Teilchenarten“. Es entsteht eine thermische Verteilung und ein Kondensat in beiden Spineinstellungen. In Abbildung (b) sind drei Absorptionsspektren dargestellt. Diese zeigen den Ausgangszustand mit der präparierten Superposition aus $|m_F = \pm 1\rangle$ sowie die Zusammensetzung nach einer Haltezeit von 40 ms und 200 ms. Der Kondensatanteil in der ursprünglichen Spinzusammensetzung wurde mit unter 50% relativ niedrig gewählt, damit der Effekt deutlich wird.

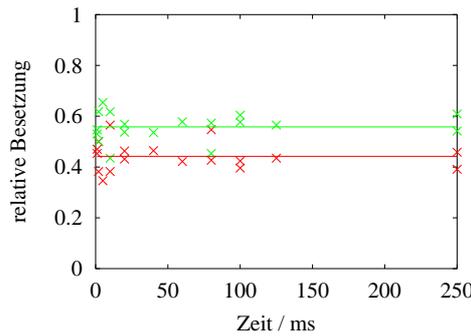
sucht. Im Idealfall, wie in den Experimenten mit ^{23}Na [52] im Hyperfeinzustand $F=1$, nimmt das Kondensat unabhängig von dem anfänglich präparierten Spinzustand nach einer gewissen Haltezeit den Grundzustand an. Die bei diesem Prozess frei werdende Energie kann durch eine Erniedrigung des Kondensatanteils kompensiert werden, oder es kann zu Anregungen im Kondensat führen. In den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimenten konnte eine Entwicklung in Richtung des Spingrundzustandes jedoch nicht in den Spingrundzustand beobachtet werden. Vielmehr wurden abhängig von der Präparation unterschiedliche Endzustände beobachtet. Diese sind in Tabelle 6.1 angegeben.

Die Ursache für die Abhängigkeit der beobachteten Endzustände von dem präparierten Anfangszustand kann durch mehrere Effekte verursacht sein. Zum einen ist im Vergleich zu ^{23}Na im Hyperfeinzustand $F=1$ der relative Energiebeitrag der spinabhängigen Wechselwirkung um etwa eine Größenordnung höher, so dass relativ eine größere Ener-

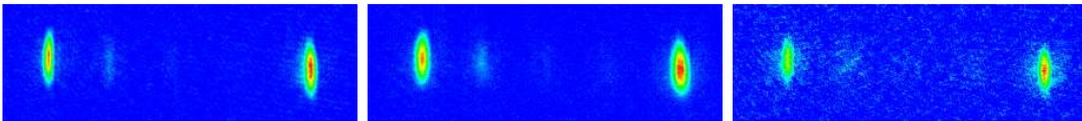
6.7. Messungen zum Grundzustand

gie durch die Spindynamik frei werden kann. Zum anderen liegt das Zeitintervall für die Beobachtung der Spindynamik aufgrund von Verlustprozessen (siehe Abschnitt 6.8) im Bereich von 250 ms gegenüber einigen Sekunden. Es ist somit verständlich, dass lediglich eine Entwicklung in Richtung des Grundzustands für die Spineinstellung beobachtet wird.

So wurde in einigen Messserien eine Entwicklung des Kondensatanteils beobachtet, wobei dieser alle Spinzustände gleichmäßig besetzt (siehe Tabelle 6.1). Eine Gleichverteilung über alle Spinkomponenten stellt jedoch in keinem der drei in Kapitel 3 vorgestellten Phasendiagrammen den Grundzustand dar (siehe hierzu Abbildungen 3.6 und 3.7). Trotzdem können aus den Experimenten mit Gesamtspin null Folgerungen über die magnetische Phase von ^{87}Rb im Hyperfeinzustand $F=2$ gezogen werden. Präpariert man das Kondensat in dem Spingrundzustand, so sollte keine Spindynamik in andere Komponenten beobachtet werden. Da für ^{87}Rb eine polare Wechselwirkung vorhergesagt wird, wurde eine Messserie durchgeführt, in der das Kondensat in einer Mischung aus den m_F Komponenten $+2$ und -2 präpariert wurde. Abbildung 6.11(a) zeigt, dass diese Spinnischung zeitlich stabil ist und keine anderen Spinkomponenten besetzt werden.



(a)



(b) Haltezeit 1 ms

(c) Haltezeit 20 ms

(d) Haltezeit 250 ms

Abbildung 6.11: Die Abbildung zeigt, dass bei einer präparierten Spinnzusammensetzung aus den Komponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ keine Spindynamik beobachtet wird. Mit grün ist der Anteil der $|m_F = -2\rangle$ Komponente gekennzeichnet und mit rot die $|m_F = +2\rangle$ Komponente. (b), (c) und (d) zeigen Absorptionsspektren nach unterschiedlich langen Haltezeiten in der Dipolfalle.

Eine Spinnzusammensetzung aus den Komponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$

wird sowohl bei der polaren Phase als auch bei der ferromagnetischen Phase angenommen. Die Grundzustände dieser beiden magnetischen Phasen unterscheiden sich lediglich durch eine unterschiedliche räumliche Verteilung. Bei einer ferromagnetischen Wechselwirkung kommt es zu einer Separation der beiden Spinkomponenten und bei der polaren Phase ist eine Mischung aus den Spinzuständen $+2$ und -2 energetisch bevorzugt. Um sagen zu können, welches Verhalten die ^{87}Rb Kondensate im Hyperfeinzustand $F=2$ zeigen, muss also analysiert werden, ob die Kondensatanteile in den beiden Spinzuständen überlappen oder separieren. Diese Auswertung kann über die Bestimmung der Breiten der Kondensate nach einer Flugzeit vorgenommen werden. Separieren die beiden Spinkomponenten aufgrund einer ferromagnetischen Wechselwirkung in der optischen Falle, so ist die Ausdehnung in axialer Richtung der einzelnen Kondensatanteile während der Detektion nach einer Flugzeit nur noch halb so groß, als wenn eine Mischung der Komponenten stattgefunden hat. Ein Vergleich zwischen der Breite eines Kondensates in dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ mit der mittleren Breite in den Komponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ dieser Spinmischung zeigt, dass sich bei der Spinmischung die Breiten der Kondensatanteile in den einzelnen Spinkomponenten nicht halbieren. Es wird lediglich eine Verringerung der axialen Ausdehnung um etwa 15% beobachtet (siehe Abbildung 6.12). Diese Beobachtung ist ein klares Indiz gegen eine Separation der beiden Spinzustände in axialer Richtung und für eine Mischung der Spinkomponenten entsprechend des polaren Grundzustandes. Die etwas geringere Ausdehnung der Kondensate aus der Spinmischung kann durch zwei Effekte verursacht sein. Dies ist zum einen die unterschiedliche Teilchenzahl in den Kondensaten. In dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ besteht der Kondensatanteil aus etwa 5×10^4 Atomen, während die Kondensate aus der Spinmischung ab 150 ms Haltezeit aufgrund von Verlustprozessen (siehe Abschnitt 6.8) aus etwa 5×10^3 Atomen bestehen (siehe Abbildung 6.15(b) und (c)). Weiterhin kann die geringe Abnahme in der Ausdehnung durch den Einfluss eines geringen Magnetfeldgradienten verursacht sein.

Da die Spinausheillänge, wie in Abschnitt 3.2.4 berechnet, nur Werte in der Größenordnung von unter einem μm annimmt, ist somit gezeigt, dass ein polares Verhalten der ^{87}Rb Atome im Hyperfeinzustand $F=2$ vorliegt.

Aus diesem Verhalten kann jedoch nicht direkt auf eine polare Phase geschlossen werden, da Atome mit einer zyklische Phase durch ein Offsetmagnetfeld ebenfalls den selben Grundzustand annehmen. Interessanterweise wird eine sehr langsame Spindynamik in den Fällen beobachtet, in welchen das Kondensat in einer Spinzusammensetzung entsprechend einem möglichen Grundzustand der zyklischen Phase präpariert wurde (siehe Tabelle 6.1). So geht beispielsweise bei einer Präparation des Kondensates aus den Zuständen $|m_F = \pm 2\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$ die Spinzusammensetzung nur sehr langsam in den beobachteten Grundzustand über. Dies ist anhand von drei Absorptionbildern in Abbildung 6.13 dargestellt. Bei der Messreihe, in welcher eine Spinmischung aus den Spinkomponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ präpariert wurde, konnte keine Spindynamik beobachtet werden. Es fand lediglich ein schnellerer Verlust in der Besetzung der Komponente $|m_F = -1\rangle$ statt (siehe Abbildung 6.16(d)-(f)).

Die Abbildung 6.14(a) zeigt unter Verwendung der von C.V. Ciobanu et al. [76]

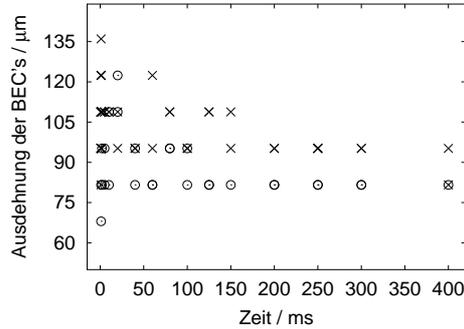


Abbildung 6.12: Die Abbildung zeigt einen Vergleich der axialen Ausdehnung zwischen einem Kondensat mit Gesamtspin 2 (mit x gekennzeichnet) und der mittleren Ausdehnung in den Komponenten $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ von einem Kondensat bestehend aus diesen beiden Spinkomponenten (mit o gekennzeichnet). Die Breiten der ein-komponentigen Kondensate sind lediglich um etwa 15% größer als die einzelnen Komponenten der zwei-komponentigen Kondensate.

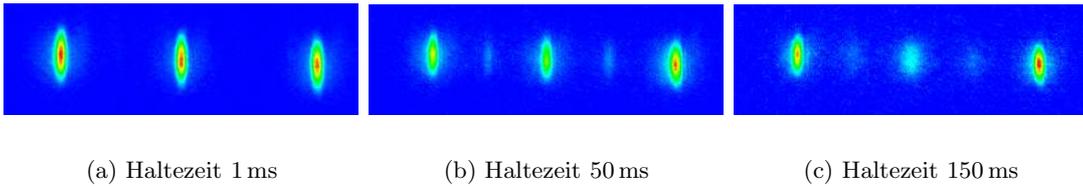


Abbildung 6.13: Die drei Bilder zeigen die unterschiedlichen Stadien in der Spinentwicklung eines Kondensates. Das Kondensat wurde in dem Spinzustand $|m_F = \pm 2\rangle$ und $|m_F = 0\rangle$ präpariert (Abbildung (a)). Nach 50 ms in der optischen Falle wird eine sehr schwache Besetzung der Zustände $|m_F = \pm 1\rangle$ beobachtet (Abbildung (b)). Letztlich wird ein Kondensat nur in den voll gestreckten Zuständen $|m_F = \pm 2\rangle$ detektiert (Abbildung (c)), während in den übrigen Komponenten eine thermische Verteilung vorliegt.

berechneten Streulängen für ^{87}Rb und der benutzten experimentellen Parameter, an welcher Position im polaren Phasendiagramm die Messungen durchgeführt wurden. Die Parameter c_1 und c_2 nehmen bei einer mittleren Dichte von $4,0 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ die Werte $4c_1 = k_B 9,8 \text{ nK}$ und $c_2/5 = -k_B 0,04 \text{ nK}$ an. Der durch den Magnetfeldgradienten von kleiner 15 mG cm^{-1} aufgespannte Bereich liegt, wie in den Experimenten beobachtet, innerhalb des Mischbereichs. Im Gegensatz zu der polaren Wechselwirkung würde eine zyklischen Wechselwirkung vorliegen, falls das Vorzeichen von c_2 positiv wäre. Dieser Fall ist in Abbildung 6.14(b) gezeigt. Sämtliche Parameter in (b) entsprechen denen der Abbildung in 6.14(a) verwendeten, nur der Parameter c_2 nimmt hier den Wert $+k_B 0,20 \text{ nK}$ statt $-k_B 0,20 \text{ nK}$ an. Es zeigt sich, dass sich bei dem verwendeten Offsetmagnetfeld die Grundzustände in den beiden magnetischen Phasen nicht unterschei-

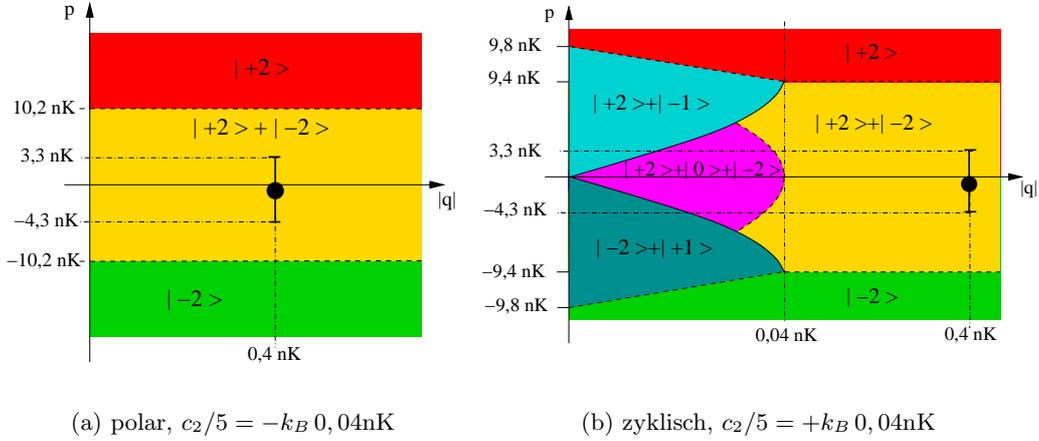


Abbildung 6.14: Die beiden Abbildungen zeigen die beiden möglichen Phasendiagramme, welche mit dem gemessenen Grundzustand übereinstimmen würden. Für das polare Diagramm sind neben den experimentellen Einstellungen (siehe Abschnitt 6.2.3) die in [76] angegebenen Streulängen verwendet worden. Unter Verwendung des Kondensatradius in axialer Richtung konnte der Bereich im Phasendiagramm eingetragen werden, innerhalb dessen der Grundzustand für das präparierte Kondensat liegt. Es ist zu beachten, dass der Gesamtspin des Systems nicht exakt null ist (siehe Abbildung 6.11). Dies führt zu der Verschiebung des Mittelpunktes auf der p -Achse. Ändert man das Vorzeichen von c_2 , so gelangt man zu dem zyklischen Diagramm, welches in Abbildung (b) dargestellt ist. Auch in diesem ist der Bereich eingezeichnet, welchen die Kondensatwellenfunktion annehmen würde. Es zeigt sich, dass in beiden Fällen derselbe Grundzustand vorliegt und keine Unterscheidung zwischen den Phasen vorgenommen werden kann.

den. Damit man experimentell in den Bereich der zyklischen Phase gelangt, indem im angegebenen Beispiel ein charakteristischer Grundzustand für die zyklische Phase angenommen werden würde, müsste ein Offsetmagnetfeld kleiner 100 mG angelegt werden.

