

# Kettengeometrien über Jordan-Systemen und zugehörige Morphismen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades  
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
Fachbereich Mathematik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von  
Maryna Bibik, geb. Kalmanovych  
aus Kertsch/Ukraine

Hamburg, 2015

Tag der Disputation:

21. Oktober 2015

Folgende Gutachterinnen und Gutachter  
empfehlen die Annahme der Dissertation:

Prof. Dr. Andrea Blunck

Prof. Dr. Hans Havlicek

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>17</b>
1.1 Projektive Geraden über Ringen und Jordan-Systemen . . . . .	17
1.2 Kettengeometrien und Kettenräume . . . . .	29
1.3 Morphismen von Kettenräumen . . . . .	34
1.4 Projektive Darstellungen . . . . .	38
<b>2 Eine Beispielklasse: Jordan-Systeme in <math>K_{3,3}</math> und zugehörige projektive Darstellungen</b>	<b>47</b>
2.1 Zweidimensionale Jordan-Systeme in $K_{3,3}$ . . . . .	48
2.2 Dreidimensionale Jordan-Systeme in $K_{3,3}$ . . . . .	52
2.3 Struktursätze über Jordan-Systeme in $K_{3,3}$ . . . . .	63
2.4 Geometrische Interpretation von Jordan-Systemen in $K_{3,3}$ . . . . .	69
2.4.1 Projektive Darstellungen von zweidimensionalen Jordan-Systemen . . . . .	72
2.4.2 Projektive Darstellungen von dreidimensionalen Jordan-Systemen . . . . .	81
<b>3 Projektive Geraden über Jordan-Systemen und zugehörige Kettenräume</b>	<b>93</b>
3.1 Einleitung . . . . .	93
3.2 Die Projektive Gerade über einem nicht notwendigerweise starken Jordan-System . . . . .	95
3.3 Endlichdimensionale Jordan-Systeme . . . . .	111

3.4	Kettenräume über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen . . . . .	128
<b>4</b>	<b>Jordan-Homomorphismen und Morphismen von Distanzräumen</b>	<b>137</b>
4.1	Jordan-Homomorphismen von Matrizenalgebren . . . . .	137
4.2	Jordan-Homomorphismen von Jordan-Systemen hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen . . . . .	146
4.3	Interpretation der Morphismen von Distanzräumen hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen in einem Graßmann-Raum	165
<b>5</b>	<b>Homotopismen und Morphismen von Kettenräumen</b>	<b>175</b>
5.1	Jordan-Homomorphismen von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen und induzierte Morphismen . . . . .	176
5.2	Homotopismen von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen und induzierte Morphismen . . . . .	186
5.3	Algebraische Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien über Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen . . . . .	206
<b>6</b>	<b>Beweise der Hilfssätze</b>	<b>253</b>
6.1	Hilfssatz 1 . . . . .	253
6.2	Hilfssatz 2 . . . . .	259
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>265</b>

# Einleitung

Kettengeometrien sind geometrische Strukturen, die einige klassische Kreisgeometrien verallgemeinern. In ihrer üblichen (algebraischen) Darstellung lassen sich Kettengeometrien im Kontext der projektiven Geometrie über Ringen finden (siehe z. B. [5], [26], [42], [65], [66]). Beide Begriffe stehen in einem engen Zusammenhang (vgl. [42, S. 783]): Ist  $K$  ein Körper<sup>i</sup> und  $R$  eine  $K$ -Algebra, so findet man auf der projektiven Gerade  $PG(1, R)$  eine Inzidenzstruktur  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ , deren Punktmenge  $\mathcal{P}$  die projektive Gerade selbst ist und die Menge  $\mathcal{B}$  der Blöcke aus allen  $K$ -Untergeraden besteht. Diese Inzidenzstruktur ist genau die **Kettengeometrie über**  $(K, R)$ , welche mit  $\Sigma(K, R)$  bezeichnet wird. Die Blöcke werden **Ketten** genannt. Mit  $\mathbb{P}(R)$  und  $\mathfrak{C}(K, R)$  bezeichnet man die Punktmenge bzw. Kettenmenge von  $\Sigma(K, R)$ .

Der Begriff der Kettengeometrie entstand beim Versuch, drei wesentlich verschiedene Geometrien, nämlich die **Möbius-Geometrie**, die **Laguerre-Geometrie** und die **pseudo-euklidische (Minkowski) Geometrie**, systematisch zu untersuchen und einheitlich darzustellen. Alle drei Geometrien sind schon seit langer Zeit bekannt und wurden zunächst mit reellen Algebren beschrieben und später etwas allgemeiner, aber immer noch getrennt untersucht, bevor Walter Benz ihre gemeinsame Struktur erkannt und axiomatisch beschrieben hat. Im Fall von zweidimensionalen Algebren kann man die Möbius-, die Laguerre- bzw. die Minkowski-Geometrie grob interpretieren als Geometrie derjenigen ebenen Schnitte einer Kugel, eines Kegels bzw. eines einschaligen Hyperboloids, welche mehr als einen Punkt, aber keine Geraden enthalten (vgl. [6]). Nach W. Benz werden sie auch „Benzebenen“

---

<sup>i</sup>Im Weiteren sei  $K$  stets ein kommutativer Körper. Sonst wird explizit ausgewiesen, wenn Kommutativität nicht vorausgesetzt wird.

genannt. Um uns eine bessere Vorstellung über Kettengeometrien zu schaffen, beschreiben wir kurz alle drei zweidimensionalen Geometrien<sup>ii</sup> im reellen Fall:

- (1) Die Punktmenge der reellen ebenen Möbius-Geometrie (Möbius-Ebene), auch Geometrie der Kreise genannt, kann als die Menge aller Punkte der Einheitskugel im Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$  dargestellt werden. In diesem Fall besteht die Menge der Ketten aus allen Kreisen auf der Einheitskugel. Formal kann man die Möbius-Ebene mittels der Quadrik  $\mathcal{Q}_M$  im dreidimensionalen reellen projektiven Raum zur quadratischen Form  $Q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$  beschreiben. Diese Quadrik besteht nur aus Punkten der Form  $\mathbb{R}(x_1, x_2, x_3, 1)$  und entspricht daher der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$  (siehe [26, 5.1.4(1)]). Die Menge aller ebenen Schnitte von  $\mathcal{Q}_M$ , die mehr als einen Punkt enthalten, entspricht also der Menge aller Kreise auf der Einheitskugel.

Eine andere Darstellung der reellen Möbius-Geometrie erhält man mittels der sogenannten **stereographischen Projektion** der Einheitskugel auf eine Ebene  $\mathcal{E}_0$  (siehe Abbildung 1). Hierbei wird der Nordpol  $n$  der Einheitskugel auf den Punkt  $\infty$  projiziert. Die Kreise durch  $n$  gehen auf sogenannte **erweiterte Geraden**  $G \cup \{\infty\}$  über, wobei  $G \subseteq \mathcal{E}_0$  eine euklidische Gerade ist. Die Projektionsbilder aller weiteren Kreise sind gewöhnliche euklidische Kreise in  $\mathcal{E}_0$ . Die Punktmenge dieses Modells der reellen Möbius-Geometrie ist also  $\mathcal{E}_0 \cup \{\infty\}$ . Hierbei kann die Ebene  $\mathcal{E}_0$  mit der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen identifiziert werden, so dass die Punktmenge der Möbius-Ebene als die projektive Gerade  $\mathbb{P}(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  mit  $\infty := \frac{1}{0}$  algebraisch beschrieben werden kann (siehe [34, 1.6]). Mehr dazu findet man auch in Kapitel 0 des Buchs [26].

- (2) Die reelle ebene Laguerre-Geometrie (Laguerre-Ebene) kennt man auch als die Geometrie von Speeren und Zykeln: Ist eine euklidische Ebene

---

<sup>ii</sup>In [61] findet man Kettengeometrien über dreidimensionalen kommutativen  $\mathbb{R}$ -Algebren. Die dreidimensionale reelle Laguerre-Geometrie und ihre Visualisierung wird ausführlich in [38] behandelt.

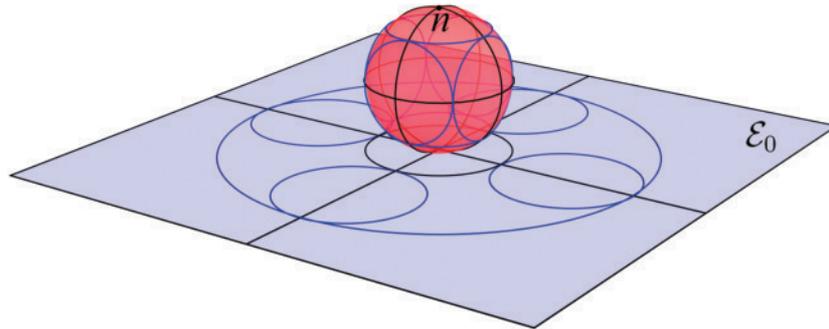


Abbildung 1: Stereographische Projektion

$\mathcal{E}$  gegeben, dann versteht man unter einem Speer (in  $\mathcal{E}$ ) eine orientierte Gerade in  $\mathcal{E}$  und unter einem Zykel (in  $\mathcal{E}$ ) einen orientierten Kreis bzw. einen Punkt (als Kreis vom Radius 0) von  $\mathcal{E}$  (siehe [5, S. 11]). Hierbei kann man jeden Zykel  $z$  auch als eine Speermenge auffassen, und zwar in dem Sinne, dass  $z$  aus solchen Speeren  $S$  besteht, welche diesen Zykel berühren (in Zeichen  $S - z$ ), d.h. (siehe Abbildung 2):

- Ist  $z$  ein orientierter Kreis, dann gilt  $S - z$ , wenn die dem Speer  $S$  zugrunde liegende Gerade (die Trägergerade von  $S$ ) Tangente des dem Zykel  $z$  zugrunde liegenden Kreises (des Trägerkreises von  $z$ ) ist, und die Orientierungen von  $S$  und  $z$  im Berührungspunkt übereinstimmen;
- Ist  $z$  ein Punkt, dann gilt  $S - z$ , wenn  $z$  auf der Trägergerade von  $S$  liegt.

Für jeden Zykel  $z$  schreibt man also  $z = \{S \mid S - z\}$  (siehe [5, S. 12]).

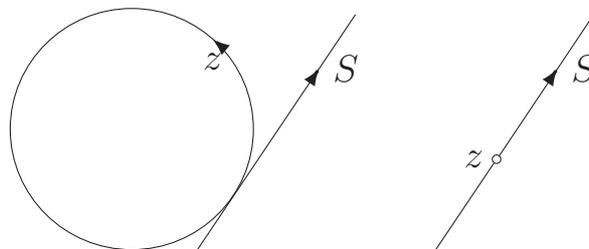


Abbildung 2: Die Berührung von Speer  $S$  und Zykel  $z$

Insbesondere gibt es für zwei verschiedene Speere  $S$  und  $T$  genau dann keinen Zykel  $z$  mit  $S, T \in z$ , wenn ihre Trägergeraden parallel sind und

die Orientierungen von  $S$  und  $T$  übereinstimmen. In diesem Fall nennt man  $S$  und  $T$  parallel (in Zeichen  $S||T$ ) (siehe [5, Satz 1.1]).

Die Menge aller Speere einer euklidischen Ebene stellt die Punktmenge der Laguerre-Ebene dar. Die Menge aller Zykeln ist die Kettenmenge der Laguerre-Ebene und die Berührung von Speer und Zykel beschreibt die Inzidenzrelation.

L. J. Smid und B. L. van der Waerden haben in [63, S. 774] eine Abbildung konstruiert, welche die Speere eindeutig auf die von der Spitze verschiedenen Punkte eines quadratischen Kegels abbildet. Die Zykeln gehen dabei auf die nicht-entarteten ebenen Schnitte über, d.h. solche Schnitte des Kegels mit Ebenen, welche die Spitze nicht enthalten (vgl. auch [15]). Also liegt der Laguerre-Ebene die Quadrik  $\mathcal{Q}_L$  in  $PG(3, \mathbb{R})$  zur quadratischen Form  $Q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  zugrunde (siehe [26, 5.1.4(2)]). Hierbei ist  $\mathcal{Q}_L$  ein Kegel mit Spitze  $s = \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$ . Daher ist  $\mathcal{Q}_L \setminus \{s\}$  die Punktmenge der Laguerre-Ebene.

Mittels einer geeigneten stereographischen Projektion des Kegels erhält man das **isotrope Modell** der Laguerre-Ebene: Hierbei gehen die Punkte des Kegels (ohne die Spitze) auf die Elemente von  $\mathcal{E} \cup \mathbb{R}$  über, wobei  $\mathcal{E}$  die reelle euklidische  $xy$ -Ebene ist. Die Elemente von  $\mathcal{E}$  und  $\mathbb{R}$  nennt man eigentliche bzw. uneigentliche isotrope Punkte. Die Laguerre-Kreise werden analog isotrope Kreise genannt. Hierbei wird ein isotroper Kreis als eine Menge  $\{(x, y) \mid y + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\} \cup \{\alpha\}$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  dargestellt und kann also auf zweierlei Art beschrieben werden (siehe [5, S. 19]):

- als die Menge der Punkte einer Parabel in  $\mathcal{E}$ , deren Achse parallel zur  $y$ -Achse ist, zusammen mit einem uneigentlichen Punkt, welcher sich in eindeutiger Weise aus dem Parameter der Parabel ergibt, oder
- als die Menge einer Gerade, welche nicht parallel zur  $y$ -Achse ist, zusammen mit dem uneigentlichen Punkt 0.

Man kann zeigen, dass die Menge  $\mathcal{E} \cup \mathbb{R}$  aller isotropen Punkte mit der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(\mathbb{R}[\varepsilon]) := \mathbb{R}[\varepsilon] \cup \left\{ \frac{1}{y\varepsilon} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$  über der  $\mathbb{R}$ -Algebra

der **dualen Zahlen**  $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R} + \mathbb{R}\varepsilon$  mit  $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ , identifiziert werden kann. Dabei entspricht  $\mathbb{R}[\varepsilon]$  der Menge aller eigentlichen isotropen Punkte und  $\left\{ \frac{1}{y\varepsilon} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$  beschreibt alle uneigentlichen isotropen Punkte der Geometrie (siehe [5, S. 26-28]).

In [5] findet man auch weitere Modelle der Laguerre-Ebene.

- (3) Die ebene Minkowski-Geometrie (Minkowski-Ebene) kann man ebenso mit Hilfe einer Quadrik darstellen, nämlich mittels der hyperbolischen Quadrik  $\mathcal{Q}_A$  in  $PG(3, \mathbb{R})$  zur quadratischen Form  $Q : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ . Wählen wir  $x_4 = 0$  als Fernebene, so erhalten wir im Affinen das einschalige Hyperboloid (siehe [5, S. 49]). Die Punkte der hyperbolischen Quadrik bilden die Punktmenge der Minkowski-Geometrie. Die Kreismenge besteht aus allen ebenen Schnitten von  $\mathcal{Q}_A$ , die keine Geraden enthalten. Daher kann es durch zwei verschiedene Punkte einen Kreis aus der Kreismenge der Minkowski-Ebene nur dann geben, wenn ihre Verbindungsgerade eine Sekante ist. Bekanntlich gehen durch jeden Punkt von  $\mathcal{Q}_A$  genau zwei Geraden. Jede solche Gerade ist in einer der beiden Familien  $\mathcal{R}_1$  und  $\mathcal{R}_2$  von paarweise windschiefen Geraden enthalten. Hierbei überdeckt jede dieser Familien jeweils die hyperbolische Quadrik (vgl. [15, 2.30]).

Üblich ist aber das klassische Modell der Minkowski-Ebene, nämlich das **Hyperbel-Modell**: In der reellen Anschauungsebene stellt jedes geordnete Paar  $(a, b)$  aus der Menge  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  einen Punkt dar, den man in diesem Zusammenhang einen eigentlichen pseudo-euklidischen Punkt nennt. Zu uneigentlichen pseudo-euklidischen Punkten gehören das Symbol  $\infty$  sowie alle zu  $y = x$  und  $y = -x$  parallelen Geraden. Erweitert man alle weiteren Geraden der Anschauungsebene mit dem Punkt  $\infty$ , so erhält man (einige) pseudo-euklidische Kreise. Zum zweiten Typ von pseudo-euklidischen Kreisen zählen alle Hyperbeln der Gleichung  $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = \gamma \neq 0$ , wobei die Asymptoten als uneigentliche Punkte stets dazu genommen werden (siehe [6, §2]). Diese Darstellung ist der obigen Geometrie der ebenen Schnitte isomorph (siehe [6, 3.3, 3.4]).

Allgemein liegt der Minkowski-Ebene die zweidimensionale reelle Algebra der **anormal-komplexen Zahlen** zugrunde, welche zu dem direkten Produkt  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  isomorph ist. Bei der algebraischen Darstellung der Minkowski-Ebene über  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  wird die projektive Gerade  $\mathbb{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  mit dem direkten Produkt  $\mathbb{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(\mathbb{R}) = (\mathbb{R} \cup \infty) \times (\mathbb{R} \cup \infty)$  identifiziert (vgl. 1.1.13). Für weitere Details dieser Darstellung sowie weitere Modelle verweisen wir auf [5, §4].

Durch aufmerksame Betrachtung aller drei Geometrien kann man merken, dass die Punkte, die in Ketten zusammengefasst werden, stets zueinander in einer bestimmten Relation stehen. Im Fall der Möbius-Ebene ist das die Relation „verschieden“: durch je zwei verschiedene Punkte der Einheitskugel gibt es trivialerweise mindestens einen Kreis. In der Laguerre-Ebene ist das die Relation „nicht parallel“, wenn man das Modell von Speeren und Zykeln zugrunde legt. Für Minkowski-Geometrie kann man diese Relation dadurch beschreiben, dass die Punkte verschieden sind und ihre Verbindungsgerade weder in  $\mathcal{R}_1$  noch in  $\mathcal{R}_2$  enthalten ist (solche Punkte heißen „nicht benachbart“). Alle drei Relationen sind symmetrisch und antireflexiv, wie man sich leicht überlegen kann. Allgemein nennt man diese Relation **distant** (in Zeichen  $\Delta$ ) und es gilt: Ist  $R$  eine  $K$ -Algebra, so geht durch je drei paarweise distante Punkte von  $\Sigma(K, R)$  genau eine Kette aus  $\mathfrak{C}(K, R)$ . Eine detaillierte Einführung in die Thematik Distanzräume und Kettengeometrien geben wir in Kapitel 1 dieser Arbeit.

Obwohl Kettengeometrie eines der heute aktiven Teilgebiete der Inzidenzgeometrie ist, gibt es jedoch noch viele offene Fragen. In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit den zwei klassischen Fragestellungen (siehe unten).

Über welchen algebraischen Strukturen eine Kettengeometrie definiert werden kann, scheint die allererste Frage zu sein. Die projektive Gerade kann man über jedem beliebigen Ring  $R$  definieren (siehe Abschnitt 1.1 sowie [17], [19]). Auf übliche Art und Weise (siehe 1.2.1) definiert man die Kettengeometrie  $\Sigma(S, R)$ , wenn  $R$  eine Algebra über einem Unterring  $S \leq R$  ist. Ist nun  $R$  ein Ring, der einen nicht notwendigerweise kommutativen Unterkörper  $F$  mit  $1 \in F$  enthält, so dass  $R$  keine  $F$ -Algebra ist, so erhalten wir die verall-

gemeinerte Kettengeometrie  $\Sigma(F, R)$ , welche sich dadurch auszeichnet, dass je drei paarweise distante Punkte auf mehr als einer Kette liegen können (siehe 1.2.3). Die schönsten Kettengeometrien liefern Algebren über Körpern. In diesem Fall sind sie sogar Kettenräume, d.h. Kettengeometrien, welche bestimmte Axiome erfüllen (siehe 1.2.4). Beispiele für Kettenräume findet man z. B. in [42] und [43]. Zusätzliche Eigenschaften, die sich in vielen Beweisen als hilfreich erwiesen haben (siehe z. B. [11]), besitzen Kettengeometrien über stabilen und starken  $K$ -Algebren (siehe 1.1.21, 1.1.25).

Außer Kettengeometrien über  $K$ -Algebren werden auch Unterräume (siehe 1.2.9) von diesen Kettengeometrien und diesen Unterräumen zugrunde liegende Unterstrukturen von  $K$ -Algebren studiert (siehe z. B. [11], [26], [24]). In [43] werden von A. Herzer alle nichttrivialen zusammenhängenden Unterräume von Kettengeometrien über starken  $K$ -Algebren beschrieben. Dort wird gezeigt, dass allen solchen Unterräumen ein sogenanntes starkes Jordan-System<sup>iii</sup> zugrunde liegt (siehe [43, Theorem 2]). Später führt A. Blunck in [26] Kettengeometrien über Unterhalbgebren und starken Jordan-Systemen in  $K$ -Algebren allgemein ein, wobei die projektive Gerade über einem starken Jordan-System  $J$  entsprechend mit  $\mathbb{P}(J)$  bezeichnet wird (siehe 1.1.26, 1.1.27 und 1.1.29). Einige Beispiele für Kettengeometrien über Jordan-Systemen findet man auch in [66]: Dort werden von Z.-X. Wan Kettengeometrien über Matrizenringen sowie Jordan-Systemen hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen im Kontext der „Geometrie der Matrizen“ beschrieben.

Wie man die projektive Gerade bzw. Kettengeometrie über nicht starken Jordan-Systemen allgemein definieren kann, wurde bisher nicht untersucht. In diesem Zusammenhang setzen wir uns das erste Ziel dieser Arbeit: *Studium bzw. Definition der projektiven Gerade und Kettengeometrien über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen*. Man beachte, dass ein Jordan-System stets in einer Algebra über einem Körper enthalten gedacht wird.

Es stellt sich zunächst die Frage, ob die schon bekannte Definition der

---

<sup>iii</sup>Im Vergleich zu Jordan-Systemen werden Jordan-Algebren viel öfter in unterschiedlichen Kontexten untersucht. Diese beiden Begriffe gehören aber zusammen: Ist  $J$  ein Jordan-System in einer  $K$ -Algebra mit  $\text{Char}K \neq 2$ , so wird  $J$  zu einer speziellen Jordan-Algebra, wenn man dem Jordan-System  $J$  die so genannte Jordanmultiplikation  $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$  zuordnet.

projektiven Gerade über einem starken Jordan-System (siehe 1.1.29) auch für nicht starke Jordan-Systeme im Kontext von Kettengeometrien allgemein geeignet ist, d.h. ob die projektive Gerade über einem nicht starken Jordan-System die Punktmenge einer Kettengeometrie ist. Um diese Frage zu beantworten, untersuchen wir in Kapitel 2 die Beispielklasse aller zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme in der Matrizenalgebra  $K_{3,3}$  aller  $3 \times 3$ -Matrizen mit Einträgen aus einem Körper  $K$  von Charakteristik  $\neq 2$ . Als Folgerung geben wir ein Beispiel eines (weder starken noch Jordan-abgeschlossenen) Jordan-Systems, über dem die projektive Gerade eine der Eigenschaften eines Unterraums verletzt (siehe 2.4.7), so dass wir auf die oben gestellte Frage sofort negativ antworten können. Als Nebenergebnis geben wir eine Klassifikation aller zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  (siehe Abschnitt 2.1 bzw. Abschnitt 2.2) und formulieren zwei Struktursätze (siehe 2.3.3, 2.3.5), welche alle Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  allgemein beschreiben.

Auf Grund der in Kapitel 2 erreichten Resultate folgt die Notwendigkeit, eine neue (besser geeignete) Definition der projektiven Gerade über einem nicht notwendigerweise starken Jordan-System in einer  $K$ -Algebra zu formulieren. Diese führen wir in Anlehnung an [19] in Kapitel 3 ein (siehe 3.2.4): Ist  $J$  ein Jordan-System, so bezeichnen wir nun die (neue) projektive Gerade über  $J$  mit  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Die neue Definition erweist sich sofort als geeigneter als die übliche (1.1.29): Das oben erwähnte Beispiel liefert mit der Punktmenge  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  eine Kettengeometrie, was natürlich zur weiteren Untersuchung in dieser Richtung motiviert. Außerdem stimmt die neu eingeführte Definition für starke Jordan-Systeme mit der üblichen Definition überein, so dass in diesem Fall alle schon bekannten Ergebnisse auch für  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  gelten.

Die gleiche Frage wird auch allgemein behandelt, d.h. unter welchen Voraussetzungen die beiden Mengen  $\mathbb{P}(J)$  und  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  gleich sind. Dafür führen wir analog zu der Definition eines stabilen Ringes den Begriff des stabilen Jordan-Systems in  $R$  ein (siehe 3.2.7) und zeigen, dass im Fall von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen  $J$  die Gleichheit  $\mathbb{P}(J) = \tilde{\mathbb{P}}(J)$  dazu äquivalent ist, dass  $J$  stabil in  $R$  ist (siehe 3.2.15). Diese Tatsache erweckt das Interesse dafür, wann ein Jordan-System in der entsprechenden Algebra stabil ist.

In Abschnitt 3.3 studieren wir in diesem Kontext endlichdimensionale Jordan-Systeme  $J$  in der Matrizenalgebra  $R = K_{n,n}$  über einem Körper  $K$ . Es wird bewiesen, dass im Fall  $|K| \geq n+1$  mit  $n \geq 2$  alle Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systeme in  $R$  stabil sind. Ob auch die Umkehrung gilt, ist leider immer noch unklar.

Zum Abschluss des Kapitels 3 zeigen wir, dass die von uns eingeführte projektive Gerade  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  tatsächlich ermöglicht, eine Kettengeometrie über  $J$  zu definieren, und zwar im Fall, dass  $J$  Jordan-abgeschlossen ist (siehe 3.4.5). Somit können wir auf die bisher in der Literatur stets verwendete Voraussetzung „stark“ verzichten. In folgenden Kapiteln konzentrieren wir uns auf Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme.

Die zweite klassische Fragestellung im Kontext von Kettengeometrien ist die algebraische Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien, d.h. solcher Abbildungen, welche Ketten auf Ketten überführen (siehe Abschnitt 1.3). Ein relevanter Aspekt dabei ist, über welchen Algebren bzw. anderen algebraischen Strukturen die jeweiligen Kettengeometrien definiert sind. Bisher wurden Morphismen von Kettengeometrien hauptsächlich über starken Algebren über Körpern sowie über in diesen Algebren enthaltenen starken Jordan-Systemen studiert. A. Blunck hat in [11] bewiesen, dass alle Morphismen von Kettengeometrien über starken Jordan-Systemen durch Homotopismen der zugrunde liegenden Jordan-Systeme algebraisch beschreibbar sind (siehe [11, 3.10]). Als Folgerung gilt eine analoge Aussage für Morphismen von Kettengeometrien über starken Algebren: in diesem Fall kann jeder Morphismus von Kettengeometrien durch Jordan-Homomorphismen der Algebren beschrieben werden (siehe [11, 3.13]).

Die Umkehrung dieses Problems, nämlich welche Abbildungen Morphismen von Kettengeometrien sowie die Distanzrelation erhaltende Abbildungen (auch  $\Delta$ -Morphismen genannt, siehe 1.1.9) induzieren, ist nicht weniger interessant. A. Blunck hat in [11] ebenso gezeigt, dass jeder Homotopismus von starken Jordan-Systemen einen Morphismus von Kettengeometrien induziert. Einige Jahre später haben A. Blunck und H. Havlicek in [20] bewiesen, dass jeder Jordan-Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  zwischen zwei beliebigen Ringen  $R, R'$  eine Abbildung  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  induziert, welche distante Punkte in

distante Punkte überführt. Besitzen  $R, R'$  jeweils einen (nicht notwendigerweise kommutativen) Unterkörper, so ist die induzierte Abbildung unter einer bestimmten Voraussetzung ein Morphismus von Kettengeometrien (siehe [20, Theorem 5.2]). Der Fall von nicht starken Jordan-Systemen wurde bisher aber auch in diesem Kontext noch nicht studiert. Daher lautet das zweite Ziel der vorliegenden Arbeit wie folgt: *Untersuchung und algebraische Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen.*

Analog wie oben stellt sich dabei die Frage, ob die schon bekannten Ergebnisse im Bezug auf Morphismen von Kettengeometrien über starken Algebren und Jordan-Systemen auf solche auch im nicht starken Fall übertragbar sind. Auf Grund der Tatsache, dass alle Morphismen von Kettengeometrien über starken Algebren durch Jordan-Homomorphismen induziert werden, betrachten wir Jordan-Homomorphismen etwas genauer. Zunächst studieren wir diese in Kapitel 4 am Beispiel von Matrizenalgebren gleicher Ordnung  $n \geq 2$  über beliebigen Körpern. Wir zeigen, dass jeder Jordan-Homomorphismus in diesem Fall entweder ein Homomorphismus oder ein Anti-Homomorphismus ist (siehe 4.1.5). Zusätzlich geben wir eine algebraische Beschreibung aller Homomorphismen bzw. Anti-Homomorphismen von Matrizenalgebren an (siehe 4.1.6). Danach untersuchen wir Jordan-Homomorphismen von einem Jordan-System  $H_n(K)$  hermitescher (und als Spezialfall symmetrischer) Matrizen in einen Matrizenring gleicher Ordnung über einem Körper  $K'$ , wobei nun  $\text{Char}K, \text{Char}K' \neq 2$  vorausgesetzt wird (siehe Abschnitte 4.1, 4.2). Um die algebraische Beschreibung aller solchen Jordan-Homomorphismen zu bestimmen, beweisen wir, dass jeder solche Jordan-Homomorphismus sich zu einem Homomorphismus und einem Anti-Homomorphismus der entsprechenden Matrizenalgebren eindeutig erweitern lässt (siehe 4.2.5, 4.2.6). Außerdem formulieren wir eine Bedingung, welche dazu äquivalent ist, dass hermitesche Matrizen unter einem Jordan-Homomorphismus wieder in hermitesche Matrizen abgebildet werden (siehe 4.2.7), wobei die gleiche Frage im bijektiven Fall schon von Z.-X. Wan in [66] untersucht wurde. Anschließend schauen wir uns die projektive Geometrie von  $K_{n,n}$  sowie  $H_n(K)$  genauer an: Für die oben beschriebenen Abbildungen beweisen wir, dass diese stets Morphismen

---

der entsprechenden Distanzräume induzieren, welche sowohl die Distanzrelation als auch die Adjazenzrelation (siehe 1.1.14, Abschnitt 1.4) auf den entsprechenden projektiven Geraden in beiden Richtungen invariant lassen. Zum Abschluss dieses Kapitels stellen wir eine geometrische Interpretation von den durch Jordan-Homomorphismen induzierten  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltenden Morphismen vor (siehe 1.1.7, 1.1.9). Dafür wird die Punktmenge der jeweiligen Kettengeometrie projektiv dargestellt und somit mit der Punktmenge  $\mathcal{G}$  eines Graßmann-Raumes (im Fall von Matrizenalgebren) bzw. mit einer gewissen Teilmenge von  $\mathcal{G}$  (im Fall von Jordan-Systemen hermitescher Matrizen) identifiziert (siehe Abschnitt 1.4). Das gibt uns die Möglichkeit, zur Theorie der Graßmann-Räume überzugehen.

Durch die Resultate aus Kapitel 4 inspiriert und in Anlehnung an [20] zeigen wir in Kapitel 5, dass jeder Jordan-Homomorphismus zwischen zwei Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen stets einen Morphismus von Kettengeometrien induziert (siehe 5.1.12). Die gleiche Aussage wird auch für Homotopismen zwischen Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen bewiesen (siehe 5.2.8). Im letzten Abschnitt des Kapitels 5 werden alle Morphismen von Kettengeometrien über Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen  $J, J'$  in Algebren  $(K, R)$  bzw.  $(K', R')$  algebraisch beschrieben, wobei vorausgesetzt wird, dass  $(K, R)$  endlichdimensional und damit in die Matrizenalgebra  $K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  eingebettet werden kann und es gilt  $|K| \geq n + 1$  (siehe 5.3.22). Insbesondere ist  $J$  unter diesen Voraussetzungen in  $R$  stabil (siehe 3.3.5).

In Kapitel 6 haben wir einige Lemmata und Sätze gesammelt, welche im Abschnitt 2.2 angewendet werden.

Alle Abbildungen aus der vorliegenden Arbeit wurden selbst mit Hilfe der folgenden Programme erstellt: Autodesk 3ds Max Design 2014, Chaos Group V-Ray 3.0, Blackmagic Design Fusion 7.7 und Adobe Photoshop CS6. Die Abbildungen aus Kapitel 1 wurden in Anlehnung an die Webseite der Technischen Universität Wien<sup>iv</sup> angefertigt.

---

<sup>iv</sup><http://www.geometrie.tuwien.ac.at/fg3/chaingeom.html>

## Danksagungen

Allererst möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Betreuerin Frau Prof. Dr. Andrea Blunck für Ihr Interesse, Ihre Geduld und unsere zahlreichen produktiven und zielführenden Diskussionen bedanken. Ohne Ihren wertvollen akademischen Rat wäre diese Arbeit nicht entstanden.

Außerdem danke ich allen Mitgliedern des Arbeitsbereichs Geometrie für die angenehme und freundliche Atmosphäre. Ich danke auch unserer Arbeitsgemeinschaft Geometrie für Gelegenheiten, meine Zwischenergebnisse vorzustellen und dazu ein Feedback zu bekommen.

Mein großer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Hans Havlicek aus der Technischen Universität Wien für die Zusage, mein Zweitgutachter zu sein, sowie für konstruktive und hilfreiche Bemerkungen und Verbesserungsvorschläge zu meiner Arbeit.

Zu guter Letzt geht mein besonderer Dank an meine Familie und insbesondere meine Eltern für ihre enorme Unterstützung während aller vergangenen Jahren meines Promotionsstudiums - ohne sie hätte ich meine Promotion nicht geschafft.

Während der ersten zwei Jahren meines Promotionsstudiums wurde ich finanziell durch ein Promotionsstipendium nach dem Hamburgischen Gesetz zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses gefördert.

# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Definitionen, Sätze und Bezeichnungen vorgestellt, die unter anderem in Artikeln [11], [12], [16], [17], [18] sowie im Buch [26] und im Handbook of Incidence Geometry [42] zu finden sind.

### 1.1 Projektive Geraden über Ringen und Jordan-Systemen

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit sei  $R$  stets ein assoziativer Ring mit  $1 \neq 0$ . Mit  $R^*$  und  $Z(R)$  seien die Gruppe aller invertierbaren Elemente in  $R$  bzw. das Zentrum von  $R$  bezeichnet. Die Elemente von  $R^*$  nennt man **Einheiten** und die Elemente von  $R \setminus R^*$  werden **Nichteinheiten** genannt. Bevor wir die projektive Gerade über  $R$  definieren können, stellen wir einige Grundbegriffe über Moduln vor (siehe [26, S. 10-15], [50, S. 187-195]).

**Definition 1.1.1.** *Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Linksmodul.*

- (1) *Eine Teilmenge  $\{x_i \mid i \in I\}$  von Elementen von  $M$  heißt eine **Basis** von  $M$ , falls die lineare Abbildung  $R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R_i \rightarrow M : (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$  mit  $R_i = R$  für alle  $i \in I$  bijektiv ist.*
- (2) *Besitzt  $M$  eine Basis  $\{x_1, \dots, x_n\}$ , dann heißt  $M$  **frei vom Rang  $n$** .*
- (3) *Ein Untermodul  $U$  von  $M$  heißt **zyklisch**, wenn es ein  $m \in M$  gibt, so dass  $U = Rm = \{rm \mid r \in R\}$  ist.*

Im Unterschied zu zwei Basen eines endlichdimensionalen Vektorraums<sup>i</sup> über einem Körper enthalten verschiedene Basen eines freien Moduls über einem beliebigen Ring nicht unbedingt gleich viele Elemente (siehe Beispiel 4.2 in [50, S. 194]). Man beachte, dass manche Autoren den Rang eines freien Moduls definieren als die Kardinalität einer Basis dieses Moduls unter der Voraussetzung, dass diese Kardinalität für je zwei Basen stets gleich ist (siehe z. B. Definition 4.4 in [50, S. 195]). In der obigen Definition wird das aber nicht gefordert. Beispiele für solche Moduln mit gleichmächtigen Basen sind Moduln über kommutativen Ringen ungleich dem Nullring (siehe Satz 4.3 in [50, S. 194]).

Für uns sind insbesondere freie  $R$ -Linksmoduln  $M$  vom Rang 2 relevant. Ist  $\{u, v\}$  eine feste Basis von  $M$ , dann kann  $M$  mittels eines  $R$ -Modul-Isomorphismus  $R^2 \rightarrow M : (x, y) \mapsto xu + yv$  mit dem Linksmodul  $R^2$  identifiziert werden, wie wir das im Weiteren auch stets machen werden (vgl. [26, 1.2.6(1)]).

Aus der klassischen projektiven Geometrie übernommen, definiert man die Punkte der projektiven Gerade über  $R$  als gewisse freie Untermoduln von  $R^2$  vom Rang 1. Nicht jedes Paar  $(a, b) \in R^2$  wird aber als ein Repräsentant eines Punktes der projektiven Gerade gewählt: Ein (zyklischer) Untermodul  $R(a, b) \subseteq R^2$  ist ein Punkt, wenn  $(a, b) \in R^2$  ein Element einer zweielementigen Basis von  $R^2$  ist (wie oben erwähnt, kann  $R^2$  i.Allg. auch Basen mit einer Mächtigkeit  $\neq 2$  besitzen) (siehe [35, 3.2.6]).

Analog wie im Fall von Vektorräumen über Körpern operiert die Gruppe  $GL_2(R)$  der invertierbaren  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen aus  $R$  in natürlicher Weise von rechts auf der Menge aller zyklischen Untermoduln von  $R^2$  und ist zu der Automorphismengruppe von  $R^2$  isomorph (siehe [26, 1.2.7]). Hierbei ist eine Matrix  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  mit  $x, y, z, w \in R$  genau dann invertierbar, wenn  $\{(x, y), (z, w)\}$  eine Basis von  $R^2$  ist. Damit wird die projektive Gerade über  $R$  wie folgt definiert<sup>ii</sup>:

<sup>i</sup>In der vorliegenden Arbeit ist unter einem Vektorraum stets ein Linksvektorraum gemeint.

<sup>ii</sup>Im Weiteren verwenden wir stets die Exponentialschreibweise für Abbildungen, d.h.  $a^\alpha$  bezeichnet das Bild von  $a$  unter der Abbildung  $\alpha$ .

**Definition 1.1.2.** Die **projektive Gerade** über einem Ring  $R$ , die mit  $\mathbb{P}(R)$  bezeichnet wird, ist die Bahn des freien zyklischen Untermoduls  $R(1, 0)$  unter der Operation von  $GL_2(R)$ :

$$\mathbb{P}(R) = \{R(1, 0)^\gamma \mid \gamma \in GL_2(R)\}.$$

Die Elemente von  $\mathbb{P}(R)$  werden Punkte genannt.

Mit anderen Worten ist  $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  genau dann, wenn eine Matrix in  $GL_2(R)$  existiert, welche das Paar  $(a, b)$  als erste Zeile hat<sup>iii</sup>. Das liefert die folgende Bemerkung (vgl. [35, 3.2.9]):

**Bemerkung 1.1.3.** Zwei Punkte  $R(a, b), R(c, d) \in \mathbb{P}(R)$  sind genau dann gleich, wenn es ein  $r \in R^*$  gibt, so dass  $(a, b) = r(c, d)$  ist.

Daraus folgt unmittelbar die Existenz von  $u, v \in R$  mit  $au + bv = 1$ . Wir benötigen noch eine Definition (vgl. [26, 1.4.4]):

**Definition 1.1.4.** Sei  $M$  ein  $R$ -Linksmodul. Das Element  $m \in M$  heißt *unimodular*, falls es eine Linearform  $\lambda$  von  $M$  gibt mit  $m^\lambda = 1$ .

Ist  $m = (a, b) \in R^2$ , so ist  $m$  genau dann unimodular, wenn  $x, y \in R$  existieren, so dass  $ax + by = 1$  ist.

Zusammenfassend gilt stets die folgende Bemerkung (vgl. [26, 1.4.5]):

**Bemerkung 1.1.5.** Sei  $R$  ein Ring. Ist  $p \in \mathbb{P}(R)$ , dann gibt es ein unimodulares  $(a, b) \in R^2$  mit  $p = R(a, b)$ .

Im Fall von kommutativen Ringen  $R$  gilt sogar die Umkehrung (vgl. [26, 1.4.7]):

**Bemerkung 1.1.6.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring, dann gilt  $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  genau dann, wenn  $(a, b) \in R^2$  unimodular ist.

---

<sup>iii</sup>I.Allg. kann man die Punkte von  $\mathbb{P}(R)$  auch mittels solcher Paare  $(a, b) \in R^2$  darstellen, für welche keine Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  existiert (siehe [17], [35, 3.2.8]). Solche Repräsentante möchten wir aber hier ausschließen.

Für weitere Beschreibung der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(R)$  brauchen wir den Begriff des (abstrakten) Distanzraums (vgl. [26, 1.1.1]):

**Definition 1.1.7.** Sei  $\mathbb{P}$  eine nichtleere Menge und  $\Delta \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$  eine Relation auf  $\mathbb{P}$ . Dann heißt das Paar  $(\mathbb{P}, \Delta)$  genau dann ein **Distanzraum**, wenn  $\Delta$  die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1)  $\Delta$  ist **symmetrisch**, d.h.  $p \Delta q$  impliziert stets  $q \Delta p$ ,
- (2)  $\Delta$  ist **antireflexiv**, d.h.  $p \not\Delta p$  für jedes  $p \in \mathbb{P}$  (mit  $\not\Delta$  wird dabei die Negation von  $\Delta$  bezeichnet).

Die Elemente von  $\mathbb{P}$  heißen **Punkte**, die Relation  $\Delta$  wird **Distanzrelation** genannt. Gilt  $p \Delta q$ , dann heißen die Punkte **distant**.

Dank der in 1.1.6 aufgezählten Eigenschaften der Distanzrelation  $\Delta$  können Distanzräume auch als (ungerichtete) Graphen aufgefasst werden. Die Punkte von  $\mathbb{P}$  sind dabei die Knoten und die ungeordneten Paare distanter Punkte sind die Kanten des zugehörigen **Distanzgraphen**. In der nächsten Definition stellen wir noch einige Grundbegriffe vor (vgl. [26, 1.1.3]):

**Definition 1.1.8.** Sei  $(\mathbb{P}, \Delta)$  ein Distanzraum. Dann heißt  $(\mathbb{P}, \Delta)$

- (1) **nichttrivial**, wenn  $\mathbb{P}$  drei paarweise distante Punkte enthält,
- (2) **stabil**, wenn es zu beliebigen Punkten  $p, q \in \mathbb{P}$  stets einen Punkt  $r \in \mathbb{P}$  gibt, so dass  $p \Delta r \Delta q$  gilt,
- (3) **zusammenhängend**, wenn es zu beliebigen Punkten  $p, q \in \mathbb{P}$  stets ein  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und die Punkte  $p_0, \dots, p_n$  gibt mit  $p_0 = p, p_n = q$  und  $p_{i-1} \Delta p_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  (d.h. wenn der zugehörige Distanzgraph zusammenhängend im Sinne der Graphentheorie ist).

Im Kontext von Distanzräumen muss man noch den Begriff des Morphismus zwischen Distanzräumen erwähnen (siehe [26, 1.1.4]):

**Definition 1.1.9.** Seien  $(\mathbb{P}, \Delta)$  und  $(\mathbb{P}', \Delta')$  Distanzräume. Eine Abbildung

$$\varphi : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}', \Delta')$$

nennt man **Morphismus von Distanzräumen** (kurz  $\Delta$ -Morphismus), wenn  $\varphi$  die Distanzrelation invariant lässt, d.h. für  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p \Delta q$  auch  $p^\varphi \Delta' q^\varphi$  gilt.

Ist der Morphismus  $\varphi : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}', \Delta')$  bijektiv, dann heißt  $\varphi$  **Isomorphismus** von Distanzräumen, wenn auch  $\varphi^{-1} : (\mathbb{P}', \Delta') \rightarrow (\mathbb{P}, \Delta)$  ein Morphismus von Distanzräumen ist.

Existiert ein Isomorphismus  $\varphi : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}', \Delta')$ , so heißen die Distanzräume  $(\mathbb{P}, \Delta)$  und  $(\mathbb{P}', \Delta')$  **isomorph**.

Ein Isomorphismus  $\varphi : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}, \Delta)$  heißt **Automorphismus** des Distanzraums  $(\mathbb{P}, \Delta)$ . Die Menge aller Automorphismen von  $(\mathbb{P}, \Delta)$  bildet bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, welche man mit  $\text{Aut}(\mathbb{P}, \Delta)$  bezeichnet.

Wir möchten wieder die projektive Gerade über einem Ring ins Zentrum unserer Betrachtung zurückgeben. Die projektive Gerade  $\mathbb{P}(R)$  ist mit einer Distanzrelation  $\Delta$  versehen, welche wie folgt definiert wird (siehe z. B. [16, S. 120-121]):

**Definition 1.1.10.** Zwei Punkte  $p = R(a, b)$  und  $q = R(c, d) \in \mathbb{P}(R)$  heißen **distant**, wenn sie zueinander komplementär als Untermoduln von  $R^2$  sind, d.h. wenn  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  gilt.

Nach Satz 1.4.1 in [26] gilt insbesondere:

**Bemerkung 1.1.11.** Die Relation  $\Delta$  stimmt genau dann mit der Relation  $\neq$  überein, wenn  $R$  ein Körper ist.

Offensichtlich ist die in 1.1.10 definierte Distanzrelation  $\Delta$  auf  $\mathbb{P}(R)$  wirklich symmetrisch und antireflexiv, so dass  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$  ein Distanzraum ist. Auf den Fall der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(K)$  über einem Körper möchten wir noch kurz eingehen.

**Bemerkung 1.1.12.** Sei  $K$  ein Körper, dann ist die projektive Gerade

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \{K(\lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in K, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\} \\ &= \{K(k, 1) \mid k \in K\} \cup \{R(1, 0)\}.\end{aligned}$$

Betrachtet man die Abbildung  $K \rightarrow \mathbb{P}(K) : k \mapsto K(k, 1)$ , dann ist sie offenbar injektiv und ihr Bild ist  $\{K(k, 1) \mid k \in K\}$ . Definiert man zusätzlich  $\infty := R(1, 0)$ , so kann die projektive Gerade  $\mathbb{P}(K)$  mit  $K \cup \{\infty\}$  identifiziert werden.

Als Beispiel betrachten wir die projektive Gerade über einem speziellen endlichen Ring:

**Beispiel 1.1.13.** Sei  $K = GF(2)$  und  $R = K \times K$ . Gemäß 1.1.6 haben die Punkte von  $\mathbb{P}(R)$  die Form  $R(a, b)$  mit  $ax + by = (1, 1)$  für  $x, y \in R$ . Deshalb besteht  $\mathbb{P}(R)$  aus den folgenden neun Punkten:  $R((1, 1), (0, 0))$ ,  $R((1, 1), (1, 0))$ ,  $R((1, 1), (0, 1))$ ,  $R((1, 1), (1, 1))$ ,  $R((1, 0), (0, 1))$ ,  $R((0, 1), (1, 0))$ ,  $R((1, 0), (1, 1))$ ,  $R((0, 1), (1, 1))$ ,  $R((0, 0), (1, 1))$ .

Aufgrund von 1.1.12 lässt sich die projektive Gerade  $\mathbb{P}(R)$  als direktes Produkt

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}(K) = (K \cup \{\infty\}) \times (K \cup \{\infty\})$$

darstellen, wobei für direktes Produkt der entsprechenden Distanzräume gilt (vgl. 1.1.11):

$$(\mathbb{P}(K), \neq) \times (\mathbb{P}(K), \neq) := (\mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}(K), \Delta)$$

mit

$$(p_1, p_2) \Delta (q_1, q_2) := p_1 \neq q_1 \text{ und } p_2 \neq q_2. \quad (1.1)$$

Den zugehörigen Distanzgraphen kann man daher wie folgt hinzeichnen (die schattierten Dreiecke dienen zur besseren Visualisierung):

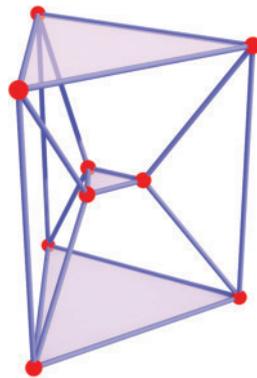


Abbildung 1.1: Distanzgraph von  $\mathbb{P}(R)$   
für  $R = GF(2) \times GF(2)$

Man sieht direkt, dass der Distanzgraph von  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$  nichttrivial, stabil und zusammenhängend ist.

Die Relation  $\not\sim$  auf  $\mathbb{P}(R)$  ist gemäß 2.2.11 in [26] die Vereinigung der Äquivalenzrelationen  $\|_1$  und  $\|_2$ , welche durch  $R(a, b) \|_i R(c, d) :\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , definiert werden, wobei  $I_1 = K \times \{0\}$  und  $I_2 = \{0\} \times K$  die (einzigsten) maximalen Ideale von  $R$  sind (siehe [26, 2.2.2]). Insbesondere gilt für zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{P}(R)$ :

$$p \not\sim q \Leftrightarrow p \|_1 q \text{ oder } p \|_2 q \text{ bzw. } p \Delta q \Leftrightarrow p \not\|_1 q \text{ und } p \not\|_2 q.$$

Man kann nachrechnen, dass diese Definition der Distanzrelation auf  $\mathbb{P}(R)$  zu der in (1.1) definierten Distanzrelation auf  $\mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}(K)$  äquivalent ist.

Die Distanzrelation auf  $\mathbb{P}(R)$  liefert zwei weitere binäre Relationen, nämlich die **Parallelitätsrelation** und die **Adjazenzrelation**, welche folgendermaßen definiert werden (siehe [22, 3.1, 3.2], [21]):

**Definition 1.1.14.** Sei  $R$  ein Ring. Zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  heißen

- (1) **parallel** (in Zeichen  $p \| q$ ), wenn  $x \Delta p \Rightarrow x \Delta q$  für alle  $x \in \mathbb{P}(R)$  gilt. Die Relation  $\|$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{P}(R)$ , so dass folglich  $p \| q \Leftrightarrow \Delta(p) = \Delta(q)$  gilt, wobei  $\Delta(p)$  und  $\Delta(q)$  die Mengen aller zu  $p$  bzw.  $q$  distanten Punkte in  $\mathbb{P}(R)$  bezeichnen (siehe [21, Corollary 2.3]).
- (2) **adjazent** (in Zeichen  $p \sim q$ ), wenn ein  $r \in \mathbb{P}(R)$  existiert, so dass

$r \nparallel p, q$  und  $\Delta(r) \subseteq \Delta(p) \cup \Delta(q)$  gilt. In dieser Situation sagt man auch, dass  $p$  **adjazent** zu  $q$  **via**  $r$  ist. Die Relation  $\sim$  ist ebenso symmetrisch und antireflexiv.

Alle drei Relationen auf  $\mathbb{P}(R)$  stehen in einem Zusammenhang miteinander, es gilt nämlich  $p \sim q \Rightarrow p \nparallel q$  sowie  $p \parallel q \Rightarrow p \not\Delta q$ . Insbesondere gilt  $p \parallel q \Leftrightarrow p \not\Delta q$  für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  genau dann, wenn  $R$  lokal ist. In der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(R)$  über einem lokalen Ring  $R$  haben wir außerdem  $p \Delta q \Leftrightarrow p \sim q$  für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  (siehe [21, 3.2, 3.5]).

Analog zu  $\Delta$ -Morphismen definiert man Abbildungen, unter welchen die Adjazenzrelation bzw. die Parallelitätsrelation erhalten bleibt (siehe [21, 2.2, 4.1]):

**Definition 1.1.15.** Seien  $R, R'$  Ringe und  $\varphi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  eine Abbildung. Dann heißt  $\varphi$

- (i) **Adjazenz-Morphismus** (kurz  $\sim$ -Morphismus), wenn für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  aus  $p \sim q$  stets  $p^\varphi \sim' q^\varphi$  folgt.
- (ii) **Parallelität-Morphismus** (kurz  $\parallel$ -Morphismus), wenn für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  aus  $p \parallel q$  stets  $p^\varphi \parallel' q^\varphi$  folgt.

Hierbei stehen  $\sim'$  und  $\parallel'$  für die Adjazenzrelation bzw. die Parallelitätsrelation auf  $\mathbb{P}(R')$ .

Entsprechend werden  $\sim$ -Iso-,  $\sim$ -Automorphismen sowie  $\parallel$ -Iso-,  $\parallel$ -Automorphismen definiert (vgl. 1.1.9).

Insbesondere gilt nach [21, 4.1, 5.2] das Folgende:

**Bemerkung 1.1.16.** Seien  $R$  und  $R'$  Ringe und  $\varphi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  eine Abbildung. Dann haben wir:

- (1) Ist  $\varphi$  ein Isomorphismus von Distanzräumen, dann auch ein  $\sim$ - und  $\parallel$ -Isomorphismus. Die Umkehrung gilt aber i.Allg. nicht.
- (2) Sind  $R = \text{End}_K(U)$  und  $R' = \text{End}_{K'}(U')$  Endomorphismenringe von Vektorräumen  $U$  und  $U'$  über (nicht notwendigerweise kommutativen)

Körpern  $K$  bzw.  $K'$  mit Dimensionen  $1 \leq \dim_K U, \dim_{K'} U' < \infty$ , dann ist  $\varphi$  genau dann ein  $\Delta$ -Isomorphismus, wenn  $\varphi$  ein  $\sim$ -Isomorphismus ist.

Beispiele für  $\Delta$ -Isomorphismen sind solche Abbildungen  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$ , welche durch Isomorphismen von Ringen  $R \rightarrow R'$  induziert sind. Es gilt sogar (siehe [22, 2.4(b)]):

**Beispiel 1.1.17.** Seien  $R, R'$  Ringe und  $\alpha : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus. Dann ist die Abbildung  $\bar{\alpha} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(a, b) \mapsto R'(a^\alpha, b^\alpha)$  ein  $\Delta$ -Morphismus. Ist  $\alpha$  bijektiv, so ist  $\bar{\alpha}$  ein  $\Delta$ -Isomorphismus.

Von allen drei Relationen auf der projektiven Gerade steht die Distanzrelation in der vorliegenden Arbeit im Zentrum unserer Betrachtung. Zu der Adjazenzrelation werden wir noch kurz im Abschnitt 1.4 und im Kapitel 4 zurückkehren. Jetzt behandeln wir aber wieder den Distanzraum  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$ .

Nach Satz 1.3.4 in [26] gilt das Folgende:

**Bemerkung 1.1.18.** Die Gruppe  $GL_2(R)$  operiert auf  $\mathbb{P}(R)$  und lässt die Distanzrelation invariant. Deshalb induziert  $GL_2(R)$  eine Untergruppe von  $Aut(\mathbb{P}(R), \Delta)$ , welche die **projektive Gruppe von  $R$**  heißt und mit  $PGL_2(R)$  bezeichnet wird. Der Kern der Operation von  $GL_2(R)$  auf  $\mathbb{P}(R)$  ist  $Z(R)^*E$ , so dass  $PGL_2(R)$  isomorph zur Faktorgruppe  $GL_2(R)/Z(R)^*E$  ist. Mit  $E$  wird dabei die  $2 \times 2$ -Einheitsmatrix bezeichnet.

Bevor wir fortsetzen, über die projektive Gerade zu sprechen, möchten wir noch eine relevante Eigenschaft der projektiven Gruppe erwähnen. Zunächst erläutern wir einige Bezeichnungen (vgl. [26, 1.3.6]):

**Definition 1.1.19.** Sei  $(\mathbb{P}, \Delta)$  ein Distanzraum und  $\Gamma \leq Aut(\mathbb{P}, \Delta)$ . Dann operiert  $\Gamma$  auf  $(\mathbb{P}, \Delta)$

- (1) **2- $\Delta$ -transitiv**, wenn es zu je zwei Paaren *distanter Punkte*  $(p, q)$  und  $(p', q')$  ein  $\gamma \in \Gamma$  gibt, so dass  $p' = p^\gamma$  und  $q' = q^\gamma$  ist.
- (2) **3- $\Delta$ -transitiv**, wenn es zu je zwei *Tripeln*  $(p, q, r)$  und  $(p', q', r')$  *distanter Punkte* ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $p' = p^\gamma, q' = q^\gamma, r' = r^\gamma$  gibt.

Für die projektive Gruppe gilt gemäß 1.3.8 in [26]:

**Satz 1.1.20.** *Sei  $R$  ein Ring. Dann operiert die projektive Gruppe  $PGL_2(R)$   $\mathfrak{B}$ - $\Delta$ -transitiv auf  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$ .*

In der Theorie der projektiven Gerade sind stabile Ringe und starke Algebren über einem Körper<sup>iv</sup>  $K$  (kurz  $K$ -Algebren) von besonderer Bedeutung (siehe z. B. [26], [65]):

**Definition 1.1.21.** *Der Ring  $R$  heißt stabil, wenn für jedes unimodulare  $(x, y) \in R^2$  ein  $c \in R$  existiert, so dass  $xc + y \in R^*$  ist.*

Die stabilen Ringe werden in der Geometrie häufig auch Ringe „vom stabilen Rang 2“ genannt, während sie in anderen Kontexten „vom stabilen Rang 1“ heißen (siehe z. B. [28]).

Analog zu dem Fall der projektiven Gerade über einem kommutativen Ring gilt für die projektive Gerade über einem stabilen Ring das Folgende (vgl. 1.1.6, [26, 1.4.18]):

**Bemerkung 1.1.22.** Sei  $R$  ein stabiler Ring, dann gilt  $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  genau dann, wenn  $(a, b) \in R^2$  unimodular ist.

Daher kann man die projektive Gerade  $\mathbb{P}(R)$  über einem stabilen Ring  $R$  als Menge aller durch unimodulare  $m \in R^2$  erzeugten Untermoduln  $Rm$  beschreiben. Außerdem gilt die folgende Bemerkung (vgl. [26, 1.4.19]):

**Bemerkung 1.1.23.** Für jeden Ring  $R$  vom stabilen Rang 2 sind äquivalent:

- (1)  $p \in \mathbb{P}(R)$
- (2)  $p = R(a, 1 + ab)$  für  $a, b \in R$
- (3)  $p = R(1 + cd, c)$  für  $c, d \in R$

Die Eigenschaft der Stabilität eines Ringes überträgt sich auf den zugehörigen Distanzraum (vgl. [26, 1.4.20]):

---

<sup>iv</sup>Wir erinnern, dass in der vorliegenden Arbeit mit Körper stets kommutativer Körper gemeint ist.

**Bemerkung 1.1.24.** Ist  $R$  ein stabiler Ring, dann ist der Distanzraum  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$  stabil.

Beispiele für stabile Ringe sind lokale Ringe,  $n \times n$ -Matrizenringe  $K_{n,n}$  aller  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus einem Körper  $K$ , direkte Produkte  $R \times R$  bzgl. eines stabilen Ringes  $R$  sowie alle starken Algebren.

**Definition 1.1.25.** Sei  $K$  ein Körper und sei  $R$  eine  $K$ -Algebra, d.h. ein Ring mit  $K \subseteq Z(R)$ ,  $1_K = 1_R =: 1$ .

- (1) Für  $x \in R$  setze man  $e(x) := \{k \in K \mid x + k \in R^*\}$
- (2) Die  $K$ -Algebra  $R$  heißt **stark**, wenn für alle  $x \in R$  die Bedingung  $|e(x)| > |K \setminus e(x)|$  gilt.

Die Ungleichung in (2) bedeutet, dass auf der affinen Geraden  $x + K$  mehr Einheiten als Nichteinheiten liegen. Insbesondere werden auch unendliche Kardinalzahlen zugelassen.

Beispiele für starke Algebren sind alle lokalen  $K$ -Algebren über einem Körper  $K$  mit der Mächtigkeit  $|K| > 2$ , direkte Produkte  $K \times K$  mit  $|K| > 4$  und  $n \times n$ -Matrizenringe  $K_{n,n}$  mit  $|K| > 2n$  (siehe [26, 2.4.5, 2.4.6]).

Projektive Geraden werden nicht nur über Ringen und Algebren studiert, sondern auch über ihren algebraischen Unterstrukturen. Sei  $S \leq R$  ein beliebiger Unterring, dann kann man  $\mathbb{P}(S)$  analog wie  $\mathbb{P}(R)$  definieren. Nach Satz 1.5.1 in [26] ist dann die Abbildung

$$\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(R) : S(a, b) \mapsto R(a, b)$$

ein injektiver Morphismus von Distanzräumen  $(\mathbb{P}(S), \Delta_S) \rightarrow (\mathbb{P}(R), \Delta_R)$ , d.h.  $\iota$  bildet distante Punkte in  $\mathbb{P}(S)$  auf distante Punkte in  $\mathbb{P}(R)$  ab. Deshalb kann  $\mathbb{P}(S)$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}(R)$  aufgefasst werden. Betrachtet man die Abbildung  $\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)^\iota \subseteq \mathbb{P}(R)$  (diese ist bijektiv), dann ist sie ein Isomorphismus von Distanzräumen, wenn nichtdistanten Punkte unter  $\iota$  auf ebensolche abgebildet werden, was zu  $S^* = R^* \cap S$  äquivalent ist. In diesem Fall stimmen die Relationen  $\Delta_R$  und  $\Delta_S$  auf  $\mathbb{P}(S)$  überein und man sagt, dass  $\mathbb{P}(S)$  vermöge  $\iota$  in  $\mathbb{P}(R)$  eingebettet wird (siehe [26, 1.5.2]).

Analog definiert man die projektive Gerade über einer Unteralgebra  $S \leq R$ , wobei es bei der Definition einer Unteralgebra zusätzlich gefordert wird, dass  $S$  bzgl. Inversenbildung abgeschlossen ist (vgl. [26, 3.1.2]):

**Definition 1.1.26.** *Unter einer Unteralgebra  $S$  einer  $K$ -Algebra  $R$  versteht man hier einen Untervektorraum  $S \leq R$ , für den gilt:*

- (1)  $1 \in S$
- (2)  $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$
- (3)  $a \in S \cap R^* \Rightarrow a^{-1} \in S$ , d.h. es gilt  $S \cap R^* = S^*$ .

Etwas komplizierter ist die projektive Gerade über sogenannten Jordan-Systemen allgemein zu definieren. Unter einem Jordan-System<sup>v</sup> versteht man eine algebraische Unterstruktur, welche den Begriff der Unteralgebra verallgemeinert (vgl. [26, 3.1.5]):

**Definition 1.1.27.** *Sei  $R$  eine  $K$ -Algebra,  $J$  ein Untervektorraum des  $K$ -Vektorraums  $R$  mit  $1 \in J$ . Dann heißt  $J$*

- (1) **Jordan-System** in  $R$ , wenn für jedes  $b \in J^* = J \cap R^*$  auch  $b^{-1} \in J$  gilt.
- (2) **Jordan-abgeschlossen** in  $R$ , wenn für alle  $a, b \in J$  auch  $aba \in J$  ist.

---

<sup>v</sup>Wie schon in der Einleitung erwähnt, werden in der Literatur hauptsächlich (spezielle) Jordan-Algebren bzw. spezielle Jordan-Ringe behandelt (siehe z. B. [46], [47], [49]). Hierbei wird eine spezielle Jordan-Algebra als einen  $K$ -Untervektorraum einer  $K$ -Algebra mit Charakteristik  $\neq 2$  definiert, welcher unter  $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$  (oder auch  $a \circ b = ab + ba$ ) abgeschlossen ist, wobei  $ab$  die gewöhnliche assoziative Multiplikation in der  $K$ -Algebra ist. Unter einer Jordan-Algebra versteht man eine  $K$ -Algebra mit Charakteristik  $\neq 2$ , welche mit einer Komposition  $a \circ b$  versehen ist, für die  $a \circ b = b \circ a$  und  $(a \circ a \circ b) \circ a = a \circ a \circ (b \circ a)$  gilt (siehe [1], [47]). Nicht jede Jordan-Algebra ist speziell.

Eine ähnliche Definition findet man z. B. in [40]. Dabei wird ein Jordan-Ring als eine  $K$ -Algebra mit dem Produkt  $a \circ b = ab + ba$  definiert.

Spezielle Jordan-Ringe  $\mathfrak{J}$  werden als additiv abgeschlossene Untergruppen eines Ringes definiert, wobei für alle  $a, b \in \mathfrak{J}$  auch  $a^2, aba \in \mathfrak{J}$  gilt. Die einfachsten Beispiele für spezielle Jordan-Ringe sind assoziative Ringe selbst. Ein weiteres wichtiges Beispiel sind Mengen  $\mathcal{K} = \{a \in R \mid a^* = a\} \subseteq R$  von selbstadjungierten Elementen bzgl. einer Involution  $a \rightarrow a^*$  von  $R$ , d.h. einer Abbildung, für die gilt  $(a+b)^* = a^* + b^*$ ,  $(ab)^* = b^*a^*$  und  $a^{**} = a$  für alle  $a, b \in R$  (siehe [49]).

Zu weiteren Jordan-Strukturen siehe z. B. [7].

(3) **stark** in  $R$ , wenn für alle  $b \in J$  die Bedingung  $|e(b)| > |K \setminus e(b)|$  gilt (vgl. 1.1.25(2)).

Für starke Jordan-Systeme gilt das Folgende (vgl. [26, S. 62-63]):

**Bemerkung 1.1.28.** Sei  $R$  eine  $K$ -Algebra und  $J$  ein starkes Jordan-System in  $R$ . Dann ist  $J$  auch Jordan-abgeschlossen. Ist  $R$  stark, dann sind alle Jordan-Systeme in  $R$  auch stark.

Die projektive Gerade wurde bisher im Wesentlichen nur für starke Jordan-Systeme definiert (siehe z. B. [11], [24], [26]). Basierend auf der Definition der projektiven Gerade über stabilen Ringen und damit starken Algebren definiert man die projektive Gerade über starken Jordan-Systemen (vgl. 1.1.23):

**Definition 1.1.29.** Sei  $J$  ein starkes Jordan-System in der  $K$ -Algebra  $R$ . Man setze

$$\mathbb{P}(J) := \{R(1 + ab, a) \mid a, b \in J\} (\subseteq \mathbb{P}(R)).$$

Wir nennen  $\mathbb{P}(J)$  die **projektive Gerade über  $J$** .

Die allgemeinere Definition der projektiven Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen wird im Kapitel 3 eingeführt (siehe 3.2.4).

## 1.2 Kettengeometrien und Kettenräume

Um eine (verallgemeinerte) Kettengeometrie bzw. einen Kettenraum zu definieren, brauchen wir eine Inzidenzstruktur, die aus einer Punktmenge zusammen mit einer Menge von Blöcken (hier „Ketten“), gewissen Teilmengen der Punktmenge, besteht. Wir starten mit dem Begriff der Kettengeometrie bzw. der verallgemeinerten Kettengeometrie.

Sei zunächst  $R$  eine Algebra über einem Unterring  $S \leq R$  (kurz  $S$ -Algebra oder  $(S, R)$ ), d.h. es gilt  $S \subseteq Z(R)$  und damit muss  $S$  kommutativ sein. Wir betrachten die Punktmenge  $\mathbb{P}(R)$ , welche mit der Distanzrelation  $\Delta_R$  versehen

ist. Laut dem Abschnitt 1.1 kann  $\mathbb{P}(S)$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}(R)$  aufgefasst werden. Offenbar ist auch  $\mathbb{P}(S)^\gamma$  für jedes  $\gamma \in PGL_2(R)$  eine Teilmenge von  $\mathbb{P}(R)$ .

**Definition 1.2.1.** Sei  $R$  eine  $S$ -Algebra. Wir definieren

$$\mathfrak{C}(S, R) := \{\mathbb{P}(S)^\gamma \mid \gamma \in PGL_2(R)\}$$

und nennen  $\mathfrak{C}(S, R)$  die Menge aller **Ketten**  $\mathbb{P}(S)^\gamma$  in  $\mathbb{P}(R)$ . Die Inzidenzstruktur

$$\Sigma(S, R) := (\mathbb{P}(R), \mathfrak{C}(S, R))$$

heißt die **Kettengeometrie** über der Algebra  $(S, R)$ .

Die Teilmenge  $\mathbb{P}(S)$  ist genau eine Kette durch die Punkte  $R(1, 0)$ ,  $R(0, 1)$  und  $R(1, 1)$ , welche die **Standardkette** genannt wird.

Kettengeometrien  $\Sigma(K, R)$  über einer Algebra  $R$  über einem Körper  $K$  wurden von vielen Autoren untersucht (siehe z. B. [5], [26], [42]). In diesem Fall besitzt  $\Sigma(K, R)$  eine wichtige Eigenschaft, welche auch Kettengeometrien  $\Sigma(S, R)$  über einer  $S$ -Algebra unter einer Zusatzbedingung erfüllen (vgl. [26, 2.1.2]):

**Satz 1.2.2.** Sei  $R$  eine  $S$ -Algebra mit  $R^* \cap S = S^*$ . Dann gilt in  $\Sigma(S, R)$ :  
Durch je drei paarweise distante Punkte geht genau eine Kette.

Etwas komplizierter ist der Fall, wenn der Körper nicht notwendigerweise im Zentrum von  $R$  liegt und damit  $R$  keine  $K$ -Algebra sein muss. Dann sind i.Allg. je drei paarweise distante Punkte durch mehr als eine Kette verbunden.

**Definition 1.2.3.** Sei  $R$  ein Ring und  $F$  ein nicht notwendigerweise kommutativer Unterkörper von  $R$  mit  $1 \in F$ . Die Inzidenzstruktur  $\Sigma(F, R) = (\mathbb{P}(R), \mathfrak{C}(F, R))$  mit

$$\mathfrak{C}(F, R) := \{\mathbb{P}(F)^\gamma \mid \gamma \in PGL_2(R)\}$$

heißt die **verallgemeinerte Kettengeometrie** über  $(F, R)$ .

Mehr zu verallgemeinerten Kettengeometrien findet man z. B. in [13], [16], [18]. In der vorliegenden Arbeit werden sie nicht weiter untersucht.

Nun betrachten wir Inzidenzstrukturen, welche zusätzlich zur Aussage von 1.2.2 noch weitere Bedingungen erfüllen (vgl. [11]):

**Definition 1.2.4.** Sei  $(\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  eine Inzidenzstruktur mit der Punktmenge  $\mathbb{P}$  und der Menge  $\mathfrak{C}$  der ausgezeichneten Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Die Elemente von  $\mathfrak{C}$  nennen wir **Ketten**. Weiter definieren wir die Distanzrelation  $\Delta$  auf  $\mathbb{P}$ : Zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{P}$  heißen genau dann **distant**, wenn sie verschieden und durch eine Kette verbunden sind.

Die Inzidenzstruktur  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  mit der Distanzrelation  $\Delta$  auf  $\mathbb{P}$  heißt ein **Kettenraum**, wenn  $\Sigma$  die folgenden Axiome erfüllt:

- K1** Jeder Punkt  $p \in \mathbb{P}$  liegt auf mindestens einer Kette und jede Kette  $C \in \mathfrak{C}$  enthält mindestens drei Punkte.
- K2** Je drei paarweise distante Punkte  $p, q, r \in \mathbb{P}$  liegen gemeinsam auf genau einer Kette  $C =: (pqr) \in \mathfrak{C}$ .
- K3** Für jeden Punkt  $p \in \mathbb{P}$  seien  $\Delta(p) := \{q \in \mathbb{P} \mid q \Delta p\}$  und  $\mathfrak{C}_p := \{C \setminus \{p\} \mid p \in C \in \mathfrak{C}\}$ . Dann ist  $\Sigma_p := (\Delta(p), \mathfrak{C}_p)$  (genannt das **Residuum** von  $\Sigma$  im Punkte  $p$ ) ein **partieller affiner Raum**, d.h. eine Inzidenzstruktur, die aus einem affinen Raum durch Herausnahme von einigen Parallelklassen von Geraden entsteht.

Jede Kettengeometrie  $\Sigma(S, R)$  erfüllt offenbar die Bedingung **K1**. Im Fall  $S^* = R^* \cap S$  scheint  $\Sigma(S, R)$  auch **K2** zu erfüllen, was aber nicht unbedingt der Fall ist, da die in 1.1.10 und in 1.2.4 (algebraisch bzw. geometrisch) definierten Distanzrelationen auf  $\mathbb{P}(R)$  bzw.  $\mathbb{P}$  i.Allg. nicht gleich sind: Durch je zwei Punkte von  $\mathbb{P}(R)$ , die distant im Sinne von Definition 1.1.10 sind, geht stets eine Kette; die Umkehrung muss aber nicht gelten. In bestimmten Fällen stimmen die beiden Distanzrelationen auf  $\mathbb{P}(R)$  doch überein. Genauer gilt (vgl. [26, 2.1.5]):

**Satz 1.2.5.** *Sei  $R$  eine  $S$ -Algebra und  $\Sigma(S, R)$  die Kettengeometrie über  $(S, R)$ . Dann sind äquivalent:*

- (1) *Es gilt  $S^* = R^* \cap S$ , und zwei verschiedene Punkte von  $\mathbb{P}(R)$  sind genau dann distant, wenn sie gemeinsam auf einer Kette liegen.*
- (2) *Der Ring  $S$  ist ein Körper.*

In diesem Fall ist jede Kettengeometrie sogar ein Kettenraum (vgl. [26, 2.1.15]):

**Satz 1.2.6.** *Sei  $R$  eine Algebra über einem Körper  $K$ , dann ist die Kettengeometrie  $\Sigma = \Sigma(K, R)$  ein Kettenraum, und je zwei Residuen  $\Sigma_p$  und  $\Sigma_q$  von  $\Sigma$  sind isomorph.*

Für starke  $K$ -Algebren sind auch die entsprechenden Kettenräume stark. Abstrakt wird ein starker Kettenraum wie folgt definiert (vgl. [26, 2.4.1]):

**Definition 1.2.7.** *Sei  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  ein Kettenraum. Dann heißt  $\Sigma$  **stark**, wenn gilt:*

- (1) *Der Distanzraum  $(\mathbb{P}, \Delta)$  ist stabil.*
- (2) *Für jeden Punkt  $p \in \mathbb{P}$  und jede Kette  $C \in \mathfrak{C}$  gilt  $C \cap \Delta(p) = \emptyset$  oder  $|C \cap \Delta(p)| > |C \setminus \Delta(p)| + 1$ .*

Es gilt sogar die Äquivalenz (vgl. [26, 2.4.10]):

**Satz 1.2.8.** *Sei  $R$  eine  $K$ -Algebra. Dann ist der Kettenraum  $\Sigma(K, R)$  genau dann stark, wenn  $R$  stark ist.*

Die klassischen Beispiele für Kettenräume sind die sogenannten reellen „Benzebenen“, die Kettenräume über zweidimensionalen reellen Algebren, benannt nach Walter Benz. Eine ausführliche Beschreibung der Beispiele findet man in [5], [26, S. 1-6, 38-43] (siehe auch Einleitung).

Ähnlich wie projektive Geraden werden Kettenräume auch über Unterstrukturen (Unteralgebren, Jordan-Systemen) behandelt (siehe [11], [12], [24],

[26]). Für einen Kettenraum  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  wird versucht herauszufinden, wann eine entsprechende Teilmenge  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}$  selbst die Punktmenge eines Kettenraums und damit ein Unterraum von  $\Sigma$  ist. Abstrakt wird ein Unterraum eines Kettenraums wie folgt definiert (vgl. [26, 3.1.1]):

**Definition 1.2.9.** *Sei  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  ein Kettenraum und  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}$ . Dann heißt  $\mathbb{S}$  ein **Unterraum** von  $\Sigma$ , wenn  $\mathbb{S}$  die folgenden Bedingungen erfüllt:*

- (1)  $\mathbb{S}$  enthält drei paarweise distante Punkte.
- (2) Sind  $p, q, r \in \mathbb{S}$  paarweise distant, so liegt ihre eindeutige Verbindungskette  $C = (pqr)$  ganz in  $\mathbb{S}$ . Die Menge aller dieser Verbindungsketten wird mit  $\mathfrak{C}(\mathbb{S})$  bezeichnet.
- (3) Die Inzidenzstruktur  $(\mathbb{S}, \mathfrak{C}(\mathbb{S}))$  ist selbst ein Kettenraum.

Die Teilmenge  $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{P}$  heißt ein **schwacher Unterraum** von  $\Sigma$ , wenn  $\mathbb{S}$  nur die Bedingung (2) erfüllt. Erfüllt  $\mathbb{S}$  zusätzlich die Bedingung (1), dann heißt  $\mathbb{S}$  ein **nichttrivialer schwacher Unterraum** von  $\Sigma$ .

Manchmal nennen wir auch die Inzidenzstruktur  $(\mathbb{S}, \mathfrak{C}(\mathbb{S}))$  einen Unterraum von  $\Sigma$ .

Es ist bekannt, dass jeder Kettenraum  $\Sigma(K, S)$  über einer beliebigen Unteralgebra  $S \leq R$  mit einem Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  mittels der entsprechenden Einbettung identifiziert werden kann (siehe [26, 3.1.3]). Im Fall von starken  $K$ -Algebren  $R$  kann man auch beweisen, dass sich alle nichttrivialen zusammenhängenden schwachen Unterräume eines Kettenraums  $\Sigma(K, R)$  algebraisch mit Hilfe von starken Jordan-Systemen beschreiben lassen, wobei ein Unterraum zusammenhängend ist, wenn der entsprechende Distanzraum zusammenhängend ist (siehe [26, 3.2.4]).

Allgemein ist aber nicht jede projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  über einem Jordan-System  $J \subseteq R$  ein Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  (vgl. 2.4.7 im Unterabschnitt 2.4.1). Bisher konnte man nur für starke Jordan-Systeme (und einige einzelne Beispielklassen wie hermitesche Matrizen) beweisen, dass  $\mathbb{P}(J)$  einen Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  liefert.

Dafür definieren wir die Untergruppe  $\Delta(J)$  der Gruppe  $PGL_2(R)$ , welche erzeugt wird von denjenigen Abbildungen, die durch alle Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \text{ (mit } c \in J) \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

induziert werden.

Gemäß 3.1.16 und 3.1.17 in [26] lässt die Gruppe  $\Delta(J)$  die Menge  $\mathbb{P}(J)$  invariant und operiert auf  $\mathbb{P}(J)$  2- $\Delta$ -transitiv. Das ermöglicht die in  $\mathbb{P}(J)$  enthaltenen Ketten von  $\Sigma(K, R)$  wie folgt zu beschreiben (vgl. [26, 3.1.19]):

**Satz 1.2.10.** *Sei  $R$  eine Algebra über einem Körper  $K$  und  $J$  ein starkes Jordan-System in  $R$ . Sind  $p, q, r \in \mathbb{P}(J)$  paarweise distant, dann liegt ihre Verbindungskette ganz in  $\mathbb{P}(J)$ . Jede solche Kette  $C$  hat die Gestalt  $C = (C_h)^\delta$  mit  $\delta \in \Delta(J)$ ,  $h \in J^*$  und  $C_h := \{R(sh, t) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K)\}$ . Umgekehrt ist für jedes  $\delta \in \Delta(J)$  und  $h \in J^*$  stets  $(C_h)^\delta \subseteq \mathbb{P}(J)$ .*

Die Menge aller solchen Ketten  $C$  bezeichnet man mit  $\mathfrak{C}(K, R, J)$ , so dass wir den folgenden Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  erhalten (vgl. z. B. [11, S. 36-37], [26, 3.1.20]):

**Satz 1.2.11.** *Sei  $J$  ein starkes Jordan-System in  $R$ . Dann ist*

$$\Sigma(K, R, J) = (\mathbb{P}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$$

mit  $\mathfrak{C}(K, R, J) = \{(C_h)^\delta \mid h \in J^*, \delta \in \Delta(J)\}$  ein Unterraum von  $\Sigma(K, R)$ . Wir nennen  $\Sigma(K, R, J)$  die **Kettengeometrie über**  $(K, R, J)$ .

### 1.3 Morphismen von Kettenräumen

Für zwei beliebige Kettenräume definiert man einen Morphismus dieser Kettenräume wie folgt (vgl. [26, 1.1.4, 2.1.13], [11, 1.9]):

**Definition 1.3.1.** *Seien  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  und  $\Sigma' = (\mathbb{P}', \mathfrak{C}')$  Kettenräume. Eine*

Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$$

heißt **Morphismus von Kettenräumen**, wenn  $\varphi$  ein Morphismus von Distanzräumen ist und zusätzlich Ketten in  $\mathbb{P}$  auf Ketten in  $\mathbb{P}'$  abbildet, d.h.  $C^\varphi \in \mathfrak{C}'$  für alle  $C \in \mathfrak{C}$  gilt.

Ist der Morphismus  $\varphi$  bijektiv, dann heißt  $\varphi$  **Isomorphismus von Kettenräumen**, wenn  $\varphi$  ein Isomorphismus von Distanzräumen ist und es gilt  $C'^{\varphi^{-1}} \in \mathfrak{C}$  für alle  $C' \in \mathfrak{C}'$ .

Ein Morphismus  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  heißt **Endomorphismus von Kettenräumen**.

Ein Isomorphismus  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$  heißt **Automorphismus von Kettenräumen**. Die Menge aller Automorphismen von Kettenräumen bildet eine Gruppe, welche mit  $\text{Aut}(\Sigma)$  bezeichnet wird.

Ganz wichtig sind auch die folgenden Begriffe (vgl. [11, 3.1]):

**Definition 1.3.2.** Seien  $\Sigma = (\mathbb{P}, \mathfrak{C})$  und  $\Sigma' = (\mathbb{P}', \mathfrak{C}')$  Kettenräume und  $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}'$  ein Morphismus der Kettenräume. Dann heißt  $\varphi$

- (1) **stark**, wenn für  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p^\varphi \Delta q^\varphi$  auch  $p \Delta q$  gilt.
- (2) **trivial**, wenn es eine Kette  $C \in \mathfrak{C}'$  gibt, so dass  $\mathbb{P}^\varphi = C$  ist.

Zunächst erwähnen wir kurz einige Beispiele für Morphismen von Kettengeometrien:

**Beispiel 1.3.3.** (1) Wie schon im Abschnitt 1.1 erwähnt, ist die projektive Gruppe  $PGL_2(R)$  eine Untegruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{P}(R), \Delta)$ .

- (2) Ein weiteres Beispiel sind Morphismen, die durch Ringhomomorphismen induziert werden. Seien  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  und  $\psi : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus mit  $K^\psi = K'$ , dann ist die Abbildung  $R(a, b) \rightarrow R'(a^\psi, b^\psi)$  ein Morphismus von Kettenräumen  $\Sigma(K, R) \rightarrow \Sigma(K', R')$ .

Im Fall der Morphismen zwischen Kettenräumen über Algebren über Körpern stehen die sogenannten „fundamentalen“ Morphismen im Zentrum:

**Definition 1.3.4.** Seien  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$ . Außerdem seien  $\Sigma(K, R) = (\mathbb{P}(R), \mathfrak{C}(K, R))$  und  $\Sigma(K', R') = (\mathbb{P}(R'), \mathfrak{C}(K', R'))$  Kettenräume und  $\varphi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  ein Morphismus von Kettenräumen. Dann heißt  $\varphi$  **fundamental**, wenn  $\varphi$  die Punkte  $\infty = R(1, 0)$ ,  $R(0, 1)$  und  $R(1, 1)$  auf  $\infty' = R'(1', 0')$ ,  $R'(0', 1')$  bzw.  $R'(1', 1')$  abbildet.

**Bemerkung 1.3.5.** Seien  $\Sigma(K, R)$  und  $\Sigma(K', R')$  Kettenräume über Algebren  $(K, R)$  bzw.  $(K', R')$  und sei  $\varphi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  ein Morphismus von Kettenräumen. Laut 1.1.20 operiert die Gruppe  $PGL_2(R)$  3- $\Delta$ -transitiv auf  $(\mathbb{P}(R), \Delta)$ , so dass  $\varphi$  auf einen fundamentalen Morphismus zurückgeführt werden kann, d.h. es existieren ein fundamentaler Morphismus  $\tilde{\varphi} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  und ein  $\delta \in PGL_2(R')$ , so dass  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \delta$  ist.

Für ein weiteres Beispiel brauchen wir die folgende Definition (vgl. [11, 2.1]):

**Definition 1.3.6.** Seien  $J$  und  $J'$  Jordan-Systeme in Algebren  $(K, R)$  bzw.  $(K', R')$ . Ein Paar  $(\alpha, \beta)$  von semilinearen Abbildungen  $J \rightarrow J'$  (mit den zugehörigen Körpermonomorphismen  $\hat{\alpha}$  bzw.  $\hat{\beta} : K \rightarrow K'$ ) heißt **Homotopismus von Jordan-Systemen**, falls es die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $1^\alpha \in J'^*$ ,
- (ii)  $(aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha$  für alle  $a, b \in J$ .

Ein Paar  $(\alpha, \beta)$  von semilinearen Bijektionen, welche die beiden Eigenschaften erfüllen, nennt man **Isotopismus von Jordan-Systemen**.

Existiert ein Isotopismus  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$ , dann heißen die Jordan-Systeme  $J$  und  $J'$  **isotop**.

Entsprechend werden Auto- und Endotopismen definiert.

Ist  $\alpha = \beta$  und  $1^\alpha = 1'$ , dann heißt  $\alpha$  **Jordan-Homomorphismus**<sup>vi</sup>.

<sup>vi</sup>Manche Autoren betrachten Jordan-Homomorphismen zwischen assoziativen Ringen und setzen daher statt Semilinearität nur Additivität der Abbildung voraus. Unter solchen Autoren sind z. B. Bartolone (siehe [3]) und Jacobson & Rickart (siehe [48]).

Gemäß [20, Theorem 4.4(b)] induziert jeder Jordan-Homomorphismus von Ringen  $\alpha : R \rightarrow R'$  einen  $\Delta$ -Morphismus. Es gilt das Folgende:

**Beispiel 1.3.7.** Sei  $\alpha : R \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus und  $R''$  ein Unterring von  $R'$ , der durch  $R^\alpha$  erzeugt wird. Außerdem seien  $C \subseteq \mathbb{P}(R)$  und  $C'' \subseteq \mathbb{P}(R'') \subseteq \mathbb{P}(R')$  die Zusammenhangskomponenten von  $R(1, 0)$  bzw.  $R''(1', 0')$  (im Sinne der Graphentheorie), d.h. die Distanzräume  $(C, \Delta)$  und  $(C'', \Delta')$  sind zusammenhängend. Dann kann man unter Zusatzbedingungen eine Abbildung  $\bar{\alpha} : C \rightarrow C''$  definieren, welche sich zu einem Morphismus  $\gamma : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  von (verallgemeinerten) Kettengeometrien erweitern lässt, und zwar wie folgt: Für jede von  $C$  verschiedene Zusammenhangskomponente  $C_\mu \subseteq \mathbb{P}(R)$  wählt man eine Matrix  $a_\mu \in GL_2(R)$ , deren erste Zeile einen Punkt von  $C_\mu$  darstellt. Ist  $\delta_{a_\mu} \in PGL_2(R)$  die von  $a_\mu$  induzierte Abbildung, dann gilt  $C_\mu^{\delta_{a_\mu}^{-1}} = C$ . Analog wird eine Matrix  $a'_\mu \in GL_2(R')$  gewählt, welche  $C''$  auf eine Zusammenhangskomponente  $C''_\mu$  von  $\mathbb{P}(R')$  abbildet. Insgesamt gilt  $C_\mu^{\delta_{a_\mu}^{-1} \bar{\alpha} \delta_{a'_\mu}} = C^{\bar{\alpha} \delta_{a'_\mu}} = C''^{\delta_{a'_\mu}} = C''_\mu$ , wobei  $\delta_{a'_\mu} \in PGL_2(R')$  durch die Matrix  $a'_\mu$  induziert ist. Die Komposition aller dieser Abbildungen beschreibt  $\gamma$ .

Bei starken Algebren  $R$  ist  $C = \mathbb{P}(R)$  und  $\bar{\alpha}$  lässt sich durch  $\bar{\alpha} : R(1+ab, a) \mapsto R(1+a^\alpha b^\alpha, a^\alpha)$  beschreiben (vgl. [3], [20, 5.2, 5.3]).

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, ist ein wichtiges Problem im Zusammenhang mit Morphismen von Kettengeometrien, diese algebraisch zu beschreiben. Ein relevanter Aspekt dabei ist, über welcher algebraischen Struktur (Algebra bzw. Jordan-System) die jeweiligen Kettengeometrien definiert sind. Dabei sind Morphismen von Kettengeometrien über starken  $K$ -Algebren  $R$  bzw.  $R'$  genau die Morphismen, die durch Jordan-Homomorphismen  $R \rightarrow R'$  sowie Elementen von  $PGL_2(R')$  induziert werden. Das folgt wegen der 3- $\Delta$ -Transitivität von  $PGL_2(R')$  auf  $\mathbb{P}(R')$  aus dem folgenden Satz (vgl. [11, 3.13]):

**Satz 1.3.8.** *Seien  $\Sigma = \Sigma(K, R)$  und  $\Sigma' = \Sigma(K, R')$  Kettengeometrien über starken  $K$ -Algebren  $R$  und  $R'$ , dann sind die nichttrivialen fundamentalen Morphismen  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  genau die Morphismen, die durch Jordan-Homomorphismen  $\alpha : R \rightarrow R'$  mit  $\dim_K R^\alpha \geq 2$  induziert sind.*

Im Kapitel 5 (siehe 5.3.22) wird dieser Satz verallgemeinert.

## 1.4 Projektive Darstellungen

Wir machen zuerst einen kurzen Exkurs über Graßmann-Räume<sup>vii</sup>. Dafür brauchen wir zunächst Definition eines partiellen linearen Raums (vgl. [8], [59]):

**Definition 1.4.1.** Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  eine Inzidenzstruktur. Dann heißt  $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$  ein **partieller linearer Raum**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für jeden Punkt gibt es eine Gerade, die diesen Punkt enthält, d.h.  $\bigcup_{G \in \mathcal{L}} G = \mathcal{P}$ .
- (2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte, d.h.  $G \in \mathcal{L} \Rightarrow |G| \geq 2$ .
- (3) Durch je zwei verschiedene Punkte gibt es höchstens eine Gerade und damit gilt  $G, H \in \mathcal{L} \Rightarrow |G \cap H| \leq 1$ .

Zwei oder mehrere Punkte, welche auf einer Gerade liegen, heißen **kollinear**.

**Definition 1.4.2.** Sei  $\Pi$  ein beliebiger projektiver Raum der Dimension<sup>viii</sup>  $n < \infty$ <sup>ix</sup>. Für jedes  $r \in \{0, \dots, n-1\}$  sei  $\mathcal{G}_n^r$  die Menge aller  $r$ -dimensionalen Unterräume von  $\Pi$  und  $\mathcal{L}_n^r$  die Menge aller Büschel, wobei ein **Büschel** die Menge aller Elemente von  $\mathcal{G}_n^r$  ist, welche in einem gemeinsamen  $(r+1)$ -dimensionalen Unterraum von  $\Pi$  enthalten sind und einen gemeinsamen  $(r-1)$ -dimensionalen Unterraum von  $\Pi$  haben. Die Inzidenzstruktur  $\Pi_n^r = (\mathcal{G}_n^r, \mathcal{L}_n^r)$  ist ein partieller linearer Raum, welchen man den mit  $\Pi$  assoziierten **Graßmann-Raum vom Index  $r$**  nennt. Die Elemente von  $\mathcal{G}_n^r$  heißen Punkte von  $\Pi_n^r$  und die Elemente von  $\mathcal{L}_n^r$  nennt man Geraden von  $\Pi_n^r$ .

<sup>vii</sup>Mehr zu Graßmann-Räume siehe z. B. [8], [9], [44], [59].

<sup>viii</sup>Hier ist projektive Dimension gemeint.

<sup>ix</sup>Man kann einen Graßmann-Raum auch im Fall  $n = \infty$  definieren (siehe z. B. [23]). Für die vorliegende Arbeit ist aber nur der endlichdimensionale Fall relevant.

Es ist klar, dass im Fall  $r = 0$  die Menge  $\mathcal{G}_n^0$  mit der Punktmenge von  $\Pi$  übereinstimmt. Die Menge  $\mathcal{G}_n^{n-1}$  ist ein  $n$ -dimensionaler projektiver Raum, genannt der zu  $\Pi$  duale Raum.

Auf einem Graßmann-Raum wird eine binäre Relation definiert, nämlich die **Adjazenzrelation**, welche mit  $\sim$  bezeichnet wird<sup>x</sup>.

**Definition 1.4.3.** Sei  $\Pi_n^r = (\mathcal{G}_n^r, \mathcal{L}_n^r)$  ein Graßmann-Raum. Zwei Punkte  $P, Q \in \mathcal{G}_n^r$  sind genau dann **adjazent**, wenn  $\dim(P \cap Q) = r - 1$  ( $\Leftrightarrow \dim(P + Q) = r + 1$ ) ist.

Zwei Punkte in  $\mathcal{G}_n^r$  sind also genau dann adjazent, wenn sie kollinear sind.

Wir betrachten nun den Endomorphismenring  $S = \text{End}_K(U)$  eines Vektorraums  $U$  über einem Körper  $K$  mit endlicher Dimension  $n$ . Definiert man  $V = U \times U$  und  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{2n-1}^{n-1} = \{W \leq V \mid W \simeq V/W\}$ , dann kann die projektive Gerade  $\mathbb{P}(S)$  mittels einer bijektiven Abbildung mit  $\mathcal{G}$  identifiziert werden (siehe [12], [17, S. 292], [22, S. 152]):

$$\Psi : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathcal{G} : S(a, b) \mapsto U^{(a,b)} := \{(u^a, u^b) \mid u \in U\} \leq V, \quad (1.2)$$

wobei  $\Psi$  (nicht)distante Punkte von  $\mathbb{P}(S)$  auf (nicht)komplementäre Unterräume von  $\mathcal{G}$  abbildet. Dabei ist  $\mathcal{G}$  die Punktmenge des mit  $\mathbb{P}(K, V) = PG(2n - 1, K)$  assoziierten Graßmann-Raums  $\Pi_{2n-1}^{n-1}$ , welche aus allen  $n$ -dimensionalen Unterräumen des Vektorraums  $V$  (kurz  **$n$ -Räumen**) besteht. Damit können die Punkte von  $\mathcal{G}$  mit den entsprechenden Unterräumen in  $PG(2n - 1, K)$  identifiziert werden.

