Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen

Eine historische Untersuchung über die Grundlagen
der Physik im Grenzbereich zu Mathematik,
Philosophie und Kunst

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg

vorgelegt von

Klaus-Heinrich Peters

aus Gütersloh

Hamburg 2004

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. G. Wolfschmidt
und Prof. Dr. K. Fredenhagen

Hamburg, den 18.6.2003

Prof. Dr. A. Kreuzer
Dekan des Fachbereichs Mathematik

Klaus-Heinrich Peters

Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen

Eine historische Untersuchung über die Grundlagen
der Physik im Grenzbereich zu Mathematik,
Philosphie und Kunst

Der kaum veränderte Text dieser Arbeit erscheint als Buch unter dem Titel „Schönheit, Exaktheit, Wahrheit“ im Verlaufe des Jahres 2004 im GNT-Verlag.

Vorwort

Die Geschichte der Physik ist reich an Beispielen für die intuitiv richtige Verwendung mathematischer Größen, die innerhalb der zeitgenössischen Mathematik noch unverstanden waren oder ihr sogar offen widersprachen. Im Allgemeinen läßt sich aber beobachten, dass sich eine korrekte mathematische Theorie früher oder später einstellt, die den genauen Sinn und Anwendungsbereich der von den Physikern geahnten Rechenregeln festlegt. Während sich in diesem Prozess das Befremden der Mathematiker in ein befriedigendes Verständnis wandelt, so dass sie sich dem nächsten Problem zuwenden können, ergibt sich für den Historiker und Philosophen gerade die Gelegenheit, fragend bei diesem Prozess zu verweilen. Denn in der Phase, wenn physikalische und mathematische Erkenntnis aus dem Takt kommen, enthüllt sich die Grenze und damit auch der innere Zusammenhang von Mathematik und Physik. Die Natur physikalischer Einsicht zeigt sich dort am Deutlichsten, wo sie der Mathematik (wenn auch vorläufig) widersprechen muss; umgekehrt zeigt sich die spezifische Wichtigkeit mathematischer Exaktheit in der Physik gerade im Kontrast von mathematisch-rigorosem und mathematisch-intuitivem Theorieansatz.
Die Geschichte der Distributionen in der Physik bietet einen besonders ergiebigen Rahmen sich diesen Fragen zuzuwenden. Wir finden eine fast 20-jährige Geschichte der mathematischen Unsicherheit von Diracs erster Definition der δ-Funktion bis zu Schwartz' Theorie der Distributionen. In dieser Zeit unterstützt die δ-Funktion maßgeblich den Siegeszug der Quantenmechanik, um später ebenso maßgeblich am zwischenzeitlichen Niedergang der Quantenfeldtheorie mitzuwirken. Dabei zeigt sich das Für und Wider von intuitiver und strenger Mathematik nicht nur ahistorisch im Vergleich von damaligem zu modernem Wissen. Mit von Neumanns Spektraltheorie steht nämlich fast von Anfang an auch eine mathematisch strenge Alternativformulierung der Quantentheorie zur Disposition, die das Problem der δ-Funktion schon im Keime umgeht. Damit entsteht natürlich auch eine historische Diskussion, die für die geschichtlich-philosophische Untersuchung ungemein wichtig ist.

Ich habe in diesem Buch versucht, die Frage nach dem Zusammenhang von Mathematik und Physik durch die Perspektive der Hauptbeteiligten an der Diskussion um die Distributionen zu betrachten. Dabei drängte sich im Laufe der Untersuchung durch Diracs ästhetisch motiviertes Denken auch noch der Bereich des Schönen ins Blickfeld der Arbeit, so dass neben Mathematik, Physik und Geschichte nun auch die Kunst in die Untersuchung einbezogen werden musste. Ich befürchte, dass ich es bei dieser interdisziplinären Bandbreite wohl keinem Spezialisten wirklich recht machen konnte. Andererseits denke ich, dass sich gerade in dieser Breite für jeden etwas Besonderes findet, denn der Weg querfeldein durch alle Disziplinen ergibt oft ganz überraschende Ausblicke.
So zeigt sich, um einige Beispiele zu nennen, in der Auslegung von Diracs Werk die

Möglichkeit eines direkten Bezuges von mathematischer Schönheit und wissenschaftlicher Wahrheit. Zuvor bietet die Interpretation der Mathematik als Medium einen neuartigen begrifflichen Ansatzpunkt der Diskussion um die Rolle der Mathematik in der Physik. Dagegen enthüllt die Diskussion der Arbeiten von Neumanns einen unvorhergesehenen Zusammenhang der axiomatischen Methode mit der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik, die dadurch neue Transparenz und Plausibilität erhält.
Dazu habe ich mich bemüht, in den rein theoriengeschichtlichen Darstellungen der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie sowie der verallgemeinerten Funktionen in der Physik eine brauchbare Einführung auf mittlerem Niveau (sowohl in der Länge als auch im mathematischen Schwierigkeitsbereich) bereitzustellen. Ich gaube, dass die Lektüre dieser Teile für jeden Physikstudenten eine wertvolle Ergänzung zum Verständnis dieser Themengebiete sein kann.

Die vorliegende Arbeit entstand am Hamburger Institut für Geschichte der Naturwissenschaften und wurde im Juni 2003 vom Fachbereich Mathematik angenommen. Dementsprechend geht der erste Dank an meine beiden Betreuer Prof. Gudrun Wolfschmidt vom IGN und Prof. Klaus Fredenhagen vom II. Institut für theoretische Physik, die diese Arbeit ermöglicht und in vielerlei Hinsicht unterstützt haben. Auch das Programm zur Doktorandenförderung der Universität Hamburg hat durch wertvolle Finanzspritzen einen entscheidenden Anteil an der Enstehung der Dissertation gehabt. Klaus Frieler verdanke ich erhellende Diskussionen, die die Arbeit vorangebracht und einige dunkle Punkte geklärt haben. Dem Lesekomitee Dietlind Frieling, Dierk Janssen und Jan-Philip Heymann verdanke ich verschiedene Korrekturen und Anregungen. Danke auch an das Deutsche Museum München für die Benutzung des Archivs, in dem ich wertvolle Quellen einsehen konnte; an Karin Reich und das ganze Team vom IGN für großartige Unterstützung im Arbeitsalltag; an Robert und Francois Huguenin; und all die vielen Kollegen, Bibliothekare, Sekretäre ..., die inhaltlich oder logistisch weitergeholfen haben.
Zum Schluss noch ein besonderes “Danke schön” an Paul Jurij Hempel, Andrea Hempel, Bernd Kensicki, Astrid Kulas, Renate Golletz und meine Eltern.

Hamburg, November 2003 *Klaus-Heinrich Peters*

Inhaltsverzeichnis

Seems like the more I think I know
the more I find I don't

Jello Biafra

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Die Arbeit handelt von dem „Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen". Dieser Titel bestimmt das Thema der vorliegenden Arbeit aber nicht eindeutig und bedarf einer einführenden Erläuterung.

Beginnen wir mit der Bestimmung des Gemeinten am hinteren Ende des Titels. „Distributionen" sind bestimmte mathematische Objekte, die seit dem Ende der 40er Jahre des 20sten Jahrhunderts von Laurent Schwartz (1915-2002) in die Mathematik eingeführt wurden. Grob gesprochen und einen bestimmten Standpunkt wählend, kann man Distributionen als Verallgemeinerung des mathematischen Begriffes der „Funktion" ansehen.
Distributionen traten allerdings schon lange *vor* ihrer expliziten mathematischen Definition in vielen Problemen der Mathematik und Physik auf. Am berühmtesten ist die Diracsche δ-Funktion , die Paul Dirac (1902-1984) 1927 als „uneigentliche" oder „verallgemeinerte" Funktion im Rahmen seiner „Transformationstheorie" in die Physik einführte. Aus der Sicht der damaligen Analysis war die Definition der δ-Funktion allerdings nicht widerspruchsfrei zu bewerkstelligen. Nichtsdestotrotz setzte sie sich trotz Widerstandes der Mathematiker schnell im Formalismus der Physiker fest. Ihr kam in der einheitlichen Formulierung der Prinzipien der Quantenmechanik eine überragende Rolle zu, die sich später in der Entwicklung der Quantenfeldtheorie noch vergrößerte. Ihre mathematische Natur blieb aber bis zur Schwartzschen Theorie ungeklärt.
Die δ-Funktion blieb ob ihres ungeklärten mathematischen Charakters für die der Physik nahestehenden Mathematiker ein Dorn im Auge. Der Mathematiker John von Neumann (1903-1957) entwickelte in bewusster Abgrenzung zu Diracs Formalismus eine mathematisch korrekte Formulierung der Probleme der Quantenmechanik: Die Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum. Die Spektraltheorie von Neumanns argumentiert von vornherein anders als die Diracsche Transformationstheorie, und lässt auf diese Weise erst gar kein Bedürfnis nach der Benutzung der δ-Funktion entstehen. Der Antagonismus zwischen der Diracschen und der von Neumannschen Theorie macht das Zentrum dieser Arbeit aus.

Die „Geschichte der Distributionen" meint daher auch die Geschichte des *impliziten* und unbewussten Gebrauchs von Distributionen. Tatsächlich wird dies nach dem Gesagten sogar die primäre Bedeutung des Geschichtsbegriffes in dieser Arbeit sein.

Der vordere Teil des Titels spricht von dem „Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik". „Zusammenhang" meint nun nicht nur und nicht primär das historische Faktum einer wechselseitigen Befruchtung der Disziplinen „Mathematik" und „Physik", wie sie gerade in der Geschichte der verallgemeinerten Funktionen zu Tage tritt. Vielmehr meint „Zusammenhang" hier den inneren und notwendigen Zusammenhang der beiden Disziplinen, der eine historisch-faktische Wechselwirkung erst ermöglicht. Die Frage nach dem Zusammenhang von Mathematik und Physik ist daher die Frage, *wieso und inwiefern die Physik mathematische Physik ist und sein muss.* Albert Einstein fasste diese Frage so:

> An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so viel beunruhigt hat. Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?
>
> *Einstein am 27.11.1921 vor der Preußischen Akademie der Wissenschaften*[1]

Eugene Wigner beschrieb dieses Rätsel als Wunder:

> The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.
>
> *Eugene Wigner*[2]

Die Frage nach dem Zusammenhang von Mathematik und Physik stellt also gleichzeitig die Frage nach dem Zusammenhang von Geist und Natur, nach der Art und nach der Sicherheit und universellen Gültigkeit der empirischen naturwissenschaftlichen Erkenntnis.
Die Auseinandersetzung mit diesen Grundsatzfragen führt aber schnell ins Bodenlose, und allzuleicht verliert man sich in orientierlungsloser Spekulation. Die verallgemeinerten Funktionen bilden aber einen ersten Fußhalt und Ansatzpunkt, diese Fragen ganz konkret zu stellen. Denn die Geschichte des Gebrauchs der δ-Funktion ist die Geschichte eines zeitweiligen Zusammenbruchs der unbefragten Selbstverständlichkeit in der Beziehung zwischen Mathematik und Physik. Durch diese Bruchstelle fällt nun Licht auf die ansonsten innere Verbindung der beiden Disziplinen. Durch den mathematisch unverstandenen Gebrauch der δ-Funktion und ihrer Verallgemeinerungen konnte sich ein zugespitzter *Gegensatz* zwischen Mathematik und Physik entwickeln. Diracs unbefangener Gebrauch der δ-Funktion zeigt dabei, was für ihn die Mathematik auch im Allgemeinen sei, während die von Neumannsche Ablehnung zeigt, was Mathematik eben nicht sein soll und darf. Die Geschichte der Distributionen bietet daher einen geeigneten Leitfaden, dem inneren Zusammenhang von Mathematik und Physik nachzufragen.

Die Frage nach der Mathematik in der Physik ist für den theoretischen Physiker die Frage nach seiner Existenz. Die Antworten auf existentielle Grundfragen sind aber das, was ein jeder für „selbstverständlich" hält. Der „Zusammenhang von Mathematik und

[1] [Einstein 1956]
[2] zitiert nach [Wigner 1992]

Physik" kann daher durch das Fragen nach dem *Selbstverständnis der theoretischen Physiker* erfragt werden. Genau dies ist die Richtung, den diese Dissertation einschlagen wird. Die grundsätzliche Vorgehensweise wird dadurch bestimmt, dass sich die Untersuchung dem Gebrauch von verallgemeinerten Funktionen bei ausgewählten Personen widmet. Im Kern der Arbeit stehen Dirac, von Neumann und Wolfgang Pauli (1900-1958), ergänzt durch etwas allgemeiner gehaltene Betrachtungen über Werner Heisenberg (1901-1976).
Durch eine ausführliche Auslegung veröffentlichter Arbeiten, ergänzt durch explizite Kommentare in Briefen, Interviews etc, soll versucht werden, den Problemkreis von Mathematik und Physik aus dem Blickwinkel derjenigen zu betrachten, deren überragende Meisterschaft in diesem Gebiet einen besonders guten Zugang zu der Problematik verrät. Es geht hier um die Ermittlung der Grunderfahrung und Einstellung, durch die Dirac, von Neumann und Pauli imstande sind, ihre überragenden Leistungen zu vollbringen.
Diese Betrachtungsweise hat offensichtlich den Vorteil, nicht einfach im luftleeren Raum über Mathematik und Physik zu „philosophieren". Stattdessen sollen Physik und Mathematik an der Stelle aufgesucht werden, wo sie faktisch entstehen: bei den Mathematikern und Physikern. Dabei soll unter diesen nicht der Durchschnitt befragt werden, sondern gerade die Besten, bei denen sich eine besondere Qualität des Standpunktes verrät.
Die Befragung der Praktiker und Meister eines Gebietes scheint die offensichtlich vernünftige Art und Weise, sich dem Gegenstand zu nähern. Dabei hat diese Idee einen entscheidenden Haken: Gerade die Besten wissen, dass sie *nicht* wissen. Die Grunderfahrung des Mathematischen und des Physikalischen, die die Einstellung zu Mathematik und Physik leiten, sind meist unbekannt, da sie der Hintergrund sind, auf dem sich die sachliche Arbeit abzeichnet und zum Vorschein kommt. Es liegt gerade im Wesen des Hintergrundes, sich nicht in den Vordergrund zu drängen und unaufffällig zu sein. Die Herausarbeitung dieses Unaufffälligen ist daher ein oft langwieriger Prozess der Auslegung von verschiedenen Texten der Physiker und Mathematiker im Hinblick auf das sich äußernde Verhältnis von Mathematik und Physik. Die Auslegung rückt das implizit Mitgedachte und Vorrausgesetzte in die Aufmerksamkeit.

Die Expedition in den Grenzbereich von Mathematik und Physik erhält damit einen doppelten Leitfaden: Sachlich in der Theorie der Distributionen, unter Führung und Anleitung durch die besten theoretischen Physiker des betrachteten Zeitabschnittes.

Fügen wir jetzt insgesamt den Gesamttitel „Der Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen" zusammen, so ist also gemeint: Eine historische Untersuchung des prätheoretischen Gebrauches verallgemeinerter Funktionen in der Quantentheorie, um im Selbstverständnis der theoretischen Physiker das Verhältnis von Mathematik und Physik zu beleuchten.

Mit dieser Präzisierung des Themas ist gleichzeitig der historische Rahmen bestimmt: Das Hauptaugenmerk wird auf den 20er und 30er Jahren liegen, in denen die δ-Funktion ihren Siegeszug in der Physik begann, ohne doch schon mathematisch geklärt zu sein. Als physikgeschichtlicher Hintergrund ist gleichzeitig die Periode der Quantenmechanik und der Übergang zur Quantenfeldtheorie festgelegt.

1.2 Methodologie und Gliederung

Methodik

Der „biographischen Methode“ entsprechend habe ich versucht, jeder behandelten Person zunächst aus sich heraus gerecht zu werden. Das bedeutet, dass sich die Richtung, die die Fragestellung konkret einschlägt, jeweils mit den besprochenen Personen wechselt. Jeder Einzelne soll zunächst nach *seinen* Maßstäben beurteilt werden. Da die beteiligten Personen sehr unterschiedlich waren, erhält jedes Kapitel einen ganz eigenen Charakter, Ton und Vorgehensweise. So erhält das Dirac-Kapitel eine Diskussion der mathematischen Schönheit, während man, um von Neumann gerecht zu werden, zunächst die axiomatische Methode besprechen muss. Aus dem gleichen Grunde enthält das Kapitel über von Neumann einige Diagramme, die die hochgeordnete Systematik und starke Kategorisierung des formalistischen Vorgehens widerspiegeln, während so ein Schematismus bei der Behandlung der intuitiv-anschaulichen Argumentation der Physiker von vornherein unangemessen bleibt. Im Großen und Ganzen wollte ich vermeiden, die verschiedenen Standpunkte unter eine vorgefasste Begrifflichkeit zu bringen, um stattdessen eine jeweils dem persönlichen Standpunkt angemessene Begrifflichkeit in jedem Kapitel neu zu finden. Erst im Nachhinein sollen die verschiedenen Standpunkte in eigens dafür vorgesehenen Kapitel in Bezug gesetzt werden.
Ein Grundschema ist aber doch zu erkennen: Ich habe versucht, zunächst die die δ-Funktion besprechenden Arbeiten vorzustellen und einen interpretierenden Teil anzuschließen. Allerdings geht auch dieses Schema nicht ohne Abweichungen durch. Bei von Neumann musste es durch die Betrachtung der axiomatischen Methode unterbrochen werden. Bei Heisenberg habe ich mangels explizit mathematischer Texte aus seiner Feder ganz auf den Disskussionspunkt der δ-Funktion verzichtet. Dafür gibt es von Heisenberg umfangreiche Äußerungen und Reflektionen aus diesem Bereich, die sich daher ganz natürlich und seiner Denkweise angemessen ins Zentrum der Überlegung stellen.

Übersicht über die Arbeit

Jedes der Kapitel, die sich der Darstellung Diracs, von Neumanns, Paulis und Heisenbergs widmen, sollte im Großen und Ganzen in sich rund sein und könnte mit nur geringen Einbußen auch für sich gelesen werden[3]. Die Argumentation ist nicht fortlaufend und setzt mit der Besprechung einer neuen Person in einem neuen Kapitel neu ein. Die verschiedenen Varianten des Zusammenhanges von Mathematik und Physik sollen zuerst eigenständig für sich sprechen. Erst dann sollen diese Varianten thematisch in Bezug gesetzt und verglichen werden. Um diese Auswertung übersichtlicher und pointierter zu machen, möchte ich nur von *drei verschiedenen Varianten des Zusammenhanges von Mathematik und Physik* sprechen:

1. Der Diracschen,

2. der von Neumannschen und

[3]Zumindest für den mathematisch gebildeten Leser, der nicht auf eine stückweise Darstellung der Mathematik angewiesen ist

3. der Pauli-Heisenberg-Bohr Variante.

Letztere ließe sich noch weiter aufschlüsseln, aber für unsere Zwecke liegen Pauli und Heisenberg mit ihrem Lehrer Niels Bohr (1885-1962) in allen prinzipiellen Fragen auf der gleichen Linie.

Die drei vertretenen Ansichten erhellen sich gegenseitig durch interessante wechselseitige Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Die Anordnung der Kapitel müßte also angemessenerweise im Kreis bzw. Dreieck verlaufen, was leider in einem schriftsprachlichen Text nicht möglich ist. Innerhalb der eindimensionalen Abfolge von Kapiteln kann diese mehrdimensionale Struktur nicht ohne Redundanz und ohne Willkür realisiert werden. Sowohl für die gewählte Anordnung als auch für verschiedene Varianten und Gegenteile lassen sich Gründe und Gegengründe angeben.
Ich habe mich für folgende Anordnung entschieden: Ich beginne in Kapitel 5 mit Dirac, da in seiner Arbeit mit der Entwicklung der δ-Funktion der für diese Arbeit leitende Referenzpunkt gesetzt wird. Danach wird in Kapitel 6 von Neumann besprochen, der mit seiner Ablehnung der δ-Funktion in deutlichem Kontrast zu Dirac steht. Die sich ergebenden Gemeinsamkeiten und Unterschiede werden in dem anschließendem Kapitel 7 besprochen. Diese Gemeinsamkeiten und Unterschiede leuchten aber noch nicht den gesamten Raum aus, in dem sich Mathematik und Physik bewegen. Mit der Diskussion der Arbeiten Wolfgang Paulis (Kapitel 8) und Werner Heisenbergs (Kapitel 9) wird der Diskussion eine weitere Dimension hinzugefügt. In Kapitel 10 soll schließlich ein Gesamtüberblick über die verschiedenen Aufffassungen von Mathematik und Physik gegeben werden.
Veranschaulichen kann man sich die Anordnung in einem geometrischen Bild, wenn man sich jeden der drei Standpunkte zunächst wörtlich als Punkt denkt. Nachdem mit Dirac und von Neumann die beiden ersten Punkte gesetzt sind, wird im anschließenden Kapitel „Dirac und von Neumann: Ein Vergleich “ die erste Verbindungslinie gezogen. Pauli und Heisenberg, zusammen als dritter Punkt stilisiert, liegen aber nicht auf dieser Gerade sondern definieren je eine weitere Verbindungslinie zu Dirac bzw. von Neumann. Dadurch entsteht eine weitere Dimension in der Betrachtung. Die wechselseitigen Bezüge dieser Dreiecksgeschichte sollen dann zusammenfassend in einem „Entwurf eines Gesamtbildes“ beleuchtet werden.

Vorgestellt sind der Arbeit die beiden Kapitel 2 und 3, die mit dem physik- und mathematikhistorisichen Kontext unerlässliches Hintergrundwissen präsentieren, welches in der ganzen Arbeit als „Allgemeinbildung“ vorrausgesetzt wird. Das grundlegende mathematische Konzept der δ-Funktion wird auf elementarem Niveau innerhalb dieser Einleitung (Abschnitt 1.3) eingeführt, um unmittelbar Einstieg in die Diskussion zu finden.
Der Hauptteil der Arbeit ist eingefasst von zwei rein historisch referierenden Kapiteln. In Kapitel 4 werden δ-Funktionen und δ-ähnliche Funktionen besprochen, die sich schon vor Dirac unter verschiedensten Namen hier und da als unentbehrlich in der mathematischen Physik entpuppten. Kapitel 11 gibt zum Schluss der Arbeit noch einen Überblick, wie die korrekte mathematische Theorie der Distributionen in der Physik adaptiert wurde.

Mögliche Alternativen bei der Lektüre Auf diese Weise ergibt sich die Option, die Arbeit ausschließlich unter dem Gesichtspunkt der Darstellung der Geschichte der δ-Funktion in der Physik zu lesen, ohne sich um die Auslegung der Arbeiten im Hinblick

auf das Verhältnis von Mathematik und Physik zu kümmern. Dazu würde genügen, nach der Lektüre von Kapitel 4 aus dem Dirac-Kapitel die Abschnitte 5.2 bis 5.5 zu lesen, und dann mit den Abschnitten 6.2.2 und 6.3, die von Neumanns Werk referieren, fortzufahren. Paulis Umgang mit der δ-Funktion wird in den Abschnitten 8.2.1 bis 8.2.3 dargestellt. Kapitel 11 schließt den Kreis und zeigt die ersten Verwendungen der mathematisch korrekten Theorie in der Physik.
Diese Kapitel bilden das Skelett der Arbeit und bieten eine historische Beschreibung, wie, wo und warum die δ-Funktion (bzw. ihre Vor- und Nachfahren) in der Physik gebraucht wurden und wie und wo die Schwartzsche Theorie der Distributionen ihren ersten Widerhall in der Physik fand.

Neben der historischen gibt es auch noch verschiedene thematische Alternativen zur gewählten biographischen Ordnung. So wäre vor allem eine thematische Ordnung anhand des Begriffes der „Mathematik als Medium“ denkbar. Innerhalb der biographischen Ordnung findet sich die Diskussion der Mathematik als Medium auf verschiedene Abschnitte verteilt. Der Begriff des Mediums entsteht aus der Diskussion des Diracschen Ansatzes in Kapitel 5.6.3 und wird in den folgenden Abschnitten weiter ausgebaut. Da Dirac selbst aber über den Begriff des Mediums hinausgeht, wird die Diskussion des Begriffes im Sinne der biographischen Priorität zunächst zugunsten des Begriffes der „Schönheit“ verdrängt. In Kapitel 10.2 werden wir noch einmal auf den Begriff des Mediums zurückkommen, nachdem durch von Neumann, Pauli und Heisenberg nochmals neues Licht auf den Begriff gefallen ist. An dieser Stelle soll der Versuch gemacht werden, das „Medium“ als Leitfaden zur Gesamtschau auf die drei verschiedenen Standpunkte in der Grauzone zwischen Mathematik und Physik zu benutzen.
Bleibt noch anzumerken, dass keine systematische „Philosophie“ der Mathematik angestrebt oder vorrausgesetzt wird. Die verschiedenen auftauchenden Leitbegriffe wie „Medium“, „Abbildung“, oder Diracs „mathematische Qualität in der Natur“ sollen in keine hierarchische Systematik gefasst werden. Die Interpretationen entlang dieser Linien sollen vielmehr die in den Biographien vorgezeichneten Trampelpfade durch das Gebiet freiräumen, um den von Dirac, von Neumann und Pauli begangenen Denkwegen *nachzugehen.* Die Frage, ob die sich ergebenden Kreuzungspunkte dieser Wege ein Koordinatensystem ergeben würden, welches zur Kartographie des Grenzgebietes zwischen Mathematik und Physik und damit zu einer sachlichen Systematik mit klarer begrifflicher Gliederung führen könnte, soll in dieser Arbeit nicht beantwortet werden. Aufgabe hier wird sein, den Weg zu gehen und zu sehen, was hier und dort am Wegesrand gefunden werden kann – jede andere Erwartungshaltung wäre eine unnötige Überlastung des biographischen Ansatzes. Nichtsdestotrotz sollen an den sich abzeichnenden Wegkreuzungen die verschiedenen Richtungen in Bezug gesetzt werden, so dass sich doch immerhin in Kapitel 10 eine Art Gesamtbild der Region ergeben wird.

1.3 Die δ-Funktion und die Theorie der Distributionen

Die δ-Funktion wird heute in den verschiedensten physikalischen Kontexten gebraucht. Am anschaulichsten kommt die grundlegende Idee ihrer Defintion in der Elektrodynamik

zur Geltung. Diese soll daher als physikalisches Beispiel zur Einführung in den mathematischen Problemkreis der δ-Funktion benutzt werden. Dabei wird sich gleichzeitig auch der allgemeinere Begriff der *Distribution* ergeben.
Betrachtet werde zunächst eine kontinuierliche Ladungsverteilung. Die Ladungs*dichte* ρ im Raumpunkte x wird festgestellt durch eine Funktion $\rho(x)$. Die Funktion ρ ordnet jeder rellen Zahl x, die den betrachteten Raumpunkt bestimmt, eine andere relle Zahl $\rho(x)$ zu, die die Größe der Ladungsdichte an eben diesem Punkt angibt. Bezeichnet man die Menge der reellen Zahlen mit $\mathcal{R}$, so schreibt man dafür

$$\begin{aligned}\rho : \mathcal{R} &\to \mathcal{R}\\ x &\mapsto \rho(x)\end{aligned}$$

Die genaue Art und Weise der Zuordnung bleibt hier zunächst unbestimmt.
Die Gesamtladung e innerhalb eines Volumens V wird dann errechnet als das Integral $\int_V \rho(x)\, dx$.
Was passiert nun, wenn man *Punkt*ladungen betrachten will? Wie kommt man von der Darstellung von kontinuierlichen Verteilungen zurück zum diskreten Fall? Kann der diskrete Fall als Spezialfall in den kontinuierlichen eingebettet werden?
Die naheliegende Idee besteht nun darin, die Gesamtladung innerhalb von V immer weiter zusammenzuschieben und so die Funktion immer weiter zu lokalisieren. Die Dichte wird im Zentrum der Verteilung vergrößert, während die Gesamtladung $\int_V \rho(x)\, dx$ konstant gehalten wird. Betrachten wir zum Beispiel die Funktion

$$\begin{aligned}\rho_n : \mathcal{R} &\to \mathcal{R}\\ x &\mapsto \rho_n(x) := ne^{-\pi n^2 x^2} \qquad \text{(siehe Abb. 1.1)} \quad .\end{aligned}$$

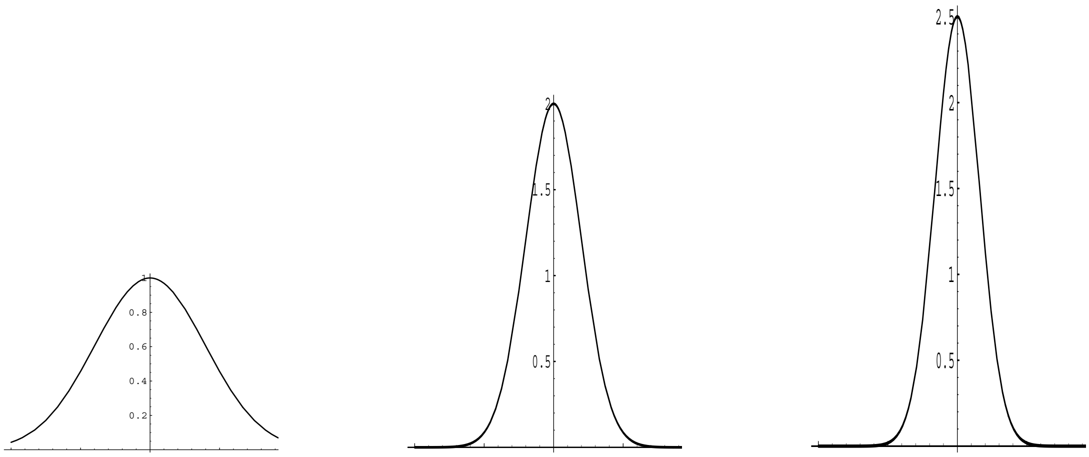

Abbildung 1.1: Die Funktionen $\rho_n(x)$ für $n = 1, 2$ und $2\frac{1}{2}$

Diese Gaußfunktion hat für je festes n am Ursprung ein Maximum und fällt zu beiden Seiten symmetrisch ab; das Integral über den ganzen Raum ergibt für beliebiges n eins. Der Index n deutet an, dass hier eine ganze Familie von Gaußfunktionen definiert ist, deren einzelne Mitglieder sich nur durch den konstanten Wert von n unterscheiden.
Die Idee des Zusammenziehens der Ladung im Ursprung kann also mathematisch beschrieben werden durch die *Folge* von Funktionen $\rho_n(x)$ mit $n = 1, 2, \ldots$. Für steigendes

n wird das Maximum von ρ immer ausgeprägter, während die Gesamtladung, also das Integral über ρ, konstant bleibt. Im Grenzfalle $\lim_{n\to\infty}$ würde, wie anschaulich klar ist, die gesamte Ladung am Ursprung konzentriert sein und die Ladungsdichte damit unendlich groß werden müssen. Es scheint also, dass die Funktion $\delta(x) := \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)$ die gewünschten Eigenschaften

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \tag{1.1}$$

$$\text{und} \quad \int \delta(x)\, dx = 1 \tag{1.2}$$

besitzt und eine Punktladung der Größe eins am Ursprung beschreibt. Die wichtigste rechnerische Eigenschaft dieser Konstruktion ist

$$\int f(x)\delta(x)\, dx = f(0) \tag{1.3}$$

für eine (einigermaßen) beliebige Funktion f, oder allgemeiner

$$\int f(x)\delta(x-a)\, dx = f(a) \quad , \tag{1.4}$$

wenn die δ-Funktion nicht am Ursprung sondern an der Stelle $x = a$ sitzt.[4]
Man kann sich die Gültigkeit von (1.3) ebenfalls an Bild 1.1 klarmachen. Alle Funktionswerte von f außerhalb des Ursprungs werden bei der Bildung des Produktes $f \cdot \delta$ mit 0 multipliziert und vernichtet, so dass nur der Wert $f(0)$ sozusagen als Faktor vor der δ-Funktion einen Beitrag liefert, woraus sich mit (1.2) dann (1.3) ergibt.
Es ist bisher bewusst anschaulich und heuristisch argumentiert worden, und dabei wurden einige feinere Unterscheidungen, die für die mathematische Präzision wichtig sind, völlig außer acht gelassen. Schaut man schärfer auf die benutzten Argumente, so fallen einige Unklarheiten auf, die nun beleuchtet werden sollen. Es ist in der bisherigen Argumentation nicht genau genug unterschieden, was eigentlich mit dem Grenzwert gemeint sein soll, wie,wann und wo er denn durchgeführt wird. Tatsächlich ergibt sich Teil (1.2) der Definition aus einer Betrachtung des Grenzwertes der *Integrale* $\lim_{n\to\infty} \int \rho_n(x)\, dx$. Dieser ist sicherlich gleich eins, denn da das Integral für jedes n gleichbleibend 1 ergibt, erhalten wir die konstante Folge $1, 1, 1, ...$ und deren Grenzwert ist trivialerweise ebenfalls eins. Der erste Teil der Definition (1.1) ergibt sich dagegen aus einer Betrachtung des Grenzwertes der Folge von *Funktionen* ρ_n, die auf immer kleinerem Gebiete von null verschieden sind. Damit kann präzise nach der *Kompatibiltät* von (1.1) und (1.2) gefragt werden:

$$\lim_{n\to\infty} \int \rho_n(x)\, dx \stackrel{?}{=} \int \lim_{n\to\infty} \rho_n(x)\, dx \tag{1.5}$$

Ist also die Integration mit der Grenzwertbildung vertauschbar oder nicht? Es ist a priori mathematisch unklar, ob der Grenzwert der Folge der Integrale den gleichen Wert hat, wie das Integral über den Grenzwert. Der gesunde Menschenverstand neigt beim ersten Hinblick sicherlich spontan zu der etwa von Oliver Heaviside (1850-1925) vertretenen Meinung, dass das, was *bis* zur Grenze gültig ist auch *an* der Grenze gültig bleibt.

[4]Diese Eigenschaft ist so signifikant, dass man sie auch an Stelle von (1.1),(1.2) als Definition der δ-Funktion benutzen könnte.

Aber schon en einfaches Argument zeigt, dass dieses hier *nicht* der Fall ist. Denn während die linke Seite von (1.5) wie gezeigt 1 ergibt, so können wir die rechte Seite für sich berechnen, und erhalten ein ganz anderes Ergebnis. Denn die Funktion δ ist überall außer am Ursprung null. Aber das Integral[5] einer Funktion, die fast überall (also überall, außer an endlich vielen Ausnahmepunkten) verschwindet, ist weiterhin identisch null. Allgemeiner gilt: Wird eine beliebige Funktion f an endlich vielen diskreten Stellen geändert, und heiße diese neue Funktion g, so gilt immer $\int f dx = \int g dx$. Die rechte Seite ergibt also null, und es wird deutlich, dass in diesem Falle Integration und Limesbildung nicht vertauschbar sind.
Mathematisch gilt für diese Fälle der Begriff der *gleichmäßigen Konvergenz*. Wenn eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert, so gilt immer: Aus

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx = \int f(x)\, dx \quad .$$

Die oben definierte Folge $\rho_n(x)$ konvergiert damit nur in einem allgemeineren Sinne („punktweise“) gegen die Funktion $\delta(x)$.
Betrachtet man aus diesem Winkel noch einmal die Gleichung (1.5), so wird klar, dass die Existenz eines Objektes mit den Eigenschaften (1.1) *und* (1.2) bedeuten würde, dass null manchmal gleich eins werden könnte. Und dies ist trotz seiner Anschaulichkeit natürlich eine mathematische Zumutung.

Theorie der Distributionen Weil die δ-Funktion innerhalb der damaligen Analysis keine „ordentliche“ Funktion sein konnte, wurde sie auch „uneigentliche“ (engl: improper) Funktion genannt. Die Tatsache, dass der damaligen Funktionsbegriff dabei als zu eng empfunden wurde, spiegelt sich in der Benennung als „verallgemeinerte Funktion“ wider. Denn im Gegensatz zu der Definition einer einfachen Funktion, die gegeben ist durch die Angabe der Funktionswerte f für alle Werte von x, brauchen wir zur Darstellung der δ-Funktion *zwei* unterschiedliche Betrachtungsweisen gleichzeitig: Erstens die Angabe der Funktionswerte für den gesamten Bereich, mit Ausnahme der singulären Stelle (1.1), und zeitens die genaue Beschreibung der Art der Singularität von hinten herum durch Angabe des Wertes des Integrals (1.2). Diese mehrschichtige Definition kann als eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs verstanden werden, die *nichtlokale* Elemente in den Funktionsbegriff einführt, denn das Verhalten von $\delta(x)$ an der Stelle $x = 0$ wird durch eine globale Eigenschaft der Funktion, nämlich das Integral über den ganzen Wertebereich, ausgedrückt.
Da die beiden Teilstücke (1.1) und (1.2) der Definition unterschiedliche mathematische Ebenen behandeln, bleibt allerdings unklar, wieso und inwiefern sich beide Stücke zu einer Definition eines eindeutigen Objektes ergänzen können.

[5] im Lebesgueschen Sinne; auf die Möglichkeit der Zugrundelegung eines allgemeineren Integralbegriffes kann hier nicht eingegangen werden

Die begrifflich scharfe Fassung dieses Problemkreises gelingt, wenn man sich von der Definition (1.1)(1.2) zunächst verabschiedet, und die spezielle Eigenschaft (1.3) der δ-Funktion zum Ausgangspunkt der Überlegungen macht. Die Formel $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$ beinhaltet offenbar die Regel, eine Funktion f durch ihren Wert am Ursprung zu ersetzen. Wenn diese Regel als primärer Gehalt des δ-Symbols betrachtet wird, anstatt an der Vorstellung von „Funktion" und „Integral" kleben zu bleiben, so erhält man einen anderen mathematischen Charakter des Problems. Der mathematische Kern dieser Regel besteht offensichtlich in einer Zuordnung einer Funktion zu einem ihrer Werte. Bezeichnet man die Menge aller Funktionen f mit $\mathcal{S}$ und die reellen Zahlen wie üblich mit $\mathcal{R}$, so ergibt sich eine Abbildung $\mathcal{S} \to \mathcal{R}$. Diese Abbildungen heißen *Funktionale.* Zum Beispiel ist das Integral ein Funktional, denn dieses ordnet jeder Funktion eine reelle Zahl zu, die anschaulich als Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion gedeutet werden kann. Das Integral ist sogar ein *lineares* Funktional. Das bedeutet, dass die Summe zweier Funktionen $f + g$ der Summe der jeweiligen Integrale zugeordnet wird, also $\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx$.
Die Gleichung (1.3) zeigt dann, dass man die δ-Funktion als lineares Funktional auffassen kann, nämlich als

$$\begin{aligned} \delta : \mathcal{S} &\to \mathcal{R} \\ f &\mapsto \delta(f) := f(0) \quad . \end{aligned} \tag{1.6}$$

Durch diese Gleichung ist der eigentliche Gehalt von (1.3) eingefangen, ohne Referenz auf eine punktweise Definition von δ als Funktion.
Nun können zwar die meisten denkbaren Funktionale über der Menge $\mathcal{S}$ als Integrale über Funktionen aus $\mathcal{S}$ dargestellt werden, aber eben nicht alle. Das δ-Symbol ist ein Beispiel für ein Funktional, bei dem sich (1.6) *nicht* durch ein Integral darstellen läßt, obwohl mit (1.3) *fast* eine solche gelungen wäre. Da eine Integraldarstellung in praktischen Rechnungen aber viele Vorteile liefert, ist die *bloß symbolische Schreibweise* (1.3) für (1.6) aber weiterhin sinnvoll und üblich.

Lineare stetige Funktionale über bestimmten Funktionenräumen („Testfunktionen") heißen *Distributionen.* Obwohl Distributionen als Funktionale einen anderen Charakter als Funktionen haben, lassen sich Distributionen dennoch als Verallgemeinerung des Funktionenbegriffs ansehen. Denn die Menge aller Funktionen kann in die Menge der Distributionen eingebettet werden, da jede Funktion g eindeutig ein Funktional I_g bestimmt durch

$$\begin{aligned} I_g : \mathcal{S} &\to \mathcal{R} \\ f &\mapsto I_g(f) := \int g(x) f(x) dx \quad . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Die Funktion $g(x)$ heißt dabei der Integralkern der Distribution I_g.
Die Menge der Distributionen ist also wesentlich größer als die Menge der Funktionen; echte Funktionen können via (1.7) eindeutig einen Distributionssinn erhalten. Damit ist die Bezeichnung „verallgemeinerte" Funktionen verifiziert.
Werden Funktionen im Distributionssinne verstanden, so werden wie bei der δ-Funktion die Singularitäten der Funktionen in mathematisch präzisem Sinne handhabbar. Durch die sogenannte „Verschmierung mit Testfunktionen" (1.7) werden die besonders gutartigen Eigenschaften der Testfunktionen f teilweise auf die beliebig schwierigen Funktionen

g übertragen.
Distributionen sind dabei nicht mehr punktweise definiert, haben also nicht mehr für jeden Punkt x einen festgelegten Wert. Eine Lokalisierung im Raume wird bestenfalls noch von der Ausdehnung der Testfunktion f gewährleistet. Allerdings kann man Distributionen oft via (1.7) zumindest streckenweise durch ihre Integralkerne darstellen. Im Beispiel (1.7) kann I_g definitionsgemäß sogar vollständig durch die Funktion g als Kern beschrieben werden. Die δ-Funktion (1.6) ist unter Ausschluß der singulären Stelle $x = 0$ mit der Funktion (1.1) darstellbar. Dies ist der eigentliche Sinn der ursprünglichen Definition (1.1), die nun „im Distributionssinne“ eine präzise Bedeutung erhält.
Distributionen haben einige bequeme Eigenschaften. So sind sie zum Beispiel beliebig oft differenzierbar. Andererseits wird diese Eigenschaft mit dem Mangel erkauft, dass man im Allgemeinen kein eindeutiges Produkt von zwei Distributionen definieren kann. Eine Analogie zu Funktionen, bei den man $f \cdot g$ durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ definieren kann, existiert hier nicht so ohne weiteres. Das Problem der Unendlichkeiten in der Quantenfeldtheorie hängt eng mit diesem Problem der Produktbildung zusammen.

Kapitel 2

Der physikgeschichtliche Kontext

2.1 Tabellarische Übersicht

Wie man der Übersicht (Abbildung 2.1) entnehmen kann, soll diese Einleitung die allgemeine Entwicklung von der Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie von 1925 bis Ende der 40er Jahre behandeln. Die Entwicklung lässt sich *sachlich* in drei Gebiete teilen[1]. Die Übersetzung der klassischen Theorien in ihre quantisierten Versionen gelang zuerst mit der Punktmechanik, also der nichtrelativischen Theorie des räumlichen Bewegungszusammenhangs von Massenpunkten. Hier wurde von Heisenberg und Schrödinger eine Lawine losgetreten, so dass innerhalb von zwei Jahren der konzeptionelle Unterbau der neuen Theorie mehr oder weniger gefunden und anerkannt war. Mit Beginn der dreißiger Jahre hatte die Quantenmechanik mit Erscheinen der Bücher von Dirac, von Neumann und des Handbuchartikels von Pauli den Charakter einer systematisch aufgebauten und durchgehend strukturierten Theorie erhalten.
Die Rubrik „relativistische Quantenmechanik" bezieht sich zunächst auf die Versuche, die Theorie auf Bereiche auszudehnen, in denen Effekte der speziellen Relativitätstheorie eine Rolle spielen. Hier hatte Dirac 1928 mit der Aufstellung der nach ihm benannten Gleichung den ersten Durchbruch erzielt. Die Interpretation dieser Gleichung im Sinne der Löchertheorie und die daraus entspringenden Versuche der Berechnung von physikalischen Effekten ist der weitere Inhalt dieser Rubrik. Dem Geiste nach gehört auch Feynmans Ansatz in dieses Feld, da er von einer Teilchenvorstellung ausgeht.
Der Bereich „Quantenfeldtheorie" enthält die wichtigsten Etappen bei dem Versuch, die Prinzipien der Quantenmechanik von Teilchen zu einer Quantentheorie der Felder zu verallgemeinern. Der entscheidende methodische Unterschied zu den löchertheoretischen Ansätzen besteht hier seit Jordans Arbeiten darin, dass nicht nur das elektromagnetische Feld nach den Prinzipien der Quantenmechanik behandelt (also „quantisiert) werden sollte (das ist naheliegend, auch in der Löcherteorie), sondern auch die Wellen der Schrödinger und Dirac- Gleichung genau der gleichen Prozedur wie das elektromagnetische Feld unterworfen werden sollen. Sie werden so gewissermaßen zum zweiten Male quantisiert, und daher sind heute für den mathematischen Praktiker die Begriffe „Feldquantisierung" und „zweite Quantisierung" synonym.
Wissenschaftstheoretisch lassen sich zwei unterschiedliche Perioden ausmachen: Wir beginnen in der Phase einer großen Umwälzung der Physik, die ich mit T.S. Kuhn eine

[1] diese Idee stammt meines Wissens von Schweber, siehe [Schweber1994]

	Quantenmechanik	relativistische QM	Quantenfeldtheorie
1949			*Dyson*: Störungsreihe und S-Matrix
1948		*Feynman*: Propagatortheorie und Feynmandiagramme	*Schwinger*: Renormierung
1947			*Tomonaga*: Renormierung
⋮		⋮ (*Stückelberg*: Renormierung)	⋮ (*Heisenberg*: S-Matrix)
1940			⋮
⋮	—	⋮	Rechenversuche: *Weisskopf, Bethe* *und Oppenheimer* ⋮
1933	*Pauli*: Handbuchartikel		
1932	*von Neumann*: Math. Grundlagen der QM		
1931		*Dirac*: Anti-Elektron	
1930	*Dirac*: Principles of Quantum Mechanics	*Dirac*: Löchertheorie	
1929			*Heisenberg, Pauli*: Quantenfeldtheorie
1928		*Dirac*: Dirac-Gleichung	*Jordan* (mit *Klein, Wigner, Pauli*): 2. Quantelung *Dirac*: Strahlungstheorie
1927	Kopenhagener Deutung *Heisenberg*: Unschärfe		
1926	*Dirac*: Transformationstheorie *Schrödinger*: Wellenmechanik	*Klein, Gordon und Weitere*: skalare Wellengleichung *Schrödinger*: Versuche	
1925	*Dirac*: Q-Zahlen *Born, Jordan*: Matrizen *Heisenberg*: Durchbruch		

Abbildung 2.1: Zeittafel zur Entwicklung von Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie

„wissenschaftliche Revolution" nennen möchte[2]. Nach Etablierung der neuen Begriffe und der allgemeinen Akzeptanz derselben befand sich die relativistische Theorie schon aber bald wieder in der Krise, da der Formalismus unsinnige Ergebnisse ergab. Die Krise der relativistischen Quantenmechanik und -feldtheorie spitzte sich in den dreißiger Jahren immer weiter zu, führte aber *nicht* wie in den zwanzigern zu einer neuen revolutionären Umwandlung in den Konzepten der Physik. Stattdessen wurde diese Krise durch rechentechnische Verbesserungen und plausible Kompromisse innerhalb der bekannten Theorien beigelegt. Diese Kompromisse sind Inhalt der Renormierungstheorie.
Wissenschaftskulturell erleben wir hier den Wechsel vom europäischen Kontinent nach Nordamerika. Bis zum Beginn der dreißiger Jahre gingen alle Impulse, die die Theorie voran brachten entweder von Dirac in England oder vom deutschsprachigen Raum aus. Entsprechend sind die meisten Veröffentlichungen in deutsch erschienen. Oppenheimer aus den USA, Landau aus der UdSSR und Tomonaga in Japan hatten alle bei Bohr, Heisenberg oder Pauli gelernt oder mit ihnen gearbeitet.
Nach dem Krieg waren die USA mit einem Schlage auch in der Wissenschaft der Dreh- und Angelpunkt. Alle wichtigen Veröffentlichungen erschienen in amerikanischen Zeitschriften und in englischer Sprache. Plötzlich waren es die Europäer[3], die sich bemühen mussten, nicht den Anschluss an das zu verlieren, was in den Vereinigen Staaten vor sich ging.

2.2 Quantenmechanik

Heisenberg, Born, Jordan: Matrizenmechanik

25 Jahre nach Plancks Einführung des Wirkungsquantums gelingt Heisenberg in seiner Arbeit *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*[4] endlich der Durchbruch zu einer echten Quantentheorie. Während in den Jahren vorher durch geschicktes Raten unter Benutzung des Korrespondenzprinzips immer mehr Phänomene formelmäßig eingefangen werden konnten, zeigt sich hier erstmals ein grundlegendes neues Prinzip, auf dem die ganze Physik aufgebaut werden kann.

Er formuliert dort den philosophischen Leitfaden, dass nur observable Größen in einer physikalischen Theorie zu benutzen seien. Da nicht die Bahnen selbst eines Elektrons im Atom beobachtet werden, sondern nur *spektroskopische* Daten zur Verfügung stehen, die als Übergänge zwischen verschiedenen stationären Zuständen klassifiziert werden können, sollte sich die quantentheoretische Beschreibung darauf konzentrieren, diese Übergänge zu verknüpfen. Die Menge der Übergänge zwischen je zwei Zuständen n und m wird natürlicherweise in einer quadratischen Tabelle der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

[2] [Kuhn76]
[3] genauer „die in Europa verbliebenen"
[4] [Heisenberg 1925a]

angegeben.[5] Die Einträge a_{nm} an der (n, m)ten Stelle von $\mathbf{A}$ sind dabei Zahlen, die ein Maß für die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs von m nach n sein sollen.

Gemäß des „philosophischen“ Prinzips, soll nun dieses quadratische Schema selbst die klassische Größe „Elektronenbahn“ ersetzen.
Dieses ist der revolutionäre Schritt weg von den philosophischen Grundauffassungen der klassischen Physik. Die Bahn $q(t)$ des Teilchens, die zu jedem Zeitpunkt t den Ort q des Elektrons angibt, soll nicht länger das Grundphänomen der Physik sein, aus dem alle anderen Daten, also insbesondere die spektroskopischen Beobachtungen erklärt werden können. Die tatsächlich observabeln Größen sollen die fundamentalen Bausteine einer Theorie sein und von dieser verknüpft werden, ohne Beziehung auf ideelle und unbeobachtbare Variable wie „Ort“ und „Bahn“. Damit ist der ganzen Art und Weise, die Welt durch „Modelle“ erklären zu wollen auf einmal das Wasser abgegraben. Das Konzept einer beobachterunabhängigen Realität, die die Physik auffinden soll, wird nun relativiert. Bohr beschrieb dies später so:

> Es ist falsch zu glauben, dass es die Aufgabe der Physik sei, herauszufinden, wie die Natur beschaffen ist. Die Physik befasst sich nur damit, was wir über die Natur sagen können.
>
> *N. Bohr*, zitiert nach *[Gleick 1993]S.352*[6]

Doch wie soll eine Tabelle eine dynamische Variable repräsentieren? Wie soll mit einem „quadratischen Schema“ gerechnet werden?
In *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*[7] sucht Heisenberg die Rechenregeln, denen die quantenmechanische Größen gehorchen. Dabei argumentiert er übrigens nicht explizit mit den eben dargestellten quadratischen Tabellen, sondern kombiniert freihändig (also ohne die vorgestellte Anordnung in einer Liste) die Übergangsamplituden a_{nm}.

> „Gesetzt den Fall, eine Variable $x(t)$ werde quantentheoretisch dargestellt durch die Gesamtheit der a_{nm}: „Wodurch wird die Größe $x(t)^2$ repräsentiert?“
>
> *[Heisenberg 1925a]*

Durch Kombinieren und Probieren findet er ein Multiplikationsgesetz für diese physikalischen Größen und kann ein erstes einfaches Beispiel durchrechnen.
Dieses Multiplikationsgesetz besitzt allerdings einen sehr merkwürdigen Charakterzug: Seien X, Y physikalische Größen, so ist das Produkt XY nicht mehr wie bei gewöhnlichen Zahlen gleich dem Produkt YX, oder $XY - YX \neq 0$. Die Multiplikation haǧt also von der Reihenfolge der Faktoren ab.

> Während klassisch $x(t) \cdot y(t)$ stets gleich $y(t)x(t)$ wird, braucht dies in der Quantentheorie im Allgemeinen nicht der Fall zu sein. In speziellen Fällen, z.B. bei der Bildung $x(t)x(t)^2$ tritt diese Schwierigkeit nicht auf.
>
> *[Heisenberg 1925a]*

[5] Diese Art der historischen Problemdarstellung stammt aus [Dirac 1978], S.4f
[6] Dieser hat das Zitat aus [Gregory 1988]
[7] [Heisenberg 1925a]

Aus diesem Grunde beschäftigt sich Heisenberg vorerst nur mit diesen speziellen Fällen. Max Born (1882-1970) und Pascual Jordan (1902-1980) gelang es aber bald[8], den Charakter dieser merkwürdigen Rechenregeln auf schon bekannte mathematische Objekte zurückzuführen:

> Die mathematische Grundlage der Heisenbergschen Betrachtung ist das Multiplikationsgesetz der quantentheoretischen Größen [...]. Die Ausgestaltung seines Formalismus [...] beruht auf der Bemerkung, dass diese Regel nichts ist, als das den Mathematikern wohlbekannte Gesetz der Multiplikation von Matrizen.
>
> *[Born und Jordan 1925]*

Damit konnte der Quantentheorie mit einem Schlage ein schon bekannter Formalismus zur Verfügung gestellt werden. Dabei heißt „bekannt" zunächst nur: „den Mathematikern bekannt". In Physikerkreisen hatte bis dahin kaum jemand, Heisenberg eingeschlossen, von Matrizen gehört. Allein Born hatte in früheren Jahren mit Matrizen Kontakt gehabt. Die Abstraktheit und Neuigkeit dieser mathematischen Objekte erklärt einen Teil des Widerwillens, den die meisten Physiker gegenüber der Matrizenmechanik verspürten.

Die Matrizenmechanik wurde durch die Arbeit von Born und Jordan und die anschließende „Dreimännerarbeit"[9] zusammen mit Heisenberg zu einer geschlossenen Theorie der stationären (periodischen) Vorgänge ausgebaut und an einer Reihe von einfachen Beispielen durchgerechnet. Pauli gelang im Oktober 1926 mit der Berechnung des Wasserstoffatoms zum erstenmal die Anwendung der neuen Theorie auf ein real existierendes physikalisches System, und erzielte exzellente Übereinstimmung mit den experimentellen spektroskopischen Daten.

Dirac: The Fundamental Equations of Quantum Mechanics

Ungefähr gleichzeitig mit Born und Jordan entwickelte Dirac ausgehend von Heisenbergs Ideen seine Version einer Quantenmechanik.
Heisenberg an Pauli im November 1925:

> [...] da fällt mir noch ein: bei Fowler hat ein Engländer Dirac das mathematische zu meiner Arbeit (also im wesenlichen dasselbe, wie in Teil I Born-Jordan) unabhängig noch einmal gemacht. Born und Jordan werden da wohl ein wenig traurig sein, aber immerhin haben sie's zuerst gemacht und man sieht doch jetzt, dass die Theorie wohl richtig ist.
>
> [Pauli 1979], I., S.266

In seiner Arbeit *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*[10] beschreibt er den Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik :

> In a recent paper Heisenberg puts forward a new theory, which suggests that it is not the equations of clasical mechanics that are in any way at fault, but that the mathematical operations by wich physical results are deduced from them require

[8] [Born und Jordan 1925]
[9] [Born, Jordan, Heisenberg 1926]
[10] [Dirac 1925]

> modification. *All* the information supplied by the classical theory can thus be made use of in the new theory.
>
> [Dirac 1925]

Es sind also nicht die *Gleichungen* der klassischen Mechanik, sondern die mathematischen Methoden, mit denen man physikalische Ergebnisse aus diesen Gleichungen gewinnt, die aus der gewöhnlichen Mechanik eine Quantenmechanik machen. Dirac spielt damit auf die Tatsache an, dass die klassischen Poissonklammern und die Kommutatoren den gleichen Rechenregeln genügen.

Es braucht nicht im Einzelnen inhaltlich auf die Arbeit eingegangen zu werden, da sie mehr oder weniger das Gleiche aussagt wie der Born-Jordan-Heisenberg-Artikel. Stattdessen kann an dieser Stelle schon zur Einstimmung auf die Diskussion von Diracs Arbeitsweise in Kapitel 5 auf die charakteristischen stilistischen Unterschiede zum Born-Jordan-Papier hingewiesen werden. Born löst das Problem durch die Einbettung von Heisenbergs Ansatz in bekannte Mathematik. Bei Born gibt es einerseits die quantentheoretischen Größen und andererseits Matrizen, wobei erstere mit letzteren identifiziert werden können. Es ist, als würden verschiedene Schablonen übereinandergelegt (die quantentheoretischen Schemata und die Matrizenrechnung), um dann festzustellen, dass sie in allen Nuancen übereinstimmen.
Dirac dagegen schaut, was die quantentheoretischen Variablen fordern, und bastelt sich die entsprechende Algebra freihändig selber zusammen. Ausgehend von der Nichtvertauschbarkeit der Observablen stellt Dirac Stück für Stück die Rechenregeln selbst zusammen. Man hat bei Dirac nie das Gefühl, es gebe da Mathematik, die „auf die Physik angewendet wird", sondern merkt gleich, dass diese algebraischen Regeln aus der Physik kommen. *Hier wird nicht Mathematik auf Physik „angewendet", sondern hier kommt die Physik selbst, als Mathematische zu Wort.* Daraus erwächst die größere Allgemeinheit des Diracschen Ansatzes, was ich kurz an der weiteren Entwicklung illustrieren möchte: Borns Matrizen sind eben nur ein *Beispiel* für mathematische Objekte, die dem erwähnten Multiplikationsgesetz gehorchen. Es gibt also noch andere mathematische „Schablonen", die auf die Quantentheorie passen, wie zum Beispiel Schrödingers Ansatz. Heute spricht man von verschiedenen Darstellungen der Algebra. Da Dirac es von Anfang an (mehr oder weniger explizit) auf die Algebra der quantentheoretischen Größen selbst, und nicht auf eine spezielle Darstellungen abgesehen hatte, (er spricht lieber von q-Zahlen als von Operatoren oder Matrizen) war er auch wie kein Zweiter geeignet, später die Äquivalenz von dem matrizenmechanischen und dem nun zu schildernden, völlig anders erscheinendem wellenmechanischen Ansatz zu zeigen.

Schrödinger: Wellenmechanik (Undulationsmechanik)

Erwin Schrödinger (1887-1961) entwickelte seine Wellenmechanik in einer Reihe von Arbeiten einerseits in Anlehnung an die Theorie der Materiewellen von L. de Broglie, andererseits in bewusster Abgrenzung zu Heisenbergs Matrizenmechanik. Schrödinger spitzt den Unterschied zwischen seinem eigenen Ansatz und dem Heisenbergschen folgendermaßen zu:

> Die Autoren selbst [also Heisenberg, Born und Jordan] bezeichnen die Theorie als 'wahre Diskontinuumstheorie'. Die Undulationsmechanik hingegen bedeutet gerade

Abbildung 2.2: Nobelpreisgewinner 1932/33 im Dezember 1933 in Stockholm. Von links nach rechts: Heisenbergs Mutter, Diracs Mutter, Schrödingers Frau, Dirac, Heisenberg, Schrödinger (©AIP).

> umgekehrt von der klassischen Mechanik aus einen Schritt *auf die Kontinuumstheorie zu.* Tritt doch an die Stelle des durch endlich viele dependente Variable [...] beschreibbaren Geschehens ein kontinuierliches *feldmäßiges* Geschehen im Konfigurationsraum [...].
>
> *[Schrödinger 1926c]*

Schrödinger ringt in seinen vier Mitteilungen *Quantisierung als Eigenwertproblem*[11] von 1926 mit verschiedensten Herleitungen und Deutungen seiner Wellenfunktion und ihrer Differentialgleichung. Es ist schon kurios wie Schrödinger in der ersten Mitteilung die heute als „Schrödingergleichung im Zentralpotential“ bezeichnete Differentialgleichung aus dem Hut zaubert, das Wasserstoffatom lehrbuchartig ausrechnet, um erst in der zweiten Mitteilung eine halbwegs verständliche Begründung der stationären Schrödingergleichung zu geben. Er selbst nennt seine erste Herleitung in der zweiten Mitteilung „unverständlich“ und weist extra daraufhin, dass man die erste Mitteilung nicht vor der zweitens gelesen haben müsse.
Sein leitendes Prinzip ist (in der zweiten Mitteilung) folgende Analogie: Die Quantentheorie verhält sich zur klassischen Mechanik wie die Wellenoptik zur Strahlenoptik. Und genauso, wie bei entsprechenden Größenordnungen Beugungserscheinungen auftreten, die mit der Strahlenoptik völlig unerklärlich sind, so soll eine Wellenmechanik der klassi-

[11] [Schrödinger 1926a] bis [Schrödinger 1926e]

schen Punktmechanik untergelegt werden, um die unverständlichen Quantenphänomene erklärbar zu machen. Es ist also erklärtes Ziel, den Massen*punkt* der klassischen Mechanik durch die Materiewelle zur ersetzen, und so die Quantentheorie zu begründen.

Aus dieser Idee gewinnt er das Gesetz der Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Energie, und postuliert eine damit kompatible Wellengleichung, z.B.:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\Psi(x) = 0$$

mit

$$E = h\nu \quad .$$

Aber auch dieser zweite Versuch der Herleitung der Schrödingergleichung bleibt etwas dunkel. Man wird hier Zeuge wie Schrödinger händeringend mit allerlei Erklärungen versucht, seine brilliante physikalische Eingebung seinen Mitmenschen plausibel zu machen.

Diese mehr oder minder erratene Gleichung ist heutzutage als stationäre Schrödingergleichung bekannt; die Frage nach der allgemeinen Zeitabhängigkeit blieb in den ersten Mitteilungen ausgeklammert. Damit konnten aber schon die wichtigsten mechanischen Systeme zu berechnet werden, also die Energieniveaus des Keplerproblems, der harmonische Oszillator etc. Interessant ist vor allem, wie sich in Schrödingers Theorie, die ja ganz darauf angelegt ist, das Kontinuum zu betonen, die diskreten Energieniveaus a posteriori durch die Rechnung ergeben. Denn setzt man in die Schrödingergleichung für V das Coulombpotential ein, so bekommt man eine Differentialgleichung. Diese ist aber nur dann *eindeutig* lösbar und diese Lösungen bleiben nur dann *überall endlich*, wenn eine bestimmte Kombination von Konstanten *ganzzahlige* Werte annimmt. Sammelt man diese zusammen, so ergeben sich *rein mathematisch* die Bohrschen diskreten Energieniveaus

$$-E_n = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}.$$

Auch die anderen Quantenzahlen ergeben sich so ganz natürlich aus der Differentialgleichung.

In der vierten Mitteilung gelingt die Ausdehnung der Gleichung auf allgemeine Zeitabhängigkeit, und zwar entscheidet Schrödinger sich hier für die *erste* Ordnung in der Zeit:

$$\frac{\partial\Psi(t,x)}{\partial t} = \pm\frac{2\pi i}{h}E\Psi(t,x).$$

Die zeitabhängige Gleichung enthält nun eine ganz neue und merkwürdige Eigenschaft: Die Wellenfunktion Ψ wird komplex. Dieser Schritt ist von fundamentaler Bedeutung, denn die Interpretationsfrage muss nun neu gestellt werden. Der Wert der Wellenfunktion selbst kann nun nicht mehr observabel sein, denn Messwerte sind immer reell. Erst die reelle Kombination $\Psi\bar{\Psi}$ kann observable Bedeutung haben. Es ist also erst der Betrag von Ψ von physikalischer Bedeutung und der theoretische Grundbaustein der Theorie ist nicht mehr eindeutig mit den Messwerten verknüpft. Dadurch entstehen neue Freiheitsgrade, die sich etwa in der Möglichkeit von Teilchen mit Spin äußern.
Wie stellt sich Schrödinger selbst der Interpretationsfrage? In der 4. Mitteilung, Paragraph 7 geht er diese folgendermaßen an:

> $\Psi\bar{\Psi}$ [also das Absolutquadrat von Ψ, welches reell ist] ist eine Art Gewichtsfunktion im Konfigurationsraum des Systems. Die Wellenmechanische Konfiguraton des Systems ist eine Superposition vieler, strenggenommen aller, kinematisch möglichen punktmechanischen Konfigurationen. Dabei steuert jede punktmechanische Konfiguration mit einem gewissen Gewicht zur wahren wellenmechanischen Konfiguration bei, welches Gewicht eben durch $\Psi\bar{\Psi}$ gegeben ist. Wenn man Paradoxien liebt, kann man sagen, das System befindet sich gleichsam in allen kinematisch denkbaren Lagen gleichzeitig, aber nicht in allen „gleich stark“.
>
> *[Schrödinger 1926e]*

Schrödinger steht also schon kurz vor einer statistischen Deutung seiner Wellenfunktion, denn im Grunde genommen sagt Gewichtsfunktion schon fast statistisches Gewicht. Auch den mathematisch wichtigsten Schritt zur statistischen Deutung liefert Schrödinger mit: Denn eine Gewichtsfunktion sollte normiert werden können, genauer gesagt sollte das Gesamtgewicht im ganzen Raume konstant bleiben, damit die Gesamtladung insgesamt in der Zeitentwicklung unverändert bleibt: $\int dx\Psi\bar{\Psi} = 1$. Dazu zeigt Schrödinger, dass seine Wellenfunktion einer *Kontinuitätsgleichung* genügt.
Damit ist der mathematische Apparat der Wellenmechanik vollendet und der statistischen Interpretation der Wellenfunktion durch Born[12] die Tür geöffnet.

Bevor wir kurz auf die weitere Entwicklung der Interpretationsfrage zu sprechen kommen, soll kurz auf die zwischenzeitlich entdeckte Äqivalenz von Undulations- und Matrizenmechanik eingegangen werden.

Die Äquivalenz der Ansätze und die konzeptionelle Vollendung der Quantenmechanik

Die Diskussion um die Äquivalenz der Ansätze ist der physikhistorische Hintergrund, auf dem sich die Diskussionen des Hauptteiles dieser Arbeit abspielen. Viele Details finden sich daher in den Kapiteln 5 und 6, an dieser Stelle soll nur die generelle Entwicklung skizziert werden.

Schon zwischen seiner zweiten und dritten Mitteilung konnte Schrödinger in seinr Arbeit *Über das Verhältnis der Born-Jordan-Heisenbergschen Quantenmechanik zu der meinen*[13] die vollständige Äquivalenz der Ansätze demonstrieren. Und zwar gelingt es ihm, aus den Lösungen seiner Wellengleichung die Heisenbergschen Matrizen zu konstruieren. Er bemerkt, dass seine Differentialoperatoren den Vertauschungsrelationen genügen. Die Matrixelemente selbst lassen sich (in moderner Terminologie gesagt) aus den Lösungen der Schrödingergleichung ausrechnen als die Komponenten der Operatoren zwischen zwei orthogonalen Lösungen der der Schrödingergleichung.
Auch Dirac zeigt in seiner Transformationstheorie die Äquivalenz der Ansätze, benutzt aber den entgegengesetzten Weg: Die Schrödingergleichung wird aus der Matrizenformulierung hergeleitet. Diracs Transformationstheorie beruht auf der Tatsache, dass durch die Quantenbedingungen (Vertauschungsrelationen) und den Bewegungsgleichungen

$$pq - qp = ih \quad , \quad ih\dot{g} = gH - Hg$$

[12] [Born 1926b]
[13] [Schrödinger 1926c]

die gesuchte Matrix g gar nicht eindeutig bestimmt ist[14]: Sei g eine Matrix, die allen Anforderungen erfüllt, so erfüllt auch $G := bgb^{-1}$ die Anforderungen, gesetzt den Fall b hängt nicht von der Zeit ab, und ist unitär ($b^{-1} = b^{\dagger}$). Die Ausarbeitung dieser Transformationen unter Einbeziehung von Matrizen mt kontinuierlichen Indizes gipfelt in der Herleitung der Schrödingergleichung aus den Transformantionsfunktionen:

> The eigenfunctions of Schrödinger's wave equation are just the transformation functions that eable one to transform the (q)-Scheme of matrix representation to a scheme in which the Hamiltonian is a diagonal matrix.
>
> *[Dirac 1927b]*

Die Schrödingergleichung erscheint somit als eine aus den Matrizen abgeleitete mathematische Technik, ohne den von Schrödinger beabsichtigten anschaulichen wellenmechanischen Gehalt zu besitzen.
Die mathematisch maßgebende und anerkannte Formulierung gelang John von Neumann ab 1927, gipfelnd 1932 in seinen Buch *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*, in dem der Hilbertraum als maßgeblicher Zustandsraum der physikalischen Zustände festgeschrieben wurde. Die Observablen sind von nun an Operatoren auf dem abstrakten Hilbertraum, die sich in unterschiedlichster Gestalt mathematisch darstellen können: Als Differentialoperatoren auf Funktionen, als Matrizen, die auf Vektoren wirken und ähnliches[15].
Da von Neumanns Ansätze Stil und Methoden der reinen Mathematik benutzen, wurden sie für die Physiker zur „Sonntagsdarstellung“ der Grundlagen der Quantenmechanik. Man war froh, dass manche Rechnungen und Behauptungen jetzt streng bewiesen waren, und blieb aber für den Hausgebrauch bei den alten teilweise inkonsistenten aber *physikalisch* einleuchtenden mathematischen Methoden.
Die Basis für den täglichen Gebrauch der Quantenmechanik für eine breite Masse legten Dirac mit seinen *Principles of Quantum Mechanics*[16], dem ersten Lehrbuch über Quantenmechanik und Pauli in seinem Handbuchartikel *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*[17].

Deutung: Wahrscheinlichkeitsdeutung, Unschärferelation, Bewertung der Entwicklung

Die statistische Deutung und die Unschärferelation Betrachten wir noch einmal die Merkwürdigkeit, dass in Schrödingers Arbeiten schon die Wellengleichung für viele nichttriviale Probleme endgültig gelöst wurde, ohne dass überhaupt klar war, was die Wellenfunktion überhaupt bedeuten soll. Schrödinger beabsichtigt zwar eine realistische Deutung, in dem Sinne, dass Ψ einen realen, objektiven Schwingungsvorgang beschreibt. Gleichzeitig betont er aber auch, dass dieser Schwingungsvorgang *nicht* eine Schwingung im dreidimensionalen Raum sei wie eine Wasserwelle etwa, sondern ein Schwingungsvorgang im *Konfigurationsraum.*

[14] Diese Arbeit wird ausführlich in Kapitel 5 referiert werden
[15] Ausführliche Diskussion in Kapitel 6
[16] [Dirac 1930b]
[17] [Pauli 1933]; diese beiden Arbeiten werden auszugsweise in den entsprechenden Kapiteln über Dirac bzw. Pauli besprochen werden

> Daß die Ψ-Funktion selbst im Allgemeinen nicht direkt dreidimensional räumlich interpretiert werden kann und darf, so sehr das Einelektronenproblem dazu verleitet, weil sie eben im Allgemeinen eine Funktion im Konfigurationenraum, nicht im wirklichen Raum ist, ist zu wiederholten Malen hervorgehoben worden.
>
> *[Schrödinger 1926e]*

Dass die Wellenfunktion im „Konfigurationenraum" vorkommt, bedeutet, dass etwa bei zwei Teilchen *eine* Gesamtwellenfunktion im *sechsdimensionalen* Raum betrachtet werden muss und nicht die Überlagerung von *zwei* Wellen im dreidimensionalen Raum, wie es für eine anschauliche „materiale" Interpretation notwendig wäre. Während zwei anschauliche Wellen Ψ_1 und Ψ_2 sich im dreidimensionalen Raum zu $\Psi_{1,2}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x)$ additiv überlagern, gilt für zwei Wellenfunktionen $\Psi_{1,2}(x, y) = \psi_1(x)\psi_2(y) \pm \psi_1(y)\psi_2(x)$. Dies ist aber das Gesetz zur Verknüpfung von Wahrscheinlichkeiten.
Es war schließlich Max Born, der diese Tatsachen zu einer konsistenten Wahrscheinlichkeitsinterpretation verknüpfte. Er erkannte in Schrödingers Theorie die Möglichkeit, auch aperiodische Prozesse, z.B. Stoßvorgänge zu beschreiben, was in der Matrizenmechanik bis dahin unmöglich war. In seiner Arbeit *Zur Quantenechanik der Stoßvorgänge*[18], die *vor* Schrödingers 4. Mitteilung erschien (Born rechnet noch mit der normalen Wellengleichung) kritisiert er sowohl Heisenbergs Ansatz auf eine raumzeitliche Beschreibung überhaupt zu verzichten als unbefriedigend, als auch die Schrödingersche realistische Ursprungsintention. Anschließend an Einsteins Bemerkung, das Wellenfeld weise den Korpuskeln den Weg schreibt er:

> Ich möchte also versuchsweise die Vorstellung verfolgen: Das Führungsfeld, dargestellt durch die skalare Funktion Ψ der Koordinaten aller beteiligten Partikeln und der Zeit, breitet sich nach der Schrödingerschen Differentialgleichung aus. Impuls und Energie aber werden so übertragen, als wenn Korpuskeln (Elektronen) tatsächlich herumfliegen. Die Bahnen dieser Korpuskeln sind nur soweit bestimmt, wie Energie- und Impulssatz sie einschränken; im übrigen wird für das Einschlagen einer bestimmten Bahn nur eine Wahrscheinlichkeit durch die Werteverteilung der Funktion Ψ bestimmt. Man könnte das, etwas paradox, etwa so zusammenfassen: Die Bewegung der Partikeln folgt Wahrscheinlichkeitsgesetzen, die Wahrscheinlichkeit selbst aber breitet sich im Einklang mit dem Kausalgesetz aus.
>
> *[Born 1926b]*

Wie man sich denken kann, finden auf den folgenden Seiten die statistischen Begrifflichkeiten (relative Häufigkeiten, Mittelwerte), die heute den Eckpfeiler der Quantemechanik bilden.
Im Streit zwischen den wellenmechanischen Realistikern und den Anhängern der neuen Philosophie, dass nur Observable Größen in der Theorie auftauchen dürfen, hatten durch Borns statistische Deutung eigentlich *beide* Seiten recht bekommen.
Bohr nahm das Phänomen, das Born im obigen Zitat „etwas paradox" nennt als zentralen Ausgangspunkt für seine Deutung der Quantenphänomene:

> Nach dem Wesen der Quantentheorie müssen wir uns also damit begnügen, die Raum-Zeit- Darstellung und die Forderung der Kausalität, deren Vereinigung für die klassischen Theorien kennzeichnend ist, als komplementäre, aber einander ausschließende Züge [...] aufzufassen [...].
>
> *[Bohr 1928]*

[18][Born 1926b]

Nun war Heisenberg (angeblich) zunächst enttäuscht, dass Born nun die Schrödingersche Theorie „als die tiefste Fassung der Quantengesetze“[19] ansah. Tatsächlich war aber inzwischen noch aus ganz anderer Richtung klar, dass der Begriff der Bahn eines Teilchens nicht *völlig* aus der Physik getilgt werden konnte: Z.B. zeigten Blasenkammerphotos doch ein bahnähnliches Verhalten. Heisenberg musste also ein wenig zurückrudern, und das Ergebnis dieser Anstrengung war seine Unschärferelation, erschienen 1927 in *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*[20], die mit Bohrs oben schon zitierter Arbeit das Kernstück der sogenannten „Kopenhagener Deutung“ des Formalismus ausmacht.

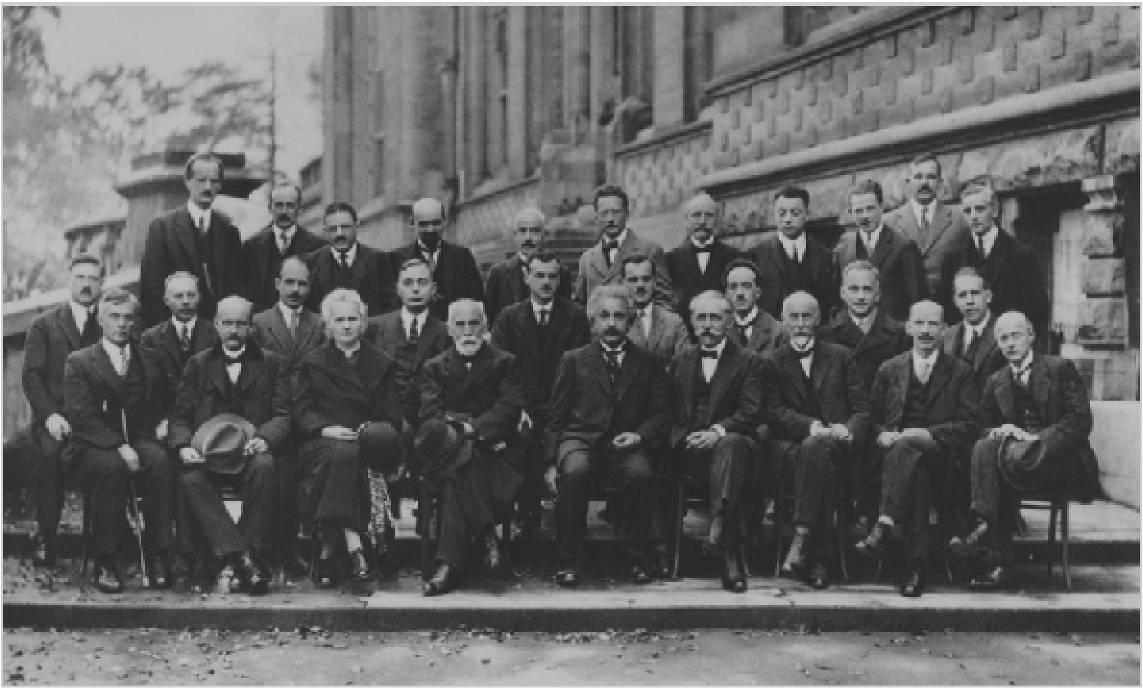

Abbildung 2.3: Die Solvay-Konferenz 1927. Rechte Bildhälfte oben: Pauli und Heisenberg. Unterhalb zwischen ihnen: Max Born, rechts daneben Niels Bohr. Bildmitte: Dirac. (©AIP)

Die Unschärferelation $\Delta p \Delta q \sim h$, die mathematisch direkt aus den Vertauschungsrelationen $[p, q] = -i\hbar$ folgen, werden dort aus einer Analyse des Messprozesses hergeleitet und plausibel gemacht. Auf eine eingehende Analyse der Kopenhagener Deutung soll hier verzichtet werden, in Kapitel 6 werden aber einige grundsätzliche Aspekte ausführlich angesprochen werden.

Bemerkungen zur historischen Weiterentwicklung Rechentechnisch hat sich Schrödingers Formalismus enorm schnell durchgesetzt. Max Born selbst erkannte gleich 1926, dass der Schrödingersche Formalismus gestattete, auch aperiodische Vorgänge (freies Teilchen, Stoßprozesse) zu behandeln, weswegen er schon im Jahr nach seiner Entwicklung der Matrizenmechanik zu Schrödingers Formalismus überwechselte. Pauli, der durch die

[19] [Born 1926a]
[20] [Heisenberg 1927]

matrixmechanische Berechnung des Wasserstoffatoms diese Rechentechnik zu ihrem ersten wahren Erfolg führte, nennt seinen Übersichtsartikel im Handbuch der Physik 1933 „Prinzipien der Wellenmechanik“. Theoretisch wird die Qantenmechanik seitdem in der Mehrzahl der Fälle auf Schrödingers Wellenmechanik aufgebaut (mit Ausnahme der abstrakteren Herangehensweise von Dirac vielleicht), rechentechnisch wird fast ausschließlich dieser Formalismus verwendet.

Von der Deutung der Quantenmechanik her gesehen, führt die Wellenmechanik allerdings leicht in die Irre, denn sie täuscht durch ihre größere Anschaulichkeit dort Licht vor, wo eigentlich Schatten ist. Die „Wahrscheinlichkeitswelle“ verleitet leicht dazu, die dem Problem angemessene Behutsamkeit zu vergessen. Deshalb schreibt Heisenberg:

> Jordans Aufsatz in den Naturwissenschaften fand ich recht hübsch – stellenweise nicht sehr exakt. Was bedeutet z.B. die „Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron an einem bestimmten Punkt steht“, wenn der Begriff „Ort des Elektrons“ nicht anständig definiert ist.
>
> Heisenberg an Pauli,*[Pauli 1979], S.374*

Es besteht die Gefahr, an der Vorstellung einer „Wahrscheinlichkeitswelle“ haftenzubleiben, die sich im Raum ausbreitet ganz wie eine materielle Wasserwelle. Abgesehen davon, dass die Schrödingerfunktion auf dem Konfigurationsraum und *nicht* im physikalischen dreidimensionalen Raum definiert ist, bleibt das Problem, wie man sich denn nun eigentlich sich ausbreitende Wahrscheinlichkeiten verstehen soll. Man gibt sich leichter damit zufrieden, weil das Konzept „Welle“ einem irgendwie bekannt vorkommt, aber mehr *verstehen* tut man nicht.
Vom abstrakten Aufbau der Theorie her betrachtet, sind beide Formulierungen einfach verschiedene Darstellungen desselben Sachverhaltes, nämlich der merkwürdigen Algebra der physikalischen Größen, die durch Vertauschungsrelationen definiert ist. Auf die zentrale Stellung der Vertauschungsrelation wiederum haben allerdings Born, Jordan und Heisenberg und vor allem Dirac von Anfang an deutlich hingewiesen, so dass deren Formalismus vom theoretischen Standpunkt als wesentlich befriedigender angesehen werden kann.

2.3 Relativistische Quantenmechanik

> The general theory of quantum mechanics is now almost complete, the imperfections that still remain being in connection with the exact fitting in of the theory with relativity ideas.
>
> *[Dirac 1929b]*

Die bisher vorgestellte Entwicklung beschränkte sich auf die Ausarbeitung und Vollendung der nichtrelativistischen Theorie. Sie ist damit nach damaligem und heutigem Verstande nur die Näherung einer allgemeineren Theorie, die den Bedingungen der speziellen Relativitätstheorie genügen muss. Eine „wahre“ Theorie muss selbstverständlich auf der vierdimensionalen Raum-Zeit einer relativistischen Welt formuliert werden. Der Suche nach einer relativistischen Quantenmechanik galt daher das Hauptaugenmerk der beteiligten Physiker.

Die skalare Gleichung Schon Schrödinger hatte vor seiner Reihe über die Wellenmechanik versucht, eine relativistische Theorie aufzustellen. Das Ergebnis der „vermutlichen Verallgemeinerung“ seiner Grundgleichungen teilte er in seiner 4. Mitteilung 1926 mit. Die Verallgemeinerte relativistische Wellengleichung wird heute nach O. Klein und W. Gordon „Klein-Gordon-Gleichung“ genannt, und soll kurz erläutert werden.

Die Prinzipien der nichtrelativistischen Wellenmechanik konnten schließlich zusammengefasst werden, indem man eine Vorschrift angab, wie aus den klassischen Größen Operatoren entstehen sollten. Die Energie E wurde ersetzt durch die Ableitung nach der Zeit, also $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, der Impuls p wurde zur Ortsableitung $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Die Schrödingergleichung ergibt sich dann aus der klassischen Energieformel

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad \rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V)\Psi \quad .$$

Soll diese wellenmechanische Quantisierungsvorschrift aber auf die relativistische Energie-Impulsbeziehung

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

an, so muss erklärt werden, was denn die Wurzel aus einem Differentialoperator bedeuten könne. Geht man dagegen von der quadrierten Gleichung $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ aus, wie Schrödinger es in seiner Arbeit ohne viel Aufhebens macht, so gelangt man zur Gleichung[21]

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2)\Phi = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi.$$

Pais [22] berichtet von mindestens sechs voneinander unabhängigen Entdeckungen dieser Gleichung.
Schrödinger selbst ließ diese Gleichung aus zwei Gründen fallen. Erstens macht die Gleichung für alle damals bekannten Teilchen falsche experimentelle Vorhersagen. Das liegt, aus heutiger Sicht, daran, dass die Klein-Gordon-Gleichung eine Gleichung für ein skalares Feld ist und daher gar nicht auf Elektronen und Protonen, die einen Spin besitzen, anzuwenden ist. Zweitens schreibt Schrödinger entstehe diese Gleichung durch „eine bloße formale Analogie“, und sei deshalb auch gar nicht ernstzunehmen.
Schrödinger selbst bewertet seine Argumentation als provisorisch. Und die inhärenten theoretischen und konzeptionelle Mängel wurden erst bei etwas näherer Analyse deutlich: Die Gleichung liefert nicht einfach nur falsche Ergebnisse, sondern ist überhaupt nicht interpretierbar!

Der entscheidende Unterschied zur nichtrelativistischen Gleichung ist, dass jetzt eine *zweite* Ableitung in der Zeit auftaucht, was zur Folge hat, dass diese Gleichung einem ganz anderen *Typus* angehört und die Lösungen Φ nicht mehr als Wahrscheinlichkeitsdichten interpretiert werden können.[23] Außerdem: In der quadrierten Energie-Impulsbeziehung ist mit der Energie E auch $-E$ eine korrekte Lösung der Gleichung, entsprechend erhalten wir „Wellenfunktionen“ mit negativer Energie und die haben keinen physikalischen Sinn.

[21] Eigentlich behandelt Schrödinger gleich das Problem im Magnetfeld, ich gebe hier zur Vereinfachung die Gleichung für das *freie* Feld.

[22] [Pais 1987], S.97

[23] Positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte

Diracgleichung Dirac suchte daher eine Gleichung vom Schrödinger-Typ $H\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$, also erster Ordnung in der Zeit, die eine positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte liefern sollte und deren Quadrat die Klein-Gordon-Gleichung ergeben müsse.[24]
Übersetzt man die relativistische Energie-Impulsbeziehung in die Sprache der Differentialoperatoren, so ergibt sich aus der Quadratwurzel folgende Aufgabe: Wir suchen also einen Differentialoperator 1.Ordnung, so dass die zweifache Anwendung auf die Wellenfunktion die Klein-Gordon Gleichung ergeben würde. Die überraschende Wendung liegt darin, dass dieses ganz leicht funktioniert, wenn man davon ausgeht, dass die Wellenfunktion (mindestens) vier Komponenten hat. Wir haben also statt einer einkomponentigen Wellenfunktion, einem Skalar, jetzt ein völlig neues und der Physik bis dahin noch unbekanntes Objekt, nämlich einen vierkomponentigen *Spinor*

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Diracgleichung lautet dann[25]

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \big(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \beta m\big)\Psi \ .$$

Dabei sind die Größen α_i, β dem mehrkomponentigen Charakter der Wellenfunktion entsprechend 4×4-Matrizen; z.B. ist

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} & 0 & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & 0 & \end{pmatrix} \ .$$

Dirac fand diese Gleichung durch schlichtes Herumprobieren, durch „playing with equations“[26]. Er hatte mit seiner Gleichung nicht nur sein Ziel erreicht, eine Wellengleichung mit ordentlichrer Wahrscheinlichkeitsdichte zu finden, sondern noch viel mehr.

> It was found that this equation gave the particle a spin of half a quantum. And also gave it a magnetic moment. It gave just the properties that one needed for an electron. That was really an unexpected bonus for me, completely unexpected.
>
> *Dirac*, zitiert nach *[Pais 1987]*

Die Dirac Gleichung lässt eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation zu, ist relativistisch kovariant (jeder bewegte Beobachter hat die gleiche Gleichung) und liefert automatisch die richtige Kopplungsstärke an das Magnetfeld, die Pauli noch per Hand hatte hinzufügen müssen. Die richtige Feinstruktur der Spektrallinien im Wasserstoff kommt heraus, und für nichtrelativistische Energien ergeben sich alle Eigenschaften der Schrödingergleichung. Die Gleichung löst jedoch nicht das zweite Problem der Klein-Gordon-Gleichung, wie Dirac gleich in der Einleitung zu seinem Artikel erwähnt, nämlich das Problem der negativen

[24] Nach heutiger Ausdrucksweise. In seinen eigenen Worten braucht er die erste Ordnung, weil sonst die Transformationstheorie nicht funktioniert.
[25] [Dirac 1928a]
[26] Ausführliches darüber im Dirac-Kapitel

Energien: Die Wellenfunktion hat nun 4 Komponenten, es würden aber eigentlich zwei für die beiden erwünschten Spinfreiheitsgrade genügen. Diese treten aber wiederum in doppelter Ausfertigung auf, nämlich für positive und negative Energie. Die Komponenten negativer Energie sind auch nicht eindeutig und für alle Zeiten von denjenigen mit positiver Energie zu trennen, wie anfangs noch z.B. von Pauli vermutet und von Dirac sogar gefordert wurde (nach dem Vorbild der Elektrodynamik, wo man die avancierten Lösungen einfach als „unphysikalisch“ wegwirft). Selbst wenn man mit einem System mit nur positiver Energie startet, kommen mit der Zeitentwicklung notwendigerweise die negativen Komponenten hinzu. Jetzt hatte man doch wieder ein ernsthaftes und unangenehmes Problem, denn die Gleichung war offensichtlich allzu gut, um sie einfach zu ignorieren.
Mit der Diracgleichung ging die grandiose erste Phase der Quantenmechanik mit einem spektakulären Höhepunkt zuende. Nachdem nach dem großen Durchbruch 1925 die Theorie immer wieder auf überraschend einfach die atomaren Phänomene erklärte, tauchte hier die Quantenmechanik plötzlich nicht mehr nur als die Lösung alter Probleme auf, sondern wurde selbst zur Ursache eines tiefen Rätsels.

> Many things did come out all right, but as I said, very soon one saw that the application of the Lorentz group is something dangerous. I think mostly one saw it from Dirac's paper on the electron. The negative energies definetely showed that something comes in now which doesn't fit so well with what we know.
>
> *Heisenberg [Interview AHQP]*

Mit der Einführung von relativistischen Ideen beginnt die lange Durststrecke der Physik, die sich dann in der relativistischen Feldtheorie ein paar Jahre später als echte Krise manifestieren sollte. Bezeichnend ist der nun einsetzentende Stimmungsumschwung von der Euphorie zu einem langen Kater: Heisenberg schrieb zu den Problemen, die die Dirac-Gleichung aufwarf am 28.4.28 an Jordan:

> In völliger Apathie und Verzweiflung über den gegenwärtigen Stand (oder sollte man sagen: Saustall) der Physik, der durch Diracs ebenso schöne wie unrichtige Arbeiten in ein hoffnungsloses Chaos von Formeln verwandelt wurde ...
>
> *zitiert nach Rudolf Haag in [Heisenberg 1989b]*

Oder Heisenberg an Pauli am 3. Mai 1928:

> Über die wichtigeren Probleme weiß ich heut' zwar nichts Neues; aber, um mich nicht dauernd mit Dirac herumzuärgern, hab' ich mal was anderes, nämlich Ferromagnetismus getrieben, und davon möcht' ich Dir jetzt erzählen.
>
> *[Pauli 1979]S.443*

Oder am 31. Juli:

> Das traurigste Kapitel der modernen Physik ist aber nach wie vor die Diracsche Theorie [...].
>
> *[Pauli 1979]S.467*

und später im gleichen Brief

> Jordan soll über dem Magnetelektron trübsinnig geworden sein, erzählte Gordon in Kiel. Man kann's eigentlich verstehen.
>
> *[Pauli 1979]S.468*

Die Löchertheorie Allerdings führte das Problem der negativen Energien zunächst noch zu einem großen Triumph der Theorie. Dirac erkannte 1930, dass es keine Möglichkeit gibt, den Lösungen negativer Energie zu entkommen. Daher entschloss er sich, nicht länger nach deren Vermeidung zu suchen, sondern diese zu akzeptiern und nach einer physikalischen Deutung dieser Lösungen zu suchen. Ausgangspunkt dieser Überlegungen ist, dass ein Elektron negativer Energie sich im äußeren Feld genauso verhält, als ob es positive Ladung bei entsprechend positiver Energie hätte. Das Elektron negativer Energie hätte so die Eigenschaften eines positiv geladenen Teilchens. Dieses positiv geladene Teilchen wurde zunächst mit dem Proton in Verbindung gebracht. Es ergaben sich aber sogleich einige schwerwiegende Inkonsistenzen mit einigen Grundprinzipien der Physik. Beispielsweise würde ein Übergang von positiver zu negativer Energie den Satz von der Ladungserhaltung verletzen. Dirac machte nun folgenden Vorschlag:

> Let us assume that there are so many electrons in the world, that all the states of negative energy are occupied except perhaps a few of small velocity ... Only the small departure from exact uniformity, brought about by some of the negative-energy states being unoccupied can we hope to observe... We are therefore led to the assumption that the holes in the distribution of negative electrons are the protons.
>
> *[Dirac 1930a]*

Das Vakuum soll demgemäß als ein Zustand vorgestellt werden, in dem alle Zustände negativer Energie besetzt sind. Glücklicherweise genügen die Elektronen dem Pauli-Prinzip, so dass sich in jedem Zustand nur ein einziges Elektron aufhalten darf. Ansonsten müssten alle Elektronen im Grundzustand die niedrigst mögliche Energie besitzen und bei negativ unendlicher Energie verharren. Das Vakuum besteht nach dieser Vorstellung aus einem See von Elektronen negativer Energie, in dem alle Zustände negativer Energie gefüllt und die Zustände positiver Energie unbesetzt sind. Dieser See wurde bald „Dirac-See“ genannt.
Der Dirac-See bietet den Rahmen, in dem zum erstenmal die Erzeugung von Teilchenpaaren aus dem Vakuum in Erwägung gezogen werden konnte. Regt man ein Elektron negativer Energie auf ein höheres Niveau mit positiver Energie an, so entsteht ein Elektron positiver Energie und ein Loch im Dirac-See, welches sich als Proton zeigen müsste.

Es bestand allerdings sogleich der Einwand, dass das Proton dann aber dieselbe Masse wie das Elektron haben müsse. Dirac setzte dem die Möglichkeit entgegen, dass ja eventuell die Wechselwirkung zwischen den Löchern ihre Masse ändern könne. Es wurde allerdings sehr schnell klar, dass die Symmetrie der Massen bei positiven und negativen Energien in jedem Falle erhalten bleiben müsse, und das Loch exakt die gleiche Masse haben müsse wie das Teilchen.

Dirac zog 1931 die Konsequenzen und schrieb:

> A hole, if there were one, would be a new kind of particle, unknown to experimental physics, having the same mass and opposite charge to an electron. We may call such a particle an anti-electron.
>
> *[Dirac 1931b]*

Silvan Schweber nennt in seinem Buch *QED and the men who made it*[27] als Grund für die Identifikation der Löcher mit Protonen nicht nur die Tatsache, dass zu diesem Zeitpunkt nur die beiden Teilchensorten Protonen und Elektronen bekannt waren und es allgemein akzeptiert war, dass die Welt aus nur zwei Teilchenarten, Protonen und Elektronen bestehe, sondern vor allem auch ästethische Gründe. Denn wenn die Löcher tatsächlich Protonen wären, so wäre die *ganze* Materie mit *einer* Gleichung, der Diracschen eben, beschrieben. Man hätte dann eine einheitliche Theorie der Materie gehabt. Hat man aber zwei verschiedene Sorten von Teilchen, so muss man auch wieder einen See von negativen Protonen postulieren, und das ganze Bild der Natur verschwimmt wieder.
Die Experimente von Anderson einerseits und Blackett und Occhialini andererseits 1932, die die Existenz des positiven Elektron nahelegten, wurden zunächst nur ganz vorsichtig im Diracschen Sinne interpretiert, und sogar Bohr und Pauli waren, ob es nun ein neues Teilchen sei oder nicht, davon überzeugt, dass all das nichts mit den Diracschen Löchern zutun haben könne.

> Besides, I don't believe in the Dirac-„holes“, even if the positive electron exists.
> *Pauli an Blackett*, 19.4.33 *[Pauli 1979] II, S.158*

Erst im Dezember 1933 konnte Blackett sich durchringen, seine Experimente wirklich als Bestätigung der Dirac-Theorie anzusehen.
Durch die Annahme des Sees von Elektronen negativer Energie und der Interpretation der Löcher in demselben als Antiteilchen, war nun die Dirac-Theorie, eigentlich zur Beschreibung eines einzelnen Elektrons gedacht, zu einer Mehrteilchentheorie mutiert, in der schon Prozesse von Teilchenerzeugung und Vernichtung Platz hatten. Es zeigt sich so, dass eine konsequent relativistische Theorie im Einklang mit der Äquivalenz von Masse und Energie gar nicht mehr als Theorie eines einzelnen Teilchens deutbar ist, da diese nicht mehr stabil sind, sondern erzeugt und vernichtet werden können.

Eine ganz andere Art, eine Mehrkörpertheorie aufzubauen entwickelte sich aber überraschenderweise mit der Quantenfeldtheorie.

2.4 Quantenfeldtheorie

Zunächst ist die Zielrichtung einer Quantenfeldtheorie gar nicht auf die Beschreibung von Vielteilchensystemen ausgerichtet. Vielmehr geht es zunächt darum, neben der Verallgemeinerung des quantenmechanischen Formalismus auf relativistische Probleme auch die Verallgemeinerung der Prinzipien der Punktmechanik auf Felder anzugehen. Theoretisch liegt der Unterschied zwischen Massenpunkten und Feldern vor allem darin, dass ein Feld, da es koninuierlich im Raum verteilt ist, eine unendliche Menge von Freiheitsgraden besitzt. Mathematisch treten beim Grenzübergang von sehr vielen auf unendlich viele Freiheitsgrade einige Komplikationen auf, die in Form von unphysikalischen Divergenzen die Theorie über Jahrzehnte plagten.

[27] [Schweber1994]

2.4.1 Die konzeptionelle Begründung

Dirac erkannte 1927[28], dass die quantentheoretische Behandlung des elektromagnetischen Feldes zu einer Beschreibung desselben durch Feldquanten, den sogenannten Photonen, führt. Dirac zeigt, wie bei einer nichtrelativistischen Behandlung die Energie und die Phase der Fourierkomponenten des elektromagnetischen Feldes als Operatoren („q-Zahlen“) aufgefasst werden können, die den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen genügen. Diese Behandlung erweist sich als äquivalent zur Beschreibung des Feldes durch Lichtquanten, die der Einstein-Bose-Statistik genügen.
Aufbauend auf Diracs Arbeit schlug Jordan vor, auch die Schrödingerschen Materiewellen auf diese Art zu behandeln, da man auf diesem Wege zu einer relativistischen Mehrteilchentheorie kommen könne. Das Seltsame ist, dass die Schrödingerschen (und später die Diracschen und Klein-Gordonschen) Wellenfunktionen ja keine klassischen Felder sind wie das elektromagnetische, sondern erst durch die Quantisierung der Punktmechanik entstanden sind. Es ist, als würden sie gleichsam zum zweiten Male quantisiert.
Auch Heisenberg und Pauli ermittelten in diese Richtung. Im Februar 1927 schon schlug Pauli Heisenberg ein Programm zur Entwicklung der Quantenfeldtheorie vor, wobei Heisenberg gleich wusste, worauf er hinaus wollte.

> Mit Ihrem Programm hinsichtlich der Elektrodynamik bin ich sehr einverstanden; nicht ganz aber hinsichtlich der Analogie: Quanten-Wellenmechanik: klassischer Mechanik= Quantenelektrodynamik : klassischer Maxwell-Theorie. daß man die Maxwellschen Gleichungen quanteln soll, um die Lichtquanten usw. a la Dirac zu bekommen glaub ich schon, aber man soll dann vielleicht doch auch später die de Broglie Wellen quanteln, um Ladung und Masse und Statistik (!!) der Elektronen und Kerne zu bekommen.
>
> *Heisenberg an Pauli, Februar 1927, [Pauli 1979], S.376*

Pauli hatte offensichtlich zuerst nur an die klassischen (also elektromagnetische) Felder gedacht, was im Sinne der Analogie auch naheliegend ist. Heisenberg erkannte aber schon die größere Anwendungsweite der Feldquantisierung auch auf die nichtklassischen Felder der Wellenmechanik.

Die verschiedenen technischen und konzeptionellen Hindernisse bei der Durchführung der Feldquantisierung konnten ab 1927 Schritt für Schritt überwunden werden, bis in *Zur Quantentheorie der Wellenfelder*[29] die einheitliche konzeptionelle Vollendung gelang. Zunächst hatten Jordan und Klein 1927[30] die „zweite“ Quantelung erstmals an einer Schrödingerschen Materiewelle vorgenommen, um zu einer Mehrkörpertheorie zu gelangen. Jordan und Wigner konnten dann in *Über das Paulische Äquivalenzverbot*[31] zeigen, dass man, um zu einer Mehrteilchentheorie für Teilchen, die dem Ausschließungsprinzip genügen, die üblichen Vertauschungrelationen $AB - BA$ durch den Antikommutator $AB + BA$ ersetzen muss. Dadurch kann die Theorie formal für beide Teilchensorten – mit und ohne Ausschließungsprinzip – identisch aufgebaut werden.[32]

[28] [Dirac 1927b]
[29] [Heisenberg und Pauli 1929]
[30] [Jordan und Klein 1927]
[31] [Jordan und Wigner 1928]
[32] Den tieferen Grund dafür fand Pauli erst 12 Jahre später im Spin-Statistik Theorem: Nur so ist Kausalität gewährleistet.

