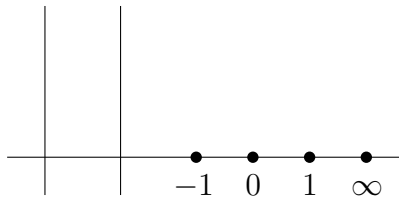


Abschätzungen von Arakelov Schnittzahlen für eine Familie von superelliptischen Kurven



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik, Informatik
und Naturwissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt
im Fachbereich Mathematik
von

Malte Moos

Hamburg, 2016

Tag der Disputation: 10.10.2016

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

Auf Grund der Gutachten von:

Prof. Dr. Ulf Kühn

Prof. Dr. Jan Steffen Müller

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
1 Geometrie von Kurven	13
1.1 Algebraische Kurven	13
1.2 Gefaserte und arithmetische Flächen	15
1.2.1 Regularität und Aufblasungen	16
1.2.2 Schnitttheorie arithmetischer Flächen	20
1.2.3 Kanonische Divisoren auf arithmetischen Flächen	21
1.3 Modelle von Kurven	22
1.3.1 Normalisierungen	23
1.3.2 Reguläre Modelle	24
1.3.3 Semistabile Modelle	25
1.3.4 Abstieg	28
1.3.5 Modelle vom \mathbb{P}_K^1	29
1.4 Semistabile Modelle von superelliptischen Kurven - der zahme Fall	30
1.4.1 Superelliptische Kurven	31
1.4.2 Schritt 1: Modelle der projektiven Gerade	33
1.4.3 Schritt 2: Normalisierung	35
1.5 Semistabile Modelle p -zyklischer Überlagerungen - der wilde Fall	35
1.5.1 p -zyklische Überlagerungen	36
1.5.2 Schritt 1: Semistabile Modelle der projektiven Gerade . .	37
1.5.3 Schritt 2: Normalisierung	39
2 Die Familie von Kurven $\{C_p : y^p = x^3 - x\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$	43
2.1 Eigenschaften der Kurvenfamilie $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$	43

2.2	Ein semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p	47
2.2.1	Ein semistabiles Modell im Fall $\mathfrak{q} \mid (2)$	48
2.2.2	Ein semistabiles Modell im Fall $\mathfrak{p} \mid (p)$	51
2.2.3	Ein globales semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p	54
2.3	Ein reguläres Modell $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ von C_p	56
3	Arakelov Invarianten von Kurven	61
3.1	Arithmetische Schnittzahlen hermitescher Geradenbündel	61
3.2	Obere Schranken für $\bar{\omega}^2$	64
3.3	Untere Schranken für $\bar{\omega}^2$	65
4	Obere und untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$	69
4.1	Arakelov Invarianten von $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$	70
4.1.1	Beiträge zu einer oberen Schranke über $\mathfrak{q} \mid (2)$	70
4.1.2	Beiträge zu einer oberen Schranke über $\mathfrak{p} \mid (p)$	72
4.1.3	Obere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$	74
4.1.4	Kanonische Divisoren auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$	75
4.1.5	Beiträge zu einer unteren Schranke über $\mathfrak{q} \mid (2)$	79
4.1.6	Beiträge zu einer unteren Schranke über $\mathfrak{p} \mid (p)$	83
4.1.7	Untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$	87
	Bibliography	88

Einführung

Die Lösungen vieler zahlentheoretischer Probleme korrespondieren zu rationalen Punkten auf algebraischen Kurven oder bestimmen selber interessante algebraische Kurven. Diese rationalen Punkte werden am besten mit Höhen studiert und von besonderem Interesse sind hierbei Vermutungen, die Höhe und Arakelov Schnittzahlen in Verbindung setzen (siehe [La]). Da im Allgemeinen nicht viel über diese arithmetischen Schnittzahlen bekannt ist, untersuchen wir in dieser Arbeit für eine konkrete Familie von superelliptischen Kurven das Verhalten der arithmetischen Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$.

Um eine algebraische Kurve zu untersuchen, betrachtet man diese zusammen mit ihren Reduktionen modulo eines Primideals. Dies führt zu dem Konzept einer arithmetischen Fläche. Die Arakelov Theorie liefert eine Schnitttheorie auf arithmetischen Flächen, welche es erlaubt Schnittzahlen von arithmetischen Divisoren zu berechnen. Hierbei ist insbesondere die arithmetische Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$ der relativ dualisierenden Garbe, ausgestattet mit der Arakelov Metrik, von Interesse (siehe [Sz], [Ul] und [Zh1]). Ab Geschlecht $g > 1$ ist die explizite Berechnung dieser Selbstschnittzahl nach wie vor unbekannt und auch über Schranken für diese Zahlen ist nur wenig bekannt.

Parshin zeigte, dass eine spezielle obere Schranke für $\bar{\omega}^2$ für gewisse Familien von Morphismen von arithmetischen Flächen eine effektive Version von Mordell's Vermutung liefern würden (siehe [Pa], [Vo]) und somit Aussagen über die rationalen Punkte auf Kurven gemacht werden könnten. Allerdings gibt es nur wenige Resultate für derartige obere Schranken.

Es gibt explizite Berechnungen bzw. gewisse Abschätzungen von $\bar{\omega}^2$ für hyperelliptische Kurven (siehe [BMMB] und [Ka]) und für die Modulkurven $X_0(N)$ (siehe [AU]). Desweiteren gibt es polynomiale obere Schranken in Ab-

hängigkeit vom Belyi Grad einer Kurve (siehe [Ja]). Wir befassen uns in dieser Arbeit mit oberen Schranken für $\bar{\omega}^2$ nach Kühn (siehe [Kü]). Diese Theorie ist für reguläre Modelle von Kurven mit gewissen Eigenschaften anwendbar. Bislang wurden obere Schranken nach Kühn für Modulkurven mit gewissen Level Strukturen und Fermatkurven mit quadratfreien Exponenten berechnet (weitere Beispiele siehe [CM],[CK]). Ein Ziel dieser Arbeit ist es, diese Liste um eine weitere Beispielklasse von Kurven zu ergänzen.

Auf der anderen Seite sind untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ im Zusammenhang mit der Bogomolov Vermutung von Interesse (siehe [Sz], [U1] und [Zh1]). Im Fall von Funktionenkörpern gibt es bereits eine effektive Version der Bogomolov Vermutung (siehe [Zh2] und [Ci2]), während dies für Zahlkörper nach wie vor ein offenes Problem ist. In [KM] geben Kühn und Müller eine Theorie an, mit der man ebenfalls für eine große Klasse von arithmetischen Flächen untere Schranken von $\bar{\omega}^2$ berechnen kann. Diese Theorie ist in Situationen anwendbar, in denen [Zh1] nicht funktioniert. Bis heute wurden untere Schranken nach Kühn und Müller [KM] ebenfalls für Modul- und Fermatkurven berechnet (siehe [CM],[CK]).

In dieser Arbeit betrachten wir obere und untere Schranken von $\bar{\omega}^2$ für die Familie von superelliptischen Kurven bestimmt durch die affine Gleichung

$$C_p : y^p = x^3 - x,$$

wobei $p \geq 5$ eine Primzahl ist. Die Kurve ist so gewählt, dass die Konstruktion von geeigneten regulären Modellen für jedes Mitglied der Familie möglich ist.

Das erste zentrale Ergebnis der Arbeit ist die Konstruktion eines regulären semistabilen Modelles für jede Kurve der oben genannten Familie von superelliptischen Kurven C_p . Dazu bestimmen wir für alle $p \geq 5$ ein semistabiles Modell von C_p welches wir mit $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ bezeichnen.

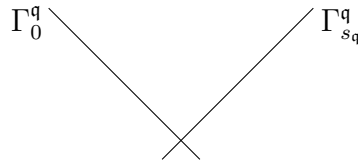
Theorem. (siehe Theorem 2.2.5) *Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$ mit primitiver p -ter Einheitswurzel ζ_p . Dann gibt es ein semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p über $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, für das folgendes gilt:*

i.) Für alle Primstellen \mathfrak{m} von \mathcal{O}_K die nicht über (2) oder (p) liegen ist die

Reduktion glatt und gegeben durch

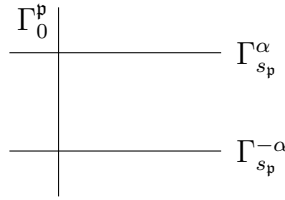
$$\mathcal{C}_{p,\mathfrak{m}}^{\text{ss}} = C_p \times k(\mathfrak{m}).$$

ii.) Sei \mathfrak{q} ein Primideal welches $(2) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{q}}^{\text{ss}}$ folgende Konfiguration



wobei $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{q}}) = p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}) = \frac{p-1}{2}$.

iii.) Sei \mathfrak{p} ein Primideal welches $(p) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{p}}^{\text{ss}}$ folgende Konfiguration



wobei $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{p}}) = 0$, $p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}) = p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}) = \frac{p-1}{2}$.

Die einzigen singulären Punkte sind die Schnittpunkte der Komponenten.

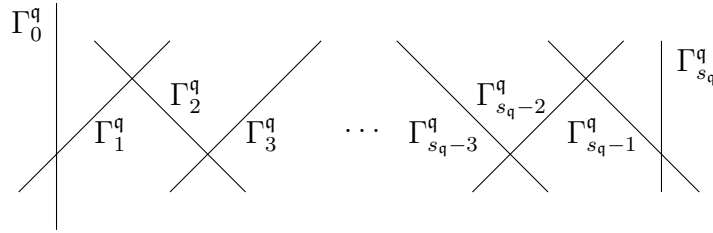
Wir nutzen dieses Resultat, um daraus ein reguläres Modell der Kurvenfamilie mit Hilfe bekannter Theorie zu konstruieren. Dabei nutzen wir die Eigenschaft des semistabilen Modelles aus, dass nur Doppelpunkte als Singularitäten (also die potentiell nicht regulären Punkte) auftreten können und bekannt ist, wie diese aufgelöst werden können (siehe Proposition 1.3.21). Diese Auflösung hängt von der lokalen Beschaffenheit der singulären Punkte ab und tritt im nächsten Ergebnis in der Form auf, dass diese lokale Beschaffenheit die Anzahl der Komponenten bestimmt (daher die Zahlen $s_{\mathfrak{q}}$ und $s_{\mathfrak{p}}$). Wir erhalten das folgende reguläre semistabile Modell, welches wir mit $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ bezeichnen.

Proposition. (siehe Proposition 2.3.2) Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$ mit primitiver p -ter Einheitswurzel ζ_p . Dann gibt es ein reguläres semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ von C_p über $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, für das folgendes gilt:

i.) Für alle Primstellen \mathfrak{m} von \mathcal{O}_K die nicht über (2) oder (p) liegen ist die Reduktion glatt und gegeben durch

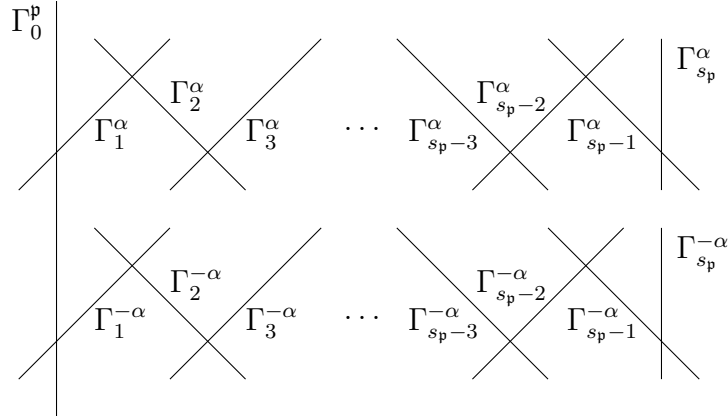
$$\mathcal{C}_{p,\mathfrak{m}}^{\text{reg}} = C_p \times k(\mathfrak{m}).$$

ii.) Sei \mathfrak{q} ein Primideal welches (2) $\subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{q}}^{\text{reg}}$ folgende Konfiguration



Es gilt $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{q}}) = p_a(\Gamma_{s_q}^{\mathfrak{q}}) = \frac{p-1}{2}$ und $p_a(\Gamma_i^{\mathfrak{q}}) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, s_q - 1$.

iii.) Sei \mathfrak{p} ein Primideal welches (p) $\subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{p}}^{\text{reg}}$ folgende Konfiguration



Außerdem gilt $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{p}}) = 0$, $p_a(\Gamma_{s_p}^{\alpha}) = p_a(\Gamma_{s_p}^{-\alpha}) = \frac{p-1}{2}$ und $p_a(\Gamma_i^{\pm\alpha}) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, s_p - 1$.

(Für mehr Details siehe Proposition 2.3.2).

Dieses Ergebnis nutzen wir um obere und untere Schranken von $\bar{\omega}^2$, mit Methoden von [Kü] für die oberen und [KM] für die unteren Schranken, in dieser Kurvenfamilie auszurechnen. Für die oberen Schranken erhalten wir folgendes Ergebnis.

Theorem. (siehe Theorem 4.1.8) Sei $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ das reguläre semistabile Modell aus Proposition 2.3.2 über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$. Dann gilt für die arithmetische Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$ der dualisierenden Garbe zusammen mit der Arakelov Metrik

$$\bar{\omega}^2 \leq (2g - 2) \left([K : \mathbb{Q}] (\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) - (p - 2) \left(\frac{R_{\mathfrak{q}}}{2} \log(2) + R_{\mathfrak{p}} \log(p) \right) \right),$$

wobei $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten unabhängig von p sind und

$$R_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_{\mathfrak{q}} \cdot f(\mathfrak{q}|2), \quad R_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p)$$

mit Trägheitsgrad f (siehe Bemerkung 4.1.9).

Da die Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$ positiv ist, liefert dieses Ergebnis außerdem eine Schranke für die Größe der Zahlen $R_{\mathfrak{q}}$ bzw. $R_{\mathfrak{p}}$ (für Details siehe Bemerkung 4.1.9). Für die unteren Schranken für $\bar{\omega}^2$ erhalten wir folgendes Ergebnis.

Theorem. (siehe Theorem 4.1.23) Sei $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ das reguläre semistabile Modell aus Proposition 2.3.2 über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$. Dann gilt für den Selbstschnitt $\bar{\omega}^2$ der dualisierenden Garbe

$$\bar{\omega}^2 \geq (p - 2) (R_{\mathfrak{q}} \log(2) + 2R_{\mathfrak{p}} \log(p)),$$

wobei $R_{\mathfrak{q}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ wie oben sind.

Die unteren Schranken liefern zusammen mit den Oberen noch eine leicht stärkere Schranke für die Größe der Zahlen $R_{\mathfrak{q}}$ bzw. $R_{\mathfrak{p}}$. (für Details siehe Bemerkung 4.1.24)

Insgesamt können wir sagen, dass das semistabile Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ und die Arithmetik des Zahlkörpers K stark miteinander verflochten sind. Daher ist es ein interessantes Problem die Zahlen $R_{\mathfrak{q}}$ bzw. $R_{\mathfrak{p}}$ explizit zu bestimmen. In dieser Dissertation können jedoch keine konkreten Aussagen über diese Zahlen gemacht werden.

Inhalt der Arbeit

1. *Kapitel "Geometrie von Kurven"*: Im ersten Kapitel wiederholen wir bereits bekannte Theorie über semistabile und reguläre Modelle von Kurven sowie der dazu benötigten Grundlagen. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf Abschnitt 1.4 und 1.5, über die semistabile Reduktion von superelliptischen Kurven unter gewissen Einschränkungen. Insbesondere Abschnitt 1.4 (nach [BW2]) und Abschnitt 1.5 (nach [Le]) über die semistabile Reduktion von superelliptischen Kurven ist hier von Interesse.

2. *Kapitel "Die Familie von Kurve $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$ "*: Im zweiten Kapitel betrachten wir die genannte Familie von Kurven und konstruieren für jedes $p \geq 5$ ein reguläres semistabiles Modell C_p^{reg} . Dabei beginnen wir in Abschnitt 2.1 mit allgemeinen Eigenschaften der Kurvenfamilie und konstruieren dann in Abschnitt 2.2 ein semistabiles Modell. In Abschnitt 2.3 berechnen wir aus dem semistabilen Modell ein reguläres Modell.

3. *Kapitel "Arakelov Invarianten von Kurven"*: In diesem Kapitel fassen wir die nötige Arakelov Theorie zusammen. Wir beginnen in Abschnitt 3.1 mit allgemeiner Theorie und kommen dann in Abschnitt 3.2 zu den oberen Schranken für $\bar{\omega}^2$ nach [Kü]. In Abschnitt 3.3 stellen wir dann noch die unteren Schranken für $\bar{\omega}^2$ nach [KM] vor.

4. *Kapitel "Obere und untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}^{\text{reg}}$ "*: In diesem Kapitel beginnen wir in Abschnitt 4.1.4 mit der Berechnung eines kanonischen Divisors auf der Familie C_p^{reg} . In Abschnitt 4.1 berechnen wir dann mit Hilfe der Theorie aus Kapitel 3 (über Arakelov Invarianten von Kurven) die oberen und unteren Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf C_p^{reg} .

Danksagung

Als erstes möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Ulf Kühn bedanken. Ich bin ihm sehr dankbar für die Vergabe des spannenden Themas dieser Dissertation und für die ständige Unterstützung in den letzten Jahren. Großer Dank gilt auch Prof. Dr. Jan Steffen Müller der mich ebenfalls in den letzten Jahren immer wieder und sehr intensiv unterstützt hat.

Außerdem möchte ich meiner Arbeitsgruppe "Arithmetische Geometrie und Zahlentheorie" für die tolle Zeit und das sehr gute Arbeitsklima danken. Insbesondere Henrik Bachmann, Benjamin Göbel, Nils Matthes und Raphael Zayadeh möchte ich für mathematische und nicht-mathematische Unterstützung während der letzten Jahre danken.

Kapitel 1

Geometrie von Kurven

In diesem Kapitel werden wir bekannte Methoden aus der arithmetischen Geometrie zusammenstellen. Wir konzentrieren uns hierbei insbesondere auf die Konstruktion von semistabilen und regulären Modellen und die dafür benötigte Theorie. Mit Hilfe dieser Theorie werden wir in Kapitel 2 konkret ein semistabiles reguläres Modell einer superelliptischen Familie von Kurven über einem Zahlkörper K konstruieren.

In den Abschnitten 1.2 und 1.3 ist unsere Hauptreferenz das Buch "*Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*" von Q. Liu [Li1].

Für die Abschnitte 1.4 und 1.5, über die semistabile Reduktion verwenden wir in einem Fall die Ergebnisse von I. Bouw und S. Wewers [BW2] und im anderen die Resultate von C. Lehr [Le].

1.1 Algebraische Kurven

Definition 1.1.1. Sei K ein Körper. Eine *algebraische Kurve* ist eine algebraische Varietät deren irreduzible Komponenten Dimension 1 haben.

Wenn wir in dieser Arbeit von einer Kurve über einem Körper K sprechen, meinen wir in der Regel eine Kurve im Sinne der nächsten Definition. Falls eine dieser Eigenschaften nicht erfüllt ist, weisen wir darauf hin.

Definition 1.1.2. Eine projektive, glatte und geometrisch zusammenhängende algebraische Kurve X über K heißt allgemein *Kurve über K* und wird mit X/K notiert. *Glatt* bedeutet dabei, dass es keine singulären Punkte auf X über dem algebraischen Abschluss \overline{K} von K gibt.

In dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich mit der folgenden Klasse von Kurven beschäftigen.

Definition 1.1.3. Eine *superelliptische Kurve* ist eine Kurve über einem Körper K der Charakteristik 0, die durch eine affine Gleichung der Form

$$y^n = f(x)$$

bestimmt ist, wobei $f(x) \in K[x]$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Die Kurve im folgenden Beispiel wird uns in der gesamten Arbeit begleiten. Wir zeigen in dem Beispiel, dass die gewählte Kurve glatt über $\overline{\mathbb{Q}}$ ist.

Beispiel 1.1.4. Sei $p \geq 5$ eine Primzahl und C_p die affine Kurve

$$C_p : y^p = x^3 - x$$

über \mathbb{Q} . Die Kurve ist singulär in den Punkten, in denen alle partiellen Ableitungen verschwinden. Wir setzen $f(x, y) = y^p - x^3 + x$ und erhalten für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = py^{p-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3x^2 + 1.$$

Diese verschwinden für Paare (x, y) der Form $(x, y) = (\pm\sqrt{1/3}, 0)$. Da es keine Punkte auf C_p gibt, die dieses erfüllen, ist die Kurve glatt über $\overline{\mathbb{Q}}$.

Der projektive Abschluss von C_p ist gegeben durch $Y^p = X^3Z^{p-3} - XZ^{p-1}$ und es gibt nur einen Punkt $P_\infty = (1 : 0 : 0)$ mit $Z = 0$. Allerdings ist dieser Punkt singulär, so dass der projektive Abschluss nicht glatt ist.

Jedoch können wir eine weitere affine Karte so wählen, dass der Punkt im Unendlichen nicht mehr singulär ist. Wähle $a, b \in \mathbb{N}$ so, dass $3b - pa = 1$ gilt, was wegen $\gcd(3, p) = 1$ immer möglich ist. Nach [To, §1] induziert die Koordinatenabbildung

$$x = \frac{1}{v^b u^p}, \quad y = \frac{1}{v^a u^3}$$

einen Morphismus $\varphi : C_p \rightarrow \tilde{C}_p$, wobei

$$\tilde{C}_p : v = 1 - u^{2p} v^{2b}.$$

Wenn weder u noch v Null sind, befinden wir uns auf der ursprünglichen affinen Karte C_p . Es gibt keine Punkte mit $v = 0$ auf \tilde{C}_p und genau einen Punkt

$P_\infty = (u, v) = (0, 1)$ falls $u = 0$. Dieser Punkt ist nicht singulär. Die Umkehrabbildung

$$u = \frac{x^a}{y^b}, \quad v = \frac{y^p}{x^3}$$

induziert einen Morphismus $\psi : \tilde{C}_p \rightarrow C_p$ und es gilt $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\tilde{C}_p}$ sowie $\psi \circ \varphi = \text{id}_{C_p}$, so dass die Abbildung birational und damit eine zulässige Verklebung der beiden Karten ist.

1.2 Gefaserte und arithmetische Flächen

1.2.1. Im folgenden sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K . Weiter sei S das Dedekind Schema $S = \text{Spec}(R)$ der Dimension 1.

Bemerkung 1.2.2. Wir betrachten in dieser Arbeit hauptsächlich Zahlkörper K mit zugehörigem Ganzheitsring $R = \mathcal{O}_K$ oder nicht-archimedische lokale Körper K_ν mit diskreten Bewertungsring $R = R_\nu$.

Definition 1.2.3. Sei S wie in 1.2.1. Ein integrales, projektives und flaches S -Schema $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ der Dimension 2 heißt *gefaserte Fläche über S* . Der generische Punkt von S wird mit η notiert und

$$\mathcal{X}_K = \mathcal{X} \times_S \text{Spec } K$$

bezeichnet die *generische Faser* von \mathcal{X} . Ist $s \in S$, $s \neq \eta$ ein abgeschlossener Punkt und $k = k(s)$ der Restklassenkörper von s , so heißt

$$\mathcal{X}_s = \mathcal{X} \times_S \text{Spec } k(s)$$

spezielle Faser über s von \mathcal{X} und wird mit \mathcal{X}_s oder auch $\mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k(s)}$ notiert, falls klar ist über welchem abgeschlossenen Punkt wir uns befinden.

Bemerkung 1.2.4. Die Flachheit von f ist äquivalent zur Surjektivität von f und sorgt dafür, dass "stetig" über alle Fasern variiert wird (siehe z.B. [Si, Seite 311]). Dass das Schema integral ist, ist gleichbedeutend damit, dass \mathcal{X} irreduzibel und reduziert ist.

Proposition 1.2.5. *Sei S wie in 1.2.1 mit generischem Punkt η und $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine gefaserte Fläche. Dann ist die generische Faser \mathcal{X}_K eine projektive integrale Kurve über $K(S)$ und die spezielle Faser \mathcal{X}_s ist für alle $s \in S$ eine projektive Kurve über $k(s)$.*

Beweis. Siehe [Li1, Lemma 8.3.3]. \square

1.2.1 Regularität und Aufblasungen

Proposition 1.2.6. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Dann gilt*

$$\dim(A) \leq \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2), \quad (1.1)$$

wobei $\dim(A)$ die Krulldimension von A und $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ die Dimension des A/\mathfrak{m} -Vektorraumes $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist.

Beweis. Siehe [Li1, Corollary 2.5.14.b]. \square

Definition 1.2.7. Einen noetherschen lokalen Ring A mit maximalem Ideal \mathfrak{m} , für den $\dim(A) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ gilt, nennen wir *regulär*. Dies ist genau dann der Fall, wenn \mathfrak{m} von $\dim(A)$ Elementen erzeugt wird.

Definition 1.2.8. Ein lokal noethersches Schema X heißt *regulär an $x \in X$* , wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ ein regulärer Ring ist. Das Schema X heißt *regulär*, falls es regulär in allen Punkten $x \in X$ ist. Ein Punkt auf X der nicht regulär ist, heißt *singulär*. Ein Schema, welches nicht regulär ist, heißt *singulär*.

Wollen wir Komponenten oder Punkte eines Schemas auf Regularität überprüfen, ist es oft sinnvoll $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ zu betrachten. Wir geben eine weitere Methode zum Überprüfen auf Regularität an.

Proposition 1.2.9. *Sei (A, \mathfrak{m}) ein regulärer, lokaler, noetherscher Ring und $f \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$. Dann ist A/fA genau dann regulär, wenn $f \notin \mathfrak{m}^2$.*

Beweis. Siehe [Li1, Proposition 4.2.12]. \square

Die nächste Proposition macht diese Methode anwendbar. Das heißt, dass wir mit Hilfe der Proposition den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ in die gewünschte Form bringen können. Die Proposition besagt, dass Quotientenbildung und Lokalisierung kommutieren.

