

**Ein zeitlich selbstadaptives
numerisches Verfahren zur Berechnung
von Strömungen aller Mach-Zahlen
basierend auf Mehrskalenasymptotik
und diskreter Datenanalyse**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Lars Berend Hoffmann

aus Bremen

Hamburg 2000

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich
Mathematik der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. Th. Sonar
und Prof. Dr. R. Hass

Hamburg, den 12.7.2000

Prof. Dr. U. Eckhardt
Dekan des Fachbereichs Mathematik

für Miriam

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
Symbole und Notation	v
1 Einleitung	1
2 Die Euler–Gleichungen	5
2.1 Anfangs- und Randbedingungen	7
2.2 Analytisches und numerisches Verhalten der Euler–Gleichungen	7
2.3 Asymptotische Mehrskalentwicklung	10
3 Das numerische Verfahren	15
3.1 Flußkorrekturansatz	15
3.1.1 Additive Zerlegung der Flußfunktion	16
3.1.2 Charakteristische Formulierung des homogenen Systems	22
3.1.3 Zeitdiskretisierung	26
3.1.4 Implizites Zeitschrittverfahren	36
3.2 Diskretisierung des Strömungsgebietes	40
3.3 Die Ortsdiskretisierung	42
3.3.1 Diskretisierung des homogenen Systems	43
3.3.1.1 Lineare Rekonstruktion mit MUSCL–Ansatz in charakteristischen Variablen	44
3.3.1.2 Ein modifizierter Roe–Riemannlöser für das homogene System	45
3.3.2 Kompakte Diskretisierung der asymptotischen Flußkorrekturanteile	48
3.3.2.1 Druckzerlegung	51
3.3.2.2 Evolution des führenden Druckterms	52

3.3.2.3	System der langwelligen Akustik	52
3.3.2.4	Die Energie–Poisson–Gleichungen	59
3.3.3	Exakte Projektion im Fall sehr kleiner Entwicklungsparameter	64
3.4	Das Gesamtverfahren	73
4	Referenzparameter und Datenzerlegung	77
4.1	Entdimensionalisierung	77
4.2	Identifikation eines asymptotischen Regimes	82
4.2.1	Diskreter Evolutionsalgorithmus	88
4.2.2	Das Relevanzmaß	89
4.2.3	Zerlegungsalgorithmus	94
4.2.4	Eigenschaften des Zerlegungsalgorithmus	100
4.2.5	Validität des Zerlegungsalgorithmus	101
4.3	Zeitliche Adaption des Entwicklungsparameter M	105
5	Numerische Resultate	107
	Zusammenfassung und Ausblick	115

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Promotionsstipendiums der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Projekt So 363/3-1, am Fachbereich für Mathematik der Universität Hamburg. Im Laufe ihrer Entstehung habe ich von vielen Seiten persönliche und fachliche Unterstützung erhalten, für die ich mich an dieser Stelle recht herzlich bedanken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Th. Sonar, der mich am Ende meines Studiums mit dem faszinierenden Forschungsgebiet hyperbolischer Erhaltungsgleichungen vertraut gemacht hat und der durch seine bereitwillige Unterstützung und Förderung die Basis für die Entstehung dieser Arbeit gelegt und ihre Form geprägt hat.

Herrn Dr. A. Meister möchte ich herzlich für sein Engagement und stetes Interesse an der Arbeit, für seine konstruktive Kritik und fachliche Unterstützung danken, die in einer Betreuung mündete, wie ich sie mir besser nicht vorstellen kann.

Den Mitgliedern des DFG-Projektes, Prof. Dr. R. Klein, Prof. Dr. C.-D. Munz, Dr. N. Botta und Dipl.-Math. S. Roller, danke ich für die vielen hilfreichen Diskussionen und Anregungen, die wesentlich zu einem tieferen Verständnis der Problematik von Strömungen kleiner Mach-Zahlen beigetragen und mir über numerische Schwierigkeiten hinweg geholfen haben.

Desweiteren danke ich Herrn Priv. Doz. Dr. L. Latecki und Herrn Dr. R. Lakämper für die fachliche Unterstützung im Bereich der diskreten Datenanalyse und ihre Bereitschaft mich in ihren Forschungsschwerpunkt einzuarbeiten.

Herrn Prof. Dr. R. Hass danke ich für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Allen Kollegen vom Fachbereich Mathematik danke ich für die Unterstützung meiner Arbeit und für die angenehme Zeit am Institut für Angewandte Mathematik während der Entstehung. Hierbei möchte ich Herrn Dipl.-Math. Th. Grahs und Herrn Dipl.-Math. I. Thomas hervorheben, denen ich mit meinen kleinen oder größeren Problemen zur Last fallen durfte.

Meinem Vater gebührt der Dank für die Mühe, die Arbeit auf Fehler und Lesbarkeit durchgearbeitet zu haben.

Von ganzem Herzen möchte ich meiner Freundin Miriam für das Verständnis und die Liebe danken, mit der sie jede Phase dieser Arbeit mitgetragen hat.

Lars Berend Hoffmann

Symbole und Notation

In der gesamten Arbeit sind vektorielle Größen sowie Matrizen fett gedruckt, wobei Vektoren durch kleine und Matrizen durch große Buchstaben repräsentiert werden. Die folgenden Listen geben die häufig benutzten Symbole und Notationen in alphabetischer Reihenfolge zusammen mit einer stichwortartigen Erläuterung wieder:

Symbole

A	numerische Flußfunktion der Korrekturflüsse (Abschnitt 3.3.2, S. 49)
$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$	Flußkorrekturfunktion (Abschnitt 3.1.3, S. 33)
c	Schallgeschwindigkeit (Abschnitt 2, S. 5)
c^*	modifizierte Schallgeschwindigkeit (Abschnitt 3.1.1, S. 22)
E	Totalenergie
$\mathbf{f}(\mathbf{u})$	Fluß der Euler-Gleichungen (Abschnitt 2, S. 6)
γ	Isotropenexponent (Abschnitt 2, S. 6)
\mathcal{H}	numerische Flußfunktion des homogenen Systems (Abschnitt 3.3.1, S. 47)
H	Enthalpie (Abschnitt 2, S. 6)
H^*	modifizierte Enthalpie (Abschnitt 3.1.1, S. 20)
$\mathbf{h}(\mathbf{u})$	homogene Flußfunktion (Abschnitt 3.1.1, S. 20)
I^l	Indexmenge der Kontrollvolumina innerhalb des Zerlegungsalgorithmus (Abschnitt 4.2)
J^l	Indexmengen der Teilgebiete (Abschnitt 4.2)
$k(i; I^l)$	Kostenfunktion (Abschnitt 4.2, S. 90)
$\lambda_{\min}(f)$	Minimale Wellenlänge der Funktion f (Abschnitt 4.2, S. 91)
M	Entwicklungsparameter (Abschnitt 4.1)
Ma	lokale Mach-Zahl (Abschnitt 2, S. 6)
M_v, M_{div}, M_l	Indikatoren zur Bestimmung des Entwicklungsparameters (Abschnitt 4.1, S. 79, sowie Abschnitt 4.2, S. 94)
m	Impuls (Abschnitt 2, S. 6)
N	Anzahl der Kontrollvolumina
Ω	Beschränktes Gebiet im \mathbb{R} .

Ω_j	konvexes oder konkaves Teilgebiet von Ω (Abschnitt 4.2, S. 88)
Φ	Verfahrensfunktion (Abschnitt 3.1.3, S. 27)
p	Druck (Abschnitt 2, S. 7)
$p^{(i)}$	Druckkomponenten (Abschnitt 3.3.2.1, S. 51)
p_{NL}	nicht-lokale Druckkomponente (Abschnitt 3.1.1, S. 20)
ρ	Dichte
σ_i	Kontrollvolumen
S	Entropie (Abschnitt 3.1.2, S. 24)
S^*	modifizierte Entropie (Abschnitt 3.1.2, S. 25)
τ	Abkürzung, $\tau = (\gamma - 1)M^2$
Δt	Zeitschrittweite
\mathbf{u}	Vektor der konservativen Variablen (Abschnitt 2, S. 6)
v	Geschwindigkeit
\mathbf{w}	Satz der charakteristischen Variablen
Ξ	Menge aller Kontrollvolumina (Abschnitt 3.2)

Notationen

$\hat{\varphi}$	dimensionsbehaftete Größe
$\hat{\varphi}_{\text{ref}}$	Referenzgröße
$\bar{\varphi}$	langwelliger Anteil (Abschnitt 4.2)
φ'	kurzwelliger Anteil (Abschnitt 4.2)
x_i	Koordinate des Schwerpunktes der Box σ_i
$x_{i \pm \frac{1}{2}}$	Koordinaten der Ränder eines Kontrollvolumens
Δx_i	Durchmesser des Kontrollvolumens σ_i (Abschnitt 3.2)
$\Delta x_{i+\frac{1}{2}}$	Abstand benachbarter Schwerpunkte (Abschnitt 3.2)
$\varphi_{i+\frac{1}{2}}$	Werte der Funktion am Zellrand (Abschnitt 3.3.2, S. 49)
$(\nabla\varphi)_{i+\frac{1}{2}}$	Kompakte Diskretisierung der Ableitung von φ am Zellrand (Abschnitt 3.3.2, S. 49)
$(\nabla^3\varphi)_{i+\frac{1}{2}}$	Diskretisierung der dritten Ableitung von φ am Zellrand (Abschnitt 3.3.3, S. 70)
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm
$\ \cdot\ _\infty$	Supremumsnorm

In der Arbeit werden die folgenden Ordnungssymbole verwendet, deren Bedeutung hier nochmals kurz erläutert werden:

Es seien die Funktionen f und g gegeben, die von einem Parameter M abhängen mögen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f = o(g), M \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow 0} \left(\frac{f}{g} \right) \rightarrow 0, \\ f = O(g), M \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow 0} \left(\frac{f}{g} \right) \rightarrow C < \infty, \\ f = O_s(g), M \rightarrow 0 &\Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow 0} \left(\frac{f}{g} \right) \rightarrow C \end{aligned}$$

mit $0 < C < \infty$.

1. Einleitung

Im Bereich der Strömungsmechanik existieren bereits seit einigen Jahren effiziente und hochauflösende numerische Verfahren zur Simulation unterschiedlichster reibungsfreier, reibungsbehafteter und turbulenter Strömungsfelder [2, 3, 4, 21, 25]. Der Anwendungsbereich vieler Methoden beschränkt sich dabei jedoch zumeist auf rein inkompressible oder rein kompressible Strömungsfelder. Eine Berechnung instationärer Strömungen mit zeitlich sehr unterschiedlichen Mach-Zahlen Ma , wie sie zum Beispiel bei Verbrennungsvorgängen beim Übergang von einer Deflagration mit $Ma \in [10^{-4}, 10^{-3}]$ zur Detonation mit $Ma \in [5, 10]$ auftreten, können demzufolge von derartigen numerischen Algorithmen nicht geeignet durchgeführt werden. Die Erweiterung der Gültigkeit eines kompressiblen Verfahrens in den inkompressiblen Bereich oder umgekehrt bietet folglich eine wichtige und interessante Zukunftsaufgabe in der numerischen Strömungsmechanik.

In Hinblick auf den im Bereich kleiner Mach-Zahlen verstärkt hyperbolisch/elliptischen Charakter der Euler-Gleichungen und die Notwendigkeit auch Strömungen mit großen Dichtefluktuationen, wie sie bei Mehrphasenströmungen auftreten, berechnen zu können, sollte ein Verfahren die folgenden Eigenschaften aufweisen:

1. Auch für kleine Mach-Zahlen dürfen keine Restriktionen an die Dichteverteilung gestellt werden.
2. Nach einer Abspaltung der steifen elliptischen Flußterme dürfen die hyperbolischen Flußterme nur Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten der Größenordnung $O(1)$ aufweisen, während die implizit zu diskretisierenden elliptischen Terme Signalausbreitungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung der Mach-Zahl besitzen müssen.
3. In dem Verfahren müssen verschiedene Druckkomponenten definiert werden, welche die unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften des Druckes widerspiegeln.
4. Der Algorithmus soll langwellige akustische Phänomene in der Größenordnung der Mach-Zahl auflösen und ihre Evolution beschreiben.

Um eine gezielte Weiterentwicklung bestehender numerischer Verfahren in Hinblick auf die oben genannten Forderungen zu erreichen, müssen aus den betrachteten partiellen Differentialgleichungen neben den mathematischen die

wesentlichen physikalischen Eigenschaften der zu untersuchenden Strömungsfelder analysiert werden.

Ein geeignetes analytisches Hilfsmittel für die Untersuchung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen stellen asymptotische Entwicklungen dar. Basierend auf der in [10, 20] präsentierten asymptotischen Ein- und Mehrskalenganalyse der Euler-Gleichungen wird in dieser Arbeit ein numerisches Verfahren vorgestellt, welches sich zur Simulation von Strömungen in allen Mach-Zahlbereichen eignet und in natürlicher Weise den oben genannten Anforderungen genügt. Das Verfahren entspricht im Bereich kompressibler Strömungen einem herkömmlichen Upwind-Verfahren und berücksichtigt im Fall kleiner Mach-Zahlen die Ergebnisse der angesprochenen Studien. Neben einem neuartigen Zerlegungsalgorithmus zur Bestimmung der unterschiedlichen Druckkomponenten ist in dem Verfahren eine zeitlich angepaßte Entdimensionalisierung der Variablen enthalten, wodurch ermöglicht wird, den Übergang von einem schwach kompressiblen zu einem rein kompressiblen Regime zu berechnen. Somit stellt das hier vorgestellte numerische Verfahren eine echte Erweiterung an den in [10] dargelegten Algorithmus dar.

Die vorliegende Arbeit ist in fünf Kapitel unterteilt. Nach dieser kurzen Einführung werden im zweiten Kapitel die fundamentalen Eigenschaften der Euler-Gleichungen und den daraus resultierenden Schwierigkeiten bei der Umsetzung in ein numerisches Verfahren beschrieben. Im Anschluß an eine spezielle Entdimensionalisierung, durch welche ein Parameter M von der Größenordnung der maximalen Mach-Zahl in die Gleichungen eingefügt wird, wird eine Eigenwertanalyse dieses Systems partieller Differentialgleichungen ausgeführt und hierdurch eine wesentliche Problematik numerischer Verfahren im Bereich kleiner Mach-Zahlen herausgearbeitet.

Im dritten Kapitel wird eine detaillierte Herleitung des numerischen Verfahrens vorgenommen. Hierzu wird zunächst die konvektive Flußfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ der Euler-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

in einer Form $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u})$ aufgespalten, daß die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten λ_i , $i = 1, 2, 3$ des Systems

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

stets $\lambda_i = O(1)$, $M \rightarrow 0$ erfüllen und der verbleibende Flußanteil $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ der Bedingung $\lim_{M \rightarrow 1} \mathbf{a}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ genügt. Zur Diskretisierung des homogenen Systems (1.1) wird eine modifizierte Variante des bekannten Roe-Riemannlösers vorgestellt, die eine lineare Rekonstruktion mit MUSCL-Ansatz in den charakteristischen Variablen verwendet und eine Methode zweiter Ordnung in Raum

und Zeit darstellt. Durch die Diskretisierung des homogenen Systems ist sichergestellt, daß im Fall $M \rightarrow 1$ ein stetiger Übergang zur Diskretisierung des rein kompressiblen Upwind-Verfahren erzielt wird.

Der verbleibende asymptotische Flußanteil $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ der konvektiven Flußfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ beinhaltet in natürlicher Weise alle Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten der Größenordnung $O\left(\frac{1}{M}\right)$, $M \rightarrow 0$. Dieser Anteil wird über einen zentralen Ansatz derart diskretisiert, daß

- das resultierende Gesamtverfahren eine zeitlich und räumlich konsistente Approximation zweiter Ordnung der Euler-Gleichungen repräsentiert,
- über die Einführung einer Druckzerlegung der Form

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)}$$

eine gezielte Berücksichtigung der Druckverteilung auf der Grundlage der asymptotischen Analyse vorgenommen und

- im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl eine divergenzfreie diskrete Geschwindigkeitsverteilung erzielt wird.

Im Hinblick auf eine zuverlässige und stabile Simulation instationärer Strömungen unterschiedlichster Mach-Zahlbereiche mittels einer derartigen asymptotisch basierten Methode ergibt sich eine wesentliche Forderung in der zeitlichen Evolution des Referenzparameters M und einer gleichzeitigen physikalisch sinnvollen Zerlegung der Zustandsvariablen des Druckes und des Impulses. Hierzu wird im Kapitel 4 ein neuartiger, aus der digitalen Bildverarbeitung stammender Zerlegungsalgorithmus vorgestellt, welcher im Vergleich zu klassischen Ansätzen viele Vorzüge besitzt. Der Algorithmus ist parameterfrei, unabhängig von der Art der Diskretisierung, vollständig lokal und besitzt eine numerische Komplexität der Ordnung $O(N \log(N))$, wenn N die Anzahl der Diskretisierungspunkte beschreibt.

Im abschließenden fünften Kapitel werden mehrere Beispiele unterschiedlicher Strömungsfelder zur Validierung des numerischen Verfahrens genutzt. Hierbei wird unter anderem eine Strömung im Übergangsbereich vom schwach kompressiblen zum kompressiblen Regime und eine Simulation eines im Bereich kleiner Mach-Zahlen befindlichen Strömungsfeldes betrachtet.

2. Die Euler–Gleichungen

Die Euler–Gleichungen beschreiben reibungsfreie Strömungen im Gültigkeitsbereich der Kontinuumsannahme. Sie beinhalten mit den Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie drei fundamentale Prinzipien der Physik und stellen ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Zur Entdimensionalisierung der Strömungsgrößen werden die in Tabelle 2.1 dargestellten Bezugsgrößen verwendet.

Physikalische Größe	Bezugsgröße	Dimensionslose Größe
Länge	\hat{l}_{ref}	$x = \frac{\hat{x}}{\hat{l}_{ref}}$
Zeit	$\frac{\hat{l}_{ref}}{\hat{v}_{ref}}$	$t = \hat{t} \frac{\hat{v}_{ref}}{\hat{l}_{ref}}$
Geschwindigkeit	\hat{v}_{ref}	$v = \frac{\hat{v}}{\hat{v}_{ref}}$
Dichte	$\hat{\rho}_{ref}$	$\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{ref}}$
Druck	\hat{p}_{ref}	$p = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_{ref}}$
Totalenergie	$\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}$	$E = \hat{E} \frac{\hat{\rho}_{ref}}{\hat{p}_{ref}}$
Lokale Schallgeschwindigkeit	$\hat{c}_{ref} = \sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}$	$c = \sqrt{\gamma \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}} \sqrt{\frac{\hat{\rho}_{ref}}{\hat{p}_{ref}}}$

Tabelle 2.1: Bezugsgrößen und dimensionslose Variablen.

Das Superskript $\hat{}$ kennzeichnet dimensionsbehaftete Größen, der Index $_{ref}$ beschreibt charakteristische Bezugsgrößen, die den Anfangs- und Randbedingungen respektive den aktuellen Strömungsverhältnissen entnommen werden. Dabei sollten die charakteristischen Bezugsgrößen so gewählt werden, daß ins-

Isotropenexponent	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
Lokale Mach-Zahl	$\text{Ma} = \frac{ \hat{v} }{\hat{c}}$
Entwicklungsparameter	$M = \frac{\hat{v}_{ref}}{\hat{c}_{ref}} = \frac{\hat{v}_{ref}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}}$

Tabelle 2.2: Dimensionslose Kennzahlen.

besondere die entdimensionalisierten Strömungsgrößen (ρ, v, p) und damit auch (E, c) in einer Größenordnung vorliegen. Tabelle 2.2 beinhaltet die dimensionslosen Kennzahlen der Strömung, wobei der auftretende Isotropenexponent γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck c_p und bei konstantem Volumen c_v repräsentiert, so daß für Luft $\gamma = 1.4$ gilt.

Bezeichnen wir mit $m = \rho v$ den Impuls und fassen die Erhaltungsgrößen im Vektor der konservativen Variablen

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ \rho E \end{pmatrix}$$

zusammen, so lassen sich die Euler-Gleichungen unter Verwendung der Enthalpie pro Masseneinheit $H = E + p/\rho$ als System von Erhaltungsgleichungen in der Form

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \quad (2.1)$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} f_\rho(\mathbf{u}) \\ f_m(\mathbf{u}) \\ f_{(\rho E)}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ mv + M^{-2}p \\ Hm \end{pmatrix},$$

die konvektive Flußfunktion repräsentiert und ∂_t, ∂_x die partiellen Ableitungen nach der Zeit- beziehungsweise nach der Ortskoordinate bezeichnen. Die eindimensionalen Euler-Gleichungen stellen somit ein System von 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten $\rho, m, \rho E$ und p dar, so daß das System erst durch Hinzunahme der algebraisch gegebenen Zustandsgleichung geschlossen wird. Diese

ergibt sich unter Berücksichtigung der beschriebenen Entdimensionalisierung in der Form

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{M^2}{2} v^2 \right) = (\gamma - 1) \rho e, \quad (2.2)$$

wobei e die innere Energie des Systems darstellt.

2.1 Anfangs- und Randbedingungen

Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}$ müssen zur Schließung des Systems (2.1) neben der Vorgabe sinnvoller Anfangsbedingungen geeignete Randbedingungen definiert werden. Wir betrachten periodische Randbedingungen, sowie Einström-, Ausström- und Körperländer.

Bei periodischen Randbedingungen setzen wir voraus, daß das Strömungsfeld für alle physikalischen Größen φ ein periodisches Verhalten aufweist. Hierbei fordern wir zudem, daß die Länge $|\Omega|$ des betrachteten Strömungsgebietes ein Vielfaches der Frequenz jeder physikalischen Größe φ darstellt, so daß stets

$$\varphi(x, t) = \varphi(x + |\Omega|, t)$$

für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}_0^+$ gilt.

Der Körperland stellt vereinbarungsgemäß eine feste Wand dar, die vom Fluid nicht durchströmt wird, wodurch für die Geschwindigkeit

$$v(x, t) = 0$$

für alle Wandpunkte x und alle Zeiten $t \in \mathbb{R}_0^+$ folgt.

Für Ein- und Ausströmländer betrachten wir eindimensionale Riemann-Probleme normal zum Rand, wodurch der Charakteristikentheorie Informationen entnommen werden können, die eine geeignete Extrapolation beziehungsweise Interpolation der charakteristischen Variablen vorgeben. Eine explizite Beschreibung dieser Vorgehensweise wird im Rahmen der Herleitung des numerischen Verfahrens vorgenommen.

2.2 Analytisches und numerisches Verhalten der Euler-Gleichungen in Strömungsbereichen kleiner Mach-Zahlen

Werden die charakteristischen Bezugsgrößen aus Tabelle 2.1 geeignet gewählt, so daß die entdimensionalisierten Strömungsgrößen (ρ, v, p) in der Größenord-

nung $O(1)$ liegen, dann können Strömungen unterschiedlicher Mach-Zahlen über die Größe des Entwicklungsparameters M charakterisiert und beschrieben werden, denn es gilt

$$\max_{x \in \Omega}(\text{Ma}) = O_s(M), \quad M \rightarrow 0.$$

Für Strömungsfelder kleiner Mach-Zahlen weisen die entdimensionalisierten Euler-Gleichungen (2.1) neben der für $M \rightarrow 0$ singular werdenden Impulsgleichung weitere Schwierigkeiten auf, die bei einer Umsetzung in ein numerisches Verfahren mit Gültigkeit in allen Mach-Zahlbereichen beachtet werden müssen. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes führen wir eine Eigenwertanalyse der Euler-Gleichungen durch.

Die Ableitung des Flußvektors $\mathbf{f}(\mathbf{u})$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + \frac{\gamma-1}{M^2} \left(\rho E - \frac{1}{2} M^2 \frac{m^2}{\rho} \right) \\ \frac{m}{\rho} (\rho E + (\gamma-1) \left(\rho E - \frac{1}{2} M^2 \frac{m^2}{\rho} \right)) \end{pmatrix},$$

nach den konservativen Variablen $\mathbf{u} = (\rho, m, \rho E)^T$ liefert die Jakobimatrix $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$ der Form

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\frac{\gamma-1}{2} - 1)v^2 & (3-\gamma)v & \frac{\gamma-1}{M^2} \\ -vH + \frac{\gamma-1}{2}M^2v^3 & H - (\gamma-1)M^2v^2 & \gamma v \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ ergeben die gesuchten Eigenwerte,

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = \det(\mathbf{f}'(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{I}) &= -\lambda^3 + 3v\lambda^2 + \left(\frac{\gamma-1}{M^2}H - \frac{\gamma-1}{2}v^2 - 3v^2 \right) \lambda \\ &\quad - \frac{\gamma-1}{M^2}vH + \frac{\gamma-1}{2}v^3 + v^3 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß $\lambda_0 = v$ einen Eigenwert darstellt. Faktorisierung des charakteristischen Polynoms mit $(\lambda - v)$ liefert die beiden restlichen Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= v \pm \left(v^2 - v^2 - \frac{\gamma-1}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{M^2}H \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= v \pm \frac{1}{M} \left((\gamma-1) \left(H - \frac{M^2}{2}v^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= v \pm \frac{c}{M}. \end{aligned}$$

Die durchgeführte charakteristische Analyse der Euler-Gleichungen zeigt deutlich das unterschiedliche Lösungsverhalten bei variierendem Entwicklungsparameter M . Zwar liegt für alle $M > 0$ ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem vor, jedoch belegen die vorliegenden Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten, daß im Fall einer sehr kleinen Mach-Zahl ein zunehmend elliptischer Charakter der Lösung zu erwarten ist, da das Abhängigkeitsgebiet eines jeden Punktes mit kleiner werdenden Werten von M anwächst und sich Informationen in der vorliegenden dimensionslosen Form mit nahezu unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Im Rahmen eines numerischen Verfahrens auf der Basis eines expliziten Zeitschrittverfahrens liegt folglich für kleine M eine derart restriktive Zeitschrittbeschränkung aufgrund der CFL-Stabilitätsbedingung [1] vor, so daß eine direkte Anwendung aus zwei Gründen nicht sinnvoll ist. Erstens weist die benötigte Rechenzeit T eine Größenordnung $O_s\left(\frac{1}{M}\right)$ auf, wodurch bei $M \ll 1$ eine unpraktisch hohe Rechenzeit vorliegt, die zudem bei kleinen Veränderungen des zeitabhängigen Entwicklungsparameters großen Schwankungen ausgesetzt ist. Bei der sinnvollen Anpassung des Entwicklungsparameters während der numerischen Simulation können die benötigten CPU-Zeiten oftmals nicht abgeschätzt werden. Zweitens ergibt sich durch den für $M \ll 1$ immensen Unterschied innerhalb der Ausbreitungsgeschwindigkeiten die Problematik, daß die bei den an den Kontrollvolumengrenzen betrachteten Riemann-Problemen auftretenden Kontaktunstetigkeiten sich innerhalb eines Zeitschritts nur in der Größenordnung $M\Delta x$ bewegen. Folglich ist durch die im Finite-Volumen-Verfahren inhärent enthaltene Mittelung eine starke Verschmierung der Information zu befürchten.

Bei einer impliziten Zeitdiskretisierung umfaßt der numerische stets den physikalischen Abhängigkeitsbereich, wodurch die zulässige Zeitschrittweite keiner Begrenzung aufgrund der CFL-Bedingung unterliegt. Die verwendete Linearisierung auf der Basis einer Taylorentwicklung führt jedoch auf ein lineares Gleichungssystem, das bei derart unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten sehr schlecht konditioniert ist und folglich einen steifen Charakter aufweist.

Eine Untersuchung von Volpe [27] betreffend des numerischen Verhaltens von klassischen Finite-Volumen-Verfahren der Euler-Gleichungen im Fall kleiner Mach-Zahlen lieferte bei den untersuchten Beispielen eine Abhängigkeit der Genauigkeit der Verfahren von der Güte der Diskretisierung. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da bei einem Standardverfahren in Strömungsbereichen mit sehr kleinen Mach-Zahlen, insbesondere in der Impulsgleichung, einzelne Variablen und Flußterme in die Größenordnung der Approximationsgüte des numerischen Verfahrens geraten, wodurch keine sinnvolle Diskretisierung für die Euler-Gleichungen vorliegt.

Desweiteren konnte Sesterhenn [24] über eine Fehleranalyse direkt zeigen, daß

Auslöschungseffekte bei der Flußberechnung für das Versagen der üblichen Riemann-Löser in Strömungsbereichen kleiner Mach-Zahlen verantwortlich sind.

2.3 Asymptotische Mehrskalentwicklung

Eine weitere Möglichkeit, das Verhalten der Euler-Gleichungen im Fall kleiner Mach-Zahlen zu untersuchen, stellen asymptotische Entwicklungen dar. Die Durchführbarkeit und der Erfolg einer asymptotischen Entwicklung hängt stark von der Wahl der asymptotischen Folge und den zu untersuchenden Skalen in Raum und Zeit ab. Dabei ist sowohl die Wahl der Folge als auch die der Skalen Problem gebunden und abhängig von den zu untersuchenden Gleichungen. Anhand einfacher Beispiele läßt sich zeigen, daß asymptotische Einskalenentwicklungen nicht sinnvoll durchgeführt werden können, falls Phänomene auf unterschiedlichen Skalen innerhalb der zu analysierenden Beispiele auftreten. R. Klein [10] führte erstmals eine einkalig zeitliche, mehrskalig räumliche asymptotische Entwicklung für die Euler-Gleichungen aus, um das Verhalten von Strömungen kleiner Mach-Zahlen zu untersuchen. Ein besonderes Augenmerk wurde hierbei auf die mit der Gesamtströmung wechselwirkenden Einflüsse akustischer langwelliger Phänomene gelegt. Die Ergebnisse sind in [20] von A. Meister mathematisch fundiert und einer Einskalenentwicklung in Raum und Zeit gegenübergestellt.

Im folgenden werden wir die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse der asymptotischen Entwicklungen aus [10] und [20] skizzieren. Für die Beweise der zitierten Sätze und ausführlichere Erläuterungen sei auf [20] verwiesen.

Es sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gegeben, welches der folgenden Ordnungsabschätzung

$$(d_{\min}(\Omega))^{-1} = O\left(\frac{M}{\hat{l}_{ref}}\right), M \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

mit

$$d_{\min}(\Omega) := \min_{k=1,\dots,d} |x_k|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^t \in \partial\Omega,$$

genügt. Das Gebiet Ω ist so gewählt, daß langwellige Phänomene, die auf einer räumlichen Skala $\xi = M\mathbf{x}$ basieren, noch dargestellt werden können. Die Annahme (2.3) impliziert, daß es sich bei Ω um ein im Grenzfall $M = 0$ unbeschränktes Gebiet handelt. Desweiteren möge es eine positive Zahl M'

geben, so daß

$$\mathbf{B}_x \left(\frac{1}{M} \right) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}\|_2 < \frac{1}{M} \right\} \subset \Omega$$

für alle $M \leq M'$ erfüllt ist. Um einen räumlich mehrskaligen Ansatz zu realisieren, führen wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \tilde{M}) &\rightarrow \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_0^+ \\ (\mathbf{x}, t; M) &\xrightarrow{\mathbf{g}} (\mathbf{x}, M\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

ein und definieren den Raum $\tilde{\mathcal{U}}_m$ der vektorwertigen Funktion \mathbf{u} über den Lösungen der Euler-Gleichungen, deren physikalische Größen w in $\Omega \times \mathbb{R}_0^+$ über eine asymptotische Mehrskalentwicklung

$$w(\mathbf{x}, t; M) = \sum_{i=0}^j M^i w^{(i)}(\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; M)) + o(M^j), \quad M \rightarrow 0, \quad j = 0, 1, 2$$

entwickelt werden können. Hierbei sind die asymptotischen Funktionen

$$\begin{aligned} w^{(i)} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2 \\ (\eta, \xi, t) &\xrightarrow{w^{(i)}} w^{(i)}(\eta, \xi, t) \end{aligned}$$

gleichmäßig gültig außerhalb einer beliebig vorgegebenen Kugel $\mathbf{B}_x(s)$, $s \in \mathbb{R}^+$. Mit η bezeichnen wir die kurzweilige Raumskala, mit ξ die langweilige.

Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen in die Euler-Gleichungen liefert ein System von Gleichungen, welches auf der Untermannigfaltigkeit

$$\tilde{\mathcal{D}} := \left\{ (\eta, \xi, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_0^+ \mid (\eta, \xi, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t; M), (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

definiert ist. Da die Untermannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{D}}$ von dem Entwicklungsparameter M abhängig ist, können innerhalb der so entwickelten Gleichungen Terme gleicher Ordnung in M nicht miteinander identifiziert werden, und das System vereinfachter asymptotischer Gleichungen kann nicht aufgestellt werden. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wird der Teilraum $\mathcal{U}_m \subset \tilde{\mathcal{U}}_m$ über der Menge

$$\mathcal{D} := \left\{ (\eta, \xi, t) \in \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}_0^+ \mid \xi_j < \tilde{M}\eta_j, j = 1, \dots, d \right\}$$

eingeführt, auf der eine Funktion $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$ die entwickelten Euler-Gleichungen erfüllen muß. Außerdem müssen die zu $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$ assoziierten asymptotischen

Funktionen $w^{(0)}$, $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ einer verallgemeinerten sublinearen Wachstumsbedingung genügen:

$$w^{(0)}(\eta, \xi, t) = o(|\eta|^\alpha), \quad \eta \in \partial\mathbf{B}_\eta\left(\frac{1}{M}\right), \quad M \rightarrow 0$$

für alle $\alpha > 0$ und

$$w^{(i)}(\eta, \xi, t) = o(|\eta|), \quad \eta \in \partial\mathbf{B}_\eta\left(\frac{1}{M}\right), \quad M \rightarrow 0, \quad i = 1, 2.$$

Die verallgemeinerten Wachstumsbedingungen stellen eine direkte Übertragung der aus der gleichmäßigen Gültigkeit entwickelbaren Abschätzungen für die asymptotischen Funktionen $w^{(i)}$ in $\tilde{\mathcal{D}}$ auf die Funktionen in \mathcal{D} dar.

Jetzt sind die asymptotischen Funktionen $w^{(i)}$ von M unabhängig, wodurch Terme gleicher Ordnung in M miteinander identifiziert werden können. Unter den hier dargelegten Voraussetzungen erhält man schließlich das folgende System vereinfachter Gleichungen für die asymptotischen Funktionen,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho^{(0)} + \nabla_\eta \cdot \mathbf{m}^{(0)} &= 0 \\ \partial_t \rho^{(1)} + \nabla_\eta \cdot \mathbf{m}^{(1)} &= -\nabla_\xi \cdot \mathbf{m}^{(0)} \\ \partial_t \rho^{(2)} + \nabla_\eta \cdot \mathbf{m}^{(2)} &= -\nabla_\xi \cdot \mathbf{m}^{(1)} \\ \nabla_\eta p^{(0)} &= \mathbf{0} \\ \nabla_\eta p^{(1)} &= -\nabla_\xi p^{(0)} \\ \partial_t \mathbf{m}^{(0)} + \nabla_\eta \cdot (\mathbf{m}^{(0)} \otimes \mathbf{v}^{(0)}) + \nabla_\eta p^{(2)} &= -\nabla_\xi p^{(1)} \\ \partial_t (\rho E)^{(0)} + \nabla_\eta \cdot (\rho H \mathbf{v})^{(0)} &= 0 \\ \partial_t (\rho E)^{(1)} + \nabla_\eta \cdot (\rho H \mathbf{v})^{(1)} &= -\nabla_\xi \cdot (\rho H \mathbf{v})^{(0)} \\ \partial_t (\rho E)^{(2)} + \nabla_\eta \cdot (\rho H \mathbf{v})^{(2)} &= -\nabla_\xi \cdot (\rho H \mathbf{v})^{(1)} \end{aligned}$$

in \mathcal{D} . Hierbei stellen $\mathbf{m}^{(i)}$ und $\mathbf{v}^{(i)}$ die asymptotischen Funktionen des d -dimensionalen Impuls- beziehungsweise Geschwindigkeitsfeldes dar.