Allgemein lässt sich sagen, dass ein gemessener Grundzustand, welcher aus einer Überlagerung der Spineinstellungen $+2$ und -2 besteht, sowohl bei einer polaren als auch bei einer zyklischen magnetischen Phase angenommen werden kann. Ist der Wert für das Offsetmagnetfeld bekannt, so kann eine obere Grenze für die Parameter c_2 und g_4 aus den Experimenten ermittelt werden, da bei der zyklischen Phase diese Spinmischung den Grundzustand erst beschreibt, falls $q > c_2/5$ gilt. Aus den hier vorgestellten Experimenten ergibt sich $c_2 < k_B 2,0\text{ nK}$ und $g_4 < k_B 6,2 \times 10^{-15}\text{ nK cm}^3$.

6.8 Verlustprozesse in F=2

Die in den vorherigen Abschnitten beobachtete Spindynamik findet mit ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand F=2 statt. Die Atome in diesem Hyperfeinzustand besitzen eine um $h \times 6,8$ GHz höhere Energie als Atome im unteren Hyperfeinzustand F=1. Bei atomaren Ensembles in den voll gestreckten Zuständen kommt es aufgrund der Gesamtspinerhaltung zu keinem Verlust von Atomen durch einen Zwei-Körper Prozess. Im Gegensatz hierzu ist dieser Verlustkanal beispielsweise für ein Ensemble im Hyperfeinzustand F=2 und mit der Spineinstellung $|m_F = 0\rangle$ vorhanden. Die folgenden Wechselwirkungen stellen die möglichen Zwei-Körper Verlustkanäle für Atome in diesem Zustand dar :

$$\begin{aligned}
 2 \times |F = 2, m_F = 0\rangle &\rightarrow |F = 1, m_F = 0\rangle + |F = 2, m_F = 0\rangle, \\
 2 \times |F = 2, m_F = 0\rangle &\rightarrow |F = 1, m_F = -1\rangle + |F = 2, m_F = +1\rangle, \\
 2 \times |F = 2, m_F = 0\rangle &\rightarrow |F = 1, m_F = +1\rangle + |F = 2, m_F = -1\rangle, \\
 2 \times |F = 2, m_F = 0\rangle &\rightarrow 2 \times |F = 1, m_F = 0\rangle, \\
 2 \times |F = 2, m_F = 0\rangle &\rightarrow |F = 1, m_F = -1\rangle + |F = 1, m_F = +1\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Eine solche Wechselwirkung führt zu einem Verlust der beiden Atome aus der Falle, da diese im Mittel nach einem solchen Stoß eine Energie von jeweils $k_B \times 0,33$ K bzw. $k_B \times 0,66$ K aufweisen. Befindet sich das Ensemble in dem Zustand $|F = 2, m_F = +1\rangle$ so gibt es vier unterschiedliche Verlustkanäle. Bei einer Mischung aus verschiedenen magnetischen Unterzuständen ergibt sich eine entsprechend höher Anzahl an möglichen Verlustprozessen.

Diese Verluste verhindern beispielsweise die Beobachtung von Spindynamik bei ^{23}Na im oberen Hyperfeinzustand [87]. Bei ^{87}Rb kommt es jedoch aufgrund einer zufälligen destruktiven Interferenz verschiedener Zerfallskanäle zu einer relativ niedrigen Zerfallsrate in den unteren Hyperfeinzustand [45, 86]. Trotzdem limitieren diese Verluste die Beobachtungszeit der Spindynamik. Der Einfluss dieses Verlustprozesses wird deutlich, wenn man die Abnahme der Teilchenzahl mit der Zeit in Abhängigkeit von dem anfänglich präparierten Zustand betrachtet. In der Abbildung 6.15 werden drei unterschiedliche Messungen vorgestellt.

Es ist deutlich zu erkennen, dass der Teilchenverlust in Abbildung 6.15(b) gegenüber denen in den Abbildungen 6.15(c) und 6.15(d) wesentlich geringer ist. Dieser Umstand zeigt, dass die Zwei-Körper Verlustprozesse bei einem atomaren Gemisch aus mehreren m_F Komponenten und der vorliegenden Dichte gegenüber dem Drei-Körper Verlust, welcher die Teilchenabnahme des Ensembles mit Atomen in dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ entsprechend Abbildung 6.15(b) beschreibt, dominieren. Unter Verwendung der Gleichung 5.8 kann eine analytische Formel für die Entwicklung in der Teilchenzahl bestimmt werden, welche einen Ein- und Zwei-Körper Verlustprozess beinhaltet² :

$$N(t) = \left(\left(N(0)^{-2/5} + \frac{c_2 G}{\gamma} \right) \exp \left(\frac{2}{5} \gamma t \right) - \frac{c_2 G}{\gamma} \right)^{-5/2}. \tag{6.5}$$

²Eine analytische Lösung, welche alle drei Verlustprozesse aus Gleichung 5.8 berücksichtigt, konnte nicht gefunden werden.

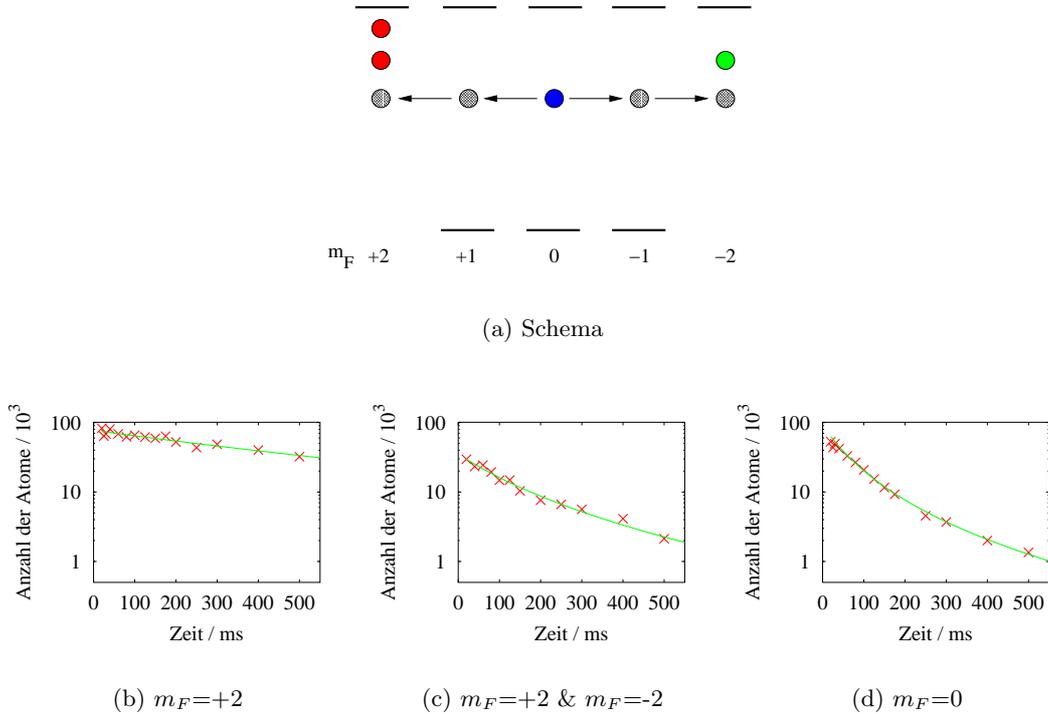


Abbildung 6.15: In Abbildung (a) sind die Zustände schematisch dargestellt, zu welchen die Abbildungen (b)-(d) die Änderung der Kondensatteilchenzahl mit der Zeit zeigen. Dabei erfolgt die Verringerung der Atome im Kondensat bei einer Präparation im Zustand $|m_F = +2\rangle$ hauptsächlich über einen Drei-Körper Verlust (Abbildung (b)). Bei einer Mischung aus den Zuständen $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -2\rangle$ in Abbildung (c) sind mehrere Zwei-Körper Verlustkanäle in den unteren Hyperfeinzustand $F=1$ gegeben. Es wird ein deutlich schnellerer Zerfall als in Abbildung (b) beobachtet. Da sich das im Zustand $|m_F = 0\rangle$ präparierte Kondensat innerhalb von etwa 25 ms durch Spindynamik über alle fünf magnetischen Unterzustände verteilt, gibt Abbildung (d) den mittleren Verlustkanal in den unteren Hyperfeinzustand an.

Die in den Abbildungen 6.15(c) und (d) dargestellten Kurven entsprechen einem Fit der Daten an diese Gleichung. Die Ergebnisse des Fitparameters G geben die Zwei-Körper Verlustraten für die beiden unterschiedlichen Mischungen an. Für das Ensemble mit den besetzten Spinkomponenten $+2$ und -2 ergibt sich $G = (6,6 \pm 0,9) \times 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Diese Verlustrate gibt den Mittelwert der fünf möglichen Verlustkanäle in den unteren Hyperfeinzustand an. Für die Daten aus der Abbildung 6.15(d) erhält man die Zwei-Körper-Verlustrate von $G = (10,2 \pm 1,3) \times 10^{-14} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$. Da ausgehend von dem Zustand $|m_F = 0\rangle$ die Spindynamik innerhalb der ersten 25 ms zu einer annähernden Gleichverteilung in den magnetischen Unterzuständen führt, gibt diese Verlustrate den Mittelwert über alle möglichen Kanäle in den unteren Hyperfeinzustand an.

Für die ermittelten Zwei-Körper Raten muss angemerkt werden, dass sich diese auf Atome im Kondensat beziehen. Für thermische Atome sollten diese Raten aufgrund der in Abschnitt 5.2.3 angesprochenen Korrelation den doppelten Wert annehmen.

Vergleicht man die in diesem Abschnitt angegebenen Verlustraten mit den Spindynamikraten in Tabelle 6.1, so wird deutlich, dass die anfängliche Spindynamik auf einer kürzeren Zeitskala stattfindet als die hier vorgestellten spinabhängigen Verlustprozesse.

6.9 Magnetisierungsprozesse

Die im vorhergehendem Abschnitt beschriebenen spinabhängigen Verlustprozesse führen zu einer „Verfälschung“ in der Entwicklung der Besetzung der Spinkomponenten. Dies wird besonders deutlich, wenn die Atome entweder mit Gesamtspin ungleich null oder in einem nicht symmetrischen Spinzustand präpariert werden. In diesen Fällen kommt es durch das Zusammenspiel zwischen Spindynamik und spinabhängigen Verlusten zu einer Magnetisierung des Kondensates. Dieser Vorgang wird anhand von zwei unterschiedlichen Anfangspräparationen in Abbildung 6.16 dargestellt.

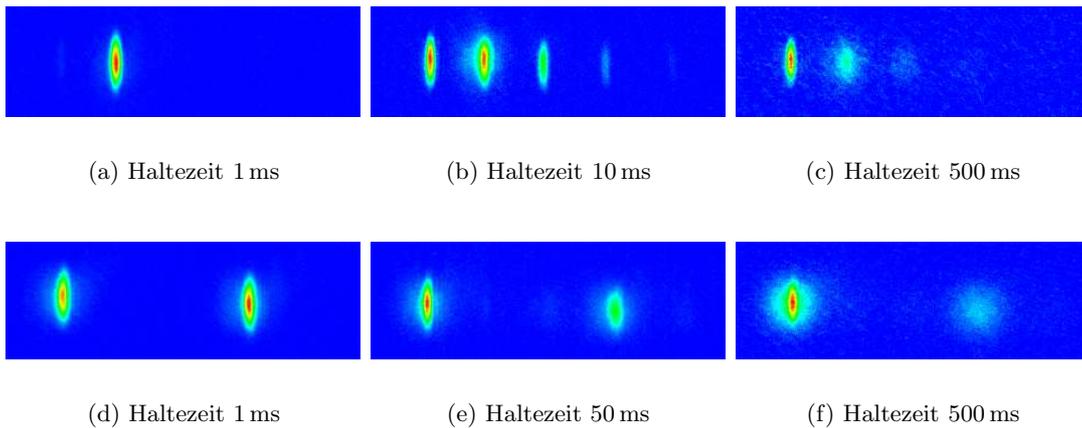


Abbildung 6.16: Die Bilder zeigen die unterschiedlichen Stadien in der Spinentwicklung des Kondensates ausgehend von den Zuständen $|m_F = +1\rangle$ und der Superposition $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$. Wurde das Kondensat in dem Spinzustand $|m_F = +1\rangle$ präpariert (Abbildung (a)), so ist nach 10 ms Haltezeit in der optischen Falle eine Besetzung der anderen Spinkomponenten zu beobachten (Abbildung (b)). Letztlich wird ein Kondensat in dem voll gestreckten Zustand $|m_F = +2\rangle$ detektiert (Abbildung (c)). Präpariert man ein Kondensat in den Zuständen $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ (Abbildung (d)), so tritt keine Besetzung der anderen Spinkomponenten auf. Es kommt lediglich zu einem schnellen Verlust der Atome im Zustand $|m_F = -1\rangle$ (Abbildung (e) und (f)).

