

Beiträge zur Verhandlungstheorie

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
(Dr.rer.pol.)

des Fachbereiches Wirtschaftswissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt von Diplom-Mathematiker
Christoph Berg aus Hamburg

Hamburg, den 21.November 1999

Mitglieder der Promotionskommission

Vorsitzender: Prof. Dr. Wegscheider
Erstgutachter: Prof. Dr. Holler
Zweitgutachter: Prof. Dr. Stahlecker

Das wissenschaftliche Gespräch fand
am 6. Juli 1999 statt

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Zusammenfassung	5
I	Rubinsteins Verhandlungsspiel unter nichtstationären Nutzenfunktionen	15
2	Einleitung	17
2.1	Einführung	17
2.2	Ein Literaturüberblick	19
3	Das Modell	22
3.1	Formale Einführung	22
3.2	Beispiele: Nichtstationäre Nutzenfunktionen	26
4	Spieltheoretische Analyse	28
4.1	Existenz eines teilspielperfekten Gleichgewichts in stationären Strategien	28
4.2	Charakterisierung der Gleichgewichte	36
4.3	Beispiele	41
5	Zusammenfassung	45
A	Mathematischer Anhang	47

II Ein Modell zur Erklärung von Reputationsphänomenen

53

6 Einführung — Das Ladenkettenparadoxon

55

7 Einführung des Modells und der Lösungskonzepte

59

7.1 Das Modell 59

7.2 Gleichgewichtskonzepte 62

8 Spieltheoretische Analyse

66

8.1 Die Existenz von nichttrivialen Gleichgewichten 66

8.2 Weitere Beobachtungen 76

8.2.1 Robustheit von Gleichgewichten 77

8.2.2 Preiskämpfe im Gleichgewicht 86

8.3 Eintrittsverhinderung unter einer unkorrelierten Beobachtungsstruktur 89

9 Diskussion und Zusammenfassung

92

9.1 Der Aufsatz von Masso 92

9.2 Zusammenfassung und Vergleich mit anderen Arbeiten 93

9.3 Diskussion der Annahmen und Ergebnisse 97

B Mathematischer Anhang

99

III Verhandlungen in Netzwerken - Graphspiele und ihre Anwendungen

109

10 Soziale Netzwerke und Graphspiele – ein Überblick

111

11 Definition und spieltheoretische Analyse

115

11.1 Das Grundmodell 115

11.2 Gleichgewichtsanalyse	119
11.2.1 Einigungsgleichgewichte	119
11.2.2 Allgemeine Gleichgewichte	124
12 Anwendungsbeispiele	133
12.1 Elemente von Verhandlungsstärke	133
12.1.1 Variation des Diskontfaktors	134
12.1.2 Strukturelle Effekte	139
12.2 Der GS-Index — Machtmessung auf Basis von Graphspielen .	148
12.2.1 Elementare Eigenschaften des GS-Index	149
12.2.2 Vergleich mit anderen Indizes	151
12.2.3 Experimentelle Ergebnisse und der GS-Index	152
12.3 Märkte	156
12.3.1 Vollständige Märkte	157
12.3.2 Unvollständige Märkte	162
13 Zusammenfassung und Ausblick	169
C Mathematischer Anhang	172

Kapitel 1

Einführung und Zusammenfassung

Verhandlungen stellen sowohl aus theoretischer wie auch aus praktischer Sicht einen fundamentalen Baustein wirtschaftlicher Interaktion dar. Für ein systematisches Verständnis von ökonomischen Vorgängen kann daher auf eine umfassende Theorie der Verhandlungen nicht verzichtet werden. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses Forschungsgebiet durch die Entwicklung und Analyse von spieltheoretischen Modellen weiterzuentwickeln.

Die praktische Bedeutung von Verhandlungen zeigt sich bereits darin, daß sie uns auf allen Ebenen des täglichen Lebens begegnen. Dies beginnt beim Aufteilen der Hausarbeit unter den Familienmitgliedern und setzt sich über den Kauf eines Gebrauchtwagens sowie die alljährlichen Tarifverhandlungen zwischen Gewerkschaften und Arbeitgebern bis zu den Bemühungen um den Beitritt der osteuropäischen Länder zur europäischen Union fort. An dieser Vielfalt von Verhandlungssituationen zeigt sich, daß ein anwendungsorientierter Ökonom nur auf der Basis einer breit angelegten und gut ausgebauten Verhandlungstheorie die Möglichkeit hat, auf ein für sein spezielles Anwen-

denkungsgebiet angemessenes Modell zurückzugreifen.

Für die Theorie der Volkswirtschaftslehre ergibt sich die Bedeutung von Verhandlungen, wenn man sich an der klassischen mikroökonomischen Theorie orientiert, aus zwei Gründen. Zum einen gibt die traditionelle Sichtweise eines Marktes mit einem festen Preissystem *keine befriedigende Antwort auf Fragen, die sich im Zusammenhang mit den Beziehungen zwischen wenigen Individuen (Aktoren, Spieler, Wirtschaftssubjekte) stellen* (Holler (1986), Seite 2). Zum anderen kann auch der Markt selbst als eine nachgelagerte Institution interpretiert werden, die sich als Folge einer Vielzahl von Verhandlungen konstituiert. Aus diesem Standpunkt heraus kann auch aus rein theoretischer Sicht das Geschehen in einem Markt nur über das Studium der Verhandlungen vollständig erfaßt werden.

Unter diesem Gesichtspunkt überrascht es zunächst, daß sich die Mikroökonomik in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts auf die Analyse des idealen Marktes konzentrierte und eine Theorie der Verhandlungen in dieser Zeit nicht einmal begründet, geschweige denn ausgearbeitet wurde. Die Ursache für dieses Phänomen liegt u. U. darin, daß bis zur Einführung der Spieltheorie durch die Arbeiten von VON NEUMANN/MORGENSTERN (1947) und NASH (1951) das geeignete modelltheoretische Instrumentarium fehlte. Erst auf der Basis dieser Arbeiten wurde eine systematische Analyse strategischer Konfliktsituationen ermöglicht, wie sie für das Verständnis von Verhandlungsvorgängen notwendig ist.

Mit der Geburt der Spieltheorie war der Weg zur weiteren Entwicklung dieses Forschungsgebietes geebnet, und die Verhandlungstheorie wurde seitdem durch eine ständig steigende Zahl von Veröffentlichungen zu einem nahezu unüberschaubaren Teilbereich der Spieltheorie ausgebaut. Um diese Literatur zu klassifizieren, bietet sich zunächst die Einteilung in kooperative und nichtkooperative Spieltheorie an.

Kooperative Spieltheorie adaptiert üblicherweise einen normativen Ansatz; es werden Axiome wie beispielsweise Symmetrie oder Paretoeffizienz verwendet, um gewünschte Eigenschaften einer Verhandlungslösung zu beschreiben.

Dabei wird allerdings die Frage ignoriert, auf welchem Wege sich die Verhandlungspartner auf das vorgesehene Resultat einigen. Daher kann kooperative Verhandlungstheorie beispielsweise keine Erkenntnis zu der Frage liefern, wie unterschiedliche Verhandlungsmechanismen das zu erwartende Ergebnis beeinflussen. Grundlegenden Arbeiten zu diesem Gebiet stammen von SHAPLEY (1953), KALAI/SMORODINSKY (1975) und NASH (1951). In den Werken von PETERS (1992) und HOLLER/ILLING (1993) ist ein Literaturüberblick enthalten.

In Gegensatz zum kooperativen Ansatz beruht die *nichtkooperative Spieltheorie* im wesentlichen auf dem Axiom der individuellen Rationalität. Die Verhandlungspartner können hier unter fest vorgegebenen Entscheidungsalternativen —ihren Strategien— wählen, und das erwartete Verhalten der Spieler wird mit Hilfe eines geeigneten Gleichgewichtskonzepts analysiert. Für eine Übersicht über nichtkooperative Verhandlungsmodelle sei auf ROTH (1985) verwiesen.

Eine weitere Klassifikation der Verhandlungstheorie läßt sich anhand der Anzahl der interagierenden Wirtschaftssubjekte treffen. Analog zu den wichtigsten Marktformen lassen sich drei grundsätzliche Fälle unterscheiden:

- *Bilaterale Verhandlungen* finden zwischen zwei Akteuren statt. Die entsprechende Marktform ist das bilaterale Monopol, wie es beispielsweise oft auf dem Arbeitsmarkt bei Verhandlungen zwischen Unternehmern und Gewerkschaften vorgefunden wird.
- *Monopolistische Verhandlungen* liegen vor, wenn ein 'großer' Akteur nacheinander oder gleichzeitig mit mehreren 'kleinen' Partnern verhandelt. Die entsprechende Marktform ist das Monopol. Ein typisches Beispiel ist die Belieferung von Computerherstellern mit Mikroprozessoren und standardisierter Software.
- Verhandeln mehr als zwei Spieler miteinander ohne daß eine monopolistische Struktur wie oben beschrieben vorliegt, so bezeichne ich dies als

polylaterale Verhandlungen. Typisch für diese Klasse von Verhandlungen sind beispielsweise Konkurrenzmärkte oder Marktsituationen, bei denen es sowohl auf der Anbieter- als auch auf der Abnehmerseite mehrere Akteure gibt. Ein Beispiel hierfür sind die Beziehungen zwischen Reifen- und Automobilherstellern.

Entlang dieser Klassifikation ist auch die vorliegende Arbeit aufgebaut. Sie besteht aus drei eigenständigen Teilen, deren Strukturen sich jeweils an wissenschaftlichen Arbeiten orientieren. Nach einer kurzen Einleitung, die in den speziellen Themenbereich einführt, folgt die Darstellung und Analyse des behandelten Modells. Den Schluß eines jeden Teils bildet dann eine kurze Diskussion der erarbeiteten Resultate. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit nichtkooperativen Verhandlungsmodellen, und als Instrumentarium wird jeweils das Gleichgewichtskonzept von NASH (1951) beziehungsweise eine entsprechende Verfeinerung verwendet. Ziel in jedem dieser drei Teile ist es, das jeweilige Forschungsgebiet kurz darzustellen und vor allem weiterzuentwickeln. Während hierzu in Teil I ein bestehendes Modell erweitert wird, werden in den Teilen II und III eigenständige neue Modelle vorgestellt, die helfen sollen, mögliche Ursachen von Verhandlungsstärke und -schwäche aufzudecken und systematisch zu beschreiben. Da sich diese Arbeit auf die theoretischen Aspekte von Verhandlungen konzentriert, ist eine ausführliche Diskussion der Anwendungsmöglichkeiten und -schwierigkeiten der behandelten Theorie nicht beabsichtigt. Dementsprechend beschränken sich die entsprechenden Abschnitte zumeist auf die Angabe von Beispielen, die einen Hinweis auf mögliche Anwendungsbereiche geben.

Im Bereich der *bilateralen Verhandlungen* hat das Modell von RUBINSTEIN (1982) eine herausragende Bedeutung erlangt. In diesem Modell verhandeln zwei Spieler, indem sie sich alternierend Vorschläge für die Aufteilung eines Kuchens machen. Weiter wird angenommen, daß dieser Kuchen mit der Zeit schrumpft, d.h., daß der Nutzen der Spieler an einem festen Anteil des Kuchens mit fortlaufender Zeit immer geringer wird. Rubinstein weist für dieses Modell nach, daß es unter bestimmten Restriktionen in bezug auf die Präfe-

renzen der Spieler ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht gibt. In Teil I dieser Arbeit wird dieses Modell aufgegriffen und eine neue Beweistechnik entwickelt, mit deren Hilfe Rubinsteins Modell in einem allgemeineren Kontext analysiert werden kann: Die Anforderungen an die Nutzenfunktionen, die die Präferenzen der beider Spieler repräsentieren, können reduziert werden. Für die so erweiterte Klasse von Nutzenfunktionen wird für Rubinsteins Verhandlungsspiel die Menge der teilspielperfekten Gleichgewichte charakterisiert und Bedingungen für die Eindeutigkeit eines Gleichgewichtes werden hergeleitet.

Diese erweiterte Analyse von Rubinsteins Verhandlungsmodell dient zum einen der Abrundung der Theorie. So wird beispielsweise der Fall fixer Verhandlungskosten durch Rubinsteins Theorem nicht abgedeckt, und in der Standardliteratur wird diese Variante zumeist als ein weiterer Sonderfall dargestellt. Mit der hier vorgestellten Beweistechnik lassen sich derartige Nutzenfunktionen leicht behandeln und Rubinsteins Theorem läßt sich als ein Spezialfall in die hier erarbeitete Analyse einfügen. Aus Anwendungssichtspunkten ist hervorzuheben, daß sich in der hier vorgestellten Analyse vor allem die Anforderung der Stationarität nicht mehr gestellt werden muss. Stationarität besagt, daß sich die Zeitpräferenzen der Spieler im Lauf des Spiels nicht ändern. Um zu zeigen, daß diese Bedingung tatsächlich eine wichtige Restriktion der zulässigen Nutzenfunktionen darstellt, werden exemplarisch einige Anwendungssituationen aufgezeigt, in denen die Präferenzen der Spieler nicht stationär sind. Diese Beispiele können mit der von Rubinstein verwendeten Beweistechnik nicht gelöst werden, wohl aber mit der hier entwickelten Methode.

Ein typisches Phänomen bei *monopolistischen Verhandlungen* ist der Reputationsgedanke. In Teil II dieser Arbeit wird daher ein Modell zur Erklärung von Reputationseffekten vorgestellt und analysiert. Im Grundmodell verhandelt ein großer Spieler (g) nacheinander mit mehreren kleinen Spielern (k). Das Basisspiel ist hierbei eine vereinfachte Variante des Ultimatumspiels:

Dieser Spielbaum behandelt die Aufteilung von vier Nutzeneinheiten. Spieler

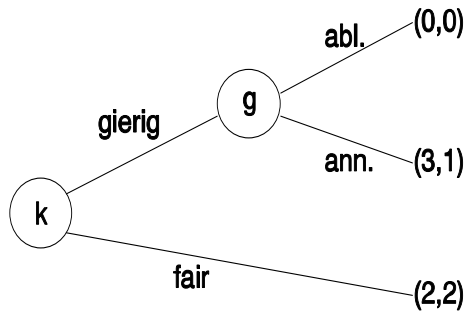


Abbildung 1.1: Eine Variante des Ultimatumspiels

k kann entweder eine 'faire' Verteilung (2,2) vorschlagen, die automatisch akzeptiert wird. Alternativ kann er sich 'gierig' geben und auf einer Aufteilung von (3,1) zu seinen Gunsten bestehen. In diesem Fall muß sich Spieler g entscheiden, ob er den Vorschlag von k annimmt oder ablehnt. Dieses Spiel wurde zuerst von SELTEN (1979) unter dem Namen Markteintrittsspiel eingeführt und ist unter diesem Namen in die Spieltheorie eingegangen und auch diese Arbeit schließt sich dieser Terminologie an (es werden dort die Begriffe 'Markteintrittsspiel' und 'Ladenkettenspiel' anstelle von 'Ultimatumspiel' und 'wiederholtes Verhandlungsspiel' verwendet). Wird dieses Spiel in der oben beschriebenen Form von einem großen Spieler und mehreren kleinen Spielern gespielt, so ergibt sich ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht, in dem die kleinen Spieler in jedem Basisspiel das von ihnen gewünschte Resultat realisieren können. Laut Selten widerspricht dieses Ergebnis der Intuition, die folgenden Spielverlauf nahelegt: Wenn der große Spieler in den ersten Spielen jeweils den Aufteilungsvorschlag (3,1) ablehnt, so rechnen die verbliebenen kleinen Spieler damit, daß der große Spieler sich auch weiterhin als harter Verhandlungspartner erweisen wird. Daher entschließen sie sich zur sicheren Realisierung des Ergebnisses (2,2) anstatt eine Ablehnung ihrer Forderung zu riskieren. Diese Entwicklung antizipierend entscheiden sich auch die kleinen Spieler in den ersten Perioden gegen den Vorschlag (3,1). Als Resultat wird in jeder Periode das Ergebnis (2,2) realisiert. Dieser Widerspruch

zwischen dem Ergebnis des teilspielperfekten Gleichgewichts und dem intuitiv erwarteten Resultat ist unter dem Namen Ladenkettenparadoxon in die spieltheoretische Literatur eingegangen.

Verschiedene Arbeiten haben sich seit der Veröffentlichung dieses Modells mit der Frage beschäftigt, unter welchen Umständen dieses Ergebnis revidiert werden kann: Welche Annahmen müssen verändert werden, damit die intuitiv naheliegenden Reputationseffekte, die in dieser Situation auftreten können, als rationales Verhalten aller Beteiligten interpretierbar sind. In Teil II wird das Grundmodell nun dahingehend variiert, daß sich die kleinen Spieler nicht sicher sind, in welcher Reihenfolge sie auf den großen Spieler treffen. Weiter wird angenommen, daß sie keine vollständige Information über die Ergebnisse der bisherigen Basisspiele erhalten. Die Analyse dieses Modells zeigt, unter welchen Umständen diese Annahme dem großen Spieler ermöglicht, 'reputatives Verhalten' an den Tag zu legen und aggressives Verhalten in frühen Perioden durch die Aussicht auf spätere Reputationsgewinne zu rechtfertigen.

Polylaterale Verhandlungsstrukturen werden in dieser Arbeit durch Netzwerke beschrieben. Die Verhandlungsstruktur wird hierbei formal durch einen Graphen dargestellt. Die Knoten dieses Graphens werden als Spieler interpretiert, und eine Verbindung zwischen zwei Knoten zeigt an, daß diese beiden Spieler die Möglichkeit haben, miteinander zu verhandeln. Der Frage, welche Position in einem derartigen Netzwerk eine besonders starke Verhandlungsposition mit sich bringt, gehen derzeit Ökonomen und Soziologen gleichermaßen interessiert nach. Einen Überblick über die entsprechende Literatur bietet beispielsweise der Aufsatz von WILLER (1992). In Teil III der vorliegenden Arbeit wird ein nichtkooperatives Modell von Verhandlungen auf Graphen untersucht. Die Grundidee von PANTHER (1995), die sogenannten Graphspiele, wird vorgestellt, und eine spieltheoretische Gleichgewichtsanalyse dieser Klasse von Modellen wird durchgeführt. Es gelingt, die Existenz eines stationären teilspielperfekten Gleichgewichts für beliebige Graphen nachzuweisen. Weiterhin wird die Frage der Eindeutigkeit des Gleichgewichts behandelt.

Weiter werden drei wichtige Einsatzmöglichkeiten von Graphspielen aufge-

zeigt. Zunächst werden anhand einiger Beispiele die Aussagen vorgestellt, die sich aus dieser Modellierung für die Verhandlungsstärke der Spieler ergeben. Hier sind insbesondere die starken externen Effekte zu nennen, die von einzelnen Verbindungen zwischen Spielern ausgehen können. Als zweites wird ein auf diesem Modell basierender Machtindex für Graphen entwickelt und elementare Eigenschaften dieses Index werden nachgewiesen. Bei der Anwendung dieses Index auf eine standardisierte Menge von Graphen zeigt sich, daß die auf Graphspielen basierenden Resultate in vielen Fällen besser mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen als der Myersonindex (eine Variante des Shapleywertes für Graphen). Schließlich werden mit Hilfe von Graphspielen einfache Marktmodelle konstruiert. Hierbei konzentriert sich die Aufmerksamkeit vor allem auf Märkte mit unvollständigem Marktzugang für einige Akteure. Dabei steht die Frage im Vordergrund, inwieweit sich das Gleichgewichtsergebnis einzelner Akteure verändert, wenn ihre Interaktionsmöglichkeiten mit anderen Agenten eingeschränkt werden. Die Analyse zeigt, daß sich grundsätzlich zwei verschiedene Resultate ergeben können. Ist die Beschränkung so stark, daß das Ergebnis des idealen (unbeschränkten) Marktes nicht mehr realisiert werden kann, so ändern sich die Auszahlungen aller beteiligten Akteure extrem. Die Auszahlungen der benachteiligten Agenten konvergieren im Grenzfall verschwindender Verhandlungskosten gegen Null. Sind die Einschränkungen hingegen so gering, daß das effiziente Ergebnis des idealen Marktes weiterhin realisiert werden könnte, so konvergiert auch das Resultat des spieltheoretischen Gleichgewichts gegen dieses Marktergebnis. Außerdem ist im Grenzwert verschwindender Verhandlungskosten das Gleichgewichtsergebnis der Agenten mit beschränktem Marktzutritt identisch mit den entsprechenden Resultaten des idealen Marktes; die Einschränkung des Marktzutritts bewirkt also keine schwächere Verhandlungsposition.

Mit anderen Worten lautet das Ergebnis dieser Analyse folgendermaßen: Falls die übrigen Bedingungen des idealen Marktes (vollständige Information, keine Transaktionskosten etc.) beibehalten werden, so hat eine schwache Be-

schränkung des Marktzutritts einiger Agenten keine wesentlichen Auswirkungen. Weder ist das neue Gleichgewichtsergebnis ineffizient, noch ergibt sich für die von der Beschränkung betroffenen Agenten eine Verschlechterung ihres Gleichgewichtsergebnisses.

Teil I

Rubinsteins Verhandlungsspiel unter nichtstationären Nutzenfunktionen

Kapitel 2

Einleitung

2.1 Einführung

Unter der Vielzahl der Arbeiten, die sich mit der Theorie der bilateralen Verhandlungen beschäftigen, nimmt der Aufsatz von RUBINSTEIN (1982) noch immer eine herausragende Stellung ein. In dem dort vorgestellten Modell verhandeln zwei Spieler mit alternierendem Vorschlagsrecht über die Aufteilung eines schrumpfenden 'Kuchens'. Rubinstein gelang es, für eine bestimmte Klasse von Nutzenfunktionen die Existenz eines eindeutigen teilspielperfekten Gleichgewichts nachzuweisen, dessen Eigenschaften in wesentlichen Punkten der ökonomischen Intuition entsprechen:

- Je geduldiger ein Spieler ist, desto besser ist seine Verhandlungsposition und desto größer ist der Anteil, den er im Gleichgewicht erhält.
- Das Recht, den ersten Aufteilungsvorschlag zu formulieren, gibt den Spielern einen Verhandlungsvorteil.
- Das Ergebnis des Gleichgewichts ist paretooptimal.

Aufgrund dieser Eigenschaften wurde Rubinsteins Verhandlungsmodell von den theoretischen Ökonomen begeistert aufgenommen und weiterentwickelt.

Die große Anzahl an Arbeiten, die auf diesem Modell aufbauen (vergleiche hierzu den Literaturüberblick in Kapitel 2.2), belegt diese Aussage.

Die außergewöhnliche Stellung, die Rubinsteins Aufsatz in der Theorie der Verhandlungen einnimmt, rechtfertigt auch die eingehende spieltheoretische Untersuchung von Rubinsteins Modell, die in diesem Teil der Arbeit durchgeführt wird. Es wird eine spezifische Methode zur Analyse von Verhandlungsspielen mit alternierendem Vorschlagsrecht vorgestellt. Diese Methode beruht darauf, das unendliche Verhandlungsspiel durch leicht analysierbare endliche Varianten zu approximieren; sind diese endlichen Spiele entsprechend gestaltet, so lassen sich auf diese Weise die Gleichgewichtsergebnisse für das unendliche Spiel charakterisieren.

Unter Verwendung dieser Technik ist es möglich, Rubinsteins Spiel unter weniger restriktiven Annahmen an die Nutzenfunktionen der Spieler und damit in einem allgemeineren Kontext zu analysieren. Insbesondere die von Rubinstein angesetzte Annahme der *Stationarität* wird nicht mehr benötigt. Dieses Axiom besagt, daß sich die Zeitpräferenzen der Spieler im Verlaufe der Verhandlungen nicht verändern. Wenn also ein Spieler am Anfang der Verhandlungen einen Anteil von x in Periode 0 genauso bewertet wie einen Anteil von y in Periode 1, so besagt Stationarität, daß der Spieler auch einen Anteil von x in Periode 1000 und einen Anteil von y in Periode 1001 gleich bewertet. Die Annahme der Stationarität erleichtert zwar die Analyse des Verhandlungsmodells, ist aber ökonomisch nur schwer zu begründen. In Kapitel 3 werden einige Verhandlungssituationen mit nichtstationären Nutzenfunktionen aufgezeigt.

Als weitere Restriktion an die Nutzenfunktion, die bei der Verwendung der hier vorgestellten Beweistechnik nicht mehr notwendig ist, ist der *zunehmende Verlust durch Verzögerung*¹ zu nennen, der schon von Rubinstein selbst durch seine Analyse von Nutzenfunktionen mit festen Verhandlungskosten (die keinen zunehmenden Verlust von Verzögerung aufweisen) indirekt in Frage gestellt wurde. Schließlich kann auch die Annahme der Stetigkeit der

¹Im Originaltext *increasing loss of delay*

Nutzenfunktionen bei Verwendung der hier vorgestellten Beweistechnik weniger restriktiv formuliert werden.

Durch die Abschwächung bzw. Streichung dieser Restriktionen ermöglicht die hier vorgestellte Beweistechnik eine wesentlich allgemeinere Analyse des Verhandlungsmodells mit alternierendem Vorschlagsrecht, als sie in Rubinsteins Arbeit angeboten wird. Rubinsteins Theorem wird als Spezialfall in die hier durchgeführte Untersuchung eingebettet.

In Abschnitt 2.2 wird zunächst eine kurze Literaturübersicht angeboten, um die Bedeutung des Rubinsteinspiels in der Verhandlungstheorie zu untermauern. In Kapitel 3 wird dann das hier behandelte Verhandlungsspiel formal eingeführt und in Kapitel 4 wird es analysiert: In Abschnitt 4.1 wird ein teilspielperfektes Gleichgewicht für dieses Modell konstruiert, Abschnitt 4.2 charakterisiert die Menge aller teilspielperfekten Gleichgewichte, und Abschnitt 4.3 wendet die theoretischen Ergebnisse auf einige Beispiele an. Kapitel 5 beendet diese Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung. Da bei vielen Lemmas in dieser Arbeit die Aussagen intuitiv einleuchtend und die Beweise rein technischer Natur sind, wurden diese im Interesse einer flüssigeren Darstellung des Stoffes im Anhang A untergebracht.

2.2 Ein Literaturüberblick

Zu den Besonderheiten, die die Popularität von Rubinsteins Verhandlungsmodell begründen, gehört die Eigenschaft, daß das Gleichgewichtsergebnis dieses Spiels gegen die Nashlösung konvergiert, wenn die Dauer der Verhandlungsperioden gegen Null geht. In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von BINMORE (1987), LIVNE(1985) und BINMORE et al. (1986) zu erwähnen und eine Zusammenfassung dieses Themenkreises bietet das Buch von RUBINSTEIN/OSBORNE(1990). Durch diese Verbindung von kooperativen und nichtkooperativen Ergebnissen wurde in der wohl bekanntesten Form das sogenannte *Nashprogramm* realisiert. Mit diesem Begriff wird der Versuch bezeichnet, ein Resultat sowohl durch normative bzw. axiomatische als

auch durch individuell-rationale strategische Ansätze zu motivieren.² Nash selbst formuliert dies folgendermaßen (siehe NASH (1953), S. 129): *The two approaches to the problem, the negotiation model or via the axioms, are complementary; each helps to justify and clarify the other.*

KRISHNA und SERRANO(1996) gelang es, diese Ergebnisse —Eindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichts und Konvergenz gegen die Nashlösung— auf Verhandlungsmodelle mit mehreren Spielern zu übertragen. Grundlage hierfür war die von LENSBERG (1988) entwickelte Erweiterung der Nashlösung für mehrere Spieler.

In einigen Arbeiten jüngerer Datums wurde dann aber festgestellt, daß das Resultat der Eindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichts sehr empfindlich von den Grundannahmen des Modells abhängt. Schon kleine Änderungen der Modellparameter können zu einer Vielzahl von Gleichgewichten führen. CHATTERJEE/SAMUELSON (1990) kommen zu dem Ergebnis, daß bei gleichzeitiger Gebotsabgabe jedes theoretisch mögliche Resultat als Ergebnis eines Gleichgewichts erzeugt werden kann. Dies ändert sich auch nicht, wenn weitaus restriktivere Gleichgewichtskonzepte als Teilspielperfekte angewendet werden. Zu ähnlichen Ergebnissen kommen PERRY/RENY (1993), die ein Modell mit kontinuierlichem Zeitverlauf untersuchen. Auch die Einführung einer 'kleinsten Geldeinheit' erlaubt bei hinreichend kurzen Verhandlungsperioden, nahezu jedes Resultat als Ergebnis eines teilspielperfekten Gleichgewichts zu erzeugen. Dies wird in der Arbeit von VANDAMME et al. (1990) gezeigt.

Ein weiterer Schwachpunkt von Rubinsteins Modell liegt darin, daß es nicht in der Lage ist, Verzögerungen bei der Einigung in Verhandlungssituationen zu erklären. Dies ist ein schwerwiegender Kritikpunkt, da Einigungsverzögerungen und die damit einhergehenden Effizienzeinbußen in realen Verhand-

²Interessanterweise gibt es nur sehr wenige Arbeiten, die sich aus dem Blickwinkel der evolutischen Spieltheorie, sozusagen dem 'dritten Standbein' der Spieltheorie, mit Verhandlungsvorgängen beschäftigen. Als Ausnahmen sind hier die Arbeiten von YOUNG (1993), GALE et al. (1995) und PETERS (1998) zu nennen.

lungen regelmäßig zu beobachten sind. Verschiedene Arbeiten haben versucht, dieses Phänomen durch unvollständige Information der Spieler über die Nutzenfunktion des jeweils anderen zu erklären. Üblicherweise hielten diese Arbeiten am Grundmodell Rubinsteins mit alternierendem Vorschlagsrecht fest. CHATTERJEE/SAMUELSON (1987 und 1988) und CRAMPTON (1992) analysieren Käufer-Verkäufer-Modelle, in denen die Individuen sich nicht über den *Wert* des zu teilenden Gutes für den anderen Spieler sicher sind. RUBINSTEIN (1985a und 1985b) hingegen untersucht den Fall, daß die Spieler sich über die *Zeitpräferenz* ihres Gegenübers im Unklaren sind. Der Tenor dieser und weiterer, verwandter Arbeiten lautet, daß die Unsicherheit über die Situation des Verhandlungspartners durchaus zu einer Verzögerung der Einigung führen kann. Die Spieler signalisieren ihrem Gegenüber durch das Ablehnen seines Gebotes ihre Verhandlungsstärke. Allerdings sind die in diesen Arbeiten konstruierten Gleichgewichte (im Gegensatz zu Rubinsteins Originalmodell) zumeist nicht eindeutig. Zudem wird in diesen Arbeiten entweder nur eine einseitige Unsicherheit angenommen, oder die möglichen Einschätzungen der Spieler über die Wertschätzung ihres Gegenüber sind nur sehr grob modelliert. Eine umfassende Analyse eines Verhandlungsmodells mit zweiseitiger Unsicherheit und einem Kontinuum an möglichen Nutzenfunktionen existiert zur Zeit nicht.

Kapitel 3

Das Modell

3.1 Formale Einführung

Zwei Spieler, $N = \{1, 2\}$, verhandeln über die Aufteilung eines beliebig teilbaren 'Kuchens'. Dieser wird hier, wie üblich, mit dem Einheitsintervall $[0, 1]$ identifiziert. Zeit ist unbegrenzt und verläuft diskret, das heißt, das Spiel läuft in Perioden $t \in T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ab.

In Periode Null formuliert Spieler 1 einen Vorschlag x über die Aufteilung des Gutes. Nachdem dieses Angebot unterbreitet wurde, entscheidet Spieler 2 über dessen Annahme oder Ablehnung. Nimmt er an, so endet das Spiel, und die vorgeschlagene Aufteilung $(x, 1 - x)$ wird realisiert. Im Falle einer Ablehnung tritt das Spiel in die nächste Zeitperiode, in der Spieler 2 das Recht erhält, einen Aufteilungsvorschlag zu formulieren, den dann Spieler 1 annimmt oder ablehnt. Diese Prozedur wiederholt sich mit alternierendem Vorschlagsrecht für die beiden Spieler, bis es zu einer Einigung gekommen ist. Es gibt kein Zeitlimit, und somit ist ein endloses Verhandeln der beiden Spieler ebenfalls möglich. Das Spielergebnis einer permanenten Nichteinigung wird durch $(0, \infty)$ notiert. Kommt es zu einer Einigung, so wird diese durch ein Paar (x, t) beschrieben, wobei t die Periode bezeichnet, in der das Angebot unterbreitet und akzeptiert wurde, und $x \in [0, 1]$ den Anteil am Kuchen, den

Spieler 1 erhält. $1-x$ ist dann der für Spieler 2 verbliebene Rest.¹ Dies spiegelt sich auch im Sprachgebrauch wieder, der im weiteren verwendet wird; schlägt Spieler 1 Aufteilungsergebnis x vor, so wird dies als eine *Forderung* von x verstanden, während ein Aufteilungsvorschlag x von Spieler 2 als ein *Angebot* an Spieler 1 interpretiert wird. Die Menge aller möglichen Spielresultate sei mit $\mathcal{E} = ([0, 1] \times T) \cup \{(0, \infty)\}$ bezeichnet.

Die Präferenzen der beiden Spieler über die Menge der Spielresultate werden durch Nutzenfunktionen $u_i : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben. Aus dem Spielresultat (x, t) ergibt sich für die Spieler also ein Nutzen von $u_1(x, t)$ bzw. $u_2(1-x, t)$. Die folgenden Annahmen über die Eigenschaften der Nutzenfunktionen sind direkt der Arbeit von RUBINSTEIN (1982) entnommen.

Annahme 3.1.1. [Rubinstein] *Die Nutzenfunktionen der Spieler besitzen folgende Eigenschaften:*

(A1) *Die $u_i(x_i, t)$ sind streng monoton steigend in x_i für jedes $t \in T$ und $i = 1, 2$.*

(A2) *Die $u_i(x_i, t)$ sind stetig in x_i für jedes $t \in T$ und $i = 1, 2$.*

(A3) *Die $u_i(x_i, t)$ sind nichtstreng monoton fallend in t für alle x_i und $i = 1, 2$. Gilt $x_i \neq 0$, so sind die $u_i(x_i, t)$ sogar streng monoton fallend in t für $i = 1, 2$.*

(A4) *$u_i(0, \infty) \leq u_i(x_i, t)$ für alle $x_i \in [0, 1], t \in T$ und $i = 1, 2$.*

Annahme (A1) besagt, daß das zu verhandelnde Gut nutzenstiftend und nichtsättigend ist. Mehr Kuchen bedeutet ceteri paribus mehr Nutzen. (A2) bedeutet, daß der Nutzen —bei festgehaltener Periode t als Funktion des erhaltenen Kuchens gesehen— stetig ist. Aus Axiom (A3) folgt, daß Zeit wertvoll ist; beide Spieler haben bei einer gegebenen Einigung einen Nutzen,

¹An einigen Stellen (insbesondere bei der Beschreibung der Axiome) ist es günstiger, die Aufteilung durch ein Paar (x_1, x_2) zu beschreiben. In dieser Notation beschreibt x_i den Anteil von Spieler i , und es gilt $x_1 + x_2 = 1$.

der um so größer ist, je eher diese Einigung zustande kommt. Einem Spieler ist der Zeitpunkt einer Einigung höchstens dann egal, wenn diese ihm einen Anteil von 0 zuspricht. (A4) schließlich sagt aus, daß kein Spieler irgendein Verhandlungsergebnis ungünstiger einschätzt als permanente Nichteinigung.

In Rubinsteins Arbeit werden noch weitere Annahmen gemacht, auf die wir später zurückkommen werden. Da hier weniger Axiome aufgestellt wurden, ist die Analyse in dieser Arbeit für eine deutlich größere Klasse von Nutzenfunktionen als in Rubinsteins ursprünglicher Arbeit anwendbar. Für eine Diskussion, inwiefern die Klasse der zulässigen Nutzenfunktionen noch stärker erweitert werden kann, wird auf Kapitel 5 verwiesen.

Für beliebiges i und t ist die Funktion $u_i(x_i, t)$ —als Funktion von x_i betrachtet— aufgrund von Axiom A1 streng monoton steigend. Daher existiert die Umkehrfunktion, die hier mit $u_i^{-1}(\cdot, t)$ bezeichnet wird. Diese Funktion ist nur auf dem Intervall $[u_i(0, t), u_i(1, t)]$ definiert. Um sie auf alle reellen Zahlen zu erweitern, wird sie außerhalb ihres Definitionsbereiches durch die konstante stetige Ergänzung fortgesetzt.

Somit gilt

$$u_i^{-1}(\tilde{u}, t) = \begin{cases} x_i, & \text{wenn es ein } x_i \in [0, 1] \text{ gibt mit } u_i(x_i, t) = \tilde{u} \\ 1, & \text{wenn } u_i(x_i, t) < \tilde{u} \quad \forall x_i \in [0, 1] \\ 0, & \text{wenn } u_i(x_i, t) > \tilde{u} \quad \forall x_i \in [0, 1] \end{cases}$$

Diese Definition auch in (OSBORNE/RUBINSTEIN (1990), S. 34) zu finden.

Zur formal vollständigen Beschreibung des hier behandelten Verhandlungsspiels müssen noch die Strategien der Spieler definiert werden: Eine *Geschichte des Spiels bis zum Zeitpunkt t* oder auch kurz eine *Geschichte* ist eine Folge $h^t = x_0, x_1, \dots, x_{t-1}$ mit $x_j \in [0, 1]$. Eine Geschichte gibt damit an, welche Aufteilung zu jeder Periode vor t vorgeschlagen wurde. Implizit wird dabei angenommen, daß diese Angebote abgelehnt wurden, da ansonsten das Spiel ja zu einem früheren Zeitpunkt geendet hätte. Die Menge aller Geschichten der Länge t sei mit H^t bezeichnet. Aus formalen Gründen seien noch die Menge der leeren Geschichten, $H^0 = \emptyset$, und die Menge *aller* Geschichten,

$H = \bigcup_{t \in T} H^t$, definiert.

Nach der Einführung dieser Bezeichnungen können nun die Strategiemengen der beiden Spieler definiert werden.

Definition 3.1.2. Eine **Strategie** σ für Spieler 1 ist eine Sequenz von Funktionen $\sigma = \sigma^0, \sigma^1, \dots$ mit $\sigma^t : H^t \rightarrow [0, 1]$ für gerade t und $\sigma^t : (H^t \times [0, 1]) \rightarrow \{\text{Annehmen}, \text{Ablehnen}\}$ für ungerade t .

Eine Strategie λ für Spieler 2 ist eine Sequenz von Funktionen $\lambda = \lambda^0, \lambda^1, \dots$ mit $\lambda^t : H^t \rightarrow [0, 1]$ für ungerade t und $\lambda^t : (H^t \times [0, 1]) \rightarrow \{\text{Annehmen}, \text{Ablehnen}\}$ für gerade t .

Es bezeichne Σ die Menge aller Strategien für Spieler 1 und Λ die Menge aller Strategien für Spieler 2.

Die Funktion $\sigma^t(h^t)$ legt für gerade t fest, welche Forderung Spieler 1 nach der Geschichte h^t stellt. Für ungerade t gibt $\sigma^t(h^t, x)$ an, welche Angebote x von seinem Gegenüber Spieler 1 nach der Geschichte h^t akzeptiert. Eine Strategie für Spieler 2 ist analog zu interpretieren.

Damit sind alle notwendigen Elemente des Spieles eingeführt, und zu gegebenen Nutzenfunktionen u_1 und u_2 wird nun das *allgemeine Rubinsteinspiel* definiert. Die Analyse dieses Spiels ist der Inhalt dieses Teils der Arbeit.

Definition 3.1.3. Ein **allgemeines Rubinsteinspiel** ist durch die Spielermenge $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, die Nutzenfunktionen (u_1, u_2) und die in Definition 3.1.2 erklärten Strategiemengen Σ und Λ definiert.

Bevor die eigentliche Analyse eines allgemeinen Rubinsteinspiels beginnt, werden im nun folgenden Abschnitt einige Anwendungsbeispiele für die hier verwendete erweiterte Klasse von Nutzenfunktionen vorgestellt.

3.2 Beispiele: Nichtstationäre Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt werden einige Verhandlungssituationen vorgestellt, in denen sich die Präferenzen der Spieler nur durch nichtstationäre Nutzenfunktionen beschreiben lassen.

Beispiel 3.2.1. Kampfeslustige Gewerkschafter

Ein Unternehmer und ein Repräsentant der Gewerkschaften verhandeln über den Tarifabschluss für das betroffene Unternehmen. Es wird angenommen, daß die Verhandlungen entsprechend Rubinsteins Modell mit alternierendem Vorschlagsrecht durchgeführt werden. Weiter sei der Kapitalstock des des Unternehmers als feste Größe vorgegeben. Es geht also um die Verteilung des Überschusses der Unternehmung, der auf 1 normiert wird. Die Auszahlung des Unternehmers entspricht einfach seinem abdiskontierten Anteil; erhält er also x_u in Periode t , so ergibt sich daraus ein Nutzen von $\delta^t x_u$. Die Auszahlung der Gewerkschaftsmitglieder hingegen wird von zwei Faktoren beeinflusst: Zum einen haben sie, wie auch der Unternehmer, eine natürliche Zeitpräferenz, die durch einen festen Diskontfaktor δ ausgedrückt wird. Zum anderen wird die Zufriedenheit der Gewerkschafter von der Frage beeinflusst, ob sie 'lange genug' um ihren Lohn gekämpft haben. Eine sehr frühe Einigung hinterläßt das Gefühl, der Gewerkschaftsführer habe nicht hartnäckig genug verhandelt und wird daher von den Gewerkschaftsmitgliedern kaum akzeptiert. Die Gewerkschafter sind in frühen Perioden also geduldiger, was in ihrer Nutzenfunktion durch einen größeren, für jede Periode j individuellen Diskontparameter $\delta_j^G > \delta$ niederschlägt. Mit dem Fortgang der Verhandlungen sinkt die Kampfeslust, und die relativen Kosten einer weiteren Verzögerung für die Gewerkschafter steigen. Der Diskontparameter wird also mit zunehmendem j kleiner. Der Nutzen, den die Gewerkschaft aus einem Anteil x_g in Periode T zieht, läßt sich dann durch die Formel $u_g(x_g, T) = x_g \prod_{j=1}^T \delta_j^G$ beschreiben.

Beispiel 3.2.2. Nußecken

Ein Obstlieferant und ein Bäcker verhandeln über die Lieferung einer Ladung Walnüsse. Der Bäcker kann die Nüsse auf zwei verschiedene Arten verarbeiten. Zum einen kann er sie für sein Alltagsgeschäft verwenden, was einen Profit von 1 ergibt. Alternativ hat er die Möglichkeit, einen großen Auftrag für Nußecken für ein Festival in Periode 10 zu akzeptieren. Aus diesem Auftrag ergibt sich ein Erlös von 2, allerdings fallen wegen des Termindrucks außerordentliche Arbeitsbelastungen und damit zusätzliche Kosten in Höhe von $\frac{2}{t}$ an, wobei $\tilde{t}$ die Differenz zwischen dem Zeitpunkt der Einigung und dem Beginn des Festivals ist. Ab Periode 10 ist die zweite Alternative nicht mehr möglich. Überdies diskontieren beide Parteien künftige Auszahlungen mit einem gemeinsamen Diskontfaktor δ ab.

Aus dieser Beschreibung lassen sich die folgenden Nutzenfunktionen für die Verhandlungspartner ableiten: Aus einer Preisvereinbarung von p in Periode t ergibt sich ein Nutzen von $u_L = p \cdot \delta^t$ für den Lieferanten. Für den Bäcker ergibt sich eine Auszahlung von $u_B = \max\left((1 - p)\delta^t, \left(2 - \frac{2}{10-t} - p\right)\delta^t\right)$ (falls $t < 10$) bzw. $u_b = (1 - p)\delta^t$ (falls $t \geq 10$).

Kapitel 4

Spieltheoretische Analyse

4.1 Existenz eines teilspielperfekten Gleichgewichts in stationären Strategien

Die Strategiemengen in einem allgemeinen Rubinsteinspiel sind unendlichdimensional. Damit läßt sich die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Nashgleichgewichten oder teilspielperfekten Gleichgewichten nicht mit den Standardsätzen der Spieltheorie behandeln. Es ist sehr einfach, Nashgleichgewichte für ein allgemeines Rubinsteinspiel zu konstruieren; nahezu jedes Resultat (x, t) kann als Ergebnis eines Nashgleichgewichts dargestellt werden.

Satz 4.1.1. *Gegeben sei ein beliebiges Ergebnis $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathcal{E}$ mit den Eigenschaften $u_1(\tilde{x}, \tilde{t}) \geq u_1(0, 0)$ und $u_2(1 - \tilde{x}, \tilde{t}) \geq u_2(0, 0)$. Dann gibt es ein Nashgleichgewicht, welches das Ergebnis $(\tilde{x}, \tilde{t})$ erzeugt.*

Der Beweis von Satz 4.1.1 befindet sich im Anhang.

Beispielsweise kann in Periode 0 jede Aufteilung als Nashgleichgewicht realisiert werden. Selbst ineffiziente Resultate können sich auf diese Art ergeben. Damit ist offensichtlich, daß das Nashgleichgewicht kein adäquates Lösungskonzept für die Analyse eines allgemeinen Rubinsteinspiels ist. Wir wenden

unsere Aufmerksamkeit deshalb ausschließlich teilspielperfekten Gleichgewichten zu. Teilspielperfektheit bedeutet für das hier behandelte Modell, daß jedes Angebot, das ein Spieler in einer beliebigen Situation formuliert, optimal sein muß, gegeben die Gleichgewichtsstrategien beider Spieler. Weiterhin muß ein Spieler ein Angebot annehmen, wenn er bei einer Ablehnung dieses Angebotes unter den Gleichgewichtsstrategien ein schlechteres Ergebnis zu erwarten hätte, als er sich durch eine Annahme sichern kann. Schließlich muß ein Spieler ein Angebot ablehnen, wenn er daraus eine höhere Auszahlung zu erwarten hat, als sich durch eine Annahme für ihn ergeben würde. Im folgenden werden die Begriffe 'Gleichgewicht' und 'teilspielperfektes Gleichgewicht' synonym verwendet.

Im folgenden werden einige Lemmata formuliert, die auf den ersten Blick trivial erscheinen mögen, aus zweierlei Gründen aber dennoch an dieser Stelle aufgeführt werden. Zum einen werden durch diese Vorarbeit die Beweise der späteren Hauptaussagen dieser Arbeit erleichtert. Zum anderen sind die hier bewiesenen Aussagen keineswegs so selbstverständlich, wie dies der erste Eindruck nahelegt. Die Beweise für alle Lemmata in diesem Kapitel sind im Anhang zu finden. Das erste Lemma besagt, daß es in einem Gleichgewicht immer zu einer Einigung kommt.

Lemma 4.1.2. *Das Ergebnis $(0, \infty)$ kann in einem allgemeinen Rubinstein-spiel nicht durch ein teilspielperfektes Gleichgewicht erzeugt werden.*

Auch das folgende Lemma ist intuitiv einsichtig: Kein Spieler wird in einem Gleichgewicht jemals seinem Gegenüber den ganzen Kuchen anbieten. Mit anderen Worten: Das Recht zur Formulierung eines Aufteilungsvorschlags schützt einen Spieler davor, völlig leer auszugehen.

Lemma 4.1.3. *Es sei (σ, λ) ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Für gerade t gilt dann $\sigma^t(h_t) > 0$ und für ungerade t gilt $\lambda^t(h_t) < 1$ für beliebige Geschichten h_t .*

Die Analyse wird im folgenden durch die Betrachtung von stationären

Strategien¹ fortgesetzt. Darunter werden Strategien verstanden, bei denen die Aktion in einer beliebigen Situation nur vom aktuellen Zeitpunkt und nicht von den Ereignissen in früheren Perioden abhängt. Teilspielperfekte Gleichgewichte in solchen Strategien können leicht konstruiert und charakterisiert werden; daher läßt sich die Existenz eines Gleichgewichts für ein beliebiges allgemeines Rubinsteinspiel mit Hilfe dieser Strategien einfach nachweisen.

Definition 4.1.4. *Eine Strategie für Spieler 1 (bzw. Spieler 2), $\sigma = \sigma^0, \sigma^1 \dots$ (bzw. $\lambda = \lambda^0, \lambda^1 \dots$) heißt **stationäre Strategie**, wenn die σ^t (bzw. λ^t) konstante Funktionen in den h^t für alle t sind.*

Die Aussagen der nun folgenden Lemmata wurden in ähnlicher Form bereits bei RUBINSTEIN (1982) formuliert; es sei aber noch einmal daran erinnert, daß hier Rubinsteins Spiel für eine weit größere Klasse von Nutzenfunktionen untersucht wird. So gelten in diesem Kontext die folgenden Aussagen nur für stationäre Strategien und sind nicht allgemeingültig. Dies wird später am Beispiel 4.3.4 verdeutlicht.

Verwenden beide Spieler stationäre Strategien, so ist eine Verzögerung der Einigung in keinem Teilspiel möglich. Falls beispielsweise die aktuellen Strategien eine Einigung x in einer späten Periode $n > 0$ vorsehen, so wäre es dem in Periode $n - 1$ vorschlagenden Spieler möglich, ein Angebot zu formulieren, dessen Realisierung beide Spieler höher bewerten als (x, n) und das deshalb von dem anderen Spieler angenommen würde. Ein solcher Aufteilungsvorschlag wäre eine profitable Abweichung von der geplanten Strategie, was im Widerspruch zur Definition der Teilspielperfektheit steht. Als Konsequenz ergibt sich, daß in einem Gleichgewicht in stationären Strategien eine Einigung jeweils in der erstmöglichen Periode zustande kommen muß.

Lemma 4.1.5. *In einem Gleichgewicht in stationären Strategien einigen sich die Spieler in der ersten Periode eines jeden Teilspiels.*

¹Hierbei sind stationäre *Strategien* wohl zu unterscheiden von stationären *Nutzenfunktionen*, vergleiche Theorem 4.2.4.

Damit in jedem Teilspiel eine sofortige Einigung erzielt werden kann, muß das Angebot eines Spielers i jeweils vom anderen Spieler j akzeptiert werden. Wäre andererseits Spieler j auch gewillt, ein für ihn schlechteres Angebot zu akzeptieren, so wäre es für Spieler i sinnvoll, einen entsprechenden Vorschlag zu formulieren, da ihm dies ein besseres Ergebnis verspricht. Daraus folgt, daß im Gleichgewicht der aktuelle Aufteilungsvorschlag des einen Spielers und die Akzeptanzfunktion des anderen einander genau entsprechen müssen. Das folgende Lemma formalisiert diese Aussage.

Lemma 4.1.6. *Sei (σ, λ) ein teilspielperfektes Gleichgewicht in stationären Strategien. Dann existiert eine Folge $\tau_0, \tau_1, \dots$ derart, daß folgendes gilt: In jeder ungeraden Periode t akzeptiert Spieler 1 ein Angebot genau dann, wenn es mindestens τ_t beträgt. In jeder geraden Periode t akzeptiert Spieler 2 eine Forderung genau dann, wenn sie höchstens τ_t beträgt.*

In Periode t schlägt der Spieler, der das Vorschlagsrecht besitzt, die Aufteilung τ_t vor.