Die nachfolgenden Sätze geben einige fundamentale Eigenschaften der Strömungsgrößen im Fall verschwindender Mach–Zahlen wieder und erlauben so ein tiefer gehendes Verständnis über das Grenzwertverhalten von Lösungen der Euler–Gleichungen im Fall $M \rightarrow 0$.

Satz 2.3.1 *Es sei $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$. Dann folgt*

$$p^{(0)} = p^{(0)}(t) \quad \text{und} \quad p^{(1)} = p^{(1)}(\xi, t).$$

Der Satz 2.3.1 belegt, daß der führende Druckterm $p^{(0)}$ ein grundsätzlich anderes Verhalten als die Druckkomponente erster Ordnung aufweist. Während in $p^{(0)}$ nur Variationen in der Zeit zugelassen sind, weist $p^{(1)}$ zusätzlich Änderungen auf der langwelligen Skala auf. Im Gegensatz zu einer Einskalenentwicklung müssen deshalb die Komponenten $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ gesondert betrachtet werden.

Die zeitliche Entwicklung des führenden Druckterms wird über die folgende Gleichung beschrieben.

Satz 2.3.2 *Sei $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$. Dann gilt*

$$\nabla_\eta \cdot \mathbf{v}^{(0)} = -\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{dp^{(0)}}{dt}.$$

Desweiteren kann unter den genannten Voraussetzungen an das Gebiet Ω im Grenzfall $M \rightarrow 0$ die Divergenzfreiheit der Strömung nachgewiesen werden, wodurch sich ein räumlich und zeitlich konstanter Hintergrunddruck $p^{(0)}$ ergibt.

Satz 2.3.3 *Es sei $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$. Dann gilt im Grenzfall $M \rightarrow 0$*

$$\lim_{M \rightarrow 0} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t; M) = 0$$

und

$$p^{(0)} = \text{const.}$$

Es sei angemerkt, daß die Gleichung für die Divergenzfreiheit aus der führenden Energiegleichung hergeleitet und nicht von außen über die Kontinuitätsgleichung in das System der Euler-Gleichungen eingebracht wird.

Für beschränkte Gebiete folgt aus einer zu Satz 2.3.2 äquivalenten Aussage aus der Einskalenentwicklung, daß eine zeitliche Variation des Hintergrunddruckes $p^{(0)}$ nur durch Kompression über den Rand des Gebietes erfolgen kann,

$$\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{dp^{(0)}}{dt} = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (2.4)$$

Um Gleichungen für die räumlich zeitliche Variation der räumlich langwelligen Druckkomponente $p^{(1)}$ in vereinfachter Notation angeben zu können, führen wir einen Mittelungsoperator

$$\bar{w}(\xi, t) := \lim_{M \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{B}_\eta(\frac{1}{M})|} \int_{\mathbf{B}_\eta(\frac{1}{M})} w(\eta, \xi, t) \, d\eta$$

ein.

Satz 2.3.4 *Es sei $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$. Dann gilt*

$$\overline{\partial_t \mathbf{m}^{(0)}} + \nabla_\xi p^{(1)} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

und

$$\partial_t p^{(1)} + \gamma p^{(0)} \overline{\nabla_\xi \cdot \mathbf{v}^{(0)}} = 0. \quad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.5) und (2.6) beschreiben die Ausbreitung akustischer Wellen. Um das System aus Satz 2.3.4 zu schließen, nehmen wir an, daß die Dichte in führender Ordnung nur Informationen auf der langwelligen Skala besitzt. Dann kann die gemittelte Impulsgleichung (2.5) wie folgt abgeändert werden.

Satz 2.3.5 *Sei $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_m$ und gelte*

$$\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(\xi, t).$$

Dann folgt

$$\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(\xi)$$

und es gilt

$$\overline{\partial_t \mathbf{v}^{(0)}} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi p^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Unter der Voraussetzung, daß die asymptotischen Funktionen hinreichend glatt sind, um die Grenzwertprozesse der Mittelungsoperatoren mit denen der Ableitungsoperatoren zu vertauschen, läßt sich Gleichung (2.7) in der Form

$$\partial_t \overline{\mathbf{v}^{(0)}} + \frac{1}{\rho^{(0)}} \nabla_\xi p^{(1)} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

schreiben und wir erhalten eine Wellengleichung für den Druck $p^{(1)}$,

$$\partial_t^2 p^{(1)} - \nabla_\xi \cdot (c^{(0)} \nabla_\xi p^{(1)}) = 0$$

mit der Schallgeschwindigkeit

$$c^{(0)} = \frac{\gamma p^{(0)}}{\rho^{(0)}}.$$

Unter den vereinfachten Annahmen an die Dichte und an die Glattheit der asymptotischen Funktionen weist der Druckterm $p^{(1)}$ Wellencharakter auf. Die zeitliche Entwicklung dieser akustischen Druckkomponente kann numerisch über eine einfache Diskretisierung des akustischen Systems, bestehend aus den Gleichungen (2.6) und (2.8), erreicht werden.

3. Das numerische Verfahren

Basierend auf den Ergebnissen der Arbeiten [10, 19] wird in diesem Abschnitt ein semi-explizites Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung der instationären Euler-Gleichungen vorgestellt.

Um eine geeignete Integration der aus der Mehrskalenanalyse gewonnenen Kenntnisse aus Abschnitt 2.3 zu gewährleisten, stellen wir die folgenden grundlegenden Forderungen an die numerische Methode: Für Strömungsfelder, die einen Entwicklungsparameter $M \geq 1$ aufweisen, soll eine Übereinstimmung des numerischen Verfahrens mit einer klassischen Godunov-Methode erzielt werden, während für Werte des Entwicklungsparameters aus den Bereich $M \in (0, 1)$ die Ergebnisse der asymptotischen Analyse berücksichtigt werden sollen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß zum einen ein hinreichend glatter Übergang für $M = 1$ vorliegt und zum anderen, im Grenzfall eines verschwindenden Entwicklungsparameters, die in [10, 19] nachgewiesenen Eigenschaften der Strömungsgrößen erzielt werden.

3.1 Flußkorrekturansatz

Aufgrund der in Abschnitt 2.2 dargestellten Probleme bei der direkten numerischen Umsetzung der Euler-Gleichungen in ein Verfahren zur Simulation von Strömungen kleiner Mach-Zahlen, werden wir eine additive Zerlegung der Flußfunktion vornehmen, bei der zum einen ein hyperbolisches System vorliegt, das ausschließlich Ausbreitungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung $O(1)$, $M \rightarrow 0$, aufweist und zum anderen ein System auftritt, welches für $M = 1$ identisch verschwindet und für kleine Werte des Entwicklungsparameters einen zunehmend dominierenderen Einfluß gewinnt. Das hierdurch vorliegende hyperbolische System kann mit Hilfe eines expliziten Verfahrens auf der Grundlage einer Godunov-Methode gelöst werden. Die so ermittelte numerische Flußfunktion wird anschließend durch die verbleibenden Flußanteile unter Berücksichtigung der in [10, 19, 20] ausgeführten asymptotischen Mehrskalenanalyse mittels einer impliziten Methode korrigiert. Hierzu wird unter anderem eine Druckzerlegung

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)}$$

eingeführt, wodurch bei geeigneter Entdimensionalisierung und Bestimmung des Entwicklungsparameters M erreicht wird, daß alle physikalischen Größen

von der Ordnung $O(1)$ sind.

An dieser Stelle sei betont, daß der resultierende Gesamtalgorithmus keinen Splitting-Ansatz beinhaltet, sondern lediglich eine numerischen Flußberechnung für das Gesamtsystem unter gezielter Berücksichtigung der vorliegenden physikalischen Phänomene vorgenommen wird.

3.1.1 Additive Zerlegung der Flußfunktion

In diesem Abschnitt wird eine Zerlegung der Flußfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ der Euler-Gleichungen (2.1) der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

mit

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} h_\rho(\mathbf{u}) \\ h_m(\mathbf{u}) \\ h_{(\rho E)}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} a_\rho(\mathbf{u}) \\ a_m(\mathbf{u}) \\ a_{(\rho E)}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

vorgestellt, derart, daß das System

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

hyperbolisch ist und den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Geschwindigkeit $v = \lambda_1$ stellt einen Eigenwert der Funktionalmatrix $\mathbf{h}'(\mathbf{u})$ des quasilinearen Systems der Differentialgleichungen (3.2) dar.
2. Die zwei weiteren Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ der Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{u})$ sind symmetrisch um v angeordnet, das heißt

$$|\lambda_2 - v| = |\lambda_3 - v|$$

und es gilt die Ordnungsrelation

$$\lambda_{2,3} = O(1), \quad M \rightarrow 0.$$

3. Für $M \rightarrow 1$ geht das System (3.2) stetig in das System der Euler-Gleichungen (2.1) über, das heißt

$$\lim_{M \rightarrow 1} (\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{h}(\mathbf{u})) = \mathbf{0},$$

beziehungsweise

$$\lim_{M \rightarrow 1} \mathbf{a}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Die Bedingungen sind so gewählt, daß eine möglichst enge qualitative Korrelation der charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des homogenen Systems zu den der Euler-Gleichungen besteht, um eine den Euler-Gleichungen entlehnte numerische Flußberechnung vornehmen zu können.

Die charakteristische Analyse der Euler-Gleichungen (2.1) in Abschnitt 2.2 hat gezeigt, daß eine Ursache für die auftretenden charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Größenordnung $O\left(\frac{1}{M}\right)$ in dem für $M \rightarrow 0$ singularär werdenen Druckterm innerhalb der Impulsgleichung begründet liegt. Dieser Anteil wird daher in der Form

$$\partial_t m + h_m(\mathbf{u}) = \frac{(M^2 - 1)}{M^2} \partial_x p, \quad (3.3)$$

mit

$$h_m(\mathbf{u}) = mv + p$$

aufgespalten. Aufgrund der Koppelung der Impuls- und der Energiegleichung durch die Zustandsgleichung ist zu erwarten, daß auch der Fluß innerhalb der Energiegleichung aufgespalten werden muß, um die aufgestellten Bedingungen an die Eigenwerte erfüllen zu können. Aufschluß darüber liefert die folgende charakteristische Analyse. Wir betrachten hierzu das modifizierte System der Euler-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

mit

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} h_\rho(\mathbf{u}) \\ h_m(\mathbf{u}) \\ h_{(\rho E)}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ mv + p \\ H^* m \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

das ebenfalls durch die Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1) \rho \left(E - \frac{M^2}{2} |v|^2 \right)$$

geschlossen wird. Die in der Energiegleichung auftretende Enthalpieform H^* wird durch

$$H^* := \frac{\rho E + \Pi}{\rho} \quad (3.6)$$

mittels eines verallgemeinerten Druckterms Π definiert. Durch Anwendung der Bedingungen 1 – 3 auf Seite 16 an das System (3.4) werden im folgenden

hinreichende Bedingungen an den Druckterm Π hergeleitet, die eine gezielte Definition dieses Terms ermöglichen.

Aus der dritten Forderung erhalten wir $\lim_{M \rightarrow 1} H^* = H$ und folglich $\lim_{M \rightarrow 1} \Pi = p$, das heißt

$$\Pi = p + o(1), \quad M \rightarrow 1. \quad (3.7)$$

Für die Ausführung der Charakteristikenanalyse wird Π zunächst als Funktion der konservativen Variablen angesetzt. Die Jakobimatrix des Flußvektors \mathbf{h} lautet demnach

$$\mathbf{h}'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 + \partial_\rho p & 2v + \partial_m p & \gamma - 1 \\ -vH^* + v\partial_\rho \Pi & H^* + v\partial_m \Pi & v + v\partial_{(\rho E)} \Pi \end{pmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \partial_\rho p &= \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 v^2 = \frac{1}{2}\tau v^2, \\ \partial_m p &= -(\gamma - 1)M^2 v = -\tau v, \end{aligned}$$

mit $\tau := (\gamma - 1)M^2$, ergibt sich das charakteristische Polynom χ zu

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(\mathbf{h}'(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{I}) \\ &= -\lambda^3 + (3 - \tau)v\lambda^2 + v\partial_{(\rho E)} \Pi \lambda^2 \\ &\quad + \left(-3v^2 + \frac{3}{2}\tau v^2 - (2 - \tau)v^2 \partial_{(\rho E)} \Pi + (\gamma - 1)v\partial_m \Pi + (\gamma - 1)H^* \right) \lambda \\ &\quad + v^3 - \frac{1}{2}\tau v^3 + v^3 \partial_{(\rho E)} \Pi - \frac{1}{2}\tau v^3 \partial_{(\rho E)} \Pi - (\gamma - 1)vH^* + (\gamma - 1)v\partial_\rho \Pi. \end{aligned}$$

Aus der ersten Forderung, daß die Geschwindigkeit v einen Eigenwert der Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{u})$ darstellt, erhalten wir die Bedingung

$$\tau v^3 \partial_{(\rho E)} \Pi - \frac{1}{2}\tau v^3 \partial_{(\rho E)} \Pi + (\gamma - 1)v(v\partial_m \Pi + \partial_\rho \Pi) = 0.$$

Da die Gleichung für alle Geschwindigkeiten v gelten soll, kann o. E. d. A. $v \neq 0$ angenommen werden, wodurch sich die äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{2}M^2 v^2 \partial_{(\rho E)} \Pi + v\partial_m \Pi + \partial_\rho \Pi = 0 \quad (3.8)$$

ergibt. Für die zwei verbleibenden Eigenwerte machen wir den Ansatz

$$\lambda_2 := \lambda_+ = v + c^*, \quad \lambda_3 := \lambda_- = v - c^* \quad (3.9)$$

mit einer noch zu bestimmenden verallgemeinerten Schallgeschwindigkeit c^* . Durch diese Darstellung ist unmittelbar die Symmetrieforderung der Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ erfüllt. Die Ordnungsrelation überträgt sich wegen $v = O(1)$, $M \rightarrow 0$, äquivalent auf

$$c^* = O(1), \quad M \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Weiterhin erhalten wir aus der dritten Forderung

$$c^* = c + o(1), \quad M \rightarrow 1. \quad (3.11)$$

Nach Faktorisierung des charakteristische Polynom mit $(\lambda - v)$ ergeben sich für die beiden Eigenwerte λ_{\pm} die Darstellungen

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} = & \frac{2 - \tau + \partial_{(\rho E)}\Pi}{2}v \pm \left(\frac{(2 - \tau + \partial_{(\rho E)}\Pi)^2}{4}v^2 \right. \\ & \left. + (\tau - 1)v^2\partial_{(\rho E)}\Pi + (\gamma - 1)v\partial_m\Pi - v^2 + \frac{1}{2}\tau v^2 + (\gamma - 1)H^* \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ansatz (3.9) liefert

$$\partial_{(\rho E)}\Pi = \tau = (\gamma - 1)M^2 \quad (3.12)$$

und folglich die Linearität des Druckterms Π in der Totalenergie pro Einheitsvolumen ρE . Zudem ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit c^* die Darstellung

$$(c^*)^2 = (\tau - 1)\tau v^2 + (\gamma - 1)v\partial_m\Pi + \frac{1}{2}\tau v^2 + (\gamma - 1)H^* \quad (3.13)$$

und eine hinreichende Bedingung für die Forderung (3.10) gemäß

$$v\partial_m\Pi + \frac{1}{\rho}\Pi = O(1), \quad M \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3.7) folgt mit

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad \text{und} \quad (\rho E) = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}M^2 \rho v^2$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
(\gamma - 1)H^* - \frac{1}{2}\tau v^2 &= (\gamma - 1)\frac{1}{\rho}(\rho E + \Pi) - \frac{1}{2}\tau v^2 \\
&= \frac{p}{\rho} + (\gamma - 1)\frac{\Pi}{\rho} + \frac{1}{2}\tau v^2 - \frac{1}{2}\tau v^2 \\
&= \frac{p}{\rho} + (\gamma - 1)\frac{\Pi}{\rho} \\
&\stackrel{(3.7)}{=} \gamma \frac{p}{\rho} + o(1), \quad M \rightarrow 1,
\end{aligned}$$

und wir erhalten aus (3.13) die Darstellung

$$c^{*2} - c^2 = (\gamma - 1)v \{(\gamma - 1)M^4 v + \partial_m \Pi\} + o(1), \quad M \rightarrow 1.$$

Damit ergibt sich die für (3.11) hinreichende und notwendige Bedingung an $\partial_m \Pi$ in der Form

$$\partial_m \Pi = -(\gamma - 1)M^4 v + o(1), \quad M \rightarrow 1. \quad (3.15)$$

Lemma 3.1.1

Sei die Flußfunktion des Differentialgleichungssystems (3.2)

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} m \\ mv + p \\ H^* m \end{pmatrix}$$

mit

$$H^* = \frac{\rho E + p_{\text{NL}} + M^2 p}{\rho}$$

und dem nicht-lokalen Druckterm

$$p_{\text{NL}} = (1 - M^2) \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p(x, t = 0) dx$$

gegeben, dann ist das System (3.2) hyperbolisch und erfüllt die auf Seite 16 aufgeführten Bedingungen 1 – 3.

Beweis:

Für $\Pi = p_{\text{NL}} + M^2 p$ liegen mit (3.8) eine hinreichende Bedingung für die erste Forderung, mit (3.12) und (3.14) hinreichende Bedingungen für die zweite Forderung und mit (3.7) und (3.15) hinreichende Bedingungen für die dritte

Forderung vor. Die Hyperbolizität ergibt sich als direkte Folgerung der Forderungen 1 und 2.

Direktes Nachrechnen zeigt, daß

$$\begin{aligned}\partial_m \Pi &= -(\gamma - 1)M^4 v, \\ \partial_{(\rho E)} \Pi &= (\gamma - 1)M^2\end{aligned}$$

und

$$\partial_\rho \Pi = \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^4 v^2 = -\frac{1}{2}M^2 v^2 \partial_{(\rho E)} \Pi - v \partial_m \Pi$$

gilt, wodurch der Nachweis der Bedingungen (3.8), (3.12) und (3.15) erbracht ist. Mit

$$p_{\text{NL}} = o(1), \quad M \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad p_{\text{NL}} = O(1), \quad M \rightarrow 0,$$

folgen mit $p = O(1)$, $M \rightarrow 0$, die Ordnungsrelationen

$$\Pi = p + o(1), \quad M \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \Pi = O(1), \quad M \rightarrow 0,$$

wodurch die verbleibenden Gleichungen (3.7) und (3.14) erfüllt sind. \square

Bemerkung: Die Festlegung der Integrationskonstanten $p_{\text{NL}} \neq 0$ erfolgt unter der Zielsetzung, den Einfluß des Korrekturflußanteiles $\mathbf{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u})$ der Energiegleichung für kleine Werte von M möglichst gering zu halten. Mit der angesprochenen Zerlegung des Druckes

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2 p^{(2)}$$

und einer geeigneten Wahl von $p^{(0)}$ als

$$p^{(0)}(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p(x, t) dx$$

gilt für die Anfangsverteilung

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u}) \Big|_{t=0} &= -(M^2 - 1)pv - p_{\text{NL}}v \\ &= -(M^2 - 1)(Mp^{(1)} + M^2 p^{(2)})v = O(M), \quad M \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Ändert sich die Druckkomponente $p^{(0)}$ in der Zeit kaum, so sind nur geringe Änderungen in der Größe von $\mathbf{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u})$ zu erwarten. Der Einfluß von $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ ist damit fast vollständig über den singulären Impulsanteil gegeben.

Zusammenfassend erhalten wir die gesuchte Zerlegung der Flußfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ in der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ mv + p \\ H^*m \end{pmatrix}}_{\mathbf{h}(\mathbf{u}) :=} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{(M^2 - 1)}{M^2}p \\ -(M^2 - 1)pv - p_{\text{NL}}v \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}(\mathbf{u}) :=}$$

mit

$$H^* = \frac{\rho E + p_{\text{NL}} + M^2 p}{\rho} \quad \text{und} \quad p_{\text{NL}} = (1 - M^2) \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p(x, t = 0) dx.$$

Die Euler-Gleichungen (2.1) lassen sich somit äquivalent in der Form

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}) = -\partial_x \mathbf{a}(\mathbf{u}) \quad (3.16)$$

schreiben und wir bezeichnen das hyperbolische System

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

als homogenes System. Für die gemäß (3.9) innerhalb der charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des hyperbolischen Systems auftretende Schallgeschwindigkeit c^* erhalten wir mit (3.13)

$$c^* = \sqrt{\frac{p + (\gamma - 1)(p_{\text{NL}} + M^2 p)}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1 + \tau)p + (\gamma - 1)p_{\text{NL}}}{\rho}}. \quad (3.18)$$

Die theoretischen Überlegungen über das homogene System werden mit einigen Betrachtungen zur Formulierung der Gleichungen (3.17) in den charakteristischen Variablen abgeschlossen.

3.1.2 Charakteristische Formulierung des homogenen Systems

Es sei das homogene System (3.17) gegeben. Die Rechtseigenvektoren der Jakobimatrix $\mathbf{h}'(\mathbf{u})$ der Flußfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ lauten

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{1}{2}M^2 v^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c^* \\ H^* + M^2 v c^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c^* \\ H^* - M^2 v c^* \end{pmatrix}$$

mit den dazugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_1 = v, \lambda_2 = v + c^* \text{ sowie } \lambda_3 = v - c^*.$$

Fassen wir die Eigenvektoren \mathbf{r}_i zur Matrix $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ zusammen,

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = (\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v & v + c^* & v - c^* \\ \frac{1}{2}M^2v^2 & H^* + M^2vc^* & H^* - M^2vc^* \end{pmatrix},$$

so ergibt sich mit

$$\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\tau v^2}{2c^{*2}} & \tau \frac{v}{c^{*2}} & -(\gamma - 1) \frac{1}{c^{*2}} \\ -\frac{v}{2c^*} + \frac{\tau v^2}{4c^{*2}} & \frac{1}{2c^*} - \frac{\tau v}{2c^{*2}} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^{*2}} \\ \frac{v}{2c^*} + \frac{\tau v^2}{4c^{*2}} & -\frac{1}{2c^*} - \frac{\tau v}{2c^{*2}} & \frac{\gamma - 1}{2} \frac{1}{c^{*2}} \end{pmatrix}$$

und

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

die Matrixgleichung

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}' \mathbf{R} = \Lambda.$$

Zur besseren Übersicht haben wir analog zum Abschnitt 3.1.1 die Hilfsvariable $\tau := (\gamma - 1)M^2$ genutzt.

Um zu einer Beschreibung des homogenen Systems (3.17) in charakteristischen Variablen zu gelangen, führen wir die Differentiation der Flußfunktion \mathbf{h} aus:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{h}'(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Multiplikation der Gleichung (3.19) mit der inversen Matrix $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u})$ von links liefert

$$\mathbf{R}^{-1} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{h}'(\mathbf{u}) (\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1}) \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Über eine mögliche Definition der charakteristische Variablen in Differentialform

$$\partial \mathbf{w} := \mathbf{D} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{u}) \partial \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial \rho - \frac{1}{(c^*)^2} \partial p \\ \frac{1}{\rho c^*} \partial p + \partial v \\ \frac{1}{\rho c^*} \partial p - \partial v \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{2c^*}{\rho} & \\ & & \frac{2c^*}{\rho} \end{pmatrix}$$

erhalten wir eine charakteristische Formulierung des homogenen Systems in der Form

$$\partial_t \mathbf{w} + \Lambda \partial_x \mathbf{w} = 0,$$

beziehungsweise

$$\left(\partial_t \rho - \frac{1}{(c^*)^2} \partial_t p \right) + v \left(\partial_x \rho - \frac{1}{(c^*)^2} \partial_x p \right) = 0, \quad (3.20)$$

$$\left(\frac{1}{\rho c^*} \partial_t p + \partial_t v \right) + (v + c^*) \left(\frac{1}{\rho c^*} \partial_x p + \partial_x v \right) = 0, \quad (3.21)$$

$$\left(\frac{1}{\rho c^*} \partial_t p - \partial_t v \right) + (v - c^*) \left(\frac{1}{\rho c^*} \partial_x p - \partial_x v \right) = 0. \quad (3.22)$$

Numerisch können die charakteristischen Variablen in Differentialform $\partial \mathbf{w}$ nicht direkt eingesetzt werden. Stattdessen wird eine lokal linearisierte Form

$$\mathbf{w} := \begin{pmatrix} \rho - \frac{1}{(\bar{c}^*)^2} p \\ \frac{1}{\bar{\rho} \bar{c}^*} p + v \\ \frac{1}{\bar{\rho} \bar{c}^*} p - v \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

verwendet, wobei $(\bar{\rho}, \bar{c}^*)$ lokal als konstant angenommen werden.

Eine weitere Darstellung der Euler-Gleichungen in charakteristischer Form ergibt sich aus einer Formulierung der linearisierten Riemann-Invarianten mit Hilfe der Variablen (v, c, S) ,

$$\begin{aligned} \partial_t S + v \partial_x S &= 0, \\ \partial_t \left(v + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (v + c) \partial_x \left(v + \frac{2}{\gamma - 1} c \right) &= 0, \\ \partial_t \left(v - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) + (v - c) \partial_x \left(v - \frac{2}{\gamma - 1} c \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei für die Entropie S ,

$$S := \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right),$$

gilt. Um zu einer zu den Euler-Gleichungen äquivalenten Formulierung der charakteristischen Gleichungen des homogenen Systems zu gelangen, benötigen wir zunächst eine geeignete Definition einer modifizierten Entropie S^* .

Lemma 3.1.2 *Es sei das homogene System (3.17) gegeben. Dann stellt*

$$S^* := \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p + \frac{\gamma-1}{1+\tau} p_{\text{NL}}}{\rho^{1+\tau}} \right) \quad (3.25)$$

mit $\tau = (\gamma - 1)M^2$ eine Entropie für das System (3.17) dar, das heißt,

$$\partial_t S^* + v \partial_x S^* = 0 \quad (3.26)$$

und es gilt

$$\lim_{M \rightarrow 1} S^* = S = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right). \quad (3.27)$$

Beweis: Aus der Definition (3.18) der modifizierten Schallgeschwindigkeit c^* ,

$$(c^*)^2 = \frac{(1 + \tau)p + (\gamma - 1)p_{\text{NL}}}{\rho}$$

folgt

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{p + \frac{\gamma-1}{1+\tau} p_{\text{NL}}}{\rho^{1+\tau}} \right) &= \frac{\partial_t p \rho^{1+\tau} - (p + \frac{\gamma-1}{1+\tau} p_{\text{NL}})(1 + \tau) \rho^\tau \partial_t \rho}{\rho^{2(1+\tau)}} \\ &= \frac{\partial_t p}{\rho^{1+\tau}} - \frac{\partial_t \rho}{\rho^{1+\tau}} \frac{(1 + \tau)p + (\gamma - 1)p_{\text{NL}}}{\rho} \\ &= \frac{\partial_t p}{\rho^{1+\tau}} - c^{*2} \frac{\partial_t \rho}{\rho^{1+\tau}}. \end{aligned}$$

Mit $\rho > 0$, $\forall x \in \Omega$, ergibt sich Gleichung (3.26) direkt aus der charakteristischen Gleichung (3.20). Weiterhin ist mit

$$\lim_{M \rightarrow 1} \tau = \gamma - 1 \quad \text{und} \quad \lim_{M \rightarrow 1} p_{\text{NL}} = 0$$

auch der Grenzwert aus Gleichung (3.27) erfüllt. \square

Bemerkung: Für $M = 0$ stellt die modifizierte Schallgeschwindigkeit c^* eine Entropie für das homogene System dar, denn

$$S^* \Big|_{M=0} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{p + (\gamma - 1)p_{\text{NL}}}{\rho} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \ln ((c^*)^2).$$

Folglich ist eine zu (3.24) äquivalente Darstellung der charakteristischen Gleichungen durch (v, c^*, S^*) im Grenzfall $M = 0$ nicht möglich.

Für $M \neq 0$ wird die Entropie S^* in den folgenden Umformungen lokal als konstant aufgefaßt. Somit kann die Dichte ρ als Funktion des Druckes und des Parameterwertes $C = \exp((1 - \gamma)S^*)$ definiert werden:

$$\rho := g(p; C) = C^{\frac{1}{1+\tau}} \left(p + \frac{\gamma - 1}{1 + \tau} p_{\text{NL}} \right)^{\frac{1}{1+\tau}}. \quad (3.28)$$

Für die modifizierte Schallgeschwindigkeit erhalten wir hiermit

$$(c^*)^2 = \frac{(1 + \tau)p + (\gamma - 1)p_{\text{NL}}}{C^{\frac{1}{1+\tau}} \left(p + \frac{\gamma - 1}{1 + \tau} p_{\text{NL}} \right)^{\frac{1}{1+\tau}}} = C^{-\frac{1}{1+\tau}} (1 + \tau) \left(p + \frac{\gamma - 1}{1 + \tau} p_{\text{NL}} \right)^{1 - \frac{1}{1+\tau}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_t(c^*) &= \frac{1}{2c^*} C^{-\frac{1}{1+\tau}} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau} \right) (1 + \tau) \left(p + \frac{\gamma - 1}{1 + \tau} p_{\text{NL}} \right)^{-\frac{1}{1+\tau}} \partial_t p \\ &\stackrel{(3.28)}{=} \frac{1}{2c^* \rho} \tau \partial_t p, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{c^* \rho} \partial_t p = \frac{2}{\tau} \partial_t(c^*).$$

Die übrigen charakteristischen Gleichungen ergeben sich aus (3.21) und (3.22) zu

$$\partial_t \left(v \pm \frac{2}{\tau} c^* \right) + (v \pm c^*) \partial_x \left(v \pm \frac{2}{\tau} c^* \right) = 0. \quad (3.29)$$

Für $M \rightarrow 1$ gehen die Gleichungen (3.29) stetig in die Gleichungen (3.24) über, während sie für $M \rightarrow 0$ singulär werden. Innerhalb eines numerischen Verfahrens zur Berechnung von Strömungen aller Mach-Zahlbereiche sollten die Gleichungen (3.29) deshalb nicht verwendet werden, da sie bei kleinen Werten von M das Auftreten von Auslöschungseffekten und Rundungsfehlern begünstigen.

3.1.3 Zeitdiskretisierung

In den folgenden Abschnitten werden wir eine räumlich und zeitlich konsistente Diskretisierung höherer Ordnung für das zu den Euler-Gleichungen äquivalente System (3.16) herleiten. Aufgrund des stetigen Übergangs des homogenen

Systems (3.17) in das der Euler-Gleichungen im Fall $M \rightarrow 1$ erscheint es sinnvoll, zunächst eine Diskretisierung höherer Ordnung des homogenen Systems vorzunehmen und die in (3.16) enthaltene Flußfunktion $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ als Korrektur der homogenen Flüsse $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ im Fall $M < 1$ anzusehen. Im Kontext eines Verfahrens, welches eine Zeitdiskretisierung höherer Ordnung beinhaltet, müssen daher die innerhalb des Gesamtzeitschrittes auftretenden Korrelationen zwischen den homogenen und den Flußanteilen aus $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ geeignet innerhalb der Flußkorrekturen berücksichtigt werden und zu einer noch zu definierenden asymptotischen Flußkorrektur $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$ ergänzt werden.

Definition 3.1.3

Sei $\mathbf{u}(\cdot, t)$ die exakte Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t \mathbf{u}(x, t) = -\partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \quad (3.30)$$

zum Zeitpunkt t . Dann heißt eine auf der Verfahrensfunktion Φ basierende Methode

$$\mathbf{u}^{n+1}(x) = \mathbf{u}^n(x) + \Delta t \Phi(\mathbf{u}^n(x), \Delta t; \mathbf{g}) \quad (3.31)$$

zur zeitlichen Evolution der Differentialgleichung (3.30) konsistent von der Ordnung p am Ort $x \in \Omega$, falls bei hinreichend glatter Lösung \mathbf{u} und Abbildung $\partial_x \mathbf{g}$

$$\mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \mathbf{u}(x, t^n) - \Delta t \Phi(\mathbf{u}(x, t^n), \Delta t; \mathbf{g}) = O(\Delta t^{p+1}) \quad (3.32)$$

mit $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ gilt. Die Methode heißt konsistent von der Ordnung p , falls (3.32) für alle $x \in \Omega$ gilt.

Lemma 3.1.4

Die Zeitintegration

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^n(x) &= \mathbf{u}(x, t^n) \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} (\Theta \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^n(x)) + (1 - \Theta) \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\tilde{m}}(x))) \\ \mathbf{u}^{n+1}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \Delta t \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}(x)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

stellt für alle $\Theta \in \mathbb{R}$ und $m, \tilde{m} \in [n, n+1]$ ein konsistentes Verfahren von zweiter Ordnung in der Zeit für die Differentialgleichung (3.30) dar.

Beweis:

Mit

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}(x) \\
&= \mathbf{u}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) - \mathbf{u}(x, t^n) + \frac{\Delta t}{2} (\Theta \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^m(x)) + (1 - \Theta) \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\tilde{m}}(x))) \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \partial_t \mathbf{u}(x, t) dt + \frac{\Delta t}{2} (\partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^n(x)) + O(\Delta t)) \\
&= - \int_{t^n}^{t^{n+\frac{1}{2}}} \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t)) dt + \frac{\Delta t}{2} (\partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^n(x)) + O(\Delta t)) \\
&= O(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

erhalten wir den Nachweis der Konsistenzordnung unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \mathbf{u}^{n+1}(x) \\
&= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \mathbf{u}(x, t) dt + \Delta t \left(\partial_x \mathbf{g} \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}(x) \right) \right) \\
&= -\Delta t \partial_x \mathbf{g} \left(\mathbf{u}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) \right) + \Delta t \left(\partial_x \mathbf{g} \left(\mathbf{u}(x, t^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) \right) \right) + O(\Delta t^3) \\
&= O(\Delta t^3). \quad \square
\end{aligned}$$

Für die Verfahrensfunktionen Φ und $\tilde{\Phi}$ zweier zur Differentialgleichung (3.30) konsistenter Methoden zweiter Ordnung gilt stets

$$\Phi(\mathbf{u}^n(x), \Delta t; \mathbf{g}) - \tilde{\Phi}(\mathbf{u}^n(x), \Delta t; \mathbf{g}) = O(\Delta t^2).$$

Folglich ist bei der Herleitung einer konsistenten Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung für das Gesamtsystem (3.16) auf der Basis einer konsistenten Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung des homogenen Systems (3.17) die explizite Berücksichtigung der Diskretisierung des homogenen Systems nicht notwendig. Ausgehend von einer beliebigen konsistenten Diskretisierung zweiter Ordnung des homogenen Systems werden wir im folgenden eine gezielte Untersuchung der benötigten asymptotischen Korrekturflüsse $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$ durchführen, die auf der Basis der Flüsse des homogenen Systems ein konsistentes Gesamtverfahren zweiter Ordnung definieren. Betrachten wir die Diskretisierung des homogenen Systems in der Form (3.33), so wird unmittelbar deutlich, daß innerhalb des Verfahrens Approximationen an die physikalische Lösung des homogenen Systems zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ verwendet werden. Der hierdurch berechnete Massenfluß zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ weist keinen Einfluß des Impulsflusses $a_m(\mathbf{u})$ auf. Somit stellt die im Rahmen der Diskretisierung des homogenen Systems ermittelte Dichte ρ^{n+1} voraussichtlich keine Approximation zweiter Ordnung an

die Dichte des Gesamtsystems dar, wodurch eine asymptotische Korrektur des Massenflusses trotz $a_\rho(\mathbf{u}) = 0$ zu erwarten ist. Diese einfachen Überlegungen zeigen bereits, daß eine direkte numerischen Approximation des Flußanteils $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ mittels eines Zeitintegrationsverfahrens zweiter Ordnung in der Regel keine konsistente Methode zweiter Ordnung für das Gesamtsystem der Euler-Gleichungen liefert.