Für die Abbildung  $\Psi$  gilt außerdem (siehe [21, Proposition 3.8]):

**Bemerkung 1.4.4.** Seien  $S = \text{End}_K(U)$ ,  $\mathcal{G}$  und  $\Psi : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathcal{G}$  wie oben. Dann gilt für alle  $p, q \in \mathbb{P}(S)$ :

$$p \sim q \Leftrightarrow p^\Psi \sim q^\Psi \Leftrightarrow p^\Psi \text{ und } q^\Psi \text{ sind verschiedene kollineare Punkte von } \mathcal{G}.$$

---

<sup>x</sup>Man darf die Adjazenzrelation auf  $\mathcal{G}$  mit der in 1.1.14 definierten Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(R)$  nicht verwechseln. Die beiden Relationen stehen aber in einem engen Zusammenhang zueinander, wie wir unten sehen werden, deswegen werden sie gleich bezeichnet.

Somit kann man die Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(S)$  im Sinne von 1.1.14 mit der Adjazenzrelation auf  $\mathcal{G}$  identifizieren.

Stellt man nun  $S = \text{End}_K(U)$  als einen  $n \times n$ -Matrizenring  $K_{n,n}$  dar, so kann man die Punkte von  $\mathbb{P}(S)$  auch anders darstellen (vgl. [42, 4.5(4)]). Offenbar ist  $U$  ein treuer  $S$ -Rechtsmodul<sup>xi</sup>. Sei nun  $U'$  ein mittels eines  $S$ -Isomorphismus  $' : U \rightarrow U' : u \mapsto u'$  zu  $U$  isomorpher  $S$ -Rechtsmodul. Wegen  $K \leq S$  ist die Abbildung  $'$  auch  $K$ -linear, so dass  $U'$  ein zu  $U$  isomorpher  $K$ -Vektorraum ist. Man setze  $V' = U \oplus U'$ , dann entspricht jedem Punkt  $S(a, b)$  ein  $K$ -Unterraum  $[a, b] = \{ua + u'b \mid u \in U\}$  von  $V'$ . Definiert man  $\mathbb{P}_S(U) = \{[a, b] \mid S(a, b) \in \mathbb{P}(S)\}$ , dann ist die Abbildung

$$\mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}_S(U) : S(a, b) \mapsto [a, b] \quad (1.3)$$

wohldefiniert und bijektiv. Analog wie oben sind dabei zwei Punkte in  $\mathbb{P}(S)$  genau dann distant, wenn die entsprechenden  $n$ -Räume in  $\mathbb{P}_S(U)$  komplementär sind. Insbesondere ist  $(a|b)$ <sup>xii</sup> eine  $n \times 2n$ -Matrix vom (Zeilen-)Rang  $n$ , welche man eine **homogene Koordinate** von  $[a, b]$  nennt (siehe [66, S. 124]). Wegen  $V \simeq V'$  wollen wir im Weiteren die Menge  $\mathbb{P}_S(U)$  mit der Menge  $\mathcal{G}$  identifizieren.

Wie man schon erkennen konnte, ist auf  $\mathcal{G}$  außer der Adjazenzrelation eine Distanzrelation definiert, wobei zwei Punkte in  $\mathcal{G}$  genau dann distant sind, wenn sie als Unterräume von  $V$  zueinander komplementär sind. Bezeichnen wir die Distanzrelation auf  $\mathcal{G}$  mit  $\Delta_{\mathcal{G}}$ , dann ist  $(\mathcal{G}, \Delta_{\mathcal{G}})$  ein Distanzraum und daher ist die in (1.2) definierte Abbildung  $\Psi$  sogar ein Isomorphismus von Distanzräumen.

Die Menge  $\mathcal{G}$  mit der Adjazenzrelation liefert den **Graßmann-Graphen** mit Knotenmenge  $\mathcal{G}$ , bei dem zwei Knoten genau dann mit einer Kante verbunden sind, wenn sie zueinander adjazent sind. Sind  $X, Y$  zwei beliebige Punkte in einem Graßmann-Graphen, so kann man Distanz (im Sinne der Graphentheorie) zwischen diesen Punkten, bezeichnet mit  $d(X, Y)$ , nach der

<sup>xi</sup>D.h. für jedes  $s \in S \setminus \{0\}$  gibt es ein  $u \in U$  mit  $us \neq 0$  (vgl. [26, 1.2.5].)

<sup>xii</sup>Diese Bezeichnung steht für die durch Matrix  $b$  erweiterte Matrix  $a$  für  $a, b \in K_{n,n}$

Formel

$$\begin{aligned} d(X, Y) = d &\Leftrightarrow \dim((X + Y)/X) = \dim((X + Y)/Y) = d \\ &\Leftrightarrow \dim(X/(X \cap Y)) = \dim(Y/(X \cap Y)) = d \\ &\Leftrightarrow \dim(X \cap Y) = n - d \end{aligned}$$

bestimmen<sup>xiii</sup> (vgl. [23, 2.3], [44]).

Ist  $n \geq 2$ , dann gilt für Distanz zwischen zwei Punkten in  $\mathcal{G}$  auch das Folgende (vgl. [66, S. 89-91, 124-127]):

**Bemerkung 1.4.5.** Seien  $X, Y \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Punkte und die Matrizen  $(x_1|x_2)$ ,  $(y_1|y_2)$  ihre homogene Koordinaten, dann gilt  $d(X, Y) = d \Leftrightarrow \text{Rang}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = n + d$ , was zu  $\text{Rang}((x_1 - y_1)|(x_2 - y_2)) = d$  äquivalent ist. Gilt  $d = 1$ , dann sind  $X, Y$  adjazent.

Nun möchten wir die Punkte der projektiven Gerade über einer beliebigen  $K$ -Algebra  $R$ , welche bestimmte Bedingungen erfüllt, mit gewissen Punkten von  $\mathcal{G}$  identifizieren.

Zunächst werden wir  $R$  in  $S$  (von oben) einbetten. Anschließend kann dann  $\mathbb{P}(R)$  in  $\mathbb{P}(S)$  eingebettet werden. Dazu benötigen wir eine Definition (vgl. [17, 4.1]):

**Definition 1.4.6.** Sei  $K$  ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Körper und  $R$  ein Ring. Ein Vektorraum  $U$  über  $K$  heißt ein  $(K, R)$ -**Bimodul**, wenn  $U$  ein (unitärer)  $R$ -Rechtsmodul ist, so dass für alle  $k \in K$ ,  $u \in U$ ,  $a \in R$  die Gleichheit  $k(u \cdot a) = (ku) \cdot a$  gilt.

Seien also  $R$  eine  $K$ -Algebra und  $U$  ein treuer  $R$ -Rechtsmodul mit der Skalarmultiplikation  $\cdot : U \times R \rightarrow U : (u, r) \mapsto u \cdot r$ . Wegen  $K \leq R$  ist  $U$  insbesondere auch ein  $K$ -Rechtsmodul. Nun können wir  $U$  wegen der Kommutativität von  $K$  zu einem  $K$ -Vektorraum machen, indem wir  $ku := u \cdot k$  setzen (den Beweis führen wir hier nicht durch). Für alle  $k \in K$ ,  $u \in U$ ,

<sup>xiii</sup>Hier ist wieder projektive Dimension gemeint.

$a \in R$  gilt daher:

$$(ku) \cdot a = (u \cdot k) \cdot a = u \cdot (ka) = u \cdot (ak) = (u \cdot a) \cdot k = k(u \cdot a).$$

Mit anderen Worten ist die Abbildung  $\rho_a : U \rightarrow U : u \mapsto u \cdot a$  für jedes  $a \in R$   $K$ -linear. Gemäß 1.4.6 ist  $U$  also ein  $(K, R)$ -Bimodul. Dieses Ergebnis formulieren wir in der folgenden Bemerkung:

**Bemerkung 1.4.7.** Sei  $R$  eine  $K$ -Algebra und  $U$  ein treuer  $R$ -Rechtsmodul. Dann ist  $U$  auch ein  $(K, R)$ -Bimodul.

Folglich ist  $R$  vermöge der Abbildung

$$\rho : R \rightarrow \text{End}_K(U) = S : a \mapsto \rho_a,$$

durch welche jedem  $a \in R$  die Rechtsmultiplikation

$$\rho_a : U \rightarrow U : u \mapsto u \cdot a = ua$$

zugeordnet wird, in den Endomorphismenring  $S$  einbettbar (man beachte, dass hier noch nicht gefordert wird, dass  $U$  endlichdimensional sein soll). Den Homomorphismus  $\rho$  nennt man auch eine  **$K$ -lineare Darstellung von  $R$**  (vgl. [17, S. 293], [26, 10.3.1]).

Nach dem Satz 3.1 in [17] ist dann die Abbildung

$$\bar{\rho} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(S) : R(a, b) \mapsto S(\rho_a, \rho_b)$$

wohldefiniert und injektiv und es gilt

$$\forall p, q \in \mathbb{P}(R) : p \Delta_R q \Rightarrow p^{\bar{\rho}} \Delta_S q^{\bar{\rho}},$$

d.h.  $\bar{\rho}$  lässt die Distanzrelation invariant.

Setzen wir nun zusätzlich voraus, dass  $\dim_K U = n < \infty$  ist (also  $S = \text{End}_K(U)$  wie am Anfang des Abschnitts), so ist dann  $R$  auch endlichdimensional und wir erhalten schließlich die folgende projektive Darstellung von

$\mathbb{P}(R)$  (vgl. [17, 4.2, 4.6(2)]):

**Satz 1.4.8.** *Sei  $R$  eine endlichdimensionale  $K$ -Algebra und  $U$  ein treuer  $R$ -Rechtsmodul der  $K$ -Dimension  $n$ . Dann ist die Abbildung*

$$\Phi := \bar{\rho} \circ \Psi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R)^\Phi \subseteq \mathcal{G} : R(a, b) \mapsto U^{(\rho_a, \rho_b)} = \{(ua, ub) \mid u \in U\}$$

*bijektiv und bildet (nicht)distante Punkte von  $\mathbb{P}(R)$  auf (nicht)komplementäre Unterräume von  $V$  ab.*

In der Matrixdarstellung gilt analog zu dem obigen Satz (siehe [26, 10.3.2, 10.3.3]):

**Satz 1.4.9.** *Es ist  $\zeta : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}_R(U) : R(a, b) \mapsto [a, b]$  mit  $\mathbb{P}_R(U) = \{[a, b] \mid R(a, b) \in \mathbb{P}(R)\} \subseteq \mathcal{G}$  eine bijektive Abbildung. Genau dann sind  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  windschief, wenn  $R(a, b)$  und  $R(c, d)$  distant sind.*

In [17] findet man auch eine Beschreibung projektiver Darstellungen der projektiven Gerade über einem beliebigen Ring. Zu projektiven Darstellungen von verallgemeinerten Kettengeometrien siehe z. B. [18].

Im Folgenden möchten wir mit Hilfe von einigen Beispielen bestimmte projektive Darstellungen, die sogenannten „Geradenmodelle“, beschreiben, welche im Abschnitt 2.4 wieder auftauchen werden (vgl. [26, Abschnitt 10.5]):

**Beispiel 1.4.10.** Sei stets  $K = \mathbb{R}$  und  $V = U \times U$  mit  $U = \mathbb{R}^2$ . Weiter sei  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_3^1$  die Menge aller Geraden des 3-dimensionalen reellen projektiven Raums  $PG(3, \mathbb{R})$ .

- (1) Sei  $R = \mathbb{C}$ , dann ist  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  eine reelle Möbiusebene (siehe [26, Kapitel 0, 2.2.4]). Identifiziert man  $\mathbb{C}^2$  mit  $\mathbb{R}^4$  vermöge  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 : (a, b) \mapsto (a_1, a_2, b_1, b_2)$  für  $a = a_1 + ia_2$ ,  $b = b_1 + ib_2$ , so kann man die Punkte  $\mathbb{C}(a, b) \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$  als gewisse 2-Räume in  $\mathbb{R}^4$ , also Geraden von  $PG(3, \mathbb{R})$  der Gestalt

$$\mathbb{R}(a_1, a_2, b_1, b_2) + \mathbb{R}(-a_2, a_1, -b_2, b_1)$$

darstellen. Wir bezeichnen die Menge aller solcher Geraden<sup>xiv</sup> mit  $\mathcal{S} \subseteq$

<sup>xiv</sup>Die Menge  $\mathcal{S}$  ist ein Spread von  $PG(3, \mathbb{R})$ . Dabei nennt man eine Menge  $\mathcal{S}$  bestimmter

$\mathcal{G}$  (siehe [15]). Damit entspricht die projektive Gerade  $\mathbb{P}(\mathbb{C})$  einer Menge lauter windschiefer Geraden von  $PG(3, \mathbb{R})$ , wobei durch jeden Punkt von  $PG(3, \mathbb{R})$  eine Gerade aus  $\mathcal{S}$  geht. Diese Menge von Geraden nennt man **elliptische lineare Kongruenz** (oder auch **elliptische Geradenkongruenz**) (siehe Abbildung 1.2 (links)). Jede Geradenschar der dort zu erkennenden einschaligen Hyperboloide entspricht einer Kette von  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})^{\text{xv}}$ .

- (2) Sei  $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , dann ist  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  eine Minkowski-Ebene (vgl. [26, 2.2.14]). Vermöge

$$((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto (a_1, a_2, b_1, b_2)$$

identifizieren wir die Punkte von  $\mathbb{P}(R)$  mit Geraden von  $PG(3, \mathbb{R})$  der Form

$$\mathbb{R}(a_1, 0, b_1, 0) + \mathbb{R}(0, a_2, 0, b_2)$$

mit  $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Jede solche Gerade trifft die beiden windschiefen Geraden  $G_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1, 0)$  und  $G_2 = \mathbb{R}(0, 1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$ . Umgekehrt kommt jede Verbindungsgerade zweier Punkte  $p_i \in G_i$  vor. Eine Menge solcher Geraden nennt man eine **hyperbolische lineare Kongruenz**, die abstrakt als eine Menge aller Geraden, welche zwei feste windschiefe Geraden treffen, beschrieben werden kann (siehe Abbildung 1.2 (rechts)).

- (3) Sei  $R \simeq \mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R} + \mathbb{R}\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  die Algebra der **dualen Zahlen**, dann ist  $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{R}[\varepsilon])$  eine Laguerre-Ebene (vgl. [26, 2.2.10]). Die Punkte von  $\mathbb{P}(\mathbb{R}[\varepsilon])$  werden mittels der Abbildung

$$(a_1 + a_2\varepsilon, b_1 + b_2\varepsilon) \mapsto (a_1, a_2, b_1, b_2)$$

---

Unterräume eines (Links-)Vektorraums  $V$  über einem nicht notwendigerweise kommutativen Körper  $K$  einen **Spread**, wenn  $\mathcal{S}$  mindestens drei paarweise komplementäre Unterräume von  $V$  enthält und es gilt  $V = \bigcup \mathcal{S}$  (siehe z. B. [12]).

<sup>xv</sup>Solche Scharen in  $\mathcal{S}$  heißen **Reguli**. Mehr dazu findet man im Abschnitt 2.4.

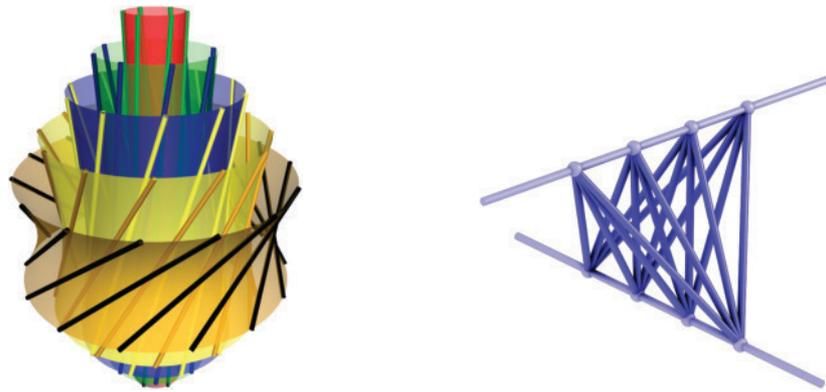


Abbildung 1.2: Elliptische lineare Kongruenz (links);  
Hyperbolische lineare Kongruenz (rechts).

als Geraden von  $PG(3, \mathbb{R})$  der Form

$$\mathbb{R}(a_1, a_2, b_1, b_2) + \mathbb{R}(0, a_1, 0, b_1)$$

mit  $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$  dargestellt. Jede solche Gerade trifft die Gerade  $G = \mathbb{R}(0, 1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$  in einem Punkt  $\mathbb{R}(0, a_1, 0, b_1)$  und liegt in derjenigen Ebene durch  $G$ , welche die Gerade  $H = \mathbb{R}(1, 0, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1, 0)$  im Punkt  $\mathbb{R}(a_1, 0, b_1, 0)$  schneidet. Die Menge aller solcher Geraden heißt **parabolische lineare Kongruenz**<sup>xvi</sup> (siehe Abbildung 1.3 (links)).

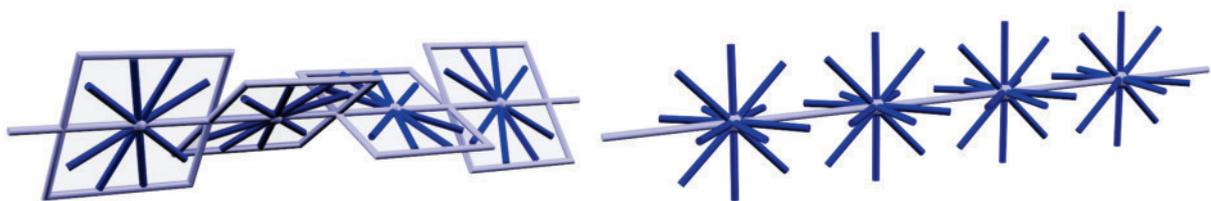


Abbildung 1.3: Parabolische lineare Kongruenz (links);  
Ausgearteter linearer Komplex (rechts)

Abstrakt kann man eine parabolische lineare Kongruenz wie folgt be-

---

<sup>xvi</sup>Bei manchen Autoren wird die Gerade  $G$  immer der parabolischen Kongruenz hinzuge-rechnet (siehe z. B. [33, S. 232]).

schreiben: Sei  $G$  eine feste Gerade und  $\pi$  eine linear induzierte projektive Kollineation, welche jeden Punkt auf  $G$  auf eine Ebene durch  $G$  abbildet. Sämtliche Geraden, welche die Gerade  $G$  in einem Punkt  $p \in G$  schneiden und zusätzlich in der Ebene  $p^\pi$  liegen, bilden eine parabolische Kongruenz.

- (4) Sei  $R$  die Algebra der **Ternionen** (der oberen  $2 \times 2$ -Dreiecksmatrizen) über  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $p = R(a, b)$  mit  $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$  ein Punkt in  $\mathbb{P}(R)$ , wenn die erweiterte Matrix  $(a|b)$  den Rang 2 hat. Daher entspricht jeder Punkt in  $\mathbb{P}(R)$  einer Gerade von  $PG(3, \mathbb{R})$  der Gestalt

$$\mathbb{R}(a_1, a_2, b_1, b_2) + \mathbb{R}(0, a_3, 0, b_3),$$

welche die Gerade  $G = \mathbb{R}(0, 1, 0, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 1)$  in einem Punkt schneidet. Auf diese Weise kann man jede Gerade darstellen, die durch einen Punkt auf  $G$  geht.

Die Menge solcher Geraden heißt **ausgearteter** (oder auch **spezieller**) **linearer Komplex**<sup>xvii</sup>, den man abstrakt wie folgt beschreibt: Ein ausgearteter linearer Komplex ist eine Menge sämtlicher Geraden, welche eine feste Gerade  $G$  in jeweils einem Punkt treffen, aber von  $G$  verschieden sind (siehe Abbildung 1.3 (rechts)).

---

<sup>xvii</sup>Auch beim speziellen linearen Komplex wird die Gerade  $G$  oft dazu genommen (siehe z. B. [33, S. 233], dort nennt man den speziellen linearen Komplex ein Gebüsch oder einen singulären linearen Komplex und die Gerade  $G$  heißt Gebüschachse).

## Kapitel 2

# Eine Beispielklasse: Jordan-Systeme in $K_{3,3}$ und zugehörige projektive Darstellungen

Bevor wir im nächsten Kapitel projektive Geraden über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen untersuchen, sollen in diesem Kapitel als Einstieg und Motivation Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  klassifiziert und zugehörige projektive Darstellungen ausführlich beschrieben werden. Es wird ein Beispiel eines weder starken noch Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systems vorgestellt, über welchem kein Kettenraum gemäß der im Kapitel 1 eingeführten Definition 1.1.29 der projektiven Gerade existiert.

In den ersten Abschnitten dieses Kapitels werden wir alle zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  klassifizieren. Anhand von diesen formulieren und beweisen wir zwei Sätze, welche alle Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  beschreiben. Anschließend stellen wir projektive Darstellungen einiger dieser Jordan-Systeme dar.

Sei also  $R = K_{3,3}$  eine Matrizenalgebra über einem Körper  $K$  mit Charakteristik  $\text{Char}K \neq 2$ , d.h.  $\dim_K R = 9$ . Weiter sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System in  $R$  mit  $\dim_K J = m \leq 9$ . Gilt  $m = 1$ , so ist  $J$  isomorph zu  $K$ . Im Fall  $m = 9$  ist  $J = R$ . In nachfolgenden Abschnitten betrachten wir ausführlich die Fälle  $m = 2$  und  $m = 3$ . Alle Matrizen werden hierbei mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

## 2.1 Zweidimensionale Jordan-Systeme in $K_{3,3}$

Bevor wir die Beschreibung aller zweidimensionalen Jordan-Systeme in  $R$  in einem Satz zusammenfassen, formulieren und beweisen wir das folgende Lemma:

**Lemma 2.1.1.** *Sei  $R = K_{n,n}$  und  $K$  in  $R$  via  $k \mapsto \text{diag}(k, \dots, k)$  eingebettet, so dass  $K \leq R$  ist. Weiter sei  $L \subseteq R$  ein Erweiterungskörper von  $K$ . Dann ist  $R$  ein  $L$ -Vektorraum mit  $\dim_L R = n^2/[L : K]$ .*

*Beweis:* Wir beweisen zunächst die erste Behauptung. Offenbar ist  $(R, +)$  eine abelsche Gruppe, denn  $R$  ist ein  $K$ -Vektorraum. Damit sind alle Additionsgesetze eines Vektorraums in  $R$  gültig. Mit den Rechenregeln für Matrizen überzeugt man sich davon, dass  $R$  auch die Axiome für Skalarmultiplikation  $\cdot : L \times R \rightarrow R : (l, r) \mapsto l \cdot r$  erfüllt. Damit ist  $R$  ein  $L$ -Vektorraum.

Nach Satz 1.2 in [50] gilt deshalb  $\dim_K R = [L : K] \cdot \dim_L R$  mit  $[L : K] := \dim_K L$ . Daraus folgt sofort  $\dim_L R = n^2/[L : K]$ .  $\square$

**Satz 2.1.2.** *Sei  $J$  ein zweidimensionales Jordan-System in  $R$ . Dann ist  $J$  von einem der folgenden Typen:*

- (J1)  *$J$  ist eine  $K$ -Algebra, welche zum Ring der dualen Zahlen über  $K$  isomorph ist, d.h.  $J \simeq K[\varepsilon] = K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon \notin K, \varepsilon^2 = 0$ .*
- (J2)  *$J$  ist eine  $K$ -Algebra, welche zum direkten Produkt  $K \times K \simeq K + Ke$  mit  $e^2 = e$  isomorph ist.*
- (J3)  *$J$  ist ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System über  $K \simeq GF(3)$  mit  $J^* = K^*$  und es gibt eine Basis  $\{1, b\}$ , so dass  $J = K + Kb$  ist, wobei  $b$  das Minimalpolynom  $m_b(X) = X(X - 1)(X - 2)$  hat.*

*Beweis:* Sei  $\{1, b\}$  eine Basis von  $J$ , d.h.  $J = K + Kb$ . Wir machen eine Fallunterscheidung nach dem Grad des Minimalpolynoms  $m_b(X)$  von  $b$ . Bekanntlich teilt das Minimalpolynom  $m_b(X)$  der Matrix  $b$  ihr charakteristisches Polynom  $\chi_b(X)$ . Wegen  $\text{Grad}(\chi_b(X)) = 3$  hat  $m_b(X)$  höchstens den Grad 3. Da  $1, b$  linear unabhängig sind, können nur zwei Fälle auftreten, und zwar:

(1)  $\text{Grad}(m_b(X)) = 2$ , d.h.  $1, b, b^2$  sind linear abhängig und in diesem Fall ist  $J = K + Kb = K[b] \leq R$  eine kommutative  $K$ -Algebra in  $R$ , welche zu  $K[X]/I_b$  isomorph ist, wobei  $I_b := \{p(X) \in K[X] \mid p(b) = 0\} = (m_b(X))$  das von  $m_b(X)$  erzeugte Ideal von  $b$  im Polynomring  $K[X]$  ist (siehe [32, S. 251,256]). Gemäß 2.2.1 in [26] kommen für diese Algebra nur drei Typen in Frage:

(a)  $J$  ist ein Erweiterungskörper von  $K$  mit  $[J : K] = 2$ : In unserem Fall kann  $J/K$  keine Körpererweiterung sein, denn sonst wäre  $J$  selbst ein Körper und damit  $R$  ein  $J$ -Vektorraum, so dass nach 2.1.1  $\dim_J R = 9/2 \notin \mathbb{N}$  folgen würde. Daher kann in  $R = K_{3,3}$  keine quadratische Körpererweiterung enthalten sein.

(b)  $J \simeq K[\varepsilon] = K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon \notin K$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ , d.h.  $J$  ist eine zum Ring der dualen Zahlen isomorphe  $K$ -Algebra (vgl. (J1)).

(c)  $J = K + Ke \simeq K \times K$  mit  $e^2 = e$  (vgl. (J2)).

(2)  $\text{Grad}(m_b(X)) = 3$ , d.h.  $1, b, b^2$  sind linear unabhängig und es gilt  $m_b(X) = X^3 + s_1X^2 + s_2X + s_3$  mit  $s_i \in K$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Wegen  $b^2 \notin J$  kann  $J$  weder eine  $K$ -Algebra, noch Jordan-abgeschlossen sein.

Wir zeigen zunächst, dass  $J$  in diesem Fall genau dann ein Jordan-System ist, wenn  $J^* = K^*$  gilt. Es ist klar, dass im Fall  $J^* = K^*$  ein Jordan-System vorliegt (vgl. 1.1.27). Es bleibt die Hinrichtung zu beweisen. Sei also  $J$  ein Jordan-System. Wir betrachten die Menge aller invertierbaren Elemente  $J^* \subseteq J = \{k + lb \mid k, l \in K\}$ . Wir nehmen an, dass es ein  $a = k + lb \in J^*$  mit  $l \neq 0$  existiert, also gilt  $a \notin K^*$  und damit  $J = K + Kb = K + Ka$ . OBdA setzen wir  $l = 1$ . Offenbar ist  $\text{Grad}(m_a(X)) = 3$ , denn sonst würde  $0 = a^2 + t_1a + t_2 = (k + b)^2 + t_1(k + b) + t_2 = b^2 + (2k + t_1)b + (k^2 + t_1k + t_2)$  mit  $t_1, t_2 \in K$  gelten, was ein Widerspruch zu der Voraussetzung  $\text{Grad}(m_b(X)) = 3$  ist. Daher sind  $1, a, a^2$  linear unabhängig und daraus folgt  $a^2 \notin J$ . Sei also  $m_a(X) = X^3 + t_1X^2 + t_2X + t_3$  mit  $t_i \in K$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , und

$t_3 = -\det(a) \neq 0$ . Daher gilt

$$\begin{aligned} a^3 + t_1 a^2 + t_2 a + t_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + t_1 a + t_2 + t_3 a^{-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^{-1} = -t_3^{-1} a^2 - t_3^{-1} t_1 a - t_3^{-1} t_2 &\notin J, \end{aligned}$$

weil  $a^2 \notin J$  ist. Unsere Annahme liefert also einen Widerspruch. Daraus folgt die Behauptung  $J^* = K^*$ .

Nun untersuchen wir, wie die Menge  $J \setminus J^*$  aussehen muss, damit die Gleichheit  $J^* = K^*$  erfüllt ist und deshalb  $J$  ein Jordan-System ist. Sei also  $a \in J \setminus (J^* \cup \{0\})$ . Nach gleicher Argumentation wie oben ist  $\text{Grad}(m_a(X)) = 3$ . Für  $m_a(X) = X^3 + t_1 X^2 + t_2 X + t_3 = \chi_a(X)$  mit  $t_i \in K$  gibt es die folgenden Möglichkeiten:

- (a) Ist  $m_a(X)$  irreduzibel in  $K$ , dann muss  $t_3 = -\det(a) \neq 0$  sein, da sonst hätte  $m_a(X) = X(X^2 + t_1 X + t_2)$  eine Nullstelle  $X = 0$  in  $K$ . In diesem Fall kann also  $a \in J$  nur invertierbar sein, wobei  $a$  nicht zu  $K$  gehört und daher  $J^* \neq K^*$  gilt.
- (b) Sei  $m_a(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2) \in K[X]$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Dann gilt  $\det(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$  oder  $\lambda_2 = 0$ . Wegen  $|K| \geq 3$  existiert ein  $\mu \in K^*$ , so dass  $a' := \mu + a \in J^*$  ist. Wegen  $a \notin K$  ist auch  $a' \notin K$ . Damit haben wir ein  $a' \in J^* \setminus K^*$  gefunden, so dass wieder  $J^* \neq K^*$  ist.
- (c) Sei  $m_a(X) = (X - \lambda)^3 \in K[X]$  mit  $\lambda \in K$ , dann ist  $\lambda^3 = \det(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ . Damit ist  $a$  wegen  $a^3 = 0$  nilpotent. Das liefert  $a + k \in J^* \setminus K^*$  für alle  $k \in K^*$  und deshalb gilt  $J^* \neq K^*$ .
- (d) Sei  $m_a(X) = (X - \lambda)q(X) \in K[X]$  mit  $\lambda \in K$ , wobei  $q(X) = X^2 + r_1 X + r_2$  mit  $r_i \in K$  irreduzibel in  $K$  ist, d.h. insbesondere  $r_2 \neq 0$ . Daher ist  $a$  zu der Matrix  $\begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  ähnlich und es ist  $q(X) = m_c(X) = (X - c_{11})(X - c_{22}) - c_{12}c_{21} = X^2 - (c_{11} + c_{22})X + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})$  für  $c := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ . Wegen  $\det(c) = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = r_2 \neq 0$  gilt  $\det(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ . Nun bestimmen wir ein  $\mu \in$

$K^*$ , für welches  $c' := \mu + c$  invertierbar ist, d.h. also  $\det(c') = (c_{11} + \mu)(c_{22} + \mu) - c_{12}c_{21} = c_{11}c_{22} + (c_{11} + c_{22})\mu + \mu^2 - c_{12}c_{21} = (c_{11} + c_{22} + \mu)\mu + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \neq 0$ . Wir betrachten zwei Fälle:

- (d<sub>1</sub>) Gilt  $c_{11} + c_{22} \neq 0$ , dann wähle  $\mu = -(c_{11} + c_{22}) \in K^*$ . In diesem Fall erhalten wir  $\det(c') = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0$ .
- (d<sub>2</sub>) Gilt  $c_{11} + c_{22} = 0$ , dann ist  $q(X) = X^2 - (c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22})$ . Da  $q(X)$  irreduzibel in  $K$  ist, existiert kein  $\nu \in K$ , so dass  $c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22} = \nu^2$  ist. Daraus ergibt sich  $\det(c') = \mu^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) \neq 0$  für alle  $\mu \in K$ .

Das impliziert, dass wir stets ein  $\mu \in K^*$  finden, so dass  $a' := a + \mu \in J^* \setminus K^*$  ist, denn es gilt  $\det(a') = \mu \cdot \det(c') \neq 0$ . Insgesamt folgern wir wieder  $J^* \neq K^*$ .

- (e) Sei nun  $m_a(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \in K[X]$  mit paarweise verschiedenen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ . Dann ist  $a$  zu der Matrix  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  ähnlich und es ist  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(a) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$  oder  $\lambda_2 = 0$  oder  $\lambda_3 = 0$ . Hat  $K$  mehr als drei Elemente, dann gibt es stets ein  $\mu \in K^*$ , für welches  $a' := \mu + a \notin K$  invertierbar in  $J$  ist. Deshalb ist  $J$  in diesem Fall für alle  $K$  mit  $|K| > 3$  kein Jordan-System.

Sei also  $K \simeq GF(3)$ , dann kann man oBdA  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  und  $\lambda_3 = 0$  setzen. In diesem Fall kann man einfach nachrechnen, dass es außerhalb von  $K^*$  keine weitere invertierbare Elemente in  $J$  gibt. Daraus folgt  $J^* = K^*$  und damit ist  $J$  ein Jordan-System (vgl. (J3)).  $\square$

Eine Folgerung aus dem Beweis zu dem obigen Satz schreiben wir noch einmal als Bemerkung auf:

**Bemerkung 2.1.3.** Sei  $J$  ein Jordan-System in  $R = K_{3,3}$  mit  $\dim_K J = 2$ , dann ist  $J$  kein Erweiterungskörper von  $K$ .

Man kann sogar zeigen, dass in  $K_{3,3}$  (in Abhängigkeit von  $K$ ) stets Jordan-Systeme von jedem im Satz 2.1.2 aufgezählten Typ existieren:

**Bemerkung 2.1.4.** Sei zunächst  $K$  ein beliebiger Körper, dann gibt es in  $K_{3,3}$  stets jeweils ein Jordan-System vom Typ (J1) bzw. (J2):

(J1) Wähle  $\{1, \varepsilon\}$  als Basis von  $J$  mit  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ . Dann ist  $J = K + K\varepsilon$  offenbar eine  $K$ -Algebra, welche zum Ring der dualen Zahlen isomorph ist.

(J2) Sei  $J = K \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = K + Ke$  mit  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^2$ , dann gilt offensichtlich  $J \simeq K \times K$ .

Sei nun  $K \simeq GF(3)$ , dann existiert in  $K_{3,3}$  ein Jordan-System vom Typ (J3):

(J3) Die Menge  $J = \left\{ \begin{pmatrix} k+l & 0 & 0 \\ 0 & k+2l & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \mid k, l \in GF(3) \right\} = K + Ka$  mit  $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $J^* = K^*$  ist offenbar ein Jordan-System und es gilt  $m_a(X) = X(X-1)(X-2)$ . Wegen  $a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$  ist  $J$  nicht Jordan-abgeschlossen.

Schließlich fassen wir alle zweidimensionalen Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  mit den zugehörigen Beispielen in einer Tabelle zusammen:

#	Allgemeine Darstellung	Beispiel	Bemerkung
$\dim_K J = 2$			
(J1)	$J \simeq K[\varepsilon] = K + K\varepsilon, \varepsilon^2 = 0$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}$	$K$ -Algebra
(J2)	$J = K + Ke \simeq K \times K, e^2 = e$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}$	$K$ -Algebra
(J3)	$J = K + Ka, a^2 \notin J, m_a(X) = X(X-1)(X-2), K \simeq GF(3)$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & x+2y \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\}, K = \{0, 1, 2\}$	Nicht Jordan-abgeschlossen, $J^* = K^*$

## 2.2 Dreidimensionale Jordan-Systeme in $K_{3,3}$

Alle Jordan-Systeme der Dimension 3 in  $R$  beschreiben wir wieder in einem Satz:

**Satz 2.2.1.** *Sei  $J$  ein dreidimensionales Jordan-System in  $R$ . Dann gibt es folgende Möglichkeiten für  $J$ :*

- (J1)  $J$  ist ein Erweiterungskörper von  $K$  vom Grad  $[J : K] = 3$ .
- (J2)  $J \simeq K + K\varepsilon + Kd$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  und  $d^2 = d$  ist eine  $K$ -Algebra, welche genau dann kommutativ ist, wenn  $\varepsilon d = d\varepsilon = 0$  gilt. Ist  $J$  nicht kommutativ, dann ist  $J$  zu der  $K$ -Algebra der Ternionen  $T$  isomorph.
- (J3)  $J \simeq K[\varepsilon] = K + K\varepsilon + K\varepsilon^2$  mit  $\varepsilon^3 = 0$  ist eine kommutative  $K$ -Algebra.
- (J4)  $J \simeq K + Ke + Kd$  mit  $e^2 = e, d^2 = d$  ist eine  $K$ -Algebra, welche genau dann kommutativ ist, wenn  $ed = de = 0$  gilt. Im nicht kommutativen Fall ist  $J \simeq T$ .
- (J5)  $J$  ist eine kommutative  $K$ -Algebra, welche zum direkten Produkt  $K \times L$  isomorph ist, wobei  $L$  ein quadratischer Erweiterungskörper von  $K$  ist.
- (J6)  $J \simeq K + K\varepsilon + K\delta$  mit  $\varepsilon^2 = 0, \delta^2 = 0$  ist eine kommutative  $K$ -Algebra und es gilt stets  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ .
- (J7)  $J \simeq K + Ka + Kb$  ist ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System über  $K \simeq GF(3)$ , wobei  $m_b(X) = X(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$  mit  $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ist und  $a$  zu  $b$  ähnlich ist oder  $\text{Grad}(m_a(X)) = 2$  gilt.

*Beweis:* Sei  $b \in J \setminus K$  und  $m_b(X)$  das Minimalpolynom von  $b$ . Für den Grad von  $m_b(X)$  in  $R$  gibt es wieder zwei Möglichkeiten:

- (1) Sei  $\text{Grad}(m_b(X)) = 3$ , d.h.  $1, b, b^2$  sind linear unabhängig. Im Beweis von Satz 2.1.2 (Teil (2)) wurden schon alle Möglichkeiten für  $b$  kurz zusammengefasst, wobei dort gezeigt wurde, dass wir in den Fällen (a)-(d) oBdA  $b \in J^*$  annehmen können. In diesen Fällen gilt dann  $b^2 \in J$ , so dass  $J = K + Kb + Kb^2 = K[b] \simeq K[X]/(m_b(X)) \leq R$  eine kommutative  $K$ -Algebra in  $R$  ist. Im Fall (e) müssen wir hingegen sowohl  $b^2 \in J$  als auch  $b^2 \notin J$  berücksichtigen. Im Folgenden betrachten wir alle Fälle noch einmal ausführlich:

- (a) Sei  $m_b(X) \in K[X]$  irreduzibel, dann ist  $J = K[b] \simeq K[X]/(m_b(X))$  ein Erweiterungskörper vom Grad 3, also vom Typ (J1) (siehe [51,

S. 229]). Wegen  $\dim_{K[b]}R = 9/3 = 3 \in \mathbb{N}$  haben wir dabei keinen Widerspruch (siehe 2.1.1).

- (b) Sei  $m_b(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2) \in K[X]$  mit zwei verschiedenen Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$ . Da  $m_b(X)$  das Minimalpolynom von  $b$  ist, gibt es kein Polynom  $p(X) \in K[X]$  vom Grad  $\leq 2$  mit  $p(b) = 0$ . Insbesondere gilt  $b - \lambda_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ ,  $(b - \lambda_1)^2 \neq 0$  sowie  $(b - \lambda_1)(b - \lambda_2) \neq 0$ .

Wir setzen nun  $\varepsilon := (b - \lambda_1)(b - \lambda_2) = b^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)b + \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ . Es gilt dann  $\varepsilon^2 = (b - \lambda_1)^2(b - \lambda_2)(b - \lambda_2) = m_b(b)(b - \lambda_2) = 0$ . Offenbar gilt  $\varepsilon \neq b^2$  und  $1, b, \varepsilon$  sind linear unabhängig. Damit erhalten wir schon mal  $J = K + K\varepsilon + Kb$  mit  $\varepsilon^2 = 0$ .

Weiter setze  $e := \frac{\lambda_1 - b}{\lambda_1 - \lambda_2} \in K + Kb \subseteq J$  mit  $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$  nach Voraussetzung, dann gilt:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{(\lambda_1 - b)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(\lambda_1^2 - 2\lambda_1 b + b^2) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(\varepsilon + \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1 b + (\lambda_1 + \lambda_2)b) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(\varepsilon + \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)b) \\ &= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}(\varepsilon + (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - b)) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\varepsilon + \frac{\lambda_1 - b}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\varepsilon + e = \delta^{-2}\varepsilon + e \end{aligned}$$

für  $\delta := \lambda_1 - \lambda_2 \in K^*$  und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon e &= (b - \lambda_1)(b - \lambda_2) \frac{\lambda_1 - b}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= -\delta^{-1}(b - \lambda_1)^2(b - \lambda_2) \\ &= -\delta^{-1}m_b(b) = 0 = e\varepsilon. \end{aligned}$$

Definiere nun  $d := e^2 = \delta^{-2}\varepsilon + e = \delta^{-2}(\lambda_1 - b)^2$ . Nach dem oben

Gezeigt folgt  $d^2 = (\delta^{-2}\varepsilon + e)^2 = \delta^{-4}\varepsilon^2 + 2\delta^{-2}\varepsilon e + e^2 = e^2 = d$ . Wir zeigen, dass  $1, d, \varepsilon$  linear unabhängig sind. Angenommen,  $1, d, \varepsilon$  sind linear abhängig, d.h. es existieren  $\mu, \nu \in K$ , so dass  $\mu + \nu\varepsilon = d$  gilt. Das impliziert

$$\begin{aligned} \mu + \nu\varepsilon &= d \\ \Leftrightarrow \mu + \nu\varepsilon &= \delta^{-2}\varepsilon + e \\ \Leftrightarrow \mu &= (\delta^{-2} - \nu)\varepsilon + e \\ \Leftrightarrow \mu &= (b - \lambda_1)((\delta^{-2} - \nu)(b - \lambda_2) - \delta^{-1}) \notin K. \end{aligned}$$

Unsere Annahme liefert also einen Widerspruch. Insgesamt können wir daraus folgern  $J = K + Kd + K\varepsilon$  mit  $d^2 = d$  und  $\varepsilon^2 = 0$  (vgl. (J2), kommutativer Fall).

(c) Sei  $m_b(X) = (X - \lambda)^3 \in K[X]$  mit einer dreifachen Nullstelle  $\lambda \in K^*$ . Definiere man  $\varepsilon := b - \lambda$ , dann gilt  $\varepsilon^2 = (b - \lambda)^2 \neq 0$  nach gleicher Argumentation wie oben und  $\varepsilon^3 = (b - \lambda)^3 = m_b(b) = 0$ . Offenbar sind  $1, \varepsilon, \varepsilon^2$  linear unabhängig, da es sonst  $\mu, \nu \in K$  mit  $(b - \lambda)^2 = \mu(b - \lambda) + \nu$  geben würden und somit  $b^2 - (2\lambda + \mu)b + (\lambda^2 + \mu\lambda - \nu) = 0$  wäre, was ein Widerspruch zur Voraussetzung  $\text{Grad}(m_b(X)) = 3$  ist. Daraus folgt  $J = K + K\varepsilon + K\varepsilon^2 = K[\varepsilon]$  mit  $\varepsilon^3 = 0$  (vgl. (J3)).

(d) Sei  $m_b(X) = (X - \lambda)q(X) \in K[X]$  mit einer einfachen Nullstelle  $\lambda \in K^*$ , wobei  $q(X) \in K[X]$  ein normiertes und in  $K$  irreduzibles Polynom vom Grad 2 ist, d.h. es gilt  $q(b) \neq 0$ . Dann ist  $b$  zu einer Matrix  $c$  der Gestalt  $c = \begin{pmatrix} \lambda & x & y \\ 0 & u & v \\ 0 & w & z \end{pmatrix}$  mit  $x, y, u, v, w, z \in K$  ähnlich, wobei  $q(X) = m_a(X)$  für  $a := \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \in K_{2,2}$  ist und somit gilt  $q(a) = 0$ . Wir studieren die zu  $J$  isomorphe  $K$ -Algebra  $J' := K + Kc + Kc^2$ .

Nach dem Satz von Kronecker (siehe [51, S.254]) existiert ein Erweiterungskörper  $L$  von  $K$  mit  $[L : K] = 2$ , der eine Wurzel von  $q(X)$  enthält, d.h. es gibt ein  $t \in L$  mit  $q(t) = 0$  und  $L = K(t) = K + Kt \simeq K[X]/(q(X))$ , so dass  $\dim_K K[X]/(q(X)) = 2$  ist. Au-

ßerdem ist die  $K$ -Unteralgebra  $K[a]$  isomorph zu  $K[X]/(q(X))$ .  
Damit gilt  $L \simeq K[a]$  mit einer Basis  $\{1, a\}$  von  $K[a]$ .

Betrachtet man ein beliebiges Element aus  $J'$ , so hat dieses die gleiche Gestalt wie  $c$ , wobei im unteren rechten Block stets ein Element aus  $K[a] \simeq L$  steht, denn es gilt  $J' = K + Kc + Kc^2$  und  $c^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda x + xu + yw & \lambda y + xv + yz \\ 0 & u^2 + vw & uv + vz \\ 0 & wu + zw & wv + z^2 \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} u^2 + vw & uv + vz \\ wu + zw & wv + z^2 \end{pmatrix} = a^2 \in K[a]$ .  
Folglich können wir zwischen den  $K$ -Vektorräumen  $J'$  und  $L$  eine Abbildung definieren, nämlich wie folgt

$$f : J' \rightarrow L : k_1 + k_2c + k_3c^2 \mapsto k_1 + k_2a + k_3a^2.$$

Die Abbildung  $f$  ist ein Homomorphismus von  $K$ -Algebren  $J'$  und  $L$  mit  $1_{J'} \mapsto 1_L$ , denn es gilt für zwei beliebige Matrizen aus  $J'$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_1 & y_1 \\ 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & w_1 & z_1 \end{pmatrix}^f \begin{pmatrix} \lambda_2 & x_2 & y_2 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 0 & w_2 & z_2 \end{pmatrix}^f \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ w_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 & v_2 \\ w_2 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1u_2 + v_1w_2 & u_1v_2 + v_1z_2 \\ w_1u_2 + z_1w_2 & w_1v_2 + z_1z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1x_2 + x_1u_2 + y_1w_2 & \lambda_1y_2 + x_1v_2 + y_1z_2 \\ 0 & u_1u_2 + v_1w_2 & u_1v_2 + v_1z_2 \\ 0 & w_1u_2 + z_1w_2 & w_1v_2 + z_1z_2 \end{pmatrix}^f. \end{aligned}$$

Dabei ist  $f$  surjektiv und es gilt offenbar  $\dim_K \text{Kern } f = 1$  mit

$$\text{Kern } f = \{k_1 + k_2c + k_3c^2 \mid k_1 + k_2a + k_3a^2 = 0\} =: Ke,$$

wobei  $e = \begin{pmatrix} 1 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $e_1, e_2 \in K$  ein Basisvektor von  $\text{Kern } f$

ist. Das liefert die Isomorphie von den  $K$ -Vektorräumen  $\text{Kern } f$  und  $K$ .

Nun definieren wir  $U := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u' & v' \\ 0 & w' & z' \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} u' & v' \\ w' & z' \end{pmatrix} \in K + Ka + Ka^2 \right\}$ , dann ist  $U$  ein  $K$ -Unterraum von  $J'$ . Folglich ist die Einschränkung  $f|_U : U \rightarrow L$  ein  $K$ -Vektorraum-Isomorphismus. Es gilt also  $J' = \text{Kern } f \oplus U$ . Nun bestimmen wir den Basisvektor  $e$ . Für  $\text{Kern } f$  sind die folgenden Fälle denkbar:

(i) Gilt  $e_1 = e_2 = 0$ , dann ist  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(ii) Seien  $e_1 = 0$  und  $e_2 \neq 0$ . Dann haben wir

$$c = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda e_2 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & z \end{pmatrix}, \quad c^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda e_2 w & \lambda^2 e_2 + \lambda e_2 z \\ 0 & u^2 + vw & uv + vz \\ 0 & wu + zw & wv + z^2 \end{pmatrix} \in J'$$

$$\Leftrightarrow \lambda e_2 w = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } w = 0.$$

Wegen  $\lambda \in K^*$  muss also  $w = 0$  sein. In diesem Fall ist aber  $c$  diagonalisierbar und somit hat das charakteristische Polynom drei Nullstellen, was ein Widerspruch ist. Dieser Fall tritt also nie ein.

(iii) Seien  $e_1 \neq 0$  und  $e_2 = 0$ . Dann gilt

$$c = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda e_1 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & z \end{pmatrix}, \quad c^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda^2 e_1 + \lambda e_1 u & \lambda \lambda e_1 v \\ 0 & u^2 + vw & uv + vz \\ 0 & wu + zw & wv + z^2 \end{pmatrix} \in J'$$

$$\Leftrightarrow \lambda e_1 v \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = 0.$$

Nach gleicher Argumentation wie in (ii) folgt  $v = 0$  und damit kann  $q(X)$  in  $K$  nicht irreduzibel sein. Daher kann dieser Fall ebenso nicht eintreten.

(iv) Seien nun  $e_1, e_2 \neq 0$ . Damit sind  $x = \lambda e_1, y = \lambda e_2 \in K^*$ . Das

Inverse von  $c$  ist dann

$$\begin{aligned} c^{-1} &= (\lambda(uz - vw))^{-1} \begin{pmatrix} uz - vw & \lambda e_2 w - \lambda e_1 z & \lambda e_1 v - \lambda e_2 u \\ 0 & \lambda z & -\lambda v \\ 0 & -\lambda w & \lambda u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} (uz - vw)^{-1} (e_2 w - e_1 z) & (uz - vw)^{-1} (e_1 v - e_2 u) \\ 0 & (uz - vw)^{-1} z & -(uz - vw)^{-1} v \\ 0 & -(uz - vw)^{-1} w & (uz - vw)^{-1} u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} c^{-1} &\in J' \\ &\Leftrightarrow (uz - vw)^{-1} (e_2 w - e_1 z) = \lambda^{-1} e_1 \text{ und} \\ &\quad (uz - vw)^{-1} (e_1 v - e_2 u) = \lambda^{-1} e_2 \\ &\Leftrightarrow e_1^{-1} e_2 w - z = (uz - vw) \lambda^{-1} \text{ und} \\ &\quad e_2^{-1} e_1 v - u = (uz - vw) \lambda^{-1} \\ &\Leftrightarrow e_2^{-1} e_1 v - u = e_1^{-1} e_2 w - z \\ &\Leftrightarrow w = e_1^2 e_2^{-2} v - e_1 e_2^{-1} u + e_1 e_2^{-1} z. \end{aligned}$$

Definiert man  $e_1 e_2^{-1} =: \nu \in K^*$ , dann ist  $a = \begin{pmatrix} \nu^2 v - \nu u + \nu z & u & v \\ \nu^2 v - \nu u + \nu z & u & v \\ \nu^2 v - \nu u + \nu z & u & v \end{pmatrix}$ . Für das Minimalpolynom von  $a$  erhalten wir dann  $q(X) = (X - u)(X - z) - \nu \nu (\nu v - u + z) = (X - (u - \nu v))(X - (\nu v + z))$ , so dass  $q(X) = 0$  in  $K$  lösbar ist, was wieder ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist. Dieser Fall kann also auch nicht eintreten.

Insgesamt folgern wir:  $\text{Kern } f = Ke$  mit  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und deshalb erhalten wir  $U = K(1 - e) + K\tilde{a}$  mit  $\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & z \end{pmatrix} \in U$ . Daher gilt  $J \simeq J' = Ke + K(1 - e) + K\tilde{a} \simeq K \times L$  vermöge  $\text{Kern } f \oplus U \rightarrow K \times L : ke + l(1 - e) + s\tilde{a} \mapsto (k, l + sa)$  für  $k, l, s \in K$  und  $a \in K_{2,2}$  wie oben mit  $K[a] \simeq L$  (vgl. (J5)).

(e) Sei  $m_b(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3) \in K[X]$  mit drei paarweise verschiedenen Nullstellen  $\lambda_i \in K$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , insbesondere gilt somit  $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$  für alle  $i \neq j$ . Dann ist  $b$  zu einer Diagonalmatrix  $c = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  ähnlich, d.h. es gibt ein  $s \in GL_3(K)$  mit  $s^{-1}bs = c$ . Damit sind auch  $b^2$  und  $c^2$  ähnlich, denn es gilt  $s^{-1}b^2s = (s^{-1}bs)(s^{-1}bs) = c^2$ . Wir betrachten zwei Fälle:

(i) Sei  $b^2 \in J$ , so dass  $J = K[b]$  eine  $K$ -Algebra ist. Da mit  $1, b, b^2$  auch  $1, c, c^2$  linear unabhängig sind, können wir statt  $J = K + Kb + Kb^2$  die zu  $J$  isomorphe  $K$ -Algebra  $J' := K + Kc + Kc^2$  betrachten.

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} e &:= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_3)^{-1}(c - \lambda_1)(c - \lambda_3) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_3)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_2 - \lambda_3)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in J'. \end{aligned}$$

Damit ist  $e^2 = e$ . Analog setze man

$$\begin{aligned} d &:= (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_3 - \lambda_2)^{-1}(c - \lambda_1)(c - \lambda_2) \\ &= (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_3 - \lambda_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_3 - \lambda_1)^{-1}(\lambda_3 - \lambda_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in J', \end{aligned}$$

so dass auch  $d^2 = d$  gilt. Außerdem erhalten wir  $ed = 0 = de$ . Offenbar sind  $1, e, d$  linear unabhängig. Daraus folgt  $J \simeq J' = K + Ke + Kd \simeq K \times K \times K$  vermöge  $x + ye + zd \mapsto (x, x + y, x + z)$  (vgl. (J4), kommutativer Fall).

(ii) Sei nun  $b^2 \notin J$ . Gemäß des Beweises von Satz 2.1.2 kann dieser Fall nur für  $b \notin J^*$  und  $K \simeq GF(3)$  eintreten. Es gibt

also eine Basis  $\{1, a, b\} \subseteq J$ , so dass  $J = K + Ka + Kb$  ist. Insbesondere ist  $J$  in diesem Fall nicht Jordan-abgeschlossen und somit keine  $K$ -Algebra.

Definiere man  $J_b := K + Kb$ , dann ist  $J_b$  nach 2.1.2(J3) ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System mit  $J_b^* = K^*$ . Nun betrachten wir den zweiten Basisvektor  $a$ .

Gilt  $\text{Grad}(m_a(X)) = 3$ , dann muss auch  $a^2 \notin J$  gelten, denn sonst wäre  $J$  eine  $K$ -Algebra. Daher ist  $J_a := K + Ka$  ein zweidimensionales nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System vom gleichen Typ wie  $J_b$  mit  $J_a^* = K^*$ . Daraus folgt, dass  $a$  und  $b$  ähnlich sind und somit ein  $p \in GL_3(K)$  mit  $b = p^{-1}ap$  existiert. Das liefert  $J = K + Ka + Kp^{-1}ap$ .

Im Fall  $\text{Grad}(m_a(X)) = 2$  ist  $J_a = K[a]$  eine zweidimensionale  $K$ -Algebra in  $J \subseteq R$  und laut 2.1.2, Teil (1) gibt es nur 2 Möglichkeiten dafür:  $J_a \simeq K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  oder  $J_a \simeq K + Ke$  mit  $e^2 = e$ . Ein Beispiel für ein solches Jordan-System  $J$  ist  $J = K + Kb + K\varepsilon$  mit  $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und somit  $J^* = K^* + K\varepsilon$  (vgl. (J7)).

- (2) Für alle  $b \in J \setminus K$  sei  $\text{Grad}(m_b(X)) = 2$  und damit  $1, b, b^2 \in J$  linear abhängig, d.h.  $K[X]/(m_b(X)) \simeq K + Kb = K[b] \leq R$  ist für jedes  $b \in J \setminus K$  eine zweidimensionale  $K$ -Algebra in  $R$ . Damit gilt  $K[b] \simeq K[\varepsilon]$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  oder  $K[b] \simeq K \times K$ , wobei  $m_b(X) = 0$  in beiden Fällen in  $K$  lösbar ist (vgl. Beweis von 2.1.2, Teil (1)).

Sei nun  $\{1, a, b\}$  eine Basis von  $J$ , so dass  $J = K + Ka + Kb$  ist. Dann gilt offensichtlich  $K[a] \cap K[b] = K$  und damit ist  $J = K + Ka + Kb = K + Ka + K + Kb = K[a] + K[b]$ . Wir betrachten alle Kombinationsmöglichkeiten von  $a$  und  $b$ :

- (a) Seien  $\lambda, \mu \in K$  doppelte Nullstellen von  $m_a(X)$  bzw.  $m_b(X)$ , d.h.  $m_a(X) = (X - \lambda)^2$  und  $m_b(X) = (X - \mu)^2$ . Es gilt dann  $K[a] = K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  und  $K[b] = K + K\delta$  mit  $\delta^2 = 0$ . Mit  $1, a, b$  sind auch  $1, \varepsilon, \delta$  linear unabhängig. Daher ist  $J = K[a] + K[b] =$

$K + K\varepsilon + K\delta$ . Nach Hilfssatz 6.1.2 ist  $J$  eine kommutative  $K$ -Algebra (vgl. (J6)).

- (b) Sei  $\lambda \in K$  die doppelte Nullstelle von  $m_a(X)$  und  $\mu_1, \mu_2 \in K$  zwei verschiedene Nullstellen von  $m_b(X)$ , d.h.  $m_a(X) = (X - \lambda)^2$  und  $m_b(X) = (X - \mu_1)(X - \mu_2)$ . Damit gilt  $K[a] = K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  und  $K[b] = K + Ke \simeq K \times K$  mit  $e^2 = e$ . Daraus folgt  $J = K[a] + K[b] = K + K\varepsilon + K + Ke = K + Ke + K\varepsilon$ . Wir zeigen, dass  $J$  eine nicht kommutative  $K$ -Algebra ist. Das bedeutet insbesondere, dass  $J$  zu der  $K$ -Algebra aus dem Fall (1)(b) des Beweises nicht isomorph sein kann.

Sei  $c = \varepsilon + e \in J$ . Wir erinnern daran, dass nach Voraussetzung  $\text{Grad}(m_c(X)) = 2$  ist. Angenommen, es gilt  $e\varepsilon = \varepsilon e$ . Laut dem Beweis von 6.2.2(a) ist dann  $e\varepsilon = \varepsilon e = \lambda\varepsilon$  für  $\lambda \in \{0, 1\}$ . Dann folgt daraus  $c^2 = e + 2\lambda\varepsilon$  und damit sind  $1, c, c^2$  sowohl für  $\lambda = 0$  als auch für  $\lambda = 1$  linear unabhängig. Unsere Annahme liefert also einen Widerspruch. Deshalb gilt schon mal  $e\varepsilon \neq \varepsilon e$ . Nach 6.2.2(a) ist  $J$  also eine nicht kommutative  $K$ -Algebra, welche gemäß [56, Satz 1] zu der  $K$ -Algebra der Ternionen isomorph ist (vgl. (J2), nicht kommutativer Fall).

- (c) Seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  zwei verschiedene Nullstellen von  $m_a(X)$  und  $\mu_1, \mu_2$  zwei verschiedene Nullstellen von  $m_b(X)$ , d.h.  $m_a(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ ,  $m_b(X) = (X - \mu_1)(X - \mu_2)$ . Dann gilt  $K[a] = K + Ke \simeq K \times K$  mit  $e^2 = e \notin K$  und  $K[b] = K + Kd \simeq K \times K$  mit  $d^2 = d \notin K$ .

Offenbar sind  $1, e, d$  linear unabhängig. Daraus folgt  $J = K[a] + K[b] = K + Ke + K + Kd = K + Ke + Kd$ . Gemäß 6.2.2(b) ist  $J$  eine nicht notwendigerweise kommutative  $K$ -Algebra. Wir zeigen, dass  $J$  in diesem Fall stets nicht kommutativ ist.

Sei  $c = k + le + sd \in J$  mit  $k, l, s \in K^*$ . Wir nehmen an, dass  $ed = de$  gilt. Laut dem Beweis von 6.2.2(b) ist dann  $ed \in \{0, e\}$ .

Das liefert

$$c^2 = \begin{cases} k^2 + (2kl + l^2)e + (2ks + s^2)d, & \text{falls } ed = 0, \\ k^2 + (2kl + l^2 + 2ls)e + (2ks + s^2)d, & \text{falls } ed = e. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass  $1, c, c^2$  im Fall  $ed = 0$  für  $l \neq s$  linear unabhängig sind, was aber wegen  $\text{Grad}(m_c(X)) = 2$  ein Widerspruch ist. Den gleichen Widerspruch erhalten wir im Fall  $ed = e$  für  $l \neq -s$ . Daher ist unsere Annahme falsch und es gilt  $ed \neq de$ , so dass  $J$  nicht kommutativ ist. Nach [56, Satz 1] ist  $J$  zu der  $K$ -Algebra der Ternionen isomorph.

Damit haben wir alle möglichen Fälle untersucht. □

In der folgenden Tabelle stellen wir alle möglichen dreidimensionalen Jordan-Systeme noch einmal dar:

#	Allgemeine Darstellung	Beispiel	Bemerkung
$\dim_K J = 3$			
(J1)	$J$ ist ein Erweiterungskörper von $K$ mit $[J : K] = 3$		Ein kommutativer Körper
(J2)	$J = K + K\varepsilon + Kd, \varepsilon^2 = 0, d^2 = d$	a) $\left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq$ $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$	Eine $K$ -Algebra, kommutativ im Fall $\varepsilon d = d\varepsilon = 0$ (Beispiel (a)).
(J3)	$J = K[\varepsilon] = K + K\varepsilon + K\varepsilon^2, \varepsilon^3 = 0$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$	Eine kommutative $K$ -Algebra
(J4)	$J = K + Ke + Kd, e^2 = e, d^2 = d$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq K \times K \times K$	Eine kommutative $K$ -Algebra mit $ed = de = 0$

#	Allgemeine Darstellung	Beispiel	Bemerkung
$\dim_K J = 3$			
(J5)	$J = K + Ke + Ki \simeq K \times L$ , $e^2 = e$ , $L \simeq Ke + Ki$ ist ein Erweiterungskörper mit $[L : K] = 2$	$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K, \right.$ $\left. \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in L \right\}$	Eine kommutative $K$ -Algebra
(J6)	$J = K + K\varepsilon + K\delta$ , $\varepsilon^2 = 0, \delta^2 = 0$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & z & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$	Eine kommutative $K$ -Algebra mit $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$
(J7)	$J = K + Ka + Kb$ , $a^2 \notin J$ , $m_a(X) = X(X-1)(X-2)$ , $K \simeq GF(3)$	$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x+y & 0 \\ 0 & 0 & x+2y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$ , $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $b^2 = 0$ , $J^* = K^* + Kb$	Ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System; $b$ ist ähnlich zu $a$ oder es gilt $\text{Grad}(m_b(X)) = 2$

## 2.3 Struktursätze über Jordan-Systeme in $K_{3,3}$

In diesem Abschnitt beschreiben wir in zwei Struktursätzen alle Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$ . Zunächst möchten wir uns auf quadratisch abgeschlossene Jordan-Systeme konzentrieren, d.h. auf solche, welche für jedes  $a \in J$  auch dessen Quadrat  $a^2$  und damit die zugehörige  $K$ -Algebra  $K[a]$  enthalten. Für alle zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme können wir in den vorangehenden Abschnitten das Folgende beobachten:

**Bemerkung 2.3.1.** Sei  $J \subseteq K_{3,3}$  ein zwei- oder dreidimensionales Jordan-System mit  $a^2 \in J$  für alle  $a \in J$ . Dann hat  $J$  eine Basis, so dass jeder Basisvektor entweder nilpotent, oder idempotent<sup>1</sup>, oder Element eines Erwei-

<sup>1</sup>In einem Ring  $R$  heißt ein Element  $e \in R$  **idempotent**, wenn  $e^2 = e$  gilt (siehe [50,

terungskörpers  $L \subseteq J$  von  $K$  ist.

Im folgenden Satz verallgemeinern wir diese Bemerkung für weitere Dimensionen von  $J$ . Dazu führen wir einen neuen Begriff ein:

**Definition 2.3.2.** Sei  $J$  ein Jordan-System über einem Körper  $K$  und  $\{b_i \mid i \in J\}$  eine Basis von  $J$ . Für jedes  $i \in I$  nennen wir  $b_i$  **geeignet**, wenn  $b_i$  eine der folgenden Eigenschaften hat:

(i)  $b_i$  ist nilpotent

(ii)  $b_i$  ist idempotent

(iii)  $b_i \in L$ , wobei  $L \subseteq J$  ein Erweiterungskörper von  $K$  ist.

**Satz 2.3.3.** (Struktursatz 1.) Sei  $J$  ein Jordan-System in  $R = K_{3,3}$  mit  $\dim_K J = s \leq 9$ . Für alle  $a \in J$  sei  $a^2 \in J$ . Dann existiert eine Basis  $\{1, e_1, \dots, e_{s-1}\}$ , so dass  $J = K + Ke_1 + \dots + Ke_{s-1}$  ist und jedes Basiselement  $e_i$  geeignet ist.

*Beweis:* Sei  $\dim_K J = s \leq 9$ . Die Fälle  $s \in \{1, 2, 3\}$  wurden schon in den ersten Abschnitten dieses Kapitels untersucht. Also betrachten wir zunächst den Fall  $s = 4$ :

Sei also  $J = K + Kb_1 + Kb_2 + Kb_3$ . Wir machen die folgende Fallunterscheidung:

- (1) Für alle  $a \in J$  seien  $1, a, a^2$  linear abhängig, d.h.  $K[b_i] = K + Kb_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sind zweidimensionale  $K$ -Algebren. Nach Satz 2.1.2 haben  $K[b_i]$  die Gestalt  $K + Ke_i$ , wobei  $e_i$  geeignet sind. Für  $i \neq j$  gilt insbesondere  $K[b_i] \cap K[b_j] = K$ . Damit ist  $J = K[b_1] + K[b_2] + K[b_3] = K + Ke_1 + Ke_2 + Ke_3$  wie gewünscht.
- (2) OBdA seien  $1, b_1, b_1^2$  linear unabhängig, d.h.  $\text{Grad}(m_{b_1}(X)) = 3$ . Dann ist  $J_{b_1} := K + Kb_1 + Kb_1^2 = K[b_1]$  eine dreidimensionale  $K$ -Algebra und laut 2.3.1 gibt es eine Basis  $\{1, e_1, e_2\} \subseteq J_{b_1}$  mit geeigneten Basiselementen, so dass  $J_{b_1} = K + Ke_1 + Ke_2$  ist. Ergänze man  $\{1, e_1, e_2\}$  mit  $c$  zu einer neuen Basis von  $J$ , dann erhalten wir  $J = K + Ke_1 + Ke_2 + Kc$ .

- (2.1) Sind  $1, c, c^2$  ebenfalls linear unabhängig, dann ist auch  $J_c := K + Kc + Kc^2$  eine dreidimensionale  $K$ -Algebra und damit gilt  $J_c = K + Kd_1 + Kd_2$  mit geeigneten  $d_1, d_2$ . Nach Voraussetzung ist  $c^2 \in J$ , so dass gilt  $\dim \text{Lin}\{1, e_1, e_2, d_1, d_2\} = \dim \text{Lin}\{1, b_1, b_1^2, c, c^2\} = \dim \text{Lin}\{1, b_1, b_1^2, c\} = 4$ . Daher erhalten wir  $J = K + Ke_1 + Ke_2 + Kd_1$  mit der Basis  $\{1, e_1, e_2, d_1\}$ , deren Basisvektoren geeignet sind.
- (2.2) Sind  $1, c, c^2$  linear abhängig, dann ist  $K[c] = K + Kc = K + Kd$  eine zweidimensionale  $K$ -Algebra in  $J$ , wobei  $d$  geeignet ist. In diesem Fall gilt dann  $J = J_{b_1} + K[c] = K + Ke_1 + Ke_2 + Kd$ .

Damit ist der Fall  $s = 4$  erledigt. Sei nun  $s \geq 5$  und  $J = K + Ka_1 + \dots + Ka_{s-1}$ .

- (I) Sind  $1, a, a^2$  für alle  $a \in J$  linear abhängig, dann sind  $K[a_i] = K + Ka_i = K + Ke_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, s-1\}$  zweidimensionale  $K$ -Algebren mit geeigneten  $e_i$  und  $K[a_i] \cap K[a_j] = K$  für alle  $i \neq j$ . Daher ergibt sich  $J = K[a_1] + \dots + K[a_{s-1}] = K + Ke_1 + \dots + Ke_{s-1}$ .
- (II) Sind  $1, a_i, a_i^2$  linear unabhängig für alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  für ein  $m \in \{1, \dots, s-1\}$ , dann sind  $J_{a_i} := K[a_i] = K + Ka_i + Ka_i^2 = K + Ke_i + Kd_i$  dreidimensionale  $K$ -Algebren und alle Basiselemente  $e_i, d_i$  sind geeignet.

Definiere man nun einen Vektorraum  $U := K[a_1] + \dots + K[a_m]$ . Nach Voraussetzung ist  $U \subseteq J$ . Damit gilt  $\dim \text{Lin}\{1, e_1, d_1, \dots, e_m, d_m\} = \dim U =: r \in \{m+1, \dots, 2m+1\}$ . Analog wie oben wählen wir  $r$  Vektoren aus  $\{1, e_1, d_1, \dots, e_m, d_m\}$  als eine Basis von  $U$  und bezeichnen diese mit  $\{1, b_1, \dots, b_{r-1}\}$ . Gilt  $s = r$ , dann sind wir fertig.

Sei also  $r < s$ . Dann ergänzen wir die gewählte Basis von  $U$  mit  $s - r$  Vektoren  $c_1, \dots, c_{s-r}$  zu einer Basis von  $J$ , wobei  $1, c_i, c_i^2$  für alle  $i \in \{1, \dots, s-r\}$  linear abhängig sind. Daraus folgern wir, dass  $K[c_i] = K + Kc_i = K + Kf_i$  zweidimensionale  $K$ -Algebren mit geeigneten  $f_i$  sind. Schließlich erhalten wir  $J = U + K[c_1] + \dots + K[c_{s-r}] = K + Kb_1 + \dots + Kb_{r-1} + Kf_1 + \dots + Kf_{s-r}$ .  $\square$

**Bemerkung 2.3.4.** Sei  $J \subseteq K_{3,3}$  ein Jordan-System, dann gilt:

- (a) Ist  $|K| > 3$ , dann gilt stets  $a^2 \in J$  für alle  $a \in J$ .
- (b) Ist  $K \simeq GF(3)$  und gibt es kein  $a \in J$  mit  $m_a(X) = X(X-1)(X-2)$ , dann gilt stets  $a^2 \in J$  für alle  $a \in J$ .

*Beweis:* Offensichtlich gilt  $a^2 \in J$  für alle  $a \in J$  mit  $\text{Grad}(m_a(X)) = 2$ , denn  $a^2 \in K + Ka \subseteq J$  ist. Sei also  $a \in J$  mit  $\text{Grad}(m_a(X)) = 3$ .

- (a) Ist  $a \in J^*$ , dann gibt es  $k, l \in K$  und  $s \in K^*$ , so dass  $a^{-1} = k + la + sa^2 \in J$  gilt. Damit ist auch  $a^2 \in J$ . Im Fall  $a \in J \setminus J^*$  findet man stets wegen  $|K| > 3$  ein  $\mu \in K^*$ , so dass  $a + \mu \in J^*$  ist. Nach obiger Argumentation ist dann  $a^2 + 2\mu a + \mu^2 = (a + \mu)^2 \in J$  und daher  $a^2 \in J$  (vgl. Beweis von 2.1.2, Teil (2)).
- (b) Der Beweis verläuft analog zum Teil (a). □

Aus Bemerkung 2.3.4 kann man folgern, dass die einzigen Jordan-Systeme, die die Voraussetzung des ersten Struktursatzes 2.3.3 im Allgemeinen nicht erfüllen, sind also Jordan-Systeme über  $K \simeq GF(3)$ , welche mindestens ein  $a \in J \setminus J^*$  besitzen, das drei paarweise verschiedene Eigenwerte hat, für welches aber  $a^2 \notin J$  gilt. Solche Jordan-Systeme können niemals Jordan-abgeschlossen sein und sind deswegen für Kettenräume von geringerer Bedeutung. Man kann aber trotzdem diese allgemein beschreiben, indem man das im Beweis benutzte Prinzip der Konstruktion einer Basis von  $J$  zur Hilfe nimmt.

Jetzt kommen wir zu dem zweiten Struktursatz:

**Satz 2.3.5.** (Struktursatz 2.) *Sei  $J \subseteq K_{3,3}$  ein Jordan-System über  $K \simeq GF(3)$  mit  $\dim_K J = s \leq 9$ . Sei  $a \in J \setminus J^*$  mit  $a^2 \notin J$  und  $m_a(X) = X(X-1)(X-2)$  sein Minimalpolynom. Dann gibt es eine Basis  $\{1, a, e_1, \dots, e_{s-2}\}$  von  $J$ , deren Basiselemente  $e_i$  geeignet oder ähnlich zu  $a$  sind.*

*Beweis:* Sei  $J = K + Ka + Kb_1 + \dots + Kb_{s-2}$ . Wir betrachten zwei Fälle:

- (1) Für alle  $i \in \{1, \dots, s-2\}$  seien  $1, b_i, b_i^2$  linear abhängig. Dann sind  $K[b_i] = K + Kb_i$  zweidimensionale  $K$ -Algebren mit  $K[b_i] \cap K[b_j] = K$  für

alle  $i \neq j$ . Daher gibt es Basen  $\{1, e_i\}$  von  $K[b_i]$ , so dass alle  $e_i$  geeignet sind. Daraus folgt  $J = Ka + \sum_{i=1}^{s-2} K[b_i] = K + Ka + Ke_1 + \dots + Ke_{s-2}$  wie gewünscht.

- (2) Für ein  $m \in \{1, \dots, s-2\}$  und alle  $i \in \{1, \dots, m\}$  seien  $1, b_i, b_i^2$  linear unabhängig. Gilt außerdem  $b_i^2 \in J$ , dann erhält man analog zum Beweis von 2.3.3 (Teil (II)) eine Basis  $\{1, a, e_1, \dots, e_{s-2}\}$  von  $J$ , wobei  $e_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, s-2\}$  wieder geeignet sind. Gibt es ein  $k \in \{1, \dots, m\}$ , so dass  $b_i^2 \notin J$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, dann hat man eine Basis  $\{1, a, b_1, \dots, b_k, e_1, \dots, e_{s-k-2}\}$  mit  $e_i$  wie oben. Nach 2.3.4 ist  $b_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k\}$  ähnlich zu  $a$ .  $\square$

Im Weiteren geben wir einige Beispiele für Jordan-Systeme der Dimension  $s = 4$  an.

**Beispiel 2.3.6.** Die folgenden vierdimensionalen Untervektorräume  $J \subseteq K_{3,3}$  sind Jordan-Systeme:

- (1) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & w & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\} = K + Ke + Kd + K\varepsilon$  mit  $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $e^2 = e$ ,  $d^2 = d$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ . Dabei gilt für ein beliebiges  $a = \begin{pmatrix} x & w & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \in J^*$ :  $x, y, z \neq 0$  und  $a^{-1} = \frac{1}{xyz} \begin{pmatrix} yz & -zw & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} \in J$ . Wegen  $0 = ed = de = \varepsilon d = d\varepsilon = e\varepsilon \neq \varepsilon e = \varepsilon \in J$  ist  $J$  eine nicht kommutative  $K$ -Algebra.
- (2) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & w \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\} = K + Ke + K\varepsilon + K\varepsilon^2$  mit  $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $e^2 = e$ ,  $\varepsilon^3 = 0$ . Für ein beliebiges  $a = \begin{pmatrix} x & z & w \\ 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in J^*$  gilt:  $x, y \neq 0$  und  $a^{-1} = \frac{1}{x^2y} \begin{pmatrix} xy & -xz & z^2 - yw \\ 0 & x^2 & -xz \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} \in J$ . Wegen  $e\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$  und  $e\varepsilon\varepsilon = e\varepsilon^2e = \varepsilon^2e\varepsilon^2 = \varepsilon^2\varepsilon\varepsilon^2 = \varepsilon\varepsilon^2\varepsilon = 0$ ,  $e\varepsilon\varepsilon = \varepsilon^2 \in J$  ist  $J$  keine  $K$ -Algebra, aber Jordan-abgeschlossen.
- (3) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & w & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\} = K + Ke + K\varepsilon + K\delta$  mit  $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $e^2 = e$ ,  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$ . Dabei gilt für ein  $a = \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & w & x \end{pmatrix} \in J^*$ :  $x, y \neq 0$  und  $a^{-1} = \frac{1}{x^2y} \begin{pmatrix} xy & -xz & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & -xw & xy \end{pmatrix} \in J$ . Wegen

$e\varepsilon = 0 \neq \varepsilon e = \varepsilon \in J$ ,  $e\delta = 0 \neq \delta e = \delta \in J$  und  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$  ist  $J$  eine nicht kommutative  $K$ -Algebra.

(4) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\} = K + K\varepsilon + K\delta + K\eta$  mit  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\varepsilon^2 = \delta^2 = \eta^2 = 0$ . Für alle  $a = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in J^*$  gilt:  $x \neq 0$  und  $a^{-1} = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x^2 & -xy & yw-xz \\ 0 & x^2 & -xw \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \in J$ . Wegen  $\varepsilon\delta = 0 = \delta\varepsilon$ ,  $\eta\varepsilon = 0 \neq \varepsilon\eta = \delta \in J$  und  $\delta\eta = \eta\delta = 0$  ist  $J$  eine nicht kommutative  $K$ -Algebra.

(5) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & z+w \\ 0 & -z & y \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} + \mathbb{R}e + \mathbb{R}i + \mathbb{R}\varepsilon$  mit  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $e^2 = e$ ,  $\varepsilon^2 = 0$ , wobei  $m_i(X) = X(X^2 + 1)$  gilt und  $X^2 + 1$  in  $\mathbb{R}$  irreduzibel ist. Dabei ist  $\mathbb{R} + \mathbb{R}i \simeq \left\{ \begin{pmatrix} y & z \\ -z & y \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{C}$ . Allgemein gilt für ein  $a = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & z+w \\ 0 & -z & y \end{pmatrix} \in J^*$ :  $\det(a) = x(y^2 + z(z + w)) \neq 0$  und  $a^{-1} = \frac{1}{\det(a)} \begin{pmatrix} y^2+z w & 0 & 0 \\ 0 & xy & -xw \\ 0 & xz & xy \end{pmatrix} \in J$ . Wegen  $\varepsilon i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin J$ ,  $\varepsilon e \varepsilon = e \varepsilon e = e i e = i e i = 0$ ,  $\varepsilon i \varepsilon = -\varepsilon \in J$  und  $i \varepsilon i = \varepsilon - i \in J$  ist  $J$  keine  $K$ -Algebra, aber Jordan-abgeschlossen.

**Bemerkung 2.3.7.** Sei  $J$  ein vierdimensionales Jordan-System in  $K_{3,3}$ . Dann gilt

(1)  $J \neq K + K\varepsilon + K\varepsilon^2 + K\varepsilon^3$  mit  $\varepsilon^4 = 0$ .

(2)  $J$  ist kein Erweiterungskörper vom Grad 4.

*Beweis:* (1) Sei  $\varepsilon \in J$  mit  $\varepsilon^4 = 0$  und  $\varepsilon^3 \neq 0$ . Dann ist  $\varepsilon$  eine Nullstelle des Polynoms  $g(X) = X^4 \in K[X]$ . Nach F16 in [57, S. 213] ist  $g(X)$  durch das Minimalpolynom  $m_\varepsilon(X)$  von  $\varepsilon$  teilbar. Daraus folgt  $m_\varepsilon(X) = X^i$  mit  $i \leq 4$ . Wegen  $\varepsilon^3 \neq 0$  kommt nur  $i = 4$  in Frage. Somit ist  $m_\varepsilon(X) = X^4$  und es gibt keine Polynome mit Grad  $< 4$ , welche  $\varepsilon$  als Nullstelle besitzen. Das ist aber ein Widerspruch, da das charakteristische Polynom von  $\varepsilon$  wegen  $\varepsilon \in K_{3,3}$  höchstens den Grad 3 haben kann. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(2) Die Behauptung gilt nach 2.1.1 wegen  $\dim_J R = 9/4 \notin \mathbb{N}$ . □

Für die in 2.3.6 vorgestellten Beispiele kann jeweils eine Basis mit geeigneten Basisvektoren direkt auf den ersten Blick angegeben werden. Das ist natürlich nicht immer der Fall, wie das nächste Beispiel demonstriert.

**Beispiel 2.3.8.** Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & w \\ z & y & z \\ w & z & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in K \right\} = K + Ke + Kb_1 + Kb_2$  mit  $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Offensichtlich ist  $J$  ein Jordan-System, denn für jede Matrix  $a = \begin{pmatrix} x & z & w \\ z & y & z \\ w & z & x \end{pmatrix} \in J^*$  ist ihre inverse Matrix  $a^{-1} = \frac{1}{\det(a)} \begin{pmatrix} xy-z^2 & zw-xz & z^2-yw \\ zw-xz & z^2-w^2 & zw-xz \\ x^2-yw & zw-xz & xy-z^2 \end{pmatrix} \in J$ . Es gilt aber  $e^2 = e$ ,  $b_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $b_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - e$ . Allgemein gilt für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :  $b_1^{2n+1} = 2^n b_1$ ,  $b_1^{2n} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $b_2^{2n} = 1 - e$  und  $b_2^{2n+1} = b_2$ .

Definiert man nun eine neue Basis  $\{1, e, 1 - e, 2^{-1}b_1^2\}$ , dann sind alle Basisvektoren idempotent:

$$(1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e,$$

$$(2^{-1}b_1^2)^2 = 2^{-2}b_1^4 = 2^{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^{-1}b_1^2.$$

## 2.4 Geometrische Interpretation von Jordan-Systemen in $K_{3,3}$

In diesem Abschnitt studieren wir die im vorherigen Abschnitt vorgestellten zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme im Rahmen der projektiven Geometrie: Ist  $\Sigma(K, R, J)$  ein Kettenraum über  $J$ , so kann man diesen projektiv darstellen, indem man die Punkte als  $n$ -dimensionale Unterräume in einem  $2n$ -dimensionalen Raum darstellt (siehe Abschnitt 1.4). Dabei werden die Ketten durch  $n$ -Reguli beschrieben. Im Folgenden führen wir den Begriff eines  $n$ -Regulus und eines Raums von  $n$ -Reguli ein (vgl. [26, S. 215-219]). Dafür wird die projektive Geometrie  $\mathbb{P}(K, V)$  für einen  $K$ -Vektorraum  $V$  mit der Menge  $L(V)$  aller  $K$ -Untervektorräume von  $V$  identifiziert (siehe [26, S. 297]).

**Definition 2.4.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $L(V)$  die projektive Geometrie über  $K$ . Außerdem sei  $\mathfrak{M} \subseteq L(V)$ . Eine Gerade  $G$  heißt **Treffgerade** von  $\mathfrak{M}$ , wenn  $G$  mit jedem Unterraum aus  $\mathfrak{M}$  genau einen Punkt gemeinsam hat. Gilt zusätzlich, dass durch jeden Punkt von  $G$  genau ein Unterraum aus  $\mathfrak{M}$  geht, dann heißt  $G$  **Transversale** von  $\mathfrak{M}$ .

**Definition 2.4.2.** Sei  $\mathfrak{R}$  eine nicht leere Menge, welche aus  $n$ -Räumen besteht. Dann ist  $\mathfrak{R}$  ein  **$n$ -Regulus**, wenn gilt: Ist  $X \in \mathfrak{R}$ , so geht durch jeden Punkt von  $X$  eine Transversale von  $\mathfrak{R}$ .

Das einfachste Beispiel eines  $n$ -Regulus ist ein 1-Regulus, welcher aus den Punkten einer projektiven Gerade besteht.

Man kann zeigen, dass ein  $n$ -Regulus einen  $2n$ -Raum aufspannt, wobei alle  $n$ -Räume in  $\mathfrak{R}$  paarweise windschief sind (siehe [26, 10.1.2]). Im Weiteren sei also  $\dim_K V = 2n$ , dann ist  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{2n-1}^{n-1} \subseteq L(V)$  die Menge aller  $n$ -Unterräume von  $V$ , d.h. die Punktmenge  $\mathcal{G}$  des entsprechenden Grassmann-Raums (vgl. Abschnitt 1.4).

**Definition 2.4.3.** Sei  $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{G}$ . Weiter sei auf  $\mathfrak{P}$  eine Relation  $\Delta$  mit

$$\forall X, Y \in \mathfrak{P} : X \Delta Y \Leftrightarrow X \cap Y = 0$$

definiert. Dann ist das Paar  $(\mathfrak{P}, \Delta)$  ein Distanzraum.

Die Menge  $\mathfrak{P}$  heißt **abgeschlossen gegenüber  $n$ -Reguli-Bildung** (oder **Reguli-abgeschlossen, regulär**), wenn mit je drei paarweise windschiefen  $n$ -Räumen  $X, Y, Z \in \mathfrak{P}$  der  $n$ -Regulus  $\mathfrak{R}(X, Y, Z)$  ganz in  $\mathfrak{P}$  liegt.

**Definition 2.4.4.** Sei  $\mathfrak{P}$  regulär und  $\mathcal{R}$  die Menge aller in  $\mathfrak{P}$  enthaltenen  $n$ -Reguli. Dann heißt die Inzidenzstruktur  $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$  **Raum von  $n$ -Reguli**.

Nun kehren wir zu Kettenräumen zurück. Sei  $S = K_{n,n}$  bzw.  $S = \text{End}_K(U)$  für einen geeigneten Unterraum  $U$  von  $V$  mit  $\dim_K(U) = n$ . Dann kann man jeden Punkt aus  $\mathbb{P}(S)$  mit einem  $n$ -Raum aus  $\mathcal{G}$  identifizieren (siehe (1.3) bzw. (1.2) in Abschnitt 1.4). Es gilt sogar mehr (siehe [12, 2.8]):

**Satz 2.4.5.** *Ist  $V = U \times U$  für einen geeigneten Unterraum  $U \leq V$  und  $S = \text{End}_K(U)$ , dann bildet die Bijektion*

$$\Psi : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathcal{G} : S(a, b) \mapsto U^{(a,b)} = \{(u^a, u^b) \mid u \in U\}$$

die Menge  $\mathfrak{C}(K, S)$  aller Ketten von  $\Sigma(K, S)$  in die Menge  $\mathcal{R}(\mathcal{G})$  aller Reguli in  $\mathbb{P}(K, V)$  ab. Deshalb sind die Inzidenzstrukturen  $\Sigma(K, S)$  und  $(\mathcal{G}, \mathcal{R}(\mathcal{G}))$  isomorph (über  $\Psi$ ).

Analoges gilt auch für die Abbildung (1.3) im Fall  $S = K_{n,n}$ .

Sei nun  $R$  eine  $K$ -Algebra, welche einen treuen  $R$ -Rechtsmodul  $U$  der  $K$ -Dimension  $n$  besitzt. Nach 1.4.7 ist dann  $U$  ein  $(K, R)$ -Bimodul, so dass  $R$  in  $S$  eingebettet werden kann. Dann entspricht jedem Punkt  $R(a, b)$  ein  $K$ -Unterraum  $[a, b] \in \mathbb{P}_R(U) \subseteq \mathbb{P}_S(U) = \mathcal{G}$  in Matrixdarstellung bzw.  $U^{(\rho_a, \rho_b)} = \{(ua, ub) \mid u \in U\} \in \mathcal{G}$  (vgl. 1.4.8, 1.4.9). Analog zu 2.4.5 werden die Ketten von  $\Sigma(K, R)$  in  $n$ -Reguli übertragen (siehe [26, 10.3.5]):

**Satz 2.4.6.** *Sei  $R$  eine  $K$ -Algebra und  $U$  ein treuer  $R$ -Rechtsmodul mit  $\dim_K U = n$ . Dann ist der Raum von  $n$ -Reguli  $\Sigma_K(U, R) = (\mathbb{P}_R(U), \mathcal{R}_R(U))$  zu der Kettengeometrie  $\Sigma(K, R)$  isomorph, wobei  $\mathcal{R}_R(U)$  die Menge aller in  $\mathbb{P}_R(U)$  enthaltenen  $n$ -Reguli bezeichnet.*

Bezüglich der Jordan-Systeme kann man zeigen, dass im Fall von einer starken endlichdimensionalen  $K$ -Algebra  $R$  mit  $J \subseteq R$  die Kettengeometrie  $\Sigma(K, R, J)$  sich in der Form  $\Sigma_K(U, J')$  mit geeigneten  $U$  und  $J'$  als Raum von  $n$ -Reguli darstellen lässt (siehe [26, 10.3.6]). Für mehr Information zur Konstruktion von  $n$ -Reguli und Beschreibung von Isomorphismen zwischen Kettengeometrien bzw. Kettenräumen und Räumen von  $n$ -Reguli verweisen wir auf [12, 3.6] und [26, S. 223-230].

Nun betrachten wir wieder  $R = K_{3,3}$ . Fast alle zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme in  $R$  sind  $K$ -Algebren, so dass  $\Sigma(K, J) \simeq \Sigma_K(U, J) = (\mathbb{P}_J(U), \mathcal{R}_J(U))$  für einen treuen  $J$ -Rechtsmodul  $U$  der  $K$ -Dimension 3 gilt. Dabei definieren wir einen Vektorraum  $V := U \oplus U'$  mit  $U' \simeq U$ , den wir mit  $K^6$  identifizieren. Nur in zwei Fällen haben wir nicht Jordan-abgeschlossene

Jordan-Systeme, für welche unklar ist, ob diese einen Kettenraum liefern. Wir versuchen aber trotzdem, für ein solches  $J$  auf bekannte Weise die zugehörige projektive Gerade zu definieren und zu überprüfen, ob die entsprechende Menge der  $n$ -Räume ein Raum von  $n$ -Reguli und damit selbst ein Kettenraum ist. Wir fangen mit den Jordan-Systemen der Dimension 2 an.

### 2.4.1 Projektive Darstellungen von zweidimensionalen Jordan-Systemen

Geometrische Interpretationen von Jordan-Systemen  $J \simeq K[\varepsilon] = K + K\varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  und  $J \simeq K \times K$  in  $K_{2,2}$  wurden schon in [26, S. 237] diskutiert. Im Fall  $J \simeq K[\varepsilon]$  ist die zugehörige Kettengeometrie  $\Sigma(K, J)$  eine Laguerre-Ebene und im Fall  $J \simeq K \times K$  eine Minkowski-Ebene. Nun beschreiben wir durch  $\Sigma_K(U, J)$  die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  über allen drei möglichen zweidimensionalen Jordan-Systemen in  $K_{3,3}$ .

(J1) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} \simeq K[\varepsilon]$ .

Seien weiter  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & 0 & y_a \\ 0 & x_a & 0 \\ 0 & 0 & x_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b & 0 & y_b \\ 0 & x_b & 0 \\ 0 & 0 & x_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  eine  $3 \times 6$ -Matrix mit dem Rang 3 ist, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$ . Wir studieren das Bild  $\Sigma_K(U, J)$  der projektiven Darstellung von  $\mathbb{P}(J)$ , d.h. die Menge  $\mathfrak{P}$  aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in einem 5-dimensionalen projektiven Raum mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, lx_a, ky_a + sx_a, kx_b, lx_b, ky_b + sx_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, 0, y_a, x_b, 0, y_b) + K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b). \end{aligned}$$

Dafür betrachten wir den 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G \oplus G' = PG(3, K)$  von  $PG(5, K)$  mit  $G := K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1)$  und  $G' := K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 1, 0, 0)$  und die zu  $G \oplus G'$  komplementäre Gerade  $L := K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ .

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet den projektiven Unterraum  $G \oplus G' \leq PG(5, K)$  in einer Gerade  $H_{\mathcal{E}} := K(x_a, 0, y_a, x_b, 0, y_b) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$ . Jede solche Gerade  $H_{\mathcal{E}}$  trifft ihrerseits die Gerade  $G \leq PG(3, K)$  in einem

Punkt  $q := K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$  und liegt in derjenigen Ebene durch  $G$ , welche die zu  $G$  komplementäre Gerade  $G' \leq PG(3, K)$  in einem Punkt  $K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0)$  schneidet. Damit bildet die Menge aller Geraden  $H_{\mathcal{E}}$  eine parabolische Kongruenz in  $G \oplus G'$ , welche der projektiven Darstellung von  $\mathbb{P}(J_1)$  mit  $J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} \simeq J \simeq K[\varepsilon]$  entspricht (vgl. 1.4.10(3), [26, S. 237-238]).

Außerdem schneidet jede Ebene  $\mathcal{E}$  die Gerade  $L$  in einem Punkt  $p := K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0)$ , d.h.  $\mathcal{E} = H_{\mathcal{E}} \oplus p$ . Insbesondere ist die Zuordnung  $L \rightarrow G : p \mapsto q$  linear induziert. Die Menge aller solchen Verbindungsgeraden  $pq$  bildet also in dem 3-dimensionalen projektiven Raum  $G \oplus L$  einen Regulus, welcher die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J_2)$  mit  $J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in K \right\} \simeq K$  darstellt. Hierbei ist die Abbildung  $J \rightarrow J_2 : \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$  surjektiv, aber nicht injektiv, so dass jeder Gerade des Regulus stets mehrere Ebenen aus  $\mathfrak{P}$  entsprechen.