Bei einem im Zustand $|m_F = +1\rangle$ präparierten Kondensat werden nach einer Haltezeit von 10 ms mehrere Spinkomponenten besetzt. Die vom Spinzustand abhängigen

Experimente mit spinor BEC's

Verlustkanäle führen zu einer vom m_F Zustand abhängigen Abnahme in der Teilchenzahl. Dabei zeichnen sich die Atome im voll gestreckten Zustand dadurch aus, dass diese nur bei einer Wechselwirkung mit Atomen in einer anderen Spineinstellung den Hyperfeinzustand ändern können. Somit kommt es zu einem langsameren Verlust der Teilchen in dem Zustand $|m_F = +2\rangle$ gegenüber den Teilchen in den Zuständen $|m_F \neq +2\rangle$. Bei dem Ausgangszustand $|m_F = +1\rangle$ kommt es also erst aufgrund der Spindynamik zu einer Besetzung mehrerer Spinzustände und anschließend aufgrund von spinabhängigen Verlusten zu der Magnetisierung. Grundlage für den beobachteten Prozess ist also, dass die Spindynamik innerhalb eines kürzeren Zeitintervalls stattfindet als die spinabhängigen Verluste. Weiterhin ist in Abbildung 6.16(c) zu erkennen, dass sich die thermischen Atome nach der Haltezeit von 500 ms im Wesentlichen in dem anfänglich präparierten Spinzustand $|m_F = +1\rangle$ befinden.

Ein etwas unterschiedliches Verhalten zeigen die Abbildungen 6.16(d)-(f). Die Spinnmischung der Zustände $|m_F = +2\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ zeigt keine Änderung in der Spinnzusammensetzung. Es kommt lediglich aufgrund von spinabhängigen Verlusten zu der Magnetisierung des Kondensates. Im Gegensatz zu dem oben beschriebenen Experiment sind in diesem Fall die spinabhängigen Verluste „schneller“ als die Spindynamik.

Wie sich der Gesamtspin des Kondensates für unterschiedliche Anfangspräparationen mit der Zeit ändert, zeigt Abbildung 6.17.

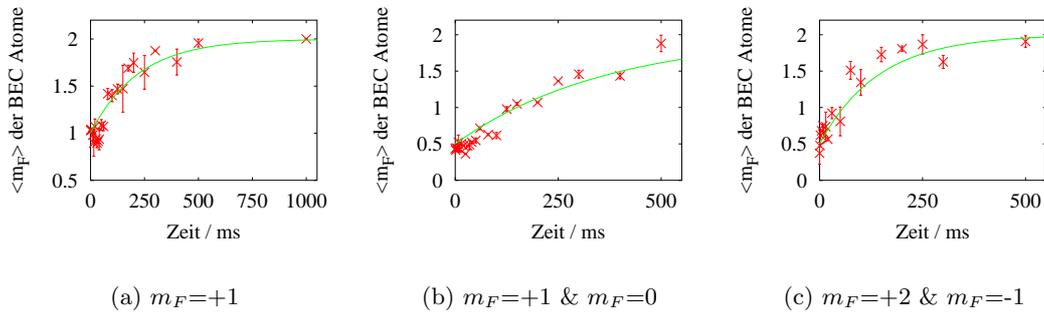


Abbildung 6.17: Die drei Abbildungen zeigen die Änderung des Gesamtspins mit der Haltezeit in der Falle. Die anfänglich präparierten Zustände sind $|m_F = +1\rangle$ in Abbildung (a), $|m_F = +1\rangle$ mit $|m_F = 0\rangle$ in Abbildung (b), sowie $|m_F = +2\rangle$ mit $|m_F = -1\rangle$ in Abbildung (c). Die durchgezogene Linie entspricht einer an die Datenpunkte gefittete Exponentialfunktion. Diese dient lediglich zur Verdeutlichung des Effektes.

6.10 Zusammenfassung

Die in diesem Kapitel vorgestellten ersten Experimente zur Spindynamik mit Bose-Einstein Kondensaten aus Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ zeigen eine Vielzahl unterschiedlicher Effekte. Wichtig für die zeitliche Entwicklung in der Spinnzusammensetzung sind im Wesentlichen drei Prozesse : die Spindynamik, die spinabhängigen Verluste

und die Thermalisierung. Dabei zeigt es sich als sehr vorteilhaft für die Analyse der Messergebnisse, dass diese Prozesse mit einer jeweils anderen Zeitkonstante ablaufen. So konnte erstmals gezeigt werden, dass die Besetzung „neuer“ Spinkomponenten im Kondensat nicht global einsetzt, sondern in dem Bereich mit der höchsten Dichte startet. Dies entspricht der Erwartung bei einer kohärenten Entwicklung. Ebenso konnte über eine Zeitspanne von 200 ms ausgehend von dem Spinzustand $|m_F = 0\rangle$ ein Anzeichen für eine Spinoszillation beobachtet werden. Bei einem relativ hohen Anteil von 50% an nicht-kondensierten Atomen wird beobachtet, dass es zu einem relativ schnellen Schmelzen der Kondensate aufgrund des durch die Spindynamik vergrößerten Phasenraums kommt. In einem weiteren für die Arbeit zentralen Experiment konnte basierend auf den in Kapitel 3 angegebenen Phasendiagrammen gezeigt werden, dass die Kondensate aus ^{87}Rb Atomen im Hyperfeinzustand $F=2$ bei dem eingestellten Offsetmagnetfeld ein polares Verhalten aufzeigen. Aus Lebensdauermessungen von Kondensaten aus unterschiedlichen Spineinstellungen konnten zwei bisher unbekannte Zwei-Körper Stoßparameter bestimmt werden. Diese spinabhängigen Verluste führen bei Kondensaten mit Gesamtspin ungleich null zu einer Magnetisierung der Kondensate.

Ausblick

Mit der im Rahmen dieser Arbeit aufgebauten Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten wurden die ersten grundlegenden Experimente zu Kondensaten mit Spinfreiheitsgrad in ^{87}Rb demonstriert. Dabei heben sich die durchgeführten Experimente gegenüber denen, die am MIT mit ^{23}Na durchgeführt wurden, in einer vielfältigen Weise ab. Hierbei ist vor allem, neben der höheren Komplexität der Spindynamik bei Kondensaten im Hyperfeinzustand $F=2$ im Vergleich zu Kondensaten im Hyperfeinzustand $F=1$, die gegenüber der Thermalisierung schneller stattfindende Spindynamik zu nennen.

Um eine weitergehende Kenntnis über die Eigenschaft von ^{87}Rb zu erreichen, wurden in der Arbeitsgruppe auch Experimente zur Spindynamik im Hyperfeinzustand $F=1$ durchgeführt [146]. In einem weiteren Experiment konnte eine Feshbach Resonanz zwischen den Zuständen $|F=1, m_F=+1\rangle$ und $|F=2, m_F=-1\rangle$ detektiert werden [129]. Dies ist die erste Messung einer Feshbach Resonanz zwischen Atomen in zwei unterschiedlichen Hyperfeinzuständen und liegt im Gegensatz zu den bisher beobachteten Feshbach Resonanzen in ^{87}Rb [128] bei einem niedrigen Magnetfeld von $9,09\pm 0,01$ G.

Aufbauend auf den vorgestellten Messungen lassen sich noch detailliertere Kenntnisse über das Verhalten der ^{87}Rb Kondensate gewinnen. Hierzu bietet sich beispielsweise an, den Teilchenverlust aus den unterschiedlichen Spinkomponenten bei einem magnetischen Offsetfeld von einigen Gauss zu messen. Da in diesem Fall die Spindynamik unterdrückt ist, kommt es zu keiner Änderung in der Besetzung der m_F Zustände und die Zwei-Körper Raten könnten für jeden einzelnen Verlustkanal ermittelt werden. So lässt sich ein vollständiges Bild über die Stoßeigenschaften von ^{87}Rb im oberen Hyperfeinzustand gewinnen.

Zudem kann die Eigenschaft, dass durch ein hohes Magnetfeld die Spindynamik unterdrückt wird, auch für eine detailliertere Untersuchung der Thermalisierung nach einer

anfänglichen Spindynamik verwendet werden. Wird nach dem Einsetzen der Spindynamik und vor der Thermalisierung also bei einer anfänglichen Präparation der Spinkomponente $|m_F = 0\rangle$ nach etwa 20 ms das Magnetfeld auf einige Gauss erhöht, so kann die Wechselwirkung des Kondensates im „neuen“ Spinzustand mit der thermischen Verteilung im „alten“ Spinzustand $|m_F = 0\rangle$ ohne die Beeinflussung einer gleichzeitig stattfindenden Spindynamik beobachtet werden. Ebenso lässt sich der Einfluss durch die thermischen Atome untersuchen, indem die Experimente bei unterschiedlichen Kondensatanteilen durchgeführt werden.

Neben der Beobachtung von statischen Effekten lassen sich auch dynamische Prozesse in mehr-komponentigen Spinor-Kondensaten beobachten. So wäre es beispielsweise interessant, das Durchlaufen von unterschiedlichen Spinkomponenten zu untersuchen. Dazu könnte ein Kondensat in den Zuständen $|m_F = \pm 2\rangle$ dienen. Ein nach der Präparation angelegter Magnetfeldgradient von einigen G/cm führt zu einer Trennung der Komponenten und ein plötzliches Ausschalten des inhomogenen Magnetfeldes sollte zu einer räumlichen Oszillation der Spinzustände führen. Die Auslenkungen der beiden Spinkomponenten unterscheiden sich dabei nur um die Richtung. Somit mischen sich die beiden Komponenten im Fallenzentrum. Ein Vergleich zu dem Verhalten eines ein-komponentigen Kondensates im Zustand $|m_F = +2\rangle$ gibt Aufschluss über die dynamische Wechselwirkung der Spinkomponenten. Insbesondere kann festgestellt werden, ob das Durchlaufen von Spinkomponenten, welche sich im Prinzip mischen, superfluid erfolgt, oder ob durch die Wechselwirkung wie beispielsweise die Besetzung neuer Spinkomponenten zusätzliche Effekte beobachtet werden können.

Weiterhin unterscheiden sich die topologischen Anregungen in mehr-komponentigen Systemen von denen in einem „normalen“ Kondensat. Wird ein Vortex innerhalb eines Bose-Einstein Kondensates erzeugt, so nimmt in Systemen mit skalarem Ordnungsparameter die Dichte entlang einer Linie den Wert null an. Dies ist erforderlich, damit der skalaren Wellenfunktion in diesem Bereich ein eindeutiger Wert zugewiesen werden kann. Im Gegensatz hierzu existieren in Kondensaten mit Spinfreiheitsgrad Vortices ohne ein Dichteminimum. Die Eindeutigkeit der Wellenfunktion wird erreicht, indem entlang des „Vortextkerns“ eine andere Spinkomponente besetzt ist als außerhalb. Solche Spinstrukturen werden als Skyrmionen [148] oder Merons [149] bezeichnet, wobei diese sich durch unterschiedliche Randbedingungen an das System unterscheiden. Im Gegensatz zu den mit ^{23}Na in $F=1$ realisierten Spin-Vortices [150] wird in Systemen mit Hyperfeinspin zwei eine komplexere Struktur erwartet [151]. Erzeugt werden können diese Anregungen durch ein Absenken des Offsetmagnetfeldes innerhalb der Magnetfalle auf den Wert null. Um die so erzeugten Strukturen beobachten zu können, muss die Detektion der Atome entlang der longitudinalen Kondensatrichtung erfolgen. Diese kann in dem aufgebauten Experiment durch einige zusätzliche optische Komponenten integriert werden. Ebenso besteht die Möglichkeit, mit dem Verfahren unter Verwendung eines blau-verstimmten Lasers Vortices mit der Ladungszahl vier zu erzeugen [151, 152] und deren zeitliche Entwicklung zu beobachten.

Ausblick

Eine andere faszinierende Möglichkeit mit Spinor-Kondensaten besteht darin, Experimente zur Verschränkung durchführen zu können. Hierzu gibt es eine Fülle an theoretischen Vorschlägen [153, 154, 155, u.a]. Jedoch ist die experimentelle Umsetzung sehr komplex, da eine Kontrolle über die Wechselwirkungspartner nicht möglich ist. Daher erscheint eine Realisierung der Experimente zu diesem Themenkreis innerhalb eines optischen Gitters vorteilhafter. Vergleichbar mit Experimenten aus Atomen in unterschiedlichen Hyperfeinzuständen [156] wäre eine Umsetzung mit Spinor-Kondensaten möglich.