Im Sinne der Übersichtlichkeit vernachlässigen wir im weiteren die explizite Angabe der Ortsvariablen. Sei

$$\mathbf{u}^n := \mathbf{u}(t^n) \quad (3.34)$$

und

$$\Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n) = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathbf{h},\rho}(\mathbf{u}^n) \\ \Phi_{\mathbf{h},m}(\mathbf{u}^n) \\ \Phi_{\mathbf{h},(\rho E)}(\mathbf{u}^n) \end{pmatrix} := \Phi(\mathbf{u}^n, \Delta t; \mathbf{h})$$

eine Verfahrensfunktion einer zur Differentialgleichung (3.17) konsistenten Methode zweiter Ordnung, dann schreiben wir

$$\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n),$$

wobei wir zur Kennzeichnung der numerischen Lösung des homogenen Systems den Index \mathbf{h} verwenden. Somit gilt

$$\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \Delta t \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \quad (3.35)$$

mit

$$\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}^n). \quad (3.36)$$

Analog sei

$$\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathbf{f},\rho}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \Phi_{\mathbf{f},m}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \Phi_{\mathbf{f},(\rho E)}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} := \Phi(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}, \Delta t; \mathbf{f})$$

eine Verfahrensfunktion einer zu den Euler-Gleichungen (2.1) konsistenten Methode zweiter Ordnung. Dann schreiben wir

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})$$

und es gilt

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \Delta t \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \quad (3.37)$$

mit

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} \partial_x m^n \\ \partial_x (mv + p)^n - \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\ \partial_x (H^* m)^n - (M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Der Einfluß der für $M \rightarrow 0$ singulären Anteile der Impulsgleichung liefert zum Zeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$ die Differenz zwischen dem Impuls des homogenen Systems $m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ und dem Impuls des Gesamtsystems $m^{n+\frac{1}{2}}$ in der Form

$$m^{n+\frac{1}{2}} - m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.39)$$

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich auf der Basis dieser Darstellung

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} &= \rho^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{f}, \rho}(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\stackrel{(3.37)}{=} \rho^n - \Delta t \partial_x \left(m^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\Delta t^3) \\ &\stackrel{(3.39)}{=} \rho^n - \Delta t \partial_x \left(m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\Delta t^3) \\ &= \rho^n - \Delta t \partial_x h_{\rho}(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x^2 p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\ &\stackrel{(3.35)}{=} \rho^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{h}, \rho}(\mathbf{u}^n) - \Delta t \Phi_{\tilde{\mathbf{a}}, \rho}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{a}}, \rho}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x^2 p^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

und

$$\rho(t^{n+1}) - \rho^{n+1} = O(\Delta t^3).$$

Für die Impulsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{h}}^{n+1} &\stackrel{(3.35)}{=} m^n - \Delta t \partial_x h_m \left(\mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \partial_x \mathbf{h}_m(\mathbf{u}^n) \right) + O(\Delta t^3) \\ &= m^n - \Delta t \partial_x \left((mv + p)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\Delta t^3), \end{aligned}$$

wobei $(mv + p)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ die Kurzschreibweise von $\left(m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$ darstellt. Unter Berücksichtigung von

$$\rho^{n+\frac{1}{2}} = \rho_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.42)$$

folgt

$$\begin{aligned} v^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{m^{n+\frac{1}{2}}}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \stackrel{(3.39),(3.42)}{=} \frac{m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}}{\rho_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\ &= v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

und somit

$$\begin{aligned} (mv)^{n+\frac{1}{2}} &\stackrel{(3.43)}{=} \left(m_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) \left(v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2\rho^{n+\frac{1}{2}}} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &\stackrel{(3.42)}{=} (mv)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{M^2 - 1}{M^2} v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + \frac{(\Delta t)^2}{4} \frac{(M^2 - 1)^2}{M^4} \frac{(\partial_x p^{n+\frac{1}{2}})^2}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{(3.43)}{=} (mv)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} (v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Diskretisierung der Impulsgleichung läßt sich folglich in der Form

$$\begin{aligned} m^{n+1} &= m^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{f},m} \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= m^n - \Delta t \partial_x (mv + p)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\ &\stackrel{(3.44)}{=} m^n - \Delta t \partial_x (mv + p)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x \left((v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &\quad - \Delta t \partial_x (p - p_{\mathbf{h}})^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\ &\stackrel{(3.35)}{=} m^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{h},m}(\mathbf{u}^n) - \Delta t \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},m}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.45)$$

mit

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},m} \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}\right) &= -\frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p - p_{\mathbf{h}})^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x \left((v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

und

$$m(t^{n+1}) - m^{n+1} = O(\Delta t^3)$$

schreiben. Abschließend betrachten wir die Energiegleichung. Aufgrund der Definition der Enthalpieform

$$H^* = E + \frac{p_{\text{NL}} + M^2 p}{\rho}$$

ergibt sich

$$(\rho H^*)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = (\rho E)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + p_{\text{NL},\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + M^2 p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$$

und

$$\begin{aligned} (\rho E)^{n+\frac{1}{2}} &\stackrel{(3.38)}{=} (\rho E)^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x (H^* m)^n - (M^2 - 1) \partial_x (p v)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\stackrel{(3.36)}{=} (\rho E)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left((M^2 - 1) \partial_x (p v)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Der nicht-lokale Druckterm p_{NL} unterliegt keiner zeitlichen Evolution, wodurch $p_{\text{NL},\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{\text{NL}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{\text{NL}}^n$ folgt, und wir erhalten die Darstellungen

$$\begin{aligned} H^{*,n+\frac{1}{2}} &= \frac{(\rho E)^{n+\frac{1}{2}} + p_{\text{NL}}^{n+\frac{1}{2}} + M^2 p^{n+\frac{1}{2}}}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\stackrel{(3.42),(3.47)}{=} H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \left((M^2 - 1) \partial_x (p v)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad + M^2 \frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} \left(p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (H^* m)^{n+\frac{1}{2}} &\stackrel{(3.39)}{=} (H^* m)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left((M^2 - 1) \partial_x (p v)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) v^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + M^2 \left(p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \right) v^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Für die Energiegleichung der Euler–Gleichungen ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
(\rho E)^{n+1} &= (\rho E)^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{f},(\rho E)} \left(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&= (\rho E)^n - \Delta t \partial_x (H^* m)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Delta t (M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t^3) \\
&\stackrel{(3.48)}{=} (\rho E)^n - \Delta t \partial_x (H^* m)_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + \Delta t (M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x (H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}) - \Delta t M^2 \partial_x \left((p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) v^{n+\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x \left(\left((M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) v^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(\Delta t^3) \\
&= (\rho E)^n - \Delta t \Phi_{\mathbf{h},(\rho E)}(\mathbf{u}^n) - \Delta t \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},(\rho E)}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) \tag{3.49}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\Phi_{\tilde{\mathbf{a}},(\rho E)}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) &= -(M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} - \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \\
&\quad + M^2 \partial_x \left((p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) v^{n+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x (H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \partial_x \left(\left((M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}} \right) v^{n+\frac{1}{2}} \right) \tag{3.50}
\end{aligned}$$

und

$$(\rho E)(t^{n+1}) - (\rho E)^{n+1} = O(\Delta t^3).$$

Zusammenfassend läßt sich die bei einer Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung zu berücksichtigende Flußkorrektur über die Flußkorrekturfunktion

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_\rho(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \tilde{a}_m(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \tilde{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{a}_\rho(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{\Delta t M^2 - 1}{2} \frac{1}{M^2} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_m(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) &= -\frac{M^2 - 1}{M^2} p^{n+\frac{1}{2}} + (p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\quad + \frac{\Delta t M^2 - 1}{2} \frac{1}{M^2} (v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} + v^{n+\frac{1}{2}}) \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) &= -(M^2 - 1)(pv)^{n+\frac{1}{2}} - (p_{\text{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + M^2(p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}})v^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t M^2 - 1}{2} \frac{1}{M^2} H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left((M^2 - 1) \partial_x (pv)^{n+\frac{1}{2}} + \partial_x (p_{\text{NL}}v)^{n+\frac{1}{2}} \right) v^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

in der Form

$$\Phi_{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},\rho}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},m}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \\ \Phi_{\tilde{\mathbf{a}},(\rho E)}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} := \Phi(\mathbf{u}^n, \Delta t; \tilde{\mathbf{a}}) = \partial_x \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^2) \quad (3.54)$$

schreiben. Wir bezeichnen die Flußkorrekturfunktion $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})$ als asymptotische Flußfunktion, entsprechend sprechen wir von einer asymptotischen Flußkorrektur.

Innerhalb der asymptotischen Anteile aller Flüsse können sämtliche mit der Zeitschrittweite Δt multiplizierten Terme durch eine Approximation erster Ordnung ersetzt werden, ohne einen Ordnungsverlust im Rahmen des Gesamtverfahrens zu bewirken. Innerhalb der Impulsflüsse kann daher die Geschwindigkeit $v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ beispielsweise durch v^n , $v^{n+\frac{1}{2}}$ oder v^{n+1} ersetzt werden. Da zudem $p^{n+1} = p^{n+\frac{1}{2}} + O(\Delta t) = p^n + O(\Delta t)$ gilt, kann der asymptotische Impulsflußanteil

$$\frac{M^2 - 1}{M^2} v_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{M^2 - 1}{M^2} v^{n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}$$

in der Form

$$\frac{M^2 - 1}{M^2} v^m \partial_x p^{\tilde{m}}$$

mit $m, \tilde{m} \in [n, n + 1]$ variiert werden. Auf analoge Weise ergibt sich eine Modifikation des asymptotischen Massenflußanteils und wir erhalten für die Energiegleichung die Variationsmöglichkeiten

$$\frac{M^2 - 1}{M^2} H^{*,m} \partial_x p^{\tilde{m}}, (M^2 - 1) p^{\tilde{m}} v^m \text{ und } p_{\text{NL}}^{\tilde{m}} v^m$$

mit $m, \tilde{m} \in [n, n + 1]$ für die Terme

$$\frac{M^2 - 1}{M^2} H_{\mathbf{h}}^{*,n+\frac{1}{2}} \partial_x p^{n+\frac{1}{2}}, (M^2 - 1) (pv)^{n+\frac{1}{2}} \text{ respektive } (p_{\text{NL}} v)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Desweiteren zeigt sich bei der gewählten Formulierung sehr deutlich, daß bei einer konsistenten Zeitintegration erster Ordnung eine direkte Diskretisierung der Flußfunktionen $\mathbf{h}(\mathbf{u})$ und $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ ohne Berücksichtigung etwaiger Korrelationen möglich ist. Diese Aussage begründet sich auf der Tatsache, daß mit

$$p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = O(\Delta t)$$

alle im Vergleich zu einer separaten Diskretisierung erster Ordnung der Flußfunktionen zusätzlich auftretenden Terme innerhalb der asymptotischen Flußkorrektur $\Phi_{\tilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}})$ von der Größenordnung $O(\Delta t)$ sind. Bezogen auf die Flußfunktionen $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ und $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$ läßt sich diese Eigenschaft in der Form

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}) - \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = O(\Delta t)$$

ausdrücken. Die asymptotischen Flußfunktionen weisen eine signifikant unterschiedliche Struktur auf. Wir wollen daher zum Abschluß dieses Abschnitts die für das numerische Verfahren grundlegende Bedingung

$$\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = o(1), M \rightarrow 1 \tag{3.55}$$

nachweisen. Zunächst können die mit dem Faktor $(M^2 - 1)$ multiplizierten Anteile vernachlässigt werden. Zudem gilt aufgrund der Definition des nicht-lokalen Drucks stets $p_{\text{NL}} = o(1)$, $M \rightarrow 1$, so daß lediglich der in der Impuls- und Energiegleichung auftretende Term

$$p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$$

untersucht werden muß. Hierfür erhalten wir mit (3.36) und (3.38) das benötigte Abfallverhalten unmittelbar aus

$$\mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{\Delta t}{2} \partial_x \underbrace{(\mathbf{f}(\mathbf{u}^n) - \mathbf{h}(\mathbf{u}^n))}_{= o(1), M \rightarrow 1} = o(1), M \rightarrow 1$$

und folglich die Eigenschaft (3.55).

Analog zu den bereits erläuterten Variationsmöglichkeiten innerhalb der asymptotischen Korrekturflüsse, werden wir nun auch eine Modifikation des Terms $p^{n+\frac{1}{2}} - p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}}$ vorstellen. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Modifikationen wird dieser Term nicht mit dem Faktor Δt multipliziert, wodurch zum Erhalt einer Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung ausschließlich Variationen in der zeitlichen Ordnung $O(\Delta t^2)$ vorgenommen werden dürfen. Aus den Euler-Gleichungen (2.1) läßt sich unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung (2.2) die Druck-Evolutionsgleichung

$$\partial_t p + \partial_x(pv) + (\gamma - 1)p\partial_x v = 0$$

herleiten. Analog erhalten wir für das homogene System (3.4) die Darstellung

$$\partial_t p_{\mathbf{h}} + \partial_x(pv)_{\mathbf{h}} + (\gamma - 1)\partial_x(p_{\text{NL}}v_{\mathbf{h}}) + (\gamma - 1)M^2 p_{\mathbf{h}}\partial_x v_{\mathbf{h}} = 0.$$

Nutzen wir ausgehend von $p^n = p_{\mathbf{h}}^n$ und $v^n = v_{\mathbf{h}}^n$ ein Zeitschrittverfahren erster Ordnung, so folgen

$$p^{n+\frac{1}{2}} = p^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x(pv)^n + (\gamma - 1)p^n \partial_x v^n \right) + O(\Delta t^2)$$

und

$$p_{\mathbf{h}}^{n+\frac{1}{2}} = p^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x(pv)^n + (\gamma - 1)\partial_x(p_{\text{NL}}v)^n + (\gamma - 1)M^2 p^n \partial_x v^n \right) + O(\Delta t^2).$$

Hierdurch ergibt sich

$$\begin{aligned} (p - p_{\mathbf{h}})^{n+\frac{1}{2}} &= (\gamma - 1) \frac{\Delta t}{2} \left((M^2 - 1)p^n \partial_x v^n + \partial_x(p_{\text{NL}}v)^n \right) + O(\Delta t^2) \\ &= (\gamma - 1) \frac{\Delta t}{2} \left((M^2 - 1)p^m \partial_x v^m + \partial_x(p_{\text{NL}}v)^m \right) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

mit $m \in [n, n + 1]$.

3.1.4 Implizites Zeitschrittverfahren

Im Fall einer kleinen Mach-Zahl beinhalten die asymptotischen Korrekturflüsse alle auftretenden Informationsausbreitungen mit einer Geschwindigkeit in der Größenordnung $O_s\left(\frac{1}{M}\right)$. Daher erweist sich eine implizite Evolutionsvorschrift als sinnvoll, damit das Verfahren keiner restriktiven CFL-Bedingung aufgrund dieser Terme unterliegt.

Wir werden daher zunächst ein vollständig implizites Zeitschrittverfahren zweiter Ordnung für die asymptotischen Korrekturterme herleiten und anschließend die Vorgehensweise für das Gesamtverfahren erläutern.

Lemma 3.1.5

Die Zeitintegration

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^n(x) &= \mathbf{u}(x, t^n), \\
\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \Delta t \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x)), \\
\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x)) - \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x)) \right), \\
\mathbf{u}^{n+1}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} \left(\partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x)) + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^{n+1}(x)) \right),
\end{aligned} \tag{3.56}$$

stellt ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit für die Differentialgleichung (3.30) dar, wenn die Lösung $\mathbf{u}(x, t)$ der Differentialgleichung und die Flußfunktion $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ hinreichend glatt sind.

Beweis:

Für die Lösung $\mathbf{u}(x, \cdot) \in C^3(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ der Differentialgleichung (3.30) und $\mathbf{g}(\mathbf{u}(\cdot, \cdot)) \in C^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ erhalten wir mit Hilfe einer Taylorentwicklung nach dem zweiten Argument

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, t^{n+1}) &= \mathbf{u}(x, t^n) + \Delta t \partial_t \mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 \mathbf{u}(x, t^{n+1}) + O(\Delta t^3) \\
&= \mathbf{u}(x, t^n) - \Delta t \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x \left(\partial_t \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \right) + O(\Delta t^3) \\
&= \mathbf{u}(x, t^n) - \Delta t \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x \left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \right) + O(\Delta t^3).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir die Abkürzung

$$\mathbf{G}(x, t^{n+1}) = \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}(x, t^{n+1}))$$

ein. Folglich kann die Gleichung (3.57) in der Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(x, t^{n+1}) &= \mathbf{u}(x, t^n) - \Delta t \mathbf{G}(x, t^{n+1}) \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x \left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}(x, t^{n+1})) \mathbf{G}(x, t^{n+1}) \right) + O(\Delta t^3)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

geschrieben werden. Desweiteren wird im folgenden die Ortsvariable x vernachlässigt.

Zunächst werden wir zeigen, daß eine implizite Formulierung eines Runge–Kutta–Verfahrens ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung in der Zeit für die Differentialgleichung (3.30) darstellt. Der Vergleich beider Zeitschrittverfahren liefert dann die Aussage des Lemmas.

Es sei \mathbf{u}_{RK}^i die Lösung beziehungsweise die Zwischenlösung des Runge–Kutta–Verfahrens. Unter Ausnutzung der Abkürzung

$$\mathbf{G}_{RK}^i = \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}_{RK}^i).$$

besitzt die implizite Formulierung die Darstellung

$$\mathbf{u}_{RK}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}_{RK}^{n+1} + \Delta t \mathbf{G}_{RK}^{n+1}, \quad (3.59)$$

$$\mathbf{u}^n = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{RK}^{n+1} + \mathbf{u}_{RK}^{\tilde{n}}) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_{RK}^{\tilde{n}}. \quad (3.60)$$

Die obige Vorgehensweise läßt sich äquivalent in der Form

$$\mathbf{u}_{RK}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}_{RK}^{\tilde{n}} - \mathbf{G}_{RK}^{n+1}), \quad (3.61)$$

$$\mathbf{u}_{RK}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}_{RK}^{\tilde{n}} + \mathbf{G}_{RK}^{n+1}) \quad (3.62)$$

schreiben. Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{RK}^{n+1} &\stackrel{(3.62)}{=} \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}_{RK}^{\tilde{n}} + \mathbf{G}_{RK}^{n+1}) \\ &= \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_{RK}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_x \left(\mathbf{g}(\mathbf{u}_{RK}^{n+1}) + \frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{RK}^{n+1}) (\mathbf{u}_{RK}^{\tilde{n}} - \mathbf{u}_{RK}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + O(|\mathbf{u}_{RK}^{\tilde{n}} - \mathbf{u}_{RK}^{n+1}|^2) \right) \\ &\stackrel{(3.59)}{=} \mathbf{u}^n - \Delta t \mathbf{G}_{RK}^{n+1} - \frac{\Delta t^2}{2} \partial_x \left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{RK}^{n+1}) \mathbf{G}_{RK}^{n+1} \right) + O(\Delta t^3) \\ &\stackrel{(3.58)}{=} \mathbf{u}(t^{n+1}) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nutzen wir entsprechend $\mathbf{G}^i = \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{u}^i)$, so ergibt sich mit dem erste Ordnung impliziten Zeitschrittverfahren (3.56)₂ die Darstellung

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}}^{n+1} &= \mathbf{u}^n - \Delta t \widetilde{\mathbf{G}}^{n+1} \\ &= \mathbf{u}(t^{n+1}) + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Unter Verwendung der Gleichung (3.63) folgt

$$\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}} = \mathbf{u}_{RK}^{n+1} + O(\Delta t^2). \quad (3.65)$$

Hierdurch erhalten wir mit

$$\mathbf{u}^{\widetilde{n}} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}^{\widetilde{n}} - \mathbf{G}^{\widetilde{n+1}})$$

wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\widetilde{n}} - \mathbf{u}_{RK}^{\widetilde{n}} &= -\frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}^{\widetilde{n}} - \mathbf{G}^{\widetilde{n+1}} - \mathbf{G}_{RK}^{\widetilde{n}} + \mathbf{G}_{RK}^{n+1}) \\ &\stackrel{(3.65)}{=} -\frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}^{\widetilde{n}} - \mathbf{G}_{RK}^{\widetilde{n}}) + O(\Delta t^3) \\ &= -\frac{\Delta t}{2} (O(\mathbf{u}^{\widetilde{n}} - \mathbf{u}_{RK}^{\widetilde{n}})) + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (3.66)$$

die Darstellung

$$\mathbf{u}^{\widetilde{n}} - \mathbf{u}_{RK}^{\widetilde{n}} = O(\Delta t^3).$$

Abschließend ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_{RK}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}^{\widetilde{n}} + \mathbf{G}^{n+1} - \mathbf{G}_{RK}^{\widetilde{n}} - \mathbf{G}_{RK}^{n+1}) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{G}^{n+1} - \mathbf{G}_{RK}^{n+1}) + O(\Delta t^4) \\ &= \frac{\Delta t}{2} (O(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_{RK}^{n+1})) + O(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (3.67)$$

wodurch

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{RK}^{n+1} + O(\Delta t^4) = \mathbf{u}(t^{n+1}) + O(\Delta t^3) \quad (3.68)$$

folgt. Die Nachweise der Gültigkeit der Abschätzungen

$$\mathbf{G}^i - \mathbf{G}_{RK}^i = O(\mathbf{u}^i - \mathbf{u}_{RK}^i)$$

in (3.66) und (3.67) ergeben sich direkt aus Taylorentwicklungen nach \mathbf{u} . \square

Im Gegensatz zu einem expliziten Runge–Kutta–Verfahren kann aufgrund der starken Kopplung der Gleichungen (3.62) und (3.61) keine sukzessive Berechnung der Einzelschritte vorgenommen werden. Hier liegt die Notwendigkeit des diskutierten Zeitschrittverfahrens begründet, welches als ein iteratives Verfahren zur Lösung der Gleichungen (3.62) und (3.61) angesehen werden kann. Durch die Vorgabe des Startwertes über das implizite erste Ordnung Verfahren

(3.56)₂ wird die gewünschte Genauigkeit in der Größe der Verfahrensordnung schon nach einem Iterationsschritt erreicht.

Für die Euler–Gleichungen verwenden wir zusammenfassend das Zeitintegrationsverfahren in der Form

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \Delta t \Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) - \Delta t \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x)), \\
\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) + \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x))) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) + \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x))) \\
&= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x)) - \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}}(x))), \\
\mathbf{u}^{n+1}(x) &= \mathbf{u}^n(x) - \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) + \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x))) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) + \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{n+1}(x))) \\
&= \mathbf{u}^n(x) - \Delta t \Phi_{\mathbf{h}}(\mathbf{u}^n(x)) - \frac{\Delta t}{2} (\Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{\widetilde{n}}(x)) + \Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^{n+1}(x))),
\end{aligned} \tag{3.69}$$

wobei $\Phi_{\mathbf{h}}$ und $\Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}$ noch zu bestimmende Verfahrensfunktionen darstellen. Ist das numerische Verfahren basierend auf der Verfahrensfunktion $\Phi_{\mathbf{h}}$ zur Lösung des homogenen Systems konsistent von der Ordnung zwei und approximiert die Verfahrensfunktion $\Phi_{\widetilde{\mathbf{a}}}$ die Flußfunktion $\widetilde{\mathbf{a}}$ im Raum von zweiter Ordnung, dann stellt das obige Verfahren ein konsistentes Verfahren der Ordnung zwei an die Euler–Gleichungen (3.16) dar.

3.2 Diskretisierung des Strömungsgebietes

Bei der folgenden Beschreibung des numerischen Verfahrens betrachten wir stets endliche Intervalle $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Die Grundidee der Finite–Volumen–Verfahren basiert auf der Einführung von Kontrollvolumina sowie der Betrachtung schwacher Lösungen der zugrundeliegenden Gleichungen. Als Kontrollvolumen $\widetilde{\Omega}$ bezeichnen wir im Fall des eindimensionalen räumlichen Gebietes jedes offene Teilintervall $\widetilde{\Omega} = (\widetilde{a}, \widetilde{b})$ mit $\widetilde{a} < \widetilde{b}$. Eine Funktion

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x, t) &\mapsto \mathbf{u}(x, t),
\end{aligned}$$

die bezüglich der Zeit von beschränkter Variation ist und die sich für jedes feste $t \in \mathbb{R}_0^+$ im Raum $(L^\infty \cap L^1)(\Omega; \mathbb{R}^3)$ befindet, heißt schwache Lösung der

Gleichung (2.1) in Ω , falls

$$\int_{\tilde{\Omega}} \partial_t \mathbf{u}(x, t) dx + \int_{\partial \tilde{\Omega}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x, t)) \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{0} \quad (3.70)$$

für alle Kontrollvolumina $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ gilt, wobei \mathbf{n} die äußere Einheitsnormale an $\partial \tilde{\Omega}$ darstellt.

Zur numerischen Lösung der Gleichung (3.70) diskretisieren wir den räumlichen Anteil mittels einer Unterteilung $\{a = \tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{\tilde{N}} = b\}$ in \tilde{N} Teilintervalle. Die Unterteilung ist nicht notwendigerweise als äquidistant zu wählen.

Im Falle einer äquidistanten Unterteilung werden die Teilintervalle σ_i , welche im folgenden als Kontrollvolumina respektive Boxen bezeichnet werden, über $\sigma_i = [\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$, $i = 1, \dots, \tilde{N}$ bestimmt.

Im Fall einer nicht äquidistanten Aufteilung nutzen wir das eindimensionale Pendant zur Sekundärnetzmethode, um aus den Knotenpunkten \tilde{x}_i die Kontrollvolumina σ_i zu berechnen. Dazu werden zunächst die Koordinaten $x_{i+\frac{1}{2}}$ der Ränder einer jeden Box bestimmt,

$$x_{i+\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(\tilde{x}_i + \tilde{x}_{i+1}), \quad i = 0, \dots, (\tilde{N} - 1),$$

sowie

$$x_{\frac{1}{2}} = \tilde{x}_0 \quad \text{und} \quad x_{\tilde{N}+\frac{3}{2}} = \tilde{x}_{\tilde{N}}.$$

Die Boxen ergeben sich dann über $\sigma_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $i = 1, \dots, (\tilde{N} + 1)$.

Die Schwerpunkte der Boxen σ_i werden mit x_i bezeichnet. Ihr Abstand zueinander berechnet sich aus

$$\Delta x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1}),$$

wobei $\Delta x_i = |\sigma_i|$ den Durchmesser der Boxen angibt. Desweiteren bezeichnen wir mit Ξ die Menge aller Kontrollvolumina $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Hierbei gibt $N = \#\Xi$ die Anzahl der Kontrollvolumina an.

Schließlich wird mit

$$\Delta x_{min} = \min_{\sigma_i \in \Xi} |\sigma_i| \quad \text{und} \quad \Delta x_{max} = \max_{\sigma_i \in \Xi} |\sigma_i|$$

den Durchmesser der kleinsten respektive größten Box der Diskretisierung bezeichnet.

3.3 Die Ortsdiskretisierung

Basierend auf der in Abschnitt 3.2 beschriebenen räumlichen Diskretisierung des Strömungsgebietes Ω werden wir im folgenden ein numerisches Verfahren zur approximativen Lösung der Euler-Gleichungen vorstellen.

Sei $\sigma \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Gebiet und φ eine beliebige physikalische Größe, dann stellt

$$(\mathcal{M}_\sigma \varphi)(t) := \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \varphi(y, t) dy \quad (3.71)$$

den Mittelungsoperator über σ dar, so daß der hierdurch definierte Mittelwert ortsunabhängig ist und mit

$$\varphi_\sigma(t) := (\mathcal{M}_\sigma \varphi)(t) \quad (3.72)$$

bezeichnet wird.

Wir verwenden ein Finite-Volumen-Verfahren höherer Ordnung und betrachten daher stets die Evolution der Zellmittelwerte

$$\mathbf{u}_i(t) := (\mathcal{M}_{\sigma_i} \mathbf{u})(t)$$

gemäß

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_i(t) &= -(\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}))(t) \\ &= -(\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}))(t) - (\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{a}(\mathbf{u}))(t) \end{aligned}$$

für alle $\sigma_i \in \Xi$, wobei die Initialisierung der stückweise konstanten Funktionen

$$\mathbf{u}_{\sigma_i}(x, t) = \mathbf{u}_i(t), \quad x \in \sigma_i$$

durch Anwendung des Zellmittelungsoperators $(\mathcal{M}_{\sigma_i} \cdot)$ auf die Anfangsverteilung gemäß

$$\mathbf{u}_{\sigma_i}(x, 0) := (\mathcal{M}_{\sigma_i} \mathbf{u})(0), \quad x \in \sigma_i$$

definiert wird. Eine zeitliche Integration liefert die Darstellung der Gleichung (3.16) in Integralform

$$\mathbf{u}_i(t^{n+1}) = \mathbf{u}_i(t^n) - \left\{ \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u}))(t) dt + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{a}(\mathbf{u}))(t) dt \right\}$$

für $i = 1, \dots, N$. Die folgenden Abschnitte beschreiben eine mögliche Vorgehensweise zur Definition zweier numerischer Flußfunktionen

$$\mathcal{H} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

derart, daß unter Ausnutzung des impliziten Zeitschrittverfahrens (3.69) sich das numerische Verfahren als

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}) \right\}, \\ \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) + \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}) \right\}, \\ \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{u}_i^{n+1}) \right\}, \end{aligned} \tag{3.73}$$

mit $\Delta x_i = |\sigma_i|$ schreiben läßt. Hierzu werden wir zunächst eine Diskretisierung höherer Ordnung für das homogene System vornehmen und anschließend die numerische Approximation der asymptotischen Korrekturflüsse basierend auf der im Abschnitt 3.1.3 durchgeführten Analyse entwickeln.

3.3.1 Diskretisierung des homogenen Systems

Das homogene System (3.17) hat in Integralform die Darstellung

$$\mathbf{u}_{i,\mathbf{h}}(t^{n+1}) = \mathbf{u}_i(t^n) - \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u})) (t) dt.$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes wird das Ortsintegral $(\mathcal{M}_{\sigma_i} \partial_x \mathbf{h}(\mathbf{u})) (t)$ in eine Formulierung mit Randflüssen überführt. Das zeitliche Integral der Randflüsse kann mit einem modifizierten Riemannlöser, linearer Rekonstruktion der Daten sowie einem MUSCL-Ansatz in zweiter Ordnung in Raum und Zeit gelöst werden.

Mit der noch genauer zu bestimmenden Flußfunktion \mathcal{H} zur Approximation der Randintegrale lautet die vollständige Diskretisierung

$$\mathbf{u}_{i,\mathbf{h}}^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\}. \quad (3.74)$$

Wir werden dazu den approximativen Roe–Riemann–Löser mit Entropiefix an das homogene System anpassen. Die Rekonstruktion der Daten erfolgt in den charakteristischen Variablen (3.23), wobei für die v -Charakteristik je nach Testbeispiel auch die in Abschnitt 3.1.2 hergeleitete verallgemeinerte Entropie genutzt wird.

Die Verwendung eines MUSCL-Ansatzes in der Zeit ist in einer Raumdimension effizienter als Runge–Kutta–Verfahren von höherer Ordnung, da der Ansatz im Verfahren direkt innerhalb der räumlichen Rekonstruktion implementiert werden kann und so ein mehrfaches Lösen der Riemann–Probleme an den Rändern der Kontrollvolumina vermieden wird.

3.3.1.1 Lineare Rekonstruktion mit MUSCL–Ansatz in charakteristischen Variablen

Es wird die charakteristische Größe w_j betrachtet, die der charakteristischen Gleichung

$$\partial_t w_j + \lambda_j \partial_x w_j = 0 \quad (3.75)$$

genügt. Die Größe w_j ist als Zellmittelwert auf jedem Kontrollvolumen σ_i der Größe $\Delta x_i = |\sigma_i|$ gegeben. Der Wert von $(w_j)_i$ zum Zeitschritt t^n sei mit $(w_j)_i^n$ bezeichnet. Gesucht ist eine lineare Rekonstruktion $((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_{L,R}$ der Daten am linken und rechten Rand der Box σ_i zum Zwischenzeitpunkt $t^{n+\frac{1}{2}}$.

Zunächst berechnen wir die Steigungen $d(w_j)_{i,L}^n$ und $d(w_j)_{i,R}^n$ mittels der Werte von $(w_j)_i^n$ und dem Funktionswert seines linken beziehungsweise rechten Nachbarn

$$d(w_j)_{i,L}^n := \frac{(w_j)_i^n - (w_j)_{i-1}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad d(w_j)_{i,R}^n := \frac{(w_j)_{i+1}^n - (w_j)_i^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}$$

Es wird mit $\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}}$ wiederum der Abstand der Schwerpunkte der Boxen σ_{i+1} und σ_i beziehungsweise σ_i und σ_{i-1} zueinander bezeichnet. Damit das Gesamtverfahren die TVD–Bedingung erfüllt, limitieren wir die Steigungen mit einem in der Literatur üblichen Steigungslimiter. In den meisten numerischen Testbeispielen nutzen wir den bekannten Superbee–Limiter [17]

$$d(w_j)_i^n := \text{superbee}((d(w_j)_i^n)_L, (d(w_j)_i^n)_R)$$

mit

$$\text{superbee}(x, y) := \max \left\{ 0; \min \left(1; 2 \frac{x}{y} \right); \min \left(\frac{x}{y}; 2 \right) \right\}.$$

Über

$$((w_j)_i^n)_{L,R} := (w_j)_i^n \mp d(w_j)_i^n \frac{\Delta x_i}{2} \quad (3.76)$$

berechnen sich die Randdaten zum Zeitpunkt t^n . Dabei ist das negative Vorzeichen für die Berechnung des linken Randwertes zu verwenden.

Um zu einem Verfahren höherer Ordnung in der Zeit zu gelangen, verwenden wir einen MUSCL–Ansatz. Dazu wird eine Evolution der rekonstruierten Randdaten um einen halben Zeitschritt vorgenommen. Die verwendete Evolution muß nicht in konservativer Form geschehen, so daß wir in diesem Schritt die charakteristische Gleichung (3.75) nutzen können. In der Diskretisierung der Ortsableitung ist wiederum die limitierte Steigung $d(w_j)_i^n$ einzusetzen. Für den linken Rand ergibt sich mit $t^{n+\frac{1}{2}} = t^n + \frac{1}{2}\Delta t$ die Darstellung

$$((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_L = ((w_j)_i^n)_L - \lambda_j \frac{\Delta t}{2} d(w_j)_i^n.$$

Zusammenfassend folgt mit (3.76)

$$\begin{aligned} ((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_L &= (w_j)_i^n - d(w_j)_i^n \frac{\Delta x_i}{2} - \lambda_j \frac{\Delta t}{2} d(w_j)_i^n \\ &= (w_j)_i^n - \frac{1}{2} \left(1 + \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \right) d(w_j)_i^n \Delta x_i \end{aligned}$$

und entsprechend für den rechten Rand

$$((w_j)_i^{n+\frac{1}{2}})_R = (w_j)_i^n + \frac{1}{2} \left(1 - \lambda_j \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \right) d(w_j)_i^n \Delta x_i.$$

3.3.1.2 Ein modifizierter Roe–Riemannlöser für das homogene System

Die Idee des approximativen Roe–Riemannlösers besteht darin, die Jakobimatrix $\mathbf{h}'(\mathbf{u})$ durch eine konstante Matrix $\tilde{\mathbf{h}}'(\tilde{\mathbf{u}})$, die sogenannten Roe–Matrix, zu ersetzen und das linearisierte Riemannproblem exakt zu lösen. Dabei hat die

Roe–Matrix in Abhängigkeit von der Wahl von $\tilde{\mathbf{u}}$ als Funktion der Daten des linken und rechten Zustandes,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) &\mapsto \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R),\end{aligned}$$

die folgenden drei Eigenschaften aufzuweisen:

1. Hyperbolizität des linearisierten Systems,
2. Konsistenz mit der exakten Jakobimatrix im Fall $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$:

$$\tilde{\mathbf{h}}'(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{h}'(\mathbf{u}),$$

3. Konservativität an Unstetigkeitsstellen:

$$\mathbf{h}((\mathbf{u}_{i+1})_L) - \mathbf{h}((\mathbf{u}_i)_R) = \tilde{\mathbf{h}}'(\tilde{\mathbf{u}})((\mathbf{u}_{i+1})_L - (\mathbf{u}_i)_R).$$

Im Einklang mit den Eigenschaften der Roe–Matrix nutzen wir den Roe–Pike–Ansatz um die gemittelten Werte $\tilde{\mathbf{W}} := (\tilde{v}, \tilde{H}^*, \tilde{c}^*)^T$, die Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{r}}_j$, Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ und Wellenstärken $\tilde{\alpha}_j$ des homogenen Systems zu bestimmen. Bei diesem Ansatz umgeht man das explizite Erstellen der Roe–Matrix, da diese im Lösungsalgorithmus nicht benötigt wird.