Dem Problem der relativistischen Invarianz stellt sich erstmals der Artikel *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*[33]. Pauli und Jordan geben darin erstmals die Vertauschungsrelatonen zwischen den elektromagnetischen Feldgrößen direkt an, ohne den üblichen Umweg über die Fourierzerlegung des Feldes, und schreiben diese in einer manifest kovarianten Form.

Mit Heisenbergs und Paulis *Quantentheorie der Wellenfelder*[34] gelangen 1929 schließlich alle grundsätzlichen Bestimmungsstücke zu einer Quantenfeldtheorie zur Klarheit und die Idee wird folgendermaßen zusammengefasst:

> Es scheint bei unserem Ansatz zur relativistischen Behandlung des Mehrkörperproblems naturgemäß, dass wir dem Vorhandensein der Teilchen zunächst durch Einführung der zugehörigen Materiewellen Rechnung tragen. Der Übergang von der klassischen Theorie zur Quantentheorie geschieht dann also in zwei Schritten; erstens in dem Übergang von der klassischen Punktmechanik zu den Wellengleichungen des quantenmechanischen Einkörperproblems (ein Teilchen in einem vorgegebenen elektromagnetischen Felde) und der Deutung der gewonnen Differentialgleichung im Sinne einer klassischen Kontinuumstheorie; zweitens in dem Übergang zum Mehrkörperproblem, in dem [...] sowohl Materie als auch elektomagnetische Wellen (die beide in der gewöhnlichen Raum-Zeit-Welt verlaufen) einer Quantelung unterworfen werden.
>
> *[Heisenberg und Pauli 1929]*

Wir finden in der Arbeit den allgemeinen und vollständigen Aufbau der Feldtheorie mit dem Lagrangeschen Formalismus und die Definition der Vertauschungsrelationen für beliebige Felder für die Feldgröße und ihren kanonisch konjugierten Impuls. Der gesamte theoretische Apparat der Quantenfeldtheorie mit der Verallgemeinerung des Lagrange- und Hamiltonformalismus für kontinuierliche Freiheitsgrade, Bewegungsgleichungen für die Feldgrößen, die Erhaltungssätze und die gesamte Quantisierungsprozedur; kurz: all die Dinge, die heute noch die ersten Kapitel eines jeden Lehrbuches über Quantenfeldtheorie ausmachen, werden dort zum ersten Mal der physikalischen Öffentlichkeit in geschlossener Form präsentiert. Heisenberg und Pauli benutzen hier im Gegensatz zum Jordan-Pauli-Artikel[35] wiederum die dreidimensionale Formulierung, also Vertauschungsrelationen zu gleichen Zeiten, weswegen sie die Lorentzinvarianz erst mit einer langen Rechnung beweisen müssen.
Das allgemeine Verfahren wird dann auf Diracsche Materiewellen und elektromagnetische Felder angewendet. Da für den einfachsten, den skalaren Fall, keine physikalischen Anwendungen bekannt waren, wird dieser auch nicht erwähnt, was für das stufenweise Verständnis der gesamten Prozedur sicherlich nicht förderlich gewesen ist.[36]

Die Idee der Feldquantisierung war und ist aus verschiedenen Gründen attraktiv: Wenn sich klassisch das Problem der Wechselwirkung von Strahlung mit Materie als Wechselwirkung zwischen zwei fundamental verschiedenen Entitäten darstellt, so hat man hier

[33] [Jordan und Pauli]
[34] [Heisenberg und Pauli 1929]
[35] [Jordan und Pauli]
[36] Überhaupt muss man hier und bei den vorige Arbeiten sehen, dass die Entwicklung der Theorie am Phänomen des elektromagnetischen Feldes angefangen hat, was sich aber *nach* dem Aufbau der Theorie im Lichte der gewonnenen Systematik als besonders schwieriger Sonderfall entpuppt.

eine gemeinsame theoretische Basis gefunden. Weiterhin, und dieser Gesichtspunkt war in der Anfangszeit sehr wichtig, hat man nun eine Mehrteilchentheorie, die sich komplett im dreidimensionalen Raum, oder im relativistischen Falle in der vierdimensionalen Raumzeit abspielt, und nicht länger in dem abstrakten Konfigurationsraum der Schrödingertheorie wie oben geschildert.

Andererseits offenbarte die Theorie von Anfang an einige schwerwiegende Mängel. Schon Heisenberg und Pauli betonen, dass durch die Verwendung der relativistischen Einteilchengleichungen, auch deren Probleme, also negative Energien, in die Feldtheorie transferiert werden. Jordan beschreibt 1963[37] seine Enttäuschung darüber, dass die Arbeit zu keinen neuen Ergebnissen führte, und auch auf das Problem der Selbstenergie des Elektrons keinerlei neues Licht geworfen wurde. Auch Heisenberg und Pauli selbst waren alles andere als zufrieden, mussten sie doch zur Behebung der Probleme bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes [38] zu dem ihnen sonst so verhaßten Mittel der „Epsilontik“ greifen. Das Zurückgreifen auf reine Rechentricks wurde von Heisenberg und Pauli für gewöhnlich als „faule Ausrede“[39] empfunden, da hiermit kein *physikalisches* Verständnis des Problems erzielt wird. Überhaupt machte der Kampf gegen mathematische Schwierigkeiten die Theorie von Anfang an unbeliebt:

> Auch sind die neuen Resultate, zu denen unsere Theorie führt, überhaupt sehr dürftig und die Gefahr liegt nahe, dass die ganze Angelegenheit allmählich den Kontakt mit der Physik verliert und in reine Mathematik ausartet. *[Pauli 1979] S.513*

Und Heisenberg meinte später[40], die Arbeit hätte sich insgesamt *falsch* angefühlt.

Der Mangel an handfesten Fortschritten und Ergebnissen läutete sogleich auch die Suche nach einer *konzeptionellen* Kritik an der Feldquantisierung ein. In seiner 32er Arbeit *Relativistic Quantum Mechanics* übt Dirac scharfe Kritik an der physikalischen Sinnhaftigkeit der Feldquantisierung. Gerade die oben als Vorteil bezeichnete Situation, nun Materie und Strahlung prinzipiell auf gleichem Fuße zu behandeln, weckt seinen Widerstand:

> These authors [Heisenberg und Pauli] regard the field itself as a dynamical system amenable to Hamiltonian treatment and its interaction with the particles as describable by an interaction energy, so that the usual methods of Hamiltonian quantum mechanics may be applied. There are serious objections to these views, apart from the purely mathematical difficulties to which they lead. If we wish to make an observation on a system of interacting particles, the only effective method of procedure is to subject them to a field of electromagnetic radiation and see how they react. Thus the role of the field is to provide a means for making observations. *The very nature of an observation requires an interplay of the field and the particles.* We cannot therefore suppose the field to be a dynamical system on the same footing as the particles and thus something to be observed in the same way as the particles. The field should appear in the theory as something more elementary and fundamental. *[Dirac 1932]*

[37] [Interview AHQP]

[38] in dem zweiten Teil der Arbeit 1930 als aus der Eichfreiheit stammend erkannt und entsprechend verwertet.

[39] [Interview AHQP]

[40] [Interview AHQP]

Wir sehen wie Dirac hier den Aspekt des Feldes als *Medium physikalischer Beobachtung* hervorhebt, im Gegensatz zum Feld als *Gegenstand* derselben.[41][42] Dirac verspricht in seiner Arbeit, dieser Beziehung zwischen Feld und Teilchen gerecht zu werden. Dabei legt er besonderen Wert darauf, in Analogie zu Heisenbergs Idee von 1925 nur wirklich beobachtbare Größen in der Theorie zuzulassen. So sucht Dirac „ein algebraisches Schema, welches nur die Wahrscheinlichkeitsamplituden enthält", womit er die klassischen relativistischen Bewegungsgleichungen direkt in Bewegungsgleichungen zwischen diesen Größen zu übersetzen hofft. Da die beobachtbaren Größen die Wahrscheinlichkeit von Strahlungsübergängen ist, muss die fundamentale Größe der Theorie ein Matrixelement sein, welches den Übergang von einlaufenden zu auslaufenden Wellen beschreibt. Aufgabe der Theorie ist also allein, die ein- mit den auslaufenden Zuständen zu verknüpfen. Der Übergang von der klassischen Theorie zur Quantentheorie wird nun folgendermaßen vollzogen:

> Let us make the assuption that *the passage from the field of ingoing waves to the field of outgoing waves is just a quantum jump performed by one field.*
>
> [Dirac 1932]

Diracs kritische Überlegungen sind das erste Beispiel einer phänomenologisch orientierten Kritik, die sich an dem Grundentwurf der Quantenmechanik orientierte und alle nicht direkt beobachtbaren Größen eliminieren wollte. Argumente dieses Typs haben die Quantenfeldtheorie immer begleitet. Der bekanntetste Alternativentwurf dieser Art wurde später in den 40er Jahren Heisenbergs S-Matrixtheorie. Hier wie dort erwies sich aber der von [Heisenberg und Pauli 1929] gelegte konzeptionelle Boden als gut genug, diese Alternativansätze auf die Quantenfeldtheorie zurückzuführen[43].

2.4.2 Die 30er Jahre: Kampf gegen die Divergenzen

Anfang der 30er Jahre gab es nun zwei theoretisch schlüssige Formulierungen der Theorie der Elektronen. Aber sowohl Löcher - wie Feldtheorie wurden von einem fatalen Mangel geplagt: Genaue Berechnungen der physikalischen Größen aus der Löchertheorie sowie aus der Feldtheorie ergaben unsinnige Ergebnisse. Immer wieder erhielt man bei der Berechnung von Größen wie Energie und Ladungsdichte einen unendlichen großen Wert – was offensichtlich nicht der physikalischen Realität entspricht. Schlimmer noch, diese Unendlichkeiten entpuppten sich als eng mit der Grundidee der Feldtheorie verknüpft, nämlich mit der Tatsache, dass die Theorie unendlich viele Freiheitsgrade besitzt.

> Quantum Theory is always successful when describing systems with a finite number of degrees of freedom, but when dealing with systems possessing infinitely many degrees of freedom it causes divergent results to appear [...]. The theory of holes

[41] Dieser Themenkreis der Messbarkeit des Feldes ist dann vor allem durch die Arbeit [Bohr und Rosenfeld 1933] behandelt worden. Das Feld dient natürlich nicht nur der Beobachtung von Teilchen, sondern kann selbst durch Probekörper ausgemessen werden. So kann also auch das genaue Gegenteil von Diracs Behauptung vertreten werden, was wiederum für die Symmetrie des Heisenberg – Pauli Ansatzes spricht.

[42] Wheeler und Feynman versuchten diesen Standpunkt später bis ins Extrem durchzuführen (vgl. [Schwinger 1983b], S.355)

[43] siehe den Abschnitt über F. Dyson später in diesem Abschnitt

> postulates an infinite number of electrons, and therefore comes into the same category.
>
> *Pauli*, zitiert nach *[Schweber1994]S.84*

Da genau dieser Übergang den Unterschied zwischen einer Mechanik von Massenpunkten und einer Mechanik von Feldern ausmacht, sah das ganze Projekt lange Zeit wie eine Sackgasse aus.

Die Divergenzen

Das Problem der Divergenzen soll nun an drei Beispielen in einfacher Form kurz vorgestellt werden.

Nullpunktenergie Die älteste dieser auftretenden Divergenzen fiel schon Jordan bei der Abfassung der „Dreimännerarbeit“[44] auf. Die Quantentheorie sagte für den harmonischen Oszillator eine Nullpunktsenergie von $\frac{1}{2}\hbar\omega$ vorraus. Die Beschreibung eines Systems von Oszillatoren lässt sich daraus mühelos gewinnen:

> Die Quantenzustände des Oszillatorensystems können gekennzeichnet werden durch „Quantenzahlen“ $n_1, n_2, n_3, \ldots$ der einzelnen Oszillatoren, so dass die Energien der einzelnen Zustände bis auf eine additive Konstante gegeben sind durch
>
> $$E_n = h \sum_k \nu_k n_k \quad .$$
>
> Die additive Konstante, die „Nullpunktsenergie“, ist gleich
>
> $$C = \frac{1}{2} h \sum_k \nu_k$$
>
> (sie wäre insbesondere im Grenzfall unendlich vieler Freiheitsgrade unendlich groß).
>
> *[Born, Jordan, Heisenberg 1926]*

Da ein Feld gerade die Schwingungen an jedem Raumpunkt beschreiben soll, gilt diese Argumentation insbesondere für die Feldtheorie: Schon das Vakuum wäre ein Zustand unendlich großer Energie.
Die unendlich Nullpunktsenergie ist allerdings, wie schon im Zitat betont, eine *Konstante*, und führt daher zu keinen Problemen, da man nur Energie*differenzen* beobachten kann. Die Nullpunktsenergie ist als eine Konstante, die zu *allen* physikalischen Vorgängen dazukommt, *nicht* beobachtbar, und kann daher in einem Prozess der Eichung des Einheitensystems versteckt werden.
Der Prozeß des numerischen Anpassens und der Einheitenfestlegung ist in der Physik als „Normierung“ bekannt. Die Idee einer *nachträglichen* Berücksichtigung von konstanten Faktoren darf dementsprechend „Re-Normierung“ heißen. Der Terminus „Renormierung“ wurde erstmals 1936 von R. Serber[45] gebraucht und bezeichnet seitdem die Methode, wie in der Theorie auftretende *unendliche* Konstanten durch eine Umeichung des Maßsystems aus der Theorie zu entfernen sind.

[44] [Born, Jordan, Heisenberg 1926]
[45] siehe [Schweber1994]

Die Nullpunktsenergie ist das harmloseste Beispiel einer Unendlichkeit und das einfachste Beispiel für eine Renormierung. Die Nullpunktsenergie ist von vornherein ein Konstante und ändert am observablen Wert der physikalischen Energiedifferenzen gar nichts. Dies gilt noch genauso für die nächste beschriebene Unendlichkeit, die unendliche Ladungsdichte in der Löchertheorie, aber nicht für die interessanteren Unendlichkeiten, denen wir uns hinterher zuwenden werden.

Die unendliche Ladungsdichte des Vakuums Die Löchertheorie führt durch die Annahme des Dirac-Sees offensichtlich zu einer unendlichen Ladungsdichte des Vakuums. Dieses Problem konnte ab 1934 durch einen konzeptionellen Kniff gelöst werden[46]: Weil die Theorie symmetrisch in Elektronen und Positronen sein muss, könnte man genauso eine Theorie konstruieren, in der die Positronen die Materie sind, und die Elektronen die Löcher im Dirac-See. Die eigentliche Theorie kann nun als „Superposition" beider Theorien aufgefasst werden, so dass sich die jeweiligen unendlichen Ladungsdichten aus dem See genau wegheben. Dies ist der erste Schritt weg vom Dirac-See.[47] [Furry und Oppenheimer 1934] beseitigen diese essentiell löchertheoretischen Schwierigkeiten dann durch ein einfaches Argument, indem Teilchen und Antiteilchen symmetrisch in den feldtheoretischen Formalismus eingebaut werden. Die Autoren geben dort erstmals die Uminterpretation der Vernichtungsoperatoren von Elektronen negativer Energie als Erzeuger eines Positrons positiver Energie an.
Auch die Arbeit [Pauli und Weisskopf 1934], die die Quantisierung eines geladenen skalaren Feldes behandelt, machte deutlich, dass die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen ganz ohne die Idee des mit Teilchen gefüllten Vakuums auskommen kann. Pauli sprach deshalb gerne von einer „Anti-Dirac-Theorie".

Selbstenergie Wenden wir uns nun als Beispiel für ein viel ernsteres Problem der unendlichen Selbstenergie des Elektrons zu. Das Auftreten dieser Divergenz wurde schon bald nach der Begründung der der Quantenfeldtheorie durch [Heisenberg und Pauli 1929] bekannt, siehe etwa Arbeiten von Oppenheimer[48], Heisenberg[49] und Waller[50].
Schon in der *klassischen* Theorie des Punktelektrons tritt eine charakteristische Unendlichkeit auf. Betrachten wir etwa den Fall klassischer elektrostatischer Wechselwirkung: Das Gaußsche Gesetz der Elektrostatik

$$\triangle\phi = 4\pi\rho$$

ergibt für eine Punktladung $\rho = -e\delta(\vec{r})$ als Lösung für das elektrostatische Potential

$$\phi = -\frac{e}{r}$$

und damit für die elektrische Feldstärke $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\vec{E} = -\frac{e}{r^2} \quad .$$

[46] und bedarf daher keiner wirklichen „Renormierung" im obigen Sinn
[47] Diese Erklärung stammt von Viktor Weisskopf in [Brown und Hoddeson 1983].
[48] [Oppenheimer 1930]
[49] [Heisenberg 1930b]
[50] [Waller 1930a], [Waller 1930b]

Die Energiedichte ist proportional zum Quadrat der Feldstärke $U = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2$, so dass die Gesamtenergie $W = \int d^3xU$ für ein Feld außerhalb des Elektronenradius a

$$W = \frac{1}{2}\int_a^\infty \vec{E}^2(r)\,dr = \frac{1}{2}e^2\int_a^\infty \frac{1}{r^4}r^2\,dr = \frac{e^2}{2a}$$

beträgt. Für ein punktförmiges Elektron erhalten wir also schon in der klassischen Theorie einen Ausdruck, der für $a \to 0$ linear divergiert.
Die gleiche Rechnung liefert im quantentheoretischen Gewande jedoch einen anderen Wert. [Weisskopf 1934] erhielt den Ausdruck[51]

$$W = m_0c^2 + \frac{3}{2\pi}m_0c^2\frac{e^2}{hc}\log\frac{\lambda_c}{a} \quad , \tag{2.1}$$

wobei λ_c die Compton-Wellenlänge $\lambda_c = h/mc$ des Elektrons bedeutet (die Verringerung dieser Divergenz in der quantenmechanischen Rechnung liegt an der speziellen Wechselwirkung des Elektrons mit den Fluktuationen des Vakuums).

Dieses Resultat wurde gemeinhin als Ermutigung empfunden denn eine logarithmische Divergenz ist nur noch eine sehr schwache Divergenz. Während eine lineare Divergenz dem Verhalten der Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$ entspricht[52], erhalten wir für den Logarithmus eine Reihe der Form $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ [53], die sehr langsam wächst: Nach einer Million Summanden ist die Reihe immer noch kleiner als 14,4.

In absoluten Zahlen für das Elektron bedeutet dies, dass der Wert von a, an dem der zweite (logarithmische) Term von (2.1) halb so groß wird wie der erste, erst bei $10^{-72}cm$ liegt[54]. Das ist z.B. wesentlich kleiner als der Schwarzschild-Radius des Elektrons, der etwa bei $10^{-45}cm$ liegt. Damit wird klar, dass sich die Unendlichkeit erst in Größenordnungen bemerkbar machen würde, die experimentell ganz und gar unzugänglich sind und in denen die Gültigkeit der Theorie ohnehin unklar wäre – das heißt die Theorie wäre für alle praktischen Zwecke gut genug.
Die Idee eines Umgangs mit dieser Divergenz bestünde also darin, das divergente Integral bei einem sehr kleinen aber endlichen Wert von a abzuschneiden. Dafür böten sich verschiedene physikalische Hypothesen an. Wenn etwa das Elektron kein Punkt ist, sondern ein ausgedehntes Objekt mit innerer Struktur, so würde die $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke im inneren des Elektrons nicht mehr gelten. Die logische Struktur der Theorie bliebe unangetastet, aber die Randbedingungen wären so gebaut, dass keine Singularitäten aufträten. Andererseits ist das so lange so gut wie hoffnungslos, bis

[51] Eine gern erzählte Geschichte berichtet davon, wie Weisskopf zunächst ein falsches Resultat bekam (eine quadratische Divergenz) und veröffentlichte, aber von W. Furry brieflich auf den Fehler hingewiesen wurde. Weisskopf publizierte nun eine Berichtigung, in der er Furrys Brief zitierte. So gilt nun „offiziell" Weisskopf als der Entdecker der logarithmischen Divergenz.

[52] nach S.Weinberg in [Weinberg 1977]

[53] Die Reihenentwicklung des Logarithmus

$$\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \ldots \qquad x > \frac{1}{2}$$

hat für $x \to \infty$ offensichtlich das angegebene Verhalten.

[54] [Weisskopf 1983]

man genaue Informationen über die Struktur des Elektrons besitzt. Denn das Ergebnis des Abschneidens ist offenbar im Allgemeinen abhängig davon, *wo* genau abgeschnitten werden soll. Diese Überlegungen machen also erst dann Sinn, wenn es Hinweise auf eine innere Struktur des Elektrons gäbe, die bis heute ausgeblieben sind.
Diese Richtung war aber nicht nur vom empirischen Standpunkt zweifelhaft, sondern auch vom theoretischen Standpunkt unschön. Denn eine fundamentale Theorie sollte eigentlich nicht von physikalischen ad-hoc Annahmen wie der Struktur des Elektrons abhängen.
Einige prominente Physiker meinten, das Divergenzproblem müsse zuerst in der klassischen Theorie gelöst werden und könne erst danach in der Quantenfeldtheorie erfolgreich behandelt werden. Dieser Weg berief sich vor allem auf Bohrs Korrespondenzprinzip, das in der Vergangenheit eine wichtige Leitlinie gewesen war. Vor allem Kramers, aber auch Dirac forschten in diese Richtung.

Stimmungen

Über die 30er Jahre bis 1946 wurden eine Menge fruchtloser Anstrengungen unternommen, dem Problem beizukommen. Der Widerspruch zwischen der konzeptionell überaus überzeugenden Theorie und den offensichtlich unsinnigen Ergebnissen, die aus ihr berechnet wurden verdarb schließlich überall die Stimmung. Die Probleme waren hartnäckig und auch über 10 Jahre, nachdem sie in allen Einzelheiten bekannt waren, einer Lösung nicht näher gerückt. Die community hoffte im allgemeinen auf eine große Revolution, die analog zur Situation von 1925 das ganze Bild zurechtrücken und den gordischen Knoten mit einem Schlage zu durchtrennen würde. Die Quantenfeldtheorie wurde als Theorie mit begrenztem Gültigkeitsbereich angesehen, die bei höheren Energien zusammenbricht. Vor allem von Bohr und Heisenberg, aber auch von Dirac sind die strengen Überzeugungen überliefert, nach denen die Quantenfeldtheorie durch eine Revolution der fundamentalen Konzepte durch etwas ganz neues ersetzt werden solle.

> The only improtant part that we have to give up is quantum electrodynamics... We may give it up without regrets... in fact, on account of its extreme complexity, most physicists will be very glad to see the end of it.
>
> *Dirac*, zitiert nach *[Pais 1987] S.105*

Die Physiker betrachteten die Quantenelektrodynamik unter dem „kill or cure“ - Prinzip, wobei Dirac hier zeigt, dass er keinerlei Hoffnung auf Heilung mehr hatte.

Vor allem Heisenberg propagierte dazu in den 30er Jahren die Idee einer fundamentalen Länge, eines „Längenquantums“. Dieses würde wiederum die Divergenzen vermeiden, da die Feldstärke „am Ort des Elektrons“ gar kein sinnvoller Begriff mehr wäre. Heisenbergs Vorschlag war eine konsequente Fortführung seiner Gedanken zur Unschärferelation. Denn in der Feldthorie war ja durch das Hintertürchen wieder von einem exakt bestimmten Ort die Rede geworden, zwar nicht vom Ort eines Teilchens, wohl aber von de Feldstärke an einem Ort. Bohr und Rosenfeld[55] wiesen daher 1933 darauf hin, dass die Feldstärke an einem Punkt gar kein vernünftig definierter Begriff ist. Heisenbergs Idee der quantisierten Länge erscheint daher wie die sinnvolle Ausweitung der Kopenhagener Philosphie der Quantenmechanik auf die Feldtheorie.

[55] [Bohr und Rosenfeld 1933]

Heisenbergs sogenannte S-Matrix Theorie entstand aus der Überlegung, welche Züge der Quantenfeldtheorie die Einführung einer fundamentalen Länge überleben würden, welche Begriffe dann noch wohldefiniert und welche Größen observabel blieben. Die S-Matrix war von Heisenberg als radikal neue Herangehensweise an die Physik gedacht (obwohl sie sich als etwas später als äquivalent zur Feldtheorie zeigte). Sie ist damit auch ein Beispiel für die weitverbreitete Ansicht, dass Quantenfeld- und Löchertheorie nur *Näherungen* einer zukünftigen Theorie sein sollten.

Heisenberg erzählt in einem Interview mit T.S. Kuhn, wie 1923 und 24 das Gefühl von einem unmittelbar bestehenden großen Durchbruch das Geschehen bestimmte, so als wäre man kurz davor einen Hafen zu erreichen. In den 30er Jahren dagegen wäre man wieder auf offener See, und einen echten dauerhaften Fortschritt hätte auch niemand erwartet:

> It is very difficult to describe that state because it was psychologically so different from the state in 1923 or 1924. In 23 and 24 we knew there were difficulties and we also had the feeling that we were quite close to the final solution of these difficulties. Just one step and we will be in a new field. It was as if we were just before entering a harbour, while in this later period we were just going out into the sea again, i.e., all kinds of difficulties coming up and really we didn't know where it would lead to. And even if new and good ideas came up, these ideas would work a short way and then again one had new difficulties. It was clearly seen that this was an entirely new story. So nobody expected quick results at that time.
>
> *[Interview AHQP]*

Diese Situation setzte sich bis kurz nach Kriegsende fort. Silvan Schweber gibt folgendes Beispiel für den angestauten Pessimismus:

> At the conference [Juli 1946] Bohr, Pauli, and Dirac gave their assessment of the physics of fundamental particles.
> Their pessimistic outlook is conveyed by the titles of their talks. Bohr spoke on „*Problems* of Elementary-Particle Physics", Pauli on the „*Difficulties* of Field Theories and of Field Quantization", and Dirac on the „*Difficulties* in Quantum Elektrodynamics".
>
> *[Schweber1994], S.153*

Weisskopfs Einführungsartikel für die Shelter Island Konferenz 1947 beschreibt das Gefühl, immer wieder mit dem Kopf vor die Wand zu rennen:

> The theory of elementary particles has reached an impasse. Certain well known attempts have been made in the last fifteen years to overcome a series of fundamental problems. All these attempts seem to have failed at an early stage. [...] After returning from war work, most of us went through just these attempts and tried to analyse the reason of failure.. Therefore, the list which follows [Liste der Themen = Schwierigkeiten] will be well known to everyone and will probably invoke a feeling of knocking a sore head against the same old wall.
>
> zitiert nach *[Schweber1994]*

Eine wissenschaftstheoretische Aufarbeitung der 30er und 40er Jahre soll im Anschluss an die Darstellung des großen Durchbruchs der Renormierungstheorie in Kapitel 2.5 erfolgen.

2.4.3 Der Durchbruch zu einer funktionierenden QED: Die Renormierung

> Was die Selbstenergie und die Selbstladung betrifft, so sind sie zwar noch unendlich, aber Schwinger und Feynman + Dyson haben sie wohlverpackt *neben* die Theorie der beobachtbaren Effekte gelegt.
>
> *Pauli an Delbrück 15.12.49 [Pauli 1979] III, S.722*

Der große Durchbruch zu einer echten QED kam nach dem Krieg und ist verknüpft mit den Namen Julian Schwinger (1918-1994), Sin-itiro Tomonaga (1906-1979) und Richard Feynman (1918-1991). Freeman Dyson (* 1923) gelang es kurz danach die ganz verschiedenen Ideen dieser Autoren unter ein einheitliches Dach zu bringen und Feynmans halb-intuitive Rechenschemata aus Schwingers Ansätzen herzuleiten. Zu Tomonaga kommt im Folgenden nichts, aus keinem besonderem Grunde.
Durch die während des Krieges gemachten technologischen Verbesserungen konnten die amerikanischen Experimentatoren jetzt deutlich genauere Versuche durchführen. Im April 1947 entdeckten Lamb und Retherford eine Aufsplittung zweier Spektrallinien im Wasserstoff, im Gegensatz zur Vorraussage der einfachen relativistischen Theorie. Im Juni des gleichen Jahres veröffentlichten Rabi, Nelson und Nafe, ihre Ergebnisse über eine Abweichung des magnetischen Momentes, ebenfalls im Gegensatz zur naiven Vorhersage der Einteilchen-Dirac-Gleichung.
Durch diese experimentell ermittelten Abweichungen von den bisherigen Vorhersagen der Theorie fiel schlagartig neues Licht auf das Problem der Unendlichkeiten. Denn nun zeigte sich, dass sich in verschiedenen Divergenzen (etwa der Selbstenergie) *observable* Effekte verbargen, im Unterschied etwa zu dem besprochenen Phänomen der Nullpunktsenergie, hinter dem sich keinerlei *physikalischer* Effekt versteckte.
In dem Unsinn der Unendlichkeiten versteckte sich also doch ein Körnchen Wahrheit und der entstehende Erklärungsnotstand animierte eine Reihe der fähigsten Physiker, sich wieder der Quantenelektrodynamik zuzuwenden. Der darauf folgende Durchbruch besteht sachlich vor allem in zwei Dingen: Eine relativistisch invariante *Isolierung* der Unendlichkeit, und einem *Subtraktionsverfahren* derart, dass nach Abzug der Unendlichkeit ein endlicher nichttrivialer Rest bleibt. Wie man sich dies vorzustellen hat: zwei unendliche Größen so voneinander abzuziehen, dass auf eindeutige Weise etwas übrigbleibt, soll nun vorweg an einem Beispiel erläutert werden.

Die Idee der Renormierung

Die geforderte Isolierung der Unendlichkeiten bedeutet, dass wir die divergenten Terme aufspalten können in einen konstanten unendlichen Faktor plus einen endlichen, observablen Rest. Die eigentliche Renormierung besteht dann darin, die freien Konstanten der Theorie (also Masse und Ladung) so zu wählen, dass sie sich mit den berechneten unendlichen Konstanten wegkürzen.

Betrachten[56] wir etwa

$$f(x) = \int_1^\infty dy \frac{1}{x+y} \quad . \tag{2.2}$$

[56]Die folgende Darstellung beruht auf [Mills 1993]

Für große y geht der Integrand wie $\frac{1}{y}$, und damit gegen null für sehr große y. Trotzdem divergiert das Integral, da die Stammfunktion von $\frac{1}{y}$ den Logarithmus von y ergibt. Die Integration von 1 bis ∞ führt damit wegen $\lim_{y\to\infty} \log y = \infty$ auf die schon im vorigen Abschnitt diskutierte schwache logarithmische Divergenz
$f(x)$ ist damit für jeden Wert von x nicht definiert!
Was aber wohl zu sehen ist: Die Differenz zweier Funktionswerte scheint sinnvoll zu sein:

$$\bar{f} := f(x) - f(0) = \int_1^\infty dy \, \frac{1}{x+y} - \int_1^\infty dy \, \frac{1}{y} \tag{2.3}$$

Wenn man nun die Subtraktion mit der Integration vertauscht

$$\bar{f}(x) = \int_1^\infty dy \, \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} \right) \tag{2.4}$$

so ergibt sich nach etwas Bruchrechnung

$$\bar{f} = -x \int_1^\infty dy \, \frac{1}{y(x+y)} \; . \tag{2.5}$$

Die Funktion $\bar{f}(x)$ ist jetzt wohldefiniert![57]
Man sieht: $f(x) = A + \bar{f}(x)$ mit $A = f(0)$ ist bis auf die additive Konstante A doch eine ordentliche Funktion. Wichtig ist hier die Konstanz des unendlichen Summanden $A = f(0)$, damit die Unendlichkeit in allen Bereichen den gleichen Charakter behält. Auf diese Art ist die Divergenz jetzt isoliert und kontrollierbar! Die unendliche Konstante sollte nun wie bei der Nullpunktsenergie keine Rolle mehr spielen; der von x abhängige Rest ist immer endlich und damit unproblematisch.

Vergrößern wir nun die Divergenz und betrachten

$$g(x) = \int_1^\infty dy \, \frac{y}{x+y} \tag{2.6}$$

Der Integrand wird konstant für $y \to \infty$, und das Integral ist linear divergent. Anwendung des Subtraktionstricks ergibt

$$g(x) - g(0) = \int_1^\infty dy \, y \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} \tag{2.7}$$

$$= -x \int_1^\infty dy \, \frac{y}{y(x+y)} \tag{2.8}$$

$$= -x f(x) \tag{2.9}$$

[57] Am Rande sei schon einmal bemerkt: Streng genommen gilt 2.4 nicht, denn dass die Summe zweier Integrale gleich dem Integral der Summe ist, gilt nur wenn die Integrale selbst konvergent sind. Dyson schreibt dazu in seinem klassichen Artikel:

> It hardly needs to be pointed out that the arguments of these section have involved extensive manipulations of infinite quantities. These manipulations have only formal validity, and must be justified *a posteriori* by the fact that they ultimately lead to a clear separation of finite from infinite expressions. Such a *a posteriori* jsutification of dubious manipulations is an inevitable feature of any theory which aims to extract meaningful results from not completely consistent premises.
>
> *[Dyson 1949b]*

Die Subtraktion führt also dieses Integral auf das vorherige zurück und es ergibt sich

$$g(x) = B - Ax + \bar{g}(x) \quad , \tag{2.10}$$

wobei die gleiche Bezeichnungsweise wie im vorigen Beispiel gewählt wurde.
Wir haben also die x-Abhängigkeit von f, g vollständig verstanden, allein die absoluten Werte und der lineare Anteil sind unendlich, und auf diese Weise nicht wohlbestimmt. Aber den qualitativen Verlauf der Funktionen, ihre gesetzmäßige Veränderung mit der Variablen x haben wir jetzt im Grossen und Ganzen im Griff!
Dieses Phänomen ist eine spezielle Eigenschaft dieser Sorte Integrale, und nur auf Beispiele dieser Form anzuwenden. Dieses sind aber gerade die Integrale, denen man in der Quantenelektrodynamik begegnet.
Die eigentliche Renormierung gelingt dann, wenn man die unenendlichen Konstanten A und B mit den freien Konstanten der Theorie, Masse und Ladung, identifizieren kann. Die Konstanten werden gewissermaßen in Ladung und Masse versteckt, so dass der eigentlich interessante Anteil, nämlich der endliche Rest $\bar{g}(x)$ die bekannten elektrodynamischen Korrekturen (Lambshift, anomales Moment) bewirken kann. Genau wie schon bei der Nullpunktsenergie besprochen, kann dann die Theorie wieder (re) an die numerische Skala der Physik angemessen (normiert) werden.
In der Renormierung werden die Masse m und die Ladung e, mit denen die Theorie startet, als unendlich angesetzt und zwar so, dass sie die im Verlauf der Berechnungen auftretenden Unendlichkeiten A und B gerade aufheben. Die zunächst rein mathematischen definierten Konstanten e und m der Theorie werden so angesetzt, dass sich nach dem Berechnen der gewünschten Größen und *nachdem* sich die Divergenzen aufgehoben haben, gerade der *physikalische* Wert von Ladung und Masse ergibt. Die Parameter e und m werden also erst *am Ende* aller Rechnungen mit den physikalischen Eigenschaften Ladung und Masse *identifiziert*, damit man vorher allen Unfug mit ihnen treiben darf.
In den folgenden Abschnitten will ich zunächst auf die Beiträge von Schwinger und Feynamn eingehen und die Stoßrichtung ihrer Arbeit skizzieren.

Schwinger

> Other people publish to show you how to do it, but Julian Schwinger publishes to show you that only he can do it.
>
> *„Ein gereizter Kritiker“*, nach *[Schweber1994], S.334*

Julian Schwinger begann die Berechnung des Lamb-Shifts und der Anomalie des magnetischen Momentes bald nach deren Bekanntwerden. Nach all den versprengten Versuchen seiner Vorgänger, gelang es Schwinger, beide Effekte nach *der gleichen Methode* zu berechnen. Nun gab es ein einheitliches Rechenschema (bis zur Ordnung e^2), in welchem alle wichtigen Effekte aufgehoben waren. Dies ist wahrscheinlich der Punkt, an dem die Hoffnung greifbar wurde, die Quantenelektrodynamik könne sich doch noch als geschlossene Theorie retten lassen.
Schwinger entwickelte seit den ersten Rechnungen seine Methode immer weiter, beginnend mit einer kurzen Mitteilung über den berechneten Wert der Anomalie[58] und gipfelnd in den Arbeiten QED I-III[59]. Schwingers Veröffentlichungen zur Quantenelektrodynamik in

[58] [Schwinger 1948a]
[59] [Schwinger 1948b] bis [Schwinger 1949b]

der Physical Review heben als zentralen Punkt seines Vorgehens die *relativstische Kovarianz* in den Vordergrund. Der erste Teil trägt den Untertitel „A Covariant Formulation“.

> This paper [...] is occupied with the formulation of a completely covariant elektrodynamics. Manifest covariance with respect to Lorentz and gauge transformations is essential in a divergent theory since the use of a particular reference system or gauge in the course of calculation can result in a loss of covariance in view of the ambiguities that may be the concomitant of infinities.
>
> [Schwinger 1948b]

Schwinger betont hier schon in der Einleitung, wie wichtig die dauernde ausdrückliche Kovarianz gerade in einer divergenten Theorie ist, da durch die Manipulation der Unendlichkeiten Zweideutigkeiten entstehen, die die Unabhängigkeit der Rechnung vom Bezugssystem gefährden könnten.
Wie es schon Pauli und Jordan fast 20 Jahre früher versuchten, muss hier wieder zentrale Mangel des kanonischen Formalismus überwunden werden:

> The equations of motion and the supplementry condition a manifestly covariant; the canonical commutaton relations lack this essential characteristic since a special Lorentz reference system is employed. The commutation relations involve field variables at two points of a four-dimensional surface characterized by t =const. We shall achieve the desired covariance by replacing such surface with the invariant concept of a space-like surface. [...] Surfaces of the type t =const form a special non-covariant class of plane space-like surfaces.
>
> [Schwinger 1948b]

Beispiel: Zur Erreichung der Kovarianz definiert Schwinger die Wellenfunktion Ψ auf einer beliebigen raumartigen Fläche σ. Die gewöhnliche Differentiation muss nun duch eine Funktionalableitung von $\Psi[\sigma]$ ersetzt werden, die die Änderung von Ψ bei Änderung von σ angibt. Man kann sich leicht ausmalen, dass die benötigte Mathematik hier einen enormen Komplexitätssprung macht – weshalb hier auf eine genauere Darstellung auch verzichtet werden muss.
Als zweiten Punkt nennt Schwinger eine „natural division between the properties of the independent fields and the effects of field interactions“[60]. Diese ausdrückliche Aufteilung von freien Feldern und der Wechselwirkung wird durch eine Transformation ins Wechselwirkungsbild erzeugt. Schwinger weist darauf hin, dass das Heisenbergbild zwar den Erfordernissen der Kovarianz angemessen ist, aber enorme praktische Nachteile besitzt:

> [Das Heisenbergbild] is not entirely suitable, however, as a practical means of treating elektrodynamic questions, since commutators of field quantities at points separated by a timelike interval can be constructed only by solving the equation s of motion. This situation is to be contrasted with that of the Schrödinger representation, in which all operators refer to the same time, thus providing a distinct separation between kinematical and dynamical aspects.
>
> [Schwinger 1948b]

[60][Schwinger 1949a]

Die zweite Arbeit [Schwinger 1949a] nutzt den so entwickelten Formalismus zur Berechnung quantenelektrodynamischer Effekte und enthält die erste veröffentlichte Rechnung zum anomalen magnetischen Moment.
Schwingers Erfolg war durchschlagend, und F. Dyson schrieb im Sommer '48, als sich der Ruf von Schwingers Durchbruch in den Vereinigten Staaten verbreitete:

> I think in a few months we shall have forgotten what pre-Schwinger physics was like.
>
> *F. Dyson*, zitiert nach [Schweber1994]

Abbildung 2.4: Julian Schwinger (©AIP)

Schwingers Arbeiten galten (und gelten) als extrem schwierig und undurchsichtig. Allerdings werden auch Schwingers Fähigkeiten um einige Größenordnungen höher eingeschätzt, als die des Durchschnittstheoretikers. So berichtet Silvan Schweber, selbst kein unbeschriebenes Blatt in der Quantenfeldtheorie, von seinen „awesome computational powers“[61], also „ehrfurchtgebietenden rechnerischen Fähigkeiten“. Ein Blick in seine Arbeiten unterstreicht dies noch einmal. Diese außerordentliche Rechenkraft Schwingers wird noch einmal unterstrichen, wenn man bedenkt, dass er seine Rechnungen ohne die von Feynman eingeführten Tricks durchführte, die heute die Grundlage jeder *praktischen* Rechnung der QED sind.
Entsprechend beurteilte Schwinger auch die Feynmanschen Tricks:

> Like the silicon chip of more recent years, the Feynman-diagram was bringing computation to the masses.
>
> *[Schwinger 1983a] S.343*

Erst mit Feynman wurde die Entwicklung der QED für die breite Masse von Physikern überhaupt mitvollziehbar.

Feynman

So kommen wir also zu Richard P. Feynman, dem wohl berühmtesten und kreativsten Physiker in dieser Generation.
Feynmans Beiträge lassen sich schlecht anhand der Chronologie seiner Veröffentlichungen darstellen. Allzu oft hatte er nur ein lose Menge von Ideen, die aber nicht systematisch ausgearbeitet waren und die er demgemäß auch nicht veröffentlichte. Feynmans Ruhm und die Bekanntheit seiner Arbeit begründete sich daher vor allem auf den Eindruck, den er bei Konferenzen hinterließ. Erst nachdem in Insiderkreisen bekannt war, wie gut und einfach seine Ideen waren, rang er sich zu einer Veröffentlichung durch. Dies gipfelte darin, dass seine Propagator-Theorie der Quantenelektrodynamik erst erschien, nachdem

[61] [Schweber1994], S.309

Dyson die Äquivalenz dieses Ansatzes zu Schwingers feldtheoretischem Ansatz veröffentlicht hatte.

Abbildung 2.5: Richard P. Feynman

Feynmans Arbeiten sind immer unorthodox und enthalten viele anschauliche Vorstellungen, die der Quantenphysik zunächst fremd erscheinen. Die nichtklassischen Elemente der Theorie führt er dann an unerwarteter Stelle mit viel Phantasie durch die Hintertür in die Theorie ein. So sind seine Arbeiten durchdrungen von der Vorstellung von Teilchenbahnen. Die quantentheoretischen Unbestimmtheiten erzeugt Feynman so, dass er in seiner Pfadintegralmethode jeder möglichen Bahn (im Gegensatz zu Ort und Impuls) eine Wahrscheinlichkeitsgewichtung zuordnet. Die dazu benötigte Mathematik ist für strenge Mathematiker ein einziger Albtraum, führt aber mit Feynmanscher Phantasie ganz elegant zu Ergebnissen.
In seiner Theorie der Elektronen und Positronen [Feynman 1949a] nehmen die Teilchenbahnen einen zentralen Platz ein. Diese anschauliche Darstellung muss aber mit einigen sehr merkwürdigen Zügen der quantenmechanischen Unbestimmtheit Tribut zollen, etwa indem sich Teilchen nun in der Zeit rückwärts bewegen müssen. Diese Überlegungen resultieren aus einem „over-all space-time point of view“:

> This view is quite different from that of the Hamiltonian method which considers the future as developing continuously from out of the past. Here we imagine the entire space-time history laid out, and that we just become aware of increasing portions of it successively. In a scattering problem this over-all view of the complete scattering process is similar to the S-Matrix viewpoint of Heisenberg. The temporal order of events during the scattering is irrelevant.
>
> *[Feynman 1949a]*

Die Idee von Wellen, die sich in der Zeit rückwärts bewegen, lässt sich weit zurückverfolgen. Feynman experimentierte schon in den 30er Jahren zusammen mit seinem Mentor John A. Wheeler mit der Idee, die Divergenzen der Elektrodynamik abzuschaffen, indem man auf die Idee des Feldes insgesamt verzichtet[62]. Sie erkundeten auch die Möglichkeiten, die die Hinzunahme avancierter Lösungen in der klassischen Elektrodynamik boten. Das sind Lösungen der Feldgleichungen, in denen die Wirkung zeitlich vor der Ursache liegt, und die gemeinhin als unphysikalisch ausgeschlossen werden, aber gleichwohl mathematisch den retardierten (also kausalen) gleichberechtigt sind.
Genauso entwickelt seine Feynman seine Quantenelektrodynamik aus der Analyse der Wellenausbreitung eines Teilchens, welches der Diracgleichung gehorcht – wobei die Einschränkung auf retardierte Lösungen aufgehoben wird.

> In this solution, the „negative energy states“ appear in a form which may be pictured (as by Stückelberg) in space-time as waves travelling away from the external

[62]Man findet Vorläufer auch dieser Idee bei Dirac, siehe etwa S.32.

potential backwards in time.

[Feynman 1949a]

Dieser Gesichtspunkt ist mathematisch wesentlich einfacher als der feldtheoretische Ansatz, da der mathematische Apparat nun „fundamentally no more complicated than Schrödinger's method of dealing with one or more particles" ist. Dabei folgt Feynman folgender Methode:

> The main principle is to deal directly with the solutions of the Hamiltonian differential equations rather than with the equations themselves
>
> *[Feynman 1949a]*

Feynman macht diesen veränderten Standpunkt anhand der Schrödingergleichung klar:

> The Schrödinger equation
> $$i\partial\psi/\partial t = H\psi \tag{I}$$
> describes the change in the wave function ψ in an infinitesimal time Δt as due to the operation of an operator $\exp(-iH\Delta t)$. One can ask also, if $\psi(x_1, t_1)$ is the wave function at x_1 at time t_1, what is the wave function at time $t_2 > t_1$? It can always be written as
> $$\psi(x_2, t_2) = \int K(x_2, t_2; x_1, t_1)\psi(x_1, t_1)d^3x_1$$
> where K is a Green's function for the linear equation (I).
>
> *[Feynman 1949a]*

In dieser Schreibweise des Problems (die übrigens dem Huygensschen Prinzip entspricht) ist das zentrale Objekt also die Greensfunktion, die die Propagation der Wellenbewegung von (x_1, t_1) nach (x_2, t_2) beschreibt. Diese Greensfunktion heißt deshalb auch „Propagator".

Feynamn berechnet mit dieser Methode in [Feynman 1949a] einfache Streuproblem an einem externen Potential und verwendet zur graphischen Darstellung der Wellenbewegung verschieden Graphen. Dies ist der Auftakt zur Einführung der berühmten Feynmangraphen, die in voller Ausprägung in der folgenden Veröffentlichung *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*[63] erscheinen. Feynman geht dort kompliziertere Probleme der Wechselwirkung an und beschreibt die Kraftwirkung eines elektromagnetischen Feldes durch den Austausch von Photonen. Alle Prozesse der Elektrodynamik werden durch Emission und Absorption von Photonen beschieben, die einen Impulsübertrag auf die Elektonen schaffen (siehe Abbildung 2.6). Photonen sind durch geschlängelte, Elek-

Abbildung 2.6: Feynmangraphen

[63] [Feynman 1949b]

tronen durch durchgehende Linien dargestellt. Die Zeit läuft von links nach rechts, die Pfeilrichtung gibt die Bewegungsrichtung der Elektronen in der Zeit an. Links sehen wir somit Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares und deren anschließende Vernichtung (Vakuumpolarisation). In der Mitte die Streuung eines Elektrons im äußeren Feld mit Erzeugung und Absorption eines intermediären Photons. (Anomalie des magnetischen Momentes). Rechts Emission und Absorbtion eines Photons beim freien Elektron.

> I was sort of half-dreaming, like a kid would ... that it would be funny if these funny pictures turned out to be useful, because the damned Physical Review would be full of these odd-looking things. And that turned out to be true.
>
> *Feynman*, zitiert nach *[Kaku 1994], S.163*

Durch diese durch und durch anschauliche Vorstellung der Wechselwirkung konnte Feynamn quasi durch bloßes Ansehen des Prozesses die richtige Gleichung aufschreiben. Denn die sogenannten Feynmanregeln bestimmen zu jedem Graphen einen bestimmten Faktor in der zu lösenden Gleichung. Neben dieser relativ einfachen Methode des Aufschreibens der entsprechenden Gleichungen besaß Feynman auch die nötige Virtuosität im Lösen dieser Gleichungen. Dieses ist das zweite Element von Feynmans überwältigendem Erfog. Denn obwohl seine graphische Methode schnell die richtigen Gleichungen liefert, sind diese nicht trivial zu lösen und enthalten außerdem die bekannten Divergenzen. So sind die heutigen Lehrbücher der QED nicht nur voll von Feynmangraphen und -regeln, sondern auch von „Feynmans Parametertricks“ zum Lösen komplizierter Integrale.
In welchem Maße Feynman mit diesen beiden Fähigkeiten seinen Zeitgenossen vorraus war, belegt folgende gern erzählte Geschichte: Ein Student, der in seiner Dissertation die Wechselwirkung zwischen Neutron und Elektron berechnet hatte, wurde bei einem Vortrag auf einer Konferenz von Oppenheimer böse kritisiert. Als Feynman von dem Vorfall hörte, berechnete er innerhalb von ein paar Stunden seine Version dieser Rechnung. Am nächsten Morgen wollte er seine Rechnung mit derjenigen des Studenten vergleichen. Dieser war völlig entgeistert, als er hörte, dass Feynman eine Rechnung, für die er zwei Jahre gebraucht hatte, an einem einzigen Abend durchgeführt hatte. Darüberhinaus hatte Feynman gleich ein allgemeineres Problem berechnet.

> This was when I really knew I had something. I really didn't know that I had something so wonderul as when this happened [...]. That was the moment that I really knew that I had to publish – that I had gotten ahead of the world.
>
> *Feynman* , zitiert nach *[Schweber1994]*

Feynman hatte bis dahin gar nicht das Gefühl gehabt, irgendetwas Neues geschaffen zu haben.

> It was te purpose of making these simplified methods of calculating more available that I published my paper in 1949, for I still didn't think I had solved any real problems, except to make more efficient calculations. But it turns out that if the efficiency is increased enough, it itself is practically a discovery. It was a lot faster way of doing the old thing.
>
> *Feynman* zu einer Studentenzeitschrift, nach *[Schweber1994], S.457*

Der Vorfall ereignete sich im Januar 1949. Erst da kam ihm der Gedanke zu publizieren.

Abbildung 2.7: Die Shelter-Island-Konferenz 1947. Feynman in der Mitte, Schwinger ganz rechts hockend. Diese Konferenz gilt als der Wendepunkt der Geschichte der Quantenelektrodynamik. (©AIP)

Dyson

Über Freeman Dyson wird folgende Geschichte erzählt:

> [Jemand] made the following remark: „Theoretical physics is in such a mess, I have decided to switch to pure mathematics," whereupon Dyson remarked, „That's curious. I have decided to switch to theoretical physics for precisely the same reason!"
> *[Schweber1994], S.491*

Dyson war Brite und kam direkt nach dem Krieg nach Amerika, wo gerade Schwingers und Feynmans Stern aufging. Er machte sich schnell mit Schwingers Lösungen vertraut und befreundete sich eng mit Feynman, wobei er dessen bisher unveröffentlichte Methoden kennenlernte. Dyson erkannte schnell die Äquivalenz dieser so unterschiedlich erscheinenden Methoden. Merkwürdig an Dysons Arbeit über die Vereinheitlichung der Ansätze von Schwinger, Tomonaga und Feynman ist dass sie im Großen und Ganzen *vor* dem Erscheinen der Arbeiten der Autoren publiziert wurde. Feynman hatte bis dato keine zusammenhängende Theorie geschaffen, sondern eine Menge funktionierender Regeln, wie die in der Quantenelektrodynamik auftretenden Prozesse berechnet werden könnten. Erst durch die Arbeit von Dyson wurden nicht nur die inneren Zusammenhänge von Feynmans Gedanken deutlich, sondern auch der Zusammenhang von Schwingers und Feynmans Ansätzen. Auch Schwinger hatte seine zweite Arbeit zur Quantenelektrodynamik erst im gleichen Heft der *Physical Review* wie Dyson. Schwingers und Feynmans Fortschritte wurden zunächst in Vorträgen auf Konferenzen publik gemacht, und für eine Veröffemtlichung schienen sie ihren Schöpfern noch nicht perfekt genug (obwohl bei Feynman auch Schreibfaulheit im Spiel gewesen sein mag[64]). Mit Dysons Arbeit bekommt die QED erstmals eine sowohl (halbwegs) mathematisch korrekte als auch verdauliche Form. Mit Dyson erreicht

[64] [Gleick 1993]

die Theorie eine Höhe von logischer und systematischer Konsistenz und Klarheit.
Dyson selbst erklärt den Stand der Dinge in der Einleitung so:

> As a result of the recent and independent discoveries of Tomonaga, Schwinger and Feynman, the subject of quantum electrodynamics has made two very notable advances. On the one hand, both the foundations and the applications of the theory have been simplified by being presented in a completely relativistic way; on the other, the divergence difficulties have been at least partially overcome. In the reports so far published, emphasis has naturally been placed on the second of these advances; the magnitude of the first has been somewhat obscured by the fact that the new methods have been applied to problems which were beyond the range of the older theories, so that the simplicity of the methods was hidden by the complexity of the problems. Furthermore, the theory of Feynman differs so profoundly in its formulation from that of Tomonaga and Schwinger, and so little of it has been published, that its particular advantages have not hitherto been available to users of the other formulations. The advantages of the Feynman theory are simplicity and ease of applicaton, while those of Tomonaga-Schwinger are generality and theoretical completeness.
>
> *[Dyson 1949a]*

Dyson beschreibt das Ziel der Arbeit als zweifach: Schwingers Theorie zu vereinfachen, und die Äquivalenz der verschiedenen Ansätze zu zeigen. Dabei gliedert er Feynmans Ideen in die Feldtheorie ein, ein Ansatz der Feynman selbst bis dahin völlig fremd geblieben war. Dabei gelingt ihm die Verbindung von Feynmanscher Anschaulichkeit mit der größeren theoretischen Strenge Schwingers.
Darüberhinaus gelingt es ihm nachzuweisen, dass die Renormierungsverfahren bis zu einer beliebigen (endlichen) Ordnung funktionieren[65].
Auf dem Wege dahin erkennt Dyson, dass das, was man die ganze Zeit auszurechnen versuchte, gerade Heisenbergs S-Matrix ist. Der Witz liegt darin, dass sie von Heisenberg selbst als Versuch gemeint war, die Physik radikal abzuändern.

> It came as a great shock to me in Princeton to find the work we had been doing was calculating the S-matrix: Heisenberg was only talking about it [...]. Heisenberg's work was always presented as being new physics so the surprising thing was to find the old physics led to it in a natural way.
>
> *Dyson*, zitiert nach *[Schweber1994] S.507*

Auch Pauli spricht dies in einem Brief an Heisenberg deutlich aus:

> Die S-Matrix dürfte zwar in einer künftigen Theorie existieren, scheint aber als Ausgangspunkt einer Theorie völlig ungeeignet. Sie ist nicht diejenige Größe, die in den allgemeinen Naturgesetzen vorkommen wird, sondern eine späte Folgerung aus diesen.
>
> *Pauli an Heisenberg 20.10.48 [Pauli 1979] III*

Mit Dysons Arbeit war die Quantenelektrodynamik zunächst einmal über den Berg und hatte den Status einer erfolgreichen Theorie erreicht – ihr empirischer Erfolg ist bis heute einzigartig. Die verschiedenen Methoden waren zu *einer* Theorie verknüpft und die

[65]Dieses Ergebnis musste später noch einmal relativiert werden – aber wir wollen hier nicht pingelig sein.

Unterschiedlichkeit der Ansätze nur als verschiedene Gesichtspunkte und Techniken innerhalb der einen Quantenelektrodynamik erkannt. Dyson hatte der QED ihre gültige Lehrbuchform gegeben. Das heißt aber nicht, dass die Renormierung nicht weiterhin verschiedensten konzeptionellen Bedenken ausgesetzt geblieben wäre. Gerade der Umstand, mit unendlichen Größen starten zu müssen, und nur auf Umwegen zum physikalischen Gehalt der Theorie vordringen zu können, ließ die Skepsis lebendig bleiben.

> Accordingly, what is to be looked for in a future theory is not so much a modification of the present theory which will make infinite quantities finite, but rather a turning-round of the theory so that the finite quantities shall become primary and the infinite quantities secondary.
>
> *[Dyson 1949b]*

2.5 Wissenschaftstheoretische Bemerkungen

2.5.1 Der konservative Durchbruch

Die zwanziger Jahre der Physik sind wohl das Paradebeispiel für das, was T.S. Kuhn eine wissenschaftliche Revolution nennt. Im Vergleich zum normalen Gang des Forschens, wo innerhalb anerkannter Begrifflichkeit und Probleme systematisch neue Erkenntnisse erzeugt werden, zeigt sich hier ein „Paradigmenwechsel“, wo neue Grundbegriffe etabliert werden und sich die Ordnung aller Dinge, auch der schon bekannten, verschiebt. Heisenberg bezeichnete das gleiche Phänomen mit dem Begriff „abgeschlossene Theorie“.
Die Quantenmechanik ist eine besonders heftige Erschütterung dieser Art, da sie das Wesen der Physik selbst, namentlich die Natur der Realität und die Einbettung des menschlichen Daseins in dieselbe fragwürdig machte.
Ende der 20er Jahre war so der Rahmen für die Physik abgesteckt, und grundsätzlich geklärt, auf welche Weise und Methode jedes konkrete physikalische Problem gelöst werden sollte. Für die nichtrelativistische Punktmechanik lag ein so klares und selbstkonsistentes Schema vor, dass die Eingliederung der speziellen Relatvitätstheorie und des elektromagnetischen Feldes durch naheliegende Verallgemeinerungen eigentlich hätte gelingen sollen. Die Divergenzprobleme machten diesen Anstrengungen aber die ganzen 30er Jahre hindurch einen Strich durch die Rechnung, so dass man sicherlich im Kuhnschen Sinne von einer Krise sprechen darf. Das Eigentümliche des Durchbruchs von 1946-48 ist jedoch, dass die Krise nicht in einer wissenschaftlichen Revolution überwunden wurde, sondern durch ein konservatives Festhalten an den überkommenen Grundbegriffen und Konzepten.

> Things changed only just enough so that they could stay the same.
>
> *[Weinberg 1977]*

Die Geschichte der Quantenelektrodynamik stellt vielleicht kein Gegenbeispiel zur Kuhnschen Theorie dar, zeigt aber doch, dass die Unterscheidung von normaler Wissenschaft und Revolutionen eine allzu grobe Unterscheidung für die verschiedenen Phasen einer Wissenschaft sind. Die folgenden Bemerkungen sollen dies verdeutlichen.

Die alte Garde der Begründer der Quantentheorie (Heisenberg, Bohr, Dirac) versuchten diese Situation wie in den 20er Jahren anzugehen: durch radikale Änderungen in den

Grundlagen der Physik. Heisenberg beschreibt[66] die Erfahrung solchen revolutionären Denkens als das Gefühl, den Ast auf dem man sitzt anzusägen.

> That can't be helped, because after all one never can rest. There is no solid bottom.
>
> *[Interview AHQP]*

Dieses *wissenschaftliche Grundgefühl*, letztlich keinen festen Grund unter den Füßen zu haben, ist typisch für die Physikergeneration, die zwischen 1900 und 1928 in die Wissenschaft initiiert worden ist. Jeder, der in dieser ersten Phase der Quantenmechanik die Physik kennenlernte, hat bestimmt kein Grundvertrauen in irgendeine „richtige“ Theorie gelernt.

> Apparently, as soon as you have started in your youth doing physics on this solid ground, then you never dare later on to come away from it. Einstein and Planck had these difficulties and again the younger generation have the same difficulties. Only our generation, since we have grown up into a complete mess, is in the happy position that we are quite willing to give up schemes if necessary.
>
> *Heisenberg [Interview AHQP]*

Heisenberg stellte immer wieder fest, dass in diesem Sinne die jüngere Generation wesentlich festeres Vertrauen in die Quantentheorie besitzt als ihre Begründer. Hier spielt auch Heisenbergs philosophische Grunderfahrung mit hinein, nach der die „Erkenntnis über einer grundlosen Tiefe schwebe“, also keinen festen Ausgangspunkt habe.[67]
Bohr blies 1939 auf der Warschauer Konferenz ins gleiche Horn und forderte eine noch radikalere Abkehr von den bisherigen Grundlagen der Physik:

> Quite apart from any prospect of mastering hitherto unresolved problems in atomic theory,...there can be no question in further developments of returning to a description of atomic phenomena in closer conformity with the causality ideal. Rather we are here confronted with the necessity of a still more radical departure from acustomed modes of description of natural phenomena implying a further extension of the point of view of complementarity.
>
> *Bohr*, zitiert nach *[Schweber1994], S.99*

Entlang dieser Linien suchten die Koryphäen der Quantenmechanik eine Lösung der Probleme. Heisenbergs schon erwähnte Suche nach einer fundamentalen Längeneinheit, einem „Längenquantum“, das die Theorie genau wie die Entdeckung des Wirkungsquantums revolutioniert hätte, und entsprechend seine S-Matrix Theorie lagen in dieser Richtung.
Wir Nachgeborene bemerken hier die fast paradoxe Situation, dass gerade die Suche nach möglichst radikalen Veränderungen eine allzu *konservative* Einstellung sein kann. Denn die allgemeine Methodik, nach der Bohr und seine Schüler hier vorgehen, war geprägt durch die Situation, in der sie sich 20 Jahre vorher bewährt hatten. Was sich aber nun ab 1948 als gangbarer Weg zeigte, war im Gegenteil geführt durch ein geduldiges Festhalten am Erreichten.
Denn da zeigte sich, dass der feste Grund, auf den die neue Physikergeneration geboren worden war und auf den sie vertraute, tatsächlich tragfähig genug war, alle Probleme zu lösen. Alle Alternativvorschläge erledigten sich quasi übernacht mit dem großen Durchbruch 1947/48. Und dieser Durchbruch war, wie Schweber es nennt, rein „konservativ und technisch“.

[66] [Interview AHQP]
[67] vgl. etwa seinen Vortrag vom 9.7.48 *Die gegenwärtigen Grundprobleme der Atomphysik*

> The circumvention of the divergence difficulties was the work of a handful of individuals [...] and the solution advanced was conservative and technical.
>
> *[Schweber1994]*

Denn alles, was geschah, war, dass mit rechentechnischen Verbesserungen die alten Konzepte plötzlich mit sinnvollen Ergebnissen ausgestattet werden konnten. So bemerkte Schwinger:

> I was the one guy, who was not trying desperately to change field theory, but asking, what was it really saying....I am a field theorist and a conservative one in the creative sense of not willing to abandon,what has been hard won.
>
> *Schwinger*, zitiert nach *[Schweber1994], S.303*

Auch Feynman lag auf dieser konservativen Linie; er beschrieb seine Fortschritte ebenso als „a faster way of doing the old thing“.

> I still didn't think I had solved any real problems, except to make more efficient calculations. But it turns out that if the efficiency is increased enough, it itself is practically a discovery.
>
> *Feynman*, nach *[Schweber1994], S.457*

Dass der durch Schwinger und Feynman eingeleitete Durchbruch vor allem ein Produkt eines amerikanischen pragmatischen Konservatismus war, ist nicht nur eine Idee der heutigen Historiker[68], sondern entspricht auch der Selbstwahrnehmung und -darstellung vor allem Schwingers. Schon 1949 machte sich Pauli über Schwingers so zur Schau gestellte Konservativität lustig, da er hinter dem Schwingerschen Formalismus ein zwar noch unbekanntes aber doch *neues* physikalisches Konzept vermutete:

> Deshalb finde ich Schwingers Illusion, dass er seine Endresultate (aus der alten Theorie von Heisenberg und mir) ohne neue Annahmen deduzieren könne, nicht nur in logischer Hinsicht verwirrend, sondern auch ein Hemmnis für den weiteren Fortschritt und eine unsachliche Herabsetzung von Schwingers eigenem (guten) physikalischen Instinkt zu Gunsten eines unhaltbaren Pseudo-Konservatismus.
>
> *Pauli an Bethe 29.1.49, [Pauli 1979],III*

Einen knappen Monat später vermutet er in einem Brief an Oppenheimer „strong psychological reasons for the very conservative appearance of his theory“. [69]

2.5.2 Gründe für den Stillstand in den 30er Jahren

Die Bedeutung der experimentellen Grundlagen

Gerade bei dieser Form des „konservativen Durchbruchs“ stellt sich die Frage, wieso es mehr als 15 Jahre dauerte[70], bis der entscheidende Fortschritt gelingen konnte. Wie Steven Weinberg[71] bemerkt, wäre der Durchbruch 1947-49 schon ab 1934 jederzeit in der einen oder anderen Form möglich gewesen. Zwar wären ohne die Idee der Renormierung,

[68] [Schweber1994],[Weinberg 1977]
[69] [Pauli 1979],III, S.637
[70] zieht man den Krieg ab, so ist es immer noch eine Dekade
[71] [Weinberg 1977]

also die Absorption der Unendlichkeiten in einer Redefinition der physikalischen Parameter, die Rechnungen formal unendlich geblieben, aber die tatsächlichen Korrekturen an observablen Größen (Lamb-Shift, anomales magnetisches Moment ...) wären doch schon abschätzbar gewesen. Es gab aber, wie wir nun sehen wollen, bis nach dem Krieg keinerlei experimentellen Druck, die Theoretiker zu einem solchen rechentechnischen Pragmatismus zu nötigen.

In den beiden Jahrzehnten zuvor, gestützt nur auf konzeptionelle Überlegungen, bedeuteten die auftretenden Unendlichkeiten als innere Inkonsistenzen gleich den Tod der Quantenelektrodynamik als ernstzunehmender Theorie. Vom theoretischen Standpunkt aus waren daher nicht endliche Beiträge der Divergenzen gesucht, sondern im Sinne des „kill or cure“ Prinzips sollten die Divergenzen insgesamt und komplett verschwinden. Die Diracsche Theorie von 1928 genoß ein überaus großes Ansehen, so dass kaum jemand ernsthaft an der Richtigkeit des von ihr vorhergesagten magnetischen Moments zweifelte. Gerade dessen theoretische Herleitung aus der Dirac-Gleichung bezeichnet eine der großen Sternstunden der Physik; sie hatte sich durch das Zusammenfallen von theoretischer Eleganz und empirischer Adäquatheit[72] ein riesiges Vertrauen verdient. Sie war Physik wie sie sein sollte. Da auch von experimenteller Seite kaum Abweichungen bekannt waren – allerdings wurde die Aufhebung der Entartung des $2S_{1/2}$ und des $2P_{1/2}$ schon 1938 von Houston und Williams [73] entdeckt –, gab es hier die geschilderte „entweder – oder“ Situation.

Der mittlere Weg zwischen „kill“ und „cure“, die Unendlichkeiten der Feldtheorie zu endlichen observablen Änderungen der Dirac-Theorie zurechtzustutzen, kam damit niemandem in den Sinn. Obwohl sich schon Oppenheimer 1930 mit der Berechnung von Energie*differenzen* herumschlug, kam diese Sichtweise nie in Mode, wohl auch weil Oppenheimer feststellte, dass auch die von ihm berechneten Energiedifferenzen nicht endlich bleiben müssten. Auch die Berechnung von Energiedifferenzen funktioniert nämlich erst dann, wenn der *volle* Begriff der Renormierung zur Verfügung steht.

Erst mit dem Lamb-Shift bekam die QED plötzlich die Aufgabe, einzelne und besondere Phänomene zu erklären bzw. zu berechnen. Damit änderte sich ihr Status *in der Praxis* aber von einem grundlegenden Naturgesetz und Prinzip zu einem System von Erklärungen (oder zumindest Berechnungen) für bestimmte Phänomene, d.h. die Korrekturen zu Energie und magnetischem Moment. Für ein solches System von Erklärungen gelten natürlich ganz andere Maßstäbe als für einen theoretischen Grundentwurf der gesamten Natur[74]. Das erklärt auch, warum die Entwicklung so rapide voran ging, nachdem der Lamb-Shift und das anomale magnetische Moment experimentell gesichert waren.

> There is a huge apparent distance between the equations that theorists play with at their desks, and the practical reality of atomic spectra and collision processes. It takes a certain courage to bridge this gap, and to realize that the products of thought and mathematics have something to do with the real world. [...] The great thing accomplished by the discovery of the Lamb-Shift was not so much that it forced us to change our physical theories, as that it forced us to take them seriously.
>
> [Weinberg 1977], S.30

[72] Spätestens seit der Entdeckung des Positrons

[73] [Schweber1994], S.91

[74] siehe etwa [Cartwright 1983]

Bei einer Podiumsdiskussion [Brown und Hoddeson 1983] war auch Weisskopf einer ähnlichen Meinung, als er sagte, dass durch experimentellen Druck der Durchbruch schon Mitte der 30er Jahre hätte erfolgen können:

> If there had been a Lamb-Retherford experiment at that time, probably a lot of us, I'm sure Euler and myself, would have sat down and tried to calculate it, and I don't see why we couldn't have calculated it pretty much in the same way as French and I, or Kroll and Lamb, did later. We probably would not have used the elegant methods developed by Feynman, Dyson, etc., but we probably would have gotten the correct result, as we did in 1948.
>
> *V. Weisskopf [Brown und Hoddeson 1983] S.270*

Verpasste Chancen in der Theorie: E.C.G. Stückelberg

Neben den experimentellen Anstößen gab es aber auch einige theoretische Entwicklungen, die, wären sie frühzeitig gewürdigt und verstanden worden, schon in den 30er Jahren den Durchbruch hätten bringen können. Dazu gehört vor allem die theoretische Arbeit von E.C.G. Stückelberg. Stückelbergs Arbeit und Leben ist vom historischen Standpunkt besonders interessant, da es in allen „Was wäre geworden wenn" Spekulationen in der Geschichte der Quantenfeldtheorie einen zentralen Platz einnimmt. Sein Leben und Werk sind inzwischen zu einer tragischen Legende geworden.

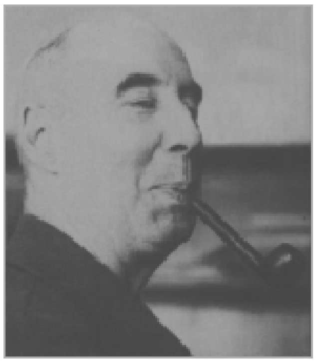

Abbildung 2.8: Ernst C. G. Stückelberg von Breidenbach

Ernst Carl Gerlach Stückelberg lebte von 1905 bis 1984. Er studierte in München bei Sommerfeld und promovierte 1927 in Basel. Danach unterrichtete er ein paar Jahre in Princeton. Stückelberg kam 1933 als Privatdozent nach Zürich, ging 1935 als Professor für theoretische Physik nach Genf, zwischen 1942 und 57 unterrichtete er zusätzlich in Lausanne.
Die Liste von Stückelbergs Beinahe-Erfolgen ist sehr lang und umschließt einige der größten Durchbrüche in der zeitgenössischen Physik. 1934 hatte er ungefähr gleichzeitig mit Yukawa die Idee, die Kernkräfte durch den Austausch eines massiven Vektorbosons zu beschreiben. Aufgrund von Paulis Widerstand wurde diese Idee allerdings nicht publiziert. Auch das entscheidende theoretische Werkzeug zur Renormierung wurde von Stückelberg antizipiert[75]: Die relativistische Invarianz der Rechnungen. Diese invariante Formulierung der Störungstheorie hätte somit sehr gut eine Basis für die Renormierung abgeben können, wie Viktor Weißkopf bemerkte[76]. 1941/42 findet sich die Interpretation der Positronen als Elektronen, die rückwärts in der Zeit laufen, eine Idee, die später durch Feynman populär wurde. Diese Ideen wurden durch Graphen illustriert, die die Feynman-Diagramme um mehr als 5 Jahre antizipierte. [Crease und Mann 1986] berichten darüberhinaus, dass Stückelberg irgendwann 1942/43 einen Artikel an die Physical Review schickte, in dem die gesamte Renormierungsprozedur für die QED korrekt beschrieben wurde. Dieses wurde

[75] [Stückelberg 1934], [Stückelberg 1938]
[76] [Weisskopf 1983]

abgelehnt, weil es sich nach den Worten des Gutachters eher um ein Programm oder eine Skizze handelte denn um einen echten Artikel.
Auch seine private Geschichte ist durchzogen von widrigen Umständen, die sich auf die physikalische Karriere sicherlich hinderlich auswirkten. Zunächst musste er nach seiner Rückkehr aus den USA feststellen, dass ihm trotz seiner Lehrtätigkeit in Princeton die formalen Qualifikationen zum Unterrichten in der Schweiz fehlten. So konnte er zunächst nur eine schlechtbezahlte Stelle als Privatdozent an der Universität Zürich annehmen. Weiterhin verlor er das Vermögen seiner ersten Frau durch schiefgelaufene Geschäftsinvestitionen, so dass er schließlich in der Armee seinen Lebensunterhalt verdienen musste. So wurde nicht nur seine akademische Arbeit aufgehalten, er konnte die Schweiz auch nicht verlassen und war so relativ isoliert. In die Zeit größten persönlichen und finanziellen Drucks fallen wohl auch die ersten Symptome manisch-depressiven Verhaltens. Aufgrund dieser Krankheit verbrachte er immer wieder einige Wochen im Krankenhaus, wo die verschiedensten Therapiemethoden, inclusive Elektroschocks, an ihm ausprobiert wurden – erfolglos.
Stückelbergs Ideen scheinen sehr schwierig zu verstehen gewesen zu sein. Die Nützlichkeit der vorgestellten Formulierungen war oft nicht einzusehen. Markus Fierz, damals in Basel, neigte zu einer kompletten Ablehnung der Stückelbergschen Ideen. Im Sommer 1949 schrieb er an Pauli, die Stückelbergsche (und auch die Feynmansche) Methode sei nur ein „heuristischer Gesichtspunkt für gewisse Naturen“, die einer ernsthaften Kritik nicht standhalte „und soweit man sein Vorgehen rechtfertigen kann, ist es genau dasselbe wie die Quantenelektrodynamik.“[77]
Res Jost scheint in seinen Erinnerungen an seine Assistentenzeit in Zürich das Verständnisproblem eher auf der Seite von Stückelbergs nicht ganz so weitsichtigen Zuhörern zu suchen und schreibt lapidar: „Den großen E.C.G. Stückelberg - von Breidenbach haben wir nicht verstanden.“[Jost 1984]. Victor Weisskopf erzählt[78], wenn er oder Pauli Stückelberg verstanden hätten, hätten sie schon 1936 den Lamb-Shift oder das anomale magnetische Moment berechnen können.
Aber nicht nur die physikalischen Konzepte Stückelbergs blieben den meisten Physikern schleierhaft. Das Verständnis wurde auch noch durch seine komplizierte Art der Darstellung seiner Ideen erschwert. Er benutzte oft seine privaten Konventionen in der mathematischen Notation.

> Stückelberg switched the ordinarily used terms for variables with those for parameters, put the indices on the opposite side of the symbols, and filled his equations with an incomprehensible forest of curved arrows an colored letters.
>
> [Crease und Mann 1986], S.142

Auch Weisskopf schrieb, Stückelbergs

> writings and his talks were rather obscure, and it was very difficult to understand them or to make use of his methods. He came frequently to Zürich in the years 1934-6, when I was working with Pauli, but we could not follow his way of presentation.
>
> *V. Weisskopf in [Brown und Hoddeson 1983]*

Zusätzlich waren seine Arbeiten fast durchweg auf französisch geschrieben, da „sein Sekretär ausschließlich französisch sprach“[79]. Da damals noch Deutsch und schon Englisch

[77] Fierz an Pauli 17.6.49 [Pauli 1979] III
[78] [Brown und Hoddeson 1983]
[79] [Crease und Mann 1986],S.142

die hauptsächlich in der physikalischen Literatur verbreiteten Sprachen waren, war dies wohl ein weiteres Hindernis zu Stückelbergs internationaler Anerkennung.
Alle Faktoren zusammen bewirkten, dass seine Artikel kaum zur Kenntnis genommen wurden. Dass Stückelberg sowohl in Dysons zweitem Artikel über die Renormierung als auch von Feynman zitiert wird, ist allein auf Paulis Intervention zurückzuführen. Erst im Lichte der fertigen QED erscheinen Stückelbergs Arbeiten als die visionären Produkte, als die sie heute bekannt sind.
Ein Beispiel für die spätere Durchsetzung und Würdigung von Stückelbergs Arbeit ist [Stückelberg und Petermann 1953], in der er zusammen mit Andre Petermann die Renormierungsgruppe einführt wird. Für den Kontext dieser Dissertation ist die Arbeit aber vor allem wegen der erstmaligen expliziten Benutzung des Begriffes der Distribution besonders wichtig, weswegen wir noch auf sie zurückkommen werden.

Kapitel 3

Der mathematikhistorische Kontext

Die Vorgeschichte der Theorie der Distributionen ist in Jesper Lützens *The Prehistory of the Theory of Distributions*[1] ausführlich beschrieben worden. Seinen Gedankenlinien folgend, möchte ich dieses Kapitel auf einen groben Überblick beschränken und verweise den an Details interessierten Leser direkt an das Original. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass aus unbekannten Gründen die mathematikhistorische Literatur und Forschung um einige Größenordnungen die physikhistorische übersteigt. Es finden sich also einige ausgezeichnete Werke, die sich mit der Geschichte der Funktionalanalysis beschäftigen[2]. Der engagierte Leser wird also leicht ein zu ihm passendes Werk finden können.

Die Theorie der Distributionen gehört heute in die Funktionalanalysis. Nichtsdestotrotz entstand die Theorie nicht allein aus der Fortentwicklung funktionalanalytischer Fragestellungen. Vielmehr entstand die Theorie als Vereinheitlichung und Vereinfachung einer Reihe von unabhängigen Gedankengängen und Methoden, die an den unterschiedlichsten Stellen Eingang in die Mathematik und die theoretischen Physik gefunden hatten. [Lützen 1982] nennt

1. Heavisides „operational calculus“
2. Verallgemeinerte Ableitungen und verallgemeinerte Lösungen von Differentialgleichungen
3. Verallgemeinerte Fouriertransformationen
4. Uneigentliche Funktionen
5. De Rahms Arbeiten im Rahmen der algebraischen Topologie über „Ströme“.

Die Theorie der Distributionen ist für die Mathematikhistoriker von besonderem Interesse, da offenbar keine vertikale Entwicklung in sachlich unbekanntes Gebiet stattfindet, sondern eine horizontale Entwicklung, die verschiedene halbwegs bekannte oder geahnte Sachverhalte aus unterschiedlichen Teilgebieten vereinigt und unter einem neuen Gesichtspunkt betrachtet. Distributionen sind nicht eigentlich neu *entdeckte* Objekte, sie sind vielmehr eine neue Unterscheidung innerhalb von schon bekannten Zusammenhängen (und damit neu *als* Objekt).

[1] [Lützen 1982]
[2] es sei hier nur Dieudonnés „Geschichte der Mathematik“ genannt

Die Geschichte des Auftretens der Distributionen als uneigentliche Funktionen in der Physik (Punkt 4) wird in dieser Arbeit noch ausführlicher behandelt werden. Auch die Arbeiten Heavisides (Punkt 1), die ebenfalls in die Geschichte der Physik gehören, werden in Kapitel 4 besprochen; der Abschnitt 3.2 soll zur Übersicht die Eckdaten zusammentragen.
Der Hauptteil dieses Kapitels 3.1 soll einer Skizze der mehr mathematischen Entwicklungen dienen und den mathematikhistorischen Kontext beschreiben. Dort werden allem die Punkte 2 und 3 kurz skizziert und die Arbeiten Schwartz' und Sobolevs beschrieben werden. Der fünfte von Lützen genannte Punkt übersteigt die im Rahmen der Arbeit vorrausgesetzte Mathematik und wird schlicht übersprungen.

3.1 Vorgeschichte der Distributionen

Kommen wir nun zur Darstellung des rein mathematikhistorischen Kontexts, der zur Theorie der Distributionen führte.

Kurze Skizze der Geschichte der Funktionalanalysis

Die Wurzeln der Funktionalanalysis liegen einerseits in der Variationsrechnung und andererseits in der Theorie der Integralgleichungen. Innerhalb des ersten Zusammenhanges führte V. Volterra 1887 die „Funktionen von Linien“ ein; J. Hadamard prägte 1903 dafür den Begriff „Funktional“. 1906 führte M. Fréchet in seiner Doktorarbeit den Begriff „Funktionalanalysis“ ein und begann das systematische Studium von Funktionenräumen und reellwertigen Abbildungen, also rellen Funktionalen. Die gestellte Aufgabe lag in der Variationsrechnung, die betrachteten Funktionale waren im Großen und Ganzen Integrale. Die Bestimmung des Extremums eines Integrals sollte als Differentiation des Funktionals beschrieben werden, damit etwa die Maxima und Minima des Integrals in Abhängigkeit von der zu integrierenden Funktion als Nullstelle einer Ableitung definiert werden konnten. Fréchets Arbeiten stießen aber schnell an eine Grenze, da seine Funktionenräume noch nicht als lineare Räume gedacht waren.
Erst David Hilbert (1860-1940) arbeitete in seiner Theorie der linearen Integralgleichungen mit Funktionenräumen mit linearer Struktur. Hilbert studierte die Äquivalenz eines unendlichen Systems von algebraischen Gleichungen von unendlich vielen Unbekannten mit einer Integralgleichung. Dabei stieß Hilbert bis 1910 auf die (heute so bezeichneten) Räume $\mathcal{L}^2$ und l^2, also die Räume der quadratintegrablen Funktionen bzw. quaderatsummablen Folgen. 1907 bewiesen E. Fischer und F. Riesz die Äquivalenz der beiden Räume. Dass diese Räume auch geometrischer Anschaulichkeit und Begrifflichkeit zugänglich waren, wurde zuerst in einer Arbeit von E.Schmidt 1908 gezeigt. Der volle Begriff des Hilbertraumes entstand dann 1927 in John von Neumanns Arbeiten über die mathematischen Prinzipien der Quantenmechanik[3].
Die Räume $\mathcal{L}^p$ wurden von F.Riesz 1910 in Zusammenhang mit der Lösung von Integralgleichungen ausführlich diskutiert und zu Beginn der 1920er Jahre von Stefan Banach axiomatisiert. Diese waren die ersten Beispiele für allgemeine normierte Räume, deren Norm nicht aus einem Skalarprodukt abgeleitet werden konnte.
Die ersten interessanten Ergebnisse über stetige lineare Funktionale erreichte Hadamard

[3] die in Kapitel 6 besprochen werden wird

seit 1903 mit einer Reihe von Darstellungstheoremen. Er konnte zeigen, dass jedes stetige lineare Funktional T als Grenzwert einer Folge von Integralen

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} \int f(t) g_n(t) dt \quad , \quad g_n \text{ stetig}$$

geschrieben werden kann. F. Riesz verbesserte diesen Satz 1909, indem er zeigte, dass ein stetiges lineares Funktional als Stieltjes-Integral

$$T(f) = \int f(t) d\alpha$$

dargestellt werden kann, wobei α eine Funktion beschränkter Variation bedeutet. Ein Jahr später konnte er zeigen, dass ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{L}^p$ als

$$T(f) = \int f(x) g(x) dx \quad ; \quad g \in \mathcal{L}^q \quad ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

dargestellt werden kann. Dieses Theorem zeigte, dass manche Funktionale als gewöhnliche Funktionen aufgefasst werden können, auch wenn diese für $p, q \neq 2$ einem anderen Funktionenraum angehören. Die letzten beiden Theoreme zeigen, dass manche, aber nicht alle linear-stetigen Funktionale durch Funktionen darstellbar sind. Damit war seit 1910 die Möglichkeit der Verallgemeinerung des Konzeptes der Funktion durch die Benutzung von Funktionalen theoretisch gegeben. Allerdings dauerte es bis 1936, bis schließlich Sergei Sobolev (1908-1989) Funktionale als verallgemeinerte Funktionen benutzte.
[Lützen 1982] nennt zwei Gründe für die lange Dauer von der theoretischen Möglichkeit bis zur tatsächlichen Realisierung dieser Verallgemeinerung: Es gab erstens keine genügend starke mathematische Motivation diesen Schritt zu unternehmen und zweitens war die Theorie der Dualräume[4] noch nicht weit genug entwickelt. Da Distributionen eben die Elemente des Dualraumes eines gegebenen Funktionenraumes sind, ist klar, dass in der Theorie der Dualität die Erkenntnis der besonderen mathematischen Zusammenhänge bereitgestellt wird, die sich schließlich in den begrifflichen Unterscheidungen der Theorie der Distributionen verdichten. Es ist bezeichnend, dass auch L. Schwartz vor seiner Distributionentheorie über Dualität arbeitete.
Der erwähnte erste Punkt ergibt sich aus der Tatsache, dass die meisten Problemfelder, die eine Verallgemeinerung des Funktionenkonzeptes forderten in ganz verschiedenen mathematischen Problembereichen verstreut lagen. Am meisten involviert waren sicherlich die Physiker, die aber größtenteils keine Funktionalanalysis beherrschten. Zwar beschäftigte sich etwa Pauli um 1928 mit der „Volterraschen Funktionalmathematik“, zog aber keine direkte Verbindung zum Problem der δ-Funktion.
Innerhalb der Mathematik wurden Verallgemeinerungen des Funktionsbegriffes vor allem in zwei Bereichen gesucht: In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und in der Theorie der Fouriertransformation. Diese beiden Bereiche sollen nun kurz skizziert werden.

[4]Sei $\mathcal{M}$ ein linearer, normierter und vollständiger Raum über einem Körper K, so heißt $\mathcal{M}$ Banachraum. Ist $\mathcal{M}$ darüberhinaus nicht nur mit einer Norm sondern sogar mit einem inneren Produkt ausgestattet, so ist es ein Hilbertraum. Die Menge der linearen Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach K (die linear-stetigen Funktionale) bildet den Dualraum $\mathcal{M}^*$, der selbst wieder ein Banachraum ist. Hilberträume sind sogar selbstdual, also $\mathcal{M}^*$ isomorph zu $\mathcal{M}$

Verallgemeinerte Fouriertransformationen

Das Bedürfnis nach verallgemeinerten Fouriertransformationen ergibt sich aus der Tatsache, dass, damit das Fourierintegral $\int f(x)e^{ikx}dx$ existiert, die Funktion f schnell genug im Unendlichen abfallen muss. Diese Einschränkung ist aber in vielen konkreten Fällen extrem störend.
Als Fourier 1811 seine berühmte Transformationsformeln

$$\phi(\mu) = \int_0^\infty f(x)\cos\mu x\, dx \tag{3.1}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \phi(\mu)\cos\mu x\, d\mu \tag{3.2}$$

und sein Integraltheorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\mu(y-x)\, dy\, d\mu \quad , \tag{3.3}$$

welches formal durch Kombination von (3.1) und (3.2) entsteht, angab, war es einigermaßen unklar, unter welchen Vorraussetzungen an f dieses Theorem Gültigkeit habe. Bis 1910 wurde als Gültigkeitsvorraussetzung herausgearbeitet, dass die Funktion f im Unendlichen gegen 0 streben müsse und in der Nachbarschaft von Unendlich eine absolut integrierbare Ableitung besitzen müsse. Pringsheim schrieb dazu 1910, diese Vorraussetzungen seien extrem unbefriedigend,

> als es die Gültigkeit einer Integral-Formel von der *Stetigkeit*, ja *Differenzierbarkeit* der zu integrirenden Funktion abhängig macht, mithin Beschränkungen einführt, die dem Wesen der Sache fremd sind.
>
> zitiert nach *[Lützen 1982]*, S.75

Es war Plancherel, der im gleichen Jahr die erste große Verallgemeinerung zustandebrachte. Er schrieb (3.1) als

$$\phi(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{d\mu}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin\mu x}{x}dx \quad , \tag{3.4}$$

die in den Fällen, in denen die Differentiation unter dem Integral durchgeführt werden darf, mit (3.1) identisch ist. In dieser Darstellung konnten die quadratintegrablen Funktionen $f \in \mathcal{L}^2(0,\infty)$ fouriertransformiert werden. Die Transformierte ϕ liegt wiederum selbst in $\mathcal{L}^2(0,\infty)$, und zweimalige Anwendung der Transformation ergibt nun die Identität.
Hahn veränderte 1926 die Transformationsformel von Plancherel, indem er auf die Ableitung $\frac{d}{d\mu}$ in (3.4) verzichtete. Die entspechende Inversionsformel ist dann natürlich nicht mehr symmetrisch, aber die durch das x im Nenner verbesserte Konvergenz des Integrals, erlaubte es ihm zum Beispiel, auch konstante Funktionen zu transformieren. Hahn vermied damit verallgemeinerte Funktionen, indem er die Transformation entsprechend abänderte.
Diese Beispiele sollen genügen, um die groben Linien der Forschung deutlich zu machen; mehr dazu siehe wiederum in [Lützen 1982]. Bis zu Laurent Schwartz gelangten in den folgenden Jahren noch Wiener und Bochner zu einer Erweiterung der erlaubten Funktionen, wobei vor allem letzterer der Fouriertransformation im Distributionssinne so nahe kam, dass er Schwartzsche Theorie in keiner Weise würdigen wollte[5].

[5] siehe [Lützen 1982], S.83 ff

Verallgemeinerte Lösungen für Differentialgleichungen

Gesucht werden „Lösungen" einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung, die allerdings selbst nicht n-fach differenzierbar sind. Diese Lösungen sind „verallgemeinerte" Lösungen, umgekehrt erfüllen dies Lösungen die Gleichungen durch den Prozess der „verallgemeinerten" Differentiation. Die Probleme, die so ein Verallgemeinerung nahelegen sind sehr alt und lassen sich zurückverfolgen bis in die Mitte des 18ten Jahrhunderts zur Diskussion über die schwingende Saite zwischen d'Alambert und Euler. Modern ausgedrückt stritten sich die beiden um die Frage, wie regulär die Lösung der Wellengleichung zu sein habe. In der Folgezeit neigten die Mathematiker unter dem Einfluss der strengeren Klärung des Begriffes der „Differentiation" natürlicherweise zu der Meinung, eine wirkliche Lösung müsse auch n-fach differenzierbar sein. Andererseits stellten Probleme wie scharfe Kanten der Saite bzw. Schockwellen auch ein mathematisch interessantes Problem dar. [Lützen 1982] nennt verschiedene Vorgehensweisen zur Lösung dieser Problem, von denen hier nur drei genannt seien:

1. Die Substitution der Differentialgleichung durch ein anderes physikalisches Modell des Systems, basierend auf physikalischen Annahmen.
   Dieses ist die klassische Vorgehensweise von Physikern, wurde aber auch von reinen Mathematikern wie Riemann verwendet.

2. Benutzung von Testkurven und Testoberflächen
   Diese Methode wurde vor allem in der Potentialtheorie (etwa die Grundgleichung der Elektrostatik $\triangle V = 4\pi\rho$) benutzt. Man setze eine der Funktionen ϕ oder ψ im Greensche Theorem

   $$\int_V (\phi\triangle\psi - \psi\triangle\phi) d^3x = \int_{\partial V} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) ds$$

   gleich eins. Damit ist die Differentialgleichung in eine Integro-Differentialgleichung umgeformt. Diese Gleichung muss nun für ein genügend reguläres Integrationsgebiet gelten (daher der Name Testkurve oder -oberfläche). Die neue Gleichung gilt nun für eine größere Klasse von Funktionen.

3. Testfunktionen
   Diese Methode ist eng verwandt mit der vorhergehenden. Die Gleichung wird mit einer hinreichend regulären Testfunktion multipliziert, so dass die Differentiationen via partielle Integration auf die Testfunktion abgewälzt werden können. Die Lösung braucht daher nicht im eigentlichen Sinne differenzierbar zu sein. Diese Methode wurde vor der Theorie der Distributionen etwa von Wiener, Hilbert und Courant, Weyl und anderen mehr verwendet.

Natürlich sind sämtliche Kombinationen der zitierten (und nicht zitierten) Methoden möglich; für die theoretische Physik bestand die befriedigendste Lösung sicherlich darin, eine physikalische Begründung für einen der angebenen mathematischen Umwege zu finden. Damit musste nicht, wie unter 1) beschrieben, ein neues Modell geschaffen werden, sondern ein bestehendes lediglich verbessert werden. Schon Hermann Weyl schrieb 1913, den zweiten Weg benutzend:

> Die für die mathematische Physik wesentliche Definition von $\triangle v$ liegt nicht in der Gleichung
> $$\triangle v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$
> sondern: für ein skalares oder vektorielles, stetig differentierbares Feld v ist $\triangle v$ diejenige stetige Funktion (falls sie existiert) welche für jedes Raumstück J die Gleichung
> $$\int_J \triangle v dp = -\int_D \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$
> erfüllt. $[D = \partial J]$
>
> *[Weyl 1913]*, zitiert nach *[Lützen 1982]*

Weyl versteht die integrale Form der Gleichung nicht nur als mathematischen Trick, sondern empfindet sie auch als dem physikalischen Problem angemessener.

Sobolevs verallgemeinerte Funktionen

Sergei Sobolev lebte von 1908 bis 1989 und beschäftigte sich hauptsächlich mit dem Studium von partiellen Differentialgleichungen. Wir verdanken Sobolev die erste „echte“ Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion. Sobolev beschäftigte sich ab 1933 mit der Lösung des Anfangswertproblems bei hyperbolischen Differentialgleichungen. 1936 setzte er sich zum Ziel, die Gleichung

$$Lu \equiv \sum_i \sum_j A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F$$

zu lösen, wobei die Anfangswerte $u|_{t=0}$ und $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$ vorgegeben seien. Dabei seien A, B, C analytische Funktionen von der x_i. Die von ihm angegebene Lösung hatte aber einige Schönheitsfehler, vor allem weil an eine Lösung u allzuviele Bedingungen gestellt werden mussten.

Abbildung 3.1: Sergei Sobolev

Um ein ordentliches Existenzkriterium für Lösungen angeben zu können, erweiterte Sobolev das Problem auf einen Raum von Funktionalen. Dazu definierte er den Raum Φ_s der s-fach stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Sobolev definierte dann den Raum Z_s der Funktionale auf Φ_s. In diesen Räumen wurde ein Konvergenzbegriff eingeführt und die Operatioren auf Φ_s wurden auf den Raum der Funktionale verallgemeinert. Sobolev zeigte, dass der Adjungierte $L^* : Z_{s_1} \to Z_{s_2}$ zu einem Operator $L : \Phi_{s_1} \to \Phi_{s_2}$ durch

$$(L^* \rho, \phi) = (\rho, L\phi) \quad \forall \rho \in Z_{s_1} \quad , \quad \phi \in \Phi_{s_2}$$

eindeutig definiert war. Die Differentiation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in Z konnte also durch die Anwendung von $-\frac{\partial}{\partial x_i}$ in Φ erklärt werden. Entsprechend verallgemeinerte sich der Differentialoperator des gestellten Cauchy-Problems auf die Funktionale. In diesem verallgemeinerten Rahmen

konnte das obige Problem nun auf befriedigende Art und Weise gelöst werden.
Damit war Sobolev der Erste, der im vollen Sinne des Wortes „Distributionen“ verwendete (auch wenn dieser Begriff erst eine Dekade später von Schwartz geprägt wurde). Er ging bei der Entwicklung seiner verallgemeinerten Funktionen den gleichen Weg, den Schwartz später benutzte: Ausgehend vom Cauchy-Problem einen Raum von linearen Funktionalen entwickelnd und dann mittels adjungierter Operatoren die Operationen von Funktionen auf Funktionale verallgemeinernd. Sobolev entwickelte allerdings keine volle Theorie aus seinen Funktionalen. Sie waren von ihm als spezielles Werkzeug für dieses spezielle Problem gedacht. Erst Laurent Schwartz entwickelte eine volle *Theorie* der Distributionen, in denen diese als eigenständige Objekte für sich betrachtet wurden und dementsprechend in der ganzen Bandbreite ihrer mathematischen Bedeutung (inkl. der δ-Funktion) erkannt wurden.

Schwartz und die Theorie der Distributionen

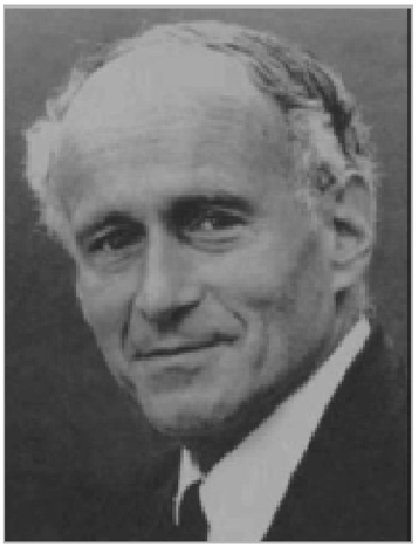

Abbildung 3.2: Laurent Schwartz

Laurent Schwartz wurde 1915 in Paris geboren. Zu seinen Lehrern zählten Hadamard, Borel und Lebesgue. Als Jude und trotzkistischer Sympathisant verbrachte er den Zweiten Weltkrieg in Clermont-Ferrand, wo er schließlich sogar einen falschen Namen annehmen musste, um der Polizei zu entgehen. Die Theorie der Distributionen entstand im Winter 1944/45, als er noch den Namen „Selemartin“ benutzte. 1950/51 erschien die Monographie *Théorie des Distributions*[6], die bis heute das Standardwerk über Distributionen geblieben ist. Schon 1950 wurde ihm dafür die Fields-Medaille zugesprochen. Trotz seiner Lösung von der trotzkistischen Organisation wurde ihm allerdings aus politischen Gründen die Einreise in die USA verwehrt. Schwartz blieb zeitlebens politisch aktiv. So wurde er 1960 aufgrund seines Engagements gegen den Algerienkrieg für zwei Jahre von der École Polytechnique suspendiert, wo er Professor für Mathematik war.
Laurent Schwartz starb am 4. Juli 2002.

Schwartz stieß wie Sobolev durch die Arbeit an partiellen Differentialgleichungen auf die Notwendigkeit, den Funktionsbegriff zu verallgemeinern. Die in seiner Arbeit auftauchenden verallgemeinerten Lösungen konnten auch als Faltungsoperatoren aufgefasst werden. Schwartz erkannte, dass ein geeignet definierter Faltungsoperator zur Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes taugen könnte, denn jede stetige Funktion g auf dem $\mathcal{R}^n$ kann mit dem Operator $f \to f * g$ identifiziert werden. So konnte etwa die δ-Funktion als neutraler Faltungsoperator

$$\delta \cdot \phi = \phi$$

[6] [Schwartz 1950]

definiert werden. Schwartz mühte sich einige Zeit mit seinen Faltungsoperatoren ab, bis ihm eines Tages klar wurde, dass er alle Probleme überwinden könne, wenn er seine verallgemeinerten Funktionen nicht als Faltungsoperatoren sondern als Funktionale definierte. Die nannte er nun „Distributionen“. Mit diesem Durchbruch standen alle Bestimmungsstücke der Theorie zur Verfügung, und sie entwickelte sich derart schnell, dass er schon im Winter 45/46 über das Thema Vorlesungen in Paris halten konnte.
Schwartz kannte zum Zeitpunkt der Entwicklung seiner Theorie weder die Arbeiten Sobolevs noch war ihm bewusst, dass in der Physik inzwischen nicht nur die δ-Funktion, sondern auch viele weitere verallgemeinerte Funktionen benutzt wurden. Die δ-Funktion selbst war im allerdings seit Studententagen bekannt und wohl auch eine Quelle der Inspiration für seine Theorie[7]. Während er 45/46 seine Theorie in den Vorlesungen vorstellte, machten ihn die teilnehmenden Elektrotechniker auf Heavisides „operational calculus“ aufmerksam und drängten ihn, die Theorie in Richtung Fourier- und Laplacetransformationen auszubauen. Schon im Dezember 1946 hielt einen Vortrag vor der „Societé des Radioeléctriciens“. 1947 hatte Schwartz die Fouriertransformationen in seine Theorie eingebaut und den Raum der „temperierten“ Distributionen erfunden. Mit dem Erscheinen der Monographie 1950/51 war die Theorie konsolidiert.