Physikalische Daten

Tabelle A.1: Naturkonstanten (aus 1998 CODATA [157])

Lichtgeschwindigkeit	c	$2,99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (exakt)
Permeabilitätskonstante	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ (exakt)
Dielektrizitätskonstante	ϵ_0	$\mu_0^{-1} c^{-2}$ (exakt)
		$8,854187817 \dots \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Planckkonstante	h	$6.62606876(52) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $4.1356627(16) \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Elementarladung	e	$1,602176462(63) \times 10^{-19} \text{ C}$
Bohr'sches Magneton	μ_B	$9.27400899(37) \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ $h \cdot 1,399624624(56) \text{ MHz} \cdot \text{G}^{-1}$
Atomare Masseneinheit	u	$1,66053873(13) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse des Elektrons	m_e	$5,485799110(12) \times 10^{-4} \text{ u}$ $9,10938188(72) \times 10^{-31} \text{ kg}$
Bohr'scher Radius	a_B	$0,5291772083(19) \times 10^{-10} \text{ m}$
Boltzmann Konstante	k_B	$1,3806503(24) \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Tabelle A.2: physikalische Eigenschaften von ^{87}Rb

Atomzahl	Z	37	
Anzahl der Nukleonen	$Z+N$	87	
relatives natürliches Vorkommen	$\eta(^{87}\text{Rb})$	27,83(2)%	[158]
Lebensdauer des Isotops	τ_n	4.88×10^{10} Jahre	[158]
Atomare Masse	m	$1,44316060(11) \times 10^{-25}$ kg	[159]
Dichte bei 25°C	ρ_m	$1.53 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$	[158]
Schmelzpunkt	T_M	$39.31 \text{ }^\circ\text{C}$	[158]
Siedepunkt	T_B	$688 \text{ }^\circ\text{C}$	[158]
spezifische Wärmekapazität	c_p	$0,363 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	[158]
molare Wärmekapazität	C_p	$31,060 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	[158]
Gasdruck bei 25°C	P_v	4.0×10^{-7} mbar	[158]
Kernspin	I	$3/2$	
Ionisationsgrenze	E_I	$4,1771270(2)$ eV	[160]
Zeemanverschiebung des Uhrenübergangs	$\Delta\omega_{clock} \cdot B^{-2}$	$2\pi \cdot 575,15 \text{ Hz} \cdot \text{G}^{-2}$	
s-Wellenstreu­längen $F=1$	a_0	$110,0 \pm 4,0 a_B$	[71]
	a_2	$107,0 \pm 4,0 a_B$	[71]
s-Wellenstreu­längen $F=2$	a_0	$89,4 \pm 3,0 a_B$	[76]
	a_2	$94,5 \pm 3,0 a_B$	[76]
	a_4	$106,0 \pm 4,0 a_B$	[76]
elastische Zwei-Körper-Stöße	Γ_{el}	$32a_0n\sqrt{\pi k_B T/m}$ $1,4 \times 10^{-11} \frac{n}{[\text{cm}^{-3}]} \left(\frac{T}{[\mu\text{K}]}\right)^{0,5}$	[112]
inelastische Zwei-Körperstöße $F=2, m_F=2$	G_{dip}	$10^{-14} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	[161]
Drei-Körper-Stöße $F=2, m_F=2$	L_{3k}^{BEC}	$1,8 \times 10^{-29} \text{ cm}^6 \cdot \text{s}^{-1}$	[142]
inelastische Zwei-Körperstöße $F=1, m_F=-1$	G_{dip}	$< 1,6 \times 10^{-16} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$	[22]
Drei-Körper-Stöße $F=1, m_F=-1$	L_{3k}^{BEC}	$5,8 \times 10^{-30} \text{ cm}^6 \cdot \text{s}^{-1}$	[22]

Tabelle A.3: Eigenschaften des Übergangs $^{87}\text{Rb } D_2(5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{3/2})$

Frequenz	ω_0	$2\pi \cdot 384,2279818773(55)$ THz	[162]
Wellenlänge (Vakuum)	λ	780,246291629(11) nm	
Wellenzahl (Vakuum)	$k_L \cdot (2\pi)^{-1}$	12816,46591247(18) cm^{-1}	
Lebensdauer	τ	26,24(4) ns	[163]
Natürliche Linienbreite (FWHM)	Γ	$2\pi \cdot 6.065(9)$ MHz	
Rückstoßgeschwindigkeit	v_r	5,8845 $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$	
Rückstoßenergie	ω_r	$2\pi \cdot 3,7709$ kHz	
Rückstoßtemperatur	T_r	361,95 nK	
Dopplerverschiebung	$\Delta\omega_d(v_{atom} = v_r)$	$2\pi \cdot 7,5418$ kHz	
Dopplertemperatur	T_D	146 μK	
Sättigungsintensität ($F = 2 \rightarrow F = 3$)	I_{sat}	3,576(4) $\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$	
Sättigungsintensität ($m_F = \pm 2 \rightarrow m'_F = \pm 3$)	I_{sat}	1,669(2) $\text{mW} \cdot \text{cm}^{-2}$	

Tabelle A.4: Eigenschaften des Übergangs $^{87}\text{Rb } D_1(5^2S_{1/2} \rightarrow 5^2P_{1/2})$

Frequenz	ω_0	$2\pi \cdot 377,1074635(4)$ THz	[162]
Wellenlänge (Vakuum)	λ	794,9788509(8) nm	
Wellenzahl (Vakuum)	$k_L \cdot (2\pi)^{-1}$	12578,950985(13) cm^{-1}	
Lebensdauer	τ	27,70(4) ns	[163]
Natürliche Linienbreite (FWHM)	Γ	$2\pi \cdot 5.746(8)$ MHz	
Rückstoßgeschwindigkeit	v_r	5,7754 $\text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$	
Rückstoßenergie	ω_r	$2\pi \cdot 3,6325$ kHz	
Rückstoßtemperatur	T_r	348,66 nK	
Dopplerverschiebung	$\Delta\omega_d(v_{atom} = v_r)$	$2\pi \cdot 7,2649$ kHz	
Dopplertemperatur	T_D	138 μK	

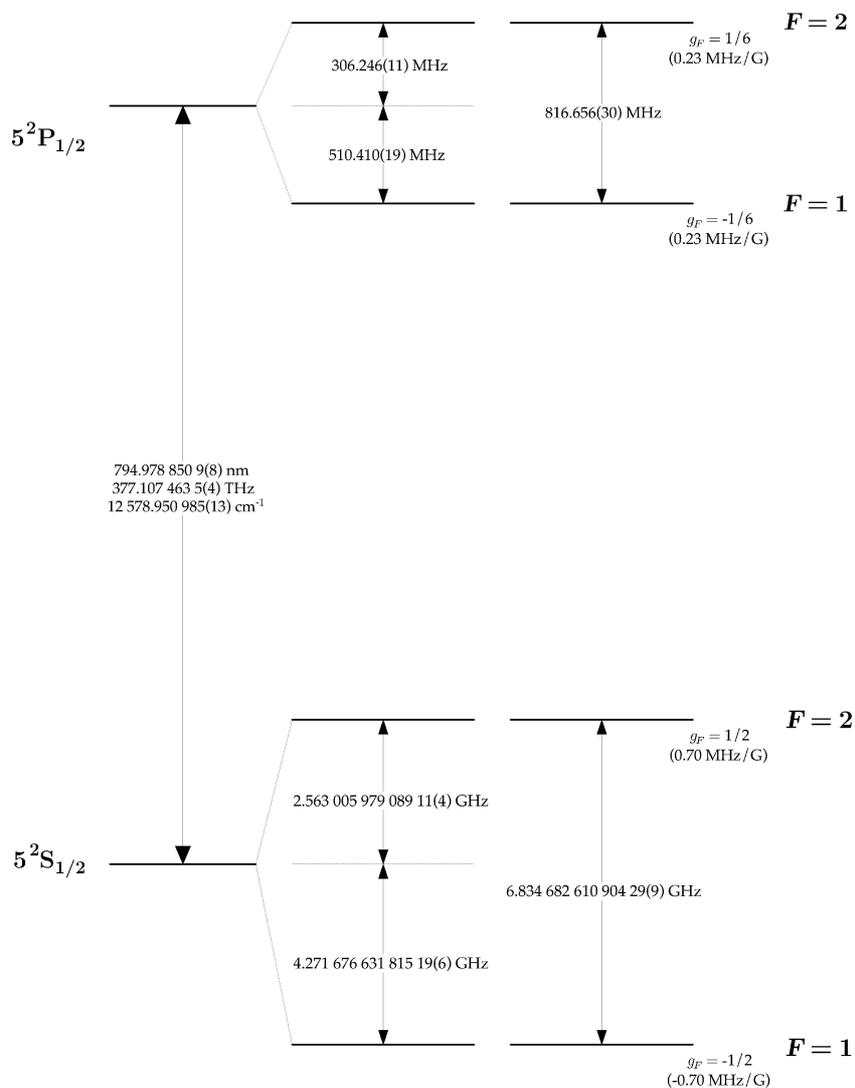


Abbildung A.1: ^{87}Rb D_1 Übergänge mit Frequenzaufspaltung zwischen den Hyperfeinzuständen. Die Werte für Grundzustände sind [164] entnommen, die für die angeregten Zustände stammen aus [165]. Die angegebenen Landé g_F -Faktoren geben die den jeweiligen Unterzuständen entsprechende Zeemanaufspaltung an.

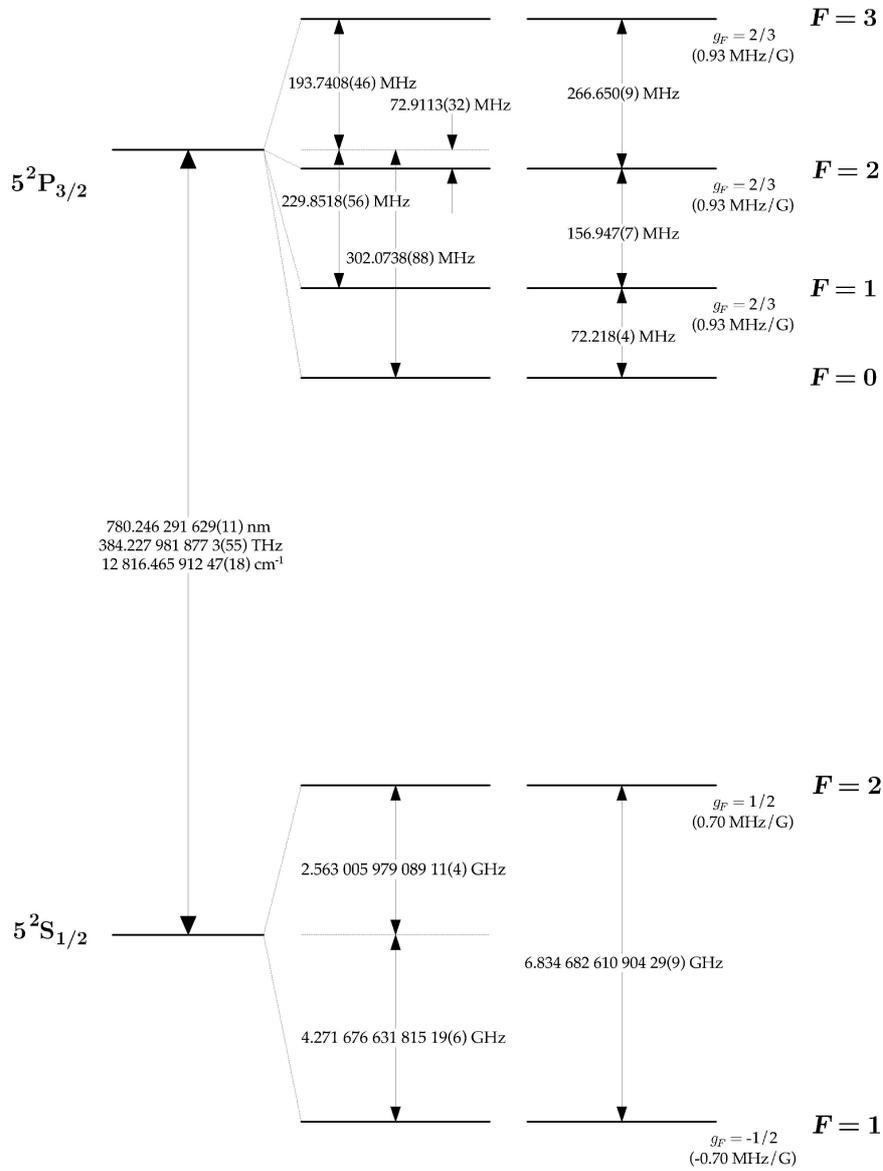
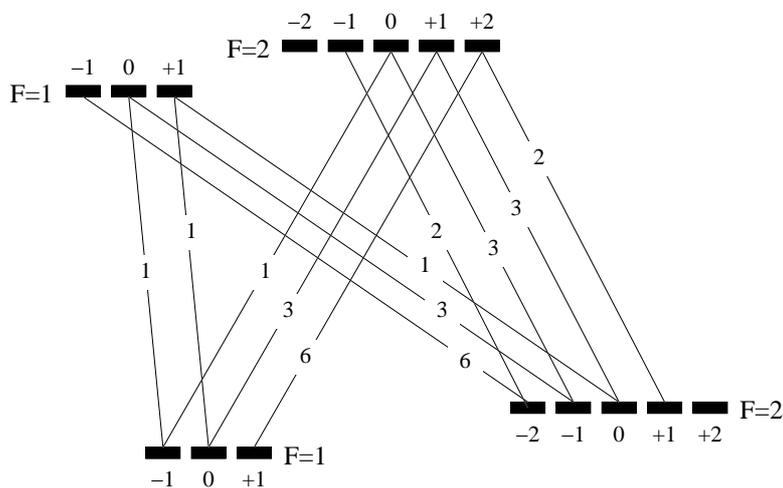
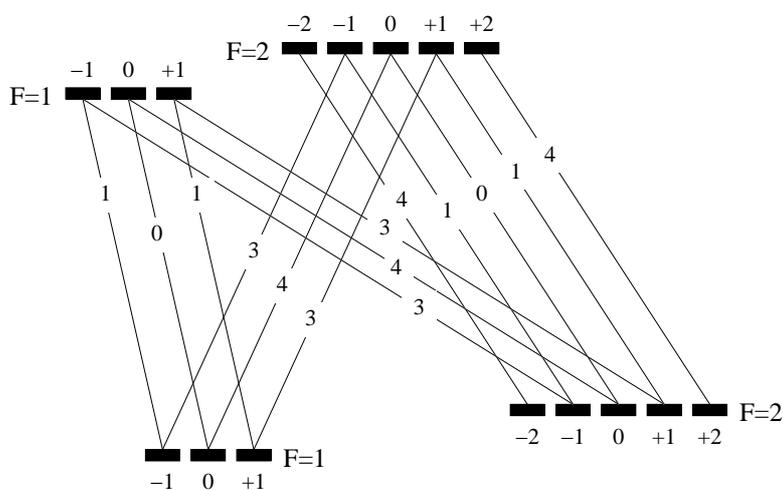


Abbildung A.2: ^{87}Rb D_2 Übergänge mit Frequenzaufspaltung zwischen den Hyperfeinzuständen. Die Werte für Grundzustände sind [164] entnommen, die für die angeregten Zustände stammen aus [162]. Die angegebenen Landé g_F -Faktoren geben die den jeweiligen Unterzuständen entsprechende Zeemanaufspaltung an.