Wir überspringen den Linearisierungsschritt zur Bestimmung vereinfachter analytischer Ausdrücke der Wellenstärken und lösen direkt das algebraische Problem bestehend aus den zwei Gleichungssystemen

$$\Delta \mathbf{u}_{[i,i+1]} = (\mathbf{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L - (\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R = \sum_{j=1}^3 \tilde{\alpha}_j \tilde{\mathbf{r}}_j, \quad (3.77)$$

$$\Delta \mathbf{h}_{[i,i+1]} = \mathbf{h}((\mathbf{u}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})_L) - \mathbf{h}((\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R) = \sum_{j=1}^3 \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{r}}_j, \quad (3.78)$$

indem wir die analytischen Ausdrücke für λ_j und \mathbf{r}_j als Funktionen der gesuchten Mittelwerte $\tilde{\mathbf{W}}$ ansetzen:

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{v} - \tilde{c}^*, \quad \tilde{\lambda}_2 = \tilde{v}, \quad \tilde{\lambda}_3 = \tilde{v} + \tilde{c}^*,$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} - \tilde{c}^* \\ \tilde{H}^* - M^2 \tilde{v} \tilde{c}^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} \\ \frac{1}{2} M^2 \tilde{v}^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v} + \tilde{c}^* \\ \tilde{H}^* + M^2 \tilde{v} \tilde{c}^* \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der sechs Mittelwerte stehen jedoch nur fünf Gleichungen zur Verfügung, da die zweite Gleichung des ersten Systems mit der ersten Gleichung des zweiten Systems identisch ist. Zur Schließung des algebraischen Problems fordern wir, daß für die gemittelten Werte auch die Zustandsgleichung erfüllt sei. In einer Formulierung für die verallgemeinerte Schallgeschwindigkeit muß demnach

$$(\tilde{c}^*)^2 = (\gamma - 1) \left[\tilde{H}^* - \frac{1}{2} M^2 \tilde{v}^2 \right] \quad (3.79)$$

gelten. Für die Ausführung der Berechnungen sei auf [5] verwiesen. Bei bekannten Mittelwerten $\tilde{\mathbf{W}}$ erhält man die Koeffizienten $\tilde{\alpha}_j$ aus dem Gleichungssystem (3.77) in der Form

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2\tilde{c}^*} \left[\Delta\rho_{[i,i+1]}(\tilde{v} + \tilde{c}^*) - \Delta m_{[i,i+1]} - \tilde{c}^* \tilde{\alpha}_2 \right], \quad (3.80)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\gamma - 1}{(\tilde{c}^*)^2} \left[\Delta\rho_{[i,i+1]}(\tilde{H}^* - M^2 \tilde{v}^2) + M^2 \tilde{v} \Delta m_{[i,i+1]} - \Delta(\rho E)_{[i,i+1]} \right], \quad (3.81)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \Delta\rho_{[i,i+1]} - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2. \quad (3.82)$$

Die zwei fehlenden Mittelwerte ergeben sich nun aus dem Gleichungssystem (3.78) zu

$$\tilde{v} := \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad (3.83)$$

und

$$\tilde{H}^* := \frac{\sqrt{\rho_L} H_L^* + \sqrt{\rho_R} H_R^*}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}. \quad (3.84)$$

Da linearisierte Riemannprobleme nur Lösungen mit Stößen zulassen, können Verdünnungswellen, welche einen stetigen Charakter besitzen, nicht richtig wiedergegeben werden. Eine Approximation mittels eines linearisierten Riemannlösers kann daher nicht zu guten numerischen Lösungen führen. In der praktischen Umsetzung führt dies aber nur für sonische und transsonische Verdünnungswellen zu einem signifikanten Fehler. In diesen Fällen können unphysikalische, entropieverletzende Schockwellen auftreten.

Durch die Einführung eines Entropie-fix nach Harten–Hyman werden diese Probleme beseitigt. Dazu werden in den kritischen Fällen die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_j$ geeignet geändert. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in [25].

Schließlich berechnet sich die Flußfunktion $\mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$ zu

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) := h \left((\mathbf{u}_i^{n+\frac{1}{2}})_R \right) + \sum_{\tilde{\lambda}_j \leq 0} \tilde{\alpha}_j \tilde{\lambda}_j \tilde{\mathbf{r}}_j. \quad (3.85)$$

3.3.2 Kompakte Diskretisierung der asymptotischen Flußkorrekturanteile

In diesem Abschnitt definieren wir eine numerische Flußfunktion für die asymptotischen Flußkorrekturterme, welche auf einer kompakten Diskretisierung der räumlichen Ableitungsoperatoren beruht, so daß das numerische Zeitschrittverfahren (3.69) auf der Basis der in Paragraph 3.3.1 hergeleiteten räumlichen und zeitlichen Approximation zweiter Ordnung des homogenen Systems zu einem Gesamtverfahren von zweiter Ordnung in Raum und Zeit für die Euler-Gleichungen erweitert wird.

Unter Ausnutzung der in Abschnitt 3.1.3 angegebenen Variationsmöglichkeiten zur Festlegung der asymptotischen Korrekturflüsse schreiben wir

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s) = \begin{pmatrix} \bar{a}_\rho(\mathbf{u}^s) \\ \bar{a}_m(\mathbf{u}^s) \\ \bar{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u}^s) \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

gemäß

$$\begin{aligned} \bar{a}_\rho(\mathbf{u}^s) &= \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} \partial_x p^s \\ \bar{a}_m(\mathbf{u}^s) &= -\frac{M^2 - 1}{M^2} p^s + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - 1) ((M^2 - 1) p^s \partial_x v^s + p_{\text{NL}} \partial_x v^s) \\ &\quad + \Delta t \frac{M^2 - 1}{M^2} v^s \partial_x p^s, \\ \bar{a}_{(\rho E)}(\mathbf{u}^s) &= -(M^2 - 1) (pv)^s - (p_{\text{NL}} v)^s \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - 1) M^2 v^s ((M^2 - 1) p^s \partial_x v^s + p_{\text{NL}} \partial_x v^s) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} H^{*,s} \partial_x p^s \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} v^s ((M^2 - 1) \partial_x (pv)^s + \partial_x (p_{\text{NL}} v)^s). \end{aligned}$$

Für das Kontrollvolumen $\sigma_i = [x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}]$ erhalten wir unter Verwendung der

Gleichung (3.54) die Darstellung

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_i} \Phi_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathbf{u}^s(x)) \, dx &= \int_{\sigma_i} \left(\partial_x \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x)) + O(\Delta t^2) \right) \, dx \\
&= \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x_{i+\frac{1}{2}})) - \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x_{i-\frac{1}{2}})) + O(\Delta t^2) \\
&= \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x_{i+\frac{1}{2}})) - \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x_{i-\frac{1}{2}})) + O(\Delta t^2). \quad (3.87)
\end{aligned}$$

Wir fordern daher von der numerischen Flußfunktion $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ die Approximationsgüte

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) = \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{u}^s(x_{i+\frac{1}{2}})) + O(\Delta x^2),$$

wodurch sich unter Verwendung des Zeitschrittverfahrens (3.69) ein Gesamtverfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit ergibt.

Für den Zellmittelwert φ_i der physikalischen Größe φ auf der Box σ_i mit dem Schwerpunkt x_i gilt

$$\varphi_i = \varphi(x_i) + O(\Delta x^2),$$

womit über einen zentralen Ansatz

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{i+\frac{1}{2}}) &= \frac{\Delta x_i \varphi_{i+1} + \Delta x_{i+1} \varphi_i}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + O(\Delta x^2) = \underbrace{\frac{\Delta x_i \varphi_{i+1} + \Delta x_{i+1} \varphi_i}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}}_{=:\varphi_{i+\frac{1}{2}}} + O(\Delta x^2) \\
&\quad (3.88)
\end{aligned}$$

folgt. Desweiteren werden die in $\bar{\mathbf{a}}$ auftretenden Ortsableitungen gemäß

$$(\phi \partial_x \varphi)(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{\Delta x_i \phi_{i+1} + \Delta x_{i+1} \phi_i}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \underbrace{\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}}_{=:(\nabla \varphi)_{i+\frac{1}{2}}} + O(\Delta x^2), \quad (3.89)$$

diskretisiert. Hiermit können wir die numerische Flußfunktion in der Form

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\rho(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) \\ \mathcal{A}_m(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) \\ \mathcal{A}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

mit

$$\mathcal{A}_\rho(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) = \frac{\Delta t M^2 - 1}{2} \frac{1}{M^2} (\nabla p)_{i+\frac{1}{2}}^s, \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_m(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) &= -\frac{M^2 - 1}{M^2} p_{i+\frac{1}{2}}^s \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - 1) \left((M^2 - 1) p_{i+\frac{1}{2}}^s (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^s + p_{\text{NL}} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^s \right) \\
&\quad + \Delta t \frac{M^2 - 1}{M^2} v_{i+\frac{1}{2}}^s (\nabla p)_{i+\frac{1}{2}}^s
\end{aligned} \tag{3.92}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^s, \mathbf{u}_{i+1}^s) &= -(M^2 - 1) (pv)_{i+\frac{1}{2}}^s - p_{\text{NL}} v_{i+\frac{1}{2}}^s \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} (\gamma - 1) M^2 \left((M^2 - 1) (pv)_{i+\frac{1}{2}}^s (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^s \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + p_{\text{NL}} v_{i+\frac{1}{2}}^s (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^s \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} H_{i+\frac{1}{2}}^{*,s} (\nabla p)_{i+\frac{1}{2}}^s \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} v_{i+\frac{1}{2}}^s \left((M^2 - 1) (\nabla (pv))_{i+\frac{1}{2}}^s + p_{\text{NL}} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^s \right)
\end{aligned} \tag{3.93}$$

zusammenfassen. Die Verwendung der Darstellung (3.87) innerhalb der Gleichung (3.54) ermöglicht eine vollständige Berechnung der zeitlichen Variation der Zellmittelwerte auf der Basis des Zeitschrittverfahrens (3.69) durch Nutzung der Approximationen (3.91), (3.92) und (3.93) in Kombination mit einer einfachen Linearisierung der implizit gegebenen asymptotischen Flußfunktionen und einer anschließenden iterativen Lösung der resultierenden linearen Gleichungssysteme. Diese Vorgehensweise berücksichtigt zwar die unterschiedlichen Informationsausbreitungsgeschwindigkeiten vernachlässigt jedoch die aus der asymptotischen Analyse gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Eigenschaften des Drucks. Wir werden daher eine Diskretisierung der asymptotischen Flußanteile innerhalb der Gleichung (3.73) auf der Basis der numerischen Flußfunktion (3.90) derart durchführen, daß sowohl die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten berücksichtigt als auch die Resultate der asymptotischen Mehrskalanalyse aus Abschnitt 2.3 einbezogen werden. Hierzu zerlegen wir den Druckterm in qualitativer Übereinstimmung mit der asymptotischen Druckentwicklung in der Form $p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)}$. Anschließend nehmen wir eine gezielte Berechnung des führenden Druckterms $p^{(0)}$ und

des langwelligen Druckanteils $p^{(1)}$ auf der Grundlage einer Druckkorrekturgleichung respektive einer Wellengleichung vor. Einsetzen der Druckzerlegung in die Energiegleichung liefert unter Verwendung der ermittelten Druckterme $p^{(0),s}$ und $p^{(1),s}$ ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung des Druckanteils $p^{(2),s}$ bei der jedoch weitere physikalische Größen zum Zeitpunkt t^s benötigt werden. Wir führen daher eine Fixpunktiteration durch, bei der zunächst $p^{(2),s,\nu}$ auf der Grundlage bekannter Werte ermittelt und anschließend zur Korrektur der homogenen Flüsse gemäß der asymptotischen Flußanteile verwendet wird. Die hierdurch erzielte Variation aller physikalischer Größen nutzen wir daraufhin zur Modifikation des so linearisierten Gleichungssystems, wodurch eine verbesserte Berechnung des hochfrequenten Druckanteils erzielt wird. In den folgenden Abschnitten geben wir eine exakte Beschreibung aller hier im Sinne der Verständlichkeit des Gesamtkontextes bereits im Vorfeld kurz erläuterten Vorgehensweise.

3.3.2.1 Druckzerlegung

Im numerischen Verfahren wird eine Zerlegung des Druckes p der Form

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2p^{(2)} \quad (3.94)$$

vorgenommen, um die aus der asymptotischen Mehrskalenganalyse der Euler-Gleichungen gewonnenen Resultate innerhalb der im numerischen Verfahren implizit diskretisierten asymptotischen Anteile nutzen zu können. Damit tritt im Gegensatz zur durchgeführten theoretischen Analyse kein Restterm der Größenordnung $o(M^2)$ auf und folglich liegt keine exakte Übereinstimmung der auftretenden Druckterme mit den im Bereich der Mehrskalenganalyse genutzten asymptotischen Funktionen vor. Die Wirkung der Zerlegung begründet sich nicht in einer quantitativen Identität, sondern beruht auf einem qualitativ gleichen Verhalten der auftretenden Druckterme. Basierend auf den Ergebnissen der asymptotischen Analyse fordern wir deshalb für einen hinreichend kleinen Entwicklungsparameter M einen räumlich konstanten Druckterm $p^{(0)}$. Zudem setzen wir voraus, daß $p^{(1)}$ die langwelligen akustischen Phänomene der Strömung repräsentiert und $p^{(2)}$ die hochfrequenten Restanteile beinhaltet. Analog zum asymptotischen Mehrskalensatz gelte desweiteren

$$p = p^{(0)} + o(1), \quad M \rightarrow 0 \quad (3.95)$$

sowie

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + o(M), \quad M \rightarrow 0, \quad (3.96)$$

woraus sich die Bedingungen

$$p^{(i)} = o(M^{-1}), \quad M \rightarrow 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.97)$$

ergeben.

Auf die genauen Berechnungsvorschriften der einzelnen Druckkomponenten $p^{(i)}$ werden wir erst im Kapitel 4 eingehen, da sie mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters M einhergehen.

3.3.2.2 Evolution des führenden Druckterms

Gemäß der asymptotischen Mehrskalanalyse wird die Evolution des führenden Druckterms $p^{(0)}$ durch die Druckkompressionsgleichung

$$\frac{1}{\gamma p^{(0)}} \frac{dp^{(0)}}{dt} = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} v^{(0)} \cdot n \, ds \quad (3.98)$$

beschrieben, wobei n die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ darstellt. Hierdurch wird deutlich, daß die zeitliche Entwicklung des Drucks $p^{(0)}$ durch Expansion respektive Kompression über den Rand des Strömungsgebietes festgelegt und folglich durch die Vorgabe der Randbedingungen bestimmt wird. Bei periodischen Rändern oder undurchlässigen Wänden verschwindet die rechte Seite der Gleichung (3.98) identisch und wir erhalten einen zeitlich invarianten Druckterm $p^{(0)}$. Bei Ein- und Ausströmrändern approximieren wir die Gleichung (3.98) für $\Omega = (a, b)$ in der Form

$$p_i^{(0),n+1} = p_i^{(0),n} - \frac{\Delta t}{|\Omega|} \mathcal{A}^{(0)} \left(v_l^n, v_r^n, p_i^{(0),n} \right) \quad (3.99)$$

mit

$$\mathcal{A}^{(0)} \left(v_l^n, v_r^n, p_i^{(0),n} \right) = \gamma p_i^{(0),n} (v_r^n - v_l^n), \quad (3.100)$$

wobei $v_{l,r}^n$ die am linken beziehungsweise rechten Rand des Gebietes Ω vorliegende Strömungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t^n repräsentieren.

3.3.2.3 System der langwelligen Akustik

Die zeitliche Entwicklung des langwelligen akustischen Druckterms $p^{(1)}$ ist der zugrundeliegenden asymptotischen Analyse [10, 19, 20] folgend durch eine Wellengleichung festgelegt. Diese Differentialgleichung läßt sich als System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in der Form

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (3.101)$$

mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{m} \\ p^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}(\mathbf{v}) = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ (c^{(0)})^2 \bar{m} \end{pmatrix}$$

schreiben, mit

$$c^{(0)} = \sqrt{\gamma p^{(0)} / \rho_\Omega},$$

wobei

$$\rho_\Omega(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \rho(x, t) \, dx$$

gilt und $(p^{(1)}, \bar{m})$ den rein langwelligen Anteil der Drucks, beziehungsweise des Impulses beschreibt. Für die Bestimmung der langwelligen Anteile verweisen wir auf Kapitel 4, in dem der diskrete Zerlegungsoperator der physikalischen Variablen in ihre einzelnen Komponenten beschrieben wird. Desweiteren repräsentiert $p^{(0)}$ den führenden Druckterm.

Aus der quasilinearen Form des Systems (3.101) läßt sich direkt ablesen, daß das System

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (c^{(0)})^2 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.102)$$

hyperbolisch ist und die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{c^{(0)}}{M}$$

aufweist. Somit ergibt sich im Fall $M \ll 1$ eine sehr schnelle Informationsausbreitung, die zu einer starken Restriktion der Zeitschrittweite aufgrund der CFL-Bedingung führt. Dieser Zeitschritt liegt für kleine Werte des Entwicklungsparameters M weit unterhalb der zulässigen Zeitschrittweite des verwendeten Verfahrens zur Lösung des homogenen Systems, so daß zum Beispiel die large time step method von LeVeque [16], ein Mehrgitterverfahren oder eine implizite Methode genutzt werden sollte. Wir werden uns im folgenden auf den impliziten Ansatz konzentrieren. Analog zu der im Abschnitt 3.1.2 vorgestellten charakteristischen Formulierung der modifizierten Euler-Gleichungen betrachten wir zur Berechnung der charakteristischen Variablen des Systems (3.101) die in Gleichung (3.102) auftretende Funktionalmatrix in einer lokal linearisierten Form. In dem vorliegenden Fall betrachten wir daher $c^{(0)}$ innerhalb

der charakteristischen Analyse als zeitlich konstant. Die zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ gehörenden Eigenvektoren lauten

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ c^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -c^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Fassen wir die Eigenvektoren in der Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c^{(0)} & -c^{(0)} \end{pmatrix}$$

zusammen, so ergibt sich mit

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2c^{(0)}} \begin{pmatrix} c^{(0)} & 1 \\ c^{(0)} & -1 \end{pmatrix}$$

die charakteristische Form des Systems gemäß

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + \begin{pmatrix} \frac{c^{(0)}}{M} & 0 \\ 0 & -\frac{c^{(0)}}{M} \end{pmatrix} \partial_x \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (3.103)$$

Hierbei lautet der Vektor der charakteristischen Variablen

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{R}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \bar{m} + \frac{1}{c^{(0)}}p^{(1)} \\ \bar{m} - \frac{1}{c^{(0)}}p^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Euler-Gleichungen betrachten wir schwache Lösungen des Systems (3.101). Unter Verwendung des Zellmittelwertes

$$\mathbf{v}_i(t) = (\mathcal{M}_{\sigma_i} \mathbf{v})(t)$$

auf dem Kontrollvolumen σ_i läßt sich das numerische Verfahren durch Einführung einer numerischen Flußfunktion $\mathcal{A}^{(1)}$ in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_i(t) = -\frac{1}{|\sigma_i|} \{ \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i(t), \mathbf{v}_{i+1}(t)) - \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_{i-1}(t), \mathbf{v}_i(t)) \}$$

schreiben. Integrieren wir die Gleichung über das Zeitintervall $[t^n, t^{n+1}]$, so ergibt sich mittels des linearen Einschrittverfahrens

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{g}(t) dt = \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{g}(t^{n+1}) + \mathbf{g}(t^n)) + O(\Delta t^3)$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n &= -\frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^{n+1}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1}) - \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{v}_i^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) \right\} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Für jede Kontrollvolumengrenze, die sich im Inneren des Intervalls Ω befindet, betrachten wir die Komponenten des in Gleichung (3.103) gegebenen Vektors $\tilde{\mathbf{v}}$, die auch als Riemannsche Invarianten bezeichnet werden. Da die Größen $(\tilde{v}_j)_i$ in der (x, t) -Ebene auf der Geraden mit der Steigung $(\lambda_j^{-1})_i$ konstant sind, berechnet sich der auf der gemeinsamen Grenze der Kontrollvolumina σ_i und σ_{i+1} vorliegende Wert $\mathbf{v}^* = (\bar{m}^*, p^{(1),*})^T$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{m}^* + \frac{1}{c^{(0)}} p^{(1),*} &= \bar{m}_i + \frac{1}{c^{(0)}} p_i^{(1)}, \\ \bar{m}^* - \frac{1}{c^{(0)}} p^{(1),*} &= \bar{m}_{i+1} - \frac{1}{c^{(0)}} p_{i+1}^{(1)}. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} p^{(1),*} &= \frac{1}{2} (p_i^{(1)} + p_{i+1}^{(1)}) + \frac{c^{(0)}}{2} (\bar{m}_i - \bar{m}_{i+1}) \\ \bar{m}^* &= \frac{1}{2} (\bar{m}_i + \bar{m}_{i+1}) + \frac{1}{2c^{(0)}} (p_i^{(1)} - p_{i+1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Hierdurch definieren wir die numerische Flußfunktion vermöge

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}) &= \mathbf{g}(\mathbf{v}^*) = \frac{1}{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} p^{(1),*} \\ (c^{(0)})^2 \bar{m}^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mathbb{M}} \begin{pmatrix} c^{(0)}(v_{i,1} - v_{i+1,1}) + (v_{i,2} + v_{i+1,2}) \\ (c^{(0)})^2(v_{i,1} + v_{i+1,1}) + c^{(0)}(v_{i,2} - v_{i+1,2}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Mit (3.104) liegt ein implizites Verfahren vor, so daß zur approximativen Ermittlung des numerischen Flusses zur Zeit t^{n+1} eine Linearisierung der Flußfunktion vorgenommen wird. Wir nutzen hierzu die Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^{n+1}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1}) \\ &= \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) + \frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)}{\partial \mathbf{v}_i} \underbrace{(\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n)}_{=:\Delta \mathbf{v}_i} \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)}{\partial \mathbf{v}_{i+1}} \underbrace{(\mathbf{v}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{v}_{i+1}^n)}_{=:\Delta \mathbf{v}_{i+1}} + O(\|\Delta \mathbf{v}_i\|^2) + O(\|\Delta \mathbf{v}_{i+1}\|^2). \end{aligned}$$

Die auftretenden Funktionalmatrizen weisen die Gestalt

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})}{\partial \mathbf{v}_i} = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} c^{(0)} & 1 \\ (c^{(0)})^2 & c^{(0)} \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})}{\partial \mathbf{v}_{i+1}} = \frac{1}{2M} \begin{pmatrix} -c^{(0)} & 1 \\ (c^{(0)})^2 & -c^{(0)} \end{pmatrix}$$

auf.

Randbedingungen

Bei den betrachteten Strömungsfeldern unterscheiden wir periodische Ränder, undurchlässige Wände, sowie Ein- und Ausströmränder.

In Fall periodischer Ränder hatten wir in Abschnitt 2.1 vorausgesetzt, daß alle im Strömungsfeld auftretenden physikalischen Größen ein periodisches Verhalten mit einer Frequenz $k = \frac{m}{|\Omega|}$ mit $m \in \mathbb{N}$ aufweisen. Somit können wir die Randflüsse gemäß

$$\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1}) = \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_1)$$

und

$$\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_1)$$

definieren, wodurch sowohl die explizite Bestimmung der Flüsse als auch der zugehörigen Funktionalmatrizen analog zu den inneren Kontrollvolumengrenzen verläuft.

Ein Körperwand stellt vereinbarungsgemäß eine feste Wand dar, die vom Fluid nicht durchströmt wird. Damit verschwindet die Geschwindigkeitskomponente in Wandnormalenrichtung, wodurch $m = \rho v = 0$ an der Wand gilt und sich die Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{v}^* im betrachteten Fall einer an der rechten Grenze des Intervalls Ω befindlichen Wand

$$\begin{aligned} \overline{m}^* + \frac{1}{c^{(0)}} p^{(1),*} &= \overline{m}_N + \frac{1}{c^{(0)}} p_N^{(1)} \\ \overline{m}^* &= 0 \end{aligned}$$

ergeben. Der numerische Fluß stellt daher im Fall einer festen Wand ausschließlich eine Funktion der Strömungsgrößen des Randkontrollvolumens dar und

läßt sich in der Form

$$\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1}) = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p_N^{(1)} + c^{(0)} \bar{m}_N \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} v_{N,2} + c^{(0)} v_{N,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, so daß für eine implizite Formulierung lediglich die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1})}{\partial \mathbf{v}_N} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} c^{(0)} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berücksichtigt werden muß. Für die linke Grenze des Intervalls erhalten wir analog

$$\mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p_1^{(1)} - c^{(0)} \bar{m}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} v_{1,2} - c^{(0)} v_{1,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -c^{(0)} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir den qualitativen Verlauf der Charakteristiken, so ergibt sich aufgrund der Vorzeichenstruktur der Eigenwerte $\lambda_1 = -\lambda_2$, daß am Ein- und Ausströmrand eine Größe aus dem Strömungsfeld extrapoliert und die zweite Größe von außen vorgegeben werden muß.

Für den Fall des Einströmrandes geben wir hierbei den Impuls \bar{m}_e als Funktion der Zeit vor, wodurch sich im Fall eines linksseitigen Einströmrandes für den Zustandsvektor \mathbf{v}^* die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{m}^* - \frac{1}{c^{(0)}} p^{(1),*} &= \bar{m}_1 - \frac{1}{c^{(0)}} p_1^{(1)} \\ \bar{m}^* &= \bar{m}_e(t) \end{aligned}$$

ergeben. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p_1^{(1)} - c^{(0)} (\bar{m}_1 - \bar{m}_e) \\ (c^{(0)})^2 \bar{m}_e \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} v_{1,2} - c^{(0)} (v_{1,1} - \bar{m}_e) \\ (c^{(0)})^2 \bar{m}_e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog zur festen Wand muß lediglich die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)}{\partial \mathbf{v}_1} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -c^{(0)} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt werden, da der Impuls explizit gegeben ist. Am Ausströmrand wird im Gegensatz zum Einströmrand der Druck $p_e^{(1)}$ anstelle des Impulses vorgegeben, so daß wir für einen rechtsseitigen Ausströmrand unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \bar{m}^* + \frac{1}{c^{(0)}} p^{(1),*} &= \bar{m}_N + \frac{1}{c^{(0)}} p_N^{(1)} \\ p^{(1),*} &= p_e^{(1)}(t) \end{aligned}$$

den Flußvektor

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1}) &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p_e^{(1)} \\ (c^{(0)})^2 \left[\bar{m}_N + \frac{1}{c^{(0)}} (p_N^{(1)} - p_e^{(1)}) \right] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{M} \begin{pmatrix} p_e^{(1)} \\ (c^{(0)})^2 \left[v_{N,1} + \frac{1}{c^{(0)}} (v_{N,2} - p_e^{(1)}) \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die Funktionalmatrix

$$\frac{\partial \mathcal{A}^{(1)}(\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_{N+1})}{\partial \mathbf{v}_N} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (c^{(0)})^2 & c^{(0)} \end{pmatrix}$$

erhalten.

Lineare Gleichungssystemlöser

Die Diskretisierung des Systems der langwelligen Akustik auf der Basis eines impliziten Zeitschrittverfahrens führt bei der beschriebenen Linearisierung der numerischen Flußfunktion auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der zeitlichen Veränderung des Druckterms $p^{(1)}$. Die Matrix \mathbf{A} des Gleichungssystems weist im Kontext der gewählten Diskretisierung des Strömungsgebietes eine Block-Tridiagonalgestalt auf, wobei im Fall periodischer Randbedingungen zudem die Matrixkomponenten $A_{1,N}$ und $A_{N,1}$ von Null verschieden sind. Zur Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme stellen präkonditionierte Krylov-Unterraum-Verfahren ein effektives Mittel dar. Wir nutzen hierbei den von van der Vorst entwickelten BiCGSTAB-Algorithmus [26], wobei das lineare Gleichungssystem zunächst mittels einer unvollständigen LU-Zerlegung der Matrix \mathbf{A} geeignet vorkonditioniert wird.

3.3.2.4 Die Energie–Poisson–Gleichungen

Zur Evolution des hochfrequenten Druckanteils $p^{(2)}$ ersetzen wir innerhalb jeder Gleichung des Zeitintegrationsverfahrens (3.73) die auf der linken Seite auftretende Totalenergie pro Einheitsvolumen $(\rho E)^s$ unter Verwendung der Zustandsgleichung durch

$$(\rho E)^s = \frac{p^s}{\gamma - 1} + \frac{M^2}{2} \rho^s (v^s)^2.$$

Einsetzen der Druckkomposition

$$p = p^{(0)} + Mp^{(1)} + M^2 p^{(2)}$$

liefert für die Energiegleichung innerhalb (3.73)₁ die Darstellung

$$\begin{aligned} M^2 \frac{p_i^{(2), \widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0), \widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} - M \frac{p_i^{(1), \widetilde{n+1}}}{\gamma - 1} - \frac{M^2}{2} \rho_i^{\widetilde{n+1}} \left(v_i^{\widetilde{n+1}} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) - \mathcal{A}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Auf der Basis der Druckkompressionsgleichung und der Wellengleichung können $p^{(0), n+1}$ und $p^{(1), n+1}$ bestimmt und als Approximation für den Hintergrunddruck $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ innerhalb der Gleichungen (3.73)₁ und (3.73)₃ genutzt werden. Die Größe $\mathbf{u}^{\widetilde{n}}$ kann hingegen als eine Variation von \mathbf{u}^n auf dem Zeitebene $t^{\widetilde{n}}$ aufgefaßt werden, weshalb stets $p^{(0), \widetilde{n}} = p^{(0), n}$ und $p^{(1), \widetilde{n}} = p^{(1), n}$ verwendet wird. In der Bestimmungsgleichung (3.106) und den aus (3.73)_{2,3} durch entsprechendes Vorgehen gewonnenen Gleichungen für die hochfrequenten Druckanteile $p^{(2), s}$ sind die physikalischen Größen ρ^s , v^s und $H^{*, s}$ auf der rechten Seite noch unbekannt. Wir werden deshalb $p^{(2), s}$ zusammen mit den Variablen $(\rho^s, m^s, (\rho E)^s)$ über eine Fixpunktiteration bestimmen und versehen hierzu alle Variablen in Gleichung (3.106) mit dem Iterationsindex ν . Zur Initialisierung der innerhalb der Iteration benötigten Variablen nutzen wir die zur Verfügung stehende Approximation des homogenen Systems gemäß

$$v^{\widetilde{n+1}, 0} = v_h^{n+1}, H^{*, \widetilde{n+1}, 0} = H_h^{*, n+1} \text{ und } \rho^{\widetilde{n+1}, 0} = \rho_h^{n+1}$$

für (3.73)₁, sowie die Daten zum Zeitpunkt t^n

$$v^{\widetilde{n}, 0} = v^n, H^{*, \widetilde{n}, 0} = H^{*, n} \text{ und } \rho^{\widetilde{n}, 0} = \rho^n$$

für (3.73)₂ und schließlich die Lösung des Systems (3.73)₁

$$v^{n+1,0} = v^{\widetilde{n+1}}, H^{*,n+1,0} = H^{*,\widetilde{n+1}} \text{ und } \rho^{n+1,0} = \rho^{\widetilde{n+1}}$$

für (3.73)₃.

Spalten wir diejenigen Summanden innerhalb der asymptotischen Flußfunktion $\mathcal{A}_{(\rho E)}$ aus Gleichung (3.73)₁ ab, die als Faktor die hochfrequente Druckkomponente $p^{(2),\widetilde{n+1},\nu}$ aufweisen, dann erhalten wir für den asymptotischen Energieflußanteil gemäß (3.93) die Darstellung

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\ &= \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\ & \quad - (M^2 - 1)M^2 (p^{(2)}v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2}(\gamma - 1)M^4(M^2 - 1)(p^{(2)}v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2}(M^2 - 1)H_{i+\frac{1}{2}}^{*,s} (\nabla p^{(2)})_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2}(M^2 - 1)M^2 v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} (\nabla(p^{(2)}v))_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \end{aligned} \quad (3.107)$$

mit

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) \\ &= -(M^2 - 1) \left((p^{(0),n+1} + Mp^{(1),n+1})v^{\widetilde{n+1},\nu} \right)_{i+\frac{1}{2}} - p_{\text{NL}} v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2}(\gamma - 1)M^2 \left((M^2 - 1) \left((p^{(0),n+1} + Mp^{(1),n+1})v^{\widetilde{n+1},\nu} \right)_{i+\frac{1}{2}} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \right. \\ & \quad \left. + p_{\text{NL}} v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \right) \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \frac{M^2 - 1}{M^2} H_{i+\frac{1}{2}}^{*,s} \left(\nabla(p^{(0),n+1} + Mp^{(1),n+1}) \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \left((M^2 - 1) \left(\nabla((p^{(0),n+1} + Mp^{(1),n+1})v^{\widetilde{n+1},\nu}) \right)_{i+\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + p_{\text{NL}} (\nabla v)_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Folglich ergibt sich zur Berechnung von $p_i^{(2),\widetilde{n+1},\nu}$, $i = 1, \dots, N$ ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}^{\widetilde{n+1},\nu} \mathbf{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \mathbf{b}^{\widetilde{n+1},\nu} \quad (3.109)$$

mit

$$\mathbf{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \begin{pmatrix} p_1^{(2),\widetilde{n+1},\nu} \\ \vdots \\ p_N^{(2),\widetilde{n+1},\nu} \end{pmatrix} \quad \text{und einer rechten Seite} \quad \mathbf{b}^{\widetilde{n+1},\nu} = \begin{pmatrix} b_1^{\widetilde{n+1},\nu} \\ \vdots \\ b_N^{\widetilde{n+1},\nu} \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten von $\mathbf{b}^{\widetilde{n+1},\nu}$ ergeben sich aus der Kombination der Gleichungen (3.106), (3.107) und (3.108) zu

$$\begin{aligned} b_i^{\widetilde{n+1},\nu} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n+1}}{\gamma - 1} - M \frac{p_i^{(1),n+1}}{\gamma - 1} - \frac{M^2}{2} \rho_i^{\widetilde{n+1},\nu} \left(v_i^{\widetilde{n+1},\nu} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) - \widetilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Für die nicht verschwindenden Matrixkomponenten erhalten wir unter Berücksichtigung

sichtigung von $\Delta x_i = |\sigma_i|$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{i,i-1}^{\widetilde{n+1},\nu} &= \frac{\Delta t(M^2 - 1)}{\Delta x_i} \left\{ M^2 \frac{\Delta x_i}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} v_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu} + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} H_{i-\frac{1}{2}}^{*,\widetilde{n+1},\nu} \right. \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} M^2 \frac{1}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} v_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu} v_{i-\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\
&\quad \left. - \frac{\Delta t}{2} M^4 (\gamma - 1) \frac{\Delta x_i}{2\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} v_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu} (\nabla v^{\widetilde{n+1},\nu})_{i-\frac{1}{2}} \right\}, \\
\mathbf{A}_{i,i}^{\widetilde{n+1},\nu} &= \frac{M^2}{\gamma - 1} - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} \mathbf{A}_{i+1,i}^{\widetilde{n+1},\nu} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \mathbf{A}_{i-1,i}^{\widetilde{n+1},\nu} \\
&= \frac{M^2}{\gamma - 1} \\
&\quad - \frac{\Delta t(M^2 - 1)}{\Delta x_i} \left\{ \frac{M^2}{2} \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) v_i^{\widetilde{n+1},\nu} \right. \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{*,\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{H_{i-\frac{1}{2}}^{*,\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} M^2 \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{v_{i-\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) v_i^{\widetilde{n+1},\nu} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} M^4 (\gamma - 1) v_i^{\widetilde{n+1},\nu} \\
&\quad \left. \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (\nabla v^{\widetilde{n+1},\nu})_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (\nabla v^{\widetilde{n+1},\nu})_{i-\frac{1}{2}} \right) \right\}, \\
\mathbf{A}_{i,i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} &= \frac{\Delta t(M^2 - 1)}{\Delta x_i} \left\{ -M^2 \frac{\Delta x_i}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} + \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} H_{i+\frac{1}{2}}^{*,\widetilde{n+1},\nu} \right. \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} M^2 \frac{1}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} v_{i+\frac{1}{2}}^{\widetilde{n+1},\nu} \\
&\quad \left. + \frac{\Delta t}{2} M^4 (\gamma - 1) \frac{\Delta x_i}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu} (\nabla v^{\widetilde{n+1},\nu})_{i+\frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Verwendung des ermittelten hochfrequenten Druckterms $p^{(2),\widetilde{n+1},\nu}$ ermöglicht nun eine vollständige Bestimmung der asymptotischen Korrekturanteile über

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu+1} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Die iterative Vorgehensweise liefert eine Folge von Druckanteilen $\{p^{(2),\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.109) sowie Folgen $\{\rho^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$, $\{m^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ und $\{(\rho E)^{\widetilde{n+1},\nu}\}_{\nu=0}^k$ über die Flußkorrekturgleichung (3.111). Als Abbruchkriterium der Fixpunktiteration verwenden wir die diskrete L_1 -Norm der Flußkorrekturänderung mittels

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\Delta t}{|\Omega|} \sum_{i=1}^N \left| \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu-1}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1},\nu-1}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1},\nu-1}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1},\nu-1}) \right) \right\|_{\infty} < \varepsilon \end{aligned} \quad (3.112)$$

mit einer extern vorgegebenen Genauigkeitsschranke ε . Zur Lösung des auftretenden linearen Gleichungssystems kann in Sinne einer Erweiterung auf mehrere Raumdimensionen analog zum System der langwelligen Akustik eine ILU-Vorkonditionierung in Kombination mit einem BiCGSTAB-Verfahren verwendet werden. Im räumlich eindimensionalen Fall bietet sich jedoch eine direkte Ausführung der LU-Zerlegung der Tridiagonalmatrix $\mathbf{A}^{\widetilde{n+1},\nu}$ an. Die Algorithmen für den periodischen wie auch nicht periodischen Fall lassen sich aus [23] entnehmen.