Schwartz’ neue Theorie wurde im Großen und Ganzen begeistert als wichtige mathematische Innovation aufgenommen. In der Theorie der Distributionen fanden ganz unterschiedliche mathematische Probleme ihre Lösung. Sowohl in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen als auch in der Theorie der Fouriertransformationen, in der mathematischen Physik und der algebraischen Topologie lieferte der Begriff der Distribution die angemessene begriffliche Unterscheidung, die Probleme ins rechte Licht zu stellen und eventuell zu lösen.
Diese Tatsache macht einerseits die besondere Wichtigkeit der Schwartzschen Arbeit deutlich; andererseits veranlasste sie etwa F.E. Brouwder zu der Bemerkung:

> The theory of distributions has provided a language rather than a methodology. It is used as a way to organize and to state problems, in a more general and fexible form; then, other tools are applied.
>
> *F. Browder 1975* zitiert nach *[Lützen 1982],*S.162

Diese Bemerkung kann negativ oder positiv verstanden wirden, in jedem Falle macht sie die Besonderheit der Theorie deutlich: Sie ermöglicht eine angemessene Formulierung verschiedenster Probleme, was in vielen Fällen der erste Schritt zur Lösung sein mag. Andererseits, und diesen Aspekt werden wir gerade in der Physik kennenlernen, ist sie doch *nur* eine Umformulierung, so dass die sachlichen Probleme an anderer Stelle wieder auftreten. So findet sich in der englischen Ausgabe von [Courant und Hilbert 1962] die Bemerkung:

> Introducing ideal functions may appear a sweeping extension of ordinary calculus. Yet, in the realm of ideal functions not all operations of classical calculus can be carried out. Thus the advantage of securing unrestricted differentiability is partly offset by the loss of freedom in multiplying functions or in forming composite functions.
>
> *R. Courant* zitiert nach *[Lützen 1982],* S.161

[7]gemäß [Lützen 1982]

So ist auch die gemischte Haltung der Physikergemeinde auf die Theorie der Distributionen zu verstehen, die in Kapitel 8 und 11 deutlich werden wird.

3.2 Übersicht über Distributionen in der Physik

Auf den geschilderten mathematik- und physikgeschichtlichen Hintergründen wurden die verallgemeinerten Funktionen in der Physik zunehmend wichtig. Für die Geschichte der Distributionen in der Physik lassen sich folgende Eckdaten festhalten:

1882 Gustav Kirchhoffs „mathematische Präcisierung des Huygens'schen Principes"

1893 Oliver Heavisides „operational calculus"

1910 Arnold Sommerfelds „Zackenfunktion"

1924 Richard Courants „Einheitskraft"

1926 Kornel Lanczos' „Einheitskern"

1927 Paul A.M. Diracs δ-Funktion

Johann von Neumann: Spektraltheorie

1928 Pauli und Jordan: Die relativistische δ-Funktion

1929 Pauli und Heisenberg: Vertauschungsrelationen der Quantenfeldtheorie

1932 Bohr und Rosenfeld: Die physikalische Notwendigkeit der verallgemeinerten Funktionen

1945 Laurent Schwartz' Theorie der Distributionen

$\sim$ 1950 Distributionen in der Physik: axiomatische Feldtheorie und Renormierungstheorie

Schon vor Diracs Definition der δ-Funktion traten vereinzelt Funktionen mit denselben Eigenschaften in der theoretischen Physik auf. Diracs Vorgänger benutzten diese Funktion allerdings nur als begrenzten mathematischen Trick innerhalb eines spezifischen Problemzusammenhanges [8]. Es war erst Dirac, der 1927 die δ-Funktion als eigenständiges Objekt definierte und zum Ausgangspunkt seines Formalismus der Quantenmechanik machte[9]. Obwohl von Neumann in der Hoffnung, der δ-Funktion den Garaus zu machen, schon im gleichen Jahr die ersten Teile seiner Spektraltheorie veröffentlichte und der Quantenmechanik ein solides mathematisches Fundament gab[10], setzte sich die δ-Funktion mit überwältigendem Erfolg im Formalismus der Physiker fest. Schon 1928 gaben Pauli und Jordan die erste Verallgemeinerung mit ihrer relativistischen „Δ-Funktion", die die entsprechende δ-artige Singularität auf dem Lichtkegel besaß[11]. Mit der Entwicklung der Quantenfeldtheorie rückte die δ-Funktion noch mehr ins Zentrum der Physik, denn hier

[8] siehe Kapitel 4
[9] Kapitel 5
[10] Kapitel 6
[11] Kapitel 8.2.3

wurde sie direkt am logischen Ausgangspunkt der Theorie, den Vertauschungsrelationen, benötigt[12]. 1932 zeigten Bohr und Rosenfeld in ihrer Analyse der Messbarkeit feldtheoretischer Größen, dass das Auftreten verallgemeinerter Funktionen an fundamentaler Stelle in der Theorie einer physikalischen Notwendigkeit entspringt[13]. Damit gaben sie erstmals eine physikalische Begründung für die Uneigentlichkeit der benutzten Mathematik.
Bis zum Bekanntwerden der Schwartzschen Theorie verstrichen zwei Jahrzehnte, in denen die fundamentalen Theorien der Physik als mathematisch falsch zu gelten hatten. In Einklang damit ergaben sich die mathematischen Schwierigkeiten der Divergenzen der Quantenfeldtheorie. Spätestens mit der Entwicklung der Renormierung wurde der Zusammenhang dieser Probleme mit dem Auftreten sinnloser, nicht-definierter Rechnungen mit verallgemeinerten Funktionen allgemein erkannt. Da es mit der Renormierung aber gelungen war, auch ohne einen strengen mathematischen Kontext aus den sinnlosen Ausdrücken sinnvolle physikalische Ergebnisse zu erzielen, hielt sich der Einschlag der Theorie der Distributionen in der Physik in engen Grenzen. Im Allgemeinen wurde der Begriff der Distribution nur als nachträgliche Legalisierung von dem altbekannten und gewohnheitsmäßigem Umgang der Physiker mit uneigentlichen Funktionen angesehen, ohne neuen kreativen Schub für die Physik bereitzuhalten[14]. Ab 1950 versuchten daher nur einige wenige, die Divergenzprobleme in der Terminologie des Distributionenkalküls klar und systematisch darzustellen[15], oder die Grundlagen der Quantenfeldtheorie mathematisch korrekt zu formulieren[16].

[12]Kapitel 8.2.2
[13]Kapitel 11.1
[14]siehe z.B. Kapitel 8.3.4
[15]Kapitel 11.3
[16]Kapitel 11.2

Kapitel 4

δ-Funktionen vor Dirac

In diesem Kapitel sollen verschiedene Stellen der theoretischen Physik aufgesucht werden, in denen die (erst von Dirac so benannte) δ-Funktion im physikalischen Formalismus gebraucht wurde.

4.1 Kirchhoff: Das Huygens'sche Princip

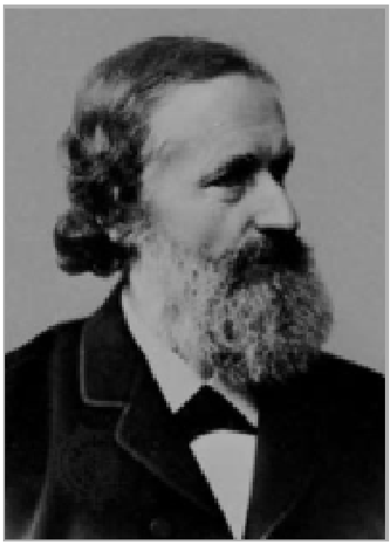

Abbildung 4.1: Gustav Kirchhoff

Die Geschichte der δ-Funktion in der Physik beginnt mit der theoretischen Arbeit Gustav Kirchhoffs[1], dem die erste mir bekannte mathematische Definition der δ-Funktion zu verdanken ist. Seine Ideen zur „mathematischen Präcisierung des Huygens'schen Principes" erschienen zuerst 1882 [Kirchhoff 1882], zitieren möchte ich im Folgenden aus der 1891 nach seinem Tode erschienenen *Vorlesung über mathematische Optik*[2]. Kirchhoff handelt dort über die Lichtbewegung im Rahmen der Wellentheorie, also über transversale Schwingungen des Äthers.

Die „Verrückungskomponenten eines Aetherteilchens" genügen der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2 \triangle \phi \quad . \tag{4.1}$$

Ziel der Betrachtung ist es nun, $\phi(t,x)$ im inneren eines Gebietes durch die Randwerte (und deren Ableitungen) auf der Begrenzungsfläche dieses Gebietes auszudrücken.

Schauen wir kurz ohne technische Details auf die Rechnung, so findet sich folgender Gedankengang: Kirchhoff beginnt mit dem Greenschen Satz

$$\int ds(U\frac{\partial V}{\partial N} - V\frac{\partial U}{\partial N}) = \int d\tau(V\triangle U - U\triangle V) \quad . \tag{4.2}$$

[1] Geboren 1824 in Königsberg, gestorben 1887 in Berlin

[2] [Kirchhoff 1891]

Dabei ist $d\tau$ das Volumenelement, ds das Flächenelement und N die nach innen gerichtete Normale der Grenzfläche. Nun wird einerseits für U das ϕ aus (4.1) eingesetzt und andererseits V als folgende „Hülfsfunktion" definiert:

$$V = \frac{F(r_0 + at)}{r_0}$$

so, dass V jedenfalls die Wellengleichung erfüllt. Die Funktion F selbst wird nun ohne weitere Einführung so bestimmt:

> Ueber die Function F setzen wir vorraus, dass sie für alle endlichen positiven und negativen Werthe ihres Arguments verschwinde, für unendlich kleine Werthe desselben positiv sei und zwar so, dass
>
> $$\int F(\zeta)d\zeta = 1$$
>
> ist, wenn das Integral von einer endlichen negativen bis zu einer endlichen positiven Grenze genommen wird.
>
> *[Kirchhoff 1891]*

Als Beispiel dient ihm

$$F(\zeta) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2\zeta^2} \quad ,$$

„wo μ eine sehr große Constante bedeutet, so ist die Function $F(\zeta)$ für jeden endlichen Werth von ζ verschwindend klein, für $\zeta = 0$ wird sie unendlich wie μ selbst", und es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 1 \quad .$$

Er fügt noch hinzu: „Endlich ist, was hier besonders hervorgehoben werden muss, $F(\zeta)$ nebst seinen Ableitungen für alle Werthe von ζ, die Null mit eingeschlossen, endlich und eine stetige Function ihres Argumentes."
Dies die erste mathematische Definition einer δ-Funktion der Geschichte der theoretischen Physik. Obwohl hier noch jeder Hinweis auf Besonderheiten und Schwierigkeiten dieser „Funktion" fehlen, ist diese Definition inhaltlich schon fast mit modernen (nichtrigorosen) Darstellungen der δ-Funktion identisch. Kirchhoff stellt auch noch keine eigenständige Liste besonderer Rechenregeln zusammen, denen seine Funktion F genügen soll; vielmehr werden im Verlaufe der Rechnung immer wieder die gerade benötigten Eigenschaften von F argumentativ beigebracht[3].
Erwähnt werden soll, dass Kirchhoff mit seiner „Hülfsfunktion" $V = \frac{\delta(r_0+at)}{r_0}$ nicht nur irgendeine δ-Funktion definiert, sondern gleich eine komplette Greensfunktion für die Wellengleichung mit Singularitäten auf dem negativen Teil des Lichtkegels angibt.

Mit den so spezifizierten Grössen $U = \phi$ und $V = \frac{F(r_0+at)}{r_0}$ kann Kirchoff nun alle Integrale in (4.2) leicht ausführen und gelangt schließlich zu

$$\phi_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int ds \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \frac{\phi(t - \frac{r_0}{a})}{r_0} - \frac{f(t - \frac{r_0}{a})}{r_0} \right\} \quad , \tag{4.3}$$

mit $f(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial N}$, womit er bei der gewünschten Formulierung angekommen ist.
Das Ergebnis lässt sich physikalisch

[3] Etwa die Analogie zum heutigen $\int \delta(x)f(x)dx = f(0)$.

> dahin aussprechen, dass die Bewegung des Aethers in jedem Punkte des von der Fläche s umschlossenen Raumes T angesehen werden kann als hervorgebracht durch eine Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die erste δ-Funktion im Kontext der Optik entsteht. Dabei dient sie als reiner Rechentrick, denn weder der

- mathematische Kontext der als Fundamentallösung einer Differentialgleichung (wurde erst 1908 von Hadamard geschaffen) noch die
- physikalisch-anschauliche Interpretation der Greensfunktion (z.B. als „Propagator der Lichtbewegung")

exstierte schon zu dem Zeitpunkt.

4.2 Heaviside: Operational Calculus

Abbildung 4.2: Oliver Heaviside

Etwa eine Dekade später finden wir in England eine der illustresten Persönlichkeiten im Grenzbereich zwischen Mathematik und Physik am Werk.
Oliver Heaviside[4] ist durch seinen äußerst unorthodoxen Gebrauch des mathematischen Formalismus schon zu Lebzeiten umstritten gewesen wie kein zweiter. Heaviside handelte sich mit seinen Methoden sogar ernsthaften Ärger ein, beispielsweise stoppte die Royal Society eine schon begonnene Artikelserie in ihren *Proceedings* wegen seines allzu freien Gebrauchs divergenter Reihen. Daneben verschaffte ihm aber der überragende Erfolg seiner theoretischen Methoden eine große Anhängerschaft.
Heavisides Hauptarbeitsgebiet waren Elektrodynamik und Elektrotechnik, und er war einer der ersten, die die Maxwellschen Gleichungen in der uns heute bekannten symmetrischen Form schrieben, so dass sie eine zeitlang sogar als „Heaviside-Hertz-Gleichungen" zitiert wurden.

Kern der Kontroverse war Heavisides Operatorenrechnung. Das Konzept der Differentialoperatoren war zwar zu seiner Zeit schon 200 Jahre alt, neu war aber die Unbefangenheit des Umganges mit ihnen. Es soll nun ein kurzer Überblick über Heavisides mathematische Ideen gegeben werden.
Der reziproke Gesamtwiderstand $\frac{1}{Z}$ eines elektrischen Systems ist ein *Operator*, der die äußere Spannung V den Strom I transformiert

$$V = ZI \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{1}{Z}V \quad \text{(Ohmsches Gesetz).}$$

[4]geboren 1850 in Camden (London), gestorben 1925 in Torquay

Den Gesamtwiderstand Z muss man aus dem normalen Widerstand R, der Induktivität der beteiligten Spule L und der Kapazität der Kondensatoren berechnen. Der Trick besteht nun darin, Induktivitäten und Kapazitäten als Operatoren aufzufassen, so dass die Kapazitäten und Induktivitäten genau wie Ohmsche Widerstände behandelt werden können, womit sich der Gesamtwiderstand Z als Summe der Einzelwiderstände ergibt:

$$Z = R + \hat{L} + \hat{C} \quad .$$

Dabei ist R ein gewöhnlicher Multiplikationsoperator und

$$\hat{L} = Lp \qquad \hat{C} = \frac{1}{Cp}$$

mit

$$p := \frac{d}{dt} \qquad p^{-1} := \int_0^t dt \quad .$$

Natürlich ist das so definierte $\frac{1}{p}$ nicht im strengen Sinne das Inverse von p (man beachte den Beitrag der unteren Integrationsgrenze), es ist aber gerade Heavisides Eigenart und der Kern seines Kozeptes, sich nicht von diesen „mathematischen“ Einwänden ablenken zu lassen. Die Idee der Überlegung ist nämlich, das physikalische Problem nun durch diese Operatoren auszudrücken und dann mit den p-Symbolen *wie mit ganz gewöhnlichen Variablen* weiterzurechnen.
Hier klingt zum erstenmal deutlich das Thema der *Algebraisierung* der Differential- und Integralrechnung an, die sich in dem Wunsch äußert, mit Differentiation und Integration genauso elementar operieren zu können wie mit Multiplikation und Division. Die von Heaviside strapazierte formale Analogie zwischen Multiplikation – Division mit Differentiation – Integration ist dabei ein Garant für (scheinbare oder wirkliche) Einfachheit der Darstellung.
Anders gewendet könnte man auch sagen, Heaviside erspare sich hier eine lästige Fouriertransformation, die das Gewünschte auf mathematisch korrektem Wege erreichen würde.

Betrachten wir die konkrete Lösung eines Problems an einem einfachen aber typischen Beispiel eines Stromkreises mit einem Ohmschen Widerstand und einer Spule. Wir erhalten aus dem Ohmschen Gesetz jetzt im Operatorsinne

$$I = \frac{1}{R + Lp} V.$$

Dies ist die „operationale Lösung“ des Problems. Jetzt wird noch eine funktionale Lösung gesucht. Um diese zu erhalten, bedarf es typischerweise dreier Schritte:

1. Entwicklung der operationalen Lösung in Potenzreihen nach p oder p^{-1}.
2. Vorgabe der äußeren Spannung V(t), und
3. Angabe der Wirkung der Potenzen von p oder p^{-1} auf diese äußere Spannung.

Die erste Aufgabe wird in unserem Beispiel durch

$$\frac{1}{R + Lp} V = \frac{1}{R} \left\{ \frac{R}{Lp} - \left(\frac{R}{Lp} \right)^2 + \left(\frac{R}{Lp} \right)^3 - \ldots \right\} V$$

gelöst. Zweitens wird nun eine äußere Spannung in Form einer Stufenfunktion vorgegeben als

$$V(t) = H(t) \equiv \mathbf{1} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \quad .$$

Heaviside selbst bezeichnete die Stufenfunktion meist einfach als **1**, heutzutage wird sie mit gutem Recht als „Heaviside-Funktion" bezeichnet, da er sie so ausgiebig benutzte. Drittens werden noch Regeln gebraucht, die definieren, wie die Operatoren auf die Sprungfunktion wirken sollen. Heaviside benutzt

$$p^{-n}\mathbf{1} = \frac{t^n}{n!} \quad \text{und} \quad p^n\mathbf{1} = 0 \quad ,$$

wobei beide Regeln mit der Konstanz von **1** nach Einschalten des Stromes erklärt werden. (Die Abweichungen von der zweiten Regel werden uns gleich beschäftigen...) Ein besonderes Kuriosum bei manchen Fragestellungen ist das Auftauchen halbzahliger Differentiationen, also $p^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$, für die er durch Vergleich mit anderen Methoden und Plausibilitätsbetrachtungen („experimental mathematics") die Regel

$$p^{\frac{1}{2}}\mathbf{1} = (\pi t)^{-\frac{1}{2}}$$

fand.
In unserem Beispiel ergibt sich nun

$$I = \frac{V}{R}\left\{1 - \exp\left(\frac{-Rt}{L}\right)\right\} \quad .$$

Dieses Beispiel möge genügen, um einen Eindruck von der Heavisides Sorglosigkeit im Umgang mit der Mathematik zu erhalten. Kontrastiert man dies mit dem hervorragenden faktischen Erfolg seiner Methoden, ergibt sich hier die Zwischenfrage, welches Verhältnis von Mathematik und Physik sich bei Heaviside ausspricht. Für ihn bedeutet die interne Unstimmigkeit des Formalismus anscheinend nur, dass die Mathematik nicht völlig *blind* angewendet werden darf, nicht automatisch und für jeden funktioniert, sondern immer eine physikalische Supervision braucht.

> ... to avoid error, it is desireable to be guided by the conditions of the physical problem concerned. That will serve to counteract the ambiguity of the purely mathematical machinery.
>
> *Heaviside*, zitiert nach *[Nahin 1988], S.232*

Physikalische Intuition und physikalisches Verständnis machen die mathematische Stringenz überflüssig. Beides wird von mathematischer Strenge geradezu eingeengt, so dass Heaviside schreibt:

> Rigorous mathematics is narrow, physical mathematics bold and broad.
>
> *Heaviside* zitiert nach *[Nahin 1988], S.217*

Gehen wir nun aber zurück zur Ableitung der Stufenfunktion. Wie gesagt setzte Heaviside meist $p^n\mathbf{1} = 0$, aber auch hier zeigte er sich undogmatisch, wenn ihn das physikalische Phänomen dazu zwang. Für ein bestimmtes Problem fand er für den Strom

$$I = pQ \equiv pQ\mathbf{1} \quad ,$$

wobei Q eine konstante Ladung ist. Heaviside kann hier den Strom allerdings nicht null setzen, so dass er eine neue Interpretation von $p\mathbf{1}$ finden muss:

> We have to note that if Q is any function of the time, then pQ is its rate of increase. If then, as in the present case, Q is zero before and constant after $t = 0$, pQ is zero, except when $t = 0$. It is then infinite. But it's total amount is Q. That is to say, $p\mathbf{1}$ means a function of t which is wholly concentrated at the moment $t = 0$, of total amount 1. It is impulsive, so to speak. [...] Unlike the function $p^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ the function $p\mathbf{1}$ does not involve appeal either to experiment or to generalized differentiation, but involves only the ordinary ideas of differentiation and integration pushed to their limit.
>
> *Heaviside*, zitiert nach *[Lützen 1982], S.116*

Wir finden hier also eine sehr anschauliche Definition der δ-Funktion.
Auf eine ausführliche Diskussion, wie er mit seiner δ-Funktion rechnet, kann hier verzichtet werden, da die speziellen physikalischen Probleme und ihre Behandlung in gebührender Ausführlichkeit schon in [Lützen 1982] und [Lützen 1979] geschildert wurden. Erwähnt sei nur, dass Heaviside zum Beispiel auch auf Ableitungen der δ-Funktion stiess, die er zur Behandlung von Fourierreihen und vielem mehr benutzte.

4.3 Sommerfeld: Die Zackenfunktion

Auf den Naturforscherversammlungen in Königsberg 1910 und in Münster 1912 hielt Arnold Sommerfeld (1868-1951) die Vorträge, die 1912 in den Artikel *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung*[5] eingingen. Dort stellt sich Sommerfeld der Aufgabe, die Theorie der erzwungenen Schwingungen mit der gleichen Allgemeinheit wie die bekannte Theorie der freien Schwingungen zu behandeln. Dazu muss er von der homogenen Schwingungsgleichung

$$\triangle u + k^2 u = 0 \tag{4.4}$$

ausgehend auf der rechten Seite nun eine beliebige Funktion zulassen. Dabei möchte Sommerfeld zeigen, dass es genügt, eine „Einheitsquelle“ zu betrachten und insgesamt keine neuen mathematischen Schwierigkeiten entstehen.
Ein „Quellpunkt der Ergiebigkeit 1“ ist nun offensichtlich durch

Abbildung 4.3: Arnold Sommerfeld

$$\int_{\sigma_0} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma_0 = 1 \tag{4.5}$$

gegeben, wobei σ_0 eine beliebig kleine Fläche um den Quellpunkt O bedeutet und n die äußere Flächennormale bedeutet. Wird als σ_0 eine sehr kleine Kugelfläche vom Radius r benutzt, so folgt bei Annäherung an O, dass

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad , \quad u = -\frac{1}{4\pi r} \quad ,$$

[5] [Sommerfeld 1912]

da dann (4.5) erfüllt ist. Das Potential einer normierten Quelle ist also durch die Form $-\frac{1}{4\pi r}$ gegeben.
Für den eindimensionalen Fall schreibt Sommerfeld die Einheitsquelle dann als

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_- = 1 \quad ,$$

wobei die Indizes die Annäherung an den Quellpunkt von positiver bzw. negativer Seite andeuten. „Statt des Unendlichwerdens der Funktion haben wir hier also nur den Einheitssprung im Differentialquotienten von u, während u selbst stetig bleibt.“
Wenden wir uns nun der Einheitsquelle selbst zu:

> Die im Punkte O isolierte Einheitsquelle fassen wir als Grenze einer kontinuierlichen Verteilung f von Quellen auf. Wir denken uns also eine zunächst stetige positive Funktion f im Gebiete S definiert, die im Punkte O ein steiles Maximum besitzt, und unterwerfen sie der Bedingung
>
> $$\int f\, dS = 1 \quad . \tag{4.6}$$
>
> Die Funktion f möge überdies von einem Parameter abhängen, und in dem Maße, wie dieser einem gewissen Grenzwert zustrebt, im allgemeinen zu Null abnehmen außer im Punkte O, wo sie wegen der Bedingung (4.6) schließlich unendlich ansteigt. Ein solches Verhalten von f kann als *Zackenfunktion*[6] bezeichnet werden. Im Limes haben wir also für einen Punkt P unseres Gebietes S:
>
> $$f = 0 \ldots P \neq 0$$
> $$\int f\, dS_0 = 1 \ldots P = 0 \quad ,$$
>
> wobei das letzte Integral auf eine beliebig kleine Umgebung des Punktes O beschränkt werden kann.
>
> *[Sommerfeld 1912]*

Da die folgende Benutzung Sommerfelds Behutsamkeit im Umgang mit der Mathematik so schön zeigt, möchte ich seinem Argument noch etwas weiter folgen.
Zunächst zeigt Sommerfeld, dass die Differentialgleichung

$$\triangle u + k^2 u = f \tag{4.7}$$

mit seiner Zackenfunktion f tatsächlich einer Einheitsquelle (4.5) entspricht: Integration von (4.7) über ein kleines Raumgebiet S_0 mit Oberfläche σ_0 ergibt nämlich

$$\int \triangle u\, dS_0 + k^2 \int u\, dS_0 = \int f\, dS_0 \quad ,$$

wobei das zweite Glied der linken Seite bei Verkleinerung des Gebietes S_0 schließlich verschwindet (zumindest für die vorher diskutierten u's). Das erste Glied geht mit dem Greenschen Satz über in

$$\int_{\sigma_0} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma_0$$

[6] Die Bezeichnung „Zackenfunktion“ wird in den späteren Auflagen von Sommerfelds „Vorlesungen über theoretische Physik“ an den entsprechenden Stellen durch Diracs spätere Bezeichnung „δ-Funktion “ ersetzt [Sommerfeld 1958].

und die rechte Seite wird definitionsgemäß zu eins, womit wir Gleichung (4.5) wieder erhalten.
Sommerfeld betont, dass er den Übergang vom Volumen- zum Flächenintegral bei der Anwendung des Greenschen Satzes *vor* der Limesbildung $\sigma_0 \to 0$ vollzieht, womit die Ausdrücke auch *im* Limes gleichbleiben. Dieser Gesichtspunkt der korrekten Reihenfolge von Limes und Integration bei der Rechnung mit der Zackenfunktion wird von ihm mehrfach ausdrücklich angesprochen.

Zur Lösung von (4.7) wird f in eine Reihe von Eigenfunktionen der *homogenen* Schwingungsgleichung (4.4) entwickelt, „natürlich vor Ausführung des Grenzüberganges“:

$$f = \sum A_m u_m \quad , \quad A_m = \int f u_m \, dS \tag{4.8}$$

Die Lösungen u von (4.7) werden nun ebenfalls in eine Reihe nach Eigenfunktionen von (4.4) entwickelt,

$$u = \sum B_m u_m \quad , \tag{4.9}$$

so dass er

$$\triangle u = -\sum B_m k_m^2 u_m \tag{4.10}$$

und schließlich

$$\triangle u + k^2 u = \sum B_m (k^2 - k_m^2) u_m$$

erhält. Aus (4.7) erhält Sommerfeld damit aus diesem Ansatz

$$\sum B_m (k^2 - k_m^2) u_m = \sum A_m u_m$$

oder

$$B_m = \frac{A_m}{k^2 - k_m^2} \quad .$$

Indem er nun die Reihenentwicklung (4.8) für A_m umdreht und dann zum Limes übergeht, erhält er

$$A_m \quad \to \quad u_m(O) \int f \, dS = u_m(O) \quad , \tag{4.11}$$

„da nur noch die Umgebung von O zu dem Integral A_m einen Beitrag liefert, und da sich u_m im Punkte O wie überhaupt im ganzen Gebiete S stetig verhält.“[7] Damit folgt

$$B_m = \frac{u_m(O)}{k^2 - k_m^2}$$

womit sich dann mit (4.9)

$$u = \sum \frac{u_m(O) u_m(P)}{k^2 - k_m^2} = G_{OP} \tag{4.12}$$

ergibt. Die Lösung u von (4.7) wurde dabei sogleich als Greensche Funktion G gekennzeichnet. Es ist also gezeigt, dass die Greensche Funktion der allgemeinen Gleichung aus

[7] hier verbirgt sich der Mittelwertsatz der Integralrechnung

den Lösungen der homogenen Gleichung und ihren Eigenwerten berechnet werden kann.

Nachdem Sommerfeld dieses zentrale Ergebnis erhalten hat, kommt er nun nochmal auf einige mathematische Details zurück. Er betont noch einmal, dass die Entwicklung (4.8) für die Zackenfunktion nur *vor* dem Grenzübergang benutzt wurde, solange sie sich als vernünftige Funktion zeigt und noch keine pathologischen Züge auftreten. Deshalb macht die Konvergenz der Entwicklung (4.8) keinerlei Schwierigkeiten, genauso wie die gliedweise Differentiation der Reihe für u in (4.10).

> Wohl aber würde die gliedweise Ausführung des Grenzüberganges in der Reihe für u in Hinsicht auf die mathematische Strenge eine genauere Untersuchung erfordern. In der Reihe für f würde die gliedweise Ausführung des Grenzüberganges ergeben
>
> $$f = \sum u_m(O) u_m(P) \quad , \tag{4.13}$$
>
> d.h. eine Reihe [...] die ... sicher divergent ist. Man beachte indessen, daß unsere Ableitung mit dieser divergenten f-Reihe nicht operiert, daß sie vielmehr vor Ausführung des Limes zu der u-Reihe , die wegen des für $m = \infty$ verschwindenden Faktors $1/(k^2 - k_m^2)$ auch im Limes konvergieren kann.
>
> *[Sommerfeld 1912]*

Wir können festhalten, dass Sommerfelds Zackenfunktion an einer genau bezeichneten Stelle, nämlich bei der Frage der genauen Konvergenz der Summe in (4.12), die mathematische Strenge hinter sich lässt und er sich mit der bloßen Möglichkeit der Konvergenz begnügen muss. Später im Text kommt Sommerfeld nochmals auf das Problem zurück, und zeigt, dass (4.12) im eindimensionalen Falle absolut, im zwei- oder dreidimensionalen dagegen nur bedingt konvergent ist[8].

> Damit hängt zusammen, daß im Quellpunkte [...] die Greensche Funktion im eindimensionalen Falle endlich bleibt [...], dagegen im zwei- und dreidimensionalen Falle von zunehmender Ordnung unendlich wird.
>
> *[Sommerfeld 1912]*

Zwischendurch sei erwähnt, dass die von Sommerfeld noch bewusst vermiedene Formel (4.13) sich später im vollen Kontext des δ-Funktion -Kalküls als Vollständigkeitsrelation des Systems u_m entpuppen wird.

In den nächsten Kapiteln finden sich verschiedene „Folgerungen und Erweiterungen“. Für akustische Anwendungen führt Sommerfeld zunächst die Dipolquelle ein. Diese wird dargestellt durch

$$u = \sum \frac{u_m(P)}{k^2 - k_m^2} \frac{\partial u_m(O)}{\partial h} \quad ,$$

worin man unschwer die Antizipation der Ableitung der δ-Funktion als Quelle erkennen kann.
Danach wird die beliebige räumliche Verteilung f von Quellen besprochen, die sich allgemein als Superposition

$$u = \int f G \, dS$$

[8] Der Nenner $k^2 - k_m^2$ geht für $m \to \infty$ im eindimensionalen wie m^2 und erzwingt so die Konvergenz

ergibt.

Zum Abschluß des ersten Teiles der Arbeit diskutiert Sommerfeld noch den Neuigkeitswert seiner Behandlung. Zunächst ist zu sehen, dass die hier vorgeführte Idee sich grundsätzlich vom allgemein („seit Fourier“) Üblichen unterscheidet, da hier die Lösungen der infragestehenden Differentialgleichung aus den Lösungen einer *anderen* Differentialgleichung, nämlich der homogenen Schwingungsgleichung aufgebaut werden. Einen ähnlichen Gedanken findet Sommerfeld rudimentär noch bei Poincaré, aber der „Grenzübergang zur Zackenfunktion [...] wird indessen auch hier nicht vollzogen.“ Dagegen scheint ihm seine Theorie mehr oder weniger in der Hilbert-Schmidtschen Theorie der Integralgleichungen enthalten zu sein (diese wird im folgenden Abschnitt durch die Augen von R. Courant betrachtet).

> Es bedarf kaum der Erwähnung, daß in der Theorie der Integralgleichungen diese Beziehungen in ganz anderem Umfange bewiesen und mathematisch präzisiert werden, wie in unserer Darstellung, die die Existenz von Eigenfunktionen und (bis zu einem gewissen Grade) auch die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach ihnen als physikalisch plausibel von Anfang an vorraussetzte.
>
> *[Sommerfeld 1912]*

Dagegen stößt Sommerfeld im zweiten Teil seiner Arbeit, in der er Probleme in einem unendlich ausgedehnten Gebiiet behandelt, in bisher mathematisch noch völlig unbekanntes Gebiet vor. Sommerfeld stößt dort auf ein kontinuierliches Eigenwertspektrum mit „uneigentlichen Eigenfunktionen“. Die Theorie der Integralgleichungen zur exakten Begründung dieses Gebietes müsste in dieser „aussichtsreichen Richtung“ weiterentwickelt werden.

4.4 Courant: Die Einheitskraft

Richard Courant (1888-1972) versuchte in den 1924 erschienen *Methoden der Mathematischen Physik*[9], die Physik und die Mathematik wieder einander zu nähern, denn „der Strom der wissenschaftlichen Entwicklung ist in Gefahr, sich weiter und weiter zu verästeln, zu versickern und auszutrocknen.“[10] Ergebnis dieser Anstrengungen war ein Lehrbuch, das von seinem Erscheinen an vielzitiert und besonders einflussreich war und auch noch modernen Standards gerecht wird.
Courant war bei der Behandlung der Differentialgleichungen der klassischen Physik, insbesondere den Schwingungsproblemen, besonders daran gelegen, ihren Zusammenhang mit Integralgleichungen herauszustellen. Damit rückt die Methode der Greenschen Funktionen an einen wichtigen Platz in seinen Betrachtungen. Courant betrachtet zunächst allgemein einen linearen selbstadjungierten Differentialoperator

$$L[u] = pu'' + p'u' - qu$$

[9][Courant und Hilbert 1924]. Der Beitrag Hilberts zu diesem Buch scheint sich darauf zu beschränken, dass Material aus seinen Vorlesungen verwendet worden ist. Courant ging es bei der Erwähnung Hilberts bei der Autorenschaft vor allem darum, zu betonen, „daß die hier vertretenen wissenschaftlichen und pädagogischen Bestrebungen Kinder der mathematischen Geistesrichtung sind, welche für immer mit Hilberts Namen verbunden bleiben wird.“ (Vorwort)

[10][Courant und Hilbert 1924], Vorwort

mit stetigen Funktionen p, q und die zugehörige inhomogene Gleichung

$$L[u] = -\phi(x) \quad .$$

Abbildung 4.4: Richard Courant

Courant diskutiert nun die physikalische Interpretation dieser Gleichung als „Gleichgewichtsbedingung einer Saite unter dem Einfluß einer über die Saite verteilten zeitlich konstanten Kraft, deren Dichte durch $\phi(x)$ gegeben ist.“ Die kontinuierliche Kraft soll dabei als Superposition von „Einzelkräften“ aufgefasst werden, die an der Stelle $x = \xi$ mit der Intensität 1 angreift. Bezeichne $K(x, \xi)$ die Auslenkung der Saite am Orte x bei einer Einzelkraft an ξ, so ergibt sich bei der Superposition der Einzelkräfte zu $\phi(\xi)$ für die Gesamtauslenkung u der Ansatz

$$u(x) = \int K(x, \xi)\phi(\xi)\, d\xi \quad .$$

Der Kern K ist die Greensche Funktion zu L und wird anschaulich auch als „Einflußfunktion“ bezeichnet. Welcher Differentialgleichung muss K genügen? Offenbar muss

$$L[K] = 0 \quad \text{für} \quad x \neq \xi$$

gelten, und bei $x = \xi$ finden wir eine Singularität, die über folgenden Gedankengang bestimmt wird:

> Wir denken uns die Einzelkraft entstanden durch Grenzübergang aus einer Kraft $\phi_\epsilon(x)$, die für $|x - \xi| > \epsilon$ in G Null ist und deren Gesamtintensität durch die Gleichung
>
> $$\int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \phi_\epsilon(x)\, dx = 1$$
>
> gegeben wird.
>
> *[Courant und Hilbert 1924]*

Auch Courant führt seine „δ-Funktion “ hier also aus physikalischen Gesichtspunkten heraus ein, um die „Einzelkraft“ auszudrücken, und nicht etwa aus mathematischen Gründen (etwa um $L[u]$ zu „invertieren“).
Die Singularität des Kernes wird so bestimmt, dass man K_ϵ betrachtet, welches im durch ϵ abgesteckten Bereich der originalen Gleichung $L[K_\epsilon] = (pK'_\epsilon)' - qK_\epsilon = -\phi_\epsilon$ genügt. Wird diese Gleichung nun über einen Bereich integriert, der mindestens so groß ist, wie der ϵ-Bereich, so ergibt sich

$$\int \left(\frac{d}{dx} \left(p \frac{dK_\epsilon}{dx} \right) - qK_\epsilon \right) dx = -1 \quad .$$

der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ kann jetzt vollzogen werden, wobei angenommen wird, dass K_ϵ gegen eine überall stetige Funktion konvergiere, deren Ableitung bis auf die Stelle $x = \xi$

ebenfalls stetig sei. Die Art der Unstetigkeit an dieser Stelle wird bestimmt, indem das Integrationsgebiet auf den Punkt ξ zusammengezogen wird. Dann ergibt sich aus

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{dK_\epsilon}{dx}\right)-qK_\epsilon\right)dx=-1$$

die Bedingung

$$\lim_{\delta\to 0}\left(p(x)\frac{dK(x,\xi)}{dx}\bigg|_{x=\xi+\delta}-p(x)\frac{dK(x,\xi)}{dx}\bigg|_{x=\xi-\delta}\right)=-1 \quad , \tag{4.14}$$

da der Beitrag des Integrales über qK wegen der Stetigkeit von q und K im Limes verschwindet. Da auch p in ξ stetig ist, ergibt sich aus (4.14) die Bedingung

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{dK(x,\xi)}{dx}\bigg|_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta}=-\frac{1}{p(\xi)} \quad , \tag{4.15}$$

die die Singularität der Greenschen Funktion über die Größe der Sprungstelle der Ableitung charakterisiert.
Courant macht nun aus diesen „heuristischen Überlegungen“ eine strenge mathematische Theorie, indem er die Argumentation umdreht, und die Greensche Funktion als den Kern von $L[u]$ *derfiniert*, der das singuläre Verhalten (4.15) aufweist. Festhalten sollten wir im Kontext unserer Fragestellung, dass Courants δ-Funktion ϕ_ϵ in der mathematisch strengen Formulierung nicht mehr auftritt. Die „Einheitskraft“ macht Sinn, um sich über die physikalische Interpretation der Begriffe zu orientieren; sie macht auch Sinn um sich über das zu erwartende Verhalten der mathematischen Lösung zu orientieren, aber in der *mathematischen Theorie* der Differential- und Integralgleichungen wird sie nicht gebraucht. Der Problemkreis einer Definition einer δ-Funktion liegt hier ausgesprochen auf der Seite der Physiker, die sie zu einer simplen Formulierung des Huygensschen Prinzips gut gebrauchen könnten – die mathematische Theorie kommt jedenfalls mit einer hinreichenden Charakterisierung der Greenschen Funktion durch die Charakterisierung des Spunges der Ableitung aus.

4.5 Lanczos: Der Einheitskern

Mit der nun zu besprechenden Arbeit von Kornel Lanczos[11] betreten wir den Bereich der quantenmechanischen Fragestellung. Die Arbeit *Über eine feldmäßige Darstellung der neuen Quantenmechanik*[12] entstand unmittelbar nach Bekanntwerden der Matrizenmechanik. Sie ist eine echte Kuriosität, denn einerseits kommt sie sehr nah sowohl an Schrödingers Wellenmechanik als auch an die Transformationstheorie Diracs und verpasst doch um Haaresbreite den Punkt, der Schrödingers und Diracs Arbeiten etwas später so berühmt machte.

[11] * 1893 in Stuhlweißenburg, Ungarn; † 1974 in Budapest
[12] [Lanczos 1926]

Die *feldmässige Darstellung der der neuen Quantenmechanik* zeigt den engen Zusammenhang zwischen der Göttinger Matrizenmechanik und der Theorie der Integralgleichungen. Dabei wird die Äquivalenz einer feldmäßigen „Kontinuumsauffassung“ mit der „Diskontinuumsauffassung“ der Matrizenmechanik gezeigt, was besonders bemerkenswert ist, da Lanczos' Arbeit *vor* Schrödingers Wellenmechanik entstand. Schon bevor Schrödinger die Quantenmechanik mit seiner Wellenfunktion verbessern wollte, schrieb Lanczos in seiner Einleitung:

> Was aber die Deutung der Tatsachen, also das eigentliche Wesen der Quanten anbelangt, ist es nicht ausgeschlossen, daß die integrale Formulierung sogar der matrizenmässigen überlegen ist, insofern sie den Vorzug hat, mit der Feldvorstellung unmittelbar vereinbar, ja geradezu auf sie aufgebaut zu sein, während der Diskontinuumsauffassung der Begriff des Feldes offenbar fernliegt.
>
> *[Lanczos 1926]*

Die Idee ist, eine unendliche quadratische Matrix als die Komponenten einer „Kernfunktion“ f bezüglich eines vollständigen orthogonalen Systems darzustellen. Dabei ist

$$f(s,\sigma) = \sum a_{ik}\phi^i(s)\phi^k(\sigma) \tag{4.16}$$

mit

$$a_{ik} = \int f(s,\sigma)\phi^i(s)\phi^k(\sigma)ds\,d\sigma \quad . \tag{4.17}$$

Auf diese Art und Weise lassen sich alle mit Matrizen definierten Operationen auf die Kernfunktionen übertragen, die dann die physikalischen Größen repräsentieren sollen.

Zur Formulierung der Vertauschungsrelationen muss der der Einheitsmatrix entsprechende Kern durch

$$E(s,\sigma) = \sum \phi^i(s)\phi^i(\sigma)$$

eingeführt werden.

> Der Einheitskern zeigt nun folgendes merkwürdiges Verhalten. Er verschwindet überall, wo $\sigma \neq s$ ist. Er wird in dem Punkt $\sigma = s$ unendlich, und zwar so, daß
>
> $$\lim_{s=0} \int E(s, s+\epsilon)d\epsilon = 1$$
>
> wird.
>
> *[Lanczos 1926]*

Lanczos gibt damit eine explizite Definition der δ-Funktion in der direkten Vorläuferschaft von Dirac. Aber anders als Dirac, der in etwas anderem Kontext arbeitet, steht Lanczos vor dem Problem, das singuläre Verhalten dieses Kerns zu interpretieren oder aber zu umgehen. Für die Quantisierungsbedingungen der Matrizen $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ findet man nämlich auf Ebene der Funktionen p, q

$$(pq - qp)(s,\sigma) = hE(s,\sigma) \quad ,$$

wobei der Faktor $2\pi i$ fortdefiniert wurde und h das Wirkungsquantum bedeutet. Lanczos folgert daraus, dass „die Born-Jordansche Quantisierungsbedingung nicht mit voller Schärfe, sondern nur mit beliebiger Annäherung gültig sein“ kann, sofern die Funktionen

p, q überall, also auch für $s = \sigma$ endlich sein sollen.
Als Alternative schlägt er vor, die ganze Gleichung mit dem symmetrischen Kern $K(s, \sigma)$ zu multiplizieren, so dass die scharfe Vertauschungsrelation als

$$(Kpq - Kqp)(s, \sigma) = hK(s, \sigma)$$

erhalten bleibt und „das singuläre Verhalten Einheitskerns umgangen wird.“
Der wesentliche Unterschied zur Matrizenmechanik besteht darin, dass in dieser „Feldtheorie“ ein zusätzliches Element in die Rechnung eingeführt wird. Denn der symmetrische Kern gehört fest zu dem vorher gewählten Orthogonalsystem und ist davon abhängig, während die daraus gebildeten Matrixelemente gegenüber der Wahl des Orthogonalsystems indifferent sind. Die Matrixgleichungen sind also gegenüber orthogonalen Transformationen invariant.

> Damit ergibt sich für die prinzipielle Bewertung der beiden Auffassungen folgendes Bild. Sind alle physikalischen Tatsachen von der Beschaffenheit, daß sie uns prinzipiell immer nur die Koeffizienten der Matrizen liefern können, so gebührt der matrizenmäßigen Darstellung der Vorzug (wenigstens vom positivistischen Standpunkt aus!), weil sie kein prinzipiell unerreichbares Element in die Beschreibung der Tatsachen hineinbringt. Die Sachlage ändert sich aber, wenn dem Kern eine physikalische Bedeutung zukommt. In diesem Falle muß die feldmässige Darstellung als die adäquatere gelten, weil die matrizenmäßige Formulierung insofern weniger liefert, als sie nur die Eigenwerte des Kernes geben kann, das System der Eigenfunktionen aber unbestimmt läßt.
>
> *[Lanczos 1926]*

Für den zweiten Fall erkennt Lanczos die Notwendigkeit der externen Bestimmung des Kernes etwa durch eine Differentialgleichung, die sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenfunktionen bestimmt. Es scheint hier also, dass Lanczos an dieser Stelle die Schrödingergleichung einfordert.

Die Beziehung zu Schrödingers Wellenmechanik und Diracs Transformationstheorie Diese Feldtheorie klingt von Ton und Zielsetzung her wie ein Bedürfnis nach der kurz nachher publizierten Wellenmechanik und scheint die Äquivalenzbeweise von Heisenbergscher und Schrödingerscher Quantentheorie vorwegzunehmen. Alles was hier zu fehlen scheint ist die Schrödingergleichung zur *Bestimmung* der Wellenfunktionen, diese selbst scheinen aber in ihrer ganzen Bedeutung schon antizipiert:

> Zu jeder Eigenfunktion $\phi^i(s)$ gehört also ein bestimmter Quantenzustand des Systems.
>
> *[Lanczos 1926]*

Ich möchte nun in einem kurzen Exkurs zeigen, dass dies jedoch nicht so ist.

Zunächst zu Schrödingers Reaktion auf den Artikel. Er setzt sich in dem Artikel, in dem er das Verhältnis der Matrizenmechanik zur Wellenmechanik bestimmt [13] deutlich von Lanczos ab:

[13] [Schrödinger 1926c]

> Ähnliche Gedanken äußert K. Lanczos in einer kürzlich erschienen interessanten Note, welche gleichfalls schon die wertvolle Erkenntnis enthält, daß die Heisenbergsche Atomdynamik auch einer kontinuierlichen Deutung fähig ist. Im übrigen hat die Lanczossche Arbeit mit der vorliegenden weniger direkte Berührungspunkte, als man im ersten Augenblick meinen könnte. Die Determinierung des vorläufig noch ganz unbestimmt gelassenen Lanczosschen Formelsystems ist *nicht* in der Richtung zu suchen, daß etwa Lanczos symmetrischer Kern $K(s,\sigma)$ mit der Greenschen Funktion unserer Wellengleichung [...] zu identifizieren sei. Denn diese Greensche Funktion, wenn sie existiert, hat zu Eigenwerten die Quantenniveaus selbst. Von dem Lanczosschen Kern dagegen wird verlangt, daß er die *reziproken* Quantenniveaus zu Eigenwerten haben soll.
>
> *[Schrödinger 1926c]*

Werfen wir also mit Schrödinger einen zweiten Blick auf das „Formelsystem“. Bilden wir zu dem Hamiltonoperator[14] die Matrixelemente bezüglich seiner Eigenfunktionen, so erhalten wir

$$H_{ik} = E_i \delta_{ik}$$

und gemäß (4.16)

$$H(s,\sigma) = \sum_i E_i \phi_i(s) \phi_i(\sigma) \quad .$$

Wählen wir die ϕ_i speziell als ein Orthonormalsystem von Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$\phi(s) = \lambda \int K(s,\sigma)\phi(\sigma)\, d\sigma \tag{4.18}$$

so konvergiert die rechte Seite im Mittel[15] gegen den Kern $K(s,\sigma)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\phi_i(s)\phi_i(\sigma)}{\lambda_i} = K(s,\sigma) \quad ,$$

so dass

$$H(s,\sigma) \sim K(s,\sigma) \quad .$$

Also gehört zu dem Hamiltonoperator H bei Lanczos ein Kern K zum Eigenwert $\lambda = \frac{1}{E}$ der Integralgleichung (4.18), der damit *verschieden* ist, vom Kern der Schrödingergleichung

$$\Psi_i(s) = E_i \int G(s,\sigma)\Psi_i(\sigma)\, d\sigma \quad .$$ [16]

Wir haben es also nicht mit einer simplen Umdefinition $\lambda \to E$ eines Eigenwertes zu tun, sondern gelangen zu einem Kern, der *nicht* zur Schrödingergleichung gehört.[17] Entsprechend sind die Eigenfunktionen ϕ_i nicht mit den Schrödingerschen Wellenfunktionen

[14] Dies ist natürlich eine moderne Bezeichnung, und eine Sichtweise, die Lanczos nicht zur Verfügung stand. Das Rechnen mit „Operatoren“ wurde ja erst von Schrödinger eingeführt.

[15] siehe die Bilinearformel in [Courant und Hilbert 1924]

[16] Anders gesagt: Die zugehörige Differentialgleichung für die Eigenfunktionen ϕ lautet dann

$$D\phi - \lambda\phi = 0 \quad .$$

Der Differentialoperator D ist aber mit dem Hamiltonoperator H der Schrödingergleichung nicht identisch.

[17] Außer vielleicht, es würde ein Fall vorliegen, bei dem mit E automatisch auch $\frac{1}{E}$ ein Eigenwert wäre.

identisch. [18]

Umgekehrt gilt für die Matrixelemente des symmetrischen Kernes nach (4.17)

$$K_{ik} = \int K(s,\sigma)\phi_i(s)\phi_k(\sigma)\,ds\,d\sigma \quad .$$

Integration über die erste Variable führt unter Beachtung der Definition des Eigenwertproblems zu

$$K_{ik} = \int \frac{1}{\lambda_k}\phi_i(s)\phi_k(s)\,ds \quad ,$$

was wegen der Orthonormalität zu dem gewünschten Ergebnis kommt, dass

$$K_{ik} = H_{ik} \qquad \text{für} \qquad \lambda = \frac{1}{E}$$

.

Wir finden so trotz der enormen äußerlichen Ähnlichkeit tatsächlich keine innere Verwandtschaft von Lanczos und Schrödinger. Schrödingers Gleichung ist *nicht* die von Lanczos vermutete Differentialgleichung für den Kern. Es ist aber gerade die Wellengleichung mit der Wellenfunktion das Zentrum von Schrödingers ganzer Argumentation, denn diese trägt seine „realistische“ Auffassung einer Quantentheorie. Schrödinger füllt daher nicht Lanczos' leeren Formalismus mit Physik, sondern ist ganz anders gerichtet. Es ist also nicht gerechtfertigt, wie hier und da zu hören ist, Schrödinger einerseits und auf der anderen Seite den Göttingern und Kopenhagenern vorzuwerfen, sie hätten Lanczos Beitrag bewusst ignoriert oder doch zumindest heruntergespielt.

Genauso ist auch im Verhältnis zu Dirac keine historische Umbewertung vorzunehmen. Dirac zitiert zwar die Lanczossche Arbeit in seiner bahnbrechenden Arbeit zur Transformationstheorie, dies allerdings nur der Vollständigkeit halber und nicht, weil er Impulse für seine eigene Arbeit aus ihr erhielt[19]. Diracs leitende Idee in [Dirac 1927b] war die Verallgemeinerung des Formalismus auf kontinuierliche Matrizen *zu dem Zweck der Einbeziehung des kontinuierlichen Spektrums.* Damit schafft er einen gedanklichen Rahmen, in dem einige der Lanczosschen Gedanken erst ihren eigentlichen Sinn entfalten können. Die Bereitstellung dieses gedanklichen Rahmens macht die bei Lanczos erkennbaren Ansätze erst sinnvoll.
Damit sind die tragenden Gedanken bei Schrödinger und bei Dirac von der vorliegenden Arbeit ganz verschieden, so dass die relative Resonanzlosigkeit dieser Arbeit auch bei ihren unmittelbaren Nachfolgern erklärlich bleibt. Die Schönheit dieser Arbeit besteht für den Physikhistoriker somit nicht darin, einen verkannten Vorläufer großer historischer Werke ins Bewusstsein zurückzuholen, sondern darin, eine äußerst intelligenten, aber fruchtlos gebliebene Idee zur (alternativen) Weiterentwicklung der Physik zu untersuchen. Als Beispiel betrachte man die Probleme, auf die Lanczos bei seiner weiteren Ausarbeitung stößt, die an dem folgenden „quantenmechanischem mainstream“ ganz vorbeizielen, wie etwa die „unscharfen Quantisierungsbedingungen“.

[18] Ganz allgemein gilt, dass die Formaeln (4.16), (4.17) im allgemeinen nicht einen Differentialoperator H in ihren inversen Integraloperator G transformieren, sondern mit $H(s,\sigma)$ einfach eine integrale Darstellung der Matrixelemente liefern.

[19] [Interview AHQP]

Kapitel 5

Dirac

Mit Paul A. M. Dirac gelangen wir nun ins Zentrum der Dissertation. Nach einem kurzen biographischen Überblick soll in Abschnitt 5.2 die Entstehung der δ-Funktion nachgezeichnet werden. Dazu soll mit seiner Transformationstheorie auch der sachliche Entwicklungskontext nachvollziehbar werden, dem das Kapitel 5.3 gewidmet ist. Dabei soll besonders auf die Argumente geachtet werden, mit denen eine ordentliche mathematische Definition für überflüssig erklärt wird. In Kapitel 5.4 soll berichtet werden, wie Dirac selbst im Laufe der Zeit seine Konzeption weiterentwickelte und verbesserte.

In einer kurzen Zwischenbemerkung soll in 5.5 die enorme Erleichterung, die die δ-Funktion für die Handhabung des physikalischen Formalismus bedeutet, dargestellt werden.

Kapitel 5.6 soll den Gebrauch der δ-Funktion im Hinblick auf die leitende Frage nach der Rolle der Mathematik in der Physik auswerten. Dort werden die Begriffe „Medium“, „Eleganz“ und „mathematische Schönheit“ im Zentrum stehen. Es soll versucht werden, Diracs Begriff der „Schönheit“ in der Physik wirklich gerecht zu werden, und sie nicht auf eine reine Geschmacksfrage des Physikers zu reduzieren. Der sich schemenhaft abzeichnende Zusammenhang zwischen der Schönheit und der Wahrheit einer Theorie erscheint als die eigentliche Quelle des Diracschen Denkens. Dies soll zumindest ansatzweise plausibel gemacht werden.

5.1 Biographischer Überblick

Geboren 1902 in Bristol, begann Paul Adrian Maurice Dirac 1918 das Studium der Elektrotechnik. Nach Abschluss der Ausbildung konnte er keinen Job finden, und begann noch im gleichen Jahr an der Universität Bristol Mathematik zu studieren. Im Sommer 1923 schloss er sein Studium ab und ging nach Cambridge. Dort wurde er Ralph Fowler zugeteilt, einem der wenigen Briten, die sich in der Atomtheorie auskannten. So machte sich Dirac mit den neueren Entwicklungen der Atomphysik vertraut, obwohl sein eigentliches Interesse zunächst der Relativitätstheorie gegolten hatte. Dirac hörte dort in den nächsten Jahren viele Vorträge von den Pionieren der Atomphysik, etwa von Franck oder Bohr. Nach einem halben Jahr in Cambridge war er soweit, seinen ersten wissenschaftlichen Artikel zu veröffentlichen. Ab 1925 begann das „goldene Zeitalter der Quantenmechanik“,

Abbildung 5.1: Paul Adrien Maurice Dirac (©AIP)

unter maßgeblicher Beteiligung Diracs. Schon *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics*[1] begründete 1925 seinen Ruhm als besonders origineller und eigenständiger Geist.

Im Frühjahr 1926 erhielt er seinen Doktortitel für eine 140 Seiten lange Abhandlung mit dem Titel *Quantum Mechanics.*
1926/27 verbrachte er einige Zeit in Kopenhagen bei Bohr und danach in Göttingen, wo er Heisenberg, Pauli und die anderen Koryphäen der neuen Quantenmechanik persönlich kennenlernte. Ende 1926 wurde seine Transformationstheorie fertiggestellt, die im Zentrum dieses Kapitels stehen wird. Am Ende seiner Zeit an Bohrs Institut entstand ein weiterer Meilenstein der Physik: *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation*[2] war der erste Baustein zur Entwicklung der modernen Quantenfeldtheorie. Anfang 1928 gelang ihm schließlich die relativistische Theorie des Elektrons mit der heute nach ihm benannten „Diracgleichung".
Um möglichst von Lehrverpflichtungen verschont zu bleiben und ein Maximum an Freiheit und Zeit für seine eigenen Forschungen behalten zu können, lehnte er seit 1928 verschiedene Berufungen innerhalb Englands und nach Amerika ab, um in Cambridge bleiben zu können. 1929 richtete dort sein St John's College eigens für ihn einen neuen Posten ein, der möglichst wenig Vorlesungsverpflichtungen enthielt.

[1] [Dirac 1925]
[2] [Dirac 1927c]

Ab '29 arbeitete er dann an seinem Lehrbuch *The Principles of Quantum Mechanics*[3], das 1930 veröffentlicht wurde und bis heute ein Standardwerk geblieben ist.
Im gleichen Jahr wurde er Mitglied der Royal Society und war damit in die höchste Klasse der britischen Wissenschaftsränge aufgestiegen. Im Herbst 1932 wurde er „Lucasian Professor of Mathematics" in Cambridge, womit er Newtons berühmten Lehrstuhl übernahm und 37 Jahre lang ausfüllte. Während dieser Zeit schlug er immer wieder finanziell wesentlich besser dotierte Positionen aus.
Während seiner Zeit in Cambridge ging er oft auf Vortragsreisen, nach Amerika genauso wie in die Sowjetunion.
1930 erschien seine sogenannte „Löchertheorie", die eine physikalische Interpretation der überflüssigen Lösungen der Diracgleichung ermöglichte. In der verbesserten Version von 1931 konnte Dirac die Existenz eines Elektrons mit positiver Ladung vorraussagen – was als einer der größten Triumphe der theoretischen Physik gilt.
1933 bekam er mit Schrödinger zusammen den Nobelpreis verliehen[4]. Rudolf Peierls berichtet, Dirac habe ihn nur angenommen, weil eine Ablehnung noch mehr Publicity bedeutet hätte.[5]
1937 heiratete er Margit Balasz, die Schwester von Eugene Wigner.
1947 wurden in der 3. Auflage der *Principles* erstmals die berühmten bra- und ket-Vektoren der Öffentlichkeit vorgestellt.
1954 konnte er eine Einladung Oppenheimers zu einem einjährigen Gastaufenthalt in den Vereinigten Staaten nicht nutzen, da ihm ein Visum verweigert wurde. Dies stand vermutlich mit seinen guten Kontakten in die Sowjetunion in Zusammenhang, die ihm 1955 eine Gastprofessur in Moskau einbrachte.
1969 legte er sein Amt in Cambridge nieder und ging in die USA. Im September 1971 trat er schließlich eine Stelle als Professor an der Florida State University in Tallahasee an, die er bis zu seinem Tod am 20.10 1984 innehatte.

5.2 Der Weg zur δ-Funktion

Während seiner Ausbildung als Elektrotechniker kam Dirac mit Heavisides „Operatorrechnung" in Kontakt. Diese Methoden wurden zum Lösen von Differentialgleichungen benutzt[6]. Sie wurden als gut funktionierende Faustregeln behandelt und gelehrt, was für Ingenieurswissenschaften ja auch hinreichend ist. Die rätselhafte Art, wie diese Methoden funktionierten, machten einen starken Eindruck auf Dirac. Das ganze Studium der Elektrotechnik konzentrierte sich darauf, die Gleichungen zu lernen, die richtige Antworten lieferten, und diese dann als Faustregeln auf das infrage stehende Problem anzuwenden.
Dirac fühlte sich zu der Zeit zwar nicht dazu getrieben, die tiefere Ursache für das Funktionieren dieser Regeln zu ergründen, nichtsdestotrotz kam ihm aber in dieser Phase erstmals die Idee einer δ-Funktion. Diese ging offenbar nicht primär auf die Heavisidesche Idee der mathematischen Beschreibung eines Pulses zurück, sondern war durch formale Fragen angeregt:

> I think it was probably that kind of training that first gave me the idea of a delta

[3] [Dirac 1930b]
[4] Gleichzeitig ging der 32er Preis, der noch nicht vergeben war, an Heisenberg.
[5] [Taylor1987]
[6] siehe Kapitel 4.2

> function because when you think of loads in engineering structures, sometimes you have a distributed load and sometimes you have a concentrated load at the point. Well, it's essentially the same whether you have a concentrated load or a distributed one but you use somewhat different equations in the two cases. Essentially it's only to unify these two things which sort of led to the delta function.
>
> *[Interview AHQP]*

Es geht also um die formale Gleichbehandlung von stetigen Ladungsverteilungen und Punktladungen, d.h. um die Behandlung letzterer als Grenzfall des stetig verteilten Falles. Allerdings versuchte Dirac diese Vereinheitlichung zu diesem Zeitpunkt noch nicht explizit, es war zunächt nur es erst ein „allgemeines Gefühl". Dirac erinnert sich im Interview, die Notwendigkeit dieser Vereinheitlichung sei ihm bei der Lektüre von Eddingtons *Mathematical Theory of Relativity* wirklich klargeworden. Eddington schreibt dort:

> In this and a succeeding equation I have a *quantity* on the left hand side and a *density* on the right hand side. I trust to the reader to amend this mentally. It would, I think, only make the equations more confusing if I attempted to indicate the amendment symbolically.
>
> *[Eddington 1956], S.190*

Entsprechend ersetzt Eddington danach freimütig und je nach Bedürfnis die Ladungsdichte ρ mit der Ladung e und umgekehrt. Dass dieses Verfahren Diracs Phantasie anregte lag allerdings, wie wir in Abschnitt 5.6 ausführlich sehen werden, weniger an der freien Benutzung des Formalismus, als an der offensichtlichen *Uneleganz* dieser Vorgehensweise, die soviel Worte zu ihrer Erläuterung braucht.
Die ersten Anzeichen der δ-Funktion zeigen sich in Diracs Publikationen ab Mitte 1926 zuerst in der Arbeit *Theory of Quantum Mechanics*[7], in der Dirac erstmals Schrödingers Wellenmechanik verarbeitet. Er betrachtet die Schrödingergleichung in der Form

$$F(q,p,t,E)\psi = 0 \quad , \tag{5.1}$$

bei der jede beliebige Lösung ψ aufgrund der Linearität des Operators F sogleich nach einem vollständigen Satz $\{\psi_n\}$ von Lösungen zu $\psi = \sum c_n\psi_n$ zerlegt werden kann. Im Falle des kontinuierlichen Spektrums wird der Entwicklungsatz zu $\psi = \int c_\alpha \psi(\alpha)d\alpha$ verallgemeinert, woran er die Fußnote knüpft:

> The general solution may contain quantities, such as ψ_α and $\partial\psi_\alpha/\partial\alpha$ which satisfy the differential equation (5.1), but which cannot strictly be put in the form $\int c_\alpha\psi(\alpha)d\alpha$, although they may be regarded as the limits of series of quantities which are of this form.
>
> *[Dirac 1926a]*

Durch das Bedürfnis, die Entwicklung nach Eigenfunktionen auch für eine Eigenfunktion selbst durchzuführen, wird ein Einheitsintegraloperator im Formalismus nötig. Hier sehen wir den Wunsch nach einer formal identischen Behandlung von diskreten und kontinuierlichen Problemen am Werk. Dirac weist auch auf die Möglichkeit einer Definition des Einheitsoperators durch einen Grenzübergang hin, ohne aber genauer zu sagen, wie dieser verstanden werden soll. Er lässt es bei dieser Bemerkung bewenden und benutzt deshalb

[7] [Dirac 1926a]

im ganzen Rest des Artikels den unproblematischen diskreten Fall mit $\psi = \sum c_n \psi_n$. Zwei Arbeiten später, sobald der volle Begriff der δ-Funktion zur Verfügung steht macht er es genau andersherum: Der Einfachheit halber werden dort sofort alle Formeln für das kontinuierliche Spektrum angegeben.
In der darauf folgenden Arbeit *The Compton Effect in Wave Mechanics*[8] will Dirac im Verlaufe eines Argumentes einen Satz aus der klassischen Mechanik in die Quantentheorie übertragen. Setzt man

$$\psi_\alpha = e^{iS_\alpha/h} \quad , \tag{5.2}$$

so kann S als die Wirkungsfunktion der Hamilton-Jacobi-Theorie betrachtet werden. Deren Ableitung $\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}$ ist klassisch eine Konstante. Um dieses auch für die entsprechenden Matrixelemente in der Quantenmechanik zu beweisen, differenziert Dirac (5.2) nach α und gelangt zu

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha_r} = \frac{i}{h} \frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha_r} \psi_a \quad .$$

Ohne weitere Einführung fährt Dirac dann fort, dass die rechte Seite damit von der Form

$$\int c(\alpha, \alpha')\psi_{\alpha'} d\alpha'$$

ist,

> where $c(\alpha, \alpha')$ is a certain very discontinuous „function" of $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ and $\alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$, which is equal to zero except when $|\alpha_2 - \alpha'_2|, |\alpha_3 - \alpha'_3|$ and $|\alpha_4 - \alpha'_4|$ are very small, and is very large and poitive when α'_r is a little greater than α_r, and is very large and negative when α'_r is a little less than α_r.
>
> *[Dirac 1927a]*

Hier tritt völlig unkommentiert und aus heiterem Himmel die erst einen Monat später formal eingeführte Ableitung der δ-Funktion auf. Die Möglichkeit des Umschreibens des Differentialoperators $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ in einen Integraloperator wird wie ein selbstverständlicher und langbekannter Kniff vorrausgesetzt. Die Eigenschaft, dass $\psi'(\alpha)$ die Darstellung $\psi'(\alpha) = \int c(\alpha, \alpha')\psi(\alpha')d\alpha'$ besitzt, wird nicht weiter diskutiert und begründet, sondern dient als einfacher *Rechenschritt* zum Beweis der Konstanz von $\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}$. Die zeitliche Konstanz der entsprechenden Matrixelemente liegt jetzt tatsächlich auf der Hand: $-ih\, c(\alpha, \alpha')$ ist nun die Matrixdarstellung von $\frac{\partial S_\alpha}{\partial \alpha}$ und unabhängig von t'; der Satz gilt also auch für die Quantentheorie.

5.3 Diracs Transformationstheorie

Ende 1926 war die konzeptionelle Vereinheitlichung der Quantentheorie das drängendste Problem der Physik. Die mathematische Äquivalenz der Matrizen- und der Wellenmechanik war zwar bereits verstanden, doch die Bornsche statistische Interpretation der Wellenmechanik mit den Matrizen in Verbindung zu bringen sei, war völlig unklar. Es fehlte weiterhin eine einheitliche Interpretation des Formalismus, und es war unklar, welche physikalische Bedeutung die mathematischen Symbole nun eigentlich hatten.
In dieser Situation kam Dirac im September 1926 nach Kopenhagen, wo er neben Bohr

[8] [Dirac 1927a]

auch häufig mit Heisenberg und Pauli zusammentraf. Die Verbindung der statistischen Deutung der Wellenmechanik mit dem allgemeineren Formalismus der Matrizenmechanik war das deutlich vor Augen liegende Ziel; die resultierende „Transformationstheorie“ wurde dann fast gleichzeitig von Jordan und Dirac unabhängig voneinander gefunden. Heisenberg berichtete Pauli von Kopenhagen aus in einem Brief nach Hamburg von Diracs Fortschritten bei der Übertragung von wellenmechanischer Begrifflichkeit in die Matrizensprache:

> Dirac hat ... eine sehr lustige Betrachtung angestellt. Frage: „Was ist die qm Matrix der elektrischen Dichte“. Definition der Dichte: I. Sie ist überall null, wo das Elektron nicht ist. In Gleichungen:
>
> $$\begin{aligned} \rho(x_0, y_0, z_0, t)(x_0 - x(t)) &= 0 \\ \rho(x_0, y_0, z_0, t)(y_0 - x(t)) &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$
>
> Ferner, die Gesamtladung ist e:
>
> $$\int \rho(x_0, y_0, z_0, t) dx_0 dy_0 dz_0 = e$$
>
> Die Lösung ist (wie man ziemlich leicht beweisen kann):
>
> $$\rho_{nm}(x_0 y_0 z_0 t_0) = e\psi_n \psi_m^*(x_0 y_0 z_0)$$
>
> *[Pauli 1979] I,(S.351)*

Man erkennt hier sogleich, wie wesentlich die Definition einer δ-artigen Funktion für die Formulierung einer einheitlichen quantentheoretischen Mechanik ist, die sowohl Matrizen als auch Wellenfunktionen umfassen soll. Dieser Brief zeigt, wie schon in den ersten Zeugnissen und den ersten Entwürfen der Transformationstheorie bei der Vereinheitlichung von wellen- und matrizenmechanischer Konzeption die δ-Funktion im Mittelpunkt der Aufmerksamkeit steht. Die Tranformationstheorie ruht vom Zeitpunkt ihrer gedanklichen Entstehung in wesentlicher Weise auf dem Begriff der δ-Funktion.

Betrachten wir jetzt die veröffentlichte Version dieser Ideen. In seinem Aufsatz „The Physical Interpretation of Quantum Dynamics“ [Dirac 1927b], der schließlich die Transformationstheorie systematisch ausarbeitet, hat Diracs Fragestellung folgende Form angenommen: Er sucht eine allgemeine Methode, die gesamte von der Quantentheorie bereitgestellte physikalische Information ohne spezielle Zusatzannahmen zu erhalten. Speziell muss geklärt werden, welche Fragen an das physikalische System überhaupt sinnvoll sind, und wie man die entsprechenden Antworten erhält, d.h. aus Rechnungen mit q-Zahlen normale c-Zahlen gewinnen kann, die mit dem Experiment verglichen werden können[9]. Mathematisch ausgedrückt führt der erste Punkt auf den Begriff des vollständigen Satzes kommutierender Variablen. Die Abhängigkeit des Formalismus von der spezifischen

[9][...] certain questions that one can ask about the system on the classical theory [...] can be given definite unambigious answers on the quantum theory as well ....In the present paper a general theory of such questions and the way the answers are to be obtained will be worked out. This will show all the physical information that one can hope to get from the quantum dynamics and will provide a general method for obtaining it ...

physikalischen Situation zeigt sich durch die Wahl der angemessenen Variablen, in denen das Problem dargestellt wird. Im Original-Matrixansatz stehen die Zeilen und Spalten für Übergänge zwischen verschiedenen Orbits, ein Ansatz der für Streuprobleme offensichtlich wenig Sinn macht. Um von diesen Einschränkungen frei zu werden, braucht man

> ... a theory of the more general schemes of matrix representation, in which the rows and columns refer to any set of constants of integration that commute, and the laws of transformation from one such scheme to another.
>
> *[Dirac 1927b]*

Bevor Dirac jedoch diese eigentliche Aufgabe in Angriff nimmt, führt er nun vorweg in einem Kapitel „notation“ die kontinuierlichen Matrizen ein. Insbesondere muss, wenn man der Theorie der Matrizenmechanik folgen will, gesagt werden, was denn die „Diagonale“ einer kontinuierlichen Matrix ist. Die „Diagonale“ einer kontinuierlichen Matrix erfordert dann als den zentralen Bestandteil die Einführung der δ-Funktion. Wir folgen Dirac hier in dem Aufbau seiner Arbeit und diskutieren im nächten Kapitel zunächst die δ-Funktion, bevor wir im darauffolgenden Abschnitt zur eigentlichen Transformationstheorie zurückkehren werden.

5.3.1 Die δ-Funktion in Definition und Rechnung

Dirac führt die Matrizen als Repräsentanten physikalischer Größen sogleich für eine diskrete wie kontinuierliche Indexmenge gleichzeitig ein. Dabei stellt er aber sogleich heraus, dass der kontinuierliche Fall der „more general and typical one“ sei, weshalb er die ganze Arbeit in kontinuierlicher Schreibweise durchführt. Da aber bei der Manipulation kontinuierlicher Matrizen nicht auf eine bekannte mathematische Theorie zurückgegriffen werden kann, ist die Ausarbeitung eines entsprechenden Rechenschemas die erste Aufgabe der Untersuchung.

> „One cannot go far in the development of the theory of matrices with continuous ranges of rows and columns without needing a notation for that function of a c-number x that is equal to zero except when x is very small, and whose integral through a range that contains the point $x = 0$ is equal to unity.“
>
> *[Dirac 1927b]*

In Gleichungen:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{when} \quad x \neq 0, \tag{5.3}$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1 \quad . \tag{5.4}$$

[Dirac 1927b]

Diracs δ-Funktion entsteht also im Kontext der „kontinuierlichen Matrizen“, in dem sie, wie er später im gleichen Artikel sagt, die Rolle der Eins spielt.

Er räumt sogleich ein, dass die δ-Funktion keine eigentliche Funktion sei, und interpretiert die δ-Funktion versuchsweise als Grenzwert einer Folge von Funktionen. „Versuchsweise“ deswegen, weil die nähere Betrachtung[10] zeigt, dass man so kein Objekt mit den gewünschten Eigenschaften (5.3) und (5.4) erhalten kann, und Dirac selbst in späteren Veröffentlichungen die Idee des Grenzwertes einer Folge nur noch als Hilfsmittel zur Anschauung der δ-Funktion benutzt.

Die Uneigentlichkeit von δ macht allerdings nicht viel aus, denn:

> All the same one can use $\delta(x)$ as though it were a proper function for practically all the purposes of quantum mechanics without getting incorrect results.
>
> *[Dirac 1927b]*

Daraufhin führt er auch die Ableitung der δ-Funktion ein, die, wie er sogleich zugibt, noch weniger „eigentlich“ sind als δ selbst.

Im Gegensatz zu seinen Vorläufern definiert Dirac damit die δ-Funktion von Anfang an als ein eigenständiges und besonderes Objekt, das einer ganzen Reihe von sehr speziellen Rechenregeln gehorcht. Wir finden gleich im ersten Artikel eine ganze Reihe davon:

1. $\delta(x) = \delta(-x)$ und $x\delta(x) = 0$, was zusammen mit $\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$ eine alternative Definition ergäbe.

2. $\int f(x)\delta(a-x)dx = f(a)$ und $\int f(x)\delta'(a-x)dx = f'(a)$ durch partielle Integration.

3. Verallgemeinerung auf die n-fache Ableitung

4. $\int \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$ und allgemeiner
   $\int \delta'(a-x)\delta^{(n)}(x-b)dx = \delta^{(n+1)}(a-b)$

5. $-x\delta'(x) = \delta(x)$

6. Später findet sich innerhalb des Textes noch eine Taylorentwicklung

   $$\sum \frac{1}{n!}(ah)^n \delta^{(n)}(\xi' - \xi``) = \delta(\xi' - \xi'' + ah) \quad ,$$

   die damit begründet wird, dass Taylors Theorem für alle Funktionen der Folge gilt, als deren limes die δ-Funktion angesehen wird.

7. Weniger eine Rechenregel als vielmehr die Verknüpfung zur Physik und zum Ziele der Transformationstheorie ist die Bemerkung, dass die δ-Funktion die Elemente der kontinuierlichen Einheitsmatrix angebe, und eine allgemeine Diagonalmatrix $f(\alpha)$ die Gestalt $f(\alpha')\delta(\alpha'\alpha``)$ habe.

Diese Rechenregeln sind nun in mehrfacher Hinsicht interessant. Sie zeigen deutlich, wie zum erstenmal der Versuch gemacht wird, die δ-Funktion als mathematisches Objekt systematisch zu benutzen und in einen rechentechnischen Kontext einzubettten, indem ein ganzer Satz von Regeln angegeben wird.

[10] siehe dazu die mathematische Einleitung

Bei den vorher behandelten Vorläufern wurde zwar jeweils eine δ-Funktion definiert, aber immer nur zur vorübergehenden Erläuterung eines bestimmten Argumentes, ohne selbst und als solche in den engeren Gesichtskreis zu rücken. Die δ-artigen Funktionen von Kirchhoff, Sommerfeld und Courant hatten nur den Status einer halb-anschaulichen Argumentationshilfe, und waren nicht eigentlich *Gegenstand* mathematischer Untersuchungen. Das Neue an Diracs Behandlung der δ-Funktion liegt in dem erstmaligen Versuch, sie als mathematisches Objekt mit selbständiger mathematischer Existenz zu behandeln und als solches rechnerisch zu manipulieren. Deshalb trägt sie heute ganz zu recht den Namen *Diracs* δ-Funktion.
Damit geht Dirac weit über das von seinen Vorläufern intendierte hinaus. Daher muss er sich im Unterschied zu seinen Vorgängern der Kritik der professionellen Mathematiker unterziehen, da er sich zu weit in ihre Domäne hineigetraut hat. Erst an dieser Stelle macht eine Stellungnahme der Mathematik zur δ-Funktion überhaupt Sinn, da sie vorher nicht unbedingt als Problem der *Mathematik* erkennbar war[11]. Dass hier einerseits eine systematische Definition mit Rechenregeln angegeben wird, aber andererseits keine Brücke zur existierenden mathematischen Theorie geschlagen wird, macht das Streitpotential aus, das die δ-Funktion durch Dirac erhält.

Erst Diracs „Quasi-Definition“ macht deutlich, dass und wie sich die δ-Funktion einer stetigen Einbettung in einen mathematischen Kontext entzieht. Dieser mathematische Mangel macht nun vor allem die *Begründung* der Rechenregeln interessant. Da es sich nicht um eine ordentliche mathematische Definition handelt, werden die oben angegeben Eigenschaften nicht (im strengen Sinne) berechnet oder bewiesen, sondern entstehen aus *Plausibilitätsbetrachtungen*, die sich nur dadurch rechtfertigen, dass sie *nicht zu falschen* Ergebnissen führen. Im Text finden wir diesen Gedankengang zweimal: Man darf mit der δ-Funktion rechnen, *als ob* sie eine stetige Funktion sei, weil dieses nicht zu falschen Resultaten führt. Diracs Argument beruht also nicht auf der *Richtigkeit* seines Vorgehens, sondern auf der schwächeren Aussage, dass es *nicht unrichtig* sei. Die doppelte Verneinung ist die einzig mögliche „Begründung“, die die Uneigentlichkeit der δ-Funktion zulässt.
Eine ausführlichere Diskussion und Interpretation Argumentation wird in Abschnitt 5.6.2 erfolgen, sobald wir noch mehr Stellungnahmen Diracs aus späteren Zeitabschnitten gesammelt haben.
Aber zunächst zurück zur Transformationstheorie.

5.3.2 Die Transformationstheorie

Nachdem das elementare Kalkül mit der δ-Funktion vorgestellt ist, kann sich Dirac nun seinem eigentlichen Anliegen, der Transformationstheorie widmen. Dabei zeigt sich sogleich, welchen Stellenwert die δ-Funktion in der Konzeption und Formulierung der Quantentheorie besitzt.

Dirac beginnt mit der Definition eines quantenmechanischen Problems im Sinne der Matrizenmechanik. Gegeben sei ein Satz kanonischer Variablen, die alle physikalischen Anforderungen erfüllen:

[11] siehe dazu auch die kurze Diskussion auf Seite 100

1. Vertauschungsrelationen
$$pq - qp = ih \quad ,$$
wobei die p, q irgendwelche Matrizen mit diskreten oder kontinuierlichen Indizes sind.

2. Für irgendeine dynamische Variable g gelten die Bewegungsgleichungen
$$gH - Hg = ih\dot{g}$$
beziehungsweise
$$gH - Hg + ih\frac{\partial g}{\partial t} = ih\dot{g}$$

3. $H(q, p)$ ist diagonal, bzw. zu diagonalisieren.

4. Matrizen, die „reelle Variablen“ (also Observablen) repräsentieren, sollen hermitesch sein.

Kern der Transformationstheorie ist nun die Beobachtung, dass mit der Variablen g auch die transformierte Variable
$$G = bgb^{-1} \tag{5.5}$$
alle Forderungen erfüllt. Genauer gesagt: Für eine beliebige invertierbare Matrix b bleiben alle algebraischen Relationen erhalten. Wenn b nicht zeitabhängig ist, gilt auch die Bewegungsgleichung weiterhin. Wenn b unitär ist (Dirac gebraucht nicht dieses Wort), bleibt auch die Hermitezität erhalten, und wenn b mit H kommutiert bleibt auch, falls vorhanden, die Diagonalität erhalten.

Dirac diskutiert nun primär Transformationen, in denen nur die ersten beiden Relationen erfüllt sind. Die Transformationsgleichung (5.5) kann er nun in kontinuierlichen Komponenten schreiben als
$$G(\xi'\xi“) = \int\int b(\xi'\alpha')d\alpha' \cdot g(\alpha'\alpha“)d\alpha'' \cdot b^{-1}(\alpha“\xi“) \quad . \tag{5.6}$$
Diese Gleichung ist offenbar direkt nach dem Vorbild des Multiplikationsgesetzes für gewöhnliche Matrizen gebaut.
Nach einer Umbenennung von $b(\xi'\alpha')$ in das intuitivere (ξ'/α') und entsprechend $b^{-1}(\xi'\alpha')$ in (α'/ξ') erhält man für die Transformation der Variablen g vom α-Schema ins ξ-Schema
$$g(\xi'\xi“) = \int\int (\xi'/\alpha')d\alpha' \cdot g(\alpha'\alpha“)d\alpha'' \cdot (\alpha''/\xi“) \quad . \tag{5.7}$$
Dabei ist die Unterscheidung zwischen G und g fallengelassen worden, was sinnvoll ist, da G die gleiche Variable ist wie g. Der Unterschied liegt allein in dem Schema, durch welches die Variable dargestellt wird, und dieses wird bereits durch das Argument angegeben.
Jede q-Zahl wird so durch ungestrichene Symbole dargestellt, jeder Parameter, d.h. Matrixindex wird durch gestrichene Buchstaben bezeichnet. Betrachten wir speziell die Variable ξ in ihrem eigenen Schema, so hat ξ Diagonalgestalt:
$$\xi(\xi'\xi“) = \xi'\delta(\xi' - \xi“) \quad . \tag{5.8}$$

Die zu ξ kanonisch konjugierte Matrix η erhält im ξ-Schema die Form

$$\eta(\xi'\xi``) = -ih\delta'(\xi' - \xi``) \quad , \tag{5.9}$$

was sich durch die Forderung nach Erfüllung der Vertauschungsrelationen ergibt.
Will man nun die Größen ξ und η in einem anderen Schema darstellen, so muss (5.8) und (5.9) in die Transformationsgleichung (5.7) eingesetzt werden. Bei Transformation einer einzien Variablen[12] ergibt sich

$$\eta(\xi'\alpha') = -ih\frac{\partial(\xi'/\alpha')}{\partial\xi'} \quad \text{bzw.} \quad \xi(\xi'\alpha') = \xi'(\xi'/\alpha') \quad . \tag{5.10}$$

Die Komponenten von η im neuen Schema ergeben sich also durch Ableitung der Transformationsfunktion; diejenigen von ξ durch Multiplikation der Transformationsfunktion mit ξ'.
Für Funktionen der Größen ξ, η erhält man die Komponenten des neuen Schemas entsprechend durch die Wirkung eines Differentialoperators

$$f(\xi,\eta)(\xi'\alpha') = f(\xi', -ih\frac{\partial}{\partial\xi'})(\xi'/\alpha') \quad .$$

Sucht man jetzt speziell ein Schema α, welches eine vorgegebene Funktion $F(\xi,\eta)$ in Diagonalgestalt $F(\xi,\eta)(\alpha'\alpha``) = F(\xi\eta)(\alpha') \cdot \delta(\alpha' - \alpha``)$ darstellt, so ergibt sich folgende Differentialgleichung für die Transformationsfunktion:

$$F(\xi', -ih\frac{\partial}{\partial\xi'})(\xi'/\alpha') = F(\alpha')(\xi'/\alpha') \quad .$$

Dies ist aber für den Fall, dass die ξ und die η die p und q sind und F die Energie H wird, nichts anderes als die Schrödingergleichung.

> The eigenfunctions of Schrödinger's wave equation are just the transformation functions ... that enable one to transform from the (q) scheme of matrix representation to a scheme in which the Hamiltonian is a diagonal matrix.
>
> *[Dirac 1927b]*

Für unsere Zwecke ist der Transformationstheorie mit der Herleitung des Zusammenhanges zwischen Matrizen- und Wellenmechanik erst einmal genüge getan. Die von Neumannsche Version der Äquivalenz, und damit eine vollkommen andere Vorgehensweise, wird zum Vergleich in Abschnitt 6 vorgestellt werden.

5.4 Die weitere Entwicklung der δ-Funktion

Dirac selbst hat in der Einführung der δ-Funktion keine besondere Leistung gesehen. Allerspätestens mit der Arbeit von Lanczos lag der Begriff der δ-Funktion in der Luft. Dirac wunderte sich im Interview mit T.S. Kuhn später, dass niemand vor ihm die δ-Funktion eingeführt hatte, „because it's just a question of notation“[13]. Auch war er der Meinung, dass kontinuierliche Matrizen schon lange bei Mathematikern in Gebrauch gewesen seien:

[12] Dirac spricht von „gemischter Darstellung“, da hier nur die Zeilen (oder Spalten) allein transformiert werden.

[13] [Interview AHQP]

> I did not get them from anyone else, but I suppose the mathematicians had it long before.
>
> *[Interview AHQP]*

Dass die Sache mit der δ-Funktion und den kontinuierlichen Matrizen wohl doch nicht so einfach war, zeigte sich spätestens mit den Arbeiten John von Neumanns[14]. Auch wenn Dirac in den 1930 erstmals erschienenen *Principles of Quantum Mechanics* die Kritik der Mathematiker nicht erwähnt und er sich auch offensichtlich nicht dadurch berührt fühlt, erläutert er doch den Zusammenhang seiner δ-Funktion mit mathematischer Strenge etwas ausführlicher.
Der Kontext ergibt sich hier, wie schon in [Dirac 1926b] aus der Entwickelbarkeit der Lösungen Ψ nach Eigenfunktionen bei koninuierlichem Spektrum

$$\Psi = \int a_p \psi_p \, dp \quad . \tag{5.11}$$

Man erinnere sich, dass aber nicht *jede* Lösung so dargestellt werden kann, etwa ψ_p selbst. Damit der Entwicklungssatz aber immer und für alle Fälle allgemein gelten kann, lassen wir nun zu,

> daß die Koeffizienten a_p auch in bestimmter Weise unendlich werden. Dann läßt sich jedes Ψ wenigstens formal nach Glg. (5.11) darstellen. Das ist ganz ähnlich wie in der Geometrie, wo wir auch zwei parallelen Linien einen Schnittpunkt in der Unendlichkeit zuschreiben, um zu vermeiden, daß die parallelen Linien eine Ausnahme von der Regel bilden, daß zwei gerade Linien sich stets in einem Punkt schneiden.
>
> *[Dirac 1930b]*

Wie schon in [Dirac 1926a] wird auch an dieser Stelle die δ-Funktion im wellenmechanischen Kontext eingeführt. Mathematisch wird sie danach in der gleichen Weise wie oben beschrieben, die verschiedenen Rechenregeln ergeben sich „unmittelbar aus der Definition“ oder seien „at least not inconsistent with the definition“ [Dirac 1930b]. Hier findet sich weiterhin die doppelte Verneinung[15], und eine *positive* Herleitung der δ-Funktion aus der Mathematik bleibt weiter aus. Aber diese braucht Dirac aus zwei Gründen auch gar nicht zu geben: Erstens braucht er *als Physiker* sich keine besonderen Gedanken um die Strenge zu machen, denn für die Physik genügt die Plausibilität der Mathematik vollauf:

> Für alle physikalischen Zwecke genügt es, falls man nicht gerade eine strenge Axiomatik anstrebt, sich mit groben anschaulichen Vorstellungen über Grenzwerte und Stetigkeit zu bescheiden, wie man sie z.B. aus dem Vektorbilde der ψ gewinnen kann.
>
> *[Dirac 1930b], S.38*

Die Argumentation ist aber zweitens auch innermathematisch gesehen und trotz des Fehlens einer positiven Begründung kein *gravierender* Verstoß gegen mathematische Strenge:

[14] Kapitel 6

[15] Die eben benutzte deutsche Übersetzung schreibt hier statt „not inconsistent with the definition“ „wenigstens mit dieser Definition in Übereinstimmung“. Das Abschätzige der doppelten Verneinung wird hier im Deutschen durch das „wenigstens“ wiedergegeben.

> Die Einführung dieser δ-Funktion in unsere Analysis verursacht keinen Mangel an Strenge in unserer Theorie. Denn jede Gleichung, die die δ-Funktion enthält, läßt sich in eine Form umschreiben, die die δ-Funktion nicht enthält, dafür aber im Allgemeinen viel umständlicher ist. Die δ-Funktion ist also nur ein bequemes Mittel der Schreibweise. Der einzige Mangel an Strenge in unserer Theorie rührt daher, daß wir mit den abstrakten Symbolen Rechnungen wie die Differentiation und Integration in bezug auf Parameter durchführen, die in ihnen enthalten sind, ohne daß diese Operationen streng definiert sind.
>
> *[Dirac 1930b]*

Tatsache ist aber, dass uns Dirac auch nur ein einziges Beispiel einer strengen Rechnung ohne Benutzung der δ-Funktion schuldig bleibt. Die Auffassung der δ-Funktion als *bloße Schreibweise* ist damit zumindest problematisch, da gar nicht gesagt ist, *für was genau* die δ-Funktion eigentlich eine Schreibweise sein soll. Eine wirkliche Diskussion, inwiefern *und wofür* die δ-Funktion eine Abkürzung ist, finden wir erst in Paulis Handbuchartikel [Pauli 1933].

Doch schauen wir uns, bevor wir diese Punkte im nächsten Abschnitt genauer betrachten, zunächst noch die weitere Entwicklung des Diracschen Konzeptes in den nächten Jahrzehnten an. 30 Jahre später finden wir in der 58er Auflage der „Principles“, dass Diracs eigener Gebrauch und seine Begründung der δ-Funktion immer verfeinerter wurde. Die Hinführung legt dabei besonderen Wert auf die Unterscheidung *verschiedener Sorten* Unendlichkeit:

> Our work [...] led us to consider quantities involving a certain kind of infinity. To get a precise notation for dealing with these infinities ...
>
> [Dirac 1958]

führt Dirac dann die δ-Funktion ein. Auch hier betont er gleich, dass $\delta(x)$ keine normale Funktion sei:

> Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confined to a certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency arise.
>
> *[Dirac 1958]*

Danach finden wir etwa eine ganze Reihe zusätzlicher bemerkenswerter Rechenregeln:

1. Alternative Definition als Ableitung der Heaviside-Funktion. Dirac bemerkt, dass „the δ function appears whenever one differentiates a discontinuous function“.

2. $\delta(ax) = a^{-1}\delta(x) \qquad a > 0$

3. $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right) \qquad a > 0$

4. Weitere Anwendungen von $x\delta(x) = 0$: Aus $A = B$ folgt jetzt $\frac{A}{x} = \frac{B}{x} + c\delta(x)$ mit beliebiger Konstante c.

5. $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$

Diese verbesserten Rechenregeln entspringen dabei der verfeinerten Konzeption. Dirac präsentiert die δ-Funktion ausdrücklich als nicht-punktweise definiertes Objekt, das immer nur unter dem Integral auftaucht und nur unter einem Integral überhaupt Sinn macht. Entsprechend ist der Sinn dieser Gleichungen nunmehr „that its two sides give equivalent results as factors in an integrand.“ Wir erhalten hier das erste Mal in seinen Schriften eine Auskunft darüber, in welchem *mathematischen* Sinne Gleichungen mit δ-Funktionen gemeint sein könnten, und welche mathematische Bedeutung die δ-Funktion haben könnte. Dirac deutet so das erste Mal an, wie die lang versprochene „korrekte, aber umständliche“ Schreibweise (die er mit der δ-Funktion vermeiden möchte) nun tatsächlich aussehen könnte.

> Therefore it should be possible to rewrite the theory in a form in which the improper functions appear allthrough only in integrands. One could then eliminate the improper functions altogether.
>
> *[Dirac 1958], S.59*

Diese Einstellung kommt faktisch dem Gebrauch der δ-Funktion als *Funktional* schon so nahe, dass hier nur noch das *begriffliche* Zentrum der mathematischen Formulierung fehlt[16]. Die relativ schwachen, da negativen Argumente, die sich allein auf das Ausbleiben von Fehlern und auf Bequemlichkeit stützten, werden hier erstmals durch die Andeutung einer positiven mathematischen Theorie aufgepeppt.

5.5 Die δ-Funktion in der Physik

Bevor ich im Einzelnen darauf eingehe, welches Verständnis von Mathematik sich in der δ-Funktion äußert, möchte ich kurz einen Eindruck vermitteln, auf welche Art und Weise sie sich in der Physik festgesetzt hat und welchen Stellenwert sie in der Quantentheorie einnimmt.

Die Transformationstheorie in der dargestellten Form ist hauptsächlich nur noch von historischen Interesse und ihre Art der Darstellung als reine Matrixtheorie wurde von Dirac schon 1930 in seinen „Principles“ auf eine universellere Basis gestellt. Die δ-Funktion blieb für die Physik aber unter jedem Wandel des Gesichtspunktes immer der zentrale Teil einer Begrifflichkeit, die eine Behandlung des Stetigen aus den von diskreten Problemen entlehnten Methoden anstrebte.

In der Transformationstheorie war sie als die Ermöglichung des Begriffs der kontinuierlichen Matrix *das* Fundament der konzeptionellen Gleichbehandlung von Problemen mit diskreten und kontinuierlichen Quantenzahlen. Die Transformationstheorie war noch ganz als Matrizentheorie konzipiert. Um überhaupt die Begrifflichkeit der Born-Jordanschen Quantenmechanik auf allgemeine Probleme anwenden zu können, war es, wie wir gesehen haben, unerlässlich, alle zentralen Operationen, die für Matrizen machbar sind, in genau derselben Weise für kontinuierliche Matrizen zu definieren. Gerade die Elemente der Diagonalmatrix H waren ja die mit dem Experiment zu vergleichenden eigentlichen physikalischen Werte. Die Diagonalelemente stellen die Verbindung von Theorie und Experiment

[16] Tatsächlich berichtet H. Kragh in [Kragh 1990] von einer Begegnung Diracs mit Laurent Schwartz im August 1949 in Vancouver, also nach der Entwicklung der Theorie der Distributionen, wobei mir näheres leider nicht bekannt ist.

dar. Wir sehen also, wie die δ-Funktion als kontinuierliches Äquivalent der Diagonalmatrix nicht nur ein relativ unwichtiger Rechentrick ist, sondern direkt am konzeptionellen Kern der Theorie beteiligt ist.
Der leitende Gesichtspunkt der Theorie verlagerte sich aber bald auf die abstraktere Auffassung der Zustände als einem *Vektorraum.* Das hier auftretende analoge Problem ist die *überabzählbare* Anzahl von Dimensionen, wobei mathematisch gesehen einige anschauliche Eigenschaften aus dem $\mathcal{R}^n$ nicht übertragen werden. Die δ-Funktion ist dabei der Kniff, den Formalismus trotzdem genau analog dem diskreten Fall zu gestalten. Dies soll kurz anhand des Beispieles der Wellenfunktionen gezeigt werden.
Beginnen wir mit dem diskreten Spektrum. Jedes Ψ kann durch lineare Superposition von Basisvektoren geschrieben werden:

$$\Psi = \sum_n a_n \psi_n. \tag{5.12}$$

Dabei sind die Koeffizienten a_n die Projektion von Ψ auf den n-ten Basisvektor

$$a_n = (\psi_n, \Psi) = \int dx \psi_n^*(x)\Psi(x) \quad . \tag{5.13}$$

Die Einsetzung von (5.12) führt zu

$$(\psi_n, \Psi) = \int dx\ \psi_n^*(x)\Psi(x) = \int dx \sum_m a_m \psi_n^*(x)\psi_m(x)$$

und damit auf die Bedingung

$$\int dx\ \psi_n^* \psi_m = \delta_{nm}.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass das System der ψ_n ein Orthonormalsystem ist. Die Parsevalsche Gleichung gibt an, wie sich die Normierung der Ψ auf die Koeffizienten der Zerlegung überträgt:

$$(\Psi, \Psi) = \int dx \sum_{n,m} a_n^* \psi_n^* a_m \psi_m = \sum_n |a_n|^2 = 1$$

Betrachten wir nun Wellenfunktionen, die durch einen kontinuierlichen Parameter abgezählt werden. Aus (5.12) erhalten wir als Verallgemeinerung das Integral

$$\Psi(x) = \int dy\ f(y)\psi_y(x). \tag{5.14}$$

Die Koeffizientenfunktion $f(y)$ soll wiederum als Projektion verstanden werden, und so schreiben wir

$$f(y) = (\psi_n, \Psi) = \int dx\ \psi_y^*(x)\Psi(x) \quad .$$

Die Einsetzung der Entwicklung führt uns dann zu

$$(\psi_n, \Psi) = \int dx\ \psi_y^*(x)\Psi(x) = \int dx \int dy' f(y')\psi_y^*(x)\psi_{y'}(x)$$

Damit wir auf der rechten Seite $f(y)$ herausbekommen, muss offenbar gelten, dass

$$\int dx\ \psi_y^*(x)\psi_{y'}(x) = \delta(y-y'),$$

sofern wir die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge vorraussetzen.
Dies ist die Orthogonalitätsrelation im stetigen Fall. Die δ-Funktion suggeriert also, dass beim Übergang ins kontinuierliche Spektrum „nichts besonderes“ passiert. Diese Analogie zum $\mathcal{R}^n$ – das „Vektorbild der ψ“[17]– ist anschaulich und für die Physik viel wichtiger als die auftretenden Unterschiede, denn „für alle physikalischen Zwecke genügt es, sich mit groben anschaulichen Vorstellungen über Grenzwerte und Stetigkeit zu bescheiden“[18].
In der Formulierung der Vollständigkeitsrelation tritt die δ-Funktion unabhängig von der Art des Spektrums auf. Setzen wir nämlich (5.13) in (5.12) ein, so erhalten wir aus

$$\Psi(x) = \sum_n \int dx' \psi_n^*(x')\Psi(x')\psi_n(x)$$

die Bedingung

$$\sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) = \delta(x-x') \quad ;$$

für das kontinuierliche Spektrum entspechend

$$\int dy\ \psi_y^*(x')\psi_y(x) = \delta(x-x') \quad .$$

Man vergleiche die eindringliche Kürze dieser Formulierung mit den entsprechenden Ausführungen Paulis und von Neumanns in den folgenden Kapiteln.
In der bisher in diesem Kapitel durchgeführten Überlegung tritt die δ-Funktion als Verallgemeinerung des Kronecker-δ nur als Begriff einer Relation zwischen den Basisfunktionen auf, sie bleibt völlig abstrakt. Ihr Gebrauch wird aber sogleich anschaulicher, wenn wir sehen, wie sowohl die Koeffizienten $f(y)$ als auch die Wellenfunktionen selbst von der Form der δ-Funktion sein können. Setzen wir in (5.14) als den zu entwickelnden Vektor Ψ selbst einen Basisvektor ψ_y ein, so finden wir mit

$$\psi_y(x) = \int dy'\ f(y')\psi_{y'}(x) \quad , \tag{5.15}$$

dass der Koeffizient

$$f(y') = \delta(y-y')$$

sein muss. Dies war ja auch Diracs originale Überlegung in [Dirac 1926a] und die Motivation in [Dirac 1930b] zur Einführung der δ-Funktion.
Umgekehrt können auch die Wellenfunktionen selbst die Form der δ-Funktion besitzen. Betrachten wir zum Beispiel das Eigenwertproblem des Ortsoperators

$$x\Psi(x) = x'\Psi(x) \quad ^{19}.$$

[17] siehe Zitat Seite 93
[18] siehe Zitat Seite 93
[19] genaugenommen müsste man schreiben: $x\psi_{x'}(x) = x'\psi_{x'}(x)$

Das „x“ auf der linken Seite ist der Operator, im Unterschied zum Eigenwert auf der rechten Seite, der deshalb mit x' bezeichnet wurde. Die Eigenfunktion Ψ, die diese Gleichung erfüllt ist offenbar $\delta(x-x')$. Für eine normale Orts-Wellenfunktion $\Psi(x)$ erhalten wir dann gemäß (5.14) die Darstellung

$$\Psi(x) = \int dx' \; \Psi(x')\delta(x-x') \quad ,$$

die Koeffizientenfunktion f ist in dieser Betrachtung mit der Wellenfunktion identisch, und die Basisvektoren ψ_y sind die δ-Funktionen. Die δ-Funktion erfüllt also selbst die Orthogonalitätsrelation, denn

$$\int dx \; \delta(x-y)\delta(x-y') = \delta(y-y')$$

gemäß Regel 4 auf Seite 89.
Die δ-Funktion macht den Formalismus „rund“, alle eigentlich pathologischen Fälle gliedern sich ganz zwanglos in einen sehr einfachen Formalismus ein. Mit der δ-Funktion werden alle Verbote der Vertauschung von Summation und Integration übersprungen – „ohne dass falsche Ergebnisse herauskommen“. Alle auftretenden Gleichungen können nicht nur ineinander eingesetzt werden, man kann jetzt sogar damit weiter*rechnen*, also die Terme fast beliebig umgruppieren und die Operationen in der gewünschten Reihenfolge durchführen; kurz: alles was man zum Vor- und Rückwärtsrechnen braucht. Die Gleichungen lassen sich jetzt in jede beliebige Richtung nach einer beliebigen Variablen auflösen. Versucht man es ohne δ-Funktion mathematisch korrekt, so stößt man bald an eine Grenze des Weiterrechnens, weil durch schlechte Konvergenzeigenschaften nicht vor dem Summieren integriert werden darf etc.
Die Analogie zum $\mathcal{R}^n$ gewährt damit nicht nur der bildlichen Vorstellbarkeit der Rechnungen einen Einlass in den Formalismus, sondern hat auch innermathematisch als Beispiel zur „Algebraisierung der Analysis“ Gewicht. Was hier gerade mühsam als Vereinfachung des Rechenprozesses beschrieben wurde, zeigt sich noch deutlicher, wenn man die δ-Funktion in den mathematischen Kontext des Lösens von Differentialgleichungen stellt. Man betrachte eine Differentialgleichung

$$D\phi(x) = j(x) \quad .$$

Eine symbolische Inversion führt zu der formalen Lösung

$$\mathbf{1}\phi(x) = D^{-1}j(x) \quad .$$

Die δ-Funktion erlaubt nun, dieser Inversion eine mathematische Bedeutung zu gegben. Wir sehen nämlich, dass

$$\phi(x) = \int dx'\Delta(x,x')j(x') \tag{5.16}$$

mit der Greenschen Funktion Δ

$$D\Delta(x,x') = \delta(x-x') \quad , \tag{5.17}$$

eine Lösung der Differentialgleichung ergibt. Da mit der δ-Funktion die Identität als Integraloperator dargestellt werden kann, erhalten wir nun einen Ausdruck für das Inverse eines Differentialoperators als Integration über die Greensche Funktion. Mit Hilfe der δ-Funktion wird die die formale Analogie von Differential- und Integralrechnung mit Multiplikation und Division in den Vordergrund der Rechnung gespielt. Damit wird die Analysis einer algebraischen Form der Anschauung zugänglich. Diese „Anschauung" ist nicht nur nicht visuell, sondern überhaupt nicht sinnlich. Der Titel „anschaulich" wurde jedoch mit Bedacht gewählt und soll auf die unmittelbare Natürlichkeit der Grundrechenarten (etwa im Vergleich zur Infinitesimalrechnung) hinweisen. Die Addition und Multiplikation von Zahlen ist mindestens so offensichtlich und einleuchtend wie alles, was man im wörtlichen Sinne „mit bloßen Augen" sieht. Ich möchte daher das, was wie die Grundrechenarten in ihrer elementarsten Form, auch einem vorwissenschaftlichen und unausgebildeten Verstande unmittelbar einleuchtend ist, als „algebraisch-anschaulich" bezeichnen.
Seinen eigentlichen Sinn und Ursprung hat der Slogan „Algebraisierung der Analysis" allerdings erst in dem Versuch, die analytischen Methoden tatsächlich durch algebraische zu ersetzen und auf den Grenzwertbegriff in der bekannten Form ganz zu verzichten. An dieser Stelle soll nur darauf hingewiesen werden, dass diese Versuche im Rahmen der „Nichtstandard-Analysis" in besonders engem Zusammenhang mit der Beschreibung von Distributionen und damit der δ-Funktion entstanden.
Die δ-Funktion ist für die Physiker ein sichtlicher Ausdruck von Heavisides Traum, mit Operatoren ganz wie mit Zahlen rechnen zu können; sie ist für Physiker wie Mathematiker ein Ausdruck des Traumes, mit dem Unendlichen ganz wie mit einer gewöhnlichen Zahl umgehem zu können. In der Quantenmechanik bringt die enge Analogie zum $\mathcal{R}^n$ damit ein Doppeltes: Erstens die Verbindung des Formalismus zum bildlich-anschaulichen und damit einhergehend die „Veralgebraisierung" (d.i. die algebraische Veranschaulichung) des Formalismus selbst. Gerade im Vergleich mit der Darstellung bei [Pauli 1933][20] und [von Neumann 1932][21] möchte ich behaupten, dass die δ-Funktion einen entscheidenden Anteil bei der Ausbreitung und Akzeptanz der Quantenmechanik hatte, da sie einer wesentlich größeren Menge von Menschen ermöglichte, den theoretischen Unterbau der Quantenmechanik zu verstehen und nachzuvollziehen[22].