Proposition 1.2.10. *Sei A ein Ring, $B \subset A$ eine multiplikative Teilmenge, $I \subset A$ ein Ideal und \tilde{B} das Bild von B in B/I . Dann gilt*

$$(A/I)_{(\tilde{B})} \cong A_{(B)}/IA_{(B)}.$$

Beweis. Siehe [Ma, Theorem 4.2]. \square

Definition 1.2.11. Sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Dann definieren wir $C_{p,\mathbb{Z}}$ als die gefaserte Fläche gegeben durch die Verklebung der beiden affinen Schemata

$$U_1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x, y]/(y^p - x^3 + x))$$

und

$$U_2 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[u, v]/(v - 1 + u^{2p}v^{2b})),$$

wobei $x = \frac{1}{v^b u^p}$, $y = \frac{1}{v^a u^3}$ und a, b wie in Beispiel 1.1.4.

Die folgende Proposition sagt uns, warum die Glattheit der generischen Faser wichtig ist.

Proposition 1.2.12. *Sei S wie in 1.2.1 und $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser \mathcal{X}_K . Dann gibt es eine nicht leere offene Teilmenge V von S , so dass $f^{-1}(V) \rightarrow V$ glatt ist. Das heißt, die spezielle Faser \mathcal{X}_s ist glatt bis auf endlich viele $s \in S$.*

Beweis. Siehe [Li1, Proposition 8.3.11]. \square

Beispiel 1.2.13. Sei $C_{p,\mathbb{Z}}$ die gefaserte Fläche aus Definition 1.2.11. In Beispiel 1.1.4 haben wir gesehen, dass die generische Faser $C_{\mathbb{Q}}$ glatt ist. Nach Proposition 1.2.12 gibt es daher nur endlich viele Fasern die nicht glatt sind. Wir betrachten zuerst die affine Karte U_1 von $C_{p,\mathbb{Z}}$ (siehe Definition 1.2.11) und überprüfen die Fasern über allen Primstellen (π) auf Regularität. Wir setzen $f(x, y) = y^p - x^3 + x$ und erhalten für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = py^{p-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 1. \quad (1.2)$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$\pi = 2$: Betrachten wir die Faser $C_{(2)}$ mit Hilfe von Proposition 1.2.9 und 1.2.10. Nach (1.2) ist höchstens der Punkt $P = V((x+1, y, \pi))$ korrespondierend zu dem maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (x+1, y, \pi)$ nicht regulär. Es gilt

$$\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_K[x, y]_{\mathfrak{m}}/(y^p - x^3 + x).$$

Nach Proposition 1.2.9 ist $\mathcal{O}_{C,P}$ genau dann regulär, wenn $\bar{f} \notin \mathfrak{m}^2$, wobei \bar{f} die Reduktion modulo π von f ist. Es gilt

$$\bar{f}(x, y) = y^2 \cdot y^{p-2} - (x+1)^2 \cdot x + \pi(x+1) \cdot x \in \mathfrak{m}^2,$$

also ist die spezielle Faser $C_{(2)}$ im Punkt P nicht regulär.

$\pi = p$: Diesen Fall betrachten wir später in Proposition 2.1.5.

$\pi \neq 2, p$: Über allen Fasern, die nicht über (2) und (p) liegen, folgt aus (1.2) dass $y = 0$ für einen nicht regulären Punkt (x, y) gelten muss. Die einzigen Punkte der Form $(x, 0)$, welche auf der Kurve liegen, müssen $x \equiv 1, 0, -1 \pmod{\pi}$ erfüllen. Jedoch verschwindet die partielle Ableitung nach x (über keiner von (2) und (p) verschiedenen Primstelle) an keinem dieser Punkte.

Bleibt noch der Punkt im Unendlichen. Wir setzen $g(u, v) = v - 1 + u^{2p}v^{2b}$ und erhalten für die partielle Ableitung nach v

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 1 + 2bu^{2p}v^{2b-1}.$$

Im Punkt $P_\infty = (0, 1)$ gilt sofort

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0, 1) \equiv 1 \not\equiv 0,$$

so dass die Reduktion des Punktes im Unendlichen über allen Primstellen regulär ist.

Definition 1.2.14. Sei S wie in 1.2.1. Eine reguläre gefaserte Fläche $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ heißt *arithmetische Fläche*. Wir nehmen an, dass die *generische Faser* \mathcal{X}_K von f geometrisch irreduzibel ist.

Kommen wir nun zu Aufblasungen und Eigenschaften von Aufblasungen. Sei A ein noetherscher Ring, $I \subseteq A$ ein Ideal und \tilde{A} die graduierte A -Algebra

$$\tilde{A} = \bigoplus_{d \geq 0} I^d, \quad \text{wobei } I^0 := A.$$

Sei h_1, \dots, h_n ein Erzeugendensystem von I . Weiter sei $t_i \in I = \tilde{A}_1$ das Element h_i aufgefasst als homogenes Element vom Grad 1. Dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus von graduierten A -Algebren

$$\phi : A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \tilde{A},$$

gegeben durch $\phi(T_i) = t_i$. Ist $P(T) \in A[T_1, \dots, T_n]$ ein homogenes Polynom, so gilt

$$P(t_1, \dots, t_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(h_1, \dots, h_n) = 0.$$

Definition 1.2.15. Sei $X = \text{Spec}(A)$ ein affines noethersches Schema, $I \subseteq A$ ein Ideal und $\tilde{X} = \text{Proj}(\tilde{A})$. Dann nennt man den kanonischen Morphismus $\tilde{X} \rightarrow X$ *Aufblasung von X entlang $V(I) = \text{Spec}(A/I)$* .

Eine Aufblasung hat die folgenden Eigenschaften.

Lemma 1.2.16. *Sei A ein noetherscher Ring und $I \subseteq A$ ein Ideal.*

- i.) *Der Ring \tilde{A} ist ganz (bzw. reduziert) genau dann, wenn A ganz (bzw. reduziert) ist.*
- ii.) *Sei $S_i = T_i/T_1 \in \mathcal{O}(D_+(T_1))$, wobei $D_+(T_1)$ die offene Menge zu dem homogenen Element T_1 ist. Dann ist $(\text{Ker } \phi)_{(T_1)}$ gegeben durch*

$$\{P(S) \in A[S_2, \dots, S_n] \mid \exists d > 0, h_1^d P \in (h_1 S_2 - h_2, \dots, h_1 S_n - h_n)\}$$

und $\tilde{A}_{(t_1)}$ ist isomorph zur A -Unteralgebra von A_{h_1} erzeugt von den Elementen $h_2/h_1, \dots, h_n/h_1$.

- iii.) *Sei $J := (h_i T_j - h_j T_i)_{1 \leq i, j \leq n}$. Dann ist $J \subset \text{Ker } \phi$. Angenommen die h_i definieren ein minimales Erzeugendensystem und das abgeschlossene Unterschema $Z := V_+(J)$ vom \mathbb{P}_A^{n-1} ist integral, dann ist die abgeschlossene Immersion $\alpha : \text{Proj } \tilde{A} \rightarrow Z$ ein Isomorphismus, wobei $V_+(J)$ die Menge der Ideale ist, die J enthalten.*

Beweis. Siehe [Li1, Lemma 8.1.2]. □

Das folgende Lemma gibt uns eine konstruktive Methode zum Aufblasen von Punkten auf einem Schema.

Lemma 1.2.17. *Sei $\tilde{X} \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ die Aufblasung eines noetherschen, integralen, affinen Schemas entlang des abgeschlossenen Unterschemas $V(I)$. Sei $I = (h_1, \dots, h_n)$, wobei $h_i \neq 0$ für alle i . Dann ist \tilde{X} die Vereinigung der offenen affinen Unterschema $\text{Spec}(A_i)$, wobei A_i die A -Unteralgebra von $\text{Quot}(A)$, erzeugt von $h_j h_i^{-1} \in \text{Quot}(A)$ mit $1 \leq j \leq n$, ist.*

Beweis. Siehe [Li1, Lemma 8.1.4]. □

1.2.2 Schnitttheorie arithmetischer Flächen

Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche wie in Definition 1.2.14.

Bemerkung 1.2.18. i.) Da S noethersch und f von endlichem Typ ist, folgt dass auch \mathcal{X} noethersch ist.

ii.) Da \mathcal{X} ein reguläres noethersches integrales Schema (und damit normal, siehe [Li1, Theorem 4.2.16]) ist, ist $\text{Cl}(\mathcal{X})$ isomorph zur Picard Gruppe $\text{Pic}(\mathcal{X})$ (siehe [Li1, Korollar 7.1.19 und Proposition 7.2.16]). Mit $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ notieren wir die invertierbare Garbe zu einem Divisor D .

Definition 1.2.19. Wir setzen $\text{Cl}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}} = \text{Cl}(\mathcal{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dann ist $\text{Cl}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ wieder eine Gruppe und wir können mit Divisoren mit rationalen Koeffizienten arbeiten.

Lemma 1.2.20. Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche und $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt. Dann gilt

$$\mathcal{X}_s = \frac{1}{m} \text{div}(h)$$

in $\text{Cl}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$, wobei $\mathcal{X}_s = f^*s$, $h \in K(\mathcal{X})$ und $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Siehe [Cu, Lemma 1.3.16]. □

Definition 1.2.21. Seien \mathcal{D}, \mathcal{E} effektive Divisoren ohne gemeinsame Komponente, $x \in \mathcal{X}$ ein abgeschlossener Punkt und f, g Repräsentanten im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ von \mathcal{D} und \mathcal{E} . Dann ist die *Schnittzahl* $i_x(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ im Punkt x als die Länge von $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}/(f, g)$ aufgefasst als $\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}$ -Modul definiert. Das Symbol $i_x(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ ist bilinear und die Schnittzahl kann auf alle Divisoren von \mathcal{X} ohne gemeinsame Komponente fortgesetzt werden (schreibe \mathcal{D} als $\mathcal{D}_+ - \mathcal{D}_-$ mit \mathcal{D}_+ und \mathcal{D}_- effektiv und definiere $i_x(\mathcal{D}, \mathcal{E}) := i_x(\mathcal{D}_+, \mathcal{E}) - i_x(\mathcal{D}_-, \mathcal{E})$). Nun sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt. Die *Schnittzahl von \mathcal{D} und \mathcal{E} über s* ist dann definiert durch

$$i_s(\mathcal{D}, \mathcal{E}) := \sum_{x \in X_s} i_x(\mathcal{D}, \mathcal{E})[k(x) : k(s)],$$

wobei x alle abgeschlossenen Punkte von \mathcal{X}_s durchläuft und $k(x), k(s)$ die Restklassenkörper von x und s sind. Wir notieren die Schnittzahl $i_s(\mathcal{D}, \mathcal{E})$ von zwei Divisoren \mathcal{D} und \mathcal{E} auch mit $\mathcal{D}.\mathcal{E}$ wenn klar ist, welches $s \in S$ gemeint ist.

Proposition 1.2.22. Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche und $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt.

- i.) Es gilt $\Gamma \cdot \mathcal{X}_s = 0$ für jede irreduzible Komponente Γ von \mathcal{X}_s .
- ii.) Seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ die irreduziblen Komponenten von \mathcal{X}_s mit Vielfachheiten d_1, \dots, d_r . Dann gilt

$$\Gamma_i^2 = -\frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i} d_j \Gamma_j \cdot \Gamma_i$$

für alle $i \leq r$.

Beweis. Siehe [Li1, Proposition 9.1.21]. □

Definition 1.2.23. Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und \mathcal{E} ein vertikaler Divisor in der speziellen Faser \mathcal{X}_s . Nach dem "Moving Lemma" (siehe [Li1, Korollar 9.1.10]) existiert ein Hauptdivisor (f) , so dass $\mathcal{D} := \mathcal{E} + (f)$ und \mathcal{E} keine gemeinsame Komponente haben. Nach [La, Theorem 3.1, Seite 58] gilt $(f) \cdot \mathcal{E} = 0$ und die *Selbstschnittzahl* von \mathcal{E} ist definiert als

$$\mathcal{E}^2 := \mathcal{D} \cdot \mathcal{E}.$$

1.2.3 Kanonische Divisoren auf arithmetischen Flächen

Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche wie in Definition 1.2.14. Da f ein lokal vollständiger Durchschnitt (siehe [Li1, Beispiel 6.3.18]) ist, kann die kanonische Garbe $\omega_{\mathcal{X}/S}$ von $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ definiert werden (siehe [Li1, Definition 6.4.7]).

Da S lokal noethersch und f ein projektiver, flacher und lokal vollständiger Durchschnitt der relativen Dimension 1 ist, ist die kanonische Garbe isomorph zur 1-dualisierenden Garbe (siehe [Li1, Theorem 6.4.32]).

Definition 1.2.24. Ein Divisor \mathcal{K} von \mathcal{X} mit $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\mathcal{K}) \cong \omega_{\mathcal{X}/S}$ heißt *kanonischer Divisor*. Nach Bemerkung 1.2.18 existiert dieser immer.

Bemerkung 1.2.25. Sei $s \in S$. Zu jeder Faser $\mathcal{X}_s \rightarrow \text{Spec } k(s)$ gibt es eine kanonische Garbe $\omega_{\mathcal{X}_s/\text{Spec } k(s)}$ und es gilt die Relation $\omega_{\mathcal{X}_s/\text{Spec } k(s)} \cong \omega_{\mathcal{X}/S}|_{\mathcal{X}_s}$ (siehe [Li1, Theorem 6.4.9]). Falls s der generische Punkt ist, so kann analog zur Definition für arithmetische Flächen ein kanonischer Divisor K von $\mathcal{X}_K = \mathcal{X} \times_S \text{Spec } K$ definiert werden. Es gilt $\mathcal{K}|_{\mathcal{X}_K} \cong K$.

Sei nun \mathcal{E} ein vertikaler Divisor der speziellen Faser \mathcal{X}_s und \mathcal{K} ein kanonischer Divisor auf \mathcal{X} . Da kanonische Divisoren eindeutig bis auf rationale Äquivalenz sind, hängt die Schnittzahl $\mathcal{K} \cdot \mathcal{E}$ nur von $\omega_{\mathcal{X}/S}$ und nicht von dem Repräsentanten \mathcal{K} ab. Es gilt das folgende wichtige Theorem.

Theorem 1.2.26. (Adjunktionsformel) *Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche, $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und \mathcal{E} ein vertikaler Divisor der speziellen Faser \mathcal{X}_s . Dann gilt*

$$2p_a(\mathcal{E}) - 2 = \mathcal{E}^2 + \mathcal{K} \cdot \mathcal{E}, \quad (1.3)$$

wobei $p_a(\mathcal{E})$ das arithmetische Geschlecht von \mathcal{E} ist.

Beweis. Siehe [Li1, Theorem 9.3.7]. □

In späteren Rechnungen wollen wir konkret einen kanonischen Divisor auf einer arithmetischen Fläche bestimmen. Die nächste Proposition wird uns dabei helfen.

Proposition 1.2.27. *Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine arithmetische Fläche und $\mathcal{K} \in \text{Cl}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X})$ ein Divisor auf \mathcal{X} , der die Adjunktionsformel (1.3) erfüllt und dessen Einschränkung auf die generische Faser \mathcal{X}_K ein kanonischer Divisor von \mathcal{X}_K ist. Dann ist \mathcal{K} ein kanonischer Divisor auf \mathcal{X} .*

Beweis. Siehe [CK, Proposition 2.5]. □

Bemerkung 1.2.28. Nach Lemma 1.2.20 gilt in $\text{Cl}(\mathcal{X})_{\mathbb{Q}}$ für spezielle Fasern $\mathcal{X}_s = \frac{1}{m} \text{div}(h)$. Das heißt, dass die speziellen Fasern Divisoren sind, die von Funktionen kommen, und dass der kanonische Divisor eindeutig bis auf ein rationales Vielfaches ist.

1.3 Modelle von Kurven

In diesem Abschnitt wiederholen wir die nötige Theorie über Normalisierungen und Modelle von Kurven. Unsere Referenz für die Abschnitte 1.3.1-1.3.3 ist [Li1]. Für Abschnitt 1.3.4 verwenden wir [BLR] und [Cu] sowie [Sc] für Abschnitt 1.3.5.

1.3.1 Normalisierungen

Ein Integritätsring A heißt *normal*, falls A ganz abgeschlossen in $\text{Frac}(A)$ ist (d.h. $a \in \text{Frac}(A)$ ganz über A impliziert $a \in A$).

Definition 1.3.1. Sei X ein Schema. Dann heißt X *normal* an $x \in X$, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ normal ist. Das Schema X heißt *normal*, falls X irreduzibel und normal für alle $x \in X$ ist.

Definition 1.3.2. Sei X ein integrales Schema. Ein Morphismus $\pi : X' \rightarrow X$ heißt *Normalisierungsmorphismus*, falls X' normal ist und jeder dominante Morphismus $f : X \rightarrow Y$, mit Y normal, eindeutig durch π faktorisiert wird:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow \pi & \\ X' & & \end{array}$$

Definition 1.3.3. Ein Morphismus $f : X' \rightarrow X$ heißt *integral*, falls für alle offenen affinen Teilmengen U von X , $f^{-1}(U)$ affin ist und die Ringabbildung $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(f^{-1}(U))$ integral ist.¹

Proposition 1.3.4. Sei X ein integrales Schema. Dann existiert ein, bis auf Isomorphie, eindeutiger Normalisierungsmorphismus $\pi : X' \rightarrow X$. Außerdem ist ein Morphismus $f : X' \rightarrow X$ der Normalisierungsmorphismus genau dann, wenn Y normal, und f birational und integral ist.

Beweis. Siehe [Li1, Proposition 4.1.22]. □

Die Normalisierung eines Schemas können wir wie folgt verallgemeinern.

Definition 1.3.5. Sei X ein integrales Schema und L eine algebraische Erweiterung des Funktionenkörpers $K(X)$. Dann definieren wir die *Normalisierung von X in L* als integralen Morphismus $\pi : X' \rightarrow X$, wobei X' normal ist, $K(X') = L$ und π den kanonischen Morphismus $\text{Spec } L \rightarrow X$ fortsetzt. Wir notieren die Normalisierung auch mit $N(X, L)$.

¹Eine Ringabbildung $A \rightarrow B$ ist *integral*, falls alle Elemente aus B Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten aus A sind.

Bemerkung 1.3.6. Analog zu Proposition 1.3.4 gilt auch hier, dass die Normalisierung $\pi : X' \rightarrow X$ von X in L existiert und eindeutig ist. Außerdem ist $\pi^{-1}(U)$ für jede affine Teilmenge $U \subset X$ affin und $\mathcal{O}_{X'}(\pi^{-1}(U))$ ist der integrale Abschluss von $\mathcal{O}_X(U)$ in L . Die Normalisierung von X in $K(X)$, also $N(X, K(X))$, ist nichts anderes als die Normalisierung wie sie oben definiert ist.

1.3.2 Reguläre Modelle

Definition 1.3.7. Sei S wie in 1.2.1 und X eine Kurve über K . Ein *Modell* \mathcal{X} von X ist eine normale gefaserte Fläche $f : \mathcal{X} \rightarrow S$, so dass die generische Faser $\mathcal{X}_K = \mathcal{X} \times_S \text{Spec } K$ isomorph zu X/K ist.

Bemerkung 1.3.8. Die Normalität ist gleichbedeutend damit, dass wir eine Schnitttheorie auf der Fläche haben (siehe z.B. [Bo]).

Definition 1.3.9. i.) Sei X eine Kurve über K . Ein Modell \mathcal{X} von X heißt *regulär*, falls \mathcal{X} regulär ist.

ii.) Ein reguläres Modell \mathcal{X} von X heißt *relativ minimal*, falls jeder birationale Morphismus $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ auf ein anderes reguläres Modell \mathcal{X}' von X ein Isomorphismus ist. Falls alle relativ minimalen regulären Modelle in derselben birationalen Äquivalenzklasse von \mathcal{X} isomorph sind, heißt \mathcal{X} *minimales reguläres Modell* von X .

Bemerkung 1.3.10. Sei \mathcal{X} ein reguläres Modell von X über K . Ein irreduzibler vertikaler Divisor $\mathcal{D} \in \text{Div}(\mathcal{X})$ heißt *exzeptionell*, falls $\mathcal{D} \cong \mathbb{P}_k^1$ und $\mathcal{D}^2 = -1$. Aus Castelnuovo's Kriterium (siehe [Li1, Theorem 9.3.8]) folgt, dass \mathcal{X} minimal ist, genau dann wenn das Modell keine exzeptionellen Komponenten hat.

Unter welchen Bedingungen kann aus einer gefaserten Fläche mit generischer Faser $\mathcal{X}_K \cong X$ ein reguläres Modell (also eine arithmetische Fläche) konstruiert werden?

Definition 1.3.11. Sei X ein lokal noethersches Schema. Ein eigentlicher birationaler Morphismus $\pi : X' \rightarrow X$, wobei X' regulär ist, heißt *Desingularisierung* von X .

Theorem 1.3.12. *Sei S wie in 1.2.1 und $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser \mathcal{X}_K . Dann gibt es eine Desingularisierung von \mathcal{X} .*

Beweis. Siehe [Li1, Korollar 8.3.51]. □

1.3.3 Semistabile Modelle

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Semistabilität von Kurven und gefaserten Flächen. Eine semistabile Kurve ist eine Kurve die nur die "einfachsten" Singularitäten, sogenannte Doppelpunkte (siehe Definition 1.3.13), zulässt. Diese Kurven wurden zuerst im Zusammenhang mit Modulräumen von glatten Kurven von Deligne und Mumford [DM] studiert. Für die folgenden beiden Definitionen verwenden wir als Referenz [Li1].

Im folgenden seien K , R und S wie in 1.2.1.

- Definition 1.3.13.**
- i.) Sei X eine reduzierte Kurve über einem Körper K und $\pi : X' \rightarrow X$ der Normalisierungsmorphismus (siehe Definition 1.3.5). Ein abgeschlossener Punkt $x \in X$ heißt *gewöhnlicher Doppelpunkt* (oder *Knoten*), falls $\delta_x = 1$, wobei δ_x die δ -Invariante (siehe [Li1, Seite 304, Formel (5.18)]) zu einem singulären Punkte $x \in X$ ist. Ein gewöhnlicher Doppelpunkt heißt *split*, falls die Punkte $\pi^{-1}(x)$ über K rational sind.
 - ii.) Eine Kurve X über K heißt *semistabil*, falls die Kurve reduziert ist und nur gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten hat.
 - iii.) Ein Modell \mathcal{X} von X über \mathcal{O}_K heißt *semistabil*, falls jede Faser von $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ semistabil ist. Existiert ein derartiges Modell, so sagen wir, dass X semistabile Reduktion über K hat.
 - iv.) Ein semistabiles Modell heißt *stabil*, falls zusätzlich gilt:
 - i.) X ist zusammenhängend, projektiv und $p_a(X) \geq 2$,
 - ii.) Eine irreduzible Komponente Γ mit $\Gamma \cong \mathbb{P}_K^1$ schneidet alle anderen Komponenten in mindestens 3 Punkten.

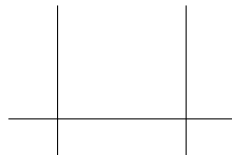
Bemerkung 1.3.14. Die Definition der Semistabilität ist in der Literatur unterschiedlich. Z.B. ist in [La] ein semistabiles Modell bereits regulär.

Definition 1.3.15. Sei $\mathcal{X} \rightarrow S$ eine gefaserte Fläche, $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und \mathcal{X}_s semistabil. Dann kann der speziellen Faser \mathcal{X}_s wie folgt ein Graph zugeordnet werden:

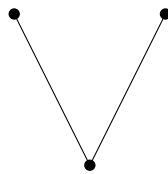
- Die Ecken sind gegeben durch die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser \mathcal{X}_s .
- Zwei Ecken sind mit einer Kante verbunden, falls die korrespondierenden irreduziblen Komponenten sich schneiden. Wenn 2 Komponenten sich n -mal schneiden, so sind sie auch mit n Kanten verbunden.
- Wenn sich eine Komponente selber schneidet, also einen Doppelpunkt hat, so wird der korrespondierenden Ecke ein Kreis zugeordnet.

Dieser Graph heißt *Dualgraph* der speziellen Faser \mathcal{X}_s . Die spezielle Faser ist ein *Baum*, falls der Dualgraph ein Baum² ist.

Beispiel 1.3.16. In Kapitel 2 dieser Arbeit werden wir konkret ein semistabiles Modell der Kurve aus Definition 1.2.11 konstruieren. Eine spezielle Faser, die dort auftreten wird, hat 3 Komponenten in folgender Konfiguration



mit Dualgraph



Wir motivieren das nächste Theorem mit dem folgenden Standardbeispiel.

Beispiel 1.3.17. Wir betrachten für eine Primzahl $p \geq 5$ die elliptische Kurve $E : y^2 = x^3 + p$ über \mathbb{Q} . Diese ist über \mathbb{Q} nicht singulär, reduziert sich modulo p aber zu der singulären Kurve $E_p : y^2 = x^3$ mit Spitze im Punkt $P = (x, y) = (0, 0)$, welche nicht semistabil ist. Wir erweitern jetzt den Grundkörper zu

²Im Sinne der Graphentheorie, also ein zusammenhängender kreisfreier Graph.

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{p})$ und machen eine Koordinatentransformation $(x, y) \mapsto (\sqrt[3]{p}x_1, \sqrt{p}y_1)$. Dann erhalten wir für E die Gleichung $y_1^2 = x_1^3 + 1$ welche modulo p gute Reduktion hat.

Theorem 1.3.18. (Deligne-Mumford) *Sei K ein Zahlkörper und X eine Kurve über K . Dann existiert eine endliche separable Körpererweiterung L von K , so dass es ein semistabiles Modell \mathcal{X} über \mathcal{O}_L von X/L gibt.*

Beweis. Siehe [DM, Korollar 2.7]. □

Bemerkung 1.3.19. Der Beweis von Theorem 1.3.18 von Deligne und Mumford ist konstruktiv. Jedoch ist es in der Praxis sehr schwierig derartige Modelle oder auch nur eine geeignete Körpererweiterung wie im Theorem anzugeben. So wird zum Beispiel in [Ar] von S. Wewers und K. Arzdorf ein alternativer Beweis angegeben, der es ermöglicht, über einen Algorithmus die semistabile Reduktion von Kurven, zumindest in Spezialfällen, zu berechnen.