Analog verfahren wir für die zwei verbleibenden Gleichungen (3.73)₂ und (3.73)₃, wobei stets ein Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{\widetilde{n},\nu} \mathbf{p}^{(2),\widetilde{n},\nu} = \mathbf{b}^{\widetilde{n},\nu} \quad (3.113)$$

respektive

$$\mathbf{A}^{n+1,\nu} \mathbf{p}^{(2),n+1,\nu} = \mathbf{b}^{n+1,\nu} \quad (3.114)$$

gelöst werden muß, bei dem die jeweils auftretende Matrix eine zu $\mathbf{A}^{\widetilde{n+1},\nu}$ äquivalente Struktur aufweist und die Komponenten der entsprechenden rechten

Seite die Darstellung

$$\begin{aligned}
b_i^{\tilde{n},\nu} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n}}{\gamma - 1} - M \frac{p_i^{(1),n}}{\gamma - 1} - \frac{M^2}{2} \rho_i^{\tilde{n},\nu} (v_i^{\tilde{n},\nu})^2 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\tilde{n},\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{\tilde{n},\nu}) - \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{\tilde{n},\nu}, \mathbf{u}_i^{\tilde{n},\nu}) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\tilde{n}+1}, \mathbf{u}_{i+1}^{\tilde{n}+1}) + \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{\tilde{n}+1}, \mathbf{u}_i^{\tilde{n}+1}) \right\} \quad (3.115)
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
b_i^{n+1,\nu} &= (\rho E)_i^n - \frac{p_i^{(0),n+1}}{\gamma - 1} - M \frac{p_i^{(1),n+1}}{\gamma - 1} - \frac{M^2}{2} \rho_i^{n+1,\nu} (v_i^{n+1,\nu})^2 \\
&\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{n+1,\nu}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1,\nu}) - \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{n+1,\nu}, \mathbf{u}_i^{n+1,\nu}) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_i^{\tilde{n}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\tilde{n}}) - \tilde{\mathcal{A}}_{(\rho E)}(\mathbf{u}_{i-1}^{\tilde{n}}, \mathbf{u}_i^{\tilde{n}}) \right\} \quad (3.116)
\end{aligned}$$

besitzen.

Entsprechend der Vorschrift (3.111) zur iterativen Lösung der Gleichung (3.73)₁ wird auch für die Gleichungen (3.73)₂ und (3.73)₃ eine derartige Iteration durchgeführt und der Iterationsabbruch jeweils analog zu (3.112) vorgenommen.

3.3.3 Exakte Projektion im Fall sehr kleiner Entwicklungsparameter

Aufgrund der in Abschnitt 3.3.2 gewählten kompakten Operatoren zur Diskretisierung der Ortsableitungen liegt im Grenzfall $M \rightarrow 0$ bei verschwindender Kompression von außen keine exakte Projektion des Geschwindigkeitsfeldes auf seinen divergenzfreien Anteil vor. Die Diskretisierung der zweiten Ableitungen innerhalb der Energie–Poisson–Gleichungen läßt sich nicht als Hintereinanderausführung des verwendeten diskreten Divergenzoperators auf den diskreten Operator des Gradienten darstellen, wodurch keine exakte Projektion realisiert werden kann.

Um den Sachverhalt der diskreten Operatorwahl zu verdeutlichen, nutzen wir zur Anschauung eine einfache inkompressible Modellgleichung. Es sei das System

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0,\end{aligned}$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ und einer skalaren Funktion $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Es bezeichne mit $\nabla_g(\cdot)$ den nicht näher bestimmten diskreten Operator des Gradienten, während der diskrete Divergenzoperator im folgenden mit $\nabla_d \cdot (\cdot)$ bezeichnet wird. Die Zeitableitung sei wie folgt diskretisiert:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \Delta t (\mathbf{v} \cdot \nabla_g \mathbf{v} - \nabla_g \phi)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Um sicher zu stellen, daß unter der Voraussetzung $\nabla_d \cdot \mathbf{v}^n = 0$ die berechnete Geschwindigkeit zum Zeitschritt $n + 1$ die Divergenzbedingung

$$\nabla_d \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0$$

exakt erfüllt, wird $\nabla_g \phi^{n+\frac{1}{2}}$ über ein Poissonproblem

$$\Delta \phi^{n+\frac{1}{2}} = \nabla_d \cdot \left(\nabla_g \phi^{n+\frac{1}{2}} \right) = \nabla_d \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla_g \mathbf{v})^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.117)$$

bestimmt. Dann gilt:

$$\nabla_d \cdot \mathbf{v}^{n+1} = \nabla_d \cdot \mathbf{v}^n - \Delta t \nabla_d \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla_g \mathbf{v} - \nabla_g \phi)^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Werden die Diskretisierungen für den Divergenzoperator $\nabla_d \cdot (\cdot)$ und den Operator $\nabla_g(\cdot)$ nicht konsistent zur Wahl des diskreten Laplaceoperators in (3.117) gewählt, so liegt keine exakte Projektion vor und im Falle der kompakten Diskretisierungen aus 3.3.2 gilt bestenfalls

$$\nabla_d \cdot \mathbf{v}^{n+1} = O(\Delta t \Delta x^2) = O(\Delta x^3).$$

Im folgenden beschreiben wir eine Vorgehensweise, bei der im Fall $M \rightarrow 0$ eine exakte Projektion der Geschwindigkeit auf ihren divergenzfreien Anteil vorliegt, falls keine Kompression über den Rand des Gebietes erfolgt. Im Fall $M \neq 0$ liefert die diskrete Projektion Exaktheit im Sinne einer Projektion auf ein Geschwindigkeitsfeld mit vorgeschriebener Divergenz.

Die Idee, gleichzeitig die Godunovflüsse des homogenen Systems nutzen zu können und insbesondere im Fall $M \ll 1$ diskret eine exakte Projektion zu

realisieren, beruht auf der Tatsache, daß wir im nahezu inkompressiblen Fall nicht auf die bisher verwendete Ortsdiskretisierung zur Herleitung des Poissonproblems angewiesen sind [22].

Wir werden das im Abschnitt 3.3.2 beschriebene Verfahren nutzen, um die Evolution eines Zeitschrittes auszuführen. Liegt der Wert des Entwicklungsparameters M oberhalb eines zu wählenden Schwellenwertes, so ist keine exakte Projektion nötig und die Berechnung des Zeitschrittes abgeschlossen. Erst für Werte von M unterhalb des Schwellenwertes müssen die Impulse eine weitere Korrektur erfahren, damit eine exakte Projektion gewährleistet wird.

Wir ändern die Notation des vollständig impliziten Zeitschrittverfahrens (3.73) wie folgt ab,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}) \right\}, \\ \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n+1}}) + \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n+1}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n+1}}) \right\}, \\ \mathbf{u}_i^{n+1,*} &= \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left\{ \mathcal{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathcal{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) \right\} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_{i+1}^{\widetilde{n}}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{\widetilde{n}}, \mathbf{u}_i^{\widetilde{n}}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}(\mathbf{u}_i^{n+1,*}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) - \mathcal{A}(\mathbf{u}_{i-1}^{n+1,*}, \mathbf{u}_i^{n+1}) \right\}, \end{aligned}$$

mit

$$\rho^{n+1} = \rho^{n+1,*} \quad \text{und} \quad (\rho E)^{n+1} = (\rho E)^{n+1,*}.$$

Für die Impulse setzen wir zunächst

$$m_i^{**} = m_i^{n+1,*} - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} (M^2 - 1) \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{(2),n+1,*} - p_{i-\frac{1}{2}}^{(2),n+1,*} \right),$$

und schließlich

$$m_i^{n+1} = m_i^{**} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} (M^2 - 1) \left(p_{i+\frac{1}{2}}^{(2),n+1} - p_{i-\frac{1}{2}}^{(2),n+1} \right). \quad (3.118)$$

Um die Impulse zum neuen Zeitschritt berechnen zu können, muß $p^{(2),n+1}$ erneut über die Lösung eines Poissonproblems bestimmt werden. Wir wählen

dazu eine Diskretisierung der Energiegleichung $\partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho H v) = 0$ der Form

$$\begin{aligned}
& (\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^n \\
&= -\frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ ((\rho H v)^{n+1} + (\rho H v)^n)(x_{i+\frac{1}{2}}) \right. \\
&\quad \left. - ((\rho H v)^{n+1} + (\rho H v)^n)(x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \\
&\stackrel{(3.118)}{=} -\frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ \left(H^{n+1}(m^{**} + \frac{\Delta t}{2}(M^2 - 1)\partial_x p^{(2),n+1}) \right)(x_{i+\frac{1}{2}}) \right. \\
&\quad \left. - \left(H^{n+1}(m^{**} + \frac{\Delta t}{2}(M^2 - 1)\partial_x p^{(2),n+1}) \right)(x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ (\rho H v)^n(x_{i+\frac{1}{2}}) - (\rho H v)^n(x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \tag{3.119}
\end{aligned}$$

Die in (3.119) auftretenden inneren Ableitungsoperatoren werden nun wie folgt diskretisiert, um eine zu der verwendeten zentralen äußeren Diskretisierung der Ableitung der Flußfunktion konsistente innere Diskretisierung zu gewährleisten,

$$\begin{aligned}
(\phi \partial_x \varphi)(x_{i+\frac{1}{2}}) &= \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} (\varphi_{i+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}} (\varphi_{i+\frac{3}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2}}) \right) \\
&\quad + O(\Delta x^2) \\
&= \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}}{4\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \varphi_{i+2} + \left(2 - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right) \varphi_{i+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(2 - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) \varphi_i - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \varphi_{i-1} \right\} + O(\Delta x^2) \tag{3.120}
\end{aligned}$$

In Gleichung (3.119) sind alle Variablen bis auf $p^{(2),n+1}$ bekannt. Um zu einem numerisch stabilen Verfahren zu gelangen, muß $(\rho E)^{n+1}$ über die Zustandsgleichung durch

$$(\rho E)^{n+1} = \frac{1}{\gamma - 1} (p^{(0)} + M p^{(1)} + M^2 p^{(2)})^{n+1} + \frac{1}{2} M^2 \frac{(m^2)^{n+1,*}}{\rho^{n+1}}$$

ersetzt werden. Innerhalb der kinetischen Energie können die Impulse durch die mit * gekennzeichnete Zwischenlösung approximiert werden, da der Einfluß der kinetischen Energie auf die Gesamtenergie $(\rho E)^{n+1}$ für $M \rightarrow 0$ verschwindet.

Die vollständig diskrete Form der Energiegleichung lautet somit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\gamma - 1} (p_i^{(0),n+1} + M p_i^{(1),n+1} + M^2 p_i^{(2),n+1}) + \frac{1}{2} M^2 \frac{(m_i^{n+1,*})^2}{\rho_i^{n+1}} - (\rho E)_i^n \\
&= -\frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ (H^{n+1} m^{**})_{i+\frac{1}{2}} - (H^{n+1} m^{**})_{i-\frac{1}{2}} \right\} \\
& \quad - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_i} (M^2 - 1) \frac{H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{4\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} p_{i+2}^{(2),n+1} + \left(2 - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right) p_{i+1}^{(2),n+1} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. - \left(2 - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) p_i^{(2),n+1} - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} p_{i-1}^{(2),n+1} \right\} \\
& \quad + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_i} (M^2 - 1) \frac{H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{4\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} p_{i+1}^{(2),n+1} + \left(2 - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right) p_i^{(2),n+1} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. - \left(2 - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-\frac{3}{2}}} \right) p_{i-1}^{(2),n+1} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-\frac{3}{2}}} p_{i-2}^{(2),n+1} \right\} \\
& \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left\{ (\rho H v)_{i+\frac{1}{2}}^n - (\rho H v)_{i-\frac{1}{2}}^n \right\}. \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von $p^{(2),n+1}$,

$$\overline{\mathbf{A}}^{n+1} \mathbf{p}^{(2),n+1} = \overline{\mathbf{b}}^{n+1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p}^{(2),n+1} = \begin{pmatrix} p_1^{(2),n+1} \\ \vdots \\ p_N^{(2),n+1} \end{pmatrix}$$

und Einträgen im Vektor der rechten Seite

$$\begin{aligned}
\overline{b}_i^{n+1} &= (\rho E)_i^n - \frac{1}{\gamma - 1} (p^{(0)} + M p^{(1)})_i^{n+1} - \frac{1}{2} M^2 \frac{(m_i^2)^{n+1,*}}{\rho_i^{n+1}} \\
& \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left(H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} m_{i+\frac{1}{2}}^{**} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} m_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) \\
& \quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left((\rho H v)_{i+\frac{1}{2}}^n - (\rho H v)_{i-\frac{1}{2}}^n \right).
\end{aligned}$$

Die Matrix $\overline{\mathbf{A}}^{n+1}$ stellt eine schwach gekoppelte Bandmatrix dar, deren nicht

verschwindenden Matrixkomponenten sich wie folgt berechnen,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{A}}_{i,i-2}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{3}{2}}\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\
\overline{\mathbf{A}}_{i,i-1}^{n+1} &= -\frac{\Delta t^2\Delta x_{i+1}}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\
&\quad + \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i}\left(2 - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-\frac{3}{2}}}\right)(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\
\overline{\mathbf{A}}_{i,i}^{n+1} &= \frac{\mathbf{M}^2}{\gamma - 1} - \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left(2 - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}\right)(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i}\left(2 - \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\right)(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\
\overline{\mathbf{A}}_{i,i+1}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}\left(2 - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}}\right)(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\
&\quad - \frac{\Delta t^2\Delta x_{i-1}}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\
\overline{\mathbf{A}}_{i,i+2}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i+\frac{3}{2}}}(\mathbf{M}^2 - 1)H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Liegt eine räumlich konstante Dichteverteilung vor, so ergibt sich im Grenzfall $\mathbf{M} = 0$ eine ebenfalls räumlich konstante Enthalpie H , wodurch bei einer äquidistanten Unterteilung

$$\overline{\mathbf{A}}_{i,i-1}^{n+1} = \overline{\mathbf{A}}_{i,i+1}^{n+1} = 0$$

folgt. Hierdurch ergibt sich eine reduzierbare Matrix und eine Entkoppelung des Druckterms $p^{(2),n+1}$. Deshalb sind auch bei nicht äquidistanten Diskretisierungen und einer räumlich leicht variierenden Enthalpie im Fall $\mathbf{M} \rightarrow 0$ verstärkt numerische Auslöschungseffekte zu erwarten. Zur Vermeidung derartiger numerischer Phänomene werden häufig sogenannte *Staggered-Grid-Techniken* verwendet. Wir nutzen eine in [2] vorgestellte Vorgehensweise, bei der, übertragen auf den vorliegenden Fall, zur Stabilisierung des Verfahrens eine Addition des Terms

$$\begin{aligned}
&-\frac{\Delta t^2}{4\Delta x_i}(\mathbf{M}^2 - 1)\left\{\frac{\Delta x_i\Delta x_{i+1}}{4}\left(H^{n+1}\left(\partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu} - \partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu-1}\right)\right)(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\
&\quad \left.-\frac{\Delta x_{i-1}\Delta x_i}{4}\left(H^{n+1}\left(\partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu} - \partial_x^3 p^{(2),n+1,\nu-1}\right)\right)(x_{i-\frac{1}{2}})\right\}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

innerhalb des Poissonproblems vorgenommen wird und $p^{(2),n+1}$ nun iterativ bestimmt werden muß. Ergibt sich eine hinsichtlich des Iterationsindizes ν auskonvergierte Druckverteilung, so verschwinden die Zusatzterme, wodurch sichergestellt ist, daß im Grenzfall die ursprünglichen Gleichungen gelöst werden. Hinsichtlich des betrachteten Gleichungssystems führt dieser Term auf eine stets irreduzible Gesamtmatrix, wodurch die Druckentkopplung vermieden wird. Die auftretenden Ableitungen werden gemäß

$$\begin{aligned} (\phi \partial_x^3 \varphi)(x_{i+\frac{1}{2}}) &= \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x_i \Delta x_{i+\frac{1}{2}} \Delta x_{i+1}} \left\{ \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \varphi_{i+2} - \left(2 + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right) \varphi_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) \varphi_i - \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \varphi_{i-1} \right\} + O(\Delta x^2) \\ &= \phi_{i+\frac{1}{2}} (\nabla^3 \varphi)_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.123)$$

diskretisiert und zur Initialisierung

$$p^{(2),n+1,-1} = p^{(2),n+1,*}$$

verwendet. Die durch den Stabilisierungsterm (3.122) unter Nutzung der Diskretisierung (3.123) auftretenden zusätzlichen Matrixeinträge lauten folglich

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{A}}_{i,i-2}^{Z,n+1} &= -\frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{3}{2}}\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \overline{\mathbf{A}}_{i,i-1}^{Z,n+1} &= \frac{\Delta t^2 \Delta x_{i+1}}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i} \left(2 + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-\frac{3}{2}}} \right) (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \overline{\mathbf{A}}_{i,i}^{Z,n+1} &= -\frac{\Delta t^2}{16\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(2 + \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right) (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i} \left(2 + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right) (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \overline{\mathbf{A}}_{i,i+1}^{Z,n+1} &= \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \left(2 + \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} \right) (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &\quad + \frac{\Delta t^2 \Delta x_{i-1}}{16\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \overline{\mathbf{A}}_{i,i+2}^{Z,n+1} &= -\frac{\Delta t^2}{16\Delta x_{i+\frac{1}{2}}\Delta x_{i+\frac{3}{2}}} (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^{n+1} \mathbf{p}^{(2),n+1,\nu} = \mathbf{b}^{\nu-1} \quad (3.124)$$

mit der vom Iterationsindex unabhängigen Matrix \mathbf{A}^{n+1} ,

$$\mathbf{A}^{n+1} = \overline{\mathbf{A}}^{n+1} + \mathbf{A}^{Z,n+1}.$$

Die Matrix \mathbf{A}^{n+1} weist im Gegensatz zu $\overline{\mathbf{A}}^{n+1}$ eine kompakte Bandstruktur auf. Die nicht verschwindenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,i-1}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i} (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \mathbf{A}_{i,i}^{n+1} &= \frac{M^2}{\gamma - 1} - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_{i-\frac{1}{2}}\Delta x_i} (M^2 - 1) H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \\ \mathbf{A}_{i,i+1}^{n+1} &= \frac{\Delta t^2}{4\Delta x_i\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} (M^2 - 1) H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}. \end{aligned}$$

Da für die Entropie H stets $H > 0$ gilt, ist die Matrix \mathbf{A}^{n+1} für alle $M > 0$ diagonaldominant und das System (3.124) kann mit einem der in Abschnitt 3.3.2.4 angesprochenen Verfahren gelöst werden.

Für die iterationsabhängige rechte Seite $\mathbf{b}^{\nu-1}$ gilt entsprechend

$$\begin{aligned} b_i^{\nu-1} &= (\rho E)_i^n - \frac{1}{\gamma - 1} (p^{(0)} + M p^{(1)})_i^{n+1} - \frac{1}{2} M^2 \frac{(m_i^2)^{n+1,*}}{\rho_i^{n+1}} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left(H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} m_{i+\frac{1}{2}}^{**} - H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} m_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} \left((\rho H v)_{i+\frac{1}{2}}^n - (\rho H v)_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t^2}{16\Delta x_i} (M^2 - 1) \left(\Delta x_i \Delta x_{i+1} H_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (\nabla^3 p^{(2),n+1\nu-1})_{i+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \Delta x_{i-1} \Delta x_i H_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (\nabla^3 p^{(2),n+1\nu-1})_{i-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Als Abbruchkriterium verwenden wir die diskrete Maximumsnorm der Differenz zweier aufeinander folgender Iterierten $p^{(2),n+1,\nu}$ und $p^{(2),n+1\nu-1}$,

$$\max_{\sigma_i \in \Xi} \left| p_i^{(2),n+1,\nu} - p_i^{(2),n+1\nu-1} \right| < \varepsilon$$

mit vorgegebener Genauigkeitsschranke ε . Um zu einer numerisch exakten Projektion zu gelangen, muß die Schranke im Bereich der für die Funktionen vorgegebenen Genauigkeit angesetzt werden.

Nach der Iteration zur Bestimmung von $p^{(2),n+1}$ ergibt sich der Impuls zum neuen Zeitschritt aus Gleichung (3.118) zu

$$m_i^{n+1} = m_i^{**} + \frac{\Delta t}{2\Delta x_i} (M^2 - 1) (p_{i+\frac{1}{2}}^{(2),n+1} - p_{i-\frac{1}{2}}^{(2),n+1}).$$

Lemma 3.3.1 *Es sei der Wert des Entwicklungsparameters so klein vorgegeben, daß unter der gewählten numerischen Genauigkeit ε an die Variablen*

$$M = O_s(\sqrt{\varepsilon}) \quad (3.125)$$

gilt. Weiterhin sei angenommen, daß das Strömungsfeld zum Zeitschritt n divergenzfrei sei, der Hintergrunddruck $p^{(0)}$ eine homogene Verteilung im Raum aufweise und keine Kompression über den Rand des betrachteten Gebietes erfolge, d. h.

$$p^{(0),n+1} = p^{(0),n} = \text{const.}, \quad (3.126)$$

und daß die akustische Druckkomponente $p^{(1)}$ identisch verschwinde.

Dann ist die Gesamtenergie $(\rho E)^{n+1}$ zum neuen Zeitschritt homogen in Raum und Zeit und die neue Geschwindigkeit ist divergenzfrei.

Beweis:

Aufgrund der in Kapitel 4 vorgestellten Entdimensionalisierung weisen alle entdimensionalisierten Strömungsgrößen φ eine Größenordnung von $O(1)$ auf. Mit (3.125) gilt

$$1 + M^2\varphi = 1 + O(M^2) = 1 + \varepsilon, \quad (3.127)$$

so daß im folgenden o.E.d.A. $M = 0$ gesetzt werden kann. Dann lautet die Zustandsgleichung unter Einbezug der Druckzerlegung (3.94) und (3.127)

$$(\rho E)^n = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(0),n}.$$

Für die Enthalpie H , beziehungsweise H^* , gilt entsprechend

$$(\rho H)^n = (\rho H)^{*,n} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0),n}.$$

Die Poissonprobleme (3.109), (3.113), (3.114) des Zeitschrittverfahrens (3.73) sind so konstruiert, daß die Gesamtenergie zum neuen Zeitschritt im Fall eines verschwindenden Entwicklungsparameters

$$(\rho E)^{n+1} = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(0),n+1}$$

erfüllt, da die homogenen Flüsse innerhalb der Energiegleichung im Fall $M = 0$ identisch verschwinden. Es folgt aus Voraussetzung (3.125) die Homogenität in Zeit und Raum für ρE und ρH .

Da für den Hintergrunddruck $p^{(0)}$, $p^{(0)} > 0$ gilt, läßt sich die Divergenzfreiheit aus der Bestimmungsgleichung (3.118) und der Diskretisierung der Energiegleichung (3.119) herleiten. Der Übersichtlichkeit verzichten wir auf die vollständige Diskretisierung entsprechend Gleichung (3.121). Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho H)^{n+1}}{\Delta x_i} \left(v^{n+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) - v^{n+1}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_i} \left((\rho H v)^{n+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) - (\rho H v)^{n+1}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_i} \left((H m)^{n+1}(x_{i+\frac{1}{2}}) - (H m)^{n+1}(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) \\ &\stackrel{(3.118)}{=} \left\{ \left(H^{n+1} \left(m^{**} + \frac{\Delta t}{2} (M^2 - 1) \partial_x p^{(2),n+1} \right) \right) (x_{i+\frac{1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. - \left(H^{n+1} \left(m^{**} + \frac{\Delta t}{2} (M^2 - 1) \partial_x p^{(2),n+1} \right) \right) (x_{i-\frac{1}{2}}) \right\} \\ &\stackrel{(3.119)}{=} 0. \end{aligned}$$

Folglich ist die Strömung zum neuen Zeitpunkt divergenzfrei. \square

3.4 Das Gesamtverfahren

Die in den vorausgegangenen Abschnitten beschriebenen Zeit- und Ortsdiskretisierungen ermöglichen eine zusammenfassende Darstellung des Gesamtverfahrens. Hierbei stellt $\mathbf{u}^n = (\mathbf{u}_1^n, \dots, \mathbf{u}_N^n)^T$ die gegebenen Zellmittelwerte der physikalischen Größen auf den Boxen $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ zur Zeit t^n dar. Gesucht ist eine Approximation \mathbf{u}^{n+1} der Strömungsgrößen zum Zeitpunkt $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Das hierzu verwendete Zeitschrittverfahren läßt sich in folgender schematischer Form darstellen:

Darstellung eines Zeitschrittes —

Berechne die zulässige Zeitschrittweite Δt bezogen auf die explizite Lösung des homogenen Systems	
Berechne die Lösung \mathbf{u}_h^{n+1} des homogenen Systems (3.17) mittels der Approximation (3.74)	
Berechne $p^{(0),n+1}$ durch Lösen der Druckkorrekturgleichung (3.99)	
Berechne $p^{(1),n+1}$ mittels des Systems der langwelligen Akustik (3.101)	
Initialisiere $v^{\widetilde{n+1},0} = v_h^{n+1}$, $H^{*,\widetilde{n+1},0} = H_h^{*,n+1}$ und $\rho^{\widetilde{n+1},0} = \rho_h^{n+1}$	
$\nu = 0$	
Wiederhole	
Löse das Gleichungssystem $\mathbf{A}^{\widetilde{n+1},\nu} \mathbf{p}^{(2),\widetilde{n+1},\nu} = \mathbf{b}^{\widetilde{n+1},\nu}$	
Ermittle $\mathbf{u}^{\widetilde{n+1},\nu+1}$ über die Flußkorrekturgleichung (3.111)	
L_1 -Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$	
Y	N
$\mathbf{u}^{\widetilde{n+1}} = \mathbf{u}^{\widetilde{n+1},\nu+1}$	$\nu = \nu + 1$
STOP	

Fortsetzung —

Initialisiere $v^{\tilde{n},0} = v^n$, $H^{*,\tilde{n},0} = H^{*,n}$ und $\rho^{\tilde{n},0} = \rho^n$	
$\nu = 0$	
Wiederhole	
Löse das Gleichungssystem $\mathbf{A}^{\tilde{n},\nu} \mathbf{p}^{(2),\tilde{n},\nu} = \mathbf{b}^{\tilde{n},\nu}$	
Ermittle $\mathbf{u}^{\tilde{n},\nu+1}$ durch eine aus (3.73) ₂ resultierende Flußkorrekturgleichung entsprechend der Form (3.111)	
L_1 -Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$	
Y	N
$\mathbf{u}^{\tilde{n}} = \mathbf{u}^{\tilde{n},\nu+1}$	$\nu = \nu + 1$
STOP	
Initialisiere $v^{n+1,*,0} = v^{\widetilde{n+1}}$, $H^{*,n+1,*,0} = H^{*,\widetilde{n+1}}$ und $\rho^{n+1,*,0} = \rho^{\widetilde{n+1}}$	
$\nu = 0$	
Wiederhole	
Löse das Gleichungssystem $\mathbf{A}^{n+1,*,\nu} \mathbf{p}^{(2),n+1,*,\nu} = \mathbf{b}^{n+1,*,\nu}$	
Ermittle $\mathbf{u}^{n+1,*,\nu+1}$ durch eine aus (3.73) ₃ resultierende Flußkorrekturgleichung entsprechend der Form (3.111)	
L_1 -Norm der Flußkorrekturänderung $< \varepsilon$	
Y	N
$\mathbf{u}^{n+1,*} = \mathbf{u}^{n+1,*,\nu+1}$	$\nu = \nu + 1$
STOP	

Fortsetzung —

$\rho^{n+1} = \rho^{n+1,*}$ und $(\rho E)^{n+1} = (\rho E)^{n+1,*}$	
$M < \varepsilon_M$, exakte Projektion notwendig? Y N	
Initialisiere $p^{(2),n+1,-1} = p^{(2),n+1,*}$	$m^{n+1} = m^{n+1,*}$
$\nu = 0$	
Wiederhole	
Löse das Gleichungssystem $\mathbf{A}^{n+1} \mathbf{p}^{(2),n+1,\nu} = \mathbf{b}^{\nu-1}$	
$\ p^{(2),n+1,\nu} - p^{(2),n+1,\nu-1}\ _\infty < \varepsilon_p$ Y N	
$m^{n+1} = m^{**} + \frac{\Delta t}{2}(M^2 - 1)\nabla p^{(2),n+1,\nu}$	$\nu = \nu + 1$
STOP	

4. Referenzparameter und Datenzerlegung

Das in den vorangehenden Abschnitten beschriebene numerische Verfahren basiert grundlegend auf der Festlegung eines geeigneten Referenzparameters und der Zerlegung der physikalischen Größen in Anteile unterschiedlicher, vom Referenzparameter abhängiger Frequenzen.

Mit der Bestimmung eines geeigneten Zerlegungsalgorithmus wie auch mit der hiermit verbundenen Berechnung des Referenzparameters werden wir uns in diesem Kapitel beschäftigen.

In den folgenden Abschnitten sind alle Variablen, falls nicht ausdrücklich vermerkt, dimensionsbehaftet. Wir werden aber, um eine bessere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, das Superskript $\hat{}$ zur Bezeichnung der dimensionsbehafteten Form an allen Stellen, wo es zu keiner Verwechslung kommen kann, vernachlässigen.

4.1 Entdimensionalisierung und Bestimmung des asymptotischen Entwicklungsparameters M

Um eine sinnvolle Entdimensionalisierung der physikalischen Werte gemäß Tabelle 2.1 durchführen zu können, müssen die benötigten Referenzwerte auf geeignete Weise aus den im Strömungsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$ gegebenen Werten bestimmt werden. Üblicherweise wird die Entdimensionalisierung durch die Festlegung der Referenz der Länge \hat{l}_{ref} , der Dichte $\hat{\rho}_{ref}$ und der Geschwindigkeit \hat{v}_{ref} zu Beginn der Modellierung unabhängig von der Art des zu modellierenden Strömungsfeldes, ob kompressibel oder inkompressibel, gegeben. Diese Modellierungen basieren auf der Annahme, daß der globale Charakter des Strömungsfeldes sich während der Rechenzeit nicht ändert. Somit ist eine Festlegung der Referenzen zu Beginn der Rechnung gerechtfertigt. Treten jedoch bei Strömungen Änderungen in ihrem globalen Charakter von inkompressibel zu kompressibel oder umgekehrt auf, so ist es notwendig, eine zeitabhängige Entdimensionalisierung einzuführen.

Durch die Hinzunahme einer unabhängigen Druckreferenz \hat{p}_{ref} weisen die dimensionslosen Euler-Gleichungen den Parameter

$$M := \frac{\hat{v}_{ref}}{\sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}}{\hat{\rho}_{ref}}}} \quad (4.1)$$

auf. Dieser kann bei der folgenden Wahl der zugrundeliegenden Referenzwerte sowohl als Maß für die Inkompressibilität des vorliegenden Strömungsfeldes als auch als Maß für die Langwelligkeit von akustischen Wellen im Strömungsgebiet verwendet werden. Daher dient der Entwicklungsparameter zur Gewichtung der Einflüsse der asymptotischen Korrekturflüsse innerhalb des numerischen Verfahrens.

Die Referenzlänge \hat{l}_{ref} ist eine durch das Problem vorgegebene Längenskala, welche die zu untersuchenden Änderungen im Geschwindigkeits-, Dichte- und Druckfeld genügend scharf auflöst oder welche eine charakteristische Größe eines umströmten Objektes bezeichnet. Sie kann zum Beispiel bei Tragflügelumströmungen als maximale Tragflügeldicke, Spannweite oder Tragflügeltiefe gewählt werden. Bei Kanalströmungen wird in der Regel der Kanaldurchmesser verwendet. Die Wahl von \hat{l}_{ref} sollte demnach die größte Diskretisierung des Gebietes $\hat{\Omega}$ vorgeben.