5.6 Dirac und die Rolle der Mathematik in der Physik

5.6.1 Die δ-Funktion und die Mathematik

Wir sind nach dem Gesagten jetzt in der Lage, weiter zu präzisieren und zu begründen, inwieweit die δ-Funktion tatsächlich die Rolle der Mathematik in der Physik insgesamt beleuchten kann.
Die Uneigentlichkeit der δ-Funktion erzeugte einen Spannungsbogen zwischen a.) einer mathematischen Definition mit einem improvisierten mathematischen Kontext aus Re-

[20] siehe Kapitel 8.2.1
[21] siehe Kapitel 6.3
[22] Dieselbe Situation ergab sich später in der Quantenelektrodynamik mit den Feynman-Graphen, und so ist man versucht, die entsprechende (schon zitierte) Bemerkung Schwingers zu dem Thema auf Diracs δ-Funktion anzuwenden: The δ-function „was bringing computation to the masses".

chenregeln und b.) der gleichzeitigen Abgrenzung und Absetzung von der existierenden mathematischen Theorie. Dirac wagt sich auf genuin mathematisches Gebiet und spricht es gleichzeitig der Mathematik ab. Daraus ergibt sich sogleich der in der Einleitung vorrausgesetzte doppelte Leitfaden:

1. in sachlicher Hinsicht:
   Die merkwürdige Zwitternatur der δ-Funktion wirft ein einzigartiges Licht auf die Rolle der Mathematik in der Physik, da sie innerhalb des Mathematischen eine Unterscheidung ermöglicht zwischen einem selbstbezüglichen „Eigen“anteil, der die Mathematik als eigene Wissenschaft begründet, und einem allgemeineren mathematischen Charakter, der für die Naturwissenschaften maßgeblich ist und auch uneigentliche Objekte umfasst. Die δ-Funktion trägt alle für den Physiker wichtigen Eigenschaften der Mathematik, ohne diejenigen zu besitzen, die für die Mathematiker wichtig sind. Sie zeigt den für den Physiker maßgeblichen Charakter der Mathematik in aller Reinheit. So bringt gerade die Uneigentlichkeit der δ-Funktion ans Licht, in welcher Art und Weise „Mathematik“ insgesamt in der theoretischen Physik gebraucht wird.

2. in persönlicher Hinsicht:
   Da sich gerade an der δ-Funktion die Geister scheiden, wirft sie ein besonderes Licht auf Unterschiede in der persönlichen Einstellung zur Mathematik bei verschiedenen Personen. Die Spannung zwischen Physik und Mathematik zwingt die handelnden Personen, Farbe zu bekennen und ihre Position zur Mathematik deutlich zu machen.

Die δ-Funktion gehörte nach dem gesagten also zwar zum physikalischen Formalismus, aber nicht in die Mathematik als Wissenschaft. Hier liegt der Grund, warum eine mathematische Theorie der δ-Funktion so lang auf sich warten ließ: Die Physiker fühlten sich definitionsgemäß nicht zuständig für die mathematische Ebene, und in das Gebiet der Mathematiker fiel sie *wegen* der Uneigentlichkeit erst gar nicht herein. Der δ-Funktion ging es mit ihrer mathematischen Grundlegung so, wie dem unglücklichen Stiefkinde mit dem Taschengeld: Läuft es zur Mutter, sagt diese, der Vater sei fürs Geld zuständig. Läuft es zum Stiefvater, gibt es auch nichts, denn er ist zwar fürs Geld, aber nicht für *dieses* Kind zuständig. Die δ-Funktion lebte in einem neutralen Bereich, in dem sich keine Seite notwendig zur Klärung berufen fühlte. Deshalb entwickelte John von Neumann nicht eine mathematische Theorie der δ-Funktion, sondern einen anderen Zugang zur Quantenmechanik.

5.6.2 Interpretation der δ-Funktion

Kehren wir zurück zu Diracs Einführung der δ-Funktion , um verschiedene Aspekte zu ihrer Interpretation zu sammeln. Wir sahen, wie man sie „für alle Zwecke der Quantenmechanik benutzen kann, als ob sie eine gewöhnliche Funktion wäre.“ Der auffälligste Aspekt der δ-Funktion ist damit wohl die *Effektivität*. Die δ-Funktion funktioniert, und mehr braucht ein Physiker nicht zu wissen.
Diese Position zur δ-Funktion finden wir zur Mathematik insgesamt. Die Mathematik ist für die Physik ein *Werkzeug*, das als solches unthematisch zu bleiben hat und dessen einziger Zweck es ist, den *physikalischen Ideen* zum Ausdruck zu verhelfen.

> All the same the mathematics is only a tool and one should learn to hold the physical ideas in one's mind without reference to the mathematical form.
>
> *[Dirac 1958], S.viii*, ursprünglich *[Dirac 1930b]*

Gerade die δ-Funktion wird in der gesamten physikalischen Literatur immer wieder mit großer Selbstverständlichkeit als „Werkzeug" bezeichnet. Der instrumentale Charakter der δ-Funktion bekundet sich vor allem in der enormen *Erleichterung der Arbeit* des theoretischen Physikers durch die kurze Prägnanz der Schreibweise, die die Grundidee deutlich macht und viele Rechnungen abkürzt. Die vorhin beschriebene Tendenz zur Algebraisierung vereinfacht die Rechentechnik, lässt einen direkten Lösungsweg zu und unterstreicht mithin den instrumental-technischen Charakter der δ-Funktion.
Die δ-Funktion macht den von Dirac behaupteten Werkzeugcharakter der gesamten Mathematik besonders deutlich, denn sie verkörpert den Aspekt der puren Zweckmäßigkeit besonders rein, da sie an den innermathematischen Aspekten wie Logik, Konsistenz etc. nur einen geringen Anteil hat. Von einem Werkzeug wird nur verlangt, dass es funktioniert, und es bleibt für den Praktiker völlig uninteressant, wie und warum es funktioniert. Aus diesem Grund braucht das eigentliche Wesen der festgestellten „Uneigentlichkeit" in der Mathematik von Dirac nicht hinterfragt zu werden. Halten wir also als ersten Punkt fest:

- *Die δ-Funktion ist in betontem Maße ein Werkzeug zur effektiven Behandlung physikalischer Probleme.*

Weiterhin hatten wir gesehen, wie Dirac seine δ-Funktion hauptsächlich als „bequeme Schreibweise" ansieht. Die Frage stellte sich allerdings sogleich: Bequeme Schreibweise *von was*? Legen wir die „bequeme Schreibweise" zunächst als „abkürzende Schreibweise" aus, so erscheint die δ-Funktion als kurzes Symbol und Andeutung für einen komplizierteren mathematischen Zusammenhang. So betrachtet, stellt sich die Frage nach der mathematischen Konsistenz tatsächlich nicht auf der Ebene der δ-Funktion, denn eine „bloße Schreibweise" muss nicht selbst ein vernünftiger Zusammenhang sein, *sondern soll nur auf diesen verweisen.* Es soll nur ein Hinweis auf eine „eigentlich" mathematische Ebene gegeben werden. Diese Ebene einer *darunterliegenden* sinnvollen mathematischen Theorie wird von Dirac zuerst überhaupt nicht angeschnitten und erst 1958 angedeutet.

- *Die δ-Funktion ist ein Symbol für einen mathematischen Zusammenhang, und damit nicht selbst ein mathematisches Symbol.*

Die δ-Funktion gehört nicht zur „Sprache der Mathematik" sondern spricht *über* die Mathematik. Deshalb fühlt sich Dirac auch nicht in der Pflicht, eine *positive* Begründung dafür zu liefern, wieso die δ-Funktion legitim ist. Er muss nur zeigen, dass die, wie auch immer geartete, mathematische Ebene nicht mit seiner Argumentation interferiert. Die δ-Funktion respektiert die mathematische Theorie, ohne doch aus ihr hervorzugehen. Seine Aufgabe besteht darin, eine *Grenze* zu ziehen, und nicht darin, eine innere Verknüpfung dieser Ebenen herzustellen. Das Ziehen einer Grenze ist eine Form der Zurückweisung, die sich in den schon erwähnten doppelten Verneinungen ausdrückt. Man macht *keinen Fehler* und es wird mathematisch *nicht unrichtig. No in*consistencies arise. Wird die δ-Funktion in dieser Hinsicht betrachtet, gehört sie mehr zur physikalischen Terminologie als zur mathematischen Argumentation. Die Art dieser Abgrenzung charakterisiert die Mathematik nicht als eines innerlich und inhaltlich mit der Physik verknüpften Aspektes,

sondern als eine äußerliche *Rand*bedingung. Nach dieser Ansicht steckt die Mathematik nur das Spielfeld, aber nicht die Spielregeln ab.
Auch Werner Heisenberg bezieht sich in seinem Buch *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*[23] auf eine mathematische Ebene, auf die die δ-Funktion bezogen bleibt:

> Wir folgen hier den Methoden Diracs; diese Methoden sind sehr durchsichtig, sie können allerdings nur unter mathematischen Vorsichtsmaßregeln angewendet werden. Da sie aber in allen praktisch vorkommenden Fällen streng gerechtfertigt werden können, wird man gegen ihre Anwendung hier keine Bedenken hegen.
>
> *[Heisenberg 1930a], S.84*

Doch genau wie vorher bei Dirac erwähnt, gibt uns auch Heisenberg weder ein Beispiel für die geforderten Vorsichtsmaßregeln noch für eine strenge Rechtfertigung. Denn die strenge Rechtfertigung würde die Darstellung einer mathematischen Theorie erfordern; die Vorsichtsmaßregeln müssten in dieser wurzeln. Zwar *behauptet* Heisenberg hier mehr, als dass man „keine Fehler" mache, und unterstellt eine positive Begründbarkeit und eine Einbettung der δ-Funktion in die Mathematik. Diese Auffassung entspricht auch in etwa dem „gesunden Menschenverstand" und würde deshalb nicht weiter auffallen, wenn nicht zu der infragestehenden Zeit *überhaupt kein Referenzobjekt* auf der mathematischen Ebene existiert hätte. Heisenberg löst seinen Anspruch nicht nur nicht ein, er *kann* ihn auch gar nicht einlösen. Einen eigentlich mathematischen Gegenstand, der da symbolisch von den Physikern als „δ" abgekürzt wird, existierte als solcher zu der Zeit nicht in der Mathematik. Das wissen sowohl Heisenberg als auch Dirac, was sie aber offensichtlich nicht hindert, sich zu verhalten, *als ob* es eine wohldefinierte mathematische Theorie gäbe.

Ein weiterer leitender Aspekt ist die Bedeutung der δ-Funktion als Symbol für einen anschaulichen Approximationsprozess. Die δ-Funktion ist eine Weise, sich bildlich eine Vorstellung von der Unendlichkeit zu schaffen. Schon vorhin[24] wurde erwähnt, wie Dirac mit der δ-Funktion eine ganz bestimmte *Art* der Unendlichkeit kennzeichnen will. $\delta(x)$ wäre somit ein Symbol, das den gesamten speziellen in Abschnitt 1.3 in Bild 1.1 dargestellten Prozess des Unendlichwerdens meint. Es macht Sinn, dieses als die „Grundbedeutung" von δ zu bezeichnen, denn dieses ist Diracs ursprüngliche Idee gewesen:

> The delta function came in just from picturing the infinities as something which approximates to them.
>
> *[Interview AHQP]*

Der Symbol- und Abkürzungscharakter der δ-Funktion zeigt sich also nicht (primär) in der Abkürzung eines abstrakt-mathematischen Kontextes, sondern in der symbolischen Darstellung einer *anschaulichen* Überlegung. Dieses ist denn auch die zweite mögliche Antwort auf die Frage, von was die δ-Funktion eine „bequeme Schreibweise" sei.
Dirac betonte später oft die Nützlichkeit des approximativen Denkens, das er während seiner Ingenieurs-Ausbildung schätzen gelernt habe. Während er bis dahin das Arbeiten mit Näherungen als „intolerable ugly" empfand, konnte er danach auch in Approximationen einen „considerable amount of beauty"[25] erkennen. Vielleicht hätten sogar die

[23] [Heisenberg 1930a]
[24] Seite 94
[25] [Dirac 1977c] zitiert nach [Schweber1994], S.21

*Grund*gleichungen der Physik den Charakter einer Näherung, da sie ja den *gegenwärtigen* Stand unseres Wissens repräsentierten[26].
Die δ-Funktion als Approximation bedeutet also nicht wörtlich „nur am Ursprung lokalisiert", sondern meint „wesentlich enger als alles, was einen Physiker je angehen kann", wie Dirac im Interview mit T.S. Kuhn später betonte:

> TSK: Well, I think many people must have been uncomfortable with the idea of a function that was that badly behaved.
>
> D: The mathematicians would be.
>
> TSK: The physicists' functions were generally not even better behaved often than the mathematicians' functions, although the physicists apparently didn't worry too much about it.
>
> D: Well, the physicists could understand it at once as a function which is narrower than any distance which he is ever concerned with, and the physicist doesn't need to go to the limit, he can just retain it as a function like that. I would always picture it in that way.
>
> TSK: So you have a picture with the sort of physcal justification of it that it's an approximation function; all I need to do is to make it narrow enough so that the distances involved are small compared with any I'm concerned with and then let it be a finite distance.
>
> D: Yes, I would picture it that way. I would do all my work with such a picture. So I have never worked with Schwartz's distributions because I find this picture quite adequate for all physical purposes.
>
> *[Interview AHQP]*

Dirac benutzt die δ-Funktion als Symbol für einen anschaulichen, sogar im experimentalphysikalisch Sinne realisierbaren Approximationsprozess. Die innere formale Konsistenz ist kein Problem, da man im physikalischen Kontext letztlich *niemals* wirklich mit der Grenze im Unendlichen in Berührung kommt, wo die subtilen Unterscheidungen der Mathematiker über Grenzwerte und Konvergenz erst wichtig werden.[27] Insofern ist der Bezug auf die mathematische Theorie im Grunde irrelevant, so dass auch die Entwicklung der Theorie der Distributionen für die Physik (oder Physiker von Diracs Schlag) keinerlei Unterschied machte.
Insgesamt können wir als dritten Aspekt festhalten:

- *Die δ-Funktion ist ein Symbol für einen bildlich-anschaulichen Zusammenhang, und damit kein Symbol* inner*halb eines* rein *mathematischen Zusammenhanges.*

Diese sich in der δ-Funktion ausdrückende Anschaulichkeit ist gleichzeitig der Grundgedanke bei ihrer Benutzung. Erst dieser Aspekt zeigt, was eigentlich mit dem Formalismus gemeint ist. Ohne die anschauliche Bedeutung könnte die δ-Funktion auf der symbolischen Ebene gar nicht manipuliert werden, da keine positive Begründung auf und innerhalb der symbolischen Ebene für sie existiert. Da die δ-Funktion von der Mathematik durch die oben diskutierte nur äußerlich bestimmte Grenze geschieden ist, muss sie auf

[26] wie vorige Fußnote

[27] Inwiefern diese Argumentation auch zu entgegengesetzen Konsequenzen führen kann, werden wir im Kapitel 6 bei Vorstellung der Theorie des Mathematikers John von Neumann sehen.

anderem Wege animiert werden. Dies geschieht durch den direkten Blick auf das von ihr *Gemeinte*. Die δ-Funktion ist so zu benutzen wie ein Wegweiser. Das, was man findet, wenn man ihm folgt, ist wesentlich interessanter als das, was man sieht, wenn man ihn bloß anschaut. Auf diese Weise zieht Dirac die Sicherheit seiner Argumentation aus dem sicheren Einblick in den physikalischen Zusammenhang. Er geht weiterhin wie selbstverständlich davon aus, dass sich für eine *offensichtlich* richtige Argumentation eine konsistente Mathematik schon finden wird. Die von Heisenberg gemeinten „Vorsichtsmaßregeln“ beim Rechnen mit der δ-Funktion sind damit wohl kaum eine mathematische Vorsicht, sondern eher eine Aufforderung, beim Rechnen mit der δ-Funktion niemals das Gemeinte aus den Augen zu verlieren. Mit *dieser* Vorsicht besteht dann wieder keine Gefahr, wie Darwin in einem Kommentar zur zweiten Auflage der „Principles“ meint:

> Though something seems a bit wrong, it can't be really serious, and with reasonable precautions there is no danger.
>
> *Darwin 1935*, zitiert nach *[Kragh 1990], S.80*

5.6.3 Mathematik als Medium: Durchsichtigkeit

Fassen wir zusammen, so können wir Diracs Ideen zur δ-Funktion folgendermaßen sortieren:

1. Die δ-Funktion ist ein Werkzeug, um möglichst einfach Ergebnisse zu erzielen. Als Werkzeug leistet sie keinen inhaltlichen Beitrag zur physikalischen Erkenntnis.

2. δ ist ein Symbol für einen mathematischen Zusammenhang, aber kein Teil eines symbolischen Zusammenhanges.
   Daher die Bezeichnungen als „Schreibweise“, insbesonderere als Abkürzung. Mathematische Konsistenz liegt auf anders gearteter Ebene.
   Diese mathematische Ebene ist nur als Randbedingung und Begrenzung verstanden; sie ist zwar notwendig, aber nicht inhaltlich bestimmend.

3. δ als Symbol für anschauliche Zusammenhänge.
   Sie ist das Zeichen für eine physikalische Approximation des Unendlichen, die in der endlichen Welt der Physik völlig ausreicht.

Sprache, Schrift, Symbolik im Allgemeinen, wie auch Werkzeuge zeichnen sich dadurch aus, dass sie jeweils auf anderes verweisen. Der inhaltliche und bildlich verstandene Zusammenhang muss durch die mathematische Symbolik hindurch gesehen werden. Das mathematische Werkzeug ist das, durch das hindurch der physikalische Zusammenhang geordnet dargestellt werden kann. Diese Struktur des „Durch die Mathematik hindurch“ zeigt zuerst: Mathematik ist ein Mittel für Zwecke.
Denn ein Werkzeug ist ein Mittel zum Handeln und Tun; die Mathematik ist Werkzeug zur Problemlösung, insbesondere also zum Ausrechnen. Schrift und Sprache, in den Punkten 2 und 3 auftretend, sind Mittel zum Ausdruck, zur Kommunikation und Darstellung einer Idee. Für unsere Fragestellung erhalten wir dann: Die Mathematik dient als Schreibweise und Sprache der Mitteilung der physikalischen Idee.
Die genannten Zwecke – Darstellung, Mitteilung, Handlung – sind offenbar Weisen, mit der Physik in Kontakt zu treten und an ihr teilzuhaben. Der Zweck der Physik selbst ist offensichtlich die Erkenntnis der Natur durch Erkenntnis der sie durchwaltenden Ordnung,

die wir als Naturgesetze ansprechen. Die Mathematik ist dann ein Mittel zur Erkenntnis der Natur. Die Mathematik ist das *Medium*, durch das wir die Zusammenhänge erkennen können. Das Mittel als Mittler=Medium vermittelt die physikalische Erkenntnis. Als Medium zur Mitteilung vermittelt die Mathematik nicht nur den Ausdruck, sondern vor allem das Hören und Vernehmen des physikalischen Zusammenhanges. Sie dient zur Wahrnehmung der physikalischen Ordnung. Die Mathematik steht als Medium in der Mitte zwischen Mensch und physikalischer Idee.
Mit der Idee der Mathematik als Medium bleiben alle Aspekte der Mathematik als Mittel zum Zweck erhalten[28]. Darüberhinaus hat der Begriff des Mediums aber eine viel reichere Bedeutung, deren Facetten in den nächsten Abschnitten zur Sprache kommen sollen.

Das Hauptmerkmal, welches Diracs Arbeit auszeichnet und ausnahmslos von Freunden wie Kritikern seiner Methode bewundert wurde, ist die *Eleganz* und *Transparenz* des Formalismus. So sprach Heisenberg davon, Diracs Methoden seien „sehr durchsichtig“[29], von Neumann spricht von „Durchsichtigkeit und Eleganz“[30]. Es ist kaum nötig, weitere Kommentare anzuführen, denn jeder, der je mit Diracs Arbeiten zu tun hatte, wird den Eindruck der Durchsichtigkeit unmittelbar bestätigen.
„Durchsichtigkeit“ spricht die Mathematik wiederum als Medium an, wobei der Begriff jetzt optisch verstanden wird. Durchsichtigkeit ist offenbar genau die Eigenschaft, die ein Medium braucht, um als Medium tauglich zu sein. Das Medium soll selbst völlig unaufdringlich nur für das Erscheinen und Hervorkommen des eigentlichen Inhalts sorgen. Das Medium muss *klar* sein, um seinen Gegenstand unverstellt und ganz enthüllt zu präsentieren. Das Medium als das, was in der Mitte zwischen Subjekt und dem Objekt steht, kann den Gegenstand *ver*decken, oder aber, als Durchsichtiges gerade *ent*decken. Es kann als Mittleres den Blick verstellen oder gar entstellen, wie eine schlecht geschliffene Linse, oder aber den Gegenstand *zu*stellen, also übermitteln und transprotieren. Die Durchsichtigkeit der Mathematik ist so ein Zeichen der *Enthülltheit* des physikalischen Zusammenhanges. Der Prozess des Verstehens ist jetzt *Erklärung*, welche wir als die Aufklarung des Mediums zum Zwecke der *Einsicht* in den Sachverhalt verstehen können. Die Durchsichtigkeit des Formalismus sorgt für eine direkte, meist bildliche Erfahrbarkeit des physikalisch gemeinten und öffnet der Intuition die Tore. Wir sind der Durchsichtigkeit bei der Besprechung des anschaulichen Charakters der δ-Funktion und der Vorstellbarkeit von Vektoren im $\mathcal{R}^n$ schon begegnet und werden im nächsten Abschnitt andere Beispiele für diese intuitive Art Mathematik zu betreiben bespechen.

5.6.4 Intuitive Mathematik

Die Durchsichtigkeit des Formalismus ist allerdings nicht identisch mit mathematischer Strenge und logischer Exaktheit. Mathematische Exaktheit bedeutet die *innere* Stringenz des Formalismus. Wir hatten dagegen gesehen, wie Dirac oftmals seinen Formalismus als Symbolik für *anschaulich* gegebene Zusammenhänge benutzt. Die Mathematik als Medium schafft *Hin*weise, keine *Be*weise. Daher darf das Verhältnis zu mathematischer Strenge auch sehr entspannt sein, die Formeln haben jeweils eine direkte physikalische Bedeutung

[28] Das Werkzeug kann als Medium zur Handlung aufgefasst werden, die Schrift als Medium zur Mitteilung und die Sprache als Medium zur Verständigung.
[29] wie oben zitiert
[30] [von Neumann 1932]

und bedürfen deshalb keiner stabilen logischen Verbindung untereinander.
Als Dirac in Bristol anfing Mathematik zu studieren, war ihm nach seiner Ingenieursausbildung die Notwendigkeit mathematischer Strenge nicht besonders plausibel:

> It seemed to me that when you're confident that a certain method gives the right answer, you didn't have to bother about rigour. In fact, I still feel rather that way.
> *[Interview AHQP]*

Dirac nimmt nun die „confidence“ offensichtlich aus dem „Sich-Auskennen“ in dem zugrundeliegenden physikalischen Bereich. Wer sich in dem Zusammenhang der physikalischen Phänomene auskennt, braucht nicht die Krücke der logischen Konsiststenz. Dann kann man sich auf das Gefühl verlassen: „You just rely on your general intuition.“[31] Das ist für Ingenieure so, denn

> they have a general feeling about what is important and what can be neglected. That would make a good engineer. Probably would make a good physicist also.
> *[Interview AHQP]*

Hier finden wir „allgemeine Intuition“ und ein „gutes Gefühl“ als die eigentlichen Messlatten nicht nur für den kreativen Prozess der Ideenfindung, sondern auch für die Beurteilung von ausgearbeiteten Theorien. Das Gefühl und die richtige Intuition sind die Kennzeichen für das Sich-Auskennen in den Phänomenen und zeugen von einer tieferen als der nur rationalen Vertrautheit mit dem Gegenstand.
Diese Vorgehensweise ließ Dirac in den Augen der Mathematiker wie einen „Mystiker“ aussehen, denn trotz falscher Argumentation gelangte er immer zu den richtigen Resultaten. G. Birkhoff hatte 1933 in Cambridge die Quantenmechanik Vorlesung Diracs gehört und berichtete E. Kemble von einer Menge Fehler in der Vorlesung und in den „Principles“. Kemble antwortete ihm:

> So far as fallacious reasoning is concerned I have heard of one man who has collected a list of 40 or 50 such mistakes; but nevertheless his final results seem usually to be in conformity with experiment. He has always seemed to me to be a good deal of a mystic and that is, I suppose, my way of saying that he thinks every formula has a meaning if properly understood – a point of view which is completely repugnant to me and is one of the reasons that I have never been able to adopt his methods, as many other physicists have.
> *Kemble an Birkhoff 27.3.33 [AHQP] nach [Kragh 1990]*

Interessant ist hier vor allem die Bezeichnung „Mystiker“. Dieses Wort bezeichnet im christlichen Kulturkreis gerade die Leute, die von einer *direkten Erfahrung* Gottes zu berichten wussten, und sich daher nicht an die Dogmen und theologische Argumentation gebunden fühlten. Oft genug kamen sie deshalb mit der Obrigkeit in Konflikt.
Demnach stünde auch Dirac, als „Mystiker“ im übertragenen Sinne, mit dem physikalisch Gemeinten in direktem Kontakt – und wäre deshalb nicht an rationale Argumentation gebunden. Denn wozu soll er begründen, was er *sieht*?
Übrigens ist auch der Mystiker ein Medium, wobei das Wort jetzt in einer weiteren Nuance erklingt, die eher in der Religion und Parapsychologie geläufig ist. „Medium“ trifft also auch in diesem Sinne, als Verbindungsglied zum Nichtsinnlichen, Diracs Umgang mit

[31] [Interview AHQP]

der Mathematik.
Auch in diesem Beispiel zeigt sich einmal mehr, dass die Durchsichtigkeit des Formalismus für Dirac die höchste Priorität genießen musste. Der durchsichtige Formalismus soll den Blick auf das Geschaute lenken und so zu seiner *Erfahrung* verhelfen. Seiner Eigenart nach bedarf der Formalismus damit keiner inneren Stringenz, weil er sich jederzeit aus dem unmittelbar Gesehenen definiert. Dies sehen wir wiederum an Kembles Brief. Als „Mystik", von der er sich abgestoßen fühlt, bezeichnet er ganz konkret den Glauben, „jede Formel habe eine Bedeutung". Auch dieses meint: Dirac benutzt die Mathematik nur um das auszudrücken, was er an physikalischer Gesetzmäßigkeit schon durchschaut hat. Dann hat jede Formel den Charakter eines Hinweises auf etwas Physikalisches und *meint* etwas konkretes anschaulich Gegebenes. Für die Mathematiker[32] dagegen, und dieses soll ausführlich im von Neumann gewidmeten Kapitel 6 besprochen werden, haben Formeln nur innerhalb eines formalen Kontextes eine Bedeutung, und tragen damit keine *externe* Bedeutung.

Seine intuitive Vorgehensweise bezeichnete Dirac selbst als „geometrisch", im Unterschied zum „algebraischen" Denken. Abdus Salam erinnert sich an ein Gespräch mit Dirac über dieses Thema:

> „How do you picture de-Sitter-space?" I said „I write down the metric and then think about the structure of the terms in the expression." He said „[...] You think algebraically [...]. I picture, without effort, the de Sitter space as a four-dimensional surface in a five-dimensional space."
>
> *A. Salam* in *[Kursunoglu und Wigner 1987] S.269*

Dieses geometrische Denken wird auch deutlich im Aufbau von Diracs Quantenmechanik. Anhand der Diskussion der Rolle der δ-Funktion in der Physik hatten wir schon gesehen, wie es Dirac gerade auf die Analogie des Zustandsraumes zu einem gewöhnlichen n-dimensionalen Vektorraum ankommt. In dem schon zitierten Interview betont er, dass er sich unter den Gleichungen immer etwas vorstellen müsse. Durch diesen anschaulichen Entwurf im Hintergrund der Gleichungen erhält Diracs Mathematik gerade die Durchsichtigkeit, für die sie bekannt wurde. Die Durchsichtigkeit wird vor allem über die Analogie des Formalismus zur linearen Algebra im $\mathcal{R}^n$ realisiert, wobei das Gemeinte jederzeit geometrisch vorstellbar bleibt.
Die Vorstellung muss aber nicht immer im wörtlichen Sinne bildlich sein. Dirac war auch ein Meister der algebraischen Behandlung von Problemen. Er führte die rein algebraisch definierten „q-Zahlen" in die Physik ein und erkannte die Rolle der Vertauschungsrelationen sowohl im mathematischen als auch im physikalischen Sinne. Trotz des nicht-visuellen Charakters bleibt auch hier sein Vorgehen intuitiv. Bei den q-Zahlen etwa war Diracs Vorgehen von dem schließlich publizierten völlig verschieden. Da sich die q-Zahlen einer unmittelbaren *bildlichen* Vorstellung entzogen, regte Dirac seine Intuition dadurch an, dass er mit diesen Größen *spielte*, um so ein *Gefühl* für die Relationen zu bekommen. Erst nachdem Dirac die Lösungen der Aufgaben spielerisch-intuitiv erkennen konnte, konstruierte er nachträglich den kürzesten rationalen Weg, der von der Aufgabe zur Lösung führt. Diese Lösung wurde schließlich publiziert. Dass den Lesern, ohne Diracs Erfahrungshintergrund und Gefühl, die in den Arbeiten präsentierten Lösungen oft wie ein Wunder

[32]besser: eine bestimmte Geistesströmung unter den Mathematikern

vorkamen, ist, so gesehen, nicht verwunderlich. Der dort präsentierte direkteste Weg zur Lösung war für den, der sich noch nicht im Gelände auskannte, schwer nachvollziehbar. So schrieb Darwin an Bohr am 31.3.28:

> I continue to find that though Dirac evidently knows all about everything the only way to get it out of his writings is to think of it all of oneself in one's own way and afterwards to see it was the same thing.
>
> zitiert nach *[Kragh 1990], S.63*

Der Weg, Diracs Schriften wirklich zu verstehen, bestand also darin, sich selbst in das abgesteckte Gelände zu begeben, doch ohne sich an den publizierten Lösungsweg gebunden zu fühlen, ergo: selber mit der Sache zu spielen.
Diracs „playing with equations" ist sein Weg, der Intuition auch dort Raum zu verschaffen, wo einfache bildliche Vorstellungen nicht möglich sind.

> One may, however, extend the meaning of the word picture to include any way of looking at the fundamental laws which makes their self-consistency obvious.
>
> *[Dirac 1958] S.10*

Die bildliche Vorstellung ist also nur ein Spezialfall des „intuitiven Gefühls", und das Spielen dient der intuitiven Wahrnehmung des abstrakten Raumes, der die dortigen Zusammenhänge offenbart. Durch das Spielen werden die abstrakten Relationen anschaulich; dem *Betrachten* des Visuell-Anschaulichen entspricht das *Spielen* mit dem Algebraisch-Anschaulichen.
Das berühmteste Beispiel hierfür bietet die Entwicklung der Diracgleichung. Diracs anfänglicher Zugang zur Suche nach einer relativistischen Wellengleichung war gänzlich abstrakt: Er suchte eine lineare Gleichung vom Schrödingertyp, also etwas ganz und gar Nichtvisuelles. Das Spielen mit verschiedenen Gleichungen und die spielerische Einbeziehung anderer Ideen (in diesem Falle Matrizen), gab der Intuition den Nährboden, auf eine völlig unerwartete Art ein stimmiges Ergebnis zu liefern. Diese spielerische Intuition im nichtvisuellen Raum ist kaum noch als physikalische Imagination erkennbar, so dass wir in [Taylor1987], S.73 sogar die Bemerkung finden, Dirac spiele mit den Gleichungen, *anstatt* zu versuchen, die richtige physikalische Idee einzuführen.

5.6.5 Mathematik als Medium: Das Beieinander von Verschiedenem

Wie kommt es nun, dass gerade die Mathematik das geeignete Medium für das Erkennen eines *physikalischen* Zusammenhanges ist? Wieso ist die Mathematik Werkzeug für die Physik? Wie sind Mathematik und Physik beschaffen, dass die Mathematik als Medium die physikalischen Aussagen vermitteln kann?
Gehen wir noch ein Stück in die von diesen Fragen angedeutete Richtung, so stellen wir zuerst fest, dass wir das Medium bisher hauptsächlich als etwas Äußeres aufgefasst haben, das weder zu dem Erkennenden noch zu dem Erkannten eine wesentliche Beziehung hat. Das Medium als Durchsichtiges erschien wie ein neutraler Vermittler zwischen Subjekt und Objekt, zwischen Physiker und physikalischem Gesetz. Die vorigen Abschnitte sollten zeigen, wie Dirac die Mathematik in seiner physikalischen Arbeit hauptsächlich in diesem Sinne verstanden und benutzt hat.

Diese Auslegung von „Medium“ ist nichtsdestotrotz viel zu eng, denn die Mathematik erscheint hier als *ein* Medium zur physikalischen Erkenntnis. Ein Blick auf die real existierende Physik zeigt aber die Tatsache: Die Mathematik ist nicht irgendein, sondern *das* Medium für die Physik. Es gibt kein anderes, die physikalischen Gesetze sind mathematisch ausgedrückt. In dieser Exklusivität erkennen wir eine viel größere Enge der Beziehung zwischen Mathematik und Physik als bisher besprochen.

Diese exklusive Nähe ist dabei weiterhin im Begriff des „Mediums“ aufgehoben, den wir nun nach weiteren Gesichtspunkten auslegen müssen.
„Medium“ meint im Allgemeinen viel mehr als nur ein Zwischending zwischen dem Erkennenden und dem Erkannten. Das Medium erscheint vielmehr „zwischen“ den Dingen, weil es schon der Raum ist, in dem sich die Dinge aufhalten. Ein Medium ist auch ein notwendig mit der betrachteten Sache verknüpftes „Umfeld“: Das Wasser ist das Medium für die Fische, und zwar nicht *ein* Medium, sondern *das* Medium für den Fisch. Der Fisch *gehört* ins Wasser. Die Luft ist unter diesem Gesichtspunkt nicht mehr als Durchsichtige als Medium zum Schauen gedacht, sondern als die Luft, die wir atmen. Der Äther der vorrelativistischen Physik als Medium elektromagnetischer Wellen ist zwischen allen Dingen, weil alle Dinge in ihm sind.
Diese zweite, umfangreichere Bedeutung von „Medium“ meint damit den Raum, in dem sich die Dinge ihrer Eigenart gemäß aufhalten können und bezeichnet damit eine innige Zusammengehörigkeit von Gegenstand und Medium.

Schauen wir noch weiter in diese Richtung, so finden wir eine dritte Bedeutungsnuance, die das vorher festgestellte noch verschärft. Ein Medium ist nicht nur das, wohinein die Dinge gehören, sondern sogar dasjenige, was die *Anwesenheit* des Gegenstandes erst *ermöglicht*. Der klassische Äther bezeichnet gerade die Bedingung der Möglichkeit von elektromagnetischen Wellen, und ist erst sekundär ein Medium in den vorgenannten Sinnen. Seinem Sinn nach ist er der *Träger* der Wellen, erst sekundär erfüllt er den ganzen Raum und ist so drittens auch zwischen den Dingen. So ist auch der leere Raum der relativistischen Physik ein Medium, in dem und durch das erst die Gegenstände der Physik erscheinen können.[33] Genauso ist in spiritistischen Sitzungen oder beim Voodoo das Medium dasjenige, das die Anwesenheit der Gottheit oder einer toten Person ermöglicht. Diesem Sinne sind wir eben schon bei der Besprechung der „Mystik“ begegnet.
In dieser Bedeutung gibt das Medium dem Gegenstand nicht nur Aufenthalt, sondern lässt ihn sich allererst ereignen. Das Medium bezeichnet das, wodurch sich der Gegenstand verkörpern kann. Das Medium in diesem Sinne ist also nicht mehr nur etwas Drittes, was zwischen den Dingen ist, und deshalb potentiell die Sicht auf die Dinge stört, sondern das, was ihnen Aufenthalt gibt oder sogar entdeckt und verwirklicht.

Die genannten Nuancen unterscheiden sich im Grad der Zusammengehörigkeit des Mediums mit dem Gegenstand, von relativer Beliebigkeit, beim Bild des Vermittlers, zu wesentlicher Hineingehörigkeit beim Fisch oder zum eigentlichen Träger der Anwesenheit selbst.
Im Allgemeinen durchragt jedes Medium die ganze Bedeutungsbreite. Bedenken wir etwa

[33] Das Fallenlassen des Konzepts des Äthers bedeutet in diesem Zusammenhang nur, dass jetzt auch Felder die gleiche Gegenständlichkeit wie materielle Dinge haben.

das Medium in seinem modernsten Gebrauch als „Massenmedium", zum Beispiel Zeitung oder Fernsehen. Dem ersten Blick erscheinen die Massenmedien als Vermittler von Nachrichten zwischen Individuen. Das Medium macht eine Information öffentlich. Bedenken wir dies weiter, so fällt auf, dass die Medien die Information nicht in einen vorhandenen öffentlichen Raum hineingeben, sondern diesen öffentlichen Raum allererst erschaffen. Das Medium kreiert die gemeinsame öffentliche Welt für Individuen. Es definiert den Kontext für das Zusammen von Einzelnen. Dadurch definiert es rückwärts aber auch gleichzeitig, was ein „Individuum" ist. Fundamentaler gedacht *definieren* die Massenmedien das Sein der Individuen als Individuen. Das Medium ist dann nicht ein Drittes, was zwischen zwei (oder viele) tritt, sondern das maßgebliche Eine, in welchem zwei als zwei erscheinen können.
Dieses Beispiel soll zeigen, wie das Medium als Vermittler auf tieferen Bedeutungsschichten aufliegt, in denen sich das Medium als Grund der Ermöglichung des Beieinander von Verschiedenem zeigt. Das Medium ist der Raum, der den Dingen Aufenthalt gewährt.

Es ist gerade diese vielschichtige Mehrdeutigkeit, die den Begriff des Mediums zur Charakterisierung der Mathematik in der Physik so geeignet macht. Denn dieses für den Begriff des Mediums typische Bedeutungsflimmern spiegelt genau die Mehrdeutigkeit der Einstellung des Physikers zur Mathematik wider. Mit dem vollen Begriff des Mediums ist ein Rahmen gesteckt, innerhalb dessen sich die nicht nur bei Dirac geläufigen Charakterisierungen der Mathematik bewegen.

Die eingangs gestellte Frage, wieso gerade die Mathematik das Medium zur Erkenntnis des physikalischen Zusammenhanges sein soll, erhält durch die Auslegung des „Mediums" einen wichtigen Fingerzeig. Sie ergibt an dieser Stelle die Vermutung, dass die Mathematik als Medium im fundamentalen Sinne nicht nur Vermittler zur physikalischen Struktur ist, sondern gerade die Art und Weise ist, in der der physikalische Zusammenhang überhaupt *da*, also für Menschen öffentlich sein kann.

Diese Abstufungen wesentlicher Zusammengehörigkeit finden wir übrigens auch, wenn wir den Begriff des „Werkzeugs" zugrundelegen und das Thema umgekehrt vom Werkzeugcharakter der Mathematik her aufrollen. Für die Frage nach dem Werkzeug möchte ich die auf Thomas von Aquin[34] zurückgehende Unterscheidung von *instrumentum coniunctum* und dem *instrumentum separatum* zugrundelegen. Das instrumentum coniunctum ist ein Werkzeug, welches mit dem Handelnden unmittelbar *verbunden* ist, als Standardbespiel gilt hier die Hand. Die Hand ist einerseits ein Werkzeug, da sie verschiedene zweckmäßige Funktionen hat. Sie ist aber auch ein integraler Bestandteil des Körpers. Das instrumentum separatum dagegen ist *abgetrennt* und nicht notwendigerweise dem Handelnden zugehörig. Als Beispiel denke man sich ein beliebiges Handwerkszeug wie z.B. einen Hammer.
Wir entnehmen dieser Unterscheidung zweierlei: Das instrumentum coniunctum gehört wesentlich zum Handelnden dazu und ist ein natürlicher Teil von ihm, während das instrumentum separatum beliebig austauschbar und veränderbar ist. Zweitens, jetzt sozusagen kantisch gewendet, ist ein instrumentum coniunctum offenbar die Bedingung der Möglich-

[34]Thomas behandelt diese in der Summa theologica, ich folge hier der zusammenfassenden Darstellung von Josef Pieper [Pieper 1958], Kapitel 9

keit des Werkzeuggebrauchs im Sinne des instrumentum separatum. Die Hand *ermöglicht* erst den Gebrauch des Hammers; das Auge den Gebrauch des Fernrohrs. Genauso ist offenbar der allgemeine mathematische Charakter eines formalen Gesetzes derjenige, der den Einsatz von Techniken der wissenschaftlichen Mathematik als Werkzeug im „separierten“ Sinne ermöglicht.
Der gleiche Zusammenhang erscheint in dem Verhältnis von natürlicher Sprache und Terminologie. Die Terminologie ist ein Werkzeug, um bestimmte Sachverhalte exakt und genau mitzuteilen. Jeder Begriff wird genau definiert. Die natürliche Sprache ist hier das zugrundeliegende „verbundene“ Instrument: Es ermöglicht den Gebrauch und die Verwendung einer eigentlichen Terminologie[35].
Dem rein technischen Gebrauch wissenschaftlicher mathematischer Methoden liegt ein impliziter und natürlicher mathematischer Charakter der physikalischen Regel vorraus. Mathematik ist daher zunächst ein natürlich „verbundenes“ Instrument aus dem erst in der terminologischen Zuspitzung der wissenschaftlichen Mathematik der Charakter des Werkzeuges als Gerätschaft erwächst.
Wir finden damit auch im Begriff des Werkzeugs mehr als das, was man im gewöhnlichen Wortsinne als einen „bloß instrumentalen“ Charakter ansprechen würde. Mit dem Begriff des instrumentum coniunctum verschwindet die strenge Grenze zwischen dem Handelnden und dem Werkzeug der Handlung, wie das Beispiel der Hand zeigt. Genauso verwischte sich im Verlauf der Diskussion des Begriffes des Medium die Grenze zwischen dem Dargestellten selbst und dem Medium der Darstellung. Diese bleiben zwar unterscheidbar, gehören aber doch enger zusammen, als der erste Blick vermuteten lässt.

5.6.6 Eleganz

Mit dem Begriff des Mediums haben wir die erste Ebene der Interpretation der Mathematik in der Physik erreicht. Ich denke, dass mit diesem Begriff das durchschnittliche Alltagsverständnis nicht nur Diracs, sondern auch der meisten theoretischen Physiker recht genau eingefangen ist – zumindest scheint das „Medium“ einen erhellenden begrifflichen Rahmen zur Diskussion des Verhältnisses von Mathematik und Physik abzugeben. Eine weitere Diskussion in diese Richtung würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Stattdessen müssen wir im Kontext dieser Arbeit nun zu Dirac zurückkehren, und uns fragen, ob mit dem Begriff des Mediums schon Diracs ureigener Zugang zu Mathematik und Physik gefunden wurde. Und in der Tat stellt sich heraus, dass wir, Dirac betreffend, noch nicht am Ende dieser Überlegungen angekommen sind.

Der entscheidende Hinweis dafür ergibt sich, wenn wir nun endlich auf das zweite Charakteristikum von Diracs Formalismus zu sprechen kommen: Die Eleganz.
„Eleganz“ wird meist im gleichen Atemzug wie die Durchsichtigkeit genannt und findet sich in quasi jedem Kommentar zu Diracs Arbeit. Pauli sprach von der „großer Eleganz und Kürze“[36] des Formalismus und von Neumann meinte Diracs Methode sei „an Kürze und Eleganz kaum zu überbieten“[37]. Nun haben Durchsichtigkeit und Eleganz einige Attribute gemeinsam: Sie teilen die Momente der Schlichtheit, Unaufdringlichkeit, Reinheit

[35] siehe dazu [Pieper 1958], auf diesen Punkt hat auch Niels Bohr immer wieder hingewiesen
[36] [Pauli 1931a]
[37] [von Neumann 1932]

und Direktheit. Eleganz ist aber keine Eigenschaft, die ein Medium haben kann. Es ist wohl kaum eine Situation vorstellbar, in der ein Medium ohne viel Wortverdreherei als „elegant“ bezeichnet werden kann. „Elegante Mathematik“ geht daher über die Mathematik als Medium hinaus, und es ergibt sich die Aufgabe, aus dem Begriff der Eleganz eine angemessene Interpretation des Formalismus zu gewinnen.

Wie ist „Eleganz“ zu verstehen? Was für Dinge können überhaupt elegant genannt werden? Elegant sein kann zunächst die Kleidung. Aber auch die Lösung eines Problems, die Bewegung eines Tänzers und das Design eines Autos heißen elegant. „Elegant“ ist immer die *Form* eines Gegenstandes. Bei der Kleidung ist primär der *Schnitt* elegant, bei der Problemlösung der *Weg*, beim Tänzer die durch die Bewegung gezogene Linie und beim Auto die geometrische Gestalt.

Die Schlichtheit der eleganten Form zeugt jedoch nicht von Armut oder Geiz, sondern hat den Charakter des *Edlen*. Das Edle ist das, was keines Schmuckes bedarf, weil es von sich aus schon wesentlich schön und erhaben *ist*. Eleganter Schmuck und elegante Kleidung sind daher nie blendend-protzig, sondern dezent unterstreichend. Das Edle der Eleganz der Kleidung bezeugt so nicht Stolz, sondern Würde. Die Schlichtheit der Eleganz ist auch kein Zeichen von Demut, sondern von Bescheidenheit, die nicht auf ein äußeres Lob angewiesen ist. Dies kann auch so gesagt werden, dass die elegante Form eine *natürliche* Eigenschaft der Dinge unterstreicht und zur Geltung bringt. Die Sparsamkeit der Ausstattung soll durch die Beschränkung als Hinweis auf das Wesentliche verstanden werden. Damit zusammen hängt die Direktheit der Eleganz. Die elegante Lösung eines Problems zeigt in großer Reinheit den Kern der Sache, der hinter großem Umschweif verborgen lag. Die elegante Lösung geht den direkten Weg, ohne sich um konventionelle Denkmuster zu kümmern. Daher erhält sie ihre Frische. Die elegante Lösung ist auch die „natürliche“ Lösung eines Problems, weil sie ihr Maß nicht aus dem Bekannten nimmt, sondern aus dem Problem selbst.

In der Eleganz liegt also eine *natürliche Angemessenheit der Form*. Darin liegt: Elegante Kleidung muss nicht nur passen, sondern soll „sitzen wie angegossen“. Die elegante Lösung ist nicht nur richtig, sondern trifft den neuralgischen Punkt des ganzen Problems, von dem aus die Einzelteile koordiniert werden. Durch dieses koordinierte Auf-den-Punkt-bringen entsteht die Mühelosigkeit der eleganten Bewegung. Aus dieser Mühelosigkeit entsteht wiederum die reibungslose Funktionalität der Form. Der Begriff der Eleganz enthält damit das Moment der Funktionalität, welches bisher als „Werkzeug“ angesprochen wurde. Die Maßgeschneidertheit und Natürlichkeit einer eleganten Lösung heißt dabei nicht, dass es die *einzig wahre* Lösung ist. Genauso können auch verschieden geschnittene Kleidungsstücke elegant sein, oder verschiedene Linienführungen der Gestalt eines Autos. Die Passgenauigkeit ist eine Vorbedingung der Eleganz, hinzu kommt noch ein Element der *Freiheit* der Gestaltung. Ein erzwungener und eindeutig vorgegebener Lösungsweg ist nicht mehr elegant, sowenig wie die notwendige Kreisform des Autoreifens ein Zeichen von „elegantem Design“ darstellt.

Der sowohl direkte als auch natürliche Weg wird versinnbildlicht durch die *geschwungene* Linie, die ein Inbegriff der Eleganz ist. Physiker und Mathematiker werden gleich an die Form Brachystochrone denken: Der kürzeste Weg ist nicht die Gerade, sondern ein eleganter Schwung, sobald reale Nebenbedingungen beteiligt sind. Und genauso wird die Schnelligkeit eines Autos durch „elegante Linienführung“, also geschwungene Formen

dargestellt. Die elegante Form ist die lebendige Form im Gegensatz zur erstarrten, leeren, „viktorianischen“ Form, die die „Form wahren“ muss, weil sich der Gehalt verflüchtigt hat. *Die elegante Form ist der geformte Gehalt selbst.* Sie transzendiert die Unterscheidung von Form und Gehalt.
Die elegante Form steht mit beiden Beinen im richtigen Leben und erhält den Charakter des Edlen nicht aus der Anpassung an eine fixe Vorstellung von Schönheit und Harmonie einer idealen Welt, sondern aus ihrer Verwirklichung im freien Spiel mit den Widrigkeiten der alltäglichen irdischen Beschränkungen.

Insgesamt können wir sagen: Mit „Eleganz“ wird immer eine natürliche Einheit von Form und Gehalt, von Funktionalität und Schönheit, Mittel und Zweck oder auch Verspieltheit und Zielgerichtetheit ausgedrückt. Während im Begriff des Mediums nur die jeweils eine Seite betont wurde – die Funktionalität des Mittels und die Priorität des Gehaltes –, finden sich diese Eigenschaften in der eleganten Form in eins mit ihrem jeweiligen begrifflichen Komplement.
Der Begriff der eleganten Form erscheint also als größer und fundamentaler als der Begriff des Mediums, er geht wesentlich darüber hinaus. Das Medium bezeichnet die Möglichkeit der Präsenz von Verschiedenem beieinander. Der Begriff der Form bezeichnet dagegen gar keine Relation mehr. Die „Form“ gehört allein zum Gegenstand selber. Der Gegenstand ist nicht „in“ der Form wie der Fisch im Wasser, sondern er ist durch seine Form das, was er ist. Durch die Form erhält der Gegenstand sein Aussehen und seine Funktion. Da durch die Form der Gegenstand erst ist, was er ist, ist die Form das, was den Gegenstand als *diesen* Gegenstand konstituiert und damit zur Erkenntnis bereitstellt. Die Form ist das, was etwas zu etwas macht. Sie stellt das Ding als unterscheidbaren Gegenstand ins Licht. Sie ist also in einem ursprünglicheren Sinne dasjeneige, was ein Ding „veröffentlicht“, indem sie das Ding zum Ding macht. Der Begriff der Form ist jeder Idee von Vermittlung vorgelagert, denn er redet *un*mittelbar und direkt über das Ding selbst.
Der Begriff der Form ist der erkenntistheoretischen Unterscheidung von Subjekt - Objekt - Medium vorraus, da hier nicht entschieden wird, ob das geformte Ding als isoliertes Objekt und die gemeinsame Welt als Medium gedacht werden soll. Noch anders gewendet: Das Medium beantwortet die Frage, *wodurch* etwas da ist. Form ist die Antwort darauf, *was* und *wie* dieses Etwas überhaupt ist.
„Medium“ ist damit eine Ableitung von „Form“. Wird „Form“ in einen erkenntnistheoretischen Kontext, d.h. in eine Subjekt-erkennt-Objekt-Struktur hineingestellt und folgerichtig als Medium interpretiert, so erscheint ihre Eleganz als Durchsichtigkeit.

Fassen wir das Ganze für unsere leitende Fragestellung zusammen, so ergibt sich: Die elegante Mathematik ist die naturgemäße Form des physikalischen Zusammenhanges. In der Einheit von Form und Gehalt erscheint der physikalische Zusammenhang nicht mehr nur *durch*, sondern *als* diese mathematische Form. Die elegante Form ist nicht nur die äußerliche Begrenzung eines physikalischen Gehaltes sondern seine naturgemäße Weise, anwesend, also „öffentlich“ zugänglich präsent zu sein. Der physikalische Zusammenhang ist damit von sich aus schon mathematisch. Die Mathematik ist damit nichts, was irgendwie zur Physik hinzukommt, sondern ein Charakter des *Seins* der Physik. Dieser grundsätzlich mathematische Charakter ermöglicht dann die Benutzung der eigentlichen Mathematik als Werkzeug, Schrift und Sprache. Dabei bringt die Eleganz des Formalismus das Wesentliche des Zusammenhanges besonders rein zur Geltung.

Mit dem jetzt Gesagten haben wir den ersten Satz von äußeren Kennzeichen weit hinter uns gelassen. Die Idee der Mathematik als Vermittler ging mehr und mehr verloren, erst durch die tiefere Interpretation des Begriffs des Mediums, und jetzt endgültig in der Einheit von Form und Gehalt der Eleganz. Die Auffassung der Rolle der Mathematik in der Physik hat sich damit stark gewandelt und muss nun noch bei Dirac direkt nachgewiesen werden.

5.6.7 Mathematical Beauty

Diracs formalistische Seite

Die bisherige Schilderung legte ihren Schwerpunkt bewusst auf die Darstellung des „anschaulichen“ Dirac, dem es um die Vermittlung einer physikalischen Idee geht, ohne auf die Mathematik besonders zu achten. Die gerade mit der Eleganz zutagegetretene Einheit von mathematischer Form und physikalischem Gehalt geht aber über die Idee, durch die Mathematik *hindurch* die Physik direkt zu erleben, hinaus. Da in der Eleganz der lebendige Gehalt geformt wird, kommt die elegante Form mit sich selbst zum Ziel und ist *zugleich* Mittel *und* Zweck – also Selbstzweck. In der Einheit von Form und Gehalt muss die mathematische Form selbst ins Zentrum der physikalischen Betrachtungen rücken. Und in der Tat finden wir in Diracs Arbeiten *in eins* mit der Anschaulichkeit eine ausgeprägte Konzentration auf die mathematische Formulierung. Diracs Hang zur Eleganz ist also ein zweischneidiges Schwert, denn trotz der Anschaulichkeit verselbständigt sich der Formalismus zum eigentlichen Dreh- und Angelpunkt seiner Arbeit.
Diese Attitüde machte Diracs Arbeit vielen Physikern zu abstrakt. Die Betonung der „gehaltvollen Form“ führt nämlich zur Vernachlässigung sowohl von Experimenten und der ganzen bodenständigen und handfesten Physik, als auch der philosophischen Interpretation. Da in der Suche nach Eleganz die Physik als reiner Formalismus eigenständig im Zentrum des Interesses steht, sitzt Dirac zwischen *allen* Stühlen: Die Mathematiker bemängeln das Fehlen der mathematischen Strenge, die Physiker finden seine Argumentation allzu formalistisch. Sogar Theoretiker wie Max Born schlossen sich dieser Kritik an. Anlässlich der Debatte um die Deutung der Quantentheorie schrieb er:

> Some theoretical physicists, among them Dirac, give a short and simple answer to this question [concerning the existence of an objective reality]. They say: The existence of a mathematical consistent theory is all we want.
>
> *Born 1936*, zitiert nach *[Kragh 1990], S.81*

Wolfgang Pauli, sozusagen der Vermittler zwischen Mathematikern und Physikern, trifft in seinem Kommentar zu Diracs „Principles“ den Nagel auf den Kopf:

> ... und wenn [...] die volle mathematische Strenge nicht überall gewahrt wird, so wird dies von den physikalisch orientierten Lesern eher als Vorzug denn als Mangel empfunden werden, da die Übersichtlichkeit der Darlegungen sich hierdurch wesentlich erhöht.
> Trotz dieser Vorzüge der symbolischen Methode der Darstellung der Quantentheorie hat sie auch schwerwiegende Nachteile. Der Referent hat hierbei nicht so sehr den Umstand im Auge, daß diese Methode an das Abstraktionsvermögen des Lesers die

> höchsten Anforderungen stellt, sondern vielmehr folgendes: Der Leser erfährt prinzipiell nicht, wie die zur Messung einer Observablen dienenden Apparate wirklich aussehen und ob für eine beliebig allgemein gewählte Observable [...] überhaupt ein Apparat wirklich existiert, der sie zu messen gestattet. [...] Der Referent ist der Meinung, daß hierdurch eine gewisse Gefahr der Wirklichkeitsfremdheit für die Theorie besteht [...]. Wie dem auch sei, es ist zuzugeben, daß die symbolische Methode eben dem Absehen dieser Art ihre große Eleganz und Allgemeinheit verdankt...
>
> *[Pauli 1931a]*

Die Eleganz der Darstellung wird sowohl mit einem Mangel an mathematischer Strenge als auch mit einem Verlust einer Beziehung zum physikalischen Alltag – Geräte, Messungen – erkauft. Diracs Physik sucht sozusagen die Eleganz um der Eleganz willen. Beachten wir, dass gerade die *prinzipielle* Beachtung der Frage der möglichen Meßbarkeit durch die *Theoretiker* ein Kernpunkt der Kopenhagener Deutung und die Essenz des Bohrschen Philosophierens war, so erkennen wir, wie sehr sich Dirac von allen Strömungen in der Physik unterscheidet und wie konsequent er zwischen allen Stühlen steht.
Diracs Art Physik zu betreiben entzieht sich damit der Festlegung auf einer Skala irgendwo zwischen physikalischer Anschauung und mathematischer Konsistenz. Dirac hat seinen eigenen, unabhängigen Standpunkt, den wir bisher als Suche nach einem *eleganten Formalismus* gekennzeichnet haben. Was zur Eleganz gehört, haben wir eben besprochen: die edle Schlichtheit, die unkonventionelle Frische, die Angemessenheit der Form. Wohin aber die Eleganz selbst gehört, war noch nicht bestimmt. „Elegant" im eigentlichen Sinne heißt nämlich erst ein Gegenstand, der uns wegen der aufgezählten Züge *gefällt.* Das, *woraufhin* der Gegenstand betrachtet wird, den wir „elegant" nennen, ist seine *Schönheit.* Die Eleganz ist eine bestimmte Form des Gefallens, Eleganz zeugt von Stil und Geschmack. Die elegante Form ist „formschön", auf die gekennzeichnete schlicht-direkt-krummlinige Art und Weise. Und im Begriff der Schönheit trifft sich unsere Auslegung Diracs Denkens mit seiner eigenen Selbstauffassung. In der „Schönheit" finden wir Diracs Auslegung der Einheit von Formalismus und Gehalt.

Diracs Denken und Trachten steht insgesamt unter dem „Prinzip der mathematischen Schönheit". Als Dirac 1956 in Moskau gebeten wurde, einen einzelnen Satz aufzuschreiben, der der Nachwelt erhalten bleiben solle, schrieb er:

> A physical law must possess mathematical beauty.

Bevor wir auf Diracs Auslegung seines Begriffes der mathematischen Schönheit eingehen, sollten wir uns erst noch einmal der Tragweite dieses Begriffes im Lichte unserer bisherigen Analyse ansehen. „Mathematische Schönheit" ist weder physikalische Intuition noch mathematische Konsistenz, denn diese beiden haben bestenfalls Anteile an diesem Prinzip und sind ihm ganz und gar untergeordnet. „Mathematische Schönheit" ist nicht irgendeine nachträgliche Eigenschaft der Mathematik und Physik, um dem Physiker ein wohliges Gefühl bei seiner sachlichen Arbeit zu vermitteln. Es ist demgemäß nicht so, dass die Gleichungen der Physik zunächst wahr sein müssen, und es dann noch vielleicht noch die Freiheit gibt, diese schön zu formulieren. Wahrheit und Schönheit gehen hier Hand in Hand. Doch sehen wir nun in den folgenden Absätzen, wie Dirac selbst dieses Thema anfasst.

The Relation between Mathematics and Physics

In *The relation between mathematics and Physics*[38] entwickelt Dirac ausführlich das Konzept mathematischer Schönheit. Diracs dortiger Gedankengang soll im Folgenden dargestellt werden:
Dirac beginnt mit der Grundbeobachtung, dass sich a priori kein logischer Grund angeben lässt, warum es möglich sein sollte aufgrund *mathematischer* Überlegungen den Ausgang von *Experimenten* vorherzusagen. Wie kommt es aber, dass gerade dies nichtsdestoweniger funktioniert, und zwar mit überragendem Erfolg? Dirac macht hierzu folgenden Vorschlag:

> This must be ascribed to some *mathematical quality in Nature*, a quality which the casual observer of Nature would not suspect, but which nevertheless plays an important role in Nature's scheme.

Er fährt fort:

> One might describe the mathematical quality in Nature by saying that the universe is so constituted that mathematics is a useful tool in its description. However, recent advances in physical science show that this statement of the case is too trivial. The connection between mathematics and the description of the universe goes far deeper than this [...].
>
> *[Dirac 1939a]*

In der klassischen Mechanik gilt für die Bewegungsgleichungen das *Prinzip der Einfachheit*. Dieses Prinzip ist einigermaßen einleuchtend. Zumindest basiert das Treiben der gesamten klassischen Physik in der einen oder anderen Form darauf, möglichst viele verschiedene Phänomene unter ein einheitliches, möglichst einfaches Gesetz zu subsummieren.
Die Entdeckung der Relativitätstheorie machte es nötig, dieses Prinzip zu revidieren: Newtons einfaches Gravitationsgesetz wurde durch eine Theorie ersetzt, die schon einen enorm ausgeklügelten mathematischen Apparat braucht, um das entsprechende Gesetz überhaupt zu formulieren, geschweige denn Lösungen anzugeben. Natürlich könnte man vom Standpunkt höherer Mathematik mit gutem Grunde auch behaupten, Einsteins Theorie sei einfacher, aber Dirac verwirft dieses Argument, da es den *praktischen Wert* des Prinzips der Einfachheit als Leitfaden der Forschung total verfehle.[39]
Der Grund für die große Akzeptanz der Relativitätstheorie liegt vielmehr an ihrer *mathematischen Schönheit*, eine Qualität, die wie in der Kunst zwar nicht definiert werden kann, aber nichtsdestotrotz von jedermann wahrgenommen werden kann. Die Fortschritte von

[38] [Dirac 1939a]
[39] Auch Max Born diskutiert dieses Beispiel in seinem Briefwechsel mit Einstein:

> In regard to simplicity opinions will differ in many cases. Is Einstein's law of gravity simpler than Newtons? Trained mathematicians will answer yes, meaning the logical simplicity of the foundations, while others will say empathically no, because of the horrible complication of the formalism.
>
> *[Born 1969], S.221*

Einstein erwiderte, es komme doch gerade auf die logischen Grundlagen an. Born antwortete, er stimmte zwar zu, halte das aber nur für seinen privaten Geschmack, denn es komme auf ja doch darauf an, welche Formel den Beobachtungen besser gerecht würde.
Dieses Beispiel kontrastiert besonders deutlich den hier diskutierten Ansatz Diracs.

der prärelativistischen Physik zur speziellen, danach zur allgemeinen Relativitätstheorie lassen sich so unter das *Prinzip der mathematischen Schönheit* subsummieren. Und genauso treten in der Quantenmechanik die elegantesten Züge der klassischen Mechanik mit *gesteigerter* Schönheit wieder auf.
Die Methoden der Mathematik unterscheiden sich von denen der Physik:

> One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by Nature...

aber beide Methoden konvergieren, denn

> as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which Nature has chosen.
>
> *[Dirac 1939a]*

Die Wichtigkeit einer mathematischen Idee für die Physik wäre letztlich proportional zu ihrer mathematischen Interessantheit. Als Beispiel gibt Dirac die Bedeutung des vierdimensionalen Raumes in der Physik. In der Mathematik sind aber augenblicklich Räume mit beliebiger Dimensionszahl gleichwertig interessant. Entsprechend seiner Idee sollte sich über kurz oder lang aber herausstellen, dass der vierdimensionale Raum auch mathematisch wesentlich interessanter ist, als drei- oder fünfdimensionale Räume.

Der Mathematik kommt entsprechend eine Leitrolle beim Herangehen an neue Probleme zu:

> The theoretical worker in the future will therefore have to proceed in a more indirect way. The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and *after* each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities [...].
>
> *[Dirac 1931b]*

Dirac führt die Löchertheorie als eben so ein Beispiel an, wo ein zunächst allzu allgemein aussehender Formalismus im nachhinein eine physikalische Interpretation erhält. Das letzte Zitat ist nun bezeichnenderweise der Arbeit über magnetische Monople entnommen, deren ganze Idee auf der mathematisch möglichen Symmetrie der Maxwellgleichungen beruht. Die Analogie ist offensichtlich: So wie sich aus den zunächst uninterpretierbaren Lösungen der Diracgleichung das Positron ergibt, so lassen auch die Maxwellgleichungen im Prinzip den Monopol zu.

Was ist Schönheit?

Soweit [Dirac 1939a]. Dirac geht hier von der richtigen, aber als oberflächlich empfundenen Charakterisierung der Mathematik *als Werkzeug* aus, um einen Schritt tiefer vorzudringen und findet „mathematische Schönheit“ als den verbindlichen Grund, der Mathematik und Physik den gemeinsamen Boden gibt. Dies entspricht ziemlich genau dem Ergebnis, welches wir vorher durch die Auslegung der Eleganz seiner Mathematik gewonnen haben.

Bei Dirac erscheint das Verhältnis von Mathematik zu Physik als die verwunderliche Eigenschaft, dass das, was mathematisch interessant ist, auch physikalisch verwirklicht ist. „Interessant“ ist für Dirac in diesem Kontext gleichbedeutend mit „schön“. Zuspitzend könnte man also sagen: *Mathematische Schönheit* geht mit *physikalischer Wahrheit* einher. Die genaue Art und Weise dieses Einhergehens lässt Dirac völlig unbestimmt, im Grunde ist es für ihn ein empirisches Faktum, dem er nicht weiter nachfragt. Wir finden wohl einen gemeinsamen Grund für dieses wie auch immer geartete Einhergehen genannt: Die „mathematische Qualität in der Natur“. Was es mit dieser auf sich haben könnte, wird in Abschnitt 5.6.8 betrachtet, zunächst müssen wir verstehen, was „Schönheit“ eigentlich bedeuten soll. Damit wird sich auch unsere Interpretation von Diracs Stellung im Ganzen von Mathematik und Physik vervollständigen.
Mit dem Prinzip mathematischer Schönheit ist Diracs Position in Mathematik und Physik genau auf den Begriff gebracht. Im Lichte dieses Prinzips erkennen wir, dass Diracs Position letztlich nicht im Widerstreit zwischen mathematischer *Form* und physikalischem *Inhalt* liegt, sondern seine Wurzeln tiefer hat. Das Prinzip der Schönheit erlaubt es ihm, sich unabhängig von den Erfordernissen des Formalen, also mathematischer Konsistenz zu bewegen. Gleichzeitig geht es aber auch nicht um einen rein anschaulichen Gehalt, dem die Form zu dienen hat. Der Schönheit müssen sich Form und Gehalt unterordnen, aus dieser erhalten sie ihre Bestimmung und ihren Sinn. Schönheit ist ein Begriff, der zu einer wesentlich *zweckfreien* Betrachtung des Gegenstandes gehört. Kant schreibt demgemäß in der „Analytik der Schönheit“[40]:

> *Geschmack* ist das Beurteilungsvermögen eines Gegenstandes oder einer Vorstellungsart durch ein Wohlgefallen, oder Mißfallen, *ohne alles Interesse*. Der Gegenstand eines solchen Wohlgefallens heißt schön.
>
> *[Kant 1790] S.79*

Zur Schönheit gehört die „freie Gunst“. Das Schöne eines Gegenstandes eröffnet sich nicht unter der Beurteilung desselben unter Gesichtspunkten eines sachlichen *Interesses* an dem Gegenstand, also seiner Zweckmäßigkeit für menschliche Ziele und Absichten. Das heißt: Das Schöne darf nicht im vorhinein Zielen und Zwecken unterworfen sein, vielmehr muss der Gegenstand gerade um seiner selbst Willen genommen werden. Der schöne Gegenstand muss als solcher in seiner eigenen Würde erscheinen, also insbesondere über seinen funktionellen Charakter hinaus.
Wir sehen, wie zum Begriff der Schönheit gerade die Art von Selbstzweck der Betrachtung eines Gegenstandes gehört, der allen Lesern Diracs am deutlichsten auffällt. Wir finden hier die Wurzel von sowohl Paulis Sorge der „Wirklichkeitsfremdheit“ als auch des „fallacious reasoning“, welches die Mathematiker bemängeln: Beides ist nicht Diracs Thema; die Anwendung auf die physikalische Wirklichkeit (d.i. Zweckmäßigkeit des Formalismus) wie auch das rationale Argumentieren sind zweitrangig und aus dem Schönen ableitbar. Diracs Formalismus gleicht damit eher einem Kunstwerk, das für sich selbst steht und spricht, als einem Handwerkszeug, was in einen Kontext von Funktionalität eingebunden

[40] Dass ich hier und später Kant zitiere, bedeutet nicht etwa, dass meine Argumentation von einer bestimmten philosphischen Richtung, dem transzendentalen Idealismus, abhängig ist. Kant wird an dieser Stelle nur soweit gehört, um die Klärung eines Begriffsgehaltes zu erreichen, und einen vorläufigen festen Brückenkopf in dem Phänomen zu finden. Dass dazu die Werke Kants verwendet werden, liegt einzig daran, dass ihm erfahrungsgemäß die Aufhellung des phänomenologischen Gehaltes der Begriffe in außerordentlicher Deutlichkeit gelingt.

ist.
Im Begriff der Schönheit liegt auch die Forderung, nach einer direkten Erfahrung des Gegenstandes, der wir schon bei der Diskussion des „mystischen“ Charakters von Diracs Schriften begegnet sind. Hören wir nochmals Kant:

> Wenn man Objekte bloß nach Begriffen beurteilt, so geht alle Vorstellung der Schönheit verloren. Also kann es auch keine Regel geben, nach der jemand genötigt werden sollte, etwas für schön anzuerkennen. Ob ein Kleid, ein Haus, eine Blume schön sei: dazu läßt man sich sein Urteil durch keine Gründe oder Grundsätze aufschwatzen. Man will das Objekt den eigenen Augen unterwerfen ....
>
> *[Kant 1790], S.87*

„Schönheit“ enthält also die Aufforderung, das Schöne selbst und unvermittelt in Augenschein zu nehmen. In genau diesem Sinne verzichtet Dirac auf die unbedingte mathematische Konsistenz, denn diese ist eben das System der „Gründe und Grundsätze“, die im Bereich der Schönheit nichts verloren haben. Dies wiederum deckt sich mit dem Begriff der Mathematik als Medium: Sie dient bei Dirac eben nicht zum Argumentieren, sondern zum Zeigen und Präsentieren des physikalischen Zusammenhanges.

Bisher wurde vor allem der „subjektive“ Aspekt der Schönheit besprochen, der einem naturwissenschaftlich orientierten Leser wohl auch als erstes ins Auge springt. Aufgrund der genannten Eigenschaften der Schönheit wurde Diracs „mathematical beauty“, obwohl es mit großer Genauigkeit das Hauptcharakteristikum seines Denkens trifft, von seinen Kommentatoren als *allgemeingültiges Prinzip* nicht wirklich ernst genommen. Schönheit gilt sogar als „essentiell subjektiv“ [Kragh 1990] und wurde deshalb im Allgemeinen als eine private ästhetische Motivation verstanden[41]. Dies ist zwar nicht unrichtig, zeigt aber dennoch nicht das Eigentümliche des Schönheitsbegriffes. Eine feinere Unterscheidung im Umkreis des Schönen ist daher angezeigt.
Kant unterscheidet in der Analytik der Schönheit drei Arten des Wohlgefallens: Das Wohlgefallen am *Angenehmen* führt zu *Vergnügen*, und beruht auf privater *Neigung*. Das Angenehme hat keinerlei Anspruch auf Allgemeingültigkeit in seinem Begriff. Es bezeichnet in moderner Sprechweise alles das, was *nur* „Geschmackssache“ ist. Am anderen Ende der Skala steht das Wohlgefallen am *Guten*. Gut heißt das, was geschätzt und gebilligt wird. Hier wird ein „objektiver Wert“ gesetzt. Das Gefallen des Guten bezieht sich somit auch *Achtung* vor dem Gegenstande. Das Wohlgefallen am *Schönen* beruht dagegen auf der freien Gunst, da weder ein triebhaftes Begehren noch ein objektiver Wert uns dieses Wohlgefallen aufzwingt. Schön ist das, was *rein* gefällt.
Für unserem Kontext ist wichtig zu bemerken, dass mit der Beurteilung von etwas als „schön“ *mehr* gemeint ist, als nur ein „Privatgefühl“, wie bei dem Urteil aus Neigung. Der Grundsatz „jeder hat seinen eigenen Geschmack“ gilt daher *nur* für den Geschmack der Sinne, für Urteile aus Neigung. Wenn einer etwas als schön beurteilt,

> glaubt man eine allgemeine Stimme für sich zu haben, und macht Anspruch auf den Beitritt von jedermann, da hingegen jede Privatempfindung nur für den Betrachtenden allein und sein Wohlgefallen entscheiden würde.
>
> *[Kant 1790], S.87/88*

[41] siehe auch [Schweber1994]

In der Schönheit liegt also eine *Forderung* nach Allgemeingültigkeit des Urteils beschlossen. Diese Forderung ist als Forderung aber eben nur eine Forderung: Es fordert den Beitritt der anderen, ohne dieses aufgrund logischer Argumente *einfordern* zu können. Schönheit beansprucht allgemeine Geltung, die aber nicht *beweisbar* ist. Eine andere Art, dieses Mehr-als-subjektiv zu verstehen, ergibt sich, wenn man beachtet, dass in der Schönheit durch das Absehen von jedem Interesse und jeder Neigung eine hochgradig reine Art der Begegnung mit dem Gegenstand vorliegt. Der Gegenstand wird so betrachtet, wie er für sich ist; er kann frei auf die ihm angemessene Art als er selbst begegnen. Die Beurteilung von etwas als „schön“ ist damit zwar nicht objektivierbar, also zweifelsfrei für jedermann bindend, geht aber doch *in höchstem* Maße über das Subjekt hinaus.
Dieser Spagat ist das Charakteristikum der Schönheit. Deshalb geht jeder Versuch, dem Konzept der Schönheit eine „objektive Bedeutung“ zuzulegen, wie Kragh zu fordern scheint, von vornherein am Phänomen vorbei. Die Schönheit ist als das, was sie ist, weder objektiv noch nur subjektiv, sondern steht in der gekennzeichneten Weise „dazwischen“. Dies soll hier nicht weiter vertieft werden, es soll nur als Hinweis dienen, dass die Subsumierung der Schönheit unter die menschlichen „Privatempfindungen“ ein wesentliches Moment des von Dirac gemeinten Phänomens verfehlt.
Wenn mathematische Schönheit auch mehr als bloß subjektiv ist, so kann sie dennoch nicht ein sinnvoller Leitfaden für die Forschung sein, *sofern* mit Leitfaden eine sichere Methode zum Ziel zu kommen gemeint ist. Das würde eben die allgemeinen Regeln zur Begründung und die Fixierung des Begriffs der Schönheit vorraussetzen, die eben zurückgewiesen wurden. Der Leitfaden gilt immer nur im Nachhinein in der Reflektion – und *nie* als Wegweiser in die Zukunft. Wir sahen, dass durch „Mathematische Schönheit“ Diracs Denkweise in seiner großen und kreativen Zeit sehr genau interpretiert wird. Man kann also im Nachhinein sagen, dies sei ein „Leitfaden“ gewesen. Diracs große Arbeiten orientieren sich aber direkt an der Schönheit, und nicht an einem *Leitfaden von Schönheit.* Dirac selbst scheint sein Prinzip aber in eben diesem Sinne gemeint zu haben, und damit diesem Missverständnis erlegen zu sein. Die vorhin zitierten Stellen zeigen ausdrücklich, wie Dirac sich hier auf eine zukünftige Forschungsmethodik bezieht. Das dies nicht gut funktioniert, zeigen aber schon seine eigenen späteren Arbeiten. Sobald Dirac sich der mathematischen Schönheit als Prinzip bewusst geworden war, versiegte der kreative Strom, und er beginnt sich selbst zu kopieren – und der Erfolg der Theorien bleibt aus. Zum Beispiel ist die Arbeit über magnetische Monopole (wie oben geschildert) ziemlich analog der Vorhersage des Positrons aus der Diracgleichung. Nur scheint es die magnetische Monopole im Gegensatz zum Positron eben nicht zu geben, und *diese* Arbeit ist dann tatsächlich nur noch *bloß* formal. Hier wird deutlich, wie die kreative Arbeit auch selbstgesetzte Leitfäden übelnimmt. Die schon zitierte direkte Erfahrung des Gegenstandes als Bedingung der Möglichkeit zu seiner kreativen Ausarbeitung wird ersetzt durch die Erfahrung des Leitfadens, und so bleibt das Ergebnis blass, lauwarm und berechnet. Schiller beschrieb dieses Phänomen in ähnlichem Zusammenhang so:

> Grazie hingegen muss jederzeit Natur, d.i. unwillkürlich, sein (wenigstens so scheinen), und das Subjekt selbst darf nie so aussehen, als wenn es um seine Anmut wüsste.
>
> *F. Schiller, Über Anmut und Würde*

Es ist bei einem theoretischen Physiker natürlich kein Wunder, dass er einen Hang zu allgemeinen Methoden hat, denn dies ist sein täglich Brot und seine Leidenschaft. Dirac selbst schätzte den logischen Gedankengang und die systematische Schlussfolgerung wesentlich mehr als die zufälligen Eingebungen aus dem Blauen heraus, die seiner Arbeit die unverwechselbare Note geben. Deshalb war die Transformationstheorie sein liebstes Stück. Sie war auf logisch deduktivem Wege entstanden und dies kam seinem Ideal des wissenschaftlichen Arbeiten viel näher als die launische Intuition – obwohl sie meist wohlgelaunt war.

5.6.8 Die mathematische Qualität in der Natur

Wieso ist die Regelmäßigkeit, die der Mathematiker schön findet, mit den Regeln, die man in der Natur vorfindet identisch? Diracs Antwort lautet: Das liegt an der „mathematischen Qualität" in der Natur. Die Mathematik beschreibt deshalb die Natur, weil diese selbst in einem tieferen Sinne mathematisch ist. Dirac spricht hier also genau den Sachverhalt aus, den wir bei der Diskussion der Eleganz auf Seite 113 fanden, als wir sagten, der physikalische Zusammenhang sei von sich aus schon mathematisch. Die „mathematische Qualität in der Natur" ist der Name für die Eigenschaft der Natur, die diese Art der Beschreibung *erst ermöglicht*. Die „mathematische Qualität" meint nicht die Mathematik als ausgestaltete Wissenschaft, sondern das, was sowohl der Mathematik als Wissenschaft als auch der Naturwissenschaft vorrausliegt.
Die mathematische Qualität liegt aber offensichtlich nicht so *in* der Natur, wie Steine, Planeten und Murmeltiere in der Natur vorkommen. Die mathematische Qualität liegt in den *Gesetzmäßigkeiten und Regelmäßigkeiten* der Natur, also in allem was *Maß* hat und hält. Die theoretische Physik kümmert sich um das Natur*gesetz*.

> ... the main object of physical science is not the provision of pictures, but is the formulation of laws governing the phenomena...
>
> *[Dirac 1958], S.10*

Dem Physiker geht es also nicht um die Natur als solche, sondern um das Naturgesetz – also um *Werte* (sogar universelle Werte). Es weicht hier zumindest das Befremdliche aus Diracs Formulierung, bei der man sich fragt, wie denn etwas rein Geistiges wie die Mathematik „in" etwas rein Vorhandenem wie der Natur „vorkommen" könnte: Mathematisch ist das Gesetz, die Ordnung, die Regel und das Maß „in" der Natur. Dass dieser logisch-systematische *Zusammenhang* der Naturerscheinungen aber als solcher mathematisch ist, ist zwar nicht so ohne weiteres klar, aber doch immerhin plausibel. Denn Regel, Ordnung und Gesetz sind nicht mehr vorhandene Naturdinge, sondern haben schon den gleichen Charakter wie die Sätze der Mathematik: Sie gelten.
Ob sie gelten, entscheidet allerdings in letzter Instanz nicht ihre „Schönheit". Mathematische Schönheit steht nicht in Konkurrenz und ist kein Ersatz für die beiden großen Maßstäbe der Wahrheit einer Wissenschaft: empirische Richtigkeit und interne Konsistenz. Dass diese Kriterien letztlich über den objektiven Wahrheitsgehalt einer Theorie entscheiden, hat Dirac natürlich nie bestritten; wir lesen z.B. 1958:

> The justification for the whole scheme depends, apart from internal consistency, on the agreement of the final results with experiment.
>
> *[Dirac 1958], S.15*

Und schließlich passte er sogar seine persönlichen Ansichten an die experimentellen Tatsachen an. 1981 schickte er zum 50sten Jahrestag des Artikels über die Monople eine Nachricht an eine Konferenz in Triest, worin er sagte, dass er, nachdem er 50 Jahre lang keine Ermutigung von experimenteller Seite bekommen hatte, nun ebenfalls dazu neige, an der Existenz von Monopolen zu zweifeln.
Schönheit ist also kein Maß für die Richtigkeit der Theorie. Die dazu erforderliche Art von Objektivität fehlt ihr. Andererseits ist sie nicht einfach nur eine private „Geschmackssache“. Auch die Idee Diracs, die Schönheit als Leitfaden für die Forschung zu deuten, erwies sich im ersten Anlauf als nicht schlüssig. Wir sehen also weiterhin noch nicht klarer, inwiefern Schönheit und Wahrheit Hand in Hand gehen sollen.
Die bisherige Interpretation legt aber, undeutlich genug, folgendes nahe: Diracs Begriff der Schönheit verwirklicht sich vor allem in der Eleganz seiner Arbeit. Die Eleganz entscheidet nun nicht, ob ein Satz *richtig* ist. Die Entscheidung über Richtigkeit liegt – definitionsgemäß – bei Empirie und Konsistenz. Empirische Richtigkeit und Konsistenz sind aber wiederum *äußere* Rahmenbedingungen, die keinerlei inhaltlichen Bezug zur Theorie haben. Es sind notwendige, also *negative* Bedingungen, die nur bestimmte Sätze auszuschließen vermögen, aber nicht ein organisches inneres Prinzip der positiven Gestaltung einer Theorie vorgeben. Eleganz ist dagegen eine *bevorzugte* Weise der Anwesenheit des Geformten. Die elegante Formulierung zeigt eine besondere Güte und ist besonders geeignet zur Darstellung des Sachverhaltes. Die Eleganz zeigt, ob mit dem Richtigen auch etwas Wesentliches gesagt sei. Der elegante Formalismus ist nicht nur richtig, sondern *wahr*. „Richtig“ ist alles, was nicht falsch ist. „Wahr“ sagt mehr, das Wahre ist sozusagen *genau* richtig, es trifft den Kern der Sache. Nicht umsonst spricht Dirac im vorigen Zitat von der „Justification“ des Schemas und nicht von „Truth“. Diracs Interpretation der Schönheit als Leitfaden erhält nun folgenden Sinn: „Schönheit“ oder „Eleganz“ ist kein Leitfaden, der eine Methode vorgibt, sondern ein *inneres* Gestaltungsprinzip. Schönheit ist ein kreatives, kein regulatives Prinzip.
Die Möglichkeit eines solchen inneren Prinzipes ergibt sich aus der angedeuteten Einheit von Form und Gehalt. Wenn die Physik von vornherein mathematisch ist, ist klar, warum „mathematische Schönheit“ als theoretisch-physikalisches Prinzip denkbar ist. Auf der Ebene der „mathematischen Qualitität der Natur“ ist die Eleganz *das* Prinzip der wissenschaftlichen Formgebung, die den infragestehenden Gegenstand frei und seiner Art angemessen zur Begegnung und zur Geltung bringen kann[42].
Es wird jetzt klarer, warum die bloße Richtigkeit des Resultats noch keine ordentliche physikalische Theorie ausmacht. Diesen Punkt betonte Dirac immer wieder im Zusammenhang mit der Renormierungstheorie, die nichts als eine Menge funktionierender Regeln gebe.

> The result is a theory which is not based on strict mathematics, but is rather a set of working rules.
> Many people are happy with this situation because it has limited amount of success.
> But this is not good enough. *Physics must be based on strict mathematics.*
> *[Dirac 1984]*

„Strict mathematics“ ist dabei wohl kaum die Exaktheit, die die Mathematiker meinen. Im Lichte der Interpretation würde man „strict mathematics“ also nicht mit „exakte Ma-

[42]Dieser Punkt wird nach der Diskussion mathematischer Strenge in Kapitel 7.2 nochmal aufgenommen werden.

thematik“ übersetzen, sondern als „strikt mathematisch“: Die „funktionierenden Regeln“ sind nicht direkt und rein („strikt“) der mathematischen Qualität der Natur entnommen. Hier wird kein wesentlicher mathematischer Zusammenhang der Naturerscheinungen ans Licht gebracht. Strikt mathematisch heißt also: Rein aus dem Verständnis der ursprünglichen mathematischen Qualität der die Naturprozesse durchwaltenden Ordnung geschöpft. Dies ist primär für jede Theorie, die eigentliche mathematische Exaktheit ist dann eine Folge des strikt Mathematischen. Das strikt Mathematische zeigt sich im eleganten Formalismus. Die exakte Mathematik ist dann nur noch der Lack und die Politur, die der Form Haltbarkeit geben und sie allseits präsentabel machen.

5.6.9 Abschließende Bemerkungen

Genauso wie man in Niels Bohr den Physiker als Philosophen erkennen kann, erkennen wir in Dirac – alles gesagte bestätigt diese Sicht – den begnadeten Künstler. Damit stellt Diracs Physik als Suche nach Schönheit (verstanden als die elegante Form) ihn in der gekennzeichneten Weise außerhalb der gewohnten Fragestellungen und Denkgewohnheiten. Diracs Maß verläuft auf diese Art quer zu den normalerweise an eine Theorie angelegten Maßstäbe von Konsistenz und Empirie: Es fordert diese nicht heraus, erkennt sie aber auch nicht ohne weiteres an. Diese Art zu denken verwirrte seine Zeitgenossen ungemein, und Dirac hatte bald den Ruf des genialen Sonderlings. Einstein sprach von dem schwindelerregenden Grat zwischen Genie und Wahnsinn:

> I have trouble with Dirac. This balancing on the dizzying path between genius and madness is awful.[43]
>
> *Einstein an Ehrenfest im August 1926*, zitiert nach *[Kragh 1990]*

Schrödinger betont die resultierenden Schwierigkeiten beim Verständnis der Texte Diracs.

> Dirac has a completely original and unique method of thinking, which – precisely for that reason – will yield the most valuable results, hidden to the rest of us. But he has no idea how difficult his papers are for the normal human being.
>
> *Schrödinger an Bohr am 23.10.1926,* zitiert nach *[Kragh 1990]*[44]*, S.37*

Und sein Meisterstück, die Diracgleichung, stürzte die Physiker in tiefe Konfusion, da ihre Schönheit mit der physikalischen Richtigkeit zu kollidieren schien. Heisenbergs Reaktion spricht hier Bände:

> In völliger Apathie und Verzweiflung über den gegenwärtigen Stand (oder sollte man sagen: Saustall) der Physik, der durch Diracs ebenso schöne wie unrichtige Arbeiten in ein hoffnungsloses Chaos von Formeln verwandelt wurde ...
>
> *Heisenberg am 28.4.28 an Jordan,* zitiert nach *Rudolf Haag* in *[Heisenberg 1989b]*

Natürlich waren die Leute nicht wirklich verärgert, sondern immer wieder gespannt auf neue Arbeiten Diracs, da sie meist überraschende und tiefsinnige Einsichten lieferten. Und bei den Arbeiten, bei denen das nicht zutraf, stellte sich oft erst Jahre später der Wert der Idee heraus. Die weniger berühmten Arbeiten dienten oft als Ausgangspunkt für besonders fruchtbare Gedankengänge anderer Leute. So bezieht sich Feynmans Pfadintegralformulierung auf eine Idee Diracs, auch Schwinger entnahm die Ideen zu seiner

[43] I apologise for using the translated english version instead of the german original

[44] siehe vorige Fußnote

Formulierung der Quantenfeldtheorie („sourcery“) einer Arbeit Diracs.

Was Diracs Werk auszeichnet und was in seinem Prinzip der mathematischen Schönheit so gut reflektiert wird, ist die schöpferische Kraft seines Denkens, die ganz automatisch die Diskussion in einen künstlerischen Bereich verlagert. Ziel der Erörterung war es, dieses oftbemerkte Faktum erstmals ernst zu nehmen, und ihm einige wenige Schritte nachzugehen. Ich hoffe, es ist dabei gelungen, einen gemeinsamen Boden der oft widersprüchlich erscheinenden Bemerkungen Diracs (und die der Zeitgenossen über Dirac) zu erkennen, der die Widersprüche auflöst und so Diracs eigene Position zur Mathematik und Physik deutlich macht.

Kapitel 6

von Neumann

Wir werden nun die Perspektive wechseln und die Mathematik in der Physik unter einem ganz anderen Schwerpunkt kennenlernen: Anhand der Arbeiten von Neumanns soll die Wichtigkeit mathematischer Strenge in den Theorien der Physik untersucht werden. Dabei wird uns die Mathematik nicht als *die* Mathematik begegnen, sondern in einer besonderen Richtung und Ausprägung, die als „formalistisch“ oder „axiomatisch“ bezeichnet wird.
Das Kapitel ist folgendermaßen organisiert: Nach einer biographischen Einführung soll in 6.2 das Hilbertsche Programm zur Axiomatisierung dargestellt und interpretiert werden. Dabei wird nach einer allgemeinen Einführung in die Idee der Axiomatisierung die Arbeit *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*[1] besprochen werden, die einen ersten Entwurf zu einer Axiomatisierung der Quantentheorie auf Grundlage des Wahrscheinlichkeitsbegriffes enthält. Kapitel 6.2.3 reflektiert über den Sinn und die Folgen der Axiomatik für die Physik und 6.2.4 zeigt den resultierenden Gegensatz der formalistischen Auffassung zur Mathematik als Medium.

Die Forderung nach mathematischer Strenge ergibt sich aus dem Programm der Axiomatik mit besonderer Schärfe und wird daher nach der allgemeinen Axiomatik behandelt. In Kapitel 6.3 wird von Neumanns mathematisch konsistente Durchführung der Quantentheorie in der Spektraltheorie beschrieben. Damit folge ich der historischen Entwicklung, die 1927 mit dem Versuch einer Axiomatisierung der Quantentheorie[2] beginnt, und erst hinterher die mathematisch konsistente Ausarbeitung des axiomatischen Entwurfs verfolgt, kumulierend 1932 in *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik*[3]. Nach der Präsentation der Spektraltheorie kann dann in 6.4 der Beitrag der mathematischen Strenge zur physikalischen Erkenntnis diskutiert werden. Wir kommen dort explizit auf die besondere Rolle der Mathematik für die Physik zu sprechen. Weiterhin wird sich dort ein besonderer Gleichklang zwischen von Neumanns Formulierung und der Kopenhagener Philosophie der Quantentheorie ergeben.
Kapitel 7 wird schließlich einem Vergleich der Diracschen und Neumannschen Denkweise gewidmet sein. Dabei soll verdutlicht werden, welche unterschiedlichen Maßstäbe die beiden an eine physikalische Theorie legen.

[1] [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]
[2] [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]
[3] [von Neumann 1932]

6.1 Biographischer Überblick

John von Neumann wurde 1903 in Budapest als János Neumann geboren. In seiner Zeit in Deutschland wurde er als „Johann von Neumann“ bekannt. Der volle ungarische Name lautete Margittai Neumann János Lajos. Das „Margittai“ ist dabei eine Art Adelstitel, weshalb er seinen Nachnamen zu „von Neumann“ eindeutschte[4]. Nach seiner Emigration in die USA wurde die eingedeutschte Form noch milde angelsächsisch umgedeutet, so dass er schließlich als „John von Neumann“ in die Geschichte einging.
1914 trat von Neumann in das Budapester Lutheraner-Gymnasium ein – wie schon Eugene Wigner ein Jahr vorher. Aus der gemeinsamen Schulzeit dieser beiden intellektuellen Sonderfälle sind einige merkwürdige Anekdoten erhalten, nachzulesen etwa in [Macrae 1994]. Von Neumanns Begabung wurde von seinem Mathematiklehrer erkannt, der dafür sorgte, dass von Neumann ab 1915 von den Mathematikern der Budapester Universität zusätzlichen Privatunterricht erhielt. So war er an der Universität unter den Mathematikern schon als Kollege akzeptiert, bevor er noch das Gymnasium abgeschlossen hatte. Den ersten Artikel *Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome* schrieb er zusammen mit seinem Mentor M. Fekete im Alter von 17 Jahren; die Arbeit wurde 1922 veröffentlicht. 1921 ging er nach Berlin, um aus Gründen der beruflichen und finanziellen Perspektive Chemieingenieurswesen zu studieren. Seinen Abschluss wollte er an der ETH in Zürich machen, wo er 1923 sein Eingangsexamen bestand und 1925 seinen Abschluss schaffte. Gleichzeitig war er an der Universität in Budapest für Mathematik eingeschrieben, wo er 1926 seinen Doktor in Mathematik verliehen bekam.
Obwohl er offiziell Chemie studierte, galt seine Aufmerksamkeit weiterhin der Mathematik. Mit seiner in Berlin abgefassten *Axiomatisierung der Mengenlehre* wurde von Neumann in Mathematikerkreisen schnell bekannt. Die Stoßrichtung der Arbeit lag genau in Hilberts Linie, so dass von Neumann seit der Veröffentlichung 1925 ein gern gesehener Gast bei Hilbert in Göttingen wurde. In Zürich traf er auf Hermann Weyl, dessen Unterricht er manchmal während dessen Abwesenheit vertrat.
Nachdem er seine Doktorprüfung in Budapest abgelegt hatte, ging er mit einem Stipendium der Rockefeller-Stiftung nach Göttingen. Dort kam er mit der neuen Quantenmechanik in Berührung und half bei der Ausarbeitung und Abrundung der von Lothar Nordheim für Hilbert aufbereiteten Formulierung der Transformationstheorien von Dirac und Jordan, erschienen 1927 als *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*[5]. Damit waren seine Forschungen nach den mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik angestoßen, die, mit *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*[6] im gleichen Jahr beginnend, 1932 in dem Standardwerk *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*[7] mündeten. 1927 ging er als Privatdozent nach Berlin und wechselte 1929 nach Hamburg.
In diesen Jahren arbeitete von Neumann an so verschiedenen Problemen wie am wahrscheinlichkeitstheoretischen Aufbau der Quantenmechanik wie auch *Zur Hilbertschen Beweistheorie* (beide 1927). 1928 und 1929 veröffentlichte er zusammen mit Wigner eine Reihe von Arbeiten, in denen die Theorie der Darstellungen von Gruppen zur Erklärung der Atomspektren benutzt wird. 1928 erschien auch der erste noch unbeachtete Artikel

[4] [Legendi und Szentivanyi 1983]
[5] [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]
[6] [von Neumann 1927]
[7] [von Neumann 1932]

Abbildung 6.1: John von Neumann (©IAS)

über Spieltheorie.
Anfang 1930 kam er – wiederum mit Wigner zusammen – für ein halbes Jahr als Gastdozent nach Princeton und siedelte 1931 endgültig dorthin um. Zunächst Professor an der Universität, wurde 1933 Professor am Institute of Advanced Studies. 1933 bewarb er sich nach einem der regelmäßigen Europabesuche um die Einbürgerung in die USA. 1930 heiratet er zum ersten Mal, nach der Scheidung 1937 dann noch einmal 1938.
1943 stieß er nach Los Alamos, um bei dem Atombombenprojekt zu helfen. Nach 1945 war er an der Entwicklung der Wasserstoffbombe beteiligt. So war auch bei den Tests im Bikini-Atoll 1946 dabei, seine spätere Erkrankung wird auf diesen Umstand zurückgeführt.
1944 erschien *Theory of Games*, das er zusammen mit Oskar Morgenstern verfasste. Auch bei der mathematischen Behandlung ökonomischer Modelle und bei der Entwicklung des Computers leistete von Neumann wegweisende Arbeit.
Von Neumann blieb seit dem Krieg in engem Kontakt zu militärischen und politischen Kreisen, unter anderem als Berater der CIA. 1955 wurde er Mitglied des amerikanischen Atomenergiekomitees. Mitte 1955 verschlechterte sich sein Gesundheitszustand rapide und er starb nach langem Krankenhausaufenthalt am 8.2. 1957 in Washington D.C.
Von Neumann gilt als der „Nachfolger Hilberts“, als „Patriarch der Mathematik“, und gilt als das letzte mathematische Universalgenie. Es wird berichtet, dass er höchstens 4 Stunden Schlaf in der Nacht brauchte, so dass er seiner riesigen Anzahl von politischen und wissenschaftlichen Verpflichtungen nachkommen konnte.