Für spätere Zwecke brauchen wir die folgenden beiden Propositionen.

Proposition 1.3.20. *Sei S wie in 1.2.1 und $f : \mathcal{X} \rightarrow S$, S eine semistabile gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser \mathcal{X}_K . Sei x ein singulärer Punkt der speziellen Faser \mathcal{X}_s über $s \in S$. Dann gibt es ein S' -Schema, endlich, unverzweigt und flach über S , sowie einen Basiswechsel*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_S S' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

so dass jeder Punkt von \mathcal{X}' der über x (und in der Faser $\mathcal{X}'_{s'}$) liegt ein gewöhnlicher split Doppelpunkt über $k(s')$ ist. Außerdem gibt es einen Isomorphismus

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X}', x'} \cong \widehat{\mathcal{O}}_{S', s'}[[u, v]]/(uv - c) \tag{1.4}$$

für ein $c \in \mathfrak{m}_{s'}$. Die Bewertung von c nennen wir Stärke von x in \mathcal{X} .

Beweis. Siehe [Li1, Corollary 10.3.22]. □

Proposition 1.3.21. *Sei S wie in 1.2.1 und $f : \mathcal{X} \rightarrow S$ eine semistabile gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser \mathcal{X}_K . Sei $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ die minimale Desingularisierung (siehe [Li1, Definition 9.3.31]) und $x \in \mathcal{X}_s$ ein*

gewöhnlicher split Doppelpunkt der Stärke e (siehe Proposition 1.3.20). Dann ist $\pi^{-1}(x)$ eine Kette von $e-1$ projektiven Geraden über $k(s)$, die sich transversal in rationalen Punkten schneiden. Diese Geraden haben Vielfachheit 1 in \mathcal{X}'_s und Selbstschnitt -2 in \mathcal{X}' .

Beweis. Siehe [Li1, Korollar 10.3.25]. □

1.3.4 Abstieg

In diesem Abschnitt wollen wir einige Anwendungen aus der Abstiegstheorie wiederholen. Die Theorie erlaubt uns die faserweise Konstruktion eines regulären Modelles, die man dann durch Verklebung der Fasern zu einem globalen Modell zusammensetzen kann. Eine Zusammenfassung findet sich in [Cu, Abschnitt 2.3]. Für mehr Details siehe [BLR, Kapitel 6].

Sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring $R = \mathcal{O}_K$. Zu $r \in R$ sei $R_0 = \mathcal{O}_K[r^{-1}]$ die Lokalisierung von R bzgl. $\{1, r, r^2, \dots\}$. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ die Primideale von R mit $r \in \mathfrak{p}_i$. Weiter sei R_i die Lokalisierung von R an \mathfrak{p}_i für $1 \leq i \leq s$. Außerdem sei $\mathcal{S} = \text{Spec } R$ und $\mathcal{S}_i = \text{Spec } R_i$. Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 1.3.22. *Sei X ein $\text{Spec } K$ -Schema und für alle $1 \leq i \leq s$ sei $\mathcal{X}_i = \text{Spec } A_i$ ein affines \mathcal{S}_i -Schema, wobei X und $\mathcal{X}_i \times_{\mathcal{S}_i} \text{Spec } K$ zueinander $\text{Spec } K$ -isomorph sind. Dann existiert ein \mathcal{S} -Schema \mathcal{X} mit $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_i \cong \mathcal{X}_i$ für $1 \leq i \leq s$.*

Beweis. Siehe [Cu, Theorem 2.3.4]. □

Das Theorem 1.3.22 kann jetzt auf den Fall regulärer Modelle angewendet werden.

Korollar 1.3.23. *Sei X eine Kurve über K und \mathcal{X}_i ein reguläres Modell von X über $\mathcal{S}_i = \text{Spec } R_i$ für alle i . Dann existiert ein reguläres Modell \mathcal{X} über R mit $\mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_i \cong \mathcal{X}_i$ für $1 \leq i \leq s$.*

Beweis. Siehe [Cu, Korollar 2.3.5]. □

1.3.5 Modelle vom \mathbb{P}_K^1

In diesem Abschnitt stellen wir die nötige Theorie über Modelle vom \mathbb{P}^1 zusammen und verwenden als Referenz [Sc]. Es sei R ein vollständig diskreter Bewertungsring gemischter Charakteristik mit Quotientenkörper K , uniformisierendem Element π und algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k .

Definition 1.3.24. Ein *Gitter* von K^2 ist ein freier R -Untermodul vom Rank 2. Zwei Gitter M_1, M_2 sind *äquivalent*, falls es ein $a \in K^*$ gibt, so dass $M_1 = aM_2$ gilt und mit $[M]$ notieren wir die Äquivalenzklasse eines Gitters M . Zu je zwei Gittern M_1, M_2 existiert eine Basis u, v von M_1 , $n \in \mathbb{N}$ und ein a wie oben, so dass $au, a\pi^n v$ eine Basis von M_2 ist. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ hängt nur von den Äquivalenzklassen von M_1 und M_2 ab und heißt *Abstand* der beiden Gitter. Wir definieren nun den Baum \mathbb{T} von $\mathrm{PGL}_2(K)$ wie folgt:

- $\mathrm{Ecken}(\mathbb{T}) = \{[M] \mid M \subset K^2 \text{ Gitter}\}$,
- Zwei Ecken sind genau dann miteinander verbunden, falls ihr Abstand 1 ist.

Nach [Sc, Seite 111-112] definiert dies wirklich einen Baum.

Bemerkung 1.3.25. (Modelle vom \mathbb{P}_K^1)

- i.) Nach [Sc] steht die Menge der Ecken von \mathbb{T} in Bijektion zur Menge der glatten Modelle vom \mathbb{P}_K^1 über $\mathrm{Spec}(R)$, also

$$\begin{aligned} \mathrm{Ecken}(\mathbb{T}) &= \{[M] \mid M \subset K^2 \text{ Gitter}\} \\ &\cong \{\text{Glatte Schemata über } \mathrm{Spec} R \text{ mit generischer Faser } \mathbb{P}_K^1\}. \end{aligned}$$

Die Ecken von $\mathrm{PGL}_2(K)$ können mit $\mathrm{PGL}_2(K)/\mathrm{PGL}_2(R)$ identifiziert werden. Sei $\mathbb{P}_R^1 = \mathrm{Proj}(R[x_0, x_1])$ mit $x = x_1/x_0$ für ein transzendentes $x \in K(\mathbb{P}_K^1)$. Dann korrespondiert eine $\mathrm{PGL}_2(R)$ -Äquivalenzklasse einer projektiven linearen Transformation

$$x \rightarrow x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

zu einem Modell $\mathbb{P} = \mathrm{Proj}(R[x'_0, x'_1])$ mit $x' = x'_1/x'_0$.

- ii.) Seien s_1 und s_2 zwei verschiedene Ecken von \mathbb{T} . Dann können Repräsentanten M_1 und M_2 gewählt werden, so dass

$$u, v \text{ Basis von } M_1 \Rightarrow au, a\pi^n v \text{ Basis von } M_2$$

(siehe Definition 1.3.24).

Nach [Sc, Seite 113] ist die Vereinigung $\mathbb{P}(M_1, M_2)$ von $\mathbb{P}(M_1)$ und $\mathbb{P}(M_2)$ dann gegeben durch den Abschluss von

$$Y_0X_1 - \pi^n X_0Y_1 = 0 \text{ in } \text{Proj}(R[Y_0X_0, X_1Y_0, Y_0X_1, X_1Y_1]).$$

Damit ist $\mathbb{P}(M_1, M_2)$ ein normales Schema über $\text{Spec } R$, mit reduzierter spezieller Faser, zwei irreduziblen Komponenten isomorph zu $\mathbb{P}(M_1)_k$ und $\mathbb{P}(M_2)_k$ die sich transversal in einem Punkt schneiden. Der lokale Ring von $\mathbb{P}(M_1, M_2)$ im Schnittpunkt ist die Lokalisierung von $R[T_1, T_2]/(T_1T_2 - \pi^n)$ im Ursprung.

Bemerkung 1.3.25 ii.) wie folgt verallgemeinert werden.

Proposition 1.3.26. *Sei T ein lokal endlicher Teilbaum von \mathbb{T} definiert durch die Ecken $s_i = [M_i]$, für $i = 1, \dots, n$ und sei $\mathbb{P}(T)$ die Vereinigung der $\mathbb{P}(M_i)$. Dann hat das Schema $\mathbb{P}(T)$ folgende Eigenschaften:*

- i.) $\mathbb{P}(T)$ ist lokal von endlichem Typ, normal und flach über $\text{Spec } R$ mit generischer Faser isomorph zu \mathbb{P}_K^1 .
- ii.) Die spezielle Faser $\mathbb{P}(T)_k$ ist reduziert, zusammenhängend, hat Dimension 1 und nur gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten. Alle Komponenten sind isomorph zum \mathbb{P}_k^1 .
- iii.) Der Graph der speziellen Faser $\mathbb{P}(T)_k$ kann kanonisch mit T identifiziert werden.

Beweis. Siehe [Sc, Proposition 1.2]. □

1.4 Semistabile Modelle von superelliptischen Kurven - der zahme Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir die semistabile Reduktion von superelliptischen Kurven. Wir folgen dabei den Resultaten von Irene Bouw und Stefan Wewers [BW2] und [BW1].

1.4.1 Superelliptische Kurven

Sei p eine Primzahl \mathbb{Q}_p der Körper der p -adischen Zahlen. Wir betrachten die Überlagerung $\phi : X \rightarrow Y := \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ von Kurven birational gegeben durch

$$X : y^n = f(x), \quad (1.5)$$

wobei $f \in \mathbb{Q}_p[x]$ nicht konstant und $\phi(x, y) = x$.

Sei L_0 der Zerfällungskörper von f und $S \subset L_0$ die Nullstellenmenge von f . Dann kann f geschrieben werden als

$$f(x) = c \prod_{\alpha \in S} (x - \alpha)^{m_\alpha},$$

wobei $c \in \mathbb{Q}_p^*$ und $m_\alpha \in \mathbb{N}$ die Vielfachheit der jeweiligen Nullstelle ist.

Annahme 1.4.1. Die Kurve (1.5) sei so gewählt, dass folgendes gilt.

- i.) Es gilt $\text{ggT}(n, m_\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in S$.
- ii.) Der Exponent $n \geq 2$ ist teilerfremd zu p .
- iii.) Es gilt $g(X) \geq 1$.

Bemerkung 1.4.2. a.) Wegen Annahme 1.4.1 i.) ist X absolut irreduzibel. Das Geschlecht von X ist gegeben durch

$$g(X) = \frac{(n-1)(\deg(f)-1)}{2}$$

und Annahmen 1.4.1 ii.) und 1.4.1 iii.) implizieren $\deg(f) \geq 3$. Das heißt, ϕ verzweigt an mindestens 3 Punkten.³

b.) Die affine Kurve $y^n = f(x)$ über L_0 ist singulär an $x = \alpha$, genau dann wenn $m_\alpha > 1$. Das Urbild $\phi^{-1}(\alpha)$ hat $\text{ggT}(n, m_\alpha)$ Punkte über dem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}_p}$ und für den Verzweigungsindex gilt

$$e_\alpha = \frac{n}{\text{ggT}(n, m_\alpha)} \quad \text{und} \quad e_\infty = \frac{n}{\text{ggT}(n, \sum_\alpha m_\alpha)}.$$

³Die Menge der Verzweigungspunkte auf X heißt *Verzweigungsort* und die Bilder dieser Punkte auf Y heißen *kritische Werte* von ϕ .

c.) Die Primstellen schlechter Reduktion von X liegen in

$$\mathcal{S} := \{\mathfrak{p} \in K \text{ prim} \mid \mathfrak{p} \text{ teilt } n \cdot c \cdot \Delta(\tilde{f})\},$$

wobei c der Leitkoeffizient von f und $\tilde{f} = f/\text{ggT}(f, f')$ ist.

Annahme 1.4.3. Sei K_ν eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p mit den folgenden Eigenschaften.

- i.) Der Zerfällungskörper L_0 von f liegt in K_ν .
- ii.) Die p -te Wurzel des uniformisierenden Elementes $\pi_{L_0} \in L_0$ liegt in K_ν .
- iii.) Eine primitive p -te Einheitswurzel ζ_p liegt in K_ν .
- iv.) Die Erweiterung K_ν/\mathbb{Q}_p ist eine Galoiserweiterung.

Nun sei $D \subset Y$ der Verzweigungsdivisor von ϕ . Dann zerfällt $D_{K_\nu} := D \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\nu$ (d.h. D_{K_ν} hat $d = \deg(D_{K_\nu})$ verschiedene K_ν -rationale Punkte im Support) und es gilt

$$D_{K_\nu} = \begin{cases} S, & \text{falls } \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \equiv 0 \pmod{n}, \\ S \cup \{\infty\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 1.4.4. Sei X eine Kurve über \mathbb{Q}_p , K_ν eine Galoiserweiterung von \mathbb{Q}_p über der X semistabile Reduktion hat und $G := \text{Gal}(K_\nu/\mathbb{Q}_p)$. Weiter sei R der diskrete Bewertungsring von K_ν mit maximalem Ideal \mathfrak{m}_ν und Restklassenkörper k . Ein semistabiles R -Modell \mathcal{X} von $X_{K_\nu} = X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_\nu$ heißt *quasi-stabil*, falls sich die tautologische Gruppenwirkung von G auf X_{K_ν} zu einer Gruppenwirkung auf \mathcal{X} fortsetzen lässt.

Proposition 1.4.5. Sei X über K_ν eine superelliptische Kurve, für die Annahme 1.4.1 gilt und K_ν/\mathbb{Q}_p eine endliche Körpererweiterung, für die Annahme 1.4.3 gilt. Dann hat X_{K_ν} quasi-stabile (also insbesondere semistabile) Reduktion.

Beweis. Siehe [BW2, Corollary 4.6]. □

Die Konstruktion des quasi-stabilen Modelles \mathcal{X} von X_{K_ν} erfolgt in 2 Schritten.

Schritt 1: Zuerst wird ein semistabiles Modell \mathcal{Y} von $Y_{K_\nu} = \mathbb{P}_{K_\nu}^1$ konstruiert, so dass sich die Verzweigungspunkte von ϕ zu paarweise verschiedenen glatten Punkten der speziellen Faser \mathcal{Y}_k spezialisieren.

Schritt 2: Die Normalisierung von \mathcal{Y} im Funktionenkörper $K(X_{K_\nu})$ ist quasi-stabil.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die beiden Schritte explizit beschrieben.

1.4.2 Schritt 1: Modelle der projektiven Gerade

In diesem Abschnitt konstruieren wir ein stabil markiertes Modell $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ von (Y_{K_ν}, D_{K_ν}) nach [BW2].

Definition 1.4.6. i.) Sei S ein Dedekind Schema, $\mathcal{X} \rightarrow S$ eine semistabile Kurve und $s_1, \dots, s_r : S \rightarrow \mathcal{X}^{sm}$ disjunkte Schnitte mit Support in den glatten Punkten von $\mathcal{X} \rightarrow S$. Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ der Divisor, der durch die Bilder der Schnitte s_i erzeugt wird. Dann heißt $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ *markierte semistabile Kurve* und der Divisor \mathcal{D} heißt *Markierung* von X/S .

ii.) Sei K_ν ein nicht-archimedischer lokaler Körper und X eine glatte Kurve über K_ν . Sei $D \subset X$ ein effektiver Divisor vom Grad d über $\text{Spec } K_\nu$. Eine markierte Kurve (X, D) hat *semistabile Reduktion*, falls D zerfällt und (X, D) sich zu einer markierten semistabilen Kurve $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ über R_ν fortsetzen lässt. Dann heißt $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ *semistabiles Modell* von (X, D) .

iii.) Angenommen es gilt $2g(X) - 2 + d > 0$. Dann gibt es nach [BW2, Proposition 3.2] ein eindeutiges minimales semistabiles Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ von (X, D) . Dieses Modell heißt, *stabiles Modell* von (X, D) .

Sei $\Delta = \Delta_{\mathcal{Y}_k} = (V(\Delta), E(\Delta))$ der Graph der speziellen Faser \mathcal{Y}_k (siehe Definition 1.3.15).

Definition 1.4.7. Eine *Koordinate* auf Y_{K_ν} ist ein K_ν -linearer Isomorphismus $x : Y_{K_\nu} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{K_\nu}^1$. Dann kann Y_{K_ν} mit $\mathbb{P}_{K_\nu}^1$ durch die gewählte Koordinate identifiziert werden und jede Koordinate durch ein Element aus $\text{PGL}_2(K_\nu)$ repräsentiert werden. Zwei Koordinaten x_i, x_j heißen *äquivalent*, falls der Automorphismus $x_i \circ x_j^{-1} : \mathbb{P}_{K_\nu}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{K_\nu}^1$ sich zu einem Automorphismus auf \mathbb{P}_R^1 fortsetzen lässt, also zu einem Element in $\text{PGL}_2(R)$ korrespondiert.

Sei T die Menge der Tripel $t = (a, b, c)$ von paarweise verschiedenen Elementen des Verzweigungsdivisors D_{K_ν} . Zu $t = (a, b, c)$ sei x_t die eindeutige Koordinate, so dass

$$x_t(a) = 0, \quad x_t(b) = 1, \quad x_t(c) = \infty \quad (1.6)$$

gilt, also

$$x_t(x) = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{x-c}.$$

Proposition 1.4.8. *Sei $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ das stabile Modell von (Y_{K_ν}, D_{K_ν}) .*

i.) Für alle $t \in T$ setzt sich die Abbildung x_t zu einem eigentlichen R -Morphismus $x_t : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}_R^1$ fort. Die Einschränkung auf die spezielle Faser

$$\bar{x}_t : \mathcal{Y}_k \rightarrow \mathbb{P}_k^1$$

kontrahiert alle Komponenten von \mathcal{Y}_k bis auf eine zu einem abgeschlossenen Punkt.

ii.) Für alle Komponenten $\Gamma \in Y_k$ existiert ein $t \in T$, so dass die Abbildung \bar{x}_t die Komponente Γ nicht kontrahiert. Das heißt, \bar{x}_t induziert einen Isomorphismus $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_k^1$.

iii.) Die Äquivalenzklasse der Koordinate x_t aus ii.) ist eindeutig bestimmt durch die Komponente \mathcal{Y}_k und wir erhalten eine Bijektion

$$V(\Delta) \cong T / \sim$$

zwischen den irreduziblen Komponenten von \mathcal{Y}_k und der Menge der Äquivalenzklassen von Koordinaten.

Beweis. Siehe [BW2, Proposition 4.2]. □

Bemerkung 1.4.9. Die Konfiguration der speziellen Faser \mathcal{Y}_k von \mathcal{Y} ist ein endlicher, ungerichteter Baum. Das kommt wie folgt zustande. Gibt es in der speziellen Faser Verzweigungspunkte die zusammenfallen, so können wir diese mit einer Aufblasung in diesem glatten Punkt voneinander trennen. Wir erhalten eine weitere Komponente vom Geschlecht 0 die unsere Ursprungskomponente in diesem Punkt schneidet. Nun kann es sein, dass auf der neuen Komponente weiterhin Verzweigungspunkte zusammenfallen und wir diesen Prozess wiederholen müssen. Da auf diese Art keine Kreise entstehen, ergibt sich als Konfiguration ein Baum und da es nur endlich viele Verzweigungspunkte gibt, ist dieser Baum endlich.

1.4.3 Schritt 2: Normalisierung

In diesem Abschnitt wird die Normalisierung \mathcal{X} von \mathcal{Y} im Funktionenkörper von X_{K_ν} beschrieben⁴.

Das Modell \mathcal{X} kann wie folgt berechnet werden: Sei $i \in V(\Delta)$ und x_i die korrespondierende Koordinate. Weiter sei η_i die Gauß-Bewertung des Funktionenkörpers $L(x_i)$ von X_{K_ν} (die Fortsetzung der Bewertung von K_ν). Die Bewertung auf K_ν wird durch $\nu(p) = 1$ normalisiert.

Definition 1.4.10. Sei π_{K_ν} ein uniformisierendes Element von R . Für alle $i \in V(\Delta)$ sei

$$N_i := \frac{\eta_i(f)}{\eta_i(\pi_{K_\nu})}, \quad f_i := \pi_{K_\nu}^{-N_i} f, \quad y_i := \pi_{K_\nu}^{-N_i/n} y.$$

Die Definition von N_i stellt sicher, dass $\pi_{K_\nu}^{N_i/n}$ aus Gleichung (1.5), geschrieben in den neuen Parametern x_i und y_i , von X_{K_ν} gekürzt werden kann. Dies definiert die Komponenten

$$\mathcal{X}_i : y_i^n = f_i(x_i)$$

der speziellen Faser von \mathcal{X}_k und es gilt folgendes Lemma.

Lemma 1.4.11. *Die Kurve \mathcal{X}_i ist semistabil.*

Beweis. Siehe [BW2, Proposition 4.5.1] □

Bemerkung 1.4.12. Die Kurve \mathcal{X}_i über k ist im allgemeinen nicht irreduzibel. Das liegt daran, dass die Einschränkung

$$\phi_i := \phi|_{\Gamma_i} : \mathcal{X}_i \rightarrow \Gamma_i$$

weniger Verzweigungspunkte als ϕ haben kann und die analoge Voraussetzung zu 1.4.1.i.) für absolute Irreduzibilität nicht erfüllt sein muss.

1.5 Semistabile Modelle p -zyklischer Überlagerungen - der wilde Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir die semistabile Reduktion einer p -zyklischen Überlagerung und folgen dabei den Resultaten von C. Lehr [Le].

⁴Im Allgemeinen ist es schwer die Normalisierung zu berechnen. In unserem Fall geben [BW2] eine konkrete Beschreibung an.

1.5.1 p -zyklische Überlagerungen

Sei p eine Primzahl, \mathbb{Q}_p der Körper der p -adischen Zahlen und $\phi : X \rightarrow Y := \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1$ eine Überlagerung von Kurven birational gegeben durch die Gleichung

$$y^p = f(x), \quad (1.7)$$

wobei $f \in \mathbb{Q}_p[x]$ normiert und $\phi(x, y) = x$.

Eine solche Überlagerung heißt *p -zyklisch*, da die Erweiterung der Funktionenkörper $K(Y)/K(X)$ Galois mit p -zyklischer Galoisgruppe G ist. Es gilt $Y = X/G$.

Annahme 1.5.1. *Die Kurve (1.7) sei so gewählt, dass folgendes gilt.*

- i.) *Es gilt $\text{ggT}(d, p) = 1$, wobei $d = \deg(f)$.*
- ii.) *Die Anzahl m der verschiedenen Nullstellen von $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ über ihren jeweiligen Zerfällungskörpern ist gleich und es gilt $m < p$.*
- iii.) *Es gilt $g(X) \geq 1$.*

Die folgende Definition wird in Annahme 1.5.3 benötigt.

Definition 1.5.2. Sei $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von $\bar{f}'(x)$, die keine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ ist. Weiter seien $\xi_1, \dots, \xi_{\sigma(\bar{\xi})}$ diejenigen Nullstellen von $f'(x)$ die sich zu $\bar{\xi}$ reduzieren. Für $1 \leq i \leq \sigma(\bar{\xi})$ sei $b_i \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ so gewählt, dass

$$v(b_i) = \max \left\{ v \left(\left(\frac{\tau}{f^j(\xi_i)} \right)^{1/j} \right) \mid 2 \leq j \leq \sigma(\bar{\xi}) + 1 \right\},$$

wobei $\tau = (-p)^{\frac{p}{p-1}}$ und Bewertung v wie in Annahme 1.5.3.

Annahme 1.5.3. *Sei K_ν eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q}_p in der folgende Elemente liegen.*

- i.) *Eine p -te Einheitswurzel ζ_p und $(-p)^{\frac{1}{p-1}}$.*
- ii.) *$f(\xi_i)^{1/p}$ und b_i (siehe Definition 1.5.2), wobei $\bar{\xi}$ über alle Nullstellen von $\bar{f}'(x)/\text{ggT}(\bar{f}'(x), \bar{f}(x))$ läuft.*
- iii.) *$(b_i - b_j)^{1/p}$ für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i, j \leq \sigma(\bar{\xi})$, $i \neq j$ und b_i, b_j korrespondierend zu ξ_i, ξ_j , so dass $\bar{\xi}_i = \bar{\xi}_j = \bar{\xi}$. Wieder läuft $\bar{\xi}$ über alle Nullstellen von $\bar{f}'(x)/\text{ggT}(\bar{f}'(x), \bar{f}(x))$.*

Weiter sei R der diskrete Bewertungsring von K_ν mit maximalen Ideal \mathfrak{m}_ν , Restklassenkörper k und uniformisierendem Element π . Die Bewertung v auf K_ν sei normalisiert durch $v(\pi) = 1$.

Theorem 1.5.4. *Sei X eine Kurve über K_ν , für die Annahme 1.5.1 gilt und K_ν/\mathbb{Q}_p eine Körpererweiterung, für die Annahme 1.5.3 gilt. Dann hat X semistabile Reduktion über K_ν .*

Beweis. Siehe [Le, Theorem 2 und Korollar 3]. □

Die Konstruktion eines semistabilen Modelles \mathcal{X} von X_{K_ν} erfolgt in 2 Schritten.

Schritt 1: Zuerst wird mit Hilfe von 1.3.26 ein semistabiles Modell des $\mathbb{P}_{K_\nu}^1$ konstruiert, welches wir mit $\mathbb{P}(T)$ bezeichnen.

Schritt 2: Die Normalisierung von $\mathbb{P}(T)$ im Funktionenkörper $K(X_{K_\nu})$ ist semistabil.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die beiden Schritte explizit beschrieben.

1.5.2 Schritt 1: Semistabile Modelle der projektiven Gerade

Genau wie in Abschnitt 1.4.2 werden auch hier zuerst Koordinaten definiert.