Der Beweis für Lemma 4.1.6 ergibt sich direkt aus dem oben gesagten und wird daher ausgelassen.

Als direkte Konsequenz aus diesem Lemma kann ein Gleichgewicht in stationären Strategien durch die Angabe der Folge $\tau_0, \tau_1, \dots$ vollständig beschrieben werden. Darüber hinaus können aber noch weitere Einschränkungen an stationäre Gleichgewichtsstrategien formuliert werden: Wenn die Aktionen beider Spieler nur vom aktuellen Zeitpunkt und nicht von den Ereignissen in den vergangenen Perioden abhängen, dann muß der Vorschlag, den ein Spieler in einer beliebigen Situation unterbreitet, so gestaltet sein, daß sein Gegenüber indifferent ist zwischen dem Akzeptieren dieses Angebots und der Ablehnung mit anschließender Realisierung des eigenen Vorschlages in der nächsten Periode. Die Folge der τ_i , die gemäß Lemma 4.1.6 als vollständige Beschreibung der Strategien in einem Gleichgewicht in stationären Strategien dient, muß also einer Indifferenzbedingung genügen, die in Definition 4.1.7 und Lemma 4.1.8 formal beschrieben wird.

Definition 4.1.7. Zu einem gegebenen Paar von Nutzenfunktionen (u_1, u_2) bezeichne $R(l, x, t)$ eine endliche Variante des allgemeinen Rubinsteinspiel derart, daß das Spiel in Periode l startet und in Periode t mit dem Ergebnis (x, t) abbricht, falls es vorher zu keiner Einigung gekommen ist.

Dieses Spiel hat ein eindeutiges Gleichgewicht, das durch Backward Induction ermittelt werden kann und in dem sich die Spieler sofort einigen. Es bezeichne $f_l(x, t)$ die aus diesem Gleichgewicht resultierende Aufteilung.

Es ist offensichtlich, daß die $f_{t-1}(x, t)$ für gerade t , falls möglich, die Gleichung

$$u_1(f_{t-1}(x, t), t-1) = u_1(x, t) \quad (4.1.1)$$

erfüllen müssen. Gleichung (4.1.1) beschreibt die Indifferenzbeziehung zwischen den Aufteilungsvorschlägen im Gleichgewicht. Spieler 2 unterbreitet in Periode $t-1$ ein Angebot, das Spieler 1 indifferent zwischen der Annahme und der Realisierung seiner eigenen Forderung in Periode t stellt. Falls (4.1.1) nicht erfüllbar ist (dies kann dann geschehen, wenn $u_1(x, t)$ so klein ist, daß $u_1(y, t-1) > u_1(x, t)$ für beliebige $y \in [0, 1]$ gilt), so folgt $f_{t-1}(x, t) = 0$. Unter Verwendung der Umkehrfunktion u^{-1} können diese Aussagen folgendermaßen zusammengefaßt werden.²

$$f_{t-1}(x, t) = u_1^{-1}(u_1(x, t), t-1) \quad (4.1.2)$$

Diese Gleichung gibt die Indifferenzbeziehung 4.1.1 wieder und beschreibt (zusammen mit ihrem Analogon für ungerade Perioden und Spieler 2) notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Folge τ_i ein Gleichgewicht in stationären Strategien beschreibt.

Lemma 4.1.8. Es sei $\tau_0, \tau_1, \dots$ eine Folge reeller Zahlen. Dann beschreibt diese Folge genau dann ein Gleichgewicht in stationären Strategien im Sinne von Lemma 4.1.6, wenn für alle $t \in T$ die Identität $\tau_{t-1} = f_{t-1}(\tau_t, t)$

²Zur Definition von u^{-1} vergleiche Gleichung (3.1.1).

gilt, wobei die $f_t(\cdot, \cdot)$ wie oben definiert sind oder auch alternativ durch die Gleichungen

$$f_{t-1}(x, t) = u_1^{-1}(u_1(x, t), t - 1) \text{ für gerades } t \quad (4.1.3)$$

$$f_{t-1}(x, t) = 1 - u_2^{-1}(u_2(1 - x, t), t - 1) \text{ für ungerades } t \quad (4.1.4)$$

sowie

$$f_{t-2}(x, t) = f_{t-2}(f_{t-1}(x, t), t - 1) \quad (4.1.5)$$

iterativ definiert werden können.

Um also ein Gleichgewicht in stationären Strategien zu konstruieren, muß eine Folge τ_i gefunden werden, die den in Lemma 4.1.8 aufgeführten Bedingungen genügt. Die Existenz einer solchen Folge ist nicht trivial und wird hier konstruktiv bewiesen.

Doch zunächst seien einige Eigenschaften der $f_l(x, t)$ festgehalten.

1. Als eine direkte Konsequenz der Monotonie der Nutzenfunktionen sind die $f_l(x, t)$ monoton wachsend in x für alle t und l .
2. Für alle t gilt $1 = f_t(1, t) \geq f_t(1, t + 1)$, was elementar daraus folgt, daß der Wertebereich von f_t immer eine Teilmenge von $[0, 1]$ ist.
3. Aus 1. und 2. ergibt sich, daß die Folge der $f_l(1, t)$, die sich bei festgehaltenem l und wachsendem t ergibt, schwach monoton fallend ist.
4. Die Ungleichung $f_t(x, t + 1) \geq x$ gilt für beliebige gerade t , wobei strikte Ungleichheit für $x < 1$ gilt (vergleiche (A4) in Annahme 3.1.1). Für ungerade t gilt entsprechend $f_t(x, t + 1) \leq x$ mit einer strikten Ungleichung für $x > 0$. Ein Spieler muß seinem Gegenüber also weniger als x anbieten, um ihn indifferent zwischen der Annahme des Angebots und der Realisation von x in der nächsten Periode zu stellen. Diese Eigenschaft folgt aus der Monotonie der Nutzenfunktion in der Zeit.

Auch das folgende Lemma wird für die spätere Beweisführung benötigt.

Lemma 4.1.9. *Beide Spieler bewerten das Resultat $(f_l(x, n), l)$ mindestens genauso hoch wie (x, n) für alle $x \in (0, 1)$, $n \in T$ und $l \leq n$. Beide Spieler bewerten das Resultat $(f_l(x, n), l)$ höher als (x, n) für alle $x \in (0, 1)$, $n \in T$ und $l \leq n - 2$.*

Die Aussage von Lemma 4.1.9 kann etwas formaler auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$u_i(f_l(x, n), l) \geq u_i(x, n) \quad \forall x \in [0, 1], n \in T, l \leq n$$

und

$$u_i(f_l(x, n), l) > u_i(x, n) \quad \forall x \in [0, 1], n \in T, l \leq n - 2.$$

Nach dieser Vorarbeit kann jetzt ein Gleichgewicht in stationären Strategien konstruiert werden. Wie bereits oben angemerkt, muß zu diesem Zweck eine Folge τ_i gefunden werden, die den in Lemma 4.1.8 beschriebenen Anforderungen genügt. Diese Aufgabe ist nicht trivial, da diese Bedingungen 'rückwärtig iterativ' definiert sind, d.h., τ_i ist eine Funktion von τ_{i+1} . Da die u_i^{-1} , die diese Relation beschreiben, nicht surjektiv sind, wird es im allgemeinen nicht zum Ziel führen, mit einem beliebigen τ_0 zu starten und die weiteren τ_i daraus zu generieren.

Bei der nun folgenden Konstruktion der geeigneten τ_i wird der zugrundeliegende Gedanke in diesem Abschnitt deutlich: Spieler 1 hat in dem Spiel $R(0, 1, n)$ —also der endlichen Variante des Rubinsteinspiels, welche in Periode n dem Spieler 1 den gesamten Kuchen zuspricht— einen Verhandlungsvorteil gegenüber der unendlichen Variante: Eine Verzögerung der Verhandlungen übt Druck auf Spieler 2 aus, da die Abbruchperiode n näherrückt, in der er nichts mehr erhält. Spieler 1 hingegen kann sich eine Auszahlung von $u_1(1, n)$ als Reservationswert unter allen Umständen sichern. Der Nutzen, den Spieler 1 aus diesem Verhandlungsvorteil ziehen kann, wird um so geringer, je größer n wird und je weiter der Spielabbruch in die Ferne rückt. Dies äußert sich mathematisch darin, daß die Folge der $f_l(1, n)$, die sich bei festgehaltenem l aus einem wachsenden n ergibt, schwach monoton fallend

ist. Außerdem ist sie natürlicherweise durch 0 nach unten beschränkt und konvergiert daher gegen einen Grenzwert, der hier mit f_l^{max} bezeichnet wird. Dieser Grenzwert existiert für jedes $l \in T$, und es ergibt sich eine Folge der f_l^{max} . Diese Folge ist für die Analyse des allgemeinen Rubinsteinspiels aus zwei Gründen wertvoll: Zum einen besitzt sie die in Lemma 4.1.8 verlangten Eigenschaften und beschreibt somit ein Gleichgewicht in stationären Strategien, zum anderen hilft sie bei der Charakterisierung *aller* Gleichgewichte eines allgemeinen Rubinsteinspiels, wie im nächsten Kapitel aufgezeigt wird. Doch zunächst sei die Gleichgewichtseigenschaft der f_l^{max} formuliert und bewiesen.

Satz 4.1.10. *Die Folge $f_l^{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_l(1, n)$ beschreibt ein Gleichgewicht in stationären Strategien, d.h., die Strategien für die beiden Spieler "in Periode l schlage die Aufteilung f_l^{max} vor, bzw. akzeptiere einen Vorschlag Deines Gegenübers genau dann, wenn er für Dich mindestens so gut wie f_l^{max} ist" bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Beweis: Da die Folgen $f_l(1, t)$ (für festgehaltenes t) per definitionem die Gleichungen (4.1.3) und (4.1.4) erfüllen und da die $f_l(x, t)$ für beliebige t und l in x stetig sind, genügen auch die f_l^{max} diesen notwendigen und hinreichenden Bedingungen. $\square$

Da die f_l^{max} für jedes Paar von Nutzenfunktionen existieren, ist damit die Existenz eines Gleichgewichts für ein beliebiges allgemeines Rubinsteinspiel bewiesen.

Als direkte Folge von Satz 4.1.10 kann ein weiteres Gleichgewicht konstruiert werden: Hierzu werden die Spiele $R(l, 0, n)$ betrachtet, die zum Zeitpunkt l beginnen und in Periode n den gesamten Kuchen Spieler 2 zusprechen. Die Folge der $f_l(0, n)$, die sich bei festgehaltenem l und wachsendem n ergibt, ist schwach monoton steigend und nach oben durch 1 beschränkt. Somit existiert der Grenzwert $f_l^{min} := \lim_{n \rightarrow \infty} f_l(0, n)$ für jedes l , und in Analogie zu Satz 4.1.10 ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 4.1.11. *Die Folge f_l^{min} beschreibt ein Gleichgewicht in stationären Strategien, d.h., die Strategien für die beiden Spieler*

”In Periode l schlage die Aufteilung f_l^{min} vor, bzw. akzeptiere einen Vorschlag Deines Gegenübers genau dann, wenn er für Dich mindestens so gut wie f_l^{min} ist”

bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

4.2 Charakterisierung der Gleichgewichte

Mit Hilfe des im letzten Kapitel hergeleiteten Instrumentariums können jetzt einige Kernaussagen hergeleitet werden. Neben einer Charakterisierung der Menge aller Gleichgewichtsergebnisse werden Bedingungen angegeben, die äquivalent zur Eindeutigkeit eines Gleichgewichts sind. Schließlich wird gezeigt, daß sich Rubinsteins Theorem über die Existenz und Eindeutigkeit des Gleichgewichts als Spezialfall dieser Bedingungen beweisen läßt.

Das Spiel $R(0, 1, n)$ ist mit dem allgemeinen (zeitlich unbeschränkten) Rubinsteinspiel bis auf den Spielabbruch in Periode n zugunsten von Spieler 1 identisch. Wie schon im letzten Kapitel angemerkt, leitet sich hieraus ein Verhandlungsvorteil für Spieler 1 ab. Dieser manifestiert sich darin, daß es für Spieler 1 in keinem Gleichgewicht im unbeschränkten Rubinsteinspiel ein besseres Ergebnis als das Gleichgewichtsergebnis in $R(0, 1, n)$ geben kann. Mit anderen Worten, in keinem Gleichgewicht wird in Periode 0 ein Ergebnis größer als $f_0(1, n)$ realisiert werden. Da diese Aussage für beliebige n gilt kann sich auch ein größeres Resultat als f_0^{max} niemals aus einem Gleichgewicht ergeben. Allgemeiner formuliert stellt f_l^{max} für Spieler 1 das beste in Periode l mögliche Gleichgewichtsergebnis dar. Entsprechende Aussagen gelten auch für Spieler 2, für den f_l^{min} das beste Ergebnis darstellt, das sich aus einem teilspielperfekten Gleichgewicht in Periode l ergeben kann. Somit bilden zu einem vorgegebenen allgemeinen Rubinsteinspiel (vgl. Definition 3.1.3) die f_l^{max} und die f_l^{min} obere und untere Schranken für alle Gleichgewichtsergebnisse. Diese Aussagen werden in dem nun folgenden Theorem

zusammengefaßt.

Theorem 4.2.1. *Es sei (σ, λ) ein beliebiges Gleichgewicht eines allgemeinen Rubinsteinspiels, in dem eine Einigung in Periode l zustande kommt. Dann liegt diese Einigung im Intervall $[f_l^{min}, f_l^{max}]$.*

Theorem 4.2.1 formuliert das zentrale Ergebnis in diesem Teil der Arbeit: Durch die Grenzwerte der Gleichgewichtsergebnisse aus endlichen Spielen läßt sich die Menge der Gleichgewichtsergebnisse des unbeschränkten Spiels charakterisieren.

Im nächsten Schritt der Analyse sollen jetzt Bedingungen für die Eindeutigkeit eines Gleichgewichts angegeben werden. Es ergibt sich unmittelbar, daß hierfür die beiden Gleichgewichte, die in Satz 4.1.10 und Korollar 4.1.11 beschrieben werden, notwendigerweise identisch sein müssen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f_l^{min} = f_l^{max}$ für alle $l \in T$ gilt. Wie in dem nun folgenden Theorem formuliert wird, stellt diese Identität aber nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für Eindeutigkeit des Gleichgewichts dar.

Theorem 4.2.2. *Ein allgemeines Verhandlungsspiel hat genau dann ein eindeutiges Gleichgewicht, wenn $f_l^{min} = f_l^{max}$ für alle l gilt. Dieses Gleichgewicht ist identisch mit dem in Satz 4.1.10 beschriebenen.*

Beweis: Die *Notwendigkeit* dieser Bedingungen ergibt sich, wie eben beschrieben, aus Satz 4.1.10 und Korollar 4.1.11. Die Aussage, daß diese Bedingungen auch *hinreichend* sind, folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4.2.3. *Falls $f_l^{min} = f_l^{max}$ für alle l gilt, so einigen sich die Spieler in der ersten Periode eines jeden Teilspiels.*

Aus diesem Lemma (dessen Beweis im Anhang zu finden ist) und aus Theorem 4.2.1 folgt direkt, daß die einzige Gleichgewichtsstrategie für jeden Spieler nur derart sein kann, daß er in Periode l eine Aufteilung von $f_l^{max} = f_l^{min}$ vorschlägt und einer Einigung nur zustimmt, wenn sie für ihn mindestens so

gut wie f_l^{max} ist. Daraus ergibt sich, daß die in Theorem 4.2.2 beschriebene Bedingung auch hinreichend für die Eindeutigkeit eines Gleichgewichts ist. $\square$

Rubinsteins Theorem kann jetzt als ein Spezialfall der Bedingungen in Theorem 4.2.2 bewiesen werden: Wenn die Nutzenfunktionen außer den Eigenschaften A1-A4 auch stationär sind und dem Axiom 'zunehmender Verlust durch Verzögerung' (siehe Theorem 4.2.4) genügen, so gibt es ein eindeutiges Gleichgewicht.

Theorem 4.2.4. *Angenommen, die Nutzenfunktionen $u_1(z, t)$ und $u_2(z, t)$ genügen über (A1)-(A4) hinaus noch den beiden folgenden Annahmen:*

(A5) (Stationarität) *Für beliebige $t \in T$ gilt*

$$u_i(z, 0) = u_i(\tilde{z}, 1) \Leftrightarrow u_i(z, t) = u_i(\tilde{z}, t + 1).$$

(A6) (Zunehmender Verlust durch eine Verzögerung) (ZVV) *Der Ausdruck $z - u_i^{-1}(u_i(z, 1), 0)$ ist streng monoton steigend in z für $i = 1, 2$.*

Dann gibt es ein eindeutiges teilspielperfektes Gleichgewicht. In diesem Gleichgewicht gibt es eine Einigung in der ersten Periode.

Axiom (A5) sagt aus, daß sich die Zeitpräferenzen der Spieler im Verlaufe des Spiels nicht verändern. Axiom (A6) besagt, daß der Verlust, der sich aus einer einperiodigen Verzögerung ergibt, mit dem Anteil eines Spielers wächst. Das nun folgende Axiom (A6') liefert eine äquivalente und etwas anschaulichere Formulierung von (A6):

(A6') Aus $x > y$ und $u_i(x, 0) = u_i(x + \epsilon_x, 1)$ und $u_i(y, 0) = u_i(y + \epsilon_y, 1)$ folgt $\epsilon_x > \epsilon_y$.

Weiterhin folgt aus (A6) direkt die Aussage

(A6'') $x - f_{n-1}(x, n)$ ist für alle n monoton steigend in x ,

die im folgenden Beweis verwendet wird.

Beweis von Theorem 4.2.4:

Zu zeigen ist, daß $f_l^{max} = f_l^{min}$ für alle $l \in T$ gilt. Im folgenden wird dieser Beweis zunächst für $l = 0$ geführt.

FISHBURN/RUBINSTEIN (1982) zeigen, daß sich alle Nutzenfunktionen, die den Axiomen (A1)-(A6) genügen, in der Form $u_i(z, t) = (\delta_i)^t \cdot u_i^*(z)$ mit $\delta_i \in (0, 1)$ und einer monotonen Funktion $u_i^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben lassen. Daraus folgt

$$f_{n-1}(x, n) = f_0(x, 1) \text{ für ungerade } n \quad (4.2.6)$$

und

$$f_{n-1}(x, n) = f_1(x, 2) \text{ für gerade } n. \quad (4.2.7)$$

Die zu zeigende Aussage $f_0^{max} = f_0^{min}$ ist gleichbedeutend damit, daß die Differenz zwischen $f_0(1, n)$ und $f_0(0, n)$ beliebig klein wird, falls n groß genug ist. Sei also ein kleines $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir definieren die kompakte Menge $K := \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x - y \geq \varepsilon\}$. Aus (A6'') folgt nun

$$x > y \Rightarrow x - y > f_0(x, 1) - f_0(y, 1). \quad (4.2.8)$$

und

$$x > y \Rightarrow x - y > f_1(x, 2) - f_1(y, 2). \quad (4.2.9)$$

Damit ist die durch $g(x, y) := \min\left\{\frac{x-y}{f_0(x,1)-f_0(y,1)}, \frac{x-y}{f_1(x,2)-f_1(y,2)}\right\}$ definierte stetige Funktion größer als 1 für alle $x > y$, insbesondere also auf der Menge K . Es bezeichne $\gamma > 1$ das Minimum von g auf der kompakten Menge K . Somit gilt $\frac{(x-y)}{\gamma} \geq (f_{n-1}(x, n) - f_{n-1}(y, n))$ für alle $(x, y) \in K$ und für $n = 1, 2$. Wegen (4.2.6) und (4.2.7) gilt die Ungleichung $\frac{(x-y)}{\gamma} \geq (f_{n-1}(x, n) - f_{n-1}(y, n))$ auch für beliebige $n \in T$.

Sei nun $\tilde{n}$ so groß gewählt, daß $\frac{1}{\gamma^{\tilde{n}}} < \varepsilon$ gilt. Es ergibt sich unter Verwendung der Identität³

$$f_{\tilde{n}-2}(1, \tilde{n}) - f_{\tilde{n}-2}(0, \tilde{n}) = f_{\tilde{n}-2}(f_{\tilde{n}-1}(1, \tilde{n}), \tilde{n} - 1) - f_{\tilde{n}-2}(f_{\tilde{n}-1}(0, \tilde{n}), \tilde{n} - 1)$$

³Diese Identität ergibt sich direkt aus der Definition der f_n (siehe auch Lemma 4.1.3).

die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
& f_{\tilde{n}-1}(1, \tilde{n}) - f_{\tilde{n}-1}(0, \tilde{n}) \leq \frac{(1-0)}{\gamma} \leq \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\gamma}\right\} \\
\Rightarrow \quad & f_{\tilde{n}-2}(1, \tilde{n}) - f_{\tilde{n}-2}(0, \tilde{n}) \leq \frac{(f_{\tilde{n}-1}(1, \tilde{n}) - f_{\tilde{n}-1}(0, \tilde{n}))}{\gamma} \leq \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\gamma^2}\right\} \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
\Rightarrow \quad & f_0(1, \tilde{n}) - f_0(0, \tilde{n}) \leq \frac{(f_1(1, \tilde{n}) - f_1(0, \tilde{n}))}{\gamma} \leq \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\gamma^n}\right\} \\
\Rightarrow \quad & f_0(1, \tilde{n}) - f_0(0, \tilde{n}) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $f_0^{max} \leq f_0(1, n)$ und $f_0^{min} \geq f_0(0, n)$ für alle $n \in T$ gilt, ergibt sich schließlich

$$f_0^{max} - f_0^{min} < f_0(1, n) - f_0(0, n) \leq \varepsilon. \quad (4.2.10)$$

Da dies für beliebige ε gilt, folgt daraus $f_0^{max} = f_0^{min}$.

Es bleibt noch der Nachweis $f_l^{max} = f_l^{min}$ für $l > 0$ zu führen: Wegen der Stationarität der Nutzenfunktionen ist ein Teilspiel, das in einer beliebigen geradzahligem Periode n beginnt, bis auf eine Normierung der Nutzenfunktionen identisch mit dem Originalspiel. Daher läßt sich die obige Rechnung durch Umbenennung der Indizes leicht auf den Fall beliebiger geradzahligem t übertragen. Auch für ungerade t läßt sich die obige Argumentation aus Symmetriegründen direkt übertragen.

Damit ist der Beweis von Theorem 4.2.4 beendet. $\square$

Mit den Theoremen 4.2.1, 4.2.2 und 4.2.4 wurden die wesentlichen Aussagen über ein allgemeines Rubinsteinspiel formuliert und bewiesen. Damit ist die theoretische Analyse des allgemeinen Rubinsteinspiels fast abgeschlossen. Leider sind diese Resultate und insbesondere Theorem 4.2.2 unter Anwendungsgesichtspunkten sehr unbefriedigend: Um zu einem gegebenen Paar von Nutzenfunktionen die Eindeutigkeit des Gleichgewichts im dazugehörigen allgemeinen Rubinsteinspiel nachzuweisen, müßten unendlich viele Grenzwerte berechnet werden, eine Aufgabe, die auch numerisch nicht sinnvoll geleistet werden kann. Dieses Problem wird in dem nun folgenden Theorem behandelt. Für beliebige Nutzenfunktionen stellt bereits die Identität $f_0^{max} = f_0^{min}$ sicher, daß alle Gleichgewichte dasselbe *Resultat* produzieren.

Theorem 4.2.5. *Es sei ein allgemeines Rubinsteinspiel mit Nutzenfunktionen (u_1, u_2) gegeben, für welche $f_0^{min} = f_0^{max}$ gilt. Für ein beliebiges Gleichgewicht (σ, λ) gilt dann, daß sich die Spieler in Periode 0 auf die Teilung f_0^{max} einigen.*

Beweis: Angenommen, $f_0^{min} = f_0^{max}$ gilt, und die Strategien (σ, λ) formen ein Gleichgewicht derart, daß eine Einigung nicht in der ersten Periode zustande kommt. Es wird also eine Einigung (x, t) mit $t > 0$ realisiert. Nun folgt aus Lemma 4.1.3 die Ungleichung $x \leq f_t^{max}$, und aus Lemma 4.1.9 ergibt sich $u_1(f_0^{max}, 0) > u_1(f_t^{max}, t)$; somit gilt für ein ausreichend kleines ε auch $u_1(f_0^{max} - \varepsilon, 0) > u_1(f_t^{max}, t)$. Da Spieler 2 einer Forderung von $f_0^{max} - \varepsilon = f_0^{min} - \varepsilon$ aber unbedingt zustimmen wird (man vergleiche den Beweis von Theorem 4.2.1), stellt die Formulierung einer solchen Forderung in Periode 0 eine Verbesserung für Spieler 1 dar, was im Widerspruch zur Teilspielperfektheit steht. $\square$

Somit folgt aus der Identität $f_0^{max} = f_0^{min}$, daß sich alle Gleichgewichte höchstens im Verhalten der Spieler abseits des Gleichgewichtspfades unterscheiden und daß alle Gleichgewichte dasselbe Ergebnis mit einer Einigung in Periode 0 produzieren. Dieses Ergebnis ist insbesondere vom Standpunkt der Anwendung nützlich, denn zu einem beliebigen allgemeinen Rubinsteinspiel können die f_0^{min} und die f_0^{max} numerisch berechnet werden. Auf diese Weise kann die Eindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichtsergebnisses überprüft werden.

4.3 Beispiele

In diesem Abschnitt werden die Techniken, die in den letzten Kapiteln erarbeitet wurden, zur Analyse einiger Beispiele eingesetzt. Diese Beispiele wurden nicht wegen ihrer ökonomischen Wertes ausgewählt, sondern es geht zum einen um die Demonstration der hier vorgestellten Analysetechnik und zum

anderen um die Frage, inwieweit das Konzept der Teilspielperfektheit in der Lage ist, intuitiv einsichtige Ergebnisse zu garantieren. Schließlich ist es ein Ziel der Spieltheorie, durch Gleichgewichtskonzepte das Verhalten von Wirtschaftssubjekten in Modellen nachvollziehbar zu beschreiben. Anhand der hier vorgestellten Beispiele wird deutlich, daß dies im Fall des allgemeinen Rubinsteinspiels nicht immer gelingt.

Das erste Beispiel behandelt die klassischen, bereits von Rubinstein vorgeschlagenen Nutzenfunktionen mit festen Verhandlungskosten in jeder Periode.

Beispiel 4.3.1. *Es sei $u_i(z, t) = z - c_i t$. Für $c_1 \neq c_2$ sind die wohlbekannten Rubinsteinschen Ergebnisse leicht zu beweisen; für $c_1 < c_2$ und beliebige gerade t beispielsweise gilt $f_l(x, l+2) = \min\{1, x - c_1 + c_2\}$, woraus direkt $f_t^{max} = f_t^{min} = 1$ für gerade t und $f_t^{max} = f_t^{min} = c_1$ für ungerade t folgt. Für $c_1 > c_2$ ergibt sich entsprechend $f_t^{max} = f_t^{min} = 0$ für ungerade t und $f_t^{max} = f_t^{min} = 1 - c_2$ für gerade t .*

Für $c_1 = c_2$ gilt $f_l(x, l+2) = x \ \forall x \in [c_1, 1]$, woraus sich direkt $f_t^{max} = 1$ und $f_t^{min} = c_1$ für gerade t sowie $f_t^{max} = 1 - c_1$ und $f_t^{min} = 0$ für ungerade t ergibt.

Dieses Ergebnis ist nicht sehr intuitiv: Das Gleichgewicht spricht dem Spieler, der die geringeren Kosten hat, den gesamten Kuchen zu. Das Bemerkenswerte dabei ist, daß dies unabhängig von der Höhe oder der Differenz der Kosten der beiden Spieler ist. Selbst bei einem nur marginalen Kostenvorteil erhält Spieler 1 im Gleichgewicht das beste aller möglichen Ergebnisse. Das nächste Beispiel zeigt, daß dieser Effekt aufgehoben wird, wenn die Zeitpräferenzen der beiden Spieler neben festen Kosten auch durch eine Abdiskontierung dargestellt werden.

Beispiel 4.3.2. *Es sei $u_1(x, t) = \delta^t x - \sum_{i=1}^t c_1 \delta^i$ und $u_2(x, t) = \delta^t x - \sum_{i=1}^t c_2 \delta^i$ mit einem gemeinsamen Diskontfaktor $\delta = 0,95$ und fixen Verhandlungskosten in Höhe von $c_1 = 0,04$ und $c_2 = 0,05$.*

Für dieses Beispiel kann das eindeutige Gleichgewichtsergebnis numerisch berechnet werden. Es gilt $f_0^{min} = f_0^{max} \approx 0,630$.

Das nächste Beispiel zeigt abdiskontierende Nutzenfunktionen, bei denen es kein eindeutiges Gleichgewicht gibt. Die Besonderheit liegt darin, daß sich der Diskontfaktor in jeder Periode vergrößert; die Spieler werden geduldiger, und der Verlust einer weiteren Periode wird zunehmend bedeutungslos. Es zeigt sich also, daß eine beliebige Abdiskontierung alleine nicht ausreicht, um die Eindeutigkeit des Gleichgewichts sicherzustellen.

Beispiel 4.3.3. Es sei $u_1(x, t) = u_2(x, t) = \prod_{i=1}^t \delta_i \cdot x$ mit einem variierenden Diskontfaktor von $\delta_i := 1 - 10^{-i}$. Eine numerische Kalkulation von f_0^{max} und f_0^{min} ergibt $f_0^{max} \approx 0,991$ und $f_0^{min} \approx 0,109$. Es gibt kein eindeutiges Gleichgewicht.

Das nun folgende Beispiel zeigt, daß für den Fall $f_0^{max} > f_0^{min}$ allgemeingültige Aussagen über die Gleichgewichtsergebnisse nicht getroffen werden können; das hier vorgestellte Gleichgewicht hat keine ökonomische Interpretation, aber eine wichtige spieltheoretische Konsequenz. Es zeigt, daß das Konzept der Teilspielperfektheit nicht stark genug ist, um die in den Lemmata 4.1.5 und 4.1.6 vorgestellten intuitiven Aussagen für beliebige Gleichgewichte zu garantieren. In der hier formulierten Allgemeingültigkeit gelten diese Aussagen nur für Gleichgewichte in stationären Strategien.

Der Grundgedanke in folgendem Gleichgewicht ist, daß die Spieler das Gebot in Periode Null verwenden, um sich danach auf eines von zwei Gleichgewichten zu koordinieren. Hat Spieler 1 in Periode 0 mindestens $\frac{9}{10}$ oder $\frac{6}{10}$ verlangt, so koordinieren die Spieler sich auf ein 'ausgeglichenes' Gleichgewicht. Andernfalls wird in der Folge ein Gleichgewicht realisiert, welches das für Spieler 2 günstigstmögliche Resultat ergibt.

Beispiel 4.3.4. Es sei $u_i(x_i, t) = x_i - tc_i$ mit $c_i = \frac{1}{5}$ für $i = 1, 2$. Wie schon in Beispiel 4.3.1 angemerkt wurde, gilt $f_0^{min} = 0$ und $f_0^{max} = \frac{4}{5}$. Es gibt ein Kontinuum an Gleichgewichten, von denen eines die folgende Gestalt hat:

Die Strategie für Spieler 1 lautet

In Periode 0 schlage $x = 1$ vor. Wenn Spieler 1 in Periode Null mindestens $\frac{9}{10}$ oder genau $\frac{4}{10}$ verlangt hat, dann fordere von der zweiten Periode an immer $\frac{7}{10}$ und akzeptiere einen Vorschlag x von Spieler 2 genau dann, wenn $x \geq \frac{1}{2}$ gilt. Anderenfalls fordere in jeder Periode $\frac{1}{5}$ und akzeptiere jedes Angebot.

Die entsprechende Strategie für Spieler 2 lautet

In Periode 0 akzeptiere eine Forderung von Spieler 1 genau dann, wenn sie kleiner als $\frac{1}{5}$ ist oder wenn sie genau $\frac{4}{10}$ beträgt. Wenn Spieler 1 in Periode 0 entweder mehr als $\frac{9}{10}$ oder genau $\frac{4}{10}$ verlangt hat, dann biete ab Periode 2 immer $x = \frac{1}{2}$ und akzeptiere jede Forderung von Spieler 1, die kleiner oder gleich $\frac{7}{10}$ ist. Anderenfalls biete Spieler 1 ab Periode 2 jeweils $x = 0$ an und akzeptiere eine Forderung nur, wenn sie höchstens $\frac{1}{5}$ beträgt.

Wie schon oben angemerkt, hat dieses Gleichgewicht einige konterintuitive Eigenschaften. So ist beispielsweise die Annahmefunktion von Spieler 2 nicht monoton: Während er in Periode 0 einer Forderung von $\frac{4}{10}$ zustimmt, lehnt er eine geringere Forderung in Höhe von $\frac{7}{20}$, ab. Weiterhin ist das Resultat dieses Gleichgewichts nicht effizient, da die Einigung nicht in Periode 0 zustande kommt. Damit belegt dieses Beispiel, daß das Konzept der Teilspielperfekteit in diesem Modell keine intuitiv einsichtige Resultate garantieren kann, wenn es kein eindeutiges Gleichgewicht gibt.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In diesem Teil der Arbeit wurde das von Rubinstein vorgestellte Verhandlungsmodell mit alternierendem Vorschlagsrecht für eine erweiterte Klasse von Nutzenfunktionen analysiert. Um in diesem Spiel Aussagen über die Menge der teilspielperfekten Gleichgewichte treffen zu können, wurde eine Technik entwickelt, die die Menge der Gleichgewichtsergebnisse durch die Analyse von endlichen Varianten des Originalspiels eingrenzt. Dadurch war es möglich, Schranken für alle möglichen Gleichgewichtsergebnisse festzulegen und äquivalente Bedingungen für die Eindeutigkeit eines teilspielperfekten Gleichgewichts anzugeben. Rubinsteins Theorem konnte als ein Spezialfall in diesen Kontext eingebettet werden. Damit bietet die hier vorgestellte Technik die Möglichkeit zu einer umfassenden Analyse dieses Modells. Ist allerdings das Gleichgewicht nicht eindeutig, so ist eine weitergehende Analyse der Gleichgewichte wahrscheinlich nicht möglich und auch nicht unbedingt sinnvoll. Beispiel 4.3.4 zeigt, daß in diesem Fall das Konzept der Teilspielperfektheit einfach nicht stark genug ist, um ein als 'rational' empfundenes Verhalten der Spieler zu garantieren. In diesem Fall müßten feinere Gleichgewichtskonzepte, beispielsweise aus der evolutorischen Spieltheorie, herangezogen werden, um das Verhalten der Spieler angemessen zu beschreiben.

Es ist mit den hier vorgestellten Techniken wahrscheinlich möglich, die hier

erhobenen Forderungen an die Nutzenfunktionen der Spieler weiter zu reduzieren. Insbesondere kann das Axiom der Stetigkeit abgeschwächt werden, was dann interessant ist, wenn die Nutzen der Spieler ein starkes psychologisches Element enthalten. Ein Beispiel hierfür sind die Verhandlungen zwischen Gewerkschaften und Arbeitgebern, bei denen aus Sicht der Gewerkschaftsmitglieder 'bei den Lohnerhöhungen unbedingt eine 3 vor dem Komma stehen soll'. Derartige Präferenzen würden sich durch eine unstetige Nutzenfunktion beschreiben lassen.

Die hier präsentierte Technik ist numerisch leicht umzusetzen und bietet sich daher zur Anwendung an. Eine große Klasse von Verhandlungssituationen kann so mit geringem mathematischen Aufwand spieltheoretisch analysiert werden. Inwieweit sich dieses Verfahren auch bei der Analyse von Mehrpersonenspielen oder von Verhandlungen unter unvollständiger Information anwenden läßt, kann noch nicht abschließend beantwortet werden.

Anhang A

Mathematischer Anhang

Beweis von Satz 4.1.1: Zu einem gegebenen Ergebnis $(\tilde{x}, \tilde{t})$ mit den im Satz angegebenen Eigenschaften bildet die Strategie für Spieler 1

In den Perioden 0 bis $\tilde{t} - 1$ schlage die Aufteilung $x = 1$ vor und lehne jedes Angebot von Spieler 2 ab. In allen Perioden ab $\tilde{t}$ biete jeweils $\tilde{x}$ an und akzeptiere ein Angebot nur dann, wenn es genau $\tilde{x}$ beträgt

zusammen mit der Strategie für Spieler 2

In den Perioden 0 bis $\tilde{t} - 1$ schlage die Aufteilung $x = 0$ vor und akzeptiere keine Forderung von Spieler 1. In allen Perioden ab $\tilde{t}$ biete jeweils $\tilde{x}$ an und akzeptiere ein Angebot nur dann, wenn es genau $\tilde{x}$ beträgt.

ein Nashgleichgewicht, wie leicht überprüft werden kann. $\square$

Beweis von Lemma 4.1.2: Angenommen, es gibt ein Gleichgewicht (σ, λ) , welches das Spielergebnis $(0, \infty)$ produziert. Zu einem beliebigen ε mit $u_2(1 - \varepsilon, 0) > u_2(1, 1)$ sei nun die Aktion von Spieler 1 betrachtet, in Periode Null eine Forderung in Höhe von ε zu stellen. Ein derartiges Angebot würde von Spieler 2 auf jeden Fall akzeptiert, da es ihm ein besseres Ergebnis sichert, als er durch eine Fortsetzung auch im günstigsten Fall erhoffen könnte. Daraus würde sich Spielergebnis $(\varepsilon, 0)$ ergeben, das auch Spieler 1 aufgrund der Axiome (A4) und (A1) höher bewertet als eine permanente Nichteinigung. Damit stellt eine solche Abweichung eine Verbesserung für

Spieler 1 dar, was im Widerspruch zur Teilspielperfektheit steht. $\square$

Beweis von Lemma 4.1.3: Angenommen, es gibt ein Gleichgewicht (σ, λ) , in dem oBdA Spieler 1 nach der Geschichte h_t seinem Gegenüber alles anbietet, d.h. $\sigma_t(h_t) = 0$. Dieses Angebot wird selbstverständlich von Spieler 2 akzeptiert, da dieser dadurch eine Auszahlung von $u_2(1, t)$ erhält, die größer ist als der Nutzen aus jedem Resultat, das durch eine Ablehnung entstehen könnte. Aus der Monotonie in der Zeit und der Stetigkeit der Nutzenfunktionen folgt damit aber auch, daß für ausreichend kleines $\varepsilon > 0$ Spieler 2 auch das Ergebnis $(1 - \varepsilon, t)$ jedem Ergebnis in einer späteren Periode vorziehen würde. Spieler 2 würde also auch einer Forderung von ε unbedingt zustimmen. Damit kann sich Spieler 1 durch Realisierung der Forderung von ε gegenüber ihrer ursprünglichen Strategie verbessern, und σ war nicht optimal, was im Widerspruch zur Teilspielperfektheit steht. $\square$

Beweis von Lemma 4.1.5: Angenommen, es gäbe ein beliebiges Gleichgewicht in stationären Strategien (σ, λ) , aus dem sich das Spielergebnis (x, t) mit $t > 0$ ergibt. Sei oBdA weiter angenommen, daß t ungerade ist, woraus wegen Lemma 4.1.3 $x < 1$ folgt. Für ausreichend kleines ε gilt nun, daß Spieler 2 einer Forderung von $x + \varepsilon$ in Periode $t - 1$ zustimmen würde, da die für ihn daraus resultierende Auszahlung, $u_2(1 - x - \varepsilon, t - 1)$, größer wäre als der Nutzen, der sich aus einer Ablehnung ergibt. Aus der Stationarität der Strategien folgt nämlich, daß im Falle einer Ablehnung weiterhin in Periode t die Einigung x zustandekommt, aus der sich für Spieler 2 ein Nutzen von $u_2(1 - x, t) < u_2(1 - x - \varepsilon, t - 1)$ ergäbe.

Die Realisierung eines solchen Angebots würde Spieler 1 aber einen größeren Anteil ($x + \varepsilon$ anstelle von x) in einer früheren Periode ($t - 1$ statt t) bieten und ihm somit einen höheren Nutzen sichern als er unter Strategie σ erhalten könnte. Daher würde die Formulierung dieses Angebots für ihn eine profitable Abweichung darstellen. Die ursprünglichen Strategien (σ, λ) waren also kein Gleichgewicht. $\square$

Beweis von Lemma 4.1.8: Der Beweis der Behauptung $\tau_{t-1} = f_{t-1}(\tau_t, t)$ wird hier nur für gerade t geführt; für ungerade t verläuft der Nachweis analog.

Da in einem Gleichgewicht in stationären Strategien in dem in Periode $t - 1$ beginnenden Teilspiel eine sofortige Einigung erzielt wird, muß das Angebot τ_{t-1} von Spieler 2 in Periode $t - 1$ von Spieler 1 akzeptiert werden. Im Falle einer Ablehnung würde, unter den bestehenden Strategien, in Periode t das Resultat (τ_t, t) realisiert. Wenn Spieler 1 also das Angebot τ_{t-1} in Periode $t - 1$ akzeptiert, so muß $u_1(\tau_{t-1}, t - 1) \geq u_1(\tau_t, t)$ gelten. Falls andererseits $u_1(\tau_{t-1}, t - 1) > u_1(\tau_t, t)$ und $\tau_{t-1} > 0$ gilt, so kann sich Spieler 2 auch sicher sein, daß das Angebot $\tau_{t-1} - \varepsilon$ für ausreichend kleines ε angenommen würde; damit wäre die Formulierung eines solchen Angebots eine profitable Abweichung, was im Widerspruch zur Teilspielperfektheit stünde. Also folgt im Gleichgewicht entweder $u_1(\tau_{t-1}, t - 1) = u_1(\tau_t, t)$ oder $\tau_{t-1} = 0$. Unter Verwendung der Schreibweise der Umkehrfunktion u^{-1} wird diese Aussage zu $\tau_{t-1} = u^{-1}(u_1(\tau_t, t), t - 1) = f_{t-1}(\tau_t, t)$. $\square$

Beweis von Lemma 4.1.9: Es sei oBdA die Bewertung von Spieler 1 und eine ungerade Periode l betrachtet. Für die Aufteilungen $f_l(x, t)$ und $f_{l+1}(x, t)$ gilt gemäß ihrer Definition $u_1(f_l(x, t), l) \geq u_1(f_{l+1}(x, t), l + 1)$. Weiter erfüllen die Aufteilungen $f_{l+1}(x, t)$ und $f_{l+2}(x, t)$ entweder die Gleichung $u_2(1 - f_{l+1}(x, t), l + 1) = u_2(1 - f_{l+2}(x, t), l + 2)$ oder $f_{l+1}(x, t) = 1$. In beiden Fällen folgt aus der Monotonie der Nutzenfunktionen in der Zeit $f_{l+1}(x, t) > 0$ sowie $f_{l+1}(x, t) \geq f_{l+2}(x, t)$ und somit $u_1(f_{l+1}(x, t), l + 1) > u_1(f_{l+2}(x, t), l + 2)$, denn Spieler 1 erhält einen größeren Anteil zu einem früheren Zeitpunkt. Hieraus und aus dem oben Gesagten schließlich ergibt sich $u_1(f_l(x, t), l) > u_1(f_{l+2}(x, t), l + 2)$.

Durch Iterierung dieser Überlegungen ergibt sich auch $u_1(f_l(x, n), l) \geq u_1(x, n)$ für beliebige $l \leq n - 2$.

Der Nachweis für ungerade l erfolgt ganz analog. Schließlich läßt sich dieser Beweis aus Symmetriegründen direkt auf Spieler 2 übertragen. $\square$

Beweis von Theorem 4.2.1: Es ist leicht zu sehen, daß sich die Behauptung des Theorems direkt aus den folgenden Aussagen ergibt:

Für alle $t \in T$ und für beliebige Geschichten $h^t \in H^t$ genügen die Aufteilungsvorschläge der Spieler in Periode t folgenden Bedingungen:

$$\sigma_t(h^t) \geq f_t^{min} \quad \text{für gerades } t \quad (\text{A.1.1})$$

und

$$\lambda_t(h^t) \leq f_t^{max} \quad \text{für ungerades } t \quad (\text{A.1.2})$$

Weiterhin werden Aufteilungsvorschläge, die den Ungleichungen

$$\sigma_t(h^t) \geq f_t^{max} \quad \text{für gerades } t \quad (\text{A.1.3})$$

beziehungsweise

$$\lambda_t(h^t) \leq f_t^{min} \quad \text{für ungerades } t \quad (\text{A.1.4})$$

genügen, abgelehnt.

Da somit eine Aufteilung, die nicht zwischen f_l^{min} und f_l^{max} liegt, entweder von einem Spieler nicht vorgeschlagen oder vom anderen Spieler unbedingt abgelehnt wird, muß jedes Gleichgewichtsergebnis in Periode l im Intervall $[f_l^{min}, f_l^{max}]$ liegen.

Zum Beweis der oben beschriebenen Bedingungen sei oBdA angenommen, daß Ungleichung (A.1.2) verletzt ist. Sei also die Existenz eines Gleichgewichts (σ, λ) und eine Geschichte h^t derart angenommen, daß Spieler 2 nach Geschichte h^t ein 'zu großes' Angebot $\lambda_t(h^t) > f_t^{max}$ formuliert.

Aus der Definition $f_t^{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_t(1, n)$ folgt direkt die Existenz eines geraden $\tilde{n}$ mit der Eigenschaft $\lambda_t(h^t) > f_t(1, \tilde{n})$. Dann gelten die folgenden Überlegungen unabhängig von der Geschichte des Spiels zu einem beliebigen Zeitpunkt.

Spieler 1 kann in dem in Periode $\tilde{n}$ beginnenden Teilspiel nicht mehr als den gesamten Kuchen verlangen. Daher würde er für ein beliebiges $\varepsilon_{\tilde{n}} > 0$ ein Angebot in Periode $\tilde{n} - 1$ von Spieler 2 in Höhe von $x_{\tilde{n}-1} := u_1^{-1}(u_1(1, \tilde{n}), \tilde{n} -$

1) + $\varepsilon_{\tilde{n}} = f_{\tilde{n}-1}(1, \tilde{n}) + \varepsilon_{\tilde{n}}$ in Periode $\tilde{n} - 1$ unbedingt akzeptieren; ein solches Angebot würde ihm (wegen der Addition von $\varepsilon_{\tilde{n}}$) einen höheren Nutzen bieten als sich aus einer Fortsetzung des Spiels im günstigsten Fall ergeben kann. Daraus ergibt sich wiederum, daß Spieler 2 kein Spielresultat schlechter als $(x_{\tilde{n}-1}, \tilde{n} - 1)$ akzeptieren muß. Daher wird er in Periode $\tilde{n} - 2$ eine Forderung größer als $u_2^{-1}(u_2(x_{\tilde{n}-1}, \tilde{n} - 1), \tilde{n} - 2) = f_{\tilde{n}-2}(x_{\tilde{n}-1}, \tilde{n} - 1) =: x_{\tilde{n}-2}$ unbedingt ablehnen. Dies vorhersehend, wird Spieler 1 in Periode $\tilde{n} - 3$ ein Angebot in Höhe von $f_{\tilde{n}-3}(x_{\tilde{n}-2}, \tilde{n} - 2) + \varepsilon_{\tilde{n}-3} =: x_{\tilde{n}-3}$ unbedingt annehmen, da ihr dies ein besseres Resultat gibt, als sie im Falle einer Ablehnung in Periode $\tilde{n} - 2$ oder einer beliebigen späteren Periode erhoffen kann.

Durch Iterierung dieser Argumente ergibt sich, daß Spieler 2 auch sicher sein kann, daß in Periode t ein Angebot in Höhe von $f_t(x_{\tilde{n}-(\tilde{n}-t)+1}, t + 1) + \varepsilon_n =: x_{\tilde{n}-(\tilde{n}-t)} = x_t$ von Spieler 1 unbedingt angenommen würde. Diese Aussage gilt für beliebige $\varepsilon_i > 0$.

Falls in diesen Überlegungen alle ε_i auf 0 gesetzt würden, ergäbe sich $x_t = f_t(1, \tilde{n}) < \lambda(h^t)$. Da alle hier auftretenden Funktionen stetig sind, ist es möglich, die $\varepsilon_i > 0$ so klein zu wählen, daß $x_t < \lambda(h^t)$ weiterhin gilt. Spieler 2 kann mit dem oben Gesagten sicher sein, daß ein Angebot von x_t —ebenso wie das Angebot $\lambda(h^t)$ — in Periode t akzeptiert würde. Daher ergibt sich aus einem Angebot von x_t eine strikte Verbesserung für Spieler 2 gegenüber dem aktuellen Angebot $\lambda(h^t)$, was einen Widerspruch zur Optimalität seiner Strategie in einem teilspielperfekten Gleichgewicht darstellt.

Die weiteren oben aufgestellten Behauptungen lassen sich analog nachweisen.

Damit ist die Aussage des Theorems bewiesen: Wenn die Spieler sich in einem Gleichgewicht in Periode t auf eine Aufteilung einigen, so muß diese Aufteilung im Intervall $[f_t^{min}, f_t^{max}]$ liegen. Alle anderen Ergebnisse sind mit dem Lösungskonzept der Teilspielperfektheit nicht zu vereinbaren. $\square$

Beweis von Lemma 4.2.3: Angenommen, $f_l^{min} = f_l^{max}$ gilt für beliebige l , und es gibt ein Gleichgewicht (σ, λ) und ein $t \in T$ derart, daß sich die Spieler in dem in Periode t beginnenden Teilspiel nicht sofort einigen.

Aus Lemma 4.1.2 folgt, daß sich die Spieler dann in einer späteren Periode n einigen. Da aufgrund von Theorem 4.2.1 diese Einigung weder größer noch kleiner als $f_n^{min} = f_n^{max}$ sein kann, muß sie identisch zu dieser Zahl sein. Sei nun oBdA n eine gerade Zahl. Es wird nun gezeigt, daß es für Spieler 2 eine vorteilhafte Abweichung von seiner Strategie λ in Periode $n - 1$ gibt, die zu einer Einigung in dieser Periode führt. Die Existenz einer solchen profitablen Abweichung stellt dann einen Widerspruch zu der Annahme dar, daß das Strategienpaar (σ, λ) ein Gleichgewicht bilden.

Aus Lemma 4.1.3 folgt $f_n^{min} > 0$ und als Konsequenz aus der Monotonie der Nutzenfunktionen gilt $f_{n-1}^{min} = f_{n-1}(f_n^{min}, n) < f_n^{min}$. Nun ergibt sich aus Theorem 4.2.1, daß in einem Gleichgewicht das einzig mögliche Resultat in einer späteren Periode $m > n$ das Ergebnis $f_m^{min} = f_m^{max}$ ist. Weiter ist aus Lemma 4.1.9 bekannt, daß Spieler 1 das Spielresultat $(f_{n-1}^{min}, n - 1)$ dem Ergebnis (f_m^{min}, m) für alle $m > n$ strikt vorzieht und das Resultat $(f_{n-1}^{min}, n - 1)$ mindestens genauso hoch bewertet wie (f_n^{min}, n) . Also würde Spieler 1 in Periode $n - 1$ ein Angebot von Spieler 2 in Höhe von $f_{n-1}^{min} + \varepsilon$ für beliebige $\varepsilon > 0$ unbedingt akzeptieren.