6.2 Die axiomatische Methode

Nachdem sich die statistische Deutung der Quantenmechanik mehr und mehr durchgesetzt hatte, wurde eine axiomatische Formulierung der Quantentheorie möglich, die schließlich ganz auf der Idee einer Wahrscheinlichkeitstheorie aufbaute. Hilberts physikalischer Assistent Lothar Nordheim unternahm den Versuch, die Transformationstheorien von Dirac und Jordan in die Hilbertsche Terminologie zu übersetzen, was diesen im Wintersemester 1926/27 zu einer Vorlesung über die neuere Entwicklung der Quantenmechanik anregte. In dem Prozess der Ausarbeitung kam von Neumann nach Göttingen, wo er bei der mathematischen Durchführung der Arbeit half.
Der Ansatz der Quantentheorie unter Hilberts Einfluss liegt in einer Linie mit dessen Versuchen, die Mathematik auf eine axiomatische Grundlage zu stellen. Mit seinen *Grundlagen der Geometrie* von 1899 erschuf Hilbert das Urbild der axiomatischen Methode in der Mathematik, wo alle Begriffe durch ein System von Axiomen streng definiert werden, und die Schlussweise aus diesen Axiomen von der ursprünglich in diesen Begriffen liegenden Anschauung völlig unabhängig wird. Seit dieser Zeit wurden Anstrengungen unternommen, auch die Arithmetik und die Mengenlehre zu axiomatisieren, was sich allerdings als wesentlich schwieriger herausstellte. Es wird berichtet[8], dass von Neumann gerade mit seiner Abhandlung über die Axiomatisierung der Mengenlehre[9] Hilberts Aufmerksamkeit erregte, so dass er bald ein häufiger Gast bei Hilbert war. Hilbert spielte immer wieder mit der Idee, nach diesem Vorbilde auch die Naturwissenschaften auf eine sichere Grundlage zu stellen. Die axiomatische Idee war also von Anfang an dafür gedacht, auch die Naturwissenschaften mit zu erfassen. Schon bei der Formulierung der berühmten 23 Hilbertschen Probleme auf dem Mathematikerkongress 1900 in Paris wird die Axiomatisierung der mathematischen Physik als sechste Aufgabe für das kommende Jahrhundert genannt. Hilbert verwendete selbst einige Aufmerksamkeit auf das Problem, welches ihn lange Jahre beschäftigte. So erinnert sich zum Beispiel P. Ewald an die Zeit zwischen 1910 und 1915:

> Hilbert was in a period where he said, „well, now I have reformed mathematics. Now I will reform physics, and then after that chemistry.
>
> *P.P. Ewald* im Interview mit T.S.Kuhn, zitiert nach *[Eckert 1993]*

Hilbert selbst schrieb 1918 in einem Aufsatz über „axiomatisches Denken“:

> Ich glaube: Alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik. Durch Vordringen zu immer tieferliegender Schichten von Axiomen [...] gewinnen wir auch in das Wesen des wissenschaftlichen Denkens selbst immer tiefere Einblicke und werden uns der Einheit unseres Wissens immer mehr bewußt. In dem Zeichen der axiomatischen Methode erscheint die Mathematik berufen zu einer führenden Rolle in der Wissenschaft überhaupt.
>
> *[Hilbert 1918]*

Allerdings stieß die Durchführung der Axiomatisierung und Formalisierung schon innerhalb der Mathematik auf Schwierigkeiten und Widerstand. Ich möchte an dieser Stelle nur an den Konflikt zwischen Hilberts formalistischen Ideen und Brouwers Intuitionismus

[8] [Macrae 1994]
[9] [von Neumann 1925]

erinnern, der vor allem in den 20er Jahren eine Grundlagendiskussion in der Mathematik auslöste.

6.2.1 Die Idee der Axiomatik

Die axiomatische Methode ist in der Hilbertschen Prägung der *genetischen* entgegengesetzt. Hilbert führt diesen Unterschied 1900 in *Über den Zahlbegriff*[10] folgendermaßen ein: Die Existenz der Elemente der axiomatischen Theorie wird von Anfang an vorrausgesetzt. Die axiomatische Geometrie setzt die Existenz von Punkt, Gerade und Ebene vorraus, so dass von vornherein ein abgegrenzter Bereich von Subjekten möglicher Aussagen angegeben wird. Hilbert und Bernays bezeichnen dies 1934 als die „existenziale Fassung der Axiomatik“[11]. Darin unterscheidet sie sich von der genetischen Methode, bei der die Elemente des Gegenstandsgebietes erst in der Durchführung der Theorie konstruiert werden. Das Standardbeispiel für die genetische Methode ist die „klassische“ Begründung der Arithmetik (wie sie mit dem Namen Kroneckers verknüpft ist), die allein die natürlichen Zahlen vorraussetzt. Die reellen Zahlen werden erst nach und nach konstruiert, etwa als Lösungen bestimmter, sonst nicht lösbarer Gleichungen.
„Axiomatisch“ heißt jede Theorie, bei der die Grundbegriffe und Vorrausstzungen an die Spitze gestellt werden, und bei denen der weitere Inhalt mittels Definition und Beweis logisch abgeleitet wird.[12]

Man muss nun aber zwei verschiedene Sorten der Axiomatik auseinanderhalten: Die „inhaltliche“ und die „formale“ Axiomatik. Die inhaltliche Axiomatik setzt ihre Grundbegriffe und Grundsätze als evident, also als offensichtlich *wahr* vorraus. Das Standardbeispiel hierfür ist die Geometrie Euklids, dessen Axiome von offensichtlichen Beziehungen zwischen anschaulichen *geometrischen Objekten* (Punkt, Gerade, Ebene) handeln. Auch die Newtonsche Physik beruht auf inhaltlichen Axiomen. Sie ist als „Extrakt aus Erfahrungskomplexen“[13] eine Idealisierung und hat ein Gegenstandsgebiet von zwar *anschaulichen*, aber doch idealen Dingen, z.B. von Massenpunkten im leeren Raum. Die inhaltliche Axiomatik handelt immer von abstrakten und idealen Gegenständen, die aber einer konkreten Anschauung zugänglich bleiben. Die Gegenstände der inhaltlichen Axiomatik sind also konkrete ideale Objekte.

Abbildung 6.2: David Hilbert

Der Kern der axiomatischen Methode in dem von Hilbert verschärften Sinn ist die Abstraktion von aller räumlichen und bildlichen Intuition und ein Absehen von der *Wahrheit* der Grundsätze. Diese Methode heißt *formale* Axiomatik. Für die Deduktion der Theorie aus den Axiomen ist die Wahrheit der Axiome völlig

[10] [Hilbert 1900]
[11] [Hilbert und Bernays 1934]
[12] [Hilbert und Bernays 1934]
[13] [Hilbert und Bernays 1934]

irrelevant. Die Entdeckung der Nichteuklidschen Geometrien zeigte deutlich wie ein Axiom (in diesem Falle das Parallelenaxiom) nicht unbedingt eine Wahrheit ausdrücken müsse, sondern nur eine mögliche Grundannahme sei. Hilbert ging noch einen Schritt weiter und bemerkte, dass nicht nur die Wahrheit der Grundaussagen sondern auch die anschauliche Bedeutung der Grundbegriffe für einen axiomatischeh Aufbau der Theorie völlig irrelevant sind. Durch das System der Axiome werden alle auftretenden Begriffe allein durch den *formalen Kontext* bestimmt und so *implizit* definiert. Die Begriffe sind nur durch ihre in den Axiomen festgelegten gegenseitigen logischen Relationen bestimmt. Damit verlieren sie vollständig ihre umgangssprachliche Bedeutung, die als bloße Suggestionshilfe übrigbleibt. Die formale Axiomatik abstrahiert völlig vom anschaulichen Sachgehalt einer Theorie – beziehe sich die Anschauung auch auf so abstrakte mathematische Dinge wie „Punkt" und „Gerade". Ein gern zitiertes geflügeltes Wort Hilberts fasst das axiomatische Programm prägnant zusammen: „Es muß in allen geometrischen Aussagen möglich sein, die Wörter Punkt, Gerade und Ebene durch Tisch, Stuhl und Bierglas zu ersetzen".

Entsprechend kann in einer formal-axiomatischen Theorie auch nicht mehr aus der Einsicht in einen Sachverhalt heraus argumentiert werden.

> Denn in meiner Theorie wird das inhaltliche Schließen durch ein äußeres Handeln nach Regeln ersetzt; damit erreicht die axiomatische Methode diejenige Sicherheit und Vollendung, deren sie fähig ist und deren sie auch bedarf, wenn sie zum Grundmittel aller theoretischen Forschung werden soll.
>
> *[Hilbert 1927]*

Die sachliche Anschauung der Begriffe spielt gar keine Rolle mehr und darf auch nicht zur Argumentation herangezogen werden.

> Alle Aussagen, die die Mathematik ausmachen, werden in Formeln umgesetzt, sodaß die eigentliche Mathematik zu einem Bestande an Formeln wird.
>
> *[Hilbert 1927]*

Hier vollzieht sich eine Trennung aller Anteile der Theorie, die sich auf die Erkenntnis und die Wahrheit eines konkreten Sachgebietes beziehen von den rein logischen Problemen des Schließens und der Deduktion. Während die inhaltliche Axiomatik sich ganz auf den „Erkenntnischarakter" der Axiome konzentriert, ist die Wahrheit der Axiome für die formale Axiomatik völlig irrelevant, da hier die logische Sphäre ganz von der intuitiven, also der epistemologischen Grundlage der Theorie getrennt wird.[14]

Durch den vollständigen Verzicht auf inhaltliche Bedeutung der Begriffe erfordert die formale Axiomatik auch ein besonderes Mittel zu ihrer Begründung. Während die inhaltliche Axiomatik von Euklid und Newton sich auf Evidenzen berufen kann, muss die formale Axiomatik die Widerspruchsfreiheit der Axiome erst nachweisen. Da alle äußeren Verbindungen des Formalismus zur Anschauung gekappt sind, bleibt als einziges und wichtigstes Maß nur die *innere Konsistenz* des Formalismus übrig. Die Widerspruchsfreiheit ist das Maß der „Wahrheit" eines formalen Systems. Damit beruht ein formales axiomatisches System „nicht auf einer besonderen Erkenntnisbeziehung zu dem jeweiligen Sachgebiet", sondern ist „vielmehr für jedwede Axiomatik ein und dieselbe ..., nämlich diejenige primitive Erkenntnisweise, welche die Vorbedingung für jede exakte theoretische Forschung

[14] dazu vor allem [Bernays 1922]

überhaupt bildet."[15] Durch die axiomatische Abstraktion wird der Formalismus auf sich selbst gestellt und ist, wenn er widerspruchsfrei ist, als solcher schon für sich wahr und damit auch für alle speziellen Erkenntnisbezirke, auf die er „passt".
Hilbert wurde deshalb vorgeworfen, seine Mathematik entarte in ein bloßes Spiel mit Symbolen. Besonders sein Widersacher Brouwer betont, hier läge doch wohl eine Verwechslung von Linguistik und mathematischem Sachgehalt vor, eine „Konfusion zwischen dem Akt der Konstruktion und der Sprache der Mathematik". Denn die Nicht-Widersprüchlichkeit eines Systems bedeute schließlich noch nicht die Wahrheit desselben, und aus der Konsistenz folge noch nicht die *Existenz* des mathematischen Zusammenhanges. Brouwers Begriff der Existenz eines mathematischen Objektes enthält als Eckpfeiler die explizite Konstruiertheit des Objektes. Da die mathematische Gedankenkonstruktion die Grundlage der Matematik sei, seien die formalen Beweise der Widerspruchslosigkeit nur ein nachheriges Geschäft ohne jeden inhaltlich-mathematischen Beitrag.
Tatsächlich stellt Hilbert das Zeichen selbst ins Zentrum seiner Betrachtung. Die Zahl*zeichen* sind die Grundlage der Mathematik.

> Hierin liegt die feste philosophische Einstellung, die ich zur Begründung der reinen Mathematik – wie überhaupt zu allem wissenschaftlichen Denken, Verstehen und Mitteilen – für erforderlich halte: *am Anfang* – so heißt es hier – *ist das Zeichen.*
>
> *[Hilbert 1922]*

Die Erklärung der Zahlen beginnt infolgedessen mit dem Gedankengang: Das *Zeichen* 1 ist eine Zahl. Ein Zeichen, dass mit 1 beginnt und 1 endet und zwischen diesen Zeichen nur die Symbole „+" enthält ist ebenfalls eine Zahl, also etwa etwa 1+1+1+1. „Diese Zahlzeichen, die Zahlen sind und die Zahlen vollständig ausmachen, sind selbst Gegenstand unserer Betrachtung, haben aber sonst keinerlei *Bedeutung.*"[16] Bedeutung hat aber zum Beispiel das Symbol 2, welches die Zeichenfolge 1+1 bedeutet, wobei die „Bedeutung" hier eine reine Abkürzung ist.
Die Bezeichnung „reines Formelspiel" für Hilberts Mathematik ist also keineswegs unangebracht, und er empfand sie auch nicht als diffamierend. Denn, so hält er dagegen, dass gerade dieses Formelspiel, wie es ihm vorschwebte, genau das leiste, was von der Mathematik erwartet werde.

> Dieses Formelspiel gestattet, den gesamten Gedankeninhalt der mathematischen Wissenschaft einheitlich auszudrücken und derart zu entwickeln, daß zugleich die Zusammenhänge der einzelnen Sätze und Tatsachen deutlich werden. Die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, allgemein aufzustellen, ist keineswegs vernünftig; im Gegenteil entspricht es dem Wesen einer Theorie, daß man in einer Entwickelung nicht nötig hat, zwischendurch noch auf die Anschauung oder Bedeutung zurückzugreifen. Der Physiker verlangt gerade von einer Theorie, daß ohne Heranziehung anderweitiger Bedingungen aus den Naturgesetzen oder Hypothesen die besonderen Sätze allein durch Schlüsse, also auf Grund eines reinen Formelspiels abgeleitet werden. Nur gewisse Kombinationen und Folgerungen der physikalischen Gesetze können durch das Experiment kontrolliert werden – so wie in meiner Beweistheorie nur die realen Aussagen unmittelbar der Verifikation fähig sind.
>
> *[Hilbert 1927]*

[15] [Hilbert und Bernays 1934]
[16] [Hilbert 1922]

Die Signifikanz der axiomatischen Methode erstreckt sich aber über die Mathematik und die theoretische Physik hinaus auf alle Gebiete, die einer denkerischen Erfassung zugänglich sind.

> Das Formelspiel, über das Brouwer so wegwerfend urteilt, hat außer dem mathematischen Wert noch eine wichtige philosophische Bedeutung. Dieses Formelspiel vollzieht sich nämlich nach gewissen bestimmten Regeln, in denen die *Technik unseres Denkens* zum Ausdruck kommt. Diese Regeln bilden ein abgeschlossenes System, das sich auffinden und endgültig angeben läßt. Die Grundidee meiner Beweistheorie ist nichts anderes, als die Tätigkeit unseres Verstandes zu beschreiben, ein Protokoll über die Regeln aufzunehmen, nach denen unser Denken tatsächlich verfährt.
>
> *[Hilbert 1927]*

Die formale Axiomatik beschäftigt sich mit den Regeln des Denkens selbst und gilt daher für jedes Gegenstandsgebiet, sofern es einer *theoretischen Forschung* ausgesetzt ist.

Die Verbindung der reinen Denkgesetze mit den Gegenstandsgebieten wird nun zu einem eigenständigen Problem. Die Frage, wie und worauf der Formalismus „passen“ kann, führt Hilbert zur Frage nach dem Verhältnis von inhaltlicher und formaler Axiomatik:

> Die formale Axiomatik bedarf der inhaltlichen notwendig als ihrer Ergänzung, weil durch diese überhaupt erst die Anleitung zur Auswahl der Formalismen und ferner für eine vorhandene formale Theorie auch erst die Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit gegeben wird.
> Andrerseits können wir bei der inhaltlichen Axiomatik deshalb nicht stehenbleiben, weil wir es in der Wissenschaft, wenn nicht durchweg, so doch vorwiegend mit solchen Theorien zu tun haben, die gar nicht vollkommen den wirklichen Sachverhalt wiedergeben, sondern eine *vereinfachende Idealisierung* des Sachverhaltes darstellen und darin ihre Bedeutung haben. Eine derartige Theorie kann gar nicht durch Berufung die evidente Wahrheit ihrer Axiome oder auf Erfahrung ihre Begründung erhalten, vielmehr kann diese Begründung nur in dem Sinne geschehen, daß die in der Theorie vollzogene Idealisierung, d.h. die Extrapolation, durch welche die Begriffsbildungen und Grundsätze der Theorie die Reichweite entweder der anschaulichen Evidenz oder der Erfahrungsdaten überschreitet, als eine widerspruchsfreie eingesehen wird.
>
> *[Hilbert und Bernays 1934]*

Da die Axiome der Physik ihrem Wesen nach sowohl über die Erfahrung als auch über die Evidenz hinausgehen, ist die innere Konsistenz das erste Maß, welches an die Theorie angelegt werden muss und was überhaupt über die Brauchbarkeit entscheidet. Die Widerspruchsfreiheit muss also unabhängig von jedem tatsächlichen Inhalt bewiesen werden, sofern es sich um ein *theoretisches System* handelt.

Bevor wir in Abschnitt 6.2.3 auf den allgemeinen Sinn der Axiomatik für die Naturwissenschaft zu sprechen kommen, soll zur Illustration des Übergangs von der inhaltlichen zur formalen Ebene zunächst die konkrete Gestalt der Axiomatik in der Quantenmechanik angeschaut werden.

6.2.2 Physikalische Axiome: Die „Grundlagen der Quantenmechanik“

In *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*[17] wird eine axiomatische Formulierung der Quantentheorie auf der Basis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes angestrebt. Dabei werden wir Zeuge bei dem Prozess, den Hilbert und Bernays als den Übergang von der inhaltlichen zur formalen Axiomatik beschrieben hatten. Wir erleben hier die angestrebte Separation des rein logischen Anteils der Theorie von ihrem epistemischen Gehalt.

Die Idee der Formalisierung in [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]

Hilbert, von Neumann und Nordheim wollen die Quantentheorie als axiomatische Wahrscheinlichkeitstheorie aufbauen. Dabei skizzieren sie vorweg den Prozess der angestrebten Formalisierung, den wir jetzt zur Vertiefung des vorher Gesagten noch einmal mitvollziehen wollen.
Ausgehend von den empirischen gefundenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen soll aus diesen gewisse Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten als allgemeingültig *gefordert* werden. In diesem offensichtlich inhaltlich bestimmten Prozess werden die (inhaltlichen) Axiome angesetzt. Der Übergang zum Formalismus geschieht dann, indem man einen „analytischen Apparat“ sucht, dessen Elemente *genau dieselben* Relationen erfüllen. Der Apparat des Formalismus besteht aus reinen Rechengrößen. Die in diesem Apparat auftretenden Rechengrößen können wiederum physikalisch interpretiert werden, da die physikalischen Relationen eben von dem analytischen Apparat *abgebildet* werden.

> Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z.B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. Durch die Axiome werden die Relationen zwischen den geometrischen Gebilden, wie Punkt, Gerade, Ebene, beschrieben, und dann gezeigt, daß diese Relationen gerade ebenso bei einem analytischen Apparat, nämlich den linearen Gleichungen erfüllt sind. Dadurch kann man wieder umgekehrt aus den Eigenschaften der linearen Gleichungen geometrische Sätze gewinnen.
>
> *[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]*

Diese Aufgabe ist nun für die Quantenmechanik durchzuführen: Jeder mechanischen Größe ein Symbol als Repräsentanten zuzuordnen, das zunächst eine reine Rechengröße ist, „aus der man aber Aussagen über die Repräsentanten anderer Größen, und dann durch Zurückübersetzung Aussagen über wirkliche physikalische Dinge erhalten kann“.

Wie Hilbert, von Neumann und Nordheim betonen, besteht der einschneidende Punkt für die *Verständlichkeit* der Theorie nun vor allem darin, diese beiden Ebenen auseinanderzuhalten: Einerseits den Formalismus, andererseits die physikalische Interpretation.

> Durch die Axiomatisierung verlieren die vorher etwas vagen Begriffe, wie Wahrscheinlichkeit und so weiter, ihren mystischen Charakter, da sie dann durch die Axiome implizit definiert sind.
>
> *[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]*

[17] [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]

Erst aus der impliziten Definition der Begriffe erhalten diese eine scharfe Bedeutung. Erst die implizite Definition der Begriffe stellt die Rationalität der Theorie her und macht sie zum Gegenstand des Argumentierens und damit der Vernunfterkenntnis überhaupt. Kurz, erst durch die Axiomatisierung ist eindeutig festgelegt, worüber man überhaupt redet.
[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927] betonen noch, dass der analytische Apparat vollkommen festgelegt sei, allein in der physikalischen Interpretation komme noch ein Element der Freiheit und Willkür hinein. Der formale Apparat stellt also das Sichere und Beständige der Theorie dar. Das obige Diagramm zieht hier explizit die Grenze zwischen den logischen, also absolut sicheren Anteilen der Theorie und der inhaltlichen, epistemischen Domäne, die willkürlich und veränderlich bleiben.

Die Axiome der Quantentheorie

Bevor wir im nächsten Abschnitt untersuchen wollen, wie die Idee der Axiomatisierung die Rolle der Mathematik in der Physik interpretiert, schauen wir erst noch weiter, wie sich die axiomatische Methode in dieser frühen Zeit der Quantenmechanik tatsächlich manifestiert und wie das Wechselspiel von inhaltlichen Axiomen und ihrer Formalisierung in unserem konkreten Fall aussieht.
Die Autoren geben sechs Axiome an, die aber, dem Zustand der Quantentheorie zum Zeitpunkt des Entstehens der Arbeit entsprechend erst allgemeine Richtlinien zur Aufstellung eines endgültigen Axiomensystems sein wollen.

I „Zu zwei mechanischen Größen $F_1(qp)$ und $F_2(qp)$ gibt es stets eine Funktion zweier Variablen
$$\phi(xy; F_1F_2)$$
derart, daß
$$\phi(xy; F_1F_2)\bar{\phi}(xy; F_1F_2) = w(xy; F_1F_2)$$
die relative Wahrscheinlichkeitsdichte dafür ist, daß für gegebenen Wert von y von F_2 der Wert von F_1 zwischen x und $x + dx$ liegt.“
ϕ heißt Wahrscheinlichkeitsamplitude, die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem Integral über w.

II „Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß für einen gegebenen Wert von $F_1 = x$, F_2 einen Wert zwischen y und $y + dy$ habe, sei wieder durch dieselbe Funktion $w(xy; F_1F_2)$ gegeben.“

III „Weiter wird zu verlangen sein, daß für die Beziehung einer Größe zu sich selbst, also für $w(xy; F_1F_1)$ eine scharfe Bestimmung eintritt, derart, daß also jeder mechanischen Größe wirklich ein bestimmter Zahlwert zugeordnet werden kann.“

IV Die Kompositionsregel für verschiedene Amplituden lautet so: „Seien F_1, F_2, F_3 drei mechanische Größen, und x, y, z die zugehörigen Zahlwerte, so soll die Beziehung gelten
$$\phi(xz; F_1F_3) = \int \phi(xy; F_1F_2)\phi(yz; F_2F_3)\, dy\ .\text{“}$$
Dieses ist das Analogon für die Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten auf Ebene der Amplituden.

V Die Wahrscheinlichkeiten hängen nur von der funktionalen Natur der Größen ab, und damit von der kinematischen Verknüpfung; insbesondere also nicht von speziellen dynamischen Eigenschaften des Systems wie der Hamiltonfuktion.

VI Die Wahrscheinlichkeiten hängen nicht vom gewählten Koordinatensystem ab.

Dieses provisorische Axiomensystem zeigt die *logische Struktur* der Theorie. Wir sehen, diese Axiome sind inhaltlich bestimmt, sie reden über die Beziehung physikalischer Größen und über den anschaulichen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Weiterhin sind sie ohne weiteres als (anschaulich-) mathematisch zu erkennen.
Die Entkleidung der logischen Struktur von ihren inhaltlichen Referenzen geschieht jetzt in der Formalisierung, also in der Wahl des analytischen Apparates: Der „allgemeinen Operatorenrechnung".

Die Operatorrechnung

Als analytisches Gerüst stellen Hilbert, Nordheim und von Neumann nun die Operatorrechnung vor. Dem Entwurfcharakter des Artikels folgend, werden aber nur die Grundzüge derselben dargestellt – die mathematische Gültigkeit der einzelnen Operationen bleibt somit ungeprüft.
Es werden also lineare Operatoren auf nicht näher definierten Funktionen eingeführt und die elementaren Operationen wie „komplex konjugieren" und „invertieren" erklärt. Sodann führen die Autoren den Begriff des „vollständigen Operators" ein, der anzeigt, welches Argument die nach der Operation entstandene Funktion haben soll:

$$T^{\binom{x}{y}}(f(y)) = (Tf)(x).$$

Die hinter dieser Notation liegende idee ist es, eine Integraldarstellung der Operatoren zu erreichen:

$$T^{\binom{x}{y}}(f(y)) = \int \phi(x,y)f(y)dy \quad ,$$

wobei ϕ der *Kern* des Operators T ist.
Dieses ist nun die Stelle, an der die δ-Funktion ins Spiel kommt. In dieser frühen Arbeit, in der es nur um den ersten Entwurf der Theorie geht, lassen die Autoren auch uneigentliche Funktionen als Kerne zu, „um unbeschränkt mit den Integraloperatoren operieren zu können". Die Definition geht hier so:

$$\mathbf{1}^{\binom{x}{y}} \cdots = \int \delta(x-y) \dots dy$$

Auch hier folgt eine kurze Anschauung für die δ-Funktion als Funktion mit scharfem Maximum aber gleichbleibendem Flächeninhalt.

> Dieses Verhalten kann man auch dadurch beschreiben, daß man verlangt: Für jedes Intervall $ab, (a < b)$ sei
>
> $$\int_a^b \delta(u)du = \begin{cases} 0, & \text{wenn 0 nicht in } ab \text{ liegt,} \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn 0 am Rande von } ab \text{ liegt,} \\ 1, & \text{wenn 0 im Intervall } ab \text{ liegt.} \end{cases}$$

Mit der δ-Funktion kann jetzt jeder vollständige Operator als Integraloperator dargestellt werden, und so wird sie im Verlauf des Artikels ausführlich benutzt und mit ihr gerechnet.

Nach der genauen Vorstellung der Rechenregeln für die Operatoren und ihre Kerne kommen die Autoren schließlich zu dem Kernpunkt der Angelegenheit, nämlich zu dem Beweis, dass diese Operatorenrechnung der gesuchte analytische Apparat zur Quantenmechanik ist. Die Zuordnungsvorschrift zwischen den formalen und den physikalischen Größen ergibt sich aus

$$pf(x) = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} f(x), \quad qf(x) = xf(x) \quad \left(\epsilon = \frac{h}{2\pi i}\right) .$$

Die Interpretation beginnt also mit der Zuordnung von den als *physikalisch* gedachten Größen p und q zu den (als reinen Rechengrößen gedachten) Operatoren x bzw $\epsilon\frac{\partial}{\partial x}$. Bei Funktionen $F(qp)$ funktioniert es entsprechend, sobald sie als Potenzreihen gedacht werden. Die eigentliche Interpretation, also die Verbindung des formalen Apparates mit der „Welt der Tatsächlichkeit", besteht dann aus der Behauptung:

> *Die Wahrscheinlichkeitsamplitude $\phi(xy; qF)$ zwischen der Koordinate q und einer beliebigen mechanischen Größe $F(qp)$ – d.h. dafür, daß bei gegebenem Werte y von F die Koordinate zwischen x und $x + dx$ liegt – wird durch den Kern des Integraloperators geliefert, der den Operator q kanonisch in den zu der mechanischen Größe $F(pq)$ zugeordneten Operator transformiert.*
> Wir schließen gleich die Definition der Wahrscheinlichkeitsamplitude für zwei beliebige mechanische Größen $F_1(pq)$ und $F_2(pq)$ an. *Seien T_1 und T_2 die Operatoren, die den Operator q kanonisch in die zu F_1 bzw. F_2 zugeordneten Operatorfunktionen transformieren, also*
> $$T_1 q T_1^{-1} = F_1 , \quad T_2 q T_2^{-1} = F_2 ,$$
> *so ist $\phi(xy; F_1F_2)$ gleich dem Kern des Operators*
> $$T = T_1^{-1} T_2 .$$
> *[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]*

Nachdem die Interpretation geleistet ist, muss, neben einer abschließenden Politur nur noch gezeigt werden, dass die so definierten Wahrscheinlichkeiten die Axiome erfüllen. Das geschieht durch einfaches Nachrechnen, indem für die Wahrscheinlichkeitsamplituden nach den obigen Regeln die Kerne der Operatoren eingesetzt werden. Die Operatorenrechnung erfüllt genau die von den Axiomen erforderten Bedingungen, oder nochmal in den Begriffen von Hilbert und Bernays[18]: Die inhaltlichen Axiome I-VI gehen in ein System von Bedingungen über, deren gemeinsame Erfüllbarkeit durch die Operatorenrechnung erwiesen wird.
Abschließend werden in [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927] noch einzelne Nebenbedingungen diskutiert, nämlich dass die Wahrscheinlichkeiten positiv und reell sein müssen, was durch den Formalismus noch nicht garantiert ist. Deshalb muss noch der Begriff des adjungierten Operators $T^\dagger$ und schließlich des selbstadjungierten oder hermiteschen Operators[19] eingeführt und diskutiert werden, für den nun $T^\dagger = T$ gilt. Die Beschränkung

[18] [Hilbert und Bernays 1934]
[19] zwischen denen hier noch nicht unterschieden wird

auf hermitesche Operatoren hat den weiteren Vorteil, die Unbestimmtheit der *Reihenfolge* der Operatoren in einer Operatorfunktion bei der Zuordnung zu einer mechanichen Größe $F(pq)$ zu vermindern.

Die Wirkung der Arbeit

Die Zielrichtung ist also die Idee der Axiomatisierung, noch nicht ihre Durchführung mit einem selbstkonsistenten mathematischen Apparat. Das Ganze ist, wie der Vergleich mit dem Dirac-Kapitel ergibt, noch ganz Transformationstheorie, ein bisschen aufbereitet im Hinblick auf das, was sich die Mathematiker unter einer physikalischen Theorie vorstellen. Im Grunde war es, wie Nordheim später kommentierte[20] eine reine Übersetzungsarbeit, und so war die Wirkung des Artikels sehr begrenzt. Er löste weder die mathematischen Inkonsistenzen der Transformationstheorien, noch brachte er physikalisch eine Verbesserung gegenüber Diracs Original. Der Artikel wurde wohl akzeptiert, und die Physiker fühlten sich nicht wirklich belästigt. Der Einschlag war auch deshalb nicht so groß, weil die vom Standpunkt mathematischer Strenge wesentlich besseren Arbeiten von Neumanns so bald danach erschienen.
Nach Nordheims Einschätzung[21] war der Artikel zwar „quite elegant“ aber natürlich „absolutely inacceptable mathematically“, und der größte Verdienst dieser Arbeit sei es sicherlich gewesen, von Neumann zu seiner Hilbertraumtheorie angeregt zu haben. Als Vorläufer der von Neumannschen Theorie kommt ihr aber doch eine große Bedeutung zu, da erst in der Übersetzung in die konsequente mathematische Sprache die genaue Art und Weise der mathematischen Inkonsistenzen bestimmt werden konnte. Damit wurde das zu lösende Problem eindeutig definiert und die dahinterstehende mathematische *Frage* verständlich, so dass von Neumann eine Antwort suchen konnte.
Der Mangel an Strenge war den Autoren schon zum Zeitpunkt der Abfassung schmerzlich bewusst, denn das formalistische Programm Hilberts steht und fällt mit der Selbstkonsistenz der Theorie, wie wir in Abschnitt 6.2.1 gesehen hatten. Nichtsdestotrotz scheint den Autoren hier die Durchsichtigkeit der „mathematisch noch unvollkommenen Form“ ein gutes Argument für diese Darstellung der Theorie,

> zumal eine ganz exakte Darstellung viel mühsamer und umständlicher werden dürfte.
>
> *[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]*

6.2.3 Vom Sinn der Axiomatik: Die Rationalität der Wissenschaft

Wissenschaft und Objektivität

Die axiomatische Methode soll nach Hilberts Ansicht die Basis des Wissenschaftlichen sein. Was aber ist die Wissenschaft?
Wie etwa Heisenberg in [Heisenberg 1932] beschreibt[22], beruht der wissenschaftliche Prozess in bevorzugtem Maße in einem Absehen von den sinnlichen *Qualitäten* der Gegenstände. Die Gegenstände der Physik werden gerade unabhängig von Qualitäten wie

[20] [Interview AHQP]
[21] [Interview AHQP]
[22] und dessen Text ich hier als Leitfaden benutzen möchte

Farbe, Geruch oder Geschmack untersucht. Die klassische Physik nimmt die Gegenstände allein hinsichtlich ihres raum-zeitlichen Bewegungszusammenhanges. „Bewegung“ ist jetzt reine Fortbewegung in einem nivellierten homogenen Raum; ein „Körper“ ist rein bestimmt durch seine Masse und geometrische Gestalt. Die Eigenschaften und Qualitäten werden zu sekundären abgeleiteten Größen. die sich aus Kombination und Wechselwirkung der nackten Gegenstände ergeben. Die rote Farbe eines Gegenstandes wird bewirkt durch das Emissions- und Absorptionsverhalten der Atome auf der Oberfläche des Gegenstandes, der elektromagnetische Wellen bevorzugt mit einer Wellenlänge von $7 \cdot 10^{-7} m$ aussendet, die im Auge des Betrachters eine Farbempfindung auslöst.

Deutlich ist dabei allerdings, dass die ursprüngliche *Qualität*, die rote Farbe selbst, bei dieser Rekonstruktion nicht zurückgewonnen wird. Denn die Angabe einer Wellenlänge hat mit der Qualität „rot“ trivialerweise nichts zu tun. Die eigentliche Röte des Roten kommt nicht mehr zur Sprache. Maxwells Theorie beschreibt zwar auf einheitliche Weise die elektrischen und magnetischen Phänomene, verzichtet aber gerade auf das „Lebendigmachen des sinnlich unmittelbar gegebenen Phänomens“[23]. Maxwells Optik kann auch ein Blinder verstehen – gerade dies illustriert eindrücklich, wie es der Naturwissenschaft gerade um das Absehen vom inneren Bezug des Subjekts zum Gegenstand geht.
Die Quantenmechanik treibt diesen Prozess auf die Spitze, denn jetzt verlieren die Atome auch noch die letzte Anschauungsqualität: Auch der *geometrische* Vorstellungsgehalt wie etwa „Bahn des Elektrons“ wird aufgegeben und es bleibt ein rein mathematisches Gesetz. Mit der raum-zeitlichen Vorstellung, sozusagen dem Inbegriff des Anschaulichen, verliert auch die letzte „sinnliche“ Qualität ihren Platz in der Physik.

Gehen wir nun über den Vortragstext hinaus und fragen, worin diese von Heisenberg bemerkte Abstreifung des sinnlich vorgestellten Anschaulichen wurzelt. Die sinnlichen Qualitäten werden deshalb aus der Physik ausgegrenzt, da sie als *subjektive* Erlebniskomponenten der Erfahrung gelten. Die sinnlichen Qualitäten beruhen auf einem *privaten* Erleben und dem je subjektiven Augenschein. Der Sinn der wissenschaftlichen Methode besteht also darin, die *Objektivität* der wissenschaftlichen Aussagen zu erzwingen.
Als Grundbedeutung von „Objektivität“ möchte ich folgendes vorschlagen:
Objektivität ist die Forderung, dass die wissenschaftlichen Aussagen über *die Gegenstände* von *diesen Gegenständen selbst gelten.* Anders gesagt: Die ausgesagten Eigenschaften gehören innerlich zum Ding und nicht zur Aussage oder dem Aussagendem.
Dazu müssen sie zuallererst von aller Referenz auf *persönliche* Erfahrung und persönliches Erleben gereinigt werden. Auf jede inhaltliche Verbindung des Erkennenden zum Erkannten muss explizit verzichtet werden. Insbesondere muss ausgeschlossen werden, dass das, was einer an den Gegenständen ausmacht, etwa nur in Relation zu seinem bestimmten Standpunkt, seiner Persönlichkeit und Erfahrung gilt. Es muss geklärt werden, ob eine behauptete *Ein*sicht nicht vielleicht doch nur eine *An*sicht ist.
Dieser Schritt von der persönlichen Meinung zum ausgewiesenen Wissen über die Gegenstände selbst ist die Aufgabe der Wissenschaft. Dieser Schritt erscheint nun besonders deutlich in der Axiomatisierung und Formalisierung der Theorie, wie nun gezeigt werden soll.

[23] [Heisenberg 1932]

Axiomatik und Objektivität

Die Ausschaltung der persönlichen Komponente der Erfahrung vollzieht die axiomatische Methode durch die zitierte „Ersetzung des inhaltlichen Schließens durch äußere Regeln". Die Formalisierung drängt, wie wir in 6.2.1 gesehen haben, den inhaltlichen Bezug des Subjekts zum Gegenstand seiner Erkenntnis zurück zugunsten eines Handelns nach *äußeren* Regeln. Die äußere Regel ist aber per definitionem unabhängig vom subjektiven Erfahrungshorizont des Handelnden und hat daher einen *allgemeinen* Anspruch auf Gültigkeit.

Woher kommt aber diese äußere Regel, woher nimmt sie ihr Maß und das Recht zu maßregeln?
Das inhaltliche Schließen ist im weitesten Sinne noch ein *Wahrnehmen*, da hier noch der Inhalt selbst der Leitfaden des Schließens ist. Der Inhalt selbst und wie es mit ihm bestellt ist, kommt hier unmittelbar „vor Augen". Der Inhalt ist noch präsent und befragbar – wenn u.U. auch nur in der Vorstellung. Die sinnliche Wahrnehmung, auch in diesem weitesten Sinne, unterliegt aber dem *Zweifel*. Das Wahrgenommene bedarf noch einer Rechtfertigung, um es von möglichen Täuschungen zu unterscheiden. Erst die Axiomatisierung teilt die Präsenz des Gegenstandes ein in eine rein sinnliche (äußere) Beobachtung und ein rein verstandesmäßiges (inneres) Urteil. Der „inhaltliche Schluss" zerfällt in der Axiomatisierung in zwei unabhängige Komponenten, die reine Wahrnehmung und den reinen Verstand. Der „inhaltliche Schluss" ist dann eine undifferenzierte, archaische Erkenntnisweise, nämlich eine unkontrollierte Verbindung von Sinnesdatum und Urteil. Die intuitive Präsenz eines Gegenstandes oder Zusammenhanges im inhaltlichen Schluss ist weder Wahrnehmung noch Denken im strengen Sinn. Diese Erkenntisform ist prärational. Erst die strenge Unterscheidung und bewusst koordinierte Verbindung von Wahrnehmung und Denken, wie sie die Axiomatisierung anstrebt, macht die wissenschaftliche Methode aus.
Durch die Gewinnung einer reinen Verstandesebene erreicht man die Unabhängigkeit von der Relativität und Unsicherheit der inhaltlichen Bezüge. Die reinen Verstandesurteile verhalten sich in dieser Unabhängigkeit dem Inhalt gegenüber als *äußere* Regel. Erst als äußere Regel wird der Schluss rational – und umgekehrt.
Damit erhalten wir: Die äußere Regel erlangt ihre Autorität aus der Rationalität. In der reinen Rationalität des Schließens wird das persönliche und bezweifelbare Element, welches noch in der Wahrnehmung und so im inhaltlichen Schluss liegt, vollständig ausgeschaltet.

Während der inhaltliche Schluss sein Maß und seinen Grund aus der Offensichtlichkeit seiner Aussage bezieht, beruft sich der rationale Schluss allein auf die logische Notwendigkeit.
Die Begründung durch den Verstand ersetzt die Einsicht in einen Sachverhalt durch die *Argumentation.* Die Erzeugung *wahrer* Einsichten wird abgelöst durch die Schaffung *zwingender* Argumente. Wissenschaftliches Argumentieren kann sich als reine Funktion des Verstandes nun nicht mehr auf „Offensichtliches" berufen – dies würde weiterhin eine Form der Wahrnehmung erfordern – sondern findet seine Überzeugungskraft in der „Unanfechtbarkeit der Argumente"[24].

[24]Hilbert, siehe Seite 146

Die Begründung durch Argumentieren wird zugespitzt zu einem *Beweis*. Die Axiomatisierung definiert einen begrifflichen Kontext, der niemals verlassen wird. Erst innerhalb eines vorgegebenen Kontextes von implizit, d.h. durch ihre gegenseitigen Relationen definierten Begriffen ist eine rationale Argumentation erst möglich. Der Kontext implizit definierter Begriffe gibt die allgemeine Basis, unter der eine strenge Beweisführung möglich wird. Denn als implizit definierter Kontext hat er die subjektübergreifende Eigenständigkeit, die von einer *neutralen Basis* für die Argumentation zu verlangen ist. Durch die innere eindeutige Verknüpfung der Begriffe wird deren Bedeutung auf natürliche Weise und damit für alle Zeiten unzweideutig festgelegt. Die Argumentation wird daher von allen subjektiven Kontexten (persönlicher oder kultureller Hintergrund) befreit und schließt Missverständnisse aus. Die implizite Definiton schafft einen gemeinsamen Grund für eine Argumentation, die einen Beweis von einer Vermutung allgemeingültig unterscheiden kann. Wir sahen schon bei der Untersuchung von Diracs Begründung der δ-Funktion , wie der gegebene mathematische Kontext verlassen werden musste und die δ-Funktion nicht als mathematisches Symbol, sondern nur auf einen (wie auch immer gearteten) mathematischen Zusammenhang hinweisen sollte[25]. Dieses Springen zwischen Kontexten ist nötig, wo die Konsistenz des Zusammenhanges fehlt. Es ist geradezu ein Kennzeichen der intuitiven Einsicht, über vorgegebenene bestimmte Kontexte hinauszugehen und einen angemessenen Kontext neu zu erschaffen.[26] *Dieses* richtig zu machen bedarf aber der richtigen Intuition – und diese ist eben nicht objektiv.

Kurz zusammengefasst: Die axiomatische Methode ersetzt den inhaltlichen Schluss durch die äußere Regel. Diese Regel ist als Regel des reinen Verstandes frei von subjektiven Komponenten. Die Offensichtlichkeit der Einsicht wird damit von der Unanfechtbarkeit der Argumente als maßgebliches Wahrheitskriterium abgelöst. Eine erste Bedingung für die Objektivität der wissenschaftlichen Erkenntnis wurde so durch die axiomatische Methode erfüllt: Durch die Rationalität der Argumentation ist sichergestellt, dass die Erkenntnisse nicht nur Glauben und Meinen sind, die einem persönlichen Erleben entspringen. Die so gewonnenen Erkenntnise sind für jedes vernunftbegabte Wesen bindend und unbezweifelbar. Sie sind unabhängig von menschlichen weltlichen Begabungen, Fertigkeiten und Erfahrungen und transzendieren so die Einsicht über das Subjekt hinaus in ein allgemeines Gelten.

Die Eigenständigkeit als Bedingung der Objektivität

Die Aussagen und Gesetze der Wissenschaft sollen von den Gegenständen selbst gelten. Diese Forderung geht recht bedacht noch über die eben behandelte rein negativ bestimmte Unabhängigkeit vom Subjekt hinaus. Die Unabhängigkeit muss noch durch ein positives Kriterium eigener in sich selbst ruhender Existenz ergänzt werden. Das „Selbst“ der Gegenstände zeigt sich in ihrer *Eigenständigkeit*.

Diese Eigenständigkeit wird verwirklicht durch die Selbstbezüglich- und genügsamkeit des selbstkonsistenten Zusammenhanges.

Die Aussagen der Wissenschaft müssen zuallerserst mit sich selbst stimmig sein. Sie genügen so einem rein *inneren* Maß. Durch die Ausrichtung auf ein selbstgesetztes inneres

[25]Kapitel 5.6.2

[26]siehe auch 7. Interessant ist auch die unterschiedliche Art und Weise des Springens zwischen Kontexten bei Dirac und Pauli, Abschnitt 10.1.1.

Maß, gilt der Formalismus schon *für sich*. Er ist nicht auf externe Bedeutung angewiesen. Dieses Für-sich-Gelten ist aber gerade das, was wir für ein Naturgesetz vorraussetzen. Die Gegenstände der Natur machen ihren Zusammenhang „unter sich“ aus – ohne externes Eingreifen eines Gottes und unabhängig von menschlicher Erkenntnismöglichkeit. Das Gravitationsgesetz soll natürlich schon vor Newton, sogar vor der Entstehung von Lebens überhaupt gelten, da es eben *von* der Materie als solcher gilt. *Die Eigenständigkeit dieses Zusammenhanges muss sich daher in der Eigenständigkeit des Formalismus zeigen.* Die Axiomatisierung bewirkt mit der Abtrennung der subjektiven Komponenten und der selbstkonsistenten Formalisierung diese Selbstständigkeit, die sicherstellt, dass die Aussagen der Theorie überhaupt die Macht und Möglichkeit haben, von eigenständigen und durch sich selbst vorliegenden Naturzusammenhängen als solchen zu reden.

Die Eigenständigkeit impliziert wiederum eine Form von Abgeschlossenheit und Beständigkeit. Der Formalismus stellt ein *abgeschlossenes* System dar – innerlich konsistent, vollständig und zu keinen kleinen Abänderungen mehr fähig. Er definiert so die Theorie als fertiges, als *ganzes* Gebilde und Einheit, da er von innen her einen natürlichen Rand definiert. Hilbert schrieb[27], die eigentliche Mathematik werde zu einem Bestand an Formeln. Dieser Bestand verwirklicht eine Beständigkeit, da er von einem *inneren* Band zusammengehalten wird, welches gegen äußere Änderungen immun ist. Eine Änderung des Formalismus würde so gleich eine ganz andere Theorie bedeuten.
Diese abgeschlossene eigenständige Ganzheit des Formalismus gibt als gültiger Rahmen den theoretischen Begründungen und Erklärungen, kurz: den Beweisen, ihren Halt und Grund. Die Beweis*kraft* eines vorgebenen Beweises speist sich aus dem durch die Ganzheit definierten Kontext.

Was aber hat der eigenständige für sich selbst geltende Formalismus noch mit Naturwissenschaft zu tun? Ist diese Abgeschlossenheit nicht ein Gegenargument für die Benutzung der axiomatischen Methode in den Naturwissenschaften, da man doch einwenden könnte, dass die Naturwissenschaft auf etwas Äußeres, eben die Natur bezogen bleiben müsse?
Nein, denn wir müssen auch beachten, dass erst der *deduktive* Zusammenhang die Theorie zu einer Theorie macht und die Systematik und Beständigkeit besorgt, die im Worte „Theorie“ mitgedacht ist. Denn „der Physiker verlangt gerade von einer Theorie, daß ohne Heranziehung anderweitiger Bedingungen aus den Naturgesetzen oder Hypothesen die besonderen Sätze allein durch Schlüsse, also aufgrund eines reinen Formelspieles, abgeleitet werden.“[28] Eine Theorie ist der Gesamt*zusammenhang* aller Aussagen über das jeweilige Sachgebiet, und dieser Zusammenhang wird eben durch die *innere* Logik der Verbindungen und Folgerungen hergestellt.

Erst die Übersicht über die inneren Zusammenhänge macht aber das Verständnis des Zusammenhanges aus. Erst in der selbstkonsistenten Eigenständigkeit werden die Zusammenhänge zu *inneren* Zusammenhänge zwischen den Objekten. Nur dann wird aus einer Betrachtung *Verstehen.*

[27][Hilbert 1927], siehe Seite 130
[28][Hilbert 1927], siehe auch Seite 131

Noch deutlicher wird dieses, wenn wir weiterhin beachten, dass eine Theorie auch eine *vorhersagende* Kraft haben soll. Diese Vorhersagen sind offensichtlich aus den Grundsätzen zu erschließen. Deshalb ist es so wichtig, dass „man in seiner Entwickelung nicht nötig hat, zwischendurch noch auf Anschauung [...] zurückzugreifen“[29].

Zusammenfassend ergibt sich: Die Axiomatisierung ist eine Methode zur Objektivierung des Wissens. Sie schafft den Überstieg vom Subjekt zu den Objekten durch die Verwirklichung einer strengen Rationalität und kann in zwei Aspekten betrachtet werden:

1. Die Neutralisierung aller sinnlichen Anteile in der Erkenntnis stellt sicher, dass die Erkenntnis vom erkennenden Subjekt unabhängig wird. Diese Unabhängigkeit ist eine notwendige, aber erst negative Bedingung für sicheres Wissen von den Gegenständen selbst.

2. Diese (negative) Freiheit vom Subjekt wird ergänzt durch die positive Forderung nach eigenständiger Gültigkeit des Formalismus für sich. Erst in dieser Eigenständigkeit zeigt sich, dass die postulierten Gesetze auch wirklich von den Gegenständen selbst gelten.

6.2.4 Die Rolle des Formalismus: Medium und Abbildung

Die Idee der Axiomatik in der Naturwissenschaft steht in fundamentalem Gegensatz zur Idee der Mathematik als Medium (im Sinne der Durchsichtigkeit). Denn am Anfang der Axiomatik steht die Idee, sämtlichen anschaulichen Gehalt aus den Begriffen zu streichen. Der Formalismus verweist ausschließlich auf sich selbst und die verwendeten Begriffe haben gar keine externe Bedeutung mehr. Sie sind nicht mehr Hinweis, nicht Wegweiser, sondern nur noch Knotenpunkte eines selbstkonsistenten logischen Geflechtes.

Dieses logische Geflecht steht dem „physikalischen Gehalt“ jetzt *gegenüber*. Die Mathematik wird als gleichberechtigtes, eigenständiges Ding für sich betrachtet. Diese mathematische Wissenschaft wird dann mit dem „Gehalt“, also den Dingen der Natur, beziehungsweise dem Zusammenhang dieser Dinge, in Bezug gesetzt. Die Art des Bezuges zwischen Form und Gehalt ergibt sich aus der Diskussion des Überganges von inhaltlichen zu formalen Axiomen in Kapitel 6.2.1 und 6.2.2. Skizzieren wir die dortigen Argumente in einem Diagramm, so ergibt sich etwa folgendes (Abbildung 6.3): Man startet mit einem

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\text{inhaltlich--physikalische Relation}"] \arrow[d, "\text{Darstellung}"'] & b \\
A \arrow[r, "\text{mathematisch--formale Relation}"'] & B \arrow[u, "\text{Interpretation}"']
\end{tikzcd}$$

Abbildung 6.3: Schema zur Formalisierung

System von inhaltlichen Axiomen (a), sucht sich dann einen analytischen Apparat (A), der die inneren Relationen der inhaltlichen Axiome genau widerspiegelt (Darstellung). Danach

[29] [Hilbert 1927], siehe Seite 131; zu diesem Themenkreis auch den Abschnitt „Axiomatik und wissenschaftliche Kreativität“ ab Seite 145

werden aus dem System (A) formal einige Ausssagen deduziert (B), die dann wiederum durch die Interpretation zu Aussagen über „wirkliche physikalische Dinge“[30] werden (b)[31].

Der Bezug zwischen der inhaltlichen und der formalen Ebene hat damit offenbar den Charakter der *Zuordnung*. Die Mathematik ist eine *Abbildung* der physikalischen Ordnung. Der Bezug von Mathematik und Physik ist damit eine *Entsprechung*. Die im Formalismus auftretenden Relationen haben eine Entsprechung in der physikalischen Ordnung.

Der Formalismus für sich genommen ist also reine Syntaktik ohne Bedeutung und somit leer. Die Bedeutung der Symbole wird nachträglich angeklebt in der extra als solchen gekennzeichneten Interpretation des Formalismus. Diese Interpretation schafft das Abbildungsverhältnis zwischen zwei getrennten und für sich bestehenden Sphären: dem physikalischen und dem formalen Zusammenhang. Der Formalismus ist die *logische Modellierung* der Zusammenhänge der Natur. Das Modell und das Abbild sind nicht das Gemeinte selbst, sondern die *Rekonstruktion* desselben in einer anderen Sphäre – in unserem Fall die Repräsentierung der äußeren physikalischen Ordnung im inneren mentalen Raum. In diesem Sinne ist der Mathematiker Architekt und Konstrukteur (beziehungsweise Rekonstrukteur, sobald er sich explizit mit Physik beschäftigt).
Während die Mathematik als durchsichtiges Medium die Brücke zwischen dem Subjekt und der physikalischen Ordnung schlägt, indem sie deren Wahrnehmung ermöglicht, bewegt sich die Mathematik als Abbildung ganz innerhalb des Subjektes. Sie ist die Wiedererschaffung der äußeren Ordnung im Geist. Die Mathematik ist nicht Medium, sondern *Ort* der Erkenntis. Die Brücke wird hier durch den Prozess der Abbildung – Darstellung und Interpretation – geschlagen.

---

[30] [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927]

[31] Diese Auffassung wird in der Wissenschaftstheorie expliziter unter die Lupe genommen. So findet man etwa in [Jammer 1974] eine etwas detailliertere Fassung und Diskussion dieser Relation, Dort werden im Anschluss an bekannte wissenschaftstheoretische Konzepte als Komponenten einer Theorie T der Formalismus F und einen Satz R von „Regeln der Korrespondenz“ (coordinating definitions, semantical rules, etc) angegeben. In diesem Verhältnis von F und R finden wir das Verhältnis von inhaltlicher Sacherkenntnis und formaler Logik in folgender Form wieder:

> F without R is a meaningless game with symbols, R without F is at best an incoherent and sterile description of facts.
>
> *[Jammer 1974], S.10*

Wir finden hier Hilberts Standpunkt wieder, indem *sowohl* das Formelspiel *als auch* die „Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit“ gefordert wird.
Wir können die formalistische Auffassung nun dahingehend kennzeichnen, dass der Übergang vom Formalismus zum physikalischen Gehalt *nur an bestimmten Stellen* vollzogen werden darf, und die „Regeln der Korrespondenz“ nur an definierten Stellen angreifen. Erinnern wir uns an Hilberts Satz, dass „die Forderung, wonach dabei jede einzelne Formel für sich allein deutbar sein soll, [...] keineswegs vernünftig“ sei, und man nicht mitten im Argument auf Anschauung zurückgreifen dürfe. Der Übergang vom Formalen zum Inhaltlichen darf an den Stellen geschehen, wo gewisse Folgerungen aus dem Formalismus durch das Experiment kontrolliert werden können. In der formalistischen Auffassung ist das Formelsystem weitgehend abgeschlossen und die beiden horizontalen Bereiche des Diagrammes sind nur an zwei Stellen verbunden: Die „Darstellung“ vollzieht sich ausschließlich in der Axiomatisierung, die „Interpretation“ nur in gewissen Endformeln. Nicht jede einzelne Formel hat eine externe Bedeutung, sondern nur die Gesamtheit des Systems.

6.2.5 Einschub: Verschiedene Bemerkungen

Formalisierung und Physik: Das Werkzeug als Maschine

An dieser Stelle bietet sich die Gelegenheit für ein kurze Zwischenbemerkung, die das jetzt Gesagte mit dem im Kapitel 5.6.5 diskutierten Begriff des Werkzeugs in Beziehung setzt. Die Selbstkonsistenz und Eigenständigkeit des Formalismus nimmt nämlich eine aufschlussreiche Form an, wenn sie im Hinblick auf den instrumentalen Charakter der Mathematik beleuchtet wird. Diese Betrachtung soll den Sinn und die Folgen der axiomatischen Methode noch weiter verdeutlichen.

Im Dirac-Kapitel wurde der Mathematik in einer Zwischenstufe der Diskussion der Charakter eines Werkzeuges für die Physik zugewiesen. Die Werkzeuge selbst wiederum konnten in solche erster und zweiter Art unterteilt werden: Instrumentum coniunctum und instrumentum separatum. Mit der Formalisierung macht das Werkzeug einen weiteren Qualitätssprung und mutiert zu etwas Neuem, einem Werkzeug dritter Art: zur Maschine.
Die inhaltliche Einsicht ist von der persönlichen Intuition abhängig – der Schluss nach äußeren Regeln gilt schon für sich. Denn dieser Schluss funktioniert *automatisch*, ohne besonderes Bewusstsein. Die Mathematik wird hier zur *Maschine*. Die Auffassung des Formalismus als Maschinerie ist schon am alltäglichen Sprachgebrauch der Physiker abzulesen. Hilbert, von Neumann und Nordheim bezeichnen ihn als analytischen „Apparat“, und eine direkte denkerische Lösung eines physikalischen Problems (unter Umgehung des formal vorgezeichneten Weges) wird in Physikerkreisen gern als „zu Fuß“ bezeichnet. Der Maschinencharakter der formalistischen Mathematik wird getragen von ihrem automatischen Funktionieren. Das Automatische wiederum wird erreicht durch die innere Stringenz und Folgerichtigkeit. Der Formalismus orientiert sich wie die Maschine ausschließlich an *inneren* Parametern und Relationen – und wird so unabhängig von äußeren Bezügen. Er ist durch sein lückenloses Ineinandergreifen nicht mehr auf eine bewusste Supervision seines Verwenders angewiesen. Der Maschinencharakter des Formalismus manifestiert sich deshalb nicht zuletzt darin, dass formalisierte Rechnungen heute tatsächlich von Maschinen durchgeführt werden. Und es ist bezeichnend dass John von Neumann einer der Pioniere der Computertechnologie war.
In die Maschinerie muss bloß noch vorne ein Problem hereingegeben werden, so dass sie automatisch das richtige Ergebnis ausspucken kann. Die Lösung eines mathematischen Problems ist, sobald der formale Weg bekannt ist, keine kreative Leistung mehr, die Einsicht in den Sachverhalt erfordert, sondern eine Tätigkeit nach festen Regeln, die im Prinzip von jedermann zu leisten ist – wobei uns der Jedermann heutzutage in Gestalt des Computers entgegentritt. Die kreative denkerische Tätigkeit des Physikers verlagert sich daher von einer direkten Problemlösung zu der Aufgabe, das Problem in einer für den Formalismus verdaulichen Art und Weise zu stellen; beispielsweise in der Suche und Angabe einer richtigen Lagrange-Funktion, aus der der Formalismus dann „von selbst“ die richtigen Bewegungsgleichungen berechnet. Mit Hilbert gesprochen:

> ... dadurch werden die inhaltlichen Überlegungen, die selbstverständlich niemals völlig entbehrt oder ausgeschaltet werden können, an eine andere Stelle, gewissermaßen auf ein höheres Niveau verlegt, und zugleich wird in der Mathematik eine strenge und systematische Trennung zwischen den Formeln und formalen Beweisen

einerseits und den inhaltlichen Überlegungen andererseits möglich.

[Hilbert 1922]

Hilbert bezeichnet dabei die inhaltlichen Überlegungen als das „eigentliche Denken“ – auf dem formalen Niveau ist keinerlei Überlegung im vollen Sinne des Wortes mehr nötig.

Der Formalismus ist die *Methode*, mit der man mit Sicherheit ins Ziel kommt. Erst mit dem Besitz einer allgemeinen Methode ist das allgemeine Prinzip erkannt, nach dem sich jedes Einzelproblem aus einem gesetzlichen Zusammenhang entfaltet. Der Formalismus als Maschine, die den Input in Output transformiert, spiegelt das seit Newton leitenden Prinzips der Physik: Der Unterscheidung zwischen Gesetz und Anfangsbedingung. Sobald nur irgendein Anfangszustand vorgegeben ist, entstehen alle weiteren Konfigurationen automatisch gemäß dem Gesetz. Das Naturgesetz transformiert den Input der Anfangsbedingungen in den Output des Versuchsergebnisses, und zwar automatisch. Die Formulierung des Gesetzes muss daher diese Zwangsläufigkeit zum Ausdruck bringen. Der Gesetzmäßigkeit des Naturablaufes entspricht der Automatismus der mathematischen Maschine.
Der Automatismus ist so ein Zeichen für die *Notwendigkeit* des Ablaufes der Naturvorgänge. Ein Ablauf, der sowohl von selbst als auch ohne jede Freiheit der beteiligten Elemente geschieht ist offensichtlich ein Notwendiger. Die Erkenntis in die Notwendigkeit der Naturabläufe ist aber ein Zeichen für die *Vollständigkeit* der Naturerkenntis.
Die Betonung des Automatismus zeigt noch einmal die Gültigkeit eines Gedankenganges unabhängig von demjenigen, der den Gedanken vollzieht. Die Maschine ist weitgehend autonom – und so stehen die formalisierten Gedankengänge für sich selbst.

Dieser Begriff des Werkzeuges als Maschine ist aber ein fundamental anderer als der, der in der Auffassung der Mathematik als durchsichtiges Medium diskutiert wurde. Dort lag die Betonung auf der Andersartigkeit von Werkzeug und Werkstoff, das Werkzeug der Mathematik war als *Mittel* dem Zweck der Physik völlig *unter*geordnet. Hier dagegen wird die Physik in die Mathematik *ein*geordnet, so dass das Gefüge der mathematischen Theorie und ihre Methoden in die Physik eingreifen können. Während sich im ersten Sinne die Mathematik ganz nach der Physik zu richten hat, liegt es jetzt umgekehrt: Die Formulierung des physikalischen Zusammenhanges muss für die Benutzung der mathematischen Maschinerie brauchbar gemacht werden.[32]

Axiomatik und wissenschaftliche Kreativität

Axiomatik und Mathematisierung wurden als Ausdruck der Sicherheit und Gültigkeit der naturwissenschaftlichen Erkenntnis beschrieben. Das Streben nach Sicherheit steht in einem natürlichen Spannungsverhältnis zu der fortschreitenden Veränderung der wissenschaftlichen Theorien und insbesondere zum kreativen Prozess der Theorienentwicklung.[33]

[32]Dem entspricht die Unterscheidung von Handwerker und Arbeiter: Während der Handwerker sein Handwerkszeug *benutzt*, muss der Arbeiter die Maschine *bedienen*. Der Arbeiter ist in ein System industrieller Fertigungsprozesse eingeordnet und ein Teil von diesem, und ist primär auf das System selbst bezogen: Es geht ihm um die Arbeit als solche. Der Handwerker bleibt dagegen immer auf eine spezielle zu vollbringende Aufgabe bezogen, bei deren Lösung ihm sein Werkzeug als Hilfsmittel zur Verfügung steht: Ihm geht es bei der Arbeit ums Werk.

[33]Dieser Gedanke wurde, wie der gesamte Abschnitt, durch die Arbeit [Stöltzner 2001] angeregt.

Gerade deswegen wurde sie von Physikern immer wieder abgelehnt So schreibt etwa Feynman 1965 in *The character of physical law*:

> Some day, when physics is complete and we know all the laws, we may be able to start with some axioms ... so that everything can be deduced. But while we do not know all the laws, we can use some to make guesses at theorems which extend beyond the proof.
>
> *R.P. Feynman*, zitiert nach *[Stöltzner 2001]*

Feynman setzt hier eine axiomatische Formulierung nicht nur mit einer konzeptionellen Abgeschlossenheit der Theorie sondern sogar mit einer endgültigen Formulierung der Physik gleich. Was Feynman hier in den Vordergrund stellt, ist die Erkenntnis, dass die Axiomatisierung schon ein *Ergebnis* des Denkens ist, und die Klarheit über Grundlagen am *Ende* des eines Forschungsprozesses steht. Er betont, dass, solange die Naturgesetze nicht bekannt sind, der Erkenntnisweg induktiv ist und von der Vielzahl der Phänomene zur einheitlichen Regel fortschreitet und die Deduktion aus Grundlagen nur zur nachträglichen logischen Rekonstruktion und abschließenden Verifikation der Theorie dienen kann. Bezeichnend für das Gefühl, mit der Axiomatisierung das Pferd von hinten aufzuzäumen, ist wohl die Reaktion Paul Ehrenfests auf die Transformationstheorie Jordans:

> Ja, da Sie es axiomatisch geschrieben haben, das bedeutet ja nur, daß man die Arbeit von hinten nach vorne lesen muss!
>
> *P. Ehrenfest*, Erinnerung von *P.Jordan, [Interview AHQP]*

Wie wir aber in unserer Diskussion über die formale Axiomatik gesehen haben, postulieren die Axiome in Hilberts Sinn überhaupt keine Wahrheiten mehr, sondern sind nur klar dargestellte Grundannahmen. Die Assoziation von „Axiom" mit „ewiger Wahrheit" ist also nur ein Relikt aus der Ära der inhaltlichen Axiomatik. Weil die Axiomatik Hilberts rein formal ist, bedeutet sie hauptsächlich eine Aufforderung, bewusst und systematisch zu denken:

> Die axiomatische Methode ist tatsächlich und bleibt das unserem Geiste angemessene unentbehrliche Hilfsmittel einer jeden exakten Forschung, auf welchem Gebiete es auch sei: sie ist logisch unanfechtbar und zugleich fruchtbar; sie gewährleistet dabei der Forschung die vollste Bewegungsfreiheit. Axiomatisch verfahren heißt in diesem Sinne nichts anderes als mit Bewußtsein denken: Während es früher ohne die axiomatische Methode naiv geschah, daß man an gewisse Zusammenhänge wie an Dogmen glaubte, so hebt die Axiomenlehre diese Naivität auf, läßt uns jedoch die Vorteile des Glaubens.
>
> *[Hilbert 1922]*

Entsprechend besteht im Hilbertschen Sinne keinerlei Grund zu der Feynmanschen Annahme, eine axiomatische Formulierung mache erst in einer endgültigen Theorie Sinn. Hilbert betont, dass die Axiomatisierung ein Instrument gerade zur *kreativen* Forschung sei – die logische Strukturierung macht das Denken nicht nur „unanfechtbar" sondern auch „beweglich". Zwar möchte man Feynman zustimmen, dass das Ziel der Axiomatik eine endgültige Formulierung der Theorie sei, aber im Forschungsprozess selbst ist durchaus die *versuchsweise* Ansetzung von Axiomen eine kreative Vorgehensweise.
Da dieses in Physikerkreisen jedoch kaum zu vermitteln war, versuchte Max Born das gleiche Mißverständnis im gleichen Jahr in seinem Beitrag zur Festschrift zu Hilberts 60sten Geburtstag auszuräumen:

> Der Physiker geht darauf aus, zu erforschen, wie die Dinge in der Natur sind; Experiment und Theorie sind ihm dabei nur Mittel zum Zweck, und im Bewußtsein der unendlichen Kompliziertheit des Geschehens, die ihm bei jedem Experiment entgegentritt, wehrt er sich dagegen, irgendeine Theorie als endgültig anzusehen. Darum verabscheut er das Wort „Axiom“, dem im gewöhnlichen Sprachgebrauch der Sinn der endgültigen Wahrheit anhaftet, in dem gesunden Empfinden, daß Dogmatismus der schlimmste Feind der Naturwissenschaft sei. Der Mathematiker aber hat nicht mit Tatsachen des Geschehens, sondern mit logischen Zusammensetzungen zu tun, und in Hilberts Sprache bedeutet die axiomatische Behandlung einer Disziplin keineswegs die endgültige Aufstellung bestimmter Axiome als ewiger Wahrheiten, sondern die methodische Forderung: Nenne deine Vorraussetzungen am Anfang deiner Überlegung, halte dich daran und untersuche, ob diese Vorraussetzungen nicht zum Teil überflüssig sind oder gar einander widersprechen.
>
> *[Born 1922]*

Auch ist es durchaus denkbar, dass zu einem gegebenen gültigen Axiomensystem eine tieferliegendere, allgemeinere Schicht von Axiomen entdeckt wird. Hilbert sprach in diesem Zusammenhang von einer fortschreitenden „Tieferlegung der Fundamente“ [34]. Eine axiomatische Theorie ist also nicht automatisch mit einer universalen und endgültigen Theorie gleichzusetzen. Obwohl eine endgültige Theorie wahrscheinlich axiomatisch formuliert wäre, gilt hier nicht der Umkehrschluss, jede axiomatische Theorie müsse schon den Anspruch auf Endgültigkeit haben. *Die Axiomatisierung beansprucht die Vollendung der Wissenschaftlichkeit einer Theorie und nicht die inhaltliche Vollendung der Theorien selbst.* Im Gegensatz zu Feynmans Annahme sind Axiome damit nicht erst im Endstadium einer wissenschaftlichen Entwicklung sinnvoll, sondern schon im Prozess der Theoriebildung.

> Axiomatization ... permits a large degree of openness because one can easily devise alternative theories just by dropping or modifying a single axiom.
>
> *[Stöltzner 2001]*

Die Axiomatisierung dient dazu, den Bau der Theorie übersichtlicher zu gestalten und so eventuell notwendige Veränderungen schnell und systematisch lokalisieren zu können. Die Axiomatisierung kann so gerade dazu benutzt werden, einen wissenschaftlichen Opportunismus systematisch in die Theorie einzuführen.
Dass Hilbert selbst mit Vorliebe gerade nicht fundamentale Theorien der Physik axiomatisieren wollte, werden wir im nächsten Abschnitt betrachten.

Axiomatik und Quantenmechanik

Neben diesen allgemeinen Bemerkungen zum Verhältnis zu Physik und Axiomatik lässt sich aber noch eine besondere Beziehung der Axiomatik speziell zur Quantenmechanik feststellen.
Ulrich Majer[35] erhielt bei einer Durchsicht von Hilberts Physikvorlesungen noch einen interessanten Hinweis auf die Verbindung von Axiomatik und Phänomenologie. In ihrer klassischen Gestalt sucht die Physik eine grundlegende Erklärung der Phänomene aus der Struktur der Materie heraus: So wird etwa das Phänomen der Wärme erklärt durch die

[34] etwa [Hilbert 1918], siehe auch das Zitat S.128
[35] [Majer 2001]

Energie sehr vieler Teilchen. Die gesamte statistische Mechanik ist ein Paradebeispiel für die Erklärung der gegebenen Phänomene durch anschauliche Modellvorstellungen. Zur Zeit der Vorlesungen ging es Hilbert um eine Rückführung der gesamten Physik auf die Punktmechanik, um eine möglichst detaillierte Vorstellung der beteiligten mikroskopischen Abläufe.
Nun schlägt Hilbert aber auch eine entgegengesetzte Methode vor, da die Erklärung durch Rückführung auf mikrokopische Ursachen nicht immer ans Ziel kommt:

> Solche Überlegungen lassen es gut erscheinen, einstweilen ein ganz anderen, ja geradezu *entgegengesetzten* Weg in der Behandlung der Physik einzuschlagen, wie es auch tatsächlich geschehen ist. Man sucht sich nämlich vornherein möglichst wenig detaillierte Vorstellung des physikalischen Processes zu machen, sondern legt zunächst nur einmal die allgemeinen Parameter, die seinen äußeren Verlauf bestimmen, fest; alsdann kann man durch *axiomatische* physikalische *Annahmen* die Form der Lagrangeschen Funktion L als Funktion dieser Parameter und ihrer Differentialquotienten bestimmen. Wird dann der Vorgang durch das Minimalprinzip $\int Ldt =$Min. gegeben, so kann man alleine aus Annahmen über die Form von L allgemeine Eigenschaften des Bewegungszustandes herleiten, ohne eine nähere Kenntnis der Vorgänge zu besitzen.
>
> *Hilbert 1906*, zitiert nach *[Majer 2001]*

Dabei ist nun, wie Majer betont, gerade der phänomenologische Ansatz einer axiomatischen Behandlung besonders zugänglich, weil die Konsequenzen der direkt in den Ansatz eingehenden verschiedenen Parameter systematisch studiert werden können. Beispielsweise kann auf diese Art die Temperatur als allgemeiner Parameter in der Thermodynamik benutzt werden und ihre Abhängigkeit etwa von der Energie untersuchen, anstatt auf Schwingungszustände einzelner Moleküle einzugehen.
Für Hilbert war das phänomenologisch-beschreibende Vorgehen nur als Zwischenschritt zu einer wirklich erklärenden Theorie gedacht, die die Phänomene durch genaue Vorstellungen der Wechselwirkung der verborgenen Teilchen und Kräfte deduziert – also auch für Theorien die nicht als fundamental gelten.
Nun ist die Quantenmechanik aber gerade eine weitgehend phänomenologische Theorie in diesem Sinne. Sie verzichtet auf detaillierte Vorstellungen des mikroskopischen Geschehens und wird in diesem Sinne deskriptiv. Der Unterschied zur klassischen statistischen Mechanik liegt darin, dass sich für die quantenmechanische Statistik keine Rückführung auf „verborgene Parameter“ angeben lässt, die die beobachteten Phänomene durch anschauliche Modelle erklärt. Die Quantenmechanik ist also prinzipiell eine phänomenologische Theorie in diesem Sinne, und die geforderte „nähere Kenntnis der Vorgänge“ prinzipiell ausgeschlossen.
Die Quantenmechanik ist unter diesem Gesichtspunkt für eine Axiomatisierung besonders geeignet, weil sie sowohl fundamental als auch phänomenologisch[36] ist.

6.3 Mathematische Strenge: Die Spektraltheorie

Wie wir gesehen haben, ist für die axiomatische Behandlung die innere Konsistenz des Formalismus von zentraler Bedeutung. Die Hauptaufgabe für von Neumann war daher die

[36] siehe dazu die Diskussion in Kapitel 6.4.2

exakte Ausarbeitung des quantenmechanischen Formalismus, der die δ-Funktion überflüssig machen sollte.

Als von Neumann nach Göttingen kam, erlebte er die Entwicklung der Quantenmechanik und ihres Formalismus unmittelbar mit, und so fiel ihm fast automatische die Rolle des Kritikers des Diracschen Formalismus zu. Nachdem Hilbert, von Neumann und Nordheim die Diracsche Transformationstheorie umsortiert hatten, um sie in den Kontext Hilbertscher Begrifflich- und Begreifbarkeit zu stellen, war der Boden bereitet, die sich dort verbergenden mathematischen Fragen zu präzisieren und frontal anzugehen. Von Neumann schaffte schon kurz darauf in [von Neumann 1927] den Durchbruch zu einer mathematischen korrekten Theorie, der Spektraltheorie im Hilbertraum. In den folgenden Jahren rundete er die Arbeit immer weiter ab, und das Buch „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" von 1932 ist in seiner Art *das* Standardwerk über die formale Quantentheorie geworden.

Noch während [Hilbert, Neumann, Nordheim 1927] fertiggestellt wurde – die Autoren kündigten es in einer Fußnote an – arbeitete von Neumann an der mathematischen Präzisierung des Formalismus um die mathematischen Mängel der Transformationstheorie auszugleichen. Dabei steht zugleich mit der Behebung der mathematischen Schwierigkeiten die konzeptionelle Vereinheitlichung von Matrizen- und Wellenmechanik im Vordergrund. Die „Mathematische Begründung der Quantenmechanik" [von Neumann 1927] zeigt zunächst die Probleme beider Ansätze. Eine echte Matrizenmechanik ist zu einseitig, da sie eigentlich nur Probleme mit diskretem Spektrum behandeln kann. Die Verallgemeinerung auf kontinuierliche Matrizen impliziert aber mathematisch gesehen ein simultanes Operieren mit Matrizen und Integralkernen.

> ... indessen ist dieses Verfahren [...] wohl sehr schwer mathematisch streng durchzuführen: muß man doch dabei Begriffsbildungen wie unendlich große Matrixelemente oder unendlich nahe benachbarte Diagonalen einführen.
>
> *[von Neumann 1927]*

Aber auch Schrödingers Methode ist „schweren mathematischen Bedenken" ausgesetzt, da man dort nicht vermeiden kann „auch sog. uneigentliche Eigenfunktionen zuzulassen". Dabei werden primär die „absurden" Eigenschaften der δ-Funktion genannt.
In der Einleitung zu [von Neumann 1932] macht von Neumann seine Einstellung zu Diracs Transformationstheorie nochmals deutlich, jetzt auf dem Hintergrund der zwei Jahre zuvor erschienen „Principles of Quantum Mechanics" [Dirac 1930b].

> Die erwähnte, infolge ihrer Durchsichtigkeit und Eleganz heute in einen großen Teil der quantenmechanischen Literatur übergegangene Methodik von Dirac wird den Anforderungen der mathematischen Strenge in keiner Weise gerecht – auch dann nicht, wenn diese natürlicher- und billigerweise auf das sonst in der theoretischen Physik übliche Maß reduziert werden. [...]
> Dies wäre kein Einwand, wenn diese in den heutigen Rahmen der Analysis nicht passenden Begriffsbildungen für die neue physikalische Theorie wirklich wesentlich wären.[...]
> Das ist aber keineswegs der Fall, es soll vielmehr gezeigt werden, daß die Transformationstheorie auf eine ebenso klare und einheitliche Weise auch mathematisch einwandfrei begründet werden kann. Dabei ist zu betonen, daß der korrekte Aufbau

> nicht etwa aus einer mathematischen Präzisierung und Explizierung der Diracschen Methode besteht, sondern daß er ein von vornherein abweichendes Vorgehen nötig macht, nämlich das Anlehnen an die Hilbertsche Spektraltheorie der Operatoren.
> *[von Neumann 1932] S.1 f*

In der Spektraltheorie (unbeschränkter) Operatoren auf dem Hilbertraum geht es also

- *mathematisch* um eine konsistente Formulierung der Quantenmechanik, die ausdrücklich grundlegend anders ist als Diracs Transformationstheorie,
- was *technisch*, wie wir gleich sehen werden, durch eine Umformulierung des Eigenwertproblems in Aussagen über die Zerlegung der Operatoren in Spektralprojektoren erreicht wird.
- Dadurch erhalten wir *physikalisch* einen Formalismus ohne „Umweg durch das nichtbeobachtbare und nicht-invariante“[37].

6.3.1 Von Neumanns Äquivalenzbeweis: Der Hilbertraum

Ich möchte nun in der gebotenen Kürze von Neumanns Spektraltheorie darstellen, und zwar in der Version, in der sie im Buche [von Neumann 1932] steht.
Aufhängungspunkt sei, wie bei Dirac vorhin, der Äquivalenzbeweis von Wellen- und Matrizenmechanik.
Von Neumanns Geniestreich besteht aus drei Schritten.

1 Die Herstellung der formalen Analogie von Matrizen- und Wellenmechanik als Eigenwertproblem.
Das dynamische Problem der Matrizenmechanik liegt bekanntlich in der Diagonalisierung der Hamiltonschen Matrix H, die aus den Matrizen p, q gebildet werden soll, welche wiederum die Vertauschungsrelationen erfüllen. Von Neumann stellt nun ganz bewusst heraus, dass dieses Problem eben in der Lösung des Eigenwertproblems der Matrix H besteht, d.h. dass die Diagonaliserung einer Matrix im Wesentlichen zur Bestimmung ihrer Eigenwerte äquivalent ist – dies ist damals noch nicht selbstverständlich gewesen.
Hat man eine Matrix H gefunden, so kann die gesuchte Diagonalmatrix H^d durch eine unitäre Transformation aus dieser gewonnen werden, d.h. $H^d = S^{-1}HS$. Gesucht werden also die Matrizen S und H^d mit $SH^d = HS$. Schreibt man die Komponenten in Kleinbuchstaben, folgt

$$\sum_\nu s_{\mu\nu} h^d_{\nu\rho} = \sum_\nu h_{\mu\nu} s_{\nu\rho} \tag{6.1}$$

oder, da H^d diagonal ist: $h^d_{\mu\nu} = w_\mu \delta_{\mu\nu}$

$$w_\rho s_{\mu\rho} = \sum_\nu h_{\mu\nu} s_{\nu\rho} \quad . \tag{6.2}$$

[37] [von Neumann 1927]

Zu lösen ist also die Eigenwertgleichung

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \quad , \tag{6.3}$$

womit man die Lösungen

$$w_\rho = \lambda \qquad ; \qquad s_{\nu\rho} = x_\nu \tag{6.4}$$

erhält.
Die gesuchten Diagonalelemente w_ρ sind also die Eigenwerte von (6.3), die Spalten der Transformationsmatrix S die entsprechenden Eigenvektoren.
Die Gegenüberstellung von (6.3) mit der Schrödingergleichung liefert eine vollständige *formale* Analogie der beiden Eigenwertprobleme:

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \qquad \text{(Matrizenmechanik)} \tag{6.5}$$

$$H\psi(q_1, \ldots, q_k) = \lambda\psi(q_1, \ldots, q_k) \quad \text{(Schrödingergleichung).} \tag{6.6}$$

Der Vektor x_μ kann als „Funktion" einer „unstetigen Variablen" μ gedeutet werden, oder aber die Funktion $\psi(q)$ als Vektor mit einem „kontinuierlichen Index" q verstehen. Etwas genauer gefasst: Einerseits sind die Zahlenfolgen $x_1, x_2 \ldots$ gegeben und andererseits die Funktionen ψ. Beides sind *Funktionen* und zwar entweder auf den ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$, wie im ersten Falle, oder auf irgendeinem reellen Definitionsbereich Ω, z.B. dem gewöhnlichen x, y, z-Raum. Auf diesen Größen betrachtet man jedesmal einen linearen Operator H. Auch werden diese Größen analogen Randbdingungen unterworfen: Für die Folgen verlangt man, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ endlich bleibt, für die Funktionen muss analog $\int_\Omega |\psi|^2 dv < \infty$ gelten. Die Formulierungen (6.5) und (6.6) unterscheiden sich also nur in dem zugrundegelegten Raum $\mathbf{F}$ bzw. Ω.

2 Die Analogie ist aber noch nicht perfekt, denn was haben der *Differentialoperator H* und die *Matrix* $h_{\mu\nu}$ miteinander zu tun? Wie sollen so unterschiedliche Dinge in Analogie gesetzt werden?
Die Transformation $x_\mu \to h_{\mu\nu} x_\mu$ lässt sich auf kontinuierliche Indizes verallgemeinern. Dabei soll der *Index*, also eine ganze Zahl $\nu \in \mathbf{Z}$ übergehen in den k-dimensionalen Zustandsraum Ω der $q_1 \ldots q_k$. Das richtige Analogon zur Summe $\sum_\nu$ wird damit das Integral $\int dq_1 \ldots dq_k$ über das Zustandsraumvolumenelement. Das Matrixelement $h_{\mu\nu}$ wird so zu einem Integralkern $h(q_1 \ldots q_k, q'_1 \ldots q'_k)$, so dass wir insgesamt die Analogie

$$x_\nu \quad \to \quad \sum_{\nu'} h_{\nu'\nu} x_{\nu'} \tag{6.7}$$

$$\psi(q_1 \ldots q_k) \quad \to \quad \int_\Omega dq'_1 \ldots dq'_k \, h(q_1 \ldots q_k, q'_1 \ldots q'_k)\psi(q'_1 \ldots q'_k) \tag{6.8}$$

bekommen. Damit muss, um die Analogie zwischen (6.5) und der Schrödingergleichung (6.6) zu vervollständigen, das $H = H(q, \frac{\partial}{\partial q})$ aus (6.6) ebenfalls als *Integral*operator dargestellt werden. Wir suchen also einen Integralkern $h(q, q')$, so dass

$$H\psi(q_1 \ldots q_k) = \int_\Omega dq'_1 \ldots dq'_k \, h(q_1 \ldots q_k, q'_1 \ldots q'_k)\psi(q'_1 \ldots q'_k) \quad , \tag{6.9}$$

womit sich dann (6.6) im Sinne von (6.9) durch einen einfachen Grenzübergang aus (6.5) ergäbe, der die Summe in ein Integral überführt. Dieses ist somit der Versuch, den diskreten Indexraum **Z** mit dem kontinuierlichen Zustandsraum Ω in direkte Analogie zu setzen.
Von Neumann kommentiert:

> Im wesentlichen ist dieser Weg von Dirac mit großer Konsequenz und zweifellosem Erfog in mehreren, für die Quantenmechanik grundlegenden Arbeiten, beschritten worden. Wenn wir trotzdem nach einer anderen Lösung suchen, so hat dies seinen Grund darin, daß die oben skizzierte Analogie eine recht oberflächliche bleibt, solange man sich an das sonst übliche Maß an mathematischer Strenge hält.
>
> *[von Neumann 1927]*

(6.9) ist nämlich schon für die „allereinfachsten“ Operatoren nicht zu erfüllen. Die Frage, ob sich für jeden Differentialoperator eine Integraldarstellung finden lässt, hat nämlich eine einfache Antwort: Nein. Betrachten wir als einfachsten Fall, das neutrale Element, die **1**. Dann müsste man finden:

$$\psi(q) = \int dq'\, h(q,q')\psi(q') \qquad \text{oder} \tag{6.10}$$

$$\psi(0) = \int dq\, h(q)\psi(q) \quad . \tag{6.11}$$

Dabei muss $h(q)$ eine gerade Funktion seines Arguments sein.
Wählt man etwa $\psi(q) > 0$ für $\psi \neq 0$ und $\psi(0) = 0$, so folgt aus (6.11) $h(q) = 0$ für $q \neq 0$. Sei dagegen im ganzen Definitionsbereich $\psi(q) = 1$, so müsste $\int dq\, h(q) = 1$ gelten, während aber für eine Funktion $h(q) = 0\, \forall\, q \neq 0$

$$\int dq\, h(q) = 0$$

gilt. Damit ist der Widerspruch gezeigt und Diracs δ-Funktion im zugrundegelegten mathematischen Kontext ad absurdum geführt.

> ... will man trotzdem die Richtigkeit dieses falschen Satzes fingieren, so muß man, wie Dirac es tut, „uneigentliche“ Integralkerne betrachten usw.
>
> *[von Neumann 1927]*

Dieses gedenkt von Neumann aber im Folgenden nicht zu tun.

3 Die Lösung des Problems, die implizit schon in Schrödingers Äquivalenzbeweis[38] angelegt ist, ergibt sich durch die Feststellung, dass aber schon physikalisch gar nichts an der Beziehung zwischen **Z** und Ω selber liegt, sondern nur an der Beziehung von *Funktionen* auf **Z** bzw Ω. Die quadratintegrablen Funktionen auf Ω sollen nun mit F_Ω, die quadratsummablen Folgen **Z** mit F_Z bezeichnet werden[39].
Die Räume F_Z und F_Ω sind nun, im Gegensatz zu ihren ihnen zugrundeliegenden Mengen, schon isomorph: Jeder Folge aus F_Z lässt sich eine Funktion $f \in F_\Omega$ umkehrbar eindeutig zuordnen, die c_n der Folge sind nämlich die Entwicklungkoeffizienten eines f in einem orthogonalen Koordinatensystem.

[38] [Schrödinger 1926c]
[39] heute $\mathcal{L}_2$ bzw. l_2

> D.h.: Auch ohne die Einführung „kontinuierlicher Matrizen“ und „uneigentlicher Gebilde“ sind die der Quantenmechanik zugrunde liegenden verschiedenen Funktionenräume – auch bei absoluter mathematischer Strenge – im Wesentlichen identisch.
> *[von Neumann 1927]*

Sie sind *Hilbertsche Räume*. Nachdem bis dato die Bezeichnung „komplexer Hilbertscher Raum“ für F_Z üblich war, wird die Benennung „Hilbertscher Raum“ jetzt auf den ganzen abstrakten Raum ausgedehnt. F_Z und F_Ω sind jetzt nur noch als „spezielle Einkleidungen“ des abstraktem geometrischen Raum anzusehen. Damit ist der allgemeine formale Rahmen der Quantenmechanik als die Theorie des Hilbertraumes erkannt.

□

Konsequenterweise konzentriert sich die Diskussion nun völlig auf die mathematischen Eigenschaften des Hilbertraumes. Dieser wird nun axiomatisch als linearer metrischer Raum[40] definiert.

6.3.2 Spektraltheorie

Natürlich ist uns mit dem Begriff des Hilbertraumes allein noch nicht geholfen, denn schon die Eigenfunktionen des Orts- und des Impulsoperators liegen ja gar nicht mehr in ihm. Von Neumann muss also auch das Eigenwertproblem noch so umformulieren, dass eine einheitliche Behandlung von „Punkt- und Streckenspektrum“ ermöglicht wird, d.h. der Grenzübergang vom diskreten zum kontinuierlichem Spektrum leicht zu bewerkstelligen ist.
Dieses Problem macht eine vorhergehende eingehende Beschäftigung mit den mathematischen Eigenschaften des Hilbertraumes unerlässlich. Es zeigt sich, dass die Entwicklung einer ausgefeilten Theorie der linearen Operatoren auf dem Hilbertraum die zentrale Aufgabe wird.
Für den Raum F_Z hatte Hilbert schon 1906 die Theorie der unendlichen Matrizen begründet und das Eigenwertproblem für *beschränkte* Matrizen gelöst. Da die in der Quantenmechanik auftretenden Matrizen jedoch in der Regel nicht beschränkt sind, besteht mathematisch die Aufgabe in einer entsprechender Verallgemeinerung des Hilbertschen Ansatzes. Die Schlüsselrolle spielen dabei die Projektionsoperatoren $P^2 = P$, die, am Rande bemerkt, von von Neumann 1927 noch ganz in der Hilbertschen Begriffsbildung „Einzeloperatoren“ genannt werden.

Von Neumann geht das Problem an, indem er zeigt, dass dem Eigenwertproblem

$$Af = \lambda f$$

noch verschiedene mathematischen Mängel anhaften:

1. Die Eigenfunktionen f sind nicht eindeutig festgelegt. Selbst bei einzelnem Eigenwert bleibt die Phase von f unbestimmt, im Falle mehrfacher Eigenwerte (Entartung) bleibt sogar eine orthogonale Koordinatentransformation der Eigenfunktionen untereinander möglich.

[40] mit unendlicher Dimensionszahl und in dem die Cauchysche Konvergenzbedingung gilt und in dem es überall dichte Folgen gibt

2. Im kontinuierlichen Spektrum funktioniert der ganze Ansatz nicht, weil die entsprechenden Eigenfunktionen oder -folgen gar nicht mehr zum Hilbertraum gehören, weil sie nicht mehr normierbar sind.

Zu 2.) erhebt sich sogleich folgender Einwand: Wieso lässt man nicht von Anfang an Funktionen mit unendlicher Norm $\int |f(P)|^2 dv$ zu? Von Neumann antwortet folgendermaßen[41]: Weil das Zulassen solcher Funktionen immer noch nicht *jedes* Problem lösbar macht. Zwar würde das Zulassen der nichtnormierbaren Lösung $f = e^{\frac{i}{\hbar}px}$ das Eigenwertproblem des Operators $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$ im erweiterten Raume lösbar machen, aber schon für das Eigenwertproblem des Multiplikationsoperators $\hat{q} = q$ nutzt die Erweiterung des Raumes nichts, da in diesem Falle gar keine Eigenfunktionen existieren (es sei denn man ließe „uneigentliche Eigenfunktionen" zu). Für die direkte Behandlung des kontinuierlichen Spektrums nutzt es also gar nichts, den Bereich der zugelassen Funktionen zu verändern.

Der von von Neumann eingeschlagene Weg zur Lösung des Eigenwertproblems orientiert sich zunächst an der Theorie der Matrizen im $\mathcal{R}^n$, um dann eine Formulierung zu suchen, die auch im allgemeineren Falle tragfähig ist. Dabei leitet ihn die Idee, im Endlichen zunächst eine Form der Eigenwertgleichung zu finden, die eben die unter 1.) genannten Mehrdeutigkeiten vermeidet und so präzise genug ist, auch den Grenzübergang zu unendlicher Dimensionszahl zu versuchen.
Betrachten wir dazu einen linearen Operator A auf Vektoren x im $\mathcal{R}^n$, so ergibt sich die Darstellung

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\mu \quad .$$

Die zur Matrix A gehörige „hermitesche Form"[42] sieht so aus[43]:

$$^t\bar{x}Ay = \sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu \; . \tag{*}$$

Nun findet sich immer ein kanonisches Koordinatensystem, in dem A als Diagonalmatrix dargestellt wird, welches durch eine unitäre Transformation mit dem ursprünglichen verknüpft ist. Ist S diese Transformation, so erhalten wir

$$^t\bar{x}Ay = {}^t\bar{x}\, S^{-1}SAS^{-1}Sy = \overline{{}^t(\,Sx)}\, SAS^{-1}Sy \tag{*}$$

Da SAS^{-1} diagonal ist mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{*}$$

[41] [von Neumann 1927]

[42] Eine hermitesche Form ist das komplexe Analogon zu einer symmetrischen Bilinearform $V \times V \to \mathbf{K}$ mit $(v, w) = (w, v)\ \forall\ v, w \in V$. Damit gilt für die hermitesche Form $V \times V \to \mathbf{C}$ entsprechend $(v, w) = \overline{(w, v)}$. Ist die Form noch positiv definit, so definiert sie ein Skalarprodukt.

[43] Ich habe alle Formeln, die nicht wörtlich bei von Neumann stehen, sondern die ich zur weiteren Erläuterung seines Argumentes hinzugefügt oder doch zumindest erkennbar abgeändert habe, durch ein *-Symbol kenntlich gemacht.

erhalten wir in Komponenten

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu = \sum_{\mu\nu} \sum_{\sigma\rho} \delta_{\mu\nu} \lambda_\nu (s_{\rho\mu} x_\rho) \overline{(s_{\sigma\nu} y_\sigma)} \, ,$$

wobei die λ_ν die Diagonalelemente sind. Nach Ausführung der Summation über μ ergibt sich schließlich

$$\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu = \sum_{\nu} \lambda_\nu \sum_{\sigma\rho} (s_{\rho\nu} x_\rho) \overline{(s_{\sigma\nu} y_\sigma)} \, . \tag{6.12}$$

Dieses ist die bekannte Eigenwertgleichung, geschrieben diesmal für die hermitesche Form der Matrix A. Die λ sind nun bis auf die Reihenfolge bestimmt, nicht aber die $s_{\rho\sigma}$, die, falls mehrere λ zusammenfallen, noch unitäre Transformationen der Zeilen untereinander zulassen.

> Mit solchen, nicht eindeutig festgelegten Größen den schwierigen Grenzübergang $n \to \infty$ zu versuchen, ist aber aussichtslos: denn wie soll der Prozeß konvergieren, wenn die $\lambda_\rho, s_{\mu\nu}$ unterwegs große Schwankungen nach Belieben ausführen können, die durch ihre mangelhafte Bestimmtheit möglich werden!
>
> *[von Neumann 1932]*[44]

Um über diese Mehrdeutigkeit hinwegzukommen, sucht von Neumann zunächst einen Ausdruck, der gegenüber den erwähnten Veränderungen invariant ist. Statt der mehrdeutigen $\lambda, s_{\mu\nu}$ soll nun ein Begriff ins Zentrum des Fragens gestellt werden, der gegenüber diesen Mehrdeutigkeiten von vornherein unempfindlich ist. Die Eindeutigkeit wird also nicht dadurch erreicht, dass noch weitere Bestimmungsstücke gesucht werden – womit die Unterscheidungen feiner würden – sondern dadurch, dass ein gröberer Begriff gesucht wird, der durch die Bestimmungsstücke schon eindeutig bestimmt ist.
Beachten wir zwischendurch, dass es hier um die im axiomatischen Programm geforderte Eindeutigkeit der Festlegung des Formalismus durch die physikalische Aufgabenstellung geht. Solange verschiedene Lösungen äquivalent sind, ist die physikalische Aufgabe nicht eindeutig in ein mathematisches Problem übersetzt. Ohne diese Eindeutigkeit ist aber die physikalische Fragestellung nicht wirklich in dem mathematisch-formalen Problem aufgehoben, wie es die Axiomatik anstrebt.

Sei l irgendeiner der Werte, die ein oder mehrere der λ_ν annehmen. Von Neumann bildet nun die Form

$$\sum_{\substack{\nu \\ \lambda_\nu = l}} \sum_{\sigma\rho} (s_{\rho\nu} x_\rho) \overline{(s_{\sigma\nu} y_\sigma)} \, .$$

Die darstellende Matrix ist offenbar von der Form

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} S \quad , \tag{*}$$

[44] In diesem Zitat habe ich die andere mathematischen Symbole verwendet, um an die laufende Notation anzuknüpfen.

wobei die Einsen an allen Stellen ν mit $\lambda_\nu = l$ stehen und 0 sonst. Diese Matrix ist leicht als Projektor in den Eigenraum, der von den zu l gehörigen Eigenvektoren aufgespannt wird, zu erkennen. Innerhalb dieser hermiteschen Form machen nun die eben aufgezählten Freiheiten offensichtlich keinerlei Unterschied mehr, die l sind im Gegensatz zu den λ eindeutig, und gegenüber der Änderung $s_{\mu\nu}$ ist der ganze Ausdruck invariant. Das gleiche gilt offensichtlich dann auch für die Summe

$$\sum_{\substack{\nu \\ \lambda_\nu \le l}} \sum_{\sigma\rho} (s_{\rho\nu} x_\rho) \overline{(s_{\sigma\nu} y_\sigma)} =: E(l; x, y).$$

$E(l; x, y)$ ist eine hermitesche Form, denn sie ordnet jedem Paar $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in „symmetrischer“ Art und Weise eine Zahl zu. Die zugehörige Matrix $E(l)$ ist konstant 0, solange l kleiner als jeder Eigenwert λ_ν bleibt. Wird l grösser als jedes λ_ν, so ist $E(l)$ die Einheitsmatrix, denn dann reduziert sich $E(l; x, y)$ auf das kanonische Skalarprodukt im $\mathcal{R}^n$:

$$\sum_{\nu} \sum_{\sigma\rho} (s_{\rho\nu} x_\rho) \overline{(s_{\sigma\nu} y_\sigma)} = (x, S^{-1} S y) = (x, y). \qquad (*)$$

Dazwischen ist $E(l)$ konstant, außer an den Sprungstellen $l = \lambda_\nu$. Die voneinander verschiedenen Eigenwerte tauchen jetzt also als Sprungstellen der matrixwertigen Funktion $E(l)$ wieder auf.
Weiterhin gilt für $l' \le l''$:

$$E(l')E(l'') = E(l'')E(l') = E(l'),$$

wie man sich am besten an der Matrizenform der E klarmacht: In der Diagonale Einsen bis zur Stelle ν mit $\lambda_\nu > l$, ab da nur Nullen. Insbesondere ergibt sich für $l' = l''$ auch die algebraische Definition der E als Projektoren $E^2 = E$. Sie sind Projektoren auf den von den zu Eigenwerten $\lambda_\nu \le l$ gehörigen Eigenvektoren aufgespannten Unterraum.
Seien $l_1, \ldots, l_m$ die voneinander verschiedenen Eigenwerte aus den $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, mit $m < n$. Die Eigenwertgleichung (6.12) liest sich nun im Wesentlichen als Differenz der E, ausgedrückt durch den Projektor auf den Unterraum zu einem einzigen (eventuell vielfachen) Eigenwert l.

$$\sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu = \sum_{\tau=1}^{m} l_\tau \left(E(l_\tau; x, y) - E(l_{\tau-1}; x, y) \right) .$$

Durch einfaches Umschreiben erhält man mit

$$\sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu = \sum_{\tau=1}^{m} l_\tau \Delta E(l_\tau; x, y) \quad \text{mit} \quad \Delta E(l_\tau; x, y) := E(l_\tau; x, y) - E(l_{\tau-1}; x, y)$$

eine Form, die sich jetzt als Stieltjessches Integral schreiben lässt:

$$\sum a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda; x, y).$$

Von Neumanns Ergebnis liest sich insgesamt für den $\mathcal{R}^n$ so:

Gesucht wird zu einer gegebenen Hermiteschen Matrix $H = \{h_{\mu\nu}\}$ eine Schar Hermitescher Matrizen $E(\lambda)(-\infty < \lambda < +\infty)$, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für genügend $\left\{\begin{matrix}\text{kleine}\\ \text{große}\end{matrix}\right\}$ λ ist $E(\lambda) = \left\{\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right\}$. $E(\lambda)$ ist (als Funktion von λ aufgefaßt) überall konstant, mit endlich vielen Ausnahmepunkten. In diesen ändert es sich sprunghaft, und zwar vollzieht sich der Sprung stets links von der genannten Stelle.
2. Es ist stets $E(\lambda')E(\lambda'') = E(\min(\lambda', \lambda''))$.
3. Es gilt (unter Verwendung des Stieltjesschen Integrals):

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)$$

[von Neumann 1932]

In dieser Formulierung fällt die Verallgemeinerung auf das kontinuierlich Spektrum wesentlich leichter. Gesucht werden die Äquivalente der drei Punkte für hermitesche Operatoren im Hilbertraum. Dabei kann Punkt 2 unverändert übernommen werden. Punkt 3 muss leicht uminterpretiert werden. Da $E(\lambda)$ jetzt ein Operator ist, interpretiert von Neumann $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda)$ als sinngemäße Abkürzung für

$$(Hf, g) \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda; f, g) \, .$$

Der wirkliche Übergang vollzieht sich allerdings in Punkt 1. Der Grenzübergang $n \to \infty$ kann dazu führen, dass auch der größte Eigenwert über alle Maßen anwächst, oder der kleinste gegen $-\infty$ geht. Auch können die Übrigen immer dichter zusammenrücken: Es kann sein, dass ein Streckenspektrum auftritt. Daher wird Punkt 1 für den allgemeinen Hilbertraum durch folgende Forderungen ersetzt: Statt des stückweise konstanten $E(\lambda)$ müssen jetzt allgemeinere Funktionen zugelassen werden, die an den Grenzen $\pm\infty$ entsprechend gegen 0 bzw. 1 nur konvergieren (anstatt die Werte im wörtlichen Sinne annehmen zu müssen).

$$\text{Für} \quad \lambda \to -\infty \quad \text{geht} \quad E(\lambda) \to 0; \quad \text{für} \quad \lambda \to \infty \quad \text{geht} \quad E(\lambda) \to 1.$$

Dem Auftreten des Streckenspektrums wird dadurch Rechnung getragen, dass man statt der stückweisen Konstanz von $E(\lambda)$ jetzt auch stetiges Anwachsen der Funktion zulässt, so dass E im ganzen Bereich als nichtabnehmend und stetig von rechts vorrausgesetzt wird. Eine Schar von Projektionsoperatoren E die die obigen verallgemeinerten Bedingungen 1 und 2 erfüllt, heißt Zerlegung der Einheit. Gilt auch Bedingung 3, heißt sie zu H gehörig.[45]

Das mathematische Problem der Quantenmechanik lautet dann so: Lässt sich zu einem vorgegebenen hermiteschen Operator H immer eine Zerlegung der Einheit angeben?