Definition 1.5.5. Sei $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von $\bar{f}'(x)$ die keine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ ist und seien (ξ_i, b_i) alle Paare zu allen $\bar{\xi}$ (siehe Definition 1.5.2). Dann definiert

$$x_{\bar{\xi},i} := \frac{b_i}{x - \xi_i}.$$

zu jedem dieser Paare eine Koordinate.

Das folgende Lemma sagt uns, wann zwei Koordinaten in derselben Äquivalenzklasse von $\mathrm{PGL}_2(K_\nu)/\mathrm{PGL}_2(R)$ liegen.

Lemma 1.5.6. *Zwei Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & -d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 1 & -d' \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(K_\nu)$$

mit Einträgen aus R sind $\mathrm{PGL}_2(R)$ -äquivalent, genau dann wenn $v(b) = v(b')$ und $v(d - d') \geq v(b)$.

Beweis. Siehe [Le, Lemma 5]. □

Es wird nun ein semistabiles Modell des $\mathbb{P}_{K\nu}^1$ konstruiert. Dabei werden die Nullstellen von $\bar{f}'(x)$ betrachtet, die keine Nullstellen von $\bar{f}(x)$ sind. Es werden 2 Typen von Nullstellen wie folgt unterschieden.

Definition 1.5.7. Sei $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von $\bar{f}'(x)$, die keine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ ist.

i.) Dann werden 2 Typen von Nullstellen unterschieden:

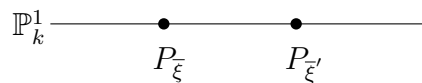
Typ 1: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}) \geq 2$. Das heißt, es gibt $\sigma(\bar{\xi})$ verschiedene Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_{\sigma(\bar{\xi})}$ von $f'(x)$ die sich auf $\bar{\xi}$ spezialisieren.

Typ 2: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}') = 1$. Das heißt, es gibt nur eine Nullstelle ξ_1 von $f'(x)$ die sich auf $\bar{\xi}'$ spezialisiert.

ii.) Sei $(\bar{\xi}, f(\bar{\xi})^{1/p})$ der zu $\bar{\xi}$ korrespondierende Punkt auf der Kurve X . Mit $P_{\bar{\xi}}$ wird das Bild von $(\bar{\xi}, f(\bar{\xi})^{1/p})$ unter der Überlagerung ϕ auf der speziellen Faser bezeichnet (nach Voraussetzung können verschiedene $P_{\bar{\xi}}$ auf der speziellen Faser \mathbb{P}_k^1 des $\mathbb{P}_{K\nu}^1$ nicht zusammen fallen).

In der folgenden Bemerkung wird ein bestimmtes semistabiles Modell des $\mathbb{P}_{K\nu}^1$ konstruiert.

Bemerkung 1.5.8. Sei $\bar{\xi}$ eine Typ 1 Nullstelle, $\bar{\xi}'$ eine Typ 2 Nullstelle und $P_{\bar{\xi}}$ bzw. $P_{\bar{\xi}'}$ die korrespondierenden Bilder unter ϕ auf der speziellen Faser \mathbb{P}_k^1 (siehe Definition 1.5.7).

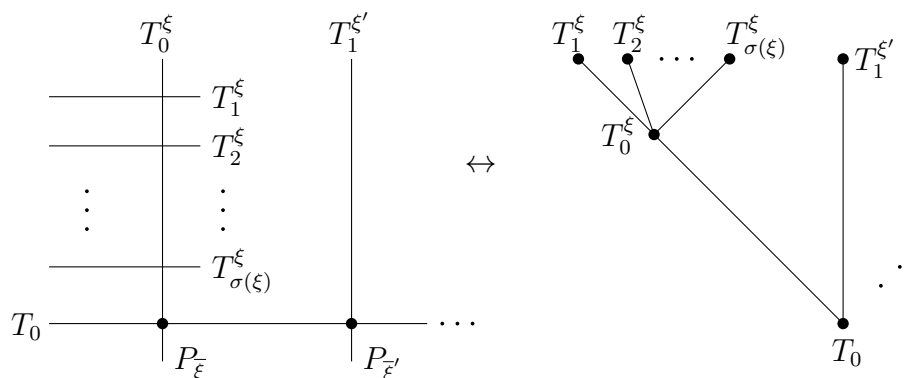


Bilder einer Typ 1 und Typ 2 Nullstelle unter ϕ

Die Punkte $P_{\bar{\xi}}$ und $P_{\bar{\xi}'}$ werden jetzt aufgeblasen und es sind die beiden Konfigurationen möglich:

Typ 1: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}) \geq 2$. Dann gibt es über dieser Nullstelle $\sigma(\bar{\xi}) + 1$ Komponenten $T_0^\xi, T_1^\xi, \dots, T_{\sigma(\bar{\xi})}^\xi$ die wie im nächsten Bild angeordnet sind.

Typ 2: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}') = 1$. Dann gibt es über dieser Nullstelle genau eine Komponente $T_1^{\xi'}$ die wie im nächsten Bild angeordnet ist.



Die beiden möglichen Konfigurationen zu den beiden Nullstellentypen (links die spezielle Faser \mathbb{P}_k^1 und rechts der zugehörige Dualgraph T)

Definition 1.5.9. Das oben konstruierte semistabile Modell des $\mathbb{P}_{K_\nu}^1$ wird mit $\mathbb{P}(T)$ bezeichnet. Dieses Modell korrespondiert zu dem semistabilen Modell aus Proposition 1.3.26.

1.5.3 Schritt 2: Normalisierung

Theorem 1.5.10. Sei $\mathbb{P}(T)$ das semistabile Modell aus Definition 1.5.9 und \mathcal{X}_N die Normalisierung von $\mathbb{P}(T)$ in $K(X_{K_\nu})$. Dann ist \mathcal{X}_N semistabil und hat folgende Eigenschaften:

- Die spezielle Faser \mathcal{X}_k von \mathcal{X}_N ist ein Baum (siehe Definition 1.3.15).
- Nur die Komponenten am Ende des Baumes haben Geschlecht größer Null und sind separabel.
- Alle anderen Komponenten haben Geschlecht Null.

Beweis. Siehe [Le, Theorem 2]. □

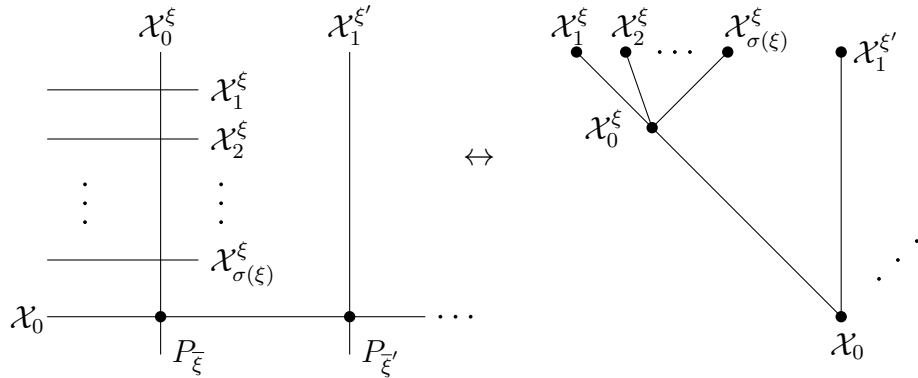
Die folgende Bemerkung beschreibt die spezielle Faser \mathcal{X}_k von \mathcal{X}_N .

Bemerkung 1.5.11. Sei $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von $\bar{f}'(x)$ die keine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ ist. Jede solche Nullstelle korrespondiert zu einem Punkt $P_{\bar{\xi}} = (\bar{\xi}, f(\bar{\xi})^{1/p})$ auf der speziellen Faser \mathcal{X}_k . Dann werden analog zu Definition 1.5.7 die 2 Typen von Nullstellen unterschieden:

Typ 1: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}) \geq 2$. Das heißt, es gibt $\sigma(\bar{\xi})$ verschiedene Nullstellen $\xi_1, \dots, \xi_{\sigma(\bar{\xi})}$ von $f'(x)$ die sich auf $\bar{\xi}$ spezialisieren. Dann gibt es über dieser Nullstelle $\sigma(\bar{\xi}) + 1$ Komponenten $\mathcal{X}_0^\xi, \mathcal{X}_1^\xi, \dots, \mathcal{X}_{\sigma(\bar{\xi})}^\xi$ die wie im nächsten Bild angeordnet sind.

Typ 2: Es gilt $\sigma(\bar{\xi}') = 1$. Das heißt, es gibt nur eine Nullstelle ξ_1 von $f'(x)$ die sich auf $\bar{\xi}'$ spezialisiert. Dann gibt es über dieser Nullstelle genau eine Komponente $\mathcal{X}_1^{\xi'}$ die wie im nächsten Bild angeordnet ist.

Sei also $\bar{\xi}$ eine Typ 1 Nullstelle und $\bar{\xi}'$ eine Typ 2 Nullstelle. Dann entsteht durch Aufblasen von Punkten über diesen Nullstellen die folgende Konfiguration:



Konfiguration der speziellen Faser über den beiden möglichen Nullstellentypen

Dualgraph der speziellen Faser

Es gilt:

- i.) Nur die Komponenten am Ende des Baumes haben positives Geschlecht. Alle anderen Komponenten haben arithmetisches Geschlecht Null. Die Komponenten mit positiven arithmetisches Geschlecht sind jeweils Artin-Schreier Überlagerungen, die konkret angegeben werden können:

- Sei $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von $\bar{f}'(x)$, die keine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ ist. Für alle Paare (ξ_i, b_i) (siehe Definition 1.5.2) sei

$$\begin{aligned}
 f_{(\xi_i, b_i)}^{\bar{\xi}}(x) &:= \frac{x^N}{f(\xi_i)} f(b_i/x + \xi_i) = \sum_{k=0}^N \left(\frac{f^{(k)}(\xi_i)}{k! \cdot f(\xi_i)} \right) b_i^k x^{N-k} \\
 &= x^{ps} + \frac{f'(\xi_i)}{f(\xi_i)} b x^{ps-1} + \frac{f^{(2)}(\xi_i)}{2! f(\xi_i)} b^2 x^{ps-2} + \dots + \frac{1}{f(\xi_i)} b x^{ps-1},
 \end{aligned}$$

wobei $N = ps > \deg(f)$ minimal, so dass $p \mid N$.

- Mit obiger Definition gibt es für alle Paare (ξ_i, b_i) die Komponente

$$\mathcal{X}_i^\xi : T^p - T + \left(\frac{x^N - f_{(\xi_i, b_i)}(x)}{x^N} \right) = 0, \quad (1.8)$$

wobei der Ausdruck in der Klammer ein Polynom in x^{-1} ist.

- ii.) Die Summe der Geschlechter über einer Nullstelle $\bar{\xi}$ haben Geschlecht $\sigma(\bar{\xi})(p-1)/2$. Die Summe der Geschlechter über alle diese Paare ist das Geschlecht der generischen Faser.

Kapitel 2

Die Familie von Kurven

$$\{C_p : y^p = x^3 - x\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$$

In diesem Kapitel betrachten wir die diskrete Familie $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$ der Kurven

$$C_p : y^p = x(x-1)(x+1)$$

vom Geschlecht $g = p - 1$ definiert über einem Zahlkörper K , wobei $p \geq 5$ eine Primzahl ist. Das Ziel ist es ein reguläres semistabiles Modell der Kurve zu konstruieren.

Die Kurve C_p ist so gewählt, dass wir die Theorie über semistabile Reduktion aus den Abschnitten 1.4 und 1.5 anwenden können. Das heißt insbesondere, dass Annahmen 1.4.1 und 1.5.1 erfüllt sind.

Wir beginnen in Abschnitt 2.1 mit allgemeinen Eigenschaften der obigen Kurvenfamilie und berechnen dann in Abschnitt 2.2 ein semistabiles Modell für die Kurven mit $p \geq 5$ in dieser Familie. In Abschnitt 2.3 konstruieren wir aus dem semistabilen Modell ein reguläres Modell.

2.1 Eigenschaften der Kurvenfamilie $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$

Im Folgenden verwenden wir durchgehend die folgende Annahme (bzw. Notation).

Annahme 2.1.1. *Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.*

- Mit C_p bezeichnen wir für fixierte Primzahl $p \geq 5$ die projektive Kurve gegeben durch die affinen Karten

$$C_p : y^p = x(x-1)(x+1)$$

und

$$\tilde{C}_p : v = 1 - u^{2p}v^{2b}$$

über \mathbb{Q} , wobei $x = \frac{1}{v^b u^p}$, $y = \frac{1}{v^a u^3}$ (siehe Beispiel 1.1.4).

- Die Kurvenfamilie $\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}}$ definieren wir als

$$\{C_p\}_{p \geq 5 \text{ prim}} := \{C_p \mid p \geq 5 \text{ Primzahl}\}.$$

- Wir setzen $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$.

In Abschnitt 1.2.1 haben wir bereits gesehen, dass die affinen Kurven gegeben durch C_p und \tilde{C}_p regulär sind. In Definition 1.2.11 haben wir die gefaserte Fläche $C_{p,\mathbb{Z}}$ für fixiertes $p \geq 5$ als Verklebung der beiden affinen Schemata

$$U_1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[x, y]/(y^p - x^3 + x))$$

und

$$U_2 = \text{Spec}(\mathbb{Z}[u, v]/(1 - u^{2p}v^{2b} - v))$$

definiert. Dabei waren $a, b \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $3b - pa = 1$ gilt, was wegen $\text{ggT}(3, p) = 1$ (siehe Annahme 2.1.1) immer möglich ist.

Definition 2.1.2. Sei K ein Zahlkörper und \mathcal{O}_K der zugehörige Ganzheitsring. Dann notieren wir den Basiswechsel $C_{p,\mathbb{Z}} \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \text{Spec } \mathcal{O}_K$ mit C_{p,\mathcal{O}_K} .

Lemma 2.1.3. Die einzigen nicht semistabilen Fasern der Fläche $C_{p,\mathbb{Z}}$ sind die Fasern über den Primstellen (2) und (p) . Insbesondere sind nach dem Basiswechsel zu \mathcal{O}_K die Fasern von C_{p,\mathcal{O}_K} über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (2)$ und $\mathfrak{p} \mid (p)$ nicht semistabil.

Beweis. In Beispiel 1.2.13 haben wir bereits gesehen, dass alle Fasern über Primstellen \mathfrak{m} mit $\mathfrak{m} \neq (2), (p)$ glatt sind. In Abschnitt 1.4 wird klar, dass die Faser über (2) nicht semistabil ist und diese Theorie angewendet werden kann um ein semistabiles Modell über (2) zu konstruieren.

Analog ist nach Abschnitt 1.5 die Faser über der Primstelle (p) nicht semistabil und Theorem 1.5.10 kann angewendet werden um eine semistabiles Modell über der Primstelle (p) zu konstruieren.

Da Semistabilität invariant unter Basiswechsel ist (siehe [Li1, Proposition 10.3.15]), ändert sich dieses auch nach einem Basiswechsel nicht. \square

Für die semistabile Reduktion haben wir folgendes Ergebnis.

Proposition 2.1.4. *Die gefaserte Fläche aus Definition 2.1.2 hat über dem Körper*

$$K = \mathbb{Q} \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p} \right)$$

semistabile Reduktion.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Annahme 1.4.3 und Theorem 1.5.10. Weitere Details werden in Theorem 2.2.5 klar. \square

Die folgende Proposition sagt uns welche Fasern von $C_{p,\mathbb{Z}}$ nicht regulär sind.

Proposition 2.1.5. *Sei $C_{p,\mathbb{Z}}$ die gefaserte Fläche aus Definition 1.2.11. Dann sind nur die Fasern über den Primstellen (2) und (p) nicht regulär und die nicht regulären Punkte sind folgendermaßen:*

- i.) Die Faser $C_{(2)}$ hat genau einen nicht regulären Punkt $P = (1, 0)$ auf U_1 .*
- ii.) Die Faser $C_{(p)}$ hat genau die beiden nicht regulären Punkte*

$$P_\alpha = (\alpha, f(\alpha)^{1/p}), \quad P_{-\alpha} = (-\alpha, -f(\alpha)^{1/p})$$

auf U_1 , wobei $\alpha = (1/3)^{1/2}$ und $f(x) = x^3 - x$.

Insbesondere ist der Punkt im Unendlichen in allen Fasern regulär.

Beweis. In Beispiel 1.2.13 haben wir bereits gesehen, dass alle Fasern die nicht über (2) und (p) liegen regulär sind und dass der Punkt im Unendlichen in allen Fasern regulär ist. Den Beweis für Aussage i.) haben wir in dem Beispiel ebenfalls ausgeführt. Bleibt also noch die Faser über (p) .

Die partiellen Ableitungen von U_1 verschwinden modulo p an den Punkten

$$P_\alpha = (\alpha, f(\alpha)^{1/p}), \quad P_{-\alpha} = (-\alpha, f(-\alpha)^{1/p}),$$

wobei $\alpha = (1/3)^{1/2}$ und $f(x) = x^3 - x$.

Wir überprüfen mit Hilfe von Proposition 1.2.9 und 1.2.10 den Punkt P_α auf Regularität ($P_{-\alpha}$ ist analog). Sei also $\mathfrak{m} = (x - \alpha, y - \beta, p)$, wobei $\beta = f(\alpha)^{1/p}$.

Wir betrachten die Summe

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{i}{p} \beta^i (y - \beta)^{p-i} - ((x - \alpha)^3 + 3\alpha(x - \alpha)^2) \in \mathfrak{m}^2.$$

Wegen

$$\sum_{i=0}^{p-1} \binom{i}{p} \beta^i (y - \beta)^{p-i} = y^p - \beta^p$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} S(x, y) &= y^p - \beta^p - ((x - \alpha)^3 + 3\alpha(x - \alpha)^2) \\ &= y^p - \beta^p - x^3 + 3\alpha^2 x - 2\alpha^3 \\ &= y^p - x^3 + x, \end{aligned}$$

da $3\alpha^2 = 1$ und

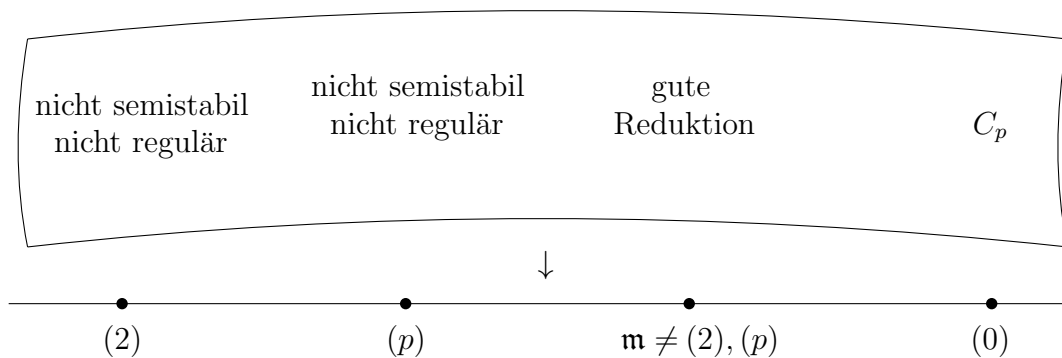
$$\beta^p + 2\alpha^3 = f(\alpha) + 2\alpha^3 = \alpha(3\alpha^2 - 1) = 0.$$

Insgesamt also

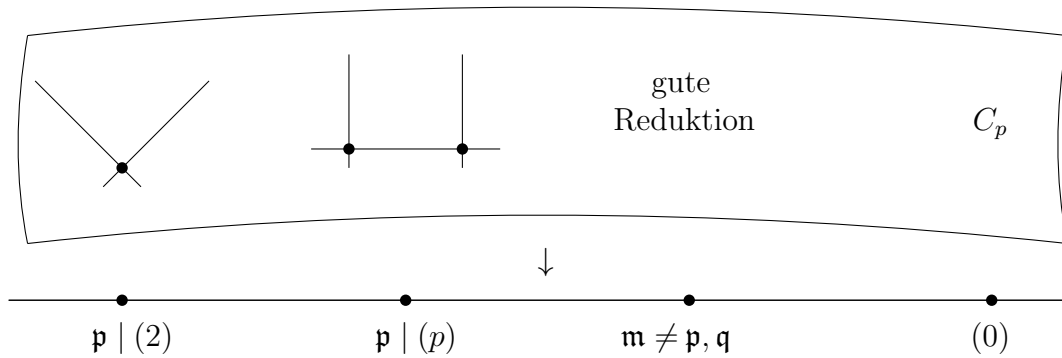
$$y^p - (x^3 - x) \in \mathfrak{m}^2$$

und der Punkt P_α ist somit nicht regulär. \square

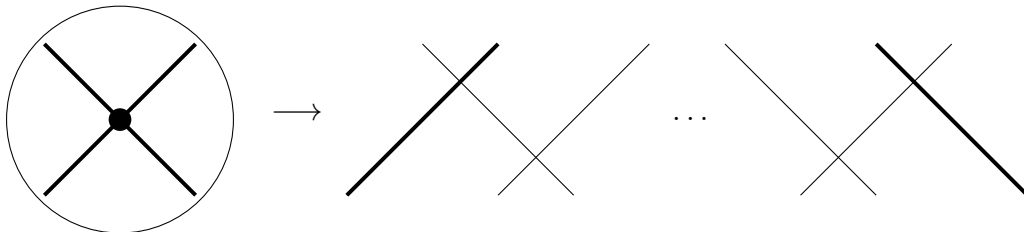
Das heißt, über unsere gefaserte Fläche $C_{p, \mathbb{Z}}$ haben wir bis jetzt folgende Informationen.



Betrachten wir jetzt die Situation über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$, also die gefaserte Fläche C_{p, \mathcal{O}_K} . Dann gibt es ein semistabiles Modell mit folgender Konfiguration, wobei die markierten Punkte potentiell nicht regulär sein können.



Um letztendlich Regularität zu erhalten, also eine arithmetische Fläche, nutzen wir Proposition 1.3.21 um die potentiell nicht regulären Punkte wie folgt aufzulösen.



Dabei erhalten wir n Komponenten vom Geschlecht 0 mit Selbstschnitt -2 die den Punkt auseinander ziehen (siehe Proposition 1.3.21). Die Anzahl der Komponenten hängt von der lokalen Beschaffenheit des Punktes sowie dem Verzweigungsgrad der jeweiligen Primstelle ab.

2.2 Ein semistabiles Modell C_p^{ss} von C_p

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu fixierter Primzahl $p \geq 5$ ein semistabiles Modell C_p^{ss} unserer Kurve C_p . Wir betrachten die Primstellen schlechter Reduktion und unterscheiden dabei die Fälle:

1. Fall $\mathfrak{q} \mid (2)$: Die Methode aus Abschnitt 1.4, von I. Bouw und S. Wewers, für superelliptische Kurven ist anwendbar da $\mathfrak{q} \nmid (p)$ gilt. Die Bedingungen an die Kurve sind in Annahme 1.4.1 gelistet.
2. Fall $\mathfrak{p} \mid (p)$: Die Methode aus den Abschnitt 1.5 ist anwendbar. Diese wurde von C. Lehr [Le] in seiner Dissertation entwickelt. Die Resultate sind für p -zyklische Überlagerungen unter den Bedingungen 1.5.1 anwendbar.

2.2.1 Ein semistabiles Modell im Fall $\mathfrak{q} \mid (2)$

Wir betrachten die Kurve C_p aus Abschnitt 2.1 über dem lokalen Körper \mathbb{Q}_2 . Der Zerfällungskörper von f ist \mathbb{Q}_2 und wir schreiben

$$f(x) = x(x+1)(x-1) \in \mathbb{Q}_2[x].$$

Die Kurve erfüllt die Voraussetzung 1.4.1 und für die Erweiterung

$$K_\nu = \mathbb{Q}_2 \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2} \right)$$

ist Annahme 1.4.3 erfüllt. Jetzt betrachten wir die Überlagerung

$$\phi : C_p \rightarrow Y := \mathbb{P}_{K_\nu}^1, \quad (x, y) \mapsto x.$$

Der Verzweigungsdivisor $D \subset Y$ von ϕ hat Support in den kritischen Werten $-1, 0, 1, \infty$ (siehe Abschnitt 1.4.1). Sei T die Menge der Tripel $t = (a, b, c)$ von paarweise verschiedenen Elementen des Verzweigungsdivisors D . Zu $t = (a, b, c)$ sei x_t die eindeutige Koordinate, so dass

$$x_t(a) = 0, \quad x_t(b) = 1, \quad x_t(c) = \infty \tag{2.1}$$

gilt, d.h.

$$x_t(x) = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{x-c}.$$

Wir erhalten folgende Koordinaten.

Lemma 2.2.1. *Es sei D der Verzweigungsdivisor von $\phi : C_p \rightarrow \mathbb{P}_{K_\nu}^1$ und K_ν wie oben. Dann gilt für die Menge T*

$$T = \{t_0 = (0, 1, \infty), t_1 = (-1, 0, \infty), t_2 = (-1, 1, \infty), t_3 = (-1, 1, 0)\},$$

wobei $t_0 \sim t_2$, $t_1 \sim t_3$ und $t_0 \not\sim t_1$.