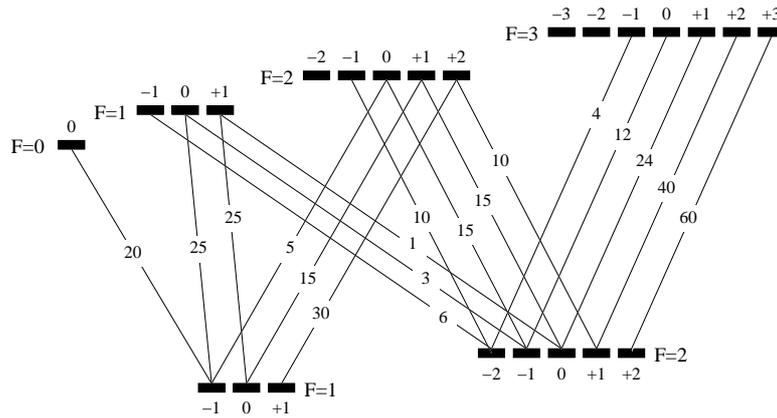


(a)

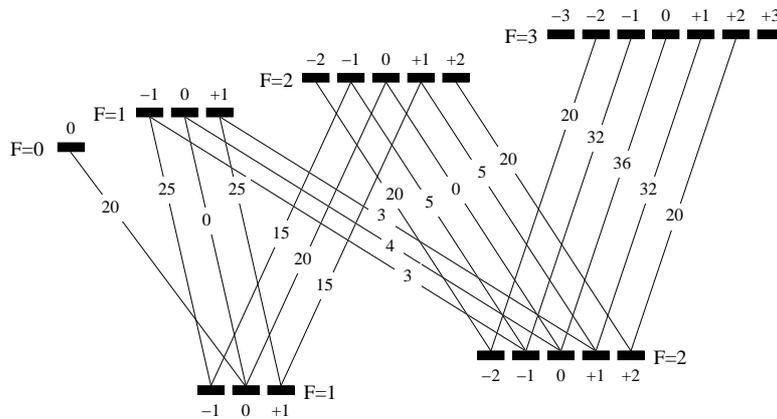


(b)

Abbildung A.3: Clebsch-Gordon Koeffizienten für die Übergänge der ^{87}Rb D_1 Linie: $^2S_{1/2} - ^2P_{1/2}$. Die Grafik (a) gibt die Koeffizienten für zirkuläre Polarisation an und die Grafik (b) für eine lineare Polarisation. Die Übergangsstärken stammen aus [92].



(a)



(b)

Abbildung A.4: Clebsch-Gordon Koeffizienten für die Übergänge der ^{87}Rb D_2 Linie: $^2S_{1/2} - ^2P_{3/2}$. Die Grafik (a) gibt die Koeffizienten für zirkuläre Polarisation an und die Grafik (b) für eine lineare Polarisation. Die Übergangsstärken stammen aus [92].

Schema des Lasersystems

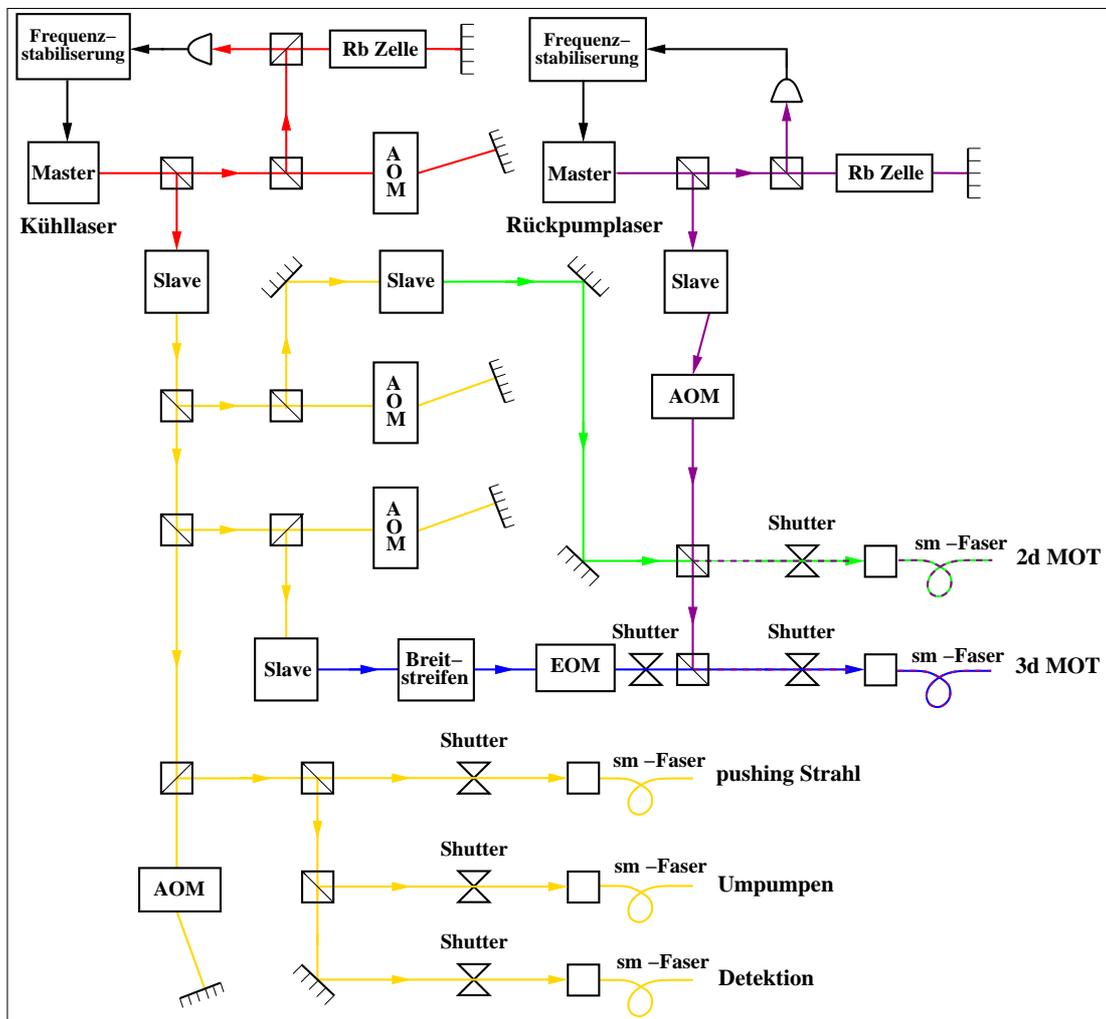


Abbildung B.1: Die Abbildung zeigt eine schematische Darstellung des Lasersystems.

Spinabhängige Wechselwirkung in $F=2$

Nachdem in Kapitel 3 auf die theoretische Beschreibung von Bose-Einstein Kondensaten mit dem Freiheitsgrad des Spins in der *mean-field* Näherung eingegangen wurde, werden hier die speziell für den Hyperfeinzustand $F=2$ geltenden Formeln zur spinerhaltenden und spinändernden Wechselwirkung unter Berücksichtigung eines Magnetfeldes ausgerechnet. Dies erfolgt für die beiden schon erwähnten Darstellungen der Projektionsoperatoren. Im Folgenden wird nur der spinabhängige Teil des Hamiltonoperators betrachtet. Dieser lautet in zweiter Quantisierung (entsprechend Formel 3.1, 3.2, 3.29 und 3.34) wie folgt :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \frac{4\pi\hbar^2}{m} \sum_{\mathcal{F}=0,2,4} a_{\mathcal{F}} \sum_{i,j,k,l=-2}^{+2} \hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) \hat{\Psi}_j^\dagger(\vec{r}) \mathcal{P}_{\mathcal{F}} \hat{\Psi}_k(\vec{r}) \hat{\Psi}_l(\vec{r}) \\ & - \int d^3\vec{r} p \hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) (\mathcal{S}_z)_{ij} \hat{\Psi}_j(\vec{r}) + \int d^3\vec{r} q \hat{\Psi}_i^\dagger(\vec{r}) (\mathcal{S}_z^2)_{ij} \hat{\Psi}_j(\vec{r}) , \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

wobei über gleiche Indizes summiert wird. Hierbei stehen die drei Streulängen a_0 , a_2 und a_4 für die Beschreibung von Stößen zwischen zwei Atomen mit Gesamtspin 0, 2 oder 4 entsprechend dem Index, sowie \mathcal{P}_i für die Projektoren auf einen entsprechenden Stoß, p ist der Vorfaktor für den linearen Zeeman Effekt, q ist der Vorfaktor für den quadratischen Zeeman Effekt (siehe Kapitel 3) und \mathcal{S}_z steht für die z-Komponente der

Spinabhängige Wechselwirkung in F=2

Spinmatrizen. Die Spinmatrizen besitzen im Fall F=2 die Form:

$$\mathcal{S}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_y = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Es wird nun in den beiden Darstellungen der Projektionsoperatoren der Hamiltonoperator soweit bearbeitet bis sämtliche Wechselwirkungsterme deutlich werden. Die Angaben erfolgen in der *mean-field* Näherung.

C.1 Gebräuchliche Darstellung der Projektionsoperatoren

Die hier verwendete Darstellung setzt sich zusammen aus der Identität, $\vec{\mathcal{S}}^2$ und \mathcal{P}_0 (siehe Kapitel 3.3). Somit hat die Gleichung C.1 in *mean-field* Näherung die Form :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} g_0 \varphi_i^* \varphi_j^* \varphi_i \varphi_j \\ & + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} g_2 \sum_{l=x,y,z} \sum_{i,j,k,m=-2}^2 \varphi_i^* \mathcal{S}_l \varphi_j \cdot \varphi_k^* \mathcal{S}_l \varphi_m \\ & + \frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \frac{4}{5} g_4 |(\frac{1}{2} \cdot (-1)^i \varphi_i \varphi_{-i})^2| \\ & - \int d^3\vec{r} p \cdot \varphi_i^* \mathcal{S}_z \varphi_i + \int d^3\vec{r} q \cdot (\varphi_i^* \mathcal{S}_z^2 \varphi_i - 4), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

wobei über gleiche Indizes summiert wird. Der Übersichtlichkeit halber wurde $\varphi_i(\vec{r})$ durch φ_i ersetzt. Die Summe $|(\frac{1}{2} (-1)^i \varphi_i \varphi_{-i})^2|$ entspricht dem Erwartungswert des Projektors \mathcal{P}_0 auf einen Stoß mit Gesamtspin null [76]. Die Konstanten g_i lassen sich wie folgt aus den Streulängen a_i berechnen [75] :

$$g_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot \frac{4a_2 + 3a_4}{7}, \quad g_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot \frac{a_4 - a_2}{7}, \quad g_4 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \cdot \frac{7a_0 - 10a_2 + 3a_4}{7}. \quad (\text{C.4})$$

Im Folgenden werden die Beiträge der einzelnen Komponenten von g_0 , g_1 , g_2 , p und q aufgeführt. Dabei werden noch die Anteile unterschieden, welche einen Stoß zwischen Teilchen mit gleichem Spin bzw. mit unterschiedlichem Spin beinhalten und solche, welche zu einer Änderung in einer Spinmischung führen. Diese treten nur bei Beiträgen von g_1 und g_2 auf, da der Term mit g_0 eine spinunabhängige Wechselwirkung beschreibt und die p und q -Terme von Einteilchenoperatoren stammen. Betrachtet man den g_0

C.1. Gebräuchliche Darstellung

Anteil von Gleichung C.3, so führt diese zu den folgenden Beiträgen :

$$\begin{aligned}
 & \varphi_i^* \varphi_j^* \varphi_i \varphi_j = \tag{C.5} \\
 & \left(\begin{aligned} & \varphi_{+2}^* \varphi_{+2}^* \varphi_{+2} \varphi_{+2} + \varphi_{+1}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+1} \varphi_{+1} + \varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_0 \varphi_0 \\ & + \varphi_{-1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{-1} \varphi_{-1} + \varphi_{-2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-2} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + 2 \cdot \left(\begin{aligned} & \varphi_{+2}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+2} \varphi_{+1} + \varphi_{+2}^* \varphi_0^* \varphi_{+2} \varphi_0 + \varphi_{+2}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+2} \varphi_{-1} \\ & + \varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} + \varphi_{+1}^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_0 + \varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + \varphi_{+1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+1} \varphi_{-2} + \varphi_0^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_{-1} + \varphi_0^* \varphi_{-2}^* \varphi_0 \varphi_{-2} \\ & + \varphi_{-1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-1} \varphi_{-2} \end{aligned} \right).
 \end{aligned}$$

Die Terme in der oberen Klammer entsprechen einer Wechselwirkung zwischen Atomen mit gleichem Spin. Die untere Klammer beschreibt hingegen einen Stoß zwischen Teilchen mit unterschiedlichem Spin ohne eine Spinänderung. Die Stöße zwischen Teilchen mit unterschiedlichem Spin besitzen eine doppelt so hohe Amplitude, da es sich im anderen Fall um identische Teilchen handelt.