Wegen $f_{n-1}^{min} < f_n^{min}$ kann Spieler 2 unter Wahl eines ausreichend kleinen ε ein Angebot $f_{n-1}^{min} + \varepsilon < f_n^{min}$ gestalten, welches unbedingt angenommen wird und dessen Annahme ihm einen höheren Nutzen gibt als er unter Strategie λ erhielte — es ergibt sich die für Spieler 2 günstigere Aufteilung $(f_{n-1}^{min} + \varepsilon$ statt $f_n^{min})$ zu einem früheren Zeitpunkt (Periode $n - 1$ statt Periode n). Somit könnte er sich durch die Formulierung eines solchen Angebots verbessern, was einen Widerspruch zu Teilspielperfektheit des Gleichgewichts (σ, λ) darstellt.

□

Teil II

Ein Modell zur Erklärung von Reputationsphänomenen

Kapitel 6

Einführung — Das Ladenkettenparadoxon

In seinem berühmten Aufsatz aus dem Jahr 1978 stellt SELTEN das 'Ladenkettenspiel' vor: Ein Monopolist besitzt Niederlassungen in n Orten. In jedem dieser Märkte erscheint nun nacheinander ein potentieller Konkurrent. Diese muß sich entscheiden, ob er einen Eintritt in den vom Monopolisten dominierten Teilmarkt wagen will. Falls er sich für einen Markteintritt entscheidet, kann der Monopolist auf zwei Weisen darauf antworten: Entweder er stimmt einer Marktteilung mit der neuerwachsenen Konkurrenz zu, oder er antwortet aggressiv und initiiert einen Preiskampf, der beiden Akteuren schadet. Weiterhin zieht der Monopolist einen Nichteintritt des Konkurrenten dem Ergebnis einer Marktteilung vor, während jeder Konkurrent eine Marktteilung in seinem Teilmarkt höher bewertet als sein Fernbleiben aus dem Markt.

Da aggressives Verhalten dem Monopolisten Kosten verursacht, läßt es sich nur dann rationalisieren, wenn durch einen Preiskampf weitere potentielle Konkurrenten am Eintritt gehindert werden und somit die in der Gegenwart entstandenen Einbußen in künftigen Perioden kompensiert werden können. Im Grundmodell (SELTEN (1978)) mit N Märkten und vollständiger Informa-

tion läßt sich dieser Gedanke jedoch nicht in ein spieltheoretisches Gleichgewicht belegen. Dies läßt sich durch Backward Induction leicht nachweisen. Es ergibt sich, daß das so skizzierte Spiel —unabhängig von der Zahl der Konkurrenten— ein eindeutig bestimmtes teilspielperfektes Gleichgewicht besitzt, in dem alle Konkurrenten in den Markt eintreten und der Monopolist jedesmal mit einer Marktteilung antwortet.

Wie Selten ausführt, ist dieses Resultat nicht einsichtig. Angenommen, der Monopolist beantwortet die ersten Markteintritte mit Preiskämpfen; dann scheint es natürlich, daß ein solches Verhalten dazu führt, daß die nachfolgenden Konkurrenten ebenfalls einen Preiskampf gegen sich erwarten und sich daher gegen einen Markteintritt entschließen. Hierdurch wiederum würde die Auszahlung des Monopolisten in den späteren Perioden verbessert werden und sein Verhalten —die kostspieligen Preiskämpfe in den frühen Perioden— wäre ex post gerechtfertigt. Dieser von SELTEN (1978) aufgezeigte Widerspruch zwischen einem intuitiv nachvollziehbaren Ergebnis und dem teilspielperfekten Gleichgewicht in dieser Entscheidungssituation ist unter dem Namen *Ladenkettenparadoxon* beziehungsweise *Chainstore paradox* in die Literatur eingegangen.

KREPS/WILSON (1982a) und MILGROM/ROBERTS (1982) variieren in ihren Arbeiten das Grundmodell zu einem Spiel unter unvollständiger Information. Als Ergebnis sind sie in der Lage, den mittlerweile klassischen Reputationsgedanken zur Auflösung des Paradoxons einzusetzen. In diesen Modellen sind die Konkurrenten nicht sicher, ob der Monopolist stark oder schwach ist. Ein starker Monopolist wird aufgrund einer entsprechenden Auszahlungsstruktur auf einen Markteintritt *immer* mit einem Preiskampf reagieren. Ein schwacher Monopolist hingegen befindet sich in der oben beschriebenen Situation und für ihn ist die Antwort 'Marktteilung' im Basisspiel eine schwach dominierende Strategie. Im Gleichgewicht dieses Reputationsmodells hat auch der schwache Monopolist einen Anreiz zu kämpfen, da er auf diese Weise seine Reputation als starker Spieler aufrechterhalten kann. Dies wiederum sehen die Konkurrenten voraus, und daher wird im sequentiellen Gleichge-

wicht auch in den ersten Perioden ein Markteintritt verhindert.

Ein wesentlicher Kritikpunkt an diesen Modellen liegt darin, daß die Annahme, der Monopolist sei stark und würde einen Preiskampf einer Marktteilung vorziehen, nur schwer zu rechtfertigen ist. Aus diesem Vorwurf heraus entstand die Arbeit von PITCHIK (1990), in welcher die Autorin vorschlägt, die Stärke des Monopolisten zu endogenisieren: Zu Beginn des Spiels entscheidet der Monopolist, in wievielen (zufällig ausgewählten) Märkten er gerne seine Auszahlung a priori verändern und dadurch stark werden möchte. Pitchik weist nach, daß es in diesem Modell ein Gleichgewicht mit Eintrittsverhinderung gibt, wenn die Kosten für den Monopolisten, sich in einem Markt stark zu machen, ausreichend klein sind.

In der vorliegenden Arbeit wird ein alternativer Ansatz zur Lösung des Lakenkettenparadoxons vorgestellt. Die Grundannahme ist, daß die Konkurrenten über die *Reihenfolge*, in der sie über ihren Eintritt entscheiden, nicht informiert sind. Um diese Unsicherheit aufrechtzuerhalten, muß weiterhin angenommen werden, daß die Aktionen der jeweils anderen Spieler von den Konkurrenten nicht uneingeschränkt beobachtet werden können. Unter diesen Annahmen bildet das Strategienprofil *sämtliche Konkurrenten treten ein, und der Monopolist antwortet jedes Mal friedlich* immer noch ein sequentielles Gleichgewicht. Es wird aber auch die Existenz von Gleichgewichten nachgewiesen, in denen eine Eintrittsverhinderung stattfindet. Das im Modell mit vollständiger Information zwingende Argument der Backward Induction kann unter diesen Bedingungen nicht angewandt werden, da der letzte Konkurrent nicht unbedingt weiß, daß er sich in dieser Position befindet. Daher kann er keinen Nutzen aus der Tatsache ziehen, daß die Kampfdrohung des Monopolisten in der letzten Periode unglaubwürdig ist.

Dieser Ansatz ähnelt dem Modell von Masso (1995), welches ebenfalls unvollständige Information über die Reihenfolge der Konkurrenten zur Konstruktion eintrittsverwehrender Gleichgewichte verwendet. Die beiden Aufsätze entstanden unabhängig voneinander. Der Autor erfuhr von der Existenz des Massoschen Aufsatzes erst, nachdem wesentliche Teile dieser Arbeit bereits

fertiggestellt waren. Zu einer detaillierten Diskussion der Gemeinsamkeiten und der Unterschiede dieser beiden Arbeiten sei auf Kapitel 8 verwiesen.

In Kapitel 7 werden die Grundannahmen sowie die verwendeten Gleichgewichtskonzepte beschrieben. In Kapitel 8 wird die spieltheoretische Analyse des Grundmodells und einiger Varianten durchgeführt. Insbesondere werden hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz von eintrittsverwehrenden Gleichgewichten erarbeitet. Kapitel 9 bietet neben einer kurzen Zusammenfassung eine ausführliche Diskussion der Annahmen und Ergebnisse sowie einen Vergleich mit den oben angeführten Arbeiten. Der Anhang B, enthält einige Rechnungen, die aus Gründen der Übersichtlichkeit im Hauptteil ausgelassen wurden.

Kapitel 7

Einführung des Modells und der Lösungskonzepte

7.1 Das Modell

Es gibt $n + 1$ Spieler, einen Monopolist und die Menge N der Konkurrenten, $N = \{1..n\}$. Zu Beginn des Spiels werden die Konkurrenten 'numeriert', d.h., es wird durch ein Zufallsereignis festgelegt, in welcher Reihenfolge die Konkurrenten agieren. Jeder Konkurrent $i \in N$ erhält dann eine Nummer $x_i \in N$ derart zugeordnet, daß $i \neq j \Leftrightarrow x_i \neq x_j$ gilt. Zwei verschiedene Konkurrenten haben also stets eine unterschiedliche Nummer und jede Nummer wird genau einmal vergeben. Jede mögliche Reihenfolge ist gleich wahrscheinlich, und die Konkurrenten erhalten von dem Ergebnis dieses Zufallsereignisses keine Kenntnis. Dann spielen die Konkurrenten entsprechend dieser Reihenfolge mit dem Monopolisten das Markteintrittsspiel: In Periode¹ j entscheidet sich der Konkurrent i mit der Nummer $x_i = j$, ob er in den Markt eintreten

¹Der Ausdruck Periode ist in diesem Zusammenhang abstrakt zu verstehen: 'Periode i ' bedeutet 'nachdem die ersten $i - 1$ Konkurrenten ihre Entscheidung über einen Markteintritt realisiert haben'. In Sinne dieses Sprachgebrauchs haben die Konkurrenten, die ja nicht wissen, wieviele Konkurrenten vor ihnen agiert haben, kein Zeitgefühl und wissen nicht, in welcher Periode sie sich befinden.

will (Aktion² 'M') oder ob er dem Markt fernbleibt (Aktion 'F'). Wählt er einen Markteintritt, so ist es an dem Monopolisten, sich für einen Preiskampf (Aktion 'P') oder eine Marktteilung (Aktion 'T') zu entscheiden. Entscheidet er sich für einen Preiskampf, so erhalten der Monopolist und der Konkurrent jeweils eine Auszahlung von 0. Wählt er eine Marktteilung, so erhält der Monopolist eine Auszahlung von a mit $0 < a < 1$ und der eingetretene Konkurrent ein Ergebnis von $A > 1$. Entscheidet sich der Konkurrent gegen den Markteintritt, so erhalten er und der Monopolist jeweils eine Auszahlung von 1. Eine Diskontierung findet nicht statt. Da angenommen wird, daß die Präferenzen aller Spieler durch eine VonNeumann/Morgensternsche Nutzenfunktion beschrieben werden können, lassen sich sämtliche Variationen des Ladenkettenspiels durch eine lineare Transformation auf die hier beschriebene Form bringen; es wurde also eine allgemeingültige Form der Beschreibung gewählt. Abbildung 7.1 zeigt das Markteintrittsspiel in der Spielbaumdarstellung.

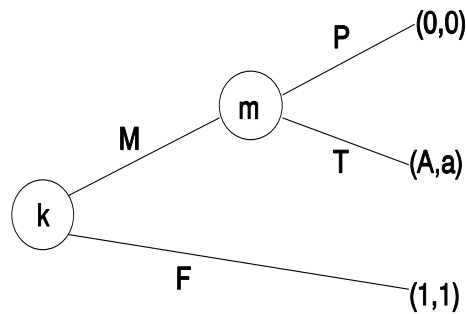


Abbildung 7.1: Der Spielbaum des Markteintrittsspiels. m und k bezeichnen den Monopolisten bzw. den Konkurrenten. Es gilt $A > 1 > a > 0$.

Das Ergebnis eines Basisspiels wird zwar vom Monopolisten unmittelbar wahrgenommen, von den verbliebenen Spielern aber nicht unbedingt beob-

²Bei den Abkürzungen werden *Aktionen* der Spieler (Beispiel: 'Markteintritt') mit einem einzelnen Großbuchstaben (M) bezeichnet. *Ergebnisse des Basisspiels* (Beispiel: 'Preiskampf') werden durch zwei Großbuchstaben (PK) repräsentiert

achtet (anderenfalls wäre ja die Annahme, daß die Konkurrenten über ihre Reihenfolge nicht informiert sind, bedeutungslos: Sie könnten auf ihre Nummer durch die Zahl der bisher beobachteten Spielergebnisse rückschließen). Kommt es zu einer Marktteilung, so wird dieses Ergebnis von den restlichen Konkurrenten mit der Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$ beobachtet. Ein Preiskampf wird mit der Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ beobachtet, und schließlich wird die Entscheidung eines Konkurrenten, nicht in den Markt einzutreten, von den übrigen Konkurrenten überhaupt nicht wahrgenommen. Es sei weiterhin angenommen, daß die Beobachtungen der Konkurrenten vollständig korreliert seien, d.h., ein Spielergebnis wird entweder von allen Konkurrenten oder von keinem beobachtet. Der Monopolist erfährt, ob ein Spielergebnis von den Konkurrenten wahrgenommen wird.

Für die formale Analyse werden die folgenden Abkürzungen Verwendung finden: Es bezeichne MT das Basisspielergebnis einer Marktteilung, PK einen beobachteten Preiskampf, PK_u einen unbeobachteten Preiskampf und schließlich sei NE die Abkürzung für den Nichteintritt eines Konkurrenten.

In diesem Modell ist eine Strategie eine Funktion, die die von einem Spieler wahrgenommenen Basisspielergebnisse in die Menge der möglichen Aktionen abbildet. Um diese Beschreibung zu formalisieren, werden die folgenden Definitionen benötigt.

Definition 7.1.1. *Eine Geschichte des Spiels der Länge t , h^t , ist eine t -elementige Folge von Ergebnissen des Basisspiels. Es bezeichne $\mathcal{H}^t = \{NE, MT, PK, PK_u\}^t$ die Menge aller Geschichten des Spiels der Länge t . $\mathcal{H} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^t$ bezeichne die Menge aller Geschichten beliebiger Länge. Schließlich bezeichne $h^0 = \emptyset$ die leere Geschichte.*

Definition 7.1.2. *Eine Folge von Beobachtungen der Länge t , b^t , ist eine Folge von beobachteten Ergebnissen des Basisspiels, d.h., $b^t \in \{MT, PK\}^t$. Es sei $\mathcal{B}^t$ die Menge aller Folgen von Beobachtungen der Länge t . $\mathcal{B} = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^t$ bezeichne die Menge aller Beobachtungen beliebiger Länge. Schließlich bezeichne $b^0 = \emptyset$ die leere Beobachtungsfolge.*

Ein Konkurrent, der sich für oder gegen einen Markteintritt zu entscheiden hat, kann gemäß den oben getroffenen Annahmen nur einen Ausschnitt der bisher eingetretenen Basisspielergebnisse wahrnehmen. Eine Strategie für einen Konkurrenten, σ_k , ist daher eine Handlungsvorschrift, die aus den beobachteten Spielergebnissen eine Aktion —Markteintritt oder kein Markteintritt— ableitet. Formal ist eine Strategie daher als eine Funktion $\sigma_k : \mathcal{B} \rightarrow \{\text{Markteintritt, kein Markteintritt}\}$, beziehungsweise $\mathcal{B} \rightarrow \{M, F\}$ definiert. In der so eingeführten Notation gibt $\sigma_k(b^t)$ die Entscheidung des Konkurrenten an, nachdem die Folge b^t beobachtet wurde.

Entsprechend ist eine Strategie des Monopolisten, σ_m , eine Funktion der Geschichte des Spiels bis zum aktuellen Zeitpunkt. Formal ausgedrückt gilt also

$\sigma_m : \mathcal{H} \rightarrow \{\text{Preiskampf, Marktteilung}\}$ beziehungsweise $\sigma_m : \mathcal{H} \rightarrow \{P, T\}$.

Da das vorliegende Modell wegen der Unsicherheit der Konkurrenten über ihre Reihenfolge ein Spiel mit nicht perfekter Information darstellt, wird eine Notation benötigt, mit der die subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen der Konkurrenten festgehalten werden können. Ein *System von subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen der Konkurrenten über die eigene Nummer* oder auch kurz eine *Einschätzung* μ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{B} \rightarrow S^n$, wobei S^n für den n -dimensionalen Einheitssimplex steht. Eine Einschätzung formalisiert die Vermutung eines Konkurrenten über seine Position nach den verschiedenen möglichen Beobachtungen. Beispielsweise gibt $\mu_i(PK, MT, PK)$ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Konkurrent in seiner subjektiven Einschätzung Nummer i hat, nachdem er die Spielergebnisse PK , MT und PK beobachtet hat. Selbstverständlich muß $\sum_{i=1}^N \mu_i(b^t) = 1$ für beliebige $b^t \in \mathcal{B}$ gelten.

7.2 Gleichgewichtskonzepte

Im folgenden wird die Analyse auf symmetrische Gleichgewichte in reinen Strategien beschränkt. Hierbei bedeutet symmetrisch, daß die Konkurrenten,

die a priori alle identisch sind, dieselbe Strategie wählen.

Als weitere Einschränkung der betrachteten Gleichgewichte sei angenommen, daß der Monopolist seine Aktionen ausschließlich von der Folge von Beobachtungen und der Nummer des aktuellen Konkurrenten abhängig macht. Diese Annahme scheint zunächst sehr restriktiv, ist es aber nicht: Im Gleichgewicht resultiert die optimale Entscheidung des Monopolisten zwischen Marktteilung und Preiskampf ausschließlich aus der Nummer des aktuellen Konkurrenten und den zu erwartenden Entscheidungen der verbliebenen Konkurrenten. Diese wiederum können nur von der Folge der beobachteten Basisspiele abhängen. Also hängt die gesamte künftige Auszahlung, die der Monopolist aus einer Entscheidung für eine Marktteilung bzw. einem Preiskampf zu erwarten hat, auch nur von der Folge der Beobachtungen und der Nummer des aktuellen Konkurrenten ab. Da der Monopolist im Gleichgewicht seine Auszahlung maximiert, kann er seine Aktion also nur dann von unbeobachteten Basisspielen abhängig machen, wenn die erwartete Auszahlung seiner beiden Aktionsalternativen gleich ist. Dies kann aber ggf. durch eine beliebig kleine Variation von a , der Auszahlung des Monopolisten aus einer Marktteilung, ausgeschlossen werden. Mit anderen Worten bildet die Menge der Parameter, für welche diese Annahme im Gleichgewicht eine wirkliche Beschränkung darstellt, eine Nullmenge. Daher mindert obige Einschränkung die Aussagekraft der nun folgenden Analyse nicht.

Da es sich hier um ein Spiel mit nicht perfekter Information handelt, ist als Lösungskonzept das perfekte Bayesschen Gleichgewicht beziehungsweise das sequentielle Gleichgewicht anzuwenden. Ein perfektes Bayessches Gleichgewicht in diesem Spiel ist ein Tripel $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ mit folgenden Eigenschaften:

- B1 Die Strategie des Monopolisten, σ_m , maximiert seine Auszahlung unter Berücksichtigung der Strategie der Konkurrenten in jeder Situation.
- B2 Die Strategie eines Konkurrenten, σ_k , maximiert dessen erwartete Auszahlung in jeder möglichen Situation, gegeben seine Einschätzung und die Strategien der anderen Spieler.

B3 Die Einschätzungen der Konkurrenten, $\mu(\cdot)$, sind konsistent mit den Strategien des Monopolisten und der Konkurrenten und werden, wo möglich, mit Hilfe der Bayesschen Regel angepaßt.

Im folgenden werden die Begriffe 'Gleichgewicht' und 'perfektes Bayessches Gleichgewicht' synonym verwendet. Ein Bayessches Gleichgewicht $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ heißt ein *sequentielles Gleichgewicht*, (vergleiche KREPS/WILSON (1982b)), wenn zusätzlich zu B1-B3 auch noch Bedingung B4 erfüllt ist.

B4 Wenn das Auftauchen einer Beobachtungsfolge $b^t \in \mathcal{B}$ unter den gegebenen Strategien (σ_m, σ_k) die Wahrscheinlichkeit Null hat, dann ist eine Einschätzung $\mu(b^t)$ für die Konkurrenten genau dann zulässig, wenn eine (hier mit j indizierte) Folge von Strategien und Einschätzungen $(\sigma_m^j, \sigma_k^j, \mu^j)$ für alle Spieler und für $j = 1, 2, 3 \dots$ existiert, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Die Strategien σ_m^j und σ_k^j haben einen vollen Träger³, d.h., in jeder Situation wird jede Aktion mit positiver Wahrscheinlichkeit gewählt.
- Die Strategien σ_m^j und σ_k^j konvergieren punktweise gegen σ_m und σ_k .
- Die Einschätzungen μ^j sind konsistent mit den Strategien (σ_m^j, σ_k^j) . Da diese Strategien einen vollen Träger haben, werden diese Einschätzungen durch die Bayessche Regel eindeutig bestimmt.
- Der Grenzwert der Einschätzungen μ^j ist μ .

Ein sequentielles Gleichgewicht beschränkt also im Gegensatz zum perfekten Bayesschen Gleichgewicht auch die Einschätzungen außerhalb des Gleichgewichtspfades.

³Der Träger einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als die Menge der Ereignisse, die eine Wahrscheinlichkeit größer als Null haben. Bei einem vollen Träger wird also jede Aktion mit positiver Wahrscheinlichkeit durchgeführt.

Ein erstes Bayessches Gleichgewicht ist leicht zu finden; es gilt in der hier beschriebenen Version auch für alle Varianten des Grundmodells: Jeder Konkurrent tritt *immer* ein und der Monopolist entscheidet sich *immer* für eine Marktteilung. Da die Einschätzungen für dieses Gleichgewicht ohne Bedeutung sind, können sie passend gewählt werden und an dieser Stelle wird nicht näher auf sie eingegangen. Offensichtlich ist dieses Gleichgewicht auch ein sequentielles Gleichgewicht; es wird in dieser Arbeit als das *triviale Gleichgewicht* bezeichnet.

Im folgenden wird nun die Frage untersucht, unter welchen Umständen neben dem trivialen Gleichgewicht weitere Gleichgewichte existieren. Mit anderen Worten gilt die folgende Analyse nichttrivialen Gleichgewichten mit der Eigenschaft, daß die Konkurrenten sich auf dem Gleichgewichtspfad gegen einen Markteintritt entscheiden.

Kapitel 8

Spieltheoretische Analyse

8.1 Die Existenz von nichttrivialen Gleichgewichten

In diesem Abschnitt werden für das Grundmodell notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines nichttrivialen Gleichgewichts angegeben. Zunächst müssen aber einige Definitionen und Lemmata erarbeitet werden.

Definition 8.1.1. *Gegeben sei ein Gleichgewicht $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$. Eine Beobachtungssequenz b^t hat die **Blockingeigenschaft** unter den gegebenen Strategien, wenn sich die Konkurrenten nach der Beobachtung von b^t gegen einen Markteintritt entscheiden.*

Weiter wird das folgende Lemma benötigt, das die möglichen Einschätzungen der Konkurrenten nach Beobachtungssequenzen mit der Blockingeigenschaft eingrenzt. Wenn die Konkurrenten nach einer Beobachtung nicht in den Markt eintreten, so können sie keine Einschätzung haben, die eine zu große Wahrscheinlichkeit auf eine niedrige Nummer legt.

Lemma 8.1.2. *Es sei $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ ein nichttriviales Gleichgewicht. Weiterhin habe b^t die Blockingeigenschaft (wobei unerheblich ist, ob b^t überhaupt mit*

positiver Wahrscheinlichkeit auf dem Gleichgewichtspfad auftauchen kann).
Dann gilt

$$i < k \Rightarrow \mu_i(b^t) \leq \mu_k(b^t). \quad (8.1.1)$$

Beweis: Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die Aussage für die leere Beobachtungsfolge $b^0 = \emptyset$ stimmt: Gegeben, daß noch kein Basisspielergebnis beobachtet wurde und daß die leere Beobachtungsfolge die Blockingeigenschaft besitzt, muß der einzelne Konkurrent vermuten, jede Nummer mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen, d.h., $\mu_i(b^0) = \frac{1}{n}$ für alle $i \in N$. In diesem Fall stimmt die Aussage des Lemmas offensichtlich.

Für die Analyse der Einschätzung der Konkurrenten nach einer nichtleeren Beobachtungssequenz werden die folgenden Notationen eingeführt: Wir sagen, daß eine nichtleere Beobachtungsfolge b^t von j Konkurrenten *produziert* wurde, wenn die letzte Beobachtung in b^t von dem Basisspiel mit Konkurrent Nummer j stammt. Weiter sei die Funktion ν_j durch

$$\nu_j(b^t) = \mathcal{P}(b^t \text{ wird von } j \text{ Konkurrenten produziert} \mid b^t \text{ wurde beobachtet})$$

definiert.¹

Da alle Konkurrenten nach der Beobachtung einer Sequenz b^t mit der Blockingeigenschaft nicht in den Markt eintreten, hätte der einzelne Konkurrent, falls er über die Zusatzinformation verfügte, daß b^t von j Konkurrenten produziert wurde, keinen Anhaltspunkt, um zu bestimmen, welche Nummer —größer als j — er haben könnte. Daher muß er in diesem Fall annehmen, daß er jede Nummer größer als j mit derselben Wahrscheinlichkeit besitzt. Unter der Annahme, daß die Beobachtung b^t von j Konkurrenten produziert wurde, stellt sich die Wahrscheinlichkeitseinschätzung des Konkurrenten folgendermaßen dar:

$$\mu_i(b^t \text{ wurde von } j \text{ Konkurrenten produziert}) = \frac{1}{n-j} \quad \forall i > j.$$

¹ $\mathcal{P}(A \mid B)$ bezeichnet in der hier verwendeten Notation die subjektive Wahrscheinlichkeit von Ereignis A , gegeben, daß Ereignis B eingetreten ist.

Daraus folgt

$$\mu_i(b^t) = \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{P}(b^t \text{ wurde von } j \text{ Konkurrenten produziert}) \cdot \frac{1}{n-j} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\nu_j(b^t)}{n-j},$$

woraus sich die Aussage des Lemmas direkt ergibt. $\square$

Mit Hilfe von Lemma 8.1.2 ist es nun möglich, die nun folgende Hauptaussage dieses Teils der Arbeit zu beweisen. Theorem 8.1.3 formuliert die mathematisch notwendigen und hinreichenden Bedingungen an die Parameter des Spiels für die Existenz eines nichttrivialen Gleichgewichts. Für die ökonomische Interpretation wird auf Korollar 8.1.5 verwiesen, das anschliessend hergeleitet wird.

Theorem 8.1.3. *Ein nichttriviales Gleichgewicht existiert genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *Es gilt*

$$p < q, \tag{8.1.2}$$

d. h. Ein Preiskampf wird mit geringerer Wahrscheinlichkeit als eine Marktteilung beobachtet.

- *Es gibt eine Nummer $\tilde{n} \in N$ derart, daß die Ungleichungen*

$$\tilde{n} \geq n - \frac{n}{A} \tag{8.1.3}$$

und

$$\tilde{n} \leq n - \frac{a}{(1-a)(q-p)} \tag{8.1.4}$$

erfüllt sind.

Beweis von Theorem 8.1.3: Zunächst wird die *Notwendigkeit* der im Theorem 8.1.3 angegebenen Bedingungen nachgewiesen:

Es sei $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ ein beliebiges nichttriviales Gleichgewicht. Wir betrachten nun einen Konkurrenten $\tilde{n} \in N$ und eine Beobachtungsfolge $\tilde{b}^t$ mit den folgenden Eigenschaften:

PI Nach einer Beobachtung von $\tilde{b}^t$ bekämpft der Monopolist den Konkurrenten mit der Nummer $\tilde{n}$ (und alle früheren Konkurrenten), und er entscheidet sich für eine Marktteilung bei allen Konkurrenten mit einer Nummer größer als $\tilde{n}$.

PII $\tilde{b}^t$ hat die Blockeigenschaft, d.h., nach der Beobachtung von $\tilde{b}^t$ spielen die Konkurrenten F .

PIII Wenn nach der Sequenz $\tilde{b}^t$ ein beliebiges Basisspielergebnis (Marktteilung oder Preiskampf) beobachtet wird, werden alle verbleibenden Konkurrenten immer eintreten, und der Monopolist entscheidet sich immer für eine Marktteilung.

Da die Existenz einer solchen Sequenz und eines entsprechenden Konkurrenten $\tilde{n}$ nicht unmittelbar einsichtig ist, wird sie in folgendem Lemma formuliert und im Anhang bewiesen.

Lemma 8.1.4. *Für jedes nichttriviale Gleichgewicht existiert ein $\tilde{n}$ und eine Beobachtungssequenz $\tilde{b}^t$ mit den Eigenschaften PI - PIII existieren.*

Die Analyse der Entscheidungssituation der Spieler nach der Beobachtung des $\tilde{b}^t$ mit den Eigenschaften PI bis PIII wird nun die Notwendigkeit der in Theorem 8.1.3 aufgeführten Bedingungen ergeben:

Gemäß Annahme PII entscheiden sich die Konkurrenten nach der Beobachtung von $\tilde{b}^t$ gegen einen Markteintritt. Wie sieht nun die Einschätzung eines Konkurrenten nach dieser Sequenz aus? Er weiß, dass seine Nummer zwischen $t + 1$ und n liegen muß. Wenn seine Nummer größer als $\tilde{n}$ wäre, würde der Monopolist auf einen eventuellen Markteintritt mit einer Marktteilung antworten. In diesem Fall wäre ein Markteintritt die optimale Strategie. Die Entscheidung *gegen* einen Markteintritt ist also genau dann eine optimale Aktion, wenn

$$1 \geq A \cdot \mathcal{P}(\text{Die eigene Nummer ist größer als } \tilde{n} \mid \tilde{b}^t \text{ wurde beobachtet}) \quad (8.1.5)$$

gilt. In Gleichung 8.1.5 steht auf der linken Seite die Auszahlung, die sich aus der Aktion F ergibt, rechts steht das erwartete Ergebnis eines Markteintritts. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Ungleichung (8.1.3) für die Existenz eines eintrittsverhindernden Gleichgewichts unbedingt erfüllt sein muß. Um die Notwendigkeit dieser Ungleichung nachzuweisen, wird der am wenigsten restriktive Fall betrachtet, der die geringsten Beschränkungen auf die Parameter des Spiels legt.

Dies bedeutet, daß sich der Konkurrent die pessimistischste aller möglichen Einschätzungen zu eigen macht. Eine pessimistische Einschätzung bedeutet nämlich, daß der Konkurrent wenig geneigt ist, sich für einen Markteintritt zu entscheiden; die Anforderungen an die Parameter für ein eintrittsverhinderndes Gleichgewicht werden dadurch so gering wie möglich gehalten.

Unter der gegebenen Strategie des Monopolisten ist ein Markteintritt für einen Konkurrenten um so attraktiver, je wahrscheinlicher eine hohe Nummer hat. Je eher also die subjektive Einschätzung des Konkurrenten auf eine hohe Nummer lautet, desto eher wird er sich für einen Markteintritt entscheiden. In ihrer pessimistischsten Einschätzung legen die Konkurrenten daher eine größtmögliche Wahrscheinlichkeit auf niedrige Nummern.

Lemma 8.1.2 gibt für diese schlechtestmögliche Einschätzung eine Beschränkung an: Die subjektive Wahrscheinlichkeit, eine niedrige Nummer zu haben, kann niemals größer sein als diejenige, eine hohe Nummer zu haben. Unter Berücksichtigung dieses Lemmas gestaltet sich die oben beschriebene schlechtestmögliche Einschätzung derart, daß der Konkurrent vermutet, jede Nummer zwischen $t + 1$ und n mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu haben. Unter diesen Bedingungen wird Ungleichung (8.1.5) zu

$$1 \geq A \cdot \frac{n - \tilde{n}}{n - t} \quad (8.1.6)$$

Wegen $t \geq 0$ folgt daraus direkt

$$1 \geq A \cdot \frac{n - \tilde{n}}{n} \quad (8.1.7)$$

bzw.

$$\tilde{n} \geq n - \frac{n}{A} \quad (8.1.8)$$

Damit ist Ungleichung (8.1.3) bewiesen.

Falls die Einschätzung des Konkurrenten günstiger als die hier skizzierte 'schlechtestmögliche Variante' ist, so ist die Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite von (8.1.5) größer und diese Ungleichung stellt noch größere Anforderungen an die Parameter des Spiels. Da also Ungleichung (8.1.8) die am wenigsten restriktive Variante von (8.1.5) beschreibt, muß sie im Gleichgewicht unbedingt erfüllt sein.

Es sei nun der Fall betrachtet, daß der Konkurrent mit der Nummer $\tilde{n}$ (entgegen seiner aktuellen Strategie) nach der Beobachtung von $\tilde{b}^t$ in den Markt eingetreten ist. Der Monopolist muß sich in diesem Fall zwischen einer Marktteilung und einem Preiskampf entscheiden.

Entscheidet er sich für einen Preiskampf, so wird dieser mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ nicht beobachtet, es ergibt sich dann unter den aktuellen Strategien ein erwarteter Nutzen von $1 \cdot (n - \tilde{n})$, da alle folgenden Konkurrenten nicht in den Markt eintreten werden. Mit Wahrscheinlichkeit p wird dieses Ergebnis beobachtet, was wegen PIII dazu führt, daß alle weiteren Konkurrenten eintreten und der Monopolist sich von nun an für eine Marktteilung entscheidet, was eine Auszahlung von $a \cdot (N - \tilde{n})$ ergibt. Insgesamt ergibt sich also aus einem Preiskampf ein erwarteter Nutzen von $(1 - p) \cdot (n - \tilde{n}) + p \cdot a \cdot (n - \tilde{n})$.

Wählt der Monopolist andererseits die Aktion 'Marktteilung', so erhält er eine Auszahlung von a in der laufenden Periode. Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - q$ wird das aktuelle Basisspiel nicht beobachtet und er erhält in zukünftigen Perioden eine Auszahlung von 1. Falls das Ergebnis beobachtet wird, so erhält er eine Auszahlung von a in allen verbleibenden Perioden. Daraus ergibt sich ein erwartetes Ergebnis der Aktion 'Marktteilung' von $a + (1 - q) \cdot (n - \tilde{n}) + q \cdot a \cdot (n - \tilde{n})$. Da der Monopolist sich annahmegemäß für einen Preiskampf entscheidet, muß die Bedingung

$$(1 - p) \cdot (n - \tilde{n}) + p \cdot a \cdot (n - \tilde{n}) \geq a + (1 - q) \cdot (n - \tilde{n}) + q \cdot a \cdot (n - \tilde{n}) \quad (8.1.9)$$

oder auch

$$(q - p) \cdot (1 - a) \cdot (n - \tilde{n}) \geq a \quad (8.1.10)$$

erfüllt sein, damit dies in der beschriebenen Situation eine optimale Aktion ist. Dies kann nur dann der Fall sein, wenn $p < q$ gilt, womit die Notwendigkeit von Bedingung (8.1.2) bewiesen ist. Umformen von (8.1.10) ergibt

$$\tilde{n} \leq n - \frac{a}{(q - p)(1 - a)}, \quad (8.1.11)$$

womit die Notwendigkeit aller im Theorem formulierten Bedingungen bewiesen ist.

Um zu beweisen, daß die Bedingungen (8.1.2), (8.1.3) und (8.1.4) auch *hinreichend* für die Existenz eines nichttrivialen Gleichgewichts sind, sei $\tilde{n}$ die größte Zahl, die diese Gleichungen erfüllt. Es wird behauptet, daß das folgende Tripel $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ ein Gleichgewicht darstellt.

Die Strategie σ_m für den Monopolisten lautet: *Bekämpfe jeden Konkurrenten bis Nummer $\tilde{n}$, wenn nicht mindestens ein beliebiges Basisspielergebnis beobachtet wurde. Ansonsten spiele Marktteilung.*

Die Strategie σ_k für den Konkurrenten lautet: *Entscheide dich gegen einen Markteintritt, wenn noch nichts beobachtet wurde. Falls mindestens ein Basisspielergebnis beobachtet wurde, spiele Markteintritt.*

Weiter sei die Einschätzung der Konkurrenten, μ , derart, daß sie, wenn sie noch nichts beobachten konnten, jeder Nummer die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen. Es gilt also $\mu_i(\emptyset) = \frac{1}{n}$ für alle $i \in N$. Da unter den aktuellen Strategien kein Konkurrent in den Markt eintreten wird, sind damit die Einschätzungen *auf* dem Gleichgewichtspfad vollständig spezifiziert. Die Einschätzungen *abseits* des Gleichgewichtspfades müssen nicht berechnet werden, da die Strategien aller Spieler außerhalb des Gleichgewichtspfades dem trivialen Gleichgewicht entsprechen. Die Optimalität der oben beschriebenen Strategien gilt in diesem Fall für beliebige Einschätzungen.

Um zu verifizieren, daß die so beschriebenen Strategien und Einschätzungen $(\sigma_m, \sigma_k, \mu)$ tatsächlich ein nichttriviales Gleichgewicht darstellen, muß nachgewiesen werden, daß die Einschätzung der Konkurrenten konsistent mit den

gespielten Strategien ist und daß diese Strategien in jeder möglichen Situation gegenseitig beste Antworten unter Berücksichtigung dieser Einschätzung darstellen. Konsistenz ist —wie schon oben erwähnt— abseits des Gleichgewichtspfades trivialerweise erfüllbar. Die einzige Beobachtungssequenz auf dem Gleichgewichtspfad aber ist die leere Sequenz —kein Konkurrent wird in den Markt eintreten. Wenn noch nichts beobachtet wurde und entsprechend den aktuellen Strategien die Konkurrenten sich in dieser Situation gegen einen Markteintritt entscheiden, so ist die oben beschriebene Einschätzung, jede Nummer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zu besitzen, offensichtlich konsistent.

Aus dieser Einschätzung der Konkurrenten ergibt sich, daß die subjektive Wahrscheinlichkeit, eine Nummer größer als $\tilde{n}$ zu haben, $\frac{n-\tilde{n}}{n}$ beträgt. Mit dieser Wahrscheinlichkeit wird ein eventueller Eintritt mit einer Marktteilung beantwortet. Somit ergibt sich aus der Aktion 'Markteintritt' eine erwartete Auszahlung von $A \cdot \frac{n-\tilde{n}}{n}$. Wegen (8.1.3) gilt aber $1 > A \cdot \frac{n-\tilde{n}}{n}$, und somit ist 'kein Markteintritt' für die Konkurrenten in der Tat in dieser Situation die optimale Aktion.

Eine Überprüfung der Strategie des Monopolisten ergibt, daß in Periode $\tilde{n}$ aus einem Preiskampf eine erwartete Auszahlung von $pa(n - \tilde{n}) + (1 - p)(n - \tilde{n})$ resultiert. Von einer Marktteilung hingegen kann er ein Ergebnis von $a + qa(n - \tilde{n}) + (1 - q)(n - \tilde{n})$ erwarten.

Also ist für den Monopolisten ein Preiskampf in Periode $\tilde{n}$ (und damit auch in allen früheren Perioden) eine optimale Strategie genau dann, wenn die Ungleichung

$$pa(N - \tilde{n}) + (1 - p)(N - \tilde{n}) > a + qa(N - \tilde{n}) + (1 - q)(N - \tilde{n}) \quad (8.1.12)$$

erfüllt ist. Diese Ungleichung ist äquivalent zu (8.1.4). Schließlich folgt aus der Tatsache, daß $\tilde{n}$ die *kleinste* Zahl ist, die (8.1.3) und (8.1.4) erfüllt, daß für alle Perioden nach $\tilde{n}$ die Antwort 'Marktteilung' die optimale Aktion für den Monopolisten als Antwort auf einen eventuellen Markteintritt ist.

Also formen die oben beschriebenen Strategien ein perfektes Bayessches

Gleichgewicht und die Ungleichungen (8.1.2), (8.1.3) und (8.1.4) stellen auch hinreichende Bedingungen für die Existenz eines nichttrivialen Gleichgewichts dar.

Damit ist der Beweis von Theorem 8.1.3 abgeschlossen. $\square$

Im folgenden sollen einige Konsequenzen aus Theorem 8.1.3 abgeleitet werden. Zum einen können die dort abgeleiteten Bedingungen in einer einzigen Ungleichung zusammengefaßt werden.

Korollar 8.1.5. *Die Ungleichungen $q > p$ und*

$$n \geq \frac{A \cdot a}{(1-a)(q-p)} + A \quad (8.1.13)$$

beschreiben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen Gleichgewichts.

Beweis: Es sei $\tilde{n}$ die kleinste natürliche Zahl größer als $n - \frac{n}{A}$. Die Bedingungen (8.1.3) und (8.1.4) sind dann erfüllt, wie die folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{A \cdot a}{(1-a)(q-p)} + A \\ \Rightarrow \quad \frac{n}{A} - 1 &\geq \frac{a}{(1-a)(q-p)} \\ \Rightarrow \quad -\frac{n}{A} + 1 &\leq -\frac{a}{(1-a)(q-p)} \\ \Rightarrow \quad n - \frac{n}{A} + 1 &\leq n - \frac{a}{(1-a)(q-p)} \\ \Rightarrow \quad \tilde{n} &\leq n - \frac{a}{(1-a)(q-p)} \end{aligned}$$

$\square$

Damit kann direkt in Abhängigkeit von den Parametern p , q , a und A eine Mindestzahl von Konkurrenten angegeben werden, ab der ein Gleichgewicht mit Eintrittsverhinderung existiert.

Das Gleichgewicht, das im Beweis des Theorems beschrieben wurde, ist (bei entsprechender Wahl von Einschätzungen außerhalb des Gleichgewichtspfad) auch ein sequentielles Gleichgewicht. Da weiterhin notwendige Bedingungen für ein Bayessches Gleichgewicht trivialerweise auch notwendige Bedingungen für ein sequentielles Gleichgewicht darstellen, ergibt sich direkt das zweite Korollar aus Theorem 8.1.3.

Korollar 8.1.6. *Die Ungleichungen (8.1.2), (8.1.3) und (8.1.4) beschreiben notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines nichttrivialen sequentiellen Gleichgewichts.*

Dieses Kapitel endet mit einer kurzen Erläuterung von Theorem 8.1.3 beziehungsweise Korollar 8.1.5. Zunächst einmal sind einige der Grundaussagen nicht weiter überraschend. Aus Ungleichung (8.1.13) ergibt sich, daß die Existenz von nichttrivialen Gleichgewichten durch

- eine große Zahl an Konkurrenten n ,
- ein kleines A , d.h., einen kleinen Anreiz für die Konkurrenten, eine Marktteilung anzustreben,
- ein kleines a , d.h., geringe Kosten eines Preiskampfes und eine hohe Monopolistenrendite bei Nichteintritt der Konkurrenten,
- eine niedrige Beobachtungswahrscheinlichkeit p eines Preiskampfes und
- eine hohe Beobachtungswahrscheinlichkeit q einer Marktteilung

begünstigt wird. Diese Aussagen sind leicht nachvollziehbar. Die etwas interessantere Bedingung $q > p$ läßt sich mit folgender Überlegung begründen:

Für den Monopolisten ist es im eintrittsverwehrenden Gleichgewicht typischerweise günstig, wenn die Konkurrenten möglichst wenig Basisspielergebnisse beobachten können, da sie dann tendentiell auf eine niedrige eigene Nummer schließen und sich eher gegen einen Markteintritt entscheiden. Daher erhält der Monopolist im Falle $q > p$ aus dem schlechter beobachtbaren Basisspielergebnis Preiskampf eine Art 'Nichtinformationsrente', die sich daraus ergibt, daß die verbliebenen Konkurrenten mit einer größeren Wahrscheinlichkeit dieses Basisspiel nicht beobachten und dann nur eine um eine Beobachtung kürzere Sequenz wahrnehmen. In dem hier vorgestellten Modell hofft der Monopolist deshalb, daß ein Preiskampf möglichst nicht beobachtet wird. Im Falle $p > q$ gibt diese Nichtinformationsrente dem Monopolisten

—unabhängig von eventuellen Signalwirkungen— eine unmittelbare Auszahlung eines Preiskampfes, und es ist daher leicht einsichtig, daß durch $q > p$ die Entstehung eines nichttrivialen Gleichgewichts *begünstigt* wird. Das überraschende Ergebnis des Theorems liegt darin, daß diese Rente *zwingend* vorhanden sein muß, damit nichttriviale Gleichgewichte existieren können. Für eine ausführlichere Diskussion dieses Themas sei auf Kapitel 9 verwiesen.

8.2 Weitere Beobachtungen

In diesem Abschnitt werden weitere Effekte analysiert, die in dem hier vorgestellten Modell beobachtet werden können. Zunächst wird die Robustheit von nichttrivialen Gleichgewichten untersucht. Es wird die Frage gestellt, was passiert, wenn Konkurrenten versehentlich in den Markt eintreten. In einem solchen Fall —einer Situation außerhalb des Gleichgewichtspfad— würden die restlichen Konkurrenten ihre Einschätzungen aktualisieren, und es wäre denkbar, daß dann nur für extrem große Spielerzahlen der eintrittsverwehrende Effekt aufrechterhalten werden kann. Daraus würde folgen, daß eintrittsverwehrende Gleichgewichte labil sind; eine sehr kleine Abweichung von den vorgesehenen Strategien kann dann zu wesentlichen Änderungen im Spielverlauf führen, was vom Gesichtspunkt der Gleichgewichtsauswahl aus ein starkes Argument gegen die Realisierung von eintrittsverwehrenden Gleichgewichten wäre. Als Antwort auf diese Frage werden in Teilabschnitt 8.2.1 eintrittsverwehrende Gleichgewichte konstruiert, in welchen sich die Konkurrenten auch nach relativ vielen Preiskämpfen gegen einen Markteintritt entscheiden. In Teilabschnitt 8.2.2 wird die Frage beantwortet, inwiefern sich Preiskämpfe aus rationalem Verhalten der Beteiligten ergeben können, d.h., unter welchen Umständen Preiskämpfe im Gleichgewicht auftreten können. Schließlich wird in Abschnitt 8.3 die Frage beantwortet, inwieweit die Annahme der vollständigen Korrelation der Beobachtung kritisch für die im letzten Kapitel präsentierten Ergebnisse ist: Die dort vorgestellte Variation der Modellannahmen zeigt, daß diese spezifische Beobachtungsstruktur für

die Existenz von nichttrivialen Gleichgewichten nicht essentiell ist.

8.2.1 Robustheit von Gleichgewichten

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus vorgestellt, der es ermöglicht, *stabile* Gleichgewichte zu erzeugen. Darunter werden in diesem Kontext Gleichgewichte verstanden, bei denen die Eintrittsverhinderung auch abseits des Gleichgewichtspfades, nach einem irrtümlichen Eintritt eines oder mehrerer Konkurrenten, möglichst lange aufrechterhalten wird. Die hier vorgestellten Gleichgewichte haben die attraktive Eigenschaft, daß die Strategien der Spieler eine Art Reputationseffekt widerspiegeln: Eintrittsverhinderung findet solange statt, bis der Monopolist einmal 'Schwäche zeigt' und sich für eine Marktteilung entscheidet. Alternativ bricht die Eintrittsverhinderung zusammen, wenn ein Eintritt der Konkurrenten mit anschließendem beobachteten Preiskampf so oft erfolgt ist, daß die verbleibenden Konkurrenten aufgrund der häufigen Beobachtungen auf eine ausreichend hohe eigene Nummer schließen.

Der interessante Parameter in diesen Gleichgewichten ist m , die maximale Anzahl an Preiskämpfen, nach deren Beobachtung noch ein Markteintritt verhindert wird. Die Berechnung dieses Parameters ist aus folgendem Grund recht kompliziert: Da die Preiskämpfe entsprechend den Strategien nur außerhalb des Gleichgewichtspfades stattfinden, greift bei der Berechnung der Einschätzungen der Konkurrenten in diesem Fall die Bedingung B4 aus der Definition eines sequentiellen Gleichgewichts. Eine Möglichkeit zur Berechnung eines m für ein gegebenes Parameterset (A, a, n, p, q) wird hier vorgestellt.

Es wird für den Rest dieses Kapitels vereinfachend angenommen, daß $q = 1$ gilt, daß also eine Marktteilung unbedingt beobachtet wird. Zusammen mit der Strategie der Konkurrenten, die beinhaltet, daß nach der Beobachtung mindestens einer Marktteilung 'Eintritt' gespielt wird, garantiert dies, daß der Monopolist die Folgen der Aktion 'Marktteilung' leicht abschätzen kann.

Diese Annahme erleichtert die folgende Analyse.

Die Strategie des Monopolisten, σ_m , sieht in den hier analysierten Gleichgewichten folgendermaßen aus:

- Wenn eine Marktteilung mindestens einmal beobachtet wurde, spiele Marktteilung T.
- Wenn ein Preiskampf öfter als m Mal beobachtet wurde, spiele T.
- Wenn ein Preiskampf genau m Mal beobachtet wurde, spiele T, wenn der aktuelle Konkurrent eine Nummer größer als $\tilde{n}_u$ hat.
- Wenn ein Preiskampf weniger als m Mal beobachtet wurde, spiele T, wenn der aktuelle Konkurrent eine Nummer größer als $\tilde{n}_a$ hat.
- Wenn keine der oben beschriebenen Bedingungen zutrifft, spiele Preiskampf P.

Die Strategie der Konkurrenten, σ_k , lautet: Spiele Markteintritt M, wenn entweder mindestens $m + 1$ mal ein Preiskampf oder mindestens eine Marktteilung beobachtet wurde. Anderenfalls spiele F.

Entsprechend den oben definierten Strategien ist $\tilde{n}_a$ die höchste Nummer, mit der ein Konkurrent vom Monopolisten noch mit einem Preiskampf überzogen wird unter der Bedingung, daß der nächste Konkurrent sich unabhängig von der Beobachtung des Preiskampfes in der aktuellen Periode gegen einen Markteintritt entscheidet. Damit die oben beschriebene Strategie für den Monopolisten tatsächlich optimal ist, wird $\tilde{n}_a$ als die größte Zahl n_0 gewählt, für die die Ungleichung

$$0 + (n - n_0) \cdot 1 \geq a + (n - n_0) \cdot a \quad (8.2.14)$$

bzw.

$$(1 - a) \cdot (n - n_0) \geq a \quad (8.2.15)$$

erfüllt ist. In Ungleichung (8.2.14) steht auf der linken Seite die Auszahlung, die der Monopolist aus einem Preiskampf zu erwarten hat; auf der rechten Seite steht die Auszahlung, die aus einer Marktteilung resultiert.

Analog ist $\tilde{n}_u$ die höchste Nummer n_0 , mit der ein Konkurrent noch mit einem Preiskampf überzogen wird unter der Bedingung, daß alle weiteren Konkurrenten sich nach der Beobachtung einer Marktteilung oder auch eines weiteren Preiskampfes für einen Markteintritt entscheiden.

Also ist $\tilde{n}_u$ im Gleichgewicht die größte natürliche Zahl n_0 , die die Ungleichung

$$0 + p(n - n_0) \cdot 1 + (1 - p)(n - n_0) \cdot a \geq a + (n - n_0) \cdot a \quad (8.2.16)$$

bzw.

$$p(1 - a)(n - n_0) \geq a \quad (8.2.17)$$

erfüllt. Offensichtlich gilt unter diesen Umständen $\tilde{n}_u < \tilde{n}_a$.

Als Ergebnis der Definition von $\tilde{n}_u$ und $\tilde{n}_a$ ist die Strategie des Monopolisten optimal, gegeben die Strategien der Konkurrenten. Die Hauptaufgabe bei der Berechnung der hier erarbeiteten Gleichgewichte liegt nun darin, die Einschätzung der Konkurrenten nach der Beobachtung von mindestens einem Preiskampf zu bestimmen. Anhand dieser Einschätzungen kann dann die Optimalität der Strategie der Konkurrenten überprüft werden.