Beweis. Es gilt $D = S \cup \{\infty\}$, wobei $S = \{-1, 0, 1\}$. Damit erhalten wir nach (1.6) folgende Tripel

$$T = \{t_0 = (0, 1, \infty), t_1 = (-1, 0, \infty), t_2 = (-1, 1, \infty), t_3 = (-1, 1, 0)\}.$$

Die korrespondierenden Koordinaten x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sind gegeben durch

$$t_0 = (0, 1, \infty): x_0(x) = x,$$

$$t_1 = (-1, 1, \infty): x_1(x) = \frac{x+1}{2} \text{ mit } x_1^{-1}(x) = 2x - 1,$$

$$t_2 = (-1, 0, \infty): x_2(x) = x + 1 \text{ mit } x_2^{-1}(x) = x - 1,$$

$$t_3 = (-1, 1, 0): x_3(x) = \frac{x+1}{2x} \text{ mit } x_3^{-1}(x) = \frac{1}{2x-1}.$$

Für die Äquivalenzklassen gilt

$$x_0 \circ x_2^{-1}(x) = x - 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(R),$$

$$x_1 \circ x_3^{-1}(x) = \frac{x}{2x-1} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(R)$$

und

$$x_0 \circ x_1^{-1}(x) = 2x - 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{PGL}_2(R).$$

Das heißt, wir haben $t_0 \sim t_2$, $t_1 \sim t_3$ und $t_0 \not\sim t_1$. □

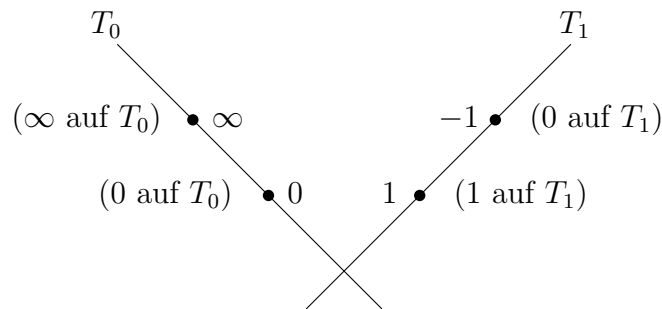
Sei $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$ das markierte stabile Modell von (Y_{K_ν}, D_{K_ν}) und (Y_k, D_k) die spezielle Faser von $(\mathcal{Y}, \mathcal{D})$. Nach Abschnitt 1.4.2 erhalten wir 2 Koordinatenabbildungen $x_i : Y_{K_\nu} \rightarrow \mathbb{P}_{K_\nu}^1$, $i = 0, 1$ gegeben durch

$$x_0(x) = x \text{ und } x_1(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Sei $T_i \subset Y_k$ die irreduzible Komponente zu x_i (bzw. t_i). Für die Spezialisierung der Verzweigungspunkte x erhalten wir

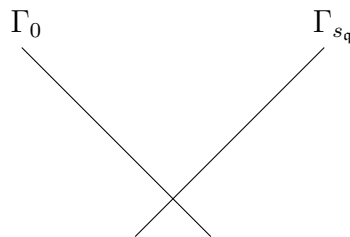
x	-1	0	1	∞
$\bar{x}_0(x) = \bar{x}$	1	0	1	∞
$\bar{x}_1(x) = \frac{\bar{x}+1}{2}$	0	∞	1	∞

Hier können wir bereits die Konfiguration der beiden Komponenten ablesen. Nach Bemerkung 1.4.9 haben wir den Punkt auf T_0 aufgeblasen, in dem 1 und -1 zusammenfallen. Das heißt, die Verzweigungspunkte 0 und ∞ bleiben (getrennt) auf der Komponente T_0 und die Punkte 1 und -1 trennen sich auf T_1 . Der Schnittpunkt der beiden Komponenten ist nach der obigen Tabelle der Punkt mit Koordinate 1 auf T_0 und ∞ auf T_1 .



Nun sei \mathcal{X} die Normalisierung von \mathcal{Y} im Funktionenkörper von X_L . Wir verwenden Abschnitt 1.4.3 um diese Normalisierung zu berechnen und die spezielle Faser \mathcal{X}_k zu beschreiben.

Proposition 2.2.2. *Sei $K_\nu = \mathbb{Q}_2(\zeta_p, \sqrt[p]{2})$ und $p \geq 5$ eine Primzahl. Dann hat C_p über K_ν semistabile Reduktion. Die spezielle Faser besteht dabei aus 2 Komponenten Γ_0, Γ_{s_q} vom arithmetischen Geschlecht $\frac{p-1}{2}$, die sich transversal in einem Punkt schneiden¹. Der einzige singuläre Punkt ist der Schnittpunkt.*



Beweis. Nach Abschnitt 1.4.3 müssen für unsere beiden Koordinaten x_1, x_2 aus Lemma 2.2.1 die folgenden Werte und Funktionen berechnen

$$N_i := \frac{\eta_i(f)}{\eta_i(\pi_{K_\nu})}, \quad f_i := \pi_{K_\nu}^{-N_i} f, \quad y_i := \pi_{K_\nu}^{-N_i/p} y.$$

Für unsere Kurve erhalten wir

¹Wir nennen die zweite Komponente Γ_{s_q} statt Γ_1 . In Proposition 2.3.2 wird klar warum.

i	t	x_i	\bar{f}_i	N_i	y_i
0	$(0, 1, \infty)$	$x_0(x) = x$	$\bar{f}_0 = x_0^3 + x_0$	0	$y_0 = y$
1	$(-1, 1, \infty)$	$x_1(x) = \frac{x+1}{2}$	$\bar{f}_1 = x_1^2 + x_1$	2	$y_1 = 2^{-2/p}y$

Die spezielle Faser hat die beiden Komponenten

$$\begin{aligned}\Gamma_0 : y_0^p &= \bar{f}_0 = x_0^3 + x_0, \\ \Gamma_{s_q} := \Gamma_1 : y_1^p &= \bar{f}_1 = x_1^2 + x_1,\end{aligned}$$

vom arithmetischen Geschlecht $p_a(\Gamma_0) = p_a(\Gamma_1) = (p-1)/2$. Die Komponenten schneiden sich in genau dem einen Punkt mit $\bar{x}_0 = 1$ und $\bar{x}_1 = \infty$. Da das Modell nach Lemma 1.4.11 semistabil ist, sind die Komponenten reduziert und der Schnittpunkt transversal. Außerdem sind die Komponenten nicht singulär. \square

2.2.2 Ein semistabiles Modell im Fall $p \mid (p)$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Kurve C_p über dem lokalen Körper \mathbb{Q}_p . Nach Abschnitt 1.5 müssen wir zuerst die b_i aus Definition 1.5.2 und die Transformationen aus 1.5.5 berechnen. Dann können wir eine endliche Körpererweiterung K_ν von \mathbb{Q}_p wie in Annahme 1.5.3 angeben, über der C_p semistabile Reduktion hat.

Die Ableitung $\bar{f}'(x)$ hat die beiden Nullstellen $\alpha := \sqrt{1/3}$ und $-\alpha := -\sqrt{1/3}$ die keine Nullstellen von $\bar{f}(x)$ sind. Es spezialisiert sich jeweils nur eine Nullstelle von $f'(x)$ auf die Nullstellen von $\bar{f}'(x)$ (d.h. $\sigma(\alpha) = \sigma(-\alpha) = 1$), so dass wir nur zwei Elemente $b_{\alpha,1}$ und $b_{-\alpha,1}$ berechnen müssen.

Lemma 2.2.3. *i.) Für*

$$b_{\alpha,1} = b_{-\alpha,1} = \sqrt{\tau}$$

sind die Bedingungen aus Definition 1.5.2 erfüllt, wobei $\tau = (-p)^{\frac{p}{p-1}}$.

Damit erhalten wir zwei Koordinaten

$$x_{\alpha,i} = \frac{\sqrt{\tau}}{x - \alpha} \quad \text{und} \quad x_{-\alpha,1} = \frac{\sqrt{\tau}}{x + \alpha}.$$

ii.) Die Kurve C_p hat über dem Körper

$$K_\nu = \mathbb{Q}_p \left(\zeta_p, \sqrt{3}, {}^{2(p-1)}\sqrt{-p} \right)$$

semistabile Reduktion.

Beweis. Wir benötigen folgende Informationen über $f(x) := x^3 - x$:

i	$f^{(i)}(x)$	$f^{(i)}(x) = 0$	$f^{(i)}(\alpha)$	$f^{(i)}(-\alpha)$
0	$f(x) = x^3 - x$	-1, 0, 1	$-\frac{2\alpha}{3}$	$\frac{2\alpha}{3}$
1	$f'(x) = 3x^2 - 1$	$\alpha, -\alpha$	0	0
2	$f''(x) = 6x$	0	6α	-6α
3	$f'''(x) = 6$		6	6

i.) Nach Definition 1.5.2 suchen wir $b_{\alpha,1}$ und $b_{-\alpha,1}$, so dass

$$v(b_{\alpha,1}) = v\left(\left(\frac{\tau}{\sqrt{12}}\right)^{1/2}\right) \quad \text{und} \quad v(b_{-\alpha,1}) = v\left(\left(\frac{\tau}{-\sqrt{12}}\right)^{1/2}\right)$$

gilt, also zum Beispiel $b_{\alpha,1} = b_{-\alpha,1} = \sqrt{\tau}$, da $p \geq 5$.

Damit können wir jetzt die Koordinaten aus Definition 1.5.5 angeben und erhalten

$$x_{\alpha,1} = \frac{\sqrt{\tau}}{x - \alpha}, \quad x_{-\alpha,1} = \frac{\sqrt{\tau}}{x + \alpha}.$$

ii.) Nach Annahme 1.5.3 müssen wir folgende Elemente zu \mathbb{Q}_p adjungieren:

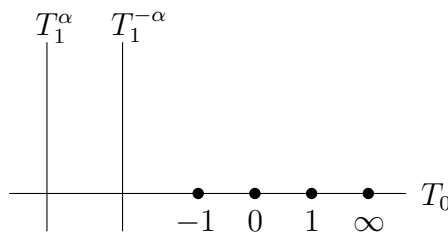
- $f(\alpha)^{1/p} = -(4/27)^{1/2}$, $f(-\alpha)^{1/p} = (4/27)^{1/2}$,
- $b_{\alpha,1} = b_{-\alpha,1} = \sqrt{\tau} = (-p)^{\frac{p}{2(p-1)}}$.

Das können wir auf die Elemente $\sqrt{3}$, $\sqrt{\lambda} = (-p)^{\frac{1}{2(p-1)}}$ reduzieren und erhalten

$$K_\nu = \mathbb{Q}_p \left(\zeta_p, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p} \right).$$

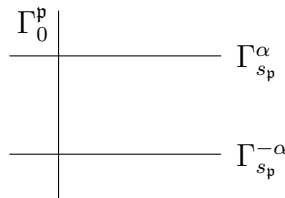
□

Nach Abschnitt 1.5.3 sieht die Konfiguration der speziellen Faser des semistabilen Modelles des $\mathbb{P}_{K_\nu}^1$ wie folgt aus, wobei die markierten Punkte die Verzweigungspunkte sind und bei der Konstruktion keinen Einfluss nehmen.



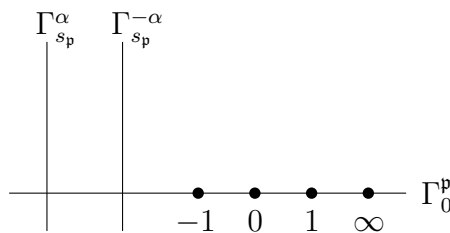
Wir betrachten jetzt den minimalen Teilbaum T von \mathbb{T} , der die Ecken korrespondierend zu \mathbb{P}_R^1 und den Transformationen $x_{\alpha,1}, x_{-\alpha,1}$ enthält. Nach Theorem 1.5.10 ist die semistabile Reduktion gegeben durch die Normalisierung des semistabilen Modelles $\mathbb{P}(T)$ von $\mathbb{P}_{K_\nu}^1$ im Funktionskörper von X_{K_ν} . Wir verwenden Abschnitt 1.5.3 um diese Normalisierung zu berechnen und die spezielle Faser X_k zu beschreiben. Wir erhalten folgendes Ergebnis.

Proposition 2.2.4. *Sei $K_\nu = \mathbb{Q}_p(\zeta_p, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$ und $p \geq 5$ eine Primzahl. Dann hat C_p über K_ν semistabile Reduktion. Die spezielle Faser besteht dabei aus 3 Komponenten $\Gamma_0^p, \Gamma_{s_p}^\alpha$ und $\Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ in folgender Konfiguration²*



mit arithmetischen Geschlecht $p_a(\Gamma_0^p) = 0$ und $p_a(\Gamma_{s_p}^\alpha) = p_a(\Gamma_{s_p}^{-\alpha}) = \frac{p-1}{2}$. Die Komponenten sind reduziert und die Schnittpunkte transversal. Die einzigen singulären Punkte sind die beiden Schnittpunkte der Komponenten.

Beweis. Nach Bemerkung 1.5.11 wissen wir bereits wie die Konfiguration der speziellen Faser aussieht. Wir haben eine Komponente Γ_0^p vom Geschlecht Null und 2 Komponenten $\Gamma_1^\alpha, \Gamma_1^{-\alpha}$ (die wir $\Gamma_{s_p}^\alpha, \Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ nennen) über den Nullstellen von $\bar{f}'(x)$.



Da die Verzweigungspunkte nicht mit den Nullstellen zusammenfallen haben diese keinen Einfluss auf die Konstruktion des semistabilen Modelles. Um die Gleichungen für die Komponenten anzugeben (siehe Bemerkung 1.5.11)

²Wir nennen die beiden Komponenten $\Gamma_{s_p}^\alpha$ und $\Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ statt Γ_1^α und $\Gamma_1^{-\alpha}$. In Proposition 2.3.2 wird klar warum.

müssen wir zuerst die folgenden Funktionen berechnen

$$\begin{aligned} f_{(\alpha, b_1^\alpha)}(x) &= x^p - \frac{9}{2}\tau x^{p-2} - \frac{3\alpha}{2}\tau^{3/2}x^{p-3}, \\ f_{(-\alpha, b_1^{-\alpha})}(x) &= x^p - \frac{9}{2}\tau x^{p-2} + \frac{3\alpha}{2}\tau^{3/2}x^{p-3}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die beiden Γ_1^α und $\Gamma_1^{-\alpha}$:

- Die erste irreduzible Komponente $\Gamma_{s_p}^\alpha$ korrespondiert zu der Transformation $\frac{\sqrt{\tau}}{x-\alpha}$ und hat die Artin-Schreier Gleichung (siehe Formel (1.8))

$$\Gamma_{s_p}^\alpha : T^p - T = \frac{9}{2}\tau x^{-2}.$$

- Die zweite irreduzible Komponente $\Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ korrespondiert zu der Transformation $\frac{\sqrt{\tau}}{x+\alpha}$ und hat genau dieselbe Gleichung

$$\Gamma_{s_p}^{-\alpha} : T^p - T = \frac{9}{2}\tau x^{-2}.$$

Beide Komponenten haben arithmetisches Geschlecht $(p-1)/2$ und sind als Kurve regulär. Da das Modell nach Theorem 1.5.10 semistabil ist, sind die beiden Schnittpunkte transversal und alle Komponenten reduziert. \square

2.2.3 Ein globales semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p

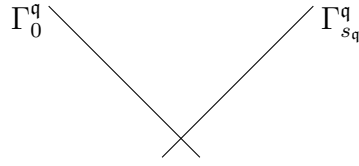
Wir fassen die letzten beiden Abschnitte zusammen und erhalten insgesamt folgendes Ergebnis.

Theorem 2.2.5. *Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[2(p-1)]{-p})$ mit primitiver p -ter Einheitswurzel ζ_p . Dann gibt es ein semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p über $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, für das folgendes gilt:*

- i.) *Für alle Primstellen \mathfrak{m} von \mathcal{O}_K die nicht über (2) oder (p) liegen ist die Reduktion glatt und gegeben durch*

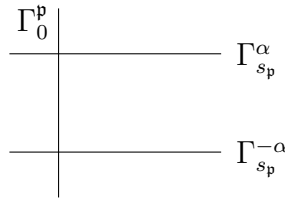
$$\mathcal{C}_{p, \mathfrak{m}}^{\text{ss}} = C_p \times k(\mathfrak{m}).$$

- ii.) *Sei \mathfrak{q} ein Primideal welches (2) $\subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p, \mathfrak{q}}^{\text{ss}}$ folgende Konfiguration*



wobei $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{q}}) = p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}) = \frac{p-1}{2}$.

iii.) Sei \mathfrak{p} ein Primideal welches $(p) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{p}}^{\text{ss}}$ folgende Konfiguration



wobei $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{p}}) = 0$, $p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}) = p_a(\Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}) = \frac{p-1}{2}$.

Die einzigen singulären Punkte sind die Schnittpunkte der Komponenten.

Beweis. Die lokalen Konstruktionen haben wir bereits in Proposition 2.2.2 und Proposition 2.2.4 durchgeführt. Da Semistabilität invariant unter Basiswechsel ist (siehe [Li1, Proposition 10.3.15]), können wir das Modell über

$$K = \mathbb{Q} \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p} \right)$$

zu einem globalen Modell verkleben. \square

Bemerkung 2.2.6. Außerdem können die lokalen Modelle des \mathbb{P}^1 zu einem globalen semistabilen Modell verklebt werden, welches wir mit \mathcal{Y}_T bezeichnen. Die speziellen Fasern sind durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{T,\mathfrak{q}} &= \text{spezielle Faser des } \mathbb{P}^1 \text{ aus Abschnitt 2.2.1, falls } \mathfrak{q} \mid (2), \\ \mathcal{Y}_{T,\mathfrak{p}} &= \text{spezielle Faser des } \mathbb{P}^1 \text{ aus Abschnitt 2.2.2, falls } \mathfrak{p} \mid (p), \\ \mathcal{Y}_{T,\mathfrak{m}} &= \mathbb{P}^1, \quad \text{falls } \mathfrak{m} \nmid (2), (p) \end{aligned}$$

gegeben. Die Überlagerung $C_p \rightarrow \mathbb{P}^1$ lässt sich zu einem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Morphismus $\mathcal{C}_p^{\text{ss}} \rightarrow \mathcal{Y}_T$ fortsetzen.

2.3 Ein reguläres Modell $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ von C_p

In diesem Abschnitt wollen wir aus dem semistabilen Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ (siehe Theorem 2.3.2) ein reguläres Modell konstruieren. Da wir wissen, dass die potentiell nicht regulären Punkte nur Doppelpunkte sein können, ist es möglich diese mit Hilfe von Proposition 1.3.21 aufzulösen.

Definition 2.3.1. Sei $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ das semistabile Modell aus Theorem 2.2.5.

- i.) Die Stärke (siehe Proposition 1.3.20) des Schnittpunktes der beiden Komponenten $\Gamma_0^{\mathfrak{q}}$ und $\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}$ in der speziellen Faser über $\mathfrak{q} \mid (2)$ bezeichnen wir mit $s_{\mathfrak{q}}$.
- ii.) Die Stärke der Schnittpunkte der Komponente $\Gamma_0^{\mathfrak{p}}$ mit $\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\alpha}$ und $\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{-\alpha}$ in der speziellen Faser über $\mathfrak{p} \mid (p)$ bezeichnen wir beide mit $s_{\mathfrak{p}}$.

(Für mehr Details zu dieser Definition siehe Beweis von Proposition 2.3.2).

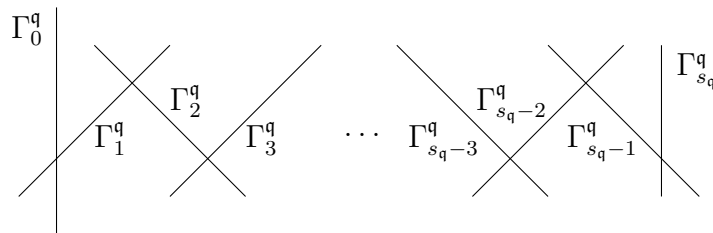
Wir erhalten folgendes Ergebnis.

Proposition 2.3.2. Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[2(p-1)]{-p})$ mit primitiver p -ter Einheitswurzel ζ_p . Dann gibt es ein reguläres semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ von C_p über $\text{Spec } \mathcal{O}_K$, für das folgendes gilt:

- i.) Für alle Primstellen \mathfrak{m} von \mathcal{O}_K die nicht über (2) oder (p) liegen ist die Reduktion glatt und gegeben durch

$$\mathcal{C}_{p,\mathfrak{m}}^{\text{reg}} = C_p \times k(\mathfrak{m}).$$

- ii.) Sei \mathfrak{q} ein Primideal welches $(2) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{q}}^{\text{reg}}$ folgende Konfiguration

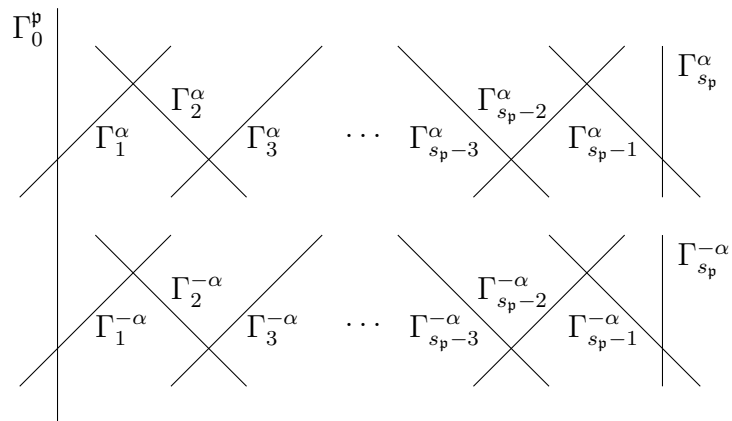


und Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \vdots \\ & & \dots & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & \dots & \\ \vdots & & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei die Komponenten nach $\Gamma_0^q, \Gamma_1^q, \dots, \Gamma_{s_q}^q$ angeordnet sind. Es gilt $p_a(\Gamma_0^q) = p_a(\Gamma_{s_q}^q) = \frac{p-1}{2}$ und $p_a(\Gamma_i^q) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, s_q - 1$.

iii.) Sei \mathfrak{p} ein Primideal welches $(p) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann hat $C_{p,\mathfrak{p}}^{\text{reg}}$ folgende Konfiguration



und Schnittmatrix

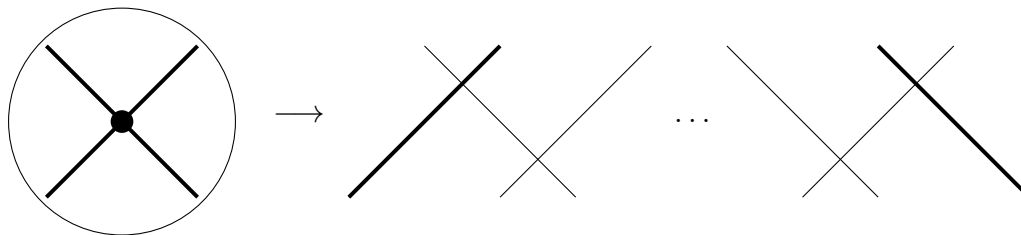
$$\left(\begin{array}{c|cccc|cccc} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 & & \dots & 0 & & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots & & & \\ \vdots & & & \dots & & & & 0 & \\ & \vdots & & 1 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & -1 & & & \\ \hline 1 & & & & & -2 & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & & & & & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & & \dots & & \\ & & & & & \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & 0 & \dots & & 1 & -1 \end{array} \right),$$

wobei die Komponenten nach $\Gamma_0^{\mathfrak{p}}, \Gamma_1^{\alpha}, \dots, \Gamma_{s_p}^{\alpha}, \Gamma_1^{-\alpha}, \dots, \Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ angeordnet sind. Außerdem gilt $p_a(\Gamma_0^{\mathfrak{p}}) = 0$, $p_a(\Gamma_{s_p}^{\alpha}) = p_a(\Gamma_{s_p}^{-\alpha}) = \frac{p-1}{2}$ und $p_a(\Gamma_i^{\pm\alpha}) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, s_p - 1$.

Beweis. Wir betrachten das semistabile Modell aus Theorem 2.2.5. Die potentiell einzigen nicht regulären (bzw. singulären) Punkte sind die Schnittpunkte der Komponenten

- $\Gamma_0^{\mathfrak{q}}$ und $\Gamma_{s_q}^{\mathfrak{q}}$ über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (2)$,
- $\Gamma_0^{\mathfrak{p}}$ und $\Gamma_{s_p}^{\alpha}$ bzw. $\Gamma_0^{\mathfrak{p}}$ und $\Gamma_{s_p}^{-\alpha}$ über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (p)$.

Nach Proposition 1.3.20 hat so ein Schnittpunkt lokal die Form $uv - c$ (siehe Gleichung 1.4), wobei die Bewertung von c die jeweiligen Stärken s_q bzw. s_p definiert. Nach Proposition 1.3.21 können diese Singularitäten mit Hilfe von $s_q - 1$ bzw. $s_p - 1$ Komponenten, die sich transversal schneiden, Vielfachheit 1, arithmetisches Geschlecht 0 und Selbstschnitt -2 haben, aufgelöst werden.



Damit erhalten wir genau die behauptete Konfiguration. \square

Korollar 2.3.3. *Das Modell aus Theorem 2.3.2 ist minimal.*

Beweis. Nach Bemerkung 1.3.10 ist \mathcal{C} minimal, da das Modell keine exzeptionellen Komponenten hat. \square

Bemerkung 2.3.4. Der Morphismus $\mathcal{C}_p^{\text{ss}} \rightarrow \mathcal{Y}_T$ (siehe Bemerkung 2.2.6) induziert einen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Morphismus $\mathcal{C}_p^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{Y}_T$ von arithmetischen Flächen, da $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ nur durch Aufblasen von Punkten aus $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ konstruiert wurde.

Kapitel 3

Arakelov Invarianten von Kurven

In diesem Kapitel, über Arakelov Invarianten von Kurven, stellen wir obere und untere Schranken für den Selbstschnitt der relativ dualisierenden Garbe vor. In Abschnitt 3.1 stellen wir die nötige einführende Theorie zusammen und nutzen als Referenz *”Géométrie d’Arakelov des surfaces arithmétiques”* von C. Soulé [So]. Für die oberen Schranken in Abschnitt 3.2 wiederholen wir die Ergebnisse von U. Kühn [Kü] und für die unteren Schranken in Abschnitt 3.3 wiederholen wir die Ergebnisse von U. Kühn zusammen mit J. S. Müller [KM].

3.1 Arithmetische Schnittzahlen hermitischer Geradenbündel

Es sei K ein Zahlkörper mit Ganzheitsring \mathcal{O}_K und $f : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ eine arithmetische Fläche wie in Definition 1.2.14. Mit \mathcal{X}_∞ notieren wir die komplexwertigen Punkte $\mathcal{X}(\mathbb{C})$. Dies ist eine kompakte, 1-dimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit, welche verschiedene zusammenhängende Komponenten haben kann. Es gibt die Zerlegung

$$\mathcal{X}_\infty = \coprod_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}),$$

wobei $\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ die Menge der komplexwertigen Punkte der Kurve

$$\mathcal{X}_\sigma = \mathcal{X} \times_{\text{Spec } K, \sigma} \text{Spec } \mathbb{C}$$

und $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ eine Einbettung ist.