Insgesamt kann man die Menge  $\mathfrak{P}$  wie folgt beschreiben:

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  wird von einer Gerade  $H_{\mathcal{E}} \leq G \oplus G'$  und einem Punkt  $p \leq L$  (bzw. von  $H_{\mathcal{E}}$  und einer Gerade  $pq$  des Regulus in  $G \oplus L$ ) aufgespannt. Durch jede Gerade  $H_{\mathcal{E}}$  der oben beschriebenen parabolischen Kongruenz in  $G \oplus G'$  geht genau eine Ebene  $\mathcal{E}$ . Durch jeden Punkt  $p$  gehen hingegen mehrere Ebenen aus  $\mathfrak{P}$ , welche die entsprechende Gerade  $pq$  gemeinsam haben (siehe Abbildung 2.1).

- (J2) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} \simeq K \times K$ . Die projektive Gerade  $\mathbb{P}(K \times K)$  besteht aus allen Punkten  $J(u, v)$  mit  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2) \in J$  und  $(u_i, v_i) \neq (0, 0)$  für  $i \in \{1, 2\}$  (gemäß 1.1.6). Daher kann man  $\mathbb{P}(J) \simeq \mathbb{P}(K \times K)$  mit dem direkten Produkt  $\mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}(K)$  identifizieren (vgl. 1.1.13).

Nun seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & 0 & 0 \\ 0 & y_a & 0 \\ 0 & 0 & y_a \end{pmatrix}$ ,  $b := \begin{pmatrix} x_b & 0 & 0 \\ 0 & y_b & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix}$  und  $(a|b)$  mit dem Rang 3, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$  und  $(y_a, y_b) \neq (0, 0)$ . Wir untersuchen wieder die Menge  $\mathfrak{P}$  aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, ly_a, sy_a, kx_b, ly_b, sy_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0) + K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0) + K(0, 0, y_a, 0, 0, y_b). \end{aligned}$$

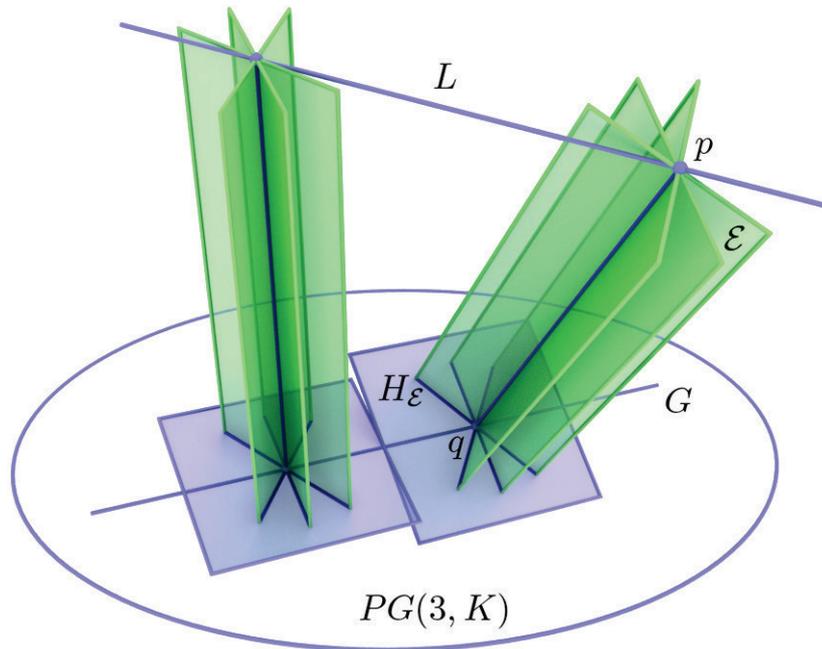


Abbildung 2.1:  $J \simeq K[\varepsilon]$

Dafür betrachten wir drei paarweise windschiefe Geraden

$$G_1 := K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$G_2 := K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$G_3 := K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

welche  $PG(5, K)$  aufspannen.

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  trifft alle drei Geraden  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  jeweils in genau einem Punkt:

$$p := \mathcal{E} \cap G_1 = K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0),$$

$$q := \mathcal{E} \cap G_2 = K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0),$$

$$r := \mathcal{E} \cap G_3 = K(0, 0, y_a, 0, 0, y_b).$$

Man betrachte nun die zu jeder Ebene  $\mathcal{E}$  gehörige Gerade  $H := pq \leq \mathcal{E}$ . Die Menge aller solcher Geraden bildet in dem 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G_1 \oplus G_2 = PG(3, K) \leq PG(5, K)$  eine hyperbolische Kongruenz, wobei jede Verbindungsgerade zweier Punkte  $p \leq G_1$

und  $q \leq G_2$  in dieser Menge liegt (vgl. 1.4.10(2), [26, S. 238]). Betrachtet man die Menge aller Geraden  $L := pr$ , so erhält man in  $G_1 \oplus G_3 = PG(3, K)$  analog die zweite hyperbolische Kongruenz.

Im Unterschied dazu ist die Zuordnung  $G_2 \rightarrow G_3 : q \mapsto r$  linear induziert, so dass die Menge aller Verbindungsgeraden  $G := qr \leq \mathcal{E}$  in  $G_2 \oplus G_3 = PG(3, K)$  einen Regulus bildet. Dieser stellt die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J_1) \simeq \mathbb{P}(K)$  mit  $J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \in K \right\} \simeq K$  dar. Hierbei ist die Abbildung  $J \rightarrow J_1 : \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$  surjektiv, aber nicht injektiv. Analog ist die Gerade  $G_1$  eine weitere Darstellung von  $\mathbb{P}(K)$ . Wie wir uns oben überlegt haben, gilt  $\mathbb{P}(J) \simeq \mathbb{P}(K) \times \mathbb{P}(K)$ . Daher kann man  $\mathfrak{P}$  wie folgt beschreiben:

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  wird durch einen Punkt auf  $G_1$  und eine Gerade  $G$  des Regulus in  $G_2 \oplus G_3$  aufgespannt. Umgekehrt kommt jede Ebene  $p \oplus G$  in  $\mathfrak{P}$  vor (siehe Abbildung 2.2).

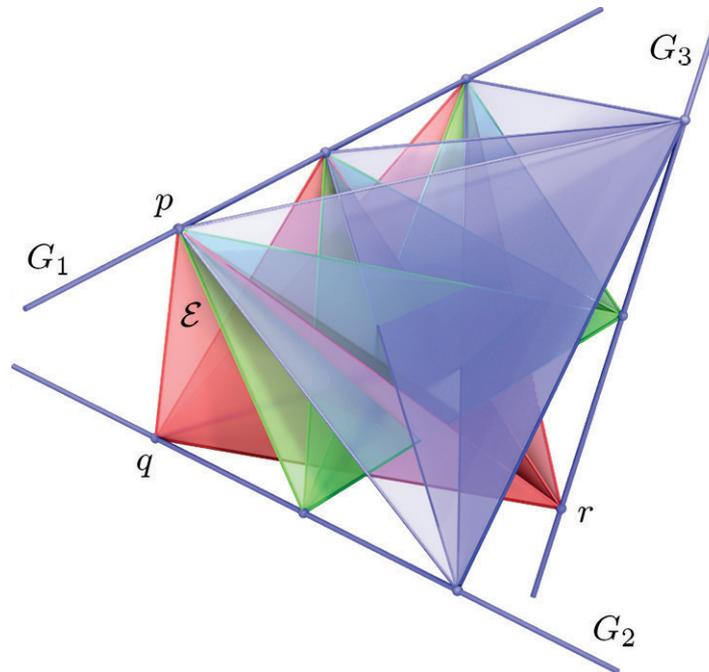


Abbildung 2.2:  $J \simeq K \times K$

- (J3) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x+2y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} \simeq K + Ka$  für ein  $a \in J$  mit dem Minimalpolynom  $m_a(X) = X(X - 1)(X - 2)$  und  $K \simeq GF(3)$ ,  $J^* = K^*$ . Da  $J$  weder eine  $K$ -Algebra noch Jordan-abgeschlossen (und

damit nicht stark) ist, stellt sich die Frage, wie man die projektive Gerade in diesem Fall definieren sollte. In der weiter unten stehenden Bemerkung werden wir zeigen, dass die schon bekannte Definition 1.1.29 der projektiven Gerade über diesem Jordan-System kein Kettenraum ist. In den nächsten Abschnitten werden wir zu diesem Beispiel noch mehrmals zurückkehren und versuchen, dieses Problem zu lösen. Hier betrachten wir jedoch die übliche Definition 1.1.29.

Sei also  $\mathbb{P}(J) = \{R(1 + ab, a) \mid a, b \in J\} \subseteq \mathbb{P}(R)$ . Hierbei seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a + y_a & 0 & 0 \\ 0 & x_a + 2y_a & 0 \\ 0 & 0 & x_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b + y_b & 0 & 0 \\ 0 & x_b + 2y_b & 0 \\ 0 & 0 & x_b \end{pmatrix}$ . Dann hat die erweiterte Matrix

$$(1 + ab|a) = \begin{pmatrix} 1 + (x_a + y_a)(x_b + y_b) & 0 & 0 & x_a + y_a & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (x_a + 2y_a)(x_b + 2y_b) & 0 & 0 & x_a + 2y_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_a x_b & 0 & 0 & x_a \end{pmatrix}$$

stets den Rang 3. Wir studieren nun die Menge  $\mathfrak{P}$  aller Ebenen  $\mathcal{E} := [1 + ab, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [1 + ab, a] &= \{(k(1 + (x_a + y_a)(x_b + y_b)), l(1 + (x_a + 2y_a)(x_b + 2y_b)), \\ &\quad s(1 + x_a x_b), k(x_a + y_a), l(x_a + 2y_a), s x_a) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(1 + (x_a + y_a)(x_b + y_b), 0, 0, x_a + y_a, 0, 0) \\ &\quad + K(0, 1 + (x_a + 2y_a)(x_b + 2y_b), 0, 0, x_a + 2y_a, 0) \\ &\quad + K(0, 0, 1 + x_a x_b, 0, 0, x_a). \end{aligned}$$

Wir betrachten wiederum drei paarweise windschiefe Geraden  $G_1 = K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $G_2 = K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0)$  und  $G_3 = K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ . Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet alle drei Geraden jeweils in genau einem Punkt, und zwar:

$$\begin{aligned} p &:= \mathcal{E} \cap G_1 = K(1 + (x_a + y_a)(x_b + y_b), 0, 0, x_a + y_a, 0, 0), \\ q &:= \mathcal{E} \cap G_2 = K(0, 1 + (x_a + 2y_a)(x_b + 2y_b), 0, 0, x_a + 2y_a, 0), \\ r &:= \mathcal{E} \cap G_3 = K(0, 0, 1 + x_a x_b, 0, 0, x_a). \end{aligned}$$

Dabei gibt es für  $r$  insgesamt vier Möglichkeiten:

- $x_a = 0 \Rightarrow r = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$
- $x_a = 1 \Rightarrow r = \begin{cases} K(0, 0, 1, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 0 \\ K(0, 0, 2, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 1 \\ K(0, 0, 0, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 2 \end{cases}$
- $x_a = 2 \Rightarrow r = \begin{cases} K(0, 0, 1, 0, 0, 2) = K(0, 0, 2, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 0 \\ K(0, 0, 0, 0, 0, 2) = K(0, 0, 0, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 1 \\ K(0, 0, 2, 0, 0, 2) = K(0, 0, 1, 0, 0, 1), & \text{falls } x_b = 2 \end{cases}$

Damit kommen alle vier Punkte der Gerade  $G_3$  vor. Analoges gilt auch für die Punkte  $p \in G_1$  und  $q \in G_2$ . Nun untersuchen wir genauer die Ebenen  $\mathcal{E}$ . Offenbar ist  $p \oplus q \oplus r$  eine Ebene in  $PG(5, K)$ . Unser Ziel ist herauszufinden, welche und wieviel davon in der Menge  $\mathfrak{P}$  enthalten sind.

- (a) Seien  $p = K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  und  $q = K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ , d.h.  $x_a + y_a = x_a + 2y_a = 0$  und  $x_b + y_b, x_b + 2y_b \in K$  sind beliebig. Daraus folgt  $y_a = 0$  und damit ist auch  $x_a = 0$ . Das liefert  $r = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ . Daher existiert durch die Punkte  $p = K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  und  $q = K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$  genau eine Ebene  $\mathcal{E} = p \oplus q \oplus r \in \mathfrak{P}$ , nämlich die Ebene durch den Punkt  $r = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  (siehe Abbildung 2.3(a)).
- (b) Seien  $p = K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  und  $q \neq K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ , d.h. es gilt  $x_a + y_a = 0, x_a + 2y_a \neq 0$  und  $x_b + y_b \in K$  ist beliebig. Sei also  $x_a + 2y_a = \lambda \in K^*$  (man beachte hierbei, dass jeder Punkt  $q$  mit beiden Werten aus  $K^*$  dargestellt werden kann). Dann folgt daraus  $y_a = \lambda$  und somit ist  $x_a = 2\lambda \in K^*$  und  $q = K(0, 1 + \lambda(x_b + 2y_b), 0, 0, \lambda, 0)$ . Da  $x_b + y_b \in K$  beliebig ist, können auch alle drei Werte von  $x_b$  vorkommen. Das impliziert  $r = K(0, 0, 1 + 2\lambda x_b, 0, 0, 2\lambda)$  mit  $x_b \in K$ . Deshalb spannt jede Gerade  $pq = K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 1 + \lambda(x_b + 2y_b), 0, 0, \lambda, 0)$  jeweils drei Ebenen  $\mathcal{E} = pq \oplus r \in \mathfrak{P}$  auf, welche die Gerade  $G_3$  in drei von vier verschiedenen Punkten

$r \neq K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  schneiden. Damit erhalten wir in diesem Fall noch neun Ebenen aus  $\mathfrak{P}$  (siehe Abbildung 2.3(a)).

(c) Der Fall  $p \neq K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  und  $q = K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$  ist analog zu dem Fall (b) (siehe Abbildung 2.3(b)).

(d) Seien nun  $p \neq K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  und  $q \neq K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ , d.h.  $x_a + y_a = \lambda$  und  $x_a + 2y_a = \mu$  mit  $\lambda, \mu \in K^*$ . Damit gilt  $y_a = \mu + 2\lambda$  und folglich  $x_a = \lambda + 2y_a = \lambda + 2(\mu + 2\lambda) = 2(\lambda + \mu)$ .

Wir betrachten eine beliebige, aber feste Gerade  $pq$ . Dann gibt es für  $p$  und  $q$  jeweils zwei Darstellungsmöglichkeiten in Abhängigkeit von  $\lambda$  bzw.  $\mu$ . Stellt man  $p$  und  $q$  mit verschiedenen  $\lambda$  und  $\mu$  dar, dann bedeutet das  $\lambda = 2\mu$  und es gilt folglich  $x_a = 0$ . Damit erhalten wir durch die Gerade  $pq$  eine Ebene  $\mathcal{E} \in \mathfrak{P}$ , welche die Gerade  $G_3$  in dem Punkt  $r = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  trifft.

Sei nun  $\lambda = \mu$ . Dann ist  $y_a = 0$  und somit  $x_a = \lambda \in K^*$ . Insbesondere sind  $p = K(\lambda + (x_b + y_b), 0, 0, 1, 0, 0)$  und  $q = K(0, \lambda + (x_b + 2y_b), 0, 0, 1, 0)$  mit festen  $x_b + y_b, x_b + 2y_b \in K$ , so dass  $x_b \in K$  (in Abhängigkeit von  $\lambda$ ) eindeutig bestimmt werden kann. Wir zeigen nun, dass wir für beide Werte von  $\lambda$  stets den gleichen Punkt  $r = K(0, 0, 1 + \lambda x_b, 0, 0, \lambda) = K(0, 0, \lambda + x_b, 0, 0, 1)$  bekommen. Seien

$$p = K(1 + x_b + y_b, 0, 0, 1, 0, 0), q = K(0, 1 + x_b + 2y_b, 0, 0, 1, 0)$$

für  $\lambda = 1$  und

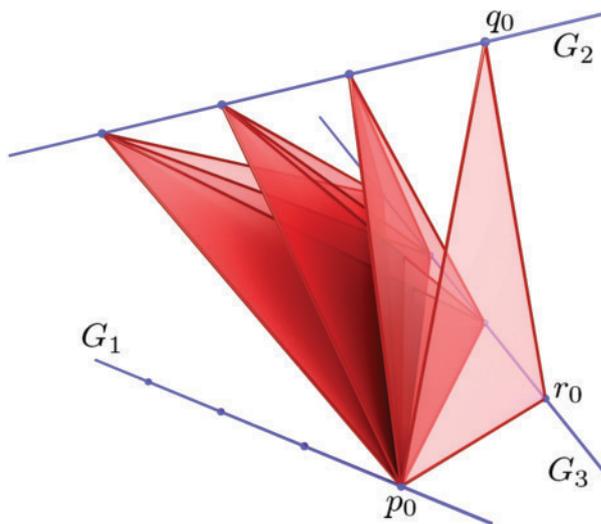
$$p = K(2 + x'_b + y'_b, 0, 0, 1, 0, 0), q = K(0, 2 + x'_b + 2y'_b, 0, 0, 1, 0)$$

für  $\lambda = 2$  jeweils zwei Darstellungsmöglichkeiten für feste  $p$  und  $q$ , d.h. es gilt

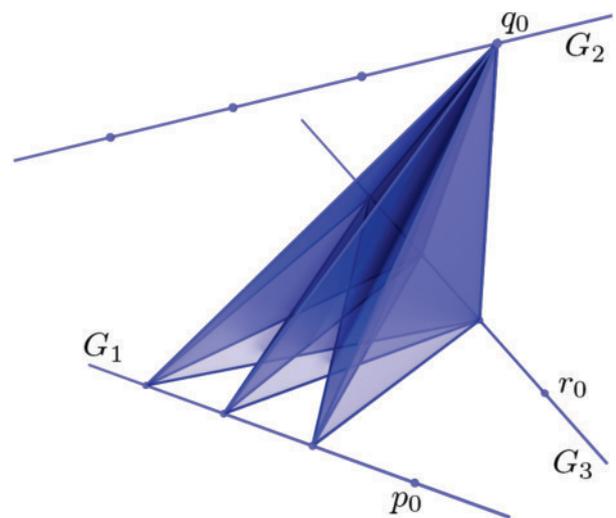
$$\begin{aligned} 1 + x_b + y_b &= 2 + x'_b + y'_b, \\ 1 + x_b + 2y_b &= 2 + x'_b + 2y'_b. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $y_b = y'_b$  und  $x_b = 1 + x'_b$ . Das liefert  $1 + x_b = 2 + x'_b$ , so dass  $r = K(0, 0, 1 + x_b, 0, 0, 1) = K(0, 0, 2 + x'_b, 0, 0, 1)$  auch eindeutig ist.

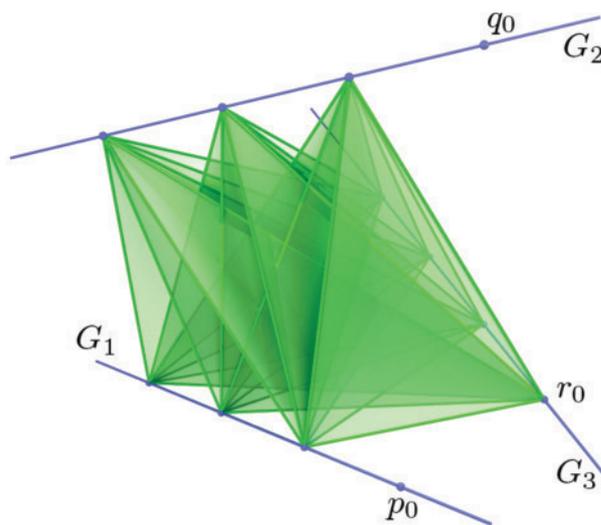
Damit gehen durch jede Gerade  $pq$  stets zwei Ebenen  $\mathcal{E} \in \mathfrak{P}$ . Da es jeweils drei Möglichkeiten für  $p$  und  $q$  gibt, ergeben sich in diesem Fall insgesamt 18 Ebenen (siehe Abbildung 2.3(c)).



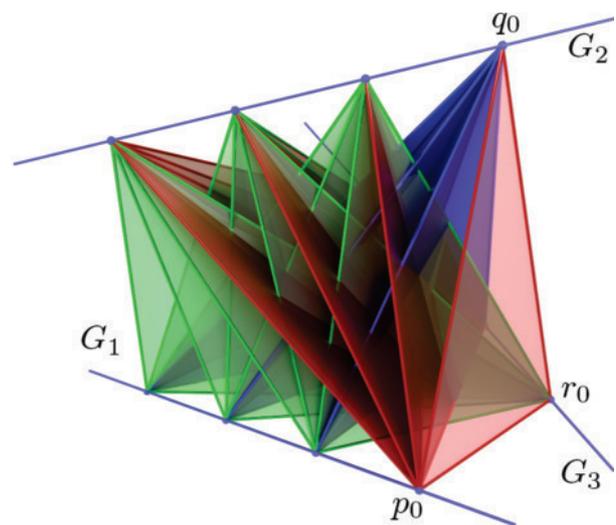
(a) Fälle (a) und (b): 10 Ebenen



(b) Fall (c): 9 Ebenen



(c) Fall (d): 18 Ebenen



(d) Alle 37 Ebenen

Abbildung 2.3:  $J \simeq K + Ka$  mit  $m_a(X) = X(X - 1)(X - 2)$ ,  $K \simeq GF(3)$ ;  $p_0 = K(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ ,  $q_0 = K(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ ,  $r_0 = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$

Zusammengezählt gibt es also in  $\mathfrak{P}$  genau 37 Ebenen  $\mathcal{E}$  (siehe Abbildung 2.3(d)).

**Bemerkung 2.4.7.** Sei  $J$  wie in (J3), dann ist  $\mathbb{P}(J)$  kein (schwacher) Unterraum von  $\Sigma(K, R)$ .

*Beweis:* Im Folgenden identifizieren wir  $\mathbb{P}(J)$  mit der Menge  $\mathfrak{P}$  der oben beschriebenen Ebenen.

Seien  $G_1, G_2, G_3$  wie oben. Weiter seien  $\mathcal{E}_1 = p_1 \oplus q_1 \oplus r_1$ ,  $\mathcal{E}_2 = p_2 \oplus q_2 \oplus r_2$  zwei Ebenen aus  $\mathbb{P}(J)$  mit  $p_1 := K\mathbf{p}_1$ ,  $p_2 := K\mathbf{p}_2 \in G_1$ ,  $q_1 := K\mathbf{q}_1$ ,  $q_2 := K\mathbf{q}_2 \in G_2$  und  $r_1 := K\mathbf{r}_1$ ,  $r_2 := K\mathbf{r}_2 \in G_3$ . Zunächst zeigen wir

$$\forall \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{P}(J) : \mathcal{E}_1 \Delta \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow p_1 \neq p_2, q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2. \quad (2.1)$$

Die Hinrichtung ist trivial. Wir beweisen also die Rückrichtung der Äquivalenz (2.1).

Seien also  $p_1 \neq p_2, q_1 \neq q_2, r_1 \neq r_2$ , d.h.  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  bzw.  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  bzw.  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  sind linear unabhängig, so dass die Geraden  $G_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , als Verbindungsgeraden  $p_1 \oplus p_2, q_1 \oplus q_2$  bzw.  $r_1 \oplus r_2$  dargestellt werden können. Da  $G_1, G_2, G_3$  paarweise windschief sind, ist  $V = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ . Daraus folgt, dass  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$  als eine Basis von  $V$  gewählt werden kann.

Weiter sei  $t := K\mathbf{t} \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ . Dann existieren  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in K$ , so dass einerseits  $\mathbf{t} = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \mu_1\mathbf{q}_1 + \nu_1\mathbf{r}_1$  und andererseits  $\mathbf{t} = \lambda_2\mathbf{p}_2 + \mu_2\mathbf{q}_2 + \nu_2\mathbf{r}_2$  ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_1\mathbf{p}_1 - \lambda_2\mathbf{p}_2 + \mu_1\mathbf{q}_1 - \mu_2\mathbf{q}_2 + \nu_1\mathbf{r}_1 - \nu_2\mathbf{r}_2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = \nu_1 = \nu_2 = 0, \end{aligned}$$

weil  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  linear unabhängig sind. D.h.  $\mathbf{t}$  ist der Nullvektor und somit haben die Ebenen  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$  keinen gemeinsamen Punkt. Daraus folgt  $\mathcal{E}_1 \Delta \mathcal{E}_2$  und damit ist (2.1) bewiesen.

Nun zeigen wir, dass  $\mathbb{P}(J)$  Bedingung (2) der Definition 1.2.9 nicht erfüllt und damit kein Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  ist. Dafür wählen wir Ebenen  $\mathcal{E} = p \oplus q \oplus r$ ,  $\mathcal{E}' = p' \oplus q' \oplus r'$  und  $\mathcal{E}'' = p'' \oplus q'' \oplus r''$  aus  $\mathbb{P}(J)$  mit (vgl. Fall (d)

auf Seite 59):

$$\begin{aligned} p &= K(1, 0, 0, 1, 0, 0), & q &= K(0, 1, 0, 0, 1, 0), & r &= K(0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ p' &= K(1, 0, 0, 2, 0, 0), & q' &= K(0, 1, 0, 0, 2, 0), & r' &= K(0, 0, 1, 0, 0, 2), \\ p'' &= K(0, 0, 0, 1, 0, 0), & q'' &= K(0, 0, 0, 0, 1, 0), & r'' &= K(0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

und  $p, p', p'' \in G_1$ ,  $q, q', q'' \in G_2$ ,  $r, r', r'' \in G_3$ .

Alle neun Punkte sind paarweise verschieden und damit sind die Ebenen  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  nach (2.1) paarweise distant. Nach Definition eines (schwachen) Kettenraums liegen diese Ebenen gemeinsam auf genau einer Kette  $C = (\mathcal{E}\mathcal{E}'\mathcal{E}'')$  des Kettenraums  $\Sigma(K, R)$ . Wegen  $|K| = 3$  enthält jede Kette (bzw. Regulus) genau vier Ebenen. Damit  $\mathbb{P}(J)$  ein (schwacher) Unterraum von  $\Sigma(K, R)$  ist, muss es in  $\mathbb{P}(J)$  noch eine Ebene  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{p} \oplus \tilde{q} \oplus \tilde{r}$  geben, die auch auf  $C$  liegt. Insbesondere ist  $\tilde{\mathcal{E}}$  zu  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  distant. Für die Punkte  $\tilde{p}$  und  $\tilde{q}$  gibt es wegen (2.1) genau eine Möglichkeit, und zwar:

$$\tilde{p} = K(1, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ und } \tilde{q} = K(0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Gemäß (a) auf Seite 58 existiert in  $\mathbb{P}(J)$  genau eine Ebene  $\tilde{\mathcal{E}}$ , nämlich mit  $\tilde{r} = K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ . Wegen  $\tilde{r} = r$  gilt aber  $\mathcal{E} \not\perp \tilde{\mathcal{E}}$ , so dass  $C$  nicht ganz in  $\mathbb{P}(J)$  liegt. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Die obere Bemerkung zeigt nochmal, dass die übliche Definition 1.1.29 der projektiven Gerade über einem starken Jordan-System für nicht notwendigerweise starke Jordan-Systeme i.Allg. nicht sinnvoll ist.

## 2.4.2 Projektive Darstellungen von dreidimensionalen Jordan-Systemen

Wie schon in der Einleitung kurz erwähnt, wurden alle Kettengeometrien über dreidimensionalen kommutativen reellen Algebren von H.-J. Samaga in [61] schon beschrieben. Eine ausführliche Beschreibung der Kettengeometrie über (J3) (gemäß unserer Klassifikation in 2.2.1) im reellen Fall findet man

im Artikel [38] von H. Havlicek. Im Folgenden stellen wir alle dreidimensionalen Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systeme in  $K_{3,3}$  projektiv dar (vgl. Abschnitt 2.2). Das nicht Jordan-abgeschlossene Jordan-System (J7) lassen wir aufgrund des vorherigen Unterabschnitts außer Betrachtung.

(J1) Sei  $J$  ein Erweiterungskörper vom Grad 3. Dann ist  $\Sigma(K, J)$  ein Möbiusraum, so dass die projektive Gerade über  $J$  aus lauter windschiefen Ebenen des 5-dimensionalen projektiven Raums  $PG(5, K)$  besteht (siehe [26, S. 237]).

(J2) Sei  $J = K + K\varepsilon + Kd$  mit  $\varepsilon^2 = 0$  und  $d^2 = d$ . In diesem Fall ist  $J$  eine nicht notwendigerweise kommutative  $K$ -Algebra.

(a) Sei zunächst  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq K + K\varepsilon + Kd$  kommutativ mit  $\varepsilon d = d\varepsilon = 0$ . Weiter seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a+y_a & 0 & 0 \\ 0 & x_a & z_a \\ 0 & 0 & x_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b+y_b & 0 & 0 \\ 0 & x_b & z_b \\ 0 & 0 & x_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  den Rang 3 hat, d.h. es gilt  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$  und  $(x_a + y_a, x_b + y_b) \neq (0, 0)$ . Wir studieren die Menge  $\mathfrak{P}$  aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{ (k(x_a + y_a), lx_a, lz_a + sx_a, k(x_b + y_b), lx_b, lz_b + sx_b) \mid \\ &\quad (k, l, s) \in K^3 \} \\ &= K(x_a + y_a, 0, 0, x_b + y_b, 0, 0) + K(0, x_a, z_a, 0, x_b, z_b) \\ &\quad + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b). \end{aligned}$$

Wir betrachten den durch die Geraden  $G := K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1)$  und  $G' := K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0)$  aufgespannten dreidimensionalen projektiven Unterraum  $G \oplus G' = PG(3, K)$  von  $PG(5, K)$  und die dazu komplementäre Gerade  $L := K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ .

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet den oben definierten Unterraum  $G \oplus G'$  von  $PG(5, K)$  in einer Gerade  $H := K(0, x_a, z_a, 0, x_b, z_b) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$ . Jede solche Gerade trifft die Gerade  $G$  in einem Punkt  $q := K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$  und liegt in einer Ebene durch  $G$ , welche die Gerade  $G' \leq PG(3, K)$  in einem Punkt  $K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0)$

schneidet. Daher bildet die Menge aller solcher Geraden eine parabolische Kongruenz in  $G \oplus G'$ . Diese ist eine projektive Darstellung von der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(J_1)$  mit  $J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, z \in K \right\} \simeq K[\varepsilon]$  (vgl. 1.4.10(3)). Hierbei ist die Abbildung  $J \rightarrow J_1 : \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x \end{pmatrix}$  surjektiv, aber nicht injektiv. Jede Ebene  $\mathcal{E}$  trifft auch  $L$  in einem Punkt  $p := K(x_a + y_a, 0, 0, x_b + y_b, 0, 0)$ , so dass  $\mathcal{E} = H \oplus p$  ist. Die Menge aller Verbindungsgeraden  $H' := pq$  bildet offenbar in dem 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G \oplus L$  von  $PG(5, K)$  eine hyperbolische Kongruenz, welche  $\mathbb{P}(J_2)$  mit  $J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in K \right\} \simeq K \times K$  projektiv darstellt (vgl. 1.4.10(2)).

Nun kann man die Menge  $\mathfrak{P}$  allgemein wie folgt beschreiben: Jede Ebene  $\mathcal{E}$  wird von jeweils einer Gerade der oben beschriebenen parabolischen und hyperbolischen Kongruenz aufgespannt. Umgekehrt kommt jede Ebene  $H + H'$  in  $\mathfrak{P}$  vor (siehe Abbildung 2.4).

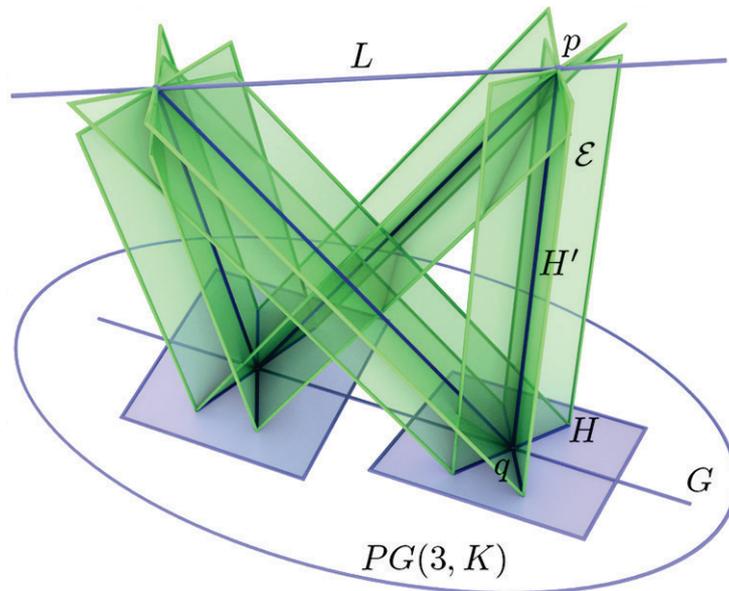


Abbildung 2.4:  $J \simeq K + K\varepsilon + Kd, \varepsilon^2 = 0, d^2 = d, \varepsilon d = d\varepsilon = 0$

- (b) Im nicht kommutativen Fall ist  $J$  zu der  $K$ -Algebra der Ternionen  $T$  isomorph. Daher ist  $\mathbb{P}(J)$  als ein ausgearteter linearer Komplex projektiv darstellbar (vgl. 1.4.10, [26, S. 239]).

Genauer sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\}$ . Weiter seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & z_a & 0 \\ 0 & y_a & 0 \\ 0 & 0 & y_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b & z_b & 0 \\ 0 & y_b & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  eine  $3 \times 6$ -Matrix vom Rang 3 ist, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$  und  $(y_a, y_b) \neq (0, 0)$ . Dann besteht die Menge  $\mathfrak{P}$  aus allen Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, kz_a + ly_a, sy_a, kx_b, kz_b + ly_b, sy_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, z_a, 0, x_b, z_b, 0) + K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0) + K(0, 0, y_a, 0, 0, y_b). \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder den 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G \oplus G' = PG(3, K)$  von  $PG(5, K)$  mit  $G := K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0)$  und  $G' := K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 1, 0, 0, 0)$  und die zu  $G \oplus G'$  komplementäre Gerade  $L := K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ .

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet  $G \oplus G' \leq PG(5, K)$  in einer Gerade  $H := K(x_a, z_a, 0, x_b, z_b, 0) + K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0)$ . Diese trifft die Gerade  $G$  in einem Punkt  $q := K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0)$ . Umgekehrt geht durch jeden Punkt von  $G \oplus G'$  eine Gerade  $H$ , so dass die Menge aller Geraden  $H$  in  $G \oplus G'$  einen ausgearteten linearen Komplex bildet (vgl. 1.4.10(4), [26, S. 239]).

Darüber hinaus trifft jede Ebene  $\mathcal{E}$  die Gerade  $L$  in einem Punkt der Form  $K(0, 0, y_a, 0, 0, y_b) =: p$ . Die Zuordnung  $G \rightarrow L : q \mapsto p$  ist linear induziert, so dass die Menge aller Verbindungsgeraden  $H' := pq$  einen Regulus in  $G \oplus L$  bildet.

Allgemein kann die Menge  $\mathfrak{P}$  folgendermaßen beschrieben werden:

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  kann man als  $H + H'$  darstellen, wobei  $H \cap H' = q$  ist. Umgekehrt spannt jede Gerade  $H$  des ausgearteten linearen Komplexes mit derjenigen Gerade  $H'$  des Regulus eine Ebene  $\mathcal{E}$  aus  $\mathfrak{P}$  auf, welche die Gerade  $H$  in dem Punkt  $q$  schneidet (siehe Abbildung 2.5).

Eine ausführliche Beschreibung dieser Ebenenmenge findet man auch in [39, Proposition 4] (unter dem Namen  $\mathcal{G}_X$ ).

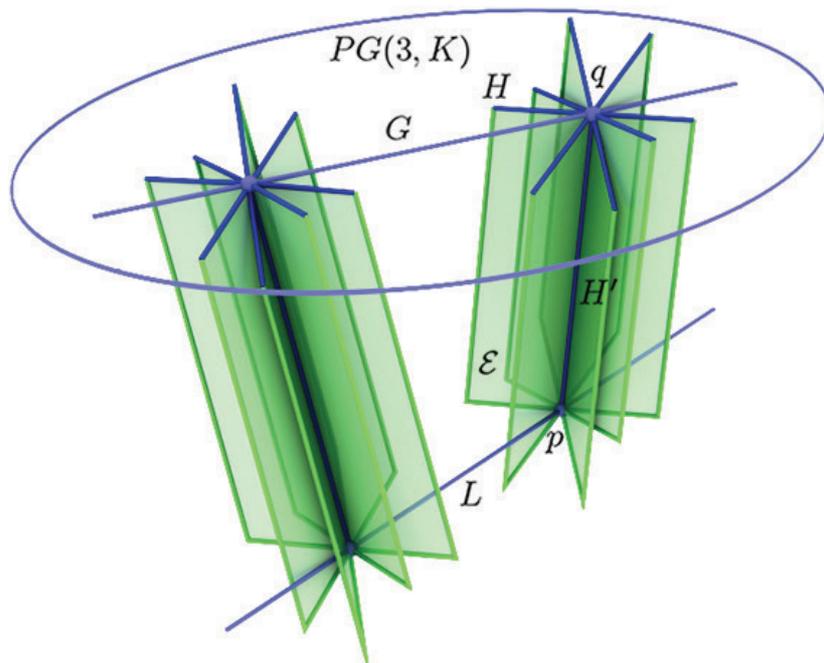


Abbildung 2.5:  $J \simeq K + K\varepsilon + Kd \simeq T, \varepsilon^2 = 0, d^2 = d, \varepsilon d \neq d\varepsilon$

In weiteren Fällen seien  $G_1, G_2, G_3$  stets die folgenden drei paarweise windschiefen Geraden in  $PG(5, K)$ :

$$G_1 := K(1, 0, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$G_2 := K(0, 1, 0, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$G_3 := K(0, 0, 1, 0, 0, 0) + K(0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

(J3) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq K + K\varepsilon + K\varepsilon^2 = K[\varepsilon]$  mit  $\varepsilon^3 = 0$ .

Man sieht sofort, dass  $J$  eine Unteralgebra der  $K$ -Algebra der oberen Dreiecksmatrizen  $J'$  ist, und somit ist  $\mathbb{P}(J)$  in  $\mathbb{P}(J')$  einbettbar.

Seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ 0 & x_a & y_a \\ 0 & 0 & x_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b & y_b & z_b \\ 0 & x_b & y_b \\ 0 & 0 & x_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  den Rang 3 hat, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$ . Dann ist  $\mathfrak{A}$  die Menge aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, ky_a + lx_a, kz_a + ly_a + sx_a, kx_b, ky_b + lx_b, kz_b + ly_b + sx_b) \mid \\ &\quad (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b) + K(0, x_a, y_a, 0, x_b, y_b) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b). \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$f : K^6 \rightarrow K^6 : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (0, x_1, x_2, 0, x_4, x_5),$$

welche mit  $f^3 = 0$  nilpotent ist.

Definiert man den Punkt  $p := K(x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b)$ , so kann man die Ebene  $\mathcal{E}$  durch  $p$  mittels  $\mathcal{E} = p + p^f + p^{f^2}$  beschreiben. Außerdem gilt

$$\text{Kern } f = G_3, \text{Kern } f^2 = G_2 \oplus G_3, \text{Kern } f^3 = K^6$$

und dementsprechend

$$(K^6)^f = G_2 \oplus G_3, (K^6)^{f^2} = G_3, (K^6)^{f^3} = 0.$$

Ordnen wir jedem Punkt  $r := K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b) \leq G_3$  sein  $f$ -Urbild zu, so erhalten wir einen 3-dimensionalen Unterraum von  $K^6$  durch  $G_3$ , welcher in  $G_2 \oplus G_3$  liegt. In projektiver Interpretation erhalten wir eine linear induzierte Bijektion  $\alpha_1$  der Punkte von  $G_3$  auf das Büschel derjenigen Ebenen durch  $G_3$ , die im Unterraum  $G_2 \oplus G_3$  liegen. Hierbei schneidet jede Ebene  $\mathcal{E}$  durch  $r$  die entsprechende Ebene  $r^{\alpha_1} = K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0) + G_3$  in einer Gerade  $H := K(0, x_a, y_a, 0, x_b, y_b) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$ . Die Menge aller solcher Geraden  $H$  bildet in  $G_2 \oplus G_3$  eine parabolische Kongruenz.

Ordnen wir analog jedem Punkt  $r$  von  $G_3$  sein  $f^2$ -Urbild zu, so erhalten wir einen 5-dimensionalen Unterraum von  $K^6$  durch  $G_2 \oplus G_3$ . In projektiver Interpretation erhalten wir eine linear induzierte Bijektion  $\alpha_2$  der Punkte von  $G_3$  auf das Büschel von Hyperebenen durch  $G_2 \oplus G_3$ . Betrachten wir für den Punkt  $r$  eine Gerade  $H = K(0, x_a, y_a, 0, x_b, y_b) + K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$  aus der oben beschriebenen parabolischen Kongruenz, so spannt  $H$  mit jedem Punkt aus ihrem 4-dimensionalen  $f$ -Urbild  $H^{f^{-1}} = K(x_a, y_a, 0, x_b, y_b, 0) + K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0) + G_3 \leq r^{\alpha_2}$  jeweils eine Ebene  $\mathcal{E}$  aus  $\mathfrak{P}$  auf. Umgekehrt spannt jeder Punkt von  $r^{\alpha_2}$ , der nicht in  $G_2 \oplus G_3$  liegt, mit genau einer Gerade  $H \leq r^{\alpha_1}$  eine Ebene aus  $\mathfrak{P}$  auf,

d.h. durch jeden Punkt  $p \leq r^{\alpha_2} \setminus (G_2 \oplus G_3)$  geht genau eine Ebene aus  $\mathfrak{P}$ .

Damit kann die Menge  $\mathfrak{P}$  wie folgt beschrieben werden ([37]): Die Menge aller Ebenen  $\mathcal{E}$  ist genau die Menge derjenigen Ebenen, welche die Gerade  $G_3$  in genau einem Punkt  $r$  schneiden, mit der Ebene  $r^{\alpha_1}$  eine gemeinsame Gerade  $H$  haben und ganz in der Hyperebene  $r^{\alpha_2}$  enthalten sind. Hierbei gehen durch jede Gerade  $H$  mehrere Ebenen aus  $\mathfrak{P}$ . Umgekehrt kann man zeigen, dass zwei Ebenen aus  $\mathfrak{P}$  durch zwei verschiedene Geraden  $H, H' \leq G_2 \oplus G_3$  der parabolischen Kongruenz mit  $H \cap H' = r$  einen einzelnen Punkt  $r$  gemeinsam haben (siehe Abbildung 2.6).

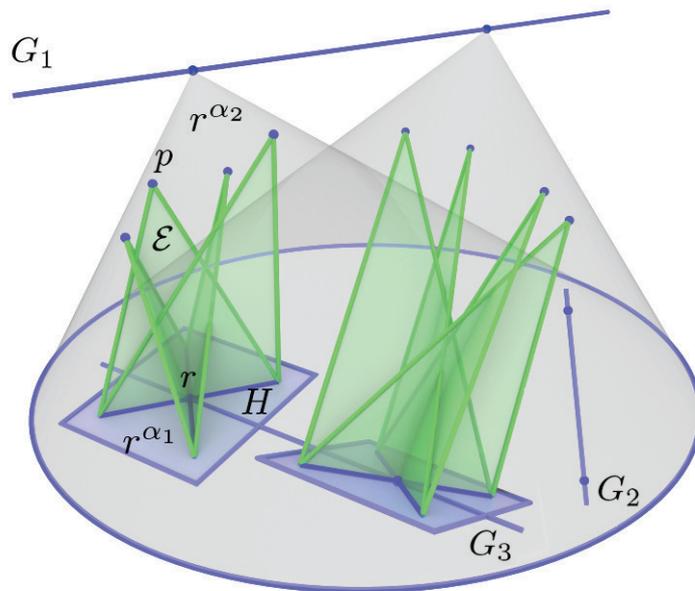


Abbildung 2.6:  $J \simeq K + K\varepsilon + K\varepsilon^2, \varepsilon^3 = 0$

(J4) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq K + Ke + Kd$  eine kommutative  $K$ -Algebra mit  $e^2 = e, d^2 = d$  und  $ed = de = 0$ . Dann ist  $J \simeq K \times K \times K$ . Aus Sicht der Kettengeometrie ist  $\Sigma(K, J)$  ein Minkowski-Raum (siehe [26, S. 238]). Genauer gilt:

Seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & 0 & 0 \\ 0 & y_a & 0 \\ 0 & 0 & z_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b & 0 & 0 \\ 0 & y_b & 0 \\ 0 & 0 & z_b \end{pmatrix}$ , so dass die Matrix  $(a|b)$  den Rang 3 hat, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0), (y_a, y_b) \neq (0, 0)$  und  $(z_a, z_b) \neq (0, 0)$ . Dann ist  $\mathfrak{P}$  die Menge aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in

$PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, ly_a, sz_a, kx_b, ly_b, sz_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0) + K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0) + K(0, 0, z_a, 0, 0, z_b). \end{aligned}$$

Jede solche Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet die Geraden  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  in jeweils einem Punkt, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \cap G_1 &= K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0) =: p_1, \\ \mathcal{E} \cap G_2 &= K(0, y_a, 0, 0, y_b, 0) =: p_2, \\ \mathcal{E} \cap G_3 &= K(0, 0, z_a, 0, 0, z_b) =: p_3. \end{aligned}$$

Die Menge  $\mathfrak{P}$  besteht also aus allen Ebenen, welche von jeweils drei Punkten  $p_i \in G_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , erzeugt werden (siehe Abbildung 2.7).

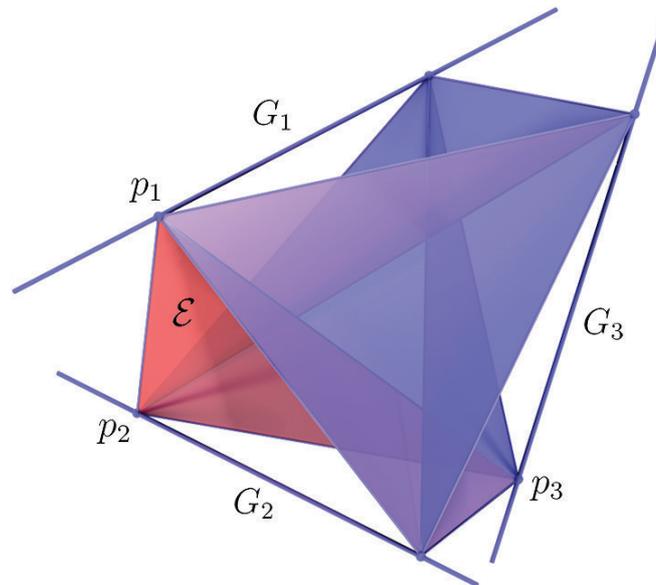


Abbildung 2.7:  $J \simeq K \times K \times K$

Hierbei bildet die Menge aller Verbindungsgeraden  $p_i p_j$  von Punkten von jeweils zwei Geraden  $G_i, G_j$ ,  $i \neq j$ , in dem entsprechenden 3-dimensionalen projektiven Raum  $G_i \oplus G_j$  eine hyperbolische Kongruenz (vgl. 1.4.10(2)).

(J5) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{pmatrix} \mid \lambda, x, y, z, w \in K \right\} \simeq K + Ke + Ki \simeq K \times L$  mit

$e^2 = e$ , wobei  $L \simeq Ke + Ki$  ein quadratischer Erweiterungskörper ist. Außerdem seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 \\ 0 & x_a & y_a \\ 0 & z_a & w_a \end{pmatrix}$ ,  $b := \begin{pmatrix} \lambda_b & 0 & 0 \\ 0 & x_b & y_b \\ 0 & z_b & w_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  den Rang 3 hat, d.h. insbesondere  $(\lambda_a, \lambda_b) \neq (0, 0)$ . Die Menge  $\mathfrak{P}$  besteht also aus allen Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$[a, b] = \{(k\lambda_a, lx_a + sz_a, ly_a + sw_a, k\lambda_b, lx_b + sz_b, ly_b + sw_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ = K(\lambda_a, 0, 0, \lambda_b, 0, 0) + K(0, x_a, y_a, 0, x_b, y_b) + K(0, z_a, w_a, 0, z_b, w_b).$$

Wir betrachten den 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G_2 \oplus G_3$  von  $PG(5, K)$  und die zu  $G_2 \oplus G_3$  komplementäre Gerade  $G_1$ .

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet den Raum  $G_2 \oplus G_3$  in einer Gerade  $H := K(0, x_a, y_a, 0, x_b, y_b) + K(0, z_a, w_a, 0, z_b, w_b)$ . Alle solchen Geraden  $H$  sind paarweise windschief. Hierbei geht durch jeden Punkt in  $G_2 \oplus G_3$  eine Gerade  $H$ , so dass die Menge aller Geraden  $H$  den Raum  $G_2 \oplus G_3$  überdeckt. Damit ist die Menge aller solcher Geraden eine elliptische Geradenkongruenz in  $G_2 \oplus G_3$ , welche die projektive Gerade  $\mathbb{P}(L)$  projektiv darstellt (vgl. 1.4.10(1), [26, S. 237]).

Analog findet sich in  $PG(5, K)$  die projektive Darstellung von  $\mathbb{P}(K)$ , und zwar als die Menge aller Schnittpunkte  $p := K(\lambda_a, 0, 0, \lambda_b, 0, 0)$  von  $\mathcal{E}$  mit  $G_1$ .

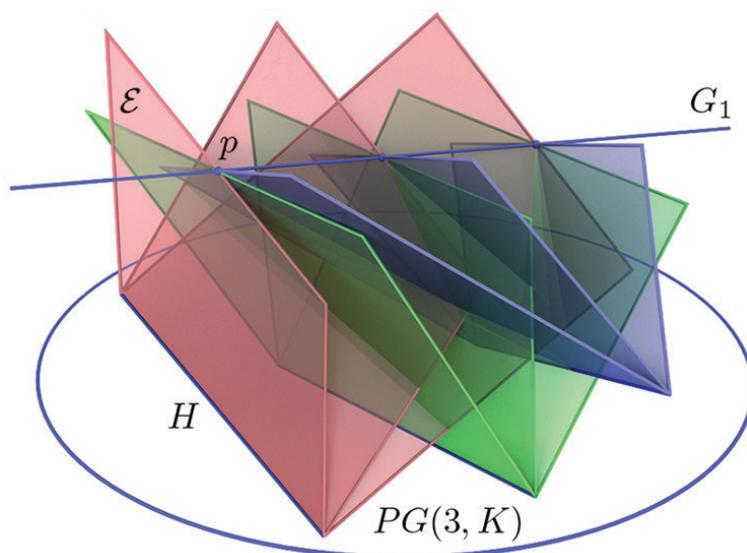


Abbildung 2.8:  $J \simeq K \times L$ ,  $[L : K] = 2$

Damit erhalten wir: Jede Ebene  $\mathcal{E}$  wird von jeweils einem Punkt  $p \in G_1$  und einer Gerade  $H$  der oben beschriebenen elliptischen Geradenkongruenz in  $G_2 \oplus G_3$  aufgespannt. Umgekehrt kommt jede Ebene  $p \oplus H$  als ein Element von  $\mathfrak{P}$  vor (siehe Abbildung 2.8).

(J6) Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & z & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in K \right\} \simeq K + K\varepsilon + K\delta$  eine kommutative  $K$ -Algebra mit  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$  und  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ . Weiter seien  $a, b \in J$  mit  $a := \begin{pmatrix} x_a & y_a & 0 \\ 0 & x_a & 0 \\ 0 & z_a & x_a \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} x_b & y_b & 0 \\ 0 & x_b & 0 \\ 0 & z_b & x_b \end{pmatrix}$ , so dass  $(a|b)$  vom Rang 3 ist, d.h.  $(x_a, x_b) \neq (0, 0)$ . Dann ist  $\mathfrak{P}$  die Menge aller Ebenen  $\mathcal{E} := [a, b]$  in  $PG(5, K)$  mit

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{(kx_a, ky_a + lx_a + sz_a, sx_a, kx_b, ky_b + lx_b + sz_b, sx_b) \mid (k, l, s) \in K^3\} \\ &= K(x_a, y_b, 0, x_b, y_b, 0) + K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0) + K(0, z_a, x_a, 0, z_b, x_b). \end{aligned}$$

Jede Ebene  $\mathcal{E}$  schneidet den 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G_1 \oplus G_2$  von  $PG(5, K)$  in einer Gerade  $G := K(x_a, y_b, 0, x_b, y_b, 0) + K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0)$ . Jede solche Gerade trifft die Gerade  $G_2$  in einem Punkt  $q := K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0)$  und liegt in derjenigen Ebene durch  $G_2$ , welche die Gerade  $G_1$  in einem Punkt  $K(x_a, 0, 0, x_b, 0, 0)$  schneidet. Somit bildet die Menge aller solcher Geraden  $G$  eine parabolische Kongruenz in  $G_1 \oplus G_2$ .

Außerdem schneidet jede Ebene  $\mathcal{E}$  den 3-dimensionalen projektiven Unterraum  $G_2 \oplus G_3$  von  $PG(5, K)$  in einer Gerade  $H := K(0, x_a, 0, 0, x_b, 0) + K(0, z_a, x_a, 0, z_b, x_b)$ . Jede solche Gerade schneidet ebenso die Gerade  $G_2$  im Punkt  $q$ , liegt aber in derjenigen Ebene durch  $G_2$ , welche die Gerade  $G_3$  in einem Punkt  $K(0, 0, x_a, 0, 0, x_b)$  trifft. Damit ist die Menge aller Geraden  $H$  eine parabolische Kongruenz in  $G_2 \oplus G_3$ .

Die Menge  $\mathfrak{P}$  kann schließlich wie folgt beschrieben werden: Jede Ebene  $\mathcal{E} \in \mathfrak{P}$  wird von jeweils zwei sich in einem Punkt  $q$  schneidenden Geraden  $G, H$  aufgespannt. Umgekehrt kommt jede Ebene  $G + H$  mit  $G \cap H = q$  in  $\mathfrak{P}$  vor (siehe Abbildung 2.9).

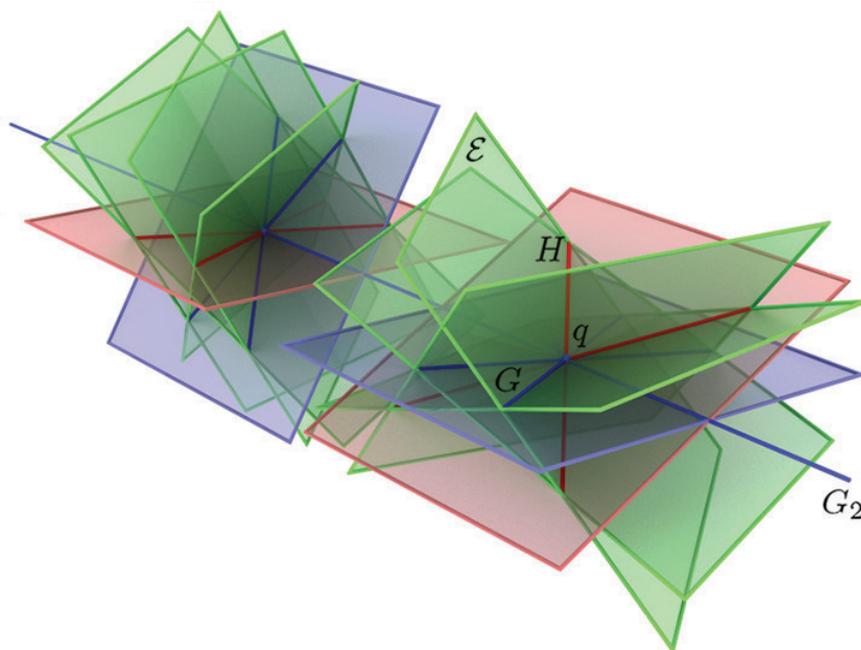


Abbildung 2.9:  $J \simeq K + K\varepsilon + K\delta$ ,  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$



# Kapitel 3

## Projektive Geraden über Jordan-Systemen und zugehörige Kettenräume

### 3.1 Einleitung

In diesem Kapitel behandeln wir Jordan-Systeme  $J$  in einer  $K$ -Algebra  $R$ . Es wird eine erweiterte Definition der projektiven Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen eingeführt und entsprechend die zugehörige Kettengeometrie definiert.

Im Abschnitt 3.2 führen wir den Begriff der stabilen Jordan-Systeme ein und definieren die projektive Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen. Die zugehörigen Kettenräume werden im letzten Abschnitt 3.4 untersucht.

Nun möchten wir ausführlicher auf den Abschnitt 3.3 eingehen. In diesem Abschnitt wird die projektive Gerade über Jordan-Systemen  $J$  in einer endlichdimensionalen  $K$ -Algebra  $R$  genauer untersucht. Es werden Bedingungen formuliert, unter welchen die neu eingeführte Definition der projektiven Gerade über  $J$  zu der schon bekannten Definition äquivalent ist. Dabei fassen wir  $R$  und damit auch  $J$  als entsprechende Unterstrukturen einer Matrizenalgebra auf, und zwar wie folgt:

Sei  $R$  eine beliebige  $K$ -Algebra, welche einen treuen  $R$ -Rechtsmodul  $U$  der  $K$ -Dimension  $n$  besitzt, und  $M := K_{n,n}$  die  $n \times n$ -Matrizenalgebra mit Einträgen aus  $K$ . Dann ist  $M$  zu dem Endomorphismenring  $End_K(U)$  isomorph, wobei jede Matrix in  $M$  in Bezug auf eine festgewählte Basis von  $U$

mit einer linearen Abbildung identifiziert werden kann. Gemäß 1.4.7 ist  $U$  ein  $(K, R)$ -Bimodul, so dass die Abbildung

$$\rho : R \rightarrow M : a \mapsto \rho_a,$$

die jedes  $a \in R$  auf die Rechtsmultiplikation

$$\rho_a : U \rightarrow U : u \mapsto ua$$

abbildet, ein injektiver Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit  $1 \mapsto \rho_1 = id \hat{=} E$  ist. Insbesondere gilt  $\dim_K R \leq n^2 < \infty$  (vgl. Abschnitt 1.4).

Wir zeigen nun, dass  $R^\rho$  sogar eine Unteralgebra von  $M$  im Sinne der Definition 1.1.26 ist. Die ersten beiden Bedingungen von 1.1.26 sind offensichtlich erfüllt. Die Bedingung (3) gilt ebenso (vgl. Beweis von 1.5.5 in [26]):

Sei  $b \in (R^\rho)^*$ , dann identifizieren wir  $b$  mit einer bijektiven linearen Abbildung  $\rho_a$  für ein  $a \in R$ . Wir zeigen zunächst, dass  $a \in R^*$  und somit  $(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$  gilt. Dafür betrachten wir die Abbildung  $R \rightarrow R : x \mapsto xa$  und beweisen analog wie in [17, 4.6(2)], dass diese injektiv ist: Sei  $xa = 0$  für ein  $x \neq 0$ . Für alle  $u \in U$  haben wir dann  $0 = u0 = u(xa) = (ux)a = (ux)^{\rho_a}$ . Da  $\rho_a$  bijektiv ist, folgt daraus  $ux = 0$  für alle  $u \in U$ . Somit ist  $x = 0$ , denn  $U$  ist treu. Wir haben also einen Widerspruch zu unserer Annahme. Das liefert die Injektivität von  $R \rightarrow R : x \mapsto xa$ . Diese Abbildung ist also auch surjektiv und somit bijektiv, da  $R$  endlichdimensional ist. Insbesondere hat dann  $1 \in R$  das Urbild  $c \in R$ , d.h. es ist  $ca = 1$ . Gemäß [26, 2.3.3] ist dann auch  $ac = 1$  und damit  $a \in R^*$  mit  $c = a^{-1}$ , wie gewünscht. Das impliziert  $b^{-1} \hat{=} (\rho_a)^{-1} = \rho_c = \rho_{a^{-1}} \in R^\rho$ .

Insbesondere kann man die Kettengeometrie  $\Sigma(K, R)$  als einen Unterraum von  $\Sigma(K, M)$  auffassen: Die Kettenräume  $\Sigma(K, R)$  und  $\Sigma(K, R)^{\tilde{\rho}} = \Sigma(K, R^\rho)$  sind vermöge der von  $\rho$  induzierten Abbildung  $\tilde{\rho} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R^\rho) : R(x, y) \mapsto R^\rho(x^\rho, y^\rho)$  isomorph (vgl. [17, 3.1], [22, 2.4(b)]). Darüber hinaus ist nach 3.1.3 in [26] die Abbildung  $\iota : \mathbb{P}(R^\rho) \rightarrow \mathbb{P}(M) : R^\rho(a, b) \rightarrow M(a, b)$  ein injektiver Morphismus von Kettenräumen  $\Sigma(K, R^\rho) \rightarrow \Sigma(K, M)$ . Dabei ist das Bild  $\Sigma(K, R^\rho)^\iota$  ein Unterraum von  $\Sigma(K, M)$ , welcher vermöge  $\iota$  isomorph

zu  $\Sigma(K, R^\rho)$  ist. Insgesamt folgt daraus, dass  $\Sigma(K, R)^{\tilde{\rho}\iota} = \Sigma(K, R^\rho)^\iota$  ein zu  $\Sigma(K, R)$  isomorpher Unterraum von  $\Sigma(K, M)$  ist (via  $\tilde{\rho} \circ \iota$ ).

Sei nun  $J \subseteq R$  ein Jordan-System in  $R$ . Dann ist  $J^\rho \subseteq R^\rho \subseteq M$  ein Jordan-System in  $R^\rho$  bzw.  $M$ , denn es gilt (vgl. 1.1.27(1)):

(i)  $1 \hat{=} E \in J^\rho$

(ii) Sei  $b \in (J^\rho)^* \subseteq (R^\rho)^*$ . Analog wie oben identifizieren wir  $b$  mit einem  $\rho_a \in (\text{End}_K(U))^*$  für ein  $a \in J$  und zeigen  $a \in J^*$ . Das liefert  $b^{-1} \hat{=} (\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}} \in J^\rho$ .

Folglich kann man sich bei der Untersuchung von Jordan-Systemen in endlichdimensionalen  $K$ -Algebren bzw. von projektiven Geraden über diesen und zugehörigen Kettenräumen auf Jordan-Systeme in einer Matrizenalgebra beschränken. Um diese Identifizierung zu betonen, werden alle Matrizen auch weiterhin mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Die Einheitsmatrix bezeichnen wir mit  $E$ , falls unmittelbar mit Matrizen gerechnet wird, und sonst mit 1.

Das gleiche Prinzip wird auch in Kapitel 5 sehr nützlich sein.

### 3.2 Die Projektive Gerade über einem nicht notwendigerweise starken Jordan-System

Bei der Überlegung, wie man allgemein projektive Geraden über Jordan-Systemen am sinnvollsten definieren sollte, so dass  $\mathbb{P}(J)$  auch Punktmenge eines Kettenraums ist, werden die folgenden Aspekte berücksichtigt:

- Behält man Definition 1.1.29 auch für die projektive Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen, dann lässt  $\Delta(J)$  i. Allg. die Punktmenge  $\mathbb{P}(J)$  nicht invariant. Das Problem liegt an der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , die die Punkte  $R(1 + ab, a)$  in  $R(a, 1 + ab)$  abbildet:

**Beispiel 3.2.1.** Sei  $J$  wie in 2.1.4(J3) mit  $a = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $b = 2a \in J$ , dann ist  $R(1 + ab, a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R(a, 1 + ab) \notin \mathbb{P}(J)$ , denn es existiert keine Matrix  $u \in R^*$ , so dass  $u(1 + ab) = u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$  ist.

- Wie wir im Kapitel 2 gesehen haben, ist  $\Sigma(K, R, J) = (\mathbb{P}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$  mit  $\mathbb{P}(J)$  wie in 1.1.29 für ein beliebiges  $J$  i. Allg. kein Unterraum von  $\Sigma(K, R)$ .
- Nicht starke Algebren sind nicht notwendigerweise stabil, so dass es für projektive Geraden über Algebren und allgemein über Ringen manchmal falsch ist, die Punkte wie in 1.1.23 zu beschreiben. Betrachtet man also die projektive Gerade über einem nicht notwendigerweise stabilen Ring, so kann der Durchmesser des zugehörigen Distanzgraphen im Sinne der Graphentheorie im Unterschied zu stabilen Distanzräumen größer als 2 sein.

Die Beschreibung der Punkte der projektiven Gerade über einem beliebigen Ring entnimmt man dem folgenden Satz (vgl. [19, S. 109]):

**Satz 3.2.2.** *Sei  $R$  ein Ring und  $C_\infty$  die Zusammenhangskomponente (bezüglich der Distanzrelation) des Punktes  $R(1, 0) \in \mathbb{P}(R)$ . Dann gilt:*

- (a) *Die Gruppe  $GL_2(R)$  operiert transitiv auf der Menge von Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{P}(R)$ .*
- (b) *Seien  $t_1, t_2, \dots, t_n \in R, n \geq 0$ , und setze*

$$(x, y) := (1, 0) \cdot E(t_n) \cdot E(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot E(t_1)$$

*mit  $E(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  für ein beliebiges  $t \in R$ , dann ist  $R(x, y) \in C_\infty$ . Umgekehrt lässt sich jeder Punkt  $r \in C_\infty$  in dieser Form schreiben.*

- (c) *Die Gruppe  $GE_2(R)$ <sup>i</sup> ist der Stabilisator von  $C_\infty$  in  $GL_2(R)$ .*
- (d) *Die projektive Gerade  $\mathbb{P}(R)$  ist zusammenhängend genau dann, wenn  $R$  ein  $GE_2$ -Ring ist, d.h.  $GE_2(R) = GL_2(R)$ .*

Jedes Produkt  $(x_i, y_i) := (1, 0) \cdot E(t_i) \cdot E(t_{i-1}) \cdot \dots \cdot E(t_1)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , definiert einen Punkt  $p_i := R(x_i, y_i)$ , so dass wir mit  $p_0 := R(1, 0)$  eine Folge von distanten Punkten  $p_n \Delta p_{n-1} \Delta \dots \Delta p_1 \Delta p_0$  erhalten.

---

<sup>i</sup>Die Gruppe  $GE_2(R) \leq GL_2(R)$  wird von der elementaren Untergruppe  $E_2(R) \leq GL_2(R)$  und allen invertierbaren Diagonalmatrizen erzeugt. Die elementare Untergruppe  $E_2(R)$  wird ihrerseits von allen Matrizen  $E(t) := \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $t \in R$  erzeugt (siehe [19]).

Durch diesen Satz inspiriert, stellen wir die neue Definition der projektiven Gerade über  $J$  vor, welche im Weiteren mit  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  bezeichnet wird, um zwischen den beiden Definitionen bzw. Mengen zu unterscheiden. Zunächst brauchen wir eine Untergruppe von  $GL_2(R)$  über einem Jordan-System  $J$ . Im Weiteren bezeichnen wir mit  $\mathcal{S}(J)$  die Menge aller endlichen Folgen von Elementen in  $J$ , inklusive der leeren Folge.

**Bemerkung 3.2.3.** (1) Sei  $E_2(J)$  die Menge aller Matrizen

$$E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) =: E(T),$$

wobei  $T := (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  eine Folge der  $n \geq 0$  Elemente in  $J$  ist. Dann ist  $E_2(J)$  eine Untergruppe von  $GL_2(R)$ , denn es gilt:

$$E(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = E(0) \cdot E(-t) \cdot E(0) \in E_2(J).$$

Also ist  $E_2(J)$  die Gruppe, die von allen Matrizen  $E(t)$  mit  $t \in J$  erzeugt wird. Diese Gruppe nennen wir die **elementare Gruppe über  $J$**  (vgl. [19, S. 108]).

(2) Die Gruppe  $E_2(J)$  wird auch von allen Matrizen  $B_{12}(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E(-t) \cdot E(0)^{-1}$  und  $B_{21}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = E(0)^{-1} \cdot E(-t)$  mit  $t \in J$  erzeugt, denn es gilt:

$$E(t) = B_{12}(1) \cdot B_{21}(-1) \cdot B_{12}(1) \cdot B_{21}(t).$$

(3) Die Einträge der Matrizen in  $E_2(J)$  können mittels bestimmter Polynome beschrieben werden. Dazu seien  $X = (x_1, x_2, \dots)$  eine unendliche Folge der Unbestimmten über  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}\langle X \rangle$  die freie  $\mathbb{Z}$ -Algebra aller Polynome in nicht kommutativen Unbestimmten  $x_1, x_2, \dots$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ . Ist  $R$  eine  $K$ -Algebra mit  $J \subseteq R$  und  $(t_1, t_2, \dots)$  eine unendliche Folge der Elemente in  $R$ , dann ist  $\psi : \mathbb{Z}\langle X \rangle \rightarrow R : f \mapsto f(t_1, t_2, \dots)$  und  $x_i \mapsto t_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  laut der universellen Eigenschaft von  $\mathbb{Z}\langle X \rangle$  ein eindeutiger Homomorphismus. Damit ist auch  $\phi : E_2(\mathbb{Z}\langle X \rangle) \rightarrow E_2(R) :$

$(f_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} \mapsto (f_{ij}(t_1, t_2, \dots))_{i,j \in \{1,2\}}$  ein Homomorphismus. Uns interessieren aber nur Matrizen der Gestalt  $E(x_1) \cdot \dots \cdot E(x_n) \in E_2(\mathbb{Z}\langle X \rangle)$  mit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}\langle X \rangle)$  und  $x_i^\psi = t_i \in J \subseteq R$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Bilder solcher Matrizen unter  $\phi$  sind offenbar in  $E_2(J)^{\text{ii}}$ .

Nun setze man für ein  $f \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$  und  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(T) = f(t_1, \dots, t_n) := f(t_1, t_2, \dots, t_n, 0, 0, \dots). \quad (3.1)$$

Für ein  $n \geq 1$  sei eine Folge von Elementen in  $\mathbb{Z}\langle X \rangle$  rekursiv definiert:

$$\left. \begin{aligned} e^{(-2)} &:= -1, e^{(-1)} := 0, e^{(0)} := 1, \\ e^{(n)} &:= e^{(n-1)}x_n - e^{(n-2)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Wegen (3.1) kann man für die in (3.2) definierten Polynome eine kürzere Notation einführen:

$$e_i^j := e^{(j-i+1)}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j), \quad \tilde{e}_i^j := e^{(j-i+1)}(x_j, x_{j-1}, \dots, x_i) \quad (3.3)$$

mit  $i, j \in \mathbb{Z}$  und  $i \geq 1, j \geq i - 3$ . Insbesondere haben wir für  $n \geq -2$ :

$$\begin{aligned} e_1^n &= e^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{(n)}, \\ \tilde{e}_1^n &= e^{(n)}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1). \end{aligned}$$

Ist  $1 \leq i \leq j$ , dann gelten nach (3.2) und (3.3) die folgenden Rechenregeln, welche im Laufe der vorliegenden Arbeit mehrmals verwendet werden:

$$\begin{aligned} e_i^j &= e_i^{j-1}x_j - e_i^{j-2} = x_i e_{i+1}^j - e_{i+2}^j, \\ \tilde{e}_i^j &= \tilde{e}_{i+1}^j x_i - \tilde{e}_{i+2}^j = x_j \tilde{e}_i^{j-1} - \tilde{e}_i^{j-2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Schließlich sei  $E(T) \in E_2(J)$  eine Matrix mit  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$

---

<sup>ii</sup>Für die ausführliche Herleitung der Beschreibung der Matrizen in  $E_2(R)$  sei auf [20, S. 113-115] verwiesen.

für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ , dann beschreibt man diese nach Lemma 2.5 in [20] wie folgt:

$$E(T) = E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) = \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_2^n(T) & -e_2^{n-1}(T) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

wobei wir für  $n = 0$  die Einheitsmatrix  $E() = E$  erhalten. Analog wird auch die Umkehrmatrix beschrieben:

$$E(T)^{-1} = E(t_n)^{-1} \cdot \dots \cdot E(t_1)^{-1} = \begin{pmatrix} -\tilde{e}_2^{n-1}(T) & -\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\ \tilde{e}_2^n(T) & \tilde{e}_1^n(T) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Es sind z. B.

$$E(t_2) = \begin{pmatrix} e_1^1(T) & e_1^0(T) \\ -e_2^1(T) & e_2^0(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^0(T)t_2 - e_1^{-1}(T) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

für  $T = (t_2)$  und

$$\begin{aligned} E(t_1)E(t_2) &= \begin{pmatrix} e_1^2(T) & e_1^1(T) \\ -e_2^2(T) & e_2^1(T) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(3.4)}{=} \begin{pmatrix} e_1^1(T)t_2 - e_1^0(T) & e_1^0(T)t_1 - e_1^{-1}(T) \\ t_2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_1t_2 - 1 & t_1 \\ t_2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für  $T = (t_1, t_2)$ .

Nun können wir  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  definieren:

**Definition 3.2.4.** Sei  $J$  ein nicht notwendigerweise starkes Jordan-System und  $E_2(J) \leq GL_2(R)$  die elementare Gruppe über  $J$ . Dann nennen wir die

Bahn von  $R(1, 0)$  unter  $E_2(J)$  die projektive Gerade über  $J$ :

$$\tilde{\mathbb{P}}(J) := \{R(1, 0) \cdot E(T) \mid E(T) \in E_2(J)\}.$$

Nach Definition von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  folgt direkt, dass  $E_2(J)$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  operiert. Insbesondere lässt  $E_2(J) \leq GL_2(R)$  die Distanzrelation invariant (gemäß 1.1.18). Der Kern der Operation von  $E_2(J)$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  fällt offensichtlich mit dem Zentrum  $H$  von  $E_2(J)$  zusammen. Für dieses Zentrum  $H$  gilt:

**Bemerkung 3.2.5.** Sei  $J$  ein Jordan-System. Dann ist das Zentrum  $H$  von  $E_2(J)$  die folgende Menge:

$$E_2(J) \cap \{aE \mid a \in R^*, at = ta \forall t \in J\}.$$

*Beweis:* Wir zeigen die beiden Inklusionen, aus denen dann die Gleichheit folgt:

„ $\subseteq$ “: Sei  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in H$ , dann kommutiert  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  mit allen Matrizen aus  $E_2(J)$ . Für ein beliebiges  $t \in J$  betrachten wir die Matrix  $E(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in E_2(J)$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} xt - y & x \\ zt - w & z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} tx + z & ty + w \\ -x & -y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$xt - y = tx + z, \quad x = ty + w, \quad zt - w = -x \quad \text{und} \quad z = -y.$$

Daher gilt für jedes  $t \in J$

$$xt = tx \quad \text{und} \quad w = zt + x.$$

Setzt man  $t := 0$  und  $t := 1$ , dann ergibt sich  $w = x = z + x$ . Das impliziert  $0 = z = y$  und somit ist  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ . Wegen  $H \leq E_2(J) \leq GL_2(R)$  muss  $x \in R^*$  sein. Insgesamt folgern wir  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in E_2(J) \cap \{aE \mid a \in R^*, at = ta \forall t \in J\}$ .

„ $\supseteq$ “: Nun sei  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in E_2(J)$  mit  $a \in R^*$ , wobei  $at = ta$  für alle  $t \in J$  gilt. Wir zeigen, dass  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in H$  ist.

Wir rechnen zunächst, dass  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  mit allen  $E(t) \in E_2(J)$  kommutiert:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Da  $E_2(J)$  von allen Matrizen  $E(t)$  mit  $t \in J$  erzeugt wird, gilt somit die Behauptung.  $\square$

Bezeichnen wir mit  $PE_2(J) \leq \text{Aut}(\mathbb{P}(R), \Delta)$  die Untergruppe aller Abbildungen, welche von  $E_2(J)$  induziert wird, dann gilt  $PE_2(J) \simeq E_2(J)/H$ . Diese Gruppe nennen wir die **projektive elementare Gruppe über J**.

Ab sofort bezeichnen wir die Teilmenge  $\{R(1 + ab, a) \mid a, b \in J\}$  von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  stets mit  $\mathbb{P}(J)$  (auch dann, wenn  $J$  nicht stark ist).

**Bemerkung 3.2.6.** (1) Für ein beliebiges  $J$  liegt die Menge  $\mathbb{P}(J)$  offenbar ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ , denn jeder Punkt  $p = R(1 + ab, a) \in \mathbb{P}(J)$  ist als  $p = R(1, 0) \cdot E(-a) \cdot E(b)$  mit  $E(-a), E(b) \in E_2(J)$  darstellbar.

(2) Für starke Jordan-Systeme stimmen die beiden Definitionen überein, d.h.  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$ . Wir wissen, dass im Fall von starken Jordan-Systemen die Gruppe  $\Delta(J)$  die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  invariant lässt (siehe Abschnitt 1.2), was i.Allg. nicht unbedingt der Fall ist. Ist also  $J$  stark, so kann man zusätzlich zu (1) zeigen, dass  $\tilde{\mathbb{P}}(J) \subseteq \mathbb{P}(J)$  ist. Es gilt nämlich:

- $B_{21}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$  induziert eine Abbildung in  $\Delta(J)$  für alle  $t \in J$ .
- $B_{12}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  induziert eine Abbildung in  $\Delta(J)$  für alle  $t \in J$ .

- Folglich wird von jedem  $E(t) = B_{12}(1) \cdot B_{21}(-1) \cdot B_{12}(1) \cdot B_{21}(t)$  eine Abbildung in  $\Delta(J)$  induziert. Damit ist  $PE_2(J)$  eine Untergruppe von  $\Delta(J)$ , d.h.  $PE_2(J)$  lässt die Menge  $\mathbb{P}(J)$  ebenso invariant, so dass  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = R(1, 0) \cdot E_2(J) \subseteq \mathbb{P}(J)$  ist.

Um uns im Weiteren klar zu machen, ob die Gleichheit  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$  auch für nicht starke Jordan-Systeme gilt, führen wir den Begriff der stabilen Jordan-Systeme ein. Diese Definition ist eher technisch und ähnelt der Definition der stabilen Ringe.

**Definition 3.2.7.** Ein Jordan-System  $J$  nennen wir **stabil** in  $R$ , falls für alle  $p = R(a, b) \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  gilt:

$$\exists x \in J : a + bx \in R^*.$$

Im Folgenden möchten wir die neu definierte projektive Gerade  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  genauer studieren. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass die Stabilität von  $J$  sowohl hinreichend als auch notwendig dafür ist, dass die beiden Mengen  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  und  $\mathbb{P}(J)$  gleich sind. Bevor wir am Ende des Abschnitts diese Aussage beweisen können, benötigen wir einige Sätze, die auch in weiteren Abschnitten wichtig sein werden. Für den ersten Satz brauchen wir ein Lemma, das Propositionen 3.3 und 3.4 in [20] aus unserer Sicht repräsentiert:

**Lemma 3.2.8.** Sei  $J$  ein Jordan-System und  $n \geq 0$ . Dann gilt

$$e_1^n(T)x\tilde{e}_1^n(T) \in J \text{ und } e_1^n(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T) \in J \Leftrightarrow J \text{ ist Jordan-abgeschlossen}$$

für alle  $x \in J$  und  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ .

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “ Mit  $e_1^n(T)x\tilde{e}_1^n(T)$  ist insbesondere für beliebige  $t_1, x \in J$  auch  $e_1^1(t_1)x\tilde{e}_1^1(t_1) = t_1xt_1 \in J$ . Damit ist  $J$  Jordan-abgeschlossen.

„ $\Leftarrow$ “ Sei nun  $J$  Jordan-abgeschlossen und  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ . Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe der vollständigen Induktion. Zunächst zeigen wir  $e_1^n(T)x\tilde{e}_1^n(T) \in J$ . Für ein beliebiges  $x \in J$  gilt wegen der Jordan-

Abgeschlossenheit von  $J$  sicher für  $n = 0$  und  $n = 1$

$$\begin{aligned} e_1^0(T)x\tilde{e}_1^0(T) &= x \in J, \\ e_1^1(T)x\tilde{e}_1^1(T) &= t_1xt_1 \in J. \end{aligned}$$

Nun setzen wir voraus, dass die Aussage bis zu einem bestimmten  $n$  gilt. Erweitern wir die Sequenz  $T$  mit einem  $t_{n+1} \in J$ , dann ist die Aussage auch für  $n + 1$  gültig, wie wir im Folgenden zeigen werden:

$$\begin{aligned} e_1^{n+1}(T, t_{n+1})x\tilde{e}_1^{n+1}(T, t_{n+1}) &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^n(T)t_{n+1} - e_1^{n-1}(T))x(t_{n+1}\tilde{e}_1^n(T) - \tilde{e}_1^{n-1}(T)) \\ &= \underbrace{e_1^n(T)t_{n+1}xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T)}_{=:x_1} + \underbrace{e_1^{n-1}(T)x\tilde{e}_1^{n-1}(T)}_{=:x_2} \\ &\quad - (e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T)), \end{aligned}$$

wobei  $x_1, x_2$  nach Induktionsvoraussetzung in  $J$  sind; im Fall von  $x_1$  benutzen wir hier  $t_{n+1}xt_{n+1} \in J$ . Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T) &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^{n-1}(T)t_n - e_1^{n-2}(T))t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\ &\quad + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}(t_n\tilde{e}_1^{n-1}(T) - \tilde{e}_1^{n-2}(T)) \\ &= e_1^{n-1}(T)t_nt_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\ &\quad + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}t_n\tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T) \\ &= \underbrace{e_1^{n-1}(T)(t_nt_{n+1}x + xt_{n+1}t_n)}_{=:x_3}\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\ &\quad - (e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T) + e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T)) \end{aligned}$$

mit  $x_3 \in J$ , da  $t_nt_{n+1}x + xt_{n+1}t_n = (t_n + x)t_{n+1}(t_n + x) - t_nt_{n+1}t_n - xt_{n+1}x \in J$  ist. Wiederholen wir den Vorgang, so kommen wir für  $n$  gerade schließlich zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} x_n - (e_1^2(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^1(T) + e_1^1(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^2(T)) \\ = x_n - ((t_1t_2 - 1)t_{n+1}xt_1 + t_1xt_{n+1}(t_2t_1 - 1)) \end{aligned}$$

mit  $x_n \in J$  und

$$\begin{aligned}
 & (t_1 t_2 - 1)t_{n+1} x t_1 + t_1 x t_{n+1} (t_2 t_1 - 1) \\
 &= t_1 t_2 t_{n+1} x t_1 + t_1 x t_{n+1} t_2 t_1 - (t_{n+1} x t_1 + t_1 x t_{n+1}) \\
 &= t_1 (t_2 t_{n+1} x + x t_{n+1} t_2) t_1 - (t_{n+1} x t_1 + t_1 x t_{n+1}) \in J,
 \end{aligned}$$

und für  $n$  ungerade zu

$$x_{n+1} - (e_1^1(T) t_{n+1} x \tilde{e}_1^0(T) + e_1^0(T) x t_{n+1} \tilde{e}_1^1(T)) = x_{n+1} - (t_1 t_{n+1} x + x t_{n+1} t_1) \in J.$$

Insgesamt folgt daraus  $e_1^{n+1}(T) x \tilde{e}_1^{n+1}(T) \in J$ . Damit gilt die Behauptung für alle  $n \geq 0$ .

Analog beweisen wir die zweite Aussage. Es ist

$$\begin{aligned}
 e_1^0(T) \tilde{e}_1^{-1}(T) &= 0 \in J, \\
 e_1^1(T) \tilde{e}_1^0(T) &= t_1 \in J.
 \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Aussage bis zu einem festen  $n$  gilt, zeigen wir mit dem gerade Gezeigten deren Gültigkeit für  $n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 e_1^{n+1}(T, t_{n+1}) \tilde{e}_1^n(T, t_{n+1}) &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^n(T) t_{n+1} - e_1^{n-1}(T)) (t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) - \tilde{e}_1^{n-2}(T)) \\
 &= e_1^n(T) t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^n(T) t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T) \\
 &\quad - \underbrace{e_1^{n-1}(T) t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T)}_{\in J} + \underbrace{e_1^{n-1}(T) \tilde{e}_1^{n-2}(T)}_{\in J},
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 & e_1^n(T) t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^n(T) t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T) \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^{n-1}(T) t_n - e_1^{n-2}(T)) t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) \\
 &\quad - (e_1^{n-1}(T) t_n - e_1^{n-2}(T)) t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T) \\
 &= e_1^{n-1}(T) t_n t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-2}(T) t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T) \\
 &\quad - (e_1^{n-2}(T) t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T) t_n t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T)) \in J
 \end{aligned}$$

nach dem Beweis der ersten Aussage gilt. Damit ist auch die zweite Aussage für alle  $n \geq 0$  gültig.  $\square$

**Satz 3.2.9.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System. Dann gilt:*

$$\tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty) = \{R(h, 1) \mid h \in J\}.$$

*Beweis:* Offensichtlich gilt die Inklusion  $\{R(h, 1) \mid h \in J\} \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$ . Wir zeigen nun die andere Richtung.

Sei  $p = R(h, 1) \Delta R(1, 0)$  mit  $h \in R$  (nach 2.1.8 in [26] hat jedes Element von  $\Delta(\infty)$  diese Gestalt). Wir zeigen, dass  $h$  in  $J$  liegt.

Einerseits ist  $p = R(1, 0)E(h)$  mit  $E(h) \in E_2(R)$ . Wegen  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  ist andererseits  $p = R(1, 0)E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) = R(1, 0)E(T)$  mit  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $E(T) = \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_2^n(T) & -e_2^{n-1}(T) \end{pmatrix}$ . Da  $p \Delta R(1, 0)$  ist, muss  $e_1^{n-1}(T) \in R^*$  und damit  $p = R((e_1^{n-1}(T))^{-1} \cdot e_1^n(T), 1)$  sein. Daraus folgt  $h = (e_1^{n-1}(T))^{-1} \cdot e_1^n(T)$  und damit hat die Matrix  $e_1^{n-1}(T) \cdot \begin{pmatrix} h & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_1^{n-1}(T) & 0 \end{pmatrix}$  die gleiche erste Zeile wie  $E(T)$ . Nach Lemma 3.1 in [19] existieren  $s \in R$  und  $u \in R^*$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) &= \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_2^n(T) & -e_2^{n-1}(T) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & u \end{pmatrix} \cdot e_1^{n-1}(T) \cdot \begin{pmatrix} h & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ se_1^n(T) - ue_1^{n-1}(T) & se_1^{n-1}(T) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_1^{n-1}(T)h & e_1^{n-1}(T) \\ se_1^{n-1}(T)h - ue_1^{n-1}(T) & se_1^{n-1}(T) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow E(t_n) &= E(t_{n-1})^{-1} \cdot \dots \cdot E(t_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & u \end{pmatrix} \cdot e_1^{n-1}(T) \cdot \begin{pmatrix} h & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow E(t_n) \stackrel{(3.6)}{=} \begin{pmatrix} -\tilde{e}_2^{n-2}(T) & -\tilde{e}_1^{n-2}(T) \\ \tilde{e}_2^{n-1}(T) & \tilde{e}_1^{n-1}(T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^{n-1}(T)h & e_1^{n-1}(T) \\ se_1^{n-1}(T)h - ue_1^{n-1}(T) & se_1^{n-1}(T) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_n = -\tilde{e}_2^{n-2}(T)e_1^{n-1}(T)h - \tilde{e}_1^{n-2}(T)(se_1^{n-1}(T)h - ue_1^{n-1}(T)), \\ 1 = -\tilde{e}_2^{n-2}(T)e_1^{n-1}(T) - \tilde{e}_1^{n-2}(T)se_1^{n-1}(T), \\ -1 = \tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T)h + \tilde{e}_1^{n-1}(T)(se_1^{n-1}(T)h - ue_1^{n-1}(T)), \\ 0 = \tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T) + \tilde{e}_1^{n-1}(T)se_1^{n-1}(T). \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen erhalten wir:

- (1) Wegen  $e_1^{n-1}(T) \in R^*$  ist laut Proposition 2.8 in [20] auch  $\tilde{e}_1^{n-1}(T) \in R^*$ , so dass gilt:

$$\tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T) + \tilde{e}_1^{n-1}(T)se_1^{n-1}(T) = 0 \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow s = -(\tilde{e}_1^{n-1}(T))^{-1}\tilde{e}_2^{n-1}(T) \quad (3.8)$$

- (2) Mit (3.7) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T)h + \tilde{e}_1^{n-1}(T)se_1^{n-1}(T)h - \tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-1}(T) = -1 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(\tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T) + \tilde{e}_1^{n-1}(T)se_1^{n-1}(T))}_{=0}h - \tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-1}(T) = -1 \\ \Leftrightarrow & \tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-1}(T) = 1 \quad (3.9) \\ \Leftrightarrow & u = (\tilde{e}_1^{n-1}(T))^{-1}(e_1^{n-1}(T))^{-1} \\ \Leftrightarrow & u^{-1} = e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T). \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.8 ist  $u^{-1} \in J$ . Damit ist auch  $u \in J$ .

$$(3) \quad -\tilde{e}_2^{n-2}(T)e_1^{n-1}(T) - \tilde{e}_1^{n-2}(T)se_1^{n-1}(T) = 1 \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow -\tilde{e}_2^{n-2}(T) - \tilde{e}_1^{n-2}(T)s = (e_1^{n-1}(T))^{-1} \quad (3.11)$$

- (4) Schließlich zeigen wir, dass  $h \in J$  ist:

$$t_n = -\tilde{e}_2^{n-2}(T)e_1^{n-1}(T)h - \tilde{e}_1^{n-2}(T)se_1^{n-1}(T)h + \tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T)$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{-(\tilde{e}_2^{n-2}(T)e_1^{n-1}(T) + \tilde{e}_1^{n-2}(T)se_1^{n-1}(T))}_{=1 \text{ (vgl. (3.10))}}h + \tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T) \\
 &= h + \tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T) \\
 \Leftrightarrow h &= t_n - \tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T)
 \end{aligned}$$

Es bleibt  $\tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T) \in J$  zu beweisen. Dafür betrachten wir den (1,2)-Eintrag der Einheitsmatrix

$$(E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_{n-1})) \cdot (E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_{n-1}))^{-1} = E,$$

für den gemäß (3.5) und (3.6) gilt (siehe 3.2.3(3)):

$$-e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-2}(T) + e_1^{n-2}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T) = 0. \quad (3.12)$$

Nach (3.12) und Lemma 3.2.8 ist  $e_1^{n-2}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T) = e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-2}(T) \in J$ . Folglich ist mit  $u \in J$  auch  $ue_1^{n-2}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)u \in J$ , denn  $J$  ist Jordan-abgeschlossen. Mit (3.9) ist  $(e_1^{n-1}(T))^{-1} = \tilde{e}_1^{n-1}(T)u$ , so dass insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{e}_1^{n-2}(T)ue_1^{n-1}(T) &= (e_1^{n-1}(T))^{-1}e_1^{n-2}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-1}(T) \\
 &= \tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-2}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)ue_1^{n-1}(T) \in J.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 3.2.10.** Es ist auch  $s \in J$ . Es gilt nämlich:

$$s \stackrel{(3.8)}{=} -(\tilde{e}_1^{n-1}(T))^{-1}\tilde{e}_2^{n-1}(T) \stackrel{(3.9)}{=} -ue_1^{n-1}(T)\tilde{e}_2^{n-1}(T).$$

Für den (1,2)-Eintrag der Matrix  $(E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n))^{-1}(E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n)) = E$  gilt hierbei (vgl. (3.5), (3.6) in 3.2.3(3)):

$$-\tilde{e}_2^{n-1}(T)e_1^{n-1}(T) + \tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T) = 0.$$

Damit ist  $\tilde{e}_2^{n-1}(T) = \tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T)(e_1^{n-1}(T))^{-1}$ . Das impliziert:

$$\begin{aligned} s &= -ue_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T)(e_1^{n-1}(T))^{-1} \\ &\stackrel{(3.9)}{=} -ue_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)u. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $\tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T) \in J$  ist. Setze man  $\tilde{T} := (t_{n-1}, \dots, t_1) \in \mathcal{S}(J)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T) &= \tilde{e}_1^{n-1}(t_1, \dots, t_n)e_2^{n-1}(t_1, \dots, t_n) \\ &= \tilde{e}_1^{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})e_1^{n-2}(t_2, \dots, t_{n-1}) \\ &= e_1^{n-1}(t_{n-1}, \dots, t_1)\tilde{e}_1^{n-2}(t_{n-1}, \dots, t_2) \\ &= e_1^{n-1}(t_{n-1}, \dots, t_1)\tilde{e}_1^{n-2}(t_{n-1}, \dots, t_2, t_1) \\ &= e_1^{n-1}(\tilde{T})\tilde{e}_1^{n-2}(\tilde{T}). \end{aligned}$$

Nach 3.2.8 gilt also  $\tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T) \in J$ . Damit ist auch

$$e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)e_2^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T) \in J.$$

Wegen  $u \in J$  folgt daraus  $s \in J$ , wie gewünscht.  $\square$

Im Fall, dass  $J$  nicht Jordan-abgeschlossen in  $R$  ist, kann die Menge  $\tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$  mit  $J$  i.Allg. nicht identifiziert werden.

**Beispiel 3.2.11.** Sei  $J$  wie in 2.1.4(J3). Weiter seien  $t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $t_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $t_3 = 1$  aus  $J$ . Dann ist der Punkt  $p = R(1,0)E(t_1)E(t_2)E(t_3) = R(t_3 - (t_1t_2 - 1)^{-1}t_1, 1) \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$  mit  $t_3 - (t_1t_2 - 1)^{-1}t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \notin J$ .