Aus Mittelungen über das gesamte Gebiet $\hat{\Omega}$ ergeben sich die Referenzen für die Dichte und den Druck zu

$$\hat{\rho}_{ref} := \hat{\rho}_{ref}(t) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho}(x, t) dx$$

und

$$\hat{p}_{ref} := \hat{p}_{ref}(t) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|} \int_{\hat{\Omega}} \hat{p}(x, t) dx.$$

Als direkte Folgerung aus der Kontinuumsannahme fordern wir eine zeitlich globale positive untere Schranke für die Druck- und Dichtereferenz. Desweiteren sei angenommen, daß die Referenzen auch zeitlich global nach oben beschränkt seien,

$$\begin{aligned} 0 < C_1 &\leq \hat{\rho}_{ref}(t) \leq C_2 < \infty, \\ 0 < C_3 &\leq \hat{p}_{ref}(t) \leq C_4 < \infty, \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Aus diesen Referenzen bestimmt sich die Referenz der globalen Schallgeschwindigkeit vermöge

$$\hat{c}_{ref} := \hat{c}_{ref}(t) = \sqrt{\frac{\hat{p}_{ref}(t)}{\hat{\rho}_{ref}(t)}}.$$

Die Beschränktheitsannahmen von $\hat{\rho}_{ref}$ und \hat{p}_{ref} übertragen sich direkt auf \hat{c}_{ref} ,

$$0 < C_5 \leq \hat{c}_{ref}(t) \leq C_6 < \infty, \quad \forall t \in [0, T].$$

Durch die Bestimmung der Geschwindigkeitsreferenz \hat{v}_{ref} und der Berechnung des Entwicklungsparameters M nach (4.1) könnte der Vorgang der Entdimensionalisierung abgeschlossen werden. Da der Entwicklungsparameter jedoch nicht nur in der Größenordnung der lokalen Mach-Zahlen anzusetzen ist, sondern auch den Grad der Kompressibilität wie auch die Langwelligkeit vorhandener akustischer Wellen messen soll, ist es sinnvoller, M aus dem Strömungsfeld zu bestimmen und für $M \neq 0$

$$\hat{v}_{ref} := M \hat{c}_{ref} \quad (4.2)$$

zu setzen. Aufgrund der Beschränktheitsannahmen an \hat{c}_{ref} folgt aus dem formalen Grenzübergang $M \rightarrow 0$ sofort $\hat{v}_{ref} \rightarrow 0$. Damit die dimensionslosen Geschwindigkeiten aber nicht unbeschränkt anwachsen, muß $\|\hat{v}\|_{\infty} \rightarrow 0$ im Falle $M \rightarrow 0$ gefordert werden. Das heißt, der formale Übergang vom schwach kompressiblen Strömungsfeld in ein rein inkompressibles ist wegen des asymptotischen Ansatzes und den natürlich erscheinenden Beschränktheitsannahmen nur für die triviale Lösung möglich. Aufgrund von Rundungsfehlern und Auslöschungseffekten wird ein divergenzfreies Strömungsfeld jedoch schon für Werte von M^2 in der Größenordnung der Rechengenauigkeit erreicht, so daß auch nicht triviale inkompressible Strömungsfelder simuliert werden können.

Natürliche Forderungen an die dimensionsbehafteten Größen, um ein in diesem Sinne schwach kompressibles, beziehungsweise ein eher inkompressibles Strömungsfeld zu charakterisieren, sind durch ein annähernd divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld und ein nahezu konstantes Druckfeld gegeben. An die Dichteverteilung werden keine Forderungen gestellt, so daß Strömungen mit Dichteunstetigkeiten, wie sie bei Vermischungen von unterschiedlichen Medien auftreten, simuliert werden können. Typischen Vertreter für schwach kompressible Strömungsfelder, in denen große Dichteunstetigkeiten vorkommen, das Druckfeld nahezu konstant ist und die Geschwindigkeiten klein gegen eins sind, stellen Verbrennungsvorgänge dar.

Wir führen drei Indikatoren ein, um die verschiedenen Eigenschaften eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes zu messen. Die beiden ersten Indikatoren charakterisieren die Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes,

$$M_v := C_v \frac{\max_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} |\hat{v}|}{\hat{c}_{ref}} \quad (4.3)$$

und

$$M_{div} := C_{div} \sqrt{\frac{\max_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} |\nabla \cdot \hat{v}| \hat{l}_{ref}}{\hat{c}_{ref}}}. \quad (4.4)$$

Man beachte, daß M_{div} aufgrund der dimensionsbehafteten Divergenzbildung eine dimensionsunabhängige Kennzahl ist.

Der andere Indikator ist an die Druckzerlegung gekoppelt und trägt akustische Längeninformation des Druckfeldes. Für die Definition des mit M_l bezeichneten Indikators verweisen wir auf Abschnitt 4.2, in dem die Bestimmung des Indikators zusammen mit der Zerlegung des Druckes wie auch des Impulses beschrieben wird.

Formal kann nun der Entwicklungsparameter M definiert werden. Um sicher zu stellen, daß ein kompressibles Standardverfahren in den Fällen genutzt wird, in denen einer der Indikatoren größer oder gleich einem kritischen Wert α , $\alpha \leq 1$, ist, definieren wir einen Hilfsparameter

$$\tilde{M} := \min \{ \alpha, \max(M_v, M_{div}, M_l) \} \in (0, \alpha]$$

und eine Funktion $g : (0, \alpha] \ni \tilde{M} \mapsto g(\tilde{M}) \in [\frac{1}{\alpha}, 1)$,

$$g(\tilde{M}) := 1 + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha^2} \tilde{M}^2. \quad (4.5)$$

Hieraus ergibt sich der Entwicklungsparameter zu

$$M := g(\tilde{M})\tilde{M}, \quad \tilde{M} \in (0, \alpha].$$

Über den kritischen Wert α und die Funktion g wird das Umschalten von dem asymptotischen Korrekturverfahren auf das kompressible Standardverfahren gesteuert. Ein kleiner Wert α bewirkt einen frühzeitigen Wechsel zum kompressiblen Verfahren schon für relativ kleine lokale Mach-Zahlen. Abbildung 4.1 verdeutlicht den Einfluß der Funktion g bei unterschiedlich gewählten Werten von α .

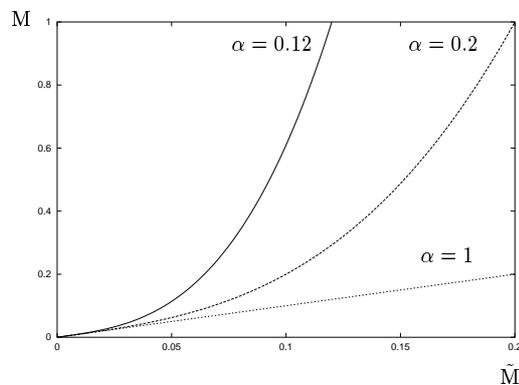


Abbildung 4.1: Einfluß der Funktion g auf den Referenzparameter

Dabei ist die Funktion g so gewählt, daß $M = O_s(\tilde{M})$, $\tilde{M} \rightarrow 0$ gilt, da

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{M} \rightarrow 0} \frac{M(\tilde{M})}{\tilde{M}} &= \lim_{\tilde{M} \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha^2} \tilde{M}^2 \right) = 1, \\ \lim_{M \rightarrow 0} \frac{\tilde{M}(M)}{M} &= \frac{\tilde{M}}{g(\tilde{M})\tilde{M}} = \lim_{M \rightarrow 0} g(\tilde{M})^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der Indikatoren M_{div} und M_l ergibt sich hieraus das in Abschnitt 2.2 geforderte Abfallverhalten

$$\max_{x \in \Omega} (Ma) = O_s(M), \quad M \rightarrow 0.$$

Desweiteren kann aus $\tilde{M} = O_s(M)$ gefolgert werden, daß

$$M_v, M_{div}, M_l = O(M), \quad M \rightarrow 0, \quad (4.6)$$

gilt, da aus $M \rightarrow 0$, $\tilde{M} \rightarrow 0$ und schließlich $M_v, M_{div}, M_l \rightarrow 0$ folgen. Wegen $M = O_s(\tilde{M})$ geht mindestens eine der Größen M_v, M_{div} oder M_l genauso schnell gegen Null wie der Entwicklungsparameter selbst.

Es ist offensichtlich, daß kleiner werdende Werte des Entwicklungsparameters M stets mit einem dimensionsbehafteten Strömungsfeld gekoppelt sind, welches ein in unserem Sinne zunehmend inkompressiblen Charakter aufweist.

Die Geschwindigkeitsreferenz ergibt sich nun wie in (4.2) beschrieben aus

$$\hat{v}_{ref} = M \hat{c}_{ref}.$$

Aufgrund der Indikatoren M_v und M_{div} ist das dimensionslose Geschwindigkeitsfeld beschränkt,

$$\max_{x \in \Omega} |v| = \frac{\max_{x \in \Omega} |\hat{v}|}{\hat{v}_{ref}} \stackrel{(4.3)}{=} \frac{1}{C_v} \frac{M_v}{M} \stackrel{(4.6)}{\rightarrow} C < \infty, \quad M \rightarrow 0,$$

und die Divergenzfreiheit im Fall einer verschwindenden Mach-Zahl garantiert,

$$\max_{x \in \Omega} |\nabla \cdot v| = \frac{\max_{\hat{x} \in \Omega} |\nabla \cdot \hat{v}| \hat{l}_{ref}}{\hat{v}_{ref}} \stackrel{(4.4)}{=} \frac{1}{C_{div}^2} \frac{M_{div}^2}{M} \stackrel{(4.6)}{\rightarrow} 0, \quad M \rightarrow 0.$$

Der Vorgang der Entdimensionalisierung wird durch die Bestimmung der charakteristischen Zeitskala abgeschlossen, welche sich mit der durch (4.2) vorliegenden Referenzgeschwindigkeit \hat{v}_{ref} zu

$$\hat{t}_{ref} = \frac{\hat{l}_{ref}}{\hat{v}_{ref}}$$

ergibt. Damit scheint die Anzahl der Iterationen von \hat{l}_{ref} abzuhängen. Da die Zeitschrittweite jedoch über die CFL-Bedingung des homogenen Systems mittels

$$\Delta t = (\text{CFL-Zahl}) \min_{\sigma_i \in \Xi} \left(\frac{|\sigma_i|}{|v_i| + c_i^*} \right)$$

gesteuert wird, kürzt sich der Einfluß der Entdimensionalisierung gerade wieder heraus. Man beachte, daß in der zugehörigen dimensionsbehafteten CFL-Bedingung des homogenen Systems

$$\begin{aligned} \Delta \hat{t} = \Delta t \hat{t}_{ref} &= (\text{CFL-Zahl}) \min_{\sigma_i \in \Xi} \frac{|\hat{\sigma}_i| \frac{1}{\hat{l}_{ref}}}{\frac{|\hat{v}_i|}{\hat{v}_{ref}} + \frac{\hat{c}_i^*}{\hat{c}_{ref}}} \hat{t}_{ref} \\ &= (\text{CFL-Zahl}) \min_{\hat{\sigma}_i \in \hat{\Xi}} \left(\frac{|\hat{\sigma}_i|}{|\hat{v}_i| + M \hat{c}_i^*} \right) \end{aligned}$$

im Vergleich zu der dimensionsbehafteten CFL-Bedingung der Euler-Gleichungen der Schallterm mit dem Faktor M multipliziert werden muß.

4.2 Identifikation eines asymptotischen Regimes

Die Identifikation eines asymptotischen, das heißt schwach kompressiblen, Regimes geht einher mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters $M \in (0, 1]$ und den für die Ansätze aus der Mehrskalenanalyse benötigten additiven Zerlegungen des Impulses als auch des Druckes. Die Voraussetzungen der kontinuierlichen Mehrskalenanalyse an die Funktionen übertragen sich wie folgt in den diskreten Kontext:

- i. Der Impuls \hat{m} soll additiv in einem langwelligen Anteil \overline{m} und einen kurzwelligen Rest m' zerfallen,

$$\hat{m} = \overline{m} + m'.$$

- ii. Im Rahmen des in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten numerischen Verfahrens, welches auf den aus der asymptotischen Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen gewonnenen Resultaten aufbaut, wurde eine Komposition des Druckes der Form

$$\hat{p} = \hat{p}^{(0)} + M \hat{p}^{(1)} + M^2 \hat{p}^{(2)} \quad (4.7)$$

verwendet. Wie schon in Abschnitt 3.3.2.1 angemerkt, besitzt diese Zerlegung keinen Abschneidefehler der Ordnung $o(M^2)$, so daß keine exakte Übereinstimmung der Druckterme $\hat{p}^{(0)}$, $\hat{p}^{(1)}$ und $\hat{p}^{(2)}$ mit den aus der Theorie der Mehrskalenganalyse genutzten kontinuierlichen Funktionen vorliegt. In der numerischen Umsetzung ist es jedoch vollkommen ausreichend, daß die einzelnen Druckterme ein qualitativ gleiches Verhalten wie ihre kontinuierlichen Gegenspieler aufweisen.

Dementsprechend fordern wir für hinreichend kleine Entwicklungsparameter M einen räumlich konstanten Druckterm $\hat{p}^{(0)}$. Zudem fordern wir, daß $\hat{p}^{(1)}$ die rein langwelligen akustischen Phänomene der Strömung repräsentiert und $\hat{p}^{(2)}$ die hauptsächlich kurzwelligen Restanteile beinhaltet. Aufgrund der exakten Zerlegung läßt sich $\hat{p}^{(2)}$ allein aus der Kenntnis von \hat{p} , $\hat{p}^{(0)}$ und $\hat{p}^{(1)}$ bestimmen.

Im Gegensatz zur Theorie der asymptotischen Entwicklungen sind wir nicht ausschließlich am Verhalten der Druckterme im Grenzwert eines verschwindenden Entwicklungsparameters interessiert, sondern an Abschätzungen, die für alle Werte von M Gültigkeit besitzen. Die Ordnungsrelationen (3.95) und (3.97) werden zu $\hat{p}^{(i)} = O(1)$, $i = 0, 1, 2$, abgeschwächt und in dem Verfahren numerisch wie folgt realisiert,

$$\|\hat{p}^{(i)}\|_{\infty} \leq C_{p_i} \hat{p}_{ref}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (4.8)$$

Diese Ungleichungen müssen durch den Zerlegungsalgorithmus erfüllt werden. Dabei sind die Konstanten C_{p_i} zunächst frei, aber natürlich unabhängig von M , wählbar.

Aus der Formel der Druckzerlegung (4.7) und den Abschätzungen (4.8) wird ersichtlich, daß eine Zerlegungsroutine im Einklang mit der Bestimmung des Entwicklungsparameters stehen und numerisch simultan umgesetzt werden muß.

Ist keine Zerlegung, welche die Bedingungen (4.8) erfüllen, möglich, so ist M identisch eins zu wählen. Man befindet sich dann in einem rein kompressiblen Regime, in dem die Annahmen der Mehrskalenasymptotik keine Gültigkeit mehr besitzen.

In dem Fall, daß M im Bezug auf den maximalen Durchmesser d_{max} des Gebietes $\hat{\Omega}$ so klein wird, daß keine langwellige Akustik mehr aufgelöst werden kann,

$$\frac{1}{M} \gg \frac{d_{max}(\hat{\Omega})}{\hat{l}_{ref}} = d_{max}(\Omega),$$

degeneriert der Mehrskalenasatz zu einem Einskalenansatz. Die Berechnungen des langwelligen Anteils des Impulses \overline{m} als auch die Bestimmung der

akustischen Druckkomponente $\hat{p}^{(1)}$ entfallen, da sie im numerischen Verfahren nicht mehr benötigt werden.

Der Grenzfall $M = 0$ eines rein inkompressiblen Regimes stellt einen Sonderfall dar, auf den in [22] explizit eingegangen wird.

Setzen wir

$$\hat{p}^{(0)}(t) := \hat{p}_{ref}(t) = \frac{1}{|\hat{\Omega}|} \int_{\hat{\Omega}} \hat{p}(x, t) dx,$$

so erfüllt der führende Druckterm $\hat{p}^{(0)}$ für alle $M \in (0, 1]$ die an ihn gestellten Forderungen. Desweiteren läßt sich die Druckzerlegung (4.7) entsprechend zur Impulszerlegung auch schreiben als

$$\hat{\phi} = \bar{\phi} + \phi',$$

mit

$$\hat{\phi} := \hat{p} - \hat{p}^{(0)}, \quad \bar{\phi} := M\hat{p}^{(1)} \quad \text{und} \quad \phi' := M^2\hat{p}^{(2)}.$$

Das Ziel des Zerlegungsalgorithmus läßt sich nun wie folgt beschreiben:

Es bezeichne I die Indexmenge der Diskretisierung. Arbeite aus einem beliebig vorgegebenen Signal $(f_i)_{i \in I}$ einer Funktion f die langwelligen Strukturen so heraus, daß $(f_i)_{i \in I}$ additiv in einen rein langwelligen Anteil $(\bar{f}_i)_{i \in I}$ und einen Rest $(f'_i)_{i \in I}$ zerfällt,

$$f_i = \bar{f}_i + f'_i, \quad \forall i \in I.$$

Der Restanteil $(f'_i)_{i \in I}$ enthält alle kurzwelligen Anteile und soll bezüglich der Maximumsnorm klein in Bezug auf die Norm des langwelligen Anteils $(\bar{f}_i)_{i \in I}$ bleiben,

$$\|(\bar{f}_i)_{i \in I}\|_{\infty} \gg \|(f'_i)_{i \in I}\|_{\infty}.$$

Ein für diese Zielvorstellung optimaler Zerlegungsalgorithmus sollte die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- A. Die Zerlegung als auch die Bestimmung von M müssen simultan erfolgen.
- B. Der Entwicklungsparameter M soll stetig von den Daten abhängen und darf nicht a-priori auf eine kleine Menge diskrete Werte festgelegt werden.

- C. Der Algorithmus soll weitestgehend parameterfrei sein und muß automatisch terminieren.
- D. Das Verfahren soll sich lokal an die Daten anpassen, das heißt in Teilgebieten, die ein rein langwelliges Verhalten aufweisen, soll keine weitere Zerlegung stattfinden.
- E. Der Algorithmus muß unabhängig von der Art und der Feinheit der Diskretisierung sein. Außerdem sollte er robust gegenüber numerisches Rauschen sein. In diesem Sinne ist der Nachweis der Stetigkeit der unter Umständen nichtlinearen Zerlegungsoperatoren erstrebenswert.
- F. Schließlich muß die Zerlegung eine gute numerische Performance aufweisen, da die Daten in jedem Zeitschritt erneut in ihren Komponenten aufgespalten werden müssen. Der Algorithmus darf höchstens eine numerische Komplexität der Ordnung $O(N \log N)$ aufweisen, wenn N die Anzahl der Diskretisierungspunkte bzw. Kontrollvolumina bezeichnet.

Aufgrund der Forderung (F) kommen einfache Mittelungsoperatoren, welche auf Faltungen mit einer Boxfunktion oder eines Gaußkerns beruhen, als Zerlegungsoperatoren nicht in Betracht, obwohl man mit geeigneten a-priori-Abschätzungen zur Bestimmung von M alle Forderungen an die Zerlegungen erfüllen kann [6][7]. Hierzu wird neben den Indikatoren M_v und M_{div} des Geschwindigkeitsfeldes ein primitiver Indikator des Druckfeldes M_p eingeführt, der die Variation der Druckfluktuationen mißt,

$$M_p := \left(\frac{\max_{\hat{\sigma}_i \subset \hat{\Omega}} \hat{p} - \min_{\hat{\sigma}_i \subset \hat{\Omega}} \hat{p}}{\hat{p}_{ref}} \right)^{v_p}, \quad v_p \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right).$$

Eine Längeninformation aus dem Druckfeld geht bei dieser Betrachtung nicht mit in die Bestimmung des Entwicklungsparameters M ein. Auch aus diesem Grund sollten Zerlegungsoperatoren auf Basis von Faltungen nicht verwendet werden.

Von einer Verwendung eines Filters, der auf einer Fourierzerlegung des Signals basiert und die hohen Frequenzen geeignet manipuliert, haben wir abgesehen, da es nicht abzuschätzen ist, welche Auswirkungen das Verändern einzelner Frequenzbänder für das Gesamtsignal hat. Dies gilt insbesondere im unstrukturierten Fall, indem die Frequenzbänder zunächst über eine Faltung gewonnen werden müssen. Desweiteren ist der Ansatz nicht lokal.

Wavelets haben lokale Eigenschaften in Raum und Zeit. Ein Großteil der Wavelets, insbesondere diejenigen mit verschwindenden Momenten höherer Ordnung, sind jedoch an äquidistante strukturierte Gitter gebunden, was sie im

Zusammenhang mit Punkt (E) zu unflexibel macht. Weiterhin soll der Indikator M_l des Referenzparameters M für kleine Werte genau bestimmt werden. Dies ist aber durch eine einzelne Waveletanalyse nicht möglich. Innerhalb der von Mallat [18] eingeführten schnellen Wavelet-Transformation wird in jedem Zerlegungsschritt der derzeitig langwellige Anteil des Signals mit Hilfe von Faltungen und Sub-Sampling weiter in einen hochfrequenten und einen niederfrequenten Anteil aufgespalten. Dabei wächst die Wellenlänge des langwelligen Anteils pro Zerlegungsschritt um den Faktor zwei. Durch weitere Waveletzerlegungen der jeweiligen hochfrequenten Anteile, die bei einer einzelnen Wavelet-Transformation nicht weiter bearbeitet werden, können alle numerischen Frequenzen einer Funktion bestimmt werden. Dies führt aber zwangsläufig zu dem Verlust der Multiskaleneigenschaft und der Ordnung des Algorithmus von $O(N)$.

Eine Übersicht über scale-space evolution Algorithmen, welche auf parabolischen Differentialgleichungen aufbauen, ist in [28] gegeben. Neben den Vorteilen eines Kurvenevolutionsalgorithmus basierend auf linearen Diffusionsgleichungen, treten jedoch gravierende Probleme auf (Weickert [28], p. 6):

- a. "Gaussian smoothing does not only reduce noise, but also blurs important features such as edges and, thus, makes them harder to identify. Since Gaussian scale-space is designed to be completely uncommitted, it cannot take into account any a-priori information on structures which are worth being preserved (or even enhanced).
- b. Linear diffusion filtering dislocates edges when moving from finer to coarser scales. So structures which are identified at a coarse scale do not give the right location and have to be traced back to the original image[...]. In practice, relating dislocated information obtained at different scales is difficult and bifurcations may give rise to instabilities. These coarse-to-fine tracking difficulties are generally denoted as the correspondence problem."

Um diese Problem zu überwinden, werden anisotrope und nichtlineare Diffusionsprozesse oder auch Reaktions-Diffusionsprozesse betrachtet. Diese Algorithmen sind jedoch nicht parameterfrei und die Steuerung des Abbruchkriteriums stellt ein offenes Problem dar. Desweiteren steigt der numerische Aufwand im Vergleich zu den linearen Diffusionsprozessen stark an. Diese besitzen jedoch schon einem numerischen Aufwand in der Größenordnung der Faltungsoperatoren, so daß die komplizierteren Algorithmen bei der von uns gestellten Aufgabe nicht sinnvoll anwendbar sind.

Wir verwenden als Zerlegungsoperator einen aus der diskreten Datenanalyse stammenden neuen Evolutionsalgorithmus diskreter Strukturen [14]. In diesem Teilgebiet der diskreten Datenanalyse werden polygonal berandete Strukturen untersucht, die geeignet vereinfacht werden sollen, um die wichtigen visuellen Anteile herauszuarbeiten, ohne die Grobstruktur der Struktur zu verändern und ohne die visuell wichtigen Punkte zu verschieben.

In jedem Evolutionsschritt werden gewisse, aufeinander folgende Kanten durch jeweils eine ersetzt, welche die äußeren Eckpunkte eines Kantenpaares verbindet. Der Schlüssel zum Erfolg dieses sehr einfachen Algorithmus liegt in der Reihenfolge der Ersetzungen. Dazu wird jedem Kantenpaar in jedem Evolutionsschritt über ein Relevanzmaß ein Kostenwert zugeordnet, der die Signifikanz der Kontur, welche durch das Kantenpaar erzeugt wird, in Bezug auf die anderen Konturen widerspiegelt. Ist der Kostenwert klein, das heißt, die Struktur, die durch das Paar hervorgerufen wird, ist unbedeutend, so wird diese durch eine einzelne Kante ersetzt.

Die durch das Relevanzmaß erzwungene Reihenfolge der Ersetzungen bewirkt eine Hierarchie der einzelnen Konturen, so daß sich in der Evolution zwei getrennte Phasen bemerkbar machen. In der ersten Phase kommt es zum Enttauschen der Kontur des Objektes, ohne daß sich deren Gestalt nennenswert ändert. Erst in der nachfolgenden zweiten Phase treten sukzessive Vereinfachungen an der Gestalt der Kontur auf.

Übertragen auf unsere Zielvorstellung ist zu einer diskreten Punkteverteilung der Funktion f ein geeignetes Relevanzmaß zu finden, welches es ermöglicht, diejenigen Punkte zu bestimmen, die nicht durch \bar{f} repräsentiert werden und dann diese in einem zweiten Schritt durch andere Werte zu ersetzen, so daß die Punkteverteilung von \bar{f} eine gewisse diskrete "Glattheit" besitzt. Die Werte von f' ergeben sich dann aus der Differenz von f und \bar{f} .

Zunächst benötigen wir eine in unserem Kontext geeignete Definition der Wellenlänge, um die Begriffe von lang- und kurzwelligen Strukturen gegeneinander abgrenzen zu können.

Im Gegensatz zum Fourieransatz bezeichnen wir jede Funktion als langwellig, deren Wendepunkte einen genügend großen Abstand voneinander haben. Durch diese Festlegung hat eine Sinusfunktion und jede beliebige andere Funktion mit denselben Wendepunkten die gleiche Wellenlänge.

Diese Definition der Wellenlänge besitzt den Nachteil, daß sich nach dem Fourieransatz kurzwellige Anteile auch in Gebieten, welche nach der obigen Festlegung als langwellig gelten, verstecken können, wie dies zum Beispiel bei einer sich zu einem Stoß aufsteilenden Welle der Fall ist. In diesem Beispiel wachsen die kurzwelligen Anteile nach Fourier stetig an und es entstehen sogar immer

kurzwelligere Anteile, während der Abstand benachbarter Wendepunkte bis zur Stoßbildung sogar konstant bleiben kann. Nach der obigen Definition bliebe damit auch die Wellenlänge konstant. Es könnte deshalb nützlich sein *nach* der Zerlegung eine Fourier- oder Waveletanalyse durchzuführen, um die Lücke der beiden Definitionen zu schließen.

In Gebieten mit kurzwelligen Anteilen treten gehäuft Wendepunkte auf, während in Gebieten mit langwelligen Anteilen kaum Wendepunkte vorhanden sind. Diese Eigenschaft der Langwelligkeit werden wir uns bei der Definition einer Kostenfunktion zur Bestimmung des Relevanzmaßes zunutze machen.

4.2.1 Diskreter Evolutionsalgorithmus

Zu einer gegebenen disjunkten Zerlegung des Gebietes Ω in Kontrollvolumina $(\sigma_i)_{i \in I}$, I sei eine Indexmenge mit $N := \#I$, betrachten wir die Zellmittelwerte $(f_i)_{i \in I}$ einer Funktion f lokalisiert in den Schwerpunkten der Kontrollvolumina. Eine lineare Rekonstruktion der so lokalisierten Zellmittelwerte führt direkt auf eine stückweise lineare Funktion vergleichbar mit den polygonal berandeten Konturen aus [15]. Wir bezeichnen eine Kante, die die Zellmittelwerte f_i und f_{i+1} verbindet mit $k_{i+\frac{1}{2}}$. Desweiteren bezeichnen wir den von dem Kantenpaar $(k_{i-\frac{1}{2}}, k_{i+\frac{1}{2}})$ eingeschlossenen Winkel, ausgehend von der Kante $k_{i-\frac{1}{2}}$, als Wendewinkel α_i der Zelle σ_i . Abbildung 4.2 verdeutlicht das beschriebene Vorgehen. Über die Vorzeichenverteilung des Wendewinkels α_i läßt sich das Gebiet

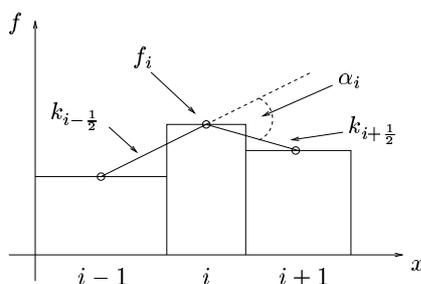


Abbildung 4.2: Bezeichnungen innerhalb des Zerlegungsalgorithmus

Ω in sich überlappende konvexe und konkave Teilgebiete Ω_j , $j \in J$ unterteilen. Die Menge J bezeichnet hierbei die Indexmenge der Teilgebiete. Dabei reicht jedes Teilgebiet bis einschließlich der Schwerpunkte der Kontrollvolumina, in denen sich das Vorzeichen des Wendewinkels ändert. Somit stellt jeder Eckpunkt eines Teilgebietes einen diskreten Wendepunkt der Funktion f dar. Man beachte, daß diskrete Wendepunkte immer paarweise auftreten. Zwischen einem solchen Wendepunktepaar liegen höchstens Punkte, deren Wendewinkel

identisch verschwinden.

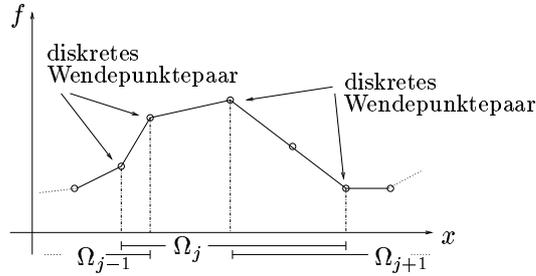


Abbildung 4.3: Teilgebiete Ω_j und diskrete Wendewinkel

Eine diskrete Kurvenevolution einer Funktion f erzeugt eine Folge von Funktionen $\{f^0 = f, \dots, f^m\}$ und eine Folge von Indexmengen $\{I^0 = I, \dots, I^m\}$ mit $\#I^{l+1} < \#I^l$ und $\#I^m \leq 2$. Hierbei bezeichnen die Indexmengen I^l diejenigen Zellmittelwerte f_i der Funktion f , die zum Zeitpunkt des l -ten Evolutionsschrittes unverändert geblieben sind. Um diejenigen Indizes zu bestimmen, deren assoziierte Zellmittelwerte unverändert aus dem l -ten Evolutionsschritt hervorgehen, wird jedem Index $i \in I^l$ über das noch näher zu bestimmende Relevanzmaß ein Kostenwert $k(i, I^l) \in \mathbb{R}_0^+$ zugeordnet. Es sei

$$k_{\min}(I^l) := \min\{k(i, I^l) : i \in I^l\}.$$

Die Menge $I_{\min}(I^l)$ bezeichne die Menge der Indizes minimaler Kosten zum l -ten Evolutionsschritt,

$$I_{\min}(I^l) := \{i \in I^l : k(i, I^l) = k_{\min}(I^l)\}.$$

Der Evolutionsalgorithmus entfernt nun die Menge $I_{\min}(I^l)$ aus I^l ,

$$I^{l+1} = I^l \setminus I_{\min}(I^l).$$

4.2.2 Das Relevanzmaß

Das Relevanzmaß gibt die Signifikanz jeder Einzelstruktur in Bezug auf alle anderen Strukturen wieder und steuert so die Abfolge der Evolution. In diesem Fall soll das Relevanzmaß ein Maß für die Langwelligkeit darstellen. Da wir den Begriff der Wellenlänge über den Abstand der Wendepunkte zueinander festgelegt haben, ist für die Definition der Kostenfunktion, die jedem Index eines Kontrollvolumens einen Wert zuordnet, die Summe der Abstände des Schwerpunktes zu den benachbarten Wendepunkten von entscheidender Bedeutung. Dagegen ist die relative Lage zwischen den Wendepunkten oder

auch lokale Eigenschaften eines Punktes, wie sein Krümmungsverhalten, von nur untergeordnete Bedeutung. Da alle Wendepunkte diskret als Wendepunktpaare auftreten, ist im diskreten Kontext der Abstand zu denjenigen Wendepunkten gemeint, die in der Krümmung ein anderes Vorzeichen aufweisen als das der Punkte, die zwischen ihnen liegen. Die Summe der Abstände zu den benachbarten Wendepunkten entspricht also gerade der Länge der konkaven oder konvexen Teilgebiete $|\Omega_j|$, projiziert auf die x -Achse (vergleiche Abb. 4.3). Jeder Zelle können also bis zu drei unterschiedliche Längen konkaver oder konvexer Teilgebiete zugeordnet werden. Um Eindeutigkeit zu gewährleisten, wählen wir jeweils das Minimum der zugeordneten Längen aus.

Da sich während der Evolution die Anzahl der Teilgebiete ändert, führen wir eine Folge von Indexmengen der Teilgebiete $\{J^0 = J, \dots, J^m\}$ ein.

Wir definieren die Kostenfunktion k ,

$$k : I^l \ni i \xrightarrow{k} k(i; I^l) \in \mathbb{R}_0^+,$$

über

$$k(i; I^l) := \left| \min_{j \in \{J^l: \sigma_i \cap \Omega_j \neq \emptyset\}} |\Omega_j| - \min_{j \in J^l} |\Omega_j| \right| \cdot |\alpha_i|, \quad \forall i \in I^l. \quad (4.9)$$

Hierdurch wird erreicht, daß innerhalb eines jeden Evolutionsschrittes neben Indizes $i \in I^l$, mit f_{k-1} , $f_{k=i}$, f_{k+1} sind kollinear angeordnet, alle Indizes des zur Zeit kleinsten Teilgebietes entfernt werden.

Indizes von Randpunkten werden, sofern es sich nicht um periodische Ränder handelt, gesondert behandelt. Hierzu wird dem zum Randpunkt zugehörigen Index der Kostenwert unendlich zugeordnet. Die Indizes bleiben während der gesamten Kurvenevolution fixiert und können nicht herausgenommen werden.

Um die Stetigkeit des Evolutionsverfahrens nach [13] nachweisen zu können, müssen die folgenden drei notwendigen Voraussetzungen durch die Kostenfunktion k erfüllt werden:

1. Die Kostenfunktion k ist stetig bezüglich der Hausdorff-Norm im \mathbb{R}^2 .
2. Es sei $i \in I^l$ gegeben. Dann gilt:

$$k(i; I^l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{k-1}, f_{k=i}, f_{k+1} \text{ sind kollinear angeordnet.}$$

3. Es bezeichne mit $d(f_{k=i}, \overline{f_{k-1}f_{k+1}})$, $i \in I^l$, den Wert der Projektion des Punktes $f_{k=i}$ auf die Kante, welche die Punkte f_{k-1} und f_{k+1} verbindet. Dann gilt

$$d(f_{k=i}, \overline{f_{k-1}f_{k+1}}) \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(i; I^l) \longrightarrow 0.$$

Die in (4.9) definierte Kostenfunktion erfüllt die Bedingungen 2 und 3, jedoch nicht 1, da über die Länge der Teilgebiete nicht lokale Informationen der Funktion f^l benötigt werden. Ein Nachweis der Stetigkeit der Kurvenevolution nach [13] ist deshalb nicht möglich.

Lemma 4.2.1 *Während eines jeden Kurvenevolutionsschrittes kann die Anzahl der Teilgebiete Ω_j nicht zunehmen, das heißt,*

$$\#J^{l+1} \leq \#J^l.$$

Beweis:

Es bezeichne mit Ω_j^* das zum l -ten Evolutionsschritt kleinste Teilgebiet,

$$|\Omega_j^*| = \min_{j \in J^l} |\Omega_j|.$$

O.E.d.A. gibt es nur ein minimales Teilgebiet. Durch das Entfernen aller Indizes $i \in I^l$ mit $\sigma_i \cap \Omega_j^* \neq \emptyset$ wird die Anzahl der Teilgebiete zunächst um ein bis fünf Teilgebiete reduziert. Jedoch müssen zwei Wendewinkel neu bestimmt werden. Somit können maximal zwei neue Teilgebiete an Stelle von Ω_j^* entstehen und wir müssen die zwei folgenden Fälle unterscheiden.

In dem Fall, in dem mehrere Teilgebiete entfernt wurden, kann die Anzahl $\#J^{l+1}$ nicht größer als $\#J^l$ werden.