Da die Konkurrenten sich im Gleichgewicht gegen einen Markteintritt entscheiden, können Preiskämpfe nur außerhalb des Gleichgewichtspfades auftauchen. Entsprechend der Bedingung B4 müssen wir zur Berechnung der Einschätzungen außerhalb des Gleichgewichtspfades eine Sequenz von Strategien mit vollem Träger betrachten —sozusagen Agenten, denen bei der Ausführung ihrer Strategie "mit zitternder Hand" Fehler unterlaufen—, die gegen die Gleichgewichtsstrategien konvergieren. Besitzen die dazu konsistenten Einschätzungen einen Grenzwert, so stellt dieser eine zulässige Einschätzung für das hier untersuchte Gleichgewicht dar. Die Ermittlung einer zulässigen Einschätzung ist das Ziel der nun folgenden Berechnungen.

Zunächst sei festgehalten, daß ein Preiskampf unter den oben beschriebenen Strategien grundsätzlich auf drei verschiedene Arten entstehen kann:

- Fall 1: Ein Konkurrent tritt entgegen seiner Strategie in den Markt ein, und der Monopolist bekämpft ihn gemäß seiner Strategie.
- Fall 2: Ein Konkurrent tritt gemäß seiner Strategie in den Markt ein, und der Monopolist entscheidet sich entgegen seiner Strategie für einen Preiskampf.
- Fall 3: Ein Konkurrent tritt entgegen seiner Strategie in den Markt ein, und der Monopolist, der eigentlich in dieser Situation einer Marktteilung zustimmen müßte, entscheidet sich entgegen seiner Strategie für einen Preiskampf.

Fall 2 ist für die folgende Analyse uninteressant, da in dieser Situation unter den oben angegebenen Strategien sämtliche weiteren Konkurrenten unabhängig von der Beobachtung des aktuellen Basisspiels ebenfalls in den Markt eintreten werden. Somit folgen von diesem Zeitpunkt an alle Beteiligten den Strategien des trivialen Gleichgewichts. Hierfür ist eine Spezifikation der Einschätzungen überflüssig.

Auch Fall 3 muß bei der nun folgenden Berechnung nicht berücksichtigt werden. Um dies einzusehen, versetzen wir uns in die Lage eines Konkurrenten, der soeben einen Preiskampf beobachtet hat, und vollziehen seine Überlegungen nach. Angenommen, es liegt nicht Fall 2 vor, es wurde aber ein Preiskampf beobachtet. Es bezeichne b_1 bzw. b_3 die Wahrscheinlichkeit, daß Fall 1 bzw. Fall 3 eintritt ist. Zu berechnen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß Fall 1 eingetreten ist unter der Bedingung, daß überhaupt ein Preiskampf beobachtet wurde. Es sollen also die Terme

$$p_1 = (\text{Fall 1 ist eingetreten} \mid \text{Fall 1 oder Fall 3 ist eingetreten}) = \frac{b_1}{b_1 + b_3} \quad (8.2.18)$$

und

$$p_3 = (\text{Fall 3 ist eingetreten} \mid \text{Fall 1 oder Fall 3 ist eingetreten}) = \frac{b_3}{b_1 + b_3} \quad (8.2.19)$$

berechnet werden.

Damit Fall 3 eintritt, müssen zwei Agenten in Abweichung von ihrer Strategie handeln, nämlich der eintretende Konkurrent und der einen Preiskampf initiiierende Monopolist. Wenn die Wahrscheinlichkeit für 'fehlerhaftes Verhalten' der Agenten ε beträgt, so bedeutet dies, daß sich die Wahrscheinlichkeit für Fall 3 aus der Berechnung eines Polynoms in ε ergibt, in dem alle Summanden mindestens den Grad 2 haben, d.h., $b_3 = a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^2)$ für geeignete a_i . Damit Fall 1 eintritt, muß nur einer der beteiligten Agenten gegen seine Strategie handeln; wo bei der Berechnung von b_3 der Term ε^2 auftaucht, ergibt sich hier $\varepsilon \cdot (1 - \varepsilon)$. Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit von b_1 ergibt sich daher ein Polynom in ε , in dem mindestens ein Summand den Grad 1 hat, d.h., $b_1 = c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + c_3\varepsilon^3 + o(\varepsilon^2)$ für geeignete c_i . Hieraus sowie aus der Definition der Terme p_1 und p_3 folgt sofort $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_1 = 1$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_3 = 0$. Der Fall 3 kann also bei den nun folgenden Berechnungen genau wie Fall 2 vernachlässigt werden.

Damit ist für die nun folgende Berechnung der subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzung des Konkurrenten im sequentiellen Gleichgewicht nur der erste Fall relevant, in dem $l \leq m$ Preiskämpfe beobachtet wurden und diese dadurch zustandegekommen sind, daß Konkurrenten mit einer Nummer kleiner oder gleich n_u versehentlich in den Markt eingetreten sind und der Monopolist dies, entsprechend seiner Strategie, mit einem Preiskampf beantwortet hat.

Von nun an werden die Abkürzungen A_j für das Ereignis 'Der Konkurrent hat Nummer j ' und B_l für das Ereignis ' l Preiskämpfe wurden beobachtet' verwendet. Es soll der Term $\mathcal{P}(A_j|B_l)$ berechnet werden, nämlich die subjektive Wahrscheinlichkeit, daß ein Konkurrent die Nummer j hat unter

der Bedingung, daß bisher genau l Preiskämpfe beobachtet wurden.² Sind die $\mathcal{P}(A_j|B_l)$ einmal für alle l und j bekannt, so kann die Optimalität der Strategie der Konkurrenten überprüft und der Parameter m kann berechnet werden.

Entsprechend der Definition eines sequentiellen Gleichgewichts sei eine gegen Null konvergierende Folge ε_i und eine dazu korrespondierende Folge von Strategienpaaren (σ_m^i, σ_k^i) betrachtet. Diese Strategienpaare seien derart, daß der Monopolist unter σ_m^i in jeder Situation mit Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon_i$ dieselbe Aktion wählt wie unter σ_m und mit Wahrscheinlichkeit ε_i die andere Handlungsalternative wählt. Analog agieren die Konkurrenten unter σ_k^i in jeder Situation mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon_i$ identisch und wählen mit Wahrscheinlichkeit ε_i die entgegengesetzte Aktion wie unter σ_k . Offenbar haben die Strategienpaare (σ_m^i, σ_k^i) einen vollen Träger und konvergieren punktweise gegen (σ_m, σ_k) .

Die in den folgenden Rechnungen auftauchenden Terme sind im wesentlichen gebrochen rationale Terme mit Polynomen in ε_i , der Fehlerwahrscheinlichkeit für das i -te Strategienpaar. Für solche Terme folgt aus den Grenzwertgesetzen und der l'Hospitalischen Regel direkt, daß der Grenzwert für $\varepsilon_i \rightarrow 0$ nur von dem niedrigstgradigen Term in diesen Polynomen abhängt. Das heißt, daß in den folgenden Gleichungen durch das Weglassen von Termen mit höheren Exponenten der Grenzwert der Einschätzungen nicht verändert wird. In der Notation wird dieses Weglassen (was die entsprechenden Rechnungen sehr vereinfacht) durch das Zeichen $\approx$ angedeutet.

Die Einschätzungen der Konkurrenten können nun ermittelt werden. Hierfür wird zu einem gegebenem ε_i und dem entsprechenden Strategienpaar (σ_m^i, σ_k^i) der Ausdruck $\mathcal{P}_i(A_j|B_l)$ berechnet³. Der Grenzwert von $\mathcal{P}_i(A_j|B_l)$ für $\varepsilon_i \rightarrow 0$, so er denn existiert, gibt eine im sequentiellen Gleichgewicht zulässige Einschätzung $\mathcal{P}(A_j|B_l)$ für die Konkurrenten außerhalb des Gleichge-

²Da die Einschätzungen aller Konkurrenten gleich sind, ist es nicht nötig, daß $\mathcal{P}$ mit einem Index für die Identität des Konkurrenten zu versehen.

³ $\mathcal{P}_i$ bezeichnet die Einschätzung der Konkurrenten unter dem Strategienpaar (σ_m^i, σ_k^i) .

wichtspfad an. Bei der Berechnung von $\mathcal{P}_i(A_j|B_l)$ muß natürlich die aktuelle Strategie des Monopolisten berücksichtigt werden; diese lautet (s.o.), in Abhängigkeit von der Zahl der bisher beobachteten Eintritte, entweder *”bekämpfe die Konkurrenten bis einschließlich Nummer $\tilde{n}_u$ ”* oder *”bekämpfe die Konkurrenten bis einschließlich Nummer $\tilde{n}_a$ ”*.

Für die folgenden Rechnungen wird der Fall betrachtet, daß die Strategie des Monopolisten einen Preiskampf bis Nummer $\tilde{n}_u$ vorsieht. Die Berechnung für den Fall, daß der Monopolist alle Konkurrenten bis einschließlich Nummer $\tilde{n}_a$ bekämpft, verläuft völlig analog und wird deshalb hier nicht im Detail beschrieben.

Offensichtlich gilt für $j \leq l$ die Identität $\mathcal{P}_i(A_j|B_l) = 0$. Für $j > l$ ergibt sich nach Anwendung der Bayesschen Regel

$$\mathcal{P}_i(A_j|B_l) = \frac{\mathcal{P}_i(A_j \text{ und } B_l)}{\mathcal{P}_i(B_l)} \quad (8.2.20)$$

Weiterhin gelten

$$\mathcal{P}_i(A_j \text{ und } B_l) = \mathcal{P}_i(A_j) \cdot \mathcal{P}_i(B_l|A_j) \quad (8.2.21)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(B_l|A_j) &= \binom{j-1}{l} ((1-\varepsilon_i)^l \varepsilon_i^l) p^l (1-\varepsilon_i)^{j-1-l} \\ &+ \sum_{k=l+1}^{j-1} \binom{j-1}{k} ((1-\varepsilon_i)^k \varepsilon_i^k) p^l (1-p)^{k-l} \cdot (1-\varepsilon_i)^{j-1-k} \end{aligned} \quad (8.2.22)$$

für $j > l$ und $j \leq n_u + 1$. Der erste Term auf der rechten Seite von (8.2.22) gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß es genau l Preiskämpfe gegeben hat. Der erste Faktor in diesem Term entspricht der Notwendigkeit, daß der Monopolist l mal *nicht* versehentlich falsch agiert (also tatsächlich ’Preiskampf’ spielt) und daß l Konkurrenten entgegen ihrer Gleichgewichtsstrategie in den Markt eingetreten sind. Der zweite Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß die restlichen Konkurrenten sich gegen einen Markteintritt entschieden haben.

In diesem Fall ist die Aktion des Monopolisten irrelevant und taucht in der Berechnung nicht auf. Der zweite Summand in Gleichung (8.2.22) entspricht dem Fall, daß es mehr als l Preiskämpfe gegeben hat, von denen aber nur l beobachtet wurden. Dieser Summand ist ein Polynom, in dem die ε_i jeweils in einer höheren Potenz als l auftauchen. Dieses Polynom kann daher ignoriert werden, ohne daß sich der Grenzwert für $\varepsilon_i \rightarrow 0$ verändert. Mit dieser Änderung ergibt sich

$$\mathcal{P}_i(B_l|A_j) \approx \binom{j-1}{l} ((1 - \varepsilon_i)^l \varepsilon_i^l) p^l (1 - \varepsilon_i)^{j-1-l}. \quad (8.2.23)$$

Weiterhin gilt $\mathcal{P}_i(B_l|A_j) = 0$ für $j \leq l$ und, entsprechend dem oben Erwähnten, $\mathcal{P}_i(B_l|A_j) \approx \mathcal{P}_i(B_l|A_{n_u+1})$ für $j > n_u + 1$.

Schließlich gilt

$$\mathcal{P}_i(B_l) = \sum_{j=l+1}^N \mathcal{P}_i(B_l|A_j) \mathcal{P}_i(A_j) \quad (8.2.24)$$

wobei $\mathcal{P}_i(A_j)$ trivialerweise gleich $\frac{1}{n}$ ist. Somit folgt

$$\mathcal{P}_i(B_l) = \frac{1}{n} \sum_{j=l+1}^n \mathcal{P}_i(B_l|A_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=l+1}^{n_u+1} \mathcal{P}_i(B_l|A_j) + \frac{1}{n} \sum_{j=n_u+2}^n \mathcal{P}_i(B_l|A_{n_u+1}) \quad (8.2.25)$$

Durch Einsetzen von (8.2.21), (8.2.23) und (8.2.25) in (8.2.20) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(A_j|B_l) \approx & \quad (8.2.26) \\ & \frac{\frac{1}{n} \binom{j-1}{l} ((1 - \varepsilon_i)^l \varepsilon_i^l) p^l (1 - \varepsilon_i)^{j-1-l}}{\frac{1}{n} \sum_{j=l+1}^{n_u+1} \binom{j-1}{l} ((1 - \varepsilon_i)^l \varepsilon_i^l) (1 - \varepsilon_i)^{j-1-l} p^l + \frac{1}{n} \sum_{j=n_u+2}^n \binom{n_u}{l} ((1 - \varepsilon_i)^l \varepsilon_i^l) (1 - \varepsilon_i)^{n_u-l} p^l} \end{aligned}$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $\varepsilon_i \rightarrow 0$ existiert. Es gilt

$$\mathcal{P}(A_j|B_l) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \mathcal{P}_i(A_j|B_l) = \frac{\binom{j-1}{l}}{\sum_{j=l+1}^{n_u+1} \binom{j-1}{l} + (n - n_u - 1) \binom{n_u}{l}} \quad (8.2.27)$$

Für $l = 0$ ergibt sich $\mathcal{P}(A_j|B_0) = \frac{1}{n}$ was mit den früher hergeleiteten Resultaten konsistent ist.

Sind die $\mathcal{P}(A_j|B_l)$ für alle j und l bekannt, so ist die Berechnung des maximalen m kein Problem: Für jeden Konkurrenten kann zu einer gegebenen Anzahl von beobachteten Preiskämpfen n_0 die subjektive Wahrscheinlichkeit berechnet werden, daß seine Nummer klein genug ist und daß somit ein eventueller Eintritt mit einer Marktteilung beantwortet wird. Anhand der hieraus entstehenden Einschätzung kann dann überprüft werden, ob die am Anfang dieses Abschnitts beschriebenen Strategien tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht darstellen und somit, ob das betrachtete n_0 als 'Preiskampfanzahl' zulässig ist. Da diese Überprüfung für jedes n_0 leistbar ist, kann auf diese Weise die größtmögliche Anzahl der Preiskämpfe im Gleichgewicht, m , ermittelt werden.

Zusammenfassend ergibt sich der folgende Algorithmus zur Konstruktion eines sequentiellen Gleichgewichts mit robuster Eintrittsverhinderung. Es seien die Parameter A, a, q, p und n gegeben.

1. Setze $l = -1$.
2. Berechne mit Hilfe von Gleichung (8.2.27) die Einschätzungen der Konkurrenten nach der Beobachtung von $l + 1$ Preiskämpfen.
3. Überprüfe, ob die Aktion 'Markteintritt' die beste Aktion der Konkurrenten ist unter diesen Einschätzungen und unter der Annahme, daß die Strategie des Monopolisten *Kämpfe*, wenn die Nummer des Konkurrenten größer als $\tilde{n}_u$ ist. Falls ja, erhöhe l um eins und gehe zu Schritt 2. Anderenfalls setze $m = l$.

Beispielsweise ergibt sich für die Parameterwerte $A=1,5$, $a=p=0,6$ und $q=1$ die folgende Tabelle:

n = Anzahl der Konkurrenten	m =max. Anzahl von Kämpfen
6	0
9	1
20	4
30	6
40	9
50	12
60	15
70	18
80	20
100	26

Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Konkurrenten und der maximalen Anzahl der beobachteten Preiskämpfe entwickelt sich offenbar annähernd proportional mit dem Faktor $1/4$. Damit ist gezeigt, daß es eintrittsverhindernde Gleichgewichte gibt, die gegen kleinere Fehler der Spieler robust sind.

8.2.2 Preiskämpfe im Gleichgewicht

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, inwiefern auch das Auftreten von Preiskämpfen in dem hier vorgestellten Modell im Gleichgewicht möglich ist. Intuitiv liegt die Vermutung nahe, daß Preiskämpfe nicht aus rationalem Verhalten aller Beteiligten erklärt werden können: Wenn ein Konkurrent sich im Gleichgewicht zum Eintritt entschließt, so tut er dies, weil seine Einschätzung aufgrund der bisher beobachteten Spielergebnisse dahingehend lautet, daß er mit hoher Wahrscheinlichkeit eine hohe Nummer hat und daher in seiner subjektiven Einschätzung eine gute Chance auf eine Marktteilung sieht. Warum sollte der Monopolist in einer solchen Situation die Kosten eines Preiskampfes auf sich nehmen? Wird der Kampf nicht beobachtet, so hat sich die Situation für den Monopolisten nicht geändert. Auch der nächste Konkurrent —der aus Symmetriegründen dieselbe Strategie verfolgt— wird sich für einen Markteintritt entscheiden, und es wurde nichts gewonnen. Wird andererseits der Preiskampf von den verbliebenen Konkurrenten beobachtet,

so werden diese bei der Einschätzung ihrer Position wegen der längeren Beobachtungssequenz eher auf eine höhere Nummer schließen, was sie erst recht 'Markteintritt' wählen läßt.

Diese Intuition ist nicht immer korrekt. Preiskämpfe können jenseits des Gleichgewichtspfades erklärt werden als *Signale* des Monopolisten an die verbliebenen Konkurrenten, daß diese ihre Einschätzung aktualisieren müssen. Dies ist dann möglich, wenn der letzte Preiskampf —gemessen an den Vermutungen der Konkurrenten— außergewöhnlich früh aufgetreten ist. In diesem Fall führt die aufgrund des Signals 'Preiskampf' revidierte Einschätzung dazu, daß die Konkurrenten höhere Wahrscheinlichkeit auf niedrigere Nummern legen und sich daher zu einem Nichteintritt entschließen. Das folgende Beispiel illustriert diesen Fall.

Beispiel 8.2.1. *Für $n = 4$ Konkurrenten seien die folgenden Strategien und Einschätzungen betrachtet.*

Die Strategie für den Monopolisten lautet: Wenn noch kein Basisspielergebnis beobachtet wurde, bekämpfe die Konkurrenten bis einschließlich Nummer drei. Nach der Beobachtung eines Preiskampfes, spiele P gegen Konkurrent Nummer zwei und spiele T bei allen Konkurrenten mit einer größeren Nummer. Nach der Beobachtung von zwei Preiskämpfen bekämpfe Konkurrent Nummer drei. Nach der Beobachtung von mindestens einer Marktteilung spiele immer T . In Periode vier spiele immer T .

Die Strategie für den Konkurrenten lautet: Wenn es keine Beobachtung gibt oder wenn genau zwei Preiskämpfe beobachtet wurden, spiele F . Anderenfalls spiele M .

Die dazugehörigen Einschätzungen der Konkurrenten lauten:

- $\mu_i(b^0) = \frac{1}{4}$ für $i = 1 \dots 4$. Wenn die Konkurrenten noch nichts beobachtet haben, so nehmen sie an, jede Nummer mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen.
- $\mu_3(PK, PK) = \mu_4(PK, PK) = \frac{1}{2}$. Ein zweiter Preiskampf kann unter den oben skizzierten Strategien nur in Periode 2 aufgetreten sein. Wur-

den also zwei Preiskämpfe beobachtet, so beträgt die subjektive Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$, daß der Konkurrent Nummer 3 beziehungsweise Nummer 4 hat.

- $\mu_2(PK) = \frac{1}{6-2p}$, $\mu_3(PK) = \frac{2-p}{6-2p}$ und $\mu_4(PK) = \frac{3-p}{6-2p}$.

Diese Strategien und Einschätzungen bilden beispielsweise für die Parameterwerte $A = 1.5$, $a = 0.35$, $q = 1$ und $p = 0.4$ ein sequentielles Gleichgewicht.

Der Nachweis, daß diese Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht formen, ist im Anhang zu finden.

Beispiel 8.2.1 illustriert den oben erwähnten Punkt: Nach der Beobachtung eines einzelnen Preiskampfes adoptieren die Konkurrenten eine recht optimistische Einschätzung: Sie vermuten, daß dieser Kampf mit großer Wahrscheinlichkeit in einer späten Periode stattfand und schließen daraus, daß sie mit großer Wahrscheinlichkeit die Nummer 4 haben. Daher entscheiden sie sich für einen Markteintritt. Sollte der Preiskampf aber tatsächlich in der ersten Periode zustandegekommen sein, so signalisiert der Monopolist dies durch einen Preiskampf in Periode 2. Wird dieses Signal beobachtet, so revidieren die verbliebenen Konkurrenten ihre Einschätzung: Sie wissen nun, daß die ersten beiden Preiskämpfe in den ersten beiden Perioden zustandegekommen sein müssen und vermuten nun, die Nummern drei und vier mit derselben Wahrscheinlichkeit zu haben. Daher entscheiden sie sich gegen einen Markteintritt, wodurch die Kosten des Signals aus Sicht des Monopolisten ex post gerechtfertigt werden.

Falls p niedrig genug und n ausreichend groß ist, so können Preiskämpfe selbst auf dem Gleichgewichtspfad beobachtet werden, wie das folgende Beispiel demonstriert.

Beispiel 8.2.2. Für $n = 100$ Konkurrenten seien die folgenden Strategien und Einschätzungen betrachtet.

Die Strategie für den Monopolisten lautet:

Bekämpfe den ersten Konkurrenten. Wenn dieser Preiskampf nicht beobachtet wurde, stimme bei allen weiteren Konkurrenten einer Marktteilung zu.

Wenn genau ein Preiskampf beobachtet wurde, bekämpfe alle Konkurrenten bis einschließlich dem neunundneunzigsten und stimme beim hundertsten Konkurrenten einer Marktteilung zu. Wenn mindestens zwei Preiskämpfe oder mindestens eine Marktteilung beobachtet wurden, dann spiele immer Marktteilung.

Für die Konkurrenten lautet die Strategie: Spiele F, wenn genau ein Preiskampf beobachtet wurde. Anderenfalls spiele M.

Die Einschätzungen der Konkurrenten nach der leeren Beobachtung lauten $\mu_1(b^0) = \frac{100}{199}$ und $\mu_2(b^0) = \frac{99}{199}$. Weiter vermuten die Konkurrenten nach der Beobachtung von genau einem Preiskampf, jede Nummer zwischen zwei und n mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen, d.h., $\mu_i(PK) = \frac{1}{n-1}$ für alle $i = 2 \dots n$.

Diese Strategien und Einschätzungen bilden beispielsweise für die Parameterwerte $a = \frac{99}{199}$, $A = 3$, $q = 1$ und $p = \frac{1}{100}$ ein sequentielles Gleichgewicht.

Der Nachweis, daß diese Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht bilden, ist im Anhang zu finden.

In diesem Beispiel kommt es in der ersten Periode zu einem Preiskampf. Dieser Preiskampf wirkt als Reputationssignal: Wird er beobachtet, so tritt kein weiterer Konkurrent ein. Anderenfalls folgen alle Akteure ab Periode 2 dem trivialen Gleichgewichtspfad.

8.3 Eintrittsverhinderung unter einer unkorrelierten Beobachtungsstruktur

In diesem Abschnitt wird eine Variation des Grundmodells mit stochastisch unkorrelierten Beobachtungen der Konkurrenten untersucht. Wie bisher sei angenommen, daß ein Preiskampf mit der Wahrscheinlichkeit q und eine Marktteilung mit Wahrscheinlichkeit p beobachtet wird. Im Gegensatz zu dem im letzten Kapitel vorgestellten Modell beobachten aber nicht mehr alle

Konkurrenten dasselbe. Statt dessen wird für jeden Konkurrenten die von ihm beobachtete Sequenz individuell bestimmt. Unter dieser Beobachtungsstruktur wird das Modell sehr komplex, und eine systematische Analyse wie in Abschnitt 8.1 ist nicht möglich. Es sei daher in diesem Abschnitt bei der Angabe eines Gleichgewichts mit Eintrittsverhinderung belassen, um nachzuweisen, daß die Existenz von nichttrivialen Gleichgewichten auch unter diesen Annahmen möglich ist.

An dieser Stelle sei angemerkt, daß das triviale Gleichgewicht weiterhin existiert. Ein Markteintritt aller Konkurrenten, jeweils mit einer Marktteilung beantwortet, stellt immer noch ein sequentielles Gleichgewicht dar.

Während sich unter den oben skizzierten Annahmen die Strategiemenge der Konkurrenten nicht verändert, so muß die Strategiemenge des Monopolisten an die Veränderung des Modells angepaßt werden. Da es so etwas wie eine 'von allen beobachtete Sequenz' nicht mehr gibt, kann der Monopolist seine Aktionen nicht mehr auf die beobachteten Basisspielergebnisse konditionieren. Eine Strategie des Monopolisten ist nun eine Abbildung aller möglichen Basisspielergebnissequenzen in die Menge seiner möglichen Aktionen. Unter Verwendung der Definition $\mathcal{G}_i = \{MT, PK, KE\}^i$ gilt nun $\sigma_m : \bigcup_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{G}_i \rightarrow \{\text{Preiskampf}, \text{Marktteilung}\}$.

Das nun folgende Beispiel zeigt, daß auch unter diesen Bedingungen ein eintrittsverwehrendes Gleichgewicht existieren kann.

Beispiel 8.3.1. *Die Zahl der Konkurrenten sei $n = 3$. Weiter sei die Strategie des Monopolisten wie folgt beschrieben: In der ersten Periode spiele 'P'. In der zweiten Periode spiele 'P' genau dann, wenn es in der ersten Periode keine Marktteilung gegeben hat. In Periode drei spiele 'M'. Die Konkurrenten treten genau dann in den Markt ein, wenn sie mindestens zwei Preiskämpfe oder mindestens eine Marktteilung beobachtet haben. Die Einschätzungen der Konkurrenten werden durch die Gleichungen $\mu_1(b^0) = \mu_2(b^0) = \mu_3(b^0) = \frac{1}{3}$, $\mu_2(PK) = \frac{1}{3}$ und $\mu_3(PK) = \frac{2}{3}$ beschrieben. Diese Strategien bilden beispielsweise für die Parameterwerte $p = \frac{4}{10}$, $q = \frac{6}{10}$, $a = \frac{3}{10}$ und $A = \frac{12}{10}$ ein Gleichgewicht.*

Der Beweis, daß diese Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht konstituieren, ist im Anhang zu finden.

Interessant ist für die oben beschriebenen Strategien, daß die Ungleichung $p < q$ (zu einem ' $\leq$ ' abgeschwächt) weiterhin eine notwendige Restriktion an die Parameter für die Existenz eines eintrittsverwehrenden Gleichgewichts darstellt. Dies ergibt sich aus den im Anhang zu findenden Ungleichungen (B.1.11) und (B.1.12). Aus (B.1.11) folgt

$$a \leq \frac{1 - p^2 - (1 - q)}{q + 1 - p^2} =: d. \quad (8.3.28)$$

Andererseits folgt aus (B.1.12) die Ungleichung

$$a \geq \frac{(1 - q) - (1 - q)^2}{1 + 1 - (1 - q)^2 - q} =: c. \quad (8.3.29)$$

Also muß a im Intervall $[c, d]$ liegen, damit das hier beschriebene Gleichgewicht existieren kann. Aus der Ungleichung $p > q$ folgt nun $d - c = \frac{q^2 - p^2}{(1 - p^2 + q)(1 + q - q^2)} < 0$, und damit können nicht beide oben aufgeführten Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sein; es gibt dann keine Parameterwerte, für die die obigen Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein Gleichgewicht bilden.

Kapitel 9

Diskussion und Zusammenfassung

Dieser Teil der Arbeit schließt mit einer Diskussion der zugrundegelegten Annahmen, einer Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse sowie einem Vergleich mit anderen Lösungsansätzen zum Ladenkettenparadoxons, insbesondere den Aufsätzen von KREPS/WILSON(1982a) und MILGROM/ROBERTS (1982) sowie der Arbeit von MASSO (1996). Die Arbeit von Masso ist relativ neu und wird deshalb zunächst kurz zusammengefaßt.

9.1 Der Aufsatz von Masso

Ebenso wie in dem hier vorgestellten Modell nimmt Masso an, daß die Konkurrenten keine Information über die Reihenfolge haben, in der sie über ihren Markteintritt entscheiden. Weiter wird angenommen, daß die Konkurrenten keine vollständige Information über die Geschichte des Spiels erhalten. Die Beobachtungsstruktur sieht in den von Masso behandelten Beispielen so aus, daß die Konkurrenten zum Zeitpunkt ihrer Entscheidung über den Markteintritt eine der drei folgenden Informationen erhalten:

- Kein Konkurrent ist in den Markt eingetreten.

- Bisher wurden alle Konkurrenten, die sich zu einem Markteintritt entschlossen haben, mit einem Preiskampf überzogen.
- Es kam in der Vergangenheit schon mindestens einmal zu einer Marktteilung.

Unter dieser Beobachtungsstruktur zeigt Masso, daß eintrittsverhindernde Gleichgewichte im Grundmodell und unter den folgenden Variationen existieren können:

- Unsicherheit aller Spieler über die Anzahl der Konkurrenten.
- Der Monopolist hat nicht die Möglichkeit, Konkurrenten wahrzunehmen, die sich gegen einen Markteintritt entschieden haben.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, aufgrund derer die Reihenfolge der Agenten bestimmt wird, ist nicht symmetrisch. Agenten unterscheiden sich beispielsweise in ihrer Einschätzung zu Beginn des Spiels, wer die höchste Nummer hat.

Schließlich weist Masso nach, daß es kein eintrittsverhinderndes Gleichgewicht geben kann, wenn alle Spieler die Ergebnisse Marktteilung und Preiskampf uneingeschränkt beobachten können. Hier liegt ein Berührungspunkt zu der vorliegenden Arbeit vor, denn dieses Ergebnis ergibt sich auch aus Theorem 8.1.3: Für $p = q = 1$ kann es kein eintrittsverhinderndes Gleichgewicht geben.

9.2 Zusammenfassung und Vergleich mit anderen Arbeiten

Das zentrale Ergebnis, das diese Arbeit mit dem Aufsatz von Masso teilt, liegt darin, daß das Ladenkettenparadoxon mit Hilfe der Annahme unvollständiger Information über die Reihenfolge der Konkurrenten aufgelöst werden kann. Wenn sich die potentiellen Marktteilnehmer nicht sicher sind, in

welcher Reihenfolge sie über ihren Markteintritt zu entscheiden haben, läßt sich die Technik der Backward Induction nicht anwenden. Dieser Effekt läßt sich für vollständig korrelierte ebenso wie für stochastisch unabhängige Beobachtungsfunktionen nachweisen und ist somit nicht von einer spezifischen Beobachtungsstruktur abhängig. Es ergeben sich direkt die intuitiv gut einsichtigen Ergebnisse, daß eine größere Zahl von potentiellen Konkurrenten N (und damit die bessere Chance, einen Verlust in einer gegebenen Periode durch spätere Eintrittsverwehruug zu amortisieren), geringere Kosten eines Preiskampfes (größeres a) und ein geringerer Anreiz A des Markteintritts jeweils positive Auswirkung auf die Existenz eintrittsverwehrender Gleichgewichte haben.

Weiterhin ist der Effekt der Eintrittsverhinderung robust gegenüber 'versehentlich' eintretenden Konkurrenten. Das bedeutet, daß der eintrittsverhindernde Effekt nicht notwendigerweise durch eine kleine Abweichung von der Gleichgewichtsstrategie zerstört werden kann. Schließlich ist das hier vorgestellte Modell in der Lage, Preiskämpfe als rationales Verhalten beider Parteien auf und abseits des Gleichgewichtspfadcs zu erklären. Sie können auftreten, wenn die Konkurrenten sich verschätzen und eine zu hohe Wahrscheinlichkeit auf hohe Nummern legen. In diesem Fall wird ein Preiskampf als ein Signal des Monopolisten an die Konkurrenten verstanden, aufgrund dessen diese ihre Einschätzung im Sinne des Monopolisten revidieren.

Ein besonders auffälliges Resultat ist die Notwendigkeit der Bedingung $p < q$ für die Existenz von eintrittsverwehrenden Gleichgewichten. Diese Ungleichung wurde interpretiert als eine Art 'Nichtbeobachtbarkeitsrente', die unbedingt gegeben sein muß, damit sich der Monopolist im Gleichgewicht jemals zu einem Preiskampf entschließt. Die Notwendigkeit dieser Bedingung konnte je nach Beobachtungsstruktur nachgewiesen bzw. motiviert werden. Insbesondere folgt aus dieser Aussage, daß für die Spezialfälle $p = q = 0$ (also für den Fall, daß die Konkurrenten überhaupt nichts beobachten können) und $p = q = 1$ (den Fall, daß jeder Markteintritt unabhängig von seiner Beantwortung beobachtet wird) kein eintrittsverwehrendes Gleichgewicht exi-

stieren kann.

Die Beobachtungsstruktur dieser Arbeit —Beobachtung eines jeden Basis-
spielergebnisses mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit— ist realistischer als
die des Massoschen Modells, in dem die Konkurrenten nur eine von drei
Grundinformationen (siehe Abschnitt 9.1) erhalten. Die Vorstellung, daß ein
potentieller Marktkonkurrent nur einen zufällig ausgewählten Ausschnitt der
bisherigen Aktionen des Monopolisten beobachten kann, erscheint als eine
adäquate Modellierung der realen Welt. Auch konnten unter den hier un-
terstellten Annahmen einige Ergebnisse (Preiskämpfe im Gleichgewicht und
sogar auf dem Gleichgewichtspfad sind möglich, nichttriviale Gleichgewich-
te bei unterschiedlich korrelierter Beobachtungsstruktur) hergeleitet werden,
die in dem Massoschen Modell nicht nachweisbar sind.

Weiterhin ergeben sich interessante Vergleichspunkte mit den klassischen Re-
putationsmodellen von KREPS/WILSON(1982a) und MILGROMROBERTS (1982)¹.
Gemeinsam mit dem hier vorgestellten Modell (und mit dem Modell von
Masso) ist der *Reputationseffekt*, nämlich die Eigenschaft, daß im Gleichge-
wicht typischerweise schon eine einzige beobachtete Marktteilung dazu führt,
daß alle weiteren Konkurrenten auch künftig Marktteilungen erwarten sich
entsprechend zu einem Markteintritt entschließen.

Ein interessanter Unterschied in den hier betrachteten Modellen liegt in der
Interpretation eines beobachteten Preiskampfes. Falls in dem Modell von
Kreps/Wilson ein Preiskampf beobachtet wird, so schließt ein über einen
Markteintritt nachdenkender Konkurrent daraus, daß er mit größerer Wahr-
scheinlichkeit einem starken Monopolisten gegenübersteht. Die Beobachtung
eines Preiskampfes führt also dazu, daß dem Konkurrenten ein Markteintritt
weniger attraktiv erscheint. In dem hier präsentierten Modell hingegen führt
ein beobachteter Preiskampf dazu, daß die Konkurrenten ihre Einschätzung

¹Da sich die beiden Arbeiten aus meiner Sicht nicht wesentlich voneinander unterschei-
den, werde ich mich von nun an auf die Arbeit von Kreps/Wilson beschränken. In diesem
Zusammenhang sei auch die empfehlenswerte Zusammenfassung dieser beiden Arbeiten in
FUDENBERG/TIOLE (1993) erwähnt.

über ihre Nummer revidieren. Daraus ergibt sich in den meisten Fällen (siehe die Gleichgewichte in Abschnitt 8.2.1), daß die Konkurrenten eine höhere Wahrscheinlichkeit auf hohe Nummern legen und sich damit eher zu einem Markteintritt entschließen. Mit anderen Worten: Während bei Kreps/Wilson die Beobachtung eines Preiskampfes einen Markteintritt der verbliebenen Konkurrenten unwahrscheinlicher macht, wirkt sie in dem hier vorgestellten Modell entgegengesetzt. Sie macht einen Markteintritt wahrscheinlicher.

Eine Stärke des Reputationsmodells von Kreps/Wilson liegt darin, daß es nur ein einziges Gleichgewicht gibt, während in den in dieser Arbeit analysierten Modellen das triviale Gleichgewicht —ein Markteintritt aller Konkurrenten, der jeweils mit einer Marktteilung beantwortet wird— in allen Varianten (und auch in sämtlichen Beispielen des Massoschen Aufsatzes) weiterbesteht. Das wirft das Problem der Gleichgewichtsauswahl auf: Warum soll gerade ein eintrittsverwehrendes Gleichgewicht gewählt werden? Auf diese Problematik wird hier nicht näher eingegangen. Statt dessen sei auf die Arbeiten von KANDORI et al. (1993), FUDENBERG/LEVINE (1987) und FUDENBERG/KREPS (1987) verwiesen, die sich eingehender mit dem Problem der Gleichgewichtsauswahl bei Spielen mit einem 'großen' und vielen 'kleinen' Spielern auseinandersetzen.

Auf der anderen Seite sind auch zu den klassischen Reputationsmodellen einige kritische Anmerkungen zu machen. Erstens ist die Annahme problematisch, der Monopolist könnte 'stark' sein und aus einem Preiskampf größeren Profit als aus einer Marktteilung ziehen. Andererseits führt die von Pitchik vorgeschlagene Endogenisierung (und damit Entschärfung) dieser ursprünglich exogen gegebenen 'Marktstärke' dazu, daß es wiederum eine Vielzahl von Gleichgewichten gibt und das insbesondere auch das triviale Gleichgewicht mit einem Markteintritt aller Konkurrenten existiert. Also wird die Endogenisierung der Stärke des Monopolisten mit dem Verlust der Eindeutigkeit des Gleichgewichts erkaufte.

Die zweite Schwäche des klassischen Reputationsmodells liegt darin, daß das Gleichgewicht des Modells von Kreps/Wilson gemischte Strategien verwen-

det. Mit anderen Worten, die Spieler 'würfeln' die Aktionen aus, die sie in bestimmten Situationen durchführen. Zudem hat dieses Gleichgewicht die Eigenschaft, daß die Aktionswahrscheinlichkeit der einzelnen Akteure ausschließlich von den Auszahlungen der *anderen* Spieler abhängt. Dies kann sicherlich kaum als eine gelungene Beschreibung des vielzitierten homo oeconomicus angesehen werden.

9.3 Diskussion der Annahmen und Ergebnisse

Die Kernannahmen dieses Modells —unvollständige Information über die Aktionsreihenfolge und unvollständige Beobachtbarkeit der Basisspielergebnisse der anderen Agenten— sind vom Standpunkt der Anwendung unproblematisch. Auch ist die hier unterstellte Beobachtungsstruktur realistischer als die von Masso angenommene.

Wichtig für die Interpretation der hier erarbeiteten Ergebnisse ist die Bedingung $p \leq q$, die für die Existenz von eintrittsverhindernden Gleichgewichten notwendig ist. Diese Bedingung scheint auf den ersten Blick sehr restriktiv, im folgenden werden daher einige Argumente für die leichtere Beobachtbarkeit einer Marktteilung angeführt.

Zum einen kann der Begriff *Preiskampf* als Synonym für jegliche Aktion verstanden werden, mit der der Monopolist einem zum Eintritt entschlossenen Konkurrenten das Leben so schwer wie möglich macht. Eine Möglichkeit hierfür wäre verdecktes Lobbying, um dem Markteindringling einen angemessenen Standort im Markt zu verwehren. Auch im Vorfeld des geplanten Markteintritts vorgenommene kostspielige Maßnahmen zur Kunden- oder Lieferantenbindung an das eigene Unternehmen wären hier zu nennen. Kampfmechanismen können also durchaus verdeckt stattfinden. Eine Auseinandersetzung zwischen dem eingesessenen Unternehmen und dem Eindringling würde in diesem Fall von der Außenwelt kaum wahrgenommen. Im

Gegensatz dazu kann eine Marktteilung nicht verheimlicht werden.

Zum anderen sei hier das Argument aufgeführt, daß die Beobachtbarkeit einer Marktteilung oder eines Preiskampfes *endogen* bestimmt sein könnte: In den hier vorgestellten nichttrivialen Gleichgewichten reichte üblicherweise bereits die Beobachtung einer einzigen Marktteilung, um alle verbliebenen Konkurrenten zu einem Markteintritt zu bewegen. Mit anderen Worten, die Beobachtung einer Marktteilung hat für alle Konkurrenten eine große Bedeutung. Daher sind die Konkurrenten an einer derartigen Nachricht besonders interessiert und sie werden, wenn irgend möglich, sich besonders bemühen, von einer möglicherweise erfolgten Marktteilung zu erfahren. Dadurch wird die Beobachtbarkeit einer Marktteilung erhöht.

Abschließend ist festzustellen, daß mit dem hier vorgestellten Modell eine Erklärung für Reputationsphänomene erarbeitet wurde, die eine echte Alternative zu den klassischen Reputationsmodellen darstellt.

Anhang B

Mathematischer Anhang

In diesem Anhang werden die Gleichgewichtseigenschaften einiger Beispiele aus Kapitel 8.2 verifiziert und es wird der Beweis von Lemma 8.1.4 durchgeführt.

Beweis von Lemma 8.1.4: In einem Gleichgewicht wird der Monopolist gegenüber dem N -ten Konkurrenten immer einer Marktteilung zustimmen. Diese Feststellung ist unabhängig von der aktuellen Beobachtungssequenz in Periode n . Daher werden alle Konkurrenten sich nach der Beobachtung einer beliebigen Sequenz der Länge $n - 1$ unbedingt für einen Markteintritt entscheiden. Sei nun n_{min} die kleinste Zahl mit der Eigenschaft, daß sämtliche Konkurrenten nach der Beobachtung einer beliebigen Sequenz mit einer Länge von mindestens n_{min} Markteintritt spielen und der Monopolist dies mit einer Marktteilung beantwortet. Daß es mindestens eine Zahl mit diesen Eigenschaften gibt, nämlich $n - 1$, wurde gerade gezeigt. Aus der Definition von n_{min} folgt nun die Existenz einer um eine Beobachtung kürzeren Sequenz $b^{n_{min}-1}$ derart, daß die Konkurrenten nach der Beobachtung dieser Sequenz nicht in den Markt eintreten und daß es mindestens ein n gibt, so daß der Monopolist dem Konkurrenten mit der Nummer n nach der Beobachtung von $b^{n_{min}-1}$ mit einem Preiskampf antwortet. Wegen der Optimalität der Strategien im Gleichgewicht wird der Monopolist dann auch alle Konkurrenten

mit einer kleineren Nummer bekämpfen. Sei nun $\tilde{n}$ als die größte Nummer gewählt, mit der ein Konkurrent unter diesen Umständen bekämpft wird. Offenbar erfüllen die $\tilde{b}^t = b^{n_{\min}-1}$ und $\tilde{n}$ die Eigenschaften PI bis PIII. $\square$

Es folgen die Berechnungen für Beispiel 8.2.1.

Beispiel. Für $n = 4$ Konkurrenten seien die folgenden Strategien und Einschätzungen betrachtet.

Die Strategie für den Monopolisten lautet: Wenn noch kein Basisspielergebnis beobachtet wurde, bekämpfe die Konkurrenten bis einschließlich Nummer drei. Nach der Beobachtung eines Preiskampfes (durch die Konkurrenten) spiele P gegen Konkurrent Nummer zwei und T bei allen Konkurrenten mit einer größeren Nummer. Nach der Beobachtung von zwei Preiskämpfen bekämpfe Konkurrent Nummer drei. Nach der Beobachtung von mindestens einer Marktteilung spiele immer T. In Periode vier spiele immer T.

Die Strategie für den Konkurrenten lautet: Wenn es keine Beobachtung gibt oder wenn genau zwei Preiskämpfe beobachtet wurden, spiele F. Anderenfalls spiele M.

Die dazugehörigen Einschätzungen der Konkurrenten lauten:

- $\mu_i(b^0) = \frac{1}{4}$ für $i = 1 \dots 4$. Wenn die Konkurrenten noch nichts beobachtet haben, so nehmen sie an, jede Nummer mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen.
- $\mu_3(PK, PK) = \mu_4(PK, PK) = \frac{1}{2}$. Ein zweiter Preiskampf kann unter den oben skizzierten Strategien nur in Periode 2 aufgetreten sein. Wurden also zwei Preiskämpfe beobachtet, so beträgt die subjektive Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$, daß der Konkurrent Nummer 3 beziehungsweise Nummer 4 hat.
- $\mu_2(PK) = \frac{1}{6-2p}$, $\mu_3(PK) = \frac{2-p}{6-2p}$ und $\mu_4(PK) = \frac{3-p}{6-2p}$.

Diese Strategien und Einschätzungen bilden beispielsweise für die Parameterwerte $A = 1.5$, $a = 0.35$, $q = 1$ und $p = 0.4$ ein sequentielles Gleichgewicht.

Während die Konsistenz der Einschätzungen der Konkurrenten nach der Beobachtung von keinem oder zwei Preiskämpfen unmittelbar einsichtig ist, werden die Einschätzungen nach einem Preiskampf im folgenden erläutert:

Da ein Preiskampf nur abseits des Gleichgewichtspfades auftreten kann, wird in Analogie zu den Rechnungen in Kapitel 8.2.1 eine Folge von 'Spielern mit zitternder Hand' betrachtet, die in jeder Situation mit Wahrscheinlichkeit ε_i von der oben beschriebenen Strategie abweichen. Wie in Kapitel 8.2.1 werden Terme, in denen ε in höherer Ordnung auftaucht, weggelassen. Es ergeben sich unter Verwendung der dort eingeführten Bezeichnungen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_i(B1|A1) &= 0 \\
\mathcal{P}_i(B1|A2) &\approx \varepsilon_i(1 - \varepsilon_i)p \\
\mathcal{P}_i(B1|A3) &\approx \varepsilon_i(1 - \varepsilon_i)p \cdot (1 - p)(1 - \varepsilon_i)^2 + (1 - \varepsilon_i)\varepsilon_i(1 - \varepsilon_i)p \\
\mathcal{P}_i(B1|A4) &\approx \varepsilon_i(1 - \varepsilon_i)p \cdot (1 - p)(1 - \varepsilon_i)^3 + (1 - \varepsilon_i) \cdot p\varepsilon_i(1 - \varepsilon_i) \cdot (1 - \varepsilon_i) \\
&\quad + (1 - \varepsilon_i) \cdot (1 - \varepsilon_i) \cdot p(1 - \varepsilon_i)\varepsilon_i \\
\mathcal{P}_i(B1) &= \mathcal{P}_i(A2)\mathcal{P}_i(B1|A2) + \mathcal{P}_i(A3)\mathcal{P}_i(B1|A3) + \mathcal{P}_i(A4)\mathcal{P}_i(B1|A4) \\
&\approx \frac{1}{4}p\varepsilon_i\left((1 - \varepsilon_i) + (1 - \varepsilon_i) \cdot (1 - p)(1 - \varepsilon_i)^2 + (1 - \varepsilon_i)(1 - \varepsilon_i)\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}p\varepsilon_i\left((1 - \varepsilon_i)(1 - p)(1 - \varepsilon_i)^3 + (1 - \varepsilon_i)^3 + (1 - \varepsilon_i)^3\right)
\end{aligned}$$

In dieser Berechnung repräsentiert beispielsweise der erste Summand bei der Berechnung von $\mathcal{P}_i(B1|A3)$ das Ereignis, daß der beobachtete Preiskampf in Periode 1 geschah. In diesem Fall ist —gemäß den Strategien der Spieler— auch der Konkurrent in Periode 2 in den Markt eingetreten, und der daraus resultierende Preiskampf wurde mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ nicht beobachtet. Der zweite Summand in dieser Gleichung beschreibt die Möglichkeit, daß der Preiskampf aufgrund eines Markteintritts des zweiten Konkurrenten erfolgt ist. Die anderen Gleichungen erklären sich analog.

Durch Grenzwertberechnung für $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ergibt sich schließlich

$$\mu_2(PK) = \mathcal{P}(A2|B1) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \mathcal{P}_i(A2|B1) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \frac{\mathcal{P}_i(B1|A2)}{\mathcal{P}_i(B1)} = \frac{1}{4 + 2(1 - p)}. \quad (\text{B.1.1})$$

Die anderen Wahrscheinlichkeitseinschätzungen ergeben sich analog.

Nun können die Entscheidungen der Spieler auf ihre Optimalität überprüft werden. Falls noch nichts beobachtet wurde, spielen die Konkurrenten F . Dies ist optimal, falls gilt:

$$1 \geq \frac{1}{4}A \quad (\text{B.1.2})$$

Damit die Entscheidung $\sigma_k(PK) = M$ optimal ist, muß weiter gelten:

$$A(\mu_3(PK) + \mu_4(PK)) = \frac{5 - 2p}{6 - 2p}A \geq 1 \quad (\text{B.1.3})$$

Zuguterletzt treten die Konkurrenten nach der Beobachtung von zwei Preiskämpfen nicht ein. Dies bedingt

$$1 \geq \frac{1}{2}A. \quad (\text{B.1.4})$$

Aus Sicht des Monopolisten gelten die folgenden Optimalitätsbedingungen

$$\sigma_m(b^0, 3) = P \Rightarrow (1 - p) + pa \geq 2a \quad (\text{B.1.5})$$

$$\sigma_m(PK, 2) = P \Rightarrow 2p + 2(1 - p)a \geq 3a \quad (\text{B.1.6})$$

$$\sigma_m(PK, 3) = T \Rightarrow 2a \geq (1 - p)a + p \quad (\text{B.1.7})$$

$$\sigma_m((PK, PK), 3) = P \Rightarrow (1 - p) + pa \geq 2a \quad (\text{B.1.8})$$

Diese Gleichungen sind für die angegebenen Parameterwerte $A = 1.5$, $a = 0.35$, $q = 1$ und $p = 0.4$ erfüllt. Somit beschreiben die oben aufgeführten Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht. $\square$

Es folgen die Berechnungen für Beispiel 8.2.2.

Beispiel. Für $n = 100$ Konkurrenten seien die folgenden Strategien und Einschätzungen betrachtet.

Die Strategie für den Monopolisten lautet: Bekämpfe den ersten Konkurrenten und, wenn nichts beobachtet wurde, stimme bei allen weiteren Konkurrenten einer Marktteilung zu. Wenn genau ein Preiskampf beobachtet wurde, bekämpfe alle Konkurrenten bis einschließlich dem neunundneunzigsten, und stimme beim hundertsten Konkurrenten einer Marktteilung zu. Wenn mindestens zwei Preiskämpfe oder mindestens eine Marktteilung beobachtet wurden, dann spiele immer Marktteilung.

Für die Konkurrenten lautet die Strategie: Spiele F , wenn genau ein Preiskampf beobachtet wurde. Anderenfalls spiele M .

Die Einschätzungen der Konkurrenten nach der leeren Beobachtung lauten $\mu_1(b^0) = \frac{100}{199}$ und $\mu_2(b^0) = \frac{99}{199}$. Weiter vermuten die Konkurrenten nach der Beobachtung von genau einem Preiskampf, jede Nummer zwischen zwei und N mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen, d.h., $\mu_i(PK) = \frac{1}{N-1}$ für alle $i = 2 \dots N$.