In diesem Zusammenhang führen wir den Begriff des Jordan-Abschlusses von einem Jordan-System ein:

**Definition 3.2.12.** Sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System und  $\hat{J}$  der kleinste  $K$ -Untervektorraum von  $R$ , welcher  $J$  enthält (damit ist  $1 \in \hat{J}$ ) und für welchen gilt:

$$(1) \quad \forall a \in \hat{J}^* := \hat{J} \cap R^* : a^{-1} \in \hat{J}^*.$$

$$(2) \quad \forall a, b \in \widehat{J} : aba \in \widehat{J}.$$

Dann nennen wir  $\widehat{J}$  den **Jordan-Abschluss** von  $J$ . Offenbar ist  $\widehat{J}$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$  (vgl. 1.1.27). Ist  $J$  Jordan-abgeschlossen, dann gilt insbesondere  $J = \widehat{J}$ .

**Bemerkung 3.2.13.** Sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System. Dann existiert stets ein eindeutiger Jordan-Abschluss  $\widehat{J} \subseteq R$  von  $J$ .

*Beweis:* Sei  $\{J_i \mid i \in I\}$  die Menge aller Untervektorräume von  $R$ , welche  $J$  enthalten und die Bedingungen aus 3.2.12 erfüllen. Offensichtlich ist diese Menge nicht leer, da  $R$  in der Menge liegt.

Wir betrachten nun die Menge  $\bigcap_{i \in I} J_i \neq \emptyset$ . Dann ist diese Schnittmenge wieder ein Untervektorraum von  $R$ , der die Bedingungen aus 3.2.12 erfüllt. Außerdem ist sie nach Konstruktion minimal. Daraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit des Jordan-Abschlusses von  $J$  ([37]).  $\square$

Für nicht Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme folgt unmittelbar nach 3.2.12 und nach dem Beweis von 3.2.9 die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 3.2.14.** Sei  $J$  ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System und  $\widehat{J}$  sein Jordan-Abschluss. Dann gilt  $\widetilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty) \subseteq \{R(h, 1) \mid h \in \widehat{J}\}$ .

Jetzt können wir herausfinden, wann die beiden Definitionen der projektiven Gerade zumindest für Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme übereinstimmen.

**Satz 3.2.15.** Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System. Es gilt:

$$\mathbb{P}(J) = \widetilde{\mathbb{P}}(J) \Leftrightarrow J \text{ ist stabil in } R.$$

*Beweis:* "  $\Rightarrow$  " Wir nehmen an, dass  $\mathbb{P}(J) = \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  ist. Für ein beliebiges  $p = R(1 + ab, a) \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  (mit  $a, b \in J$ ) und  $x = -b \in J$  gilt dann  $1 + ab + ax = 1 \in R^*$ . Damit ist  $J$  stabil in  $R$ .

"  $\Leftarrow$  " Sei nun  $J$  stabil in  $R$ . Es ist zu zeigen, dass jeder Punkt  $p \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  mit irgendwelchen zwei Parametern  $a, b \in J$  beschreibbar ist, d.h. dass  $p =$

$R(1 + ab, a)$  ist. Offenbar gilt das für alle  $p \in \mathbb{P}(J) \subseteq \widetilde{\mathbb{P}}(J)$ . Wir zeigen nun, dass diese Bedingung auch für jedes  $q_n := R(1, 0)E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $n \geq 3$  und  $t_1, \dots, t_n \in J$  gültig ist.

Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 3$ . Es ist dann  $q_3 = R(1, 0)E(t_1) \cdot E(t_2) \cdot E(t_3) = R((t_1t_2 - 1)t_3 - t_1, t_1t_2 - 1) \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$ . Nach der Voraussetzung gibt es ein  $x_0 \in J$ , so dass gilt:

$$(t_1t_2 - 1)t_3 - t_1 + (t_1t_2 - 1)x_0 = (t_1t_2 - 1)(t_3 + x_0) - t_1 =: d_0 \in R^*.$$

Als Zwischenschritt zeigen wir, dass  $d_0^{-1}(t_1t_2 - 1) \in J$  ist. Wie in [3, S. 95] definieren wir für  $x, y, z \in J$  mit  $x + xyz + z \in R^*$  das Element  $D(x, y, z) := (x + xyz + z)^{-1}(1 + xy) \in R$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} d_0^{-1}(t_1t_2 - 1) &= ((t_1t_2 - 1)(t_3 + x_0) - t_1)^{-1}(t_1t_2 - 1) \\ &= (t_1t_2(t_3 + x_0) - (t_3 + x_0) - t_1)^{-1}(t_1t_2 - 1) \\ &= (t_1 - t_1t_2(t_3 + x_0) + (t_3 + x_0))^{-1}(1 - t_1t_2) \\ &= D(t_1, -t_2, t_3 + x_0). \end{aligned}$$

Nach Lemmata 2.2 und 2.3 in [11] ist  $D(t_1, -t_2, t_3 + x_0) \in J$  (obwohl diese Lemmata für starke Jordan-Systeme bewiesen wurden, gelten zumindest für unsere Zwecke wichtige Teile der Lemmata auch für Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme, wie man leicht prüfen kann). Setzt man  $a_0 := d_0^{-1}(t_1t_2 - 1) \in J$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} q_3 &= R((t_1t_2 - 1)t_3 - t_1, t_1t_2 - 1) \\ &= R(d_0 - (t_1t_2 - 1)x_0, t_1t_2 - 1) \\ &= R(d_0 - d_0a_0x_0, d_0a_0) \\ &= R(1 - a_0x_0, a_0) \in \mathbb{P}(J). \end{aligned}$$

Sei nun  $n > 3$ . Es gilt:

$$q_n = q_3 \cdot E(t_4) \cdot \dots \cdot E(t_n)$$

$$\begin{aligned}
&= R(1 - a_0x_0, a_0) \cdot E(t_4) \cdot \dots \cdot E(t_n) \\
&= R((a_0x_0 - 1)t_4 + a_0, a_0x_0 - 1)E(t_5) \cdot \dots \cdot E(t_n).
\end{aligned}$$

Analog wie oben setzen wir  $d_1 := (a_0x_0 - 1)(t_4 + x_1) + a_0 \in R^*$  für ein  $x_1 \in J$  und  $a_1 := d_1^{-1}(a_0x_0 - 1) = D(-a_0, x_0, t_4 + x_1) \in J$ , dann erhalten wir  $R((a_0x_0 - 1)t_4 + a_0, a_0x_0 - 1) = R(1 - a_1x_1, a_1)$ . Nach mehreren Schritten haben wir:

$$\begin{aligned}
q_n &= R(1 - a_1x_1, a_1)E(t_5) \cdot \dots \cdot E(t_n) \\
&= R((a_1x_1 - 1)t_5 + a_1, a_1x_1 - 1)E(t_6) \cdot \dots \cdot E(t_n) \\
&= R(1 - a_2x_2, a_2)E(t_6) \cdot \dots \cdot E(t_n) \\
&= \dots = R(1 - a_{n-3}x_{n-3}, a_{n-3}),
\end{aligned}$$

wobei  $a_{n-i}$ ,  $d_{n-i}$  für entsprechende  $x_{n-i} \in J$  und  $i \in \{4, \dots, n\}$  wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned}
a_{n-i} &:= d_{n-i}^{-1}(a_{n-(i+1)}x_{n-(i+1)} - 1) = D(-a_{n-(i+1)}, x_{n-(i+1)}, t_{n-i+3} + x_{n-i}) \in J \\
d_{n-i} &:= (a_{n-(i+1)}x_{n-(i+1)} - 1)(t_{n-i+3} + x_{n-i}) + a_{n-(i+1)} \in R^*.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Nach dem Beweis des obigen Satzes kann man folgern:

**Bemerkung 3.2.16.** Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System. Gibt es für jeden Punkt  $p = R(1, 0)E(t_1)E(t_2)E(t_3) \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  (mit  $t_1, t_2, t_3 \in J$ ) ein  $x \in J$ , so dass  $(t_1t_2 - 1)(t_3 + x) - t_1 \in R^*$  ist, dann ist  $J$  stabil in  $R$ .

### 3.3 Endlichdimensionale Jordan-Systeme

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel angekündigt, betrachten wir nun  $J$  in einer endlichdimensionalen  $K$ -Algebra  $R = K_{n,n}$ . Wir zeigen, dass alle Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systeme in  $R$  unter einer zusätzlichen Bedingung stabil sind. Dafür beweisen wir das folgende Lemma:





ausführlich nur den Diagonalanteil der Matrizen. Die zu  $d$  zugehörige Diagonalmatrix bezeichnen wir mit  $\tilde{d} := d - m$ . Es gilt:

Die Matrix  $d_1 := \lambda_{k-1}d - d^2$  liegt in  $K[d]$  und hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{(\lambda_{k-1}\lambda_1 - \lambda_1^2)E_{r_1}} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{(\lambda_{k-1}\lambda_{k-2} - \lambda_{k-2}^2)E_{r_{k-2}}} & & \\ & & & \boxed{0_{r_{k-1}}} & \\ \mathbf{0} & & & & \boxed{0_{r_k}} \end{pmatrix} + m_1$$

mit  $m_1 := \lambda_{k-1}m - \tilde{d}m - m\tilde{d} - m^2$ . Hierbei stehen  $0_{r_{k-1}}$  und  $0_{r_k}$  für die  $r_{k-1} \times r_{k-1}$ - bzw.  $r_k \times r_k$ -Nullmatrizen. Offensichtlich hat  $d_1$  höchstmöglich  $k - 1$  Eigenwerte. Außerdem hat  $m_1$  wieder die Gestalt (3.16) und ist damit nilpotent. Für  $i \neq j$  gilt wegen  $\lambda_i \neq \lambda_j$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}\lambda_i - \lambda_i^2 &= \lambda_{k-1}\lambda_j - \lambda_j^2 \\ \Leftrightarrow \lambda_{k-1}(\lambda_i - \lambda_j) &= \lambda_i^2 - \lambda_j^2 = (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i + \lambda_j) \\ \Leftrightarrow \lambda_{k-1} &= \lambda_i + \lambda_j \end{aligned}$$

Wir machen die folgende Fallunterscheidung:

- (1) Hat  $d_1$  nur 2 Eigenwerte (0 und  $\lambda_{k-1}\lambda_1 - \lambda_1^2$ ), dann sollte  $d$  maximal 4 Eigenwerte haben, denn aus  $\lambda_{k-1} = \lambda_1 + \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_j$  für  $i \neq j$  folgt  $\lambda_i = \lambda_j$ , was ein Widerspruch ist, d.h. es gilt

$$d = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 E_{r_1}} & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\lambda_2 E_{r_2}} & \\ \mathbf{0} & & \boxed{0_{r_3}} \end{pmatrix} + m$$

oder

$$d = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 E_{r_1}} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{\lambda_2 E_{r_2}} & & \\ & & \boxed{\lambda_3 E_{r_3}} & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{0_{r_4}} \end{pmatrix} + m$$

und damit ist

$$d_1 = \begin{pmatrix} \boxed{(\lambda_2 \lambda_1 - \lambda_1^2) E_{r_1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{0_{r_2+r_3}} \end{pmatrix} + m_1$$

bzw.

$$d_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \lambda_2 E_{r_1}} & \mathbf{0} \\ & \boxed{\lambda_1 \lambda_2 E_{r_2}} \\ \mathbf{0} & & \boxed{0_{r_3+r_4}} \end{pmatrix} + m_1,$$

denn es für  $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$  gilt  $\lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda_1 - \lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2$ . Im ersten Fall erhalten wir sofort  $e_1 := \lambda_1^{-1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} d_1 \in K[d]$ . Für  $d$  mit 4 Eigenwerten setzen wir

$$e_1 := (\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1))^{-1} (\lambda_2 d_1 - d_1 d) = \begin{pmatrix} \boxed{E_{r_1}} & & & \mathbf{0} \\ & \boxed{0_{r_2}} & & \\ & & \boxed{0_{r_3}} & \\ \mathbf{0} & & & \boxed{0_{r_4}} \end{pmatrix} + m_{e_1}$$

mit  $m_{e_1} := (\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1))^{-1} (\lambda_2 m_1 - \tilde{d}_1 m - m_1 \tilde{d} - m_1 m)$ , wobei  $\tilde{d}_1$  den Diagonalanteil von  $d_1$  bezeichnet und  $m_{e_1}$  eine nilpotente obere Dreiecksmatrix ist. Offenbar gilt  $e_1 \in K[d]$ .

- (2) Hat nun  $d_1$  mehr als zwei Eigenwerte, dann gibt es (mindestens) ein  $i \neq 1$ , so dass  $\mu_1 := \lambda_{k-1} \lambda_1 - \lambda_1^2 \neq \lambda_{k-1} \lambda_i - \lambda_i^2 =: \mu_i$  ist. Weiter

betrachten wir  $d_1^2 \in K[d]$ . Es gibt wieder zwei Fälle:

- (a) Hat  $d_1^2$  immer noch mehr als 2 Eigenwerte, dann sei oBdA  $\mu_1^2 \neq \mu_i^2$ . Setzt man  $d_2 := \mu_i d_1 - d_1^2$ , dann ist  $d_2$  ein Element von  $K[d]$  und hat die Gestalt

$$\left( \begin{array}{cccc} \boxed{(\mu_i \mu_1 - \mu_1^2) E_{r_1}} & & & \mathbf{0} \\ & \cdots & & \\ & & \boxed{0_{r_i}} & \\ \mathbf{0} & & & \cdots \\ & & & \boxed{0_{r_{k-1}+r_k}} \end{array} \right) + m_2$$

mit  $m_2 := \mu_i m_1 - \tilde{d}_1 m_1 - m_1 \tilde{d}_1 - m_1^2$ . Offensichtlich ist  $m_2$  wieder der Form (3.16) und es gilt  $\mu_i \mu_1 - \mu_1^2 = (\mu_i - \mu_1) \mu_1 \neq 0$ .

- (b) Hat  $d_1^2$  genau 2 Eigenwerte, dann multiplizieren wir  $d_1^2$  mit  $d$ , so dass alle von Null und paarweise verschiedenen Eigenwerte von  $d_1^2 d \in K[d]$  die gleichen Vielfachheiten wie die entsprechenden Eigenwerte von  $d$  haben. Die Matrix  $d_1^2 d$  hat aber schon weniger Eigenwerte als  $d$ . Analog wie im Fall (a) erhält man durch geeignete Linearkombination von  $d_1^2 d$  und  $d_1^2$  eine Matrix in  $K[d]$ , die einen Eigenwert weniger als  $d_1^2 d$  hat. Diese bezeichnen wir wieder mit  $d_2$ .

Weiter betrachtet man  $d_2$  mit gleicher Fallunterscheidung und rechnet analog wie oben mit  $d_2, d$  (im Fall (1)) bzw.  $d_2^2, d_2$  (im Fall (2a)) oder  $d_2^2, d_2 d$  (im Fall (2b)) und bei Bedarf wiederholt den Vorgang so oft, bis alle Diagonalelemente außer den ersten  $r_1$  eliminiert sind. Diese Matrix hat dann bis auf Vielfaches die gewünschte Gestalt von  $e_1$  und liegt offenbar in  $K[d]$ . Die anderen Matrizen  $e_2, \dots, e_{k-1}$  bestimmt man analog, wobei für jede nachfolgende Matrix  $e_i$  die Matrix  $d - \lambda_1 e_1 - \dots - \lambda_{i-1} e_{i-1} \in K[d]$  statt  $d$  benutzt werden kann.









erledigt.

Ist  $d$  invertierbar, dann gilt  $\lambda_i \neq 0$  und gegebenenfalls  $B_j \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Mit  $\lambda_k - d \in K[d]$  erhalten wir eine nicht invertierbare Matrix wie oben, welche dann die Matrizen  $e_1, \dots, e_{k-1}$  liefert. Die letzte Matrix  $e_k$  errechnet sich dann durch  $e_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} e_i$  (ist  $\lambda_k - d$  wie im Fall 2, dann ist die Matrix  $e_k$  der Gestalt (3.17), welche wir bei Bedarf noch in die gewünschte Form überführen müssen).  $\square$

Jetzt sind wir in der Lage, das erste Hilfsergebnis zu beweisen.

**Lemma 3.3.2.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  und  $|K| \geq n + 1$ . Dann gilt:*

$$\forall p \in \mathbb{P}(J) \exists a \in J, b \in J^* : p = R(1 + ab, a).$$

*Beweis:* Sei  $p = R(1 + cd, c) = R(1, 0)E(-c)E(d) \in \mathbb{P}(J) \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $c \in J$  und  $d \in J \setminus J^*$ . Wir betrachten zwei Fälle:

- (1) Sei  $c \in J^*$ , dann ist  $p = R(c^{-1} + d, 1)$ . Ist  $c^{-1} + d \in J^*$ , so wähle man ein  $\lambda \in K^* \setminus \{1\}$  (dieses existiert, denn  $K$  enthält nach Voraussetzung mindestens 3 Elemente). Setzt man  $a := (1 - \lambda)^{-1}(c^{-1} + d)^{-1}$  und  $b := \lambda(c^{-1} + d) \in J^*$ , dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} p &= R(1 + \lambda - \lambda, (c^{-1} + d)^{-1}) \\ &= R((1 - \lambda) + (c^{-1} + d)^{-1}\lambda(c^{-1} + d), (c^{-1} + d)^{-1}) \\ &= R(1 + (1 - \lambda)^{-1}(c^{-1} + d)^{-1}\lambda(c^{-1} + d), (1 - \lambda)^{-1}(c^{-1} + d)^{-1}) \\ &= R(1 + ab, a). \end{aligned}$$

Ist  $c^{-1} + d \notin J^*$ , dann existiert ein  $\mu \in K^*$ , so dass  $c^{-1} + d - \mu \in J^*$  ist<sup>iii</sup>. Mit  $a := \mu^{-1}$  und  $b := c^{-1} + d - \mu \in J^*$  ergibt sich:

$$p = R(\mu + c^{-1} + d - \mu, 1)$$

---

<sup>iii</sup>Wegen  $J \subseteq K_{n,n}$  hat  $c^{-1} + d$  maximal  $n$  Eigenwerte und mindestens einer davon ist 0, da  $c^{-1} + d$  nicht invertierbar ist. Die Existenz von  $\mu$  folgt dann direkt nach Voraussetzung an die Mächtigkeit des Körpers.

$$\begin{aligned}
 &= R(1 + \mu^{-1}(c^{-1} + d - \mu), \mu^{-1}) \\
 &= R(1 + ab, a).
 \end{aligned}$$

(2) Sei nun  $c \in J \setminus J^*$ . Weiter sei  $\chi_d(X)$  das charakteristische Polynom von  $d$ . Wir haben zwei Fälle zu betrachten:

1. Fall: Sei  $\chi_d(X)$  vollständig in Linearfaktoren zerlegbar, dann ist  $d$  zu einer oberen Dreiecksmatrix  $d'$  wie in (3.15) konjugiert, d.h. es existiert ein  $u \in R^*$  mit  $d' = u^{-1}du$ , also  $d' \in u^{-1}Ju =: J'$ , und es gilt  $\chi_d(X) = \pm(X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$  mit paarweise verschiedenen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  und  $r_1, \dots, r_k \geq 1$  mit  $\sum_{i=1}^k r_i = n$  für ein  $k \leq n$  (vgl. [32, S. 260]). Offenbar ist 0 ein Eigenwert von  $d \in J \setminus J^*$  bzw.  $d' \in J' \setminus J'^*$ . OBdA sei  $\lambda_k = 0$ . Wir betrachten nun  $d' \in J'$  genauer.

Wegen  $J' = u^{-1}Ju$  ist  $J'$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Damit liegt die  $K$ -Algebra  $K[d'] = K + Kd' + \dots + Kd'^{t-1}$  mit  $\dim_K(K[d']) = t \leq n$  ganz in  $J'$ . Nach Lemma 3.3.1 gibt es in  $K[d']$  für jedes  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  eine obere Dreiecksmatrix  $e_i$  der Gestalt (3.13).

Setze man nun  $s' := 1 - (e_1 + \dots + e_{k-1}) \in K[d']$ , d.h. es ist

$$s' = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ \mathbf{0} & & \boxed{E_{r_k}} \end{pmatrix} + \hat{m}$$

mit  $\hat{m}$  wie in (3.16). Dann ist  $d' + \tau s' \in J'^*$  für alle  $\tau \in K^*$ . Setzt man nun  $s := us'u^{-1} \in J$ , dann folgt daraus  $d + \tau s = ud'u^{-1} + \tau us'u^{-1} = u(d' + \tau s')u^{-1} \in uJ'^*u^{-1} = J^*$  für alle  $\tau \in K^*$ .

Mit  $c$  ist auch  $cs$  nicht invertierbar, so dass ein  $l \in K^*$  mit  $cs - l \in R^*$  ( $\Leftrightarrow 1 - l^{-1}cs \in R^*$ ) existiert. Schließlich setze man  $a := (1 - l^{-1}cs)^{-1}c \in R$  und  $b := l^{-1}s + d \in J^*$ . Es gilt:

$$1 - l^{-1}cs \in K[cs] \text{ mit } \dim_K K[cs] = v \leq n$$



mit  $d' = u^{-1}du \in J' := u^{-1}Ju$  für ein  $u \in R^*$ , wobei  $B_1, \dots, B_l$  die Blöcke mit irreduziblen charakteristischen Polynomen  $\chi_{B_1}(X), \dots, \chi_{B_l}(X)$  sind, welche  $\chi_d(X)$  teilen, d.h. es gilt  $B_j \in L_j \simeq K[X]/(\chi_{B_j}(X))$  für jedes  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Dabei gilt insbesondere  $B_j \neq 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Definiert man analog wie oben  $s' := 1 - \sum_i e_i$  für  $e_i \in K[d']$  wie in (3.14), dann hat  $s'$  in der Hauptdiagonale statt der Blöcke  $B_1, \dots, B_l$  nur Elemente aus  $K$  und sonst Nullen (an der Stelle von  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \neq 0$ ) bzw. Einsen (an der Stelle von  $\lambda_k = 0$ ), so dass  $d' + \tau s' \in J'^*$  und folglich auch  $d + \tau s \in J^*$  mit  $s = us'u^{-1} \in J$  für alle  $\tau \in K^*$  gilt, denn es ist  $B_j + \tau t \neq 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, l\}$  und alle  $t \in K$ . Weiter verläuft der Beweis analog zum Beweis von Fall 1.  $\square$

**Bemerkung 3.3.3.** Aus dem obigen Lemma zusammen mit Lemma 3.1.15 in [26] folgt  $\mathbb{P}(J) = \{R(x, 1 + xy) \mid x, y \in J\}$ .

Im Teil (2) des Beweises von 3.3.2 haben wir insbesondere ein wichtiges Ergebnis erhalten, das wir im Weiteren noch benutzen werden. Dieses Ergebnis<sup>iv</sup> schreiben wir als Korollar auf:

**Korollar 3.3.4.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  und  $d \in J \setminus J^*$ . Dann existiert ein  $s \in K[d] \subseteq J$ , so dass  $d + ks \in J^*$  für alle  $k \in K^*$  gilt.*

Mit Bemerkung 3.2.16 und Lemma 3.3.2 beweisen wir den folgenden Satz:

**Satz 3.3.5.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  und  $|K| \geq n + 1$ . Dann ist  $J$  stabil in  $R$ .*

*Beweis:* Nach 3.2.16 reicht es die Punkte der Form  $p = R(1, 0)E(a)E(b)E(c) \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  (für  $a, b, c \in J$ ) zu betrachten. Ist  $a \in J^*$ , so gilt das Gewünschte für  $x = -c \in J$ :  $(ab - 1)(c + x) - a = (ab - 1)(c - c) - a = -a \in J^*$ .

<sup>iv</sup>Ein ähnliches Ergebnis gilt gemäß Lemma 2.1.1 in [42]: Für jedes  $d \in J$  existiert nämlich ein  $c \in K[d]^*$ , so dass  $dc - k$  in  $K[d] \subseteq J$  invertierbar für alle  $k \in K \setminus \{0, 1\}$  ist. Für unsere Zwecke ist es aber ganz wichtig, dass der Fall  $k = 1$  zumindest für nicht invertierbare  $d \in J$  nicht ausgeschlossen wird.

Sei nun  $a \in J \setminus J^*$ . Es ist  $R(1, 0)E(a)E(b) = R(ab - 1, a) \in \mathbb{P}(J)$ . Nach 3.3.2 und 3.3.3 gibt es also  $a', s, t \in J$  und  $b' \in J^*$ , so dass  $R(ab - 1, a) = R(1 + a'b', a') = R(s, st + 1)$  mit  $s = -b'a'b' - b'$  und  $t = (b')^{-1}$  gemäß dem Beweis von 3.1.15(2) in [26] ist. Daraus folgt  $p = R(1, 0)E(a)E(b)E(c) = R(s, st + 1) \cdot E(c) = R(sc - st - 1, s) = R(s(c - t) - 1, s)$ . Für  $x = -(c - t) \in J$  gilt die Behauptung.  $\square$

Aus der Stabilität des Jordan-Systems folgt aber seine Jordan-Abgeschlossenheit nicht. Es gibt auch Jordan-Systeme über einem Körper mit kleinerer Mächtigkeit als in 3.3.5 vorausgesetzt, welche immer noch stabil in  $R$  sind. Wir stellen einige Beispiele für stabile Jordan-Systeme vor, welche die Voraussetzungen des Satzes 3.3.5 nicht erfüllen:

**Beispiel 3.3.6.** (1) Sei  $J$  die Menge aller Matrizen  $\begin{pmatrix} \lambda & \nu & \tau \\ 0 & \mu & \nu \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda, \mu, \nu, \tau \in K$ . Dann ist  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System. Nach 3.3.5 ist  $J$  für alle  $K$  mit  $|K| \geq 4$  stabil in  $R$ . Wir beweisen, dass  $J$  auch für  $K \simeq GF(3)$  stabil ist.

Sei  $S \leq K_{3,3}$  die  $K$ -Algebra der oberen Dreiecksmatrizen und  $p = S(a, b) \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \subseteq \mathbb{P}(S)$ . Wir zeigen, dass ein  $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} \in J$  existiert, so dass  $a + bx \in S^*$  gilt.

Wir wissen, dass jede endlichdimensionale  $K$ -Algebra stabil ist, d.h. es gibt ein  $y \in S$  mit  $a + by \in S^*$ . Seien  $a := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ ,  $b := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in S$  und  $y := \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & 0 & y_{33} \end{pmatrix} \in S$  wie oben. Es ist dann

$$a + by = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}y_{11} & a_{12} + b_{11}y_{12} + b_{12}y_{22} & a_{13} + b_{11}y_{13} + b_{12}y_{23} + b_{13}y_{33} \\ 0 & a_{22} + b_{22}y_{22} & a_{23} + b_{22}y_{23} + b_{23}y_{33} \\ 0 & 0 & a_{33} + b_{33}y_{33} \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$a + by \in S^* \Leftrightarrow a_{11} + b_{11}y_{11} \neq 0, \quad a_{22} + b_{22}y_{22} \neq 0 \quad \text{und} \quad a_{33} + b_{33}y_{33} \neq 0.$$

Jetzt konstruieren wir das gesuchte  $x \in J$ .

Da  $y_{12}, y_{23}$  und  $y_{13}$  auf die Determinante von  $a + by$  keine Wirkung haben, können wir oBdA  $x_{12} := y_{12}$  und  $x_{13} := y_{13}$  wählen. Außerdem setzen wir sofort  $x_{22} := y_{22}$ . Nun betrachten wir drei Fälle:

- (a) Sei  $b_{11} = 0$ , dann ist  $a_{11} \neq 0$  und somit gilt  $a_{11} + b_{11}x_{11} \neq 0$  für alle  $x_{11} \in K$ . Damit auch die Gleichheit  $a_{33} + b_{33}x_{11} \neq 0$  erfüllt ist, wählen wir  $x_{11} := y_{33}$ , so dass schließlich  $a + bx \in S^*$  gilt, wie gewünscht.
- (b) Sei  $b_{33} = 0$ . Dann konstruiert man  $x$  analog wie in (a).
- (c) Seien nun  $b_{11}, b_{33} \neq 0$ , dann sind  $y_{11} \neq -b_{11}^{-1} \cdot a_{11}$  und  $y_{33} \neq -b_{33}^{-1} \cdot a_{33}$ . Wegen  $|K| = 3$  finden wir also stets ein  $x_{11} \neq -b_{11}^{-1} \cdot a_{11}$ ,  $-b_{33}^{-1} \cdot a_{33}$ , so dass beide Bedingungen  $a_{11} + b_{11}x_{11} \neq 0$  und  $a_{33} + b_{33}x_{11} \neq 0$  erfüllt sind.

Daraus folgt die Behauptung.

- (2) Sei  $J$  wie in 2.1.4(J3), also ein nicht Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $K_{3,3}$  mit  $K \simeq GF(3)$ . Wir zeigen, dass  $J$  stabil in  $R$  ist. Sei  $D \leq K_{3,3}$  die  $K$ -Algebra aller Diagonalmatrizen. Weiter sei  $p = R(a, b) \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $a := \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \in D$ . Wir suchen ein  $x := \begin{pmatrix} y+z & 0 & 0 \\ 0 & y+2z & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \in J \leq D$ , für welches die Bedingung  $a + bx \in D^*$  erfüllt ist. Es gilt:

$$a + bx = \begin{pmatrix} a_1 + b_1(y+z) & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2(y+2z) & 0 \\ 0 & 0 & a_3 + b_3y \end{pmatrix} \in S^*$$

$$\Leftrightarrow a_1 + b_1(y+z) \neq 0, a_2 + b_2(y+2z) \neq 0 \text{ und } a_3 + b_3y \neq 0.$$

Damit haben wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} b_1z + b_1y &= u - a_1 \\ 2b_2z + b_2y &= v - a_2 \\ b_3y &= w - a_3 \end{aligned}$$

in den zwei Unbekannten  $y, z$  mit geeigneten  $u, v, w \in K^*$ . Wir suchen also solche  $u, v, w \in K^*$ , so dass das Gleichungssystem lösbar ist. Wir betrachten wieder zwei Fälle:

- (a) Sei  $b_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Sind  $a, b \in D^*$ , dann sind auch  $a_i \neq 0$ . In diesem Fall ist die Bedingung  $a + bx \in D^*$  für  $x = 0$  erfüllt. Sonst sei oBdA  $a_3 = 0$ . Dann liefert die 3. Gleichung sofort  $y = b_3^{-1}w \in \{b_3^{-1}, 2b_3^{-1}\}$ . Aus der 1. Gleichung ergibt sich  $z = b_1^{-1}(u - a_1 - b_1b_3^{-1}w) \in \{b_1^{-1}(k - a_1 - b_1b_3^{-1}l) \mid k, l \in \{1, 2\}\}$ . Setzt man  $w = 1$ , dann erhalten wir durch Einsetzen von  $y$  und  $z$  in die 2. Gleichung mit einem beliebigen  $v \neq 0$ :

$$\begin{aligned} & 2b_2z + b_2y + a_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 2b_2b_1^{-1}(u - a_1 - b_1b_3^{-1}) + b_2b_3^{-1} + a_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 2b_2b_1^{-1}(u - a_1) - b_2b_3^{-1} + a_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & u \neq 2b_1b_3^{-1} - 2b_1b_2^{-1}a_2 + a_1 \end{aligned}$$

Wegen  $|K| = 3$  findet man stets ein  $u \in K^*$ , welches die obige Aussage erfüllt.

- (b) Wir nehmen nun an, dass es mindestens ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  gibt mit  $b_i = 0$ . Sei oBdA  $b_3 = 0$ , dann muss  $a_3$  von 0 verschieden sein, denn sonst wäre  $R(a, b)$  kein Punkt von  $\tilde{P}(J)$ . Setzt man  $w = a_3 \neq 0$ , dann kann  $y \in K$  beliebig gewählt werden, z. B.  $y = 0$ . Ist auch  $b_1 = 0$  und damit  $a_1 \neq 0$ , dann setze  $u = a_1$  und wähle  $z \in K$  so, dass  $v = 2b_2z + a_2 \neq 0$  ist. Im Fall  $b_1 \neq 0$  ist  $z = b_1^{-1}(u - a_1)$  und damit gilt für die 2. Gleichung mit einem beliebigen  $v \neq 0$ :

$$\begin{aligned} & 2b_2z + a_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 2b_2b_1^{-1}(u - a_1) + a_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & u \neq a_1 - 2b_1b_2^{-1}a_2 \end{aligned}$$

Die gleiche Argumentation wie im Fall (a) liefert uns die gesuchten  $u, v, w \in K^*$ .

Obwohl  $J$  in  $R$  stabil ist, folgt daraus die Gleichheit der Mengen  $\mathbb{P}(J)$  und  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  nicht. Genauer wird diese Tatsache im nachfolgenden Abschnitt erklärt. Das zeigt, dass auf die Voraussetzung des Satzes 3.2.15 nicht verzichtet werden kann.

Eine wichtige Folgerung aus 3.3.5 unter Beachtung von 3.2.15 schreiben wir noch mal als Korollar auf:

**Korollar 3.3.7.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  und  $|K| \geq n + 1$ . Dann ist  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$ .*

### 3.4 Kettenräume über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen

In diesem Abschnitt soll klar gemacht werden, inwieweit die im Abschnitt 3.2 eingeführte Definition der projektiven Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen im Sinne der Kettengeometrie sinnvoll ist. Bevor diese Frage genauer untersucht wird, möchten wir das Beispiel von oben weiter ausführen.

**Beispiel 3.4.1.** Sei  $J$  wieder wie in 2.1.4(J3) und  $D \leq K_{3,3}$  die  $K$ -Algebra aller Diagonalmatrizen mit  $K \simeq GF(3)$ . Wegen  $J \subseteq D$  betrachten wir die projektive Gerade von  $J$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}(D)$ . Wie wir in 2.4.7 schon gesehen haben, ist die gemäß 1.1.29 definierte projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  kein Unterraum von  $\Sigma(K, D)$  und damit nicht die Punktmenge eines Kettenraums, da nicht alle Verbindungsketten von drei paarweise distanten Punkten ganz in  $\mathbb{P}(J)$  sind. Wir betrachten zunächst, ob für die im Fall (J3) des Unterabschnitts 2.4.1 behandelten Punkte die in  $\mathbb{P}(J)$  fehlende Kette in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  enthalten ist. Seien also

$$h_1 := D(1 + a_1 b_1, a_1) \text{ mit } a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in J,$$

$$h_2 := D(1 + a_2 b_2, a_2) \text{ mit } a_2 = b_2 = 1 \in J,$$

$$h_3 := D(1 + a_3 b_3, a_3) \text{ mit } a_3 = 2, b_3 = 1 \in J,$$

d.h. es gilt  $h_1 = D\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ,  $h_2 = D(2, 1)$ ,  $h_3 = D(0, 1)$ . Dann sind  $h_1, h_2, h_3$  paarweise distante Punkte, die den Ebenen  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  bzw.  $\mathcal{E}''$  aus dem Beweis von 2.4.7 entsprechen. Sei  $C_h := (h_1 h_2 h_3)$  die Verbindungskette. Gemäß dem Beweis von 2.4.7 liegt der vierte Punkt von  $C_h$  außerhalb von  $\mathbb{P}(J)$ . Tatsächlich ist der Punkt  $h_4 := D(1, 0)E(a_4)E(b_4)E(c_4) = D\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \setminus \mathbb{P}(J)$  mit  $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_4$  und  $c_4 = \begin{pmatrix} 1+z & 0 & 0 \\ 0 & 1+2z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein beliebiges  $z \in K$  (dieses verschwindet beim Ausrechnen von  $h_4$ ) zu allen  $h_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , distant und für  $\sigma \in PGL_2(D)$ , welche durch die Matrix  $\begin{pmatrix} x & y \\ v & w \end{pmatrix} \in GL_2(D)$  mit  $x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $v := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $w := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  induziert wird, gilt:

$$\begin{aligned} D(1, 0)^\sigma &= D(x, y) = D(u_1(1 + a_1 b_1), u_1 a_1) = h_1, \text{ mit } u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in D^*, \\ D(0, 1)^\sigma &= D(v, w) = D(u_1(a_4 b_4 c_4 - a_4 - c_4), u_1(a_4 b_4 - 1)) = h_4, \\ D(1, 1)^\sigma &= D(x + v, y + w) = h_3, \\ D(2, 1)^\sigma &= D(2x + v, 2y + w) = D(u_2(1 + a_2 b_2), u_2 a_2) = h_2, \text{ mit} \\ u_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in D^*. \end{aligned}$$

Damit ist  $h_4 \in C_h = \mathbb{P}(K)^\sigma$ . Insbesondere ist  $\mathbb{P}(J)$  eine echte Teilmenge von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ .

Wir können sogar zeigen, dass  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  ein Unterraum von  $\Sigma(K, D)$  ist. Das bedeutet insbesondere, dass für je drei paarweise distante Punkte in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  ihre Verbindungskette ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  liegt und die Inzidenzstruktur  $\tilde{\Sigma} := (\tilde{\mathbb{P}}(J), \mathfrak{C}(\tilde{\mathbb{P}}(J)))$  selbst ein Kettenraum ist. Wir zeigen unter anderem, dass die Menge aller Ketten in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  wie folgt aussieht:

$$\mathfrak{C}(\tilde{\mathbb{P}}(J)) = \{C^\delta \mid \delta \in PE_2(J), C \in \mathfrak{C}(K, D), \infty \in C\} =: \mathfrak{C}(K, D, J). \quad (3.18)$$

Als Zwischenschritt untersuchen wir die Menge aller zu  $\infty$  distanten Punkte von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  und zeigen, dass diese Menge mit der Menge  $\Delta(\infty) = \{p \in \mathbb{P}(D) \mid p \Delta \infty\} = \{D(h, 1) \mid h \in D\} \subseteq \mathbb{P}(D)$  übereinstimmt. Offenbar gilt  $\tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty) \subseteq \Delta(\infty)$ . Wir zeigen nun die andere Inklusion. Sei  $p = D(h, 1) \in$

$\Delta(\infty)$  mit  $h \in D$ , d.h.  $h = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$  mit  $k_i \in K$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Setzt man  $a := k_1 + 2k_3$  und  $b := k_2 + 2k_3 + a = k_1 + k_2 + k_3$ , dann erhalten wir

$$h = \begin{pmatrix} a + k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a + k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } s := \begin{pmatrix} a + k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2a + k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \in J.$$

Ist  $b = 0$ , dann ist  $h = s \in J$  und damit gilt sofort  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$ . Sei nun  $b = 1$  (für  $b = 2$  gilt analog). Mit  $t := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in J$  und  $l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in J$  ist  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2tlt$ , so dass  $h = s + 2tlt$  ist. Weiter setze man  $m := s - t \in J$ . Wegen  $tl - 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (tl - 1)^{-1} \in D^*$  ergibt sich

$$\begin{aligned} p &= D(h, 1) = D(s + 2tlt, 1) = D(m - tlt + t, 1) = D(m - (tl - 1)t, 1) \\ &= D((tl - 1)m - t, tl - 1) = D(1, 0)E(t) \cdot E(l) \cdot E(m) \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\Delta(\infty) \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$  und damit gilt die Gleichheit  $\Delta(\infty) = \tilde{\mathbb{P}}(J) \cap \Delta(\infty)$ .

Betrachtet man die entsprechenden Mengen aller Ketten durch  $\infty$  in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  bzw.  $\mathbb{P}(D)$ , so sind sie nach dem gerade Gezeigten auch gleich, d.h. es gilt

$$\tilde{\mathfrak{C}}(\infty) := \{\tilde{C} \in \mathfrak{C}(\tilde{\mathbb{P}}(J)) \mid \infty \in \tilde{C}\} = \{C \in \mathfrak{C}(K, D) \mid \infty \in C\} =: \mathfrak{C}(\infty).$$

Wir kommen nun zu dem eigentlichen Beweis der oben angekündigten Behauptungen.

Zunächst zeigen wir, dass für je drei paarweise distante Punkte in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  ihre Verbindungskette ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  liegt und jede solche Kette  $\tilde{C}$  die Gestalt  $\tilde{C} = C^\delta \in \mathfrak{C}(K, D, J)$  mit  $\delta \in PE_2(J)$  und  $C \in \mathfrak{C}(\infty)$  hat. Seien also  $p, q, r \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  paarweise distant und  $p = D(1, 0)E(T)$  mit  $E(T) \in E_2(J)$ . Ist  $\alpha$  die durch die Matrix  $E(T)^{-1}$  induzierte Abbildung in  $PE_2(J)$ , dann gilt  $p^\alpha = D(1, 0)$  und damit ist  $(p^\alpha q^\alpha r^\alpha) =: C \in \tilde{\mathfrak{C}}(\infty) = \mathfrak{C}(\infty)$  eine Kette durch  $\infty$  in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Daher ist  $(pqr) = C^\delta \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$  für  $\delta = \alpha^{-1}$  die Kette durch  $p, q, r$ . Umgekehrt ist für jedes  $\delta \in PE_2(J)$  und  $C \in \mathfrak{C}(\infty)$  stets  $C^\delta \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Damit

gilt Bedingung (2) der Unterraumdefinition 1.2.9 sowie (3.18). Bedingung (1) von 1.2.9 ist auch erfüllt, denn  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  enthält sicher die Punkte  $D(1, 0)$ ,  $D(0, 1)$  und  $D(1, 1)$ .

Schließlich zeigen wir, dass  $\tilde{\Sigma}$  selbst ein Kettenraum ist. Axiome **K1** und **K2** sind offensichtlich erfüllt. Wir müssen also zeigen, dass alle Residuen  $\tilde{\Sigma}_p$ ,  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$ , partielle affine Räume sind. Da  $E_2(J)$  Ketten aus  $\tilde{\Sigma}$  auf ebensolche abbildet und transitiv auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  operiert, können wir oBdA den Punkt  $p = \infty$  betrachten. Nach dem oben Gezeigten gilt  $\Delta(\infty) = \Delta(\infty) \cap \tilde{\mathbb{P}}(J)$  und  $\tilde{\mathfrak{C}}_\infty := \{C \setminus \{\infty\} \mid C \in \tilde{\mathfrak{C}}(\infty)\} = \{C \setminus \{\infty\} \mid C \in \mathfrak{C}(\infty)\} =: \mathfrak{C}_\infty$ . Daraus folgt, dass die Residuen  $\Sigma_\infty = (\Delta(\infty), \mathfrak{C}_\infty)$  und  $\tilde{\Sigma}_\infty = (\Delta(\infty) \cap \tilde{\mathbb{P}}(J), \tilde{\mathfrak{C}}_\infty)$  auch identisch sind. Mit  $\Sigma_\infty$  ist also auch  $\tilde{\Sigma}_\infty$  ein partieller affiner Raum im affinen Raum  $\mathbb{A}(K, D)$ .

Das obige Beispiel illustriert, inwiefern die neue Definition der projektiven Gerade über nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen (zumindest für dieses konkrete Jordan-System) aus Sicht der Kettengeometrie sinnvoll ist. Natürlich kann man die in diesem Beispiel definierte Kettengeometrie nicht auf ein beliebiges Jordan-System übertragen: Wenigstens ist die Gleichheit  $\Delta(\infty) = \Delta(\infty) \cap \tilde{\mathbb{P}}(J)$  nicht allgemein gültig, so dass sowohl Ketten durch  $\infty$ , als auch die entsprechenden Residuen  $\tilde{\Sigma}_\infty$  allgemein anders aussehen sollten. Die Idee, alle Ketten mittels der Ketten durch  $\infty$  zu beschreiben, scheint jedoch nicht verkehrt zu sein. Außerdem haben wir eine Untergruppe  $PE_2(J) \leq PGL_2(R)$  zur Verfügung, welche auf dem Distanzraum  $(\tilde{\mathbb{P}}(J), \Delta)$  operiert. Diese operiert auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  sogar 2- $\Delta$ -transitiv. Um das zu beweisen, brauchen wir zunächst das folgende Lemma:

**Lemma 3.4.2.** *Sei  $J$  ein Jordan-System. Dann gilt*

$$PE_2(J) \text{ ist } 2\text{-}\Delta\text{-transitiv auf } \tilde{\mathbb{P}}(J) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall p, q \in \tilde{\mathbb{P}}(J), p \Delta q \exists \alpha \in PE_2(J) : \\ p^\alpha = R(1, 0), q^\alpha = R(0, 1) \end{cases}$$

*Beweis:* Die Rechts-Implikation ist klar. Wir beweisen also nur die Links-Implikation. Seien  $(p, q), (\bar{p}, \bar{q})$  Paare distanter Punkte in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $\alpha \in PE_2(J)$  mit  $p^\alpha = R(1, 0)$  und  $q^\alpha = R(0, 1)$  und ein

$\bar{\alpha} \in PE_2(J)$  mit  $\bar{p}^{\bar{\alpha}} = R(1, 0)$  und  $\bar{q}^{\bar{\alpha}} = R(0, 1)$ . Setzt man  $\gamma := \alpha \circ \bar{\alpha}^{-1} \in PE_2(J)$ , dann gilt sofort  $\bar{p} = p^\gamma$  und  $\bar{q} = q^\gamma$ , was zu beweisen war.  $\square$

**Lemma 3.4.3.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System. Dann operiert  $PE_2(J)$  2- $\Delta$ -transitiv auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ .*

*Beweis:* Seien  $p = R(1, 0)E(T), q = R(1, 0)E(S) \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  distant mit  $E(T), E(S) \in E_2(J)$ . Weiter sei  $\alpha \in PE_2(J)$  durch die Matrix  $E(T)^{-1}$  induziert, dann gilt  $p^\alpha = R(1, 0)$  und  $q^\alpha = R(1, 0)E(S)E(T)^{-1}$  mit  $p^\alpha \Delta q^\alpha$ . Nach 3.2.9 hat  $q^\alpha$  die Gestalt  $q^\alpha = R(h, 1)$  für ein  $h \in J$ . Damit ist  $q^\alpha = R(1, 0)E(h)$ . Setze nun  $\beta := E(h)^{-1} \in PE_2(J)$ , dann gilt  $(p^\alpha)^\beta = R(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & h \end{pmatrix} = R(0, 1)$  und  $(q^\alpha)^\beta = R(1, 0)$ . Für  $\gamma := \alpha \circ \beta \in PE_2(J)$  gilt nach 3.4.2 die Behauptung.  $\square$

Nun können wir die in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  enthaltenen Ketten für Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in einem Satz beschreiben, welcher den Satz 1.2.10 verallgemeinert:

**Satz 3.4.4.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Für je drei paarweise distante Punkte  $p, q, r \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  liegt ihre Verbindungskette  $C = (pqr) \in \mathfrak{C}(K, R)$  ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Jede solche Kette  $C$  hat die Gestalt  $C = (C_h)^\delta$ , wobei  $C_h := \{R(sh, t) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K)\}$  für ein  $h \in J^*$  und  $\delta \in PE_2(J)$  ist. Umgekehrt ist für  $\delta \in PE_2(J)$  und  $h \in J^*$  stets  $(C_h)^\delta \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$ .*

*Beweis:* Seien  $p, q, r \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  paarweise distant. Nach 3.4.3 gibt es ein  $\delta \in PE_2(J)$  mit  $p^\delta = R(1, 0)$  und  $q^\delta = R(0, 1)$ , so dass  $r^\delta = R(h, 1)$  für ein  $h \in J^*$  nach 3.2.9 ist. Die Punkte  $p^\delta, q^\delta, r^\delta$  liegen auf der Kette  $\mathbb{P}(K)^\gamma$ , wobei  $\gamma \in PGL_2(R)$  durch  $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  induziert wird. Offenbar ist aber  $\mathbb{P}(K)^\gamma = \{R(1, 0)\} \cup \{R(kh, 1) \mid k \in K\} = C_h \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Damit ist die Kette  $(pqr) = (C_h)^{\delta^{-1}}$  ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  enthalten.

Sei nun  $\delta \in PE_2(J)$  und  $h \in J^*$ . Dann ist mit  $C_h \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$  auch  $(C_h)^\delta \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$ , denn  $PE_2(J)$  lässt die Menge aller Punkte der projektiven Gerade über  $J$  sowie die Distanzrelation von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  invariant.  $\square$

Im folgenden Satz zeigen wir schließlich, dass  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  ein Unterraum von

$\Sigma(K, R)$  ist. Dies stellt eine Verallgemeinerung von Satz 1.2.11 dar:

**Satz 3.4.5.** *Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Dann ist*

$$\tilde{\Sigma} := \Sigma(K, R, J) := (\tilde{\mathbb{P}}(J), \tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J))$$

mit  $\tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J) := \{(C_h)^\delta \mid h \in J^*, \delta \in PE_2(J)\}$  ein Unterraum von  $\Sigma(K, R)$ . Wir nennen  $\Sigma(K, R, J)$  die Kettengeometrie über  $(K, R, J)$ .

*Beweis:* Nach 3.4.4 ist Bedingung (2) von 1.2.9 erfüllt. Offenbar gilt wegen  $\mathbb{P}(K) \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$  auch Bedingung (1). Wir zeigen also, dass  $\tilde{\Sigma}$  selbst ein Kettenraum ist. Dazu betrachten wir die Residuen  $\tilde{\Sigma}_p$  für  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  und zeigen, dass diese partielle affine Räume sind. Da  $PE_2(J)$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  transitiv operiert und Ketten aus  $\tilde{\Sigma}$  nach 3.4.4 auf ebensolche abbildet, können wir oBdA den Punkt  $p = R(1, 0)$  wählen. Dann ist  $\tilde{\Sigma}_\infty = (\tilde{\Delta}(\infty), \tilde{\mathfrak{C}}_\infty)$  mit  $\tilde{\Delta}(\infty) = \Delta(\infty) \cap \tilde{\mathbb{P}}(J) = \{R(h, 1) \mid h \in J\}$  (gemäß 3.2.9) und  $\tilde{\mathfrak{C}}_\infty = \{C \setminus \{\infty\} \mid \infty \in C \in \tilde{\mathfrak{C}} = \tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J)\}$ . Nach 2.1.9 in [26] kann man jede Kette in  $\tilde{\mathfrak{C}} \subseteq \mathfrak{C}(K, R)$  durch  $\infty$  als  $\mathbb{P}(K)^\gamma$  für ein  $\gamma \in PGL_2(R)$  darstellen, wobei  $\gamma$  durch die Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  mit  $c \in R, d \in R^*$  induziert wird. Identifiziert man  $R(h, 1) \in \tilde{\Delta}(\infty)$  mit  $h \in J$ , dann erhalten wir:

$$C \setminus \{\infty\} = \{R(k, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid k \in K\} = d^{-1}c + Kd^{-1} \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J).$$

Setzen wir nun  $a := d^{-1}c \in J$  und  $b := d^{-1} \in J^*$ , so gilt also  $C \setminus \{\infty\} = a + Kb$ . Somit ist  $\tilde{\mathfrak{C}}_\infty = \{a + Kb \mid a \in J, b \in J^*\}$ . Folglich ist  $\tilde{\Sigma}_\infty$  ein partieller affiner Raum im affinen Raum  $\mathbb{A}(K, J)$ .  $\square$

**Bemerkung 3.4.6.** Sei  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Dann gilt:

- (1) Die Gruppe  $\Delta(J)$  lässt die Menge  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  invariant.
- (2) Es gilt  $\tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J) = \{(C_h)^\delta \mid h \in J^*, \delta \in PE_2(J)\} = \{(C_h)^\delta \mid h \in J^*, \delta \in \Delta(J)\} = \mathfrak{C}(K, R, J)$  mit  $\mathfrak{C}(K, R, J)$  aus Satz 1.2.11 (auch für nicht starkes  $J$ ).
- (3) Ist  $J$  stark, so stimmt  $\tilde{\Sigma}$  mit der Definition der Kettengeometrie über

$(K, R, J)$  aus Satz 1.2.11 überein.

*Beweis:* Wir erinnern zunächst, dass die Gruppe  $\Delta(J)$  eine Untergruppe von  $PGL_2(R)$  ist, die von denjenigen Abbildungen erzeugt wird, welche durch Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  mit  $c \in J$  und  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  induziert werden (siehe Abschnitt 1.2, S. 27). Im Verlauf des Beweises bezeichnen wir diese Abbildungen mit  $\delta_1$  (für ein beliebiges  $c \in J$ ) bzw.  $\delta_2$ .

- (1) Es ist zu zeigen, dass beide Erzeuger  $\delta_1, \delta_2$  von  $\Delta(J)$  die Menge  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  invariant lassen. Für die durch  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  induzierte Abbildung  $\delta_1$  gilt die Aussage sofort wegen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = B_{21}(c) = E(0)^{-1} \cdot E(-c) \in E_2(J)$  (siehe 3.2.3(2)).

Wir betrachten nun die Abbildung  $\delta_2$ . Für alle Punkte  $p = R(1, 0)E(T) \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  haben wir:

$$\begin{aligned} p^{\delta_2} &= R(1, 0)E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= R(1, 0)E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(t_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= R(1, 0)E(t_1) \cdot \dots \cdot E(t_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(t_n)^{-1} \\ &= \dots = R(1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(t_1)^{-1} \cdot \dots \cdot E(t_n)^{-1} \\ &= R(1, 0)E(0)^{-1} \cdot E(t_1)^{-1} \cdot \dots \cdot E(t_n)^{-1} \\ &= \dots = R(1, 0)E(-t_1) \cdot \dots \cdot E(-t_n)E(0)^{-1} \in \tilde{\mathbb{P}}(J), \end{aligned}$$

weil  $E(t)^{-1} = E(0)E(-t)E(0)$  für alle  $t \in J$  gilt. Daraus folgt die Behauptung.

Insbesondere haben wir auch die Gleichheit  $E(T) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} E(\tilde{T})^{-1}$  mit  $\tilde{T} = (t_n, \dots, t_1) \in \mathcal{S}(J)$  gezeigt, d.h. es gilt stets

$$\forall \delta \in PE_2(J) \exists \tilde{\delta} \in PE_2(J) : \delta \circ \delta_2 = \delta_2 \circ \tilde{\delta}. \quad (3.19)$$

- (2) Gemäß 3.2.6(2) ist  $PE_2(J) \leq \Delta(J)$ . Somit gilt  $\tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J) \subseteq \mathfrak{C}(K, R, J)$ . Wir zeigen nun die andere Inklusion. Dazu beweisen wir, dass für jedes  $\delta \in \Delta(J)$  ein  $\delta' \in PE_2(J)$  existiert, so dass  $(C_h)^\delta = (C_h)^{\delta'}$  gilt.

Da jede Abbildung aus  $\Delta(J)$  als Hintereinanderausführung der Abbildungen  $\delta_1, \delta_2$  dargestellt werden kann, können wir das Prinzip der

vollständiger Induktion anwenden, indem wir die Aussage zunächst für beide Erzeuger von  $\Delta(J)$  zeigen. Für  $\delta_1 \in \Delta(J)$  gilt sofort  $\delta'_1 = \delta_1 \in PE_2(J)$  mit  $(C_h)^{\delta_1} = (C_h)^{\delta'_1}$ .

Wir beweisen nun die Aussage für  $\delta_2 \in \Delta(J)$ . Sei  $\delta'_2 \in PE_2(J)$  die durch  $E(0)^{-1}$  induzierte Abbildung. Dann erhalten wir nach (1) das Gewünschte:

$$\begin{aligned} (C_h)^{\delta_2} &= \{R(1, 0)^{\delta_2}\} \cup \{R(\lambda h, 1)^{\delta_2} \mid \lambda \in K\} \\ &= \{R(0, 1)\} \cup \{R(1, \lambda h) \mid \lambda \in K\} \\ &= \{R(0, -1)\} \cup \{R(1, -\lambda h) \mid \lambda \in K\} \\ &= \{R(1, 0)^{\delta'_2}\} \cup \{R(\lambda h, 1)^{\delta'_2} \mid \lambda \in K\} = (C_h)^{\delta'_2}. \end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir an, dass die Aussage für ein beliebiges  $\delta \in \Delta(J)$  wahr ist und es gilt  $(C_h)^\delta = (C_h)^{\delta'}$  für ein  $\delta' \in PE_2(J)$ . Es bleibt die Gültigkeit der Aussage für die Abbildungen  $\bar{\delta}_i := \delta \circ \delta_i$  mit  $i \in \{1, 2\}$  zu zeigen.

Für  $\bar{\delta}_1$  erhalten wir sofort wegen  $\delta_1 \in PE_2(J)$  und unserer Annahme:

$$(C_h)^{\bar{\delta}_1} = (C_h)^{\delta\delta_1} = ((C_h)^\delta)^{\delta_1} = ((C_h)^{\delta'})^{\delta_1} = (C_h)^{\delta'\delta_1} = (C_h)^{\bar{\delta}'_1}$$

mit  $\bar{\delta}'_1 \in PE_2(J)$ .

Nun betrachten wir  $\bar{\delta}_2 \in \Delta(J)$ . Nach unserer Annahme gilt zunächst analog wie oben  $(C_h)^{\bar{\delta}_2} = (C_h)^{\delta\delta_2} = (C_h)^{\delta'\delta_2}$ . Weiter rechnen wir also mit  $\delta' \circ \delta_2 \in \Delta(J)$ .

Sei  $\delta'$  durch die Matrix  $E(T) \in E_2(J)$  mit  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  induziert. Dann folgt aus (3.19) und nach dem oben Gezeigten:

$$(C_h)^{\delta'\delta_2} = (C_h)^{\delta_2\tilde{\delta}'_2} = (C_h)^{\delta'_2\tilde{\delta}'_2},$$

wobei  $\delta'_2 \in PE_2(J)$  wie oben ist und  $\tilde{\delta}'_2 \in PE_2(J)$  durch die Matrix  $E(\tilde{T})^{-1} \in E_2(J)$  mit  $\tilde{T} = (t_n, \dots, t_1) \in \mathcal{S}(J)$  induziert wird.

Insgesamt ergibt sich  $(C_h)^{\bar{\delta}_2} = (C_h)^{\bar{\delta}'_2}$  für  $\bar{\delta}'_2 := \delta'_2 \circ \tilde{\delta}'_2 \in PE_2(J)$  wie gewünscht.

Daraus folgt  $\mathfrak{C}(K, R, J) \subseteq \tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J)$  und daher gilt die Gleichheit  $\tilde{\mathfrak{C}}(K, R, J) = \mathfrak{C}(K, R, J)$ . Folglich kann man die Kettengeometrie  $\tilde{\Sigma}$  über  $(K, R, J)$  auch mittels der Gruppe  $\Delta(J)$  definieren, d.h. es gilt  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbb{P}}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$ .

(3) Die Aussage folgt unmittelbar aus (2) und 3.2.6(2). □

Wegen 3.4.6(2) bezeichnen wir im Weiteren die Kettenmenge von  $\tilde{\Sigma}$  stets mit  $\mathfrak{C}(K, R, J)$ .

# Kapitel 4

## Jordan-Homomorphismen und Morphismen von Distanzräumen

Im diesem Kapitel werfen wir einen schärferen Blick auf den im Kapitel 1 definierten Begriff des Jordan-Homomorphismus. Anhand von bestimmten Beispielklassen untersuchen wir, wie man solche Abbildungen algebraisch beschreiben kann.

Wir konzentrieren uns auf Jordan-Homomorphismen von Matrizenalgebren über Körpern und von Jordan-Systemen hermitescher Matrizen. Die Jordan-Homomorphismen von Matrizenalgebren bzw. Jordan-Systemen hermitescher Matrizen werden algebraisch beschrieben. Es wird auch gezeigt, dass jeder Jordan-Homomorphismus der angegebenen Strukturen eine Abbildung der entsprechenden projektiven Geraden induziert, welche die Distanz sowie die Adjazenzrelation invariant lässt.

### 4.1 Jordan-Homomorphismen von Matrizenalgebren

In diesem Abschnitt benötigen wir die folgende Definition eines Matrizenringes (vgl. [49, S. 311]):

**Definition 4.1.1.** *Sei  $\mathcal{U}$  ein Ring mit Einselement. Dann ist  $\mathcal{U}$  ein **Matrizenring über  $S$** , wenn  $\mathcal{U}$  eine Menge  $\{e_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$  von Matrizen-einheiten enthält, d.h. Matrizen, welche die Eigenschaften  $e_{ij}e_{sl} = \delta_{js}e_{il}$  mit*

$$\delta_{js} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } i, j, s, l \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \sum_1^n e_{ii} = 1 \text{ erfüllen.}$$

Dabei ist  $S$  der Unterring von  $\mathcal{U}$ , der mit allen  $e_{ij}$  kommutiert. Insbesondere kann jedes Element  $u \in \mathcal{U}$  eindeutig in der Form  $u = \sum s_{ij}e_{ij}$  mit  $s_{ij} \in S$  geschrieben werden.

Liegt  $S$  ganz im Zentrum von  $\mathcal{U}$ , dann heißt  $\mathcal{U}$  eine **Matrizenalgebra über  $S$** .

**Bemerkung 4.1.2.** Sei  $R$  ein Ring und  $M = R_{n,n}$  der übliche Matrizenring aller  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $R$ . Weiter seien  $e_{ij} \in M$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , die Standardmatrizeneinheiten, d.h. Matrizen, welche auf der Position  $(i, j)$  eine Eins und sonst Nullen haben, und  $S \subseteq M$  die Menge aller Matrizen in  $M$ , welche mit allen  $e_{ij}$  kommutieren. Dann gilt  $S = R \cdot E = \{rE \mid r \in R\}$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix von  $M$  ist. Damit ist  $M$  ein Matrizenring über  $S$  im Sinne von Definition 4.1.1. Umgekehrt ist  $\mathcal{U}$  zu dem Matrizenring  $S_{n,n}$  aller  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $S$  isomorph.

*Beweis:* Offenbar gilt  $R \cdot E \subseteq S$ . Es bleibt  $S \subseteq R \cdot E$  zu zeigen.

Sei also  $(m_{ij}) := (m_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in S$ . Dann gilt  $(m_{ij})e_{sl} = e_{sl}(m_{ij})$  für jede Standardmatrizeneinheit  $e_{sl}$  mit  $s, l \in \{1, \dots, n\}$ . Daraus folgt  $m_{is} = m_{lj} = 0$  für alle  $i \neq l$  und  $j \neq s$ . Setzt man  $s = l$ , dann erhalten wir  $(m_{ij}) = \text{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn})$ . Sei nun  $s = 1$  und  $l \in \{1, \dots, n\}$  beliebig. Wegen  $(m_{ij})e_{1l} = e_{1l}(m_{ij})$  gilt dann  $m_{11} = m_{ll}$  für alle  $l \in \{1, \dots, n\}$ . Das impliziert  $(m_{ij}) = m_{11}E \in R \cdot E$ , so dass folglich  $S \subseteq R \cdot E$  gilt. Die verbleibenden Behauptungen sind klar. □

Aufgrund von 4.1.2 gelten alle Ergebnisse über Matrizenringe  $\mathcal{U}$  im Sinne von Definition 4.1.1 auch für Matrizenringe  $R_{n,n}$  und umgekehrt. Im Weiteren fassen wir  $\mathcal{U}$  stets als den Matrizenring  $S_{n,n}$  auf.

Jordan-Homomorphismen von einem Matrizenring in einen beliebigen Ring wurden schon von N. Jacobson und C.E. Rickart untersucht. In [48] haben sie gezeigt, dass jeder solche Jordan-Homomorphismus die Summe von einem Homomorphismus und einem Anti-Homomorphismus ist (siehe unten).

Unabhängig davon hat I.N. Herstein in [41, Theorem H] bewiesen, dass jeder Jordan-Homomorphismus  $\alpha$  von einem Ring  $R$  in einen Primring  $R'$  von Charakteristik ungleich 2 und 3 entweder ein Homomorphismus oder ein Anti-Homomorphismus ist. Ein Jahr später hat M.F. Smiley das gleiche Ergebnis erhalten, aber ohne Voraussetzung, dass die Charakteristik von  $R'$  ungleich 3 sein soll (siehe [62]).

Relativ kürzlich hat H.M. Yao einen Satz bewiesen, nach dem man folgern kann, dass alle Jordan-Homomorphismen  $\alpha : K_{n,n} \rightarrow K_{n,n}$  mit  $n \geq 3$  und  $\text{Char}K \neq 2$  entweder Homomorphismen oder Anti-Homomorphismen sind (siehe [67, Theorem 8]). Im Folgenden zeigen wir, dass dieselbe Aussage auch im Fall von einem Jordan-Homomorphismus zwischen zwei Matrizenringen (gleicher Ordnung  $\geq 2$ ) über beliebigen verschiedenen Körpern gilt (im bijektiven Fall wurde sie schon von Z.-X. Wan in [66, Theorem 3.24] bewiesen, wobei Jordan-Isomorphismen dort semi-Isomorphismen heißen).

Zunächst stellen wir Lemma 3 von N. Jacobson und C.E. Rickart aus [48] vor:

**Lemma 4.1.3.** *Seien  $\mathcal{U} = S_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  ein Matrizenring (im Sinne von 4.1.1) und  $\mathcal{U}'$  ein beliebiger Ring. Weiter seien  $\alpha : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$  ein Jordan-Homomorphismus und  $\mathfrak{E}$  der von dem Bild  $\mathcal{U}^\alpha$  erzeugte Unterring von  $\mathcal{U}'$ . Dann gibt es zwei  $n \times n$ -Systeme  $\{g_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ ,  $\{h_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$  von Matrizeneinheiten in  $\mathfrak{E}$ , so dass  $e_{ij}^\alpha = g_{ij} + h_{ij}$  und  $g_{ij}h_{kl} = h_{kl}g_{ij} = 0$  für alle  $i, j, k, l$  gilt.*

Im Weiteren nennen wir  $\mathfrak{E}$  wie in 4.1.3 auch den **einhüllenden Ring** von  $\mathcal{U}^\alpha$ . Gemäß dem obigen Lemma und Satz 7 in [48] sowie dem Beweis davon gilt der folgende Satz:

**Satz 4.1.4.** *Jeder Jordan-Homomorphismus  $\alpha$  von einem Matrizenring  $\mathcal{U} = S_{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , in einen beliebigen Ring  $\mathcal{U}'$  ist die Summe von einem Homomorphismus  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{E}$  und einem Anti-Homomorphismus  $\vartheta : \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{E}$ , wobei  $\mathfrak{E}$  der einhüllende Ring von  $\mathcal{U}^\alpha$  ist. D.h. es ist  $\alpha = \psi + \vartheta$  mit  $a^\alpha = a^\psi + a^\vartheta$  für alle  $a \in \mathcal{U}$ . Sind  $g_{ij}, h_{ij}$  wie in 4.1.3, dann gilt außerdem  $1_{\mathcal{U}}^\psi = g := \sum_{i=1}^n g_{ii} \in \mathfrak{E}$ ,  $1_{\mathcal{U}}^\vartheta = h := \sum_{i=1}^n h_{ii} \in \mathfrak{E}$  sowie  $g + h = 1_{\mathcal{U}'}$ ,  $g^2 = g$ ,  $h^2 = h$  und  $gh = hg = 0$ .*

Nun betrachten wir einen Jordan-Homomorphismus  $\alpha$  zwischen  $n \times n$ -Matrizenalgebren über Körpern. Dann gilt sogar:

**Satz 4.1.5.** *Seien  $R = K_{n,n}$  und  $R' = K'_{n,n}$  zwei Matrizenalgebren mit  $n \geq 2$  und  $\alpha : R \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus. Dann ist  $\alpha$  entweder ein Homomorphismus oder ein Anti-Homomorphismus.*

*Beweis:* Sei  $\mathfrak{E}$  der einhüllende Ring von  $R^\alpha$ . Nach Satz 4.1.4 existieren ein Ringhomomorphismus  $\psi : R \rightarrow \mathfrak{E}$  und ein Ring-Antihomomorphismus  $\vartheta : R \rightarrow \mathfrak{E}$ , so dass  $\alpha$  sich als Summe  $\alpha = \psi + \vartheta$  darstellen lässt und es gilt  $1_R^\psi = g$  und  $1_R^\vartheta = h$  mit  $g + h = 1_{R'}$ ,  $g^2 = g$ ,  $h^2 = h$  und  $gh = hg = 0$  für  $g, h \in \mathfrak{E}$  wie in 4.1.4. Außerdem gilt nach dem Beweis von Satz 7 in [48]  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ , wobei  $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}g$  und  $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}h$  zweiseitige Ideale in  $\mathfrak{E}$  mit  $\text{Bild } \psi \subseteq \mathfrak{E}_1$ ,  $\text{Bild } \vartheta \subseteq \mathfrak{E}_2$  sind.

Nun möchten wir uns die beiden Ideale  $\mathfrak{E}_1$  und  $\mathfrak{E}_2$  genauer anschauen. Wegen  $g^2 = g$  ist  $g$  eine Nullstelle des Polynoms  $q(X) = X^2 - X \in K'[X]$ . Daher ist  $q(X)$  durch das Minimalpolynom  $m_g(X)$  von  $g$  teilbar. Folglich zerfällt  $m_g(X)$  vollständig in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen in  $K'$ . Nach F18 in [57, S. 215] ist also  $g$  diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $p \in GL_n(K')$ , so dass  $p^{-1}gp = \text{diag}(\underbrace{1', \dots, 1'}_{s\text{-mal}}, 0', \dots, 0')$  mit  $s = \text{Rang}_{K'}g$  ist (vgl. [27, Lemma 2]). Damit berechnen wir  $p^{-1}hp = p^{-1}(1_{R'} - g)p = 1_{R'} - p^{-1}gp = \text{diag}(0', \dots, 0', \underbrace{1', \dots, 1'}_{t\text{-mal}})$  mit  $t = n - s = \text{Rang}_{K'}h$ . Genauer haben wir

$$p^{-1}gp = \begin{pmatrix} E_{s,s} & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & 0_{t,t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p^{-1}hp = \begin{pmatrix} 0_{s,s} & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & E_{t,t} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

wobei  $E_{s,s}$  und  $E_{t,t}$  die  $s \times s$ - bzw.  $t \times t$ -Einheitsmatrizen sind und  $0_{s,s}$ ,  $0_{s,t}$ ,  $0_{t,s}$  und  $0_{t,t}$  die entsprechenden Nullmatrizen bezeichnen. Daraus folgt, dass wir im Folgenden oBdA statt  $\alpha$  die Abbildung  $\tilde{\alpha} : a \mapsto p^{-1}a^\alpha p$  betrachten können (diese ist offenbar auch ein Jordan-Homomorphismus) und von  $g$ ,  $h$  der Ge-

stalt (4.1) ausgehen. Dann gilt einerseits

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}g = \{ag \mid a \in \mathfrak{E}\} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} u & 0_{n,t} \end{pmatrix} \mid u \in K'_{n,s} \right\}$$

und andererseits

$$\mathfrak{E}_1 = g\mathfrak{E} = \{ga \mid a \in \mathfrak{E}\} \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} v \\ 0_{t,n} \end{pmatrix} \mid v \in K'_{s,n} \right\}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\mathfrak{E}_1 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & 0_{t,t} \end{pmatrix} \mid a \in K'_{s,s} \right\}.$$

Analog erhält man

$$\mathfrak{E}_2 \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0_{s,s} & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & b \end{pmatrix} \mid b \in K'_{t,t} \right\}.$$

Da  $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$  ist, erhalten wir

$$\mathfrak{E} \leq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & b \end{pmatrix} \mid a \in K'_{s,s}, b \in K'_{t,t} \right\}.$$

Wegen  $\text{Bild } \psi \subseteq \mathfrak{E}_1$  können wir  $\psi$  als eine Abbildung nach  $\mathfrak{E}_1$  auffassen, nämlich:

$$\psi : R \rightarrow \mathfrak{E}_1 \leq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0_{s,t} \\ 0_{t,s} & 0_{t,t} \end{pmatrix} \mid a \in K'_{s,s} \right\}.$$

Damit ist  $\psi$  ein Homomorphismus  $R \rightarrow K'_{s,s}$ . Nach Lemma 10 in [53] muss dann  $n$  ein Teiler von  $s$  sein. Wegen  $s \leq n$  folgt daraus  $s = n$  und folglich  $t = 0$ , so dass  $\vartheta$  die Nullabbildung und  $\alpha$  ein Homomorphismus ist, oder  $s = 0$  und damit  $t = n$ , so dass  $\psi$  die Nullabbildung und  $\alpha$  ein Anti-Homomorphismus

ist. □

Da jeder Anti-Homomorphismus als Hintereinanderausführung von einem Homomorphismus und dem Transponieren von Matrizen dargestellt werden kann, reicht es, nur Homomorphismen algebraisch zu beschreiben. Dank Z.-X. Wan ist die algebraische Beschreibung aller Isomorphismen  $\alpha : K_{n,n} \rightarrow K'_{n,n}$  schon bekannt (siehe [66, Theorem 3.22]). Wir verweisen auch auf [67, Corollary 1, Corollary 2] für die algebraische Beschreibung aller Homomorphismen bzw. Anti-Homomorphismen  $K_{n,n} \rightarrow K_{n,n}$  mit  $\text{Char}K \neq 2$  und  $n \geq 3$ . Diese Resultate werden im folgenden Satz verallgemeinert:

**Satz 4.1.6.** *Seien  $R = K_{n,n}$  und  $R' = K'_{n,n}$  zwei Matrizenalgebren und  $f : R \rightarrow R'$  ein Homomorphismus. Dann gibt es einen Körperhomomorphismus  $\psi : K \rightarrow K'$  und eine Matrix  $g \in GL_n(K')$ , so dass für alle  $a = (a_{ij}) \in R$  gilt  $a \mapsto a^f = g^{-1}(a_{ij}^\psi)g$ .*

*Beweis:* Wir definieren die Abbildung  $\hat{f} : R \rightarrow \text{Bild } f$  mit  $a^f = \hat{a}^f$  für alle  $a \in R$ . Es ist bekannt, dass Matrizenalgebren über Körpern einfach sind, d.h. sie haben keine zweiseitigen Ideale außer  $\{0\}$  und sich selbst. Da der Kern von  $f$  (und damit auch von  $\hat{f}$ ) ein Ideal von  $R$  ist und da  $f$  keine Nullabbildung ist, gilt  $\text{Kern } f = \text{Kern } \hat{f} = \{0\}$ . Damit ist  $f$  injektiv und  $\hat{f}$  bijektiv, d.h. es ist  $R \cong \text{Bild } f$ .

Nach Korollar 4.4.4 in [30] gibt es einen Ring  $L$  mit  $R' = L_{n,n}$  und einen Homomorphismus  $\varphi : K \rightarrow L$ , so dass  $a^f = (a_{ij}^\varphi)$  für alle  $a \in R$  gilt. Damit induziert  $\varphi$  einen Homomorphismus  $\tilde{\varphi} : R \rightarrow L_{n,n} : a = (a_{ij}) \mapsto (a_{ij})^f = (a_{ij}^\varphi)$ . Zunächst untersuchen wir die Beziehung, in welcher  $K'$  und  $L$  zueinander stehen.

Sei  $\omega : L_{n,n} \rightarrow R'$  ein beliebiger Isomorphismus zwischen Matrizenringen, dann folgt nach Theorem 3.22 in [66] wegen der Kommutativität von  $K'$ , dass  $L$  und  $K'$  via eines Körperisomorphismus  $\sigma : L \rightarrow K'$  isomorph sind und es eine Matrix  $g \in GL_n(K')$  gibt, so dass  $b^\omega = g^{-1}(b_{ij}^\sigma)g$  für alle  $b \in L_{n,n}$  gilt.

Nun können wir  $\omega = id$  setzen, denn es ist  $a^{\tilde{\varphi}} = a^f$  für alle  $a \in R$ . Dann gilt  $b^\omega = g^{-1}(b_{ij}^\sigma)g = b$  für alle  $b \in K'_{n,n} = L_{n,n}$ . Damit erhalten wir  $a = (a_{ij}) \mapsto$

$a^f = (a_{ij}^\varphi) = g^{-1}(a_{ij}^{\varphi\sigma})g = g^{-1}(a_{ij}^\psi)g$  für alle  $a \in R$ , wobei  $\psi := \varphi \circ \sigma : K \rightarrow K'$  ein Körperhomomorphismus ist.  $\square$

Es ist bekannt, dass jeder Ringhomomorphismus  $R \rightarrow R'$  einen Morphismus von Distanzräumen  $(\mathbb{P}(R), \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}(R'), \Delta')$  induziert (siehe 1.1.17). Die gleiche Aussage gilt auch für Anti-Homomorphismen  $R \rightarrow R'$  von Ringen (siehe [22, 2.4(c)]). Wir können sogar zeigen, dass jeder durch einen Jordan-Homomorphismus induzierte Morphismus von Distanzräumen im Fall von Matrizenalgebren sogar in beiden Richtungen  $\Delta$ - sowie  $\sim$ -erhaltend ist.

**Satz 4.1.7.** *Seien  $R = K_{n,n}$  und  $R' = K'_{n,n}$ . Jeder Jordan-Homomorphismus  $f : R \rightarrow R'$  induziert eine Abbildung  $\bar{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$ , welche in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist, d.h. für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  gilt*

$$p \Delta q \Leftrightarrow p^{\bar{f}} \Delta' q^{\bar{f}} \text{ und } p \sim q \Leftrightarrow p^{\bar{f}} \sim' q^{\bar{f}}.$$

*Beweis:* Laut 4.1.5 ist  $f$  entweder ein Homomorphismus oder ein Anti-Homomorphismus. Wir betrachten die beiden Fälle:

- (1) Sei  $f$  ein Homomorphismus. Dann induziert  $f$  einen  $\Delta$ -Morphismus  $\bar{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(a, b) \mapsto R'(a^f, b^f)$ . Wir zeigen, dass  $\bar{f}$  in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist. Dafür nehmen wir zu Hilfe den obigen Satz, wobei alle Bezeichnungen aus seinem Beweis im Folgenden übernommen werden.

Gemäß dem Beweis von 4.1.6 existiert ein zu  $K'$  isomorpher Körper  $L$  mit  $R' = L_{n,n}$ , so dass  $f$  sich als Hintereinanderausführung von einem Ringhomomorphismus  $R \rightarrow L_{n,n}$  und einem Ringisomorphismus  $id : L_{n,n} \rightarrow K'_{n,n}$  darstellen lässt. Laut [22, 2.4(b)] induziert jeder Ringisomorphismus einen  $\Delta$ -Isomorphismus, der nach 1.1.16(1) auch ein  $\sim$ -Isomorphismus ist. Daher können wir im Weiteren oBdA annehmen, dass  $L = K'$  gilt und damit  $\varphi : K \rightarrow K'$  ein Körperhomomorphismus ist, welcher unsere Abbildung  $f = \tilde{\varphi}$  induziert.

Nun definieren wir  $K'' := \text{Bild } \varphi$ , dann ist  $K'' \subseteq K'$  ein zu  $K$  isomorpher Körper und damit ein Unterkörper von  $K'$ . Weiter setzen wir

$R'' := \text{Bild } f$ , dann ist  $R'' = K''_{n,n}$  und es gilt  $R'' \simeq R$  (vgl. Beweis von 4.1.6). Hierbei induziert der Ringisomorphismus  $\widehat{f} : R \rightarrow R''$  einen  $\Delta$ -Isomorphismus  $\widehat{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R'') : R(a, b) \mapsto R''(a^f, b^f)$ , der auch ein  $\sim$ -Isomorphismus ist. D.h. es gilt für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$ :

$$p \Delta q \Leftrightarrow p^{\widehat{f}} \Delta'' q^{\widehat{f}} \quad \text{und} \quad p \sim q \Leftrightarrow p^{\widehat{f}} \sim'' q^{\widehat{f}},$$

wobei  $\Delta''$  und  $\sim''$  für die Distanzrelation bzw. Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(R'')$  stehen. Die projektive Gerade  $\mathbb{P}(R'')$  kann ihrerseits vermöge des injektiven  $\Delta$ -Morphismus  $\iota : \mathbb{P}(R'') \rightarrow \mathbb{P}(R') : R''(c, d) \mapsto R'(c, d)$  als Teilmenge von  $\mathbb{P}(R')$  aufgefasst werden (vgl. Abschnitt 1.1). Da  $\widehat{f}$  bijektiv ist, gibt es für jeden Punkt  $R''(c, d) \in \mathbb{P}(R'')$  einen Punkt  $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  mit  $R''(c, d) = R(a, b)^{\widehat{f}} = R''(a^f, b^f)$ . Folglich ist dann  $R''(c, d)^\iota = R(a, b)^{\widehat{f} \iota} = R''(a^f, b^f)^\iota = R'(a^f, b^f) = R(a, b)^{\widehat{f}}$ . Um unsere Behauptung zu beweisen, reicht es daher, die Äquivalenzen

$$p^{\widehat{f}} \Delta'' q^{\widehat{f}} \Leftrightarrow p^{\widehat{f}} \Delta' q^{\widehat{f}}, \tag{4.2}$$

$$p^{\widehat{f}} \sim'' q^{\widehat{f}} \Leftrightarrow p^{\widehat{f}} \sim' q^{\widehat{f}} \tag{4.3}$$

zu zeigen, wobei  $\Delta'$  und  $\sim'$  die Distanzrelation bzw. Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(R')$  bezeichnen.

Zunächst zeigen wir die Gültigkeit von (4.2). Nach Satz 1.5.2 in [26] ist (4.2) zu  $R''^* = R'^* \cap R''$  für  $R''^* = GL_n(K'')$  und  $R'^* = GL_n(K')$  äquivalent, d.h. dazu, dass  $R''$  eine Unteralgebra von  $R'$  im Sinne von Definition 1.1.26 ist. Diese Gleichheit werden wir also gleich beweisen.

Sei  $v \in R''$  invertierbar, dann ist  $v \in GL_n(K'') \leq GL_n(K')$  auch in  $R'$  invertierbar. Somit gilt schon die Inklusion  $R''^* \subseteq R'^* \cap R''$ .

Sei nun  $v \in R'^* \cap R''$ , d.h. es ist  $\det(v) \in K'^*$ . Weiter gibt es ein  $u = (u_{ij}) \in R$  mit  $u^f = (u_{ij}^\varphi) = v$  und es gilt  $\det(v) = \det(u^f) = \det(u_{ij}^\varphi) \in K'' \leq K'$ . Da  $\varphi : K \rightarrow K'$  ein Körperhomomorphismus ist, muss auch  $\det(u) \neq 0$  sein. Wegen  $K \simeq K''$  gilt daher  $\det(v) = \det(u_{ij}^\varphi) \in K''^*$ . Daraus folgt  $v \in R''^*$  und somit gilt die andere Inklusion  $R''^* \supseteq R'^* \cap R''$ .

Insgesamt liefert das die Gleichheit  $R''^* = R'^* \cap R''$ , so dass dann auch die Äquivalenz (4.2) gilt.

Wegen  $p \Delta q \Leftrightarrow \overline{p^f} \Delta'' \overline{q^f}$  und (4.2) erhalten wir  $p \Delta q \Leftrightarrow p^f \Delta' q^f$  für alle  $p, q \in \mathbb{P}(R)$  wie gewünscht.

Es bleibt nun (4.3) zu zeigen. Im Weiteren beachten wir, dass es für alle  $a, b, c, d \in R$  das Folgende gilt:

$$w = \begin{pmatrix} a^f & b^f \\ c^f & d^f \end{pmatrix} \in R''_{2,2} = K''_{2n,2n} \leq R'_{2,2} = K'_{2n,2n}.$$

Seien also  $p^f, q^f \in \mathbb{P}(R')$  mit  $p^f = R'(a^f, b^f)$ ,  $q^f = R'(c^f, d^f)$  und  $\overline{p^f}, \overline{q^f} \in \mathbb{P}(R'')$  mit  $\overline{p^f} = R''(a^f, b^f)$ ,  $\overline{q^f} = R''(c^f, d^f)$ . Zunächst nehmen wir an, dass  $p^f$  und  $q^f$  in  $\mathbb{P}(R')$  adjazent sind, d.h. es gilt (vgl. 1.4.4, 1.4.5):

$$\text{Rang}_{K'} w = \text{Rang}_{K'} \begin{pmatrix} a^f & b^f \\ c^f & d^f \end{pmatrix} = n + 1.$$

Das bedeutet, dass die Dimension des Zeilenraums  $n + 1$  ist und jede Zeile als Linearkombination von  $n + 1$  linear unabhängigen Zeilen (Basisvektoren des Zeilenraums) dargestellt werden kann. Dabei sind die Koeffizienten der Linearkombination aus  $K'' \leq K'$ , da alle Einträge von  $w \in K''_{2n,2n}$  in  $K''$  liegen. Das impliziert  $\text{Rang}_{K''} w = n + 1$  und damit gilt  $\overline{p^f} \sim'' \overline{q^f}$ .

Wegen  $\text{Rang}_{K''} w = n + 1 \Rightarrow \text{Rang}_{K'} w = n + 1$  ist die Umkehrrichtung  $\overline{p^f} \sim'' \overline{q^f} \Rightarrow p^f \sim' q^f$  trivial.

Analog wie für die Distanzrelation folgern wir schließlich die Äquivalenz  $p \sim q \Leftrightarrow p^f \sim' q^f$ , was zu zeigen war.

- (2) Sei nun  $f$  ein Anti-Homomorphismus. Dann existiert ein Homomorphismus  $\eta : R \rightarrow R'$ , so dass  $f = \eta \circ T$  ist, wobei  $T$  das Transponieren von Matrizen bezeichnet. Nach [22, 2.4(c)] induziert  $f$  einen Morphismus von den zugehörigen Distanzräumen, und zwar wie folgt:

Sei  $p = R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  ein beliebiger Punkt, dann gibt es  $c, d \in R$ , so dass die Matrix  $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  invertierbar ist. Weiter sei  $(v, w)^T$  die zweite Spalte der Matrix  $M^{-1}$ , dann ist  $\bar{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(a, b) \mapsto R'(-w^f, v^f)$  ein wohldefinierter  $\Delta$ -Morphismus.

Analog wird auch durch  $T$  eine Abbildung  $\bar{T} : \mathbb{P}(R') \rightarrow \mathbb{P}(R') : R'(a, b) \mapsto R'(-w^T, v^T)$  induziert, welche sogar ein  $\Delta$ -Isomorphismus und somit ein  $\sim$ -Isomorphismus ist (siehe [22, Theorem 5.4]).

Nach (1) induziert der Homomorphismus  $\eta$  die Abbildung  $\bar{\eta} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(a, b) \mapsto R'(a^\eta, b^\eta)$ , welche in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist.

Es reicht also, die Gleichheit  $\bar{f} = \bar{\eta} \circ \bar{T}$  zu beweisen. Für einen beliebigen Punkt  $p = R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$  sei  $M$  wie oben. Da  $\eta$  ein Homomorphismus der Ringe ist, gilt  $(M^\eta)^{-1} = (M^{-1})^\eta$  (mit  $\eta$  eintragsweise angewandt), so dass  $(v^\eta, w^\eta)^T$  die zweite Spalte der Matrix  $(M^\eta)^{-1}$  ist. Daraus folgt:

$$R(a, b)^{\bar{\eta}\bar{T}} = R'(a^\eta, b^\eta)^{\bar{T}} = R'(-w^{\eta T}, v^{\eta T}) = R'(-w^f, v^f) = R(a, b)^{\bar{f}}.$$

Damit gilt die Behauptung. □

## 4.2 Jordan-Homomorphismen von Jordan-Systemen hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen

Sei  $R = K_{n,n}$  eine Matrizenalgebra über einem Körper  $K$  mit  $\text{Char}K \neq 2$  und  $S_n(K) \subseteq R$  die Menge aller symmetrischen Matrizen in  $R$ . Bekanntlich ist  $S_n(K)$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Sei nun  $\bar{\cdot} : K \rightarrow K : \lambda \mapsto \bar{\lambda}$  ein involutorischer Anti-Automorphismus von  $K$  und sei  $H_n(K) \subseteq R$  die Menge aller hermiteschen Matrizen, d.h. es ist  $H_n(K) = \{a \in R \mid \bar{a}^T = a\}$  mit  $\bar{a} = (\bar{a}_{ij})$ . Wegen der Kommutativität von  $K$  ist  $\bar{\cdot}$  sogar ein Automorphismus von  $K$ . Folglich ist  $\bar{\cdot} : R \rightarrow R$  ein Automorphismus der Matrizenalgebra mit  $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$  für alle  $a, b \in R$ . Insgesamt ist  $*$  :=  $\bar{\cdot} \circ T = T \circ \bar{\cdot}$  ein involutorischer Anti-Automorphismus von  $R$ , denn es für alle  $a, b \in R$  gilt  $(a + b)^* = \overline{(a + b)}^T = \bar{a}^T + \bar{b}^T = a^* + b^*$ ,  $(ab)^* = \overline{(ab)}^T = (\bar{a}\bar{b})^T = \bar{b}^T \bar{a}^T = b^* a^*$

und  $(a^*)^* = \overline{(\bar{a}^T)^T} = \overline{(\bar{a}^T)^T} = \bar{\bar{a}} = a$ . Im Folgenden nennen wir jede Abbildung  $*$  :  $a \rightarrow a^*$  mit den Eigenschaften  $(a + b)^* = a^* + b^*$ ,  $(ab)^* = b^*a^*$  und  $a^{**} = a$  eine **Involution** (vgl. [49]).

Die Menge  $H_n(K)$  erfüllt die wichtigsten Eigenschaften eines Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systems in  $R$ , und zwar (vgl. 1.1.27):

- (1)  $H_n(K)$  ist bzgl. Inversenbildung abgeschlossen: Sei  $a \in H_n(K) \cap GL_n(K)$ , dann ist  $a^{-1} \in GL_n(K)$  und es gilt

$$\begin{aligned} aa^{-1} = 1 &\Leftrightarrow (aa^{-1})^* = 1^* \\ &\Leftrightarrow (a^{-1})^*a^* = 1 \Leftrightarrow (a^{-1})^*a = 1 \\ &\Leftrightarrow (a^{-1})^* = a^{-1} \Leftrightarrow a^{-1} \in H_n(K). \end{aligned}$$

- (2)  $H_n(K)$  ist Jordan-abgeschlossen, d.h. für alle  $a, b \in H_n(K)$  ist auch  $aba \in H_n(K)$ , denn es ist  $(aba)^* = a^*(ab)^* = a^*b^*a^* = aba$ .

Allerdings ist  $H_n(K)$  i.Allg. kein Jordan-System in der  $K$ -Algebra  $R$ , da  $H_n(K)$  kein  $K$ -Untervektorraum von  $R$  ist: Alle hermiteschen Matrizen bilden in  $R$  sicherlich eine additive Gruppe, welche aber bezüglich der Skalarmultiplikation nicht abgeschlossen ist. Tatsächlich gilt für alle  $h \in H_n(K)$ ,  $k \in K$ :  $kh \in H_n(K) \Leftrightarrow kh = \overline{(kh)^T} = \bar{k}\bar{h}^T \Leftrightarrow \bar{k} = k$ , d.h.  $H_n(K)$  ist genau dann ein Jordan-System in der Algebra  $(K, R)$ , wenn  $\bar{\phantom{x}} = id$  ist. In diesem Fall stimmt die Menge  $H_n(K)$  mit der Menge  $S_n(K)$  überein. Definiert man den Fixkörper  $F := Fix^- = \{k \in K \mid \bar{k} = k\} \leq K$ , dann ist  $R$  auch eine  $F$ -Algebra und offenbar ist  $H_n(K)$  ein Jordan-System in  $(F, R)$ .

In der projektiven Geometrie spielen hermitesche Matrizen eine wichtige Rolle (siehe z. B. [24], [66]). Die Menge  $H_n(K)$  ist auch ein Beispiel für einen speziellen Jordan-Ring von selbstadjungierten Elementen bzgl. der Involution  $*$  von  $R$  (vgl. Kapitel 1 (S. 23), [49]). Im Weiteren fassen wir die Menge hermitescher Matrizen als Verallgemeinerung des Jordan-Systems symmetrischer Matrizen auf.

Im Folgenden sei  $J := H_n(K)$  und analog setzen wir  $J' := H_n(K') = \{a \in R' \mid \bar{a}'^T = a\} \subseteq R' = K'_{n,n}$  mit  $\bar{a}' = (\bar{a}'_{ij})$ , wobei  $' : K' \rightarrow K'$  ein

Körperautomorphismus und  $\bar{\cdot} \circ T = T \circ \bar{\cdot} =: *'$  eine Involution von  $R'$  ist. Hierbei sind die Fälle  $\bar{\cdot} = id$  bzw.  $\bar{\cdot}' = id$  auch zugelassen. Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es, Jordan-Homomorphismen der Jordan-Systeme hermitescher Matrizen algebraisch zu beschreiben. Man muss dabei das Folgende beachten:

**Bemerkung 4.2.1.** Da hermitesche Matrizen i.Allg. keinen  $K$ -Vektorraum bilden, können wir im Weiteren die Semilinearität von Jordan-Homomorphismen nicht fordern. Deshalb wird in diesem Kapitel unter einem Jordan-Homomorphismus eine additive Abbildung  $\alpha$  mit den Eigenschaften  $1^\alpha = 1'$  und  $(aba)^\alpha = a^\alpha b^\alpha a^\alpha$  für alle  $a, b \in J = H_n(K)$  gemeint.

Für unseren Zweck sind die folgenden Lemmata und insbesondere der Satz von Jacobson & Rickart relevant (siehe Lemma 1, Lemma 2, Satz 4 in [49]):

**Lemma 4.2.2.** Sei  $\mathcal{U} = S_{n,n}$  (im Sinne von Definition 4.1.1<sup>i</sup>) und  $x \mapsto x^*$  eine Involution, so dass für die Matrizeneinheiten gilt  $e_{ii}^* = e_{ii}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann existiert eine Involution  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  von  $S$  und selbstadjungierte invertierbare Elemente  $\gamma_i \in S$ , d.h.  $\bar{\gamma}_i = \gamma_i$ , so dass gilt

$$x^* = \sum \gamma_i^{-1} \bar{\xi}_{ij} \gamma_i e_{ji} \text{ für } x = \sum \xi_{ij} e_{ij}. \quad (4.4)$$

Umgekehrt ist jede Abbildung  $x \mapsto x^*$  der Form (4.4) eine Involution mit  $e_{ii}^* = e_{ii}$ .