Im Fall, in dem genau ein Teilgebiet entfernt wurde, weisen die ehemals zu Ω_j^* benachbarten Teilgebiete ein gleiches Vorzeichen in ihrer Wendewinkelverteilung auf, so daß durch die Neubestimmung der Wendewinkel der jetzt benachbarten Schwerpunkte höchstens ein neues Teilgebiet entstehen kann.

Das Entfernen der Indizes $i \in I^l$, mit f_{k-1} , $f_{k=i}$, f_{k+1} sind kollinear angeordnet, das heißt, die Funktionswerte f_{k-1} , $f_{k=i}$, f_{k+1} liegen auf einer Geraden, verändert weder die Anzahl der Teilgebiete noch müssen Wendewinkel anderer Indizes neu bestimmt werden. \square

Definition 4.2.2 (Minimale Wellenlänge einer Funktion f)

Es seien die Zellmittelwerte $(f_i)_{i \in I}$ einer Funktion f lokalisiert in den Schwerpunkten der disjunkten Kontrollvolumina $(\sigma_i)_{i \in I}$ des Gebietes Ω gegeben. Über die Vorzeichenverteilung des Wendewinkels α_i wird das Gebiet Ω in sich überlappende konvexe und konkave Teilgebiete Ω_j , $j \in J$ unterteilt. Die Mengen I , J bezeichnen die Indexmengen der Kontrollvolumina respektive der Teilgebiete.

Die minimale Wellenlänge der so diskretisierten Funktion f wird über den minimalen Abstand zweier benachbarter Teilgebiete Ω_j und Ω_{j+1} , $\{j, j+1\} \subset J$ definiert,

$$\lambda_{\min}(f) := \min_{\{j, j+1\} \subset J} (|\Omega_j| + |\Omega_{j+1}| - |\Omega_j \cap \Omega_{j+1}|).$$

Bemerkung: Im Fall periodischer Randbedingungen ist $((j+1) \bmod (\#J))$ zu betrachten.

Lemma 4.2.3 Es sei eine auf der Kostenfunktion (4.9) basierende Kurvenevolution einer Funktion f gegeben. Dann gilt weder

$$\min_{j \in J^l} |\Omega_j| \leq \min_{j \in J^{l+1}} |\Omega_j|, \quad 0 \leq l < l+1 \leq m,$$

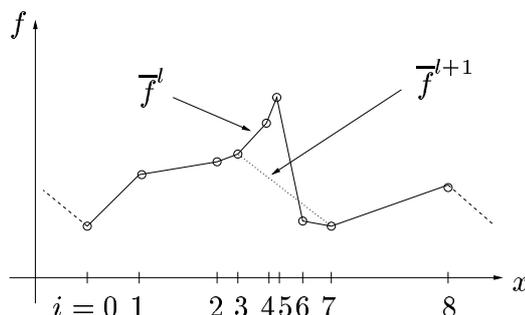
noch

$$\lambda_{\min}(f^l) \leq \lambda_{\min}(f^{l+1}), \quad 0 \leq l < l+1 \leq m$$

notwendigerweise.

Beweis:

Wir betrachten den folgenden Ausschnitt einer diskretisierten Funktion f . Die Abbildung gibt nur die qualitative Anordnung der Punkte in Bezug auf ihren Wendewinkel wieder. Die Abstände $\Delta x_{i+\frac{1}{2}}$ der Schwerpunkte f_i zueinander,



die Längen der Teilgebiete Ω_j , $j \in J^l$, im weiteren mit Ω_j^l bezeichnet, und die Abstände zweier benachbarter Teilgebiete $\lambda_{j,j+1}^l$,

$$\lambda_{j,j+1}^l = (|\Omega_j^l| + |\Omega_{j+1}^l| - |\Omega_j^l \cap \Omega_{j+1}^l|),$$

sind aus Tabelle 4.1 zu entnehmen. Da wir uns nur für den skizzierten Ausschnitt der Funktion f interessieren, haben wir den Längen der Teilgebiete Ω_0 und Ω_8 den Wert unendlich zugewiesen. Der Wert des Parameters ε ist aus dem Intervall $(0, \frac{1}{5})$ frei wählbar.

Im l -ten Evolutionsschritt weist die Kostenfunktion den Indizes 4, 5, 6 den Wert Null zu und sie werden aus der Indexmenge entfernt. Es ergibt sich eine neue Kante, die die Punkte f_3 und f_7 verbindet. Um die Numerierung der Punkte nicht zu verändern, wird der Abstand der Punkte f_4 und f_7 weiterhin

j	$\Delta x_{j+\frac{1}{2}}$	$ \Omega_j^l $	$\lambda_{j,j+1}^l$
0	$1 - 3\varepsilon$	∞	∞
1	$1 - 3\varepsilon$	$2 - 6\varepsilon$	$2 + \varepsilon$
2	ε	$1 + 4\varepsilon$	$2 + \varepsilon$
3	4ε	$1 - \varepsilon$	2
4	2ε	$2 - 2\varepsilon$	∞
5	$1 - 3\varepsilon$	∞	
6	ε		
7	1		

Tabelle 4.1: Größen zum l -ten Evolutionsschritt.

mit $\Delta x_{3+\frac{1}{2}} = x_7 - x_3$ bezeichnet. Die sich hieraus ergebenden neuen Abstände der verbliebenen Schwerpunkte, Längen der Teilgebiete Ω_j^{l+1} und Abstände $\lambda_{j,j+1}^{l+1}$ sind in Tabelle 4.2 zusammengefaßt.

Aus den Tabellen ist zu entnehmen, daß $|\Omega_2^{l+1}| < |\Omega_3^l|$ und $\lambda_{1,2}^{l+1} < \lambda_{2,3}^l$ gilt und somit sowohl

$$\min_{j \in J^l} |\Omega_j| > \min_{j \in J^{l+1}} |\Omega_j| \quad \text{als auch} \quad \lambda_{\min}(f^l) > \lambda_{\min}(f^{l+1})$$

folgt. Weder die Evolution des kleinsten Teilgebietes noch die der minimalen Wellenlänge sind monoton wachsend. \square

Dennoch ist

$$\lambda_{\min}(f^0) \leq \lambda_{\min}(f^m)$$

zu erwarten, da die Anzahl der Teilgebiete nach Lemma 4.2.1 während der Kurvenevolution nicht zunehmen kann. Terminiert die Evolution erst mit $\#I \leq 2$ und erfüllt die Ausgangsfunktion $\lambda_{\min}(f^0) \neq |\Omega|$, so gilt die obigen Abschätzung mit echt kleiner. Wir können im Durchschnitt davon ausgehen, daß die minimale Wellenlänge während des Evolutionsalgorithmus zunehmen wird, obwohl der Prozeß nach Lemma 4.2.3 nicht notwendigerweise monoton sein muß.

Zum Abschluß dieses Abschnittes können wir nun den Indikator M_l für den Entwicklungsparameter M , basierend auf der Wellenlängeninformation des

j	$\Delta x_{j+\frac{1}{2}}$	$ \Omega_j^{l+1} $	$\lambda_{j,j+1}^{l+1}$
0	$1 - 3\varepsilon$	∞	∞
1	$1 - 3\varepsilon$	$2 - 6\varepsilon$	$2 - 5\varepsilon$
2	ε	$1 - 2\varepsilon$	$2 + 2\varepsilon$
3	$1 + 4\varepsilon$	$1 + 5\varepsilon$	$2 + 5\varepsilon$
4		$2 + 4\varepsilon$	∞
5		∞	
6			
7	1		

Tabelle 4.2: Größen zum $(l + 1)$ -ten Evolutionsschritt.

Druckfeldes, definieren,

$$M_l(f^l) := \min \left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(f^l)}, 1 \right\}. \quad (4.10)$$

4.2.3 Zerlegungsalgorithmus

Der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Zerlegungsalgorithmus kann wie folgt in einer allgemeinen Form zusammengefaßt werden:

1. Setze $l = 0$, $\bar{f}_i = f_i$, $f'_i = 0$, $\forall i \in I^0 = I$.
2. Unterteile Ω in sich überlappende konkave und konvexe Teilgebiete Ω_j , $j \in J^l$, der Funktion \bar{f}_i , $\forall i \in I^l$.
3. Überprüfe die Gültigkeit einer von der Aufgabenstellung abhängigen Abbruchbedingung sowie das allgemeine Abbruchkriterium $\#I^l > 2$. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, gehe zu 10. . Ansonsten fahre mit 4. fort.
4. Ordne jedem Index $i \in I^l$ über das Relevanzmaß (4.9) einen Kostenwert $k(i, I^l)$ zu.
5. Bestimme $I_{\min} = \{i \in I^l : k(i, I^l) = 0\}$.

6. Reduziere die Indexmenge der unveränderten Funktionswerte,

$$I^{l+1} = I^l \setminus I_{min}(I^l).$$

7. Berechne die lineare Rekonstruktion \bar{f}_i , $i \in I^0 \setminus I^{l+1}$ aus den Daten f_i , $i \in I^{l+1}$ und bestimme $f'_i = f_i - \bar{f}_i$, $i \in I^0 \setminus I^{l+1}$.

8. Erhöhe den Evolutionsindex, $l = l + 1$.

9. Gehe zu 2. .

10. Berechne geglättete Daten \bar{f}_i , $i \in I^0 \setminus I^m$ aus den Daten f_i , $i \in I^m$. Hierbei bezeichnet m den Wert des Evolutionsindex nach Beendigung der Schleife 2. - 9. .

11. Bestimme $f'_i = f_i - \bar{f}_i$, $i \in I^0 \setminus I^m$.

Im Falle der Druckzerlegung ist das Abbruchkriterium über die Abschätzungen (4.8) gegeben. Dabei geht aufgrund der auszuführenden Zerlegung von $\hat{\phi} = \hat{p} - \hat{p}^{(0)}$ mit $\bar{\phi} = M\hat{p}^{(1)}$ und $\phi' = M^2\hat{p}^{(2)}$ der Wert des Entwicklungsparameters direkt in die Überprüfung der Abschätzungen

$$\|\bar{\phi}\|_{\infty} = M\|\hat{p}^{(1)}\|_{\infty} \stackrel{!}{\leq} C_{p_1}M\hat{p}_{ref} \quad (4.11)$$

und

$$\|\phi'\|_{\infty} = M^2\|\hat{p}^{(2)}\|_{\infty} \stackrel{!}{\leq} C_{p_2}M^2\hat{p}_{ref} \quad (4.12)$$

ein. Im numerischen Verfahren gehen wir wie folgt vor. Basierend auf den Informationen aus dem Geschwindigkeitsfeld wird über

$$\tilde{M}' := \min(\alpha, \max(M_v, M_{div})) \leq \tilde{M}$$

eine vorläufige Näherung M' an den Entwicklungsparameter bestimmt,

$$M' := g(\tilde{M}')\tilde{M}'$$

mit $M' \leq M$, da g eine monoton wachsende Funktion darstellt. Wir verschärfen die im Abbruchkriterium zu überprüfenden Ungleichungen (4.11) und (4.12) zu

$$\|\bar{\phi}\|_{\infty} \stackrel{!}{\leq} C_{p_1}M'\hat{p}_{ref} \quad (4.13)$$

und

$$\|\phi'\|_\infty \stackrel{!}{\leq} C_{p_2} (M')^2 \hat{p}_{ref}. \quad (4.14)$$

Wird im Laufe der Kurvenevolution eine der Ungleichungen (4.13) oder (4.14) nicht erfüllt, so müssen im weiteren Verlauf die entsprechenden Ungleichungen (4.11) respektive (4.12) überprüft werden. Dazu ist in jedem weiteren Evolutionsschritt über den Längenskalenindikator M_l der Entwicklungsparameter M zu bestimmen.

Zur Überprüfung der Ungleichungen (4.11) und (4.12) beziehungsweise (4.13) und (4.14) benötigen wir schnell zu berechnende obere Schranken an $\|\bar{\phi}\|_\infty$ und $\|\phi'\|_\infty$, um eine gute Performance des Zerlegungsalgorithmus zu garantieren. Zunächst gilt

$$\|\bar{\phi}^l\|_\infty \leq \|\bar{\phi}^{l-1}\|_\infty \leq \|\bar{\phi}^0\|_\infty.$$

Folglich muß die Gültigkeit der Abschätzung (4.13) nur zu Beginn der Kurvenevolution überprüft werden. Die entsprechende Abschätzung (4.11) hingegen muß in jedem Evolutionsschritt ausgewertet werden, in dem sich M ändert. Dies führt im ungünstigsten Fall auf einen Algorithmus der Ordnung $O(N^2)$, so daß anstelle von (4.11) im numerischen Verfahren mit der Abschätzung

$$\|\bar{\phi}^0\|_\infty \stackrel{!}{\leq} C_{p_1} M \hat{p}_{ref} \quad (4.15)$$

gearbeitet wird. Aufgrund des zu erwartenden Größenverhältnisses von $\bar{\phi}$ zu ϕ' stellt die Abschätzung (4.15) keine starke Einschränkung an die ursprüngliche Ungleichung (4.11) dar.

Um eine obere Schranke an $\|\phi'\|_\infty$ herzuleiten, welche sich ausschließlich aus Werten der Ausgangsfunktion ϕ berechnen läßt, müssen insbesondere die Boxen σ_i mit $i \in I^0 \setminus I^l$ geeignet zu Teilgebieten zusammengefaßt werden. Dazu definieren wir für jede Kante, welche die Punkte ϕ_j und ϕ_{j+m} , $j \in I^l$ und $m > 0$, verbindet ein Teilgebiet $\bar{\Omega}_j^l$ über

$$\bar{\Omega}_j^l := \bigcup_{j \leq i \leq j+m} \sigma_i$$

und fassen die Indizes j zur Indexmenge $\bar{\mathcal{J}}^l$ zusammen. Desweiteren führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} (\phi)_{j,max}^l &:= \max_{\sigma_i \subset \bar{\Omega}_j^l} \phi_i, \\ (\phi)_{j,min}^l &:= \min_{\sigma_i \subset \bar{\Omega}_j^l} \phi_i, \\ (\phi)_{j,L}^l &:= \phi_i, \quad x_i \leq x_k, \quad \forall x_i, x_k \in \bar{\Omega}_j^l, \\ (\phi)_{j,R}^l &:= \phi_i, \quad x_i \geq x_k, \quad \forall x_i, x_k \in \bar{\Omega}_j^l. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|(\phi')^l\|_\infty \leq (\phi')_{approx}^l$$

mit

$$\begin{aligned} (\phi')_{approx}^l &:= \max_{j \in \bar{\mathcal{J}}^l} \left(\max \left\{ (\phi)_{j,max}^l - (\phi)_{j,L}^l, (\phi)_{j,L}^l - (\phi)_{j,min}^l, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (\phi)_{j,max}^l - (\phi)_{j,R}^l, (\phi)_{j,R}^l - (\phi)_{j,min}^l \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

und $(\phi')_{approx}^l$ ist eine schnell zu berechnende obere Schranke an $\|(\phi')^l\|_\infty$. Die Abschätzung (4.12) wird zu

$$(\phi')_{approx}^l \stackrel{!}{\leq} C_{p_2} M^2 \hat{p}_{ref} \quad (4.17)$$

beziehungsweise die Abschätzung (4.14) zu

$$(\phi')_{approx}^l \stackrel{!}{\leq} C_{p_2} (M')^2 \hat{p}_{ref} \quad (4.18)$$

abgeschwächt.

Die Impulszerlegung kann erst nach der Zerlegung des Druckes erfolgen, da das Abbruchkriterium über die Wellenlängeninformation des Druckfeldes gesteuert wird. Ist die minimale Wellenlänge des Druckfeldes kleiner als die der Impulse, so wird die Kurvenevolution gestoppt.

Um in jedem Evolutionsschritt die Indizes mit minimalen Kosten numerisch sinnvoll zu bestimmen, müssen die Indizes nach der Größe ihrer Kosten aufsteigend angeordnet werden und nur die Indizes, deren Kosten sich durch das Herausnehmen der Indizes minimaler Kosten ändern, in die geordnete Liste

neu einsortiert werden. Dazu verwenden wir eine Kostenfunktion, welche eine zur Kostenfunktion (4.9) äquivalente Anordnung der Indizes bewirkt, sich jedoch numerisch mit geringerem Aufwand umsetzen läßt. Zunächst werden alle Indizes $i \in I^0$ mit $\alpha_i = 0$ entfernt. In einem zweiten Schritt werden alle Indizes mit $\sigma_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $j \in J^0$ fest, zu einem Cluster zusammengefaßt und die Cluster nach der Länge der zugehörigen Teilgebiete Ω_j aufsteigend sortiert. Die Bestimmung der minimalen Teilgebietslänge entfällt. Innerhalb der Cluster werden die Indizes in absteigender Reihenfolge nach der Größe des Betrages ihrer Wendewinkel sortiert. Dies wird bei der glatten Rekonstruktion der diskreten rein langwelligen Funktion \bar{f} aus den unverändert gebliebenen Daten benötigt.

In jedem Evolutionsschritt wird nun neben dem Cluster des zur Zeit kleinsten Teilgebietes mögliche Indizes mit verschwindendem Wendewinkel, die nach dem Eliminationsschritt bei der anschließenden linearen Rekonstruktion entstanden sein können, herausgenommen. So wird garantiert, daß innerhalb der Kurvenevolution keine Indizes mit verschwindenden Wendewinkel auftreten und bis auf die diskreten Wendepunkte keine mehrfachen Zuordnungen von Indizes zu unterschiedlichen Clustern bestehen. Die herauszunehmenden Indizes werden in jedem Evolutionsschritt in absteigender Reihenfolge nach der Größe des Betrages ihrer Wendewinkel in einem Stack gespeichert.

Satz 4.2.4 *Die Anzahl der Kontrollvolumina zu Beginn der Kurvenevolution sei mit $N = \#I^0$ bezeichnet. Dann beträgt die formale Ordnung des Zerlegungsalgorithmus $O(N \log N)$, falls an Stelle von (4.11) und (4.12) innerhalb des Abbruchkriteriums die Abschätzungen (4.13), (4.15), (4.17) und (4.18) verwendet werden.*

Beweis:

Es bezeichne mit $\bar{N} = \#J^0$ die Anzahl der konvexen und konkaven Teilgebiete Ω_j zu Beginn der Kurvenevolution. Da jedes Teilgebiet aus mindestens einem Kontrollvolumen besteht, gilt $\bar{N} \leq N$.

Das Anordnen der Cluster sowie der Indizes innerhalb eines jeden Clusters kann mit Sortieralgorithmen wie QUICKSORT oder HEAPSORT mit $O(N \log N)$ Operationen ausgeführt werden. Innerhalb eines jeden Evolutionsschrittes werden durch das Herausnehmen eines Clusters maximal sieben Teilgebiete in ihrer Größe verändert. Die dazugehörigen Cluster müssen entweder aus der geordneten Liste entfernt oder neu eingeordnet werden. Dies kann mit $O(\log N)$ Operationen ausgeführt werden. Werden zwei Cluster zusammengefaßt, so müssen die angeordneten Indexlisten der beiden Cluster zu einer geordneten Liste zusammengefaßt werden. In Abhängigkeit der Größe der Listen, hier mit m_1

und m_2 bezeichnet, kann dieser Vorgang über MERGESORT mit $O(m_1 + m_2)$ Operationen im Fall etwa gleich großer Listen oder über direktes Einsortieren der einzelnen Indizes der kleineren Liste in die geordnete größere Liste mit $O(\min(m_1, m_2) \log(\max(m_1, m_2)))$ Operationen ausgeführt werden.

Hierbei entspricht das Zusammenfassen von Indizes zu einem Cluster formal dem Entfernen dieser Indizes aus der Liste der Indizes mit unverändert gebliebenen Funktionswerten, da sie über die Liste der Cluster nur durch einen Cluster repräsentiert werden.

Zur Überprüfung der Abschätzungen (4.13) und (4.15) innerhalb des Abbruchkriteriums werden zu Beginn der Evolution $O(N)$ Operationen benötigt und jeweils $O(1)$ Operationen in jedem Evolutionsschritt. Die Berechnung von $(\phi')_{j,max}^l$ beziehungsweise $(\phi')_{j,min}^l$ kann während der gesamten Kurvenevolution mit $O(N)$ Operationen durchgeführt werden. Schließlich können die numerischen Kosten zur Bestimmung von $(\phi')_{approx}^l$ innerhalb der Ungleichungen (4.17) und (4.18) durch $O(\log(N))$ Operationen in jedem Evolutionsschritt nach oben abgeschätzt werden.

Da die Evolution nach $\bar{N} \leq N$ Schritten terminiert und für jeden herausgenommenen Index $O(\log N)$ Operationen benötigt werden, so beträgt die Ordnung des Zerlegungsalgorithmus $O(N \log N)$.

Eine Beschreibung der genannten Sortieralgorithmen entnehme man [12]. \square

Aufgrund der frei wählbaren Konstanten C_{p_1} und C_{p_2} innerhalb der Abschätzungen (4.8) sowie der Konstanten C_v und C_{div} in den Definitionen der Indikatoren des Geschwindigkeitsfeldes als auch der Wahl des Umschaltparameters α ist der Zerlegungsalgorithmus formal nicht parameterfrei. Da alle Konstanten bis auf α über die numerische Umsetzung des Ordnungsbegriffes $O(\cdot)$ in das Verfahren aufgenommen werden mußten, können diese geeignet für alle zu rechnenden numerischen Beispiele fest vorgewählt werden. Der Wert des Umschaltparameters α ist hingegen aus Performancegründen und Gründen zur Vermeidung von Auslöschungseffekten zu wählen, so daß man bei dem Zerlegungsalgorithmus von einem parameterfreien Algorithmus sprechen kann.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einige Anmerkungen betreffend der Rekonstruktion der diskreten rein langwelligen Funktion \bar{f} aus den unverändert gebliebenen Daten machen. Die im Zerlegungsalgorithmus enthaltene lineare Rekonstruktion stellt nicht in allen Fällen eine glatte und damit sinnvolle Interpolation an die unbekannte langwellige Funktion \bar{f} dar. Insbesondere in dem Fall, in dem sehr viele Punkte entfernt worden sind und die Abstände der unverändert aus der Kurvenevolution hervorgegangenen Punkte zueinander sehr groß sind, ist zu erwarten, daß die Interpolation an \bar{f} einen relativ großen Fehler aufweist und große Sprünge in den Ableitungen von \bar{f} zu

erwarten sind.

Wir versuchen deshalb herausgenommene Zellmittelwerte von f in \bar{f} wieder einzufügen, ohne dabei neue Wendepunkte zu erzeugen. Hierzu durchlaufen wir den Stack der durch die Kurvenevolution herausgenommenen Indizes $I^0 \setminus I^m$ in umgekehrter Reihenfolge und prüfen für jeden Index i , ob durch das Einfügen des Punktes f_i in \bar{f} sich die Anzahl der Teilgebiete $\#J^m$ vergrößert. Ist dies nicht der Fall, so wird der Index in die Menge I^m aufgenommen. Durch die Reihenfolge der im Stack gespeicherten Indizes wird erreicht, daß zunächst versucht wird die Indizes, welche zu langwelligeren Anteilen der Funktion f gehörten, einzufügen. Innerhalb der herausgenommenen Cluster werden dabei über den Betrag des Wendewinkels zuerst die Indizes, die aus glatten Bereichen des zugehörigen Teilgebietes stammten, ausgewählt. Der Gesamtalgorithmus der Zerlegung liefert nun schon im Fall linearer Interpolation sehr gute Ergebnisse.

Eine weitere Möglichkeit, um eine glattere Interpolation zu erreichen, besteht darin die lineare Rekonstruktion durch einen nichtlinearen Rekonstruktionsalgorithmus zu ersetzen. Hier bieten sich neben quadratischen Rekonstruktionen all jene Rekonstruktionsalgorithmen an, die sicherstellen, daß keine weiteren Wendepunkte durch den Algorithmus in \bar{f} eingefügt werden. Eine Rekonstruktion durch kubische Splines kann deshalb in diesem Zusammenhang nicht verwendet werden.

Die unterschiedlichen Rekonstruktionsarten sind in Abschnitt 4.2.5 einander gegenübergestellt.

4.2.4 Eigenschaften des Zerlegungsalgorithmus

In [15] sind die Eigenschaften des diskreten Evolutionsalgorithmus aufgeführt, die von der Wahl des Relevanzmaßes unabhängig sind. Wir fassen diese Eigenschaften in diesem Abschnitt kurz zusammen und ergänzen sie durch die Eigenschaften, welche charakteristisch für das von uns verwendete Relevanzmaß sind:

1. Die Zerlegung des Druckes als auch die Bestimmung von M erfolgen simultan.
2. Die Genauigkeit der Bestimmung des Indikators M_l hängt ausschließlich von der Feinheit der Diskretisierung ab.
3. Der Algorithmus läuft parameterfrei und terminiert automatisch. Gilt beim Abbruch $\#I^m \leq 2$, so ergibt sich als Kurve eine Gerade.

4. Das Verfahren paßt sich lokal den Daten an. Aufgrund des gewählten Relevanzmaßes werden nur Teilgebiete, in denen kurzwellige Phänomene auftreten, während eines Evolutionsschrittes bearbeitet. Alle anderen bleiben davon unberührt. Dabei kann davon ausgegangen werden, daß die Funktion im Laufe der Evolution immer langwelliger wird.
5. Es treten keine Abrundungseffekte oder Verschiebungen von relevanten Konturen auf, da die übrigen Zellmittel ihren Wert nicht ändern.
6. Ein Nachweis der Stetigkeit des Zerlegungsoperators ist nicht möglich, da die gewählte Kostenfunktion unstetig ist. Trotzdem scheinen die numerischen Resultate aus dem folgenden Abschnitt 4.2.5 zu belegen, daß die Zerlegung von der Feinheit der Diskretisierung annähernd unabhängig ist, da immer einzelne Teilgebiete als Ganzes gleichzeitig bearbeitet werden. Weiterhin ist ein Entauschen der Funktionen zu Beginn der Evolution festzustellen, da numerisches Rauschen ein kurzwelliges Phänomen darstellt.
7. Der Algorithmus besitzt die numerische Komplexität der Ordnung $O(N \log N)$, wenn N die Anzahl der Kontrollvolumina bezeichnet.

4.2.5 Validität des Zerlegungsalgorithmus

Anhand von drei Testbeispielen werden wir die verschiedenen Eigenschaften des Zerlegungsalgorithmus demonstrieren und die Interpolationen der unterschiedlichen Rekonstruktionsarten miteinander vergleichen. Das Rechengebiet $\Omega = [-51, 51]$ aller Testfunktionen ist im äquidistanten Fall in 1020, im unstrukturierten Fall in 1021 Kontrollvolumina unterteilt. Die Kontrollvolumina des unstrukturierten Falles werden entsprechend der Vorschrift aus Abschnitt 3.2 aus den Kanten der äquidistanten Unterteilung gewonnen, wobei die Lage der Kanten über eine Zufallsverteilung um maximal $\frac{1}{4}\Delta x$ variieren können.

Zunächst betrachten wir einen langwelligen Druckimpuls ($M_l = \frac{1}{102}$), der eine regelmäßige hochfrequente Störung überlagert ist. Die exakte Funktion lautet

$$\hat{p} = \hat{p}^{(0)} + M_l \hat{p}^{(1)} + M_l^2 \hat{p}^{(2)}$$

mit $\hat{p}_{ref} = \frac{4}{M_l^2} \frac{N}{m^2}$ und

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= 1, \\ p^{(1)} &= 2\gamma(1 + \cos(2\pi M_l x)), \\ p^{(2)} &= 2\gamma \sin(80\pi M_l x). \end{aligned}$$

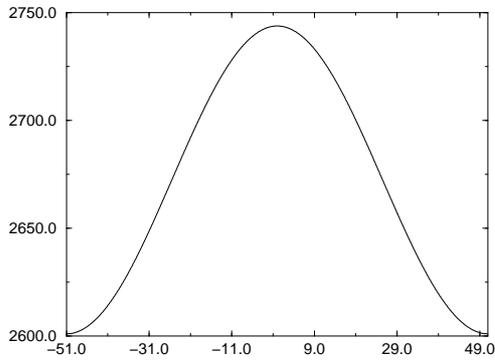


Abbildung 4.4: Langwelliger Druckanteil

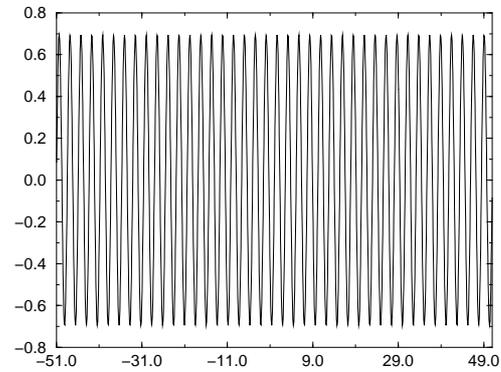


Abbildung 4.5: Kurzwellige Druckfluktuationen

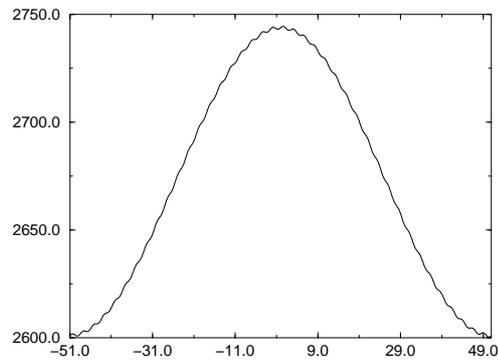
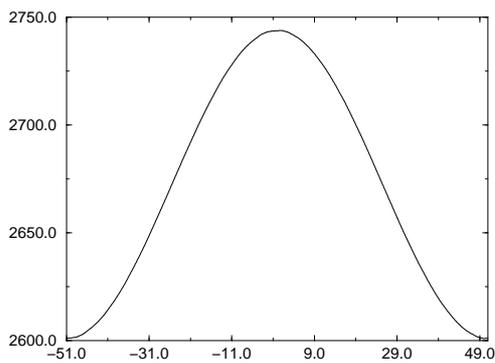
Abbildung 4.6: Druckverteilung des Gesamtsignals \hat{p} 

Abbildung 4.7: Gefilterter langwelliger Anteil

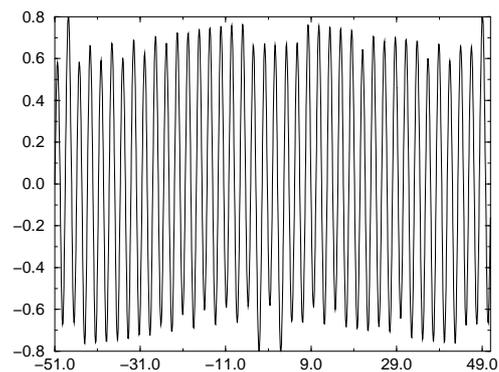


Abbildung 4.8: Restanteil

Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen den langwelligen beziehungsweise kurzwelligen Anteil der Druckwelle \hat{p} , deren Gesamtverteilung nach Addition beider

Komponenten in Abbildung 4.6 dargestellt ist. Die Abbildungen 4.7 und 4.8 geben die entsprechenden Anteile nach der Zerlegung bei einer äquidistanten Unterteilung des Rechengebietes wieder. Das langwellige Signal ist sehr gut wiederhergestellt und von dem kurzwelligen Anteil getrennt worden.

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine zum ersten Beispiel vergleichbare Situation, jedoch ist der Ausgangsfunktion

$$\hat{v}(x, t = 0) = \sqrt{\gamma}(1 + \cos(2M\pi x)) \frac{m}{s}$$

ein numerischen Rauschen überlagert worden. Zur Diskretisierung wurde ein unstrukturiertes Gitter verwendet.

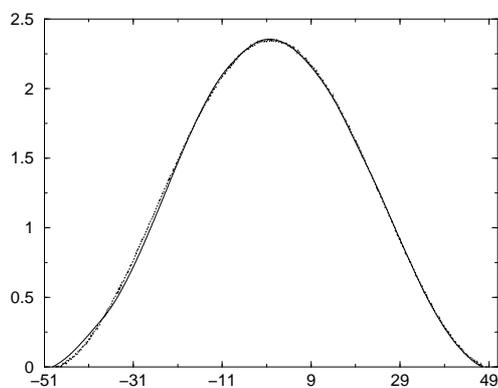


Abbildung 4.9: Langwellige Geschwindigkeitsverteilung

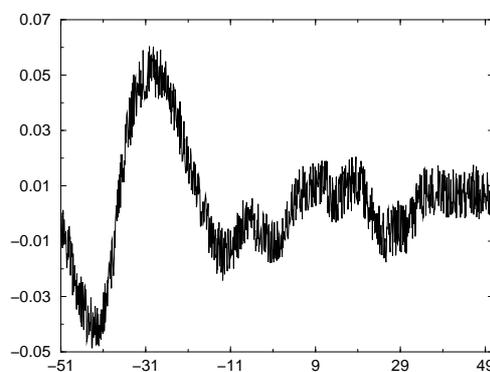


Abbildung 4.10: Kurzwelliges Rauschen

In Abbildung 4.9 ist das gestörte Signal über die gestrichelte Linie angedeutet und zusammen mit der rekonstruierten langwelligen Funktion geplottet. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Differenz beider Funktionen. Die mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Einfügeroutine und quadratischer Interpolation rekonstruierte langwellige Funktion stellt eine sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr gute langwellige Interpolation an die verrauschte Ausgangsverteilung dar.

Abbildungen 4.11 und 4.12 zeigen die anderen Rekonstruktionsarten im Vergleich. Dabei ist zu erkennen, daß insbesondere durch die Einfügeroutine die Interpolation des langwelligen Signals erheblich verbessert wird, während der in Abbildung 4.12 dokumentierte Unterschied der Interpolationsarten nach dem Einfügen von Punkten bei diesem Beispiel nur eine qualitative Verbesserung des langwelligen Signals in Bezug auf seine Glattheit darstellt.

Das letzte Beispiel ist einer Berechnung aus Kapitel 5 entnommen, in der eine kurzwellige Dichtefluktuation in einem langwelligen akustischen Strömungs-

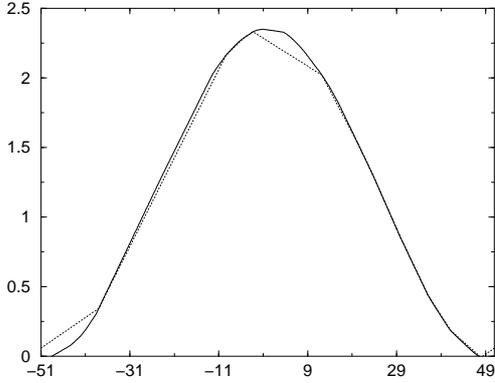


Abbildung 4.11: Lineare Rekonstruktion mit/ohne Einfügeroutine

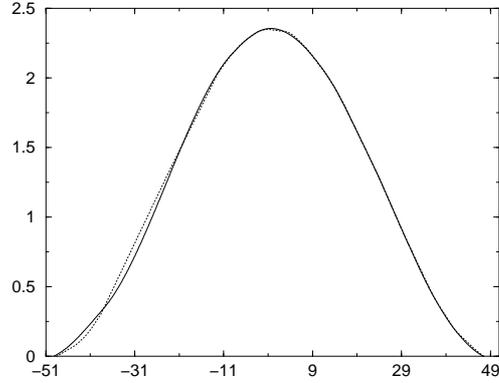


Abbildung 4.12: Lineare und quadratische Interpolation

feld transportiert wird. Die Anfangsverteilung, welche wiederum auf einem unstrukturierten Gitter diskretisiert wird, lautet

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, t = 0) &= 1 + 2M(1 + \cos(2M_l\pi x)) + \Phi(x)\frac{1}{2}\sin(80M_l\pi x)\frac{kg}{m^3}, \\ \hat{v}(x, t = 0) &= \sqrt{\gamma}(1 + \cos(2M_l\pi x))\frac{m}{s}, \\ \hat{p}(x, t = 0) &= \frac{4}{M_l^2}(1 + 2\gamma M_l(1 + \cos(2\pi M_l x))\frac{N}{m^2},\end{aligned}$$

mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(10M_l\pi x)), & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{2}{10M_l} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $M_l = \frac{1}{102}$. Alle folgenden Abbildungen zeigen das gefilterte Dichtesignal zum Zeitpunkt $T = 5,071s$.