Es folgen nun die möglichen Wechselwirkungen des Anteils von g_2 :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j,k,m=-2}^2 \sum_{l=x,y,z} \varphi_i^* \mathcal{S}_l \varphi_j \cdot \varphi_k^* \mathcal{S}_l \varphi_m = \tag{C.6} \\
 & \left(\begin{aligned} & 4\varphi_{+2}^* \varphi_{+2}^* \varphi_{+2} \varphi_{+2} + \varphi_{+1}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+1} \varphi_{+1} \\ & + \varphi_{-1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{-1} \varphi_{-1} + 4\varphi_{-2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-2} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + 2 \cdot \left(\begin{aligned} & 4\varphi_{+2}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+2} \varphi_{+1} - 2\varphi_{+2}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+2} \varphi_{-1} - 4\varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} \\ & + 3\varphi_{+1}^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_0 - \varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} - 2\varphi_{+1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+1} \varphi_{-2} \\ & + 3\varphi_0^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_{-1} + 4\varphi_{-1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-1} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + 2 \cdot \left(\begin{aligned} & \sqrt{6}\varphi_{+2}^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_{+1} + \sqrt{6}\varphi_{+2}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_0 + 2\varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+2} \varphi_0 + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_0^* \varphi_{+2} \varphi_{-1} + 2\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} \\ & + 3\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_0 + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_0 \varphi_{-1} + 3\varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + \sqrt{6}\varphi_0^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_{-2} + \sqrt{6}\varphi_0^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-1} \varphi_{-1} + \sqrt{6}\varphi_{-1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_{-2} \end{aligned} \right).
 \end{aligned}$$

Entsprechend der Auflistung der Beiträge zum g_0 Term sind hier wieder die unterschiedlichen Stöße getrennt voneinander aufgeführt. Hinzugekommen ist ein Anteil, der die Wechselwirkung beschreibt, welche zu einer Spinänderung mit $\Delta m_F = 1$ der beiden Atome führt. Dafür gibt es zwölf Möglichkeiten.

Nun werden die Beiträge des Terms g_4 aufgeführt. Diese bieten leider keine so anschauliche Darstellung, da nur Vernichtungsoperatoren verwendet werden. Es handelt sich daher nur bei dem Betrag um einen hermiteschen Operator. Für eine intuitivere

Spinabhängige Wechselwirkung in F=2

Darstellung sei auf Kapitel C.2 verwiesen. Die Anteile zum g_4 Term lauten :

$$\begin{aligned} |(\frac{1}{2} \cdot (-1)^i \varphi_i \varphi_{-i})^2| = \frac{1}{4} | & \varphi_{+2}^2 \varphi_{-2}^2 + \varphi_{+1}^2 \varphi_{-1}^2 + \varphi_0^4 - 2\varphi_{+2} \varphi_{+1} \varphi_{-1} \varphi_{-2} \\ & + 2\varphi_{+2} \varphi_0^2 \varphi_{-2} - 2\varphi_{+1} \varphi_0^2 \varphi_{-1} | . \end{aligned}$$

Bei den folgenden Beiträgen handelt es sich um den Einfluss von Magnetfeldern. Diese sind wie oben erwähnt Einteilcheneffekte, so dass sie zu keiner Änderung in der Spinzusammensetzung führen. Sie liefern nur einen spinabhängigen Beitrag für die Energie des Systems. Die Beiträge für den linearen Zeeman Effekt sind :

$$\varphi_i^* \varphi_j^* \mathcal{S}_z \varphi_i \varphi_j = 2\varphi_{+2}^* \varphi_{+2} + \varphi_{+1}^* \varphi_{+1} - \varphi_{-1}^* \varphi_{-1} - 2\varphi_{-2}^* \varphi_{-2} .$$

Für den quadratischen Zeeman Effekt gilt :

$$\varphi_i^* \varphi_j^* \mathcal{S}_z^2 \varphi_i \varphi_j = 4\varphi_{+2}^* \varphi_{+2} + \varphi_{+1}^* \varphi_{+1} + \varphi_{-1}^* \varphi_{-1} + 4\varphi_{-2}^* \varphi_{-2} .$$

Es ist bei dem quadratischen Zeeman Effekt darauf zu achten, dass das Vorzeichen von q vom Kernspin des Elementes abhängt.

C.2 Alternative Darstellung der Projektionsoperatoren

Alternativ zu der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Darstellung lässt sich auch eine Darstellung wählen, welche keinen Projektionsoperator mehr beinhaltet. Die Vor- und Nachteile dieser Darstellung sind in Kapitel 3.3 aufgeführt worden. Hier ersetzt nun $\langle \mathcal{S}^2 \rangle^2$ den Erwartungswert $\langle \mathcal{P}_0 \rangle$. Damit ergibt sich Gleichung C.1 in *mean-field* Näherung zu :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int} = & \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \tilde{g}_0 \varphi_i^* \varphi_j^* \varphi_i \varphi_j \\ & + \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \tilde{g}_2 \sum_{l=x,y,z} \sum_{i,j,k,m=-2}^2 \varphi_i^* \mathcal{S}_l \varphi_j \cdot \varphi_k^* \mathcal{S}_l \varphi_m \\ & + \frac{1}{2} \int d^3 \vec{r} \tilde{g}_4 \sum_{l=x,y,z} \sum_{i,j,k,m=-2}^2 \varphi_i^* \mathcal{S}_l^2 \varphi_j \cdot \varphi_k^* \mathcal{S}_l^2 \varphi_m \\ & - \int d^3 \vec{r} p \cdot \varphi_i^* \mathcal{S}_z \varphi_i + \int d^3 \vec{r} q \cdot (\varphi_i^* \mathcal{S}_z^2 \varphi_i - 4) . \end{aligned} \quad (C.7)$$

Es wird wieder über gleiche Indizes summiert und $\varphi_i(\vec{r})$ durch φ_i abgekürzt. Die Konstanten \tilde{g}_i sind Linearkombinationen der Streulängen a_i :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_0 = \frac{4\pi \hbar^2}{m} \cdot \frac{-84a_0 + 240a_2 + 54a_4}{210}, \quad \tilde{g}_2 = \frac{4\pi \hbar^2}{m} \cdot \frac{-7a_0 - 20a_2 + 27a_4}{210}, \\ \tilde{g}_4 = \frac{4\pi \hbar^2}{m} \cdot \frac{7a_0 - 10a_2 + 3a_4}{210}. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Die Wechselwirkungsamplituden der einzelnen Stoßprozesse bezüglich der Konstanten \tilde{g}_0 , \tilde{g}_2 sowie bei den Termen p und q stimmen mit den entsprechenden aus dem Abschnitt C.1 überein. Nur die Wechselwirkungsamplituden zu dem Term \tilde{g}_4 haben hier

C.3. Formeln zur zeitlichen Entwicklung

eine andere Form und können leichter interpretiert werden. Dort sind alle Wechselwirkungsarten enthalten, welche auch schon bei dem Term $\langle \vec{\mathcal{S}} \rangle^2$ auftreten. Zusätzlich gibt es hier noch die Möglichkeit eines Stoßes mit $\Delta m_F = 2$. Die einzelnen Amplituden berechnen sich zu den folgenden Werten :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j,k,m=-2}^2 \sum_{l=x,y,z} \varphi_i^* \mathcal{S}_l^2 \varphi_j \cdot \varphi_k^* \mathcal{S}_l^2 \varphi_m = \tag{C.9} \\
 & \left(\begin{aligned} & 16\varphi_{+2}^* \varphi_{+2}^* \varphi_{+2} \varphi_{+2} + 13\varphi_{+1}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+1} \varphi_{+1} + 18\varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_0 \varphi_0 \\ & + 13\varphi_{-1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{-1} \varphi_{-1} + 16\varphi_{-2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-2} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + 2 \cdot \left(\begin{aligned} & 16\varphi_{+2}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+2} \varphi_{+1} + 12\varphi_{+2}^* \varphi_0^* \varphi_{+2} \varphi_0 + 10\varphi_{+2}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+2} \varphi_{-1} \\ & + 20\varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} + 15\varphi_{+1}^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_0 + 23\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + 10\varphi_{+1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+1} \varphi_{-2} + 15\varphi_0^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_{-1} + 12\varphi_0^* \varphi_{-2}^* \varphi_0 \varphi_{-2} \\ & + 16\varphi_{-1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-1} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + 2 \cdot \left(\begin{aligned} & \sqrt{6}\varphi_{+2}^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_{+1} + \sqrt{6}\varphi_{+2}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_0 - 10\varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_{+1}^* \varphi_{+2} \varphi_0 + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_0^* \varphi_{+2} \varphi_{-1} - 10\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} \\ & - 3\varphi_{+1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_0 + \sqrt{6}\varphi_{+1}^* \varphi_{-2}^* \varphi_0 \varphi_{-1} - 3\varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_{+1} \varphi_{-1} \\ & + \sqrt{6}\varphi_0^* \varphi_{-1}^* \varphi_{+1} \varphi_{-2} + \sqrt{6}\varphi_0^* \varphi_{-2}^* \varphi_{-1} \varphi_{-1} + \sqrt{6}\varphi_{-1}^* \varphi_{-1}^* \varphi_0 \varphi_{-2} \end{aligned} \right) \\
 & + \left(\begin{aligned} & 12\varphi_{+2}^* \varphi_{-2}^* \varphi_0 \varphi_0 + 12\varphi_0^* \varphi_0^* \varphi_{+2} \varphi_{-2} \end{aligned} \right) .
 \end{aligned}$$

C.3 Formeln zur zeitlichen Entwicklung der Spinkomponenten

Aus den Gleichungen C.3 und C.7 kann die zeitliche Entwicklung der Spinkomponenten abgelesen werden. Dies ist nur eine Näherung, da die Anteile der kinetischen Energie und des Fallenpotentials nicht mit berücksichtigt werden. Weiterhin wird eine Dissipation durch die thermische Wolke vernachlässigt. Die Differential-Gleichungen lauten bei einer homogenen Dichteverteilung und bei Vernachlässigung der spinerhaltenden sowie

Spinabhängige Wechselwirkung in $F=2$

spinabhängigen Wechselwirkungsterme :

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{+2} &= 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_0^* \zeta_{+1} \zeta_{+1} + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{-1}^* \zeta_{+1} \zeta_0 & (C.10) \\
&+ (4\tilde{g}_2 - 20\tilde{g}_4)n\zeta_{-2}^* \zeta_{+1} \zeta_{-1} + 12\tilde{g}_4 n\zeta_{-2}^* \zeta_0 \zeta_0 \\
&- 2p\zeta_{+2}, \\
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{+1} &= 4\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{+1}^* \zeta_{+2} \zeta_0 + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_0^* \zeta_{+2} \zeta_{-1} \\
&+ (4\tilde{g}_2 - 20\tilde{g}_4)n\zeta_{-1}^* \zeta_{+2} \zeta_{-2} + 6(\tilde{g}_2 - \tilde{g}_4)n\zeta_{-1}^* \zeta_0 \zeta_0 \\
&+ 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{-2}^* \zeta_0 \zeta_{-1} \\
&- p\zeta_{+1} + 3q\zeta_{+1}, \\
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_0 &= 12(\tilde{g}_2 - \tilde{g}_4)n\zeta_0^* \zeta_{+1} \zeta_{-1} + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{-1}^* \zeta_{+1} \zeta_{-2} \\
&+ 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{-2}^* \zeta_{-1} \zeta_{-1} + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{+2}^* \zeta_{+1} \zeta_{+1} \\
&+ 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{+1}^* \zeta_{+2} \zeta_{-1} + 24\tilde{g}_4 n\zeta_0^* \zeta_{+2} \zeta_{-2} \\
&+ 4q\zeta_0, \\
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{-1} &= 4\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{-1}^* \zeta_0 \zeta_{-2} + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{+2}^* \zeta_{+1} \zeta_0 \\
&+ (4\tilde{g}_2 - 20\tilde{g}_4)n\zeta_{+1}^* \zeta_{+2} \zeta_{-2} + 6(\tilde{g}_2 - \tilde{g}_4)n\zeta_{+1}^* \zeta_0 \zeta_0 \\
&+ 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_0^* \zeta_{+1} \zeta_{-2} \\
&+ p\zeta_{-1} + 3q\zeta_{-1}, \\
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \zeta_{-2} &= (4\tilde{g}_2 - 20\tilde{g}_4)n\zeta_{+2}^* \zeta_{+1} \zeta_{-1} + 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_{+1}^* \zeta_0 \zeta_{-1} \\
&+ 2\sqrt{6}(\tilde{g}_2 + \tilde{g}_4)n\zeta_0^* \zeta_{-1} \zeta_{-1} + 12\tilde{g}_4 n\zeta_{+2}^* \zeta_0 \zeta_0 \\
&+ 2p\zeta_{-2}.
\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 3.6.1 beschrieben, führt der lineare Zeeman-Effekt nur zu einer Drehung der Phasen, wobei $\phi_{+2} + \phi_{+1} + \phi_0 + \phi_{-1} + \phi_{-2}$ zeitlich konstant bleibt. Durch eine Transformation, welche die Drehung der entsprechenden Komponenten berücksichtigt, können die Beiträge von p im Differentialgleichungssystem eliminiert werden.



Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1925:3, 1925.
- [2] L. de Broglie. Radiation-waves and quanta. *Comptes rendus*, 177:507, 1923.
- [3] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1924:261, 1924.
- [4] F. London. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, 141:643, 1938.
- [5] S.T. Beliaev. Energy-spectrum of a non-ideal Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 34:299, 1958.
- [6] S. Chu. The manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 70:685, 1998.
- [7] C.N. Cohen-Tannoudji. Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.*, 70:707, 1998.
- [8] W.D. Phillips. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.*, 70:721, 1998.
- [9] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu und D.E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2631, 1987.
- [10] H.F. Hess. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Phys. Rev. B*, 34:3476, 1986.

-
- [11] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [12] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn und W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969, 1995.
- [13] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollett und R.G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1687, 1995. *ibid.* **79**, 1170 (1997).
- [14] C.C. Bradley, C.A. Sackett und R.G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, 78:985, 1997.
- [15] D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77:420, 1996.
- [16] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend und W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77:988, 1996.
- [17] D.S. Jin, M.R. Matthews, J.R. Ensher, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Temperature-dependent damping and frequency shifts in collective excitations of a dilute Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 78:764, 1997.
- [18] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn und W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275:637, 1997.
- [19] B.P. Anderson und M.A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282:1686, 1998.
- [20] L. Deng, E.W. Hagley, J. Wen, M. Trippenbach, Y. Band, P.S. Julienne, J.E. Simsarian, K. Helmerson, S.L. Rolston und W.D. Phillips. Four-wave mixing with matter waves. *Nature*, 398:218, 1999.
- [21] K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, W. Ertmer, K. Rzażewski, A. Sanpera und M. Lewenstein. Coherent evolution of bouncing Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3577, 1999.
- [22] E.A. Burt, R.W. Ghrist, C.J. Myatt, M.J. Holland, E.A. Cornell und C.E. Wieman. Coherence, correlations, and collisions: What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay. *Phys. Rev. Lett.*, 79:337, 1997.
- [23] W. Ketterle und H.-J. Miesner. Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers. *Phys. Rev. A*, 56:3291, 1997.

-
- [24] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y.B. Band, M. Edwards, M.R. Doery, P.S. Julienne, K. Helmerson, S.L. Rolston und W.D. Phillips. Measurement of the coherence of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3112, 1999.
- [25] J. Denschlag, J.E. Simsarian, D.L. Feder, C.W. Clark, L.A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, W.P. Reinhardt, S.L. Rolston, B.I. Schneider und W.D. Phillips. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 287:97, 2000.
- [26] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov und M. Lewenstein. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83:5198, 1999.
- [27] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2498, 1999.
- [28] K.W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben und J. Dalibard. Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 84:806, 2000.
- [29] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook und A. Aspect. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292:461, 2001.
- [30] F.P.D. Santos, F. Perales, J. Léonard, J. Wang, C.J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc und C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein condensation of metastable helium. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3459, 2001.
- [31] L. Santos, G.V. Shlyapnikov, P. Zoller und M. Lewenstein. Bose-Einstein condensation in trapped dipolar gases. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1791, 2000.
- [32] M. Greiner, C.A. Regal und D.S. Jin. A molecular Bose-Einstein condensate emerges from a Fermi sea. *Nature*, 426:537, 2003.
- [33] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag und R. Grimm. Bose-Einstein condensation of molecules. *Science*, 302:2101, 2003.
- [34] M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzi-babic und W. Ketterle. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 91:250404, 2003.
- [35] C.A. Regal, M. Greiner und D.S. Jin. Observation of resonance condensation of Fermionic atom pairs. *Phys. Rev. Lett.*, 426:537, 2003.
- [36] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch und I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39, 2002.

-
- [37] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J.J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D.S. Petrov, H. Kreutzmann G.V. Shlyapnikov, L. Santos und M. Lewenstein. Observation of phase fluctuations in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87:160406, 2001.
- [38] L. Guttman und J.R. Arnold. The non-participation of ^6He in the superfluidity of ^4He . *Phys. Rev.*, 92:547, 1953.
- [39] I.M. Khalatnikov. Hydrodynamics of solutions of two superfluid liquids. *Sov. Phys. JETP*, 5:542, 1957.
- [40] W.B. Colson und A.L. Fetter. Mixtures of Bose liquids at finite temperature. *J. Low Temp. Phys.*, 33:231, 1978.
- [41] E.D. Siggia und A.E. Ruckenstein. Bose condensation in spin-polarized atomic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1423, 1980.
- [42] T.-L. Ho und V.B. Shenoy. Binary mixtures of Bose condensates of alkali atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3276, 1996.
- [43] B.D. Esry, C.H. Greene, J.P. Burke und J.L. Bohn. Hartree-Fock theory for double condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 78:3594, 1997.
- [44] C.K. Law, H. Pu, N.P. Bigelow und J.H. Eberly. "Stability signature" in two-species dilute Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3105, 1997.
- [45] C.J. Myatt, E.A. Burt, R.W. Ghrist, E.A. Cornell und C.E. Wieman. Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 78:586, 1997.
- [46] D.S. Hall, M.R. Matthews, J.R. Ensher, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Dynamics of component separation in a binary mixture of Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1539, 1998.
- [47] D.S. Hall, M.R. Matthews, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Measurements of relative phase in two-component Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1543, 1998.
- [48] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E.A. Cornell und M.J. Holland. Nonlinear Josephson-type oscillations of a driven, two-component Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 59:R31, 1999.
- [49] M.R. Matthews, B.P. Anderson, P.C. Haljan, D.S. Hall, M.J. Holland, J.E. Williams, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Watching a superfluid untwist itself: Recurrence of Rabi oscillations in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3358, 1999.

-
- [50] J.M. McGuirk, D.M. Harber, H.J. Lewandowski und E.A. Cornell. Normal-superfluid interaction dynamics in a spinor Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91:150402, 2003.
- [51] H.J. Lewandowski, J.M. McGuirk, D.M. Harber und E.A. Cornell. Decoherence-driven cooling of a degenerate spinor Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91:240404, 2003.
- [52] J. Stenger, S. Inouye, D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur und W. Ketterle. Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates. *Nature*, 396:345, 1999.
- [53] H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A.P. Chikkatur und W. Ketterle. Observation of metastable states in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2228, 1999.
- [54] D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger und W. Ketterle. Quantum tunneling across spin domains in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83:661, 1999.
- [55] N.D. Mermin. d-wave pairing near the transition temperature. *Phys. Rev. A*, 9:868, 1974.
- [56] S.N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, 26:178, 1924.
- [57] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley & Sons, 1987.
- [58] V.V. Goldman, I.F. Silvera und A.J. Leggett. Atomic hydrogen in an inhomogeneous magnetic field: Density profile and Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. B*, 24:2870, 1981.
- [59] D.A. Huse und E.D. Siggia. The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential. *J. Low Temp. Phys.*, 48:137, 1982.
- [60] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii und S. Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71:463, 1999.
- [61] W. Ketterle, D.S. Durfee und D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari und C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 67. IOS Press, 1999.
- [62] C.J. Pethick und H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [63] W. Ketterle und N.J. van Druten. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Phys. Rev. A*, 54:656, 1996.
- [64] N. Bogolubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys.*, 11:23, 1947.

-
- [65] E.P. Gross. *Nouvo Cimento*, 20:454, 1961.
- [66] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451, 1961.
- [67] B.P. Anderson, P.C. Haljan, C.E. Wieman und E.A. Cornell. Vortex precession in Bose-Einstein condensates: Observations with filled and empty cores. *Phys. Rev. Lett.*, 85:2857, 2000.
- [68] J.M. Gerton, D. Strekalov, I. Prodan und R.G. Hulet. Direct observation of growth and collapse of a Bose-Einstein condensate with attractive interactions. *Nature*, 408:692, 2000.
- [69] S.L. Cornish, N.R. Claussen, J.L. Roberts, E.A. Cornell und C.E. Wieman. Stable ^{85}Rb Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1795, 2000.
- [70] W. Ketterle. Spinor condensates and light scattering from Bose-Einstein condensates. *cond-mat/0005001*, 2000.
- [71] T.-L. Ho. Spinor Bose condensates in optical traps. *Phys. Rev. Lett.*, 81:742, 1998.
- [72] T. Ohmi und K. Machida. Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases. *J. Phys. Soc. Jap.*, 67:1822, 1998.
- [73] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu und F. Laloë. *Quantenmechanik*. Walter de Gruyter, 1997.
- [74] C.K. Law, H. Pu und N.P. Bigelow. Quantum spins mixing in spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5257, 1998.
- [75] M. Koashi und M. Ueda. Exact eigenstates and magnetic response of spin-1 and spin-2 Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1066, 2000.
- [76] C.V. Ciobanu, S.-K. Yip und T.-L. Ho. Phase diagrams of $F=2$ spinor Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 61:033607, 2000.
- [77] W.-J. Huang und S.-C. Gou. Ground-state energy of the spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 59:4608, 1999.
- [78] M. Ueda und M. Koashi. Theory of spin-2 Bose-Einstein condensates: Spin correlations, magnetic response, and excitation spectra. *Phys. Rev. A*, 65:063602, 2002.
- [79] G. Breit und I.I. Rabi. Measurement of nuclear spin. *Phys. Rev.*, 38:2082, 1931.
- [80] T. Isoshima, K. Machida und T. Ohmi. Spin-domain formation in spinor Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 60:4857, 1999.

-
- [81] H. Pu, C.K. Law, S. Raghavan, J.H. Eberly und N.P. Bigelow. Spin-mixing dynamics of a spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 60:1463, 1999.
- [82] E.A. Cornell, J.R. Ensher und C.E. Wieman. Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. In M. Inguscio, S. Stringari und C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 15. IOS Press, 1999.
- [83] C.E. Hecht. The possible superfluid behaviour of hydrogen atom gases and liquids. *Physica*, 25:1159, 1959.
- [84] W.C. Stwalley und L.H. Nosanow. Possible “new” quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 36:910, 1976.
- [85] W. Ketterle und N.J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:181, 1996.
- [86] P.S. Julienne, F.H. Mies, E. Tiesinga und C.J. Williams. Collisional stability of double Bose condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 78:1880, 1997.
- [87] A. Görlitz, T.L. Gustavson, A.E. Leanhardt, R. Löw, A.P. Chikkatur, S. Inouye, D.E. Prichard und W. Ketterle. Sodium Bose-Einstein condensates in the F=2 state in a large-volume optical trap. *Phys. Rev. Lett.*, 90:033201, 2003.
- [88] C.E. Wiemann und L. Hollberg. Using diode lasers for atomic physics. *Rev. Sci. Instrum.*, 62:1, 1990.
- [89] G.C. Bjorklund und M.D. Levenson. Frequency modulation (FM) spectroscopy. *Appl. Phys. B*, 32:145, 1983.
- [90] H.C. Lefevre. Single-mode fiber fractional wave devices and polarization controllers. *Electronic Letters*, 16:778, 1980.
- [91] I. Shvarchuck, K. Diekmann, M. Zielonkowski und J.T.M. Walraven. Broad-area diode laser system for a rubidium Bose-Einstein condensation experiment. *Applied Physics B*, 71:475, 2000.
- [92] H.J. Metcalf und P. van der Straten. *Laser cooling and trapping*. Springer, 1999.
- [93] J. Nellessen, J. Werner und W. Ertmer. Magneto-optical compression of a monoenergetic sodium atomic beam. *Opt. Commun.*, 78:300, 1990.
- [94] E. Riis, D.S. Weiss, K.A. Moler und S. Chu. Atom funnel for the production of a slow, high-density atomic beam. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1658, 1990.
- [95] K. Diekmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller und J.T.M. Walraven. Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms. *Phys. Rev. A*, 58:3891, 1998.

-
- [96] P. Berthoud, A. Joyet, G. Duddle, N. Sagna und P. Thomann. A continuous beam of slow, cold cesium atoms magnetically extracted from a 2d magneto-optical trap. *Europhys. Lett.*, 41:141, 1998.
- [97] J. Schoser, A. Batär, V. Schweikhard, A. Grabowski, Y.B. Ovchinnikov und T. Pfau. Intense source of cold Rb atoms from a pure two-dimensional magneto-optical trap. *Phys. Rev. A*, 66:023410, 2002.
- [98] P. Julienne und J. Vigué. Cold collisions of ground- and excited-state alkali-metal atoms. *Phys. Rev. A*, 44:4464, 1991.
- [99] J. Dalibard und C.C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: Simple theoretical models. *J. Opt. Soc. Am.*, 6:2023, 1998.
- [100] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W.D. Phillips, P.L. Gould und H.J. Metcalf. Observation of atoms laser cooled below the Doppler limit. *Phys. Rev. Lett.*, 61:169, 1988.
- [101] C.J. Copper, G. Hillenbrand, J. Rink und C.G. Townsend. The temperature of atoms in a magneto-optical trap. *Europhys. Lett.*, 28:397, 1994.
- [102] P. Engels. persönliche Mitteilung.
- [103] W.H. Wing. Some problems and possibilities for quasi-static neutral particle trapping. In W.D. Phillips, editor, *Proceedings of the Workshop on Spectroscopic Applications of Slow Atomic Beams*, volume 653. NBS, Gaithersburg, 1983.
- [104] E. Majorana. *Nouvo Cimento*, 9:43, 1932.
- [105] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher und E.A. Cornell. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3352, 1995.
- [106] Y. Gott, M.S. Ioffe und V. Tel’Kovskii. *Nucl. Fusion 192 Suppl.*, 3:1045, 1962.
- [107] D.E. Pritchard. Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1336, 1983.
- [108] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee und W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77:416, 1996.
- [109] T. Bergeman, G. Erez und H. Metcalf. Magneto-static trapping fields for neutral atoms. *Phys. Rev. A*, 35:1535, 1987.
- [110] M. Kottke. Magnetfallen und Signaturen der Eindimensionalität von Bose-Einstein Kondensaten. Dissertation, Universität Hannover, 2004.