Eine Involution der Form (4.4) in einem Matrizenring nennt man **kanonisch** (siehe [49]).

**Lemma 4.2.3.** Sei  $\mathcal{U} = S_{n,n}$  ein Matrizenring über einem Ring  $S$  und  $\mathcal{K}$  die Menge von selbstadjungierten Elementen von  $\mathcal{U}$  bzgl. einer Involution  $*$ , d.h.

---

<sup>i</sup>Also ist  $S$  ein Unterring von  $\mathcal{U}$ , welcher mit allen Matrizeneinheiten von  $\mathcal{U}$  kommutiert. Gemäß 4.1.2 wird  $\mathcal{U}$  mit dem Matrizenring  $S_{n,n}$  aller  $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $S$  identifiziert. Insbesondere darf man  $S_{n,n}$  mit der Menge symmetrischer  $n \times n$ -Matrizen  $S_n(K)$  mit Einträgen aus einem Körper  $K$  nicht verwechseln.

$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{U} \mid x^* = x\}$ . Gilt  $n \geq 2$ , dann ist der einhüllende Ring von  $\mathcal{K}$  der Matrizenring  $S_{n,n}$  selbst.

Analog wie oben kann man zeigen, dass  $\mathcal{K}$  eine Untergruppe der additiven Gruppe  $\mathcal{U}$  ist, welche sowohl bzgl. Inversenbildung, als auch Jordan-abgeschlossen ist. Damit ist  $\mathcal{K}$  ein spezieller Jordan-Ring, d.h. für alle  $a, b \in \mathcal{K}$  gilt  $a + b, a^2, aba \in \mathcal{K}$  (vgl. Kapitel 1 (S. 23)). Ist  $S$  ein Körper, so ist  $\mathcal{K}$  offenbar ein Jordan-System in der Algebra  $\mathcal{U}$  über dem Fixkörper  $Fix^- = \{s \in S \mid \bar{s} = s\} \leq S$ .

**Satz 4.2.4.** Sei  $\mathcal{U} = S_{n,n}$  ein Matrizenring mit einer kanonischen Involution. Angenommen, es gilt  $n \geq 3$  und der Jordan-Ring  $\mathcal{K}$  wie oben ist spurwertig, d.h. für alle  $a \in \mathcal{K}$  gibt es ein  $b \in \mathcal{U}$  mit  $a = b + b^*$ . Dann kann jeder Jordan-Homomorphismus von  $\mathcal{K}$  in einen beliebigen Ring  $\mathcal{U}'$  zu einem Ringhomomorphismus  $\mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{E}$  eindeutig erweitert werden, wobei  $\mathfrak{E}$  der einhüllende Ring von  $\mathcal{K}^\alpha$  in  $\mathcal{U}'$  ist.

Um diesen Satz auf Jordan-Homomorphismen von  $J$  anwenden zu können, stellen wir fest, dass in unserem Fall (also  $*$  =  $\bar{\phantom{x}} \circ T$ ) alle Voraussetzungen erfüllt sind. Dazu seien  $e_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , die Standardmatrizeneinheiten von  $R$ . Für diese gilt offenbar  $e_{ii}^* = e_{ii}$  und  $e_{ij}^* = e_{ji}$  für  $i \neq j$ . Nach Lemma 4.2.2 ist also  $*$  kanonisch, wobei  $\gamma_i = 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  sind. Es gilt tatsächlich für jede beliebige Matrix  $x = \sum \xi_{ij} e_{ij} \in R$  mit  $\xi_{ij} \in K$  (vgl. 4.1.1):

$$x^* = \left( \sum \xi_{ij} e_{ij} \right)^* = \sum (\xi_{ij} e_{ij})^* = \sum \bar{\xi}_{ij} e_{ij}^* = \sum \bar{\xi}_{ij} e_{ji}.$$

Hierbei gilt offenbar  $x \in J \Leftrightarrow \xi_{ij} = \bar{\xi}_{ji}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

Außerdem ist  $J$  wegen  $Char K \neq 2$  spurwertig, da jede hermitesche Matrix  $h$  sich in der folgenden Form schreiben lässt:

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{h}_{1n} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix} = a + a^* \text{ mit } a = \begin{pmatrix} 2^{-1}h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2^{-1}h_{nn} \end{pmatrix} \in R.$$

Folglich können wir das erste Ergebnis dieses Abschnitts formulieren:

**Satz 4.2.5.** *Seien  $R = K_{n,n}$ ,  $R' = K'_{n,n}$  mit  $n \geq 3$  und  $J = H_n(K) \subseteq R$ . Dann lässt sich jeder beliebige Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow R'$  zu einem Homomorphismus und einem Anti-Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  eindeutig erweitern.*

*Beweis:* Sei  $\mathfrak{E}$  der einhüllende Ring von  $J^\alpha$ . Nach Satz 4.2.4 existiert ein eindeutiger Homomorphismus  $\vartheta : R \rightarrow \mathfrak{E}$  mit  $\vartheta|_J = \alpha$ . Wegen  $\mathfrak{E} \leq R'$  ist  $\gamma : R \rightarrow R' : a \mapsto a^\vartheta$  ein Homomorphismus und es gilt  $\gamma|_J = \vartheta|_J = \alpha$ . Mit  $\vartheta$  ist auch  $\gamma$  eindeutig.

Jetzt definieren wir  $\delta := * \circ \gamma : R \rightarrow R' : a \mapsto a^{*\gamma}$ , dann ist  $\delta$  ein Anti-Homomorphismus der Ringe mit  $\delta|_J = \alpha$ , denn es gilt  $(ab)^\delta = (ab)^{*\gamma} = (b^*a^*)^\gamma = b^{*\gamma}a^{*\gamma} = b^\delta a^\delta$  für alle  $a, b \in R$  sowie  $*|_J = id_J$  und damit  $c^\delta = (c^*)^\alpha = c^\alpha$  für alle  $c \in J$ . Die Eindeutigkeit von  $\delta$  folgt daraus, dass  $R$  der einhüllende Ring von  $J$  ist (gemäß 4.2.3). □

Wird nun die uns schon bekannte algebraische Beschreibung der Homomorphismen  $R \rightarrow R'$  herangezogen (vgl. 4.1.6), dann lässt sich das folgende Korollar formulieren:

**Korollar 4.2.6.** *Seien  $R = K_{n,n}$ ,  $R' = K'_{n,n}$  mit  $n \geq 3$  und  $J = H_n(K) \subseteq R$ . Weiterhin sei  $\alpha : J \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus. Dann ist  $\alpha$  durch einen Körperhomomorphismus  $\psi : K \rightarrow K'$  und einen inneren Automorphismus  $a \mapsto g^{-1}ag$  von  $R'$  mit  $g \in GL_n(K')$  mittels  $a^\alpha = g^{-1}(a_{ij}^\psi)g$  bzw.  $a^\alpha = (g^{-1}(a_{ij}^\psi)g)^T$  induziert.*

Offenbar liegt das  $\alpha$ -Bild von  $J$  in einem zu  $J'$  konjugierten Jordan-System  $g^{-1}J'g$ . Nun stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen hermitesche Matrizen in  $R$  in hermitesche Matrizen in  $R'$  abgebildet werden, d.h. wann  $J^\alpha \subseteq J'$  gilt. Nach 4.2.6 folgt der nächste Satz (vgl. [66, S. 355] im bijektiven Fall):

**Satz 4.2.7.** *Seien  $R = K_{n,n}$ ,  $R' = K'_{n,n}$  mit  $n \geq 3$  und  $J = H_n(K) \subseteq R$ . Weiter sei  $\alpha : J \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus und  $g \in GL_n(K')$  sowie*

$\psi : K \rightarrow K'$  wie in 4.2.6. Dann gilt  $J^\alpha \subseteq J'$  genau dann, wenn es ein  $\lambda \in K'^*$  mit  $g = \lambda \overline{g^{-1}}'^T$  gibt und  $\psi$  ein  $\bar{\phantom{x}}$ -Homomorphismus ist, d.h. es gilt  $\bar{\phantom{x}} \circ \psi = \psi \circ \bar{\phantom{x}}$ .

*Beweis:* „ $\Rightarrow$ “ Wir setzen zunächst voraus, dass  $J^\alpha \subseteq J'$  ist.

Sei  $x \in J$ , dann kann  $x$  in der Form  $x = \sum_i a_{ii} e_{ii} + \sum_{i < j} (b_{ij} e_{ij} + \bar{b}_{ij} e_{ji})$  mit  $a_{ii}, b_{ij} \in K$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  geschrieben werden, wobei  $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt und  $\{e_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$  die Menge der Standardmatrizeneinheiten ist.

Es reicht, den Fall zu betrachten, dass  $a^\alpha = g^{-1}(a_{ij}^\psi)g$  für alle  $a \in J$  ist (vgl. 4.2.6). Für  $x \in J$  haben wir dann

$$x^\alpha = \sum_i g^{-1}(a_{ii}^\psi e'_{ii})g + \sum_{i < j} g^{-1}(b_{ij}^\psi e'_{ij} + \bar{b}_{ij}^\psi e'_{ji})g,$$

wobei  $e'_{ij}, i, j \in \{1, \dots, n\}$ , die Standardmatrizeneinheiten in  $R'$  sind.

Insbesondere sind  $a_{ii} e_{ii}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $b_{ij} e_{ij} + \bar{b}_{ij} e_{ji}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$  hermitesch, daher müssen ihre Bilder nach unserer Voraussetzung in  $J'$  liegen. Daraus folgt:

- (i)  $g^{-1}(a_{ii}^\psi e'_{ii})g = \bar{g}'^T (a_{ii}^\psi e'_{ii}) \overline{g^{-1}}'^T$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- (ii)  $g^{-1}(b_{ij}^\psi e'_{ij} + \bar{b}_{ij}^\psi e'_{ji})g = \bar{g}'^T (b_{ij}^\psi e'_{ji} + \bar{b}_{ij}^\psi e'_{ij}) \overline{g^{-1}}'^T$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ .

Wir betrachten den Fall  $a_{ii} = b_{ij} = 1 \in K$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \text{ sowie } g^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann sind auch  $a_{ii}^\psi = b_{ij}^\psi = 1' \in K'$  und es ergibt sich:

- (i)  $g^{-1} e'_{ii} g = \bar{g}'^T e'_{ii} \overline{g^{-1}}'^T$  und somit ist  $e'_{ii} = g \bar{g}'^T e'_{ii} \overline{g^{-1}}'^T g^{-1}$  für alle  $i \in$

$\{1, \dots, n\}$ . Für jedes fest gewählte  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt daher

$$\begin{aligned} e'_{jj} &= g\bar{g}'^T e'_{jj} \overline{g^{-1}}'^T g^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i g_{1i} \bar{g}'_{1i} & \cdots & \sum_i g_{1i} \bar{g}'_{ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i g_{ni} \bar{g}'_{1i} & \cdots & \sum_i g_{ni} \bar{g}'_{ni} \end{pmatrix} e'_{jj} \begin{pmatrix} \sum_i \bar{g}'_{i1} \tilde{g}_{i1} & \cdots & \sum_i \bar{g}'_{i1} \tilde{g}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i \bar{g}'_{in} \tilde{g}_{i1} & \cdots & \sum_i \bar{g}'_{in} \tilde{g}_{in} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\sum_i g_{1i} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{i1}) & \cdots & (\sum_i g_{1i} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{in}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sum_i g_{ni} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{i1}) & \cdots & (\sum_i g_{ni} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{in}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Gleichungen  $(\sum_i g_{ji} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{ij}) = 1'$  und  $(\sum_i g_{ji} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{is}) = (\sum_i g_{si} \bar{g}'_{ji})(\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{ij}) = 0'$  für alle  $s \neq j$ .

Nun setzen wir  $\sum_i g_{ji} \bar{g}'_{ji} =: \lambda_j \in K' \setminus \{0'\}$ . Dann ist  $\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{ij} = \lambda_j^{-1}$  und damit gilt  $\sum_i \bar{g}'_{ij} \tilde{g}_{is} = \sum_i g_{si} \bar{g}'_{ji} = 0'$  für alle  $s \neq j$ .

Insgesamt erhalten wir  $g\bar{g}'^T = \sum_j \lambda_j e'_{jj}$  und analog  $\overline{g^{-1}}'^T g^{-1} = \sum_j \lambda_j^{-1} e'_{jj}$ .

(ii)  $g^{-1}(e'_{ij} + e'_{ji})g = \bar{g}'^T(e'_{ji} + e'_{ij})\overline{g^{-1}}'^T$  für jedes fest gewählte Paar  $(i, j)$  mit  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  und  $i < j$ . Das liefert:

$$\begin{aligned} e'_{ij} + e'_{ji} &= g\bar{g}'^T(e'_{ji} + e'_{ij})\overline{g^{-1}}'^T g^{-1} \\ &= \left(\sum_s \lambda_s e'_{ss}\right) (e'_{ji} + e'_{ij}) \left(\sum_r \lambda_r^{-1} e'_{rr}\right) \\ &= (\lambda_i e'_{ij} + \lambda_j e'_{ji}) \left(\sum_r \lambda_r^{-1} e'_{rr}\right) \\ &= \lambda_i \lambda_j^{-1} e'_{ij} + \lambda_j \lambda_i^{-1} e'_{ji} \\ &= \lambda_i \lambda_i^{-1} (e'_{ij} + e'_{ji}) \\ \Leftrightarrow \lambda_i \lambda_j^{-1} &= \lambda_j \lambda_i^{-1} = \lambda_i \lambda_i^{-1} = 1' \\ \Leftrightarrow \lambda_i &= \lambda_j. \end{aligned}$$

Daher können wir folgern, dass  $\lambda_i =: \lambda$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  un-

abhängig von  $i$  ist und es gilt  $g\bar{g}'^T = \lambda E_{R'}$  und  $\overline{g^{-1}}'^T g^{-1} = \lambda^{-1} E_{R'}$ , wobei  $E_{R'}$  die Einheitsmatrix  $R'$  ist. Somit erhalten wir die erste Bedingung

$$\exists \lambda \in K' \setminus \{0'\} : g = \lambda \overline{g^{-1}}'^T.$$

Sei nun  $x = \mu e_{ij} + \bar{\mu} e_{ji} \in J$  mit  $\mu \in K$ . Dann gilt

$$x^\alpha = g^{-1}(\mu^\psi e'_{ij} + \bar{\mu}^\psi e'_{ji})g$$

und nach dem oben Gezeigten haben wir

$$\begin{aligned} (x^\alpha)^* &= \bar{g}'^T (\overline{\mu^\psi}' e'_{ji} + \overline{\bar{\mu}^\psi}' e'_{ij}) \overline{g^{-1}}'^T \\ &= \lambda g^{-1} (\overline{\mu^\psi}' e'_{ji} + \overline{\bar{\mu}^\psi}' e'_{ij}) \lambda^{-1} g \\ &= \lambda \lambda^{-1} g^{-1} (\overline{\mu^\psi}' e'_{ji} + \overline{\bar{\mu}^\psi}' e'_{ij}) g \\ &= g^{-1} (\overline{\mu^\psi}' e'_{ji} + \overline{\bar{\mu}^\psi}' e'_{ij}) g. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} x^\alpha &= (x^\alpha)^* \\ \Leftrightarrow g^{-1}(\mu^\psi e'_{ij} + \bar{\mu}^\psi e'_{ji})g &= g^{-1}(\overline{\mu^\psi}' e'_{ji} + \overline{\bar{\mu}^\psi}' e'_{ij})g \\ \Leftrightarrow \mu^\psi &= \overline{\mu^\psi}' \quad \text{und} \quad \bar{\mu}^\psi = \overline{\bar{\mu}^\psi}', \end{aligned}$$

d.h. es muss  $\bar{\phantom{x}} \circ \psi = \psi \circ \bar{\phantom{x}}$  gelten, da  $\mu \in K$  beliebig gewählt wurde.

„ $\Leftarrow$ “ Die Rückrichtung ist einfach nachzurechnen. Sei  $x = \sum \mu_{ij} e_{ij} \in J$  hermitesch, d.h. es ist  $x = x^* = \sum \bar{\mu}_{ij} e_{ji}$  und damit gilt  $\mu_{ij} = \bar{\mu}_{ji}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Wir setzen voraus, dass  $\psi$  ein  $\bar{\phantom{x}}$ -Homomorphismus ist und es ein  $\lambda \in K' \setminus \{0'\}$  mit  $g = \lambda \overline{g^{-1}}'^T$  gibt. Dann gilt:

$$x^\alpha = g^{-1} \left( \sum \mu_{ij}^\psi e'_{ij} \right) g$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda^{-1} \bar{g}'^T \left( \sum \mu_{ji}^\psi e'_{ji} \right) \lambda \overline{g^{-1}}'^T \\
 &= \lambda^{-1} \lambda \bar{g}'^T \left( \sum \bar{\mu}_{ij}^\psi e'_{ji} \right) \overline{g^{-1}}'^T \\
 &= \bar{g}'^T \left( \sum \overline{\mu}_{ij}^\psi e'_{ji} \right) \overline{g^{-1}}'^T \\
 &= \left( g^{-1} \left( \sum \mu_{ij}^\psi e'_{ij} \right) g \right)^{*'} \\
 &= (x^\alpha)^{*'},
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Die oben erreichte algebraische Beschreibung der Jordan-Homomorphismen von  $J$  in  $R'$  wurde für  $n \geq 3$  bewiesen. Im Weiteren möchten wir den fehlenden Fall  $n = 2$  betrachten. Dieses Problem wurde schon von W.S. Martindale in [58, S. 240-243] diskutiert. Zunächst möchten wir die Ergebnisse aus diesem Artikel auf unseren Fall übertragen.

Sei also  $R = K_{2,2}$  und  $\{e_{ij} \mid i, j \in \{1, 2\}\}$  die Menge der Standardmatrixeneinheiten. Wir setzen  $R_{ij} := e_{ii} R e_{jj}$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ . Man kann leicht nachrechnen, dass  $R_{ij} = \{k e_{ij} \mid k \in K\} = K e_{ij}$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt. Insbesondere ist  $R_{ii} = K e_{ii}$  für jedes  $i \in \{1, 2\}$  zu  $K$  isomorph. Außerdem haben wir  $R = \sum_{i,j} R_{ij}$  sowie  $R_{ii} = R_{ij} R_{ji}$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ . Darüber hinaus gilt offenbar  $R_{ij}^* = R_{ji}$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ . Die Elemente von  $R_{ij}$  bezeichnen wir im Weiteren mit  $x_{ij} := x e_{ij}$  für  $x \in K$  und wir setzen  $x_{ji} := x_{ij}^*$  für alle  $i \neq j$ , d.h. es ist  $x_{ji} = \bar{x} e_{ji}$  und es gilt insbesondere  $x_{ij} + x_{ji} \in J$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Nun definieren wir  $J_i := J \cap R_{ii}$  für  $i \in \{1, 2\}$ , dann ist  $J_i = \{k e_{ii} \mid k \in K, \bar{k} = k\} = \text{Fix}^- e_{ii}$ , also gilt  $J_i \simeq F \leq K$ . Somit ist  $J_i$  ein Unterring von  $R_{ii}$ . Dann gibt es trivialerweise zwei Möglichkeiten:

$$J_i = R_{ii} \text{ oder } J_i \subset R_{ii}.$$

Insbesondere gilt die Gleichheit  $J_i = R_{ii}$  genau dann, wenn  $F = K$  und somit  $J = S_2(K)$  ist. Nun setzen wir im Weiteren auch  $\text{Char} K' \neq 2$  voraus. Dann

gilt gemäß [58, Theorem 2] das Folgende:

**Bemerkung 4.2.8.** Seien  $R = K_{2,2}$ ,  $R' = K'_{2,2}$  und  $J = S_2(K)$ . Weiter sei  $\alpha : J \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus, dann kann  $\alpha$  zu einem Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  eindeutig erweitert werden.

I.Allg. ist  $J_i$  aber nicht unbedingt ein Unterring von  $R_{ii}$ . Bezeichnet man mit  $\mathfrak{E}_{J_i}$  den einhüllenden Ring von  $J_i$  in  $R_{ii}$ , so ist die Bedingung  $\mathfrak{E}_{J_i} = R_{ii}$  für alle  $i \in \{1, 2\}$  erfüllt, wenn der Matrizenring  $R$  über seinem Zentrum  $Z(R)$  mehr als 16-dimensional ist (vgl. [58, Corolary 1, S. 242]). In diesem Fall kann jeder Jordan-Homomorphismus  $J \rightarrow R'$  nach Korollar 1 aus [58, S. 242] sogar zu einem Isomorphismus  $R \rightarrow R'$  eindeutig erweitert werden.

Im Folgenden möchten wir Bemerkung 4.2.8 verallgemeinern, d.h. wir zeigen, dass die gleiche Behauptung in unserem Fall allgemein für  $J = H_2(K)$  wahr ist. Dazu benötigen wir Lemma 4 aus [58, S. 234], das besagt:

**Lemma 4.2.9.** *Sei  $R$  ein Ring mit Involution  $*$ , der  $n > 1$  von Null verschiedene idempotente Elemente  $e_1, \dots, e_n$  mit  $e_i e_j = 0$  für alle  $i \neq j$ ,  $e_i^* = e_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\sum_i e_i = 1$  besitzt. Weiter sei  $\mathcal{K} = \{r \in R \mid r^* = r\}$  und  $R_{ij}$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  wie oben definiert. Außerdem sei  $\alpha : \mathcal{K} \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus in einen beliebigen Ring  $R'$ . Dann gilt  $(x_{ij} + x_{ji})^\alpha = u'_{ij} + u'_{ji}$  für alle  $i \neq j$  mit  $u'_{ij} \in e_i^\alpha R' e_j^\alpha$ ,  $u'_{ji} \in e_j^\alpha R' e_i^\alpha$ .*

In unserem Fall, d.h.  $R = K_{2,2}$  mit den Standardmatrizeneinheiten  $e_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , setzen wir im Folgenden  $R'_{ij} := e_{ii}^\alpha R' e_{jj}^\alpha$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  (vgl. [58, S. 234]). Laut Lemmata 1 und 2 aus [58] sind  $e_{11}^\alpha, e_{22}^\alpha$  auch idempotent und es gilt  $e_{ii}^\alpha e_{jj}^\alpha = 0'$  für  $i \neq j$ . Das liefert  $R'_{ij} R'_{kl} = 0'$  für  $j \neq k$  (vgl. [58, S. 234]). Insbesondere gilt auch das Folgende:

**Lemma 4.2.10.** *Seien  $R = K_{2,2}$ ,  $R' = K'_{2,2}$  und  $\alpha : J \rightarrow R'$  ein Jordan-Homomorphismus. Weiter sei  $\{e'_{ij} \mid i, j \in \{1, 2\}\}$  die Menge der Standardmatrizeneinheiten in  $R'$  und  $R_{ij}, R'_{ij}$  für alle  $i, j$  wie oben. Dann gibt es für alle  $i \neq j$  Matrizen  $d_{ij}$  in  $R'$ , so dass  $\{d_{ij} \mid i, j \in \{1, 2\}\}$  mit  $d_{ii} := e_{ii}^\alpha$  eine Menge von Matrizen in  $R'$  ist und es gilt  $R'_{ij} = K' d_{ij}$  für alle  $i, j$ .*

*Beweis:* Da  $\alpha$  additiv ist, gilt zunächst  $d_{11} + d_{22} = e_{11}^\alpha + e_{22}^\alpha = 1' \in R'$ . Außerdem sind  $d_{ii} \in R'$  idempotent mit  $d_{ii}d_{jj} = 0'$  für  $i \neq j$  (siehe oben) und somit in  $R'$  nicht invertierbar und verschieden von Null. Nun ist  $d_{11}$  offenbar zu  $e'_{11}$  ähnlich, d.h. es gibt eine Matrix  $p \in GL_2(K')$  mit  $d_{11} = p^{-1}e'_{11}p$ . Das impliziert  $d_{22} = 1' - d_{11} = p^{-1}(1' - e'_{11})p = p^{-1}e'_{22}p$ . Setzen wir  $d_{ij} := p^{-1}e'_{ij}p$  für  $i \neq j$ , so sind  $d_{ij}$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  Matrizeinheiten von  $R'$ .

Folglich haben wir  $R'_{ij} = d_{ii}R'd_{jj} = p^{-1}e'_{ii}pR'p^{-1}e'_{jj}p = p^{-1}e'_{ii}R'e'_{jj}p = p^{-1}K'e'_{ij}p = K'p^{-1}e'_{ij}p = K'd_{ij}$  für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  wie gewünscht.  $\square$

Nun beweisen wir die oben angekündigte Behauptung:

**Satz 4.2.11.** *Seien  $R = K_{2,2}$  und  $R' = K'_{2,2}$  mit  $\text{Char}K, \text{Char}K' \neq 2$ . Dann kann jeder Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow R'$  zu einem Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  und zu einem Anti-Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  eindeutig erweitert werden.*

*Beweis:* Seien  $d_{ij}$  für  $i, j \in \{1, 2\}$  wie in 4.2.10, d.h.  $R'_{ij} = d_{ii}R'd_{jj} = K'd_{ij}$  für  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Aufgrund von Lemma 4.2.9 definieren wir eine additive Abbildung

$$\psi : \sum_{i \neq j} R_{ij} \rightarrow R' : x_{ij} \mapsto u'_{ij} \in R'_{ij}, \quad i \neq j,$$

mit  $(x_{ij} + x_{ji})^\alpha = x_{ij}^\psi + x_{ji}^\psi = u'_{ij} + u'_{ji}$  (vgl. [58, S. 234]). Zunächst zeigen wir schrittweise, dass es einen Homomorphismus  $\phi : R \rightarrow R'$  mit  $\phi|_J = \alpha$  gibt, wobei  $\phi$  mittels  $\psi$  beschrieben werden kann:

(1) *Behauptung:* Für  $i \neq j$  gilt  $(x_{ij}y_{ji}z_{ij})^\psi = x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi$ .

*Beweis:* Laut der obigen Bezeichnung gilt  $x_{ij} = xe_{ij}$ ,  $y_{ji} = \bar{y}e_{ji}$  und  $z_{ij} = ze_{ij}$  für  $x, y, z \in K$ . Daraus folgt  $x_{ij}y_{ji}z_{ij} = xe_{ij}\bar{y}e_{ji}ze_{ij} = x\bar{y}z(e_{ij}e_{ji}e_{ij}) = z\bar{y}x(e_{ij}e_{ji}e_{ij}) = ze_{ij}\bar{y}e_{ji}xe_{ij} = z_{ij}y_{ji}x_{ij}$ .

Analog gilt  $x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi = z_{ij}^\psi y_{ji}^\psi x_{ij}^\psi$ , denn es sind  $x_{ij}^\psi, y_{ij}^\psi, z_{ij}^\psi \in R'_{ij}$  mit  $R'_{ij} = K'd_{ij}$  (gemäß 4.2.10).

Außerdem haben wir  $(x_{ij}y_{ji}z_{ij})^* = \overline{(xe_{ij}\bar{y}e_{ji}ze_{ij})}^T = (\bar{x}e_{ij}ye_{ji}\bar{z}e_{ij})^T = \bar{z}e_{ji}ye_{ij}\bar{x}e_{ji} = z_{ji}y_{ij}x_{ji}$  und analog  $(z_{ij}y_{ji}x_{ij})^* = x_{ji}y_{ij}z_{ji}$ .

Mit  $x_{ij}y_{ji}z_{ij} + (x_{ij}y_{ji}z_{ij})^* = z_{ij}y_{ji}x_{ij} + (z_{ij}y_{ji}x_{ij})^* \in J$  und  $x_{ij} + x_{ij}^* = x_{ij} + x_{ji} \in J$  für alle  $x_{ij} \in R_{ij}$  erhalten wir deshalb:

$$\begin{aligned}
 2'(x_{ij}y_{ji}z_{ij} + (x_{ij}y_{ji}z_{ij})^*)^\alpha &= (x_{ij}y_{ji}z_{ij} + (x_{ij}y_{ji}z_{ij})^*)^\alpha \\
 &\quad + (z_{ij}y_{ji}x_{ij} + (z_{ij}y_{ji}x_{ij})^*)^\alpha \\
 &= (x_{ij}y_{ji}z_{ij} + z_{ji}y_{ij}x_{ji} + z_{ij}y_{ji}x_{ij} + x_{ji}y_{ij}z_{ji})^\alpha \\
 &= ((x_{ij} + x_{ji})(y_{ij} + y_{ji})(z_{ij} + z_{ji}) \\
 &\quad + (z_{ij} + z_{ji})(y_{ij} + y_{ji})(x_{ij} + x_{ji}))^\alpha \\
 &= (x_{ij} + x_{ji})^\alpha (y_{ij} + y_{ji})^\alpha (z_{ij} + z_{ji})^\alpha \\
 &\quad + (z_{ij} + z_{ji})^\alpha (y_{ij} + y_{ji})^\alpha (x_{ij} + x_{ji})^\alpha \\
 &= (x_{ij}^\psi + x_{ji}^\psi)(y_{ij}^\psi + y_{ji}^\psi)(z_{ij}^\psi + z_{ji}^\psi) \\
 &\quad + (z_{ij}^\psi + z_{ji}^\psi)(y_{ij}^\psi + y_{ji}^\psi)(x_{ij}^\psi + x_{ji}^\psi) \\
 &= x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi + x_{ji}^\psi y_{ij}^\psi z_{ji}^\psi + z_{ij}^\psi y_{ji}^\psi x_{ij}^\psi + z_{ji}^\psi y_{ij}^\psi x_{ji}^\psi \\
 &= 2'x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi + 2'x_{ji}^\psi y_{ij}^\psi z_{ji}^\psi.
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (x_{ij}y_{ji}z_{ij} + (x_{ij}y_{ji}z_{ij})^*)^\alpha &= (x_{ij}y_{ji}z_{ij})^\psi + (x_{ji}y_{ij}z_{ji})^\psi \\
 &= x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi + x_{ji}^\psi y_{ij}^\psi z_{ji}^\psi.
 \end{aligned}$$

Offenbar gilt  $R'_{ij} \cap R'_{ji} = K'd_{ij} \cap K'd_{ji} = \{0'\}$  für alle  $i \neq j$ . Daraus folgt  $(x_{ij}y_{ji}z_{ij})^\psi = x_{ij}^\psi y_{ji}^\psi z_{ij}^\psi \in R'_{ij}$  und  $(x_{ji}y_{ij}z_{ji})^\psi = x_{ji}^\psi y_{ij}^\psi z_{ji}^\psi \in R'_{ji}$ , was zu zeigen war.

(2) *Behauptung:* Sei  $a_{ii} = \sum_\lambda x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda \in J_i = J \cap R_{ii}^{\text{ii}}$ ,  $i \neq j$ , dann gilt

$$\left( a_{ii}^\alpha - \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \right) z_{ij}^\psi = 0' \text{ sowie } z_{ji}^\psi \left( a_{ii}^\alpha - \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \right) = 0'$$

für alle  $z_{ij} \in R_{ij}$  bzw.  $z_{ji} \in R_{ji}$ .

*Beweis:* Nach Lemma 7 in [58] (sowie dem Beweis davon) gilt  $a_{ii}^\alpha z_{ij}^\psi =$

---

<sup>ii</sup>Dabei stehen  $\lambda \in \mathbb{N}$  für Indizes und nicht für Potenzen. Wegen der  $e_{ii}e_{jj} = 0$  für alle  $i \neq j$  sind schon die Quadrate  $R_{ij}^2 = R_{ji}^2 = 0$ .

$(a_{ii}z_{ij})^\psi$  und  $z_{ji}^\psi a_{ii}^\alpha = (z_{ji}a_{ii})^\psi$  für alle  $a_{ii} \in J_i$  und  $z_{ij} \in R_{ij}$ ,  $z_{ji} \in R_{ji}$  mit  $i \neq j$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{ii}^\alpha z_{ij}^\psi &= (a_{ii}z_{ij})^\psi = \left( \sum_\lambda x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda z_{ij} \right)^\psi \\ &= \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda z_{ij})^\psi \stackrel{(1)}{=} \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi z_{ij}^\psi \end{aligned}$$

und es gilt deshalb  $(a_{ii}^\alpha - \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi) z_{ij}^\psi = a_{ii}^\alpha z_{ij}^\psi - \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi z_{ij}^\psi = 0'$ , wie gewünscht.

Die zweite Gleichheit zeigt man analog.

- (3) *Behauptung:* Für  $\sum_\lambda x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda = \sum_\lambda a_{ij}^\lambda b_{ji}^\lambda \in R_{ii}$ ,  $i \neq j$ , gilt  $\sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi = \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi$ .

*Beweis:* Seien  $c_{ji} \in R_{ji}$  und  $f_{ij} \in R_{ij}$  beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \left( \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \right) f_{ij}^\psi &= \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi f_{ij}^\psi \stackrel{(1)}{=} \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda f_{ij})^\psi \\ &= \left( \sum_\lambda x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda f_{ij} \right)^\psi = \left( \sum_\lambda a_{ij}^\lambda b_{ji}^\lambda f_{ij} \right)^\psi \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi f_{ij}^\psi = \left( \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi \right) f_{ij}^\psi \end{aligned}$$

und somit ist  $c_{ji}^\psi \left( \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \right) f_{ij}^\psi = c_{ji}^\psi \left( \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi \right) f_{ij}^\psi$ .

Nun setzen wir  $z'_{ii} := \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi - \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi \in R'_{ii}$ . Wir zeigen, dass  $z'_{ii} = 0'$  ist. Nach dem gerade Gezeigten haben wir  $R'_{ji} z'_{ii} R'_{ij} = 0'$ .

Weiter gilt nach Lemma 7 in [58] wegen  $e_{ii} \in J_i$ :

$$\begin{aligned} e_{ii}^\alpha z'_{ii} e_{ii}^\alpha &= e_{ii}^\alpha \left( \sum_\lambda (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi - \sum_\lambda (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi \right) e_{ii}^\alpha \\ &= \sum_\lambda (e_{ii}^\alpha (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi e_{ii}^\alpha - e_{ii}^\alpha (a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda)^\psi e_{ii}^\alpha) \\ &= \sum_\lambda ((e_{ii} x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda e_{ii})^\psi - (e_{ii} a_{ij}^\lambda)^\psi (b_{ji}^\lambda e_{ii})^\psi) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda} ((x_{ij}^{\lambda})^{\psi} (y_{ji}^{\lambda})^{\psi} - (a_{ij}^{\lambda})^{\psi} (b_{ji}^{\lambda})^{\psi}) = z'_{ii}.$$

Für  $e_{ii} = \sum_{\mu} n_{ij}^{\mu} m_{ji}^{\mu} \in J_i$  haben wir dann

$$\begin{aligned} z'_{ii} &= e_{ii}^{\alpha} z'_{ii} e_{ii}^{\alpha} \\ &= \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) z'_{ii} e_{ii}^{\alpha} \\ &+ \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} z'_{ii} \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) \\ &+ \sum_{\mu, \mu'} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} z'_{ii} (n_{ij}^{\mu'})^{\psi} (m_{ji}^{\mu'})^{\psi}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} &\left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) z'_{ii} \\ &= \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) \left( \sum_{\lambda} (x_{ij}^{\lambda})^{\psi} (y_{ji}^{\lambda})^{\psi} - \sum_{\lambda} (a_{ij}^{\lambda})^{\psi} (b_{ji}^{\lambda})^{\psi} \right) \\ &= \sum_{\lambda} \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) (x_{ij}^{\lambda})^{\psi} (y_{ji}^{\lambda})^{\psi} \\ &- \sum_{\lambda} \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) (a_{ij}^{\lambda})^{\psi} (b_{ji}^{\lambda})^{\psi} = 0' \end{aligned}$$

wegen  $(e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi}) (x_{ij}^{\lambda})^{\psi} = (e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi}) (a_{ij}^{\lambda})^{\psi} = 0'$   
gemäß (2) für alle  $\lambda \in \mathbb{N}$ .

Analog zeigt man die Gleichheit  $z'_{ii} \left( e_{ii}^{\alpha} - \sum_{\mu} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} \right) = 0'$ .

Außerdem haben wir  $\sum_{\mu, \mu'} (n_{ij}^{\mu})^{\psi} (m_{ji}^{\mu})^{\psi} z'_{ii} (n_{ij}^{\mu'})^{\psi} (m_{ji}^{\mu'})^{\psi} = 0'$ , denn wegen  $R'_{ji} z'_{ii} R'_{ij} = 0'$  ist  $(m_{ji}^{\mu})^{\psi} z'_{ii} (n_{ij}^{\mu'})^{\psi} = 0'$  für alle  $\mu, \mu' \in \mathbb{N}$ .

Insgesamt folgern wir  $z'_{ii} = 0'$  und somit gilt die Behauptung.

(4) Nun können wir eine additive Abbildung  $\phi : R \rightarrow R'$  wie folgt definie-

ren:

$$\phi : R \rightarrow R' : x_{ij}^\phi = \begin{cases} x_{ij}^\psi \in R'_{ij} & \text{für } i \neq j \\ x_{ii}^\phi = \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \in R'_{ii} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $x_{ii} = \sum_{\lambda} x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda \in R_{ii}$  mit  $i \neq j$  ist (man muss dabei beachten, dass  $x_{ii}$  nicht unbedingt hermitesch ist). Nach Behauptung (3) ist  $\phi$  wohldefiniert.

(5) *Behauptung:* Die Abbildung  $\phi : R \rightarrow R'$  ist ein Homomorphismus.

*Beweis:* Es reicht, die folgenden Fälle zu betrachten:

- (a) Für  $i \neq j$  gilt  $(a_{ij} b_{ij})^\phi = 0^\phi = 0' = a_{ij}^\psi b_{ij}^\psi = a_{ij}^\phi b_{ij}^\phi$ .
- (b) Für alle  $a_{ij} b_{ji} \in R_{ii}$  mit  $i \neq j$  gilt nach Definition von  $\phi$ :  $(a_{ij} b_{ji})^\phi = a_{ij}^\psi b_{ji}^\psi = a_{ij}^\phi b_{ji}^\phi$ .
- (c) Für  $i \neq j$  gilt mit  $a_{ii} = \sum_{\lambda} x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda$  wegen  $x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ij} \in R_{ij}$  für alle  $b_{ij} \in R_{ij}$ :

$$\begin{aligned} (a_{ii} b_{ij})^\phi &= \left( \sum_{\lambda} x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ij} \right)^\phi = \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ij})^\phi \\ &= \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ij})^\psi \stackrel{(1)}{=} \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi b_{ij}^\psi \\ &= \left( \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda)^\psi (y_{ji}^\lambda)^\psi \right) b_{ij}^\psi = a_{ii}^\phi b_{ij}^\phi. \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $(b_{ji} a_{ii})^\phi = b_{ji}^\phi a_{ii}^\phi$  für alle  $b_{ji} \in R_{ji}$ .

- (d) Für  $a_{ii} = \sum_{\lambda} x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda \in R_{ii}$  und  $b_{ii} \in R_{ii}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} (a_{ii} b_{ii})^\phi &= \left( \sum_{\lambda} x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ii} \right)^\phi = \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda y_{ji}^\lambda b_{ii})^\phi \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda)^\phi (y_{ji}^\lambda b_{ii})^\phi \stackrel{(c)}{=} \sum_{\lambda} (x_{ij}^\lambda)^\phi (y_{ji}^\lambda)^\phi b_{ii}^\phi \end{aligned}$$

$$\stackrel{(b)}{=} \sum_{\lambda} (x_{ij}^{\lambda} y_{ji}^{\lambda})^{\phi} b_{ii}^{\phi} = \left( \sum_{\lambda} x_{ij}^{\lambda} y_{ji}^{\lambda} \right)^{\phi} b_{ii}^{\phi} = a_{ii}^{\phi} b_{ii}^{\phi}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

- (6) Nun bleibt zu zeigen, dass  $\phi$  tatsächlich Erweiterung von  $\alpha$  ist, d.h. für  $\phi|_J : J \rightarrow R'$  gilt  $\phi|_J \equiv \alpha$ . Wir wissen, dass jede hermitesche Matrix  $a \in J$  sich in der Form  $a = \sum_i a_{ii} + x_{12} + x_{21}$  mit  $a_{ii} \in J_i$  und  $x_{ij} \in R_{ij}$  schreiben lässt. Für  $\phi$  impliziert das einerseits:

$$(x_{12} + x_{21})^{\phi} = x_{12}^{\phi} + x_{21}^{\phi} \stackrel{(4)}{=} x_{12}^{\psi} + x_{21}^{\psi} = (x_{12} + x_{21})^{\alpha}.$$

Andererseits ist  $a_{ii}^{\phi} = a_{ii}^{\alpha}$ , denn es gilt für  $a_{ii} = \sum_{\lambda} x_{ij}^{\lambda} y_{ji}^{\lambda} \in J_i$  mit  $i \neq j$  wegen  $a_{ii} = a_{ii}^* = \sum_{\lambda} y_{ij}^{\lambda} x_{ji}^{\lambda}$  sowie nach Lemma 6 in [58] und (4):

$$\begin{aligned} 2' a_{ii}^{\alpha} &= \sum_{\lambda} ((x_{ij}^{\lambda})^{\psi} (y_{ji}^{\lambda})^{\psi} + (y_{ij}^{\lambda})^{\psi} (x_{ji}^{\lambda})^{\psi}) \\ &= \sum_{\lambda} (x_{ij}^{\lambda})^{\psi} (y_{ji}^{\lambda})^{\psi} + \sum_{\lambda} (y_{ij}^{\lambda})^{\psi} (x_{ji}^{\lambda})^{\psi} \\ &= 2' a_{ii}^{\phi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt  $a^{\phi} = a^{\alpha}$  für alle  $a \in J$ , so dass  $\phi$  Erweiterung von  $\alpha$  ist. Nach Lemma 4.2.3 ist  $\phi$  eindeutig.

Analog wie im Beweis von 4.2.5 ist der Anti-Homomorphismus  $\delta : * \circ \phi : R \rightarrow R'$  die eindeutige Erweiterung von  $\alpha$ . □

Ein  $2 \times 2$ -Matrizenring über einem nicht kommutativen Körper der reellen Quaternionen liefert uns ein Gegenbeispiel zu dem obigen Satz 4.2.11. Dieses Beispiel wurde kurz in [58, S. 243] erwähnt. Im Folgenden möchten wir es aber ausführlicher untersuchen.

**Beispiel 4.2.12.** Sei  $\mathbb{H}$  der nicht kommutative Körper der Quaternionen und  $R = R' = \mathbb{H}_{2,2}$  der  $2 \times 2$ -Matrizenring über  $\mathbb{H}$ . Weiterhin sei  $\bar{\cdot} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : a = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \mapsto \bar{a} = a_1 - a_2 i - a_3 j - a_4 k$  die Konjugation in  $\mathbb{H}$ . Offensichtlich ist  $* = \bar{\cdot} \circ T$  mit  $R \ni a = \sum a_{ij} e_{ij} \rightarrow \sum \bar{a}_{ij} e_{ji}$  eine Involution

in  $R$ . Wir bestimmen zunächst die Menge aller hermiteschen Matrizen  $J = \{x \in R \mid x^* = x\}$ . Sei  $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in J$ . Es ist  $x^* = \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  genau dann, wenn  $\bar{a} = a, \bar{c} = b, \bar{b} = c$  und  $\bar{d} = d$  gilt. Damit haben wir  $a = a_1 \in \mathbb{R}, d = d_1 \in \mathbb{R}$  und  $b = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k = \bar{c} = c_1 - c_2i - c_3j - c_4k$  mit  $b_1 = c_1, b_2 = -c_2, b_3 = -c_3, b_4 = -c_4 \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt, dass jede hermitesche Matrix  $x \in J$  in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ \bar{b} & d_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} i + b_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} j + b_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} k \\ &= a_1 e_{11} + d_1 e_{22} + b_1 (e_{12} + e_{21}) \\ &+ b_2 (e_{12} - e_{21}) i + b_3 (e_{12} - e_{21}) j + b_4 (e_{12} - e_{21}) k. \end{aligned}$$

Daher ist  $\dim_{\mathbb{R}} J = 6$ , wobei die Menge  $\{e_{11}, e_{22}, e_{12} + e_{21}, (e_{12} - e_{21})i, (e_{12} - e_{21})j, (e_{12} - e_{21})k\}$  eine Basis von  $J$  ist (im Folgenden bezeichnen wir diese Basiselementen der Reihe nach mit  $f_1, \dots, f_6$ ). Dabei gilt offensichtlich  $\mathfrak{E}_{J_i} \neq R_{ii}$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Der Matrizenring  $R$  ist seinerseits offenbar über seinem Zentrum  $Z(R) = \{\lambda E \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$  16-dimensional, so dass die Voraussetzungen des Korollars 1 in [58, S. 242] nicht erfüllt sind. Deshalb muss schon mal nicht jeder Jordan-Homomorphismus von  $J$  zu einem Automorphismus von  $R$  erweiterbar sein. Wir zeigen, dass es tatsächlich einen Jordan-Homomorphismus  $J \rightarrow J$  gibt, den man sogar nicht zu einem Endomorphismus von  $R$  erweitern kann. Dafür betrachten wir die eindeutige lineare Abbildung  $\phi : J \rightarrow J$  mit

$$\begin{aligned} f_1^\phi &= f_1, f_2^\phi = f_2, f_3^\phi = f_3, \\ f_4^\phi &= f_5, f_5^\phi = f_4, f_6^\phi = f_6. \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir, dass  $\phi$  ein Jordan-Automorphismus ist.

Sei  $a = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & d_1 \end{pmatrix} \in J$ , dann hat das  $\phi$ -Bild von  $a$  in Matrixdarstellung die Gestalt  $a^\phi = \begin{pmatrix} a_1 & b' \\ b' & d_1 \end{pmatrix}$  mit  $b' := b_1 + b_3i + b_2j + b_4k$  für  $b = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k \in \mathbb{H}$ . D.h.  $\phi$  wird durch eine Abbildung  $' : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} : b \mapsto b'$  induziert. Die Abbildung  $'$  ist ein Anti-Automorphismus von  $\mathbb{H}$ : Offenbar ist  $'$  additiv mit  $'|_{\mathbb{R}} = id$  und für  $b = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$  und  $c = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k$  gilt

$$\begin{aligned}
 c'b' &= (c_1 + c_2i + c_3j + c_4k)'(b_1 + b_2i + b_3j + b_4k)' \\
 &= (c_1 + c_3i + c_2j + c_4k)(b_1 + b_3i + b_2j + b_4k) \\
 &= (c_1b_1 - c_3b_3 - c_2b_2 - c_4b_4) + (c_1b_3 + c_3b_1 + c_2b_4 - c_4b_2)i \\
 &\quad + (c_1b_2 - c_3b_4 + c_2b_1 + c_4b_3)j + (c_1b_4 + c_3b_2 - c_2b_3 + c_4b_1)k \\
 &= (b_1c_1 - c_2b_2 - c_3b_3 - c_4b_4) + (b_1c_2 + b_2c_1 + b_3c_4 - b_4c_3)j \\
 &\quad + (b_1c_3 - b_2c_4 + b_3c_1 + b_4c_2)i + (b_1c_4 + b_2c_3 - b_3c_2 + b_4c_1)k \\
 &= (bc)'.
 \end{aligned}$$

Hiermit rechnet man nun leicht nach, dass  $\phi$  ein Jordan-Automorphismus von  $J$  ist.

Nun nehmen wir an, dass eine Erweiterung von  $\phi$  zu einem Endomorphismus  $\Phi : R \rightarrow R$  existiert. Nach Lemma 9 in [58] ist dann  $\Phi$  durch  $\phi$  eindeutig bestimmt und es gilt für  $i, j \in \{1, 2\}$  mit  $i \neq j$ :

- (i)  $e_{ij}^\Phi = (e_{ii}(e_{ij} + e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\Phi(e_{ij} + e_{ji})^\Phi = e_{ii}^\phi(e_{ij} + e_{ji})^\phi = e_{ii}(e_{ij} + e_{ji}) = e_{ij}$ .
- (ii)  $(ie_{ij})^\Phi = (e_{ii}i(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\Phi(i(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\phi(i(e_{ij} - e_{ji}))^\phi = e_{ii}j(e_{ij} - e_{ji}) = je_{ij}$ .
- (iii)  $(je_{ij})^\Phi = (e_{ii}j(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\Phi(j(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\phi(j(e_{ij} - e_{ji}))^\phi = e_{ii}i(e_{ij} - e_{ji}) = ie_{ij}$ .
- (iv)  $(ke_{ij})^\Phi = (e_{ii}k(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\Phi(k(e_{ij} - e_{ji}))^\Phi = e_{ii}^\phi(k(e_{ij} - e_{ji}))^\phi = e_{ii}k(e_{ij} - e_{ji}) = ke_{ij}$ .

Weiter gilt für  $i \in \{1, 2\}$ :

- (v)  $e_{ii}^\Phi = e_{ii}^\phi = e_{ii}$ .

$$(vi) \quad (ie_{ii})^\Phi = (ie_{ij}e_{ji})^\Phi = (ie_{ij})^\Phi e_{ji}^\Phi = je_{ij}e_{ji} = je_{ii} = e_{ij}je_{ji} = e_{ij}^\Phi (ie_{ji})^\Phi.$$

$$(vii) \quad \text{Analog zeigt man } (je_{ii})^\Phi = ie_{ii} \text{ und } (ke_{ii})^\Phi = ke_{ii}.$$

Das sind also die Bilder aller 16 Basiselemente von  $R$ .

Sei nun  $x = ie_{11} \in R_{11} \setminus \mathfrak{E}_{J_1}$  mit  $\mathfrak{E}_{J_1} = \{re_{11} \mid r \in \mathbb{R}\}$  und  $y = je_{12} \in R_{12}$ . Es gilt dann:

$$(xy)^\Phi = (ie_{11}je_{12})^\Phi = (ke_{11}e_{12})^\Phi = (ke_{12})^\Phi = ke_{12},$$

$$x^\Phi y^\Phi = (ie_{11})^\Phi (je_{12})^\Phi = je_{11}ie_{12} = jie_{11}e_{12} = -ke_{12} \neq ke_{12} = (xy)^\Phi.$$

Daraus folgt, dass  $\Phi$  kein Endomorphismus sein kann und unsere Annahme falsch war.

Insbesondere kann man daraus folgern, dass es keinen Anti-Endomorphismus  $\Psi : R \rightarrow R$  mit  $\Psi|_J = \phi$  gibt, denn sonst wäre  $* \circ \Psi : R \rightarrow R$  ein Endomorphismus mit  $(* \circ \Psi)|_J = \phi$ , d.h. Erweiterung von  $\phi$ , was dem oben Gezeigten widerspricht.

Zum Abschluss dieses Abschnittes können wir Bemerkung 4.2.1 ergänzen:

**Bemerkung 4.2.13.** Seien  $K, K'$  Körper mit  $Char K, Char K' \neq 2$ . Dann ist jeder Jordan-Homomorphismus von Jordan-Systemen der symmetrischen Matrizen  $S_n(K) \rightarrow S_n(K')$  semilinear.

*Beweis:* Seien  $R = K_{n,n}, R' = K'_{n,n}$  und  $J = S_n(K) \subseteq R, J' = S_n(K') \subseteq R'$ . Weiter sei  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus. Da  $\alpha$  additiv ist, bleibt zu zeigen:  $(ka)^\alpha = k^{\hat{\alpha}} a^\alpha$  für alle  $k \in K$  und  $a \in R$ , wobei  $\hat{\alpha} : K \rightarrow K'$  der Begleitmonomorphismus ist.

Sei nun  $\tilde{\alpha} : R \rightarrow R'$  die (gemäß 4.2.5 bzw. 4.2.11 existierende) Erweiterung von  $\alpha$ . Dann ist  $\tilde{\alpha}$  ein Homomorphismus (bzw. ein Anti-Homomorphismus) der Matrizenalgebren. Für alle  $k \in K, a \in R$  mit Notation aus 4.1.6 gilt dann:

$$\begin{aligned} (ka)^{\tilde{\alpha}} &= (kE_R a)^{\tilde{\alpha}} = (kE_R)^{\tilde{\alpha}} a^{\tilde{\alpha}} = g^{-1} k^\psi E_{R'} g a^{\tilde{\alpha}} \\ &= k^\psi g^{-1} g a^{\tilde{\alpha}} = k^\psi a^{\tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

Wegen  $\tilde{\alpha}|_J \equiv \alpha$  folgt die Behauptung mit  $\hat{\alpha} = \psi$ . □

### 4.3 Interpretation der Morphismen von Distanzräumen hermitescher bzw. symmetrischer Matrizen in einem Graßmann-Raum

Sei  $J = H_n(K)$  (bzw.  $S_n(K)$ ) das Jordan-System hermitescher<sup>iii</sup> (bzw. symmetrischer) Matrizen in  $R = K_{n,n}$ . Der projektive Raum von  $J$  wird allgemein folgendermaßen definiert (siehe [66, S. 285-287, 357-358]):

**Definition 4.3.1.** Sei  $K$  ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Körper und  $P$  ein  $m$ -dimensionaler Unterraum des  $2n$ -dimensionalen Vektorraums  $V = K^{2n}$ ,  $0 \leq m \leq n$ . Weiter sei  $M = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \in K_{2n,2n}$ , wobei  $E_n$  für die  $n \times n$ -Einheitsmatrix steht, und  $\bar{\cdot} : K \rightarrow K$  ein involutorischer Anti-Automorphismus. Definiere  $P^\perp = \{a \in K^{2n} \mid aM\bar{P}^T = 0\} \leq K^{2n}$  mit  $\bar{P} = (\bar{p}_{ij})$ . Dann heißt  $P^\perp$  **der duale Unterraum** von  $P$  bzgl.  $M$ . Gilt  $P = P^\perp$ , so heißt  $P$  **selbstdual**.

**Bemerkung 4.3.2.** Sei  $W$  ein  $n$ -dimensionaler Unterraum eines  $2n$ -dimensionalen Raums und die Matrix  $(a|b)$  eine homogene Koordinate von  $W$  (vgl. Abschnitt 1.4). Im Weiteren identifizieren wir  $W$  mit  $(a|b)$ . Der Unterraum  $W$  ist selbstdual genau dann, wenn  $a\bar{b}^T = b\bar{a}^T$  gilt. Ist noch  $a$  invertierbar, dann kann man  $W$  auch in der Form  $(E_n|a^{-1}b)$  schreiben, wobei  $a^{-1}b$  offenbar hermitesch ist.

**Definition 4.3.3.** Die Menge aller selbstdualen Unterräume von  $V$  heißt **der projektive Raum** von  $n \times n$  hermiteschen Matrizen (bzw. symmetrischen Matrizen im Fall  $\bar{\cdot} = id$ ) und wird als  $\mathcal{PH}_n(K)$  (bzw.  $\mathcal{PS}_n(K)$ ) bezeichnet. Die Unterräume aus dieser Menge heißen die Punkte von  $\mathcal{PH}_n(K)$  (bzw.  $\mathcal{PS}_n(K)$ ).

Nach Proposition 6.39 aus [66, S. 357] (bzw. Proposition 5.40 aus [66, S. 287] für  $J = S_n(K)$ ) ist ein Unterraum  $W$  genau dann selbstdual, wenn  $\dim_K W = n$  ist und  $WM\overline{W}^T = 0$  gilt. Die Elemente von  $\mathcal{PH}_n(K)$  sind

<sup>iii</sup>Dabei halten wir im Hinterkopf, dass  $H_n(K)$  ein Jordan-System über dem Fixkörper  $F = \text{Fix} \bar{\cdot} \leq K$  ist.

daher  $n$ -dimensionale Untervektorräume von  $V$ , also Punkte des Graßmann-Graphen  $\mathcal{G}$  (vgl. Abschnitt 1.4). Gelegentlich identifizieren wir die Punkte des Graßmann-Graphen mit den zugehörigen projektiven Teilräumen von  $PG(2n - 1, K)$ . Insbesondere ist  $\mathcal{PH}_n(K)$  eine Teilmenge der Menge aller  $(n - 1)$ -dimensionalen projektiven Teilräume von  $PG(2n - 1, K)$ .

Gemäß der Propositionen 6.43, 6.47 bzw. 5.44, 5.48 in [66] gilt (vgl. 1.4.5):

**Bemerkung 4.3.4.** Für zwei beliebige Punkte  $W_1$  und  $W_2$  von  $\mathcal{PH}_n(K)$  bzw.  $\mathcal{PS}_n(K)$  ist

$$d(W_1, W_2) = \text{Rang}(W_1 M \overline{W_2}^T) \text{ bzw. } d(W_1, W_2) = \text{Rang}(W_1 M W_2^T),$$

wobei  $M \in K_{2n, 2n}$  wie oben ist. Gilt  $d(W_1, W_2) = 1$ , dann sind  $W_1, W_2$  adjazent.

Im Folgenden sei  $K$  wieder kommutativ mit  $\text{Char}K \neq 2$ . Wir möchten zuerst zeigen, dass jeder Jordan-Homomorphismus  $J \rightarrow J'$  einen Morphismus der entsprechenden Distanzräume induziert, der in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist. Dafür beweisen wir noch zwei Aussagen. Wir beschränken uns auf den Fall von hermiteschen Matrizen, da  $S_n(K) = H_n(K)$  für  $\bar{\phantom{x}} = id$  gilt.

Nach Theorem 1 in [24] stimmt die Punktmenge von  $\mathcal{PH}_n(K)$  mit der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(J) = \{R(t_1 t_2 - 1, t_1) \mid t_1, t_2 \in J\}$  überein. Es gilt außerdem die Gleichheit  $\mathbb{P}(J) = \widetilde{\mathbb{P}}(J)$ , wie wir gleich sehen werden, so dass die Punktmenge von  $\mathcal{PH}_n(K)$  auch die projektive Gerade über  $J$  im Sinne von Definition 3.2.4 darstellt.

**Bemerkung 4.3.5.** Das Jordan-System  $J = H_n(K)$  hermitescher Matrizen ist stets stabil in  $R$ . Folglich gilt  $\widetilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$  (gemäß 3.2.15).

*Beweis:* Da  $J$  in  $R$  Jordan-abgeschlossen ist, reicht es wegen 3.2.16 zu zeigen, dass es für jeden Punkt  $p = R(1, 0)E(t_1)E(t_2)E(t_3) \in \widetilde{\mathbb{P}}(J)$  ein  $x \in J$  gibt, so dass  $(t_1 t_2 - 1)(t_3 + x) - t_1 \in R^*$  gilt. Ist  $t_1 \in J^*$ , dann setzen wir  $x = -t_3 \in J$  und sind damit fertig.

Sei also  $t_1 \in J$  nicht invertierbar. Wir suchen ein  $u \in J$  mit  $(t_1 t_2 - 1)u - t_1 \in R^*$ , so dass die Behauptung für  $x := u - t_3 \in J$  gilt. Nach Proposition 1.32 in [66, S. 37] (die Voraussetzungen der Proposition sind wegen  $Char K \neq 2$  und der Kommutativität von  $K$  erfüllt) ist  $t_1$  zu einer Diagonalmatrix  $t'_1 := \text{diag}(a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0)$  mit  $\bar{a}_i = a_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  und  $r = \text{Rang}(t_1) < n$  kogredient, d.h. es existiert eine Matrix  $p \in GL_n(K)$  mit  $t'_1 = \bar{p}^T t_1 p$ . Nun gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & (t_1 t_2 - 1)u - t_1 \in R^* \\ \Leftrightarrow & \bar{p}^T ((t_1 t_2 - 1)u - t_1) p \in R^* \\ \Leftrightarrow & (\bar{p}^T t_1 p p^{-1} t_2 (\bar{p}^T)^{-1} - 1) \bar{p}^T u p - \bar{p}^T t_1 p \in R^* \\ \Leftrightarrow & (t'_1 t'_2 - 1)u' - t'_1 \in R^* \end{aligned}$$

mit  $t'_2 := p^{-1} t_2 (\bar{p}^T)^{-1} = p^{-1} t_2 (\overline{p^{-1}})^T \in J$  und  $u' := \bar{p}^T u p \in J$ .

Da die Matrix  $t'_2$  hermitesch ist, hat sie die Gestalt

$$t'_2 = \sum_{i=1}^n m_{ii} e_{ii} + \sum_{i < j} m_{ij} e_{ij} + \sum_{i > j} \bar{m}_{ij} e_{ji}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} t'_1 t'_2 - 1 &= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1r} & m_{1(r+1)} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{m}_{1r} & \dots & m_{rr} & m_{r(r+1)} & \dots & m_{rn} \\ \bar{m}_{1(r+1)} & \dots & \bar{m}_{r(r+1)} & m_{(r+1)(r+1)} & \dots & m_{(r+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{m}_{1n} & \dots & \bar{m}_{rn} & \bar{m}_{(r+1)n} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} - E \\ &= \begin{pmatrix} a_1 m_{11} - 1 & \dots & a_1 m_{1r} & a_1 m_{1(r+1)} & \dots & a_1 m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_r \bar{m}_{1r} & \dots & a_r m_{rr} - 1 & a_r m_{r(r+1)} & \dots & a_r m_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $u' := \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1) \in J$  mit  $\text{Rang}(u') = n - r$ , so ist die Matrix

$$(t'_1 t'_2 - 1)u' - t'_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & \dots & 0 & a_1 m_{1(r+1)} & \dots & a_1 m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -a_r & a_r m_{r(r+1)} & \dots & a_r m_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

wegen  $a_i \neq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, r\}$  invertierbar. Damit ist auch  $(t_1 t_2 - 1)u - t_1 \in R^*$  für  $u = (\overline{p^{-1}})^T u' p^{-1} \in J$ . □

Die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  ist eine Teilmenge der projektiven Gerade über dem Matrizenring  $R = K_{n,n}$ , denn es ist  $\mathbb{P}(R) = \{R(ab-1, a) \mid a, b \in R\}$  gemäß 1.1.23 (vgl. auch [24]). Deshalb stimmt die Distanzrelation  $\Delta$  auf  $\mathbb{P}(J)$  mit der Distanzrelation  $\Delta_R$  auf  $\mathbb{P}(R)$  überein. Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass auf  $\mathbb{P}(J)$  auch die Adjazenzrelation  $\sim = \sim_R$  von  $\mathbb{P}(R)$  vorliegt. Da es aber i.Allg. nicht klar ist, ob die Adjazenzrelation auf dem projektiven Raum über  $J$  mittels der Distanzrelation auf der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(J)$  beschrieben werden kann (siehe [24]), können wir die Adjazenzrelation auf  $\mathcal{PH}_n(K)$  mit der Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(J)$  im Sinne von Definition 1.1.14 nicht identifizieren. Die Adjazenzrelation im Kontext von Graßmann-Graphen ist jedoch viel üblicher. Deshalb werden wir im Weiteren stets die Adjazenzrelation auf der projektiven Gerade  $\mathbb{P}(J)$  im Sinne von 4.3.4 meinen. Wir erinnern, dass die Adjazenzrelationen auf  $\mathbb{P}(R)$  und  $\mathcal{G}$  gleich sind (siehe 1.4.4).

**Lemma 4.3.6.** *Sei mit  $\sim$  und  $\sim_R$  die Adjazenzrelation auf  $\mathbb{P}(J)$  bzw.  $\mathbb{P}(R)$  bezeichnet. Dann gilt  $p \sim q \Leftrightarrow p \sim_R q$  für alle  $p, q \in \mathbb{P}(J)$ .*

*Beweis:* Wir betrachten die projektiven Geraden  $\mathbb{P}(J)$  und  $\mathbb{P}(R)$  in ihren projektiven Darstellungen  $\mathcal{PH}_n(K)$  bzw.  $\mathcal{G}$  (vgl. (1.2) in Abschnitt 1.4). Wie schon oben erwähnt, ist  $\mathcal{PH}_n(K) \subseteq \mathcal{G}$ .

„ $\Rightarrow$ “ Seien  $W_1 = (x|y)$ ,  $W_2 = (x'|y')$  zwei adjazente Punkte von  $\mathcal{PH}_n(K)$ , d.h. es gilt laut 4.3.4  $\text{Rang}(W_1 M \overline{W_2}^T) = 1$ . Dann können  $W_1$  und  $W_2$  unter der unitären Gruppe<sup>iv</sup>  $U_{2n}(K, M)$  auf die Punkte  $A = (E_n|0)$  bzw.  $B = \begin{pmatrix} 0_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} & 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}$  abgebildet werden, wobei  $U_{2n}(K, M) \leq GL_2(R)$  Distanz zwischen zwei Punkten und insbesondere die Adjazenzrelation invariant lässt, d.h. wir haben  $W_1 \sim W_2 \Leftrightarrow A \sim B$  (vgl. Propositionen 6.45, 6.46 in [66]). Nun sieht man direkt, dass  $A \sim_R B$  ist, denn es gilt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0_1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} & 0 & 0_{n-1} \\ 0_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & E_{n-1} & 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} = n + 1 \Leftrightarrow A \sim_R B.$$

Daraus folgern wir  $W_1 \sim_R W_2$  (gemäß Proposition 3.31 in [66, S. 126]).

„ $\Leftarrow$ “ Seien nun  $W_1 = (x|y)$ ,  $W_2 = (x'|y')$  zwei Punkte von  $\mathcal{PH}_n(K)$  mit  $W_1 \sim_R W_2$ , d.h. es ist  $\text{Rang} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = n + 1$ .

Weiter sei  $d(W_1, W_2) = \text{Rang}(W_1 M \overline{W_2}^T) = r$ . Wir zeigen, dass  $r = 1$  ist und somit  $W_1$  und  $W_2$  auf  $\mathcal{PH}_n(K)$  adjazent sind.

Analog wie oben können die Punkte  $W_1, W_2$  unter der unitären Gruppe  $U_{2n}(K, M)$  auf die Punkte  $X = (E_n|0)$  bzw.  $Y = \begin{pmatrix} 0_r & 0 & E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$  abgebildet werden. Wegen  $U_{2n}(K, M) \leq GL_2(R)$  gilt insbesondere  $X \sim_R Y$ . Damit haben wir

$$n + 1 = \text{Rang} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} & 0 & 0_{n-r} \\ 0_r & 0 & E_r & 0 \\ 0 & E_{n-r} & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = n + r \Leftrightarrow r = 1,$$

was zu zeigen war. □

Jetzt kommen wir zu unserem ersten Ziel dieses Abschnitts. Wir wissen

<sup>iv</sup>D.h. Gruppe von unitären  $2n \times 2n$ -Matrizen mit Einträgen aus  $K$  bzgl. der Matrix  $M$ . Hierbei nennt man eine Matrix  $N$  **unitär** bzgl.  $M$ , wenn es gilt  $\overline{N}^T M N = M$ .

schon, dass jeder Jordan-Homomorphismus von Ringen  $\alpha : R \rightarrow R'$  einen  $\Delta$ -Morphismus induziert (vgl. Abschnitt 1.3, 1.3.7). Ist  $R$  ein Ring vom stabilen Rang 2 (und Matrizenalgebren sind vom stabilen Rang 2), dann gilt  $\mathbb{P}(R) = \{R(ab - 1, a) \mid a, b \in R\}$  und die Abbildung  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(ab - 1, a) \mapsto R'(a^\alpha b^\alpha - 1', a^\alpha)$  ist ein  $\Delta$ -Morphismus (siehe z. B. [22, S. 149-150]).

Im Fall von starken Jordan-Systemen  $J, J'$  über Körpern induziert jeder semilineare Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow J'$  einen  $\Delta$ -Morphismus  $\bar{\alpha} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J') : R(1 + ab, a) \mapsto R'(1' + a^\alpha b^\alpha, a^\alpha)$ , der sogar ein Morphismus von Kettengeometrien ist (siehe [11]).

In unserem Fall sind  $J = H_n(K), J' = H_n(K')$  nicht notwendigerweise stark sowie Jordan-Homomorphismen i.Allg. nicht semilinear. Jedoch gilt das Folgende (es sind dabei 4.2.1 und 4.2.13 zu beachten):

**Satz 4.3.7.** *Seien  $R = K_{n,n}$  und  $R' = K'_{n,n}$  mit  $n \geq 2$ . Weiter seien  $J = H_n(K) \subseteq R, J' = H_n(K') \subseteq R'$ . Dann induziert jeder Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow J'$  eine Abbildung  $\bar{\alpha} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J')$ , welche in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist.*

*Beweis:* Im Abschnitt 4.2 haben wir festgestellt, dass man jeden Jordan-Homomorphismus  $J \rightarrow J'$  für  $n \geq 2$  zu einem Ringhomomorphismus  $\phi : R \rightarrow R'$  eindeutig erweitern kann (vgl. 4.2.5, 4.2.11). Dieser Ringhomomorphismus induziert eine Abbildung  $\bar{\phi} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(x, y) \mapsto R'(x^\phi, y^\phi)$ , die nach 4.1.7 in beiden Richtungen sowohl  $\Delta$ - als auch  $\sim$ -erhaltend ist. Für die Punkte von  $\mathbb{P}(J) \subseteq \mathbb{P}(R)$  gilt dann wegen  $\phi|_J = \alpha$

$$R(ab - 1, a)^{\bar{\phi}} = R'((ab - 1)^\phi, a^\phi) = R'(a^\phi b^\phi - 1', a^\phi) = R'(a^\alpha b^\alpha - 1', a^\alpha)$$

und da die  $\Delta$ - bzw.  $\sim$ -Relation auf  $\mathbb{P}(J)$  mit derjenige auf  $\mathbb{P}(R)$  übereinstimmt, ist auch die Abbildung  $\bar{\alpha} := \bar{\phi}|_{\mathbb{P}(J)} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J') : R(ab - 1, a) \mapsto R'(a^\alpha b^\alpha - 1', a^\alpha)$  in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend.  $\square$

Nun untersuchen wir, wie man die durch Jordan-Homomorphismen induzierten Abbildungen geometrisch interpretieren kann. Im Weiteren seien  $V$  und  $V'$  Vektorräume über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  mit endlicher Dimension  $2n$

und  $V^*$  bezeichne den Dualraum von  $V$ , d.h. einen Rechtsvektorraum über  $K$ . Die Menge aller  $n$ -dimensionalen Untervektorräume von  $V$  und  $V'$  sei entsprechend mit  $\mathcal{G}$  bzw.  $\mathcal{G}'$  bezeichnet.

Gemäß 4.1.5 ist jeder Jordan-Homomorphismus von Matrizenalgebren des gleichen Formats  $\alpha : R \rightarrow R'$  entweder ein Homomorphismus oder ein Anti-Homomorphismus. Jeder solche Jordan-Homomorphismus induziert eine Abbildung auf den entsprechenden projektiven Geraden  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$ , welche in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist (vgl. 4.1.7). Somit induziert jeder Jordan-Homomorphismus von Matrizenalgebren einen  $\Delta$ - und  $\sim$ -Morphismus auf den entsprechenden Graßmann-Graphen  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  (beachte (1.2) und 1.4.4). Im bijektiven Fall gilt insbesondere (siehe [23, Theorem 4.2, 4.4]):

**Bemerkung 4.3.8.** Seien  $V, V'$  wie oben und  $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  bijektiv. Dann ist  $\varphi$  genau dann ein Isomorphismus der Graßmann-Graphen, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (1)  $\dim V = \dim V' = 0$ .
- (2)  $\dim V = \dim V' = 2$  und  $|K| = |K'|$ .
- (3)  $4 \leq \dim V = \dim V' = 2n < \infty$  und es gibt eine semilineare Bijektion  $f : V \rightarrow V'$  mit  $X^\varphi = X^f$  oder eine semilineare Bijektion  $f : V^* \rightarrow V'$  mit  $X^\varphi = (X^\perp)^f$ , wobei  $X^\perp = \{g \in V^* \mid \forall x \in X : g(x) = 0\}$  der Annulator von  $X$  ist. Mit anderen Worten wird  $\varphi$  durch Kollineationen oder Dualitäten<sup>v</sup> der entsprechenden projektiven Räume  $PG(2n - 1, K) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  induziert.

Der nicht notwendigerweise bijektive Fall wird nun untersucht:

**Satz 4.3.9.** Seien  $R = K_{n,n}, R' = K'_{n,n}$  Matrizenalgebren,  $n \geq 2$ , und  $f : R \rightarrow R'$  ein Homomorphismus. Der durch  $f$  induzierte Morphismus von Graßmann-Graphen ist durch eine Einbettung von projektiven Räumen  $\eta : PG(2n - 1, K) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  induziert, d.h. durch eine injektive

<sup>v</sup>Kollineationen auf Dualraum, d.h. solche Abbildungen, welche kollineare Punkte auf in einem Büschel liegende Hyperebenen überführen.

Abbildung, die die Kollinearität von Punkten invariant lässt. Dabei lässt sich  $\eta$  durch eine bis auf Multiplikation mit einer Einheit (aus  $K'^*$ ) eindeutig bestimmte injektive semilineare Abbildung induzieren.

*Beweis:* Nach 4.1.6 gibt es eine Matrix  $g \in GL_n(K')$  und einen Körperhomomorphismus  $\beta : K \rightarrow K'$ , so dass  $a^f = g^{-1}(a_{ij}^\beta)a$  für alle  $a \in R$  gilt. Setze man  $K'' := \text{Bild } \beta$ , dann ist  $K'' \leq K'$  und  $\beta : K \rightarrow K''$  der Körperisomorphismus. Weiterhin seien  $R'' := K''_{n,n}$  die Matrizenalgebra über  $K''$ ,  $V'' := (K'')^{2n} \subseteq V' = (K')^{2n}$  und  $\mathcal{G}''$  der mit  $V''$  assoziierte Grassmann-Graph. Die Abbildung  $\hat{f} : R \rightarrow R'' : a \mapsto a^f = g^{-1}(a_{ij}^\beta)g$  ist ein Ringisomorphismus. Dieser induziert einen  $\Delta$ -Isomorphismus von projektiven Geraden  $\hat{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R'') : R(a, b) \mapsto R''(a^f, b^f)$  und damit einen Isomorphismus von Grassmann-Graphen  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}''$ , der seinerseits durch eine semilineare Bijektion  $\sigma : V \rightarrow V'' \leq V'$  mit Begleitisomorphismus  $\hat{\sigma} : K \rightarrow K''$  (vgl. Beweis von Theorem 5.4 in [22]) und somit durch eine Kollineation  $\eta_1 : PG(2n-1, K) \rightarrow PG(2n-1, K'') : Ka \mapsto K''a^\sigma$  (vgl. Proposition 2.6 in [31]) induziert wird.

Wir betrachten nun die semilineare injektive Abbildung

$$\tau : V'' \rightarrow V' : a \mapsto a^\tau = a$$

mit Begleitmonomorphismus  $\hat{\tau} : K'' \rightarrow K' : k \mapsto k^{\hat{\tau}} = k$ . Offenbar ist die von  $\tau$  induzierte Abbildung

$$\eta_2 : PG(2n-1, K'') \rightarrow PG(2n-1, K') : K''a \mapsto K'a^\tau = K'a$$

die kanonische Einbettung von projektiven Räumen. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} & \{K''a, K''b, K''c\} \text{ kollinear in } PG(2n-1, K'') \\ \Leftrightarrow & \{K'a, K'b, K'c\} \text{ kollinear in } PG(2n-1, K'). \end{aligned}$$

Da  $\Delta$ - und  $\sim$ -Relationen auf  $\mathbb{P}(R'')$  und  $\mathbb{P}(R')$  übereinstimmen (siehe Abschnitt 4.1) und damit dann auf  $\mathcal{G}''$  und  $\mathcal{G}'$ , ist die durch  $\eta_2$  induzierte Abbildung  $\mathcal{G}'' \rightarrow \mathcal{G}'$  die kanonische Einbettung von Grassmann-Graphen.

Insgesamt folgern wir, dass der durch  $f$  induzierte Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  von Graßmann-Graphen durch eine injektive Abbildung

$$\eta := \eta_1 \circ \eta_2 : PG(2n - 1, K) \rightarrow PG(2n - 1, K') : Ka \mapsto K'a^{\sigma\tau}$$

induziert wird, wobei  $\eta$  gemäß [31, Proposition 2.7] eine durch die semilineare Injektion  $\sigma \circ \tau : V \rightarrow V'$  induzierte Einbettung von projektiven Räumen ist. Nach Theorem 2.9 zusammen mit Proposition 4.1 in [31] ist  $\sigma \circ \tau$  bis auf Multiplikation mit einer Einheit  $\varepsilon \in K'^*$  eindeutig bestimmt (vgl. auch [31, Corollary 4.4]).  $\square$

Eine analoge Aussage gilt auch für Morphismen von Graßmann-Graphen, welche durch Anti-Homomorphismen der Matrizenalgebren induziert werden:

**Satz 4.3.10.** *Sei  $f : R \rightarrow R'$  ein Anti-Homomorphismus der Matrizenalgebren. Dann ist der durch  $f$  induzierte Morphismus von Graßmann-Graphen durch eine Dualität  $P(2n - 1, K) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  bzw. eine Einbettung  $P(V^*) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  und damit durch eine injektive semilineare Abbildung  $V^* \rightarrow V'$  induziert.*

*Beweis:* Laut 4.1.6 lässt sich  $f$  mittels einer Matrix  $g \in GL_n(K')$  und eines Körperhomomorphismus  $\beta : K \rightarrow K'$  beschreiben, und zwar wie folgt  $f : x \mapsto x^f = g^{-1}(a_{ji}^\beta)g$ . Der Anti-Homomorphismus  $f$  induziert eine  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltende Abbildung  $\bar{f} : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R') : R(a, b) \rightarrow R'(-d^f, c^f)$ , wobei  $(c, d)^T$  die zweite Spalte einer Matrix  $M^{-1}$  mit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix} \in GL_n(K)$  ist (vgl. Beweis von 4.1.7(2)). Mit Bezeichnungen wie im Beweis von 4.3.9 erhalten wir einen  $\Delta$ -Isomorphismus von projektiven Geraden  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R'') : R(a, b) \rightarrow R''(-d^f, c^f)$ . Dementsprechend haben wir einen Isomorphismus von Graßmann-Graphen  $\vartheta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}''$ , der seinerseits durch eine semilineare Bijektion  $\sigma : V^* \rightarrow V''$  vermöge  $X^\vartheta = (X^\perp)^\sigma$  für alle  $X \in \mathcal{G}$  (vgl. wieder Beweis von Theorem 5.4 in [22]) und damit durch eine Kollineation  $PG(2n - 1, K) =: P(V^*) \rightarrow PG(2n - 1, K'')$  induziert wird. Dabei ist  $\perp : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$  bzw.  $\perp : PG(2n - 1, K) = P(V) \rightarrow P(V^*)$  eine Dualität. Insgesamt ist  $P(V) \rightarrow PG(2n - 1, K'')$  (als Hintereinanderausführung von

Dualität und Kollineation) eine Dualität.

Analog wie in 4.3.9 betten wir  $PG(2n - 1, K'')$  in  $PG(2n - 1, K')$  ein, so dass der durch  $f$  induzierte Morphismus  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  von Graßmann-Graphen durch eine Dualität  $P(V) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  bzw. eine Einbettung  $P(V^*) \rightarrow PG(2n - 1, K')$  und damit durch eine injektive semilineare Abbildung  $V^* \rightarrow V'$  induziert wird.  $\square$

Wir betrachten wieder Jordan-Systeme hermitescher Matrizen  $J = H_n(K)$ ,  $J' = H_n(K')$ . Wie wir oben gezeigt haben, induziert jeder Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow J'$  eine Abbildung  $\bar{\alpha} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J')$ , die in beiden Richtungen  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltend ist (siehe 4.3.7). Somit haben wir eine  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltende Abbildung auf den entsprechenden Teilmengen von Graßmann-Graphen  $\zeta : \mathcal{PH}_n(K) \rightarrow \mathcal{PH}_n(K')$ .

Außerdem wissen wir schon, dass  $\alpha$  sich zu einem Homomorphismus und einem Anti-Homomorphismus  $R \rightarrow R'$  eindeutig erweitern lässt. Daher kann man  $\bar{\alpha}$  bzw.  $\zeta$  zu einem  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltenden Morphismus  $\mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(R')$  bzw. zu einem Morphismus von Graßmann-Graphen  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  fortsetzen, dessen Beschreibung in 4.3.9 bzw. 4.3.10 herausgefunden wurde. Diese Tatsache formulieren wir als das folgende Korollar:

**Korollar 4.3.11.** *Seien  $J = H_n(K)$ ,  $J' = H_n(K')$  mit  $n \geq 2$ . Ist  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus, dann ist die durch  $\alpha$  induzierte  $\Delta$ - und  $\sim$ -erhaltende Abbildung  $\mathcal{PH}_n(K) \rightarrow \mathcal{PH}_n(K')$  durch eine Einbettung von projektiven Räumen  $PG(2n - 1, K) \rightarrow PG(2n - 1, K')$ , also durch eine injektive semilineare Abbildung  $V \rightarrow V'$  induziert.*

# Kapitel 5

## Homotopismen und Morphismen von Kettenräumen

In diesem Kapitel beweisen wir die zwei wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit. Es wird zunächst gezeigt, dass jeder Homotopismus von Jordan-abgeschlossenen und nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen über Körpern stets einen Morphismus der zugehörigen Kettengeometrien induziert. Dieses Ergebnis wurde durch den bekannten Satz für Ringe im Fall von Jordan-Homomorphismen (siehe [20, 5.2]) und durch den Satz für starke Jordan-Systeme im Fall von Homotopismen (siehe [11, 2.6]) motiviert. Fast alle Zwischenergebnisse aus den beiden ersten Abschnitten, die wir hauptsächlich als Lemmata formulieren, verallgemeinern einige Lemmata aus [20] im Fall von Jordan-Homomorphismen zwischen Ringen (ein Verweis auf die entsprechenden Lemmata aus [20] wird stets zum Vergleich gegeben).

Das zweite Ergebnis verallgemeinert den Darstellungssatz für Morphismen von Kettengeometrien über starken Jordan-Systemen, der besagt, dass alle solche Morphismen durch Homotopismen zwischen den zugrunde liegenden Jordan-Systemen beschrieben werden können (siehe [11, 3.10, 3.13] bzw. 1.3.8): Dasselbe gilt unter einer Voraussetzung an die Mächtigkeit des Körpers auch für Kettengeometrien über Jordan-abgeschlossenen und nicht notwendigerweise starken Jordan-Systemen in  $R = K_{n,n}$ .

Beim Vorgehen orientieren wir uns an den genannten Artikeln.

## 5.1 Jordan-Homomorphismen von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen und induzierte Morphismen

Seien  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$ . Außerdem seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . In diesem Abschnitt betrachten wir einen Jordan-Homomorphismus  $\alpha : J \rightarrow J'$  mit dem Begleitmonomorphismus  $\hat{\alpha} : K \rightarrow K'$ , d.h.  $K$  und  $K'$  müssen nicht isomorph sein. Das Bild von  $J$  unter  $\alpha$  besitzt dabei die folgenden Eigenschaften:

**Bemerkung 5.1.1.** Für  $J^\alpha \subseteq J'$  gilt stets:

- (1)  $J^\alpha$  ist ein  $K^{\hat{\alpha}}$ -Vektorraum mit  $1' = 1^\alpha \in J^\alpha$ : Wegen der Additivität von  $\alpha$  ist  $J^\alpha$  eine Untergruppe von  $(J', +)$ . Für alle  $k' \in K^{\hat{\alpha}}$  und  $a' \in J^\alpha$  gilt außerdem  $k'a' \in J^\alpha$ , denn es gibt  $k \in K$  und  $a \in J$ , so dass  $k' = k^{\hat{\alpha}}$  und  $a' = a^\alpha$  und damit  $k'a' = k^{\hat{\alpha}}a^\alpha = (ka)^\alpha \in J^\alpha$  ist. Alle weiteren Eigenschaften eines Vektorraums vererben sich von  $J'$  auf  $J^\alpha$ .
- (2) Einheiten werden in Einheiten abgebildet: Sei  $a \in J^*$ , dann ist  $1' = (aa^{-2}a)^\alpha = a^\alpha(a^{-2})^\alpha a^\alpha \Rightarrow a^\alpha \in J^{\alpha*}$  und daher  $a^\alpha = (aa^{-1}a)^\alpha = a^\alpha(a^{-1})^\alpha a^\alpha \Leftrightarrow 1' = a^\alpha(a^{-1})^\alpha \Leftrightarrow (a^\alpha)^{-1} = (a^{-1})^\alpha$ .
- (3) Für alle  $a', b' \in J^\alpha$  ist auch  $a'b'a' \in J^\alpha$ , denn es existieren  $a, b \in J$  mit  $a' = a^\alpha$  und  $b' = b^\alpha$  und daher  $a'b'a' = a^\alpha b^\alpha a^\alpha = (aba)^\alpha \in J^\alpha$ .

Gilt zusätzlich  $b'^{-1} \in J^\alpha$  für alle  $b' \in J^{\alpha*}$ , dann ist  $J^\alpha$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R'$ .

Im Weiteren sei  $R''$  der einhüllende Ring von  $J^\alpha \subseteq R'$ , d.h. der kleinste Unterring von  $R'$ , welcher  $J^\alpha$  enthält. Die  $K'$ -Algebra  $R'$  ist offensichtlich auch eine  $K^{\hat{\alpha}}$ -Algebra, denn  $K^{\hat{\alpha}}$  ist ein Unterkörper von  $K'$ . Wegen  $K^{\hat{\alpha}} \leq R''$  ist daher auch  $R''$  eine  $K^{\hat{\alpha}}$ -Algebra (wir setzen aber nicht voraus, dass  $R''$  eine Unter algebra von  $R'$  im Sinne von Definition 1.1.26 ist). Im Weiteren nennen wir  $R''$  die **einhüllende  $K^{\hat{\alpha}}$ -Algebra von  $J^\alpha$** .

Darüber hinaus sei  $J''$  das von  $J^\alpha$  erzeugte Jordan-abgeschlossene Jordan-System in der  $K^{\widehat{\alpha}}$ -Algebra  $R''$ , d.h. das kleinste Jordan-abgeschlossene Jordan-System in  $R''$ , das  $J^\alpha$  enthält. Also ist  $J''$  der Jordan-Abschluss von  $J^\alpha$  im Sinne von Definition 3.2.12. Offenbar ist  $R''$  auch der einhüllende Ring von  $J''$ , insbesondere kann  $J'' = R''$  gelten. Wegen der Jordan-Abgeschlossenheit von  $J'$  und  $J^\alpha \subseteq J'$  ist  $J''$  ganz in  $J'$  enthalten und es gilt  $J''^* \subseteq J'^*$ . Wir beweisen das erste Ergebnis dieses Abschnitts (vgl. [20, 3.6]):

**Satz 5.1.2.** *Seien  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus,  $R'' \leq R'$  die einhüllende  $K^{\widehat{\alpha}}$ -Algebra von  $J^\alpha$  und  $J'' \subseteq J'$  das von  $J^\alpha$  erzeugte Jordan-abgeschlossene Jordan-System in  $R''$ . Außerdem seien  $H$  und  $H''$  die Zentren von  $E_2(J)$  bzw.  $E_2(J'')$ . Dann gilt:*

(a) *Ist  $E(T) \in H$  für  $T \in \mathcal{S}(J)$ , dann ist auch  $E(T^\alpha) \in H''$ .*

(b) *Die Menge*

$$N_\alpha := \{E(T^\alpha) \mid T \in \mathcal{S}(J) \text{ und } E(T) = E\}$$

*ist in  $H''$  enthalten.*

(c)  *$N_\alpha$  ist eine normale Untergruppe in  $E_2(J'')$  und die Abbildung*

$$\alpha_E : E_2(J) \rightarrow E_2(J'')/N_\alpha : E(T) \mapsto N_\alpha \cdot E(T^\alpha)$$

*mit  $T \in \mathcal{S}(J)$  ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.*

*Beweis:* (a) Sei  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  mit  $E(T) \in H$ . Dann ist  $E(T) = \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_2^n(T) & -e_2^{n-1}(T) \end{pmatrix} = aE \in H$  für ein  $a \in R^*$  mit  $at = ta$  für alle  $t \in J$  (vgl. 3.2.5). Damit gilt  $e_1^n(T) = a \in R^*$  und  $e_1^{n-1}(T) = 0$ . Nach Satz 3.5 in [20] folgt sofort  $e_1^{n-1}(T^\alpha) = 0'$ .

Außerdem gilt  $e_2^n(T) = 0$  und  $-e_2^{n-1}(T) = a \in R^*$ . Wegen  $e_2^n(T, 1) = e_2^n(T) = 0$  und  $e_2^{n-1}(T, 1) = e_2^{n-1}(T) = -a$  ist  $e_2^{n+1}(T, 1) = e_2^n(T, 1) \cdot 1 - e_2^{n-1}(T, 1) = a \in R^*$  und damit folgt analog nach dem gleichen Satz  $e_2^n(T^\alpha, 1') = e_2^n(T^\alpha) = 0'$  sowie  $e_2^{n+1}(T^\alpha, 1') \in R''^*$  und somit  $e_2^{n-1}(T^\alpha) \in R''^*$ .

Nun setze man  $S := (s, T, 0, -s, 0) \in \mathcal{S}(J)$  für ein  $s \in J$ . Aus

$$E(0^\alpha)E((-s)^\alpha)E(0^\alpha) = E(0')E(-s^\alpha)E(0') = E(s^\alpha)^{-1}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} E(S) &= E(s)E(T)E(s)^{-1} = E(T) = e_1^n(T)E, \\ E(S^\alpha) &= E(s^\alpha)E(T^\alpha)E(s^\alpha)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -e_2^{n-1}(T^\alpha) & -s^\alpha e_1^n(T^\alpha) - e_2^{n-1}(T^\alpha)s^\alpha \\ 0' & e_1^n(T^\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit 3.5 in [20] erhalten wir  $s^\alpha e_1^n(T^\alpha) = -e_2^{n-1}(T^\alpha)s^\alpha$  für alle  $s \in J$ . Für  $s = 1$  ergibt sich  $e_1^n(T^\alpha) = -e_2^{n-1}(T^\alpha) \in R''^*$ , so dass folglich  $e_1^n(T^\alpha)$  mit allen  $s' \in J^\alpha$  kommutiert. Um zu zeigen, dass  $e_1^n(T^\alpha)$  auch mit allen  $t \in J''$  kommutiert, reicht es wegen 5.1.1 nur die Inversen von allen  $s' \in J^{\alpha*}$  zu betrachten. Sei also  $s' \in J^{\alpha*}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} e_1^n(T^\alpha)(s')^{-1} &= (s'(e_1^n(T^\alpha))^{-1})^{-1} = (s'e_1^n(T^\alpha)(e_1^n(T^\alpha))^{-2})^{-1} \\ &= (e_1^n(T^\alpha)s'(e_1^n(T^\alpha))^{-2})^{-1} = (e_1^n(T^\alpha))^2(s')^{-1}(e_1^n(T^\alpha))^{-1} \\ \Leftrightarrow e_1^n(T^\alpha)(s')^{-1}e_1^n(T^\alpha) &= (e_1^n(T^\alpha))^2(s')^{-1} \\ \Leftrightarrow (s')^{-1}e_1^n(T^\alpha) &= e_1^n(T^\alpha)(s')^{-1}. \end{aligned}$$

Das gleiche Prinzip benutzt man auch beim Zeigen von  $e_1^n(T^\alpha)t = te_1^n(T^\alpha)$  für alle  $t \in J''^* \setminus J^{\alpha*}$ . Daher ist  $E(T^\alpha) \in H'' = E_2(J'') \cap \{aE' \mid a \in R''^*, at = ta \forall t \in J''\}$ .

(b) Sei  $T \in \mathcal{S}(J)$  mit  $E(T) = E \in H$ . Teil (a) liefert dann  $E(T^\alpha) \in H''$ . Damit gilt die Behauptung.

(c) Für ein  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definieren wir

$$\widehat{T} := (0, -t_n, 0, 0, -t_{n-1}, 0, \dots, 0, -t_1, 0) \in \mathcal{S}(J).$$

Die Identität  $E(t_i)^{-1} = E(0)E(-t_i)E(0)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  impli-

ziert die Gleichheit  $E(\widehat{T}) = E(T)^{-1}$ . Außerdem gilt wegen der Semilinearität von  $\alpha$

$$\begin{aligned}\widehat{T}^\alpha &= (0', (-t_n)^\alpha, 0', 0', (-t_{n-1})^\alpha, 0', \dots, 0', (-t_1)^\alpha, 0') \\ &= (0', -t_n^\alpha, 0', 0', -t_{n-1}^\alpha, 0', \dots, 0', -t_1^\alpha, 0') = \widehat{T}^\alpha.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $E' = E(0')E(0')^{-1} = E(0^\alpha)E(0^\alpha)^{-1} \in N_\alpha$ . Wir nehmen an, dass für ein  $V \in \mathcal{S}(J)$  die Gleichheit  $E(T) = E(V)$  gilt. Das ist äquivalent zu  $E(T)E(V)^{-1} = E(T)E(\widehat{V}) = E(T, \widehat{V}) = E$ . Damit ist  $E(T^\alpha, \widehat{V}^\alpha) = E(T^\alpha, \widehat{V}^\alpha) = E(T^\alpha)E(V^\alpha)^{-1} \in N_\alpha$ . Daraus können wir  $E(T^\alpha) \in N_\alpha \cdot E(V^\alpha)$  folgern.

Für zwei beliebige  $E(T^\alpha), E(V^\alpha) \in N_\alpha$  gilt dann wegen  $E(T) = E(V) = E$  nach dem oben Gezeigten  $E(T^\alpha)E(V^\alpha)^{-1} \in N_\alpha$ . Folglich ist  $N_\alpha$  eine Untergruppe von  $E_2(J'')$ , welche gemäß (a) und (b) normal ist.