Für beschränkte Operatoren war diese Frage schon 1906 durch die Arbeit von Hilbert geklärt: Zu jedem stetigen Hermiteschen Operator gehört genau eine Zerlegung der Einheit. Die Verallgemeinerung auf unbeschränkte Operatoren gelang in [von Neumann 1929a].

[45]Ich habe hier ein klein wenig die Definition vereinfacht, um nicht allzu tief in die Materie eindringen zu müssen.

Für die „maximalen“ Operatoren findet er, dass von gewissen Ausnahmen abgesehen, genau eine Zerlegung der Einheit existiert.

Schauen wir nun zu, wie sich die gewohnte quantenmechanische Problematik in dem neuen Formalismus ausnimmt. Zunächst ist von der erreichten Warte leicht zu beweisen, dass das eigentliche Eigenwertproblem $Af = \lambda f$ überhaupt nur an den Unstetigkeitsstellen von $E(\lambda)$ lösbar ist. Dies ist nochmals eine nachträgliche Rechtfertigung für den eingeschlagenen Weg. Interessanter als die einigermaßen evidente Verbindung der Formalismen im Falle des diskreten Spektrums ist für uns allerdings die Lösung des „Eigenwertproblems“ im kontinuierlichen Spektrum, also da, wo Dirac seine δ-Funktion gebrauchen muss. Betrachten wir also das Eigenwertproblem des Ortsoperators

$$(q_j - \lambda) f(q_1, \ldots, q_l) = 0.$$

Es ist einerseits klar, dass die gewöhnliche Lösung dieses Problems nicht existiert, andererseits liegt nach dem vorher Gesagten ein anderer Weg klar vor Augen: Die $E(\lambda_0)$ waren ja im diskreten Falle die Summe aus den Projektoren in die einzelnen Unterräume $\lambda \leq \lambda_0$. Analog ist zu vermuten, dass sich bei der Behandlung des Ortsoperators der Versuch

$$E(\lambda_0) f(q_1 \ldots q_l) = \begin{cases} f(q_1 \ldots q_l), & \text{für} \quad q_j \leq \lambda_0 \\ 0 & \text{für} \quad q_j > \lambda_0 \end{cases}$$

als richtig erweisen wird. Für diese Projektoren muss nun im Nachhinein erwiesen werden, dass sie die 3 Forderungen erfüllen, was ohne Schwierigkeiten gelingt.
Man erhält so „auf völlig unexaktem Wege“ eine Schar von Projektoren und verifiziert hinterher die Bedingungen, so dass man „die heuristische Schlußweise *nachträglich* zu einer exakten“[46] machen kann. Somit ist es gelungen „die Eigenfunktionen im Streckenspektrum als uneigentliche Gebilde zu behandeln, d.h. das Eigenwertproblem ohne ihre explizite Nennung zu formulieren“[47].

Mit diesen Betrachtungen kommt der Aufstieg vom anschaulichen Inhaltlichen zum rein Formalen ins Ziel; die Übersetzung des physikalischen Problems in den Formalismus ist abgeschlossen. Der entwickelte Formalismus gibt die logischen Verknüpfungen des physikalischen Problems nun 1:1 wieder, die folgenden mathematischen Zusammenhänge mit ihren Sätzen über hermitesche Operatoren werden damit gleichzeitig Aussagen über die physikalischen Observablen. Der Abstieg vom Formalismus zu den physikalischen Messwerten, die „Deutung“, wird der Gegenstand des nächsten Abschnittes sein.

6.4 Formale Strenge und physikalische Erkenntnis

6.4.1 Erste Eindrücke

Vergleichen wir nun dieses Ergebnis rein äußerlich mit den bisherigen Formulierungen des physikalischen Problems, so springt sofort ins Auge, dass es noch abstrakter ist als die unter Physikern ohnehin schon unbeliebte Matrizenmechanik. Von Neumann mutet der

[46][von Neumann 1932]
[47][von Neumann 1929a]

zeitgenössischen Physik offensichtlich einen harten Brocken zu. Mit der von von Neumann vorgeschlagenen Formulierung kann man nicht einmal mehr geradeaus die Lösungen *ausrechnen*, sondern man soll sie erraten und *hinterher* beweisen, dass man richtig geraten hat. Als Leitfaden für das Raten benutzt von Neumann sogar die gewöhnliche Lösung für das Problem, also letztlich etwas, was der Diracschen Formulierung ohnehin äquivalent ist. Man soll das gleiche Problem lösen, aber „ohne dessen explizite Nennung". Von diesem Standpunkt aus betrachtet sieht von Neumanns Theorie wie eine Mogelpackung aus: Der gleiche Inhalt wird wesentlich aufwendiger verpackt. Schlimmer noch, die Verpackung ist derart kompliziert, dass der Inhalt kaum noch sichtbar ist. Das ganze sieht aus wie pure Kosmetik, um dem Dogmatismus der Mathematik genüge zu tun. So wird auch das Vorurteil bestätigt, mathematische Strenge wäre bestenfalls ein nachträgliches Geschäft, nachdem die Ergebnisse schon längst bekannt sind – von Neumann sagt schließlich ausdrücklich, dass dieses der Weg ist, mit dem man mit seiner Theorie arbeiten soll.
Auch von „mathematischer Schönheit" ist, im Sinne Diracscher Eleganz, nicht viel zu spüren. Die Spektraltheorie ist geradezu das Gegenteil einer eleganten Behandlung. Sie ist durch die Methode des Erratens und Beweisens eine *indirekte* Lösungsmethode. Sie benutzt einen riesigen Apparat, der nichts zur Lösung beizusteuern scheint. Der Aufwand zur Betreibung des Formelapparates steht in überhaupt keinem Verhältnis zu den Leistungen die er konkret erbringt.
Auch erscheint die von Neumannsche Behandlung trotz der mathematischen Strenge nicht rationaler und objektiver. Sie gibt sich höchstens den Anschein rationaler zu sein, aber hinter der formalistischen Fassade benutzt sie im Prozess der *Erratens* der Lösung genau jene Intuition, die sie gerade vermeiden wollte. Der nachträgliche Beweis des Erratenen steckt das Ganze in eine rationale Verpackung, die ihren irrationalen Inhalt bloß verbirgt.[48] Es ist also kein Wunder, dass viele Physiker der Meinung waren (und sind), dass der bereits durch Dirac bekannte Sachverhalt durch eine derartige Komplexität und Abstraktheit eher vernebelt denn erhellt werde. Die erreichte mathematische Strenge scheint im ersten Augenblick *gegen* die Physik zu gehen, oder doch zumindest mit echter Physik nichts mehr zu tun zu haben.

Wir werden jedoch im folgenden Abschnitt sehen, dass diese Kritik zu kurz greift und zumindest bei von Neumann auf einem Mißverständnis beruht. Dort soll gezeigt werden, wie von Neumanns Argumentation *durchgehend physikalisch motiviert ist und ein anderes physikalisches Konzept impliziert.* Von Neumanns Spektraltheorie ist in ihrem Gehalt und ihrer Aussage *nicht* dasselbe wie Diracs Transformationstheorie – auch wenn natürlich numerisch keine anderen Ergebnisse erzielt werden und sie keine *experimentell entscheidbare* Alternative darstellt.

[48]Das bedeutet natürlich nicht, dass nicht die Lösung des rein mathematischen Problems sehr elegant ausgefallen ist. Aber der physikalische Sachverhalt wird eher verdunkelt als erhellt.

6.4.2 Die Signifikanz der mathematisch korrekten Theorie für die Physik

Deutung des Formalismus

Zum Nachweis einer eigenen physikalischen Bedeutung des Formalismus betrachten wir erst einmal, wie von Neumann die physikalische Interpretation des Formalismus durchführt.

Die Spektralprojektoren stehen im Zentrum des formalen Zusammenhanges. Deshalb ist es vernünftig, die physikalische Interpretation gleich in Begriffen der Spektralprojektoren durchzuführen. Der fundamentale Satz zur physikalischen Deutung der Spektralprojektoren lautet:

> Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zustand ϕ die Größen mit den bzw. Operatoren $R_1 \ldots R_l$ Werte aus den bzw. Intervallen $I_1 \ldots I_l$ annehmen, ist
>
> $$||E_1(I_1) \cdots E_l(I_l)\phi||^2 \quad ,$$
>
> wenn $E_1(\lambda), \ldots, E_l(\lambda)$ die bzw. zu $R_1, \ldots, R_l$ gehörigen Zerlegungen der Einheit sind.
>
> *[von Neumann 1932], S.104*

Dabei sind die $R_1 \ldots R_l$ alle miteinander vertauschbar. Die Wahrscheinlichkeit, den Wert innerhalb eines vorgebenen Werteintervalles zu finden, bestimmt sich aus der Projektion des Zustandsvektors auf dieses Intervall.

Diese Formel macht auch physikalisch Sinn: Größen mit kontinuierlichem Spektrum unterliegen ja der schon in der klassischen Physik auftretenden Unbestimmtheit durch endliche Fehlergrenzen bei der Messung. Dieser Fehler lässt sich zwar beliebig verringern, er wird aber nie tatsächlich 0. Deshalb sind die Werte der ungequantelten Größen (z.B. die Koordinaten eines Elektrons) immer nur in den Grenzen eines endlichen Intervalles bekannt – und genau das beschreibt die Formel.

> Für jene Größen dagegen, die (auf Grund der anschaulichen Vorstellung) „gequantelt“ sind, ist es umgekehrt: da diese nur diskreter Werte fähig sind, genügt es, sie so genau zu beobachten, daß kein Zweifel mehr darüber besteht, welcher der „gequantelten“ Werte in Frage kommt – dieser wird dann bestimmt absolut genau angenommen.
>
> *[von Neumann 1932] S.116*

Mit diesen Betrachtungen (die von Neumanns Buch allerdings nicht erschöpfen) kommt unsere Fragestellung ins Ziel: Die obige Formel beinhaltet die gesuchte gleichwertige Behandlung von Punkt- und Streckenspektrum. Sie bringt auch den Übergang vom reinen Formalismus zur physikalischen Interpretation: Die auf den Zustand wirkenden Spektralprojektoren geben die physikalischen Messwerte an – genauer gesagt, die Statistik der Messwerte.

Im Anschluss an das vorige Zitat schließt von Neumann folgende Bemerkung an:

> (Nebenbei sei erwähnt, daß die [...] Einführung „uneigentlicher“ oder nicht zum Hilbertschen Raume gehöriger Eigenfunktionen [...] gerade hier die Wirklichkeit schlechter wiedergibt als unser Verfahren. Denn sie täuscht die Existenz solcher

> Zustände vor, in denen Größen mit Streckenspektrum gewisse Werte genau annehmen, obwohl gerade dies nie vorkommt. Wir glauben, neben ihrer mathematischen Unhaltbarkeit, auch aus diesem Grunde derartige Idealisationen ablehnen zu müssen, obwohl diese mehrfach vorgeschlagen wurden.)
>
> *[von Neumann 1932] S.117*

Von Neumann legt damit betonten Wert auf die Feststellung, dass er mit seiner mathematisch korrekten Theorie zu einem Formalismus gelangt, der die phänomenologischen Tatsachen der Physik *besser* darstellt, als die grobschlächtigen mathematischen Methoden der Physiker selbst. Der Spektralprojektor ist nicht zufällig der Kern der formalistischen Betrachtungen, der dann aus Gründen der Zweckmäßigkeit und Ökonomie direkt physikalisch interpretiert wird. Die Projektion in ein endliches Intervall zeigt vielmehr genau die Eigenschaften, die ein experimentalphysikalischer Messprozess *tatsächlich* hat: Die Unschärfe im Fall des Streckenspektrums.
Die mathematisch ausgefeilte Formulierung entledigt sich der *Idealisierungen*, die Physiker gern vorraussetzen. Die δ-Funktion entspricht dabei der unphysikalischen idealen Vorstellung von der genauen Bestimmbarkeit eines Punktes im Kontinuum. In diesem konkreten Fall korrespondiert sie mit der Annahme, dass eine physikalische Größe mit Streckenspektrum zumindest theoretisch einen scharfen Eigenwert annehmen könnte. In von Neumanns Formulierung kommen dagegen erst gar keine Begriffe vor, die prinzipiell keine Entsprechung in der faktischen Physik haben.

Der Spektralprojektor liefert also nicht nur die mathematische Antwort auf das Problem eines kontinuierlichen Eigenwertspektrums, sondern steht schon aus physikalischen Gründen im Zentrum der Theorie. Damit erweist sich, dass die mathematisch korrekte Durchführung der Quantentheorie nicht nur kein rein mathematischer Zeitvertreib ist, sondern im Gegenteil sogar *besser* die Gegebenheiten der Physik widerspiegelt als der Diracsche Formalismus. Strenge Mathematik ist offenbar nicht eine barocke Entartung der theoretischen Physik, sondern die Erfassung des physikalisch-phänomenologischen Zusammenhanges im reinen Verstand. Die Mathematik wird hier zwar Selbstzweck, allerdings nicht selbstbezüglicher mathematischer Selbstzweck, sondern konzeptionell-physikalischer Selbstzweck. So zeigt sich gerade die strenge Mathematisierung als Garant für die Wirklichkeitsnähe der Theorie. Prägnant gesagt, führt die mathematische auch zu einer phänomenologischen Strenge.

6.4.3 Die „Kopenhagener Phänomenologie“

Spektraltheorie und Kopenhagener Phänomenologie

Diese phänomenologische Strenge der Theorie beinhaltet dabei ein spezifische Auslegung des Begriffs des physikalischen Phänomens, wie sie gerade in der Quantenmechanik anzutreffen ist. Von Neumann erreicht mit seiner Spektraltheorie, dass die observablen Tatsachen in der physikalischen Theorie verknüpft werden. Dieses ist aber gerade die charakteristische Stoßrichtung der Quantentheorie Kopenhagener Prägung.
Heisenbergs Durchbruch in [Heisenberg 1925a] stellte gerade das philosophische Prinzip an die Spitze, nur direkt beobachtbare Größen in der Theorie zu verknüpfen. Bis zur Quantentheorie war es wissenschaftlicher common sense, die zur Erklärung von Phänomenen eingeführten idealen Größen für die *eigentlich wirklichen* physikalischen Dinge zu

halten, da sie die Welt der (bloßen) Erscheinungen verursachten. Unter diesem Gesichtspunkt ist klar, dass die *Ur*sachen gegenüber den *Tat*sachen einen höheren ontologischen Status besitzen. In der Quantenmechanik werden die Idealisierungen aber als Unsinn erkannt, sobald feststeht, dass sie prinzipiell unbeobachtbar sind. So kritisiert Heisenberg die Verwendung des Begriffes „Ort“ in einem Brief an Pauli:

> Was bedeutet z.B. die „Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Elektron an einem bestimmten Punkt steht“, wenn der Begriff „Ort des Elektrons“ nicht anständig definiert ist.
>
> *Heisenberg an Pauli, [Pauli 1979], S.374*

Das, was der Physiker tatsächlich als Material vorliegen hat, *sind* die Phänomene, an diesen muss sich die Theorie am Ende beweisen. Daher sind Begriffe, die nicht phänomenal realisiert werden können reine Phantasiegebilde, so „grundlegend“ sie auch erscheinen mögen. Mit Nietzsche gesprochen:

> Die „scheinbare“ Welt ist die einzige: die „wahre Welt“ ist nur *hinzugelogen.*
>
> *Friedrich Nietzsche*

Die Phänomene sind nicht länger eine bloße Außenseite eines inneren „verborgenen“ Geschehens – sie sind schon die Wirklichkeit. Damit ist die Aufgabe der Grundlagenphysik nicht länger die Suche nach *Erklärungen*, die das Beobachtete durch auf eine Verknüpfung von *hinter* den Phänomenen liegenden Entitäten zurückführt, sondern stellt direkt den Zusammenhang zwischen observablen Größen her. Die Quantenmechanik ist so sowohl ein phänomenologische wie auch eine fundamentale Theorie. Heisenberg beschrieb in seinen populären und philosophischen Vorträgen[49] wie die Physik dadurch immer weniger *Erklärungen* der Phänomene gibt als vielmehr nur noch das Beobachtbare *beschreibt.*

Ich möchte diese Grundtendenz, die die für die klassische Physik übliche Verwechslung von Idealisierung und Wirklichkeit aufhebt und so die Physik vom Kopf auf die Füße stellt, als „Kopenhagener Phänomenologie“ bezeichnen. Der Terminus soll eine Antwort auf die *philosophische* Grundfrage andeuten, wieweit und welche Begriffe in einer physikalischen Theorie Beobachtungen entsprechen und so überhaupt Sinn machen. Die Grundgedanken der „Kopenhagener Phänomenologie“ sind damit in weiten Teilen unabhängig von den tatsächlichen physikalischen Entwicklungen, die zur Quantentheorie geführt haben. Die Quantentheorie und damit die Kopenhagener *Deutung* verschärft diese Fragestellung in gewisser Weise, denn sie zeigt den Bereich an, in dem die Frage nach einer verborgenen zugrundeliegenden Realität *entscheidbar* wird.

Von Neumanns Formalismus zeigt sich als die angemessene mathematische Implementierung der Kopenhagener Phänomenologie, da er alle Begriffe, die nichtobservablen Größen entsprechen, konsequent vermeidet und so weit wie möglich das phänomenal gegebene formalisiert:

> Ein gemeinsamer Mangel aller dieser Methoden[50] ist aber, daß sie prinzipiell unbeobachtbare und physikalisch sinnlose Elemente in die Rechnung einführen [...]. Die als Schlußresultate erscheinenden Wahrscheinlichkeiten sind zwar invariant, es ist

[49] siehe besonders [Heisenberg 1932]

[50] also der Heisenbergschen, Schrödingerschen, Diracschen

> aber unbefriedigend und unklar, weshalb der Umweg durch das nicht-beobachtbare und nicht-invariante notwendig ist.
>
> *[von Neumann 1927]*

Die Benutzung dieser „sinnlosen Elemente“ führt zwar nicht von vornherein zu Widersprüchen wie etwa die Annahme eines gleichzeitig scharfen Ortes und Impulses, ist aber ein *ästhetischer* Mangel, da sie dem Geiste der Kopenhagener Phänomenologie widerspricht.
Dass von Neumann den Kopenhagener Geist in seinem Formalismus sogar besser einfängt als die Physiker selbst, zeigt der direkte Vergleich mit der entsprechenden Textstelle bei Dirac:

> Thus an eigenstate belonging to an eigenvalue in a range is a mathematical idealization of what can be attained in practice. All the same such eigenstates play a very useful role in the theory and one could not very well do without them. Science contains many examples of theoretical concepts which are limits of things met with in practice and are useful for the precise formulation of laws of nature, although they are not realizable experimentally, and this is just one more of them.
>
> *[Dirac 1958], S.48*

Diracs Argumentation zeigt an dieser Stelle eine deutliche Anlehnung an das *klassische* Konzept idealer Größen, deren Unschärfe allein durch subjektive Begrenzungen herrührt. An dieser Stelle wird deutlich, wie die mathematische Idealisierung der „Uneigentlichkeit“ einer entsprechenden physikalisch-konzeptionellen Idealisierung entspricht. *Mathematische Korrektheit und die Kopenhagener Phänomenologie sind offenbar zwei Seiten derselben Medaille.* Dirac selbst ist übrigens der gleichen Meinung: Im Anschluss an die zitierte Passage schreibt er, dass es denkbar sei, dass die physikalisch realisierbaren Zustände gerade durch die Vektoren im Hilbertraum dargestellt werden und so die Uneigentlichkeit der zu scharfem Eigenwert im Streckenspektrum gehörenden Eigenfunktionen gerade der physikalischen Nichtrealisierbarkeit entspricht:

> It may be that the infinite length of the ket vectors corresponding to those eigenstates is connected to their unrealizability, and that all realizable states correspond to ket vectors that can be normalized and that form a Hilbert space.
>
> *[Dirac 1958], S.48*

Das Unendliche

Die Art und Weise der Existenz eines Punktes im Kontinuum wird aber nicht erst in der Benutzung der Mathematik in der Physik zum Problem. Der ontologische Status des unendlich Kleinen (und Großen) ist schon innerhalb der Mathematik immer umstritten gewesen und gerade innerhalb der Intuitionismus - Formalismus Debatte gab es wieder eine intensivere Diskussion. Einerseits gab es den Standpunkt, eine unendliche Menge im wörtlichen Sinne als vorliegend zu betrachten, also das Unendliche als aktual seiend zu betrachten. In diesem Sinne stellt man sich das Kontinuum der Zahlen als eine „fertige Einheit“ von unendlich vielen Elementen vor, die aus unendlich vielen Dingen, den reellen Zahlen, zusammengesetzt ist.
Andersherum kann der Begriff des Unendlichen als Limesbegriff verstanden werden, der aussagt, dass etwas *endlos* weiterführbar ist. Die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich groß, da man immer weiter zählen kann. Die Menge der reellen Zahlen in einem

vorgebenen Intervall ist unendlich groß, weil dieses Intervall endlos teilbar ist. Das Unendliche wird hier als *potentiell* unendlich angesehen.
Schon innerhalb der Mathematik ist der erste Standpunkt ein „idealistischer“ – Hilbert etwa redet in dem Vortrag *Über das Unendliche*[51] in einem Atemzug dem aktual Unendlichen wie der „Methode der idealen Elemente“ das Wort. Die idealen Elemente sind „ideal“ im Gegensatz zu „wirklich“ oder „natürlich“. Hilbert nennt als Standardbeispiel den unendlich fernen Punkt in der Geometrie, in dem sich zwei parallele Geraden schneiden. Durch die Annahme eines aktual vorliegenden unendlich fernen Punktes werden die Verknüpfungsgesetze der Geometrie wesentlich einfacher, denn dann gilt für je zwei Geraden (auch für Parallelen), dass sie sich einem Punkte schneiden.
Dieses klingt nicht nur dem Sinne nach wie Diracs oben zitierte Verteidigung der δ-Funktion (siehe S.163), tatsächlich benutzt Dirac in seinen *Principles*[52] sogar *dasselbe* Beispiel zur Veranschaulichung des Sinnes der uneigentlichen Funktionen.
Andererseits ist klar, dass für die Physik, gerade in ihrer Kopenhagener Prägung, die potentielle Bedeutung des Unendlichen tragend sein muss, denn der Physiker operiert de facto letztlich immer im Endlichen.

> Glaube den Mathematikern nicht, wenn sie dir weismachen wollen, es gebe so etwas wie eine aktual unendliche Punktmenge. Könnte man so etwas beobachten?
>
> *Werner Heisenberg* zitiert nach *[von Weizsäcker 1992]*

Auch in diesem Sinne liegt die Spektraltheorie mit ihrer Betonung des Eigenwert*intervall*es im Detail viel klarer auf der philosophischen Linie von Heisenberg als der Formalismus der Physiker selbst. Die „idealen Elemente“, die *sogar für den Mathematiker* in den Bereich des Unwirklichen und Bloß-Ausgedachten ragen, haben erst recht nichts im Formalismus einer phänomenologischen Physik zu suchen[53].
Mit der Spektraltheorie wird die typisch quantenmechanische Betonung der observablen Größen auf den bis dato weiterhin klassisch und aktual benutzten Begriff „Unendlichkeit“ ausgedehnt.

Die Quantenmechanik als Ergebnis von Phänomenologie und Mathematisierung

In Kapitel 6.2.3 wurde deutlich, wie die Axiomatisierung auf eine gesteigerte Rationalität der wissenschaftlichen Erkenntnis drängt. Durch die Formalisierung werden die Anteile des reinen Verstandes von dem empirischen Anteil der Erkenntnis getrennt. Aus dem inhaltlichen Schluss werden die rein formal-logischen Zusammenhänge extrahiert, um den objektiven, methodisch einwandfreien und beständigen Anteil der Theorie ans Licht zu bringen. Der nun festgestellte Zusammenhang mit der phänomenologischen Strenge zeigt, dass dabei offenbar auch die inhaltliche Seite von allen verstandesmäßigen Konzepten *gereinigt* wird und einen rein phänomenologischen Gegenstandsbegriff zurücklässt. Als Residuum der Formalisierung bleibt das reine Sinnesdatum zurück. Die empirischen Ele-

[51] [Hilbert 1925]
[52] [Dirac 1930b]
[53] Man beachte dass diese Argumentation unabhängig davon ist, ob die idealen Elemente mathematisch korrekt definiert sind oder nicht.

mente der Theorie sind jetzt, überspitzt gesagt, die Zählerstände des Meßinstrumentes.

Die Formalisierung bewirkt also eine *Aufspaltung* der inhaltlichen Einsicht in eine rein konzeptionelle rationale Komponente und einen nun wirklich empirischen Teil. Das Inhaltliche löst sich in eine empirische und eine formale Komponente auf. Wir kommen so im Vergleich zu Abbildung 6.3 (Seite 142) zu einem verbesserten Schema der Formalisierung (Abbildung 6.4).

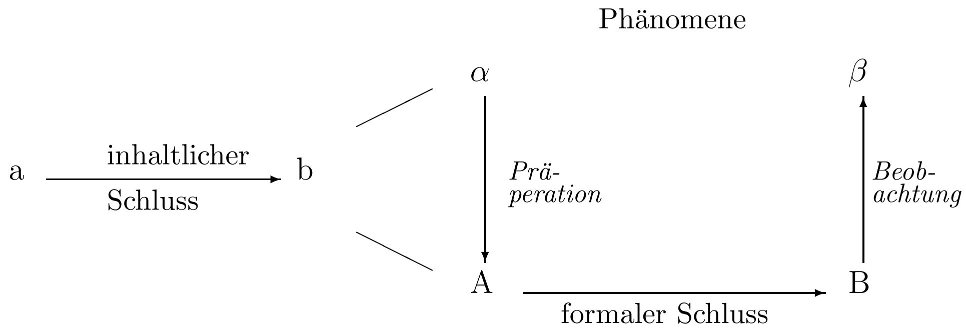

Abbildung 6.4: Verbessertes Schema der Formalisierung

Der Weg des inhaltlichen Schlusses von gewissen inhaltlichen Sätzen a zu anderen inhaltlichen Sätzen b wird ersetzt durch die formale Verknüpfung von Aussagen A, B, die phänomenal vorliegenden Sinnesdaten α, β entsprechen. Neu ist hieran, dass durch den Begriff des Phänomens als Beobachtungsdatum deutlich wird, dass die Phänomene α, β nicht mehr *als solche* untereinander verknüpft sind – die Zusammenhänge werden vielmehr auf der mathematisch-konzeptionellen Ebene hergestellt.

Schauen wir uns dies zunächst konkret in der Quantenmechanik an, wo sich die Trennung von konzeptionellem und empirischem Bereich in besonderer Reinheit zeigt.
In der Quantenmechanik zeigt sich die im Diagramm angedeutete Art der Verknüpfung darin, dass die Idee einer inhaltlich vorstellbaren beobachterunabhängigen Realität insgesamt als selbstwidersprüchliche Idealisation erkannt und verworfen wird. Die anschaulichen Konzepte der klassischen Physik, die, wie etwa die „Bahn eines Teilchens“, eine Verknüpfung raumzeitlicher Phänomene für sich behaupten, werden abgelehnt. Stattdessen bilden nun die Meßergebnisse und Beobachtungsdaten den empirischen „realen“ Teil der Theorie.
Umgekehrt ist der Zusammenhang der Phänomene nun ausschließlich formal mathematisch. Das mathematische Gesetz der Verknüpfung ist unanschaulich: Weder Schrödingers Wellenfunktionen mit ihrer Wahrscheinlichkeitsamplitude noch die gänzlich abstrakten Heisenbergschen Matrizen beschreiben einen inhaltlich vorstellbaren Prozess.
Hierher gehört auch der Bohrsche Begriff der Komplementarität einer raum-zeitlichen Beschreibung und der Forderung nach Kausalität[54]. Die kausale Entwicklung, etwa symbolisiert durch die Schrödingergleichung, findet *zwischen* zwei Beobachtungen statt. Dieser Prozess der Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist erstens ganz und gar unanschaulich und zweitens rein mathematisch. Kehren wir durch eine Beobachtung zur raumzeitlichen

[54] [Bohr 1928]

Beschreibung zurück, so bricht die Kausalentwicklung zusammen. Der objektive Zusammenhang der Phänomene *unter sich* ist damit *rein* mathematisch-konzeptioneller Natur.

Genau wie die Strenge der Mathematik erhöht auch die Strenge der Phänomenologie die Objektivität. Denn über einen aktuell vorliegenden Zählerstand am Meßinstrument lässt sich ebensowenig streiten wie über einen logischen Schluss. Zwar wird für die Quantenmechanik immer wieder betont, sie sei gerade weniger objektiv als die klassische Physik, da sie doch das Element der menschlichen Beobachtung in die Theorie einführe. Es ist aber gerade Aufgabe der Wissenschaft, vorgegebene Konzepte zu hinterfragen und auf ihren beweisbaren Kern hin zu prüfen. In diesem Sinne ist das klassische Konzept einer anschaulich vorliegenden beobachterunabhängigen Realität unwissenschaftlich. Zwar zeigt sich in der Quantenmechanik, dass der *anschauliche* raum-zeitliche Gegenstand nicht mehr an sich, sondern nur als Gegenstand physikalischer Experimente gedacht werden darf. Die „Objektivität“ (die Forderung, dass die Aussagen über die Gegenstände von den Gegenständen selbst gelten) wird aber nicht nur nicht angetastet, sondern in gewissem Sinne sogar gesteigert. Denn dann, wenn die Gegenstände *wirklich* als solche und für sich *sind*, dann gilt der objektive mathematische Kausalzusammenhang. Die Quantenmechanik fügt bloß hinzu: Dann, *und nur dann.* Wenn nämlich ein sinnlicher Anteil ins Spiel kommt und wir zur anschaulichen raumzeitlichen Beschreibung zurückkehren, *sind* die Dinge faktisch nicht länger für sich, und der Versuch, in diese phänomenologische Ebene irgendein „objektives Für-sich-Gelten“ einzuführen, macht von vornherein gar keinen Sinn.

Hinter der Betonung des rein Phänomenologischen und der Axiomatisierung steht die gleiche Idee: Beides versucht sich möglichst streng an das Vorgegebene zu halten und vorwissenschaftliche Assoziationen und „natürliche“ Anschauung aus der Wissenschaft fernzuhalten und nur mit dem zu arbeiten, was man direkt sieht oder bewusst schließen kann. Mathematisierung und Phänomenologie sind zwei Aspekte der *Strenge* der Wissenschaft. Deshalb bietet sich gerade ein möglichst phänomenologischer Theorieansatz besonders zur Axiomatisierung an[55]. Beides steigert durch die Zurückweisung aller Elemente, die nicht empirisch gesichert sind oder durch reine Logik aus diesen hervorgehen, die Objektivität und damit die eigentliche Wissenschaftlichkeit der Physik. Die Quantenmechanik erscheint so als das natürliche Ergebnis der Axiomatisierung auf einer phänomenologisch verstandenen inhaltlichen Basis (Abbildung 6.5). Wir kommen so zu einem Gesichtspunkt der Quantenmechanik, der weniger ihren revolutionären Charakter, als ihre logische Folgerichtigkeit aus der Entwicklung der Wissenschaft mit dem Ziel gesteigerter Objektivität betont. Die Quantenmechanik mit ihrer gesteigerten Mathematisierung und ihrer phänomenologischen Grundeinstellung verkörpert den Fortschritt der wissenschaftlichen Erkenntis hin zu einer rationalen und objektiven Wissenschaft, die sicheres und beständiges Wissen liefert.

6.4.4 Die Rolle der Mathematik in der Physik

Die Aufspaltung des inhaltlichen Schlusses in einen rein phänomenologischen und einen rein formalen Bereich weist nun aber über die in Abschnitt 6.2.4 gefundene Grundidee der Mathematik als Abbildung hinaus. Denn wenn der inhaltliche Teil nur noch die nack-

[55] wie schon in Kapitel 6.2.5 angedeutet

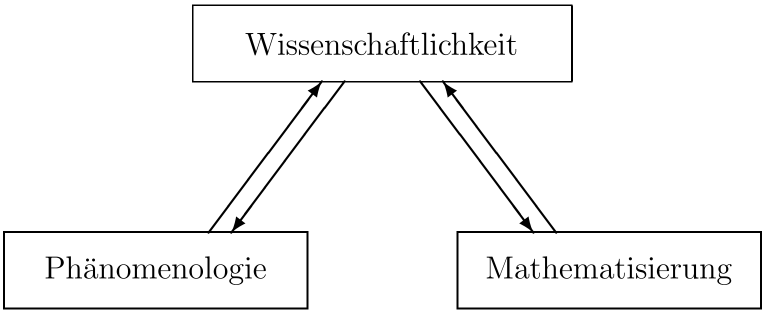

Abbildung 6.5: Die Quantenmechanik

ten Sinnesdaten enthält, so steckt die Gesamtheit aller Zusammenhänge, die diese Daten zu einem Ganzen verknüpfen, offenbar im mathematischen Formalismus. Der Zusammenhang der Naturerscheinungen unter sich *ist* mathematischer Natur. Der Entwurf einer für sich selbst vorliegenden und zusammenhängenden Natur ist ein mathematischer Entwurf. Hier zeigt sich wieder die „mathematische Qualität in der Natur“.
Die zuvor festgestellte Eigenschaft der Mathematik als Abbildung meint damit nicht so sehr, die Mathematik sei Abbild eines andersartigen Zusammenhanges. Vielmehr ist schon die inhaltliche Relation[56], sofern sie überhaupt Relation ist und sein kann, schon mathematisch. Der Charakter der mathematischen „Modellierung“, die oben angesprochen wurde, muss damit allgemeiner verstanden werden. Dass ein Modell das Modell *von* einem Original ist, bedeutet in jedem Falle, dass es *dieselbe* Stuktur besitzt wie jenes. Ur- und Abbild verwirklichen diese Struktur aber in verschiedener Weise: Durch anderen Maßstab und anderes Material; man denke etwa an Modelle des Architekten oder an Hobby-Modellbauer. Mit der Mathematik verhält es sich dagegen anders, denn sie soll gerade diese identische Struktur letztlich selbst *sein* – nicht nur *darstellen*[57]. Der Terminus „Abbildung“ meint also nicht nur das abgebildete Abbild, wie es anfangs verstanden wurde, sondern das Abbildende, die Möglichkeit des Abbildens selbst. Die mathematische Struktur ist das worin des Übereinkommens von Urbild und Abbild. Der Formalismus ist die mathematische Struktur der physikalischen Ordnung. Diese mathematische Struktur der physikalischen Ordnung ist die Identität, die dann als eindeutige Zuordnung von Ur- und Abbild gedeutet werden kann. Die Mathematik ist damit nicht nur eine Seite der Abbildungsrelation, sondern der Raum, in dem die Relation stattfinden kann.

Insgesamt können wir festhalten: Die oben genannte „logische Modellierung“ ist, einen Schritt weiter gedacht, nicht die Wiedererschaffung eines nicht-mathematischen Zusammenhanges im mentalen Raum, sondern schlicht seine explizite Darlegung. Auf die Physik übertragen heißt das, dass der Formalismus den rein mathematischen Charakter des Entwurfs eines für sich geltenden physikalischen Zusammenhanges explizit macht. Dieser

[56]siehe das Diagramm 6.3 auf Seite 142
[57]Dass sich eine Struktur *innerhalb* der Mathematik noch verschieden darstellen lässt, ist eine andere Frage.

erscheint als Abbildung und Modell, solange die unsinnige Idealisierung einer inhaltlich anschaulichen „Realität für sich“ aufrechterhalten wird. Die axiomatische Physik ruht dann genau wie die Diracsche auf der „mathematischen Qualität in der Natur“ – diese wird nur unterschiedlich aufgefasst und vergegenständlicht[58].

6.4.5 Die weitere Entwicklung der von Neumannschen Konzeption

Es ist eine altbekannte Tatsache, dass von Neumanns Beweis der Unmöglichkeit verborgener Parameter zu einem Eckstein der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie geworden ist. Darüber hinaus sehen wir nun deutlich, dass eine Entsprechung von Neumanns mit dem Kopenhagener Grundgedanken der Quantenmechanik schon in der Art des entwickelten Formalismus liegt und nicht erst in der *expliziten* Zurückweisung verborgener Parameter durch den Beweis ihrer Unmöglichkeit. Die Spektraltheorie des Mathematikers von Neumann verkörpert die Unmöglichkeit der punktgenauen Beobachtbarkeit und liegt damit in ihrer begrifflichen Struktur *näher* am physikalisch Vorliegendem als die Transformationstheorie des Physikers Dirac. Sie realisiert auf der mathematisch-formalen Ebene, was vor allem Heisenberg (und Bohr) durch die *begriffliche* Interpretation leisten. Die Frage nach der genauen Bedeutung der Worte, die das Markenzeichen des Bohrschen Denkens über die Physik ist, die genaue Wägung des Sinnes der benutzten Sprache, finden in von Neumanns Spektraltheorie ihr formales Äquivalent.
Dies ist insofern kein Wunder, da es auch von Neumann wie Bohr und Heisenberg in erster Linie um *konzeptionelles* Verstehen der Physik geht, was jeder mit den ihm eigenen Mitteln versucht. Erinnern wir uns, dass schon in der ersten großen Veröffentlichung zur Begründung der Quantentheorie[59] als *Motivation* zur Spektraltheorie angegeben wird, eine Theorie „ohne Umweg durch das Unbeobachtbare“ zu finden. Von Neumann sucht also ganz bewusst und von Anfang an *konzeptionelles* Verständnis – in der Richtung der Kopenhagener Phänomenologie. Dies wird noch weiter unterstrichen, wenn man von Neumanns weiteren Werdegang verfolgt.
Die Suche nach dem Formalisumus, der den grundsätzlichen Gegebenheiten der Physik gerecht wird, kam nämlich auch mit der Hilbertraumformulierung noch nicht ins Ziel.[60] Die gleichen Gründe, die von Neumann die Transformationstheorien Diracs und Jordans ablehnen ließen und zur Entwicklung der Spektraltheorie führten, führen ihn in einem zweiten Schritt über den Hilbertraum hinaus.

> I would like to make a confession which may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more. After all, Hilbert space (as far as quantum mechanical things are concerned) was obtained by generalizing Euclidean space, footing on the principle of „conserving the validity of all formal rules“ [...]. Now we begin to believe that it is not the *vectors* that matter, but the lattice of all linear (closed) subspaces. Because: 1) The vectors ought to represent physical states, but they do it redundantly, up to a complex factor, only 2) and besides, the states are merely a derived notion, the primitive (phenomenologically given) notion being the

[58] dazu mehr in Kapitel 7.2
[59] [von Neumann 1927]
[60] siehe [Rédei 1996]

> qualtities which correspond to the *linear closed subspaces.*
>
> *von Neumann an Birkhoff*, zitiert nach [Rédei 1996][61]

Wir sehen, wie von Neumann den mit der Spektraltheorie eingeschlagenen Weg konsequent weiterverfolgt und den Formalismus noch rigoroser an die „primitive phenomenologically given", also an die von der Physik vorgegebenen Begriffe knüpfen will. Zu diesem Zwecke ist er sogar bereit, mit dem Hilbertraumformalismus seine eigene Schöpfung über Bord zu werfen. So findet von Neumann schließlich eine Klasse heute nach ihm benannter Algebren[62]. Von Neumanns Suche nach einem angemesseneren Formalismus ist also auch hier physikalisch motiviert.
M. Rédei, der von Neumanns Abkehr von der Hilbertraumformulierung im Detail beschrieben hat, kommt anhand seines Themas zu der gleichen Grundaussage, die wir schon in der Spektraltheorie antrafen:

> The moral of this story of von Neumann's intellectual move from the Hilbert space formalism towards the type II_1 (and even more general algebras) is what drove him was not the desire to have a mathematical unobjectionable theory – there was nothing wrong with Hilbert space formalism as mathematical theory. What von Neumann wanted was conceptual understanding. He was ready to leave behind any mathematical theory – however beautiful in itself – to achieve that.
>
> *[Rédei 1996]*

[61]Der sich widerum auf Birkhoff 1958 beruft. Ich muss gestehen, dass ich das Zitat trotz einigen Suchaufwandes dort nicht gefunden habe.

[62]und glaubt im „Typ II_1" die bessere Verallgemeinerung der Matrizentheorie endlicher Dimension gefunden zu haben. Für Einzelheiten siehe [Rédei 1996], es sei nur bemerkt, dass die Hilbertraumformulierung noch keinen ordentlichen immer endlichen Begriff der Spur eines Operators bereithält. Die Spur dient aber zur Definition der Wahrscheinlichkeiten, und auf dem Begriff der Wahrscheinlichkeit ist die gesamte Quantenmechanik aufgebaut. Eine detaillierte Verfolgung des Themas würde aber an dieser Stelle zu weit führen.

Kapitel 7

Dirac und von Neumann: Ein Vergleich

Bevor mit Pauli und Heisenberg eine dritte Variante des Verhältnisses von Mathematik und Physik besprochen werden soll, soll nun kurz gesammelt und reflektiert werden, wie die beiden bisher besprochenen Charaktere zueinander stehen. Vollständig wird die Auswertung erst nach der Einbeziehung der Positionen Paulis und Heisenbergs. Hier sollen aber schon einige Türen geöffnet werden, die das weitere Vorgehen anleiten können.

Das Verständnis der Rolle der Mathematik in der Physik bei Dirac und von Neumann entpuppt sich nach allem Gesagten als wesentlich bunter und vielschichtiger als es auf den ersten Blick erschien. Dirac erschien zunächst als mathematischer Anarchist, dem es rein um physikalischen Gehalt ging. Dieses einfache Bild differenzierte sich aber durch die deutliche Tatsache, dass er dazu den Formalismus ins Zentrum seines Denkens stellte. Bei von Neumann ergab es sich andersherum: Was zuerst wie rein formale Bessererwisserei aussah, konnte mit guten Argumenten als inhaltlich gehaltvoller bewertet werden. Sowohl Diracs als auch von Neumanns Arbeit überstiegen auf den zweiten Blick die einfache Zuordnung zu den Kategorien „Physik“ und „Mathematik“.
Bei Dirac zeigte sich im Algebraisch-Anschaulichen, gipfelnd in der Eleganz des Formalismus, eine grundsätzliche Einheit von Form und Gehalt. Diese Einheit von Form und Gehalt passt offenbar nicht in die von den Axiomatikern aufgestellte Alternative von „inhaltlichem“ und „formalem“ Schluss, sondern ist darauf ausgelegt beides zu vereinigen. Bei Dirac finden wir daher sowohl Komponenten des rein inhaltlichen Schließens wie auch des rein formal argumentierenden. Er ist daher im Hinblick auf das Begriffspaar „inhaltlich – formal“ nicht wirklich ein Gegenpart zu von Neumanns Ansatz – erst Pauli und Heisenberg werden diejenigen sein, die in großer Reinheit den inhaltlichen Schluss verkörpern[1]
Der Vergleich von Dirac und von Neumann muss daher unter anderen Begriffen versucht werden.

[1]Diese Tatsache steuert auch ihren Teil zu einer Erklärung des Phänomens bei, dass Dirac sich auf eine explizite Auseinandersetzung mit der von Neumannschen Theorie niemals einliess. Siehe dazu die „Abschließende Bemerkung“ am Ende des Kapitels

7.1 Verschiedene Denkweisen

In von Neumann und Dirac begegnen uns verschiedene Modi des *Verstehens* der physikalischen Ordnung: Die Mathematik als durchsichtiges Medium gibt Hinweise, diese Ordnung zu sehen und sie direkt zu erleben. Sie will durch Winke zu verstehen geben. Das Ur- und Vorbild dieser Erkenntnisform ist offenbar die visuelle Wahrnehmung. Es geht um das weitsehende Durchschauen der Ordnung. Die zweite beschriebene Art des Verstehen eignet sich den Gegenstand indirekt an, indem sie ihn (maßstäblich) selber macht – re-konstruiert. Die Modellierung versteht ihren Gegenstand, indem sie die Position des Schöpfers einnimmt. Diese Art des Verstehens entlehnt ihren Charakter offenbar aus dem Tast- und Gleichgewichtssinn, sie beruft sich nicht auf das Auge sondern auf Hand und Fuß. Die formale Argumentation schaut nicht in Richtung des Wegweisers, sondern tastet sich behutsam Schritt für Schritt vor[2]. Sie ist nicht Hinweis, sondern Beweis. Sie zielt auf *Halt* und *festen Stand* an jeder Stelle und nicht auf die Erhellung des weiten Ganzen. Gleichzeitig wird in der Konstruktion des Modells dessen Urbild er*fasst* und be*griffen.*

Im Folgenden werden noch weitere Facetten dieses Unterschiedes zwischen Nah- und Fernsinn, Medium und Modell diskutiert werden. Die Verschiedenheit zwischen der Weite der Sicht und der Nähe des Ertastbaren zeigt sich in der unterschiedlichen Gewichtung von Detail und Gesamtentwurf, in der Interpretation von denkerischer Tiefe oder Oberflächlichkeit und in der unterschiedlichen Bindung an einen *lokalen* Argumentationskontext.

7.1.1 Symmetrie und Analogie

Die Diracsche Theorie zeigt ihr Verständnis von der Situation durch eine große mathematische Symmetrie[3] – man denke etwa an die völlige Gleichartigkeit der Formulierung von Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation mit der δ-Funktion in Kapitel 5.5. Sie sieht damit von Einzelheiten ab, um das für sie wichtige um so deutlicher in den Vordergrund zu stellen. Dieses Absehen von Einzelheiten bringt den eleganten Überblick über die Grundidee des Ganzen. Die Symmetrie ist ein Ordnungsschema in dem sich die Äquivalenz von scheinbar verschiedenen Fällen ausdrückt. Sie vermindert so die Komplexität der zusammenhängenden Einzelfälle zu dem Wechselspiel weniger Prinzipien. Sie stellt damit das *grundsätzlich Einfache* der Angelegenheit in den Vordergrund.
Die Symmetrie kennzeichnet den angemessenen Standpunkt gegenüber dem Problem, da von hier aus die Regel, nach der die Dinge strukturiert sind, direkt erkennbar ist. In ihr zeigt sich Verständnis, da sie deutlich das Wesentliche vom Unwesentlichen trennt und gleichzeitig alle Phänomene strukturiert untereinander anordnet.
Die entsprechende Argumentationsfigur ist die *Analogie*, auf die Dirac bei der Definition und Behandlung der δ-Funktion permanent angewiesen bleibt. Die Analogie überträgt einen an sich fremden Kontext in das zu verstehende Gebiet und liefert so eine grundsätzliche Orientierung.

Bei von Neumann findet sich dagegen gerade die Betonung der Einzelheiten und der

[2]sozusagen an der „Außenseite“ der Dinge, siehe unten
[3]dieses Wort ganz allgemein – nicht mathematisch zugespitzt– gebraucht

detaillierten Asymmetrie in den Gleichungen. Von Neumanns Arbeit betont nicht die Analogie, sondern gerade die mathematischen Unterschiede zwischen dem $\mathcal{R}^n$ und dem $\mathcal{R}^\infty$, und nimmt gerade sie zum Ausgangspunkt für seine Theorie. Und gerade in dieser Asymmetrie findet sich auch die physikalische Asymmetrie zwischen kontinuierlichem und diskretem Spektrum wieder. Die formale Symmetrie Diracs ist hier eine Idealisierung, die gerade der Natur *nicht* entspricht. Die von vornherein größere Asymmetrie in von Neumanns Theorie implementiert damit eine besondere Realitätsnähe, da die in der Natur vorgefundenen Asymmetrien direkt in den Formalismus einfließen, und nicht a posteriori erklärt werden müssen. Gleichzeitig wird sie wesentlich abstrakter und allgemeiner, da die gewöhnlichen bekannten mathematischen Objekte eben allzuviel innere Struktur besitzen[4].

„Verständnis“ bedeutet hier, den Zusammenhang von der Menge seiner Details her zu verstehen, anstatt vom Entwurf des Ganzen her die Details zu betrachten – die dann eventuell in Ausnahmen von der Regel oder unwichtige Nebeneffekte behandelt werden. Es ist der Unterschied, ob man die Bäume im Wald sieht, oder eine strukturierte Menge von Bäumen. Und so denken viele Physiker, von Neumann sehe vor lauter Bäumen den Wald nicht mehr, während er darauf besteht, dass der Wald eben die so und so angeordneten Bäume *ist*. Dass die tatsächliche physikalische Situation bei von Neumann dann besser wiedergegeben wird, ist nach dem Gesagten nicht mehr weiter verwunderlich, denn die von Neumannsche Theorie hat weniger die Tendenz, vom großen Entwurf her einzelne Fakten zu überrollen, sondern ist direkt aus diesen aufgebaut. Die Physiker erwarten allerdings gerade von einer physikalischen Theorie, das Universum einheitlich von seinem Angelpunkt her zu erklären; es ist gerade der Entwurf, aus dem sich die Fakten ergeben sollen. Daraus erklärt sich, dass von Neumanns Theorie trotz ihrer Vorzüge im Realitätsbezug für viele Physiker keine Anziehungskraft hatte.

7.1.2 Denkgewohnheiten und -erwartungen

Lothar Nordheim erzählte im Interview eine Geschichte, um von Neumanns Denkweise zu charakterisieren [Interview AHQP]. Es geht um ein Unterhaltungsrätsel, welches von Neumann einst gestellt wurde: Eine Fliege fliegt zwischen zwei Platten, die sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit aufeinanderzubewegen hin und her. Welche Strecke legt die Fliege zurück, bevor sie zerquetscht wird? Es gibt natürlich eine einfache Antwort: Die Strecke ist natürlich einfach das Produkt der Geschwindigkeit der Fliege mit der benötigten Zeit (das verstehen Physiker unter einer eleganten Lösung). Von Neumann aber, so erzählt Nordheim, summierte schlichtweg die Reihe der Einzelstrecken im Kopf auf.

Es sei einmal dahingestellt, inwieweit diese Geschichte ins Reich der Legenden gehört. Sie soll, von einem Physiker erzählt, gleichzeitig eine staunende Bewunderung vor der Gewalt von Neumannschen Denkens ausdrücken als auch die Weltfremdheit des Genius schmunzelnd bemerken. Jedenfalls illustriert sie herrvorragend von Neumanns Herangehensweise an die Probleme, die uns schon in der Spektraltheorie begegnete. Ganz unbekümmert vor mathematischen Schwierigkeiten tastet er sich Schritt für Schritt genau an der physikalischen Problemstellung entlang zu einer Lösung. Von Neumann löst das Problem direkt

[4] Diese größere Allgemeinheit zeigt sich nicht zuletzt darin, dass von Neumanns Formalismus auf eine viel größere Anzahl von physikalischen Fällen passt. So scheint Diracs Formalismus in Problemen mit singulärem kontinuierlichem Spektrum zusammenzubrechen, während diese Fälle im Formalismus der Spektraltheorie mit aufgehoben sind.

am Wortlaut der gestellten Frage entlang. Er nimmt das Problem *wörtlich*. Ein Problem wörtlich nehmen heißt aber, immer im vorgegebenen Kontext zu bleiben.
Der Physiker dagegen sucht nach der *inhaltlichen Einsicht*, die das Problem in ein anderes Licht taucht. Der Physiker sucht solange einen neuen Standpunkt bis das Problem einfach ist. Er sucht den Kern der Sache zu ergründen, in der Hoffnung dass die Schwierigkeiten nur an der Oberfläche liegen und sich als scheinbar erweisen werden (wie in der Geschichte). Die Aufgabe wird trivialisiert und mit Standardmethoden lösbar gemacht. Die Lösung der Aufgabe liegt also gerade im Verlassen des vorgegebenen Kontextes und im Finden eines adäquaten Problemzusammenhanges.
Die Auseinandersetzung um die δ-Funktion fällt offenbar in diese Kategorie. Die inhaltliche Einsicht nimmt für sich in Anspruch, ein besonders *tiefes* Verständnis des Zusammenhanges ausdrücken. Sie führt zu der einfachen, *eleganten* Lösung des Problems. Sie ist kurz und prägnant, weil sie den *Kern* der Sache zeigt. Diese Denkweise beruht auf einem Aha-Erlebnis.
Von Neumanns Denken wirkt von dort aus gesehen *oberflächlich*. Er geht den langen Weg außen am Wortlaut entlang. Wer sich aber wörtlich an die Aufgabe hält anstatt an das von den Worten Gemeinte, versteht das Problem nicht eigentlich und beweist eher einen Mangel an Ein- und Übersicht in das Phänomen. Der oberflächliche Lösungsweg funktioniert nur mit mathematischer Kraftmeierei – eine eigentliche Intelligenz, die den leichten, eleganten Weg wählt, ist nicht zu erkennen.

Verlassen wir aber den Bereich der Erzählung mit ihrem Spielzeugproblem, und betrachten die Denkweisen unter dem Horizont des bisher Gesagten, so fällt das Urteil jedoch anders aus. Wir bemerken sofort, wie die „oberflächliche“ Denkweise sowohl mit der phänomenologischen Grundströmung der Quantenmechanik als auch der axiomatischen Methode korrespondiert. Die zusätzliche Dimension des Denkraumes, den die Intuition liefert, soll aus der wissenschaftlichen Begründung und Argumentation zugunsten des rein rationalen ausgeklammert werden. Dadurch wird der ursprüngliche Kontext des Problems gewahrt und es ist sichergestellt, dass man in der Argumentation nicht in die Phantasie abgleitet, oder eine plötzlich eine andere Frage beantwortet.
Fällt die zusätzliche Dimension der Intuition weg, so erscheint oberflächliches Denken plötzlich als bodenständig und die intuitive „Tiefe“ der Einsicht als abgehobene Verstiegenheit – es kommt darauf an, ob man auf dem Kopf oder auf den Füßen steht. Zum Beispiel verlässt die Benutzung uneigentlicher idealer Größen den mathematischen Argumentationskontext, wie mehrmals betont wurde. Die Argumentation ist dann innerhalb des vorgegebenen Kontextes nicht mehr nachvollziehbar. Eine Argumentation, die sich auf den intuitiven Hintergrundraum beruft macht *Sprünge*, die dann Löcher in der rationalen Argumentation sind. Von der anderen Seite aus betrachtet sind diese Sprünge gerade ein Zeichen von (manchmal) genialen Geistesblitzen, die das Problem mit einem Schlag in ein anderes Licht rücken.
Genauso ist das, was für den einen eine *Abkürzung* der Argumentation ist, dem anderen ein *Um- und Abweg* – genauso ist die δ-Funktion ja von Dirac auf der einen und von Neumann auf der anderen Seite ja bezeichnet worden.
Die inhaltliche Einsicht äußert sich auf der mathematischen Ebene oft als *Trick*. Auch der Trick kann auf zwei entsprechende Weisen ausgelegt werden: Einerseits kann er direkt die Pointe einer Sache angeben (der „Trick“ oder „Witz“ an der Sache) und so gerade das

Wesentliche beisteuern. Umgekehrt kann ein Trick auch genausogut ein Notbehelf sein, der zeigt, dass man einer Sache innerlich *nicht* gewachsen ist. Die Benutzung eines Tricks kann also sowohl als Zeichen von Geschicklichkeit als auch von Mogelei sein.

7.2 Stimmigkeit, Richtigkeit und Schönheit

Die Mathematik kommt in der theoretischen Physik in den Arbeiten Diracs und von Neumanns auf zwei verschiedene Arten zu Wort: Einmal als eleganter und einmal als selbstkonsistenter Formalismus. Die „mathematische Qualität der Natur“ war als gemeinsamer Ausgangspunkt für die unterschiedlichen Ausformungen der mathematischen Physik deutlich geworden. In diesen Möglichkeiten zeigt sich ein anders gelagertes Grundverständnis der Physik und der Mathematik insgesamt. Nachdem nun gezeigt wurde, wie sich dieses Verständnis in den verschiedenen denkerischen Vorlieben, Gewohnheiten und Methoden der beiden niederschlägt, soll nun direkt der unterschiedlichen Grundstellung zur Wissenschaft nachgefragt werden. Es stellt sich nun die Frage nach der Auffassung der *Wahrheit*; was wissenschaftliche Wahrheit sei oder doch sein solle.
Um die unterschiedliche Auffassung der Wahrheit bei Dirac und von Neumann deutlich machen zu können, soll zuerst noch Neumanns Auffassung der „mathematischen Schönheit“ diskutiert werden, da dieser Begriff für Dirac eine zentrale Rolle spielte.

7.2.1 Von Neumann und mathematische Schönheit

Wir finden diesen Begriff in den Werken von Neumanns erörtert in der Arbeit „The Mathematician“ [von Neumann 1947], in der er sich mit mit der Verwandtschaft von Mathematik und Physik auseinandersetzt. Er beginnt mit der Beobachtung, dass die theoretische Physik viel mit der Mathematik gemein habe, die axiomatischen Ansätze Euklids seien ja der Prototyp der axiomatischen Formulierung der klassischen Mechanik, der Maxwellschen Elektrodynamik und der speziellen Relativitätstheorie. Diese Theorien *erklären* nicht die Phänomene, sondern sind reine Schemata zur Klassifizierung und Verbindung von Ereignissen:

> Furthermore the attitude does not explain phenomena, but only classifies and correlates, is today accepted by most physicists. This means that the criterion of success for such a theory is simply whether it can, by a simple and elegant classifying and correlating scheme, cover very many phenomena, which without this scheme would seem complicated and heterogeneous, and whether the scheme even covers phenomena which were not considered or even not known at the time when the scheme was evolved.
>
> *[von Neumann 1947]*

Wir beachten zuerst, dass das Erfolgskriterium die *Eleganz* des Schemas, und damit zu einem großen Anteil ästhetischer Natur ist. Das wird dadurch möglich, weil im Gegensatz zu *Erklärungen* die Klassifizierungen nicht mehr inhaltlich bestimmt sind, sondern äußere Regeln sind.

Von Neumann beschreibt dies als das auch in der reinen Mathematik geläufige Kriterium. Was beide Disziplinen sehr voneinander unterscheidet ist die *faktische Vorgehensweise*. Der Antrieb der Physiker kommt von Außen: Experimente produzieren theoretische Schwierigkeiten, die nach einer sofortigen Lösung verlangen. Experimente stören und beunruhigen die physikalische Theorie, so dass sich die Forschungskräfte an gerade aktuellen und wichtigen Gebieten konzentrieren. Der Mathematiker hat nicht diese Bündelung aller Interessen auf bestimmte „problematische" Gebiete, wie die theoretische Physik, sondern meist die Freiheit, zu machen, was er will. Die Probleme *müssen* nicht auf der Stelle gelöst werden, wie in der Physik, wo es dauernd durch die Empirie hereingebrachte wirkliche Konflikte gibt, die zu lösen sind. Was er tut und wie er es tut ist für den Mathematiker von seinem ästhetischen Urteil bestimmt.

> I think it is correct to say, that his criteria of selection, and also those of success, are mainly aesthetical.
>
> *[von Neumann 1947]*

> One expects a mathematical theorem or a mathematical theory not only to describe and to classify in a simple and elegant way numerous and a priori disparate special cases. One also expects „elegance" in its „architectural", structural makeup. Ease in stating the problem, great difficulty in getting hold of it and in all attempts at approaching it, then again some very surprising twist, by which the approach, or some part of the approach becomes easy, etc. Also, if the deductions are lenghty or complicated, there should be some simple general principle involved, which „explains" the complicatons and detours, reduces the apparent arbitrariness to a few simple guiding motivations, etc. These criteria are clearly those of any creative art, and the existence of some underlying empirical, worldly motif in the background – often in a very remote background – overgrown by aestheticizing developments and followed into a multitude of labyrinthine variants – all this is much more akin to the athmosphere of art pure and simple than to to that of the empirical sciences.
>
> *[von Neumann 1947]*

Die Mathematischen Ideen entspringen der Empirie und beginnen ein Eigenleben zu führen, das fast ausschließlich durch ästhetische Kriterien vorankommt. Das führt andererseits aber auch zu schwerwiegenden Problemen, wenn die empirische Quelle allzuweit zurückgelassen wurde.

> In other words, at a great distance from its empirical source, or after much „abstract" imbreeding, a mathematical subject is in danger of degeneration. At the inception the style is usually classical; when it shows signs of becoming baroque, the danger signal is up.
>
> *[von Neumann 1947]*

Die Verselbständigung von der empirischen Quelle führt zu dem Verlust eines äußeren Maßes und daher leicht zur Degeneration, womit wohl weniger Zurückentwicklung als abgehobene „Spinnerei" gemeint sein dürfte. Dies wird nur verhindert, wenn die empirischen Einflüsse zumindest indirekt einwirken, oder aber die Eigendynamik von Männern mit „außerordentlich gutem Geschmack" angeleitet wird:

> This need not be bad if the field is surrounded by correlated subjects, which still have closer empirical connections, or if the discipline is under the influence of of men with an exceptionally well-developed taste.
>
> *[von Neumann 1947]*

> In any event, whenever this stage is reached, the only remedy seems to me to be the rejuvenating return to the source: the reinjection of more or less directly empirical ideas. I am convinced that this was a necessary condition to conserve the freshness and vitality of the subject and that this will remain equally true for the future.
>
> *[von Neumann 1947]*

Die normale Einstellung des Mathematikers zu seinem Fach, nach der von Neumann hier ausdrücklich fragt, ist also die eines Künstlers, und nicht die eines empirischen Wissenschaftlers. Die Empirie ist nur die Nahrung, aber nicht der Geist der Mathematik. Sie bringt die scharfe Luft und den frischen Wind und schafft Bewährungsproben für die Mathematik, die sie vor einer reinen Selbstbezüglichkeit bewahrt und den Bezug zu weltlichen Fragen aufrechterhält.
Diesen doppelten Aspekt der reinen Kunst des Mathematischen und der Lebendigkeit der wirklichen Probleme, die durch die Physik symbolisiert wird, zeigt sich durchgehend in den Schriften, etwa auch [von Neumann 1954]. Dort zeigt er, dass es der mathematischen Forschung nicht um Anwendbarkeit geht. Das, worum es in der Mathematik geht, und worauf sie abzielt, ist das mathematische Problem als *mathematisches* Problem. Die Kriterien zur Auswahl und Lösung eines Problems sind ästhetischer Natur. Andererseits ist die Verbindung zur Physik extrem wichtig, um die Kraft und Wirklichkeit des mathematischen Fragens aufrechtzuerhalten.

Die Mathematik ist damit als reine Kunst aufgefasst, die immer Wechselspiel von reiner Ästhetik und Bezug auf die Wirklichkeit steht[5]. Das *erste* Kriterium bleibt jedoch immer künstlerisch.

> The mathematician's patterns, like the painter's or poet's, must be *beautiful*; the ideas, like the colours or the words, must fit in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.
>
> *[Hardy 1940]*

Auch das Konzept des mathematischen Beweises ist nicht ein für allemal feststehend. Die Mathematik der großen Helden der Vergangenheit hielte derzeitigen Maßstäben von Strenge in keiner Weise stand. Und gerade in der Hilbert-Brouwer Debatte wurde von den Intuitionisten nochmal das gesamte bisherige Konzept eines mathematischen Beweises umgeworfen.

Auch hier finden wir die Forderung nach mathematischer Schönheit als Basis des mathematischen Schaffens. Diese Forderung bezieht sich dabei allerdings im Gegensatz zu Dirac auf die *reine* Mathematik. Die Anwendungen der Mathematik werden als *Gegenpol* zur reinen Ästhetisierung verstanden. Aus der Sicht von Neumanns kann die mathematische Physik nur insoweit dem Schönheitsgebot unterliegen, wie sie von einer inhaltlichen Erklärung getrennt ist.

7.2.2 Stimmigkeit: Eleganz und Selbstkonsistenz

Es sind jetzt alle Bestimmungsstücke beisammen, um die unterschiedliche Auslegung der Frage nach der Wahrheit bei Dirac und von Neumann deutlich zu machen.

---

[5] in der Kunst selbst handelt es sich dabei oft um die Frage, ob reine Kunst auch politisch sein darf oder muss.

Von Neumann und Dirac haben die gemeinsame Eigenschaft, den mathematischen Formalismus ins Zentrum ihres Fragens zu stellen. Der Formalismus geriet dabei zum Selbstzweck der Betrachtungen – dass gerade dadurch richtige Physik betrieben wird, wurde mehrfach deutlich. Das Kriterium, nachdem der Formalismus sich ausrichtet ist ein *inneres* Maß: Die *Stimmigkeit*. Sie ist ein inneres Maß in dem Sinne, dass sie nach inneren Notwendigkeiten richtet, ohne auf Anweisungen von außen angewiesen zu sein. Die Stimmigkeit äußert sich bei von Neumann in der Selbstkonsistenz, bei Dirac in der Eleganz. Selbstkonsistenz ist die reine anschauungsfreie Form der Stimmigkeit, Eleganz ihre höchste Verwirklichung im Anschaulichen.
Die Stimmigkeit als Selbstkonsistenz wurde in 6.2.3 als Bedingung der Selbständigkeit der Aussagen erkannt, die für eine Objektivierung der Aussagen essentiell ist. Der Konsistenz gelang damit der Sprung vom subjektiven Meinen zum objektiven Wissen.
Auch die Stimmigkeit als Eleganz vollführt diesen Satz über das Subjekt hinaus. Bei der Diskussion des Schönen bei Dirac in 5.6.7 wurde deutlich, wie das Schöne gerade *frei* begegnen soll, ohne vorgelagertes Interesse und um seiner selbst willen. Betrachtet man diesen Satz nicht mehr aus der Perspektive des Betrachters sondern der des Künstlers, so ergibt sich, dass das Schaffen des Schönen den Gegenstand gerade *freigibt* für eine freie Betrachtung. Das Kunstwerk als Verwirklichung des Schönen muss als solches frei und für sich stehen, es muss eigenständig und unabhängig von der Persönlichkeit seines Erschaffer sein. Das In-sich-Stehen und Auf-sich-Beruhen des Kunstwerkes unterscheidet es gerade von der angenehmen Gefälligkeit „schöner“ Gebrauchsgegenstände.
Die In- und Selbständigkeit erreicht Dirac durch die selbstgenügsame Rundheit der Eleganz. Die innere Stimmigkeit des Eleganten vollführt den Sprung vom subjektiv Gefälligen hin zum für sich selbst sprechenden Kunstwerk.

Das Um-sich-selbst-Drehen der Mathematik wird sowohl bei Dirac als auch von Neumann von dem Impetus getragen, über das das bloß Subjektive hinauszugehen. Der Unterschied zeigt sich darin, dass von Neumann die mathematische Form vom phänomenologischen Anteil vollständig abtrennt, und so die Stimmigkeit ganz auf den reinen Verstand beschränkt. Gerade diese Konzentration auf den Verstand macht für von Neumann die Verständlichkeit der Theorie aus[6]. Dirac geht in die andere Richtung und bezieht durch die innere Verschmelzung von Form und Gehalt auch die Anschauung in eine innere Stimmigkeit ein.

Entsprechend anders präsentiert sich das „Über-das-Subjekt-hinaus“. Bei von Neumann erkennen wir den Drang nach einer Objektivierung, die sich einerseits durch Abgeschlossenheit und Selbstkonsistenz des Formalismus ausdrückt und andererseits den nicht-objektiven Bereich der reinen Phänomene streng vom Formalismus trennt. Der Abgeschlossenheit und Konsistenz entspricht bei Dirac die Eleganz, die das Kunstwerk als fertiges (besser: vollendetes) zur freien Begegnung freigibt.

Von Neumanns Selbstkonsistenz sucht die Stimmigkeit im anschauungsfreien Raum der reinen Rationalität. Da auf diese Weise der physikalische Zusammenhang in aller Reinheit begegnet, ist die innere Selbskonsistenz auch schon das Maß für die Wahrheit der Theorie. Hinzu kommt allerdings, dass auch die „Anweisung zur Anwendung auf ein

[6] Wie in Abschnitt 6.2.2 gezeigt.

Gebiet der Tatsächlichkeit“[7] korrekt ausgeführt werden muss. Entsprechend muss die innere Stimmigkeit durch ein weiteres Wahrheitskriterium ergänzt werden: Die *Richtigkeit*. Die Richtigkeit ist ein dem Formalismus *äußeres* Maß. Die Richtigkeit der Übereinstimmung von Theorie und Experiment verifiziert den Prozess der Aufspaltung des inhaltlichen Schlusses in phänomenologische und formale Ebene. Mit der Richtikgkeit und Stimmigkeit zusammen erhalten wir nun für jede mit Pfeilen angedeutete Relation des Diagramms 6.4 eine Kontrollinstanz: Der experimentelle Aufbau muss richtig mathematisch kodiert werden, dann sorgt die innere Stimmigkeit für bestimmte Vorhersagen, deren Richtigkeit wiederum durch die Beobachtung erwiesen werden muss.
Damit haben wir den gemeinen Wahrheitsbegriff von empirischen Richtigkeit und Selbstkonsistenz wiedergewonnen. Ohne die Stimmigkeit hätten wir kein Verständnis des Zusammenhanges, ohne empirische Richtigkeit der Aussagen, fehlte ganz das „wovon“ der Aussagen. Eine Menge von richtigen Aussagen macht noch keine Theorie, keinen Zusammenhang aus, andererseits nutzen uns zusammenhängende Aussagen nichts, die nicht richtig sind.
Aus diesem Wahrheitsbegriff folgt aber, dass für „Schönheit“ innerhalb der Physik kein Platz bleibt. Denn der Übergang zum Formalen ist durch die *eindeutige* Richtigkeit ohne jede Freiheit, und der formale Bereich bleibt durch die Forderung nach Selbstkonsistenz fest an das Gegebene gebunden. Im Kontext der eindeutigen automatischen Richtigkeit fehlt gerade das Element der Gestaltungsfreiheit des Formalismus – man hat keine Wahl mehr. Im Gegensatz zur Eleganz suchen Richtigkeit und Selbstkonsistenz die *einzig* wahre Lösung. Diese Strenge der Bindung wiederum zeigt wiederum das Streben nach Objektivität. Nur wenn keine Wahl besteht, werden die physikalischen Zusammenhänge auch in der *Notwendigkeit* ihres Ablaufes begriffen.
Dies deckt sich mit von Neumanns Begriff der mathematischen Schönheit. Mathematische Schönheit gehört in die *reine* Mathematik. Weil dort die äußere Bindung der Richtigkeit fehlt, besteht in der rein mathematischen Theorie die Freiheit der Gestaltung, die etwa in der zitierten „Eleganz in der Architektur“ zum Ausdruck kommt. In der reinen Mathematik finden wir innerhalb des Stimmigen noch genug Freiheit, das Gewebe der einzelnen Aussagen verschieden und mit unterschiedlichen Schwerpunkten zu gestalten. Der Mathematiker steht gerade auf halber Strecke zwischen Entdecker und Erfinder.
Der Physiker soll aber reiner Entdecker sein. Das Kriterium der Richtigkeit im oben definierten Sinn tilgt aus der Mathematik den Anteil des Erfinders und damit gleichzeitig die Möglichkeit der Schönheit. Von Neumann sieht die Physik als Antipoden zur Ästhetisierung. Die Physik gibt der Mathematik die Bodenhaftung die sie braucht, um nicht rein ins Ästhetische abzugleiten. Die Enge der Bindung an die „äußere Realität“ begrenzt, nach von Neumann, die reine Erfindungskraft. In der Physik selbst schließlich wird die Bindung *streng* – und für die Gestaltung des Stimmigen bleibt kein Platz.

Wie kann da Dirac die mathematische Schönheit *in der Physik* fordern? Schon bei der Diskussion der Eleganz wurde deutlich, dass die Eleganz *nicht* die barocke, abgehobene und reine Schönheit meint. Die Schönheit als Eleganz ist nicht der Gegenpol zur „dreckigen“ Realität, wie der Schönheitsbegriff von Neumanns, sondern zielt gerade auf die Verwirklichung des Schönen in und durch die Welt. Deshalb steht Dirac nicht wie von Neumann zwischen den Polen von mathematischer kristallklarer Schönheit und der

[7] [Hilbert und Bernays 1934], siehe Abschnitt 6.2.1

Bodenständigkeit der vorhandenen Welt.
Dirac argumentiert direkt aus der ungeteilten mathematischen Qualität der Natur. Die Eleganz ist nicht deshalb *inneres* Maß, weil sie vom Äußeren abgekoppelt und unabhängig ist, oder, wie bei von Neumann, via Richtigkeit fest mit den Phänomenen verbunden ist. Sie ist vielmehr in dem Sinne „innen", weil sie das relative „innen" und „außen" ihrer Teile umfasst und so als Gesamtheit kein „Außen" mehr hat. Die Stimmigkeit der Eleganz vereinigt inneres und äußeres Maß der Selbstkonsistenz und Richtigkeit, sie enthält als anschaulicher Formalismus von Anfang an die Gesamtheit der mathematischen Physik. Ohne explizite Trennung von Form und Gehalt braucht die innere Stimmigkeit nicht zu einer *Übereinst*immigkeit aufgebrochen zu werden. Die Richtigkeit als Übereinstimmung macht ja erst im besprochenen Kontext der Formalisierung Sinn. Da dies aber für Dirac nicht die leitende Bedeutung der Mathematik ist, ist für ihn die Richtigkeit nicht das letztgültige Maß für die Wahrheit. Diese bleibt von untergeordneter Bedeutung. Diracs Physik ruht nicht auf der Richtigkeit, sondern enthält sie. Als tragendes Kriterium für die Wahrheit erscheint hier die Schönheit.
„Schönheit" ist für Dirac der Begriff, der der *Gesamtheit* Teilrelationen der Wahrheit, Richtigkeit und Selbstkonsistenz, entspricht. Richtigkeit und Stimmigkeit sind die Kriterien der objektiven Gültigkeit der Theorie, Schönheit ist das Kriterium für die Gültigkeit des Kunstwerkes. Die Objektivität sucht nach der *absoluten* Wahrheit, die Kunst nach der *menschlichen* Wahrheit[8]. Dass Dirac der Meinung war, die Unhintergehbarkeit der Endlichkeit der menschlichen Erkenntnis ließe sich auch in den Theorien der Physik wiederfinden, kann mit vielen Stellen belegt werden. In Kapitel 5.6.2 begegnete uns etwa die Meinung, auch die Grundgleichungen der Physik könnten approximative Gleichungen sein, da sie nur gegenwärtiges Wissen widerspiegelten.
Auch der in der Objektivität liegende Absolutheitsanspruch bewegt sich letztlich *innerhalb* der menschlichen Erkenntnisweise – die Rationalisierung bleibt doch ein menschliches Tun. So ist zu verstehen, dass Dirac die Gültigkeit des Kunstwerkes höher einstufen kann, als die objektive, beweisbare Gültigkeit. Die Objektivierung rationalisiert einen *Teil*bereich des menschlichen Erkennens, sie ruht aber weiterhin in dessen Gesamtheit. Man sieht dies daran, dass auch die Axiomatiker ohne die Intuition nicht auskommen. Dieser Teil taucht auf der metamathematischen Ebene wieder auf, wie es schon vorher zitiert wurde: Auch Hilbert war auf der metamathematischen Ebene strenger Intuitionist.[9] Der intuitive Bereich wird durch die Rationalisierung nur *verschoben*, nicht getilgt. Die rein rationale Wissenschaft mit ihrer Selbstkonsistenz und Richtigkeit ist der Bereich, aus dem die Intuition herausdividiert wurde. Sie taucht freilich auf der anderen Seite der Gleichung wieder auf – bloß wird diese von den Axiomatikern nicht im Kontext von Physik und Mathematik betrachtet, sondern separat. Aus diesem Blickwinkel erscheint es durchaus legitim, von vornherein mit der ungeteilten Gesamtheit des menschlichen Erkenntisvermögens an die Arbeit zu gehen, wie es in Diracs Werk getan wird.

---

[8] Siehe dazu zum Beispiel noch einmal Kant:

> Annehmlichkeit gilt auch für vernunftlose Tiere; Schönheit nur für Menschen, d.i. tierische, aber doch vernünftige Wesen, aber nicht bloß als solche, (z.B. Geister), sondern zugleich als tierische; das Gute aber für jedes vernünftige Wesen überhaupt.
>
> *[Kant 1790]*

[9] [Weyl 1944]

7.3 Abschließende Bemerkungen

> While Dirac presents his reasoning with admirable simplicity and allows himself to be guided at every step by physical intuition – refusing at several places to be burdened by the impediment of mathematical rigor – von Neumann goes at his problems equipped with the nicest of mathematical tools and analyses it to the satisfaction of those whose demands for logical completeness are most exacting.
>
> *[Margenau 1933], nach [Kragh 1990]*

Wir verstehen nun genauer, warum sich kein Streit im echten Sinne zwischen Dirac und von Neumann entwickelt hat. Sie beackern zwar denselben Bereich, bebauen ihn aber mit anderen Feldfrüchten, die auch nebeneinander gedeihen. Obwohl in dem hauptsächlich betrachteten Zeitraum Diracs Theorie tatsächlich mathematisch als *falsch* eingestuft werden musste, konnte doch jeder seinen Ansatz mit eigenen guten Argumenten zur Blüte bringen. Von Diracs Warte aus gesehen, beschäftigt sich von Neumann ganz mit der Richtigkeit des Formalismus, was für ihn ein bloß nachgeordnetes Gebiet darstellte. Er überging somit ganz entspannt die von Neumannsche Kritik. Eine Erwähnung von Neumanns und der Hilbertraumtheorie findet sich nur zwei Mal[10] in den „Principles", als er erwähnt:

> The space of bra and ket vectors when the vectors are retricted to be of finite length and to have finite scalar products is called by mathematicians a *Hilbert space*. The bra and ket vectors that we now use form a more general space than a Hilbert space.
>
> *[Dirac 1958], S.40*

Von Neumann dagegen hält Dirac wohl für einen Pionier, der aber erst vorbereitende Arbeit leistet. So können beide in friedlicher Koexistenz miteinander auskommen.

[10] Die andere Stelle wurde eben schon zitiert

Kapitel 8

Pauli

Die Diskussion über Mathematik und Physik bliebe unvollständig, wollten wir uns auf die Charaktere von Neumann und Dirac beschränken – schon Dirac ist nicht repräsentativ für die theoretische Physik insgesamt. Auch wurde deutlich, dass die allgemeine Polemik von Neumanns gegen die Physiker Dirac nur streift. Die beiden nun folgenden kürzeren Kapitel über Pauli und Heisenberg sollen die Diskussion um eine dritte Dimension bereichern und so für die nötige Tiefenschärfe des bisher Gesagten sorgen. Dabei wird die Diskussion ein drittes Standbein erhalten und so erst die rechte innere Stabilität erlangen.

8.1 Biographischer Überblick

Wolfgang Pauli jr. wurde am 25.4. 1900 in Wien geboren. Sein Patenonkel war Ernst Mach, über dessen Einfluss auf den jungen Pauli oft spekuliert wurde. Schon in jungen Jahren wurde Paulis außergewöhnliche mathematische Begabung erkannt, sein Gymnasiallehrer sprach sogar von einem „neuen Gauß". Nach der Schule ging er nach München, um bei Sommerfeld theoretische Physik zu studieren. Sommerfeld erkannte schnell die außergewöhnliche Begabung seines Studenten und übertrug ihm schon in seinem vierten Semester die Anfertigung eines großen Übersichtsartikel über die allgemeine Relativitätstheorie in der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Pauli, kaum 20 Jahre alt, schrieb eine 250 Seiten lange Abhandlung, die von Sommerfeld und Einstein gleichermaßen als Meisterwerk gelobt wurde.

In München wurde er aber vor allem mit der Atomtheorie vertraut. 1922 promovierte er über *Das Modell des Wasserstoffmolekülions*. Nach seinem Studium ging er als Assistent von Max Born nach Göttingen, danach zu Niels Bohr nach Kopenhagen. In dieser Zeit arbeitete er über den anomalen Zeemaneffekt, was schließlich 1925 in der berühmten Arbeit *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren* gipfelte, die erstmals die Spinquantenzahl s einführte und das Paulische Ausschließungsprinzip formulierte. Mit dem Ausschließungsprinzip wurde die alte Quantentheorie vollendet und Paulis Zusammenfassung für das *Handbuch der Physik* 1926 wurde ein Klassiker.

1926 wurde er Privatdozent in Hamburg bei Wilhelm Lenz. Seit 1925 entstand unter Federführung von Heisenberg, Born, Jordan und Dirac die neue Quantenmechanik. Heisenberg stand die ganze Zeit über in engem Kontakt zu Pauli, dessen Beiträge und Ideen an vielen Stellen in die Quantenmechanik einflossen, ohne dass doch die grundlegenden

Abbildung 8.1: Wolfgang Pauli jr. (©CERN)

Artikel seinen Namen trugen. In dieser Zeit keimte sein Ruf als graue Eminenz der Quantenmechanik, die sich im Hintergrund hielt, um dort die Fäden zusammenzuhalten. 1926 konnte er das Wasserstoffatom mit den Methoden der Matrizenmechanik lösen, womit sie ihre erste[1] realistische Bewährungsprobe bestand.
1928 ging er an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, wo er, mit einer kurzen Unterbrechung während des Zweiten Weltkrieges bis zu seinem Tode 1958 blieb. 1929 legte er zusammen mit Heisenberg die Grundlagen zu der modernen relativistischen Quantenfeldtheorie, an deren Entwicklung er in den folgenden Jahrzehnten immer wieder teilhatte. Die Elementarteilchenphysik bereicherte er durch die Neutrinohypthese (ab 1930). In den 50er Jahren arbeitete er über diskrete Symmetrien in der Feldtheorie und konnte zeigen, dass eine Feldtheorie invariant unter der Kombination CPT sein muss[2], wobei C die Ladungsumkehr, P die Parität und T die Zeitumkehr bedeutet.
Während des Krieges unterrichtete er am Institute for Andvanced Studies in Princeton, wo er viele Bekanntschaften mit den amerikanischen Kollegen schloss. Diese persönliche Verbundenheit mit den amerikanischen Kollegen ermöglichte es ihm, nach seiner Rückkehr in die Schweiz über aktuellen Entwicklungen der Renormierungstheorien up to date zu bleiben, so dass man in der Schweiz nach 1945 zwar nicht direkt am Puls der Zeit war, aber doch nicht allzuweit entfernt. Paulis Rückkehr nach Zürich erschien vielen unverständlich, denn es zeichnete sich bereits deutlich ab, dass die Vereinigten Staaten künftig tonange-

[1] und letzte, da Schrödingers Wellenmechanik ihren Siegeszug schon angetreten hatte
[2] Anteile an diesesm Theorem haben neben Pauli auch Lüders und Zumino und Schwinger.

bend in der Physik werden würden. Res Jost berichtet[3] von einem Gespräch mit Pauli, wo dieser gesagt habe, es sei in Amerika zwar leicht, viel Geld zu verdienen, aber schwierig, es auszugeben. Pauli sei auch durch „den Einstieg der Physik in das Waffengeschäft“ tief betoffen gewesen, und die Entwicklung der Physik im industriellen Atomzeitalter hin zu Großforschungsanlagen mit riesigen Maschinen sei sein Ding nicht gewesen.

> So suchte er sich einen Wohnsitz, an dem das Unvermeidliche möglichst harmlos und operettenhaft vor sich gehen würde – und fand die Schweiz.
>
> *[Jost 1984]*

Paulis starke Persönlichkeit machte ihn auch zu einem großen Lehrer. Trotz seines schwer verständlichen Vorlesungsstiles übte sein scharfes Urteilsvermögen vor allem in persönlichen Diskussionen eine große Wirkung auf seine Schüler und Assistenten aus. Viele Schüler, von denen hier exemplarisch nur Viktor Weisskopf genannt werde, wurden selbst bekannte Persönlichkeiten in der theoretischen Physik. Berühmt ist auch seine Bekanntschaft mit dem Psychologen C.G. Jung, mit dem zunächst therapeutische, später freundschaftliche Beziehungen bestanden. 1952 erschien das gemeinsam herausgegebene Buch *Naturerklärung und Psyche*. Während die merkwürdige Abgründigkeit der Quantenmechanik und des kreativen wissenschaftlichen Prozesses bei Heisenberg zu philosophischer Reflexion führte, schlägt sie sich in Paulis Denken in einer lebendigen Nachbarschaft zur Psychologie nieder.
Paulis Stärke lag vor allem im sorgsamen Durchdenken der neuen Ideen der Physik des 20sten Jahrhunderts. Der Drang, die neuen Entwicklungen wirklich verstehen zu wollen und in einem einheitlichen Entwurf zu versammeln zeigt sich vor allem in seinen Enzyklopädieartikeln. Schon die erwähnte Übersicht über die Relativitätstheorie begründete seinen Ruhm auf diesem Gebiet. Die zusammenfassenden Darstellungen über die ältere Quantentheorie 1926 und die neue Quantenmechanik 1933 im *Handbuch der Physik* wurden zu klassischen Werken, die ehrfurchtsvoll das alte, bzw. neue Testament genannt wurden. Aufgrund seiner gefürchteten humorvoll-ätzenden aber immer fundierten Kritik an neuen Ideen, die sowohl allzu verstiegene Entwürfe als auch zu zaghaftes Vorgehen ahndete, wurde ihm von Weisskopf der Titel „Gewissen der theoretischen Physik“ verliehen.
Da Pauli bei der Entwicklung sowohl der Quantenmechanik als auch der renormierten Quantenelektrodynamik eher aus dem Hintergrund operierte, wurde er beispielsweise in [Schweber1994] in die zweite Reihe des Physikerolymps eingeordnet, dessen vorderste Ränge mit den Hervorbringern der neuen Ideen (Heisenberg, Dirac, Feynman, Schwinger ...) besetzt werden. Wenn man jedoch weniger auf bloße Originalität schielt und darauf, wer als Erster etwas gedacht und publiziert hat, sondern berücksichtigt, wer den Boden für die Entdeckungen bereitet, und nachher die Klärung und das Verständnis des Gewonnenen besorgt, dann nennt man doch wohl zuerst: Wolfgang Pauli.

8.2 Verallgemeinerte Funktionen in Paulis Arbeiten

Betrachten wir zunächst anhand von drei ausgewählten Artikeln, wie Pauli die δ-Funktion und ihre Verallgemeinerungen einführt und mit ihnen umgeht. Zunächst soll ein Paragraph

[3] [Jost 1984]

aus dem sogenannten „Handbuchartikel“ *Die Prinzipien der Wellenmechanik*[4] vorgestellt werden. Pauli fasst dort die Quantenmechanik in einem lehrbuchartigen Text zusammen und erweist sich nach übereinstimmendem Urteil mehrerer Physikergenerationen einmal mehr als Meister der zusammenfassenden Darstellung eines Themengebietes. Obwohl der Text mit seinem Erscheinungsjahr 1933 der Jüngste der Beispielartikel ist, soll er aufgrund seiner thematischen Einfachheit und Allgemeinheit zuerst besprochen werden.
Danach soll die in Zusammenarbeit mit Heisenberg entstandene Arbeit *Zur Quantentheorie der Wellenfelder*[5] besprochen werden. Hier stellen Heisenberg und Pauli die Grundprinzipien der modernen Quantenfeldtheorie vor, wie sie seitdem maßgeblich geblieben sind. Auch diese Arbeit strebt die Vorstellung von Grundprinzipien der Physik an, allerdings ist es im Unterschied zum Handbuchartikel ein echter Forschungsbericht und nicht eine nachträgliche Aufbereitung gesichtern Wissens.
Die Arbeit *Zur Quantendynamik ladungsfreier Felder*[6] schließlich ist ein echter „technischer“ Arbeitsbericht und ein wichtiger Zwischenschritt auf dem Weg zu einer allgemeinen Quantenfeldtheorie. Dieser Artikel ist deshalb so ausgesprochen bemerkenswert, weil Jordan und Pauli erstmals in der Physik eine Verallgemeinerung der δ-Funktion durchführen.

8.2.1 Paulis Handbuchartikel

Wenden wir uns also zuerst Paulis Handbuchartikel zu, dem „neuen Testament“, und schauen wir, wie er das Problem des kontinuierlichen Spektrums anfasst.
Wir beginnen die Diskussion in Kapitel 6, in der Pauli die Lösungen der stationären Schrödingergleichung behandelt. Wenn die in dem Hamiltonoperator H vorkommenden Feldgrößen V, Φ_k die Zeit nicht explizit enthalten, kann die Schrödingergleichung separiert werden, und die Wellenfunktion erhält die Form $\psi(q,t) = u(q)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Die Schrödingergleichung definiert damit ein *Eigenwert*problem, da nur für bestimmte E reguläre Lösungen bestehen.
Damit u^*u als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretierbar sein soll, ist es „naheliegend“, die Endlichkeit von $\int uu^*\,dq$ zu verlangen. Diese Forderung gilt allerdings *nicht* für ein kontinuierliches Eigenwertspektrum! Denn für ein freies Teilchen ist die ebene Welle $u = e^{\frac{i}{\hbar}(p_1q_1+\cdots+p_fq_f)}$ mit $p_1 \ldots p_f$ als Integrationskonstanten zwar eine Lösung der Gleichung, die aber offensichtlich nicht normierbar ist. Die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen außerhalb eines vorgegebenen Volumens zu finden ist unenendlich viel größer als innerhalb. Die ebenen Wellen sind deshalb schon aus physikalisch einsichtigen Gründen ein Grenzfall. Endlich bleibt dagegen der *Quotient* der Aufenthaltswahrscheinlichkeit von zwei endlichen Gebieten.
Abhilfe schafft die Bildung von Wellenpaketen

$$\bar{u}_{p'_k,p''_k} = \int_{p'_k}^{p''_k} dp_1 \ldots dp_f \, u_{p_1 \ldots p_f} \quad , \tag{8.1}$$

[4][Pauli 1933]
[5][Heisenberg und Pauli 1929]
[6][Jordan und Pauli]

für die das Normierungsintegral[7] existiert. Daraus ergibt sich für Eigenfunktionen mit stetigem Parameter λ als Verallgemeinerung die Forderung, dass für die Basispakete

$$\bar{u}_{\lambda'\lambda''} = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, u_\lambda(q)$$

(mit $\lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_n$, falls mehrere Parameter auftreten) der Ausdruck

$$\int \bar{u}^*_{\lambda'\lambda''}(q)\bar{u}_{\lambda'\lambda''}(q)dq$$

endlich bleibt.
Zur späteren Verwendung soll noch $\bar{u}_\lambda$ (mit nur einem Index) durch

$$\bar{u}_\lambda := \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda u_\lambda$$

definiert werden. Dann ist $\bar{u}_{\lambda'\lambda''} = \bar{u}_{\lambda'} - \bar{u}_{\lambda''}$ und $\frac{d}{d\lambda}\bar{u}_\lambda = u_\lambda$.

Für diskretes Spektrum, zB. $E_n, E_m \ldots$ folgt bekanntlich aus der Hermitezität des Energieoperators für die Eigenfunktionen die Orthogonalitätsrelation

$$\int dq\, u^*_m u_n = 0 \quad \text{für} \quad E_n \neq E_m \quad . \tag{8.2}$$

Jedes quadratintgrable f ist dann entwickelbar in

$$f \sim a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + \cdots \tag{8.3}$$

mit

$$a_n = \int dq f u^*_n \quad . \tag{8.4}$$

„$\sim$“ bedeutet, dass nur *Konvergenz im Mittel* erforderlich ist. Das ist wichtig, da so Singularitäten in den Funktionen auftreten dürfen. Wir erhalten so unter Berücksichtigung des „$\sim$“ als Vollständigkeitsrelation

$$\int dq|f|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a^*_k a_k \quad . \tag{8.5}$$

[7] $\bar{u}(q)$ ist die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion $\chi_{p'p''}(p)$, und für diese gilt durch elementares ausrechenen zunächst

$$\bar{u} = \frac{1}{iq} e^{iqp}\Big|_a^{-a} = 2\frac{\sin aq}{q} \quad ,$$

wobei der p-Nullpunkt in die Mitte des Integrationsintervalls verlegt wurde. Diese Funktion ist quadratintegrabel mit $\int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{\sin^2 aq}{q^2} = \pi|a|$.

Die Verallgemeinerung auf den Fall des Streckenspektrums läuft nun folgendermaßen: Die Verallgemeinerung der Orthogonalitätsrelation (8.2) auf die Wellenpakete (8.1) lautet[8]

$$\int dq\, \bar{u}^*_{\lambda_1'\lambda_1''} \bar{u}_{\lambda_2'\lambda_2''} = 0 \quad \text{wenn} \quad [\lambda_1'\lambda_1''] \quad \text{außerhalb} \quad [\lambda_2'\lambda_2''] \quad , \tag{8.6}$$

was unmittelbar einleuchtet, da sich *kein* Eigenwert überschneidet. Auch hierfür wird, wie im diskreten Fall, eine direkte Begründung aus der Forderung nach Hermitezität des Hamiltonoperators gegeben.

Pauli betrachtet nun das genaue Gegenteil, nämlich den Fall *identischer* Eigenwertbereiche der beiden Wellenpakete. Damit ist das Problem der Normierung der Elementarpakete angesprochen. Zu berechnen wäre mithin

$$\tilde{G}(\lambda, \Delta\lambda) := \int dq\; \bar{u}^*_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} \bar{u}_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} \quad .$$

Beim Beispiel der ebenen Wellen wäre $\tilde{G} = \pi\,\Delta\lambda$.
Pauli benutzt jetzt „kleine“ Eigenwertintervalle, um den Grenzübergang zu vollziehen. Das Wellenpaket wird aus immer weniger Komponenten aufgebaut und man erhält den Limes

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{1}{\Delta\lambda} \int dq\; \bar{u}^*_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} \bar{u}_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} \to G(\lambda) \quad . \tag{8.7}$$

Dieser existiert, weil das Integral bei rein kontinuierlichem Eigenwertspektrum offensichtlich stetig von λ abhängt. Die Norm zu scharfem Eigenwert ergibt sich damit als Grenzwert der verschmierten Norm der Pakete. Wie man sieht, wird der Grenzwert von vornherein außerhalb des Integrals durchgeführt, so dass der Grenzwert der Norm und nicht die Norm der Grenzwerte betrachtet wird.

$$\int dq\; \bar{u}^*_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} \bar{u}_{\lambda,\lambda+\Delta\lambda} = \int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda} d\lambda\, G(\lambda) \tag{8.8}$$

ist dann offenbar die Norm der Gesamtheit der Eigenfunktionen im Intervall $\lambda + \Delta\lambda$.

Die Gleichungen (8.6) und (8.8) lassen sich jetzt zusammenfassen zu

$$\int dq\, \bar{u}^*_{\lambda_1'\lambda_1''} \bar{u}_{\lambda_2'\lambda_2''} = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda\, G(\lambda) \quad , \tag{8.9}$$

wobei $[\lambda'\lambda'']$ das gemeinsame Teilintervall von den λ_1 und λ_2- Intervallen ist.
Pauli nennt die Funktionen $\bar{u}$ normiert bezüglich λ, falls $G(\lambda) = 1$. Dann wird (8.9) zu

$$\int dq\, \bar{u}^*_{\lambda_1'\lambda_1''} \bar{u}_{\lambda_2'\lambda_2''} = (\lambda'' - \lambda') \quad . \tag{8.10}$$

Betrachten wir noch die Reihenentwicklung (8.3). Die Frage ist, wie man die Reihe für Wellenpakete als Basisfunktionen anschreibt. Pauli fasst sich kurz und gibt einfach die Verallgemeinrung zu

$$f \sim \int d\lambda\; a_\lambda u_\lambda = \int a_\lambda d\bar{u}_\lambda \quad , \tag{8.11}$$

[8] Vermutlicher Druckfehler auf S.818 berichtigt: dort steht „u^*“ ohne „quer“.

mit $d\bar{u}_\lambda = \frac{d\bar{u}_\lambda}{d\lambda} d\lambda$ und $\frac{d\bar{u}_\lambda}{d\lambda} = u_\lambda$ gemäß Definition der $\bar{u}$ (8.2.1).

Wie im diskreten Fall erhalten wir (ohne Rechnung) die Koeffizienten aus Anwendung der Orthogonalitätsrelation zu

$$a_\lambda G(\lambda) = \int dq\, f\, u_\lambda^* \quad . \tag{8.12}$$

Anschließend diskutiert Pauli in einem kleingedruckten Einschub von Neumanns Ansatz, den er in seine Terminologie übersetzt. Dabei betont er, wie hierdurch Punkt- und Streckenspektrum formal einheitlich erfasst werden.

Erst nachdem Pauli die Sache vollständig dargelegt hat, führt er zur Abkürzung die δ-Funktion ein:

> Für die Rechnungen ist es oft bequem, die Integrale
>
> $$\int u_\lambda^* u_\lambda dq$$
>
> als uneigentliche Gebilde einzuführen. Sei $\delta(\lambda)$ eine uneigentliche Funktion mit der Eigenschaft, daß für alle stetigen
>
> $$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda = \begin{cases} f(0) \\ 0 \end{cases} \quad \text{wenn } 0 \begin{cases} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{cases} (\lambda_1 \lambda_2)\ ,$$
>
> so gilt
>
> $$\int u_\lambda^* u_{\lambda'} dq = G(\lambda)\delta(\lambda - \lambda') \quad \text{bzw.} \quad = \delta(\lambda - \lambda')\ .$$
>
> Später werden wir auch die Ableitung δ' der δ-Funktion gebrauchen, die definiert ist durch
>
> $$\int f(\lambda)\delta'(\lambda)d\lambda = -\int f'(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda \begin{cases} -f'(0) \\ 0 \end{cases} \quad \text{wenn } 0 \begin{cases} \text{innerhalb} \\ \text{außerhalb} \end{cases} (\lambda_1 \lambda_2)\ ,$$
>
> Diese Relationen sind als eine formal bequeme Abkürzung für (8.9), (8.10) zu betrachten.
>
> *[Pauli 1933]*

Im folgenden Kapitel „Allgemeine Transformationen Operatoren und Matrizen“ gewinnt Pauli die Matrizenmechanik aus der Wellenmechanik. Dort betont er, dass die Matrizenmechanik „sehr unübersichtlich“ werde, sobald ein kontinuierliches Spektrum auftauche. Die Verallgemeinerung der Terminologie der Matrizenmechanik auf kontinuierliche Systeme erfolgt dann ausdrücklich ohne weitere Berücksichtigung von Konvergenzfragen – denn hier wird die dauernde Benutzung der δ-Funktion unumgänglich. Als einzige einschränkende Bemerkung finden wir nur noch den Hinweis, dass die Formeln erst sinnvoll seien, wenn sie mit beliebigen Funktionen multipliziert und integriert (also in moderner Terminologie „verschmiert“) werden.

8.2.2 Vertauschungsrelationen für die Quantenfeldtheorie

Das nächste Beispiel zum Umgang mit der δ-Funktion entnehmen wir dem Beitrag *Zur Quantentheorie der Wellenfelder*[9]. Es ist bekannt, dass Pauli die Abfassung des Berichtes besorgte, da Heisenberg gerade auf eine Amerikareise ging. Stil und Darstellung sind daher sicherlich Paulis, so dass die Besprechung dieses Artikels in dieses Kapitel (und nicht in Heisenbergs) gehört.