Diese Strategien und Einschätzungen bilden beispielsweise für die Parameterwerte $a = \frac{99}{199}$, $A = 3, q = 1$ und $p = \frac{1}{100}$ ein sequentielles Gleichgewicht.

Um zu verifizieren, daß diese Strategien in der Tat ein sequentielles Gleichgewicht darstellen, wird zunächst die Strategie des Monopolisten überprüft. Er bekämpft den ersten Konkurrenten. Wenn dieser Preiskampf beobachtet wird, so führt dies zu dem Resultat 'kein Markteintritt' in allen weiteren Perioden des Spiels. Wenn der Preiskampf nicht beobachtet wird, so ergibt sich für alle weiteren Perioden eine Marktteilung.

Also muß, damit ein Preiskampf in Periode eins eine optimale Aktion für den Monopolisten ist, die Ungleichung

$$p(100 - 1) + (1 - p)(100 - 1)a \geq 100a$$

erfüllt sein. Unter den angegebenen Parameterwerten ist diese Bedingung mit Gleichheit erfüllt. Daraus folgt weiterhin, daß ab Periode 2 ein Preiskampf nicht optimal für den Monopolisten ist.

Nach der Beobachtung eines Preiskampfes sind die Strategien derart, daß die Konkurrenten nicht eintreten, solange kein weiteres Basisspielergebnis beobachtet wurde. Der Monopolist entschließt sich zu einem Preiskampf gegen alle Konkurrenten mit einer Nummer kleiner oder gleich 99. Dieses Verhalten ist optimal, wenn

$$(1 - p) + pa \geq 2a$$

gilt, was unter den im Lemma vorgeschlagenen Parametern ebenfalls mit Gleichheit erfüllt ist. Somit ist die Strategie des Monopolisten auch in diesem Fall optimal, gegeben die Strategien der Konkurrenten. Falls mindestens zwei Preiskämpfe oder eine Marktteilung beobachtet wurden, so agieren alle Spieler entsprechend dem trivialen Gleichgewicht und erfüllen somit alle Gleichgewichtsanforderungen.

Als zweiter Schritt werden hier die Einschätzungen der Konkurrenten berechnet. Falls alle Spieler gemäß dem trivialen Gleichgewicht handeln, was beispielsweise nach der Beobachtung von mindestens einer Marktteilung der Fall ist, so ist eine Spezifikation der Einschätzungen der Konkurrenten überflüssig. Daher werden hier nur die Einschätzungen nach der Beobachtung von einem oder keinem Kampf behandelt. Falls ein Konkurrent nichts beobachtet, so kann er —unter den gegebenen Strategien— nur die Nummer eins oder zwei haben. Hätte er eine höhere Nummer, so hätte er entweder einen Preiskampf oder eine Marktteilung beobachtet. Eine Anwendung der Bayesschen Regel ergibt direkt eine Einschätzung von $\mu_1(h^0) = \frac{100}{199}$ für den Fall, daß der Konkurrent nichts beobachtet hat. Entsprechend beträgt die Wahrscheinlichkeit, Nummer zwei zu sein, in dieser Situation $\mu_2(h^0) = \frac{99}{199}$.

Nach der Beobachtung eines Kampfes weiß der Konkurrent, daß dieser Kampf in Periode 1 erfolgt ist und daß alle weiteren Konkurrenten entsprechend ihrer Strategie nicht eingetreten sind. Somit vermutet er, jede Nummer zwischen 2 und 100 mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu besitzen, d.h., $\mu_i(PK) = \frac{1}{99}$ für $i = 2, \dots, 100$.

Zuguterletzt muß die Optimalität der Strategie der Konkurrenten unter Berücksichtigung der oben berechneten Einschätzungen und der Strategien

des Monopolisten überprüft werden. Wenn nichts beobachtet wurde, ergibt ein Markteintritt eine erwartete Auszahlung von $\frac{99}{199}A$, ein Fernbleiben aus dem Markt ergibt eine sichere Auszahlung von 1. Somit muß

$$\frac{99}{199}A \geq 1$$

erfüllt sein, damit die Entscheidung für einen Markteintritt optimal ist. Damit es optimal ist, sich nach der Beobachtung eines Preiskampfes gegen einen Markteintritt zu entscheiden, muß die Ungleichung

$$\frac{1}{99}A \leq 1$$

erfüllt sein. Diese Bedingungen sind beispielsweise unter den vorgeschlagenen Parameterwerten erfüllt, so daß die oben angegebenen Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht formen. $\square$

Zum Abschluß dieses Kapitels werden die Gleichgewichtseigenschaften von Beispiel 8.3.1 nachgewiesen.

Beispiel. *Die Zahl der Konkurrenten sei $n = 3$. Weiter sei die Strategie des Monopolisten wie folgt beschrieben:*

In der ersten Periode spiele Preiskampf. In der zweiten Periode spiele Preiskampf genau dann, wenn es in der ersten Periode keine Marktteilung gegeben hat. In Periode drei spiele Marktteilung. Die Konkurrenten treten genau dann in den Markt ein, wenn sie mindestens zwei Preiskämpfe oder mindestens eine Marktteilung beobachtet haben. Die Einschätzungen der Konkurrenten werden durch die Gleichungen $\mu_1(b^0) = \mu_2(b^0) = \mu_3(b^0) = \frac{1}{3}$, $\mu_2(PK) = \frac{1}{3}$ und $\mu_3(PK) = \frac{2}{3}$ beschrieben. Diese Strategien bilden beispielsweise für die Parameterwerte $p = \frac{4}{10}$, $q = \frac{6}{10}$, $a = \frac{3}{10}$ und $A = \frac{12}{10}$ ein Gleichgewicht.

Im folgenden wird nun schrittweise die Optimalität der Strategien der Spieler nachgewiesen. Die Überprüfung der Strategie des Monopolisten ist etwas aufwendiger als in den bisherigen Beispielen, da die Reaktionen der folgenden Konkurrenten in diesem Modell von den individuell beobachteten Spielergebnissen abhängen und somit potentiell Zufallsereignisse sind.

In Periode drei eine Marktteilung offensichtlich die optimale Aktion für den Monopolisten. Damit ein Preiskampf in Periode zwei (nachdem noch kein Konkurrent in den Markt eingetreten ist) optimal ist, muß die Ungleichung

$$1 \geq a + (q \cdot a + (1 - q)) \quad (\text{B.1.9})$$

erfüllt sein. Die entsprechende Ungleichung für die Optimalität der Entscheidung für einen Preiskampf gegen den ersten Konkurrenten lautet

$$2 \geq a + q(a + (1 - q)^2 + (1 - (1 - q)^2)a) + (1 - q)(1 + qa + 1 - q) \quad (\text{B.1.10})$$

In dieser Ungleichung repräsentiert die linke Seite die Auszahlung eines Preiskampfes. Auf der rechten Seite steht die erwartete Auszahlung einer Marktteilung.

Damit in Periode zwei nach einem Preiskampf in Periode eins ein Preiskampf die optimale Entscheidung ist, muß

$$p^2 a + (1 - p^2) \geq qa + (1 - q) + a \quad (\text{B.1.11})$$

gelten.

Nach einer Marktteilung in Periode eins spielt der Monopolist in Periode zwei ebenfalls Marktteilung. Damit dies optimal ist, muß die Ungleichung

$$a + (1 - q)^2 + (1 - (1 - q)^2)a \geq (1 - q) + qa \quad (\text{B.1.12})$$

gelten.

Bevor die Optimalität der Strategie der Konkurrenten überprüft werden kann, müssen zunächst deren Einschätzungen bestimmt werden. Diese werden in Analogie zu Kapitel 8.2.1 berechnet und es ergibt sich nach der Beobachtung von keinem Spielergebnis eine Einschätzung von $\mu_1(b^0) = \mu_2(b^0) = \mu_3(b^0) = \frac{1}{3}$. Nach der Beobachtung von einem Preiskampf ergibt sich $\mu_2(PK) = \frac{1}{3}$ und $\mu_3(PK) = \frac{2}{3}$. Nach der Beobachtung von zwei Preiskämpfen oder mindestens einer Marktteilung müssen die Einschätzungen der Konkurrenten nicht berechnet werden, da die Strategien hier dem trivialen Gleichgewichtspfad folgen. Unter den so beschriebenen Einschätzungen ist die Entscheidung gegen einen Markteintritt nach der Beobachtung

eines Preiskampfes genau dann optimal, wenn

$$\frac{2}{3}A \leq 1 \tag{B.1.13}$$

gilt. Damit die Konkurrenten nicht in den Markt eintreten, nachdem sie noch nichts beobachtet haben, muß $\frac{1}{3}A \leq 1$ gelten, was aber aus Gleichung (B.1.13) direkt folgt. Die Optimalität der Aktionen der Konkurrenten in allen anderen Situationen ergibt sich schließlich direkt aus der Strategie des Monopolisten. Damit ist der Nachweis vollständig, daß die oben beschriebenen Strategien und Einschätzungen tatsächlich ein sequentielles Gleichgewicht bilden.

Teil III

Verhandlungen in Netzwerken - Graphspiele und ihre Anwendungen

Kapitel 10

Soziale Netzwerke und Graphspiele – ein Überblick

”... bargaining occupies an important place in economic theory, since the ‘pure bargaining problem’ is at the opposite pole of economic phenomena from ‘perfect competition’.”

Gemäß diesem Zitat (ROTH (1985), S.1) läßt sich die mikroökonomische Theorie anhand zweier gegensätzlicher Pole charakterisieren. Auf der einen Seite stehen die Ergebnisse, die sich in einem idealen Markt nachweisen lassen. In den entsprechenden Modellen sieht sich das einzelne Individuum einer Umwelt gegenüber, die es durch sein Tun nicht oder nur unmerklich beeinflussen kann. Daher wird die Entscheidung des einzelnen Agenten üblicherweise aus der Lösung eines Optimierungsproblems abgeleitet, in dem die äußeren Faktoren wie die Preise der Güter, Aktionsmöglichkeiten und Informationsmengen als fix angenommen werden und der Nutzen anhand einer vorgegebenen Präferenzstruktur maximiert wird. Weiterhin hat in derartigen Märkten zu- meist jeder Agent die Möglichkeit, mit jedem anderen Akteur ohne Zeitverlust und Kosten zu interagieren. Es herrscht vollständige Information und unbeschränkter Marktzutritt für alle Akteure.

Den Gegenpol hierzu bildet die ökonomische Theorie der bilateralen Verhand-

lungen, in der sich zwei Individuen über die Aufteilung eines nur gemeinsam erzielbaren Überschusses zu einigen versuchen. Hier haben die Aktionen eines Agenten direkte Auswirkungen auf seinen Gegenüber, und beide Spieler müssen die strategischen Folgen ihrer Entscheidungen berücksichtigen.

Die Realität läßt sich in den meisten Fällen am besten durch eine Mischform zwischen diesen beiden Extremen —Optimierung in einer fest vordefinierten Umgebung und strategische Interaktion mit einem einzigen Verhandlungspartner— beschreiben. Denn während einerseits die Vorstellung vollständiger Information und unbeschränkten Marktzugangs offenbar einen idealisierten Zustand darstellt, so ist andererseits in vielen Verhandlungssituationen die Annahme unrealistisch, daß die Partner 'auf einer einsamen Insel' miteinander kommunizieren. Vielmehr werden die beiden Akteure Alternativen zu einer Zusammenarbeit miteinander haben. In einer Käufer-Verkäufer-Beziehung beispielsweise könnte der Kunde die Möglichkeit haben, ein vergleichbares Gut bei einem anderen Händler zu kaufen. Andererseits wird auch der Verkäufer versuchen, sich durch Verhandlungen mit anderen Kunden neue Handelspartner zu schaffen, um so seine Abhängigkeit von einer einzelnen Person zu verringern.

Das Resultat dieser alternativen Verhandlungsmöglichkeiten kann wiederum davon abhängen, was in der aktuellen Verhandlung erreichbar ist, und so wird das endgültige Ergebnis für einen Agenten von einem Wechselgeflecht von Verhandlungsvorgängen und Handlungsalternativen bestimmt. Anders formuliert ergibt sich für jeden derart involvierten Akteur eine Art lokaler Markt, in dem die Gesamtheit der zu ihm benachbarten Individuen samt deren Verflechtung untereinander seine Möglichkeiten zu profitablen Aktivitäten definiert.

Die noch relativ schwach entwickelte Theorie der Verhandlungen in Netzwerken bemüht sich, diese Effekte zu untersuchen und somit einen Beitrag zur Verbindung der oben genannten Pole zu leisten. Agenten werden als Knotenpunkte eines Graphen modelliert und die (Verhandlungs-)Macht einzelner Akteure in diesem System wird analysiert. Neben theoretisch in-

teressierten Volkswirten haben sich vor allem Soziologen mit derartigen Modellen beschäftigt. Die Artikel von WILLER (1992) und MIZRUCHI et al. (1994) bieten einen guten Überblick über die Literatur und die verschiedenen Ansätze zu diesem Thema. Neben speziell auf Graphen zugeschnittenen axiomatischen Lösungskonzepten (MARKOVSKY et al. (1988) und RYLL (1996)) wurden auch Instrumente aus der Graphentheorie (BONACICH/BIENENSTOCK (1993)) und Standardverfahren der kooperativen Spieltheorie wie der Kern (BIENENSTOCK/BONACICH (1993) und KALAI et al. (1978)) und der Shapleywert (vergleiche COOK et al. (1983) oder MYERSON (1977)) zur Analyse von Verhandlungen auf Graphen eingesetzt. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der experimentellen Untersuchung von Graphspielen (MARKOVSKY et al. (1988) und COOK et al. (1983)) sowie dem 'Metaspiel', nämlich mit der Frage, welche Graphen beim gegebenen Einsatz eines vorgegebenen Lösungskonzeptes von den Agenten aufgebaut werden (CHENG (1996) und ROTH (1985)).

Bemerkenswerterweise verwenden die meisten zu diesem Thema erschienenen Arbeiten kooperative Lösungskonzepte, um die Verhandlungsstärke der einzelnen Positionen in einem Graphen zu ermitteln. Die vorliegende Arbeit stellt nun, aufbauend auf einer Idee von PANTHER (1995), eine nichtkooperative Modellierung von Verhandlungen in Netzwerken, die sogenannten Graphspiele, vor. Dabei wird das Netzwerk durch einen ungerichteten Graphen beschrieben, und die Spieler werden jeweils mit einem Knoten in diesem Graphen identifiziert. Eine Verbindung in diesem Graph zeigt an, daß die derart verknüpften Spieler die Möglichkeit zu einer profitablen Zusammenarbeit haben. In bilateralen Verhandlungen versuchen sie, sich auf eine Verteilung des gemeinsam erzielbaren Überschusses zu einigen. In dieser Arbeit werden nur sogenannte *exklusive* Graphen analysiert, d.h. die Akteure sind nur zu einer einzigen Zusammenarbeit in der Lage und verlassen das Spiel, sobald sie sich mit einem anderen Spieler geeinigt haben. Grundsätzlich läßt sich das hier vorgestellte Modell aber auf nichtexklusive Graphen erweitern.

Es ist meine Überzeugung, daß die so definierte Klasse von Spielen ein großes Potential zur Analyse von sozialen und wirtschaftlichen Fragestellungen hat.

Ein Schwerpunkt dieses Teils der Arbeit liegt daher darin, die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von Graphspielen anhand von drei Einsatzfeldern aufzuzeigen.

In Kapitel 11 werden Graphspiele vorgestellt und spieltheoretisch analysiert. In Abschnitt 11.1 wird der Begriff des Graphspiels formal eingeführt. Abschnitt 11.2 enthält die theoretische Analyse dieser Klasse von Modellen; die Existenz eines Gleichgewichts für beliebige Graphspiele wird nachgewiesen, und die Frage seiner Eindeutigkeit wird behandelt. Kapitel 12 zeigt einige Anwendungsfelder für die hier vorgestellte Klasse von Verhandlungsspielen. In Abschnitt 12.1 wird anhand einiger Beispiele gezeigt, welche Aussagen über Verhandlungsstärke in Netzen sich anhand von Graphspielen treffen lassen. Insbesondere die Auswirkung von Verzögerungen sowie die externen Effekte, die von der Existenz einzelner Verbindungen ausgehen, werden dargestellt. Kapitel 12.2 führt einen auf Graphspielen basierenden Verhandlungsstärkeindex für Netzwerke ein. Die Ergebnisse dieses Index für eine standardisierte Menge von Graphen werden mit experimentellen Resultaten und den Ergebnissen anderer Indizes wie beispielsweise des Myersonindex verglichen. In Kapitel 12.3 werden Graphspiele zur Analyse von Märkten eingesetzt. Insbesondere werden Märkte mit unvollständigem Marktzutritt untersucht. Kapitel 13 beschließt diese Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung und Kommentierung der Ergebnisse. Die etwas umfangreicheren Beweise wurden im Interesse einer besseren Übersichtlichkeit in den mathematischen Anhang verlegt.

Kapitel 11

Definition und spieltheoretische Analyse

11.1 Das Grundmodell

Dieser Abschnitt orientiert sich eng an dem Aufsatz von PANTHER (1995). Es sei $N = \{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der Spieler, die paarweise über die Aufteilung eines beliebig teilbaren Gutes der Größe 1 verhandeln. Zeit ist diskret und wird mit $t = 0, 1, 2, \dots$ indiziert. Der Zeithorizont ist unbegrenzt. Der Nutzen der Spieler ist linear in dem erhaltenen Anteil und wird mit einem Diskontfaktor δ abdiskontiert, der für alle Spieler identisch ist. Somit ergibt sich für einen beliebigen Spieler aus einem Anteil x in Periode t eine Auszahlung von $\delta^t x$.

Ein Paar von Spielern kann nur dann miteinander verhandeln, wenn es verbunden ist. Es bezeichne $G = \{\langle i, j \rangle, \langle k, o \rangle, \langle p, l \rangle, \dots\}$ die Menge der Verbindungen zwischen den Spielern. Das ungeordnete Paar $\langle i, j \rangle$ ist genau dann ein Element von G , wenn eine Verbindung zwischen den Spielern i und j mit $i \neq j$ besteht. Es werden keinerlei Restriktionen auf G gelegt, aber ohne Verlust der Allgemeingültigkeit beschränkt sich die hier erarbeitete Analyse auf diejenigen Spieler, die zu Beginn des Spiels mindestens eine Verbindung ha-

ben. Die Anzahl der Elemente in G sei m . Ein Paar (N, G) wird im folgenden als *Spielstruktur*, *Graphspiel* oder auch einfach als *Graph* bezeichnet.

Die Informationen, die in den Mengen N und G enthalten sind, können auch in Form einer Verbindungsmatrix $\mathbf{G}$ dargestellt werden. Für diese Matrix gilt $g_{ij} = 1$ genau dann, wenn die Spieler i und j miteinander verbunden sind, anderenfalls wird $g_{ij} = 0$ definiert. Offensichtlich ist die Matrix $\mathbf{G}$ symmetrisch.

Ein ungerichteter Graph¹ bildet die dritte Möglichkeit, eine Spielstruktur darzustellen. Die Spieler werden durch die Knoten repräsentiert und eine Kante zwischen den Knoten i und j existiert genau dann, wenn die Spieler i und j verbunden sind. Beispielsweise entspricht (N, G) mit $N = \{1, 2, 3\}$ und $G = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ derselben Spielstruktur wie die Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oder der Graph $\mathcal{G}$ in Abbildung 11.1.²

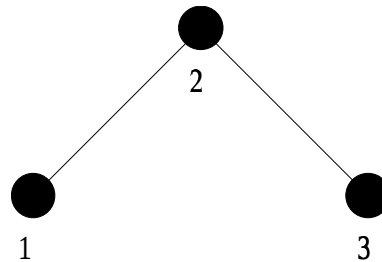


Abbildung 11.1: Ein einfacher Graph

¹Ein ungerichteter Graph ist definiert durch eine Menge K von Knoten sowie eine Menge $V \subset K^2$ von Kanten, vergleiche JUNGnickel et al. (1994), S.18 ff.

²Von nun an werden zur Vereinfachung der Schreibweise die Graphen mit der Nummer der Abbildung, in der sie zu sehen sind, identifiziert. Wir sprechen also von Graph 11.1 anstatt vom Graph in Abbildung 11.1.

Für die Analyse von Graphspielen werden sich auch die folgenden Definitionen als nützlich erweisen: Es sei $G_i \subset G$ die Menge aller Paare, die i enthalten. Somit beschreibt G_i alle Verbindungen von Spieler i . Entsprechend ist die Menge N_i definiert als die Menge der Spieler, mit denen i verbunden ist. Die Anzahl der Elemente in G_i und N_i , die per definitionem gleich sein muß, sei mit m_i bezeichnet. Weiter sei $G \setminus \{i, j\} := G \setminus (G_i \cup G_j)$ definiert als die Menge aller Verbindungen ohne diejenigen Paare, die i oder auch j enthalten. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird angenommen, daß ein Paar $\langle i, j \rangle$, das erfolgreich miteinander verhandelt hat, das Spiel verläßt. $(N \setminus \{i, j\}, G \setminus \{i, j\})$ bezeichnet den daraus entstehenden Nachfolgegraph, nämlich diejenige Spielstruktur, die aus (N, G) entsteht, wenn die Spieler i und j samt ihren Verbindungen entfernt werden. Die Matrix $\mathbf{G} \setminus \{i, j\}$ und der Graph $\mathcal{G} \setminus \{i, j\}$ werden analog definiert; somit ergibt sich die Matrix $\mathbf{G} \setminus \{i, j\}$ aus $\mathbf{G}$, indem die jeweils i te und j te Zeile und Spalte entfernt wird. Schließlich wird mit $\Gamma(N, G)$ die Menge aller Spielstrukturen bezeichnet, die sich durch das wiederholte Entfernen von verbundenen Spielern aus (N, G) erzeugen lassen.

Die Spieler treffen nach folgendem Verhandlungsprotokoll aufeinander: In jeder Periode $t = 0, 1, 2, \dots$ wird ein Paar von miteinander verbundenen Spielern zufällig bestimmt. Dabei wird jedes Spielerpaar mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt. Nachdem das Paar $\langle i, j \rangle \in G$ bestimmt wurde, verhandeln die beiden Spieler über die Aufteilung eines Gutes der Größe 1 wie folgt. Einer der beiden Spieler wird ausgelost und darf dem anderen Spieler eine Aufteilung vorschlagen. Die Wahrscheinlichkeit, das Vorschlagsrecht zugesprochen zu bekommen, ist für beide Spieler gleich. Nachdem der Vorschlag formuliert wurde, kann der andere Spieler diesen entweder annehmen oder ablehnen. Nimmt er an, so erhalten die beiden Spieler einen dieser Aufteilung entsprechenden Anteil bzw. die damit verbundene Auszahlung und verlassen das Spiel. In der nächsten Periode wird dann das Spiel mit dem so entstandenen Nachfolgegraphen, $(N \setminus \{i, j\}, G \setminus \{i, j\})$, fortgesetzt.

Wird der Aufteilungsvorschlag abgelehnt, so verändert sich nichts, und die

Spielstruktur geht unverändert in die nächste Periode, in der wiederum ein Paar ausgewählt wird und miteinander verhandelt. Da die Zufallsereignisse zur Auswahl der verhandelnden Paare stochastisch unabhängig sind, ist es durchaus möglich, daß dasselbe Paar mehrmals hintereinander miteinander verhandelt.

Um die Beschreibung des Modells zu komplettieren, müssen noch die Strategiemengen der Spieler definiert werden³. Hierfür sei zunächst eine *Geschichte des Spiels der Länge t* , h_t , definiert. h_t beschreibt alle Ereignisse bis einschließlich Periode t , d.h., für jede Periode wird angegeben, welches Paar ausgelost wurde, wer das Vorschlagsrecht erhalten hat, welcher Aufteilungsvorschlag gemacht wurde und ob dieser angenommen oder abgelehnt wurde. Es bezeichne H_t die Menge aller Geschichten der Länge t und $H := \cup_{t \in T} H_t$ die Menge *aller* Geschichten. Eine *Strategie* für Spieler i , σ_i , ist eine Abbildung, die jeder Geschichte $h_t \in H$ ein m_i -Tupel von Paaren $((x_{ij}, y_{ij}), (x_{ik}, y_{ik}), \dots)$ derart zuordnet, daß das Paar (x_{ij}, y_{ij}) die Aktion des Spielers i beschreibt, falls er auf den mit ihm verbundenen Spieler j trifft. $x_{ij} \in [0, 1]$ ist der Aufteilungsvorschlag, den i unterbreitet⁴ und $y_{ij} : [0, 1] \rightarrow \{\text{Annahme}, \text{Ablehnung}\}$ definiert die Annahmefunktion, welche die Antwort von Spieler i auf ein Angebot von j angibt. Schließlich ist ein *Strategienprofil* $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_n)$ ein n -Tupel von Strategien, das jedem Spieler genau eine Strategie zuordnet.

Die Analyse in dieser Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit stationären teilspielperfekten Gleichgewichten. Ein Strategienprofil σ ist genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn die Aktion jedes Agenten nach jeder möglichen Geschichte des Spiels optimal ist, gegeben die Strategien der anderen Spieler. σ heißt *stationär*, wenn folgendes gilt: Wenn nach zwei Geschichten h_t und h_r die Menge der noch im Spiel verbliebenen Spieler und somit

³Die folgenden Definitionen werden in dieser Formalität später nicht mehr benötigt, können aber hier im Interesse einer vollständigen Beschreibung des Modells nicht ausgelassen werden.

⁴Dabei wird x_{ij} als der Anteil für Spieler i verstanden. Für Spieler j verbleibt dann $1 - x_{ij}$.

auch die Menge der noch vorhandenen Verbindungen identisch ist, dann ist die Aktion eines beliebigen Spielers i nach beiden Geschichten dieselbe, d.h. $\sigma_i(h_t) = \sigma_i(h_r)$. Von nun an werden die Begriffe *Gleichgewicht* und *stationäres teilspielperfektes Gleichgewicht* synonym verwendet.

11.2 Gleichgewichtsanalyse

In diesem Abschnitt wird eine spieltheoretische Analyse von Graphspielen durchgeführt. In Teilabschnitt 11.2.1 werden anhand von Einigungsgleichgewichten grundlegende Eigenschaften von Gleichgewichten in Graphspielen vorgestellt. Die Grundgedanken dieser Analyse werden in Teilabschnitt 11.2.2 dann auf allgemeine Gleichgewichte erweitert. Ebenfalls in 11.2.2 wird auch die Frage nach der Eindeutigkeit und Existenz eines Gleichgewichts für beliebige Graphspiele behandelt.

11.2.1 Einigungsgleichgewichte

In diesem Teilabschnitt, der sich eng an dem entsprechenden Kapitel in PANTHER (1995) orientiert, konzentrieren wir unsere Aufmerksamkeit ausschließlich auf *Einigungsgleichgewichte*; darunter verstehen wir Gleichgewichte, bei denen in jeder Periode eine Einigung erzielt wird, bis keine miteinander verbundenen Spieler mehr übrig sind. Zu einer gegebenen Spielstruktur und einem gegebenen Gleichgewicht bezeichne $v_i \in [0, 1]$ den Erwartungswert der Auszahlung, die sich für Spieler i ergibt. Gelegentlich wird auch v_i^G geschrieben, falls aus dem Kontext nicht eindeutig die Spielstruktur hervorgeht, auf die sich v_i bezieht. Als eine direkte Folge von Teilspielperfektheit und Stationarität wird Spieler i in einem Gleichgewicht ein Angebot von Spieler j immer dann annehmen, wenn der angebotene Anteil ihm einen größeren Nutzen gibt, als er —gegeben die Strategien aller Spieler— aus einer Ablehnung mit nachfolgender Fortsetzung des Spieles erwarten könnte. Also wird er ein Angebot immer dann annehmen, wenn es größer als δv_i ist.

Weiter wird im Gleichgewicht ein Spieler ein Angebot auch dann annehmen, wenn es ihn indifferent zwischen Annahme und Ablehnung stellt, also genau δv_i beträgt. Der Wert δv_i dient somit als Reservationswert, ab dem Spieler i einen Aufteilungsvorschlag eines anderen Spielers akzeptiert. Offensichtlich ist dieser Reservationswert und damit die Entscheidung über Annahme und Ablehnung eines Angebots unabhängig von der Frage, *von wem* Spieler i das Angebot unterbreitet wurde.

Wenn andererseits Spieler i das Recht erhalten hat, seinem Verhandlungspartner j eine Aufteilung vorzuschlagen, so muß er den Reservationswert seines Gegenübers berücksichtigen. Er wird die größte Forderung stellen, die Spieler j noch akzeptiert, d.h., er wird einen Anteil von δv_j offerieren und den Rest von $1 - \delta v_j$ für sich verlangen. Die Formulierung eines solchen Angebots ist allerdings nur dann eine optimale Aktion, wenn der für Spieler i verbleibende Anteil mindestens seinem Reservationswert entspricht, das heißt, wenn die Ungleichung

$$1 - \delta v_j \geq \delta v_i$$

beziehungsweise

$$\delta v_i + \delta v_j \leq 1 \tag{11.2.1}$$

erfüllt ist. Anderenfalls übersteigt die Summe der Reservationswerte der beiden Spieler den Wert des aufzuteilenden Gutes, und jede mögliche Einigung widerspricht der Optimalität der Strategien im Gleichgewicht. Unter diesen Umständen kann es keine Einigung geben; die Reservationswerte der beiden Spieler lassen eine erfolgreiche Verhandlung nicht zu. Die Gültigkeit von Ungleichung (11.2.1) ist daher für jedes Paar $\langle i, j \rangle \in G$ eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Einigungsgleichgewichts.

Wenn die beiden Spieler unter diesen Bedingungen eine Einigung erreichen, so ergibt sich für Spieler i aus einem Zusammentreffen mit Spieler j eine erwartete Auszahlung von

$$v_i(\langle i, j \rangle) = \frac{1}{2}(1 - \delta v_j) + \frac{1}{2}(\delta v_i) = \frac{1}{2}(1 + \delta v_i - \delta v_j) = \delta v_i + \frac{1}{2}(1 - \delta v_i - \delta v_j). \tag{11.2.2}$$

Somit können beide Spieler von einer Einigung miteinander ihren Reservationswert plus der Hälfte von $1 - \delta v_i - \delta v_j$, dem verbliebenen Überschuß, erwarten. Mit anderen Worten: Die hier vorgestellte Verhandlungsprozedur implementiert die Nashlösung für die verhandelnden Spieler, berechnet zum Konfliktpunkt $d = (\delta v_i, \delta v_j)$.⁵

Die Reservationswerte v_i und v_j , die den Konfliktpunkt für die Verhandlungen zwischen i und j bestimmen, ergeben sich im Gleichgewicht endogen. Aus der Stationarität der Strategien folgt direkt, daß die Auszahlung eines Spielers im Gleichgewicht in einem beliebigen Teilspiel nur von der aktuellen Spielstruktur und nicht von der Geschichte des Spiels abhängt. Die erwartete Auszahlung v_i , die Spieler i aus einem gegebenen Gleichgewicht erwarten kann, ergibt sich wie folgt:

$$v_i = \frac{1}{m} \sum_{j \in N_i} \frac{1}{2} (1 + \delta v_i - \delta v_j) + \frac{1}{m} \sum_{\langle j, k \rangle \in G \setminus \{i\}} \delta v_i^{G \setminus \{j, k\}} \quad (11.2.3)$$

In dieser Gleichung spiegeln sich die beiden möglichen Ereignisse wieder, die in einer gegebenen Spielstruktur eintreten können. Wird Spieler i ausgelost, mit einem anderen Spieler j zu verhandeln, so ergibt sich seine erwartete Auszahlung $v_i(\langle i, j \rangle)$ entsprechend Gleichung (11.2.2). Summiert man diesen Wert für alle Paare, die Spieler i enthalten, und gewichtet das Ergebnis mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich der erste Summand auf der rechten Seite in (11.2.3). Anderenfalls wird ein Paar $\langle j, k \rangle$ ausgelost, an dem Spieler i nicht beteiligt ist. Dieses Paar verläßt dann die Spielstruktur, und Spieler i findet sich in der reduzierten Spielstruktur $G \setminus \{j, k\}$ wieder und erhält die erwartete Gleichgewichtsauszahlung für diese Struktur. Wiederrum werden alle möglichen Ergebnisse dieser Art aufaddiert und mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gewichtet. Daraus ergibt sich dann der zweite Summand auf der rechten Seite von Gleichung (11.2.3).

⁵Diese Aussage hängt direkt von der Linearität der Nutzenfunktionen ab. Für nichtlineare Nutzenfunktionen ergibt sich aus dem hier vorgestellten Verhandlungsprotokoll im allgemeinen keine der bekannten kooperativen Verhandlungslösungen.

Durch ein Auflisten von Gleichung (11.2.3) für alle Spieler, Zusammenfassung und elementare Umformung ergibt sich schließlich ein System von linearen Gleichungen $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{c}$ in folgender Form:

$$\begin{bmatrix} a_1 & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & a_2 & \dots & e_{2j} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ e_{j1} & e_{j2} & \dots & a_j & \dots & e_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nj} & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + 2 \sum_{\{j,k\} \in G \setminus \{1\}} \delta v_1^{G \setminus \{j,k\}} \\ \vdots \\ \vdots \\ m_n + 2 \sum_{\{j,k\} \in G \setminus \{n\}} \delta v_n^{G \setminus \{j,k\}} \end{bmatrix} \quad (11.2.4)$$

Bei diesem Gleichungssystem ist die Matrix $\mathbf{A}$ der Matrix der Verbindungen, $\mathbf{G}$, sehr ähnlich: Außerhalb der Diagonale ist $\mathbf{A}$ identisch mit $\delta\mathbf{G}$, es gilt also $e_{ij} = \delta$ für $\langle i, j \rangle \in G$ und ansonsten $e_{ij} = 0$. Auf der Diagonale ergibt sich $a_i = 2m - m_i\delta$.

Der Lösungsvektor $\mathbf{v}$ bestimmt die Gleichgewichtsstrategien für die Spielstruktur $\mathbf{G}$ wie oben beschrieben. Die in diesem Gleichungssystem auftretenden Gleichgewichtsauszahlungen der Fortsetzungsspiele $G \setminus \{j, k\}$ lassen sich analog berechnen. Auf diese Weise entstehen immer neue Fortsetzungsspiele, bis schließlich die *Endgraphen* erreicht werden. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß das nach einer beliebigen Einigung von zwei Spielern entstehende Fortsetzungsspiel keinerlei Verbindungen mehr enthält. Endgraphen sind leicht lösbar, da trivialerweise alle Unterstrukturen für alle verbliebenen Spieler eine Auszahlung von 0 ergeben. Durch Backward Induction lassen sich dann alle anderen v_i ermitteln, und das Einigungsgleichgewicht ist schließlich vollständig charakterisiert. Die bis zu diesem Punkt getroffenen Aussagen werden jetzt durch Satz 11.2.1 zusammengefaßt.

Satz 11.2.1 (Panther). *In einem Einigungsgleichgewicht sind die Strategien derart, daß in jeder Teilspielstruktur $\gamma \in \Gamma(G)$ Spieler i bei einem Zu-*

sammentreffen mit Spieler j bei eigenem Vorschlagsrecht einen Anteil von $1 - \delta v_j^\gamma$ verlangt und ein Angebot von j genau dann akzeptiert, wenn es ihm mindestens δv_i^γ sichert. Die v_i^γ sind hierbei jeweils iterativ über das lineare Gleichungssystem (11.2.4) bestimmt und müssen für alle $\gamma \in \Gamma(N, G)$ und für alle $\langle i, j \rangle \in G$ der Ungleichung (11.2.1) genügen.

Der Beweis für diesen Satz ergibt sich direkt aus dem oben gesagten. Aus der Struktur der Matrix in Gleichungssystem (11.2.4) kann weiterhin abgeleitet werden, daß ein Einigungsgleichgewicht —wenn es denn existiert— eindeutig ist.

Satz 11.2.2 (Panther). *Für ein beliebiges Netzspiel (N, G) und ein beliebiges $\delta < 1$ gilt: Es existiert höchstens ein Einigungsgleichgewicht.*

Beweis: Die Ungleichung $a_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N e_{ij} = (2m - m_i \delta) - m_i \delta > 0$ gilt wegen $\delta < 1$ für beliebige i . Daraus wiederum folgt, daß die Matrix $\mathbf{A}$ für beliebige Spielstrukturen G diagonaldominant ist. Damit ist sie auch regulär, und das Gleichungssystem (11.2.4) hat eine eindeutige Lösung. $\square$

Das Gleichungssystem (11.2.4) kann für beliebige Verhandlungsstrukturen (N, G) aufgestellt und gelöst werden. Das bedeutet allerdings nicht, daß jedes Spiel ein Einigungsgleichgewicht besitzt. Die hierzu nötige Bedingung wurde bereits durch Ungleichung (11.2.1) beschrieben. Ist diese Ungleichung für mindestens ein verbundenes Paar $\langle i, j \rangle$ verletzt, so kann es kein Einigungsgleichgewicht geben.



Abbildung 11.2: Eine Spielstruktur ohne Einigungsgleichgewicht

Beispielsweise besitzt die Spielstruktur in Abbildung 11.2 für ausreichend große δ kein Einigungsgleichgewicht: Die Gleichungen (11.2.3) stellen sich,

angewandt auf diesen Graphen, folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{3} \left[\delta v_1 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_1 - \delta v_2) \right] + \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{3} \delta \frac{1}{2} \\
v_2 &= \frac{1}{3} \left[\delta v_2 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_1 - \delta v_2) \right] + \frac{1}{3} \left[\delta v_2 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_2 - \delta v_3) \right] + \frac{1}{3} \delta \frac{1}{2} \\
v_3 &= \frac{1}{3} \delta \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left[\delta v_3 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_2 - \delta v_3) \right] + \frac{1}{3} \left[\delta v_3 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_3 - \delta v_4) \right] \\
v_4 &= \frac{1}{3} \delta \frac{1}{2} + \frac{1}{3} 0 + \frac{1}{3} \left[\delta v_4 + \frac{1}{2} (1 - \delta v_4 + \delta v_2) \right]
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die Lösungen $v_1 = v_4 = \frac{6+3\delta-2\delta^2}{12(3-\delta)}$ und $v_2 = v_3 = \frac{12+3\delta-2\delta^2}{12(3-\delta)}$. Falls nun δ ausreichend groß ist, so verletzen v_2 und v_3 die Ungleichung (11.2.1) und damit die notwendige Bedingung für eine Einigung. Für $\delta = 0.98$ ergibt sich beispielsweise $\delta v_2 + \delta v_3 \approx 1.053 > 1$. Unter diesen Umständen bewerten die Zentralspieler die Chance auf ein Ausbeuten der exponierten Lage der Außenspieler höher als das Ergebnis einer Zusammenarbeit miteinander, und es kann kein Einigungsgleichgewicht geben.

Auf der einen Seite gibt es also Spielstrukturen, die für einen ausreichend *großen* Diskontfaktor kein Einigungsgleichgewicht zulassen. Auf der anderen Seite kann leicht nachgewiesen werden, daß jedes Graphspiel für hinreichend *kleines* δ ein Einigungsgleichgewicht besitzt: Für $\delta \leq \frac{1}{2}$ ist die kritische Bedingung (11.2.1) wegen $v_i, v_j < 1$ immer erfüllt. Damit hat jedes Graphspiel für $\delta \leq \frac{1}{2}$ ein Einigungsgleichgewicht.

11.2.2 Allgemeine Gleichgewichte

Die Tatsache, daß für das Graphspiel in Abbildung 11.2 für große δ kein Einigungsgleichgewicht existiert, ergibt sich daraus, daß sich in einem solchen Gleichgewicht die abdiskontierten Reservationswerte der starken Zentralspieler auf mehr als 1 addieren würden. Daher würde bei jeder möglichen Einigung mindestens einer von ihnen eine Spielfortsetzung vorziehen. Der natürliche Versuch, diese Situation aufzulösen, besteht darin, eine Strategiekombination zu analysieren, in welcher sich die beiden starken Spieler im

Falle eines Aufeinandertreffens nicht einigen. Es ergibt sich aber, daß auch auf diese Weise kein Gleichgewicht gefunden wird: Nach einer entsprechenden Modifikation von Gleichungssystem (11.2.4) ergeben sich identische Spielwerte in Höhe von $v_i = \frac{1+\delta}{6-2\delta}$ für alle Agenten. Dies beruht darauf, daß die Paare $\langle 1, 2 \rangle$ und $\langle 3, 4 \rangle$ —gegeben, daß sich Spieler 2 und 3 nicht einigen— jeweils symmetrische Verhandlungspositionen haben und daher im Erwartungswert auch eine egalitäre Aufteilung erzielen. Die Nichteinigung zwischen den Mittelspielern macht somit ihren ursprünglich vorhandenen strukturellen Vorteil wieder zunichte. Mit den so hergeleiteten Spielwerten ergibt sich nun aber für beliebige δ die Ungleichung $\delta(v_2 + v_3) < 1$, und eine Einigung zwischen den Spielern 2 und 3 ist damit wieder profitabel. Damit müßte die Einigung im Gleichgewicht aber auch erfolgen und wir schlußfolgern, daß auch die oben skizzierte Strategienkombination kein Gleichgewicht beschreibt. Mit anderen Worten: Ein Gleichgewicht, in dem sich die Spieler 2 und 3 überhaupt nicht einigen, kann es ebenfalls nicht geben.

Da also für den Graph 11.2 offenbar kein Gleichgewicht in reinen Strategien existiert, wenden wir uns nun gemischten Strategien zu. Dazu bezeichne $p_{i,j} \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit, daß es zu einer Einigung kommt, wenn die Spieler i und j aufeinandertreffen. Eine notwendige Voraussetzung für die Verwendung von gemischten Strategien ist $\delta(v_i + v_j) = 1$. Das bedeutet, daß beide verhandelnden Spieler indifferent zwischen dem Erzielen einer Einigung (welche dann Auszahlungen von δv_i bzw. δv_j ergibt) oder einem Scheitern der Verhandlungen mit nachfolgender Fortsetzung des Spiels sind. Falls $\delta(v_i + v_j) > 1$ gilt, so kann entweder die Formulierung eines Angebots oder seine Annahme keine optimale Aktion sein, da mindestens einer der Spieler ein schlechteres Ergebnis als seinen Reservationswert erhält. Andererseits würde aus $\delta(v_i + v_j) < 1$ folgen, daß eine Einigung zwischen den beiden Spielern einen Überschuß generiert und daher im Gleichgewicht auch mit Sicherheit erfolgen muß.

Zusammenfassend gilt also, daß in einem Gleichgewicht in gemischten Stra-

tegien für alle Paare $\langle i, j \rangle \in G$ die Folgerungen

$$\delta v_i + \delta v_j < 1 \Rightarrow p_{i,j} = 1 \quad (11.2.5)$$

und

$$\delta v_i + \delta v_j > 1 \Rightarrow p_{i,j} = 0 \quad (11.2.6)$$

erfüllt sein müssen. Falls $\delta v_i + \delta v_j = 1$ gilt, so werden keine Anforderungen an $p_{i,j}$ gestellt.

Im folgenden werden die Sätze 11.2.1 und 11.2.2 auf Gleichgewichte in gemischten Strategien erweitert. Zu einem vorgegebenen m -dimensionalen Vektor von Einigungswahrscheinlichkeiten $p = (p_{i,j} | \langle i, j \rangle \in G) \in [0, 1]^m$ kann die Bestimmung der Spielwerte in Analogie zu Gleichung (11.2.3) für jeden Spieler i erfolgen.

$$v_i = \frac{1}{m} \sum_{j \in N_i} p_{i,j} \frac{1}{2} (1 + \delta v_i - \delta v_j) + \frac{1}{m} \sum_{\langle j,k \rangle \in G \setminus \{i\}} p_{j,k} \delta v_i^{G \setminus \{j,k\}} + \frac{1}{m} \sum_{\langle j,k \rangle \in G} (1 - p_{j,k}) \delta v_i \quad (11.2.7)$$

Die Gesamtheit der Gleichungen (11.2.7) für alle i läßt sich wiederum zu einem linearen Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{c}$ zusammenfassen.

$$\begin{bmatrix} a_1 & e_{12} & \dots & e_{1j} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & a_2 & \dots & e_{2j} & \dots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ e_{j1} & e_{j2} & \dots & a_j & \dots & e_{jn} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nj} & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j \in N_1} p_{1,j} + 2 \sum_{\langle j,k \rangle \in G \setminus \{1\}} p_{j,k} \delta v_1^{G \setminus \{j,k\}} \\ \vdots \\ \sum_{j \in N_n} p_{n,j} + 2 \sum_{\langle j,k \rangle \in G \setminus \{n\}} p_{j,k} \delta v_n^{G \setminus \{j,k\}} \end{bmatrix} \quad (11.2.8)$$

Wie zuvor gibt es eine große Ähnlichkeit zwischen der Matrix in diesem Gleichungssystem, $\mathbf{A}$, und der Spielstrukturmatrix $\mathbf{G}$: Außerhalb der Diagonale von $\mathbf{A}$ gilt $e_{ij} = p_{i,j} \delta g_{ij}$, wobei die g_{ij} die Matriceinträge von $\mathbf{G}$ sind. Auf der Diagonale ergibt sich $a_{ii} = 2m - \delta \sum_{\langle i,j \rangle \in G_i} p_{i,j} - 2\delta \sum_{\langle j,k \rangle \in G} (1 - p_{j,k})$.

Nach dieser Vorarbeit kann jetzt Satz 11.2.1 auf allgemeine Gleichgewichte erweitert werden.

Satz 11.2.3. *Zu einem gegebenen Graphspiel (N, G) und einem Diskontfaktor δ beschreiben die Vektorenmengen $p^\gamma = (p_{i,j}^\gamma, \dots)$ und $v^\gamma = (v_1^\gamma, v_2^\gamma, \dots, v_n^\gamma)$ genau dann ein Gleichgewicht, wenn sie die Bedingungen (11.2.5), (11.2.6) und (11.2.8) für alle $\gamma \in \Gamma(G)$ erfüllen.*

In diesem Gleichgewicht einigt sich das Spielerpaar $\langle i, j \rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $p_{i,j}^\gamma$, wenn es im Teilgraph γ aufeinandertrifft. Falls sich die Spieler einigen, so bietet der vorschlagende Spieler i seinem Gegenüber j einen Anteil von δv_j^γ an, was von diesem akzeptiert wird.

Der Beweis für Satz 11.2.3 ergibt sich direkt aus dem oben Gesagten. Als Ergebnis dieses Satzes kann ein Gleichgewicht durch die Menge der charakteristischen Vektoren v^γ und p^γ beschrieben werden. Da dies bei einigen Graphen wegen der Vielzahl der Teilgraphen aber in einer sehr aufwendigen Notation resultieren würde, beschränken wir uns von nun an bei der Beschreibung eines Gleichgewichts auf die Angabe der charakteristischen Vektoren des Originalspiels, p^G und v^G . Insbesondere wird in v^G ja auch das erwartete Gleichgewichtsergebnis für die einzelnen Spieler beschrieben. Daher ist dieser Vektor das aus ökonomischer Sicht interessanteste Charakteristikum eines Gleichgewichts.

Auch für die Matrix in Gleichungssystem (11.2.8) kann gezeigt werden, daß sie diagonaldominant ist. Daher läßt sich Satz 11.2.2 auf Gleichgewichte in gemischten Strategien erweitern.

Satz 11.2.4. *Sei eine beliebige Spielstruktur (N, G) vorgegeben. Zu einem gegebenen Vektor von Einigungswahrscheinlichkeiten, $p \in [0, 1]^m$, und gegebenen Spielerauszahlungen für alle Teilgraphen, v_i^γ , besitzt Gleichung (11.2.8) eine eindeutige Lösung. Das heißt, zu einem gegebenen Vektor von Einigungswahrscheinlichkeiten existiert höchstens ein korrespondierender Vektor $v \in [0, 1]^n$ von Gleichgewichtsauszahlungen.*

Beweis: Aus der Gleichungskette

$$\begin{aligned}
& a_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N e_{ij} \\
&= 2m - \delta \sum_{\langle i, j \rangle \in G_i} p_{i,j} - 2\delta \sum_{\langle j, k \rangle \in G} (1 - p_{j,k}) - \sum_{j=1, j \neq i}^N p_{i,j} \delta g_{ij} \\
&= 2m - \delta \sum_{\langle i, j \rangle \in G_i} p_{i,j} - 2\delta \sum_{\langle j, k \rangle \in G} (1 - p_{j,k}) - \delta \sum_{\langle i, j \rangle \in G_i} p_{i,j} \\
&= 2m - 2\delta \sum_{\langle j, k \rangle \in G} 1 + 2\delta \sum_{\langle j, k \rangle \in G} p_{j,k} - \delta \sum_{\langle i, j \rangle \in G_i} p_{i,j} - \delta \sum_{\langle i, j \rangle \in G_i} p_{i,j} \\
&\geq 2m - 2\delta \sum_{\langle j, k \rangle \in G} 1 \\
&= 2m - 2\delta m \\
&> 0
\end{aligned}$$

folgt, daß die Matrix in Gleichungssystem (11.2.8) diagonaldominant und damit regulär ist, woraus sich das Behauptete direkt ergibt. $\square$

Um also ein Gleichgewicht für ein gegebenes Graphspiel zu konstruieren, müssen die $p_{i,j}$ derart bestimmt werden, daß die sich daraus eindeutig ergebenden v_i die Bedingungen (11.2.5) und (11.2.6) erfüllen. Wenn dieses Problem immer lösbar ist, so ist gesichert, daß für beliebige Spielstrukturen ein Gleichgewicht existiert.

Diese Fragestellung ist nicht trivial, da die Standardsätze der Spieltheorie über die Existenz eines Gleichgewichts (vergleiche beispielsweise DASGUPTA/MASKIN (1986)) für die Analyse von Graphspielen nicht eingesetzt werden können. Das Hauptproblem ist, daß die Auszahlungen der Spieler nicht stetig von ihren Strategiemengen abhängen: Eine marginale Verringerung im Angebot eines Spielers kann dazu führen, daß dieses von seinem Gegenüber nicht mehr akzeptiert wird, was substantielle Auswirkungen auf die erwarteten Auszahlungen aller Spieler nach sich zieht. Mit Hilfe von KAKUTANIS Fixpunkttheorem ist es aber dennoch möglich, das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 11.2.5. *Zu jedem Graphspiel (N, G) und zu jedem $\delta \in (0, 1)$ existiert mindestens ein Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

Beweis: Der Beweis verläuft via Induktion über n , die Gesamtzahl der Spieler. Die Induktionsverankerung für $n = 1$ ist trivial. Für $n = 2$ ergibt sich eine Art Rubinsteinspiel mit zufällig verteiltem Vorschlagsrecht. Für dieses Spiel kann ein Gleichgewicht mit $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$ leicht konstruiert werden.

Sei nun die Aussage des Theorems für alle Spielstrukturen mit bis zu $n + 1$ Spielern bewiesen, und sei ein Diskontfaktor δ und ein beliebiges Graphspiel (N, G) mit $n + 2$ Spielern und m Verbindungen vorgegeben. Für jeden Teilgraph von (N, G) läßt sich nach der Induktionsvoraussetzung ein Gleichgewicht berechnen. Weiter sei die Abbildung $\tilde{v} : [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]^{n+2}$ dadurch definiert, daß $\tilde{v}(p)$ der Vektor der Spielwerte ist, der sich nach Satz 11.2.4 eindeutig aus dem Vektor der Einigungswahrscheinlichkeiten p ergibt.