Insgesamt erhalten wir  $N_\alpha \cdot E(T^\alpha) \subseteq N_\alpha \cdot E(V^\alpha)$  für alle  $T, V \in \mathcal{S}(J)$  mit  $E(T) = E(V)$ . Analog zeigt man  $N_\alpha \cdot E(V^\alpha) \subseteq N_\alpha \cdot E(T^\alpha)$ , indem man  $E(V)E(T)^{-1} = E$  betrachtet. Die gegenseitige Teilmengenbeziehung liefert die Gleichheit  $N_\alpha \cdot E(T^\alpha) = N_\alpha \cdot E(V^\alpha)$ . Damit ist  $\alpha_E$  wohldefiniert und offenbar ein Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{aligned}E(T_1)^{\alpha_E} E(T_2)^{\alpha_E} &= N_\alpha \cdot \underbrace{E(T_1^\alpha) \cdot N_\alpha}_{=N_\alpha \cdot E(T_1^\alpha)} \cdot E(T_2^\alpha) \\ &= N_\alpha \cdot E(T_1^\alpha, T_2^\alpha) \\ &= E(T_1, T_2)^{\alpha_E} \\ &= (E(T_1) \cdot E(T_2))^{\alpha_E}.\end{aligned}$$

□

Aus diesem Satz folgt direkt:

**Korollar 5.1.3.** *Seien alle Voraussetzungen von Satz 5.1.2 erfüllt. Ist  $N_\alpha$  trivial, dann ist die Abbildung*

$$\alpha_E : E_2(J) \rightarrow E_2(J'') : E(T) \mapsto E(T^\alpha)$$

mit  $T \in \mathcal{S}(J)$  ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Im nächsten Schritt soll eine Abbildung zwischen den projektiven elementaren Gruppen  $PE_2(J) \simeq E_2(J)/H$  und  $PE_2(J'') \simeq E_2(J'')/H''$  definiert werden. Dafür fassen wir die projektive Gerade  $\tilde{\mathbb{P}}(J'')$  als Teilmenge der projektiven Gerade  $\tilde{\mathbb{P}}(J')$  auf. Der folgende Satz zeigt, dass eine solche Identifizierung tatsächlich möglich ist:

**Satz 5.1.4.** *Sei  $J_1$  ein Jordan-System in einer  $K_1$ -Algebra  $R_1$  und  $J_2 \subseteq J_1$  ein Jordan-System in einer Algebra  $R_2$  über einem Unterkörper  $K_2 \leq K_1$ , wobei  $R_2$  ein Unterring von  $R_1$  ist. Dann ist*

$$\iota : \tilde{\mathbb{P}}(J_2) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J_1) : R_2(1, 0)E(T) \mapsto R_1(1, 0)E(T)$$

mit  $T \in \mathcal{S}(J_2)$  ein injektiver Morphismus von Distanzräumen  $(\tilde{\mathbb{P}}(J_2), \Delta_2) \rightarrow (\tilde{\mathbb{P}}(J_1), \Delta_1)$ .

*Beweis:* Wegen  $E_2(J_2) \leq E_2(J_1)$  ist  $\iota$  ein wohldefinierter Morphismus von Distanzräumen. Wir zeigen, dass  $\iota$  injektiv ist.

Seien  $R_2(1, 0)E(T), R_2(1, 0)E(V) \in \tilde{\mathbb{P}}(J_2)$  mit  $R_1(1, 0)E(T) = R_1(1, 0)E(V)$ . Dann folgt daraus  $R_1(1, 0) = R_1(1, 0)E(T)E(V)^{-1}$ , d.h.  $E(T)E(V)^{-1} \in E_2(J_2)$  liegt im Stabilisator von  $R_1(1, 0)$  und damit ist  $(a, 0)$  die erste Zeile von  $E(T)E(V)^{-1}$  mit  $a \in R_1^* \cap R_2$ . Wegen  $E_2(J_2) \leq GL_2(R_2)$  muss auch  $a \in R_2^*$  sein, so dass  $E(T)E(V)^{-1}$  auch im Stabilisator von  $R_2(1, 0)$  enthalten ist. Das liefert sofort die gewünschte Gleichheit  $R_2(1, 0)E(T) = R_2(1, 0)E(V)$ .  $\square$

Ab sofort identifizieren wir also die Punkte der projektiven Gerade  $\tilde{\mathbb{P}}(J'')$  mit denen von  $\tilde{\mathbb{P}}(J')$  vermöge  $R''(1', 0')E(T) \mapsto R'(1', 0')E(T)$  für alle  $T \in \mathcal{S}(J'')$ .

Nun können wir unter Berücksichtigung von Lemma 3.4.3 den nächsten Satz beweisen (vgl. [20, 4.4]):

**Satz 5.1.5.** *Seien  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus,  $R'' \leq R'$  die einhüllende  $K^{\hat{\alpha}}$ -Algebra von  $J^\alpha$  und  $J'' \subseteq J'$  das von  $J^\alpha$  erzeugte Jordan-abgeschlossene Jordan-System in  $R''$ . Dann gilt:*

(a) Die Abbildung

$$\alpha_{PE} : PE_2(J) \rightarrow PE_2(J'') : H \cdot E(T) \mapsto H'' \cdot E(T^\alpha)$$

mit  $T \in \mathcal{S}(J)$  ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

(b) Die Abbildung

$$\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'') \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J') : R(1, 0) \cdot E(T) \mapsto R'(1', 0') \cdot E(T^\alpha)$$

mit  $T \in \mathcal{S}(J)$  ist wohldefiniert.

(c) Das Paar  $(\alpha_{PE}, \bar{\alpha})$  ist ein Homomorphismus von Transformationsgruppen, d.h. für alle  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  und alle  $\delta \in PE_2(J)$  gilt  $p^{\delta\bar{\alpha}} = p^{\bar{\alpha}\delta''}$  mit  $\delta'' = \delta^{\alpha_{PE}}$ .

*Beweis:* (a) Sei  $N_\alpha$  wie in 5.1.2 definiert, dann ist  $N_\alpha \subseteq H''$ . Wir betrachten den kanonischen Epimorphismus

$$\eta : E_2(J'')/N_\alpha \rightarrow (E_2(J'')/N_\alpha)/(H''/N_\alpha)$$

und nach Isomorphiesatz gilt dann  $(E_2(J'')/N_\alpha)/(H''/N_\alpha) \simeq E_2(J'')/H''$ . Die Faktorgruppe  $E_2(J'')/H''$  ist ihrerseits zu der projektiven elementaren Gruppe  $PE_2(J'')$  isomorph, denn  $H''$  ist der Kern der Operation von  $E_2(J'')$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J'')$ . Die Komposition von  $\alpha_E$  und  $\eta$  liefert daher einen Homomorphismus

$$\alpha_E \circ \eta : E_2(J) \rightarrow PE_2(J'').$$

Für alle  $E(T) \in H$  mit  $T \in \mathcal{S}(J)$  gilt  $E(T)^{\alpha_E} = N_\alpha \cdot E(T^\alpha) \in H''/N_\alpha$  (gemäß 5.1.2(a)), so dass  $H^{\alpha_E} \subseteq H''/N_\alpha = \text{Kern } \eta$  ist. Daher ist  $H \subseteq \text{Kern } \alpha_E \circ \eta$ , so dass die Abbildung

$$\alpha_{PE} : E_2(J)/H \simeq PE_2(J) \rightarrow PE_2(J'') : H \cdot E(T) \mapsto H'' \cdot E(T^\alpha)$$

nach der universellen Eigenschaft der Faktorgruppen ein durch die Gleich-

heit  $(H \cdot E(T))^{\alpha_{PE}} = E(T)^{\alpha_{E\eta}}$  wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist (siehe [50, S. 20]).

- (b) Für  $S \in \mathcal{S}(J)$  sei  $E(S)$  eine Matrix, die den Punkt  $R(1, 0)$  fixiert, dann hat die erste Zeile von  $E(S)$  die Gestalt  $(a, 0)$  mit  $a \in R^*$ . Nach Satz 3.5 in [20] hat dann  $E(S^\alpha)$  die erste Zeile der Form  $(a', 0')$  mit einem  $a' \in R''^* \subseteq R^*$ , so dass  $E(S^\alpha)$  den Punkt  $R'(1', 0')$  auch invariant lässt (vgl. Beweis von 5.1.2(a)). Daher geht der Stabilisator von  $R(1, 0)$  unter  $\alpha_{PE}$  in den Stabilisator von  $R'(1', 0')$  über.

Sei nun  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  ein beliebiger Punkt. Dann existiert eine Sequenz  $T \in \mathcal{S}(J)$ , so dass  $p = R(1, 0)E(T)$  ist. Weiterhin sei  $p = R(1, 0)E(V)$  eine weitere Darstellung von  $p$  mit  $V \in \mathcal{S}(J)$ . Dann erhalten wir

$$R(1, 0)H \cdot E(T) \cdot E(V)^{-1} = \underbrace{R(1, 0)E(T)}_{=p=R(1,0)E(V)} \cdot E(V)^{-1} = R(1, 0)$$

und daher ist  $H \cdot E(T) \cdot E(V)^{-1} \in PE_2(J)$  im Stabilisator von  $R(1, 0)$  enthalten. Nach dem im ersten Absatz Gezeigten wird dann  $R'(1', 0')$  auch durch  $H'' \cdot E(T^\alpha) \cdot E(V^\alpha)^{-1}$  fixiert, d.h.

$$\begin{aligned} R'(1', 0')H'' \cdot E(T^\alpha) \cdot E(V^\alpha)^{-1} &= R'(1', 0') \\ \Leftrightarrow R'(1', 0')H'' \cdot E(T^\alpha) &= R'(1', 0')H'' \cdot E(V^\alpha). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Wohldefiniertheit von  $\bar{\alpha}$ .

- (c) Gemäß (a) und (b) ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}}(J) & \xrightarrow{E(T)} & \tilde{\mathbb{P}}(J) \\ \bar{\alpha} \downarrow & & \downarrow \bar{\alpha} \\ \tilde{\mathbb{P}}(J'') & \xrightarrow{E(T^\alpha)} & \tilde{\mathbb{P}}(J'') \end{array} \quad (5.1)$$

für alle  $T \in \mathcal{S}(J)$  kommutativ. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Jetzt zeigen wir, dass  $\bar{\alpha}$  ein  $\Delta$ -Morphismus ist.

**Lemma 5.1.6.** *Seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Seien außerdem  $\alpha : J \rightarrow J'$  und  $\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'')$  wie in 5.1.5. Dann bildet  $\bar{\alpha}$  distante Punkte in distante Punkte ab.*

*Beweis:* Seien  $p, q \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  distant. Gemäß 3.4.3 operiert  $PE_2(J)$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  2- $\Delta$ -transitiv. Daher existiert ein  $\beta \in PE_2(J)$  mit  $p^\beta = R(1, 0)$  und  $q^\beta = R(0, 1)$ . Identifiziert man  $\beta^{-1} \in PE_2(J)$  mit einer Matrix  $E(T) \in E_2(J)$  für ein  $T \in \mathcal{S}(J)$ , dann können die Bilder von  $p = R(1, 0)^{\beta^{-1}} = R(1, 0) \cdot E(T)$  und  $q = R(0, 1)^{\beta^{-1}} = R(0, 1) \cdot E(T)$  unter  $\bar{\alpha}$  bestimmt werden. Es gilt nämlich  $p^{\bar{\alpha}} = R'(1', 0') \cdot E(T^\alpha)$  und  $q^{\bar{\alpha}} = R'(0', 1') \cdot E(T^\alpha)$ . Da aber  $PE_2(J'')$  auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J'')$  ebenso 2- $\Delta$ -transitiv operiert ( $J'' \subseteq J'$  ist Jordan-abgeschlossen in  $R''$ ), sind auch  $p^{\bar{\alpha}}$  und  $q^{\bar{\alpha}}$  in  $\tilde{\mathbb{P}}(J'')$  distant.  $\square$

Wir können sogar beweisen, dass  $\bar{\alpha}$  eine harmonische Abbildung ist. Um eine harmonische Abbildung definieren zu können, erinnern wir kurz an den Begriff des harmonischen Quadrupels (vgl. [42, 1.3.5]):

**Definition 5.1.7.** *Für vier Punkte  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}(R)$  mit paarweise distanten  $p_1, p_2, p_3$  und distanten  $p_1, p_4$  heißt das Quadrupel  $(p_1 p_2 p_3 p_4)$  genau dann **harmonisch**, wenn es ein  $\gamma \in PGL_2(R)$  existiert, so dass  $(p_1^\gamma, p_2^\gamma, p_3^\gamma, p_4^\gamma) = (R(1, 0), R(0, 1), R(1, 1), R(-1, 1))$  gilt.*

Für ein harmonisches Quadrupel  $(p_1 p_2 p_3 p_4)$  gilt insbesondere, dass auch  $p_1, p_2, p_4$  paarweise distant sind. Außerdem sind alle vier Punkte genau dann paarweise distant, wenn  $2 \in R^*$  ist (vgl. [36, S. 463]).

Eine harmonische Abbildung definiert man wie folgt [20, 4.7]:

**Definition 5.1.8.** *Eine Abbildung  $\tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J')$  heißt **harmonisch**, wenn sie harmonische Quadrupel invariant lässt.*

**Lemma 5.1.9.** *Seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Seien außerdem  $\alpha : J \rightarrow J'$  und  $\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'')$  wie in 5.1.5. Dann ist  $\bar{\alpha}$  eine harmonische Abbildung.*

*Beweis:* Seien  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \tilde{\mathbb{P}}(J) \subseteq \mathbb{P}(R)$  und  $(p_1 p_2 p_3 p_4)$  harmonisch, d.h.  $p_1, p_2, p_3$  bzw.  $p_1, p_2, p_4$  sind paarweise distant. Wegen 3.4.3 können wir oBdA

$p_1 = R(1, 0)$  und  $p_2 = R(0, 1)$  setzen. Daher sind  $p_3 = R(a, 1)$  und  $p_4 = R(b, 1)$  mit  $a, b \in J^*$ .

Nach Definition 5.1.7 existiert ein  $\gamma \in PGL_2(R)$ , so dass

$$\begin{aligned} (p_1^\gamma, p_2^\gamma, p_3^\gamma, p_4^\gamma) &= (R(1, 0)^\gamma, R(0, 1)^\gamma, R(a, 1)^\gamma, R(b, 1)^\gamma) \\ &= (R(1, 0), R(0, 1), R(1, 1), R(-1, 1)) \end{aligned}$$

gilt. Man rechnet leicht nach, dass  $\gamma$  durch eine Matrix  $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$  mit  $x, y \in R^*$  induziert ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} R(a, 1)^\gamma &= R(1, 0) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = R(ax, y) = R(y^{-1}ax, 1) = R(1, 1) \Leftrightarrow a = yx^{-1}, \\ R(b, 1)^\gamma &= R(1, 0) \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = R(bx, y) = R(y^{-1}bx, 1) = R(-1, 1) \Leftrightarrow b = -yx^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich  $p_4 = R(-a, 1)$ . Wegen

$$R(t, 1)^{\bar{\alpha}} = (R(1, 0) \cdot E(t))^{\bar{\alpha}} = R'(1', 0') \cdot E(t^\alpha) = R'(t^\alpha, 1')$$

für alle  $t \in J$  und nach 5.1.6 ist das Quadrupel

$$(p_1^{\bar{\alpha}}, p_2^{\bar{\alpha}}, p_3^{\bar{\alpha}}, p_4^{\bar{\alpha}}) = (R'(1', 0')R'(0', 1')R'(a^\alpha, 1')R(-a^\alpha, 1'))$$

mit  $a^\alpha \in J'^*$  harmonisch. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Nun sind wir in der Lage unser Hauptergebnis dieses Abschnitts zu beweisen.

**Satz 5.1.10.** *Seien  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus,  $R'' \leq R'$  die einhüllende  $K^{\hat{\alpha}}$ -Algebra von  $J^\alpha$  und  $J'' \subseteq J'$  das von  $J^\alpha$  erzeugte Jordan-abgeschlossene Jordan-System in  $R''$ . Die Abbildung  $\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'')$  bildet stets  $K$ -Ketten in  $K'$ -Ketten ab.*

*Beweis:* Seien  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbb{P}}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$  und  $\tilde{\Sigma}' = (\tilde{\mathbb{P}}(J''), \mathfrak{C}(K', R', J''))$  die Kettengeometrien über  $(K, R, J)$  bzw.  $(K', R', J'')$  und  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  eine Kette in  $\tilde{\Sigma}$ . Dann gibt es laut 3.4.5 ein  $\delta \in PE_2(J)$ , so dass  $C$  die Gestalt  $C = (C_h)^\delta$

für ein  $h \in J^*$  mit

$$C_h = \{R(sh, t) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K)\} = \{R(\lambda h, 1) \mid \lambda \in K\} \cup \{R(1, 0)\}$$

hat. Die Kette durch  $R'(1', 0')$ ,  $R'(0', 1')$  und  $R'(h^\alpha, 1')$  kann man analog als Menge

$$C_{h^\alpha} = \{R'(s'h^\alpha, t') \mid K'(s', t') \in \mathbb{P}(K')\} = \{R'(\lambda'h^\alpha, 1') \mid \lambda' \in K'\} \cup \{R'(1', 0')\}$$

darstellen.

Wegen der Semilinearität von  $\alpha$  gilt  $(\lambda h)^\alpha = \lambda^{\hat{\alpha}} h^\alpha \in K^{\hat{\alpha}} h^\alpha \subseteq K' h^\alpha$  für alle  $\lambda \in K$  und  $h \in J$  und daher  $(Kh)^\alpha \subseteq K' h^\alpha$ . Identifiziert man nun  $\delta \in PE_2(J)$  mit einer Matrix  $E(T) \in E_2(J)$ ,  $T \in \mathcal{S}(J)$ , dann folgt daraus für jeden Punkt  $R(a, b) \in C$ :

$$\begin{aligned} R(a, b)^{\bar{\alpha}} &= (R(\lambda h, 1) \cdot E(T))^{\bar{\alpha}} = (R(1, 0) \cdot E(\lambda h, T))^{\bar{\alpha}} \\ &= R'(1', 0') \cdot E((\lambda h)^\alpha, T^\alpha) = R'((\lambda h)^\alpha, 1') \cdot E(T^\alpha) \\ &= R'(\lambda^{\hat{\alpha}} h^\alpha, 1') \cdot E(T^\alpha) \in (C_{h^\alpha})^{\delta'} \end{aligned}$$

bzw.

$$R(a, b)^{\bar{\alpha}} = (R(1, 0) \cdot E(T))^{\bar{\alpha}} = R'(1', 0') \cdot E(T^\alpha) \in (C_{h^\alpha})^{\delta'}$$

mit  $\delta' \in PE_2(J'')$ , welche durch die Matrix  $E(T^\alpha) \in E_2(J'') \leq E_2(J')$  induziert wird. Insgesamt ergibt sich daher  $C^{\bar{\alpha}} \subseteq (C_{h^\alpha})^{\delta'} \in \mathfrak{C}(K', R', J')$ .  $\square$

Es ist klar, dass wir im Fall, dass  $\hat{\alpha} : K \rightarrow K'$  ein Körperisomorphismus ist, die Gleichheit  $(Kh)^\alpha = K' h^\alpha$  für alle  $h \in J$  erhalten, so dass jede  $K$ -Kette auf  $K'$ -Kette durch die in 5.1.10 definierte Abbildung abgebildet wird. Diese Folgerung formulieren wir im folgenden Korollar:

**Korollar 5.1.11.** *Seien  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$ . Seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Weiter sei  $\alpha : J \rightarrow J'$  ein Jordan-Homomorphismus mit dem Begleitisomorphismus*

$\hat{\alpha} : K \rightarrow K'$  und  $\bar{\alpha}$  wie in 5.1.5. Dann ist die Abbildung

$$\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'') \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J')$$

ein Morphismus von Kettengeometrien.

**Bemerkung 5.1.12.** Im Fall, dass  $J$  stabil ist, erhalten wir wegen der Gleichheit  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$  sowie  $R(1 + ab, a) = R(1, 0)E(-a)E(b)$  für alle  $a, b \in J$  einen Morphismus von Kettengeometrien

$$\bar{\alpha} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'') \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J') : R(1 + ab, a) \mapsto R'(1' + a^\alpha b^\alpha, a^\alpha),$$

welcher uns schon aus dem Fall von starken Jordan-Systemen bekannt ist (vgl. [26, 4.2.13]).

## 5.2 Homotopismen von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen und induzierte Morphismen

Seien wieder  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  und  $J, J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Statt eines Jordan-Homomorphismus betrachten wir nun einen Homotopismus  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$ .

Im Fall von starken Jordan-Systemen  $J, J'$  wissen wir, dass jeder Homotopismus  $J \rightarrow J'$  einen Morphismus von Kettengeometrien induziert. Genauer gilt der folgende Satz (siehe [11, 2.6]):

**Satz 5.2.1.** *Seien  $J, J'$  starke Jordan-Systeme in  $K$ -Algebren  $R$  bzw.  $R'$  und sei  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J') : R(1 + ab, a) \mapsto R'(1' + a^\alpha b^\beta, a^\alpha) \quad (5.2)$$

ein Morphismus der Kettengeometrien. Der Morphismus  $\gamma$  ist genau dann stark, wenn  $\alpha$  (und damit auch  $\beta$ ) Nichteinheiten in Nichteinheiten abbildet. Ist  $\dim_K J^\alpha (= \dim_K J^\beta) \geq 2$ , dann ist  $\gamma$  nicht trivial.

Das Ziel dieses Abschnitts ist zu beweisen, dass  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  auf

ähnliche Art und Weise wie in (5.2) einen Morphismus von Kettengeometrien  $\tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  mit  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbb{P}}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$ ,  $\tilde{\Sigma}' = (\tilde{\mathbb{P}}(J'), \mathfrak{C}(K', R', J'))$  induziert. Und zwar definieren wir die Abbildung (vgl. 5.1.5(b))

$$\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J') : R(1, 0)E(T) \mapsto R'(1', 0')E(T^{(\alpha, \beta)}) \quad (5.3)$$

mit

$$T^{(\alpha, \beta)} = \begin{cases} (t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ (t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

für  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ ,  $n \geq 0$ . (Beweis der Wohldefiniertheit von  $\gamma$  folgt weiter unten).

Entsprechend definieren wir die durch den Homotopismus  $(\beta, \alpha)$  induzierte Abbildung

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{(\beta, \alpha)} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J') : R(1, 0)E(T) \mapsto R'(1', 0')E(T^{(\beta, \alpha)})$$

mit

$$T^{(\beta, \alpha)} = \begin{cases} (t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_{n-1}^\beta, t_n^\alpha), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ (t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\beta, t_n^\alpha), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

für  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ ,  $n \geq 0$ . Insbesondere gilt für  $\mathbb{P}(J) \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$  (vgl. (5.2)):

$$\gamma|_{\mathbb{P}(J)} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J') \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J')$$

$$R(t_1 t_2 - 1, t_1) = R(1, 0)E(t_1, t_2) \mapsto R'(1', 0')E(t_1^\alpha, t_2^\beta) = R(t_1^\alpha t_2^\beta - 1', t_1^\alpha)$$

bzw.

$$\tilde{\gamma}|_{\mathbb{P}(J)} : \mathbb{P}(J) \rightarrow \mathbb{P}(J') \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J')$$

$$R(t_1 t_2 - 1, t_1) \mapsto R(t_1^\beta t_2^\alpha - 1', t_1^\beta).$$

Um das Hauptergebnis dieses Abschnitts erreichen zu können, benötigen wir die folgenden Lemmata (vgl. [20, 3.3, 3.4, 3.5]; man beachte 3.2.8):

**Lemma 5.2.2.** *Sei  $R$  eine Algebra über einem Körper  $K$  und  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System in  $R$ . Dann gilt:*

(a) *Ist  $h = e_1^n(T)x\tilde{e}_1^n(T)$  für ein  $x \in J$  und  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ ,  $n \geq 0$ , dann ist*

$$h^\alpha = (e_1^n(T)x\tilde{e}_1^n(T))^\alpha = \begin{cases} e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})x^\alpha\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ e_1^n(T^{(\beta,\alpha)})x^\beta\tilde{e}_1^n(T^{(\beta,\alpha)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

*Eine analoge Aussage gilt auch für  $h^\beta$ .*

(b) *Ist  $h = e_1^n(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T)$  für eine Folge  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ ,  $n \geq 0$ , dann ist*

$$h^\alpha = (e_1^n(T)\tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha = \begin{cases} e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})\tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ e_1^n(T^{(\beta,\alpha)})\tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\beta,\alpha)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

*Eine analoge Aussage gilt auch für  $h^\beta$ .*

*Beweis:* (a) Wir beweisen die Aussage mit Hilfe der vollständigen Induktion. Für  $n \in \{0, 1, 2\}$  ist die Behauptung schon mal richtig:

$$\begin{aligned} h^\alpha &= (e_1^0(T)x\tilde{e}_1^0(T))^\alpha = x^\alpha = e_1^0(T^{(\alpha,\beta)})x^\alpha\tilde{e}_1^0(T^{(\alpha,\beta)}), \\ h^\alpha &= (e_1^1(T)x\tilde{e}_1^1(T))^\alpha = (t_1xt_1)^\alpha = t_1^\alpha x^\beta t_1^\alpha = e_1^1(T^{(\beta,\alpha)})x^\beta\tilde{e}_1^1(T^{(\beta,\alpha)}), \\ h^\alpha &= (e_1^2(T)x\tilde{e}_1^2(T))^\alpha = ((t_1t_2 - 1)x(t_2t_1 - 1))^\alpha \\ &= (t_1t_2xt_2t_1 - (t_1t_2x + xt_2t_1) + x)^\alpha \\ &= t_1^\alpha t_2^\beta x^\alpha t_2^\beta t_1^\alpha - (t_1^\alpha t_2^\beta x^\alpha + x^\alpha t_2^\beta t_1^\alpha) + x^\alpha \\ &= e_1^2(T^{(\alpha,\beta)})x^\alpha\tilde{e}_1^2(T^{(\alpha,\beta)}), \end{aligned}$$

denn es gilt

$$(t_1t_2x + xt_2t_1)^\alpha = ((t_1 + x)t_2(t_1 + x) - t_1t_2t_1 - xt_2x)^\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= (t_1^\alpha + x^\alpha)t_2^\beta(t_1^\alpha + x^\alpha) - t_1^\alpha t_2^\beta t_1^\alpha - x^\alpha t_2^\beta x^\alpha \\
 &= t_1^\alpha t_2^\beta x^\alpha + x^\alpha t_2^\beta t_1^\alpha.
 \end{aligned}$$

Nun setzen wir voraus, dass die Aussage bis zu einem bestimmten  $n$  gilt. Wir erweitern die Folge  $T$  mit einem  $t_{n+1} \in J$  und zeigen, dass die Aussage auch für  $n + 1$  gültig ist. Wir beweisen nur den Fall, dass  $n \in 2\mathbb{N}$  ist (für  $n \in 2\mathbb{N} + 1$  verläuft der Beweis ganz analog). Dafür betrachten wir den Ausdruck  $h = e_1^{n+1}(T, t_{n+1})x\tilde{e}_1^{n+1}(T, t_{n+1})$  und wenden darauf die Regeln (3.4) so oft an, bis wir eine Summe von solchen Ausdrücken bekommen, so dass beim Anwenden von Eigenschaften eines Homotopismus bzw. der Induktionsvoraussetzung auf diese eine Summe von ähnlichen Ausdrücken entsteht, welche aber nun nicht von  $t_i \in J$  bzw.  $x \in J$ , sondern von ihren  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Bildern abhängig ist. Beim rückwärtigen Anwenden von (3.4) werden die erhaltenen Ausdrücke wieder zusammengefasst, was schließlich das Gewünschte liefert.

Genauer gilt nach 3.2.8 und nach Induktionsvoraussetzung (IV):

$$\begin{aligned}
 h^\alpha &= (e_1^{n+1}(T, t_{n+1})x\tilde{e}_1^{n+1}(T, t_{n+1}))^\alpha \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^n(T)t_{n+1}xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T))^\alpha + (e_1^{n-1}(T)x\tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha \\
 &\quad - (e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T))^\alpha \\
 &\stackrel{(IV)}{=} e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) + e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}) \\
 &\quad - \underbrace{(e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T))^\alpha}_{=:u_0},
 \end{aligned}$$

denn wegen  $n - 1 \in 2\mathbb{N} + 1$  haben wir

$$\begin{aligned}
 (e_1^{n-1}(T)x\tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha &= (e_1^{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})x\tilde{e}_1^{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}))^\alpha \\
 &= e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha)x^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha) \\
 &= e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta)x^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta) \\
 &= e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}).
 \end{aligned}$$

Nun zerlegen wir den Ausdruck  $u_0$  und versuchen sein  $\alpha$ -Bild zu be-

stimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
u_0 &= e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T) \\
&\stackrel{(3.4)}{=} e_1^{n-1}(T)t_n t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\
&\quad + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}t_n\tilde{e}_1^{n-1}(T) - e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T) \\
&= e_1^{n-1}(T)(t_n t_{n+1}x + xt_{n+1}t_n)\tilde{e}_1^{n-1}(T) \\
&\quad - (e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T))
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_0^\alpha &= (e_1^n(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T) + e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^n(T))^\alpha \\
&\stackrel{(IV)}{=} e_1^{n-1}((t_1, \dots, t_{n-1})^{(\beta, \alpha)})(t_n t_{n+1}x + xt_{n+1}t_n)^\beta \tilde{e}_1^{n-1}((t_1, \dots, t_{n-1})^{(\beta, \alpha)}) \\
&\quad - \underbrace{(e_1^{n-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T) + e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha}_{=: u_1}, \\
&= e_1^{n-1}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-2}^\beta, t_{n-1}^\alpha)(t_n^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta) \tilde{e}_1^{n-1}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-2}^\beta, t_{n-1}^\alpha) \\
&\quad - u_1^\alpha \\
&= e_1^{n-1}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta)(t_n^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta) \tilde{e}_1^{n-1}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta) - u_1^\alpha \\
&= e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})(t_n^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta) \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)}) - u_1^\alpha,
\end{aligned}$$

denn es ist

$$\begin{aligned}
(t_n t_{n+1}x + xt_{n+1}t_n)^\beta &= ((t_n + x)t_{n+1}(t_n + x) - t_n t_{n+1}t_n - xt_{n+1}x)^\beta \\
&= (t_n^\beta + x^\beta)t_{n+1}^\alpha (t_n^\beta + x^\beta) - t_n^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta - x^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta \\
&= t_n^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta.
\end{aligned}$$

Hierbei ist der Ausdruck  $u_1$  vom gleichen Typ wie  $u_0$ , so dass wir den Vorgang wiederholen können. Analog wie oben ergibt sich für  $u_1$  wegen  $n - 2 \in 2\mathbb{N}$ :

$$u_1^\alpha = e_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)})(t_{n-1}^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha + t_{n+1}^\alpha x^\beta t_{n-1}^\alpha) \tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)})$$

$$- \underbrace{(e_1^{n-2}(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{n-3}(T) + e_1^{n-3}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^{n-2}(T))^\alpha}_{=:u_2},$$

weil

$$\begin{aligned} e_1^{n-2}((t_1, \dots, t_{n-2})^{(\alpha, \beta)}) &= e_1^{n-2}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-3}^\alpha, t_{n-2}^\beta) \\ &= e_1^{n-2}(t_1^\alpha, \dots, t_{n-2}^\beta, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta) \\ &= e_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)}) \end{aligned}$$

und entsprechend  $\tilde{e}_1^{n-2}((t_1, \dots, t_{n-2})^{(\alpha, \beta)}) = \tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)})$  gilt.

Wiederholen wir mehrmals den Vorgang und definieren wir nach jedem  $i$ -ten Schritt den entsprechenden Ausdruck  $u_i$ , dann ergibt sich für  $u_i$  nach Induktionsvoraussetzung

$$u_i^\alpha = e_1^{n-i-1}(T^{(\alpha, \beta)})(t_{n-i}^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha + t_{n+1}^\alpha x^\beta t_{n-i}^\alpha) \tilde{e}_1^{n-i-1}(T^{(\alpha, \beta)}) - u_{i+1}^\alpha,$$

falls  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  ungerade und damit  $n-i-1 \in 2\mathbb{N}$  ist, und

$$u_i^\alpha = e_1^{n-i-1}(T^{(\alpha, \beta)})(t_{n-i}^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_{n-i}^\beta) \tilde{e}_1^{n-i-1}(T^{(\alpha, \beta)}) - u_{i+1}^\alpha$$

für gerade  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , also  $n-i-1 \in 2\mathbb{N}+1$ . Hierbei soll man beachten, dass  $x \in J$  und  $t_i \in J$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  stets unter derselben Abbildung  $\alpha$  bzw.  $\beta$  abgebildet wird.

Nach dem letzten Schritt erhalten wir wegen  $i = n-1 \in 2\mathbb{N}+1$

$$\begin{aligned} u_{n-1}^\alpha &= e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})(t_1^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha + t_{n+1}^\alpha x^\beta t_1^\alpha) \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)}) \\ &\quad - (e_1^0(T)t_{n+1}x\tilde{e}_1^{-1}(T) + e_1^{-1}(T)xt_{n+1}\tilde{e}_1^0(T))^\alpha \\ &\stackrel{(3.2)}{=} e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})(t_1^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha + t_{n+1}^\alpha x^\beta t_1^\alpha) \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)}) - 0^\alpha \\ &= e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})(t_1^\alpha x^\beta t_{n+1}^\alpha + t_{n+1}^\alpha x^\beta t_1^\alpha) \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)}) \\ &\quad - (e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^{-1}(T^{(\alpha, \beta)}) + e_1^{-1}(T^{(\alpha, \beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)})) \\ &= (e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})t_1^\alpha - e_1^{-1}(T^{(\alpha, \beta)}))x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)}) \\ &\quad + e_1^0(T^{(\alpha, \beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta (t_1^\alpha \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha, \beta)}) - \tilde{e}_1^{-1}(T^{(\alpha, \beta)})) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.4)}{=} e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha,\beta)}) + e_1^0(T^{(\alpha,\beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}).$$

Setzen wir nun  $u_{n-1}^\alpha$  in  $u_{n-2}^\alpha$  ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} u_{n-2}^\alpha &= e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})(t_2^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_2^\beta) \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) - u_{n-1}^\alpha \\ &= e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})(t_2^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_2^\beta) \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) \\ &\quad - (e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha,\beta)}) + e_1^0(T^{(\alpha,\beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)})) \\ &= (e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})t_2^\beta - e_1^0(T^{(\alpha,\beta)}))t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) \\ &\quad + e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha (t_2^\beta \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) - \tilde{e}_1^0(T^{(\alpha,\beta)})) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} e_1^2(T^{(\alpha,\beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) + e_1^1(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^2(T^{(\alpha,\beta)}). \end{aligned}$$

Führt man so weiter fort, so kommen wir schließlich zu

$$\begin{aligned} u_0^\alpha &= e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})(t_n^\beta t_{n+1}^\alpha x^\beta + x^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta) \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}) \\ &\quad - e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})x^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha,\beta)}) + e_1^{n-2}(T^{(\alpha,\beta)})t_{n+1}^\alpha x^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}). \end{aligned}$$

Das liefert

$$\begin{aligned} h^\alpha &= e_1^{n+1}(T^{(\alpha,\beta)}, t_{n+1}^\alpha) x^\beta \tilde{e}_1^{n+1}(T^{(\alpha,\beta)}, t_{n+1}^\alpha) \\ &= e_1^{n+1}((T, t_{n+1})^{(\beta,\alpha)}) x^\beta \tilde{e}_1^{n+1}((T, t_{n+1})^{(\beta,\alpha)}), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Damit gilt die Behauptung für alle  $n \geq 0$ .

- (b) Die zweite Aussage beweisen wir analog mit Hilfe der vollständigen Induktion. Für  $n \in \{0, 1\}$  ist die Behauptung trivial:

$$\begin{aligned} h^\alpha &= (e_1^0(T) \tilde{e}_1^{-1}(T))^\alpha = 0' = e_1^0(T^{(\alpha,\beta)}) \tilde{e}_1^{-1}(T^{(\alpha,\beta)}), \\ h^\alpha &= (e_1^1(T) \tilde{e}_1^0(T))^\alpha = t_1^\alpha = e_1^1(T^{(\beta,\alpha)}) \tilde{e}_1^0(T^{(\beta,\alpha)}). \end{aligned}$$

Sei nun  $n \geq 2$ . Wir nehmen an, dass die Aussage für ein festes  $n$  gilt (oBdA sei  $n$  gerade, die Behauptung für  $n$  ungerade beweist man analog), und zeigen deren Gültigkeit für  $n+1$  (vgl. Beweis von 3.2.8).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 h^\alpha &= (e_1^{n+1}(T, t_{n+1})\tilde{e}_1^n(T, t_{n+1}))^\alpha \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^{n-1}(T)t_n t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha + (e_1^{n-2}(T)t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T))^\alpha \\
 &\quad - (e_1^{n-1}(T)t_n t_{n+1} \tilde{e}_1^{n-2}(T) + e_1^{n-2}(T)t_{n+1} t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha \\
 &\quad - (e_1^{n-1}(T)t_n \tilde{e}_1^{n-1}(T))^\alpha + (e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-2}(T))^\alpha \\
 &\stackrel{(a)}{=} e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})t_n^\beta t_{n+1}^\alpha t_n^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)}) + e_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)})t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)}) \\
 &\quad - (e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})t_n^\beta t_{n+1}^\alpha \tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)}) + e_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)})t_{n+1}^\alpha t_n^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})) \\
 &\quad - e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})t_n^\beta \tilde{e}_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)}) + e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})\tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)}),
 \end{aligned}$$

denn für  $n - 1 \in 2\mathbb{N} + 1$  gilt nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
 (e_1^{n-1}(T)\tilde{e}_1^{n-2}(T))^\alpha &= (e_1^{n-1}(t_1, \dots, t_n)\tilde{e}_1^{n-2}(t_1, \dots, t_n))^\alpha \\
 &= (e_1^{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})\tilde{e}_1^{n-2}(t_1, \dots, t_{n-1}))^\alpha \\
 &= (e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha)\tilde{e}_1^{n-2}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha)) \\
 &= (e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta)\tilde{e}_1^{n-2}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta)) \\
 &= e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)})\tilde{e}_1^{n-2}(T^{(\alpha, \beta)}).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass auch die zweite Aussage für alle  $n \geq 0$  wahr ist.  $\square$

**Lemma 5.2.3.** *Seien  $J, J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in Algebren  $R$  bzw.  $R'$  über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  und  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus. Dann gilt für alle  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$ :*

(a) *Ist  $e_1^n(T) \in R^*$ , dann ist auch  $e_1^n(T^{(\alpha, \beta)}) \in R'^*$ .*

(b) *Gilt  $e_1^n(T) \in R^*$  und  $e_1^{n-1}(T) = 0$ , dann folgt daraus  $e_1^{n-1}(T^{(\alpha, \beta)}) = 0'$ .*

*Beweis:* (a) Sei  $e_1^n(T) \in R^*$ , dann ist auch  $\tilde{e}_1^n(T) \in R'^*$  (gemäß [20, 2.8]).

Nach Lemma 3.2.8 gilt  $h := e_1^n(T)\tilde{e}_1^n(T) \in J^*$ , so dass  $h^\alpha$  und  $h^\beta$  in  $J'$  auch invertierbar sind, da  $\alpha$  und  $\beta$  Einheiten in Einheiten abbilden (siehe [11, 2.2]).

Sei  $n \in 2\mathbb{N}$  (die Behauptung für  $n \in 2\mathbb{N} + 1$  gilt analog). Dann erhalten

wir laut 5.2.2(a):

$$h^\alpha = (e_1^n(T)\tilde{e}_1^n(T))^\alpha = e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})1^\alpha\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \in J'^* \subseteq R'^*.$$

Daher ist  $e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})$  rechtsinvertierbar. Sei nun  $\tilde{T} = (t_n, \dots, t_1)$  und  $\tilde{h} := \tilde{e}_1^n(T)e_1^n(T) = e_1^n(\tilde{T})\tilde{e}_1^n(\tilde{T}) \in J^*$ , dann ergibt sich analog

$$\begin{aligned} \tilde{h}^\beta &= (e_1^n(\tilde{T})\tilde{e}_1^n(\tilde{T}))^\beta = e_1^n(\tilde{T}^{(\beta,\alpha)})1^\beta\tilde{e}_1^n(\tilde{T}^{(\beta,\alpha)}) \\ &= e_1^n(t_n^\beta, t_{n-1}^\alpha, \dots, t_1^\alpha)1^\beta\tilde{e}_1^n(t_n^\beta, t_{n-1}^\alpha, \dots, t_1^\alpha) \\ &= \tilde{e}_1^n(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_n^\beta)1^\beta e_1^n(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_n^\beta) \\ &= \tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)})1^\beta e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \in J'^* \subseteq R'^*, \end{aligned}$$

so dass  $e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})$  auch linksinvertierbar ist. Insgesamt folgt daraus  $e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \in R'^*$ .

- (b) Sei nun  $e_1^n(T) \in R^*$  und  $e_1^{n-1}(T) = 0$ . Dann ist  $\tilde{e}_1^n(T) \in R^*$  und nach (a) gilt dann  $\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \in R'^*$ . Wir betrachten wieder nur den Fall, dass  $n$  gerade ist.

Erweitert man die Folge  $T \in \mathcal{S}(J)$  mit 1, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} e_1^{n+1}(T, 1) &= e_1^n(T, 1) \cdot 1 - e_1^{n-1}(T, 1) \\ &= e_1^n(T) - e_1^{n-1}(T) = e_1^n(T). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Außerdem gilt offenbar  $\tilde{e}_1^n(T, 1) = \tilde{e}_1^n(T)$ .

Nun setze man  $h := e_1^{n+1}(T, 1)\tilde{e}_1^n(T, 1)$ , dann ist  $h \in J$  (gemäß 3.2.8) und nach 5.2.2 gilt einerseits

$$\begin{aligned} h^\alpha &= (e_1^{n+1}(T, 1)\tilde{e}_1^n(T, 1))^\alpha = e_1^{n+1}((T, 1)^{(\beta,\alpha)})\tilde{e}_1^n((T, 1)^{(\beta,\alpha)}) \\ &= e_1^{n+1}(T^{(\alpha,\beta)}, 1^\alpha)\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}, 1^\alpha) \\ &\stackrel{(3.4)}{=} (e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \cdot 1^\alpha - e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}))\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \\ &= e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})1^\alpha\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) - e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$h^\alpha \stackrel{(5.4)}{=} (e_1^n(T)\tilde{e}_1^n(T))^\alpha = e_1^n(T^{(\alpha,\beta)})1^\alpha \tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}).$$

Das liefert  $e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)})\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) = 0'$  und wegen  $\tilde{e}_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \in R'^*$  folgern wir die Behauptung  $e_1^{n-1}(T^{(\alpha,\beta)}) = 0'$ .  $\square$

**Lemma 5.2.4.** *Seien  $J, J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in Algebren  $R$  bzw.  $R'$  über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  und  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus. Dann gilt für alle  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J)$  mit  $n \geq 0$ :*

$$e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}) \cdot 1^\alpha = \begin{cases} 1^\alpha \cdot e_1^n(T^{(\beta,\alpha)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ 1^\beta \cdot e_1^n(T^{(\beta,\alpha)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

bzw.

$$e_1^n(T^{(\beta,\alpha)}) \cdot 1^\beta = \begin{cases} 1^\beta \cdot e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ 1^\alpha \cdot e_1^n(T^{(\alpha,\beta)}), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

*Beweis:* Wir führen einen Induktionsbeweis. Für  $n = 0$  ist die Aussage trivial. Für  $n = 1$  haben wir wegen  $t^\alpha = 1^\alpha t^\beta 1^\alpha$  für alle  $t \in J$ :

$$e_1^1(T^{(\alpha,\beta)}) \cdot 1^\alpha = t_1^\beta \cdot 1^\alpha = 1^\beta \cdot t_1^\alpha = 1^\beta \cdot e_1^1(T^{(\beta,\alpha)}).$$

Nun nehmen wir an, dass die Behauptung bis zu einem beliebigen, aber festen  $n \geq 2$  gilt. Wie in den vorhergehenden Beweisen betrachten wir nur den Fall  $n \in 2\mathbb{N}$ . Dann gilt für  $n + 1 \in 2\mathbb{N} + 1$ :

$$\begin{aligned} e_1^{n+1}(t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_n^\alpha, t_{n+1}^\beta) \cdot 1^\alpha &= (e_1^n(t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_n^\alpha, t_{n+1}^\beta)t_{n+1}^\beta \\ &\quad - e_1^{n-1}(t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_n^\alpha, t_{n+1}^\beta)) \cdot 1^\alpha \\ &= e_1^n(t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_n^\alpha)t_{n+1}^\beta 1^\alpha - e_1^{n-1}(t_1^\beta, t_2^\alpha, \dots, t_{n-1}^\beta)1^\alpha \\ &\stackrel{(IV)}{=} 1^\beta e_1^n(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_n^\beta)t_{n+1}^\alpha - 1^\beta e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1^\beta (e_1^n(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_n^\beta, t_{n+1}^\alpha) t_{n+1}^\alpha - e_1^{n-1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_{n-1}^\alpha, t_n^\beta, t_{n+1}^\alpha)) \\
&= 1^\beta \cdot e_1^{n+1}(t_1^\alpha, t_2^\beta, \dots, t_n^\beta, t_{n+1}^\alpha).
\end{aligned}$$

Daher gilt die Aussage für alle  $n \geq 0$ .  $\square$

Nun sind wir bereit, unser Hauptergebnis dieses Abschnitts zu beweisen. Dafür nehmen wir noch zu Hilfe Bemerkung 4.2.3 aus [26], welche besagt, dass jeder Homotopismus das Produkt eines Jordan-Homomorphismus und eines Hauptisotopismus ist. Dabei wird ein Hauptisotopismus folgendermaßen definiert (vgl. [26, 4.2.2]):

**Definition 5.2.5.** Seien  $J_1, J_2$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in der  $K$ -Algebra  $R$  mit  $J_2 = J_1 c$  für ein  $c \in J_1^*$ . Der Jordan-Isotopismus  $(\varphi, \psi) : J_1 \rightarrow J_2$  mit  $x^\varphi = xc$ ,  $x^\psi = c^{-1}x$  für  $x \in J_1$  heißt **Hauptisotopismus**.

Für jeden Hauptisotopismus  $(\varphi, \psi) : J_1 \rightarrow J_2$  gilt insbesondere  $J_1^\psi = J_2 = J_1^\varphi$ , da wegen der Jordan-Abgeschlossenheit von  $J_1$  und  $c \in J_1^*$  die Bedingung  $J_1 = cJ_1c$  erfüllt ist.

Genauer lässt sich jeder Homotopismus  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  wie folgt darstellen:

$$(\alpha, \beta) = (\sigma, \sigma) \circ (\varphi, \psi) = (\sigma \circ \varphi, \sigma \circ \psi),$$

wobei  $(\varphi, \psi) : J'' \rightarrow J'$  ein Hauptisotopismus mit  $J'' := J'c^{-1}$  für  $c = 1^\alpha \in J'^*$  und  $\sigma : J \rightarrow J''$  ein Jordan-Homomorphismus ist. Man beachte hierbei, dass  $c = c^2c^{-1} \in J''^*$  wegen  $c^2 \in J'^*$  gilt. Außerdem ist  $c = 1^\alpha = 1^{\sigma\varphi} = 1'^\varphi$  und analog  $c^{-1} = 1^\beta = 1'^\psi$  mit  $1' \in J'' \cap J'$ . Den Zusammenhang zwischen diesen Abbildungen können wir mit dem folgenden Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc}
J & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & J' \\
\searrow \sigma & & \nearrow (\varphi, \psi) \\
& J'' &
\end{array}$$

Wegen der Resultate über Jordan-Homomorphismen in Abschnitt 5.1 reicht es also, die in (5.3) definierte Abbildung nur für Hauptisotopismen zu untersuchen. Im Weiteren betrachten wir deshalb nur den rechten Pfeil des obigen

Diagramms. Die Null- bzw. die Einselemente von  $J''$  und  $J'$  sind offenbar gleich, diese bezeichnen wir entsprechend mit  $0'$  und  $1'$ . Es gilt der folgende Satz (vgl. 5.1.2):

**Satz 5.2.6.** *Sei  $R'$  eine Algebra über einem Körper  $K'$  und seien  $J'', J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R'$  mit  $J' = J''c$  für ein  $c \in J''^*$ . Weiter sei  $(\varphi, \psi) : J'' \rightarrow J'$  der Hauptisotopismus mit  $x^\varphi = xc$  und  $x^\psi = c^{-1}x$  für  $x \in J''$ . Außerdem seien  $H'', H'$  die Zentren von  $E_2(J'')$  bzw.  $E_2(J')$ . Ist  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J'')$  für ein  $n \geq 0$  mit  $E(T) \in H''$ , dann gilt:*

$E(T^{(\varphi, \psi)}) \in H'$ , falls  $n \in 2\mathbb{N}$ ,

$$E(T^{(\varphi, \psi)}) = \begin{pmatrix} a' & 0' \\ 0' & ca'c \end{pmatrix} \text{ mit } s'a' = ca's'c^{-1} \text{ für alle } s' \in J', \text{ falls } n \in 2\mathbb{N} + 1.$$

*Beweis:* Sei  $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}(J'')$  mit  $E(T) = \begin{pmatrix} e_1^n(T) & e_1^{n-1}(T) \\ -e_2^n(T) & -e_2^{n-1}(T) \end{pmatrix} \in H''$ , dann hat  $E(T)$  die Gestalt  $\begin{pmatrix} a & 0' \\ 0' & a \end{pmatrix}$ , wobei  $a = e_1^n(T) = -e_2^{n-1}(T) \in R'^*$  mit  $at = ta$  für alle  $t \in J''$  ist (vgl. 3.2.5). Außerdem gilt dann  $e_1^{n-1}(T) = e_2^n(T) = 0'$ . Nach 5.2.3 folgt daraus  $e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) \in R'^*$  und  $e_1^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}) = 0'$ .

Wegen  $e_2^n(T, 1') = e_2^n(T) = 0'$  und  $e_2^{n-1}(T, 1') = e_2^{n-1}(T) = -a$  erhalten wir mit (3.4)

$$e_2^{n+1}(T, 1') = e_2^n(T, 1') \cdot 1' - e_2^{n-1}(T, 1') = e_2^n(T) - e_2^{n-1}(T) = a \in R'^*.$$

Offensichtlich ist  $(\psi, \varphi) : J'' \rightarrow J'$  ein Homotopismus. Dann folgt wieder nach Lemma 5.2.3

$$\begin{aligned} e_2^{n+1}((T, 1')^{(\psi, \varphi)}) &= e_2^{n+1}(T^{(\varphi, \psi)}, 1'^\varphi) \in R'^*, \\ e_2^n(T^{(\varphi, \psi)}, 1'^\varphi) &= e_2^n(T^{(\varphi, \psi)}) = 0'. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$\begin{aligned} e_2^{n+1}(T^{(\varphi, \psi)}, 1'^\varphi) &\stackrel{(3.4)}{=} e_2^n(T^{(\varphi, \psi)}, 1'^\varphi) \cdot 1'^\varphi - e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}, 1'^\varphi) \\ &= e_2^n(T^{(\varphi, \psi)}) \cdot 1'^\varphi - e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}) = -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}) \in R'^*. \end{aligned}$$

Insgesamt sieht die Matrix  $E(T^{(\varphi,\psi)})$  wie folgt aus:

$$E(T^{(\varphi,\psi)}) = \begin{pmatrix} e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) & 0' \\ 0' & -e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)}) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Analog zum Beweis von 5.1.2(a) setze man  $S := (s, T, 0', -s, 0')$  für ein  $s \in J''$ . Es ist dann

$$E(S^{(\psi,\varphi)}) = \begin{cases} E(s^\psi, T^{(\varphi,\psi)}, 0', -s^\psi, 0'), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ E(s^\varphi, T^{(\varphi,\psi)}, 0', -s^\psi, 0'), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases}$$

Außerdem gilt  $E(0')E(-s^\psi)E(0') = E(s^\psi)^{-1}$ . Daher erhalten wir:

$$E(S) = E(s)E(T)E(s)^{-1} = E(T) = \begin{pmatrix} a & 0' \\ 0' & a \end{pmatrix},$$

$$E(S^{(\psi,\varphi)}) = \begin{cases} E(s^\psi)E(T^{(\varphi,\psi)})E(s^\psi)^{-1}, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ E(s^\varphi)E(T^{(\varphi,\psi)})E(s^\psi)^{-1}, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}$$

mit

$$E(s^\psi)E(T^{(\varphi,\psi)})E(s^\psi)^{-1} = \begin{pmatrix} -e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)}) & -s^\psi e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) - e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)})s^\psi \\ 0' & e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) \end{pmatrix},$$

$$E(s^\varphi)E(T^{(\varphi,\psi)})E(s^\psi)^{-1} = \begin{pmatrix} -e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)}) & -s^\varphi e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) - e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)})s^\psi \\ 0' & e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) \end{pmatrix}.$$

Da  $E(S)$  eine Diagonalmatrix ist, muss auch der (1, 2)-Eintrag von  $E(S^{(\psi,\varphi)})$  gemäß 5.2.3(b) Null sein, d.h.

$$\begin{cases} s^\psi e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) = -e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)})s^\psi, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ s^\varphi e_1^n(T^{(\varphi,\psi)}) = -e_2^{n-1}(T^{(\varphi,\psi)})s^\psi, & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1. \end{cases} \quad (5.6)$$

Wir betrachten nun die beiden Fälle getrennt. Sei zunächst  $n \in 2\mathbb{N}$ . Da (5.6) für ein beliebiges  $s \in J''$  gilt, ist es insbesondere auch für  $s = c$  gültig. Damit ergibt sich wegen  $c^\psi = c^{-1}c = 1'$ :

$$\begin{aligned} c^\psi e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) &= -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)})c^\psi \\ \Leftrightarrow e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) &= -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}). \end{aligned}$$

Da  $\psi : J'' \rightarrow J'$  bijektiv ist, haben alle  $s' \in J'$  die Form  $s' = s^\psi$ , so dass  $s'e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) = e_1^n(T^{(\varphi, \psi)})s'$  für alle  $s' \in J'$  gilt. Damit ist  $E(T^{(\varphi, \psi)}) \in H'$ , wie gewünscht (vgl. (5.5)).

Sei nun  $n \in 2\mathbb{N} + 1$ . Dann gilt für  $s = 1'$ :

$$\begin{aligned} 1'^\varphi e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) &= -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)})1'^\psi \\ \Leftrightarrow 1'^\varphi e_1^n(T^{(\varphi, \psi)})1'^\varphi &= -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)}) \\ \Leftrightarrow E(T^{(\varphi, \psi)}) &= \begin{pmatrix} a' & 0' \\ 0' & ca'c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $a' := e_1^n(T^{(\varphi, \psi)})$  und

$$\begin{aligned} s^\varphi e_1^n(T^{(\varphi, \psi)}) &= -e_2^{n-1}(T^{(\varphi, \psi)})s^\psi \\ \Leftrightarrow s^\varphi a' &= ca'c(1's1')^\psi \\ \Leftrightarrow s^\varphi a' &= ca'c1'^\psi s^\varphi 1'^\psi \\ \Leftrightarrow s^\varphi a' &= ca'cc^{-1}s^\varphi c^{-1} \\ \Leftrightarrow s^\varphi a' &= ca's^\varphi c^{-1} \end{aligned}$$

für alle  $s^\varphi \in J'$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi : J'' \rightarrow J'$  gilt  $s'a' = ca's'c^{-1}$  für alle  $s' \in J'$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

Aus diesem Satz folgern wir, dass Homotopismen im Unterschied zu Jordan-Homomorphismen zumindest auf die bekannte Art und Weise (vgl. 5.1.5(a)) i.Allg. keine Abbildung der projektiven Gruppen  $PE_2(J'') \rightarrow PE_2(J')$  induzieren. Nichtsdestotrotz kann man jedoch zeigen, dass die in (5.3) definierte Abbildung für jeden beliebigen Homotopismus ein wohldefinierter Morphismus

mus von Kettengeometrien ist. Im Fall von einem Hauptisotopismus ist die induzierte Abbildung entsprechend ein Isomorphismus von Kettengeometrien.

**Satz 5.2.7.** *Seien  $J''$ ,  $J'$  und  $(\varphi, \psi) : J'' \rightarrow J'$  wie in 5.2.6. Dann gilt:*

(a) *Die Abbildung*

$$\gamma_{(\varphi, \psi)} : \tilde{\mathbb{P}}(J'') \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J') : R'(1', 0')E(T) \mapsto R'(1', 0')E(T^{(\varphi, \psi)})$$

*mit  $T \in \mathcal{S}(J'')$  ist wohldefiniert.*

(b)  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  *ist ein  $\Delta$ -Isomorphismus.*

(c)  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  *ist ein Isomorphismus von Kettengeometrien.*

*Beweis:* (a) Seien  $T = (t_1, \dots, t_n), V = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{S}(J'')$ ,  $n, m \geq 0$ , zwei verschiedene Folgen mit  $R'(1', 0')E(T) = R'(1', 0')E(V)$ . Wir zeigen, dass die Gleichheit  $R'(1', 0')E(T^{(\varphi, \psi)}) = R'(1', 0')E(V^{(\varphi, \psi)})$  auch erfüllt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} R'(1', 0')E(T) &= R'(1', 0')E(V) \\ \Leftrightarrow R'(1', 0')E(T)E(V)^{-1} &= R'(1', 0') = R'(1', 0')E(V)E(T)^{-1}, \end{aligned}$$

d.h. die Matrizen  $E(T)E(V)^{-1}$  und  $E(V)E(T)^{-1}$  sind im Stabilisator von  $R'(1', 0')$  und damit haben die Gestalt  $\begin{pmatrix} u & 0' \\ * & * \end{pmatrix}$  mit  $u \in R'^*$ . Wir machen eine Fallunterscheidung:

(1) Sei  $m \in 2\mathbb{N} + 1$ . Dann erhalten wir für die Matrix  $E(T)E(V)^{-1} = E(t_1, \dots, t_n, 0', -v_m, 0', \dots, 0', -v_1, 0') =: E(S) \in E_2(J'')$ :

$$\begin{aligned} &E(T^{(\varphi, \psi)})E(V^{(\varphi, \psi)})^{-1} \\ &= \begin{cases} E(t_1^\varphi, \dots, t_n^\psi, 0', -v_m^\psi, 0', \dots, 0', -v_1^\psi, 0'), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ E(t_1^\psi, \dots, t_n^\psi, 0', -v_m^\psi, 0', \dots, 0', -v_1^\psi, 0'), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} E(t_1^\varphi, \dots, t_n^\psi, 0'^\varphi, -v_m^\psi, 0'^\varphi, \dots, 0'^\varphi, -v_1^\psi, 0'^\varphi), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ E(t_1^\psi, \dots, t_n^\psi, 0'^\varphi, -v_m^\psi, 0'^\varphi, \dots, 0'^\varphi, -v_1^\psi, 0'^\varphi), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

d.h. es gilt  $E(T^{(\varphi,\psi)})E(V^{(\varphi,\psi)})^{-1} = E(S^{(\psi,\varphi)})$ . Nach 5.2.3 ist auch  $E(S^{(\psi,\varphi)})$  vom Typ  $\begin{pmatrix} w & 0' \\ * & * \end{pmatrix}$  mit  $w \in R'^*$ , so dass  $E(T^{(\varphi,\psi)})E(V^{(\varphi,\psi)})^{-1}$  ebenso den Punkt  $R'(1', 0')$  fixiert. Daraus folgt das Gewünschte.

- (2) Im Fall  $m \in 2\mathbb{N}$  und  $n \in 2\mathbb{N}+1$  gilt die Behauptung analog, indem man statt  $E(T^{(\varphi,\psi)})E(V^{(\varphi,\psi)})^{-1}$  die Matrix  $E(V^{(\varphi,\psi)})E(T^{(\varphi,\psi)})^{-1}$  betrachtet.
- (3) Seien nun  $m, n \in 2\mathbb{N}$ , dann hat die Matrix  $E(-1', -1', -1', T)$  eine ungerade Anzahl von Einträgen. Wegen  $E(-1', -1', -1') = E \in H''$  ist  $R'(1', 0')E(V) = R'(1', 0')E(T) = R'(1', 0')E(-1', -1', -1', T)$ . Somit lässt die Matrix  $E(S) := E(V)E(-1', -1', -1', T)^{-1} \in E_2(J'')$  den Punkt  $R'(1', 0')$  invariant. Nach dem gleichen Prinzip wie in (1) erhalten wir

$$E(V^{(\varphi,\psi)})E((-1', -1', -1', T)^{(\varphi,\psi)})^{-1} = E(S^{(\psi,\varphi)}),$$

wobei  $E(S^{(\psi,\varphi)})$  gemäß 5.2.3 wieder im Stabilisator von  $R'(1', 0')$  enthalten ist, d.h. es gilt

$$R'(1', 0')E(V^{(\varphi,\psi)}) = R'(1', 0')E((-1', -1', -1', T)^{(\varphi,\psi)}).$$

Außerdem gilt (vgl. 5.2.6)

$$\begin{aligned} E((-1', -1', -1')^{(\varphi,\psi)}) &= E(-1'^\psi, -1'^\varphi, -1'^\psi) \\ &= E(-c^{-1}, -c, -c^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} c^{-1} & 0' \\ 0' & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das impliziert

$$\begin{aligned} R'(1', 0')E((-1', -1', -1', T)^{(\varphi,\psi)}) \\ &= R'(1', 0')E(-1'^\psi, -1'^\varphi, -1'^\psi, t_1^\varphi, \dots, t_n^\psi) \\ &= R'(1', 0')E(-1'^\psi, -1'^\varphi, -1'^\psi)E(t_1^\varphi, \dots, t_n^\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R'(1', 0') \begin{pmatrix} c^{-1} & 0' \\ 0' & c \end{pmatrix} E(T^{(\varphi, \psi)}) \\
&= R'(1', 0') E(T^{(\varphi, \psi)}).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$R'(1', 0') E(V^{(\varphi, \psi)}) = R'(1', 0') E(T^{(\varphi, \psi)}).$$

Somit gilt die Wohldefiniertheit von  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$ .

- (b) Die Abbildung  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  ist bijektiv: Mit  $(\varphi, \psi) : J'' \rightarrow J'$  ist auch  $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) : J' \rightarrow J''$  ein Hauptisotopismus. Damit kann man die Injektivität von  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  ganz einfach zeigen, indem man für  $T^{(\varphi, \psi)}, V^{(\varphi, \psi)} \in \mathcal{S}(J')$  die Gleichheit  $R'(1', 0') E(T^{(\varphi, \psi)}) = R'(1', 0') E(V^{(\varphi, \psi)})$  annimmt und auf die beiden Punkte die (gemäß (a) wohldefinierte) Abbildung  $\gamma_{(\varphi^{-1}, \psi^{-1})} : \tilde{\mathbb{P}}(J') \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J'')$  anwendet:

$$\begin{aligned}
&R'(1', 0') E(T^{(\varphi, \psi)}) = R'(1', 0') E(V^{(\varphi, \psi)}) \\
\Rightarrow &\left( R'(1', 0') E(T^{(\varphi, \psi)}) \right)^{\gamma_{(\varphi^{-1}, \psi^{-1})}} = \left( R'(1', 0') E(V^{(\varphi, \psi)}) \right)^{\gamma_{(\varphi^{-1}, \psi^{-1})}} \\
\Rightarrow &R'(1', 0') E((T^{(\varphi, \psi)})^{(\varphi^{-1}, \psi^{-1})}) = R'(1', 0') E((V^{(\varphi, \psi)})^{(\varphi^{-1}, \psi^{-1})}) \\
\Rightarrow &R'(1', 0') E(T) = R'(1', 0') E(V).
\end{aligned}$$

Die Surjektivität von  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  folgt direkt aus der Surjektivität von  $(\varphi, \psi)$ .

Nun zeigen wir, dass  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$  die Distanzrelation invariant lässt. Seien  $T = (t_1, \dots, t_n), V = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{S}(J'')$  und  $p = R'(1', 0') E(T), q = R'(1', 0') E(V) \in \tilde{\mathbb{P}}(J'')$  distant. Nach 3.4.3 existiert ein  $\rho \in PE_2(J'')$  mit  $p^\rho = R'(1', 0')$  und  $q^\rho = R'(0', 1')$ , und gemäß (a) gilt

$$\begin{aligned}
p^{\rho \gamma_{(\varphi, \psi)}} &= R'(1', 0')^{\gamma_{(\varphi, \psi)}} \\
&= (R'(1', 0') E(-1', -1', -1'))^{\gamma_{(\varphi, \psi)}} \\
&= R'(1', 0') E(-c^{-1}, -c, -c^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= R'(1', 0') \begin{pmatrix} c^{-1} & 0' \\ 0' & c \end{pmatrix} \\
 &= R'(1', 0')
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 q^{\rho\gamma(\varphi, \psi)} &= R'(0', 1')^{\gamma(\varphi, \psi)} \\
 &= (R'(1', 0')E(1')^{-1})^{\gamma(\varphi, \psi)} \\
 &= (R'(1', 0')E(0', -1', 0'))^{\gamma(\varphi, \psi)} \\
 &= R'(1', 0')E(0', -c, 0') \\
 &= R'(1', 0')E(c)^{-1} \\
 &= R'(0', 1').
 \end{aligned}$$

Damit sind  $p^{\rho\gamma(\varphi, \psi)}$  und  $q^{\rho\gamma(\varphi, \psi)}$  in  $\widetilde{\mathbb{P}}(J')$  distant.

Weiter sei  $E(S) \in E_2(J'')$  mit  $S = (s_1, \dots, s_r)$  die Matrix, die  $\rho$  induziert. Genauer gilt dann

$$\begin{aligned}
 R'(1', 0')E(T)E(S) &= p^\rho = R'(1', 0'), \\
 R'(1', 0')E(V)E(S) &= q^\rho = R'(0', 1').
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 R'(1', 0')E((T, S)^{(\varphi, \psi)}) &= p^{\rho\gamma(\varphi, \psi)} = R'(1', 0'), \\
 R'(1', 0')E((V, S)^{(\varphi, \psi)}) &= q^{\rho\gamma(\varphi, \psi)} = R'(0', 1').
 \end{aligned}$$

Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

- (1) Sei zunächst  $r \in 2\mathbb{N}$ , dann gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
 E((T, S)^{(\varphi, \psi)}) &= E(T^{(\varphi, \psi)}, S^{(\varphi, \psi)}), \\
 E((V, S)^{(\varphi, \psi)}) &= E(V^{(\varphi, \psi)}, S^{(\varphi, \psi)}).
 \end{aligned}$$

Das liefert

$$\begin{aligned} p^{\rho\gamma(\varphi,\psi)} &= R'(1', 0')E((T, S)^{(\varphi,\psi)}) \\ &= R'(1', 0')E(T^{(\varphi,\psi)})E(S^{(\varphi,\psi)}) \\ &= R'(1', 0') \end{aligned}$$

und deshalb ist  $p^{\gamma(\varphi,\psi)} = R'(1', 0')E(T^{(\varphi,\psi)}) = R'(1', 0')E(S^{(\varphi,\psi)})^{-1}$  mit  $E(S^{(\varphi,\psi)}) \in E_2(J')$ . Analog gilt  $q^{\gamma(\varphi,\psi)} = R'(0', 1')E(S^{(\varphi,\psi)})^{-1}$ . Da  $J'$  Jordan-abgeschlossen ist, folgt daraus  $p^{\gamma(\varphi,\psi)} \Delta q^{\gamma(\varphi,\psi)}$  (gemäß 3.4.3).

(2) Nun sei  $r \in 2\mathbb{N} + 1$ . In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} E((T, S)^{(\psi,\varphi)}) &= \begin{cases} E(t_1^\varphi, \dots, t_n^\psi, s_1^\varphi, \dots, s_r^\varphi), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N}, \\ E(t_1^\psi, \dots, t_n^\psi, s_1^\varphi, \dots, s_r^\varphi), & \text{falls } n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \\ &= E(T^{(\varphi,\psi)}, S^{(\psi,\varphi)}) \end{aligned}$$

bzw.

$$E((V, S)^{(\psi,\varphi)}) = E(V^{(\varphi,\psi)}, S^{(\psi,\varphi)}).$$

Betrachtet man noch zusätzlich die entsprechend definierte Abbildung  $\gamma_{(\psi,\varphi)}$ , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} p^{\rho\gamma(\psi,\varphi)} &= R'(1', 0')E((T, S)^{(\psi,\varphi)}) \\ &= R'(1', 0')E(T^{(\varphi,\psi)})E(S^{(\psi,\varphi)}), \end{aligned}$$

wobei man analog nachrechnen kann, dass  $p^{\rho\gamma(\psi,\varphi)} = R'(1', 0')$  ist. Damit gilt  $p^{\gamma(\varphi,\psi)} = R'(1', 0')E(S^{(\psi,\varphi)})^{-1}$  mit  $E(S^{(\psi,\varphi)}) \in E_2(J')$ . Analog zeigt man, dass  $q^{\gamma(\varphi,\psi)} = R'(0', 1')E(S^{(\psi,\varphi)})^{-1}$  ist. Nach gleicher Argumentation wie in (1) folgt daraus  $p^{\gamma(\varphi,\psi)} \Delta q^{\gamma(\varphi,\psi)}$ .

Da  $(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) : J' \rightarrow J''$  auch ein Hauptisotopismus ist, gilt entspre-

chend für  $p, q \in \widetilde{\mathbb{P}}(J'')$ :

$$\begin{aligned} p^{\gamma(\varphi, \psi)} \Delta q^{\gamma(\varphi, \psi)} &\Rightarrow p^{\gamma(\varphi, \psi)\gamma(\varphi^{-1}, \psi^{-1})} \Delta q^{\gamma(\varphi, \psi)\gamma(\varphi^{-1}, \psi^{-1})} \\ &\Leftrightarrow p \Delta q. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

- (c) Wir betrachten die Kettengeometrien  $\widetilde{\Sigma}'' := \Sigma(K', R', J'') = (\widetilde{\mathbb{P}}(J''), \mathfrak{C}(K', R', J''))$  und  $\widetilde{\Sigma}' := \Sigma(K', R', J') = (\widetilde{\mathbb{P}}(J'), \mathfrak{C}(K', R', J'))$ . Wegen (b) bleibt zu zeigen, dass  $\gamma_{(\varphi, \psi)}$   $K'$ -Ketten in  $\widetilde{\mathbb{P}}(J'')$  auf  $K'$ -Ketten in  $\widetilde{\mathbb{P}}(J')$  abbildet.

Gemäß 3.4.4 existieren für jede Kette  $C \in \mathfrak{C}(K', R', J'')$  ein  $\delta \in PE_2(J'')$  und ein  $h \in J''^*$  mit  $C = (C_h)^\delta$ , wobei  $C_h = \{R'(1', 0')\} \cup \{R'(\lambda h, 1') \mid \lambda \in K'\}$  eine Kette durch  $R'(1', 0')$ ,  $R'(0', 1')$  und  $R'(h, 1')$  ist.

Die Ketten durch  $R'(1', 0')$ ,  $R'(0', 1')$  und  $R'(h^\psi, 1')$  sind entsprechend die Mengen

$$C_{h^\psi} = \{R'(1', 0')\} \cup \{R'(\mu h^\psi, 1') \mid \mu \in K'\}.$$

Da  $\psi$  semilinear (mit Begleitautomorphismus  $\widehat{\psi} : K' \rightarrow K'$ ) ist, haben wir  $(\lambda h)^\psi = \lambda^{\widehat{\psi}} h^\psi \in K'^{\widehat{\psi}} h^\psi = K' h^\psi$  für alle  $\lambda \in K'$ ,  $h \in J''$  und deshalb ist  $(K'h)^\psi = K' h^\psi$ .

Sei  $\delta$  durch die Matrix  $E(S) \in E_2(J'')$  mit  $S = (s_1, \dots, s_n)$  induziert. Wir betrachten wieder zwei Fälle:

- (1) Sei  $n \in 2\mathbb{N}$ . Dann ergibt sich für alle  $R(a, b) \in C$ :

$$\begin{aligned} R(a, b)^{\gamma(\varphi, \psi)} &= (R'(\lambda h, 1')E(S))^{\gamma(\varphi, \psi)} \\ &= (R'(1', 0')E(\lambda h, S))^{\gamma(\varphi, \psi)} \\ &= R'(1', 0')E((\lambda h)^\psi, s_1^\varphi, \dots, s_n^\psi) \\ &= R'(\lambda^{\widehat{\psi}} h^\psi, 1')E(S^{(\varphi, \psi)}) \in (C_{h^\psi})^{\delta'} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} R(a, b)^{\gamma(\varphi, \psi)} &= (R'(1', 0')E(S))^{\gamma(\varphi, \psi)} \\ &= R'(1', 0')E(S^{(\varphi, \psi)}) \in (C_{h\psi})^{\delta'}, \end{aligned}$$

wobei  $\delta' \in PE_2(J')$  durch die Matrix  $E(S^{(\varphi, \psi)})$  induziert wird. Das impliziert  $C^{\gamma(\varphi, \psi)} \subseteq (C_{h\psi})^{\delta'} \in \mathfrak{C}(K', R', J')$ . Da aber die beiden Ketten  $C$  und  $(C_{h\psi})^{\delta'}$  Ketten von  $\Sigma(K', R')$  sind und  $\gamma(\varphi, \psi)$  bijektiv ist, gilt sogar  $C^{\gamma(\varphi, \psi)} = (C_{h\psi})^{\delta'}$ .

(2) Für  $n \in 2\mathbb{N} + 1$  zeigt man analog  $C^{\gamma(\varphi, \psi)} = (C_{h\varphi})^{\delta'} \in \mathfrak{C}(K', R', J')$ . □

Anhand der Sätze 5.1.10, 5.1.11 und 5.2.7 können wir schließlich Satz 5.2.1 für Jordan-abgeschlossene und nicht notwendigerweise starke Jordan-Systeme verallgemeinern:

**Korollar 5.2.8.** *Seien  $R$  und  $R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$ . Seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Weiter sei  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus mit den Begleitmonomorphismen  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} : K \rightarrow K'$ . Dann bildet die Abbildung*

$$\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)} : \widetilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \widetilde{\mathbb{P}}(J') : R(1, 0)E(T) \mapsto R'(1', 0')E(T^{(\alpha, \beta)})$$

*$K$ -Ketten in  $K'$ -Ketten ab.*

*Sind  $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}$  bijektiv, dann ist  $\gamma$  ein Morphismus von Kettengeometrien.*

### 5.3 Algebraische Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien über Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen

In diesem Abschnitt beschreiben wir alle Morphismen der Kettengeometrien über Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen, wobei das der Ausgangspunktmenge zugrunde liegende Jordan-System in einer endlichdimensionalen

Algebra enthalten ist. Aufgrund unserer Überlegungen im Abschnitt 3.1 werden wir uns dieses Jordan-System in einer Matrizenalgebra vorstellen.

Im vorangehenden Abschnitt haben wir gezeigt, dass jeder Homotopismus von (endlich- sowie unendlichdimensionalen) Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen stets einen Morphismus von entsprechenden Kettengeometrien induziert (siehe 5.2.8). Ist das Jordan-System, welches der Ausgangspunktmenge zugrunde liegt, stabil, dann sehen solche Morphismen ähnlich zu denen über starken Jordan-Systemen aus. Als Spezialfall von 5.2.8 bzw. Verallgemeinerung von 2.6 in [11] gilt der folgende Satz:

**Satz 5.3.1.** *Seien  $R, R'$  Algebren über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  und  $J, J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ , wobei  $J$  stabil in  $R$  ist. Außerdem sei  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus mit den Begleitisomorphismen  $\hat{\alpha}, \hat{\beta} : K \rightarrow K'$ . Dann ist die induzierte Abbildung  $\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)} : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J') : R(1 + ab, a) \mapsto R'(1' + a^\alpha b^\beta, a^\alpha)$  ein Morphismus von Kettengeometrien. Der Morphismus  $\gamma$  ist genau dann stark, wenn  $\alpha$  (und damit auch  $\beta$ ) Nichteinheiten in Nichteinheiten abbildet.*

*Gilt  $\dim_{K'} J^\alpha (= \dim_{K'} J^\beta) \geq 2$ , dann ist  $\gamma$  nicht trivial.*

*Beweis:* Den zweiten Teil des Satzes folgert man wegen 3.4.5 und 3.4.6 analog wie im Beweis von 2.6 in [11]. □

Unser Hauptziel ist zu zeigen, dass der im obigen Satz beschriebene Prozess der Induzierung unter einer Zusatzbedingung umkehrbar ist.

In diesem Abschnitt seien also  $J, J'$  stets Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  in den Algebren  $(K, R)$  bzw.  $(K', R')$ , wobei  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  ist. Insbesondere ist auch  $J$  endlichdimensional. Entsprechend seien  $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbb{P}}(J), \mathfrak{C}(K, R, J))$  und  $\tilde{\Sigma}' = (\tilde{\mathbb{P}}(J'), \mathfrak{C}(K', R', J'))$  die Kettengeometrien über  $(K, R, J)$  bzw.  $(K', R', J')$ . Außerdem sei  $\gamma : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  ein Morphismus von Kettengeometrien. Dabei können wir uns auf solche Morphismen konzentrieren, welche die Punkte  $R(1, 0)$  und  $R(0, 1)$  auf  $R'(1', 0')$  bzw.  $R'(0', 1')$  abbilden, denn die Gruppe  $PE_2(J')$  operiert 2- $\Delta$ -transitiv auf der Menge  $\tilde{\mathbb{P}}(J')$  (siehe 3.4.3). Im Unterschied zu fundamentalen Morphismen wird nicht vorausgesetzt, dass  $\gamma$  auch den Punkt  $R(1, 1)$

in  $R'(1', 1')$  überführt. Im Folgenden nennen wir solche Morphismen  $\gamma$  **fast-fundamental**.

Zunächst möchten wir den Morphismus auf Residuen einschränken, welche bekanntlich partielle affine Räume sind. Hierbei nennen wir zwei Punkte in einem partiellen affinen Raum **distant**, wenn sie verschieden und durch eine Gerade verbunden sind (vgl. 1.2.4, 1.2.5). Diese Distanzrelation bezeichnen wir wieder mit  $\Delta$ . Im Weiteren benötigen wir noch die folgende Definition (vgl. [11, 3.1]):

**Definition 5.3.2.** Seien  $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon, \parallel)$  und  $\mathbb{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon, \parallel)$  affine Räume und  $\tilde{\mathbb{A}} = (\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{L}}, \epsilon, \parallel)$ ,  $\tilde{\mathbb{A}}' = (\mathcal{P}', \tilde{\mathcal{L}}', \epsilon, \parallel)$  partielle affine Räume, welche aus  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A}'$  entstehen. Eine Abbildung  $\kappa : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  heißt ein **Morphismus partieller affiner Räume**, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $\forall p, q \in \mathcal{P} : p \Delta q \Rightarrow p^\kappa \Delta q^\kappa$ .
- (2)  $\forall G \in \tilde{\mathcal{L}} : G^\kappa \in \tilde{\mathcal{L}}'$ .

Der Morphismus  $\kappa$  heißt **stark**, falls gilt zusätzlich

- (3)  $\forall p, q \in \mathcal{P} : p^\kappa \Delta q^\kappa \Rightarrow p \Delta q$ ,

und **trivial**, falls

- (4)  $\exists G' \in \tilde{\mathcal{L}}' : \mathcal{P}^\kappa = G'$ .

Die Abbildung  $\kappa$  heißt ein **Homomorphismus affiner Räume**  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ , wenn

- (5)  $\forall G \in \mathcal{L} : G^\kappa \in \mathcal{P}' \cup \mathcal{L}'$ .

Sind  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{A}'$  affine Räume über Körpern, dann gilt für jeden Homomorphismus  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  sogar das Folgende (vgl. [64, 1.4]):

**Bemerkung 5.3.3.** Seien  $\mathbb{A} = AG(K, V)$ ,  $\mathbb{A}' = AG(K', V')$  affine Koordinatenräume mit  $|K| \geq 3$  und  $\chi : AG(K, V) \rightarrow AG(K', V')$  ein Homomorphismus mit  $\chi(0) = 0'$ . Ist  $\chi$  nicht trivial, d.h.  $\dim_{K'} \chi(V) \geq 2$ , dann ist  $\chi$  eine semilineare Abbildung von Vektorräumen  $V \rightarrow V'$ .

Seien  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  wieder beliebig und  $\tilde{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{A}'}$  partielle affine Räume, welche aus  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  entstehen. Die Geraden von  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{A}'$  heißen **regulär**, wenn sie in  $\tilde{\mathbb{A}}$  bzw.  $\tilde{\mathbb{A}'}$  enthalten sind, und sonst **singulär**. Ist  $\mathcal{E}$  eine Ebene in  $\mathbb{A}$  bzw.  $\mathbb{A}'$ , dann nennen wir  $\mathcal{E}$  **regulär**, falls sie mindestens drei reguläre Richtungen enthält. Dabei versteht man unter einer regulären Richtung eine Parallelklasse regulärer Geraden in einer Ebene.

Aus den ersten beiden Bedingungen der obigen Definition folgt:

**Bemerkung 5.3.4.** Seien  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  sowie  $\tilde{\mathbb{A}}, \tilde{\mathbb{A}'}$  wie in 5.3.2 und sei  $\kappa : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$  ein Morphismus partieller affiner Räume. Dann ist die Abbildung  $\kappa|_G : G \rightarrow G^\kappa$  für alle  $G \in \tilde{\mathcal{L}}$  bijektiv, d.h. reguläre Geraden werden durch  $\kappa$  bijektiv in reguläre Geraden abgebildet. Das impliziert, dass die Ordnungen<sup>1</sup> der beiden affinen Räume gleich sind, d.h. gilt  $ord \mathbb{A} = ord \mathbb{A}'$ .

Wir kehren zu unserer Ausgangssituation zurück. Wie schon oben angedeutet, ist unser Ziel alle Morphismen  $\gamma : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J')$  zu beschreiben. Dafür betrachten wir zunächst die Einschränkungen von  $\gamma$  auf Residuen. Angesichts der Definition des Residuums wird klar, dass jede Einschränkung von  $\gamma$  auf ein Residuum die ersten beiden Bedingungen von 5.3.2 erfüllt. Hierbei beachte man, dass die in einem partiellen affinen Raum definierte Distanzrelation mit der auf  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  bzw.  $\tilde{\mathbb{P}}(J')$  übereinstimmt (siehe 1.2.5). Genauer gilt (vgl. 1.2.4, [11, 3.2]):

**Lemma 5.3.5.** *Ein Morphismus  $\gamma : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  der Kettengeometrien induziert für jeden Punkt  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  einen Morphismus  $\gamma_p := \gamma|_{\Delta(p)} : \tilde{\Sigma}_p \rightarrow \tilde{\Sigma}'_{p^\gamma}$  partieller affiner Räume.*

Ab sofort sei  $\gamma : \tilde{\mathbb{P}}(J) \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(J')$  ein fast-fundamentaler Morphismus. Da  $\gamma$  die Distanzrelation invariant lässt, werden die Punkte  $R(x, 1)$  bzw.  $R(1, x)$  für alle  $x \in J$  in ebensolche abgebildet. Daher kann man ein Paar von Abbildungen  $(\alpha, \beta)$  mit  $\alpha, \beta : J \rightarrow J'$  definieren, für welche  $R(x, 1)^\gamma = R'(x^\beta, 1')$  und  $R(1, x)^\gamma = R'(1', x^\alpha)$  gilt.

<sup>1</sup>Ist  $\mathbb{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in, \parallel)$  ein affiner Raum und  $G \in \mathcal{L}$ , dann heißt  $|G|$  **Ordnung** von  $\mathbb{A}$ , bezeichnet mit  $ord \mathbb{A}$ . Insbesondere ist  $ord \mathbb{A}$  unabhängig von der Wahl von  $G$ .

Alle Punkte  $R(1, x)$  mit  $x \in J$  bilden gemäß 3.2.9 die Punktmenge des Residuums  $\tilde{\Sigma}_{R(0,1)}$ , welcher mit einem partiellen affinen Raum  $\tilde{\mathbb{A}}$  in  $\mathbb{A} = AG(K, J)$  mittels  $R(1, x) \mapsto x$  identifiziert wird. Analog identifizieren wir  $\tilde{\Sigma}'_{R'(0',1')}$  mit einem partiellen affinen Raum  $\tilde{\mathbb{A}}'$  in  $\mathbb{A}' = AG(K', J')$ . Daher ist die Abbildung  $\alpha = \gamma|_{\Delta(R(0,1))} : \tilde{\Sigma}_{R(0,1)} \rightarrow \tilde{\Sigma}'_{R'(0',1')}$  nach 5.3.5 ein Morphismus partieller affiner Räume  $\tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}'$ .

Das Gleiche gilt auch für  $\beta = \gamma|_{\Delta(R(1,0))} : \tilde{\Sigma}_{R(1,0)} \rightarrow \tilde{\Sigma}'_{R'(1',0')}$ , indem man die Residuen  $\tilde{\Sigma}_\infty$  und  $\tilde{\Sigma}'_\infty$  mit den gleichen partiellen affinen Räumen  $\tilde{\mathbb{A}}$  bzw.  $\tilde{\mathbb{A}}'$  mittels  $R(x, 1) \mapsto x$  identifiziert.

Im Weiteren wird schrittweise bewiesen, dass  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  ein Homotopismus ist. Als erster Schritt zeigen wir, dass  $\alpha$  und  $\beta$  Homomorphismen affiner Räume  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  sind. Dafür untersuchen wir das Verhalten eines nicht trivialen Morphismus  $\tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}'$  der partiellen affinen Räume eingeschränkt auf eine reguläre Ebene, die eine singuläre Gerade enthält.

Wir verschaffen uns zunächst eine Bedingung, welche die Existenz von mindestens einer regulären Ebene durch jede singuläre Gerade in  $\tilde{\mathbb{A}}$  gewährleistet. Hierbei beachten wir die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 5.3.6.** Sei  $a_0 + Ka$  eine beliebige singuläre Gerade in  $\mathbb{A} = AG(K, J)$ , also  $a_0 \in J, a \in J \setminus (J^* \cup \{0\})$ . Dann existiert gemäß 3.3.4 ein  $b \in K[a] \subseteq J$ , so dass  $a + \lambda b \in J^*$  für alle  $\lambda \in K^*$  gilt. Ist auch  $b$  invertierbar, dann hat die Ebene  $a_0 + Ka + Kb$  genau  $|K|$  reguläre Richtungen, und sonst  $|K| - 1$ .

Da wir uns aber i.Allg. nicht sicher sein können, dass  $b \in J^*$  ist, setzen wir im Weiteren  $|K| > 3$  voraus. Zusammenfassend gilt (vgl. [42, 3.5.5]):

**Bemerkung 5.3.7.** Sei  $\mathbb{A} = AG(K, J)$  und  $|K| > 3$ . Dann existiert durch jede singuläre Gerade in  $\mathbb{A}$  mindestens eine reguläre Ebene, welche höchstens zwei singuläre Richtungen enthält.

Haben wir gezeigt, dass  $\alpha$  und  $\beta$  nicht triviale Homomorphismen affiner Räume sind, dann liefert die Bedingung  $|K| > 3$  zusammen mit 5.3.3 die Semilinearität der beiden Abbildungen.

Bevor wir beweisen, dass  $\alpha$  (und analog auch  $\beta$ ) tatsächlich ein Homomorphismus affiner Räume ist, zeigen wir zunächst, dass jeder nicht triviale Morphismus partieller affiner Räume reguläre Ebenen entweder surjektiv in reguläre Geraden oder bijektiv in reguläre Ebenen abbildet.

**Lemma 5.3.8.** *Sei  $\kappa : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}'$  ein nicht trivialer Morphismus partieller affiner Räume mit  $\text{ord } \mathbb{A} \geq 3$  und  $\mathcal{E}$  eine reguläre Ebene in  $\mathbb{A}$ . Dann ist  $\mathcal{E}^\kappa$  eine reguläre Gerade in  $\tilde{\mathbb{A}}'$  oder  $\mathcal{E}$  wird durch  $\kappa$  bijektiv in eine reguläre Ebene in  $\mathbb{A}'$  abgebildet.*

*Beweis:* Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei reguläre Geraden, welche  $\mathcal{E}$  aufspannen. Insbesondere ist also  $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ . Im Fall  $G_1^\kappa = G_2^\kappa$  ist offenbar  $\mathcal{E}^\kappa = G_1^\kappa$  eine reguläre Gerade in  $\tilde{\mathbb{A}}'$ . Nun setzen wir voraus, dass  $G_1^\kappa \neq G_2^\kappa$  ist. Dann folgt zunächst  $\mathcal{E}^\kappa \subseteq \mathcal{E}'$ , wobei  $\mathcal{E}'$  die durch  $G_1^\kappa$  und  $G_2^\kappa$  aufgespannte Ebene in  $\mathbb{A}'$  ist (siehe Beweis von 3.3 in [10]). Wir zeigen nun, dass  $\kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  sogar bijektiv ist.

Zur Injektivität: Seien  $p, q \in \mathcal{E}$  zwei verschiedene Punkte. Ist ihre Verbindungsgerade  $G = pq$  regulär, dann gilt sofort  $p^\kappa \neq q^\kappa$ , denn  $\kappa|_G : G \rightarrow G^\kappa$  ist gemäß 5.3.4 bijektiv. Wir nehmen daher an, dass  $G$  singulär mit  $p^\kappa = q^\kappa$  ist. Wir machen eine Fallunterscheidung:

- (1) Seien zunächst  $p, q \in G_1 \cup G_2$ . Offenbar gilt  $G \neq G_1$  sowie  $G \neq G_2$ . Wegen  $G_1^\kappa \neq G_2^\kappa$  muss nach unserer Annahme  $p^\kappa = q^\kappa = G_1^\kappa \cap G_2^\kappa$  gelten. Daraus folgt aber  $G_1 \cap G_2 = p = q$ , was ein Widerspruch ist. Daher erhalten wir  $p^\kappa \neq q^\kappa$ .
- (2) OBdA sei nun  $p \in G_1$  und  $q \notin (G_1 \cup G_2)$ . Seien  $\hat{G}_1 := \{q \parallel G_1\}$  und  $\hat{G}_2 := \{q \parallel G_2\}$  die zu  $G_1$  bzw.  $G_2$  parallelen Geraden durch  $q$ . Dann schneidet  $\hat{G}_1$  die Gerade  $G_2$  und  $\hat{G}_2$  die Gerade  $G_1$ . Wir setzen  $v := G_1 \cap \hat{G}_2$  und  $w := \hat{G}_1 \cap G_2$ . Offenbar ist  $w \neq p$ , da sonst  $\hat{G}_1 = G_1$  wäre und damit  $q \in G_1$ . Da  $\hat{G}_2 = vq$  regulär ist, kann  $v = p$  auch nicht eintreten. Nach Voraussetzung gibt es in  $\mathcal{E}$  eine dritte reguläre Richtung. Sei also  $G_3$  eine weitere reguläre Gerade in  $\mathcal{E}$  durch den Punkt  $G_1 \cap G_2$ . Die Parallele zu  $G_3$  durch  $p$  schneidet  $\hat{G}_2$  in einem Punkt. Sei also  $\hat{G}_3 := \{p \parallel G_3\}$  und  $z := \hat{G}_3 \cap \hat{G}_2 \notin \{v, q\}$  der Schnittpunkt.

Ist  $p = G_1 \cap G_2$ , dann gilt  $G_3 = \widehat{G}_3$  (siehe Abbildung 5.1(links)). Da alle regulären Geraden gemäß 5.3.4 durch  $\kappa$  bijektiv in reguläre Geraden abgebildet werden, gilt einerseits

$$\begin{aligned}\widehat{G}_3^\kappa &= (pz)^\kappa = p^\kappa z^\kappa = q^\kappa z^\kappa = (qz)^\kappa = \widehat{G}_2^\kappa \\ &= (qv)^\kappa = q^\kappa v^\kappa = p^\kappa v^\kappa = (pv)^\kappa = G_1^\kappa\end{aligned}$$

und andererseits mit  $u := G_3 \cap \widehat{G}_1$

$$\begin{aligned}\widehat{G}_3^\kappa &= (pu)^\kappa = p^\kappa u^\kappa = q^\kappa u^\kappa = (qu)^\kappa = \widehat{G}_1^\kappa \\ &= (qw)^\kappa = q^\kappa w^\kappa = p^\kappa w^\kappa = (pw)^\kappa = G_2^\kappa,\end{aligned}$$

was unserer Voraussetzung  $G_1^\kappa \neq G_2^\kappa$  widerspricht.