Wie schon im Handbuchartikel gibt Pauli erst eine längliche Herleitung aus physikalischen Argumenten, und führt erst ganz zum Schluss die δ-Funktion als Abkürzung ein; diesmal für die Formulierung der Vertauschungsrelationen für Felder:
Es seien Q und $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$ die kanonischen Feldvariablen mit der Lagrangedichte L; mit $p := \Delta V \cdot P$ werde der Gesamtimpuls innerhalb der n, m, lten Volumenzelle bezeichnet. Pauli und Heisenberg stellen nun Frage, wie die Vertauschungsrelationen von endlich vielen Freiheitsgraden

$$p_{\alpha,lmn} Q_{\beta,l'm'n'} - Q_{\beta,l'm'n'} p_{\alpha,lmn} = \delta_{lmn;l'm'n'} \delta_{\alpha\beta} \quad ,$$

für die uns interessierende Impuls*dichte* $P_\alpha(x_1 x_2 x_3) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} p_{\alpha,lmn}$ formuliert werden kann.

> Würden wir in [der vorigen] Gleichung nach Division durch ΔV zur Grenze $\Delta V \to 0$ übergehen, so würden wir also auf der rechten Seite 0 erhalten. Wir erhalten jedoch ein sinnvolles Resultat, wenn wir [obige Gleichung] erst mit einer beliebigen Treppenfunktion f (c-Zahl) der Indizes $l'm'n'$ multiplizieren und über alle Zellen eines gewissen Raumstückes V' summieren, wenn wir im Limes $\Delta V \to 0$ die Funktion f derart gegen eine stetige Raumfunktion $f(x_1, x_2, x_3)$ konvergieren lassen, daß hierbei die Summe
>
> $$\sum_{l'm'n'} f(l', m', n') \Delta V$$
>
> in das Integral
>
> $$\int_{V'} f(x'_1, x'_2, x'_3) dV'$$
>
> über das ausgewählte Raumstück übergeht. Wir erhalten [...] im Limes einer unendlich fein gewordenen Zelleinteilung
>
> $$\int\int\int_{V'} f(x'_1, x'_2, x'_3) dV \{P_\alpha(x_1 x_2 x_3) Q_\beta(x'_1 x'_2 x'_3) - Q_\beta(x'_1 x'_2 x'_3) P_\alpha(x_1 x_2 x_3)\}$$
> $$= \frac{h}{2\pi i} \delta_{\alpha\beta} \begin{cases} f(x_1, x_2, x_3), & \text{wenn Punkt } x_1, x_2, x_3 \text{ in } V', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8.13}$$

Nach der langwierigen Darstellung und Durchführung dieses Grenzüberganges vom diskreten zum kontinuierlichen Fall führen Heisenberg und Pauli nun die δ-Funktion ein:

> Es ist zweckmäßig, dieses Resultat mittels des von Dirac eingeführten singulären Funktionensymbols $\delta(x)$ zu formulieren, das durch
>
> $$\int_a^b f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0), & \text{wenn } x = 0 \text{ in } (a, b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
>
> definiert ist.

[9][Heisenberg und Pauli 1929]

Unter Einführung des bekannten Klammersymboles für den Kommutator erhalten sie dann schließlich für (8.13) die kompakte Form der kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[Q_\alpha, Q'_\beta] = 0, \quad [P_\alpha, P'_\beta] = 0 \tag{8.14}$$

$$[P_\alpha, Q'_\beta] = [P'_\alpha, Q_\beta] = \frac{h}{2\pi i}\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{x'}) \; . \tag{8.15}$$

8.2.3 Eine δ-Funktion auf dem Lichtkegel

Die *Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder*[10] beschäftigt sich mit der Aufstellung relativistisch invarianter Vertauschungsrelationen. Pauli und Jordan basteln weiter an der Idee Jordans, Vertauschungsrelationen für die Felder selbst, und nicht erst, wie bisher üblich, für die Fourierkoeffizienten zu fordern, und wollen diese in invarianter Weise angeben.

Nach der Vorstellung der (bis dato) gewöhnlichen Methode der Fourierzerlegung für das elektromagnetische Feld, folgt ein mathematisches Kapitel, welches für die spätere Verwendung die relativistische „Δ“-Funktion definiert. Zuerst finden wir die Definition der „gewöhnlichen“ δ-Funktion, wobei ins Auge fällt, dass diesmal die Chararkterisierung über Folgen das zentrale Element der Definition ist: Nach der kurzen Definition der δ-Funktion auf bekanntem Wege über die Werte von $\int \delta(x)dx$ bzw $\int f(x)\delta(x)dx$ folgt eine Präzisierung des Sinnes über δ-Folgen:

> Die „Funktion“ $\delta(x)$ kann aufgefasst werden als *Abkürzung* für ein *Folge* von Funktionen $\delta_1(x), \delta_2(x) \ldots, \delta_N(x), \ldots$, für welche der $\lim N \to \infty \int_a^b \delta_N(x)dx$ existiert und den oben angegebenen Wert hat. Ebenso soll dann
>
> $$\int_a^b f(x)\delta(x)dx \quad \text{bedeuten} \quad \lim_{N\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_N(x)dx \, .$$

Pauli und Jordan geben als Beispiel für eine δ-Folge die Folge $\frac{\sin 2\pi N x}{\pi x}$.

Diese Definition ist der Ausgangspunkt für die Verallgemeinerung der δ-Funktion auf den relativistischen Fall. Die heute so genannte „Pauli-Jordan-Funktion“ Δ wird definiert über die Folge

$$\Delta_N(x, y, z, ct) = \int\int\int_{\vec{r} \le N} \frac{2}{|\vec{r}|} \sin 2\pi(k_x x + k_y y + k_z z - |\vec{r}|ct)dk_x dk_y dk_z \tag{8.16}$$

mit

$$|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Der Limes der Integrale über eine Funktion f über ein beliebiges vierdimensionales Weltgebiet V_4

$$\lim_{N\to\infty} \int_{V_4} f(x \ldots t)\Delta_N(x \ldots t)dV_4$$

wird nun „symbolisch“ bezeichnet mit

$$\int_{V_4} f(x \ldots t)\Delta(x \ldots t)dV_4$$

[10] [Jordan und Pauli]

und es gilt:

$$\int_{V_4} f(x\ldots t)\Delta(x\ldots t)dV_4$$
$$= \int_{V_3^+} f(x,y,z,ct=-r)\frac{1}{r}dxdydz - \int_{V_3^-} f(x,y,z,ct=r)\frac{1}{r}dxdydz \quad (8.17)$$

Dabei wurde mit $V_3^{\pm}$ der dreidimensionale Schnitt mit dem Lichtkegel $r = \mp ct$ definiert. Diese Gleichung kann nun als allgemeine Definition der invarianten Δ-Funktion genommen werden, wobei jetzt die Folge (8.16) nur noch als spezielle Realisierung aufgefasst werden soll. Die Vertauschungsrelationen für die Komponenten des elektromagnetischen Feldes lauten nun nach etwas Rechnung (P steht als Abkürzung für die vier Koordinaten x, y, z, t des Punktes P):

$$[E_i(P), H_k(P')] = \frac{ihc}{8\pi^2}\frac{\partial^2}{c\partial t\partial x_l}\Delta(P'-P)\ .$$

Hinzugefügt sei, dass sich dann in [Heisenberg und Pauli 1929] für Δ die intuitive Form

$$\Delta(x\ldots t) = \frac{1}{r}[\delta(r+ct) - \delta(r-ct)]$$

findet. Allerdings wird der in [Jordan und Pauli] gewonnene invariante Standpunkt in dieser Arbeit wieder verworfen und zur Rechnung mit *gleichzeitigen* Vertauschungsrelationen zurückgekehrt, weil „die Verallgemeinerung für andere Wellen als Lichtwellen nicht sehr übersichtlich“[11] wäre.

8.2.4 Die Interpretation der δ-Funktion

Es soll nun herausgestellt werden, wie Pauli die δ-Funktion und ihre Verallgemeinerungen versteht.
Zunächst fällt auf, wie im Handbuchartikel und der *Quantentheorie der Wellenfelder*, in denen es vor allem um die Darstellung von Grundprinzipien (der Quantenmechanik bzw der Quantenfeldtheorie) geht, die grundsätzliche Argumentation *ohne* Verwendung der δ-Funktion gegeben wird. Erst am jeweiligen Ende des Gedankenganges wird die δ-Funktion aus Gründen der formalen Bequemlichkeit eingeführt. Pauli führt sie unter den Rubriken „Abkürzung“, „Zweckmäßigkeit“ und „Bequemlichkeit“ ein, nachdem er den Leser erst durch eine langwierige Argumentation geführt hat.
Betrachten wir diese Argumentation, die ohne δ-Funktion auskommt etwas genauer: Im Handbuchartikel wird die Orthogonalität und die Vollständigkeit für das kontinuierliche und das diskrete Spektrum separat behandelt. Zuerst werden die Gleichungen für die Eigenfunktionen u_n des diskreten Spektrums hergeleitet, wobei auffällt, dass Pauli hier sogar auf die Benutzung des Kroneckerschen δ-Symbols verzichtet. Danach wird in einem eigenständigem Gedankengang die Vollständigkeit und Orthogonalität direkt für die Wellen*pakete* $\bar{u}_{\lambda'\lambda''}$ bewiesen, nicht etwa für die unverschmierten Eigenfunktionen u_λ selbst. Pauli verzichtet damit auf einen Analogieschluss[12]. Die für eine wirkliche Analogie

[11] [Heisenberg und Pauli 1929], S.34; siehe dort auch weitere Gründe für die Verwerfung des invarianten Formalismus

[12] Er sieht und zeigt wohl die Analogie, aber er *schließt* nicht aus ihr

so unverzichtbaren unverschmierten Eigenfunktionen u_λ kommen in der Argumentation gar nicht vor. Diese Eigenfunktionen, etwa zu scharfem Ort oder Impuls, wurden vorher schon aus Gründen der physikalischen Interpretation verworfen, da sie einen „physikalisch singulären Grenzfall" darstellen, der nicht normierbar ist. Diesem physikalischen Grenzfall entspräche aber der mathematisch singuläre Grenzfall der δ-Funktion. *Da Pauli aber permanent einer physikalisch regulären Argumentation verhaftet bleibt, stößt er bei der Darstellung gar nicht erst auf die δ-Funktion.*
Ähnlich ist die Lage in der *Quantentheorie der Wellenfelder*. Auch dort finden wir zunächst die Vertauschungsrelationen für Felder erst umständlich innerhalb eines Integrals über eine Testfunktion definiert, womit wiederum keine δ-Funktion auftritt. Im Unterschied zum Handbuchartikel können sich Heisenberg und Pauli an dieser Stelle allerdings noch nicht darauf berufen, dass auch diese Verschmierung einen physikalischen Grund habe – diese Einsicht wurde erst 1933 von Niels Bohr und Leon Rosenfeld[13] nachgeliefert. Heisenberg und Pauli begnügen sich mit dem Hinweis, dass sich nur so ein „sinnvolles Resultat" ergebe – eine Art Platzhalter für ein wirkliches, also physikalisches Argument.

Die δ-Funktion ist also eine rein formale Analogie und damit bestimmt sich ihr Charakter als *Abkürzung*. *Wofür* die δ-Funktion eigentlich eine Abkürzung sein soll, wird im Handbuchartikel explizit gesagt: Sie dient zur Darstellung für das (so nicht definierte) Skalarprodukt $\int u_\lambda^* u_{\lambda'} dq$ der *unverschmierten* Basisfunktionen u, welche aus physikalischen Gründen aus der Diskussion ausgeschlossen waren. Die mathematische Bequemlichkeit der Abkürzung liegt also darin, dass man mit der δ-Funktion vorgeben kann, immer mit unverschmierten Größen arbeiten zu können. Dies bedeutet aber, dass der Abkürzungscharakter der δ-Funktion von vornherein nicht in der formalen Abkürzung im Sinne einer mathematischen Definition eines neuen Symbols liegt, sondern, recht verstanden, einen gesamten mathematisch-physikalischen Argumentationskomplex in besonders einprägsamer Form bezeichnet.
In der *Quantentheorie der Wellenfelder* liegt die Sache im Prinzip genauso – mit dem Unterschied, dass Heisenberg und Pauli das 1929 noch nicht in aller Klarheit gesehen haben. Im Text erscheint die Verschmierung der Felder noch als bloßer Trick „um irgendwie weiterzukommen".
Bei Jordan und Pauli finden wir dagegen eine ganz andere Argumentation. Dort werden die δ-Funktion und die Pauli-Jordan-Funktion vorweg in einem Extraabschnitt eingeführt, gleichzeitig drängt sich die Definition über Folgen in den Vordergrund. Dies liegt offensichtlich daran, dass diese Arbeit keine Darstellung von physikalischen Grundprinzipien anstrebt, sondern die Lösung eines mathematisch-technischen Details im Rahmen des Kalküls mit verallgemeinerten Funktionen. Auch hier legt Pauli Wert auf die Betonung des nur Symbolischen, aber zeigt gleichzeitig, wie, unter Beachtung dieses Aspektes, der Formalismus als kraftvolles und funktionsfähiges Instrument der Physik benutzt werden kann.
Dieser Text zeigt, wie Pauli im rechnerischen Alltag den Umgang mit der δ-Funktion nicht nur keine Berührungsängste hatte, sondern das Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen sogar zu neuen Höhen führte und, nach Klarstellung des Charakters dieser „Funktionen", diese auch bedenkenlos genutzt hat.

[13] [Bohr und Rosenfeld 1933], ausführliche Besprechung dieser Arbeit in Abschnitt 11.1

Unter einen Hut gefasst ergibt sich aus den drei Arbeiten Folgendes: Pauli wahrte im Grundsatz eine deutliche Distanz zur δ-Funktion. Sofern oder sobald aber dem Leser klargewesen sein sollte, wie sie zu interpretieren sei, hatte er keinerlei Bedenken gegen ihre Verwendung.
Die δ-Funktion erscheint als Abkürzung *im eigentlichen Sinne* als „bloße“ Abkürzung und bloßes Symbol, da der lange und „eigentliche“ Weg der Argumentation aus dem physikalisch Vorliegendem von ihm tatsächlich zunächst beschritten wird. Erst zur Bündelung der gegebenen physikalischen Argumentation wird die δ-Funktion als Analogie eingeführt. Dadurch bleibt die gesamte Argumentation *unabhängig* von diesem formalen Trick[14].

8.3 Paulis Haltung zu verallgemeinerten Funktionen

8.3.1 Der physikalische Kontext

Durch die gekennzeichnete Art der *physikalischen* Analyse entgeht Pauli gleichzeitig der Gefahr, *mathematisch* unsauber zu werden. Pauli erkennt den durch die δ-Funktion symbolisierten Bruch im mathematischen Kontext, aber er versucht nicht, ihn *innerhalb* der Mathematik zu überspringen. Er ist nicht auf einen einheitlichen mathematisch-formalen Kontext angewiesen. Dort, wo die Argumentation am gesetzten mathematischen Leitfaden nicht weitergeht, setzt er durch physikalische Ad-hoc-Argumente *neu* ein. In diesem Fall bestehen die Ad-hoc-Annahmen jeweils in der Verschmierung der mathematischen Größen. Im Handbuchartikel haben wir dafür eine klare physikalische Begründung: Nur die Wellenpakete sind überhaupt beobachtbar. Auch in [Heisenberg und Pauli 1929] die Vertauschungrelationen ad hoc verschmiert – kein Argument *innerhalb* des bisherigen Kontextes lässt sich angeben, warum dieses so gerade an dieser Stelle geschehen muss. Auch hier liegt ein physikalischer Grund – die tatsächliche Messbarkeit – im Verborgenen. Da dieser physikalische Grund 1929 noch nicht genannt werden kann, tritt der Ad-hoc-Charakter der Verschmierung durch die Floskel „um ein sinnvolles Resultat zu erhalten“ umso deutlicher in den Vordergrund.
Der Bruch im mathematischen Kontext wird also überwunden, aber *nicht* durch das Fingieren einer mathematischen Brücke, sondern durch Berufung auf einen höheren, den „physikalischen“ Kontext. An den Bruchstellen wird die Argumentation explizit nichtmathematisch und vermeidet so den mathematischen Fehler.
Während für den Mathematiker Ad-hoc-Annahmen die Geschlossenheit der Theorie bedrohen und sie unvollständig erscheinen lassen[15], zeigt uns Pauli, wie es dem Physiker gerade um diese (aus der Sicht der Mathematik) *Zusatz*annahmen geht. Die Nichtabgeschlossenheit des Formalismus *öffnet* diesen für den höheren, physikalischen Kontext.
In Abschnitt 8.3.3 werden wir aus den Briefen Paulis noch mehrere Beispiele aus der Quantenfeldtheorie für den Zusammenhang zwischen (mathematischen) Ad-hoc-Annahmen und einer *physikalischen* Argumentation erhalten. Jedenfalls erhalten wir schon an dieser Stelle die Gelegenheit zu einer Definition von „physikalischer Kontext“. Der physikalische Kontext ist derjenige logische Zusammenhang, aus dem die Ad-hoc-Annahmen stammen,

[14] Wenn auch in [Heisenberg und Pauli 1929] aus den angeführten Gründen nur „virtuell“ unabhängig
[15] man erinnere sich an Hilberts Ausspruch, dass man zur Entwicklung der Theorie eben nicht zwischendurch auf Anschauung zurückgreifen dürfe, siehe Abschnitt 6.2.1

die die verwendete Mathematik von außen steuern.

Da es Pauli immer um diesen physikalischen Kontext geht, braucht er sich weder um die Glättung des mathematischen Zusammenhanges (δ-Funktion) noch um die Einbettung in einen genügend großen Kontext (Spektraltheorie) zu bemühen. Er behandelt die diskreten und kontinuierlichen Phänomene am Leitfaden desselben *Prinzips*, was von der Suche nach einer formalen *Vereinheitlichung* der Phänomenbereiche streng unterschieden werden muss.

Dieses Wechselspiel zwischen sauberer Mathematik und einem übergeordneten physikalischen Kontext, der an den mathematischen Bruchstellen zum Tragen kommt, gilt nicht nur für die δ-Funktion selbst, sondern ist ein Charakteristikum für alle verallgemeinerten Funktionen. Dies soll nun an drei weiteren Beispielen vertieft und aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet werden. Zunächst betrachten wir eine frühe Idee zur Vermeidung von verallgemeinerten Funktionen überhaupt. Danach wenden wir uns der Renormierungstheorie zu, in der Paulis Forderung nach neuen *physikalischen* Ideen zur Vermeidung mathematischer Schwierigkeiten noch einmal besonders deutlich wird. Als letztes soll seine Reaktion auf die frisch entstandene Theorie der Distributionen dargestellt werden.

8.3.2 Ein Versuch zur Vermeidung der δ-Funktion

Die einheitliche physikalische Argumentation führt in den mit der δ-Funktion zusammenhängenden Fällen nicht automatisch zu einem einzelnen durchgehaltenen mathematischen Kontext. Dieser Umstand ist bemerkenswert, und war für Pauli eine treibende Unruhe seines Denkens. Aus der frühen Zeit (1928) ist aus den Briefen ein Beispiel überliefert, wie Pauli zunächst einen Versuch unternahm, auf die δ-Funktion ganz zu verzichten:
In dem Artikel *Gruppentheorie und Quantenmechanik*[16] führt Hermann Weyl erstmals die heute nach ihm benannte Algebra ein. Pauli erschien dies als ein Weg, die δ-Funktion gänzlich zu vermeiden:

> Ich war sehr froh über ihre Feststellung, daß der Übergang vom endlichen zum unendlichen Fall zunächst zu den Gleichungen
>
> $$e^{i\sum \tau_k q_k} \cdot e^{i\sum \sigma_k p_k} = e^{-i\sum \sigma_k \tau_k} \cdot e^{i\sum \sigma_k p_k} \cdot e^{i\sum \tau_k q_k} \qquad (I)$$
>
> führt, und daß $pq-qp=i$ (analog mit den entsprechenden Operatorgleichungen) erst sekundär daraus folgt. Denn beim Problem der quantentheoretischen Umdeutung der klassischen Feldphysik, hat man, rein mathematisch gesprochen, den Schritt zu vollziehen, daß man von endlich vielen σ_k und τ_k erst zu abzählbar unendlich vielen und dann sogar zu einem Kontinuum für die σ und τ übergeht. Der letztere Standpunkt entspricht der Einführung nicht vertauschbarer Funktionen $p(x_1 \ldots x_4), q(x_1 \ldots x_4)$ der Raum-Zeitkoordinaten und das Analogon zu (I) ist dann
>
> $$e^{i\int \tau(x_1\ldots x_4)q(x_1\ldots x_4)dx_1\ldots dx_4} e^{i\int \sigma p dx_1\ldots dx_4} = e^{-i\int \sigma\tau dV_4} e^{i\int \sigma p dV_4} e^{i\int \tau q dV_4}, \qquad (II)$$

[16] [Weyl 1927]

worin τ und σ beliebige Funktionen sind. (Für $\psi(q_1 \dots q_f)$ tritt dann das „Funktional" $\Psi\{q(x_1 \dots x_4)\}$ und entsprechende Operatoren mit diesen.)
Das Analogon zu

$$p^\rho q^\sigma - q^\sigma p^\rho = i\delta^{\rho\sigma} \qquad \left\{\delta^{\rho\sigma} = \begin{matrix} 0 & \text{für} & \rho \neq \sigma \\ 1 & \text{für} & \rho = \sigma \end{matrix}\right\}$$

erfordert aber die Einführung des singulären Funktionssymbols $\delta(x - x')$ definiert durch

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= 0 \quad \text{für} \quad x \neq x' \\ \delta(x - x') &= \infty \quad \text{für} \quad x = x' \end{aligned}$$

derart, daß

$$\int_{x-a}^{x+b} f(x')\delta(x - x')dx' = f(0), \quad a, b \text{ positiv.}$$

Es ist nun meine Hoffnung, daß mit ihrer Methode die Einführung solcher singulären Symbole in die Quantentheorie der Felder sich gänzlich vermeiden lassen wird.

Pauli an Weyl am 29.1.1928 [Pauli 1979], I:429

Paulis positive Resonanz auf Weyls Arbeit ist also zumindest zum Teil darauf zurückzuführen, dass er sich eine Eliminierung der δ-Funktion aus dem Apparat der Quantenmechanik versprach.

8.3.3 Renormierungstheorie

Kommen wir nun zu Paulis Einstellung zur Renormierungstheorie, in der die verallgemeinerten Funktionen wiederum eine besondere Rolle spielen.

1953 hatte Heisenberg eine neue Idee, wie man die Unendlichkeiten der Quantenfeldtheorie beseitigen könnte, und führte einige neue Rechengrößen in die Theorie ein. Pauli blieb gegenüber seinen Ideen aber sehr skeptisch.

Ich bin ganz Deiner Meinung, daß die Renormalierungsphilosophie als unbefriedigend abzulehnen ist. Will man aber etwas *wirklich Besseres* machen, so muß ... [man] durch ein physikalisches Modell verständlich machen, was das [Heisenbergs neue Rechengrößen] eigentlich bedeutet [...]. Sonst bleibst Du nämlich doch in der Renormalisierungsphilosphie hängen [...].

[Pauli 1979] IV.2, S.506

Man könnte sagen, dass alles, was aus der rein defensiven Position gegen die Unendlichkeiten entspringt, letztlich doch auf eine Renormierung hinausläuft. Der positive neue Entwurf müsste daher vor allem eine neue *physikalische* Idee enthalten, der die Divergenzen nicht *vermeidet*, sondern eben durch eine andere Argumentation von vornherein keine entstehen lässt. Da Heisenberg keine neue zwingende physikalische Idee vorweisen konnte, tat Pauli Heisenbergs Hantieren mit neuen, weder physikalisch noch mathematisch verstandenen Hilfsmitteln als „wishful mathematics" ab. Ähnliche Kommentare zu Heisenbergs Arbeit finden sich schon in den frühen 20er Jahren, als Heisenberg und Pauli darum rangen, den Rechenregeln der älteren Quantentheorie eine Basis aus physikalischem

Verständnis zu geben.

Noch deutlicher wird dieser Konflikt zwischen mathematischer Findigkeit und physikalischer Idee in Paulis Reaktion auf Schwingers erste Durchbrüche in der Renormierungstheorie. Nachdem dieser Pauli zu Weihnachten 1948 eine Kopie seines zweiten Artikels[17] zugeschickt hatte, war die Zeit für Pauli reif, sich in die Diskussion einzumischen. Stein des Anstoßes waren vor allem Schwingers Behandlung von Produkten singulärer Funktionen. Die Resultate selbst ließ Pauli unbeanstandet, was ihn störte, waren „einige seiner „Beweise“ und die pseudo-deduktive Form gewisser Argumente“.[18] Paulis Punkt war, dass die in der Theorie auftretenden Produkte von singulären Funktionen nicht *berechnet* werden könnten, da sie a priori gar keinen Sinn machten, sondern erst *definiert* werden müssten. In seiner Antwort an Schwinger vom 24.1.1949 findet sich die gesamte Argumentation aufs Schönste zusammengefasst:

> I wish to stress the circumstances that products of functions (or their derivatives) of which one has a singularity of the type $\delta(x_\mu x_\mu)$ the other of the type $(x_\mu x_\mu)^{-1}$ at the light cone are not well defined mathematical symbols and therefore integrals over the four-dimensional x'-space of such products at the point $x - x'$ and external fields at the point x' [...] have not an a priori meaning. The same holds for the corresponding integrals over the four-dimensional momentum space, if its different invariant or covariant summands do not converge seperately. Every „evaluation“ of expressions of this type is not a „computation“ in the ordinary sense, but rather a new *definiton*, which can only be made precise by refering to a certain limiting process, in the course of which the singular functions are first replaced by regular functions (analogous to the well known definition of Dirac's δ-function which, however, turns out to be a too particular case for the problem investigated by you). The uniqueness of sensible rules for these definitions has to be particularly investigated. A particular way to handle an a priori indetermined (non defined) mathematical expression is according to my opinion an essential encroachment upon the fundaments of quantum electrodynamics and its consequences should not be considered as simple deductions based on known principles.
>
> *[Pauli 1979] III, S.609*

Pauli betont hier sowohl die Wichtigkeit mathematischer Strenge als auch die physikalische Bedeutung dieses mathematischen Sachverhaltes. Da sich mathematisch die Notwendigkeit einer Definition ergibt, muss diese von außerhalb der Mathematik genommen werden und damit auf eine fundamentale Neuartigkeit im *physikalischen Konzept* verweisen. Was mathematisch als Definition erscheint sind die zusätzlichen physikalische Annahmen, die *nicht* aus der „alten Theorie von Heisenberg und mir“ folgen.

> Ich habe keinen Zweifel, daß hinter diesem Formalismus – d.h. hinter der Unbestimmtheit von Produkten von Funktionen mit Pol- und mit δ-Singularität – eine noch nicht deutlich erkannte Physik stecken muß.
>
> *Pauli an Bethe 29.1.1949 [Pauli 1979] III*

„Without use of new assumptions this formalism is only an empty scheme.“[19] Anders gewendet, ist es Paulis Ziel, „versteckte Annahmen, die in Schwingers 'Beweisen' enthalten

[17] Es handelte sich um [Schwinger 1949a]

[18] [Pauli 1979] III, S.604

[19] Pauli an Bethe 25.1.1949

sind an's Tageslicht zu bringen.“[20] Da Schwingers Antwort auf seinen Brief ausblieb, rechnete Pauli damit, dass Schwinger „– zwecks besserer Verhüllung seiner Annahmen – mit noch mehr mathematischer Virtuosität eine noch dickere Rauchwolke auf Zürich lanzieren wird (nachdem sich seine bisherige smoke-screen als zu durchsichtig erwiesen hat.“[21]
Pauli hat seine Kritik, nachdem er von Schwinger selbst keine Antwort erhielt, polemisch so zusammengefasst: Es scheine so, dass Schwinger auf „irgendeinem Berge Sinai“ eine Art Offenbarung gehabt habe.

> Und der Herr sprach: „Setze immer $\frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial x_\nu} = 0$ für $x = 0$, tue aber nicht so für $\frac{\partial}{\partial x_\nu}\delta^{(4)}(x)$ trotz gleicher Symmetrieeigenschaften.“ Wir nennen hier die betreffende Regel kurz „die Offenbarung“.
>
> *Pauli an Peierls 10.7.49, [Pauli 1979] III*

Um die Willkür bei der Behandlung der Divergenzen zu begrenzen, schlug Pauli eine formale Prozedur vor, die später als „Pauli-Villars Regularisierung“ bekannt wurde. Um singuläre Funktionen auf dem Lichtkegel zu definieren, müssen erst reguläre Funktionen definiert werden, die im Grenzfall das Gewünschte ergeben. Pauli benutzt in seiner Diskussion der Schwingerschen Arbeit in einem Brief an Wentzel[22] die Methode der Verschmierung des singulären Ausdrucks mit einem „Regulator“, um so eine widerspruchsfreie Systematik in die Rechnungen bringen zu können.

> This technical device enables me to go around safely among people, who contradict each other, like one walks in the rain with an umbrella.
>
> *[Pauli 1979] III, S.621*

Diese Geschichte verdeutlicht einmal mehr das schon in Abschnitt 8.3.1 anhand Paulis Veröffentlichungen gezeichnete Bild, wie mathematische Sauberkeit gerade auf die Notwendigkeit von physikalischen Ad-hoc-Annahmen hinweist. Die mathematische „Virtuosität“ Schwingers, die keinen mathematisch-formalen Kriterien genügt, aber zu richtigen Ergebnissen gelangt, *verschleiert* die zugrundeliegende Physik (bzw. das Fehlen derselben) und versperrt wie eine Rauchwolke die Sicht auf den physikalischen Gehalt (bzw. dessen Fehlen). Es ist gerade die *Notwendigkeit* von Ad-hoc-Argumenten, die sowohl die mathematische Integrität herstellt, als auch den Hinweis auf die „unbekannte“ Physik bereithält. Die Notwendigkeit eines physikalischen Argumentes folgt aus der streng durchgehaltenen mathematischen Argumentation: Denn einen mathematischen Algorithmus zur Multiplikation der verallgemeinerten Funktionen *gibt es nicht.* Die Mathematik selbst verweist hier durch die Grenze, an die sie stößt, auf die Notwendigkeit eines äußeren Argumentes.

8.3.4 Die Theorie der Distributionen

Pauli suchte also nie den mathematischen Trick, sondern immer das physikalische Verständnis des Problems. Zumindest sollte der „Trick“ eine einsichtige physikalische Begründung erhalten, sonst bekommt man zwar richtige Ergebnisse, hat aber nichts von der Physik verstanden. Außerdem sollte, *wenn* schon mathematisch argumentiert wird, die

[20] Pauli an Peierls 14.2.49
[21] Pauli an Bethe 8.3.49
[22] [Pauli 1979] III, S.605

Mathematik wenigstens richtig gemacht werden, da die Mathematik gerade in ihren Problemzonen das physikalische Argument fordert. Beides gehört zusammen und lässt sich vielleicht am besten unter dem Stichwort einer durchgehaltenen „sauberen Methodik" zusammenfassen,.

Auf der anderen Seite war Pauli nicht nur Feind der *unsauberen* mathematischen Argumentation, sondern auch der *sterilen* mathematischen Argumention. Nach dem bisher Gehörten sollte es nicht verwundern, dass die Theorie der Distributionen, die schließlich die verallgemeinerten Funktionen auch mathematisch legalisierte, von Pauli nicht im Geringsten begrüßt wurde. Im Gegenteil, hier wurde wieder einmal der Unterschied zwischen der formalen Gelehrsamkeit der reinen Mathematik und einer neuen physikalischen Idee deutlich.
Stückelbergs Assistent A. Petermann war der Erste, der versuchte, die neue Theorie von Laurent Schwartz für die Physik, insbesondere die Renormierungstheorie nutzbar zu machen[23]. Doch bei Pauli stieß er auf blanke Ablehnung. Am 14.2.55 schreibt Pauli an Rosenfeld über Petermann[24]:

> ...and after he made himself entirely *impossible* by writing to me about Laurent Schwartz in connection with physics, I am not very curious about it [seinen Artikel].

Am 24.2.55 schreibt er, er würde Petermanns Argumente gerne „without any appeal to the ideas of Laurent Schwartz" präsentiert bekommen.
Paulis Ablehnung wird allerdings verständlich, wenn wir beachten, dass die Theorie der Distributionen für Pauli nichts *inhaltlich* Neues bereithielt. Sämtliche Besonderheiten des Rechnens mit Distributionen waren Pauli bekannt, wie schon der oben zitierte Brief an Schwinger zeigt. Auch *mit* einer funktionsfähigen mathematischen Theorie bleiben sämtliche Probleme, die die verallgemeinerten Funktionen für den Physiker aufwerfen, dieselben. Zum Beispiel wird auch in der Schwartzschen Theorie der Wunsch der Physiker nach „kanonischer" Bildung von Produkten von Distributionen nicht erfüllt. Vielmehr erfahren wir in der mathematischen Theorie, wieso er auch gar nicht erfüllbar ist, so dass hier die Notwendigkeit einer physikalisch sinnvollen *Definition* weiterhin bestehen bleibt.
Vergleichen wir Paulis „physikalischen" Umgang mit Distributionen mit der legalisierten Form, die die Schwartzsche Theorie anbietet, so ergibt sich ohnehin kaum ein Unterschied: Die Formulierung der δ-Funktion als Funktional über einen Raum von Testfunktionen deckt sich vollständig mit der Technik des Verschmierens, die von Pauli von Anfang an aus physikalischen Gründen verwendet wurde. Für *sein* Verständnis wurde also durch das Hinzufügen eines konsistenten mathematischen Kontextes nichts gewonnen, was der physikalische Kontext nicht ohnehin hergegeben hätte und nicht mathematisch schon im Großen und Ganzen vorgezeichnet war. Die Theorie der Distributionen war damit, was die Physik angeht, nichts als eine gelehrte Umformulierung von Altbekanntem und das beste Beispiel von reiner (= unnützer) Mathematik.
Interessanterweise gab die Theorie auch innerhalb der Mathematik keine neuen Antworten auf ungelöste Fragen, sondern gab ebenfalls nur einen allgemeingültigen Rahmen für viele spezielle bekannte Fälle. In der Mathematik wurde sie allerdings gerade aus diesen Gründen geschätzt.

[23]siehe dazu Abschnitt 11.3

[24]Dank an K. von Meyenn, der mir diese Textstellen schon vor der Veröffentlichung dieses Bandes [Pauli 1979] zur Verfügung gestellt hat

> ... most of the problems which belong to the theory of distributions had been considered and essentially solved before Schwartz, but no one had succeeded in building up a formalism which would dispense of special arguments in each particular case.
>
> *[Dieudonné 1964], zitiert nach [Lützen 1982], S.3*

Für Pauli sind es aber gerade die „speziellen Argumente in jedem Einzelfall“, die aus einer mathematischen Argumentation eine physikalische machen, denn gerade hier kommen die physikalischen Ideen ins Spiel.

8.3.5 Zusammenfassung

Insgesamt lässt sich also folgendes sagen: Die mathematische Unstimmigkeit der uneigentlichen Funktionen ist Pauli immer Hinweis einen – meist noch unverstandenen – *physikalischen* Zusammenhang. An Stellen, wo die Mathematik nicht stimmt, ist zweierlei zu beachten:

1. Es muss weiter mathematisch *sauber* argumentiert werden. Das heisst aber gerade nicht, das Problem mit mathematisch-formalen Argumenten zu behandeln. Diese wäre nur eine *Um*formulierung der schon gegebenen mathematischen Formulierung. Diese kann in Grenzen ihr Recht haben, bleibt aber im Grunde uninteressant, wie das Beispiel der Theorie der Distributionen zeigt. Die geforderte Sauberkeit des mathematischen Argumentierens dient nicht der Behebung des Problems, sondern nur zur Anzeige der Stelle, wo die mathematische Argumentation an ihre *Grenze* stößt und neuer Input von außen *gefordert* wird.

2. An den Stellen mit schlechter Mathematik hilft daher nur ein Ad-hoc-Argument, welches eine neue physikalische Idee in die Mathematik implementiert. Durch das Ad-hoc-Argument dirigiert der physikalische Kontext den formalen Zusammenhang. Durch die Sprünge und Lücken im mathematischen Kontext entstehen die Öffnungen, durch die der mathematische Formalismus im Ganzen des physikalischen Verständnisses verankert werden kann.

Von den Mathematikern wurden die „heuristischen Einsichten“ der Physiker, die sich im Umgang mit verallgemeinerten Funktionen zeigten, teils bewundert, teils belächelt:

> ... one is astonished by the skill with which the authors use clumsy and unsuitable tools to obtain the right results, and one is led to admire the unfailing heuristic insight of the true physicist.
>
> *[Wiener 1930]*, zitiert nach *[Lützen 1982], S.78*

Es sind gerade *diese* Einsichten, die dem Mathematiker als (bloß) heuristisch erscheinen, um die es Pauli geht. Paulis Zorn über allzu reines mathematisches Argumentieren[25] ist in diesem Lichte verständlich: Ihm ist in einem mathematischen Problem eine physikalische Einsicht versprochen. Rein mathematische Argumente führen aber nicht zur inhaltlichen Einsicht, sondern verstellen die Sicht, da sie sich auf den mathematischen Kontext zurückbeziehen, den die gesuchte Einsicht gerade transzendieren soll.

[25] wofür uns im nächsten Abschnitt noch einige Beispiele begegnen werden

8.4 Mathematik und Physik bei Pauli

Verlassen wir nun die verallgemeinerten Funktionen und versuchen wir herauszufinden, inwieweit sich diese Ergebnisse auf die Mathematik im Allgemeinen übertragen.

8.4.1 Spott und Psychologie

Für Paulis ablehnende bis spöttische Haltung der reinen Mathematik gegenüber gibt es neben der Theorie der Distributionen noch eine Menge weiterer Beispiele. Heisenberg konnte sich z.B. im Interview mit T.S. Kuhn an folgende Geschichte erinnern:

> Von Neumann told Pauli, „I can prove this and this", and then Pauli said, „Well, if a proof was important in physics, you would be a great physicist."
>
> *[Interview AHQP]*

Ein schönes Beispiel für eine „Bosheit aus reinem Selbstzweck"[26] gegen diejenigen, die von der Wichtigkeit reiner Mathematik in der Physik überzeugt waren, liefert der Brief von Pauli an Weyl vom 1.7.1928 in die Vereinigten Staaten, wo Weyl sich vorübergehend aufhielt:

> Lieber Herr Weyl!
> Vor mir liegt das Aprilheft der Proceedings of the National Academy. Nicht nur enthält es eine Arbeit von Ihnen in der Rubrik „Physics" sondern, wie über Ihrer Arbeit steht, sind Sie jetzt in einem „Physical Laboratory" zu Hause; wie ich höre, sollen Sie in Amerika sogar eine Professur für theoretische Physik innehaben. Ich bewundere Ihren Mut; denn die Schlußfolgerung erscheint unabweisbar, daß Sie, wenigstens eine Zeit lang, nicht nach Ihren Erfolgen auf dem Gebiet der reinen Mathematik, sondern aufgrund Ihrer treuen, aber unglücklichen Liebe zur Physik beurteilt sein wollen. Verzeihen Sie mir, wenn ich Sie auch weiterhin als Mathematiker betrachte; sonst müßte ich ja untersuchen, wie sich das Maß Ihrer Begeisterung für die Physik zu dem Umfang verhält, in dem sich Ihre Reformvorschläge in der Physik bisher bewährt haben.
>
> *[Pauli 1979], I:505*

Dass Hermann Weyl bei den Physikern ohnehin nicht viel Anerkennung erwartete, zeigt er in dem Vorwort zu seinem Buch *Quantenmechanik und Gruppentheorie*[27]:

> Ich kann es nun einmal nicht lassen, in diesem Drama von Mathematik und Physik – die sich im Dunkeln befruchten, aber von Angesicht zu Angesicht so gerne einander verkennen und verleugnen – die Rolle des (wie ich genugsam erfuhr, oft unerwünschten) *Boten* zu spielen.
>
> *[Weyl 1928]*

Pauli konnte sich diesen Spott, der nicht immer humorvoll aufgenommen wurde[28] deshalb leisten, da bekannt war, dass er selbst eine große mathematische Gabe besaß, diese aber *bewusst* nur beschränkt nutzte, um das Primat des physikalischen Prinzips vor der

[26] siehe etwa Pauli an Weyl 26.8.1929 [Pauli 1979], I:518
[27] [Weyl 1928]
[28] Hermann Weyl reagierte offenbar verärgert auf den zitierten Brief, wie dem anschließenden Brief Paulis an Weyl zu entnehmen ist. Schaden hat ihre Freundsschaft aber nicht genommen.

mathematischen Kodifizierung hervortreten lassen. Im Gegensatz zu den meisten Physikern, die die Mathematik meiden, weil sie gar nicht *kompetent* für eine mathematische Argumentation sind, haben wir in Pauli einen Fall, der *aufgrund* seiner Kompetenz die Mathematik verwirft und als nichtssagend abtut. Paulis Kritik an den Mathematikern hat damit ein ganz besonderes sachliches Gewicht, da sie sich nicht psychologisch als mentale Bequemlichkeit und Flucht vor logischen Schwierigkeiten umdeuten lässt[29]. Als Beispiel für Paulis mathematische Virtuosität können wir wieder den Handbuchartikel anführen, wo er die Spektraltheorie, deren Formulierung überdurchschnittliche mathematische Kenntnisse erfordert, im Vorrübergehen in einem kleingedruckten Absatz erläutert. Diese kurzgefasste Darstellung am Rande wirkt, als wolle Pauli sagen: „Es ist gar nicht besonders schwer, die mathematisch korrekten Zusammenhänge zu formulieren, aber es ist für die Physik einfach nicht *wichtig*."
Man hat Pauli in diesem Sinne sogar eine bewusste Abstinenz von der Mathematik nachgesagt[30] und in der Tat ist in der Radikalität seiner Angriffe auf die mathematische „Gelehrsamkeit" unschwer der typische Übereifer des geläuterten Konvertiten zu erkennen.

8.4.2 Physikalische Idee und mathematischer Formalismus

Nichtsdestotrotz blieb Paulis Bezugspunkt das *theoretische* Denken, und dies ist wesentlich mathematisch. So waren mathematische Inkonsistenzen für Pauli im Allgemeinen *der* Ausgangspunkt des Nachdenkens über eine Theorie, wie er in einem Brief an Schrödinger schreibt:

> *Meine* Privat-Philosophie ist *keine* rein empiristische, dazu bin ich viel zu mathematisch veranlagt. [...]
>
> 1. Um zwingende Aussagen darüber machen zu können, was – nicht nur technisch, sondern im *Prinzip* – *beobachtbar* ist, muß man bereits *eine Theorie haben.* Diese Aussagen sind daher immer *relativ* zur akzeptierten *Theorie.*
> 2. Bei der Beurteilung einer physikalischen Theorie ist ihre logische und mathematische Struktur (mindestens) ebenso wichtig wie ihre Beziehung zur Empirie (für mich persönlich ist erstere noch wichtiger).
> 3. Wenn ich darüber nachdenke, *wo* eine Theorie verbesserungsbedürftig ist, gehe ich *nie* von Betrachtungen über Meßbarkeit aus, sondern von solchen Folgerungen aus der Theorie, wo die Mathematik *nicht stimmt* (wie Unendlichkeiten oder Divergenzen).
>
> *Pauli an Schrödinger 27.1.55 [Pauli 1979] IV.2, S.XVII*

[29] man denke etwa an Hilberts Satz, die Physik sei zu schwierig, um sie den Physikern zu überlassen.
[30] So schreiben [Mehra und Rechenberg 1982b]:

> Pauli had often criticized Heisenberg's ealier theories of atomic structure as being too formal. Though he himself possessed great skill iin handling mathematical formalism, he had – after completing his doctoral thesis and the work with Born on perturbation theory – protected himself against an excessively brilliant use of mathematical machinery. He believed that the latter often served to hide the essential physical difficulties. Hence, in much of his own work for several years following his thesis, he had practised an almost Bohr-like abstinence of mathematical formalism.
>
> *[Mehra und Rechenberg 1982b], S.268*

Im Folgenden gilt es im Auge zu behalten, dass dieses *nie* – wie schon bei verallgemeinerten Funktionen gesehen – dazu führte, die Lösung des Problems in einer verbesserten Mathematik zu suchen, sondern von Pauli immer als Hinweis verstanden wurde, wo eine neue *physikalische* Idee vonnöten war. Schauen wir uns also einige andere Beispiele an.

Schon seit der Zeit der älteren Quantentheorie kritisierte Pauli immer wieder Vorstöße, die zwar rechnerischen Fortschritt brachten, aber keine neue physikalische Idee erkennen ließen. Im Gegenteil, die Konzentration auf die formalen Merkmale des Problems wurde von Pauli geradezu als Verschleierung des physikalischen Sachverhaltes verstanden. Legendär ist etwa die Geschichte, wie Max Born Pauli im Zug traf und ihn für die Ausarbeitung seiner Matrizenmechanik gewinnen wollte. Born wurde brüsk zurückgewiesen:

> I asked him whether he would like to collaborate with me in this problem. But instead of the expected interest, I got a cold and sarcastic refusal. „Yes, I know you are fond of tedious and complicated formalism. You are only going to spoil Heisenberg's physical ideas by your futile mathematics", and so on ...
>
> *Max Born*, zitiert nach *[Richter 1979]*

Im Oktober 1925 schrieb Pauli an Kronig über die von Born und dem stattdessen gewonnenen Jordan erreichten Ergebnisse:

> Man muß zunächst versuchen, die Heisenbergsche Mechanik noch etwas mehr vom Göttinger formalen Gelehrsamkeitsschwall zu befreien und ihren physikalischen Kern noch besser bloßzulegen.
>
> *[Pauli 1979], I:247*

Heisenberg selbst umschreibt Paulis Einstellung im Rückblick, indem er ihm folgende Worte in den Mund legt:

> „It may be that the that the problems of physics can now be solved. But if we come in too early with mathematical proofs, we have a good chance to ruin it. Because then we have a chance that we unconsciously assume some mathematical axioms which are not fullfilled and thereby get into contradictions and all the difficulties again."
>
> *[Interview AHQP]*

Die „Göttinger Gelehrsamkeit", für Pauli Inbegriff des leeren formalen Argumentierens, blieb Zeit seines Lebens eine Lieblingszielscheibe seines Spotts.
Die Gefahr, sich dabei in rein formalen Argumenten zu verstricken und in ein rein mathematisches Rätsellösen zu verlieren, erkannte Pauli natürlich nicht nur bei anderen, sondern vor allem bei sich selbst. So wurde in der Ausarbeitung der Quantenfeldtheorie schnell deutlich, dass die Anwendung des Formalismus auf physikalische Probleme direkt in mathematische Untiefen lief. Pauli schrieb in einem Brief an Bohr (Juli 1929) über die Divergenzprobleme:

> Auch sind die neuen Resultate, zu denen unsere Theorie führt, überhaupt sehr dürftig und die Gefahr liegt nahe, daß die ganze Angelegenheit allmählich den Kontakt mit der Physik verliert und in reine Mathematik ausartet.
>
> *[Pauli 1979], I:513*

Hier finden wir auch einen weiteren Anhaltspunkt für die Umgrenzung, wann eine Idee „physikalisch“ sinnvoll sei. Es geht hier um die Neuigkeit der Resultate, denn sonst wäre es wieder bloß eine Umformulierung des Bekannten – also purer Formalismus. Ein Formalismus muss also entweder zu neuen *beobachtbaren* Konsequenzen führen oder aber, wie die Matrizenmechanik, ein neues Konzept über die Natur der Dinge und ihre Zusammenhänge ausdrücken:

> Übrigens ist der neue „Formalismus“ gar nicht so furchtbar formal, z.B. kann man sich aufgrund desselben manches über die Kinematik der Quantentheorie zurechtlegen.
>
> *Heisenberg an Pauli 21.6.1925 [Pauli 1979] I:221*

„Bloß formal“ bezeichnet für den Physiker also die Neigung der Mathematik, sich nur um sich selbst zu drehen. „Kontakt mit der Physik“ besteht nur, wenn der mathematische Kontext erwiesenermaßen in den physikalischen eingebettet bleibt. Dies geschieht, wenn der Formalismus neue physikalische Resultate – Messergebnisse einerseits oder Modelle und konzeptionelle Einsichten andererseits – hervorbringt.

Demgegenüber ist die Argumentation im rein mathematischen Kontext in sich geschlossen und verliert so den Kontakt zur physikalischen Realität. Dieses Gefühl teilen auch viele Mathematiker; Hermann Weyl formulierte dieses so:

> Mathematisierend isoliert sich der Geist aus seinem in die Welt geworfenen Dasein zur Einsamkeit mit sich selbst, er verzichtet auf die Entschleierung von Weltgeheimnissen.
>
> *[Weyl 1928]*

Auch Einstein haut in die gleiche Kerbe, wenn er schreibt:

> Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.
>
> *[Einstein 1956], S.119*

Die Mathematik erhält ihre Strenge durch die Beschränkung auf Trivialfälle. Je korrekter die Mathematik gehandhabt wird, desto mehr muss sie sich auf klare Begriffe einschränken, deren Zusammenhang mit der Physik aber immer unklarer wird. Die mathematische Argumentation hat die Neigung, die Grundbegriffe der Theorie so eng zu formulieren, dass die aus ihnen folgenden Sätze mathematisch sicher und handhabbar sind. Es ist aber gerade die Aufgabe des theoretischen Physikers sich zu fragen, ob durch die Grundbegriffe, die eine sichere Argumentation ermöglichen, überhaupt noch die physikalische Realität getroffen wird. Und so ist die Aufgabe des Physikers gerade nicht die Glättung des mathematischen Kontextes, sondern die Darstellung der physikalischen Situation, die allererst einen mathematischen Kontext definiert. Dieses findet sich explizit in einem Schreiben Paulis an Einstein, in dem er ihm V. Bargmann als Assistenten empfiehlt. Nachdem er dessen große mathematische Begabung erwähnt, fährt er fort:

> Seine Schwierigkeit war immer die, daß er kein richtiges Gefühl dafür hatte, wie man ein physikalisches Problem mathematisch anzusetzen hat – also eben das, was den Mathematiker vom theoretischen Physiker unterscheiden soll, fiel ihm schwer.[31]
>
> *[Pauli 1979], II:598*

[31] Pauli fährt, nachdem er eine abschließende Bosheit ankündigt, fort: „Bei der Art Ihrer jetzigen Beschäftigung mit theoretischer Physik dürfte Ihnen das kaum sehr unangenehm auffallen.“

Der Unterschied zwischen einem Mathematiker und einem theoretischen Physiker besteht also darin, dass letzterer ein physikalisches Problem mathematisch *ansetzen* soll. Der Physiker muss also die Art und Weise der Mathematik und ihren Umfang bestimmen. Die Mathematik braucht, um für die Physik fruchtbar zu sein, eine ständige Supervision durch den Physiker. Die Arbeit des Theoretikers ist eine *Übersetzungsarbeit*, von der Natur her in die Mathematik hinein. Der Theoretiker steht zwischen den Welten und damit *über* der Mathematik. Dieses ist denn auch der Eindruck, den man auch bei der Lektüre von Paulis eigenen Arbeiten gewinnt. Die mathematische Darstellung wird ständig neu aus dem Phänomen geschöpft.

Wir finden somit für die Mathematik insgesamt das bestätigt, was sich in der Untersuchung der verallgemeinerten Funktionen schon ankündigte: Dort wo die Grenze der Mathematik erreicht ist, d.h. entweder ihr Ende (wie beim Bruch der Selbstkonsistenz bei den verallgemeinerten Funktionen) oder ihr Anfang (wie bei der Ansetzung des mathematischen Problems), beginnt die physikalische Einsicht in das Phänomen. Hinter dieser Grenze liegt der ominöse „physikalische Zusammenhang“, dessen Wesen bisher nur negativ bestimmt wurde, als das, was für den mathematischen Kontext ad hoc von außen kommt. Die ausschließliche Charakterisierung als das „Darüberhinaus“ des Formalismus legt folgende Interpretation nahe: Die mathematische Formulierung ist die Manifestation des Verstehens des physikalischen Zusammenhanges. Die physikalische Einsicht selbst kann nur über diese Manifestation mitgeteilt werden. Mathematisch ist die Art, wie der physikalische Zusammenhang als bekannter und verstandener Zusammenhang da ist – aber entscheidend ist für Pauli der Blick ins Unverstandene und Unbekannte, also in das, was sich erst noch als mathematisch manifestieren wird[32]. Dieses prämathematisch Unbekannte lässt sich aber offensichtlich nur negativ beschreiben: wäre es positiv, hätte es Form und wäre so selbst Teil mathematischen Formalismus. Die rein formale Spielerei löst kein physikalisches Problem, da sich der Formalismus, eben da er Formalismus ist, bei dem schon Bekannten aufhält – vielleicht es neu ordnend, aber nichts Neues bringend. Die neue Idee erscheint aus dem ungeformten Unbekannten.

8.4.3 Pauli, Dirac, von Neumann

Wie steht nun Paulis Verhältnis zur Mathematik im Verhältnis zu dem bei Dirac und von Neumann erarbeiteten?

Obwohl Dirac und Pauli sich bisweilen der gleichen Terminologie bedienen, ergeben sich deutliche Unterschiede in ihrer Auffassung. Betrachten wir zunächst die δ-Funktion. Die Dualität von kontinuierlichen und diskreten Problemen in der Quantenmechanik bedeutet zunächst einen *Bruch im mathematischen Kontext*. Bei Dirac war die δ-Funktion das „missing link“ zwischen den diskreten und kontinuierlichen Spektra, welches eine formal einheitliche Behandlung ermöglichte. Deshalb steht sie bei [Dirac 1927b] an der *Spitze* der Argumentation. Die δ-Funktion ist der Dreh- und Angelpunkt einer eleganten systematischen und einheitlichen Behandlung der Quantenphänomene, weshalb sie bei Dirac zwar Abkürzung ist, aber diese Abkürzung als Hauptelement der *Eleganz* der Abhand-

[32] Bei Heisenberg finden wir im nächsten Kapitel die entsprechende Idee der Mathematik als nachträglicher Rationalisierung des Geschauten

lung einen zentralen Stellenwert genießt. Bei Pauli ist die δ-Funktion dagegen *bloß* eine Abkürzung und *bloß* ein Symbol für die vorher gegebene physikalische Argumentation. Diese physikalische Argumentation ist für Pauli der springende Punkt und daher hat sie trotz ihrer relativen Langwierigkeit oberste Priorität.
Wir finden damit bei Dirac und Pauli zwar äußerlich die gleiche Terminologie, die aber aufgrund der verschiedenen Kontexte der beiden einem anderen Bedeutungsgehalt entspricht und eine grundverschiedene Wertschätzung verbirgt.

Paulis Behandlung des kontinuierlichen Spektrums ist derjenigen von Neumanns in gewisser Weise sogar näher. Diese Nähe zeigt sich zuerst äußerlich in der Kurzdarstellung der Spektraltheorie im Handbuchartikel *vor* der Einführung der δ-Funktion. Aber auch inhaltlich deckt sich die Argumentation im Handbuchartikel eher mit der Spektraltheorie. Tatsächlich erscheint Paulis Darstellung der von Neumannschen Theorie nur als Umformulierung seiner vorher gegebenen Argumentation. Diese erscheint viel mehr als das physikalische Äquivalent zu von Neumanns Projektionsoperatoren als wie eine Ausformulierung des mit der δ-Funktion Gemeinten. Pauli bleibt in jedem Falle der argumentativen Strenge verpflichtet, die, anscheinend ganz mühelos, zu mathematischer Strenge verdichtet werden kann. Paulis Argumentation ist daher *parallel* zu derjenigen von Neumanns. Pauli scheint von seiner phänomenologischen Argumentation so leicht zu mathematischer Stringenz zu kommen, wie wir umgekehrt bei von Neumann die phänomenologische Strenge aus der mathematischen Selbstkonsistenz entspringen sahen. Der entscheidende Unterschied zwischen Pauli und von Neumann besteht darin, dass Pauli keinen einheitlichen, globalen mathematischen Kontext braucht. Im Gegenteil, durch die Lücken im Kontext kann der physikalische Gehalt bisweilen umso besser glänzen und sich besser beweisen – wie die meisterliche Argumentation im Handbuchartikel zeigt.
Damit steht er aber wiederum in frontalem Gegensatz zur Idee der Axiomatik, denn Pauli bedient sich gerade der *inhaltlichen* Argumentation und betreibt das von Hilbert so gescholtene „Zurückgreifen auf Anschauung mitten im Argument“. Paulis Revier ist die inhaltliche Argumentation. Diese Argumentation ist zwar mathematisch aber nicht formalistisch. Sie beachtet eben nur begrenzt den Zusammenhang der Formeln unter sich.

Zusammenfassend ist zu sagen: Während Dirac versucht, den Bruch im mathematischen Kontext mit der δ-Funktion zu kleben, sucht von Neumann mit der Spektraltheorie einen übergeordneten, einheitlichen Kontext. Beide bleiben so dem einheitlichen, stimmigen mathematischen Kontext in besonderer Weise verpflichtet, der eine im Modus der Eleganz, der andere in dem der Stringenz. Pauli ist der Vertreter der physikalischen Strenge. Dadurch ergeben sich deutliche Parallelen zur mathematischen Strenge von Neumanns, als auch zur anschaulichen Argumentation Diracs. Seine Mathematik ist streng ohne diese Tatsache doch gleich zu prinzipieller Wichtigkeit erheben zu wollen wie die Axiomatiker. Pauli und Dirac teilen ein Moment der inhaltlichen Argumentation, doch von da aus gehen beide entgegengesetzte Wege: Dirac vereinigt das Inhaltliche mit dem Formalen in der Eleganz des Formalismus, der fortan im Zentrum des Interesses steht. Pauli hingegen widersteht dieser Versuchung. Für ihn geht es um ein Offenhalten der Mathematik für den physikalischen Inhalt. *Jedes* um sich selbst drehen der Mathematik, sei es im Modus der Strenge der reinen Mathematik (von Neumann), sei es im Modus der rechnerischen Virtuosität (Schwinger) oder im Modus des algebraisch-anschaulichen Schönen (Dirac) ist eine Verdeckung des Inhalts.

Kapitel 9

Heisenberg

9.1 Biographischer Überblick

Werner Heisenberg wurde am 5.12.1901 in Würzburg geboren. 1910 siedelte die Familie nach München über, wo er 1920 am Maximilians-Gymnasium sein Abitur ablegte. Im gleichen Jahr begann er bei Sommerfeld sein Physikstudium und begegnete dort Wolfgang Pauli. 1923 legte er seine Doktorprüfung ab und begab sich als Assistent von Max Born nach Göttingen, wo er Paulis Nachfolge antrat. 1924/25 verbrachte er ein halbes Jahr bei Niels Bohr in Kopenhagen.

Mitte 1925 gelang Heisenberg der entscheidende Durchbruch zur Quantenmechanik, die er zusammen mit Born und Jordan schließlich als Matrizenmechanik ausarbeitete. 1926 ging er wiederum nach Kopenhagen, wo er 1927 die berühmten Unschärferelationen fand. Aus dieser Arbeit und den Gedanken Niels Bohrs entwickelte sich die maßgebliche Interpretation der Quantenmechanik, die als „Kopenhagener Deutung“ bekannt wurde.

1928 wurde er Professor für theoretische Physik in Leipzig. 1929 legte er in Zusammenarbeit mit Wolgang Pauli mit der Arbeit „Zur Quantentheorie der Wellenfelder“ den Grundstein zur relativistischen Quantenfeldtheorie. Im gleichen Jahr begab er sich auf eine Vortragsreise, die ihn, zum Teil begleitet von Paul Dirac, in die USA und über Japan um die ganze Welt führte.

1933 wurde ihm der Nobelpreis für das Jahr 1932 zugesprochen.

Während der Nazizeit war Heisenberg einer der wenigen führenden Physiker, die weder vertrieben wurden noch freiwillig emigrierten. Bei einer Vortragsreise 1939 in die USA wurde ihm sogar die Einwanderung angeboten, aber Heisenberg lehnte ab und kehrte nach Deutschland zurück. Heisenberg war kein Nazi, empfand sich aber wohl als Patriot. Bis 1938 war er immer wieder Anfeindungen von nationalsozialistischer Seite ausgesetzt, kam aber glimpflich davon. Einzig seine Berufung als Nachfolger Sommerfelds in München wurde verhindert.

Ab 1939 arbeitete er federführend an dem Problem der Kernspaltung und der Atombombe. Das Projekt misslang – inwieweit dies ein wissenschaftlicher Misserfolg oder ein Erfolg passiven Widerstands der beteiligten Physiker gewesen ist, sei hier einmal dahingestellt.

Heisenberg war spätestens nach dem Ausbruch des Krieges von der wissenschaftlichen Welt isoliert. Seine Ideen zur S-Matrix Theorie gelangten über die Schweiz zur Welt hinaus. Nichtsdestotrotz hatte Heisenberg nach dem Krieg den Anschluss an den physikalischen mainstream verloren, die bahnbrechenden Arbeiten Schwingers und Feynmans

Abbildung 9.1: Werner Heisenberg (©MPI)

verlegten das Zentrum der theoretischen Physik endgültig nach Amerika und Heisenbergs Stimme war in der Diskussion über die Renormierung nicht mehr an vorderster Front zu hören.
1946 ließ er sich nach der Internierung in Göttingen nieder. 1958 siedelte er mit seinem Max-Planck-Institut nach München über. In seinen späten Jahren arbeitete Heisenberg hauptsächlich an einer einheitlichen Feldtheorie der Elementarteilchen, die aber nur geringen Einfluss auf den Gang der Physik ausübte.
Heisenberg starb am 1. Februar 1976 in München.

9.2 Mathematik und Physik bei Heisenberg

Dieses Kapitel über Heisenberg stützt sich vor allem auf Interviews, die Thomas S. Kuhn Anfang der 60er Jahre mit Heisenberg führte. Wir werden also im Unterschied zu den vorhergehenden Kapiteln nicht zuerst die Verwendung der δ-Funktion untersuchen.

9.2.1 Die Irrelevanz des Formalismus für das physikalische Verständnis

Heisenbergs Neigung zur Mathematik ist geprägt von einem Hang zu unmittelbarer Anschaulichkeit. Schon innerhalb der reinen Mathematik bevorzugt er die Differentialgeometrie, die ein großes Maß an räumlicher Vorstellung zulässt. Die Differentialgeometrie sei eben eine „Sache, die sich schön visualisieren lässt“[1]. Aber noch besser gefallen ihm

[1] [Interview AHQP]

die Aufgaben, die nicht nur gut zu visualisieren sondern im wörtlichen Sinne zu *sehen* sind. Bezeichnend ist etwa sein Hang zur Hydrodynamik, einem Thema, dem er seine Dissertation widmete.

> Well, I found hydrodynamics such a nice subject, because one could see what you did in your mathematics. I mean, there was such a nice correspondence between a mathematical calculation which looked rather complicated on the one hand, and the physical picture where you could see what happened on the water on the other hand.
>
> *[Interview AHQP]*

Das Schöne an der Hydrodynamik ist, dass die Rechnung in jedem Schritt in *direkter Entsprechung* zu den sinnlich erfahrbaren Geschehnissen am Objekt steht. Man verliert sich nicht in der Mathematik, sondern benutzt sie zur Herausstellung und Klärung des unmittelbar Vorliegenden. Dann dient die Mathematik dazu herauszufinden, wie die *Dinge* selbst zusammenhängen.

> I would say, I had never much fun in mathematics where you have to prove something. But I had much fun in mathematics where you have to find out how things are. I don't know whether that says anything, but I think it's that way.
>
> *[Interview AHQP]*

Die Mathematik soll den Gegenstand direkt ansprechen. Dazu gehört das unmittelbare Vor-Augen-liegen des konkreten Gegenstandes, wobei die mathematische Darstellung seiner inneren Zusammenhänge zeigt, wie es mit diesem konkreten Gegenstand bestellt ist.

Auch bei den wesentlich abstrakteren wissenschaftlichen Unternehmungen Heisenbergs, bei denen, wie in der Quantenmechanik, der Gegenstand nur noch indirekt „vor Augen" kommt, muss doch immerhin Gesamtbild und Konzept anschaulich bleiben. Sogar in der Quantenmechanik, in der, gerade von Heisenberg propagiert, klassische Modellvorstellungen und Bilder von den atomaren Vorgängen ganz ausgeschaltet werden sollen, wird das eigentliche Verständnis durch den globalen Überblick über die Zusammenhänge ausgemacht und *nicht* durch die Einzelheiten der rationalen (mathematischen) Verknüpfung. Die Einsicht kommt als Ganzes und in der Anschauung, Heisenberg spricht von „Bildern, die er sich von den Zusammenhängen macht". Es sind Bilder von Zusammenhängen – nicht etwa Bilder von Vorgängen im Atom. Ein Bild von einem Zusammenhang haben, heißt, über diesen Zusammenhang im Bilde zu sein. Das *Verstehen* eines physikalischen Zusammenhanges liegt also in der Erfassung des einheitlichen globalen Kontextes der verschiedenen Phänomene, und der muss nicht mehr *optisch* visualisierbar sein. Das Anschaulich-Visuelle bleibt als Metapher für globale Übersicht bestehen, da es sich um einen *Fern*sinn handelt.

Dass das Verständnis bei Heisenberg als Einsicht in die Ganzheit des Zusammenhanges kommt, zeigt sich auch in seiner Einstellung, die großen Probleme der Elementarteilchenphysik müssten, da sie alle zusammenhängen, auch alle auf einmal gelöst werden. Durch eine Verschiebung des Kontextes und des Rahmens der bisherigen Theorie soll alles insgesamt ins Lot fallen. Hier widersprach etwa Dirac heftig, der darauf bestand, immer ein Problem nach dem Nächsten zu lösen. Diese unterschiedliche Auffassung spiegelt sich in dem spezifischen Charakter der Arbeiten der beiden wider. Die relativistische Wellengleichung ist auch deshalb „typisch Dirac", weil sie *ein* Problem auf fast sensationelle Weise löst, aber gleichzeitig einen noch größeren Rattenschwanz von Merkwürdigkeiten mit sich zieht. Das Gesamtbild der Quantentheorie wird durch die Diracgleichung damit zunächst undurchsichtiger. Nach Heisenbergs Empfindung verwandelte die Diracgleichung die Physik in einen „Saustall"[2].

Das globale bildliche Verständnis bleibt oft von den Irrungen und Wirrungen sowohl der verbalen als auch der mathematische Formulierung dieser Bilder unangetastet.

> So first one has what one may call an impression of how things are connected, and from this impression one can guess, and you have a good chance to guess the correct things. But then you say, „Well, why do you guess this, and why not that?" Then you try to give rationalizations, to use words and to say, „Well, because I described such and such".
>
> *[Interview AHQP]*

Das *Begründen* ist also ein nachträgliches Rechtfertigen und Kommunizieren von dem was man *sieht.*

> Well, if one gets into such a picture, one sees experimental connections rather clearly and they all look quite reasonable. But as soon as you try to rationalize it, then you have, of course, a greater chance to make one mistake after the other.
>
> *[Interview AHQP]*

Während der Physiker nach vorne schaut, um sich einen Überblick zu schaffen, blickt die Mathematik immer *rückwärts*, sie ordnet und kartographiert den im primären Sinne schon entdeckten Bereich. Der Forscher gleicht dem Entdecker und Eroberer eines neuen Kontinents, der Mathematiker ist Missionar, der in gemessenem Abstand folgt, das Vorgehen im Nachhinein verifiziert und sicherstellt, dass ab jetzt alles mit rechten Dingen zugeht.
Reine Mathematik für die Physik immer einen Schritt zu spät. Mathematiker beweisen später, was die Physik lange kennt :

> We just want to solve the physical problems. Later on the mathematicians will prove what we need."
>
> *[Interview AHQP]* [3]

Reine Mathematik ist die nachträgliche Rationalisierung des von der Intuition zugetragenen. Mathematik räumt auf und schafft Ordnung, wenn die Party vorbei ist und die Gäste gegangen sind. Gerade die Theorie der Distributionen, die keine sachlich neuen Einzelerkenntisse lieferte, sondern allein für den Rahmen und die Systematik vorhandener Kenntnisse sorgte, ist ein gutes Beispiel für diese Art, die Mathematik zu betrachten.
In diesem Sinne beschreibt Heisenberg die rein mathematische Argumentation als zu „sauber" und sich selbst als zu „schlampig" dafür. Als Kontrast zu Diracs geflügeltem Wort von „pretty mathematics" möchte ich Heisenbergs Neigung als „dirty mathematics" zusammenfassen. Die durchgehaltene Entsprechung von mathematischer Argumentation und

[2]siehe Zitat Seite 123
[3]Diese Stelle ist ausführlicher noch einmal auf Seite 217 in anderem Kontext zitiert.

dinglicher Anschauung ermöglicht einen ständigen Wechsel der Argumentationsebenen vom mathematischen Argument zu anschaulicher Offensichtlichkeit und zurück. Durch diesen dauernden Kontakt zur schmutzigen Wirklichkeit verliert die Mathematik ihre Sterilität.

Das Gesamtbild, der physikalische Gehalt, ist also weitgehend unabhängig von der Art der mathematischen Formulierung. Daher ist die Konsistenz des Formalismus kein Argument für oder wider ein physikalisches Konzept. Heisenberg beschreibt dies an dem für ihn prägenden Beispiel seines Lehrers Sommerfeld:

> He would say, „Well, if this mathematical scheme doesn't work, we can always assume there is a similar mathematical scheme which will work and still the physical content may be the same".
>
> *[Interview AHQP]*

Hier wird die Signifikanz des Formalismus für das physikalische Verständnis rundheraus bestritten.
Sommerfeld lehrte seine Schüler nicht allgemeine mathematische Methoden, etwa, wie man beliebige Differentialgleichungen zu lösen habe oder auch gruppentheoretische Prinzipien nutzbringend einsetzen könne, sondern *Tricks* zum Lösen *bestimmter* Probleme. Heisenberg nennt (unter anderem) folgendes Beispiel:

> He would say, „Now here we have a problem which has rotational symmetry." But then he would not say, „Now consider the group of rotations;" he would say, „Since we have rotational symmetry, then, of course, it's a nice trick to introduce polar coordinates; then you will see that things work out."
>
> *[Interview AHQP]*

Die Mathematik wurde immer direkt am physikalischen Problem entwickelt und nie für sich selbst, um hinterher auf ein physikalisches Problem *angewendet* zu werden. Im Sommerfeld-Seminar lernten die Studenten, dass

> the mathematical foundations or the proofs were not important. What was important was the mathematical representation of nature.
>
> *[Interview AHQP]*

Heisenberg beschreibt die Wirkung dieser Erziehung als eine Schulung des mathematischen Instinktes, eines guten mathematischen Gefühls.[4]

Die Zweitrangigkeit der mathematischen Formulierung geht soweit, dass sogar ernsthafte mathematische Widersprüche nicht als Einwand gegen eine fundierte Intuition gelten. Heisenberg beschreibt, wie eine Formel zwar widersprüchlich sein kann, aber man trotzdem *sehen* kann, dass sie stimmt. Dieses „sehen, dass etwas stimmt" war schon für Sommerfeld *das* Kriterium dafür, eine Arbeit zu veröffentlichen oder nicht, unabhängig von der inneren mathematischen und konzeptionellen Konsistenz. Im Rahmen der frühen Quantentheorie war dieses aus nachvollziehbaren Gründen der einzige Weg Fortschritte zu machen, es gab ja keine einheitliche theoretische Basis zur Beschreibung der Phänomene. Von daher war sogar zu erwarten, dass die gefundenen Formeln manchmal keinen Sinn

[4] Dazu sollte noch angemerkt werden, dass Sommerfeld ein begnadeter Rechenkünstler war. Legendär unter seinen Schülern war seine Fähigkeit, komplizierte Integrale in der komplexen Ebene zu lösen.

machten: Sie sollten jenseits der klassischen Mechanik liegen, aber der neue Kontext, der sie hätte verständlich machen können, war ja noch unbekannt.
Heisenberg geht noch darüber hinaus und fordert unabhängig vom jeweils aktuellen Zustand der Physik die größere Beachtung dieser Seite der Physik, die er bei den Zeitgenossen der frühen 60er Jahre nur in Feynman erkennen konnte. Nach Heisenbergs Gefühl mangelt es an Mut, zu sagen

> „Well, I know that I must be wrong; certainly there is a contradiction, but damn it, I can see that it's right."
>
> *[Interview AHQP]*

Wie kann man dieses „richtig aussehen" verstehen? Auch Heisenberg stellt sich die Frage, *wie* man denn weiß, dass eine Theorie richtig ist, wenn man sich um einen Beweis – die Folgerung ihrer Zwangsläufigkeit – nicht kümmert?

> I think it's so interesting to analyse this question, „What does it mean that the theory looks correct or does not look right."
>
> *[Interview AHQP]*

Auch Heisenberg weiß keine Kriterien anzugeben. Aus genau diesem Grunde stand auch schon Sommerfeld selbst in der Kritik, da er mit seinem Zahlenmystizismus auch keine bessere Begründung hatte, als dass es *für ihn* richtig aussah.

Wir haben schon verschiedenen Elemente des Gut- oder Schlechtaussehens zusammengetragen. Enscheidend ist jeweils der Punkt, inwieweit die Theorie die Gesamtheit der Phänomene koordiniert. Als Beispiel für eine Theorie, die falsch aussieht bzw. aussah, nennt Heisenberg Diracs schon erwähnte relativistische Wellengleichung. Obwohl sie einerseits durch die Herleitung der Sommerfeld-Formel und des g-Faktors absolut überzeugend war, sah sie ihm dennoch falsch aus, da sie zu viele verrückte Sachen, wie etwa negative Energien enthielt.
Auch die mit Pauli entwickelten Grundlagen der Quantenfeldtheorie sahen falsch aus – es gab von Anfang an riesige Probleme, die dann spätestens mit Weisskopfs Berechnungen der Unendlichkeiten manifest wurden. Im Gegensatz zur Quantenmechanik, wo sich eine verblüffende Einfachhheit zeigte, sobald das Problem gelöst war, wurde in der Feldtheorie nichts wirklich einfach und durchsichtig. Immer war man von zusätzlichen Tricks abhängig, damit die Theorie funktionierte (Heisenberg nennt die von ihm und Pauli im ersten Artikel benötigte „Epsilontik"). Bei Relativitätstheorie und Quantenmechanik wurde durch den veränderten Blickwinkel plötzlich alles schlagartig durchsichtig und einfach, die bisherigen umständlichen Formeln vereinfachten sich beträchtlich; im Falle von Dirac-Gleichung und Quantenfeldtheorie blieb aber alles unbefriedigend.
Es geht also um die Gewinnung des richtigen Standpunktes, unter dem sich die Gesamtheit der in Frage kommenden Phänomene schlagartig durchsichtig wird. Eine gute Theorie beantwortet mehr Fragen, als sie aufwirft. Sie ordnet die grundsätzlichen Zusammenhänge. Das Richtig-Aussehen einer Theorie liegt nicht in der Menge der richtig beschriebenen Beobachtungsdaten, sondern in der Klärung und Vereinfachung des Gesamtbildes. Zusätzliche Ad-hoc-Annahmen, wie die erwähnten mathematisch motivierten Tricks in der Quantenfeldtheorie, und eine neue Reihe von *genauso schwierigen* Problemen wie bei der Diracgleichung zerstören die Überzeugungskraft der Theorie. Sie muss die *Substanz* des physikalischen Problems darlegen.

> Then of course, you come to the funny concept of the substance of the problem. What is that?
>
> *[Interview AHQP]*

Diese Frage bleibt bei Heisenberg offen. Wir werden später nach weiterer Vorbereitung darauf zurückkommen.

9.2.2 Die Priorität des konzeptionellen Verstehens und die Wechselwirkung von Mathematik und Konzept

Der lockere und fröhliche Umgang Sommerfelds mit mathematischen Prinzipien erhielt bei Heisenberg seine Ergänzung durch die philosophische Strenge des Durchdenkens physikalischer Konzepte bei Niels Bohr. Heisenberg beschreibt in den Interviews immer wieder den großen Einfluss, den Bohrs fast nicht-mathematische, fast experimentelle Art, theoretische Physik zu betreiben, auf ihn gehabt hat. Bei Bohr musste die experimentelle Situation zunächst durch passende Konzepte beschrieben und verstanden werden, bevor sich aus den Konzepten die spezielle mathematische Form ergab. Das *Verstehen* des physikalischen Problems ist somit primär vom Finden der richtigen Konzepte abhängig, das heißt bei Bohr, der richtigen *Worte*, die das infragestehende Problem präzise beschreiben.

Bohr war sehr streng mit der Auslegung von „etwas verstehen“, er verhielt sich sehr

Abbildung 9.2: Bohr, Heisenberg und Pauli in angeregter Diskussion (©AIP)

ungnädig gegenüber unausgereiften Konzepten. Er war bekannt dafür, dass er physikalische Ideen (eigene und die anderer Leute gleichermaßen) einem Kreuzverhör unterzog, um wirklich alle Seiten eines Problems bis ins Detail zu verstehen. Man könnte in Bohrs Vorgehensweise die verbale Analogie eines mathematischen Beweises sehen. So gehörte

Bohr auch zu den Kritikern Sommerfelds, die dessen (von Heisenberg vielzitierten) Enthusiasmus wegen der konzeptionellen Unausgegorenheit der älteren Quantenmechanik nicht nachvollziehen konnten.[5]
Diese Art der Physik konnte deshalb unbedingte Priorität beanspruchen, da, wie Pascal Jordan[6] bemerkte, Bohrs langsames begriffliches Ertasten eines Problems dieses erst langsam zu einer mathematischen Behandlung *reifen* ließ. Dies ist ebenfalls einleuchtend, denn bevor man ein Problem mathematisch angeht, muss man vorweg ein gewisses Verständnis davon haben. Die allgemeine Richtung der Erforschung und die Methoden müssen aus einem Vorverständnis des physikalischen Zusammenhanges genommen werden.
Aber dieser Prozess führte auch rückwärts zu Ergebnissen. Bohrs Arbeit mit Rosenfeld[7] war die Extraktion des physikalischen Gehaltes aus den mathematischen Versuchen von Pauli und Jordan, deren Bedeutung für die physikalische Praxis bis dahin nicht verstanden war.

Dass ein konsistenter mathematischer Formalismus aber umgekehrt auch eine wertvolle Hilfe beim Auffinden des richtigen physikalischen Konzeptes sein kann, hatte Heisenberg gleichwohl gut in Erinnerung. Vor Beginn der Matrixmechanik in der älteren Quantentheorie fehlte gerade das mathematische Schema, und die Konsistenz des mathematischen Schemas sollte wiederum Leitstern für das begriffliche Verständnis werden:

> There was of course, from the very beginning the impression that if we find a consistent mathematical scheme, then it should sooner or later be possible also to avoid the contradictios in the way in which we talk about it. After all, mathematics is meant to be consistent; if mathematics is not consistent it's just wrong. Therefore, as soon as you find a consistent mathematical scheme then you should be able, sooner or later, to find also the right words to talk about it.
>
> *[Interview AHQP]*

Wir sehen, wie umgekehrt auch die Mathematik den Weg zu einem begrifflichen Verständnis bahnen kann. Zur Zeit der Entstehung der Matrixmechanik war es also das mathematische Schema, was fehlte. Dieses Vorgehen war gerade das Gegenteil des von Bohr bevorzugten, wie Heisenberg auch bestätigte.
Und auch Heisenberg war diese Reihenfolge im Grunde fremd. In seiner Forschungsarbeit ging er niemals von der mathematischen Formulierung des Problems aus. So kam ihm Diracs Idee, den Elektonenspin mit der Begründung herzuleiten, hier sei eine Gleichung zu linearisieren, „ziemlich absurd“ vor. Heisenberg gehörte gleichwohl nicht zu den Leuten, die Diracs Arbeit für reine Mathematik hielten, da ihm[8] doch klar war, dass sie etwas substantiell Physikalisches enthielt.

9.2.3 Die innere Konsistenz einer Theorie

Es sei noch eine Zwischenbemerkung zu dem vorangegangenen Zitat gemacht. Heisenberg bestimmt Mathematik als den Bereich, in dem Konsistenz und Widerspruchsfreiheit mit

[5] Wie auch Born mit annähernd gleichen Argumenten (Brief von Born an Sommerfeld vom 5.3.1920, zitiert nach [Eckert 1993]).
[6] im Interview am 20.6.63, [Interview AHQP]
[7] [Bohr und Rosenfeld 1933]
[8] wie den meisten Physikern

Wahrheit zusammenfällt. Die Wahrheit der Mathematik liegt in der Konsistenz. Dieser Wahrheitsbegriff deckt sich nicht mit demjenigen der Physik. Die innere Konsistenz ist ein Aspekt der Wahrheit der Physik, aber nicht der einzige und gemäß Heisenberg nicht der führende. Weil die Konsistenz an der Wahrheit der Physik beteiligt ist, kann sie zwischenzeitlich die Führung übernehmen und der Ausgangspunkt des Nachdenkens werden. Die Frage nach der Rolle der Mathematik in der Physik ist daher gleichbedeutend mit der Frage nach dem Anteil der Konsistenz an der physikalischen (oder sonst einer sachwissenschaftlichen) Wahrheit.
Konsistenz ist eine zwangsläufige Begleiterscheinung einer wahren Theorie. „Die Mathematiker werden später beweisen, was wir als richtig erkannt haben". Konsistenz kommt nachträglich und beiläufig – sie ist also keineswegs im Zentrum von Heisenbergs Begriff der physikalischen Wahrheit angesiedelt. Sie steht so wenig im Zentrum, dass sie unter Umständen eine zeitlang sogar völlig unbeachtet bleiben kann[9]. Konsistenz ist eine zwangsläufige Folge der Wahrheit, ein äußeres Kriterium für eine inhaltliche Wahrheit. Konsistenz gilt für jede Wahrheit, daher kann sie nie über die spezielle Wahrheit eines vorliegenden Falles entscheiden. Sie ist deshalb bestenfalls ein negatives Kriterium (im Sinne einer nur notwendigen Bedingung), kann aber nie einen positiven Leitfaden für die Forschung abgeben und deshalb der inhaltlichen Einsicht nicht den Weg bahnen.

9.2.4 Reine Mathematik und Axiomatik in der Physik

Grundsätzlich, und trotz seiner guten Erfahrung in seiner Zusammenarbeit mit Max Born, hatte die strenge Mathematik im Großen und Ganzen doch eine abschreckende Wirkung auf Heisenberg. Obwohl er zu Beginn seines Studiums sogar erwogen hatte, Mathematik zu studieren, stellte er doch bald fest, dass ihn die Vorlesungen bei den exakten Mathematikern[10] langweilen:

> That kind of exact mathematics, you know, where you prove that it converges within this and this range, and so on, in some way never appealed to me.
>
> *[Interview AHQP]*

Die Art des mathematischen Beweises gefällt Heisenberg deshalb nicht, weil er keinen Zuwachs an Übersichtlichkeit über das Gemeinte bringt.

> This proving of such and such I found to be almost like cheating. You start somewhere, and then you go into a dark tunnel and then you come out some other place. You find you have proved what you wanted to prove, but in the tunnel you don't see anything. So I never liked that very much.
>
> *[Interview AHQP]*

Die schrittweise Aneinanderreihung der logischen Schlüsse lenkt den Blick in die falsche Richtung, ähnlich einem Wanderer, der sich auf die Füße schaut und dabei die Gegend (um die es ihm geht) nicht mehr wahrnehmen kann.

Die gesamte Theorie der reellen Funktionen fand er als Student „pathologisch":

[9] Wobei Heisenberg offensichtlich für eine etwas weniger vorläufige Theorie doch davon ausgeht, dass sie grundsätzlich mathematisch konsistent darstellbar sein müsste.
[10] namentlich Pringsheim

> When he spoke about the function which was, say, one at every rational point, and zero at every non-rational point, then I felt „Well, that's the end of it. That's not a function."
>
> *[Interview AHQP]*

Gerade diese Beispiele zeigen, wie sich Heisenberg nicht um die Tragweite und die Möglichkeiten abstrakter Konzepte kümmern mochte, die jenseits jeder ernsthaften Beobachtbarkeit lagen. Heisenberg verknüpfte sogar die Frage nach prinzipieller Beobachtbarkeit im weitersten Sinne mit der mathematischen Existenz. Von Weizsäcker berichtet, wie er von Heisenberg hörte:

> Glaube den Mathematikern nicht, wenn sie dir weismachen wollen, es gebe so etwas wie eine aktual unendliche Punktmenge. Könnte man so etwas beobachten?
>
> *Werner Heisenberg* zitiert nach *[von Weizsäcker 1992]*

Die Leere des rein mathematischen Argumentierens wurde für Heisenberg am Deutlichsten in reinen Existenzsätzen, für die aber kein einziges konkretes Beispiel existierte. Er nennt die hermiteschen Formen mit diskretem und kontinuerlichem Spektrum, die als erste von den Physikern angeben wurden, obwohl die Mathematiker lang gewusst hatten, dass sie existieren müssten.

> But that again in some way made me dislike mathematics more than before because I felt, „Well, after all, these mathematicians prove that something exists, but they don't show it." The physicist is not interested in what exists mathematically. I want to see it on the paper; I want to write it down.
>
> *[Interview AHQP]*

Es war Heisenberg also lieb, die strenge Mathematik aus der Physik möglichst herauszuhalten. So erklärt sich auch seine Abneigung gegen das Wort „Matrizenmechanik" für seine Quantenmechanik. Am 16. November 1925 schreibt er an Pauli:

> Ich bin immer wütend, wenn ich die Theorie nur unter dem Namen Matrizenphysik genannt höre und hatte eine Zeit lang ernstlich vor, das Wort Matrix ganz aus der Arbeit zu streichen und durch ein anderes z.B. „quantentheor[etische] Größe" zu ersetzen. (Übrigens ist Matrix wohl eines der dümmsten mathematischen Wörter, die es gibt.) Auch weiß ich nicht, ob man nicht die Hauptachsentransformation ganz hinauswerfen sollte, denn wie man *wirklich* integriert, haben Sie beim Wasserstoff gezeigt, und das andere ist also doch nur formaler Kram.
>
> *[Pauli 1979] I, S.255*

Heisenberg spielte also mit der gleichen Idee, die Dirac zu der Benennung „q-Zahlen" für die Quantengrößen führte; eine Bezeichnung die sich direkt auf die mathematische Natur der physikalischen Größen bezieht, *ohne* Referenz auf einen etwaigen intern-mathematischen Zusammenhang.

Interessant ist auch, dass sich in den 38 Jahren, die zwischen den beiden vorigen Zitaten befinden, keinerlei Veränderung in Heisenbergs Auffassung findet. Nie interessiert ihn, wie es mathematisch im Allgemeinen und im Prinzip zuzugehen hat, seien es Existenzsätze oder allgemeine Transformationen. Wichtig ist allein, was man konkret aufschreiben und ausrechnen kann. Dies wiederum gehört in die Sphäre der rechnerischen Findigkeit und

Kreativität à la Sommerfeld, und nicht in die allgemeinen Prinzipien der deduktiven Mathematik.

Entsprechend betrachtete er die Versuche, die Physik zu axiomatisieren mit großem Mißtrauen. Schon die ersten Versuche Jordans, die Quantenmechanik zu axiomatisieren, waren Heisenberg im Grunde unsymphatisch. Nicht, weil die Benutzung mathematischer Methoden unrichtig ist, sondern weil der Kontakt zur Physik verloren geht. Die Axiomatisierung *trennt* die Wissenschaft vom direkten Zugang zu ihren Objekten:

> When you axiomatize a theory, as for instance Newton has done in classical mechanics, you say „these are my assumptions, these are my axioms"; then the whole thing is consistent and all the rest follows. Then from this very moment on you don't know whether this whole scheme has anything at all to do with nature, because then it's closed. [...] I mean, in some way you have lost contact with nature; there is something which is closed in itself.
>
> *[Interview AHQP]*

Auch Rosenfeld erzählt von dieser Erfahrung. Im Zusammenhang mit von Neumanns Theorie schreibt er:

> Many people, especially young people, find it helpful because it is put in symbols, it is formalized. But the danger of formalizing is that you loose the physical content of it ...
>
> *L. Rosenfeld [Interview AHQP]*

Genau wie schon bei Pauli diskutiert, ist auch bei Heisenberg die Auffassung deutlich, dass die Abgeschlossenheit des selbstkonsistenten Formalismus alle Türen zur Realität versperrt. Gerade die Abgeschlossenheit und Eigenständigkeit des Formalismus, deren Bedeutung für die Objektivität in Kapitel 6 ausführlich besprochen wurde, zeigt hier ihre andere Seite. Gleichzeitig mit der Abhängigkeit von Subjekten schwindet auch der Kontakt zur unmittelbar erlebten physikalischen Realität.
Der Dualismus von mathematischer Konsistenz und physikalischer Intuition ist offensichtlich mehr als eine historische Kuriosität, die sich in der Konkurrenz zwischen der formalistisch geprägten Göttinger und der von Bohr geprägten Kopenhagener Auffassung erschöpft. Vielmehr handelt es sich um eine Konstante, da sich in den folgenden Generationen theoretischer Physiker die gleichen Fragen wiederholen. Heisenberg erwähnt insbesondere die Gruppe der Axiomatiker[11], die ein konsistentes mathematisches Fundament für die Quantenfeldtheorie suchten, mit der damaligen Göttinger Gruppe um Born:

> Those people try to do proper mathematical analysis with the most modern tools of mathematics and hope thereby to solve the problem of physics.
>
> *[Interview AHQP]*

Demgegenüber stellt er Pauli, sich selbst und als modernes[12] Beispiel G. Chew, denen es darum geht, erst eine physikalische Lösung zu finden, woraus die Mathematik sich dann fast trivialerweise von selbst ergibt.

[11] das sind Wightman, Lehmann, Symanzik
[12] Anfang der 60er

> I find it so interesting that in our present time we have exactly this same situation. Because again, there's one group saying that we must only do the mathematics properly, and then we will know what it is all about. And other people like Chew, or also myself, would say, „Well, on the contrary, we must first solve the fundamental physical difficulty[13], and not worry at all about mathematical existence and the convergence and so on. We are just not interested in axioms. We just want to solve the physical problems. Later on the mathematicians will prove what we need.“
>
> *[Interview AHQP]*

Heisenberg wird auch in diesem Zusammenhang nie müde zu betonen, dass die Divergenzprobleme in der Quantenfeldtheorie durch ein neues physikalisches Konzept gelöst werden müssen, und eine rein mathematische Entschärfung der Unendlichkeiten keinen Erkenntnisfortschritt bedeute:

> These difficulties are not only difficulties of our own stupidity with regard to mathematics, but apparently they are difficulties in nature.
>
> *[Interview AHQP]*

Ein anderer Grund zur Ablehnung der Axiomatik findet sich in der Anerkennung der Offenheit der Wissenschaft. Im Interview erzählt Heisenberg, die Axiomatisierung sei ein Ausdruck zu großen Vertrauens in die Quantentheorie. Gemäß Heisenberg vertrauen Leute wie Wightman zu sehr auf den festen Boden der Quantenmechanik. Genau wie Lehmann und Symanzik stelle dieser sich vor, die Quantenmechanik sei auf ewig die Basis der Physik. Für Heisenberg dagegen ist die Quantenmechanik ein Erklärungsschema, das eine zeitlang funktionieren mag, aber durch neue Entwicklungen schnell veralten kann [14] Die übertriebene Mathematisierung ist eine Vortäuschung eines festen Grundes für die Wissenschaft, den sie nicht besitzt.
Heisenberg setzt die Bemühungen um eine Axiomatik gleich mit einem Finalitätsanspruch der Axiomatiker – ein nicht notwendigerweise zwingender Zusammenhang, wie in Kapitel 6.2.5 diskutiert wurde.

Nichtsdestotrotz war Heisenberg immer pragmatisch genug, sich wichtig erscheinende mathematische Theorien anzueignen. So hat er zum Beispiel aufgrund von Wigners Artikeln über die Gruppentheorie einige Zeit damit verbracht, sich diese Theorie ernsthaft anzueignen.

9.3 Zusammenfassung

Wie bei Pauli finden wir bei Heisenberg ein nicht-formalistisches Physikverständnis. Im Gegensatz zu Pauli musste sich Heisenberg allerdings nie um eine Abgrenzung zur Mathematik bemühen – er war von Natur aus nicht-mathematisch veranlagt und kam der reinen Mathematik niemals so nah wie Pauli oder Dirac. Insofern ist auch sein Verhältnis zur reinen Mathematik wesentlich gelassener als etwa Paulis und es fehlt die Paulische

[13] Hier liegt im Manuskript entweder ein Versprecher Heisenbergs oder ein Fehler in der Abschrift vor, denn es heißt dort „mathematical difficulty“, was offensichtlich nicht gemeint ist.

[14] Dies ist auch ein Generationenkonflikt. Wer in eine Zeit mit solider Basis hineingeboren wurde, könne eben nicht anders denken, während Heisenbergs eigene Generation die Physik in einem total ungeordneten und offen Zustand vorgefunden hatte.

Gehässigkeit gegenüber den Mathematikern. Heisenbergs Physik muss von ihrer ganzen Anlage her keinerlei Interferenz befürchten.
Die Mathematik zeigt sich bei Heisenberg besonders deutlich als *nachträgliche Rationalisierung* eines intuitiven Konzeptes. Das Konzept erscheint meist bildlich in der physikalischen Idee, wird dann durch Verbalisierung „linearisiert" zu einer kausalen physikalischen Erklärung. Diese wird schließlich zugespitzt in der mathematischen Formulierung. Dieses ist das Grundschema der theoretischen Erkenntnis. Dies zeigt sich bis in die historische Reihenfolge, in der die Nachträglichkeit der mathematischen Argumentation die Regel ist, und die Mathematik später beweist, was in der Physik schon benutzt wird.
Auch wenn das Grundschema bisweilen in der anderen Richtung funktioniert, so hat doch die physikalische Idee oberste Priorität. Die weiteren Schritte der Erklärung – Verbalisierung und Mathematisierung – dienen dann der Verifizierung und Kommunikation der Idee. Sie veröffentlichen die Idee und stellen sie zur Diskussion, damit die objektive, d.h. die allgemeine Gültigkeit der Idee zur Verhandlung gebracht werden kann.
Wir stoßen wiederum in direkter Weise auf den Begriff der Mathematik als Medium[15]. Das Medium veröffentlicht das Konzept und macht es allgemein zugänglich. Das Medium schafft den öffentlichen, gemeinsamen und neutralen Raum, an dem alle – unbesehen ihrer Person – teilhaben.
Entscheidend bleibt aber das *Vermittelte* selbst. Die Wahrheit der Sache hängt nicht davon ab, ob sie gut vermittelbar ist. Entsprechend kann ein mathematisches Schema fehlerhaft sein, aber trotzdem „die Wahrheit" über die Sache aussagen.

Die Verselbständigung der Mathematik im rein mathematischen Fragen führt zu ihrer Selbstgenügsamkeit und Abgeschlossenheit. Damit ist aber das Medium nicht mehr als Medium gedacht. Es ist selbst ein Objekt geworden. Damit das Medium Medium bleibt, darf es *niemals* selbst zum *Gegenstand* werden. Damit bedürfte es selber wieder der Vermittlung, um zum Subjekt oder zu anderen Objekten zu gelangen. Offenbar mündet dieser Gedankengang in einen unendlichen Regress. Als solcher stellt sich dann die Axiomatik dar, die durch die inhaltliche Entleerung des Formalismus zu metamathematischen Erwägungen gezwungen wird, die dann entweder rein intuitionistisch werden, oder aber eine weitere Meta-Ebene der Reflexion erfordern[16].
Was Heisenberg will, ist der *direkte* Zugriff auf den physikalischen Zusammenhang. Die Mathematik, die als Medium *unreflektiert* bleiben muss, zeigt direkt den Zusammenhang der Naturvorgänge, wie das Beispiel der Hydrodynamik zeigt. Heisenbergs mathematische Physik zeigt direkt die „mathematische Qualität in der Natur".

Die Arbeit des theoretischen Physikers besteht in der Rationalisierung und Objektivierung. Eben dazu muss er mit einem Bein im Irrationalen stehen. Sowohl Heisenberg als auch Pauli war dies wohl bewusst. Bei Pauli äußert sich dieses Bewusstsein in seiner bekannten Neigung zur Psychologie. Dabei wendet er sich nicht irgendeiner beliebigen zu, sondern gerade derjenigen von C.G.Jung, die einen besonders ausgeprägten Hang zum Irrationalen hat. Heisenberg zollte der unbekannten Quelle der Intuition Tribut, indem

[15]siehe Abschnitt 5.6.5

[16]Die Tendenz zur Abkopplung und das Entstehen einer separaten Ebene, in der das Medium selbst Gegenstand der Betrachtung wird und seine Neutralität verliert, scheint ein universelles Phänomen zu sein, welches sich von der Physik bis in die Ökonomie und Soziologie erstreckt. Eine weitere Diskussion würde aber zu weit vom Thema abschweifen; siehe dazu auch eine kurze Bemerkung in Abschnitt 10.2

er sich mit der philosophischen Reflexion der Naturwissenschaft beschäftigte. Im Grunde *war* Heisenberg Philosoph. Dies zeigt sich in seinen Vorträgen und Interviews, die sich durch die Kraft originellen und echten Fragens auszeichnen, die das Kennzeichen wahren Philosophierens ist.

Kapitel 10

Entwurf eines Gesamtbildes

10.1 Eine Dreiecksgeschichte

Wir sind nun vorbereitet, die einzelnen zusammengetragenen Bestimmungstücke zu einem Ganzen zusammenzufügen. So wie drei Punkte eine Ebene bestimmen, so könen wir versuchen, aus den Herangehensweisen Diracs, von Neumanns und Heisenberg-Paulis (die hier der Einfachheit halber zusammen betrachtet werden sollen) einen Gesamteindruck der Mathematik in der Physik zu erhalten. Den drei Punkten entsprechend erhalten wir drei Geraden, die je zwei Punkte verbinden. Diese Geraden symbolisieren die Liste der Gemeinsamkeiten, die sich zwischen je zwei Charakteren ergeben und den dritten betont ausschließen. Diese Diskussionen „auf der Geraden“ wurden größtenteils in den Einzelkapiteln geführt und sollen hier zur „Gesamtebene“ zusammengefasst werden – wobei durch die Gesamtschau nochmals neues und tieferes Verständnis angesterebt wird.

10.1.1 Dirac – Heisenberg und Pauli

Betrachten wir zuerst die Achse, die von Heisenberg und Pauli zu Dirac verläuft. Diese Linie konstituiert offenbar die Grenze zwischen Mathematik und Physik als zwei Disziplinen. Was die Physiker von dem Mathematiker von Neumann vor allem unterscheidet, soll nun herausgearbeitet werden.

Den Physikern gemeinsam ist die durchgehaltene Präsenz der im Formalismus gemeinten Physik. Dieses ist bei Pauli und Heisenberg deutlich, da sie betont inhaltlich argumentieren und sich vom Formalistischen abgrenzen. Gerade Pauli ist ein Vertreter der Unterscheidung von mathematischer Form und physikalischem Gehalt, bei der er dann die inhaltliche Position einnimmt.

Bei Dirac nimmt zwar das Formalistische eine betonte Eigendynamik an, aber es ist bei ihm immer *physikalischer* Formalismus. In ihm wird direkt die mathematische Qualität der Natur geformt. Dieses wurde als Einheit von Form und Gehalt interpretiert. Dadurch kann man nicht sagen, Dirac gleite ins Formalistische ab; vielmehr bleibt die Physik nicht *durch* den, sondern *als* der Formalismus selbst präsent. Die Eleganz des Formalismus beeinträchtigt nicht seine Durchsichtigkeit sondern ist eher eine Übersteigerung derselben.

Ein weiterer Aspekt der dauernden Präsenz von Physik wurde in Abschnitt 6.2.3 aus der Sicht der Mathematiker geschildert. Dort ergab sich, wie die inhaltliche Argumentation der Physiker mit sich bringt, nicht dem gewählten formalen Kontext treu bleiben, sondern zwischen den Kontexten springen. Aber auch hier zeigt sich wieder der Unterschied zwischen der rein inhaltlichen Argumentation Paulis und der inhaltlich-formalen Diracs. Während Paulis Ad-hoc-Argumente einem Sprung vom formalen zum inhaltlichen Kontext bedeuten, finden wir bei Dirac in seinen Analogieschlüssen eher ein Springen zwischen verschiedenen formalen Kontexten.