Definition 3.1.1. Ein *hermitesches Geradenbündel* $\overline{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}, h)$ ist ein Geradenbündel \mathcal{L} auf \mathcal{X} zusammen mit einer glatten hermiteschen Metrik h auf dem induzierten holomorphen Geradenbündel $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ auf \mathcal{X}_∞ . Mit $\|\cdot\|$ notieren wir die dazugehörige Norm. Zwei hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ auf \mathcal{X} heißen *isomorph*, falls

$$\overline{\mathcal{L}} \otimes \overline{\mathcal{M}}^{-1} \cong (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|),$$

wobei $|\cdot|$ der Absolutbetrag ist. Die *arithmetische Picard Gruppe* $\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X})$ ist die Gruppe der Isomorphieklassen von hermiteschen Geradenbündeln $\overline{\mathcal{L}}$ auf \mathcal{X} , wobei die Gruppenstruktur durch das Tensorprodukt gegeben ist.

Definition 3.1.2. Seien $\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{M}}$ zwei hermitesche Geradenbündel auf \mathcal{X} und l, m nicht triviale, globale Schnitte, deren induzierte Divisoren $\text{div}(l)$ und $\text{div}(m)$ auf \mathcal{X} keine gemeinsamen horizontalen Anteile haben. Dann ist die *Schnittzahl an den endlichen Stellen* $(l.m)_{\text{fin}}$ von l und m definiert durch

$$\begin{aligned} (l.m)_{\text{fin}} &:= \sum_{x \in \mathcal{X}} \log \#(\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}/(l_x, m_x)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} i_x(\text{div}(l), \text{div}(m)) \log |k(x)| \\ &= \sum_{s \in \text{Spec } \mathcal{O}_K} \left(\sum_{x \in \mathcal{X}_s} i_x(\text{div}(l), \text{div}(m)) [k(x) : k(s)] \right) \log |k(s)|, \end{aligned}$$

wobei l_x und m_x lokale Gleichungen von l und m am Punkt $x \in \mathcal{X}$ sind. Die Summe läuft über alle abgeschlossenen Punkte x von \mathcal{X} .

Die Schnitte l und m induzieren globale Schnitte auf \mathcal{L}_∞ und \mathcal{M}_∞ , welche ebenfalls mit l und m notiert werden. Sei $\text{div}(l) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} P_{\alpha}$ mit $p_{\alpha} \in \mathbb{Z}$, $P_{\alpha} \in \mathcal{X}_\infty$ und

$$(\log \|m\|)[\text{div}(l)] := \sum_{\alpha} p_{\alpha} \log \|m(P_{\alpha})\|.$$

Die *Schnittzahl an den unendlichen Stellen* $(l.m)_{\infty}$ von l und m ist gegeben durch

$$(l.m)_{\infty} := -(\log \|m\|)[\text{div}(l)] - \int_{\mathcal{X}_{\infty}} \log \|l\| \cdot c_1(\overline{\mathcal{M}}),$$

wobei $c_1(\overline{\mathcal{M}}) \in H^{1,1}(\mathcal{X}_\infty, \mathbb{R})$ die erste Chern Form von $\overline{\mathcal{M}}$ ist und außerhalb des Divisors $\text{div}(l)$ auf \mathcal{X}_∞ gegeben ist durch

$$c_1(\overline{\mathcal{M}}) = \text{dd}^c(-\log \|m(\cdot)\|^2).$$

Die Funktion $\log \|m(\cdot)\|^2$ ist auf \mathcal{X}_∞ lokal integrierbar, so dass die Schnittzahl im Unendlichen wohldefiniert ist. Die *arithmetische Schnittzahl* $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}}$ von $\overline{\mathcal{L}}$ und $\overline{\mathcal{M}}$ ist definiert durch

$$\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{M}} := (l.m)_{\text{fin}} + (l.m)_\infty. \quad (3.1)$$

Die *arithmetische Selbstschnittzahl* von $\overline{\mathcal{L}}$ ist gegeben durch $\overline{\mathcal{L}}.\overline{\mathcal{L}}$.

Theorem 3.1.3. (Arakelov, Deligne et al.) *Formel (3.1) induziert eine bilineare, symmetrische Paarung*

$$\widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X}) \times \widehat{\text{Pic}}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe z.B. [So]. □

Bemerkung 3.1.4. Theorem 3.1.3 ist eine Verallgemeinerung der arithmetischen Schnittpaarung von Arakelov, in der nur hermitische Geradenbündel, deren Chern Formen Vielfache einer Volumenform sind, betrachtet werden.

Wenn das Geschlecht von \mathcal{X} größer als 1 ist, gibt es für jedes σ auf $\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C})$ die *kanonische Volumenform*

$$\nu_{\text{can}}^\sigma(z) = \frac{i}{2g} \sum_j |f_j^\sigma|^2 dz \wedge d\bar{z},$$

wobei $f_1^\sigma(z)dz, \dots, f_g^\sigma(z)dz$ eine Orthonormalbasis von $H^0(\mathcal{X}_\sigma(\mathbb{C}), \Omega^1)$ zusammen mit dem natürlichen Skalarprodukt ist. Wir schreiben ν_{can} für die induzierte Volumenform auf \mathcal{X}_∞ und setzen

$$\overline{\mathcal{O}}(D) = \overline{\mathcal{O}}(D)_{\nu_{\text{can}}}.$$

Die Norm des Schnittes 1_D von $\mathcal{O}(D)$ ist gegeben durch $\|1_D\| = g(D, \cdot)$ wobei g die kanonische Green Funktion ist (siehe z.B. [La]). Nach Arakelov gibt es eine eindeutige Metrik $\|\cdot\|_{\text{Ar}}$ auf $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}$, so dass für alle Schnitte P von \mathcal{X} die Adjunktionsformel

$$\overline{\omega}.\overline{\mathcal{O}}(P) + \overline{\mathcal{O}}(P)^2 = 0, \quad (3.2)$$

gilt, wobei $\overline{\omega} := \overline{\omega}_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} = (\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}, \|\cdot\|_{\text{Ar}})$.

Bemerkung 3.1.5. Sei $f : \mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ eine arithmetische Fläche. Anstelle von $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}$ kann man auch mit der relativ dualisierenden Garbe $\omega_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}}$, ebenfalls ausgestattet mit der Arakelov Metrik, arbeiten. Es gilt

$$\omega_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}} = \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} \otimes f^* \omega_{\text{Spec } \mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}$$

und damit

$$\bar{\omega}_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}}^2 = \bar{\omega}_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}^2 + (2g - 2) \log(|\Delta_{K|\mathbb{Q}}|)^2,$$

wobei $\Delta_{K|\mathbb{Q}}$ die Diskriminante des Zahlkörpers K ist. Damit lassen sich Schranken für $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}$ in Schranken für $\omega_{\mathcal{X}/\mathbb{Z}}$ übersetzen und umgekehrt.

3.2 Obere Schranken für $\bar{\omega}^2$

Sei $\mathcal{Y} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ eine arithmetische Fläche mit generischer Faser Y . Wähle $\infty, P_1, \dots, P_r \in Y(K)$, so dass $Y \setminus \{\infty, P_1, \dots, P_r\}$ hyperbolisch ist. Sei $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ eine beliebige arithmetische Fläche zusammen mit einem Morphismus $\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ von arithmetischen Flächen, so dass der induzierte Morphismus $\beta : X_K \rightarrow Y_K$ von algebraischen Kurven über K unverzweigt über $Y(K) \setminus \{\infty, P_1, \dots, P_r\}$ ist. Sei $g \geq 2$ das Geschlecht von X und $d = \deg(\beta)$. Setze $\beta^* \infty = \sum b_j S_j$ und $b_{\max} = \max_j \{b_j\}$. Die Punkte S_j heißen *markierte Punkte*. Ein Divisor auf X mit Support in den markierten Punkten von Grad 0 heißt *markiert*. Ein Primideal \mathfrak{p} heißt *schlecht*, falls die Faser von \mathcal{X} über \mathfrak{p} reduzibel ist.

Theorem 3.2.1. *Sei $\beta : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ wie oben ein Morphismus von arithmetischen Flächen. Wir nehmen an, dass alle markierten Punkte K -rational sind und dass alle markierten Divisoren Torsionsdivisoren sind. Dann gilt für die arithmetische Selbstschnittzahl der dualisierenden Garbe auf \mathcal{X} die Ungleichung*

$$\bar{\omega}^2 \leq (2g - 2) \left([K : \mathbb{Q}] (\kappa_1 \log b_{\max} + \kappa_2) + \sum_{\mathfrak{p} \text{ bad}} a_{\mathfrak{p}} \log \text{Nm}(\mathfrak{p}) \right), \quad (3.3)$$

wobei $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ positive Konstanten sind, die nur von Y und den Punkten ∞, P_1, \dots, P_r abhängen. Die Koeffizienten $a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Q}$ sind gegeben durch lokale Schnittzahlen (siehe Formel (3.6) weiter unten).

Beweis. Folgt aus [Kü, Theorem I] und Bemerkung 3.1.5. □

Sei \mathcal{S}_j der Zariski-Abschluss eines markierten Punktes S_j auf \mathcal{X} . Sei \mathcal{K} ein kanonischer Divisor auf \mathcal{X} , dann gibt es für jeden markierten Punkt S_j einen vertikalen \mathbb{Q} -Divisor \mathcal{F}_j , so dass

$$\left(\mathcal{S}_j + \mathcal{F}_j - \frac{1}{2g-2} \mathcal{K} \right) \cdot \mathcal{C}_l^{(\mathfrak{p})} = 0, \quad (3.4)$$

für alle irreduziblen Komponenten $\mathcal{C}_l^{(\mathfrak{p})}$ der Faser $f^{-1}(\mathfrak{p})$ über $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathcal{O}_K$. Analog gibt es für jeden markierten Punkt S_j einen Divisor \mathcal{G}_j , so dass für alle $\mathcal{C}_l^{(\mathfrak{p})}$ gilt

$$\left(\mathcal{S}_j + \mathcal{G}_j + \frac{1}{d} \text{div}(s) \right) \cdot \mathcal{C}_l^{(\mathfrak{p})} = 0, \quad (3.5)$$

wobei s ein Schnitt von $\beta^* \mathcal{L}$ und $\mathcal{L} = \mathcal{O}(P) \in \text{Pic}(\mathcal{Y})$ ist. Die Divisoren \mathcal{F}_j und \mathcal{G}_j existieren unter den gegebenen Voraussetzungen immer (siehe [Cu, Bemerkung 3.2.6]). Dann sind die rationalen Zahlen $a_{\mathfrak{p}}$ aus dem Theorem durch folgende arithmetische Schnittzahlen von trivial metrisierten hermiteschen Geradenbündeln gegeben

$$\sum_{\mathfrak{p} \text{ bad}} a_{\mathfrak{p}} \log \text{Nm}(\mathfrak{p}) = -\frac{2g}{d} \sum_j b_j \mathcal{O}(\mathcal{G}_j)^2 + \frac{2g-2}{d} \sum_j b_j \mathcal{O}(\mathcal{F}_j)^2. \quad (3.6)$$

3.3 Untere Schranken für $\bar{\omega}^2$

Sei K ein Zahlkörper und \mathcal{O}_K der Ganzheitsring von K . Sei X/K eine projektive, glatte und geometrisch zusammenhängende Kurve über K vom Geschlecht $g > 1$. Weiter sei \mathcal{X} ein reguläres Modell von X über \mathcal{O}_K .

Nach [KM, Korollar 2.3] gibt es zu jeder irreduziblen vertikalen Komponente Γ von \mathcal{X} , einen vertikalen \mathbb{Q} -Divisor V_{Γ} , so dass

$$(V_{\Gamma} \cdot \mathcal{C}) = \frac{1}{2g-2} (-\mathcal{C}^2 + 2p_a(\mathcal{C}) - 2) - \frac{\delta_{\Gamma \mathcal{C}}}{b_{\Gamma}} \quad (3.7)$$

für alle irreduziblen Komponenten \mathcal{C} von \mathcal{X} die in derselben speziellen Faser wie Γ liegen. Dabei ist b_{Γ} die Vielfachheit der irreduziblen Komponente Γ und δ das Kronecker Delta auf der Menge der irreduziblen Komponenten von \mathcal{X} . Sei $D \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ ein \mathbb{Q} -Divisor vom Grad 1, so dass $(2g-2)D$ ein kanonischer \mathbb{Q} -Divisor auf X ist. Dann gibt es einen vertikalen Divisor V_D , so dass

$$\mathcal{K} = (2g-2)(D_{\mathcal{X}} + V_D) \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}) \quad (3.8)$$

ein kanonischer \mathbb{Q} -Divisor auf \mathcal{X} ist, wobei $D_{\mathcal{X}}$ der Zariski-Abschluss von D ist. Außerdem sei ein weiterer Divisor U_D definiert durch

$$U_D = \sum_{\Gamma} b_{\Gamma} (2(V_{\Gamma} \cdot V_D) - V_{\Gamma}^2) \Gamma, \quad (3.9)$$

wobei Γ die irreduziblen Komponenten von \mathcal{X} durchläuft. Zu jedem \mathbb{Q} -Divisor $D \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ vom Grad 1 gibt es ein hermitesches Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}_D$, welches wie folgt definiert ist.

Definition 3.3.1. Das hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}_D$ auf \mathcal{X} ist definiert durch

$$\overline{\mathcal{L}}_D = \bar{\omega} \otimes \overline{\mathcal{O}}(2D_{\mathcal{X}}) \otimes \mathcal{O}(U_D)^{-1} \otimes \overline{\mathcal{O}}(-a\mathcal{X}_{\infty}),$$

wobei $a = \overline{\mathcal{O}}(D_{\mathcal{X}})^2 - \mathcal{O}(V_{\mathcal{X}})^2 \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\overline{\mathcal{O}}(D_{\mathcal{X}})^2$ der Selbstschnitt von $\mathcal{O}(D_{\mathcal{X}})$ ausgestattet mit der Arakelov Metrik und $\overline{\mathcal{O}}(-a\mathcal{X}_{\infty}) = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, |\cdot|e^a)$.

Definition 3.3.2. Sei $D \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ ein \mathbb{Q} -Divisor vom Grad 1. Dann sei β_D definiert durch

$$\beta_D := \frac{1}{2g-2} \mathcal{O}(2V_D + U_D)^2 + 2(\bar{\omega} \cdot \mathcal{O}(U_D)), \quad (3.10)$$

wobei die vertikalen Geradenbündel mit der trivialen Metrik ausgestattet sind.

Bemerkung 3.3.3. Die Berechnung von β_D ist lokal über allen Primstellen \mathfrak{p} von \mathcal{O}_K möglich. Das heißt insbesondere, dass auch die Divisoren V_D und U_D lokal berechnet werden können. Um die expliziten Rechnungen in Kapitel 4 übersichtlich zu halten, setzen wir

$$V_{D,\mathfrak{p}} := V_D |_{\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}}, \quad U_{D,\mathfrak{p}} := U_D |_{\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}}$$

wobei $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ die spezielle Faser von \mathcal{X} über einer Primstelle \mathfrak{p} von \mathcal{O}_K ist. Weiter sei

$$\beta_{D,\mathfrak{p}} := \frac{1}{2g-2} \mathcal{O}(2V_{D,\mathfrak{p}} + U_{D,\mathfrak{p}})^2 + 2(\bar{\omega} \cdot \mathcal{O}(U_{D,\mathfrak{p}}))$$

(vgl. Formel 3.10). Dann gilt $\beta_D = \sum_{\mathfrak{p}} \beta_{D,\mathfrak{p}}$.

Lemma 3.3.4. *Angenommen das reguläre Modell \mathcal{X} ist minimal und die spezielle Faser von \mathcal{X} ist reduziert. Dann ist $(\mathcal{K} \cdot U_D) \geq 0$ und damit $\beta_D \geq 0$.*

Beweis. Siehe [KM, Lemma 2.17 und Korollar 2.18]. □

Sei F eine endliche Erweiterung von K und $\varphi_F = \text{pr}_1 \circ \pi_F : \mathcal{X}^F \rightarrow \mathcal{X}$, wobei $\pi_F : \mathcal{X}^F \rightarrow \mathcal{X} \otimes \mathcal{O}_F$ die minimale Desingularisierung ist. Nach [Li2] gibt es eine endliche Erweiterung F_0 von K , so dass $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_F$ semistabil für jede Erweiterung F von F_0 ist. Sei $\mathcal{X}_{sm}^{F_0}$ die Menge der glatten Punkte von \mathcal{X}^{F_0} und $\text{Exc}(\varphi_{F_0})$ die Ausnahmepunkte von φ_{F_0} . Dann sei

$$T(\mathcal{X}) := \varphi_{F_0} \left((\mathcal{X}^{F_0} \setminus \mathcal{X}_{sm}^{F_0}) \cup \text{Exc}(\varphi_{F_0}) \right).$$

Bemerkung 3.3.5. Wenn \mathcal{X} semistabil ist, gilt $T(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_{sm}$.

Definition 3.3.6. Ein hermitesches Geradenbündel heißt *relativ semipositiv*, falls der Schnitt mit allen vertikalen Komponenten nicht negativ ist.

Theorem 3.3.7. Sei $D \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ ein \mathbb{Q} -Divisor vom Grad 1, so dass $(2g - 2)D$ ein kanonischer \mathbb{Q} -Divisor auf X ist und $D_{\mathcal{X}} \cap T(\mathcal{X}) = \emptyset$. Falls das hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}_D$ relativ semipositiv ist, gilt

$$\bar{\omega}^2 \geq \beta_D.$$

Beweis. Siehe [KM, Theorem 1.3]. □

Theorem 3.3.8. Angenommen \mathcal{X} ist minimal und die spezielle Faser von \mathcal{X} ist reduziert. Dann gilt:

- i.) $\overline{\mathcal{L}}_D$ ist relativ semipositiv für jeden Divisor $D \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(X)$ vom Grad 1,
- ii.) $\beta := \beta_D$ ist unabhängig von der Wahl von D ,
- iii.) $\beta \geq 0$, mit Gleichheit genau dann wenn alle Fasern von \mathcal{X} irreduzibel sind.

Beweis. Siehe [KM, Theorem 1.4]. □

Sei \mathfrak{p} eine Primstelle von \mathcal{O}_K . Im Fall, dass die spezielle Faser $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ von \mathcal{X} reduziert ist, hängt $\beta_{\mathfrak{p}} = \beta_{D, \mathfrak{p}}$ nicht mehr von D ab. Außerdem gibt es dann eine konkrete Formel für $\beta_{\mathfrak{p}}$. Dabei sei $M = (m_{ij})_{i,j}$ definiert als die negative Schnittmatrix der speziellen Faser $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ von \mathcal{X} und $M^+ = (n_{ij})_{i,j}$ die Moore-Penrose Pseudoinverse von M (siehe [Ci1, §3]).

Lemma 3.3.9. *Angenommen die spezielle Faser $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ von \mathcal{X} ist reduziert, dann hängt $\beta_{\mathfrak{p}} = \beta_{D,\mathfrak{p}}$ nicht von D ab und es gilt*

$$\beta_{\mathfrak{p}} = \frac{4(g-1)}{gr} + \frac{g-1}{g} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r n_{ii} n_{jj} m_{ij} + \frac{2(g-1)}{g} \sum_{i=1}^r a_i n_{ii} - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r a_i a_j n_{ij},$$

wobei r die Anzahl der irreduziblen Komponenten $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ von $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ ist und $a_i := -\Gamma_i^2 + 2p_a(\Gamma_i) - 2$.

Beweis. Siehe [KM, Lemma 2.19]. □

Kapitel 4

Obere und untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$

In diesem Kapitel wollen wir für die Familie $\{\mathcal{C}_p\}_{p \geq 5}^{\text{reg}}_{\text{prim}}$ von regulären semistabilen Modellen (siehe Kapitel 2) obere und untere Schranken für den Selbstschnitt der dualisierenden Garbe berechnen.

Wir beginnen in den Abschnitten 4.1.1-4.1.3 mit der Berechnung einer oberen Schranke für $\bar{\omega}^2$ nach der Theorie aus Abschnitt 3.2. In den Abschnitten 4.1.4-4.1.7 berechnen wir untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ nach der Theorie aus Abschnitt 3.3.

Wir treffen in diesem Kapitel die folgenden Annahmen (bzw. Notationen).

Annahme 4.0.10. *Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.*

- Die Kurve C_p aus Annahme 2.1.1 definiert über \mathbb{Q} , fassen wir in diesem Kapitel als Kurve über dem Zahlkörper

$$K = \mathbb{Q} \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[2(p-1)]{-p} \right)$$

auf und notieren diese ebenfalls mit C_p .

- Sei \mathfrak{q} ein Primideal welches $(2) \subset \mathcal{O}_K$ teilt.
- Sei \mathfrak{p} ein Primideal welches $(p) \subset \mathcal{O}_K$ teilt.
- Mit $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$ bezeichnen wir die generische Faser von $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$. Die spezielle Faser über \mathfrak{q} bzw. \mathfrak{p} bezeichnen wir mit $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{q}}^{\text{reg}}$ bzw. $\mathcal{C}_{p,\mathfrak{p}}^{\text{reg}}$.

- Seien $\Gamma_i^{\mathfrak{q}}$, $i = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$, die Komponenten der speziellen Faser über \mathfrak{q} , wobei $s_{\mathfrak{q}}$ die Stärke aus Proposition 2.3.2 ist.
- Seien $\Gamma_0^{\mathfrak{p}}$, Γ_i^{α} , $\Gamma_i^{-\alpha}$, für $i = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}}$, die Komponenten der speziellen Faser über \mathfrak{p} , wobei $s_{\mathfrak{p}}$ die Stärke aus Proposition 2.3.2 ist.
- Wenn wir in einem Abschnitt die Primstellen \mathfrak{q} oder \mathfrak{p} einzeln betrachten, lassen wir bei den Komponenten $\Gamma_i^{\mathfrak{q}}$, $\Gamma_i^{\mathfrak{p}}$ das \mathfrak{q} bzw. \mathfrak{p} weg (was im Fall \mathfrak{p} nur $\Gamma_0^{\mathfrak{p}} = \Gamma_0$ bedeutet).

4.1 Arakelov Invarianten von $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$

In diesem Abschnitt wollen wir die oberen und unteren Schranken nach Theorem 3.2.1 und 3.3.7 für unsere arithmetische Fläche $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$, die wir in Abschnitt 2.1 konstruiert haben, bestimmen.

4.1.1. Wir betrachten die Kurve C_p zusammen mit dem Morphismus

$$\beta : C_p \rightarrow \mathbb{P}^1$$

definiert durch $(x, y) \mapsto (x)$. Dies ist eine Überlagerung vom Grad p mit Verzweigungsort $\{-1, 0, 1, \infty\}$. Diesen Morphismus setzen wir zu einem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Morphismus

$$\beta : \mathcal{C}_p^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{Y}_T$$

von arithmetischen Flächen fort (siehe Bemerkung 2.3.4). Es gibt nur einen markierten Punkt $S_1 = P_{\infty}$. Dieser ist rational und wir können Theorem 3.2.1 anwenden.

4.1.1 Beiträge zu einer oberen Schranke über $\mathfrak{q} \mid (2)$

In diesem Abschnitt berechnen wir die lokalen Beiträge zu einer oberen Schranke über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (2)$. Wir verwenden dabei die Notationen aus Annahme 4.0.10.

Proposition 4.1.2. Die Divisoren $\mathcal{G}_{\mathfrak{q}} = 0$ und

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{q}} = - \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} \left(\frac{1}{2} k \right) \Gamma_k,$$

erfüllen über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (2)$ die Formeln (3.4) bzw. (3.5).

Beweis. Nach Abschnitt 3.2 müssen wir für jeden markierten Punkt S_j einen Divisor \mathcal{F}_j nach Formel (3.6) berechnen. Da es nur einen markierten Punkt $S_1 = P_\infty$ gibt, können wir $j = 1$ setzen und erhalten für jede Primstelle \mathfrak{q} mit $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)$ einen Divisor $\mathcal{F}_\mathfrak{q}$. Das heißt, wir haben

$$\left(\overline{P_\infty} + \mathcal{F}_\mathfrak{q} - \frac{1}{2g-2} \mathcal{K} \right) \cdot \Gamma_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, s_\mathfrak{q},$$

wobei \mathcal{K} ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ ist und wählen den Ansatz

$$\mathcal{F}_\mathfrak{q} = a_0 \Gamma_0 + a_1 \Gamma_1 + \dots + a_{s_\mathfrak{q}-1} \Gamma_{s_\mathfrak{q}-1} + a_{s_\mathfrak{q}} \Gamma_{s_\mathfrak{q}}.$$

Wir berechnen zuerst mit Hilfe der Adjunktionsformel (1.3) die folgenden Schnittzahlen

$$\begin{aligned} (\mathcal{K} \cdot \Gamma_0^\mathfrak{q}) &= p - 2, \\ (\mathcal{K} \cdot \Gamma_k^\mathfrak{q}) &= 0, \quad k = 1, \dots, s_\mathfrak{q} - 1, \\ (\mathcal{K} \cdot \Gamma_{s_\mathfrak{q}}^\mathfrak{q}) &= p - 2. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 1 - a_0 + a_1 - \frac{p-2}{2p-4} &= 0, \\ 0 + a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} - 0 &= 0, \quad k = 1, \dots, s_\mathfrak{q} - 1, \\ 0 + a_{s_\mathfrak{q}-1} - a_{s_\mathfrak{q}} - \frac{p-2}{2p-4} &= 0. \end{aligned}$$

und wir erhalten insgesamt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -a_0 + a_1 &= -1/2, \\ a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, s_\mathfrak{q} - 1, \\ a_{s_\mathfrak{q}-1} - a_{s_\mathfrak{q}} &= 1/2 \end{aligned}$$

und können $a_k = -\frac{k}{2}$, $k = 0, 1, \dots, s_\mathfrak{q}$ als Lösung wählen.