Es wird nun behauptet, daß die Funktion $\tilde{v}(p)$ stetig im Vektor p ist. Hierzu ist zunächst festzuhalten, daß die Matrix A und der Vektor c in Gleichungssystem (11.2.8) stetig von p abhängen. Da die Matrix A regulär ist, existiert ihre Inverse A^{-1} und ist ebenfalls stetig in p . Also hängt auch $\tilde{v}(p) = A^{-1}c$ stetig von p ab.

Nun bezeichne $V = [0, 1]^{n+2}$ den Raum aller möglichen Auszahlungsvektoren und es sei die Korrespondenz⁶ $\tilde{p}(v) : V \rightarrow \mathcal{P}([0, 1])$ folgendermaßen definiert: Zu vorgegebenen $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ seien für alle $\langle i, j \rangle \in G$ die Mengen $\tilde{p}_{i,j}(v)$ durch

$$\tilde{p}_{i,j}(v) = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } \delta(v_i + v_j) < 1 \\ \{0\} & \text{falls } \delta(v_i + v_j) > 1 \\ [0, 1] & \text{falls } \delta(v_i + v_j) = 1 \end{cases}$$

beschrieben.

Nun wird die Korrespondenz⁷ $\tilde{p} : V \rightarrow [0, 1]^G$ durch $\tilde{p}(v) = \mathbf{X}_{\langle i,j \rangle \in G} \tilde{p}_{i,j}(v)$

⁶Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}([0, 1])$ die Potenzmenge von $[0, 1]$.

⁷In der folgenden Gleichung bezeichnet $\mathbf{X}_{\langle i,j \rangle \in G} \tilde{p}_{i,j}(v)$ das Mengenkreuzprodukt der Mengen $\tilde{p}_{i,j}(v)$ über alle $\langle i, j \rangle \in G$.

definiert. Damit ordnet $\tilde{p}$ jedem Auszahlungsvektor v genau die Menge aller Einigungswahrscheinlichkeitsvektoren zu, die mit den Bedingungen (11.2.5) und (11.2.6) korrespondieren. Die Motivation für $\tilde{p}$ ergibt sich aus der klassischen 'best response correspondence' in der Spieltheorie, ist aber nicht mit ihr identisch.

Es läßt sich leicht verifizieren, daß die Korrespondenzen $\tilde{p}_{i,j}$ und damit auch $\tilde{p}$ halbstetig von oben sind. Wegen der Stetigkeit der Funktion $\tilde{v}$ ist daher die Korrespondenz $F : V \rightarrow V$, die durch $F(v) = \tilde{v} \circ \tilde{p}(v) = \tilde{v}(\tilde{p}(v))$ definiert wird, ebenfalls halbstetig von oben. Damit hat F als Resultat von Kakutanis Fixpunkttheorem einen Fixpunkt v^* mit $v^* \in F(v^*)$. Zusammen mit dem entsprechenden Vektor p^* beschreibt Vektor v^* ein Gleichgewicht des Graphspiels im Sinne von Satz 11.2.3. $\square$

Unter Anwendung gemischter Strategien ist es nun beispielsweise möglich, das in Abbildung 11.2 dargestellte Spiel auch für große δ zu lösen. Die Berechnung des symmetrischen Gleichgewichts ergibt die Auszahlungen $v_2 = v_3 = \frac{1}{2\delta}$ sowie $v_1 = v_4 = \frac{-6+5\delta+2\delta^2}{2\delta^2}$ und schließlich $p_{2,3} = \frac{18-24\delta+2\delta^2+4\delta^3}{\delta(-6+5\delta+2\delta^2)}$. Für eine eingehendere Analyse dieses Gleichgewichts sei auf das nächste Kapitel verwiesen.

Die Frage, ob beliebige Netzspiele ein *eindeutiges* Gleichgewicht besitzen, konnte nicht abschließend beantwortet werden. Es kann daher an dieser Stelle nur auf einige Schwierigkeiten hingewiesen werden, die sich bei der Bearbeitung dieses Problems ergeben. Zunächst muß festgestellt werden, daß der Begriff 'eindeutig' in diesem Zusammenhang nur eingeschränkt verwendet werden kann. So gibt es beispielsweise verschiedene Möglichkeiten, eine vorgegebene Einigungswahrscheinlichkeit zu realisieren. Beispielsweise führt das Strategienpaar 'biete einen Anteil von x mit Wahrscheinlichkeit p an und offeriere 0 mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ ' und 'akzeptiere ein Angebot nur, wenn es genau x beträgt' dazu, daß die Aufteilung x mit Wahrscheinlichkeit p realisiert wird. Dasselbe Ergebnis kann aber auch mit dem Strategienpaar 'biete x an' und 'akzeptiere ein Angebot der Höhe x mit einer Wahrscheinlichkeit p ' erreicht werden. Wenn die beiden Strategienkombinationen auch

identische Ergebnisse produzieren, so sind sie doch im rein formalen Sinne verschieden. Unter diesem Gesichtspunkt hat beispielsweise das Graphspiel 11.2 für große δ bei genauer Betrachtung mehrere Gleichgewichte. Allerdings ist diese Aussage unter Anwendungsgesichtspunkten wertlos. Die aus ökonomischer Sicht interessante Frage lautet, ob zu einem gegebenen Graphspiel die für ein Gleichgewicht charakteristischen Werte, die Vektoren p und v , eindeutig bestimmt sind.

Hierzu kann anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden, daß es eine Eindeutigkeit des Gleichgewichts, wenn überhaupt, nur in bezug auf die *Gleichgewichtsauszahlungen* der Spieler, v_i , nicht aber in bezug auf die Einigungswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ geben kann. Zu diesem Zweck sei das Graphspiel $G = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 8 \rangle\}$ in Abbildung 11.3 betrachtet.

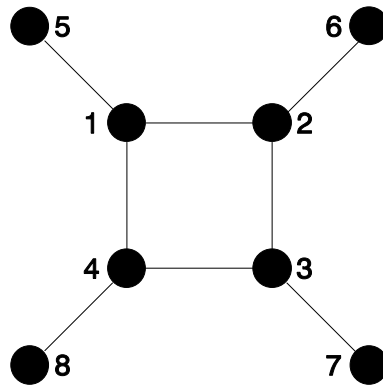


Abbildung 11.3: Ein Graphspiel mit mehreren Gleichgewichten

Eine Berechnung der Spielwerte ergibt für diese Struktur für $\delta = 0.99$ ein symmetrisches Gleichgewicht mit den Werten $v_i = 0.50505$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und $v_i = 0.421$ für $i = 5, 6, 7, 8$. Weiter gilt in diesem Gleichgewicht $p_{1,2} = p_{2,3} = p_{3,4} = p_{4,1} = p := 0.179$ sowie $p_{1,5} = p_{2,6} = p_{3,7} = p_{4,8} = 1$. Nun kann aber leicht überprüft werden, daß für ein beliebiges $\varepsilon \leq p$ auch die veränderte Menge von Einigungswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}_{1,2} = \tilde{p}_{3,4} = p + \varepsilon$ und

$\tilde{p}_{2,3} = \tilde{p}_{4,1} = p - \varepsilon$ dieselben Auszahlungswerte für die Spieler ergeben und somit ebenfalls ein Gleichgewicht charakterisieren.

Also kann es eine allgemeine Eindeutigkeitsaussage höchstens für die Auszahlungsvektoren im Gleichgewicht, nicht aber für die Einigungswahrscheinlichkeiten $p_{i,j}$ geben. Eine solche Eindeutigkeitsaussage konnte bis jetzt noch nicht nachgewiesen werden. Andererseits gelang es auch nicht, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, das mehrere Auszahlungsvektoren durch Gleichgewichte unterstützt.

Es ist die Vermutung des Autors, daß es keine Graphstruktur gibt, die mehrere unterschiedliche Vektoren v als Gleichgewichtsauszahlung zuläßt. Im folgenden wird daher der Einfachheit halber von *den* Gleichgewichtsauszahlungen die Rede sein, obwohl im streng formalen Sinne eigentlich die Formulierung 'die Auszahlungen in *einem* Gleichgewicht' verwendet werden müßte. Die Vermutung, daß die Gleichgewichtsauszahlungen für eine beliebige Spielstruktur eindeutig bestimmt sind, wird zum Abschluß dieses Kapitels formal festgehalten.

Vermutung 11.2.6. *Zu einer beliebigen Spielstruktur (N, G) gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor von Auszahlungen $v = (v_1, \dots, v_n)$ derart, daß jedes Gleichgewicht diese Werte für die Spieler generiert.*

Kapitel 12

Anwendungsbeispiele

12.1 Elemente von Verhandlungsstärke

In diesem Kapitel wird anhand einiger numerisch berechneter Beispiele demonstriert, welche Einflüsse auf die Verhandlungsstärke eines Spielers in vernetzten Strukturen anhand von Graphspielen aufzeigt werden können. Als Verhandlungsstärke eines Spielers i wird in diesem Kontext sein Gleichgewichtsergebnis v_i interpretiert. Dieses wird von zwei Einflußgrößen beeinflusst, nämlich dem Diskontfaktor δ und der Graphstruktur G . Die möglichen Wirkungen dieser beiden Aspekte werden in den beiden Teilabschnitten dieses Kapitels nacheinander behandelt. Während die Bedeutung des Diskontfaktors δ in Teilabschnitt 12.1.1 im Vordergrund steht, werden in 12.1.2 einige Beispiele zur Auswirkung der Graphstruktur gebracht.

Die Gleichgewichtsberechnungen in diesem Abschnitt wurden mit dem Programmpaket Mathematica entsprechend den Beschreibungen in Abschnitt 11.2 durchgeführt¹ und werden bei den einzelnen Beispielen nicht mehr näher erläutert. Statt dessen wird eine intuitive Erklärung zu den beobachteten Ergebnissen und Entwicklungen offeriert.

¹Die Berechnungsprogramme sind auf Anfrage beim Autor erhältlich.

12.1.1 Variation des Diskontfaktors

Es gibt viele ökonomische Interpretationen für die Veränderung eines Diskontfaktors: Beispiele wären eine veränderte Aktionsgeschwindigkeit der Spieler, eine andere Zeitpräferenz oder auch eine neue Einschätzung der Agenten, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Spiel in der nächsten Periode fortgesetzt wird. Wie im folgenden gezeigt wird, erhöht ein größerer Diskontfaktor zwar erwartungsgemäß die Summe der Auszahlungen aller Spieler, daraus folgt aber nicht unbedingt, daß sich auch das Ergebnis jedes einzelnen Agenten verbessert. Um die verschiedenen Effekte, die von einem veränderten Diskontfaktor ausgehen können, zu studieren, werden in diesem Teilabschnitt asymmetrische Verhandlungsstrukturen mit starken und schwachen Spielern untersucht. Insbesondere geht es dabei um die Frage, ob es Grundregeln gibt, welche Spieler von schrumpfenden Verzögerungskosten am meisten profitieren. Anhand von zwei Beispielen wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist. Es wird deutlich, daß sowohl eine Verstärkung als auch eine Abschwächung des strukturell gegebenen Verhandlungsvorteils aus einer Erhöhung des Diskontfaktors resultieren können.

Eine intuitiv leicht einsichtige Werteentwicklung ergibt sich für den Graph 11.1. Abbildung 12.1 zeigt für diesen Graphen die Auszahlungen des Zentralspielers 2 und der Randspieler 1 und 3 (wobei im Gleichgewicht selbstverständlich $v_1 = v_3$ gilt).

Ein niedriger Diskontfaktor bedeutet ganz allgemein, daß die Kosten von ergebnislosen Verhandlungen für alle Beteiligten wachsen. Wenn aber das Scheitern der Verhandlungen für beide Partner kostspielig ist, so führt dies in einer Verhandlungssituation dazu, daß die resultierende Aufteilung egalitärer wird; in der formalen Analyse kann dies daran erkannt werden, daß der Überschuß $1 - \delta v_i - \delta v_j$ wächst, der (vergleiche Gleichung (11.2.2)) zwischen den Verhandelnden gleich verteilt wird. Im Extremfall $\delta = 0$ ergibt sich bei jeder Verhandlung —unabhängig von der Struktur des Graphen— eine erwartete Aufteilung von $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Daraus ergibt sich für jeden Spieler i für $\delta = 0$ eine Auszahlung von $\frac{m_i}{2m}$. In Graph 12.1 ergibt sich also $v_1 = v_3 = \frac{1}{4}$

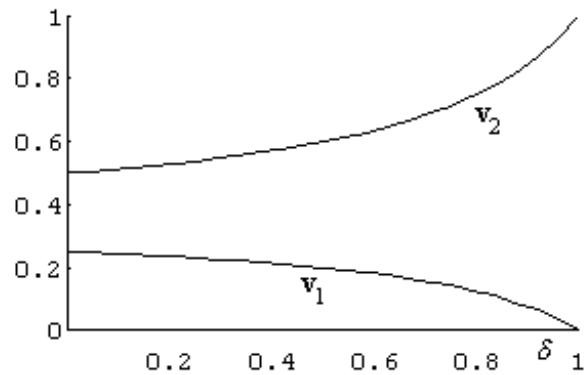


Abbildung 12.1: Die Gleichgewichtsauszahlungen für Spielstruktur 11.1

und $v_2 = \frac{1}{2}$.

Für wachsendes δ vergrößert sich die Auszahlung des Zentralspielers und das Ergebnis der Randspieler verringert sich. Dies ergibt sich aus der günstigen Position, in der sich Spieler 2 befindet; er kann die beiden Randspieler gegeneinander ausspielen, da bei jedem Spielverlauf einer von ihnen ohne Handelspartner verbleiben und daher leer ausgehen muß. Trifft unter diesen Bedingungen ein Randspieler auf den Zentralspieler, so kann er nur dann auf eine positive Auszahlung hoffen, wenn er einen Teil der Verzögerungskosten für sich deklariert, die dieser als Folge einer Nichteinigung erdulden müßte. Diese Kosten werden aber mit steigendem δ immer geringer und konvergieren im Grenzfall $\delta \rightarrow 1$ gegen Null. Der Zentralspieler kann dann die volle Gesamtauszahlung von 1 für sich beanspruchen.

Dieses Ergebnis entspricht auch einer einfachen ökonomischen Intuition: Der Zentralspieler läßt sich als ein 'monopolistischer Verkäufer' interpretieren, der eine einzelne Einheit eines unteilbaren Gutes besitzt; die Randspieler entsprechen dann zwei Käufern, die eine Zahlungsbereitschaft in Höhe von 1 und eine unelastische Nachfrage nach einer Einheit dieses Gutes haben. Im Grenzfall verschwindender Verzögerungs- und Verhandlungskosten kann der Monopolist seine Marktmacht voll ausspielen und das Gut zum Preis von 1

verkaufen. Dieses Ergebnis entspricht auch den entsprechenden Resultaten der klassischen mikroökonomischen Theorie. In Abschnitt 12.3 wird auf die Anwendung von Graphspielen als Marktmodelle ausführlicher eingegangen.

In Graph 11.1 führt also ein größeres δ zu einer Begünstigung des strukturell bevorteilten Spielers. Ein genau entgegengesetztes Ergebnis mit einer komplizierteren Intuition ergibt sich für Spielstruktur 11.2. Die Gleichgewichtsauszahlungen der Spieler 1 und 2 für dieses Graphspiel sind in Abbildung 12.2 gezeigt.²

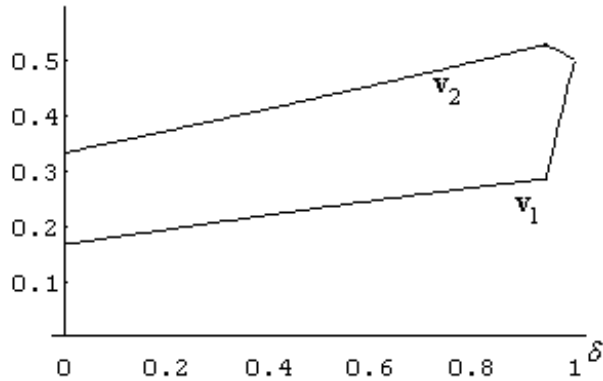


Abbildung 12.2: Gleichgewichtsergebnisse für den Graph in Abbildung 11.2

Im Gegensatz zum Graphen 12.1 bewirkt ein größeres δ hier durchgehend auch eine Verbesserung der Situation der Randspieler. Die Auszahlungskurve der Zentralspieler hingegen knickt bei $\delta = \delta^* \approx 0,945$ ab und entwickelt sich ab dieser Stelle fallend. Für $\delta \rightarrow 1$ konvergiert die Auszahlung aller Spieler gegen $\frac{1}{2}$. Parallel dazu geht die Einigungswahrscheinlichkeit der Zentralspieler, $p_{2,3}$, gegen 0.

Eine Erklärung für die Entwicklung der Kurve $v_2(\delta)$ beginnt damit, daß sich bei $\delta = \delta^*$ auch das Gleichgewichtsverhalten der Zentralspieler ändert. Sie verwenden gemischte Strategien und einigen sich im Falle eines Aufeinan-

²Die Werte der anderen Spieler werden hier nicht aufgeführt, da im symmetrischen Gleichgewicht selbstverständlich $v_1 = v_4$ und $v_2 = v_3$ gilt.

dertreffens nicht mehr mit Sicherheit, sondern nur noch mit einer positiven Wahrscheinlichkeit $p_{2,3} \in (0, 1)$. Daraus ergibt sich die Gleichung $\delta v_2 + \delta v_3 = 1$ und damit, wegen der Symmetrie des Gleichgewichts, $v_2 = v_3 = \frac{1}{\delta 2}$. Durch diese Gleichung wird die Auszahlungskurve der Zentralspieler für $\delta > \delta^*$ beschrieben. Für $\delta \rightarrow 1$ konvergiert daher die Auszahlung der Spieler 2 und 3 gegen $\frac{1}{2}$.

Um die Entwicklung der Funktion $v_1(\delta)$, der Auszahlungsentwicklung der Randspieler, verstehen zu können, muß zunächst die Situation der Zentralspieler genauer betrachtet werden. Sie können aus Symmetriegründen bei beliebigem δ aus einer Einigung miteinander immer eine Auszahlung von $\frac{1}{2}$ erwarten. Für große δ haben die Spieler 2 und 3 im Falle eines Aufeinandertreffens zwei Möglichkeiten: Sie können sich einigen, oder sie können die Verhandlungen scheitern lassen und darauf hoffen, in einer späteren Periode von der schlechten Verhandlungsposition der Randspieler zu profitieren. Letztere Option muß, da die Zentralspieler zwischen diesen beiden Möglichkeiten randomisieren, ebenfalls eine erwartete Auszahlung von $\frac{1}{2}$ ergeben. Nun hängt der Wert dieser Alternative zum einen von dem Diskontfaktor ab, der die Kosten der eintretenden Verzögerung bestimmt. Zum anderen ergibt er sich aus dem niedrigen Gleichgewichtsergebnis der Randspieler, von dem die Zentralspieler profitieren, wenn sie auf diese treffen. Steigt der Diskontfaktor, so schrumpfen die Kosten, die sich aus der Verzögerung der Einigung ergeben. Entsprechend muß, damit die erwartete Auszahlung einer Nichteinigung bei $\frac{1}{2}$ bleibt, die Möglichkeit zur Ausbeutung der Randspieler geringer werden. Das bedeutet, mit steigendem δ muß im Gleichgewicht die Auszahlung der Randspieler steigen. Dies wiederum kann nur dann der Fall sein, wenn die Einigungswahrscheinlichkeit der Zentralspieler sinkt. Denn je weniger wahrscheinlich eine Einigung zwischen den Spielern 2 und 3 ist, desto geringer ist die Gefahr für die Randspieler, am Ende ohne Verhandlungspartner das Spiel beenden zu müssen, und desto stärker wird ceteri paribus ihre Verhandlungsposition. Aus dem Zusammenspiel dieser Effekte ergibt sich der beobachtete Verlauf der Gleichgewichtsergebnisse. Die Bedeutung des strukturellen Ver-

handlungsvorteils der Zentralspieler wird immer geringer und verschwindet im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ schließlich völlig.

Auf einer rein intuitiven Ebene kann diese Erklärung noch etwas anders formuliert werden: Mit wachsendem δ sinken die Verzögerungskosten, die die Zentralspieler im Falle einer Nichteinigung erleiden. Damit ist eine Einigung zwischen ihnen nicht mehr so attraktiv (noch ein wenig zu warten kostet ja nicht viel) und auch nicht mehr so wahrscheinlich. Folglich verliert die Drohung, daß die beiden Zentralspieler sich einigen *könnten*, an Kraft. Dadurch wird auch das Druckmittel geschwächt, mit dem die Randspieler ausgebeutet wurden und deren Position verbessert sich. Im Grenzwert $\delta = 1$ schließlich haben die Zentralspieler jeglichen Verhandlungsvorteil verloren, und es ergibt sich eine egalitäre Aufteilung.

Als Ergebnis der Beispiele 11.1 und 11.2 kann festgehalten werden, daß die Auswirkungen eines größeren δ unterschiedliche Effekte auf die strukturell bevorteilten Agenten haben können. Der Verhandlungsvorteil kann verschwinden, wie dies bei Graph 11.2 beobachtet wurde, oder sich verstärken, wie es in Graph 11.1 der Fall ist. Als ein erster Erklärungsversuch für diese Beobachtung bietet sich die *strukturelle Ineffizienz* als ein Garant für einen sich vergrößernden Verhandlungsvorteil an: In Graph 11.1 *muß* am Ende einer der benachteiligten Spieler ohne Verhandlungspartner verbleiben, wohingegen es bei Graph 11.2 möglich ist, daß alle Spieler eine Verhandlung erfolgreich abschliessen. Dadurch ist garantiert, daß das Drohpotential der Zentralspieler in Graph 11.1 auch bei großem δ nicht verschwindet.

Anhand der Beispiele im nächsten Teilabschnitt wird aber deutlich, daß die hier beschriebene Ineffizienz keinesfalls die einzig mögliche Erklärung für bleibenden Verhandlungsvorteil darstellt (vergleiche Graph 12.14). Auch kann sie nicht garantieren, daß die Auszahlung der Zentralspieler gegen den Extremwert 1 konvergiert (vergleiche Graph 12.3). Die Bestimmungsgründe von Verhandlungsstärke in Graphspielen sind so vielfältig, daß eine Formulierung von einfachen und allgemeingültigen Kennzeichen bleibender Verhandlungsmacht nicht möglich ist.

12.1.2 Strukturelle Effekte

Bei dem Versuch, allgemeine Aussagen über die Auswirkungen von Netzstrukturen auf die Verhandlungsstärke der Agenten zu treffen, ergibt sich ein ähnliches Ergebnis wie im letzten Teilabschnitt: Graphspiele erweisen sich als eine eigenständige Form der Verhandlung und die Ursachen von Verhandlungsmacht lassen sich in der hier verwendeten Modellierung nicht durch einfache und allgemeingültige Faustregeln beschreiben. In den folgenden Teilabschnitten wird diese Aussage untermauert. Es wird sich zeigen, daß auch 'offensichtliche' Verhandlungsvorteile wie Zentralität oder eine große Anzahl von Verhandlungspartnern keinesfalls eine verlässliche Garantie für Verhandlungsstärke bilden. Ein weiterer Schwerpunkt in den nächsten Beispielen liegt im Aufzeigen der starken externen Effekte, die von einzelnen Verbindungen ausgehen können. Die Auswirkungen einer einzelnen Verbindung auf aussenstehende Spieler können wesentlich stärker sein als die direkte Wirkung auf die neu verbundenen Akteure.

Wie im letzten Teilabschnitt werden zu den Beispielen jeweils intuitive Erklärungen angeboten.

12.1.2.1 Zentralität

Ein naheliegender Gedanke lautet, daß die Gleichgewichtsauszahlungen eines Spielers vor allem durch seine Zentralität im Netz bestimmt werden. Die Untersuchungen in Abschnitt 12.1.1 unterstützen diese Vermutung; dort hatten jeweils die Zentralspieler die meisten Verhandlungspartner und auch das beste Gleichgewichtsergebnis vorzuweisen.

Diese Beobachtung läßt sich jedoch nicht verallgemeinern. Weder Zentralität noch eine große Anzahl an Verhandlungspartnern können einem Spieler eine starke Verhandlungsposition garantieren, wie anhand des folgenden Beispiels (das zuerst von Stephan Panther untersucht wurde) demonstriert wird.

Die Auszahlungen zu Graphspiel 12.3³ sind in Abbildung 12.4 ge-

³Für diesen Graphen gibt es eine anschauliche ökonomische Interpretation: Hierbei

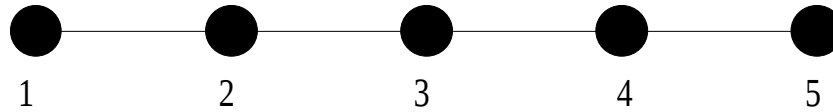


Abbildung 12.3: Ein Graph mit einem schwachen Zentralspieler

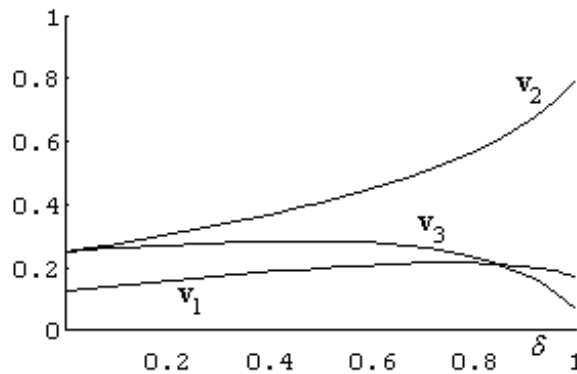


Abbildung 12.4: Die Gleichgewichtsauszahlungen zum Graphen in Abbildung 12.3

zeigt. Bemerkenswert ist hierbei vor allem das Ergebnis von Spieler 3, das für große δ das schlechteste aller Akteure ist. Dies gilt trotz seiner hohen Zentralität und überrascht insbesondere deshalb, weil die Menge der mit 3 verbundenen Spieler eine Obermenge der mit 1 verbundenen Agenten darstellt. Daher wäre es auf den ersten Blick einsichtiger, die Randspieler 1 und

entsprechen die fünf Agenten jeweils einem Unternehmen. Diese Unternehmen sind geographisch auf einer Linie angeordnet, und es wird angenommen, daß der Abstand zwischen zwei benachbarten Unternehmen stets eine Streckeneinheit (SE) beträgt. Die Unternehmen 2 und 4 sind 'Steinbrüche', d.h., sie produzieren eine Einheit eines schwer transportierbaren Gutes. Die Produktionskosten betragen Null. Bei den anderen drei Unternehmen handelt es sich um 'Bauunternehmer', die jeweils Bedarf an einer Einheit dieses Gutes haben und hierfür eine Zahlungsbereitschaft von 200 Geldeinheiten (GE) besitzen. Der Transport von einer Einheit über eine Streckeneinheit kostet jeweils 100 GE. Damit ergibt sich bei je zwei benachbarten Unternehmen ein aufteilbarer Überschuß von 100 GE.

5 als die schwächsten Akteure in diesem System einzustufen.

Die Erklärung für die Verhandlungsschwäche von Spieler 3 liegt darin, daß er sich nach dem Ausscheiden der Paare $\langle 1, 2 \rangle$ oder $\langle 4, 5 \rangle$ in der sehr ungünstigen Randposition aus Abbildung 11.1 wiederfindet, in der sein Spielwert für $\delta \rightarrow 1$, wie in Abschnitt 12.1.1 gesehen, gegen Null konvergiert. Falls sich Spieler 3 also nicht als erster einigt, so kann er sicher sein, in dem resultierenden Teilgraphen ein ungünstiges Resultat zu erhalten. Im Gegensatz dazu sieht sich der Randspieler 1 zwar einerseits der Gefahr ausgesetzt, nach einer Einigung von 2 und 3 in einem Teilnetz zu enden, in dem er überhaupt keine Verbindung mehr besitzt. Andererseits kann er darauf hoffen, nach dem Abgang des Spielerpaars $\langle 3, 4 \rangle$ auf einer gleichberechtigten Basis mit Spieler 2 zu verhandeln. Somit hat Spieler 1 immerhin eine Chance von $\frac{1}{4}$, in einer späteren Periode in ein Teilnetz mit einer erwarteten Auszahlung von $\frac{1}{2}$ zu gelangen. Diese Option besitzt Spieler 3 nicht, woraus ein stärkerer Einigungsdruck resultiert. Hieraus ergibt sich dann die bessere Verhandlungsposition von Spieler 1.

Bemerkenswert ist auch, daß die Auszahlung der Zentralspieler in diesem Graphen trotz der strukturellen Ineffizienz für $\delta \rightarrow 1$ nicht gegen 1 geht. Dies läßt sich folgendermaßen erklären: Die Position der Randspieler ist —wie oben beschrieben— so stark, daß die Randpositionen auch im Grenzfall $\delta \rightarrow 1$ ein Ergebnis größer als Null erzielen. Daraus folgt, daß die starken Spieler 2 und 4 nicht wie in Graph 11.1 im Grenzwert ein Gleichgewichtsergebnis von 1 für sich beanspruchen können. Hieraus wiederum ergibt sich, daß auch der schwache Zentralspieler im Grenzfall eine positive Auszahlung erhält.

Eine weitere Auffälligkeit in Abbildung 12.4 besteht darin, daß die Gleichgewichtsauszahlungen der schwächeren Spieler ihr Maximum jeweils im Inneren des Intervalls $[0, 1]$ haben. Die Auszahlungen v_1 und v_3 sind also nicht monoton in δ , und im Unterschied zu den Auszahlungsentwicklungen von Spieler 2 in Graph 11.2 (vergleiche Abbildung 12.2) geht diese Entwicklung hier nicht mit einer qualitativen Veränderung der Gleichgewichtsstrategien einher. Der Grund hierfür liegt darin, daß einerseits die Spieler 1, 3 und 5 von

den Verzögerungskosten profitieren, die den starken Spielern 2 und 4 aus dem Scheitern einer Einigung entstehen würden. Für ein wachsendes δ schrumpfen nun diese Kosten von Spieler 2, was sich negativ auf die Auszahlungen der schwachen Spieler auswirkt. Auf der anderen Seite steigt mit wachsendem δ auch die Gesamtauszahlung aller Agenten (der Wert aller Einigungen in späteren Perioden wird erhöht), was sich positiv in den Auszahlungen aller Spieler niederschlägt. Bei einer Veränderung von δ wirken nun diese beiden Effekte gegeneinander; die maximale Auszahlung für die schwachen Spieler ergibt sich an dem Punkt, wo sich die Veränderungen dieser Effekte bei einer marginalen Änderung von δ gerade aufheben.

12.1.2.2 Neue Verhandlungspartner und Verzögerungseffekte

Ein anderer naheliegender Gedanke zur Bestimmung von Verhandlungsstärke besagt, daß das Hinzufügen einer Verbindung zu einem Graphen vor allem den beiden neu verbundenen Spielern nützt. Natürlich ist diese Vermutung nicht grundsätzlich falsch, aber die Effekte, die von einer neuen Verbindung ausgehen, können vielfältiger Natur sein und in Extremfällen auch den neu verbundenen Spielern schaden.

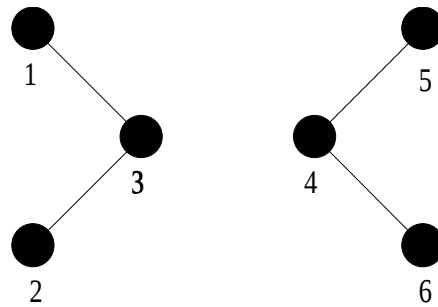


Abbildung 12.5: Zwei getrennte Systeme mit jeweils einem starken Spieler

Ein ganz elementares Beispiel hierfür ist in den Graphen 12.5 und 12.6 dargestellt, die sich nur durch eine einzige Verbindung unterscheiden. Für

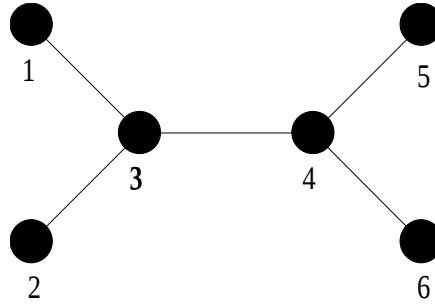


Abbildung 12.6: Der Graph aus Abbildung 12.5 plus eine weitere Verbindung

festgehaltenes $\delta = 0,95$ ergeben sich für Graph 12.5 Spielwerte in Höhe von $v_3 = v_4 = 0,88$ und $v_1 = v_2 = v_5 = v_6 = 0,046$. Für Abbildung 12.6 resultieren Gleichgewichtsauszahlungen von $v_3 = v_4 = 0,87$ und $v_1 = v_2 = v_5 = v_6 = 0,048$. Das Hinzufügen der Verbindung zwischen 3 und 4 schädigt also diese beiden Spieler und begünstigt alle anderen, was auf den ersten Blick geradezu paradox wirkt. Dieses Resultat läßt sich dadurch erklären, daß die neu eingefügte Verbindung im Gleichgewicht niemals genutzt wird und somit lediglich ein 'waste of time', eine Verzögerung im Ablauf des Spiels darstellt. Damit wirkt das Einfügen einer weiteren Verbindung wie ein Absenken des Diskontfaktors beim Graphen in Abbildung 12.3; die Verzögerungskosten einer Nichteinigung werden für die Zentralspieler erhöht, und es ergibt sich eine bessere Verhandlungsposition für die Randspieler. Intuitiv gesprochen besteht für die Zentralspieler die Gefahr, bei Verhandlungen miteinander Zeit zu vergeuden, bis sie sich gegenseitig von der Unmöglichkeit einer profitablen Zusammenarbeit überzeugt haben. Daher vergeht im Erwartungswert mehr Zeit, bis sie nach einem Scheitern von Verhandlungen wieder die Möglichkeit zu Interaktion mit den Randspielern bekommen. Damit steigen die Kosten für einen Fehlschlag der Verhandlungen, und die Verhandlungsposition der Randspieler verbessert sich. Im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ lösen sich diese Verzögerungseffekte dann aber wieder auf; es ergeben sich —unabhängig von Existenz der Verbindung zwischen 3 und 4— Auszah-

lungsgrenzwerte von 1 für die Zentralspieler 3 und 4 und ein Ergebnis von 0 für die Randspieler 1, 2, 5 und 6.

Es kann also geschehen, daß das Hinzufügen einer neuen Verbindung ausschließlich Verzögerungseffekte produziert und keine weiteren Auswirkungen auf die Verhandlungsposition der einzelnen Spieler hat. In diesem Fall bewirkt die neue Verbindung vor allem einen stärkeren Einigungsdruck für die starken Spieler und schwächt damit deren Position.

12.1.2.3 Neue Verhandlungspartner und externe Effekte

Fügt man in einen bestehenden Graphen neue Verbindungen ein, so können externe Effekte entstehen. Damit ist in diesem Zusammenhang die Wirkung einer neuen Verbindung auf nicht direkt beteiligte Spieler gemeint.⁴ Das erste Beispiel für derartige Effekte zeigt, daß eine neue Verbindung für andere Akteure eine größere Änderung als für die eigentlich neu verbundenen Spieler bewirken kann.

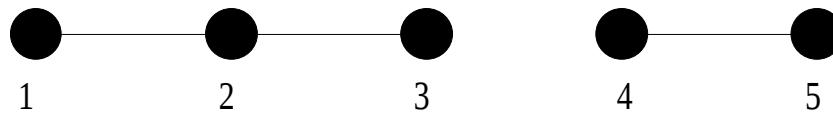


Abbildung 12.7: Graph 12.3 mit einer fehlenden Verbindung

Die Graphen 12.3 und 12.7 unterscheiden sich nur durch das Fehlen der Verbindung $\langle 3, 4 \rangle$. Für einen Diskontfaktor von $\delta = 0,98$ wird aus einem Vergleich der Auszahlungen der Spieler in Abbildung 12.7 ($v_1 = v_3 = 0,021$, $v_2 = 0,952$, $v_4 = v_5 = 0,493$) mit denjenigen in Abbildung 12.3 ($v_1 = v_5 = 0,181$, $v_2 = v_4 = 0,761$, $v_3 = 0,097$), zweierlei deutlich: Die Verhandlungspositionen der Spieler 3 und 4 wurden durch das Hinzufügen von der neuen

⁴Die Bezeichnung 'externe Effekte' beruht auf der Vorstellung, daß zwei Spieler sich gemeinsam Gedanken über den (Kosten verursachenden) Aufbau einer Verbindung zwischen sich machen. Dabei sind sie nur an der direkten Ergebnisverbesserung interessiert und ignorieren alle Auswirkungen, die diese Verbindung auf andere Spieler hat.

Verbindung erwartungsgemäß verbessert, jedoch profitierte Spieler 1 von dieser neuen Verbindung noch mehr als Spieler 3. Dies ergibt sich daraus, daß durch die nun mögliche Einigung von 3 und 4 vor allem die Position von 2 geschwächt wird, wovon wiederum Spieler 1 profitiert.

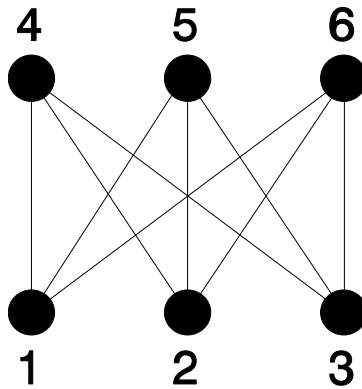


Abbildung 12.8: Ein einfaches Marktmodell

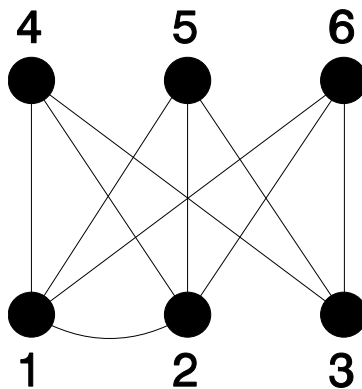


Abbildung 12.9: Graph 12.8 plus eine weitere Verbindung

Ein weiteres Beispiel ist in den Abbildungen 12.8 und 12.9 dargestellt. Abbildung 12.8 beschreibt ein symmetrisches Graphspiel, das als ein kleiner Markt mit je drei Käufern und Verkäufern interpretiert werden kann. Da sich alle Spieler in einer strategisch äquivalenten Position befinden, ergeben

sich im Gleichgewicht identische Auszahlungen von $v_i = \frac{1+\delta+\delta^2}{6}$ für alle Spieler. Beispielsweise ergibt sich für $\delta = 0,99$ ein Gleichgewichtsergebnis von $v_i = 0,495$.

Im Graph 12.9 wurde eine weitere Verbindung zwischen den Spielern 1 und 2 hinzugefügt (was natürlich die Interpretation als Markt ad absurdum führt). Für diesen Graph ergeben sich für ausreichend großes δ Effekte, die in ähnlicher Form bereits bei Graph 11.2 beobachtet werden konnten: Die Spieler 1 und 2 wählen gemischte Strategien und einigen sich im Falle eines Aufeinandertreffens mit einer positiven Wahrscheinlichkeit $p_{1,2} \in (0,1)$. Falls die beiden erfolgreich verhandeln, so finden sich die verbliebenen Akteure in einem Stern mit Spieler 3 als Zentrum wieder. Aus diesem möglichen Spielverlauf ergibt sich eine schwache Verhandlungsposition für die Spieler 4, 5 und 6 und eine sehr günstige Situation für Spieler 3. Dies spiegelt sich in den Gleichgewichtswerten wieder, die sich beispielsweise für den Diskontfaktor $\delta = 0,99$ auf $v_1 = v_2 = 0,505$, $v_3 = 0,530$ und $v_4 = v_5 = v_6 = 0,456$ belaufen.

Aus dem Vergleich mit den entsprechenden Auszahlungswerten für Graph 12.8 ist zu erkennen, daß auch in diesem Falle durch das Hinzufügen einer weiteren Verbindung zwar die Situation der an dieser Verbindung beteiligten Spieler verbessert wird. Gleichzeitig gehen von dieser Verbindung aber starke externe Effekte aus, so daß alle anderen Spieler von dieser Verbindung wesentlich stärker beeinflußt werden als die neu verbundenen Spieler.

Weiterhin kann auch an Graph 12.9 dasselbe Phänomen wie in Graph 12.3 beobachtet werden: Spieler 3 erhält ein besseres Gleichgewichtsergebnis als Spieler 1, obwohl die Menge der Verbindungspartner von 1 eine echte Obermenge der Verbindungspartner von 3 darstellt. Anders als bei den Graphen in den Abbildungen 12.3 und 12.7 bewirkt die zusätzliche Verbindung hier jedoch keine anhaltende Veränderung der Verhandlungssituation. Für $\delta \rightarrow 1$ konvergieren die Auszahlungen aller Spieler in den Abbildungen 12.8 und 12.9 gleichermaßen gegen $\frac{1}{2}$.

Das letzte Beispiel dieses Teilabschnitts zeigt, daß die externen Effekte einer

Verbindung so stark sein können, daß auf die an der Verbindung beteiligten Spieler ein negativer Rückkopplungseffekt entsteht, der stärker wirkt als der eigentliche direkte positive Effekt der neuen Verbindung. Graph 12.10 ergibt sich aus Graph 11.2 durch das Einfügen einer Verbindung zwischen den Spielern 2 und 4.

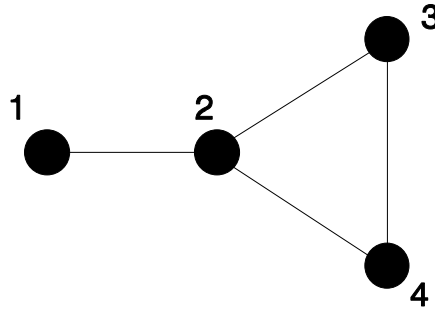


Abbildung 12.10: Graph 11.2 plus eine weitere Verbindung

Für $\delta = 0,99$ ergeben sich für Graph 11.2 Auszahlungen in Höhe von $v_1 = v_4 = 0,464$ und $v_2 = v_3 = 0,505$. Für Graph 12.10 hingegen ergeben sich Auszahlungen von $v_1 = 0,196$, $v_2 = 0,621$ und $v_3 = v_4 = 0,339$. Offensichtlich hat das Hinzufügen der Verbindung $\langle 2, 4 \rangle$ die Verhandlungssituation von Spieler 4 deutlich verschlechtert.

Eine Erklärung für dieses Ergebnis beginnt mit der Feststellung, daß Spieler 3 durch die neue Verbindung in eine deutlich schlechtere Position gelangt ist. Ihm droht nach einer erfolgreichen Einigung zwischen 2 und 4 ein Verbleib ohne Verhandlungspartner und damit eine Auszahlung von 0. Dadurch wird das Ergebnis von Spieler 3 verschlechtert, woraus sich ergibt, daß (im Falle eines Aufeinandertreffens) eine Einigung zwischen 2 und 3 mit Sicherheit erfolgt. Es werden nicht mehr, wie in Graph 11.2, gemischte Strategien verwendet sondern es liegt ein Einigungsgleichgewicht vor. Dadurch wiederum vergrößert sich im Vergleich zu Graph 11.2 die Wahrscheinlichkeit, daß Spieler 4 am Ende ohne einen Verhandlungspartner verbleibt. Die daraus resultierende Schwächung der Verhandlungsposition von Spieler 4 überwiegt

den positiven direkten Effekt, der durch die Verbindung zu einem neuen potentiellen Verhandlungspartner erzeugt wird, und es ergibt sich in der Summe eine schlechtere Verhandlungsposition für diesen Akteur.

Zusammenfassend wurde in den obigen Beispielen gezeigt, daß sich das Gleichgewichtsergebnis jedes Agenten aus einer Überlagerung verschiedener Effekte ergibt. Der Versuch, mit 'lokalen' Analysen und einfachen Faustregeln die Verhandlungsstärken einzelnen Spieler zu analysieren, wird der Komplexität von Verhandlungen auf Netzwerken nicht gerecht. Zu einem gegebenen Graph kann nur eine Gleichgewichtsanalyse, wie sie in Kapitel 11.2 beschrieben wurde, über die Verhandlungsmacht der einzelnen Spieler Aufschluß geben. Damit unterscheiden sich Graphspiele wesentlich von axiomatischen Ansätzen zur Untersuchung von Verhandlungsstärke in Graphen.

12.2 Der GS-Index — Machtmessung auf Basis von Graphspielen

Im Grundmodell der Graphspiele, das in Abschnitt 11.1 vorgestellt wurde, bewirkt die Einführung von Verzögerungskosten in Form eines Diskontparameters, daß ein Einigungsdruck auf die Akteure ausgeübt wird. Durch diese Maßnahme wird für einige Graphen die Eindeutigkeit des Gleichgewichts gesichert. Denn würde das Modell aus Abschnitt 11.1 ohne Zeitkosten gespielt (also mit $\delta = 1$), so ergäbe sich bereits für den sehr einfachen Graph $G = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ —eine Art Rubinsteinspiel mit zufällig vergebenem Vorschlagsrecht— eine unendliche Menge von Gleichgewichten: Jede Aufteilung könnte als Gleichgewichtsergebnis produziert werden. Für $\delta < 1$ hingegen hat dieser Graph ein eindeutiges Gleichgewicht mit $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$. Die Einführung eines Diskontfaktors grenzt also für einige Graphen die Menge der Gleichgewichte deutlich ein. Wie im letzten Kapitel dargestellt wurde, ergibt sich daraus aber, daß die Auszahlung eines Spielers von zwei verschiedenen Faktoren beeinflußt wird, nämlich der Graphstruktur und dem Dis-

kontfaktor. Daher stellt sich bei jedem Graphen die Frage, welchem dieser beiden Faktoren eine beobachtbare Verhandlungsschwäche oder -stärke einzelner Spieler zuzuordnen ist. Um zu einer Betrachtung der Machtverhältnisse ausschließlich aufgrund der Struktur des Netzes und ohne Berücksichtigung von Zeitkosten zu gelangen, wird an dieser Stelle vorgeschlagen, den Grenzwert der Spielerauszahlungen für $\delta \rightarrow 1$ als Machtindex —den sogenannten Graphspielindex oder GS-Index— für Netzstrukturen zu verwenden. In Teilabschnitt 12.2.1 wird dieser Index formal definiert und einige seiner elementaren Eigenschaften werden nachgewiesen. In 12.2.2 wird der so definierte Index mit zwei anderen populären Instrumenten zur Machtmessung in Graphen, nämlich dem Kern und dem Myersonwert, verglichen. Schließlich wird in 12.2.3 das Ergebnis des GS-Index einigen experimentellen Ergebnissen zu Verhandlungen auf Graphen gegenübergestellt.

12.2.1 Elementare Eigenschaften des GS-Index

Wir beginnen mit einer formalen Definition sowie dem Nachweis, daß für jeden Graph mindestens ein GS-Index existiert.

Definition 12.2.1. *Zu einer gegebenen Graphstruktur (N, G) heißt ein Vektor*

*$\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$ ein **GS-Index**, wenn es eine Folge $\delta_j \rightarrow 1$ und eine dazugehörige Folge $v(\delta_j)$ von Gleichgewichtsauszahlungsvektoren des Graphspiels (N, G) derart gibt, daß $v(\delta_j) \rightarrow \tilde{v}$ gilt.*

Lemma 12.2.2. *Zu jedem Graphspiel (N, G) gibt es mindestens einen GS-Index.*

Beweis: Zu jedem δ existiert (vergleiche Theorem 11.2.5) mindestens ein Vektor von Gleichgewichtsauszahlungen $v(\delta)$. Dieser ist per definitionem ein Element der kompakten Menge $[0, 1]^n$. Daher existiert zu einer beliebigen Folge $\delta_j \rightarrow 1$ und jeder dazu passenden Folge von Gleichgewichtsvektoren

$v(\delta_j)$ als Ergebnis der Satzes von Bolzano-Weierstraß (vergleiche beispielsweise FORSTER (1984), S. 22) mindestens ein Häufungspunkt, der einen GS-Index darstellt. $\square$

Falls für $\delta < 1$ die Eindeutigkeit der Gleichgewichtsauszahlungen, wie sie in Vermutung 11.2.6 formuliert wurde, bewiesen werden könnte, so ließe sich auch die Eindeutigkeit des GS-Machtindex leicht zeigen. Da diese Eindeutigkeit aber bis jetzt nicht nachgewiesen werden konnte, muß zunächst die theoretisch mögliche Mehrdeutigkeit des GS-Indexes in Kauf genommen werden. Diese Schwierigkeit teilen auch andere Instrumentarien zur Machtmessung wie beispielsweise der Kern.

Bei der praktischen Berechnung des GS-Index ist die Tatsache hilfreich, daß jeder GS-Index ein Gleichgewicht des Graphspiels für den Diskontfaktor $\delta = 1$ darstellen muß.

Lemma 12.2.3. *Sei $\tilde{v}$ ein GS-Index für die Spielstruktur (N, G) . Dann gibt es einen Vektor von Einigungswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}$ derart, daß das Paar $(\tilde{v}, \tilde{p})$ die Gleichgewichtsbedingungen (11.2.5), (11.2.6) und (11.2.8) erfüllt, berechnet für den Diskontfaktor $\delta = 1$.*

Beweis: Aus der Definition des GS-Index folgt, daß es Folgen $\delta_j < 1$ und $v(\delta_j)$ mit den Eigenschaften $\delta_j \rightarrow 1$ und $v(\delta_j) \rightarrow \tilde{v}$ gibt. Sei nun $p(\delta_j)$ eine Folge von Einigungswahrscheinlichkeiten, die zusammen mit den Gleichgewichtsauszahlungen $v(\delta_j)$ jeweils ein Gleichgewicht beschreiben. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge der $p(\delta_j)$; es bezeichne $\tilde{p}$ ihren Grenzwert. Aus der Stetigkeit der Operatoren in den Bedingungen (11.2.5), (11.2.6) und (11.2.8) folgt dann direkt, daß auch die Grenzwerte der Folgen $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j = 1$, $\lim_{j \rightarrow \infty} v(\delta_j) = \tilde{v}$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} p(\delta_j) = \tilde{p}$ diesen drei Bedingungen genügen und daher ein Gleichgewicht im Sinne von Satz 11.2.3 beschreiben. $\square$

Der Wert dieses Lemmas besteht darin, daß einige Graphen für $\delta = 1$ ein eindeutiges Gleichgewicht besitzen, was die Grenzwertbildung erspart und

somit die Berechnung des GS-Index sehr vereinfacht. Dies trifft beispielsweise auf die Graphen 11.1 und 12.5 zu. Die Grenzwertbildung ist lediglich für diejenigen Fälle nötig, in denen es für $\delta = 1$ mehrere Gleichgewichte gibt, was (neben der oben erwähnten Variante von Rubinsteins Verhandlungsspiel) beispielsweise auf die Graphen in den Abbildungen 11.2 und 12.8 zutrifft.

12.2.2 Vergleich mit anderen Indizes

Anhand einiger der im letzten Abschnitt behandelten Beispiele sei hier kurz dargestellt, daß der GS-Index nicht mit anderen populären Indizes wie beispielsweise dem Myersonwert⁵ oder dem Kern⁶ identisch ist und somit ein selbständiges Instrument zur Machtmessung in Graphstrukturen darstellt.