Anhand dieses Beispiels können die hervorragenden lokalen Eigenschaften des Zerlegungsalgorithmus gezeigt werden. Die Zerlegung wird adaptiv fast vollständig auf den Teilbereich eingeschränkt, in dem sich die kurzwelligen Dichteoszillationen befinden. Vernachlässigt man numerisches Rauschen der Größenordnung 10^{-6} , so entsprechen sich in den anderen Teilbereichen die Ausgangsfunktion und die gefilterte langwellige Funktion identisch. Es treten keine globalen Abrundungseffekte auf. In Abbildung 4.14 ist nochmals der Unterschied zwischen der linearen und der quadratischen Interpolation aufgezeigt, der sich in der Abbildung der kurzwelligen Oszillationen jedoch nicht bemerkbar macht.

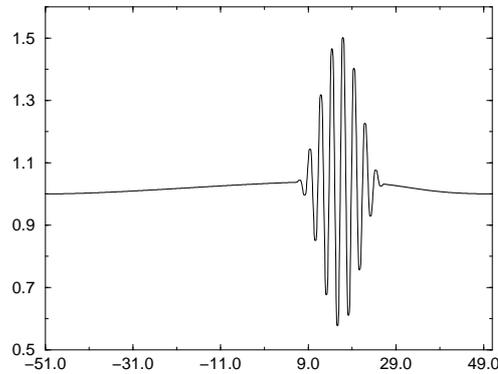


Abbildung 4.13: Dichteverteilung

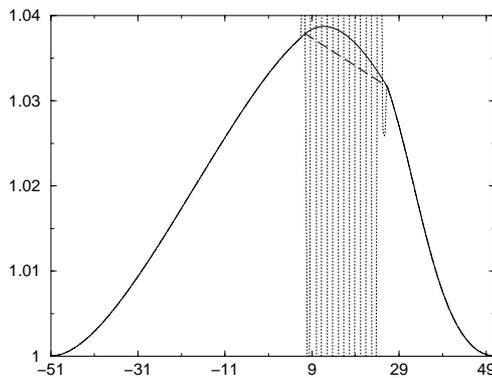


Abbildung 4.14: Gefilterter langwelliger Anteil

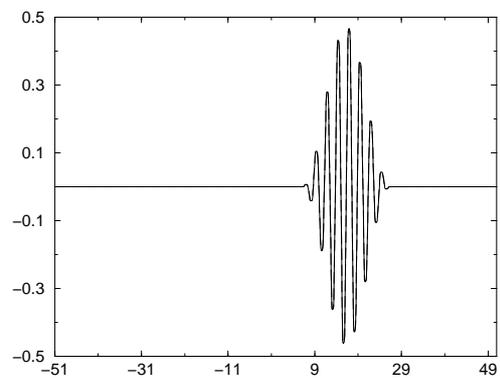


Abbildung 4.15: Kurzwellige Oszillationen

4.3 Zeitliche Adaption des Entwicklungsparameter M

Eine zeitliche Anpassung von M ist bei einem sich zeitlich in seinem Charakter ändernden Strömungsfeldes von großer Bedeutung, da der Entwicklungsparameter M allein aus den Werten des Strömungsfeldes gewonnen wird.

Eine zeitliche Adaption kann leicht durch ein einfaches Reskalieren nach jedem Zeitschritt erreicht werden. Da die Zerlegung der Variablen in jedem Zeitschritt ausgeführt werden muß, ist eine Berechnung der Indikatoren als auch der Mittelwerte im Vergleich dazu nicht sehr zeitintensiv. Zusätzlich ist es möglich, den Rechenaufwand weiter zu reduzieren und ein Reskalieren der Dichte und des Druckes zu vermeiden, falls sich ihre Durchschnittswerte während der Rechenzeit nicht wesentlich ändern. Dann muß nur noch das Geschwindigkeitsfeld in jedem Zeitschritt neu reskaliert werden, um die Einflüsse eines sich ändernden Entwicklungsparameters auf das Strömungsfeld zu berücksichtigen.

Bestimmung des Referenzparameters M —

Bestimme die Indikatoren M_v und M_{div} aus den Daten des Geschwindigkeitsfeldes.	
Berechne den vorläufigen Entwicklungsparameter M' ohne Informationen aus dem Druckfeld zu nutzen.	
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> Y Entwicklungsparameter $M' < 1$ N </div>	
Führe die Zerlegung des Druckes entsprechend Abschnitt 4.2.3 durch. Innerhalb der Zerlegungsroutine wird M_l simultan mitbestimmt.	$flag = GODUNOV$
Berechne den endgültigen Wert des Entwicklungsparameters M.	
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> Y Entwicklungsparameter $M < 1$ N </div>	
Zerlege den Impuls in seine langwelligen und kurzwelligen Anteile unter Berücksichtigung der Wellenlängeninformation der Druckzerlegung.	$flag = GODUNOV$
$flag = ASYMPTOTIC$	
Entdimensionalisierung aller Datensätze.	
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> Y $flag == ASYMPTOTIC$ N </div>	
Berechne einen Zeitschritt mit dem vorgestellten Verfahren entsprechend Abschnitt 3.4.	Berechne einen Zeitschritt mit einem klassischen Verfahren zur Lösung kompressibler Strömungen.
Redimensionalisierung der Strömungsdaten.	

5. Numerische Resultate

Zur Validierung des vorgestellten numerischen Verfahrens betrachten wir drei Testbeispiele aus unterschiedlichen Strömungsbereichen, wobei die Eigenschaften des Algorithmus sowohl im schwach kompressiblen Regime als auch im Übergangsbereich vom schwach kompressiblen zum kompressiblen Regime untersucht werden. Die ersten beiden Testbeispiele sind aus [10] entnommen, um die Performance des vorgestellten Verfahrens mit der einer vorhandenen Methode zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen vergleichen zu können. Der Algorithmus aus [10] beruht auf einem Splitting-Ansatz der Euler-Gleichungen und enthält keine zeitangepaßte Adaption des Entwicklungsparameters.

Alle Testbeispiele behandeln die Evolution reibungsfreier idealer Gase. In Beispiel I werden zwei kollidierende akustische Druckimpulse eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes, $\max_{x \in \Omega} \text{Ma}(x) \sim 0.1$, betrachtet. Neben der schwach nicht linearen Wellendeformation wird die zeitangepaßte Adaption des Entwicklungsparameters genauer untersucht. Beispiel II zeigt die Advektion eines kurzwelligen stark oszillierenden Wellenzuges in der Dichteverteilung innerhalb eines akustischen Strömungsfeldes mit $\max_{x \in \Omega} \text{Ma}(x) \sim 0.02$. Das vorgestellte Zeitschrittverfahren erweist sich als äußerst stabil und zeigt nur eine geringe Dissipation in den Amplituden der Dichteoszillationen. In Beispiel III wird schließlich der vollständige Übergang eines schwach kompressiblen in ein kompressibles Regime anhand einer sich zu einem Stoß aufsteilender Welle simuliert. Anhand dieses Beispiels kann die Notwendigkeit einer zeitangepaßten Adaption des Entwicklungsparameters aufgezeigt werden.

Die Parameter und freien Konstanten innerhalb des Zerlegungsalgorithmus und der Bestimmungsroutine des Entwicklungsparameters werden in allen Testbeispielen entsprechend Tabelle 5.1 gesetzt. Als Steigungslimiter innerhalb der Rekonstruktion zur Bestimmung der Flüsse des homogenen Systems wurde der Superbee-Limiter verwendet. Die Anfangsdaten der Beispiele sind in dimensionsbehafteter Form gegeben. Dabei können die hier gewählten Einheiten ($\frac{kg}{m^3}$, $\frac{m}{s}$, $\frac{N}{m^2}$) durch Reskalieren durch beliebige andere Einheiten ersetzt werden, sofern sich die Größenverhältnisse der einzelnen Variablen zueinander nicht verändern.

Die Referenz der Länge ist in allen Beispielen auf $\hat{l}_{ref} = 1 \text{ m}$ festgelegt und x sowie t stellen im weiteren die gemäß Tabelle 2.1 ermittelten dimensionslosen Orts- und Zeitvariablen dar.

α	0.12
C_v	0.5
C_{div}	0.5
C_{p_1}	2
C_{p_2}	4

Tabelle 5.1: Parameter und freie Konstanten.

Beispiel I: Die Anfangsdaten dieses Testbeispiels sind durch

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, t = 0) &= \left(0.995 + \frac{1}{11} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right) \frac{kg}{m^3}, \\ \hat{v}(x, t = 0) &= \left(\text{sign}(-x) \sqrt{\gamma} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right) \frac{m}{s}, \\ \hat{p}(x, t = 0) &= 11^2 \left(1 + \frac{\gamma}{11} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right) \frac{N}{m^2}\end{aligned}$$

in $\Omega = [-22, 22]$ geben, wobei Ω in 220 äquidistante Kontrollvolumina unterteilt wurde. An den Rändern des Gebietes wurden Wandrandbedingungen vorgeschrieben, welche im vorliegenden Fall auch über eine periodische Randbehandlung realisiert werden kann. Die folgenden Abbildungen zeigen die Strömungsgrößen zum Zeitpunkt $T = 1.63s$.

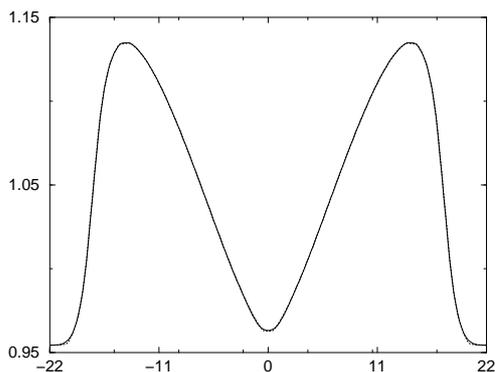


Abbildung 5.1: Dichteverteilung

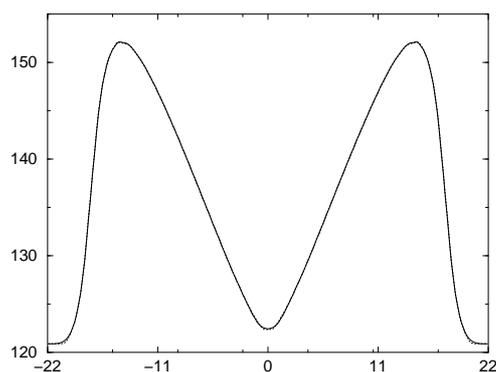


Abbildung 5.2: Druckverteilung

In den Abbildungen 5.1 bis 5.3 werden die Lösungen des hier beschriebenen Verfahrens, durchgezogene Linien, mit den eines klassischen Upwind-Verfahren, gestrichelt dargestellt, verglichen. Im Gegensatz zu [10] können fast keine Unterschiede in den physikalischen Größen festgestellt werden. Die

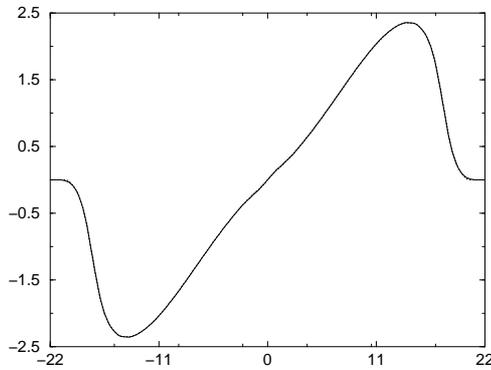


Abbildung 5.3: Geschwindigkeitsverteilung

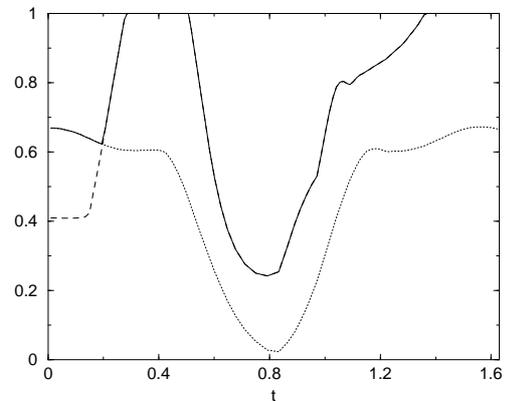


Abbildung 5.4: Zeitliche Entwicklung von M , \overline{M}_v und \overline{M}_{div}

schwach nicht lineare Wellendeformation wird aufgrund der zeitlich adaptiven Anpassung des Entwicklungsparameters M richtig wiedergegeben.

Abbildung 5.4 zeigt die zeitlichen Verläufe des Entwicklungsparameters sowie der modifizierten Indikatoren \overline{M}_v und \overline{M}_{div} ,

$$\overline{M}_v := g(M_v)M_v \quad \text{und} \quad \overline{M}_{div} = g(M_{div})M_{div},$$

um einen direkten Vergleich mit dem Entwicklungsparameter zu ermöglichen. Über die durchgezogene Linie ist der Verlauf des Entwicklungsparameters dargestellt, der Verlauf des Indikators M_v über die gepunktete und der von M_{div} über die gestrichelte. Die zeitliche Entwicklung von M wird in diesem Beispiel fast ausschließlich über den Divergenzindikator gesteuert. Nur so kann das Aufsteilen der Wellen aufgrund der nicht linearen Deformation erkannt werden, da sich die Wellenlänge im Grunde nicht ändert und es auch zu keinem Ansteigen der Geschwindigkeiten kommt. Das Absinken der Werte der Indikatoren zur Hälfte der Berechnung ist auf die Kollision der Wellen zurückzuführen, die ein fast vollständiges Auslöschen der Geschwindigkeiten bewirken. Dieses spiegelt sich in den Indikatoren wider und bewirkt eine erneute Berechnung der Evolution der Strömung durch das erweiterte Verfahren.

Beispiel II: Betrachten wir nun den schwach kompressiblen Fall eines langwelligen akustischen Strömungsfeldes. Die Dichteverteilung weist einen kurzwelligen stark oszillierenden Wellenzug auf, welcher langsam innerhalb des akustischen Feldes bewegt wird. Dabei sind die Amplituden der kurzwelligen Oszillationen in der gleichen Größenordnung wie der Mittelwert der Dichteverteilung gewählt.

Das Rechengebiet $\Omega = [-51, 51]$ wird sowohl äquidistant in 1020 Zellen als auch

nicht äquidistant in entsprechend 1021 Boxen unterteilt. Im unstrukturierten Fall variieren die Knoten \tilde{x}_i zur Berechnung der Kontrollvolumina über eine Zufallsverteilung um $\pm\frac{1}{4}\Delta x$ im Vergleich zu der äquidistanten Verteilung. Wir betrachten periodische Randbedingungen, wodurch numerische Einflüsse der Ränder auf das Innere des Strömungsgebietes ausgeschlossen werden können. Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, t = 0) &= \left(1 + \frac{1}{51} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{102}x\right)\right) + \Phi(x) \frac{1}{2} \sin\left(\frac{80\pi}{102}x\right)\right) \frac{kg}{m^3}, \\ \hat{v}(x, t = 0) &= \sqrt{\gamma} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{102}x\right)\right) \frac{m}{s}, \\ \hat{p}(x, t = 0) &= 51^2 \left(1 + \frac{\gamma}{51} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{102}x\right)\right)\right) \frac{N}{m^2}\end{aligned}$$

mit

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{10\pi}{102}x\right)\right) & , \text{ falls } 0 \leq x \leq \frac{204}{10} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 5.5 zeigt die Dichteverteilung zum Ende der Berechnung ($T =$

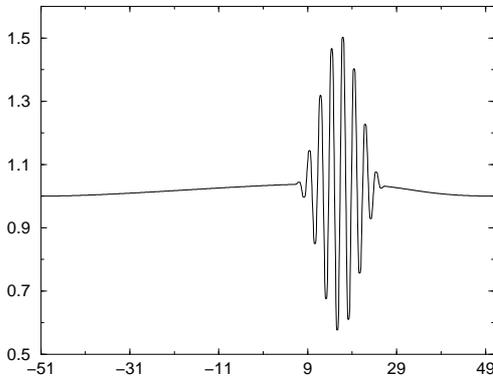


Abbildung 5.5: Dichteverteilung

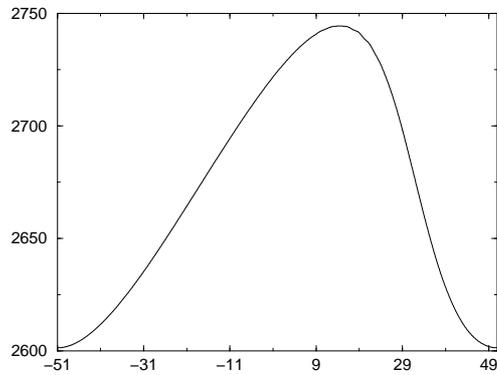


Abbildung 5.6: Druckverteilung

5.071s) für den strukturierten wie auch den unstrukturierten Fall. Die Amplituden der kurzwelligen Oszillationen sind im Vergleich zu denen aus der Anfangsverteilung fast vollständig erhalten. Bei der gewählten Genauigkeit sind die Amplituden noch sehr stark von dem verwendeten Limiter innerhalb der Berechnung der Riemannflüsse abhängig. Erst bei Verfeinerung der Diskretisierung nimmt der Einfluß der Limiter auf die Güte der Lösung ab.

Der Druck weist im Gegensatz zur glatten Anfangswertverteilung Oszillationen geringer Amplituden in dem Bereich auf, in dem die Dichteoszillationen auftreten. Diese Oszillationen geben den Einfluß des Druckanteils $p^{(2)}$ wieder,

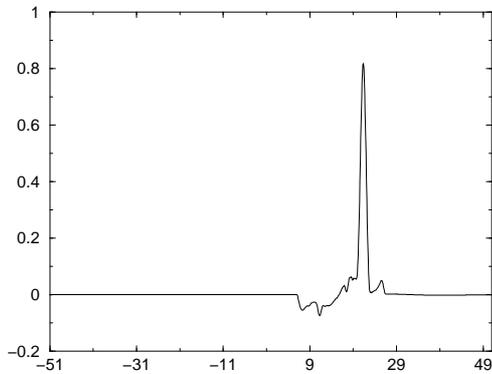
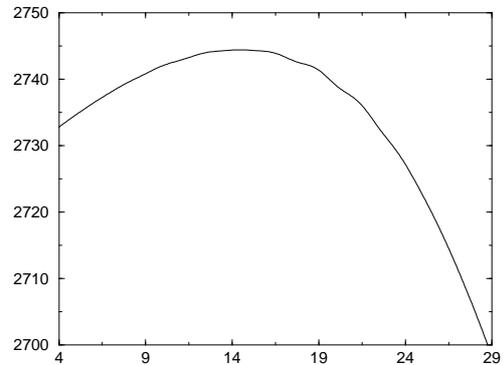
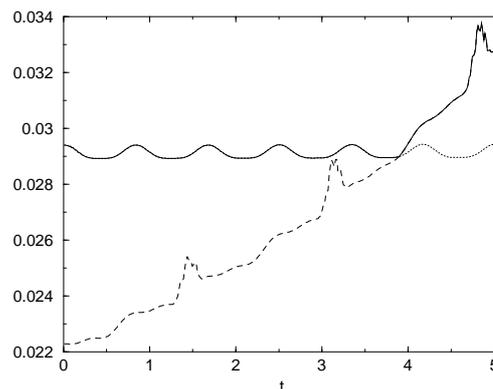
Abbildung 5.7: Druckanteil $M^2 \hat{p}^{(2)}$ 

Abbildung 5.8: Ausschnitt aus der Druckverteilung

welcher in Abbildung 5.7 dokumentiert ist und sich wiederum auf den Bereich des Wellenzuges der Dichte beschränkt. Die Verteilung von $p^{(2)}$ liefert aufgrund der nichtlinearen Zerlegung keinen direkten Aufschluß über die Gesamtverteilung des Druckes wie die Ausschnittsvergrößerung 5.8 zeigt. Die Verteilung der Geschwindigkeit ist glatt, obgleich die Vergleichslösung des expliziten Upwind-Verfahrens auch in der Geschwindigkeitsverteilung leichte Oszillationen zeigt. Aufgrund der stärkeren Dissipation des verwendeten Zeitschrittverfahrens zur Stabilisierung des Gesamtverfahrens können diese Oszillationen bei der verwendeten Diskretisierung nicht wiedergegeben werden.

Abbildung 5.9: Zeitabhängige Anpassung von M

Der Verlauf der zeitabhängigen Anpassung des Entwicklungsparameters M ist in Abb. 5.9 aufgezeigt. Die regelmäßigen Schwankungen in den Werten von M

im ersten Teil der Berechnung basieren auf der Tatsache, daß sich die akustische Welle schneller als die Dichtestörung bewegt. Damit verändert sich die relative Lage der Dichteoszillationen zu den Extrema der langwelligen Anteile der Strömung. Dies wird von dem Indikator M_v erkannt, der die Entwicklung des Entwicklungsparameters zu Beginn der Berechnung steuert. Zum Ende der Evolution hat sich die akustische Welle langsam immer stärker aufgestellt, so daß hier der Indikator M_{div} die weitere Entwicklung von M übernimmt. Der Wellenlängenindikator des Druckfeldes besitzt während der gesamten Berechnung den Wert $M_l = \frac{1}{102}$.

Beispiel III: Im letzten Beispiel betrachten wir eine sich zu einem Stoß aufteilende Welle. Es handelt sich hierbei also um den Übergang eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes in ein rein kompressibles.

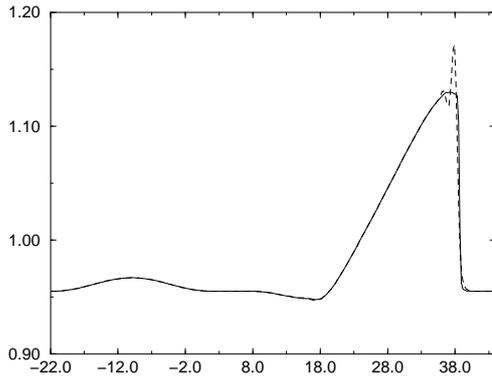


Abbildung 5.10: Dichteverteilung zum Zeitpunkt $T = 33s$

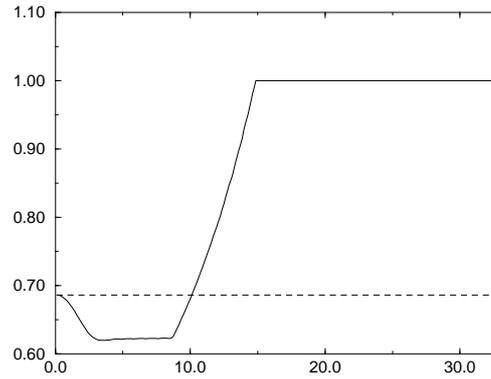


Abbildung 5.11: Verlauf der adaptiven Anpassung von M

Wir verwenden eine auf demselben Zufallsprinzip wie in Beispiel II beruhende unstrukturierte Unterteilung des Rechengebietes $\Omega = [-22, 44]$ in 331 Zellen und geben periodische Randbedingungen vor. Die Anfangsverteilung lautet:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, t = 0) &= \left(0.955 + \frac{1}{11} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right) \frac{kg}{m^3}, \\ \hat{v}(x, t = 0) &= \frac{\sqrt{\gamma}}{11} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right) \frac{m}{s}, \\ \hat{p}(x, t = 0) &= \left(2\gamma + \frac{\gamma}{11} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{11}\right)\right)\right) \frac{N}{m^2},\end{aligned}$$

für $x \leq 0$ sowie

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(x, t = 0) &= 0.955 \frac{kg}{m^3}, \\ \hat{v}(x, t = 0) &= 0 \frac{m}{s}, \\ \hat{p}(x, t = 0) &= 2\gamma \frac{N}{m^2},\end{aligned}$$

im Fall $x > 0$.

Abbildung 5.10 zeigt die Dichteverteilung mit und ohne zeitliche Anpassung des Referenzparameters zum Ende der Berechnung, $T = 33s$. In der nebenstehenden Abbildung 5.11 ist der zeitliche Verlauf der Werte von M dokumentiert.

Der Vergleich der numerischen Ergebnisse mit und ohne zeitliche Anpassung des Entwicklungsparameters verdeutlicht dieses Beispiel die Notwendigkeit einer zeitlichen Adaption von M und damit verbunden einer steten Re- und Entdimensionalisierung des betrachteten Strömungsfeldes im Fall einer sich von schwach kompressibel zu kompressibel ändernden Strömung. Obwohl sich die Lösungen in den glatten Bereichen annähernd überdecken, wird der Stoß nur bei dem adaptiven Ansatz richtig und ohne Überschwingen der Lösung aufgelöst. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die asymptotischen Korrekturen $\mathbf{a}(\mathbf{u})$ über einen zentralen Ansatz diskretisiert worden sind.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist eine Erweiterung eines Finite-Volumen-Verfahrens der Euler-Gleichungen für den Bereich kleiner Mach-Zahlen vorgestellt worden, so daß sich der Gültigkeitsbereich des Gesamtverfahrens vom inkompressiblen Regime bis zu Überschallströmungen erstreckt.

Hierzu wurde in Hinblick auf die in der Einleitung formulierten Forderungen eine gezielte Integration der aus der asymptotischen Analyse [10, 20] gewonnenen Erkenntnisse vorgenommen. Die erzielte Methode entspricht für transsonische und supersonische Strömungsfelder einem herkömmlichen Upwind-Verfahren, während im Bereich kleiner Mach-Zahlen eine Aufteilung der konvektiven Flußfunktion eine angepaßte Vorgehensweise im asymptotischen Sinne ermöglicht.

Durch die physikalisch gesteuerte Anpassung des Referenzparameters und der damit verbundenen Entdimensionalisierung des Strömungsfeldes liegt ein Algorithmus vor, der seine Diskretisierungsart selbständig dem zugrundeliegenden Strömungsfeld anpaßt. Die hierbei notwendige Zerlegung der physikalischen Größen in ihre langwelligen und kurzwelligen Anteile wurde über einen neuartigen Zerlegungsalgorithmus vorgenommen, dessen Eigenschaften mit Hilfe einiger Beispiele wirkungsvoll demonstriert werden konnten.

Zudem ergibt sich durch die gewählte Vorgehensweise im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl ein stets divergenzfreies diskretes Geschwindigkeitsfeld.

Anhand der ausgeführten Testrechnungen ist nachgewiesen worden, daß mit dem entwickelten Algorithmus eine selbstadaptive und räumlich wie zeitlich hochauflösende Methode vorliegt, die eine zuverlässige Berechnung instationärer Strömungen in unterschiedlichsten Mach-Zahlbereichen ermöglicht. Insbesondere im Übergangsbereich eines schwach kompressiblen in ein rein kompressibles Regime besitzt das entwickelte Verfahren Vorzüge gegenüber herkömmlicher Methoden zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen.

Einen zukünftigen Entwicklungsschritt stellt die Erweiterung des Verfahrens auf mehrere Raumdimensionen dar, wobei in diesem Rahmen auch eine Berücksichtigung von Reibungseffekten und Quelltermen vorgenommen werden sollte.

Literaturverzeichnis

- [1] R. COURANT, K. O. FRIEDRICHS, H. LEWY. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Annalen*, (100): 32–74, 1928.
- [2] J. H. FERZIGER, M. PERIC. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [3] C. HIRSCH. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1. Wiley & Sons, Chicester, New York, 1988.
- [4] C. HIRSCH. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 2. Wiley & Sons, Chicester, New York, 1988.
- [5] L. HOFFMANN, A. MEISTER. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen. *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe F, Computational Fluid Dynamics and Data Analysis* 13.
- [6] L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Numerical Scheme for Low Mach Number Flow based on Asymptotic Analysis with Time-Dependent Adaptation of the Asymptotic Sequence. In *Proceedings of the Fourth ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, (Eds.) C. HIRSCH, ET. AL. PANDOLFI, M., volume 1, pp. 567–572, Athens, 1998.
- [7] L. HOFFMANN, A. MEISTER. The Extension of a Compressible Flow Solver to the Low Mach Number Regime. In *Proceedings of the 3rd Seminar on Euler and Navier-Stokes Equations*, Prague, 1998.
- [8] L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Compressible Low Mach Number Scheme based on Image Processing and Asymptotic Analysis. In *8th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Bremen, September 1999.
- [9] L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Compressible Low Mach Number Scheme based on Image Processing and Asymptotic Analysis. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2000. Accepted for publication.
- [10] R. KLEIN. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I: One-Dimensional Flow. *J. Comput. Phys.*, 121: 213–237, 1995.

- [11] R. KLEIN, N. BOTTA, T. SCHNEIDER, C.D. MUNZ, S. ROLLER, A. MEISTER, L. HOFFMANN, TH. SONAR. Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics. *Journal of Engineering Mathematics*, 2000. Accepted for publication.
- [12] D. E. KNUTH. *The Art of Computer Programming*, volume 3 / Sorting and Searching. Addison–Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1973.
- [13] R. LAKÄMPER. *Formbasierte Identifikation zweidimensionaler Objekte*. PhD thesis, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik, 2000.
- [14] J. L. LATECKI, R. LAKÄMPER. Polygon Evolution by Vertex Deletion. In preparation.
- [15] L. J. LATECKI, R. LAKÄMPER. Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution. *Comput. Vision Image Understanding*, 73 (3): 441–454, 1999.
- [16] R. LEVEQUE. A Large Time Step Generalization of Godunov’s Method for Systems of Conservation Laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22 (6): 1051–1073, 1985.
- [17] R. J. LEVEQUE. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [18] S. MALLAT. A compact multiresolution representation: the wavelet model. In *IEEE Workshop Comput. Vision*, Miami Florida, 1987.
- [19] A. MEISTER. Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen. *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik*, Reihe F, Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 1, Hamburg, 1997.
- [20] A. MEISTER. Asymptotic Single and Multiple Scale Expansions in the Low Mach Number Limit. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 60 (1): 256–271, 1999.
- [21] A. MEISTER, TH. SONAR. Finite-volume schemes for compressible fluid flow. *Surv. Math. Ind.*, 8: 1–36, 1998.
- [22] T. SCHNEIDER, N. BOTTA, K. J. GERATZ, R. KLEIN. Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Compressible Solver Based on Low Mach Number Asymptotics II: Multi-Dimensional, Variable Density Zero Mach Number Flow. *J. Comput. Phys.*, 155: 248–286, 1999.

- [23] H. R. SCHWARZ. *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 3. edition, 1993.
- [24] J. SESTERHENN. *Zur numerischen Berechnung kompressibler Strömungen bei kleinen Mach-Zahlen*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Diss. ETH No. 11334, 1995.
- [25] E. F. TORO. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [26] H. A. VAN DER VORST. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13: 631–644, 1992.
- [27] G. VOLPE. Performance of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers. *AIAA J.*, 31 (1): 49–56, 1993.
- [28] J. WEICKERT. A Review of Nonlinear Diffusion Filtering. *Scale-Space Theory in Computer Visions, Lecture Notes in Comp. Sciences*, 1252: 3–28, 1997.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist eine Erweiterung eines Finite-Volumen-Verfahrens der Euler-Gleichungen für den Bereich kleiner Mach-Zahlen vorgestellt worden, so daß sich der Gültigkeitsbereich des Gesamtverfahrens vom inkompressiblen Regime bis zu Überschallströmungen erstreckt.

Hierzu wurde in Hinblick auf die in der Einleitung formulierten Forderungen eine gezielte Integration der aus der asymptotischen Analyse [10, 20] gewonnenen Erkenntnisse vorgenommen. Die erzielte Methode entspricht für transsonische und supersonische Strömungsfelder einem herkömmlichen Upwind-Verfahren, während im Bereich kleiner Mach-Zahlen eine Aufteilung der konvektiven Flußfunktion eine angepaßte Vorgehensweise im asymptotischen Sinne ermöglicht.

Durch die physikalisch gesteuerte Anpassung des Referenzparameters und der damit verbundenen Entdimensionalisierung des Strömungsfeldes liegt ein Algorithmus vor, der seine Diskretisierungsart selbständig dem zugrundeliegenden Strömungsfeld anpaßt. Die hierbei notwendige Zerlegung der physikalischen Größen in ihre langwelligen und kurzwelligen Anteile wurde über einen neuartigen Zerlegungsalgorithmus vorgenommen, dessen Eigenschaften mit Hilfe einiger Beispiele wirkungsvoll demonstriert werden konnten.

Zudem ergibt sich durch die gewählte Vorgehensweise im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl ein stets divergenzfreies diskretes Geschwindigkeitsfeld.

Anhand der ausgeführten Testrechnungen ist nachgewiesen worden, daß mit dem entwickelten Algorithmus eine selbstadaptive und räumlich wie zeitlich hochauflösende Methode vorliegt, die eine zuverlässige Berechnung instationärer Strömungen in unterschiedlichsten Mach-Zahlbereichen ermöglicht. Insbesondere im Übergangsbereich eines schwach kompressiblen in ein rein kompressibles Regime besitzt das entwickelte Verfahren Vorzüge gegenüber herkömmlicher Methoden zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name	Lars Berend Hoffmann
Geburtsdatum	03.01.1971
Geburtsort	Bremen
Familienstand	ledig, ein Kind

Schulbildung:

1977 – 1983	Grundschule und Orientierungsstufe Oldenburg
1983 – 1990	Gymnasium Eversten, Oldenburg, Abschluß Abitur

Wehr-/Zivildienst:

7.1990 – 4.1991	Wehrdienst als Sanitätssoldat, Bereich Krankenpflege
4.1991 – 9.1991	Zivildienst, häusliche Betreuung eines schwerbehinderten Kleinkindes

Studium:

10.1991 – 5.1997	Studium der Biochemie an der Universität Hamburg
10.1993 – 5.1997	Doppelstudium, zweites Studienfach angewandte Mathematik, Nebenfächer Physik, Ozeanographie Mathematik Diplom, Thema der Diplomarbeit: <i>Gültigkeit des Quasigeostrophischen Strömungsmodells für großskalige Bewegungen im Ozean</i>
6.1997 –	Promotionsstudium am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg, Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), Projekt <i>Asymptotisch adaptive Verfahren zur Simulation von Mehrskalensproblemen der Strömungsmechanik</i>

Berufliche Tätigkeit:

6.1997 – 5.2000	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg, Schwerpunkt Differentialgleichungen und Dynamische Systeme
-----------------	--

Veröffentlichungen:

1. L. HOFFMANN, A. MEISTER. The Extension of a Compressible Flow Solver to the Low Mach Number Regime. In *Proceedings of the 3rd Seminar on Euler and Navier-Stokes Equations*, Prague, 1998.
2. L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Numerical Scheme for Low Mach Number Flow based on Asymptotic Analysis with Time-Dependent Adaptation of the Asymptotic Sequence. In *Proceedings of the Fourth ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, (Eds.) C. HIRSCH, ET. AL. PANDOLFI, M. , volume 1, pp. 567–572, Athens, 1998.
3. L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Compressible Low Mach Number Scheme based on Image Processing and Asymptotic Analysis. In *8th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, Bremen, September 1999.
4. L. HOFFMANN, A. MEISTER. A Compressible Low Mach Number Scheme based on Image Processing and Asymptotic Analysis. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 2000. Accepted for publication.
5. R. KLEIN, N. BOTTA, T. SCHNEIDER, C.D. MUNZ, S. ROLLER, A. MEISTER, L. HOFFMANN, TH. SONAR. Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics. *Journal of Engineering Mathematics*, 2000. Accepted for publication.
6. L. HOFFMANN, A. MEISTER. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Strömungen kleiner Mach-Zahlen. *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe F, Computational Fluid Dynamics and Data Analysis* 13.