-
- [111] L.V. Hau, B.D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, M.M. Burns und J.A. Golovchenko. Near-resonant spatial images of confined Bose-Einstein condensates in a 4-Dee magnetic bottle. *Phys. Rev. A*, 58:R54, 1998.
- [112] K. Bongs. *Atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten*. Dissertation, Universität Hannover, 1999.
- [113] P.W.H. Pinkse, A. Mosk, M. Weidemüller, M.W. Reynolds, T.W. Hijmans und J.T.M. Walraven. Adiabatically changing the phase-space density of a trapped Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78:990, 1997.
- [114] W. Petrich, M.H. Anderson, J.R. Ensher und E.A. Cornell. Evaporative cooling of rubidium atoms in a magnetic trap. In *Fourteenth International Conference on Atomic Physics (ICAP XIV)*, page 7. University of Colorado, Boulder, 1994.
- [115] T.W. Hijmans, O.J. Luiten, I.D. Setija und J.T.M. Walraven. Optical cooling of atomic hydrogen in a magnetic trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6:2235, 1989.
- [116] B. Desruelle, V. Boyer, S.G. Murdoch, G. Delannoy, P. Bouyer und A. Aspect. Interrupted evaporative cooling of ^{87}Rb atoms trapped in a high magnetic field. *Phys. Rev. A*, 60:R1759, 1999.
- [117] S. van Staa. Entwicklung und Realisierung einer optischen Dipolfalle für ^{87}Rb Bose-Einstein Kondensate. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2003.
- [118] Y. Castin und R. Dum. Bose-Einstein condensates in time-dependent traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77:5315, 1996.
- [119] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend und W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78:582, 1997.
- [120] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S.L. Rolston und W.D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283:1706, 1999.
- [121] I. Bloch, T.W. Hänsch und T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, 82:3008, 1999.
- [122] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl und R. Grimm. Bose-Einstein condensation of cesium. *Science*, 299:2232, 2002.
- [123] D.M. Stamper-Kurn, M.R. Andrews, A.P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger und W. Ketterle. Optical confinement of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2027, 1998.
- [124] M.D. Barrett, J.A. Sauer und M.S. Chapman. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 87:010404, 2001.

-
- [125] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn und W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [126] J.L. Roberts, N.R. Claussen, J.P. Burke, C.H. Greene, E.A. Cornell und C.E. Wieman. Resonant magnetic field control of elastic scattering of cold ^{85}Rb . *Phys. Rev. Lett.*, 81:5109, 1998.
- [127] K. Diekmann, C.A. Stan, S. Gupta, Z. Hazibabic, C.H. Schunck und W. Ketterle. Decay of an ultracold fermionic lithium gas near a Feshbach resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 89:203201, 2002.
- [128] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Dürr, G. Rempe, E.G.M. van Kempen und B.J. Verhaar. Feshbach resonances in rubidium 87: Precision measurement and analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 89:283202, 2002.
- [129] M. Erhard, H. Schmaljohann, J. Kronjäger, K. Bongs und K. Sengstock. Measurement of a mixed spin channel Feshbach resonance in rubidium 87. *Phys. Rev. A*, 69:032705, 2004.
- [130] E.A. Donley, N.R. Clausen, S.T. Thompson und C.E. Wieman. Atom-molecule coherence in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 417:529, 2002.
- [131] C. Chin, A.J. Kerman, V. Vuletic und S. Chu. Sensitive detection of cold cesium molecules formed on Feshbach resonances. *Phys. Rev. Lett.*, 90:033201, 2003.
- [132] J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl und R. Grimm. Preparation of a pure molecular quantum gas. *Science*, 301:1510, 2003.
- [133] S. Dürr, T. Volz, A. Marte und G. Rempe. Observation of molecules produced from a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 92:020406, 2004.
- [134] K. Xu, T. Mukaiyama, J.R. Abo-Shaeer, J.K. Chin, D.E. Miller und W. Ketterle. Formation of quantum-degenerate sodium molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 91:210402, 2003.
- [135] D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, A.P. Chikkatur, S. Inouye, J. Stenger und W. Ketterle. Reversible formation of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 81:2194, 1998.
- [136] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M.L. Chiofalo und M.P. Tosi. Superfluid and dissipative dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic optical potential. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4447, 2001.
- [137] T.L. Gustavson, A.P. Chikkatur, A.E. Leanhardt, A. Görlitz, A. Gupta, D.E. Pritchard und W. Ketterle. Transport of Bose-Einstein condensates with optical tweezers. *Phys. Rev. Lett.*, 88:020401, 2001.

-
- [138] J. Dalibard und C. Cohen-Tannoudji. Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2:1707, 1985.
- [139] R. Grimm, M. Weidemüller und Y.B. Ovchinnikov. Optical dipole traps for neutral atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 42:95, 2000.
- [140] A.E. Leanhardt, T.A. Pasquini, M. Saba, A. Schirotzek, Y. Shin, D. Kielpinski, D.E. Prichard und W. Ketterle. Cooling Bose-Einstein condensates below 500 picokelvin. *Science*, 301:1513, 2003.
- [141] J.-P. Martikainen. Bose-Einstein condensation in shallow traps. *Phys. Rev. A*, 63:043602, 2001.
- [142] J. Söding, D. Guéry-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori und J. Dalibard. Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate. *Appl. Phys. B*, 69:257, 1999.
- [143] N. Poli, R.J. Brecha, G. Roati und G. Modugno. Cooling atoms in an optical trap by selective parametric excitations. *Phys. Rev. A*, 65:021401, 2002.
- [144] M. Kumakura, Y. Shirahata, Y. Takasu, Y. Takahashi und T. Yabuzaki. Shaking-induced cooling of cold atoms in a magnetic trap. *Phys. Rev. A*, 68:021401, 2003.
- [145] N.V. Vitanov, T. Halfmann, B.W. Shore und K. Bergmann. Laser-induced population transfer by adiabatic passage techniques. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 52:763, 2001.
- [146] M. Erhard. Dissertation, Universität Hamburg, unveröffentlicht.
- [147] M.-S. Chang, C.D. Hamley, M.D. Barrett, J.A. Sauer, K.M. Fortier, W. Zhang, L. You und M.S. Chapman. Observation of spinor dynamics in optically trapped ^{87}Rb Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 92:140403, 2004.
- [148] P.W. Anderson und G. Toulouse. Phase slippage without vortex cores: Vortex textures in superfluid ^3He . *Phys. Rev. Lett.*, 38:508, 1977.
- [149] N.D. Mermin und T.-L. Ho. Circulation and angular momentum in the a phase of superfluid Helium-3. *Phys. Rev. Lett.*, 36:594, 1976.
- [150] A.E. Leanhardt, Y. Shin, D. Kielpinski, D.E. Pritchard und W. Ketterle. Coreless vortex formation in a spinor Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 90:140403, 2003.
- [151] M. Möttönen, N. Matsumoto, M. Nakahra und T. Ohmi. Continuous creation of a vortex in a Bose-Einstein condensate with hyperfine spin $F=2$. *J. Phys.: Condens. Matter*, 49:13481, 2002.
- [152] A.E. Leanhardt, A. Görlitz, A.P. Chikkatur, D. Kielpinski, Y. Shin, D.E. Pritchard und W. Ketterle. Imprinting vortices in a Bose-Einstein condensate using topological phases. *Phys. Rev. Lett.*, 89:190403, 2002.

-
- [153] H. Pu und P. Meystre. Creating macroscopic atomic Einstein-Podolsky-Rosen states from Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3987, 2000.
- [154] L.-M. Duan, A. Sørensen, J.I. Cirac und P. Zoller. Squeezing and entanglement of atomic beams. *Phys. Rev. Lett.*, 85:3991, 2000.
- [155] A. Sørensen, L.-M. Duan, J.I. Cirac und P. Zoller. Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates. *Nature*, 409:63, 2001.
- [156] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T.W. Hänsch und I. Bloch. Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms. *Nature*, 425:937, 2003.
- [157] P.J. Mohr und B.N. Taylor. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998. *Rev. Mod. Phys.*, 72:351, 2000.
- [158] D.R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 81st ed.* CRC Press, Boca Raton, 2000.
- [159] M.P. Bradley, J.V. Porto, S. Rainville, J.K. Thomsen und D.E. Pritchard. Penning trap measurement of the masses of ^{133}Cs , $^{87,85}\text{Rb}$, and ^{23}Na with uncertainties ≤ 0.2 ppb. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4510, 1999.
- [160] S.A. Lee, J. Helmcke, J.L. Hall und B.P. Stoicheff. Doppler-free two-photon transitions to rydberg levels: convenient, useful, and precise reference wavelengths for dye lasers. *Opt. Lett.*, 3:141, 1978.
- [161] H.M.J.M. Boesten, A. Moerdijk und B.J. Verhaar. Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments. *Phys. Rev. A*, 54:R29, 1996.
- [162] J. Ye, S. Swartz, P. Junger und J.L. Hall. Hyperfine structure and absolute frequency of the ^{87}Rb $5P_{3/2}$ state. *Opt. Lett.*, 21:1280, 1996.
- [163] U. Volz und H. Schmoranzner. Precision lifetime measurements on alkali atoms and on helium by beam-gas-laser spectroscopy. *Physica Scripta*, T65:48, 1996.
- [164] S. Bize, Y. Sortais, M.S. Santos, C. Mandache, A. Clairon und C. Salomon. High-accuracy measurement of the ^{87}Rb ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain. *Europhys. Lett.*, 45:558, 1999.
- [165] G.P. Barwood, P. Gill und W.R.C. Rowley. Frequency measurements on optically narrowed Rb-stabilized laser diodes at 780 nm and 795 nm. *Appl. Phys. B*, 53:142, 1991.

Publikationsliste

- H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J.J. Arlt, K. Bongs und K. Sengstock,
Dynamics of $F=2$ Spinor Bose-Einstein Condensates,
Physical Review Letters, Band 92, Nummer 4, Seite 040402, 2004
- M. Erhard, H. Schmaljohann, J. Kronjäger, K. Bongs und K. Sengstock,
Measurement of a Mixed Spin Channel Feshbach Resonance in Rubidium 87,
Physical Review A, Band 69, Seite 0320705, 2004
- H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, J.J. Arlt, K. Bongs und K. Sengstock,
Magnetism in Ultracold Quantum Gases,
angenommen zur Veröffentlichung in Laser Physics
- H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, J.J. Arlt, K. Bongs und K. Sengstock,
Spin Evolution in Ultracold Quantum Gases,
angenommen zur Veröffentlichung in Journal of Modern Optics
- M. Erhard, H. Schmaljohann, J. Kronjäger, K. Bongs und K. Sengstock,
Bose-Einstein Condensation at Constant Temperature,
eingereicht bei Physical Review Letters

Danksagung

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Experimente wären ohne die Hilfe von einer Vielzahl von Menschen so nicht durchführbar gewesen. Diesen gebürt aus den unterschiedlichsten Gründen mein Dank :

- **Prof. Dr. Klaus Sengstock** für die Möglichkeit in diesem interessanten Gebiet der Physik meine Doktorarbeit durchführen zu können. Mit zahlreichen Anregungen und hilfreichen Diskussionen im Verlauf meiner Promotion hat er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.
- **Prof. Dr. Günter Huber** für die Übernahme des Zweitgutachtens dieser Arbeit.
- **Prof. Dr. Jan Arlt** für die anfängliche Unterstützung im Schweinelabor und den Glückskeks mit dem Inhalt :*Think of ease, but work on.* (Jetzt am 1:6 Aufteiler platziert!)
- **Dr. Kai Bongs** für die fruchtbaren Diskussionen und das stete Interesse an den neusten Entwicklungen im Labor.
- **Michael Erhard** für die sehr effektive und engagierte Zusammenarbeit beim Aufbau des Experimentes und die guten Diskussionen über *die Physik* während der Messungen. Auch wenn andere die Hitze *des Gefechtes* teilweise nicht aushielten, waren die Ergebnisse immer sehr produktiv und haben uns beim Experimentieren stets weitergebracht.
- **Markus Kottke** für die anfängliche Zusammenarbeit in Hannover und seinem Einsatz bei der Realisierung der Magnetfalle.
- **Jochen Kronjäger** für die nützlichen Diskussionen und die Unterstützung am Experiment kurz DAvor und dann DANach natürlich.
- **Sebastian van Staa** für die Verstärkung des BEC-Teams während seiner Diplomarbeit.
- **der gesamten Arbeitsgruppe** von Prof. Dr. Sengstock für den hilfsbereiten Umgang miteinander.
- **Frank Jonas und seinem Team** für die schnelle Umsetzung meiner Zeichnungen in drei-dimensionale Gebilde und die nette Atmosphäre in der *Museumswerkstatt*, sowie **der Werkstatt um Herrn Heidekrüger in Hannover** für die Laborgrundausrüstung in Sachen Basen, Prätzen und und und der oberen Ebene.
- **dem hannoveraner BEC-Team** für das anfängliche Ausleihen aller möglichen Laboruntensilien, **allen hannoveraner Kühlern** für die sehr angenehme Arbeitatmosphäre und insbesondere **Peter Spoden** dafür, dass er mir *meine Frauen-WG* in Hannover nicht wegschnappte.
- und nicht zuletzt **meinen Freunden, meinem Bruder Heiko und meiner Mutter Christa Maria** ohne sie wären die Buchstaben sicher nicht da, wo sie jetzt sind.