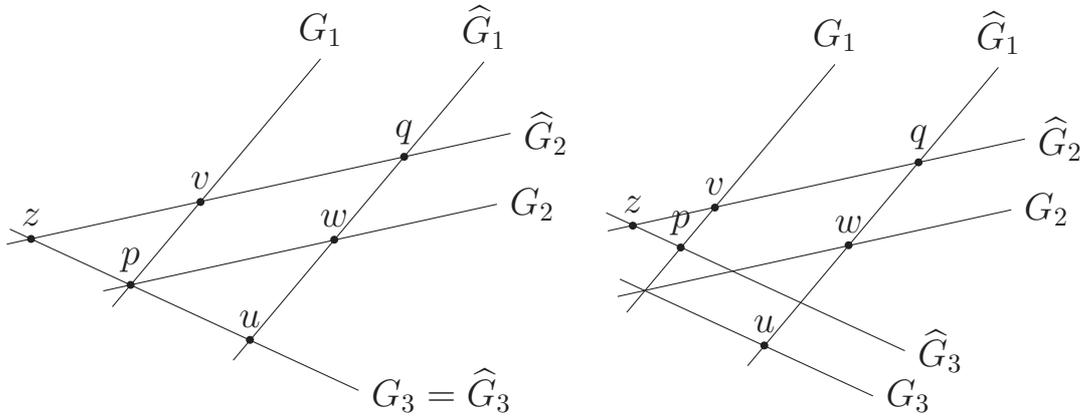


Abbildung 5.1: Die Fälle  $p = G_1 \cap G_2$  (links) und  $p \in G_1 \setminus G_2$  (rechts)

Sei nun  $p \in G_1 \setminus G_2$  (siehe Abbildung 5.1 (rechts)); auf der Abbildung sind die Punkte  $G_2 \cap \widehat{G}_3$ ,  $\widehat{G}_1 \cap \widehat{G}_3$  und  $w$  paarweise verschieden, was aber nicht unbedingt der Fall ist. Es kann auch  $w = G_2 \cap \widehat{G}_3 = \widehat{G}_1 \cap \widehat{G}_3$  gelten.). Die Geraden  $\widehat{G}_3$  und  $G_2$  schneiden sich in diesem Fall in einem von  $G_1 \cap G_2$  verschiedenen Punkt. Deshalb folgt nach unserer Voraussetzung  $\widehat{G}_3^\kappa \neq G_1^\kappa$ . Außerdem gilt nach unserer Annahme  $G_1^\kappa = (pv)^\kappa = p^\kappa v^\kappa = q^\kappa v^\kappa = (qv)^\kappa = \widehat{G}_2^\kappa$ . Insgesamt erhalten wir  $\widehat{G}_3^\kappa \neq \widehat{G}_2^\kappa$  und das impliziert  $z^\kappa = (\widehat{G}_3 \cap \widehat{G}_2)^\kappa = \widehat{G}_3^\kappa \cap \widehat{G}_2^\kappa = \widehat{G}_3^\kappa \cap G_1^\kappa = (\widehat{G}_3 \cap G_1)^\kappa = p^\kappa$ , was ein Widerspruch ist, da  $pz = \widehat{G}_3$  regulär ist. Folglich ist unsere Annahme falsch und es gilt  $p^\kappa \neq q^\kappa$ .

(3) Seien schließlich  $p, q \in \mathcal{E} \setminus (G_1 \cup G_2)$ . Wir definieren  $\widehat{G}_1 := \{q \parallel G_1\}$  und  $\widehat{G}_2 := \{p \parallel G_2\}$  die zu  $G_1$  bzw.  $G_2$  parallelen Geraden durch  $q$  bzw.  $p$  und  $v := G_1 \cap \widehat{G}_2$ ,  $w := \widehat{G}_1 \cap G_2$  und  $u := \widehat{G}_1 \cap \widehat{G}_2$  die entsprechenden Schnittpunkte, wobei  $u \neq p, q$  ist. Nach unserer Annahme gilt  $\widehat{G}_2^\kappa = p^\kappa u^\kappa = q^\kappa u^\kappa = \widehat{G}_1^\kappa$ . Insbesondere gilt nach Voraussetzung  $v^\kappa \neq w^\kappa$  (sonst wäre  $v^\kappa = w^\kappa = G_1^\kappa \cap G_2^\kappa$  und damit  $G_1 \cap G_2 = v = w = \widehat{G}_1 \cap \widehat{G}_2 = u$ , so dass  $\widehat{G}_i = G_i$  für  $i \in \{1, 2\}$  und deshalb  $p, q \in G_1 \cup G_2$  gelten würde). Daraus folgt, dass es einen von  $w$  verschiedenen Punkt  $z \in \widehat{G}_1$  gibt, für den  $z^\kappa = v^\kappa$  gilt. Wegen  $v \in G_1$  und  $z \in \mathcal{E} \setminus (G_1 \cup G_2)$  ist das ein Widerspruch zu dem oben Gezeigten.

Damit ist  $\kappa$  injektiv.

Zur Surjektivität: Seien  $G_1, G_2$  zwei verschiedene reguläre Geraden in  $\mathcal{E}$ , die sich in einem Punkt schneiden. Wegen der Injektivität von  $\kappa$  sind dann auch  $G_i^\kappa$  für  $i \in \{1, 2\}$  in  $\mathcal{E}'$  verschieden und haben einen gemeinsamen Punkt. Sei  $p' \in \mathcal{E}' \setminus (G_1^\kappa \cup G_2^\kappa)$ . Wir suchen das Urbild von  $p'$  in  $\mathcal{E}$ . Dafür definieren wir  $G'_1 := \{p' \parallel G_1^\kappa\}$  und setzen  $v' := G_2^\kappa \cap G'_1$ . Dann gibt es  $v \in G_2$ , so dass  $v' = v^\kappa$  gilt. Nun definieren wir  $\widetilde{G}_1 := \{v \parallel G_1\}$ . Wir zeigen, dass  $\widetilde{G}_1^\kappa = G'_1$  ist.

Angenommen, es gilt  $\widetilde{G}_1^\kappa \neq G'_1$ . Dann ist  $\widetilde{G}_1^\kappa \cap G'_1 = v'$  und es gilt  $\widetilde{G}_1^\kappa \not\parallel G_1^\kappa$ . Damit existiert ein  $q' \in \widetilde{G}_1^\kappa \cap G_1^\kappa$  und folglich ein  $q \in \widetilde{G}_1 \cap G_1$  mit  $q^\kappa = q'$ . Das ist aber ein Widerspruch zur Parallelität von  $\widetilde{G}_1$  und  $G_1$ . Deshalb ist unsere Annahme falsch und es gilt  $\widetilde{G}_1^\kappa = G'_1$ . Wegen  $p' \in G'_1 = \widetilde{G}_1^\kappa$  ist  $p' = p^\kappa$  für ein  $p \in \widetilde{G}_1$ .

Insgesamt folgern wir die Bijektivität von  $\kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ . Somit gilt  $\mathcal{E}^\kappa = \mathcal{E}'$ . Insbesondere werden damit auch parallele Geraden in parallele Geraden abgebildet.  $\square$

Nun möchten wir nicht triviale Morphismen partieller affiner Räume in affinen Räumen  $AG(K, J)$  bzw.  $AG(K', J')$  über Körpern genauer untersuchen. Ab sofort seien  $\mathbb{A} = AG(K, J)$ ,  $\mathbb{A}' = AG(K', J')$  und  $|K| > 3$ . Wir zeigen, dass jeder nicht triviale Morphismus partieller affiner Räume in  $\mathbb{A}$  bzw.  $\mathbb{A}'$  ein Homomorphismus  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  und wegen 5.3.3 semilinear ist. Dafür brauchen wir das folgende Lemma:

**Lemma 5.3.9.** *Sei  $\kappa : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}'$  ein nicht trivialer Morphismus partieller affiner Räume mit  $\text{ord } \mathbb{A} > 3$  und  $G$  eine singuläre Gerade in  $\mathbb{A}$  mit  $G^\kappa \subseteq G'$  für eine Gerade  $G'$  in  $\mathbb{A}'$ . Ist  $\kappa|_G : G \rightarrow G'$  injektiv, dann auch bijektiv.*

*Beweis:* Sei  $\mathcal{E} = G + H$  eine gemäß 5.3.7 existierende reguläre Ebene in  $\mathbb{A}$  mit höchstens zwei singulären Richtungen, wobei  $H$  eine reguläre Gerade ist. Nach 5.3.8 ist dann  $\mathcal{E}^\kappa = G'$  oder es gibt eine Ebene  $\mathcal{E}'$  in  $\mathbb{A}'$ , die die Gerade  $G'$  enthält, so dass die Abbildung  $\kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  bijektiv ist. Wir definieren  $\kappa_G := \kappa|_G : G \rightarrow G'$  und  $\kappa_H := \kappa|_H : H \rightarrow H'$ , wobei  $H'$  eine Gerade in  $\tilde{\mathbb{A}}'$  und  $\kappa_H$  nach 5.3.4 bijektiv ist, und betrachten die beiden Fälle:

- (1) Sei zunächst  $\mathcal{E}^\kappa = G'$ . Insbesondere ist dann  $G'$  regulär. Weiter sei  $L \subseteq \mathcal{E}$  eine von  $H$  verschiedene reguläre Gerade durch den Punkt  $z := G \cap H$ . Dann ist  $\varphi_L : G \rightarrow H : x \mapsto \{x \parallel L\} \cap H$  eine Bijektion, genannt Parallelperspektivität mit Richtung  $L$  (siehe [14, 2.5]), so dass die Abbildung  $\varphi_L \circ \kappa_H : G \rightarrow G' : x \mapsto x^{\varphi_L \kappa_H}$  ebenso bijektiv ist. Insbesondere ist die Verbindungsgerade von  $x$  und  $x^{\varphi_L}$  für alle  $x \in G \setminus \{z\}$  regulär, so dass  $x^{\kappa_G} = x^\kappa \neq x^{\varphi_L \kappa} = x^{\varphi_L \kappa_H}$  gilt.

Wegen der Bijektivität von  $\varphi_L \circ \kappa_H$  gibt es zu jedem  $v \in G'$  genau ein  $x \in G$ , so dass  $x^{\varphi_L \kappa_H} = v$  ist. Daraus folgt, dass für alle  $x \in G \setminus \{z\}$  ein  $\tilde{x} \in G$  mit  $x^{\kappa_G} = \tilde{x}^{\varphi_L \kappa_H}$  existiert, wobei  $\tilde{x} \neq x$  nach der obigen Argumentation sein muss. Außerdem ist  $\tilde{x} \neq z$ , denn sonst wäre  $x^{\kappa_G} = z^{\varphi_L \kappa_H} = z^{\kappa_H} = z^{\kappa_G}$  und damit hätten wir einen Widerspruch zur Injektivität von  $\kappa_G$ . Allgemein kann die Gleichheit  $x^{\kappa_G} = \tilde{x}^{\varphi_L \kappa_H}$  ( $\Leftrightarrow x^\kappa = \tilde{x}^{\varphi_L \kappa}$ ) nur dann erfüllt sein, wenn die Punkte  $x \in G$  und  $\tilde{x}^{\varphi_L} \in H$  nicht distant sind. Gibt es in  $\mathcal{E}$  nur eine singuläre Richtung, nämlich die Parallelklasse von  $G$ , dann gibt es zu jedem  $x \in G \setminus \{z\}$  keinen Punkt auf  $H$  außer  $z$ , der zu  $x$  nicht distant ist. Daher kann dieser Fall unter den gegebenen Voraussetzungen nicht eintreten.

Sei also  $N$  die zweite singuläre Gerade durch  $z$  und  $\varphi_N : G \rightarrow H$  die entsprechende Parallelperspektivität mit Richtung  $N$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in G \setminus \{z\}$  genau einen Punkt auf  $H \setminus \{z\}$ , der zu  $x$  nicht distant ist, und zwar  $x^{\varphi_N}$ . Das impliziert  $\tilde{x}^{\varphi_L} = x^{\varphi_N}$  und damit  $x^{\kappa_G} = \tilde{x}^{\varphi_L \kappa_H} = x^{\varphi_N \kappa_H}$  für alle  $x \in G \setminus \{z\}$ . Wegen  $z^{\kappa_G} = z^{\kappa_H} = z^{\varphi_N \kappa_H}$  folgt daraus die

Gleichheit der Abbildungen  $\kappa_G = \varphi_N \circ \kappa_H$ . Da  $\varphi_N \circ \kappa_H : G \rightarrow G' : x \mapsto x^{\varphi_N \kappa_H}$  als Verkettung bijektiver Abbildungen auch bijektiv ist, folgt daraus die Bijektivität von  $\kappa_G$ .

- (2) Sei nun  $\kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  bijektiv, dann insbesondere injektiv, d.h.  $H^\kappa = H' \neq G'$  und damit  $\mathcal{E}' = G' + H'$ . Weiter sei  $L \subseteq \mathcal{E}$  wieder eine von  $H$  verschiedene reguläre Gerade durch den Punkt  $z := G \cap H$  mit  $L^\kappa =: L' \subseteq \mathcal{E}'$ ,  $L' \neq G', H'$ , und  $\varphi_L : G \rightarrow H$  die Parallelperspektivität mit Richtung  $L$ . Analog definieren wir  $\varphi_{L'} : G' \rightarrow H'$  die Parallelperspektivität mit Richtung  $L'$ . Gemäß 5.3.8 bildet  $\kappa$  parallele Geraden in parallele Geraden ab. Da die Gerade  $xx^{\varphi_L}$  für jedes  $x \in G \setminus \{z\}$  als Parallele zu  $L$  regulär ist, folgt daraus  $(xx^{\varphi_L})^\kappa = x^\kappa x^{\varphi_{L'}^\kappa} = x^{\kappa_G} x^{\varphi_{L'}^\kappa}$  mit  $x^{\varphi_{L'}^\kappa} = (\{x \parallel L\} \cap H)^\kappa = \{x^\kappa \parallel L^\kappa\} \cap H^\kappa = \{x^{\kappa_G} \parallel L'\} \cap H' = x^{\kappa_G \varphi_{L'}}$ . Wegen der Bijektivität von  $\varphi_{L'}$  erhalten wir  $x^{\kappa_G} = x^{\varphi_{L'}^\kappa \varphi_{L'}^{-1}}$  für alle  $x \in G \setminus \{z\}$ . Für  $z \in G$  ist die Gleichheit  $z^{\kappa_G} = z^{\varphi_{L'}^\kappa \varphi_{L'}^{-1}}$  trivial. Damit sind die Abbildungen  $\kappa_G$  und  $\varphi_L \circ \kappa_H \circ \varphi_{L'}^{-1} : G \rightarrow G' : x \mapsto x^{\varphi_L \kappa_H \varphi_{L'}^{-1}}$  identisch. Folglich ist  $\kappa_G$  bijektiv. □

**Satz 5.3.10.** *Seien  $\mathbb{A} = AG(K, J)$ ,  $\mathbb{A}' = AG(K', J')$  affine Räume über Körpern  $K$  bzw.  $K'$  mit  $|K| > 3$ . Außerdem sei  $\kappa : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}'}$  ein nicht trivialer Morphismus von partiellen affinen Räumen in  $\mathbb{A}$  bzw.  $\mathbb{A}'$ . Dann ist  $\kappa$  ein Homomorphismus der affinen Räume  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  und damit semilinear.*

*Beweis:* Es ist zunächst zu zeigen, dass  $\kappa$  singuläre Geraden in Punkte oder Geraden abbildet. Im Weiteren sei  $m > 3$  die Mächtigkeit von  $K$ , wobei  $m = \infty$  nicht ausgeschlossen wird.

Sei  $a \in J \setminus (J^* \cup \{0\})$  und damit die Gerade  $a_0 + Ka$  für jedes  $a_0 \in J$  singulär. Wegen  $J \subseteq K_{n,n}$  hat  $a$  höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte und einer davon ist Null. Nach 5.3.7 existiert mindestens eine reguläre Ebene, die durch  $a_0 + Ka$  geht und höchstens zwei singuläre Richtungen hat. Sei  $\mathcal{E} = a_0 + Ka + Kb$  eine solche Ebene mit  $r \geq 3$  regulären Richtungen, wobei  $r = m - 1$  im Fall  $b \in J \setminus J^*$  und sonst  $r = m$  ist. Unter Berücksichtigung von 5.3.8 betrachten wir das Bild von  $\mathcal{E}$ . Dabei setzen wir oBdA  $a_0 = 0$  (für  $a_0 \neq 0$  gibt es eine Translation  $\tau_{a_0} : Ka + Kb \rightarrow a_0 + Ka + Kb$ , welche sowohl reguläre, als auch

singuläre Geraden erhält, so dass man in der gleichen Situation bleibt).

- (i) Sei zunächst  $\mathcal{E}^\kappa = K'c$  eine reguläre Gerade in  $\tilde{\mathbb{A}}'$ . Wir nehmen an, dass  $(Ka)^\kappa$  weder ein Punkt, noch eine Gerade ist, d.h. die Abbildung  $\kappa|_{Ka} : Ka \rightarrow K'c$  sei nicht surjektiv. Dann folgt nach 5.3.9, dass  $\kappa|_{Ka}$  auch nicht injektiv ist, d.h. es existieren verschiedene Körperelemente  $\lambda, \mu \in K$  mit  $(\lambda a)^\kappa = (\mu a)^\kappa \in K'c$ , wobei  $(Ka)^\kappa \neq (\lambda a)^\kappa$  ist. Daher muss ein  $\nu \in K \setminus \{\lambda, \mu\}$  existieren, für das  $(\nu a)^\kappa \neq (\lambda a)^\kappa$  gilt.

Wir wissen, dass durch  $\nu a$  mindestens  $m-1$  reguläre Geraden gehen. Sei  $H$  eine davon. Da jede reguläre Gerade bijektiv auf  $K'c$  abgebildet wird, gibt es auf  $H$  einen Punkt  $p \neq \nu a$  mit  $p^\kappa = (\lambda a)^\kappa = (\mu a)^\kappa \in K'c$ . Insbesondere gilt  $p \neq \lambda a, \mu a$ . Somit müssen die Geraden  $p(\lambda a)$  und  $p(\mu a)$  in  $\mathcal{E}$  singulär sein. Außerdem ist die Gerade  $\{p||Ka\} \neq p(\lambda a), p(\mu a)$  singulär, so dass wir durch  $p$  mindestens drei singuläre Geraden haben, was aber ein Widerspruch zu unserer Wahl der Ebene  $\mathcal{E}$  ist. Damit ist unsere Annahme falsch und es gilt die Behauptung, d.h.  $(Ka)^\kappa = 0^\kappa$  oder  $(Ka)^\kappa = K'c$ .

- (ii) Sei nun  $\mathcal{E}^\kappa = \mathcal{E}'$  eine reguläre Ebene in  $\mathbb{A}'$  und  $\kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  bijektiv. Damit ist auch  $\kappa|_{Ka}$  injektiv. In diesem Fall kann  $(Ka)^\kappa \subseteq \mathcal{E}'$  entweder eine Gerade sein oder die Bilder der Punkte von  $Ka$  sind in  $\mathcal{E}'$  nicht kollinear (den Fall  $(Ka)^\kappa \subsetneq G'$  für eine Gerade  $G'$  in  $\mathcal{E}'$  schließen wir wegen 5.3.9 wieder aus). Angenommen, es gilt das Letzte, d.h. es gibt ein  $\lambda \in K^* \setminus \{1\}$  mit  $(\lambda a)^\kappa \notin 0^\kappa a^\kappa$ .

Aus der Bijektivität von  $\kappa|_{\mathcal{E}}$  folgt unmittelbar, dass für jede reguläre Gerade  $G \subseteq \mathcal{E}$  die Abbildung  $\kappa|_{[G]} : [G] \rightarrow [G^\kappa]$  bijektiv ist, wobei  $[G]$  und  $[G^\kappa]$  die Parallelklassen von  $G$  bzw.  $G^\kappa$  bezeichnen. Darüber hinaus wissen wir, dass es durch jeden Punkt in  $\mathcal{E}$  höchstens zwei singuläre Geraden gibt. Wir zeigen zunächst, dass auch  $\mathcal{E}'$  höchstens zwei singuläre Richtungen besitzt.

Sei  $x' \in \mathcal{E}'$  ein beliebiger Punkt. Wegen der Bijektivität von  $\kappa|_{\mathcal{E}}$  gibt es einen Punkt  $x \in \mathcal{E}$  mit  $x^\kappa = x'$ . Nun sei  $H \subseteq \mathcal{E} \setminus \{x\}$  eine reguläre Gerade, welche  $x$  nicht enthält. Dann ist  $H^\kappa \subseteq \mathcal{E}' \setminus \{x^\kappa\}$  auch regulär. Die Menge aller Geraden durch  $x^\kappa$  ist  $\{x^\kappa w \mid w \in H^\kappa\} \cup \{x^\kappa || H^\kappa\}$ , wobei

die Gerade  $\{x^\kappa \| H^\kappa\} \in [H^\kappa]$  auch regulär ist und die reguläre Gerade  $\{x \| H\} \subseteq \mathcal{E}$  als Urbild hat. Wegen der Bijektivität von  $\kappa|_H : H \rightarrow H^\kappa$  gibt es für jeden Punkt  $w \in H^\kappa$  genau ein  $v \in H$ , so dass  $w = v^\kappa$  ist. Wir nehmen an, dass die Menge  $\{x^\kappa w \mid w \in H^\kappa\}$  drei singuläre Geraden enthält, sagen wir  $x^\kappa w_i$  für  $w_i \in H^\kappa$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Seien  $v_i \in H$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , mit  $w_i = v_i^\kappa$ . Dann können die Verbindungsgeraden  $xv_i \subseteq \mathcal{E}$  nicht regulär sein, denn sonst wären ihre Bilder auch in  $\mathcal{E}'$  regulär. Damit gibt es durch  $x$  mehr als zwei singuläre Geraden. Unsere Annahme liefert also einen Widerspruch. Daraus folgt, dass  $\mathcal{E}'$  höchstens zwei singuläre Richtungen hat. Mit anderen Worten kann es durch jeden Punkt in  $\mathcal{E}'$  höchstens zwei Geraden geben, deren Urbilder keine reguläre Geraden in  $\mathcal{E}$  sind.

Wir nehmen zusätzlich an, dass  $0^\kappa(\lambda a)^\kappa$  regulär ist. Sei  $G'$  die Parallele zu  $0^\kappa(\lambda a)^\kappa$  durch den Punkt  $a^\kappa$ , dann ist auch  $G'$  regulär. Gibt es eine reguläre Gerade  $G \subseteq \mathcal{E}$  mit  $G^\kappa = G'$ , dann muss wegen  $0^\kappa(\lambda a)^\kappa \in [G^\kappa]$  auch die Gerade  $0(\lambda a) = Ka$ , d.h. das Urbild von  $0^\kappa(\lambda a)^\kappa$ , regulär sein. Nach unserer Voraussetzung ist aber  $Ka$  singulär. Damit hat  $G'$  keine reguläre Gerade in  $\mathcal{E}$  als Urbild.

Nach den obigen Überlegungen gibt es durch  $a^\kappa$  höchstens eine weitere Gerade, welche kein Bild einer regulären Gerade von  $\mathcal{E}$  ist. Daraus folgt, dass mindestens eine Gerade von  $0^\kappa a^\kappa$  und  $a^\kappa(\lambda a)^\kappa$  eine reguläre Gerade in  $\mathcal{E}$  als Urbild hat, nämlich  $0a = Ka = a(\lambda a)$ . In beiden Fällen führt unsere zusätzliche Annahme zu einem Widerspruch. Deshalb muss  $0^\kappa(\lambda a)^\kappa$  singulär sein.

Analog zeigt man, dass auch die Geraden  $0^\kappa a^\kappa$ ,  $a^\kappa(\lambda a)^\kappa$  singulär sind, so dass  $\mathcal{E}'$  mindestens drei singuläre Richtungen enthält. Dadurch erhalten wir wieder einen Widerspruch. Nach 5.3.9 ist daher  $(Ka)^\kappa$  eine Gerade in  $\mathcal{E}'$ .

Insgesamt folgern wir, dass  $\kappa : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  ein nicht trivialer Homomorphismus affiner Räume und nach 5.3.3 semilinear ist.  $\square$

Wir stellen jetzt ein Beispiel für einen Morphismus von einem partiellen affinen Raum über einem Körper mit der Mächtigkeit 3 auf sich selbst vor,

welcher aber nicht (semi)linear ist. Damit möchten wir zeigen, dass die Bedingung für die Mächtigkeit des Körpers  $|K| > 3$  zumindest für den obigen Satz berechtigt ist.

**Beispiel 5.3.11.** Sei  $J = \left\{ \begin{pmatrix} u & w & r \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \mid u, v, w, r \in K \right\}$  mit  $K \simeq GF(3)$ . Dann ist  $J$  ein Jordan-abgeschlossenes Jordan-System, das gemäß 3.3.6(1) sogar stabil in  $R$  ist. Laut 3.2.15 gilt daher  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$ .

Das Residuum  $\tilde{\Sigma}_{R(0,1)}$  wird wieder mit dem partiellen affinen Raum  $\tilde{\mathbb{A}} = (\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{L}}, \in, \parallel)$  mit  $\mathcal{P} = J$  identifiziert.

(a) Wir zeigen zunächst, dass es eine nicht lineare Abbildung  $f : J \rightarrow J$  gibt, welche aber ein Morphismus partieller affiner Räume  $\tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  ist. Sei  $a = \begin{pmatrix} u & w & r \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \in J \setminus (J^* \cup \{0\})$  und  $\mathcal{E}$  eine Ebene, die durch die singuläre Gerade  $Ka$  und eine Gerade  $Kb$  aufgespannt ist. Dann gibt es die folgenden Möglichkeiten für  $\mathcal{E}$ :

- (i) Sei  $u = v = 0$ . Ist  $Kb$  regulär, dann ist auch  $\mathcal{E}$  regulär mit genau drei regulären Richtungen. Für  $b \notin J^*$  sind alle Richtungen in  $\mathcal{E}$  stets singulär.
- (ii) Gilt  $u \neq 0$  oder  $v \neq 0$ , dann ist  $\mathcal{E}$  stets nicht regulär. Die Ebene  $\mathcal{E}$  enthält genau zwei reguläre Richtungen, falls  $b \in J^*$  oder  $b = \begin{pmatrix} u' & w' & r' \\ 0 & v' & w' \\ 0 & 0 & u' \end{pmatrix} \notin J^*$  mit  $v' \neq 0$  (für  $u \neq 0$ ) bzw.  $u' \neq 0$  (für  $v \neq 0$ ) ist, und sonst sind alle Richtungen in  $\mathcal{E}$  singulär.

Für uns sind insbesondere nicht reguläre Ebenen interessant. Da für alle  $a \notin J^*$  aus (i) stets eine reguläre Ebene durch  $Ka$  existiert, kann man genau so wie im Beweis von 5.3.10 zeigen, dass solche  $Ka$  entweder in einen Punkt oder in eine reguläre Gerade abgebildet wird (die Behauptung von 5.3.9 ist für solche  $Ka$  wegen der endlichen Mächtigkeit des Körpers trivial). Daher betrachten wir ein  $a \notin J^*$  aus (ii) und eine Ebene durch  $Ka$  mit genau zwei regulären Richtungen. Sei also  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in J \setminus J^*$  und  $\mathcal{E} = K + Ka$ . Die regulären Richtungen in  $\mathcal{E}$  sind  $K$  und  $K(1 + a)$ .

Wir definieren die Menge  $\hat{J} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w & r \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid w, r \in K \right\} \subseteq J$ , dann ist  $J = \mathcal{E} \oplus \hat{J}$ , d.h. für alle  $h \in J$  gibt es eindeutig bestimmte  $k, l \in K$  und

$z \in \hat{J}$ , so dass  $h = k + la + z$  ist. Nun zeigen wir, dass

$$f : J \rightarrow J : k + la + z \mapsto (k + la)^{\bar{f}} + z$$

mit

$$\bar{f} := f|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow J : k + la \mapsto k + \lambda_{kl} z_f$$

für ein festes  $z_f \in \hat{J}$  und  $\lambda_{kl} = k + 2l + 1$  im Fall  $z_f \neq 0$  nicht additiv, aber ein Morphismus partieller affiner Räume ist (im Fall  $z_f = 0$  ist  $f$  offenbar semilinear).

Zunächst betrachten wir  $\bar{f}$ . Alle regulären Geraden in  $\mathcal{E}$  werden unter  $\bar{f}$  bijektiv in reguläre Geraden in  $\mathcal{E}' := K + K(1 + z_f)$  abgebildet, wobei aber parallele Geraden in sich schneidende Geraden übergehen:

$$\begin{aligned} K^{\bar{f}} &= K, \text{ denn } k^{\bar{f}} = k \text{ für alle } k \in K, \\ (a + K)^{\bar{f}} &= \{a^{\bar{f}}, (a + 1)^{\bar{f}}, (a + 2)^{\bar{f}}\} \\ &= \{0, 1 + z_f, 2(1 + z_f)\} = K(1 + z_f), \\ (2a + K)^{\bar{f}} &= \{(2a)^{\bar{f}}, (2a + 1)^{\bar{f}}, (2a + 2)^{\bar{f}}\} \\ &= \{z_f, 1, 2(1 + z_f)\} = 1 + K(2 + z_f), \\ K(a + 1)^{\bar{f}} &= \{0^{\bar{f}}, (a + 1)^{\bar{f}}, (2a + 2)^{\bar{f}}\} \\ &= \{0, 1 + z_f, 2(1 + z_f)\} = K(1 + z_f), \\ (1 + K(a + 1))^{\bar{f}} &= \{1^{\bar{f}}, (a + 2)^{\bar{f}}, (2a)^{\bar{f}}\} \\ &= \{1, 2(1 + z_f), z_f\} = 1 + K(2 + z_f), \\ (2 + K(a + 1))^{\bar{f}} &= \{2^{\bar{f}}, a^{\bar{f}}, (2a + 1)^{\bar{f}}\} = \{2, 0, 1\} = K, \end{aligned}$$

wobei  $1 + z_f, 2 + z_f \in J^*$  gilt. Das impliziert, dass  $\bar{f}$  die ersten beiden Bedingungen der Definition 5.3.2 erfüllt. Da aber semilineare Abbildungen die Parallelität von Geraden erhalten, kann  $\bar{f}$  und damit auch  $f$  nicht semilinear sein. Man merkt auch ganz schnell, dass weder  $\bar{f}$  noch  $f$  additiv ist. Es gilt tatsächlich:

$$2(1 + z_f) = (2a + 2)^{\bar{f}} = (2a + 2)^f \neq (2a)^f + 2^f = (2a)^{\bar{f}} + 2^{\bar{f}} = z_f + 2.$$

Nichtsdestotrotz ist  $f$  ein Morphismus partieller affiner Räume. Wir zeigen, dass auch  $f$  die ersten beiden Bedingungen von 5.3.2 erfüllt:

- (1) Für zwei beliebige Punkte  $p = p_{\mathcal{E}} + z_p \in J$  mit  $p_{\mathcal{E}} = k + la \in \mathcal{E}$  und  $q = q_{\mathcal{E}} + z_q \in J$  mit  $q_{\mathcal{E}} = s + ta \in \mathcal{E}$  gilt

$$\begin{aligned} p \Delta q &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}} + z_p + 2(q_{\mathcal{E}} + z_q) = (p_{\mathcal{E}} + 2q_{\mathcal{E}}) + (z_p + 2z_q) \in J^* \\ &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}} + 2q_{\mathcal{E}} \in J^* \\ &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}} \Delta q_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Analog gilt auch für die Bilder von  $p$  und  $q$ :

$$\begin{aligned} p^f \Delta q^f &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + z_p + 2(q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + z_q) \in J^* \\ &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + 2q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} \in J^* \\ &\Leftrightarrow p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} \Delta q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}}. \end{aligned}$$

Da aber  $\bar{f}$  distante Punkte in distante Punkte abbildet, folgt insgesamt daraus

$$p \Delta q \Leftrightarrow p_{\mathcal{E}} \Delta q_{\mathcal{E}} \Rightarrow p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} \Delta q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} \Leftrightarrow p^f \Delta q^f,$$

d.h.  $f$  ist ein  $\Delta$ -Morphismus.

- (2) Sind nun  $p, q, r$  paarweise verschieden und kollinear in  $\tilde{\mathbb{A}}$  mit  $p = p_{\mathcal{E}} + z_p$  und  $q = q_{\mathcal{E}} + z_q$ , dann ist ihre Verbindungsgerade  $G := p + K(q + 2p)$  und daher gilt  $r = p + 2(q + 2p) = 2(p + q) = 2(p_{\mathcal{E}} + q_{\mathcal{E}}) + 2(z_p + z_q) =: r_{\mathcal{E}} + z_r$ . Da  $p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}}, q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}}, r_{\mathcal{E}}^{\bar{f}}$  in  $\tilde{\mathbb{A}}$  auch verschieden sind und auf einer Gerade liegen, folgt daraus  $r_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} = 2(p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}})$ . Das impliziert  $r^f = r_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + z_r = 2(p_{\mathcal{E}}^{\bar{f}} + q_{\mathcal{E}}^{\bar{f}}) + 2(z_p + z_q) = 2(p^f + q^f)$  und daher gilt  $G^f \in \tilde{\mathcal{L}}$ .

- (b) Man kann sogar zeigen, dass jeder nicht triviale Morphismus  $\kappa : \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$  partieller affiner Räume mit  $k^{\kappa} = k$  für alle  $k \in K$  und  $a^{\kappa} = 0$  für ein  $a \in J \setminus J^*$  aus (ii) mit  $a + 1 \in J^*$  die Eigenschaft  $\kappa|_{\mathcal{E}} = f|_{\mathcal{E}}$  für ein  $f$  wie oben und  $\mathcal{E} = K + Ka$  hat.

Da die Gerade  $\{2, a, 2a + 1\}$  regulär ist, folgt sofort nach Voraussetzung  $(2a + 1)^\kappa = 1$ . Die reguläre Gerade  $K(a + 1)$  wird in eine reguläre Gerade durch 0 abgebildet. Deswegen können wir  $(a + 1)^\kappa =: c$  für ein  $c \in J^*$  setzen und damit gilt  $(2a + 2)^\kappa = 2c = 2(a + 1)^\kappa$ . Analog gilt für die reguläre Gerade  $a + K = \{a, a + 1, a + 2\}$ : mit  $a^\kappa = 0, (a + 1)^\kappa = c$  ist  $(a + 2)^\kappa = 2c = (2a + 2)^\kappa$ . Die reguläre Gerade  $1 + K(a + 1) = \{1, 2a, a + 2\}$  wird in eine reguläre Gerade durch  $1^\kappa = 1$  und  $(a + 2)^\kappa = 2c$  abgebildet, so dass  $(2a)^\kappa \in 1 + K(c + 1)$  und daher  $(2a)^\kappa = c + 2$  sein muss.

Daraus ergibt sich für die Funktion  $\kappa|_{\mathcal{E}}$

$$\bar{\kappa} := \kappa|_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow J : k + la \mapsto (k + 2\lambda_{kl}l) + \lambda_{kl}lc$$

mit

$$\lambda_{kl} = k + 2l + 1 \text{ für } k, l \in K.$$

Aber nicht für jedes  $c \in J^*$  ist  $\kappa$  ein  $\Delta$ -Morphismus. Wir betrachten die distanten Punkte  $1, a + 2 \in J$ . Im Fall  $c = 2$  werden die beiden Punkte auf einen Punkt  $(a + 2)^\kappa = 1 = 1^\kappa$  abgebildet, so dass die Bedingung (1) von 5.3.2 verletzt wird.

Für  $c = a + 1 \in J^*$  sind ihre Bilder  $1^\kappa = 1$  und  $(a + 2)^\kappa = 2c = 2(a + 1)$  verschieden, aber wegen  $1 + 2(2a + 2) = a + 2 \notin J^*$  nicht distant. Das Gleiche gilt auch für  $c = 2(a + 1) \in J^*$ :  $(a + 2)^\kappa = 2c = a + 1 \notin 1$ . Also ist auf jeden Fall  $c \notin K(a + 1) \cup \{2\}$ .

Analoges gilt auch für  $c \in (K + K^*a + \hat{J}) \cap J^* = K^*(a + 1) + \hat{J}$ , denn für je zwei Punkte  $p = p_{\mathcal{E}} + z_p, q = q_{\mathcal{E}} + z_q \in J$  mit  $p_{\mathcal{E}}, q_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$  und  $z_p, z_q \in \hat{J}$  gilt (vgl. Teil(a)(1))

$$p \Delta q \Leftrightarrow p_{\mathcal{E}} \Delta q_{\mathcal{E}}.$$

Damit muss  $c \in (K^* + \hat{J}) \setminus \{2\}$  sein. OBdA setzt man  $c = 1 + z_f$  für ein  $z_f \in \hat{J}$ , so dass die Eigenschaft  $\kappa|_{\mathcal{E}} = f|_{\mathcal{E}}$  erfüllt ist. Im Fall  $z_f = 0$  ist

insbesondere  $\bar{\kappa} : \mathcal{E} \rightarrow K : k + la \mapsto k$ , so dass alle singulären Geraden in  $\mathcal{E}$  bijektiv in  $K$  abgebildet werden.

Die Abbildung  $\kappa$  (und analog auch  $f$ ) kann aber i.Allg. auf die schon bekannte Art und Weise nicht zu einem Morphismus der Kettengeometrien  $\varphi : R(1,0)E(T) \mapsto R(1,0)E(T^\kappa)$  fortgesetzt werden (vgl. 5.1.5, 5.1.11). Man kann zeigen, dass  $\varphi$  für  $z_f \neq 0$  sogar nicht wohldefiniert ist: Ist  $a \in J \setminus J^*$  wie oben, dann gilt für den Punkt  $R(a+1, 1) = R(1,0)E(2, a) = R(1,0)E(a+1)$  einerseites

$$\begin{aligned} (R(1,0)E(2, a))^\varphi &= R(1,0)E(2^\kappa, a^\kappa) \\ &= R(1,0)E(2, 0) = R(1, 1) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (R(1,0)E(a+1))^\varphi &= R(1,0)E((a+1)^\kappa) \\ &= R(1,0)E(z_f+1) = R(z_f+1, 1). \end{aligned}$$

Nun brauchen wir eine Bedingung, unter welcher die oben definierten Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  nicht triviale Morphismen zwischen den entsprechenden partiellen affinen Räumen sind, so dass wir auf  $\alpha$  und  $\beta$  den Satz 5.3.10 anwenden können. Ab sofort setzen wir  $|K| \geq n+1$  für  $n \geq 2$  voraus. Dabei wird der Fall  $|K| = 3$  für  $n = 2$  ausgeschlossen, damit die Voraussetzungen von 5.3.10 erfüllt sind. Gemäß 3.3.5 ist dann  $J$  stabil in  $R$  und nach 3.3.7 gilt dann insbesondere  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$ .

In den folgenden Lemmata beweisen wir, dass für solche  $J$  die Abbildungen  $\alpha, \beta$  sicher nicht trivial sind. Wir erinnern, dass wir uns  $J$  als eine Teilmenge der Matrizenalgebra  $K_{n,n}$  vorstellen. Deshalb können wir für unsere Beweise und Rechnungen Eigenwerte der Elemente von  $J$  heranziehen.

**Lemma 5.3.12.** *Sei  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  ein beliebiger Punkt. Dann existiert eine Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  durch  $p$ , welche mindestens drei Punkte in  $\Delta(\infty)$  enthält.*

*Beweis:* Sei  $p = R(1+ab, a)$  ein beliebiger Punkt in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $a \in J$  und

$b \in J^*$  (gemäß 3.3.2). Ist  $p \in \Delta(\infty)$ , dann gibt es eine Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  durch  $p$  und  $R(1, 0)$ . Nach Voraussetzung enthält  $C$  mindestens 5 Punkte, so dass mindestens vier davon zu  $R(1, 0)$  distant sind.

Sei nun  $p \not\in R(1, 0)$ , d.h.  $a \notin J^*$ . Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:

- (a) Angenommen,  $a$  besitzt höchstens  $n - 1$  Eigenwerte (und einer davon ist Null). Wegen  $|K| \geq n + 1$  gibt es dann  $\lambda, \mu \in K^*$  mit  $\lambda \neq \mu$ , so dass  $a + \lambda, a + \mu \in J^*$  sind. Dann ist die Matrix  $\begin{pmatrix} 1+ab & a \\ -(a+\lambda)b & -(a+\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -(a+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$  und damit sind die Punkte  $q = R(b, 1), r = R(b - \lambda^{-1}, 1) \in \Delta(\infty)$  und  $p$  wegen

$$p = R(1 + ab, a) = R(1, 0) \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ -(a + \lambda)b & -(a + \lambda) \end{pmatrix} = R(1, 0)^\delta,$$

$$q = R(b, 1) = R(0, 1) \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ -(a + \lambda)b & -(a + \lambda) \end{pmatrix} = R(0, 1)^\delta,$$

$$r = R(b - \lambda^{-1}, 1) = R(1, 1) \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ -(a + \lambda)b & -(a + \lambda) \end{pmatrix} = R(1, 1)^\delta$$

in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  paarweise distant, wobei  $\delta \in PGL_2(R)$  die durch die obige Matrix induzierte Abbildung ist (vgl. 1.1.20).

Nach 3.4.4 liegt die Kette  $C := (pqr) = \mathbb{P}(K)^\delta$  ganz in  $\tilde{\mathbb{P}}(J) \subseteq \mathbb{P}(R)$ . Nun zeigen wir, dass  $C$  noch einen dritten Punkt außer  $q$  und  $r$  hat, welcher zu  $R(1, 0)$  distant ist.

Für  $k := 1 - \lambda\mu^{-1} \in K^*$  (mit  $k \neq 0, 1$  wegen  $\lambda \neq \mu$  sowie  $\lambda, \mu \neq 0$ ) gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} s &:= R(k, 1) \begin{pmatrix} 1 + ab & a \\ -(a + \lambda)b & -(a + \lambda) \end{pmatrix} \\ &= R(k + ((k - 1)a - \lambda)b, (k - 1)a - \lambda) \\ &= R(1 - \lambda\mu^{-1} + (-\lambda\mu^{-1}a - \lambda)b, -\lambda\mu^{-1}a - \lambda) \\ &= R(1 + (1 - \lambda^{-1}\mu)^{-1}(a + \mu)b, (1 - \lambda^{-1}\mu)^{-1}(a + \mu)) \in C \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J) \end{aligned}$$

mit  $s \in \Delta(\infty)$ .

- (b) Sei nun  $a \notin J^*$  mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist  $a$  zu einer  $n \times n$ -Diagonalmatrix  $\bar{a} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ähnlich, d.h. es existiert ein  $u \in R^*$  mit  $\bar{a} = u^{-1}au$ . OBdA sei  $\lambda_1 = 0$ .

Nach 3.3.1 gibt es in  $K[\bar{a}] \subseteq u^{-1}Ju =: \bar{J}$  für jedes  $i \in \{2, \dots, n\}$  eine Diagonalmatrix  $e_i$ , deren  $(i, i)$ -Eintrag 1 ist und die anderen Diagonalelemente Null sind. Folglich ist auch  $e_1 = 1 - \sum_{i=2}^n e_i \in K[\bar{a}]$ . Sei  $l \in K^* \setminus \{1\}$  und zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  wähle ein  $\mu_i \in K^* \setminus \{-\lambda_i, -l^{-1}\lambda_i\}$ , d.h.  $\mu_i + \lambda_i \neq 0$  und  $l\mu_i + \lambda_i \neq 0$  (da der Körper im kleinsten Fall vier Elemente enthält, finden wir stets solche  $\mu_i$ ). Weiter setze man  $\bar{c}_1 := \sum_{i=1}^n \mu_i e_i \in \bar{J}^*$  und  $\bar{c}_2 := l\bar{c}_1 \in \bar{J}^*$ . Dann sind  $\bar{a} + \bar{c}_i \in \bar{J}^*$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Daraus folgt  $a + c_i \in J^*$  für  $c_i := u\bar{c}_i u^{-1} \in J^*$  mit  $c_2 = lc_1$ .

Nach dem gerade Gezeigten ist die Matrix  $\begin{pmatrix} 1+ab & a \\ -(a+c_1)b & -(a+c_1) \end{pmatrix} \in GL_2(R)$ . Sei  $\delta \in PGL_2(R)$  die durch diese Matrix induzierte Abbildung. Dann sind die Punkte  $q = R(b, 1)$ ,  $r = R(b - c_1^{-1}, 1) \in \Delta(\infty)$  und  $p$  wegen  $q = R(0, 1)^\delta$ ,  $r = R(1, 1)^\delta$  und  $p = R(1, 0)^\delta$  in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  paarweise distant. Wir betrachten wieder die Kette  $C := (pqr) = \mathbb{P}(K)^\delta \subseteq \tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Setze man  $k = 1 - l^{-1} \in K^* \setminus \{1\}$ , dann ist

$$\begin{aligned} s &:= R(k, 1)^\delta = R(k, 1) \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ -(a+c_1)b & -(a+c_1) \end{pmatrix} \\ &= R(k(1+ab) - (a+c_1)b, ka - (a+c_1)) \\ &= R(k - c_1b + (k-1)ab, (k-1)a - c_1) \\ &= R(1 + (1-l)^{-1}(lc_1 + a)b, (1-l)^{-1}(a + lc_1)) \\ &= R(1 + (1-l)^{-1}(a + c_2)b, (1-l)^{-1}(a + c_2)) \in C \cap \Delta(\infty) \end{aligned}$$

und  $C$  hat deswegen mindestens drei Punkte in  $\Delta(\infty)$ . □

**Korollar 5.3.13.** *Seien  $p, q \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  zwei beliebige Punkte. Dann existiert eine Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  durch  $p$ , welche mindestens drei Punkte in  $\Delta(q)$  enthält.*

*Beweis:* Für  $p \Delta q$  ist die Aussage trivial. Sei daher  $p \not\Delta q$  und  $q = R(1, 0)^\sigma$  für ein  $\sigma \in PE_2(J)$ . Nach 5.3.12 gibt es dann durch  $p^{\sigma^{-1}} \in \widetilde{\mathbb{P}}(J) \setminus \Delta(\infty)$  eine Kette  $C := (xyz) \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  mit  $x, y, z \in \Delta(\infty)$ . Daher ist  $p \in C^\sigma = (x^\sigma y^\sigma z^\sigma)$  mit  $x^\sigma, y^\sigma, z^\sigma \in \Delta(q)$ . □

**Lemma 5.3.14.** *Ist  $\gamma : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{\Sigma}'$  ein nicht trivialer Morphismus, dann ist jeder induzierte Morphismus  $\gamma_p : \widetilde{\Sigma}_p \rightarrow \widetilde{\Sigma}'_{p^\gamma}$  partieller affiner Räume nicht trivial.*

*Beweis:* Sei  $\gamma_p = \gamma|_{\Delta(p)} : \widetilde{\Sigma}_p \rightarrow \widetilde{\Sigma}'_{p^\gamma}$  trivial, d.h. es existiert eine Gerade  $G' \in \mathfrak{C}'_{p^\gamma}$ , so dass  $(\Delta(p))^{\gamma_p} = G'$  ist. Weiter sei  $q \in \widetilde{\mathbb{P}}(J) \setminus \Delta(p)$ . Nach 5.3.13 gibt es eine Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  durch  $q$ , welche mindestens drei Punkte in  $\Delta(p)$  besitzt, sagen wir  $u, v$  und  $w$ . Für diese Punkte gilt insbesondere  $u^\gamma = u^{\gamma_p}, v^\gamma = v^{\gamma_p}$  und  $w^\gamma = w^{\gamma_p}$  mit  $u^{\gamma_p}, v^{\gamma_p}, w^{\gamma_p} \in G'$ . Da  $\gamma$  Ketten bijektiv auf Ketten abbildet, folgt daraus  $C^\gamma = (u^\gamma v^\gamma w^\gamma) = (u^{\gamma_p} v^{\gamma_p} w^{\gamma_p}) = C' := G' \cup \{p^\gamma\} \in \mathfrak{C}(K', R', J')$  und daher ist  $q^\gamma \in C'$ . Insgesamt ergibt sich  $\widetilde{\mathbb{P}}(J)^\gamma = C'$ , d.h.  $\gamma$  muss trivial sein, was unserer Voraussetzung widerspricht. Folglich ist unsere Annahme falsch und damit ist  $\gamma_p$  nicht trivial. □

Damit haben wir gezeigt, dass unter der Voraussetzung  $|K| \geq n + 1$  für  $n \geq 3$  und  $|K| \geq 4$  für  $n = 2$  die Abbildungen  $\alpha : J \rightarrow J'$  und  $\beta : J \rightarrow J'$  stets nicht triviale Morphismen partieller affiner Räume sind. Insbesondere ist deshalb  $\dim_{K'} J^\alpha \geq 2$  bzw.  $\dim_{K'} J^\beta \geq 2$ . Nach dem Satz 5.3.10 folgern wir:

**Korollar 5.3.15.** *Sei der Morphismus  $\gamma : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{\Sigma}'$  nicht trivial. Dann sind die assoziierten Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  semilinear mit  $\dim_{K'} J^\alpha, \dim_{K'} J^\beta \geq 2$ .*

Insbesondere gilt die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 5.3.16.** *Ist der Morphismus  $\gamma : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{\Sigma}'$  nicht trivial, dann sind die Körper  $K$  und  $K'$  isomorph.*

*Beweis:* Wir betrachten die mit  $\gamma$  assoziierte Abbildung  $\alpha$ . Nach 5.3.15 ist  $\alpha$

semilinear. Setze man  $1^\alpha =: d \in J'$ , dann ist die Abbildung

$$\alpha|_K : K \rightarrow K'd : k \mapsto k^\alpha = (k1)^\alpha = k^{\widehat{\alpha}}1^\alpha = k^{\widehat{\alpha}}d$$

bijektiv, denn  $K$  ist regulär, wobei  $\widehat{\alpha} : K \rightarrow K' : k \mapsto k^{\widehat{\alpha}}$  der zugehörige Körpermonomorphismus ist. Wir zeigen, dass  $\widehat{\alpha}$  sogar ein Körperisomorphismus ist.

Sei  $k' \in K'$  beliebig. Dann hat der Punkt  $k'd \in K'd$  ein  $\alpha$ -Urbild  $k \in K$ , d.h.  $k'd = k^\alpha = k^{\widehat{\alpha}}d$ . Insbesondere ist auch  $K^\alpha = K'd$  regulär und daher gilt  $d \in J'^*$ . Das impliziert  $k' = k^{\widehat{\alpha}}$ . Deshalb ist  $\widehat{\alpha}$  surjektiv und damit bijektiv.  $\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass das Paar  $(\alpha, \beta)$  sogar ein Homotopismus zwischen den entsprechenden Jordan-Systemen ist. Die folgende Aussage gilt gemäß Lemma 3.1.10 in [26]:

**Bemerkung 5.3.17.** Sei  $R$  ein Ring und  $a, b \in R^*$  mit  $a - b \in R^*$ . Dann ist auch  $a^{-1} - b^{-1} \in R^*$ , und es gilt die **Hua-Identität**:

$$(a^{-1} - b^{-1})^{-1} = a - a(a - b)^{-1}a.$$

Die nachfolgende Bemerkung wurde in [11], Lemma 3.6, bereits für starke Jordan-Systeme bewiesen. Wir führen den Beweis noch einmal aus, um zu zeigen, dass er auch in unserem Fall gültig ist:

**Bemerkung 5.3.18.** Sei  $\gamma : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{\Sigma}'$  ein Morphismus von Kettengeometrien. Dann bilden die induzierten Abbildungen  $\alpha$  und  $\beta$  Einheiten in Einheiten ab und es ist  $(u^{-1})^\alpha = (u^\beta)^{-1}$  für alle  $u \in J^*$ . Ist  $\gamma$  ein starker Morphismus, dann bilden  $\alpha$  und  $\beta$  Nichteinheiten in Nichteinheiten ab.

Ist  $\gamma$  nicht trivial, dann gilt stets für  $\alpha$  (und analog für  $\beta$ ):

$$\forall a, b \in J^* \text{ mit } a - b \in J^* : ((a^{-1} + (b - a)^{-1})^{-1})^\alpha = ((a^\alpha)^{-1} + (b^\alpha - a^\alpha)^{-1})^{-1}.$$

*Beweis:* Die ersten Aussagen lassen sich ganz einfach herleiten:

Es ist  $u \in J^*$  genau dann, wenn  $R(u, 1) \triangle R(0, 1)$  bzw.  $R(1, u) \triangle R(1, 0)$  gilt.

Damit erhalten wir  $(R(u, 1))^\gamma = R'(u^\beta, 1') \triangle R'(0', 1')$  sowie  $(R(1, u))^\gamma = R'(1', u^\alpha) \triangle R'(1', 0')$  und das liefert  $u^\alpha, u^\beta \in J^*$ . Außerdem gilt  $R(u, 1) = R(1, u^{-1})$  und deshalb  $R'(1', (u^{-1})^\alpha) = (R(1, u^{-1}))^\gamma = (R(u, 1))^\gamma = R'(u^\beta, 1') = R'(1', (u^\beta)^{-1})$ . Daraus folgt  $(u^{-1})^\alpha = (u^\beta)^{-1}$  für alle  $u \in J^*$ .

Ist  $\gamma$  nicht trivial, dann sind  $\alpha$  und  $\beta$  nach 5.3.15 semilinear. Seien  $a, b \in J^*$  mit  $a - b \in J^*$ , dann ist nach 5.3.17 auch  $a^{-1} + (b - a)^{-1} \in J^*$ . Nach dem gerade Gezeigten gilt dann

$$\begin{aligned} ((a^{-1} + (b - a)^{-1})^{-1})^\alpha &= ((a^{-1} + (b - a)^{-1})^\beta)^{-1} \\ &= ((a^{-1})^\beta + ((b - a)^{-1})^\beta)^{-1} \\ &= ((a^\alpha)^{-1} + ((b - a)^\alpha)^{-1})^{-1} \\ &= ((a^\alpha)^{-1} + (b^\alpha - a^\alpha)^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Bevor wir unser nächstes Hauptresultat beweisen, möchten wir noch ein paar Eigenschaften eines Körpers erwähnen:

**Bemerkung 5.3.19.** Sei  $K$  ein Körper mit  $|K| > 3$ . Dann gilt:

- (a) Es gibt stets ein  $k \in K^*$ , das nicht selbstinvers ist, d.h.  $k^2 \neq 1$ .
- (b) Ist  $K$  endlich mit  $CharK = 2$ , dann gibt es stets ein  $k \in K^* \setminus \{1\}$  und eine Primzahl  $p \neq 2$  mit  $k^p = 1$ , d.h.  $p$  ist die Ordnung von  $k$ .

*Beweis:* (a) Sei  $k \in K$  mit  $k^2 = 1$ . Dann gilt

$$k^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1) \Rightarrow k = 1 \text{ oder } k = -1.$$

Deshalb kann es in jedem beliebigen Körper höchstens zwei Elemente geben, die die obere Gleichheit erfüllen. Unsere Voraussetzung  $|K| > 3$  liefert damit sofort die Existenz von mindestens einem  $k \in K^*$  mit  $k^2 \neq 1$ .

- (b) Sei  $K$  endlich mit  $CharK = 2$ . Dann ist die multiplikative Gruppe von  $K$  zyklisch, d.h. es gibt ein  $a \in K^*$  mit  $K^* = \langle a \rangle$ . Außerdem gilt

$|K| = 2^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $|K^*| = 2^n - 1 =: m = \text{ord}(K^*)$ . Sei  $p$  ein Primteiler von  $m$ , d.h.  $m = pq$  mit  $q \in \mathbb{N}$ . Offenbar ist  $p \neq 2$  und es gilt  $a^m = (a^q)^p = 1$ . Wegen  $q < m$  ist insbesondere  $k := a^q \neq 1$ . Damit ist  $k$  das gesuchte Körperelement.  $\square$

Nun sind wir in der Lage, die schon oben angekündigte Behauptung zu beweisen:

**Satz 5.3.20.** *Sei  $\gamma : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  ein nicht trivialer Morphismus, dann ist das induzierte Paar  $(\alpha, \beta) = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$  ein Homotopismus zwischen den zugrunde liegenden Jordan-Systemen.*

*Beweis:* (vgl. Beweis von 3.7 in [11]) Wegen 5.3.15, 5.3.16 und 5.3.18 bleibt zu zeigen:

$$\forall a, b \in J : (aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha. \quad (5.7)$$

Wir beweisen (5.7) in mehreren Schritten:

Schritt 1: Seien  $a, b \in J^*$  mit  $a - b^{-1} \in J^*$ , dann ist nach Bemerkung 5.3.17 auch  $a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1} \in J^*$  und die Anwendung der Hua-Identität liefert  $(a^{-1} - (a - b^{-1})^{-1})^{-1} = a - aba$ . Benutzen wir 5.3.18 und dann wieder die Hua-Identität, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} a^\alpha - (aba)^\alpha &= (a - aba)^\alpha \\ &= ((a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1})^{-1})^\alpha \\ &= (a^\alpha)^{-1} + ((b^{-1})^\alpha - a^\alpha)^{-1} \\ &= (a^\alpha)^{-1} + ((b^\beta)^{-1} - a^\alpha)^{-1} \\ &= a^\alpha - a^\alpha b^\beta a^\alpha \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\forall a, b \in J^*, a - b^{-1} \in J^* : (aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha. \quad (5.8)$$

Schritt 2: Analog wie im Beweis von 3.7 in [11] zeigt man für die mit  $\alpha$  und

$\beta$  assoziierten Körperisomorphismen  $\widehat{\alpha}$  bzw.  $\widehat{\beta}$  (vgl. 5.3.16) die Gleichheit

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}. \quad (5.9)$$

Schritt 3: Als nächsten Schritt zeigen wir:

$$\forall b \in J : b^\alpha = 1^\alpha b^\beta 1^\alpha. \quad (5.10)$$

Sei zunächst  $b \in J^*$ . Wir machen eine Fallunterscheidung:

- (1) Hat  $b$  und damit auch  $b^{-1}$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Eigenwerte, dann existiert ein  $\lambda \in K^*$ , so dass  $b^{-1} - \lambda \in J^*$  und deshalb auch  $1 - (\lambda b)^{-1} \in J^*$  ist. Nach Semilinearität von  $\alpha$  und  $\beta$  sowie (5.8) und (5.9) gilt dann einerseits

$$(1 \cdot \lambda b \cdot 1)^\alpha = (\lambda b)^\alpha = \lambda^{\widehat{\alpha}} b^\alpha$$

und andererseits

$$(1 \cdot \lambda b \cdot 1)^\alpha = 1^\alpha (\lambda b)^\beta 1^\alpha = 1^\alpha \lambda^{\widehat{\beta}} b^\beta 1^\alpha = \lambda^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha b^\beta 1^\alpha,$$

so dass insgesamt  $b^\alpha = 1^\alpha b^\beta 1^\alpha$  folgt, da  $\lambda^{\widehat{\alpha}} \in K'^*$  ist.

Das Gleiche gilt auch für  $b$  mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten, falls  $|K| \geq n + 2$  (für  $n \geq 2$ ) ist.

- (2) Es bleibt der Fall zu betrachten, wenn  $b$  und  $b^{-1}$  jeweils genau  $n$  verschiedene Eigenwerte besitzen und  $|K| = n + 1$  (für  $n \geq 3$ ) ist. In diesem Fall sind also  $b$  und  $b^{-1}$  diagonalisierbar. Damit existiert ein  $u \in R^*$  mit  $u^{-1}bu = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: \bar{b} \in u^{-1}Ju =: \bar{J}$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K^*$  paarweise verschieden sind. Die inverse Matrix  $b^{-1} = u\bar{b}^{-1}u^{-1}$  ist dann zu  $\bar{b}^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$  ähnlich. Weiter sei oBdA  $\lambda_1 = \lambda_1^{-1} = 1$  und damit  $\lambda_i \neq 1$  für alle  $i \neq 1$ .

Gemäß 3.3.1 sind die Matrizen  $e_i$  mit 1 in der  $i$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte und sonst Nullen in  $K[\bar{b}] \subseteq \bar{J}$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  enthalten, so dass  $K[\bar{b}] \simeq \underbrace{K \times \dots \times K}_{n\text{-mal}}$  ist. Dann ist auch  $\bar{a} := \lambda_j e_1 + \sum_{i=2}^n e_i =$

$diag(\lambda_j, 1, \dots, 1) \in K[\bar{b}]^*$  für ein  $j \neq 1$  mit  $\lambda_j^2 \neq 1$  (so ein  $\lambda_j$  existiert gemäß 5.3.19) und es gilt  $\bar{a} - \bar{b}^{-1} = diag(\lambda_j - 1, 1 - \lambda_2^{-1}, \dots, 1 - \lambda_n^{-1}) \in K[\bar{b}]^* \subseteq \bar{J}^*$ . Daraus folgt

$$a := u\bar{a}u^{-1} \in u\bar{J}^*u^{-1} = J^*$$

sowie

$$a - b^{-1} = u\bar{a}u^{-1} - u\bar{b}^{-1}u^{-1} = u(\bar{a} - \bar{b}^{-1})u^{-1} \in u\bar{J}^*u^{-1} = J^*.$$

Insbesondere haben  $\bar{a}$  und  $\bar{a}\bar{b}\bar{a} = diag(\lambda_j^2, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K[\bar{b}] \subseteq \bar{J}$  weniger als  $n$  verschiedene Eigenwerte, denn wegen  $\lambda_j^2 \neq 1$  und  $|K^*| = n$  muss  $\lambda_j^2 = \lambda_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, n\}$  sein. Damit haben auch  $a$ ,  $a^{-1}$  und  $aba \in J$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Eigenwerte, so dass nach dem im Schritt 3(1) Gezeigten gilt dann wegen  $(1^\alpha)^{-1} = 1^\beta$  (gemäß 5.3.18):

$$\begin{aligned} a^\alpha &= 1^\alpha a^\beta 1^\alpha \Leftrightarrow 1^\beta a^\alpha = a^\beta 1^\alpha \Leftrightarrow a^\alpha 1^\beta = 1^\alpha a^\beta, \\ (a^{-1})^\alpha &= 1^\alpha (a^{-1})^\beta 1^\alpha \Leftrightarrow 1^\beta (a^{-1})^\alpha = (a^{-1})^\beta 1^\alpha \Leftrightarrow (a^{-1})^\alpha 1^\beta = 1^\alpha (a^{-1})^\beta \end{aligned}$$

sowie

$$a^\alpha b^\beta a^\alpha \stackrel{(5.8)}{=} (aba)^\alpha \stackrel{\text{Schritt 3(1)}}{=} 1^\alpha (aba)^\beta 1^\alpha \stackrel{(5.8)}{=} 1^\alpha a^\beta b^\alpha a^\beta 1^\alpha.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} b^\alpha &= (a^\beta)^{-1} (1^\alpha)^{-1} a^\alpha b^\beta a^\alpha (1^\alpha)^{-1} (a^\beta)^{-1} \\ &\stackrel{5.3.18}{=} (a^{-1})^\alpha 1^\beta a^\alpha b^\beta a^\alpha 1^\beta (a^{-1})^\alpha \\ &= 1^\alpha (a^{-1})^\beta a^\alpha b^\beta a^\alpha (a^{-1})^\beta 1^\alpha \\ &\stackrel{5.3.18}{=} 1^\alpha (a^\alpha)^{-1} a^\alpha b^\beta a^\alpha (a^\alpha)^{-1} 1^\alpha \\ &= 1^\alpha b^\beta 1^\alpha. \end{aligned}$$

Damit ist der Fall  $b \in J^*$  erledigt.

Ist nun  $b \in J \setminus J^*$ , dann liefert die Voraussetzung an die Mächtigkeit des

Körpers die Existenz von mindestens einem  $\lambda \in K^*$  mit  $b + \lambda \in J^*$ , so dass nach dem oben Gezeigten gilt:

$$b^\alpha + \lambda^\alpha = (b + \lambda)^\alpha = 1^\alpha(b + \lambda)^\beta 1^\alpha = 1^\alpha b^\beta 1^\alpha + 1^\alpha \lambda^\beta 1^\alpha = 1^\alpha b^\beta 1^\alpha + \lambda^\alpha.$$

Das liefert  $b^\alpha = 1^\alpha b^\beta 1^\alpha$  und damit ist (5.10) gezeigt.

Schritt 4: Nun beweisen wir, dass

$$\forall a \in J : (a^2)^\alpha = a^\alpha 1^\beta a^\alpha. \quad (5.11)$$

Wir machen wieder eine Fallunterscheidung:

- (1) Wir nehmen zuerst an, dass  $a$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Eigenwerte hat, so dass es also ein  $\lambda \in K^*$  gibt mit  $a - \lambda \in J^*$ . Ist  $a$  invertierbar, dann folgt sofort aus (5.8) und (5.9)

$$\begin{aligned} (\lambda^{-1})^{\widehat{\alpha}} (a^2)^\alpha &= (\lambda^{-1} a^2)^\alpha = (a \cdot \lambda^{-1} \cdot a)^\alpha = a^\alpha (\lambda^{-1})^\beta a^\alpha \\ &= a^\alpha (\lambda^{-1})^{\widehat{\beta}} 1^\beta a^\alpha = (\lambda^{-1})^{\widehat{\alpha}} (a^\alpha 1^\beta a^\alpha) \\ \Leftrightarrow (a^2)^\alpha &= a^\alpha 1^\beta a^\alpha. \end{aligned}$$

Sonst betrachte man  $a' := a - \lambda \in J^*$ , wobei  $a'$  die gleiche Anzahl von Eigenwerten wie  $a$  hat, d.h.  $\exists \mu \in K^*$  mit  $a' - \mu \in J^*$ . Nach dem oben Gezeigten folgt dann  $(a'^2)^\alpha = a'^{\alpha} 1^\beta a'^{\alpha}$ . Das liefert

$$\begin{aligned} (a^2)^\alpha - \lambda^{\widehat{\alpha}} a^\alpha - a^\alpha \lambda^{\widehat{\alpha}} + (\lambda^2)^\alpha &= (a^2 - \lambda a - a \lambda + \lambda^2)^\alpha \\ &= ((a - \lambda)^2)^\alpha = (a - \lambda)^{\alpha} 1^\beta (a - \lambda)^\alpha \\ &= a^{\alpha} 1^\beta a^\alpha - \lambda^{\alpha} 1^\beta a^\alpha - a^{\alpha} 1^\beta \lambda^\alpha + \lambda^{\alpha} 1^\beta \lambda^\alpha \\ &= a^{\alpha} 1^\beta a^\alpha - \lambda^{\widehat{\alpha}} 1^{\alpha} 1^\beta a^\alpha - a^{\alpha} 1^\beta 1^{\alpha} \lambda^{\widehat{\alpha}} \\ &\quad + \lambda^{\widehat{\alpha}} 1^{\alpha} 1^\beta \lambda^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha \\ &= a^{\alpha} 1^\beta a^\alpha - \lambda^{\widehat{\alpha}} a^\alpha - a^\alpha \lambda^{\widehat{\alpha}} + (\lambda^2)^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha \end{aligned}$$

und wegen  $(\lambda^2)^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha = (\lambda^2)^\alpha$  gilt dann  $(a^2)^\alpha = a^\alpha 1^\beta a^\alpha$ .

- (2) Für  $a$  mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten bei  $|K| \geq n + 2$  und  $n \geq 2$  gilt

die Behauptung analog wie in (1).

- (3) Sei nun  $a$  mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten und  $|K| = n + 1$  mit  $n \geq 3$ . Wir gehen analog wie im Schritt 3(2) vor.

Sei  $u \in R^*$  mit  $\bar{a} := u^{-1}au = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in u^{-1}Ju =: \bar{J}$  mit paarweise verschiedenen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ . Dann gibt es für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein  $e_i \in K[\bar{a}] \subseteq \bar{J}$  wie oben und damit ist  $\bar{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  (ist  $\bar{a} \in \bar{J} \setminus \bar{J}^*$  und oBdA  $\lambda_n = 0$ , dann ist auch  $e_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} e_i \in K[\bar{a}]$ ).

Offenbar gilt  $e_i e_j = 0$  für alle  $i \neq j$  und deshalb ist  $\bar{a}^2 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i e_i)^2$ . Setzen wir nun  $b_i := u e_i u^{-1} \in u \bar{J} u^{-1} = J$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dann folgt daraus  $b_i b_j = u e_i u^{-1} u e_j u^{-1} = u e_i e_j u^{-1} = 0$  für alle  $i \neq j$  und es gilt  $a = u \bar{a} u^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u e_i u^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$  bzw.  $a^2 = u \bar{a}^2 u^{-1} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i b_i)^2$ . Da jedes  $b_i$  genau  $2 < n$  Eigenwerte besitzt, gilt nach dem in (1) Gezeigten  $(b_i^2)^\alpha = b_i^\alpha 1^\beta b_i^\alpha$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir zeigen zunächst, dass  $b_i^\alpha b_j^\beta + b_j^\alpha b_i^\beta = 0'$  für alle  $i \neq j$  ist.

Für jedes  $i \neq j$  hat  $b_i + b_j = u(e_i + e_j)u^{-1}$  ebenso genau zwei verschiedene Eigenwerte (und einer davon ist 0), so dass es (mindestens zwei) verschiedene  $\mu_1, \mu_2 \in K^*$  gibt mit  $b_i + b_j + \mu_k \in J^*$  für  $k \in \{1, 2\}$ . Setzt man  $\nu := (\mu_1 - \mu_2)^{-1}$ , dann gilt  $(b_i + b_j + \mu_1) - \nu^{-1} = b_i + b_j + \mu_2 \in J^*$  und mit (5.8) folgt daraus einerseits:

$$\begin{aligned} & ((b_i + b_j + \mu_1)\nu(b_i + b_j + \mu_1))^\alpha \\ &= \nu^{\hat{\alpha}}(b_i^2 + b_i b_j + b_i \mu_1 + b_j b_i + b_j^2 + b_j \mu_1 + \mu_1 b_i + \mu_1 b_j + \mu_1^2)^\alpha \\ &= \nu^{\hat{\alpha}}(b_i^2 + b_i \mu_1 + b_j^2 + b_j \mu_1 + \mu_1 b_i + \mu_1 b_j + \mu_1^2)^\alpha \\ &= \nu^{\hat{\alpha}}((b_i^2)^\alpha + (b_i \mu_1)^\alpha + (b_j^2)^\alpha + (b_j \mu_1)^\alpha + (\mu_1 b_i)^\alpha + (\mu_1 b_j)^\alpha + (\mu_1^2)^\alpha) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} & ((b_i + b_j + \mu_1)\nu(b_i + b_j + \mu_1))^\alpha \\ &= (b_i + b_j + \mu_1)^\alpha \nu^\beta (b_i + b_j + \mu_1)^\alpha \\ &= \nu^{\hat{\beta}}(b_i^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + b_i^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + b_i^\alpha 1^\beta \mu_1^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta \mu_1^\alpha \\ &+ \mu_1^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + \mu_1^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + \mu_1^\alpha 1^\beta \mu_1^\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \nu^{\widehat{\beta}}((b_i^2)^\alpha + b_i^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + \mu_1^{\widehat{\alpha}} b_i^\alpha 1^\beta 1^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + (b_j^2)^\alpha \\
 &+ \mu_1^{\widehat{\alpha}} b_j^\alpha 1^\beta 1^\alpha + \mu_1^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + \mu_1^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + (\mu_1^2)^{\widehat{\alpha}} 1^\alpha 1^\beta 1^\alpha) \\
 &= \nu^{\widehat{\beta}}((b_i^2)^\alpha + b_i^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + (\mu_1 b_i)^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta b_i^\alpha + (b_j^2)^\alpha + (\mu_1 b_j)^\alpha \\
 &+ (\mu_1 b_i)^\alpha + (\mu_1 b_j)^\alpha + (\mu_1^2)^\alpha).
 \end{aligned}$$

Aus (5.9), (5.10) und  $1^\alpha \in J'^*$  folgt schließlich

$$\begin{aligned}
 0' &= b_i^\alpha 1^\beta b_j^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta b_i^\alpha \stackrel{(5.10)}{=} b_i^\alpha 1^\beta 1^\alpha b_j^\beta 1^\alpha + b_j^\alpha 1^\beta 1^\alpha b_i^\beta 1^\alpha \\
 &= b_i^\alpha b_j^\beta 1^\alpha + b_j^\alpha b_i^\beta 1^\alpha = (b_i^\alpha b_j^\beta + b_j^\alpha b_i^\beta) 1^\alpha \\
 \Leftrightarrow b_i^\alpha b_j^\beta + b_j^\alpha b_i^\beta &= 0'.
 \end{aligned}$$

Das liefert:

$$\begin{aligned}
 a^\alpha a^\beta &= (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)^\alpha (\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)^\beta \\
 &= (\lambda_1^{\widehat{\alpha}} b_1^\alpha + \dots + \lambda_n^{\widehat{\alpha}} b_n^\alpha) (\lambda_1^{\widehat{\beta}} b_1^\beta + \dots + \lambda_n^{\widehat{\beta}} b_n^\beta) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\widehat{\alpha}} \lambda_i^{\widehat{\beta}} b_i^\alpha b_i^\beta + \sum_{i<j} (\lambda_i^{\widehat{\alpha}} b_i^\alpha \lambda_j^{\widehat{\beta}} b_j^\beta + \lambda_j^{\widehat{\alpha}} b_j^\alpha \lambda_i^{\widehat{\beta}} b_i^\beta) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\widehat{\alpha}} \lambda_i^{\widehat{\beta}} b_i^\alpha b_i^\beta + \sum_{i<j} \lambda_i^{\widehat{\alpha}} \lambda_j^{\widehat{\beta}} \underbrace{(b_i^\alpha b_j^\beta + b_j^\alpha b_i^\beta)}_{=0'} \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\widehat{\alpha}} \lambda_i^{\widehat{\beta}} b_i^\alpha b_i^\beta.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus:

$$\begin{aligned}
 (a^2)^\alpha &= ((\lambda_1 b_1)^2 + \dots + (\lambda_n b_n)^2)^\alpha \\
 &= ((\lambda_1 b_1)^2)^\alpha + \dots + ((\lambda_n b_n)^2)^\alpha \\
 &\stackrel{(1)}{=} (\lambda_1 b_1)^\alpha 1^\beta (\lambda_1 b_1)^\alpha + \dots + (\lambda_n b_n)^\alpha 1^\beta (\lambda_n b_n)^\alpha \\
 &\stackrel{(5.10)}{=} (\lambda_1 b_1)^\alpha (\lambda_1 b_1)^\beta 1^\alpha + \dots + (\lambda_n b_n)^\alpha (\lambda_n b_n)^\beta 1^\alpha \\
 &= ((\lambda_1 b_1)^\alpha (\lambda_1 b_1)^\beta + \dots + (\lambda_n b_n)^\alpha (\lambda_n b_n)^\beta) 1^\alpha
 \end{aligned}$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\hat{\alpha}} \lambda_i^{\hat{\beta}} b_i^{\alpha} b_i^{\beta} \right) 1^{\alpha} = a^{\alpha} a^{\beta} 1^{\alpha} \stackrel{(5.10)}{=} a^{\alpha} 1^{\beta} a^{\alpha}.$$

Damit ist (5.11) bewiesen.

Schritt 5: Aus (5.11) folgt direkt

$$\forall a, b \in J : (ab + ba)^{\alpha} = a^{\alpha} 1^{\beta} b^{\alpha} + b^{\alpha} 1^{\beta} a^{\alpha}, \quad (5.12)$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} a^{\alpha} 1^{\beta} a^{\alpha} + (ab + ba)^{\alpha} + b^{\alpha} 1^{\beta} b^{\alpha} &= (a^2)^{\alpha} + (ab + ba)^{\alpha} + (b^2)^{\alpha} \\ &= (a^2 + ab + ba + b^2)^{\alpha} \\ &= ((a + b)^2)^{\alpha} \\ &= (a + b)^{\alpha} 1^{\beta} (a + b)^{\alpha} \\ &= a^{\alpha} 1^{\beta} a^{\alpha} + a^{\alpha} 1^{\beta} b^{\alpha} + b^{\alpha} 1^{\beta} a^{\alpha} + b^{\alpha} 1^{\beta} b^{\alpha}. \end{aligned}$$

Schritt 6: Als vorletzten Schritt beweisen wir, dass

$$\forall a \in J, b \in J^* : (aba)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\beta} a^{\alpha}. \quad (5.13)$$

Wir betrachten wieder zunächst den Fall, wenn  $a$  invertierbar ist. Gilt auch  $a - b^{-1} \in J^*$ , dann sind wir gemäß (5.8) fertig. Wir nehmen also an, dass  $a - b^{-1} \in J \setminus J^*$  ist, d.h.  $ab - 1 \in R \setminus R^*$ .

- (1) Hat  $ab \in R^*$  höchstens  $n - 1$  Eigenwerte, dann gibt es ein  $\mu \in K^* \setminus \{1\}$  mit  $ab - \mu \in R^*$ . In diesem Fall ist  $a - \mu b^{-1} \in J^*$  und mit (5.8) und (5.9) folgt dann das Gewünschte:

$$\begin{aligned} (\mu^{-1})^{\hat{\alpha}} (aba)^{\alpha} &= (a \cdot \mu^{-1} b \cdot a)^{\alpha} = a^{\alpha} (\mu^{-1} b)^{\beta} a^{\alpha} = (\mu^{-1})^{\hat{\beta}} a^{\alpha} b^{\beta} a^{\alpha} \\ \Leftrightarrow (aba)^{\alpha} &= a^{\alpha} b^{\beta} a^{\alpha}. \end{aligned}$$

- (2) Ist  $ab$  diagonalisierbar mit  $n$  verschiedenen Eigenwerten und  $|K| \geq n + 2$ , dann gilt die Aussage analog wie in (a).
- (3) Sei nun  $|K| = n + 1$  mit  $n \geq 3$  und  $ab \in R^*$  diagonalisierbar. Für

alle  $\mu_i \in K^*$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , gilt dabei  $ab - \mu_i \notin R^*$  und damit ist  $a - \mu_i b^{-1} \notin J^*$ . Daraus folgt, dass für jedes  $\mu_i$  ein  $\lambda_i \in K^*$  existiert, so dass  $a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i \in J^*$  ist. Wir betrachten mehrere Fälle:

- (3i) Es existieren  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ , so dass  $\lambda_i = \lambda_j$  für verschiedene  $\mu_i, \mu_j$  gilt, d.h.  $a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i \in J^*$  und  $a - \mu_j b^{-1} - \lambda_i \in J^*$ . Setzt man  $a' := a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i$  und  $b' := \nu b$  mit  $\nu = (\mu_j - \mu_i)^{-1}$ , dann erhalten wir  $a' - b'^{-1} = a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i - \nu^{-1} b^{-1} = a - \mu_j b^{-1} - \lambda_i \in J^*$ . Mit (5.8) folgt daraus  $(a'b'a')^\alpha = a'^\alpha b'^\beta a'^\alpha$ , wobei gilt

$$\begin{aligned} a'b'a' &= (a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i) \cdot \nu b \cdot (a - \mu_i b^{-1} - \lambda_i) \\ &= \nu a b a - \nu \mu_i a - \nu \lambda_i a b - \mu_i \nu a + \mu_i^2 \nu b^{-1} + \mu_i \nu \lambda_i - \lambda_i \nu b a \\ &\quad + \lambda_i \nu \mu_i + \lambda_i^2 \nu b \\ &= \nu a b a - 2\nu \mu_i a - \lambda_i \nu (a b + b a) + \mu_i^2 \nu b^{-1} + \lambda_i^2 \nu b + 2\mu_i \lambda_i \nu. \end{aligned}$$

Damit ist (der Fall  $2 = 0$  wird dabei nicht ausgeschlossen)

$$\begin{aligned} (a'b'a')^\alpha &= \nu^{\hat{\alpha}} (a b a)^\alpha - 2'(\mu_i \nu)^{\hat{\alpha}} a^\alpha - (\lambda_i \nu)^{\hat{\alpha}} (a b + b a)^\alpha \\ &\quad + (\mu_i^2 \nu)^{\hat{\alpha}} (b^{-1})^\alpha + (\lambda_i^2 \nu)^{\hat{\alpha}} b^\alpha + 2'(\mu_i \lambda_i \nu)^\alpha. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} a'^\alpha b'^\beta a'^\alpha &= (a^\alpha - \mu_i^{\hat{\alpha}} (b^{-1})^\alpha - \lambda_i^\alpha) \cdot \nu^{\hat{\beta}} b^\beta \cdot (a^\alpha - \mu_i^{\hat{\alpha}} (b^{-1})^\alpha - \lambda_i^\alpha) \\ &= (a^\alpha - \mu_i^{\hat{\alpha}} (b^\beta)^{-1} - \lambda_i^{\hat{\alpha}} 1^\alpha) \cdot \nu^{\hat{\alpha}} b^\beta \cdot (a^\alpha - \mu_i^{\hat{\alpha}} (b^\beta)^{-1} - \lambda_i^{\hat{\alpha}} 1^\alpha) \\ &= \nu^{\hat{\alpha}} a^\alpha b^\beta a^\alpha - \nu^{\hat{\alpha}} \mu_i^{\hat{\alpha}} a^\alpha - \nu^{\hat{\alpha}} \lambda_i^{\hat{\alpha}} a^\alpha b^\beta 1^\alpha - \mu_i^{\hat{\alpha}} \nu^{\hat{\alpha}} a^\alpha \\ &\quad + (\mu_i^{\hat{\alpha}})^2 \nu^{\hat{\alpha}} (b^{-1})^\alpha + \mu_i^{\hat{\alpha}} \nu^{\hat{\alpha}} \lambda_i^{\hat{\alpha}} 1^\alpha - \lambda_i^{\hat{\alpha}} \nu^{\hat{\alpha}} 1^\alpha b^\beta a^\alpha \\ &\quad + \lambda_i^{\hat{\alpha}} \nu^{\hat{\alpha}} \mu_i^{\hat{\alpha}} 1^\alpha + (\lambda_i^{\hat{\alpha}})^2 \nu^{\hat{\alpha}} 1^\alpha b^\beta 1^\alpha \\ &= \nu^{\hat{\alpha}} a^\alpha b^\beta a^\alpha - 2'(\nu \mu_i)^{\hat{\alpha}} a^\alpha - (\lambda_i \nu)^{\hat{\alpha}} (a^\alpha 1^\beta b^\alpha + b^\alpha 1^\beta a^\alpha) \\ &\quad + (\mu_i^2 \nu)^{\hat{\alpha}} (b^{-1})^\alpha + 2'(\mu_i \lambda_i \nu)^\alpha + (\lambda_i^2 \nu)^{\hat{\alpha}} b^\alpha. \end{aligned}$$

Wegen  $(a'b'a')^\alpha = a'^\alpha b'^\beta a'^\alpha$ ,  $\nu^{\hat{\alpha}} \in K'^*$  und (5.12) gilt dann  $(a b a)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha$ .

- (3ii) Für alle  $i \neq j$  und damit  $\mu_i \neq \mu_j$  sind auch  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Außerdem

sei  $a$  mit höchstens  $n - 1$  verschiedenen Eigenwerten. Dann gibt es ein  $\tau \in K^*$  mit  $a - \tau \in J^*$ . Da alle  $\lambda_i \in K^*$  verschieden sind, finden wir stets ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so dass  $\lambda_j = \tau$  ist. Setzt man  $a' := a - \mu_j b^{-1} - \lambda_j \in J^*$  und  $b' := -\mu_j^{-1} b \in J^*$ , dann gilt  $a' - b'^{-1} = a - \lambda_j = a - \tau \in J^*$ . Analog wie in (3i) zeigt man  $(aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha$ .

(3iii) Es gelte wieder  $\lambda_i \neq \lambda_j$  für alle  $i \neq j$ . Wir nehmen nun an, dass  $a$  genau  $n$  verschiedene Eigenwerte  $r_1, \dots, r_n \in K^*$  besitzt. Dann gibt es ein  $u \in R^*$  mit  $\bar{a} := u^{-1} a u = \text{diag}(r_1, \dots, r_n) \in u^{-1} J u =: \bar{J}$ . OBdA sei  $r_1 = 1$ . Gemäß 3.3.1 definiere man ein  $\bar{c} = \sum_{i=1}^n r'_i e_i \in K[\bar{a}]^*$  mit höchstens  $n - 1$  verschiedenen Eigenwerten  $r'_i$ , so dass  $\bar{a} + \bar{c} \in K[\bar{a}]^* \subseteq \bar{J}^*$  ist und ebenso höchstens  $n - 1$  verschiedene Eigenwerte hat. So ein  $\bar{c}$  existiert stets: Wegen  $|K| = n + 1$  und  $n \geq 3$  gibt es ein  $i \in \{2, \dots, n\}$  mit  $r_i \neq -1$ . Für  $r'_1 = r_i \neq -1$  und  $r'_i = 1$  sind mindestens zwei Eigenwerte von  $\bar{a} + \bar{c}$  gleich:  $r_i + r'_i = r_i + 1 = r'_1 + r_1 \neq 0$ .

Setzt man nun  $c := u \bar{c} u^{-1} \in J^*$ , dann haben  $c$  und  $a + c = u \bar{a} u^{-1} + u \bar{c} u^{-1} = u(\bar{a} + \bar{c}) u^{-1} \in J^*$  die gleiche Anzahl der Eigenwerte wie  $\bar{c}$  bzw.  $\bar{a} + \bar{c}$ .

Betrachtet man nun  $a + c \in J^*$  und  $c \in J^*$  statt  $a$ , dann erfüllen  $a + c, b \in J^*$  bzw.  $c, b \in J^*$  die Bedingungen eines der obigen Fälle. Daraus folgt  $(a + c)^\alpha b^\beta (a + c)^\alpha = ((a + c)b(a + c))^\alpha$  und  $(cbc)^\alpha = c^\alpha b^\beta c^\alpha$  und deshalb gilt

$$\begin{aligned} a^\alpha b^\beta a^\alpha + (a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha) + c^\alpha b^\beta c^\alpha \\ &= (a + c)^\alpha b^\beta (a + c)^\alpha = ((a + c)b(a + c))^\alpha \\ &= (aba)^\alpha + (abc + cba)^\alpha + (cbc)^\alpha \\ &= (aba)^\alpha + (abc + cba)^\alpha + c^\alpha b^\beta c^\alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es bleibt zu zeigen

$$(abc + cba)^\alpha = a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha.$$

Wir unterscheiden zwischen zwei Fällen:

(3iiia) Sei zunächst  $c^{-1}ab + bac^{-1} \in J^*$ . Insbesondere gilt stets  $c^{-1}a = ac^{-1} \in K[a] \simeq K \times \dots \times K$ . Nun erfüllen  $c, c^{-1}ab + bac^{-1} \in J^*$  wieder die Bedingungen eines der oben betrachteten Fälle (1), (3i) bzw. (3ii), da  $c$  nach Konstruktion höchstens  $n - 1$  Eigenwerte besitzt. Damit erhalten wir

$$(abc + cba)^\alpha = (c(c^{-1}ab + bac^{-1})c)^\alpha = c^\alpha(c^{-1}ab + bac^{-1})^\beta c^\alpha.$$

(3iiib) Sei nun  $c^{-1}ab + bac^{-1} \in J \setminus J^*$ , dann gibt es ein  $\rho \in K^*$  mit  $c^{-1}ab + bac^{-1} + \rho \in J^*$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} (abc + cba)^\alpha + (\rho c^2)^\alpha &= (abc + cba + \rho c^2)^\alpha \\ &= (c(c^{-1}ab + bac^{-1} + \rho)c)^\alpha \\ &= c^\alpha(c^{-1}ab + bac^{-1} + \rho)^\beta c^\alpha \\ &= c^\alpha(c^{-1}ab + bac^{-1})^\beta c^\alpha + c^\alpha \rho^\beta c^\alpha \\ &\stackrel{(5.11)}{=} c^\alpha(c^{-1}ab + bac^{-1})^\beta c^\alpha + (\rho c^2)^\alpha. \end{aligned}$$

Damit gilt stets

$$\begin{aligned} (abc + cba)^\alpha &= c^\alpha(c^{-1}ab + bac^{-1})^\beta c^\alpha \\ &\stackrel{(5.12)}{=} c^\alpha((c^{-1}a)^\beta 1^\alpha b^\beta + b^\beta 1^\alpha (ac^{-1})^\beta) c^\alpha. \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta &\stackrel{(5.12)}{=} (c^{-1}a + ac^{-1})^\beta \\ &= (2c^{-1}a)^\beta = 2'(c^{-1}a)^\beta \\ &= 2'(ac^{-1})^\beta. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Im Fall  $Char K = Char K' \neq 2$  folgt aus (5.10):

$$(abc + cba)^\alpha = c^\alpha((c^{-1}a)^\beta 1^\alpha b^\beta + b^\beta 1^\alpha (ac^{-1})^\beta) c^\alpha$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.15)}{=} c^\alpha (2'^{-1} ((c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta) 1^\alpha b^\beta \\
& + b^\beta 1^\alpha 2'^{-1} ((c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta)) c^\alpha \\
& = 2'^{-1} c^\alpha (((c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta) 1^\alpha b^\beta \\
& + b^\beta 1^\alpha ((c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta)) c^\alpha \\
& \stackrel{5.3.18}{=} 2'^{-1} c^\alpha ((c^\alpha)^{-1} 1^\alpha a^\beta 1^\alpha b^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^\alpha)^{-1} 1^\alpha b^\beta + b^\beta 1^\alpha (c^\alpha)^{-1} 1^\alpha a^\beta \\
& + b^\beta 1^\alpha a^\beta 1^\alpha (c^\alpha)^{-1}) c^\alpha \\
& = 2'^{-1} (1^\alpha a^\beta 1^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha a^\beta 1^\alpha (c^\alpha)^{-1} 1^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta 1^\alpha (c^\alpha)^{-1} 1^\alpha a^\beta c^\alpha \\
& + c^\alpha b^\beta 1^\alpha a^\beta 1^\alpha) \\
& \stackrel{5.3.18}{=} 2'^{-1} (1^\alpha a^\beta 1^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta 1^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta c^\alpha \\
& + c^\alpha b^\beta 1^\alpha a^\beta 1^\alpha) \\
& \stackrel{(5.10)}{=} 2'^{-1} (a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha a^\beta (c^{-1})^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta (c^{-1})^\alpha a^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha).
\end{aligned}$$

Wegen  $2 \neq 0$  kann man  $\bar{c} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1) = \bar{c}^{-1}$  setzen und damit ist  $\bar{a} + \bar{c} = \text{diag}(2, r_2 - 1, \dots, r_n - 1) \in J^*$ , da  $r_i \neq 1$  für alle  $i \in \{2, \dots, n\}$  sind. Da  $\bar{c}\bar{a}$  und damit auch  $ca$  genau  $n - 1$  Eigenwerte hat (es gibt ein  $i \in \{2, \dots, n\}$  mit  $r_i = -1$  und damit kommt der Eigenwert 1 doppelt vor), gilt für  $c, a \in J^*$  nach Fall (1):

$$c^\alpha a^\beta (c^{-1})^\alpha = (c^{-1})^\alpha a^\beta c^\alpha = c^\alpha a^\beta c^\alpha = (cac)^\alpha = (cca)^\alpha = a^\alpha$$

und daher

$$\begin{aligned}
(abc + cba)^\alpha &= 2'^{-1} (a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha a^\beta (c^{-1})^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta (c^{-1})^\alpha a^\beta c^\alpha \\
& + c^\alpha b^\beta a^\alpha) \\
&= 2'^{-1} (a^\alpha b^\beta c^\alpha + a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha) \\
&= a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Ist nun  $\text{Char}K = 2$ , dann gilt insbesondere  $c^{-1}a + ac^{-1} = 0$  sowie

$ca + ac = 0$ . Aus (5.10) folgt dann

$$\begin{aligned} 0'1^\beta &= 0^\beta = (c^{-1}a + ac^{-1})^\beta \\ &\stackrel{(5.12)}{=} (c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta + a^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta \\ &\stackrel{(5.10)}{=} 1^\beta (c^{-1})^\alpha a^\beta + 1^\beta a^\alpha (c^{-1})^\beta \\ &= 1^\beta ((c^{-1})^\alpha a^\beta + a^\alpha (c^{-1})^\beta) \end{aligned}$$

und das liefert  $(c^{-1})^\alpha a^\beta + a^\alpha (c^{-1})^\beta = 0'$ , also gilt  $(c^{-1})^\alpha a^\beta = a^\alpha (c^{-1})^\beta$ . Analog zeigt man

$$c^\alpha a^\beta = a^\alpha c^\beta. \tag{5.16}$$

Wegen  $|K| = n + 1 < \infty$  gibt es nach 5.3.19(b) ein  $\mu \in K^* \setminus \{1\}$ , dessen Ordnung eine Primzahl  $p > 2$  ist. Damit ist  $p$  ungerade. Setze man  $\bar{c} = \text{diag}(\mu, 1, \dots, 1)$ , dann ist die Matrix  $\bar{a} + \bar{c} = \text{diag}(1 + \mu, r_2 + 1, \dots, r_n + 1) \in \bar{J}^*$  wegen  $\mu + 1 \neq 0$  mit genau  $n - 1$  verschiedenen Eigenwerten. Die Matrix  $a + c \in J^*$  hat die gleichen Eigenschaften. Dann ist  $c^p = u\bar{c}^p u^{-1} = 1$  und damit  $c^{-1} = c^{p-1}$  mit  $p - 1$  gerade.

Die Matrizen  $c, c^k a c^k \in J^*$  erfüllen für jedes  $k < \frac{p-1}{2}$  ( $\Rightarrow k < p$ ) die Bedingungen des Falls (1), denn wegen der Kommutativität von  $a$  und  $c$  ist  $c \cdot c^k a c^k = c^{2k+1} a$  zu  $\bar{c}^{2k+1} \bar{a} = \text{diag}(\mu^{2k+1}, r_2, \dots, r_n)$  mit  $\mu^{2k+1} \neq 1$  und damit  $\mu^{2k+1} = r_i$  für ein  $i \in \{2, \dots, n\}$  ähnlich. Daraus folgt  $(c \cdot c^k a c^k \cdot c)^\alpha = c^\alpha \cdot (c^k a c^k)^\beta \cdot c^\alpha$  und entsprechend  $(c \cdot c^k a c^k \cdot c)^\beta = c^\beta \cdot (c^k a c^k)^\alpha \cdot c^\beta$ .