- Für den Graph aus Abbildung 11.1 ergibt sich ein GS-Index von $v_1 = v_3 = 0$ und $v_2 = 1$. Dieses Ergebnis ist identisch mit dem einzigen Element des Kernes, unterscheidet sich aber vom Myersonwert, welcher $v_1^m = v_3^m = \frac{1}{6}$ und $v_2^m = \frac{2}{3}$ ergibt. Der Myersonwert ist hier also etwas fairer, indem er auch den benachteiligten Spielern 1 und 3 noch einen positiven Anteil zugesteht. Der Kern und der GS-Index hingegen drücken mit ihrer Wertzuweisung aus, daß Spieler 1 oder auch Spieler 3 entfernt werden können, ohne daß die Gesamtauszahlung des Systems sinken würde. In der Sprache der Betriebswirtschaft (vgl. BRANDENBURGER/NALEBUFF (1996)) bringen die Spieler 1 und 3 jeder für sich keinen 'added value' in das Netz. Daher erhalten sie keinen Anteil an der Gesamtauszahlung.
- Für den Graph in Abbildung 11.2 lautet der GS-Index, wie schon im letzten Abschnitt besprochen, $\tilde{v}_i = \frac{1}{2}$ für alle Spieler. Dieses Ergebnis

⁵Der Myersonwert ist eine für Graphen definierte Variante des Shapleywertes. Vergleiche auch MYERSON (1977) oder RYLL (1996). Für die Berechnung des Myersonwertes und des Kernes wird der Wert einer Koalition definiert als die maximale Anzahl von disjunkten Verbindungen dieser Koalition.

⁶Vergleiche beispielsweise BIENENSTOCK/BONACICH (1992).

liegt auch im Kern, entspricht aber nicht dem Myersonwert, welcher $v_1^m = v_4^m = \frac{5}{12}$ und $v_2^m = \frac{7}{12}$ lautet. Im Myersonwert schlägt sich also hier die große Zentralität sowie die große Anzahl der Verbindungen der Zentralspieler nieder, während der GS-Index aus den schon in Abschnitt 12.1.1 erklärten Gründen eine egalitäre Aufteilung ergibt.

Der Kern umfaßt für diesen Graphen sämtliche effizienten Auszahlungsergebnisse mit $v_2 + v_3 \geq 1$. Aufgrund dieses weiten Spektrums gibt der Kern keinen Aufschluß über die Stärke der Verhandlungspositionen in diesem Graphen.

- Für den Graphen in Abbildung 12.3 gilt für das einzige Element des Kerns $v_1^k = v_3^k = v_5^k = 0$ und $v_2^k = v_4^k = 1$; für den Myersonwert ergibt sich $v_1^m = v_5^m = \frac{1}{6}$, $v_2^m = v_4^m = \frac{2}{3}$ und $v_3^m = \frac{1}{3}$ und als GS-Index ergibt sich $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_5 = \frac{5}{29}$, $\tilde{v}_2 = \tilde{v}_4 = \frac{23}{29}$ und $\tilde{v}_3 = \frac{2}{29}$. Interessant ist an diesem Graph die unterschiedliche Einstufung der Verhandlungsstärke der Spieler 3 und 5: Der Kern stuft beider Spieler gleich schwach ein, der Myersonwert spricht Spieler 5 das schlechteste Ergebnis zu und der GS-Index identifiziert Spieler 3 als den schwächsten Spieler im System.

12.2.3 Experimentelle Ergebnisse und der GS-Index

In der Sonderausgabe der Zeitschrift *Social Networks* 14 (1992), die sich ausschließlich mit der Messung von Verhandlungsmacht für Netzwerke beschäftigt, werden die dort vorgestellten Machtindizes anhand einer vorgegebenen Menge von Graphen miteinander verglichen. In diesem Abschnitt wird der GS-Index auf einige der dort analysierten Graphen angewendet, wobei genau diejenigen Graphen analysiert werden, für die auch experimentelle Ergebnisse ermittelt wurden (vergleiche hierzu die Arbeiten von COOK et al.(1993) und WILLER(1992)). Dies sind die in den Abbildungen 11.2, 12.11, 12.12, 12.13, 12.14 und 12.15 abgebildeten Spielstrukturen. In den Beispielen in diesem Abschnitt wurde die Notation an die gängige Literatur in den Sozialwissenschaften angepaßt: Statt mit Zahlen werden die Spieler mit Buchsta-

ben bezeichnet, wobei Spieler in äquivalenten Netzpositionen auch denselben Buchstaben erhalten.

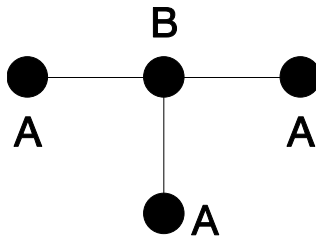


Abbildung 12.11: Es ergibt sich ein GS-Index von $v_A = 0$ und $v_B = 1$

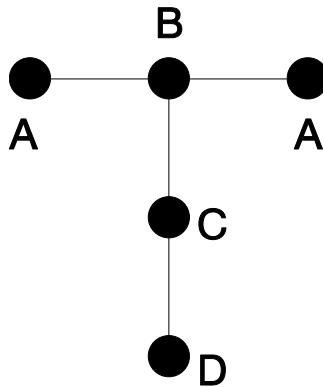


Abbildung 12.12: Es ergibt sich ein GS-Index von $v_A = 0$, $v_B = 1$ und $v_C = v_D = \frac{1}{2}$.

Korrespondierend zu diesen Machtindizes ergibt sich aus dem GS-Index eine Vorhersage für die 'Aufteilung des Kuchens' zwischen je zwei verbundenen Spielern. Die folgende Tabelle stellt die vom GS-Index vorhergesagte Aufteilung (für einen auf 100 Einheiten genormten Einigungsprofit) den in den Experimenten ermittelten Ergebnissen gegenüber. Bei der Aufteilung des Myersonindex wurde dabei angenommen, daß die Differenz zwischen den Werten zweier Spieler gleichverteilt wird. Das Kürzel 'k.E.' besagt, daß für diese Spieler keine profitable Einigung möglich ist.

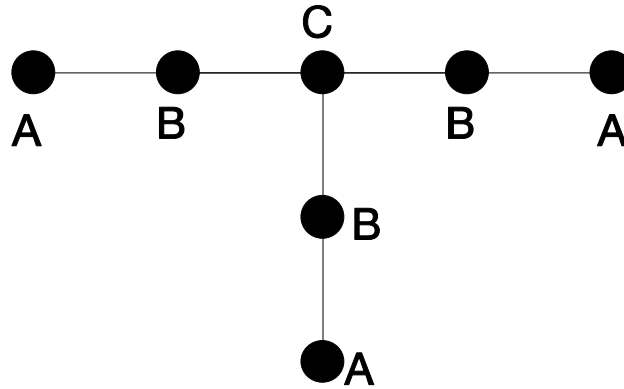


Abbildung 12.13: Es ergibt sich ein GS-Index von $v_A = \frac{628}{2291}$, $v_B = \frac{1545}{2291}$ und $v_C = \frac{354}{2291}$.

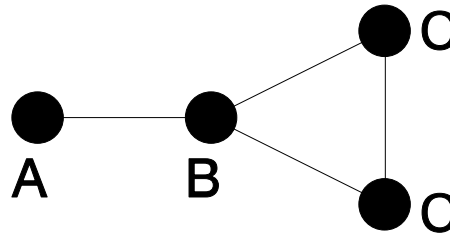


Abbildung 12.14: Es ergibt sich ein GS-Index von $v_A = \frac{11}{56}$, $v_B = \frac{35}{56}$ und $v_C = \frac{19}{56}$.

Graph	Paarung	GS-Index	M-Index	Experimente
Abbildung 11.2	A:B	50:50	58,3:41,7	52,1:47,9
	B:B	50:50	50:50	50:50
Abbildung 12.11	A:B	0:100	16,5:83,5	17,5 : 82,5
Abbildung 12.12	A:B	0:100	20,5:79,5	20,4:79,6
	B:C	k.E.	k.E.	51,3:48,7
	C:D	50:50	54: 46	50,8:49,2
Abbildung 12.13	A:B	30,0:70,0	32,5: 67,5	24,6:75,4
	B:C	76,0:24,0	58,8:41,2	79,6:20,4
Abbildung 12.14	A:B	28,6: 71,4	33,3:66,7	40:60
	B:C	64,3 :35,7	57,1:42,9	63,8;36,2
	C:C	50:50 ¹⁵⁴	50:50	50:50
Abbildung 12.15	A:B	45,2:54,8	42,0:58,0	46,7:53,3
	A:A	50:50	50:50	50:50

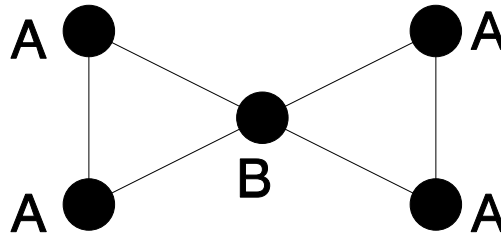


Abbildung 12.15: Es ergibt sich ein GS-Index von $v_A = \frac{8}{21}$ und $v_B = \frac{10}{21}$.

Wie der Tabelle zu entnehmen ist, erweist sich der GS-Index als guter Prediktor für die in Experimenten erzielten Aufteilungsresultate. Insbesondere sind die Vorhersagen des GS-Index bei den Graphen 11.2, 12.13 und 12.15 besser als die des Myersonindex.

Bemerkenswert erscheinen insbesondere die qualitativen Ergebnisse für den Graphen in Abbildung 12.13. Dieser stellt eine erweiterte Form des Graphen aus Abbildung 12.3 dar, und auch für diese Struktur ergibt beispielsweise der Myersonwert im Gegensatz zum GS-Index für den Zentralspieler eine stärkere Position als für die Randspieler. Offensichtlich ist der GS-Index in diesem Fall deutlich besser geeignet, die experimentell ermittelten Aufteilungsergebnisse *qualitativ* zu erklären. Die stärkste und die schwächste Verhandlungsposition werden vom GS-Index im Einklang mit den Experimenten identifiziert.

Eine wesentliche Diskrepanz zwischen der Vorhersage des GS-Index und den experimentellen Resultaten ist vor allem dann festzustellen, wenn der GS-Index eine 100:0 Aufteilung vorsieht, beispielsweise für den Graphen in Abbildung 12.11. Dies ist ein weitverbreitetes Phänomen: Der GS-Index ist ein auf nichtkooperativer Spieltheorie basierendes Konzept und ein Widerspruch zwischen der Vorhersage eines individuell-rationalen Gleichgewichtes und experimentellen Resultaten taucht regelmäßig dann auf, wenn das spieltheoretische Lösungskonzept eine Aufteilung vorschlägt, die den gesamten Überschuß einem einzelnen Spieler zugesteht. Die naheliegendste Erklärung hierfür liegt darin, daß die in Experimenten implizit verwendete Annahme, daß der erhal-

tene Nutzen eine lineare Funktion des erhaltenen Geldbetrages ist, für extrem ungleiche Verteilungen nicht zutrifft. Meine Erklärung hierfür besteht darin, daß für kleine Geldbeträge subjektive Vorstellungen von 'Fairness' einen großen Einfluß auf die Nutzenfunktion einzelner Spieler nehmen. Beispielsweise wird die Bewertung, die ein Spieler einer 99 : 1-Aufteilung zu seinen Ungunsten zumißt, nur unwesentlich vom dem erhaltenen, geringen Geldbetrag beeinflußt. Daher Man vergleiche zu diesem Thema beispielsweise die Arbeiten von GÜTH (1995) und STRAUB/MURNIGHAM (1995) zum Ultimatumspiel oder auch die Ergebnisse von OCHS/ROTH (1989) zum Rubinsteinspiel.

12.3 Märkte

In diesem Abschnitt wird anhand einiger Beispiele das Potential von Graphspielen als dynamische Modelle von Märkten demonstriert. Bereits Graph 11.1 kann als ein sehr einfaches Marktmodell mit einem Verkäufer und zwei Käufern aufgefaßt werden. Das dort abgeleitete Ergebnis, daß der Verkäufer im Grenzfall $\delta \rightarrow 1$ die gesamte Rente für sich beanspruchen kann, gilt offenbar auch für den Fall einer beliebig größeren Zahl von Käufern. Diese Aussage wird im Anhang in Lemma C.1.14 formal bewiesen.

Im Verlaufe dieses Kapitels werden nun verschiedene Marktmodelle samt der dazugehörigen Gleichgewichtsauszahlungen betrachtet. Vereinfachend wird dabei angenommen, daß es nur ein einziges homogenes Gut gibt. *Verkäufer* besitzen eine unteilbare Einheit dieses Gutes, während *Käufer* eine unelastische Nachfrage nach einer Einheit und eine Zahlungsbereitschaft von 1 für dieses Gut haben. Das Aushandeln eines Preises entspricht dann der Verhandlung über den Überschuß, den ein Käufer und ein Verkäufer bei einem Handel erzielen können.

Abschnitt 12.3.1 behandelt Marktmodelle, in denen für alle Beteiligten uneingeschränkter Interaktionsmöglichkeiten bestehen, aber ein Unterangebot des gehandelten Gutes vorliegt, d.h., es gibt weniger Verkäufer als Käufer. Bei diesen Modellen gilt die Untersuchung vor allem der Abhängigkeit des

Marktpreises vom Diskontfaktor und von der Zahl der Agenten. Da keine unterschiedlichen Marktzugangsmöglichkeiten der Agenten angenommen werden, besitzen die hier betrachteten Märkte keine besondere Struktur und die Analyse in diesem Kapitel konzentriert sich auf die *dynamischen* Aspekte des Handels.

Abschnitt 12.3.2 hingegen beschäftigt sich mit den *strukturellen* Marktauswirkungen, die sich mit Hilfe von Graphspielen analysieren lassen. Es werden unvollständige Märkte betrachtet, in denen nicht alle Verkäufer die Möglichkeit haben, mit allen Käufern zu interagieren und umgekehrt. Wie auch in Kapitel 12.2 gilt die Untersuchung den Auswirkungen der Marktstruktur und nicht den Effekten, die auf die Verzögerungskosten bei Nichteinigung zurückzuführen sind. Daher gilt die Analyse hier vor allem dem Marktergebnis für $\delta \rightarrow 1$, also für den Grenzfall verschwindender Verzögerungs- und Verhandlungskosten.

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt gelten ausschließlich symmetrischen Gleichgewichten (eine Einschränkung, die sich erübrigt, falls Vermutung 11.2.6 zutrifft). Darunter werden in diesem Kontext Gleichgewichte verstanden, bei denen zwei Spieler mit einer gleichen Menge von potentiellen Verhandlungspartnern auch ein identisches Gleichgewichtsergebnis erhalten.

12.3.1 Vollständige Märkte

Definition 12.3.1. *Eine Spielstruktur (N, G) heißt vollständiger Markt mit b Käufern und s Verkäufern, wenn folgendes gilt:*

- $N = B \cup S$ mit $B = \{1..b\}$ und $S = \{b + 1, \dots, b + s\}$.
- $\langle i, j \rangle \in G$ für beliebige $i < j$ genau dann wenn $i \in B$ und $j \in S$.

Graph 12.8 in Abschnitt 12.1.2.3 zeigt ein einfaches Beispiel für einen vollständigen Markt.

In vollständigen Märkten sind jeweils alle Käufer und alle Verkäufer in einer identischen Verhandlungssituation. Jeder Verkäufer ist mit jedem Käufer

verbunden und umgekehrt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei nun $b \geq s$ angenommen, d.h., es herrscht eine potentielle Unterversorgung mit dem gehandelten Gut. Die Auszahlungen von Käufern (bzw. Verkäufern) werden mit v_s (bzw. v_b) bezeichnet.

Für $b > s$ läßt sich aus der mikroökonomischen Theorie ein eindeutiges Ergebnis für die hier behandelte Marktsituation ableiten: Der einzige markträumende Preis ist 1, d.h., die Verkäufer können aufgrund der Unterversorgung den gesamten Profit für sich beanspruchen. Diese Aussage gilt allerdings nur unter den Voraussetzungen des 'idealen Marktes', der neben unbeschränktem Interaktionsmöglichkeiten und vollständiger Information auch die Abwesenheit von Verhandlungskosten voraussetzt. Bei Graphspielen gibt es ein dynamisches Element, und Verhandlungen verursachen Verzögerungen und damit Kosten. Daher soll in diesem Abschnitt untersucht werden, welche Auswirkungen diese Verzögerungskosten auf das Marktergebnis haben.

Eine ähnliche Fragestellungen wurden in der Literatur bereits an anderer Stelle untersucht:⁷ OSBORNE/RUBINSTEIN (1990), (S. 128 ff.) analysieren ein Modell, das dem oben definierten vollständigen Markt sehr ähnelt. Allerdings nehmen sie an, daß Verkäufer und Käufer in jeder Periode *gleichzeitig* aufeinander treffen. Diese Annahme führt dazu, daß der Gleichgewichtspreis des Gutes ausschließlich von der absoluten Differenz zwischen der Anzahl der Verkäufer und der Käufer und überhaupt nicht vom relativen Verhältnis dieser beider Zahlen abhängt. Dieses Ergebnis ist nur schlecht nachvollziehbar: Mit einer steigenden Zahl von Spielern ist die intuitive Erwartung, daß der absolute Unterschied zwischen der Anzahl der Verkäufer und der der Käufer eine schwindende Bedeutung erlangt. Die Gefahr, am Schluß ohne einen Verhandlungspartner dazustehen, verringert sich mit einer steigenden Gesamtzahl der Spieler. Dieser Effekt wird durch das Modell von Rubinstein und Osborne nicht abgebildet, wohl aber von der in diesem Kapitel vorgestellten Modellierung durch Graphspiele. Für den Spezialfall $s = 1$, also Märkte

⁷Für einen umfassenden Überblick über die relevanten Literatur sei auf den Artikel von BINMORE/HERRERO (1988) verwiesen.

mit nur einem Verkäufer, sind die Ergebnisse der vollständigen Marktes und des Modells von Rubinstein/Osborne identisch.

Abbildung 12.16 zeigt die Sequenz von Preisen⁸, die sich als Funktion der Zahl der Verkäufer bei einem festgehaltenen Verkäuferüberschuß von $b - s = 5$ ergibt. Die Punkte in dieser Sequenz wurden im Interesse einer besseren Darstellung verbunden.

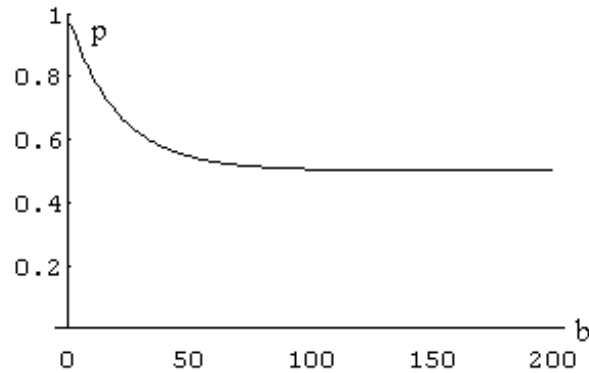


Abbildung 12.16: Marktpreise als Funktion der Verkäuferzahl b bei festgehaltenem $b - s = 5$ und $\delta = 0,95$.

Wie erwartet, ist der Preis gerade für kleines s besonders groß, d.h., je größer der *relative* Unterschied zwischen der Zahl der Käufer und der Verkäufer ist, desto höher wird der Marktpreis. Mit zunehmender Gesamtzahl der Agenten sinkt der Eingangspreis für das Gut und konvergiert schließlich gegen $\frac{1}{2}$. Dieses Ergebnis ergibt sich aus dem Zusammenspiel von zwei Effekten: Zum einen ist bei einer größeren Zahl von Agenten —wie schon oben aufgeführt— die Gefahr aus Sicht der Käufer geringer, bei einem Scheitern der Verhandlungen am Schluß ohne einen Verhandlungspartner zu verbleiben. Die Kosten eines Scheiterns der Verhandlungen bestehen also weniger in

⁸Der *Preis* oder auch der *Eingangspreis* wird in diesem Zusammenhang als das erwartete Ergebnis des Verkäufers in der ersten Periode, also der Mittelwert von δv_s und $1 - \delta v_b$ definiert.

der Gefahr, keinen Partner mehr zu finden, als vielmehr in der Verzögerung, mit der bis zur nächsten Verhandlungsmöglichkeit gerechnet werden muß. Diese Kosten sind aber für beide Verhandlungspartner im wesentlichen gleich. Zum anderen steigt mit der Gesamtzahl der Agenten die zu erwartende Wartezeit bis zur nächsten Verhandlungsmöglichkeit, weshalb die Auszahlungen der Verkäufer und Käufer gleichermaßen gegen Null konvergieren. Dies wird in Abbildung 12.17 illustriert, in der die erwarteten Auszahlungen von Verkäufern und Käufern, v_s und v_b , aufgetragen werden. Daher ist ein Scheitern der Verhandlungen für beide Verhandlungspartner sehr teuer, und die Verhandlungsmacht von Verkäufern und Käufern nähern sich einander an. Im Grenzfall $s \rightarrow \infty$ konvergiert der Preis dann gegen $\frac{1}{2}$.

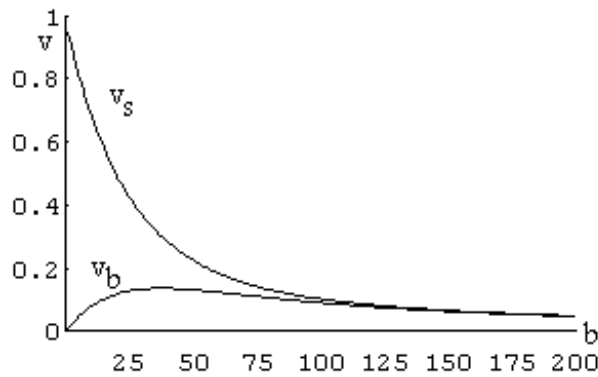


Abbildung 12.17: Die Gleichgewichtsergebnisse als Funktion der Verkäuferzahl b bei festgehaltenem $b - s = 5$ und $\delta = 0.95$

Eine weitere Beobachtung in Abbildung 12.17 besteht darin, daß die Gleichgewichtsauszahlung der Käufer zunächst mit steigender Agentenzahl wächst, dann aber fällt. Das Ansteigen der Auszahlung bei kleinen Agentenzahlen ist auf zwei Effekte zurückzuführen: Zum einen sinkt mit steigender Agentenzahl und festgehaltener Differenz zwischen der Anzahl von Verkäufern und Käufern die Wahrscheinlichkeit, ohne einen Verhandlungspartner zu verbleiben. Zum anderen schädigt der Verzögerungseffekt, der durch die zusätzlichen Agenten auftritt, die Verkäufer stärker als die Käufer. Dies ergibt sich dar-

aus, daß die Verkäufer eine deutlich höhere Gleichgewichtsauszahlung als die Käufer haben und daher als Folge einer Verzögerung einen höheren absoluten Verlust erleiden. Diese Schwächung der Verkäufer wiederum stärkt die Verhandlungsposition der Käufer.

Bei kleinen Spielerzahlen überwiegen diese beiden Effekte den Schaden, den ein Käufer aus den oben beschriebenen Nachteilen einer wachsenden Agentenzahl erleidet, und seine Gleichgewichtsauszahlung steigt. Mit steigender Agentenzahl kehrt sich dieses Verhältnis wieder um und die Gleichgewichtsauszahlung der Käufer sinkt und konvergiert, wie oben beschrieben, gegen Null.

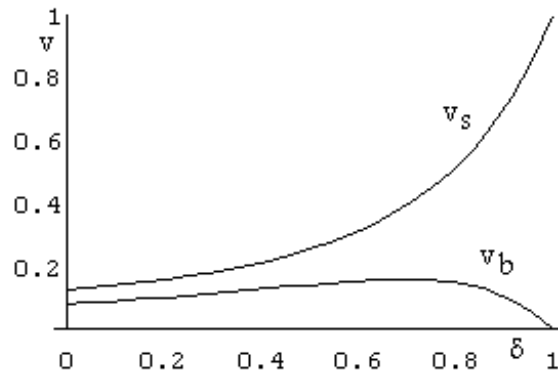


Abbildung 12.18: Spielerauszahlungen als Funktion des Diskontfaktors δ bei festgehaltenem $b = 4$ und $s = 2$.

Die Effekte eines sinkenden Diskontfaktors sind den Auswirkungen einer steigenden Agentenanzahl ähnlich. Abbildung 12.18 zeigt das Gleichgewichtsergebnis für Verkäufer und Käufer als Funktion des Diskontfaktors bei festgehaltenen Agentenzahlen von $b = 4$ und $s = 2$. Für die Käufer ergibt sich ein ähnlicher Kurvenverlauf wie in Abbildung 12.17: Die Auszahlung steigt zunächst an, fällt dann aber im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ wieder gegen Null. Dies ergibt sich daraus, daß bei niedrigem δ ein Käufer von den hohen Kosten profitiert, die einem Verkäufer aus der Verzögerung entstehen, welche mit

dem Scheitern einer Verhandlung einherginge. Diese Kosten —und damit die Aussicht des Verkäufers auf eine positive Auszahlung— sinken für $\delta \rightarrow 1$ gegen Null. Daraus erklärt sich die Beobachtung, daß in einem vollständigen Markt mit $b > s$ im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ die Gleichgewichtsauszahlung der Verkäufer gegen 1, die der Käufer gegen 0 geht. Mit anderen Worten, der Marktpreis für das Gut konvergiert gegen 1. Diese Aussage gilt für beliebige vollständige Märkte mit $b < s$ und wird im Anhang in Lemma C.1.15 formal nachgewiesen.

Damit konvergieren die Marktergebnisse in einem vollständigen Markt gegen die des Walrasschen Gleichgewichts, wenn die Verhandlungs- und Verzögerungskosten gegen Null gehen. In dieser Beziehung fügt sich das hier vorgestellte Marktmodell, ebenso wie das von Rubinstein und Osborne erarbeitete Resultat, nahtlos in die klassische mikroökonomische Theorie ein.

12.3.2 Unvollständige Märkte

In diesem Abschnitt werden *unvollständige Märkte* analysiert. Ein unvollständiger Markt liegt vor, wenn nicht alle Verkäufer die Möglichkeit haben, mit allen Käufern zu interagieren und umgekehrt.⁹ Im folgenden wird vereinfachend angenommen, daß es sowohl bei den Käufern als auch bei den Verkäufern jeweils genau zwei Arten von Agenten gibt. Die *unbeschränkten* Käufer sind mit allen Verkäufern verbunden, während die (in ihren Aktionsmöglichkeiten) *beschränkten* Käufer nur mit den unbeschränkten Verkäufern verhandeln können. Entsprechendes gilt für die Verkäufer. Die folgende Definition formalisiert dies.

⁹Auf die möglichen Gründe, warum in dem Markt keine unbeschränkte Verhandlungsmöglichkeit vorliegt, sei hier nur am Rande eingegangen: Es könnte sich um soziologische, sprachliche oder auch kulturelle Barrieren handeln, die die Interaktion bestimmter Agentengruppen verhindern. Eine andere Erklärung ist, daß die Transportkosten für das zu handelnde Gut mit der Distanz zwischen Käufer und Verkäufer wachsen. In diesem Fall wäre ein sinnvoller Handel zwischen einem Verkäufer und einem Käufer nur möglich, wenn diese geographisch benachbart sind.

Definition 12.3.2. Eine Spielstruktur (N, G) heißt **unvollständiger Markt** mit

- $b = b_u + b_b$ Käufern und $s = s_u + s_b$ Verkäufern,
- b_u Käufern und s_u Verkäufern mit jeweils unbeschränktem Zugang zu allen potentiellen Handelspartnern und
- b_b Käufern und s_b Verkäufern mit jeweils beschränktem Zugang zu den Handelspartnern,

wenn folgendes gilt: $N = B \cup S$ mit $B := B_u \cup B_b := \{1, \dots, b_u\} \cup \{b_u + 1, \dots, b_u + b_b\}$ und $S := S_u \cup S_b := \{b + 1, \dots, b + s_u\} \cup \{b + s_u + 1, \dots, b + s\}$. Weiterhin ist $\langle i, j \rangle \in G$ für beliebige $i \leq j$ genau dann, wenn gilt:

- $i \in B$,
- $j \in S$ und schließlich
- $i \in b_u$ oder auch $j \in s_u$

gilt.

Genau die Verkäufer und Käufer vom Typ s_b bzw. b_b können also nicht miteinander verhandeln. Bei der nun folgenden Untersuchung wird stets angenommen, daß $b = s$ gilt, daß also die Gesamtzahl der Käufer und die der Verkäufer identisch ist. Auf diese Weise konzentriert sich die Analyse ganz auf die Auswirkungen der Unvollständigkeit der Märkte, und es treten keine Effekte auf, die beispielsweise auf eine Überschußnachfrage zurückzuführen sind.

Unvollständige Märkte können danach klassifiziert werden, ob es möglich ist, jedem beschränkten Verkäufer einen eigenen unbeschränkten Käufer und damit einen potentiellen Handelspartner zuzuordnen.

Definition 12.3.3. Ein unvollständiger Markt im Sinne von Definition 12.3.2 heißt **ineffizient**, wenn $s_u < b_b$ (und damit $b_u < s_b$) gilt. Anderenfalls heißt ein unvollständiger Markt **potentiell effizient**.

In einem ineffizienten Markt muß mindestens ein beschränkter Verkäufer (und ein beschränkter Käufer) am Ende des Spiels ohne einen Verhandlungspartner verbleiben, während es in einem potentiell effizienten Markt möglich ist, daß jeder Spieler an einer erfolgreichen Verhandlung teilnimmt. Offenbar ist jeder Nachfolgegraph eines ineffizienten Marktes wiederum ein ineffizienter Markt, während der Nachfolgegraph eines potentiell effizienten Marktes (in Abhängigkeit von der erfolgten Paarung) sowohl ineffizient als auch potentiell effizient sein kann.

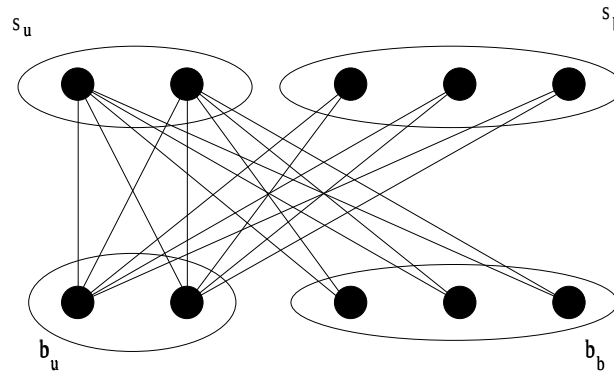


Abbildung 12.19: Ein unvollständiger ineffizienter Markt

Abbildung 12.19 zeigt den Graph eines ineffizienten unvollständigen Marktes mit den Parametern $b_u = s_u = 2$ und $b_b = s_b = 3$ und in Abbildung 12.20 sind die dazugehörigen Gleichgewichtsauszahlungen als Funktion von δ abgebildet. Das Ergebnis entspricht der Intuition: Im Grenzfalle verhält sich dieser Graph wie zwei vollständige Märkte mit jeweils einer ungleichen Zahl von Käufern und Verkäufern. In diesen Märkten herrscht jeweils ein Unter- bzw. Überangebot und der Preis konvergiert für den Grenzfalle verschwindender Verzögerungskosten gegen die Extremwerte 1 bzw. 0. Die Auszahlungen

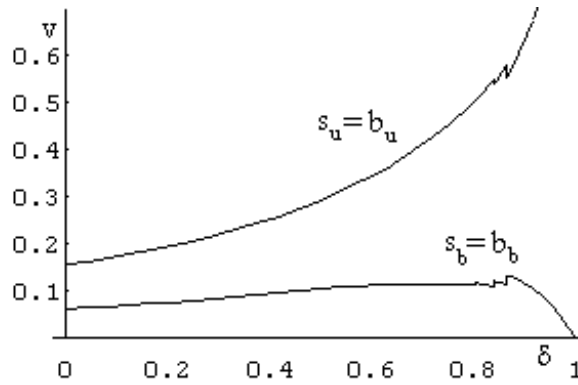


Abbildung 12.20: Gleichgewichtsergebnisse zum Graph aus Abbildung 12.19

der unbeschränkten Spieler gehen gegen 1, die der beschränkten Spieler konvergieren gegen 0. Bemerkenswert ist der unregelmäßige Kurvenverlauf, der sich in der Region um einem Diskontwert von ca. $\delta = 0.93$ ergibt. In diesem Bereich randomisieren zwei unbeschränkte Agenten in mindestens einem Teilgraph; es gilt die Identität $\delta(v_{s_u} + v_{b_u}) = 1$, und die unbeschränkten Spieler verwenden gemischte Strategien, wenn sie aufeinander treffen. Solange dies gilt, schrumpft die Auszahlung der unbeschränkten Spieler mit wachsendem δ , und es ergibt sich die Knickstelle, die in Abbildung 12.20 zu beobachten ist. Das scheinbar chaotische Verhalten der Kurven ergibt sich daraus, daß jeder der möglichen Teilgraphen eine derartige Knickstelle hat und daß sich diese Unregelmäßigkeiten überlagern.

Abbildung 12.21 zeigt den Graph eines potentiell effizienten Marktes mit den Parametern $b_u = s_b = 2$ und $b_b = s_u = 3$. In den Abbildungen 12.22 und 12.23 sind die dazugehörigen Gleichgewichtsauszahlungen zu sehen. Offenbar verschwindet der strukturelle Verhandlungsvorteil, den die unbeschränkten Spieler besitzen, im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ und die Auszahlungen aller Beteiligten konvergieren gegen $\frac{1}{2}$. Das in diesem speziellen Fall beobachtbare Ergebnis, daß in einem potentiell effizienten Markt der Verhandlungsvorteil der unbeschränkten Agenten im Grenzfall verschwindet, gilt für allgemeine unvoll-

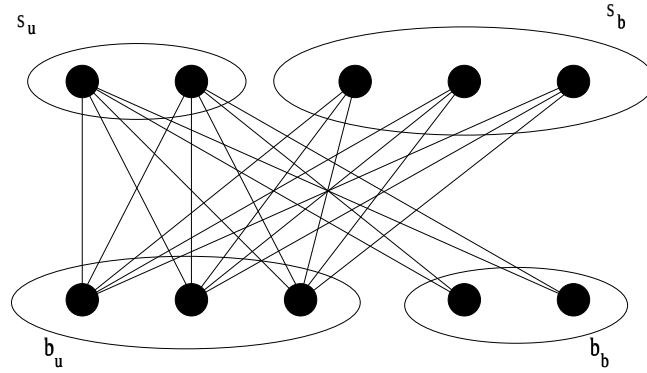


Abbildung 12.21: Ein potentiell effizienter unvollständiger Markt mit $s_u = b_u = 2$ und $s_b = b_b = 3$.

ständige Märkte und wird in dem nachfolgenden Theorem festgehalten.

Theorem 12.3.4. *Für jeden ineffizienten Markt gilt*

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_b} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_b} = 0 \text{ und } \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_u} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_u} = 1.$$

Für jeden potentiell effizienten Markt gilt

$\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_b} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_u} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_b} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_u} = \frac{1}{2}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß ein effizientes Marktergebnis erreicht wird, konvergiert für $\delta \rightarrow 1$ gegen 1.

Unter einem *effizienten* Marktergebnis wird in diesem Zusammenhang eine maximale Anzahl von erfolgreichen Verhandlungen verstanden. Ein effizientes Ergebnis liegt in einem potentiell effizienten Markt also vor, wenn kein Agent ohne Verhandlungspartner verbleibt.

Der formale Beweis für dieses Theorem ist sehr umfangreich und ergibt sich aus den Lemmata C.1.5, C.1.16, C.1.18 und C.1.19, die im mathematischen Anhang zu finden sind. An dieser Stelle wird nur eine intuitive Erklärung für dieses Ergebnis gegeben.

- Es sei oBdA angenommen, daß die Auszahlung eines beschränkten Käufers im Grenzwert gegen einen kleineren Wert als $\frac{1}{2}$ konvergiert.

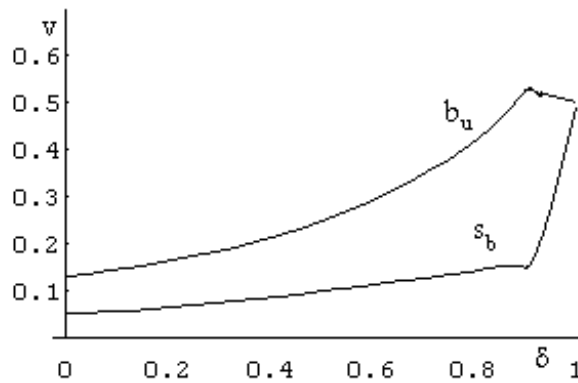


Abbildung 12.22: Spielerauszahlungen für die Spieler s_b und b_b zum Graph aus Abbildung 12.21

- Dann konvergiert das Ergebnis des korrespondierenden unbeschränkten Verkäufers gegen einen Wert größer als $\frac{1}{2}$, da er mit positiver Wahrscheinlichkeit von dieser Situation profitieren kann.
- Daraus wiederum folgt, daß sich der unbeschränkte Verkäufer mit dem unbeschränkten Käufer nicht einigen wird, da dieser eine Auszahlung von mindestens $\frac{1}{2}$ hat.
- Also werden die Verbindungen zwischen den unbeschränkten Spielern nicht genutzt. Aus dieser Tatsache wiederum ergibt sich, daß alle Spieler dieselbe Auszahlung erhalten: Wenn eine Verbindung zwischen zwei Spielern nicht genutzt wird, dann geht diese Verbindung nur als Verzögerung in die Berechnung der Gleichgewichtsauszahlungen ein; aus dem Vorhandensein dieser Verbindung leitet sich dann kein Verhandlungsvorteil mehr ab. Diese Aussage ergibt sich direkt aus der Berechnung der Gleichgewichtsauszahlungen (vergleiche Abschnitt 11.2). Also können die unbeschränkten Spieler in diesem Gleichgewicht keinen Vorteil realisieren, und das Gleichgewichtsergebnis ist für alle Spieler gleich.

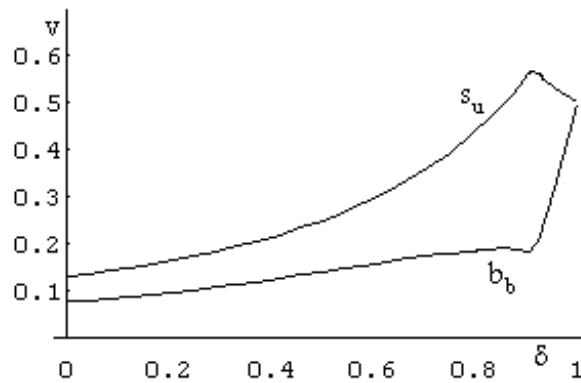


Abbildung 12.23: Spielerauszahlungen für die Spieler s_u und b_u zum Graph aus Abbildung 12.21

- Damit beträgt die Gleichgewichtsauszahlung für alle Spieler $\frac{1}{2}$, was im Widerspruch zu obiger Annahme steht.

Die mikroökonomische Aussage, auf die dieses Theorem hindeutet, lautet folgendermaßen: Von den üblichen Annahmen des idealen Marktes¹⁰ kann der 'vollständige Interaktionsmöglichkeiten' durch die schwächere Bedingung 'eine Marktstruktur mit potentieller Effizienz' ersetzt werden. Falls die Agenten weiterhin ohne Verhandlungskosten untereinander agieren können, bewirkt diese Einschränkung nichts und die klassischen Ergebnisse der Mikroökonomie —die Existenz eines Marktgleichgewichts, die Paretoeffizienz desselben etc.— gelten weiterhin. Die unbeschränkten Marktteilnehmer können also aus ihren verbesserten Interaktionsmöglichkeiten keinen Vorteil ziehen. Inwieweit diese Aussage tatsächlich in dieser Allgemeinheit gezeigt werden kann, kann zu diesem Zeitpunkt noch nicht ausgesagt werden.

¹⁰Vergleiche beispielsweise VARIAN (1992)

Kapitel 13

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Teil wurde ein von PANTHER (1995) entwickelter Ansatz zur Modellierung von Verhandlungsvorgängen in wirtschaftlichen und sozialen Netzwerken vorgestellt, weiterentwickelt und spieltheoretisch analysiert. Grundlegende Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Gleichgewichten wurden formuliert und die Schwierigkeiten bei der Analyse von Graphspielen aufgezeigt.

Bei der Analyse ausgesuchter Graphen konnte gezeigt werden, wie vielfältig die Einflußfaktoren sind, die das Gleichgewichtsergebnis der Spieler bestimmen. Hier sind neben der Wirkung des Diskontfaktors oder der Zentralität der Spieler insbesondere die starken externen Effekte zu nennen, die von einzelnen Verbindungen ausgehen können. Es kann geschehen, daß ein so starker Rückkopplungseffekt auf die verbundenen Spieler entsteht, daß ihre Verhandlungsposition durch die neue Verbindung geschwächt statt gestärkt wird. Mit Hilfe von Graphspielen und den hier vorgestellten Gleichgewichtsberechnungen ist es möglich, diese Effekte gegeneinander zu gewichten und eine Prognose über die Verhandlungsstärke der einzelnen Individuen zu erstellen.

Aufbauend auf dieser nichtkooperativen Modellierung wurde ein Index zur Bewertung von Verhandlungsstärken in Netzwerken, der GS-Index, ent-

wickelt. Dieser Index ist eigenständig und unterscheidet sich beispielsweise deutlich vom Myersonwert und vom Kern.

Die Prognosen des GS-Index über die Verhandlungsstärke der Spieler in Netzwerken wurden mit experimentell ermittelten Resultaten verglichen. Es wurde festgestellt, daß der GS-Index in vielen Situationen eine bessere Beschreibung der experimentellen Resultate als der Myersonwert ermöglicht.

Durch die Analyse von einfachen Marktmodellen mit Hilfe von Graphspielen wurde schließlich eine Verbindung zur Mikroökonomie hergestellt: In den hier betrachteten Marktmodellen verändert eine leichte Beschränkung des Marktzutritts einiger Agenten das Gleichgewichtsergebnis überhaupt nicht, wenn die folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt sind: Zum einen müssen die weiteren Annahmen des idealen Marktes —vollständige Information, keine Interaktionskosten etc.— beibehalten werden, und zum anderen muß ein effizientes Resultat weiterhin *möglich* sein, die Beschränkungen des Marktzutritts dürfen also nicht zu stark sein. Dieses Ergebnis ergab sich aus einer nichtkooperativen Modellierung eines Marktgeschehens und unterscheidet sich damit wesentlich von Marktanalysen mit Instrumenten der kooperativen Spieltheorie. Inwiefern dieses Resultat auch auf beliebige Marktstrukturen erweitert werden kann, läßt sich zu diesem Zeitpunkt noch nicht abschließend beantworten.

Eine Schwachpunkt des hier vorgestellten Modells ist der nicht geglückte Nachweis der Eindeutigkeit des Gleichgewichts. Solange Vermutung 11.2.6 nicht bewiesen werden kann, muß gegebenenfalls für jeden Spezialfall der Nachweis für die Eindeutigkeit des Gleichgewichts einzeln geführt werden. Daher sollte diesem Problem in künftigen Arbeiten große Aufmerksamkeit zukommen.

Auf der anderen Seite sind die Erweiterungsmöglichkeiten des hier vorgestellten Ansatzes mit dieser Arbeit bei weitem nicht erschöpft. Die Spielregeln könnten beispielsweise dahingehend verändert werden, daß die einzelnen Verbindungen und/oder Spieler nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zum Verhandeln ausgewählt werden. Damit ließen sich Situationen modellieren,

in denen Verbindungen zwischen bestimmten Agenten enger sind und diese daher mit größerer Wahrscheinlichkeit aufeinander treffen als andere.

Eine weitere Variation besteht darin, den Diskontfaktor während des Spieles zu verändern und ihn in Abhängigkeit von der Zahl der Spieler zu definieren. Damit ließe sich der Intuition Rechnung tragen, daß es bei einer großen Menge von Spielern wesentlich häufiger zu Begegnungen und damit zu Interaktion zwischen den Spielern kommt. Im Verlauf des Spiels, wenn einige Agenten erfolgreich verhandelt haben, werden die Verhandlungen zwischen den Spielern seltener. Dies könnte dadurch modelliert werden, daß der Diskontfaktor mit zunehmendem Verlauf des Spiels schrumpft.

Zuguterletzt könnte —falls es in der Zukunft gelingt, ein globales Eindeutigkeitstheorem zu etablieren— auch die Analyse des Metaspiels, d.h., die Definition und Untersuchung eines *Graphenaufbauspiels*, durchgeführt werden. In einem derartigen Modell bauen die Spieler nach festgelegten Regeln die Verbindungen eines Graphen auf. Nachdem dieser Vorgang abgeschlossen ist, werden die Gleichgewichtsergebnisse, die sich aus dem so entstandenen Graph ergeben, als Auszahlungen für das Graphenaufbauspiel verwendet. Inwieweit derartige Erweiterungen weitere Einsicht in die Verteilung von Verhandlungsmacht in sozialen Netzen oder auch in die Entstehung von derartigen Strukturen gibt, kann nur die Zukunft zeigen.

Anhang C

Mathematischer Anhang

In diesem Anhang werden einige Beweistechniken zur Analyse von Graphen entwickelt, mit deren Hilfe dann der Beweis für Theorem 12.3.4 aus Abschnitt 12.3 geführt wird.

Es sei noch einmal daran erinnert, daß in Abschnitt 12.3 und auch in diesem Anhang nur symmetrische Gleichgewichte betrachtet werden, d.h., Gleichgewichte, in denen alle Spieler des gleichen Typs (z. B. 'unbeschränkter Verkäufer') dieselbe Strategie verwenden und dieselbe Auszahlung erhalten.

Diese Auszahlungen werden mit den Kürzeln v_{b_u} , v_{b_b} usw. bezeichnet. Entsprechend werden die Einigungswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Agententypen durch die Kürzel p_{s_u, b_b} , p_{s_u, b_u} und p_{b_u, s_b} beschrieben. Einzelne Spieler werden weiterhin mit i, j etc. bezeichnet.

In diesem Kapitel werden die Kürzel s_b , s_u , b_b und b_u zweifach verwendet: Zum einen dienen sie zur Bezeichnung eines Spielertyps ("... und ein Spieler vom Typ b_u kann niemals eine niedrigere Auszahlung erhalten als ein Spieler vom Typ b_b "), zum anderen bezeichnen sie die Anzahl der Spieler des entsprechenden Typs ("... und wegen $b_u > b_b$ folgt daraus ..."). Hierdurch wird die Einführung weiterer Variablen vermieden, und da aus dem Kontext jeweils eindeutig ersichtlich wird, welche dieser beiden Interpretationen gemeint ist, führt diese Verwendung der Kürzel auch zu keinerlei Doppeldeutigkeit.

Das erste Lemma besagt, daß unvollständige Märkte sich nur dann von vollständigen Märkten unterscheiden, falls $s_b > 0$ und $b_b > 0$ gilt.

Lemma C.1.5. *Ein unvollständiger Markt mit $s_b = 0$ oder $b_b = 0$ ist dieselbe Spielstruktur wie ein vollständigen Markt mit einer identischen Zahl von Käufern und Verkäufern. Für einen solchen Markt ist für beliebige δ die Gleichgewichtsauszahlung aller Agenten identisch. Sie beträgt $v_i = \frac{\sum_{k=0}^{s-1} \delta^k}{2s}$.*

Die Aussagen dieses Lemmas sind offensichtlich und werden daher nicht bewiesen. Als Ergebnis dieses Lemmas genügt es in den folgenden Beweisen, sich auf den Fall $s_b > 0$ und $b_b > 0$ zu beschränken.

Das nächste Lemma besagt, daß sich in jedem Gleichgewicht mindestens ein Paar von Spielern mit Wahrscheinlichkeit 1 einigt. Diese Aussage läßt sich für beliebige Graphspiele zeigen, wird hier aber nur für Märkte im Sinne von Abschnitt 12.3 bewiesen.

Lemma C.1.6. *In einem unvollständigen Markt gilt im Gleichgewicht $p_{i,j} = 1$ für mindestens ein Paar $\langle i, j \rangle \in \{\langle b_u, s_u \rangle, \langle b_b, s_u \rangle, \langle b_u, s_b \rangle\}$.*

Beweis: Angenommen, die Aussage des Lemmas wäre falsch.

Daraus ergibt sich $v_{b_u} + v_{s_u} \geq \frac{1}{\delta}$, $v_{b_b} + v_{s_u} \geq \frac{1}{\delta}$ und $v_{b_u} + v_{s_b} \geq \frac{1}{\delta}$.

Nun werden die Fälle $s_u \geq b_b$ und $s_u < b_b$ unterschieden. In beiden ist die Summe aller Gleichgewichtsauszahlungen, $g = \sum_{i \in N} v_i$, größer als die Zahl der Einigungen, die in einem beliebigen konkreten Spielverlauf überhaupt auftreten können. Daraus ergibt sich ein Widerspruch.

1. $s_u \geq b_b$. Daraus folgt wegen $s_u + s_b = b_u + b_b$ direkt $b_u \geq s_b$.

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} g &= b_b(v_{s_u} + v_{b_b}) + s_b(v_{s_b} + v_{b_u}) + (b_u - s_b)(v_{s_u} + v_{b_u}) \\ &\geq b_b \frac{1}{\delta} + s_b \frac{1}{\delta} + (b_u - s_b) \frac{1}{\delta} = b \frac{1}{\delta} > b. \end{aligned}$$

Da bei jedem Spielverlauf höchstens b erfolgreiche Verhandlungen erfolgen können, kann die Summe der Auszahlungen der Spieler aber in keinem Spielverlauf größer als b sein, was einen Widerspruch darstellt.

2. $s_u < b_b$. Mit der Definition eines unvollständigen Marktes folgt daraus $s_b > b_u$.

In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} g &= s_u(v_{s_u} + v_{b_b}) + b_u(v_{s_b} + v_{b_u}) + (s_b - b_u)v_{s_b} + (b_b - s_u)v_{b_b} \\ &\geq s_u \frac{1}{\delta} + b_u \frac{1}{\delta} > s_u + b_u. \end{aligned}$$

Da bei jedem Spielverlauf aber höchstens $s_u + b_u$ erfolgreiche Verhandlungen erfolgen können, kann die Summe der Auszahlungen in keinem Spielverlauf größer als $s_u + b_u$ sein, was einen Widerspruch darstellt.

□

Damit ist bewiesen, daß es in jedem Markt in jedem Gleichgewicht mindestens ein Paar von Spielertypen gibt, das sich mit Sicherheit einigt.

Definition C.1.7. Ein **Graphset** $\mathcal{S}$ ist definiert als ein Tripel $\mathcal{S} = ((N, G), \delta, (v(\delta), p(\delta)))$, bestehend aus einer Graphstruktur (N, G) , einem Diskontfaktor δ und einem dazu passenden Gleichgewicht $(v(\delta), p(\delta))$.

Zu einem gegebenen Graphset $\mathcal{S} = ((N, G), \delta, (v(\delta), p(\delta)))$ bezeichne Z^S die Menge der verbundenen Spielerpaare $\langle j, k \rangle$, die sich im Falle eines Aufeinandertreffens mit Wahrscheinlichkeit $p_{j,k} = 1$ einigen würden. Weiter sei Z_{-i}^S die Menge Z^S ohne die Verbindungen, an denen i beteiligt ist. Die Zahl der Elemente in Z^S (bzw. Z_{-i}^S) sei mit z^S (bzw. z_{-i}^S) bezeichnet.