Insgesamt können wir bei Dirac trotz der Präsenz des physikalisch Gemeinten im Formalen viel weniger von einem rein inhaltlichen *Schluss* sprechen als etwa bei Pauli. Während Pauli streng inhaltlich aus der Sache heraus argumentiert, ist der Analogieschluss Diracs offenbar eine der Sache äußerliche Schlussweise, und damit rein *formal* (in diesem Sinne). Genaugenommen ist die Anschaulichkeit sogar erst möglich aufgrund dieses formalen, äußeren Charakters. Während die inhaltliche Argumentation Paulis direkt aus der Sache argumentiert und sie ungefiltert so darstellt, wie sie ist, erhält man bei Dirac eine besondere Anschaulichkeit durch den Analogieschluss, der die Sache durch Verbildlichung darstellt. *„Inhaltlich“ bedeutet nicht „anschaulich“.* Anschaulich wird etwas durch die Bereitstellung einer einfachen Analogie, einer Metapher oder eines Bildes. Die inhaltliche Argumentation ist die möglichst schlichte Darlegung einer Sache, die anschauliche Argumentation benutzt Analogien und Bilder, um das Gemeinte unmittelbar einsichtig zu machen. Analogien sind nie inhaltlich, dienen aber der Anschauung.
Deshalb konnte Dirac, wie in Kapitel 5 gezeigt, die Anschaulichkeit bis hin zum rein Formalen ausweiten, wofür der Begriff „algebraisch-anschaulich“ geprägt wurde.

10.1.2 Pauli und Heisenberg – von Neumann

Pauli und von Neumann verkörpern auf je eigene Art den Charakter der Strenge. Von Neumann die mathematische Strenge, die, wie wir gesehen hatten, die phänomenologische Strenge gleichzeitig erzeugt. Pauli geht von der physikalischen Strenge aus, und bleibt auch mathematisch jederzeit korrekt. Diese Strenge wiederum unterscheidet beide von Dirac. Denn die strenge Argumentation verbietet gerade das Argumentieren aus Analogieschlüssen. Der Analogieschluss ist äußerlich und sieht gerade von den speziellen Eigenschaften des betrachteten Dinges ab. Pauli und von Neumann nehmen aber genau die Eigenarten und Verschiedenheiten der Dinge in den Fokus – Pauli in seiner exakten Argumentation aus dem physikalischen Kontext, von Neumann mit seinen exakten mathematischen Unterscheidungen. Pauli und von Neumann argumentieren beide streng aus der Sache heraus, wobei der Unterschied darin besteht, was sie eigentlich für die Sache halten.
Die unterschiedliche Einstellung, was Sache sei, wird angezeigt durch das Begriffspaar inhaltlicher – formaler Schluss. Zunächst ist festzuhalten, dass beide die *Unterscheidung* von Form und Gehalt teilen. Sie beziehen lediglich unterschiedliche Positionen und definieren dann ihre eigene als „richtig“[1].

Während Pauli der Meister inhaltlichen Schließens ist, und seine Arbeiten durchweg die permanente „mathematische Ansetzung eines physikalischen Phänomens“ praktizieren, sucht von Neumann gerade den inhaltlichen Schluss zu vermeiden bzw. in seine Kom-

[1] Vermutlich liegt gerade daran, dass Dirac über diese Unterscheidung hinausging, dass er auf viele Physiker und Mathematiker so verwirrend wirkte.

ponenten zu zerschlagen. Dadurch bezieht sich die Strenge von Neumanns auf die Gestaltung eines einheitlichen mathematischen Kontextes. Während Pauli den physikalischen Kontext *hinter* dem Formalismus sucht, sucht von Neumann diesen *in* dem Formalismus. Diese eigenständige wissenschaftliche Mathematik ist für Pauli dann das *bloß* Formale, da sie keinen physikalischen Gehalt *an sich* mehr hat.

Heisenberg und von Neumann präsentieren zusammen die phänomenologische Grundeinstellung der Quantenmechanik. In Abschnitt 6.4.3 wurde deutlich, dass von Neumann mit seiner präzis-detailliert mathematischen Art das formale Gegenstück zu der präzisen begrifflichen Analyse des physikalischen Phänomens bei den Kopenhagenern bereitstellt. Von Neumanns Mathematik erscheint als die genuine Verwirklichung der Kopenhagener Philosophie der Quantenmechanik.

10.1.3 von Neumann – Dirac

Dirac und von Neumann verkörpern dagegen die Achse, der es um die Eigenständigkeit und Stimmigkeit des Formalismus geht. Wir sehen nun durch die Abgrenzung zu Pauli noch deutlicher die schon in Kapitel 7 besprochene Hauptgemeinsamkeit von Dirac und von Neumann: Beide gehen auf ihre Weise der Mathematik und dem Formalismus um seiner selbst willen nach. Der Formalismus selbst gelangt zu zentraler Wichtigkeit. Die innere Stimmigkeit des Formalismus war dann das Hauptmerkmal für seine Wahrheit, und die durch die innere Stimmigkeit herbeigeführte Abgschlossenheit das Kriterium für seine Gültigkeit *für sich*. Auch wenn sich die innere Stimmigkeit und Abgeschlossenheit in ganz unterschiedlichen Modi äußert[2], so ist doch ein deutlicher Unterschied zu Heisenberg und Pauli zu erkennen, die gerade die Abgeschlossenheit für eine große Gefahr halten, da damit eine Abkoppelung vom physikalisch Gemeinten einhergeht.
Die Abgeschlossenheit der Formalismen von Neumanns und Diracs konnte aber begründet werden mit der Forderung nach Eigenständigkeit der Theorie, damit sie über das Subjekt hinausweise. Bei von Neumann begegnete der Drang nach Eigenständigkeit als gesteigerte Objektivierung der Aussagen der Physik. Bei Dirac erschien dieses „Für-sich-Gelten" als Drang nach künstlerischer Vollendung.
Zusammenfassend: Dirac und von Neumann bearbeiten und betrachten den Formalismus für sich (stellen ihn ins Zentrum der Betrachtung), da der Formalismus eben für sich (durch sich allein als solcher) gelten soll. Dieses „Gelten für sich" tritt im Modus der Objektivierung und im Modus des Kunstwerkes auf.

10.2 Mathematik als Medium

Drei Punkte bestimmen bekanntlich eine Ebene. Diese Ebene ist der Raum in dem das Verhältnis von Mathematik und Physik stattfinden kann; er ist die Bühne, auf der sich das „Drama von Mathematik und Physik"[3] abspielt. Die aufgespannte Ebene lässt sich am besten durch die Formel der „Mathematik als Medium" zusammenfassen. Wie sich das bisher Gesagte unter diesem Begriffe einheitlich darstellt, soll, Wiederholungen nicht

[2]Selbstkonsistenz versus Eleganz
[3]Hermann Weyl

scheuend, an dieser Stelle erläutert werden. Damit kommen dann die interpretierenden Betrachtungen zur Rolle der Mathematik zum Abschluss.

Geist und Natur

Physik sucht die Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten in der Natur. Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten sind wiederum nicht selber in der Natur vorkommende Dinge. Sie regeln das Zusammen, das Mit- und Nacheinander der vorkommenden Dinge. Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten sollen einerseits objektiv sein, d.h. sie sollen zwischen den Dingen selbst gelten. Andererseits bedürfen die Gesetzmäßigkeiten in irgendeiner Form des menschlichen Geistes. Denn *wo* außerhalb des menschlichen Geistes finden sich Naturgesetze? Die Naturgesetze sind offenbar nicht vorhandene Dinge in der Natur. Sie sind Konzepte und damit etwas, was vom „Subjekt“ her in die Natur *hinein*gelesen wird.

Naturgesetze sind als solche offenbar mathematische Strukturen. Mathematik ist einerseits objektiver als jede empirische Wissenschaft, da sie keinen bezweifelbaren weltlichen Input benötigt. Andererseits kann ihr kaum eine Existenz außerhalb des menschlichen Geistes zugesprochen werden – sie ist also auch subjektiver als jede empirische Wissenschaft. Während man sich den materiellen Inhalt des Universums auch ohne menschlichen Geist vorstellen könnte[4], wird es *sehr* schwer zu bedenken, welche Existenzform z.B. Zahlen in einem bewusstseinsfreien Universum hätten. Existieren Zahlen, wenn niemand existiert, der zählen kann? Die Mathematik ist objektiv, gerade weil sie nicht dem weltlichen entnommen ist. Aber wenn sie nicht weltlich ist, wie kann sie dann objektiv sein?

Die mathematische Struktur ist offenbar nicht innerhalb der Unterscheidung von Subjekt und Objekt zu fassen. Auf dem Hintergrund einer mehr oder weniger radikal gedachten Polarität von Subjekt und Objekt erscheint ein „weder hier noch dort“ ganz natürlich zunächst neutral als „in der Mitte liegen“. Die Mathematik erscheint zuerst als *Medium.*

Drei Möglichkeiten des Umgangs mit der Mathematik als Medium

Die Bedeutung der „Mitte“ wandelt sich ganz entscheidend mit der Art und Weise, wie die Enden bzw. Pole der Relation betrachtet werden.
In der geläufigsten Bedeutung erscheinen das Subjekt und alles Objektive als deutlich unterschieden; dies ist die Grundunterscheidung mit höchster Priorität. Das Medium ist dann als Zwischenraum, Über- und Vermittler gedacht. Das Medium bezeichnet die weiterhin gegebene Möglichkeit gegenseitiger Einflussnahme: Als „Werkzeug“ manipuliert das Subjekt Objekte, andersherum ermöglicht das Medium als Übermittler von Information dem Subjekt die Wahrnehmung der Welt. Die Erkenntnis hat eine Von-Für-Struktur: Erkenntnis *von* den Dingen *für* den Menschen. Das Medium ist Hinweis-auf oder Beschreibung-von Vorhandenem. Durch die Beschreibung hindurch muss die Erstreckung zum Gemeinten durchmessen werden.

Dieser Begriff des Mediums enthält damit eine eigene innere Spannung. Einerseits wird vom Medium die unaufdringliche Durchsichtigkeit verlangt, andererseits würde ein

[4]obwohl man auch darüber streiten könnte

vollständig klares und perfekt durchsichtiges Medium keinerlei innere Eigenschaften aufweisen – womit der Begriff des Mediums vollkommen überflüssig würde. Damit das Medium als Medium bekannt sein kann, muss es einige wenige innere Eigenschaften mitbringen. Sind es zu viele, kann es, als in der Mitte liegendes, zum Hindernis und Störfaktor werden. Um einmal ein nicht-optisches Beispiel zu wählen, sei hier die Beziehung der Luft zum Fliegen genannt: Genauso wie die Luft Medium des Vogelfluges ist und das Fliegen allererst ermöglicht, bremst und behindert sie doch gleichzeitig den Flug. Die inneren Eigenschaften des Mediums sind also einerseits die Vorraussetzung der Durchlässig- oder Tragfähigkeit des Mediums, andererseits äußern sich diese Eigenschaften gerade als Störung und Hindernis der Vermittlung. Das Medium muss gerade die Mitte finden zwischen allzu vielen und allzu wenigen inneren Eigenschaften.
Diese Art der Selbstbegrenzung macht den janusköpfigen Charakter des Mediums aus. Das Medium lebt als solches in der Mitte zwischen den Polen der Nicht-Existenz und Dingheit.

Aus dieser Polarität ergeben sich drei verschiedene Umgangsweisen mit der Mathematik als Medium: Bei von Neumann findet sich der Impuls der Auflösung der Spannung durch den Versuch der vollständigen Objektivierung, also der Vergegenständlichung des Mediums. Dirac löst die Spannung durch den Rückzug auf das im Medium verbundene Ganze. Bei Pauli finden wir dagegen ein betontes Aushalten der Spannung durch den Versuch, die Mathematik wirklich in der Mitte zu halten.

Pauli Die ausgehaltene Spannung äußert sich bei Pauli schon in seiner emotionalen Beziehung zur Mathematik. Paulis Streitsüchtigkeit und Unzufriedenheit in mathematisch-physikalischen Belangen erscheint so als Äußerung der in der theoretischen Physik sachlich angelegten Erkenntnisstruktur. Denn als reine Mathematik ist die Mathematik ein Störfaktor und verbirgt die Physik, aber in unreinem Gebrauch verdreckt sie die Klarheit des Mediums, wie das im Ausdruck von der „Rauchwolke aus rechnerischer Virtuosität“[5] zum Ausdruck kommt. Die Mathematik als Medium ähnelt einer Glasscheibe, über die man sich dauernd ärgert, weil sie entweder so blank geputzt ist, dass man vor lauter Glitzern und Spiegeln nicht hindurchgucken kann, oder aber so dreckig, dass man sowieso nichts sieht. In beiden Fällen schaut man *auf* das Medium statt hindurch, und gelangt nicht zu einer Klarheit über das, was einen eigentlich jenseits des Mediums interessiert.

Von Neumann Während Pauli die Mathematik als Medium erfährt, und er dadurch das Medium tatsächlich und wörtlich in der Mitte halten muss – einerseits die Reinheit des Mediums bewahrend aber nicht in die Fokussierung des Mediums abgleitend – versuchen sich von Neumann und Dirac an der Überwindung des Mediums, allerdings an entgegengesetzten Polen.
Bei von Neumann rücken die mathemtischen Zusammenhänge als solche ins Zentrum des Interesses. Dieses entspricht einer Konsolidierung des Mediums als objektives Ding mit eigenständigem Interesse. Als solches in der Mitte stehend, sieht es aus, als stünde die Mathematik nun der physikalischen Erkenntnis *im Wege*, und genauso wurde es von vielen Physikern auch wahrgenommen. Allerdings zeigte die Diskussion in Kapitel 6, wie sich gleichzeitig mit der Objektivierung auch der Begriff von „in der Mitte“ ändert. In

[5] Pauli über Schwinger, siehe im Pauli-Kapitel

der Zerschlagung des inhaltlichen Schlusses zeigte sich die mathematische Struktur gerade als der Zusammenhang des physikalisch Zusammenhängenden. Der objektive, also von menschlicher Beobachtung und Teilnahme unabhängige Zusammenhang *ist* mathematisch. Damit ist die mathematische Darstellung nicht mehr Vermittler von irgendetwas, sondern unmittelbar das Gesuchte selbst.

Dirac Auch bei Dirac löst sich die eigentümliche Spannung des Mediums auf. Dirac geht zurück auf die Ganzheit, auf der sich die Spannung entfalten kann. Die Erfahrung des Mediums als offener Raum, der die Begegnung von Verschiedenem ermöglicht, bezeichnet die Existenz einer gemeinsamen Welt, in der Subjekte und Objekte zwar unterschieden werden können, aber nicht *getrennt* sind. Wird das Medium in diesem Sinne nicht mehr als bloßer Vermittler, also Raum-Überbrücker und Raum-Füller, sondern fundamentaler als Raum-Geber gedacht, so eröffnet sich die bei Dirac angetroffene Möglichkeit der Einheit von mathematischer Form und physikalischem Gehalt im eleganten Formalismus. Dadurch ergibt sich ein *unmittelbarer* Zugriff auf den physikalischen Zusammenhang, und der Begriff des Mediums löst sich auf.
Im eleganten Formalismus steht die Mathematik zwar im Zentrum des Fragens, aber *ohne* sie zu objektivieren. Die funktionalen und medialen Aspekte bleiben in der Eleganz in gewisser Weise erhalten, werden aber eingebettet in ein größeres Ganzes, welches in der künstlerischen Vergegenständlichung zur Begegnung gebracht wird.
Die Mathematik ist, ganz wie ein Kunstwerk, weder subjektiv noch objektiv. Sie verbleibt nicht einfach Medium, sowenig wie ein Kunstwerk ein bloßer Vermittler für eine „Aussage" oder Botschaft ist. Genausowenig wird die Mathematik bei Dirac Abbildung – wie auch ein Kunstwerk nicht die Abbildung von Vorhandenem ist. Weder Portraitmalerei, noch Bildhauerei, ja nicht einmal Fotografie, sofern sie *Kunst* sein soll, bildet einfach nur das Vorhandene ab. Vielmehr gibt uns Dirac ein Beispiel, wie der künstlerische Aufenthalt bei der Sache diese als solche bewusst machen kann und sie frei als sie selbst begegnen lässt.

Kapitel 11

Distributionen in der Quantenfeldtheorie

Mit der Entwicklung der Quantenfeldtheorie rückte die δ-Funktion noch stärker ins Zentrum der Physik. Wie bei der Besprechung zu Paulis Beiträgen zur Quantenfeldtheorie in Kapitel 8 deutlich wurde, rutschte die δ-Funktion (bzw. die relativistische Pauli-Jordan-Funktion) durch ihr Auftreten in den Vertauschungsrelationen ins logische Zentrum der Theorie. Da es für das Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen keinen einheitlichen Kanon gab, waren Probleme in der mathematischen Ausarbeitung der Theorie vorprogrammiert.

Die fundamentale Wichtigkeit und Allgegenwärtigkeit der verallgemeinerten Funktionen in der Quantenfeldtheorie führt naturgemäß auf zwei Fragen: Welche physikalische Notwendigkeit steckt in dem Auftreten gerade dieser Objekte im Formalismus? Und die alte Frage neu gestellt: Welche Mathematik steckt eigentlich hinter den verallgemeinerten Funktionen, so dass man die Rechnungen mit mathematischer Präzision durchführen kann?

Die erste Frage wurde im Großen und Ganzen durch die klassische Arbeit von Bohr und Rosenfeld[1] beantwortet, der wir uns in 11.1 zuwenden werden. Die Autoren zeigen dort, wie die fundamentalen quantentheoretischen Bedingungen der Messbarkeit auf einen Formalismus führen müssen, in dem die fundamentalen Objekte durch eine Integration verschmiert werden müssen.

Die zweite Frage wurde durch Laurent Schwartz' Theorie der Distributionen gelöst. Diese Theorie wurde in manchen Kreisen theoretischer Physiker rasch aufgenommen und schon 1955[2] schreibt Wightman, es sei „well known", dass die Vakuumerwartungswerte von Produkten von Feldern „Distributionen im Sinne von L.Schwartz" seien. In 11.2 und 11.3 sollen frühe Anstrengungen dokumentiert werden, wie die Theorie der Distributionen als mathematisch korrekte Implementierung dieser physikalischen Prinzipien in der Physik aufgenommen wurde. Dieser Themenkreis zerfällt wiederum in zwei Teilgebiete. In 11.2 werden die Arbeiten besprochen, die in den 50er Jahren im Anschluss an die physikalische Analyse von Bohr und Rosenfeld versuchten, die Grundlagen der Quantenfeldtheorie in mathematisch konsistenter Form, also insbesondere unter Verwendung des vollen Begriffs der Distribution, darzustellen. Hervorzuheben sind hier insbesondere die Arbeiten

[1] [Bohr und Rosenfeld 1933]
[2] [Wightman 1956]

zur axiomatischen Feldtheorie von A.S. Wightman. Der zweite Themenkreis zeigt in 11.3 Versuche, durch die Benutzung der Schwartzschen Theorie die Divergenzprobleme in der Quantenfeldtheorie zu beseitigen. Anfang der 50er Jahre zeigten vor allem die Arbeiten [Güttinger 1953] [Stückelberg und Petermann 1953] und [Bogolubov und Shirkov 1955][3], wie die mathematischen Probleme der Divergenzen und der Renormierung durch ein korrektes mathematisches Vorgehen in neuem Licht erscheinen.

11.1 Der physikalische Grund

> Wir wollen minder gepriesen und fleißiger gelesen sein.
>
> *Lessing*, zitiert von Rosenfeld als Kommentar zur Wirkung des Artikels

1931 zeigte Heisenberg[4], dass die Energiefluktuationen im elektromagnetischen Feld unendlich werden können, auch wenn keine unendliche Nullpunktsenergie auftritt. Das Zeitmittel der Energie in einem Volumen V

$$\frac{1}{T}\int dt \int_V d^3x H(x)$$

ist nur dann endlich, wenn das Volumen nicht scharf begrenzt ist.

> Zu jeder Messung einer quantentheoretische Größe ist ein Eingriff in das zu messende System nötig, der das System unter Umständen empfindlich stört. Die Messung der Strahlungsenergie in einem mathematisch scharf begrenzten Teil eines Hohlraumes wäre nur möglich durch einen „unendlichen“ Eingriff und ist deshalb eine nutzlose mathematische Fiktion. Ein praktisch durchführbares Experiment kann jedoch nur die Energie in einem Bereich mit *verwaschenen* Grenzen liefern [...]
>
> *[Heisenberg 1931]*

Heisenberg gibt damit einen ersten deutlichen Hinweis auf die physikalisch nicht hintergehbare Notwendigkeit des Verwaschens bzw. Verschmierens der physikalischen Größen, der dann in [Bohr und Rosenfeld 1933] systematisch untersucht wurde.
Bohr und Rosenfeld saßen zwei Jahre an ihrer Arbeit über die Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen. Sie stellen sich der Frage, inwieweit die Prinzipien der Quantentheorie sich in der Feldtheorie auswirken. Dass eine formal korrespondenzmäßige Beschreibung in der Feldtheorie möglich war, wurde ja schon von Heisenberg und Pauli[5] gezeigt. Eine eigene Analyse der Messbarkeit in der Feldtheorie und deren Kompatibilität mit den Vertauschungsrelationen, wie sie etwa Heisenberg in der Quantenmechanik mit der Unschärferelation anstellte, gab es aber noch nicht.

> Zusammen mit Rosenfeld habe ich im Herbst die Sache eingehender untersucht, und wir sind zu dem Ergebnis gekommen, daß volle Übereinstimmung zwischen der prinzipiellen Begrenzung der Meßbarkeit elektromagnetischer Kräfte und den Vertauschungsrelationen der Feldkomponenten in dem Formalismus besteht.
>
> *Bohr an Pauli, 25.1.33 [Pauli 1979] S.155*

[3]die allerdings nicht auf eine Verbindung ihrer Ideen zu Schwartz oder Sobolev hinweisen
[4][Heisenberg 1931]
[5][Heisenberg und Pauli 1929]

Bohr und Rosenfeld beschreiben, wie die klassische Idee des Feldes mit in jedem Raumzeitpunkt definierten Feldkomponenten auf der Idealisation beruht, das Feld sei durch Punktladungen auszumessen. In der Quantenmechanik muss demgegenüber beachtet werden, dass die Messungen in Wirklichkeit nur mit hinreichend grossen Probekörpern gemacht werden können, welche nur Mittelwerte in bestimmten Raum-Zeit-Gebieten ausmessen können. Die klassische Idee des Feldes als punktweise definiertem Objekt ist, da dieser Begriff prinzipiell nicht zu beobachten ist, nicht eins zu eins in die Quantentheorie übertragbar.

> Dieser Umstand findet seinen sinngemäßen Ausdruck gerade im quantenelektromagnetischen Formalismus, in welchem die Feldgrößen nicht mehr durch eigentliche Punktfunktionen dargestellt werden, sondern durch Funktionen von Raumzeitgebieten, die formal den Mittelwerten der idealisierten Feldkomponenten über die betreffenden Gebiete entsprechen.
>
> *[Bohr und Rosenfeld 1933]*

Dem punktweise definierten Feld bleibt eine rein formale Bedeutung, da sich die fundamentale physikalische Größe noch als Mittelwert über punktweise definierte Funktionen darstellen lässt.

Das Auftreten der δ-Funktion in den Vertauschungsrelationen der Feldstärken baut diesen Gedanken von vornherein in den Formalismus ein:

> Eben im Auftreten der [...] δ-Funktion in den Vertauschungsrelationen kommt die bereits erwähnte Tatsache zum Vorschein, dass die quantentheoretischen Feldgrössen nicht als eigentliche Punktfunktionen zu betrachten sind, sondern erst Raumzeitintegralen über die Feldkomponenten ein eindeutiger Sinn zukommt.
>
> *[Bohr und Rosenfeld 1933]*

Bohr drückt hier aus, dass die δ-Funktion in ihrem vollen Sinn genommen, also mit der Anweisung zur Integration, die physikalische Grundtatsache beschreibt, dass aufgrund der Unschärfe die Mittelwerte der Feldkomponenten in der Quantenfeldtheorie die theoretischen Grundeinheiten sind.
Die nachfolgende Analyse zeigt in allen Einzelheiten, was bei einer Messung von Feldern grundsätzlich beachtet werden muss und wie sich die quantenmechanischen Prinzipien auf dieses Problem übertragen. Das Komplementaritätsprinzip zeigt sich zum Beispiel in der „gegenseitigen Ausschliessung der genauen Kenntnis der Lichtquantenzusammensetzung eines elektromagnetischen Feldes und der Kenntnis des Mittelwerts irgendeiner seiner Komponenten in einem wohldefinierten Raumzeitgebiet.“ Denn die Kenntnis der Lichtquantenzusammensetzung geht durch die Feldwirkung des Probekörpers, der das Feld ausmessen soll, verloren.
Die Bohrschen Betrachtungen führen insgesamt zu einem Nachweis der Übereinstimmung des feldtheoretischen Formalismus mit den messtheoretischen Prinzipien der Quantenphysik. Die „Schlussbemerkung“ fasst folgendermaßen zusammen:

> Wir kommen also zu der [...] Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie der Felder in Bezug auf die Messbarkeitsfrage eine widerspruchsfreie Idealisation darstellt in dem Umfang, in dem wir von allen Einschränkungen, die auf der atomistischen Struktur der Feldquellen und der Messinstrumente beruhen, absehen können. Eigentlich dürfte dieses Ergebnis [...] anzusehen sein als unmittelbare Konsequenz der

> gemeinsamen korrespondenzmässigen Grundlage des quantenelektromagnetischen Formalismus und der Gesichtspunkte, von welchen die Prüfungsmöglichkeiten dieses Formalismus zu beurteilen sind. Nichtsdestoweniger dürfte der etwas komplizierte Charakter der zum Nachweis der völligen Übereinstimmung zwischen Formalismus und Messbarkeit herangezogenen Betrachtungen kaum zu vermeiden sein. Erstens sind ja die an der Messanordnung zu stellenden physikalischen Forderungen bedingt durch die in Integralform gekleideten Aussagen des quantenelektromagnetischen Formalismus, wodurch die besondere Einfachheit der klassischen Feldtheorie als reiner Differentialtheorie verloren geht. Weiter erfordert die Deutung der Messergebnisse und ihre Verwertung anhand des Formalismus, wie wir gesehen haben, die Berücksichtigung von gewissen in den Messproblemen der unrelativistischen Quantenmechanik nicht auftretenden Zügen der komplementären Beschreibungsweise.
> *[Bohr und Rosenfeld 1933]*

Diese Erörterungen enthalten substantiell Neues und Anderes im Vergleich zu früheren Überlegungen von Heisenberg einerseits und Landau und Peierls andererseits, und erlangten schnell den Status eines Klassikers. Auf diesem Gebiete der physikalischen Argumentation war Bohr weiterhin die maßgebliche Autorität, und das Eingangszitat zeigt, dass sich die Autoren sogar etwas mehr Kritik gewünscht hätten.
Im Anschluss an diese Arbeit erschien 1950 ein zweiter Teil, der die gewonnen Erkenntnisse noch einmal im Lichte der neuen Renormierungstheorie beleuchtete[6] und auf Phänomene höherer Ordnung verallgemeinerte.

Mit der Arbeit von Bohr und Rosenfeld war endgültig klargeworden, dass die Merkwürdigkeiten der Mathematik der δ-Funktion und anderer verallgemeinerter Funktionen in der grundlegenden physikalischen Situation wurzelten, die sich direkt aus dem Verhältnis des Physikers zur Natur ergaben. Aus dieser Tatsache heraus ergeben sich hinsichtlich des Gebrauchs verallgemeinerter Funktionen zwei mögliche Gesichtspunkte:

1. Die physikalische Begründung der verallgemeinerten Funktionen bestärkt die Tendenz zu einem intuitiven, physikalischen Gebrauch. Sie sind nun ganz eingebettet in einen globalen physikalischen Kontext womit ein physikalisch-anschaulicher Leitfaden zu ihrer Manipulation bereitsteht. Ein konsistenter mathematischer Kontext wird damit endgültig uninteressant. Urbild hierfür ist das Verhalten Paulis, wie es vor allem in seiner Reaktion auf Schwingers Arbeit und in seiner brüsken Ablehnung der Theorie der Distributionen zu Tage getreten ist.

2. Aber auch die gegenteilige Konsequenz liegt nahe: Da es sich um die eigentliche Grundlage der Theorie handelt, wird eine mathematisch korrekte Formulierung immer dringlicher. Gerade weil das punktweise definierte Feld zu einer bloßen Formalität degradiert wird, ist es besonders wichtig, die physikalischen Grundbegriffe eigenständig und ohne prinzipiellen Rückgriff auf den immer noch halbklassischen Begriff des „Mittelwerts eines Feldes“ richtig zu definieren. Von diesem Standpunkt her stellt der Begriff der Distribution einen entscheidenden Fortschritt dar. Bekanntester Repräsentant dieser Gruppe ist sicherlich A.S. Wightman, der schließlich eine axiomatische Formulierung der Quantenfeldtheorie angeben konnte.

[6] [Bohr und Rosenfeld 1950]

Wir wollen uns nun zum Abschluss der Arbeit dem zweiten Gesichtspunkt zuwenden. Mit den nun zu besprechenden Anfängen des Gebrauchs des vollen Begriffes der Distribution bekommt die Geschichte der verallgemeinerten Funktionen in der Physik eine weitere Dimension. Physikhistorisch kann man jedoch nicht vom Eintritt in eine „neue Phase“ reden, da der bisher geschilderte prätheoretische Gebrauch in der Physik weiterhin den üblichen Standard darstellte.

Die Diskussion des Gebrauchs des vollen Begriffes der Distribution in der Quantenfeldtheorie zerfällt dabei in zwei Teile: Erstens konnte mit der neuen Theorie die logische Grundlage der Feldtheorie definiert werden. Die Theorie der Distributionen etablierte sich als diejenige mathematische Theorie, mit der die von Bohr beschriebene quantentheoretische Grundgegebenheit des „Verschmiertseins“ der Felder in angemessener Form dargestellt werden konnte. Distributionen traten daher als Grundobjekte einer axiomatischen Formulierung der Quantenfeldtheorie auf. Diese Entwicklung wird in Abschnitt 11.2 besprochen.
Zweitens konnten die Divergenzprobleme der Physik auf bestimmte Rechenoperationen mit Distributionen zurückgeführt werden. Es gelang damit eine formale Identifizierung des Renormierungsproblems. Die explizite Verwendung des Distributionenkalküls erfolgte dabei hauptsächlich in einer Forschungslinie, die summarisch als „kausale Störungstheorie“ bezeichnet werden kann. Dieser Themenkreis wird Abschnitt 11.3 ausmachen.

11.2 Die Grundlagen der Quantenfeldtheorie

11.2.1 Kurze historische Skizze

> [...] the fact that intuition hardly can guide us, forces us to use standards of rigor usually frowned upon in theoretical physics.
>
> *[Jost 1965]*

Die Tatsache, dass die Intuition fehlbar ist und nicht die von der Wissenschaft erforderte Sicherheit der Erkenntnis gewährleistet, wurde in Kapitel 6 ausführlich diskutiert. Mit der Entwicklung und dem Wachstum der Physik entstand auch eine Nische für diejenigen, die sich auf die mathematische Korrektheit der Formulierung der Theorie spezialisieren konnten. In der Tradition der Arbeiten Eugene Wigners[7] etablierten sich eine Generation später einige herausragende Köpfe, deren Standards von Korrektheit sich durchaus mit denen der reinen Mathematik messen können, deren Arbeiten aber dennoch eindeutig als „Physik“ charakterisiert werden können.
Arthur S. Wightman war direkter Schüler Wigners und erreichte als erster eine axiomatische Formulierung der Quantenfeldtheorie. Die Gruppe von Physikern, die sich bei Wigner einfanden, wurde von Pauli als „Wigner-School“ bezeichnet[8].

[7]Eugene Wigner war ursprünglich Ungar und von Jugend auf mit von Neumann befreundet. Später wurde er Schwager Diracs. Wigner gehörte gleichen Göttinger Generation wie Heisenberg und Pauli und lehrte später in Princeton. Die Einführung der gruppentheoretischen Methoden in die Physik ist neben Weyl vor allem Wigner zu verdanken. 1939 legte er mit seiner Arbeit „On Unitary Representations of the inhomogeneous Lorentz Group“ [Wigner 1939] den Grundstein zu einer Klassifikation der möglichen Objekte einer physikalischen Theorie durch die verschiedenen Strahldarstellungen der Lorentzgruppe. Damit öffnete sich das erste Tor zu einer axiomatischen Charakterisierung der Physik.

[8]was allerdings deren Widerwillen erregte.

Eine andere Gruppe von ähnlich orientierten Physikern sammelte sich in den 50ern bei Heisenberg in Göttingen. Darunter Rudolf Haag, der „father of local quantum physics“[9], Harry Lehmann und andere mehr. Sie beschäftigten sich vor allem mit der Frage, ob nicht die Quantenfeldtheorie so formulierbar wäre, dass man keinen Umweg über die Divergenzen machen müsste und von vornherein und dauernd mit endlichen Größen rechnen könnte. Pauli nannte Lehmann, Symanzik und Zimmermann „Heisenbergs Zauberlehrlinge“,

> die die schwierige Aufgabe haben, die schlampige Mathematik ihres Meisters in Ordnung zu halten.
>
> *Pauli an Källen 25.2.55 [Pauli 1979] V*

Gunnar Källen und Res Jost gingen dagegen aus dem engeren Kreis um Pauli hervor.

> Die gängige Physik verstörte mich, und ich verstörte die „richtigen“ Physiker mit ihren undurchsichtigen Approximationen und den breitbeinigen Behauptungen [...].
> ...
> In diese Verwirrung strahlte ein schwaches klärendes Licht einer mehr axiomatischen Richtung, deren Ursprung in Göttingen und an der Universität Princeton zu finden ist und die von anerkannten Grundlagen aus mit sicherern Schlußweisen das Zusammenhängende vom Widersprüchlichen zu trennen versuchte.
>
> *[Jost 1984]*

Im unserem Zusammenhang ist die Arbeit von A.S. Wightman und L. Garding zur axiomatischen Formulierung der Quantenfeldtheorie von vorrangigem Interesse. Wightman und Garding arbeiteten seit Beginn der 50er Jahre an der axiomatischen Formulierung der Feldtheorie, und machten sie auf Vorträgen publik. Als zusammenfassender Artikel erschien die Arbeit aber erst 1964[10]. Vorweg gestellt ist daher eine Arbeit aus dem Jahre 1956, in der W. Schmidt und K. Baumann aus Wien ihre Version der Axiomatisierung veröffentlichten.

11.2.2 Schmidt und Baumann: „Quantentheorie der Felder als Distributionstheorie“

[Schmidt und Baumann 1956] bewerten die Verwendung des Distributionsbegriffes als essentiell für die mathematisch richtige Formulierung der Theorie:

> Es gibt bisher anscheinend keine allen Anforderungen mathematischer Strenge genügende Formulierung der Quantenfeldtheorie. Die Darstellung von Friedrichs dürfte nicht leicht auf Felder mit Wechselwirkung zu verallgemeinern sein; auch wird der Distributionsbegriff nicht benützt [...].
> ...
> Eine befriedigende Fassung der Theorie gewinnt man, wenn man raumzeitliche Distributionen von Feldoperatoren als Grundgrößen einführt. [...] Obwohl in dieser Arbeit diese Distributionen nur für die wichtigsten freien Felder tatsächlich aufgesucht werden, liegt damit ein für beliebige – auch wechselwirkende – Felder gültiger Rahmen vor.
>
> *[Schmidt und Baumann 1956]*

[9] Homepage der Arbeitsgruppe zur algebraischen Quantenfeldtheorie des II. Instituts für theoretische Physik der Universität Hamburg

[10] [Wightman und Garding 1964]

Im Folgenden beschränken die Autoren den Schwartzschen Begriff der Distribution auf „gemäßigte Distributionen“, da sie für ihre Argumentation die volle Möglichkeit einer Fouriertransformation gebrauchen. Nach Einführung und Erläuterung der mathematischen Begrifflichkeit werden die grundlegenden Postulate für ein reelles Skalarfeld aufgestellt:

> Raumzeitliche Mittelwerte des Feldskalars sind Observable. Es gibt Operatoren $\phi[f]$ in dem zu bestimmenden Hilbertraum, die der Messung des „Mittels von ϕ mit der Gewichtsfunktion f“ zugeordnet sind. $\phi(f)$ möge eine gemäßigte Operatordistribution sein.
>
> *[Schmidt und Baumann 1956]*

Dabei berufen sich die Autoren direkt auf Bohr und Rosenfeld, und zwar auf deren zweite Arbeit[11]. Der Verwendung des Distributionsbegriffes entspricht nun nicht mehr die einfache Mittelwertbildung, sondern die Bildung eines mit f gewichteten Mittelwertes. Baumann und Schmidt interpretieren diesen zusätzlichen Freiheitsgrad physikalisch als „Messungen mit Hilfe eines Probekörpers der 'Raumzeitdichte' $f(x)$“.
Es folgen noch Postulate über die Lorentzgruppe, Kausalität, das Vakuum und den Energie-Impuls-Tensor. Anschließend wird die Impulsraumdarstellung gegeben und der Formalismus auf die verschiedenen Felder (Klein-Gordon, Dirac und Maxwell) angewendet.

11.2.3 A.S. Wightman: Axiomatische Feldtheorie

> The appearance of the grand treatise in 1951[12] appeared to me to be an act of providence. ... We were not the only ones who saw in distribution theory a key to mathematical precision in quantum field theory.
>
> *A.S. Wightman* in *[Brown* et al *1989], S.611 f*

Schmidt und Baumann hatten in ihrer Arbeit insgesamt fünf physikalische Grundpostulate angegeben. Sie kamen damit der Wightmanschen axiomatischen Formulierung schon sehr nahe. Wightman und Garding bemerken allerdings zwei deutliche Unterschiede: Erstens werden bei Schmidt und Baumann temperierte Distributionen verwendet. Sie geben dafür aber keinen physikalischen Grund an, sondern allein einen der Zweckmäßigkeit (Impulsraumdarstellung). Wightman und Garding[13] zeigen dagegen in einer physikalischen Analyse, welche Einschränkung tatsächlich den Tatsachen gerecht wird. Zweitens bemängeln sie einen Mangel an mathematischer Präzision bezüglich des Umgangs mit unbeschränkten Operatoren[14], wodurch die Theorie ebenfalls nicht ganz den physikalischen

[11] [Bohr und Rosenfeld 1950]

[12] gemeint ist die Buchveröffentlichung der „Theorie der Distributionen“ [Schwartz 1950]

[13] [Wightman und Garding 1964]

[14] $\phi(f)$ heißt beschränkt, falls eine von ϕ und den Zuständen Φ und Ψ unabhänge Zahl c existiert, so dass

$$|(\Phi, \phi(f)\Psi)| \leq c|(\Phi, \Psi)| \quad .$$

Die Signifikanz der Beschränktheit liegt darin, dass dann der Operator $\phi(f)$ auf allen Zustandsvektoren Ψ definiert ist, also

$$||\phi(f)\Psi|| \equiv ||\sqrt{(\phi(f)\Psi, \phi(f)\Psi)} < \infty \quad .$$

Bei unbeschränkten Operatoren müssen eingehende Betrachtungen ihres Definitionsbereich angestellt werden.

Grundprämissen angemessen erscheint.
Die Übersetzung der Bohr-Rosenfeld-Analyse in die mathematische Formulierung der Axiome soll nun kurz skizziert werden. Wightman und Garding beginnen mit der Tatsache, dass beim Übergang vom klassischen Feld $\phi(x)$ zur quantentheoretisch korrespondierenden Größe, dem Erwartungswert von ϕ, plötzlich singuläres Verhalten auftritt – symbolisiert durch die δ-Funktion und kompliziertere verallgemeinerte Funktionen.

> The fact was usually expressed by saying that only space-time averages of fields had physical meaning, in general. In the following we will work with related quantities, the field smoothed (or smeared, or tested) with function f
>
> $$\phi(f) \equiv \int d^4x f(x)\phi(x) \quad .$$
>
> *[Wightman und Garding 1964]*

Dass das verschmierte Feld die Grundtatsache der Physik ist, wird noch dadurch verdeutlicht, dass die Autoren betonen, dass nur die *linke* Seite eine direkte mathematische Bedeutung besitzt, und die Integraldarstellung nur heuristischen Wert hat.
Die Untersuchungen von Bohr und Rosenfeld einerseits und Heisenberg[15] andererseits dienen nun als „guide in choice of the class of test functions, f, for which $\phi(f)$ is to be defined.“ Erstens wurde schon in diesen Arbeiten gezeigt, dass die Funktionen f genügend glatt sein müssen, damit der Erwartungswert $(\Psi, \phi(f)\Psi)$ endlich bleibt. Da nicht a priori entschieden werden kann, wie glatt f tatsächlich im Einzelfalle zu sein hat, bleibt als erste Bedingung nur die Forderung, dass f „infinitely smooth“ also unendlich oft differenzierbar sein müsse. Die zweite Bedingung folgt aus der Tatsache, dass Messungen immer in einem bestimmten endlichen Raum-Zeitbereich stattfinden. Die Testfunktionen brauchen also nicht über den ganzen Raum erstreckt werden und sollten daher kompakten Träger besitzen. Nachdem auch die Stetigkeitsbedingung physikalisch plausibel gemacht wurde, ergibt sich: „Linear functionals with this continuity property are just distributions in the sense of L. Schwartz.“

> A scalar field, ϕ, is an operator valued distribution, i.e. a correspondence $f \to \phi(f)$ which yields for each $f \in \mathcal{D}$ a linear operator $\phi(f)$ such that $(\Psi, \phi(f)\Psi)$ is a distribution.
>
> *[Wightman und Garding 1964]*

Der zweite Punkt, an dem Wightman und Garding wesentlich über Schmidt und Baumann hinausgehen, liegt in der physikalischen Analyse, inwieweit auch unbeschränkte operatorwertigen Distributionen zugelassen werden müssen. In dem ebenfalls 1964 erschienen *PCT, Spin and Statics and all that*[16] heißt es zur Einleitung:

> Later on in the book there is a good deal of muttering about domains of unbounded operators. There is a general feeling among physicists that anything that depends in an important way on such matters cannot be physics. We would like to offer some arguments to the contrary.
>
> *[Streater und Wightman 1964], S.88*

[15] [Heisenberg 1931]
[16] [Streater und Wightman 1964]

In [Wightman und Garding 1964] geben die Autoren drei Gründe an:

1. In allen bekannten Beispielen von Quantenfeldtheorien ist das verschmierte Feld $\phi(f)$ ein unbeschränkter Operator.

2. Die Frage der Beschränktheit ist äquivalent zur Frage der Beschränktheit des Erwartungswertes der Feldgröße $\phi(f)$. Dies ist eine physikalische Annahme, deren Sinnhaftigkeit fragwürdig ist. Immerhin sollte diese Annahme nicht in die Definition des Feldes einfließen.

3. Die Forderung nach Beschränktheit ist in allen nichttrivialen Fällen nicht kompatibel mit relativistischer Invarianz und lokaler Kommutativität.

Die Mitbeachtung von unbeschränkten Operatoren führt zu einer immensen Komplexitätssteigerung der Mathematik, so dass hier auf eine ausführlichere Darstellung verzichtet werden muss.

11.3 Die Probleme der Quantenfeldtheorie

Die Versuche die Theorie der Distributionen auf die drängenden Probleme der Renormierungstheorie anzuwenden sind etwas früher datiert als die angezeigten Untersuchungen zu den Grundlagen der Quantenfeldtheorie. Es sollen hier drei frühe Versuche von sehr unterschiedlichen Autoren besprochen werden.
Werner Güttinger, der 1952 die erste mir bekannte Untersuchung zu diesem Themengebiet veröffentlichte, stand in direktem Kontakt zu Laurent Schwartz.
Andre Petermann hingegen lernte die Theorie der Distributionen in Manchester kennen[17].
Petermann war dort einige Zeit Assistent bei Rosenfeld und hörte die Vorlesungen von M.J. Lighthill, der dort über die Schwartz'sche Theorie dozierte. Dies schlug sich in dem 1953er Artikel nieder, in dem Petermann und sein Lehrer Stückelberg die Renormierungsgruppe entdecken.
Die Arbeit von Bogolubov und Shirkov aus dem Jahre 1955 stellt einen Sonderfall dar, weil im Augenblick unklar bleiben muss, ob sie die Theorien von Sobolev und Schwartz zum Zeitpunkt der Abfassung ihres Artikels gekannt haben. Die Arbeit zeichnet sich durch die Besonderheit aus, dass sie die mathematische Strenge sucht, ohne jedoch irgendeinen Rückgriff auf bestehende mathematische Theorien vornehmen zu müssen.

11.3.1 Güttinger: Quantum Field Theory in the Light of Distribution Analysis

Werner Güttinger, Physiker an der Universität Tübingen, bewegt sich in seinem 1952 entstanden Artikel [Güttinger 1953] im Kontext der Mesonentheorie. Da bisher weder „formal limiting methods“[18] noch „realistic modifications“ befriedigende und selbstkonsistente Ergebnisse gebracht haben, erscheint ihm die Untersuchung der mathematischen Grundlagen des feldtheoretischen Formalismus geboten.

[17] [Pauli 1979] IV/2, S.100
[18] Etwa Pauli-Villars

> As is well known, the difficulties appearing in the application of covariant formalisms to meson problems are closely connected with the mathematical defects of quantum field theory. [...] In our opinion the difficulties are partly due to our inability to handle the singular propagation functions correctly. In fact, it is impossible, in a strict sense, to treat delta-functions, which are not elements of classical analysis, by the methods of this analysis itself. Therefore, we are obliged to look for a generalization of classical analysis which contains Dirac functions as regular elements. In such a correct formalism, all inconsistencies due to mathematical defects of current field theory must vanish. An analysis of the required kind exists in the form of the so-called distribution analysis, introduced recently into mathematics by Schwartz.
>
> *[Güttinger 1953]*

Güttinger muss der physikalischen Öffentlichkeit eine kurze Einführung in die Theorie der Distributionen geben. Unter anderem legt er Wert darauf zu zeigen, dass gerade die δ-Distribution gerade nicht mit einer Funktion identifiziert werden kann. Danach diskutiert Güttinger „closed loop“ Prozesse in der Mesonentheorie, wobei Matrixelemente und Selbstladungen als Distributionen zu betrachten sind. Die Veränderungen zur konventionellen Rechnung ergeben sich vor allem aus der Tatsache, dass in der Algebra neben der Null noch weitere Nullteiler existieren. Denn gelte etwa für zwei Distributionen T, S die Formel

$$x \cdot T = S \quad ,$$

so folgt nicht etwa $T = S/x$ sondern vielmehr

$$T = S/x + c\delta \quad ,$$

wobei c eine willkürliche Divisionskonstante und δ die δ-Funktion bedeutet. Diese Formel steht, wie Güttinger feststellt, schon bei Dirac[19] und kann nun im Rahmen eines systematischen Gebrauchs von Distributionen unkompliziert auf komplexere Situationen übertragen werden. Güttinger zeigt, wie sich in der Tat unterschiedliche Ergebnisse zur bisherigen Rechenweise ergeben, die, um grob zusammenzufassen, vor allem im Auftreten von Extrasummanden der Form $\sum c_n \delta^{(n)}(f)$ liegen. Die Ergebnisse sind also nur bis auf eine beliebige Distribution am Nullpunkt (bzw. auf dem Lichtkegel) bestimmt. Genauer zeigt sich ein tiefer Zusammenhang zwischen den in der Distributonstheorie auftretenden freien Konstanten und den Divergenzen der herkömmlichen Quantenfeldtheorie:

> Thus it can be concluded from the distribution-analytical formulation of field theory that an arbitrary constant corresponds to each quantity which is divergent in the conventional theory.
>
> *[Güttinger 1953]*

Güttinger zeigt dann, wie sich die Probleme der bekannten Methoden[20] im neuen Formalismus darstellen und lösen. Die konsequente Rechnung im Rahmen der Distributionstheorie

> explains the various regularization alternatives, but such doubtful limiting methods are not necessary in the new formalism which is mathematically correct as well as more powerful...
>
> *[Güttinger 1953]*

[19] in seiner Version folgt das direkt aus $x\delta(x) = 0$

[20] Pauli-Villars und Feynman-cutoff

Durch geeignete Wahl der freien Divisionskonstanten ergibt sich die „Renormierung“ ganz folgerichtig aus dem Formalismus.

> Therefore we can say, that a distribution-analytical treatment of field theory leads directly to a renormalization.
>
> *[Güttinger 1953]*

Der bisherige Rahmen der Quantenfeldtheorie ist damit zum Erzielen einer konsistenten Theorie völlig ausreichend und unrealistische Hilfskonstruktionen mit „Hilfsfeldern“ ganz und gar unnötig. Das bedeutet nach Güttinger allerdings nicht, dass man ganz ohne weitere physikalische Annahmen auskommt, denn es bleibt unklar, ob schon alle auftretenden freien Konstanten durch Anwendung bekannter physikalischer Prinzipien (etwa Eichinvarianz) festgelegt wären, oder ob die physikalischen Grundannahmen noch unvollständig seien.
Abschließend weist Güttinger noch darauf hin, dass die Feldoperatoren von Anfang an durch Distributionen zu ersetzen sind und den Vertauschungsrelationen eine Bedeutung im Sinne von Distributionen zugewiesen werden muss[21].

> But it should be pointed out that it is not legitimate to consider only the last steps of a calculation by distribution methods. The distribution analysis has to be performed from the beginning, verifying carefully each step of the computation.

Wissenschaftshistorisch bleibt noch der direkte Einfluss von L.Schwartz auf diesen Artikel zu erwähnen, dem Güttinger für „stimulierende Diskussionen“ dankt.

11.3.2 Kausale Störungstheorie: Stückelberg und Bogolubov

Während Güttinger sich mit der Umformulierung der herkömmlichen Methoden der Quantenfeldtheorie beschäftigte, finden wir bei Stückelberg und im nächsten Abschnitt bei Bogolubov die Verwendung des Kalküls der Distributionen eingebettet in einen etwas anderen Ansatz, nämlich in die „kausale Störungstheorie“.

Distributionen in der kausalen Störungstheorie

Die kausale Störungstheorie geht auf eine Idee E.C.G. Stückelbergs zurück. Anfang der 40er Jahre begann die Arbeit auf Grundlage von Heisenbergs S-Matrix- Programm. Die Idee der S-Matrix sollte die divergenzbildenden intermediären und damit unobservablen Prozesse aus der Theorie ausschließen. Stückelberg schrieb die S-Matrix als unitären Operator zwischen Anfangs und Endzuständen und fand die Verbindung zum Schrödingerschen Zustandsvektor, und führte das Wechselwirkungsbild ein (bis 1947). Stückelbergs Vortrag auf der Konferenz in Cambridge 1946 [Stückelberg 1947] hat wohl maßgeblich zur Bekanntmachung von Heisenbergs Theorie in der internationalen Community beigetragen[22].
Die Idee, die S-Matrix anhand einer Kausalitätsbedingung zu berechnen, scheint erstmals 1946 aufzutauchen[23]. Ihre volle Ausformulierung und Erforschung erwies sich allerdings

[21] Auf dieses Gebiet kommen wir in Abschnitt 11.2 zu sprechen.
[22] [Schweber1994]
[23] [Stückelberg 1947]

als extrem dornenreich, zumal auch noch die schon geschilderten finanziellen und privaten Nöte hinzukamen. Erst in Zusammenarbeit mit Dominique Rivier, der 1949 bei Stückelberg in Lausanne promovierte, entstand eine verständlichere Fassung von Stückelbergs Gedankengängen [Rivier 1949][24], die dann bis 1954 mit wechselnden Koautoren immer weiter ausgebaut wurde. Stückelberg und Ko-Autoren beschäftigten sich mit der Bestimmung der S-Matrix aus allgemeinen Prinzipien[25]. Dabei soll die allgemeine Form der S-Matrix ohne Rückgriff auf den üblichen Hamiltonschen Formalismus direkt durch Beachtung grundlegenden Prinzipien der Lorentzinvarianz (unabdingbar für jede relativistische Theorie), der Unitarität (sichert die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit) und der Kausalität soweit charakterisiert werden, dass sie in störungstheoretischer Entwicklung vollständig berechnet werden kann. Die Kausalitätsbedingung erspart dabei den Umweg über die Lösung der Bewegungsgleichungen. Obwohl das Verfahren im Großen und Ganzen äquivalent zur konventionellen Dysonschen Vorgehensweise ist, eröffnete es aber einige zusätzliche interessante Gesichtspunkte.
Die Kausalitätsbedingung erweist sich dabei als „hochgradig nichttrivial“[26] und war in ihrer Form zwischen Bogolubov und Stückelberg-Schülern umstritten. Bogolubov bezeichnet Stückelbergs Kausalität als nicht „hinreichend klar“[27]; Wanders[28] hingegen lehnt Bogolubovs Kausalitätsprinzip trotz zugegebener mathematischer Eleganz ab, da dieses zu eng sei und den Unterschied von „mikroskopischer“ und „makroskopischer“ Kausalität nicht beachte.
Aber auch innerhalb der Schweiz wurden die Ansätze Riviers und Stückelbergs sehr kontrovers diskutiert. Felix Villars erzählt Schweber[29], Stückelbergs Kausalitätsbedingung sei „nicht besonders kohärent“ gewesen. Riviers Briefwechsel mit Pauli genauso wie sonstige Äusserungen aus dieser Zeit lassen darauf schließen, dass gerade die Formulierung der Kausalitätsbedingung für Verwirrung sorgte. Insbesondere die Interpretation des „kausalen“ Propagators D_C, heutzutage als „Feynman-Propagator“ bekannt, machte enorme konzeptionelle Schwierigkeiten. Diese Funktion verschwindet nämlich gerade *nicht* ausserhalb des Lichtkegels, und es sieht daher so aus, als wäre die Ausbreitung einer Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit ein „kausaler“ Prozess.[30] Pauli bezweifelte daher schon 1949 die *fundamentale*, also physikalische Bedeutung der „Genf-Cornellfunktion D_F (bzw. D_C wie die Genfer sagen)“[31]. Als die Doktorarbeit Riviers [Rivier 1949] schließlich gedruckt wurde, enthielt sie nur „den Formalismus, aber keine Resultate“[32]. Pauli befürchtete, dass bei noch längerem Zögern mit der Veröffentlichung „Dyson oder andere dasselbe publi-

[24]auch [Stückelberg und Rivier 1950a],[Stückelberg und Rivier 1950b]

[25]siehe die zusammenfassende Darstellung [Wanders 1956] über Stückelbergs Beiträge, die auch ausführlich auf die Literatur verweist; Bogolubovs verbesserte Version in [Bogolubov und Shirkov 1955]; oder in neuerer Darstellung [Scharf 1995]

[26][Scharf 1995]

[27][Bogolubov und Shirkov 1955]

[28][Wanders 1956]

[29][Schweber1994], S.580

[30]Feynmans Theorie ist mit haargenau den gleichen konzeptionellen Schwierigkeiten belastet. Da sich Feynman aufgrund seiner hervorragenden Rechenergebnisse nach anfänglichen Schwierigkeiten aber als Autorität durchsetzte, konnte man seine Konzepte nicht einfach als etwas wirr abtun. *Verständlicher* im eigentlichen Sinne ist auch Feynman nicht, aber man war wegen seiner Reputation als genialer Künstler eher geneigt ihn ernst zu nehmen.

[31]Pauli an Bethe 8.3.49 [Pauli 1979] III. Feynman war damals in Cornell beschäftigt.

[32]Pauli an Bethe 8.3.49 [Pauli 1979] III

zieren werden (nur der Terminologie nach verschieden)“[33].
Bemerkenswert ist aber Paulis erstaunliche Milde der Stückelbergschen Arbeit gegenüber, wo er doch sonst für besonders ätzende Kritik an halbausgegorenen Ideen bekannt war. Pauli hielt die Ideen „der Genfer“ für insgesamt ganz gut, und verstand seine Kritik eher als pädagogisch.[34]

Für den physikalisch versierten Leser sei die Grundidee der kausalen Störungstheorie einmal kurz skizziert, dabei folge ich der leichteren Verständlichkeit halber der Darstellung [Bogolubov und Shirkov 1955].
Die S-Matrix ist definiert als die Größe, die in irgendeinem Streuprozess den Anfangszustand $\Phi(-\infty)$ in den Endzustand $\Phi(\infty)$ transformiert; Anfang und Ende des Prozesses als in der unendlichen Vergangenheit bzw Zukunft idealisiert:

$$\Phi(-\infty) = S\Phi(\infty) \quad .$$

Offensichtlich ist die gesamte physikalische Information der Wechselwirkung in S enthalten.
Es werde nun bei festgelegtem Anfangszustand $\Phi(-\infty) \equiv \Phi$ die Wechselwirkung mit der Intensität $g(x)$ eingeschaltet, so dass der Endwert der Amplitude als Funktional von g angesehen werden kann[35]:

$$\Phi(g) = S(g)\Phi \quad .$$

Da die gesamte Wechselwirkung des Systems in S enthalten ist, sollte sich S durch den Wechselwirkungs-Lagrange-Operator L darstellen lassen. Ausgehend von der Korrespondenzüberlegung, dass sich im klassischen Fall die Wirkung W in einem Systems bei geringer Wechselwirkung g um

$$\delta W = \int L(x)g(x)dx$$

ändert, ergibt sich quantenmechanisch eine Transformation der Zustandsamplitude Φ von

$$\delta\Phi = i\int L(x)g(x)dx\ \Phi \quad ,$$

wobei L jetzt als Operator aufgefasst wird. Die S-Matrix muss also bei kleinem g von der Form

$$S = 1 + i\int L(x)g(x)dx$$

sein. In dieser Form kann die S-Matrix aus den drei genannten Bedingungen explizit konstruiert werden. Dazu wird S als Potenzreihe dargestellt.

$$S(g) = 1 + \sum \frac{1}{n!}\int S_{(n)}(x_1 \dots x_n)g(x_1)\dots g(x_n)dx_1\dots dx_n$$

Die Bedingungen der Kausalität, Lorentzinvarianz und Unitarität führen dann auf die Form[36]

$$S(g) = 1 + \sum \frac{i^n}{n!}\int T[L(x_1)\dots L(x_n)]\ g(x_1)\dots g(x_n)dx_1\dots dx_n \quad , \tag{11.1}$$

[33] Pauli an Fierz 7.2.49 [Pauli 1979] III
[34] siehe z.B. Briefwechsel mit Dominique Rivier [Pauli 1979] III
[35] Diese Methode des „adiabatic switching“ geht auf Bogolubov zurück.
[36] zur weitergehenden Entwicklung und Kritik dieses Ausdrucks siehe [Scharf 1995]

wo die Wechselwirkungsoperatoren unter dem zeitgeordneten Produkt T stehen.
Ein zeitgeordnetes Produkt ergibt sich dabei aus einem normalen Produkt durch (chronologische) Umordnung der Operatoren. Dabei müssen dann die Vertauschungsrelationen beachtet werden, die, siehe Abschnitt 8.2.3, von der Form von Paulis und Jordans Δ-Funktion sind. Es ergeben sich in (11.1) also Produkte verallgemeinerter Funktionen vom Pauli-Jordan-Typus, die im gewöhnlichen Sinne nicht definiert sind.
In Abschnitten 8.3.3 und 8.3.4 haben wir gesehen, wie Pauli dem analogen Problem in Schwingers Arbeiten mit der Forderung nach einem physikalischen Argument begegnete, welches die willkürliche ad-hoc Behandlung der singulären Produkte aus den physikalischen Tatsachen deutlich machen sollte. In den Arbeiten Stückelbergs und Bogolubovs finden wir dagegen den Impuls, mit den singulären Funktionen korrekt zu rechnen und so die Probleme zu vermeiden.

Die Normierung der Konstanten in der Quantentheorie Stückelberg und Petermann schreiben gleich in der Einleitung ihres klassischen Artikels *La normalisation des constantes dans la theorie des quanta*[37]:

> Die Klärung des Problems ist erheblich begünstigt worden durch die Arbeit von M.L. Schwartz über die Theorie der Distributionen.
>
> *[Stückelberg und Petermann 1953]*[38]

Auch Stückelberg steht vor dem Problem, aus Produkten von singulären Funktionen Sinn zu machen.

> Es ist wohlbekannt, dass diese Produkte , aufgefasst als gewöhnliche Produkte von Funktionen, zu Divergenzen führen ...
>
> *[Stückelberg und Petermann 1953]*

Die Divergenzprobleme der Quantenfeldtheorie entstehen aus der falschen mathematischen Interpretation der singulären Funktionen. Diese Probleme werden behoben, wenn die singulären Funktionen korrekt als Distributionen begriffen werden.

> Die strikte Analyse wurde im Detail von M.L.Schwartz in der Theorie der Distributionen durchgeführt. Im Gegensatz zu neueren Formalismen (Dyson und andere) in denen die Divergenzen als solche akzeptiert und die Konstanten des Problems mit einer Algebra der unendlichen Größen „renormiert“ werden, betrachten wir multiplikative Produkte T der Distributionen $A, B...$, d.h. $T = AB...$, die im Allgemeinen nicht definiert sind. Die Entwicklung einer Reihe, in der solche Produkte vorkommen, hat also keinen genauen Sinn.
> Trotzdem ist es möglich solche Produkte zu definieren...
>
> *[Stückelberg und Petermann 1953]*

Im Zuge einer solchen Definition der Produkte bleiben freie Konstanten zu bestimmen. Diese Normierung der freien Konstanten entpuppt sich als das Gegenstück zur nachträglichen Renormierung im konventionellen Formalismus.

[37] [Stückelberg und Petermann 1953]

[38] Die Übersetzung dieses und der folgenden Zitate aus dem Französischen erfolgte unter Federführung von Francois Huguenin. Merci, mon ami.

> Die Renormierung besteht hier also in der Festlegung einer endlichen Konstanten und nicht, wie üblich, in der (fragwürdigen) Eliminierung einer Unendlichkeit. [...] Ein wesentlicher Punkt ist, daß das Renormierungsverfahren sich konsistent in unsere Formulierung einfügt, indem es zur Bestimmung gewisser Konstanten führt [...] die die sonst benutzten Bedingungen nicht festlegen können.
>
> *[Wanders 1956]*

Diese Auszüge aus der Arbeit können uns für den betrachteten Kontext genügen. Die eigentliche Zielsetzung von Petermann und Stückelberg und der Grund ihrer Berühmtheit, nämlich die Entwicklung der Renormierungsgruppe braucht uns hier nicht weiter zu interessieren.

Bogolubov Während Stückelberg und Petermann direkten Bezug auf Laurent Schwartz und die Theorie der Distributionen nehmen, gehen Bogolubov und Shirkov in in ihrer Arbeit *Probleme der Quantentheorie der Felder*[39] zwar mathematisch korrekt vor, suchen aber zunächst keinen Bezug auf eine mathematische Theorie. 1957 veröffentlichten sie ihr Buch *Introduction to the theory of quantized fields*[40], in dem schließlich eine Beschreibung der Ideen Sobolevs und Schwartz' erfolgt[41]. Dort findet sich eine Fußnote, die bemerkt, dass die sowjetische Literatur im Anschluss an Sobolev von „Verallgemeinerten Funktionen" spricht, während andernorts eher „Distributionen" gesagt wird.

Bogolubov und Shirkov verfolgen mit ihrer Artikelreihe und ihrer direkt anschließenden Buchveröffentlichung das Ziel,

> die Probleme der Beseitigung der Divergenzen aus der asymptotischen Reihe für die Streumatrix sowie die Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung darzustellen und die Grundlagen der Theorie der Greenschen Funktionen zu entwickeln.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

Dazu stellen sie ein Kapitel über singuläre Funktionen der eigentlichen Betrachtung vorweg.
Nachdem klar ist, dass durch die Vertauschungsrelationen singuläre Funktionen vom Pauli-Jordan Typus in der Theorie manipuliert werden müssen, stellt sich die Frage,

> ob Ausdrücke, die Produkte dieser Funktionen in beliebiger Anzahl enthalten einen realen Sinn haben.
> In Zusammenhang damit muß man untersuchen, welche Bedingungen an [diese Ausdrücke] zu stellen sind, damit man diesen Ausdrücken einen bestimmten Sinn beilegen kann, oder, wie man auch sagt, damit sie keine „Divergenzen" enthalten.
> Zunächst ist klar, daß wir nicht fordern können, daß die Koeffizientenfunktionen ... Funktionen im üblichen Sinn der Mathematik sind; denn wir müßten dann „singuläre" oder „uneigentliche" Funktionen wie $\delta(x)$ ..., mit denen man es in der Quantentheorie der Felder ständig zu tun hat, ganz aus der Betrachtung ausschließen.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

[39] [Bogolubov und Shirkov 1955]
[40] [Bogolubov und Shirkov 1980]
[41] leider war es mir bisher unmöglich festzustellen, in welcher Auflage diese Bemerkung erstmals auftritt. Die zitierte 3. Auflage stammt aus dem Jahre 1980 und ist in großen Teilen noch mit der Arbeit [Bogolubov und Shirkov 1955] identisch.

Zur Definition dieser uneigentlichen Funktionen versuchen Bogolubov und Shirkov

> zunächst das zu formulieren, was hierüber normalerweise in den Arbeiten zur Quantentheorie enthalten ist, aber in der Regel nicht deutlich genug gesagt wird. Man sieht leicht ein, daß im Unterschied zu den üblichen Funktionen die singulären oder uneigentlichen Funktionen nicht dadurch festgelegt sind, daß man ihre Werte für sämtliche Argumentwerte vorgibt (für eine bestimmte Menge von Argumentwerten können sie unendlich oder ganz unbestimmt sein), sondern durch Angabe der Integrationsregeln ihrer Produkte mit hinreichend regulären Funktionen.
> Mit anderen Worten: eine uneigentliche Funktion wird durch die Vorgabe eines entsprechenden linearen Funktionals in einem geeignetem „linearen Raum" hinreichend regulärer Funktionen festgelegt.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

Um diese Funktionen konkret zu konstruieren definieren Bogolubov und Shirkov einen „uneigentlichen Grenzübergang":

> Als „konvergent im uneigentlichen Sinne" bezeichnen wir hier eine Folge
>
> $$K_M(x_1, \ldots, x_n) \qquad M \to \infty \quad ,$$
>
> für die die entsporechende Integralfolge
>
> $$\int K_M(x_1, \ldots, x_n) F(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{11.2}$$
>
> für jede Funktion F einer Klasse $C(q, r, n)$ aus dem linearen Raum, für den das Funktional (11.2) definiert ist, im üblichen Sinne konvergiert.
> Wir müssen hier hervorheben, daß ein solch uneigentlicher Grenzübergang im Grunde bei der Betrachtung der singulären Funktionen in der Quantentheorie ständig benutzt wird, obwohl man in der Regel nicht auf den Unterschied zum üblichen Grenzübergang aufmerksam macht. Das gilt beispielsweise für sämtliche Grenzdefinitionen der Diracschen δ-Funktionen.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

Nach der Definition und Diskussion einiger uneigentlicher Funktionen kommen Bogolubov und Shirkov auf die Produktbildung zu sprechen. Dabei stellen sie zuerst fest,

> daß die Notwendigkeit einer besonderen Definition der Produkte für uneigentliche Funktionen typisch ist. Eine uneigentliche Funktion ist nämlich durch die Festsetzung ihrer Integrationsregeln nur für die Produkte mit hinreichend regulären Funktionen definiert, und aus diesen Regeln ergibt sich noch nicht unmittelbar das Verfahren zur Integration von Produkten mehrerer singulärer Funktionen.
> Wir müssen also die Methode des uneigentlichen Grenzüberganges auch hier anwenden und den [betrachteten] Ausdruck mit Hilfe einer konvergenten Folge regulärer Funktionen definieren.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

Im Zuge dieser Definitionen ergeben sich wiederum freie Konstanten. Diese kann man aber identifizieren mit den aus der Renormierung bekannten üblichen „Counter-Termen", die im konventionellen Formalismus eingefügt werden, um die Divergenzen wegzukürzen.

> Bei der üblichen Darstellungsweise spricht man nicht von einem Grenzübergang und benutzt als Kontra-Glieder sinnlose divergierende Ausdrücke. Unsere Darstellung ist im wesentlichen äquivalent der üblichen und unterscheidet sich von dieser nur durch ihre größere Strenge.
>
> *[Bogolubov und Shirkov 1955]*

Wie im Vorhergehenden deutlich werden sollte, zeichnet sich die Arbeit von Bogolubov und Shirkov durch die stilistische Besonderheit aus, dass sie die größere mathematische Strenge ganz im Stile einer physikalischen Abhandlung bewältigen. Sie gehen im Vergleich etwa zu Pauli einen deutlichen Schritt weiter in der mathematischen Definition der verallgemeinerten Funktionen und ihrer Manipulation, gelangen aber nie in die Nähe einer mathematischen Theorie. Die Nichterwähnung Sobolevs und Schwartz' spricht dabei für sich, unabhängig davon, ob die beiden zur Zeit der Abfassung des Artikels Kenntnis von den Arbeiten hatten oder nicht (was mir allerdings wahrscheinlich erscheint). Bogolubov und Shirkov klären und systematisieren den in herkömmlichen Darstellungen der Quantenfeldtheorie gepflegten Umgang mit verallgemeinerten Funktionen eben soweit, dass dieser einen sichereren Grund erhält und der mathematische Charakter der Probleme deutlich wird; sie gehen dabei aber nicht wesentlich über die konventionellen Methoden hinaus.
Neben den Ansätzen Stückelbergs ist diese Arbeit von Bogolubov und Shirkov ein erster Meilenstein in der mathematisch korrekten Behandlung der Probleme der Quantenfeldtheorie. Dass das Ende der Fahnenstange damit noch nicht erreicht war, zeigen die Weiterentwicklungen des „kausalen" Ansatzes, die mit noch größerer Genauigkeit und Systematik das Problem der Zeitordnung und der Produktbildung angingen. Dies geschah aber sehr langsam und im Hintergrund der Physik. Erst 1973 erreichten Epstein und Glaser[42] eine verbesserte Formulierung, die wirklich das Versprechen einlösen konnte, einen von vorne bis hinten wohldefinierten und endlichen Lösungsweg der quantenelektrodynamischen Probleme anzugeben.

[42] [Epstein und Glaser 1973]

Abbildungsnachweis

2.2 Nobelpreisträger auf dem Bahnhof in Stockholm, Dezember 1933
Max-Planck-Institut für Physik
Emilio Segré Visual Archives
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics.

2.3 Solvay-Konferenz 1927
Photographie von Benjamin Couprie, Institute International de Physique Solvay
Emilio Segré Visual Archives
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics.

2.4 Julian Schwinger
Emilio Segré Visual Archives, Physics Today Collection
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics.

2.7 Shelter-Island-Konferenz 1947
Emilio Segré Visual Archives
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics.

5.1 Paul Dirac
Photographie von A. Börtzells Tryckeri
Emilio Segré Visual Archives, E. Scott Barr and Weber Collections
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics und des St. John's College Cambridge.

6.1 John von Neumann
Mit freundlicher Genehmigung des Institute for Advanced Studies, Princeton.

8.1 Wolfgang Pauli
Pauli Archives
Mit freundlicher Genehmigung des CERN, Genf.

9.1 Werner Heisenberg
Mit freundlicher Genehmigung des Max-Planck-Instituts München.
Vielen Dank an Helmut Rechenberg.

9.2 Niels Bohr, Werner Heisenberg und Wolfgang Pauli
Niels Bohr Archive
Emilio Segré Visual Archives
Mit freundlicher Genehmigung des American Institute of Physics.

Das Urheberrecht an allen anderen Photos konnte bis zum Zeitpunkt der Drucklegung nicht ermittelt werden. Diesbezügliche Informationen bitte an den Autor oder den Verlag übermitteln.

Abbildung 2.8 (Stückelberg) ist entnommen der Galerie
`www.th.physik.uni-frankfurt.de/~jr/portraits.html`
(1.11.2003).

Alle anderen, vorher nicht genannten Fotos aus
`www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biogindex.html`
(1.11.2003).

Eingangszitat von Jello Biafra aus
Where Do Ya Draw the Line.
Erschienen auf
Dead Kennedys: *Bedtime For Democracy*

Literaturverzeichnis

[Bernays 1922] Bernays, P.: *Die Bedeutung Hilberts für die Philosphie der Mathematik*. In: Die Naturwissenschaften. 10:93 1922.
Übersetzt in [Mancosu 1998]

[Bogolubov und Shirkov 1955] Bogolubov, N.N.; Shirkov, D.V.: *Probleme der Quantentheorie der Felder*, dt. Übersetzung. In: Fort.Phys.3:439 1955
Original erschienen in: Uspechi Fiz.Nauk 55:149 1955

[Bogolubov und Shirkov 1980] Bogolubov, N.N.; Shirkov, D.V.: *Intoduction to the theory of quantized fields*. 3. Auflage. New York: John Wiley & Sons 1980.

[Bohr 1928] Bohr, N.: *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik*. In: Naturwiss. 16:245 1928.

[Bohr und Rosenfeld 1933] Bohr, N.; Rosenfeld, L.: *Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen* In: Kgl. Danske Vid. Sels., Math.-fys. Medd. 12 No. 8 1933.

[Bohr und Rosenfeld 1950] Bohr, N.; Rosenfeld, L. In: Phys. Rev. 78:794 1950

[Born 1922] Born,M.: *Hilbert und die Physik*. In: Naturwissenschaften 10:88 1922.

[Born 1926a] Born,M.: *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. In: Zeits. Phys. 37:863 1926.

[Born 1926b] Born,M.: *Quantenmechanik der Stoßvorgänge*. In: Zeits. Phys. 38:308 1926.

[Born 1969] Born,M.: *Albert Einstein – Hedwig und Max Born: Briefwechsel*. München: Nymphenburger Verlagshandlung 1969.

[Born und Jordan 1925] Born,M.; Jordan,P.: *Zur Quantenmechanik I*. In: Zeits. Phys. 34:858 1925.

[Born, Jordan, Heisenberg 1926] Born,M.; Jordan,P.; Heisenberg,W.: *Zur Quantenmechanik II*. In: Zeits. Phys. 35:557 1926.

[Brown 93] Brown, Laurie (ed): *Renormalization.* New York Berlin Heidelberg 1993.

[Brown und Hoddeson 1983] Brown, Laurie; Hoddeson, L. (ed): *The birth of particle physics* Cambridge: Cambridge University Press 1983.

[Brown *et al* 1989] Brown, Laurie; Dresden, M.; Hoddeson, L. (ed): *Pions to Quarks: Particle Physics in the 1950s* Cambridge: Cambridge University Press 1989.

[Cartwright 1983] Cartwright, Nancy: *How the laws of physics lie* Oxford: Oxford University Press 1983.

[Courant und Hilbert 1924] Courant, R. und Hilbert,D.: *Methoden der mathematischen Physik I.* Berlin 1924

[Courant und Hilbert 1937] Courant, R. und Hilbert,D.: *Methoden der mathematischen Physik II.* Berlin 1937

[Courant und Hilbert 1962] Courant, R. und Hilbert,D.: *Methods of Mathematical Physics II.* New York 1962

[Crease und Mann 1986] Crease, R.P.; Mann, C.C. : *The Second Creation* New York: Macmillan Publishing Company 1986

[Dieudonné 1964] Dieudonné, J.: *Recent developments in mathematics.* In: Amer. Math. Monthly 79:239 1964

[Dirac 1925] Dirac, P.A.M.: *The Fundamental Equations of the Quantum Mechanics.* In: Pro.Roy.Soc. London A109:642-653 1925.

[Dirac 1926a] Dirac, P.A.M.: *Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom.* In: Pro.Roy.Soc. London A110:561-579 1926.

[Dirac 1926b] Dirac, P.A.M.: *On the Theory of Quantum Mechanics.* In: Pro.Roy.Soc. London A112:661 1926.

[Dirac 1927a] Dirac, P.A.M.: *The Compton Effect in Wave Mechanics.* In: Pro.Cam.Phil.Soc. Cambridge 23 part V:500 1927.

[Dirac 1927b] Dirac, P.A.M.: *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics.* In: Pro.Roy.Soc. London A113:621-641 1927.

[Dirac 1927c] Dirac, P.A.M.: *The quantum theory of the emission and absorption of radiation.* In: Proc. Roy. Soc. London A 114:243 1927

[Dirac 1928a] Dirac, P.A.M.: *The quantum theory of the electron.* In: Proc. Roy. Soc. London A 117:610 1928

[Dirac 1929b] Dirac, P.A.M.: *Quantum mechanics of many-electron systems.* In: Proc. Roy. Soc. London A 123:714 1929

[Dirac 1930a] Dirac, P.A.M.: *A theory of electrons and photons.* In: Proc. Roy. Soc. London A 126:360 1930

[Dirac 1930b] Dirac, P.A.M.: *Die Prinzipien der Quantenmechanik* dt.Ausgabe. Leipzig: Verlag von S. Hirzel 1930.

[Dirac 1931b] Dirac, P.A.M.: *Quantized singularities in the electromagnetic field.* In: Proc. Roy. Soc. London A 133:60 1931

[Dirac 1932] Dirac, P.A.M.: *Relativistic Quantum Mechanics.* In: Proc. Roy. Soc. London A 136:453 1932

[Dirac 1939a] Dirac, P.A.M.: *The Relaton between Mathematics and Physics.* In: Proc. Roy. Soc. Edinburgh 59, part II 122 1939

[Dirac 1947a] Dirac, P.A.M.: *The principles of quantum mechanics* 3.ed. Oxford: Clarendon Press 1947.

[Dirac 1951] Dirac, P.A.M.: *A new classical theory of the electron.* In: Proc. Roy. Soc. London A 209:291 1951

[Dirac 1958] Dirac, P.A.M.: *The principles of quantum mechanics* 4.ed. Oxford: Clarendon Press 1958.

[Dirac 1963] Dirac, P.A.M.: Interview with T.S. Kuhn. Archives for the History of Quantum Physics, Niels Bohr Library, AIP, New York

[Dirac 1977c] Dirac, P.A.M.: *Recollections of an exciting era* . In: [Weiner 1977]

[Dirac 1978] Dirac, P.A.M.: *The development of quantum mechanics.* In: Dirac, P.A.M *Directions in Physics.* New York, London, Sydney, Toronto: J. Wiley & Sons 1978.

[Dirac 1984] Dirac, P.A.M.: *The requirements of fundamental physical theory.* In: Eur.J.Phys.5:65-67 1984.

[Dyson 1949a] Dyson, F.: *The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman.* In: Phys. Rev. 75:486 1949.

[Dyson 1949b] Dyson, F.: *The S-Matrix in Quantum Electrodynamics.* In: Phys.Rev. 75:1736 1949.

[Eckert 1993] Eckert, M.: *die Atomphysiker*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1993.

[Eddington 1956] Eddington, A.: *The Mathematical Theory of Relativity* Cambridge 1956; Wiederabdruck der 3. Auflage von 1923

[Einstein 1956] Einstein, A.: *Mein Weltbild*. West-Berlin: Ullstein 1956.

[Epstein und Glaser 1973] Epstein, H; Glaser,V. In: Annales de l'Institut Poincaré A19:211 1973

[Feynman 1948a] Feynman, R.P.: *Space-Time approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics.* In: Rev. Mod. Phys. 20:367 1949.

[Feynman 1948b] Feynman, R.P.: *Relativistic cut-off for quatum electrodynamics.* In: Phys.Rev. 74:939 1948.

[Feynman 1949a] Feynman, R.P.: *The theory of positrons.* In: Phys.Rev. 76:749 1949.

[Feynman 1949b] Feynman, R.P.: *Space-time approach to quantum electrodynamics.* In: Phys.Rev. 76:769 1949.

[Furry und Oppenheimer 1934] Furry, W.; Oppenheimer, J.R.: *On the theory of the electron and positron.* In: Phys.Rev. 45:245 1934.

[Gleick 1993] Gleick, J.: *Richard Feynman: Leben und Werk des genialen Physikers*. Deutsche Übersetzung. München: Droemer Knaur 1993

[Gregory 1988] Gregory, B. *Inventing reality*, New York 1988

[Güttinger 1953] Güttinger, W.: *Quantum Field Theory in the Light of Distribution Analysis.* In: Phys.Rev. 89:1004 1953.

[Hardy 1940] Hardy, G.H.:*A Mathematicvians's Apolgy* Cambridge 1940

[Heaviside 1893a] Heaviside, Oliver: *On Operators in physical mathematics I* In: Pro.Roy.Soc. London 52:504-529 1893.

[Heaviside 1893b] Heaviside, Oliver: *On Operators in physical mathematics II* In: Pro.Roy.Soc. London 54:105-143 1893.

[Heisenberg 1925a] Heisenberg, W.: *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.* In: Zeits.Phys 33:879 1925.
Wiedergedruckt in Born, Heisenberg und Jordan *Begründung der Quantenmechanik* 1962

[Heisenberg 1927] Heisenberg, W.: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*. In: Zeits.Phys 43:172 1927.

[Heisenberg 1930a] Heisenberg, W.: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie* Leipzig: Verlag von S. Hirzel 1930

[Heisenberg 1930b] Heisenberg, W.: *Die Selbstenergie des Elektrons*. In: Zeits.Phys 65:4 1930.

[Heisenberg 1931] Heisenberg, W.: *Über Energieschwankungen in einem Strahlungsfeld*. In: Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig 86:317 1931. (Wiedergedruckt in [Heisenberg 1989b])

[Heisenberg 1932] Heisenberg, W.: *Zur Geschichte der physikalischen Naturerklärung*. Wiedergedruckt in [Heisenberg 1989c]

[Heisenberg 1989b] Heisenberg, W.: Gesammelte Werke Herausgegeben von Blum, W; Dürr, H.-P.; Rechenberg, H. Series A Part II Berlin: Springer 1989.

[Heisenberg 1989c] Heisenberg, W.: Gesammelte Werke Herausgegeben von Blum, W; Dürr, H.-P.; Rechenberg, H. Series C Part I Berlin: Springer 1989.

[Heisenberg und Pauli 1929] Heisenberg, W. und Pauli, W.: *Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder I*. In: Zeits.Phys 56:1 1929 .

[Heisenberg und Pauli 1930] Heisenberg, W. und Pauli, W.: *Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder I*. In: Zeits.Phys 59:168 1930 .

[Hilbert 1899] Hilbert, D: *Grundlagen der Geometrie* Vierte Auflage von 1913. Leipzig und Berlin: Druck und Verlag von B.G. Teubner 1913.

[Hilbert 1900] Hilbert, D.: *Über den Zahlbegriff* In: Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung Bd.8 1900. Abgedruckt in und zitiert nach [Hilbert 1899].

[Hilbert 1918] Hilbert, D.: *Axiomatisches Denken*

[Hilbert 1922] Hilbert, D.: *Neubegründung der Mathematik* In: Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1:157 1922 Zitiert nach [Hilbert 1964].

[Hilbert 1925] Hilbert, D.: *Über das Unendliche* In: Mathematische Annalen 95:61 1925. Zitiert nach [Hilbert 1964].

[Hilbert 1927] Hilbert, D.: *Die Grundlagen der Mathematik* In: Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der hamburgischen Universität 6:65 1927.

[Hilbert 1964] Hilbert, D.: *Hilbertiana* Fünf Aufsätze. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1964.

[Hilbert, Neumann, Nordheim 1927] Hilbert, David; von Neumann, Johann von und Nordheim, Lothar: *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* In: Mathematische Annalen 98:1-30 1927.

[Hilbert und Bernays 1934] Hilbert, D.; Bernays, P.: *Grundlagen der Mathematik* Berlin: Verlag von Julius Springer 1934.

[Interview AHQP] Interviews mit T.S Kuhn 1962/63. In: *Archives for the History of Quantum Physics*, American Institute of Physics. Zitert nach der Kopie im Deutschen Museum München.

[Jammer 1974] Jammer, M.: *The Philosophy of Quantum Mechanics* New York ...: John Wiley & Sons 1974.

[Jordan und Klein 1927] Jordan, P., Klein, O.: *Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie.* In: Zeits. Phys. 45:751 1927.

[Jordan und Wigner 1928] Jordan,P.; Wigner,E.: *Über das Paulische Äquivalenzverbot.* In: Zeits.Phys. 47:631 1928.

[Jordan und Pauli] Jordan,P.; Pauli,W.: *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder.* In: Zeits.Phys. 47:151-173 1928.

[Jost 1965] Jost, R.: *General theory of quantized fields.* Providence – Rhode Island: American Mathematical Society 1965.

[Jost 1984] Jost, R.: *Erinnerungen: Erlesenes und Erlebtes.* In: Phys. Bl. 40 Nr.7 S.178 1984.

[Kaku 1994] Kaku, M.: *Quantum Field Theory.* New York und Oxford. Oxford University Press 1993

[Kant 1790] Kant, Immanuel: *Kritik der Urteilkraft.* zitiert nach der gelben Reclam-Ausgabe; Stuttgart: Philipp Reclam jr. 1963

[Kirchhoff 1882] Kirchhoff, Gustav: *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* In: Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin 1882. 641-669

[Kirchhoff 1891] Kirchhoff, Gustav: *Vorlesungen über mathematische Physik* Band II. Leipzig: Verlag von B.G. Teubner 1891.

[Kragh 1990] Kragh, Helge: *Dirac: A Scientific Biography.* Cambridge (UK): Cambridge University Press 1990.

[Kuhn76] Kuhn, T.S. : *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen.* Zweite revidierte deutsche Auflage. Frankfurt am Main: Suhrkamp 1976.

[Kursunoglu und Wigner 1987] Kursunoglu, B.N.; Wigner, E.P. (ed): *Reminiscences about a Great Physicist: P.A.M. Dirac.* Cambridge (UK): Cambridge University Press 1987.

[Lanczos 1926] Lanczos, K.: *Über eine feldmäßige Darstellung der neuen Quantenmechanik* In: Zeits.Phys 35:812 1926.

[Legendi und Szentivanyi 1983] Legendi, T.; Szentivanyi, T. (ed): *Leben und Werk von John von Neumann* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut 1983.

[Lützen 1979] Lützen, Jesper: *Heaviside's operational calculus and the attemts to rigorize it.* In: Archive for the History of Exact Sciences 21:161 1979.

[Lützen 1982] Lützen, Jesper: *The prehistory of distributions.* New York: Springer-Verlag 1982.

[Macrae 1994] Macrae, N.: *John von Neumann*(dt. Ausgabe). Basel, Boston Berlin: Birkhäuser 1994.

[Majer 2001] Majer, U.: *The Axiomatic Method and the foundations of Science: Historical Roots of Mathematical Physics in Göttingen (1900-1930).* In:[Redei und Stöltzner 2001].

[Mancosu 1998] Mancosu, P.: *From Brouwer to Hilbert.* New York, Oxford: Oxford University Press 1998

[Margenau 1933] Margenau, H. In: Mathematical Gazette 17:493 1933

[Mehra und Rechenberg 1982b] Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut: *The Historical Development of Quantum Theory. Volume 2* New York: Springer 1982.

[Mills 1993] Mills, R.: *Tutorial on Infinities in QED.* In [Brown 93], S.59

[Nahin 1988] Nahin, Paul J.: *Oliver Heaviside: Sage in Solitude.* New York: IEEE Press 1988.

[von Neumann 1925] Neumann, John von: *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*. In: Journal für Mathematik 154:219 1925.

[von Neumann 1927] Neumann, John von: *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*. In: Göttinger Nachrichten 1-57 1927.

[von Neumann 1929a] Neumann, John von: *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren*. In: Math.Ann. 102:49 1929.

[von Neumann 1929b] Neumann, John von: *Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen*. In: Journal für Mathematik 161:208 1929.

[von Neumann 1932] Neumann, Johann von: *Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik* Berlin: Verlag von Julius Springer 1932.

[von Neumann 1947] Neumann, John von: *The Mathematician*. In: *The works of the mind* edited by R.B.Heywood. Chicago: The University of Chikago Press 1947.

[von Neumann 1954] Neumann, John von: *The role of mathematics in science and society*. In: Graduate Alumni 6,27:16 1954, zitiert nach [von Neumann 1963] VI.

[von Neumann 1963] Neumann, John von: *Collected Works I-VI*. Oxford: Pergamon Press 1961-63

[Oppenheimer 1930] Oppenheimer, J.R.: *On the theory of electrons and protons*. In: Phys.Rev. 35:562 1930.

[Pais 1987] Pais, A.: *Playing with equations, the Dirac way*. In [Kursunoglu und Wigner 1987]

[Pauli 1931a] Pauli,W.: *Besprechung von Diracs „Principles of Quantum Mechanics“*. In: Die Naturwissenschaften 19:188 1931.

[Pauli 1933] Pauli, W.: *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*. In: Geiger, H. und Scheel, K. eds: *Handbuch der Physik*, 2te Auflage, vol. 24, Teil I, S. 82 - 272. Berlin: Springer-Verlag 1933.
Wiedergedruckt in [Pauli 1964].

[Pauli 1964] Pauli, W.: *Collected Scientific Papers Vol. I.* Edited by R.Kronig und V.F. Weisskopf.: New York London Sydney: Interscience Publishers (John Wiley and Sons, Inc. 1964.

[Pauli 1979] Pauli, Wolfgang: *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (5 Bände). Herausgegeben von Hermann, A.; Meyenn, K.v.; Weisskopf, V.F. New York: Springer 1979.

[Pauli und Weisskopf 1934] Pauli, W.; Weisskopf, V.: *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung*. In: Helv. Phys. Acta 7:709 1934.

[Pieper 1958] Pieper, J.: *Hinführung zu Thomas von Aquin*. München: Kösel-Verlag 1958.

[Rédei 1996] Rédei, M.: *Why John von Neumann did not Like the Hilbert Space Formalism of Quantum Mechanics (and what he Liked Instead)*. In: Stud.Hist.Phil.Mod.Phys. 27:493 1996.

[Redei und Stöltzner 2001] M. Redei and M. Stöltzner (eds): *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers 2001.

[Reid 1970] Reid, C.:: *Hilbert*. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag 1970

[Richter 1979] Richter, S.:: *Wolfgang Pauli*. Aarau, Frankfurt a.M., Salzburg: Veralg Sauerländer 1979

[Rivier 1949] Rivier, D.: *Une methode d'elimination des infinities en theorie des champs quantifes*. These, Université Lausanne. In: Helv. Phys. Acta 22:265 1949.

[Scharf 1995] Scharf, G.:*Finite Quantum Electrodynamics* 2nd ed. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1995.

[Schmidt und Baumann 1956] Schmidt, W.; Baumann, K.: *Quantentheorie der Felder als Distributionstheorie*. In: Nuovo Cimento 4:860 1956.

[Schrödinger 1926a] Schrödinger, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (1. Mitteilung)*. In: Ann.Phys., Bd. 79, 1926 S.361

[Schrödinger 1926b] Schrödinger, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (2. Mitteilung)*. In: Ann.Phys., Bd. 79, 1926 S.489

[Schrödinger 1926c] Schrödinger, E.: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*. In: Ann.Phys., Bd. 79, 1926 S.734

[Schrödinger 1926d] Schrödinger, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem (3. Mitteilung)*. In: Ann.Phys., Bd. 80, 1926 S.437

[Schrödinger 1926e] Schrödinger, E.: →*Quantisierung als Eigenwertproblem (4. Mitteilung).* In: Ann.Phys., Bd. 81, 1926 S.109

[Schwartz 1950] Schwartz, L.: *Theorie des distributions.* Paris: Hermann 1950.

[Schweber1994] Schweber, Silvan S.: *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga.* Princeton: Princeton University Press 1994.

[Schwinger 1948a] Schwinger, J.; *On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron* In: Phys. Rev. 73:416 1948.

[Schwinger 1948b] Schwinger, J.; *Quantum Electrodynamics I.* In: Phys. Rev. 74:1439 1948.

[Schwinger 1949a] Schwinger, J.; *Quantum Electrodynamics II.* In: Phys. Rev. 75:651 1949.

[Schwinger 1949b] Schwinger, J.; *Quantum Electrodynamics III.* In: Phys. Rev. 76:790 1949.

[Schwinger 1983a] Schwinger, J.; *Renormalization theory of quantum electrodynamics.* In: [Brown und Hoddeson 1983]

[Schwinger 1983b] Schwinger, J.; *Two shakers of physics: memorial lecture for Sin-itiro Tomonaga.* In: [Brown und Hoddeson 1983]

[Sommerfeld 1912] Sommerfeld, A.; *Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung.* In: Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung. 21:309 1912.

[Sommerfeld 1958] Sommerfeld, A.; *Vorlesungen über theoretische Physik* Band VI: Partielle Diffferentialgleichungen. 4.Auflage. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. 1958.

[Stöltzner 2001] Stöltzner, M.: *Opportunistic Axiomatics – Von Neumann on the Methodology of Mathematical Physics.* In:[Redei und Stöltzner 2001].

[Streater und Wightman 1964] Streater, R.F.; Wightman, A.S.: *PCT, Spin and Statistics and all that.* New York, Amsterdam: W.A. Benjamim 1964.

[Stückelberg 1934] Stückelberg, E.C.G.: *Relativistisch invariante Störungstheorie des Diracschen Elektrons.* In: Ann.Phys. 21:367 1934

[Stückelberg 1938] Stückelberg, E.C.G.: *Die Wechselwirkungskräfte in der Elektrodynamik und in der Feldtheorie der Kernkräfte.* In: Helv.Phys.Acta 225 1938

[Stückelberg 1947] Stückelberg, E.C.G.: *The present state of the S-Operator theory.* In: Report of an International Conference on fundamental particles ... London: The Physical Society 1947

[Stückelberg und Rivier 1948] Stückelberg, E.C.G.; Rivier, D.: *A convergent expression for the magnetic moment of the neutron (Letter).* In: Phys.Rev. 74:218 und (Erratum) 986 1948.

[Stückelberg und Rivier 1950a] Stückelberg, E.C.G.; Rivier, D.: *Causalité et structure de matrice S.* In: Helv.Phys.Acta 23:215 1950.

[Stückelberg und Rivier 1950b] Stückelberg, E.C.G.; Rivier, D.: *A propos des divergences en theorie des champs quantifies.* In: Helv.Phys.Acta 23:236 1950.

[Stückelberg und Petermann 1953] Stückelberg, E.C.G.; Petermann A.: *La normalisation des constantes dans la theorie des quanta.* In: Helv.Phys.Acta 26: 499 1953.

[Taylor1987] J. G. Taylor (ed): *Tributes to Paul Dirac.* Bristol: Adam Hilger 1987.

[Waller 1930a] Waller, I.: *Die Streuung von Strahlung durch gebundene und freie Elektronen nach der Diracschen relativistischen Mechanik.* In: Zeits.Phys. 61:837 1930.

[Waller 1930b] Waller, I.: *Bemerkungen über die Rolle der Eigenenergie des Elektrons in der Quantentheorie der Strahlung.* In: Zeits.Phys. 62:673 1930.

[Wanders 1956] Wanders, G.: *Kausale Formulierung der S-Matrixtheorie.* In: Fort.Phys. 4:611 1956.

[Weinberg 1977] Weinberg, S.: *The search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory* In: Daedalus 106:17 Fall 1977

[Weiner 1977] Weiner, C. ed.: *History of twentieth century physics* New York: Academic Press 1977.

[Weisskopf 1934] Weisskopf, V.; *Über die Selbstenergie des Elektrons.* In: Zeits.Phys. 89:27 und die Berichtigung Zeits.Phys. 90:817 1934.

[Weisskopf 1983] Weisskopf, V.; *Growing up with field theory: the development of quantum electrodynamics.* In: [Brown und Hoddeson 1983] [von Weizsäcker 1992] Weizsäcker, Carl Friedrich von: *Zeit und Wissen.* München Wien: Carl Hanser Verlag 1992.

[Weyl 1913] Weyl, H.; *Über die Randwertaufabe der Strahlungstheorie.* In: J. Reine Angew. Math. 143:177 1913.

[Weyl 1927] Weyl, H.; *Quantenmechanik und Gruppentheorie.* In: Zeits. Phys. 46:1 1927.

[Weyl 1928] Weyl, H.; *Quantenmechanik und Gruppentheorie.* Leipzig: Verlag von S. Hirzel 1928.

[Weyl 1944] Weyl, H.; *David Hilbert and His Mathematical Work.* In: Bulletin of the American Mathematical Society 50: 612 1944
Wiedergedruckt und zitiert nach [Reid 1970]

[Wiener 1930] Wiener, N.; *Generalized Harmonic Analysis.* In: Acta Math. 55:117 1930.

[Wightman 1956] Wightman, A.S.: *Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values* In: Phsy.Rev. 101:860 1956.

[Wightman und Garding 1964] Wightman, A.S., Garding, L.: *Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory* In: Arkiv for Fysik 28 nr 13:129 1964.

[Wigner 1992] Wigner, E.P.; *The Collected Works of Eugene Paul Wigner* (4 Bände). Herausgegeben von A.S. Wightman, A.S. und anderen. Springer: New York 1992.

[Wigner 1939] Wigner, E.P.; *On unitary representations fo the inhomogeneous Lorentz group.* In: Ann. Math. 40:149 1939.

Personenindex

O

P

R

S

T

V

W

Z

Klaus-Heinrich Peters

Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen
Eine historische Untersuchung über die Grundlagen der Physik im Grenzbereich zu Mathematik, Philosophie und Kunst

Hamburg 2004

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht auf dem Hintergrund der Verwendung von Distributionen in der Physik die Rolle der Mathematik in der physikalischen Erkenntnis.
Distributionen waren in der Physik schon lange vor ihrer mathematischen Begründung durch Laurent Schwartz Anfang der 1950er Jahre als "uneigentliche" oder "verallgemeinerte" Funktionen in Gebrauch. Mit Paul Diracs Definition der δ-Funktion 1927 wurde eines dieser mathematisch mangelhaft definierten Objekte sogar zu einem zentralen Bestandteil des quantenmechanischen Formalismus, was Widerstand und Kritik der Mathematiker und mathematisch orientierten Physiker auslöste. John von Neumann gelang kurze Zeit später mit seiner Spektraltheorie die Schaffung eines mathematisch korrekten Formalismus, der, in bewusster Abgrenzung zu Dirac, das Problem der δ-Funktion vermeiden und mathematisch streng argumentieren konnte. Auf dem Hintergrund dieser Auseinandersetzung wird in der vorliegenden Dissertation versucht, die Signifikanz mathematischer Strenge für den Wahrheitsgehalt einer physikalischen Theorie herauszustellen und die Rolle der Mathematik in der Physik im Allgemeinen zu verdeutlichen.

Entsprechend besteht die Arbeit aus einer historisch-berichtenden und aus einer philosophisch-interpretierenden Ebene. In den historischen Abschnitten wird die Geschichte des Auftretens verallgemeinerter Funktionen von Kirchhoff 1882 bis hin zur korrekten Verwendung von Distributionen ab den 1950er Jahren in den Arbeiten Wightmans und Anderer nachgezeichnet. Dazu kommt eine umfassende Einführung in die geschichtliche Entwicklung von Quantenmechanik und -feldtheorie, die den physikhistorischen Kontext der Auseinandersetzung um die δ-Funktion und ihre Verallgemeinerungen darstellt.
Darauf aufbauend wird auf der interpretierenden Ebene der sich auf diese Weise zeigende Zusammenhang von Mathematik und Physik diskutiert. Dazu wird untersucht, wie Paul Dirac, John von Neumann und auch Wolfgang Pauli die Rolle der Mathematik in der Physik erlebt haben. Die Grunderfahrung des mathematischen Charakters der Physik stellt sich dabei unter jedem der untersuchten Blickwinkel ganz unterschiedlich dar, so dass sich ein mehrdimensionales Bild des Zusammenhanges von Mathematik und Physik ergibt.
Die Diracsche Beziehung zum Formalismus wird zunächst im Begriff der Mathematik als *Medium* erläutert und gipfelt in der Diskussion des Prinzips der *mathematischen Schönheit*. Umgekehrt zeigt sich zeigt sich bei von Neumann die innige Beziehung mathematischer *Exaktheit* mit ebensogroßer *phänomenologischen Strenge* der Physik, wobei sich neue Aspekte der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik ergeben. Im Gegensatz zu diesen beiden ist bei Wolfgang Pauli die Mathematik insgesamt der inhaltlich-konzeptionellen Argumentation untergeordnet. Die wissenschaftstheoretischen Konsequenzen der sich abzeichnenden unterschiedlichen Auffassungen der Physik werden dann im Hinblick auf den Entwurf der Wahrheit der wissenschaftlichen Erkenntnis untersucht.

Lebenslauf

Name:	Klaus-Heinrich Peters
Adresse:	Barnerstraße 49
	22765 Hamburg
Telefon:	(040) 40 64 59
E-Mail:	khp@iphh.de
Geburtsdatum und -ort:	20. Juni 1968, Gütersloh

Schule

8/74 - 7/78	Grundschule Gütersloh-Avenwedde
8/78 - 5/87	Städtisches Gymnasium Gütersloh
5/87	Abitur

Zivildienst

11/87 - 7/89	Internationales Kinderzentrum Gütersloh

Universität

5/90 - 1/96	Studium der Physik an der Universität Hamburg Schwerpunkt theoretische Physik, Nebenfach Mathematik
1/96 - 10/97	Diplomarbeit am II. Institut für Theoretische Physik Thema: "Das magnetische Moment des Elektrons in gekrümmter Raumzeit"
5/98	Abschluss der Diplomprüfungen Gesamturteil: "ausgezeichnet"
10/99 - 12/02	Doktorarbeit am Institut für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik der Universität Hamburg Thema: "Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen"
6/03	Abschluss des Promotionsverfahrens Gesamturteil: "sehr gut"