Analoges gilt für  $c, c^l \in J^*$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ , denn  $c \cdot c^l = c^{l+1}$  ist zu  $\bar{c}^{l+1} = \text{diag}(\mu^{l+1}, 1, \dots, 1)$  konjugiert. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} (ac^{-1})^\beta &= (c^{-1}a)^\beta = (c^{p-1}a)^\beta = \underbrace{(c \cdot \dots \cdot c \cdot a \cdot c \cdot \dots \cdot c)}_{\frac{p-1}{2} \text{ mal}}^\beta \\ &\stackrel{(1)}{=} c^\beta \underbrace{(c \cdot \dots \cdot c \cdot a \cdot c \cdot \dots \cdot c)}_{\frac{p-1}{2} - 1 \text{ mal}}^\alpha c^\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dots = \begin{cases} c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot c^\alpha \cdot a^\beta \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta & \text{für } \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{N} \\ c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot a^\alpha \cdot c^\beta \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot c^\beta & \text{sonst} \end{cases} \\
&\stackrel{(5.16)}{=} c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot a^\beta \\
&= c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot 1^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta \\
&\stackrel{(5.10)}{=} \begin{cases} c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot c^\alpha \cdot 1^\beta \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{für } \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{N} \\ c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot c^\beta \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{sonst} \end{cases} \\
&\stackrel{(5.11)}{=} \begin{cases} c^\beta \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot (c^2)^\alpha \cdot c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{für } \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{N} \\ c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot \underbrace{c^\alpha \cdot (c^2)^\beta \cdot c^\alpha}_{(cc^2c)^\alpha} \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot c^\alpha \cdot (c^4)^\beta \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot \dots \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{für } \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{N} \\ c^\beta \cdot c^\alpha \cdot \dots \cdot \underbrace{c^\beta \cdot (c^4)^\alpha \cdot c^\beta}_{(cc^4c)^\beta} \cdot \dots \cdot c^\alpha \cdot c^\beta \cdot 1^\alpha \cdot a^\beta & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \dots = (c^{p-1})^\beta 1^\alpha a^\beta = (c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(abc + cba)^\alpha &= c^\alpha ((c^{-1}a)^\beta 1^\alpha b^\beta + b^\beta 1^\alpha (ac^{-1})^\beta) c^\alpha \\
&= c^\alpha ((c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta 1^\alpha b^\beta + b^\beta 1^\alpha (c^{-1})^\beta 1^\alpha a^\beta) c^\alpha \\
&\stackrel{(5.10)}{=} c^\alpha ((c^{-1})^\beta a^\alpha b^\beta + b^\beta (c^{-1})^\alpha a^\beta) c^\alpha \\
&\stackrel{(5.16)}{=} c^\alpha ((c^{-1})^\beta a^\alpha b^\beta + b^\beta a^\alpha (c^{-1})^\beta) c^\alpha \\
&= c^\alpha ((c^\alpha)^{-1} a^\alpha b^\beta + b^\beta a^\alpha (c^\alpha)^{-1}) c^\alpha \\
&= a^\alpha b^\beta c^\alpha + c^\alpha b^\beta a^\alpha.
\end{aligned}$$

Aus (5.14) folgt dann schließlich  $(aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha$ .

Damit ist der Fall  $a \in J^*$  erledigt. Es bleibt nun der Fall  $a \in J \setminus J^*$  zu behandeln. Man setze dabei  $a' := a + \sigma \in J^*$  für ein  $\sigma \in K^*$  und stelle zunächst die Gültigkeit der Aussage für  $a'$  und  $b$  fest, d.h.  $(a'ba')^\alpha = a'^\alpha b^\beta a'^\alpha$ . Das impliziert dann (5.13).

Schritt 7: Aus (5.13) folgert man dann schließlich

$$\forall a, b \in J : (aba)^\alpha = a^\alpha b^\beta a^\alpha,$$

denn: Ist  $b \in J$  nicht invertierbar, dann betrachte man zuerst  $b' := b + \lambda \in J^*$  für ein  $\lambda \in K^*$ . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (aba)^\alpha + (\lambda a^2)^\alpha &= (a(b + \lambda)a)^\alpha = a^\alpha (b + \lambda)^\beta a^\alpha \\ &= a^\alpha b^\beta a^\alpha + a^\alpha \lambda^\beta a^\alpha \\ &\stackrel{(5.11)}{=} a^\alpha b^\beta a^\alpha + (\lambda a^2)^\alpha \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Nach dem gerade bewiesenen Satz induziert jeder nicht triviale fast-fundamentale Morphismus  $\gamma$  der Kettengeometrien einen nicht trivialen Homotopismus  $(\alpha, \beta) = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ , während nach 5.3.1 jeder Homotopismus  $(\alpha, \beta) : J \rightarrow J'$  einen Morphismus  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$  der zugehörigen Kettengeometrien induziert. Wird zunächst  $\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)}$  durch einen Homotopismus  $(\alpha, \beta)$  induziert, dann liefert  $\gamma$  offensichtlich das gleiche Paar von Abbildungen  $(\alpha, \beta) = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$  zurück. Ob dieser Prozess auch umgekehrt durchgeführt werden kann, erscheint nicht so trivial zu sein. Deswegen ist unser letztes Ziel in diesem Abschnitt zu zeigen, dass jeder durch einen nicht trivialen Morphismus  $\gamma$  induzierte Homotopismus  $(\alpha, \beta) = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$  wieder den gleichen Morphismus  $\gamma = \gamma_{(\alpha, \beta)}$  induziert. Dafür brauchen wir das folgende Lemma.

**Lemma 5.3.21.** *Sei  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Gilt  $p^\gamma \neq p^{\gamma_{(\alpha, \beta)}}$ , dann gibt es eine Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  mit  $p \in C$  und  $p^\gamma \in C^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ .*

*Beweis:* OBdA sei  $p = R(1+ab, a) \not\sim R(1, 0), R(0, 1)$  mit  $b \in J^*$  (gemäß 3.3.2), d.h.  $1 + ab \notin R^*$  und  $a \notin J^*$ . Setze man  $x := -b - bab \in J \setminus J^*$  und  $y := b^{-1}$ , dann ist  $p = R(x, 1 + xy)$  (vgl. 3.3.3). Analog wie in 5.3.12 machen wir für  $a$  eine Fallunterscheidung:

- (1a) Sei  $a \notin J^*$  mit höchstens  $n - 1$  verschiedenen Eigenwerten. Dann gibt es verschiedene  $\lambda, \mu \in K^*$  mit  $a + \lambda, a + \mu \in J^*$ . Damit haben wir

drei paarweise distante Punkte  $p_0 = R(b, 1)$ ,  $p_1 = R(b - \lambda^{-1}, 1)$ ,  $p_2 = R(b - \mu^{-1}, 1) \in \Delta(\infty)$ , welche auch zu  $p$  distant sind.

- (2a) Wir betrachten nun den Fall, wenn  $a \notin J^*$  genau  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit oBdA  $\lambda_1 = 0$  besitzt. Weiter seien  $c_1, c_2 \in J^*$  wie im Beweis von 5.3.12, Teil (b) konstruiert mit  $c_2 = lc_1$  für ein  $l \in K^* \setminus \{1\}$  und  $a + c_i \in J^*$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Dann ist auch  $c_1^{-1} - c_2^{-1} = c_1^{-1}(1 - l^{-1}) \in J^*$ . Damit sind  $p_0 = R(b, 1)$ ,  $p_1 = R(b - c_1^{-1}, 1)$  und  $p_2 = R(b - c_2^{-1}, 1)$  paarweise und zu  $p$  distante Punkte in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ .

Für  $x$  gibt es die gleichen Fälle:

- (1x) Hat  $x \notin J^*$  höchstens  $n - 1$  verschiedene Eigenwerte, dann findet man analog wie in (1a) drei paarweise und zu  $p$  distante Punkte  $p'_0 = R(1, y) = R(b, 1) = p_0$ ,  $p'_1 = R(1, y - \lambda'^{-1})$ ,  $p'_2 = R(1, y - \mu'^{-1}) \in \Delta(0)$  mit  $x + \lambda', x + \mu' \in J^*$  und  $\lambda', \mu' \in K^*$ ,  $\lambda' \neq \mu'$ .
- (2x) Sei nun  $x \notin J^*$  diagonalisierbar mit genau  $n$  verschiedenen Eigenwerten, dann gibt es analog wie in (2a)  $c'_1, c'_2 \in J^*$  mit  $c'_2 = l'c'_1$  für ein  $l' \in K^* \setminus \{1\}$ , so dass  $x + c'_i \in J^*$  und  $c'^{-1}_1 - c'^{-1}_2 \in J^*$  gilt. Deshalb sind die Punkte  $p'_0 = R(1, y) = R(b, 1) = p_0$ ,  $p'_1 = R(1, y - c'^{-1}_1)$  und  $p'_2 = R(1, y - c'^{-1}_2)$  in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  paarweise und zu  $p$  distant.

Nun untersuchen wir die Ketten  $C := (p_0 p_1 p_2)$ ,  $C' := (p'_0 p'_1 p'_2)$ ,  $C_i := (p p_0 p_i)$  und  $C'_i := (p p'_0 p'_i)$  mit  $i \in \{1, 2\}$ . Alle diese Ketten haben nach Definition bzw. laut dem Beweis von 5.3.12 mindestens drei Punkte in  $\Delta(\infty) \cup \Delta(0)$ . Insbesondere stimmen die Bilder dieser Punkte unter  $\gamma$  und  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$  überein. Da jede Kette durch drei Punkte eindeutig bestimmt ist, sind auch die Bilder der entsprechenden Ketten unter  $\gamma$  und  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$  gleich. Gilt nun  $C_i^\gamma \neq C_j'^\gamma$  für mindestens ein Paar  $(i, j)$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$ , dann folgt daraus

$$\{p^\gamma, p_0^\gamma\} = C_i^\gamma \cap C_j'^\gamma = C_i^{\gamma(\alpha, \beta)} \cap C_j'^{\gamma(\alpha, \beta)} = \{p^{\gamma(\alpha, \beta)}, p_0^{\gamma(\alpha, \beta)}\}$$

und wegen  $p_0^\gamma = p_0^{\gamma(\alpha, \beta)}$  ergibt sich dann  $p^\gamma = p^{\gamma(\alpha, \beta)}$ . Analoges gilt, wenn  $C_1^\gamma \neq C_2^\gamma$  oder  $C_1'^\gamma \neq C_2'^\gamma$  ist.

Im Fall  $p^\gamma \neq p^{\gamma(\alpha, \beta)}$  muss daher stets die Gleichheit  $C_1^\gamma = C_2^\gamma = C_1'^\gamma = C_2'^\gamma$

gelten. Damit liegen die Punkte  $p_0^\gamma, p_i^\gamma, p_i^{\prime\gamma}$  für alle  $i \in \{1, 2\}$  auf einer Kette und es ist folglich  $C^\gamma = C'^\gamma = C_1^\gamma$ .

Kombinieren wir die oben betrachteten Fälle für  $a$  und  $x$ , dann erhalten wir für  $C$  und  $C'$  insgesamt vier Möglichkeiten:

(1a1x) In diesem Fall hat die Kette  $C$  die Gestalt  $C = \mathbb{P}(K)^\sigma = \{R(1, 0)\} \cup \{R(b + \nu, 1) \mid \nu \in K\}$  mit  $\sigma \in PE_2(J)$ , welches durch  $B_{21}(b)$  induziert wird, denn es gilt

$$\begin{aligned} p_0 &= R(b, 1) = R(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \\ p_1 &= R(b - \lambda^{-1}, 1) = R(-\lambda^{-1}, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \\ p_2 &= R(b - \mu^{-1}, 1) = R(-\mu^{-1}, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog ist  $C' = \{R(0, 1)\} \cup \{R(1, y + \nu) \mid \nu \in K\}$ . Da aber  $\gamma$  und  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$  fast-fundamental sind und insbesondere  $R(1, 0)^\gamma = R(1, 0)^{\gamma_{(\alpha, \beta)}} = R'(1', 0')$  und  $R(0, 1)^\gamma = R(0, 1)^{\gamma_{(\alpha, \beta)}} = R'(0', 1')$  gilt, muss es wegen  $C^\gamma = C'^\gamma$  ein  $\nu_0 \in K$  geben, so dass  $R'((b + \nu_0)^\beta, 1') = R'(0', 1')$  ist. Das impliziert  $0' = b^\beta + \nu_0^\beta$ , also  $b^\beta = -\nu_0^\beta \in K'$  und folglich ist  $p^\gamma \in C_1^\gamma = C^\gamma = \{R'(1', 0')\} \cup \{R'((\nu - \nu_0)^\beta, 1') \mid \nu \in K\} = \mathbb{P}(K)^\gamma$ . Daher ist  $C_1$  die gesuchte Kette durch  $p$  mit  $C_1^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ .

(1a2x) Für die Kette  $C$  gilt wie im Fall (1a1x). Die Kette  $C'$  kann man nun als  $\mathbb{P}(K)^\delta = \{R(0, 1)\} \cup \{R(1, y + \nu c_1^{\prime-1}) \mid \nu \in K\}$  darstellen, wobei  $\delta \in PGL_2(R)$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} (l'^{-1} - 1)c_1' & (l'^{-1} - 1)c_1'y \\ -c_1' & 1 - c_1'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (l'^{-1} - 1)c_1' \\ -1 & -c_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \in GL_2(R)$$

induziert wird. Hierbei gilt  $p'_0 = R(1, y) = R(1, 0)^\delta, p'_1 = R(1, y - c_1^{\prime-1}) =$

$R(0, 1)^\delta$ ,  $p'_2 = R(1, y - l'^{-1}c'_1{}^{-1}) = R(l', 1)^\delta$  und für  $k' \neq l'$  haben wir

$$\begin{aligned} R(k', 1) & \begin{pmatrix} (l'^{-1} - 1)c'_1 & (l'^{-1} - 1)c'_1 y \\ -c'_1 & 1 - c'_1 y \end{pmatrix} \\ & = R(k'(l'^{-1} - 1)c'_1 - c'_1, k'(l'^{-1} - 1)c'_1 y + 1 - c'_1 y) \\ & = R((k'(l'^{-1} - 1) - 1)c'_1, (k'(l'^{-1} - 1) - 1)c'_1 y + 1) \\ & = \begin{cases} R(1, y + \nu c'_1{}^{-1}) \in C', & \text{falls } k' \neq (l'^{-1} - 1)^{-1}, \\ R(0, 1) \in C' & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $\nu = (k'(l'^{-1} - 1) - 1)^{-1} \in K^*$  ist.

Analog wie in (1a1x) gibt es wegen  $C^\gamma = C'^\gamma$  ein  $\nu_0 \in K$ , so dass  $R'((b + \nu_0)^\beta, 1') = R'(0', 1')$  und damit  $b^\beta = -\nu_0^\beta$  ist. Folglich erhalten wir  $p^\gamma \in C_1^\gamma = C^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ .

(2a1x) Nun ist  $C'$  wie im Fall (1a1x) und  $C$  hat die Gestalt  $C = \mathbb{P}(K)^\sigma = \{R(b + \nu c_1^{-1}, 1) \mid \nu \in K\} \cup \{R(1, 0)\}$  mit  $\sigma \in PGL_2(R)$ , wobei  $\sigma$  durch

$$\begin{pmatrix} (l^{-1} - 1)c_1 b & (l^{-1} - 1)c_1 \\ 1 - c_1 b & -c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (l^{-1} - 1)c_1 \\ 1 & -c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$$

induziert wird. Es gilt  $p_0 = R(b, 1) = R(1, 0)^\sigma$ ,  $p_1 = R(b - c_1^{-1}, 1) = R(0, 1)^\sigma$ ,  $p_2 = R(b - l^{-1}c_1^{-1}, 1) = R(l, 1)^\sigma$  und für  $k \neq l$  ist

$$\begin{aligned} R(k, 1) & \begin{pmatrix} (l^{-1} - 1)c_1 b & (l^{-1} - 1)c_1 \\ 1 - c_1 b & -c_1 \end{pmatrix} \\ & = R(k(l^{-1} - 1)c_1 b + 1 - c_1 b, k(l^{-1} - 1)c_1 - c_1) \\ & = R((k(l^{-1} - 1) - 1)b + c_1^{-1}, k(l^{-1} - 1) - 1) \\ & = \begin{cases} R(b + \nu c_1^{-1}, 1) \in C, & \text{falls } k \neq (l^{-1} - 1)^{-1}, \\ R(1, 0) \in C & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit  $\nu = (k(l^{-1} - 1) - 1)^{-1} \in K^*$ .

Mit der gleichen Argumentation wie in (1a2x) findet man ein  $\nu_0 \in K$  mit  $R'(1', 0') = R'(1', (y + \nu_0)^\alpha)$ . Also ist  $y^\alpha = -\nu_0^\alpha$  und damit haben wir  $p^\gamma \in C_1^\gamma = C'^\gamma = \{R'(0', 1')\} \cup \{R'(1', (\nu - \nu_0)^\alpha) \mid \nu \in K\} = \mathbb{P}(K)^\gamma$ .

(2a2x) Schließlich ist der Fall  $C = \mathbb{P}(K)^\sigma$  und  $C' = \mathbb{P}(K)^\delta$  mit  $\sigma \in PGL_2(R)$  wie in (2a1x) und  $\delta \in PGL_2(R)$  wie in (1a2x) zu betrachten. Analog wie oben gibt es ein  $\nu_0 \in K$  mit  $R'(0', 1') = R'((b + \nu_0 c_1^{-1})^\beta, 1')$ , d.h.  $b^\beta = -(\nu_0 c_1^{-1})^\beta = -\nu_0^{\hat{\beta}} (c_1^{-1})^\beta$ . Wir zeigen nun, dass es ein Körperelement  $\rho \in K$  gibt, so dass  $b^\beta = \rho^\beta$  ist.

Dazu definieren wir eine weitere Kette, und zwar wie folgt: Für  $a$  bzw.  $\bar{a} = u^{-1}au = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \bar{J} = u^{-1}Ju$  mit  $u \in R^*$  und  $\lambda_1 = 0$  existiert wegen  $|K| \geq n + 1$  ein  $\tau \in K^*$ , so dass  $a + \tau \in J^*$  bzw.  $\bar{a} + \tau \in \bar{J}^*$  gilt. Weiter setzen wir  $\bar{d} := \text{diag}(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_n) \in K[\bar{a}]^* \subseteq \bar{J}^*$  mit  $\tilde{\mu}_i \in K^* \setminus \{-\lambda_i, \tau\}$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  (vgl. 3.3.1). Dann haben wir  $\bar{a} + \bar{d} \in \bar{J}^*$  und deshalb gilt  $a + d \in J^*$  für  $d := u\bar{d}u^{-1} \in K[a]^* \subseteq J^*$  sowie  $d - \tau, d^{-1} - \tau^{-1} \in J^*$ . Damit sind  $p_0 = R(b, 1), \tilde{p}_1 = R(b - d^{-1}, 1)$  und  $\tilde{p}_2 = R(b - \tau^{-1}, 1)$  paarweise und zu  $p$  distante Punkte in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ , so dass  $\tilde{C} := (p_0\tilde{p}_1\tilde{p}_2)$  eine Kette in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  ist. Diese Kette kann man als  $\mathbb{P}(K)^{\tilde{\sigma}}$  darstellen, wobei  $\tilde{\sigma} \in PGL_2(R)$  durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} (d - \tau)b & d - \tau \\ 1 - db & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d - \tau \\ 1 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$$

induziert wird. Für die Punkte  $p_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  gilt nämlich  $p_0 = R(b, 1) = R(1, 0)^{\tilde{\sigma}}, \tilde{p}_1 = R(b - d^{-1}, 1) = R(0, 1)^{\tilde{\sigma}}, \tilde{p}_2 = R(b - \tau^{-1}, 1) = R(1, 1)^{\tilde{\sigma}}$  und für  $k \in K^* \setminus \{1\}$  haben wir

$$\begin{aligned} R(k, 1)^{\tilde{\sigma}} &= R(k, 1) \begin{pmatrix} (d - \tau)b & d - \tau \\ 1 - db & -d \end{pmatrix} \\ &= R(k(d - \tau)b + (1 - db), k(d - \tau) - d) \\ &= R(1 + ((k - 1)d - k\tau)b, (k - 1)d - k\tau). \end{aligned}$$

Also ist  $\tilde{C} = \{R(b, 1)\} \cup \{R(1 + ((k - 1)d - k\tau)b, (k - 1)d - k\tau) \mid k \in K\}$ .

Da  $\tilde{C}$  mindestens drei Punkte in  $\Delta(\infty) \cup \Delta(0)$  enthält, gilt  $\tilde{C}^\gamma = \tilde{C}^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . Im nächsten Schritt wollen wir feststellen, ob  $\tilde{C}^\gamma = C^\gamma$  ist, d.h. ob die Punkte  $\tilde{p}_1^\gamma, \tilde{p}_2^\gamma$  auf  $C^\gamma$  liegen. Dafür untersuchen wir zusätzlich jeweils eine Kette durch  $\tilde{p}_1$  bzw.  $\tilde{p}_2$ .

Zunächst betrachten wir die Kette  $\tilde{C}_1 := (pp_0\tilde{p}_1)$ . Analog wie im Teil (b) des Beweises von 5.3.12 bestimmt man die weiteren Punkte auf dieser Kette. Dabei erhalten wir

$$\tilde{C}_1 = \{R(1 + k^{-1}((k-1)a - d)b, k^{-1}((k-1)a - d)) \mid k \in K^* \setminus \{1\}\} \cup \{p, p_0, \tilde{p}_1\}.$$

Für jedes  $k \in K^* \setminus \{1\}$  setzen wir  $d_k := k^{-1}((k-1)a - d) \in K[a] \subseteq J$  sowie  $q_k := R(1 + d_k b, d_k)$ , wobei jeweils  $q_k^\gamma = q_k^{\gamma(\alpha,\beta)}$  oder  $q_k^\gamma \neq q_k^{\gamma(\alpha,\beta)}$  gelten kann. Bevor wir eine geeignete Fallunterscheidung formulieren, möchten wir die Matrix  $d$  noch etwas genauer definieren.

Wegen  $\tau \neq -\lambda_i$  für alle  $i \in \{2, \dots, n\}$  gibt es ein  $k_0 \in K^* \setminus \{1\}$ , so dass  $\tau = (k_0 - 1)\lambda_j$  für ein  $j \in \{2, \dots, n\}$  ist. Nach unserer Wahl von  $d$  gilt außerdem  $\tilde{\mu}_i \neq \tau$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Somit können wir  $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_j - \tau = \tilde{\mu}_j - (k_0 - 1)\lambda_j \notin \{0, \tau\}$  setzen. Nun betrachten wir die folgenden zwei Fälle:

- (i) Wir nehmen zuerst an, dass  $q_k^\gamma \neq q_k^{\gamma(\alpha,\beta)}$  für alle  $k \in K^* \setminus \{1\}$  gilt. Das bedeutet insbesondere, dass  $d_k$  und  $1 + d_k b$  nicht invertierbar sind. Betrachtet man die Matrix  $(k_0 - 1)a - d \in J \setminus J^*$ , so kann man leicht nachrechnen, dass diese den Eigenwert  $\tau - \tilde{\mu}_j$  mindestens doppelt hat, so dass  $d_{k_0}$  höchstens  $n - 1$  Eigenwerte besitzt. Analog wie im Fall (1a1x) bzw. (1a2x) zeigt man dann für den Punkt  $q_{k_0}$  sofort das Gewünschte, d.h. dass  $b^\beta = \rho^\beta$  für ein  $\rho \in K$  ist.
- (ii) Nun sei angenommen, dass ein  $k \in K^* \setminus \{1\}$  existiert, für welches  $q_k^\gamma = q_k^{\gamma(\alpha,\beta)}$  ist. Dann gilt  $\tilde{C}_1^\gamma = \tilde{C}_1^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . In diesem Fall folgern wir die Gleichheit  $\tilde{C}_1^\gamma = C_1^\gamma$ , denn sonst wäre  $\{p^\gamma, p_0^\gamma\} = \tilde{C}_1^\gamma \cap C_1^\gamma = \tilde{C}_1^{\gamma(\alpha,\beta)} \cap C_1^{\gamma(\alpha,\beta)} = \{p^{\gamma(\alpha,\beta)}, p_0^{\gamma(\alpha,\beta)}\}$ , was zum Widerspruch  $p^\gamma = p^{\gamma(\alpha,\beta)}$  führen würde. Dadurch erhalten wir  $\tilde{p}_1 \in C_1^\gamma$ .

Im Weiteren sei also der Fall (ii) gültig. Wir möchten jetzt eine Kette durch  $\tilde{p}_2$  definieren, deren Bilder unter  $\gamma$  und  $\gamma_{(\alpha,\beta)}$  ebenfalls gleich sind. Dazu erinnern wir uns, wie  $c_1$  genau definiert wurde (siehe Beweis von 5.3.12, Teil (b)). Für  $a = u\bar{a}u^{-1}$  mit  $u \in R^*$  und  $\bar{a}$  wie oben ist  $c_1 = u\bar{c}_1u^{-1}$  mit  $\bar{c}_1 = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , wobei  $\mu_i \in K^* \setminus \{-\lambda_i, -l^{-1}\lambda_i\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , für ein fest gewähltes  $l \in K^* \setminus \{1\}$  sind. Sei nun  $\xi \in K^* \setminus \{1, 1-l^{-1}\}$ , dann können wir oBdA  $\mu_i = (\xi - 1)\lambda_i$  für alle  $i \in \{2, \dots, n\}$  setzen. Wegen  $\lambda_1 = 0$  kann  $\mu_1 \neq 0$  beliebig gewählt werden, dieses werden wir im Laufe des Beweises noch etwas präzisieren.

Nun betrachten wir einen Punkt auf  $C_1 = (pp_0p_1)$ , welcher von den Punkten  $p, p_0, p_1$  verschieden ist. Gemäß dem Beweis von 5.3.12 (Teil (b)) hat jeder von  $p, p_0, p_1$  verschiedene Punkt die Gestalt

$$R(1 + k^{-1}((k - 1)a - c_1)b, k^{-1}((k - 1)a - c_1)) =: s_k$$

mit  $k \in K^* \setminus \{1\}$ . Wir konzentrieren uns auf den Punkt  $s_\xi$ , d.h.  $k = \xi$ . Weiter setzen wir  $a_\xi := \xi^{-1}((\xi - 1)a - c_1) \in J$ . Nach der obigen Wahl von  $\mu_2, \dots, \mu_n$  ist dann  $a_\xi$  ähnlich zu der Diagonalmatrix

$$\begin{aligned} \xi^{-1} \text{diag}(-\mu_1, (\xi - 1)\lambda_2 - \mu_2, \dots, (\xi - 1)\lambda_n - \mu_n) \\ = \text{diag}(-\xi^{-1}\mu_1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Fordern wir zusätzlich  $\mu_1 \neq \xi\tau$ , dann haben wir

$$a_\xi + \tau \approx \text{diag}(\tau - \xi^{-1}\mu_1, \tau, \dots, \tau)$$

und somit gilt  $a_\xi + \tau \in J^*$ . Das liefert

$$\begin{aligned} s_\xi &= R(1 + a_\xi b, a_\xi) = R(1 + \tau^{-1}a_\xi - \tau^{-1}a_\xi + a_\xi b, a_\xi) \\ &= R(1 + \tau^{-1}a_\xi + a_\xi(b - \tau^{-1}), a_\xi) \\ &= R(1 + (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi(b - \tau^{-1}), (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi), \end{aligned}$$

so dass  $s_\xi \triangle \tilde{p}_2$  ist. Deshalb sind die Punkte  $p, s_\xi$  und  $\tilde{p}_2$  paarweise

distant.

Gilt  $s_\xi^\gamma \neq s_\xi^{\gamma(\alpha,\beta)}$ , dann erhalten wir sofort nach (1a1x) bzw. (1a2x)  $b^\beta = \rho^\beta$  für ein  $\rho \in K$ , denn die Matrix  $(1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi$  hat wegen

$$\begin{aligned} & (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi \\ & \approx \text{diag}((1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}, 1, \dots, 1) \cdot \text{diag}(-\xi^{-1}\mu_1, 0, \dots, 0) \\ & \approx \text{diag}(-(1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}\xi^{-1}\mu_1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

genau 2 Eigenwerte (man beachte, dass wir im Fall  $n = 2$  wegen  $|K| \geq 4$  den Fall (1a) anwenden können).

Es gelte nun  $s_\xi^\gamma = s_\xi^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . In diesem Fall untersuchen wir die Kette  $\tilde{C}_2 := (ps_\xi\tilde{p}_2)$ . Diese kann man als  $\mathbb{P}(K)^\eta$  darstellen, wobei  $\eta \in PGL_2(R)$  durch die Matrix

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 + (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a(b - \tau^{-1}) & (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a \\ r(b - \tau^{-1}) & r \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a(b - \tau^{-1}) & (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a \\ b - \tau^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} r & = (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi - (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a \\ & \approx \text{diag}(-(1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}\xi^{-1}\mu_1, 0, \dots, 0) \\ & \quad - \text{diag}(1, (1 + \tau^{-1}\lambda_2)^{-1}, \dots, (1 + \tau^{-1}\lambda_n)^{-1}) \cdot \text{diag}(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \\ & = \text{diag}(-(1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}\xi^{-1}\mu_1, -(1 + \tau^{-1}\lambda_2)^{-1}\lambda_2, \dots, \\ & \quad - (1 + \tau^{-1}\lambda_n)^{-1}\lambda_n) \in \bar{J}^*, \end{aligned}$$

also  $r \in J^*$ , induziert wird. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} R(1, 0)^\eta & = R(1 + (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a(b - \tau^{-1}), (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a) \\ & = R(1 + \tau^{-1}a + a(b - \tau^{-1}), a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= R(1 + ab, a) = p, \\
 R(0, 1)^\eta &= R(r(b - \tau^{-1}), r) \\
 &= R(b - \tau^{-1}, 1) = \tilde{p}_2, \\
 R(1, 1)^\eta &= R(1 + (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a(b - \tau^{-1}) + r(b - \tau^{-1}), (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + r) \\
 &= R(1 + (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi(b - \tau^{-1}), (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi) = s_\xi.
 \end{aligned}$$

Jeder weitere Punkt auf  $\tilde{C}_2$  hat die Form

$$\begin{aligned}
 R(k, 1)^\eta &= R(1 + ((1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + k^{-1}r)(b - \tau^{-1}), (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + k^{-1}r) \\
 &= R(1 + \tilde{a}_k(b - \tau^{-1}), \tilde{a}_k)
 \end{aligned}$$

mit  $\tilde{a}_k := (1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + k^{-1}r \in J$  und  $k \in K^* \setminus \{1\}$  und es gilt

$$\begin{aligned}
 k\tilde{a}_k &= k(1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + r \\
 &= (k - 1)(1 + \tau^{-1}a)^{-1}a + (1 + \tau^{-1}a_\xi)^{-1}a_\xi \\
 &\approx (k - 1)diag(0, (1 + \tau^{-1}\lambda_2)^{-1}\lambda_2, \dots, (1 + \tau^{-1}\lambda_n)^{-1}\lambda_n) \\
 &\quad + diag(-(1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}\xi^{-1}\mu_1, 0, \dots, 0) \\
 &= (k - 1)diag((1 - k)^{-1}(1 - \tau^{-1}\xi^{-1}\mu_1)^{-1}\xi^{-1}\mu_1, (1 + \tau^{-1}\lambda_2)^{-1}\lambda_2, \dots, \\
 &\quad (1 + \tau^{-1}\lambda_n)^{-1}\lambda_n).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\tilde{a}_k \in J^*$  und damit gilt  $R(k, 1)^\eta \triangle R(1, 0)$  für alle  $k \in K^* \setminus \{1\}$ . Das impliziert  $(R(k, 1)^\eta)^\gamma = (R(k, 1)^\eta)^{\gamma(\alpha, \beta)}$ , so dass schließlich  $\tilde{C}_2^\gamma = \tilde{C}_2^{\gamma(\alpha, \beta)}$  ist.

Wegen  $(1 + \tau^{-1}\lambda_i)\lambda_i^{-1} = \lambda_i^{-1} + \tau^{-1} \neq \lambda_j^{-1} + \tau^{-1} = (1 + \tau^{-1}\lambda_j)\lambda_j^{-1}$  für alle  $i, j \in \{2, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$  ist insbesondere  $\tilde{a}_k \notin K^*$ , so dass  $R(k, 1)^\eta \neq R(b, 1) = p_0$  und somit  $\tilde{C}_2 \neq C_1$  gilt.

Nach gleicher Argumentation wie oben folgern wir  $\tilde{C}_2^\gamma = C_1^\gamma$  und somit gilt  $\tilde{p}_2^\gamma \in C_1^\gamma$ .

Also haben wir  $\tilde{p}_1^\gamma, \tilde{p}_2^\gamma \in C_1^\gamma = C^\gamma$ , was sofort  $\tilde{C}^\gamma = C^\gamma$  impliziert. Für den Punkt  $\tilde{p}_2 \in \tilde{C}$  folgt daraus  $\tilde{p}_2^\gamma = R(b - \tau^{-1}, 1)^\gamma = R'((b - \tau^{-1})^\beta, 1') \in C^\gamma$  und wegen  $\tilde{p}_2 \triangle p_0$  und somit  $R'((b - \tau^{-1})^\beta, 1') \neq R'(b^\beta, 1')$  so wie  $R'((b - \tau^{-1})^\beta, 1') \neq R'(1', 0')$  muss es ein  $\tilde{v} \in K^*$  geben, für wel-

ches  $R'((b - \tau^{-1})^\beta, 1') = R'((b + \tilde{\nu}c_1^{-1})^\beta, 1')$  gilt. Das liefert  $-(\tau^{-1})^\beta = (\tilde{\nu}c_1^{-1})^\beta \in K'^*$ . Deshalb erhalten wir  $(c_1^{-1})^\beta = (-\tilde{\nu}^{-1}\tau^{-1})^\beta \in K'^*$ . Das impliziert  $b^\beta = -\nu_0^{\hat{\beta}}(c_1^{-1})^\beta = (\nu_0\tilde{\nu}^{-1}\tau^{-1})^\beta = \rho^\beta$  für  $\rho := \nu_0\tilde{\nu}^{-1}\tau^{-1} \in K$ .

Insgesamt folgern wir

$$\begin{aligned} p^\gamma \in C_1^\gamma &= C^\gamma = \{R'(1', 0')\} \cup \{R'((b + \nu c_1^{-1})^\beta, 1') \mid \nu \in K\} \\ &= \{R'(1', 0')\} \cup \{R'(b^\beta + (\nu c_1^{-1})^\beta, 1') \mid \nu \in K\} \\ &= \{R'(1', 0')\} \cup \{R'(\rho - \nu\tilde{\nu}^{-1}\tau^{-1})^\beta, 1') \mid \nu \in K\} \\ &= \{R'(1', 0')\} \cup \{R'((\nu_0 - \nu)\tilde{\nu}^{-1}\tau^{-1})^\beta, 1') \mid \nu \in K\} \\ &= \mathbb{P}(K)^\gamma. \end{aligned}$$

Damit sind alle Fälle erledigt und das Lemma ist bewiesen.  $\square$

**Satz 5.3.22.** *Sei  $\gamma : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  ein fast-fundamentaler nicht trivialer Morphismus. Dann ist der Morphismus  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$ , der durch den assoziierten Homotopismus  $(\alpha, \beta) = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$  induziert ist, zu  $\gamma$  identisch.*

*Jeder nicht triviale Morphismus  $\sigma : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}'$  hat die Gestalt  $\sigma = \gamma_{(\alpha, \beta)} \circ \delta$ , wobei  $\delta \in PE_2(J')$  und  $\gamma_{(\alpha, \beta)}$  durch einen Homotopismus  $(\alpha, \beta)$  mit  $\dim_{K'} J^\alpha \geq 2$  induziert wird. Umgekehrt ist jede Abbildung dieses Typs ein nicht trivialer Morphismus.*

*Beweis:* Im folgenden Beweis beachten wir, dass jede Kette in  $\mathfrak{C}(K, R, J)$  mindestens fünf Punkte enthält, denn nach Voraussetzung hat der Körper  $K$  im kleinsten Fall 4 Elemente.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass für alle  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  die Gleichheit  $p^\gamma = p^{\gamma_{(\alpha, \beta)}}$  gilt. Sei also  $p \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  ein beliebiger Punkt. Gilt  $C^\gamma \neq \mathbb{P}(K)^\gamma$  für jede Kette  $C \in \mathfrak{C}(K, R, J)$  durch  $p$ , dann folgt sofort nach Lemma 5.3.21 die Behauptung. Daher betrachten wir einen Punkt  $p$  und eine Kette  $C$  durch  $p$  mit  $C^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$  und zeigen  $p^\gamma = p^{\gamma_{(\alpha, \beta)}}$ .

Da  $\gamma$  nicht trivial ist, gibt es einen Punkt  $q \in \tilde{\mathbb{P}}(J)$  mit  $q^\gamma \notin \mathbb{P}(K)^\gamma$ . Nach 5.3.21 folgt dann  $q^\gamma = q^{\gamma_{(\alpha, \beta)}}$ . Gemäß 5.3.13 gibt es durch jeden Punkt von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  eine Kette, welche mindestens drei zu  $p$  distante Punkte enthält. Wäre  $\{p^\gamma\} \cup \Delta(p)^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ , dann würden alle diese Ketten und damit auch alle

Punkte von  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  unter  $\gamma$  auf  $\mathbb{P}(K)$  abgebildet, was aber ein Widerspruch zur Nichttrivialität von  $\gamma$  ist (vgl. 5.3.14). Daher können wir oBdA  $q \in \Delta(p)$  wählen.

Wir zeigen nun, dass es noch mindestens einen Punkt auf  $C$  gibt, welcher zu  $q$  distant ist.

Die projektive lineare Gruppe  $PGL_2(R)$  operiert 3- $\Delta$ -transitiv auf  $\mathbb{P}(R)$ , daher gibt es ein  $\sigma \in PGL_2(R)$ , welches  $p$  auf  $R(1, 0)$  und zwei weitere Punkte von  $C$  auf  $R(0, 1)$  bzw.  $R(1, 1)$  abbildet. Damit ist  $C^\sigma = \mathbb{P}(K)$ . Wegen  $q \Delta p$  ist dann  $q^\sigma = R(a, 1)$  für ein  $a \in R$ .

Da  $a$  höchstens  $n$  verschiedene Eigenwerte hat, gibt es wegen  $|K| \geq n + 1$  mindestens ein  $k \in K$  mit  $a - k \in R^*$ , so dass  $q^\sigma$  zu  $R(1, 0)$  und  $R(k, 1)$  auf  $C^\sigma = \mathbb{P}(K)$  distant ist. Setze man  $p' := R(k, 1)^{\sigma^{-1}} \in C$ , so gilt  $q \Delta p'$  wegen  $PGL_2(R) \leq Aut(\mathbb{P}(R), \Delta)$ . Im Weiteren sei  $C' := (pp'q)$ .

Laut 3.4.3 gibt es ein  $\eta \in PE_2(J)$  mit  $p^\eta = R(1, 0)$  und  $p'^\eta = R(0, 1)$ , d.h. es gilt  $C^\eta = \{R(1, 0)\} \cup \{R(\lambda h, 1) \mid \lambda \in K\}$  für ein  $h \in J^*$ . Wegen  $q \Delta p$  und  $q \Delta p'$  muss dann  $q^\eta$  die Gestalt  $R(x, 1)$  mit einem  $x \in J^*$  haben, wobei  $x$  und  $h$  wegen  $q^\eta \notin C^\eta$  linear unabhängig sind. Nun ist  $H := \{R(1, 0)\} \cup \{R(x - \lambda h, 1) \mid \lambda \in K\} = \mathbb{P}(K) \begin{pmatrix} -h & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \neq C^\eta$  eine Kette in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  durch  $p^\eta = R(1, 0)$  und  $q^\eta = R(x, 1)$ . Insbesondere ist  $p'^\eta \notin H$  und damit  $H \neq C'^\eta$ . Für jedes  $\lambda \in K^*$  definieren wir  $q_\lambda := R(x - \lambda h, 1)^{\eta^{-1}}$ , dann ist  $H = \{p^\eta, q^\eta\} \cup \{(q_\lambda)^\eta \mid \lambda \in K^*\}$  und damit  $C_q := \{p, q\} \cup \{q_\lambda \mid \lambda \in K^*\} = H^{\eta^{-1}}$  eine Kette in  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ .

Jeder Punkt  $(q_\lambda)^\eta = R(x - \lambda h, 1) \in H = (C_q)^\eta$  ist zu mindestens einem Punkt auf  $C^\eta \setminus \{R(1, 0)\}$  distant, nämlich  $(q_\lambda)^\eta \Delta R(-\lambda h, 1)$ . Damit ist jeder Punkt  $q_\lambda \in \Delta(p) \cap C_q$  zu mindestens einem Punkt  $p_\lambda := R(-\lambda h, 1)^{\eta^{-1}}$  auf  $C \setminus \{p\}$  distant, wobei  $p_\lambda \neq p'$  für alle  $\lambda \in K^*$  gilt. Weiter setze man  $C_\lambda := (q_\lambda p_\lambda p)$  für jedes  $\lambda \in K^*$  (siehe Abbildung 5.2).

Wegen  $q^\gamma \notin \mathbb{P}(K)^\gamma$  gilt  $C'^\gamma \neq \mathbb{P}(K)^\gamma$  und  $C_q^\gamma \neq \mathbb{P}(K)^\gamma$ . Das bedeutet, dass es höchstens zwei Punkte auf  $C_q$  gibt, welche unter  $\gamma$  in  $\mathbb{P}(K)^\gamma$  abgebildet werden, und einer davon ist  $p$ . Mit anderen Worten finden wir (mindestens zwei) verschiedene  $\lambda_1, \lambda_2 \in K^*$  mit  $q_{\lambda_i}^\gamma \notin \mathbb{P}(K)^\gamma$  und daher muss die Gleichheit  $q_{\lambda_i}^\gamma = q_{\lambda_i}^{\gamma(\alpha, \beta)}$  für  $i \in \{1, 2\}$  erfüllt sein. Das liefert analog wie oben  $C_{\lambda_i}^\gamma \neq \mathbb{P}(K)^\gamma$ .

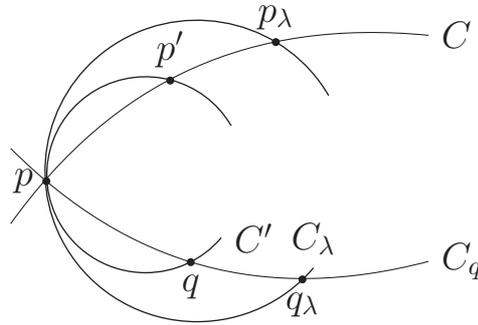


Abbildung 5.2

Insbesondere gilt  $C'^\gamma = C'^{\gamma(\alpha,\beta)}$  sowie  $C_{\lambda_i}^\gamma = C_{\lambda_i}^{\gamma(\alpha,\beta)}$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Gilt  $C'^\gamma = C_{\lambda_i}^\gamma$  für ein  $i \in \{1, 2\}$ , dann ist  $p_{\lambda_i}^\gamma \in C'^\gamma$  und damit  $C'^\gamma = (p'^\gamma p_{\lambda_i}^\gamma p^\gamma) = C^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ , was ein Widerspruch ist. Das impliziert  $C'^\gamma \neq C_{\lambda_i}^\gamma$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ . Haben  $C'^\gamma$  und  $C_{\lambda_i}^\gamma$  nur einen Punkt gemeinsam, dann ist dieser Punkt  $p^\gamma$  und dann folgt sofort  $\{p^\gamma\} = C'^\gamma \cap C_{\lambda_i}^\gamma = C'^{\gamma(\alpha,\beta)} \cap C_{\lambda_i}^{\gamma(\alpha,\beta)} = \{p^{\gamma(\alpha,\beta)}\} \Rightarrow p^\gamma = p^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . Gibt es im Schnitt  $C'^\gamma \cap C_{\lambda_i}^\gamma$  noch einen weiteren Punkt außer  $p^\gamma$ , dann kann dieser Punkt weder  $p'^\gamma$  noch  $p_{\lambda_i}^\gamma$  sein, denn sonst wäre  $C_{\lambda_i}^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$  bzw.  $C'^\gamma = \mathbb{P}(K)^\gamma$ . Sei also  $C'^\gamma \cap C_{\lambda_i}^\gamma = \{v^\gamma, p^\gamma\}$  für ein  $v \in (C' \cup C_{\lambda_i}) \setminus \{p, p', p_{\lambda_i}\}$ , dann ist  $v^\gamma \notin \mathbb{P}(K)^\gamma$  und daher  $v^\gamma = v^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . Daraus folgt  $\{p^\gamma, v^\gamma\} = C'^\gamma \cap C_{\lambda_i}^\gamma = C'^{\gamma(\alpha,\beta)} \cap C_{\lambda_i}^{\gamma(\alpha,\beta)} = \{p^{\gamma(\alpha,\beta)}, v^{\gamma(\alpha,\beta)}\}$  und deshalb ist  $p^\gamma = p^{\gamma(\alpha,\beta)}$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

# Kapitel 6

## Beweise der Hilfssätze

In diesem Kapitel beweisen wir Hilfssätze, welche im Abschnitt 2.2 angewendet werden. Im Weiteren sei stets  $K$  ein Körper mit  $\text{Char}K \neq 2$  und  $R = K_{3,3}$ .

### 6.1 Hilfssatz 1

Für den ersten Hilfssatz benötigen wir das folgende Lemma:

**Lemma 6.1.1.** *Sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System. Seien weiter  $\varepsilon, \delta \in J$  mit  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$  und  $\varepsilon\delta = -\delta\varepsilon$ , dann gilt  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ .*

*Beweis:* Wegen  $\varepsilon^2 = 0$  ist  $\varepsilon$  zu einer Matrix  $\varepsilon' := \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $u, v, w \in K$  ähnlich, d.h. es gibt ein  $p \in GL_3(K)$  mit  $\varepsilon' = p^{-1}\varepsilon p$ . Wir beweisen die Behauptung zunächst für  $\varepsilon'$  und  $\delta' := p^{-1}\delta p$ . Insbesondere gilt nach Voraussetzung  $\varepsilon'\delta' = p^{-1}\varepsilon p p^{-1}\delta p = p^{-1}\varepsilon\delta p = p^{-1}(-\delta\varepsilon)p = -\delta'\varepsilon'$  sowie  $\varepsilon'^2 = \delta'^2 = 0$ . Wegen  $0 = \varepsilon'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & uw \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  gilt dann  $u = 0$  oder  $w = 0$ .

Sei  $\delta' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ . Dann erhalten wir

$$\varepsilon'\delta' = \begin{pmatrix} um_{21} + vm_{31} & um_{22} + vm_{32} & um_{23} + vm_{33} \\ wm_{31} & wm_{32} & wm_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & m_{11}u & m_{11}v + m_{12}w \\ 0 & m_{21}u & m_{21}v + m_{22}w \\ 0 & m_{31}u & m_{31}v + m_{32}w \end{pmatrix} = -\delta'\varepsilon'.$$

Wir machen die folgende Fallunterscheidung für  $u$  und  $w$ :

- (i) Seien  $u = w = 0$ . Ist auch  $v = 0$ , dann ist  $\varepsilon' = 0$  und damit gilt sofort die Behauptung. Sei also  $v \neq 0$ , dann haben wir:

$$\varepsilon'\delta' = \begin{pmatrix} vm_{31} & vm_{32} & vm_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{11}v \\ 0 & 0 & m_{21}v \\ 0 & 0 & m_{31}v \end{pmatrix} = -\delta'\varepsilon'$$

und somit ergibt sich  $m_{31} = m_{32} = m_{21} = 0$  und  $m_{11} = -m_{33}$ . Daher ist  $\delta' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & -m_{11} \end{pmatrix}$  und wegen  $0 = \delta'^2 = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & * & * \\ 0 & m_{22}^2 & * \\ 0 & 0 & m_{11}^2 \end{pmatrix}$  gilt dann  $-m_{33} = m_{11} = m_{22} = 0$ . Folglich erhalten wir  $\varepsilon'\delta' = 0 = \delta'\varepsilon'$ .

- (ii) Seien  $u = 0$ ,  $w \neq 0$  und  $v$  beliebig. Es gilt dann

$$\varepsilon'\delta' = \begin{pmatrix} vm_{31} & vm_{32} & vm_{33} \\ wm_{31} & wm_{32} & wm_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_{11}v + m_{12}w \\ 0 & 0 & m_{21}v + m_{22}w \\ 0 & 0 & m_{31}v + m_{32}w \end{pmatrix} = -\delta'\varepsilon'.$$

Das impliziert  $m_{31} = m_{32} = 0$ . Daher ist  $\delta' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}$  und wegen  $0 = \delta'^2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & m_{33}^2 \end{pmatrix}$  ist auch  $m_{33} = 0$ . Das liefert sofort  $\varepsilon'\delta' = 0 = \delta'\varepsilon'$ .

- (iii) Seien  $u \neq 0$ ,  $w = 0$  und  $v$  beliebig. Dann haben wir

$$\varepsilon'\delta' = \begin{pmatrix} um_{21} + vm_{31} & um_{22} + vm_{32} & um_{23} + vm_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & m_{11}u & m_{11}v \\ 0 & m_{21}u & m_{21}v \\ 0 & m_{31}u & m_{31}v \end{pmatrix} = -\delta'\varepsilon'$$

und damit gilt  $m_{21} = m_{31} = 0$ . Daraus folgt  $\delta' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$  und wegen  $0 = \delta'^2 = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$  ist dann  $m_{11} = 0$ . Somit ergibt sich  $\delta'\varepsilon' = 0 = \varepsilon'\delta'$ .

Insgesamt folgt daraus  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ . □

Jetzt kann der erste angekündigte Hilfssatz bewiesen werden:

**Hilfssatz 6.1.2.** *Sei  $J = K + K\varepsilon + K\delta \subseteq R$  mit  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$ . Dann ist  $J$  genau dann ein Jordan-System, wenn  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$  gilt. Folglich ist  $J$  eine kommutative  $K$ -Algebra.*

*Beweis:* "⇐" Sei  $J$  wie oben mit  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ . Offenbar gilt  $1 \in J$ . Wir zeigen, dass für jedes  $c \in J^*$  auch  $c^{-1} \in J$  gilt (vgl. 1.1.27(1)). Sei also  $c := k + l\varepsilon + s\delta \in J^*$  mit  $k, l, s \in K$ . Es ist  $k \in K^*$ , denn im Fall  $k = 0$  wäre  $c = l\varepsilon + s\delta$  wegen  $(l\varepsilon + s\delta)^2 = l^2\varepsilon^2 + ls(\varepsilon\delta + \delta\varepsilon) + s^2\delta^2 = 0$  nilpotent und damit nicht invertierbar. Folglich ist  $c^{-1} = k^{-1} - k^{-2}l\varepsilon - k^{-2}s\delta$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} cc^{-1} &= (k + l\varepsilon + s\delta)(k^{-1} - k^{-2}l\varepsilon - k^{-2}s\delta) \\ &= kk^{-1} + (-kk^{-2}l + k^{-1}l)\varepsilon + (-kk^{-2}s + k^{-1}s)\delta - lk^{-2}s\varepsilon\delta - k^{-2}ls\delta\varepsilon \\ &= 1 + \underbrace{(-k^{-1}l + k^{-1}l)}_{=0}\varepsilon + \underbrace{(-k^{-1}s + k^{-1}s)}_{=0}\delta - k^{-2}ls \underbrace{(\varepsilon\delta + \delta\varepsilon)}_{=0} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt  $c^{-1} \in J$  für jedes  $c \in J^*$ . Daraus folgt, dass  $J$  ein Jordan-System ist.

"⇒" Sei nun  $J = K + K\varepsilon + K\delta$  ein Jordan-System mit  $\varepsilon^2 = \delta^2 = 0$ . Wir beweisen die Gültigkeit der Gleichheit  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ . Dafür setzen wir  $c := k + l\varepsilon + s\delta \in J^*$  und  $c^{-1} := k' + l'\varepsilon + s'\delta$  mit  $k, k' \in K^*$  und  $l, s, l', s' \in K$ . Gilt  $l = 0$ , dann ist  $c = k + s\delta \in K[\delta]$  für alle  $s \in K$  invertierbar mit  $c^{-1} = k^{-1} - k^{-2}s\delta \in K[\delta]$ . Somit ist dann auch  $l' = 0$ . Es gilt sogar die

Äquivalenz  $l = 0 \Leftrightarrow l' = 0$ . Analog gilt auch  $s = 0 \Leftrightarrow s' = 0$ .

Nun nehmen wir an, dass  $s \in K^*$  (und damit  $s' \in K^*$ ) ist. Wir zeigen zunächst, dass es mindestens ein  $l \neq 0$  gibt, so dass  $c$  invertierbar ist. In diesem Fall ist dann nach dem oben Gezeigten auch  $l' \neq 0$ .

Nach Voraussetzung ist  $\varepsilon$  zu einer Matrix  $\varepsilon' := \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  ähnlich, d.h. es ist  $\varepsilon' = p^{-1}\varepsilon p$  für ein  $p \in GL_3(K)$ . Wegen  $\varepsilon'^2 = 0$  gilt hierbei  $uw = 0$  und damit  $u = 0$  oder  $w = 0$  (vgl. Beweis von 6.1.1). Weiter untersuchen wir das zu  $J$  konjugierte Jordan-System  $J' := p^{-1}Jp = K + K\varepsilon' + K\delta'$  mit  $\delta' := p^{-1}\delta p = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$  und  $c' := p^{-1}cp = k + l\varepsilon' + s\delta' \in J'$ . Zuerst betrachten wir das Produkt  $\varepsilon'\delta'\varepsilon'$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon'\delta'\varepsilon' &= \begin{pmatrix} 0 & u(um_{21} + vm_{31}) & v(um_{21} + vm_{31}) + w(um_{22} + vm_{32}) \\ 0 & wm_{31}u & w(vm_{31} + wm_{32}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u(um_{21} + vm_{31}) & v(um_{21} + vm_{31} + wm_{32}) \\ 0 & 0 & w(vm_{31} + wm_{32}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & v(vm_{31} + wm_{32}) \\ 0 & 0 & w(vm_{31} + wm_{32}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (vm_{31} + wm_{32})\varepsilon', & \text{falls } u = 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u(um_{21} + vm_{31}) & v(um_{21} + vm_{31}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (um_{21} + vm_{31})\varepsilon', & \text{falls } w = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es stets ein  $\tau \in K$  gibt, so dass  $\varepsilon'\delta'\varepsilon' = \tau\varepsilon' \in J'$  ist.

Mit  $(k + s\delta')^{-1} = k^{-1} - k^{-2}s\delta' \in J'$  erhalten wir

$$c'(k^{-1} - k^{-2}s\delta') = (k + l\varepsilon' + s\delta')(k^{-1} - k^{-2}s\delta') = 1 + k^{-1}l\varepsilon'(1 - k^{-1}s\delta').$$

Definiert man  $d := \varepsilon'(1 - k^{-1}s\delta') \in R$ , dann gilt

$$\begin{aligned} d^2 &= (\varepsilon' - k^{-1}s\varepsilon'\delta')^2 \\ &= -k^{-1}s\varepsilon'\delta'\varepsilon' + k^{-2}s^2\varepsilon'\delta'\varepsilon'\delta' \\ &= -k^{-1}s\tau\varepsilon' + k^{-2}s^2\tau\varepsilon'\delta' = -k^{-1}s\tau d. \end{aligned}$$

Ist  $\tau = 0$ , dann ist  $d$  nilpotent. In diesem Fall gilt dann  $c'(k^{-1} - k^{-2}s\delta') = 1 + k^{-1}ld \in R^*$  und damit ist  $c' \in J'^*$  für alle  $l \in K$ . Das impliziert unmittelbar  $c \in J^*$  für alle  $l \in K$ .

Sei nun  $\tau \in K^*$ , dann ist  $-ks^{-1}\tau^{-1}d$  idempotent, denn es gilt  $(-ks^{-1}\tau^{-1}d)^2 = k^2s^{-2}\tau^{-2}d^2 = k^2s^{-2}\tau^{-2}(-k^{-1}s\tau)d = -ks^{-1}\tau^{-1}d$ . Insbesondere hat  $-ks^{-1}\tau^{-1}d$  die Eigenwerte 0 und 1. Wegen  $|K| \geq 3$  gibt es mindestens ein  $\nu \in K^*$  mit  $1 + \nu ks^{-1}\tau^{-1}d \in R^*$ . Setzen wir  $l := \nu k^2s^{-1}\tau^{-1} \in K^*$ , dann ergibt sich  $c'(k^{-1} - k^{-2}s\delta') = 1 + k^{-1}ld = 1 + \nu ks^{-1}\tau^{-1}d \in R^*$ . Daher ist  $c' \in J'^*$  und somit  $c \in J^*$  für mindestens ein  $l \in K^*$ .

Weiter gilt

$$\begin{aligned} cc^{-1} &= (k + l\varepsilon + s\delta)(k' + l'\varepsilon + s'\delta) \\ &= kk' + (kl' + k'l)\varepsilon + (ks' + k's)\delta + ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = 1 \in J. \end{aligned}$$

Wegen  $kk' + (kl' + k'l)\varepsilon + (ks' + k's)\delta \in J$  ist auch  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon \in J$ , wobei  $l, s, l', s' \in K^*$  sind. Daher existieren  $x, y, z \in K$ , so dass  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = x + y\varepsilon + z\delta$  ist. Wir machen die folgende Fallunterscheidung:

- (i) Seien  $x = y = z = 0$ , dann ist auch  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = 0$ . Mit  $k' = k^{-1}$ ,  $l' = -k^{-2}l$  und  $s' = -k^{-2}s$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon\delta &= -(ls')^{-1}l's\delta\varepsilon \\ &= (-lk^{-2}s)^{-1}k^{-2}ls\delta\varepsilon \\ &= -(ls)^{-1}k^2k^{-2}ls\delta\varepsilon = -\delta\varepsilon \end{aligned}$$

(vgl. "⇐"). Nach Lemma 6.1.1 folgt dann sofort  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$ , wie gewünscht.

- (ii) Seien  $x = y = 0$ ,  $z \neq 0$ , dann ist  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = z\delta$ . Das impliziert  $(ls'\varepsilon - z)\delta = -l's\delta\varepsilon$  und somit gilt  $(ls'\varepsilon - z)\delta\varepsilon = 0$  wegen  $\varepsilon^2 = 0$ . Offenbar ist  $ls'\varepsilon - z \in K[\varepsilon]$  invertierbar. Daraus folgt  $\delta\varepsilon = 0$ . Damit erhalten wir  $ls'\varepsilon\delta = z\delta$ . Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von links mit  $\varepsilon$ , dann ergibt sich  $0 = z\varepsilon\delta$  und wegen  $z \neq 0$  ist somit auch  $\varepsilon\delta = 0$ .

(iii) Seien  $x = z = 0$ ,  $y \neq 0$ . Dann gilt  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$  analog wie in (ii).

(iv) Seien  $x, y, z \neq 0$ . Wir haben die Gleichung  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = x + y\varepsilon + z\delta$ .

- Multiplizieren wir beide Seiten der obigen Gleichung von rechts mit  $\varepsilon$ , dann gilt

$$\begin{aligned} ls'\varepsilon\delta\varepsilon &= x\varepsilon + z\delta\varepsilon \\ \Leftrightarrow ls'\varepsilon\delta\varepsilon - z\delta\varepsilon &= x\varepsilon \\ \Leftrightarrow (ls'\varepsilon - z)\delta\varepsilon &= x\varepsilon \\ \Leftrightarrow \delta\varepsilon &= (ls'\varepsilon - z)^{-1}x\varepsilon, \end{aligned}$$

weil  $ls'\varepsilon - z \in K[\varepsilon]^*$  ist. Damit ist  $\delta\varepsilon \in K[\varepsilon]$ .

- Multiplizieren wir beide Seiten derselben Gleichung von links mit  $\delta$ , dann erhalten wir analog wie oben  $\delta\varepsilon \in K[\delta]$ . Daraus folgt  $\delta\varepsilon \in K[\varepsilon] \cap K[\delta] = K$  und wegen  $\det(\delta\varepsilon) = 0$  gilt  $\delta\varepsilon = 0$ .
- Wir betrachten wieder die Ausgangsgleichung  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = x + y\varepsilon + z\delta$ . Multiplizieren wir beide Seiten zunächst von rechts mit  $\delta$  und dann von links mit  $\varepsilon$ , dann ergibt sich  $0 = l's\varepsilon\delta\varepsilon\delta = x\varepsilon\delta$  und somit ist  $\varepsilon\delta = 0$ .

(v) Seien  $x = 0$  und  $y, z \neq 0$ , dann gilt  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = y\varepsilon + z\delta$ . Führen wir die ersten beiden Schritte aus dem Fall (iv) durch, so erhalten wir:

- $ls'\varepsilon\delta\varepsilon = z\delta\varepsilon \Leftrightarrow (ls'\varepsilon - z)\delta\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \delta\varepsilon = 0$ , weil  $ls'\varepsilon - z \in K[\varepsilon]^*$  ist.
- $l's\delta\varepsilon\delta = y\varepsilon\delta = 0 \Leftrightarrow (l's\delta - y)\varepsilon\delta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\delta = 0$ , weil  $l's\delta - y \in K[\delta]^*$  ist.

(vi) Seien  $x \neq 0$ ,  $z = 0$  und  $y \in K$  beliebig. Dann gilt  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon = x + y\varepsilon$ . Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von rechts mit  $\varepsilon$ , dann erhalten wir  $x\varepsilon = ls'\varepsilon\delta\varepsilon$ . Multiplikation derselben Gleichung mit  $\varepsilon$  von links liefert  $x\varepsilon = l's\varepsilon\delta\varepsilon$ . Das impliziert  $(ls' - l's)\varepsilon\delta\varepsilon = 0$ . Wegen  $x \neq 0$  ist hierbei  $\varepsilon\delta\varepsilon = x(ls')^{-1}\varepsilon \neq 0$ . Deshalb muss  $ls' = l's$

gelten. Insgesamt erhalten wir  $ls'(\varepsilon\delta + \delta\varepsilon) = x + y\varepsilon$  und somit ist  $\varepsilon\delta + \delta\varepsilon = (ls')^{-1}x + (ls')^{-1}y\varepsilon \in K[\varepsilon]^*$ . Insbesondere gilt dann auch  $\varepsilon'\delta' + \delta'\varepsilon' = (ls')^{-1}x + (ls')^{-1}y\varepsilon' \in K[\varepsilon']^*$  für  $\varepsilon', \delta' \in J'$  wie oben. Genauer ist

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} um_{21} + vm_{31} & um_{22} + vm_{32} + um_{11} & um_{23} + vm_{33} + vm_{11} + wm_{12} \\ wm_{31} & wm_{32} + um_{21} & wm_{33} + vm_{21} + wm_{22} \\ 0 & um_{31} & vm_{31} + wm_{32} \end{pmatrix} \\ &= \varepsilon'\delta' + \delta'\varepsilon' = (ls')^{-1}x + (ls')^{-1}y\varepsilon' \\ &= \begin{pmatrix} (ls')^{-1}x & (ls')^{-1}yu & (ls')^{-1}yv \\ 0 & (ls')^{-1}x & (ls')^{-1}yw \\ 0 & 0 & (ls')^{-1}x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist der (2, 2)-Eintrag  $wm_{32} + um_{21} = (ls')^{-1}x \in K^*$ , d.h. der Fall  $u = w = 0$  kann dabei nicht eintreten. Also muss unbedingt entweder  $u \neq 0$  oder  $w \neq 0$  sein. Aus  $wm_{31} = um_{31} = 0$  folgt damit  $m_{31} = 0$ . Somit erhalten wir  $um_{21} = (ls')^{-1}x \in K^*$  sowie  $wm_{32} = (ls')^{-1}x \in K^*$ , d.h.  $u, w \neq 0$ . Das ist aber ein Widerspruch zu  $\varepsilon'^2 = 0$ . Also kann dieser Fall nicht eintreten, d.h. es gilt  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon \neq x + y\varepsilon$  für alle  $x \in K^*$ .

(vii) Analog wie in (vi) erhalten wir  $ls'\varepsilon\delta + l's\delta\varepsilon \neq x + z\delta$  für alle  $x \in K^*$ .

Damit sind alle Fälle erledigt. Schließlich können wir die Gleichheit  $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$  folgern.

Die verbleibende Behauptung ist klar. □

## 6.2 Hilfssatz 2

Für den zweiten Hilfssatz ist das folgende Lemma nützlich:

**Lemma 6.2.1.** *Sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System der Gestalt*

- (a)  $J = K + K\varepsilon + Ke$  mit  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $e^2 = e$ , dann ist  $\varepsilon e \in J$  genau dann, wenn  $e\varepsilon \in J$  gilt.

(b)  $J = K + Ke + Kd$  mit  $e^2 = e, d^2 = d$ , dann ist  $ed \in J$  genau dann, wenn  $de \in J$  gilt.

*Beweis:* Wir betrachten die beiden definierten Jordan-Systeme:

(a) Sei  $J = K + K\varepsilon + Ke$  ein Jordan-System. Um die Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, dass es mindestens ein  $k \in K^*$  existiert, so dass  $a := 1 + k\varepsilon + e \in J^*$  ist.

Da  $\varepsilon$  nach Voraussetzung nilpotent ist, können wir oBdA  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $uw = 0$  und damit  $u = 0$  oder  $w = 0$  setzen (vgl. Beweis von 6.1.1 bzw. 6.1.2). Analog wie im Beweis von 6.1.2 kann man zeigen, dass es stets ein  $\tau \in K$  existiert, so dass  $\varepsilon\varepsilon\varepsilon = \tau\varepsilon$  ist.

Offenbar ist  $1 + e \in J^*$  mit  $(1 + e)^{-1} = 1 - 2^{-1}e$ . Es gilt

$$a(1 - 2^{-1}e) = (1 + k\varepsilon + e)(1 - 2^{-1}e) = 1 + k\varepsilon(1 - 2^{-1}e).$$

Definiert man  $d := \varepsilon(1 - 2^{-1}e) \in R$ , dann ist

$$d^2 = (\varepsilon - 2^{-1}\varepsilon e)^2 = -2^{-1}\varepsilon e \varepsilon + 2^{-2}\varepsilon e \varepsilon e = -2^{-1}\tau\varepsilon(1 - 2^{-1}e) = -2^{-1}\tau d.$$

Im Fall  $\tau = 0$  ist  $d$  mit  $d^2 = 0$  nilpotent, so dass  $a(1 - 2^{-1}e) = 1 + kd \in R^*$  für alle  $k \in K$  ist. Somit ist dann auch  $a \in J^*$  für alle  $k \in K$ .

Sei nun  $\tau \in K^*$ , dann ist  $-2\tau^{-1}d$  wegen  $(-2\tau^{-1}d)^2 = 2^2\tau^{-2}d^2 = 2^2\tau^{-2}(-2^{-1}\tau d) = -2\tau^{-1}d$  idempotent. Nach gleicher Argumentation wie im Beweis von 6.1.2 ist  $a$  für mindestens ein  $k \in K^*$  invertierbar.

Sei nun  $a^{-1} := l + s\varepsilon + re \in J$ , dann sind  $s, r \neq 0$ , denn sonst wäre  $a^{-1}$  und damit auch  $a$  ein Element von  $K[\varepsilon]$  bzw.  $K[e]$ , was ein Widerspruch zur Definition von  $a$  ist. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} aa^{-1} &= (1 + k\varepsilon + e)(l + s\varepsilon + re) \\ &= l + (kl + s)\varepsilon + (l + 2r)e + kr\varepsilon e + se\varepsilon = 1 \in J. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Daraus folgt  $kr\varepsilon e + se\varepsilon \in J$ . Wegen  $k, r, s \neq 0$  gilt sofort  $e\varepsilon \in J \Leftrightarrow \varepsilon e \in J$ , was zu zeigen war.

(b) Sei  $J = K + Ke + Kd$  ein Jordan-System in  $R$  mit  $e^2 = e$ ,  $d^2 = d$ . Da  $e$  idempotent ist, sind die Eigenwerte von  $e$  nur 1 und 0. Daher kann  $e$  bis auf Konjugation nur eine der Gestalten haben (siehe [32, S. 260]):

- $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und es gilt  $e_1^2 = e_1 \Leftrightarrow u = 0$ .

- $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und es gilt  $e_2^2 = e_2 \Leftrightarrow u = 0$ .

Es reicht für  $e$  nur die zweite Variante zu betrachten, da  $e_1$  zu  $1 - e_2$  ähnlich ist.

Sei nun  $d = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ . Wegen  $u = 0$  gilt dann  $ede = m_{11}e$ . Zunächst zeigen wir wieder, dass  $a := 1 + ke + d \in J$  für mindestens ein  $k \in K^*$  invertierbar ist. Mit  $(1 + d)^{-1} = 1 - 2^{-1}d \in J^*$  ist insbesondere  $a = (1 + ke(1 - 2^{-1}d))(1 + d)$ .

Weiter setzen wir  $b := e(1 - 2^{-1}d) \in R$ . Im Fall  $m_{11} = 2$  ist  $b$  wegen  $b^2 = (1 - 2^{-1}m_{11})b$  nilpotent und damit ist  $a = (1 + kb)(1 + d) \in J^*$  für alle  $k \in K$ . Sonst ist  $(1 - 2^{-1}m_{11})^{-1}b$  wegen  $((1 - 2^{-1}m_{11})^{-1}b)^2 = (1 - 2^{-1}m_{11})^{-1}b$  idempotent und somit gilt  $a = (1 + kb)(1 + d) = (1 + k(1 - 2^{-1}m_{11})(1 - 2^{-1}m_{11})^{-1}b)(1 + d) \in J^*$  für mindestens ein  $k \in K^*$  ist.

Weiter verläuft der Beweis analog wie in (a). □

**Hilfssatz 6.2.2.** *Sei  $J \subseteq R$  ein Jordan-System der Gestalt*

(a)  $J = K + K\varepsilon + Ke$  mit  $\varepsilon^2 = 0$ ,  $e^2 = e$ , dann ist  $J$  stets eine (nicht notwendigerweise kommutative)  $K$ -Algebra.

(b)  $J = K + Ke + Kd$  mit  $e^2 = e$ ,  $d^2 = d$ , dann ist  $J$  stets eine (nicht notwendigerweise kommutative)  $K$ -Algebra.

*Beweis:* (a) Sei  $J = K + K\varepsilon + Ke$  ein Jordan-System mit  $e^2 = e$  und  $\varepsilon^2 = 0$ . Aufgrund von 6.2.1 reicht es, entweder  $\varepsilon e \in J$  oder  $e\varepsilon \in J$  zu zeigen. OBdA setzen wir wieder  $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $uw = 0$  und

$e = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \varepsilon e &= \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} um_{21} + vm_{31} & um_{22} + vm_{32} & um_{23} + vm_{33} \\ wm_{31} & wm_{32} & wm_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\varepsilon \varepsilon = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m_{11}u & m_{11}v + m_{12}w \\ 0 & m_{21}u & m_{21}v + m_{22}w \\ 0 & m_{31}u & m_{31}v + m_{32}w \end{pmatrix}.$$

Wegen (6.1) gibt es ein  $\lambda \in K^*$ , so dass  $\varepsilon e + \lambda \varepsilon \varepsilon \in J$  ist, d.h.  $\varepsilon e + \lambda \varepsilon \varepsilon = x + ye + z\varepsilon$  für bestimmte  $x, y, z \in K$ . Wir machen die folgende Fallunterscheidung:

(i) Seien  $u = 0$  und  $w \neq 0$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon e + \lambda \varepsilon \varepsilon &= \begin{pmatrix} vm_{31} & vm_{32} & vm_{33} + \lambda(m_{11}v + m_{12}w) \\ wm_{31} & wm_{32} & wm_{33} + \lambda(m_{21}v + m_{22}w) \\ 0 & 0 & \lambda(m_{31}v + m_{32}w) \end{pmatrix} \\ &= x + y \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Fall  $y \neq 0$  folgt daraus  $m_{31} = m_{32} = 0$  und damit ist  $\varepsilon e = m_{33}\varepsilon \in J$ .

Ist  $y = 0$ , dann folgern wir zunächst  $wm_{31} = 0$  und somit  $m_{31} = 0$ ,

weil  $w \neq 0$  ist. Wegen  $x = wm_{32} = vm_{31} = 0$  gilt dann  $m_{32} = 0$  und damit ist  $\varepsilon e = m_{33}\varepsilon \in J$ . Wegen  $e^2 = e$  gilt hierbei stets  $m_{33}^2 = m_{33}$ , d.h.  $m_{33} \in \{0, 1\}$ .

- (ii) Im Fall  $w = 0$  und  $u \neq 0$  folgt analog  $m_{21} = m_{31} = 0$  und damit ist  $e\varepsilon = m_{11}\varepsilon \in J$  mit  $m_{11} \in \{0, 1\}$ .
- (iii) Seien nun  $u = w = 0$ . Dann ist  $v \neq 0$ , da  $\varepsilon \neq 0$  ist. In diesem Fall erhält man  $m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$  und daher gilt  $\varepsilon e = m_{33}\varepsilon \in J$  und  $e\varepsilon = m_{11}\varepsilon \in J$  mit  $m_{11}, m_{33} \in \{0, 1\}$ .

Schließlich können wir folgern, dass  $J$  eine nicht notwendigerweise kommutative  $K$ -Algebra in  $R$  ist.

- (b) Sei  $J = K + Ke + Kd$  ein Jordan-System mit  $e^2 = e$ ,  $d^2 = d$ . Analog wie im Beweis von 6.2.1(b) können wir oBdA  $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  setzen. Weiter sei  $d = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ . Gemäß dem Beweis von 6.2.1(b) gibt es ein  $\tau \in K^*$  und  $x, y, z \in K$ , so dass  $ed + \tau de = x + ye + zd \in J$  ist, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} (\tau + 1)m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ \tau m_{21} & 0 & 0 \\ \tau m_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + zm_{11} & zm_{12} & zm_{13} \\ zm_{21} & x + zm_{22} & zm_{23} \\ zm_{31} & zm_{32} & x + zm_{33} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund von 6.2.1(b) reicht es wieder, entweder  $ed \in J$  oder  $de \in J$  zu beweisen. Dafür unterscheiden wir zwischen den folgenden zwei Fällen:

- (i) Sei  $z = 0$ , dann ergibt sich sofort  $m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{31} = 0$ . Deshalb ist  $ed = de = m_{11}e \in J$ , wobei  $m_{11} \in \{0, 1\}$  wegen  $d^2 = d$  gilt. In diesem Fall ist  $J$  eine kommutative  $K$ -Algebra.
- (ii) Sei nun  $z \neq 0$ . Dann folgt  $m_{23} = m_{32} = 0$  und  $m_{22} = m_{33}$ . Somit

haben wir:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} m_{11}^2 + m_{12}m_{21} + m_{13}m_{31} & m_{11}m_{12} + m_{12}m_{22} & m_{11}m_{13} + m_{13}m_{22} \\ m_{21}m_{11} + m_{22}m_{21} & m_{21}m_{12} + m_{22}^2 & m_{21}m_{13} \\ m_{31}m_{11} + m_{22}m_{31} & m_{31}m_{12} & m_{31}m_{13} + m_{22}^2 \end{pmatrix} \\ & = d^2 = d = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ m_{31} & 0 & m_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & m_{21}m_{13} = 0 \wedge m_{31}m_{12} = 0 \wedge m_{21}m_{12} = m_{31}m_{13} \\ \Leftrightarrow & (m_{21} = 0 \vee m_{13} = 0) \wedge (m_{31} = 0 \vee m_{12} = 0) \wedge m_{21}m_{12} = m_{31}m_{13} \\ \Rightarrow & m_{21}m_{12} = m_{31}m_{13} = 0 \\ \Rightarrow & m_{11}^2 = m_{11} \wedge m_{22}^2 = m_{22} \\ \Leftrightarrow & m_{11}, m_{22} \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Im Fall  $m_{12} = m_{21} = m_{13} = m_{31} = 0$  ist  $d = \text{diag}(m_{11}, m_{22}, m_{22})$ , wobei der Fall  $d = 0$  ausgeschlossen wird. Da  $1, e, d$  linear unabhängig sind, können die Fälle  $m_{11} = m_{22} = 1$  und  $m_{11} = 1, m_{22} = 0$  nicht eintreten. Daher gibt es die einzige Möglichkeit für  $d$ , nämlich  $d = \text{diag}(0, 1, 1)$ . Damit ist  $ed = de = 0 \in J$ , so dass  $J$  eine kommutative  $K$ -Algebra ist.

Sei nun  $m_{12} \neq 0$  oder  $m_{13} \neq 0$ . Dann sind  $m_{21} = m_{31} = 0$  und damit ist  $d = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{22} \end{pmatrix}$ . Folglich ist dann  $de = m_{11}e \in J$  mit  $m_{11} \in \{0, 1\}$ . Insbesondere kann  $J$  dabei wegen  $ed = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  und somit  $ed \neq de$  nicht kommutativ sein.

Analog gilt  $m_{12} = m_{13} = 0$  im Fall  $m_{21} \neq 0$  oder  $m_{31} \neq 0$ , so dass  $ed = m_{11}e \in J$  mit  $m_{11} \in \{0, 1\}$  ist. In diesem Fall ist  $J$  auch nicht kommutativ.

Mit 6.2.1(b) gilt insgesamt die Behauptung. □

# Literaturverzeichnis

- [1] A. A. Albert, *A structure theory for Jordan algebras*. Ann. of Math. 48 (1947), 546-567
- [2] S. A. Amitsur, *Embeddings in matrix rings*. Pacific J. Math. 36 (1971), 21-29
- [3] C. Bartolone, *Jordan homomorphisms, chain geometries and the fundamental theorem*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 59 (1989), 93-99
- [4] D. Benkovič, *Jordan homomorphisms on triangular matrices*. Linear and Multilinear Algebra 53 (2005), 345-356
- [5] W. Benz, *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Springer, 1973
- [6] W. Benz, *Über die Grundlagen der Geometrie der Kreise in der pseudo-euklidischen (Minkowskischen) Geometrie*. J. Reine Angew. Math. 232 (1968), 41-76
- [7] W. Bertram, *The Geometry of Jordan and Lie Structures*. Lecture Notes in Math. Vol. 1754, Springer, 2000
- [8] A. Bichara, G. Tallini, *On a characterization of the Grassmann space representing the  $h$ -dimensional subspaces in a projective space*. Annals of Discrete Mathematics 18 (1983), 113-132
- [9] P. Biondi, *On finite Grassmann spaces*. Annals of Discrete Mathematics 37 (1988), 69-74
- [10] A. Blunck, *Chain geometries over local alternative algebras*. J. Geom. 44 (1992), 33-44
- [11] A. Blunck, *Chain spaces over Jordan systems*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 64 (1994), 33-49
- [12] A. Blunck, *Regular spreads and chain geometries*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999), 589-603

- [13] A. Blunck, *Reguli and chains over skew fields*. Beitr. Algebra Geom. 41(1) (2000), 7-21
- [14] A. Blunck, *Geometrie*. Skript einer Vorlesung an der Universität Hamburg, Hamburg 2009
- [15] A. Blunck, *Geometrie II*. Skript einer Vorlesung an der Universität Hamburg, Hamburg 2010
- [16] A. Blunck, H. Havlicek, *Extending the concept of chain geometry*. Geom. Dedicata 83 (2000), 119-130
- [17] A. Blunck, H. Havlicek, *Projective representations I: Projective lines over rings*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 70 (2000), 287-299
- [18] A. Blunck, H. Havlicek, *Projective representations II: Generalized chain geometries*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 70 (2000), 301-313
- [19] A. Blunck, H. Havlicek, *The connected components of the projective line over a ring*. Adv. Geom. 1 (2001), 107-117
- [20] A. Blunck, H. Havlicek, *Jordan homomorphisms and harmonic mappings*. Monatsh. Math. 139 (2003), 111-127
- [21] A. Blunck, H. Havlicek, *Radical parallelism on projective lines and non-linear models of affine spaces*. Math. Pannonica 14 (2003), 113-127.
- [22] A. Blunck, H. Havlicek, *On distant-isomorphisms of projective lines*. Aequationes Math. 69 (2005), 146-163
- [23] A. Blunck, H. Havlicek, *On bijections that preserve complementarity of subspaces*. Discrete Math. 301 (2005), 46-56
- [24] A. Blunck, H. Havlicek, *Projective lines over Jordan systems and geometry of hermitian matrices*. Linear Algebra Appl. 433 (2010), 672-680
- [25] A. Blunck, H. Havlicek, *Geometric structures on finite- and infinite-dimensional Grassmannians*. Beitr. Algebra Geom. 54 (2013), 533-547
- [26] A. Blunck, A. Herzer, *Kettengeometrien. Eine Einführung*. Shaker Verlag, 2005
- [27] C.-G. Cao, X. Zhang, *Linear preservers between matrix modules over connected commutative rings*. Linear Algebra Appl. 397 (2005), 355-366
- [28] H. Chen, *Rings related to stable range conditions*. Series in Algebra Vol. 11, World Sci. Publ., Singapore, 2011

- 
- [29] W.-L. Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*. Ann. of Math. 50(1) (1949), 32-67
- [30] P. M. Cohn, *Basic algebra: Groups, rings and fields*. Springer, 2005
- [31] C.-A. Faure, *Morphisms of projective spaces over rings*. Adv. Geom. 4 (2004), 19-31
- [32] G. Fischer, *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Vieweg+Teubner Verlag, 17. Auflage, 2010
- [33] O. Giering, *Vorlesungen über höhere Geometrie*. Vieweg, 1982
- [34] H. Havlicek, *From pentacyclic coordinates to chain geometries, and back*. Mitt. Math. Ges. Hamburg 26 (2007), 75-94
- [35] H. Havlicek, *Divisible designs, Laguerre geometry, and beyond*. J. Math. Sci. (N. Y.) 186 (2012), 882-926
- [36] H. Havlicek, *Von Staudt's theorem revisited*. Aequationes Math. 89 (2015), 459-472
- [37] H. Havlicek, *Private Kommunikation*.
- [38] H. Havlicek, K. List, *A Three-Dimensional Laguerre Geometry and Its Visualization*. In: G. Weiß, editor, Proceedings - Dresden Symposium Geometry: constructive kinematic (DSG.CK), Institut für Geometrie, Tech. Univ. Dresden (2003), 122-129
- [39] H. Havlicek, A. Matraś, M. Pankov, *Geometry of free cyclic submodules over ternions*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 81 (2011), 237-249
- [40] I. N. Herstein, *On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring*. Amer. J. Math. 77 (1955), 279-285
- [41] I.N. Herstein, *Jordan homomorphisms*. Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 331-341.
- [42] A. Herzer, *Chain geometries*. In F. Buekenhout (Hrsg.), Handbook of Incidence Geometry, Elsevier, 1995
- [43] A. Herzer, *On sets of subspaces closed under reguli*. Geom. Dedicata 41 (1992), 89-99
- [44] W.-L. Huang, *Adjacency preserving transformations of Grassmann spaces*. Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 68 (1998), 65-77

- [45] W. Huang, H. Havlicek, *Diameter preserving surjections in the geometry of matrices*. Linear Algebra Appl. 429 (2008), 376-386
- [46] N. Jacobson, *General representation theory of Jordan algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), 509-530
- [47] N. Jacobson, *Structure and representations of Jordan algebras*. AMS Coll. Publ. Vol. 39, 1968
- [48] N. Jacobson, C. E. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 479-502
- [49] N. Jacobson, C. E. Rickart, *Homomorphisms of Jordan rings of self-adjoint elements*. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 310-322
- [50] J. C. Jantzen, J. Schwermer, *Algebra*. Springer, 2006
- [51] C. Karpfinger, K. Meyberg, *Algebra: Gruppen - Ringe - Körper*. Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage, 2010
- [52] J. Kosiorek, A. Matras, M. Pankov, *Distance preserving mappings of Grassmann graphs*. Beiträge Algebra Geom. 49 (2008), 233-242
- [53] A. Kovacs, *Homomorphisms of matrix rings into matrix rings*. Pacific J. Math. 49 (1973), 161-170
- [54] A. Kreuzer, *On isomorphisms of Grassmann spaces*. Aequationes Math. 56 (1998), 243-250
- [55] A. Lashkhi, *Harmonic maps over rings*. Georgian Math. J. 4 (1997), 41-64
- [56] W. Lex, V. Poneleit, H.J. Weinert, *Über die Einzigkeit der Ternionenalgebra und linksalternative Algebren kleinen Ranges*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 35(1-2)(1980), 129-138
- [57] F. Lorenz, *Lineare Algebra I*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 2003
- [58] W.S. Martindale, III, *Jordan homomorphisms of the symmetric elements of a ring with involution*. J. Algebra 5 (1967), 232-249
- [59] M. Pankov, *Grassmannians of Classical Buildings*. World Sci. Publ., Singapore, 2010
- [60] M. Pankov, *Embeddings of Grassmann graphs*. Linear Algebra Appl. 436 (2012), 3413-3424

- [61] H.-J. Samaga, *Dreidimensionale Kettengeometrien über  $\mathbb{R}$* . J. Geom. 8 (1976), 61-73
- [62] M. F. Smiley, *Jordan homomorphisms onto prime rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 84 (1957), 426-429
- [63] L. J. Smid, B. L. van der Waerden, *Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie*. Math. Ann. 110(1) (1935), 753-776
- [64] K. Sörensen, *Der Fundamentalsatz für Projektionen*. Mitt. Math. Ges. Hamburg 11 (1985), 303-309
- [65] F. D. Veldkamp, *Geometry over rings*. In F. Buekenhout (Hrsg.), Handbook of Incidence Geometry, Elsevier, 1995
- [66] Z.-X. Wan, *Geometry of matrices*. World Sci. Publ., Singapore, 1996
- [67] H. M. Yao, *Additive preservers of idempotence and Jordan homomorphisms between rings of square matrices*. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 25 (2009), 639-648



# Zusammenfassung

Jordan-Systeme sind gewisse Teilstrukturen von  $K$ -Algebren. Bisher wurden die projektive Gerade  $\mathbb{P}(J)$  über einem Jordan-System  $J$  sowie die zugehörige Kettengeometrie nur für sogenannte *starke*  $J$  definiert und untersucht. Dementsprechend wurde auch die algebraische Beschreibung der Morphismen von Kettengeometrien nur im starken Fall behandelt. Das Ziel der vorliegenden Dissertation ist es, bei unserer Untersuchung all dieser Gegenstände auf die Voraussetzung „stark“ zu verzichten.

Im Kapitel 1 werden vorbereitend die grundlegenden Begriffe, Aspekte und Zusammenhänge aus der Thematik Distanzräume und Kettengeometrien erklärt und durch Beispiele unterstützt.

In den Kapiteln 2 und 3 befassen wir uns mit der Frage von Definition der projektiven Gerade über  $J$  im nicht starken Fall. Zur Einführung und Motivation werden im Kapitel 2 alle zwei- und dreidimensionalen Jordan-Systeme im  $3 \times 3$ -Matrizenring  $K_{3,3}$  über einem Körper  $K$  mit  $\text{Char}K \neq 2$  studiert und klassifiziert. Hierbei wird anhand eines Beispiels gezeigt, dass die übliche Definition der projektiven Gerade im nicht starken Fall nicht die gewünschten Eigenschaften hat. Deshalb führen wir im Kapitel 3 die neue Definition der projektiven Gerade über einem nicht notwendigerweise starken Jordan-System  $J$  ein und bezeichnen sie mit  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . Die neue Definition umfasst die übliche für starke  $J$ . Weiter untersuchen wir, wann die beiden Mengen  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  und  $\mathbb{P}(J)$  gleich sind. Dazu führen wir den Begriff des *stabilen* Jordan-Systems in einer  $K$ -Algebra  $R$  ein und beweisen, dass im Fall von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen die Gleichheit  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$  genau dann gilt, wenn  $J$  in  $R$  stabil ist. Insbesondere wird gezeigt, dass jedes Jordan-abgeschlossene Jordan-System in  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  stabil

ist, falls  $|K| \geq n + 1$  gilt. Dieses Kapitel abschließend beweisen wir: Ist  $J$  Jordan-abgeschlossen, dann ist  $\widetilde{\mathbb{P}}(J)$  ein Unterraum der Kettengeometrie über der Algebra  $(K, R)$ . Diesen Unterraum nennen wir die Kettengeometrie über  $(K, R, J)$  und bezeichnen mit  $\Sigma(K, R, J)$ . Insbesondere stimmt diese Kettengeometrie mit der üblichen für starke  $J$  überein.

In den Kapiteln 4 und 5 werden Morphismen von Kettengeometrien der Form  $\Sigma(K, R, J)$  auf algebraische Beschreibung untersucht. Dafür werden zunächst im Kapitel 4 Jordan-Homomorphismen zwischen Matrizenalgebren gleicher Ordnung sowie von einem Jordan-System hermitescher Matrizen in eine Matrizenalgebra gleicher Ordnung - als eine Beispielklasse solcher Abbildungen - näher studiert und algebraisch beschrieben. Wir zeigen, dass Jordan-Homomorphismen in beiden genannten Fällen Morphismen der entsprechenden Distanzräume induzieren, welche sowohl die Distanzrelation als auch die Adjazenzrelation (im Sinne der Theorie der Graßmann-Räume) in beiden Richtungen invariant lassen. Zum Schluss dieses Kapitels geben wir geometrische Interpretationen dieser Morphismen, indem wir die entsprechenden projektiven Geraden in projektiven Räumen über Körpern darstellen und zur Theorie der Graßmann-Räume übergehen.

Im Kapitel 5 verallgemeinern wir einige Resultate aus dem Kapitel 4: Wir zeigen, dass jeder Jordan-Homomorphismus zwischen zwei Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen stets einen Morphismus der entsprechenden Distanzräume induziert. Zusätzlich wird bewiesen, dass dieser Morphismus sogar ein Morphismus der zugehörigen Kettengeometrien ist. Dieses Ergebnis verallgemeinern wir weiter auf Homotopismen von Jordan-abgeschlossenen Jordan-Systemen. Im letzten Abschnitt zeigen wir auch (unter zusätzlichen Voraussetzungen) die Umkehrung: Sei  $R = K_{n,n}$  mit  $n \geq 2$  und  $|K| \geq n + 1$  und sei  $R'$  eine beliebige Algebra über einem Körper  $K'$ . Außerdem seien  $J$  und  $J'$  Jordan-abgeschlossene Jordan-Systeme in  $R$  bzw.  $R'$ . Dann lässt sich jeder nicht triviale Morphismus der entsprechenden Kettengeometrien durch einen Homotopismus  $J \rightarrow J'$  beschreiben. Man beachte, dass unter diesen Voraussetzungen  $J$  in  $R$  stabil ist.

# Summary

Jordan systems are certain substructures of  $K$ -algebras. So far, the projective line  $\mathbb{P}(J)$  over a Jordan system  $J$  and the associated chain geometry have been defined and investigated only for so-called *strong* Jordan systems  $J$ . Accordingly, the algebraic description of the morphisms of chain geometries has been treated only under the assumption of the strongness of  $J$ . The aim of this thesis is to abandon the condition „strong“ in our investigation of all these subjects.

In the first chapter we explain the basic notions, aspects and correlations on the subject of distant spaces and chain geometries and support them by examples.

In the chapters 2 and 3 we consider the question of definition of the projective line over a not necessarily strong Jordan system  $J$ . As an introduction and motivation we study and classify in the second chapter all two- and threedimensional Jordan systems in the ring  $K_{3,3}$  of  $3 \times 3$  matrices over some field  $K$  with  $\text{Char}K \neq 2$ . Based on an example, we show that the usual definition of the projective line over  $J$  does not have the desired properties, if  $J$  is not strong. Therefore we introduce in the third chapter a new definition of the projective line over a not necessarily strong Jordan system  $J$  and denote it by  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$ . The new definition includes the usual one for strong Jordan systems. Further, we consider the question, when the sets  $\tilde{\mathbb{P}}(J)$  and  $\mathbb{P}(J)$  are equal. For this purpose we introduce the notion of the *stable* Jordan system in a  $K$ -algebra  $R$  and prove for Jordan closed Jordan systems  $J$ , that the equality  $\tilde{\mathbb{P}}(J) = \mathbb{P}(J)$  is equivalent to the stability of  $J$  in  $R$ . In particular, we show that every Jordan closed Jordan system in  $R = K_{n,n}$  with  $n \geq 2$  is stable, when  $|K| \geq n + 1$  holds. Concluding this chapter we prove the following: If

$J$  is Jordan closed, then  $\widetilde{\mathbb{P}}(J)$  is a subspace of the chain geometry over the algebra  $(K, R)$ . We call this subspace the chain geometry over  $(K, R, J)$  and denote it by  $\Sigma(K, R, J)$ . In particular, this chain geometry coincides with the usual one in the case, when  $J$  is strong.

In the chapters 4 and 5 we examine morphisms of chain geometries of the form  $\Sigma(K, R, J)$  for algebraic description. For this purpose, firstly Jordan homomorphisms between matrix algebras of the same order as well as of a Jordan system of hermitian matrices into a matrix algebra of the same order - as an example class of such mappings - are studied and described algebraically in the fourth chapter. We prove that Jordan homomorphisms in both cases mentioned above induce morphisms of the respective distant spaces, which preserve both the distant relation and the adjacency relation (in terms of the theory of the Grassmann spaces) in both directions. Finally we give geometric interpretations of these morphisms by representing the respective projective lines in projective spaces over some fields, so that we can use the theory of the Grassmann spaces.

In the fifth chapter we generalize some results from the chapter 4: We show that every Jordan homomorphism between two Jordan closed Jordan systems induces a morphism of the respective distant spaces. Moreover, we prove that this morphism is even a morphism of the associated chain geometries. This result is further generalized to homotopisms of Jordan closed Jordan systems. In the last section we prove that under additional assumptions the reversed statement is true as well, i.e.: Let  $R$  be a matrix ring  $R = K_{n,n}$  with  $n \geq 2$  and  $|K| \geq n+1$  and let  $R'$  be an arbitrary algebra over some field  $K'$ . Furthermore, let  $J$  and  $J'$  be Jordan closed Jordan systems in  $R$  and  $R'$  respectively. Then every nontrivial morphism of the associated chain geometries can be described by a homotopism  $J \rightarrow J'$ . Note that under these assumptions  $J$  is stable in  $R$ .