Wegen Lemma C.1.6 ist Z^S für beliebige Märkte nichtleer. Falls Z_{-i}^S für einen einzelnen Spieler i leer ist, so bedeutet dies, daß sich kein Paar ohne Beteiligung von Spieler i mit Sicherheit einigt. Im Zusammenhang mit Marktmodellen bedeutet $z_{-i}^S = 0$ insbesondere, daß Spieler i der einzige Spieler seines Typs ist: Gäbe es noch weitere Agenten desselben Spielertyps, so folgte daraus, daß diese sich (wegen der Symmetrie der betrachteten Gleichgewichte) in denselben Situationen wie i einigen, woraus sich $z_{-i}^S > 0$ direkt ergibt.

Unser Interesse in diesem Anhang gilt dem Grenzwert des Marktergebnisses für $\delta \rightarrow 1$ und es soll gezeigt werden, daß dieser Grenzwert der Gleichgewichtsergebnisse für vollständige und unvollständige Märkte jeweils bestimmte Eigenschaften hat. Zu einer gegebenen Folge $\delta_j \rightarrow 1$ und den dazugehörigen Gleichgewichten können wir unsere Analyse ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit auf eine geeignete Teilfolge beschränken.

Definition C.1.8. *Sei eine Graphstruktur (N, G) , einer Folge $\tilde{\delta}_j \rightarrow 1$ und eine zu den $\tilde{\delta}_j$ passende Folge von Gleichgewichten $(v(\tilde{\delta}_j), p(\tilde{\delta}_j))$ gegeben. Eine Teilfolge δ_j der Folge $\tilde{\delta}_j$ heißt **relevant**, wenn*

- *die Z^S , die zu den Gleichgewichten $(v(\delta_j), p(\delta_j))$ gehören, für alle δ_j identisch sind.*
- *die Spielwerte $v_{s_u}(\delta_j)$, $v_{s_b}(\delta_j)$, $v_{b_u}(\delta_j)$ und $v_{b_b}(\delta_j)$ konvergieren. Die Grenzwerte seien mit $v_{s_u}^*$, $v_{s_b}^*$, $v_{b_u}^*$ und $v_{b_b}^*$ bezeichnet.*
- *die Spielwerte $v_{s_u}^\gamma(\delta_j)$, $v_{s_b}^\gamma(\delta_j)$, etc. für alle Teilgraphen $\gamma \in \Gamma(N, G)$ konvergieren. Die Grenzwerte seien mit $v_{s_u}^{*\gamma}$, $v_{s_b}^{*\gamma}$, $v_{b_u}^{*\gamma}$ und $v_{b_b}^{*\gamma}$ bezeichnet.*

Zu einem gegebenen Graphset $\mathcal{S}$ kann es nur endlich viele verschiedene Z^S geben. Weiterhin gibt es nur endlich viele Teilgraphen $\gamma \in \Gamma(N, G)$. Daher kann zu einer gegebenen Folge von $\tilde{\delta}_j$ und den dazu passenden Gleichgewichten immer eine Teilfolge derart ausgewählt werden, daß die Menge Z^S für alle Graphsets jeweils unverändert bleibt. Aus dieser kann dann sukzessiv jeweils ein Häufungspunkt der $v_{s_u}(\tilde{\delta}_j), v_{s_b}(\tilde{\delta}_j)$ etc. und der $v_{s_u}^\gamma(\tilde{\delta}_j), v_{s_b}^\gamma(\tilde{\delta}_j)$ etc. ausgewählt werden. Insgesamt besitzt damit jede Folge von Diskontfaktoren und zugehörigen Gleichgewichten eine relevante Teilfolge.

Wenn in den folgenden Beweisen über die Grenzwerteigenschaften einer beliebigen Folge δ_j geschrieben wird, so kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß diese Folge relevant ist. Dies impliziert, daß die Menge Z^S nur noch von der Folge und nicht mehr von dem einzelnen Gleichgewicht abhängt. Wenn im Zusammenhang mit einer relevanten Folge

also von der Menge Z gesprochen wird, so wird der Index S ausgelassen und wir verwenden die Schreibweisen Z , Z_{-i} , z und z_{-i} .

Wesentliche Elemente der nun folgenden Beweise verwenden folgenden Gedanken: Angenommen, ein bestimmter Spieler i würde sich jeder Einigung verweigern und alle anderen Spieler agierten entsprechend ihren Gleichgewichtsstrategien. Dies würde schließlich damit enden, daß sich ein anderes Paar einigt und Spieler i sich in einem Teilgraphen wiederfindet. Über die Auszahlungen, die i in diesem Teilgraphen erwarten kann, werden dann Aussagen über das Ergebnis von i im Originalgraph nachgewiesen. Die folgenden Definitionen dienen der formalen Handhabung dieser Beweistechnik.

Definition C.1.9. *Es sei ein Graphset $\mathcal{S} = ((N, G), \delta, (v(\delta), p(\delta)))$ und ein i mit $z_{-i}^S > 0$ gegeben. Dann ist zu einem beliebigen $w \in (0, 1)$ die Funktion $f_i(w)$ definiert als die kleinste natürlich Zahl q derart, daß $\left(\frac{m - (z_{-i}^S)}{m}\right)^q < 1 - w$ gilt.*

Die Interpretation der Funktion f_i ist die folgende: Falls in dem vorliegenden Gleichgewicht Spieler i (eventuell in Abweichung von seiner Strategie) sich bei jedem Treffen mit einem anderen Spieler einer Einigung verweigern würde, während alle anderen Spieler bei ihrer Strategie blieben, so würde mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens w innerhalb der nächsten $f_i(w)$ Perioden mindestens ein Paar ohne i aufeinandertreffen, sich einigen und das Spiel verlassen.¹ Mit anderen Worten findet sich Spieler i nach $f_i(w)$ Perioden mit Wahrscheinlichkeit w in einem Teilgraph von (N, G) wieder. Offenbar ist f_i nur für Graphsets mit $z_{-i}^S > 0$ definiert.

Zu einer gegebenen Graphstruktur, (N, G) , einer relevanten Folge δ_j und einer Folge von dazugehörigen Gleichgewichten $(v(\delta_j), p(\delta_j))$ ist Z und damit auch Z_{-i} eine eindeutig definierte Menge. Unter diesen Umständen ist dann —falls $z_{-i} > 0$ gilt— auch f_i eine von δ_j unabhängige, eindeutig definierte Funktion.

¹Der Term $\left(\frac{m - (z_{-i}^S)}{m}\right)^q$ dient zu Abschätzung des Gegenereignisses 'Spieler i befindet sich immer noch im Originalgraph'.

Nach dieser Vorarbeit kann jetzt das wichtigste Beweiswerkzeug für die Analyse von Graphspielen, das *Verweigerungslemma*, vorgestellt werden. Mit Hilfe dieses Lemmas kann bewiesen werden, daß der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen eines Spielers $\delta_j \rightarrow 1$ unter bestimmten Umständen mindestens c beträgt, falls seine Grenzwertauszahlung in fast allen Teilspielen ebenfalls mindestens c beträgt.

Die Beweisidee ist dabei die folgende: Der betreffene Spieler i kann in einem beliebigen Gleichgewicht —sofern z_{-i} größer als Null ist— sich einfach jeder Einigung verweigern, bis sich ein anderes Paar von Spielern geeinigt hat und Spieler i sich in einem Teilnetz wiederfindet, in dem seine erwartete Auszahlung ausreichend dicht an c liegt. Für ausreichend große δ sind die Verzögerungskosten, die er dabei zu tragen hat, beliebig gering, da die Zahl der zu wartenden Perioden nicht von δ abhängt. Daher ergibt sich aus dieser Verweigerungsstrategie eine Auszahlung, die beliebig nahe an c ist. Also kann sich Agent i durch diese Strategie im Grenzwert eine Auszahlung von mindestens c immer sichern. Das nun folgende Lemma formalisiert —zunächst in einer einfachen Version— diesen Gedanken.

Lemma C.1.10. [Verweigerungslemma] *Es sei ein unvollständiger Markt (N, G) , eine relevante Folge $\delta_j \rightarrow 1$, eine dazu passende Folge von Gleichgewichten $(v(\delta_j), p(\delta_j))$ und ein Spieler i mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

A In allen Teilgraphen von $\gamma \in \Gamma(N, G)$ konvergiert die Folge der Gleichgewichtsauszahlungen für i , $v_i^j(\delta_j)$, gegen einen Grenzwert von mindestens c .

B $z_{-i} > 0$.

Dann ist der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen für Spieler i nicht kleiner als c , d.h., es gilt $v_i^ \geq c$.*

Beweis: Es sei $v_{i,min}(\delta_j)$ definiert als i 's kleinste Gleichgewichtsauszahlung zum Diskontfaktor δ_j in allen Teilgraphen von (N, G) . Wegen Annahme A

hat $v_{i,min}(\delta_j)$ einen Grenzwert größer oder gleich c . Wegen B ist weiterhin die Funktion $f_i(\cdot)$ wohldefiniert.

Sei nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann lassen sich ein j^* und ein $w^* \in (0, 1)$ derart wählen, daß die Ungleichung

$$w^* \cdot v_{i,min}(\delta_j) \cdot \delta_j^{f_i(w^*)} > c - \varepsilon \quad (\text{C.1.1})$$

für alle $j > j^*$ gilt.²

Wenn nun Spieler i im Gleichgewicht mit Diskontfaktor δ_j mit $j > j^*$ (gegebenenfalls in Abweichung von seiner Strategie) für eine Dauer von $f_i(w^*)$ Perioden jegliche Einigung verweigerte, so würde er sich danach mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens w^* in einem Teilgraph von (N, G) wiederfinden. In diesem Teilgraph hätte er eine erwartete Auszahlung von mindestens $v_{i,min}(\delta_j)$, was wegen der eingetretenen Verzögerung im ungünstigsten Fall mit $\delta_j^{f_i(w^*)}$ abdiskontiert würde. Also könnte sich der Verkäufer mit dieser Strategie eine Auszahlung von mindestens $v_{i,min}(\delta_j) \cdot w^* \cdot \delta_j^{f_i(w^*)} > c - \varepsilon$ sichern. Da er im Gleichgewicht seine Auszahlung optimiert, kann seine Gleichgewichtsauszahlung $v_i(\delta)$ ebenfalls nicht geringer als $c - \varepsilon$ sein.

Da diese Aussage für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, kann Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen von Spieler i nicht kleiner als c sein. $\square$

Bei einigen Beweisen in diesem Abschnitt wird auch eine etwas allgemeinere Version des Verweigerungslemmas verwendet. Hierbei wird die Annahme abgeschwächt, daß die Auszahlungen in *allen* Teilspielen gegen mindestens c konvergieren. Statt dessen wird dies nur noch für diejenigen Teilspiele vorausgesetzt, die unter den Gleichgewichtsstrategien im Grenzfall $\delta \rightarrow 1$ mit positiver Wahrscheinlichkeit auftauchen können.

Definition C.1.11. *Es sei ein Markt (N, G) , eine relevante Folge $\delta_j \rightarrow 1$ und eine dazu passende Folge von Gleichgewichten $(v(\delta_j), p(\delta_j))$ gegeben.*

²Zunächst wird ein ausreichend kleines w^* gewählt, danach wird in Abhängigkeit von $f(w^*)$ das j^* ausreichend groß bestimmt.

Weiter bezeichne $\Delta_i(c) \subset \Gamma(N, G)$ die Menge aller Teilgraphen von γ mit der Eigenschaft, daß für alle γ die Folge der Gleichgewichtsauszahlungen für i , $v_i^\gamma(\delta_j)$, gegen einen Grenzwert von mindestens c konvergiert.

Sei ein δ_j vorgegeben und sei angenommen, daß das Graphspiel (N, G) unter den folgenden Annahmen für eine Dauer von t Perioden gespielt wird:

- Spieler i verweigert jegliche Einigung mit einem anderen Spieler.
- Alle anderen Spieler verhalten sich entsprechend ihren Gleichgewichtsstrategien.

$g_i(\delta_j, t)$ bezeichne die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß unter diesen Umständen nach t Perioden ein Teilgraph entstanden ist, der nicht Element von $\Delta_i(c)$ ist, unter der Bedingung, daß sich mindestens ein Paar innerhalb dieser t Perioden geeinigt hat.

Mit anderen Worten, wenn sich im Gleichgewicht zum Diskontfaktor δ_j ein Spieler i mit $z_{-i} > 0$ für eine Dauer von t Perioden lang jeglicher Einigung verweigerte, so würde mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens $f_i^{-1}(t)$ in dieser Frist ein anderes Paar erfolgreich verhandeln. Geschieht dies, so ist der entstandene Teilgraph mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - g_i(\delta_j, t)$ ein Element aus $\Delta_i(c)$ und Spieler i hat mit dieser Wahrscheinlichkeit in dem Teilgraphen eine Gleichgewichtsauszahlung, die sich nur wenig von c unterscheidet.

Wenn nun bei festgehaltenem t die Folge $g_i(\delta_j, t)$ für $\delta_j \rightarrow 1$ gegen Null geht, so kann sich Spieler i durch Verwendung dieser Verweigerungsstrategie im Grenzwert eine Auszahlung von mindestens c immer sichern. Diese Aussage wird in dem folgenden Lemma formalisiert.

Lemma C.1.12. [Allgemeines Verweigerungslemma] *Es sei ein Markt (N, G) , eine relevante Folge $\delta_j \rightarrow 1$, eine dazu passende Folge von Gleichgewichten $(v(\delta_j), p(\delta_j))$, ein Spieler i , ein $c > 0$ und das zugehörige $\Delta_i(c)$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:*

A Für alle t konvergiert die Folge $g_i(\delta_j, t)$ für $\delta_j \rightarrow 1$ gegen Null.

B $z_{-i} > 0$.

Dann ist der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen für Spieler i nicht kleiner als c , d.h., es gilt $v_i^* \geq c$.

Beweis: Es sei $v_{i,min}(\delta_j)$ definiert als i 's kleinste Gleichgewichtsauszahlung zum Diskontfaktor δ_j in allen Teilgraphen in $\Delta_i(c)$. Aus der Definition von $\Delta_i(c)$ folgt, daß $v_{i,min}(\delta_j)$ für $\delta \rightarrow 1$ einen Grenzwert größer oder gleich c hat. Wegen Annahme B ist weiterhin die Funktion $f_i(\cdot)$ wohldefiniert.

Sei nun ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann können $w^* \in (0, 1)$ und ein dazu passendes j^* derart gewählt werden, daß die Ungleichung

$$v_{i,min}(\delta_j) \cdot \delta_j^{f_i(w^*)} \cdot w^* \cdot (1 - g_i(\delta_j, f_i(w^*))) > c - \varepsilon \quad (\text{C.1.2})$$

für alle $j > j^*$ gilt.

Wenn nun zu einem gegebenen δ_j mit $j > j^*$ Spieler i im Gleichgewicht (gegebenenfalls in Abweichung von seiner Strategie) immer eine Einigung verweigerte, so würde er sich nach $f_i(w^*)$ Perioden mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens w^* in einem Teilgraphen von (N, G) wiederfinden. In diesem hätte er mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - g_i(\delta_j, f_i(w^*)))$ eine Auszahlung von mindestens $v_{i,min}(\delta_j)$, was wegen der eingetretenen Verzögerung mit $\delta_j^{f_i(w^*)}$ abdiskontiert würde. Also könnte sich Spieler i mit dieser Strategie eine Auszahlung von mindestens $v_{i,min}(\delta_j) \cdot \delta_j^{f_i(w^*)} \cdot w^* (1 - g_i(\delta_j, f_i(w^*))) > c - \varepsilon$ sichern. Da er im Gleichgewicht seine Auszahlung optimiert, kann seine Gleichgewichtsauszahlung $v_i(\delta_j)$ ebenfalls nicht geringer als $c - \varepsilon$ sein. Diese Aussage gilt für beliebige $\varepsilon > 0$. Daraus folgt, daß der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen von i nicht kleiner als c sein kann. $\square$

Offenbar ist das Verweigerungslemma C.1.10 ein Spezialfall des allgemeinen Verweigerungslemmas C.1.12 mit $\Delta_i(c) = \Gamma(N, G)$.

Eine erste Anwendungsmöglichkeit von Lemma C.1.12 besteht darin, die intuitiv naheliegenden Aussagen für vollständige Märkte aus Abschnitt 12.3 zu beweisen. Hierzu wird zunächst ein *Stern* formal definiert.

Definition C.1.13. *Ein n-strahliger Stern ist ein Graph (N, G) mit $N = \{1, \dots, n+1\}$ und $G = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots, \langle 1, n+1 \rangle\}$. Spieler 1 heißt das **Zentrum** des Sterns, die anderen n Spieler heißen **Strahlen** oder **Satelliten**.*

Das einsichtige Ergebnis, daß im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ die Gleichgewichtsauszahlung des Zentrums gegen 1, die der Satelliten gegen 0 geht, kann für einen Stern leicht bewiesen werden:

Lemma C.1.14. *In einem Stern mit mindestens zwei Satelliten gilt $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_1 = 1$ und $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_i = 0$ für alle $i > 1$.*

Beweis: Die Gleichgewichtsauszahlungen in einem Stern lassen sich analytisch berechnen. Es gilt $v_1(\delta) = \frac{1}{\delta} + \frac{(2-\delta)(n-\delta)}{\delta(\delta-2n+\delta n)}$ und $v_i = \frac{n-\delta}{2n-\delta-\delta n}$ für $i > 1$. Die Behauptung von Lemma C.1.14 ergibt sich direkt hieraus. $\square$

Unter Verwendung von Lemma C.1.14 kann nun nachgewiesen werden, daß das Gleichgewichtsergebnis eines vollständigen Marktes mit einer ungleichen Anzahl von Käufern und Verkäufern für $\delta \rightarrow 1$ gegen das Walrassche Gleichgewicht konvergiert.

Satz C.1.15. *Sei (N, G) ein vollständiger Markt mit $b > s$. Weiter sei $\delta_j \rightarrow 1$, eine Folge von Diskontfaktoren und $(v(\delta_j), p(\delta_j))$ eine dazugehörige Folge von Gleichgewichten gegeben. Dann gilt $v_b^* = \lim_{\delta_j \rightarrow 1} v_b(\delta) = 0$ und $v_s^* = \lim_{\delta_j \rightarrow 1} v_s(\delta) = 1$.*

Beweis: Zunächst einmal folgt aus Lemma C.1.6, daß es in einem vollständigen Markt nur ein Einigungsgleichgewicht geben kann.

Satz C.1.15 wird nun durch Induktion über s , die Zahl der Verkäufer, bewiesen. Für den Fall $s = 1$, die Induktionsverankerung, ist ein vollständiger Markt identisch mit einem Stern, und es gilt Lemma C.1.14.

Sei nun für den Induktionsschritt die Aussage für beliebige vollständige Märkte mit bis zu k Verkäufern bewiesen. Für einen vollständigen Markt (N, G) mit $s = k+1$ Verkäufern und eine beliebige relevante Folge $\delta_j \rightarrow 1$ gilt nun offensichtlich für jeden einzelnen Verkäufer i die Ungleichung $z_{-i} > 0$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann $\lim_{\delta_j \rightarrow 1} v_i^\gamma(\delta_j) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma(N, G)$. Daher ergibt sich aus dem Verweigerungslemma direkt $\lim_{\delta_j \rightarrow 1} v_i(\delta_j) = 1$. Also gilt für den Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen der Verkäufer $v_s^* = 1$.

Daraus wiederum ergibt sich sofort für die Gleichgewichtsauszahlungen der Käufer die korrespondierende Aussage $v_b^* = 0$. $\square$

Damit sind alle Behauptungen für vollständige Märkte aus Abschnitt 12.3 bewiesen, und wir wenden uns den Aussagen über unvollständige Märkte zu. Theorem 12.3.4 wird jetzt in mehreren Schritten bewiesen.

Lemma C.1.16. *In einem ineffizienten Markt gelten die folgenden Aussagen:*

- I** *Wenn ein beliebiger unbeschränkter und ein beschränkter Spieler aufeinandertreffen, so einigen sie sich im Gleichgewicht mit Wahrscheinlichkeit 1.*
- II** *Für $\delta \rightarrow 1$ konvergieren die Gleichgewichtsauszahlungen der Agenten mit beschränktem Marktzugang gegen 0, die der Agenten mit unbeschränktem Marktzugang gegen 1. Das heißt, es gilt $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_b} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_b} = 0$ und $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_u} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_u} = 1$.*

Intuitiv kann dieses Ergebnis sehr leicht abgeleitet werden, wenn man sich einen ineffizienten Markt als eine Vereinigung von zwei vollständigen Märkten mit jeweils einer ungleichen Anzahl von Käufern und Verkäufern vorstellt. Der formale Beweis ist etwas aufwendiger.

Beweis: Lemma C.1.16 wird durch Induktion über die Gesamtzahl der Agenten bewiesen. Der kleinste ineffiziente Markt besteht aus vier Spielern und ist

äquivalent zu einem Stern mit zwei Satelliten plus einem weiteren Agenten ohne jegliche Verbindung. Die Aussagen des Lemmas folgen in diesem Fall direkt aus Lemma C.1.14. Die Induktionsverankerung ist damit bewiesen.

Sei nun die Aussage für alle ineffizienten Märkte mit bis zu n Agenten bewiesen und sei ein beliebiger ineffizienter Markt (N, G) mit $n + 2$ Spielern vorgegeben. Falls $s_u = 0$ oder $b_u = 0$ gilt, so ist (N, G) ein Stern oder ein vollständiger Markt mit einer ungleichen Zahl von Käufern und Verkäufern. Die oben behaupteten Aussagen folgen dann direkt aus Lemma C.1.14 oder Lemma C.1.15.

Sei nun der Fall $s_u > 0$ und $b_u > 0$ angenommen. Für die Aussagen von Lemma C.1.16 wird nun der Induktionsschritt bewiesen.

Zu **I**: Es wird oBdA nachgewiesen, daß sich ein unbeschränkter Verkäufer und ein beschränkter Käufer im Gleichgewicht immer einigen.

Hierzu bezeichne w_i die Auszahlung³ von Agent i in einem beliebigen Spielverlauf. Weiter bezeichne w die Summe der Auszahlungen aller Agenten vom Typ s_u und b_b . Da jeder beschränkte Käufer sich, wenn überhaupt, nur mit einem unbeschränkten Verkäufer einigen kann, ist die Gesamtzahl der Einigungen, an denen Agenten vom Typ s_u oder auch b_b teilnehmen, kleiner oder gleich s_u .

Daher ist auch w kleiner oder gleich s_u . Es folgt also für die *durchschnittlichen* Auszahlungen $\bar{w}_{s_u}$ der unbeschränkten Verkäufer und die der beschränkten Käufer, $\bar{w}_{b_b}$, die Ungleichung $s_u \cdot \bar{w}_{s_u} + b_b \cdot \bar{w}_{b_b} \leq s_u$.

Diese Aussage ist unabhängig vom aktuellen Spielverlauf und gilt insbesondere, wenn alle Beteiligten Gleichgewichtsstrategien spielen. Daher summiert sich in einem beliebigen Gleichgewichtspfad die Summe der durchschnittlichen Auszahlungen der beiden Agenten höchstens auf 1, d.h., es gilt $\bar{w}_{s_u} + \bar{w}_{b_b} \leq 1$. Daher können diese beiden Agententypen auch im Gleichgewicht zusammen keine größere Auszahlung als 1 erwarten und es gilt

³Die Auszahlung eines Agenten i in einem konkreten Spielverlauf, w_i , muß hierbei von seiner *erwarteten* Auszahlung in einem gegebenen Gleichgewicht, v_i , unterschieden werden.

$v_{s_u} + v_{b_b} \leq 1$ und damit $\delta(v_{s_u} + v_{b_b}) < 1$ in jedem Gleichgewicht für beliebige $\delta_j < 1$. Daher einigen sich ein unbeschränkter Verkäufer und ein unbeschränkter Käufer in jedem Gleichgewicht und **I** ist bewiesen.

Zum Beweis von **II** ist anzumerken, daß aus **I** und den Bedingungen $s_u > 0$ und $b_u > 0$ für jeden unbeschränkten Spieler i die Ungleichung $z_{-i} > 0$ folgt. Wegen der Induktionsvoraussetzung folgt damit $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_u} = 1$ direkt aus dem Verweigerungslemma C.1.10 und der Induktionsvoraussetzung. Die Aussage $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_u} = 1$ wird analog bewiesen. Aus diesen beiden Gleichungen folgen dann direkt die Aussagen $\lim_{\delta \rightarrow 1} v_{b_v} = \lim_{\delta \rightarrow 1} v_{s_v} = 0$ und damit ist **II** bewiesen. $\square$

Nun kann die zweite Aussage von Theorem 12.3.4 in zwei Schritten bewiesen werden. Zunächst wird der Spezialfall eines *kritischen* Marktes behandelt, später erfolgt der Nachweis für allgemeine unvollständige und potentiell effiziente Märkte.

Definition C.1.17. *Ein unvollständiger, potentiell effizienter Markt (N, G) heißt kritisch, wenn der Teilmarkt, der nach der Einigung zweier unbeschränkter Spieler entsteht, ineffizient ist.*

In einem kritischen Markt gilt offensichtlich $s_u = b_b$ und $b_u = s_b$. Einigen sich in einem kritischen Markt zwei unbeschränkte Spieler, so entsteht ein ineffizienter Markt. Einigen sich ein beschränkter und ein unbeschränkter Spieler, so ist der entstehende Teilgraph ebenfalls ein kritischer Markt.

Lemma C.1.18. *In einem kritischen Markt (N, G) gelten die folgenden Aussagen:*

- I** *Ein unbeschränkter und ein beschränkter Agent einigen sich im Gleichgewicht für beliebige $\delta < 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.*
- II** *Die Einigungswahrscheinlichkeit zwischen zwei unbeschränkten Spielern im Gleichgewicht, p_{s_u, b_u} , konvergiert für $\delta \rightarrow 1$ gegen Null.*

III Die Auszahlungen aller Spieler konvergieren für $\delta \rightarrow 1$ gegen $\frac{1}{2}$, d.h., es gilt $v_{s_u}^* = v_{b_u}^* = v_{s_b}^* = v_{b_b}^* = \frac{1}{2}$.

Beweis:

Die Argumentation zum ersten Teil des Beweises ist ähnlich dem Beweisgang von Lemma C.1.16: Schlüsselpunkt des Beweises sind die Ergebnisse, die die Agenten in einem konkreten Spielverlauf erzielen können. Darauf aufbauend werden dann Aussagen über das erwartete Gleichgewichtsergebnis hergeleitet.

Es soll nachgewiesen werden, daß die Ungleichungen $\delta(v_{s_u} + v_{b_b}) < 1$ und $\delta(v_{b_u} + v_{s_b}) < 1$ im Gleichgewicht für beliebige δ gelten. Behauptung **I** ergibt sich daraus direkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird diese Aussage hier nur für den Fall $\delta(v_{s_u} + v_{b_b}) < 1$ nachgewiesen.

In einem kritischen Markt gilt per definitionem $s_u = b_b$. Für einen beliebigen kritischen Markt (N, G) und einen beliebigen Spielverlauf werden nun die sich ergebenden Auszahlungen der Spieler betrachtet. Die Summe der Auszahlungen aller Agenten vom Typ b_b und s_u kann —da jeder beschränkte Käufer nur mit einem unbeschränkten Verkäufer interagieren kann— höchstens s_u betragen. Daher gilt für *jeden beliebigen* Spielverlauf, daß sich die Durchschnitte der Auszahlungen der Agenten vom Typ s_u und b_b , $\bar{w}_{s_u}$ und $\bar{w}_{b_b}$, auf einen Wert kleiner oder gleich 1 addieren. Dann muß auch die Summe der erwarteten durchschnittlichen Auszahlungen der s_u und der b_b in einem beliebigen Gleichgewicht kleiner oder gleich 1 sein; es gilt also für jedes Gleichgewicht $v_{s_u} + v_{b_b} \leq 1$, woraus die Ungleichung $\delta(v_{s_u} + v_{b_b}) < 1$ und damit die Behauptung **I** des Lemmas direkt folgt.

Die Behauptungen **II** und **III** in Lemma C.1.18 werden durch Induktion über n , die Zahl der Agenten bewiesen.

Zur Induktionsverankerung ist festzuhalten, daß der kleinste kritische nicht-triviale Markt aus 4 Agenten besteht und identisch mit der Graphstruktur aus Abbildung 11.2 ist. Diese kann analytisch gelöst werden (vergleiche Abschnitt 11.2.2), und die Aussagen des Lemmas gelten offensichtlich.

Sei nun die Aussage des Lemmas für jeden kritischen Markt mit bis zu $n \geq 4$ Agenten bewiesen, und es sei ein beliebiger kritischer Markt mit $n + 2 \geq 6$ Spielern betrachtet.

Es wird der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlungen $v^* = (v_{s_u}^*, v_{s_b}^*, v_{b_u}^*, v_{b_b}^*)$ sowie der Grenzwert der Einigungswahrscheinlichkeiten $p^* = \lim_{\delta_j \rightarrow 1} p(\delta_j)$ betrachtet. Nach Lemma 12.2.3 beschreiben diese beiden Vektoren ein Gleichgewicht des Graphspiels für den Diskontfaktor $\delta^* = 1$. Wir analysieren jetzt die Eigenschaften dieses Gleichgewichts.

Zunächst wird Behauptung **II** durch Widerspruch bewiesen. Angenommen, der Grenzwert der Einigungswahrscheinlichkeit zwischen zwei unbeschränkten Spielern, p^* , sei größer als Null. Daraus folgt

$$v_{s_u}^* + v_{b_u}^* \leq 1. \quad (\text{C.1.3})$$

Da ein nichttrivialer kritischer Markt angenommen wurde, gilt $s_u \geq 1$ und $b_u \geq 1$. Daher folgt aus Lemma C.1.6 und Punkt **I**, daß $z_{-i} > 0$ für jeden unbeschränkten Agenten i ist. Daher ist —unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung— das Verweigerungslemma anwendbar, und kein unbeschränkter Agent hat einen Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlung kleiner als $\frac{1}{2}$. Zusammen mit Gleichung C.1.3 folgt daraus $v_{s_u}^* = v_{b_u}^* = \frac{1}{2}$.

Nun werden die Fälle $s_u > 1$ und $s_u = 1$ unterschieden.

A $s_u > 1$.

Hier kann eine ähnliche Argumentation wie im Beweis des Verweigerungslemmas angewendet werden; es wird jetzt eine Abweichung von der Gleichgewichtsstrategie für einen unbeschränkten Verkäufer i aufgezeigt, die ihm eine erwartete Auszahlung größer als $\frac{1}{2}$ sichert, was einen Widerspruch zu den Gleichgewichtseigenschaften darstellt.

Spieler i kann so lange eine Einigung verweigern, bis sich ein anderes Paar geeinigt hat und er sich in einem Teilspiel wiederfindet. Da es mindestens einen weiteren unbeschränkten Agenten gibt, führt diese

Strategie wegen **I** mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht zu endlosem Warten. Eine beliebige endliche Verzögerung verursacht aber wegen $\delta^* = 1$ keine Kosten.

Ist nun der nach der Einigung eines anderen Paares entstandene Teilgraph wiederum ein kritischer Markt, so ist die Auszahlung des Abweichenden i gemäß Induktionsvoraussetzung gleich $\frac{1}{2}$. Ist andererseits das entstandene Teilspiel ein ineffizienter Markt —was wegen $p_{s_u, b_u}^* > 0$ und der Existenz von mindestens einem weiteren unbeschränkten Verkäufer mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten wird— so ist die Auszahlung des Abweichenden i gleich 1 gemäß Lemma C.1.16.

Aus diesen beiden Punkten ergibt sich, daß aus der vorgeschlagenen Abwartestrategie eine Auszahlung größer als $\frac{1}{2}$ resultiert. Daher kann es für die Spieler vom Typ s_u keine Gleichgewichtsstrategie sein, sich mit den Agenten vom Typ b_u zu einigen, was einen Widerspruch zu den oben getroffenen Annahmen darstellt.

B $s_u = 1$. Daraus folgt wegen $n \geq 6$ und der Definition des kritischen Marktes direkt $b_u > 1$.

Hier ist dieselbe Argumentation wie in Fall **A** mit einer Vertauschung der Rollen von s_u und b_u anwendbar. Es kann also keine Gleichgewichtsstrategie für Agenten vom Typ b_u sein, sich mit unbeschränkten Verkäufern zu einigen, was wiederum einen Widerspruch zu den Gleichgewichtseigenschaften darstellt.

Damit ist Behauptung **II** des Lemmas bewiesen.

Behauptung **III** wird ebenfalls über Induktion über die Zahl der Agenten bewiesen.

Zum Induktionsschritt ist zu sagen, daß wegen der Induktionsvoraussetzung für jeden beschränkten Agenten i der Wert $g_i(\delta_j, t)$ (vergleiche Definition C.1.11) für beliebige t wegen **II** für $\delta_j \rightarrow 1$ gegen Null konvergiert.

Damit kann für die beschränkten Agenten das allgemeine Verweigerungslemma angewendet werden, und es gilt auch $v_{s_b}^* \geq \frac{1}{2}$ und $v_{b_b}^* \geq \frac{1}{2}$.

Dies kann nur sein, wenn $v_{s_u}^* = v_{s_b}^* = v_{b_u}^* = v_{b_b}^* = \frac{1}{2}$ gilt. Damit ist auch **III** bewiesen, und der Beweis von Lemma C.1.18 ist damit abgeschlossen. $\square$

Im letzten Schritt des Beweises von Theorem 12.3.4 wird die Aussage von Lemma C.1.18 auf nichtkritische unvollständige Märkte erweitert. Die Aussage dieses Lemmas ist nach dem Beweis von Lemma C.1.18 intuitiv, der Beweis ist aber technisch aufwendig.

Lemma C.1.19. *Sei (N, G) ein nichtkritischer unvollständiger und potentiell effizienter Markt. Sei weiter eine Folge $\delta_j \rightarrow 1$ und eine dazu passende Folge an Gleichgewichten, $(v(\delta_j), p(\delta_j))$, gegeben. Dann konvergieren die Auszahlungen aller Spieler gegen $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß sich ein ineffizientes Resultat ergibt, geht gegen Null.*

Beweis: Da wegen des Lemmas C.1.18 sämtliche Teilgraphen, die aus (N, G) entstehen können, für alle Spieler im Grenzwert $\delta \rightarrow 1$ eine Auszahlung von $\frac{1}{2}$ ergeben, kann meistens das Verweigerungslemma bzw. das allgemeine Verweigerungslemma angewendet werden.

Der Beweis verläuft über Induktion über die Gesamtzahl der Agenten. Als Induktionsverankerung kann ein vollständiger Markt mit je zwei Verkäufern und Käufern verwendet werden (dies stellt einen entarteten Fall eines unvollständigen Marktes dar). Für diesen Fall gelten die Aussagen des Lemmas trivialerweise.

In einem nichtkritischen unvollständigen Markt gibt es jeden unbeschränkten Typ mindestens zweimal. Daraus folgt für jeden unbeschränkten Spieler i die Ungleichung $z_{-i} > 0$. Daher ist das Verweigerungslemma unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung direkt anwendbar, und es ergibt sich $v_{s_u}^* \geq \frac{1}{2}$ und $v_{b_u}^* \geq \frac{1}{2}$.

Für einen beschränkten Agenten i vom Typ s_b oder b_b ist nur der Fall $z_{-i} = 0$ zu beachten. Anderenfalls läßt sich das allgemeine Verweigerungslemma C.1.12 direkt anwenden.

Sei also oBdA angenommen, daß für einen beschränkten Verkäufer i die Identität $z_{-i} = 0$ gilt und daß der Grenzwert der Gleichgewichtsauszahlung von i , $v_i^* = v_{s_b}^*$, kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Diese Annahme wird jetzt zu einem Widerspruch geführt.

Da $z_{-i} = 0$ gilt, besteht das einzige Paar, welches sich im Falle eines Aufeinandertreffens mit Wahrscheinlichkeit 1 einigt, aus Spielern vom Typ s_b und b_u . Insbesondere ist in diesem Fall i der einzige beschränkte Verkäufer.

Daraus folgt, daß für einen beliebigen beschränkten Käufer j die Ungleichung $z_{-j} > 0$ gilt. Damit ist für die beschränkten Käufer das allgemeine Verweigerungslemma anwendbar und es gilt $v_{b_b}^* = \frac{1}{2}$. Daraus folgt wegen $v_{b_u}^* \geq \frac{1}{2}$ direkt $v_{s_u}^* = \frac{1}{2}$, da es für die unbeschränkten Verkäufer keinen Verhandlungspartner gibt, von dem sie ein Aufteilungsergebnis größer als $\frac{1}{2}$ erhoffen können.

Es sei nun das Gleichgewicht betrachtet, welches der Vektor $v^* = (v_{s_u}^*, v_{s_b}^*, v_{b_u}^*, v_{b_b}^*)$ zusammen mit den entsprechenden Einigungswahrscheinlichkeiten gemäß Lemma 12.2.3 für den Diskontfaktor $\delta^* = 1$ beschreibt. Da sämtliche Nachfolgegraphen, die aus (N, G) entstehen können, entweder ein kritischer Markt oder wiederum ein unvollständiger Markt sind, gilt wegen Lemma C.1.18 und der Induktionsvoraussetzung, daß in sämtlichen Nachfolgegraphen alle Agenten eine Gleichgewichtsauszahlung von $\frac{1}{2}$ erhalten.

Wie oben nachgewiesen wurde, gilt in diesem Gleichgewicht $v_{b_u}^* \geq \frac{1}{2}$ (und wegen der Annahme $v_{s_b}^* < \frac{1}{2}$ gilt sogar $v_{b_u}^* > \frac{1}{2}$) sowie $v_{s_u}^* = v_{b_b}^* = \frac{1}{2}$. Aus $v_{b_u}^* > \frac{1}{2}$ folgt sofort, daß es eine Einigung zwischen Agenten vom Typ b_u und s_u nicht geben kann. Es bezeichne nun $p_{s_u, b_b}^* \in [0, 1)$ den Grenzwert der Einigungswahrscheinlichkeit zwischen Spielern vom Typ s_u und b_b .

Entsprechend der Gleichung 11.2.7 können die Gleichgewichtsauszahlungen $v_{b_u}^*$ und $v_{s_b}^*$ analytisch berechnet werden:

$$v_{s_b}^* = \frac{1}{m} \frac{1}{2} b_u (1 + v_{s_b}^* - v_{b_u}^*) + \frac{1}{m} s_u b_u v_{s_b}^* + \frac{1}{m} s_u b_b (p_{s_u, b_b}^* \frac{1}{2} + (1 - p_{s_u, b_b}^*) v_{s_b}^*)$$

und

$$v_{b_u}^* = \frac{1}{m} \frac{1}{2} (1 + v_{b_u}^* - v_{s_b}^*) + \frac{1}{m} (b_u - 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{m} s_u b_u v_{b_u}^* + \frac{1}{m} s_u b_b (p_{s_u, b_b}^* \frac{1}{2} + (1 - p_{s_u, b_b}^*) v_{b_u}^*)$$

Für $b_u > 0$ haben diese Gleichungen als einzige Lösung $v_{s_b}^* = v_{b_u}^* = \frac{1}{2}$, was einen Widerspruch zur oben getroffenen Annahme $v_{s_b}^* < \frac{1}{2}$ darstellt.

Damit ist die Identität $v_{s_u}^* = v_{s_b}^* = v_{b_u}^* = v_{b_b}^* = \frac{1}{2}$ bewiesen, was den Beweis von Lemma C.1.19 abschließt. $\square$

Mit der Formulierung und dem Beweis der Lemmata C.1.14, C.1.15, C.1.16, C.1.18 und C.1.19 ist auch der Beweis von Theorem 12.3.4 beendet.

Literaturverzeichnis

- [1] Bienenstock, E. und Bonacich, P. (1992): *The Core as a Solution to Exclusionary Networks*, Social Networks 14, S. 231-243
- [2] Binmore, K., Rubinstein, A. and Wolinsky, A. (1986): *The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling*, Rand Journal of Economics 17, S. 176-188
- [3] Binmore, K. (1987): *Nash Bargaining Theory II* in Binmore and Dasgupta *The Economics of Bargaining*, Oxford: Blackwell
- [4] Binmore, K. und Herrero, M. (1988): *Matching and Bargaining in Dynamic Markets*, Review of Economic Studies 55, S. 17-31
- [5] Brandenburger, A. und Nalebuff, B. (1996): *Co-opetition*, Bantam Doubleday Dell Publishing Group, Inc., New York
- [6] Braun, N. (1994): *Restricted Access in Exchange Systems*, Journal of Mathematical Sociology 19, S. 129-148
- [7] Bonacich, P. und Bienenstock, E. (1993): *Assignment games, chromatic number and exchange theory*, Journal of Mathematical Sociology Vol 17(4), S. 243-259
- [8] Chatterjee, K. and Samuelson, L. (1987): *Bargaining with Two-Sided Incomplete Information: An Infinite Horizon Model with Alternating Offers*, Review of Economic Studies 54, S. 175-192

- [9] Chatterjee, K. and Samuelson, L. (1988): *Bargaining under Two-Sided Incomplete Information: The Unrestricted Offer Case*, Operations Research 36 (4), S. 605-618
- [10] Chatterjee, K. and Samuelson, L. (1990): *Perfect Equilibria in Simultaneous-Offers Bargaining*, International Journal of Game Theory 19, S. 237-267
- [11] Cook, K., Emerson, R., Gillmore, M. und Yamagishi, T. (1983): *The Distribution of Power in Exchange Networks: Theory and Experimental Results*, American Journal of Sociology 89, S. 275-305
- [12] Crampton, P. (1992): *Strategic Delay in Bargaining with Two-Sided Uncertainty*, Review of Economic Studies 59, S. 205-225
- [13] von Damme, E., Selten, R. und Winter, E. (1990): *Alternating bid bargaining with a smallest money unit*, Games and Economic Behavior 2, S. 188-201
- [14] Dasgupta, P. und Maskin, E. (1986): *The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic games, I and II*, Review of Economic Studies 53, S. 1-41
- [15] Fishburn, P. und Rubinstein, A. (1982): *Time Preference*, International Economic Review 23, S. 677-694
- [16] Forster, O. (1984): *Analysis 2*, 5.te Auflage, Vieweg Verlag Braunschweig
- [17] Fudenberg, D. und Levin, D. (1986): *Limit Games and Limit Equilibria*, Journal of Economic Theory 38, S. 261-279
- [18] Fudenberg, D. und Kreps, D. (1987): *Reputation and Simultaneous Opponents*, Review of Economic Studies 54, S. 541-568
- [19] Fudenberg, D. und Levine, D. (1987): *Reputation and Equilibrium Selection in Games with a Patient Player*, Econometrica 57, S. 759-778

- [20] Fudenberg, D. und Tirole, J. (1993): *Game Theory* (2te Auflage), MIT Press, Cambridge
- [21] Gale, J., Binmore, K. und Samuelson, L. (1995): *Learning to be Imperfect: The Ultimatum Game*, Games and Economic Behavior 8 (1), S. 56-91
- [22] Güth, W. (1995): *On Ultimatum Bargaining Experiments - A Personal Review*, Journal of Economic Behavior und Organization 27, No. 3, S. 329-344
- [23] Heuser, H. (1981): *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Stuttgart Teubner Verlag
- [24] Holler, M. und Illing, G. (1996): *Einführung in die Spieltheorie*, dritte Auflage, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York
- [25] Holler, M. (1992): *Verhandlungstheorie*, dritte Auflage, Oldenbourg Verlag München
- [26] Jungnickel, D. (1994): *Graphen Netzwerke und Algorithmen*, dritte Auflage, B.I. Wissenschaftsverlag
- [27] Kalai, E. und Smorodinsky, M. (1975): *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43, S. 513-518
- [28] Kalai, E., Postlewaite, A. and Roberts, J. (1978): *Barriers to Trade and Disadvantageous Middlemen: Nonmonotonicity of the Core*, Journal of Economic Theory 19, S. 200-209
- [29] Kandori, M., Mailath, G. und Rob, R. (1993): *Learning, Mutation, and Long Run Equilibria*, Econometrica 61, No. 1, S. 29-56
- [30] Kreps, D. and Wilson, R. (1982a): *Reputation and Imperfect Information*, Journal of Economic Theory 27, S. 253-279

- [31] Kreps, D. and Wilson, R. (1982b): *Sequential Equilibria*, *Econometrica* 50, S. 863-894
- [32] Krishna, V. und Serrano, R. (1996): *Multilateral Bargaining*, *Review of Economic Studies* 63, S. 61-80
- [33] Lensberg, T. (1988): *Stability and the Nash Solution*, *Journal of Economic Theory* 45, S. 330-341
- [34] Livne, Z. (1985): *Bargaining over the Division of a Shrinking Pie: An Axiomatic Approach*, *International Journal of Game Theory* 16, S. 223-242
- [35] Markovsky, B., Willer, D. und Patton, T. (1988): *Power relations in exchange Networks*, *American Sociological Review* 53, S. 220-36
- [36] Masso, J. (1996): *A Note On Reputation: More on the Chain-Store Paradox*, *Games and Economic Behavior* 15, Nr. 1, S. 55-82
- [37] Milgrom, P. und Roberts, D. (1982): *Predation, Reputation and Entry Deterrence*, *Journal of Economic Theory* 27, S. 253-279
- [38] Mizruchi, M. (1994): *Social Network Analysis: Recent Achievements and Current Controversies*, *Acta Sociologica* 37, S. 329-343
- [39] Muthoo, A. (1996): *A Bargaining Model Based on Commitment Tactics*, *Journal of Economic Theory* 69, S. 134-152
- [40] Myerson, R. (1977): *Graphs and Cooperation in Games*, *Mathematics and Operation Research* 2, S. 225-229
- [41] Nash, J. (1950): *The Bargaining Problem*, *Econometrica* 18, S. 155-162
- [42] Nash, J. (1951): *Non-Cooperative Games*, *Annals of Mathematics* 54, S. 286-195
- [43] Nash, J. (1953): *Two-Person Cooperative Games*, *Econometrica* 21, S. 128-140

- [44] Neumann, J. von und Morgenstern, O. (1947): *The Theory of Games and Economic Behavior*, 2.Aufl. Princeton University Press, Princeton
- [45] Ochs, J. und Roth, A. (1989): *An Experimental Study of Sequential Bargaining*, American Economic Review 79, S. 355-383
- [46] Osborne, M. und Rubinstein, A. (1990): *Bargaining and Markets*, Academic Press, San Diego et al
- [47] Panther, S. (1995): *Non Cooperative Bargaining in Social Networks*, mimeo
- [48] Perry, M. und Reny, J. (1993): *A Non-cooperative Bargaining Model with Strategically Timed Offers*, Journal of Economic Theory 59, S. 50-77
- [49] Peters, H. (1992): *Axiomatic Bargaining Theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht
- [50] Peters, R. (1998): *Evolutionäre Stabilität in sozialen Modellen*, Accedo, München
- [51] Pitchik, C. (1990): *Commitment, Reputation, and Entry Deterrence*, Games and Economic Behavior 5, S. 268-287
- [52] Qin, C. (1996): *Endogenous Formation of Cooperation Structure*, Journal of Economic Theory 69, S. 218-226
- [53] Rosenthal, R. (1979): *Sequences of games with varying opponents*, Econometrica 47, S. 1353-1366
- [54] Rosenthal, R. (1981): *Games of Perfect Information, Predatory pricing and the Chain-store Paradox*, Journal of Economic Theory 25, S. 92-100
- [55] Rosenthal, E. (1992): *Coalition Formation under Limited Communication*, Games and Economic Behavior 4, S. 402-421

- [56] Roth, A. (1985): *Game Theoretic Models of Bargaining* Cambridge University Press
- [57] Rubinstein, A. (1982): *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, *Econometrica* 50, S. 97-109
- [58] Rubinstein, A. (1985a): *A Bargaining Model with Incomplete Information About Time Preferences*, *Econometrica* 53, S. 1151-1172
- [59] Rubinstein, A. (1985b): *Choice of Conjectures in a Bargaining Game with Incomplete Information*, in Roth, A. (Ed.) *Game Theoretic Models of Bargaining*, Cambridge University Press, S. 99-114
- [60] Ryll, A. (1996): *Kooperationsstruktur und Verhandlungsstärke*, mimeo
- [61] Selten, R. (1978): *The Chain-store Paradox*, *Theory and Decision* 9, S. 127-159
- [62] Shapley, L. S. (1953): *A Value for n-Person Games*, in Kuhn, H. W. und Tucker, A. W. *Contributions to the Theory of Games, II*, *Annals of Mathematical Studies*, Princeton, S. 307-317
- [63] Skvoretz, J. und Willer, D. (1991): *Power in Exchange Networks: Setting and structural variations*, *Social Psychology Quarterly* 54, S. 224-238
- [64] Straub, P.G. und Murnighan, K.L. (1995): *An Experimental Investigation of Ultimatum Games: Information, Fairness, Expectations, and Lowest Acceptable Offers*, *Journal of Economic Behavior und Organization* 27, No. 3, S. 345-365
- [65] Sutton, J. (1986): *Non-Cooperative Bargaining Theory: An Introduction*, *Review of Economic Studies* 53, S. 709-724
- [66] Varian, H. (1992): *Microeconomic Analysis*, dritte Auflage, Norton & Company, New York

- [67] Vazquez-Brage, M. und Garcia-Jurado, I. und Carreras, F. (1996): *The Owen Value Applied to Games with Graph Restricted Communication*, Games and Economic Behavior 12, S. 42-53
- [68] Willer, D. (1992): *Predicting power in exchange networks: a brief history and introduction to the issues*, Social Networks 14, S. 187-211
- [69] Young, P. (1993): *The Evolution of Conventions*, Econometrica 61, S. 57-84

Curriculum Vitae von Christoph Berg

Geboren am 13. Mai 1967 in Hamburg, verheiratet.

Schulbildung

08/73 - 07/77	Grundschule in Hamburg.
08/77 - 01/87	Gymnasium in Hamburg. Abschluß: CTA und Abitur.

Wehrdienst

04/87 - 06/88	Dienst als Sanitäter und Musiksoldat.
---------------	---------------------------------------

Studium

06/88 - 02/94	Studium der Mathematik an der Universität Hamburg. Abschluß: Diplom. Titel der Diplomarbeit: Wavelets und Integralgleichungen.
10/90 - 04/94	Studium der Informatik an der Universität Hamburg. Abschluß: Vordiplom.
08/94 - 08/95	Gaststudium der Volkswirtschaftslehre bei Prof. Larry Samuelson an der University of Wisconsin, Madison, in den USA.
10/95 - 07/99	Promotionsstudium bei Prof. Manfred Holler an der Universität Hamburg. Disputation am 6. Juli 1999. Titel der Dissertation: Beiträge zur Verhandlungstheorie.

Berufserfahrung

10/95 - 04/98	Lehre und Forschung als wissenschaftlicher Assistent an der Universität Hamburg. – Organisation und Durchführung von Seminaren. – Planung und Realisierung von Vorlesungen. – Wartung der lehrstuhleigenen EDV-Systeme.
seit 05/98	Unternehmensberater bei Roland Berger und Partner.