Da ∞_{y_T} nur die Komponente Γ_0 trifft, gilt $\deg(\mathcal{L})|_{\Gamma_0} = 1$ und $\deg(\mathcal{L})|_{\Gamma_k} = 0$ für $k > 0$. Damit ist $p \cdot \infty_{\mathcal{C}_p^{\text{reg}}}$ der Divisor des auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ zurückgezogenen Schnittes 1_{y_T} von \mathcal{L} . Daraus folgt $\mathcal{G}_\mathfrak{q} = 0$. \square

Lemma 4.1.3. *Es gilt $(\mathcal{F}_\mathfrak{q})^2 = -\frac{1}{4}s_\mathfrak{q}$ und $(\mathcal{G}_\mathfrak{q})^2 = 0$.*

Beweis. Wenn wir \mathcal{F}_q mit einer Komponente Γ_k für $k = 1, \dots, s_q - 1$ schneiden, gilt

$$(\mathcal{F}_q \cdot \Gamma_k) = -\frac{1}{2} \cdot ((k-1) - 2k + (k+1)) = 0.$$

Das heißt, es bleibt nur

$$\mathcal{F}_q^2 = \left(\frac{1}{2} s_q \cdot \Gamma_{s_q} \right) \cdot \mathcal{F}_q = \frac{1}{4} \cdot s_q \cdot \left((s_q - 1) - s_q \right) = -\frac{1}{4} \cdot s_q.$$

□

Lemma 4.1.4. *Es gilt*

$$\sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} \mathcal{O}(\mathcal{F}_q)^2 = -\frac{1}{4} \cdot R_q \cdot \log(2),$$

wobei $R_q = \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_q \cdot f(\mathfrak{q}|2)$.

Beweis. Sei \mathfrak{q} ein Primideal mit $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)$ und Trägheitsgrad $f(\mathfrak{q}|2)$. Dann gilt

$$\mathcal{O}(\mathcal{F}_q)^2 = \mathcal{F}_q^2 \cdot \log \text{Nm}(\mathfrak{q}) = -\frac{1}{4} \cdot s_q \cdot f(\mathfrak{q}|2) \cdot \log(2)$$

und damit

$$\sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} \mathcal{O}(\mathcal{F}_q)^2 = -\frac{1}{4} \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_q \cdot f(\mathfrak{q}|2) \cdot \log(2) = -\frac{1}{4} \cdot R_q \cdot \log(2),$$

wobei wir $R_q = \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_q \cdot f(\mathfrak{q}|2)$ gesetzt haben. □

4.1.2 Beiträge zu einer oberen Schranke über $\mathfrak{p} \mid (p)$

In diesem Abschnitt berechnen wir die lokalen Beiträge zu einer oberen Schranke über den Primstellen $\mathfrak{p} \mid (p)$.

Proposition 4.1.5. *Die Divisoren $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}} = 0$ und*

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{s_{\mathfrak{p}}}{2} \right) \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \left(\frac{s_{\mathfrak{p}} - k}{2} \right) \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \left(\frac{s_{\mathfrak{p}} - k}{2} \right) \Gamma_k^{-\alpha}$$

erfüllen (3.4) bzw. (3.5).

Beweis. Mit Hilfe der Adjunktionsformel (1.3) berechnen wir die Schnittzahlen

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_0^{\mathfrak{p}}) &= 2(p-2), \\ (\mathcal{K}_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i^{\alpha}) &= 0, \text{ für } i = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}}, \\ (\mathcal{K}_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i^{-\alpha}) &= 0, \text{ für } i = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Analog zu Proposition 4.1.2 wählen wir den Ansatz

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = b_0 \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} b_k^{\alpha} \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} b_k^{-\alpha} \Gamma_k^{-\alpha}.$$

und erhalten folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -1 &= -2b_0 + b_1^{\alpha} + b_1^{-\alpha}, \text{ für } \Gamma_0^{\mathfrak{p}}, \\ 0 &= b_{k-1}^{\alpha} - 2b_k^{\alpha} + b_{k+1}^{\alpha}, \text{ für } \Gamma_k^{\alpha}, k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ 1/2 &= b_{s_{\mathfrak{p}}-1}^{\alpha} - b_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}, \text{ für } \Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}, \\ 0 &= b_{k-1}^{-\alpha} - 2b_k^{-\alpha} + b_{k+1}^{-\alpha}, \text{ für } \Gamma_k^{-\alpha}, k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ 1/2 &= b_{s_{\mathfrak{p}}-1}^{-\alpha} - b_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}, \text{ für } \Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Wir wählen

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{s_{\mathfrak{p}}}{2}, \\ b_k^{\alpha} &= b_k^{-\alpha} = \frac{s_{\mathfrak{p}} - k}{2}, \text{ für } k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ b_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha} &= b_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha} = 0 \end{aligned}$$

als Lösung.

Mit demselben Argument wie im Beweis von Proposition 4.1.5 ist $\mathcal{G}_{\mathfrak{p}} = 0$. \square

Lemma 4.1.6. *Es gilt $(\mathcal{F}_{\mathfrak{p}})^2 = -\frac{1}{2}s_{\mathfrak{p}}$ und $(\mathcal{G}_{\mathfrak{p}})^2 = 0$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 4.1.3 gilt

$$(\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \cdot \Gamma_k) = \frac{1}{2} \cdot (s_{\mathfrak{p}} - (k-1) - 2(s_{\mathfrak{p}} - k) + s_{\mathfrak{p}} - (k+1)) = 0$$

für $k = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1$ und damit

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot s_{\mathfrak{p}} \cdot \left(-s_{\mathfrak{p}} + (s_{\mathfrak{p}} - 1) \right) \right) = -\frac{1}{2} \cdot s_{\mathfrak{p}}.$$

\square

Lemma 4.1.7. *Es gilt*

$$\sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} \mathcal{O}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p}})^2 = -\frac{1}{2} \cdot R_{\mathfrak{p}} \cdot \log(p),$$

wobei $R_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p)$.

Beweis. Folgt analog zu Lemma 4.1.4. □

4.1.3 Obere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$

Theorem 4.1.8. *Sei $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ das reguläre semistabile Modell aus Proposition 2.3.2 über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$. Dann gilt für die arithmetische Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$ der dualisierenden Garbe zusammen mit der Arakelov Metrik*

$$\bar{\omega}^2 \leq (2g - 2) \left([K : \mathbb{Q}] (\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) - (p - 2) \left(\frac{R_{\mathfrak{q}}}{2} \log(2) + R_{\mathfrak{p}} \log(p) \right) \right),$$

wobei $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten unabhängig von p und $R_{\mathfrak{q}}, R_{\mathfrak{p}}$ wie in Lemma 4.1.4 bzw. 4.1.7 sind.

Beweis. Nach 4.1.1 gilt $\deg(\beta) = p$ und $\beta^* \infty = p \cdot P_{\infty}$, also $b_1 = b_{\max} = p$. Mit Lemma 4.1.4 und Lemma 4.1.7 wird aus Formel (3.6)

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} a_{\mathfrak{q}} \log(\text{Nm}(\mathfrak{q})) + \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} a_{\mathfrak{p}} \log(\text{Nm}(\mathfrak{p})) \\ &= \frac{2g - 2}{d} \left(\sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} b_1 \mathcal{O}(\mathcal{F}_{\mathfrak{q}})^2 + \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} b_1 \mathcal{O}(\mathcal{F}_{\mathfrak{p}})^2 \right) \\ &= (2g - 2) \left(-\frac{1}{4} \cdot R_{\mathfrak{q}} \cdot \log(2) - \frac{1}{2} \cdot R_{\mathfrak{p}} \cdot \log(p) \right) \\ &= -(p - 2) \cdot \left(\frac{1}{2} R_{\mathfrak{q}} \log(2) + R_{\mathfrak{p}} \log(p) \right) \end{aligned}$$

Damit folgt aus Formel (3.3) die Behauptung. □

Bemerkung 4.1.9. Nach [Sz], [Ul] und [Zh1] gilt $\bar{\omega}^2 > 0$. Das heißt, es muss

$$(p - 2) \left(\frac{R_{\mathfrak{q}}}{2} \log(2) + R_{\mathfrak{p}} \log(p) \right) < [K : \mathbb{Q}] (\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) \quad (4.2)$$

gelten. Wir betrachten die gröbere Ungleichung

$$(p-2)(R_{\mathfrak{p}} \log(p)) \leq [K : \mathbb{Q}](\kappa_1 \log(p) + \kappa_2)$$

und es folgt, dass

$$(p-2)R_{\mathfrak{p}} \leq \kappa_1 [K : \mathbb{Q}] \quad (4.3)$$

gelten muss. Nach der Fundamentalgleichung der Bewertungstheorie¹ gilt

$$[K : \mathbb{Q}] = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} e_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p)$$

und wegen

$$R_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p)$$

können wir die Ungleichung (4.3) schreiben als

$$\kappa_1 \left(\sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} e_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p) \right) \geq (p-2) \cdot \left(\sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p) \right)$$

Das heißt, die Arithmetik des Zahlkörpers K liefert eine obere Schranke für die gewichtete Summe der Stärken der Singularitäten.

4.1.4 Kanonische Divisoren auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$

Bevor wir zu den unteren Schranken kommen, geben wir eine explizite Beschreibung eines kanonischen Divisors auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$. Diesen verwenden wir dann bei der Berechnung einer unteren Schranke für $\bar{\omega}^2$. Wir bestimmen zuerst einen kanonischen Divisor $K_{\mathcal{C}_0}$ auf der generischen Faser $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$ von $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$, um dann Proposition 1.2.27 anzuwenden und diesen zu einem kanonischen Divisor $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$ auf der Fläche fortzusetzen.

¹ Sei K ein Zahlkörper mit zugehörigem Ganzheitsring \mathcal{O}_K und $(p) \subset \mathbb{Z}$ ein maximales Primideal. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}_1^{(e_1)} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_r^{(e_r)}$ von (p) in Primideale $\mathfrak{p}_i \subset \mathcal{O}_K$, wobei e_i der Verzweigungsindex des jeweiligen Primideals \mathfrak{p}_i ist. Weiter sei $f(\mathfrak{p}_i | (p)) = [\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_i : \mathbb{Z}/(p)]$ der Trägheitsgrad von \mathfrak{p}_i über (p) . Dann gilt die *Fundamentalgleichung der Bewertungstheorie*

$$\sum_{i=1}^r e_i \cdot f(\mathfrak{p}_i | (p)) = [K : \mathbb{Q}]$$

(siehe [Ne, Proposition I.8.2]).

Proposition 4.1.10. *Der Divisor*

$$K_{\mathcal{C}_0} = (p-2)(P_1 + P_2 + P_3) - (p-2)P_\infty$$

ist für alle Primzahlen $p \geq 5$ ein kanonischer Divisor auf der generischen Faser $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$ von $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$, wobei $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (-1,0)$ und P_∞ der Punkt im Unendlichen ist.

Beweis. Wir betrachten die rationale 1-Form $\omega = \frac{dx}{y}$ auf der affinen Kurve $y^p = f(x)$. Das Polynom f hat die Nullstellen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$ und $\alpha_3 = -1$.

Fall 1: Für $y_0 \neq 0$ ist $x - x_0$ eine lokale Koordinate und ω hat keine Nullstellen oder Pole.

Fall 2: Für $y_0 = 0$ ist $x = \alpha_i$. Im Punkt $P_i = (\alpha_i, 0)$ ist y eine lokale Koordinate und wir haben

$$py^{p-1}dy = (3x^2 - 1)dx \Leftrightarrow \frac{dx}{y} = \frac{py^{p-2}dy}{3x^2 - 1}.$$

Also hat ω Nullstellen der Ordnung $p-2$ in P_1 , P_2 und P_3 .

Das Geschlecht von $y^p = x^3 - x$ ist $g = p-1$, also ist der Grad des kanonischen Divisors $2p-4$. Da es nur einen Punkt im Unendlichen gibt (siehe 1.2.11), muss

$$K_{\mathcal{C}_0} = (p-2)(P_1 + P_2 + P_3) - (p-2)P_\infty$$

ein kanonischer Divisor sein. □

Nach Proposition 1.2.27 ist ein Divisor $\mathcal{K} \in \text{Cl}(\mathcal{C}_p^{\text{reg}})_{\mathbb{Q}}$, der die Adjunktionsformel (1.3) erfüllt und deren Einschränkung auf die generische Faser $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$ ist, ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$.

Proposition 4.1.11. *Sei $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ das reguläre semistabile Modell aus Proposition 2.3.2, \mathfrak{q} ein Ideal welches $(2) \subset \mathcal{O}_K$ teilt und \mathfrak{p} ein Ideal welches $(p) \subset \mathcal{O}_K$ teilt. Dann ist*

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}_0} + \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} \mathcal{V}_{\mathfrak{q}} + \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$$

für alle Primzahlen $p \geq 5$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$, wobei

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{q}} = \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} k(p-2)\Gamma_k^{\mathfrak{q}}$$

und

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{p}} = s_{\mathfrak{p}}(p-2)\Gamma_0^{\mathfrak{p}} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} (s_{\mathfrak{p}}-k)(p-2)\Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} (s_{\mathfrak{p}}-k)(p-2)\Gamma_k^{-\alpha}$$

in Abhängigkeit der Stärken $s_{\mathfrak{q}}$ und $s_{\mathfrak{p}}$.

Beweis. Nach Proposition 4.1.10 ist

$$K_{\mathcal{C}_0} = (p-2)(P_1 + P_2 + P_3) - (p-2)P_{\infty}$$

ein kanonischer Divisor auf der generischen Faser $\mathcal{C}_{p,K}^{\text{reg}}$. Um diesen Divisor auf die Fläche fortzusetzen, berechnen wir die folgenden Schnittzahlen über der Primstelle \mathfrak{q}

$$\begin{aligned} (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_0^{\mathfrak{q}}) &= 0, \\ (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_i^{\mathfrak{q}}) &= 0, \text{ für } i = 1, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1, \\ (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}) &= 2(p-2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

und \mathfrak{p}

$$\begin{aligned} (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_0^{\mathfrak{p}}) &= 2(p-2), \\ (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_i^{\alpha}) &= 0, \text{ für } i = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}}, \\ (\overline{K_{\mathcal{C}_0}} \cdot \Gamma_i^{-\alpha}) &= 0, \text{ für } i = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei $\overline{K_{\mathcal{C}_0}}$ der Zariski-Abschluss von $K_{\mathcal{C}_0}$ ist. Wir können folgenden Ansatz

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}_0} + \mathcal{V}_{\mathfrak{q}} + \mathcal{V}_{\mathfrak{p}}$$

für den kanonischen Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ wählen, wobei

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{q}} = a_0\Gamma_0^{\mathfrak{q}} + a_1\Gamma_1^{\mathfrak{q}} + \dots + a_{s_{\mathfrak{q}}-1}\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}-1}^{\mathfrak{q}} + a_{s_{\mathfrak{q}}}\Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}$$

und

$$\mathcal{V}_{\mathfrak{p}} = b_0\Gamma_0^{\mathfrak{p}} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} b_k^{\alpha}\Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} b_k^{-\alpha}\Gamma_k^{-\alpha}$$

über den Primstellen schlechter Reduktion \mathfrak{q} und \mathfrak{p} liegen. Es müssen nun die a_i und b_i bestimmen werden, wobei wir dabei wiederholt die Adjunktionsformel

$$2p_a(\Gamma_k) - 2 = \Gamma_k^2 + K_{\mathcal{C}_0} \cdot \Gamma_k + \mathcal{V}_{\mathfrak{q}} \cdot \Gamma_k + \mathcal{V}_{\mathfrak{p}} \cdot \Gamma_k, \quad k = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$$

(siehe Formel (1.3)) verwenden. Die Berechnungen können lokal durchgeführt werden und wir starten über der Primstelle \mathfrak{q} . Zusammen mit (4.4) gilt

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{p-1}{2} \right) - 2 &= -1 + 0 - a_0 + a_1, \\ 0 - 2 &= -2 + 0 + a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1, \\ 2 \left(\frac{p-1}{2} \right) - 2 &= -1 + 2(p-2) + a_{s_{\mathfrak{q}}-1} - a_{s_{\mathfrak{q}}}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p - 2 &= -a_0 + a_1, \quad \text{für } \Gamma_0^{\mathfrak{q}}, \\ 0 &= a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}, \quad \text{für } \Gamma_k^{\mathfrak{q}}, \quad k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1, \\ -(p - 2) &= a_{s_{\mathfrak{q}}-1} - a_{s_{\mathfrak{q}}}, \quad \text{für } \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}^{\mathfrak{q}}, \end{aligned}$$

und können

$$a_k = k(p-2) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$$

als Lösung in Abhängigkeit von der Stärke $s_{\mathfrak{q}}$ wählen.

Analog erhalten wir über \mathfrak{p} das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -(2p-4) &= -2b_0 + b_1^{\alpha} + b_1^{-\alpha}, \quad \text{für } \Gamma_0^{\mathfrak{p}}, \\ 0 &= b_{k-1}^{\alpha} - 2b_k^{\alpha} + b_{k+1}^{\alpha}, \quad \text{für } \Gamma_k^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ p - 2 &= b_{s_{\mathfrak{p}}-1}^{\alpha} - b_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}, \quad \text{für } \Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha}, \\ 0 &= b_{k-1}^{-\alpha} - 2b_k^{-\alpha} + b_{k+1}^{-\alpha}, \quad \text{für } \Gamma_k^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ p - 2 &= b_{s_{\mathfrak{p}}-1}^{-\alpha} - b_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}, \quad \text{für } \Gamma_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha}. \end{aligned}$$

und können

$$\begin{aligned} b_0 &= s_{\mathfrak{p}}(p-2), \\ b_k^{\alpha} &= b_k^{-\alpha} = (s_{\mathfrak{p}} - k)(p-2), \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1, \\ b_{s_{\mathfrak{p}}}^{\alpha} &= b_{s_{\mathfrak{p}}}^{-\alpha} = 0 \end{aligned}$$

als Lösung wählen. Wir setzen $b_k := b_k^{\alpha} = b_k^{-\alpha}$ und können die Lösung auch kompakt schreiben als

$$b_k = (s_{\mathfrak{p}} - k)(p-2),$$

wobei $k = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{p}}$. □

4.1.5 Beiträge zu einer unteren Schranke über $\mathfrak{q} \mid (2)$

In diesem Abschnitt berechnen wir die lokalen Beiträge zu einer unteren Schranke nach Abschnitt 3.3 über den Primstellen $\mathfrak{q} \mid (2)$. Nach Bemerkung 3.3.3 können die Berechnungen lokal durchgeführt werden und wir bestimmen zuerst die \mathbb{Q} -Divisoren V_i (siehe Formel (3.7)).

Lemma 4.1.12. *Die Divisoren V_i , $i = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$ können wie folgt gewählt werden*

- $V_0 = -\sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} \frac{k}{2} \Gamma_k,$
- $V_i = \sum_{k=0}^i \binom{k-i+1}{2} \Gamma_k - \sum_{k=i+1}^{s_{\mathfrak{q}}} \binom{k-i-1}{2} \Gamma_k,$
für $i = 1, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1,$
- $V_{s_{\mathfrak{q}}} = -V_0 = \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} \frac{k}{2} \Gamma_k.$

Beweis. Wir wählen für alle $i = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$ den Ansatz

$$V_i = a_0 \Gamma_0 + a_1 \Gamma_1 + \dots + a_{s_{\mathfrak{q}}-1} \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}-1} + a_{s_{\mathfrak{q}}} \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}. \quad (4.6)$$

Nach (3.7) müssen die \mathbb{Q} -Divisoren V_i

$$(V_i \cdot \Gamma_j) = \frac{1}{2g-2} (-\Gamma_j^2 + 2p_a(\Gamma_j) - 2) - \frac{\delta_{ij}}{m(\Gamma_j)}$$

für alle $j = 0, 1, \dots, s_{\mathfrak{q}}$ erfüllen, wobei $m(\Gamma_j)$ die Vielfachheit der jeweiligen Komponente ist. Da alle Komponenten reduziert sind, ist $m(\Gamma_j) = 1$ für alle j und wir erhalten

$$\begin{aligned} (V_i \cdot \Gamma_0) &= \frac{1}{2} - \delta_{ij}, \\ (V_i \cdot \Gamma_j) &= -\delta_{ij}, \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1, \\ (V_i \cdot \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}) &= \frac{1}{2} - \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Mit unserem Ansatz (4.6) muss ebenfalls gelten

$$\begin{aligned} (V_i \cdot \Gamma_0) &= -a_0 + a_1, \\ (V_i \cdot \Gamma_j) &= a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}, \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, s_{\mathfrak{q}} - 1, \\ (V_i \cdot \Gamma_{s_{\mathfrak{q}}}) &= a_{s_{\mathfrak{q}}-1} - a_{s_{\mathfrak{q}}}. \end{aligned}$$

Der aufwendigste Fall ist der für Divisoren V_i mit $i \in \{1, \dots, s_q - 1\}$. Wir erhalten folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & \dots & & \\ \vdots & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_{s_q-1} \\ a_{s_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Wir behaupten, dass

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(k - i + 1) & , \text{ falls } 0 \leq k \leq i \\ -\frac{1}{2}(k - i - 1) & , \text{ falls } i + 1 \leq k \leq s_q \end{cases}$$

eine Lösung ist, wobei insbesondere $a_{i-1} = a_{i+1} = 0$ gilt. Wir zeigen, dass die so gewählten a_k 's das Gleichungssystem lösen. Es gilt

$$\begin{aligned} -a_0 + a_1 &= -\frac{1}{2}(-i + 1) + \frac{1}{2}(1 - i + 1) = \frac{1}{2}, \\ a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} &= \frac{1}{2}(k - i) - (k - i + 1) + \frac{1}{2}(k - i + 2) = 0, \\ &\text{für } 1 \leq k \leq i - 1, \\ a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} &= 0 - 1 + 0 = -1, \\ a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2} &= \frac{1}{2}(1) + 0 - \frac{1}{2}(1) = 0 \\ a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} &= -\frac{1}{2}(k - i - 2) + (k - i - 1) - \frac{1}{2}(k - i) = 0, \\ &\text{für } i + 2 \leq k \leq s_q - 1, \\ a_{s_q-1} - a_{s_q} &= -\frac{1}{2}(s_q - i - 2) + \frac{1}{2}(s_q - i - 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. Analog erhalten wir durch Lösen linearer Gleichungssysteme die übrigen im Lemma behaupteten Divisoren. \square

Lemma 4.1.13. *Für die Divisoren*

$$D = \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) - \frac{1}{2}(P_\infty), \quad V_{D,q} = \sum_{k=1}^{s_q} \frac{k}{2} \Gamma_k$$

und

$$V_{D,p} = \frac{1}{2}s_p\Gamma_0^p + \sum_{k=1}^{s_p-1} \left(\frac{s_p-k}{2}\right)\Gamma_k^\alpha + \sum_{k=1}^{s_p-1} \left(\frac{s_p-k}{2}\right)\Gamma_k^{-\alpha}$$

ist $(2g-2)(D_X + V_{D,q} + V_{D,p}) \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C}_p^{\text{reg}})$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$.

Beweis. Nach Proposition 4.1.11 ist

$$\mathcal{K}_{\mathcal{C}} = \overline{K}_{\mathcal{C}_0} + \sum_{q \cap \mathbb{Z} = (2)} \mathcal{V}_q + \sum_{p \cap \mathbb{Z} = (p)} \mathcal{V}_p$$

ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$, wobei $K_{\mathcal{C}_0} = (p-2)(P_1 + P_2 + P_3) + (2-p)P_\infty$ und $\mathcal{V}_q, \mathcal{V}_p$ wie in Proposition 4.1.11. Nach (3.8) muss nun

$$(2p-4)D = K_{\mathcal{C}_0}, \quad (2p-4)V_{D,q} = \mathcal{V}_q, \quad (2p-4)V_{D,p} = \mathcal{V}_p$$

gelten. Die im Lemma behaupteten Divisoren erfüllen genau dies. \square

Korollar 4.1.14. *Es gilt*

$$U_{D,q} = \sum_{k=0}^{s_q} \left(\frac{3}{4}s_q - k\right)\Gamma_k$$

Beweis. Nach (3.9) gilt

$$U_{D,q} = \sum_{i \in I} (2(V_i \cdot V_{D,q}) - V_i^2)\Gamma_i,$$

da $b_i = 1$ für alle i . Wir verwenden die Notation der a_k aus dem Beweis von Lemma 4.1.12 und berechnen zuerst $(V_i)^2$ für $i = 1, \dots, s_q - 1$, also

$$\begin{aligned} (V_i)^2 &= (a_0\Gamma_0 + a_1\Gamma_1 + \dots + a_{i-1}\Gamma_{i-1} + a_{i+1}\Gamma_{i+1} + \dots + a_{s_q-1}\Gamma_{s_q-1} + a_{s_q}\Gamma_{s_q})^2 \\ &= a_0(-a_0 + a_1) + \sum_{k=1}^{i-1} a_k(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) + a_i(-2a_i) \\ &\quad + \sum_{k=i+2}^{s_q-1} a_k(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}) + a_{s_q}(a_{s_q-1} - a_{s_q}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der a_k verschwinden die beiden Summen und wir erhalten

$$\begin{aligned} (V_i)^2 &= a_0(-a_0 + a_1) + a_i(-2a_i) + a_{s_q}(a_{s_q-1} - a_{s_q}) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{4}s_q\right) = -\frac{1}{4}s_q. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$(V_0)^2 = (V_{s_q})^2 = -\frac{1}{4}s_q$$

und

$$\begin{aligned} V_0 \cdot V_{D,\mathfrak{q}} &= \frac{1}{4}s_q, \\ V_i \cdot V_{D,\mathfrak{q}} &= \frac{1}{4}s_q - \frac{1}{2}i, \quad i = 1, \dots, s_q - 1 \\ V_{s_q} \cdot V_{D,\mathfrak{q}} &= -\frac{1}{4}s_q. \end{aligned}$$

Über der Primstelle \mathfrak{q} gilt dann

$$\begin{aligned} U_{D,\mathfrak{q}} &= \sum_{k \in \{0,1,\dots,s_q\}} (2(V_k \cdot V_{D,\mathfrak{q}}) - V_k^2) \Gamma_k \\ &= \left(\frac{3}{4}s_q\right) \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_q-1} \left(\frac{3}{4}s_q - k\right) \Gamma_k - \left(\frac{1}{4}s_q\right) \Gamma_{s_q} \\ &= \sum_{k=0}^{s_q} \left(\frac{3}{4}s_q - k\right) \Gamma_k. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.1.15. Da das Modell $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ nach Korollar 2.3.3 minimal und reduziert ist, folgt aus Theorem 3.3.8, dass das hermitesche Geradenbündel $\overline{\mathcal{L}}_D$ relativ semipositiv ist und wir Theorem 3.3.7 anwenden können.

Proposition 4.1.16. *Für den lokalen Beitrag $\beta_{D,\mathfrak{q}}$ über einer Primstelle $\mathfrak{q} \mid (2)$ gilt*

$$\beta_{D,\mathfrak{q}} = s_q(p-2) \log \text{Nm}(\mathfrak{q}).$$

Beweis. Nach Theorem 3.3.7 und Bemerkung 3.3.3 müssen wir

$$\beta_{D,\mathfrak{q}} := \frac{1-g}{g} \mathcal{O}(2V_{D,\mathfrak{q}} + U_{D,\mathfrak{q}})^2 + 2(\overline{\omega} \cdot \mathcal{O}(U_{D,\mathfrak{q}}))$$

berechnen. Wir beginnen mit $2V_{D,\mathfrak{q}} + U_{D,\mathfrak{q}}$, also

$$\begin{aligned} 2V_{D,\mathfrak{q}} + U_{D,\mathfrak{q}} &= 2 \left(\sum_{k=1}^{s_q} \frac{k}{2} \Gamma_k \right) + \sum_{k=0}^{s_q} \left(\frac{3}{4}s_q - k \right) \Gamma_k \\ &= \sum_{k=0}^{s_q} \left(k + \frac{3}{4}s_q - k \right) \Gamma_k \\ &= \sum_{k=0}^{s_q} \frac{3}{4}s_q \Gamma_k \end{aligned}$$

und damit

$$(2V_{D,\mathfrak{q}} + U_{D,\mathfrak{q}})^2 = \left(\sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{q}}} \left(\frac{3}{4}s_{\mathfrak{q}} \right) \Gamma_k \right)^2 = 0.$$

Bleibt noch $(U_{D,\mathfrak{q}} \cdot \mathcal{K})$ zu berechnen und wir erhalten

$$\begin{aligned} U_{D,\mathfrak{q}} \cdot \mathcal{K} &= \left(\sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{q}}} \left(\frac{3}{4}s_{\mathfrak{q}} - k \right) \Gamma_k \right) \cdot \left(K_{\mathcal{C}_0} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} k(p-2)\Gamma_k \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{q}}} \left(\frac{3}{4}s_{\mathfrak{q}} - k \right) \Gamma_k \right) \cdot (K_{\mathcal{C}_0}) = \frac{s_{\mathfrak{q}}(p-2)}{2}, \end{aligned}$$

da

$$\left(\sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{q}}} \left(\frac{3}{4}s_{\mathfrak{q}} - k \right) \Gamma_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{q}}} k(p-2)\Gamma_k \right) = 0.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\beta_{D,\mathfrak{q}} = 2(U_{D,\mathfrak{q}} \cdot \mathcal{K}) = s_{\mathfrak{q}}(p-2) \log \text{Nm}(\mathfrak{q}).$$

□

Bemerkung 4.1.17. Mit Hilfe von Lemma 3.3.9 können wir für konkretes $s_{\mathfrak{q}}$ und p unsere Ergebnisse über der Primstelle \mathfrak{q} verifizieren. So erhalten wir mit Hilfe der mathematischen Software Sage [Sa] zum Beispiel für $s_{\mathfrak{q}} = 4, 7, 8$ das gewünschte Ergebnis.

4.1.6 Beiträge zu einer unteren Schranke über $\mathfrak{p} \mid (p)$

In diesem Abschnitt berechnen wir die lokalen Beiträge (siehe Bemerkung 3.3.3) zu einer unteren Schranke über den Primstellen $\mathfrak{p} \mid (p)$. Wir bestimmen zuerst die \mathbb{Q} -Divisoren V_i (siehe Formel (3.7)).

Lemma 4.1.18. *Die Divisoren V_i können wie folgt gewählt werden*

- $V_0 = \sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \binom{s_{\mathfrak{p}}-k}{2} \Gamma_k^\alpha + \sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \binom{s_{\mathfrak{p}}-k}{2} \Gamma_k^{-\alpha},$
- $V_i^\alpha = \sum_{k=0}^i \binom{s_{\mathfrak{p}}+k}{2} \Gamma_k^\alpha + \sum_{k=i+1}^{s_{\mathfrak{p}}} \binom{s_{\mathfrak{p}}+2i-k}{2} \Gamma_k^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \binom{s_{\mathfrak{p}}-k}{2} \Gamma_k^{-\alpha},$
für $i = 1, \dots, s_{\mathfrak{p}} - 1,$
- $V_{s_{\mathfrak{p}}}^\alpha = \sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{p}}} \binom{s_{\mathfrak{p}}+k}{2} \Gamma_k^\alpha + \sum_{k=0}^{s_{\mathfrak{p}}-1} \binom{s_{\mathfrak{p}}-k}{2} \Gamma_k^{-\alpha},$

- $V_i^{-\alpha} = \sum_{k=1}^i \binom{s_p-2i+k}{2} \Gamma_k^{-\alpha} + \sum_{k=i+1}^{s_p-1} \binom{s_p-k}{2} \Gamma_k^{-\alpha} + \sum_{k=0}^{s_p} \binom{s_p-2i-k}{2} \Gamma_k^{\alpha}$
für $i = 1, \dots, s_p - 1$,
- $V_{s_p}^{-\alpha} = -V_{s_p}^{\alpha}$.

Beweis. Wir wählen für alle V_i den Ansatz

$$V_i = b_0 \Gamma_0 + b_1^{\alpha} \Gamma_1^{\alpha} + \dots + b_{s_p}^{\alpha} \Gamma_{s_p}^{\alpha} + b_1^{-\alpha} \Gamma_1^{-\alpha} + \dots + b_{s_p}^{-\alpha} \Gamma_{s_p}^{-\alpha}.$$

Analog zu Lemma 4.1.12 erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\delta_{ij} &= -2b_0 + b_1^{\alpha} + b_1^{-\alpha} && \text{für } \Gamma_0^{\mathfrak{p}}, \\ -\delta_{ij}^{\alpha} &= b_{k-1}^{\alpha} - 2b_k^{\alpha} + b_{k+1}^{\alpha} && \text{für } \Gamma_k^{\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, s_p - 1, \\ 1/2 - \delta_{ij}^{\alpha} &= b_{s_p-1}^{\alpha} - b_{s_p}^{\alpha} && \text{für } \Gamma_{s_p}^{\alpha}, \\ -\delta_{ij}^{-\alpha} &= b_{k-1}^{-\alpha} - 2b_k^{-\alpha} + b_{k+1}^{-\alpha} && \text{für } \Gamma_k^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, s_p - 1, \\ 1/2 - \delta_{ij}^{-\alpha} &= b_{s_p-1}^{-\alpha} - b_{s_p}^{-\alpha} && \text{für } \Gamma_{s_p}^{-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei $\delta_{ij}^{\alpha} = 1$ falls i der Index der Komponente Γ_j^{α} ist. In Matrix Notation sieht das Gleichungssystem dann wie folgt aus

$$\left(\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \dots & & \\ & \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & -1 \\ \hline 1 & & & & & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & 1 & -2 & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \dots & \\ & & & 0 & & \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & & 0 & \dots & & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1^{\alpha} \\ \dots \\ b_{s_p}^{\alpha} \\ b_1^{-\alpha} \\ \dots \\ b_{s_p}^{-\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_{i0} \\ -\delta_{i1}^{\alpha} \\ \dots \\ -\delta_{i(s_p-1)}^{\alpha} \\ 1/2 - \delta_{is_p}^{\alpha} \\ -\delta_{i1}^{-\alpha} \\ \dots \\ -\delta_{i(s_p-1)}^{-\alpha} \\ 1/2 - \delta_{is_p}^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

Der komplizierteste Fall ist der für Divisoren V_i korrespondierend zu $\Gamma_i^{\pm\alpha}$,

$i \neq 0, s_p$. Im Fall Γ_i^α können wir

$$b_0 = \frac{s_p}{2}$$

$$b_k^\alpha = \begin{cases} \frac{s_p+k}{2} & , \text{ falls } 1 \leq k \leq i \\ \frac{s_p+2i-k}{2} & , \text{ falls } i+1 \leq k \leq s_p-1 \end{cases}$$

$$b_k^{-\alpha} = \frac{s_p-k}{2}, \quad k = 1, \dots, s_p$$

als Lösung wählen.

Durch Einsetzen kann man zeigen, dass alle im Lemma gelisteten Divisoren das Gleichungssystem für die jeweiligen Indizes lösen. \square

Bemerkung 4.1.19. In Lemma 4.1.13 hatten wir bereits gesehen, dass $(2g-2)(D_{\mathcal{X}} + V_{D,q} + V_{D,p}) \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{C}_p^{\text{reg}})$ ein kanonischer Divisor auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ ist, wobei

$$D = \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3) - \frac{1}{2}(P_\infty), \quad V_{D,q} = \sum_{k=1}^{s_q} \frac{k}{2} \Gamma_k$$

und

$$V_{D,p} = \frac{1}{2} s_p \Gamma_0^p + \sum_{k=1}^{s_p-1} \left(\frac{s_p-k}{2} \right) \Gamma_k^\alpha + \sum_{k=1}^{s_p-1} \left(\frac{s_p-k}{2} \right) \Gamma_k^{-\alpha}.$$

Korollar 4.1.20. *Es gilt*

$$U_{D,p} = -\frac{1}{2} s_p \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_p} \left(k - \frac{1}{2} s_p \right) \Gamma_k^\alpha + \sum_{k=1}^{s_p} \left(k - \frac{1}{2} s_p \right) \Gamma_k^{-\alpha}.$$

Beweis. Nach (3.9) gilt

$$U_{D,p} = \sum_i (2(V_i \cdot V_{D,p}) - V_i^2) \Gamma_i,$$

da $b_i = 1$ für alle i . Analog zum Beweis von 4.1.14 kann man zeigen, dass

$$(V_0)^2 = (V_i^\alpha)^2 = (V_i^{-\alpha})^2 = (V_{s_p})^2 = -\frac{1}{2} s_p$$

und

$$V_0 \cdot V_{D,p} = (V_0)^2 = -\frac{1}{2} s_p,$$

$$V_i \cdot V_{D,p} = \frac{i - s_p}{2}, \quad i = 1, \dots, s_p - 1$$

$$V_{s_p}^\alpha \cdot V_{D,p} = V_{s_p}^{-\alpha} \cdot V_{D,p} = 0.$$

gilt. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} U_{D,\mathfrak{p}} &= \sum_{k \in \{0,1,\dots,s_{\mathfrak{p}}\}} (2(V_k \cdot V_{D,\mathfrak{p}}) - V_k^2) \Gamma_k \\ &= -\frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}} \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \left(k - \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}}\right) \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \left(k - \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}}\right) \Gamma_k^{-\alpha}. \end{aligned}$$

□

Proposition 4.1.21. *Für den lokalen Beitrag $\beta_{D,\mathfrak{p}}$ über einer Primstelle $\mathfrak{p} \mid (p)$ gilt*

$$\beta_{D,\mathfrak{p}} = 2s_{\mathfrak{p}}(p-2) \log \text{Nm}(\mathfrak{p}).$$

Beweis. Nach Theorem 3.3.7 und Bemerkung 3.3.3 müssen wir

$$\beta_{D,\mathfrak{p}} = \frac{1-g}{g} \mathcal{O}(2V_{D,\mathfrak{p}} + U_{D,\mathfrak{p}})^2 + 2(\bar{\omega} \cdot \mathcal{O}(U_{D,\mathfrak{p}}))$$

berechnen. Für $2V_{D,\mathfrak{p}} + U_{D,\mathfrak{p}}$ gilt

$$\begin{aligned} 2V_{D,\mathfrak{p}} + U_{D,\mathfrak{p}} &= \left(s_{\mathfrak{p}} \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} (s_{\mathfrak{p}} - k) \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}-1} (s_{\mathfrak{p}} - k) \Gamma_k^{-\alpha} \right) \\ &\quad + \left(-\frac{s_{\mathfrak{p}}}{2} \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \left(k - \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}}\right) \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \left(k - \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}}\right) \Gamma_k^{-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}} \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}} \Gamma_k^{\alpha} + \sum_{k=1}^{s_{\mathfrak{p}}} \frac{1}{2} s_{\mathfrak{p}} \Gamma_k^{-\alpha} \end{aligned}$$

und damit

$$(2V_{D,\mathfrak{p}} + U_{D,\mathfrak{p}})^2 = 0.$$

Bleibt noch $(U_{D,\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{K})$ zu berechnen und wir erhalten

$$\begin{aligned} U_{D,\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{K} &= U_{D,\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{K}_{C_0} + U_{D,\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{V}_{\mathfrak{p}} \\ &= -s_{\mathfrak{p}}(p-2) + 2s_{\mathfrak{p}}(p-2) \\ &= s_{\mathfrak{p}}(p-2). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\beta_{D,\mathfrak{p}} = 2(U_{D,\mathfrak{p}} \cdot \mathcal{K}) \log \text{Nm}(\mathfrak{p}) = 2s_{\mathfrak{p}}(p-2) \log \text{Nm}(\mathfrak{p}).$$

□

Bemerkung 4.1.22. Auch über der Primstelle \mathfrak{p} können wir mit Hilfe von Lemma 3.3.9 für konkretes $s_{\mathfrak{p}}$ und p unsere Ergebnisse überprüfen. So erhalten wir wie in Bemerkung 4.1.17 für $s_{\mathfrak{p}} = 4, 7, 8$ das gewünschte Ergebnis.

4.1.7 Untere Schranken für $\bar{\omega}^2$ auf $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$

Theorem 4.1.23. *Sei $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ das reguläre semistabile Modell aus Proposition 2.3.2 über $K = \mathbb{Q}(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p})$. Dann gilt für den Selbstschnitt $\bar{\omega}^2$ der dualisierenden Garbe*

$$\bar{\omega}^2 \geq (p-2)(R_{\mathfrak{q}} \log(2) + 2R_{\mathfrak{p}} \log(p)),$$

wobei $R_{\mathfrak{q}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ wie in Lemma 4.1.4 bzw. 4.1.7 sind.

Beweis. Nach Theorem 3.3.7 und Bemerkung 4.1.15 gilt

$$\bar{\omega}^2 \geq \beta_D = \frac{1-g}{g} \mathcal{O}(2V_D + U_D)^2 + 2(\bar{\omega} \cdot \mathcal{O}(U_D)).$$

Nach Bemerkung 3.3.3 gilt

$$\begin{aligned} \beta_D &= \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} \beta_{D, \mathfrak{q}} + \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} \beta_{D, \mathfrak{p}} \\ &= \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_{\mathfrak{q}}(p-2) \cdot \log \text{Nm}(\mathfrak{q}) + \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} 2s_{\mathfrak{p}}(p-2) \cdot \log \text{Nm}(\mathfrak{p}) \\ &= (p-2) \left(\sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_{\mathfrak{q}} \log \text{Nm}(\mathfrak{q}) + 2 \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \log \text{Nm}(\mathfrak{p}) \right) \\ &= (p-2) \left(\sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_{\mathfrak{q}} f(\mathfrak{q}|2) \log(2) + 2 \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} f(\mathfrak{p}|p) \log(p) \right) \\ &= (p-2)(R_{\mathfrak{q}} \log(2) + 2R_{\mathfrak{p}} \log(p)). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir analog zu Lemma 4.1.4 und 4.1.7

$$R_{\mathfrak{q}} = \sum_{\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z} = (2)} s_{\mathfrak{q}} \cdot f(\mathfrak{q}|2) \quad \text{und} \quad R_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)} s_{\mathfrak{p}} \cdot f(\mathfrak{p}|p)$$

gesetzt. □

Bemerkung 4.1.24. Nach Theorem 4.1.8 ist eine obere Schranke für $\bar{\omega}^2$ gegeben durch

$$\bar{\omega}^2 \leq (2g-2) \left([K : \mathbb{Q}] (\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) - (p-2) \left(\frac{R_{\mathfrak{q}}}{2} \log(2) + R_{\mathfrak{p}} \log(p) \right) \right),$$

wobei $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}^+$ positive Konstanten unabhängig von p sind. Zusammen mit Theorem 4.1.23 erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq (p-2)(R_q \log(2) + 2R_p \log(p)) \\ &\leq (2g-2) \left([K : \mathbb{Q}](\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) - (p-2) \left(\frac{R_q}{2} \log(2) + R_p \log(p) \right) \right). \end{aligned}$$

Wegen $2g-2 = 2(p-2)$ können wir dieses schreiben als

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_q}{2} \log(2) + R_p \log(p) \right) &\leq [K : \mathbb{Q}](\kappa_1 \log(p) + \kappa_2) \\ &\quad - (p-2) \left(\frac{R_q}{2} \log(2) + R_p \log(p) \right) \end{aligned}$$

und erhalten die im Vergleich zu Ungleichung (4.2) leicht stärkere Ungleichung

$$(p-1) \left(\frac{R_q}{2} \log(2) + R_p \log(p) \right) \leq [K : \mathbb{Q}](\kappa_1 \log(p) + \kappa_2).$$

Insgesamt erhalten wir also starke Bedingungen an R_q bzw. R_p und es ist demnach es ein interessantes Problem diese Zahlen explizit zu bestimmen. In dieser Dissertation können jedoch keine konkreten Aussagen über diese Zahlen gemacht werden.

Literaturverzeichnis

- [Ar] *K. Arzdorf*: Semistable reduction of prime-cyclic galois covers. Ph.D. thesis, Leibniz Universität Hannover, 2012.
- [AU] *A. Abbes, E. Ullmo*: Auto-intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$. *J. Reine Angew. Math.* **484** (1997), 1–70.
- [BLR] *S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud*: Néron models. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]* **21**. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [BMMB] *J.-B. Bost, J.-F. Mestre, L. Moret-Bailly*: Sur le calcul explicite des “classes de Chern” des surfaces arithmétiques de genre 2. *Astérisque* (1990), 69–105, Séminaire sur les Pinceaux de Courbes Elliptiques (Paris, 1988).
- [Bo] *J.-B. Bost*: Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), 241–312.
- [BW1] *I. Bouw, S. Wewers*: Notes for a minicourse at ICERM (Version 30.09.2015): Semistable reduction of curves and computation of bad Euler factors of L -functions.
- [BW2] *I. Bouw, S. Wewers*: Computing L -functions and semistable reduction of superelliptic curves. *Erscheint in Glasgow Math. J.* (2010).
- [Ci1] *Z. Cinkir*: The tau constant and the discrete Laplacian matrix of a metrized graph. *European J. Combin.* **32** (2011), 639–655.
- [Ci2] *Z. Cinkir*: Zhang’s conjecture and the effective Bogomolov conjecture over function fields. *Invent. Math.* **183** (2011), 517–562.

- [CK] *C. Curilla, U. Kühn*: On the arithmetic self-intersection number of the relative dualizing sheaf for Fermat curves of prime exponent. (2009).
- [CM] *C. Curilla, J. S. Müller*: The minimal regular model of a Fermat curve of odd squarefree exponent and the arithmetic self-intersection of its dualizing sheaf.. (Preprint 2016).
- [Cu] *C. Curilla*: Regular models of Fermat curves and applications to Arakelov theory. Ph.D. thesis, Universität Hamburg, 2010.
- [DM] *P. Deligne, D. Mumford*: The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), 75–109.
- [Ja] *A. Javanpeykar*: Polynomial bounds for Arakelov invariants of Belyi curves. *Algebra Number Theory* **8** (2014), 89–140, With an appendix by Peter Bruin.
- [Ka] *I. Kausz*: A discriminant and an upper bound for ω^2 for hyperelliptic arithmetic surfaces. *Compositio Math.* **115** (1999), 37–69.
- [KM] *U. Kühn, J. S. Müller*: Lower bounds on the arithmetic self-intersection number of the relative dualizing sheaf on arithmetic surfaces. *Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.*
- [Kü] *U. Kühn*: On the arithmetic self-intersection number of the dualizing sheaf on arithmetic surfaces. (2009).
- [La] *S. Lang*: Introduction to Arakelov theory. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Le] *C. Lehr*: Reduction of p -cyclic covers of the projective line. *Manuscripta Math.* **106** (2001), 151–175.
- [Li1] *Q. Liu*: Algebraic geometry and arithmetic curves. Oxford Graduate Texts in Mathematics **6**. Oxford University Press, Oxford, 2002, Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford Science Publications.

- [Li2] *Q. Liu*: Stable reduction of finite covers of curves. *Compos. Math.* **142** (2006), 101–118.
- [Ma] *H. Matsumura*: Commutative ring theory. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **8**. Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Ne] *J. Neukirch*: Algebraic number theory. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* **322**. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Pa] *A. N. Parshin*: Application of ramified coverings in the theory of Diophantine equations. *Mat. Sb.* **180** (1989), 244–259.
- [Sa] *SageMath*: SageMathCloud, 2016, <https://cloud.sagemath.com>.
- [Sc] *T. Schmechta*: Mumford-Tate curves. *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998)*. *Progr. Math.* **187**. Birkhäuser, Basel, 2000, 111–119.
- [Si] *J. H. Silverman*: Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves. *Graduate Texts in Mathematics* **151**. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [So] *C. Soulé*: Géométrie d’Arakelov des surfaces arithmétiques. *Astérisque* (1989), Exp. No. 713, 327–343, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1988/89.
- [Sz] *L. Szpiro*: Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d’une surface arithmétique. *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III. *Progr. Math.* **88**. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 229–246.
- [To] *C. Towse*: Weierstrass points on cyclic covers of the projective line. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 3355–3378.
- [Ul] *E. Ullmo*: Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. *Ann. of Math. (2)* **147** (1998), 167–179.
- [Vo] *P. Vojta*: Diophantine inequalities and arakelov theory. Springer, 1988.

- [Zh1] *S.-W. Zhang*: Admissible pairing on a curve. *Invent. Math.* **112** (1993), 171–193.
- [Zh2] *S.-W. Zhang*: Gross-Schoen cycles and dualising sheaves. *Invent. Math.* **179** (2010), 1–73.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Arithmetik und Geometrie der Familie von superelliptischen Kurven

$$\{C_p : y^p = x^3 - x\}_{p \geq 5 \text{ prim.}}$$

Das erste zentrale Ergebnis der Arbeit ist die Konstruktion eines regulären semistabilen Modelles $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ für die obige Familie von superelliptischen Kurven. Dazu bestimmen wir zuerst für alle $p \geq 5$ ein semistabiles Modell $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ von C_p , welches über dem Zahlkörper

$$K = \mathbb{Q} \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[p-1]{-p} \right)$$

definiert ist. Dieses Ergebnis verwenden wir, um daraus ein reguläres Modell mit Hilfe bekannter Theorie zu konstruieren. Dabei nutzen wir die Eigenschaft des semistabilen Modelles aus, dass nur Doppelpunkte als Singularitäten auftreten können und bekannt ist, wie diese aufgelöst werden. Diese Auflösung hängt von der lokalen Beschaffenheit dieser Doppelpunkte ab und tritt im regulären Modell in der Form auf, dass diese lokale Beschaffenheit die Anzahl der Komponenten bestimmt.

Desweiteren betrachten wir als Anwendung in der Arakelov Theorie obere und untere Schranken der arithmetischen Selbstschnittzahl $\bar{\omega}^2$ für diese Familie von Modellen. Dabei verwenden wir Methoden von Kühn für die oberen und Kühn und Müller für die unteren Schranken. Die berechneten Schranken hängen ebenfalls von der lokalen Beschaffenheit der Doppelpunkte des semistabilen Modelles sowie dem Verzweigungsgrad der jeweiligen Primstelle ab. Insgesamt können wir folgern, dass die Geometrie des semistabilen Modelles und die Arithmetik des Zahlkörpers K in diesen Schranken stark miteinander verflochten sind.

Abstract

In this thesis, we consider the arithmetic and geometry of the family of superelliptic curves

$$\{C_p : y^p = x^3 - x\}_{p \geq 5 \text{ prim.}}$$

The first main result is the construction of a regular semistable model $\mathcal{C}_p^{\text{reg}}$ for this family of superelliptic curves. To do this, we first determine a semistable model $\mathcal{C}_p^{\text{ss}}$ of C_p for all $p \geq 5$, which is defined over the number field

$$K = \mathbb{Q} \left(\zeta_p, \sqrt[p]{2}, \sqrt{3}, \sqrt[2(p-1)]{-p} \right).$$

We use this result to construct a regular model using known theory. Here, we use the property of semistable models that only double points can occur as singularities and it is known how these are resolved. This resolution depends on the local nature of these double points and occurs in the regular model in the form that this local property determines the number of components.

Furthermore, as an application in the Arakelov theory, we consider upper and lower bounds of the arithmetic self-intersection number $\bar{\omega}^2$ for this family of models. We use methods developed by Kühn for the upper and Kühn and Müller for the lower bounds. The calculated bounds also depend on the local nature of the double points of the semistable model as well as the ramification degree of the respective prime ideal. Overall, we can conclude that the geometry of the semistable model and the arithmetic of the number field K are strongly related with each other in these bounds.

Lebenslauf

- 25.09.1983 geboren in Uelzen
- 2006 Abitur in Lüneburg
- 2006-2011 Studium der Mathematik, Universität Hamburg
- 2009 Bachelor of Science in Mathematik, Universität Hamburg
- 2011 Master of Science in Mathematik, Universität Hamburg
- 2012 Beginn der Promotion in Mathematik, Universität Hamburg
- 2012-2015 wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Hamburg